Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden – Parte 2

Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Otoño de 2020

Primeros métodos cuantitativos

Iniciaremos ahora una exploración de métodos para resolver EDO de primer orden.

El plan es estudiar:

- Ecuaciones separables
- Ecuaciones lineales, homogéneas y algunas no homogéneas
- Ecuación de tipo Bernoulli

Como se dijo en la presentación del curso, se darán ejemplos en cada tipo de ecuación que abordemos.

ECUACIONES SEPARABLES

Ecuaciones separables – Estrategia general

Una ecuación que se pueda escribir como

$$\dot{x}(t) = \Phi(x) \cdot \Psi(t)$$

se considera una ecuación separable. La razón es más o menos obvia: se puede separar el lado derecho y pasar dividiendo $\Phi(x)$. De este modo quedaría del lado izquierdo una expresión que sólo depende de x y del lado derecho una que sólo depende de t.

En teoría se puede proceder integrando ambos lados respecto a t, y aparecerá una constante de integración. Se obtendrá entonces una solución general.

Ejemplos

- $y' = t/y$ es separable, y la integración es bien directa, llevando a la solución general

$$\frac{y^2}{2} = \frac{t^2}{2} + C \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm\sqrt{t^2 + 2C}$$

  La determinación del signo y de la constante C dependen de algún dato inicial dado.

Ejemplos de ecuaciones separables

La integración respecto a t del lado izquierdo realmente es

$$\int \frac{1}{\Phi(y(t))} \frac{dy}{dt}\, dt = \int \frac{1}{\Phi(y)}\, dy$$

por lo que es válido "integrar respecto a y" en integrales de este tipo.

- $y' = \dfrac{t+1}{ty+t} = \dfrac{t+1}{t}\left(\dfrac{1}{y+1}\right).$ Llegamos entonces a

$$(y+1)y' = 1 + \frac{1}{t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y^2}{2} + y = t + \ln t + C$$

En este caso no es tan obvio cómo despejar a la y, por lo que se puede dejar una solución implícita.

Ejemplos de ecuaciones separables

Como en muchas situaciones cuando dividimos expresiones en alguna manipulación algebráica, podemos sin querer ignorar algunas soluciones especiales.

- Al resolver $y' = y^2$ la técnica de integración lleva a la solución general $y = -\dfrac{1}{t + C}$. En otras palabras se ha dejado fuera a la solución $y \equiv 0$, correspondiente al dato inicial $y(0) = 0$.
- Algo similar ocurre con $y' = \dfrac{y}{1 + y^2}$ que lleva a la solución general implícita $\ln |y| + \dfrac{y^2}{2} = t + C$, que de nuevo deja fuera a la solución $y \equiv 0$.

Solución de la ecuación logística por separación de variables

- La ecuación $\dot{P} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right)$ es separable, por lo que intentamos aplicarle las ideas anteriores.

Luego de manipulaciones algebráicas obtenemos

$$\frac{\dot{P}}{P(N-P)} = \frac{k}{N}$$

Esto sugiere usar fracciones parciales para integrar el lado izquierdo:

$$\frac{1}{P(N-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{N-P} = \frac{A(N-P)+BP}{P(N-P)}$$

Sustituyendo $P = N$ obtenemos $B = 1/N$; sustituyendo $P = 0$ obtenemos $A = 1/N$. O sea

$$\frac{1}{P(N-P)} = \frac{1}{N}\frac{1}{P} + \frac{1}{N}\frac{1}{N-P}$$

Solución de la ecuación logística por separación de variables

Ahora integramos en $\dfrac{\dot{P}}{P(N-P)} = \dfrac{k}{N}$ obteniendo

$$\int \frac{dP}{P(N-P)} = \frac{k}{N}t + C_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N}\Big[\ln P - \ln|N-P|\Big] = \frac{k}{N}t + C_1$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|\frac{P}{N-P}\right| = kt + C_2 \quad \Rightarrow \frac{P}{|N-P|} = C_3 e^{kt}$$

Para concluir este ejemplo, vemos los dos casos que surgen de tomar los casos de la expresión con valor absoluto.

Solución de la ecuación logística por separación de variables

- Si $P < N$ llegamos a $P = NC_3e^{kt} - C_3e^{kt}P$, o sea $P = \dfrac{NC_3e^{kt}}{1 + C_3e^{kt}}$
- Si $P > N$ llegamos a $P = C_3e^{kt}P - NC_3e^{kt}$, o sea $P = \dfrac{-NC_3e^{kt}}{1 - C_3e^{kt}}$

En ambos casos podemos hacer otra manipulación algebráica (factorizar la exponencial) y obtener

$$P = \frac{NC_3}{e^{-kt} + C_3} \text{ para el primer caso,} \quad P = \frac{-NC_3}{e^{-kt} - C_3} \text{ para el segundo.}$$

Obsérvese que en ambos casos podemos dar un pronóstico del comportamiento a largo plazo: si $t \to \infty$ entonces $P \to N$.

También a partir de estas expresiones se puede calcular C_3 sustituyendo un dato inicial $P(0) = P_0$.

Solución de la ecuación logística por separación de variables

Por ejemplo, de la expresión $P = \dfrac{NC_3e^{kt}}{1 + C_3e^{kt}}$, válida cuando $P_0 < N$ obtenemos, al sustituir $t = 0$

$$P_0 = \frac{NC_3}{1 + C_3} \quad \Rightarrow \quad (1 + C_3)P_0 - NC_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_3(P_0 - N) = -P_0$$

lo cual nos da un valor de $C_3 = \dfrac{P_0}{N - P_0}$ positivo.

Una idea similar funciona para obtener la constante C_3 bajo la suposición $P_0 > N$.

Otras ecuaciones de primer orden

La idea de separar variables puede aplicarse a ecuaciones de la forma $y' + a(t)y = 0$, en cuyo caso obtenemos la solución general de la forma

$$\frac{y'}{y} = -a(t) \quad \Rightarrow \quad y = C \exp\left(-\int a(t)\, dt\right)$$

El problema con el método de separación de variables es que la integral que aparece puede ser difícil o imposible de obtener.

Ejemplo
Consideremos $y' + e^{t^2} y = 0$ con condición inicial $y(1) = 2$

La idea anterior nos llevaría a la solución general $y = C \exp\left(-\int e^{t^2}\, dt\right)$, y sabemos que esta integral no existe como antiderivada.

Para este problema se puede argumentar con integrales definidas, como a continuación explicamos

Una observación sobre integración...

Supongamos que tenemos el problema

$$y' + a(t)y = 0, \qquad y(t_0) = y_0$$

Dado el valor inicial, integraremos en el intervalo $[t_0, t]$:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{y}\frac{dy}{ds}\, ds = -\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds} \ln|y(s)|\, ds = -\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

lo cual lleva a

$$\ln\left|\frac{y(t)}{y(t_0)}\right| = -\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{y(t)}{y(t_0)}\right| \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right) = 1$$

Esto dice que el valor absoluto de la izquierda es 1, para toda t.

Una observación sobre integración...

Al sustituir $t = t_0$ se sabe que $\dfrac{y(t_0)}{y(t_0)} \exp\left(\int_{t_0}^{t_0} a(s)\, ds\right) = 1$

Entonces podemos retirar el valor absoluto y obtener

$$y(t) = y(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right)$$

De vuelta al problema $y' + e^{t^2} y = 0$ con condición inicial $y(1) = 2$, obtendríamos

$$y(t) = 2 \exp\left(-\int_{1}^{t} e^{s^2}\, ds\right)$$

y la integral de la derecha puede calcularse numericamente para distintos valores de t.

ECUACIONES LINEALES

Generalidades de ecuaciones lineales

Podemos hacer una categorización considerando ecuaciones que después de un arreglo algebráico pueden escribirse como

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = h(t).$$

Generalidades de ecuaciones lineales

Podemos hacer una categorización considerando ecuaciones que después de un arreglo algebráico pueden escribirse como

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = h(t).$$

Generalidades de ecuaciones lineales

Podemos hacer una categorización considerando ecuaciones que después de un arreglo algebráico pueden escribirse como

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = h(t).$$

En este caso la expresión a la izquierda

$$G(x) = a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t)$$

es *lineal* en x:

$$G(x_1 + x_2) = G(x_1) + G(x_2); \qquad G(\lambda x) = \lambda G(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Generalidades de ecuaciones lineales

Veamos con detalle estas afirmaciones con la ecuación lineal homogénea de orden 2. En este caso consideremos $ay'' + by' + cy = 0$ y el operador diferencial $G(y) = ay'' + by' + cy$.

Nótese que

$$\begin{aligned} G(y_1 + y_2) &= a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2) \\ &= \big(ay_1'' + by_1' + cy_1\big) + \big(ay_2'' + by_2' + cy_2\big) = G(y_1) + G(y_2) \end{aligned}$$

Similarmente

$$G(\lambda y) = a(\lambda y)'' + b(\lambda y)' + c(\lambda y) = \lambda\big(ay'' + by' + cy\big) = \lambda G(y)$$

Generalidades de ecuaciones lineales

Podemos hacer una categorización considerando ecuaciones que después de un arreglo algebráico pueden escribirse como

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = h(t).$$

En este caso la expresión a la izquierda

$$G(x) = a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t)$$

es *lineal* en x:

$$G(x_1 + x_2) = G(x_1) + G(x_2); \qquad G(\lambda x) = \lambda G(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Generalidades de ecuaciones lineales

El resultado anterior tiene un recíproco, es decir toda ecuación lineal de orden n puede escribirse como

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = h(t).$$

Para las ecuaciones lineales tenemos el siguiente resultado general:

Teorema

- *(Ecuación homogénea) Las soluciones de*

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0$$

  forman un espacio vectorial de dimensión n. A cualquier base de este espacio vectorial lo llamaremos sistema fundamental de soluciones*.*

Una combinación lineal del sistema fundamental de soluciones forma la solución general de la ecuación homogénea.

Generalidades de ecuaciones lineales

Teorema

(...continuación)

- *(Ecuación no homogénea) La solución general de*

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = h(t)$$

puede escribirse como $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$*, donde*

$x_H(t)$ *es la correspondiente solución general de la ecuación homogénea,*

$x_P(t)$ *es alguna solución particular de la ecuación no homogénea.*

Basados en la primera afirmación, la segunda no es difícil de establecer.

Si nos es dada x_P y sabemos que la solución general de la ecuación homogénea x_H es combinación lineal de un sistema fundamental de soluciones, entonces dada cualquier otra solución de la ecuación no homogénea x, se cumplira que $x - x_P$ es solución de la ecuación homogénea. Entonces es combinación lineal de un sistema fundamental de soluciones, por tanto $x = x_P + x_H$.

Ecuación lineal no hogénea de orden 1 – Factor integrante

Revisemos ahora cómo resolver una ecuación $y' + a(t)y = b(t)$. Para ésto no necesitaremos todavía los principios generales recién descritos.

Recordemos la fórmula de la derivada de un producto de funciones:

$$(\mu \cdot y)' = \mu \cdot y' + \mu' \cdot y$$

Comparando con los términos en la ecuación, es sugerente la idea de multiplicar por cierta función desconocida $\mu(t)$:

$$\mu(t) \cdot y' + \mu(t)a(t) \cdot y = \mu(t)b(t)$$

Entonces dicha función μ, llamada el factor integrante debe cumplir la ecuación $\mu' = \mu a$, que es del tipo de ecuación antes revisada, y cuya solución es

$$\mu(t) = \exp\left(\int a(t)\, dt\right)$$

Ecuación lineal no hogénea de orden 1 – Factor integrante

Pero ¿qué de bueno logramos con todo ésto? Nótese que al haber multiplicado la ecuación original por μ

$$\mu(t) \cdot y' + \mu(t)a(t) \cdot y = \mu(t)b(t)$$

por la elección de μ que explicamos antes, podremos de hecho reescribir esta ecuación como

$$\mu(t) \cdot y' + \mu'(t) \cdot y = \mu(t)b(t) \quad \Rightarrow \quad \big(\mu(t) \cdot y\big)' = \mu(t)b(t)$$

Esta última expresión puede ser integrada, llevándonos a

$$\mu y = \int \mu(t)b(t)\,dt + C \quad \Rightarrow \quad y = \exp\left(-\int a(t)\,dt\right)\left[\int \mu(t)b(t)\,dt + C\right]$$

Una vez más, en algunas ocasiones las integraciones serán el paso difícil de este método. Pero no deben memorizarse estas expresiones, sino trabajar cada caso y entender el razonamiento.

Ejemplos

- $y' + 2ty = t, \quad$ con $y(1) = 2$

En este caso $a(t) = 2t$, por lo que $\mu(t) = e^{t^2}$. Multiplicamos la ecuación original por μ:

$$e^{t^2} y' + 2te^{t^2} y = te^{t^2}$$

Identificamos el lado derecho como $\left(e^{t^2} y\right)'$ y entonces integramos:

$$e^{t^2} y = \int te^{t^2} dt = \frac{1}{2} e^{t^2} + C$$

Como podemos despejar y, obtenemos la solución general $y = \dfrac{1}{2} + Ce^{-t^2}$; al sustituir la condición inicial dada en $t = 1$:

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{C}{e} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3e}{2}$$

Por tanto la solución explícita del problema es $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3e^{-t^2+1}}{2}$

Ejemplos

Tenemos tres observaciones respecto a la solución anterior

- En la integración realizada para obtener el factor integrante no se usa la constante de integración, pues sólo necesitamos una función que cumpla lo requerido en la explicación que dimos. En este sentido, no serviría usar integral definida, sino antiderivada.
- Se pudo usar integral definida en lo que dió lugar a la solución general, pero habríamos obtenido directamente la solución explícita:

$$\int_1^t \frac{d}{ds}\left[e^{s^2} y(s)\right] ds = \int_1^t s e^{s^2}\, ds \quad \Leftrightarrow \quad e^{s^2} y(s)\Big|_1^t = \frac{1}{2} e^{s^2}\Big|_1^t$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{t^2} y(t) - 2e = \frac{1}{2} e^{t^2} - \frac{1}{2} e$$

y despejando y llegamos a

$$y = \frac{1}{2} + \frac{3e}{2e^{t^2}} = \frac{1}{2} + \frac{3e^{-t^2+1}}{2}$$

Ejemplos

- La tercera observación es que bien se pudo resolver la ecución $y' + 2ty = t$ por medio de separación de variables:

$$y' = t(1-2y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{1-2y} = t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{-2}\int \frac{-2y'}{1-2y}\,dt = \frac{t^2}{2} + C$$

De aquí obtenemos

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2y| = \frac{t^2}{2} + C \quad \Leftrightarrow \quad |1-2y| = e^{-t^2-2C} = Ke^{-t^2}.$$

Al sustituir la condición inicial $y(1) = 2$ obtenemos

$$3 = Ke^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad K = 3e$$

Así que mientras y permanezca cerca de la condición inicial $y(1) = 2$ asumimos que que $2y - 1 > 0$ y obtenemos

$$2y - 1 = 3e^{-t^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3e^{-t^2+1}}{2} + \frac{1}{2}.$$

Ejemplos

- $y' + y = \dfrac{1}{1+t^2}$, con $y(2) = 3$

Como $a(t) = 1$ entonces $\mu(t) = e^t$. Luego

$$\int_2^t \frac{d}{ds}\left[e^s y(s)\right] ds = \int_2^t \frac{e^s}{1+s^2}\, ds \quad \Leftrightarrow \quad e^t y(t) - 3e^2 = \int_2^t \frac{e^s}{1+s^2}\, ds$$

y despejando obtenemos

$$y(t) = e^{-t}\left[3e^2 + \int_2^t \frac{e^s}{1+s^2}\, ds\right]$$

La observación importante aquí es que esta ecuación NO es separable.

¿Por qué?

Ejemplos

- $ty' + 2y = 4t^2, \quad \text{con } y(1) = 2$

De nuevo la ecuación no es separable. Pero se puede escribir como $y' + \dfrac{2}{t}y = 4t$ y buscar el factor integrante:

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{2}{t}\, dt\right) = e^{2\ln t} = t^2$$

Multiplicando la ecuación azul por μ y siguiendo la rutina:

$$\left(t^2 y\right)' = 4t^3 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 y = t^4 + C \quad \Leftrightarrow \quad y = t^2 + Ct^{-2}$$

Usando la condición inicial en esta solución general, de hecho obtenemos $C = 1$, por lo que la solcuión explícita es $y = t^2 + t^{-2}$.

Observación

- Cuando tenemos la ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes, no es necesario usar factor integrante, pues la separación de variables nos lleva a una solución general memorizable.

Supongamos que iniciamos con la ecuación $y' + ay = b$. Con manipulaciones algebráicas obtenemos $y' = b - ay$, que al integrarse lleva a

$$\frac{1}{-a}\int \frac{(-a)y'}{b-ay}\,dt = t + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln|b-ay| = -at + C_2 \quad \Leftrightarrow \quad |ay-b| = C_3 e^{-at}$$

Si $ay > b$ entonces obtenemos $y = Ke^{-at} + \dfrac{b}{a}$ (con $K = C_3/a$)

Si $ay < b$ entonces obtenemos $y = Ke^{-at} + \dfrac{b}{a}$ (con $K = -C_3/a$)

La solución general memorizable: $y = Ke^{-at} + \dfrac{b}{a}$.