

PONTOS DE EQUILÍBRIO NA PROGRAMAÇÃO DE DOIS NÍVEIS
LINEAR

ALINE VIANA DE SOUZA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY
RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
DEZEMBRO - 2012

**PONTOS DE EQUILÍBRIO NA PROGRAMAÇÃO DE DOIS NÍVEIS
LINEAR**

ALINE VIANA DE SOUZA

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia, da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção de título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Dr. Luis Humberto Guillermo Felipe, D. Sc.

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
DEZEMBRO - 2012

PONTOS DE EQUILÍBRIO NA PROGRAMAÇÃO DE DOIS NÍVEIS LINEAR

ALINE VIANA DE SOUZA

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia, da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção de título de Mestre em Engenharia de Produção.

Aprovada em 18 de dezembro de 2012.

Comissão Examinadora:

Prof^a Gudelia Guillermina Morales de Arica, D. Sc. – UENF

Prof^o José Ramon Arica Chavez, D. Sc. – UENF

Prof^o Adelson Siqueira Carvalho, D. Sc. – IFF

Prof^o Luis Humberto Guillermo Felipe, D. Sc. – UENF
(orientador)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao mestre dos mestres, Deus, conhecedor de toda sabedoria. Ao meu marido, aos meus pais e irmãos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus, que conduziu com maestria todo o caminho dessa trajetória, principalmente nos momentos mais difíceis.

Ao professor Luis Guillermo pela oportunidade, pela dedicação, pela paciência, mas principalmente pela parceria na transmissão do seu saber.

Aos professores do Laboratório de Engenharia de Produção pelo apoio e atenção: Arica e Galdino, meu muito obrigado. Agradeço também a profª Gudelia pelo incentivo profissional na minha vida antes mesmo da graduação.

À Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro.

Às amizades feitas e mantidas por essa trajetória: Lucas Louzada, Laís Pillar, Cláudio Marouvo, Túlio Baita, Cléber Navarro e tantos outros que mesmo em poucos momentos partilharam algumas horas em laboratório.

À Márcia Bauman, futura engenheira de produção, que muito me ajudou nos testes computacionais.

Agradeço aos meus irmãos que na inocência e na curiosidade do saber viam e viviam comigo as minhas conquistas e as minhas angústias.

Agradeço em especial à minha mãe, que no silêncio da sua timidez, sempre foi a minha maior torcedora, porque no seu simples olhar sempre estava a força que eu precisava.

Agradeço ao meu anjo, meu amado esposo Cyro, por toda paciência e tolerância, por trilhar comigo em busca dessa conquista cada dia de nossas vidas.

RESUMO

Os problemas em Dois Níveis apresentam grande importância na programação matemática, devido à capacidade de representar com bastante realismo problemas de natureza hierárquica. Desse modo, apresentam na literatura diversas aplicações em diferentes áreas. Este trabalho tem como propósito abordar o método proposto por Campêlo no ano de 1999 que consiste em caracterizar as soluções ótimas locais de problemas em Dois Níveis Linear (PDNLP) através de Pontos de Equilíbrio do problema Penalizado. Os problemas PDNLP são problemas em Dois Níveis Linear que não apresentam no primeiro nível restrição dependente da variável do seguidor. Enquanto que o Problema Penalizado, nada mais é que o problema em Dois Níveis Linear após reformulação através das condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), em que algumas das restrições – as chamadas restrições de complementaridade – aparecem penalizadas na função objetivo do primeiro nível. Para abordar este método, ressaltou-se neste trabalho os aspectos geométricos envolvidos nesta problemática, objetivando assim adquirir a análise das tabelas simplex necessárias para a caracterização das soluções ótimas locais de PDNLP. Dessa maneira, os problemas aqui destacados apresentam dimensão baixa. Como ilustração prática de problemas em Dois Níveis apresenta-se o problema de tarifação. Apresentam-se ainda alguns resultados de testes computacionais, que visam validar este trabalho.

Palavras-chave: Programação de Dois Níveis Linear, Pontos de Equilíbrio e Abordagem Geométrica.

ABSTRACT

Bilevel Problems have great importance in mathematical programming, due to the ability to represent fairly realistic hierarchical nature problems. Thus, in the literature there are variety applications in different areas. This paper aims to approach the method proposed to Campêlo in 1999 which consists in characterize the local optimal solutions to the Linear Bilevel problems (PDNLP) through Equilibrium Points of Penalized problem. PDNLP problems are problems in Linear Bilevel not showing on the first level constraints dependent variable of the follower. While the Penalized Problem is nothing more than the Linear Bilevel problem after reformulation through the Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conditions, where some of the constraints – known as complementarity constraints - appear penalized in the objective function of the first level. To approach this method, underscored in this paper the geometrical aspects involved in this problem, aiming thus acquire analysis of simplex tableaux needed for the characterization of local optimal solutions to PDNLP. Thus, the problems pointed out here have low dimension. As a practical illustration of Bilevel problems presents the problem of pricing. We also present some results of computational tests, aimed to validating this paper.

Keywords: Linear Bilevel Programming, Equilibrium Points and Geometric Approach.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	xii
LISTA DE TABELAS	xiii
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	01
1.1 Objetivos	02
1.1.1 Objetivo geral	02
1.1.2 Objetivos específicos	02
1.2 Justificativa	04
1.3 Estrutura do Trabalho	05
CAPÍTULO 2 - PROGRAMAÇÃO EM DOIS NÍVEIS LINEAR	07
2.1 Formulação do Problema	07
2.2 Propriedades	14
2.3 Aplicações	15
CAPÍTULO 3 - REFORMULAÇÃO DO PROBLEMA EM DOIS NÍVEIS LINEAR	19
3.1 As Condições KKT	19
3.2 O Problema Reformulado	20
CAPÍTULO 4 - PONTOS DE EQUILÍBRIO	22
4.1 O Problema Penalizado	22
4.2 Pontos de Equilíbrio: Conceitos	23
4.3 Condições de Otimalidade	24
4.4 Algoritmo	28
5. RESULTADOS NUMÉRICOS	30
5.1 Problemas Considerados: Abordagem Geométrica	30
5.2 Testes Computacionais	55
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	59
6.1 Conclusões	59

6.2 Recomendações para trabalhos futuros	60
.....	
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	61

APÊNDICE

➤ Apêndice A – Conjunto Convexo e Conjunto Conexo	64
➤ Apêndice B – Condições De Regularidade	66
➤ Apêndice C – Análise das Tabelas Simplex: Solução Ótima Local de PDNLP	67

LISTA DE FIGURAS

Figura 1:	Conjunto Viável do problema relaxado A	10
Figura 2:	Conjunto Viável do problema relaxado B	10
Figura 3:	Conjunto Viável do problema de Segundo Nível A e B	11
Figura 4:	Conjunto Solução do problema de Segundo Nível A e B	12
Figura 5:	Conjunto Viável de PDNLP A	12
Figura 6:	Conjunto Viável de PDNLP B	12
Figura 7:	Conjunto Solução de PDNLP A	13
Figura 8:	Conjunto Solução de PDNLP B	13
Figura 9:	Problema de tarifação	18
Figura 10:	Conjunto solução do sistema linear não homogêneo $Bz = b$	31
Figura 11:	Representação geométrica do conjunto Z	32
Figura 12:	Conjunto solução do sistema linear não homogêneo $Ds = d$	32
Figura 13:	Conjunto Viável do problema relaxado (exemplo 4)	38
Figura 14:	Interpretação geométrica do conjunto viável do problema de Segundo Nível (exemplo 4)	39
Figura 15:	Conjunto Viável do problema de Segundo Nível (exemplo 4)	40
Figura 16:	Conjunto Viável do problema de Segundo Nível para $x > 2$ (exemplo 4)	41
Figura 17:	Conjunto Solução do problema de Segundo Nível (exemplo 4)	42
Figura 18:	Conjunto Viável de PDNLP (exemplo 4)	42
Figura 19:	Conjunto Viável de PDNLP no problema relaxado (exemplo 4)	42
Figura 20:	Representação geométrica do conjunto solução de PDNLP (exemplo 4)	43
Figura 21:	Conjunto solução do sistema linear não homogêneo $Bz = b$	46

Figura 22:	Conjunto solução do sistema linear não homogêneo $Ds = d$	47
Figura AA1	Conjunto Convexo	64
Figura AA2	Conjunto Não Convexo	64
Figura AA3	Combinação Convexa de dois pontos	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Tabela simplex inicial de $P(M, z_0)$ do exemplo 3	33
Tabela 2:	Tabela simplex ótima de $P(M, z_0)$ do exemplo 3	33
Tabela 3:	Tabela simplex inicial de $P(M, z_1)$ do exemplo 3	34
Tabela 4:	Tabela simplex ótima de $P(M, z_1)$ do exemplo 3	34
Tabela 5:	Tabela simplex inicial de $P(M, z_2)$ do exemplo 3	34
Tabela 6:	Tabela simplex ótima de $P(M, z_2)$ do exemplo 3	34
Tabela 7:	Tabela simplex inicial de $P(M, z_3)$ do exemplo 3	35
Tabela 8:	Tabela simplex ótima de $P(M, z_3)$ do exemplo 3	35
Tabela 9:	Tabela simplex inicial de $P(M, s_1)$ do exemplo 3	36
Tabela 10:	Tabela simplex ótima de $P(M, s_1)$ do exemplo 3	36
Tabela 11:	Tabela simplex inicial de $P(M, s_2)$ do exemplo 3	36
Tabela 12:	Tabela simplex ótima de $P(M, s_2)$ do exemplo 3	36
Tabela 13:	Tabela simplex inicial de $P(M, z_1)$ do exemplo 4	48
Tabela 14:	Tabela simplex ótima de $P(M, z_1)$ do exemplo 4	48
Tabela 15:	Tabela simplex inicial de $P(M, z_2)$ do exemplo 4	49
Tabela 16:	Tabela simplex ótima de $P(M, z_2)$ do exemplo 4	49
Tabela 17:	Tabela simplex inicial de $P(M, z_3)$ do exemplo 4	50
Tabela 18:	Tabela simplex ótima de $P(M, z_3)$ do exemplo 4	50
Tabela 20:	Tabela simplex ótima de $P(M, z_4)$ do exemplo 4	50
Tabela 21:	Tabela simplex inicial de $P(M, z_5)$ do exemplo 4	51
Tabela 22:	Tabela simplex ótima de $P(M, z_5)$ do exemplo 4	51

Tabela 23: Tabela simplex inicial de $P(M, s_2)$ do exemplo 4	52
Tabela 24: Tabela simplex ótima de $P(M, s_2)$ do exemplo 4	52
Tabela 25: Tabela simplex ótima de $P(M, s_5)$ do exemplo 4	53
Tabela 26: Tabela simplex ótima de $P(M, s_5)$ do exemplo 4	53
Tabela 27: Tabela simplex ótima de $P(M, s_6)$ do exemplo 4	54
Tabela 28: Tabela simplex ótima de $P(M, s_6)$ do exemplo 4	54

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Desde os primórdios da Revolução Industrial ou até mesmo antes desse processo de industrialização o homem já buscava de maneira intuitiva otimizar de alguma forma o seu negócio, mesmo que pequeno e/ou informal, maximizando lucros e minimizando custos. Assim, foi possível observar que com o avanço industrial e tecnológico, ou seja, com o processo de globalização as técnicas de otimização tornaram-se cada vez mais uma ferramenta de grande necessidade nos sistemas industriais.

Pertencente à programação matemática, a otimização é uma área que tem por objetivo a busca de uma solução ótima ou um conjunto de soluções ótimas de um determinado problema. Este problema, entretanto, pode apresentar - se modelado através de uma ou mais funções, podendo ou não apresentar condições que o delimitam ou restrinja. Podendo inclusive, apresentar outros problemas de otimização em seu conjunto de restrições.

Tais problemas, conhecidos como problemas de programação Multinível caracterizam-se por representar situações que apresentam níveis hierárquicos de decisão e segundo Savard, Marcotte e Colson (2007) de um ponto de vista histórico estes problemas estão intimamente relacionados com os problemas de economia de Stackelberg, originados na década de 50. Este problema quando apresenta apenas dois níveis de decisão caracteriza-se como um caso particular da programação Multinível, chamado de programação em Dois Níveis (PDN).

A programação em Dois Níveis ganhou nos últimos tempos grande atenção e dedicação por partes de pesquisadores interessados em aprofundar seus conhecimentos teóricos e práticos relacionados à este assunto. Contribuindo, assim com o desenvolvimento da programação matemática. Destacando-se para isto Stephan Dempe (Friburgo, Alemanha), Gilles Savard, Charles Audet e Patrice Marcotte.

Segundo Campêlo (1999), a programação em Dois Níveis é um ramo da programação matemática que se ocupa de problemas de otimização, onde a região viável é parcialmente definida pelo conjunto de soluções de um segundo problema

de otimização. Nesse segundo problema de otimização assumem-se como parâmetros as variáveis de decisão do primeiro.

Problemas desta natureza podem ser encontrados na economia, na engenharia, na administração, na agricultura, na determinação de preços ótimos em estradas tarifadas, nas redes de distribuição de energia elétrica, gás e petróleo, dentre outras aplicações nas mais diferentes áreas.

Este problema quando apresenta funções objetivos e restrições do primeiro e do segundo nível lineares, caracteriza-se como um problema de programação em Dois Níveis Linear (PDNL), assunto a ser tratado neste trabalho.

Diferentes métodos de solução são encontrados na literatura para este problema. Neste trabalho, entretanto, utilizaremos o método de Pontos de Equilíbrio, proposto por Campêlo (1999). Neste método busca-se encontrar as soluções ótimas locais do problema em Dois Níveis linear através dos Pontos de Equilíbrio do problema penalizado. O problema penalizado, por sua vez, surge a partir da reformulação do problema linear em Dois Níveis através das condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), quando as restrições de complementaridade são penalizadas na função objetivo do líder.

1.1 Objetivos

Divididos em gerais e específicos, os objetivos deste trabalho são apresentados a seguir.

1.1.1 Objetivo geral

A proposta deste estudo é abordar o método de Pontos de Equilíbrio como solução do problema em Dois Níveis linear, no qual para estes problemas PDNL a restrição do problema do primeiro nível independa de variáveis de decisão pertencentes ao problema do segundo nível, caracterizando-se assim como problemas do tipo PDNLP.

1.1.2 Objetivos específicos

- Apresentar um comparativo entre os problemas PDNL e PDLNP, que são respectivamente, problemas em Dois Níveis lineares que trazem em sua estrutura a presença de restrições do primeiro nível que dependam, para o primeiro caso ou que não dependam para o segundo caso, de variáveis de decisão do segundo nível, justificando dessa forma o motivo da abordagem dos problemas PDLNP neste trabalho.

$$\begin{aligned}
 (\text{PDNL}): & \left. \begin{array}{l} \text{Max}_{x,y} \quad c_1^T x + c_2^T y \\ \text{s.a.} \quad A_1 x + A_2 y \leq a, \\ \quad \quad \quad x \geq 0, y \text{ solução de} \end{array} \right\} \text{Primeiro Nível} \\
 & \left. \begin{array}{l} (P_x) : \text{Max}_y \quad d^T y \\ \text{s.a.} \quad B_1 x + B_2 y \leq b \\ \quad \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \text{Segundo Nível} \\
 (\text{PDLNP}): & \left. \begin{array}{l} \text{Max}_{x,y} \quad c_1^T x + c_2^T y \\ \text{s.a.} \quad x \geq 0, y \text{ solução de} \end{array} \right\} \text{Primeiro Nível} \\
 & \left. \begin{array}{l} (P_x) : \text{Max}_y \quad d^T y \\ \text{s.a.} \quad B_1 x + B_2 y \leq b \\ \quad \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \text{Segundo Nível}
 \end{aligned}$$

- Abordar os problemas aqui apresentados através de um enfoque geométrico, utilizando para isto os seguintes softwares: Winplot e Matlab. Este enfoque busca evidenciar através de ilustrações características, propriedades, dentre outras particularidades do problema em Dois Níveis linear (PDLNP) e do método de solução a ser abordado para este problema. Portanto, para isso os problemas aqui apresentados apresentam dimensão baixa.
- Apresentar o processo de reformulação do problema em Dois Níveis linear através das condições de otimalidade de KKT e consequentemente a penalização deste problema, visando assim utilizar o método de Pontos de Equilíbrio como solução de PDNL.
- Apresentar o modelo de tarifação de preços, proposto por Secchin (2010), que ilustra de forma clara uma dentre tantas aplicações práticas de um problema de

programação em Dois Níveis. Entretanto, é válido ressaltar que tal problema não se enquadra nos padrões de linearidade de PDNL. Tal ilustração busca somente apresentar uma aplicação para o problema em Dois Níveis.

- Apresentar o algoritmo de busca local e os resultados da sua implementação em Matlab 6.5, visando assim validar através de testes computacionais a pesquisa em questão e consequentemente dados que foram antes geometricamente apresentados.

1.2 Justificativa

De acordo com Sobral (2008) muitos problemas, devido à sua estrutura fortemente hierárquica puderam ser melhor modelados através da programação em níveis. Por exemplo, em Economia, utiliza-se a programação em dois níveis para investigar a estrutura hierárquica de empresas com muitas divisões descentralizadas e, principalmente, com problemas de alocação de recursos. Estudam-se também, meios de determinação do preço ótimo de energia elétrica, gás e biocombustível. Em ecologia estudam-se maneiras de determinar políticas ótimas para a emissão de poluentes na atmosfera. Diferentes aplicações deste problema nas mais diversas áreas podem ser encontradas nos trabalhos de Dempe (2002) e Vicente e Calamai (1994).

Dessa maneira, é possível observar que com uma extensa aplicação em diferentes áreas, contribuições acadêmicas quanto ao que concerne tanto a aspectos teóricos e/ou práticos tornam-se de extrema importância para a programação matemática de um modo geral, mas principalmente e inclusive aos preceitos da programação em Dois Níveis linear.

Tem-se que a quantidade de aplicações deste problema cresceu rapidamente em função de novos métodos que surgiram a partir das décadas de 80 e 90. Entre os algoritmos mais conhecidos encontram-se métodos de máxima descida (SAVARD E GAUVIN, 1994), métodos de *branch and bound* (BARD, 1988), métodos de pontos extremos (BIALAS E KARWAN, 1982), métodos de penalidade (AIYOSHI E SHIMIZU, 1984) e mais recentemente técnicas de restauração inexata (ANDREANI *et al.*, 2007) e regiões de confiança (COLSON, MARCOTTE E SAVARD, 2005).

Sabe-se, entretanto, que a reformulação de um problema PDNL através do uso as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), segundo Sobral (2008) é a forma mais intuitiva para resolver problemas em Dois Níveis, pois esta ferramenta não aparece apenas como um método por si só, mas também é utilizada como base para diversas abordagens, como por exemplo: *branch and bound*, restauração inexata e métodos de região de confiança.

Todavia, esse processo de reformulação gera uma complexidade no tratamento de tal problema, ocasionada pela não convexidade da região viável que é gerada pela presença das restrições de complementaridade. Então, segundo Campêlo (1999) uma abordagem alternativa para esta situação consiste na penalização dessas restrições e consequentemente sua introdução na função objetivo, obtendo assim um problema bilinear.

Campêlo (1999), entretanto, ainda sugere em seu trabalho a abordagem deste problema a partir da fixação da variável do conjunto primal ou da variável do conjunto dual, considerando assim dois problemas lineares paramétricos. Dessa maneira, torna-se possível o seu tratamento através do método simplex, possibilitando então a caracterização das soluções ótimas locais do problema PDNLP a partir das soluções (pontos de equilíbrio) do problema penalizado. Sabe-se, portanto, que uma solução do problema penalizado é um ponto de equilíbrio somente se $\max_{z \in Z} F_M(z, \bar{s}) = F_M(\bar{z}, \bar{s}) = \max_{s \in S} F_M(\bar{z}, s) \quad \forall M \geq \bar{M}$, onde M é o parâmetro de penalização e $\bar{M} \geq 0$.

Assim, o estudo e o desenvolvimento deste trabalho teve sua motivação no trabalho *A Simplex Approach for Finding Local Solutions of a Linear Bilevel Program by Equilibrium Points*, de Campêlo e Scheimberg (2005). Neste trabalho é descrito como se obter Pontos de Equilíbrio com o método simplex, utilizando para isto informações obtidas da tabela simplex que podem ser usadas para obter condições de otimalidade local necessárias e suficientes para PDNL.

1.3 Estrutura do Trabalho

Este trabalho apresenta-se estruturado da seguinte maneira:

No **Capítulo 2 – Programação em Dois Níveis Linear**; faz-se uma apresentação da formulação do problema em Dois Níveis Linear, suas propriedades e algumas aplicações encontradas na literatura. Neste mesmo capítulo, apresenta-

se um comparativo entre os problemas PDNL e PDNLP através de uma abordagem geométrica.

No **Capítulo 3 – Reformulação do Problema em Dois Níveis Linear** apresenta-se as condições de otimalidade de KKT - o processo de reformulação do problema em Dois Níveis Linear - e consequentemente o problema reformulado.

No **Capítulo 4 – Pontos de Equilíbrio** apresenta-se a formulação do problema penalizado, a definição de Pontos de Equilíbrio e suas condições de otimalidade. Também são apresentados os algoritmos que determinam os Pontos de Equilíbrio e o algoritmo local que busca a solução local do problema PDNLP através de Pontos de Equilíbrios.

No **Capítulo 5 – Resultados Numéricos** apresenta-se um exemplo bidimensional e outro tridimensional que ilustram geometricamente a solução de problemas PDNLP através dos Pontos de Equilíbrio, utilizando inclusive, análises nas tabelas simplex. Também são apresentados resultados de testes computacionais, obtidos a partir da implementação dos algoritmos apresentados no software Matlab 6.5, visando assim validar o estudo apresentado.

No **Capítulo 6 – Considerações Finais** são referidas as experiências, dificuldades e conclusões do trabalho. Assim como, sugestões de futuros trabalhos de pesquisa.

CAPÍTULO 2

PROGRAMAÇÃO EM DOIS NÍVEIS LINEAR

Este capítulo tem como objetivo apresentar o problema de programação em Dois Níveis Linear (PDNL), suas propriedades e aplicações. O item 1.1 apresenta a formulação geral do problema, introduzindo a notação utilizada. O item 1.2 apresenta as principais propriedades de PDNL. Por fim, o item 1.3 apresenta algumas das aplicações deste problema existentes na literatura.

2.1 Formulação do problema

Os problemas de programação em Dois Níveis Linear são problemas de otimização que se caracterizam por apresentar em seu conjunto de restrições um segundo problema de otimização. Dessa maneira, estes problemas apresentam-se estruturados em dois níveis de hierarquia, onde o agente do segundo nível (seguir) está subordinado ao agente do primeiro (líder).

Este problema quando apresenta funções objetivos – do líder e do seguidor – e as restrições do primeiro e do segundo nível todas lineares, convenciona-se chamá-lo de problema de programação em Dois Níveis Linear (PDNL). Neste caso tal problema pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 (\text{PDNL}): \quad & \max_{x,y} \quad c_1^T x + c_2^T y \\
 \text{s.a.} \quad & A_1 x + A_2 y \leq a, \\
 & x \geq 0, y \text{ solução de} \quad \left. \right\} \text{Primeiro Nível} \\
 \\
 (P_x): \quad & \max_y \quad d^T y \\
 \text{s.a.} \quad & B_1 x + B_2 y \leq b \\
 & y \geq 0 \quad \left. \right\} \text{Segundo Nível}
 \end{aligned}$$

Onde:

$$x, c_1 \in \mathbb{R}^n; c_2, d, y \in \mathbb{R}^m; a \in \mathbb{R}^K; b \in \mathbb{R}^k; A_1 \in \mathbb{R}^{K \times n}; A_2 \in \mathbb{R}^{K \times m}; B_1 \in \mathbb{R}^{k \times n} \text{ e } B_2 \in \mathbb{R}^{k \times m}.$$

Neste caso, o espaço vetorial das matrizes $m \times n$ é isomorfo ao espaço vetorial Euclídeo $\mathbb{R}^{m \times n}$. Por associação ao decisivo do primeiro nível, diz-se que x é a

variável do líder e y a variável do seguidor e o problema P_x consiste em um problema paramétrico controlado pela variável do líder, ou seja, a cada valor fixo de x o seguidor reage fornecendo ao líder suas soluções ótimas.

Associados ao problema PDNL e seu tratamento teórico, tem-se as seguintes definições (CAMPÊLO, 1999):

- O Problema Relaxado:

$$\begin{aligned}
 (\text{PR}): \quad & \text{Max}_{x,y} \quad c_1^T x + c_2^T y \\
 \text{s.a.} \quad & A_1 x + A_2 y \leq a \\
 & B_1 x + B_2 y \leq b \\
 & x \geq 0, \quad y \geq 0
 \end{aligned}$$

- Conjunto viável do Problema Relaxado:

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : A_1 x + A_2 y \leq a, B_1 x + B_2 y \leq b, x \geq 0, y \geq 0\}$$

- Conjunto Viável do Problema do Segundo Nível para cada $x \in \mathbb{R}_+^n$:

$$V_x := \{y \in \mathbb{R}^m : B_1 x + B_2 y \leq b, y \geq 0\}$$

- Conjunto Solução do Problema do Segundo Nível (conjunto reação do seguidor) para cada $x \in \mathbb{R}_+^n$:

$$\text{Arg max}(P_x) := \{y^* \in V_x : d^T y^* \geq d^T y; \forall y \in V_x\}$$

- *Função Valor:* $V(x) = d^T y$, onde $y \in \text{Argmax}(P_x)$

- Conjunto Viável de PDNL (região induzida):

$$V = \{(x, y) \in W : y \in \text{Arg max } (P_x)\}$$

➤ Conjunto Solução de PDNL:

$$V^* = \{(x^*, y^*) \in V : c_1^T x^* + c_2^T y^* \geq c_1^T x + c_2^T y; \forall (x, y) \in V\}$$

O exemplo abaixo ilustra os conjuntos definidos acima, buscando ressaltar características peculiares de um problema PDNL. Neste exemplo, apresenta-se um comparativo entre os problemas A e B, demonstrando assim as consequências da presença de uma restrição dependente da variável do seguidor (y) no primeiro nível deste problema. Problemas PDNL que apresentam no primeiro nível somente a restrição de não negatividade para a variável do líder (x), chamar-se-ão PDNLP.

Exemplo 1

$$(A) : \text{Max} - x$$

$$\text{s.a. } x \geq 0 \quad (1)$$

$$\max -y$$

$$\text{s.a. } x + y \leq 4 \quad (2)$$

$$x - y \leq \frac{3}{2} \quad (3)$$

$$y \geq 0 \quad (4)$$

$$(B) : \text{Max} - x$$

$$\text{s.a. } \frac{x}{2} - y \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$x \geq 0 \quad (2)$$

$$\max -y$$

$$\text{s.a. } x + y \leq 4 \quad (3)$$

$$x - y \leq \frac{3}{2} \quad (4)$$

$$y \geq 0 \quad (5)$$

➤ Problema Relaxado:

$$(A) : \text{Max} - x$$

$$\text{s.a. } x \geq 0 \quad (1)$$

$$x + y \leq 4 \quad (2)$$

$$x - y \leq \frac{3}{2} \quad (3)$$

$$y \geq 0 \quad (4)$$

$$(B) : \text{Max} - x$$

$$\text{s.a. } \frac{x}{2} - y \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$x \geq 0 \quad (2)$$

$$x + y \leq 4 \quad (3)$$

$$x - y \leq \frac{3}{2} \quad (4)$$

$$y \geq 0 \quad (5)$$

➤ Conjunto Viável do Problema Relaxado:

$$W_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x + y \leq 4, x - y \leq \frac{3}{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$W_B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x + y \leq 4, x - y \leq \frac{3}{2}, \frac{x}{2} - y \leq \frac{1}{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$$

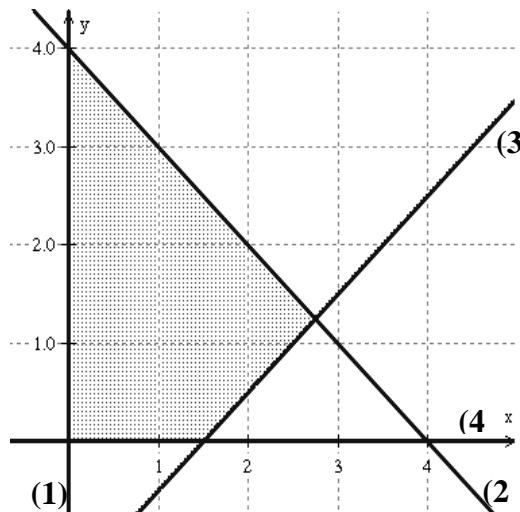


FIGURA 1: Conjunto Viável do Problema Relaxado A.

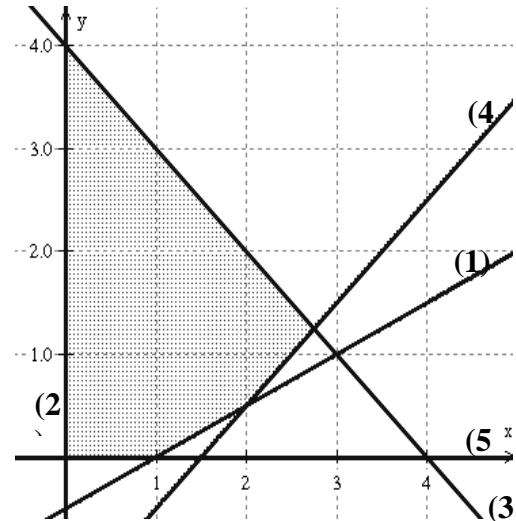


FIGURA 2: Conjunto Viável do Problema Relaxado B.

O conjunto viável do problema relaxado A corresponde na Figura 1 à região poligonal delimitada pelo conjunto de restrições deste problema. De modo análogo, o conjunto viável do problema relaxado B corresponde na Figura 2 à região poligonal delimitada pelo conjunto de restrições do problema B. É possível observar, neste caso, que o conjunto viável do problema relaxado B é menor que o conjunto viável do problema relaxado A, devido justamente a presença da restrição 1 do problema B que não aparece no conjunto de restrições do problema A.

➤ Conjunto Viável do Problema de Segundo Nível:

$$\begin{aligned} P_x^{A,B} : \quad & \max \quad -y \\ \text{s.a} \quad & x + y \leq 4 \\ & x - y \leq \frac{3}{2} \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

$$V_x = V_x^A = V_x^B = \begin{cases} [0, 4 - x], & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ \left[-\frac{3}{2} + x, 4 - x \right], & \text{se } \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{11}{4} \end{cases}$$

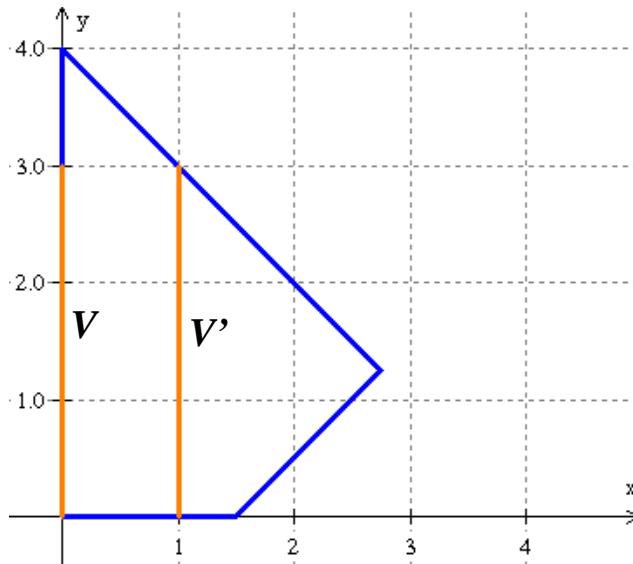


FIGURA 3: Conjunto Viável do Problema de Segundo Nível A e B.

Para efeito de visualização, ilustra-se na Figura 3 o conjunto $V_x' = \{x\} \times V_x$. Ressaltando, entretanto, que o conjunto V_x é a projeção ortogonal sobre o eixo y (intervalo este definido pelo parâmetro x adotado). Como ilustração os conjuntos V_x' e V_x , representados pelos segmentos de cor laranja, foram definidos na figura acima para $x = 1$.

Percebe-se neste caso, que ambos os problemas (A e B) apresentam o mesmo conjunto viável para o problema do Segundo Nível, consequentemente a mesma representação geométrica.

➤ Conjunto Solução do Problema de Segundo Nível:

$$\operatorname{Arg \max}(P_x)^A = \operatorname{Arg \max}(P_x)^B = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ \left\{-\frac{3}{2} + x\right\}, & \text{se } \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{11}{4} \end{cases}$$

O conjunto solução do problema do segundo nível é representado na figura abaixo pelos segmentos de reta de cor laranja: $y = 0$, para $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ e $y = -\frac{3}{2} + x$, para $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{11}{4}$.

Para efeito de ilustração adotamos o ponto $x = 1$ como parâmetro. Para este ponto, ilustrado na figura com a cor verde, temos que o conjunto viável do problema de segundo nível é determinado pelo segmento verde projetado no eixo y e para este conjunto de viabilidade, a solução deste problema quando $x = 1$ é exatamente $y = 0$, visto que o problema em questão visa maximizar $-y$.



FIGURA 4: Conjunto solução do Problema de Segundo Nível A e B. (em laranja!)

➤ Conjunto Viável do PDNLP e PDNL:

$$V^A = \left\{ (x, 0) / 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \right\} \cup \left\{ \left(x, -\frac{3}{2} + x \right) / \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{11}{4} \right\} \quad V^B = \left\{ (x, 0) / 0 \leq x \leq 1 \right\} \cup \left\{ \left(x, -\frac{3}{2} + x \right) / 2 \leq x \leq \frac{11}{4} \right\}$$

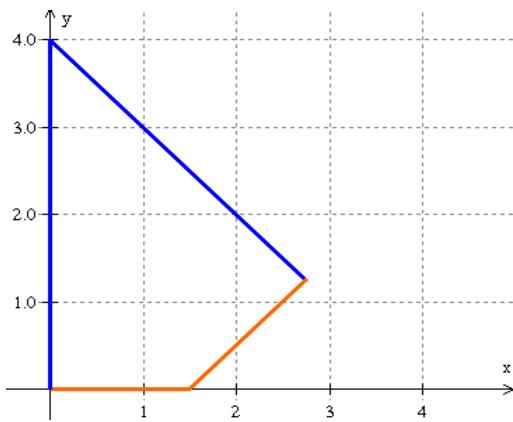


FIGURA 5: Conjunto viável do Problema de Dois Níveis A.. (em laranja!)

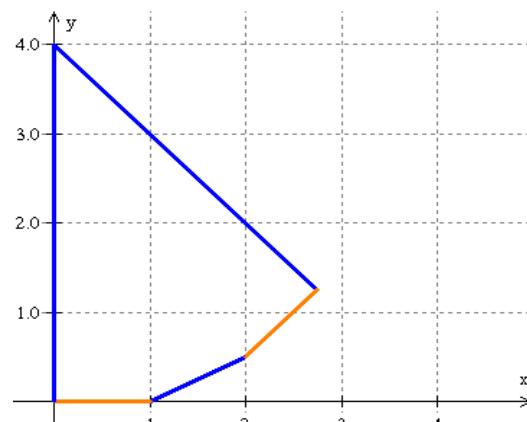


FIGURA 6: Conjunto viável do Problema de Dois Níveis B. (em laranja!)

O conjunto viável do PDNLP e do PDNL é apresentado na figura acima por um conjunto de pontos (x, y) , definidos na região poligonal pelas arestas de cor laranja, onde a variável x varia para o problema A (Figura 5) nos intervalos: $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ e $\left[\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right]$ e para o problema B (Figura 6) esta variação ocorre nos intervalos: $[0,1]$ e $\left[2, \frac{11}{4}\right]$.

A presença de uma ou mais restrições dependentes da variável do seguidor (y) no primeiro nível de um problema em Dois Níveis, como apresentado no problema B, além de reduzir a região viável deste, gera uma desconexidade neste conjunto (DEMPE, 2002).

(Ver no APÊNDICE A, definição de conjunto convexo e conjunto conexo).

➤ Conjunto Solução do PDNLP e PDNL:

$$V_A^* = V_B^* = \{(0,0)\}$$

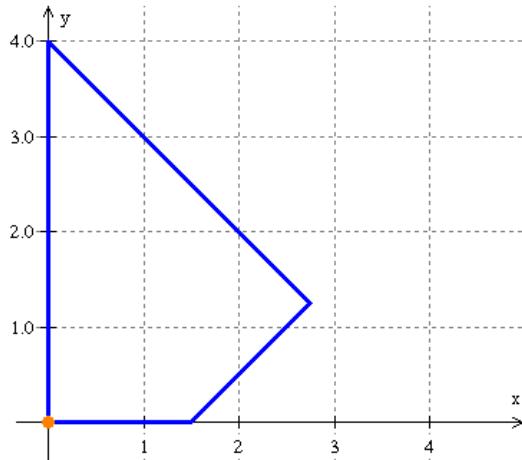


FIGURA 7: Conjunto solução do Problema de Dois Níveis A.

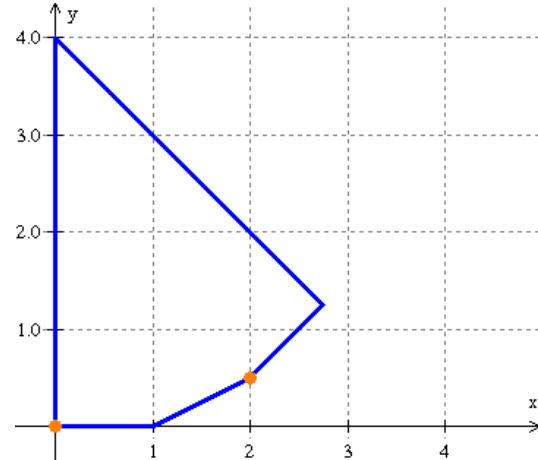


FIGURA 8: Conjunto solução do Problema de Dois Níveis B.

Observa-se na Figura 7 que no problema de Dois Níveis A, a função objetivo do líder atinge o seu valor ótimo no ponto $(0,0)$. Enquanto que, devido à desconexidade do conjunto viável do problema B, este apresenta os seguintes

valores ótimos: $(0,0)$ e $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, como observado na Figura 8. Sabe-se, entretanto, que ambos os problemas A e B apresentam a solução ótima global: $(0,0)$.

Neste exemplo, foi possível observar a seguinte particularidade: a desconexidade da região viável do problema B não influenciou no valor ótimo deste problema, pois o conjunto de soluções globais foi modificado.

Desta maneira, os seguintes problemas em Dois Níveis a serem abordados neste trabalho são do tipo PDNLP, que apresenta em geral a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} (\text{PDNLP}): \quad & \left. \begin{array}{l} \text{Max}_{x,y} \quad c_1^T x + c_2^T y \\ \text{s.a.} \quad x \geq 0, y \text{ solução de} \end{array} \right\} \text{Primeiro Nível} \\ & \left. \begin{array}{l} (P_x) : \text{Max}_y \quad d^T y \\ \text{s.a.} \quad B_1 x + B_2 y \leq b \\ \quad \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \text{Segundo Nível} \end{aligned}$$

2.2 Propriedades

Muitas características de PDNLP não são encontradas comumente em problemas tradicionais da programação matemática, como: não convexidade da região viável, não conexidade e não diferenciabilidade. Nesta seção, são formalizadas as principais propriedades de PDNLP, segundo Campêlo (1999).

- Propriedade 1: O conjunto viável V do PLDNP está contido no conjunto viável do problema relaxado W .
- Propriedade 2: A solução de um problema de Dois Níveis, quando existe, é atingida em um ponto extremo do conjunto relaxado W . Esta propriedade explica a essência de alguns algoritmos encontrados na literatura, que buscam a solução deste problema entre os vértices do conjunto viável do problema relaxado (W).

- Propriedade 3: Todo ponto extremo de V é ponto extremo do conjunto viável do problema relaxado W .

- Propriedade 4: Se as restrições do primeiro nível independem da variável do segundo nível, isto é $A_2 = 0$, então o conjunto viável V do PLDN é conexo.

Essas propriedades ajudam a caracterizar a região viável e a solução ótima de problemas em Dois Níveis, como ilustra o exemplo 1 apresentado anteriormente. Este trabalho não tem por objetivo apresentar provas das propriedades apresentadas acima. Tais resultados podem ser encontrados no trabalho de Campêlo (1999).

2.3 Aplicações

A estrutura hierárquica presente no PDNL possibilita descrever diversas aplicações práticas deste problema. Citamos abaixo, alguns dos trabalhos encontrados na literatura:

- **NEVES** (2002) – em seu trabalho de doutorado intitulado *Modelo de Programação Linear Binível para Alocação Dinâmica de Veículos*, aborda a PLDN através da parceria entre os agentes de decisão: transportador e expedidor, que visam respectivamente, a maximização dos lucros e a minimização nos envios de cargas com atraso.
- **SANTOS** (2002) – em sua dissertação de mestrado, *Programação em Dois Níveis aplicada ao Estudo da Oferta Ótima de Sistemas Termoelétricos*, considera a problemática de maximização dos lucros e a minimização dos custos do despacho térmico dos respectivos agentes de decisão.
- **LAVAL** (2003) – propõe em sua dissertação de mestrado, *Modelo de Programação Linear em Dois Níveis para Otimização de Estoques Sobressalentes*, um modelo de otimização de estoques, onde os agentes envolvidos, centros de manutenção e depósito central, visam respectivamente, minimizar a quantidade de pedidos atrasados, o

desbalanceamento entre os níveis de serviço e minimizar os custos de transporte e de manutenção de estoques.

Vicente (1992) cita mais algumas das aplicações encontradas na literatura: nos diversos problemas de transporte (taxação ou cobrança de impostos, rede, design, estimativa de falta de demanda), na administração (coordenação de firmas compostas de multi-divisões, na localização ótima de redes), no planejamento (políticas de agricultura, serviço público elétrico) e otimização de projetos. Também, na área militar como apresentado por Bracken e Mc Gill *apud* Campêlo (1999).

Exemplo 2 – O Problema de Tarifação (TOP)

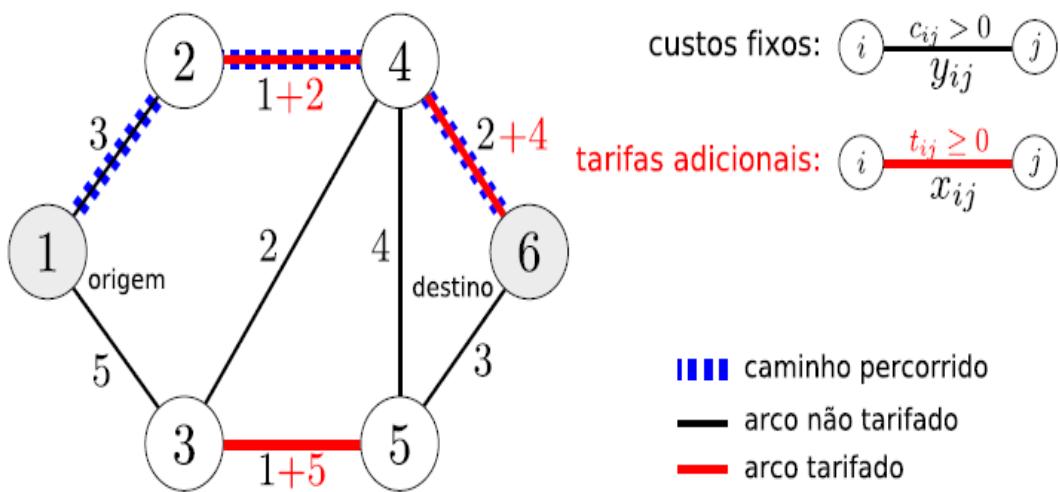
Como referência para esta subseção, o leitor pode consultar os trabalhos de Dewez (2004) e Secchin (2010).

O problema de tarifação (TOP) representa-se por uma rede composta de nós (cidades) e arcos (estradas) que ligam esses nós. Este é um problema em Dois Níveis, onde os agentes envolvidos – empresa privada (líder) que controla alguns dos arcos cobrando tarifas de viagem e usuários (seguidor) que viajam de um nó (origem) a outro nó (destino) – buscam respectivamente, maximizar a tarifação e reduzir os custos com a viagem.

Afim de modelar o problema, seja $G(K, N, \bar{A})$ uma rede onde K é o conjunto cujos elementos representam usuários de mesmo par origem-destino (*commodities*), N é o conjunto de nós e \bar{A} o conjunto de arcos. Seja $\{(o_k, d_k) \in N^2 : k \in K\}$ o conjunto desses pares origem-destino, onde demandas $\eta_k > 0$ são associadas a cada destino d_k . Seja também $A \subset \bar{A}$ o subconjunto dos arcos tarifados e $B = \bar{A} \setminus A$ o subconjunto dos arcos não tarifados. A cada arco $(i, j) \in A$ associamos um custo fixo c_{ij} e uma tarifação adicional $t_{ij} \geq 0$. A cada arco $(i, j) \in B$ associamos um custo fixo d_{ij} . Sejam ainda

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se } k \in K \text{ usa } (i, j) \in A \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad y_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se } k \in K \text{ usa } (i, j) \in B \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A variável do nível inferior x_{ij}^k corresponde a quantidade de usuários da *commodity* K num arco tarifado ij e a variável y_{ij}^k a quantidade de usuários da *commodity* K num arco não tarifado ij. Ignorando efeitos de congestionamento, assumindo que a demanda é fixa e que os usuários minimizam seus custos de viagem individualmente, o problema TOP pode ser formulado como um problema em Dois Níveis com funções objetivos bilineares e restrições lineares. Secchin (2010) ilustra o problema TOP da seguinte maneira:



$$\text{TOP: } \max_{x,y,t} \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} \eta^k t_{ij} x_{ij}^k$$

$$\text{s.a. } (0 \leq) t_{ij}^{min} \leq t_{ij} \leq t_{ij}^{max}, \quad \forall (i,j) \in A$$

$$(x, y) \in \arg \min_{x,y} \sum_{k \in K} \left(\sum_{(i,j) \in A} (c_{ij} + t_{ij}) x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in B} d_{ij} y_{ij}^k \right)$$

$$\text{s.a. } \sum_{i;(i,j) \in A} x_{ij}^k + \sum_{i;(i,j) \in B} y_{ij}^k - \sum_{i;(j,i) \in A} x_{ji}^k - \sum_{i;(j,i) \in B} y_{ji}^k$$

$$= \begin{cases} -1, & \text{se } j = o^k \\ 1, & \text{se } j = d^k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall k \in K, \forall j \in N$$

$$x_{ij}^k \geq 0, \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in A$$

$$y_{ij}^k \geq 0, \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in B.$$

FIGURA 9: Formulação do Problema de Tarifação.
Fonte: SECCHIN (2010).

Se para algum $k \in K$ só existem caminhos de o^k e d^k que contenham algum arco (i, j) tarifado, a condição $t_{ij} \leq t_{ij}^{\max}$ é importante para prevenir que o problema não possua solução ótima. Vale ressaltar, que o problema apresentado busca apenas ilustrar uma dentre várias aplicações do problema em Dois Níveis. Sabendo portanto, que este problema trata-se de um caso bilinear.

CAPÍTULO 3

REFORMULAÇÃO DO PROBLEMA EM DOIS NÍVEIS LINEAR

Neste capítulo apresentamos o processo de reformulação do problema em dois níveis através das condições de Karush – Kuhn – Tucker (KKT). Na seção 3.1 são apresentadas as condições de KKT no problema do seguidor do PDNLP e na seção 3.2 é apresentado o problema reformulado.

3.1 As condições KKT

O uso das condições KKT tem por objetivo contornar a dificuldade em tratar problemas em dois níveis, transformando estes problemas em um problema de apenas um nível, através da substituição do segundo nível pelas condições KKT, facilitando assim a solução deste problema através de técnicas computacionais. Diversos autores, dentre eles Bialas e Karwan (1984), Júdice et. al (1992) utilizam essa mesma técnica.

As condições KKT são condições necessárias de otimalidade, sob determinadas condições de regularidade (Linearidade, Mangasarian – Fromovitz, Slater). (ver Apêndice B)

Seja o seguinte problema geral de Programação Matemática:

$$(P): \max_x f(x), \text{ s.a.} \begin{cases} h(x) = 0, \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

em que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função a ser maximizada, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ determina as restrições de desigualdade e $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ determina as restrições de igualdade. O conjunto viável deste problema (P) é $V = \{x \in \mathbb{R}^n / h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$.

As condições necessárias de otimalidade para este problema podem ser apresentadas da seguinte forma:

Sob uma das condições de regularidade, se $x^* \in V$ for uma solução local do problema (P) , então existem $\mu \in \mathbb{R}_+^k$, $\lambda \in \mathbb{R}^l$ tais que $\frac{\partial}{\partial x} L(x^*, \lambda, \mu) = 0$, $\langle \mu, g(x^*) \rangle = 0$, onde a função Lagrangeana é: $L(x, \lambda, \mu) := f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle + \langle \mu, g(x) \rangle$ e $\langle \mu, g(x^*) \rangle$ é o produto escalar entre o multiplicador de Lagrange μ e conjunto de desigualdades do problema P.

Definição: (ISMAILOV E SOLODOV, 2009), diz-se que $x \in V$ é um ponto KKT, se existem $\mu \in \mathbb{R}_+^k, \lambda \in \mathbb{R}^l$ tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} L(x, \lambda, \mu) = 0, \\ \langle \mu, g(x) \rangle = 0 \end{cases}.$$

Explicitamos abaixo as condições KKT do problema do segundo nível (P_x) apresentado no item 2.1, visando a reformulação do PDNLP.

Função objetivo: $y \mapsto f(x, y) := \langle 0, x \rangle + \langle d, y \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle$

As restrições: $\begin{cases} B_1 x + B_2 y \leq b \\ y \geq 0 \end{cases}$

Podem ser representadas na forma: $\begin{cases} g(x, y) \leq 0; \text{ onde} \\ g(x, y) := \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O_{m \times n} & -I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

Para a função Lagrangeana $(y, \mu) \mapsto L(x, y, \mu) := f(x, y) + \langle g(x, y), \mu \rangle$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} L(x, y, \mu) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \mu^T \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \nabla_y f(x, y) + \sum_{j=1}^{k+m} \nabla_y g_j(x, y) \mu_j = 0 \\ &\Leftrightarrow d + (B_2^T : -I_m) \mu_j = 0 \Leftrightarrow d + B_2^T u - v = 0; \text{ onde } \mu = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{k+m} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\langle \mu, g(x, y) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle B_1 x + B_2 y - b, u \rangle - \langle y, v \rangle = 0 \Leftrightarrow -\langle \alpha, u \rangle - \langle y, v \rangle = 0;$$

onde, $B_1 x + B_2 y + \alpha = b; \alpha \geq 0$

3.2 O Problema Reformulado

Ao fazer uso das condições KKT no segundo nível do problema PDNLP, este resulta reformulado como sendo o seguinte problema de programação não linear:

$$(P) \quad \begin{aligned} & \text{Max}_{x,y} \quad c_1^T x + c_2^T y \\ & \text{s.a} \quad B_1 x + B_2 y + \alpha = b \\ & \quad x \geq 0, y \geq 0, \alpha \geq 0 \\ & \quad B_2^T u - v = d \\ & \quad \mu \geq 0, v \geq 0 \\ & \quad v^T y + u^T \alpha = 0 \end{aligned}$$

Onde $\alpha \in \mathbb{R}_+^k$ é chamada variável de folga, $u \in \mathbb{R}_+^k$ e $v \in \mathbb{R}_+^m$ são variáveis duais associadas às restrições do segundo nível.

A equivalência entre o problema (P) e o PDNLP é no sentido de que um ponto (x, y) é solução global do PDNLP, se e somente se, (x, y, α, μ, v) é solução global de (P) para algum (α, μ, v) viável. Esta equivalência deve-se ao fato de que as condições de otimalidade de KKT são necessárias e suficientes para o problema linear do segundo nível. (Audet *et al* (1998) *apud* Campêlo (1999)).

A reformulação do PDNLP faz surgir as restrições de complementaridade, apresentadas na última linha de (P) , que impedem garantir a convexidade da região viável. Dessa forma, apesar de ser possível tratá-lo, o problema reformulado apresenta características indesejáveis para os algoritmos de programação convexa (CAMPÊLO, 1999). Com isso, apresentamos no capítulo seguinte uma maneira de contornar esta dificuldade.

CAPÍTULO 4

PONTOS DE EQUILÍBRIO

Neste capítulo, apresentamos a formulação do problema penalizado, a definição de Pontos de Equilíbrio: o método, as condições de otimalidade para a solução local e o algoritmo proposto por Campêlo (1999) que utiliza os Pontos de Equilíbrio como solução de PDNLP.

4.1 O Problema Penalizado

O problema penalizado $P(M)$ consiste em uma alternativa para tratar o problema (P) : onde as restrições de complementaridade do problema reformulado são penalizadas com um parâmetro $M \geq 0$ na função objetivo de (P) , como apresentado abaixo:

$$\begin{aligned} P(M): \quad & \text{Max}_{x,y} \quad c_1^T x + c_2^T y - M(u^T \alpha + v^T y) \\ \text{s.a} \quad & B_1 x + B_2 y + \alpha = b \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \\ & B_2^T u - v = d \\ & u \geq 0, \quad v \geq 0 \end{aligned}$$

Ou, mais sucintamente, na forma paramétrica do seguinte problema bilinear.
(onde $N = n + m + k$)

$$\begin{aligned} P(M): \quad & \text{Max} \quad F_M(z, s) = c^T z - Ms^T z \\ \text{s.a} \quad & z \in Z, \quad s \in S \end{aligned}$$

$$\text{onde } \left\{ \begin{array}{l} c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \\ Z = \{z \in \mathbb{R}_+^N / Bz = b\}, \quad S = \{s \in \mathbb{R}_+^N / Ds = d\} \\ B = (B_1 : B_2 : I_k), \\ D = (O_{m \times n} : -I_m : B_2^T) \end{array} \right.$$

O conjunto Z corresponde ao conjunto viável da formulação primal do problema do seguidor, incluindo também, as variáveis de folga. E o conjunto S representa o conjunto viável do problema dual do seguidor.

O método de penalização utilizado por Campêlo e Scheimberg (2005), tem por objetivo caracterizar as soluções do PDNLP através dos pontos de equilíbrio. Este é o propósito no seguinte tópico.

4.2 Pontos de Equilíbrio: Conceitos

Diz-se que $(\bar{z}, \bar{s}) \in Z \times S$ é um ponto de equilíbrio do problema $P(M)$ se existe $\bar{M} \geq 0$ tal que $\forall M \geq \bar{M}$, tem-se

$$\max_{z \in Z} F_M(z, \bar{s}) = F_M(\bar{z}, \bar{s}) = \max_{s \in S} F_M(\bar{z}, s)$$

onde $F_M(z, s) = c^T z - Ms^T z$.

A igualdade acima é uma condição necessária para optimalidade do PDNLP, como assegura o Teorema 4.1 de CAMPÊLO e SCHEIMBERG (2005), apresentado logo abaixo.

Adotaremos a seguinte notação:

$$P(M, \bar{s}) : \max_{z \in Z} F_M(z, \bar{s}) \quad P(M, \bar{z}) : \max_{s \in S} F_M(\bar{z}, s)$$

A relação existente entre os pontos de equilíbrio do problema penalizado $P(M)$ com as soluções ótimas locais do problema PDNLP é dada pelo seguinte teorema (CAMPÊLO e SCHEIMBERG, 2005):

Teorema 4.1: $\bar{z} \in Z$ determina uma solução ótima local de PDNLP se e somente se $S_v(\bar{z}) \neq \{\}$ e, para cada $s \in S_v(\bar{z})$, (\bar{z}, s) é um ponto de equilíbrio de $P(M)$.

No teorema acima, $S_v(z)$ denota o conjunto de vértices do poliedro $S(z)$, onde $S(z) = S \cap z^\perp := \{s \in S / \langle z, s \rangle = 0\}$.

Com o teorema 4.1 Campêlo (1999) teve o propósito de encontrar entre os pontos de equilíbrio do problema penalizado as soluções locais do PDNLP.

Entretanto, é importante salientar que nem todo ponto de equilíbrio do problema penalizado garante uma solução local do PDNLP.

Segundo o lema apresentado abaixo, ainda tem-se que:

Lema 4: Se (\bar{z}, \bar{s}) é um ponto de equilíbrio do problema penalizado $P(M)$, então

$$\min \left\{ \bar{z}^T s : s \in S \right\} = \min \left\{ \bar{s}^T z : z \in Z \right\} = \bar{s}^T \bar{z} = 0$$

4.3 Condições de Optimalidade

De acordo com o teorema 4.1 as soluções ótimas locais de um PDNLP estão associadas com pontos de equilíbrio do problema $P(M)$. Considerando então, o ponto (\bar{z}, \bar{s}) como um ponto de equilíbrio, apresentamos nesta seção outras condições de optimalidade do problema PDNLP obtidas em função de (\bar{z}, \bar{s}) . Essas condições visam obter propriedades computacionalmente mais simples de serem verificadas do que as que foram apresentadas acima.

Sabe-se, portanto, que \bar{z} e \bar{s} são soluções de $(P_{M, \bar{s}})$ e de $(P_{M, \bar{z}})$, respectivamente, para todo $M \geq \bar{M}$ e que tais soluções são encontradas, nos vértices de Z e S .

Denotamos por J o conjunto de índices $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ das variáveis básicas e não básicas de \bar{z} e \bar{s} .

Considere abaixo, a tabela simplex inicial e ótima do problema $P(M, \bar{s})$, onde $D \subset J$ e $N \subset J$, são respectivamente, os conjuntos de índices das variáveis básicas e não básicas de \bar{z} .

	z_D	z_N					
	B_D	B_N	b				
	s_D	s_N	0				
	c_D^T	c_N^T	0				

→

	0	$\tilde{c}_N^T = -c_N^T - c_D^T \tilde{B}_N$	$-c_D^T \bar{z}_D$
	I	$\tilde{B}_N = B_D^{-1} B_N$	$\bar{z}_D = B_D^{-1} b$
	0	$\tilde{s}_N^T = -s_N^T - s_D^T \tilde{B}_N$	$0 = s_D^T \bar{z}_D$

Na tabela acima, a função objetivo $F_M(z, \bar{s}) = c^T z + M \bar{s}^T z$ é representada em duas linhas. A primeira linha corresponde ao termo de complementaridade $\bar{s}^T z$. Enquanto que a segunda linha expressa o termo linear $c^T z$. É possível considerar implicitamente o parâmetro M , otimizando prioritariamente a primeira linha, como realizado pelo método simplex big-M ((BAZARAA et al.(1990))).

Consideremos agora, a tabela simplex inicial e ótima do problema $P(M, \bar{z})$, onde $E \subset J$ e $R \subset J$, são respectivamente, os conjuntos de índices das variáveis básicas e não básicas de \bar{s} .

	S_E	S_R	
	D_E	D_R	d
M	$-z_E^T$	$-z_R^T$	0

→

	S_E	S_R	
	I	$\tilde{D}_R = D_E^{-1}D_R$	$\bar{s}_E = D_E^{-1}d$
M	0	$\tilde{z}_R^T = z_R - z_E^T \tilde{D}_R$	$0 = \bar{s}_E z_E^T$

No problema $P(M, \bar{z})$ a função a ser otimizada é $F_M(\bar{z}, \bar{s}) = c^T \bar{z} + M \bar{s}^T \bar{z}$. Como o primeiro termo é constante, representamos somente o segundo termo na tabela. Neste caso, a solução não depende do parâmetro M .

De acordo com Campêlo (1999), têm-se as seguintes propriedades:

Propriedade 4.1:

As seguintes proposições se satisfazem:

$$(1) \quad \tilde{s}_N \geq 0 \text{ e } \tilde{z}_R \geq 0. \quad (2) \text{ Dado } i \in N, \quad \tilde{c}_i > 0 \Rightarrow \tilde{s}_i > 0$$

Quando as situações acima não ocorrem, podem-se inferir outras condições de otimalidade. Essas condições são obtidas em função das direções extremas dos poliedros Z e S nos pontos \bar{z} e \bar{s} , disponíveis nos quadros. Tais direções são dadas pelas colunas das seguintes matrizes:

$$G_N = \begin{bmatrix} -\tilde{B}_N \\ I_{n-m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)} \quad H_R = \begin{bmatrix} -\tilde{D}_R \\ I_{n-n_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n-n_2)}$$

Onde I_p é uma matriz identidade $p \times p$. Para $i \in N$ e $j \in R$, a coluna G_i de G_N e a coluna H_j de H_R são:

$$G_i = \begin{bmatrix} -\tilde{B}_i \\ e_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad H_j = \begin{bmatrix} -\tilde{D}_j \\ e_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Onde $e_i \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $e_j \in \mathbb{R}^{n-n_2}$ são colunas de I_{n-m} e I_{n-n_2} , respectivamente.

Consequentemente, as componentes dessas direções são dadas por:

$$G_{ki} = \begin{cases} -\tilde{B}_{ki}, & k \in D \\ 0, & k \in N \setminus \{i\} \\ 1, & k = i \end{cases} \quad H_{ki} = \begin{cases} -\tilde{D}_{kj}, & k \in E \\ 0, & k \in R \setminus \{j\} \\ 1, & k = j \end{cases}$$

As componentes de custos reduzidos são:

$$\tilde{c}_i = c^T G_i \quad \tilde{s}_i = \bar{s}^T G_i \geq 0 \quad \tilde{z}_j = \bar{z}^T H_j \geq 0$$

para $i \in N$ e $j \in R$, onde as desigualdades se cumprem pela Propriedade 4.1.

Considere os seguintes conjuntos:

$$N^+ = \left\{ i \in N : \tilde{c}_i > 0 \right\} = \left\{ i \in N : c^T G_i > 0 \right\}$$

$$R^0 = \left\{ j \in R : \tilde{z}_j = 0 \right\} = \left\{ j \in R : \bar{z}^T H_j = 0 \right\}$$

Esses conjuntos são, respectivamente, direções de melhoria da função $c^T z$ em Z , em relação ao ponto \bar{z} e direções viáveis para a restrição $\bar{z}^T s = 0$ em S , relacionadas ao ponto \bar{s} .

Propriedade 4.2:

- (1) $N^+ = \{ \} \Rightarrow \bar{z}$ é solução ótima global do problema PLDNP.
- (2) $R^0 = \{ \} \Rightarrow \bar{z}$ é solução ótima local do problema PLDNP.

Definem-se também os subconjuntos:

$$N^{+0} = \left\{ i \in N^+ : s^T G_i = 0, \text{ para algum } s \in S(\bar{z}) \right\} \quad R^{00} = \left\{ j \in R^0 : \bar{z}_j = 0 \right\}$$

Campêlo e Scheimberg (2005) afirmam que os pontos de z e s podem ser representados, respectivamente, em função de \bar{z} e das direções G_i , e em função de \bar{s} e das direções H_j .

$$z = \bar{z} + \sum_{i \in N} z_i G_i \quad s = \bar{s} + \sum_{j \in R} s_j H_j$$

Assume-se a hipótese: $[D]: s \in S(\bar{z}) \Rightarrow s^T G_N \geq 0$; i.e., $s^T G_i \geq 0, \forall i \in N$.

Esta hipótese cumpre-se trivialmente quando \bar{z} é um vértice não degenerado ($\bar{z}_B > 0$). Neste caso, B_D é a única base que determina \bar{z} . Então, uma vez que \bar{z} é solução de $\min\{s^T z : z \in Z\}$, o vetor de custo reduzido ótimo $s^T G_N = s_N^T - s_D^T B_D^{-1} B_N \geq 0$.

Teorema 4.2: Se $N^{+0} = \{\}$ $\Rightarrow \bar{z}$ é solução ótima local do problema de PDNLP.

A condição suficiente presente no teorema acima é também necessária sob uma condição adicional de não degeneração. Para isso, introduzem-se as seguintes afirmações.

- (1) Dado $i \in N$, a direção G_i é degenerada se $\inf_{k \in D} \left\{ \bar{z}_k / \tilde{B}_{ki} : \tilde{B}_{ki} > 0 \right\} = 0$
- (2) O conjunto N^{+0} se diz totalmente degenerado (em relação à base B_D), se $N^{+0} \neq \{\}$ e G_i é degenerada $\forall i \in N^{+0}$.

Teorema 4.3: O ponto \bar{z} é solução ótima local do problema PDNLP se e somente se:

- (i) $N^{+0} = \{\}$, ou
- (ii) N^{+0} totalmente degenerado.

Teorema 4.4: Se o conjunto $\{(i, j) \in N^+ \times R^{00} : G_i^T H_j < 0\}$ é vazio, então \bar{z} é uma solução ótima local do PLDNP.

4.4 Algoritmo

Para a obtenção dos pontos de equilíbrio, Campêlo (1999) propõe dois algoritmos. Tais algoritmos foram definidos a partir dos seguintes problemas lineares paramétricos:

$$P(M, \bar{s}) : \max_{z \in Z} F_M(z, \bar{s})$$

$$P(M, \bar{z}) : \max_{s \in S} F_M(\bar{z}, s)$$

Para estes problemas \bar{s} é uma solução viável fixa do conjunto S e \bar{z} é uma solução viável fixa do conjunto Z .

O primeiro algoritmo parte de um ponto viável $s_0 \in S$.

Algoritmo 1

- Passo 0: Se $Z \times S \neq \{ \}$, tome $s_0 \in S$.
- Passo 1 : Resolva $P(M, s_0)$, pelo método Simplex big-M. Obtenha uma solução z_0 ou verifique se o problema é ilimitado. No segundo caso, conclua que $P(M)$ é ilimitado para todo $M \geq 0$.
- Passo 2 : Resolva $P(M, z_0)$ pelo método Simplex, obtendo uma solução \bar{s} .
- Passo 3 : Resolva $P(M, \bar{s})$, pelo método Simplex big-M. Obtenha uma solução \bar{z} ou verifique que o problema é ilimitado. No primeiro caso, (\bar{z}, \bar{s}) é um ponto de equilíbrio; no segundo, conclua que $P(M)$ é ilimitado para todo $M \geq 0$.

O segundo algoritmo parte de um ponto viável $z_0 \in Z$.

Algoritmo 2

- Passo 0: Se $Z \times S \neq \{ \}$, tome $z_0 \in Z$.
- Passo 1 : Resolva $P(M, z_0)$ pelo método Simplex, obtendo uma solução \bar{s} .
- Passo 2 : Resolva $P(M, \bar{s})$, pelo método Simplex big-M. Obtenha uma solução \bar{z} ou verifique se o problema é ilimitado. No primeiro caso, (\bar{z}, \bar{s}) é um ponto de equilíbrio, no segundo, conclua que $P(M)$ é ilimitado para todo $M \geq 0$.

Os algoritmos 1 e 2 terminam com uma das possibilidades:

- (1) encontra um ponto de equilíbrio do problema penalizado $P(M)$ e, equivalentemente uma solução local de (P) , ou
- (2) verifica que $P(M)$ é ilimitado para todo $M \geq 0$ e, equivalentemente, que (P) é ilimitado.

A seguir apresentamos o algoritmo que visa obter uma solução local para o problema em Dois Níveis a partir de Pontos de Equilíbrio do problema penalizado através da análise das tabelas ótimas dos problemas $P(M, \bar{s})$ e $P(M, \bar{z})$. Caso não se encontre a solução para o problema PLDNP o algoritmo fornece uma direção de melhoria para a função objetivo.

Algoritmo Local

- Passo 1: Se $Z \times S = \{ \}$, pare. O problema PDNLP é inviável. Caso contrário encontre um $z_0 \in Z$. Faça $K = 1$.
- Passo 2: Resolva o problema $P(M, z_0)$ e obtenha uma solução $\bar{s}^k \in S_v$. Se este problema for ilimitado, então o problema PLDNP é ilimitado. Caso contrário, obtenha a solução $\bar{z}^k \in Z_v$ do problema $P(M, \bar{s}^k)$. O ponto (\bar{z}^k, \bar{s}^k) é ponto de equilíbrio.
- Passo 3: Considere as tabelas ótimas do Simplex relativa ao problema $P(M, \bar{s}^k)$ e determine N^{+0}
 - ❖ Se $N^{+0} = \{ \}$, pare: \bar{z}^k é um ótimo local do problema PDNLP. Caso contrário:
 - ❖ N^{+0} é totalmente degenerado, Parar! Não há garantia de que o ponto de equilíbrio gere uma solução ótima local do problema PDNLP.
 - ❖ N^{+0} não é totalmente degenerado. Então, seja $i \in N^{+0}$, tal que G_i não seja degenerado.
- Passo 4: Encontre $\bar{s}^{k+1} \in \arg \min \left\{ G_i^T s : s \in S(\bar{z}^k) \right\}$, que é outra solução de $P(M, \bar{s}^k)$. Faça $K = k+1$ e vá ao passo 2.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentamos a abordagem geométrica de alguns problemas de programação em dois níveis linear quanto a sua solução através dos pontos de equilíbrio do problema penalizado. Propomos também alguns testes computacionais que visam validar os conceitos apresentados e a sustentabilidade da pesquisa.

5.1 Problemas considerados: abordagem geométrica

Exemplo 3

Utilizando as condições de KKT no problema A, obteremos então o seguinte problema penalizado.

Problema A

$$\begin{aligned} & \text{Max} - x \\ \text{s.a } & x \geq 0 \quad (1) \\ & \max -y \\ \text{s.a } & x + y \leq 4 \quad (2) \\ & x - y \leq \frac{3}{2} \quad (3) \\ & y \geq 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Problema Penalizado

$$\begin{aligned} P(M) & \text{ Max} - x - M(u_1 w + u_2 \alpha + \nu y) \\ \text{s.a } & x + y + w = 4 \\ & x - y + \alpha = \frac{3}{2} \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad w \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \\ & -u_1 + u_2 + \nu = 1 \\ & u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad \nu \geq 0 \end{aligned}$$

Onde:

$$Z = \{z \in \mathbb{R}_+^4 / Bz = b\}$$

$$Z = \{(x, y, w, \alpha) \in \mathbb{R}_+^4 / x + y + w = 4, x - y + \alpha = \frac{3}{2}\}$$

Assim:

$$(x, y, w, \alpha) \in Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w \\ \alpha \end{pmatrix} \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} - \frac{(t_1+t_2)}{2} \\ \frac{5}{4} - \frac{(t_1-t_2)}{2} \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \\ y = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}(t_1 - t_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Leftrightarrow t_1 + t_2 \leq \frac{11}{2} \\ y \geq 0 \Leftrightarrow t_1 - t_2 \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

A partir das inequações obtidas acima, tem-se em relação aos parâmetros t_1 e t_2 a solução do conjunto Z representado na Figura 10.

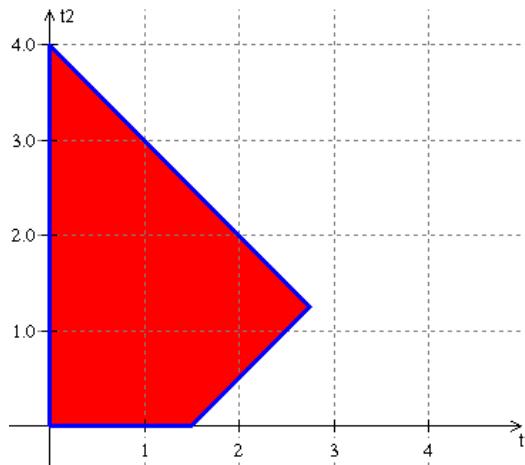


FIGURA 10: Conjunto solução do sistema linear não homogêneo $Bz = b$.

Dessa forma, tem-se que:

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(t_1, t_2) = t \rightarrow F(t) = (-\frac{1}{2}(t_1 + t_2), -\frac{1}{2}(t_1 - t_2), t_1, t_2) + (\frac{11}{4}, \frac{5}{4}, 0, 0)$$

Sendo os vértices do conjunto Z da Figura 10: $(0,0), (\frac{5}{2}, 0), (0, \frac{11}{2}), (4, \frac{3}{2})$, temos:

$$F(0,0) = (\frac{11}{4}, \frac{5}{4}, 0, 0) = z_0$$

$$F(0, \frac{11}{2}) = (0, 4, 0, \frac{11}{2}) = z_2$$

$$F(\frac{5}{2}, 0) = (\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0) = z_1$$

$$F(4, \frac{3}{2}) = (0, 0, 4, \frac{3}{2}) = z_3$$

Então, o conjunto de vértices do polígono Z é: $Z_v = \{z_0, z_1, z_2, z_3\} \subset \mathbb{R}^4$, como apresentado na Figura 11.

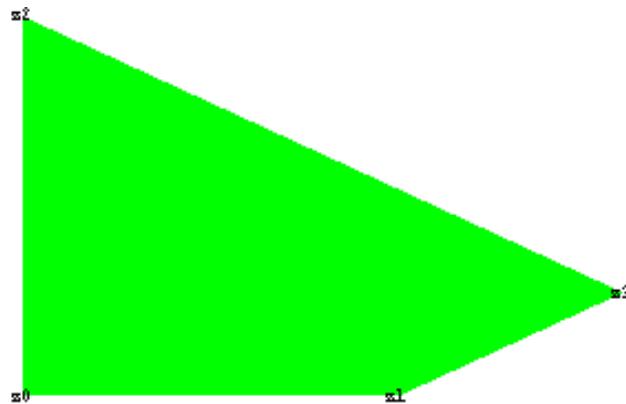


FIGURA 11: Representação geométrica do conjunto Z .

Da mesma forma, descrevemos o conjunto S e os pontos pertencentes ao seu conjunto de vértices (S_v).

Seja:

$$S = \{s \in \mathbb{R}_+^4 / Ds = d\}$$

$$S = \{(0, u_1, u_2, v) \in \mathbb{R}_+^4 / -u_1 + u_2 + v = 1\}$$

Na Figura 12, temos o plano colorido $\subset \mathbb{R}^3$ que representa o conjunto S .

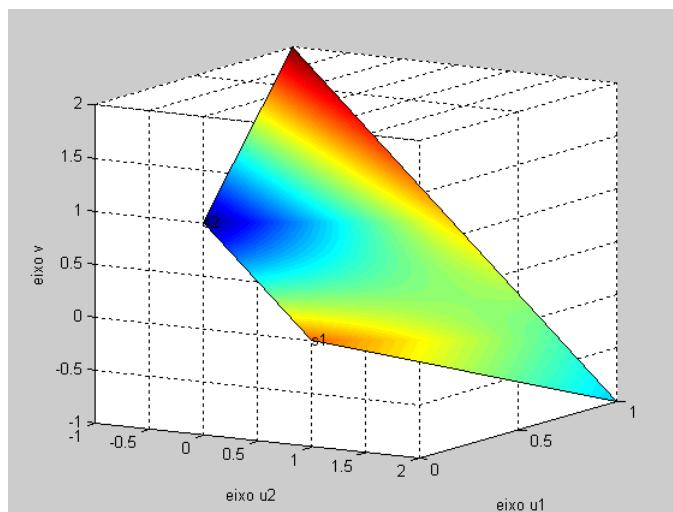


FIGURA 12: Conjunto solução do sistema linear não homogêneo $Ds = d$.

Portanto, para este conjunto temos $S_v = \{s_1, s_2\} = \{(0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0)\}$.

Com os conjuntos Z_v e S_v , obtem-se os problemas lineares paramétricos apresentados abaixo. E a partir desses problemas conseguimos obter os pontos de equilíbrio do problema penalizado e consequentemente as soluções locais do Problema de Dois Níveis Linear.

Nas tabelas abaixo as variáveis A_1 e A_2 representam variáveis artificiais presentes e necessárias na tabela simplex inicial, devido à presença de restrições com igualdade nos problemas $P(M, \bar{z})$ e $P(M, \bar{s})$, devido também a impossibilidade de determinar a matriz identidade nestas tabelas.

Tomando os vértices do polígono Z , temos:

$$\triangleright z_0 = \left(\frac{11}{4}, \frac{5}{4}, 0, 0 \right)$$

$$\begin{aligned} P(M, z_0) : \text{Max } F_M(z_0, s) &= -\frac{11}{4} - M \left(\frac{5}{4}v \right) \\ \text{s.a } -u_1 + u_2 + v &= 1 \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad v \geq 0 \end{aligned}$$

	v	u_1	u_2	A_1	
A_1	1	-1	1	1	1
M	$\frac{5}{4}$	0	0	0	
	0	0	0	1	

TABELA 1: Tabela simplex inicial do Problema $P(M, z_0)$.

	v	u_1	u_2	
u_2	1	-1	1	1
M	$\frac{5}{4}$	0	0	0

TABELA 2: Tabela simplex ótima do Problema $P(M, z_0)$.

Então: $s_1 = (0, 0, 0, 1)$

e

$$F_M(z_1, s) = -\frac{11}{4}$$

Temos na tabela 1 a tabela simplex inicial e na tabela 2 a tabela simplex ótima para o problema $P(M, z_0)$.

Essa solução: $s_1 = (0, 0, 0, 1)$ apresenta o valor ótimo $-\frac{11}{4}$ para este problema.

$$\triangleright \quad z_1 = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0 \right)$$

$$P(M, z_1) : \text{Max } F_M(z_0, s) = -\frac{3}{2} - M \left(\frac{5}{2} u_1 \right)$$

s.a $-u_1 + u_2 + v = 1$

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad v \geq 0$$

	v	u_1	u_2	A_1	
A_1	1	-1	1	1	1
M	0	$\frac{5}{2}$	0	0	
	0	0	0	1	

TABELA 3: Tabela simplex inicial do Problema P(M, z_1).

	v	u_1	u_2	
u_2	1	-1	1	1
M	0	$\frac{5}{2}$	0	0

TABELA 4: Tabela simplex ótima do Problema P(M, z_1).

Então: $s_1 = (0, 0, 0, 1)$ e $F_M(z_1, s) = -\frac{3}{2}$

O problema $P(M, z_1)$ apresenta o valor ótimo $-\frac{3}{2}$ encontrado a partir da solução ótima s_1 obtida, como mostra a tabela 4.

$$\triangleright \quad z_2 = \left(0, 4, 0, \frac{11}{2} \right)$$

$$P(M, z_2) : \text{Max } F_M(z_2, s) = -M \left(\frac{11}{2} u_2 + 4v \right)$$

s.a $-u_1 + u_2 + v = 1$

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad v \geq 0$$

	v	u_1	u_2	A_1	
A_1	1	-1	1	1	1
M	4	0	$\frac{11}{2}$	0	
	0	0	0	1	

TABELA 5: Tabela simplex inicial do Problema P(M, z_2).

	v	u_1	u_2	
v	1	-1	1	1
M	0	4	$\frac{3}{2}$	0

TABELA 6: Tabela simplex ótima do Problema P(M, z_2).

Então: $s_2 = (0, 1, 0, 0)$ e $F_M(z_2, s) = -4M$

Este problema apresenta a solução: $s_2 = (0, 1, 0, 0)$ e $-4M$ como valor ótimo.

$$\triangleright \quad z_3 = \left(0, 0, 4, \frac{3}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} P(M, z_3) : \text{Max } F_M(z_3, s) &= -M(4u_1 + \frac{3}{2}u_2) \\ \text{s.a } -u_1 + u_2 + v &= 1 \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad v \geq 0 \end{aligned}$$

	v	u_1	u_2	A_1	
A_1	-1	1	-1	1	1
M	0	4	$\frac{3}{2}$	0	
	0	0	0	1	

TABELA 7: Tabela simplex inicial do Problema $P(M, z_3)$.

Então: $s_2 = (0, 1, 0, 0)$

	v	u_1	u_2	
v	1	-1	1	1
M	0	4	$\frac{16}{5}$	0

TABELA 8: Tabela simplex ótima do Problema $P(M, z_3)$.

$$F_M(z_3, s) = 0$$

Nas tabelas 7 e 8, temos respectivamente, a tabela simplex inicial e a tabela simplex ótima do problema $P(M, z_3)$.

A solução para este problema: $s_2 = (0, 1, 0, 0)$ apresenta o valor ótimo 0.

Fixando agora os pontos $s_1, s_2 \in S_v$ no problema penalizado $P(M)$, temos:

$$\triangleright \quad s_1 = (0, 0, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} P(M, s_1) : \text{Max } F_M(z, s_1) &= -x - M(\alpha) \\ \text{s.a } x + y + w &= 4 \\ x - y + \alpha &= \frac{3}{2} \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad w \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \end{aligned}$$

	x	y	α	w	
w	1	1	0	1	4
α	1	-1	1	0	$\frac{3}{2}$
	1	0	0	0	
M	0	0	1	0	

TABELA 9: Tabela simplex inicial do Problema P(M, s_1).

$$\text{Tem-se então: } z_1 = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0 \right) \quad \text{e} \quad F_M(z, s_1) = -\frac{3}{2}$$

Nas tabelas 9 e 10, temos respectivamente, a tabela simplex inicial e a tabela simplex ótima do problema P(M, s_1).

A solução para este problema: $z_1 = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0 \right)$ apresenta o valor ótimo $-\frac{3}{2}$.

$$\triangleright \quad s_2 = (0, 1, 0, 0)$$

$$P(M, s_2): \text{Max } F_M(z, s_2) = -x - M(y)$$

$$\text{s.a} \quad x + y + w = 4$$

$$x - y + \alpha = \frac{3}{2}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad w \geq 0, \quad \alpha \geq 0$$

	x	y	α	w	
w	1	1	0	1	4
α	1	-1	1	0	$\frac{3}{2}$
	1	0	0	0	
M	0	1	0	0	

TABELA 11: Tabela simplex inicial do Problema P(M, s_2).

	x	y	α	w	
w	1	1	0	1	4
α	1	-1	1	0	$\frac{3}{2}$
	1	0	0	0	
M	0	1	0	0	0

TABELA 12: Tabela simplex ótima do Problema P(M, s_2).

$$\text{Tem-se então: } z_3 = (0, 0, 4, \frac{3}{2}) \quad \text{e} \quad F_M(z, s_2) = 0$$

Temos para o problema P(M, s_2) a solução $z_3 = (0, 0, 4, \frac{3}{2})$, como apresentado na

tabela 12. Temos também que, com essa solução o problema P(M, s_2) obtém o valor ótimo 0.

Resumidamente, temos:

$$\max_{s \in S} F_M(z_0, s) = -\frac{11}{4};$$

$$\max_{s \in S} F_M(z_3, s) = 0;$$

$$\max_{s \in S} F_M(z_1, s) = -\frac{3}{2};$$

$$\max_{z \in Z} F_M(z, s_1) = -\frac{3}{2};$$

$$\max_{s \in S} F_M(z_2, s) = -4M;$$

$$\max_{z \in Z} F_M(z, s_2) = 0;$$

Portanto, podemos notar que $\max_{s \in S} F_M(z_1, s) = \max_{z \in Z} F_M(z, s_1) = -\frac{3}{2}$.

Assim como, $F_M(z_1, s_1) = -\frac{3}{2}$. Do mesmo modo que, $\max_{s \in S} F_M(z_3, s) = \max_{z \in Z} F_M(z, s_2) = 0$ e $F_M(z_3, s_2) = 0$.

Então, de acordo com a definição de pontos de equilíbrio, apresentada na seção 4.2, temos que (z_1, s_1) e (z_3, s_2) são pontos de equilíbrio do problema P(M).

Podemos confirmar este fato através do lema 4, onde o produto escalar das coordenadas deste ponto é nulo.

A partir das tabelas ótimas do simplex relativas aos problemas P(M, s₁) e P(M, s₂) obtemos o conjunto N^{+0} para cada um destes problemas, objetivando assim encontrar as soluções locais do problema PDNLP A, apresentado na seção 5.1 deste trabalho.

Assim, temos que:

- Para P(M, s₁): $N^+ = \{ \}$ e $N^{+0} = \{ \}$; (ver apêndice C)
- Para P(M, s₂): $N^+ = \{1\}$, $N^{+0} = \{ \}$; (ver apêndice C)

Deste modo, os pontos $z_1 = (\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0)$ e $z_3 = (0, 0, 4, \frac{3}{2})$, soluções de P(M, s₁) e P(M, s₂), respectivamente, são soluções ótimas locais do problema PDNLP A. É possível observarmos este fato na Figura 7.

Exemplo 4

O exemplo a seguir, adaptado de Campêlo e Scheimberg (2005), tem por objetivo ilustrar a geometria dos conjuntos viáveis de um problema PDNLP em espaços de dimensões maiores que dois.

Seja o problema PDNLP:

$$\begin{aligned} & \text{Max} - x + 2y - 20z \\ \text{s.a } & \quad x \geq 0, y, z \text{ solução de} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_x : & \text{max} - y + 10z \\ \text{s.a } & \quad x + y + z \leq 3 \\ & \quad x + y - z \geq 1 \\ & \quad x - y + z \leq 1 \\ & \quad -x + y + z \leq 1 \\ & \quad y \geq 0; \quad z \geq 0 \end{aligned}$$

Tem-se então:

➤ O Problema Relaxado:

$$\begin{aligned} & \text{Max} - x + 2y - 20z \\ \text{s.a } & \quad x \geq 0 \\ & \quad x + y + z \leq 3 \\ & \quad x + y - z \geq 1 \\ & \quad x - y + z \leq 1 \\ & \quad -x + y + z \leq 1 \\ & \quad y \geq 0; \quad z \geq 0 \end{aligned}$$

➤ Conjunto Viável do Problema Relaxado:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : x + y + z \leq 3, x + y - z \geq 1, -x + y + z \leq 1, x - y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

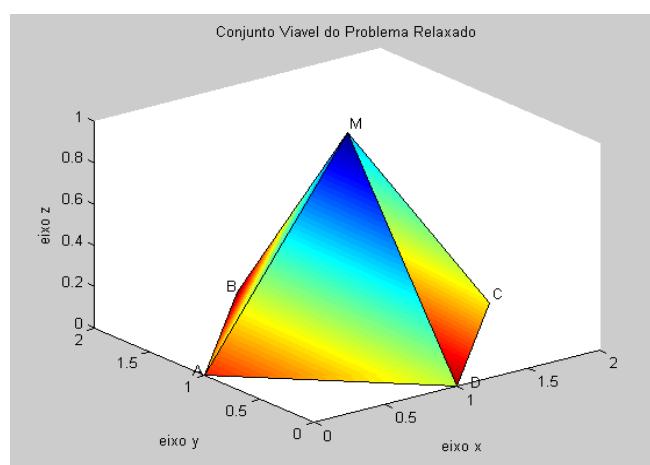


FIGURA 13: Conjunto viável do Problema Relaxado.

O conjunto viável do problema relaxado (W) é determinado pela interseção das restrições presentes no problema relaxado, que descreve neste caso, como apresentado na Figura 13 a região delimitada pela pirâmide de base quadrada com vértices A (0,1,0), B (1,2,0), C (2,1,0), D (1,0,0) e M (1,1,1).

➤ Conjunto Viável do Problema de Segundo Nível:

Este conjunto representa o conjunto de soluções viáveis (y, z) do problema P_x .

Temos neste caso que, para $x \geq 0$:

$$V_x = \begin{cases} \{(1,0)\}, & \text{se } x = 0 \\ \{(y,z) \in \mathbb{R}_+^2 : y + z \leq 1 + x; y - z \geq 1 - x; y \geq 0; z \geq 0\}, & \text{se } 0 < x < 1 \\ \{(y,z) \in \mathbb{R}_+^2 : y + z \leq 3 - x; -y + z \leq 1 - x; y \geq 0; z \geq 0\}, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \{(1,0)\}, & \text{se } x = 2 \\ \{\}, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Para uma melhor interpretação geométrica do conjunto (V_x), consideramos na figura

14, os casos: $\begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

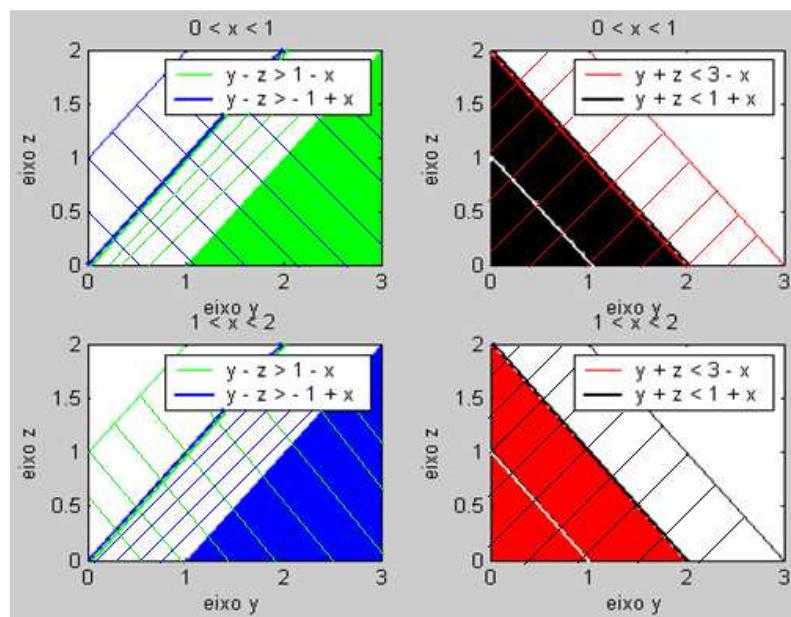


FIGURA 14: Interpretação geométrica do Problema de Segundo Nível para $0 \leq x \leq 2$

Observando a figura acima, temos que:

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1]: \begin{cases} y - z \geq 1 - x \Rightarrow y - z \geq -1 + x \\ y + z \leq 1 + x \Rightarrow y + z \leq 3 - x \end{cases} \\ \forall x \in [1,2]: \begin{cases} y - z \geq -1 + x \Rightarrow y - z \geq 1 - x \\ y + z \leq 3 - x \Rightarrow y + z \leq 1 + x \end{cases} \end{cases}$$

Então, para x no intervalo $[0,1]$ a restrição $y - z > 1 - x$ garante a restrição $y - z > -1 + x$. Assim como, a restrição $y + z < 1 + x$ garante a restrição $y + z < 3 - x$.

De modo análogo, temos que para x variando no intervalo $[1,2]$ as restrições $y - z > -1 + x$ e $y + z < 3 - x$, garantem, respectivamente, as restrições $y - z > 1 - x$ e $y + z < 1 + x$.

Resumidamente, é possível observarmos que o conjunto V_x é determinado por triângulos isósceles de vértices $(1 - x, 0)$, $(1 + x, 0)$ e $(1, x)$ para $\forall x \in [0,1]$ e $(-1 + x, 0)$, $(3 - x, 0)$ e $(1, 2 - x)$ para $\forall x \in [1,2]$. Esses triângulos podem ser melhor identificados quando pensamos na projeção de ‘cortes’ realizados perpendicularmente ao eixo x na pirâmide apresentada no conjunto W , ou seja, de maneira mais rudimentar, na ‘fatição’ vertical desta figura. Dessa forma, esses triângulos aparecem de acordo com a variação da variável x , partindo inicialmente de um ponto, quando $x = 0$ e apresentando assim um crescimento quando $x \rightarrow 1$ e um decrescimento para $x \in [1,2]$, até voltar a sua forma inicial de ponto quando $x = 2$, como mostra a Figura 15.

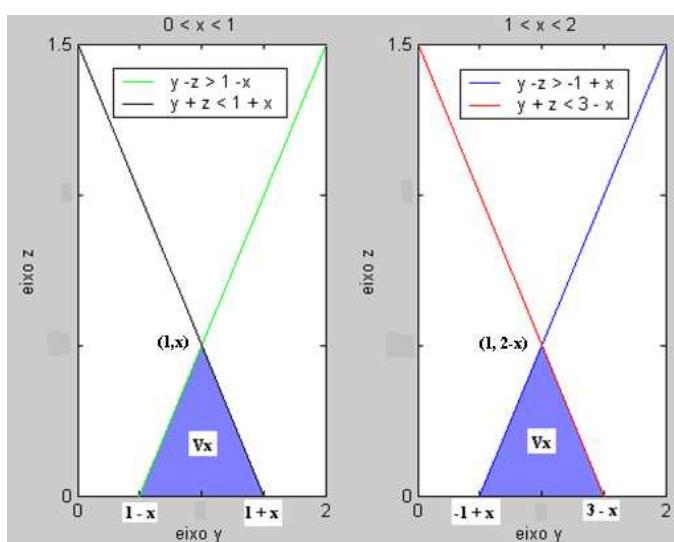


FIGURA 15: Conjunto Viável do Problema de Segundo Nível para $0 \leq x \leq 2$

Observação:

O conjunto viável do Problema de Segundo Nível quando x assume valores maiores que 2 é vazio, visto que as restrições envolvidas não apresentam uma região comum, como mostra a Figura 16.

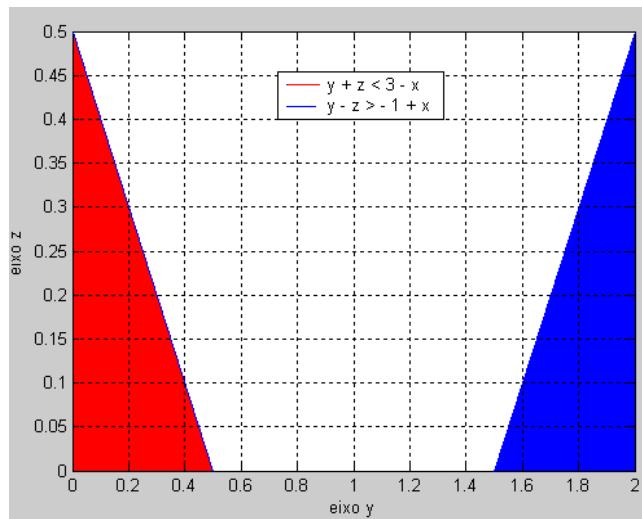


FIGURA 16: Conjunto Viável do Problema de Segundo Nível: $x > 2$

➤ Conjunto Solução do Problema de Segundo Nível:

$$\operatorname{Arg} \max P(x) = \begin{cases} \{(1, x)\}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \{(1, 2-x)\}, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Função valor:

$$V(x) = \begin{cases} f(x, 1, x) = -1 + 10x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x, 1, 2-x) = 19 - 10x, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Como o problema do segundo nível busca a maximização, tem-se que o conjunto solução deste problema é dado justamente pelos pontos que descrevem as arestas da pirâmide de W , quando $y = 1$. Este fato pode ser melhor observado se atentarmos ao gradiente desta função, que nos dá a sua direção de crescimento.

Para este problema a figura 17 ilustra a solução do problema de segundo nível, quando x assume valor 0 e quando x assume valor 2 (pontos de cor verde). Essas soluções são de modo respectivo, os pontos $(1,0)$ e $(1,0)$.

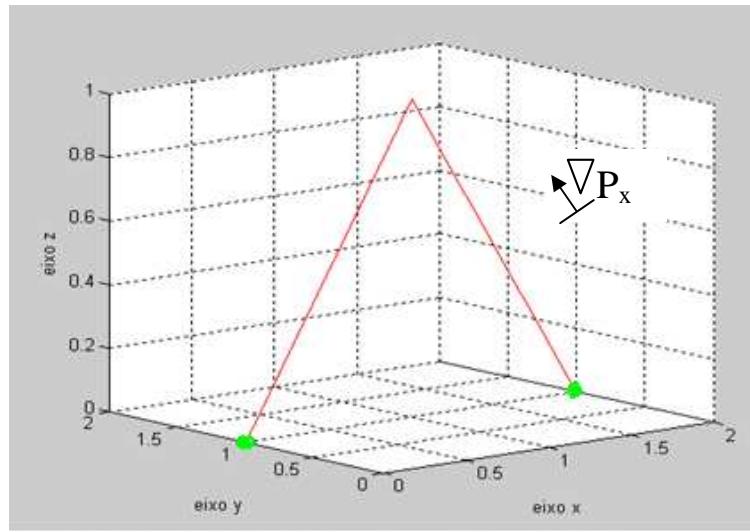


FIGURA 17: Conjunto Solução do problema de Segundo Nível.

➤ Conjunto Viável do PDNLP:

$$V = \{(x, 1, x) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 1, 2-x) : 1 \leq x \leq 2\}$$

Neste problema o conjunto V é representado pelas arestas em vermelho \overline{AM} e \overline{MC} da pirâmide do problema W , como mostra a figura 18. Na figura 15, observamos essas arestas, determinadas a partir da união dos pontos pertencentes ao conjunto solução do problema de segundo nível.

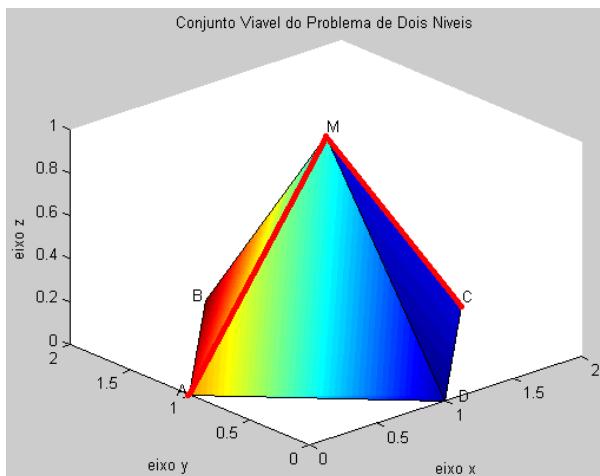


FIGURA 18: Conjunto Viável de PDNLP no Problema Relaxado

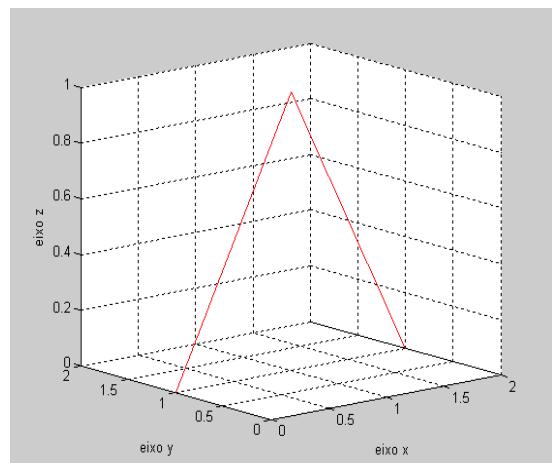


FIGURA 19: Conjunto Viável de PDNLP.

➤ Conjunto Solução do PDNLP:

$$V^* = \{(0, 1, 0)\}$$

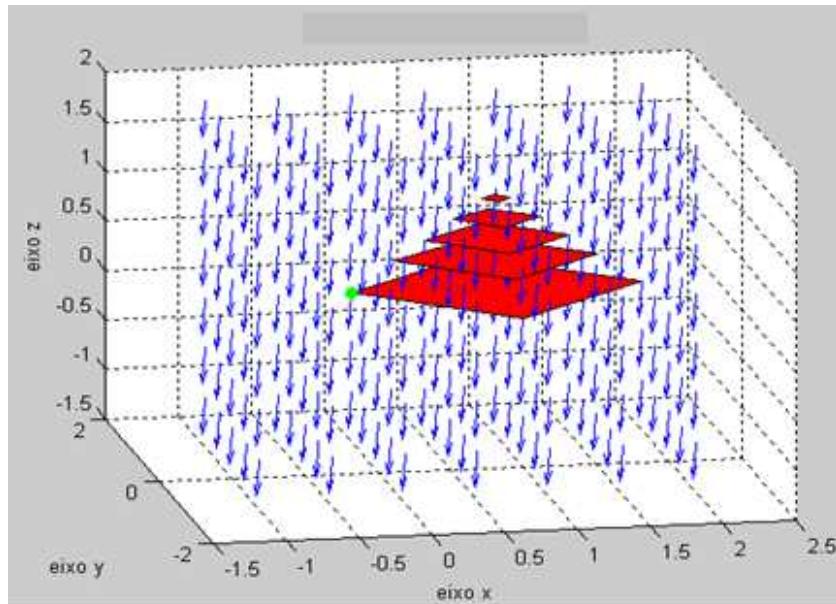


FIGURA 20: Representação Geométrica do Conjunto Solução do PDNLP

De acordo com o conjunto viável de PDNLP, apresentado anteriormente, temos que a solução deste problema dá-se exatamente em um dos vértices (A, M ou C) da pirâmide de W. Sabendo, portanto que, o problema do líder busca a maximização, temos que isto acontece quando a variável de decisão do líder (x) assume valor mínimo, ou seja, zero. Pode-se observar isto através da Figura 20, em que é possível notar a direção de crescimento (gradiente) desta função. Ainda nesta figura, ilustra-se através do ponto verde a solução $(0,1,0)$ do problema em questão.

➤ **PROBLEMA PENALIZADO:**

Utilizando as condições KKT para a reformulação do problema PDNLP do exemplo 4, temos o problema penalizado $P(M)$:

Exemplo 4

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} - x + 2y - 20z \\
 \text{s.a} \quad & x \geq 0, y, z \text{ solução de} \\
 P_x : & \max -y + 10z \\
 \text{s.a} \quad & x + y + z \leq 3 \\
 & x + y - z \geq 1 \\
 & x - y + z \leq 1 \\
 & -x + y + z \leq 1 \\
 & y \geq 0; \quad z \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(M) : & \text{Max } -x + 2y - 20z - M(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_3 + \alpha_4\mu_4 + \nu_1y + \nu_2z) \\
\text{s.a} \quad & x + y + z + \alpha_1 = 3 \\
& -x - y + z + \alpha_2 = -1 \\
& x - y + z + \alpha_3 = 1 \\
& -x + y + z + \alpha_4 = 1 \\
& -\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 + \nu_1 = 1 \\
& \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 - \nu_2 = 10 \\
& x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; \nu_1 \geq 0; \nu_2 \geq 0 \\
& \alpha_i \geq 0; \mu_i \geq 0, \text{ para } i=1,2,3,4
\end{aligned}$$

Neste problema, temos os conjuntos Z e S que determinam respectivamente, os conjuntos viáveis da formulação primal e dual do problema de segundo nível.

$$\begin{aligned}
Z &= \left\{ z \in \mathbb{R}_+^7 / Bz = b \right\} \\
Z &= \left\{ (x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^7 / \begin{array}{l} x + y + z + \alpha_1 = 3; \\ -x - y + z + \alpha_2 = -1; \\ x - y + z + \alpha_3 = 1; \\ -x + y + z + \alpha_4 = 1 \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Assim:

$$(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \right] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{(t_1 - t_2)}{2} \\ 1 + \frac{(t_1 - t_3)}{2} \\ 1 - \frac{(t_2 + t_3)}{2} \\ -t_1 + t_2 + t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}(t_1 - t_2) \\ y = 1 + \frac{1}{2}(t_1 - t_3) \\ z = 1 - \frac{1}{2}(t_2 + t_3) \\ \alpha_1 = -t_1 + t_2 + t_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 & \Leftrightarrow -t_1 + t_2 \leq 2 \\ y \geq 0 & \Leftrightarrow -t_1 + t_3 \leq 2 \\ z \geq 0 & \Leftrightarrow t_2 + t_3 \leq 2 \\ \alpha_1 \geq 0 & \Leftrightarrow -t_1 + t_2 + t_3 \geq 0 \end{cases}$$

onde $t_1, t_2, t_3 \geq 0$

O conjunto de inequações acima, definido pelos parâmetros t_1 , t_2 e t_3 representa através de parametrização o conjunto Z . Este conjunto e seu conjunto de vértices Z_v são apresentados na figura 21.

Temos então:

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^7$$

$$(t_1, t_2, t_3) = t \mapsto F(t) = \left(\frac{1}{2}(t_1 - t_2), \frac{1}{2}(t_1 - t_3), -\frac{1}{2}(t_2 + t_3), -t_1 + t_2 + t_3, t_1, t_2, t_3 \right) + (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$$

Sendo os vértices do conjunto $Z \subset \mathbb{R}^3$: $(0,0,0)$, $(0,0,2)$, $(2,2,0)$, $(0,2,0)$, $(2,0,2)$, temos:

$$F(0,0,0) = (1,1,1,0,0,0,0) = z_1$$

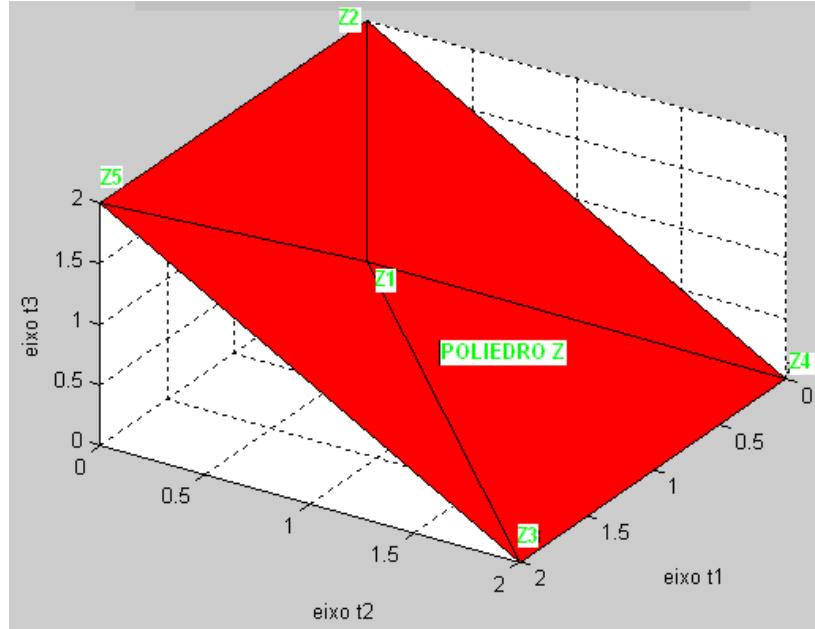
$$F(0,0,2) = (1,0,0,2,0,0,2) = z_2$$

$$F(2,2,0) = (1,2,0,0,2,2,0) = z_3$$

$$F(0,2,0) = (0,1,0,2,0,2,0) = z_4$$

$$F(2,0,2) = (2,1,0,0,2,0,2) = z_5$$

O conjunto de vértices do poliedro $Z \subset \mathbb{R}^7$ é $Z_v = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$.

FIGURA 21: Conjunto solução do sistema linear não homogêneo $Bz = b$.

De modo análogo, determinamos os conjuntos S e S_v :

$$S = \{s \in \mathbb{R}_+^7 / Ds = d\}$$

$$S = \{(0, v_1, v_2, u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}_+^7 / -u_1 + u_2 + u_3 - u_4 + v_1 = 1; u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - v_2 = 10\}$$

$$s = (0, v, \mu) = (0, v_1, v_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \in \mathbb{R}_+^7 \Rightarrow s \in S \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 1 + \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_4 \\ v_2 = -10 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t_1 - t_2 - t_3 + t_4 \\ -10 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = V_0 + \sum_{j=1}^4 t_j V_j;$$

onde $\begin{cases} V_0 = (1, -10, 0, 0, 0, 0) \\ V_1 = (1, 1, 1, 0, 0, 0) \\ V_2 = (-1, 1, 0, 1, 0, 0) \\ V_3 = (-1, 1, 0, 0, 1, 0) \\ V_4 = (1, 1, 0, 0, 0, 1) \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} V_1 = 1 + (t_1 - t_2 - t_3 + t_4) \\ V_2 = -10 + (t_1 + t_2 + t_3 + t_4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 \geq 0 \Leftrightarrow -t_1 + t_2 + t_3 - t_4 \leq 1 \\ V_2 \geq 0 \Leftrightarrow t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \geq 10 \end{cases}$$

onde $t_1, t_2, t_3, t_4 \geq 0$

Podemos escrever $s = (0, v, u) = F(t)$; onde $F(t_1, t_2, t_3, t_4) = (0, V_0 + \sum_{j=1}^4 t_j V_j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^6$

Para o conjunto de restrições: $\begin{cases} -t_1 + t_2 + t_3 - t_4 \leq 1 \\ t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \geq 10 \end{cases}$

Consideraremos primeiramente as igualdades correspondentes:

$$\begin{cases} -t_1 + t_2 + t_3 - t_4 = 1 \\ t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

Daqui resulta

$$\begin{cases} t_3 = \frac{11}{2} - t_2 \\ t_4 = \frac{9}{2} - t_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 \geq 0 \Leftrightarrow t_4 \leq \frac{9}{2} \\ t_2 \geq 0 \Leftrightarrow t_3 \leq \frac{11}{2} \end{cases}$$

Observamos então que a interseção dos hiperplanos $-t_1 + t_2 + t_3 - t_4 = 1$ e $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 10$ é o “plano” que passa pelo ponto $(0, 0, \frac{11}{2}, \frac{9}{2})$ e é gerado pelos vetores $(1, 0, 0, -1)$ e $(0, 1, -1, 0)$. Temos então na figura 22 a ilustração do conjunto S em relação aos parâmetros t_1, t_2, t_3 e t_4 projetado em \mathbb{R}^3 .

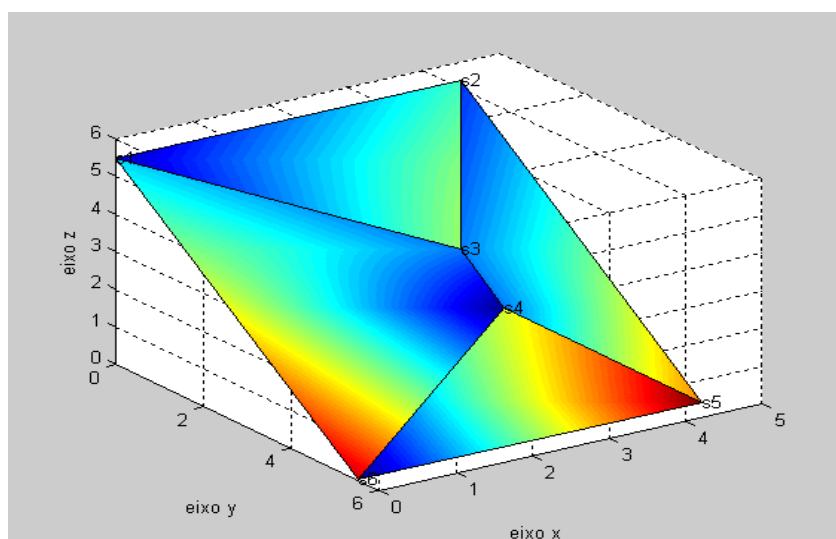


FIGURA 22: Conjunto solução do sistema linear não homogêneo $Dz = d$

Então:

$$F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^7$$

$$(t_1, t_2, t_3, t_4) = t \mapsto F(t) = (0, t_1 - t_2 - t_3 + t_4, t_1 + t_2 + t_3 + t_4, t_1, t_2, t_3, t_4) + (0, 1, -10, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Sendo os vértices do conjunto $S \subset \mathbb{R}^4$: $(0, 0, \frac{11}{2}, \frac{9}{2})$, $(\frac{9}{2}, 0, \frac{11}{2}, 0)$, $(\frac{9}{2}, 0, 1, \frac{9}{2})$, $(\frac{9}{2}, 1, 0, 0)$, $(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}, 0, 0)$, $(0, \frac{11}{2}, 0, \frac{9}{2})$ temos:

$$F(0, 0, \frac{11}{2}, \frac{9}{2}) = \left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{11}{2}, \frac{9}{2} \right) = s_1$$

$$F(\frac{9}{2}, 1, 0, \frac{9}{2}) = \left(0, 9, 0, \frac{9}{2}, 1, 0, \frac{9}{2} \right) = s_4$$

$$F(\frac{9}{2}, 0, \frac{11}{2}, 0) = \left(0, 0, 0, \frac{9}{2}, 0, \frac{11}{2}, 0 \right) = s_2$$

$$F(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}, 0, 0) = \left(0, 0, 0, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, 0, 0 \right) = s_5$$

$$F(\frac{9}{2}, 0, 1, \frac{9}{2}) = \left(0, 9, 0, \frac{9}{2}, 0, 1, \frac{9}{2} \right) = s_3$$

$$F(0, \frac{11}{2}, 0, \frac{9}{2}) = \left(0, 0, 0, 0, \frac{11}{2}, 0, \frac{9}{2} \right) = s_6$$

Assim, $S_v = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$

Com os conjuntos Z_v e S_v , obtemos os problemas lineares paramétricos apresentados abaixo. E a partir desses problemas é possível obtermos os pontos de equilíbrio do problema penalizado e consequentemente as soluções ótimas locais do problema PDNLP, apresentado no exemplo 4 deste trabalho.

Portanto, para:

$$\succ z_1 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$P(M, z_1) : \text{Max } F_M(z_2, s) = -19 - M(v_1 + v_2)$$

$$s.a \quad -u_1 + u_2 + u_3 - u_4 + v_1 = 1$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - v_2 = 10$$

$$v_1 \geq 0; \quad v_2 \geq 0$$

$$u_i \geq 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4$$

	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3	u_4	A_1	A_2	
A_1	1	0	-1	1	1	-1	1	0	1
A_2	0	-1	1	1	1	1	0	1	10
\mathbf{M}	1	1	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	1	1	

TABELA 13: Tabela simplex inicial do Problema $P(M, z_1)$.

	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3	u_4	
u_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	0	$\frac{11}{2}$
u_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	1	$\frac{9}{2}$
\mathbf{M}	1	1	0	0	0	0	

TABELA 14: Tabela simplex óptima do Problema $P(M, z_1)$.

$$\text{Então: } s = (0, 0, 0, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, 0, 0) = s_5 \quad \text{e} \quad F_M(z_1, s) = -19$$

Temos nas tabelas acima: a tabela simplex inicial (tabela 9) e a tabela simplex ótima (tabela 10) do problema $P(M, z_1)$.

A solução ótima s_5 apresenta para este problema o valor -19.

$$\triangleright z_2 = (1, 0, 0, 2, 0, 0, 2)$$

$$\begin{aligned} P(M, z_2) : \text{Max } F_M(z_2, s) &= -1 - M(2u_1 + 2u_4) \\ \text{s.a} \quad -u_1 + u_2 + u_3 - u_4 + v_1 &= 1 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - v_2 &= 10 \\ v_1 \geq 0; \quad v_2 \geq 0 & \\ u_i \geq 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 & \end{aligned}$$

	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3	u_4	A_1	A_2	
A_1	1	0	-1	1	1	-1	1	0	1
A_2	0	-1	1	1	1	1	0	1	10
M	0	0	2	0	0	2	0	0	
	0	0	0	0	0	0	1	1	

TABELA 15: Tabela simplex inicial do Problema $P(M, z_2)$.

	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3	u_4	
u_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	0	$\frac{11}{2}$
u_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	1	$\frac{9}{2}$
M	1	1	0	0	0	0	0

TABELA 16: Tabela simplex ótima do Problema $P(M, z_2)$.

$$\text{Então: } s = (0, 0, 0, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, 0, 0) = s_5 \quad \text{e} \quad F_M(z_2, s) = -1 - 9M$$

Na tabela 11 a tabela simplex inicial do problema $P(M, z_2)$ e na tabela 12 a tabela simplex ótima deste problema.

Para o problema $P(M, z_2)$ a solução ótima s_5 nos dá o seguinte valor ótimo: $-1 - 9M$.

$$\triangleright z_3 = (1, 2, 0, 0, 2, 2, 0)$$

$$\begin{aligned}
P(M, z_3) : \text{Max } F_M(z_3, s) &= 3 - M(2u_2 + 2u_3 + 2v_1) \\
s.a \quad -u_1 + u_2 + u_3 - u_4 + v_1 &= 1 \\
u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - v_2 &= 10 \\
v_1 \geq 0; \quad v_2 \geq 0 \\
u_i \geq 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}$$

	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3	u_4	A_1	A_2	
A_1	1	0	-1	1	1	-1	1	0	1
A_2	0	-1	1	1	1	1	0	1	10
	2	0	0	2	2	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	1	1	

TABELA 17: Tabela simplex inicial do Problema $P(M, z_3)$.

	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3	u_4	
u_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	0	$\frac{11}{2}$
u_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	1	$\frac{9}{2}$
M	1	1	0	0	0	0	0

TABELA 18: Tabela simplex ótima do Problema $P(M, z_3)$.

$$\text{Então: } s = (0, 0, 0, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, 0, 0) = s_5 \quad \text{e} \quad F_M(z_3, s) = 3 - 11M$$

Nas tabelas 13 e 14, temos respectivamente, a tabela simplex inicial e ótima do problema $P(M, z_3)$.

Este problema tem como solução s_5 e apresenta o seguinte valor ótimo: $3 - 11M$.

$$\Rightarrow z_4 = (0, 1, 0, 2, 0, 2, 0)$$

$$\begin{aligned}
P(M, z_4) : \text{Max } F_M(z_4, s) &= 2 - M(2u_1 + 2u_3 + v_1) \\
s.a \quad -u_1 + u_2 + u_3 - u_4 + v_1 &= 1 \\
u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - v_2 &= 10 \\
v_1 \geq 0; \quad v_2 \geq 0 \\
u_i \geq 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}$$

	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3	u_4	A_1	A_2	
A_1	1	0	-1	1	1	-1	1	0	1
A_2	0	-1	1	1	1	1	0	1	10
	1	0	2	0	2	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	1	1	

TABELA 19: Tabela simplex inicial do Problema $P(M, z_4)$.

	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3	u_4	
u_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	0	$\frac{11}{2}$
u_4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	1	$\frac{9}{2}$
M	1	0	2	0	2	0	0

TABELA 20: Tabela simplex ótima do Problema $P(M, z_4)$.

$$\text{Então: } s = (0, 0, 0, 0, \frac{11}{2}, 0, \frac{9}{2}) = s_6 \quad \text{e} \quad F_M(z_4, s) = 2$$

Nas tabelas acima, temos a tabela simplex inicial (15) e a tabela simplex ótima (16) do problema $P(M, z_4)$.

Para este problema a solução ótima s_6 apresenta o valor ótimo 2.

$$\Rightarrow z_5 = (2, 1, 0, 0, 2, 0, 2)$$

$$\begin{aligned} P(M, z_5): \text{Max } F_M(z_5, s) &= -M(2u_2 + 2u_4 + v_1) \\ s.a \quad -u_1 + u_2 + u_3 - u_4 + v_1 &= 1 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - v_2 &= 10 \\ v_1 \geq 0; \quad v_2 \geq 0 \\ u_i \geq 0, \text{ para } i &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3	u_4	A_1	A_2	
A_1	1	0	-1	1	1	-1	1	0	1
A_2	0	-1	1	1	1	1	0	1	10
	1	0	0	2	0	2	0	0	
	0	0	0	0	0	0	1	1	

TABELA 21: Tabela simplex inicial do Problema $P(M, z_5)$.

	v_1	v_2	u_1	u_2	u_3	u_4	
u_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	0	$\frac{11}{2}$
u_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	1	$\frac{9}{2}$
M	1	0	0	2	0	2	0

TABELA 22: Tabela ótima do Problema $P(M, z_5)$.

$$\text{Então: } s = (0, 0, 0, \frac{9}{2}, 0, \frac{11}{2}, 0) = s_2 \quad \text{e} \quad F_M(z_5, s) = 0$$

Temos para o problema $P(M, z_5)$, a tabela simplex inicial (17) e a tabela simplex ótima (18).

A solução ótima s_2 apresenta para este problema o valor ótimo 0.

Fixando agora o ponto $s \in S_v$ no problema penalizado $P(M)$, temos os seguintes problemas paramétricos:

Observação: Como as soluções obtidas para os problemas $P(M, \bar{z})$ apresentados acima foram apenas 3 pontos distintos do conjunto S_v , sendo eles: (s_2, s_5, s_6) ,

apresentaremos somente a análise das tabelas simplex de $P(M, \bar{s})$ para tais pontos, visto o interesse em encontrar os pontos de equilíbrio.

Assim:

$$\triangleright s_2 = \left(0, 0, 0, \frac{9}{2}, 0, \frac{11}{2}, 0 \right)$$

$$\begin{aligned}
 P(M, s_2) : \text{Max } F_M(z, s_2) &= -x + 2y - 20z - M \left(\frac{9}{2} \alpha_1 + \frac{11}{2} \alpha_3 \right) \\
 \text{s.a} \quad x + y + z + \alpha_1 &= 3 \\
 x + y - z - \alpha_2 &= 1 \\
 x - y + z + \alpha_3 &= 1 \\
 -x + y + z + \alpha_4 &= 1 \\
 x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0 \\
 \alpha_i \geq 0; \text{ para } i &= 1, \dots, 4
 \end{aligned}$$

	x	y	z	α_1	α_2	α_3	α_4	A_1	
α_1	1	1	1	1	0	0	0	0	3
A_1	1	1	-1	0	-1	0	0	1	1
α_3	1	-1	1	0	0	1	0	0	1
α_4	-1	1	1	0	0	0	1	0	1
	1	-2	20	0	0	0	0	0	
M	0	0	0	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{11}{2}$	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	1	

TABELA 23: Tabela simplex inicial do Problema P (M, s_2).

	x	y	z	α_1	α_2	α_3	α_4	
x	1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	2
α_2	0	0	2	1	1	0	0	2
α_4	0	0	2	0	0	1	1	2
y	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
M	0	0	0	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{11}{2}$	0	0
	0	0	19	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	

TABELA 24: Tabela simplex ótima do Problema P (M, s_2).

$$\text{Então: } z = (2, 1, 0, 0, 2, 0, 2) = z_5 \quad \text{e} \quad F_M(z, s_2) = 0$$

Nas tabelas acima, temos: a tabela simplex inicial (19) e a tabela ótima (20) do problema P (M, s_2). Tem-se como solução deste problema z_5 que nos dá o valor ótimo 0.

$$\triangleright s_5 = \left(0, 0, 0, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, 0, 0 \right)$$

$$\begin{aligned}
P(M, s_5) : \text{Max } F_M(z, s_2) &= -x + 2y - 20z - M \left(\frac{9}{2} \alpha_1 + \frac{11}{2} \alpha_2 \right) \\
\text{s.a.} \quad &x + y + z + \alpha_1 = 3 \\
&x + y - z - \alpha_2 = 1 \\
&x - y + z + \alpha_3 = 1 \\
&-x + y + z + \alpha_4 = 1 \\
&x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0 \\
&\alpha_i \geq 0; \text{ para } i = 1, \dots, 4
\end{aligned}$$

	x	y	z	α_1	α_2	α_3	α_4	A ₁
α_1	1	1	1	1	0	0	0	0
A ₁	1	1	-1	0	-1	0	0	1
α_3	1	-1	1	0	0	1	0	0
α_4	-1	1	1	0	0	0	1	0
	1	-2	20	0	0	0	0	0
M	0	0	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1

TABELA 25: Tabela simplex inicial do Problema P (M, s₅).

	x	y	z	α_1	α_2	α_3	α_4	
α_1	0	0	0	1	1	-1	-1	0
x	1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
z	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
y	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
M	0	0	0	0	1	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	0
	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{21}{2}$	9	

TABELA 26: Tabela simplex ótima do Problema P (M, s₅).

$$\text{Então: } z = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) = z_1 \quad \text{e} \quad F_M(z, s_2) = -19$$

Temos nas tabelas 21 e 22, respectivamente, a tabela simplex inicial e a tabela simplex ótima do problema P (M, s₅), que nos dá como solução z₁ e o valor ótimo 1 para este problema.

$$\succ s_6 = \left(0, 0, 0, 0, \frac{11}{2}, 0, \frac{9}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
P(M, s_6) : \text{Max } F_M(z, s_2) &= -x + 2y - 20z - M \left(\frac{11}{2} \alpha_2 + \frac{9}{2} \alpha_4 \right) \\
\text{s.a.} \quad &x + y + z + \alpha_1 = 3 \\
&x + y - z - \alpha_2 = 1 \\
&x - y + z + \alpha_3 = 1 \\
&-x + y + z + \alpha_4 = 1 \\
&x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0 \\
&\alpha_i \geq 0; \text{ para } i = 1, \dots, 4
\end{aligned}$$

	x	y	z	α_1	α_2	α_3	α_4	A_1	
α_1	1	1	1	1	0	0	0	0	3
A_1	1	1	-1	0	-1	0	0	1	1
α_3	1	-1	1	0	0	1	0	0	1
α_4	-1	1	1	0	0	0	1	0	1
	1	-2	20	0	0	0	0	0	
M	0	0	0	0	$\frac{11}{2}$	0	$\frac{9}{2}$	0	
	0	0	0	0	0	0	0	1	

TABELA 27: Tabela simplex inicial do Problema P (M, s₆).

	x	y	z	α_1	α_2	α_3	α_4	
α_3	2	0	0	0	-1	1	0	2
α_1	2	0	0	1	0	0	-1	2
z	-1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
y	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
M	0	0	0	0	$\frac{11}{2}$	0	$\frac{9}{2}$	0
	21	0	0	0	11	0	9	

TABELA 28: Tabela simplex ótima do Problema P (M, s₆).

$$\text{Então: } z = (0, 1, 0, 2, 0, 2, 0) = z_4 \quad \text{e} \quad F_M(z, s_2) = 2$$

Nas tabelas acima, temos: a tabela simplex inicial (23) e a tabela ótima (24) do problema P (M, s₆). Tem-se como solução deste problema: z = (0, 1, 0, 2, 0, 2, 0), que nos dá o valor ótimo 2.

Resumidamente, temos:

$$\max F_M(z_1, s) = -19$$

$$\max F_M(z_5, s) = 0$$

$$\max F_M(z_2, s) = -1 - 9M$$

$$\max F_M(z, s_2) = 0$$

$$\max F_M(z_3, s) = 3 - 11M$$

$$\max F_M(z, s_5) = -19$$

$$\max F_M(z_4, s) = 2$$

$$\max F_M(z, s_6) = 2$$

De acordo com as soluções obtidas acima, temos:

$$\max F_M(z_1, s) = \max F_M(z, s_5) = -19 = F_M(z_1, s_5)$$

$$\max F_M(z_4, s) = \max F_M(z, s_6) = 2 = F_M(z_4, s_6)$$

$$\max F_M(z_5, s) = \max F_M(z, s_2) = 0 = F_M(z_5, s_2)$$

Assim (z₁, s₅), (z₄, s₆) e (z₅, s₂) são pontos de equilíbrio do problema P(M).

Temos ainda a satisfação do lema 3, que pode ser observado nas seguintes considerações:

Sendo:

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) \\ s_5 = \left(0, 0, 0, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, 0, 0 \right) \end{array} \right\} \Rightarrow z_1^T s_5 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} z_4 = (0, 1, 0, 2, 0, 2, 0) \\ s_6 = \left(0, 0, 0, 0, \frac{11}{2}, 0, \frac{9}{2} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow z_4^T s_6 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} z_5 = (2, 1, 0, 0, 2, 0, 2) \\ s_2 = \left(0, 0, 0, \frac{9}{2}, 0, \frac{11}{2}, 0 \right) \end{array} \right\} \Rightarrow z_5^T s_2 = 0$$

A partir das tabelas ótimas do simplex relativas aos problemas $P(M, s_2)$, $P(M, s_5)$ e $P(M, s_6)$ obtemos o conjunto N^{+0} para cada um destes problemas, objetivando assim encontrar as soluções locais do problema PDNLP, apresentado no exemplo 4 deste trabalho.

Assim, temos que:

- Para $P(M, s_2)$: $N^+ = \{3\}$ e $N^{+0} = \{ \}$; (ver apêndice C)
- Para $P(M, s_5)$: $N^+ = \{ \}$, $N^{+0} = \{ \}$; (ver apêndice C)
- Para $P(M, s_6)$: $N^+ = \{1\}$, $N^{+0} = \{ \}$; (ver apêndice C)

Deste modo, os pontos $z_5 = (2, 1, 0, 0, 2, 0, 2)$, $z_1 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ e $z_3 = (0, 1, 0, 2, 0, 2, 0)$, soluções de $P(M, s_2)$, $P(M, s_5)$ e $P(M, s_6)$ respectivamente, são soluções ótimas locais do problema exemplo 4. É possível observarmos isto na Figura 18.

5.2 Testes Computacionais

Foram considerados nos testes os exemplos abordados geometricamente na seção anterior, são eles: Exemplo 3 e Exemplo 4.

➤ Problema Teste - Exemplo 3:

$$\begin{array}{l}
 \text{Max} - x \\
 \text{s.a } x \geq 0 \\
 \max - y \\
 \text{s.a } x + y \leq 4 \\
 x - y \leq \frac{3}{2} \\
 y \geq 0
 \end{array}
 \xrightarrow[\text{PROBLEMA}]{\text{PENALIZADO}}
 \begin{array}{l}
 P(M) \quad \text{Max} - x - M(u_1 w + u_2 \alpha + v y) \\
 \text{s.a } x + y + w = 4 \\
 x - y + \alpha = \frac{3}{2} \\
 x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad w \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \\
 u_1 - u_2 - v = 1 \\
 u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad v \geq 0
 \end{array}$$

Utilizando o algoritmo 2, implementado em Matlab, tomamos:

$$z_3 = (0, 0, 4, \frac{3}{2})$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
 P(M, z_3) : \text{Max } F_M(z_3, s) &= -M(4u_1 + \frac{3}{2}u_2) \\
 \text{s.a } u_1 - u_2 - v &= 1 \\
 u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad v \geq 0
 \end{aligned}$$

Para este problema o algoritmo obtém a solução $s_2 = (0, 1, 0, 0)$

Tem-se então:

$$\begin{aligned}
 P(M, s_2) : \text{Max } F_M(z, s_2) &= -x - M(y) \\
 \text{s.a } x + y + w &= 4 \\
 x - y + \alpha &= \frac{3}{2} \\
 x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad w \geq 0, \quad \alpha \geq 0
 \end{aligned}$$

Que nos dá $z_3 = (0, 0, 4, \frac{3}{2})$

Então (z_3, s_2) é Ponto de Equilíbrio.

Assim z_3 não somente é uma solução local de PDNLP, como também é solução global deste problema (ver figura 7). Visto que:

$$N^+ = \{1\} \quad N^{+0} = \{ \}$$

➤ Problema Teste - Exemplo 4:

$$\begin{aligned} & \text{Max } -x + 2y - 20z \\ & \text{s.a } \quad x \geq 0 \\ & P_x : \text{max } -y + 10z \\ & \quad \text{s.a } \quad x + y + z \leq 3 \\ & \quad \quad x + y - z \geq 1 \\ & \quad \quad x - y + z \leq 1 \\ & \quad \quad -x + y + z \leq 1 \\ & \quad \quad y \geq 0; \quad z \geq 0 \end{aligned}$$

Penalizando na função objetivo do líder as restrições de complementaridade, que aparecem após a reformulação de PDNLP através das condições de KKT, tem-se:

$$\begin{aligned} P(M) : & \text{Max } -x + 2y - 20z - M(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_3 + \alpha_4\mu_4 + \nu_1y + \nu_2z) \\ & \text{s.a } \quad x + y + z + \alpha_1 = 3 \\ & \quad -x - y + z + \alpha_2 = -1 \\ & \quad x - y + z + \alpha_3 = 1 \\ & \quad -x + y + z + \alpha_4 = 1 \\ & \quad -\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 + \nu_1 = 1 \\ & \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 - \nu_2 = 10 \\ & \quad x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad z \geq 0; \quad \nu_1 \geq 0; \quad \nu_2 \geq 0 \\ & \quad \alpha_i \geq 0; \quad \mu_i \geq 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Utilizando então o algoritmo 2, toma-se:

$$z_3 = (1, 2, 0, 0, 2, 2, 0)$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 P(M, z_3) : \text{Max } F_M(z_3, s) &= 3 - M(2u_2 + 2u_3 + 2v_1) \\
 \text{s.a} \quad -u_1 + u_2 + u_3 - u_4 + v_1 &= 1 \\
 u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - v_2 &= 10 \\
 v_1 \geq 0; \quad v_2 \geq 0 & \\
 u_i \geq 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 &
 \end{aligned}$$

Obtém-se para este problema a solução $s_5 = \left(0, 0, 0, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, 0, 0 \right)$, como mostra a tabela

14.

Tem-se então:

$$\begin{aligned}
 P(M, s_5) : \text{Max } F_M(z, s_2) &= -x + 2y - 20z - M\left(\frac{9}{2}\alpha_1 + \frac{11}{2}\alpha_2\right) \\
 \text{s.a} \quad x + y + z + \alpha_1 &= 3 \\
 x + y - z - \alpha_2 &= 1 \\
 x - y + z + \alpha_3 &= 1 \\
 -x + y + z + \alpha_4 &= 1 \\
 x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0 & \\
 \alpha_i \geq 0; \text{ para } i = 1, \dots, 4 &
 \end{aligned}$$

Que nos dá a seguinte solução: $z_1 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$

Temos assim o ponto de equilíbrio (z_1, s_5) .

Este ponto de equilíbrio determina uma solução ótima local para o problema PDNLP.

Observamos isto em:

$$N^+ = \{ \} \quad N^{+0} = \{ \}$$

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 Conclusões

Os problemas em Dois Níveis tornam-se importantes por tratar com evidente realismo problemas de estruturas hierárquicas, cada vez mais comuns em sistemas organizacionais. Dessa maneira, o método de Pontos de Equilíbrios torna-se uma alternativa eficiente na solução deste problema, visto que após a transformação de PDNLP em problemas equivalentes é possível abordá-lo utilizando técnicas da programação linear.

Portanto, o propósito deste trabalho foi abordar o Problema em Dois Níveis Linear utilizando para sua solução o método de Pontos de Equilíbrio. Para isso, buscou-se ressaltar os aspectos geométricos dos conjuntos de viabilidade de PDNLP e dos conjuntos Z e S do problema penalizado através da apresentação de exemplos de baixa dimensão, desejando com isso facilitar a compreensão deste problema.

Apresentou-se inclusive um problema (exemplo 4) de maior dificuldade geométrica quanto à apresentação dos conjuntos de viabilidade Z e S, visto que estes se apresentavam em espaços de dimensão maior que três. Dessa forma, fez-se necessário recorrer à álgebra linear para obter a representação de tais conjuntos através de transformações lineares.

Portanto, foi de extrema necessidade uma revisão de conhecimentos de álgebra linear, análise convexa, solvers de programação linear, manuseios com o matlab, entre outros.

Além claro, de programação linear que permitiu melhor compreensão e análise das tabelas simplex apresentadas. Facilitando inclusive, a assimilação de forma mais clara do conceito de Pontos de Equilíbrio, observado com mais detalhes a partir dos exemplos abordados.

É válido ressaltar que a análise das tabelas simplex foi de extrema importância para a compreensão das condições de otimalidade local do problema PDNLP, principalmente para a implementação do algoritmo local em matlab. É

importante também lembrar que a abordagem algorítmica não foi o foco deste trabalho, esta foi utilizada apenas para validação dos dados obtidos, como já mencionado.

Dessa forma, este trabalho objetivou ressaltar através de abordagens geométricas características importantes dos problemas em Dois Níveis Linear e de Pontos de Equilíbrio, facilitando através da visualização o conhecimento destes.

6.2 Recomendações para trabalhos futuros

Para pesquisas futuras propõe-se a abordagem do método de Pontos de Equilíbrio para problemas Multiníveis. Propõe-se também a criação de um modelo para estudo de caso deste problema.

Sugere-se, ainda, aduzir possíveis relações entre os problemas de programação estocástica com recursos de dois estágios e os problemas de programação em dois níveis, principalmente quanto aos níveis de decisão, a resolução e o tratamento destes problemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aiyoshi, E., Shimizu, K. (1984) A solution method for the statistic constrained stackelbeg problem via penalty method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12: 1111 – 1114.

Andreani, R., Birgin E. G., Martínez J. M. ,Schuverdt M. L. (2007) On Augmented Lagragian methods with general lowe – level constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 18: 1286 – 1309. Disponível em:< www.ime.usp.br/~egbirgin/tango > Acesso em: 08/03/2012

Bard, J.F. (1988) *Convex two-level optimization*. Mathematical Programming, 40: 15 - 27.

Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J., Sheralli,H.D (1990) *Linear Programming and Network Flows*. 2.ed. Jonh Wiley & Sons, 684p.

Bialas W.F.; Karwan, M, H. (1984) *Two-level linear programming*. Management Science, 30:1004-1020.

Bialas, W. F., Karwan, M. H. (1982) On two-level optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27 (1): 211 – 214.

Campêlo, M. B.N; Scheimberg, S. (2005) *A Simplex Approach for Finding Local Solutions of a Linear Bilevel Program by Equilibrium Points*. Submitted to: Annals of Operations Research, Kluwer, 138: 143 – 157. Disponível em: <http://www.lia.ufc.br/~mcampelo/mcampeloPublic.htm> . Acessado em: 28/ 07/ 2011.

Campêlo, M.B.N (1999) *Programação Linear em Dois Níveis: uma abordagem teórica e computacional*. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia de Sistemas e Computação) – Rio de Janeiro – RJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ.

Colson B., Marcotte P., Savard G. (2005) *A trust - region method for nonlinear bilevel programming: Algorithm and computational experience.* Computational Optimization And Applications, 30: 211 - 227.

Colson, B., Marcotte P., Savard G. (2007) An overview of bilevel optimization. *Annals of Operations Research*, 153(1):235–256.

Dempe, S. (2002) *Foundations of Bilevel Programming.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 320p

Deweza, S. (2004) *On the toll setting problem.* Tese (Doutorado em Ciências), Université Libre de Bruxelles.

Izmailov, A.; Solodov, M. (2009) *Otimização: Condições de Optimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade.* 2^a.ed. Rio de Janeiro: IMPA. 269 p. v. 1.

Júdice J.J.; Faustino A.M. (1992) A sequential LCP method for bilevel linear programming. *Annals of Operations Research*, 34:89-106.

Laval, A. S.; (2003) *Modelo de Programação Linear em Dois Níveis para Otimização de Estoques de Sobressalentes.* Ministério da Defesa Exército Brasileiro – Secretaria de Ciência e Tecnologia – Instituto Militar de Engenharia – Curso de Mestrado em Sistemas e Computação. Rio de Janeiro.

Neves, J. C. S. (2002) *Modelo de programação linear binível para a alocação dinâmica de veículos.* Rio de Janeiro: COOPPE/UFRJ. Tese (Doutorado em Sistemas e Computação) – Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Santos, C. A. M. (2002) *Programação em dois níveis aplicada ao estudo da oferta ótima em sistemas termoelétricos.* Rio de Janeiro: NCE /IM/UFRJ. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas de Computação) – Instituto de Matemática do Núcleo

de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Savard G., Gauvin J., (2004) The steepest descent direction fot the nonlinear bilevel programming problem. *Operations Research Letters*, 15:265 – 272.

Secchin, L. D.; (2010) *Programação em Dois Níveis: Teoria e Algoritmos*. Dissertação (Mestrado em Informática), Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo.

Sobral, F. N. C.; (2008) *Programação em Dois Níveis: Reformulação Utilizando as Condições KKT*. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado de São Paulo. São Paulo.

Vicente, L. N., (1992) *Bilevel Programming*. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Portugal.

Vicente, L. N; Calamai P.H. (1994) Bilevel and multilevel programming: a bibliography review. *Journal of Global Optimization*, 5: 291 - 306.

APÊNDICE

APÊNDICE A

Conjunto Convexo e Conjunto Conexo

Conjunto Convexo

- *Definição:* Um conjunto $C \in \mathbb{R}^n$ é convexo se contiver qualquer combinação convexa de dois quaisquer de seus pontos.

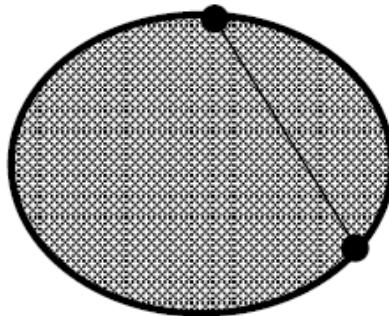


FIGURA AA1: Conjunto Convexo

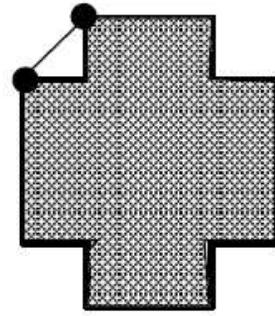


FIGURA AA2: Conjunto Não Convexo

Onde:

Combinação Convexa: Um ponto $y(\lambda)$ é combinação convexa de dois pontos, z e w de um espaço vetorial V , se: $y(\lambda) = (1 - \lambda)z + \lambda w$, $\lambda \in [0, 1]$.

Geometricamente, no plano, os pontos que pertencem ao segmento de reta que vai do ponto z até o ponto w são pontos representados por $y(\lambda)$ e variam de acordo com o parâmetro λ , como se mostra na Figura AA3.

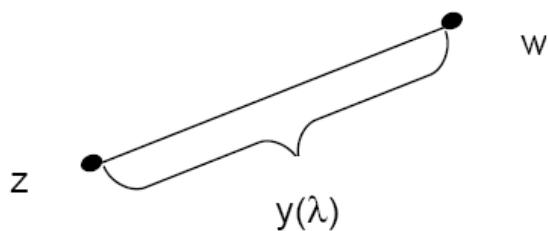


FIGURA AA3: Combinação Convexa de dois pontos

Conjunto Conexo

➤ *Definição:* Um conjunto C é dito conexo quando não pode ser escrito como a união de dois conjuntos A e B não vazios e abertos e tais que

$$A \cap (cl B) = \{ \} \quad \text{e} \quad (cl A) \cap B = \{ \}$$

onde *cl* denota o fecho do conjunto (ISMAILOV e SOLODOV, 2009).

O conceito de conexidade de conjuntos está ligado a ideia de continuidade. Na verdade, um conjunto C é conexo quando existe sempre um “caminho contínuo” de pontos de C entre qualquer par de pontos deste conjunto.

APÊNDICE B

Condições de regularidade

➤ Definição:

Com relação ao seguinte problema geral de Programação Matemática

$$(P) : \max_x f(x), \text{ s.a.} \begin{cases} h(x) = 0, \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

(aqui $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$)

Se $\bar{x} \in V := \{x \in \mathbb{R}^n / g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$, diz-se que a restrição $g_i(x) \leq 0$ é uma restrição ativa no ponto \bar{x} , se $g_i(\bar{x}) = 0$.

Neste caso i é chamado índice ativo.

$I(\bar{x}) \subset \{1, 2, 3, \dots, k\}$ denota o conjunto de índices ativos no ponto \bar{x}

Cada uma das três afirmações seguintes é chamada condições de regularidade.

(1) Condições de Linearidade.

Quando as funções g e h são afins.

(2) Condições de Mangasarian – Fromovitz.

Quando as linhas $h'_j(\bar{x})$ da matriz Jacobiana $h'(\bar{x})$ em algum ponto $\bar{x} \in V$ constituem vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n e $\exists d \in Ker h(\bar{x})$ tal que $\langle g'_i(\bar{x}), d \rangle > 0 \forall i \in I(\bar{x})$.

(3) Condição de Slater.

H é uma função afim e g é uma função convexa e $\exists \bar{x} \in V$ tal que $g_i(\bar{x}) < 0 \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

APÊNDICE C

Análise das Tabelas Simplex: Solução Ótima Local de PDNLP

➤ Problema: Exemplo 3

Índices das variáveis: $(x, y, w, \alpha) = (1, 2, 3, 4)$

▪ $P(M, s_1)$

Básicas		Não Básicas	
w	x	y	α
1	1	1	0
0	1	-1	1
0	1	0	0
0	0	0	1

$$N^+ = \{ \} \quad N^{+0} = \{ \}$$

$\Rightarrow z_1$ é solução local

▪ $P(M, s_2)$

Básicas		Não Básicas	
w	α	x	y
1	0	1	1
0	1	1	-1
0	0	1	0
0	0	0	1

$$N^+ = \{1\}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S(z_3) = s_2 \quad \therefore \quad G_1 s_2 \neq 0$$

$$\begin{aligned} S(z_3) &= z_3^\perp \cap S \\ z_3^\perp : 4w + \frac{3}{2}\alpha &= 0 \\ s = (0, v, u_1, u_2) \in z_3^\perp &\Leftrightarrow u_1 = u_2 = 0 \\ S(z_3) &= \{s_2\} \end{aligned}$$

$$N^{+0} = \{ \}$$

$\Rightarrow z_3$ é solução local

➤ Problema: Exemplo 4

Índices das variáveis: $(x, y, w, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

- $P(M, s_2)$

Básicas				Não Básicas		
x	α_2	α_4	y	z	α_1	α_3
1	0	0	1	1	1	0
1	-1	0	1	-1	1	0
1	0	0	-1	1	0	1
-1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	-2	20	0	0
0	0	0	0	0	9/2	11/2

$$N^+ = \{3\}$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S(z_5) = s_2 \quad \therefore \quad G_3 s_2 \neq 0$$

$$\begin{aligned} S(z_5) &= z_5^\perp \cap S \\ z_5^\perp : 2x + y + 2\alpha_2 + 2\alpha_4 &= 0 \\ s = (0, v_1, v_2, u_1, u_2, u_3, u_4) \in z_5^\perp &\Leftrightarrow v_1 = u_2 = u_4 = 0 \\ S(z_5) &= \{a + u_1 b\}, \quad u_1 \geq \frac{9}{2} \\ \text{onde} \\ a &= (0, 0, -9, 0, 0, 1, 0) \\ b &= (0, 0, 2, 1, 0, 1, 0) \\ \therefore S_v(z_5) &= \{s_2\} \end{aligned}$$

$$N^{+0} = \{ \}$$

$\Rightarrow z_5$ é solução local

- $P(M, s_5)$

Básicas				Não Básicas		
α_1	x	z	y	α_2	α_3	α_4
1	1	1	1	0	0	0
0	1	-1	1	-1	0	0
0	1	1	-1	0	1	0
0	-1	1	1	0	0	1
0	1	20	-2	0	0	0
9/2	0	0	0	11/2	0	0

$$N^+ = \{ \}^\circ \quad N^{+0} = \{ \}$$

$\Rightarrow z_1$ é solução local

- $P(M, s_6)$

Básicas

α_3	α_1	z	y
0	1	1	1
0	0	-1	1
1	0	1	-1
0	0	1	1
0	0	20	-2
0	0	0	0

Não Básicas

x	α_2	α_4
1	0	0
1	-1	0
1	0	0
-1	0	1
1	0	0
0	11/2	9/2

$$N^+ = \{1\}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S(z_4) = s_6 \quad \therefore \quad G_1 s_6 \neq 0$$

$$S(z_4) = z_4^\perp \cap S$$

$$z_4^\perp : y + 2\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$$

$$s = (0, v_1, v_2, u_1, u_2, u_3, u_4) \in z_4^\perp \Leftrightarrow v_1 = u_1 = u_3 = 0$$

$$S(z_4) = \{a + u_2 b\}, \quad u_2 \geq \frac{11}{2}$$

onde

$$a = (0, 0, -11, 0, 0, 0, -1)$$

$$b = (0, 0, 2, 0, 1, 0, 1)$$

$$\therefore S(z_4) = \{s_6\}$$

$$N^{+0} = \{ \}$$

$\Rightarrow z_4$ é solução local