EJEMPLOS DE METODOS CUALITATIVOS

Se consideran ecuaciones de la forma

$$y' = f(y) \quad \text{o bien} \quad \dot{x} = f(x)$$

asociadas naturalmente a sistemas dinámicos autónomos

La idea de la "línea fase" o "plano fase 1-dimensional" es graficar a f y de allí deducir intervalos donde la solución crece, decrece o permanece fija

Un punto x^* que cumple $f(x^*) = 0$ se llama <u>punto estacionario</u> o <u>punto de equilibrio</u> del sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$

Si $\lim_{t \to \infty} x(t) = x^*$ para una solución $x(t)$ con dato inicial x_0 cerca de x^*, se dice que el punto estacionario x^* es <u>estable</u>

De no ser así, se dice que es <u>inestable</u>

Podemos ahora exhibir ejemplos de esta técnica auxiliados de un importante teorema

Teorema

Considérese el sistema dinámico autónomo $\dot{x} = f(x)$ con f de clase C^1. Sea x^* punto estacionario del sistema, tal que $f'(x^*) \neq 0$. Entonces

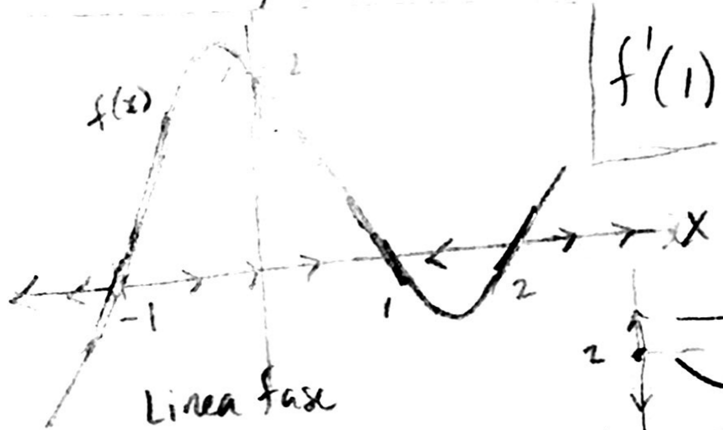
$$x^* \text{ es estable} \iff f'(x^*) < 0$$

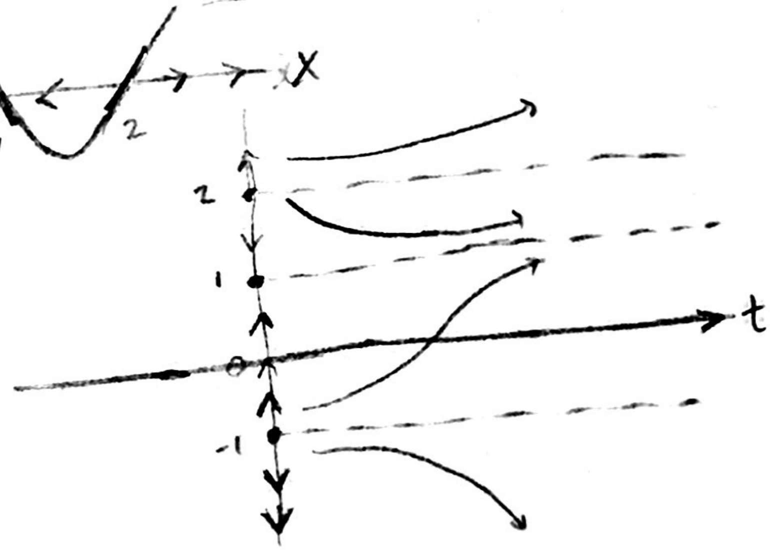
Ejemplos

① $\dot{x} = x^3 - 2x^2 - x + 2$, $f(x) = 0 \iff x = -1, x = 1, x = 2$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1 : \quad f'(-1) = 3 + 4 - 1 > 0$$

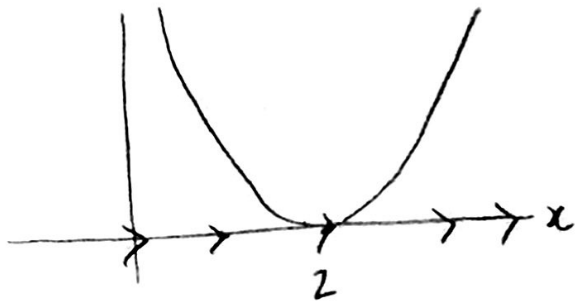
$$f'(1) = 3 - 4 - 1 < 0 \;, \quad f'(2) = 12 - 8 - 1 > 0$$



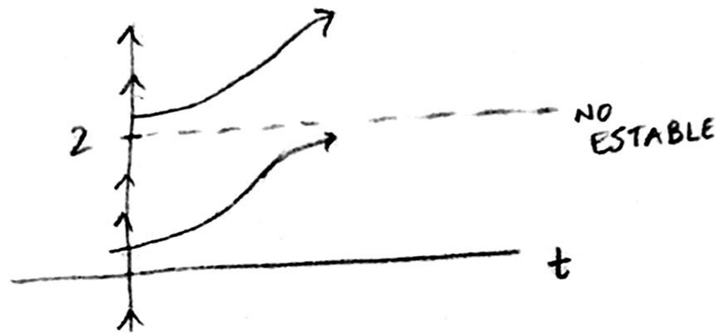


② Este ejemplo mostrará que si $f'(x^*) = 0$ en un punto estacionario, nada se puede concluir con toda certeza $\quad \dot{x} = (x-2)^2$

En este caso se tiene la línea fase :



y el esquema de soluciones



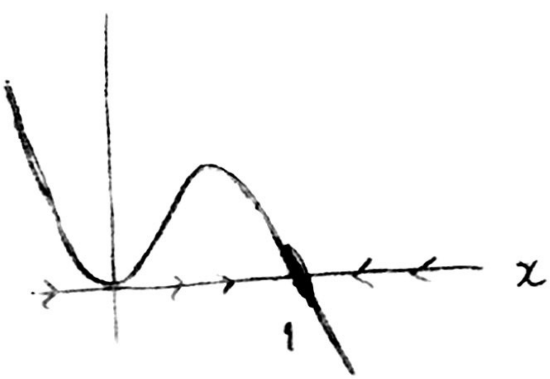
$$f'(x) = 2(x-2)$$

3

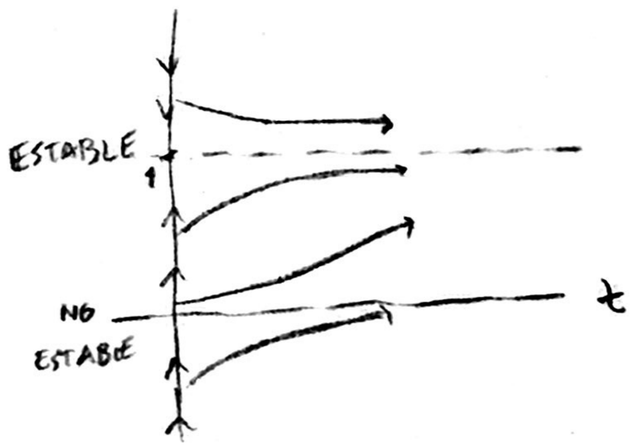
$$\dot{x} = x^2(1-x)$$

Puntos estacionarios : $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$

$f'(x) = 2x - 3x^2$, $f'(x_1^*) = 0$, $f'(x_2^*) = 2-6 < 0$



Línea fase



En los últimos ejemplos hay un punto estacionario donde $f'(x^*)=0$ y el punto no es estable

4 $\dot{x} = x^3(x-1)$

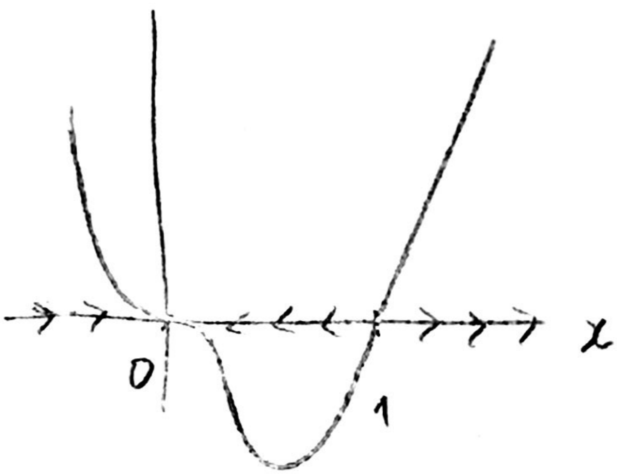
$f(x) = x^3(x-1) = 0$

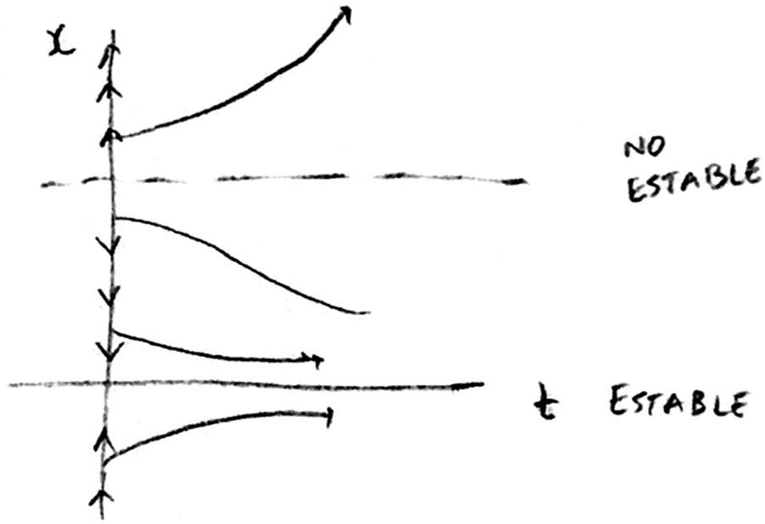
$\iff x = 0 \;,\; x = 1$

$x_1^* = 0 \quad x_2^* = 1$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$

$f'(x_1^*) = 0 \;,\; f'(x_2^*) = 4 - 3 > 0$





En este caso $x_2^* = 1$ no es estable y $f'(x_2^*) = 0$

De los ejemplos 3 y 4 concluimos que si $f'(x^*) = 0$ entonces no tenemos certeza del tipo de punto $\left(\begin{matrix}\text{estable}\\ \text{no estable}\end{matrix}\right)$ se tiene

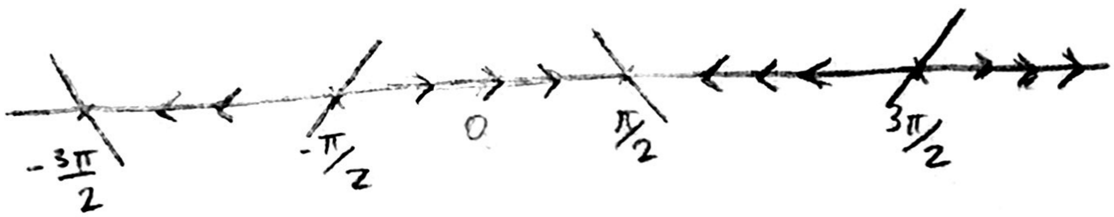
Coloquialmente hablando se puede hablar de puntos atractores y repulsores

5 $y' = (y^4+16)\cos y$, $f(y)=0 \iff \cos y = 0$

Puntos estacionarios : $y_j^* = \frac{\pi}{2} + j\pi = \frac{2\pi j + \pi}{2} = \frac{(2j+1)\pi}{2}$

$j \in \mathbb{Z}$

Ahora sólo veremos en la línea fase las flechas y una línea que representa si $f'(x^*)>0$ o $f'(x^*)<0$



$$f'(y) = \underbrace{(y^4+16)}_{\text{siempre}>0}(-\operatorname{sen} y) + \underbrace{\cos y\,(4y^3)}_{\text{Vale 0 en } y_j^*\ \forall j\in\mathbb{Z}}$$

$f'(y_0^*) < 0$ pues $(-\operatorname{sen} y_0^*) < 0$

$f'(y_{-1}^*) > 0$ pues $(-\operatorname{sen} y_{-1}^*) > 0$

$f'(y_1^*) > 0$ pues $(-\operatorname{sen} y_1^*) > 0$

$f'(y_{-2}^*) < 0$ pues $(-\operatorname{sen} y_1^*) < 0$

En este caso el diagrama de soluciones debe mostrar puntos estacionarios que alternan entre estables y no estables