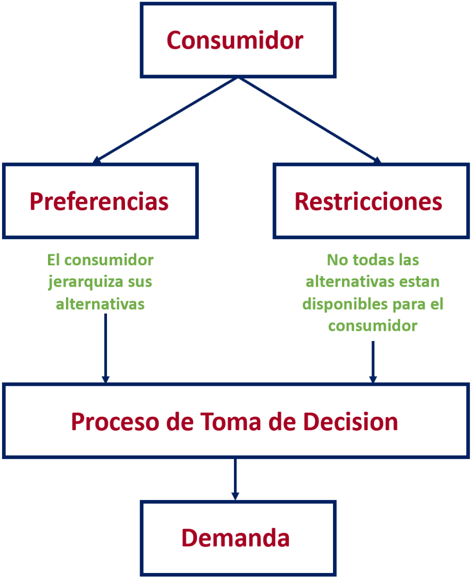
Decisiones de los Consumidores: Función de Utilidad

Alberto Ramírez de Aguilar

ITAM

Otoño 2020

Decisiones de los Consumidores



Función de Utilidad

- Cómo jerarquiza un consumidor a las alternativas? Nosotros usaremos el enfoque de **funciones de utilidad**.
- **Definición**: Una canasta es una pareja $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$.
- **Definición**: Una función $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ representa la utilidad de un consumidor si para cualquier par de alternativas $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2_+$ se tiene que:

  $$u(x_1, y_1) > u(x_0, y_0) \Leftrightarrow \text{el consumidor prefiere la canasta 1 sobre la 0.}$$

- Notemos que $u(x, y) \in \mathbb{R}$ sin embargo el signo de $u(\cdot)$ NO nos dice nada sobre si consumir (x, y) es algo "bueno" o "malo" para el consumidor.
  - La función de utilidad solamente nos sirve para ordenar los gustos del consumidor.

Curvas de Indiferencia

- **Definición**: Dada una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$, la curva de indiferencia nivel k se define como:

$$CI_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ | u(x, y) = k\}.$$

- Es decir, las curvas de indeferencia son igual a las curvas de nivel de la función de utilidad del consumidor $u(\cdot)$.
    - Económicamente, si dos canastas $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in CI_k$ entonces decimos que el consumidor está indiferente entre consumir cualquiera de las dos canastas (pues en ambas recibe una utilidad igual a k).
    - Si, por ejemplo, $(x_0, y_0) \in CI_k$ mientras que $(x_1, y_1) \in CI_j$ con $k < j$ entonces el consumidor prefiere la canasta (x_1, y_1) sobre la canasta (x_0, y_0).

Utilidad Marginal

- **Definición**: La utilidad marginal de un bien (X o Y) mide el cambio en la utilidad del consumidor si dicho bien cambia marginalmente (en a lo más una unidad).

- **Resultado**: Si $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es diferenciable entonces la utilidad marginal de un bien se puede calcular a través de la **derivada parcial** de la función con respecto a ese bien.

- Por ejemplo, si $u(x, y) = x^2y^4$ entonces:

$$umg_x(x, y) = 2xy^4 \quad umg_y(x, y) = 4x^2y^3.$$

Tasa Marginal de Sustitución

- Otro aspecto de interés sobre una función de utilidad esta en saber qué tan sustituible es el bien X con respecto al bien Y.

- **Definición**: La **tasa marginal de sustitución** se define como:

$$TMS(x, y) = \frac{umg_x(x, y)}{umg_y(x, y)}.$$

- **Teorema**: La tasa marginal de sustitución $TMS(x, y)$ mide el número de unidades del bien Y tales que el consumidor está dispuesto a sacrificar con tal de obtener una unidad adicional del bien X y mantener su utilidad constante.

- Desde un punto de vista gráfico, la TMS nos sirve para encontrar la forma de las curvas de nivel (o curvas de indiferencia) de la función de utilidad.

Propiedades de la Función de Utilidad

- A continuación, se listan distintas propiedades que una función de utilidad podría o no cumplir.

- Como veremos a lo largo de prácticamente todo el curso, estas propiedades serán muy útiles mas adelante para simplificarnos el problema que resuelven los consumidores.

- Cada propiedad se puede analizar desde un punto de vista algebraico o gráfico, siendo este último el más común de usar.

Propiedades de la Función de Utilidad: Monotonía

- **Definición**: Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es **monótona (débil)** si para cualquier $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2_+$ tal que $x_1 > x_0$ y $y_1 > y_0$ se tiene que $u(x_1, y_1) > u(x_0, y_0)$.
  - En otras palabras, una función de utilidad es monótona si siempre que el agente consume más **de los dos bienes** su utilidad mejora de manera estricta.
- **Definición**: Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es **estrictamente monótona** si para cualquier $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2_+$ tal que $x_1 \geq x_0$ y $y_1 \geq y_0$ se tiene que $u(x_1, y_1) > u(x_0, y_0)$.
  - Una función de utilidad es estrictamente monótona si siempre que el agente consume más **de al menos uno de los dos bienes** su utilidad mejora de manera estricta.
- Gráficamente, una función de utilidad es monótona (débil) si el gradiente de la función siempre "apunta para el noreste".

Propiedades de la Función de Utilidad: Cuasiconcavidad

- **Definición**: Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es **cuasicóncava (débil)** si para toda $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2_+$ tales que $u(x_0, y_0) = u(x_1, y_1)$ se tiene que:

$$u(\alpha x_0 + (1-\alpha)x_1, \alpha y_0 + (1-\alpha)y_1) \geq u(x_0, y_0),$$

para toda $\alpha \in (0, 1)$.

- **Definición**: Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es **estrictamente cuasicóncava** si para toda $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2_+$ tales que $u(x_0, y_0) = u(x_1, y_1)$ se tiene que:

$$u(\alpha x_0 + (1-\alpha)x_1, \alpha y_0 + (1-\alpha)y_1) > u(x_0, y_0),$$

para toda $\alpha \in (0, 1)$.

- Gráficamente, una función de utilidad es cuasicóncava (débil) si el contorno superior de la función es un conjunto convexo para toda $k \in \mathbb{R}$.

Propiedades de la Función de Utilidad: Homoteticidad

- **Definición**: Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es **homotética** si para cualquier $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ tales que $u(x_1, y_1) > u(x_0, y_0)$ se tiene que:

$$u(\lambda x_1, \lambda y_1) > u(\lambda x_0, \lambda y_0),$$

  para toda $\lambda > 0$.

  - En otras palabras, una función de utilidad es homotética si las preferencias del consumidor se mantienen ante un aumento proporcional en las canastas de consumo.

- Gráficamente, una función de utilidad diferenciable es homotética si ante rayos que parten del origen la tasa marginal de sustitución de la función no cambia, es decir:

$$TMS(\lambda x, \lambda y) = TMS(x, y),$$

  para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ y para toda $\lambda > 0$.

Catálogo de Funciones de Utilidad

- A continuación se presentan algunas de las funciones de utilidad más importantes (aunque no es una lista exhaustiva). Favor de identificar cuáles de las propiedades estudiades cumple o no cada función así como graficar una curva de indiferencia representativa.

- **Función Cobb-Douglas**: Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es del tipo Cobb-Douglas si
$$u(x, y) = x^\alpha y^\beta,$$
con $\alpha, \beta > 0$.

- **Función de Sustitutos Perfectos**: Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es de Sustitutos Perfectos si
$$u(x, y) = ax + by,$$
con $a, b > 0$.

Catálogo de Funciones de Utilidad

- **Función de Complementos Perfectos**: Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es de Complementos Perfectos, o también conocida como función Leontief, si

$$u(x, y) = \min\{ax, by\},$$

con $a, b > 0$.

- **Función Cuasilineal**: Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es cuasilineal si

$$u(x, y) = x + 2y^{1/2}.$$

- **Función Circular**: Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es circular si

$$u(x, y) = x^2 + y^2.$$

Catálogo de Funciones de Utilidad

- **Función CES**: Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es del tipo CES (Constant Elasticity of Substitution) si

$$u(x, y) = [ax^\rho + by^\rho]^{\frac{1}{\rho}} \, ,$$

con $a, b > 0$ y $\rho < 1$, $\rho \neq 0$.

Propiedades de la Función de Utilidad

- Una pregunta que nos podríamos hacer es: las propiedades de la función de utilidad están relacionadas entre si? La respuesta es que NO:
  - Una función de utilidad puede ser monótona mas no cuasicóncava,ejemplo $u(x,y) = x^2 + y^2$.
  - Una función de utilidad puede ser monótona mas no homotética,ejemplo $u(x,y) = \sqrt{x} + y$.
  - Una función de utilidad puede ser cuasicóncava mas no monótona,ejemplo $u(x,y) = -x^2 - y^2$.
  - Una función de utilidad puede ser cuasicóncava mas no homotética,ejemplo $u(x,y) = \sqrt{x} + y$.
  - Una función de utilidad puede ser homotética mas no monótona,ejemplo $u(x,y) = -x^2 - y^2$.
  - Una función de utilidad puede ser homotética mas no cuasicóncava,ejemplo $u(x,y) = x^2 + y^2$.
- De igual manera hay funciones que pueden cumplir las tres propiedades (ejemplo?) y otras que no cumplen ninguna! (ejemplo?)

Transformaciones Monótonas

- Cuándo dos funciones distintas u, w representan las mismas preferencias?
  - Recordemos que la función de utilidad solamente nos sirve para ordenar las preferencias de los consumidores.
  - Si dos funciones distintas u, w ordenan las canastas de la misma manera, diremos que representan las mismas preferencias.
  - Dos funciones distintas representan las mismas preferencias si una es una **transformación monótona** de la otra.
- **Definición**: Una función w es una transformación monótona de u si y solo si existe una función $g(\cdot)$ **estrictamente creciente** tales que:

$$w(x, y) = g\left(u(x, y)\right).$$

- Nota: Si u, w representan las mismas preferencias, entonces el signo de las utilidades marginales de ambas funciones coinciden y, por otro lado, la TMS de ambas funciones es la misma. Por lo tanto, el mapa de curvas de indiferencia de ambas funciones es el mismo (salvo el nivel de cada curva).

Transformaciones Monótonas

- Por ejemplo, si $u(x, y) = x^3 y^9$:
  - La función de utilidad $w(x, y) = 3log(x) + 9log(y)$ es una transformación monótona de u pues $g(z) = log(z)$ es estrictamente creciente en $(0, \infty)$.
  - De igual manera $v(x, y) = xy^3$ pues $g(z) = z^{1/3}$ es estrictamente creciente en $(0, \infty)$.
  - La transformación a $q(x, y) = \frac{1}{xy^3}$ no es monótona pues $g(z) = \frac{1}{z^{1/3}}$ no es estrictamente creciente en $(0, \infty)$.
- Por otro lado, si $u(x, y) = \frac{x}{y} - 5$ entonces:
  - La función $w(x, y) = log(x) - log(y)$ es una transformación monótona de u pues $f(z) = log(z + 5)$ es estrictamente creciente en $(-5, \infty)$.
  - La función $v(x, y) = \left(\frac{x}{y} - 5\right)^2$ no es una transformación monótona pues $f(z) = z^2$ no es creciente en $(-5, \infty)$.