

Análisis Cualitativo de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Otoño de 2020

Sistemas dinámicos autónomos vectoriales

Emprendemos ahora el estudio de ecuaciones que en forma vectorial tienen la forma de **sistema dinámico autónomo**

$$\vec{X}' = \vec{F}(\vec{X}), \quad \vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{X} \in \mathbb{R}^2$$

Los ejemplos que hemos visto son cuando para A una matriz de 2×2

$$\vec{F}(\vec{X}) = A\vec{X} \quad \text{y} \quad \vec{F}(\vec{X}) = A\vec{X} + \vec{B}$$

Per también hemos visto ejemplos de sistemas no lineales, como los modelos de depredador-presa:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \alpha P - \beta PD, \\ \frac{dD}{dt} &= -\gamma D + \beta PD \end{aligned}$$

En este caso $\vec{X} = \begin{pmatrix} P \\ D \end{pmatrix}$ y $\vec{F}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} \alpha P - \beta PD \\ -\gamma D + \beta PD \end{pmatrix}$

Sistemas dinámicos vectoriales - Puntos de equilibrio

Un punto \vec{X}^* es un **punto de equilibrio** del sistema dinámico $\vec{X}' = \vec{F}(\vec{X})$ si $\vec{F}(\vec{X}^*) = \vec{0}$.

Por ejemplo, para el sistema dinámico $\vec{X}' = A\vec{X}$, con $\det A \neq 0$, tenemos un solo punto de equilibrio $\vec{X}^* = \vec{0}$ (pues $A\vec{X} = \vec{0}$ si y sólo si $\vec{X} = \vec{0}$)

En contraste, cuando $\det A = 0$ se tendrán una infinidad de puntos de equilibrio.

Para el sistema dinámico $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}$ el punto de equilibrio se determina resolviendo $A\vec{X} + \vec{B} = \vec{0}$, es decir $A\vec{X} = -\vec{B}$

Nótese que este es el sistema que se resuelve para hallar la solución X_P propuesta al resolver el sistema de ecuaciones, suponiendo que $\det A \neq 0$.

En conclusión para el sistema $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}$ el punto de equilibrio es $\vec{X}^* = \vec{X}_P$.

Sistemas dinámicos vectoriales - Puntos de equilibrio

Para determinar los puntos estacionarios del sistema

$$\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = 1 - 3x^2 - y^2 \end{cases}$$

se tendrá que cumplir $2xy = 0$, lo cual abre dos posibilidades en la segunda ecuación $1 - 3x^2 - y^2 = 0$:

Si $x = 0$ entonces $1 - y^2 = 0 \iff y = \pm 1$

Si $y = 0$ entonces $1 - 3x^2 = 0 \iff x = \pm 1/\sqrt{3}$

Cuatro puntos de equilibrio: $\vec{X}_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{X}_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{X}_3^* = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\vec{X}_4^* = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

SISTEMAS LINEALES

Tipos de puntos de equilibrio - Sistemas Lineales

Trataremos de explicar una clasificación básica de los puntos de equilibrio para sistemas lineales de la forma $\vec{X}' = A\vec{X}$ o bien $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}$

- **Puntos degenerados:** Si se cumple alguna de las siguientes opciones
 - $\det A = 0$
 - A tiene valores propios repetidos
 - A tiene valores propios complejos con parte real cero
- **Puntos no degenerados:** que pueden ser estables o inestables
 - Estables: Nodos y Espirales
 - Inestables: Puntos silla, Nodos y Espirales

Nos enfocaremos en puntos de equilibrio no degenerados, y usaremos de nuevo la idea fundamental de vectores y valores propios.

Casos no degenerados: valores propios reales diferentes

En este caso se sabe que la solución general toma la forma

$$\vec{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

Definamos

$$\mathcal{V}_1 = \{ \vec{u} : \vec{u} = K \vec{v}_1 \}, \quad \mathcal{V}_2 = \{ \vec{u} : \vec{u} = K \vec{v}_2 \}$$

Si un dato inicial \vec{X}_0 pertenece a \mathcal{V}_1 entonces $C_2 = 0$ y tendremos que la solución $\vec{X}_1 = e^{\lambda_1 t} C_1 \vec{v}_1$ es múltiplo de \vec{v}_1

Al hacer crecer t ocurren dos cosas:

- $\vec{X}_1(t)$ permanece en \mathcal{V}_1 para toda t .
- Para $\lambda_1 > 0$ tenemos que $\vec{X}_1(t)$ se aleja de $\vec{0}$, mientras que si $\lambda_1 < 0$ tenemos que $\vec{X}_1(t)$ se acerca a $\vec{0}$.

Un análisis similar puede hacerse si el dato inicial pertenece a \mathcal{V}_2 .

Valores propios reales distintos: signos iguales

- Iniciemos mirando al caso en que $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

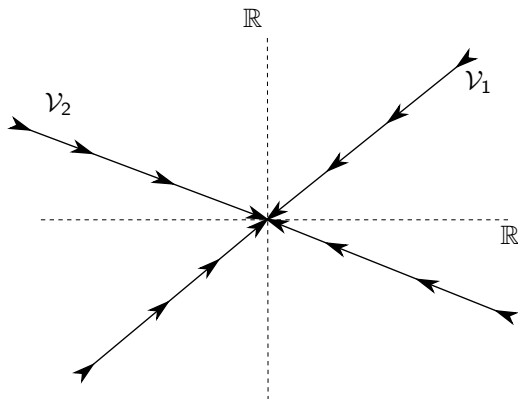
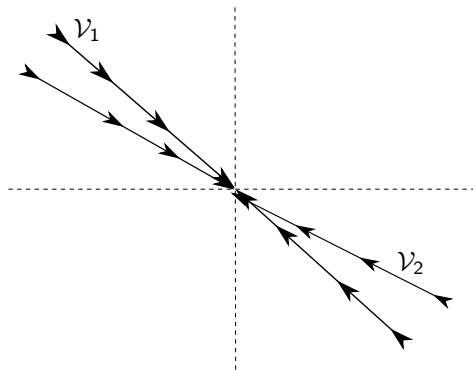


Figura: Nodo atractor. Según vimos anteriormente, un dato inicial en cualquiera de las direcciones de \vec{v}_1 o \vec{v}_2 permanecerá en esa dirección, y se acercará al $\vec{0}$.

Ejemplo

Consideremos por ejemplo el caso en que $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, cuyo polinomio característico es $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 3)(\lambda + 2)$

Al ser los valores propios $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -2$, los correspondientes vectores propios son $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ respectivamente.



Valores propios reales distintos: signos iguales

- Veamos ahora el caso en que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

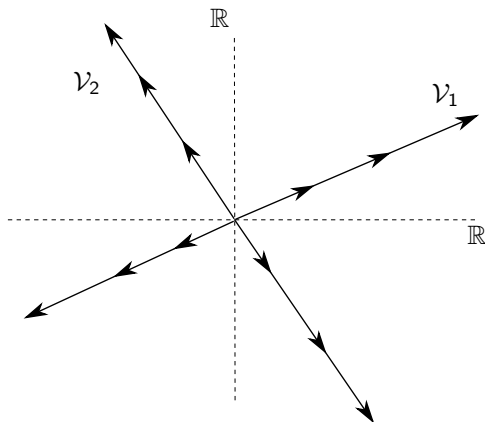
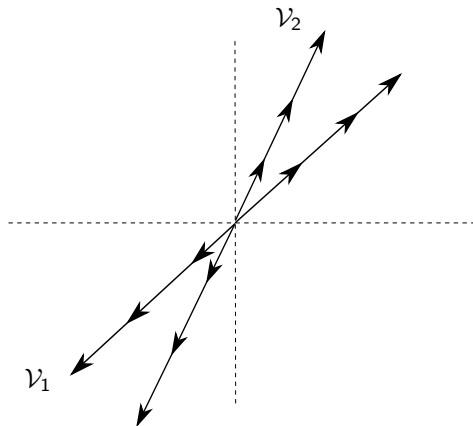


Figura: Nodo repulsor. Ahora, un dato inicial en cualquiera de las direcciones de \vec{v}_1 o \vec{v}_2 permanecerá en esa dirección, y se alejará de $\vec{0}$.

Ejemplo

Cuando $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, el polinomio característico es $\lambda^2 - 6\lambda + 8$

$$\lambda = 4 \implies \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2 \implies \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$



Otros valores iniciales

Las figuras que hemos expuesto anteriormente sugieren el comportamiento de soluciones cuyo valor inicial está en alguno de los espacios asociados a los vectores propios.

Cabe preguntar cuál será el comportamiento con algún otro valor inicial no contenido en tales subespacios.

Una vez más, la forma de la solución general sugiere lo que está pasando:

$$\vec{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

- Si se cumple $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ es de esperarse que la solución general se acerque a $\vec{0}$.
- Si se cumple $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ es de esperarse que la solución general se aleje de $\vec{0}$.

Detalles de nodos atractores y repulsores

- Veamos el caso en que $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

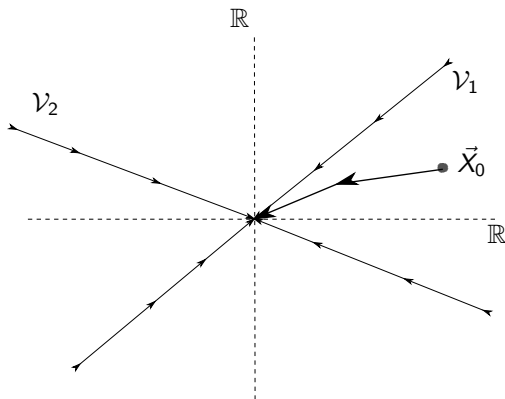


Figura: *Nodo atractor con un dato inicial en \vec{X}_0 .*

Detalles de nodos atractores y repulsores

- Veamos ahora el caso en que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

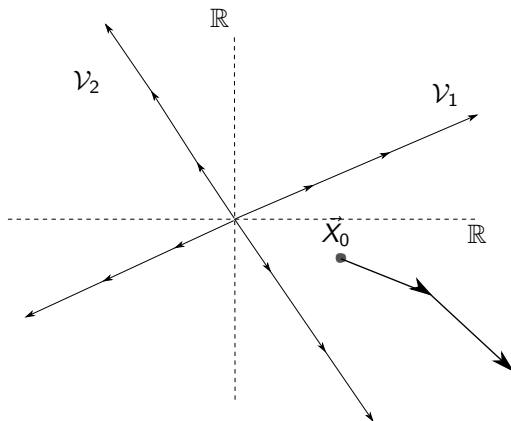


Figura: *Nodo repulsor con un dato inicial en \vec{X}_0 .*

Valores propios reales distintos: signos opuestos

- Supongamos por ejemplo que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

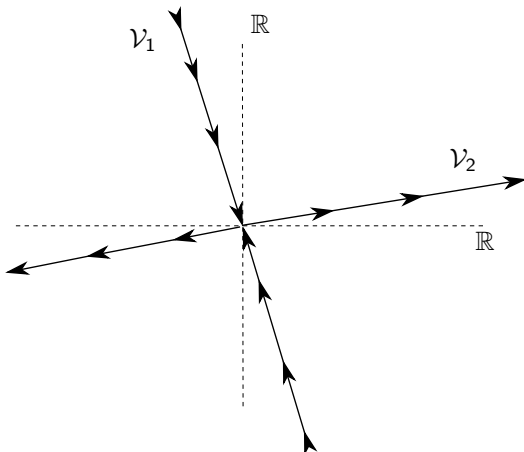


Figura: Punto silla. En este caso, un dato inicial en la dirección de \vec{v}_1 se acercará al $\vec{0}$, mientras que un dato inicial en la dirección de \vec{v}_2 se alejará de $\vec{0}$.

Otros valores iniciales para puntos silla

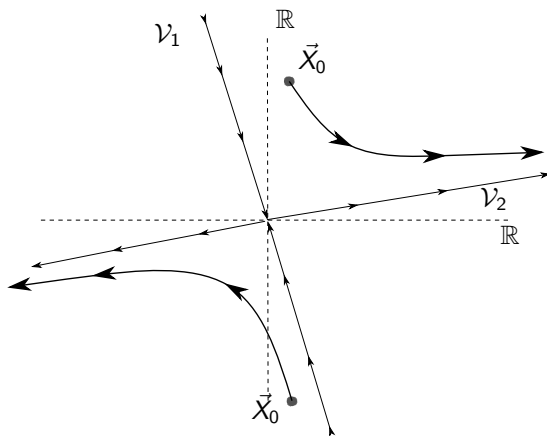
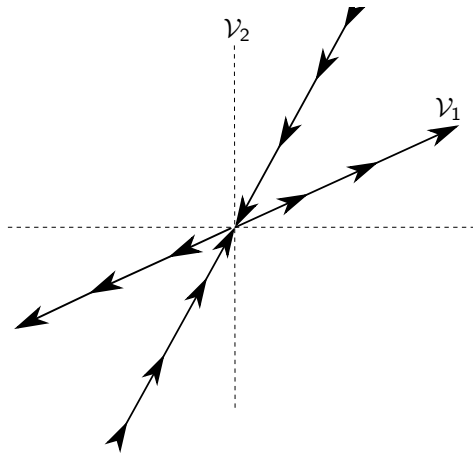


Figura: Punto silla. Aquí se muestran algunas trayectorias con datos iniciales fuera de las direcciones de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .

Ejemplo

Si tenemos $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ se tienen los valores propios $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, cuyos vectores propios son $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$



Si A tiene valores propios complejos con parte real cero

Este será el único punto de tipo degenerado que veremos brevemente.

En este caso se tiene $\lambda = \pm i\beta$, por lo que la solución general tiene la forma

$$\vec{X}(t) = C_1(\vec{r}\cos(\beta t) - \vec{s}\sin(\beta t)) + C_2(\vec{r}\sin(\beta t) + \vec{s}\cos(\beta t)) + \vec{X}_P$$

La idea intuitiva es que conforme t crece, se está trazando una curva cerrada alrededor de $\vec{0}$, o bien alrededor de \vec{X}_P

Algo similar ocurre al parametrizar la circunferencia o una elipse

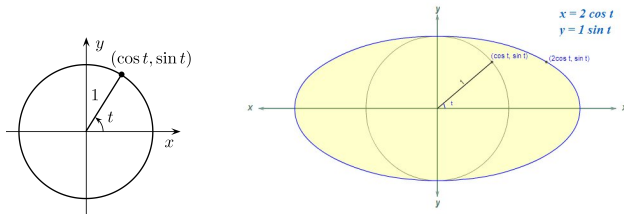


Figura: La parametrización de una circunferencia y una elipse

Lo anterior significa que para distintos valores iniciales tendremos distintos pares de constantes C_1 y C_2 , lo cual da lugar a distintas curvas cerradas alrededor del punto de equilibrio.

Por ejemplo consideremos $\vec{X}' = A\vec{X}$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Los valores propios son $\lambda_{1,2} = \pm i$

Algunos ejemplos gráficos del plano fase se pueden hallar con herramientas de graficadores (Geogebra, por ejemplo), intentando con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix},$$

Órbitas – Isoclinas

Una pregunta válida es: ¿qué sentido sigue la trayectoria? ¿Horario, o contrario a las manecillas del reloj?

Para responder esta pregunta usamos la idea de las isoclinas: se busca dividir el plano en regiones donde se sepa que el comportamiento de las curvas solución sea de los siguientes tipos

- Arriba a la derecha, o arriba a la izquierda
- Abajo a la derecha, o abajo a la izquierda

Para esto, se determinan primero las líneas donde $x'(t) = 0$ y donde $y'(t) = 0$.

Por ejemplo en el sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, al buscar las líneas donde $x' = 0$ o $y' = 0$ tendríamos $2x - 5y = 0$ o $x - 2y = 0$. Esto es

$$\mathcal{L}_1 : y = \frac{2}{5}x, \quad \mathcal{L}_2 : y = \frac{x}{2}$$

Se sabe que en \mathcal{L}_1 se cumple $x' = 0$, por lo que esta línea divide al plano en dos regiones, donde $x' \neq 0$.

Similarmente, como en \mathcal{L}_2 se cumple $y' = 0$, entonces de un lado u otro de esta línea se cumple $y' \neq 0$

Entonces, si tomamos puntos que no estén en estas líneas podremos asignar una figura angular con ciertas reglas:

- Si $y' > 0$ se asigna una flecha vertical hacia arriba y hacia abajo si $y' < 0$.
- En el mismo pequeño diagrama, se dibuja una flecha hacia la izquierda si $x' < 0$, y hacia la derecha si $x' > 0$.

Isoclinas

De vuelta al ejemplo en que $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, luego de graficar $y = \frac{2}{5}x$ y $y = \frac{x}{2}$, elegimos dos puntos fuera de estas líneas, por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

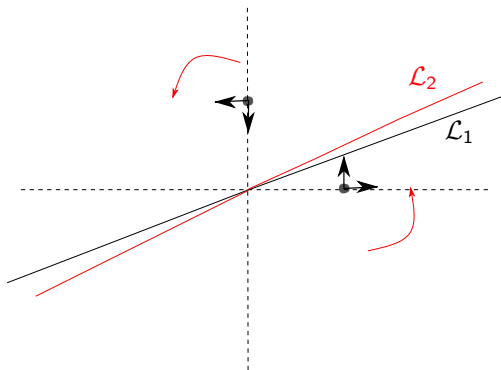
Sustituimos $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en las ecuaciones de x' y y' para determinar si son positivos o negativos:

$$x' = 2(1) - 5(0) = 2 > 0, \quad y' = 1 - 2(0) = 1 > 0$$

De igual modo sustituimos $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en las ecuaciones de x' y y'

$$x' = 2(0) - 5(1) = -5 < 0, \quad y' = 0 - 2(1) = -2 < 0$$

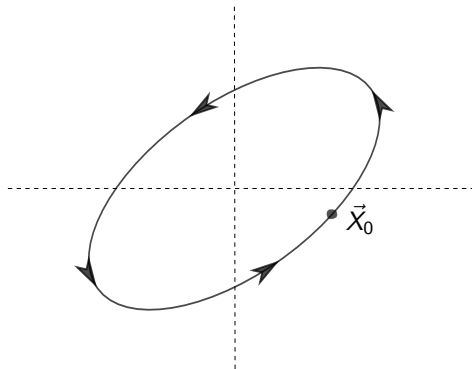
Isoclinas



Con esta información sabemos que la órbita evoluciona en sentido opuesto a las manecillas del reloj.

Plano fase de una órbita

El plano fase tendría un esquema de la siguiente forma:



Valores propios complejos - Parte real distinta de cero

Analizamos ahora la situación en que se tiene como valores propios $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ con $\alpha \neq 0$

En este caso la solución general tiene la forma

$$\vec{X}(t) = C_1 e^{\alpha t} (\vec{r} \cos(\beta t) - \vec{s} \sin(\beta t)) + C_2 e^{\alpha t} (\vec{r} \sin(\beta t) + \vec{s} \cos(\beta t))$$

por lo que tenemos una trayectoria de manera que la magnitud de sus puntos están afectados por la exponencial:

- Si $\alpha > 0$ la exponencial $e^{\alpha t}$ es creciente;
- Si $\alpha < 0$ la exponencial $e^{\alpha t}$ es decreciente

El efecto de este factor es entonces que se forma una espiral que puede converger a $\vec{0}$ (**espiral atractora**), o bien puede alejarse de $\vec{0}$ conforme t crece (**espiral repulsora**).

De nuevo la orientación del recorrido de la trayectoria se puede determinar usando isoclinas.

Ejemplo

Al considerar $\vec{X}' = A\vec{X}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, notamos que sus valores propios son $1 \pm i$.

De hecho la solución general toma la forma

$$\begin{aligned}\vec{X}(t) = & C_1 e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\beta t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\beta t) \right] \\ & + C_2 e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\beta t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\beta t) \right]\end{aligned}$$

Al tener las exponenciales con $\alpha = 1 > 0$, sabemos que es una espiral repulsora.

Ejemplo

Para determinar la orientación de la trayectoria iniciamos determinando las isoclinas.

En este caso son $y = x$, $y = -x$. Ahora tomamos dos puntos fuera de estas líneas, digamos $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ahora determinamos el signo de x' y de y' en esos puntos:

- En $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenemos

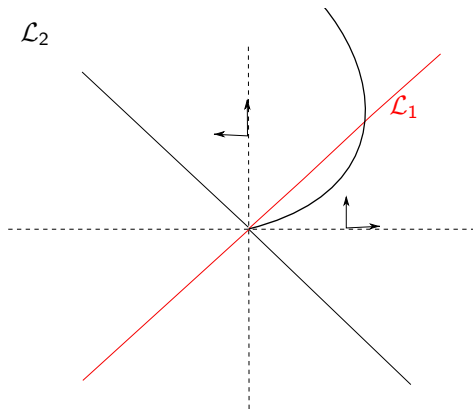
$$x' = x - y = 1 - 0 = 1 > 0, \quad y' = x + y = 1 + 0 = 1 > 0$$

- En $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tenemos

$$x' = x - y = 0 - 1 = -1 < 0, \quad y' = x + y = 0 + 1 = 1 > 0$$

Plano fase del ejemplo

El plano fase tendría un esquema de la siguiente forma:



Sistemas no homogéneos

En el caso de un sistema no homogéneo de la forma $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}$, sabemos que la solución general se escribe como $\vec{X}(t) = \vec{X}_H(t) + \vec{X}_P$.

Entonces es de esperarse que el diagrama que obtengamos para la correspondiente ecuación homogénea $\vec{X}' = A\vec{X}$ se trasladado a \vec{X}_P , recordando que éste es un vector constante.

Teorema de existencia y unicidad

El siguiente teorema abarca sistemas lineales en los que incluso los coeficientes pueden depender de t .

Teorema

Considérese el sistema de ecuaciones $\vec{X}'(t) = A(t)\vec{X}(t)$, donde la matriz de coeficientes $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ consta de funciones continuas en un intervalo abierto I que contiene al tiempo inicial t_0 . Entonces el problema de valor inicial

$$\vec{X}'(t) = A(t)\vec{X}(t), \quad \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0$$

tiene una única solución $\vec{X}(t)$ para $t \in I$.

Si además A es una matriz constante cumpliendo $\det A \neq 0$ entonces el problema de valor inicial para el sistema no homogéneo

$$\vec{X}'(t) = A(t)\vec{X}(t) + \vec{B}, \quad \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0$$

donde \vec{B} es un vector constante tiene una única solución $\vec{X}(t)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$.

SISTEMAS NO LINEALES

Aproximación lineal a un sistema no lineal

Supongamos que tenemos $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ un punto de equilibrio del sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

donde f, g son funciones de dos variables con segundas derivadas parciales continuas.

Basados en el teorema de Taylor definimos la *linealización del sistema* alrededor de $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ como el nuevo sistema lineal definido por

$$\begin{cases} x' = f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\ y' = g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) \end{cases}$$

Ejemplo

Supongamos que $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ es un punto del sistema

$$\begin{cases} x' = x + y^2 - 1 \\ y' = xy + x^2 \end{cases}$$

Entonces la aproximación lineal a este sistema es

$$\begin{cases} x' = (x - x^*) + 2y^*(y - y^*) \\ y' = (y^* + 2x^*)(x - x^*) + x^*(y - y^*) \end{cases}$$

Mirando a los coeficientes de cada variable x , y , notamos que la matriz de la linealización es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2y^* \\ y^* + 2x^* & x^* \end{pmatrix}$

La matriz de la aproximación lineal

En general definimos la *matriz Jacobiana* asociada al sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

como

$$J \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

Por ejemplo podemos calcular los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = x + y^2 - 1 \\ y' = xy + x^2 \end{cases}$$

Buscamos hallar las soluciones de

$$x + y^2 - 1 = 0, \quad xy + x^2 = 0$$

Como $x(y + x) = 0$ dividimos en dos casos: $x = 0$ y $x \neq 0$

Ejemplo – Puntos de equilibrio

Si $x = 0$ entonces al sustituir en la primera ecuación llegamos a $y^2 = 1$.

Tenemos entonces los puntos $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Por otro lado, si $x \neq 0$ en la segunda ecuación podemos despejar $y = -\frac{x^2}{x} = -x$; y de la primera ecuación obtenemos $x + x^2 - 1 = 0$.

Usando la fórmula cuadrática obtenemos $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Sean $\alpha_1 \approx -1,62$ y $\alpha_2 \approx 0,62$

Tenemos entonces los puntos $\begin{pmatrix} -1,62 \\ 1,62 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0,62 \\ -0,62 \end{pmatrix}$.

Ejemplo – Matrices Jacobianas

Las cuatro matrices Jacobianas son

$$J\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J\begin{pmatrix} -1,62 \\ 1,62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3,24 \\ -1,62 & -1,62 \end{pmatrix}, \quad J\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1,24 \\ 0,62 & 0,62 \end{pmatrix}$$

En $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ se tienen puntos silla, mientras que en $\begin{pmatrix} -1,62 \\ 1,62 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0,62 \\ -0,62 \end{pmatrix}$ se tienen espirales, atractora y repulsora, respectivamente.

El teorema de aproximación lineal

El siguiente teorema aclara el uso del proceso de linealización cuando ésta da lugar a una matriz no degenerada.

Teorema

Sea $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ un punto de equilibrio del sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

donde f, g son funciones de dos variables con segundas derivadas parciales continuas.

Supongamos que la matriz Jacobiana $J \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ es no degenerada.

Entonces en una vecindad de $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ son cualitativamente equivalentes el sistema no lineal original y su linealización.