

Méthodes de Monte Carlo

Le Calcul de Malliavin et ses applications en mathématiques financières

Jacqueline Lankia & Céline Nguyen-Tu

Février 2020

Le calcul de Malliavin est présent dans de nombreux pans de la théorie des probabilités, notamment dans l'étude de la régularité de la densité des solutions des équations différentielles stochastiques. Introduit par Paul Malliavin dans les années 70', il permet d'étendre le calcul différentiel sur des fonctions déterministes aux processus aléatoires. Certains l'appelleront aussi la théorie de l'intégration par partie sur l'espace de Wiener. Cependant, ce n'est que dans les années 80' qu'elle prendra de l'importance dans la finance de marché, notamment dans la théorie de l'évaluation des produits financiers en partie grâce à D. Ocone. Aujourd'hui, son importance a pris de l'ampleur puisque ce domaine a vu une extension aux méthodes numériques, au contrôle stochastique et au trading.

Paul Malliavin (1925-2010) était un mathématicien français et professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, aujourd'hui devenue Sorbonne Université. Il s'est principalement intéressé à l'analyse harmonique, à la théorie de l'approximation ainsi qu'aux outils qui constituent le calcul de Malliavin et qui vont faire l'objet de la présente étude.

1 Introduction

Avant toute chose, il est important de comprendre l'intérêt du calcul de Malliavin en finance. Dans un marché complet, on sait exprimer le prix de la plupart des produits financiers sous forme d'espérance. En effet, soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus de Markov à valeurs dans \mathbb{R} qui représente le cours d'un actif sous-jacent entre le temps initial 0 et l'horizon T. On suppose que $(X_t)_t$ suit la dynamique :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \quad (1)$$

où $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un mouvement Brownien dans \mathbb{R} , et b, σ sont des fonctions Lipschitziennes. On notera donc que cette EDS possède une solution unique. On considère un produit financier sur cet actif de payoff $\phi(X_T)$. Ainsi, on écrit le prix de ce produit :

$$u(0, x) = \mathbb{E}[\phi(X_T)] \quad \text{avec la condition initiale } X_0 = x \quad (2)$$

$$\text{où } X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s \quad \forall t \in [0, T] \quad (3)$$

Les méthodes de Monte Carlo classiques nous permettent de facilement approcher cette quantité, mais la tâche se complique lorsque l'on souhaite calculer les sensibilités du prix pour comprendre son comportement en fonction de différents paramètres.

- Le delta $\frac{\partial u}{\partial x}(0, x)$ est la sensibilité du prix par rapport à la valeur actuelle de l'actif sous-jacent.
- Le gamma $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, x)$ est défini comme la deuxième dérivée du prix ou bien la dérivée première du delta.
- Le vega $\frac{\partial u}{\partial \sigma}(0, x)$ est la sensibilité par rapport à la volatilité.

Une première méthode classique en analyse numérique est la méthode des différences finies. Il s'agit de remplacer la dérivée de u par une approximation aux différences finies. Si l'on note $I(\theta) = \mathbb{E}[\phi(X_T^\theta)]$ où X_T^θ dépend du paramètre θ et $J(\theta) = I'(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}[\phi(X_T^\theta)]$, alors on peut considérer les approximations suivantes pour h suffisamment petit :

$$J(\theta) = \frac{I(\theta + h) - I(\theta)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (4)$$

$$J(\theta) = \frac{I(\theta + h) - I(\theta - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (5)$$

Ces approximations sont notamment valides dès lors que I est C^2 avec dérivée seconde Lipschitz, i.e.

$$|I''(\theta_1) - I''(\theta_2)| \leq C_{I''}|x - y| \quad \forall \theta_1, \theta_2 \quad (6)$$

où $C_{I''}$ est la constante de Lipschitz de I'' .

À première vue, cette méthode n'est pas si simple à mettre en place. Il faudra prendre en compte certaines contraintes. Il faudra d'abord contrôler l'erreur qui est due à deux facteurs d'approximation : l'erreur d'approximation dirigée par le paramètre $h > 0$ et l'erreur de Monte Carlo dirigée par le paramètre $n \geq 1$ (nombre de simulations). Ainsi il faudra résoudre un problème d'optimisation sur l'effort de l'estimateur, ce qui n'est pas si évident. Si h est trop petit, la variance de l'estimateur peut être très grande, c'est le cas si le payoff est très irrégulier. Si h est trop grand, l'approximation des dérivées est mauvaise. Il faudra également faire attention à construire $I(\theta + h)$ et $I(\theta)$ avec les mêmes aléas au risque de faire exploser la variance asymptotique de l'estimateur. Enfin, cette méthode est très sensible aux discontinuités, ce qui ne permet pas de l'appliquer à toute sorte de fonction de payoff ϕ .

De ce fait, on pourra considérer une méthode dite par différentiation. Si la fonction $\theta \mapsto \phi(X_T^\theta)$ est dérivable et Lipschitz en norme \mathbb{L}^2 , alors on peut écrire :

$$J(\theta) = I'(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}[\phi(X_T^\theta)] = \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \phi(X_T^\theta) \right] \quad (7)$$

Encore une fois, cette méthode n'est pas tout à fait adaptée à l'utilisation en finance car elle suppose que la fonction de payoff soit dérivable mais surtout que la dérivée soit explicitement connue, ce qui, en pratique, n'est pas le cas.

Enfin, on se tournera vers une méthode, appelée méthode des poids, qui permettra d'écrire :

$$J(\theta) = I'(\theta) = \mathbb{E}[\pi^\theta \times \phi(X_T^\theta)] \quad (8)$$

où π^θ est le poids de la sensibilité par rapport à θ .

Cette méthode implique des outils de calcul différentiel par rapport à la trajectoire du mouvement Brownien et une formule d'intégration par parties associée, outils qui nous seront apportés par P. Malliavin.

2 Le Calcul de Malliavin

Le calcul de Malliavin traduit un calcul différentiel pour des processus aléatoires sur l'espace de Wiener. Il existe plusieurs façon d'introduire le calcul de Malliavin dans le cas continu, notamment par le chaos de Wiener ou la méthode Hida-Malliavin sur l'espace de Schwartz, mais nous présenterons l'approche originale sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $\Omega = C_0([0, T], \mathbb{R}^d)$ est l'espace de Wiener des fonctions continues $\omega : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\omega(0) = 0$. Sur cet espace, les mouvements browniens peuvent être considérés comme des fonctions continues, ainsi la dérivée sera définie comme la dépendance d'une variable par rapport aux accroissements d'une trajectoire de Brownien.

L'idée est la suivante : Soit f une fonction régulière sur \mathbb{R}^d , par une formule d'intégration par parties, on va écrire les dérivées partielles de $f(X)$ où X est un processus de Wiener dans \mathbb{R}^d comme un produit de la forme :

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(X) \right] = \mathbb{E} [f(X) L_\alpha(X)] \quad (9)$$

où L_α ne dépend pas de f et $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$ est la dérivée partielle d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$.

2.1 Dérivée de Malliavin

On considère un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel on définit un mouvement Brownien d -dimensionnel $(W_t)_t$. On note $\mathcal{F} = \sigma(W_t, 0 \leq t \leq T)$ la tribu engendrée par $(W_t, 0 \leq t \leq T)$. Les variables que nous allons manipuler sont les intégrales de Wiener sur $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$W(h) = \sum_{i=1}^d W^i(h_i) = \sum_{i=1}^d \int_0^T h_i(t) dW_t^i \quad (10)$$

Soit \mathcal{P} la famille de toutes les variables aléatoires $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$F = f(W(h^1), \dots, W(h^n)) \quad (11)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ avec $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, et $h^i \in L^2([0, T], \mathcal{F}([0, T]), dt, \mathcal{F}(\mathbb{R}^d), \mathbb{R}^d) \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Ces variables aléatoires sont appelées les polynômes de Wiener et on notera que l'ensemble \mathcal{P} est dense.

Si $F \in \mathcal{P}$ alors on définit la **dérivée de Malliavin** de F comme le processus $DF = (D_t F)_{t \geq 0} \in L^2(\Omega \times [0, T], \mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que pour tout $t \in [0, T]$:

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(W(h^1), \dots, W(h^n)) h_i(t) \quad (12)$$

L'opérateur D est aussi appelé opérateur gradient. Par ailleurs, cette définition est cohérente avec la définition naturelle de la dérivée directionnelle forte de F en direction $\gamma \in \Omega$. En effet, soit

$$g \in L^2([0, T]) \text{ et } \gamma(t) = \int_0^t g(s) ds \in \Omega \quad (13)$$

En posant $F_{\epsilon\gamma} = f(W(h^1) + \epsilon \langle g | h_1 \rangle_{L^2([0, T])}, \dots, W(h^n) + \epsilon \langle g | h_n \rangle_{L^2([0, T])})$, alors on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F_{\epsilon\gamma} - F}{\epsilon} = \int_0^T \langle D_t F | g(t) \rangle_{\mathbb{R}^d} dt \quad (14)$$

Soit $\text{Dom}(D)$ l'ensemble des variables aléatoires dérivables au sens de Malliavin et nous travaillerons sur son extension fermée $\mathcal{D}_{1,2}$ associée à la norme :

$$\|F\|_{1,2} = \mathbb{E}[|F|^2]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E} \left[\int_0^T \langle D_t F | u_t \rangle_{\mathbb{R}^d}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad \forall F \in \mathcal{D}_{1,2} \quad (15)$$

Une propriété utile qui découle de cette définition est la différentiation en chaîne : Soit $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles continument différentiables dont les dérivées partielles du premier ordre sont bornées et un vecteur (F_1, \dots, F_m) tel que $F_i \in \mathcal{D}_{1,2} \forall i \in \{1, \dots, m\}$, alors $\phi(F_1, \dots, F_m) \in \mathcal{D}_{1,2}$ et on a :

$$D\phi(F_1, \dots, F_m) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(F_1, \dots, F_m) D F_i \quad (16)$$

D. Ocone a prolongé ce résultat aux variables aléatoires dans $\mathcal{D}_{1,1}$, que nous n'explorons pas par souci de brièveté. On peut également noter que si ϕ est une fonction Lipschitzienne et que la loi de (F_1, \dots, F_m) est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^m , alors les dérivées partielles de $\phi(F)$ existent telles que l'égalité (16) soit satisfaite.

2.2 Intégrale de Skorohod

Il nous faut maintenant définir l'opérateur adjoint de D . Si u est un processus stochastique dans $L^2([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}^d)$, alors par définition d'un opérateur adjoint, δ est un opérateur de domaine $\text{Dom}(\delta)$ tel que $u \in \text{Dom}(\delta)$ si :

$$\mathbb{E} [\langle DF, u \rangle_{L^2([0, T] \times \Omega)}] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \langle D_t F | u_t \rangle_{\mathbb{R}^d} dt \right] \leq C(u) \|F\|_{1,2} \quad \forall F \in \mathcal{D}_{1,2} \quad (17)$$

On dira alors que u est intégrable au sens de Skorohod et on définit l'**intégrale de Skorohod** de u comme la variable aléatoire $\delta(u)$ qui vérifie :

$$\mathbb{E}[F \delta(u)] = \mathbb{E} [\langle DF, u \rangle_{L^2([0, T] \times \Omega)}] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \langle D_t F | u_t \rangle_{\mathbb{R}^d} dt \right] \quad \forall F \in \mathcal{D}_{1,2} \quad (18)$$

Cette équation est plus communément connue comme la **formule d'intégration par parties**. Il s'agit d'une égalité de produits scalaires respectivement dans $L^2(\Omega)$ et $L^2([0, T] \times \Omega)$. L'opérateur δ est aussi appelé opérateur divergent. Par ailleurs, $\text{Dom}(\delta)$ contient tous les processus adaptés de $L^2(\Omega \times [0, T], \mathbb{R}^d)$ et pour ces processus, l'opérateur δ coïncide avec l'intégrale stochastique d'Itô :

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^d \int_0^T u^i(s) dW_s^i \quad (19)$$

La preuve consiste à démontrer (19) pour des processus adaptés simples puis à passer à la limite. Retenons la propriété suivante de la divergence du produit d'un processus stochastique par une variable aléatoire. Soit un processus $u \in \text{Dom}(\delta)$ adapté et $F \in \mathcal{D}_{1,2}$ une variable \mathcal{F}_T -mesurable, alors $Fu \in \mathcal{D}_{1,2}$ et on a :

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \int_0^T \langle D_t F | u_t \rangle_{\mathbb{R}^d} dt \quad (20)$$

En général, dans les applications, u sera adapté et on pourra calculer les intégrales stochastiques d'Itô.

Il sera également utile de noter que pour $(u_t)_t \in \text{Dom}(\delta)$ adapté, on a :

$$D_s \left(\int_0^T u_t dW_t \right) = u_s + \int_s^T D_s u_t dW_t \quad (21)$$

$$D_s \left(\int_0^T u_t dt \right) = \int_s^T D_s u_t dt \quad (22)$$

Ce sont des formules de commutation entre les opérateurs d'intégration usuels et la dérivée de Malliavin. D'ailleurs sous la même hypothèse, $D_s u_t = 0 \quad \forall s \geq t$.

Enfin, nous avons un dernier résultat : la **formule de Clark-Ocone-Haussman** en dimension $d = 1$. Soit $F \in \mathcal{D}_{1,2}$, alors :

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \mathbb{E}[D_t F | \mathcal{F}_t] dW_t \quad (23)$$

Ce théorème donne une représentation de la variable aléatoire F en terme d'intégrales stochastiques d'Itô. Il peut notamment servir à valoriser une option à l'aide de portefeuilles de réplication autofinancés dans le cadre d'un marché complet.

Remarque : Les opérateurs D et δ sont des opérateurs fermés.

3 Applications en Finance

L'intérêt fondamental du calcul de Malliavin dans le problème appliqué précédemment introduit repose sur la formule d'intégration par parties qui, une fois appliquée, permettra d'exprimer les grecques comme :

$$J(\theta) = I'(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}[\phi(X_T^\theta)] = \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \phi(X_T^\theta) \right] = \mathbb{E}[\phi(X_T^\theta) \times \pi^\theta] \quad (24)$$

où π^θ s'exprime comme une intégrale de Skorohod.

3.1 Processus à variations premières

Nous allons maintenant nous intéresser au cas particulier des processus d'Itô pour déduire leurs dérivées de Malliavin. On considère un processus d'Itô $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ dans \mathbb{R}^d de dynamique :

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \\ X_0 = x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (25)$$

où $(W_t)_t$ est un mouvement Brownien standard d -dimensionnel et les fonctions $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ sont continûment différentiables, de dérivées bornées et Lipschitziennes. Sous ces hypothèses, l'EDS (25) admet une unique solution. Rappelons que le prix d'un produit dérivé s'écrit :

$$u(0, x) = \mathbb{E}[\phi(X_T) | X_0 = x] \quad (26)$$

où l'espérance est calculée sous la probabilité risque neutre. Il s'agit de calculer les dérivées de u par rapport à la valeur initiale du sous-jacent x et par rapport au paramètre de volatilité de diffusion σ .

Pour cela, on introduit le **processus de variation première** $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ associé à $(X_t)_t$ défini par :

$$\begin{cases} dY_t = b'(X_t)Y_t dt + \sum_{i=1}^d \sigma_i'(X_t)Y_t dW_t^i \\ Y_0 = I_d \end{cases} \quad (27)$$

où I_d est la matrice identité de \mathbb{R}^d et $\sigma_i \in \mathbb{R}^d$ est la i -ème colonne de σ . Ici, $Y_t = \frac{\partial X_t}{\partial x}$.

Alors on a que $(X_t)_t \in \mathcal{D}_{1,2} \quad \forall t \in [0, T]$ et sa dérivée de Malliavin est :

$$D_s X_t = Y_t Y_s^{-1} \sigma(s, X_s) \mathbb{1}_{\{s \leq t\}} \quad \forall s, t \in [0, T] \quad (28)$$

Montrons ce résultat en dimension 1 pour simplifier les notations. On a pour tout $t \in [0, T]$:

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s \quad (29)$$

Donc en différenciant au sens de Malliavin le processus adapté $(X_t)_t$:

$$D_s X_t = D_s \left(\int_0^t b(X_u) du \right) + D_s \left(\int_0^t \sigma(X_u) dW_u \right) \quad (30)$$

D'après (21) et (22),

$$D_s X_t = \int_s^t D_s b(X_u) du + \sigma(X_s) + \int_s^t D_s \sigma(X_u) dW_u \quad (31)$$

et par la différentiation en chaîne (16) :

$$D_s X_t = \int_s^t b'(X_u) D_s X_u du + \sigma(X_s) + \int_s^t \sigma'(X_u) D_s X_u dW_u \quad (32)$$

Ainsi, en posant $Z_t = D_s X_t$, pour tout $s \in [0, T]$, on a que $(Z_t)_t$ est solution de l'EDS :

$$\begin{cases} dZ_t = b'(X_t) Z_t dt + \sigma'(X_t) Z_t dW_t & \text{sur } [s, T] \\ Z_s = \sigma(X_s) \end{cases} \quad (33)$$

D'où l'expression :

$$Z_t = \begin{cases} \sigma(X_s) \exp \left\{ \int_s^t \left(b'(X_u) - \frac{(\sigma'(X_u))^2}{2} \right) du + \int_s^t \sigma'(X_u) dW_u \right\} & \text{si } t \in [s, T] \\ 0 & \text{si } t \in [0, s[\end{cases} \quad (34)$$

Or, d'après (27),

$$Y_t = \exp \left\{ \int_0^t \left(b'(X_s) - \frac{(\sigma'(X_s))^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma'(X_s) dW_s \right\} \quad (35)$$

Ainsi,

$$D_s X_t = \sigma(X_s) Y_t Y_s^{-1} \mathbb{1}_{\{s \leq t\}} \quad \forall s, t \in [0, T] \quad \mathbf{c.q.f.d.} \quad (36)$$

Donc si $\phi \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^d)$, alors on a :

$$\begin{aligned} D_s \phi(X_T) &= \nabla \phi(X_T) \sigma(X_s) Y_T Y_s^{-1} \mathbb{1}_{\{s \leq T\}} \\ D_s \int_0^T \phi(X_t) dt &= \int_s^T \nabla \phi(X_t) \sigma(X_s) Y_t Y_s^{-1} dt \quad \text{p.s} \end{aligned} \quad (37)$$

Prenons par exemple le cas de Black-Scholes en dimension 1 où

$$\begin{cases} dX_t = b(t) X_t dt + \sigma X_t dW_t \\ X_0 = x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} dY_t = b(t) Y_t dt + \sigma Y_t dW_t \\ Y_0 = 1 \end{cases} \quad (38)$$

Dans ce cas, $Y_t = \frac{X_t}{x}$ \mathbb{P} -p.s

3.2 Calcul des Grecques

Dans l'étude qui va suivre, nous nous plaçons dans le cadre du modèle de Black-Scholes. On considère l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel est défini le mouvement Brownien $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ et la filtration naturelle associée est $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$.

Ce modèle en dimension 1 est composé d'un actif risqué $(X_t)_t$, d'un actif sans risque et d'un taux d'intérêt déterministe $r(t)$. L'actif risqué $(X_t)_t$ suit la dynamique :

$$\begin{cases} dX_t = X_t (r(t) dt + \sigma(t) dW_t) & \text{sur } [0, T] \text{ sous la proba-risque-neutre } \mathbb{Q} \\ X_0 = x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (39)$$

On suppose que les coefficients du processus de diffusion sont des processus continûment différentiables à dérivées bornées et Lipschitz. Cette EDS admet donc une unique solution forte.

Notre modèle étant complet et sous contrainte d'absence d'opportunité d'arbitrage, on sait qu'il existe une unique probabilité risque-neutre \mathbb{Q} telle que le prix du produit dérivé sur le sous-jacent (X_t) s'exprime comme l'espérance du payoff actualisé, (2) devient :

$$u(0, x) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T r(t)dt} \phi(X_T) \mid X_0 = x \right] \quad (40)$$

En utilisant les outils précédemment introduits, on sera capable de calculer analytiquement les valeurs des différentes grecques sans même dériver la fonction valeur ou la fonction de payoff. Avant cela, revenons brièvement sur les grecques et leur intérêt.

Le delta : Le delta est la sensibilité du prix par rapport à la valeur actuelle (ou initiale) de l'actif sous-jacent :

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x} u(0, x)$$

C'est de loin le facteur de risque le plus important affectant le prix d'une option. Lorsque le marché est complet, il permet de construire le portefeuille autofinancé de couverture.

Le gamma : Le gamma est défini comme la deuxième dérivée du prix ou bien la dérivée première du delta :

$$\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(0, x)$$

Il a donc la double interprétation de la sensibilité du prix par rapport aux grandes variations et de la vitesse du changement de delta. Le gamma d'une option est grand lorsque l'option est proche de la monnaie et/ou proche de l'échéance.

Le vega : Le vega est la sensibilité par rapport à la volatilité :

$$\vartheta = \frac{\partial}{\partial \sigma} u(0, x)$$

Le vega est plus grand à la monnaie mais décroît pour les options qui sont proches de l'échéance.

Le rho : Le rho est la sensibilité par rapport au taux d'intérêt :

$$\rho = \frac{\partial}{\partial r} u(0, x)$$

Le theta : Le theta mesure la sensibilité par rapport au temps :

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial t} u(0, x)$$

Comme vu tout le long de notre raisonnement, on souhaite écrire

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}[\phi(X_T^\theta)] = \mathbb{E}_x[e^{-\int_0^T r(t)dt} \phi(X_T^\theta) \times \pi^\theta] \quad (41)$$

où π^θ ne dépend pas du payoff de l'option.

Le processus tangeant est défini par $XY_t = X_t$, $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} dY_t = Y_t (r(t)dt + \sigma(t)dW_t) & \text{sur } [0, T] \\ Y_0 = 1 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (42)$$

3.2.1 Cacul du Delta

On considère qu'il est possible de permuter espérance et dérivation pour les payoff dans C_K^∞ , continûment différentiable et à dérivées bornées. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on suppose que le payoff s'exprime comme une fonction des valeurs du sous-jacent à différentes dates $\phi(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m})$ avec les conventions $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = T$.

$$u(0, x) = \mathbb{E}_x \left[e^{-\int_0^T r(t)dt} \phi(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}) \right] \quad (43)$$

D'une part, par la dérivation en chaîne classique puis par définition du processus de variation première (42), on a :

$$\begin{aligned} \Delta &= \mathbb{E}_x \left[\frac{\partial}{\partial x} e^{-\int_0^T r(s)ds} \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \right] = \mathbb{E}_x \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \sum_{i=1}^m \partial_i \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \frac{\partial X_{t_i}}{\partial x} \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \sum_{i=1}^m \partial_i \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) Y_{t_i} \right] \end{aligned} \quad (44)$$

D'autre part, on cherche un poids π qui puisse s'exprimer comme une intégrale de Skorokhod $\pi = \delta(w)$, où w est appelé générateur. En utilisant la formule d'intégration par parties (18) :

$$\Delta = \mathbb{E}_x \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \times \delta(w) \right] = \mathbb{E}_x \left[\int_0^T D_t \left(e^{-\int_0^T r(s)ds} \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \right) w_t dt \right] \quad (45)$$

Par la formule de dérivation en chaîne au sens de Malliavin (16) puis par la dérivée de Malliavin de X_t en fonction du processus Y (28), on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta &= \mathbb{E}_x \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \sum_{i=1}^m \partial_i \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \int_0^T D_s X_{t_i} w_s ds \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \sum_{i=1}^m \partial_i \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \int_0^T Y_{t_i} Y_s^{-1} \sigma(s, X_s) \mathbf{1}_{\{s \leq t_i\}} w_s ds \right] \end{aligned} \quad (46)$$

Ainsi par identification de (44) et (46), on en déduit la **formule de Malliavin pour le Delta** :

$$\mathbb{E}_x \left[\left(Y_{t_i} - \int_0^{t_i} Y_{t_i} Y_s^{-1} \sigma(s, X_s) w_s ds \mid X_{t_1}, \dots, X_{t_m} \right) \right] = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \quad (47)$$

Une façon d'obtenir une expression explicite de w consiste à contraindre encore plus la condition nécessaire en cherchant w tel que :

$$Y_{t_i} - \int_0^{t_i} Y_{t_i} Y_s^{-1} \sigma(s, X_s) w_s ds = 0 \quad (48)$$

On introduit l'ensemble :

$$\Gamma_m = \left\{ a \in L^2([0, T]) \mid \int_0^{t_i} a(t) dt = 1, \quad \forall i = 1, \dots, m \right\} \quad (49)$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $a \in \Gamma_m$:

$$\Delta = \mathbb{E}_x \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \int_0^T a(t) [\sigma^{-1}(X_t) Y_t]^* dW_t \right] \quad (50)$$

Application : Payoff ϕ dépendant uniquement de X_T

Si le sous-jacent suit une diffusion de type Black-Scholes, alors, nous avons déjà vu que $Y_t = \frac{X_t}{x}$. Si de plus le payoff ne dépend que de la date finale T alors on a $\pi = \int_0^T a(t) \frac{Y_t}{\sigma(t) X_t} dW_t$ où a satisfait $\int_0^T a(t) dt = 1$. Un choix trivial est $a(t) = \frac{1}{T} \forall 0 \leq t \leq T$. D'où l'écriture du poids pour le Delta :

$$\pi = \delta(w) = \int_0^T \frac{1}{T} \frac{X_t}{x \sigma X_t} dW_t = \frac{W_T}{x \sigma T} \quad (51)$$

3.2.2 Calcul du Gamma

Nous supposons que f est deux fois dérivable et de dérivées bornées.

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}_x[F] \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbb{E}_x[F \delta(w_x^{delta})]) = \mathbb{E}_x \left[\frac{\partial}{\partial x} F \delta(w_x^{delta}) \right] + \mathbb{E}_x \left[F \frac{\partial}{\partial x} \delta(w_x^{delta}) \right] \quad (52)$$

Grâce à des arguments de convergence dominée, on permute l'opérateur $\delta(\cdot)$ et la différentielle par rapport à x :

$$\Gamma = \mathbb{E}_x \left[F \left(\delta(w_x^{delta}) \delta(w_x^{delta}) + \delta \left(\frac{\partial}{\partial x} w_x^{delta} \right) \right) \right] = \mathbb{E}_x \left[F \delta \left(w_x^{delta} \delta(w_x^{delta}) + \frac{\partial}{\partial x} w_x^{delta} \right) \right] \quad (53)$$

Par définition, $\Gamma = \mathbb{E}_x[F \delta(w^{gamma})] \forall F$, d'où $\delta(w^{gamma}) = \delta(w_x^{delta} \delta(w_x^{delta}) + \frac{\partial}{\partial x} w_x^{delta})$

Formule de Malliavin pour le Gamma

$$\mathbb{E}_x \left[\delta(w^{gamma}) - \delta(w^{delta} \delta(w^{delta}) + \frac{\partial}{\partial x} w^{delta} \mid X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \right] = 0 \quad (54)$$

Application : Payoff ϕ dépendant uniquement de X_T

$$\pi = \delta(w^{gamma}) = \frac{1}{x^2 \sigma T} \left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma} \right) \quad (55)$$

3.2.3 Calcul du Vega

Application : Payoff ϕ dépendant uniquement de X_T

$$\pi = \delta(w^{vega}) = \frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma} \quad (56)$$

De même on obtient pour le vega le poids suivant dans le modèle Black Scholes :

$$\delta(w^{vega}) = \frac{W_T^2}{\sigma x T} - W_T - \frac{1}{\sigma}$$

3.3 Quelques exemples numériques

3.3.1 Option digitale et corridor

L'option digitale est un type d'option qui, à la différence d'une option classique, ne connaît que deux résultats possibles. L'acheteur reçoit à échéance T soit une somme fixée d'avance Q si le cours du sous-jacent S_t est supérieur au prix d'exercice K (ou inférieur dans le cas d'une option digitale de vente), soit rien. Il s'agit d'un payoff irrégulier qui s'exprime de la façon suivante :

$$\phi(S_T) = Q \mathbb{1}_{\{S_T > K\}}$$

où S_t suit la dynamique $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$. Ainsi, on a donc S_T qui s'écrit :

$$S_T = S_t \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma W_T \right\} \text{ avec } S_0 = x$$

Le prix de l'option digitale sur S_t à la date t et d'échéance T est donné par la formule :

$$P(t, S_t, T) = \exp(-r(T-t)) \mathbb{E}_x^Q[\phi(S_T)]$$

Dans la suite, on prendra toujours $t = 0$. Une estimateur de Monte Carlo pour le prix est donnée par :

$$P_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \phi(S_T^i) \exp(-rT) \quad (57)$$

où les S_T^i sont des simulations indépendantes de même loi que S_T et M est le nombre de simulations de Monte Carlo.

Soit la variance empirique $\sigma_M^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M ((\exp(-rT)\phi(S_T^i))^2 - P_M)^2$, on obtient un intervalle de confiance pour notre estimateur :

$$I_M^\alpha = \left[P_M - a_\alpha \frac{\sigma_M}{\sqrt{M}}; P_M + a_\alpha \frac{\sigma_M}{\sqrt{M}} \right]$$

où a_α est le quantile de niveau α .

Quant à l'option corridor, il s'agit d'une différence entre deux options digitales. Son payoff est :

$$\phi(S_T) = Q \mathbb{1}_{\{K_{min} < S_T < K_{max}\}}$$

Prenons pour notre application numérique sur l'option digitale le cas où $Q = 1, S_0 = 100, \sigma = 0.2, r = 0.05, K = 140, T = 1$ an, avec $M = 100000$ simulations de Monte Carlo. Observons alors la convergence de notre estimateur.

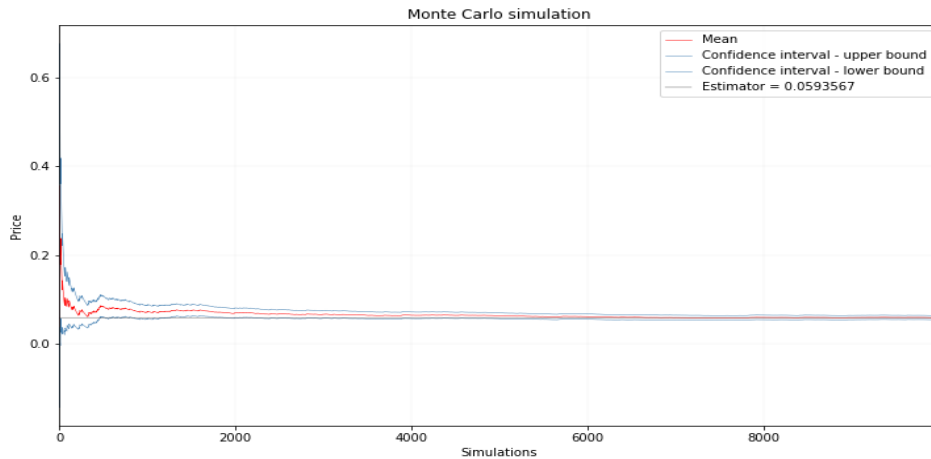


FIGURE 1 – Prix de l'option digitale avec $Q = 1, S_0 = 100, \sigma = 0.2, r = 0.05, K = 140, T = 1$ an, $M = 100000$

Figure 1 : Sur ce graphe nous pouvons voir que notre intervalle de confiance devient de plus en plus petit lorsque notre nombre de simulations augmente. Notre estimateur converge lorsque M devient très grand. Cette convergence est cohérente et illustre le principe de la loi forte des grands nombres. Ainsi prendre M très grand nous permet de nous rapprocher le plus du prix exact à la date 0.

Estimateurs de Monte Carlo des Grecques

En utilisant les poids trouvés plus haut dans le cadre du modèle de Black-Scholes, on peut approcher les valeurs des grecques par des simulations de Monte Carlo.

On a un estimateur pour le Delta et son intervalle de confiance par des simulations de $(W_T^i)_i$, une suite de mouvements Browniens standard i.i.d :

$$\Delta_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \exp(-rT) \phi(S_T^i) \frac{W_T^i}{S_0 \sigma T} \quad (58)$$

$$I_M^\alpha(\Delta) = \left[\Delta_M - a_\alpha \frac{\sigma_M^\Delta}{\sqrt{M}}; \Delta_M + a_\alpha \frac{\sigma_M^\Delta}{\sqrt{M}} \right] \text{ avec} \quad (59)$$

$$(\sigma_M^\Delta)^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\exp(-rT) \phi(S_T^i) \frac{W_T^i}{S_0 \sigma T} \right)^2 - \Delta_M^2 \quad (60)$$

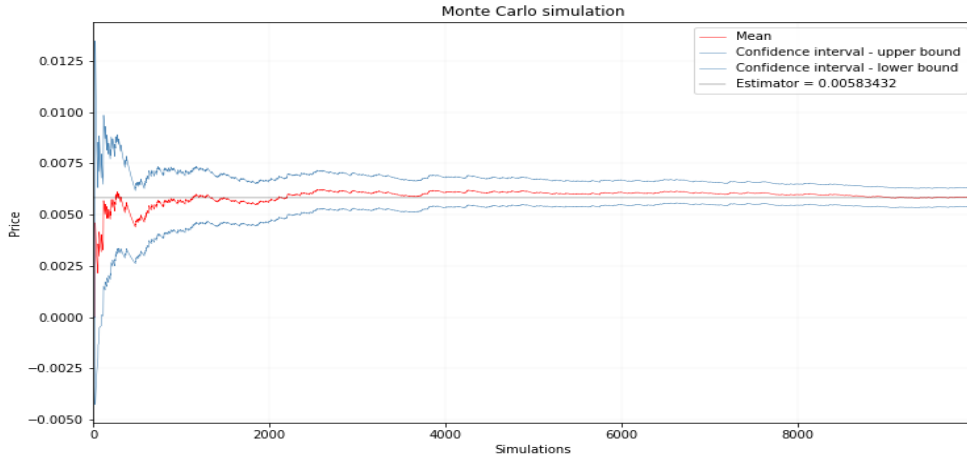


FIGURE 2 – Delta de l’option digitale avec $Q = 1, S_0 = 100, \sigma = 0.2, r = 0.05, K = 140, T = 1$ an, $M = 10000$

Figure 2 : La valeur de l’estimateur pour Delta converge vers 0.0058.

De même pour l’estimateur du Gamma et son intervalle de confiance :

$$\Gamma_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \exp(-rT) \phi(S_T^i) \frac{1}{S_0^2 \sigma T} \left(\frac{(W_T^i)^2}{\sigma T} - W_T^i - \frac{1}{\sigma} \right) \quad (61)$$

$$I_M^\alpha(\Gamma) = \left[\Gamma_M - a_\alpha \frac{\sigma_M^\Gamma}{\sqrt{M}}; \Gamma_M + a_\alpha \frac{\sigma_M^\Gamma}{\sqrt{M}} \right] \text{ avec} \quad (62)$$

$$(\sigma_M^\Gamma)^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\exp(-rT) \phi(S_T^i) \frac{1}{S_0^2 \sigma T} \left(\frac{(W_T^i)^2}{\sigma T} - W_T^i - \frac{1}{\sigma} \right) \right)^2 - \Gamma_M^2 \quad (63)$$

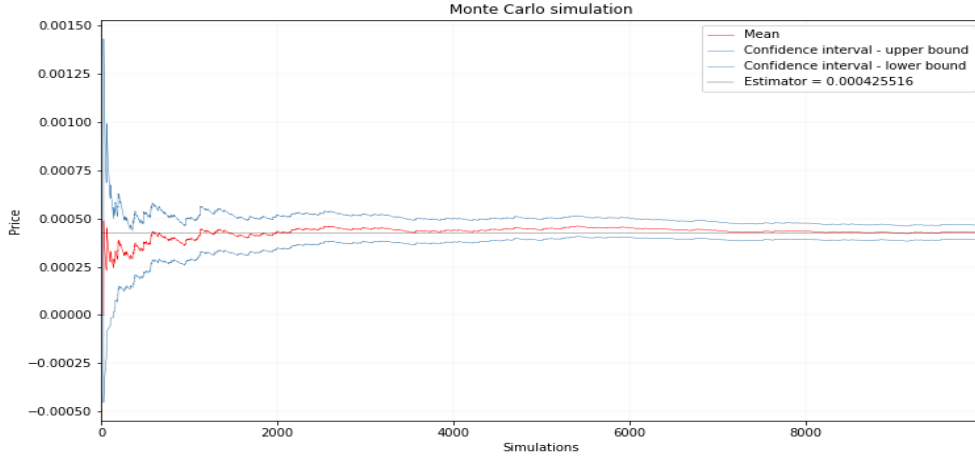


FIGURE 3 – Gamma de l’option digitale avec $Q = 1, S_0 = 100, \sigma = 0.2, r = 0.05, K = 140, T = 1$ an, $M = 10000$

Figure 3 : On obtient la valeur de 0.00042 environ pour notre estimateur de Monte Carlo pour Gamma. Ce gamma étant faible, on a donc le delta qui varie très lentement, donc il n’est pas nécessaire d’ajuster fréquemment le portefeuille pour maintenir un delta nul.

Enfin pour le Vega, on a :

$$\vartheta_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \exp(-rT) \phi(S_T^i) \left(\frac{(W_T^i)^2}{\sigma T} - W_T^i - \frac{1}{\sigma} \right) \quad (64)$$

$$I_M^\alpha(\vartheta) = \left[\vartheta_M - a_\alpha \frac{\sigma_M^V}{\sqrt{M}}; \vartheta_M + a_\alpha \frac{\sigma_M^V}{\sqrt{M}} \right] \text{ avec} \quad (65)$$

$$(\sigma_M^\vartheta)^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\exp(-rT) \phi(S_T^i) \left(\frac{(W_T^i)^2}{\sigma T} - W_T^i - \frac{1}{\sigma} \right) \right)^2 - \vartheta_M^2 \quad (66)$$

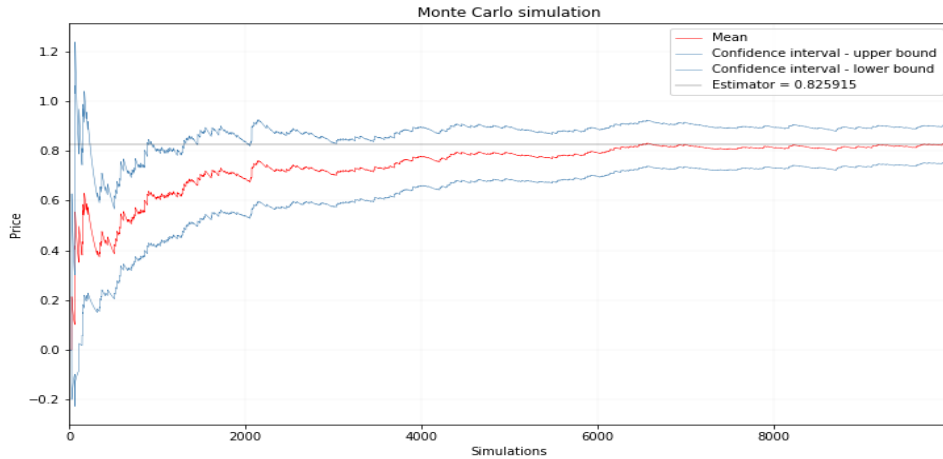


FIGURE 4 – Vega de l’option digitale avec $Q = 1, S_0 = 100, \sigma = 0.2, r = 0.05, K = 140, T = 1$ an, $M = 10000$

Figure 4 : Après simulation on obtient que le Vega est au alentours de 0.8259. Etant donné que notre vega est faible en valeur absolue, on peut en déduire que la variation de la volatilité n’a pas beaucoup d’impact sur le prix de notre option.

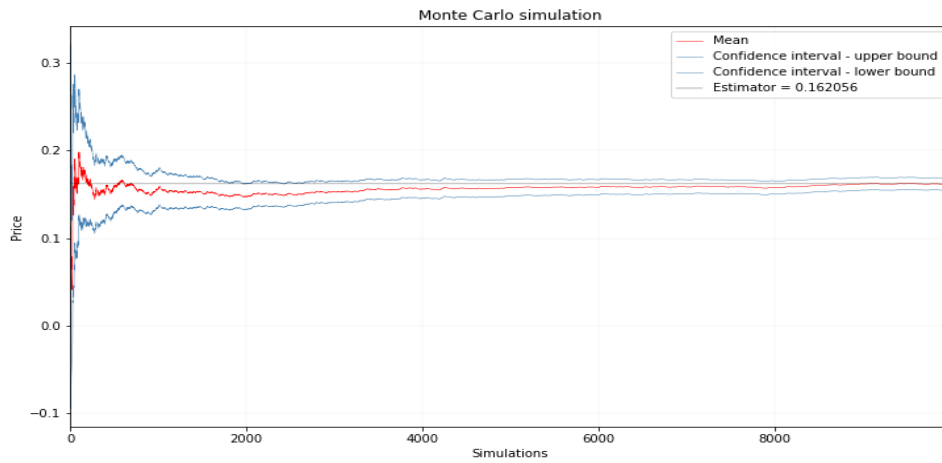


FIGURE 5 – Prix de l’option corridor de payoff $\phi(S_T) = Q\mathbb{1}_{[100,110]}$ avec $Q = 1, S_0 = 100, \sigma = 0.2, r = 0.05, T = 1$ an, avec $M = 10000$

Figure 5 : On a un estimateur de P qui converge vers 0.162.

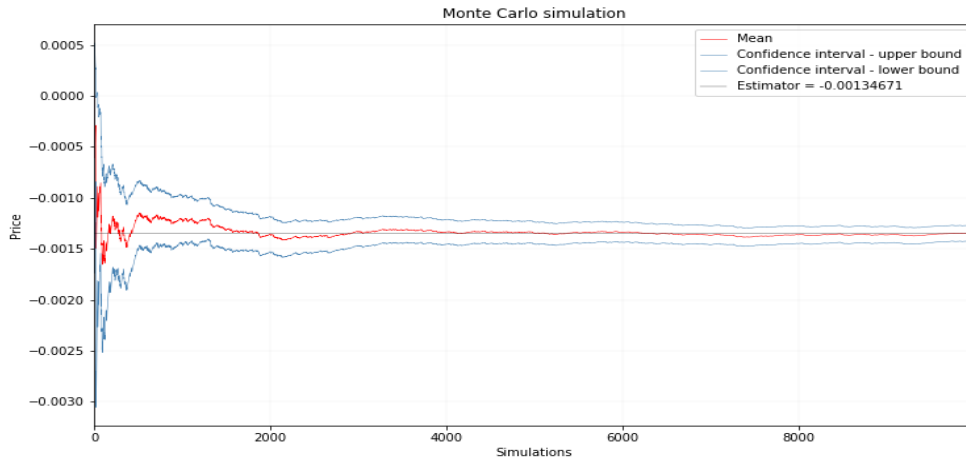


FIGURE 6 – Delta de l’option corridor de payoff $\phi(S_T) = Q\mathbb{1}_{[100,110]}$ avec $Q = 1, S_0 = 100, \sigma = 0.2, r = 0.05, T = 1$ an, avec $M = 10000$

Figure 6 : On voit que notre delta converge vers -0.0013. Ce delta est négatif donc une position longue sur cette option doit être couverte par une position longue sur le sous-jacent S_t

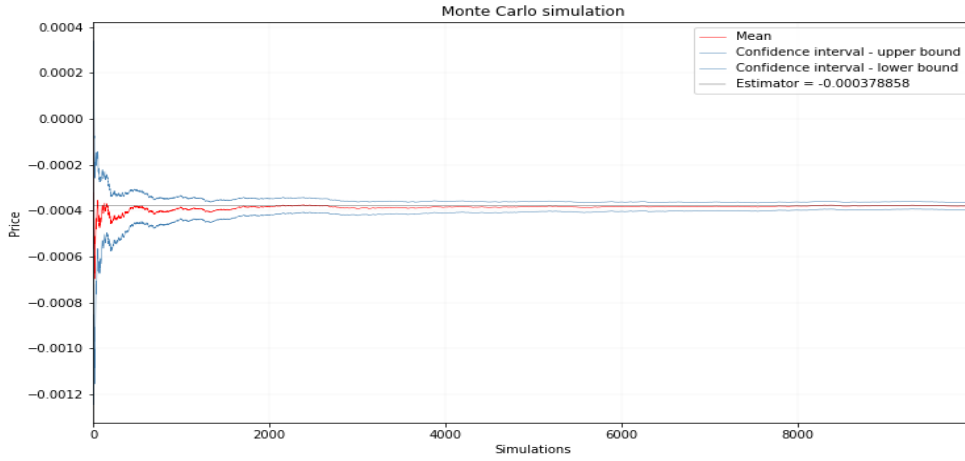


FIGURE 7 – Gamma de l’option corridor de payoff $\phi(S_T) = Q\mathbb{1}_{[100,110]}$ avec $Q = 1, S_0 = 100, \sigma = 0.2, r = 0.05, T = 1$ an, avec $M = 10000$

Figure 7 : On voit que notre Gamma converge vers -0.00037. Etant très faible en valeur absolue on a alors le delta qui varie très lentement.

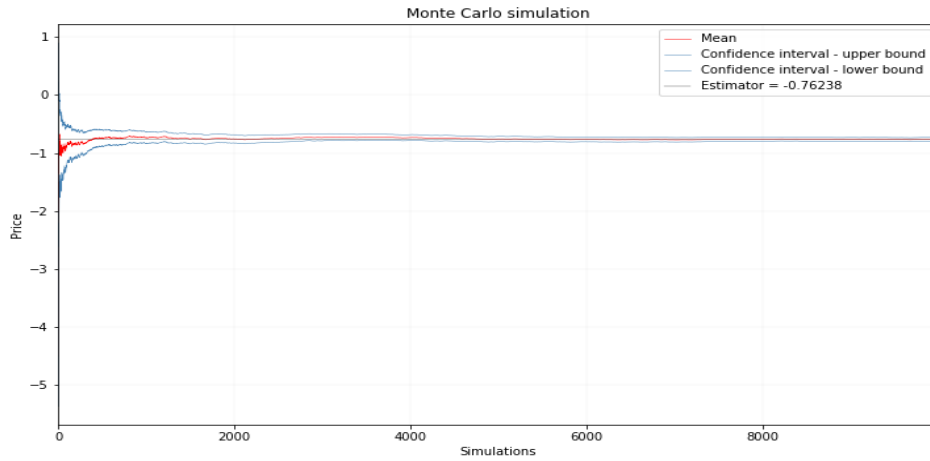


FIGURE 8 – Vega de l’option corridor de payoff $\phi(S_T) = Q\mathbb{1}_{[100,110]}$ avec $Q = 1, S_0 = 100, \sigma = 0.2, r = 0.05, T = 1$ an, avec $M = 10000$

Figure 8 : Le Vega de cette option converge vers -0.762. Etant assez faible en valeur absolue, la variation de la volatilité n’aura pas d’impact significatif sur notre prix.

3.3.2 Option Asiatique

Une option asiatique est une option dont le payoff dépend de la valeur moyenne du cours de l’actif sous-jacent pendant la vie de l’option (pour empêcher la manipulation des prix). Ainsi, le payoff H_T d’un call asiatique s’écrit :

$$H_T = \left(\int_t^T S_u du - K \right)^+$$

avec S_t défini de la même manière que pour l’option digitale.

Le prix de l’option asiatique à la date t est donnée par :

$$H(t, S_t, T) = \exp(-r(T-t)) \times \mathbb{E}_x^Q[H_T]$$

La différence avec les exemples précédents est que la fonction payoff ne dépend pas uniquement de la valeur finale du sous-jacent. Il faudra donc faire une approximation de l’intégrale par une somme de Riemann, par exemple. On commence par discrétiser l’intervalle $[0, T]$ en n pas de temps égaux. Le pas

de discrétisation h vaut alors $h = \frac{T}{n}$, et nous définissons les temps $t_i = \frac{iT}{n} = ih, \forall i = 1, \dots, n-1$. L'erreur liée à cette discrétisation sera d'ordre $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$ et on a :

$$\int_0^T S_u du \approx h \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i} \quad (67)$$

il suffit pour calculer les S_{t_i} , de calculer les W_{t_i} , ce qui est facilement réalisable car les accroissements $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}; \forall i = 1, \dots, n-1$ sont des variables aléatoires gaussiennes centrées de variance h i.i.d.

On a pour $i = 1, \dots, n-1$:

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \times e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})h + \sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})} \quad (68)$$

Ainsi l'estimateur de Monte Carlo pour le prix de l'option asiatique à l'instant $t = 0$ par :

$$H_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e^{-rT} \left(h \sum_{j=0}^{n-1} S_{T_j} - K \right)^+ \quad (69)$$

On fera nos simulations avec les paramètres suivants : $S_0 = 100, \sigma = 0.2, r = 0.1, K = 100, T = 1$ an, avec $n = 150, M = 100000$.

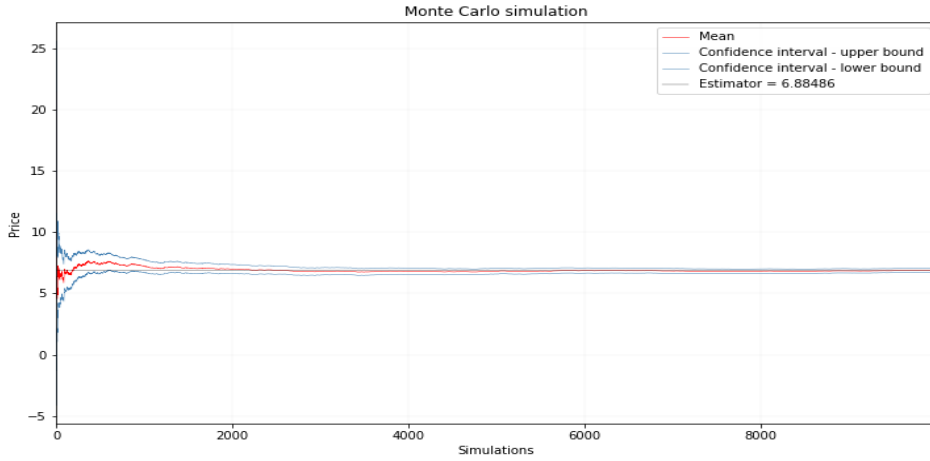


FIGURE 9 – Prix de l'option asiatique de payoff H_T avec $S_0 = 100, \sigma = 0.2, r = 0.1, K = 100, T = 1$ an, avec $n = 10000, M = 10000$

Figure 9 : On a une approximation de P de 6.88.

L'estimateur de Monte Carlo pour le Delta est donnée par la formule :

$$\Delta = \frac{e^{-rT}}{x} \mathbb{E} \left[\phi \left(\int_0^T S_s ds \right) \left(\frac{\int_0^T S_s ds}{\int_0^T s S_s ds} \left[\frac{W_T}{\sigma} + \frac{\int_0^T s^2 S_s ds}{\int_0^T s S_s ds} \right] - 1 \right) \right] \quad (70)$$

où $\phi \left(\int_0^T S_s ds \right) = \left(\int_0^T S_s ds - K \right)^+$

On utilise l'approximation suivante :

$$\int_0^T s^k S_u du \approx h \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n} \right)^k S_{t_i} \quad (71)$$

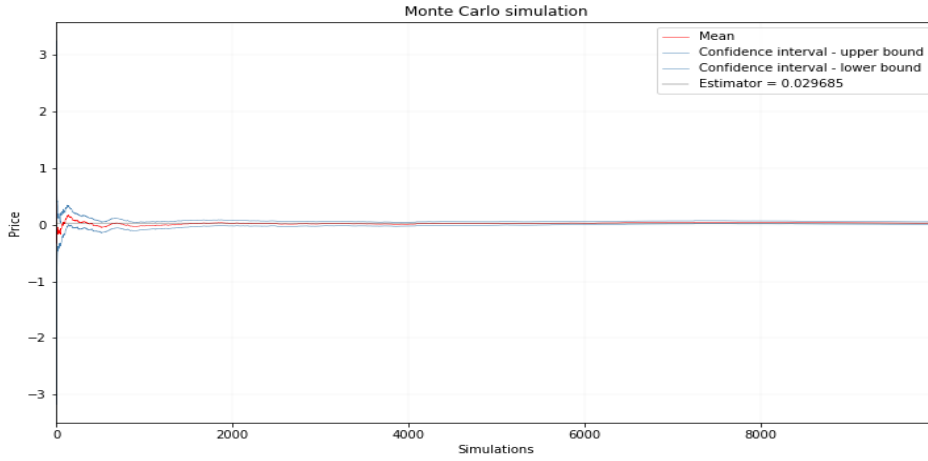


FIGURE 10 – Delta de l’option asiatique de payoff H_T avec $S_0 = 100, \sigma = 0.2, r = 0.1, K = 100, T = 1$ an, avec $n = 10000, M = 10000$

Figure 10 : On voit que notre Delta converge vers 0.029.

4 Conclusion

Cette méthode dite de Malliavin pour le calcul des Grecques est souvent comparée à la méthode des différences finies qui reste la méthode classique. Il a souvent été montré qu’elle était plus rapide et efficace, notamment lorsque la fonction de payoff est discontinue. Cela est dû à la formule d’intégration par parties qui a permis la décomposition de la dérivée du payoff en produit du payoff par une variable indépendante du reste.

D’ailleurs, il existe d’autres méthodes de poids, utilisant d’autres outils. Par exemple, si $X_T^\theta = f(Y_T^\theta)$ où $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et Y_T^θ a une densité $y \mapsto p(\theta, y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , alors on peut calculer les quantités suivantes :

$$I(\theta) = \mathbb{E}[\phi(X_T^\theta)] = \mathbb{E}[\phi(f(Y_T^\theta))] = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(f(y))p(\theta, y)dy \quad (72)$$

$$J(\theta) = I'(\theta) = \mathbb{E} \left[\phi(f(Y_T^\theta)) \frac{\partial \ln p}{\partial \theta}(\theta, Y_T^\theta) \right] \quad (73)$$

Cette méthode qui fait également intervenir un poids est la méthode de Log-vraisemblance. Elle se rapproche du calcul de Malliavin mais sa vitesse de calcul et sa précision reste moindre.

L’étude présente ne comporte que peu d’exemples d’applications et d’exemples numériques, mais il s’agissait de présenter les outils et méthodes qui peuvent désormais être appliquées à d’autres Grecques ou d’autres produits dérivés comme les options à barrière ou même encore des produits multi sous-jacents. Bien que cela ne soit pas le sujet d’étude, nous aurions très bien pu améliorer nos résultats en combinant le calcul de Malliavin aux différentes techniques de réduction de la variance traditionnelles, comme la technique des variables antithétiques ou l’importance sampling, ce qui rendrait nos estimateur d’autant plus performants.

Malgré son efficacité et son large champ d’application, il faut prendre certaines précautions avant de l’appliquer à n’importe quel produit financier. Notamment, en cas de maturités trop courtes ou d’options américaines, la méthode n’est pas efficace. Enfin, on pourra remarquer que dans l’application aux payoff qui dépendent des valeurs du sous-jacent sur tout un intervalle, une erreur d’approximation s’ajoute à notre estimateur : l’erreur par l’approximation de Riemann. Par une étude plus approfondie, on pourrait contrôler l’erreur totale par un problème d’optimisation sur l’effort de l’estimateur, qui dépend de ses paramètres. En général, il faudra trouver un équilibre entre le nombre de discrétisation, qui apporte de la précision, et la rapidité des calculs numériques. C’est pourquoi nous avons choisi de réaliser nos simulations en langage C++, reconnu pour sa puissance de calcul.

5 Références

- V. Lemaire, Cours "Probabilités numériques", *Master 1 Mathématiques et Application, Sorbonne Université (UPMC)*, 2018-2019.
- E. Fournié, J-M. Lasry, J. Lebuchoux, P-L. Lions & N. Touzi, "Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance", *Finance and Stochastics, Volume 3, Number 4*, 391-412, Springer-Verlag, 1999.
- E. Fournié, J-M. Lasry, J. Lebuchoux & P-L. Lions, "Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance II", *Finance and Stochastics, Volume 5, Number 2*, 201-236, Springer-Verlag, 2001.
- G. Di Nunno, B. Øksendal & F. Proske "Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance", *Universitext*, Springer-Verlag, 2009.
- L. Decreusefond, Cours "Selected topics in Malliavin calculus : Divergence, chaos and so much more", *Master 2 Probabilités et Modèles Aléatoires, Sorbonne Université (UPMC)*, 2019.
- F. Cosmao, F. Dupuy & A. Guillon, "Le calcul Malliavin appliqué à la finance", 2002.