Sucesiones y convergencia - Definiciones y ejemplos básicos

Análisis Matemático 1
Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Primavera de 2020

Sucesiones en $\mathbb{R}^p$

Una sucesión en $\mathbb{R}^p$ es una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}^p$. Escribimos (x_n) para denotar a dicha función. También podemos escribir $X = (x_n)$ para abreviar algo la notación. El rango de la función se denota por $\{x_n\}$.

- Podemos escribir $x_n = 2n$ para denotar a la sucesión con rango $\{2, 4, 6, \dots\}$
- Similarmente $x_n = (-1)^n$ es la sucesión cuyo rango es $\{-1, 1\}$.
- La suma de las sucesiones $X = (x_n)$ y $Y = (y_n)$ se define como $X + Y = (x_n + y_n)$ y la resta es $X - Y = (x_n - y_n)$
- El producto interior de dos sucesiones en $\mathbb{R}^p$ es la sucesión en $\mathbb{R}$ dada por $X \cdot Y = (x_n \cdot y_n)$
- Dadas $A = (a_n)$ sucesión en $\mathbb{R}$ y $X = (x_n)$ sucesión en $\mathbb{R}^p$ se define la sucesión producto $AX = (a_n x_n)$
- El producto de la sucesión $X = (x_n)$ por el escalar $K \in \mathbb{R}$ se define como la sucesión $KX = (Kx_n)$

Convergencia de sucesiones

Una sucesión $X = (x_n)$ en $\mathbb{R}^p$ converge a $x \in \mathbb{R}^p$ si para toda vecindad V de x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica $x_n \in V$.

En este caso se dice que x es límite de la sucesión (x_n) y se escribe

$$x = \lim x_n = \lim_{n\to\infty} x_n, \qquad x_n \to x$$

Iniciemos observando que cuando una sucesión es convergente, el límite es único.

Supongamos que x y x' son límites de la sucesión (x_n), y tomemos $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} \|x_j - x\| &< \epsilon/2 \qquad \text{si } j > N_1 \\ \|x_k - x'\| &< \epsilon/2 \qquad \text{si } k > N_2 \end{aligned}$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$ y $n > N$ se tendrá

$$0 \le \|x - x'\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x'\| < \epsilon \qquad \text{y por tanto } x = x'.$$

Propiedades de sucesiones convergentes

Se dice que una sucesión (x_n) es acotada si existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

- Una sucesión convergente es acotada.

Suponiendo que $x_n \to x$, si $\epsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica $\|x_n - x\| < 1$

Así, si $n > N$ se tiene $\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| < 1 + \|x\|$.

Eleigiendo $M = \max\left\{\|x_1\|, \ldots, \|x_N\|, 1 + \|x\|\right\}$ se tendrá $\|x_n\| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Para cada término de la sucesión (x_n) en $\mathbb{R}^p$ denotamos a sus coordenadas como $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{pn})$.

- $x_n \to x$ si y sólo si $(x_{1n}) \to x_1, \ldots, (x_{pn}) \to x_p$

Una dirección es fácil: $|x_{jn} - x_j| \leq \|x_n - x\| < \epsilon$

La otra también: $\|x_n - x\|^2 = \sum_{j=1}^{p} |x_{jn} - x_j|^2$, basta tomar $|x_{jn} - x_j| < \epsilon/\sqrt{p}$.

Ejemplos

- $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ Aquí podemos usar la propiedad Arquimediana...

  Dada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$, o sea que si $n > N$ entonces $|1/n - 0| = 1/n \leq 1/N < \epsilon$.

- Si (x_n) es una sucesión en $\mathbb{R}^p$ y se tienen $x \in \mathbb{R}^p$, $c > 0$, y una sucesión de números positivos (a_n) cumpliendo $a_n \to 0$, y tales que

  $$\|x_n - x\| \leq Ca_n \qquad \text{para n suficientemente grande}$$

  entonces $x_n \to x$.

  Si $\epsilon > 0$ es dada, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para $m > M$ se tiene $a_m = |a_m - 0| < \epsilon/C$.

  Por tanto

  $$\|x_m - x\| \leq Ca_m < \epsilon$$

Ejemplos

- $\lim \dfrac{1}{1+na} = 0, \quad a > 0$

$$\left|\frac{1}{1+na} - 0\right| = \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na} = \frac{1}{a}\frac{1}{n}$$

- Si $0 < b < 1$ entonces $\lim b^n = 0$

  Escribimos $b = \dfrac{1}{1+a}$ para cierta $a > 0$. Recordamos ahora la desigualdad de Bernoulli: $(1+a)^n \geq 1 + na$. Entonces

$$|b^n - 0| = b^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} < \frac{1}{a}\frac{1}{n}$$

Ejemplos

- Si $c > 0$ entonces $\lim c^{1/n} = 1$

  Separamos la prueba en dos casos

  - Si $c > 1$, escribimos $c^{1/n} = 1 + d_n$ para ciertos números $d_n > 0$

    Por desigualdad de Bernoulli $c = (1 + d_n)^n \geq 1 + nd_n$ y por tanto $d_n \leq \dfrac{c-1}{n}$.
    En conclusión:
    $$\left|c^{1/n} - 1\right| = c^{1/n} - 1 = d_n \leq \frac{c-1}{n}$$

  - Si $0 < c < 1$ escribimos $c^{1/n} = \dfrac{1}{1 + h_n}$ para ciertos números $h_n > 0$. Por la desigualdad de Bernoulli:
    $$c = \frac{1}{(1 + h_n)^n} \leq \frac{1}{1 + nh_n} < \frac{1}{nh_n}$$

    De aquí que $0 < h_n < \dfrac{1}{nc}$, y por tanto
    $$\left|1 - c^{1/n}\right| = 1 - c^{1/n} = \frac{h_n}{1 + h_n} < h_n < \frac{1}{nc}$$

Ejemplos

- $\lim n^{1/n} = 1$.

  En esta ocasión se escribe $n^{1/n} = 1 + k_n$ para cierta $k_n > 0$. Por el teorema del binomio

  $$n = (1 + k_n)^n = 1 + nk_n + \frac{n(n-1)}{2}k_n^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}k_n^2$$

  De aquí que $k_n^2 < \dfrac{2}{n-1}$. Entonces

  $$0 < n^{1/n} - 1 = k_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \epsilon$$

  siempre que $\dfrac{1}{n-1} < \dfrac{\epsilon^2}{2}$