Nota sobre elasticidad de sustitución

Diego A. Domínguez

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Muchas veces es importante estudiar como cambia la tasa marginal de sustitución al cambiar el consumo de la persona; particularmente, es de interés saber como cambia la tasa marginal de sustitución al cambiar el consumo manteniendo la utilidad constante. Cuando las curvas de indiferencia tienen pendiente negativa una forma de hacer esto es medir el cambio de la tasa marginal de sustitución al aumentar el cociente de comodidad y por comodidad x; mientras más aumente la tasa marginal de sustitución al aumentar este cociente quiere decir que, dado el nivel de utilidad, a mayor consumo relativo de comodidad y es más difícil sustituir el consumo de comodidad x. Matemáticamente medir este cambio corresponde a medir la curvatura de la curva de indiferencia, la *elasticidad de sustitución* mide el inverso de esta curvatura y en términos de cambios porcentuales.

Definición 1. Sea $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ una función de utilidad y sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ una canasta, la **elasticidad de sustitución en la canasta (x,y)** está dada por:

$$\sigma(x, y) = \left. \frac{d\frac{y}{x}}{dTMS(x, y)} \frac{TMS(x, y)}{\frac{y}{x}} \right|_{u(x,y)=\bar{u}} .$$

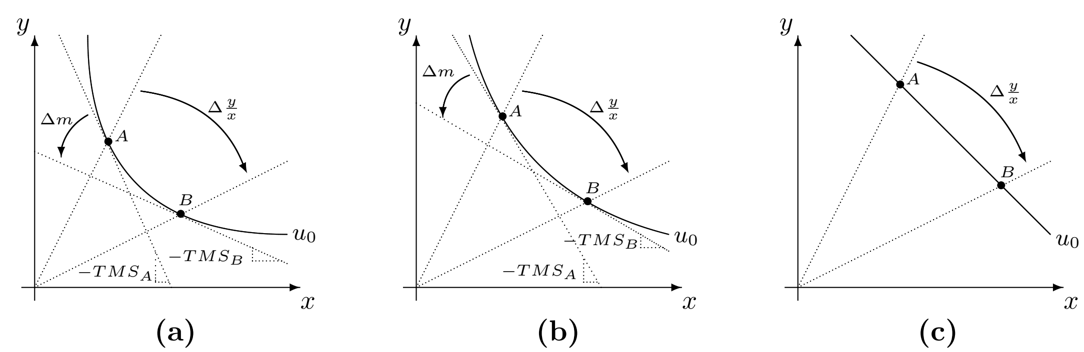

Figura 1: **Tasa Marginal de Sustitución.** En cada gráfica se presenta la curva de indiferencia de nivel u_0 para distintas funciones de utilidad; en cada canasta la tasa marginal de sustitución es igual al negativo de pendiente de la curva de indiferencia. La elasticidad de sustitución mide la curvatura de la curva de indiferencia como el cambio, en términos porcentuales, del cociente de consumo $\Delta \frac{y}{x}$ sobre el cambio en la tasa marginal de sustitución Δm. Comparando la gráficas (a) y (b) podemos observar que la elasticidad de sustitución de la función de utilidad de la gráfica (a) es menor que la de la gráfica (b) y (c), la cual a su vez es menor que la de la gráfica (c). La curva de indiferencia en la gráfica (c) es lineal y corresponde a la función $u(x, y) = x + y$, la cual tiene una tasa marginal de sustitución constante e igual a 1; para esta función cambios en el cociente de consumo $\frac{y}{x}$ no cambian la tasa marginal de sustitución, por lo tanto la elasticidad de sustitución es infinita.

La interpretación de la elasticidad de sustitución es que si el cociente de consumo de la persona aumenta en $\sigma\,\%$ manteniendo la utilidad constante, entonces la tasa marginal de sustitución aumenta en $1\,\%$. Gráficamente, mientras más lineal sea una curva de indiferencia (menos curvatura tiene) será mayor la elasticidad de sustitución.

Dado que la elasticidad de sustitución mide la curvatura de la curva de indiferencia el valor de esta dependerá de la matriz de segundas derivadas de la función de utilidad. La siguiente proposición proporciona una forma directa de calcular la elasticidad de sustitución en términos de derivadas y segundas derivadas de la función de utilidad:

Proposición 1. *Sea $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ una función de utilidad y sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ una canasta, si para cada $j, k \in \{x, y\}$ denotamos $u_j = umg_j(x, y)$ y $u_{jk} = \frac{\partial umg_j}{\partial k}(x, y)$, entonces la elasticidad de sustitución en la canasta (x, y) es igual a:*

$$\sigma(x,y) = \frac{u_x x + u_y y}{2u_{xy}u_x u_y - u_{yy}u_x^2 - u_{xx}u_y^2}\frac{u_x u_y}{xy}.$$

Ejemplo 1 (Calculando la elasticidad de sustitución). Para ciertas funciones de utilidad podemos escribir la tasa marginal de sustitución directamente en función del cociente de consumo $\frac{y}{x}$, en estos casos para calcular la elasticidad de sustitución se puede derivar directamente y calcular el cambio porcentual. Tal es el caso de la utilidad Cobb-Douglas $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$, utilizando la notación de la Proposición 1 tenemos $u_x = \alpha x^{\alpha-1}y^\beta$, $u_y = \beta x^\alpha y^{\beta-1}$, $u_{xx} = (\alpha - 1)\alpha x^{\alpha-2}y^\beta$, $u_{yy} = (\beta - 1)\beta x^\alpha y^{\beta-2}$, y $u_{xy} = \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$, y aplicando la fórmula de la Proposición 1 en la canasta (x, y) obtenemos, después de simplificar términos, $\sigma(x, y) = 1$; alternativamente tenemos que $TMS(x, y) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}y^\beta}{\beta x^\alpha y^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{y}{x}$ es una función de $\frac{y}{x}$, por lo tanto $\frac{dTMS(x,y)}{d\frac{y}{x}} = \frac{\alpha}{\beta}$, utilizando la Definición 1 obtenemos $\sigma(x, y) = \frac{\beta}{\alpha}\frac{\frac{\alpha}{\beta}\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}} = 1$. Cuando no es posible escribir la tasa marginal de sustitución en términos de dicho cociente, como es el caso para la función de utilidad $u(x, y) = x + \ln y$, entonces la fórmula de la Proposición 1 nos permite calcular la elasticidad de sustitución $\sigma(x, y) = (x + 1)/x$.
