Ecuaciones de segundo orden

Sistemas Dinámicos
Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Otoño de 2020

Principios básicos – Ecuación Homogénea

Nos enfocamos ahora en ecuaciones que pueden escribirse en la forma

$$y'' + ay' + by = g(t), \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad g \text{ continua.}$$

Para plantear su *solución general* usaremos los *Principios Generales* que enunciamos anteriormente y que ahora recordamos:

- Las soluciones de la ecuación homogénea $y'' + ay' + by = 0$ forman un espacio vectorial de dimensión 2.

  A cualquier base de este espacio vectorial se le llama *sistema fundamental de soluciones*.

- Una combinación lineal del sistema fundamental de soluciones forma la solución general de la ecuación homogénea $y'' + ay' + by = 0$.

Principios básicos – Ecuación no homogénea

- La solución general de la ecuación no homogénea $y'' + ay' + by = g$ puede escribirse como $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$, donde

  $y_H(t)$ es la solución general de la correspondiente ecuación homogénea,

  $y_P(t)$ es **alguna** solución particular de la ecuación no homogénea.

De este modo, la solución general tendrá dos constantes indeterminadas. Estas constantes se podrán determinar si nos son dados algunos datos iniciales.

Para una ecuación de orden 2 es natural asignar datos iniciales de la forma $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = z_0$.

De este modo la estrategia que desarrollamos para obtener soluciones de ecuaciones de segundo orden es

- Obtener parejas de soluciones de la ecuación homogénea que formen un sistema fundamental de soluciones.
- Proponer soluciones particulares a ecuaciones no homogéneas con cierto tipo de funciones $g(t)$.

ECUACIÓN HOMOGÉNEA

Ecuación homogénea

Iniciamos entonces la consideración de la ecuación homogénea

$$y'' + ay' + by = 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Dada la experiencia con ecuaciones de orden 1, planteamos la posibilidad de que una función de la forma $y(t) = e^{\lambda t}$ sea solución.

En este caso tendríamos $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, por lo que al sustituir en la ecuación tendríamos:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} = e^{\lambda t}\big(\lambda^2 + a\lambda + b\big).$$

Así que para que $y(t) = e^{\lambda t}$ sea solución se requiere que λ sea raíz del llamado polinomio caracerístico $s^2 + as + b$.

Sabemos del álgebra de polinomios que hay tres posibilidades para las raíces de un polinomio de grado 2.

Ecuación homogénea – Raíces reales diferentes

- Supongamos que se tienen dos raíces $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Recuérdese que la fórmula cuadrática para el polinomio $s^2 + as + b$ es $s = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, y en este caso $a^2 > 4b$.

Tendríamos entonces bien definidas dos soluciones, una para cada raíz:

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \qquad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}.$$

Un modo de verificar que y_1 y y_2 forman un sistema fundamental de soluciones es proponiendo datos iniciales, y verificando que una combinación lineal de la forma $C_1 y_1 + C_2 y_2$ resuelve dicho problema.

Proponemos entonces el problema $y'' + ay' + by = 0$ con datos iniciales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = z_0$. O sea que se debe cumplir

$$C_1 e^{\lambda_1 t_0} + C_2 e^{\lambda_2 t_0} = y_0, \qquad C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0} = z_0$$

Ecuación homogénea – Raíces reales diferentes

Podremos hallar C_1 y C_2 siempre que la matriz del sistema tenga determinante distinto de 0, o sea

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t_0} & e^{\lambda_2 t_0} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t_0} e^{\lambda_2 t_0} \left(\lambda_2 - \lambda_1\right) \neq 0.$$

Pero esto se cumple porque $\lambda_2 \neq \lambda_1$

En conclusión,

La solución general de la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ cuando el polinomio característico tiene dos raíces $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, está dada por

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Ecuación homogénea – Raíces complejas conjugadas

- Supongamos ahora que se tienen raíces $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Es decir que al usar la fórmula cuadrática para el polinomio $s^2 + as + b$ es $s = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, y tendríamos $a^2 < 4b$.

Acá es útil recordar el número imaginario puro i que cumple $i = \sqrt{-1}$, es decir $i^2 = -1$.

Entonces podemos desarrollar expresiones como $\sqrt{-9} = \sqrt{(-1)9} = \pm 3\sqrt{-1} = \pm 3i$.

De este modo, podemos escribir las raıćes del polinomio en la forma

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \qquad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

Fórmula de Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$

Ahora podemos invocar a una fórmula de Euler: $e^{iT} = \cos(T) + i\,\mathrm{sen}(T)$.

Para justificar esta fórmula recordemos primero que la serie de Taylor para e^x alrededor de 0 es $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Así, podemos manipular un poco esta fórmula para separar parte real y parte imaginaria:

$$e^{iT} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iT)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iT)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iT)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

donde hemos usado que i^{2n} alterna entre los valores 1 y -1, mientras que i^{2n-1} alterna entre los valores i y $-i$.

Pero ahora recordamos que

$$\cos(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iT)^{2n}}{(2n)!}, \qquad \mathrm{sen}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iT)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Ecuación homogénea – Raíces complejas conjugadas

Aplicando propiedades de la exponencial podríamos concluir que

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)t} &= e^{\alpha t}e^{i\beta t} = e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) + i\operatorname{sen}(\beta t)\big), \\ e^{(\alpha-i\beta)t} &= e^{\alpha t}e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}\big(\cos(-\beta t) + i\operatorname{sen}(-\beta t)\big) \\ &= e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) - i\operatorname{sen}(\beta t)\big) \end{aligned}$$

Aparentemente la opción que tenemos es tomar $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)t}$ y $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)t}$ como conjunto fundamental de soluciones.

Pero al ser funciones con valores complejos (en $\mathbb{C}$) trataremos de utilizar otro conjunto fundamental de soluciones.

Ecuación homogénea – Raíces complejas conjugadas

Observemos que

$$e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t} = 2e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

por lo que bien podríamos tomar $y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$. Por otro lado

$$e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t} = 2ie^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$$

por lo que también podríamos tomar $y_2(t) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$.

Lo que hace falta es verificar que $y(t) = C_1e^{\alpha t}\cos(\beta t) + C_2e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$ es solución general de la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ cuando $a^2 < 4b$, es decir, cuando se tienen dos raíces complejas conjugadas.

Para esto seguimos la rutina anterior.

Ecuación homogénea – Raíces complejas conjugadas

Se propone el problema $y'' + ay' + by = 0$ (suponiendo $a^2 < 4b$) con datos iniciales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = z_0$, y se propone la solución general de la forma $y(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$. Entonces

$$\begin{aligned} C_1 e^{\alpha t_0}\cos(\beta t_0) + C_2 e^{\alpha t_0}\operatorname{sen}(\beta t_0) &= y_0 \\ -C_1 e^{\alpha t_0}\beta\operatorname{sen}(\beta t_0) + C_1\alpha e^{\alpha t_0}\cos(\beta t_0) & \\ +C_2 e^{\alpha t_0}\beta\cos(\beta t_0) + C_2\alpha e^{\alpha t_0}\operatorname{sen}(\beta t_0) &= z_0 \end{aligned}$$

Entonces para determinar C_1 y C_2 la matriz del sistema debe tener determinante distinto de 0:

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha t_0}\cos(\beta t_0) & e^{\alpha t_0}\operatorname{sen}(\beta t_0) \\ -e^{\alpha t_0}\beta\operatorname{sen}(\beta t_0) + \alpha e^{\alpha t_0}\cos(\beta t_0) & e^{\alpha t_0}\beta\cos(\beta t_0) + \alpha e^{\alpha t_0}\operatorname{sen}(\beta t_0) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\alpha t_0}\left(\beta\cos^2(\beta t_0) + \beta\operatorname{sen}^2(\beta t_0)\right) = e^{\alpha t_0}\beta \neq 0$$

Ecuación homogénea – Raíces complejas conjugadas

La conclusión de los cálculos anteriores es:

La solución general de la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ *cuando el polinomio característico tiene raíces complejas de la forma* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, *con* $\beta \neq 0$, *está dada por*

$$y(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t).$$

Ecuación homogénea – Raíces reales repetidas

- Supongamos ahora que se tiene sólo una raíz $\lambda \in \mathbb{R}$.

Éste es el caso en que en la fórmula cuadrática del polinomio $s^2 + as + b$ es
$s = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ se tiene $a^2 = 4b$, es decir que de hecho $\lambda = -a/2$.

En este caso es claro que una solución de $y'' + ay' + by = 0$ está dada por $y_1(t) = e^{\lambda t}$. La pregunta es ¿cómo hallar una segunda solución, y que junto con y_1 se forme un conjunto fundamental de soluciones?

Basado en experiencia previa se podría proponer $y_2(t) = te^{\lambda t}$.

Queda de ejercicio verificar lo siguiente:

La solución general de la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ cuando el polinomio característico tiene una sola raíz $\lambda \in \mathbb{R}$, está dada por

$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 te^{\lambda t}.$$

Ecuación homogénea – Algunos ejemplos y casos especiales

- Para determinar las soluciones generales de las siguientes ecuaciones:

$$y'' + 3y' - 4y = 0, \qquad y'' + 8y' + 16y = 0, \qquad y'' + 4y' + 8y = 0$$

  notamos que se tienen raíces reales diferentes, una raíz repetida y raíces complejas **respectivamente**.

- En el caso espacial en el que $b = 0$ tendremos la ecuación $y'' + ay' = 0$, cuyo polinomio característico es $s^2 + as = 0$.

  En este caso las raíces del polinomio característico son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -a$, de donde el sistema fundamental de soluciones se forma con $y_1 = 1$, $y_2(t) = e^{-at}$. La solución general queda de la forma $y(t) = C_1 + C_2 e^{-at}$.

- En el caso en que $a = b = 0$ reduce la ecuación a $y'' = 0$. Para resolverla se integra dos veces y se obtiene: $y'(t) = A$, $y(t) = At + B$.

Ecuaciones de orden superior

Las ideas pueden extenderse a ecuaciones de orden superior.

Basta proponer inicialmente soluciones de la forma $y(t) = e^{\lambda t}$, sustituir en la ecuación, obtener el polinomio característico y hallar las raíces de dicho polinomio.

Por ejemplo para determinar la solución general de $y^{(iv)} + 6y''' + 14y'' + 16y' + 8y = 0$ hay que proponer $y(t) = e^{\lambda t}$ y al sustituir tendremos que buscar raíces del polinomio

$$s^4 + 6s^3 + 14s^2 + 16s + 8 = (s+2)^2(s^2 + 2s + 2)$$

Resumen

- *La solución general de la ecuación* $y'' + ay' + by = 0$ *cuando el polinomio característico tiene dos raíces* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, *con* $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *está dada por*

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

- *La solución general de la ecuación* $y'' + ay' + by = 0$ *cuando el polinomio característico tiene una sola raíz* $\lambda \in \mathbb{R}$, *está dada por*

$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}.$$

- *La solución general de la ecuación* $y'' + ay' + by = 0$ *cuando el polinomio característico tiene raíces complejas de la forma* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, *con* $\beta \neq 0$, *está dada por*

$$y(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t).$$

Teorema fundamental

Los dos resultados que dan sustento al método que estamos describiendo son los siguientes

Teorema

- *Considérese en general la ecuación* $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ *con datos iniciales* $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = z_0$, *donde* p, q *y* g *son continuas en un intervalo* I. *Entonces existe una única solución* $y(t)$ *de este problema para* $t \in I$.
- *Supóngase que* y_1 *y* y_2 *son soluciones de la ecuación homogénea* $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ *y que se cumple*

$$\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0) \neq 0$$

Entonces existen constantes C_1, C_2 *tales que* $y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$ *es solución del problema* $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ *con datos iniciales* $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = z_0$.

ECUACIÓN NO HOMOGÉNEA

Principios básicos – Ecuación no homogénea

- La solución general de la ecuación no homogénea $y'' + ay' + by = g$ puede escribirse como $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$, donde

  $y_H(t)$ es la solución general de la correspondiente ecuación homogénea,

  $y_P(t)$ es **alguna** solución particular de la ecuación no homogénea.

La y_H tiene una de las siguientes formas:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$y(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t).$$
$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}.$$

Así, cuando son dadas condiciones iniciales, se deben sustituir sólo hasta que se escriba la solución general como

$$y(t) = y_H + y_P$$

Ecuación no homogénea – Ideas iniciales

Para iniciar el estudio de ecuaciones lineales de segundo orden de la forma

$$y'' + ay' + by = g(t), \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad g(t) \neq 0$$

consideraremos primero el caso en que es una función constante $g(t) \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$.

De acuerdo a uno de los principios generales, deberíamos proponer $y_P = A$, es decir una función constante.

Obsérvese que en este caso se obtiene de inmediato $y_P = \dfrac{c}{b}$

Por ejemplo, la solución general de la ecuación $y'' + 3y' - 4y = 12$ es

$$y(t) = y_H + y_P = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t} - 3$$

Ecuación no homogénea – Funciones adecuadas

Al considerar ecuaciones del tipo $y'' + ay' + by = g(t)$ para aplicar el método de coeficientes indeterminados, las funciones $g(t)$ que pueden considerarse son:

Cuadro: Funciones $g(t)$ y soluciones propuestas y_P

g(t)	**Forma completa de** $\mathrm{y_P}$
ae^{rt}	Ae^{rt}
$a\cos(\beta t) + b\,\mathrm{sen}(\beta t)$	$\big(A\cos(\beta t) + B\,\mathrm{sen}(\beta t)\big)$
$ae^{\alpha t}\cos(\beta t) + be^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)$	$\big(Ae^{\alpha t}\cos(\beta t) + Be^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)\big)$
$a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$	$\big(A_n t^n + \cdots + A_1 t + A_0\big)$

Recuérdese que sólo si si la y_P está contenida en la y_H entonces se multiplica por t la solución propuesta

Ecuación no homogénea – Funciones adecuadas

Al considerar ecuaciones del tipo $y'' + ay' + by = g(t)$ para aplicar el método de coeficientes indeterminados, las funciones $g(t)$ que pueden considerarse son:

Cuadro: Funciones $g(t)$ y soluciones propuestas y_P

g(t)	**Forma completa de** $\mathrm{y_P}$
ae^{rt}	tAe^{rt}
$a\cos(\beta t) + b\,\mathrm{sen}(\beta t)$	$t\big(A\cos(\beta t) + B\,\mathrm{sen}(\beta t)\big)$
$ae^{\alpha t}\cos(\beta t) + be^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)$	$t\big(Ae^{\alpha t}\cos(\beta t) + Be^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)\big)$
$a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$	$t\big(A_n t^n + \cdots + A_1 t + A_0\big)$

Recuérdese que sólo si si la y_P está contenida en la y_H entonces se multiplica por t la solución propuesta escrita en rojo en la tabla.