# Presentación de los temas del curso MAT12210 – Sistemas Dinámicos

Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Otoño de 2020

# Breve descripción de los objetivos del curso

Mirando al temario podríamos abreviar los objetivos del curso como:

- *Presentar algunos aspectos teóricos de las matemáticas que permiten modelar algunos fenómenos usando ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias, así como técnicas clásicas para proponer soluciones de estas ecuaciones.*

Así que trataremos de abarcar *teoría y ejemplos de modelos matemáticos* de

- Ecuaciones diferenciales – dinámica continua
- Ecuaciones en diferencias – dinámica discreta.

# Dinámica Continua y dinámica discreta

En el primer caso, se adaptan las variables y las descripciones para considerar un *cambio continuo en el tiempo*.

Por ésto la dinámica de las *variables de estado* se modelan con *ecuaciones diferenciales*.

En el segundo caso, se consideran estados medidos en *periodos de tiempo dados por intervalos iguales*.

Así, la dinámica de las *variables de estado* se modelan con *ecuaciones en diferencias*.

De este modo, en los siguientes temas se cubrirá teoría y ejemplos.

# Temario reducido

ECUACIONES DIFERENCIALES

- Ecuaciones lineales de primer orden.
- Ecuación de Bernoulli,
- Ecuaciones exactas. Factores integrantes.
- Modelo de crecimiento logístico. Modelo de crecimiento neoclásico de Solow.
- Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Sistemas de ecuaciones lineales. Estabilidad.
- Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Diagramas de fase y linealización de sistemas no lineales.

ECUACIONES EN DIFERENCIAS

- Ecuaciones lineales de primer y segundo orden. La telaraña. Estabilidad.
- Ciclos y Caos.
- Sistemas lineales de ecuaciones en diferencias. Estabilidad de las soluciones.
- Ecuaciones en Diferencias Estocásticas.

# UN EJEMPLO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA USANDO ECUACIONES DIFERENCIALES

# Modelación matemática con ecuaciones diferenciales

Nos proponemos modelar algunos fenómenos que evolucionan con el tiempo.

Al describir las relaciones entre las cantidades aparecerán derivadas, que sabemos que describen razones de cambio, y por tanto obtendremos ecuaciones diferenciales.

Al hacer estos modelos se debe cuidar de:

- Establecer claramente las **suposiciones** bajo las que se trabaja, describiendo también relaciones entre las variables que se involucran.
- Distinguir al menos tres tipos de variables en esta descripción: variables independientes, variables dependientes y parámetros constantes.
- Asumiendo las **suposiciones**, establecer operaciones o relaciones matemáticas que lleven a ecuaciones de las variables y parámetros.
- En lo posible, validar los resultados con datos o información obtenida empíricamente.

# Ejemplos de crecimiento poblacional

## Ejemplo (Modelo de Malthus)

*Hallar un modelo matemático con la sola suposición de que cierta población crece de manera proporcional a la población actual.*

En este caso identificamos:

$t$ que representa el tiempo, variable independiente,

$P = P(t)$ que representa a la población presente al tiempo $t$,

$k > 0$ la constante de proporcionalidad,

$P_0 = P(0) > 0$ una población inicial (al tiempo $t = 0$)

La única suposición, al involucrar una relación de crecimiento, conlleva una razón de cambio, por lo que tendremos:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(0) = P_0.$$

# Ejemplos de crecimiento poblacional

Con las ecuaciones
$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(0) = P_0.$$
formamos lo que se llama un **problema de valor inicial.**

Una solución de dicho problema será en este caso una función $P(t)$ que cumpla ambas ecuaciones. En este caso se dice que hemos resuelto el problema.

Sin resolver la ecuación podemos dar una descripción cualitativa del crecimiento de la población, diciendo que *la población crecerá sin detenerse al avanzar el tiempo.*

¿Qué pasará si $k < 0$?

Como se tendría un "decrecimiento", podría uno imaginarse un material que va decayendo con el paso del tiempo: un material radioactivo, un depósito con un líquido que se está derramando....

# Ejemplos de crecimiento poblacional

Para hallar una solución de manera explícita usamos una simple técnica de integración (respecto a $t$):

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k, \qquad \int \frac{dP}{P} = \int k\, dt, \qquad \ln P(t) = kt + c_0$$

Nótese que ésto nos lleva a una solución de la ecuación diferencial, que no necesariamente cumple la condición inicial: $P(t) = e^{c_0} e^{kt} = Ce^{kt}$.

Por lo mismo la llamamos **solución general** del problema. Para sincronizarla con una solución que también cumpla la condición inicial simplemente sustituimos $t = 0$:

$$P_0 = P(0) = Ce^{k0} = C \quad \Rightarrow \quad P(t) = P_0 e^{kt}.$$

A ésta la llamaremos **solución particular o explícita** del problema.

# Ejemplos de crecimiento poblacional

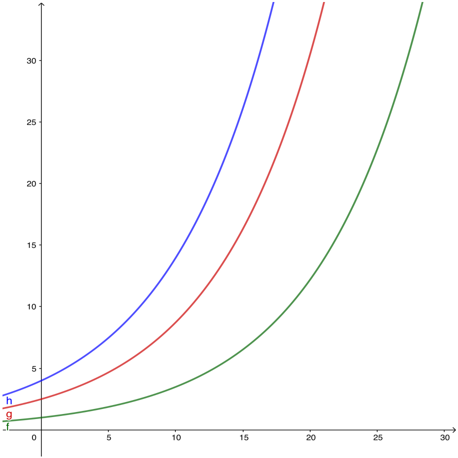



Figura: Gráficas de $y = Ce^{x/8}$, con $C = 2, 3, 4$

# Validación

Basados en datos reales, podríamos verificar si el modelo de crecimiento exponencial hace una buena predicción del crecimiento de alguna población real.

Sin embargo los datos de ejemplos concretos de crecimiento poblacional muestran otro comportamiento en el largo plazo.

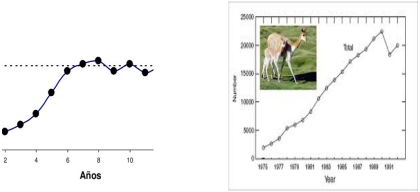



Figura: Una par de ejemplos de crecimiento poblacional

Los datos sugieren que debe haber un factor de “amortiguamiento”del crecimiento poblacional. Veremos más adelante un ejemplo concreto de un nuevo modelo.

# Ejemplo de crecimiento poblacional con dos espacies interactuando

Nos proponemos describir ahora un modelo en donde hayan dos especies que interactúan, de manera que una sea presa de la otra.

## Ejemplo (Modelos con depredadores y presas)

*Supóngase que dos especies comparten un ecosistema y una es* **depredador** *de la otra, a la que llamaremos* **presa**. *Supóngase además que:*

- *Si los depredadores no estuvieran presentes, las presas crecerían proporcionalmente a su población, sin control o restricción alguna.*
- *El depredador caza sus presas de manera proporcional al número de encuentros entre ambas especies.*
- *Si no hubiera presas la población de depredadores decrece de manera proporcional a su población.*
- *La tasa de nacimiento de depredadores es proporcional a el número de presas cazadas.*

*Obsérvese que esta última suposición implica que la tasa de nacimiento de depredadores es proporcional al número de encuentros entre las especies.*

# Crecimiento poblacional con dos espacies interactuando

En este caso tendremos dos variables dependientes del tiempo:

$$D(t) = \text{Población de depredadores}, \qquad P(t) = \text{Población de presas.}$$

Tendremos además cuatro parámetros constantes:

$\alpha > 0$ tasa de crecimiento de la presa,

$\beta > 0$ constante para medir el número de encuentros entre las especies,

$\gamma > 0$ tasa de mortandad de depredadores,

$\delta > 0$ constante para medir el beneficio de depredadores al cazar presas.

# Un modelo de depredador-presa

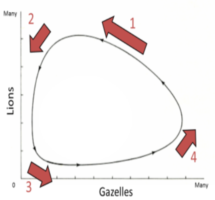
Luego de algunas argumentaciones podemos llegar a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \alpha P - \beta PD, \\ \frac{dD}{dt} &= -\gamma D + \beta PD \end{aligned}$$

A ésto se le llama **sistema de ecuaciones de primer orden.** En este caso, una solución es una pareja de funciones $P(t)$, $D(t)$ que cumplen este par de ecuaciones.

Este ejemplo nos permite recalcar el hecho de que habrá ocasiones en que no hallaremos soluciones explícitas, sino sólo describiremos soluciones aproximadas, para lo que será muy útil desarrollar algunos *métodos de aproximación o numéricos*.

# Ejemplos de crecimiento poblacional



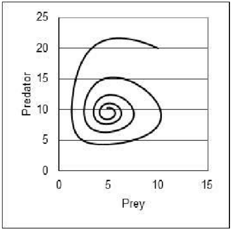
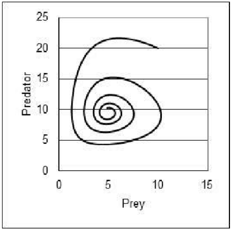




Figura: Dos posibles escenarios del modelo Depredador-Presa

Se pueden también comparar las gráficas de cada población en su evolución en el tiempo.



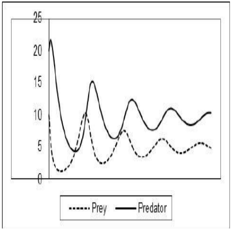




Figura: Evolución en el tiempo de las poblaciones

# Más ejemplos de crecimiento poblacional con dos especies

Para ensayar el planteamiento del modelo de dinámica poblacional en otras situaciones, dados los siguientes sistemas, respondamos la pregunta "Las especies $P$ y $D$, ¿Compiten o cooperan?".

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \alpha P - \alpha\frac{P^2}{N} + \beta PD, \\ \frac{dD}{dt} &= \gamma D + \delta PD \qquad \text{COOPERAN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -\gamma P - \delta PD, \\ \frac{dD}{dt} &= \alpha D - \beta PD \qquad \text{COMPITEN} \end{aligned}$$

# EJEMPLOS DE MODELACIÓN MATEMÁTICA USANDO ECUACIONES EN DIFERENCIAS

# Modelación matemática con ecuaciones en diferencias

Como se dijo antes, tratamos de modelar algunos fenómenos dados por procesos evolutivos, y ahora nos enfocamos en casos en que la variable del tiempo da **saltos periódicos**, por lo que tenemos una **dinámica discreta**.

Las relaciones que cumplan las distintas cantidades involucradas en el fenómeno a estudiar dan lugar a ecuaciones que interconectan razones de cambio, variaciones, decrecimientos, etc., por lo que será entonces natural que aparezcan ecuaciones en diferencias.

Para esta parte de la presentación trataremos de hacer un paralelo entre lo que describimos antes con ecuaciones diferenciales, y lo que describiremos ahora con ecuaciones en diferencias.

# Ejemplos de crecimiento poblacional

## Ejemplo (Modelo de crecimiento constante)

*La suposición que hacemos es que cierta población crece con una tasa de crecimiento constante.*

En este caso podemos suponer que $P_0$ es la población inicial, y tendremos las variables

$P_t$ es la población al tiempo $t$.

$a > 0$ es la tasa de crecimiento de un periodo a otro.

En este caso se tiene la relación de crecimiento

$$P_{t+1} = P_t + aP_t = (1 + a)P_t$$

# Ejemplos de crecimiento poblacional

De la relación anterior obtenemos

$$P_{t+2} = (1+a)P_{t+1} = (1+a)(1+a)P_t = (1+a)^2 P_t.$$

Repitiendo recursivamente tendremos $P_{t+k} = (1+a)^k P_t$.

Para usar la condición inicial $P_0$, escribimos lo anterior como

$$P_t = (1+r)^t P_0 \quad \text{para cualquier } t = 1, 2, \ldots$$

Esta es la **solución particular explícita.**

# Ejemplo de crecimiento poblacional con más de una especie

Una vez más suponemos que hay dos especies que interactúan, de manera que una es la presa de la otra.

Con las mismas consideraciones del ejemplo de dinámica continua, podemos ahora llegar al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= aP_t - bP_tD_t, \\ D_{t+1} &= -cD_t + dP_tD_t \end{aligned}$$

con $a > 1$, $b > 0$, $0 < c < 1$, $d > 0$.

## UNA CORRECCIÓN DE LOS MODELOS ANTERIORES: MODELOS DE CRECIMIENTO LOGÍSTICO

# Otro ejemplo de crecimiento poblacional

## Ejemplo (Modelo de crecimiento logístico)

*Ahora añadimos un ajuste en las suposiciones del modelo:*

- *Si la población es pequeña su crecimiento es proporcional a su tamaño.*
- *Si la población comienza a ser grande comenzará a experimentar un decrecimiento.*

Primero usaremos un nuevo parámetro, que nos indica qué tan grande es una *"población grande"*:

$N > 0$ capacidad de persistencia o de carga (de fenómenos biológicos...)

Si $P(t) < N$ la población crece, pero si $P(t) > N$ la población decrece.

# Ejemplos de crecimiento poblacional

Se requiere pues un factor F para que podamos escribir las suposiciones de la forma

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot \mathsf{F} \cdot P$$

Se tiene que:

- F está entre 0 y 1 si $0 < P < N$,
- F es negativo si $P > N$.

Una elección podría ser $\mathsf{F} = \left(1 - \frac{P}{N}\right)$, que nos lleva a la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P = kP - \frac{kP^2}{N}$$

Esta es la llamada **ecuación de Verhulst**.

# Ejemplos de crecimiento poblacional

Para esta ecuación también podríamos usar técnicas de integración para hallar una solución explícita, pero ahora haremos énfasis en el análisis cualitativo.

Primero lo escribiremos en notación de *"sistema dinámico autónomo"*:

$$\dot{P} = f(P), \qquad \text{con} \quad f(P) = k\left(1 - \frac{P}{N}\right)P$$

Y a partir de propiedades de la función $f$ podemos deducir algo del comportamiento de la población $P(t)$.

Por ejemplo, si $\dot{P}(t)$ (la derivada de $P$ respecto a $t$) es positiva sabríamos que la población crece; y de manera análoga si $\dot{P}(t)$.

En particular, si $f = 0$ entonces se tiene un comportamiento *"estacionario"*

Así que en general para revisar el comportamiento cualitativo de un sistema dinámico modelado por $\dot{P} = f(P)$ sería muy útil hacer un esquema de la gráfica de $f$ como función de $P$.

# Ejemplos de crecimiento poblacional

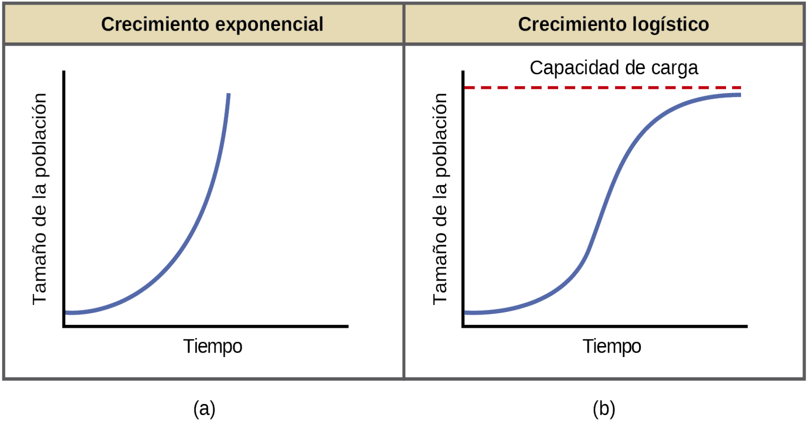



Figura: Comparación entre crecimiento exponencial y crecimiento logístico

# Ejemplos de crecimiento poblacional

## Ejemplo (Modelo discreto de crecimiento logístico)

*Ahora planteamos que el crecimiento de tasa constante tenga una "corrección logística" basados en lo que se obtuvo en el modelo de dinámica continua.*

Se plantea entonces que se tenga

$$P_{t+1} = P_t + aP_t - bP_t^2$$

Ahora el término $bP_t^2$ puede interpretarse como una medida de "fricción social", y $b > 0$ es un "coeficiente de competencia".

Nótese que en este caso llegamos a

$$P_{t+1} = P_t + aP_t\left(1 - \frac{b}{a}P_t\right) = aP_t\left(1 + \frac{1}{a} - \frac{b}{a}P_t\right)$$

# Ejemplos de crecimiento poblacional

La relación anterior puede escribirse como

$$\Delta P_t = aP_t\left(1 - \frac{b}{a}P_t\right) \qquad \text{donde } \Delta P_t \equiv P_{t+1} - P_t$$

Si $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{K}$, e interpretamos $\Delta P_t$ como un "diferencial" de $P_t$, esta expresión tiene gran parecido con la ecuación de Verhulst.

De hecho, con cambios de variable adecuados (**¡ver detalles!**), otro modo de escribir la ecuación

$$P_{t+1} = bP_t\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{b} - P_t\right)$$

es $y_{t+1} = \mu y_t(1 - y_t)$

*(Sugerencia:* $y_t = \dfrac{bP_t}{a+1}$ *funciona. Luego se puede obtener* $\mu$*)*

# Ejemplos de crecimiento poblacional

Como en el ejemplo de la ecuación diferencial de Verhulst, revisamos rápidamente el análisis cualitativo.

De nuevo usamos la *"notación de sistema dinámico autónomo"*:

$$y_{t+1} = f(y_t) \qquad \text{donde } \ f(s) = \mu s(1-s)$$

Y a partir de propiedades de la función $f$ tratamos de deducir el comportamiento de la población.

A continuación vemos un ejemplo del análisis cualitativo que repasaremos.

# Ejemplos de crecimiento poblacional

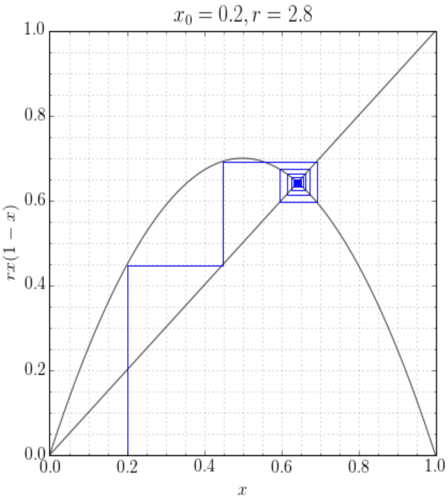



Figura: Diagrama de telaraña

# Ejemplos de crecimiento poblacional

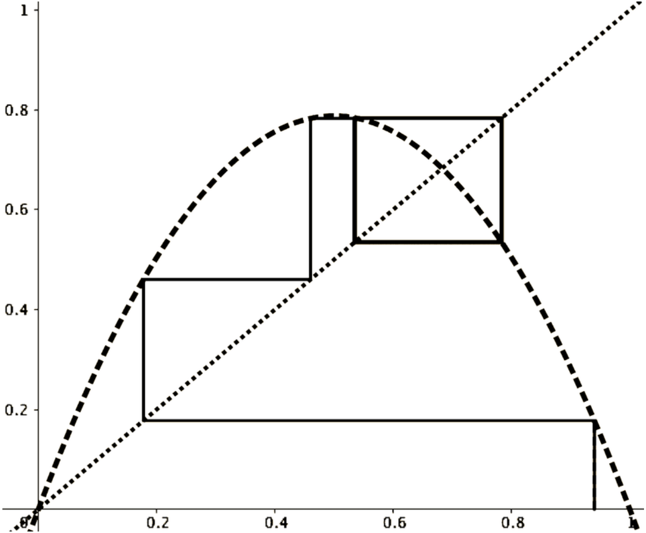



Figura: Diagrama de telaraña