Decisiones de los Consumidores: Demanda Compensada

Alberto Ramírez de Aguilar

ITAM

Otoño 2020

Limitaciones del Modelo Marshaliano

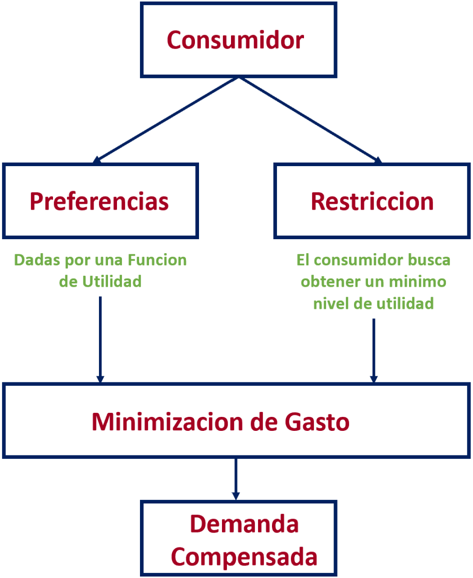
- A pesar de ser un buen modelo introductorio, el modelo Marshaliano no es suficiente para explicar cierto comportamiento de los consumidores que se observan en los datos.

- Por ejemplo:

  1. No explica por que la gente podria llegar a ahorrar.
  2. No muestra una teoría sólida que explique el por que la demanda podría llegar a tener pendiente negativa (o no).
  3. Genera resultados que no son comparables entre distintos individuos (pues la utilidad no es comparable).
  4. No endogeiniza las decisiones del consumidor para generarse un ingreso que le permite luego consumir.

- Por esta razón, ahora pasaremos a estudiar un modelo distinto, que (potencialmente) nos ayudará a entender mejor las decisiones de los consumidores.

Modelo Compensado



Problema de Minimización de Gasto

- Consideremos a un consumidor que cuenta con una función de utilidad $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que representa sus gustos por bienes X e Y. Este consumidor se enfrenta a precios $P_x, P_y > 0$.

- El Problema de Minimización de Gasto (o a veces llamado Problema Compensado) sugiere que el consumidor busca gastar lo menos posible con tal de obtener un nivel de utilidad de al menos $\bar{u}$. Es decir, el consumidor resuelve el siguiente problema:

$$\min_{\{x,y\}} \quad P_x x + P_y y \quad \text{sujeto a:}$$
$$\bar{u} \leq u(x,y)$$
$$0 \leq x$$
$$0 \leq y.$$

Función Objetivo: Gasto

- En el problema compensado, la función objetivo del consumidor esta dada por:

$$G(x, y, P_x, P_y) = P_x x + P_y y.$$

- Es decir $G(x, y, P_x, P_y)$ representa el gasto que el consumidor debe de hacer si quiere comprar la canasta (x, y) cuando el nivel de precios esta dado por (P_x, P_y).

- **Definición:** Una curva de Isogasto nivel k se define como aquellas canastas que dado los precios representan el mismo gasto:

$$IG_k = \{(x, y) | P_x x + P_y y = k\}.$$

- **Nota:** Las curvas de Isogasto se pueden ver como desplazamientos paralelos de lineas rectas con pendiente $-P_x/P_y$.

Conjunto Factible

- En el problema compensado, el conjunto factible esta dado por las siguientes ecuaciones:

$$\bar{u} \leq u(x, y)$$
$$0 \leq x$$
$$0 \leq y.$$

- Nota que este conjunto cambia dependiendo de como sea la función de utilidad del consumidor.

Método de Kuhn-Tucker Para Minimización

- Supongamos que buscamos resolver el siguiente problema (general) de minimización:

$$\min_{\{x_1, x2, \ldots, x_n\}} \quad f(x_1, x_2, ..., x_n) \ \text{ sujeto a:}$$

$$h(x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_q) = 0$$

$$g(x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_q) \geq 0$$

- Entonces, el Lagrangeano del problema lo escribimos como sigue:

$$\mathcal{L} = f(x_1, ..., x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x_1, ..., p_q) - \sum_{j=1}^{r} \mu_j h_j(x_1, ..., p_q).$$

Método de Kuhn-Tucker Para Minimización

- Luego, las condiciones de primer orden para este problema son las siguientes.

1. Con respecto a cada variable de decisión x_l:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_l}(x_1^\star, \ldots, x_n^\star, \ldots, p_q, \lambda_1^\star, \ldots, \mu_m^\star) = 0.$$

2. Con respecto a cada multiplicador de Lagrange λ_i:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i}(x_1^\star, \ldots, x_n^\star, \ldots, p_q, \lambda_1^\star, \ldots, \mu_m^\star) = 0.$$

3. Con respecto a los multiplicadores de desigualdad μ_j debemos pedir tres condiciones, llamadas **Condiciones de Holgura**:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_j}(x_1^\star, \ldots, x_n^\star, \ldots, p_q, \lambda_1^\star, \ldots, \mu_m^\star) \leq 0,$$

$$\mu_j^\star \geq 0, \quad \mu_j^\star h_j(x_1^\star, \ldots, x_n^\star, \ldots, p_q, \lambda_1^\star, \ldots, \mu_m^\star) = 0.$$

Soluciones Al Problema Compensado

- Una vez que planteamos el lagrangeano y se obtienen las condiciones de primer orden (favor de hacerlo de tarea), podemos obtener las siguientes condiciones que cualquier óptimo debe cumplir para ser solución al problema compensado:
  - Si el óptimo cumple $x^\star > 0, y^\star > 0$ entonces se debe cumplir:
  $$TMS(x^\star, y^\star) = \frac{P_x}{P_y}.$$
  - Si el óptimo cumple $x^\star = 0, y^\star > 0$ entonces se debe cumplir:
  $$TMS(0, y^\star) \leq \frac{P_x}{P_y}.$$
  - Si el óptimo cumple $x^\star > 0, y^\star = 0$ entonces se debe cumplir:
  $$TMS(x^\star, 0) \geq \frac{P_x}{P_y}.$$

Demandas Compensadas

- **Definición**: Si $(x^\star, y^\star)$ son la solución del problema compensado entonces se les llaman **Demandas Compensadas** y usualmente se denotan como:

$$x^\star = X^C(P_x, P_y, \bar{u}) \quad y^\star = Y^C(P_x, P_y, \bar{u}).$$

- **Definición**: A la función valor del problema compensado se le conoce como **Función de Gasto Mínimo**:

$$E(P_x, P_y, \bar{u}) = P_x X^C(P_x, P_y, \bar{u}) + P_y Y^C(P_x, P_y, \bar{u}).$$

Propiedades de las Demandas Compensadas

- Las demandas compensadas cumplen las siguientes propiedades:
  1. **Homogéneas de Grado Cero en Precios**: Para cualquier $\lambda > 0$ se cumple:
  $$X^C(\lambda P_x, \lambda P_y, \bar{u}) = X^C(P_x, P_y, \bar{u}) \quad Y^C(\lambda P_x, \lambda P_y, \bar{u}) = X^C(P_x, P_y, \bar{u}).$$
  2. **Ley de la Demanda Compensada**: Cualquier demanda compensada es no-creciente en su propio precio y no-decreciente en el precio cruzado. Es decir:
  $$\frac{\partial X^C}{\partial P_x}(P_x, P_y, \bar{u}) \leq 0 \quad \frac{\partial X^C}{\partial P_y}(P_x, P_y, \bar{u}) \geq 0,$$
  y de manera similar para las demandas del bien Y.
  3. **Lema de Shephard**:
  $$X^C(P_x, P_y, \bar{u}) = \frac{\partial E}{\partial P_x}(P_x, P_y, \bar{u}).$$
  4. **Simetría en Efectos Cruzados**:
  $$\frac{\partial X^C}{\partial P_y}(P_x, P_y, \bar{u}) = \frac{\partial Y^C}{\partial P_x}(P_x, P_y, \bar{u}).$$

Propiedades de la Función de Gasto Mínimo

- La función de gasto mínimo cumple las siguientes propiedades:
  1. **Homogénea de Grado Uno en Precios**: Para toda $\lambda > 0$ se cumple:
  $$E(\lambda P_x, \lambda P_y, \bar{u}) = \lambda E(P_x, P_y, \bar{u}).$$
  2. **No-Decreciente Ante Aumentos en la Utilidad**: Para toda $\bar{u} < \hat{u}$ se cumple:
  $$E(P_x, P_y, \bar{u}) \leq E(P_x, P_y, \hat{u}).$$
  3. **No-Decreciente Ante Aumentos en un Precio**: Para todo $P_x < \hat{P}_x$ se tiene que:
  $$E(P_x, P_y, \bar{u}) \leq E(\hat{P}_x, P_y, \bar{u}).$$
  4. **Cóncava en Cada Precio**: Es decir:
  $$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(P_x, P_y, \bar{u}) \leq 0.$$