Sucesiones y convergencia - Propiedades de límites y más ejemplos

Análisis Matemático 1
Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Primavera de 2020

Propiedades de límites y más ejemplos

Teorema

- *Si* X, Y *son sucesiones en* $\mathbb{R}^p$ *que convergen a* x, y *respectivamente, entonces* $X + Y$, $X - Y$ *y* $X \cdot Y$ *convergen a* $x + y$, $x - y$ *y* $x \cdot y$ *respectivamente.*
- *Si* $X = (x_n)$ *es una sucesión en* $\mathbb{R}^p$ *que converge a* x, *y* (a_n) *es una sucesión en* $\mathbb{R}$ *que converge a* $a \in \mathbb{R}$, *entonces* $a_n x_n \to ax$.
- *Si en el inciso anterior* $a \neq 0$ *entonces* $\dfrac{1}{a_n} x_n \to \dfrac{1}{a} x$
- *Si* $X = (x_n)$ *es una sucesión en* $\mathbb{R}$, $x_n > 0$, *que converge a* x *entonces* $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$
- *Si* $X = (x_n)$ *es una sucesión en* $\mathbb{R}$ *que converge a* x *entonces* $|x_n| \to |x|$.

- Si $X + Y$ converge no se sigue necesariamente que X converja ni que Y converja. Basta tomar $Y = -X$ con $x_n = n$.
- Si $X \cdot Y$ converge no se sigue necesariamente que X y Y convergen separadamente. Por ejemplo tomando $x_n = n$, $y_n = 1/n$ en $\mathbb{R}$.

  O bien en $\mathbb{R}^2$ tomamos $x_n = (n, 0)$, $y_n = (0, n)$.

Ideas de la prueba del teorema anterior

En la primera propiedad usamos desigualdades del tipo

$$\|(x_n \pm y_n) - (x \pm y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \epsilon$$

o bien del tipo (donde usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz)

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - x \cdot y| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y + x_n \cdot y - x \cdot y| \\ &\leq |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y| + |x_n \cdot y - x \cdot y| \\ &\leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \leq M_1\|y_n - y\| + \|x_n - x\|M_2 \end{aligned}$$

En este caso se usa que las sucesiones convergentes son acotadas y dada $\epsilon > 0$ se eligen $K_1, K_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$m > K_1 \quad \Rightarrow \quad \|y_m - y\| < \epsilon/2M_2, \qquad n > K_2 \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x\| < \epsilon/2M_1$$

y para $M = \text{máx}\{M_1, M_2\}$, si $k > M$ entonces $|x_k \cdot y_k - x \cdot y| < \epsilon$.

Ideas de la prueba del teorema anterior

Para la segunda propiedad notamos que $\|a_n x_n - ax\| \leq |a_n|\|x_n - x\| + |a_n - a|\|x\|$, y por tanto la prueba anterior puede adaptarse.

La tercera propiedad requiere un poco más de trabajo:

$$\left\|\frac{1}{a_n}x_n - \frac{1}{a}x\right\| \leq \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| \|x_n\| + \frac{1}{|a|}\|x_n - x\| = \frac{|a - a_n|}{|a_n a|}\|x_n\| + \frac{1}{|a|}\|x_n - x\|$$

Elegimos $M > 0$ tal que $\dfrac{1}{M} < |a|$ y $\|x\| < M$, luego elegimos $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq K_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{M} < |a_n| \quad \text{y} \quad \|x_n\| < M$$

Entonces

$$\left\|\frac{1}{a_n}x_n - \frac{1}{a}x\right\| \leq M^3|a_n - a| + M\|x_n - x\|$$

Ideas de la prueba del teorema anterior

Para probar la propiedad de la raíz cuadrada iniciemos suponiendo que $x_n \to x = 0$. En este caso dada $\epsilon > 0$ hallamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - 0| = x_n < \epsilon^2$ si $n > N$.

Si $x_n \to x$ y $x > 0$, como $(\sqrt{x_n} - \sqrt{x})(\sqrt{x_n} + \sqrt{x}) = x_n - x$, entonces

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| = \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \leq \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)|x_n - x|$$

Para la propiedad de los valores absolutos basta notar que

$$\left||x_n| - |x|\right| \leq |x_n - x|$$

Teorema del sandwich

Teorema

Si $X = (x_n)$ y $Y = (y_n)$ son sucesiones en $\mathbb{R}$ convergentes a w, y $Z = (z_n)$ cumple $x_n \leq z_n \leq y_n$, entonces $z_n \to w$.

La prueba es más o menos directa, iniciando con $\epsilon > 0$.

Primero por la convergencia $x_n \to w$ y $y_n \to w$, dada $\epsilon > 0$ existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$-\epsilon < x_n - w < \epsilon, \qquad -\epsilon < y_n - w < \epsilon$$

para $n > \max\{N_1, N_2\}$. Además por la hipótesis

$$-\epsilon < x_n - w \leq z_n - w \leq y_n - w < \epsilon$$

En conclusión, dada $\epsilon > 0$, para $n > \max\{N_1, N_2\}$ tenemos $|z_n - w| < \epsilon$.

Ejemplos

- Si una sucesión $X = (x_n)$ cumple $x_n \to x$, y $P(x)$ es un polinomio, entonces la sucesión $(P(x_n))$ es una sucesión que converge a $P(x)$.
- $x_n = \dfrac{2n+1}{n+5}$ converge a 2. Basta escribir

$$\frac{2n+1}{n+5} = \frac{n}{n}\left(\frac{2+1/n}{1+5/n}\right) \to 2$$

- $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, pues $\dfrac{1}{n} \to 0$
- Si $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ entonces

$$0 \leq y_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

Ejemplos

- Calcular $\lim \left(2\sqrt{n}\right)^{1/n}$.

  Escribimos $\left(2\sqrt{n}\right)^{1/n} = \left(2\right)^{1/n}\left(n^{1/n}\right)^{1/2}$, que tiende a 1.
- Si $a > 0$ y $b > 0$ probar que

$$\lim \left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n\right) = \frac{a+b}{2}.$$

  Escribimos

$$\left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n\right)\frac{\left(\sqrt{(n+a)(n+b)} + n\right)}{\left(\sqrt{(n+a)(n+b)} + n\right)} = \frac{(n+a)(n+b) - n^2}{\sqrt{(n+a)(n+b)} + n}$$

$$= \frac{an + bn + ab}{\sqrt{(n+a)(n+b)} + n} = \frac{a + b + ab/n}{\sqrt{1 + b/n + a/n + ab/n} + 1}$$

Ejemplos

- $\lim \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}} = 0$, pues basta notar que $\dfrac{2^{3n}}{3^{2n}} = \dfrac{8^n}{9^n} = \left(\dfrac{8}{9}\right)^n$
- Si $0 < a < b$ entonces $\lim \left(a^n + b^n\right)^{1/n} = b$.

  Buscamos hacer un sandwich:

  $$b \leq \left(a^n + b^n\right)^{1/n} \leq (2b^n)^{1/n} = 2^{1/n} b$$

- Si $z_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $z_n \to z$, entonces $z \geq 0$.

  Supóngase que $z < 0$ y elegimos $\epsilon = |z|/8$. Entonces $(z - \epsilon, z + \epsilon)$ contiene sólo números negativos, y por tanto no contiene términos de la sucesión, o sea z no es el límite de z_n (!!).

- Si dos sucesiones (x_n), (y_n) cumplen $x_n \leq y_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y además para ciertos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $x \leq y$. $(z_n = y_n - x_n)$

Un criterio de convergencia

- Sea (x_n) una sucesión de números positivos tales que $L := \lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)$ existe. Si $L < 1$ entonces (x_n) converge y además $\lim x_n = 0$.

Sabemos que de hecho $L \geq 0$, y como $L < 1$, podemos hallar $r \in \mathbb{R}$ tal que $L < r < 1$. Para $\epsilon = r - L > 0$ podemos hallar $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > K \quad \text{implica} \quad \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - L \right| < \epsilon = r - L$$

De aquí obtenemos $\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \epsilon = r$. Así que si $n > K$ concluimos

$$0 < x_{n+1} < x_n r < x_{n-1} r^2 < \cdots < x_K r^{n-K+1}$$

Si se define $C := \frac{x_K}{r^K}$, habremos obtenido $0 < x_{n+1} < Cr^{n+1}$ para $n > K$.

Como $0 < r < 1$ el teorema del sandwich concluye el teorema. ■

Ejemplos

- Sea $x_n = \dfrac{n}{2^n}$.

En este caso

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^n}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

por tanto $\lim \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \dfrac{1}{2} < 1$. En conclusión $\lim \dfrac{n}{2^n} = 0$

- Similarmente $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Est es consecuencia de que $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, donde e es el número de Euler $e \approx 2{,}718281\cdots > 1$ y de

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$