VI. Distribuciones Multivariadas

M.A. Fernando Jesús Martínez Eissa

02S2019

ITAM

División Académica de Actuaría, Estadística y Matemáticas

Distribuciones bivariadas discretas

Una colección de variables aleatorias X_1, X_2, … X_n, se puede tratar como un vector de aleatorio $\overline{(X_1, X_2, \ldots X_n)}$, por lo cual nos interesa conocer la estructura de estos vectores.

Considere el caso más sencillo con dos v.a.'s discretas, X y Y.

Definición Función de masa de probabilidad conjunta *f,m,p.c.*

Se dice que $f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ es la función de masa de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y con soporte $S \subset \mathbb{R}^2$ si:

i. $$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x, Y = y) > 0 & si\ (x,y) \in S \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

ii. $\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x,y) = 1$

Esta función cumple:

$$0 < f_{X,Y}(x,y) < 1$$

Distribuciones bivariadas discretas

Cálculo de probabilidades vía *f.m.p.c.*

Si $A \subset \mathbb{R}^2$ y (X,Y) tienen *f.m.p.c.* $f_{X,Y}(x,y)$, entonces:

$$P[(X,Y) \in A] = \sum_x \sum_y f_{X,Y}(x,y)$$

Definición Función de masa de probabilidad marginal *f.m.p.marginal*

Si $f_{X,Y}(x,y)$ es la *f.m.p.c* de (X,Y), entonces:

i. $f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y)$ es la *f.m.p.marginal* de X

ii. $f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y)$ es la *f.m.p.marginal* de Y.

La forma más común y práctica de manejar las Distribuciones Bivariadas Discretas, es a partir de su representación tabular.

Distribuciones bivariadas discretas

Ejercicio 1

Considere que se seleccionarán 3 pelotas de una urna que contiene 3 pelotas rojas, 4 blancas y 5 azules. Sean X y Y las variables aleatorias que denotan el número de pelotas rojas y blancas, respectivamente, encuentre la función de masa conjunta de X y Y.

Solución

La *fp* conjunta esta dada por $p(i,j) = P[x=i, Y=j]$ dada por:

$$p(0,0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{10}{220}$$

$$p(0,1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{40}{220}$$

$$p(0,2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{30}{220}$$

Distribuciones bivariadas discretas

Solución, (*Continúa*)

$$p(0,3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{4}{220}$$

$$p(1,0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{30}{220}$$

$$p(1,1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{60}{220}$$

$$p(1,2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{18}{220}$$

$$p(2,0) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{15}{220}$$

$$p(2,1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{12}{220}$$

$$p(3,0) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{220}$$

Distribuciones bivariadas discretas

Solución, (*Continúa*)

Lo anterior lo podemos resumir como una tabla

$X=i/Y=j$	0	1	2	3	$P[X=i]$
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$	$\frac{84}{220}$
1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0	$\frac{108}{220}$
2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0	$\frac{27}{220}$
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0	$\frac{1}{220}$
$P[Y=j]$	$\frac{56}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{4}{220}$	1

Distribuciones bivariadas discretas

Ejercicio 2

Considere que el 15% de las familias de cierta comunidad no tienen hijos, 20% tiene un hijo, 35% tienen 2 hijos y 30% tienen 3 hijos. Considere que en cada familia la probabilidad de tener una hija o un hijo es la misma (independencia). Si se elige una familia al azar de esta comunidad y M denota el número de mujeres y H el número de hombres. ¿cómo representaría la función conjunta de estas 2 variables?

Distribuciones bivariadas discretas

Solución, (*Continúa*)

Lo anterior lo podemos resumir como una tabla

$M=i/H=j$	0	1	2	3	$P[M=i]$
0	15%	10%	8.75%	3.75%	37.5%
1	10%	17.5%	11.25%	0	38.75%
2	8.75%	11.25%	0	0	20%
3	3.75%	0	0	0	3.75%
$P[H=j]$	37.5%	38.75%	20%	3.75%	1

Ejercicio 3

Suponga que X y Y son v.a.'s discretas con función de masa de probabilidad conjunta;

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy, & si\ x = 1,2,3; y = 2,4 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

a) Determine el valor c tal que permita asegurar que $f_{X,Y}(x,y)$ sea función de masa de probabilidad conjunta.

b) Construya las densidades marginales de X y Y.

c) Calcule $P[X = Y]$

Distribuciones bivariadas discretas

Ejercicio 4

Una urna contiene 8 pelotas, la mitad son negras y la otra mitad blancas. Se lanza un dado justo con caras numeradas del 1 al 6 . Si el dado cae en un número ≤ 4 se extrae una pelota de la urna, pero si el dado cae en un número > 4 se extraen 2 pelotas sin reemplazo. Suponga que X es el número total de pelotas extraídas durante el experimento y que Y es el número de pelotas negras.

a) Calcule la función de masa de probabilidad conjunta de las v.a.'s X y Y, así como sus respectivas *f.m.p. marginales*.

b) ¿Cuántas pelotas negras se espera tener al final del experimento?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que todas las pelotas extraídas durante el experimento sean negras?

d) Si sabemos que el dado cae en 5 ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una negra?

e) Si por cada blanca se recibe $50 y por c negra $100.¿Cuál es la probabilidad de hacer ganancia?

Distribuciones bivariadas continuas

Función de densidad de probabilidad conjunta *f.d.p.c.*

Se dice que $f_{X,Y}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,\infty)$ es la función de densidad conjunta de las variables aleatorias X y Y con soporte $S \subset \mathbb{R}^2$ si:

$$f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \ \forall_{(x,y)\in S} \text{ y}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)dxdy = 1$$

Cálculo de probabilidades vía *f.d.p.c.*

Si $A \subset \mathbb{R}^2$ y (X,Y) tienen *f.d.p.c.* $f_{X,Y}(x,y)$, entonces:

$$P[(X,Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x,y)dydx$$

Distribuciones bivariadas continuas

Funciones de densidad de probabilidades marginales *f.d.p.marginal*

Si $f_{X,Y}(x,y)$ es la *f.d.p.c.* de (x,y), entonces:

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$ es la *f.d.p. marginal* de X.

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$ es la *f.d.p. marginal* de Y.

También existen los casos en que X es discreta y Y continua o que Y es discreta y X continua. Estos casos normalmente se manejan de manera similar a los casos completamente discretos o completamente continuos, utilizando una aproximación discreta para la variable discreta y una aproximación continua para el caso continuo.

Distribuciones acumuladas

Se dice que $F_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$es la distribución acumulada conjunta de las v.a.'s X y Y si:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad -\infty < a, b < \infty$$

Al igual que en el caso univariado, la *f.d.a.* conjunta es la misma para v.a.'s discretas y continuas.

Propiedades de la *f.d.a. conjunta*.

1) Si $F_{X,Y}(x,y)$ es la *f.d.a conjunta* de (X,Y), entonces:

$$F_{X,Y}(-\infty, y) = 0, F_{X,Y}(x, -\infty) = 0 \; y \; F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1,$$

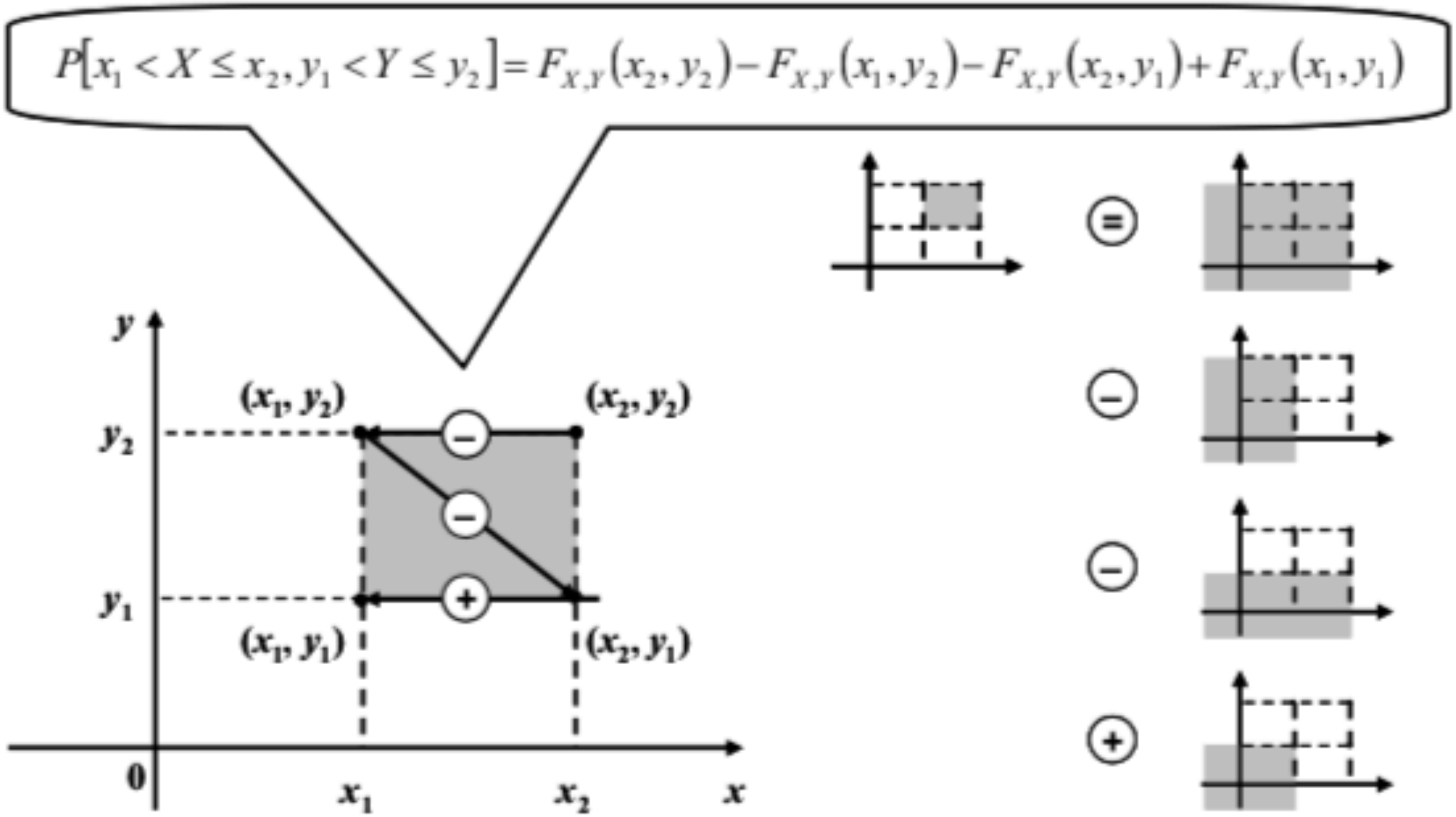
2) $F_{X,Y}(x,y)$ es continua por la derecha en cada argumento, es decir:

$$lim_{h \longrightarrow 0} F_{X,Y}(x+h, y) = lim_{h \longrightarrow 0} F_{X,Y}(x, y+h) = F_{X,Y}(x,y)$$

Distribuciones acumuladas

3) Si $x_1 < x_2$ y $y_1 < y_2$, entonces:

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2)$$
$$= F_{X,Y}(x_2, y_2\ ) - F_{X,Y}(x_1, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) + -F_{X,Y}(x_1, y_1)$$



Distribuciones acumuladas

Cálculo de $f_{X,Y}(x,y)$ *via* $F_{X,Y}(x,y)$

Si $F_{X,Y}(x,y)$ es la f.d.a. conjunta de (X,Y)entonces:

1. $f_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x,y) - F_{X,Y}(x^-,y) \quad - F_{X,Y}(x,y^-) \quad + F_{X,Y}(x^-,y^-)$ si X,Y discretas
2. $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$ si X,Y continuas

La f.d.a. conjunta no es tan útil en el caso multivariado como en el univariado.

Distribuciones acumuladas

Se dice que $F_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$es la distribución acumulada conjunta de las v.a.'s X y Y si:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad -\infty < a,b < \infty$$

A partir de lo anterior, podemos obtener la la distribución de X a partir de la función conjunta de X y Y:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X \leq x, Y < \infty) \\ &= P\left(\lim_{y\rightarrow\infty}\{X \leq x, Y \leq y\}\right) \\ &= \lim_{y\rightarrow\infty} P(\{X \leq x, Y \leq y\}) \\ &= \lim_{y\rightarrow\infty} F_{X,Y}(x,y) \\ &= F_{X,Y}(x,\infty) \end{aligned}$$

De manera similar, se tiene:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= \lim_{x\rightarrow\infty} F_{X,Y}(x,y) \\ &= F_{X,Y}(\infty,y) \end{aligned}$$

Distribuciones conjuntas y marginales

Todos los postulados de probabilidad conjunta de X y Y pueden, en teoría, responderse en términos de la distribución conjunta, por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
P(X > x, Y > y) &= 1 - P(\{X > x, Y > y\}^C) \\
&= 1 - P(\{X > x\}^C \cup \{Y > y\}^C) \\
&= 1 - P(\{X \leq x\} \cup \{Y \leq y\}) \\
&= 1 - [P(X \leq x) + P(Y \leq y) - P(X \leq x, Y \leq y)] \\
&= 1 - F_X(x) - F_Y(Y) + F_{X,Y}(x, y)
\end{aligned}
$$

Para el caso en que ambas variables sean discretas:

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{s=-\infty}^{x} \sum_{r=-\infty}^{y} f_{X,Y}(s, r)$$

Cuando son continuas:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s, r) dr ds$$

Distribuciones conjuntas y marginales

Se dice que X y Y son conjuntamente continuos si existe una función:

$$
\begin{aligned}
P(X > x, Y > y) &= 1 - P(\{X > x, Y > y\}^C) \\
&= 1 - P(\{X > x\}^C \cup \{Y > y\}^C) \\
&= 1 - P(\{X \le x\} \cup \{Y \le y\}) \\
&= 1 - [P(X \le x) + P(Y \le y) - P(X \le x, Y \le y)] \\
&= 1 - F_X(x) - F_Y(Y) + F_{X,Y}(x, y)
\end{aligned}
$$

Para el caso en que ambas variables son discretas:

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{s=-\infty}^{x} \sum_{r=-\infty}^{y} f_{X,Y}(s, r)$$

Cuando son continuas:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s, r) drds$$

Y, con probabilidad 1:

$$\frac{\partial^2}{\partial_x \partial_y} F_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial_y \partial_x} F_{X,Y}(x, y) = f_{X,Y}(x, y)$$

Distribuciones conjuntas y marginales

Otra interpretación de la densidad conjunta de probabilidades es:

$$P(a < X < a + ca, b < Y < b + bd) = \int_{b}^{b+bd} \int_{a}^{a+ac} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$
$$\approx f_{X,Y}(a,b)dadb$$

Cuando da y db son pequeñas y $f(x,y)$ es continua en (a,b). Por lo tanto, $f(a,b)$ es una medida de qué tan probable es que el vector (X,Y) esté cerca de (a,b).

Si X y Y son conjuntamente continuas, son individualmente continuas y su función de densidad se puede obtener como:

$$P\{x \epsilon A\} = P\{x \epsilon A , Y \epsilon (-\infty, \infty) \}$$
$$= \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dydx$$
$$= \int_A f_X(x)\, dx$$

Donde $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$ y de forma similar $f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$

Distribuciones conjuntas y marginales

Ejercicio 5

La función de densidad conjunta de X y Y está dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Calcule.

a. $P\{X > 1, Y < 1\}$

$$P(X > 1, Y < 1) = \int_1^\infty \int_0^1 2e^{-x}e^{-2y}dydx$$

$$= \int_1^\infty e^{-x}(1 - e^{-2})dx = e^{-1}(1 - e^{-2})$$

b. $P\{X < Y\}$

$$P(X < \ Y) = \int_0^\infty \int_0^y 2e^{-x}e^{-2y}dxdy = \int_0^\infty 2e^{-2y}(1 - e^{-y})dy = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

c. $P\{X < a\}$

$$P(X < a) = \int_0^a \int_0^\infty 2e^{-x}e^{-2y}dxdy = \int_0^a e^{-x}dx = 1 - e^{-a}$$

Distribuciones conjuntas y marginales

Ejercicio 6

Suponga que X es el tiempo (en minutos) que tarda en llegar un estudiante de su casa a la parada del autobús y que Y es el tiempo (en minutos) que tarda en llegar de la parada del autobús a la escuela. La función de densidad conjunta de X y Y está dada por:

$$f_{X,Y}(X,Y) = \begin{cases} k, & si\ 10 < x < 15, 10 < y < 20 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

a) Determine el valor de k.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante tarde menos de 12 minutos en cada trayecto? *i.e.* Que de su casa a la parada de autobús tarde menos de 12 minutos y que también de la parada de autobús a la escuela tarde menos de 12 minutos.

c) Suponga que llegando a la parada de autobús, el estudiante inicia el segundo trayecto. ¿Cuál es la probabilidad de que tarde más de 30 minutos en llegar de su casa a la escuela?

d) Calcule las *f.d.p. marginales* de X y Y ¿Cómo se distribuyen?

Distribuciones conjuntas y marginales

Ejercicio 7

Sean X y Y v.a.'s con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(X,Y) = 2x(x-y)I_{(0,1)}(x)I_{(-x,x)}(y)$$

Obtenga las funciones de densidad de probabilidad marginales de X y Y.

Distribuciones conjuntas y marginales

Ejercicio 8

Considere un círculo de radio R, suponga que se escoge un punto al azar de dicho círculo de tal manera que todas las regiones dentro del círculo que tienen la misma área, son equiprobables para contener el punto i.e. El punto se distribuye uniforme dentro del círculo. Sea el centro del círculo denotado por (0,0) y definimos a X y Y como las coordenadas del punto escogido, se sigue que la función conjunta de X y Y es:

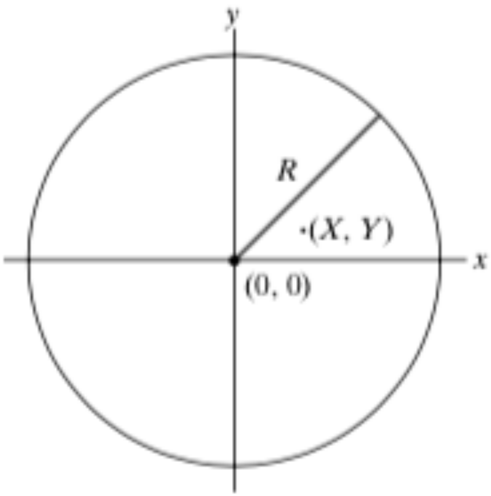
$$f(x,y) = \begin{cases} c, & si\ x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & si\ x^2 + y^2 \geq R^2 \end{cases}$$

Para algún valor de c.

a. Determine el valor de c
b. Encuentre las funciones de densidad marginales
c. Calcule la probabilidad de que D, la distancia al origen del punto seleccionado sea menor o igual a a
d. Encontrar $E(D)$

Distribuciones conjuntas y marginales

Solución



$$f(x,y)=\begin{cases} c, & si\ x^2+y^2\le R^2 \\ 0, & si\ x^2+y^2\ge R^2 \end{cases}$$

$$a)\ Sabemos\ que \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$$

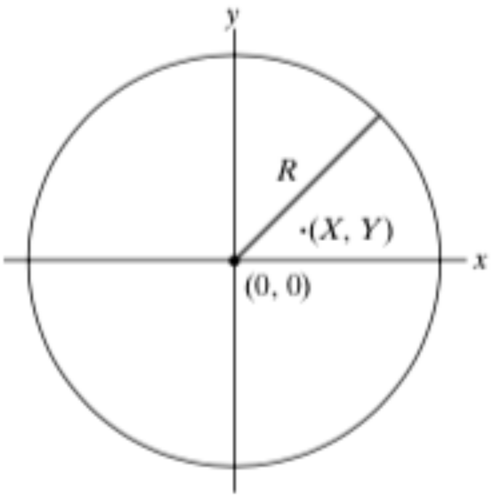
$$c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1 \rightarrow c(\pi R^2)=1 \therefore c=\frac{1}{\pi R^2}$$

$$b)\ f_X(X)=\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy=\frac{1}{\pi R^2}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy=\frac{2}{\pi R^2}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)\ con\ x^2\le R^2; 0\ e.o.c.$$

$$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dy=\frac{1}{\pi R^2}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dy=\frac{2}{\pi R^2}\left(\sqrt{R^2-y^2}\right)\ con\ y^2\le R^2\ ; 0\ e.o.c.$$

Distribuciones conjuntas y marginales

Solución



$$f(x,y)=\begin{cases} c, & si\ x^2+y^2\le R^2 \\ 0, & si\ x^2+y^2\ge R^2 \end{cases}$$

$c)\ La\ función\ de\ distribción\ de\ D=\sqrt{x^2+y^2}, para\ 0\le a\le R$

$$F_D(a)=P\left\{\sqrt{x^2+y^2}\le a\right\}$$
$$F_D(a)=P\{x^2+y^2\le a^2\}$$

$$F_D(a)=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} f(x,y)dydx$$

$$F_D(a)=\frac{1}{\pi R^2}(\pi a^2)=\frac{a^2}{R^2}$$

$d)\ A\ partir\ del\ inciso\ anterior, tenemos\ que\ la\ función\ de\ densidad\ de\ D\ es:$

$$f_D(a)=\begin{cases} \frac{2a}{R^2}, & 0\le a\le R^2 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}\ \therefore E[D]=\frac{2}{R^2}\int_0^R a^2da=\frac{2}{3}R$$

Distribuciones conjuntas y marginales

Ejercicio 9

La función de densidad conjunta de X y Y está dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Encuentre la función de densidad para X/Y.

$$f_{X/Y}(a) = P\left\{\frac{X}{Y} < a\right\}$$

$$\iint_{\frac{X}{Y}<a} e^{-(x+y)} dxdy = \int_0^\infty \int_0^{ay} e^{-(x+y)} dxdy$$

$$= \int_1^\infty e^{-y}(1 - e^{-ay})dx = \left\{-e^{-y} + \frac{e^{-(a+1)y}}{a+1}\right\}\Bigg|_0^\infty = 1 - \frac{1}{a+1}$$

Derivando, se obtiene la densidad

$$f_{X/Y}(a) = \frac{1}{(a+1)^2}$$

Distribuciones condicionales

Definición

Sean X y Y v.a. Con función de masa/densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ y función de masa/densidad de probabilidad marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

1. La función de masa/densidad condicional de X dado $\{Y=y\}$ se define como:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, f_Y(y) > 0$$

2. La función de masa/densidad condicional de Y dado $\{X=x\}$ se define como:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, f_X(x) > 0$$

Cada posible valor de X define una f.m.p. condicional distinta para Y. Por ejemplo, si X y Y son variables aleatorias discretas y X tiene soporte$\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, entonces hay m f.m.p condicionales para Y.

Esperanza condicional

La distribución condicional de Y dado que X=x está definida como:

$$f_{Y|X=x}(y|X=x) = f_Y(y|X=x) = f_y(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

La condición de independencia implica que la distribución condicional es la misma que la distribución marginal.

Las distribuciones condicionales permiten el cálculo del valor esperado o de la varianza, o cualquier otro parámetro de las distribuciones de probabilidad. Por ejemplo:

$$E(Y|X=x) = \sum_{-\infty<y<\infty} y f_Y(y|X=x) \quad caso\ discreto$$

$$E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y|X=x)dy \quad caso\ continuo$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i|Y=y\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i|Y=y]$$

Esperanza condicional

Proposición

i. $E[X] = E[E(X|Y)]$

ii. $Var[X] = E\big[Var[X|Y]\big] + Var\big[E[X|Y]\big]$

Estas propiedades son de gran utilidad en el estudio de los modelos de probabilidad mas sofisticados como los Procesos Estocásticos (procesos Poisson, cadenas de Markov, movimientos browniano). También se utilizan en Estadística Bayesiana al suponer que los parámetros de una distribución de probabilidades son variables aleatorias.

Esperanza condicional

$$E\big[E[X|Y]\big] = \sum_y E[X|Y=y]P[Y=y]$$

$$= \sum_y \sum_x xP[X=x|Y=y]P[Y=y]$$

$$= \sum_y \sum_x x\frac{P[X=x, Y=y]}{P[Y=y]}P[Y=y]$$

$$= \sum_y \sum_x xP[X=x, Y=y]$$

$$= \sum_x x \sum_y P[X=x, Y=y]$$

$$= \sum_x xP[X=x] = E[X]$$

$$\therefore E[X] = E\big[E[X|Y]\big]$$

Varianza condicional

Se define la varianza condicional de X dado Y=y como:

$$Var(X|Y) = E[\{X - E(X|Y)\}^2|Y]$$

Partiendo de

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X]$$

Tenemos

$$Var(X|Y) = E[(X^2|Y)] - E^2[X|Y]$$
$$E[Var(X|Y)] = E\{E[(X^2|Y)]\} - E\{E^2[X|Y]\}$$
$$E[Var(X|Y)] = E\{X^2\} - E\{E^2[X|Y]\} \cdots 1$$

También sabemos que $E[E[X|Y]]=E[X]$, tenemos:

$$Var[E(X|Y)] = E\{E[(X^2|Y)]\} - E^2[X] \cdots 2$$

Sumando 1 y 2 obtenemos:

$$Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var[E(X|Y)]$$

Esperanza condicional

Ejercicio 10

En la siguiente tabla se presentan las distribuciones conjuntas y marginales de las v.a.'s X y Y, donde X es el número de años de estudio concluidos por el jefe de familia y Y es el estrato de ingreso del jefe de familia (según VSMG)

X	Y					Total
	1	2	3	4	5	
0	0.199	0.124	0.122	0.005	0	0.45
3	0.177	0.034	0.009	0.003	0	0.223
6	0.008	0.025	0.04	0.049	0.065	0.187
9	0.002	0.005	0.022	0.041	0.07	0.14
Total	0.386	0.188	0.193	0.098	0.135	1

a) Si se elige un jefe de familia del estrato de ingreso más alto ¿cuántos años de estudio se espera que haya concluido?

b) Calcular $Var[X|Y = 5]$

c) Calcule y grafique $E[YY = x]\, para\, x = 0,3,6,9$ ¿qué puede concluir?

Ejercicio 11

Considere que la densidad conjunta de X y Y está dada por:

$$f(x,y) = \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y} \quad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$

Calcule $E[X|Y = y]$.

Solución

Empezamos calculando la densidad conjunta $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

$$= \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}$$

$$= \frac{e^{-x/y}e^{-y}(1/y)}{\int_{-0}^{\infty}(1/y)e^{-x/y}e^{-y}dx} = \frac{e^{-x/y}e^{-y}(1/y)}{e^{-y} - e^{-x/y}|_0^{\infty}}$$

$$= \frac{e^{-x/y}}{y}$$

$$\therefore E[X|Y = y] = \int_0^{\infty} x\frac{e^{-x/y}}{y}dx = y$$

Ejercicio 12

Un minero está atrapado en una mina que tiene tres puertas. La primer puerta lo llevará por un túnel que lo saca en 3 horas; la segunda puerta lo llevará por un túnel que lo llevará la mismo punto después de 5 horas y la tercer puerta lo llevará por un túnel que lo regresará al mismo punto después de 7 horas. Si se considera que las puertas tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas. ¿Cuál es el tiempo esperado para que salga de la mina?.

Solución

$$E[X] = E[X|Y = 1]P[X = 1] + E[X|Y = 2]P[X = 2] + E[X|Y = 3]P[X = 3]$$

$$E[X] = 3\left(\frac{1}{3}\right) + [5 + E[X]]\left(\frac{1}{3}\right) + [7 + E[X]]\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$E[X]\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{3}\right) + \left(\frac{7}{3}\right)$$

$$E[X] = 15$$

Esperanza condicional

Esperanza de la suma de un número aleatorio de variables aleatorias

Considere que el número de personas que entran a una tienda departamental en un día es una variable aleatoria con media 50. Se sabe que la compra promedio es una v.a. independiente con media de $8. Finalmente, considere que el gasto que realiza una persona es independiente del número de personas que ingresaron en la tienda ¿Cuál es el monto esperado de ventas en la tienda en un determinado día?.

Solución

Sea N el número de clientes que entran en la tienda y Xi el monto que gasta el *i-ésimo* cliente, entonces el monto total de dinero gastado por los clientes se pude expresar como: $\sum_{i=1}^{N} X_i$.

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N\right]\right] = E[N]E[X]$$

Para nuestro ejemplo es 50($8)=$400

Probabilidades con condicional

A parte de calcular las esperanzas por medio del condicionamiento, también se puede utilizar esto para calcular probabilidades. Considere un evento aleatorio arbitrario A y la v.a. Indicadora X definida como:

$$X = \begin{cases} 1, & si\ ocurre\ A \\ 0, & si\ no\ ocurre\ A \end{cases}$$

A partir de la definición de X se sigue que E[X]=P(A)

$$E[X|Y = y] = P[A|Y = y]\ para\ cualquier\ v.a.Y$$

$$P(A) = \sum_{y} P(A|Y = y)P(Y = y) \quad si\ Y es\ discreta$$

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|Y = y)\, f_Y(y)dy\ si\ Y\ es\ continua$$

Note para el caso discreto que si se definen los eventos Fi, i=1,2,3,…,n con Fi={Y=y} el caso discreto se reduce a :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|F_i)P(F_i)$$

Probabilidades con condicional

Ejercicio 13

Sea U una v.a. Uniforme en (0,1), y suponga que la distribución condicional de X dado $U=p$, es binomial con parámetros n y p. Encontrar distribución de masa de X.

Solución

$$P[X=i] = \int_0^1 P(X=i|U=p)\, f_U(p) dp$$

$$= \int_0^1 P(X=i|U=p)\, dp$$

$$= \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \int_0^1 p^i (1-p)^{n-i}\, dp = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \frac{i!\,(n-i)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

Variables Aleatorias Independientes

Se dice que las v.a.'s X y Y son independientes si, para cualesquiera dos conjuntos de números reales A y B:

$$P\{x \epsilon A , y \epsilon B\} = P\{x \epsilon A\}P\{y \epsilon B\}$$

Es decir, X y Y son independientes si y sólo si:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Es decir, sin importar si X y Y son variables discretas o continuas, X y Y son independientes sí y solo si la conjunta es igual al producto de marginales.

Se dice que X y Y son variables aleatorias dependientes si no son independientes.

Variables Aleatorias Independientes

Proposición

Se dice que las v.a.'s X y Y son independientes si:

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$$
$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

Lo anterior establece que la información de la variable aleatoria Y o X respectivamente no modifica el comportamiento probabilístico de la v.a. X y viceversa.

Teorema de independencia vía factorización

Las v.a.'s X y Y son independientes sí y sólo si existen funciones h y g tales que:

$$f_{X,Y}(x,y) = h(x)g(y)\ para\ x,y \in \mathbb{R}$$

Al aplicar este teorema, es importante asegurarse de la independencia de los dominios, *i.e.* Que el dominio de $h(x)$ no dependa de y y que el dominio de $g(y)$ no dependa de x.

Variables Aleatorias Independientes

Def. Variables aleatorias independientes (generalización)

Se dice que las v.a.'s $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ son independientes si:

$$f_{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

Def. Variables aleatorias indénticamente distribuidas

Se dice que X_i y $X_j, i \neq j$, son variables aleatorias idénticamente distribuidas si su distribución de probabilidad es la misma.

Vgr. Si $X_i \sim Po(\lambda), i = 1,2$ Entonces X1 y X2 son idénticamente distribuidas. Lo anterior no significa que sus valores sean iguales simultáneamente aunque puede ocurrir pero no necesariamente.

Muestra aleatoria

Es un conjunto de v.a.'s $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ $n \in \mathbb{Z}^+$ independientes e idénticamente distribuidas (iid).

Variables Aleatorias Independientes

Ilustración

Considere que se realizan $n+m$ tiros independientes con probabilidad de éxito p. Si X representa el número de éxitos de los primeros n tiros y Y el número de éxitos de los segundos m tiros, entonces X y Y son independientes ya que el número de éxitos de los primeros n tiros no afecta a los segundos.

Entonces la función de densidad conjunta es:

$$P\{X = x\,, Y = y\} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \binom{m}{y} p^y (1-p)^{m-y} = P\{X = x\}P\{Y = y\}$$

Variables Aleatorias Independientes

Ejercicio 14

Suponga que X y Y son v.a.i.'s con $X \sim Po(\lambda)$ y $Y \sim Po(2\lambda)$.

a) Calcular la función de masa de probabilidad conjunta de X y Y.

b) Calcular $P[X + Y \leq 1]$

Variables Aleatorias Independientes

Ejercicio 15

Suponga que U, V, X y Y son v.a.'s tales que:

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{6}e^{-\left(\frac{3u+2v}{6}\right)}, & u>0, v>0 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 24xy, & si\ 0<x<1, 0<y<1\ y\ 0<x+y<1 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

Utilice el teorema de independencia via factorización para determinar si…

a) …U y V son v.a.'s independientes

b) …X y Y son v.a.'s independientes

Variables Aleatorias Independientes

Ejercicio 16

Suponga que $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ es una $m.a.$ De una distribución normal con media μ y varianza σ^2. Obtenga la función de densidad de probabilidad conjunta de esta $m.a.$

Variables Aleatorias Independientes

Ejercicio 17

Considere que Nati y Rodri han quedado de verse para “echar chal” en un lugar determinado. Considere que el tiempo de llegada de cada uno es independiente y que se distribuye uniforme entre las 12hrs. y las 13 hrs. Encontrar la probabilidad de que el primero en llegar tenga que esperar más de 10 minutos.

Solución

Definamos X y Y como las variables aleatorias que miden el tiempo de llegada después de las 12hrs para Nati y Rodri respectivamente, entonces X y Y son v.a.’s independientes cada una con distribución uniforme en el intervalo (0,60).

Lo que se busca es $P\{X+10<Y\}+P\{Y+10<X\}$ que por simetría es

$2P\{X+10<Y\} = \iint_{x+10<Y} f_{X,Y}(x,y)dxdy =$

$\iint_{x+10<Y} f_X(x)f_X(x)dxdy = \int_0^{60}\int_0^{y-10}\left(\frac{1}{60}\right)^2 dxdy = \frac{2}{60^2}\int_0^{60}(y-10)dy = \frac{25}{36}$

Variables Aleatorias Independientes

Ejercicio 18

Sean X, Y y Z variables aleatorias independientes y distribuidas uniforme en el intervalo (0,1). Calcule $P[X \geq YZ]$

Solución

$$f_{X,Y,Z}(x.y.z) = f_X(x)f_Y(y)f_Z(z) = 1$$

$$\begin{aligned} P[X \geq YZ] &= \iiint\limits_{X \geq YZ} f_{X,Y,Z}(x,y,z)dxdydz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_{yz}^1 dxdydz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (1 - yz)dydz \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{z}{2}\right) dz = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Suma de v.a.'s Independientes

En ocasiones resulta importante calcular la distribución de $X+Y$ a partir de sus distribuciones de X y Y cuando X y Y son independientes. Suponga que X y Y son v.a.'s independientes con funciones de densidad $f_X(x)$ y $f_Y(y)$. Entonces la función de acumulación de X+Y se obtiene como:

$$F_{X+Y}(a) = P\{X+Y \leq a\}$$

$$= \iint_{X+Y\leq a} f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} f_X(x)\, dx\, f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y)\, dy$$

A la distribución de acumulación conjunta se le llama la convolución de las distribuciones de $F_X(x)$ y $FY(y)$

Valor Esperado de Transformaciones

Si X y Y tienen una función conjunta de masa/densidad de probabilidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ y sea h una función real de dos variables, entonces $h(x,y)$ es una variable aleatoria y su valor esperado es:

$$E[h(x,y)] = \sum_y \sum_x h(x,y) f_{X,Y}(x,y) \qquad \textit{caso discreto}$$

$$E[h(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \qquad \textit{caso continuo}$$

Si $E(XY)=E(X)E(Y)$ entonces X y Y son independientes. Asimismo, para las funciones g y h, $E(g(x)h(x))=E(g(x))E(h(x))$.

En particular $E(x^2y^2)=E(x^2)E(y^2)$ para X y Y independientes.

Valor Esperado de Transformaciones

Son ejemplos de transformaciones $g(X,Y)$: $X+Y, XY, \frac{X}{Y}, (X-a)(Y-b)$, e^{sX+tY}, etc.

$E[X]$ via $f_{X,Y}(x,y)$

Si $h(X,Y) = X$ y suponiendo que X y Y son continuas, entonces:

$$E[h(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)dydx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = E[X]$$

Es decir, la esperanza de X se puede calcular a partir de la densidad conjunta, pero en su cálculo aparece siempre la densidad marginal. Para el caso discreto aplica igual.

Valor Esperado de Transformaciones

Ejercicio 19

Sean Y_1 y Y_2 las proporciones de tiempo, en un día de trabajo, que los empleados I y II ocupan respectivamente en hacer tareas asignadas. El comportamiento de las frecuencias relativas conjuntas de Y_1 y Y_2 se representan por el modelo de la función de densidad:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \begin{cases} y_1 + y_2, & si\ 0 < y_1 < 1, 0 < y_2 < 1 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

a) Calcule e interprete $E\left[\frac{Y_1+Y_2}{2}\right]$

b) Calcule $E[Y_1]$ y $E[Y_2]$ y verifique que $E\left[\frac{Y_1+Y_2}{2}\right] = \frac{E[Y_1]+E[Y_2]}{2}$

Momentos Conjuntos

Sean X y Y v.a. con $E[X] = \mu_X$ y $E[Y] = \mu_Y$. Si $j, k \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

a) $E\left[X^j Y^k\right]$ es el momento conjunto de (X, Y) de orden (j, k)

b) $E\left[(X - \mu_X)^j (Y - \mu_Y)^k\right]$es el momento central conjunto conjunto de (X, Y) de orden (j, k)

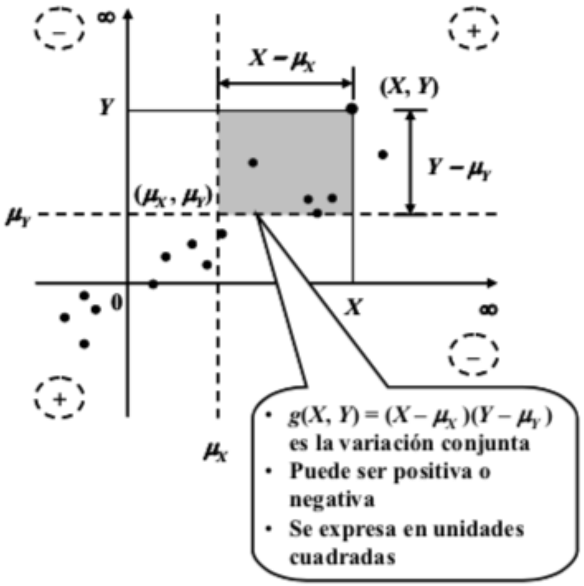
Nótese como $X^j Y^k$ y $(X - \mu_X)^j (Y - \mu_Y)^k$ son transformaciones de las variables X y Y, de modo que el cálculo de su valor esperado se realiza a través de $f_{X,Y}(x, y)$. Los momentos conjuntos por sí solos no tienen ninguna aplicación, sin embargo, aparecen en el cálculo de otras medidas poblacionales conjuntas de interés como la Covarianza.

Covarianza

Corresponde a una que indica el grado de interdependencia que existe entre dos variables aleatorias y se define como:

$$Cov(X,Y) = \sigma[X,Y] = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

La covarianza es el momento central de de orden (1,1). La transformación $g(X,Y) = (X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ es la variación conjunta que hay entre la pareja aleatoria (X,Y) y el punto (μ_X, μ_Y)



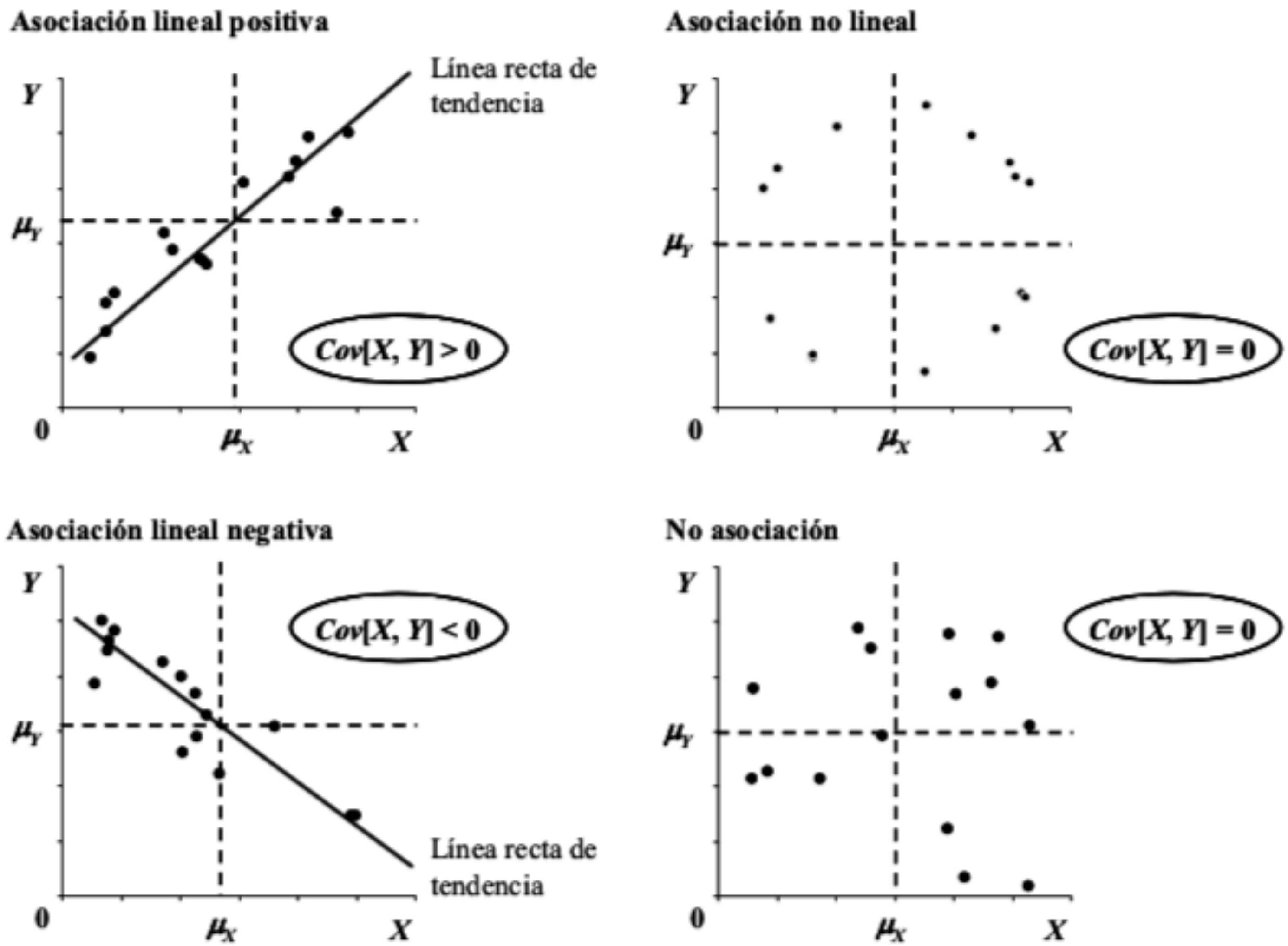
Covarianza

La covarianza está expresada en unidades cuadradas por lo que solo se interpreta (+,-,0) su signo y no su valor.

En la medida en que las realizaciones (x_i, y_i) de (X, Y), $i = 1,2,3, \ldots$ se concentran alrededor de una línea recta que pasa por (μ_X, μ_Y), la covarianza incorpora más variaciones conjuntas positivas si la recta tiene pendiente positiva, o negativas si la recta tiene pendiente negativa.

Por lo anterior, la covarianza identifica asociación lineal entre dos variables aleatorias, como se muestra a continuación:

Covarianza


Asociación lineal positiva
Línea recta de tendencia
Y
μ_Y
0
μ_X
X
$Cov[X, Y] > 0$
Asociación no lineal
Y
μ_Y
0
μ_X
X
$Cov[X, Y] = 0$
Asociación lineal negativa
Y
μ_Y
0
μ_X
X
$Cov[X, Y] < 0$
Línea recta de tendencia
No asociación
Y
μ_Y
0
μ_X
X
$Cov[X, Y] = 0$

Interpretación de la Covarianza

Si X y Y son variables aleatorias entonces:

i) $Cov[X, Y] < 0 \Rightarrow$ Asociación lineal negativa entre X y Y.

ii) $Cov[X, Y] > 0 \Rightarrow$ Asociación lineal positiva entre X y Y.

iii) $Cov[X, Y] = 0 \Rightarrow$ No asociación o asociación no lineal entre X y Y.

A partir de la definición de covarianza que se presentó anterior mente, se nota que:

$$Var(X) = Cov(X, X)$$

Y que es simétrica:

$$Cov(X,Y) = E\big((X - E[X])(Y - E[Y])\big) = E\big((Y - E[Y])(X - E[X])\big) \\ = Cov(Y,X)$$

Con la intención de determinar si la asociación lineal identificada por la covarianza es fuerte o débil, se define otra medida de asociación conocida como el coeficiente de correlación lineal.

Covarianza

En general, si $X_1, X_2, \dots X_n$ y $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ son variables aleatorias y $a_1, a_2, \dots a_n$, b, $c_1, c_2, \dots c_m$ y d son números, entonces:

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b, \sum_{j=1}^{m} c_j y_j + d\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i c_j Cov(X_i, Y_j)$$

La covarianza nos ayuda a entender como funciona la varianza para la suma de variables aleatorias

$$Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2abCov(X, Y)$$

Lo anterior nos recuerda al concepto algebráico:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Cuando son independientes o no están correlacionadas X y Y: $Var\ (X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Si $X_1, X_2, \dots X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución de probabilidad con varianza σ^2, entonces:

$$Var(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_n) = n\sigma^2$$

Covarianza

En general, si las variables en consideración no son independientes:

$$Var(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\sum_{j=1}^{m}Var(X_i)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}Cov\left(X_i,X_j\right)$$

Se define la matriz de varianza-covarianza de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ como:

$$W=\left[\left(Cov\left(X_i,X_j\right)\right)\right]=\begin{bmatrix}Cov(X_1,X_1) & \cdots & Cov(X_1,X_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ Cov(X_n,X_1) & \cdots & Cov(X_n,X_n)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}Var(X_1) & \cdots & Cov(X_1,X_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ Cov(X_n,X_1) & \cdots & Var(X_n)\end{bmatrix}$$

Otra propiedad importante es:

$$Var(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n)=[a_1a_2\cdots a_n]W[a_1a_2\cdots a_n]^T$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i^2Var(X_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}2a_ia_jCov\left(X_i,X_j\right)$$

Coeficiente de correlación

Coeficiente de correlación lineal

Sean X y Y variables aleatorias, entonces su coeficiente de correlación lineal se define por:

$$\rho(X,Y) = Corr(X,Y) = \rho_{X,Y} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

Interpretación del coeficiente de correlación lineal

Si X, Y son variables aleatorias, entonces:

$\rho_{X,Y} \longrightarrow -1 \Longrightarrow$ Alto grado de asociación lineal negativo entre X y Y

$\rho_{X,Y} \longrightarrow 0 \Longrightarrow$ Bajo grado de asociación lineal negativo o positivo entre X y Y

$\rho_{X,Y} \longrightarrow +1 \Longrightarrow$ Alto grado de asociación lineal positivo entre X y Y

Coeficiente de correlación

Coeficiente de correlación lineal

Se dice que las v.a.'s X y Y son no correlacionadas si $Cov\ (x, y) = \rho_{X,Y} = 0$

Independencia no implica no correlación

Si X y Y son v.a.'s independientes, entonces $Cov\ (X, Y) = \rho_{X,Y} = 0$

Nota: Independencia implica no correlación, sin embargo, no correlación no implica independencia. Pude ocurrir $Cov\ (X, Y) = \rho_{X,Y} = 0$ pero que X y Y sean v.a.'s dependientes.

Coeficiente de correlación

En general, si $X_1, X_2, \dots X_n$ son variables aleatorias, es posible calcular la covarinza y el coeficiente de correlación para cada pareja de variables aleatorias. Sean:

$$\sigma_{ij} = Cov(X_i, Y_i\ )\ y\ \rho_{i,j} = Corr(X_i, Y_i)$$

Para $i, j = 1,2,3 \dots n$ entonces es posible definir las siguientes matrices:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Σ es la matriz de varianza-covarianza y sus características:

- Simétrica, ya que $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j) = Cov(X_j, X_i) = \sigma_{ji}$
- En la diagonal principal aparecen las varianzas

P es la matriz de correlaciones y tiene las siguientes características:

- Simétrica, ya que $\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j) = \rho(X_j, X_i) = \rho_{ji}$
- En la diagonal principal solo aparecen 1's, ya que $\rho_{ii} = \frac{Cov(X_i, X_i)}{\sigma_{xi}\sigma_{xi}}$

Ejercicio 20

Una inmobiliaria ha determinado que si X es el número de habitaciones en los departamentos que maneja y Y es el número de lugares de estacionamiento, entonces su distribución conjunta está dada por:

X / Y	0	1	2	
1	0.20	0.15	0.00	0.35
2	0.15	0.20	0.05	0.40
3	0.05	0.10	0.10	0.25
	0.40	0.45	0.15	1.00

a) Calcule la covarianza entre las variables aleatorias, X y Y

b) ¿Son X y Y v.a.'s Independientes?

c) Calcular el coeficiente de correlación lineal e interprete su resultado

Ejercicio 21

Las variables aleatorias U y V tienen función de densidad conjunta:

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{2}{3}(u+v)e^{-u}, & u>0; 0<v<1 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

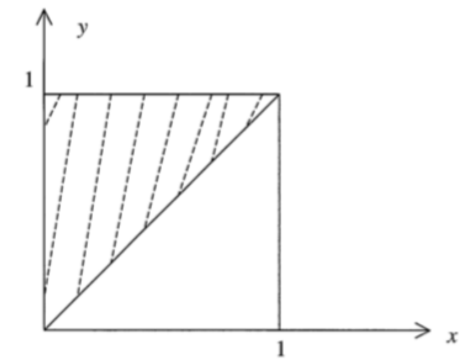
a) Calcule la covarianza entre las variables aleatorias, X y Y
b) Calcular el coeficiente de correlación lineal e interprete su resultado
c) Construir las matrices de varianza covarianza y correlaciones

Ejercicio 22

Considere la siguiente función de distribución conjunta para X y Y:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

Calcular: densidades marginales, densidades covarianza y coeficiente de correlación



Solución

$$f_X(x) = \int_{\text{all } y} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_x^1 8xy\,dy = 8x\cdot\left(\frac{1}{2}y^2\Big|_{y=x}^{y=1}\right) = 4x - 4x^3 = 4x\left(1-x^2\right),$$

$$E(X) = \int_0^1 x\cdot 4x\left(1-x^2\right)dx = \int_0^1\left(4x^2-4x^4\right)dx = \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^5\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{8}{15},$$

$$\operatorname{Var}(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2 = \int_0^1 x^2\cdot 4x\left(1-x^2\right)dx - \left(\frac{8}{15}\right)^2 =$$

$$= \int_0^1\left(4x^3-4x^5\right)dx - \frac{64}{225} = \left(x^4 - \frac{4}{6}x^6\right)\Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{64}{225} = \frac{1}{3} - \frac{64}{225} = \frac{75-64}{225} = \frac{11}{225},$$

Solución (*Continúa*)

Asimismo,

$$f_Y(y)=\int_{\text{all } x} f_{X,Y}(x,y)dx=\int_0^y 8xydx=8y\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_{x=0}^{x=y}\right)=4y^3,$$

Para $0<y<1$ y 0 *e.o.c.*

$$E(Y)=\int_0^1 y\cdot 4y^3dy=\int_0^1 4y^4dy=\left(\frac{4}{5}y^5\right)\Big|_{y=0}^{y=1}=\frac{4}{5},$$

$$\text{Var}(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\int_0^1 y^2\cdot 4y^3dy-\left(\frac{4}{5}\right)^2=$$

$$=\int_0^1 4y^5dy-\frac{16}{25}=\left(\frac{4}{6}y^6\right)\Big|_{y=0}^{y=1}-\frac{16}{25}=\frac{2}{3}-\frac{16}{25}=\frac{50-48}{75}=\frac{2}{75}.$$

Todo junto

Solución (*Continúa*)

Para el cálculo de la función de densidad conjunta, tenemos:

$$f_X(x|Y=y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{8xy}{4y^3}=\frac{2x}{y^2}$$

Para $0<x<y<1$ y 0 *e.o.c.*

$$E(X|Y=y)=\int_0^y x\cdot\frac{2x}{y^2}dx=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=y}=\frac{2}{3}y,$$

$$\mathrm{Var}(X|Y=y)=\int_0^y x^2\cdot\frac{2x}{y^2}dx-\left(\frac{2}{3}y\right)^2=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{2}{4}x^4\Big|_{x=0}^{x=y}-\frac{4}{9}y^2=\frac{1}{2}y^2-\frac{4}{9}y^2=\frac{1}{18}y^2,$$

$$E(E(X|Y))=E\left(\frac{2}{3}Y\right)=\frac{2}{3}\cdot E(Y)=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}=E(X),$$

$$\mathrm{Var}(E(X|Y))+E(\mathrm{Var}(X|Y))=\mathrm{Var}\left(\frac{2}{3}Y\right)+E\left(\frac{1}{18}Y^2\right)=$$

$$=\frac{4}{9}\mathrm{Var}(Y)+\frac{1}{18}\left(\underbrace{\mathrm{Var}(Y)+(E(Y))^2}_{E(Y^2)}\right)=\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{18}\right)\mathrm{Var}(Y)+\frac{1}{18}(E(Y))^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{Var}(Y)+\frac{1}{18}(E(Y))^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{75}+\frac{1}{18}\cdot\frac{16}{25}=\frac{11}{225}=\mathrm{Var}(X),$$

Solución (*Continúa*)

De igual forma, tenemos:

$$f_Y(y|X=x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{8xy}{4x(1-x^2)}=\frac{2y}{1-x^2}$$

Para $0<x<y<1$ y 0 *e.o.c.*

$$E(Y|X=x)=\int_x^1 y\cdot\frac{2y}{1-x^2}dy=\frac{2}{1-x^2}\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_{y=x}^{y=1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1-x^3}{1-x^2},$$

$$\text{Var}(Y|X=x)=\int_x^1 y^2\cdot\frac{2y}{1-x^2}dy-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1-x^3}{1-x^2}\right)^2=\frac{2}{1-x^2}\cdot\frac{1}{4}y^4\Big|_{y=x}^{y=1}-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1-x^3}{1-x^2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}-\frac{4}{9}\left(\frac{1-x^3}{1-x^2}\right)^2=\frac{1}{2}(1+x^2)-\frac{4}{9}\left(\frac{1-x^3}{1-x^2}\right)^2,$$

$$E(E(Y|X))=E\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1-X^3}{1-X^2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\int_0^1\frac{1-x^3}{1-x^2}\cdot 4x(1-x^2)dx=$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\int_0^1(1-x^3)\cdot x\,dx=\frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{10}=\frac{4}{5}=E(Y),$$

Todo junto

Solución (*Continúa*)

$$\operatorname{Var}\left(E(Y|X)\right)+E\left(\operatorname{Var}(Y|X)\right)=\operatorname{Var}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1-X^3}{1-X^2}\right)+E\left(\frac{1}{2}\cdot\left(1+X^2\right)-\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1-X^3}{1-X^2}\right)^2\right)=$$

$$=E\left(\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1-X^3}{1-X^2}\right)^2\right)-\left(E\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1-X^3}{1-X^2}\right)\right)^2+E\left(\frac{1}{2}\left(1+X^2\right)\right)\underbrace{-E\left(\frac{4}{9}\left(\frac{1-X^3}{1-X^2}\right)^2\right)}_{\text{Cancels out with the first term}}=$$

$$=-\left(E\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1-X^3}{1-X^2}\right)\right)^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}E\left(X^2\right)=-\left(E\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1-X^3}{1-X^2}\right)\right)^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{11}{225}+\frac{64}{225}}_{\operatorname{Var}(X)+(E(X))^2}\right)=$$

$$=-\left(\int_0^1\frac{2}{3}\cdot\frac{1-x^3}{1-x^2}\cdot 4x\left(1-x^2\right)dx\right)^2+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\left(\int_0^1\frac{8}{3}\cdot\left(x-x^4\right)dx\right)^2=$$

$$=\frac{2}{3}-\left(\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\right)^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{2}{3}-\frac{16}{25}=\frac{50-48}{75}=\frac{2}{75}=\operatorname{Var}(Y).$$

Todo junto

Solución (*Continúa*)

Para la covarianza,

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \int_0^1 \left(\int_x^1 xy \cdot 8xy\,dy \right) dx - \frac{8}{15} \cdot \frac{4}{5} =$$

$$= \int_0^1 8x^2 \cdot \left(\frac{1}{3} y^3 \Big|_{y=x}^{y=1} \right) dx - \frac{32}{75} = \int_0^1 \frac{8}{3} x^2 \left(1 - x^3\right) dx - \frac{32}{75} =$$

$$= \frac{8}{3} \left(\left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{6} x^6 \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \right) - \frac{32}{75} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{6} - \frac{32}{75} = \frac{4}{9} - \frac{32}{75} = \frac{100-96}{225} = \frac{4}{225}.$$

Para el coeficiente de correlación

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)} \cdot \sqrt{\operatorname{Var}(Y)}} = \frac{\frac{4}{225}}{\sqrt{\frac{11}{225}} \cdot \sqrt{\frac{2}{75}}} = \frac{\frac{4}{225}}{\sqrt{\frac{11}{225}} \cdot \sqrt{\frac{6}{225}}} = \frac{4}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{66}}$$

Esperanza y Varianza de comb. Lin.

Teorema

Si X y Y son v.a.'s y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:

i) $E[\alpha X \pm \beta Y] = \alpha E[X] \pm \beta E[Y]$

ii) $Var[\alpha X \pm \beta Y] = \alpha^2 Var[X] + \beta^2 Var[Y] \pm 2\alpha\beta Cov[X, Y]$

Corolario

Si X y Y son v.a.'s y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

i) $Var[\alpha X \pm \beta Y] = \alpha^2 Var[X] + \beta^2 Var[Y]$

Esperanza y Varianza de comb. Lin.

Ejercicio 24

Suponga que X y Y son variables aleatorias continuas con función de densidad de probabilidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$, y que $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Demuestre que la esperanza es un operador lineal, es decir, que

$E[\alpha X \pm \beta Y] = \alpha E[X] \pm \beta E[Y]$.

Ejercicio 25

Sabemos que, por definición. $Cov[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$. Demuestre mediante las propiedades de la esperanza que $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$

Ejercicio 26

Suponga que X y Y son variables aleatorias y que $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Utilice las propiedades de la esperanza para demostrar que:

$$Var[\alpha X \pm \beta Y] = \alpha^2 Var[X] + \beta^2\, Var[Y] \pm 2\alpha\beta Cov[X,Y]$$

Esperanza y Varianza de comb. Lin.

Esperanza como operador lineal

Si $X_1, X_{2,} X_3, \cdots, X_n$ son v.a.'s, $\boldsymbol{X} = (X_1, X_{2,} X_3, \cdots, X_n)$ $\alpha_i \in \mathbb{R}\, y\, g_i$ una función tal que $g_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1,2,3, \ldots m$, entonces:

$$E\left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i(X)\right] = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i E[g_i(X)]$$

La aplicación del teorema anterior, permite determinar, por ejemplo:

$$E[(3X - Ye^X)^2]$$
$$= E[9X^2 - 6XYe^X + Y^2e^{2X}] = 9E[X^2] + 6E[XYe^X] + E[Y^2e^{2X}]$$

Teorema .Esperanza del producto de transformaciones de v.a.i.'s

Si X y Y son v.a.i.'s y g y h son funciones arbitrarias de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, entonces:

$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]\, E[h(Y)]$

Para el caso particular en que g y h son funciones indentidad, es decir, $g(X) = X$ y $h(Y) = Y$

$E[XY] = E[X]\, E[Y]$

Esperanza y Varianza de comb. Lin.

Ejemplo 27

Cierta universidad aplica pruebas de aptitudes en ciencias y humanidades a todos los alumnos de primer ingreso. Si X y Y son las proporciones de respuestas correctas que obtiene un estudiante en las pruebas de ciencias y humanidades, respectivamente, entonces:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{2}{5}(2x+3y)I_{[0,1]}(x)I_{[0,1]}(y)$$

Demuestre que

a) Demuestre que $E\left[X^j Y^k\right] = \frac{4}{5(k+1)(j+2)} + \frac{6}{5(k+2)(j+1)} \quad j,k = 0,1,2,\ldots$

b) Calcule e interprete el coeficiente de correlación entre X y Y

c) Si el alumno se inscribe a una licenciatura en el área de humanidades, su calificación final en el examen de admisión está dada por C=30X+70Y. Calcule la esperanza y varianza de la calificación C.

Propiedades de la Covarianza

Teorema

Si $X_1, X_{2,} X_3, \cdots X_m$ y $Y_1, Y_{2,} Y_3, \cdots Y_n$ son v.a.'s y $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, para $i = 1,2,3, \dots, m; j = 1,2,3, \dots n$ entonces:

i) $Cov[\alpha_1 X_1 + \beta_1, \alpha_2 X_2 + \beta_2] = \alpha_1 \alpha_2 Cov[X_1, X_2]$

ii) $Cov\left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j Y_j\right] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j Cov\left[X_i, X_j\right]$

Corolario

Si $X_1, X_{2,} X_3, \cdots X_m$ y son v.a.'s y $\alpha_i \in \mathbb{R}$, entonces

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E[X_i]$$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j Cov\left[X_i, X_j\right] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 Var[X_i] + 2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \alpha_j Cov\left[X_i X_j\right]$$

Coreficiente de Correl. de Trans. Lin.

Teorema

$$\left|\rho_{X,Y}\right| = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ tales\ que\ Y = \alpha + \beta X$$

Función Generadora de Momentos

Dadas dos variables aleatorias, se define la Función Generadora de Momentos (*FGM*) conjunta de X y Y, se define como:

$$M_{X,Y}(s,t) = E(e^{sX+tY}) = E(e^{sX}e^{tY})$$

Con $|s| < b \; y |t| < b$ para $b > 0$. Esta condición se establece para asegurar que se pueden evaluar las derivadas parciales en (0,0).

Una propiedad muy importante de la *FGM* es que para cualesquiera dos enteros no negativos m y n, se tiene:

$$\left.\frac{\partial^{m+n}}{\partial s^m \partial t^n} M_{X,Y}(s,t)\right|_{s=0,t=0} = E(X^m Y^n)$$

Por ejemplo

$$\left.\frac{\partial}{\partial s} M_{X,Y}(s,t)\right|_{s=0,t=0} = E(X)$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t} M_{X,Y}(s,t)\right|_{s=0,t=0} = E(XY)$$

Función Generadora de Momentos

Es importante observar las siguientes relaciones respecto a la FGM de una sola variable :

$$M_X(s) = M_{X,Y}(s,0) \;\; y \;\; M_Y(t) = M_{X,Y}(0,t)$$

La propiedad de independencia a partir de la FGM ocurre sis:

$$M_{X,Y}(s,t) \; = M_X(s)M_Y(t)$$

Si la distribución conjunta entre X y Y es discreta; se tiene una secuencia finita o infinita de puntos $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots$ y

$$P[(X,Y) = (x_1,y_1)] = p_1, P[(X,Y) = (x_2,y_2)] = p_{2,} \cdots$$

Entonces la función generadora

$$M_{X,Y}(s,t) = p_1 e^{sx_1+ty_1} + p_2 e^{sx_2+ty_2} + \cdots$$

Esperanza y Varianza de comb. Lin.

Ejemplo 28

La función de densidad conjunta de las variables aleatorias X y Y está dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < y < x < \infty \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

Jacobiano

Suponga que tenemos $(U,V)=\Phi(X,Y)$, donde Φ es una función uno a uno de dos variables con valores vectoriales diferenciables, X y Y son variables aleatorias con función de densidad continua conjunta conocida, y se busca conocer la función de distribución conjunta de U y V.

Sea la función de distribución conjunta de U y V:

$$f_{U,V}(U,V) = f_{X,Y}\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

Donde $\Phi(X,Y)=(u(x,y),v(x,y))$, Dado que Φ es una función uno-a-uno, existe su inversa y ésta se puede escribir como $(x(u,v),y(u,v))$.

La derivada de la inversa es: $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$ y su determinante:

Jacobiano ←

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Ejemplo

Suponga que (X,Y) siguen una distribución normal en [0,1] y que son independientes. Entonces la función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)=1$ siempre que $0<x<1$ y $0<y<1$ y 0 *e.o.c.*

Considere que la transformación $(U,V)=\Phi(X,Y)=(X+Y,X-Y)$, *i.e.* $U=X+Y$ y $V=X-Y$. La transformación inversa es:

$$X = \frac{1}{2}(U+V) \;\; y \qquad Y = \frac{1}{2}(U-V)$$

Asimismo: $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ y su determinante= $\frac{1}{2}\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

Entonces $f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ cuando es positiva. Las condiciones para que sea positiva son:

$0 \leq \frac{1}{2}(u+v) \leq 1$ y $0 \leq \frac{1}{2}(u-v) \leq 1 \rightarrow 0 \leq u+v \leq 2$ y $0 \leq u-v \leq 2$

Ejemplo

La región en donde es positiva la función, está delimitada por:

$v \geq -u; v \leq 2-u; v \leq u \; y \; v \geq u-2$ Es decir: