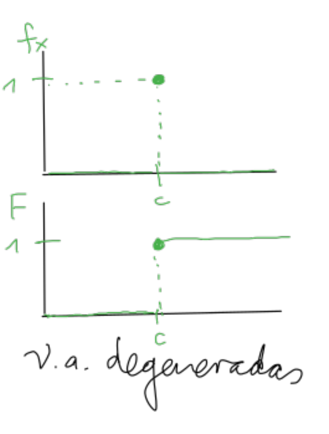
$X_n \longrightarrow X$

$X_n \longrightarrow \boxed{c}$

$c = \boxed{9.53}$

$E[c] = c$

$V(c) = 0$



v.a. degeneradas

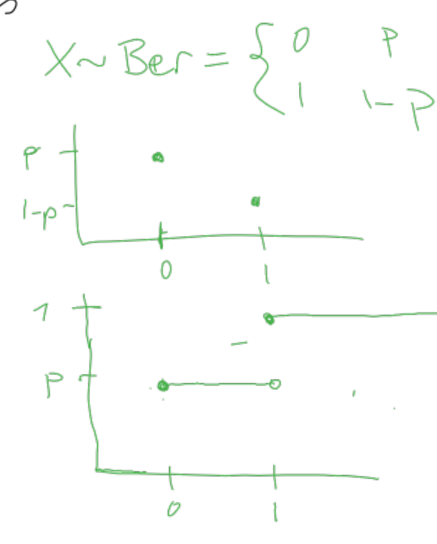
X es una v.a. si

$\boxed{X = c \text{ con proba. } 1}$

$f_X(x) = 1 \cdot I_{\{c\}}(x)$

$F_X(x)$

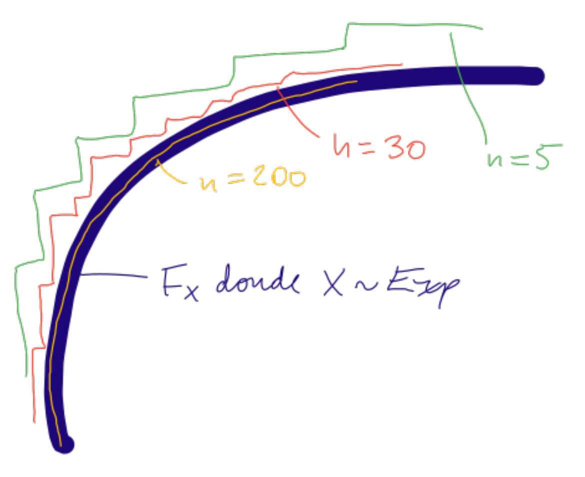
$X \sim Ber = \begin{cases} 0 & p \\ 1 & 1-p \end{cases}$



Caso 2: convergencia en distribución

$X_n \xrightarrow{d} X$ si

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$



Ejemplo 5: Sea $\{X_n\}$ tal que $F_{X_n}(x) = 1-(1-x)^n$ donde $0<x<1$. Probar que $X_n \xrightarrow{d} 1$.

P.D. $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = 1$ $\Rightarrow 0 < 1-x < 1$

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty}\left[1-(1-x)^n\right]$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty}(1-x)^n$$
$$= 1 - 0 = 1 \qquad \therefore X_n \xrightarrow{d} 1 \ \square$$

Ejemplo 6 Probar que si $X_n \sim geo\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ y $Y_n = \frac{1}{n}X_n$, entonces $Y_n \xrightarrow{d} Y$, donde $Y \sim Exp(\lambda)$.

P.D. $\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = F_Y(y)$

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n \le y) = \lim_{n\to\infty} P\left(\tfrac{1}{n}X_n \le y\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(X_n \le ny) = \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(ny) = (*)$$

Si $W \sim geo(p)$

$$F_W(\ell) = P(W \le \ell) = \sum_{k=1}^{\ell} f_W(k) = \sum_{k=1}^{\ell} p(1-p)^{k-1} = (**)$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\ell-1} ar^k = a \cdot \frac{1-r^\ell}{1-r}}$$

fórmula de cálculo

$$\therefore (**) = \sum_{k=0}^{\ell-1} p(1-p)^k = \cancel{p}\,\frac{1-(1-p)^\ell}{\cancel{1-(1-p)}} = 1-(1-p)^\ell$$

$$\therefore (*) = 1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{ny}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{ny}\right]$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{ny}$$
$$= 1 - e^{-\lambda y}$$
$$= F_Y(y) \text{ donde } Y \sim Exp(\lambda)$$
$$\therefore Y_n \xrightarrow{d} Y \ \square$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{nx} = e^{ax} \quad a \in \mathbb{R}}$$

fórmula de cálculo x2

¿Si $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$?

¿Si $X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$?

¿$\Leftrightarrow$?

Teorema Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. y sea X otra v.a. Si $c \in \mathbb{R}$, entonces

- $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$
- $X_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} c$

("la convergencia en proba. es más "fuerte" que la convergencia en distribución")

Caso 3: Convergencia en media cuadrática

Uno podría pensar que si se cumple que $X_n \xrightarrow{P} X$ y/o $X_n \xrightarrow{d} X$, ¿será cierto que $E[X_n] \longrightarrow E[X]$? } (*)

Def. Una sucesión de v.a. $\{X_n\}$ converge en media cuadrática o en norma L_2 a la v.a. X si

$$\lim_{n\to\infty} E\left[(X_n-X)^2\right] = 0$$

y lo denotamos $X_n \xrightarrow{2} X$ o $X_n \xrightarrow{L_2} X$

Def Convergencia en media r o en norma L_r:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[|X_n-X|^r\right] = 0$$

y lo denotamos como $X_n \xrightarrow{r} X$ o $X_n \xrightarrow{L_r} X$

Nota: si $r=1$, entonces se cumple (*)

$d(x,y) = |x-y| = \|x-y\|_1$ = norma L_1

$d(x,y) = (x-y)^2 = \|x-y\|_2$ = norma L_2

$d(x,y) = |x-y|^r = \|x-y\|_r$ = norma L_r

Teorema Si $X_n \xrightarrow{L_2} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

Markov: $P(X \ge a) \le \frac{E[X]}{a}$

Dem. P.D. $P(|X_n - X| \ge \varepsilon) = 0$

Suponer que $X_n \xrightarrow{L_2} X$, es decir $\lim_{n\to\infty} E[(X_n-X)^2] = 0$

$$0 \le P(|X_n - X| \ge \varepsilon) = P\left((X_n-X)^2 \ge \varepsilon^2\right)$$
$$\overset{Markov}{\le} \frac{E[(X_n-X)^2]}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{0}{\varepsilon^2} = 0$$
$$\therefore P(|X_n - X| \ge \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$\therefore X_n \xrightarrow{P} X$$

Teorema. Si $r > s$ entonces

$$L_r \Rightarrow L_s \Rightarrow P \Rightarrow D$$

Ejemplo 7 Sea $X_n \sim U(0, \frac{1}{n})$. Probar que $X_n \xrightarrow{L_2} 0$

P.D. $E[(X_n - 0)^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$E[(X_n-0)^2] = E[X_n^2]$$
$$= \int_0^{\frac{1}{n}} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n x^2\,dx = n\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{3}\left(\frac{1}{n^3}-0\right)$$
$$= \frac{1}{3n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$\therefore X_n \xrightarrow{L_2} 0 \ \square$$

Ejemplo 8: Sea $X_n = \begin{cases} n^2 & \text{con prob. } \frac{1}{n} \\ 0 & \text{con prob } 1-\frac{1}{n} \end{cases}$ $\quad 0 < \varepsilon < |X_n|$

a) Probar que $X_n \xrightarrow{P} 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n| \ge \varepsilon) = \lim_{n\to\infty}\left[P(X_n = n^2) + \cancel{P(X_n = 0)}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(X_n = n^2) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \qquad \therefore X_n \xrightarrow{P} 0$$

b) Probar que X_n NO converge en media cuadrática

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n^2] = \lim_{n\to\infty}\left[\cancel{0\cdot\left(1-\tfrac{1}{n}\right)} + n^2\cdot\frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$
$$\therefore X_n \not\xrightarrow{L_2} X$$

Teorema Central del Límite (TCL, CLT)

Versión 1 (σ^2 conocida) Sea $X_1, \dots, X$ una m.a. tal que $E[X_i] = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$. Si $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ entonces

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Versión 2 (σ^2 desconocida) Sea $X_1, \dots, X$ una m.a. tal que $E[X_i] = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$. Si $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ y $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$, entonces

$$\boxed{Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} \xrightarrow{d} N(0,1)}$$

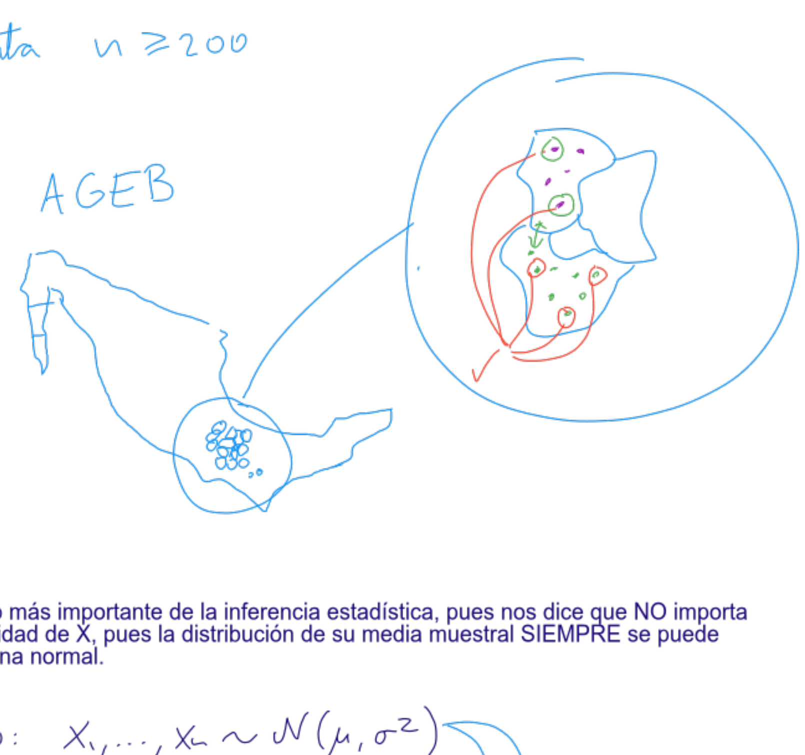
Pero: ¿qué tan grande es una muestra grande?

n grande: $n \ge 30$

n muy grande $n \ge 85$

n infinita $n \ge 200$

AGEB



El TCL es el resultado más importante de la inferencia estadística, pues nos dice que NO importa el modelo de probabilidad de X, pues la distribución de su media muestral SIEMPRE se puede aproximar mediante una normal.

Alternativas: $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$
$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Por el TCL tenemos que

$$\bar{X}_n \underset{aprox}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\sum X_i \underset{aprox}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$$