Nota sobre Dualidad

Diego A. Domínguez

Instituto Tecnológico Autónomo de México

1. Notación

En esta nota estudiamos la relación entre el problema de maximización de utilidad y el problema de minimización de gasto considerando que la función de utilidad es monótona. El problema de maximización de utilidad está dado por:

$$\begin{array}{l} \text{máx}_{x,y}\, u(x,y) \\ \text{sujeto a:} \\ I - p_x x - p_y y = 0 \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{array}$$

Denotamos el lagrangeano del problema de maximización de utilidad:

$$\mathcal{L}^M(x,y,\lambda,\mu_x,\mu_y,p_x,p_y,I) = u(x,y) + \lambda(I - p_x x - p_y y) + \mu_x x + \mu_y y,$$

las demandas marshalianas $x^M(p_x,p_y,I), y^M(p_x,p_y,I)$, el multiplicador de lagrange de la restricción presupuestal $\lambda^M(p_x,p_y,I)$, y la función de utilidad indirecta $V^M(p_x,p_y,I)$.

El problema de minimización de gasto está dado por:

$$\begin{array}{l} \text{mín}_{x,y}\, p_x x + p_y y \\ \text{sujeto a:} \\ u(x,y) = \bar{u} \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{array}$$

Denotamos el lagrangeano del problema de minimización de gasto:

$$\mathcal{L}^C(x,y,\lambda,\mu_x,\mu_y,p_x,p_y,\bar{u}) = p_x x + p_y y + \lambda(\bar{u} - u(x,y)) + \mu_x(-x) + \mu_y(-y),$$

las demandas compensadas $x^C(p_x,p_y,\bar{u}), y^C(p_x,p_y,\bar{u})$, el multiplicador de lagrange de la restricción de utilidad $\lambda^C(p_x,p_y,\bar{u})$, y la función de gasto mínimo $E(p_x,p_y,\bar{u})$.

2. De maximización de utilidad a minimización de gasto

Cuando una persona tiene un ingreso y enfrenta cierto nivel de precios competitivos y compra una canasta óptima $(x^M(p_x,p_y,I), y^M(p_x,p_y,I))$ obtiene cierto nivel de utilidad $(V(p_x,p_y,I))$. Si fijamos este nivel de utilidad como referencia $(\bar{u} = V(p_x,p_y,I))$ y el consumidor enfrenta los mismos precios, la canasta que minimiza el gasto del consumidor $(x^C(p_x,p_y,\bar{u}), y^C(p_x,p_y,\bar{u}))$ es la misma canasta óptima. Por lo tanto la demanda compensada y la demanda marshaliana están relacionadas de la siguiente forma.

Proposición 1. *Para cada vector de precios $(p_x,p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ y cada nivel de ingreso $I \in \mathbb{R}_+$:*

$$x^C(p_x,p_y,V^M(p_x,p_y,I)) = x^M(p_x,p_y,I),$$

$$y^C(p_x,p_y,V^M(p_x,p_y,I)) = y^M(p_x,p_y,I).$$

Cuando la función de utilidad es monótona, si para ciertos precios e ingreso fijamos el nivel de utilidad obtenido de las demandas marshalianas ($\bar{u} = V(p_x, p_y, I)$), entonces el gasto mínimo necesario para obtener este nivel de utilidad ($E(p_x, p_y, \bar{u})$) es igual al ingreso de la persona en el problema de maximización de utilidad. Por lo tanto la función de gasto mínimo y la función de utilidad indirecta están relacionas de la siguiente forma:

Proposición 2. *Para cada vector de precios $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ y cada nivel de ingreso $I \in \mathbb{R}_+$:*

$$E(p_x, p_y, V^M(p_x, p_y, I)) = I.$$

Diferenciando la expresión anterior respecto al ingreso, y utilizando el teorema de la envolvente se obtiene una relación entre el multiplicador del problema de minimización de gasto y el multiplicador de lagrange del problema de maximización de utilidad. Note que esta relación depende de la forma en que se escriben los lagrangeanos correspondientes al problema de minimización de gasto y de maximización de utilidad.

Proposición 3. *Para cada vector de precios $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ y cada nivel de ingreso $I \in \mathbb{R}_+$:*

$$\lambda^C(p_x, p_y, V^M(p_x, p_y, I)) = \frac{1}{\lambda^M(p_x, p_y, I)}.$$

3. De minimización de gasto a maximización de utilidad

Las tres proposiciones anteriores nos permiten partir de las soluciones del problema de minimización de gasto y obtener las soluciones del problema de maximización de utilidad, las siguientes tres proposiciones nos permiten partir de las soluciones del problema de maximización de utilidad y obtener las soluciones del problema de minimización de gasto.

Iniciamos con la relaciones entre demandas marshalianas y demandas compensadas:

Proposición 4. *Para cada vector de precios $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ y cada nivel de utilidad de referencia $\bar{u} \in \mathbb{R}$:*

$$x^M(p_x, p_y, E(p_x, p_y, \bar{u})) = x^C(p_x, p_y, \bar{u}),$$
$$y^M(p_x, p_y, E(p_x, p_y, \bar{u})) = y^C(p_x, p_y, \bar{u}).$$

De la misma forma, la función de utilidad indirecta y la función de gasto mínimo se relacionan de la siguiente forma:

Proposición 5. *Para cada vector de precios $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ y cada nivel de utilidad de referencia $\bar{u} \in \mathbb{R}$:*

$$V^M(p_x, p_y, E(p_x, p_y, \bar{u})) = \bar{u}.$$

Si diferenciamos la expresión anterior respecto al nivel de utilidad de referencia y utilizamos el teorema de la envolvente obtenemos otra vez la relación entre el multiplicador del problema de maximización de utilidad y el multiplicador de lagrange del problema de minimización de gasto, pero ahora expresada en términos de utilidad de referencia y precios.

Proposición 6. *Para cada vector de precios $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ y cada nivel de utilidad de referencia $\bar{u} \in \mathbb{R}$:*

$$\lambda^M(p_x, p_y, E(p_x, p_y, \bar{u})) = \frac{1}{\lambda^C(p_x, p_y, \bar{u})}.$$