Topología básica de $\mathbb{R}^p$ y Teorema de Bolzano-Weierstrass

Análisis Matemático 1
Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Primavera de 2020

Definiciones básicas

Dado cualquier conjunto no vacío X, una métrica sobre X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ cumpliendo, para $x, y, z \in X$

- $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

A la pareja (X, d) se le llama espacio métrico

Ejemplos de espacios métricos son los espacios vectoriales normados V, para los cuales hay una función $\| \cdot \|_V : V \to \mathbb{R}$ cumpliendo para $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\|x\|_V \geq 0$ y $\|x\|_V = 0$ si y sólo si $x = \vec{0}$.
- $\|\lambda x\|_V = |\lambda| \|x\|_V$.
- $\|x - y\|_V \leq \|x - z\|_V + \|z - y\|_V$

Definiciones básicas

Algunos espacios normados provienen de espacios con producto interior (sobre $\mathbb{R}$) H, para los cuales hay una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ cumpliendo para $x, y, z \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\langle x, y \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = \vec{0}$.
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
- $\langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$; $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

Un espacio con producto interior induce un espacio normado por medio de la fórmula $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Definiciones básicas

Se pueden hallar ejemplos de

- Espacios métricos que no son espacios vectoriales.
- Espacios métricos que no provienen de espacios vectoriales normados.
- Espacios vectoriales normados que no provienen de un producto interior.

Muchas propiedades pueden probarse para cada uno de los espacios antes mencionados, por ejemplo:

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $\left|\langle x, y\rangle\right| \leq \|x\|\,\|y\|$.
- La *otra* desigualdad triangular: $\left|\|x\| - \|y\|\right| \leq \|x - y\|$

El espacio euclidiano $\mathbb{R}^p$ es de hecho un espacio con producto interior. Adoptamos la notación $\|x\|$ para referirnos a la norma euclidiana de $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, aunque existen otras normas bien conocidas:

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{p} |x_j| \qquad \|x\|_\infty = \text{máx}\left\{|x_1|, \ldots, |x_p|\right\}$$

Definiciones topológicas básicas en $\mathbb{R}^p$

La bola abierta de radio $r > 0$ centrada en $x \in \mathbb{R}^p$ es

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| < r\}$$

La bola cerrada de radio $r > 0$ centrada en $x \in \mathbb{R}^p$ es

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| \leq r\}$$

La bola agujerada de radio $r > 0$ centrada en $x \in \mathbb{R}^p$ es

$$\dot{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^p : 0 < \|x - y\| < r\}$$

Estos conjuntos pueden de hecho definirse en cualquier espacio métrico, con las adecuaciones necesarias.

Definiciones topológicas básicas en $\mathbb{R}^p$

La familia $\{B_r(x) : r > 0,\ x \in \mathbb{R}^p\}$ de todas las bolas abiertas (o cerradas) de $\mathbb{R}^p$ forman una base de vecindades de la topología euclidiana de $\mathbb{R}^p$.

Por esto, cuando se hable de vecindades de algún $x \in \mathbb{R}^p$ (como lo hace el texto de Bartle) podemos siempre tomar una bola centrada en x como una vecindad de x.

Esto será usado en algunos teoremas posteriores.

Un conjunto $G \subseteq \mathbb{R}^p$ es abierto si para todo $x \in G$ existe $r > 0$ (que puede depender de x) tal que $B_r(x) \subseteq G$.

Un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^p$ es cerrado si su complemento F^c es abierto.

Los conjuntos $\emptyset$ y $\mathbb{R}^p$ son simultaneamente abiertos y cerrados.

Cualquier bola abierta es un conjunto abierto. Cualquier bola cerrada es un conjunto cerrado. Cualquier bola agujerada es un conjunto abierto.

Definiciones topológicas básicas en $\mathbb{R}^p$

En las siguientes $A \subseteq \mathbb{R}^p$.

- $x \in \mathbb{R}^p$ es punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$.
- $x \in \mathbb{R}^p$ es punto frontera de A si para toda $\epsilon > 0$ ocurre que

$$B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset, \qquad B_\epsilon(x) \setminus A \neq \emptyset.$$

- $x \in \mathbb{R}^p$ es punto de acumulación de A si para toda $\epsilon > 0$ ocurre que

$$\dot{B}_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset \qquad \text{nótese el uso de la bola agujerada}$$

- $x \in \mathbb{R}^p$ es punto de adherencia de A si para toda $\epsilon > 0$ ocurre que

$$B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$$

Definiciones topológicas básicas en $\mathbb{R}^p$

Basados en las definiciones anteriores, dado $A \subseteq \mathbb{R}^p$ se define

- A° el interior de A como el conjunto de puntos interiores de A.
- ∂A la frontera de A como el conjunto de puntos frontera de A.
- A' el conjunto de puntos de acumulación de A.
- $\overline{A}$ la cerradura de A como el conjunto de puntos de adherencia de A.

Propiedades (de la cerradura y el interior)

Para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}^p$ se tiene:

(i) $A \subseteq \overline{A}$

(ii) $A^\circ \subseteq A$

(iii) *Si A es cerrado entonces $A = \overline{A}$.*

(iv) *Si A es abierto entonces $A^\circ = A$.*

Demostración de (i): Si $x \in A$ y , $r > 0$ entonces $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$, por lo que x es punto de adherencia de A.

Demostración de (ii): Si $x \in A^\circ$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq A$, por tanto $x \in A$.

Demostración de (iii): Si $x \in \overline{A}$, se sabe que A^c es abierto, por lo que si suponemos que $x \notin A$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset A^c$. Entonces x no sería punto de adherencia de A.

Demostración de (iv): Si $x \in A$, se sabe que existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq A$, por lo que $x \in A^\circ$. ∎

Para el interior y la cerradura de A se tienen equivalencias útiles e interesantes.

Teorema

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^p$. Entonces

- *A° es el más grande abierto contenido en A, es decir* $A^\circ = \bigcup\{G \subseteq A : G \text{ es abierto}\}$
- *$\overline{A}$ es el más pequeño cerrado que contiene a A, es decir* $\overline{A} = \bigcap\{F \supseteq A : F \text{ es cerrado}\}$

Demostración del Teorema

Daremos los detalles de la demostración para la cerradura, quedando la demostración para el interior como ejercicio.

Primero verificamos que en efecto $\mathcal{F} = \bigcap \left\{ F \supseteq A : F \text{ es cerrado} \right\}$ es el más pequeño cerrado que contiene a A.

Obsérvese que $\mathcal{F}$ es cerrado por ser intersección de cerrados. Luego nótese que si C es cualquier cerrado que contiene a A entonces es uno de los elementos de la intersección que define a $\mathcal{F}$; por tanto contiene a dicha intersección.

A continuación verificamos que $\mathcal{F} = \overline{A}$.

($\subseteq$) Tomando $x \in \mathcal{F}$, sabemos que $x \in F$ para todo $F \supseteq A$ cerrado. Debemos probar que x es punto de adherencia de A.

Supóngase que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap A = \emptyset$.

Pero entonces, $F = B_\epsilon(x)^c$ es un cerrado que contiene a A, y $x \notin F$. **(!!)**

($\supseteq$) Si $x \in \overline{A}$ y $F \supseteq A$ es cerrado tal que $x \notin F$, entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq F^c$, pues F^c es abierto.

Pero entonces $B_r(x) \cap A = \emptyset$, lo cual contradice que $x \in \overline{A}$.

EJERCICIOS

En los ejercicios 9J y 9L de [Bartle] se pide esencialmente establecer el siguiente resultado. Usando las propiedades hasta ahora demostradas, dar una prueba de esta proposición.

Proposición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^p$. Entonces se cumplen las siguientes identidades:

$$(A^\circ)^\circ = A^\circ, \quad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ, \quad (\mathbb{R}^p)^\circ = \mathbb{R}^p, \quad (\mathbb{Q}^p)^\circ = \emptyset$$

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{A}, \quad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{\emptyset} = \emptyset, \quad \overline{\mathbb{Q}^p} = \mathbb{R}^p.$$

También se puede pensar si hay un ejemplo en que

$$(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ \quad \text{y} \quad \overline{(A \cap B)} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$$

Caracterización de cerrados y de la cerradura

Teorema

(i) *Un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^p$ es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.*

(ii) *Si $A \subseteq \mathbb{R}^p$ entonces $\overline{A} = A \cup A'$.*

Demostración de (i).

($\Rightarrow$) Si F es cerrado y $x \in F' \setminus F$, entonces, como en particular $x \in F^c$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap F = \emptyset$. Esto contradice que $x \in F'$.

($\Leftarrow$) Se probará que F^c es abierto. Si $y \in F^c$ entonces y no es punto de acumulación de F.

Entonces existe $\delta > 0$ tal que $F \cap B_\delta(y) \cap F = \emptyset$, es decir $B_\delta(y) \subseteq F^c$.

Caracterización de cerrados y de la cerradura

Demostración de (ii).

($\subseteq$) Si $x \in \overline{A}$ pero $x \notin A$, entonces sabríamos que x es punto de adherencia de A; por tanto para cada $r > 0$ se tiene $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. Así, como $x \notin A$ entonces también ocurrirá que $\dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$, es decir $x \in A'$.

($\supseteq$) Sabemos por la propiedad (i) de la cerradura que $A \subseteq \overline{A}$. Ahora, si existiera $x \in A'$ tal que $x \notin \overline{A}$, que es abierto, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq (\overline{A})^c \subseteq A^c$. Por tanto $\dot{B}_\delta(x) \cap A = \emptyset$, lo que contradice que $x \in A'$.

■

Ahora como ejercicio se puede intentar probar que $\overline{A} = A \cup \partial A$, que es el Ejercicio 9M de [Bartle].

También se puede intentar demostrar que si $x \in \overline{A}$ y $x \notin A'$, entonces $x \in A$, que es otro modo de establecer la contención ($\subseteq$).

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Estamos listos para enunciar uno de los teoremas más importantes del curso.

Teorema (de Bolzano-Weierstrass)

Todo conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^p$ tiene un punto de acumulación.

Para demostrar este teorema, iniciemos con $B \subset \mathbb{R}^p$ acotado. Entonces B está contenido en una celda cerrada I_1. Ahora subdividimos diádicamente a la celda I_1, obteniendo 2^p nuevas celdas cerradas, todas contenidas en I_1.

Como una de ellas debe tener una cantidad infinita de elementos de B, la nombramos I_2 y repetimos este procedimiento.

De este modo obtenemos una familia de celdas $\{I_k\}$, todas cerradas, contenidas en I_1, y de hecho cumpliendo $I_k \supset I_{k+1}$.

Por el teorema de celdas anidadas se cumplirá $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$, y podemos tomar y en esta intersección.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

El plan es ahora demostrar que $y \in B'$. Sea $r > 0$

Iniciemos notando que

$$0 < \ell(I_k) = \frac{1}{2^{k-1}} \ell(I_1), \qquad k = 1, 2 \ldots$$

donde en general $\ell(I)$ denota la longitud de la arista más grande de I.

Notemos ahora que si $r > 0$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $I_k \subset B_r(y)$.

Como I_k tiene una cantidad infinita de elementos de B, entonces alguno será distinto de y. Esto llevaría a que $y \in B'$.

Para probar que $I_k \subset B_r(y)$, recuérdese que si $w \in I_k$ entonces

$$\|y - w\| \leq \sqrt{p} \|y - w\|_\infty \leq \sqrt{p}\, \ell(I_k) = \frac{\sqrt{p}}{2^{k-1}} \ell(I_1) \leq \frac{\sqrt{p}}{k-1} \ell(I_1).$$

y se elige k de manera que $\dfrac{\sqrt{p}}{k-1} \ell(I_1) < r$.

Conjuntos compactos

Dado un espacio métrico (X, d) y $A \subseteq X$, una cubierta abierta de A es una familia de conjuntos abiertos $\mathcal{F} = \{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha.$$

Un subcubierta finita de $\mathcal{F}$ es una subfamilia $\{A_1, \dots, A_N\}$ de $\mathcal{F}$ con un número finito de elementos tal que $A \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_N$.

Decimos que $K \subseteq X$ es un conjunto compacto si a toda cubierta abierta de K se le puede extraer una subcubierta finita.

Obsérvese:

- Que para probar que un conjunto K es compacto se debe comenzar con una cubierta abierta de K arbitraria y exhibir cómo extraer una subcubierta finita de K.
- Que para probar que un conjunto B no es compacto basta exhibir una cubierta de B a la que no se le puede extraer una subcubierta finita.

Ejemplos de conjuntos compactos y conjuntos que NO compactos

- Todo conjunto finito en un espacio métrico es compacto.
- El conjunto $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ no es compacto.
- El conjunto $(0,1)$ de $\mathbb{R}$ no es compacto.

  Para este ejemplo basta considerar la cubierta de $(0,1)$ dada por los intervalos $\left(0, 1-\dfrac{1}{n}\right)$ con $n \in \mathbb{N}$. Nótese que si se tomara una familia finita de intervalos de esta forma ya no es cubierta del intervalo (0,1).
- Se puede también con una idea similar probar que la bola unitaria $B_1(\vec{0})$ no es compacto. y que el espacio total $\mathbb{R}^p$ tampoco lo es.
- A continuación ilustraremos lo complicado que puede resultar probar que el intervalo $[0,1]$ es compacto.

El intervalo $[0, 1]$ es compacto

Iniciemos con una cubierta arbitraria de $[0, 1]$, digamos $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$.

Entonces $0 \in G_{\alpha_0}$ para cierta α_0. Al ser G_{α_0} abierto, al elegir $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeña se cumplirá que $[0, \epsilon_0] \subset G_{\alpha_0}$.

Con esta observación, podemos definir

$$x^* := \sup \left\{ x \in [0, 1] : [0, x] \subset \bigcup_{\text{finita}} G_\alpha \right\}.$$

Notemos primero que $x^* > 0$ pues debe ser mayor o igual a la ϵ_0 antes mencionada. Si $x^* \in (0, 1]$ entonces $x^* \in G_{\alpha_1}$ para alguna α_1 y por tanto para cierta $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeña se tiene $[x^* - \epsilon_1, x^* + \epsilon_1] \subset G_{\alpha_1}$

Además por la propiedad del *"salto de supremo"* se puede concluir $[0, x^* - \epsilon_1] \subset \bigcup_{\text{finita}} G_\alpha$ y en conclusión $[0, x^* + \epsilon_1] \subset G_{\alpha_1} \cup \bigcup_{\text{finita}} G_\alpha$.

Esto es una contradicción, a menos que $x^* \geq 1$. Queda de ejercicio probar que de hecho no puede ocurrir $x^* > 1$, por lo que $x^* = 1$. Y con esto queda demostrada la afirmación.

Más ejemplos

- Si $K \subset \mathbb{R}^p$ es compacto y $F \subseteq K$ es cerrado, entonces F es compacto.

  Para probar esta afirmación iniciamos con una cubierta abierta arbitraria de F, digamos $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$.

  Para poder usar la hipótesis de que K es compacto, necesitamos *"completar"* esta cubierta de F para que sea una cubierta de K.

  Para esto añadimos sólo un elemento más: $A_0 = F^c$. Nótese que en efecto $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ cubre a F y A_0 cubre a $K \setminus F$, por lo que $A_0 \cup \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ cubre a K.

  Por compacidad de K tenemos que $K \subset \bigcup_{\text{finita}} A_j$

  Si en esta unión se hubiera incluído A_0, lo podemos remover, y de todos modos obtendríamos una unión finita que sigue cubriendo a F.

  Así que a la cubierta arbitraria $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de F le hemos logrado extraer una subcubierta finita. Esto quiere decir que F es compacto.