ESPACIOS MÉTRICOS

Un espacio métrico es una pareja (M,d), con $M \neq 0$ es dado y $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una métrica

OBS: $(M,d) = (M', d') \Longleftrightarrow M = M' \wedge d = d'$

Puede ser mismo M, pero si $d \neq d'$ es distinto espacio métrico.

Def: Bola Abierta

Sea (M,d) espacio métrico y sea $x_0 \in M$, $r > 0$, fijos definimos la bola abierta relativa a d, con centro en x_0 y radio r, denotada $B_r^d(x_0)$ y definida como sigue:

$$B_r^d(x_0) := \{ \overline{x} \in M : d(x, x_0) < r \}$$

Def: Punto Interior

$x \in E$ se llama punto interior de E, relativo a d, si $\exists\, r > 0$ tq $B^d_r(x) \subseteq E$

Def: Interior

Sea $E \subseteq M$, no vacío, se denota el interior de E, denotado E°, como

$$E^\circ := \{ x \in E : x \text{ es punto interior de } E, \text{ rel } d \}$$

Def: Conjunto Abierto

Sea (M, d) espacio métrico y sea $A \subseteq M$, no vacío, se dice que A es abierto si:

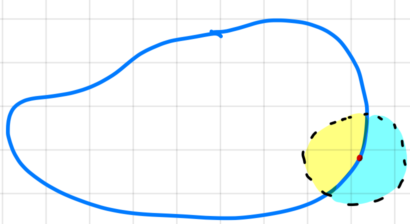
$$\forall x_0 \in A,\ \exists r_0 = r(x_0) > 0 \text{ talque } B^d_{r_0}(x_0) \subseteq A$$

Si todo punto de A, es punto interior

$A = A^\circ$

Def: Punto Frontera

$x \in M$ se llama punto frontera de E, rel a d, si $\forall r > 0$ $B^d_r(x) \cap E \neq \emptyset$ y $B^d_r(x) \cap E^c \neq \emptyset$



Def: Frontera

Sea (M,d) espacio métrico y $E \subseteq M$, no vacío, la frontera de E, relativa a d, denotada $\partial^d(E)$ se define como:

$$\partial^d(E) := \{ x \in M : \forall r > 0,\ B_r^d(x) \cap E \neq \emptyset \wedge B_r^d(x) \cap E^c \neq \emptyset \}$$

OBS:

1) $\partial^d(E) \cap E^\circ = \emptyset$

Sea $x_0 \in E^\circ \cap \partial^d(E) \Rightarrow x_0 \in E^\circ$ y $x_0 \in \partial(E)$

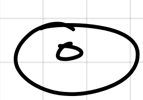
$\Rightarrow \exists r_0 > 0$ tq $B_{r_0}^d(x_0) \subseteq E \Rightarrow B_{r_0}^d(x_0) \cap E^c = \emptyset$

2) $\partial(E) = \partial(E^c)$

Sea $x_0 \in \partial(E) \Leftrightarrow \forall r > 0$ $B_r^d(x_0) \cap E \neq \emptyset$ y $B_r^d(x_0) \cap E^c \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow B_r^d(x_0) \cap E^c \neq \emptyset$ y $B_r^d(x_0) \cap (E^c)^c \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow x_0 \in \partial(E^c)$



(Si un conjunto intersecta a otro, y no a su complemento, está contenido en el

TEO: Adherencia de E

$$\overline{E} = \partial(E) \cup E^{0}$$

Dem: Sea $x_0 \in \overline{E} \Rightarrow \forall r>0 \; B^d_r(x_0) \cap E \neq \emptyset$, si $\exists r_0 > 0$ tq $B^d_r(x_0) \subseteq E$, entonces $x_0 \in E^0$, si no

$\forall r>0 \; B^d_r(x_0) \cap E^c \neq \emptyset$ y $x_0 \in \partial(E)$

Sea $x_0 \in E^0 \Rightarrow \exists r_0 > 0$ tq $B^d_{r_0}(x_0) \subseteq E$

$\Rightarrow B^d_r(x_0) \cap E \neq \emptyset$ y $x_0 \in \overline{E}$

Sea $x_0 \in \partial(D) \Rightarrow \forall r>0 \; B^d_r(x_0) \cap E \neq \emptyset$ y $x_0 \in \overline{E}$.

PROPIEDADES

1) $\partial(E) \subseteq \overline{E}$
2) $\partial(E) = \overline{E} \cap \overline{(E^c)}$
3) $E^0 \subseteq E \subseteq \overline{E}$
4) $\partial(E) = \partial(E^c)$
5) $\overline{E} = \partial(E) \cup E^0$
6) $\overline{E} = E \cup \partial(E)$
7) $\overline{(E^c)} = (E^0)^c$
8) $(E^c)^0 = (\overline{E})^c$
9) $(E \cap F)^0 = E^0 \cap F^0$
10) $E^0 \cup F^0 \subseteq (E \cup F)^0$
11) $\overline{(E \cap F)} \subseteq \overline{E} \cap \overline{F}$
12) $\overline{(E \cup F)} = \overline{E} \cup \overline{F}$
13) $(E^0)^0 = E^0$
14) $\overline{(\overline{E})} = \overline{E}$

1) Trivial

2) Sea $x_0 \in \partial(E) \Rightarrow \forall r>0 \ B^d_r(x_0) \cap E \neq \emptyset, \ B_r^d(x_0) \cap E^c \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ Trivialmente $x_0 \in \overline{E}$ y $x_0 \in \overline{E}^c$

Sea $x_0 \in \overline{E} \cap \overline{E^c} \Rightarrow \forall r>0 \ B^d_r(x_0) \cap E \neq \emptyset$ y $B_1^d(x_0) \cap E^c \neq \emptyset$

(También era trivial)

3) Trivial

4) $x_0 \in \partial(E) \Leftrightarrow \forall r>0 \ B^d_r(x_0) \cap E \neq \emptyset$ y $B_1^d(x_0) \cap E^c \neq 0$

$\Leftrightarrow \forall r>0 \ B^d_r(x_0) \cap E^c \neq \emptyset$ y $B^d_r(x_0) \cap (E^c)^c \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in \partial(E^c)$ (Trivial)

5) Teorema probado arriba

6)

7) $x_0 \in \overline{(E^c)} \Leftrightarrow \forall r>0 \ B^d_r(x_0) \cap E^c \neq 0 \Leftrightarrow \forall r>0$

$B^d_r(x_0) \not\subset E \Leftrightarrow x_0 \notin E^o \Leftrightarrow x_0 \in E^c$

8) $x_0 \in (E^c)^o \Leftrightarrow \exists r_0>0$ tq $B^d_{r_0}(x_0) \subseteq E^c$

$\Leftrightarrow \exists r_0>0$ tq $B^d_{r_0}(x_0) \cap E = \emptyset$

$\Leftrightarrow x_0 \notin \overline{E} \Leftrightarrow x_0 \in (\overline{E})^c$

9) Sea $x_0 \in (E \cap F)^o \Rightarrow \exists r_0>0$ tq $B^d_{r_0}(x_0) \subset E \cap F$

($x \in E \cap F \Rightarrow x \in E$ y $x \in F$)

$\Rightarrow B^d_{r_0}(x_0) \subset E$ y $B^d_{r_0}(x_0) \subset F$

$\Rightarrow x_0 \in E^\circ$ y $x_0 \in F^\circ \Rightarrow x_0 \in E^\circ \cap F^\circ$

Sea $x_0 \in E^\circ \cap F^\circ \Rightarrow \exists r_1, r_2 > 0$ tq $B^d_{r_1}(x_0) \subset E$ y $B^d_{r_2}(x_0) \subset F$, sea $r := \min\{r_1, r_2\} \Rightarrow B^d_r(x_0) \subset E$ y $B^d_r(x_0) \subset F \Rightarrow B^d_r(x_0) \subset E \cap F \Rightarrow x_0 \in (E \cap F)^\circ$

10) $E^\circ \cup F^\circ \subseteq (E \cup F)^\circ$

Sea $x_0 \in E^\circ \cup F^\circ \Rightarrow \exists r > 0$ tq $B^d_{r_0}(x_0) \subset E \wedge B^d_{r_0}(x_0) \subset F$

$\Rightarrow B^d_r(x_0) \subset E \cup F \Rightarrow x_0 \in (E \cup F)^\circ$

Contraej: $(E \cup F)^\circ \not\subseteq E^\circ \cup F^\circ$

Sea $E := \mathbb{Q}$ y $F = \mathbb{I}$, $E^\circ = \emptyset$ $F^\circ = \emptyset$

$E \cup F = \mathbb{R}$, $(E \cup F)^\circ = \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \neq E^\circ \cup F^\circ = \emptyset$

11) Sea $x_0 \in \overline{(E \cap F)} \Rightarrow \forall r > 0$ $B^d_r(x_0) \cap (E \cap F) \neq \emptyset$

$\Rightarrow B^d_r(x_0) \cap E \neq 0$ y $B^d_r(x_0) \cap F \neq 0$

$\Rightarrow x_0 \in \overline{E}$ y $x_0 \in \overline{F} \Rightarrow x_0 \in \overline{E} \cap \overline{F}$

Ej: $E = \mathbb{Q}$ $F = \mathbb{I}$ $E \cap F = \emptyset$ $\overline{(E \cap F)} = \emptyset$

$\overline{E} = \mathbb{R} = \overline{F}$ $\overline{E \cap F} \not\supseteq \overline{E} \cap \overline{F}$

EJEMPLO

$M=\mathbb{R}$, $E=C$ (Cantor) , $d(x,y)=|x-y|$

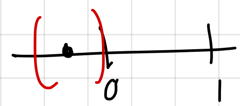
Se probó que C no contiene intervalos abiertos i.e $\forall b>a$ $(a,b)\not\subset C$, luego sea $x_0\in C$ y $r>0$ arbitrario $B_r^d(x_0)=(x_0-r,x_0+r)\not\subset C$

$\therefore$ $C^\circ=\emptyset$

$C\subset D \iff C^c\subset D^c$

2) $\partial(C)\subset C \iff C^c\subseteq(\partial(C))^c$

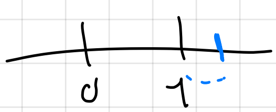
Sea $x_0\in C^c\Rightarrow x_0\notin C$, si $x_0<0$



y $r:=-x_0>0\Rightarrow(x-r,x+r)=(2x,0)\cap C=\emptyset$

$\Rightarrow B_r^d(x_0)\cap C=\emptyset$ y $x_0\notin\partial(C)$

si $x_0>1$



$r=x-1>0$

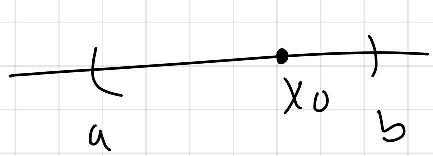
$B_r(x_0)=(x-r,x+r)=(1,2x-1)$

$\Rightarrow B_r(x_0)\cap C=\emptyset$ y $x\notin\partial(C)$

CASO 3

$x \in [0,1]$ y $x_0 \in C$. Dicha x_0 pertenece a un tercio medio abierto, removido durante la construcción de C, i.e $\exists\ I_x = (a,b)$ tq

$$I_x \cap C = \emptyset$$



y sea $r := \min\{b - x_0, x_0 - a)\}$

$$\Rightarrow (x_0 - r, x + r) \subset I_x \Rightarrow (x_0 - r, x_0 + r) \cap C \neq \emptyset$$

$$\text{y } x_0 \notin \partial(C)$$

luego $\partial(C) \subseteq C$

PROPIEDADES ABIERTOS

Sea (M,d) espacio métrico, definimos la familia $\mathcal{A}$ como $\mathcal{A} := \{A \subseteq M : A \text{ es abierto}\}$, entonces se verifica lo siguiente.

1) $\emptyset, M \in \mathcal{A}$

2) Sean $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ (un número finito) entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$$

3) Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una sucesión arbitraria de conjuntos de $\mathcal{A}$, entonces

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$$

a $\mathcal{A}$, se le llama topología

Demostración

1) Vacuidad

2) Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{a}$, si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, por vacuidad $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{a}$.

Si $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, sea $x_0 \in A_1 \cap A_2$

$\Rightarrow \exists\, r_1 > 0$ tq $B^a_{r_1}(x_0) \subset A_1$ y

$\exists\, r_2 > 0$ tq $B^a_{r_2}(x_0) \subset A_2$

$B^a_r(x_0) \subset A_1 \cap A_2$, con $r := \min\{r_1, r_2\}$

y $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{a}$. Resto: inducción.

2: Porque solo bajo intersecciones finitas

Ej: Sea $A_n := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $n \in \mathbb{N}$, es claro que $A_n \in \mathcal{a}$, con $M = \mathbb{R}$ y d la usual

$$\bigcap_n^{\infty} A_n = \bigcap_n^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

$\supseteq$) Es claro que $0 \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, así

$$0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$\subseteq$) $(A \subset B) \Leftrightarrow (B^c \subset A^c)$ (Otro distinto al $\emptyset$, no está)

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ P.d: $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

i) Si $x>0 \Rightarrow \exists\, n_x \in \mathbb{N}$ tq $0 < \frac{1}{n_x} < x$

$$\Rightarrow x \notin \left(-\frac{1}{n_x}, \frac{1}{n_x}\right)$$

ii) Si $x<0 \Rightarrow 0 < -x \Rightarrow \exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ tq

$$0 < \frac{1}{n_2} < -x \Rightarrow x < -\frac{1}{n_2} < 0$$

$$\Rightarrow x \notin \left(-\frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_2}\right)$$

$$\Rightarrow \forall x \neq 0 \,, \; x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

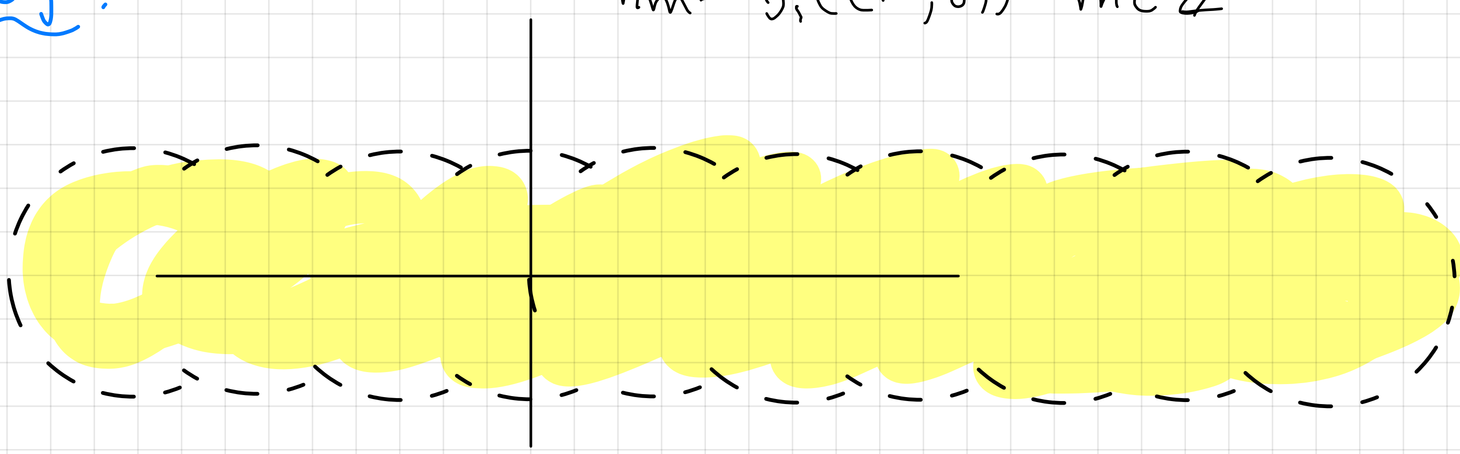
y claramente $\{0\}$ no es abierto.

III) Sea $x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists\, i_0 \in I$ tq

$$x_0 \in A_{i_0} \Rightarrow \exists\, r_0 > 0 \text{ tq } B^d_r(x_0) \subset A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I}^{\infty} A_i$$

$$\Rightarrow B^d_r(x_0) \subset \bigcup_{i \in I}^{\infty} A_i \text{ y } \bigcup_{i \in I}^{\infty} A_i \text{ es abierto}$$

Ej: $\quad A_m = B_1((m,0)) \quad m \in \mathbb{Z}$



$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} A_m$$

CONJUNTO CERRADO

Def I: Conjunto Cerrado

Sea (M,d) espacio métrico, decimos que F es cerrado si F^c es abierto

Def II: Conjunto cerrado

Sea (M,d) espacio métrico y sea $F \subseteq M$, decimos que F es cerrado si y solo sí $\partial(F) \subset F$

Def III: Conjunto Cerrado

Sea (M,d) espacio métrico y sea $F \subseteq M$, decimos que F es cerrado si y solo sí $\overline{F} = F$

TEO: $\quad \text{I} \Leftrightarrow \text{II} \Leftrightarrow \text{III} \Leftrightarrow \text{I}$

Dem: Sea $F \subseteq M$, cerrado de acuerdo a I)

P.d: $\partial(F) \subset F$

Supongamos $\partial(F) \not\subset F \Rightarrow \exists\, x_0 \in \partial(F)$ tq $x_0 \in F^c$

$\Rightarrow \exists\, x_0$ tq $\forall r > 0 \quad B_r^d(x_0) \cap F \neq \emptyset$ y $B_r^d(x_0) \cap F^c \neq 0$

$\Rightarrow \nexists\, r_0 > 0$ tq $B^a_r(x_0) \subset F^c$

$\Rightarrow x_0 \notin (F^c)^\circ = x_0 \notin F$! ??

$\Leftarrow$) Supongamos F cerrado de acuerdo a II

i.e.: $\partial(F) \subset F$, P.d: $\forall x_0 \in F^c, \exists r_0$ tq $B^a_{r_0}(x_0) \subset F^c$

Sea $x_0 \in F^c \Rightarrow x_0 \notin F \Rightarrow x_0 \notin \partial(F)$

$\Rightarrow \exists r_0 > 0$ tq $B^a_{r_0}(x_0) \cap F = \emptyset \vee B^a_r(x_0) \cap F^c = \emptyset$

Pero $x_0 \in F^c \Rightarrow B^a_{r_0}(x_0) \cap F = \emptyset$

$\Rightarrow B^a_{r_0}(x_0) \subset F^c \Rightarrow x_0$ es punto interior y F^c es abierto

II $\Leftrightarrow$ III

$\Rightarrow$) $\partial(F) \subset F \Rightarrow \overline{F} = \overset{\circ}{F} \cup \partial(F) \subset F$

$\Rightarrow \overline{F} = F$

$\Leftarrow$) $F = \overline{F} = F \cup \partial(F) \Rightarrow \partial(F) \subset F$

TEO: LA ADHERENCIA ES CERRADA

Sabemos que F es cerrado $\Leftrightarrow F = \overline{F}$

si $\overline{F}$ no fuera cerrado, y si $F = \overline{F}$

$\Rightarrow F$ no es cerrado !!