Decisiones de los Consumidores: Dualidad

Alberto Ramírez de Aguilar

ITAM

Otoño 2020

Relación entre el Modelo Marshaliano y Compensado

- Consideremos a un consumidor que cuenta con un ingreso $I > 0$ y se enfrenta a precios P_x, P_y.

  1. Si este consumidor busca maximizar su utilidad sujeto a estar dentro de su restricción (Marshaliana) entonces obtiene $V(P_x, P_y, I)$ como utilidad y como canasta óptima demanda $(X^M(P_x, P_y, I), Y^M(P_x, P_y, I))$.
  2. Si ahora, buscara minimizar su gasto sujeto a obtener al menos un nivel $\bar{u} = V(P_x, P_y, I)$, entonces demandaria **exactamente la misma canasta**.
  3. Esto sugiere que:

$$E(P_x, P_y, V(P_x, P_y, I)) = I,$$

$$X^C(P_x, P_y, V(P_x, P_y, I)) = X^M(P_x, P_y, I),$$

$$Y^C(P_x, P_y, V(P_x, P_y, I)) = Y^M(P_x, P_y, I).$$

Relación entre el Modelo Marshaliano y Compensado

- Consideremos a un consumidor que se enfrenta a precios P_x, P_y.

1. Si este consumidor busca minimizar su gasto sujeto a obtener al menos una utilidad $\bar{u}$, entonces debe ejercer un gasto de $E(P_x, P_y, \bar{u})$ y demandar $(X^C(P_x, P_y, \bar{u}), Y^C(P_x, P_y, \bar{u}))$.
2. Si ahora este mismo consumidor buscara maximizar su utilidad sujeto a no gastar mas de $E(P_x, P_y, \bar{u})$ entonces demandaría **exactamente la misma canasta**.
3. Esto sugiere que:

$$V(P_x, P_y, E(P_x, P_y, \bar{u})) = \bar{u},$$

$$X^M(P_x, P_y, E(P_x, P_y, \bar{u})) = X^C(P_x, P_y, \bar{u}),$$
$$Y^M(P_x, P_y, E(P_x, P_y, \bar{u})) = Y^C(P_x, P_y, \bar{u}).$$

Relaciones Duales

- A las relaciones anteriores entre los modelos Marshaliano y Compensado se les conoce como **Relaciones de Dualidad**.

- Las relaciones duales juegan un papel muy importante en el anáisis económico moderno, en particular son muy útiles para explicar:

    1. Más sobre cómo un parámetro puede llegar a afectar la demanda de un bien.
    2. Poder construir medidas objetivas de cambio en bienestar.

Análisis de Cambios en un Precio

- Buscamos contestar: qué determina el cambio (o no) en una demanda si un precio aumenta/disminuye?

- Consideremos por ahora que el precio del bien X cambia de manera marginal.

1. Demostraremos que ante este incremento en el precio, podemos descomponer el movimiento que las demandas de los bienes harán en dos efectos.
2. En primer lugar, al presentarse un cambio en un precio, el consumidor buscará mantener la misma utilidad sujeto a los nuevos precios. Dicho ajuste se conoce como **Efecto Sustitución**.
3. A pesar de que al consumidor le encantaría mantener su utilidad constante, éste debe ajustar su gasto para que nuevamente, en el nuevo óptimo, su gasto no exceda su ingreso. A este ajuste se le conoce como **Efecto Ingreso**.

Análisis de Cambios en un Precio

- **Teorema (Teorema de Slutsky)**: Sea $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces, ante un cambio marginal en el precio del bien X podemos asegurar que:

$$\frac{\partial X^M}{\partial P_x}(P_x, P_y, I) = \frac{\partial X^C}{\partial P_x}(P_x, P_y, \bar{u}) - \frac{\partial X^M}{\partial I}(P_x, P_y, I)X^M(P_x, P_y, I),$$

$$\frac{\partial Y^M}{\partial P_x}(P_x, P_y, I) = \frac{\partial Y^C}{\partial P_x}(P_x, P_y, \bar{u}) - \frac{\partial Y^M}{\partial I}(P_x, P_y, I)X^M(P_x, P_y, I).$$

Análisis de Cambios en un Precio

- **Teorema (Teorema de Slutsky)**: Sea $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces, ante un cambio marginal en el precio del bien Y podemos asegurar que:

$$\frac{\partial Y^M}{\partial P_y}(P_x, P_y, I) = \frac{\partial Y^C}{\partial P_y}(P_x, P_y, \bar{u}) - \frac{\partial Y^M}{\partial I}(P_x, P_y, I) Y^M(P_x, P_y, I).$$

$$\frac{\partial X^M}{\partial P_y}(P_x, P_y, I) = \frac{\partial X^C}{\partial P_y}(P_x, P_y, \bar{u}) - \frac{\partial X^M}{\partial I}(P_x, P_y, I) Y^M(P_x, P_y, I),$$

Análisis de Cambios en un Precio

- A partir de las ecuaciones de Slutsky, podemos obtener las siguientes implicaciones del modelo.
- **Proposición**: Si un bien es normal entonces es ordinario.
- **Proposición**: Si un bien es Giffen entonces es inferior y el bien cruzado es su complemento y normal.

Análisis de Cambios en Precios

- De manera algebraica también se pueden analizar los efectos de un cambio en un precio.
- Los efectos directos son:

$$ES_x = X^C(\hat{P}_x, P_y, V(P_x, P_y, I)) - X^M(P_x, P_y, I),$$

$$EI_x = X^M(\hat{P}_x, P_y, I) - X^C(\hat{P}_x, P_y, V(P_x, P_y, I)).$$

- Mientras que los efectos cruzados son:

$$ES_y = Y^C(\hat{P}_x, P_y, V(P_x, P_y, I)) - Y^M(P_x, P_y, I),$$

$$EI_y = Y^M(\hat{P}_x, P_y, I) - Y^C(\hat{P}_x, P_y, V(P_x, P_y, I)).$$

Análisis de Cambios en Precios: Ejemplo

- Supongamos a un consumidor con preferencias CES dadas por:

$$u(x, y) = x^{1/2} + y^{1/2}.$$

- Las demandas Marshalianas del consumidor son:

$$X^M(P_x, P_y, I) = \frac{IP_y}{P_x(P_x + P_y)} \quad Y^M(P_x, P_y, I) = \frac{IP_x}{P_y(P_x + P_y)}.$$

- Mientras que las demandas compensadas de este consumidor son:

$$X^C(P_x, P_y, \bar{u}) = \frac{\bar{u}^2 P_y^2}{(P_x + P_y)^2} \quad Y^C(P_x, P_y, \bar{u}) = \frac{\bar{u}^2 P_x^2}{(P_x + P_y)^2}.$$

Análisis de Cambios en Precios: Ejemplo

- Supongamos que, inicialmente, los parámetros son $(P_x, P_y, I) = (1, 1, 120)$. Lo que induce las siguientes demandas y utilidad:

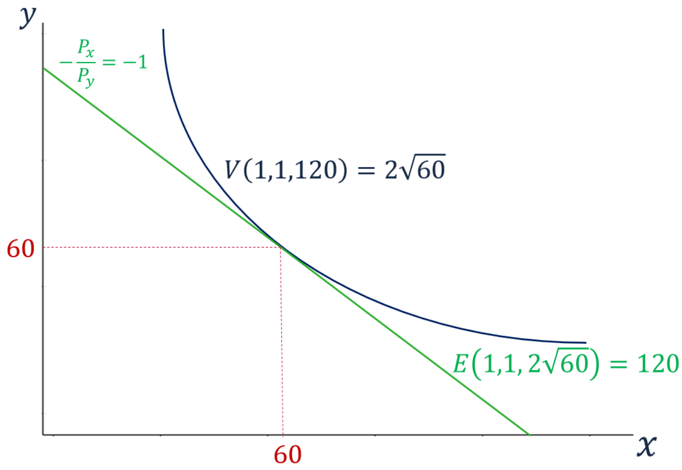
$$X^M(1,1,120) = 60 \quad Y^M(1,1,120) = 60,$$

$$V(1,1,120) = 60^{1/2} + 60^{1/2} = 2(60^{1/2}).$$

- Supongamos que el precio del bien X aumenta de $P_x = 1$ a $\hat{P}_x = 3$.

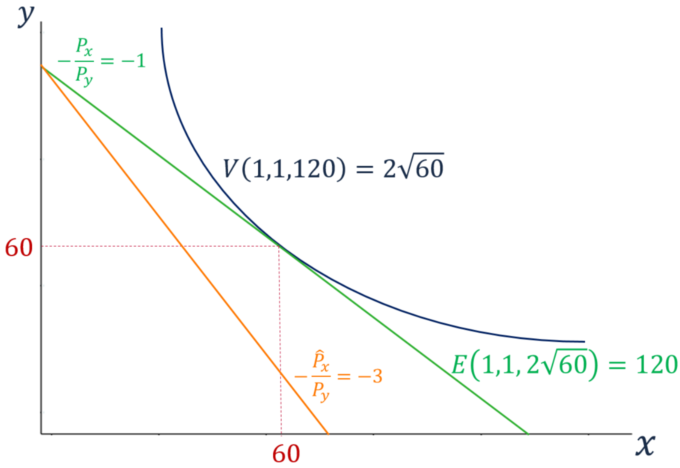
Análisis de Cambios en Precios: Ejemplo

- Gráficamente, ésta es la situación incial para el consumidor.



Análisis de Cambios en Precios: Ejemplo

- Al aumentar el precio de $P_x = 1$ a $\hat{P}_x = 3$, la restricción presupuestal del agente se contrae.



Efecto Sustitución

- Se considera la utilidad constante ($\bar{u} = 2(60^{1/2})$) y se encuentra la canasta que minimiza el gasto sujeto a obtener una utilidad de al menos $\bar{u}$.

- Es decir, se deben calcular las demandas compensadas cuando los precios son $\hat{P}_x = 3, P_y = 1$ y la utilidad es $\bar{u} = V(P_x, P_y, I) = 2(60^{1/2})$:

$$X^C(\hat{P}_x, P_y, V(P_x, P_y, I)) = X^C(3, 1, 2(60^{1/2})) = \frac{4(60)}{16} = 15,$$

$$Y^C(\hat{P}_x, P_y, V(P_x, P_y, I)) = Y^C(3, 1, 2(60^{1/2})) = \frac{36(60)}{16} = 135.$$

- Por lo tanto:

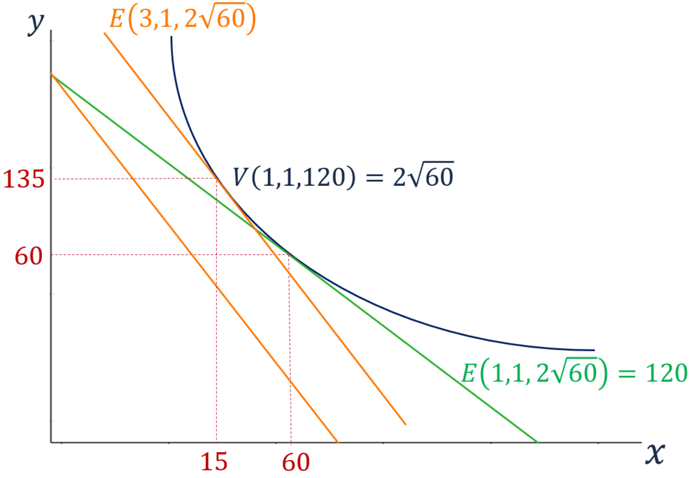
$$ES_x = X^C(\hat{P}_x, P_y, V(P_x, P_y, I)) - X^M(P_x, P_y, I) = 15 - 60 = -45,$$

$$ES_y = Y^C(\hat{P}_x, P_y, V(P_x, P_y, I)) - Y^M(P_x, P_y, I) = 135 - 60 = 75.$$

- Estos efectos son consistentes con la Ley de la Demanda Compensada.

Efecto Sustitución

- Gráficamente, lo siguiente muestra el Efecto Sustitución.



Efecto Ingreso

- Considerando los nuevos precios $(\hat{P}_x, P_y)$, el consumidor busca reducir su gasto para que éste sea igual a I.

- Por lo tanto, se debe de calcular primero las demandas Marshalianas del consumidor si se enfrenta a los precios $(\hat{P}_x, P_y)$:

$$X^M(\hat{P}_x, P_y, I) = X^M(3, 1, 120) = 10,$$

$$Y^M(\hat{P}_x, P_y, I) = Y^M(3, 1, 120) = 90.$$

- Esto implica lo siguiente (notar que en ambas demandas se están considerando los nuevos precios):

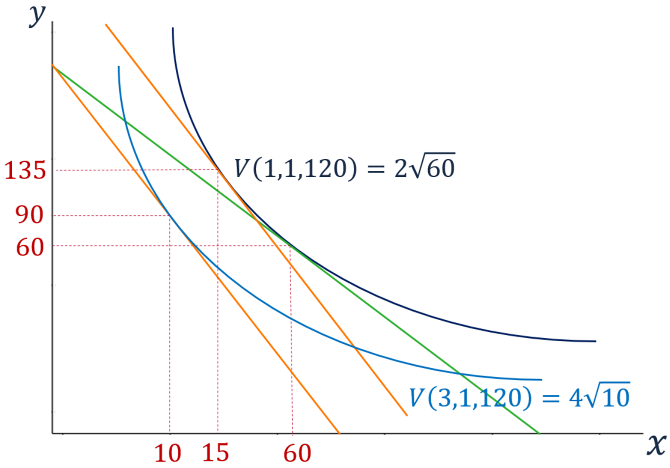
$$EI_x = X^M(\hat{P}_x, P_y, I) - X^C(\hat{P}_x, P_y, V(P_x, P_y, I)) = 10 - 15 = -5,$$

$$EI_y = Y^M(\hat{P}_x, P_y, I) - Y^C(\hat{P}_x, P_y, V(P_x, P_y, I)) = 90 - 135 = -45.$$

- Estos efectos son consistentes con que ambos bienes son normales al ingreso.

Efecto Ingreso

- Por el Efecto Ingreso, el consumo de ambos bienes disminuye (pues ambos son normales).



Efecto Total

- En conclusión, el cambio en la demanda ante este aumento en precios es:

$$ET_x = ES_x + EI_x = X^M(\hat{P}_x, P_y, I) - X^M(P_x, P_y, I) = 10 - 60 = -50,$$

$$ET_y = ES_y + EI_y = Y^M(\hat{P}_x, P_y, I) - Y^M(P_x, P_y, I) = 90 - 60 = 30.$$

- Por lo tanto, ante este aumento en precios, el consumidor disminuyó su consumo de X en 50 unidades y aumentó el de Y en 30.

- Lo anterior implica que el bien X es ordinario mientras que Y es sustituto de X.

Medidas de Cambio en Bienestar

- Buscamos construir una medida **objetiva** para poder comparar el cambio en bienestar entre distintos consumidores al momento de enfrentarse a un cambio en algún parámetro.

- Iniciemos por analizar la siguiente relación dual entre el ingreso de un consumidor y la utilidad $\bar{u}$.

- **Teorema**: Las siguientes relación se cumple entre las demandas Marshalianas y compensadas:

$$\frac{\partial X^C}{\partial \bar{u}}(P_x, P_y, \bar{u}) = \frac{\partial X^M}{\partial I}(P_x, P_y, I)\mu_u.$$

Variación Compensatoria

- **Definición**: La Variación Compensatoria mide el cambio en el ingreso que un consumidor debería de recibir ante un movimiento en los precios para que, con lo nuevos precios, sea capaz de alcanzar el mismo nivel de utilidad inicial. Es decir:
$$VC(P_x^0, P_x^1, P_y, I) = E(P_x^1, P_y, V(P_x^0, P_y, I)) - I.$$

- Nota que la VC se podría interpretar como el ingreso que el consumidor debería de recibir para no verse afectado por el cambio en precios. Sin embargo, el consumidor NO esta recibiendo dicho ingreso adicional, por lo que la VC es el negativo del cambio en el bienestar del consumidor.

- **Teorema (Teorema de Hicks)**: La variación compensatoria se puede calcular de la siguiente manera:

$$VC(P_x^0, P_x^1, P_y, I) = \int_{P_x^0}^{P_x^1} x^C(P_x, P_y, V(P_x^0, P_y, I) dP_x$$

Variación Equivalente

- **Definición**: La Variación Equivalente mide el cambio en el ingreso que un consumidor debería de recibir ante un movimiento en precios para que, aún enfrentandose a los precios originales, sea capaz de alcanzar el nivel de utilidad final. Es decir:

$$VE(P_x^0, P_x^1, P_y, I) = E(P_x^0, P_y, V(P_x^1, P_y, I)) - I.$$

- La VE nos dice que para el consumidor es **equivalente** enfrentarse a un cambio en precios, a haber perdido $E(P_x^0, P_y, V(P_x^1, P_y, I)) - I$ de su ingreso. Por lo tanto, la VE mide directamente la pérdida en bienestar del consumidor.

- **Teorema (Teorema de Hicks)**: La variación equivalente se puede calcular de la siguiente manera:

$$VE(P_x^0, P_x^1, P_y, I) = \int_{P_x^1}^{P_x^0} x^C(P_x, P_y, V(P_x^1, P_y, I) dP_x$$

Cambio en el Excedente del Consumidor

- Recordemos que el excedente del consumidor se puede calcular como:

$$EC(P_x, P_y, I) = \int_{P_x}^{\infty} X^M(P_x, P_y, I) dP_x.$$

- Dicho excedente mide la "ganancia" que un consumidor tiene al comprar un bien a un precio inferior al que esta dispuesto a pagar.

- Por lo tanto, otra medida de cambio en bienestar esta dada por el **cambio en el excedente del consumidor**:

$$\Delta EC(P_x^0, P_x^1, P_y, I) = \int_{P_x^0}^{P_x^1} X^M(P_x, P_y, I) dP_x.$$

Ejemplos

- Considera que la función de utilidad indirecta de Liliana está dada por

$$V(P_x, P_y, I) = \frac{I^2}{4P_xP_y}.$$

  Originalmente, $P_x = 2, P_y = 1, I = 20$. Encontrar la variación compensatoria si ahora Liliana se enfrenta a un precio de X igual a 4.

- Supón que para José el bien X es inferior y ordinario. Ordenar de mayor a menor (en valor absoluto) las variaciones compensatoria, equivalente, y el cambio en el excedente del consumidor.

- Supón que el SAT le da Laura dos opciones para pagar sus impuestos: Como primer opc'ión pagar de golpe $Im > 0$, y como segunda opción pagar un impuesto del 5% por unidad del bien X que Laura consume. Cuál es el máximo valor de Im tal que Laura prefiere la primera opción?