Sistemas de Ecuaciones Lineales

Sistemas Dinámicos
Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Otoño de 2020

Mercado Duopólico

Ejemplo (Equilibrio de Cournot del duopolio)

Supongamos que se quiere modelar un mercado donde la demanda de un bien, puede describirse por medio de la función del precio p del bien.

O sea, que si q es la cantidad de producción demandada, entonces el precio está dado por una función lineal

$$p(t) = N - mq(t), \quad \textit{donde } N, m > 0.$$

Supóngase que hay dos firmas que producen dicho bien, y que sus funciones de costo están dadas por

$$c_1 = a_1 + b_1 q_1, \quad c_2 = a_2 + b_1 q_2, \qquad a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$$

Entonces la función de precio queda como $p = N - m(q_1 + q_2)$

Mercado Duopólico

Ejemplo (Equilibrio de Cournot del duopolio)

Describimos la función de beneficio de la primera empresa por medio de la ecuación

$$\pi_1 = [N - m(q_1 + q_2)]q_1 - (a_1 + b_1 q_1) = (N - b_1)q_1 - mq_1^2 - mq_1 q_2 - a_1$$

Y similarmente, para la segunda empresa, la función de beneficio es

$$\pi_2 = (N - b_2)q_2 - mq_2^2 - mq_2 q_1 - a_2$$

Obsérvese que tanto π_1 *como* π_2 *son de hecho funciones de* q_1 *y* q_2*.*

La dinámica entre las empresas puede describirse del siguiente modo:

- *Una firma observa el nivel de producción de la otra, y reacciona adaptando su producción de manera que se maximice su beneficio.*

Mercado Duopólico

Ejemplo (Equilibrio de Cournot del duopolio)

Así, para optimizar el beneficio digamos de la primera empresa, se deberá tener

$$0 = \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = N - b_1 - 2mq_1 - mq_2$$

De este modo, la producción de la primera empresa debe adoptar la producción

$$q_1^* = \frac{N - b_1}{2m} - \frac{1}{2} q_2.$$

Visto como función de q_2, se tiene una recta, que en general se conoce como curva de reacción *de la primera empresa.*

Con un razonamiento similar se obtiene la curva de reacción de la segunda empresa:

$$q_2^* = \frac{N - b_2}{2m} - \frac{1}{2} q_1.$$

Mercado Duopólico

Ejemplo (Equilibrio de Cournot del duopolio)

Dado que q_1^* *es el punto donde se optimiza el beneficio, la primera empresa debe reaccionar de acuerdo a la siguiente lógica:*

- *Si* $q_1 < q_1^*$ *entonces aumenta su producción.*
- *Si* $q_1 > q_1^*$ *entonces disminuye su producción.*

La reacción de la primera empresa puede entonces describirse con la ecuación

$$q_1' = k_1(q_1^* - q_1), \qquad k_1 > 0 \text{ representa una medida de reacción}$$

Nótese que esto es claramente un comportamiento adaptativo.

Mercado Duopólico

Ejemplo (Equilibrio de Cournot del duopolio)

Sustituyendo q_1^* obtenemos

$$q_1' = k_1 \left(\frac{N - b_1}{2m} - \frac{1}{2} q_2 - q_1 \right) = -k_1 q_1 - \frac{k_1}{2} q_2 + \frac{k_1(N - b_1)}{2m}$$

Si la segunda empresa adopta una estrategia similar obtendremos

$$q_2' = -k_2 q_2 - \frac{k_2}{2} q_1 + \frac{k_2(N - b_2)}{2m}$$

Obtenemos entonces el sistema de ecuaciones que puede describirse de forma vectorial como

$$\begin{pmatrix} q_1'(t) \\ q_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & -k_1/2 \\ -k_2/2 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1(N - b_1)/(2m) \\ k_2(N - b_2)/(2m) \end{pmatrix}$$

Mercado Duopólico

Ejemplo (Equilibrio de Cournot del duopolio)

En forma breve tenemos

$$\vec{q}\,' = A\vec{q} + \vec{B}$$

donde

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -k_1 & -k_1/2 \\ -k_2/2 & -k_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} k_1(N-b_1)/(2m) \\ k_2(N-b_2)/(2m) \end{pmatrix}$$

Nos planteamos si puede haber un punto de equilibrio en este esquema de competencia duopólica.

La primera observación es que el polinomio característico es de la forma $\lambda^2 + (k_1+k_2)\lambda + \dfrac{3k_1k_2}{4}$

Mercado Duopólico

Ahora podemos invocar al siguiente resultado del álgebra de polinomios:

Teorema

Si un polinomio tiene la forma $x^2 + bx + c$, con $b, c > 0$, entonces

- *Si se tienen raíces complejas, éstas tendrán parte real negativa;*
- *Si se tienen raíces reales, éstas serán distintas y negativas.*

Para convencerse de que el teorema es cierto basta ver la fórmula cuadrática:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Mercado Duopólico

Para nuestro ejemplo, podríamos concluir que la solución puede tener dos formas:

$$\vec{q}_h = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 \qquad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 < 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

o bien si $\lambda = \alpha \pm i\beta$

$$\vec{q}_h = C_1 e^{\alpha t}\left[\vec{r}\cos(\beta t) - \vec{s}\,\text{sen}(\beta t)\right] + C_2 e^{\alpha t}\left[\vec{r}\,\text{sen}(\beta t) + \vec{s}\cos(\beta t)\right].$$

En cualquier caso, en el largo plazo $\vec{q}_h(t) \to 0$ si $t \to \infty$.

Esto implica que la solución particular $\vec{q}_p$ que propongamos será un punto estacionario del sistema.

Mercado Duopólico

Recuérdese ahora que $\vec{q}_p$ debe cumplir $A\vec{q}_p = -\vec{B}$, lo que nos lleva a

$$\vec{q}_p = \begin{pmatrix} (N - 2b_1 + b_2)/(3m) \\ (N - 2b_2 + b_1)/(3m) \end{pmatrix}$$

que se conoce como equilibrio de Cournot del modelo duopólico.

Notemos que este punto de equilibrio proporciona un estado hacia el que convergerían las produccciones de las empresas, si es que se adoptan las estrategias descritas anteriormente.

Resulta interesante que si la segunda empresa optara por adoptar una producción dada por su valor en el punto de equilibrio $q_2 = (N - 2b_2 + b_1)/(3m)$ entonces resultará que la primera empresa debería adoptar la producción dada por el valor en el punto de equilibrio $q_1 = (N - 2b_1 + b_2)/(3m)$.