$\mathcal{L}(\theta;\underline{x})$ $\quad \hat{\theta}$

$\ell(\theta;\underline{x})$

$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{MV}$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\hat{\mu} = \bar{x}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum (X_i - \bar{X})^2$

Propiedad de invarianza

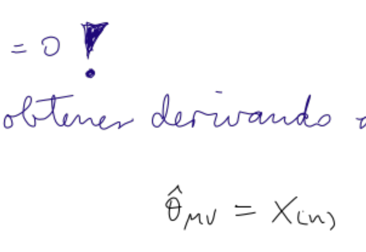
$\theta \quad \hat{\theta}$

$g(\theta) \quad g(\hat{\theta})$

Ejemplo

$X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} U(0,\theta)$. Calcular el EMV de θ.

$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x)$



$\mathcal{L}(\theta;\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \boxed{I_{(0,\theta)}(x_i)}$

$= \boxed{\frac{1}{\theta^n}} I_{(x_{(n)},\infty)}(\theta)$

$\boxed{0 < x < \theta}$

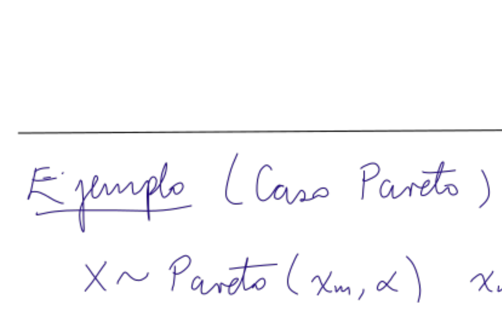
Y para una muestra

$0 < x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq \boxed{x_{(n)} < \theta <} \infty$

$\ell(\theta;\underline{x}) = -n\log(\theta)$

$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} \equiv 0 \iff n = 0$!

El EMV ~~no~~ no se puede obtener derivando $\mathcal{L}$ o ℓ



$\hat{\theta}_{MV} = X_{(n)}$

$\mathcal{L}(\theta;\underline{x})$ crece si $\frac{1}{\theta^n}$ crece

$\iff \mathcal{L}(\theta;\underline{x})$ crece θ^n decrece

$\iff \mathcal{L}(\theta;\underline{x})$ crece θ decrece

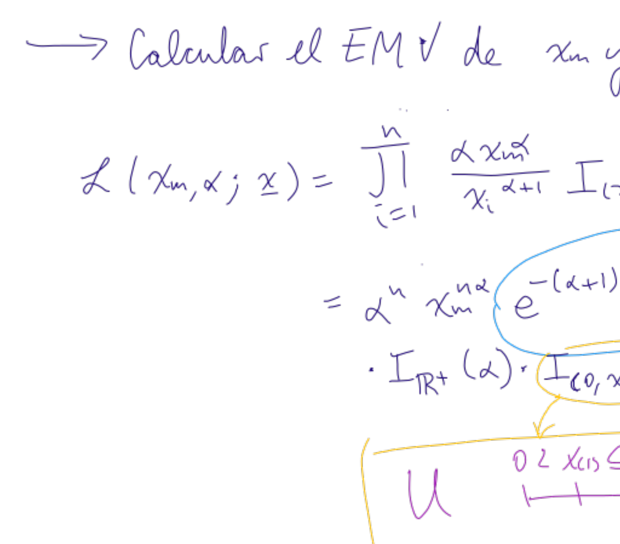
Pero θ no puede estar por debajo de ninguno de los elementos de la muestra

$\therefore \hat{\theta}_{MV} = X_{(n)}$

Ejemplo (Caso Pareto)

$X \sim \text{Pareto}(x_m, \alpha)$ $\quad x_m > 0, \alpha > 0$ y $x_m < x < \infty$

$f_X(x; x_m, \alpha) = \frac{\alpha x_m^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} I_{(x_m,\infty)}(x)$



$E[X] = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \frac{\alpha x_m}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$

$V(X) = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha \leq 2 \\ \frac{\alpha x_m^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} & \text{si } \alpha > 2 \end{cases}$

$X \sim Pa(x_m, \alpha) \Rightarrow Y = \log\left(\frac{X}{x_m}\right) \sim Exp(\alpha)$

$\longrightarrow$ Calcular el EMV de x_m y α.

$\mathcal{L}(x_m, \alpha; \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha x_m^{\alpha}}{x_i^{\alpha+1}} I_{(x_m,\infty)}(x_i)$

$= \alpha^n x_m^{n\alpha} e^{-(\alpha+1)\sum \log(x_i)} \cdot I_{\mathbb{R}^+}(\alpha) \cdot I_{(0, x_{(1)})}(x_m)$

$\prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\alpha+1)} = e^{\log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\alpha+1)}\right)}$

$= e^{\sum \log(x_i^{-(\alpha+1)})}$

$= e^{-(\alpha+1)\sum \log(x_i)}$

U $\quad 0 < x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq \boxed{x_{(n)} < \theta}$

P $\quad 0 < \boxed{x_m < x_{(1)}} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)} \leq$

$\ell(x_m, \alpha; \underline{x}) = n\log(\alpha) + n\alpha\log(x_m) - (\alpha+1)\sum \log(x_i)$

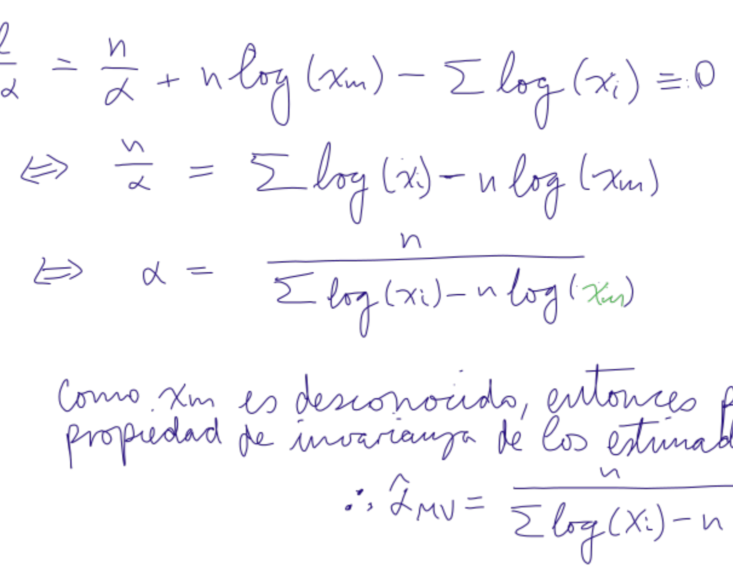
Caso para x_m:

$\frac{\partial \ell}{\partial x_m} = \frac{n\alpha}{x_m} \equiv 0 \iff n\alpha = 0 \iff n = 0$!

(No es posible obtener el EMV de x_m derivando)

Recordemos que $0 < x_m \leq x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$

$\mathcal{L}(x_m; \alpha, \underline{x}) = \underbrace{\alpha^n e^{-(\alpha+1)\sum \log(\sum x_i)}}_{\text{constante respecto a } x_m} x_m^{n\alpha} = c\, x_m^{n\alpha}$



$\therefore \hat{x}_m = X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$

Caso para α:

$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n\log(x_m) - \sum \log(x_i) \equiv 0$

$\iff \frac{n}{\alpha} = \sum \log(x_i) - n\log(x_m)$

$\iff \alpha = \frac{n}{\sum \log(x_i) - n\log(x_m)}$

Como x_m es desconocido, entonces por la propiedad de invarianza de los estimadores,

$\therefore \hat{\alpha}_{MV} = \frac{n}{\sum \log(X_i) - n\log(x_{(1)})}$

Ejemplo (Caso "pequeño")

Sea X una v.a. tal que para $\theta \in [0,1]$

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{2\theta}{3}$	$\frac{\theta}{3}$	$\frac{2(1-\theta)}{3}$	$\frac{1-\theta}{3}$

Encontrar el EMV de θ.

$\mathcal{L}(\theta;\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i)$

$= P(X=0)P(X=1)P(X=2)P(X=3)$

$= \frac{2\theta}{3} \cdot \frac{\theta}{3} \cdot \frac{2(1-\theta)}{3} \cdot \frac{1-\theta}{3}$

$= \frac{4\theta^2(1-\theta)^2}{81}$

$\ell(\theta;\underline{x}) = \log(4) + 2\log(\theta) + 2\log(1-\theta) - \log(81)$

$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{2}{\theta} + \frac{2}{1-\theta}(-1) = \frac{2}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} \equiv 0$

$\iff \frac{2}{\theta} = \frac{2}{1-\theta} \iff \frac{\theta}{2} = \frac{1-\theta}{2}$

$\iff 1 - \theta = \theta \iff 2\theta = 1 \iff \theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{2} + 0X_1 + 0X_2 + \cdots + 0X_n$

$= \frac{1}{2}$

Propiedades de los estimadores

Hemos visto hasta ahora una técnica para obtener estimadores. Sin embargo, éste no es el único objetivo. también queremos validar que tan "buenos" son.

Recordemos que un estimador es una función de la muestra, por lo que, antes de que ésta sea observada, $\hat{\theta} = h(\underline{X})$ es una v.a. Por esto es razonable pensar en $E[\hat{\theta}]$ y $V(\theta)$

Propiedad 1: sesgo

Def Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. con f.d.p. $f_X(x;\theta)$ donde θ es el parámetro de interés y $\hat{\theta} = h(X_1, \ldots, X_n)$ un estimador de θ (¡no tiene que ser el EMV de θ!). Definimos el sesgo o error de estimación promedio de $\hat{\theta}$ como

$\text{Bias}(\hat{\theta}) = B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$

Comentarios:

- $B(\hat{\theta}) = 0 \iff E[\hat{\theta}] = \theta$
- Si se cumple que $B(\hat{\theta}) = 0$, decimos que $\hat{\theta}$ es insesgado

Propiedad DESEABLE pero no suficiente

Ejemplo $\hat{\sigma}^2_{MV} = \frac{1}{n}\sum (X_i - \bar{X})^2$ $\longleftarrow$ sesgado

vs

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \bar{X})^2$ $\longleftarrow$ insesgado

Vamos a demostrar que s^2 es insesgado, es decir $E[s^2] = \sigma^2$

$\longrightarrow E[(n-1)s^2] = E\left[\sum (X_i - \bar{X})^2\right]$

$= E\left[\sum (X_i^2 - 2\bar{X}X_i + \bar{X}^2)\right]$

$= E\left[\sum X_i^2 - \sum 2\bar{X}X_i + \sum \bar{X}^2\right]$

$= E\left[\sum X_i^2 - 2\bar{X}\sum X_i + n\bar{X}^2\right]$

$= E\left[\sum X_i^2 - 2\bar{X}(n\bar{X}) + n\bar{X}^2\right]$

$= E\left[\sum X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2\right]$

$= E\left[\sum X_i^2 - n\bar{X}^2\right]$

$= \sum E[X_i^2] - nE[\bar{X}^2] = (*)$

Recordemos que si $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$E[X_i^2] = V(X_i) + E^2[X_i] = \sigma^2 + \mu^2$

y si $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, entonces

$E[\bar{X}^2] = V(\bar{X}) + E^2[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$

$\Rightarrow (*) = \sum(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)$

$= n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2$

$= n\sigma^2 - \sigma^2$

$= (n-1)\sigma^2$

$\therefore E[(n-1)s^2] = (n-1)\sigma^2$

$\iff \cancel{(n-1)} E[s^2] = \cancel{(n-1)}\sigma^2$

$E[s^2] = \sigma^2$

$\therefore s^2$ es insesgado

$E[n\hat{\sigma}^2_{MV}] = (n-1)\sigma^2$

$E[\hat{\sigma}^2_{MV}] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$

$\therefore \hat{\sigma}^2_{MV}$ tiene sesgo