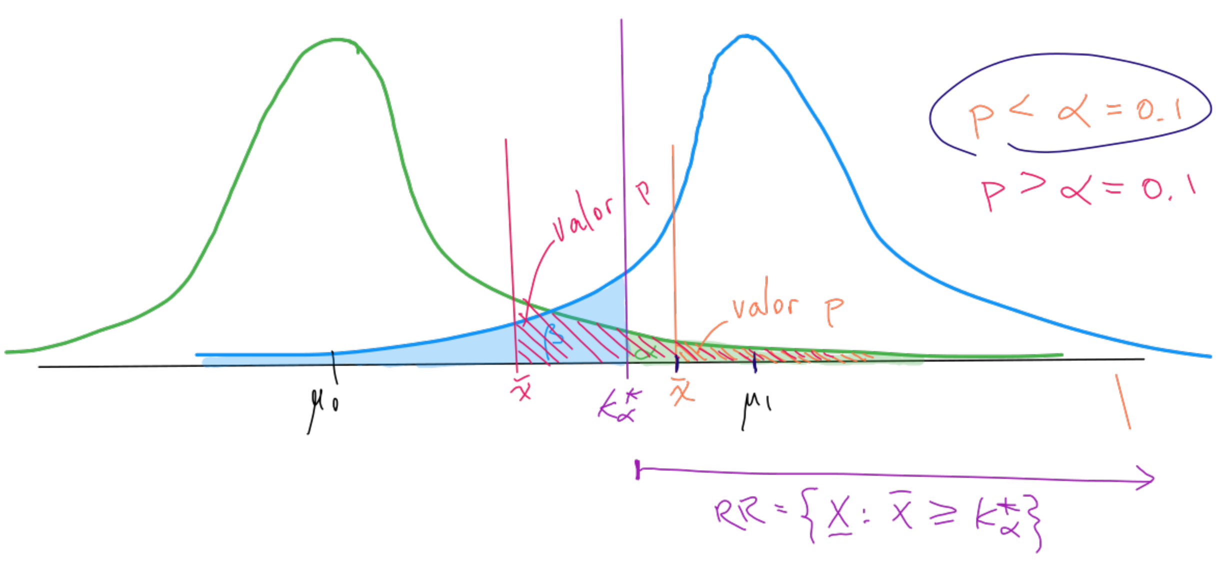
Valor p $\quad X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conocida

$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu = \mu_1$, $\quad \mu_0 < \mu_1$



Def El valor p (p-value) o nivel de significancia descriptiva es la probabilidad de que un valor estadístico observado sea posible bajo H_0.

$$\alpha = P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0) = \begin{cases} P(T(\underline{X}) \geq k_\alpha^*) \\ P(T(\underline{X}) \leq k_\alpha^*) \\ P(|T(\underline{X})| \leq k_\alpha^*) \\ P(|T(\underline{X})| \geq k_\alpha^*) \end{cases}$$

mayús $\quad$ minús

$$p = \begin{cases} P(T(\underline{X}) \geq T(\underline{x})) \\ P(T(\underline{X}) \leq T(\underline{x})) \\ P(|T(\underline{X})| \leq T(\underline{x})) \\ P(|T(\underline{X})| \geq T(\underline{x})) \end{cases}$$

Comentarios

- α es el estándar que nosotros preestablecemos de qué tan "extremos" deben ser los datos para poder rechazar H_0.
- p nos dice qué tan extremos son realmente los datos.
- El valor p nos permite contrastar hipótesis sin necesidad de calcular k_α^*.
- En general, queremos $p < 0.1$ para empezar a considerar un posible rechazo de H_0. Sin embargo, la decisión final dependerá del nivel de significancia α establecido:

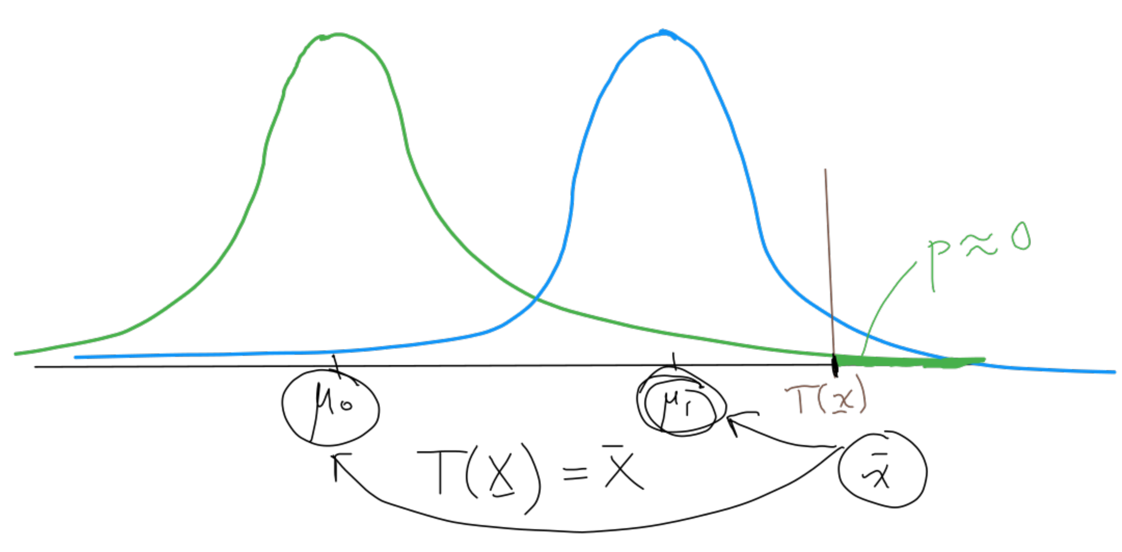
$\alpha \geq$ valor p $\Rightarrow$ rechazamos H_0

$\alpha \leq$ valor p $\Rightarrow$ no rechazamos H_0

$p \approx 0 \Rightarrow$ rechazamos H_0

H_0 vs H_1	H_0 vs H_1
$\boxed{\alpha = 5\%}$	$\alpha = 10\%$
$p = 7\%$	$p = 7\%$
$p > \alpha \Rightarrow$ no rech. H_0	$p < \alpha \Rightarrow$ rechazamos H_0

- Mientras más pequeño sea el valor p, mayor es la evidencia estadística en contra de H_0



H_0: rechazamos / no la rechazamos

H_1: rechazamos / aceptamos

Ejemplo (Ejercicio de la clase del 17/11/2020 con una Poisson)

En este ejemplo, teníamos

$$RR = \{\underline{X} : \underbrace{\sum X_i}_{T(\underline{X})} \geq k_\alpha^*\}$$

$$\alpha = 0.05 = P(\sum X_i \geq \underbrace{41}_{k_\alpha^*})$$

Después se observó una muestra $\underline{x} = \{4, 5, 8, 13, 18\}$ tal que $\sum x_i = 48$ y vimos que

$$\boxed{T(\underline{x}) = \sum x_i = 48 > 41 = k_\alpha^*}$$

$\therefore$ caemos en la RR

$\therefore$ rechazamos H_0

Lo anterior es, de manera resumida, lo que hicimos antes para resolver el ejercicio.

Ahora que sabemos qué es el valor p, podemos hacer lo siguiente:

Necesitamos pre definir $\begin{cases} \alpha = 0.05 \\ \sum X_i \text{ es buen estadístico de prueba que podemos usar porque lo conocemos bien} \end{cases}$

El siguiente paso es observar la muestra

$\underline{x} = \{4, 5, 8, 13, 18\}$

$\Rightarrow \sum x_i = 48$

$$\Rightarrow p = \mathbb{P}(\sum X_i \geq \sum x_i)$$
$$= \mathbb{P}(\sum X_i \geq 48)$$
$$= \mathbb{P}(P \geq 48) = 0.00491 \leq \alpha = 0.05$$

donde $P \sim$ Poisson(32) $\qquad \therefore$ rechazamos H_0

A grandes rasgos, necesitamos 3 cosas para hacer el contraste de hipótesis:

1) α (nosotros lo fijamos)
2) $T(\underline{X})$ (nosotros lo proponemos)
3) $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ (nosotros la observamos)

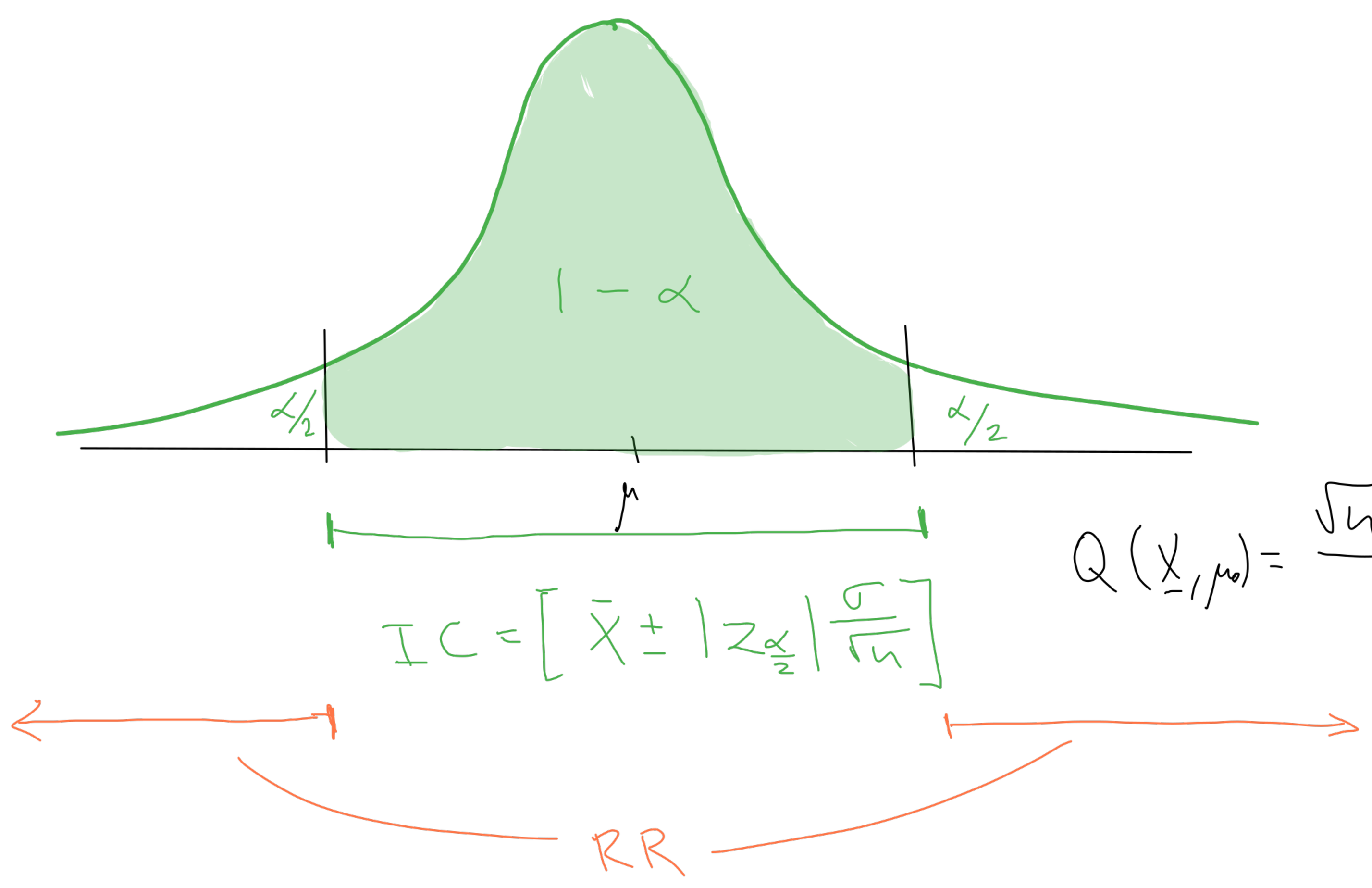
Equivalencia entre pruebas de hipótesis e intervalos de confianza

1) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. $f_X(x;\theta)$
2) Sea $Q(\underline{X}, \theta)$ una cantidad pivotal
3) Sea $I_{(1-\alpha)}$ un intervalo de confianza al $(1-\alpha)100\%$

Supongamos que se quiere probar
$$\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad \mathcal{H}_1: \theta \neq \theta_0$$

Entonces,
$$RR = I^c_{(1-\alpha)}$$

y el estadístico de prueba es
$$Q(\underline{X}, \theta_0)$$
¡no es θ sino θ_0!



$$Q(\underline{X}, \mu_0) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} = T(\underline{X})$$

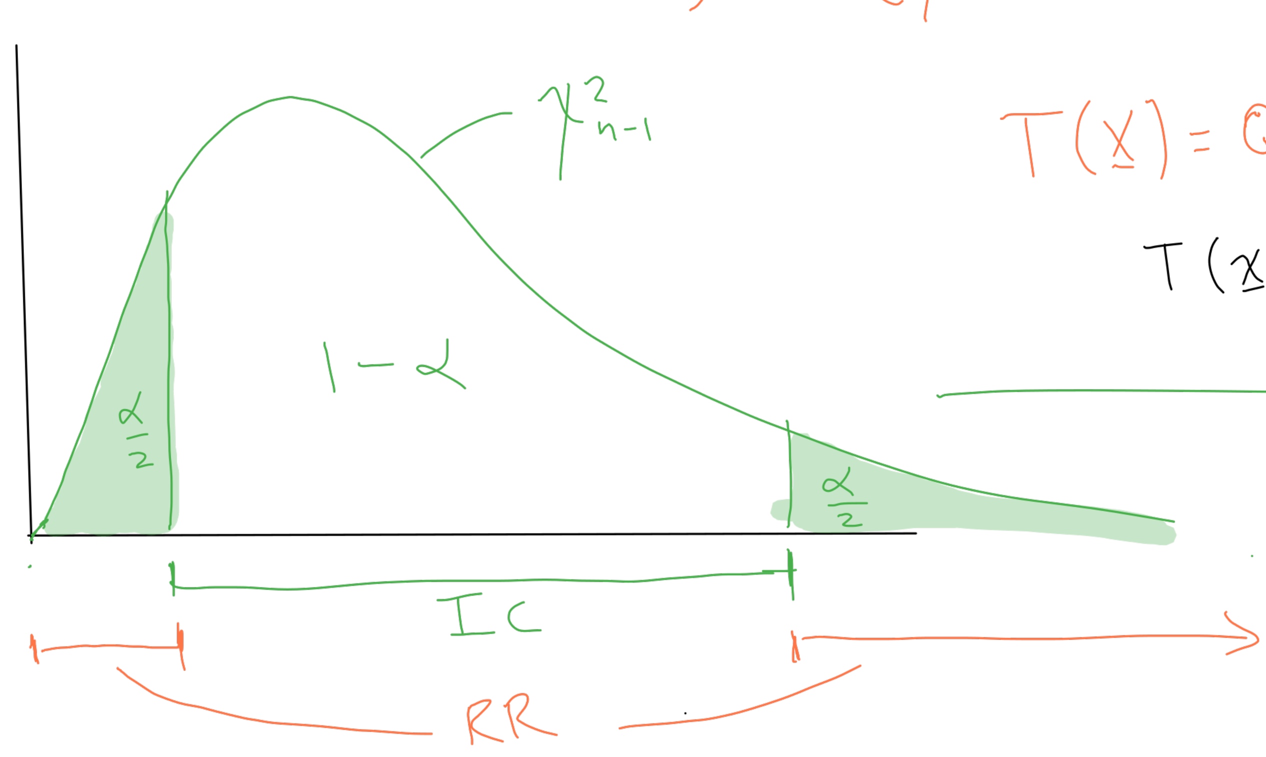
Ejemplo Sea $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

Queremos probar $\mathcal{H}_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $\mathcal{H}_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Ya habíamos visto que un IC al $(1-\alpha)100\%$ para σ^2 es
$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}}\right]$$

Teníamos también que
$$Q(\underline{X}, \sigma^2) = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Así, por la propiedad anterior,
$$RR: \left[0, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(n-1,\alpha/2)}}\right) \cup \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(n-1,1-\alpha/2)}}, \infty\right)$$



$$T(\underline{X}) = Q(\underline{X}, \sigma_0^2) = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

$T(\underline{x})$

→ "prueba de dos colas"

→ pruebas de una cola