Fundamentos de Econometría

Ignacio Lobato

ITAM

Regresión Corta y Larga

- Partimos la matriz de regresores en 2: $X = (X_1, X_2)$
- X_1 es de dimensión nxk_1 y X_2 es de dimensión nxk_2
- De igual forma: $b = (b_1', b_2')'$
- La regresión se rescribe como:

$$Y = Xb + e = (X_1 X_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + e = X_1 b_1 + X_2 b_2 + e$$

- $X_1' e = 0$ y $X_2' e = 0$

Regresión Corta

- Corriendo la regresión de y en X_1, el problema:

$$\underset{c_1}{min}\ (Y - X_1 c_1)' (Y - X_1 c_1)$$

es de rango completo

- El vector de coeficientes es $b_1^* = A_1 Y$ y el de residuales $e^* = M_1 y$, donde:

$$\underset{k_1 \times n}{A_1} = \left(X_1' X_1 \right)^{-1} X_1' \quad y \quad \underset{n \times n}{M_1} = I_n - X_1 A_1$$

- También se cumple que:

$$A_1 X_1 = I_{k_1}, \quad M_1 X_1 = O, \quad X_1' e^* = 0$$

- El modelo estimado es:

$$Y = X_1 b_1^* + e^*$$

Regresión Corta

- Corremos ahora la regresión de X_2 en X_1
- Se obtiene un conjunto de regresiones auxiliares:

$$x_j = X_1 f_j + x_j^* \quad (j = k_1 + 1, \ldots, k)$$

  donde $f_j = A_1 x_j$ y $x_j^* = M_1 x_j$
- En notación matricial: $X_2 = X_1 F + X_2^*$
- $\underset{k_1 x k_2}{F} = (f_{k_1+1}, \ldots, f_k) = A_1 X_2$, donde cada renglón contiene los coeficientes de una columna de X_2 en las columnas de X_1
- $\underset{n x k_2}{X_2^*} = (x_{k_1+1}^*, \ldots, x_k^*) = M_1 X_2$, donde cada renglón contiene los residuales de la regresión anterior

Regresión Corta

- Obtenemos los coeficientes de la regresión corta:

$$b_1^* = A_1 Y = A_1 (X_1 b_1 + X_2 b_2 + e) = b_1 + F b_2$$

- Los coeficientes de la regresión corta son una combinación lineal de los coeficientes de X_1 y X_2 en la regresión larga
- Los residuales:

$$e^* = M_1 Y = M_1 (X_1 b_1 + X_2 b_2 + e) = X_2^* b_2 + e$$

- $e^{*'} e^* = e' e + b_2' X_2^{*'} X_2^* b_2$
- $b_2' X_2^{*'} X_2^* b_2 \geq 0$
- La suma de residuales cuadrados es mayor en la regresión corta que en la larga

Regresión Corta

- La regresión corta no puede mejorar el ajuste
- $b_2' X_2^{*'} X_2^* b_2 = 0 \Leftrightarrow X_2^* b_2 = 0 \Leftrightarrow b_2 = 0$
- La regresión corta es equivalente a la larga con la restricción de que los coeficientes de $X_2 = 0$
- Un mínimo restringido no puede ser menor que uno no restringido
- La regresión corta difiere de la larga excepto cuando:
  - $b_2 = 0 \Rightarrow b_1^* = b_1,\ e^* = e$
  - $X_1' X_2 = O \Rightarrow F = A_1 X_2,\ X_2^* = X_2,\ b_1^* = b_1,\ aunque\, e^* \neq e$

Regresión Residual

- Se corre la regresión de Y en $X_2^* = M_1 X_2$, los residuales de la regresión de X_2 en X_1
- El vector de coeficientes es $c_2 = A_2^* y$, donde:

$$A_2^* = \left(X_2^{*'} X_2^*\right)^{-1} X_2^{*'} = \left(X_2^{*'} X_2^*\right)^{-1} X_2' M_1$$

- Además:

$$M_1 Y = M_1 \left(X_1 b_1 + X_2 b_2 + e\right) = X_2^* b_2 + e$$

$$X_2' X_2^* = X_2' M_1 X_2 = X_2' M_1' M_1 X_2 = X_2^{*'} X_2^*$$

- Entonces $\underset{k_2 x 1}{c_2} = A_2^* Y = b_2$ es el subvector de b que contiene los coeficientes de X_2 en la regresión larga

Regresión Residual

- b_2 se puede obtener en 2 pasos:
  - Correr la regresión de X_2 en X_1, para obtener los residuales X_2^*
  - Correr la regresión de Y en X_2^*, para obtener los coeficientes b_2
- Con b_2 se puede completar el vector de coeficientes b de la regresión larga:
  - Corriendo la regresión de Y en X_1, para obtener $b_1^* = A_1 y$
  - Recuperar $b_1 = b_1^* - Fb_2$, donde $F = A_1 X_2$
- c_2 solo toma en cuenta X_2^*, el componente de X_2 que no está linealmente relacionado a X_1
- c_2 relaciona y con X_2 controlando los efectos de X_1

Regresión Corta en el Modelo Clásico

- Partimos la matriz de regresores en 2: $X = (X_1 X_2)$
- X_1 es de dimensión nxk_1 y X_2 es de dimensión nxk_2
- $E(Y) = X_1\beta_1 + X_2\beta_2$
- La regresión larga se separa como:

$$Y = Xb + e = X_1 b_1 + X_2 b_2 + e$$

- Sabemos que:

$$E\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad V(b) = \sigma^2 Q^{-1} = \sigma^2 \begin{pmatrix} Q^{11} & Q^{12} \\ Q^{21} & Q^{22} \end{pmatrix}$$

- Si realizamos la regresión de Y en X_1, obtenemos $b_1^* = A_1 Y$, con:

$$E\left(b_1^*\right) = A_1 E\left(Y\right) = A_1\left(X_1\beta_1 + X_2\beta_2\right) = \beta_1 + F\beta_2$$

$$V\left(b_1^*\right) = A_1 V\left(Y\right) A_1' = \sigma^2 A_1 A_1' = \sigma^2\left(X_1'X_1\right)^{-1}$$

- Sesgo de variables omitidas: en general b_1^* es un estimador sesgado de β_1
- Existen 2 casos en los que b_1^* es insesgado:
  - Variables omitidas irrelevantes: $\beta_2 = 0$
  - Variables explicativas ortogonales: $F = 0$

Varianza de la Regresión Corta

- La varianza del modelo corto es menor que en el largo:

$$V(b_1) \geq V(b_1^*)$$

- Recordemos que:

$$b_1 = b_1^* - Fb_2$$

- Luego:

$$C(b_1^*, b_2) = A_1 V(Y) A_2^{*'} = \sigma^2 A_1 A_2^{*'}$$

- Por lo tanto:

$$V(b_1) = V(b_1^*) + FV(b_2) F'$$

- Donde $FV(b_2) F' \geq 0$
- Existe un trade-off entre sesgo y varianza al estimar β_1

Residuales de la Regresión Corta

- Los residuales de la regresión corta, $e^* = M_1 Y$ satisfacen:

$$E\left(e^*\right) = M_1 E\left(Y\right) = M_1\left(X_1\beta_1 + X_2\beta_2\right) = X_2^*\beta_2$$

$$V\left(e^*\right) = M_1 V\left(Y\right) M_1' = \sigma^2 M_1$$

- En general los residuales de la regresión corta no tienen esperanza igual a cero
- La esperanza de la suma de los residuales al cuadrado es:

$$E\left(e^{*'}e^*\right) = \sigma^2 tr\left(M_1\right) + \beta_2' X_2^{*'} X_2^* \beta_2 = \sigma^2\left(n - k_1\right) + \beta_2' X_2^{*'} X_2^* \beta_2$$

- Por lo tanto:

$$E\left(e^{*'}e^*\right) - E\left(e'e\right) = \sigma^2 k_2 + \beta_2' X_2^{*'} X_2^* \beta_2$$

Regresión Residual

- El vector de coeficientes de la regresión de Y en $X_2^* = M_1 X_2$, $c_2 = A_2^* Y = b_2$ cumple con:

$$E\left(b_2\right) = A_2^* E\left(Y\right) = A_2^*\left(X_1\beta_1 + X_2\beta_2\right) = \beta_2$$

$$V\left(b_2\right) = A_2^* V\left(Y\right) A_2^{*'} = \sigma^2 A_2^* A_2^{*'} = \sigma^2 \left(X_2^{*'} X_2^*\right)^{-1} = \sigma^2 \left(Q_{22}^*\right)^{-1}$$

- $\underset{k_2 x 1}{b_2}$ es subvector de b, entonces $V\left(b_2\right)$ está dado por la submatriz (de dimensión $k_2 x k_2$ inferior derecha de $V\left(b\right) = \sigma^2 Q^{-1}$

Teorema de la Submatriz Inversa

- Para una matriz positiva definida Q y su inversa Q^{-1}, las partimos como:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} Q^{11} & Q^{12} \\ Q^{21} & Q^{22} \end{pmatrix}$$

  donde las submatrices en la diagonal son cuadradas
- Entonces:

$$Q^{22} = \left(Q_{22}^{*}\right)^{-1}$$

  donde

$$Q_{22}^{*} = Q_{22} - Q_{21}\left(Q_{11}\right)^{-1} Q_{12}$$

Regresión Neoclásica (supuestos)

- $E(Y|X) = X\beta$
- $V(Y|X) = \sigma^2 I$
- $\underset{n\times k}{X} = (x_1, \ldots, x_k)$ es estocástica
- $rango(X) = k$

Regresión Neoclásica

- De la estimación de mínimos cuadrados para β, $b = AY$, y sus residuales $e = MY$, recordemos que:

$$E(b|X) = E(AY|X) = AE(Y|X) = AX\beta = \beta$$

$$V(b|X) = V(AY|X) = AV(Y|X)A' = \sigma^2 AA' = \sigma^2 Q^{-1}$$

$$E(e|X) = E(MY|X) = ME(Y|X) = MX\beta = 0$$

$$V(e|X) = V(MY|X) = MV(Y|X)M' = \sigma^2 M$$

Regresión Neoclásica

- De los resultados anteriores se sigue:

$$E\left(e'e|X\right) = \sigma^2 tr\left(M\right) = \sigma^2\left(n-k\right)$$

- Como no conocemos σ^2, proponemos or tanto, $\hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n-k}$, de modo que:

$$E\left(\hat{\sigma}^2|X\right) = \sigma^2$$

$$E\left[\hat{V}\left(b\right)|X\right] = E\left(\hat{\sigma}^2 Q^{-1}|X\right) = E\left(\hat{\sigma}^2|X\right)Q^{-1}$$

- Condicional en X, los estimadores b, $\hat{\sigma}^2$ y $\hat{V}\left(b\right)$ son insesgados

- Utilizando la LEI con los resultados anteriores:

$$E\left(b\right) = E_X\left[E\left(b|X\right)\right] = \beta$$

$$V\left(b\right) = E_X\left[V\left(b|X\right)\right] + V_X\left[E\left(b|X\right)\right] = \sigma^2 E\left(Q^{-1}\right)$$

$$E\left(\hat{\sigma}^2\right) = E_X\left[E\left(\hat{\sigma}^2|X\right)\right] = \sigma^2$$

$$E\left[\hat{V}\left(b\right)\right] = E_X\left\{E\left[\hat{V}\left(b\right)|X\right]\right\} = \sigma^2 E\left(Q^{-1}\right)$$

- Los estimadores b, $\hat{\sigma}^2$ y $\hat{V}\left(b\right)$ son insesgados incondicionalmente
- Para el análisis de la regresión corta:

$$E\left(b_1^*\right) = \beta_1 + E\left(F\right)\beta_2, \quad E\left(e^{*\prime} e^*\right) = \sigma^2\left(n - k_1\right) + \beta_2' E\left(Q_{22}^*\right)\beta_2$$

Supuesto de Normalidad

- Ahora asumimos que la distribución de Y condicional en X se distribuye normal:
$$Y|X \sim N\left(X\beta, \sigma^2 I_n\right)$$
- Para algún coeficiente b_j:
$$b_j|X \sim N\left(\beta_j, \sigma^2 q^{jj}\right)$$
- La distribución marginal de b_j no necesariamente es normal
- Sin embargo, obteniendo $z_j = \frac{b_j - \beta_j}{\sigma\sqrt{q^{jj}}}$:
$$z_j|X \sim N(0,1)$$
- La distribución marginal de z_j es $N(0,1)$

Ejemplo

- Para algún β_j^0, sea $z_j^0 = \frac{b_j - \beta_j^0}{\sigma\sqrt{q^{jj}}}$, si la hipótesis nula $H_0 : \beta_j = \beta_j^0$ es verdadera:

$$P\left[\left(z_j^0 > c\right)|X\right] = P\left[\left(z_j > c\right)|X\right] = 1 - \Phi\left(c\right)$$

- La probabilidad no varía con X, por lo tanto, si H_0 es verdadera:

$$P\left(z_j^0 > c\right) = 1 - \Phi\left(c\right)$$

- De igual forma para $u_j = \frac{b_j - \beta_j}{\hat{\sigma}\sqrt{q^{jj}}}$:

$$u_j|X \sim t\left(n-k\right)$$

  para toda X, por lo que $u_j \sim t\left(n-k\right)$
- Lo mismo aplica para los estadísticos χ^2 y F
- Las distribuciones son exactas