Teoría asíntotica

Hemos visto en varios resultados hasta el momento que n, el tamaño de muestra, juega un papel importante. Ahora nos concentraremos en algunos resultados relacionados con distribuciones de muestreo y con el tamaño de muestra (cuando éste último crece y tiende a infinito).

Por ejemplo, hemos visto que $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Observar que conforme $n \to \infty$, $\frac{\sigma^2}{n} \longrightarrow 0$

$$¿\ \bar{X} \xrightarrow[n\to\infty]{} N(\mu, 0)\ ?$$

Para poder profundizar en lo anterior, debemos hablar de "sucesiones de variables aleatorias", las cuales a diferencia de las sucesiones determinísticas, no siempre podemos decir de manera absoluta si convergen o no.

En este caso, analizaremos probabilidades asociadas a ciertas sucesiones de interés, y nos enfocaremos en tres tipos de convergencia:

1) convergencia en probabilidad
2) convergencia en distribución
3) convergencia en media cuadrática (caso particular de la convergencia en media r)

Def. Una sucesión de variables aleatorias es un conjunto infinito y numerable de v.a. $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots\}$ denotado también como $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} = \{X_n\}$

- Al tratarse de v.a., podemos calcular estadísticos $T(\underline{X}) = h(X_1, \dots, X_n)$. Es de especial interés conocer el comportamiento de dichos estadísticos y sus distribuciones de muestreo, las cuales pueden:

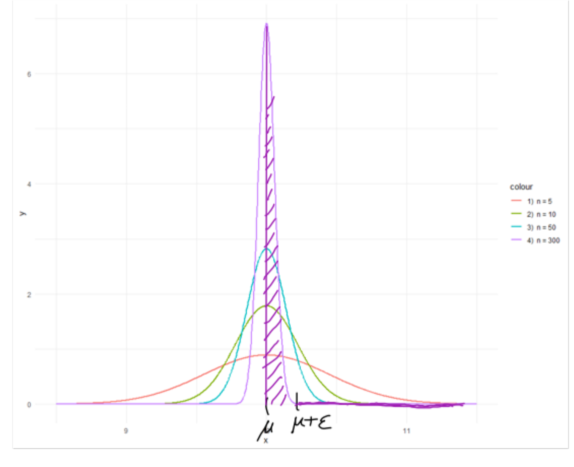
$n \to \infty$ {
- Converger a un valor constante
- Converger a una distribución límite

n grande {
- Ser aproximadas por una distribución asintótica

Caso 1. Convergencia en probabilidad:

Def. Una sucesión de v.a. $\{X_n\}$ converge en probabilidad a la v.a. X si $\forall \varepsilon > 0$

- $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$
- $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$



y lo denotamos $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$

Un ejemplo de sucesión:

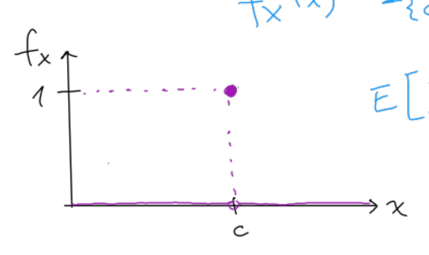
$$\{\bar{X}_n\} = \left\{X_1, \tfrac{1}{2}(X_1+X_2), \tfrac{1}{3}(X_1+X_2+X_3), \dots, \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \dots\right\}$$

- Lo que la convergencia en probabilidad nos dice es que: "la probabilidad de que X_n se acerque cad vez más a X tiende a 1 cuando n crece".

- X puede ser "constante" o puede ser una variable aleatoria

variable aleatoria degenerada } Def. X es una v.a. degenerada si

$$f_X(x) = I_{\{c\}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = c \\ 0 & \text{si } x \neq c \end{cases}$$



$E[X] = c$ $\quad$ $V(X) = 0$

Ejemplo 1: Sea $X_n \sim Exp(n)$. Probar que $X_n \xrightarrow{P} 0$

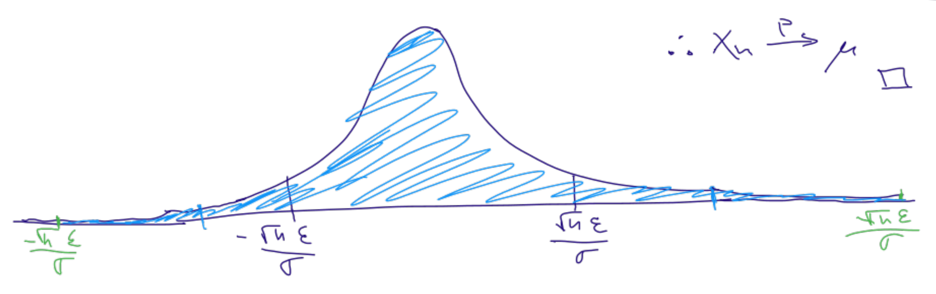
P.D. $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(X_n \geq \varepsilon, \cancel{X_n \leq -\varepsilon})$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(X_n \geq \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} [1 - P(X_n \leq \varepsilon)]$$
$$= \lim_{n\to\infty} [1 - F_{X_n}(\varepsilon)] = \lim_{n\to\infty} e^{-n\varepsilon} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{n\varepsilon}} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$
$$\therefore X_n \xrightarrow{P} 0 \quad \square$$

Ejemplo 2. $\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Probar que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

P.D. $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - \mu| < \varepsilon) = 1$

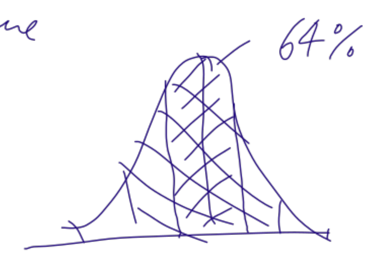
$$P(|X_n - \mu| < \varepsilon) = P(-\varepsilon < X_n - \mu < \varepsilon)$$
$$= P\left(-\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sigma} < \frac{\sqrt{n}(X_n - \mu)}{\sigma} < \frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(-\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sigma} < Z < \frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sigma}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \ \forall \varepsilon > 0 \text{ donde } Z \sim N(0,1)$$
$$\therefore X_n \xrightarrow{P} \mu \quad \square$$



Teorema 1: (desigualdad de Chebyshev)

Sea X una v.a. tal que $E[X] = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$. Entonces, para cualquier $k > 0$ se cumple que

- $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$
- $P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$



Teorema 2: (Desigualdad de Markov)

Sea X una v.a. no negativa y sea $a > 0$ un real. Entonces,

- $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$
- $P(X < a) \geq \frac{E[X]}{a}$

Ejemplo 3 Sea X una v.a. y sea Y_n otra v.a. tal que $E[Y_n] = \frac{1}{n}$ y $V(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Probar que $X_n = X + Y_n \xrightarrow{P} X$

P.D. $P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) = P(|\cancel{X} + Y_n - \cancel{X}| > \varepsilon)$$
$$= P(|Y_n| > \varepsilon) = P(|Y_n - E[Y_n] + E[Y_n]| > \varepsilon) = P(\underbrace{|Y_n - \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n}|}_{|A+B|} > \varepsilon)$$

$Y_n - \frac{1}{n}$, $\varepsilon < |A+B| \leq |A| + |B|$, $\frac{1}{n}$

desig del Δ

$$\geq P(\underbrace{|Y_n - \tfrac{1}{n}|}_{|A|} + \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{|B|} > \varepsilon)$$
$$= P\left(|Y_n - \tfrac{1}{n}| > \varepsilon - \tfrac{1}{n}\right)$$
$$= P\left(|Y_n - \tfrac{1}{n}| > \underbrace{\left(\varepsilon - \tfrac{1}{n}\right) \frac{\sqrt{V(X)}}{\sqrt{V(X)}}}_{k}\right) \quad k\sigma$$

Chebyshev

$$\leq \frac{V(X)}{(\varepsilon - \frac{1}{n})^2} = \frac{\sigma^2}{n(\varepsilon + \frac{1}{n})^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

($V(X) = \frac{\sigma^2}{n}$)

$$\therefore P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n(\varepsilon - \frac{1}{n})^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$0 \leq$
$$\therefore P(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0$$
$$\therefore X_n \xrightarrow{P} X \quad \square$$

Ejemplo 4 Sea X_n una v.a. tal que $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ y $P(X_n = n) = \frac{1}{n^2}$.

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{con prob. } 1 - \frac{1}{n^2} \\ n & \text{con prob. } \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

Probar $X_n \xrightarrow{P} 0$.

P.D. $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$

$$0 \leq P(|X_n| \geq \varepsilon) \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{E[X_n]}{\varepsilon} = (*)$$

Pero $E[X_n] = \sum_{x \in \{0,n\}} x \cdot P(X = x) = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$

$$\therefore (*) = \frac{\frac{1}{n}}{\varepsilon} = \frac{1}{n\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$$
$$\therefore X_n \xrightarrow{P} 0$$

Caso 2. Convergencia en distribución

Def. Una sucesión de v.a. $\{X_n\}$ converge en distribución a la v.a. X si

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

y lo denotamos $X_n \xrightarrow{d} X$ ó $X_n \xrightarrow{D} X$

- En este caso, X también puede ser una constante (v.a. degenerada) o una v.a. "usual".

$f_X(x) = I_{\{c\}}(x)$

$F_X(x) = I_{[c,\infty)}(x)$

$X_n \sim geo\left(\frac{\lambda}{n}\right)$
$Y_n = \frac{1}{n} X_n$
$Y \sim Exp(\lambda)$

} $Y_n \xrightarrow{d} Y$

$\lambda = 1$