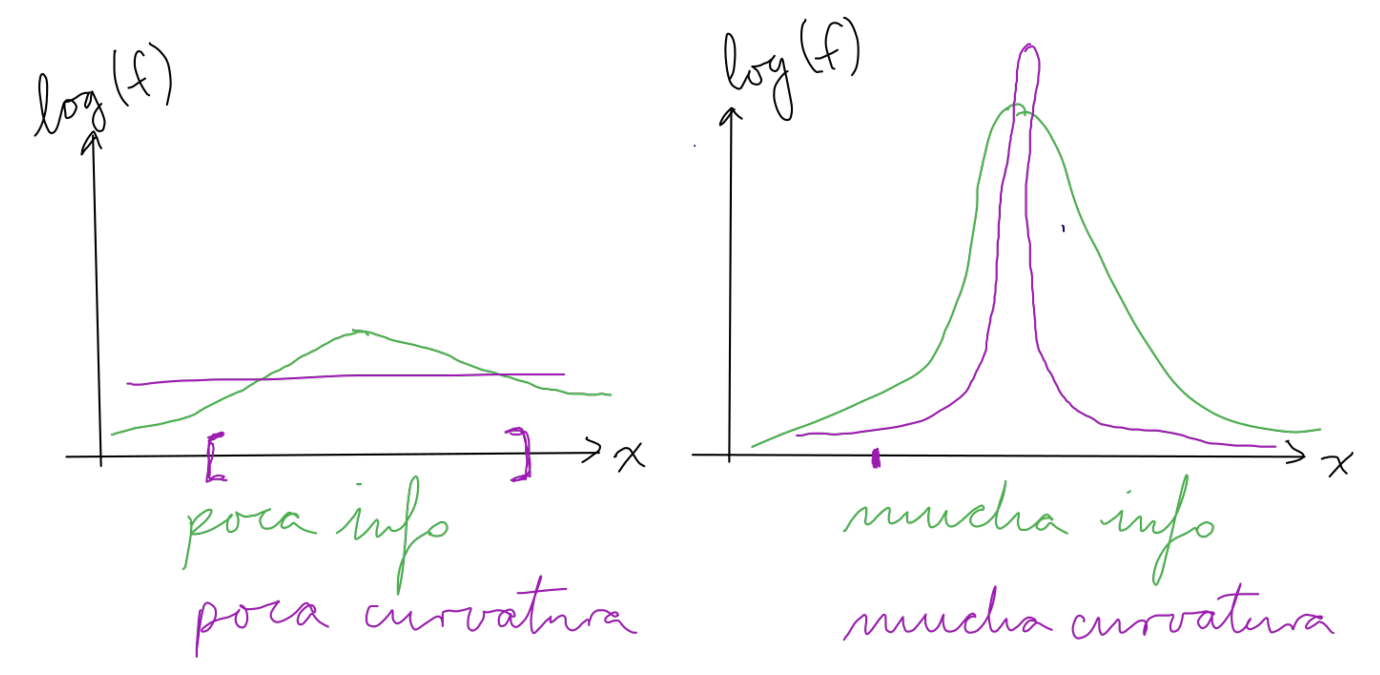
Propiedades de los EMV

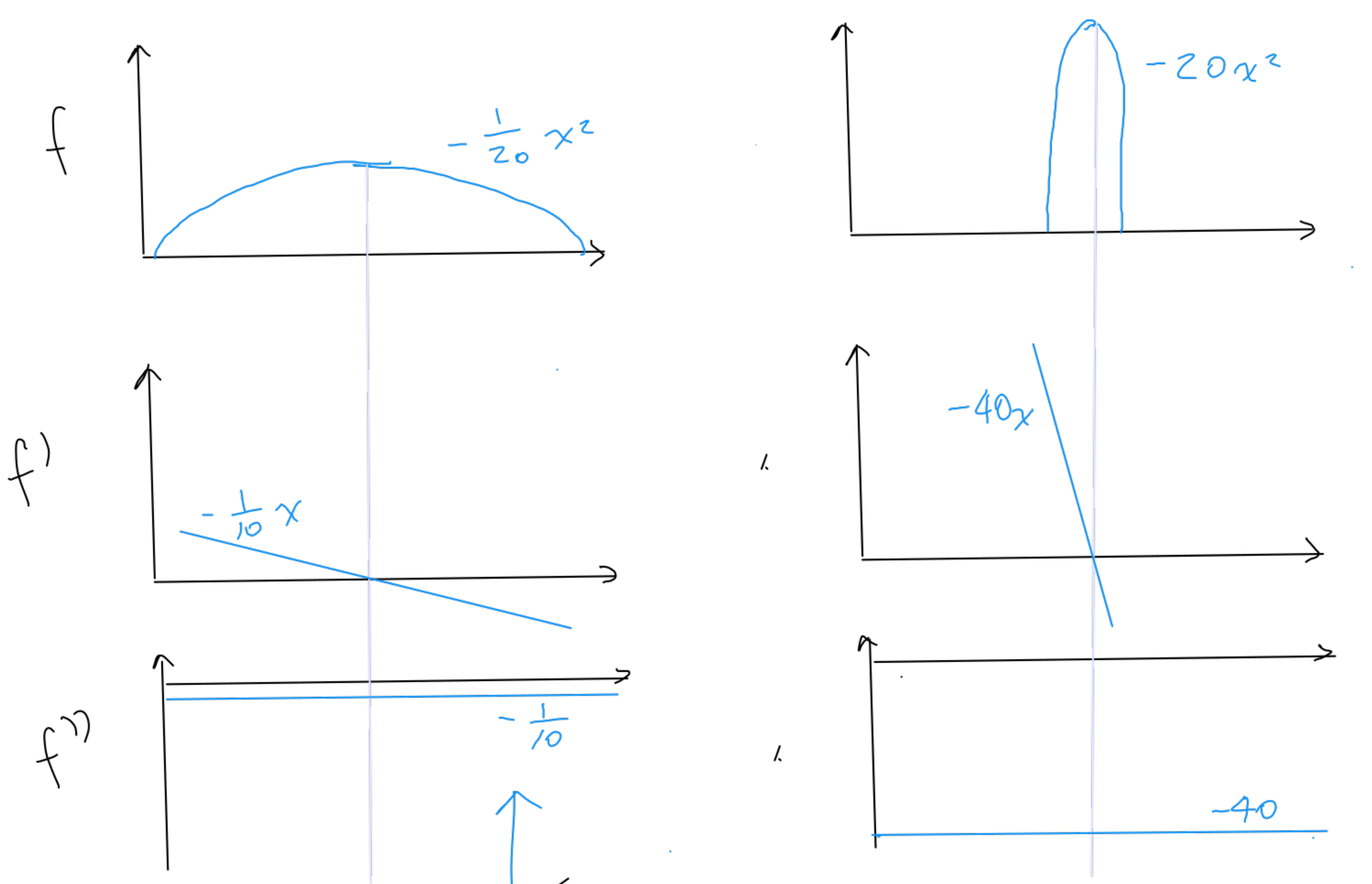
Def El criterio de información de Fisher

$$I(\theta) = E_X\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\left(f_X(X;\theta)\right)\right)^2\right]$$

la cual se puede reescribir (si se cumplen ciertas condiciones de regularidad) como

$$I(\theta) = -E_X\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log\left(f_X(X;\theta)\right)\right]$$





$I(\theta) = -E[\quad] = -(-\frac{1}{10}) = \frac{1}{10}$ $I(\theta) = 40$

pequeño = poca info   grande = mucha info

Def Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a. con f.d.p. $f_X(x;\theta)$ y sea $\hat{\theta}$ un estimador insesgado de θ. Definimos la cota inferior de Cramér-Rao como

$$V(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n\,I(\theta)}$$

(representa una cota inferior para la varianza de un estimador).

Nos ayuda a identificar estimadores de varianza mínima.

Ejemplo (Bernoulli)

$X \sim Ber(p)$

$$f_X(x;p) = p^x(1-p)^{1-x}\, I_{\{0,1\}}(x) \qquad p \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \log(f_X(x;p)) = x\log(p) + (1-x)\log(1-p)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial p}\log(f_X(x;p)) = \frac{x}{p} - \frac{1-x}{1-p}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial p^2}\log(f_X(x;p)) = -\frac{x}{p^2} - \frac{1-x}{(1-p)^2}$$

$$\therefore I(p) = -E_X\left[-\frac{X}{p^2} - \frac{1-X}{(1-p)^2}\right]$$

$$= \frac{E[X]}{p^2} + \frac{1-E[X]}{(1-p)^2}$$

$$= \frac{p}{p^2} + \frac{1-p}{(1-p)^2} = \frac{1}{p(1-p)} = I(p)$$

$\therefore$ La CICR para un estimador $\hat{p}$ es

$$V(\hat{p}) \geq \frac{1}{n\,I(p)} = \frac{1}{np(1-p)}$$

Propiedades asintóticas del EMV

$B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta = 0 \Rightarrow E[\hat{\theta}] = \theta$

① El EMV es asintóticamente insesgado

$$\lim_{n\to\infty} B(\hat{\theta}) = 0 \longrightarrow \text{equivalentemente } \lim_{n\to\infty} E[\hat{\theta}] = \theta$$

② El EMV es asintóticamente eficiente

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = \frac{1}{n\,I(\theta)}$$

(es decir que si tenemos un "buen" tamaño de muestra, estaremos cerca del estimador más eficiente (o de menor varianza posible))

③ El EMV es consistente

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

(es decir $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$)

④ El EMV converge en distribución a una normal

$$\hat{\theta} \xrightarrow{d} N\left(\theta, \frac{1}{n\,I(\theta)}\right)$$

equivalentemente

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\frac{1}{n\,I(\theta)}}} \underset{aprox}{\sim} N(0,1)$$

Ejemplo Sea $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} Bin(m,p)$ y sean los estimadores:

$$\hat{p}_{MV} = \frac{\bar{X}}{m} \quad y \quad \hat{p}_2 = \frac{\bar{X}+1}{m+2}$$

Investigar ambos estimadores sobre las propiedades de sesgo, eficiencia, consistencia y sobre la CICR.

① Sesgo:

$$E[\hat{p}_{MV}] = E\left[\frac{\bar{X}}{m}\right] = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{n} mp = \frac{nmp}{mn} = p$$

$\therefore \hat{p}_{MV}$ es insesgado

$$E[\hat{p}_2] = E\left[\frac{\bar{X}+1}{m+2}\right] = \frac{1}{m+2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] + 1\right)$$

$$= \frac{1}{m+2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} mp + 1\right)$$

$$= \frac{1}{m+2}\left(\frac{1}{n} \cdot nmp + 1\right) = \frac{mp+1}{m+2} \neq p$$

$\therefore \hat{p}_2$ tiene sesgo

② Eficiencia:

Como $\hat{p}_{MV}$ es insesgado

$$ECM(\hat{p}_{MV}) = V(\hat{p}_{MV}) = V\left(\frac{\bar{X}}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

$$= \frac{1}{m^2 n^2} \sum_{i=1}^{n} mp(1-p)$$

$$= \frac{\cancel{nm}p(1-p)}{m^{\cancel{2}} n^{\cancel{2}}} = \frac{p(1-p)}{mn}$$

$$ECM(\hat{p}_2) = \underbrace{V(\hat{p}_2)} + \underbrace{\left(B(\hat{p}_2)\right)^2}$$

$$V(\hat{p}_2) = V\left(\frac{\bar{X}+1}{m+2}\right) = \frac{1}{(m+2)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

$$= \frac{1}{n^2(m+2)^2} \sum_{i=1}^{n} mp(1-p)$$

$$= \frac{\cancel{n}mp(1-p)}{n^{\cancel{2}}(m+2)^2} = \frac{mp(1-p)}{n(m+2)^2}$$

$$B(\hat{p}_2) = E[\hat{p}_2] - p = \frac{mp+1}{m+2} - p$$

$$= \frac{\cancel{mp}+1-\cancel{mp}-2p}{m+2} = \frac{1-2p}{m+2}$$

$$\therefore ECM(\hat{p}_2) = \frac{mp(1-p)}{n(m+2)^2} + \frac{(1-2p)^2}{(m+2)^2}$$

$$= \frac{mp(1-p) + n(1-2p)^2}{n(m+2)^2}$$

(Nota: no podemos calcular la eficiencia relativa, ya que, por definición, ambos estimadores deben ser insesgados).

③ Consistencia

Como $\hat{p}_{MV}$ es insesgado

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{p}_{MV}) = \lim_{n\to\infty} \frac{p(1-p)}{nm} = 0$$

$\therefore \hat{p}_{MV}$ es consiste

$$P(|\hat{p}_2 - p| > \varepsilon) = P\left((\hat{p}_2-p)^2 > \varepsilon^2\right)$$

$$\overset{Markov}{\leq} \frac{E[(\hat{p}_2-p)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{ECM(\hat{p}_2)}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{(1-2p)^2 n + mp(1-p)}{\varepsilon^2 (m+2)^2\, n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{(1-2p)^2}{\varepsilon^2(m+2)^2} \neq 0$$

$\therefore \hat{p}_2$ <u>no</u> es consistente

④ Información de Fisher

$$I(p) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} \log\left(f_X(x;p)\right)\right]$$

$$f_X(x;m,p) = \frac{m!}{x!(m-x)!} p^x (1-p)^{m-x}$$

$$h(p) = \log\left(f_X(x;m,p)\right)$$

$$= \log\left(\frac{m!}{x!(m-x)!}\right) + x\log(p) + (m-x)\log(1-p)$$

$$\frac{\partial h}{\partial p} = \frac{x}{p} - \frac{m-x}{1-p}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial p^2} = -\frac{x}{p^2} - \frac{m-x}{(1-p)^2}$$

$$I(p) = -E\left[-\frac{X}{p^2} - \frac{m-X}{(1-p)^2}\right]$$

$$= \frac{E[X]}{p^2} + \frac{m-E[X]}{(1-p)^2}$$

$$= \frac{mp}{p^2} + \frac{m-mp}{(1-p)^2}$$

$$= \frac{m}{p} + \frac{m}{1-p}$$

$$= \frac{m-mp+mp}{p(1-p)} = \frac{m}{p(1-p)} = I(p)$$

⑤ CICR

$$V(\hat{p}) \geq \frac{1}{nI(p)} = \frac{1}{n \cdot \frac{m}{p(1-p)}} = \frac{p(1-p)}{nm} = V(\hat{p}_{MV})$$

$\therefore \hat{p}_{MV}$ es un estimador de varianza mínima

---

1) La forma de obtener el EMV

$X_1, \dots, X_n$ m.a. con f.d.p. $f_X(x;\theta)$

$$\mathcal{L}(\theta; x) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

$$\ell(\theta; x) = \log\left(\mathcal{L}(\theta; x)\right)$$

2) Optimizar $\mathcal{L}$ o ℓ (en la mayoría de los casos, derivando e igualando a cero)

3) Propiedades de los estimadores:

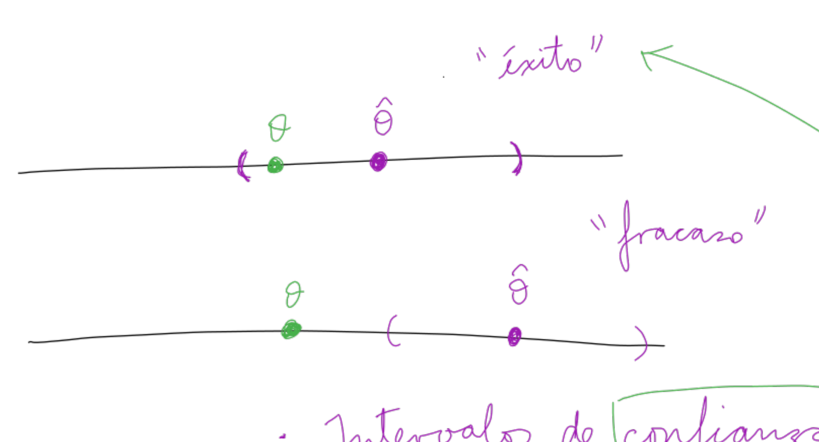
- Sesgo: $E[\hat{\theta}] - \theta$
- Varianza: $ECM(\hat{\theta})$, $ER(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$
- Consistencia: $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$

4) Propiedades de los EMV

- Asintóticamente insesgados, eficientes y consistentes
- $\hat{\theta}_{MV} \underset{aprox}{\sim} N\left(\theta, \frac{1}{nI(\theta)}\right)$

5) CICR: $V(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nI(\theta)}$

donde $I(\theta) = E_X\left[\frac{\partial}{\partial\theta^2} \log\left(f_X(X;\theta)\right)\right]$



- Intervalos de $\boxed{\text{confianza}}$
- Método pivotal

95% de $\boxed{\text{confianza}}$