Probabilidad I

EST-11101

M.A. Fernando Jesús Martínez Eissa

02H2019

ITAM

División Académica de Actuaría, Estadística y Matemáticas

Objetivo

Proporcionar al alumno los conceptos, herramientas y fundamentos de la teoría de probabilidad; para que desarrolle los niveles mínimos cognoscitivos de:

- Conocimiento
- Comprensión
- Operación

Temario

1. Fundamentos de Probabilidad;
2. Variables Aleatorias;
3. Distribuciones Importantes;
4. Distribuciones Multivariadas;
5. Distribución normal multivariada;

Evaluación

Examen°	Fecha de evaluación	Ponderación
Trabajo y tareas	Varias a lo largo del curso	5%
1er Examen Parcial	miércoles 25 de septiembre de 2019	20%
2do Examen Parcial	miércoles 30 de octubre de 2019	20%
3er Examen Parcial	miércoles 27 de noviembre de 2019	20%
Examen Final	Asignado por D.E. 9 al 20 de Dic. 2019	35%
	Total	**100%**

Artículo 27°. Los exámenes de fin de cursos serán comprensivos, por escrito, o de manera oral ante dos sinodales y se realizarán al terminar el ciclo académico en las fechas establecidas por la Dirección Escolar. Se aplicarán exclusivamente a los alumnos que aparezcan en las actas formuladas para tal efecto. En ningún caso se podrá exentar al alumno de la presentación de estos exámenes.

El examen de fin de cursos debe ser aprobado para que puedan tomarse en cuenta los demás criterios de evaluación.

Bibliografía

1. Wackerly, D.D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R.L. (2008), *Mathematical Statistics with Applications* 7th Edition, Duxbury, Thompson, Brooks/Cole.

2. Wackerly, D.D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R.L. (2010), *Estadística Matemática con aplicaciiones* 7ma Edición, CENGAGE Learning.

3. Pitman, J. (1993), *Probability*. Springer 6ª. Ed.

4. Ross, S. (1993), *A First Course in Probability*. Pearson 9th. Ed.

5. Canavos, G.C. (1987), *Probabilidad y Estadística*, McGraw Hill.

6. Mittelhammer (2013),*Mathematical Statistics for Economics and Business*, 2nd Ed. Springer.

I. Fundamentos de Probabilidad

M.A. Fernando Jesús Martínez Eissa

02H2019

azar

Del ár. hisp. **azzahr*, y este del ár. *zahr* 'dado[1]'; literalmente 'flores'.

1. m. Casualidad, caso fortuito.
2. m. Desgracia imprevista.
3. m. En los juegos de naipes o dados, carta o dado que tiene el punto con que se pierde.
4. m. En el juego de trucos o billar, cada uno de los dos lados de la tronera que miran a la mesa.
5. m. En el juego de pelota, esquina, puerta, ventana u otro estorbo.

azar moral

1. m. *Econ.* Posibilidad de que una persona o institución siga una conducta más arriesgada después de haber hecho un seguro contra alguna contingencia.

al azar

1. loc. adv. Sin rumbo ni orden.

salir azar

1. loc. verb. coloq. desus. Dicho de una cosa: Malograrse o salir mal.

juego de azar

Introducción

http://icpr.itam.mx/Principios2018/Semana01/Insurance.webm

Introducción

1. La Probabilidad nace de la necesidad del humano por conocer con certeza los eventos que sucederán en el futuro.

2. La Probabilidad es una rama de las matemáticas que se encarga del estudio formal de las reglas de la incertidumbre.
3. El concepto de probabilidad está íntimamente ligado a la idea de azar y nos ayuda a medir nuestras posibilidades de éxito.

4. Conocer, entender y comprender el azar es necesario para la toma de decisiones.
   a) Un inversionista arriesga tiempo, recursos y dinero;
   b) Un restaurante arriesga su reputación por la calidad de los alimentos;
   c) Hacer negocios con cierto socio con riesgo subjetivo alto.

5. Riesgo (*risicare*): Acontecimiento futuro, posible e incierto de naturaleza aleatoria cuya realización implica una oportunidad, o una afectación (daño).

Introducción

- Ejemplo de Antenas

- Requerimos de un método eficiente para contar el número de casos en el que puedan ocurrir las cosas.

- Muchos problemas en teoría de probabilidad, pueden resolverse simplemente por contar el número de casos posibles en los que puede presentarse un evento.

- La teoría matemática del conteo se le conoce como análisis combinatorio.

Definiciones Básicas

- **Experimento:** Proceso mediante el cual se obtiene una observación o un dato.
- **Experimento Aleatorio:** También llamado fenómeno aleatorio, es aquel cuyos resultados no pueden predecirse antes de su realización y por lo tanto, están sujetos al azar.
- **Espacio Muestral (Ω):** Es el conjunto integrado por todos los posibles resultados de un fenómeno aleatorio o experimento.
- **Evento:** Subconjunto de un espacio muestral. Se dice que un evento sucede si, al realizar un experimento, ocurre cualquiera de sus elementos. Por lo general se denotan con mayúsculas: A, B, …
- **Cardinalidad ($|A|$):** La cardinalidad de un evento A, corresponde al tamaño de este evento..

Probabilidad Objetiva

Se refiere a la frecuencia relativa de un evento a largo plazo bajo el supuesto de un número infinito de observaciones y sin cambio en las condiciones subyacentes.

Se pueden determinar por razonamiento deductivo (*a priori*), por Ejemplo la probabilidad de que salga un dos en una tirada de un dado de seis caras sin cargar es 1/6.

También se pueden determinar por razonamiento inductivo, *e.g.* la probabilidad de que una persona de 21 años fallezca antes de cumplir 26 años, no se puede deducir de manera intuitiva ni lógica y requiere de un análisis más detallado basándose en la experiencia de mortalidad

Probabilidad Subjetiva

Se refiere a la estimación individual que la persona le asigna a la posibilidad de que incurra en una pérdida y no necesariamente coincide con la probabilidad objetiva.

Por Ejemplo, una persona que compra un boleto de la lotería en el día de su cumpleaños, puede atribuirle a esa fecha el que se incrementen sus posibilidades de ganarse el "premio mayor, premio mayor" y sobre estimar la mínima probabilidad que en realidad existe de ganarse la lotería.

Una gran variedad de factores influyen en la probabilidad subjetiva: edad, género, inteligencia, educación, uso de drogas, etc.

Ejemplo I

Se lanza un dado y se registran los puntos obtenidos. En este caso el espacio muestral es:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,\}$$

Sea el evento A: Valor observado es par.

$$A=\{2,4,6\}$$

Sea B el evento en donde el valor observado es impar, entonces tenemos:

$$B=\{1,3,5\}$$

Considere el evento C, como aquellos valores mayores a 4

$$C=\{5,6\}$$

Ejemplo II

Se lanzan dos dados y se registran los puntos obtenidos. En este caso el espacio muestral es:

$\Omega=$

1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

Donde en cada par ordenado (x,y), x corresponde al puntaje del primer dado y y al puntaje del segundo dado. Dado ese espacio muestral, se pueden definir los siguientes eventos:

- A: Suma de los puntos es 7

A:{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)}

Ejemplo II (*Continúa*)

- B: El número de puntos del primer dado es mayor o igual al del segundo.

  B:{(1,1)(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),
  (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

- C: El número de puntos del primer dado es mayor que 4.

  C:{(5,1)(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),
  (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

Definición Clásica de Probabilidad

No es necesario que se lleve a cabo un experimento aleatorio ni que se recolecten observaciones para hacer afirmaciones sobre las probabilidades de los eventos.

Si un evento que está sujeto al azar puede resultar en cualesquiera Ω formas igualmente probables y mutuamente excluyentes y si n_A de estos resultados tienen la característica A, entonces la probabilidad de A es la proporción de n_A con respecto a Ω.

$$P(A) = \frac{n_A}{\Omega} = \frac{número\ de\ resultados\ donde\ ocurre\ A}{número\ total\ de\ posibles\ resultados}$$

Nota: Para que la expresión anterior tenga validez, cada uno de los resultados en el espacio muestral debe tener la misma probabilidad.

El enfoque clásico, es apropiado, por Ejemplo, para calcular probabilidades asociadas a juegos de azar.

Ejemplo III

Se lanza una moneda al aire. Las caras de la moneda están identificadas como águila y sol. Entonces

$$\Omega{:}\{A,S\} \text{ y } |\Omega|=2$$

Definimos los siguientes eventos:

A:{el resultado del lanzamiento es águila} A:$\{A\}$ y $|A|=1$

S: {el resultado del lanzamiento es sol} S:$\{S\}$ y $|S|=1$

$$P(A)=\frac{n_A}{\Omega}=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo IV

Se lanza un dado y se registra el número de puntos observados. Entonces

Ω:{$1,2,3,4,5,6$} y $|\Omega|=6$

Definimos los siguientes eventos:

A_1:{el valor observado es non} A_1 :{$1,3,5$} y $|A_1|=3$

A_2:{el valor observado es par} A_2 :{$2,4,6$} y $|A_2|=3$

A_3:{el valor observado es mayor a 4} A_3 :{$5,6$} y $|A_3|=2$

$$P(A_1) = \frac{n_{A_1}}{\Omega} = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2) = \frac{n_{A_2}}{\Omega} = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_3) = \frac{n_{A_3}}{\Omega} = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Probabilidad como Frecuencia Relativa

Si un experimento se repite n veces bajo la mismas condiciones y un evento B ocurre n_B veces, el límite de la fracción n_B/n conforme n se vuelve grande, se define como la probabilidad del atributo B.

$$P(B) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_B}{n}$$

Unidades		Frecuencia
Muestreadas	Defectuosos	Relativa
20	2	0.1000
50	3	0.0600
100	4	0.0400
200	12	0.0600
500	28	0.0560
1,000	54	0.0540
2,000	97	0.0485
5,000	244	0.0488
10,000	504	0.0504

Probabilidad Frecuentista

Ejemplo V

Considere el experimento aleatorio de lanzar una moneda. Si se repite el experimento un millón de veces, se podrá detectar una regularidad estadística que permite tener una idea de cuál es la probabilidad de observar águila.

# Lanzamientos	# Águilas	% de Águilas
10	4	40
100	54	54
1 000	490	49
10 000	4 911	49.11
100 000	49 779	49.779
1 000 000	499 812	49.9812

De lo anterior s e observa cómo el porcentaje de águilas se acerca a 50% conforme se incrementa el número de lanzamientos. Esta regularidad estadística permite modelar la incertidumbre asociada al resultado del lanzamiento de una moneda.

Probabilidad Frecuentista

Interpretación Subjetiva de la Probabilidad

Cuando la interpretación de probabilidad no tiene fundamento en la frecuencia de ocurrencia, entonces se interpreta como el grado de creencia o convicción respecto a la ocurrencia de una afirmación *i.e.* juicio personal acerca de un fenómeno impredecible.

Se llega a asignar a un evento basado en las creencias y/o en la información disponible y frecuentemente se asignan probabilidades subjetivas cuando los eventos ocurren una sola vez.

Ejemplo VI

El director financiero de una empresa asigna ciertas probabilidades a los diferentes resultados de la situación de la tasa de interés del mes que entra basado e la información que ha recabado con otros CFO's

baja	igual	sube
0.7	0.2	0.1

Técnicas de Conteo

M.A. Fernando Jesús Martínez Eissa

02H2019

Principio Básico de Conteo

Si se van a realizar 2 experimentos tales que el primero puede resultar en n posibles resultados y para c/u de esos n resultados existen m posibles resultados, entonces para el conjunto de estos dos eventos, se tendrá un total de nm posibles resultados

Ejemplo I

Considere una comunidad de 10 madres cada una con 3 hijos. Si se va a escoger una pareja madre-hijo como la pareja del año ¿cuántas opciones diferentes existen para nominar candidatos?

Para escoger a la mamá de año se tienen 10

Para escoger al hijo de año se tienen 3

Por lo tanto se tienen 30 posibles opciones

(M1,H1)	(M1,H2)	(M1,H3)
(M2,H1)	(M2,H2)	(M2,H3)
(M3,H1)	(M3,H2)	(M3,H3)
(M4,H1)	(M4,H2)	(M4,H3)
(M5,H1)	(M5,H2)	(M5,H3)
(M6,H1)	(M6,H2)	(M6,H3)
(M7,H1)	(M7,H2)	(M7,H3)
(M8,H1)	(M8,H2)	(M8,H3)
(M9,H1)	(M9,H2)	(M9,H3)
(M10,H1)	(M10,H2)	(M10,H3)

Principio Generalizado de Conteo

Si se van a realizar r experimentos tales que el primero puede resultar en n_1 posibles resultados y para c/u de esos n_1 resultados existen n_2 posibles resultados del segundo experimento y si para c/u de los resultados de los dos experimentos pasados existen n_3 posibles resultados del tercer experimento y así sucesivamente, se tendrá un total de $n_1 * n_2 * n_3 * \cdots * n_r$ posibles resultados

Ejemplo II

Considere que un banco tiene 3 actuarios, 4 ingenieros, 5 economistas y 2 contadores. El banco quiere armar un comité de planeación financiera integrado por 4 miembros que incluya un representante de cada área. ¿Cuánto comités se podrían formar?

Se podrán formar: 3 x 4 x 5 x 2 = 120 posibles comités

Técnicas de Conteo

Ejemplo III

¿Cuántas placas de automóvil se pueden tener si la placa se compone de 6 dígitos si los 3 primeros son números y los segundos 3 son letras?

Solución

10*10*10*26*26*26 = 17,576,000

Ejemplo IV

¿Qué pasaría si no se pueden repetir números ni letras?

Solución

10*9*8*26*25*24 = 11,232,000

Técnicas de Conteo

Considere los siguientes casos:

1. La hamburguesa contiene tiene carne, queso, tocino y jitomate. Para este caso en particular no importa el orden en el que se presenten los ingredientes, siempre será la misma hamburguesa.

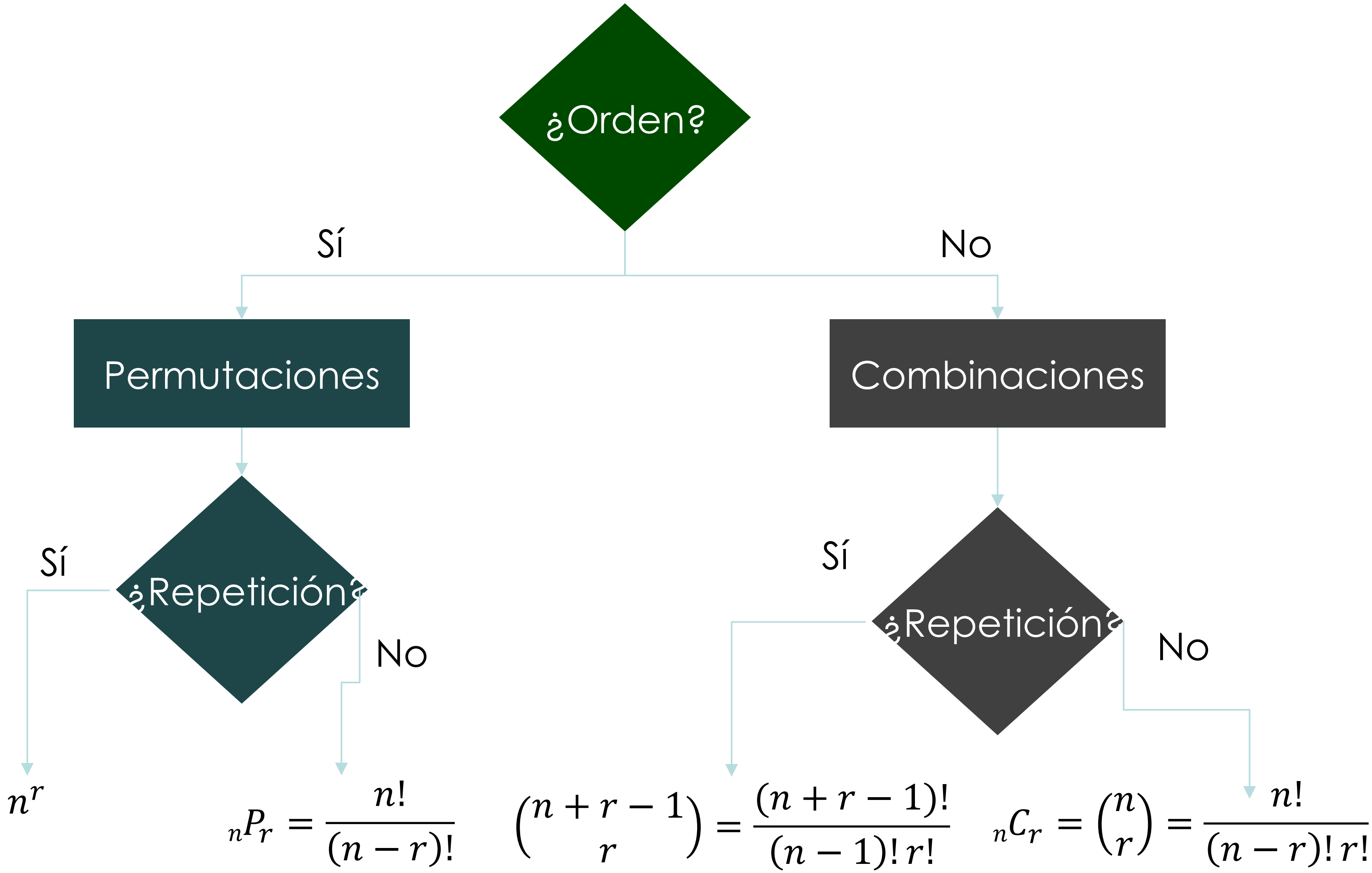
2. La contraseña de mi computadora es "letmein". Para este caso, el orden importa, ya que si no sigo la secuencia correcta, no podré acceder a mi equipo.

A grandes rasgos

Se habla de combinaciones si el orden no importa y de permutaciones si el orden importa.

También aplica que una permutación es una combinación ordenada

Técnicas de Conteo



Un arreglo ordenado de r objetos diferentes recibe el nombre de **permutación**. La cantidad de maneras de ordenar n diferentes objetos tomando r a la vez se representará mediante nPr y se calcula:

$$nPr = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo IV

Se va realizar una rifa entre 30 empleados en donde se elegirán de manera aleatoria 3 nombres sin reemplazo. El primer nombre en salir ganará \$100, el segundo \$50 y el tercero \$25 ¿Cuántos posibles puntos muestrales existen?

Solución

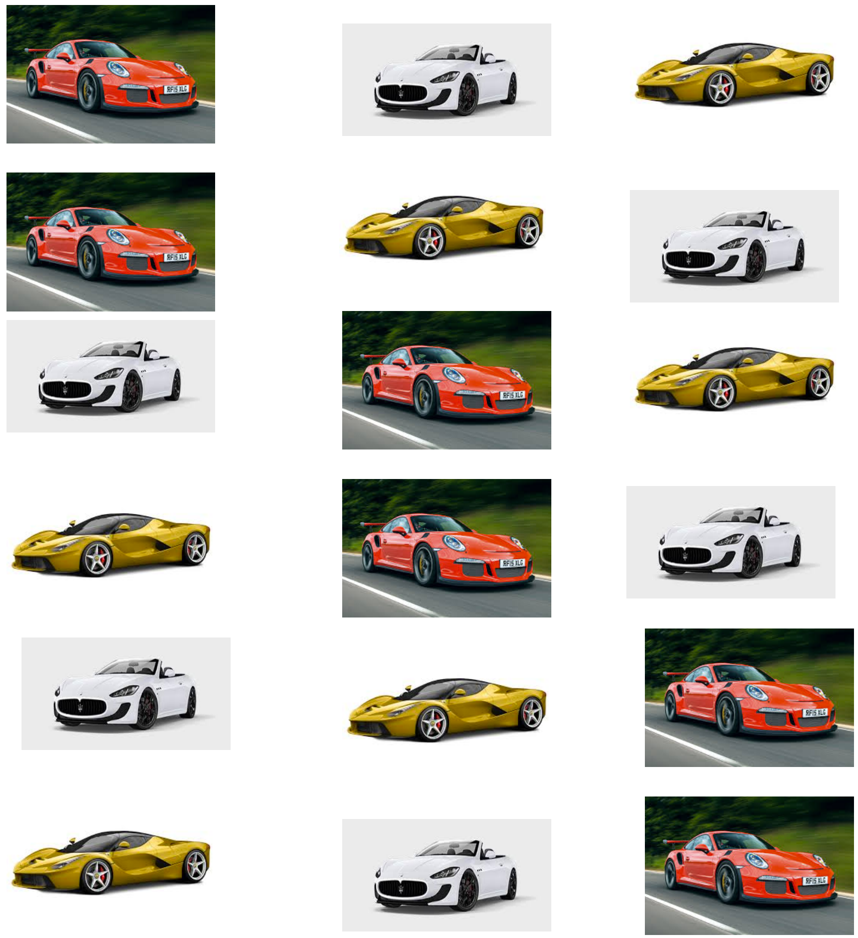
$${}_{30}P_3 = \frac{30!}{(30-3)!} = \frac{30!}{27!} = 24\,360$$

Permutaciones

¿De cuántas formas diferentes se pueden estacionar un Porsche, un Maserati y un Ferrari?

$R = 3! = 6$

Posibles permutaciones



Suponga ahora que se tienen n objetos. Razonando de manera similar que el ejercicio anterior, se tienen:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n! \qquad (1)$$

Permutaciones diferentes para n objetos.

Donde $n!$ Se conoce como "*ene factorial*" y se define como en (1). Es conveniente definir 0!=1.

Ejemplo IV

¿De cuántas formas posibles se puede ordenar el orden de bateo en un equipo de 9 jugadores de beisbol?

Solución

De 9! Formas= 362,880

Ejemplo V

Se tiene un grupo con 6 mujeres y 4 hombres. Se aplica un examen y se le asigna una calificación a los alumnos acorde a su desempeño. Asumiendo que dos alumnos no pueden obtener la misma calificación

a) ¿De cuántas formas diferentes se pueden asignar las calificaciones?
b) Si se califica por género ¿De cuántas formas diferentes se pueden asignar las calificaciones?

Solución

a) Dado que se pueden asignar las calificaciones entre los 10 alumnos, se tiene 10! Formas diferentes de asignación= 3,628,800.
b) Para el caso de las mujeres se tendría 6! Y 4! Para el caso de los hombres, por lo que se tienen (6!)(4!)=17,280

Ejemplo VI

Considere que usted tiene 10 libros, de los cuales 4 son de economía, 3 de probabilidad, 2 de estadística y 1 de econometría. Si desea acomodar sus libros por materia. ¿De cuántas formas diferentes los puede acomodar?

Solución

a) Una forma de acomodar por materia es: Economía, Probabilidad, Estadística y Econometría, por lo tanto se pueden acomodar de $4!3!2!1!=288$ posibles formas

b) Dado que se tienen 4 materias éstas se pueden acomodar de $4!=24$ posibles formas.

Por lo tanto, se tienen (288)(24)=6,912 posibles formas de acomodar.

Ejemplo VII

¿De cuántas formas diferentes se pueden acomodar las letras de la palabra ARRUAR?

Solución

a) Tenemos 6! Posibles formas si se distinguen las letras "A" y "R"

b) Si permutamos las 2"A's" y las 3"R's" entre ellas, tenemos 2! 3! Formas diferentes de escribir ARRUAR

$A_1R_1R_2UA_2R_3$ $A_2R_1R_2UA_1R_3$
$A_1R_1R_3UA_2R_2$ $A_2R_1R_3UA_1R_2$
$A_1R_2R_1UA_2R_3$ $A_2R_2R_1UA_1R_3$
$A_1R_2R_3UA_2R_1$ $A_2R_2R_3UA_1R_1$
$A_1R_3R_1UA_2R_2$ $A_2R_3R_1UA_1R_2$
$A_1R_3R_2UA_2R_1$ $A_2R_3R_2UA_1R_1$

c) Por lo tanto, tenemos $\frac{6!}{2!3!} = 60$ posibles formas de ordenación.

Razonando de manera similar que el ejercicio anterior, se tienen:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r\,!}$$

Permutaciones de n objetos de los cuales n_1 son iguales, n_2 son iguales y n_r son iguales.

Ejemplo VIII

¿Cuántas señales posibles se pueden generar con 9 banderas sin se tienen 4 azules, 3 rojas y 2 blancas?

Solución

$$\frac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1{,}260$$

Combinaciones

Un problema de interés es determinar el número de grupos diferentes de r objetos que se pueden formar a partir de un grupo total de n objetos. Por Ejemplo ¿Cuántos grupos de 3 elementos se pueden formar de un total de 5 letras?

Suponga que se tienen las primeras 5 letras del abecedario (ABCDE). Entonces para seleccionar la primera letra tenemos 5 opciones; para la segunda nos quedan 4 y para la tercera 3, por lo tanto tenemos 5*4*3=60 permutaciones posibles a escoger de un grupo de tres letras.

Cada grupo de tres puede ser contado hasta 6 veces (vgr. CDE, CED, EDC, ECD, DEC y DCE), se tiene entonces que el número de grupos que pueden formase son:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

En general, $n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$ represente el número total de formas diferentes en que un subgrupo de r elementos pude ser escogido de un total de n elementos cuando el orden NO es relevante.

Dado que cada subgrupo de r elementos se puede contar $r!$, se sigue que el número de de subgrupos diferentes de r elementos que se pueden formar de un total de n elementos es:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Definimos $nCr = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ para $r \leq n$

Y decimos que nCr representa el número de diferentes grupos de tamaño r que pueden ser seleccionados de una muestra de n elementos sin considerar el orden.

Ejemplo IX

Se va a elegir un Comité de 3 personas de un grupo de 20 candidatos. ¿Cuántos comités se pueden escoger? Solución: ${}_{20}C_3 = \frac{20!}{17!3!} = 1140$

Ejemplo X

De un grupo de 5 mujeres y 7 hombres ¿Cuántos grupos se pueden formar que contengan 2 mujeres y 3 hombres?

Solución

Para las mujeres se pueden seleccionar a los 2 elementos ${}_5C_2 = \frac{5!}{3!2!} = 10$

Para los hombres se pueden seleccionar a los 3 elementos ${}_7C_3 = \frac{7!}{4!3!} = 35$

Por lo tanto se pueden formar 350 comités integrados por 2 mujeres y 3 hombres.

¿Qué pasaría si hay dos hombres que no desean colaborar juntos?
Entonces para seleccionar los 3 elementos se tienen ${}_2C_2\,{}_5C_1=5$ casos en que quedarían estos dos hombres juntos, por lo tanto, sólo se podrán escoger 30 grupos.
En este caso, se podrán formar 300 comités.

Teorema Binomial

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Demostración por inducción

Se prueba para n=1

$$x + y = \binom{1}{0} x^0 y^{1-0} + \binom{1}{1} x^1 y^{1-1}$$

$$x + y = y + x$$

Por lo tanto se considera válida para n y se prueba para n+1

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$= (x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$$

Sea $j=k+1$ para el primer término y $j=k$ para el segundo

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j} + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right] x^j y^{n+1-j} + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left[\binom{n+1}{j}\right] x^j y^{n+1-j} + y^{n+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} \left[\binom{n+1}{j}\right] x^j y^{n+1-j} = (x+y)^{n+1}$$

Coeficientes Multinomiales

Considere un conjunto de n elementos diferentes que se divide en r grupos de tamaños $n_1, n_2, \ldots, n_r$ respectivamente donde $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ ¿Cuántas particiones o divisiones son posibles?

Existen $\binom{n}{n_1}$ posibles para el primer grupo.

Para c/u de los anteriores se tienen $\binom{n-n_1}{n_2}$ posibles para una el segundo grupo.

Para c/u de los dos casos anteriores se tienen $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ posibles para el tercer grupo y así sucesivamente, se tendrá:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$$

$$\left(\frac{n!}{(n-n_1)!\,n_1!}\right)\left(\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!\,n_2!}\right)\cdots\left(\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}-n_r)!\,n_r!}\right)$$

$$=\left(\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r\,!}\right)$$

Ejemplo XI

Un departamento de policía en una ciudad pequeña tiene 10 policías, Si se requiere que 5 oficiales estén patrullando las calles, 2 de tiempo completo en la estación y 3 en reserva. ¿Cuántas posibles divisiones de estos tres grupos se pueden realizar con los 10 policías?

Solución

Se podrán realizar $\frac{10!}{5!2!3!} = 2520$

Ejemplo XII

10 niños se dividirán en el equipo A y el equipo B con 5 integrantes c/equipo ¿Cuántas divisiones son posibles?

Solución

Se podrán realizar $\frac{10!}{5!5!} = 252$

Teoría de Conjuntos

M.A. Fernando Jesús Martínez Eissa

02H2019

ITAM

División Académica de Actuaría, Estadística y Matemáticas

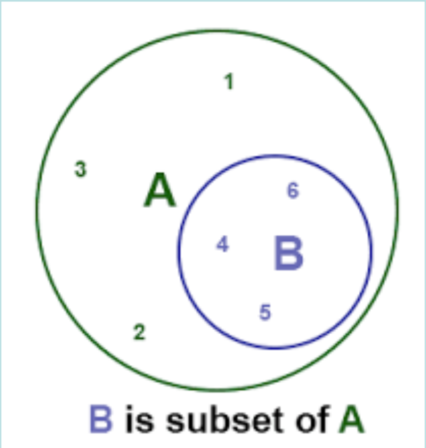
Combinaciones

https://www.youtube.com/watch?v=aK4-F_4EzwU

Conjuntos

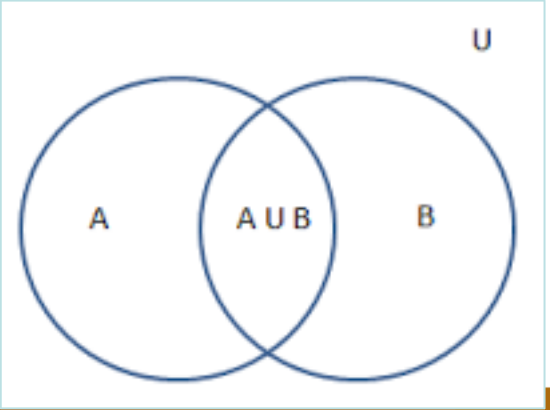
- **Conjunto:** Es una colección de elementos.

- **Subconjunto (Inclusión):** Sean A y B dos conjuntos. Si todos los elementos de B también pertenecen a A, se dice que B es subconjunto de A. Es decir: $B \subset A$.

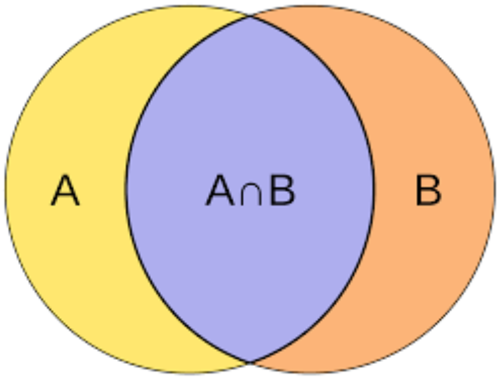


- **Conjunto nulo o vacío:** Subconjunto que no contiene elementos y se denota por $\emptyset$. El vacío por lo tanto, es subconjunto de cualquier conjunto.

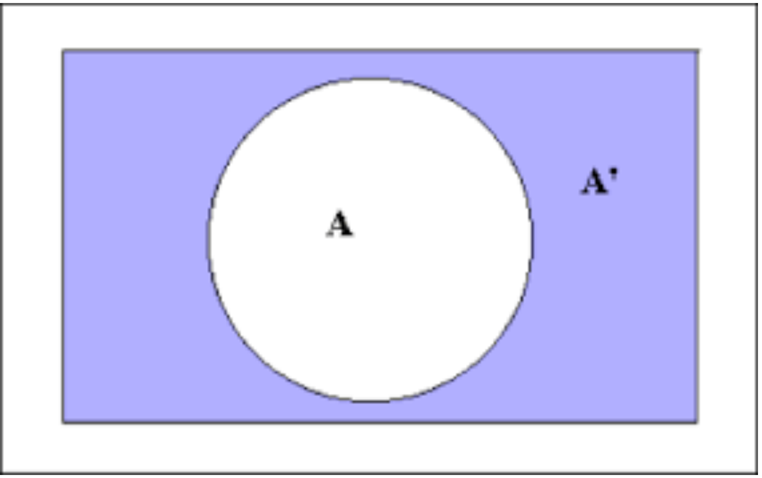
- **Unión:** La unión de A y B, representada mediante $A \cup B$, es el conjunto de puntos que pertenece a A o a B o a ambos.



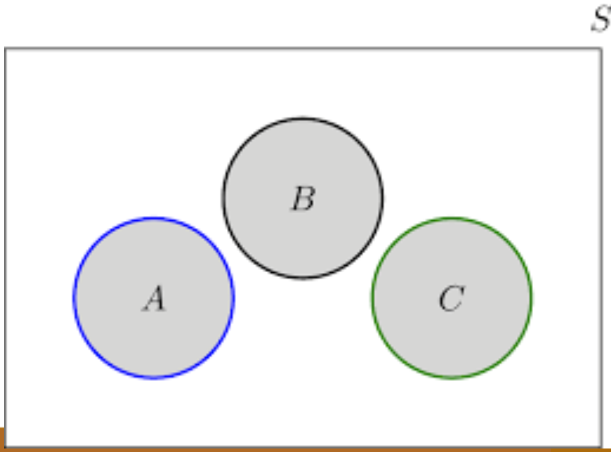
Conjuntos



- **Intersección:** La intersección de A y B, representada mediante $A \cap B$, es el conjunto de puntos que pertenece a A y que al mismo tiempo pertenecen a B.



- **Complemento:** Conjunto de puntos que pertenecen al Universo pero no a A y se denota por A', $\bar{A}$ o Ac NOTA: Observe que $A \cup A^c = \Omega$



- **Disjuntos o mutuamente excluyentes:** Cuando no tienen puntos en común o que $A \cap B = \emptyset$.

Leyes de Conjuntos

- ✓ Conmutatividad:

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

- ✓ Asociatividad:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- ✓ Distributividad:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

- ✓ Leyes de DeMorgan

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \qquad \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \qquad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Leyes de Conjuntos

Ejemplo I

Considere un experimento en donde se lanzan dos dados y se observa el número de puntos de la cara superior de cada dado. Sea Ω el conjunto de posibles pares observables. Defina los siguientes subconjuntos de Ω

A. El número del segundo dado es once; $A: \{\emptyset\}$

B. La suma de los dos números es once $B: \{(5,6),(6,5)\}$

C. Al menos uno de los números es impar.

$$C: \left\{\begin{matrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(3,1),(3,2),(3,3), \\ (3,4),(3,5),(3,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), \\ (2,1),(4,1),(6,1),(2,3),(4,3),(6,3)(2,5),(4,5),(6,5). \end{matrix}\right\}$$

Elabore una lista de los puntos en $A, C^c, A \cap B, A \cap B^c, A^c \cup B \; y \; A^c \cap C$,

Ejemplo II

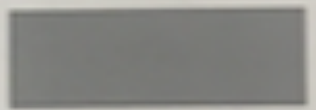
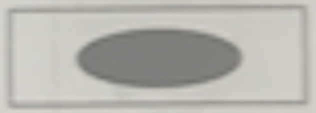
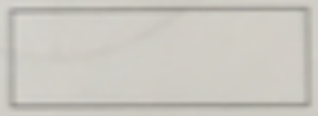
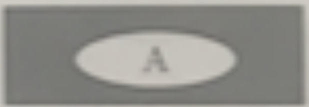
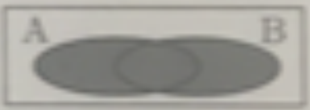
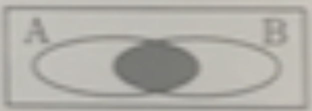
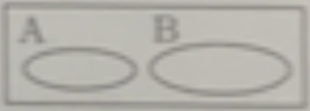
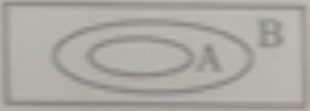
Sean los siguientes conjuntos:

- $A: \{2,4\}$
- $B: \{2,3,4,5\}$

Entonces

- $A \cup B: \{2,3,4,5\} = B$
- $A \cap B: \{2,4\} = A$

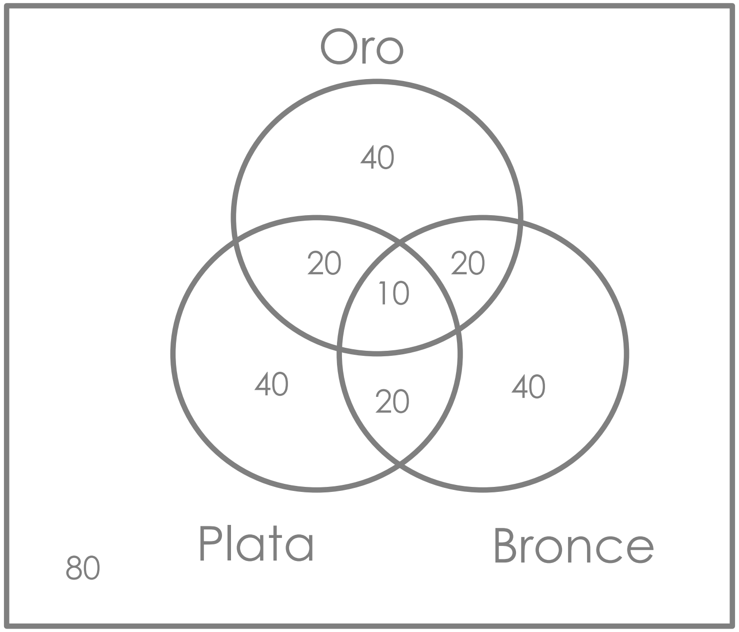
Eventos, Conjuntos y Diagramas de Venn

Event language	Set language	Set notation	Venn diagram
outcome space	universal set	Ω	
event	subset of Ω	A, B, C, etc.	
impossible event	empty set	$\emptyset$	
not A, opposite of A	complement of A	A^c	
either A or B or both	union of A and B	$A \cup B$	
both A and B	intersection of A and B	AB, $A \cap B$	
A and B are mutually exclusive	A and B are disjoint	$AB = \emptyset$	
if A then B	A is a subset of B	$A \subseteq B$	

Ejemplo III

En una competencia en la que participaron 270 personas, se sabe que se ganaron 90 medallas de oro, 90 medallas de plata y 90 medallas de bronce. 30 participantes ganaron 1 medalla de oro y 1 de plata; 30 1 de oro y 1 de bronce, 30 1 de plata y 1 bronce y sólo 10 ganaron 1 de oro, 1 de plata y 1 de bronce. Realice el diagrama de Venn.

Solución



Axiomas de Probabilidad

- ✓ Una forma de definir a la probabilidad es a partir de la **frecuencia relativa**.

- ✓ Suponga que un experimento se lleva a cabo de manera repetitiva bajo las mismas condiciones, en un espacio muestral Ω.

- ✓ Para cada evento A del espacio muestral Ω, se define $n(A)$ como el número de veces en que se presentan las primeras n repeticiones el experimento A. Entonces $P(A)$, la probabilidad del evento A, se define como:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

Ejemplo IV

Suponga que las 6 caras de un dado tienen la misma probabilidad de aparecer, entonces $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$ y $P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{2}$

Axiomas de Probabilidad

- ✓ La probabilidad es una idealización de la proporción de veces que se espera ocurra un cierto resultado en varios intentos de un experimento.

- ✓ La probabilidad de que un evento A ocurra, corresponde a la proporción del número de veces que se espera observar el evento A al realizar un experimento.

- ✓ Si la probabilidad de los eventos se interpreta como modelos de proporción respecto al número de veces que son observados, entonces se espera que cumpla con las propiedades de las proporciones

Axiomas de Probabilidad

- Axioma 1

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Axioma 2

$$P(\Omega) = 1$$

- Axioma 3

Para cualquier secuencia de eventos mutuamente excluyentes A1, A2,… (es decir $Ai \cap Aj = \emptyset \; \forall i \neq j$)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Propiedades de Probabilidad

1. Sea A un evento, entonces
$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

2. La probabilidad del evento vacío es cero
$$P(\emptyset) = 0$$

3. Sean A y B dos eventos, entonces
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
   Para los eventos A, B y C se tiene:
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap \mathrm{B} \cap C)$$

4. Si A⊂B, entonces
$$A \leq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B) y\, P(B - A) = P(B) - P(A)$$

Propiedades de Probabilidad

5. En un espacio de probabilidad finito, para un evento A, siempre se tendrá:

$$P(A) = \sum_{a \in A} P(\{a\})$$

Es decir, se puede calcular la probabilidad de un evento sumando las probabilidades de todos los eventos elementales contenidos en A. *Vgr. Probabilidad de obtener un par al tirar un dado*

6. Si A y B son dos eventos, entonces:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

Ejemplo V

Suponga que una palabra se elige al azar de este enunciado. Encontrar

A. La probabilidad de que la palabra tenga 4 letras.
B. La probabilidad de que contenga al menos dos vocales.
C. La probabilidad de que contenga 4 letras y al menos una zeta.

Solución

A. $A\colon \{azar, este\} \rightarrow |A| = 2;$

$\Omega\colon \{Suponga\ que\ una\ palabra\ se\ elige\ al\ azar\ de\ este\ enunciado\} \rightarrow |\Omega| = 11$

Por lo tanto $P(A) = \frac{2}{11} = 18.18\%$

B. $B\colon \{Suponga\ que\ contenga\ al\ menos\ dos\ vocales\} \rightarrow |B| = 8$

Por lo tanto $P(B) = \frac{8}{11} = 72.72\%$

C. $C\colon \{azar\} \rightarrow |C| = 1$

Por lo tanto $P(C) = \frac{1}{11} = 9.09\%$

Ejemplo VI

Se tienen que elegir a dos solicitantes de empleo de un grupo de cinco personas, suponga además que los candidatos difieren en grado de capacidad donde 1 es el mejor y 5 el menos capacitado (estas calificaciones las desconoce el seleccionador). Sean los eventos A y B como se describen a continuación:

A. El patrón elige al mejor y a uno de los dos menos competentes.

B. El patrón elige por lo menos uno de los dos mejores.

Determinar las probabilidades de estos dos eventos.

Solución

$A_1: \{1, 2\}; A_5: \{2, 3\};\ A_8: \{3, 4\}; A_{10}: \{4, 5\}$

$A_2: \{1, 3\}; A_6: \{2, 4\};\ A_9: \{3, 5\}$

$A_3: \{1, 4\}; A_7: \{2, 5\}$

$A_4: \{1, 5\};$

$$\therefore P(A) = 0.2 \text{ y } P(B) = \frac{7}{10} = 0.70$$

Ejemplo VII

Cuando A juega contra B, las probabilidades de que gane A son de dos a uno. Suponga que A y B juegan dos partidos. ¿Cuál es la probabilidad de que A gane por lo menos un partido?

Solución

$E_1 : \{A, A\}; E_2 : \{A, B\};\ E_3 : \{B, A\}; E_4 : \{B, B\}$

Con

$P(E_1) = \frac{4}{9}; P(E_2) = P(E_3) = \frac{2}{9}\ y\ P(E_4) = \frac{1}{9}$

Sea C el evento de que gane por lo menos un partido, entonces

$$C = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

Y $P(C) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{8}{9}$

Ejemplo VIII

Considere la siguiente tabla de frecuencias relativas (en %) de una encuesta sobre tabaquismo en una Universidad:

Hábito	H	M	TOTAL
N	28.52	23.51	52.03
D	4.63	2.04	6.67
F	34.26	7.04	41.30
Total	**67.41**	**32.59**	**100.0**

Considerando la definición frecuencia relativa de probabilidad, las frecuencias relativas anteriores, se pueden interpretar como probabilidades.

Si se eligiera al azar una persona, la probabilidad de que sea mujer es .3259

A las probabilidades en el cuerpo del cuadro, se les conoce como Probabilidades Conjuntas y a las de los márgenes Probabilidades Marginales.

Cálculo de Probabilidades

Ejemplo VIII, (*continuación*)

Las **Probabilidades conjuntas** se refieren a las probabilidades sobre las intersecciones de los eventos, por Ejemplo:

Hábito	H	M	TOTAL
N	28.52	23.51	52.03
D	4.63	2.04	6.67
F	34.26	7.04	41.30
Total	**67.41**	**32.59**	**100.0**

$$P(M \cap N) = \mathrm{P}(Mujer\ y\ nunca\ ha\ fumado) = .2352$$

$$P(H \cap F) = \mathrm{P}(Hombre\ y\ fume) = .3426$$

Las **Probabilidades marginales** se refieren a las probabilidades de eventos que involucran a un solo atributo, género o hábito, por Ejemplo:

$$P(H) = \mathrm{P}(Hombre) = .6741$$

$$P(D) = \mathrm{P}(dejó\ de\ fumar) = .0667$$

$$P(F) = \mathrm{P}(fume) = .4130$$

$$P(N) = \mathrm{P}(nunca\ ha\ fumado) = .5203$$

Ejemplo VIII, (*continuación*)

Dadas las probabilidades conjuntas y marginales, se puede calcular probabilidades sobre uniones de eventos utilizando el axioma 3.

Hábito	H	M	TOTAL
N	28.52	23.51	52.03
D	4.63	2.04	6.67
F	34.26	7.04	41.30
Total	**67.41**	**32.59**	**100.0**

Por Ejemplo, la probabilidad de que el encuestado sea hombre o que nunca haya fumado, es:

$$P(H \cup N) = \mathrm{P}(H) + P(N) - P(H \cap N) = .6741 + .5203 - .2852 = 0.9093$$

Finalmente, la probabilidad marginal $P(H)$=.6741 se obtiene al sumar las conjuntas

$$P(H) = \mathrm{P}(H \cap N) + P(H \cap D) + P(H \cap F) = .2852 + .0463 + .3426 = 0.6741$$

Ejemplo IX

Estudios recientes muestran que en cierta población de México, la probabilidad de que un habitante sea mayor de 40 años o que tenga calvicie es 0.4. La probabilidad de que sea mayor de 40 años es 0.20 y la probabilidad de que sea calvo es de 0.30. Calcular las siguientes probabilidades:

1. Tenga 40 años o menos $P(\leq 40) = 1 - P(> 40) = 1 - 0.2 = 0.8$
2. Sea mayor de 40 años con calvicie
   $$P(> 40 \cap C) = P(> 40) + P(C) - P(> 40 \cap C) = 0.2 + 0.3 - 0.4 = 0.10$$
3. Sea mayor de 40 años sin calvicie
   $$P(> 40 \cap C^c) = P(> 40) + P(C^c) - P(> 40 \cup C^c) = 0.20 - 0.10 = 0.10$$
4. Sea menor de 40 años con calvicie
   $$P(< 40 \cap C) = P(C) - P(> 40 \cup C) = 0.30 - 0.10 = 0.20$$
5. Sea menor de 40 años sin calvicie
   $$P(< 40 \cap C^c) = 1 - P(> 40 \cup C) = 1 - 0.40 = 0.6$$

Probabilidad Condicional

El concepto de probabilidad condicional se diseño para explicar la relación que existe entre las probabilidades de dos o más eventos. Entonces la probabilidad condicional de A dado b se define:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Lo anterior implica:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

También se define

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$$

Y

$$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$$

Ejemplo X

De una baraja de 52 cartas, se extraen dos cartas, una a la vez y se colocan boca abajo sobre una mesa

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta sea una reina de corazones? $P(RC) = \frac{1}{52}$
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda carta sea una reina de corazones dado que la primer carta fue un As de tréboles? $P(RC|AT) = \frac{1}{51}$

Ejemplo XI

Dos boletos son extraídos aleatoriamente **con reemplazo** de una caja con cuatro boletos numerados del uno al cuatro

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo boleto sea 4?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo boleto sea 4 dado que el primero fue 2?

$$\Omega \left\{ \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) \end{bmatrix} \right\}$$

$$\therefore P(x,4) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\therefore P(4|2) = \frac{1}{4} = 0.25$$

Ejemplo XII

Dos boletos son extraídos aleatoriamente **sin reemplazo** de una caja con cuatro boletos numerados del uno al cuatro

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo boleto sea 4?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo boleto sea 4 dado que el primero fue 2?

$$\Omega \begin{Bmatrix} & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & \end{Bmatrix}$$

$$\therefore P(x,4) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\therefore P(4|2) = \frac{1}{3} = 0.33$$

Regla de la Multiplicación

Esta regla ayuda a encontrar las probabilidad de que dos eventos ocurran simultáneamente. Esto es:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A); o$$
$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B); o$$

Ejemplo XIII

Una caja tiene tres boletos: uno rojo, uno verde y uno azul. Dos boletos serán extraídos sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de escoger primero uno rojo y luego uno verde?

$$\Omega \left\{ \begin{array}{ccc} & (r,v) & (r,a) \\ (v,r) & & (v,a) \\ (a,r) & (a,v) & \end{array} \right\}$$

$$P(R \cap V) = P(R)P(V|R)$$
$$P(R \cap V) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Regla de la Multiplicación

Ejemplo XIV

Estudios recientes muestran que en cierta población de México, la probabilidad de que un habitante sea mayor de 40 años o que tenga calvicie es 0.4. La probabilidad de que sea mayor de 40 años es 0.20 y la probabilidad de que sea calvo es de 0.30. Calcular las siguientes probabilidades:

Recordar: $P(>40 \cup C) = 0.4; P(C) = 0.3; P(>40) = .20 \text{ y } P(>40 \cap C) = .1$

1. Seleccionar a una persona con calvicie dado que ya se sabe que es mayor de 40 años.

$$P(C|>40) = \frac{P(C \cap >40)}{P(>40)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

2. Seleccionar a una persona con edad menor o igual a 40 años, dado que se sabe que tiene calvicie.

$$P(\leq 40|C) = \frac{P(\leq 40 \cap C)}{P(C)} = \frac{0.2}{0.3} = 0.6\overline{6}$$

Note que $P(A^C|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B)$

Independencia de Eventos

Se dice que dos eventos A y B son independientes si:

$$P(A|B) = P(A)$$

i.e. La probabilidad de que ocurra el evento A, no se ve afectada por la ocurrencia o no del evento B, por lo que aplicando la Regla de la Multiplicación, se tiene:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

NOTA:

El concepto de independencia, no debe confundirse con la idea de que dos eventos sean mutuamente excluyentes.

Independencia de Eventos

Ejemplo XV

En el experimento de lanzar un dado, considere los siguientes eventos:

A: Se observa un número impar

B: Se observa un 1 o un 2

¿Los eventos Ay B son independientes?

Solución

$$P(A|B) = \frac{1}{2}; P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \therefore son\ independientes$$

Considere dos urnas 1 y 2 con 6 boletos cada una como se muestra a continuación

Urna	Boletos					
a	1	2	2	1	2	2
b	1	2	3	1	2	2

Observe que los boletos están numerados 1,2 y 3 y que pueden ser blancos o verdes. El experimento consiste en extraer un boleto de manera aleatoria y se definen los siguientes eventos:

V: Se observa un boleto verde; y

D: Se observa un boleto con el número 2

¿Para qué urna los eventos Ay B son independientes? $¿P(V|D) = P(V)?$

Solución

$$P(V_a) = P(V_b) = \frac{1}{2}$$

$$P(D_a) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; P(D_b) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(V_a|D_a) = \frac{P(V_a \cap D_a)}{P(D_a)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

$$P(V_b|D_b) = \frac{P(V_b \cap D_b)}{P(D_b)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore\ Para\ la\ urna\ a$$

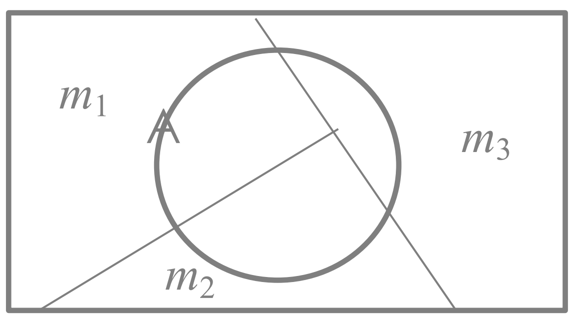
Probabilidad Total

Sirve para calcular la probabilidad de un evento cuando el espacio muestral es la unión de conjuntos mutuamente excluyentes.

Suponga que el espacio muestral Ω es la unión de conjuntos mutuamente excluyentes m_1,m_2 y m_3.

Considere el evento A subconjunto de Ω. El evento A, así como, el espacio muestral Ω, se puede considerar como la unión de tres eventos mutuamente excluyentes:

$$A \cap m1, A \cap m2, A \cap m3$$



Entonces: $A = (A \cap m1) \cup (A \cap m2) \cup (A \cap m3)$

Aplicando propiedades de probabilidad

$$P(A) = P(A \cap m1) + P(A \cap m2) + P(A \cap m3)$$

Probabilidad Total

Una probabilidad marginal $P(A)$, siempre se puede escribir como la suma de probabilidades conjuntas y por la regla de la multiplicación se tiene:

$$P(A) = P(A|m_1)P(m_1) + P(A|m_2)P(m_2) + P(A|m_3)P(m_3)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|m_i)P(m_i)$$

Otra forma equivalente de verlo es: si los eventos $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ son una partición de Ω, entonces:

$$P(A) = P(A \cap m_1) + P(A \cap m_2) + \cdots + P(A \cap m_n)$$

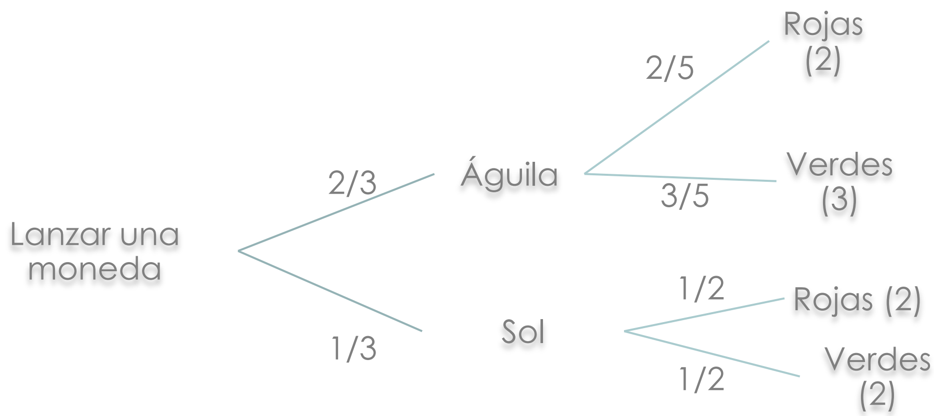
$$\therefore P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap m_i)$$

Ejemplo XVI

Se lanza una moneda cargada de tal forma que la probabilidad de que el resultado sea águila es 2/3. Si aparece águila, se extrae aleatoriamente una canica de una urna que contiene dos canicas rojas y tres verdes. Si el resultado es sol, se extrae una canica de otra urna la cual contiene dos rojas y dos verdes.

¿Cuál es la probabilidad de extraer una canica roja?

Solución



$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|S)P(S)$$
$$P(R) = P(A) + P(R|S)P(S)$$

Teorema de Bayes

Este teorema ayuda a al cálculo de las probabilidades condicionales. En general, para el cálculo de una probabilidad condicional como es el caso de $P(m_j|D)$ cuando se tiene la información de probabilidades condicionales en. $P(D|m_j)$ para $j=k$ se tiene:

$$P(m_j|D) = \frac{P(D|m_j)P(m_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(D|m_i)P(m_i)}$$

Con k=# de conjuntos que forman una partición del espacio muestral.

Nota: Observe que $P(m_1|D)$ es diferente de $P(D|m_1)$. La primera corresponde a la probabilidad condicional que se quiere calcular y la segunda, se puede obtener de los datos del problema.

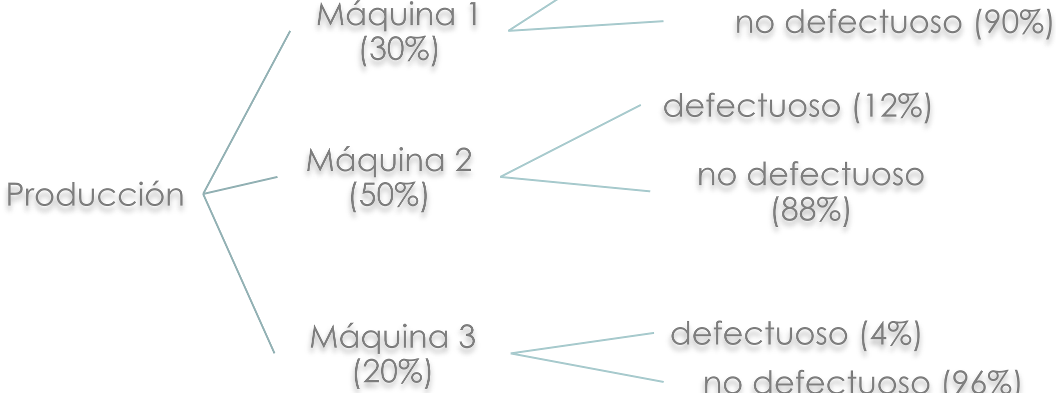
Ejemplo XVII

Una compañía elabora sus artículos con tres tipos de maquinaria con diferente tecnología. La producción se distribuye de la siguiente manera: 30% la primera, 50% la segunda y el 20% restante la tercera.

Adicionalmente se conoce que las probabilidades de artículos defectuosos son: 0.1, 0.12 y 0.04 respectivamente.

¿Cuál es la probabilidad de que un objeto tomado al azar haya sido producido por la máquina 1 si se sabe que es defectuoso?

Solución



$$P(m1|D) = \frac{P(m1 \cap D)}{P(D)}$$

Donde:

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(D|m_i)P(m_i)$$

$$P(m1|D) = \frac{(.1) * (.3)}{0.098} = 0.3061$$