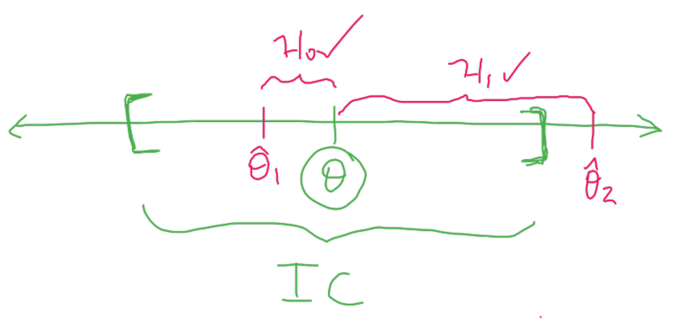
Equivalencia entre PH e IC

$X_1, \dots, X_n$ m.a. de $f_X(x;\theta)$

$Q(\underline{X}, \theta)$

$I_{(1-\alpha)}$ un IC al $(1-\alpha)100\%$



$\mathcal{H}_0 : \boxed{\theta = \theta_0}$ vs $\mathcal{H}_1 : \theta \neq \theta_0$

$$RR = I^c_{(1-\alpha)}$$

y el estadístico de prueba

$$Q(\underline{X}, \theta_0) = T(\underline{X})$$

Pruebas de hipótesis para normales

$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

① Contrastar μ con σ^2 conocida

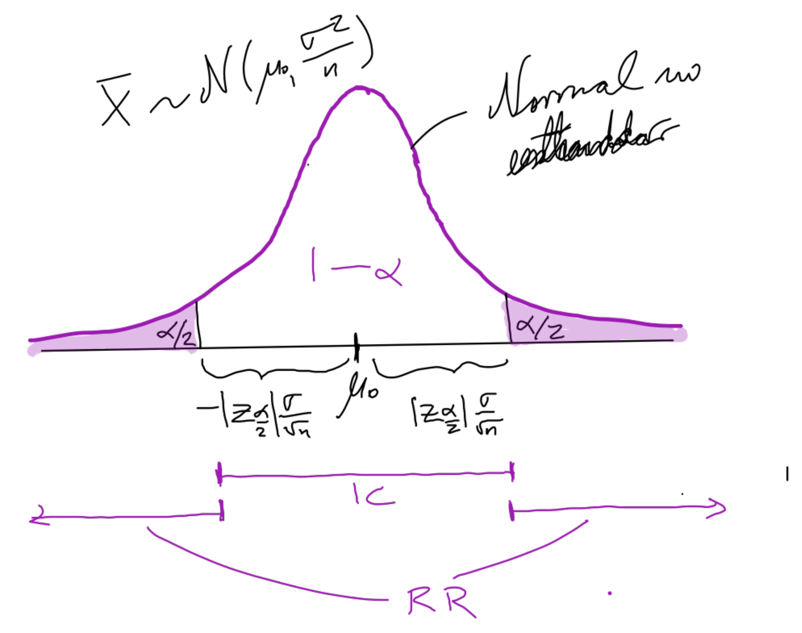
$\boxed{A}$ $\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0$ vs $\mathcal{H}_1 : \mu \neq \mu_0$

Tenemos la cantidad pivotal $Q(\underline{X}, \mu) = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$

$$T(\underline{X}) = Q(\underline{X}, \mu_0) = Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \underset{\text{Bajo } \mathcal{H}_0}{\sim} N(0,1)$$

$$I_{(1-\alpha)} = \left[\bar{X} \pm |z_{\frac{\alpha}{2}}| \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

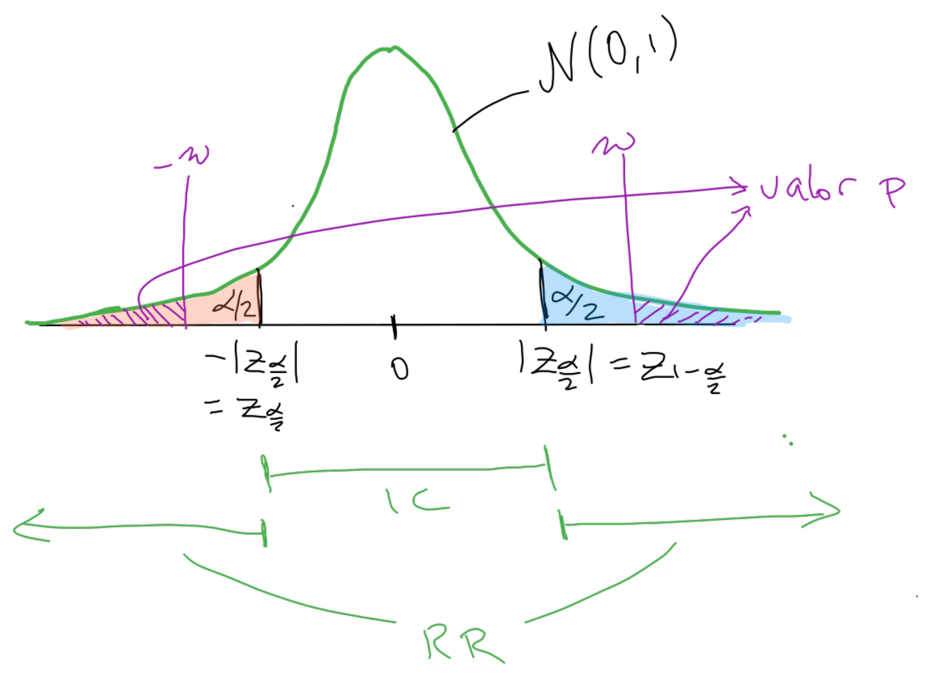
$$\Rightarrow \bar{X} - |z_{\frac{\alpha}{2}}| \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \leq \bar{X} + |z_{\frac{\alpha}{2}}| \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



$$\Rightarrow -|z_{\frac{\alpha}{2}}| \leq \underbrace{\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma}}_{T(\underline{X})} \leq |z_{\frac{\alpha}{2}}|$$

$$\therefore RR = \left\{\underline{X} : Z \geq |z_{\frac{\alpha}{2}}|,\ Z \leq -|z_{\frac{\alpha}{2}}|\right\}$$

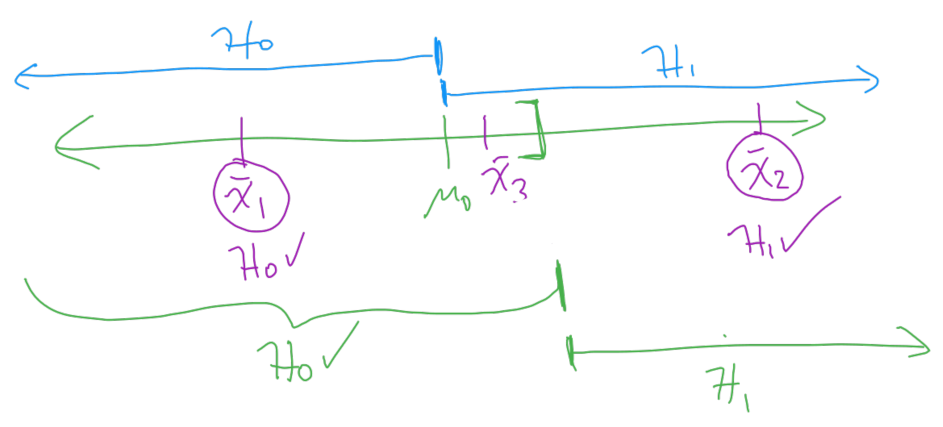
$$= \left\{\underline{X} : |Z| \geq |z_{\frac{\alpha}{2}}|\right\}$$



Si ahora observamos una muestra $\underline{x}$, podemos evaluar $T(\underline{x}) = w$, entonces

$$p = P(|Z| \geq |w|)$$
$$= 2P(Z \leq -w)$$
$$= 2P(Z \geq w)$$

$\boxed{B}$ $\mathcal{H}_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $\mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0$

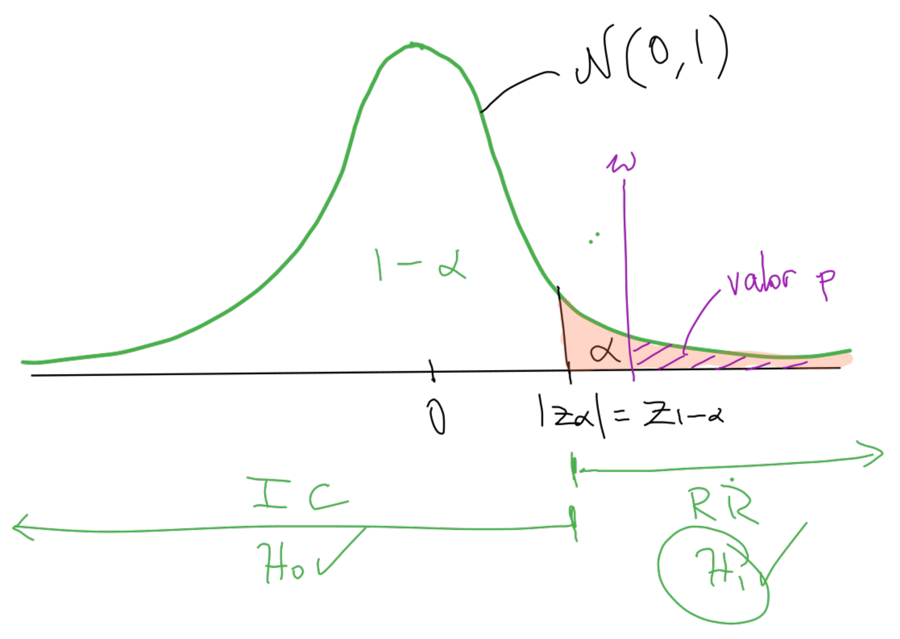


Mismo estadístico que en $\boxed{A}$

$$T(\underline{X}) = Q(\underline{X}, \mu_0) = Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma}$$

Como $\mathcal{H}_0$ es compuesta $(\mu \leq \mu_0)$, requerimos un IC unilateral y de la mano una PH de una sola cola.

$$I_{(1-\alpha)} = \left(-\infty, \bar{X} + |z_{\frac{\alpha}{2}}| \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

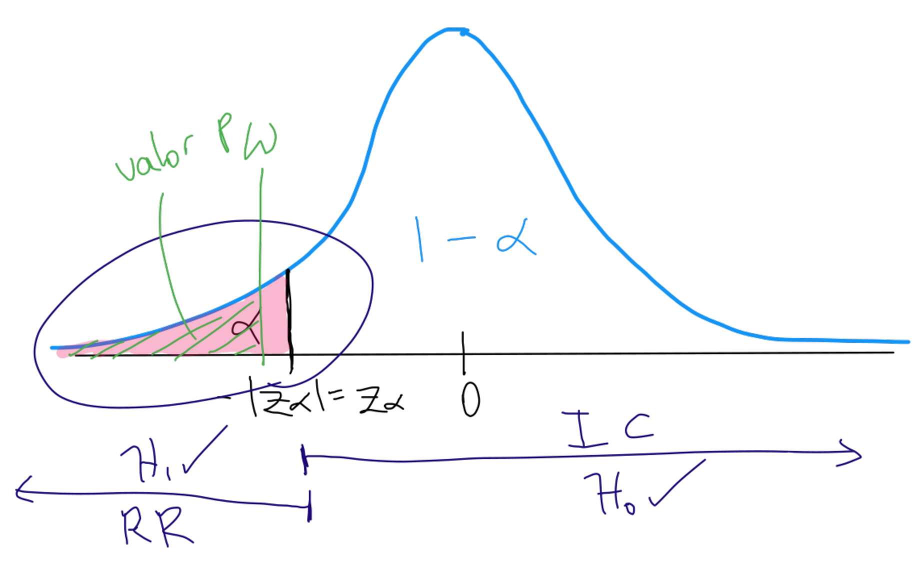


$RR = \{\underline{X} : Z \geq |z_\alpha|\}$

$T(\underline{x}) = w$

$p = P(Z \geq w)$

$\boxed{C}$ $\mathcal{H}_0 : \mu \geq \mu_0$ vs $\mathcal{H}_1 : \mu < \mu_0$



$$I_{(1-\alpha)} = \left[\bar{X} - |z_\alpha| \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$$

$$RR = \{\underline{X} : Z \leq |z_\alpha|\}$$

$$T(x) = w$$

$$P(Z \leq w)$$

Pruebas de hipótesis para muestras grandes

Sea $\{\hat{\theta}_n\}$ una sucesión de estimadores de θ.

Se quiere probar
1) $\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0$ vs $\mathcal{H}_1: \theta \neq \theta_0$
2) $\mathcal{H}_0: \theta \leq \theta_0$ vs $\mathcal{H}_1: \theta > \theta_0$
3) $\mathcal{H}_0: \theta \geq \theta_0$ vs $\mathcal{H}_1: \theta < \theta_0$

Sea el estadístico $Z_0 = \dfrac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\sqrt{V(\hat{\theta}_n)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$ $\boxed{\text{TCL}}$

Entonces,

la RR =
1) $\{\underline{X} : |Z_0| \geq |z_{\frac{\alpha}{2}}|\}$
2) $\{\underline{X} : Z \geq |z_\alpha|\}$
3) $\{\underline{X} : Z \leq |z_\alpha|\}$

Recordar que $V(\hat{\theta}_n)$ se puede estimar con la propiedad de invarianza

---

Ejemplo

Un politólogo cree que la fracción de morenistas a favor de la pena de muerte es MENOR que la proporción de panistas a favor de la pena de muerte. A partir de una muestra de 200 morenistas y de 200 panistas, se observaron 42 morenistas y 58 panistas a favor de la pena de muerte.

¿Existe evidencia estadística para probar lo que el politólogo cree? Usar alpha = 0.05. ¿Cuál es el valor p?

Sea $\left.\begin{array}{l} X_i \sim Ber(p_{MOR}) \\ Y_j \sim Ber(p_{PAN}) \end{array}\right\}$ indep. $\quad$ $i = 1, \dots, 200$ morenistas; $j = 1, \dots, 200$ panistas

Sabemos que $\hat{p}_{MOR} = \frac{1}{200}\sum X_i$

$\hat{p}_{PAN} = \frac{1}{200}\sum Y_j$

Nos interesa el contraste

$\mathcal{H}_0: p_{MOR} \leq p_{PAN}$ vs $\mathcal{H}_1: p_{MOR} > p_{PAN}$

Sea $\theta = p_{MOR} - p_{PAN}$

$\mathcal{H}_0: \theta \leq 0 = \theta_0$ vs $\mathcal{H}_1: \theta > 0 = \theta_0$

$(p_{MOR} - p_{PAN} \leq 0)$ $\quad$ $(p_{MOR} - p_{PAN} > 0)$

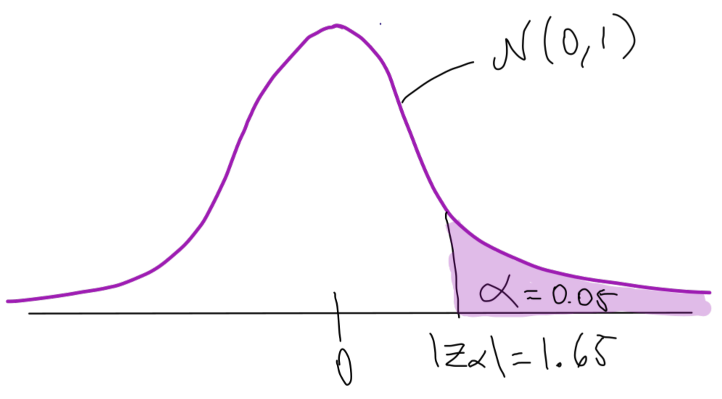
$V(X_i) = p_{MOR}(1 - p_{MOR})$

$\Rightarrow V(\hat{p}_{MOR}) = V\left(\frac{1}{200}\sum X_i\right) = \dfrac{p_{MOR}(1-\hat{p}_{MOR})}{200}$

$V(\hat{\theta}_n) = V(\hat{p}_{MOR} - \hat{p}_{PAN}) = V(\hat{p}_{MOR}) + V(\hat{p}_{PAN})$

$Z = T(\underline{X}, \underline{Y}) = \dfrac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\sqrt{V(\hat{\theta}_n)}}$ $\quad$ $\theta_0 = 0$ bajo $\mathcal{H}_0$

$= \dfrac{(\hat{p}_{MOR} - \hat{p}_{PAN}) - (p_{MOR} - p_{PAN})}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_{MOR}(1-\hat{p}_{MOR})}{200} + \dfrac{\hat{p}_{PAN}(1-\hat{p}_{PAN})}{200}}} \overset{\text{TCL}}{\underset{\text{aprox}}{\sim}} \mathcal{N}(0,1)$



$RR = \{\underline{X} : Z \geq |z_\alpha|\}$

Como $\alpha = 5\%$, $|z_\alpha| = 1.64$

$\therefore RR = \{\underline{X} : Z \geq 1.64\}$

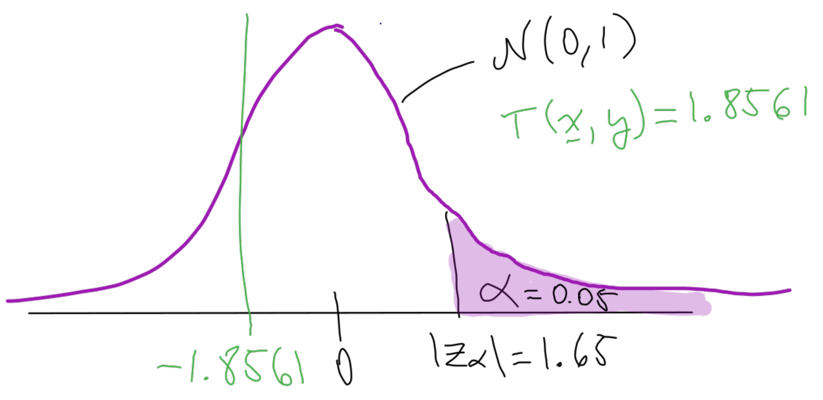
Con todo lo anterior, podemos hacer el contraste

$\hat{p}_{MOR} = \frac{1}{200}\sum X_i = \frac{42}{200} = 0.21$ $\quad$ $\theta = p_{MOR} - p_{PA}$

$\hat{p}_{PAN} = \frac{1}{200}\sum Y_j = \frac{58}{200} = 0.29$

$\therefore T(\underline{x}, \underline{y}) = \dfrac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\sqrt{V(\hat{\theta}_n)}} = \dfrac{(0.21 - 0.29) - 0}{0.0431} =$

$= \dfrac{-0.08}{0.0431} = -1.8561 < 1.64$



$\therefore$ Caemos fuera de la RR

$\therefore$ no rechazamos $\mathcal{H}_0$

$\therefore$ $p_{MOR} \leq p_{PAN}$
$\quad 42 \quad\quad 58$

$p = P(Z \geq -1.8561) = 0.96$

$\therefore$ p es MUY grande (más grande que $\alpha = 0.05$)

$\therefore$ no existe evidencia muestral que contradiga a $\mathcal{H}_0$.