Nota sobre convexidad, concavidad, y cuasiconcavidad

Diego A. Domínguez

Instituto Tecnológico Autónomo de México

En esta nota estudiaremos algunas propiedades que muchas de las funciones que se utilizan en economía poseen. Estas propiedades pueden provenir de supuestos sobre el comportamiento o la tecnología, o ser resultado del proceso de decisión o interacción entre agentes. Las propiedades que estudiaremos son concavidad, convexidad, cuasiconcavidad, y cusiconvexidad; en general estas propiedades relacionan los valores que la función toma en puntos intermedios con los valores que la función toma en puntos extremos; formalmente, un punto intermedio corresponde a una combinación convexa de dos puntos extremos:

Definición 1. Sea $x, x' \in \mathbb{R}^n$, el vector $y \in \mathbb{R}^m$ es una **combinación convexa de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x'}$** si existe un valor $\alpha \in [0,1]$ tal que $y = \alpha x + (1-\alpha)x'$; y es una **combinación estrictamente convexa de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x'}$** si además tenemos que $x \neq y \neq x'$.

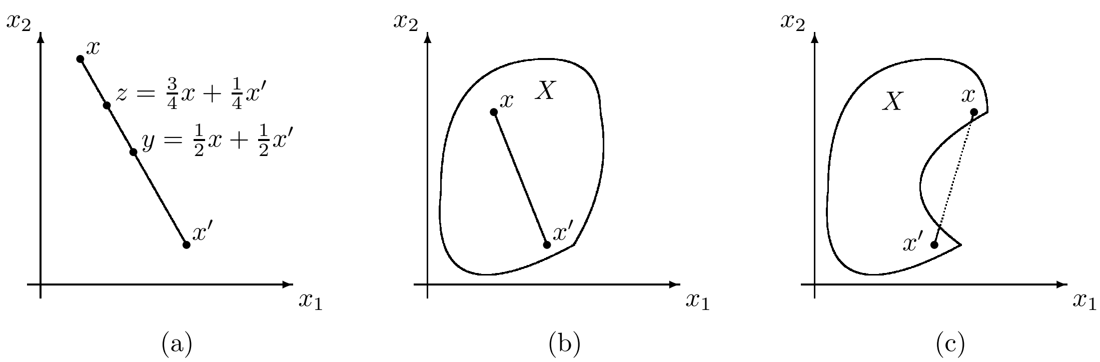

Figura 1: **(a) Combinaciones convexas:** los puntos sobre la recta que une a x con x' son sus combinaciones convexas, puntos fuera de esta recta no lo son. **(b) Conjunto convexos:** el conjunto X es convexo ya que para cualquier par de puntos x, x' sus combinaciones convexas están dentro del conjunto. **(c) Conjunto no convexo:** el conjunto X no es convexo porque algunas combinaciones convexas de x y x' (recta punteada) están fuera del conjunto.

Gráficamente una combinación convexa corresponde a un punto sobre la recta que une a dos puntos, de tal forma que, si $\alpha = 1$ entonces $y = x$, si $\alpha = 0$ entonces $y = x'$, y para valores intermedios de alpha tenemos puntos intermedios sobre la recta que une a x con x' (ver Figura 1); al hablar de combinaciones estrictamente convexas el punto y deberá estar estrictamente entre x y x' y por lo tanto no consideramos el caso cuando $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$.

Utilizando el concepto de combinaciones convexas definimos un conjunto convexo como un conjunto tal que para cada par de elementos del conjunto tenemos que cada combinación convexa de estos elementos está dentro del conjunto (ver Figura 1).

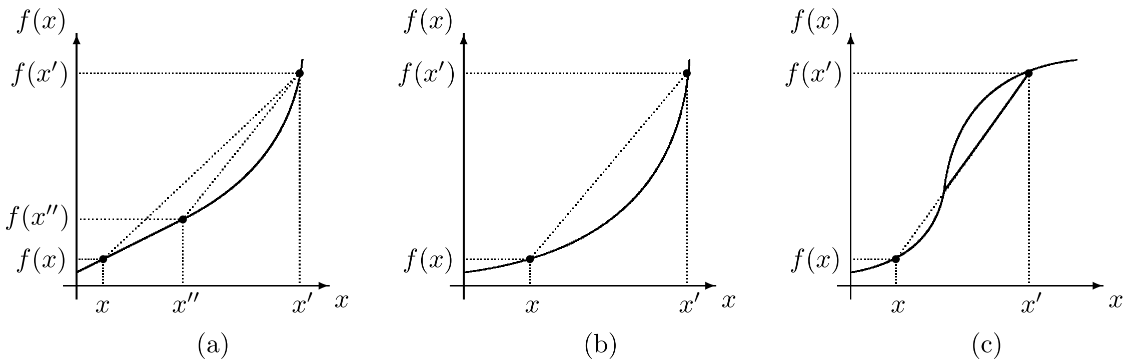

Figura 2: Funciones convexas. **(a) Función convexa:** esta función es convexa ya que para cualquier par de puntos (e.g. x y x', x y x'', o x' y x'') la recta que los une no pasa por debajo de la gráfica de la función; pero no estrictamente convexa ya que para x y x'' la recta que une a los puntos toca a la gráfica de la función. **(b) Función estrictamente convexa:** esta función es estrictamente convexa ya que para cualquier par de puntos (e.g. x y x') la recta que los une pasa por encima de la gráfica de la función. **(c) Función no convexa:** esta función no es convexa ya que existen dos puntos x y x' tal que la recta que los une pasa por abajo de la gráfica de la función (parte sólida de la recta).

Definición 2. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ es un **conjunto convexo** si para cada $x, x' \in X$ y cada $\alpha \in [0,1]$, si $y = \alpha x + (1-\alpha)x'$ entonces $y \in X$.

1. Funciones convexas

Una función es convexa si para cada par de puntos y cada combinación convexa de estos puntos, el valor de la función evaluada en la combinación convexa de los puntos es menor o igual que la combinación convexa de los valores que toma la función en los dos puntos, es decir, que la función evaluada en el promedio de los puntos es menor o igual al promedio de la función:

Definición 3. La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es **convexa** si para cada $x, x' \in \mathbb{R}^n$ y cada $\alpha \in [0,1]$, $f(\alpha x + (1-\alpha)x') \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x')$; y es **estrictamente convexa** si para cada $x, x' \in \mathbb{R}^n$ y cada $\alpha \in (0,1)$, $f(\alpha x + (1-\alpha)x') < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x')$.

Gráficamente convexidad implica que si tomamos cualquier par de puntos entonces la recta que une a estos puntos no pasa por abajo de la gráfica de la función; convexidad estricta implica que la recta que une a ambos puntos pasa por encima de la gráfica de la función (ver Figura 2).

Cuando se trata de una función diferenciable de una sola variable, convexidad se puede determinar con la derivada de segundo orden, si esta derivada es mayor o igual a cero en todo el dominio entonces la función es convexa, si esta derivada es estrictamente mayor a cero en todo el dominio entonces la función es estrictamente convexa. En el caso de funciones diferenciables de múltiples variables convexidad de la función se puede determinar por medio de los signos de los principales menores de su matriz hessiana de segundas derivadas.

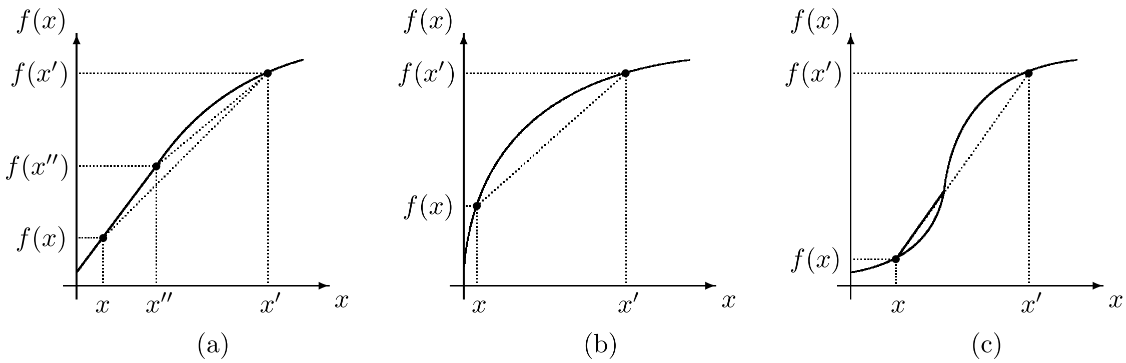

Figura 3: Funciones cóncavas. **(a) Función cóncava:** esta función es cóncava ya que para cualquier par de puntos (e.g. x y x', x y x'', o x' y x'') la recta que los une no pasa por encima de la gráfica de la función; pero no estrictamente cóncava ya que para x y x'' la recta que une a los puntos toca a la gráfica de la función. **(b) Función estrictamente convexa:** esta función es estrictamente cóncava ya que para cualquier par de puntos (e.g. x y x') la recta que los une pasa por abajo de la gráfica de la función. **(c) Función no cóncava:** esta función no es cóncava ya que existen dos puntos x y x' tal que la recta que los une pasa por encima de la gráfica de la función (parte sólida de la recta).

2. Funciones cóncavas

Una función es cóncava si para cada par de puntos y cada combinación convexa de estos puntos, el valor de la función evaluada en la combinación convexa de los puntos es mayor o igual que la combinación convexa de los valores que toma la función en los dos puntos, es decir, que la función evaluada en el promedio de los puntos sea mayor o igual al promedio de la función:

Definición 4. La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es **cóncava** si para cada $x, x' \in \mathbb{R}^n$ y cada $\alpha \in [0,1]$, $f(\alpha x + (1-\alpha)x') \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(x')$; y es **estrictamente cóncava** si para cada $x, x' \in \mathbb{R}^n$ y cada $\alpha \in (0,1)$, $f(\alpha x + (1-\alpha)x') > \alpha f(x) + (1-\alpha)f(x')$.

Gráficamente concavidad implica que si tomamos cualquier par de puntos entonces la recta que une a estos puntos no pasa por arriba de la gráfica de la función; concavidad estricta implica que la recta que une a ambos puntos pasa por abajo de la gráfica de la función (ver Figura 3).

Cuando se trata de una función diferenciable de una sola variable, concavidad se puede determinar con la derivada de segundo orden, si esta derivada es menor o igual a cero en todo el dominio entonces la función es cóncava, si esta derivada es estrictamente menor a cero en todo el dominio entonces la función es estrictamente cóncava. En el caso de funciones diferenciables de múltiples variables concavidad de la función se puede determinar por medio de los signos de los principales menores de su matriz hessiana de segundas derivadas.

Nota 1. Es importante notar que una función lineal es al mismo tiempo cóncava y convexas, y que no son ni estrictamente cóncavas ni estrictamente convexas. Además, estas funciones son las únicas que cumplen con estas dos propiedades (concavidad y convexidad) al mismo tiempo.

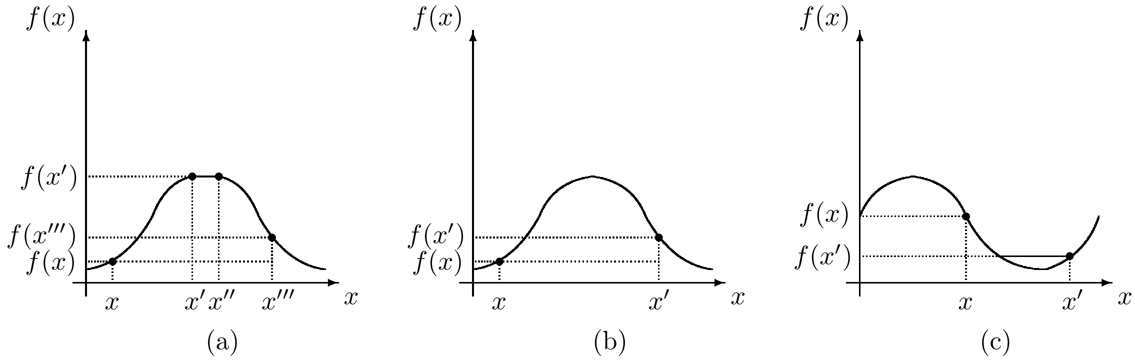

Figura 4: Funciones cuasicóncavas. **(a) Función cuasicóncava:** esta función es cuasicóncava ya que para cualquier par de puntos la recta de pendiente nula que pasa por el mínimo valor de la función no pasa por encima de la gráfica de la función; pero no estrictamente cuasicóncava ya que para x' y x'' dicha recta toca a la gráfica de la función. **(b) Función estrictamente cuasicóncava:** esta función es estrictamente cuasicóncava ya que para cualquier par de puntos (e.g. x y x') la recta de pendiente nula que pasa por el mínimo valor de la función pasa por abajo de la gráfica de la función. **(c) Función no cuasicóncava:** esta función no es cuasicóncava ya que existen dos puntos x y x' tal que la recta de pendiente nula que pasa por el mínimo valor de la función pasa por encima de la gráfica de la función (parte sólida de la recta).

3. Funciones cuasicóncavas

Finalmente concluimos esta nota con el concepto de cuasiconcavidad. Esta es una propiedad más débil que concavidad y requiere para cada par de puntos y cada combinación convexa de estos puntos, el valor de la función evaluada en la combinación convexa de los puntos es mayor o igual que el valor mínimo que toma la función en los dos puntos:

Definición 5. La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es **cuasicóncava** si para cada $x, x' \in \mathbb{R}^n$ y cada $\alpha \in [0, 1]$, $f(\alpha x + (1-\alpha)x') \geq \text{mín}\{f(x), f(x')\}$; y es **estrictamente cuasicóncava** si para cada $x, x' \in \mathbb{R}^n$ y cada $\alpha \in (0, 1)$, $f(\alpha x + (1-\alpha)x') > \text{mín}\{f(x), f(x')\}$.

Gráficamente cuasiconcavidad implica que si tomamos cualquier par de puntos entonces la recta de pendiente nula que pasa por el valor mínimo de la función en estos dos puntos no pasa por arriba de la gráfica de la función en las combinaciones convexas de estos puntos; cuasiconcavidad estricta implica que dicha recta pasa por abajo de la gráfica de la función (ver Figura 4).

Nota 2. Es importante notar que si una función es cóncava entonces también es cuasicóncava, pero existen funciones cuasicóncavas que no son cóncavas. Además, no existe una relación entre convexidad y cuasiconcavidad por lo tanto existen funciones convexas que son cuasicóncavas y existen funciones convexas que no son cuasicóncavas.