Conjuntos conexos

Análisis Matemático 1
Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Primavera de 2020

Conjuntos disconexos y conexos

Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^p$ es disconexo si existen dos conjuntos abiertos no vacíos $A, B \subset \mathbb{R}^p$ tales que

$$(A \cap D) \cap (B \cap D) = \emptyset, \qquad (A \cap D) \cup (B \cap D) = D.$$

En este caso se dice que (A, B) es una disconexión de D.

Si un conjunto no es disconexo se dice que es conexo

- $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son disconexos en $\mathbb{R}$.
- Unión disjunta de abiertos es disconexo en $\mathbb{R}^p$ (ver figura en p. 81 de [Bartle])
- El complemento de cualquier bola agujerada es disconexo en $\mathbb{R}^p$.
- $A = \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ es disconexo en $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q}$ es disconexo en $\mathbb{R}$.

Ejemplos de conjuntos conexos

- Un abierto de $\mathbb{R}^p$ es conexo si y sólo si no puede expresarse como unión de dos abiertos disjuntos no vacíos (pensar en las afirmaciones transpuestas).

Teorema

(i) *El intervalo cerrado* $[0,1]$ *es conexo en* $\mathbb{R}$.

(ii) $\mathbb{R}^p$ *es conexo.*

Asumiendo (i) demostraremos (ii). Si $\mathbb{R}^p$ no fuera conexo, podemos hallar (A,B) una disconexión de $\mathbb{R}^p$. Sean $x \in A$, $y \in B$.

Consideremos el segmento S de línea que une a estos puntos:

$$S = \left\{x + t(y-x) : t \in [0,1]\right\}$$

Ejemplos de conjuntos conexos

Proponemos ahora

$$A_1 := \{t \in \mathbb{R} : x + t(y-x) \in A\}, \qquad B_1 := \{t \in \mathbb{R} : x + t(y-x) \in B\}$$

Tenemos que $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ cumplen $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, pues si existiera $s \in A_1 \cap B_1$ entonces $x + s(y-x) \in A \cap B$, lo cual contradice que $A \cap B = \emptyset$.

Se plantea de ejercicio probar que de hecho (A_1, B_1) es una disconexión de $[0,1]$, lo cual contradice (i).

Ahora demostraremos (i) argumentando por contradicción.

Sea (A, B) una disconexión de $I = [0,1]$. Entonces $A \cap I$ y $B \cap I$ contienen muchos puntos, pues de hecho $(A \cap I) \cup (B \cap I) = I$, que es no numerable.

Supongamos que existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $0 < a < b < 1$. Nótese que $\mathcal{C} = A \cap (0, b)$ es no vacío y acotado superiormente, por lo que el supremo $c = \sup \mathcal{C}$ existe.

Ejemplos de conjuntos conexos

Notemos ahora que $0 < c < 1$ por lo que $c \in A \cup B$, pues $(A \cap I) \cup (B \cap I) = I$.

- Si ocurriera que $c \in A$ entonces c no podría ser $c = b$, y como A es abierto existe $a_1 \in A$ tal que $c < a_1$, de manera que el intervalo $[c, a_1] \subset \mathcal{C}$ y c no sería el supremos de $\mathcal{C}$.
- Similarmente, si ocurriera que $c \in B$ se podría hallar $b_1 \in B$ cumpliendo $b_1 < c$ y $[b_1, c] \subset B \cap I$. Pero esto contraviene la definición de $c = \sup \mathcal{C}$.

En cualquier caso por la contradicción concluimos que $A \cap I$ y $B \cap I$ son disjuntos. Entonces (A, B) no puede ser una disconexión de I. ■

Una importante consecuencia:

Los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}^p$ que son simultáneamente abiertos y cerrados son el conjunto vacío $\emptyset$ y el total $\mathbb{R}^p$.

En efecto, si $A \subset \mathbb{R}^p$ es abierto y cerrado de $\mathbb{R}^p$ entonces también $B = \mathbb{R}^p \setminus A$ lo es. Si se cumpliera $A \neq \emptyset$ y $A \neq \mathbb{R}^p$ entonces (A, B) sería una disconexión de $\mathbb{R}^p$.

Conjuntos conexos de $\mathbb{R}$

Teorema

Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo

Que un intervalo es un conjunto conexo, puede obtenerse como en una de los ejemplos anteriores.

Supongamos que $C \subset \mathbb{R}$ es conexo, $C \neq \emptyset$.

Demostraremos que si $a, b \in C$ cumplen $a < b$ entonces $(a, b) \subseteq C$, lo cual es suficiente para probar que C es un intervalo.

Supóngase que se tiene $a < x < b$ pero $x \notin C$. Entonces se tendría una disconexión (A, B) de G dada por

$$A = (-\infty, x), \qquad B = (x, \infty)$$

Conjuntos conexos por poligonales

Dados $x, y \in \mathbb{R}^p$, una curva poligonal que une a x con y es una unión finita numerada de segmentos de línea $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ en $\mathbb{R}^p$ tales que $L_i = \overline{z_i z_{i+1}}$ para ciertos $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1} \in \mathbb{R}^p$ que además cumplen $z_1 = x, \quad z_{n+1} = y$.

Un conjunto $H \subseteq \mathbb{R}^p$ es conexo por poligonales si para cualquier par $x, y \in H$ existe una curva poligonal que une a x con y

Teorema

Un conjunto $G \subseteq \mathbb{R}^p$ abierto es conexo si y sólo si es conexo por poligonales.

Si $G \subseteq \mathbb{R}^p$ es abierto y conexo por poligonales entonces es conexo.

$(\Leftarrow)$ Argumentando por contradicción, supóngase que (A, B) es una disconexión de G. Sean $x \in A \cap G$ y $y \in B \cap G$ y considérese la poligonal $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ que une a x con y.

Elegimos k mínima con la propiedad de que $z_{k-1} \in A \cap G$ pero $z_k \in B \cap G$.

Entonces, como en argumentos anteriores, concluimos que

$$\mathcal{A} = \{t \in \mathbb{R} : z_{k-1} + t(z_k - z_{k-1}) \in A \cap G\}$$
$$\mathcal{B} = \{t \in \mathbb{R} : z_{k-1} + t(z_k - z_{k-1}) \in B \cap G\}$$

formaría una disconexión del intervalo $[0, 1]$.

Si $G \subseteq \mathbb{R}^p$ es abierto y conexo entonces es arco-conexo.

$(\Rightarrow)$ Dado $x \in G$ definimos $G_2 := G \setminus G_1$ y

$$G_1 := \left\{ y \in G : x \text{ puede unirse a } y \text{ con una poligonal contenida en } G \right\}$$

Para abreviar escribiremos $x \rightsquigarrow y$, para denotar a esta relación de equivalencia.

Nótese que $G_1 \neq \emptyset$ pues $x \in G_1$, y $G_1 \cap G_2 = \emptyset$

Además G_1 es abierto:
Si $y \in G_1 \subseteq G$ existe $r > 0$ tal que $B_r(y) \subseteq G$. Además $y \rightsquigarrow x$ y $y \rightsquigarrow w$ para toda $w \in B_r(y)$ (con un solo segmento lineal).

En conclusión $x \rightsquigarrow w$ para toda $w \in B_r(y)$, es decir que $B_r(y) \subset G_1$.

Nótese que un argumento similar probaría que G_2 es abierto. Pero si $G_2 \neq \emptyset$, entonces (G_1, G_2) sería una disconexión de G.

La única posibilidad es entonces que $G_2 = \emptyset$. ∎