III. Distribuciones Discretas

M.A. Fernando Jesús Martínez Eissa

02H2019

Uniforme (*discreta*)

Ejemplo 1

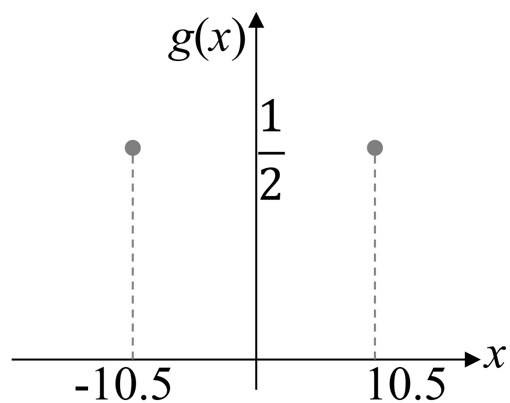
Al lanzar una moneda, se tienen dos posibles resultados: águila o sol. Si G es la v.a. definida como:

$G(sol)$=-10.5 y G($águila$)=10.5

Si en adicion sabemos que la moneda no está cargada, se puede deducir que:

$$f_G(g) = P(G = g) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & g = -10.5,10.5 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

Donde $G \sim U(-10.5,10.5)$ y gráficamente:



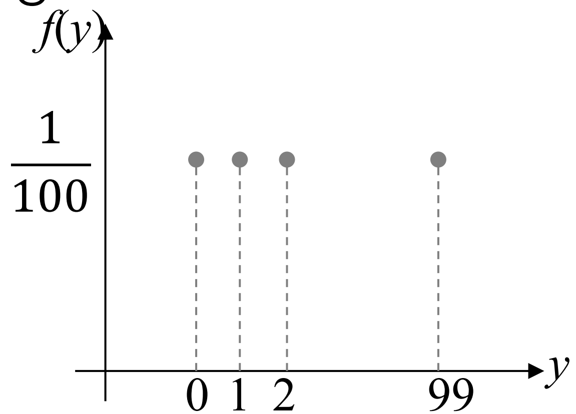
Uniforme (*discreta*)

Ejemplo 2

Considere una rifa en donde los boletos están numerados del 00 al 99. El bleto ganador será aquel cuyo número coincida con las dos últimas cifras del número que obtenga premio mayor en el siguiente concurso de la Lotería Nacional. Si Y es la variable aleatoria definida como el número del boleto ganador, entonces:

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \begin{cases} \dfrac{1}{100}, & y = 0, 1, 2, \dots, 99 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

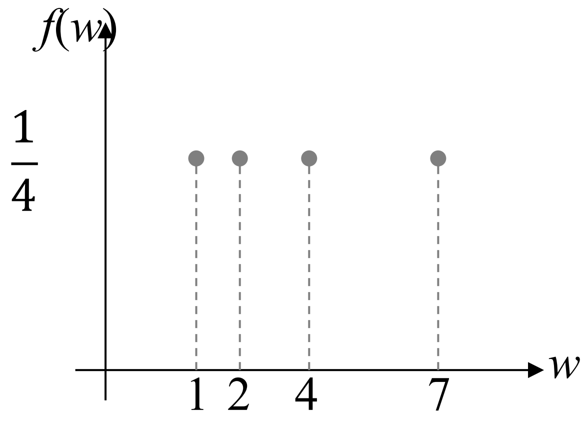
Donde $Y \sim U(0, \dots, 99)$ y gráficamente:



Uniforme (*discreta*)

1. Note que de los ejemplos anteriores las funciones de densidad G e Y son simétricas.

2. Considere la v.a. $W \sim U(1,2,4,7)$



Uniforme (*discreta*)

1. El valor esperado de esta distribución es:.

$$\mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i\, f_X(x_i)$$

2. Por su parte, la varianza se calcula como:

$$\sigma_x^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2\, f_X(x_i)$$

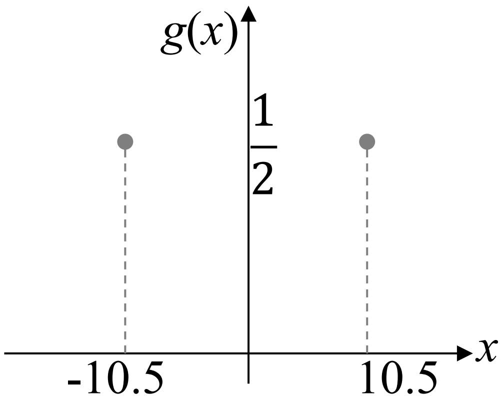
Uniforme (*discreta*)

Retomando el Ejemplo 1

Tenemos :

Que $G \sim U(-10.5, 10.5)$ y gráficamente:

$$f_G(g) = P(G = g) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & g = -10.5, 10.5 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$



Entonces si G se interpreta como la ganancia esperada, su valor esperado es:

Y la Varianza es:

$V(G)=E(G^2)-E^2(G)=(-10.5)^2*(0.5)+(10.5)^2*(0.5)=110.25$

Por lo tanto σ=10.5

Uniforme (*discreta*)

Retomando el Ejemplo 2

Consideremos que el premio de la rifa se determina a partir del número premiado de la siguiente forma:

$$X = Y + 1$$

donde X es el monto del premio en cientos de pesos y Y es el número premiado. X es una v.a. pues es función de Y y además:

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & x = 1, 2, \ldots, 100 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

Es decir $X \sim U(1, \ldots, 100)$. El valor esperado y la varianza se calculan como: $\mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, f_X(x_i) = \sum_{i=1}^{100} \frac{x_i}{100} = \frac{100*101}{100*2} = 50.5$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^{100} x_i^2 \, f_X(x_i) - (50.5)^2 = 3{,}383.5 - 2{,}550.25 = 833.25$$

$$CV = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{\sqrt{833.25}}{50.5} = 0.57$$

Uniforme (*discreta*)

- En el ejemplo anterior, la distribución es uniforme en los enteros 1,2,3,…100. En general, si $X \sim U(1,2,\dots,N)$ el valor esperado y la varianza están dados por:

$$\mu_X = \frac{N(N+1)}{2} \qquad \sigma_X = \frac{N^2-1}{12}$$

- A N se le considera el parámetro de la distribución. El espacio parametral, corresponde al conjunto al que pertenece el parámetro N, *en este caso los número naturales*.

- Considere que nos interesa conocer la probabilidad de que el monto del premio sea mayor a $80

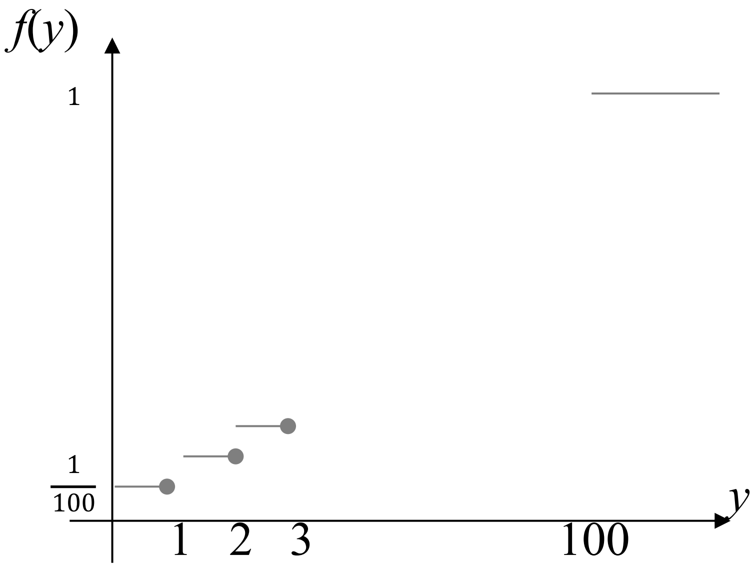
$$P(X>80) = \sum_{x=81}^{100} f_X(x) = \sum_{x=81}^{100} \left(\frac{1}{100}\right) = 20\left(\frac{1}{100}\right) = 0.2$$

Uniforme (*discreta*)

- La Función acumulación está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \dfrac{x}{100}, & x = 1,2,\ldots,100 \end{cases}$$

- Su gráfica correspondiente es:



Bernoulli

- Este modelo se aplica a un experimento cuyo espacio muestral está constituido sólo por dos resultados posibles.
- En el espacio muestral Ω={sí, no}, se consideran mutuamente excluyentes {sí} y {no}.
- Sus probabilidades están dadas por :

$$P(\{sí\}) = p \qquad\qquad P(\{no\}) = 1 - p = q$$

con $0 \leq p \leq 1$

- Para simplificar se considerará $X(sí)$=1 y $X(no)$=0 y su función de probabilidad está dada por:

x	$P(X=x)$
0	p
1	$1-p$

- Que equivale a:

x	$P(X=x)$
0	$p^{1}(1-p)^{1-1}$
1	$p^{0}(1-p)^{1-0}$

Bernoulli

- Una variable aleatoria X sigue una distribución Bernoulli si su función de probabilidad está dada por:

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}, & x = 0,1 \\ 0, & e.o.c \end{cases} \qquad 0 \leq p \leq 1$$

- Note que cumple con las propiedades de una función de probabilidad:

$$i)\ f_X(x) \geq 0$$

$$ii) \sum_{x=0}^{1} f_X(x) = 1$$

- El parámetro de la distribución es p y toma valores en el intervalo[0,1], por lo que su espacio muestral está dado por:

$$\{p \in \mathbb{R} | 0 \leq p \leq 1\}$$

Bernoulli

1. El valor esperado de esta distribución es:.

$$\mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, f_X(x_i) = p$$

2. Por su parte, la varianza se calcula como:

$$\sigma_x^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \, f_X(x_i) = pq$$

Binomial

- Se aplica en situaciones como: control de calidad, mercadotecnia y en estudios de opinión o preferencias.
- La denominación binomial, se utiliza en experimentos en los que los resultados de una v.a. pueden clasificar en dos categorías mutuamente excluyentes y exhaustivas.
- Ejemplos de variables aleatorias que se pueden modelar binomiales, son respuestas sí o no a un cuestionario y productos manufacturados clasificados como defectuosos o no defectuosos.
- En general, las variables con resultados múltiples en donde sólo uno de los resultados es de interés, se pueden considerar como binomiales.
- A las realizaciones de un experimento binomial se les conoce como ensayos.
- La distribución binomial se utiliza para calcular la probabilidad de que se presente cierto número de aciertos (éxitos) en un número de ensayos.

Postulados de la distribución binomial

- El expermento consiste en un número fijo de n ensayos o pruebas idénticas.
- Los ensayos o pruebas son independientes.
- Cada ensayo o prueba resulta en un éxito (E) o en un fracaso (F). El éxito es en lo que se está interesado y no necesariamente significa algo positivo o ventajoso que haya sucedido.
- Todas las pruebas o ensayos deben tener idénticas probabilidades de éxito p, de manera que la probabilidad de fracaso para cada prueba es q=1-p.

Ejemplo 3

En un examen de opción múltiple en donde las respuestas posibles son verdadera o falsa, cada contestación es mutuamente excluyente, ya que la respuesta no puede correcta y errónea al mismo tiempo. Si se selecciona aleatoriamente una respuesta y ésta es correcta, el resulatdo será éxito, de lo contrario será fracaso.

Binomial

Teorema

La probabilidad de k éxitos en n pruebas repetidas se denota y expresa por:

$$b(k;n,p)=\binom{n}{k}(p)^k(q)^{n-k}$$

Ejemplo 4

Se lanzan 6 monedas una sola vez; si sale águila, es éxito. Por lo tanto: $p=q=0.5$ y $n=6$

i. La probabilidad de que se presenten dos águilas *i.e.* Tener dos éxitos ($k=2$) es:

$$b(2;6,0.5)=\binom{6}{2}(0.5)^2(0.5)^{6-2}$$

ii. La probabilidad de que se presenten por lo menos cuatro águilas *i.e.* $k=4,5$ ó 6) es:

$$b(4;6,0.5)+b(5;6,0.5)+b(6;6,0.5)=\binom{6}{4}(0.5)^4(0.5)^{6-4}+\binom{6}{5}(0.5)^5(0.5)+\binom{6}{5}(0.5)^6$$

Binomial

Considere que n y p son constantes, entonces la función:

$$P(k) = b(k; n, p) = \binom{n}{k} (p)^k (q)^{n-k}$$

- Es una distribución de probabilidad discreta y se llama binomial dado que los valores de k son la sucesión del desarrollo binomial..
- Los parámetros de la distribución binomial son n, el número de repeticiones Bernoulli y p, la probabilidad de éxito en cada uno de éstos.
- El espacio parametral, es decir, el conjunto al que pertenece la pareja (n,p) está dado por:

$$\{(n, p) \in \mathbb{R}^2 | n = 1,2,3, \dots y\ 0 \leq p \leq 1\}$$

Binomial

1. El valor esperado de esta distribución es:.

$$\mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, f_X(x_i) = np$$

2. Por su parte, la varianza se calcula como:

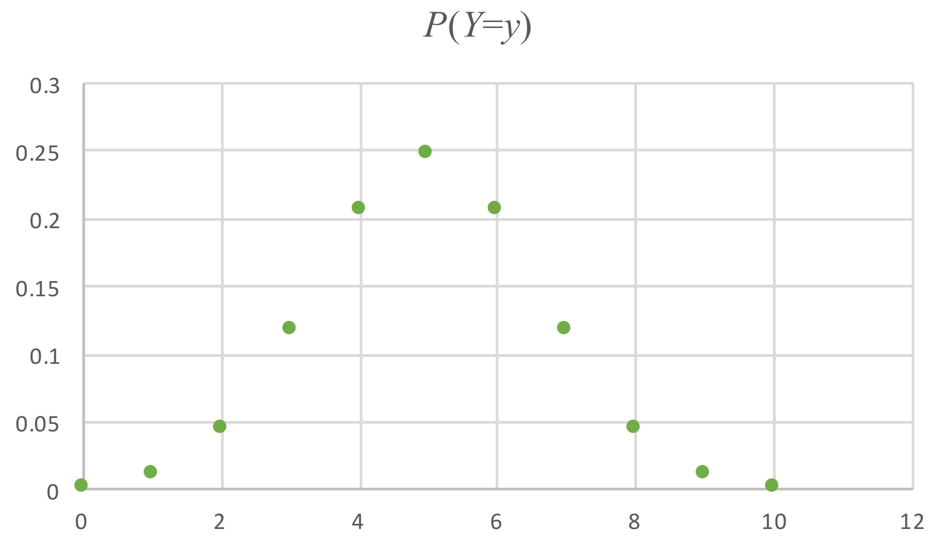
$$\sigma_x^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \, f_X(x_i) = npq$$

Ejemplo 5

Graficar la distribución de probabilidad de una v.a. Y que sigue una distribución binomial con parámetros n=10: p=q=0.5

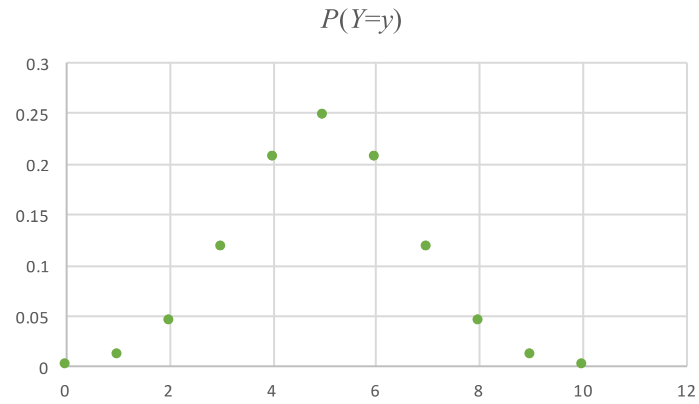
Y	$P(Y=y)$
0	0.00098
1	0.00977
2	0.04395
3	0.11719
4	0.20508
5	0.24609
6	0.20508
7	0.11719
8	0.04395
9	0.00977
10	0.00098

$$b(Y;10,0.5)=\binom{10}{y}(0.5)^y(0.5)^{10-y}$$

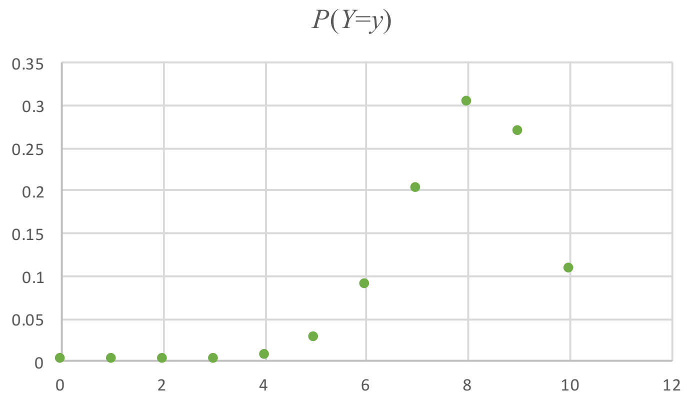


Forma geométrica de la distribución binomial

- Si p=0.5, la gráfica de la distribución binomial tiene la característica de ser simétrica

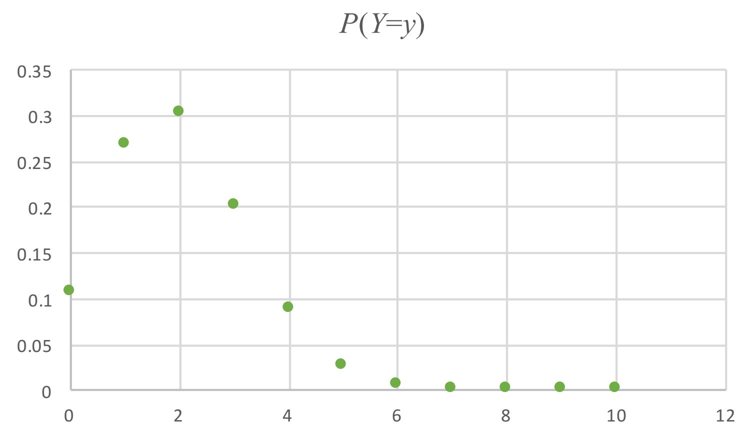


- Si p>0.5, la gráfica es asimétrica, sesgada a la izquierda



Forma geométrica de la distribución binomial

- Si $p<0.5$, la gráfica es asimétrica, sesgada a la derecha.



Binomial

Selección aleatoria en una población grande

- Esta distribución puede ser utilizada en una gran variedad de situaciones, siempre y cuando se cumplan sus postulados.
- Los postulados se cumplen en experimentos como: lanzamiento de una moneda o dado; cualquier juego de apuestas, sin embargo, es muy importante que en la práctica se satisfagan mediante la obtención de una muestra aleatoria válida de una gran población con dos categogías.
- En los experimentos binomiales se cumplen la condiciones de independencia y probabilidad de éxito constante de una selección a otra, siempre y cuando se lleve a cabo una selección aleatoria de una gran población.
- La muetras no aleatorias, dan lugar a que no se satisfagan las carácterísticas del muestreo binomial y a que los cálculos de probabilidades no sean válidos.
- La condición de independencia no se cumple en caso de que la selección se realice sin reemplazo en poblaciones pequeñas.

Ejemplo 6

Se conoce que el número de tornillos defectuosos producidos por ACME es de .01. Si ACME vende los tornillos en paquetes de 10 y ofrece como garantía de reembolso, que a lo más uno de los 10 será defectuoso. ¿qué porcentaje de los paquetes vendidos tendrá que reemplazar?

Solución

Sea X la v.a. Que describe el número de tornillos defectuosos, entonces $X \sim Bin(10{,}0.01)$. Entonces, la probabilidad de que tenga que ser reemplazado el paquete vendido es:

$$1 - P[X=0] - P[X=1] = 1 - \binom{10}{0}(0.01)^0(0.99)^{10} - \binom{10}{1}(0.01)^1(0.99)^9 \approx 0.004$$

Ejemplo 7

Considere un jurado, en el cual se necesitan 8 de los 12 votos para condenar al acusado. Asumiendo que los jurados actúan de manera independiente entre ellos e indistintamente de si el acusado es o no culpable. Cada jurado realiza la decisión correcta con parámetro θ. ¿Cuál es la probabilidad de que el jurado tome la decisión correcta?

Solución

Si el acusado es inocente, la probabilidad de que el jurado tome la decisión correcta es:

$$\sum_{i=5}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i}$$

Si el acusado es culpable, la probabilidad de que el jurado tome la decisión correcta es:

$$\sum_{i=8}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i}$$

Ejemplo 7 - Solución (*Continuación*)

Si definimos a como la probabilidad de que el acusado sea culpable y a 1-a de que sea inocente, entonces la probabilidad de que el jurado tome la decisión correcta es:

$$\alpha \sum_{i=5}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i} + (1-\alpha) \sum_{i=8}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1-\theta)^{12-i}$$

Ejemplo 8

Un equipo de comunicaciones consiste de n componentes, cada uno de los cuales funciona de manera independiente con probabilidad p. El sistema operará siempre que funcionen al menos la mitad de sus componentes. ¿Para que valor de p es un sistema de 5 componentes más probable que opere a uno de 3?

Solución

Se puede considerar que el número de que funciónenlos componentes es una variable aleatoria binomial con parámetros (n,p), por lo tanto la probabilidad de que funcione el de 5 componentes es:

$$\binom{5}{3}p^3(1-p)^{5-3}+\binom{5}{4}p^4(1-p)^{5-4}+\binom{5}{5}p^5(1-p)^{5-5}$$

Y para el de 3 componentes, tenemos:

$$\binom{3}{2}p^3(1-p)^{3-2}$$

Ejemplo 8 - Solución (*Continuación*)

Por lo tanto el sistema de 5 componentes será mejor si:

$$10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p)^1 + p^5 > 3p^2(1-p) + p^3$$
$$10p(1-p)^2 + 5p^2(1-p)^1 + p^3 > 3(1-p) + p$$
$$10p(1-p)^2 + 5p^2(1-p)^1 + p(p^2-1) > 3(1-p)$$
$$10p(1-p)^2 + 5p^2(1-p)^1 + p(p-1)(p+1) > 3(1-p)$$
$$10p(1-p)^2 + 5p^2(1-p)^1 + p(p-1)(p+1) - 3(1-p) > 0$$
$$10p(p-1)^2 - 5p^2(p-1)^1 + p(p-1)(p+1) + 3(p-1) > 0$$
$$(p-1)[10p(p-1) - 5p^2 + p(p+1) + 3] > 0$$
$$(p-1)[10p^2 - 10p - 5p^2 + p^2 + p + 3] > 0$$
$$(p-1)[6p^2 - 9p + 3] > 0$$
$$(p-1)[(3p-3)(2p-1)] > 0$$
$$3(p-1)^2(2p-1) > 0$$
$$\therefore p > \frac{1}{2}$$

Propiedades de v.a.'s Binomiales

$$E[x^k] = \sum_{i=0}^{n} i^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$E[x^k] = \sum_{i=1}^{n} i^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Utilizando la siguiente identidad

$$i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}$$

$$E[x^k] = np \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i}$$

$$E[x^k] = np \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^{k-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j}$$

$$E[x^k] = npE[(Y+1)^{k-1}]$$

Con Y una v.a. Bin(n-1,p)

Propiedades de v.a.'s Binomiales

Para el caso de que k=2 tenemos

$$E[x^2] = npE[Y+1] = np[(n-1)p+1]$$

Entonces si queremos calcular Var[x], tenemos

$$Var(x) = E[x^2] - E^2[x]$$

$$Var(x) = np[(n-1)p+1] - (np)^2$$
$$Var(x) = np[(n-1)p+1-np]$$

$$Var(x) = np[1-p] = npq$$

Poisson

Definición y características

- Una v.a. X tiene una distribución Poisson con parámetro λ>0, si su función de probabilidad está dada por:

$$f_x(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x = 0,1,2,\ldots \\ 0, \qquad\qquad e.o.c \end{cases}$$

- Notación: $X \sim Po(\lambda);\ p(x;\lambda)$

- Se cumple que:

$$f_x(x) > 0$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\ e^{\lambda} = 1$$

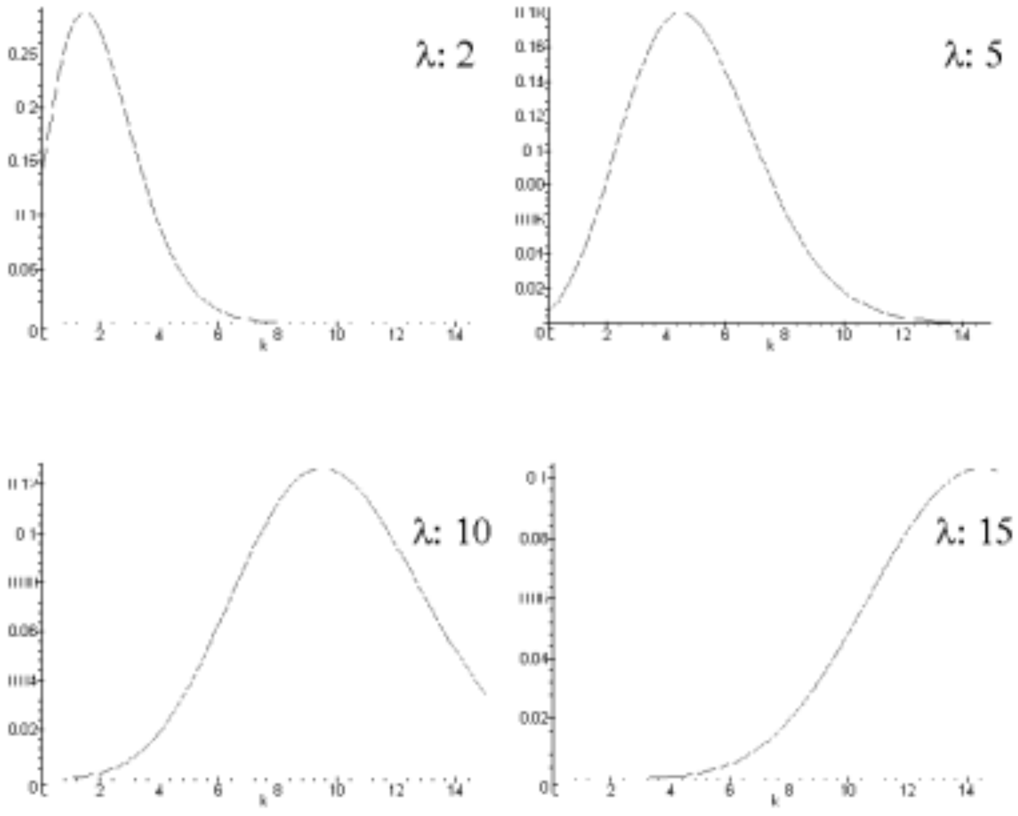
- El espacio parametral de λ son los reales positivos

Ejemplos de distribuciones Poisson

- Número de personas que llegan a una línea de espera durante algún periodo de tiempo (evento de interés: llegada de una persona a la línea de espera).
- Número de accidentes a la semana en algún crucero importante de la ciudad (evento de interés: accidente en el crucero).
- Número de llamadas de larga distancia que se reciben al mes en una empresa (evento de interés: llamada de larga distancia)
- Número de alumnos que solicitan en un día préstamo de libros en una biblioteca (evento: solicitud de un determiando libro)
- Número de alumnos que solicitan revisión de examen final en una determinada universidad (evento: soicitud de revisión de examen final).

Gráfica de la distribución Poisson

- Presenta un sesgo a la derecha conforme λ es más pequeño



Poisson

- Se puede obtener al aplicar cierto límite a la distribución binomial. Sea $Y \sim Bin(n,p)$. Si n crece $(n \to \infty)$ y p disminuye $(p \to 0)$ de tal manera que el producto np permanece constante en un valor λ, es posible demostrar que:

$$\binom{n}{y} p^{y}(1-p)^{n-y} \to \frac{\lambda^{y} e^{-\lambda}}{y!}$$

- Proceso Poisson: consiste en suponer que un fenómeno bajo estudio cumple ciertas carácterísticas:

1. Existe independencia entre el número de veces que ocurre el evento de interés en dos intervalos de tiempo disjuntos.
2. La probabilidad de que, en un intervalo de tiempo muy pequeño, se tenga una sola ocurrencia del evento es aproximadamente proporcional a la longitud del intervalo.
3. La probabilidad de que en un intrevalo de tiempo muy pequeño se tengan dos ocurrencias del evento es prácticamente despreciable vs la probabilidad de una sola ocurrencia.

Poisson

1. Si en un Proceso Poisson denotamos con λ a la constante de proporcionalidad a la que se refiere el punto 2) de la lámina anterior, y X es la v.a. que denota el número de veces que ocurre el evento de interés de una unidad de tiempo, entonces es posible demostrar que $X \sim Po(\lambda)$.

2. El valor esperado de esta distribución es:

$$\mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, f_X(x_i) = \lambda$$

3. Por su parte, la varianza se calcula como:.

$$\sigma_x^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \, f_X(x_i) = \lambda$$

Ejemplo 9

Considere la v.a. W= número de reclamos al día que recibe una aseguradora. Supongamos que W tiene una distribución Poisson, en donde sólo falta conocer el parámetro λ, es decir, el número promedio de reclamos que tiene al día.

Una forma de estimar el valor de λ es a partir de las w_i observaciones que se tengan de la variable W. Dado que λ es el valor esperado de W, se puede aproximar el valor de λ con el promedio muestral de las n observaciones tomadas.

Supongamos que se tienen 8 observaciones: W: 5, 4, 2, 4, 3, 2, 1, 3. El promedio es 3, que es el valor que se propone como el verdadero valor de λ.

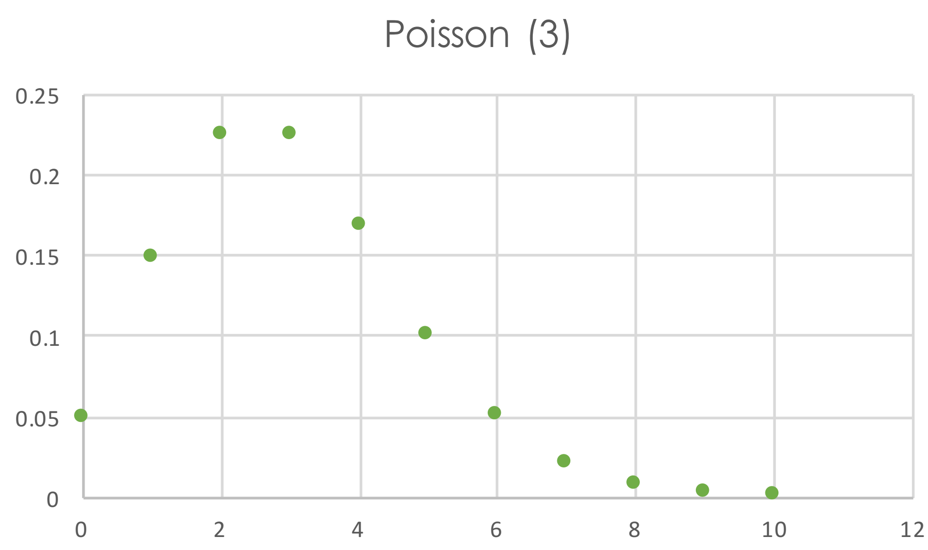
Ejemplo 9 - Solución (*continua*)

Entonces la función de densidad de W es:

$$f_W(W) = P(W = w) = \begin{cases} \dfrac{3^w e^{-3}}{w!}, w = 0,1,2,3,\ldots \\ 0, \qquad e.o.c. \end{cases}$$

Su gráfica es:

W	P(W=w)
0	0.0498
1	0.1494
2	0.2240
3	0.2240
4	0.1680
5	0.1008
6	0.0504
7	0.0216
8	0.0081
9	0.0027
10	0.0008



$$\mu_W = E(W) = 3$$

$$\sigma_W = \sqrt{V(x)} = \sqrt{3} = 1.732$$

Ejemplo 9 Solución (*continua*)

¿Cuál es la probabilidad de que en un día la aseguradora reciba 4 o 5 reclamaciones?

Se pide $P(W\!=\!4 \text{ o } W\!=\!5)= P(W\!=\!4) + P(W\!=\!5) - P(W\!=\!4 \text{ y } W\!=\!5)$

Acorde a la tabla anterior se tiene $P(W\!=\!4 \text{ o } W\!=\!5)= P(W\!=\!4) + P(W\!=\!5) - P(W\!=\!4 \text{ y } W\!=\!5) =0.1680 + 0.1008 – 0=0.269$

Función de distribución acumulada

Si $X \sim Po(\lambda)$. Entonces:

$$F_X(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \displaystyle\sum_{K=0}^{x} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Bibliografía

1. Wackerly, D.D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R.L. (2008), *Mathematical Statistics with Applications* 7th Edition, Duxbury, Thompson, Brooks/Cole.

2. Wackerly, D.D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R.L. (2010), *Estadística Matemática con aplicaciiones* 7ma Edición, CENGAGE Learning.

3. Pitman, J. (1993), *Probability*. Springer 6ª. Ed.

4. Ross, S. (1993), *A First Course in Probability*. Pearson 9th. Ed.

5. Canavos, G.C. (1987), *Probabilidad y Estadística*, McGraw Hill.

6. Mittelhammer (2013),*Mathematical Statistics for Economics and Business*, 2nd Ed. Springer.