Ecuaciones de segundo orden – Algunos ejemplos de modelación matemática

Sistemas Dinámicos
Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Otoño de 2020

Relación entre inflación y desempleo

Revisaremos un modelo matemático que describen esta relación, bajo ciertas premisas que simplifican su descripción.

Ejemplo (Curva de Phillips)

Consideramos las siguientes variables:

$u(t)$ *la tasa de desempleo;*

$p(t)$ *el logaritmo del nivel de precios;*

Notemos que si $P(t)$ *denota el nivel de precios, entonces tendríamos* $\dot{p} = \dfrac{\dot{P}}{P}$

Esto se interpreta como una tasa instantánea de cambio en el nivel de precio. Por esto $\dot{p}$ *se concibe como la tasa de inflación.*

Relación entre inflación y desempleo

Ejemplo (Curva de Phillips)

Ahora suponemos que la dinámica de estas funciones obedece a las siguientes ecuaciones:

$$\dot{u} = -\alpha(\overline{m} - p) + \beta(\overline{u} - u), \qquad \dot{p} = \gamma(\overline{u} - u)$$

Las constantes involucradas son $\alpha, \beta, \gamma > 0$ *cumpliendo* $\beta^2 > 4\alpha\gamma$*.*
Además:

$\overline{m}$	*denota el logaritmo de la cantidad nominal de dinero (circulante);*
$\overline{u}$	*tasa "natural" de desempleo.*

$\overline{m}$ *usualmente se determina desde el Banco Central, y* $\overline{u}$ *es un umbral estimado bajo la suposición de que no todos los individuos economicamente activos están empleados. Su valor depende de la buena o mala previsión de los agentes.*

Relación entre inflación y desempleo

Ejemplo (Curva de Phillips)

Así, la ecuación

$$\dot{u} = -\alpha(\overline{m} - p) + \beta(\overline{u} - u)$$

dice que el cambio en la tasa del desempleo depende de dos factores:

- *Del término $\alpha(\overline{m} - p)$, que en esencia está determinado por la política monetaria*
- *Del término $\beta(\overline{u} - u)$, que mide la discrepancia entre las tasas real y natural de desempleo.*

La ecuación $\dot{p} = \gamma(\overline{u} - u)$ se conoce como **relación de Phillips**. *Establece una relación entre la inflación $\dot{p}$ y el desempleo.*

Relación entre inflación y desempleo

Nótese que de la ecuación $\dot{p} = \gamma(\overline{u} - u)$ obtenemos $\dot{u} = -\dfrac{\ddot{p}}{\gamma}$

Sustituyendo $\dot{u}$ y $(\overline{u} - u)$ en la primera ecuación llegamos a

$$\ddot{p} + \beta\dot{p} + \alpha\gamma p = \alpha\gamma\overline{m}$$

Los métodos desarrollados en clase llevan a que una solución general para esta ecuación es

$$p(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \overline{m}$$

ya que, usando la fórmula cuadrática

$$r_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2}$$

podemos deducir que $r_1, r_2 < 0$, pues $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} < \beta$.

Relación entre inflación y desempleo

Su derivada puede sustituirse en la relación de Phillips para obtener

$$u(t) = \overline{u} - \frac{\dot{p}}{\gamma} = \overline{u} - \frac{1}{\gamma}\left(C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t}\right)$$

Como siempre, las constantes pueden determinarse dando condiciones iniciales $p(0) = p_0$, $u(0) = u_0$.

Notemos que esta última condición puede visualizarse como una condición sobre $\dot{p}$, pues de la relación de Phillips $\dot{p} = \gamma(\overline{u} - u)$, implica que una condición sobre $u(0)$ inmediatamente implica una condición sobre $\dot{p}(0)$.

Luego de algunas cuentas obtendríamos los valores de C_1 y C_2. Por tanto

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \overline{m}, \qquad \lim_{t\to\infty} u(t) = \overline{u}$$

Esto tiene una interpretación directa, recordando el significado de cada variable.

Vibraciones Mecánicas

Consideremos una masa sostenida por un resorte (en posición vertical) con longitud inicial ℓ, y supongamos que la masa causa una elongación del resorte de modo que tiene una nueva longitud $L > \ell$.

Las fuerzas inicialmente actuando en este sistema son

- El peso de magnitud mg
- La resistencia del resorte que es proporcional a la longitud elongada $-kL$

Se tendrá en estas circunstancias la condición de reposo $mg = kL$.

Vibraciones Mecánicas

Se supone ahora que una tercera fuerza actúa en el sistema, cuando este se encuentra en reposo, e imprime un desplazamiento $u = u(t)$

Se tendrán ahora tres fuerzas actuando:

- El peso $w = mg$
- La resistencia del resorte que es proporcional a la longitud elongada $F_s = -k(L + u)$
- Una fuerza de resistencia que suponemos proporcional a la velocidad de la masa, actuando en direccón opuesta al movimiento: $F_r = -\gamma u'$

Vibraciones Mecánicas

Finalmente supongamos que hay una fuerza externa $F(t)$, que puede provenir del movimiento del punto donde se montó el resorte, o bien una fuerza aplicada directamente a la masa.

Por la segunda ley de Newton, se sabe que

$$mu'' = \text{Suma de las fuerzas actuando}$$

por lo que obtenemos

$$mu''(t) = w + F_s + F_r + F = mg - k(L + u(t)) - \gamma u'(t) + F(t)$$

Reordenando y usando la condición de reposo obtenemos la ecuación

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F(t)$$

Pueden, por supuesto, añadirse condiciones iniciales $u(0) = u_0$, $u'(0) = v_0$.

Ejemplo

Una masa que pesa 3kg. (fuerza) estira un resorte 5 cm. La masa se desplaza otros 10 cm. hacia abajo para luego ser liberada. Supongamos que hay una resistencia del medio de 4kg. (fuerza) cuando la masa tiene velocidad 60 cm/seg. Formular un problema de valores iniciales que describa el movimiento de esta masa.

Para este ejemplo se deben determinar las constantes que aparecerán en la ecuación.

$$m = \frac{3}{9{,}8}, \qquad k = \frac{3}{0{,}05}, \qquad \gamma = \frac{4}{0{,}6}$$

Al no mencionarse fuerzas externas, asumimos que $F(t) \equiv 0$.

Tenemos pues $\frac{3}{9{,}8}u'' + \frac{40}{6}u' + 60u = 0$ con condiciones iniciales $u(0) = 0{,}1$ y $u'(0) = 0$.

Ejemplo (Vibraciones libres sin resistencia)

En estas se asume que $F(t) \equiv 0$ *y que* $\gamma = 0$*, por lo que se tiene*

$$mu'' + ku = 0$$

Así que la solución general tendrá la forma

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t), \qquad \textit{con } \omega_0^2 = k/m$$

Las constantes A *y* B *se obtienen con adecuadas condiciones iniciales.*

Para una discusión a fondo de este caso, escribimos esta solución en la forma

$$u(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta)$$

Vibraciones Mecánicas

Recordando identidades trigonométricas tendremos que

$$R\cos(\omega_0 t - \delta) = R\cos\delta\cos(\omega_0 t) + R\,\mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

Así, la constante δ debe elegirse de manera que $A = R\cos\delta$ y $B = R\,\mathrm{sen}\,\delta$, por lo que

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \delta = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

Es por ésto que la gráfica de u será la de una función coseno "desplazada y ampliada".

Vibraciones Mecánicas

Por ejemplo, en la ecuación $u'' + 192u = 0$ se tiene la solución general de la forma

$$u(t) = \frac{1}{6}\cos(8\sqrt{3}t) - \frac{1}{8\sqrt{3}}\operatorname{sen}(8\sqrt{3}t)$$

En este caso $\omega_0 = \sqrt{192} \approx 13{,}86$, y $R = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{192}} \approx 0{,}182$

Además $\delta = \arctan\big(\frac{-1/(8\sqrt{3})}{1/6}\big) = \arctan\big(-\sqrt{3}/4\big)$

Como en este caso $\cos\delta > 0$ y $\operatorname{sen}\delta < 0$ tenemos $\delta \approx -0{,}41$ (en radianes)

Así es como se escribiría a la solución en la forma

$$u(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta)$$

Vibraciones Mecánicas

Ejemplo (Vibraciones forzadas sin resistencia)

En este caso se asume que $\gamma = 0$ *y que hay una fuerza externa* $F(t)$*, que suponemos de la forma* $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$*. Por tanto tenemos la ecuación*

$$mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

Suponiendo que $\omega_0 = \sqrt{k/m} \neq \omega$*, la solución general será*

$$u(t) = u_H + u_P = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

En efecto, se propondría $u_P = A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)$ y se seguiría la rutina de calcular $u'(t)$, $u''(t)$ y sustituir en la ecuación para determinar las constantes A y B, resultando $A = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ y $B = 0$.

Vibraciones Mecánicas

Suponiendo que tenemos condiciones iniciales $u(0) = 0$ y $u'(0) = 0$ entonces se puede probar que

$$C_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \qquad C_2 = 0$$

y entonces la solución queda

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right)$$

La gráfica de esta función es una sinuidal dentro de otra sinuidal.

Para esta situación podemos tratar de resolver $u'' + u = 0{,}5\cos(0{,}8t)$ con datos iniciales $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$.