Método de cociente de verosimilitudes

$\mathcal{H}_0: \theta \in A$ vs $\mathcal{H}_1: \theta \in A^c$

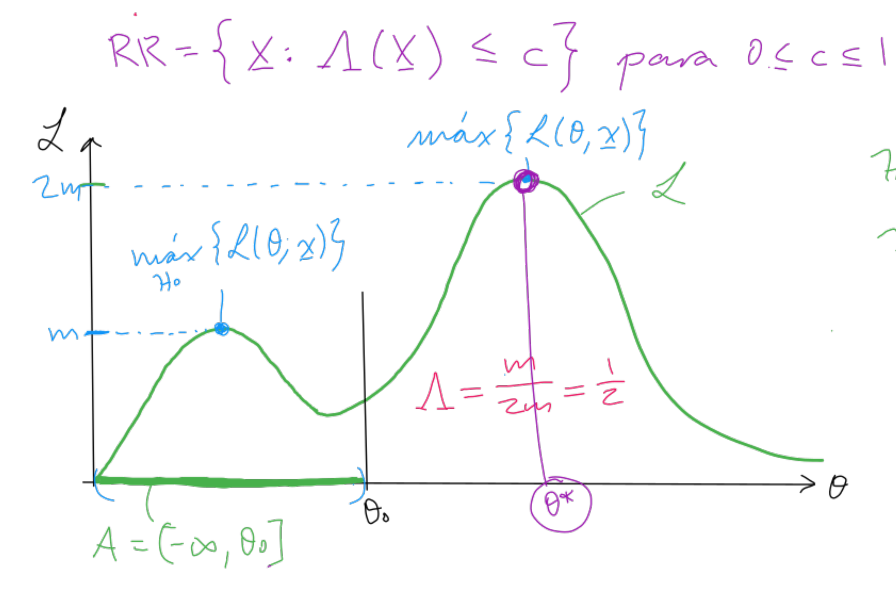
$f_X(x;\theta)$ y $\mathcal{L}(\theta;\underline{x})$

El cociente de verosimilitudes es

$$\Lambda(\underline{X}) = \frac{\underset{\mathcal{H}_0}{\text{máx}}\{\mathcal{L}(\theta;\underline{x})\}}{\text{máx}\{\mathcal{L}(\theta;\underline{x})\}} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{pseudo EMV (porque solo acepta los valores bajo } \mathcal{H}_0) \\ \longleftarrow \text{EMV} \end{array}$$

La RR asociada es

$$RR = \{\underline{X} : \Lambda(\underline{X}) \leq c\} \text{ para } 0 \leq c \leq 1$$



$\mathcal{H}_0: \theta \leq \theta_0$

$\mathcal{H}_1: \theta > \theta_0$

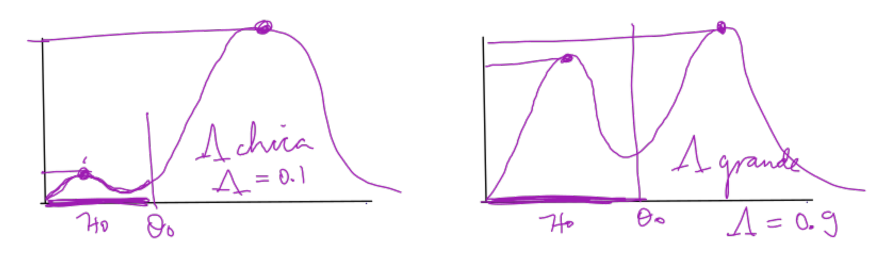
Comentarios:

- $0 \leq \Lambda \leq 1$

$$\frac{x}{y}\begin{cases} \cancel{> 1 \Rightarrow x > y} \\ \boxed{\begin{array}{l} < 1 \Rightarrow x < y \\ = 1 \Rightarrow x = y \end{array}} \end{cases}$$

- El numerador de Λ representa la máxima proba. de que hayamos observado la muestra si $\mathcal{H}_0$ fuera cierta.
- El denominador de Λ representa la máxima proba. de que hayamos observado la muestra para cualquier valor permitido para θ.

$\therefore$ Λ será pequeña si la proba. de observar la muestra suponiendo $\mathcal{H}_0$ verdadera es considerablemente menor que cuando se permiten todos los posibles valores de θ. (y esto nos llevaría a rechazar $\mathcal{H}_0$)



¿Qué tan pequeña es "pequeña"?

¿Qué tan pequeña debe ser Λ para que rechazemos $\mathcal{H}_0$?

$$RR = \{\underline{X} : \Lambda(\underline{X}) \leq c\} \quad 0 \leq c \leq 1$$

$\longrightarrow$ Ejemplo. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, 1)$

$\mathcal{H}_0: \mu = \mu_0$ vs $\mathcal{H}_1: \mu \neq \mu_0$

$$\mathcal{L}(\mu;\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2} I_{\mathbb{R}}(x_i)$$
$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum(x_i-\mu)^2}$$

Sabemos que el EMV de μ es $\hat{\mu} = \bar{X}$ y si restringimos a los valores que permite $\mathcal{H}_0$, entonces $\underset{(\text{bajo } \mathcal{H}_0)}{\hat{\mu}_0} = \mu_0$

$$\therefore \Lambda(\underline{X}) = \frac{\underset{\mathcal{H}_0}{\text{máx}}\{\mathcal{L}(\mu;\underline{x})\}}{\text{máx}\{\mathcal{L}(\mu;\underline{x})\}}$$
$$= \frac{\mathcal{L}(\mu_0;\underline{x})}{\mathcal{L}(\bar{X};\underline{x})}$$
$$= \frac{\cancel{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum(x_i-\mu_0)^2}}{\cancel{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum(x_i-\bar{X})^2}}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}\sum[(x_i-\mu_0)^2-(x_i-\bar{X})^2]}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}\sum[\cancel{x_i^2}-2\mu_0 x_i+\mu_0^2-\cancel{x_i^2}+2\bar{X}x_i-\bar{X}^2]}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}\sum[\mu_0^2-\bar{X}^2-2(\mu_0-\bar{X})x_i]}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}[n\mu_0^2-n\bar{X}^2-2(\mu_0-\bar{X})n\bar{X}]} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{X}}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}n[\mu_0^2-\bar{X}^2-2\mu_0\bar{X}+2\bar{X}^2]}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}n[\mu_0^2-2\mu_0\bar{X}+\bar{X}^2]}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}n(\mu_0-\bar{X})^2}$$

Ya encontramos Λ, tenemos que determinar RR:

$$RR = \{\underline{X} : \Lambda(\underline{X}) \leq c\}$$
$$= \{\underline{X} : e^{-\frac{1}{2}n(\mu_0-\bar{X})^2} \leq c\}$$

Nos interesa calcular $\alpha = P(\text{caer en la RR} \mid \mathcal{H}_0)$,

es decir $\alpha = P\left(e^{-\frac{1}{2}n(\bar{X}-\mu)^2} \leq c \mid \mathcal{H}_0\right) = P\left(e^{-\frac{1}{2}n(\bar{X}-\mu_0)^2} \leq c\right)$

Para lograrlo, necesitamos reexpresarla en términos de una v.a. cuya distribución conozcamos bien

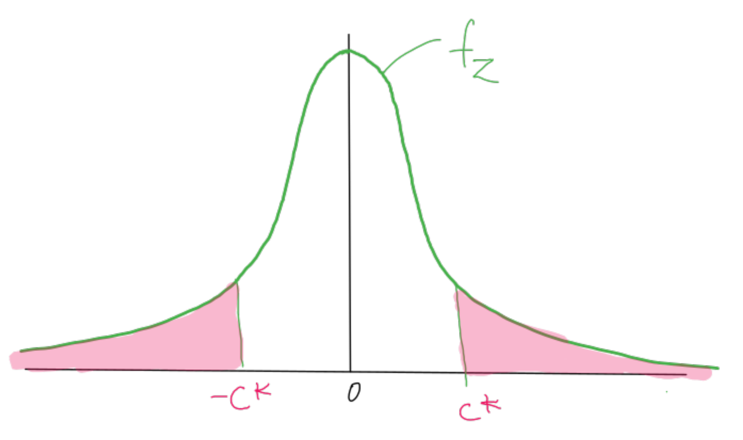
$\longrightarrow$ Sabemos que como $X_i \sim N(\mu, 1)$ para $i = 1, \ldots, n$ entonces $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n})$ y

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{1/n}} = \sqrt{n}(\bar{X}-\mu) \sim N(0,1)$$

$$RR = \{\underline{X} : e^{-\frac{1}{2}n(\bar{X}-\mu_0)^2} \leq c\}$$
$$= \{\underline{X} : -\tfrac{1}{2}n(\bar{X}-\mu_0)^2 \leq \ln(c)\}$$
$$= \{\underline{X} : n(\bar{X}-\mu_0)^2 \geq -2\ln(c)\}$$
$$= \{\underline{X} : \underbrace{\sqrt{n}|\bar{X}-\mu_0|}_{\sim N(0,1)} \geq \underbrace{\sqrt{-2\ln(c)}}_{c^*}\}$$

Así, si nos interesa calcular

$$\alpha = P(\text{rechazar } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0)$$
$$= P(\text{caer en RR} \mid \mathcal{H}_0)$$
$$= P(\sqrt{n}|\bar{X}-\mu_0| \geq c^*)$$



Ahora pongámosle valores al ejemplo:

$n = 64$

$\mu_0 = 4$ $\quad(\mathcal{H}_0: \mu = 4$ vs $\mathcal{H}_1: \mu \neq 4)$

Observamos $X_1, \ldots, X_n$ y vemos que $\bar{X} = 4.52$

4 vs 4.52 — evidencia que aporta la muestra

$\boxed{c = \frac{1}{2} \text{ (poco estrictos)}}$

$c = \frac{1}{20}$ (muy estrictos)

$\Rightarrow c^* = \sqrt{-2\ln(c)} = \sqrt{-2\ln(\frac{1}{2})} = 0.776$

$\sqrt{n}|\bar{X}-\mu_0| = \sqrt{64}|4.52-4| = (8)(0.52) = 4.16$

$$RR = \{\underline{X} : \underbrace{\sqrt{n}|\bar{X}-\mu_0|} \geq c^*\}$$

¿$4.16 \geq 0.776$?

$\rightarrow$ Sí, con la muestra observada estamos cayendo dentro de RR

$\therefore$ rechazamos $\mathcal{H}_0$

$\therefore$ aceptamos $\mathcal{H}_1$

$\therefore$ $\mu \neq 4$

7 Potencia de la prueba (power of the test)

		Decisión	
		$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$
Realidad	$\mathcal{H}_0$	✓	E I α
	$\mathcal{H}_1$	E II β	✓
			$\pi(\theta)$

Vimos que una forma de evaluar qué tan "buena" es la prueba es cuantificando α y β.

Otra forma es mediante la función de potencia:

$$\pi(\theta) = P(\text{ caer en la RR } \forall \theta)$$
$$= P(T(\underline{X}) \in RR \ \forall \theta)$$

no confundir

$$\alpha = P(\text{ caer en la RR} \mid \mathcal{H}_0)$$

- Ojo: no significa que $\mathcal{H}_1$ sea cierta.
- Si $\pi(\theta) \approx 1$, entonces existe muy buena evidencia estadística en contra de $\mathcal{H}_0$

Lema de Neyman-Pearson:

Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a. con f.d.p. $f_X(x;\theta)$ y sea $\mathcal{L}(\theta; \underline{x})$ la fun. de verosimilitud.
Consideremos el contraste

$$\underbrace{\mathcal{H}_0: \theta = \theta_0}_{\text{simple}} \quad vs \quad \underbrace{\mathcal{H}_1: \theta = \theta_1}_{\text{simple}}$$

Entonces, la RR asociada es

$$RR = \left\{ \underline{X} : \frac{\mathcal{L}(\theta_0; \underline{x})}{\mathcal{L}(\theta_1; \underline{x})} \leq k_\alpha \right\}$$

donde α es el nivel de significancia de la prueba.

¿Por qué es útil el lema de NP?

$\longrightarrow$ Porque garantiza la RR "más potente", es decir que maximiza $\pi(\theta)$ y por lo tanto busca darnos la mayor evidencia posible en contra de $\mathcal{H}_0$

Comentarios

- $\pi(\theta) \uparrow$ si $n \uparrow$ (esto no necesariamente significa que $\pi(\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$)
- En la práctica es común fijar ① α (p. ej. $\alpha = 0.05$) y con esto buscar ② la RR que maximice ③ $\pi(\theta)$
- Decimos que la RR dada por el lema de NP es la RR "asociada a la prueba más potente".