Probabilidad I

EST-11101

M.A. Fernando Jesús Martínez Eissa

02H2019

División Académica de Actuaría, Estadística y Matemáticas

Teoría de Conjuntos

M.A. Fernando Jesús Martínez Eissa

02H2019

ITAM

División Académica de Actuaría, Estadística y Matemáticas

Conjuntos

Conjunto: Es una colección o agrupación de elementos.

Notación de conjuntos Se denotan mediante letras mayúsculas y sus elementos con minúsculas. *Vgr*.

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$
$$B = \{rojo, azul, amarillo\}$$
$$C = \{1,2, \cdots, n\}$$

Conjunto nulo o vacío (∅): Conjunto que no contiene elementos.

Conjunto Universo (Ω): Conjunto que contiene a todos los elementos.

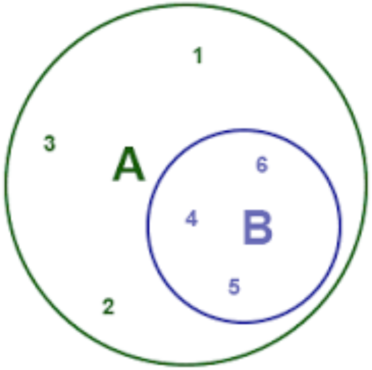
Conjuntos

Un elemento puede o no pertenecer a un conjunto, a esto se le llama *pertenencia* y se escribe:

$$x \in A \; si \; pertenece$$
$$x \notin A \; si \; no \; pertenece$$

Subconjunto: Aquel conjunto cuyos elementos pertenecen a otro conjunto y se denota $B \subset A$. La *relación de contención* se establece de la siguiente manera:

$$B \subset A \Leftrightarrow x \in B \Longrightarrow x \in A$$



B is subset of A

Cardinalidad: Consiste en el número de elementos que integran a un conjunto o la medida (tamaño) del mismo y se denota como $|A|$

Ejemplo: Si D corresponde al conjunto de posibles resultados al tirar un dado, entonces

$$D = \{1,2,3,4,5,6\}\ y\ |D| = 6$$

Si V corresponde al conjunto de las vocales

$$V = \{a, e, i, o, u\}\ y\ |V| = 5$$

Proposición

i. $Si\ A \subset B \Longrightarrow |A| \leq |B|$

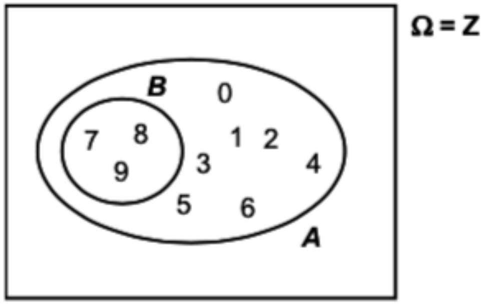
ii. $|\emptyset| = 0$

Representación

Los conjuntos pueden representarse de diferentes formas;

- Por extensión: Se enlistan cada uno de los elementos del conjunto.
- Por comprensión: Se establece una regla que permite identificar a todos los elementos del conjunto
- Gráfica: Se realiza mediante diagramas de Venn.

Conjunto	Descripción	Representación por extensión	Representación por comprensión
A	Dígitos	$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	$A = \{x \in \Omega \mid 0 \leq x \leq 9\}$
B	Dígitos mayores a 6	$B = \{7, 8, 9\}$	$B = \{x \in A \mid x > 6\}$



Operaciones con Conjuntos

Igualdad

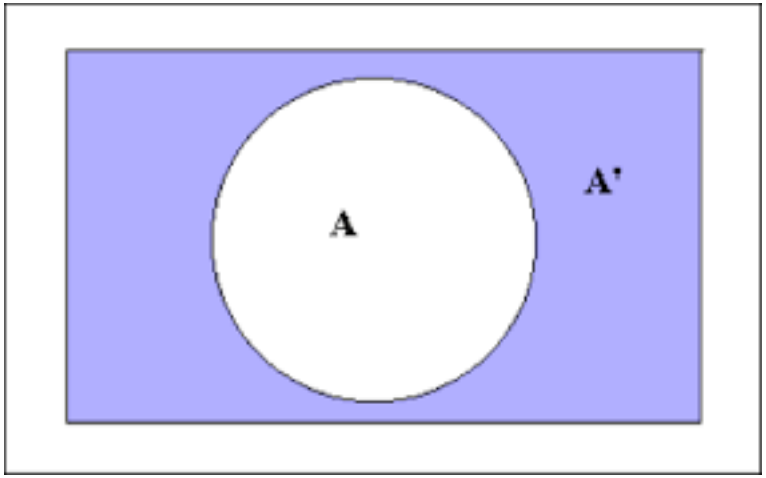
Dos conjuntos son iguales si contienen los mismos elementos, es decir:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \; y \; B \subset A$$

Complementariedad

El conjunto complemento de A, denotado por Ac, es el cojunto de los elementos de W que no están en A, es decir:

$$x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$$



Operaciones con Conjuntos

Teorema

I. $(A^c)^c = A$

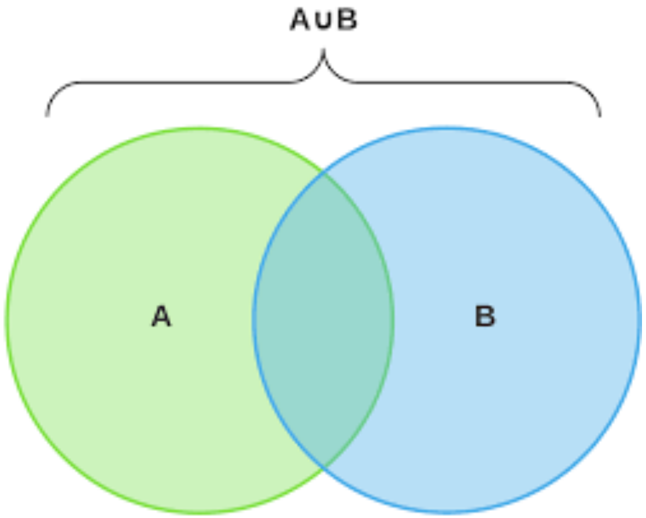
II. $(\Omega)^c = \emptyset$

Nota

Es importante aclarar que aunque los diagramas de Venn simplifican y contribuyen al entendimiento, no constituyen demostraciones formales:

Unión de Conjuntos

Consiste en el conjunto formado por todos los elementos de A y todos los elementos de B y se denota como $A \cup B$, es decir:

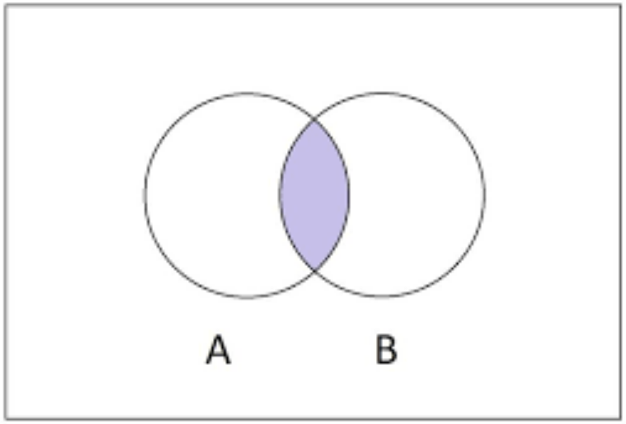


$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ó } x \in B$$

Intersección de Conjuntos

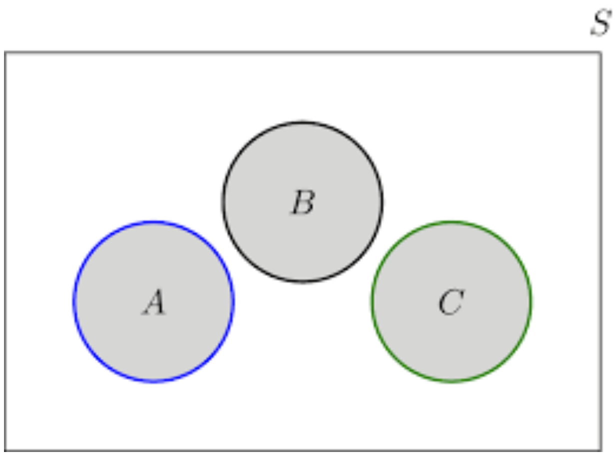
Representada mediante $A \cap B$ o AB, es el conjunto de puntos que pertenece a A y que al mismo tiempo pertenecen a B. Formalmente:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \in B$$



Conjuntos Disjuntos o mutuamente excluyentes

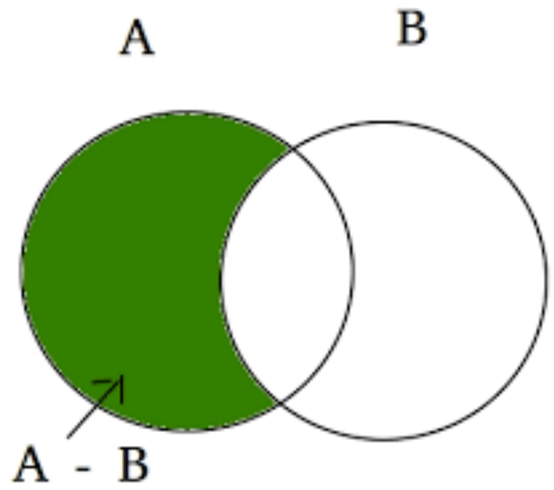
Cuando no tienen puntos en común o que $A \cap B = \emptyset$.



Diferencia Conjuntos

La diferencia de dos conjuntos denotada como A-B, corresponde al conjunto de elementos de A que no están en B. Es decir:

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \; y \; x \notin B$$



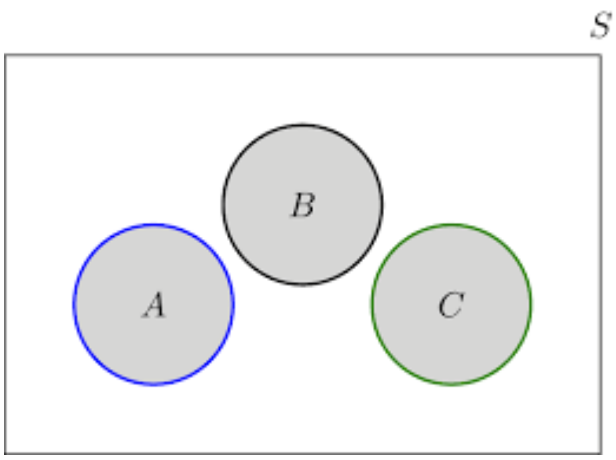
Teorema

$A \cap B^c = A - B$

Disjuntos o mutuamente excluyentes:

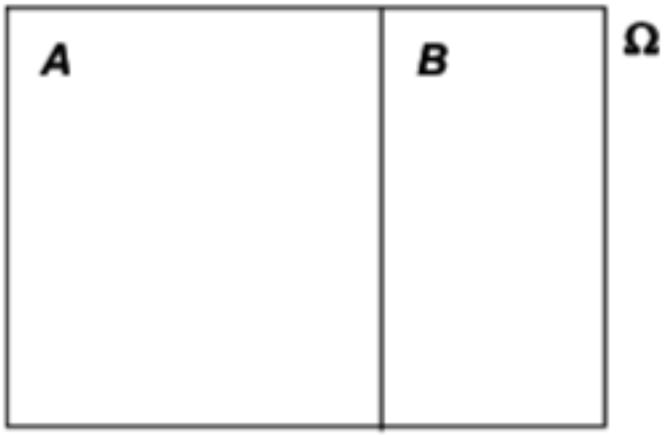
Cuando no tienen elementos en común. Formalmente:

$$A \; y \; B son \; mutuamente \; excluyentes \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$



Conjuntos Exhaustivos

Se dice que A y B, son conjuntos exhaustivos si sus elementos abarcan por completo el conjunto universo, es decir:



$$A \; y \; B son \; exhaustivos \Leftrightarrow A \cup B = \Omega$$

Teorema

I. $A \; y \; A^c son \; mutuamente \; excluyentes, i.e. \; A \cap A^c = \emptyset$

II. $A \; y \; A^c son \; exhaustivos, i.e. \; A \cup A^c = \Omega$

Ejemplo 1

Utilice la definición de igualdad de conjuntos para demostrar que:

$$(A^c)^c = A$$

Ejemplo 2

Sea el conjunto $\Omega = \{x \in \mathbb{Z}^+ | x < 12\}$ y que se definen los siguientes conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{2,4,6,8,10\}\ y\ C = \{8,9,10\}$.

a. Exprese W por extendión
b. Determine , $A \cup B$ y su cardinalidad.
c. Determine $A \cap B, A \cap C\ y\ B \cap C$
d. Represente mediante diagramas de Venn los conjuntos A, B y C
e. Se define $D = \{x \in A | x\ es\ par\}$. Calcule $D^c\ y\ A - D$. Compruebe mediante el diagrama del inciso anterior que $D = A \cap B$

Leyes de Conjuntos

Conmutatividad:

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

Asociatividad:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Distributividad:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Leyes de DeMorgan

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \qquad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \qquad \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

Leyes de Conjuntos

Propiededades con $\emptyset$ y Ω

$A \cup \Omega = \Omega$

$A \cap \Omega = A$

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

Ejemplo 3

Considere un experimento en donde se lanzan dos dados y se observa el número de puntos de la cara superior de cada dado. Sea Ω el conjunto de posibles pares observables. Defina los siguientes subconjuntos de Ω

A. El número del segundo dado es once;

$$A: \{\emptyset\}$$

B. La suma de los dos números es once

$$B: \{(5,6),(6,5)\}$$

C. Al menos uno de los números es impar.

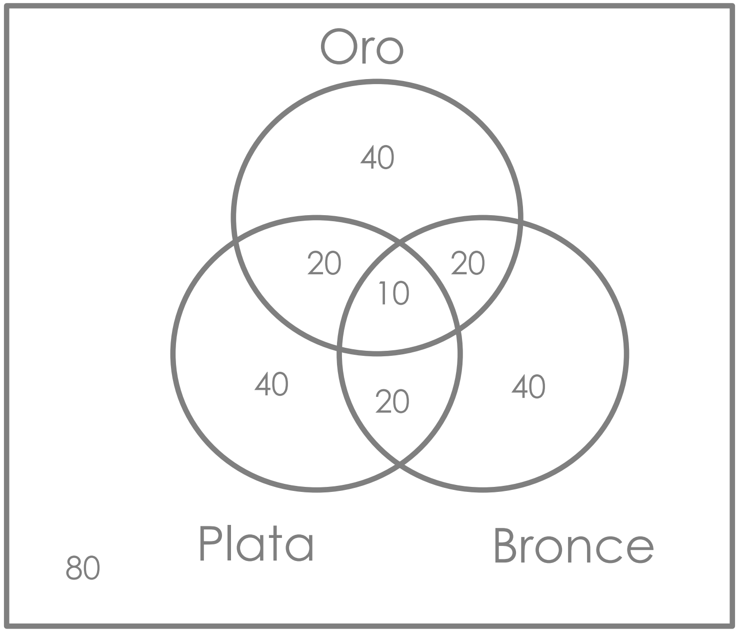
$$C: \left\{\begin{matrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(3,1),(3,2),(3,3), \\ (3,4),(3,5),(3,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), \\ (2,1),(4,1),(6,1),(2,3),(4,3),(6,3)(2,5),(4,5),(6,5). \end{matrix}\right\}$$

Elabore una lista de los puntos en $A, C^c, A \cap B, A \cap B^c, A^c \cup B \; y \; A^c \cap C$,

Ejemplo 4

En una competencia en la que participaron 270 personas, se sabe que se ganaron 90 medallas de oro, 90 medallas de plata y 90 medallas de bronce. 30 participantes ganaron 1 medalla de oro y 1 de plata; 30 1 de oro y 1 de bronce, 30 1 de plata y 1 bronce y sólo 10 ganaron 1 de oro, 1 de plata y 1 de bronce. Realice el diagrama de Venn.

Solución



Ejemplo 5

Considerando los conjuntos del Ejercicio 2, verifique que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(Leyes\ de\ De\ Morgan)$

Ejemplo 6

Leyes de De Morgan. Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots, An$ con $n \in \mathbb{N}$, subconjuntos de Ω, demuestre que:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \qquad \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

Ejemplo 7

Calcule los siguientes conjuntos de $\Omega = R\ (la\ recta\ real)$: $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 5\}, C = \{x \in \mathbb{R} | -10 < x \leq 5\}\ y\ D = \{x \in \mathbb{R} | |x + 2| \geq 2\}$

a. Represente c/conjunto. ¿se pueden representar por extensión?

b. ¿es $A \sqsubset D$?

c. Calcule $A \cap B$, $C \cap D$ y $|C \cap B^c|$

Ejemplo 8

Sea $\Omega = \mathbb{R}^2, M = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 16\}\ y\ \ N\{(x, y)||x - 1| < 2\}$ Representar geométricamente $M \cap N^c$

Si $x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n$ representan n números reales, entonces:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \; \textit{denota su } \boldsymbol{suma}$$

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i \; \textit{denota su } \boldsymbol{multiplicación}$$

Si $x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n$ y $y_1, y_2, y_3,\ldots,y_n$ son conjuntos de números reales, en general, se puede afirmar:

$$\sum_i x_i y_i \neq \sum_i x_i \sum_i y_i$$

$$\sum_i x_i^2 \neq \left(\sum_i x_i\right)^2$$

Propiedades de la Suma

Si $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ son conjuntos de números reales y c una constante, en general, se puede afirmar:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = n\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i}(x_i \pm y_i) = \sum_{i} x_i \pm \sum_{i} y_i$$

Convergencia de Sumas

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Propiedades de la Suma

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

La serie geométrica es la expansión de la Serie de Taylor de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} \; para \; |x| < 1$$

Sea f una función de clase C^∞ (infinitas derivadas) y a una constante, entonces:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x - a)^k}{k!}$$

Es su Serie de Taylor con centro en a.

Si a=0, la Serie de Taylor se conoce como Serie de Maclaurin.

Corolario

Serie de Maclaurin de e^x. (Serie de Taylor de $f(x)=e^x$ con $a=0$.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \; para \; |x| < 1$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

Ejemplo 9

Considere la siguiente información:

i	x_i	y_i
1	65	4.3
2	84	5.6
3	109	7.3
4	67	4.5

Calcule:

$$a)\ \sum_{i=1}^{4} 2i$$

$$b)\ \sum_{i=1}^{4} x_i$$

$$c)\ \prod_{i=1}^{4} y_i$$

$$d)\ \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$$

$$e)\ \sum_{i=1}^{4} x_i \sum_{i=1}^{4} y$$

$$f)\ \frac{\left(\sum_{i=1}^{4} y_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{4} y_i^2}{\sum_{i=1}^{4} ln(x_i)}$$

Ejemplo 10

Considere la siguiente información:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 325 \qquad \sum_{i=1}^{4} y_i = 21.7$$

Calcule:

$$\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{x_i}{10} - 2y_i + 5 \right) = 325$$

Ejemplo 11

Es conocido que si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a) Comprobar la validez de estas fórmulas para n=5

b) Calcular 1+2+3+…+1000

c) A partir de estas fórmulas y las propiedades de la suma calcular

$$\sum_{i=1}^{50} (2i-3)^2$$

Espacios Muestrales y Eventos

Espacio de eventos ($\mathcal{A}$)

Es la clase de todos los eventos asociados a un experimento aleatorio.

Matemáticamente el espacio de eventos es un sigma-álgebra (σ-algebra) o campo de Borel que cumple las siguientes propiedades:

i. $\emptyset \in \mathcal{A}, i.e., siempre\ incluye\ al\ \boldsymbol{vacío}\ (evento\ imposible);$

ii. $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}, i.e.\ los\ complementos\ están\ incluídos; y$

iii. $A_1, A_2, A_3, \cdots \in \mathcal{A} \Rightarrow$
$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}\ , i.e. las\ uniones\ numerables\ están\ incluidas.$

Ejemplo 12

Considere una urna con 3 bolas: roja(r), azul(a) y blanca(b) y se considera el experimento aleatorio en que se elige una bola al azar y se registrar su salida, entonces:

$$\Omega = \{r, a, b\}$$

$y\ \mathcal{A}\ incluye$:

$$\{r\}\{r, a\}$$
$$\emptyset\ \{a\}\{r, b\}\{r, a, b\}$$
$$\{b\}\{a, b\}$$

$\mathcal{A}$ es el conjunto potencia de Ω, es decir, el conjunto que incluye todos los posibles subconjuntos de Ω.

De acuerdo con la cardinalidad de Ω, los espacios muestrales se clasifican en discretos (Ω finito o infinito numerable)o contínuos (Ω infinito no numerable).

Axiomas de Probabilidad

- Una forma de definir a la probabilidad es a partir de la frecuencia relativa.
- Suponga que un experimento se lleva a cabo de manera repetitiva bajo las mismas condiciones, en un espacio muestral Ω.
- Para cada evento A del espacio muestral Ω, se define $n(A)$ como el número de veces en que se presentan las primeras n repeticiones el experimento A. Entonces $P(A)$, la probabilidad del evento A, se define como:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Ejemplo 13

Suponga que las 6 caras de un dado tienen la misma probabilidad de aparecer, entonces

$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$ y $P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{2}$

Axiomas de Probabilidad

- ✓ La probabilidad es una idealización de la proporción de veces que se espera ocurra un cierto resultado en varios intentos de un experimento.

- ✓ La probabilidad de que un evento A ocurra, corresponde a la proporción del número de veces que se espera observar el evento A al realizar un experimento.

- ✓ Si la probabilidad de los eventos se interpreta como modelos de proporción respecto al número de veces que son observados, entonces se espera que cumpla con las propiedades de las proporciones

Axiomas de Probabilidad

Sea $P: \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ se denomina función de probabilidad y satisface los siguientes:

✓ Axioma 1

$$0 \leq P(A) \leq 1 \; para\; todo\; A \in \mathcal{A}$$

✓ Axioma 2

$$P(\Omega) = 1$$

✓ Axioma 3

Para cualquier secuencia de eventos mutuamente excluyentes A1, A2,… (es decir $Ai \cap Aj = \emptyset \; \forall i \neq j$)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Espacio de Probabilidad

Es la tripleta $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

El espacio de probabilidad es un concepto sintético que asume la existencia de un espacio muestral (Ω) , un espacio de eventos $(\mathcal{A})$ y una función de probabilidad (P).

Propiedades de Probabilidad

Si $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es un espacio de probabilidad con A y B eventos en $\mathcal{A}$, entonces:

1. Sea A un evento, entonces
$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

2. La probabilidad del evento vacío es cero
$$P(\emptyset) = 0$$
Nota: P(A)=0 no implica $A = \emptyset$

3. Sean A y B dos eventos, entonces
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
Para los eventos A, B y C se tiene:
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap \mathrm{B} \cap C)$$

4. Si A⊂B, entonces
$$A \leq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B) y\ P(B - A) = P(B) - P(A)$$

Propiedades de Probabilidad

5. En un espacio de probabilidad finito, para un evento A, siempre se tendrá:

$$P(A) = \sum_{a \in A} P(\{a\})$$

Es decir, se puede calcular la probabilidad de un evento sumando las probabilidades de todos los eventos elementales contenidos en A. *Vgr. Probabilidad de obtener un par al tirar un dado*

6. Si A y B son dos eventos, entonces:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

Ejemplo 14

Suponga que una palabra se elige al azar de este enunciado. Encontrar

A. La probabilidad de que la palabra tenga 4 letras.
B. La probabilidad de que contenga al menos dos vocales.
C. La probabilidad de que contenga 4 letras y al menos una zeta.

Solución

$A\colon\{azar, este\} \rightarrow |A| = 2;$

$\Omega\colon\{Suponga\ que\ una\ palabra\ se\ elige\ al\ azar\ de\ este\ enunciado\} \rightarrow |\Omega| = 11$

Por lo tanto $P(A) = \frac{2}{11} = 18.18\%$

$B\colon\{Suponga\ que\ contenga\ al\ menos\ dos\ vocales\} \rightarrow |B| = 8$

Por lo tanto $P(B) = \frac{8}{11} = 72.72\%$

$C\colon\{azar\} \rightarrow |C| = 1$

Por lo tanto $P(C) = \frac{1}{11} = 9.09\%$

Ejemplo 15

Se tienen que elegir a dos solicitantes de empleo de un grupo de cinco personas, suponga además que los candidatos difieren en grado de capacidad donde 1 es el mejor y 5 el menos capacitado (estas calificaciones las desconoce el seleccionador). Sean los eventos A y B como se describen a continuación:

A. El patrón elige al mejor y a uno de los dos menos competentes.

B. El patrón elige por lo menos uno de los dos mejores.

Determinar las probabilidades de estos dos eventos.

Solución

$A_1 : \{1,2\}; A_5 : \{2,3\};\ A_8 : \{3,4\}; A_{10} : \{4,5\}$

$A_2 : \{1,3\}; A_6 : \{2,4\};\ A_9 : \{3,5\}$

$A_3 : \{1,4\}; A_7 : \{2,5\}$

$A_4 : \{1,5\};$

$$\therefore P(A) = 0.2 \text{ y } P(B) = \frac{7}{10} = 0.70$$

Ejemplo 16 (Espacios muestrales equiprobables)

Cuando A juega contra B, las probabilidades de que gane A son las mismas que las de B. Suponga que A y B juegan dos partidos. ¿Cuál es la probabilidad de que A gane por lo menos un partido?

Solución

$E_1: \{A, A\}; E_2: \{A, B\};\ E_3: \{B, A\}; E_4 : \{B, B\}$

Con

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{4}$$

Sea C el evento de que gane por lo menos un partido, entonces

$$C = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

Y $P(C) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{3}{4}$

Ejemplo 17 (Espacios muestrales no equiprobables)

Cuando A juega contra B, las probabilidades de que gane A son de dos a uno. Suponga que A y B juegan dos partidos. ¿Cuál es la probabilidad de que A gane por lo menos un partido?

Solución

$E_1 : \{A, A\}; E_2 : \{A, B\};\ E_3 : \{B, A\}; E_4 : \{B, B\}$

Con

$P(E_1) = \frac{4}{9}; P(E_2) = P(E_3) = \frac{2}{9}\ y\ P(E_4) = \frac{1}{9}$

Sea C el evento de que gane por lo menos un partido, entonces

$$C = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

Y $P(C) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{8}{9}$

Ejemplo 18

Estudios recientes muestran que en cierta población de México, la probabilidad de que un habitante sea mayor de 40 años o que tenga calvicie es 0.4. La probabilidad de que sea mayor de 40 años es 0.20 y la probabilidad de que sea calvo es de 0.30. Calcular las siguientes probabilidades:

1. Tenga 40 años o menos
2. Sea mayor de 40 años con calvicie
3. Sea mayor de 40 años sin calvicie
4. Sea menor de 40 años con calvicie
5. Sea menor de 40 años sin calvicie

Ejemplo 18 (*Solución*)

Estudios recientes muestran que en cierta población de México, la probabilidad de que un habitante sea mayor de 40 años o que tenga calvicie es 0.4. La probabilidad de que sea mayor de 40 años es 0.20 y la probabilidad de que sea calvo es de 0.30. Calcular las siguientes probabilidades:

1. Tenga 40 años o menos $P(\leq 40) = 1 - P(> 40) = 1 - 0.2 = 0.8$
2. Sea mayor de 40 años con calvicie
   $P(> 40 \cap C) = P(> 40) + P(C) - P(> 40 \cap C) = 0.2 + 0.3 - 0.4 = 0.10$
3. Sea mayor de 40 años sin calvicie
   $P(> 40 \cap C^c) = P(> 40) + P(C^c) - P(> 40 \cup C^c) = 0.20 - 0.10 = 0.10$
4. Sea menor de 40 años con calvicie
   $$P(< 40 \cap C) = P(C) - P(> 40 \cup C) = 0.30 - 0.10 = 0.20$$
5. Sea menor de 40 años sin calvicie
   $$P(< 40 \cap C^c) = 1 - P(> 40 \cup C) = 1 - 0.40 = 0.6$$

Ejemplo 19

La compañía "La Casita" produce y vende cera para pisos en el mercado de productos para cuidado del hogar. La fábrica produce 10,000 litros de cera semanalmente y, generalmente, tiene en inventario 5,000 litros. Si las ventas exceden la producción la compañía cubre el exceso de demanda con el inventario y si las ventas son menores a la producción se incrementa el inventario. El economista de la compañía tiene la siguiente información de eventos de las ventas semanales en litros de cera: A = [0, 5,000], B = (5,000, 10,000], C = [2,500, 7,500] y D = (5,000, 7,500], con probabilidades $P(A)$ = 0.25, $P(B)$ = 0.65, $P(C)$ = 0.35 y $P(D)$ = 0.20

1. ¿Cuál es la probabilidad de que se tenga que utilizar el inventario para satisfacer las ventas de una semana?
2. b) ¿Cuál es la probabilidad de que se vendan menos de 2,500 litros de cera en una semana?
3. c) ¿Cuál es la probabilidad del evento $G = A \cup C$

Ejemplo 19 (*Solución*)

	0-2500	2500-5000	5000-7500	7500-10000	>10,000	
A	10%	15%				25.0%
B			20%	45%		65.0%
C		15%	20%			35.0%
D			20%			20.0%
					10%	
	10%	15%	20%	45%	10%	

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se tenga que utilizar el inventario para satisfacer las ventas de una semana?

10%

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se vendan menos de 2,500 litros de cera en una semana?

10%

c) ¿Cuál es la probabilidad del evento $G = A \cup C$?

45%

Ejemplo 20

En un grupo de 20 personas ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos personas cumplan años el mismo día? Hint: Considere que no hay gemelos, triates ni cuates, etc. y que el año es de 365 días

Solución

Sean los siguientes eventos:

$$A = \{\text{"}al\ menos\ dos\ personas\ cumplen\ años\ el\ mismo\ día\text{"}\}$$
$$A^c = \{\text{"}no\ hay\ dos\ personas\ que\ cumplen\ años\ el\ mismo\ día\text{"}\}$$

Para que no haya dos personas que cumplen años el mismo día se tiene:

$$P(A^c) = \left(\frac{365}{365}\right)\left(\frac{364}{365}\right)\cdots\left(\frac{365-20+1}{365}\right) = \left(\frac{365 * 364 * \cdots * 346}{365^{20}}\right) = \frac{2.84X10^{48}}{4.82X10^{48}}$$
$$= .588$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - .588 = .411$$

Probabilidad Condicional

El concepto de probabilidad condicional se diseño para explicar la relación que existe entre las probabilidades de dos o más eventos.

Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces la probabilidad condicional de A dado B se define por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \; con \; P(B) > 0; si \; P(B) = 0 \Longrightarrow no \; se \; define$$

Lo anterior implica:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

También se define

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$$

Y

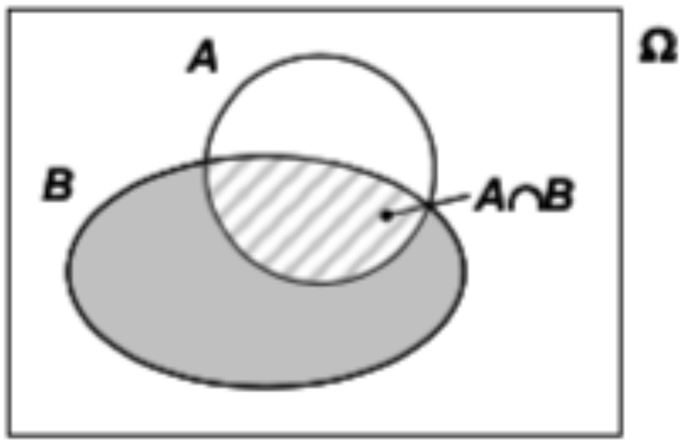
$$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$$

Al evento A se le llama evento de interés y al evento B evento condicionante.

Probabilidad Condicional

La ocurrencia del evento B puede afectar las circunstancias del fenómeno aleatorio y, posiblemente, afectar la probabilidad del evento A.

La probabilidad condicional considera que el evento B ya ocurrió, de forma tal que P(B) representa ahora el 100% (como si se redefiniera el espacio muestral) y el calculo de la P(A) queda restringido a $P(A \cap B)$ Como se muestra a continuación:



Probabilidad Condicional

Eventos favorables y Eventos Desfavorables

i. $Si\ P(A|B) > P(A) \Rightarrow B\ es\ favorable\ a\ A.$

ii. $Si\ P(A|B) < P(A) \Rightarrow B\ es\ desfavorable\ a\ A.$

Es decir, un evento condicionante es favorable (o desfavorable) al evento de interés si aumenta (o disminuye) su probabilidad de ocurrencia.

Si B no es favorable ni desfavorable a A, entonces A y B son eventos independientes.

Ejemplo 21

Sean A y B eventos un espacio de probabilidad dado con P(A) > 0 y P(B) > 0. Demuestre que si B es favorable a A, entonces A es favorable a B. Es decir, que si P(A | B) > P(A), entonces P(B | A) > P(B)

Ejemplo 22

De una baraja de 52 cartas, se extraen dos cartas, una a la vez y se colocan boca abajo sobre una mesa

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta sea una reina de corazones?

$$P(RC) = \frac{1}{52}$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda carta sea una reina de corazones dado que la primer carta fue un As de tréboles?

$$P(RC|AT) = \frac{1}{51}$$

Ejemplo 23

Dos boletos son extraídos aleatoriamente con reemplazo de una caja con cuatro boletos numerados del uno al cuatro

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo boleto sea 4?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo boleto sea 4 dado que el primero fue 2?

$$\Omega \left\{ \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) \end{bmatrix} \right\}$$

$$\therefore P(x,4) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\therefore P(4|2) = \frac{1}{4} = 0.25$$

Ejemplo 24

Dos boletos son extraídos aleatoriamente sin reemplazo de una caja con cuatro boletos numerados del uno al cuatro

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo boleto sea 4?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo boleto sea 4 dado que el primero fue 2?

$$\Omega \begin{Bmatrix} & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & \end{Bmatrix}$$

$$\therefore P(x,4) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\therefore P(4|2) = \frac{1}{3} = 0.33$$

Ejemplo 25

Sobre una pared de 2 metros de alto y 2.25 metros de ancho se coloca una diana con tres círculos concéntricos cuyos diámetros son 20 cm., 40 cm. y 60 cm. Si se lanza un dardo al azar sobre esta pared:

1. Determine la probabilidad de que caiga dentro de la diana.
2. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que el dardo caiga en el círculo del centro dado que cayó dentro de la diana?

Axiomas de Probabilidad Condicional

Si $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ es un espacio de probabilidad con $P(B) > 0$ para $B \in \mathscr{A}$ entonces $P(\cdot\,|B)$ satisface los mismos axiomas que $P(\cdot)$, es decir:

i) $P(A|B) \geq 0$ para todo $A \in \mathscr{A}$

ii) $P(\Omega|B) = 1$

iii) Si $A_1, A_2, \ldots,$ es una sucesión de eventos m.e. en $\mathscr{A}$ $(A_i \cap A_j = \varnothing$ para toda $i \neq j)$, entonces $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

Probabilidad Conjunta y Marginal

Distribución de frecuencias absolutas

Corresponde a una tabla en la cual se muestra el conteo de una característica dada ya sea para uno o varios eventos.

A partir del enfoque de probabilidad frecuentista, es posible calcular las probabilidades a partir de la distribución de frecuencias absolutas dividiendo entre el número total de observaciones. A estas frecuencias relativas, también se les denomina probabilidades empíricas.

Probabilidad Conjunta y Marginal

Ejemplo 26

Considere la siguiente tabla de frecuencias relativas (en %) de una encuesta sobre tabaquismo en una Universidad:

Hábito	H	M	TOTAL
N	28.52	23.51	52.03
D	4.63	2.04	6.67
F	34.26	7.04	41.30
Total	**67.41**	**32.59**	**100.0**

Considerando la definición frecuencia relativa de probabilidad, las frecuencias relativas anteriores, se pueden interpretar como probabilidades.

Si se eligiera al azar una persona, la probabilidad de que sea mujer es .3259

A las probabilidades en el cuerpo del cuadro, se les conoce como Probabilidades Conjuntas y a las de los márgenes Probabilidades Marginales.

Probabilidad Conjunta y Marginal

Ejemplo 26, (*continuación*)

Las Probabilidades conjuntas se refieren a las probabilidades sobre las intersecciones de los eventos, por Ejemplo:

Hábito	H	M	TOTAL
N	28.52	23.51	52.03
D	4.63	2.04	6.67
F	34.26	7.04	41.30
Total	**67.41**	**32.59**	**100.0**

$$P(M \cap N) = \mathrm{P}(Mujer\ y\ nunca\ ha\ fumado) = .2352$$

$$P(H \cap F) = \mathrm{P}(Hombre\ y\ fume) = .3426$$

Las Probabilidades marginales se refieren a las probabilidades de eventos que involucran a un solo atributo, género o hábito, por Ejemplo:

$$P(H) = \mathrm{P}(Hombre) = .6741$$

$$P(D) = \mathrm{P}(dejó\ de\ fumar) = .0667$$

$$P(F) = \mathrm{P}(fume) = .4130$$

$$P(N) = \mathrm{P}(nunca\ ha\ fumado) = .5203$$

Ejemplo 26, (*continuación*)

Dadas las probabilidades conjuntas y marginales, se puede calcular probabilidades sobre uniones de eventos utilizando el axioma 3.

Hábito	H	M	TOTAL
N	28.52	23.51	52.03
D	4.63	2.04	6.67
F	34.26	7.04	41.30
Total	67.41	32.59	100.0

Por Ejemplo, la probabilidad de que el encuestado sea hombre o que nunca haya fumado, es:

$$P(H \cup N) = \mathrm{P}(H) + P(N) - P(H \cap N) = .6741 + .5203 - .2852 = 0.9093$$

Finalmente, la probabilidad marginal $P(H)$=.6741 se obtiene al sumar las conjuntas

$$P(H) = \mathrm{P}(H \cap N) + P(H \cap D) + P(H \cap F) = .2852 + .0463 + .3426 = 0.6741$$

Regla de la Multiplicación

Esta regla ayuda a encontrar las probabilidad de que dos eventos ocurran simultáneamente. Esto es:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A);\, o$$
$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B);\, o$$

Ejemplo 27

Una caja tiene tres boletos: uno rojo, uno verde y uno azul. Dos boletos serán extraídos sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de escoger primero uno rojo y luego uno verde?

$$\Omega \left[\begin{array}{ccc} & (r,v) & (r,a) \\ (v,r) & & (v,a) \\ (a,r) & (a,v) & \end{array} \right]$$

$$P(R \cap V) = P(R)P(V|R)$$
$$P(R \cap V) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Ejemplo 28

Estudios recientes muestran que en cierta población de México, la probabilidad de que un habitante sea mayor de 40 años o que tenga calvicie es 0.4. La probabilidad de que sea mayor de 40 años es 0.20 y la probabilidad de que sea calvo es de 0.30. Calcular las siguientes probabilidades:

Recordar: $P(>40 \cup C) = 0.4; P(C) = 0.3; P(>40) = .20 \ y \ P(>40 \cap C) = .1$

1. Seleccionar a una persona con calvicie dado que ya se sabe que es mayor de 40 años.

$$P(C| > 40) = \frac{P(C \cap > 40)}{P(> 40)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

2. Seleccionar a una persona con edad menor o igual a 40 años, dado que se sabe que tiene calvicie.

$$P(\leq 40|C) = \frac{P(\leq 40 \cap C)}{P(C)} = \frac{0.2}{0.3} = 0.6\bar{6}$$

Note que $$P(A^C|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B)$$

Caso General de la Regla de la Multiplicación (CGRM)

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$, $n \geq 2$, y $P(A_1A_2 \cdots A_j) > 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n-1$, entonces:

$$P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1})$$

Diagramas de árbol con probabilidades y regla de la multiplicación

En ocasiones es útil para el cálculo de probabilidades considerar diagramas de árbol agregando probabilidades en cada una de sus ramas:

- Las probabilidades de las primeras ramas son probabilidades incondicionales.
- Las probabilidades de la ramas internas son condicionales ya que consideran lo ocurrido previamente.

El CGRM muestra cómo para calcular la probabilidad de toda una rama de un diagrama de árbol (probabilidad de una intersección) basta multiplicar todas las probabilidades involucradas en esa rama.

Ejemplo 29

Una urna contiene 10 bolas, de las cuales 3 son negras y 7 blancas. Considere el siguiente experimento: en cada turno una bola es elegida al azar, se anota su color, y se regresa a la urna junto con 2 bolas de su mismo color.

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 bolas negras en los tres primeros turnos de experimento?.

2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 bolas negras en los tres primeros turnos de experimento?.

Independencia de Eventos

Se dice que dos eventos A y B son independientes si se cumple cualesquiera de las siguientes condiciones:

$$P(A|B) = P(A), si\ P(B) > 0$$

$$P(B|A) = P(B), si\ P(A) > 0$$

$i.e.$ La probabilidad de que ocurra el evento A, no se ve afectada por la ocurrencia o no del evento B, por lo que aplicando la Regla de la Multiplicación, se tiene:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Intuitivamente es posible realizar hipótesis acerca de la independencia de eventos, sin embargo para demostrar independencia, es necesario validar que se cumplen cualesquiera de las tres condiciones anteriores.

Se dice que A y B son eventos dependientes si no son independientes

Independencia de Eventos

NOTA:

El concepto de independencia, no debe confundirse con la idea de que dos eventos sean mutuamente excluyentes.

Si A y B son eventos mutuamente excluyentes tales que la P(A)>0 y P(B)>0 entonces no pueden ser independientes.

Nótese que el simple hecho de saber que A y B son mutuamente excluyentes implica que si ocurre B no puede ocurrir A y viceversa; entonces Ay B no son independientes.

Independencia de Eventos

Teorema

Si A y B son independientes, entonces también lo son:

i) A y B^c

ii) B y A^c

iii) A^c y B^c.

Eventos completamente independientes

Se dice que $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$., son eventos completamente independientes sí y sólo sí:

$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ para toda $i \neq j$ (independencia dos a dos)

$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$ para toda $i \neq j$, $i \neq k$ y $j \neq k$ (ind. tres a tres)

$$\vdots$$

$$P\left(\bigcap_{i=i}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Independencia dos a dos no implica independencia completa

Ejemplo 30

Comente si intuitivamente A y B son eventos independientes en los siguientes casos:

a) A, color de cabello de un individuo; y B, sabor favorito de helado del individuo.

b) A, persona con una estatura de más de 1.83 m; y B, su padre mide más de 1.83 m.

c) A, edad de una persona; y B, tipo de música favorita de esta persona.

d) A, persona que es jugador de basketball; y B, la estatura de esta persona es mayor a 1.83 m.

Ejemplo 31

En el experimento de lanzar un dado, considere los siguientes eventos:

A: Se observa un número impar

B: Se observa un 1 o un 2

¿Los eventos Ay B son independientes?

Solución

$$P(A|B) = \frac{1}{2}; P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \therefore son\ independientes$$

Independencia de Eventos

Considere dos urnas 1 y 2 con 6 boletos cada una como se muestra a continuación

Urna	Boletos					
a	1	2	2	1	2	2
b	1	2	3	1	2	2

Observe que los boletos están numerados 1,2 y 3 y que pueden ser blancos o verdes. El experimento consiste en extraer un boleto de manera aleatoria y se definen los siguientes eventos:

V: Se observa un boleto verde; y

D: Se observa un boleto con el número 2

¿Para qué urna los eventos Ay B son independientes? $¿P(V|D) = P(V)?$

Solución

$$P(V_a) = P(V_b) = \frac{1}{2}$$

$$P(D_a) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; P(D_b) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(V_a|D_a) = \frac{P(V_a \cap D_a)}{P(D_a)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

$$P(V_b|D_b) = \frac{P(V_b \cap D_b)}{P(D_b)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore Para\ la\ urna\ a$$

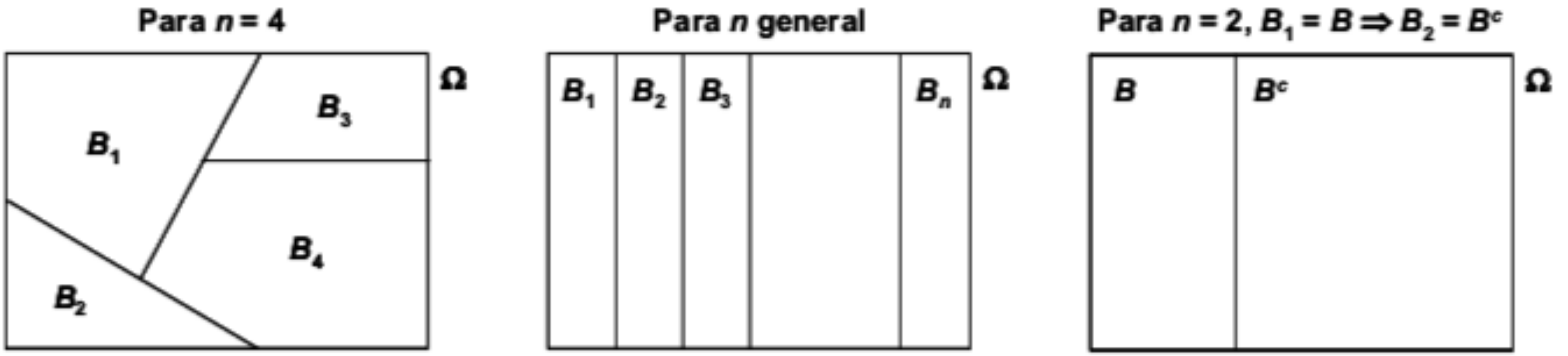
Partición

Se dice que $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forman una partición de Ω si:

i) $B_i \cap B_j = \varnothing$ para toda $i \neq j$ (eventos m.e.); y

ii) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ (eventos exhaustivos)

Gráficamente, con diagramas de Venn



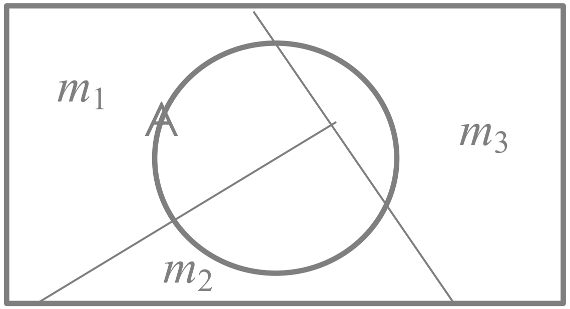
Probabilidad Total

Sirve para calcular la probabilidad de un evento cuando el espacio muestral es la unión de conjuntos mutuamente excluyentes.

Suponga que el espacio muestral Ω es la unión de conjuntos mutuamente excluyentes m_1,m_2 y m_3.

Considere el evento A subconjunto de Ω. El evento A, así como, el espacio muestral Ω, se puede considerar como la unión de tres eventos mutuamente excluyentes:

$$A \cap m1, A \cap m2, A \cap m3$$



Entonces: $$A = (A \cap m1) \cup (A \cap m2) \cup (A \cap m3)$$

Aplicando propiedades de probabilidad

$$P(A) = P(A \cap m1) + P(A \cap m2) + P(A \cap m3)$$

Regla de Probabilidades Totales

Una probabilidad marginal $P(A)$, siempre se puede escribir como la suma de probabilidades conjuntas y por la regla de la multiplicación se tiene:

$$P(A) = P(A|m_1)P(m_1) + P(A|m_2)P(m_2) + P(A|m_3)P(m_3)$$

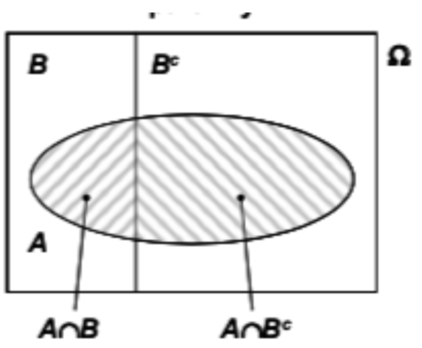
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|m_i)P(m_i)$$

Otra forma equivalente de verlo es: si los eventos $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ son una partición de Ω, entonces:

$$P(A) = P(A \cap m_1) + P(A \cap m_2) + \cdots + P(A \cap m_n)$$

$$\therefore P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap m_i)$$

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

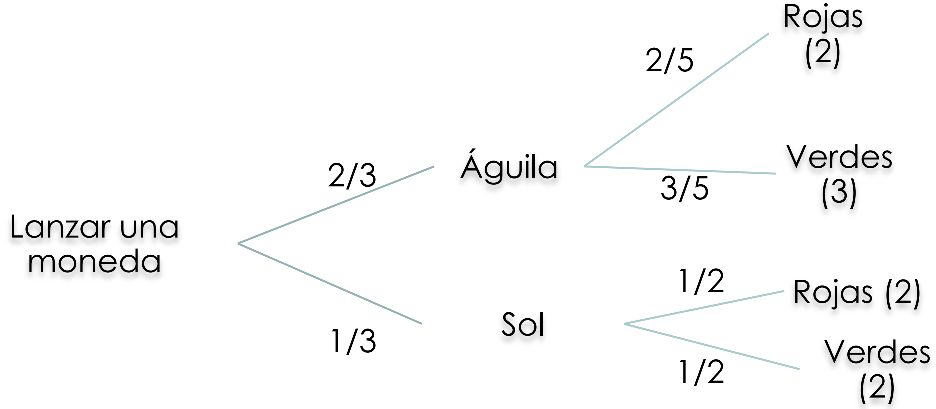


Ejemplo 32

Se lanza una moneda cargada de tal forma que la probabilidad de que el resultado sea águila es 2/3. Si aparece águila, se extrae aleatoriamente una canica de una urna que contiene dos canicas rojas y tres verdes. Si el resultado es sol, se extrae una canica de otra urna la cual contiene dos rojas y dos verdes.

¿Cuál es la probabilidad de extraer una canica roja?

Solución



$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|S)P(S)$$

Ejemplo 33

Una urna que contiene 10 pelotas, de las cuales 5 son negras. Considere el experimento en que primero se escoge al azar un número n del conjunto {1, 2, 3} y después se selecciona una muestra de n pelotas sin reemplazo de la urna. Encuentre la probabilidad de que todas las pelotas en la muestra sean negras.

Teorema de Bayes

Este teorema ayuda a al cálculo de las probabilidades condicionales. En general, para el cálculo de una probabilidad condicional como es el caso de $P(m_j|D)$ cuando se tiene la información de probabilidades condicionales en. $P(D|m_j)$ para j=k se tiene:

$$P\left(m_j|D\right) = \frac{P\left(D|m_j\right)P(m_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(D|m_i)P(m_i)}$$

Con k=# de conjuntos que forman una partición del espacio muestral.

Nota: Observe que $P(m_1|D)$ es diferente de $P(D|m_1)$. La primera corresponde a la probabilidad condicional que se quiere calcular y la segunda, se puede obtener de los datos del problema.

Teorema de Bayes

A diferencia de la Regla de la Probabilidad Total, el Teorema de Bayes permite calcular la probabilidad condicional de uno de los eventos de la partición condicionando el evento inmerso en la partición.

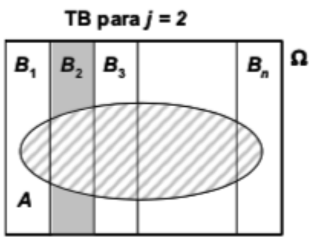
Es importante notar:

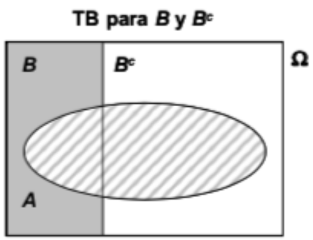
El denominador corresponde a la Probabilidad Total

El numerador siempre aparece como un sumando del denominador

Corolario. Teorema de Bayes para B y B^c.

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B^c)P(B^c)} \text{ si } P(A)>0$$





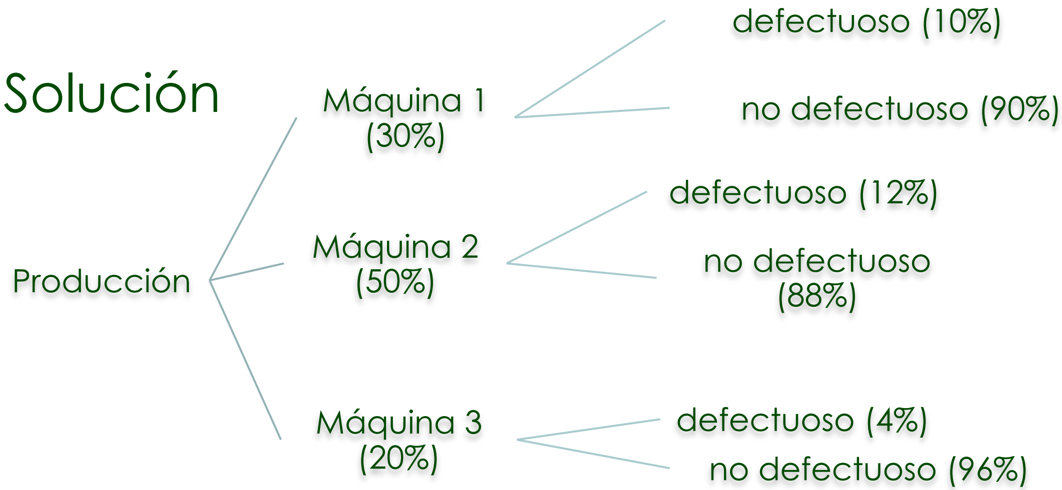
Ejemplo 33

Una compañía elabora sus artículos con tres tipos de maquinaria con diferente tecnología. La producción se distribuye de la siguiente manera: 30% la primera, 50% la segunda y el 20% restante la tercera.

Adicionalmente se conoce que las probabilidades de artículos defectuosos son: 0.1, 0.12 y 0.04 respectivamente.

¿Cuál es la probabilidad de que un objeto tomado al azar haya sido producido por la máquina 1 si se sabe que es defectuoso?

Solución



$$P(m1|D) = \frac{P(m1 \cap D)}{P(D)}$$

Donde:

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(D|m_i)P(m_i)$$

$$P(m1|D) = \frac{(.1) * (.3)}{0.098} = 0.3061$$

Ejemplo 34

Una empresa petrolera planea perforar un pozo en una zona donde no se tiene la seguridad de que exista petróleo. Los geólogos, de acuerdo con su experiencia, creen que la probabilidad de que exista petróleo en la zona es de 0.1. Se tiene la opción de hacer una prueba preliminar antes de tomar una decisión. La prueba no es concluyente, puesto que hay casos en que da resultados erróneos. Si existe petróleo, la prueba es positiva el 90% de las veces, pero aún si no existe petróleo, la prueba es positiva el 20% de las veces. Determine la probabilidad de que exista petróleo dado que la prueba resulta positiva

Solución