Nota sobre el método de Kuhn-Tucker

Diego A. Domínguez

Instituto Tecnológico Autónomo de México

El método de Khun-Tucker sirve para resolver problemas de maximización o minimización bajo restricciones de igualdad o desigualdad tal que todas las restricciones se tienen que cumplir simultáneamente. En esta nota explicaremos a manera de receta el uso del método de Kuhn-Tucker suponiendo que en los problemas que estudiaremos se cumplen los supuestos necesarios para que se pueda utilizar este método.

1. Notación

Sea $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ una **función objetivo** que queremos maximizar o minimizar que depende de ciertas **variables de decisión** $x \in \mathbb{R}^N$ de las cuales podemos escoger su valor, y ciertos **parámetros** $p \in \mathbb{R}^M$ cuyo valor está dado exógenamente. Los valores que pueden tomar las variables de decisión están sujetos a una lista de L restricciones de igualdad $\{g_l : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}\}_{l=1}^{L}$ escritas de la forma $g_l(x, p) = 0$ y K restricciones de desigualdad $\{g_k : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}\}_{k=1}^{K}$ escritas de la forma $h_k(x, p) \geq 0$.

Para resolver un problema de optimización de esta clase por el método de Kuhn-Tucker es necesario llevar a cabo tres pasos. El primer paso es construir el lagrangeano del problema; el segundo paso es obtener las condiciones de primer orden y encontrar todos los puntos que las resuelven; el tercer paso es evaluar la función objetivo en cada uno de los puntos que resuelven las condiciones de primer orden y ver en cual(es) de todos se obtiene el valor óptimo.

El método aplicado a problemas de maximización difiere del método aplicado a problemas de minimización, la construcción del lagrangeano y las condiciones de primer orden serán distintas para cada una de estas aplicaciones. A continuación detallamos los tres pasos para cada tipo de problema.

2. Problemas de maximización

Para un problema de maximización el Lagrangeano correspondiente al problema es una función $\mathcal{L} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ que depende de las variables de decisión $x \in \mathbb{R}^N$, los parámetros $p \in \mathbb{R}^M$, los multiplicadores de las restricciones de igualdad $\lambda \in \mathbb{R}^L$, y los multiplicadores de las restricciones de desigualdad $\mu \in \mathbb{R}^K$ de la siguiente forma: Para cada restricción de igualdad existe un multiplicador $\lambda_l \in \mathbb{R}$ y para cada restricción de desigualdad existe un multiplicador $\mu_k \in \mathbb{R}$ tal que el lagrangeano es la suma de la función objetivo más cada restricción multiplicada por su multiplicador.

2.1. Construcción del Lagrangeano

Dado el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{máx}_{x\in\mathbb{R}^N} & f(x,p) \\ \text{sujeto a :} & \\ & g_1(x,p) = 0, \ \ldots \ , g_L(x,p) = 0 \\ & h_1(x,p) \geq 0, \ \ldots \ , h_K(x,p) \geq 0 \end{array}$$

el lagrangeano correspondiente al problema es:

$$\mathcal{L}(x,p,\lambda,\mu) = f(x,p) + \sum_{l=1}^{L} \lambda_m g_m(x,p) + \sum_{k=1}^{K} \mu_k h_k(x,p)$$

2.2. Condiciones de primer orden

Las condiciones de primer orden del problema de maximización las podemos agrupar en tres clases: (i) la derivada parcial del lagrangeano respecto a cada una de las variables de decisión deberá ser igual a cero; (ii) la derivada del lagrangeano respecto a cada uno de los multiplicadores de las restricciones de igualdad deberá ser igual a cero; (iii) la derivada del lagrangeano respecto a cada uno de los multiplicadores de las restricciones de desigualdad deberá ser mayor o igual a cero (note que estas condiciones implican que cada restricción de desigualdad se cumple), cada uno de dichos multiplicadores deberá ser mayor o igual a cero y para cada restricción al menos una de estas dos condiciones deberá cumplirse con igual.

Un punto $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^K$ satisface las condiciones de primer orden del problema si:

(i) Para cada $n = 1, ..., N$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(x^*, p, \lambda^*, \mu^*) = 0$

(ii) Para cada $l = 1, ..., L$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k}(x^*, p, \lambda^*, \mu^*) = 0$

(iii) Para cada $k = 1, ..., K$,

  a. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_k}(x^*, p, \lambda^*, \mu^*) \geq 0$
  b. $\mu_k^* \geq 0$
  c. $\mu_k^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_k}(x^*, p, \lambda^*, \mu^*) = 0$

2.3. Evaluación de la función objetivo

Finalmente, una vez que encontramos todos los puntos que satisfacen las condiciones de primer orden es necesario evaluar la función objetivo en cada uno de ellos, y los maximizadores del problema son aquellos puntos para los cuales la función objetivo tome el valor mayor. Es importante que al encontrar un maximizador no sólo encontramos los valores óptimos de las variables de decisión sino que además encontramos valores de los multiplicadores, en economía estos valores tienen cierta interpretación que estudiaremos más adelante.

En la mayoría de los problemas existirá un solo punto que satisface las condiciones de primer orden. Sin embargo, también encontraremos problemas en los que haya múltiples puntos que satisfacen las condiciones de primer orden, y además que en muchos de estos puntos la función tome el mismo valor; en estos casos existen múltiples maximizadores de la función pero el valor máximo de la función es único.

3. Problemas de minimización

Para un problema de minimización el Lagrangeano correspondiente al problema es una función $\mathcal{L} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ que construimos de la siguiente forma: Para cada restricción de igualdad existe un multiplicador $\lambda_l \in \mathbb{R}$ y para cada restricción de desigualdad existe un multiplicador $\mu_k \in \mathbb{R}$ tal que el lagrangeano es la suma de la función objetivo más cada restricción de igualdad multiplicada por su multiplicador menos cada restricción de desigualdad multiplicada por su multiplicador.

3.1. Construcción del Lagrangeano

Dado el problema:

$$\begin{array}{lc} \text{mín}_{x\in\mathbb{R}^N} & f(x,p) \\ \text{sujeto a :} & \\ & g_1(x,p)=0, \ \ldots \ , g_L(x,p)=0 \\ & h_1(x,p)\geq 0, \ \ldots \ , h_K(x,p)\geq 0 \end{array}$$

el lagrangeano correspondiente al problema es:

$$\mathcal{L}(x,p,\lambda,\mu) = f(x,p) + \sum_{l=1}^{L} \lambda_m g_m(x,p) - \sum_{k=1}^{K} \mu_k h_k(x,p)$$

3.2. Condiciones de primer orden

Las condiciones de primer orden del problema de minimización las podemos agrupar en tres clases: (i) la derivada parcial del lagrangeano respecto a cada una de las variables de decisión deberá ser igual a cero; (ii) la derivada del lagrangeano respecto a cada uno de los multiplicadores de las restricciones de igualdad deberá ser igual a cero; (iii) la derivada del lagrangeano respecto a cada uno de los multiplicadores de las restricciones de desigualdad deberá ser menor o igual a cero (note que estas condiciones implican que cada restricción de desigualdad se cumple), cada uno de dichos multiplicadores deberá ser mayor o igual a cero y para cada restricción al menos una de estas dos condiciones deberá cumplirse con igual.

Un punto $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^K$ satisface las condiciones de primer orden del problema si:

(i) Para cada $n = 1, ..., N$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(x^*, p, \lambda^*, \mu^*) = 0$

(ii) Para cada $l = 1, ..., L$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k}(x^*, p, \lambda^*, \mu^*) = 0$

(iii) Para cada $k = 1, ..., K$,

   a. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_k}(x^*, p, \lambda^*, \mu^*) \leq 0$
   b. $\mu_k^* \geq 0$
   c. $\mu_k^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_k}(x^*, p, \lambda^*, \mu^*) = 0$

3.3. Evaluación de la función objetivo

Finalmente, una vez que encontramos todos los puntos que satisfacen las condiciones de primer orden es necesario evaluar la función objetivo en cada uno de ellos y los minimizadores del problema son aquellos puntos para los cuales la función objetivo tome el valor menor. Al igual que en problemas de maximización el valor de los multiplicadores tienen cierta interpretación que estudiaremos más adelante.

Al igual que en problemas de maximización normalmente encontraremos un único punto que satisface las condiciones de primer orden, pero también encontraremos problemas con múltiples minimizadores pero el valor mínimo de la función siempre es único.