Continuidad - Aspectos globales

Análisis Matemático 1
Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Primavera de 2020

Otro modo de ver continuidad puntual

Recordemos la definición de continuidad de una función en un punto que funciona en cualquier espacio métrico.
Sean $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ y $a \in D(f)$.

f es continua en a si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D(f) \cap B_\delta(a) \quad \textit{implica} \quad f(x) \in B_\epsilon(f(a))$$

Esta definición puede escribirse usando imágenes inversas:

f es continua en a si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f^{-1}\big(B_\epsilon(f(a))\big) \supseteq D(f) \cap B_\delta(a).$$

Este último punto de vista tiene la ventaja de no hacer referencia a puntos en vecindades, sino sólo al punto de continuidad en cuestión.

Continuidad global

La observación anterior es útil cuando consideramos la continuidad de la función en todo punto de $D(f)$.

Se dice que f es continua en su dominio si es continua en todo punto de $D(f)$.

Teorema (de continuidad global - Versión 1)

Para $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ son equivalentes las siguientes condiciones:

(a) *f es continua en su dominio;*

(b) *Si $G \subseteq \mathbb{R}^q$ es abierto, existe $G_1 \subseteq \mathbb{R}^p$ abierto tal que $f^{-1}(G) = D(f) \cap G_1$;*

(c) *Si $H \subseteq \mathbb{R}^q$ es cerrado, existe $H_1 \subseteq \mathbb{R}^p$ cerrado tal que $f^{-1}(H) = D(f) \cap H_1$;*

Existe también una versión en la que el dominio de f es todo $\mathbb{R}^p$.

Continuidad global

Teorema (de continuidad global - Versión 2)

Para $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ son equivalentes las siguientes condiciones:

- *f es continua en $\mathbb{R}^p$;*
- *Si $G \subseteq \mathbb{R}^q$ es abierto entonces $f^{-1}(G)$ es abierto en $\mathbb{R}^p$;*
- *Si $H \subseteq \mathbb{R}^q$ es cerrado entonces $f^{-1}(H)$ es cerrado en $\mathbb{R}^p$;*

Debe observarse que este teorema es consecuencia inmediata del anterior, por lo que nos enfocaremos en demostrar la *Versión 1* del teorema.

Demostración del Teorema de Continuidad Global

(a) $\Rightarrow$ (b) Sea $G \subseteq \mathbb{R}^q$ abierto y $a \in f^{-1}(G)$.

Como G es *vecindad* de $f(a)$, sabemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f(a)) \subseteq G$,

Por continuidad de f en a existe $\delta_a > 0$ tal que

$$f^{-1}(G) \supseteq f^{-1}\big(B_\epsilon(f(a))\big) \supseteq B_{\delta_a}(a) \cap D(f)$$

Denotemos por $U_a = B_{\delta_a}(a)$ y repitamos el procedimiento para toda $a \in f^{-1}(G)$.

Definimos $G_1 = \bigcup_{a \in f^{-1}(G)} U_a$ que es abierto y que cumple $f^{-1}(G) = G_1 \cap D(f)$:

$\subseteq$ es directo por construcción.

$\supseteq$ Si $x \in G_1 \cap D(f)$ entonces $x \in U_{a_0}$ para algún $a_0 \in f^{-1}(G)$. Pero como se vió antes tendríamos

$$x \in U_{a_0} \cap D(f) \subseteq f^{-1}(G)$$

$\square$

Demostración del Teorema de Continuidad Global

(b) $\Rightarrow$ (a) Sean $a \in D(f)$ y $\epsilon > 0$, de manera que con $G = B_\epsilon(f(a)) \subseteq \mathbb{R}^q$ abierto, por hipótesis existe $G_1 \subseteq \mathbb{R}^p$ abierto tal que $f^{-1}(G) = D(f) \cap G_1$.

Ésto implica que $a \in G_1$, por lo que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq G_1$.

Pero ésto significa que $f^{-1}\big(B_\epsilon(f(a))\big) = f^{-1}(G) = D(f) \cap G_1 \supseteq D(f) \cap B_\delta(a)$ $\square$

Se deja de ejercicio probar que (b) es equivalente con (c). $\blacksquare$

Nótese que este teorema se refiere a *imgenes inversas* de abiertos y cerrados.

El siguiente ejemplo muestra que las *imágenes directas* de abiertos bajo funciones continuas no siempre dan lugar a un abierto:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad G = (-1, 1), \qquad f(G) = (1/2, 1]$$

Cabe entonces preguntar cules propiedades son preservadas a través de imagen directa de funciones continuas.

Teorema

Sean $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ y $H \subseteq D(f)$ conexo en $\mathbb{R}^p$. Si f es continua en H, entonces $f(H)$ es conexo en $\mathbb{R}^q$.

Para demostrar el teorema consideramos la restricción de f a H, que denotamos por $h = f\big|_H$ es decir que $D(h) = H$ y $h(x) = f(x)$.

Nótese que $f(H) = h(H)$ y h es continua en H.

Si $h(H)$ fuera disconexo en $\mathbb{R}^q$, existiría (A, B) disconexión de $h(H)$.

Ésto quiere decir que A, B son abiertos tales que $A \cap h(H)$ y $B \cap h(H)$ son disjuntos no vacíos, y $(A \cap h(H)) \cup (B \cap h(H)) = h(H)$

Preservación de la conexidad

Por el Teorema de Continuidad Global, existen $A_1, B_1 \subseteq \mathbb{R}^p$ abiertos tales que

$$h^{-1}(A) = A_1 \cap H \qquad h^{-1}(B) = B_1 \cap H$$

Obsérvese que $A_1 \cap H \neq \emptyset$ y $B_1 \cap H \neq \emptyset$ pues $A \cap h(H) \neq \emptyset$ y $B \cap h(H) \neq \emptyset$.

Además $(A_1 \cap H) \cap (B_1 \cap H) = \emptyset$ porque $\big(A \cap h(H)\big) \cap \big(B \cap h(H)\big) = \emptyset$.

Finalmente $(A_1 \cap H) \cup (B_1 \cap H) = H$ porque $\big(A \cap h(H)\big) \cup \big(B \cap h(H)\big) = h(H)$

Hemos entonces obtenido una disconexión de H, lo cual era imposible (!!)

La contradicción implica que $h(H) = f(H)$ es conexo. $\blacksquare$

Teorema del valor intermedio

Como aplicación importante del teorema anterior podemos establecer una propiedad fundamental de las funciones continuas con valores en $\mathbb{R}$.

Teorema (Bolzano)

Sean $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *y* $H \subseteq D(f)$ *conexo en* $\mathbb{R}^p$*, y supóngase que* f *es continua y acotada en* H*.*
Si $k \in \mathbb{R}$ *cumple* $\sup\{f(x) : x \in H\} < k < \inf\{f(x) : x \in H\}$
entonces existe $x \in H$ *tal que* $f(x) = k$*, (es decir* $k \in f(H)$*).*

Suponiendo que $k \notin f(H)$ entonces podríamos dar una disconexión de $f(H)$:

$$A = \{t \in \mathbb{R} : t < k\}, \qquad B = \{t \in \mathbb{R} : t > k\}$$

Preservación de la compacidad

Teorema

Sean $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ y $K \subseteq D(f)$ compacto en $\mathbb{R}^p$, y supóngase que f es continua en K. Entonces $f(K)$ es compacto en $\mathbb{R}^q$.

Usando la idea de la restricción de f al conjunto K, como se hizo antes, podemos suponer que $D(f) = K$.

Sea $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta abierta de $f(K)$.

Por el teorema de continuidad global sabemos que existen $C_\alpha \subseteq \mathbb{R}^p$ abiertos tales que $f^{-1}(G_\alpha) = C_\alpha \cap K$.

Nótese que $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es cubierta de K:
Dado $x \in K$ se tendrá $f(x) \in f(K)$, o sea que $x \in G_{\alpha_0}$, y entonces $x \in C_{\alpha_0}$. □

Por ser K compacto tendremos $K \subseteq C_{\alpha_1} \cup \cdots \cup C_{\alpha_N}$, lo cual implica que $f(K) \subseteq G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_N}$.

Teorema del máximo y el mínimo

El teorema anterior nos permite establecer otra muy importante propiedad de funciones continuas con valores en $\mathbb{R}$.

Teorema

Sean $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ y $K \subseteq D(f)$ compacto en $\mathbb{R}^p$, y supóngase que f es continua en K. Entonces existen $x^*, x_* \in K$ tales que

$$f(x^*) = \sup\left\{f(x) : x \in K\right\}, \qquad f(x_*) = \inf\left\{f(x) : x \in K\right\}$$

Nótese primero que por el teorema anterior $f(K)$ es compacto en $\mathbb{R}$, por tanto acotado.

Sabemos pues de la existencia de $M = \sup f(K)$,

Por la propiedad del supremo podemos construir (x_n) sucesión en K tal que $f(x_n) > M - \dfrac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. O sea $M - f(x_n) < \dfrac{1}{n}$.

Teorema del máximo y el mínimo - 2

Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión (x_n') que converge a cierto $x^* \in K$.

Al evaluar en este punto y usar que f es coninua en K obtendremos

$$f(x^*) = \text{lím}\, f(x_n') = M$$

Una prueba similar funciona para hallar $x_* \in K$ cumpliendo

$$f(x_*) = \text{lím}\, f(y_n') = m := \text{ínf}\, f(K)$$

Teorema

Sean $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ y $K \subseteq D(f)$ compacto en $\mathbb{R}^p$, y supóngase que f es continua en K. Entonces existen $x^*, x_* \in K$ tales que

$$\|f(x^*)\| = \sup\left\{\|f(x)\| : x \in K\right\}, \qquad \|f(x_*)\| = \text{ínf}\left\{\|f(x)\| : x \in K\right\}$$

Espacios de funciones continuas y funciones acotadas

Fijando ahora $D \subseteq \mathbb{R}^p$, definimos

$$\begin{aligned} C_{pq}(D) &:= \left\{ f : D \to \mathbb{R}^q \,\middle|\, f \text{ es continua en } D \right\} \\ BC_{pq}(D) &:= \left\{ f : D \to \mathbb{R}^q \,\middle|\, f \text{ es continua y acotada en } D \right\} \end{aligned}$$

No es difícil verificar que $C_{pq}(D)$ y $BC_{pq}(D)$ son espacios vectoriales bajo las operaciones usuales:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x), \qquad \text{para } x \in D$$

Además $BC_{pq}(D)$ es un espacio normado con la norma

$$\|f\|_{\infty,D} := \sup \left\{ \|f(x)\| : x \in D \right\}$$

Finalmente nótese que si D es compacto entonces $C_{pq}(D) = BC_{pq}(D)$.