V. Distribuciones Continuas

M.A. Fernando Jesús Martínez Eissa

02H2019

ITAM
División Académica de Actuaría, Estadística y Matemáticas

Uniforme

Definición y características

- Una v.a. X tiene una distribución Uniforme Continua (o rectangular) continua en el intervalo [a,b], con a,b$\epsilon\mathbb{R}$, si su función de densidad está dada por:

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

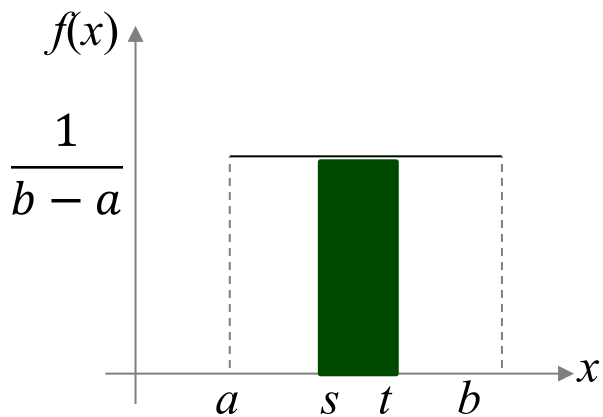
- Notación: $X \sim U[a,b]$
- Se cumple que: $f_x(x) > 0 \; y$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1$$

- La distribución uniforme es continua en [a,b] y además, a los intervalos de la misma longitud contenidos en [a,b] se les asigna la misma probabilidad.

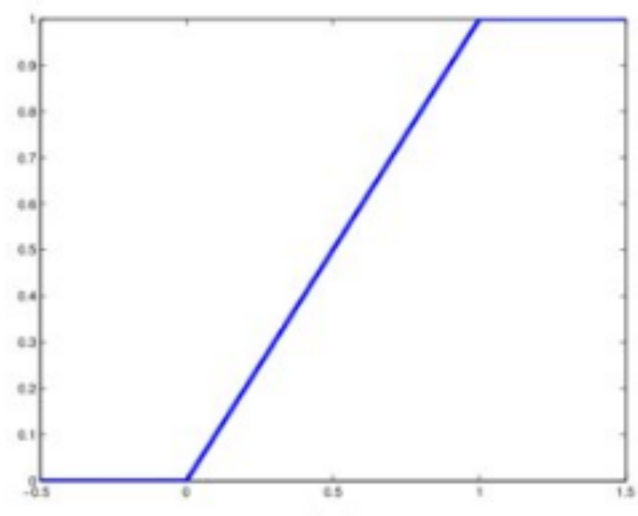
Uniforme

A la probabilidad de que X se encuentre en el intervalo $[s,t]$, corresponde al área sombreada.



La función acumulada es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$



Uniforme

Aplicaciones

- Permite modelar fenómenos equiprobables sobre intervalos de igual longitud.

- La distribución uniforme en el intervalo [0,1] es de particular interés en la Teoría de Simulación, gracias al siguiente Teorema:

Teorema: Método de la Transformación Inversa

Sea $U \sim U_{[0,1]}$. Para cualquier función de distribución acumulada continua F, si se define a la variable aleatoria $X = F^{-1}(U)$, entonces X tiene función de distribución acumulada F.

Este Teorema permite generar numeros aleatorios provenientes de cualquier distribución continua con fda inversa $F^{-1}(\cdot)$, a partir de números aleatorios distribuidos uniforme en [0,1]

Uniforme

El valor esperado y su varianza son:

$$\mu_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E^2[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$= \frac{4(b^2+ab+a^2) - 3(a^2+2ab+b^2)}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ejemplo 1

Considere la v.a. W es una v.a. continua con distribución uniforme en el intervalo (0,10). Calcular la probabilidad de:

a) $W<3$

b) $W>6$

c) $3<W<8$

Solución

$$f(W) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 1 < w < 10 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

a) $P[W < 3] = \int_0^3 \frac{1}{10} dx = \left.\frac{x}{10}\right|_0^3 = \frac{3}{10}$

b) $P[W > 6] = 1 - P[W < 6] = 1 - \int_0^6 \frac{1}{10} dx = 1 - \left.\frac{x}{10}\right|_0^6 = \frac{4}{10}$

c) $P[3 < W < 8] = P[W < 8] - [W < 3]P = \int_0^8 \frac{1}{10} dx - \int_0^3 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{2}$

Ejemplo 2

Los autobuses llegan a una determinada parada en intervalos de 15 minutos iniciando desde las 7am, i.e. 7:00, 7:15, 7:30, etc. Si un pasajero llega a la parada entre las 7:00 y las 7:30, encontrar la probabilidad de que espere:

a) *menos de 5 minutos*

b) *más de 10 minutos*

Solución

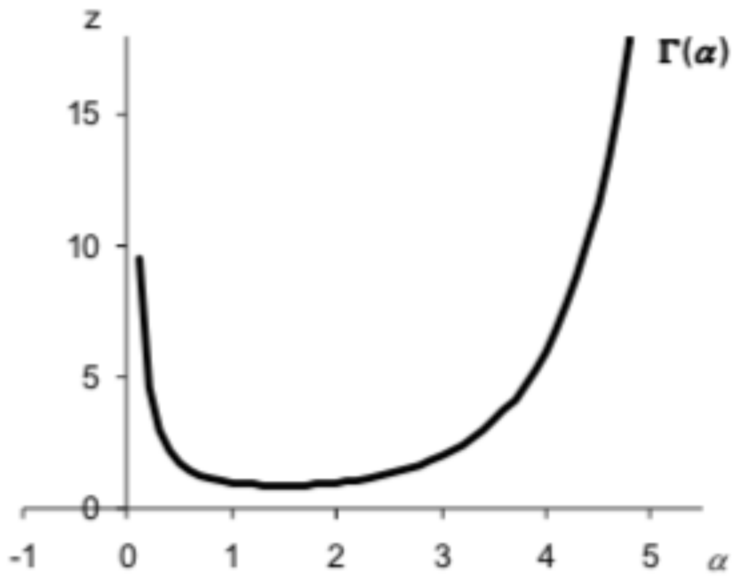
Sea X la v.a. que denota el tiempo de espera posterior a las 7 a.m. Por lo que se distribuye uniforme en el intervalo (0.30). Para que espere menos de 5 minutos debe llegar entre 7:10 y 7:15 o entre 7:25 y 7:30. Por lo tanto se busca:

a) $P[10 < x < 15] + P[25 < x < 30] = \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dx + \int_{30}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$

b) $P[0 < x < 5] + P[15 < x < 20] = \int_{0}^{5} \frac{1}{30} dx + \int_{15}^{20} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$

Función Gamma

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha-1} dy, \alpha > 0$$



Note cómo la función comienza decreciendo hasta alcanzar un mínimo entre 1 y 2 pero luego crece en forma acelerada.

Gamma

Integrando por partes $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha-1} dy$, obtenemos:

$$\Gamma(\alpha) = -e^{-y} y^{\alpha-1}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-y}(\alpha-1) y^{\alpha-2} dy$$

$$= (\alpha-1)\int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha-2} dy = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

Para valores enteros de α, tenemos

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$
$$= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$
$$= (n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3)$$
$$\therefore \Gamma(n) = (n-1)!$$

Propiedades de la Función Gamma

1) $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$
2) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$
3) $\text{Si n} \in \mathbb{Z}^+ \ entonces\ \Gamma(n) = (n-1)!$
4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

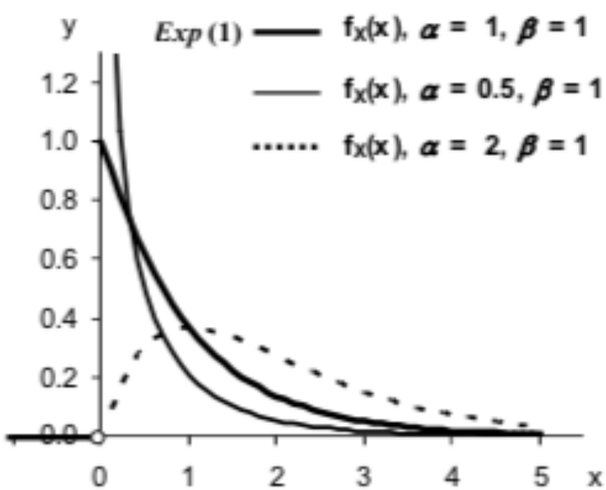
Gamma

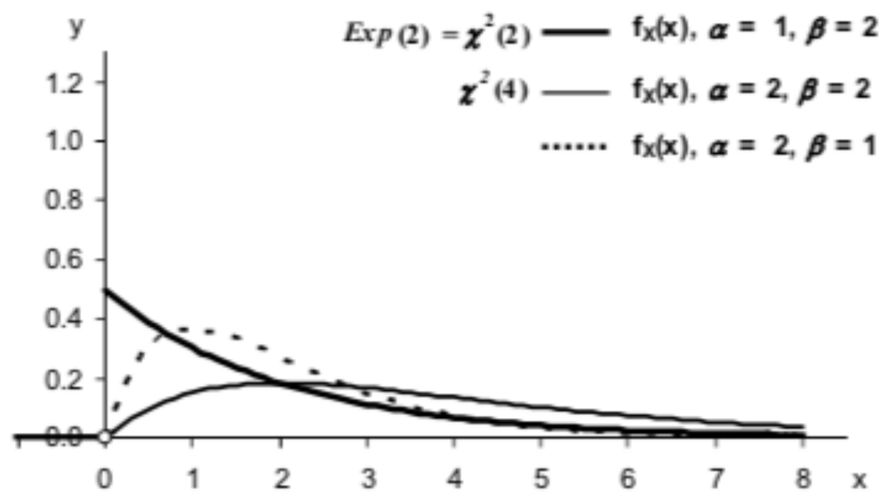
Definición y características Distribución Gamma

Una v.a. X tiene una distribución Gamma con parámetros (α,β), $\alpha>0$ $\beta>0$, si su función de densidad está dada por:

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta e^{-\beta x}(\beta x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

Con $E[x] = \frac{\alpha}{\beta}$ y $V[x] = \frac{\alpha}{\beta^2}$



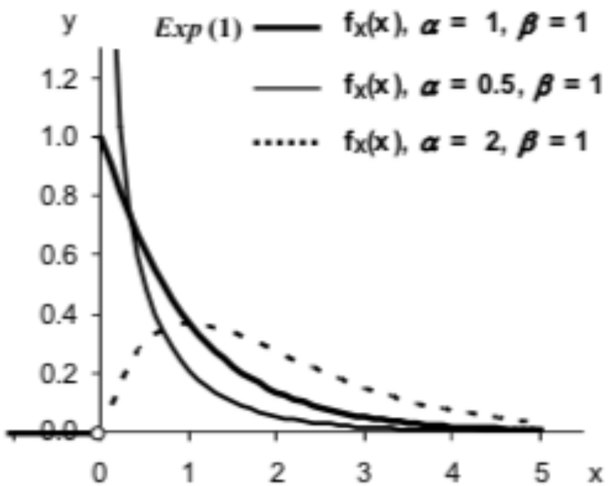


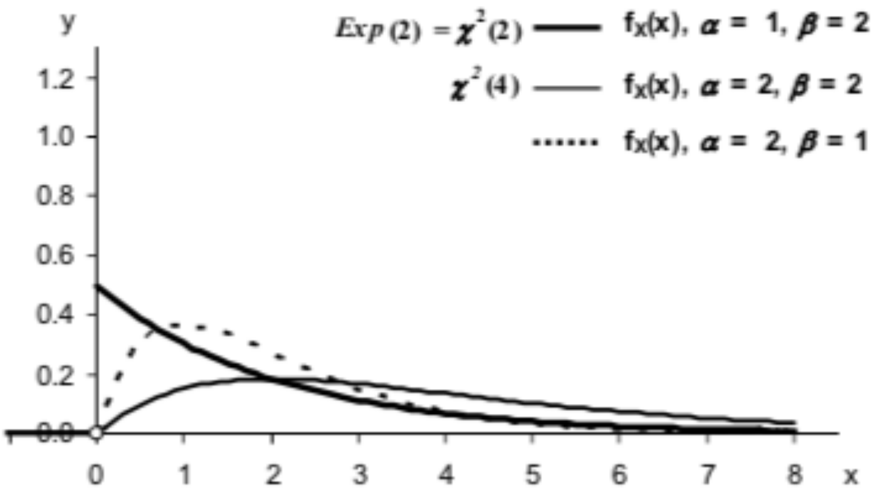
Definición y características Distribución Gamma

Otra forma de describir a la función de densidad es::

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x}{\beta}}(x)^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

Con $E[x] = \alpha\beta\ y\ V[x] = \alpha\beta^2$





Gamma

Aplicaciones

La Distribución Gamma es asimétrica con sesgo positivo y es muy versátil por los perfiles que pueden generar sus parámetros.

Se utiliza frecuentemente para modelar tiempo de vida, tiempos de espera, ingreso familiar, pérdidas, etc.

Las Distribuciones Exponencial y Ji Cuadrada son casos particulares de la Distribución Gamma.

Proposiciones

Cuando la distribución Gamma tiene parámetros (α=1,β=λ), obtenemos la función de densidad de la *Exponencial*:

$$f_x(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

Cuando la distribución Gamma tiene parámetros (α=n/2,β=1/2), obtenemos la función de densidad *Ji-cuadrada* con n grados de libertad.

$$\chi_n^2 = f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \left(\frac{1}{2}x\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(n/2)} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

Gamma

Ejemplo 3

Suponga que X es una v.a. que se distribuye Gamma (α,β)
Calcular el *k-ésimo* momento de la v.a. X

Exponencial

Definición y características

- Una v.a. X tiene una distribución Exponencial con parámetro λ si su función de densidad está dada por:

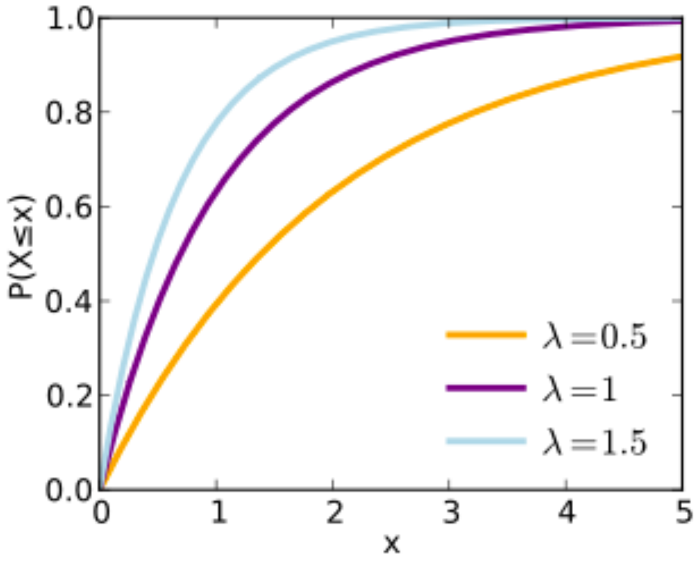
$$f_x(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

- Notación: $X \sim exp(\lambda)$

- Su función de acumulación

es:

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_0^x \lambda e^{-\lambda r} dr = 1 - e^{-\lambda x}$$



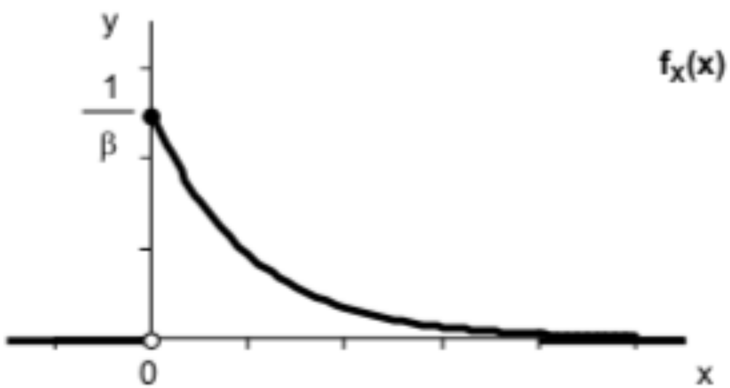
Exponencial

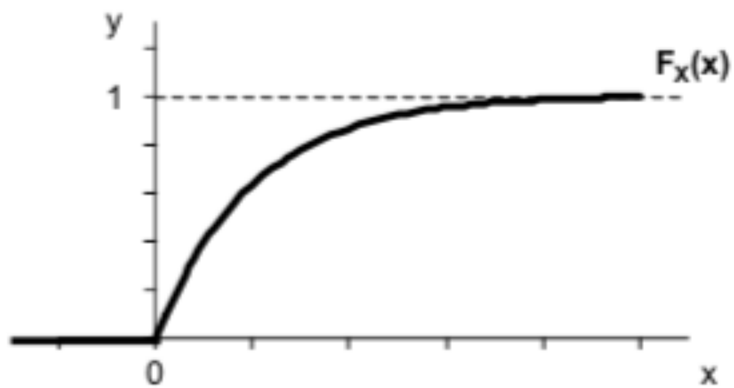
Definición y características

- También se puede definir como:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

- Notación: $X \sim exp(1/\lambda)$





Exponencial

Sin memoria

Se dice que una variable aleatoria no negativa no tiene memoria si:

$$P[X > s + t|X > t] = P[X > s]\ \forall_{s,t>0}$$

- Si pensamos en X como el tiempo de vida de algún instrumento. La ecuación anterior establece que la probabilidad de que sobreviva el instrumento por al menos $s+t$ horas, dado que ha sobrevivido t, es al misma probabilidad inicial de que sobreviviera las primeras s horas.

- En otras palabras, si el instrumento está vivo a edad t, la distribución de tiempo remanente de vida es igual a la distribución original del tiempo de vida, es decir, el instrumento "no recuerda" que ha estado en uso por un tiempo t

Exponencial

Aplicaciones

La Distribución Exponencial permite modelar la distribución del tiempo hasta la ocurrencia de algún evento específico, por ejemplo, la ocurrencia de un terremoto, una llamada telefónica, la llegada de un tren, etc. Se utiliza con frecuencia en *Teoría de Colas* para modelar líneas de espera.

Relación entre con la Distribución Poisson

El tiempo que transcurre entre la ocurrencia de dos eventos de una Distribución Poisson con parámetro β tiene una Distribución Exponencial con parámetro $\lambda = \frac{1}{\beta}$

Ejemplo 4

Sea x una variable aleatoria que se distribuye exponencial, encuentre $E[x]$ y $V[x]$:

Solución

$$E[x] = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

Sea $u=x$; $du=dx$ y $dv=\lambda e^{-\lambda x}$ $v=-e^{-\lambda x}$ Entonces integrando por partes:

$$\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-\lambda x}dx$$

$$= 0 + 0 - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

Ejemplo 4 (*Continuación*)

$$E[x^k] = \int_0^\infty x^k f(x)dx = \int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Sea $u = x^k$; $du = k\ x^{k-1}\ dx$ y $dv=\lambda e^{-\lambda x}$ $v=-e^{-\lambda x}$ Entonces integrando por partes:

$$\int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x} dx = -x^k e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-\lambda x} k\ x^{k-1} dx$$

$$= 0 + 0 + \frac{k}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\ x^{k-1} dx = \frac{k}{\lambda} E[x^{k-1}]$$

Entonces para n=2 tenemos:

$$E[x^2] = \frac{2}{\lambda} E[x] = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\therefore V[x] = E[x^2] - E^2[x] = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ejemplo 5

Suponga que la duración de una llamada telefónica medida en minutos sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = \frac{1}{10}$.Si alguien llega a la caseta telefónica antes que usted, calcule la probabilidad de que usted tenga que esperar:

a) más de 10 minutos

b) Entre 10 y 20 minutos

Solución

Sea X la v.a. que denota la duración de la llamada de la persona en la cabina. Entonces buscamos para a):

$$P[x > 10] = 1 - P[x \leq 10] = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-1}) \approx .368$$

Para b):

$$P[10 < x < 20] = F(20) - F(10) = (1 - e^{-2}) - (1 - e^{-1}) \approx .233$$

Ejemplo 6

Considere que el tiempo de vida de una batería de automóvil es una variable aleatoria con distribución exponencial con un valor promedio de 10,000 millas. Si una persona desea hacer un recorrido de 5000 millas. ¿Cuál es la probabilidad de que pueda concluir su viaje sin que tenga que reemplazar su batería? ¿qué pasa si la distribución no es exponencial?

Solución

Se sigue de la propiedad de "sin memoria" que el tiempo de vida (en miles de millas) remanente de la batería es exponencial con parámetro λ=1/10. Entonces:

$$P[remanente\ de\ vida > 5] = 1 - F(5) = e^{-5\lambda} = e^{-0.5} \approx 0.607$$

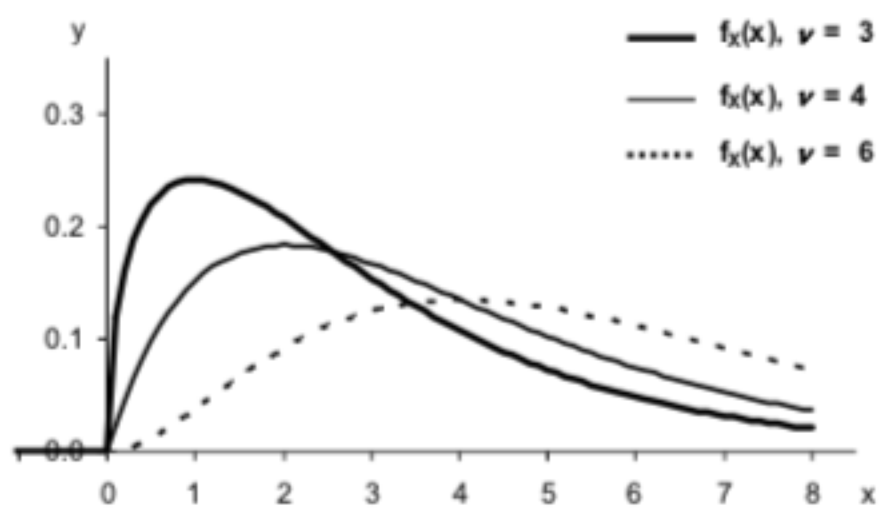
Ji-Cuadrada

Definición y características

- Una v.a. X tiene una distribución *Ji – Cuadrada* con n grados de libertad, si su función de densidad está dada por:

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

- Notación: $X \sim \chi^2(n)$



Ji-Cuadrada

Propiedades

Si $X \sim \chi^2(n)$, entonces:

i. $E[X] = n$

ii. $Var[X] = 2n$

Aplicaciones

La Distribución *Ji-Cuadrada* es de gran utilidad para la Inferencia Estadística pues está asociada al comportamiento probabilístico de la varianza muestral y aparece en algunas *pruebas de hipótesis*

Ejemplo 7

Para cierto modelo de automóviles, el monto de la pérdida (en miles de pesos) en caso de choque tiene una Distribución Gamma con media 20 y varianza 40.

a) Si un automóvil de este modelo tiene un choque, ¿cuál es la probabilidad de que la pérdida sea de más de 10,850 pesos?

b) Calcule la probabilidad de que la pérdida sea menor a 40,000 pesos en caso de choque.

c) ¿Cuál es la pérdida máxima con 99.9% de probabilidad para este modelo de automóviles?

Definición y características (d.p. Más importante)

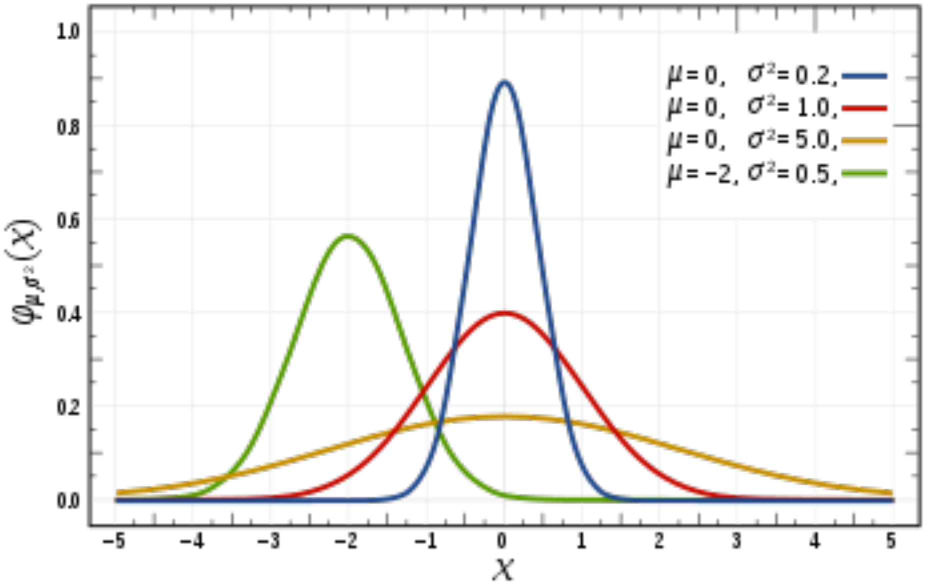
Normal

- Una v.a. X tiene una distribución Normal con parámetros μ y σ^2 si su función de densidad está dada por:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} I_{(-\infty,\infty)}(x), \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

- Notación: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- Una propiedad importante de esta distribución es que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Entonces $Y=aX+b$ se distribuye $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.



- Es una función simétrica con respecto a su media (μ)

Normal

- El parámetro μ es un factor de localización y modifica el centro de la distribución, mientras que σ^2 es un factor de forma y modifica la picudez de la función de densidad.

- La función normal siempre es mesocúrtica, es decir, tiene un coeficiente de curtosis de 3 y se considera como el estándar para clasificar la picudez del resto de las distribuciones.

- A la distribución Normal con parámetros $\mu = 0$ y σ^2 =1 se le denomina normal estándar o normal unitaria.

Normal

- Se dice que $Z \sim Normal\ Estándar\ \cong N(0,1)$, si:

$$f_Z(Z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-r^2}{2}}\ dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} I_{(-\infty,\infty)}(z)$$

- La función $f_Z(z)$ no tiene antiderivada, es decir, no existe expresión analítica cerrada de una función $F_Z(z)$ cuya derivada sea $f_Z(z)$.

- Para verificar que $A = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z) dz = 1$, hay que demostrar que $A^2 = 1$, es decir:

$$A^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dydx$$

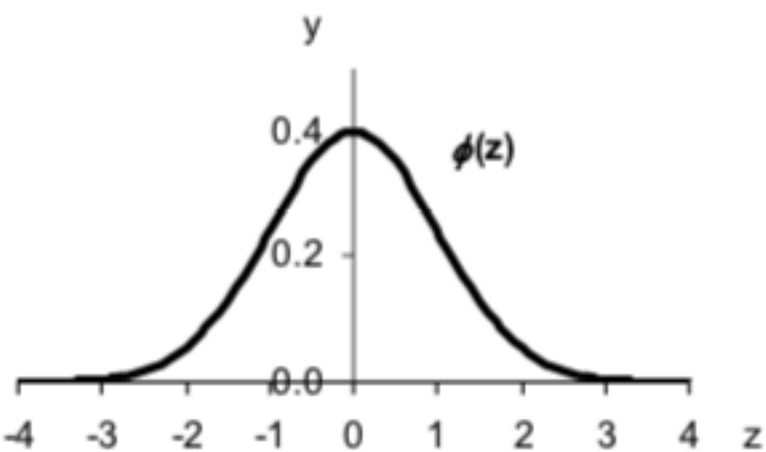
El cálculo de la doble integral, se simplifica utilizando coordenadas polares, i.e. $y = sen(\theta) y\ x = \cos(\theta)\ para\ r > 0, 0 < \theta < 2\pi$

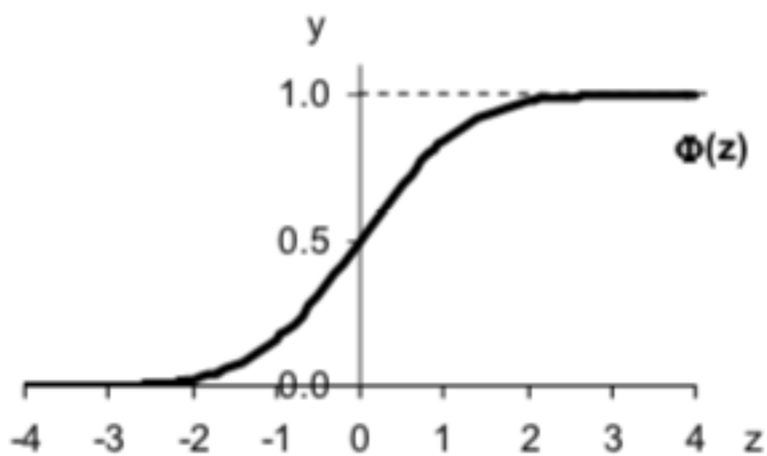
Normal

- La función de distribución acumulada de la Distribución Normal Estándar, se expresa através de la función Fi, pero sus valores se acumulan mediante integración numérica.

- Definición de Fi

$$\Phi(z) = P[Z \leq z] = \int_{-\infty}^{z} \Phi(r)\ dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-r^2}{2}}\ dr, z \in \mathbb{R}$$





Normal

Propiedades de Fi

- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

El cálculo de probabiidades de cualquier distribución normal (μ y σ^2 arbitrarios) se realiza a través de $\Phi(z)$ gracias al siguiente

Teorema de estandarización de variables aleatorias normales

- Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $Z = \frac{(x-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$, se sigue que:

$$F_x(x) = P[X \leq x] = P\left(\frac{X-\mu}{o} \leq \frac{x-\mu}{o}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{o}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{o}\right)$$

A la transformación $Z = g(X) = \frac{X-\mu}{\sigma}$ se le denomina estandarización de la v.a. X.

Normal

Distribución Acumulada N(0,1)
Área superior

$$P(Z > z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z}^{\infty} \exp\{-t^2/2\}dt$$

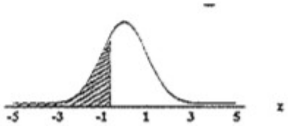
Ejemplo:
P(X > 2.15) = 0.01578

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414
0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
1	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08692	0.08534	0.08379	0.08226
1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
2	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480

Normal

Distribución Acumulada N(0,1)

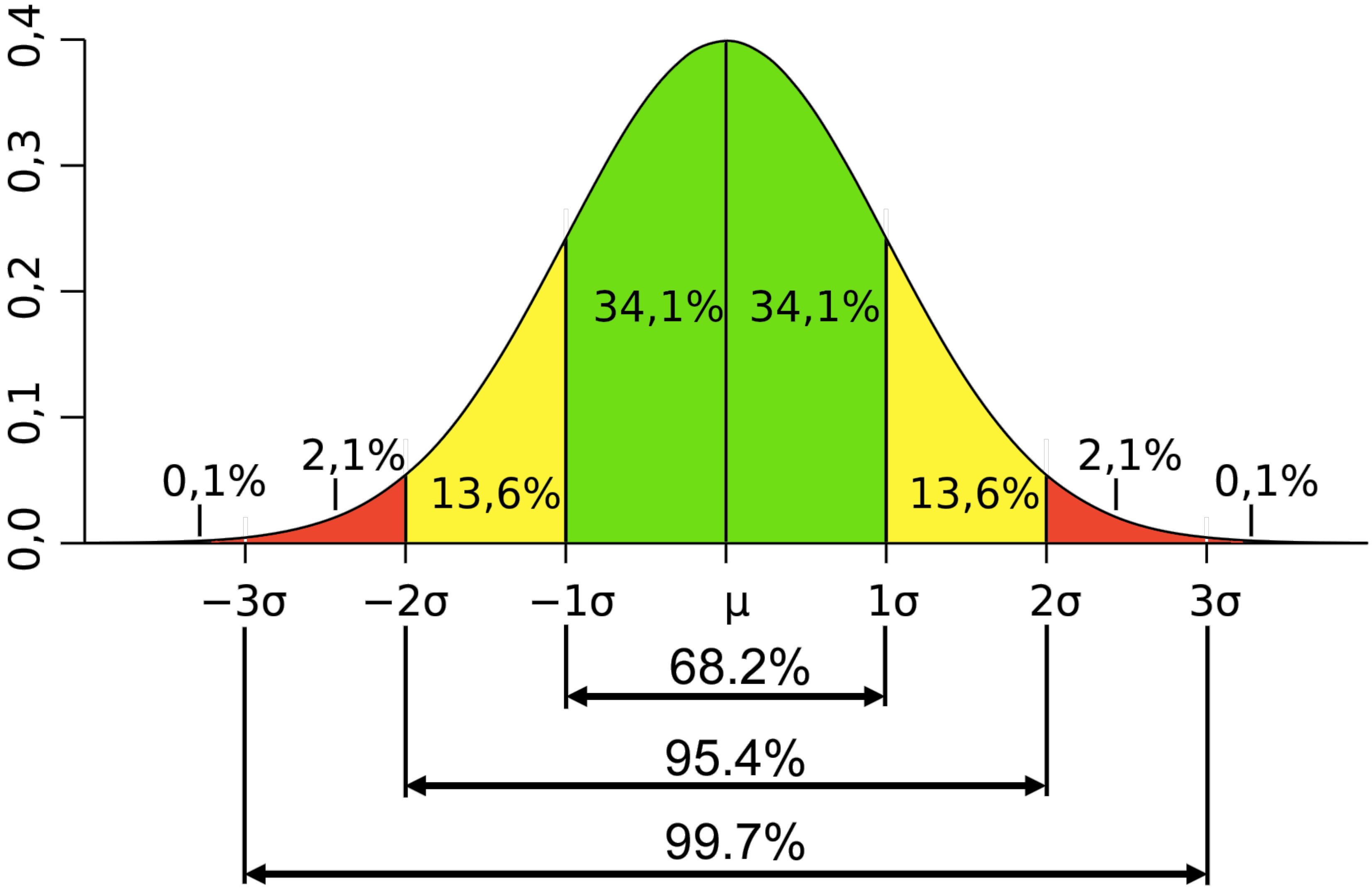
$$P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\{-t^2/2\}dt$$



Ejemplo:
$P(X \leq -2.15) = 0.01578$

z	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0
-2.9	0.00139	0.00144	0.00149	0.00154	0.00159	0.00164	0.00169	0.00175	0.00181	0.00187
-2.8	0.00193	0.00199	0.00205	0.00212	0.00219	0.00226	0.00233	0.00240	0.00248	0.00256
-2.7	0.00264	0.00272	0.00280	0.00289	0.00298	0.00307	0.00317	0.00326	0.00336	0.00347
-2.6	0.00357	0.00368	0.00379	0.00391	0.00402	0.00415	0.00427	0.00440	0.00453	0.00466
-2.5	0.00480	0.00494	0.00508	0.00523	0.00539	0.00554	0.00570	0.00587	0.00604	0.00621
-2.4	0.00639	0.00657	0.00676	0.00695	0.00714	0.00734	0.00755	0.00776	0.00798	0.00820
-2.3	0.00842	0.00866	0.00889	0.00914	0.00939	0.00964	0.00990	0.01017	0.01044	0.01072
-2.2	0.01101	0.01130	0.01160	0.01191	0.01222	0.01255	0.01287	0.01321	0.01355	0.01390
-2.1	0.01426	0.01463	0.01500	0.01539	0.01578	0.01618	0.01659	0.01700	0.01743	0.01786
-2	0.01831	0.01876	0.01923	0.01970	0.02018	0.02068	0.02118	0.02169	0.02222	0.02275
-1.9	0.02330	0.02385	0.02442	0.02500	0.02559	0.02619	0.02680	0.02743	0.02807	0.02872
-1.8	0.02938	0.03005	0.03074	0.03144	0.03216	0.03288	0.03362	0.03438	0.03515	0.03593
-1.7	0.03673	0.03754	0.03836	0.03920	0.04006	0.04093	0.04182	0.04272	0.04363	0.04457
-1.6	0.04551	0.04648	0.04746	0.04846	0.04947	0.05050	0.05155	0.05262	0.05370	0.05480
-1.5	0.05592	0.05705	0.05821	0.05938	0.06057	0.06178	0.06301	0.06426	0.06552	0.06681
-1.4	0.06811	0.06944	0.07078	0.07215	0.07353	0.07493	0.07636	0.07780	0.07927	0.08076
-1.3	0.08226	0.08379	0.08534	0.08692	0.08851	0.09012	0.09176	0.09342	0.09510	0.09680
-1.2	0.09853	0.10027	0.10204	0.10383	0.10565	0.10749	0.10935	0.11123	0.11314	0.11507
-1.1	0.11702	0.11900	0.12100	0.12302	0.12507	0.12714	0.12924	0.13136	0.13350	0.13567
-1	0.13786	0.14007	0.14231	0.14457	0.14686	0.14917	0.15151	0.15386	0.15625	0.15866
-0.9	0.16109	0.16354	0.16602	0.16853	0.17106	0.17361	0.17619	0.17879	0.18141	0.18406
-0.8	0.18673	0.18943	0.19215	0.19489	0.19766	0.20045	0.20327	0.20611	0.20897	0.21186
-0.7	0.21476	0.21770	0.22065	0.22363	0.22663	0.22965	0.23270	0.23576	0.23885	0.24196
-0.6	0.24510	0.24825	0.25143	0.25463	0.25785	0.26109	0.26435	0.26763	0.27093	0.27425
-0.5	0.27760	0.28096	0.28434	0.28774	0.29116	0.29460	0.29806	0.30153	0.30503	0.30854
-0.4	0.31207	0.31561	0.31918	0.32276	0.32636	0.32997	0.33360	0.33724	0.34090	0.34458
-0.3	0.34827	0.35197	0.35569	0.35942	0.36317	0.36693	0.37070	0.37448	0.37828	0.38209
-0.2	0.38591	0.38974	0.39358	0.39743	0.40129	0.40517	0.40905	0.41294	0.41683	0.42074
-0.1	0.42465	0.42858	0.43251	0.43644	0.44038	0.44433	0.44828	0.45224	0.45620	0.46017
-0	0.46414	0.46812	0.47210	0.47608	0.48006	0.48405	0.48803	0.49202	0.49601	0.50000

Normal



0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,1%
2,1%
13,6%
34,1%
34,1%
13,6%
2,1%
0,1%
−3σ
−2σ
−1σ
μ
1σ
2σ
3σ
68.2%
95.4%
99.7%

Ejemplo 8

Calcular la esperanza y la varianza de la función normal:

Solución

Sea $Z = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$ la v.a. De una función normal estándar con media μ=0 y σ^2=1.

$$E[z] = \int_{-\infty}^{\infty} z\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$\mathrm{V[z]} = E[z^2] = \int_{-\infty}^{\infty} z^2\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Sean: $u = x$ y $dv = xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}}dz$

$$\mathrm{V}[z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-xe^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dx\right)$$

$$\mathrm{V}[z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dx = 1$$

Ejemplo 8 (*Continuación*)

Dado que $X = \mu + \sigma z$

$E[x] = \mu + \sigma E[z] = \mu$

$V[x] = \sigma^2 V[z] = \sigma^2$

Ejemplo 9

Sea x una variable aleatoria normal con parámetros μ=3 y σ^2=9, encuentre:

a) $P[2 < x < 5]$

b) $P[x > 0]$

c) $P[\,|x - 3|>6]$

Solución

a) $P[2 < x < 5] = P\left[\frac{2-3}{3} < \frac{x-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right] = P\left[\frac{-1}{3} < z < \frac{2}{3}\right]$

$$P[2 < x < 5] = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.3779$$

b) $P[x > 0] = P\left[\frac{x-3}{3} > \frac{0-3}{3}\right] = P[z > -1] = 1 - P[z < -1] = P[z < 1] ==$

$.8413$

Ejemplo 9 (*Continuación*)

Solución

c) $P[|x-3|>6]=1-P[|x-3|<6]=1-P[-6<x-3<6]$

$$=1-P\left[\frac{-6}{3}<\frac{x-3}{3}<\frac{6}{3}\right]=$$
$$1-P[-2<z<2]\approx 0.0456$$

Ejemplo 10

Frecuentemente se refiere que un examen ha sido satisfactorio si las calificaciones de quienes aplicaron se pueden aproximar mediante una distribución normal.

El instructor generalmente utiliza las calificaciones obtenidas para estimar los parámetros μ y σ^2 y asignar así las calificaciones, otorgando A a quienes están por arriba de $\mu+\sigma$, B a quienes están entre $\mu+\sigma$ y μ; C para los que están entre μ y $\mu-\sigma$ y D para quienes están entre $\mu-\sigma$ y $\mu-2\sigma$ y F para aquellos por debajo de $\mu-2\sigma$.

¿Qué porcentajes se espera que haya de A's, B's, C's, D's y E's?

Ejemplo 10 (*Continuación*)

Para las A's se tiene:

$$P[x > \mu + \sigma] = P\left[\frac{x-\mu}{\sigma} > 1\right] = 1 - P[z < 1] = 1 - \Phi(1) \approx .1587$$

Para las B's se tiene:

$$P[\mu < x < \mu + \sigma] = P\left[0 < \frac{x-\mu}{\sigma} < 1\right] = P[z < 1] - P[z < 0] = \Phi(1) - \Phi(0)$$
$$\approx .3413$$

Para las C's se tiene:

$$P[\mu - \sigma < x < \mu] = P\left[-1 < \frac{x-\mu}{\sigma} < 0\right] = P[z < 0] - P[z < -1]$$
$$= \Phi(0) - \Phi(-1) \approx .3413$$

Para las D's se tiene:

$$P[\mu - 2\sigma < x < \mu - \sigma] = P\left[-2 < \frac{x-\mu}{\sigma} < -1\right] = P[z < -1] - P[z < -2]$$
$$= \Phi(-1) - \Phi(-2) \approx .1359$$

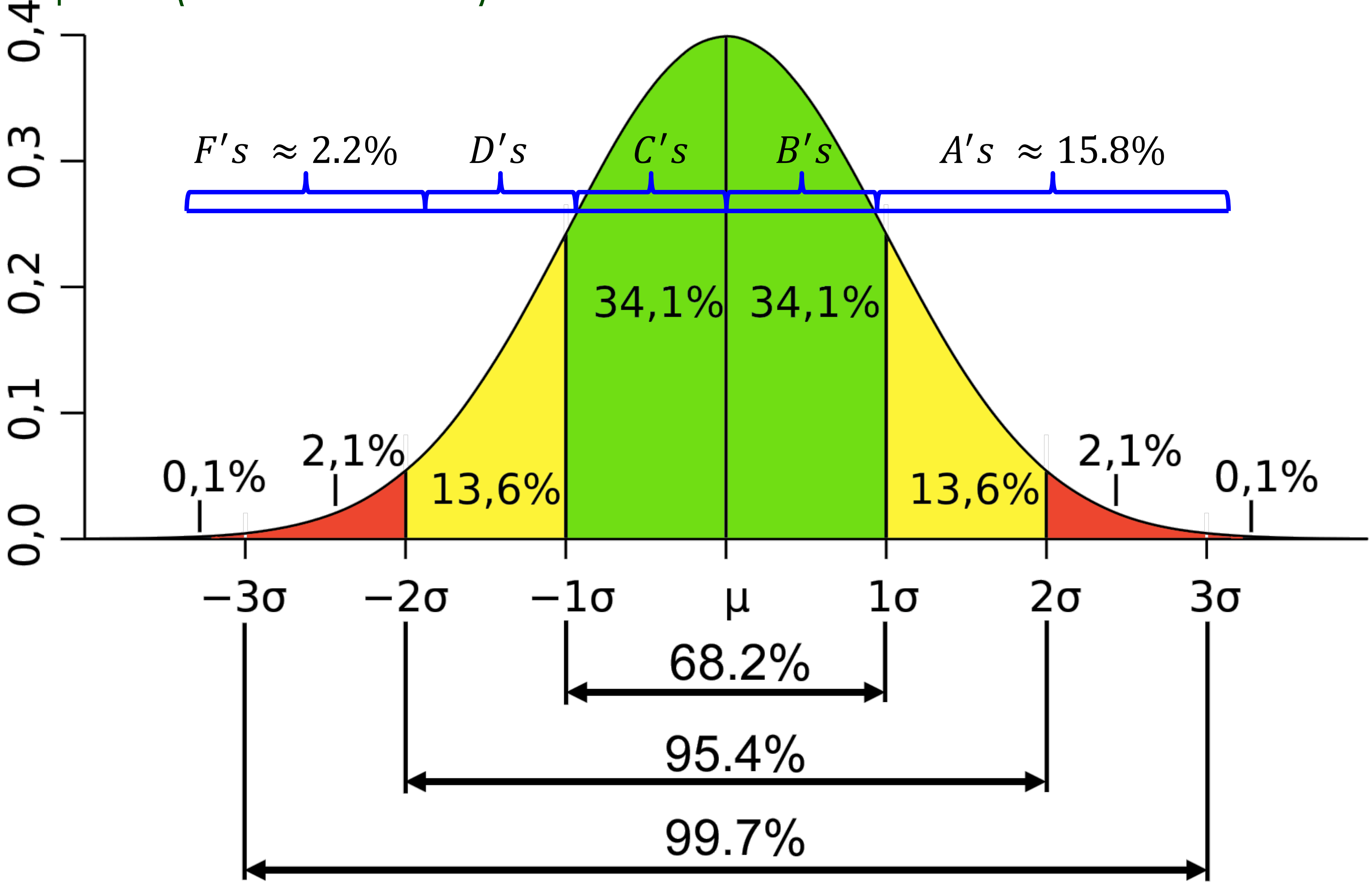
Ejemplo 10 (*Continuación*)

Para las F's se tiene:

$$P[x < \mu - 2\sigma] = P\left[\frac{x-\mu}{\sigma} < -2\right] = P[z < -2] = \Phi(-2) \approx .0228$$

Normal

Ejemplo 5 (*solución alterna*)



Ejemplo 11

Suponga que una compañía fabrica tornillos de una longitud específica, sin embargo, defectos del equipo de producción hacen que los tornillos sean ligeramente más grandes o pequeños. Suponga que esta variación (en milímetros) tiene una distribución Normal Estándar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la variación sea positiva?
b) Calcule la probabilidad de que la variación esté dentro del intervalo [-1,1] ¿Cómo se interpreta esta probabilidad?
c) ¿Qué valor debe tomar k (k>0) para asegurar que la variación esté dentro de intervalo [-k,k] el 95% de las veces?

Ejemplo 12

La estatura de los hombres adultos de la población A tiene una distribución con media 1.75 mts y desviación estándar de 5 cms. En la población B la estatura de los hombres adultos también sigue una distribución normal con media 1.75 mts pero con una desviación estándar de 10 cms.

a) Si se elige al azar un hombre adulto de cada población ¿cuál de ellos es más probable que supere una altura de 1.90 mts?
b) ¿Qué estatura mínima se puede establecer para describir a los hombres adultos de la población A y tener una certeza de 95%?

Ejemplo 13

El valor en riesgo (VaR) se convertido en una de las variables financieras de relevancia.

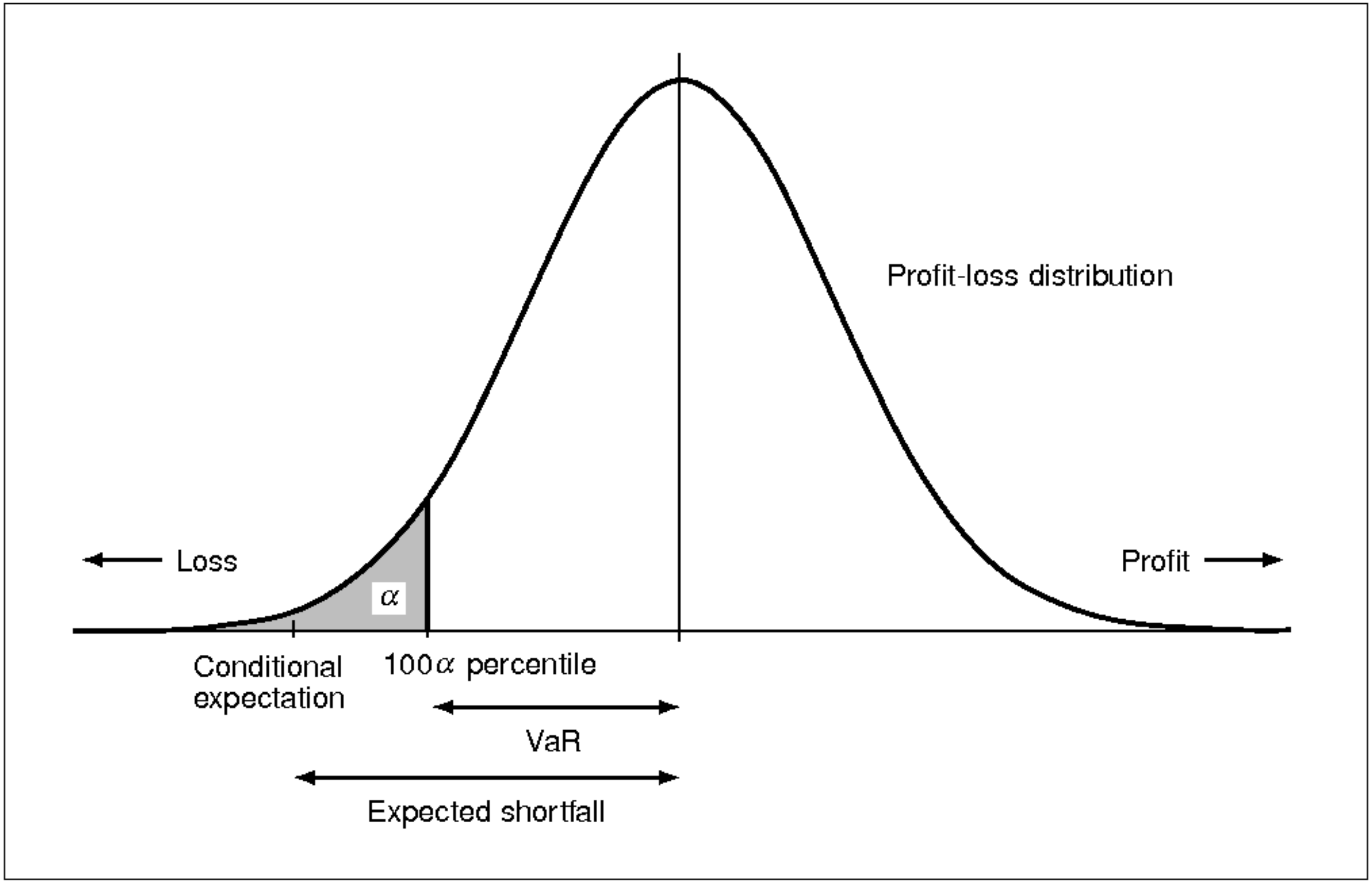
El VaR se define como el valor v tal que solo existe un $\alpha\%$ de que se presente una pérdida mayor a v en un escenario de tiempo.

Sea X, una v.a. Normal con media μ y varianza σ^2, que representa la ganancia de una inversión, entonces dado que la pérdida representa una ganancia negativa, el VaR de dicha inversión satisface:

$$\alpha\% = P[-X > v]$$

Normal

Figure 2 Profit-Loss Distribution, VaR, and Expected Shortfall



Ejemplo 13 (*Continuación*)

Considere que $\alpha\%=1\%$, tenemos:

$$0.01 = P[-X > v]$$

Estandarizando:

$$0.01 = P[X < -v] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{-v-\mu}{\sigma}\right] = P\left[< -\frac{v+\mu}{\sigma}\right] = 1 - \Phi\left(\frac{v+\mu}{\sigma}\right)$$

Dado que $\Phi(2.33)=.99$, se obtiene:

$$\frac{v+\mu}{\sigma} = 2.33 \rightarrow v = 2.33\sigma - \mu$$

De todos los conjuntos de inversiones cuyas ganancias se distribuyen de forma normal, la inversión que presenta el VaR más pequeño es aquella que tenga el mayor valor para μ-2.33σ

Aproximación Normal a la Distribución Binomial

Teorema de DeMoivre-Laplace

Sea S_n el número de éxitos que ocurren cuando se realizan n experimentos independientes, cada uno con probabilidad de éxito p, entonces para cualquier $a<b$.

$$P\left[a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right] \to \Phi(b) - \Phi(a)\ conforme\ n \to \infty$$

Es decir, el cálculo aproximado de probabilidades asociadas a una Distribución Binomial, se puede realizar mediante una Distribución Normal.

El Teorema de DeMoivre-Laplace es un caso particular del Teorema Central del Límite

Ejemplo 14

Sea X, la v.a. que denota el número de veces que se obtiene águila en un experimento donde se lanza una moneda 40 veces. Encuentre la probabilidad de que X=20.

Solución

Por medio de la distribución Binomial, sabemos:

$$P[X=20]=\binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\approx .1254$$

Utilizando la aproximación normal:

$$P[X=20]=P[19.5<x<20.5]$$
$$=P\left[\frac{19.5-20}{\sqrt{10}}<\frac{x-20}{\sqrt{10}}<\frac{20.5-20}{\sqrt{10}}\right]$$
$$=P[-0.16<z<0.16]=\Phi(.16)-\Phi(-.16)\approx .1272$$

Normal

Al aproximar una distribución discreta (vgr. Binomial) a través de una distribución continua (vgr. Normal) es posible mejorar la aproximación considerando un ajuste de corrección por continuidad llamado ajuste de Yate. Este ajuste consiste en sumar o restar 0.5 en los extremos del intervalo de la variable aleatoria discreta sobre el cual se desea calcular al probabilidad.

Ejercicio 15

En cierta localidad la mitad de las personas adultas está favor de un proyecto municipal y la otra mitad no. Si se toma una muestra de tamaño 100…

a) ¿cómo se distribuye el número de personas de la muestra que está a favor del proyecto? Indique sus supuestos

b) Aproxime la probabilidad de que 60 o más personas de la muestra estén a favor del proyecto.

Bibliografía

1. Wackerly, D.D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R.L. (2008), *Mathematical Statistics with Applications* 7th Edition, Duxbury, Thompson, Brooks/Cole.

2. Wackerly, D.D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R.L. (2010), *Estadística Matemática con aplicaciiones* 7ma Edición, CENGAGE Learning.

3. Pitman, J. (1993), *Probability*. Springer 6ª. Ed.

4. Ross, S. (1993), *A First Course in Probability*. Pearson 9th. Ed.

5. Canavos, G.C. (1987), *Probabilidad y Estadística*, McGraw Hill.

6. Mittelhammer (2013),*Mathematical Statistics for Economics and Business*, 2nd Ed. Springer.