Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden – Parte 1

Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Otoño de 2020

Generalidades de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Cualquier ecuación que involucre derivadas de alguna función podría llamarse una *ecuación diferencial*. Sin embargo nos enfocaremos en este curso en algunos ejemplos concretos.

Iniciamos entonces con una función $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ a la que podemos sacar derivadas respecto a la variable t, mismas que denotamos por $\dot{x}(t), \ddot{x}(t), \ldots$ o bien $x'(t), x''(t), \ldots$.

Si hubiera más variables de las que depende x podríamos sacar *derivadas parciales*, pero ese tema no se cubre en este curso. Por lo mismo nos referiremos usualmente como EDO a las *ecuaciones diferenciales ordinarias.*

Generalidades de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

El orden de la EDO es el orden más alto de la derivada que aparezca en la ecuación

El *operador diferencial* asociado a la ecuación se obtiene al pasar todas las expresiones que involucren a x al lado izquierdo, dejando en el lado derecho una expresión que sólo depende de t.

Así, en general se puede llamar *ecuación diferencial de orden n* a una expresión de la forma

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$$

pero se puede intentar reordenar para obtener

$$G(x, x', \ldots, x^{(n)}) = g(t)$$

en donde G es el operador diferencial asociado a la ecuación.

Si en la expresión anterior $g(t) \equiv 0$ tenemos una *ecuación homogénea*

Generalidades de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Nótese que de hecho G puede pensarse como que depende sólo de x, y tomar sus derivadas como *operaciones sobre* x.

Si el operador diferencial es lineal como función de x se dice que la ecuación diferencial es *lineal.*

Una útil distinción es cuando la ecuación $F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$ no tiene de manera explícita (despejada) a la variable t. En este caso tenemos una *ecuación autónoma*.

Ejemplos.

- $\dot{x} + \dfrac{x}{t} = 2$ Primer orden, lineal, no homogénea, no autónoma.
- $y' + 8ty = y \operatorname{sen} t \ln y$ Primer orden, no lineal, homogénea, no autónoma.
- $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x - 2 = 0$ Segundo orden, lineal, no homogénea, autónoma.

Análisis cualitativo de ecuaciones autónomas de orden 1

Iniciemos con el estudio del análisis cualitativo de ecuaciones de primer orden que pueden escribirse como

$$\dot{x}(t) = g(x), \qquad x(0) = x_0 \qquad \text{o expresiones similares}$$

Como se vió anteriormente, será útil tener una gráfica de la función $g(x)$, y así determinar dónde esperamos que la solución sea creciente, decreciente o estacionaria.

Ejemplos

- $\dot{P} = kP$ con $k > 0$ o $k < 0$. La función $g(P) = kP$ es una línea recta creciente o decreciente; es de esperarse un crecimiento o decrecimiento sostenido.
- $\dot{P} = k\left(1 - \dfrac{P}{N}\right)P$, con $k > 0$, $N > 0$.

Análisis Cualitativo de la ecuación logística

La función $g(P) = k\left(1 - \dfrac{P}{N}\right)P$ luce como una parábola "invertida":

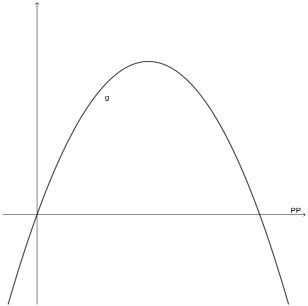

Figura: Esquema de la gráfica de la función $g(P)$

Análisis Cualitativo de la ecuación logística

A partir de los intervalos donde g es positiva o negativa, colocamos flechas a la derecha si la gráfica es positiva, o a la izquierda si la grafica es negativa.

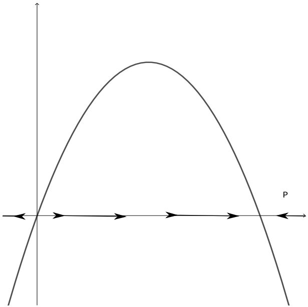

Figura: Esquema de la gráfica de la función $g(P)$

Análisis Cualitativo de la ecuación logística

A partir de esta gráfica, colocamos el eje P de forma vertical para obtener el comportamiento de las soluciones para distintos valores iniciales. A este diagrama lo podemos llamar *diagrama fase* de dimensión 1.

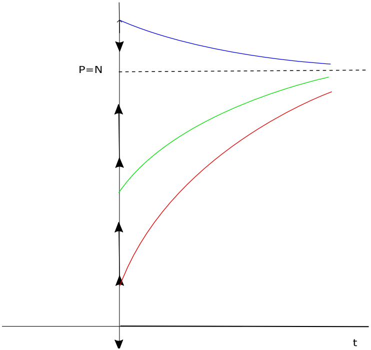

Figura: Esquema de gráficas de algunas soluciones

Análisis Cualitativo de la ecuación logística

¿Qué hay del valor $P = N$?

Primero nótese que $P = N$ es solución al problema con dato inicial $P(0) = N$.

Pero además, según la gráfica, y el razonamiento que nos llevó al diagrama fase, esta solución permanece constante, por lo que se denominará *solución estacionaria*.

Entonces el diagrama sugiere que las soluciones con datos iniciales cerca de la solución estacionaria $P = N$ convergen hacia la solución estacionaria.

¿Y por qué las gráficas no se tocan, o no deberían tocarse?

Esta pregunta la responde un teorema fundamental en esta área

Teorema de existencia y unicidad

Teorema

Supóngase que $g(t,x)$ *es una función continua en el rectángulo* $\mathcal{R} = \left\{(t,x) : a \le t \le b,\ c \le x \le d\right\}$*, y que su derivada parcial* $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ *existe y es continua en* $\mathcal{R}$*.*

Entonces para $(t_0, x_0) \in \mathcal{R}$ *existe una única solución* $x(t)$ *del problema con valores iniciales*

$$\dot{x}(t) = g(t,x), \qquad x(t_0) = x_0$$

para t *en un intervalo de la forma* $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ *para cierta* $\epsilon > 0$*.*

Ejemplos

- **Dispersión de una enfermedad.** El siguiente es un modelo **simplificado** de una dispersión de una enfermedad por contagio en la que se conoce una población con más alto riesgo de contagiarse.
  Se sabe además que el número de contagios es proporcional a los individuos de la población de alto riesgo no contaminados, de manera que al disminuir el número de individuos sanos de la población de alto riesgo disminuye a su vez la tasa de contagio.

  Sea $P = P(t)$ la población infectada al tiempo t.
  Sea N una estimación del número de individuos con alto riesgo de contagiarse. Se considera esta cantidad constante.
  Así $N - P$ denota el exceso de población sana (respecto a la que está en riesgo de enfermarse.)

Entonces podemos modelar este fenómeno describiendo la "variación instantánea" de población, escribiendo

$$P' = \alpha P(N - P), \qquad \text{con } \alpha > 0.$$

Ejemplos

Este ejemplo no difiere mucho del modelo logístico antes descrito, pues se puede escribir como $P' = k\,P\left(1 - \dfrac{P}{N}\right)$, con $k = \alpha N$.

De este modo, dado el análisis cualitativo hecho en las páginas anateriores, podemos dar un pronóstico del comportamiento a largo plazo de la población:

Si la población inicial enferma es menor a N, irá creciendo a N, mientras que si es mayor a N irá decreciendo a N.

Crítica:

- De algún modo justificaría que en estas situaciones, de haber vacuna, ésta se aplique a la población susceptible a enfermarse.
- Parece no distinguir entre las poblaciones vulnerables y no vulnerables.
- Si se tiene como población inicial a N el modelo sugiere que la población contagiada permanecerá constante (!?)

Ejemplos

- Supongamos que en un estanque la población de peces obedece un crecimiento logístico con una tasa de crecimiento $k = 0{,}3$, el tiempo t se mide en años, y se tiene una capacidad de carga $N = 2500$. Escribir una ecuación que modele cada una de las siguientes situaciones:

(a) Se pescan 100 peces al año.

$$P' = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right) - 100$$

(b) Se pesca un tercio de la población total al año.

$$P' = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right) - \frac{P}{3}$$

Análisis Cualitativo

(a) Con los datos proporcionados los puntos estacionarios corresponden a las raíces del polinomio

$$kP - \frac{kP^2}{N} - 100 = \frac{3P}{10} - \frac{3P^2}{25000} - 100, \qquad P = 396{,}09,\ P = 2103{,}91$$

Ambos son atractores

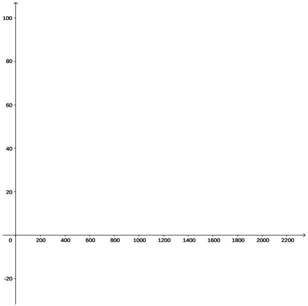

Figura: Plano fase de $P' = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right) - 100$

Análisis Cualitativo

(b) Con los datos proporcionados los puntos estacionarios corresponden a las raíces del polinomio

$$kP - \frac{kP^2}{N} - \frac{P}{3} = -\frac{P}{30} - \frac{3P^2}{25000}, \qquad P = 0,\ P = -277{,}78$$

La población se extingue

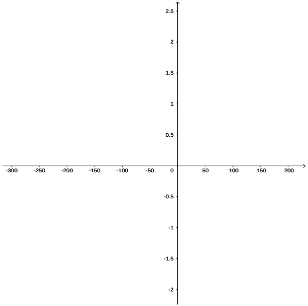

Figura: Plano fase de $P' = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right) - \frac{P}{3}$