Ecuaciones de primer orden
Modelo de Solow-Swan

Sistemas Dinámicos
Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Otoño de 2020

Un modelo simple de crecimiento económico

Ejemplo (Un modelo simple de ingreso nacional)

Consideremos las siguientes premisas para este modelo:

$Y = C + I$, *la descomposición del ingreso Y en consumo C e inversión I;*

$I = kC'$, *la inversión es proporcional a la tasa de cambio del consumo;*

$C = aY + b$, *comportamiento del consumo respecto al ingreso.*

Queremos una solución que nos ayude a ajustar el consumo $C(t)$, y de aquí obtener las funciones de ingreso $Y(t)$ e inversión $I(t)$.

En este caso una sustitución directa nos lleva a la ecuación

$$C + kC' = \frac{C-b}{a}, \qquad \text{o sea } \; C' + \frac{a-1}{ak}C = -\frac{b}{ak},$$

cuya solución general es $C(t) = Me^{(1-a)t/(ak)} + \dfrac{b}{1-a}$, con $M \in \mathbb{R}$.

Un modelo simple de crecimiento económico

Ejemplo (Un modelo simple de crecimiento económico)

Ahora supongamos que se cumplen las siguientes premisas:

- $Y(t) = \sigma K(t)$, *la inversión interna* $Y(t)$ *es proporcional al capital* $K(t)$, *con constante de productividad del capital* $\sigma > 0$;
- $K'(t) = \alpha Y(t) + H(t)$, *el crecimiento del capital se expresa como la suma del ahorro interno* $\alpha Y(t)$, $\alpha > 0$, *y la inversión extranjera* $H(t)$;
- $N'(t) = \rho N(t)$, *la fuerza laboral* $N(t)$ *crece a una tasa constante* $\rho > 0$.

En este caso, con un poco de álgebra llegamos a la ecuación

$$K'(t) - \alpha\sigma K(t) = H(t).$$

La ecuación $N'(t) = \rho N(t)$ se resuelve independientemente, y serviría para calcular el capital o la productividad *per capita*.

Supongamos que el flujo de capital extranjero es una función lineal del tiempo: $H(t) = mt + b$

Un modelo simple de crecimiento económico

De acuerdo a lo visto en clase proponemos la solución general de la ecuación

$$K'(t) - \alpha\sigma K(t) = mt + b$$

como suma de dos términos:
K_h : solución general de la ecuación homogénea
K_p : solución particular propuesta de la ecuación no homogénea.

De lo estudiando al inicio: $K_h(t) = C_1 e^{\alpha\sigma t}$

Ahora, al proponer $K_p = At + B$, como debe ser solución de la ecuación, se deberá cumplir

$$K_p' - \alpha\sigma K_p = mt + b \iff A - \alpha\sigma(At + B) = mt + b$$

De donde

$$A = \frac{-m}{\alpha\sigma}, \qquad B = -\frac{m}{\alpha^2\sigma^2} - \frac{b}{\alpha\sigma}$$

Un modelo simple de crecimiento económico

En conclusión obtendremos la solución general

$$K(t) = C_1 e^{\alpha\sigma t} - \left(\frac{m}{\alpha\sigma} t + \frac{m}{\alpha^2\sigma^2} + \frac{b}{\alpha\sigma}\right)$$

También podemos ahora obtener una fórmula para la función de ingreso, pues $Y = \sigma K$:

$$Y(t) = C_1 \sigma e^{\alpha\sigma t} - \left(\frac{m}{\alpha} t + \frac{m}{\alpha^2\sigma} + \frac{b}{\alpha}\right)$$

y la función de ingreso *per cápita*:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{N(t)} = \frac{C_1 \sigma e^{\alpha\sigma t} - \left(\frac{m}{\alpha} t + \frac{m}{\alpha^2\sigma} + \frac{b}{\alpha}\right)}{N_0 e^{\rho t}}$$

donde hemos usado que $N = e^{\rho t}$, pues se ha supuesto que $N' = \rho N$, y que se tiene una población inicial N_0.

Un modelo simple de crecimiento económico

Aquí cabe mencionar que del modelo se puede inferir un **comportamiento al largo plazo** del ingreso *per cápita*.

Como en la solución anterior el término prevaleciente para t muy grande es

$$\frac{C_1 \sigma e^{\alpha\sigma t}}{N_0 e^{\rho t}} = \frac{C_1 \sigma}{N_0} e^{(\alpha\sigma - \rho)t}$$

entonces el comportamiento del ingreso *per cápita* depende de la relación que guarden

$\alpha\sigma$ el crecimiento económico y

ρ el crecimiento poblacional.

Modelo de crecimiento económico de Solow-Swan

Ejemplo (Descripción de variables, parte 1)

Algunas variables que consideramos en este modelo son las siguientes:
$Y =$ *Producción*, $K =$ *capital*, $L =$ *fuerza laboral*

En general se asume que hay una relación de la producción Y en forma de una función del capital K y la fuerza laboral L, es decir:

$$Y = F(K, L)$$

Además F debe cumplir unas propiedades naturales que a continuación justificamos.

Modelo de crecimiento económico de Solow-Swan

Ejemplo (Propiedades de la función de Producción)

- $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$, *dado que se asume un crecimiento homogéneo,*
- $\partial_K F > 0$, $\partial_L F > 0$, *dado que se asume que al aumentar el capital o la población económicamente activa, la producción crecerá,*
- $\partial_{KK} F < 0$, $\partial_{LL} F < 0$, $\partial_{K,L} F > 0$, *que describen una condición de concavidad,*
- $F(0, L) = F(K, 0) = 0$, *pues sin capital o sin fuerza laboral no hay producción,*
- $\partial_K F(0, 1) \gg 0$, *que dice que aún sin capital hay una propensión a que éste crezca y haga crecer la producción siempre que haya una fuerza laboral no nula.*

La última condición será precisada más adelante.

Modelo de crecimiento económico de Solow-Swan

Se asume un crecimiento de la fuerza laboral a tasa constante n, es decir

$$L' = nL, \qquad n > 0$$

Ejemplo (Descripción de variables, parte 2)

Otras variables en este modelo son:
$S =$ *ahorro,* $I =$ *inversión bruta.*

Las relaciones de estas variables con las anteriores adquieren la forma de las siguientes ecuaciones:

- $S = \sigma Y, \quad$ *es decir que el ahorro es una propoción fija* $\sigma > 0$ *del ingreso.*
- $I = K' + \delta K, \quad$ *lo cual dice que la inversión se descompone como la suma de la ganancia por capital (inversión neta* K'*) más la reposición del capital depreciado, con* $\delta > 0$*.*

Modelo de crecimiento económico de Solow-Swan

Asumimos que se tienen condiciones de equilibrio, es decir $I = S$, por lo que

$$K' + \delta K = \sigma Y$$

Una vez presentadas todas las variables y constantes haremos más precisa la condición antes enunciada como $\partial_K F(0,1) \gg 0$. Proponemos que

$$\partial_K F(0,1) > \frac{\delta + n}{\sigma} > 0$$

Ahora introducimos funciones de *producción y riqueza per cápita*:

$$y = \frac{Y}{L}, \qquad k = \frac{K}{L}$$

y nos proponemos hacer una descripción de la función $k = k(t)$ en el largo plazo.

Modelo de crecimiento económico de Solow-Swan

Haremos a continuación una deducción de la ecuación que cumple la función $k = k(t)$, usando las condiciones antes descritas.

Al final de hecho nos enfocaremos en un ejemplo concreto de función de producción, llamada de Cobb-Douglas, y que tiene la forma

$$F(K, L) = aK^{\alpha}L^{\beta}, \qquad 0 < \alpha, \beta < 1, \quad a > 0.$$

Por homogeneidad se debe cumplir $\beta = 1 - \alpha$:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \quad \Leftrightarrow \quad a(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} = \lambda aK^{\alpha}L^{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^{\alpha+\beta} = \lambda.$$

Notemos ahora que

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(k, 1)$$

Modelo de crecimiento económico de Solow-Swan

Definiendo $f(k) = F(k, 1)$ tendremos entonces $y = f(k)$.

Notemos además que f cumple:

$$f' > 0, \quad f'' < 0, \quad f'(0) > \frac{\delta + n}{\sigma}, \quad f(0) = 0$$

Es decir que es **cóncava, creciente y pasa por el orígen**

Ahora observemos que

$$\frac{K'}{K} = \frac{\sigma Y - \delta K}{K} = \frac{\sigma Y}{L}\left(\frac{L}{K}\right) - \delta = \frac{\sigma f(k)}{k} - \delta$$

Modelo de crecimiento económico de Solow-Swan

Por otro lado

$$\frac{k'}{k} = \frac{\left(\frac{K}{L}\right)'}{\frac{K}{L}} = \frac{\frac{LK'-KL'}{L^2}}{\frac{K}{L}} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L} \quad \text{por tanto} \quad \frac{K'}{K} = \frac{k'}{k} + n$$

En conclusión

$$k' = \sigma f(k) - (n+\delta)k$$

Recordando que $f(k) = F(k,1) = ak^{\alpha}$ obtendremos

$$k' = \sigma a k^{\alpha} - (n+\delta)k$$

que es una ecuación de tipo Bernoulli dada por

$$k' + (n+\delta)k = \sigma a k^{\alpha}$$

Modelo de crecimiento económico de Solow-Swan
Solución Analítica

Para hallar la solución a esta ecuación seguimos el procedimiento usual: escribiendo

$$k^{-\alpha}k' + (n+\delta)k^{1-\alpha} = \sigma a \qquad \text{se própone } \ u = k^{1-\alpha}$$

y como $u' = (1-\alpha)k^{-\alpha}k'$ obtenemos la nueva ecuación en u:

$$u' + (1-\alpha)(n+\delta)u = (1-\alpha)\sigma a$$

La solución general de esta ecuación es

$$u(t) = Ce^{-\mu t} + \frac{\sigma a}{n+\delta} \quad \text{donde } \ \mu = (1-\alpha)(n+\delta)$$

Modelo de crecimiento económico de Solow-Swan
Solución Analítica

De vuelta a la variable k obtenemos:

$$k(t) = \left(Ce^{-\mu t} + \frac{\sigma a}{n+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

De este modo, en el largo plazo el capital *per cápita* se aproxima al punto estacionario

$$k^* = \left(\frac{\sigma a}{n+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Modelo de crecimiento económico de Solow-Swan
Análisis cualitativo

Para este análisis no necesitamos la función de producción de Cobb-Douglas sino sólo las propiedades generales que ya habíamos descrito antes.

Escribimos la ecuación en la forma de sistema dinámico autónomo:

$$k' = \sigma f(k) - (n+\delta)k$$

Notamos ahora que los puntos estacionarios corresponden a las soluciones de $\sigma f(k) = (n+\delta)k$

Como $f(0) = 0$ entonces una solución es $k_1 = 0$. Pero en general cualquier otra solución k_2 debe cumplir:

$$f(k_2) = \frac{(n+\delta)}{\sigma} k_2$$

Sin conocer la gráfica de f, esta ecuación nos pide hallar la intersección de f con una recta.

Llamemos $g(k) = \dfrac{(n+\delta)}{\sigma} k$ a la función que representa a dicha recta.

Ahora recuérdese la suposición $f'(0) > \dfrac{(n+\delta)}{\sigma} = g'(0)$, que ahora nos dice que f crece más rápido que g en $k = 0$.

Como además f es cóncava, su gráfica debe intersecar a la gráfica de g en algún otro punto. (Ver Figura)

Modelo de crecimiento económico de Solow-Swan
Análisis cualitativo

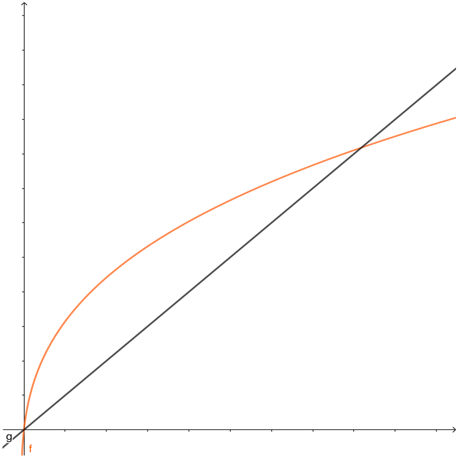

Figura: La intersección de una curva cóncava con una recta

Modelo de crecimiento económico de Solow-Swan
Análisis cualitativo

Llamemos $g(k) = \dfrac{(n+\delta)}{\sigma} k$ a la función que representa a dicha recta. Ahora recuérdese la suposición $f'(0) > \dfrac{(n+\delta)}{\sigma} = g'(0)$, que ahora nos dice que f crece más rápido que g en $k = 0$. Como además f es cóncava, su gráfica debe intersecar a la gráfica de g en algún otro punto. (Ver Figura)

En conclusión la gráfica de la resta $f - g$ tiene otra intersección con el eje horizontal. (Ver figura)

Modelo de crecimiento económico de Solow-Swan
Análisis cualitativo

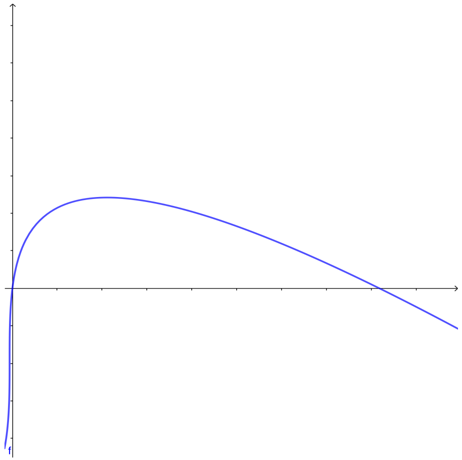

Figura: La gráfica de la resta $f - g$. De aquí se puede dar un esquema cualitativo de $k(t)$

En el caso de la función de Cobb-Douglas $F(K, L) = aK^{\alpha}L^{(1-\alpha)}$ se tiene $f(k) = ak^{\alpha}$ y los puntos estacionarios se hallan solucionando

$$k^{\alpha}(\sigma a - k^{(1-\alpha)}(n + \delta) = 0$$

lo cual lleva a $k_1 = 0$, $k_2 = \left(\dfrac{a\sigma}{n + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

El punto k_2 será un punto estacionario.