Fundamentos de Cálculo - Economía III

Alberto Ramírez de Aguilar

ITAM

Otoño 2020

Funciones de Varias Variables

- **Definición**: El conjunto $\mathbb{R}^2_+$ se define como:

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y)|x \geq 0, y \geq 0\}.$$

- **Definición**: Una función $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es una correspondencia en donde a cada elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ se le asigna un **único** elemento $z \in \mathbb{R}$. Usualmente, esta correspondencia se denota:

$$f(x, y) = z.$$

- Ejemplos:

$$f(x, y) = xy \qquad f(x, y) = e^x + y.$$

Funciones de Varias Variables: Curvas de Nivel

- **Definición**: Dada una función f, definimos la curva de nivel $k \in \mathbb{R}$ como sigue:

$$C_k = \{(x, y) | f(x, y) = k\}.$$

- Consideremos a la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.
  - Cual es la curva de nivel k?
  - Graficar en el plano cartesiano para distintos valores de k.

Derivada

- Consideremos una función $y = f(x)$. Una derivada captura el cambio en el valor de la función cuando movemos **marginalmente** a la variable dependiente.

- Formalmente, una derivada se define como:

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Si $f'(x_0) > 0$ esto significa que ante un aumento en x de x_0 a x_1 ($x_0 < x_1$) el valor de la función f aumentará.
    - Otra manera de decir esto es que f es creciente en x_0.

Derivadas Parciales

- **Definicion**: Dada una función $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ definimos la derivada parcial de f evaluada en (x_0, y_0) como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- La derivada parcial **captura el cambio marginal en f si solamente se mueve marginalmente alguna de las variables independientes, manteniendo al resto constante**.

Derivadas Parciales

- **Definicion**: El gradiente de una función en el punto (x_0, y_0), se define como:

$$\triangledown f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

- Graficamente, el gradiente de una función nos "apunta" la direccion de crecimiento de una función.
- **Teorema**: El gradiente de una función es perpendicular a las curvas de nivel.

Derivadas Parciales: Ejemplos

- Para las siguientes funciones, dar una idea de como se ve una curva de nivel, encontrar el gradiente de la función y graficar.

  1. $f(x, y) = x^2 + y^2$.
  2. $f(x, y) = x + y$.
  3. $f(x, y) = xy$.

Diferencial Total de una Función

- El diferencial total de una función sirve para aproximar el cambio en f si cambiamos marginalmente a **todas** las variables que afectan a la función.

- **Teorema**: Dada una función f, el diferencial total de f evaluado en el punto (x_0, y_0) es:
$$\Delta f(x_0, y_0) = \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$
donde $\Delta x = x_1 - x_0$ y $\Delta y = y_1 - y_0$.

Diferencial Total de una Función

- **Ejercicio**: Dar el valor del diferencial total para $f(x, y) = x^2 + y^2$ si inicialmente $(x_0, y_0) = (3, 1)$ y $\Delta x = 0.5$ mientras que $\Delta y = 1$.

- **Ejercicio**: Considerar $f(x, y) = xy^2$ y que inicialmente se esta en el punto $(2, 1)$. Cuánto debe cambiar y si queremos mover x en una unidad y mantener el valor de f constante?

Contorno Superior de una Función

- **Definición**: El contorno superior CS_k de f esta dado por:

$$CS_k = \{(x, y) | f(x, y) \geq k\}.$$

- Notemos que si conocemos el mapa de curvas de nivel de f y conocemos el valor del gradiente de la función, es muy fácil calcular CS_k.
  - Calcular el contorno superior para $f(x, y) = xy$.
  - Calcular el contorno superior para $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Convexidad

- **Definición**: Decimos que CS_k es convexo si para todo $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in CS_k$ y para toda $\alpha \in [0, 1]$ se tiene que:

$$(\alpha x_0 + (1 - \alpha)x_1, \alpha y_0 + (1 - \alpha)y_1) \in CS_k.$$

- En los ejemplos anteriores, los contornos superiores eran convexos?

Convexidad

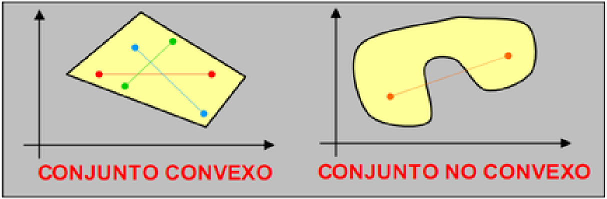

Figure: Ejemplo de un Conjunto Convexo y No Convexo.

Outline

Método de Kuhn-Tucker

- El Método de Kuhn-Tucker es una herramienta muy importante que sirve para resolver problemas de optimización con restricciones.
- Supongamos que buscamos optimizar una función $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ que depende de n variables de decisión y de q parámetros.
    - Buscamos optimizar f sujeto a k restricciones de igualdad $h_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$.
    - De igual manera, consideramos m restricciones de desigualdad $g_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$

Método de Kuhn-Tucker

- El problema que buscamos resolver es el siguiente:

$$\max_{\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}} \;\; f(x_1,x_2,\ldots,x_n,p_1,p_2,\ldots,p_q) \;\text{ sujeto a}$$

$$h_i(x_1,x_2,\ldots,x_n,p_1,p_2,\ldots,p_q) = 0 \text{ para toda } i = 1,\ldots,k,$$

$$g_j(x_1,x_2,\ldots,x_n,p_1,p_2,\ldots,p_q) \geq 0 \text{ para toda } j = 1,\ldots,m.$$

Lagrangeano del Problema

- Para resolver este problema, haremos uso de una función auxiliar llamada **Lagrangeano del Problema**.
  - Para poder construir dicha función, es necesario hacer uso de variables auxiliares conocidas como **multiplicadores de Lagrange**.
  - Cada restricción de igualdad estará asociada a un multiplicador λ_i.
  - Por otro lado, cada restricción de desigualdad estará asociada a un multiplicador μ_j.
- El Lagrangeano del problema es el siguiente:

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_q, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_m) =$$

$$f(x_1, \ldots, p_q) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i(x_1, \ldots, p_q) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(x_1, \ldots, p_q).$$

Condiciones de Primer Orden

- Para poder resolver el problema tenemos $n + k + m$ incógnitas: las n variables $x_1, \ldots, x_n$, el valor de los k multiplicadores de Lagrange para las restricciones de igualdad y los m multiplicadores de Lagrange para las restricciones de desigualdad.
  - Por lo tanto, es necesario plantear $n + m + k$ ecuaciones para poder resolver el problema.
  - A estas ecuaciones se le conocen como **Condiciones de Primer Orden**.
  - Estas condiciones están relacionadas con las derivadas de la función $\mathcal{L}$ con respecto a cada variable de decisión y con respecto a cada multiplicador de Lagrange.

Condiciones de Primer Orden

- Hay tres tipos de condiciones de primer orden:
  1. Con respecto a cada variable de decisión x_l:
  $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_l}(x_1^\star, \ldots, x_n^\star, \ldots, p_q, \lambda_1^\star, \ldots, \mu_m^\star) = 0.$$
  2. Con respecto a cada multiplicador de Lagrange λ_i:
  $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i}(x_1^\star, \ldots, x_n^\star, \ldots, p_q, \lambda_1^\star, \ldots, \mu_m^\star) = 0.$$
  3. Con respecto a los multiplicadores de desigualdad μ_j debemos pedir tres condiciones, llamadas **Condiciones de Holgura**:
  $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_j}(x_1^\star, \ldots, x_n^\star, \ldots, p_q, \lambda_1^\star, \ldots, \mu_m^\star) \geq 0,$$
  $$\mu_j^\star \geq 0, \quad \mu_j^\star h_j(x_1^\star, \ldots, x_n^\star, \ldots, p_q, \lambda_1^\star, \ldots, \mu_m^\star) = 0.$$

Resolver el Problema

- Una vez que se han planteado las condiciones de primer orden, ahora es necesario encontrar la solución del problema de maximización.
- Para hacer esto formalmente, es necesario llevar a cabo un analisis de casos posibles.
  - Recordemos que una de las condiciones de holgura es:

$$\mu_j^\star h_j(x_1^\star, \ldots, x_n^\star, \ldots, p_q, \lambda_1^\star, \ldots, \mu_m^\star) = 0.$$

  - Esto implica que en el óptimo al menos uno de los elementos de la multiplicación deben ser igual a cero.
  - Por lo tanto, el análsis de casos requiere analizar la solución en el caso de que $\mu_j = 0$ y hacer otro caso si $\mu_j > 0$.
- Nota: resolver un problema de maximización por casos puede llegar a ser muy tedioso (ver el ejemplo que haremos en clase), por lo que resulta muy conveniente hacer un análisis gráfico antes de resolver el problema!

Solución del Problema

- Sean $(x^\star, \lambda^\star, \mu^\star)$ las soluciones del problema de maximización encontrados con el método de Kuhn-Tucker. Usualmente a las variables de decisión $x^\star$ óptimas las denotamos como:

$$x^\star = x^\star(p_1, p_2, \ldots, p_q),$$

  para hacer explícita la dependencia de la solución óptima del problema de los parámetros del modelo.

- **Definición** La función valor de cualquier problema de maximización se refiere a la función objetivo evaluado en las variables de decisión óptimas:

$$V(p_1, \ldots, p_q) = f\left(x^\star(p_1, \ldots, p_q), p_1, \ldots, p_q\right).$$

Teorema de la Envolvente

- Qué pasa con la función objetivo a medida que un parámetro p_i cambia?

- El **Teorema de la Envolvente** nos da una respuesta a esta pregunta: el cambio en V (la función objetivo evaluada en el óptimo) coincide con el cambio en la función Lagrangeana evaluada en la solución óptima.

- **Teorema**: Sean $(x^\star, \lambda^\star, \mu^\star)$ la solución de algún problema de maximización con parámetros $(p_1, \ldots, p_q)$. Entonces:

$$\frac{\partial V}{\partial p_i}(p_1, \ldots, p_q) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}(x_1^\star, \ldots, x_n^\star, p_1, \ldots, p_q, \lambda_1^\star, \ldots, \mu_m^\star)$$