

# Marchés de l'énergie : valorisation de spreads

"Pricing and hedging spread options", R. Carmona & V. Durrleman (2003)

Céline Nguyen-Tu, M2MO Modélisation Aléatoire

Avril 2020

Les options spreads sont des produits financiers dont le payoff dépend de la différence de prix de plusieurs actifs sous-jacents à maturité  $T$ . Ce type d'option rencontre un grand succès de part son aptitude à réduire les mouvements défavorables d'indices. Ils sont vendus majoritairement dans les marchés de gré à gré (*over-the-counter*) et sont présent dans de nombreux pans de la finance de marché, notamment dans les marchés de l'énergie. En effet, les entreprises du secteur de l'énergie font partie des utilisateurs de contrats dérivés les plus actifs et les plus sophistiqués. Néanmoins, la valorisation des options spreads constitue une étude relativement récente. Ici, Carmona et Durrleman considèrent cette notion dans le cadre de l'énergie et des commodités.

René Carmona et Valdo Durrleman sont deux professeurs français, à l'Université de Princeton et l'École Polytechnique respectivement, spécialistes de l'analyse stochastique et des mathématiques financières. En particulier, ils s'intéressent à la finance computationnelle et environnementale.

## 1 Introduction

Un des vastes problèmes de la finance computationnelle est de savoir comment évaluer numériquement le prix d'un produit et développer des stratégies de couverture. Dans le spread suivant, on calcule dans le payoff la différence de prix entre celui de la matière première et celui du produit transformé et terminé créé à partir de cette commodité. Pour cet exemple, on peut alors considérer un spread call européen dont le payoff s'écrit :

$$C_t = \left( S_t^{\text{produit}} - h S_t^{\text{matière première}} - K \right)^+ \quad \forall t \in [0, T] \quad (1)$$

où  $S_t^{\text{produit}}$  est le prix du produit terminé,  $S_t^{\text{matière première}}$  le prix de la matière première,  $h$  la quantité de matière première et  $K$  les coûts de production comme la main d'oeuvre. Lorsque  $K = 0$  et que les deux actifs suivent des modèles de Black-Scholes, il s'agit d'une option d'échange d'un actif contre un autre et une formule de valorisation fermée a initialement été proposée par Margrabe. Toutefois, dans un contexte réel, on doit tenir compte des coûts de production (eg. coûts de démarrage pour une centrale électrique) et donc  $K \neq 0$ . Ainsi, Kirk propose en 1995 une nouvelle formule qui permettra d'approximer le prix de ce spread.

Dans l'article de Carmona et Durrleman, les auteurs s'attachent, en outre, à reprendre les techniques déjà connues, mais l'intérêt majeur de cette publication est l'introduction d'un nouvel algorithme de valorisation. Ce dernier se base sur une formule fermée de la borne inférieure du prix d'une option spread dans le cas où les sous-jacents suivent une loi log-normale.

Dès lors, nous nous intéresserons aux spreads dans le domaine de l'énergie. On développera dans un premier temps un résumé des points abordés en prenant soin de passer en revue les différents types de spreads évoqués par les auteurs. Dans un second temps, il s'agira d'appliquer certaines méthodes de valorisation afin d'illustrer numériquement notre étude.

## 2 Les différents types d'options spreads

Lorsque l'on parle de *spread* en finance, on fait référence à un écart ou une différence de prix. C'est un terme couramment utilisé par les anglophones et il désigne plusieurs choses comme l'écart de prix entre l'offre et la demande, mais on l'utilise plus fréquemment pour parler de différence de prix entre deux indices, tels que des rendements ou bien des taux d'intérêt. Selon le marché dans lequel on se situe, la nature de ces indices varie et la forme des options spreads se diversifie en conséquence. Il est important

de prendre en considération cette multiformité qui se reflétera sur l'aspect technique de la valorisation. Par ailleurs, on notera qu'il est possible d'étendre cette définition aux combinaisons linéaires d'un nombre fini d'indices, comme on a pu le voir dans l'exemple introductif. Ainsi, la formule générale du payoff d'un spread est la suivante pour un nombre  $N \in \mathbb{N}$  d'indices fixé et où  $h_1, \dots, h_N$  sont constants :

$$C_t = (h_1 S_t^1 - h_2 S_t^2 - \dots - h_N S_t^N - K)^+ \quad \forall t \in [0, T] \quad (2)$$

En ce qui concerne les spreads sur le marché des commodités, il en existe des types variés :

- spread géographique (*location spread*) : c'est la différence entre deux mêmes commodités mais situées à deux endroits différents.
- spread temporel (*calendar spread*) : c'est la différence de la valeur d'une même commodité en deux temps de maturité différents  $T_1$  et  $T_2$  (eg. en été et en hiver de la même année).
- spread de commodités (*processing spread*) : ils sont composés de deux (ou plus) commodités différentes mais reliées dans un processus de transformation et production (eg. électricité et gaz).
- spread de qualité (*quality spread*) : c'est la différence entre deux (ou plus) mêmes commodités mais de qualité ou grade différentes (eg. café Arabica et café Robusta).

Dans les marchés de l'énergie, ces spreads peuvent décrire des usines de production, des raffineries ou des espaces de stockage. Dans le cas inter-commodités, c'est-à-dire qui implique au moins deux commodités différentes, ils sont généralement utilisés pour quantifier le coût de production de produits transformés à partir de matières premières. En voici quelques exemples importants :

- le *crack spread* : Il s'agit de la différence entre un produit pétrolier brut et son produit fini. Les crack spreads impliquent trois commodités : l'essence sans plomb, le fioul domestique (à chauffage) et le pétrole brut. On distingue plusieurs combinaisons dérivées de ce spread dont le crack spread standard 3 : 2 : 1, son option spread est de payoff :

$$C_t = \left( \underbrace{\frac{2}{3} S_t^{\text{essence}} + \frac{1}{3} S_t^{\text{fioul}} - S_t^{\text{pétrole}}}_{\text{crack spread } CS_t} - K \right)^+ \quad \forall t \in [0, T] \quad (3)$$

Ainsi, il est composé de trois contrats futures de pétrole brut, deux contrats d'essence sans plomb et un contrat de fioul domestique, les prix étant exprimés en USD par baril. Dans d'autres exemples, on peut constituer des spreads calculés sur deux sous-jacents seulement en ne faisant pas intervenir les contrats d'essence ou bien de fioul. Ces spreads ont été introduits en 1994 par le New York Mercantile Exchange (NYMEX) pour permettre aux raffineurs pétroliers une meilleure gestion des risques.

- le *spark spread* : C'est le coût de conversion de gaz naturel en électricité, on parle également de *dark spread* lorsque le combustible utilisé est le charbon. On le définit comme la différence entre le prix de l'électricité et le prix du carburant qui permet sa production. De même que pour l'exemple précédent, on retrouve une variété de contrats spark spread comme par exemple le 4 : 3 :

$$C_t = \left( \underbrace{4 S_t^{\text{électricité}} + 3 S_t^{\text{gaz}}}_{\text{spark spread } SS_t} - K \right)^+ \quad \forall t \in [0, T] \quad (4)$$

Toutefois, on s'intéressera d'avantage aux options spark spread de la forme :

$$C_t = \left( \underbrace{F_t^{\text{électricité}} + h F_t^{\text{gaz}}}_{\text{spark spread } S_t} - K \right)^+ \quad \forall t \in [0, T] \quad (5)$$

où  $F_t^{\text{électricité}}$  et  $F_t^{\text{gaz}}$  sont les prix de contrats futures sur l'électricité et le gaz naturel respectivement, et  $h$  est le facteur de rendement de la centrale. Ces outils sont notamment utilisés dans la valorisation d'actifs réels.

### 3 Analyse des données des marchés

Les marchés de l'énergie sont des domaines très particuliers en ce qui concerne le traitement des données, en particulier à des fins de valorisations. Non seulement les outils utilisés sur le marché des actions ou le marché obligataire ne sont pas applicables ici, mais il faudra également prendre des précautions quant aux commodités étudiées lors de l'analyse de données.

Pour la majorité des commodités physiques, on peut classer les modèles de valorisation en deux catégories : la première concerne la dynamique du prix spot de marché et la seconde traite la courbe forward.

1. Dynamique du prix spot : Cette analyse se base sur les prix historiques du prix spot de la commodité en question sous forme de séries temporelles. Ces séries présentent des volatilités élevées et une stationnarité qui reflète un phénomène de retour à la moyenne. Pour cette raison, elles sont plus comparables à celles des taux d'intérêts que celles des actions. Cependant, elles subissent une saisonnalité non observée pour les taux d'intérêts, qui s'explique par la variation de la consommation d'énergie durant une année en fonction des saisons. Dans ce type de modèle, les auteurs ont choisi d'exploiter les données quotidiennes bien que ce choix n'est pas approprié pour l'électricité. En effet, cette dernière nécessite une discrétisation de la série en heures car sa consommation fluctue durant une semaine et une journée également. C'est un cas très particulier car l'électricité n'est pas stockable et sa production est très sensible à la météo par exemple. De ce fait, l'analyse de l'électricité à haute fréquence n'est pas abordée.
2. Dynamique de la courbe forward : Il s'agit maintenant d'une estimation de l'évolution du prix du contrat. Cette courbe évalue en une date  $t$  le prix du contrat via une fonction  $T \rightarrow F(t, T)$  qui dépend de sa maturité  $T$ . L'inconvénient est que le domaine de cette fonction évolue en fonction de  $t$ , ce qui n'est pas adapté à une analyse statistique et à un traçage graphique. Pour y remédier, on décide de convertir l'axe du temps de maturité à une durée jusqu'à la maturité  $\tau$  (*time-to-maturity*). Cela permet de d'introduire une hypothèse de continuité qui n'était pas permise pour des temps de maturités  $\{T_1, \dots, T_n\}$  discrets. Mais pour que les durées  $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  utilisées restent fixes chaque jour où la fonction est évaluée, il faut procéder à un traitement des données au préalable. De plus, pour conserver une certaine stationnarité, on devra intercaler les  $n$  prix de contrats  $F(t, \tau)$  où  $\tau$  est la durée à maturité (1 mois, 2 mois, 3 mois, ...).

On notera quand même que pas toutes les commodités subissent un effet de saisonnalité, notamment le pétrole brut. La courbe forward étant une estimation du futur prix spot, on sera amené à étudier la cohérence de ces deux types de modèles. En particulier, lorsque la volatilité est peu élevée, la courbe forward est un indicateur relativement bon du prix spot, ce qui n'est pas le cas quand la volatilité est élevée.

## 4 Cadre mathématique

Dans ce qui suit, on ne considérera que le cas de deux sous-jacents, afin de simplifier les notations. On se donne alors deux processus de prix  $S^1 = \{S_t^1\}_{t \geq 0}$  et  $S^2 = \{S_t^2\}_{t \geq 0}$ , et on définit le spread comme étant le processus  $S = \{S_t\}_{t \geq 0}$  tel que  $S_t = S_t^2 - S_t^1 \quad \forall t \geq 0$ .

### 4.1 L'option spread

On considère un call européen sur ce spread de maturité  $T$  et de strike  $K \geq 0$  : il donne le droit à son détenteur d'acheter le sous-jacent  $S$  au prix  $K$  à la date  $T$ . Son flux à maturité est donc :

$$(S_T - K)^+ = (S_T - K) \mathbf{1}_{S_T > K} = \max(0, S_T - K) \quad (6)$$

Soit  $C_0$  le prix de cette option call au temps  $t = 0$ , la formule de Black-Scholes nous donne :

$$C_0 = \mathbb{E} \left[ \underbrace{e^{-rT}}_{\text{facteur d'actualisation}} \times \underbrace{(S_T - K)^+}_{\text{payoff}} \right] = \mathbb{E} [e^{-rT} \times (S_T^2 - S_T^1 - K)^+] \quad (7)$$

sous la probabilité risque-neutre où  $r \geq 0$  est le taux d'intérêt qu'on suppose déterministe et constant (il pourrait inclure le rendement d'opportunité par exemple).

À ce stade, on pourrait déjà évaluer le prix de cette option sans même connaître les dynamiques des processus  $S^1$  et  $S^2$  car nous n'avons besoin que de leurs valeurs terminales en  $T$  (attention, ce n'est pas vrai pour n'importe quel produit, notamment le call américain). De ce fait, si l'on connaît la densité jointe  $f_T(s_1, s_2)$  de  $(S_T^1, S_T^2)$ , on écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{-rT} \times (S_T^2 - S_T^1 - K)^+] &= e^{-rT} \int \int (s_2 - s_1 - K)^+ f_T(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \\ &= e^{-rT} \int \left( \int (s_2 - s_1 - K)^+ f_{2,T|S_T^1=s_1}(s_2) ds_2 \right) f_{1,T}(s_1) ds_1 \end{aligned} \quad (8)$$

où  $f_{1,T}(s_1)$  est la densité du sous-jacent  $S^1$  au temps  $T$  et  $f_{2,T|S_T^1=s_1}(s_2)$  est la densité conditionnelle de  $S^2$  au temps  $T$  sachant que  $S_T^1 = s_1$ . Si les sous-jacents suivent une loi log-normale, alors la densité conditionnelle reste log-normale et on évalue l'intégrale intérieure par la formule de Black-Scholes. Ainsi, on peut calculer le prix  $C_0$  de cette option bien qu'en pratique, cela est loin d'être suffisant. C'est pourquoi la recherche d'une formule fermée est nécessaire et voici quelques remarques qui justifient cette démarche :

1. Une formule fermée permettrait de calculer les dérivées partielles du prix de l'option par rapport à plusieurs variables (prix initial, volatilité, etc.), aussi appelées les grecques, qui sont essentielles aux traders et aux spécialistes du risque pour parfaitement concevoir des portefeuilles de réplifications.
2. À partir de cette formule et du prix de l'option avec des maturités et strikes différents déjà présents sur le marché, on peut déduire les paramètres du modèle, notamment la volatilité implicite, nécessaires aux market-makers pour évaluer de nouveaux produits.

Remarque : Il n'est pas utile d'explorer ici le cas de l'option put s'il y a absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) dans la mesure où l'on dispose de la formule de parité call-put suivante :

$$\mathbb{E} [e^{-rT}(S_T^2 - S_T^1 - K)^+] = \mathbb{E} [e^{-rT}(S_T^1 + S_T^2 + K)^+] + x_2 - x_1 - Ke^{-rT} \quad (9)$$

où  $x_1 = e^{-rT}\mathbb{E}[S_T^1]$  et  $x_2 = e^{-rT}\mathbb{E}[S_T^2]$  sont les valeurs initiales  $S_0^1$  et  $S_0^2$  respectivement.

## 4.2 Modèles Markoviens et Équations différentielles partielles

Compte tenu des arguments présentés dans la section précédente, on va maintenant introduire les dynamiques de prix des sous-jacents sous la probabilité risque-neutre. On suppose ici que les processus  $S^1$  et  $S^2$  satisfassent le système d'EDS suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS_t^1}{S_t^1} = \mu_1(t, S_t)dt + \sigma_1(t, S_t)\rho(t, S_t)d\tilde{W}_t^1 + \sigma_1(t, S_t)\sqrt{1-\rho(t, S_t)}d\tilde{W}_t^2 \\ \frac{dS_t^2}{S_t^2} = \mu_2(t, S_t)dt + \sigma_2(t, S_t)d\tilde{W}_t^2 \end{cases} \quad (10)$$

où  $S = (S^1, S^2)$  et  $\tilde{W}^1, \tilde{W}^2$  sont deux processus de Wiener indépendants. On suppose que les fonctions  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$  et  $\rho$  soient assez régulières pour que ces EDS admettent une unique solution forte.

**Proposition 1. Formule de Feynman-Kac** Soit  $u : (t, x_1, x_2) \rightarrow u(t, x_1, x_2)$  une fonction de  $C^{1,2,2}$  telle que ses dérivées partielles soient bornées en  $t, x_1$  et  $x_2$  et qui satisfait l'EDP pour  $f$  positive :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 x_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 x_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \mu_1 x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \mu_2 x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - ru = 0, \quad [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(T, x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (11)$$

Alors pour tout  $(t, x_1, x_2) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , on obtient :

$$u(t, x_1, x_2) = \mathbb{E} \left[ e^{-\int_t^T r(s, S_s)ds} f(S_T) | S_0 = (x_1, x_2) \right] \quad (12)$$

où le taux d'intérêt  $r = r(t, S_t)$  est une fonction déterministe.

Dans le cadre de notre étude, on suppose que le taux d'intérêt est constant  $r(t, S_t) \equiv r$ , et la condition terminale est  $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1 - K)^+$ .

## 4.3 Modèle de Samuelson et Black-Scholes

Le système d'EDS (10) reste très général et convient à une étude théorique. Cependant, lorsque l'on veut appliquer nos méthodes en pratique et établir des calculs explicites, il convient de spécifier le modèle et le rendre plus maniable. Supposons que  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$  et  $\rho$  soient des constantes indépendantes de  $(t, S)$ . En posant  $W_t^1 = \rho\tilde{W}_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{W}_t^2$  et  $W_t^2 = \tilde{W}_t^2$ , deux processus de Wiener de corrélation  $\rho$ , on a :

$$\begin{cases} \frac{dS_t^1}{S_t^1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_t^1 \\ \frac{dS_t^2}{S_t^2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_t^2 \end{cases} \quad (13)$$

Les solutions de ces EDS sont :

$$\begin{cases} S_t^1 = S_0^1 e^{(\mu_1 - \sigma_1^2/2)t + \sigma_1 W_t^1} \\ S_t^2 = S_0^2 e^{(\mu_2 - \sigma_2^2/2)t + \sigma_2 W_t^2} \end{cases} \quad (14)$$

Si les conditions initiales  $S_0^1$  et  $S_0^2$  sont supposées déterministes, alors  $S^1$  et  $S^2$  sont de loi log-normale : c'est le modèle de Samuelson aussi connu sous le nom de Black-Scholes.

## 4.4 Méthodes numériques

N'ayant donc pas de formule fermée permettant de calculer les prix des options call spread, on devra se contenter de méthodes numériques qui permettent de les approcher. On considère le modèle Markovien dans cette section.

**Solutionneur d'EDP** - On peut estimer un prix de l'option spread par un solutionneur d'équations différentielles partielles. Pour cela, il faut réduire l'équation (11) à une équation parabolique non-dégénérée de dimension 3, à l'aide du changement de variable  $(x_1, x_2) = (\log u_1, \log u_2)$ . Parce qu'il s'agit de la méthode la plus répandue en mathématiques, l'article ne s'attarde pas son implémentation.

**Arbres binômiaux** - En supposant les coefficients de diffusion des deux sous-jacents constants, on écrit :

$$\begin{cases} S_t^i = S_0^i \exp \left( \left( \mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) t + \sigma_i \tilde{W}_t^i \right) & i = 1, 2 \\ \mathbb{E}[\tilde{W}_t^1 \tilde{W}_t^2] = \rho t \end{cases} \quad (15)$$

où  $\tilde{W}^1$  et  $\tilde{W}^2$  sont des mouvements Browniens. L'idée est de discrétiser le vecteur gaussien  $(\sigma_1 W_t^1, \sigma_2 W_t^2)$  de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\Sigma t$  avec

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left( \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left( \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 - 4(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \right) \quad \theta = \arctan \left( \frac{\lambda_1 - \sigma_1^2}{\rho \sigma_1 \sigma_2} \right) \end{aligned}$$

On peut dès lors écrire notre vecteur gaussien comme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 W_t^1 \\ \sigma_2 W_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sqrt{\lambda_1} B_t^1 - \sin \theta \sqrt{\lambda_2} B_t^2 \\ \sin \theta \sqrt{\lambda_1} B_t^1 + \cos \theta \sqrt{\lambda_2} B_t^2 \end{pmatrix}$$

où  $(B^1, B^2)$  est un mouvement Brownien standard de dimension 2. Ainsi, discrétiser  $(\sigma_1 W_t^1, \sigma_2 W_t^2)$  revient à discrétiser deux mouvements Browniens standards. On introduit deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  i.i.d à valeurs dans  $\{-h, 0, h\}$  avec les probabilités respectives  $(p, 1 - 2p, p)$ , où  $p = 1/6$  et  $h = \sqrt{3dt}$ . Ces dernières vont permettre de simuler les incréments des deux Browniens. De cette façon, on obtient les probabilités de notre arbre trinomial pour un couple de sous-jacents. De la même manière que pour le cas simple décrit dans *Options, futures et autres actifs dérivés* de J. Hull, on calcule numériquement le prix de l'option en simulant la diffusion jusqu'au temps terminal à travers l'arbre.

**Méthodes de Monte-Carlo** - Une autre méthode classique de valorisation est la méthode de Monte Carlo qui se base sur la loi des grands nombres. En effet, le prix de l'option au temps  $t = 0$  s'écrit :

$$u(0, x_1, x_2) = \mathbb{E} \left[ e^{-\int_0^T r(s, S_s) ds} f(S_T) \right] \quad \text{avec la condition initiale } S_0 = (x_1, x_2) \quad (16)$$

En calculant la moyenne d'un grand nombre de simulations de  $f(S_T)$ , on peut espérer approcher cette quantité. Il est également possible d'améliorer la convergence et de contrôler l'erreur de cet estimateur par des méthodes de réduction de la variance (stratification, variables de contrôle, variables antithétiques, échantillonnage d'importance, ...). Il existe également l'erreur d'approximation qui est elle, due aux estimations de la trajectoire de  $S$ . En effet, dans un contexte général, on ne dispose pas de formule explicite pour décrire la dynamique de  $S$ . Ainsi, il est nécessaire de simuler la totalité de sa trajectoire en utilisant un pas de temps  $\Delta t$  choisi avec précaution. En revanche, lorsque les coefficients de diffusion sont déterministes, il est possible de calculer directement le prix à maturité du sous-jacent :

$$\begin{aligned} S_T^1 &= S_0^1 \exp \left( \left( \mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) T + \sigma_1 \rho \sqrt{T} U + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{T} V \right) \\ S_T^2 &= S_0^2 \exp \left( \left( \mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) T + \sigma_2 \sqrt{T} U \right) \end{aligned}$$

où  $U$  et  $V$  sont deux variables gaussiennes standards indépendantes. Cette méthode reste valide lorsque les coefficients sont déterministes mais dépendent du temps.

**Transformée de Fourier** - Très utilisée lorsque les coefficients de (10) sont déterministes et constants, cette méthode permet d'approximer les intégrales dans l'expression (8).

La méthode de Monte-Carlo est critiquée par les auteurs principalement parce qu'elle ne permet pas de calculer les sensibilités des options de manière efficace, alors qu'elles sont d'une importance cruciale dans la réplcation de portefeuille. En effet, une méthode classique en analyse numérique est la méthode des différences finies pour approcher les grecques par Monte-Carlo. Toutefois, elle demande un nombre de simulations jugé déraisonnable et est sujette à plusieurs sources d'erreur qui viennent à amoindrir la qualité de l'estimateur. Pour pallier à cette difficulté, on peut envisager une méthode des poids, en particulier par le calcul de Malliavin même si elle est décrite comme trop complexe et moins efficace que d'autres. En revanche, l'arbre trinomial possède le mérite d'estimer facilement les grecques mais ses inconvénients sont sa vitesse de convergence lente et les complications engendrée par des dimensions plus grandes. Au delà de ça, aucune de ces méthodes ne permettent de calculer les paramètres implicites du modèle.

## 5 Modèle de Bachelier

Le modèle de Bachelier est la première méthode d'approximation qui mène aux formules fermées que l'on recherche. L'idée part de l'observation que la différence entre deux variables de loi log-normale (comme un spread) est comparable à une loi normale. Plutôt que d'utiliser un modèle qui décrit le comportement de deux sous-jacents, on pourrait donc modéliser le comportement du spread. On travaille avec des mouvements Browniens arithmétiques et non plus géométriques comme dans le modèle de Samuelson. Ici, on supposera que le spread  $(S_t)_t$  suit la dynamique sous la probabilité risque-neutre :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma dW_t \quad (17)$$

où  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement Brownien standard et  $\mu = r$ ,  $\sigma \geq 0$  sont des constantes déterministes.

En effet, on définit le spread  $S_t = \alpha_2 S_t^2 - \alpha_1 S_t^1$  et les dynamiques des sous-jacents  $S^1$  et  $S^2$  par :

$$\begin{cases} dS_t^1 = \mu_1 S_t^1 dt + \sigma_1 dW_t^1 & , \quad S_0^1 = x_1 \\ dS_t^2 = \mu_2 S_t^2 dt + \sigma_2 dW_t^2 & , \quad S_0^2 = x_2 \end{cases}$$

où  $\sigma_1, \sigma_2$  sont des constantes positives, et  $W^1, W^2$  deux mouvements Browniens de corrélation  $\rho$ . Alors si on choisit  $\sigma = \sqrt{\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 - 2\rho \alpha_1 \alpha_2 \sigma_1 \sigma_2}$  et  $W_t = \frac{\alpha_2 \sigma_2}{\sigma} W_t^2 - \frac{\alpha_1 \sigma_1}{\sigma} W_t^1$ , on obtient l'expression (17).

### 5.1 Formule de valorisation

**Proposition 2. Approximation de Bachelier** On considère les dynamiques

$$\begin{cases} dS_t^1 = \mu_1 S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^1 \\ dS_t^2 = \mu_2 S_t^2 dt + \sigma_2 S_t^2 dW_t^2 \end{cases} \quad (18)$$

Si la valeur du spread à maturité est de loi gaussienne, alors le prix  $C_0$  de l'option call spread de maturité  $T$  et de strike  $K$  est :

$$C_0 = (m(T) - Ke^{-rT})\Phi\left(\frac{m(T) - Ke^{-rT}}{s(T)}\right) + s(T)\phi\left(\frac{m(T) - Ke^{-rT}}{s(T)}\right) \quad (19)$$

avec

$$\begin{aligned} m(T) &= (x_2 - x_1)e^{(\mu-r)T} \\ s^2(T) &= e^{2(\mu-r)T} \left[ x_1^2(e^{\sigma_1^2 T} - 1) - 2x_1x_2(e^{\rho\sigma_1\sigma_2 T} - 1) + x_2^2(e^{\sigma_2^2 T} - 1) \right] \end{aligned}$$

et où  $\phi(x)$  et  $\Phi(x)$  sont respectivement la densité et la fonction de répartition de  $\mathcal{N}(0, 1)$ , c'est-à-dire

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

La preuve de ce résultat consiste à supposer que le spread  $S$  suit une loi normale dont on déduit sa moyenne  $\mathbb{E}[S_T^2 - S_T^1] = (x_2 - x_1)e^{\mu T}$  et sa variance  $\mathbb{V}(S_T^2 - S_T^1) = s^2(T)e^{2rT}$ . Donc on a :

$$C_0 = e^{-rT} \mathbb{E}[S_T - K]^+ = \mathbb{E}[(m(T) - Ke^{-rT} + s(T)\xi)^+] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{m/s}^{\infty} (m + su) e^{-u^2/2} du$$

où  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . En particulier, si l'on résout l'EDS (17), on a  $S_t = e^{\mu t} S_0 + \sigma \int_0^t e^{\mu(t-u)} dW_u$ . Ainsi, on observe que le spread  $S$  suit bien une loi gaussienne de moyenne  $e^{\mu t} S_0$  et de variance  $\sigma^2 \int_0^t e^{2\mu u} du = \sigma^2 \frac{e^{2\mu t} - 1}{2\mu}$ . Ainsi, on peut appliquer la proposition pour obtenir une formule fermée. On notera que le raisonnement reste le même si  $\sigma$  dépend du temps.

## 5.2 Performances

Dans l'article, on évalue cette approche lorsque la dynamique des sous-jacents suivent des mouvements Brownien géométriques (18), en comparant des résultats avec les valeurs réelles de Black-Scholes et en variant les paramètres  $K$  et  $\rho$  d'un même exemple. Les résultats montrent que l'approximation de Bachelier semble bonne quand le time-to-maturity est faible indépendamment de la corrélation du moment que le strike est négatif. Un graphe en trois dimensions révèle que l'erreur d'estimation augmente avec le strike et décroît avec la corrélation.

## 5.3 Cohérence avec la courbe Forward

Comme abordé dans la section 3 de ce rapport, il est important que notre résultat coïncide avec la courbe Forward du modèle. Passons donc en revue la procédure de calibration des données dans le cadre d'un spread. Dans les marchés de l'énergie, on rappelle que la nature des commodités influe grandement sur la structures des données que les acteurs du marchés collectent. Notamment, les maturités des contrats dont on observe les prix ne sont probablement pas les même pour les deux commodités étudiées. Par une interpolation ou une méthode de régression, on devra alors en déduire les prix pour les mêmes maturités choisies, ce qui nous permet de facilement calculer les prix des spreads. Supposons que

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t dW_t \quad (20)$$

$$S_t = e^{\mu t} S_0 + \int_0^t \sigma_u e^{\mu(t-u)} dW_u \quad (21)$$

On fixe le taux d'intérêt à une valeur constante et on a le prix d'un contrat Forward de maturité  $T$  :

$$F(t, T) = \mathbb{E}_t[S_T] = \mathbb{E}_t \left[ e^{\mu(T-t)} S_t + \int_t^T \sigma_s e^{\mu(T-s)} dW_s \right] = e^{\mu(T-t)} S_t$$

où  $\mathbb{E}_u$  est l'espérance conditionnellement à  $(S_t)_{t \leq u}$ . On se donne maintenant une courbe Forward  $T \rightarrow F_0(T)$  obtenue par lissage des données. Si l'on reprend (20) avec  $\mu = \mu_t$  qui dépend du temps, on a :

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t dW_t \quad (22)$$

$$S_t = e^{\int_0^t \mu_s ds} S_0 + \int_0^t \sigma_u e^{\int_0^t \mu_s ds} dW_u \quad (23)$$

$$F(0, T) = \mathbb{E}[S_T] = S_0 e^{\int_0^T \mu_s ds} \quad (24)$$

Pour que le modèle s'accorde à la courbe Forward observée à ce jour, il faut donc qu'il vérifie la relation :

$$\mu_T = \frac{d}{dT} \log F_0(T) \quad (25)$$

Ainsi, en choisissant un modèle paramétrique plus large, on reproduire la courbe de marché et adapter la formule de valorisation (19). Par exemple ici, on a les fonctions et conditions suivantes :

$$m(T) = (x_2 - x_1) e^{\int_0^T (\mu_u - r) du} \quad (26)$$

$$s^2(T) = e^{2 \int_0^T (\mu_u - r) du} \left[ x_1^2 (e^{\sigma_1^2 T} - 1) - 2x_1 x_2 (e^{\rho \sigma_1 \sigma_2 T} - 1) + x_2^2 (e^{\sigma_2^2 T} - 1) \right] \quad (27)$$

$$\sigma_t = \sqrt{e^{2 \int_0^t \mu_u du} \frac{d}{dt} \left( e^{-2 \int_0^t \mu_u du} s^2(t) \right)} \quad (28)$$

## 6 Cas particulier où $K=0$

Cette configuration d'option correspond à une option d'échange d'une commodité avec une autre à un temps de maturité défini  $T$ . Quand les sous-jacents sont de loi log-normale, il existe déjà une formule fermée pour évaluer le prix de cette option. Elle a été introduite par Margrabe en 1978 et est considérée comme une extension de la formule de Black-Scholes. L'option d'échange est attribuée au flux terminal :

$$(S_T^2 - S_T^1)^+ \quad (29)$$

On suppose que les deux sous-jacents suivent les dynamiques risque-neutre de mouvements Browniens géométriques :

$$\begin{cases} dS_t^1 = r S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^1 & , \quad S_0^1 = x_1 \\ dS_t^2 = r S_t^2 dt + \sigma_2 S_t^2 dW_t^2 & , \quad S_0^2 = x_2 \end{cases}$$

où le taux sans risque  $r$  et les volatilités  $\sigma_1, \sigma_2$  sont constants, et  $W^1, W^2$  sont deux mouvements Browniens de corrélation  $\rho$ , c'est-à-dire  $\mathbb{E}[dW_t^1 dW_t^2] = \rho dt$ .

**Proposition 3. Formule de Margrabe** Sous les hypothèses ci-dessus, le prix d'une option d'échange de maturité  $T$  et de strike  $K$  est donné par :

$$C_0 = x_2 \Phi(d_1) - x_1 \Phi(d_2) \quad (30)$$

où

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \frac{\sigma}{2}\sqrt{T} \quad , \quad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \frac{\sigma}{2}\sqrt{T} \quad , \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \quad (31)$$

Cette formule est aussi vraie pour n'importe quel temps  $t$ , il suffit de remplacer les valeurs  $x_1, x_2$  par les prix des sous-jacents au temps  $t$ .  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

## 7 Méthode de Carmona & Durrleman

Dans cette section, Carmona et Durrleman considèrent une méthode d'approximation du prix de l'option spread pour un strike non nul en restant dans un contexte de mouvements Browniens géométriques. On se place dans le modèle de Samuelson où les dynamiques des sous-jacents sont :

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1[(r - q_1)dt + \sigma_1 dW_t^1] & , \quad S_0^1 = x_1 \\ dS_t^2 = S_t^2[(r - q_2)dt + \sigma_2 dW_t^2] & , \quad S_0^2 = x_2 \end{cases} \quad (32)$$

où  $q_1, q_2$  sont les taux de dividendes instantanés, les volatilités  $\sigma_1, \sigma_2$  sont positives et constantes, et  $W^1, W^2$  sont deux mouvements Browniens de corrélation  $\rho$ . Ici, les sous-jacents sont des actions mais pour adapter cette méthode à des contrats futures, il suffit de prendre  $q_1 = q_2 = r$ . Encore une fois, le prix de l'option peut s'écrire comme une espérance qui dépend des valeurs terminales  $S_T^1, S_T^2$  :

$$C_0 = e^{-rT} \mathbb{E} \left[ \left( x_2 e^{(r - q_2 - \sigma_2^2/2)T + \sigma_2 W_T^2} - x_1 e^{(r - q_1 - \sigma_1^2/2)T + \sigma_1 W_T^1} - K \right)^+ \right] \quad (33)$$

Comme il s'agit d'une intégrale d'une fonction de variables gaussiennes multi-dimensionnelle, on a :

$$C_0 = \mathbb{E} \left[ \left( \alpha e^{\beta X_1 - \beta^2/2} - \gamma e^{\delta X_2 - \delta^2/2} - \kappa \right)^+ \right] = \Pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \rho) \quad (34)$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa$  sont constants et  $X_1, X_2$  suivent une loi jointe gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$  de corrélation  $\rho$ . Ici :

$$\alpha = x_2 e^{-q_2 T} \quad , \quad \beta = \sigma_2 \sqrt{T} \quad , \quad \gamma = x_1 e^{-q_1 T} \quad , \quad \delta = \sigma_1 \sqrt{T} \quad , \quad \kappa = K e^{-rT} \quad (35)$$

### 7.1 Formule de valorisation

Cette méthode se base sur leur travaux antérieurs qui montrent que par des propriétés de la loi normale multivariée et des arguments de convexité, on produit une borne inférieure du prix de l'option qui permet une bonne approximation du prix exact. Notons d'abord  $\theta^*$  la solution de l'équation où  $\rho = \cos \phi$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta \cos \theta} \ln \left( -\frac{\beta \kappa \sin(\theta + \phi)}{\gamma(\beta \sin(\theta + \phi) - \delta \sin(\theta))} \right) - \frac{\delta \cos \theta}{2} = \\ \frac{1}{\beta \cos(\theta + \phi)} \ln \left( -\frac{\delta \kappa \sin(\theta)}{\alpha(\beta \sin(\theta + \phi) - \delta \sin(\theta))} \right) - \frac{\beta \cos(\theta + \phi)}{2} \end{aligned} \quad (36)$$

**Proposition 4. Approximation de Carmona-Durrleman** Si on pose :

$$\begin{aligned} d^* &= \frac{1}{\sigma \cos(\theta^* - \psi) \sqrt{T}} \ln \left( \frac{x_2 e^{-q_2 T} \sigma_2 \sin(\theta^* + \phi)}{x_1 e^{-q_1 T} \sigma_1 \sin(\theta^*)} \right) - \frac{1}{2} (\sigma_2 \cos(\theta^* + \phi) + \sigma_1 \cos(\theta^*)) \sqrt{T} \\ \cos \phi &= \rho \quad \text{et} \quad \cos \psi = \frac{\sigma_1 - \rho \sigma_2}{\sigma} \end{aligned}$$

Alors  $\hat{p}$  est un estimateur du prix de l'option spread :

$$\hat{p} = x_2 e^{-q_2 T} \Phi \left( d^* + \sigma_2 \cos(\theta^* + \phi) \sqrt{T} \right) - x_1 e^{-q_1 T} \Phi \left( d^* + \sigma_1 \sin(\theta^*) \sqrt{T} \right) - K e^{-rT} \Phi(d^*) \quad (37)$$

En particulier,  $\hat{p}$  est le prix exact de l'option si  $K = 0$ , ou  $x_1 = 0$ , ou  $x_2 = 0$  ou  $\rho = -1$ . En effet, si  $K = 0$ , on retrouve la formule de Margrabe, et si  $x_1 x_2 = 0$ , on retrouve la formule de Black-Scholes.



## 7.2 Calcul des grecques

Quand bien même il ne s'agirait que d'une approximation, bien que jugée très précise,  $\hat{p}$  est définie comme une formule fermée et permet de construire un portefeuille de sous-couverture (car basée sur la borne inf. du prix). On rapporte quelques résultats des travaux des auteurs.

**Proposition 5. Portefeuille de sous-couverture** Soit un portefeuille comprenant  $\Delta_1$  actifs  $S^1$  et  $\Delta_2$  actifs  $S^2$  aux temps  $t \leq T$  avec

$$\Delta_1 = -e^{-q_1 T} \Phi \left( d^* + \sigma_1 \cos(\theta^*) \sqrt{T} \right) \quad \Delta_2 = -e^{-q_2 T} \Phi \left( d^* + \sigma_2 \cos(\theta^* + \phi) \sqrt{T} \right)$$

Alors ce portefeuille est un portefeuille de sous-couverture de l'option spread, c'est-à-dire que sa valeur au temps terminale  $T$  est presque sûrement la borne inférieure du payoff de l'option. Ces valeurs correspondent aux dérivées partielles de  $\hat{p}$  par rapport à chacune des deux valeurs initiales  $S_0^1$  et  $S_0^2$  : on les appelle les Gammas.

**Proposition 6. Formules des grecques**

$$\vartheta_1 = \frac{\partial \hat{p}}{\partial \sigma_1} = x_1 e^{-q_1 T} \phi \left( d^* + \sigma_1 \cos(\theta^*) \sqrt{T} \right) \cos(\theta^*) \sqrt{T} \quad (38)$$

$$\vartheta_2 = \frac{\partial \hat{p}}{\partial \sigma_2} = -x_2 e^{-q_2 T} \phi \left( d^* + \sigma_2 \cos(\theta^* + \phi) \sqrt{T} \right) \cos(\theta^* + \phi) \sqrt{T} \quad (39)$$

$$\chi = \frac{\partial \hat{p}}{\partial \rho} = -x_1 e^{-q_1 T} \phi \left( d^* + \sigma_1 \cos(\theta^*) \sqrt{T} \right) \sigma_1 \frac{\sin(\theta^*)}{\sin(\phi)} \sqrt{T} \quad (40)$$

$$\kappa = \frac{\partial \hat{p}}{\partial K} = -\Phi(d^*) e^{-rT} \quad (41)$$

$$\Theta = \frac{\partial \hat{p}}{\partial T} = \frac{\sigma_1 \vartheta_1 + \sigma_2 \vartheta_2}{2T} - q_1 x_1 \Delta_1 - q_2 x_2 \Delta_2 - rK\kappa \quad (42)$$

## 7.3 Comparaison des méthodes

### Carmona-Durrleman vs. Kirk

Les performances numériques de ces deux méthodes sont comparables mais l'avantage principal de l'utilisation de  $\hat{p}$  est la possibilité de calculer facilement toutes les Grecques de l'option et ainsi une meilleure gestion du risque. Profitons-en pour rappeler la formule de Kirk et ses hypothèses :

**Proposition 7. Approximation de Kirk** On suppose que les deux sous-jacents suivent les dynamiques risque-neutre de mouvements Browniens géométriques :

$$\begin{cases} dS_t^1 = rS_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 dW_t^1 & , \quad S_0^1 = x_1 \\ dS_t^2 = rS_t^2 dt + \sigma_2 S_t^2 dW_t^2 & , \quad S_0^2 = x_2 \end{cases}$$

où le taux sans risque  $r$  et les volatilités  $\sigma_1, \sigma_2$  sont constants, et  $W^1, W^2$  sont deux mouvements Browniens de corrélation  $\rho$ , c'est-à-dire  $\mathbb{E}[dW_t^1 dW_t^2] = \rho dt$ . On pose

$$Y_t = \left( S_t^1 - K e^{-r(T-t)} \right)$$

Alors  $\tilde{p}$  est un estimateur du prix de l'option spread :

$$\tilde{p} = x_2 \Phi(d_1) - Y_0 \Phi(d_2) \quad (43)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \ln \left( \frac{x_2}{Y_0} \right) + \frac{\sigma}{2} T \quad , \quad d_2 = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \ln \left( \frac{x_2}{Y_0} \right) - \frac{\sigma}{2} T \quad , \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 \left( \frac{x_1^2}{Y_0} \right)^2 + \sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2 \left( \frac{x_1^2}{Y_0} \right) \quad (44)$$

### Carmona-Durrleman vs. Bachelier

Les simulations numériques de la méthode de Bachelier donnent une approximation toujours inférieure à  $\hat{p}$  qui dérive déjà de la borne inférieure du prix exact. Donc on considère cette approximation bien moins performante que les deux premières. Cela s'explique par son hypothèse peu robuste concernant la loi du spread et la perte d'information du modèle à une variable par rapport au modèle à deux variables log-normales.

## 7.4 Extension aux processus à sauts

Il semble important de mentionner un autre avantage de la méthode Carmona-Durrleman dans le secteur de l'énergie. En effet, certaines commodités comme l'électricité ou le gaz naturel montrent des sauts dans leurs processus de prix. Ils sont, entre autres, engendrés par des événements climatiques ou géopolitiques qui accroissent brutalement la demande. Il nous faut donc considérer le cas du spread dont les prix des sous-jacents sont modélisés par des processus à sauts. Ces modèles sont bien plus compliqués à mettre en place de part leur calibration statistique mais la nouvelle méthode d'approximation peut être ajustée à ces clauses.

Considérons les dynamiques risque-neutre de  $S^1$  et  $S^2$  de la forme :

$$\frac{dS_t^i}{S_{t-}^i} = (r - q_i - \lambda_i \mu_i)dt + \sigma_i dW_t^i + (e^{J_t^i} - 1)dN_t^i, \quad i = 1, 2 \quad (45)$$

où  $N_1, N_2$  sont deux processus de Poisson d'intensité  $\lambda_1, \lambda_2$  indépendants de  $W^1, W^2$ , et  $(J_t^1)_{t \geq 0}, (J_t^2)_{t \geq 0}$  sont deux suites indépendantes de variables aléatoires gaussiennes  $\mathcal{N}(m_i, s_i^2)$ . De la même manière que précédemment, on obtient :

$$S_T^i = x_i \exp \left( (r - q_i - \sigma_i^2/2 - \lambda_i \mu_i)T + \sigma_i W_T^i + \sum_{k=1}^{N_T^i} J_k^i \right), \quad i = 1, 2$$

**Proposition 8. Approximation pour le modèle de Merton** On pose  $\mu_i = e^{m_i + s_i^2/2} - 1$  pour  $i = 1, 2$ , et on note  $\hat{p}(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$  l'approximation déduit de (8). Alors  $\bar{p}$  est un estimateur du prix de l'option spread dans le modèle de Merton :

$$\bar{p} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)T} \frac{(\lambda_1 T)^i (\lambda_2 T)^j}{i!j!} \hat{p}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\rho}) \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= x_1 e^{-\lambda_1 \mu_1 T + i(m_1 + s_1^2/2)} & \hat{x}_2 &= x_2 e^{-\lambda_2 \mu_2 T + j(m_2 + s_2^2/2)} \\ \hat{\sigma}_1 &= \sqrt{\sigma_1^2 + i s_1^2/T} & \hat{\sigma}_2 &= \sqrt{\sigma_2^2 + j s_2^2/T} \\ \hat{\rho} &= \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + i s_1^2/T} \sqrt{\sigma_2^2 + j s_2^2/T}} \end{aligned}$$

## 8 Dynamique du prix spot des énergies

Comme nous l'avons déjà vu, les commodités dans l'industrie de l'énergie sont bien plus complexes que les modèles assez généraux que nous avons évoqués, le plus difficile restant l'électricité. Effectivement, c'est une commodité périssable instantanément, qui subit un effet de saisonnalité dépendamment de sa géolocalisation, mais aussi une forte sensibilité aux conditions météorologiques ainsi que des contraintes physiques, notamment de stockage. Ces raisons poussent donc à adapter et construire des modèles très spécifiques et réalistes pour évaluer les produits dérivés correctement. Cette section est, par conséquent, dédiée à l'adaptation de notre modèle du prix spot. Nous ne détaillerons pas l'entièreté de la méthode sous peine de répétition et évoquerons seulement les divergences avec le modèle original de la section 7.

On suppose que  $S_t^1$  et  $S_t^2$  sont les prix spot de deux commodités au temps  $t$ . Le modèle de Samuelson de mouvements Browniens géométriques n'est, dès lors, plus adapté car il manque de prendre en compte ce qu'on appelle la *mean reversion*. Ce phénomène est observé dans les processus dont la trajectoire tend à osciller autour d'une valeur centrale. Pour modéliser ces processus, on utilise les modèles d'Ornstein-Uhlenbeck géométriques, qu'on considère neutres au risque. Ils sont définis comme solutions des EDS :

$$dS_t^i = S_t^i [-\lambda_i (\log S_t^i - \alpha_i) dt + \sigma_i dW_t^i] \quad i = 1, 2 \quad (47)$$

où les coefficients de mean-reversion  $\lambda_i > 0$  sont des constantes positives,  $\sigma_i$  sont aussi des constantes positives,  $\mu_i$  sont des constantes réelles et  $W^i$  sont des mouvement Browniens de corrélation  $\rho$ . Les paramètres de ces processus sont facilement estimés grâce à des données historiques.

En posant  $\mu_i^\infty = \mu_i - \sigma_i^2/2\lambda_i$  et  $X_t^i = \log S_t^i$ , on se rend compte par Itô que  $X^i$  n'est rien d'autre qu'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck standard. Par ses propriétés connues, on en déduit une solution de l'équation (47) et on peut écrire :

$$C_0 = e^{-rT} \mathbb{E} \left[ (S_T^2 - S_T^1 - K)^+ \right] = \Pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \tilde{\rho}) \quad (48)$$

où

$$\begin{aligned}\alpha &= e^{-rT + \mu_2^\infty + e^{-\lambda_2 T}(x_2 - \mu_2^\infty) - \sigma_{2,T}^2/2} & , & \quad \beta = \sigma_{2,T} = \sigma_2 \sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda_2 T}}{2\lambda_2}} \\ \gamma &= e^{-rT + \mu_1^\infty + e^{-\lambda_1 T}(x_1 - \mu_1^\infty) - \sigma_{1,T}^2/2} & , & \quad \delta = \sigma_{1,T} = \sigma_1 \sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda_1 T}}{2\lambda_1}} \\ \tilde{\rho} &= \rho \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{(\lambda_1 + \lambda_2)/2} \frac{1 - e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T}}{\sqrt{1 - e^{-2\lambda_1 T}} \sqrt{1 - e^{-2\lambda_2 T}}} & , & \quad \kappa = K e^{-rT}\end{aligned}$$

Il est, en outre, possible d'inclure des sauts comme dans la section 7.4 pour modéliser les pics abruptes qui s'éloignent du niveau de réversion. L'électricité fait partie des exemples qui nécessitent un tel ajustement, ainsi dans un spark spread, on suppose que :

$$dS_t^2 = S_{t-}^2 [(r - \lambda\mu)dt + \sigma_2 dW_t^2 + (e^{J_t} - 1)dN_t] \quad (49)$$

où  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  indépendant de  $W^1, W^2$ ,  $(J_t)_{t \geq 0}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}(m, s^2)$  et  $\mu$  est une fonction de  $m$  et  $s^2$ .

## 9 Dynamiques de la courbe Forward

Venons-en maintenant à la seconde catégorie de modèles citée : la dynamique de la courbe Forward. Ils sont nécessaires car en pratique, les courbes produites par les méthodes que l'on a décrites sont très rarement en adéquation avec la réelle courbe Forward observée, d'où l'ajustement des modèles mais c'est une contrainte majeure car il nous faudrait les re-calibrer tous les jours afin qu'elles soient exploitables. Dans les modèles plus sophistiqués qui vont suivre, il est question de modéliser la dynamique de la courbe Forward entière.

On suppose que pour chaque maturité  $T$ , la dynamique de la courbe Forward est donnée par :

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} \mu(t, T) dt + \sum_{k=1}^n \sigma_k(t, T) dW_t^k \quad , \quad t \leq T \quad (50)$$

où  $W = (W^1, \dots, W^n)$  est un mouvement Brownien  $n$ -dimensionnel,  $\mu(t, T) \equiv r$  et les  $\sigma_k$  sont des fonctions déterministes. On l'appelle un modèle de courbe Forward à  $n$  facteurs. Sa solution explicite est :

$$F(t, T) = F(0, T) \exp \left[ \int_0^t \left[ \mu(s, T) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_k(s, T)^2 \right] ds + \sum_{k=1}^n \int_0^t \sigma_k(s, T) dW_s^k \right] \quad (51)$$

Clairement, les prix forward suivent une loi log-normale. En particulier :

$$F(t, T) = \alpha e^{\beta X - \beta^2/2} \quad \text{pour } X \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (52)$$

$$\alpha = F(0, T) \exp \left[ \int_0^t \mu(s, T) ds \right] \quad \beta = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k(s, T)^2}$$

Par ailleurs, le prix spot vaut  $S_t = F(t, t)$ , donc en remplaçant la maturité dans l'expression (51), puis en différenciant de part et d'autre de l'égalité, on en déduit la dynamique du sous-jacent :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left[ \frac{\partial \log F(0, t)}{\partial t} + D_t \right] dt + \sum_{k=1}^n \sigma_k(t, t) dW_t^k \quad (53)$$

$$\begin{aligned}\text{où} \quad D_t &= \mu(t, t) - \frac{1}{2}(\sigma_t^S)^2 + \int_0^t \frac{\partial \mu(s, t)}{\partial t} ds - \sum_{k=1}^n \int_0^t \sigma_k(s, t) \frac{\partial \sigma_k(s, t)}{\partial t} ds + \sum_{k=1}^n \int_0^t \frac{\partial \sigma_k(s, t)}{\partial t} dW_s^k \\ (\sigma_t^S)^2 &= \sum_{k=1}^n \sigma_k(t, t)^2\end{aligned}$$

Remarque : Dans la section 3, nous avons parlé d'un changement de variable pour ne plus manipuler des maturités  $T$  mais plutôt des temps-à-maturité  $\tau = T - t$ . Pour se faire, on pose les variables :

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t, \tau) &= F(t, t + \tau) & \tilde{\mu}(t, \tau) &= \mu(t, t + \tau) & \tilde{\sigma}_k(t, \tau) &= \sigma_k(t, t + \tau) \\ \text{d'où} \quad d\tilde{F}(t, \tau) &= \tilde{F}(t, \tau) \left[ \left( \frac{\partial \log \tilde{F}(t, \tau)}{\partial \tau} + \tilde{\mu}(t, \tau) \right) dt + \sum_{k=1}^n \tilde{\sigma}_k(t, \tau) dW_t^k \right] & , & \quad \tau \geq 0\end{aligned} \quad (54)$$

## 9.1 Calibration par *Principal Component Analysis* (PCA)

On va appliquer une technique de calibration standard appelée PCA aux courbes Forward de l'énergie. Dans cette sous-section, l'hypothèse fondamentale repose sur la forme des fonctions de volatilité  $\sigma_k$ , que l'on décrit ainsi :

$$\sigma_k(t, T) = \sigma(t)\sigma_k(T - t) = \sigma(t)\sigma_k(\tau) \quad (55)$$

On en déduit :

$$\sigma_t^S = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k(t, t)^2} = \sigma(t) \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k(0)^2} = \sigma(t)\tilde{\sigma}_k(0) \quad \text{où} \quad \tilde{\sigma}_k(\tau) = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k(\tau)^2} \quad (56)$$

Cette hypothèse implique que la fonction  $t \rightarrow \sigma(t)$  est un facteur dans une constante égale à la volatilité instantanée du prix spot. C'est ce qui va nous permettre d'estimer  $\sigma(t)$  à partir des données historiques. Il suffit de calculer l'écart-type glissant du prix spot sur un intervalle de temps mobile.

On suppose qu'à chaque jour  $t$ , pour des temps-à-maturité fixés  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , on ait estimé les prix forward pour chaque maturité  $T_1 = t + \tau_1, \dots, T_N = t + \tau_N$ . On a alors les dynamiques :

$$\frac{d\tilde{F}(t, \tau_i)}{\tilde{F}(t, \tau_i)} = \left( \frac{\partial \log \tilde{F}(t, \tau_i)}{\partial \tau} + \tilde{\mu}(t, \tau_i) \right) dt + \sigma(t) \sum_{k=1}^n \sigma_k(\tau_i) dW_t^k \quad i = 1, \dots, N \quad (57)$$

On définit la matrice  $F = [\sigma_k(\tau_i)]_{i=1, \dots, N, k=1, \dots, n}$  de taille  $N \times n$  et on peut supposer que ses  $n$  vecteur de  $\mathbb{R}^N$  sont orthogonaux. En appliquant la formule d'Itô, on sait dériver le logarithme du prix forward  $\tilde{F}(t, \tau_i)$ , ce qui donne une relation entre la matrice  $F$ ,  $\sigma(t)$  et la matrice de variance/covariance  $M_t$  :

$$M_t = \sigma(t)^2 \left( \sum_{k=1}^n \sigma_k(\tau_i) \sigma_k(\tau_j) \right) = \sigma(t)^2 F F^T \quad (58)$$

Ainsi, à partir de l'estimation de  $\sigma(t)$  et de la matrice de variance/covariance empirique, on sait déterminer par PCA les fonctions de volatilité  $\sigma_k$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

## 9.2 Exemple : Option spark spread

Soit  $F_e(t, T_e)$  et  $F_g(t, T_g)$  les prix des contrats Forward d'électricité de maturité  $T_e$  et de gaz naturel de maturité  $T_g$ . On considère le spark spread de maturité  $T$  et de payoff :

$$(F_e(T, \tau_e) - H F_g(T, \tau_g) - K)^+ \quad (59)$$

où  $H$  est le facteur de rendement fixé,  $K$  le strike du contrat et on suppose que  $T < \min T_1, T_2$ . Les prix forward de l'électricité et du gaz suivent les mêmes dynamiques que plus tôt :

$$\begin{cases} dF_e(t, T) = F_e(t, T) [\mu_e(t, T)dt + \sum_{k=1}^n \sigma_{e,k}(t, T) dW_t^k] \\ dF_g(t, T) = F_g(t, T) [\mu_g(t, T)dt + \sum_{k=1}^n \sigma_{g,k}(t, T) dW_t^k] \end{cases} \quad (60)$$

Chaque jour  $t$ , on dispose des prix des contrats d'électricité pour  $N^{(e)}$  temps-à-maturité  $\tau_1^{(e)} < \dots < \tau_{N^{(e)}}^{(e)}$  et des prix des contrats de gaz pour  $N^{(g)}$  temps-à-maturité  $\tau_1^{(g)} < \dots < \tau_{N^{(g)}}^{(g)}$ . En général,  $N^{(e)} = 12$  et  $N^{(g)} = 36$ . On suppose l'hypothèse (55) sur la forme des fonctions de volatilité pour les deux commodités. On paramètre notre modèle :

1. On calcule pour les deux commodités l'écart-type glissant sur un intervalle tournant de 30 jours. On obtient donc les fonctions  $\sigma^{(e)}(t)$  et  $\sigma^{(g)}(t)$ .
2. Soit  $X_t$  le vecteur aléatoire de taille  $N = N^{(e)} + N^{(g)}$  défini par :

$$X_t = \begin{bmatrix} \left( \frac{\log F_e(t+1, \tau_j^{(e)}) - \log F_e(t, \tau_j^{(e)})}{\tau_j^{(e)}(t)} \right)_{j=1, \dots, N^{(e)}} \\ \left( \frac{\log F_g(t+1, \tau_j^{(g)}) - \log F_g(t, \tau_j^{(g)})}{\tau_j^{(g)}(t)} \right)_{j=1, \dots, N^{(g)}} \end{bmatrix}$$

Par PCA, on obtient  $n$  facteurs : pour chacun d'entre eux, les  $N^{(e)}$  premiers coefficients donnent les volatilité de l'électricité  $\sigma_k^{(e)}(\tau)$  tandis que les  $N^{(g)}$  restants donnent ceux du gaz  $\sigma_k^{(g)}(\tau)$  pour  $k = 1, \dots, n$ .

En ce qui concerne la valorisation du spread, on sait exprimer son prix risque-neutre en  $t$  :

$$C_0 = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[ (F_e(T, T_e) - HF_g(T, T_g) - K)^+ \right] \quad (61)$$

où

$$F_e(T, T_e) = F_e(0, T_e) \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^T \sigma_{e,k}(s, T_e)^2 ds + \sum_{k=1}^n \int_0^T \sigma_{e,k}(s, T_e) dW_s^k \right]$$

$$F_g(T, T_g) = F_g(0, T_g) \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^T \sigma_{g,k}(s, T_g)^2 ds + \sum_{k=1}^n \int_0^T \sigma_{g,k}(s, T_g) dW_s^k \right]$$

Donc par la méthode de la section 7. on peut valoriser l'option spark spread avec  $S_t^1 = HF_g(t, T_g)$  et  $S_t^2 = F_e(t, T_e)$  avec les paramètres :

$$\alpha = F_e(t, T_e) \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{k=1}^n \int_0^T \sigma_{e,k}(s, T)^2 ds} \quad \rho = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^n \sigma_{e,k}(s, T_e) \sigma_{g,k}(s, T_g) ds$$

$$\gamma = HF_g(t, T_g) \quad \delta = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{k=1}^n \int_0^T \sigma_{g,k}(s, T)^2 ds}$$

## 10 Applications numériques

On présente dans cette section des résultats numériques de certaines méthodes citées. On considère les dynamiques :

$$\begin{cases} dS_t^1 = S_t^1 [r dt + \sigma_1 dW_t^1] & , \quad S_0^1 = x_1 \\ dS_t^2 = S_t^2 [r dt + \sigma_2 dW_t^2] & , \quad S_0^2 = x_2 \end{cases} \quad (62)$$

où les volatilités  $\sigma_1, \sigma_2$  sont positives et constantes, et  $W^1, W^2$  sont deux mouvements Browniens de corrélation  $\rho$ . On cherche à évaluer au temps  $t=0$ , le prix de l'option call européenne spread de payoff  $f(S_T^1, S_T^2) = (S_T^2 - S_T^1 - K)^+$ , c'est-à-dire la quantité

$$C_0 = e^{-rT} \mathbb{E} [(S_T^2 - S_T^1 - K)^+] \quad (63)$$

### 10.1 Cas où $K = 0$

On compare ici les résultats de la méthode de Monte Carlo, l'approximation de Bachelier, de Kirk et la formule de Margrabe. En ce qui concerne Monte Carlo, on peut aisément simuler les variables aléatoires :

$$S_T^1 = S_0^1 \exp \left( \left( \mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) T + \sigma_1 \rho \sqrt{T} U + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{T} V \right)$$

$$S_T^2 = S_0^2 \exp \left( \left( \mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) T + \sigma_2 \sqrt{T} U \right)$$

où  $U$  et  $V$  sont deux variables gaussiennes standards indépendantes. On obtient l'estimateur :

$$E_{\text{monte-carlo}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f((S_T^1)^{(i)}, (S_T^2)^{(i)}) \quad (64)$$

où  $((S_T^1)^{(i)}, (S_T^2)^{(i)})_i$  sont des réalisations indépendantes de  $(S_T^1, S_T^2)$ .

Pour notre simulation, on choisit  $x_1 = 50, x_2 = 80, \sigma_1 = 0.3, \sigma_2 = 0.7, r = 0.005, \rho = 0.2, T = 1$ .

Margrabe	Kirk	Bachelier	Monte Carlo
36.4961	36.4961	42.8457	36.446

FIGURE 1 – Estimation du prix du spread pour les paramètres  $x_1 = 50, x_2 = 80, \sigma_1 = 0.3, \sigma_2 = 0.7, r = 0.005, \rho = 0.2, T = 1, K = 0$

La figure 1 illustre bien le fait que l'approximation de Kirk dans le cas  $K = 0$  revient à une formule de Margrabe. Quant à l'approximation de Bachelier, elle semble moins performante qu'une méthode de Monte Carlo standard.

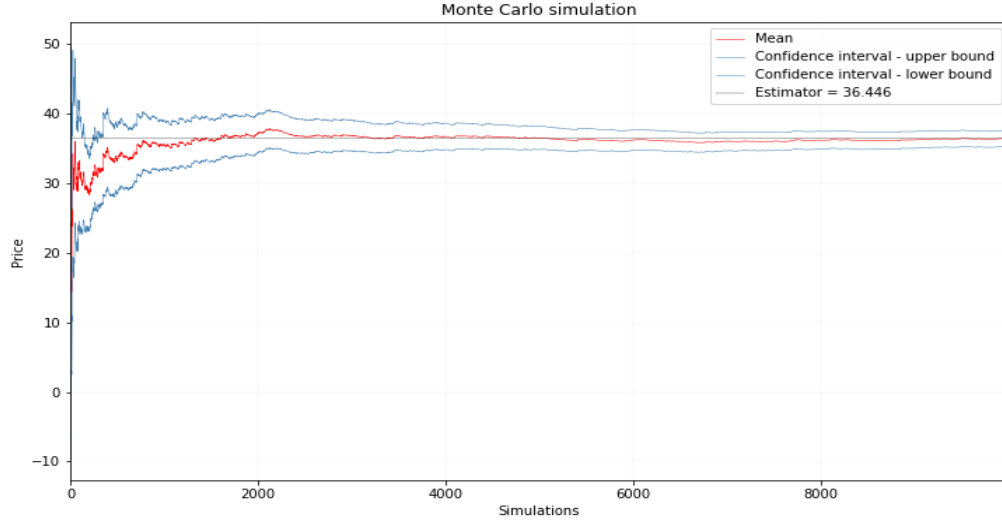


FIGURE 2 – Convergence de l'estimateur de Monte Carlo pour  $n = 10000$  simulations avec  $x_1 = 50, x_2 = 80, \sigma_1 = 0.3, \sigma_2 = 0.7, r = 0.005, \rho = 0.2, T = 1, K = 0$

## 10.2 Cas où $K \neq 0$

Cette fois, on n'utilise plus la formule de Margrabe. Des figures 3 à 6, on compare plusieurs résultats des estimateurs en s'intéressant à l'influence des paramètres  $K$  et  $T$  du modèle. On garde les mêmes paramètres sauf pour  $K = 20$  et on en fait varier qu'un à la fois.

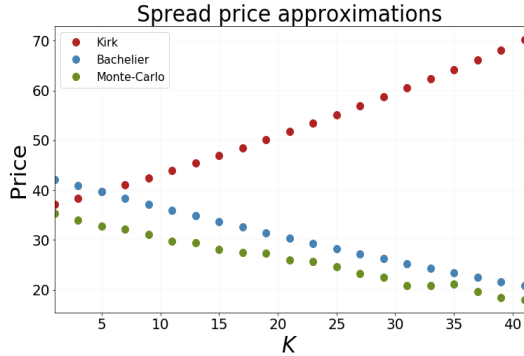


FIGURE 3 – Estimateurs en fonction de  $K$

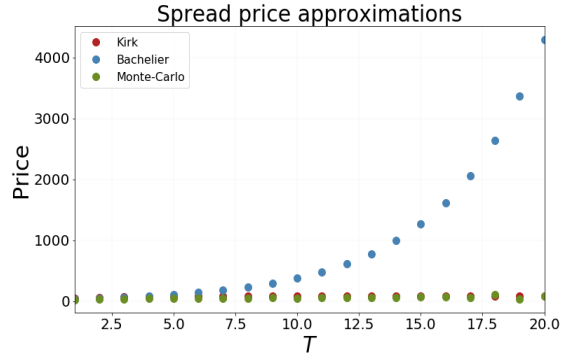


FIGURE 4 – Estimateurs en fonction de  $T$

La divergence de ces estimateurs, en particulier pour les spread de maturité élevée ou de strike élevé, nous poussent à remettre en question certaines méthodes d'approximation dans le contexte actuel. Si l'on était pas convaincu par les avertissements des auteurs quant au modèle de Bachelier et la méthode de Monte Carlo, ces simulations révèlent bien que ces dernières ont des limites.

## 11 Conclusion

Comme démontré graphiquement et le long de ce rapport, nombreux sont les outils de valorisations qui manquent de fiabilité lorsqu'il s'agit de spreads. La complexité de ce type d'option justifie le besoin de modèles plus sophistiqués et les précautions supplémentaires à prendre. Carmona et Durrleman ont toutefois apportés quelques éléments de réponse et plus précisément une nouvelle procédure d'approximation qui s'est avérée non seulement très efficace mais également utile à l'étude des sensibilités. Cette méthode, bien plus détaillée dans leur publication *Pricing and Hedging Spread Options in a Log-Normal Model* (2003) semble être la meilleure approche évoquée dans l'article. Ce dernier met en relief certaines difficultés de la valorisation de spreads par les méthodes connues, même s'il manque d'évoquer un problème considérable de l'approximation de Kirk : elle n'est valide que pour des strikes très bas.

Enfin, les auteurs exposent les ajustements qu'il est possible de mettre en place dans la procédure proposée afin de rendre chaque modèle plus réaliste. Les commodités étant principalement échangées sous forme de contrats Forwards, on s'intéresse aussi à la structure des échéances de prix Forward. Dans la dernière partie de l'article, on a énoncé la procédure de PCA qui offre des résultats satisfaisants, notamment dans le cas du pétrol brut ou du gaz naturel.

Depuis leur publication, ces résultats ont été maintes fois repris et d'autres méthodes analytiques ont vu le jour. Ce domaine est l'un des plus actifs à ce jour, d'autant plus que le secteur de l'énergie est le plus directement affecté par le climat, une thématique très actuelle. Il entretient, par ailleurs, des liens étroits avec le marché du carbone, comme vu en cours avec l'exemple du spark spread.

## 12 Références

- R. Carmona & V. Durrleman, "Pricing and hedging spread options", *Siam Review*, 45(4), 627-685, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- J. Hull, "Options, futures et autres actifs dérivés", 10<sup>th</sup> Edition, Pearson, 2018
- L. Clewlow & C. Strickland, "Energy derivatives : Pricing and risk management", Lacima Publications, 2000
- R. Carmona & V. Durrleman, "Pricing and Hedging Spread Options in a Log-Normal Model", *Working paper*, Department of Operations Research and Financial Engineering, Princeton University, 2003.
- E. Fournié, J-M. Lasry, J. Lebuchoux, P-L. Lions & N. Touzi, "Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance", *Finance and Stochastics*, Volume 3, Number 4, 391-412, Springer-Verlag, 1999.
- E. Fournié, J-M. Lasry, J. Lebuchoux & P-L. Lions, "Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance II", *Finance and Stochastics*, Volume 5, Number 2, 201-236, Springer-Verlag, 2001.
- G. Poitras, "Spread Options, Exchange Options, and Arithmetic Brownian Motion", *The Journal of Futures Markets*, 18, 487-517, 1998
- R.Aïd, "Electricity derivatives", *SpringerBriefs in Quantitative Finance*, Springer, 2015
- F.E. Benth, V.A. Kholodnyi & P.Laurence, "Quantitative Energy Finance", Springer, 2014