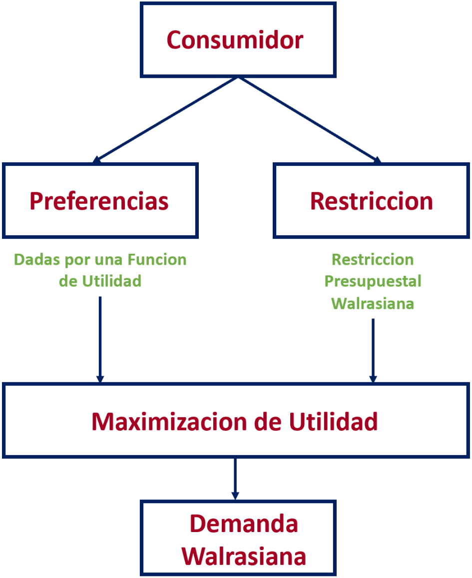
Decisiones de los Consumidores: Demanda Walrasiana

Alberto Ramírez de Aguilar

ITAM

Otoño 2020

Modelo Walrasiano



Modelo Walrasiano

- Consideremos a un consumidor que cuenta con una función de utilidad $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que representa sus gustos por bienes X e Y. Este consumidor se enfrenta a precios $P_x, P_y > 0$.

- En el modelo Walrasiano, se supone que el consumidor cuenta con una dotación de bienes $(\bar{x}, \bar{y})$ las cuales puede usar en un mercado competitivo para comprar/vender.

- El consumidor por lo tanto resuelve el siguiente problema:

$$\max_{\{x,y\}} \quad u(x,y) \quad \text{sujeto a:}$$

$$P_x x + P_y y \leq P_x \bar{x} + P_y \bar{y},$$

$$0 \leq x,$$

$$0 \leq y.$$

Solución del Problema

- Usando las condiciones de primer orden, podemos revisar (favor de hacerlo) que las condiciones de optimalidad en el modelo Walrasiano son exactamente las mismas que antes:
  - Si $x^\star > 0, y^\star > 0$ entonces en el óptimo:
  $$TMS(x^\star, y^\star) = \frac{P_x}{P_y}.$$
  - Si $y^\star = 0$ entonces en el óptimo:
  $$TMS\left(\frac{I}{P_x}, 0\right) \geq \frac{P_x}{P_y}.$$
  - Si $x^\star = 0$ entonces en el óptimo:
  $$TMS\left(0, \frac{I}{P_y}\right) \leq \frac{P_x}{P_y}.$$

Demandas Walrasianas

- **Definición**: A la solución del problema Walrasiano se le conoce como **Demandas Walrasianas** y se denotan como:

$$x^\star = X^W(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}) \quad y^\star = Y^W(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}).$$

- **Definición**: La **Función de Utilidad Indirecta Walrasiana** es la función valor del problema Walrasiano:

$$V^W(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}) = u\left(X^W(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}), Y^W(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y})\right).$$

Demandas Netas

- Cómo sabemos si un consumidor es vendedor o comprador de un bien?
- Recordemos que en el modelo Walrasiano, para que un consumidor pueda comprar de un bien debe vender del otro bien para poderse generar ingreso. Las demandas netas nos ayudan a saber si un consumidor es comprador o vendedor de un bien.
- **Definición:** Las **Demandas Netas** se definen como:

$$X^N(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}) = X^W(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}) - \bar{x},$$

$$Y^N(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}) = Y^W(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}) - \bar{y}.$$

Propiedades de la Función de Utilidad Indirecta

- Las siguientes son algunas propiedades de $V^W(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y})$.

1. Homogénea de grado cero en precios. Es decir, para toda $\lambda > 0$ se cumple:
$$V^W(\lambda P_x, \lambda P_y, \bar{x}, \bar{y}) = V^W(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}).$$

2. No decreciente ante aumentos en la dotación. Es decir:
$$\frac{\partial V^W}{\partial \bar{x}}(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \quad \frac{\partial V^W}{\partial \bar{y}}(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}) \geq 0.$$

3. El signo del impacto de un cambio en precios en la utilidad indirecta depende del signo de la demanda neta. Es decir:
$$\frac{\partial V^W}{\partial P_x}(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}) = \mu_R X^N(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}),$$
$$\frac{\partial V^W}{\partial P_y}(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}) = \mu_R Y^N(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}).$$

Propiedades de las Demandas Walrasianas

- En general, las demandas Walrasianas solo cumplen las siguientes dos propiedades

1. Homogéneas de grado cero en precios. Es decir, para toda $\lambda > 0$ se cumple:

$$X^W(\lambda P_x, \lambda P_y, \bar{x}, \bar{y}) = X^W(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}),$$
$$Y^W(\lambda P_x, \lambda P_y, \bar{x}, \bar{y}) = Y^W(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}).$$

2. Identidades de Roy:

$$X^N(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}) = \frac{\frac{\partial V^W}{\partial P_x}(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y})}{\frac{\partial V^W}{\partial \bar{x}}(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y})} P_x,$$

$$Y^N(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}) = \frac{\frac{\partial V^W}{\partial P_y}(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y})}{\frac{\partial V^W}{\partial \bar{y}}(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y})} P_y.$$

Dualidad en el Problema Walrasiano

- Para poder decir mas sobre el comportamiento de las demandas Walrasianas al momento de cambiar un parámetro hay que recurrir al análisis del problema Dual del modelo Walrasiano.

- **Relación Entre el Problema Marshaliany y Walrasiano:** Notar que para un consumidor, es equivalente recibir una dotación $(\bar{x}, \bar{y})$ a recibir un ingreso exógeno igual al valor de mercado de la dotación. Por lo tanto:

$$V^W(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}) = V(P_x, P_y, P_x\bar{x} + P_y\bar{y}),$$

$$X^W(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}) = X^M(P_x, P_y, P_x\bar{x} + P_y\bar{y}),$$

$$Y^W(P_x, P_y, \bar{x}, \bar{y}) = Y^M(P_x, P_y, P_x\bar{x} + P_y\bar{y}).$$

Ecuación de Slutsky en el Problema Walrasiano

- A partir de las relaciones duales derivadas anteriormente, podemos encontrar las siguientes ecuaciones de Slutsky.

$$\frac{\partial X^W}{\partial P_x} = \frac{\partial X^C}{\partial P_x} - \frac{\partial X^M}{\partial I} X^N,$$

$$\frac{\partial Y^W}{\partial P_x} = \frac{\partial Y^C}{\partial P_x} - \frac{\partial Y^M}{\partial I} Y^N.$$

- Es decir, el efecto total en las demandas ante un cambio en precios, se puede descomponer en un **Efecto Sustitución** mas un **Efecto Ingreso Neto**.
- Cómo se ven las ecuaciones de Slutsky ante un cambio en el precio de Y?

Outline

Modelo Ocio-Consumo

- Ahora estudiaremos una aplicación del modelo Walrasiano al mercado laboral llamado **Modelo de Ocio-Consumo**.

- Buscamos contestar las siguientes preguntas:

  1. Qué determina si una persona trabaja (quiere trabajar) o no?
  2. Como afecta la riqueza (ingreso) de una persona a su decisión de trabajo?
  3. Qué podemos esperar que le pase al trabajo de un consumidor si el salario sube/baja?

Modelo Ocio-Consumo

- Consideremos a un consumidor que recibe utilidad por consumir bienes, denotado c, así como por las horas de ocio que disfruta, denotadas h. Escribimos $u(h, c)$ la utilidad del consumidor por ocio y consumo.
- Este consumidor cuenta con T horas las cuales puede dedicar al ocio o a trabajar, denotado l. Por cada hora de trabajo, el consumidor recibe un salario $w > 0$.
- El consumidor cuenta con un ingreso no-laboral, denotado I^{NL}, el cual puede utilizar para comprar bienes de consumo. Suponemos que el precio de cada bien de consumo es $p = 1$.
- Por lo tanto, el consumidor resuelve:

$$\max_{\{h,c\}} \;\; u(h, c) \;\; \text{sujeto a}$$

$$c \leq I^{NL} + w(T - h),$$

$$h \leq T,$$

$$0 \leq h, c.$$

Modelo Ocio-Consumo

- **Definición**: A las soluciones del problema las llamamos **Demanda de Consumo** y **Demanda de Ocio**. Estas se denotan:

$$c(w, I^{NL}) \quad h(w, I^{NL}).$$

- **Definición**: La **Oferta Laboral** del consumidor esta dada por:

$$l(w, I^{NL}) = T - h(w, I^{NL}).$$

Trabajar o No Trabajar?

- Supongamos que el consumidor decide no trabajar. Es decir, la demanda de ocio del consumidor es igual a T.
- Si el consumidor decide no trabajar, entonces la máxima cantidad de c que puede demandar es $c = I^{NL}$.
- Bajo qué condiciones la canasta (T, I^{NL}) es óptima? Gráficamente (de igual manera se puede hacer un argumento usando el Lagrangeano del problema) uno se puede convencer de que si $w > TMS(T, I^{NL})$ entonces la persona decidirá trabajar. De lo contrario, preferirá demandar T horas de ocio.
- **Definición**: El **Salario de Reserva** del consumidor esta dado por:

$$w^R = TMS(T, I^{NL}).$$

Estática Comparativa

- Qué pasa con los óptimos del problema cuando cambia el salario que recibe el trabajador?
  - Intuitivamente, un menos salario (por ejemplo) disminuye el ingreso de la persona y hace mas atractivo al ocio.
  - Por lo tanto, deberíamos esperar que tanto el consumo como el ocio cambien a medida que el consumidor enfrente aumentos o bajas en w.
- Para saber qué sucede con las demandas de ocio y consumo al cambiar w, debemos recurrir a las siguientes relaciones Duales:

$$h(w, I^{NL}) = h^M(w, I^{NL} + wT),$$

$$c(w, I^{NL}) = c^M(w, I^{NL} + wT).$$

Estática Comparativa

- A partir de dichas relaciones duales, podemos obtener las ecuaciones de Slutsky para ambas demandas al haber un cambio en los precios:

$$\frac{\partial h}{\partial w} = \frac{\partial h^c}{\partial w} + \frac{\partial h^M}{\partial I} I,$$

$$\frac{\partial c}{\partial w} = \frac{\partial c^c}{\partial w} + \frac{\partial c^M}{\partial I} I.$$

- Ejemplo: Supongamos que para un trabajador, el salario w que recibe es mayor a su salario de reserva. Graficar el efecto total, sustitución e ingreso ante un aumento en el salario si sabemos que para este consumidor el ocio es un bien inferior.

Outline

Modelo de Consumo Intertemporal

- Finalmente, estudiaremo otra aplicación del modelo Walrasiano pero ahora para un consumidor que vive por dos periodos (presente y futuro) que busca consumir en ambos periodos asó como ahorrar/endeudarse.

- Buscamos contestar las siguientes preguntas:

  1. Qué determina si una persona ahoora o no?
  2. Como afecta la riqueza (ingreso) de una persona a su decisión de ahorro?
  3. Qué podemos esperar que le pase al ahorro de un consumidor si cambian los precios de mercado?

Modelo de Consumo Intertemporal

- Consideremos a un consumidor que recibe utilidad por consumir bienes en dos periodos de su vida. En el periodo presente, denotado $t = 0$, el consumidor consume c_0 mientras que en el futuro, denotado $t = 1$, consume c_1. Escribimos $u(c_0, c_1))$ la utilidad intratemporal de esta persona.
- En cada periodo de su vida, el consumidor cuenta con un ingreso exógeno (I_0, I_1) el cual puede dedicar al consumo de bienes. El precio del consumo en cada periodo se normaliza a uno.
- Entre el periodo $t = 0$ y el periodo $t = 1$, el consumidor puede decidir ahorrar/endeudarse recibiendo/pagando una tasa de interés $r > -1$.
- Por lo tanto, el consumidor resuelve:

$$\max_{\{c_0, c_1\}} \; u(c_0, c_1) \; \text{sujeto a}$$

$$c_1 \leq I_1 + (1 + r)[I_0 - c_0],$$

$$0 \leq c_0,$$

$$0 \leq c_1.$$

Modelo de Consumo Intertemporal

- **Definición**: A las soluciones del problema las llamamos **Demanda de Consumo Presente** y **Demanda de Consumo Futuro**. Estas se denotan:

$$c_0(r, I_0, I_1) \quad c_1(r, I_0, I_1).$$

- **Definición**: El **Ahorro** del consumidor esta dado por:

$$s(r, I_0, I_1) = I_0 - c_0(r, I_0, I_1).$$

Ahorrar o Endeudarse?

- Notar que dependiendo de la cantidad de intereses que el consumidor deba pagar/recibir en el futuro por cada peso endeudado/ahorrado depende crucialmente del valor de la tasa de interés r.

- Definimos $\tilde{r}$ como la tasa de interés tal que el consumidor no quiere ahorrar ni pedir prestado. Es decir, en esta tasa de interés el ahorro del consumidor es igual a cero.

- Gráficamente uno se puede convencer de lo siguiente:

$$\tilde{r} = TMS(I_0, I_1).$$

- Por lo tanto, si $r < \tilde{r}$ este consumidor decidirá endeudarse, mientras que si $r > \tilde{r}$ preferirá ahorrar (por qué?).

Estática Comparativa

- Qué sucede con las demandas de consumo asó como con el ahorro/deuda si la tasa de interés cambia?

- Para contestar esta pregunta, usemos las mismas relaciones duales discutidas en el modelo Walrasianio.

- A partir de dichas relaciones duales, podemos obtener las ecuaciones de Slutsky para ambas demandas al haber un cambio en la tasa de interés:

$$\frac{\partial c_0}{\partial r} = \frac{\partial c_0^c}{\partial r} + \frac{\partial c_0^M}{\partial r} s,$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} = \frac{\partial c_1^c}{\partial r} + \frac{\partial c_1^M}{\partial r} s.$$