Ejemplos de modelación matemática usando ecuaciones diferenciales de primer orden

Sistemas Dinámicos
Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Otoño de 2020

Ejemplos de EDO de primer orden

Ejemplo

Iniciando con una bien conocida relación que se da entre las funciones de oferta y demanda de un bien, nos proponemos describir el comportamiento del precio cuando avanza el tiempo.

Según una premisa fundamental de economía, el precio se ajusta de acuerdo a la ecuación

$$p'(t) = \alpha \left[D(p(t)) - S(p(t)) \right],$$

donde $\alpha > 0$ y $S(p)$ y $D(p)$ denotan a la función de oferta y demanda, respectivamente. O sea que

> *Si el exceso de demanda es positivo el precio aumenta, y si es negativo el precio disminuye.*

Ejemplos de EDO de primer orden

Suponiendo que las funciones de oferta y demanda cumplen

$$S(p) = m_1 p - b_1, \qquad D(p) = b_2 - m_2 p,$$

la ecuación que describe la variación del precio se convierte en

$$p'(t) = \alpha\left[(b_1 + b_2) - (m_1 + m_2)p(t)\right]$$

que podemos reescribir como

$$p'(t) + \alpha(m_1 + m_2)p(t) = \alpha(b_1 + b_2)$$

La solución toma la forma

$$p(t) = Ce^{-\alpha(m_1+m_2)t} + \frac{b_1 + b_2}{m_1 + m_2}$$

Ejemplos de EDO de primer orden

Ejemplo (Mezcla de soluciones o concentrados)

Se tiene un depósito con capacidad de 100 lt. de líquido, con un desagüe que funciona de manera que la cantidad que entra al depósito es la misma que la que sale por este desagüe. El depósito tiene un dispositivo que mantiene siempre una concentración uniforme de soluciones o concentrados en su interior.

- *Se hace entrar al depósito agua mezclada con 5 medidas de azúcar por litro, a razón de 2 litros por minuto.*
- *Por otro tubo se hace pasar agua con 10 medidas de azúcar por litro a razón de 1 litro por minuto.*
- *Se asume que el desagüe expulsa líquido a razón de 3 litros por minuto.*

Mezcla de soluciones o concentrados

En este caso conviene denotar por $S(t)$ la cantidad de medidas de azúcar en el depósito al tiempo t.

La idea fundamental es que **la razón de cambio de la cantidad de azúcar es la diferencia entre la cantidad de azúcar que entra y la cantidad de azúcar que sale**.

Además, esta razón de cambio se mide en "medidas de azúcar que fluyen por minuto (med/min)", que mide la concentración de azúcar.

$$\left[5\,\frac{med}{lt}\cdot 2\,\frac{lt}{min}\right] + \left[10\,\frac{med}{lt}\cdot 1\,\frac{lt}{min}\right] \qquad \text{razón de cambio de azúcar que entra}$$

$$\frac{S(t)}{100}\,\frac{med}{lt}\cdot 3\,\frac{lt}{min} \qquad \text{razón de cambio de azúcar que sale}$$

Mezcla de soluciones o concentrados

Poniendo la información junta obtenemos la ecuación separable

$$\frac{dS}{dt} = 20 - \frac{3S}{100} = \frac{2000 - 3S}{100}$$

que lleva a $|2000 - 3S| = e^{-0,03t+C} = ke^{-0,03t}$.

Para quitar el valor absoluto, podemos distinguir entre los casos $S < 2000/3$ y $S > 2000/3$, que dependerá de la condición inicial $S(t_0)$.

En cualquier caso se puede escribir la solución general como

$$S(t) = Ke^{-0,03t} + \frac{2000}{3}, \quad K \text{ una constante que puede ser negativa o positiva.}$$

Ejemplos de EDO de primer orden

Ejemplo (Valor de un bono conociendo su rendimiento instantáneo)

Recordando que un bono *es una promesa de pago a futuro, de la que conocemos el valor al final de un periodo* $[0, T]$*, denotemos por* $B(t)$ *el valor del bono al tiempo* $0 \leq t \leq T$.

Definamos el rendimiento *del bono en el periodo* $[t, s]$ *como*

$$\gamma(t,s) = \frac{1}{s-t}\left(\frac{B(s)-B(t)}{B(t)}\right), \text{ (tasa porcentual de cambio en el valor del bono en [t,s])}$$

y el rendimiento instantáneo *en* t *como*

$$r(t) = \lim_{s \to t} \gamma(t,s), \text{ (tasa porcentual de cambio instantáneo en el valor del bono al tiempo t).}$$

Determinar el valor del bono para $t \in [0, T]$.

Valor de un bono

Para resolver este problema basta trabajar un poco la definición de $r(t)$ para así obtener

$$r(t) = \lim_{s \to t} \frac{1}{B(t)} \left(\frac{B(s) - B(t)}{s - t} \right) = \frac{\dot{B}(t)}{B(t)}.$$

Lo cual nos lleva a la ecuación $\dot{B} - r(t)B = 0$ con una condición final dada por el valor estipulado para el bono $B(T) = B_T$.

En este caso será conveniente al hacer la integración con límites explícitos:

$$\int_t^T \frac{\dot{B}(s)}{B(s)}\, ds = \int_t^T r(s)\, ds$$

y recordar que $\dfrac{\dot{B}(s)}{B(s)} = \dfrac{d}{ds}\left[\ln(B(s))\right]$.

Valor de un bono

Por el Teorema Fundamental del Cálculo obtendremos:

$$\ln(B_T) - \ln(B(t)) = \ln\left(\frac{B_T}{B(t)}\right) = \int_t^T r(s)\,ds$$

De donde

$$B(t) = B_T\left(\exp\left(\int_T^t r(s)\,ds\right)\right) \equiv B_T\beta(t).$$

La función $\beta(t)$ es el llamado **descuento** del bono, y si $r(t) = r_0$ es constante se obtiene la conocida fórmula de una inversión capitalizada en tiempo continuo:

$$B(t) = B_T e^{-r_0(T-t)}$$

Ejemplos de EDO de primer orden

Ejemplo (Valor de un bono admitiendo depósitos y retiros)

Considérese que en el modelo anterior se admite que el valor $Y(t)$ de la inversión en bonos cambie en el tiempo. Digamos para simplificar que $Y(t) = Z(t) \cdot B(t)$, donde $Z(t)$ representa la cantidad de bonos que se tienen en la inversión.

En este caso, aplicamos la regla del producto de una derivada para obtener

$$\dot{Y}(t) = Z(t)\dot{B}(t) + \dot{Z}(t)B(t) = r(t)Z(t)B(t) + \delta(t)B(t).$$

donde $\delta(t) = \dot{Z}(t)$ es la función que representa los depósitos o retiros (cambio marginal de $Z(t)$).

Reordenando obtenemos

$$\dot{Y}(t) - r(t)Y(t) = \delta(t)B(t) \quad \text{con condición final } Y(T) = Y_T.$$

Valor de un bono...

Luego de llegar a la ecuación

$$\dot{Y}(t) - r(t)Y(t) = \delta(t)B(t) \quad \text{con condición final } Y(T) = Y_T.$$

Ahora podemos resolver este problema usando un factor integrante. Debemos aclarar que conservaremos la función que describe el valor del bono, por lo que al usar el factor integrante

$$\mu(t) = \exp\left(\int_t^T r(s)\,ds\right) = \exp\left(-\int_T^t r(s)\,ds\right) = \frac{B_T}{B(t)} \dots$$

Valor de un bono...

...obtendremos:

$$\left(\frac{B_T}{B(t)}Y\right)' = \delta(t)B_T$$

que al integrar nos lleva a

$$\frac{B_T}{B(t)}Y(t) - Y_T = \left[\int_T^t \delta(s)B_T\, ds\right]$$

(obsérvese que este cálculo ya ha incorporado la evaluación de la condición $Y(T) = Y_T$). En conclusión:

$$Y(t) = \frac{B(t)}{B_T}\left[\int_T^t \delta(s)B_T\, ds + Y_T\right]$$

$$= B(t)\left[\int_T^t \delta(s)\, ds + \frac{Y_T}{B_T}\right]$$