

# Méthodes numériques probabilistes avancées en finance

## Option barrière et diffusion tuée

Raphaël Cabouat & Céline Nguyen-Tu

Mars 2020

Introduits dans les années 1990's, les produits dérivés exotiques ont permis de diversifier les échanges sur les marchés. Ces instruments issus de l'ingénierie financière, sont généralement présents sur les marchés de gré à gré (*over-the-counter*) et possèdent des caractéristiques plus complexes que les produits dits vanilles, plus classiques et plus standardisés. Ils diffèrent de ces derniers par différentes propriétés comme la manière dont est calculé le payoff de l'option et parmi eux, on compte les options barrières. Leur payoff à maturité dépend non seulement de la valeur de l'actif sous-jacent au temps terminal mais également de sa trajectoire durant sa durée de vie par rapport à une valeur que l'on appelle barrière. Malgré qu'ils soient échangés en faibles quantités, il n'en reste pas moins qu'ils représentent un certain avantage selon le contexte, notamment sur le marché du Forex. En particulier, ils sont globalement moins chers et plus profitables que les options vanilles.

## 1 Introduction

Un des vastes problèmes de la finance computationnelle est de savoir comment évaluer numériquement le prix d'un produit et développer des stratégies de couverture. Dans la présente étude, il sera question d'étudier les options barrières. Dans l'exemple suivant, l'option se désactive si le cours de l'actif sous-jacent  $(S_t)_t$  passe au dessus de la valeur limite  $B$  entre l'instant présent  $t$  et la maturité  $T$ . Pour cet exemple, on peut alors considérer un call européen de strike  $K$  et dont le payoff s'écrit :

$$C_t = \mathbb{1}_{\{S_s < B, \forall s \in [t, T]\}} (S_t - K)^+$$

Dans un marché complet, on sait exprimer le prix de la plupart des produits financiers sous forme d'espérance. En effet, soit  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus de Markov à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui représente le cours d'un actif sous-jacent entre le temps initial 0 et l'horizon  $T$ . On suppose que  $(S_t)_t$  suit la dynamique :

$$dS_t = b(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t \quad (1)$$

où  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un mouvement Brownien dans  $\mathbb{R}$ , et  $b, \sigma$  sont des fonctions Lipschitziennes. On notera donc que cette EDS possède une solution unique. En considérant qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), on écrit le prix de notre exemple en  $t = 0$  de l'option call européen à barrière  $B$  à partir du taux d'intérêt sans risque  $r$  et de la probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$  :

$$u(0, x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-rT} C_T] \quad \text{avec la condition initiale } S_0 = x \quad (2)$$

$$\text{où } S_t = x + \int_0^t b(S_s)ds + \int_0^t \sigma(S_s)dW_s \quad \forall t \in [0, T] \quad (3)$$

Les méthodes de Monte Carlo classiques nous permettent de facilement approcher cette quantité lorsque le payoff terminal ne dépend que de la valeur de  $S_t$  au temps  $T$ , mais la tâche se complique ici puisqu'il est nécessaire de suivre la trajectoire du cours  $S_t$  entre  $t = 0$  et  $t = T$  afin de déterminer le flux terminal  $C_T$ . Pour répondre à ce problème, il existe plusieurs techniques de valorisation comme l'approche par les équations aux dérivées partielles, la méthode des différences finies ou même encore les arbres binomiaux. Ici, nous allons nous restreindre aux méthodes de Monte Carlo en étudiant deux méthodes de simulations et en les comparant aux formules fermées introduites par Merton [1].

Cette étude se fonde sur l'article [2] d'Emmanuel Gobet qui apporte de nouveaux résultats de convergence de l'erreur pour chacune des méthodes considérées. Dès lors, nous nous intéresserons à la valorisation des options barrières par ces dernières. Nous développerons dans un premier temps les caractéristiques des options barrières en prenant soin de passer en revue les différents types et leurs formules fermées. Dans un second temps, il s'agira de présenter les deux méthodes de Monte-Carlo en question, avant de les appliquer dans le contexte actuel afin d'illustrer numériquement notre étude.

## 2 Les options barrières

Les options barrières fonctionnent comme des options classiques vanilles à l'exception près que leur payoff dépend, en plus de la valeur terminale du prix de l'actif sous-jacent, de son passage éventuel d'un seuil fixé initialement, appelé barrière, avant sa maturité. Parce que leur flux terminal dépend de la trajectoire du cours durant la vie de l'option, on dit qu'ils sont *path-dependent*.

On distingue deux catégories d'options barrières :

- *knock-out* : Elle cesse d'exister une fois que le prix du sous-jacent atteint la barrière, c'est-à-dire qu'elle arrive à expiration et perd toute valeur.
- *knock-in* : Celle-ci, au contraire, ne commence à exister, ou autrement dit elle s'active, qu'une fois la barrière franchie par le cours du sous-jacent.

On note  $(S_t)_{t \geq 0}$  le prix de l'actif sous-jacent,  $\tau_B \geq 0$  le premier temps auquel  $(S_t)_t$  franchi la barrière  $B$ , et les payoffs  $\phi(S_T)$  pour une option européenne call et put standard de strike  $K$  à maturité  $T$  :

$$C_T = \phi(S_T) = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0) \quad P_T = \phi(S_T) = (K - S_T)^+ = \max(K - S_T, 0) \quad (4)$$

On peut d'ores et déjà écrire les payoffs pour les options barrières knock-in et knock-out :

$$\Phi(S_T) = \begin{cases} \mathbb{1}_{\tau_B > T} \phi(S_T) & \text{knock-out} \\ \mathbb{1}_{\tau_B \leq T} \phi(S_T) & \text{knock-in} \end{cases} \quad (5)$$

Ces options possèdent une valeur intrinsèque bien moindre que leurs équivalents vanilles, c'est pourquoi ils peuvent générer plus de profit. Elles reviennent donc moins coûteuses pour l'acheteur et présentent moins de risque pour le vendeur de l'option car elle peut devenir non-exercable. Ainsi, si l'on spéculé sur une faible fluctuation du prix du sous-jacent (entre le prix d'exercice, ou *strike*, et le prix barrière), on maximise les profits avec une option knock-out mais on encoure plus de risques si le prix explose. Au contraire, si l'on spéculé sur une forte fluctuation du prix, on maximise les gains par une option knock-in mais le risque est plus grand si le prix stagne. Dans chacune de ces catégories, on différencie les options dont la barrière est supérieure au prix initial de l'actif et celles dont la barrière est inférieure au prix initial. Ainsi, il en découle les quatre types d'option barrière suivants : *up-and-in*, *up-and-out*, *down-and-in* et *down-and-out*.

Comme pour les vanilles, il existe les options barrières européennes et américaines. L'option européenne n'est activée ou désactivée qu'à la fin de la période d'exercice et l'option américaine est activée ou désactivée pendant la période de vie de l'option dès que le prix du sous-jacent atteint le seuil barrière.

On peut toutefois trouver des variantes. Parmi elles, on compte :

- Options double barrières : Comme son nom l'indique, l'option possède deux seuils barrières, deux barrières knock-out, deux barrières knock-in ou bien l'une knock-out et l'autre knock-in. Supposons en plus de nos notations, que  $\tau_H$  est le premier temps auquel  $(S_t)_t$  franchi la barrière  $H$ , alors :

$$\Phi_{\text{double}}(S_T) = \begin{cases} \mathbb{1}_{\tau_B > T} \mathbb{1}_{\tau_H > T} \phi(S_T) & B \text{ knock-out et } H \text{ knock-out} \\ \mathbb{1}_{\tau_B \leq T} \mathbb{1}_{\tau_H \leq T} \phi(S_T) & B \text{ knock-in et } H \text{ knock-in} \\ \mathbb{1}_{\tau_B > T} \mathbb{1}_{\tau_H \leq T} \phi(S_T) & B \text{ knock-out et } H \text{ knock-in} \end{cases}$$

Généralement, il suffit qu'une barrière knock-out soit atteinte pour que l'option devienne non-exercable. De plus, l'option reste exercable si une barrière knock-in est atteinte mais qu'aucune barrière knock-out a été touchée. Cette alternative peut s'avérer être encore moins coûteuse dans le cas de deux barrières knock-out par exemple.

- Options barrières parisiennes : Dans ce cas, la condition de la barrière doit s'appliquer durant un certain temps minimum pré-défini avant de faire effet sur le contrat. Supposons que cette durée est caractérisée par le paramètre  $D$  et  $\tau_{B'}$  est le premier temps auquel  $S_t$  re-franchi la barrière  $B$  dans l'autre sens, on obtient le payoff :

$$\Phi_{\text{parisien}}(S_T) = \begin{cases} \mathbb{1}_{\tau_B > T} \phi(S_T) + \mathbb{1}_{\tau_B \leq T} \mathbb{1}_{\tau_{B'} \leq T} \mathbb{1}_{\tau_{B'} - \tau_B < D} \phi(S_T) & \text{knock-out} \\ \mathbb{1}_{\tau_B \leq T} \mathbb{1}_{\tau_{B'} \leq T} \mathbb{1}_{\tau_{B'} - \tau_B \geq D} \phi(S_T) + \mathbb{1}_{\tau_B \leq T} \mathbb{1}_{\tau_{B'} > T} \mathbb{1}_{T - \tau_B \geq D} \phi(S_T) & \text{knock-in} \end{cases}$$

- Options barrières avec *rebate* : Le détenteur de l'action reçoit une prime de compensation si l'action est désactivée. Elle est habituellement calculée en fonction d'un pourcentage de la prime initiale qui, en contrepartie, est plus élevée. En notant  $R$  cette remise :

$$\Phi_{\text{rebate}}(S_T) = \begin{cases} \mathbb{1}_{\tau_B > T} \phi(S_T) + \mathbb{1}_{\tau_B \leq T} R & \text{knock-out} \\ \mathbb{1}_{\tau_B \leq T} \phi(S_T) + \mathbb{1}_{\tau_B > T} R & \text{knock-in} \end{cases}$$

- Options barrières discrètes : Une fréquence de contrôle spécifie à quelle fréquence on vérifie un éventuel franchissement de la barrière par le prix  $S_t$ . Cette vérification a lieu en continu dans les options barrières standards, mais elle peut être faite toutes les heures, quotidiennement, etc. Si on pose  $\{t_1, \dots, t_N\}_{t_i \leq T}$  les temps de contrôle :

$$\Phi_{\text{discrete}}(S_T) = \begin{cases} \mathbb{1}_{\tau_B > T} \phi(S_T) & \text{knock-out} \\ \mathbb{1}_{\tau_B \leq T} \phi(S_T) & \text{knock-in} \end{cases} \quad \text{où } \tau_B \in \{t_1, \dots, t_N\}$$

Retenons cet exemple, qui correspondra sans qu'on le veuille à l'une des deux méthodes principales qui font l'objet de ce rapport, plus précisément en section 4.

### 3 Prix des options barrières dans le modèle de Black-Scholes

Dans ce qui va suivre, nous portons notre attention sur les quatre options barrières standards évoquées précédemment. Il nous faut avant toute chose comprendre le fonctionnement de ces instruments et détailler leurs formulations avant de s'attacher à les valoriser. Nous donnerons également les formules de valorisation fermées de Merton énumérées entre autres dans [3] et dont les résultats feront office de référence dans le coeur du sujet.

#### 3.1 Valorisation risque-neutre des options barrières standards

Soit  $(S_t)_t$  le cours du prix de l'actif sous-jacent  $S$ , on note  $\phi(S_T)$  le payoff des options call et put standards (4), la maturité du contrat  $T$ , son prix d'exercice  $K$ , le prix barrière  $B$  et le taux sans risque  $r$ .

- **Up-and-In** : L'option s'active et devient exerçable lorsque le prix du sous-jacent atteint ou dépasse le seuil barrière qui est supérieur au prix initial de l'actif  $S_t = x$ .

$$\Phi_{ui}(t, S_T) = \mathbb{1}_{\tau \leq T} \phi(S_T) = \mathbb{1}_{\max_{t \leq s \leq T} S_s \geq B} \phi(S_T) \quad \text{avec } \tau = \inf\{s \leq t ; S_s \geq B\} \quad (6)$$

est la fonction de payoff de l'option up-and-in. Le prix de cette option en  $t$  est donc  $\forall t \in [0, T]$  :

$$u_{ui}(t, x) = \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} \mathbb{1}_{\max_{t \leq s \leq T} S_s \geq B} \phi(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right] \mathbb{1}_{\max_{0 \leq s \leq t} S_s \leq B} + \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} \phi(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right] \mathbb{1}_{\max_{0 \leq s \leq t} S_s > B}$$

où  $\mathbb{Q}$  est la probabilité risque-neutre. En particulier en  $t = 0$ , on a :

$$u_{ui}(0, x) = \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-rT} \mathbb{1}_{\max_{0 \leq s \leq T} S_s \geq B} \phi(S_T) \right] \quad \text{avec la condition initiale } S_0 = x \quad (7)$$

- **Down-and-In** : L'option s'active et devient exerçable lorsque le prix du sous-jacent atteint ou dépasse le seuil barrière qui est inférieur au prix initial de l'actif  $S_t = x$ . Son payoff est :

$$\Phi_{di}(t, S_T) = \mathbb{1}_{\tau \leq T} \phi(S_T) = \mathbb{1}_{\min_{t \leq s \leq T} S_s \leq B} \phi(S_T) \quad \text{avec } \tau = \inf\{s \leq t ; S_s \leq B\} \quad (8)$$

Le prix de cette option est donc  $\forall t \in [0, T]$  :

$$u_{di}(t, x) = \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} \mathbb{1}_{\min_{t \leq s \leq T} S_s \leq B} \phi(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right] \mathbb{1}_{\min_{0 \leq s \leq t} S_s \geq B} + \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} \phi(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right] \mathbb{1}_{\min_{0 \leq s \leq t} S_s < B}$$

$$u_{di}(0, x) = \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-rT} \mathbb{1}_{\min_{0 \leq s \leq T} S_s \leq B} \phi(S_T) \right] \quad \text{avec la condition initiale } S_0 = x \quad (9)$$

- **Up-and-Out** : L'option se désactive et devient non-exerçable lorsque le prix du sous-jacent atteint ou dépasse le seuil barrière qui est supérieur au prix initial de l'actif  $S_t = x$ . Son payoff est :

$$\Phi_{uo}(t, S_T) = \mathbb{1}_{\tau > T} \phi(S_T) = \mathbb{1}_{\max_{t \leq s \leq T} S_s < B} \phi(S_T) \quad \text{avec } \tau = \inf\{s \leq t ; S_s \geq B\} \quad (10)$$

Le prix de cette option est donc :

$$u_{di}(t, x) = \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} \mathbb{1}_{\max_{t \leq s \leq T} S_s < B} \phi(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right] \mathbb{1}_{\max_{0 \leq s \leq t} S_s \leq B} \quad , \quad \forall t \in [0, T]$$

$$u_{di}(0, x) = \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-rT} \mathbb{1}_{\max_{0 \leq s \leq T} S_s < B} \phi(S_T) \right] \quad \text{avec la condition initiale } S_0 = x \quad (11)$$

- **Down-and-Out** : L'option se désactive et devient non-exercable lorsque le prix du sous-jacent atteint ou dépasse le seuil barrière qui est inférieur au prix initial de l'actif  $S_t = x$ . Son payoff est :

$$\Phi_{do}(t, S_T) = \mathbb{1}_{\tau > T} \phi(S_T) = \mathbb{1}_{\min_{t \leq s \leq T} S_s > B} \phi(S_T) \quad \text{avec } \tau = \inf\{s \leq t ; S_s \leq B\} \quad (12)$$

Le prix de cette option est donc :

$$u_{do}(t, x) = \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} \mathbb{1}_{\min_{t \leq s \leq T} S_s > B} \phi(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right] \mathbb{1}_{\min_{0 \leq s \leq t} S_s \geq B} \quad , \quad \forall t \in [0, T]$$

$$u_{do}(0, x) = \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-rT} \mathbb{1}_{\min_{0 \leq s \leq T} S_s > B} \phi(S_T) \right] \quad \text{avec la condition initiale } S_0 = x \quad (13)$$

### 3.2 Parité In-Out

Compte tenu des écritures formulées ci-dessus, on peut en déduire une relation reliant ces différentes options, non pas les calls avec puts comme pour les options vanilles, mais les in avec les out. En effet, il faudra remarquer les décompositions suivantes :

$$\mathbb{1}_{\min_{0 \leq s \leq T} S_s > B} + \mathbb{1}_{\min_{0 \leq s \leq T} S_s \leq B} = 1$$

$$\mathbb{1}_{\max_{0 \leq s \leq T} S_s \geq B} + \mathbb{1}_{\max_{0 \leq s \leq T} S_s < B} = 1$$

Par conséquent, en sommant deux à deux les options in et les options out :

$$u_{di}(t, x) + u_{do}(t, x) = \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} \phi(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right] \quad , \quad \forall t \in [0, T] \quad (14)$$

$$u_{ui}(t, x) + u_{uo}(t, x) = \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} \phi(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right] \quad , \quad \forall t \in [0, T] \quad (15)$$

ce qui correspond aux prix des options call ou put (selon la fonction  $\phi(S_T)$ ) vanilles classiques de mêmes paramètres, c'est-à-dire de mêmes sous-jacent, maturité et strike.

### 3.3 Formules fermées de Merton

On se place dans le cadre du modèle de Black-Scholes. Plus précisément, on suppose que le cours de l'actif sous-jacent  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  suit la dynamique :

$$dS_t = S_t (r dt + \sigma dW_t) \quad (16)$$

où  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un mouvement Brownien sous la probabilité  $\mathbb{Q}$ ,  $S_0$  est la valeur actuelle du sous-jacent,  $r$  est le taux d'intérêt sans risque,  $\sigma$  est la volatilité du prix de l'actif, ces derniers étant des constantes. En fixant  $q = 0$  le taux des flux intermédiaires de l'actif, on peut ainsi donner les formules de Black-Scholes [4] des prix des options call et put standards pour  $t \in [0, T]$ .

$$C_t = S_t \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2) \quad (17)$$

$$P_t = K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2) - S_t \mathcal{N}(-d_1) \quad (18)$$

où  $\mathcal{N}$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$  et

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Dans ce même contexte, Merton fut le premier à donner une solution analytique [1] pour l'option barrière down-and-out. L'extension [5] de cette dernière aux huit options barrières standards nous donne les formules de valorisation fermées qui suivent.

## Formules fermées des options barrières

On pose

$$\lambda = \frac{r + \sigma^2/2}{\sigma^2} \quad x_1 = \frac{\ln(S_0/B)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

$$y = \frac{\ln(B^2/(S_0K))}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} \quad y_1 = \frac{\ln(B/S_0)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

Les prix en  $t = 0$  des options call barrières sont donc liés deux à deux et explicités par les formules :

$$C_{ui} = \begin{cases} C_0 & \text{si } B \leq K \\ S_0 \mathcal{N}(x_1) - Ke^{-rT} \mathcal{N}(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0(B/S_0)^{2\lambda} [\mathcal{N}(-y) - \mathcal{N}(-y_1)] \\ \quad + Ke^{-rT} (B/S_0)^{2\lambda-2} [\mathcal{N}(-y + \sigma\sqrt{T}) - \mathcal{N}(-y_1 + \sigma\sqrt{T})] & \text{si } B > K \end{cases} \quad (19)$$

$$C_{uo} = \begin{cases} 0 & \text{si } B \leq K \\ C_0 - C_{ui} & \text{si } B > K \end{cases} \quad (20)$$

$$C_{di} = \begin{cases} S_0(B/S_0)^{2\lambda} \mathcal{N}(y) - Ke^{-rT} (B/S_0)^{2\lambda-2} \mathcal{N}(y - \sigma\sqrt{T}) & \text{si } B \leq K \\ C_0 - C_{do} & \text{si } B > K \end{cases} \quad (21)$$

$$C_{do} = \begin{cases} C_0 - C_{di} & \text{si } B \leq K \\ S_0 \mathcal{N}(x_1) - Ke^{-rT} \mathcal{N}(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0(B/S_0)^{2\lambda} \mathcal{N}(y_1) \\ \quad + Ke^{-rT} (B/S_0)^{2\lambda-2} \mathcal{N}(y_1 - \sigma\sqrt{T}) & \text{si } B > K \end{cases} \quad (22)$$

Ces prix sont définis de manière analogue pour les options put barrières :

$$P_{ui} = \begin{cases} -S_0(B/S_0)^{2\lambda} \mathcal{N}(-y) + Ke^{-rT} (B/S_0)^{2\lambda-2} \mathcal{N}(-y + \sigma\sqrt{T}) & \text{si } B \geq K \\ P_0 - P_{uo} & \text{si } B < K \end{cases} \quad (23)$$

$$P_{uo} = \begin{cases} P_0 = P_{ui} & \text{si } B \geq K \\ -S_0 \mathcal{N}(-x_1) + Ke^{-rT} \mathcal{N}(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + S_0(B/S_0)^{2\lambda} \mathcal{N}(-y_1) \\ \quad - Ke^{-rT} (B/S_0)^{2\lambda-2} \mathcal{N}(-y_1 + \sigma\sqrt{T}) & \text{si } B < K \end{cases} \quad (24)$$

$$P_{di} = \begin{cases} P_0 & \text{si } B \geq K \\ -S_0 \mathcal{N}(-x_1) + Ke^{-rT} \mathcal{N}(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + S_0(B/S_0)^{2\lambda} [\mathcal{N}(y) - \mathcal{N}(y_1)] \\ \quad - Ke^{-rT} (B/S_0)^{2\lambda-2} [\mathcal{N}(y - \sigma\sqrt{T}) - \mathcal{N}(y_1 - \sigma\sqrt{T})] & \text{si } B < K \end{cases} \quad (25)$$

$$P_{do} = \begin{cases} 0 & \text{si } B \geq K \\ P_0 - P_{di} & \text{si } B < K \end{cases} \quad (26)$$

Notons que ces formules analytiques sont valables à conditions que l'option soit continue, à la différence de l'option barrière discrète, c'est-à-dire que l'on vérifie un éventuel franchissement de la barrière de manière continue. Si toutefois, on est amené à traiter le cas discret décrit dans la section 2, il suffit d'utiliser ces formules avec un ajustement de la barrière par translation proposé par Broadie, Glasserman et Kou [6]. Nous aborderons ce cas lors de nos simulations numériques en section 5 à des fins comparatives.

## 4 Méthodes par les schémas d'Euler

Dans cette section nous allons analyser les schémas d'Euler pour calculer les prix de différentes options barrières. Les résultats [2] évoqués ici restent néanmoins valables pour n'importe quelle diffusion  $(X_t)_{t \geq 0}$  tuée lorsqu'elle quitte un espace ouvert  $D$ . Dans chacun des cas, nous donnerons la valeur finale obtenue pour le prix de l'option avec son erreur de Monte-Carlo et son erreur relative dans la section 5. Pour calculer l'espérance (2) on utilise la méthode de Monte-Carlo qui donne l'approximation :

$$\mathbb{E}[f(X)] \simeq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(X_i) \quad (27)$$

avec  $M$  le nombre de simulations,  $f$  une fonction qui dépend de la nature de l'option et ses caractéristiques et  $X_i$  des v.a. iid de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , qui permettent de simuler des mouvements Browniens indépendants.

Notre but est de discrétiser sur un intervalle  $[0, T]$  le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  à valeur dans  $\mathbb{R}^d$  défini ainsi :

$$X_t = x + \int_0^t B(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s \quad (28)$$

avec  $(W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^d$ . On pourra donc suivre sa trajectoire à partir de  $X_0 = x$ .

Pour se faire, on propose les deux schémas suivants :

### Schéma d'Euler discret à pas constant :

Pour  $T > 0$ , on choisit un nombre de discrétisation  $N \in \mathbb{N}$  avec un pas défini par  $\Delta = T/N$ , avec  $t_i = i\Delta$  :

$$\begin{cases} \tilde{X}_0 = x \\ \tilde{X}_{t_{i+1}} = \tilde{X}_{t_i} + B(\tilde{X}_{t_i})\Delta + \sigma(\tilde{X}_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \end{cases} \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (29)$$

### Schéma d'Euler en temps continue :

Ce schéma consiste en une interpolation du schéma discret avec  $i = 0, \dots, N-1$  :

$$\begin{cases} \tilde{X}_0 = x \\ \tilde{X}_t = \tilde{X}_{t_i} + B(\tilde{X}_{t_i})(t - t_i) + \sigma(\tilde{X}_{t_i})(W_t - W_{t_i}) \end{cases} \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[ \quad (30)$$

Dans ce cas,  $(\tilde{X}_t)$  est un processus d'Itô qui vérifie la dynamique :

$$\tilde{X}_t = x + \int_0^t B(\tilde{X}_{\phi(s)}) ds + \int_0^t \sigma(\tilde{X}_{\phi(s)}) dW_s \quad \text{avec } \phi(t) := \sup\{t_i : t_i \leq t\} \quad (31)$$

Dans un cadre plus général, on considère que la solution existe dans un espace ouvert  $D \subset \mathbb{R}^d$  et son bord  $\partial D$ . Avant d'en venir aux résultats théoriques et leurs preuves, prenons d'abord le soin de définir quelques notations de temps d'arrêt de opérateurs qui apparaîtront régulièrement :

- Le premier temps de sortie du domaine  $D$  par la diffusion  $(X_t)_{t \geq 0}$  est  $\tau := \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}$  avec pour convention  $\tau = +\infty$  si  $X_t \in D \forall t > 0$ .
- Le premier temps de sortie du domaine  $D$  par le processus d'Euler continu  $(X_t)_{t \geq 0}$  en (30) est  $\tilde{\tau}_c := \inf\{t > 0 : \tilde{X}_t \notin D\}$  avec  $\tilde{\tau}_c = +\infty$  si  $\tilde{X}_t \in D \forall t > 0$ .
- Le premier temps de sortie du domaine  $D$  par le processus d'Euler discret  $(X_{t_i})_{i=0, \dots, N}$  en (29) est  $\tilde{\tau}_d := \inf\{t_i : \tilde{X}_{t_i} \notin D\}$  avec  $\tilde{\tau}_d = +\infty$  si  $\tilde{X}_{t_i} \in D \forall i = 0, \dots, N$ .
- Pour  $r \geq 0$ , on définit l'espace  $D(r) := \{z \in \mathbb{R}^d : d(z, D) < r\}$  où  $d(z, D)$  est la distance entre le point  $z \in \mathbb{R}^d$  et l'espace  $D$ . Le temps d'arrêt  $\tilde{\tau}(r) := \inf\{t > 0 : \tilde{X}_t \notin D(r)\}$  est donc le premier temps où le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  s'approche de  $D$ .
- Pour toute fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  dans  $\mathcal{D}_L$ , on définit le générateur infinitésimal de  $(X_t)_t$  par :

$$Lf(x) := \sum_{i=1}^d B_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\sigma(x) \sigma^*(x))_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad \text{où } \sigma^* \text{ est la transposée de } \sigma$$

- Pour toute fonction  $f$  dans  $C^2$ , on note :

$$\mathcal{L}_z f(x) := \sum_{i=1}^d B_i(z) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\sigma(z) \sigma^*(z))_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad \text{où } \sigma^* \text{ est la transposée de } \sigma$$

Deux théorèmes apportés par E. Gobet nous permettent de quantifier la vitesse de convergence pour nos deux schémas appliqués à une option barrière (qu'on notera  $f(X_T)$ ). Avant leur introduction, les approximations disponibles étaient moins précises et nécessitaient un bon nombre de conditions, certaines d'entre elles n'étant désormais plus utiles. Avant de les énoncer, on suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

**Hypothèses :**

- (H1) Régularité des coefficients du processus  $(X_t)_t : B(\cdot)$  est  $C_b^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  et  $\sigma(\cdot)$  est  $C_b^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ .
- (H2) Condition d'uniformité elliptique :  $\exists \sigma_0 > 0$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}^d, \sigma(x)\sigma(x)^* \geq \sigma_0^2 \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d}$ .
- (H3) Pour  $d \geq 2$ , le domaine  $D$  est de classe  $C^\infty$  et  $\partial D$  est un compact.
- (H4) La fonction  $f$  est mesurable, bornée et telle que  $d(\text{supp}(f), \partial D) \geq 2\varepsilon > 0$ .

On définit les erreurs faibles des schémas d'Euler ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c(f, T, x, N) &= \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_{T < \tilde{\tau}_c} f(\tilde{X}_T)] - \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_{T < \tau} f(X_T)] \\ \mathcal{E}_d(f, T, x, N) &= \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_{T < \tilde{\tau}_d} f(\tilde{X}_T)] - \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_{T < \tau} f(X_T)]\end{aligned}\tag{32}$$

Pour  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ , on pose  $v(t, x) := \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_{T-t < \tau} f(X_{T-t})]$ . Sous les hypothèses (H1)-(H3),  $v(t, x)$  admet un lien avec la densité de transition au temps  $T - t$ , notée  $q_{T-t}(x, y)$ , par la relation :

$$v(t, x) = \int_D q_{T-t}(x, y) f(y) dy\tag{33}$$

Notons également que la fonction  $v(t, x)$  est de classe  $C^\infty([0, T] \times \bar{D}, \mathbb{R})$  et satisfait l'équation différentielle partielle parabolique avec conditions de Cauchy et Dirichlet :

$$\begin{cases} \partial_t v + Lv &= 0 & (t, x) \in [0, T] \times \bar{D} \\ v(t, x) &= 0 & (t, x) \in [0, T] \times D^c \\ v(T, x) &= f(x) & x \in D \end{cases}\tag{34}$$

Voici maintenant les deux théorèmes de convergence sur les schémas d'Euler appliqués à nos options de type barrière via les méthodes de Monte-Carlo :

### Théorème 1 : Convergence de l'erreur pour le schéma continu

Sous les hypothèses (H1)-(H4), il existe une certaine fonction  $K(T)$  telle que :

$$|\mathcal{E}_c(f, T, x, N)| \leq K(T) \frac{\|f\|_\infty}{1 \wedge \varepsilon^4} \frac{1}{N}\tag{35}$$

### Théorème 2 : Convergence de l'erreur pour le schéma discret

Sous les hypothèses (H1)-(H4), il existe une certaine fonction  $K(T)$  telle que :

$$|\mathcal{E}_d(f, T, x, N)| \leq K(T) \frac{\|f\|_\infty}{1 \wedge \varepsilon^4} \frac{1}{\sqrt{N}}\tag{36}$$

Le reste de cette section est consacrée aux preuves de ces théorèmes et des lemmes utilisés. C'est dans cette suite que les notations introduites depuis peu prendront tout leur sens. Ces preuves résultent principalement d'une expansion de l'erreur.

## 4.1 Démonstration du Théorème 1

Pour le schéma (30), si l'on souhaite majorer notre erreur par rapport à  $N$ , on doit faire apparaître le terme de pas  $\Delta$  qui dépend de la discrétisation  $N$ . Pour faire cela, on utilise la quantité  $v(T - T/N, X_{T-T/N}) = \mathbb{E} [\mathbb{1}_{T/N < \tau} f(X_{T/N})]$  et on la rajoute à notre terme d'erreur  $\mathcal{E}_c(f, T, x, N)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c(f, T, x, N) &= \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_{T < \tilde{\tau}_c} f(\tilde{X}_T)] - \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_{T < \tau} f(X_T)] \\ &:= C_1(N) + C_2(N) \end{aligned} \quad (37)$$

avec :

$$C_1(N) = \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_{T < \tilde{\tau}_c} f(\tilde{X}_T)] - \mathbb{E}_x \left[ v \left( \left( T - \frac{T}{N} \right) \wedge \tilde{\tau}_c, X_{(T - \frac{T}{N}) \wedge \tilde{\tau}_c} \right) \right] \quad (38)$$

$$C_2(N) = \mathbb{E}_x \left[ v \left( \left( T - \frac{T}{N} \right) \wedge \tilde{\tau}_c, X_{(T - \frac{T}{N}) \wedge \tilde{\tau}_c} \right) \right] - \mathbb{E}_x [v(0, \tilde{X}_0)] \quad (39)$$

- On s'intéresse d'abord au cas de  $C_1(N)$ , pour le majorer on utilise le lemme suivant.

### Lemme 1

Sous les hypothèses **(H1)**-(**H4**), il existe une fonction  $K(T)$  telle que :

$$\left| \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_{T < \tilde{\tau}_c} f(\tilde{X}_T)] - \mathbb{E}_x \left[ v \left( \left( T - \frac{T}{N} \right) \wedge \tilde{\tau}_c, X_{(T - \frac{T}{N}) \wedge \tilde{\tau}_c} \right) \right] \right| \leq K(T) \frac{\|f\|_\infty}{1 \wedge \varepsilon^4} \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} \quad (40)$$

*Preuve* : cf. p.10

D'après le lemme ci-dessus, on a alors :

$$|C_1(N)| \leq K(T) \frac{\|f\|_\infty}{1 \wedge \varepsilon^4} N^{-\frac{3}{2}} \quad (41)$$

- Pour le terme  $C_2(N)$ , on applique Itô à  $v$  entre 0 et  $(T - \frac{T}{N}) \wedge \tilde{\tau}_c$  :

$$v(t, x_t) = v(0, x_0) + \int_0^t \partial_t v(s, x_s) ds + \int_0^t \mathcal{L}_z v(s, x_s) ds \quad (42)$$

$$\begin{aligned} C_2(N) &= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{t_{N-1} \wedge \tilde{\tau}_c} ds (\partial_t v + \mathcal{L}_z v)|_{z=\tilde{X}_{\phi(s)}}(s, \tilde{X}_s) \right] \\ &= \int_0^{t_{N-1}} ds \mathbb{E}_x \left[ \mathbb{1}_{s < \tilde{\tau}_c} (\mathcal{L}_z v - Lv)|_{z=\tilde{X}_{\phi(s)}}(s, \tilde{X}_s) \right] \end{aligned} \quad (43)$$

Ici on a utilisé l'équation différentielle partielle (34) pour pouvoir écrire  $\partial v = -Lv$ . De plus, comme le terme est positif dans l'espérance, on peut utiliser le théorème de Fubini pour intervertir somme et espérance.

À présent, on rencontre un problème pour pouvoir de nouveau dériver. En effet, la dérivée spatiale de  $v$  n'est pas continue ( $v$  effectue un saut sur le bord de  $D$ ). Pour éviter ce problème on doit séparer cette équation en deux parties :  $\mathbb{1}_{s < \tilde{\tau}_c} = \mathbb{1}_{\phi(s) < \tilde{\tau}_c} - \mathbb{1}_{\phi(s) < \tilde{\tau}_c \leq s}$ .

$$C_2(N) := C_3(N) + C_4(N) \quad (44)$$

avec :

$$C_3(N) = \int_0^{t_{N-1}} ds \mathbb{E}_x \left[ \mathbb{1}_{\phi(s) < \tilde{\tau}_c} (\mathcal{L}_z v - Lv)|_{z=\tilde{X}_{\phi(s)}}(s \wedge \tilde{\tau}_c, \tilde{X}_{s \wedge \tilde{\tau}_c}) \right] \quad (45)$$

$$C_4(N) = \int_0^{t_{N-1}} ds \mathbb{E}_x \left[ \mathbb{1}_{\phi(s) < \tilde{\tau}_c \leq s} (\mathcal{L}_z v - Lv)|_{z=\tilde{X}_{\phi(s)}}(s \wedge \tilde{\tau}_c, \tilde{X}_{s \wedge \tilde{\tau}_c}) \right] \quad (46)$$



- Pour le cas de  $C_4(N)$ , on utilise le fait que  $|\partial_x^\alpha v(s, x)| \leq K(T) \frac{\|f\|_\infty}{1 \wedge \varepsilon^{|\alpha|}}$  dont la preuve est liée au lemme 3 qu'on admettra ici.

$$|C_4(N)| \leq K(T) \frac{\|f\|_\infty}{1 \wedge \varepsilon^2} \sum_{i=0}^{N-2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \mathbb{E}_x \left[ \mathbb{1}_{t_i < \tilde{\tau}_c \leq s} \max_{0 \leq i \leq N-1} \sup_{u \in [t_i, t_{i+1}]} \|\tilde{X}_u - \tilde{X}_{t_i}\|_{\mathbb{R}^d} \right] \quad (47)$$

Nous nous servons ensuite du lemme qui suit :

### Lemme 2

Sous l'hypothèse de **(H1)**, pour  $p \geq 1$  il existe une fonction  $K(T)$  telle que :

$$\left[ \mathbb{E}_x \left( \max_{0 \leq i \leq N-1} \sup_{t_i < s < t_{i+1}} \|\tilde{X}_s - \tilde{X}_{t_i}\|_{\mathbb{R}^d} \right)^p \right]^{1/p} \leq K(T) \sqrt{\log(N+1)} \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (48)$$

*Preuve* : cf. p.10

D'après ce lemme, on peut majorer  $C_4(N)$  :

$$|C_4(N)| \leq K(T) \frac{\|f\|_\infty}{1 \wedge \varepsilon^2} \frac{\log(N+1)}{N^{\frac{3}{2}}} \quad (49)$$

On a d'abord utilisé d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour séparer le terme  $\max_{0 \leq i \leq N-1} \sup_{u \in [t_i, t_{i+1}]}$  de

l'indicatrice, puis le fait que  $\sum_{i=0}^{N-2} \mathbb{1}_{t_i < \tilde{\tau}_c \leq t_{i+1}} \leq 1$ .

- Enfin, pour  $C_3(N)$ , on applique de nouveau Itô à l'événement  $\{\phi(s) < \tilde{\tau}_c\}$  entre les instants  $\phi(s)$  et  $s \wedge \tilde{\tau}_c$  (on se sert du fait que  $\mathcal{L}_z v(s, z) = Lv(s, z)$ ), ce qui nous permet d'obtenir :

$$C_3(N) = \int_0^{t_{N-1}} ds \int_{\phi(s)}^s dt \mathbb{E}_x \left[ \mathbb{1}_{t < \tilde{\tau}_c} (L^2 v - 2\mathcal{L}_z Lv + \mathcal{L}_z^2 v)|_{z=\tilde{X}_{\phi(t)}}(t, \tilde{X}_t) \right] \quad (50)$$

Pour pouvoir majorer  $C_3(N)$  il est nécessaire d'utiliser :

### Lemme 3

Sous les hypothèses **(H1)-(H4)**, il existe une fonction  $K(T)$  telle que  $\forall g \in C_b^{|\alpha|}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  on a :

$$|\mathbb{E}_x [\mathbb{1}_{s < \tilde{\tau}_c} g(\tilde{X}_t) \partial_x^\alpha v(s, \tilde{X}_s)]| \leq K(T) \frac{\|f\|_\infty}{1 \wedge \varepsilon^{|\alpha|}} \frac{1}{T^{|\alpha|/2}} \quad \text{avec } t \in [0, T] \text{ et } s \in [0, T[ \quad (51)$$

*Preuve* : Admise.

La preuve repose sur des techniques de calcul de Malliavin. La démontrer demanderait qu'on y consacre une section entière, donc nous admettons cette preuve.

À l'aide de ce dernier lemme nous pouvons établir l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} |C_3(N)| &\leq \int_0^{t_{N-1}} ds \int_{\phi(s)}^s dt \left| \mathbb{E}_x \left[ \mathbb{1}_{t < \tilde{\tau}_c} (L^2 v - 2\mathcal{L}_z Lv + \mathcal{L}_z^2 v)|_{z=\tilde{X}_{\phi(t)}}(t, \tilde{X}_t) \right] \right| \\ &\leq T \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{T}{N} \left| \mathbb{E}_x \left[ \mathbb{1}_{t < \tilde{\tau}_c} (L^2 v - 2\mathcal{L}_z Lv + \mathcal{L}_z^2 v)|_{z=\tilde{X}_{\phi(t)}}(t, \tilde{X}_t) \right] \right| \\ &\leq K(T) \frac{\|f\|_\infty}{1 \wedge \varepsilon^4} \frac{1}{N} \end{aligned} \quad (52)$$

**Preuve du Lemme 1 :**

*Démonstration.* On utilise le fait que l'on a bien  $v(T, \tilde{X}_T) = f(\tilde{X}_T)$  (problème de Cauchy et Dirichlet) :

$$\mathbb{E}_x [\mathbf{1}_{T < \tilde{\tau}_c} g(\tilde{X}_t)] = \mathbb{E}_x [v(T \wedge \tilde{\tau}_c, \tilde{X}_{T \wedge \tilde{\tau}_c})] \quad (53)$$

Maintenant on doit s'occuper du terme  $\mathbb{E}_x [v(T \wedge \tilde{\tau}_c, \tilde{X}_{T \wedge \tilde{\tau}_c})] - \mathbb{E}_x \left[ v \left( \left( T - \frac{T}{N} \right) \wedge \tilde{\tau}_c, X_{(T - \frac{T}{N}) \wedge \tilde{\tau}_c} \right) \right]$ , pour ce faire on souhaite appliquer Itô entre  $(T - \frac{T}{N}) \wedge \tilde{\tau}_c$  et  $(T - \delta) \wedge \tilde{\tau}_c$  en prenant la limite quand  $\delta$  tend vers 0. Le problème est que  $v(t, x)$  n'est pas forcément continue en  $t = T$  si  $f$  est seulement une fonction mesurable.

D'abord on considère le cas où  $f$  est une fonction mesurable et continue. On fait apparaître le terme  $(T - \delta) \wedge \tilde{\tau}_c$  :

$$\mathbb{E}_x [v(T \wedge \tilde{\tau}_c, \tilde{X}_{T \wedge \tilde{\tau}_c})] - \mathbb{E}_x \left[ v \left( \left( T - \frac{T}{N} \right) \wedge \tilde{\tau}_c, X_{(T - \frac{T}{N}) \wedge \tilde{\tau}_c} \right) \right] := G_1(\delta, N) + G_2(\delta, N) \quad (54)$$

avec  $G_1(\delta, N)$  qui correspond au premier terme  $+\mathbb{E}_x [v((T - \delta) \wedge \tilde{\tau}_c, X_{(T - \delta) \wedge \tilde{\tau}_c})]$  et  $G_2(\delta, N)$  qui correspond au deuxième terme  $-\mathbb{E}_x [v((T - \delta) \wedge \tilde{\tau}_c, X_{(T - \delta) \wedge \tilde{\tau}_c})]$ .

Le terme  $G_2(\delta, N)$  se traite de la même façon que le terme  $C_2(N)$  et on obtient la bonne majoration. Pour le terme  $G_1(\delta, N)$  on prend la limite quand  $\delta$  tend vers 0 et par le théorème de convergence dominée on à  $\lim_{\delta \rightarrow 0} G_1(\delta, N) = 0$ .

Maintenant on considère le cas où  $f$  n'est pas continue mais seulement mesurable et satisfait l'hypothèse **(H4)**. Dans ce cas on approxime  $f$  avec des fonctions continues notées  $f_p$ , ce qui est possible en faisant ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x [\mathbf{1}_{T < \tilde{\tau}_c} g(\tilde{X}_t)] &= \int f d\tilde{\mu}_1 \\ \mathbb{E}_x \left[ v \left( \left( T - \frac{T}{N} \right) \wedge \tilde{\tau}_c, X_{(T - \frac{T}{N}) \wedge \tilde{\tau}_c} \right) \right] &= \mathbb{E}_x [\mathbf{1}_{(T - T/N) < \tilde{\tau}_c} \mathbb{E}_x [\mathbf{1}_{T/N < \tau} f(\tilde{X}_{T/N})]] \\ &= \int f d\tilde{\mu}_2 \end{aligned} \quad (55)$$

En utilisant des arguments de densité, on approxime alors  $f$  par une somme de fonctions de  $(\mu_1 + \mu_2)$  et comme chaque  $f_p$  satisfait  $\|f_p\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ , on peut appliquer les résultats effectués pour le cas  $f$  continue aux fonctions  $f_p$ .  $\square$

**Preuve du Lemme 2 :**

*Démonstration.* Pour cette preuve on se place dans le cas général de n'importe quel processus d'Itô  $(Y_t)_{t \geq 0}$  définie par :  $dY_t = b_t dt + \sigma_t dW_t$ . Sans perte de généralité on prend  $b_t = 0$ . On a alors :

$$\sup_{t_i < s < t_{i+1}} |Y_s - Y_{s_i}| \leq \sup_{t_i < s < t_{i+1}} \int_{t_i}^s \sigma_u dW_u - \inf_{t_i < s < t_{i+1}} \int_{t_i}^s \sigma_u dW_u \quad (56)$$

Il suffit donc de s'occuper de  $\sup_{t_i < s < t_{i+1}} \int_{t_i}^s \sigma_u dW_u$ , pour l'autre membre on remplace  $\sigma$  par  $-\sigma$ . Maintenant on utilise l'inégalité de Bernstein pour les martingales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \sup_{s \in [t_{N-1}, t_N]} \int_{t_{N-1}}^s \sigma_u dW_u > z / \mathcal{F}_{t_{N-1}} \right] &\leq \exp \left( -N \frac{z^2}{2 \|\sigma^2\|_\infty T} \right) \\ \mathbb{P} \left[ \max_{0 \leq i \leq N-1} \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} \int_{t_i}^s \sigma_u dW_u \leq z \right] &\geq \mathbb{P} \left[ \max_{0 \leq i \leq N-2} \sup_{s \in [t_i, t_{i+1}]} \int_{t_i}^s \sigma_u dW_u \leq z \right] \left( 1 - \exp \left( -N \frac{z^2}{2 \|\sigma^2\|_\infty T} \right) \right) \\ &\geq \left( 1 - \exp \left( -N \frac{z^2}{2 \|\sigma^2\|_\infty T} \right) \right)^N \end{aligned} \quad (57)$$

Ensuite on inverse l'inégalité en prenant  $1 - \left(1 - \exp\left(-N \frac{z^2}{2\|\sigma^2\|_\infty T}\right)\right)^N$  et on prend l'espérance pour obtenir :

$$\mathbb{E}_x \left( \sup_{s \in [t_{N-1}, t_N]} \int_{t_{N-1}}^s \sigma_u dW_u \right)^p \leq \int_{\mathbb{R}^+} dz p z^{p-1} \left( 1 - \left( 1 - \exp\left(-N \frac{z^2}{2\|\sigma^2\|_\infty T}\right) \right)^N \right) \quad (58)$$

On partage l'intégrale en deux au point  $\xi(N) = \sqrt{T} \frac{2\|\sigma\|_\infty}{\sqrt{N}} \sqrt{\log(N+1)}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} dz p z^{p-1} \left( 1 - \left( 1 - \exp\left(-N \frac{z^2}{2\|\sigma^2\|_\infty T}\right) \right)^N \right) &= \int_0^{\xi(N)} dz p z^{p-1} \left( 1 - \left( 1 - \exp\left(-N \frac{z^2}{2\|\sigma^2\|_\infty T}\right) \right)^N \right) \\ &\quad + \int_{\xi(N)}^{\mathbb{R}^+} dz p z^{p-1} \left( 1 - \left( 1 - \exp\left(-N \frac{z^2}{2\|\sigma^2\|_\infty T}\right) \right)^N \right) \\ &\leq \int_0^{\xi(N)} dz p z^{p-1} N \exp\left(-N \frac{z^2}{2\|\sigma^2\|_\infty T}\right) \\ &\quad + \int_{\xi(N)}^{\mathbb{R}^+} dz p z^{p-1} N \exp\left(-N \frac{z^2}{2\|\sigma^2\|_\infty T}\right) \\ &\leq \xi^p(N) + K(T) N^{-p/2} \exp\left(-N \frac{\xi^2(N)}{4\|\sigma^2\|_\infty T}\right) \\ &= \xi^p(N) + K(T) N^{-p/2} \frac{1}{N+1} \end{aligned} \quad (59)$$

Ici on a utilisé le fait que  $1 - (1 - u)^N \leq Nu$  pour  $u \in [0, 1]$ . □

## 4.2 Démonstration du Théorème 2

Ici on considère  $d \geq 2$  (le cas  $d = 1$  posant certains problèmes).

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_d(f, T, x, N) &= \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_{T < \tilde{\tau}_d} f(\tilde{X}_T)] - \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_{T < \tau} f(X_T)] \\ &= \mathbb{E}_x [v(T \wedge \tilde{\tau}_d, \tilde{X}_{T \wedge \tilde{\tau}_d}) - v(0, \tilde{X}_0)] \end{aligned} \quad (60)$$

On voudrait appliquer Itô à  $v(T \wedge \tilde{\tau}_d, \tilde{X}_{T \wedge \tilde{\tau}_d}) - v(0, \tilde{X}_0)$ , mais la dérivée spatiale de  $v$  est discontinue sur les bords et le processus  $(\tilde{X}_{T \wedge \tilde{\tau}_d})_{t \geq 0}$  a des chances de croiser  $\partial D$ . Pour pallier à ce problème on utilise la projection orthogonale  $Z_t := Proj_{\tilde{D}}(\tilde{X}_t)$ .

$$\mathcal{E}_d(f, T, x, N) = E_1(N) + E_2(\delta, N) + E_3(\delta, N) \quad (61)$$

avec :

$$\begin{aligned} E_1(N) &= \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_{\tilde{\tau}(R) < T < \tilde{\tau}_d} f(\tilde{X}_T)] \\ E_2(\delta, N) &= \mathbb{E}_x [v(T \wedge \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R), \tilde{X}_{T \wedge \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R)}) \\ &\quad - v((T - \delta) \wedge \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R), \tilde{X}_{(T - \delta) \wedge \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R)})] \\ E_3(\delta, N) &= \mathbb{E}_x [v((T - \delta) \wedge \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R), X_{(T - \delta) \wedge \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R)}) - v(0, \tilde{X}_0)] \end{aligned} \quad (62)$$

- On commence par le terme  $E_1(N)$ .

$$\begin{aligned} |E_1(N)| &\leq \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbb{E}_x [|f(\tilde{X}_T)|^2]^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N}} \|f\|_\infty \mathbb{E}_x \left[ \sup_{t \in [S, S']} |\tilde{X}_t - \tilde{X}_s|^2 \right]^{1/2} \quad \text{avec } 0 \leq S' - S \leq \Delta \leq T \end{aligned} \quad (63)$$

Pour majorer l'exponentiel, on pose  $\eta > 0$ . Si  $\eta \leq 2\|b\|_\infty \Delta$ , alors on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\left(\sup_{t \in [S, S']} |\tilde{X}_t - \tilde{X}_s| \geq \eta\right) &\leq e^{c\eta^2/\Delta - c\eta^2/\Delta} = 1 \\ &\leq e^{4c\|b\|_\infty^2 T} e^{-c\eta^2/\Delta}\end{aligned}\tag{64}$$

Si  $\eta > 2\|b\|_\infty \Delta$ , alors on doit utiliser l'inégalité de Bernstein pour les martingales.

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t \in [S, S']} \int_S^t \sigma_u dW_u > \eta/\mathcal{F}_S\right] \leq \exp\left(-N \frac{\eta^2}{2\|\sigma^2\|_\infty T}\right)\tag{65}$$

Comme pour la démonstration du lemme 2, on majore ceci par  $K(T)e^{-c\eta^2/\Delta}$ .

Dans les deux cas de  $\eta$ , on majore  $E_1(N)$  par :

$$|E_1(N)| \leq \frac{K(T)}{\sqrt{N}} \|f\|_\infty\tag{66}$$

• Par la continuité de  $v$  en  $t = T$  (car  $f$  est continue) et de  $X_{\cdot \wedge \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R)}$ , on a, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E_2(\delta, N) = 0\tag{67}$$

• Pour  $E_3(\delta, N)$ , on souhaite appliquer la formule d'Itô, or on ne peut pas appliquer Itô pour le processus  $(X_{T \wedge \tilde{\tau}_d})_{t \geq 0}$ . On utilise donc la projection orthogonale  $Z_t := \text{Proj}_{\bar{D}}(\tilde{X}_t)$  pour pouvoir résoudre ce problème. Issue d'un corollaire, la formule qui suit est utilisée pour une semimartingale continue  $(Y_t)_{t \geq 0}$  à valeur dans  $\bar{D}(R)$  (avec  $Y_0 \in D$ ) et une fonction  $u(t, x) \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d) \cap C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \bar{D}, \mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned}d(u(t, Y_t)) &= \mathbb{1}_{Y_t \in D} \frac{\partial u}{\partial t}(t, Y_t) dt + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_l}(t, \tilde{Y}_t) n_l(\tilde{Y}_t) dL_t^0(F_1(\tilde{Y})) \\ &= \mathbb{1}_{Y_t \in D} \left( \frac{1}{2} \sum_{l=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_l}(t, Y_t) dY_{l,t} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_m}(t, Y_t) d\langle Y_{l,\cdot}, Y_{m,\cdot} \rangle_t \right) \\ &= \mathbb{1}_{Y_t \notin D} \left( \frac{1}{2} \sum_{l=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_l}(t, \text{Proj}_{\bar{D}}(Y_t)) dY_{l,t}^{\partial D} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_m}(t, \text{Proj}_{\bar{D}}(Y_t)) d\langle Y_{l,\cdot}^{\partial D}, Y_{m,\cdot}^{\partial D} \rangle_t \right)\end{aligned}\tag{68}$$

Cette équation provient de l'application d'Itô avec  $u(t, Y_t) - u(0, Y_0) = u(t, \text{Proj}_{\bar{D}}(Y_t)) - u(0, \text{Proj}_{\bar{D}}(Y_t))$  et du fait que pour une semimartingale sa projection sur  $\bar{D}$  (notée  $\text{Proj}_{\bar{D}}(Y_t)$ ) se décompose comme :

$$d(\text{Proj}_{\bar{D}}(Y_t)) = \mathbb{1}_{Y_t \in D} dY_t + \mathbb{1}_{Y_t \notin D} dY_t^{\partial D} + \frac{1}{2} n(Y_t) dL_t^0(F_1(Y))\tag{69}$$

En appliquant cela à  $E_3(\delta, N)$ , on la ségmente en 3 parties :

$$E_3(\delta, N) = E_4(\delta, N) + E_5(\delta, N) + E_6(\delta, N)\tag{70}$$

avec :

$$\begin{aligned}E_4(N) &= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{(T-\delta) \wedge \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R)} dt \mathbb{1}_{\tilde{X}_t \in D} (\mathcal{L}_z v - Lv)|_{z=\tilde{X}_{\phi(t)}}(t, \tilde{X}_t) \right] \\ E_5(\delta, N) &= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{(T-\delta) \wedge \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R)} \frac{1}{2} \sum_{l=1}^d \frac{\partial v}{\partial x_l}(t, \tilde{X}_t) n_l(\tilde{X}_t) dL_t^0(F_1(\tilde{X})) \right] \\ E_6(\delta, N) &= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{(T-\delta) \wedge \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R)} \sum_{l=1}^d \frac{\partial v}{\partial x_l}(t, \text{Proj}_{\bar{D}}(\tilde{X}_t)) \mathbb{1}_{\tilde{X}_t \notin D} d\tilde{X}_{l,t}^{\partial D} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^d \sum_{m=1}^d \frac{\partial^2 v}{\partial x_l \partial x_m}(t, \text{Proj}_{\bar{D}}(\tilde{X}_t)) \mathbb{1}_{\tilde{X}_t \in D} d\langle \tilde{X}_{l,\cdot}^{\partial D}, \tilde{X}_{m,\cdot}^{\partial D} \rangle_t \right]\end{aligned}\tag{71}$$

- Pour pouvoir majorer  $E_5(\delta, N)$ , on a besoin du lemme suivant :

#### Lemme 4

Sous les hypothèses **(H1)**-**(H3)**, il existe une fonction  $K(T)$  telle que pour  $x \in D$  on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[L_{T \wedge \tilde{\tau}_d}^0(F_l(\tilde{X}))] &\leq \frac{K(T)}{\sqrt{N}} \\ \mathbb{E}_x[L_{T \wedge \tilde{\tau}_d}^0(F_l(X))] &\leq \frac{K(T)}{\sqrt{N}}\end{aligned}\tag{72}$$

*Preuve* : cf. p.14

On remarque alors que notre  $E_5(\delta, N)$  est bien de la forme  $L_{T \wedge \tilde{\tau}_d}^0(F_l(\tilde{X}))$  avec un  $dL_t^0(F_l(\tilde{X}))$  non négatif. On peut dès lors utiliser le lemme 4 :

$$|E_5(\delta, N)| \leq \frac{K(T)}{\sqrt{N}} \frac{\|f\|_\infty}{1 \wedge \epsilon}\tag{73}$$

- Pour pouvoir majorer  $E_6(\delta, N)$  il est nécessaire d'utiliser un autre lemme :

#### Lemme 5

Sous les hypothèses **(H1)**-**(H3)**, il existe une fonction  $K(T)$  telle que pour  $s \in ]0, T]$  et  $x \in D$ , on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\tilde{X}_{\phi(s)} \in D, \tilde{X}_s \notin D) &\leq \frac{K(T)}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{s}} \\ \mathbb{P}_x(X_{\phi(s)} \in D, X_s \notin D) &\leq \frac{K(T)}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{s}}\end{aligned}\tag{74}$$

*Preuve* : cf. p.15

Ce dernier permet de majorer :

$$\begin{aligned}\int_0^{(T-\delta) \wedge \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R)} \mathbb{1}_{\tilde{X}_t \notin D} dt &\leq \int_0^T \mathbb{1}_{\tilde{X}_t \notin D} \mathbb{1}_{\tilde{X}_{\phi(s)} \in D} dt \\ &\leq \frac{K(T)}{\sqrt{N}}\end{aligned}\tag{75}$$

L'objectif est, maintenant, de mettre  $E_6(\delta, N)$  en fonction  $\int_0^{(T-\delta) \wedge \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R)} \mathbb{1}_{\tilde{X}_t \notin D} dt$ . Pour cela, on a recours à une inégalité qu'on ne démontrera pas ici (liée au lemme 3) par soucis de brièveté :  $\forall (s, x) \in [0, T] \times V_{\partial D(\epsilon)}$  on a sous les hypothèses **(H1)**-**(H4)**,  $|\partial_x^\alpha v(s, x)| \leq K(T) \frac{\|f\|_\infty}{1 \wedge \epsilon^{|\alpha|}}$ .

Ainsi on s'occupe de la somme dans  $E_6(\delta, N)$  grâce à l'inégalité précédente (en effet  $\tilde{X}^{\partial D}$  possède les mêmes propriétés que  $\tilde{X}$  qui est un processus d'Itô adapté et avec des coefficients bornés) et on applique le lemme 5.

$$|E_6(\delta, N)| \leq \frac{K(T)}{\sqrt{N}} \frac{\|f\|_\infty}{1 \wedge \epsilon^2}\tag{76}$$

- Il reste à contrôler  $E_4(\delta, N)$ . Dans ce but, on introduit une nouvelle fonction : Soit  $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  une fonction de coupage proche de  $\partial D$  qui vérifie

$$\mathbb{1}_{V_{\partial D(\epsilon/2)}} \leq 1 - \psi \leq \mathbb{1}_{V_{\partial D(\epsilon)}} \text{ et } \|\partial_x^\alpha \psi\|_\infty \leq C_{|\alpha|} / (1 \wedge \epsilon^{|\alpha|})$$

pour tout index  $\alpha$  (même  $\varepsilon$  que dans l'hypothèse **(H4)**). Cette fonction permet de séparer le cas où on est près du bord de  $D$  et lorsque qu'on est loin du bord. On réécrit donc  $E_4(\delta, N)$  en faisant cette distinction de cas :

$$E_4(\delta, N) = E_7(\delta, N) + E_8(\delta, N) \quad (77)$$

avec :

$$\begin{aligned} E_7(\delta, N) &= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{(T-\delta)} dt \mathbb{1}_{\tilde{X}_t \in D} \mathbb{1}_{t < \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R)} (\mathcal{L}_z - L)|_{z=\tilde{X}_{\phi(t)}} [(1-\psi)v](t, \tilde{X}_t) \right] \\ E_8(\delta, N) &= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{(T-\delta)} dt \mathbb{1}_{\tilde{X}_t \in D} \mathbb{1}_{t < \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R)} (\mathcal{L}_z - L)|_{z=\tilde{X}_{\phi(t)}} [\psi v](t, \tilde{X}_t) \right] \end{aligned} \quad (78)$$

• On s'occupe d'abord de la partie  $(1-\psi)$ . Pour cela on doit expliciter le terme  $\mathcal{L}_z - L$ , pour une question de simplification on utilise une nouvelle notation : on note  $g_\alpha = B_i$  ou  $(\sigma\sigma^*)_{i,j}$ .

$$(\mathcal{L}_z - L)|_{z=\tilde{X}_{\phi(t)}} [(1-\psi)v](t, \tilde{X}_t) = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} C_\alpha \partial_x^\alpha [(1-\psi)v](t, \tilde{X}_t) [g_\alpha(\tilde{X}_t) - g_\alpha(\tilde{X}_{\phi(t)})] \quad (79)$$

Ici on passe de nouveau par l'inégalité suivante :  $\forall (s, x) \in [0, T] \times V_{\partial D(\varepsilon)}$  on a sous les hypothèses **(H1)**-**(H4)**,  $|\partial_x^\alpha v(s, x)| \leq K(T) \frac{\|f\|_\infty}{1 \wedge \varepsilon^{|\alpha|}}$ .

Or  $(1-\psi)$  est à support inclu dans  $V_{\delta D}(\varepsilon)$ , donc  $\partial_x^\alpha [(1-\psi)v](t, \tilde{X}_t)$  peut être contrôlée par l'inégalité précédente, d'où :

$$|E_7(\delta, N)| \leq \frac{K(T)}{\sqrt{N}} \frac{\|f\|_\infty}{1 \wedge \varepsilon^2} \quad (80)$$

en utilisant le fait que  $\|\tilde{X}_t - \tilde{X}_{\phi(t)}\|_{\mathbb{R}^d} \leq K(T)N^{-1/2}$ .

• Pour  $E_8(\delta, N)$ , d'abord il est possible d'enlever l'indicatrice sur  $\tilde{X}_t \in D$  en appliquant l'opérateur  $(\mathcal{L}_z v - L)|_{z=\tilde{X}_{\phi(t)}} [\psi v]$  non pas sur  $(t, \tilde{X}_t)$  mais sur  $(t \wedge \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R), \tilde{X}_{t \wedge \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R)})$  (car on sait, que  $\psi v$  est à support dans  $\tilde{D}$ ). Puis appliquer Itô à  $\tilde{X}$  entre  $\phi(t)$  et  $t \wedge \tilde{\tau}_d \wedge \tilde{\tau}(R)$ . Les étapes sont détaillées dans l'article [2], ainsi, on obtient enfin :

$$|E_8(\delta, N)| \leq \frac{K(T)}{N} \frac{\|f\|_\infty}{1 \wedge \varepsilon^4} \quad (81)$$

#### Preuve du Lemme 4 :

*Démonstration.* Pour majorer notre expression, on utilise la formule de *Tanaka* pour pouvoir séparer notre terme  $L_{T \wedge \tilde{\tau}_d}^0(F_l(\tilde{X}))$ . Cette formule s'écrit :

$$|W_t| \leq \int_0^t \text{sign}(W_s) dW_s + J_t \quad (82)$$

avec  $(W_t)_t$  un mouvement brownien et  $J_t$  le temps local en 0 du mouvement brownien  $(W_t)_t$  (le temps local passé par  $W$  en 0 jusqu'au temps  $t$ ) qui s'écrit :  $J_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} |\{s \in [0, t] : W_s \in (-\varepsilon, +\varepsilon)\}|$ .

Dans notre cas on obtient :

$$\frac{1}{2} L_{T \wedge \tilde{\tau}_d}^0(F_l(\tilde{X})) = (F_l(\tilde{X}_{T \wedge \tilde{\tau}_d}))^- - (F_l(x))^- + \int_0^{T \wedge \tilde{\tau}_d} \mathbb{1}_{F_l(\tilde{X}_t) \leq 0} d(F_l(\tilde{X}_t)) \quad (83)$$

Maintenant on prend l'espérance. Comme  $\{F_l(y) \leq 0\}$  est équivalent à  $\{y \notin D\}$  on peut appliquer le lemme 5 à  $\mathbb{P}_x(y \notin D)$  et ainsi obtenir :

$$\mathbb{E}_x [L_{T \wedge \tilde{\tau}_d}^0(F_l(\tilde{X}))] \leq 2\mathbb{E}_x [(F_l(\tilde{X}_{T \wedge \tilde{\tau}_d}))^-] + \frac{K(T)}{\sqrt{N}} \quad (84)$$

Pour terminer la preuve il faut majorer le terme  $\mathbb{E}_x [(F_l(\tilde{X}_{T \wedge \tilde{\tau}_d}))^-]$ . Il est possible de montrer qu'on peut le majorer par  $\frac{K(T)}{\sqrt{N}}$ . Voir l'article [2] pour la fin de la preuve où l'auteur utilise un autre lemme pour pouvoir encadrer le quotient de deux probabilités.

□

### Preuve du Lemme 5 :

*Démonstration.* La Démonstration est la même pour  $X$  et  $\tilde{X}$ . On considère le cas  $\phi(s) > 0$  (le cas non trivial). On utilise les propriétés de Markov qui s'appliquent pour  $\phi(s)$  :

$$\mathbb{P}_x(\tilde{X}_{\phi(s)} \in D, \tilde{X}_s \notin D) \leq \mathbb{E}_x \left[ \mathbb{1}_{\tilde{X}_{\phi(s)} \in D} \mathbb{P}_{\phi(s)}(\|\tilde{X}'_{s-\phi(s)} - \tilde{X}'_0\| \geq d(\tilde{X}'_0, \partial D)) \right] \quad (85)$$

Pour  $\mathbb{P}_{\phi(s)}(\|\tilde{X}'_{s-\phi(s)} - \tilde{X}'_0\| \geq d(\tilde{X}'_0, \partial D))$  on utilise la méthode qu'on a utilisé pour majorer  $E_1(N)$ . Ceci nous donne directement comme majoration  $\exp\left(-c \frac{d^2(\tilde{X}_{\phi(s)}, \partial D)}{s-\phi(s)}\right)$ .

Maintenant il reste à jouer avec la densité d'une gaussienne (on considère  $D = \{y \in \mathbb{R}^d : y_l > 0\}$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[ \mathbb{1}_{\tilde{X}_{\phi(s)} \in D} \exp\left(-c \frac{d^2(\tilde{X}_{\phi(s)}, \partial D)}{s-\phi(s)}\right) \right] &\leq \int_{\mathbb{R}^d} dy \frac{K(T)}{(\phi(s))^{d/2}} \exp\left(-c' \frac{\|x-y\|^2}{\phi(s)} - c \frac{y_l^2}{s-\phi(s)}\right) \\ &\leq K(T) \sqrt{\frac{s-\phi(s)}{s}} \exp\left(-(c \wedge c') \frac{x_l^2}{s}\right) \end{aligned} \quad (86)$$

Sachant que  $s - \phi(s) \leq \frac{T}{N}$ , ceci complète notre démonstration.  $\square$

## 5 Applications numériques

Dans cette section, on reste dans le cadre de Black-Scholes en dimension  $d = 1$ . Le prix de l'actif sous-jacent est donc décrit par le processus de diffusion  $(S_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  défini par :

$$S_t = x + \int_0^t B(S_s) ds + \int_0^t \sigma(S_s) dW_s \quad (87)$$

où

$$B(S_t) = rS_t \quad \sigma(S_t) = \sigma S_t \quad S_0 = x$$

avec  $(W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement Brownien dans  $\mathbb{R}$ , et  $r, \sigma$  sont des constantes.

### 5.1 Approche par Monte-Carlo

On rappelle le prix d'une option barrière sur l'actif  $S$  de maturité  $T$  à la date  $t$  :

$$u(t, x) = \begin{cases} \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} [e^{-r(T-t)} \mathbb{1}_{T < \tau} \phi(S_T)] & \text{knock-out} \\ \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} [e^{-r(T-t)} \mathbb{1}_{T \geq \tau} \phi(S_T)] & \text{knock-in} \end{cases} \quad \text{où } \tau = \inf\{t > 0 : S_t \notin D\}$$

avec  $D \subset \mathbb{R}$  un ensemble défini dans la suite qui caractérise le type d'option barrière étudié. On ne cherchera à calculer le prix des options qu'au temps  $t = 0$ . Dans ce contexte, on dispose des schémas d'approximation d'Euler :

$$\textbf{Euler discret} \quad \begin{cases} \tilde{S}_0 = x \\ \tilde{S}_{t_{i+1}} = \tilde{S}_{t_i} + r\tilde{S}_{t_i}h + \sigma\tilde{S}_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \end{cases} \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (88)$$

$$\textbf{Euler continu} \quad \begin{cases} \tilde{S}_0 = x \\ \tilde{S}_{t_{i+1}} = \tilde{S}_{t_i} + r\tilde{S}_{t_i}h + \sigma\tilde{S}_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \\ \tilde{S}_t = \tilde{S}_{t_i} + r\tilde{S}_{t_i}(t - t_i) + \sigma\tilde{S}_{t_i}(W_t - W_{t_i}) \end{cases} \quad i = 0, \dots, N-1, \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[ \quad (89)$$

où  $h = \frac{T}{N}$  est le pas de discrétisation,  $N$  le nombre de pas de discrétisation, et  $t_i = ih$ . Ils vont permettre de simuler le prix  $S_T$ , bien qu'il aurait été possible de le faire de manière plus directe par une fonction d'une variable aléatoire gaussienne, mais surtout de simuler la trajectoire de  $(S_t)_t$  ce qui permet le calcul de l'indicatrice. Ainsi, on approche la quantité  $u(0, x)$  par l'estimateur de Monte-Carlo :

$$E_M = \begin{cases} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e^{-rT} \mathbb{1}_{T < \tau_i} \phi(\tilde{S}_T^i) & \text{knock-out} \\ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e^{-rT} \mathbb{1}_{T \geq \tau_i} \phi(\tilde{S}_T^i) & \text{knock-in} \end{cases} \quad \text{où } \tau_i = \inf\{t > 0 : \tilde{S}_t^i \notin D\} \quad (90)$$

où  $(\tilde{S}_t^i)_t$  sont des simulations indépendantes de la trajectoire du processus  $(S_t)_t$  en suivant les schémas, et  $M$  le nombre de simulations de Monte Carlo (grand). En effet, par la loi des grands nombres,  $E_M$  devrait converger vers le prix exact de l'option.

### Algorithme Monte-Carlo avec Euler discret

```

Input :  $S_0, T, r, \sigma, D, N, M$ 
Output :  $E_M$ 

Sum  $\leftarrow 0$ 
h  $\leftarrow \frac{T}{N}$ 
For  $i$  in  $1, \dots, M$  do :
     $S \leftarrow S_0$ , Out  $\leftarrow$  false
    For  $j$  in  $0, \dots, N-1$  do :
         $S \leftarrow S + rSh + \sigma S\sqrt{h} \text{Norm}(0,1)$ 
        If  $S \notin D$  do :
            Out  $\leftarrow$  true
    If Out is true do : # knock-in case
        Sum  $\leftarrow$  Sum + S
 $E_M \leftarrow \text{Sum}/M$ 

```

En ce qui concerne l'algorithme dans le cas continu, il faut compter une étape supplémentaire : celle qui permet de savoir si dans chaque intervalle de temps, le processus de prix  $(\tilde{S}_t)$  est resté ou non dans  $D$ . En effet, même si  $\tilde{S}_{t_i} \in D$  et  $\tilde{S}_{t_{i+1}} \in D$ , il n'est pas assuré que  $\tilde{S}_t \in D$ ,  $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$ . En réalité, conditionnellement aux valeurs en  $t_i$  et  $t_{i+1}$ ,  $(\tilde{S}_t)_{t \in [t_i, t_{i+1}]}$  suit la loi d'un pont Brownien. Sachant cela, il est alors facile de simuler le comportement de  $(S_t)_t$  dans cet intervalle vis-à-vis de l'ensemble  $D$ . Il suffit de simuler des variables de Bernoulli de probabilité :

$$\mathbb{P}(\tilde{S}_t \in D \ \forall t \in [t_i, t_{i+1}] \mid \tilde{S}_{t_i} = z_1, \tilde{S}_{t_{i+1}} = z_2) = p(z_1, z_2, h) \quad (91)$$

1. Si  $D = ]-\infty, b[$  :

$$p(z_1, z_2, h) = \mathbb{1}_{b > z_1} \mathbb{1}_{b > z_2} \left( 1 - \exp \left( -2 \frac{(b - z_1)(b - z_2)}{\sigma^2(z_1)h} \right) \right) \quad (92)$$

2. Si  $D = ]a, +\infty[$  :

$$p(z_1, z_2, h) = \mathbb{1}_{z_1 > a} \mathbb{1}_{z_2 > a} \left( 1 - \exp \left( -2 \frac{(a - z_1)(a - z_2)}{\sigma^2(z_1)h} \right) \right) \quad (93)$$

3. Si  $D = ]a, b[$  :

$$p(z_1, z_2, h) = \mathbb{1}_{a < z_1 < b} \mathbb{1}_{a < z_2 < b} \left( 1 - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ \exp \left( -2 \frac{k(b-a)(k(b-a) + z_2 - z_1)}{\sigma^2(z_1)h} \right) - \exp \left( -2 \frac{(k(b-a) + z_1 - b)(k(b-a) + z_2 - z_1)}{\sigma^2(z_1)h} \right) \right] \right) \quad (94)$$

Dans les deux premiers cas, on trouve également des formules [7] en dimension  $d > 1$ .

### Algorithme Monte-Carlo avec Euler continu

```

Input :  $S_0, T, r, \sigma, D, N, M$ 
Output :  $E_M$ 

Sum  $\leftarrow 0$ 
h  $\leftarrow \frac{T}{N}$ 
For  $i$  in  $1, \dots, M$  do :
     $S \leftarrow S_0$ , Out  $\leftarrow$  false
    For  $j$  in  $0, \dots, N-1$  do :
         $S' \leftarrow S + rSh + \sigma S\sqrt{h} \text{Norm}(0,1)$ 

```



```

    If  $S' \notin D$  do :
        Out  $\leftarrow$  true
    else do :
         $p \leftarrow p(z_1, z_2, h)$ 
        If Bern( $p$ ) is not true do :
            Out  $\leftarrow$  true
    If Out is true do : # knock-in case
        Sum  $\leftarrow$  Sum + S
 $E_M \leftarrow$  Sum/ $M$ 

```

En considérant  $\sigma_M^2$  la variance empirique de l'estimateur  $E_M$ , on obtient un intervalle de confiance asymptotique pour notre estimateur :

$$\sigma_M^2 = \begin{cases} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (e^{-rT} \mathbb{1}_{T < \tau_i} \phi(\tilde{S}_T^i))^2 - E_M^2 & \text{knock-out} \\ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (e^{-rT} \mathbb{1}_{T \geq \tau_i} \phi(\tilde{S}_T^i))^2 - E_M^2 & \text{knock-in} \end{cases}$$

$$I_M^\alpha = \left[ E_M - q_\alpha \frac{\sigma_M}{\sqrt{M}}; E_M + q_\alpha \frac{\sigma_M}{\sqrt{M}} \right]$$

où  $q_\alpha$  est le quantile de niveau  $\alpha$ . Dans nos simulations, on choisit le niveau de confiance usuel  $q_\alpha = 1.96$ .

Par ailleurs, remarquons que la méthode par le schéma discret entre en adéquation avec le principe de l'option à barrière discrète évoquée en section 2, celle qui consiste à évaluer la position du cours par rapport à la barrière à des temps discrets réguliers. Pour ce cas particulier, la formule fermée doit être ajustée [6] par une translation de la barrière  $B$ . Ainsi, dans la formule, on remplace  $B$  par la valeur  $B'$  :

$$B' = \begin{cases} Be^{0,5826\sigma\sqrt{T/N}} & \text{up-and-in et up-and-out} \\ Be^{-0,5826\sigma\sqrt{T/N}} & \text{down-and-in et down-and-out} \end{cases}$$

Ces nouvelles formules fermées seront également évaluée dans nos exemples en rapprochant nos résultats avec le schéma d'Euler discret. Ce changement s'opère simplement de manière numérique en calculant la formule fermée adaptée d'une option identique à l'exception près de son seuil barrière.

## 5.2 Quelques exemples

### Option Call Up-and-Out

Ici, le seuil barrière  $B$  se situe au dessus de la valeur initiale  $S_0$  de l'actif, donc on approche le prix de l'option à l'instant  $t = 0$  par des simulations, via Euler discret et continu, de  $\tilde{S}_t^i$  indépendantes et l'estimateur :

$$E_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \underbrace{e^{-rT} \mathbb{1}_{T < \tau_i} (\tilde{S}_T^i - K)^+}_{X_i} \quad \text{où } \tau_i = \inf\{t > 0 : \tilde{S}_t^i \notin D\} \text{ avec } D = ] - \infty, B[$$

On compare cette estimation avec la formule fermée de Merton (20) mais aussi avec la formule ajustée à l'option barrière discrète. On choisit les paramètres de l'option  $\tilde{S}_0 = 100, K = 100, T = 1, r = 0.05, \sigma = 0.30, B = 130$  et on fixe les paramètres de discrétisation  $N = 1000$  et de Monte-Carlo  $M = 50000$ .

Approximation de Monte Carlo		Formules fermées	
Euler discret	Euler continu	Option barrière continue	Option barrière discrète
1.6564	1.5254	1.5033	1.6067

FIGURE 1 – Résultats des méthodes de Monte-Carlo contre les formules fermées

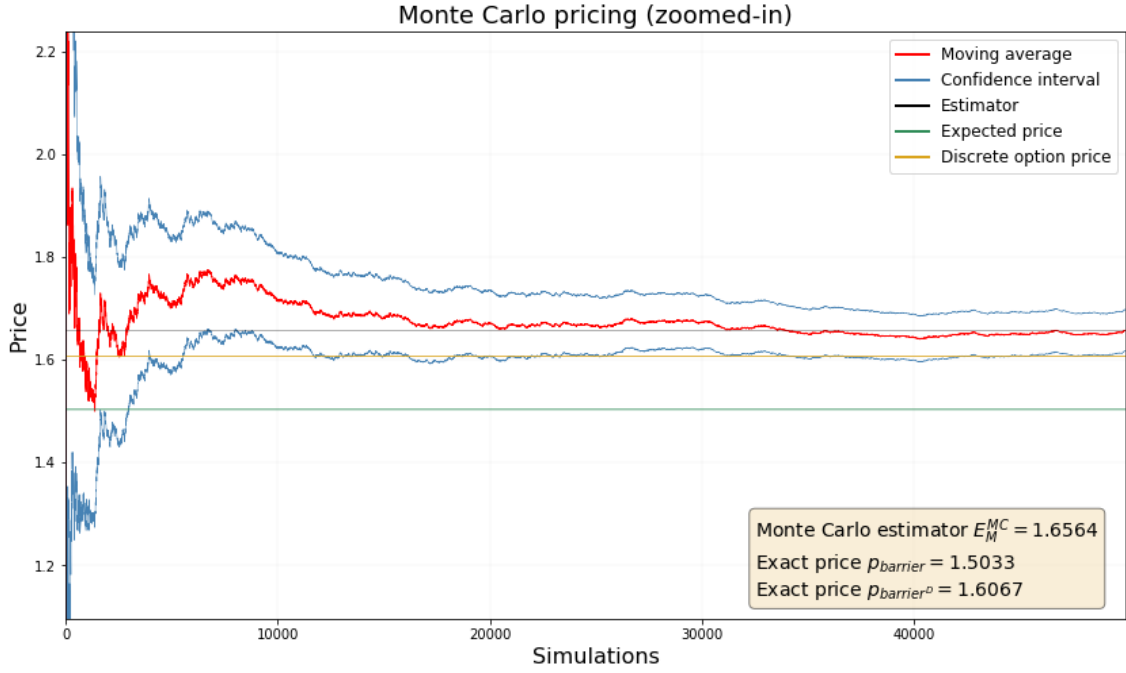


FIGURE 2 – Option barrière call *up-and-out* : Convergence de l'estimateur de Monte Carlo avec le schéma d'Euler discret pour  $N = 1000$  discrétisations  $M = 50000$  simulations avec  $\tilde{S}_0 = 100, K = 100, T = 1, r = 0.05, \sigma = 0.30, B = 130$

La Figure 2 montre l'évolution de notre estimateur lorsque le nombre de simulations augmente dans le cas de l'option up-and-out. La moyenne mobile converge vers la valeur finale de notre estimateur  $E_M = 1.6564$  et illustre bien le principe de la loi forte des grands nombres. Toutefois, la valeur que l'estimateur est supposé approcher n'appartient pas à l'intervalle de confiance contrairement à ce que l'on pourrait s'attendre. Cela s'explique par la différence de prix entre une option barrière standard  $C_{uo} = 1.5033$  et une même option observée de manière discrète. Ayant utilisé le schéma d'approximation discret pour cette première simulation, il est désormais naturel que  $E_M$  soit un estimateur du prix de l'option discrète. La valeur de ce dernier  $C_{uo}^{\text{discrete}} = 1.6067$  est d'ailleurs bien plus proche de notre estimation.

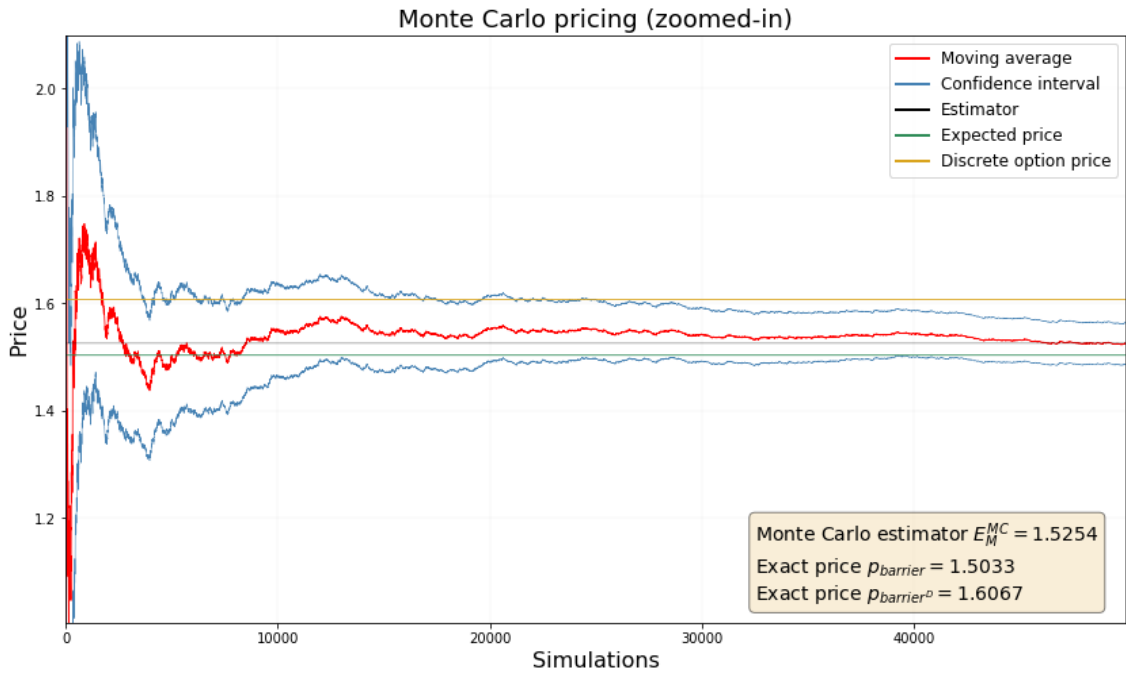


FIGURE 3 – Option barrière call *up-and-out* : Convergence de l'estimateur de Monte Carlo avec le schéma d'Euler continu pour  $N = 1000$  discrétisations  $M = 50000$  simulations avec  $\tilde{S}_0 = 100, K = 100, T = 1, r = 0.05, \sigma = 0.30, B = 130$

Dans le second exemple, on applique Monte-Carlo en s'appuyant sur le schéma d'Euler continu. Cette fois, l'estimateur  $E_M$  tend vers 1.5254, ce qui est une performance bien meilleure compte tenu de la quantité que nous souhaitions approcher. La Figure 3 témoigne de ce résultat mais néanmoins, cette comparaison ne nous surprend pas étant donné les résultats théoriques énoncés dans la section 4.

Un autre moyen de visuellement évaluer la performance de notre estimateur est de tracer son erreur et, si l'on connaît la quantité à approcher, son erreur relative. L'erreur Monte-Carlo correspond à la marge d'erreur prévu par l'intervalle de confiance. Elle découle du théorème central limite et est définie par :

$$Err_M = \frac{\sigma_M}{\sqrt{M}} \quad \text{où} \quad \sigma_M^2 = \left( \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i^2 \right) - E_M^2$$

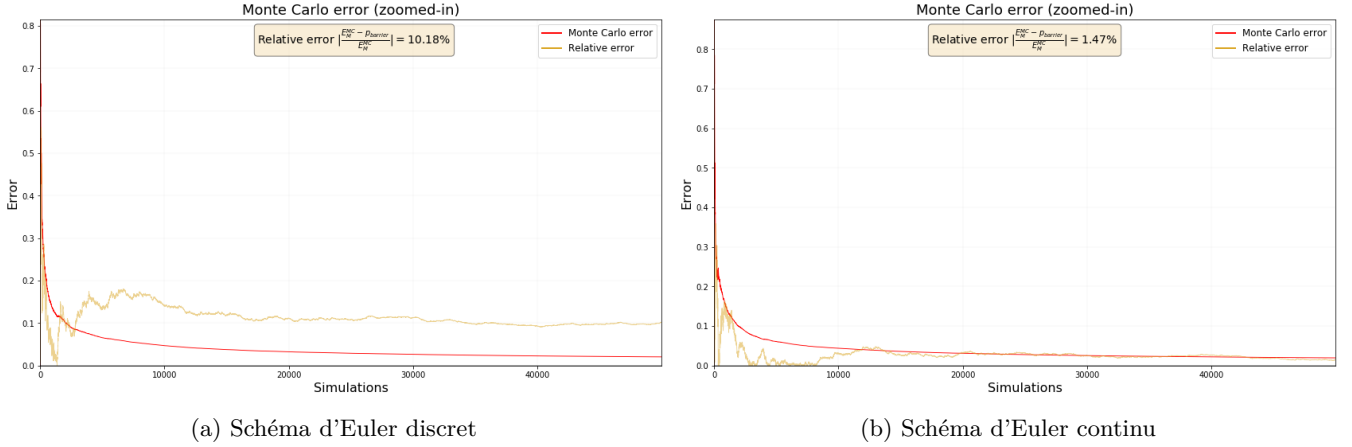


FIGURE 4 – Erreur de l'estimateur de Monte Carlo et erreur relative pour les deux schémas

L'erreur relative permet de rapidement juger si notre estimateur est assez proche de la valeur à approcher :

$$Err_M^{\text{relative}} = \left| \frac{E_M - C_{uo}}{E_M} \right|$$

Ainsi, d'après la Figure 4 et les précédentes observations, la méthode de Monte-Carlo avec le schéma d'Euler continu semble être bien plus performante.

### Option Put Down-and-In

Observons un autre exemple, où maintenant le seuil barrière  $B$  se situe en dessous de la valeur initiale  $\tilde{S}_0$  de l'actif. On approche donc le prix de l'option à l'instant  $t = 0$  par des simulations indépendantes de  $\tilde{S}_t^i$ , via Euler discret et continu, et l'estimateur :

$$E_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \underbrace{e^{-rT} \mathbb{1}_{T \geq \tau_i} (K - \tilde{S}_T^i)^+}_{X_i} \quad \text{où } \tau_i = \inf\{t > 0 : \tilde{S}_t^i \notin D\} \text{ avec } D = ]B, +\infty[$$

On compare cette estimation avec la formule fermée de Merton (25) et on réitère les simulations avec les mêmes paramètres de l'option  $\tilde{S}_0 = 100, K = 100, T = 1, r = 0.05, \sigma = 0.30$ , excepté pour  $B = 90$ . On fixe  $N = 1000$  et  $M = 50000$ .

Approximation de Monte Carlo		Formules fermées	
Euler discret	Euler continu	Option barrière continue	Option barrière discrète
9.3003	9.3004	9.3024	9.2913

FIGURE 5 – Résultats des méthodes de Monte-Carlo contre les formules fermées

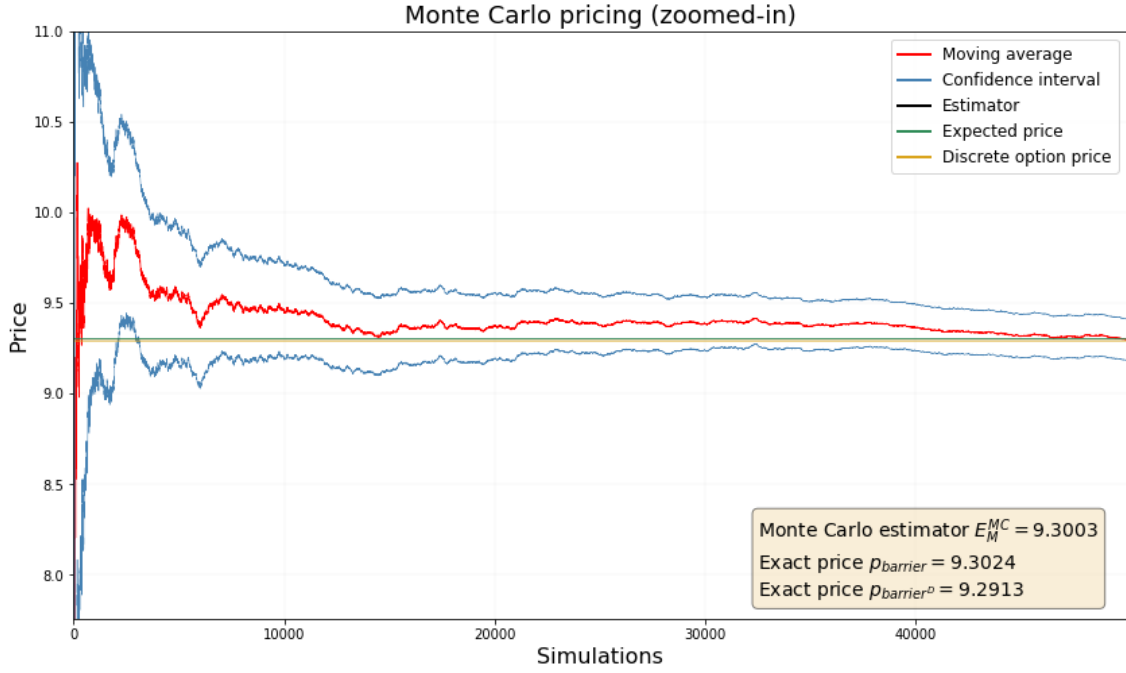


FIGURE 6 – Option barrière put *down-and-in* : Convergence de l'estimateur de Monte Carlo avec le schéma d'Euler discret pour  $N = 1000$  discrétisations  $M = 50000$  simulations avec  $\tilde{S}_0 = 100, K = 100, T = 1, r = 0.05, \sigma = 0.30, B = 90$

On analyse de manière analogue, dans les Figures 5,6 et 7, le comportement de l'estimateur de Monte-Carlo pour cette autre option. Cette fois, les estimations pour les deux schémas sont sensiblement les mêmes (à  $10e^{-5}$ ) près relativement à l'intervalle de confiance asymptotique. Elles sont dès lors plus précises que dans l'exemple précédent, comme peuvent en témoigner les erreurs relatives de la Figure 8.

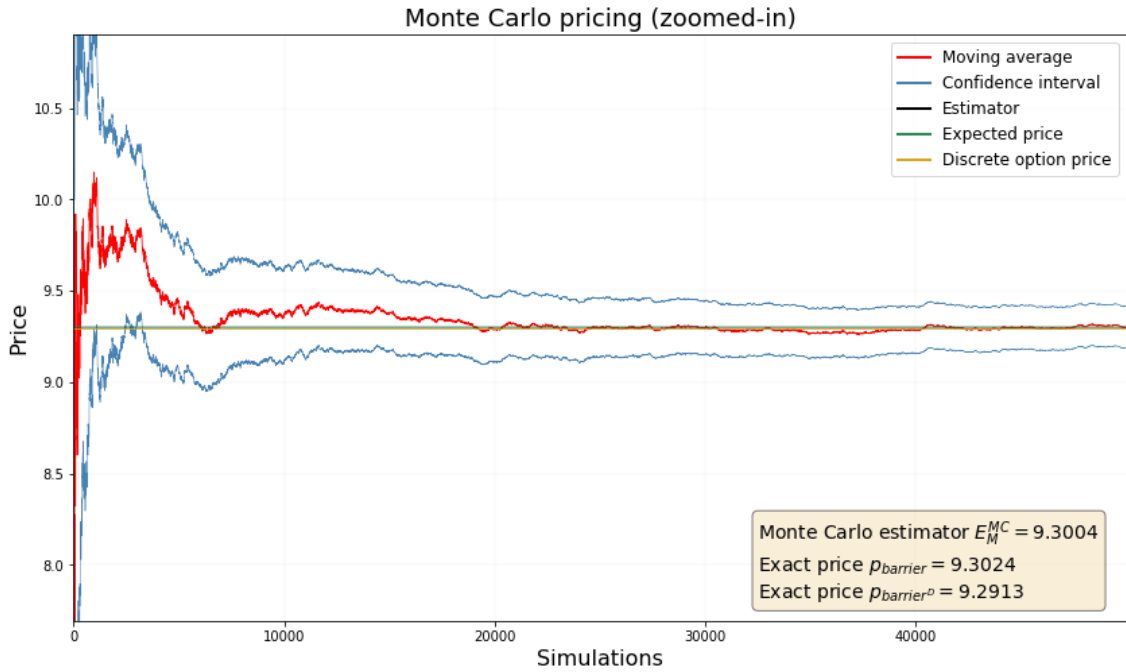


FIGURE 7 – Option barrière put *down-and-in* : Convergence de l'estimateur de Monte Carlo avec le schéma d'Euler continu pour  $N = 1000$  discrétisations  $M = 50000$  simulations avec  $\tilde{S}_0 = 100, K = 100, T = 1, r = 0.05, \sigma = 0.30, B = 90$

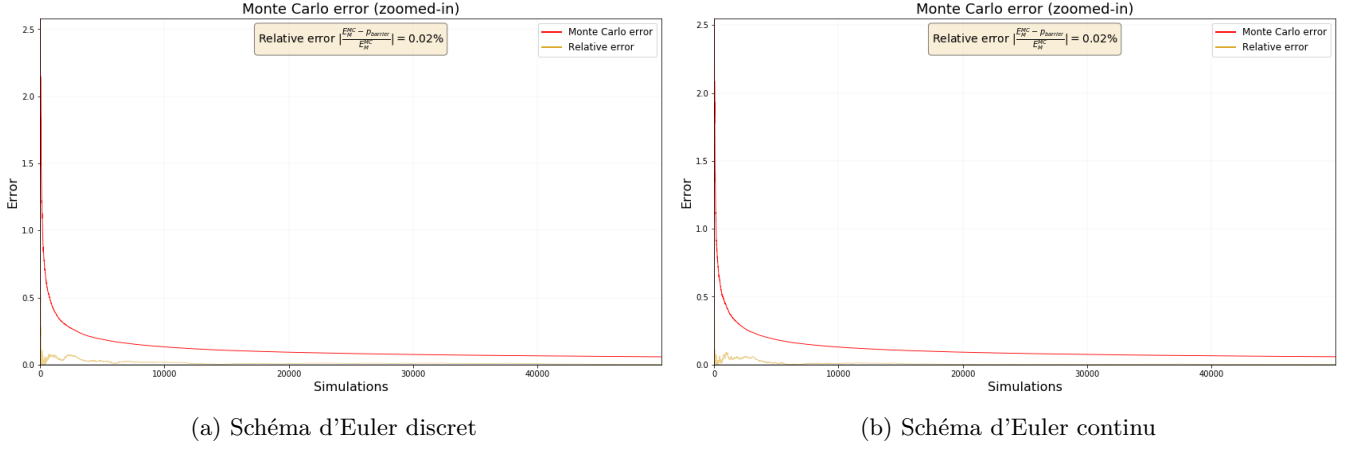


FIGURE 8 – Erreur de l'estimateur de Monte Carlo et erreur relative pour les deux schémas

Nous avons donc affaire à un exemple où les simulations par le schéma discret sont presque aussi performantes qu'avec le schéma continu. Cela est principalement dû au faible écart de prix entre l'option standard continue et son équivalent discret. De ce fait, le schéma discret n'est pas à banir systématiquement, d'autant plus que sa rapidité numérique, en comparaison au schéma continu, reste non négligeable.

Nombre de simulations	Monte-Carlo avec Euler discret			Monte-Carlo avec Euler continu		
	Prix	Intervalle de confiance		Prix	Intervalle de confiance	
		Borne inf.	Borne sup.		Borne inf.	Borne sup.
1000	9.4619	8.6525	10.271	8.9562	8.1664	9.7460
5000	9.4127	9.0538	9.7716	9.4073	9.0467	9.7679
10 000	9.3671	9.1126	9.6215	9.2291	8.9752	9.4829
50 000	9.3003	9.1862	9.4143	9.3004	9.1864	9.4143

FIGURE 9 – Résultats des méthodes de Monte-Carlo pour différents nombres de simulation  $M$

Il va de soi que plus le nombre de simulations est grand, meilleur est l'estimateur de Monte-Carlo  $E_M$ . Dans le tableau de la Figure 9, nous avons réunis plusieurs estimateurs de la valeur théorique  $P_{di} = 9.3024$ . Au vu des paramètres choisis, on obtient une bonne approximation de  $P_{di}$  à partir de 50000 simulations.

### 5.3 Erreur des schémas d'Euler

Jusqu'ici, nous nous sommes concentrés sur les convergences lorsque le nombre de simulations  $M$  tend vers  $+\infty$  : c'est la convergence de Monte-Carlo. À présent, regardons ce qu'il se passe quand le nombre de discrétisation d'Euler  $N$  tend vers  $+\infty$ . Il est question d'observer les erreurs (32) qui s'expriment ici :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_c(\phi, T, x, N) &= \begin{cases} \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} [e^{rT} \mathbf{1}_{T < \tilde{\tau}_c} \phi(\tilde{S}_T)] - \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} [e^{rT} \mathbf{1}_{T < \tau} \phi(S_T)] & \text{knock-out} \\ \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} [e^{rT} \mathbf{1}_{T \geq \tilde{\tau}_c} \phi(\tilde{S}_T)] - \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} [e^{rT} \mathbf{1}_{T \geq \tau} \phi(S_T)] & \text{knock-in} \end{cases} \\
\mathcal{E}_d(\phi, T, x, N) &= \begin{cases} \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} [e^{rT} \mathbf{1}_{T < \tilde{\tau}_d} \phi(\tilde{S}_T)] - \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} [e^{rT} \mathbf{1}_{T < \tau} \phi(S_T)] & \text{knock-out} \\ \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} [e^{rT} \mathbf{1}_{T \geq \tilde{\tau}_d} \phi(\tilde{S}_T)] - \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} [e^{rT} \mathbf{1}_{T \geq \tau} \phi(S_T)] & \text{knock-in} \end{cases}
\end{aligned}$$

où  $\tau = \inf \{t \geq 0 : S_t \notin D\}$ ,  $\tilde{\tau}_d = \inf \{t_i = i \frac{T}{N}, i = \llbracket 0, N \rrbracket : \tilde{S}_{t_i} \notin D\}$  et  $\tilde{\tau}_c = \inf \{t \geq 0 : \tilde{S}_t \notin D\}$ .

Reprenons la première l'option call up-and-out examinée dans la section précédente. Il s'agit donc d'estimer les quantités suivantes pour différentes valeurs de  $N$  et  $D = ]-\infty, B[$  :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_c(\phi, T, \tilde{S}_0, N) &= \underbrace{\mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} [e^{rT} \mathbf{1}_{T < \tilde{\tau}_c} (\tilde{S}_T^i - K)^+]}_{\text{Estimateur } E_M \text{ avec Euler continu}} - \underbrace{\mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} [e^{rT} \mathbf{1}_{T < \tau} (S_T - K)^+]}_{= C_{uo}} \\
\mathcal{E}_d(\phi, T, \tilde{S}_0, N) &= \underbrace{\mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} [e^{rT} \mathbf{1}_{T < \tilde{\tau}_d} (\tilde{S}_T^i - K)^+]}_{\text{Estimateur } E_M \text{ avec Euler discret}} - \underbrace{\mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} [e^{rT} \mathbf{1}_{T < \tau} (S_T - K)^+]}_{= C_{uo}}
\end{aligned}$$

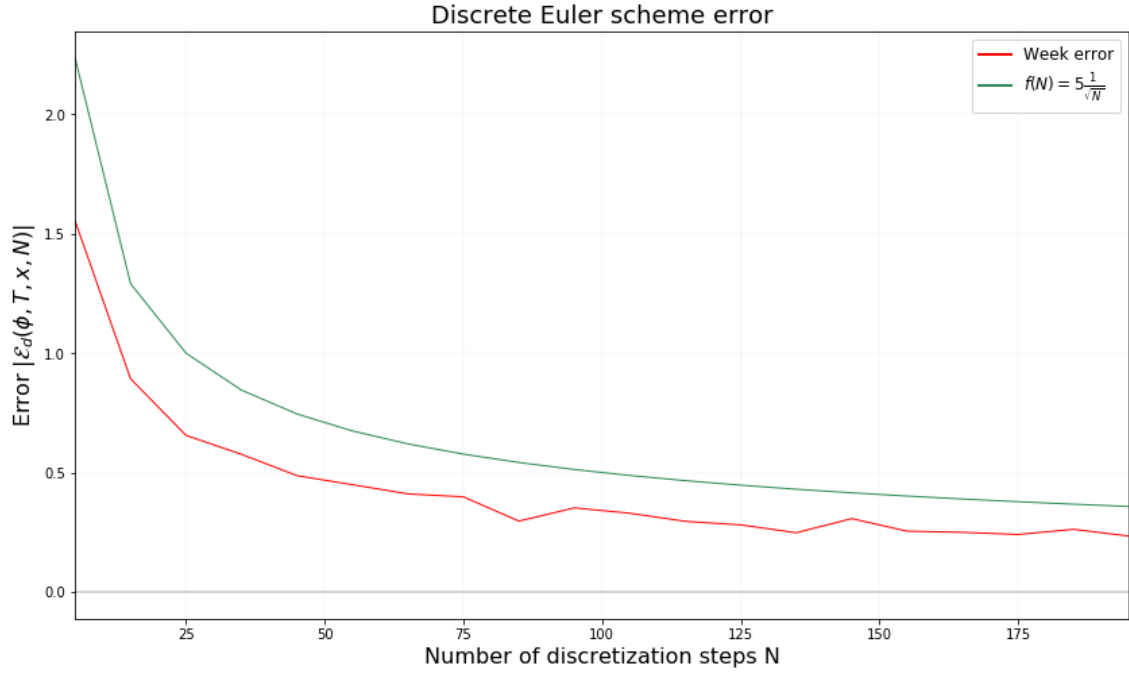


FIGURE 10 – Option barrière call *up-and-out* : Convergence de l’erreur faible avec le schéma d’Euler discret pour  $M = 50000$  simulations avec  $\tilde{S}_0 = 100, K = 100, T = 1, r = 0.05, \sigma = 0.30, B = 130$

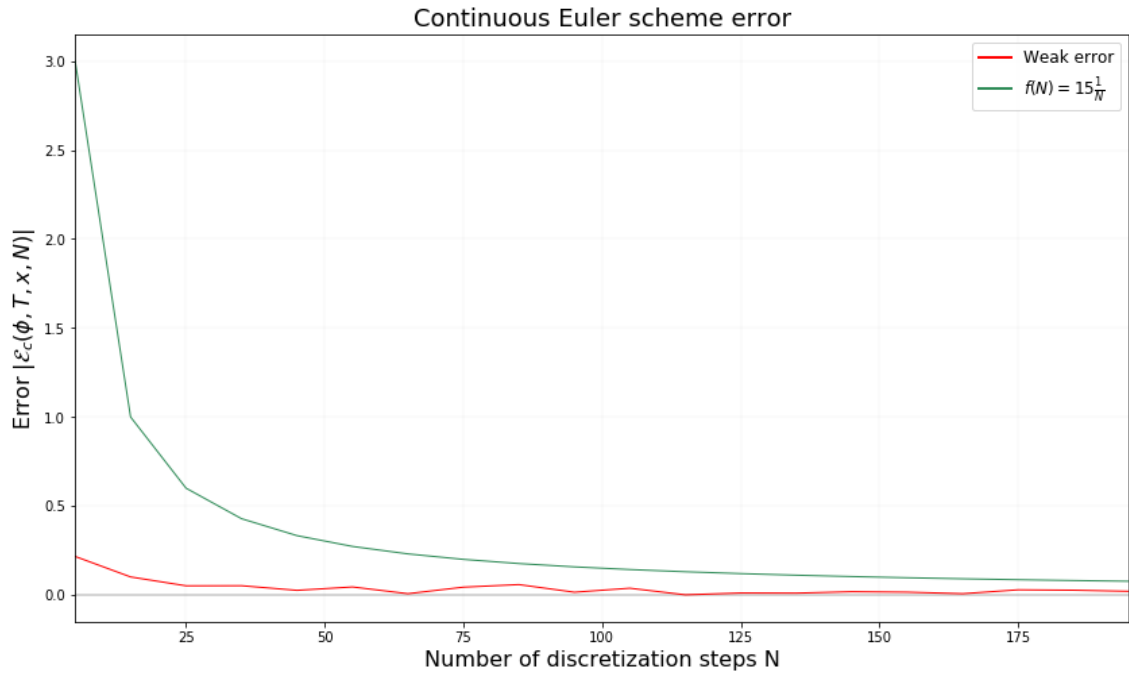


FIGURE 11 – Option barrière call *up-and-out* : Convergence de l’erreur faible avec le schéma d’Euler continu pour  $M = 50000$  simulations avec  $\tilde{S}_0 = 100, K = 100, T = 1, r = 0.05, \sigma = 0.30, B = 130$

Ces figures 10 et 11 illustrent les résultats de convergence démontrés dans la section 4 sur nos différentes simulations. Cette convergence est particulièrement appréciable pour le schéma d’Euler discret car cette discrétisation est source d’une erreur importante dans l’estimateur de Monte-Carlo et pour cause : le prix de l’option n’est plus le même.

## 6 Conclusion

Dans la présente étude, nous avons présenté les exemples de l'option call *Up-and-Out* et du put *Down-and-In* pour vérifier si nos méthodes de Monte-Carlo approchaient bien le prix de l'option théorique trouvé à l'aide des formules fermées de Merton. Ces derniers montrent bel et bien une convergence, mais surtout que notre attention doit se porter sur l'erreur de notre estimateur. Ces méthodes de valorisation peuvent désormais être appliquées à d'autres options barrières comme la parisienne ou la rebate, et même encore aux autres options exotiques telles que l'option asiatique et basket. Bien que cela ne soit pas le sujet d'étude, nous aurions très bien pu améliorer nos résultats en combinant Monte-Carlo aux différentes techniques de réduction de la variance traditionnelles, comme la technique des variables antithétiques ou l'importance sampling, ce qui rendrait nos estimateurs d'autant plus performants. Un autre moyen d'optimiser l'algorithme aurait été de simuler successivement la fonction du flux et le franchissement de barrière à chaque pas de temps pour ainsi pouvoir s'arrêter dès que l'option se désactive (pour un *knock-out*) ou dès que l'option s'active (pour un *knock-in*).

Le principal atout de la méthode d'Euler est qu'elle peut être appliquée pour n'importe quel modèle qui régit les actifs sous-jacents, notamment le modèle de Heston, alors que les méthodes par formules fermées sont restreintes au modèle de Black-Scholes. Néanmoins, elle vient rajouter une erreur d'approximation dû au schéma à l'estimateur de Monte-Carlo classique. Par une étude plus approfondie, on pourrait contrôler l'erreur totale par un problème d'optimisation sur l'effort de l'estimateur, qui dépend de ses paramètres. En général, il faudra trouver un équilibre entre le nombre de discrétisation, qui apporte de la précision, et la rapidité des calculs numériques.

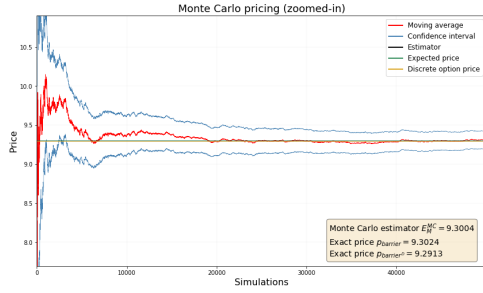
L'apport de l'article d'Emmanuel Gobet [2] est bien entendu l'introduction d'une nouvelle majoration de l'erreur faible dans nos deux cas, continue et discret : de l'ordre de  $1/N$  pour le continu et  $1/\sqrt{N}$  pour le discret. Ces théorèmes viennent améliorer les majorations proposées par Siegmund et Yuh [10] en 1982. On retrouve également des résultats théoriques analogues dans le cadre multi-dimensionnel  $d \geq 2$  [9] avec une borne inférieure de l'ordre de  $\sqrt{h}$  ( $h$  le pas du schéma) pour le schéma d'Euler discret. Une approche numérique pour une diffusion tuée 2-dimensionnelle est détaillée et illustrée en p. 278 de [11].

Enfin, la mise en pratique des schémas d'Euler met en avant l'importance de la fréquence d'observation du cours pour les options barrières, au vu de son influence sur le prix de l'option, et par conséquent sur la méthode de valorisation à choisir. Notre première application numérique a d'ailleurs montré que cette question vaut la peine d'être prise en compte. Ainsi, des techniques d'ajustements, dite *Barrier Shifting*, doivent être introduites afin de ne pas fausser les résultats computationnels. L'article [12] se place naturellement dans cette continuité en présentant ces méthodes et en les appliquant à différents cas pratiques.

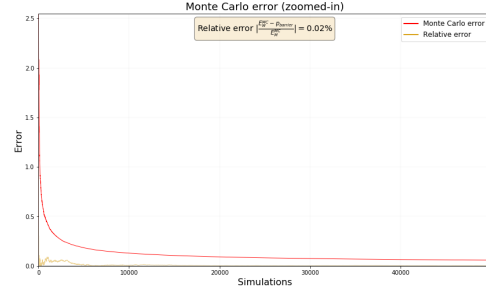
## 7 Annexe

Cette annexe comporte les graphes issus de simulations diverses et variées que peut produire notre programme. Comme il s'agissait de comparer nos simulations aux huit formules fermées de Merton, il se limite aux option barrières standards.

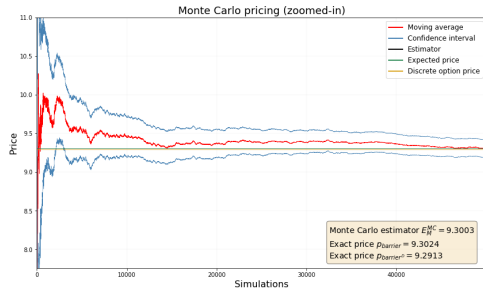
Ci-dessous se trouve l'évolution de notre estimateur lorsque le nombre de simulations augmente dans le cas de l'option **Down and In** pour le *Put* et le *Call* dans le cas continu et discret. Pour le *Put* on a 50000 simulations et pour le *Call* on a 10000 simulations.



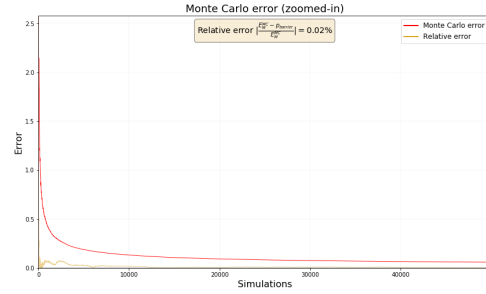
(a) Down and In Put Continuous



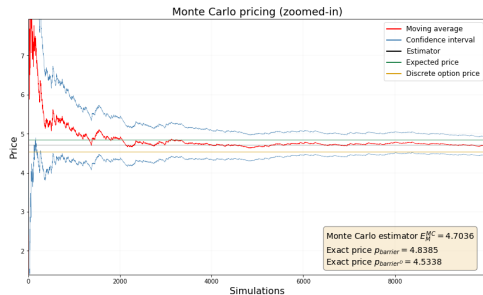
(b) Down and In Put Continuous error



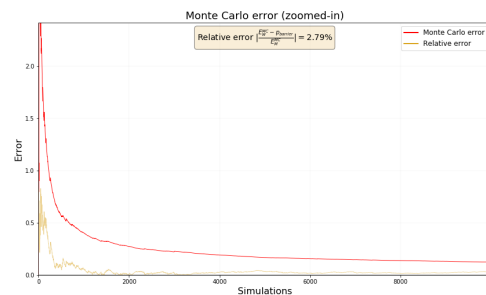
(a) Down and In Put Discrete



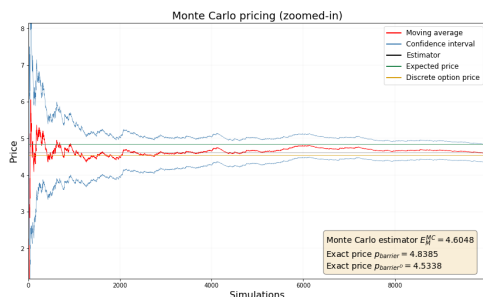
(b) Down and In Put Discrete error



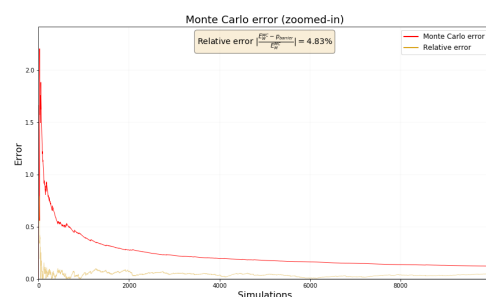
(a) Down and In Call Continuous



(b) Down and In Call Continuous error



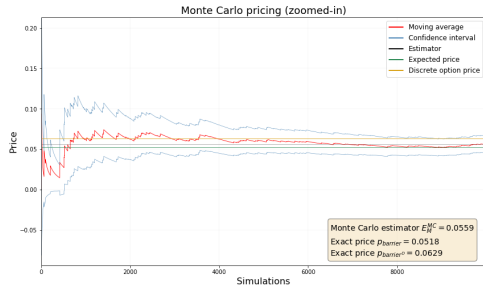
(a) Down and In Call Discrete



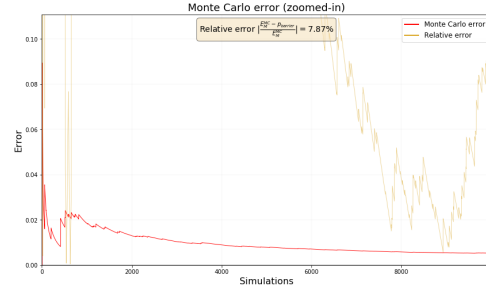
(b) Down and In Call Discrete error



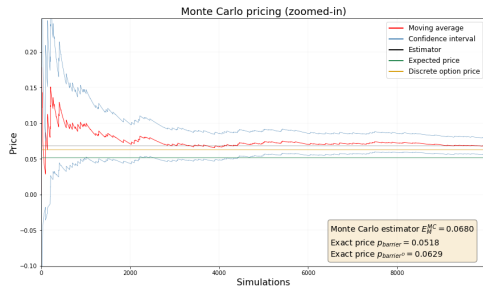
Ci-dessous l'évolution de notre estimateur lorsque le nombre de simulations augmente dans le cas de l'option **Down and Out** pour le *Put* et le *Call* dans le cas continu et discret. Pour le *Put* et le *Call* on a 10000 simulations.



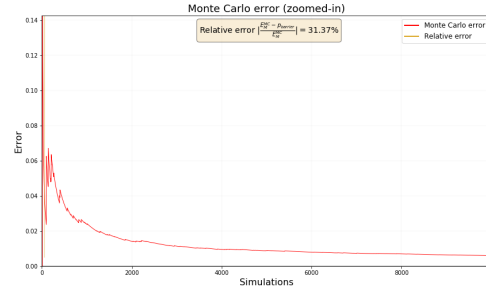
(a) Down and Out Put Continuous



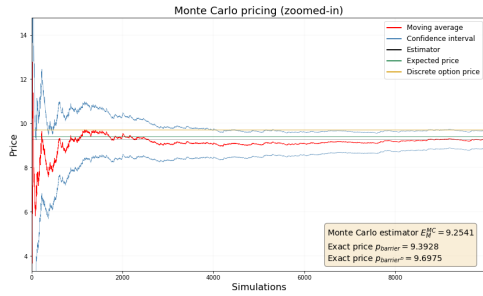
(b) Down and Out Put Continuous error



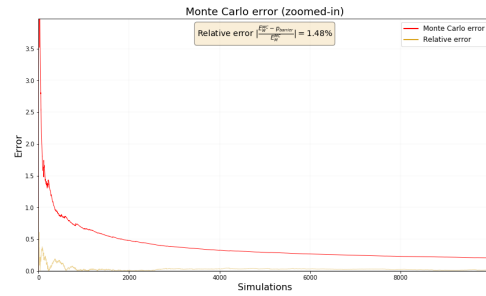
(a) Down and Out Put Discrete



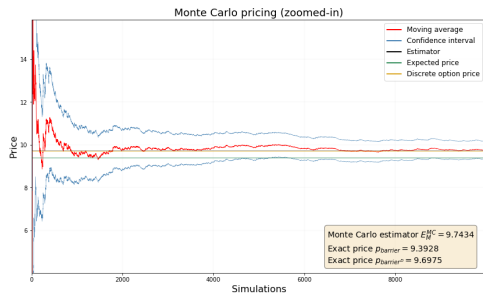
(b) Down and Out Put Discrete error



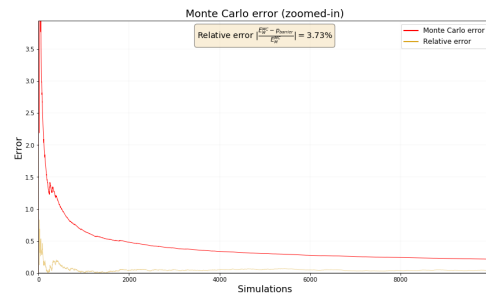
(a) Down and Out Call Continuous



(b) Down and Out Call Continuous error

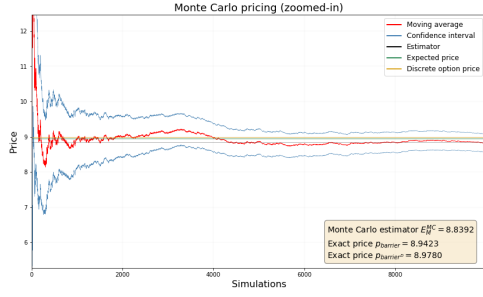


(a) Down and Out Call Discrete

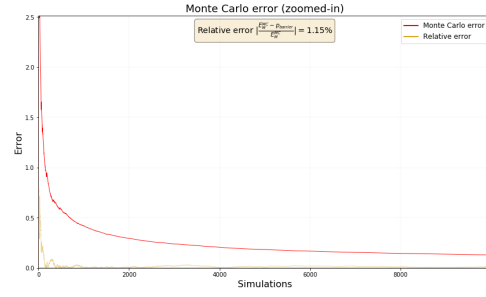


(b) Down and Out Call Discrete error

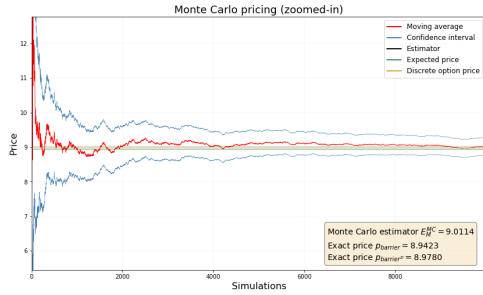
Ci-dessous l'évolution de notre estimateur lorsque le nombre de simulations augmente dans le cas de l'option **Up and Out** pour le *Put* et le *Call* dans le cas continu et discret. Pour le *Put* on a 10000 simulations et pour le *Call* on a 50000 simulations.



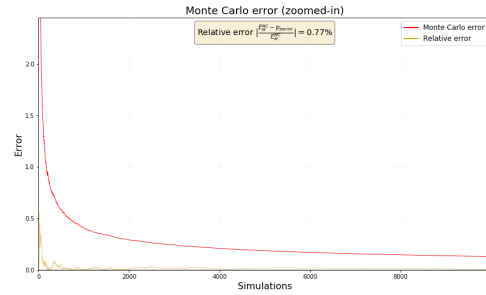
(a) Up and Out Put Continuous



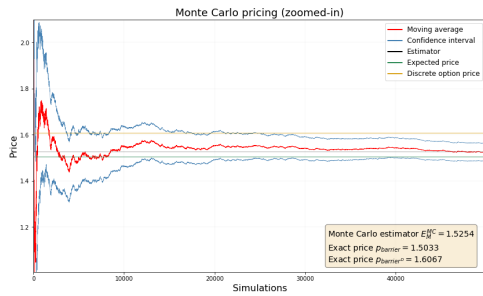
(b) Up and Out Put Continuous error



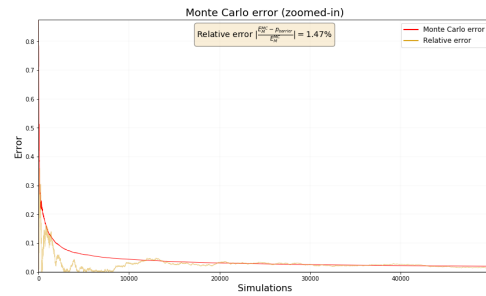
(a) Up and Out Put Discrete



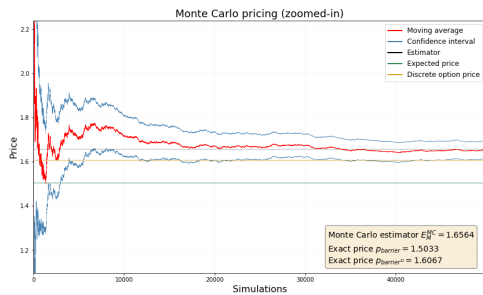
(b) Up and Out Put Discrete error



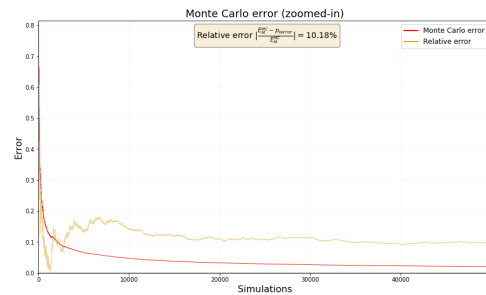
(a) Up and Out Call Continuous



(b) Up and Out Call Continuous error

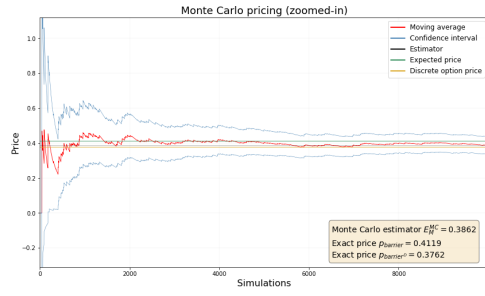


(a) Up and Out Call Discrete

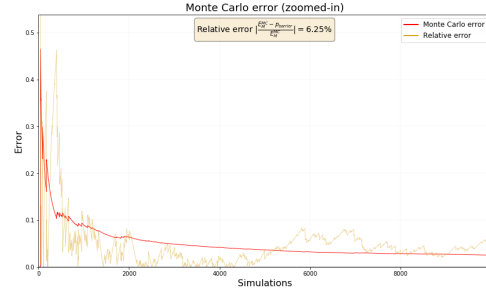


(b) Up and Out Call Discrete error

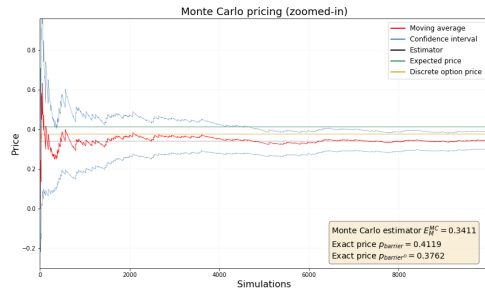
Ci-dessous l'évolution de notre estimateur lorsque le nombre de simulations augmente dans le cas de l'option **Up and In** pour le *Put* et le *Call* dans le cas continu et discret. Pour le *Put* et le *Call* on a 10000 simulations.



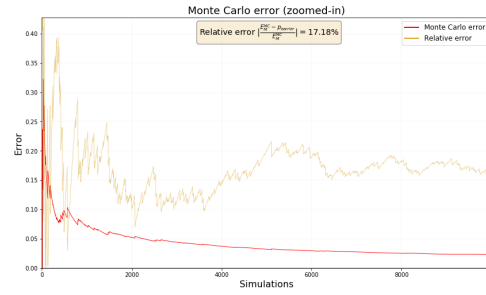
(a) Up and In Put Continuous



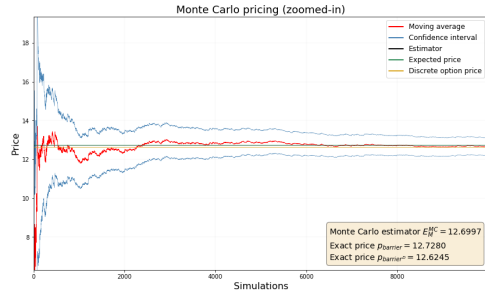
(b) Up and In Put Continuous error



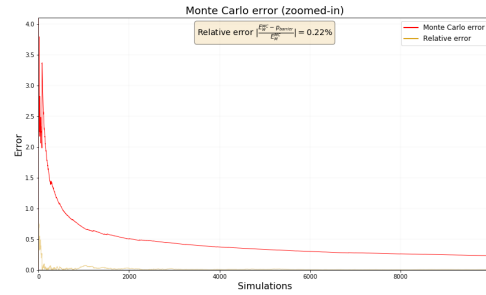
(a) Up and In Put Discrete



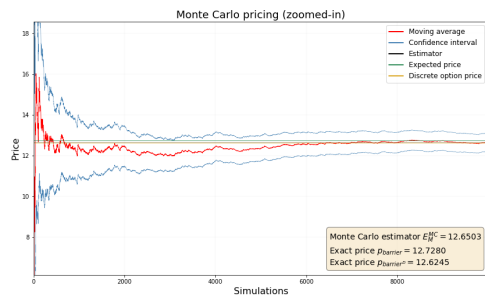
(b) Up and In Put Discrete error



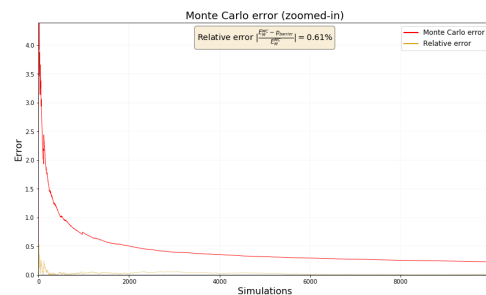
(a) Up and In Call Continuous



(b) Up and In Call Continuous error



(a) Up and In Call Discrete



(b) Up and In Call Discrete error

## Références

- [1] R.C. Merton, "Theory of rational option pricing", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (1) : 141-183, Rand Corporation, 1973
- [2] E. Gobet, "Weak approximation of killed diffusion using Euler schemes", *Stochastic processes and their applications*, 87(2) : 167-197, Elsevier, 2000.
- [3] J. Hull, "Options, futures and other derivatives", 10<sup>th</sup> Edition, Pearson, 2018
- [4] F. Black & M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, 637-654, The University of Chicago Press, 1973
- [5] M. Rubinstein & E. Reiner, "Breaking down the barriers", Vol 4 N°8, pp. 28-35, Risk Magazine, 1991
- [6] M. Broadie, P. Glasserman & S. G. Kou, "A Continuity Correction for Discrete Barrier Options", *Mathematical Finance* 7, 4 : 325-49, 1997
- [7] D. Lépingle, "Un schéma d'Euler pour équations différentielles stochastiques réfléchies", *C. R. Acad.Sci. Paris Série I* 316, 601-605, 1993
- [8] B. Bouchard & S. Menozzi, "Strong approximations of bsdes in a domain", *Bernoulli*, 15(4) :1117-1147, 2009
- [9] E. Gobet & S. Menozzi, "Exact approximation rate of killed hypoelliptic diffusions using the discrete euler scheme", *Stochastic processes and their applications*, 112(2) :201-223, Elsevier, 2004
- [10] D. Siegmund & Y.S. Yuh, "Brownian approximations for first passage probabilities", *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 59, 239-248, 1982
- [11] E. Gobet, "Euler schemes and half space approximation for the simulation of diffusion in a domain", *ESAIM : Probability and Statistics*, Volume 5, p. 261-297, 2001
- [12] E. Gobet, "Advanced Monte Carlo methods for barrier and related exotic options", Handbook of Numerical Analysis, *Mathematical Modeling and Numerical Methods in Finance*, volume 15 . pages 497-528, Elsevier, 2009