Nota sobre relación entre la demanda marshaliana y la demanda walrasiana

Diego A. Domínguez

Instituto Tecnológico Autónomo de México

1. Notación

En esta nota estudiamos la relación entre la demanda marshaliana y la demanda walrasiana. Ambas demandas provienen de un problema de maximización de utilidad sujeto a una restricción presupuestal con precios competitivos, la diferencia entre estos problemas está en el ingreso del consumidor. Para la demanda marshaliana el ingreso del consumidor es una cantidad de dinero exógena, mientras que para la demanda walrasiana el ingreso del consumidor está dado por el valor de mercado de una dotación de bienes.

Dados los precios de los bienes $p_x, p_y \in \mathbb{R}_{++}$ y el ingreso del consumidor $I \in \mathbb{R}_+$ el problema de maximización de utilidad para obtener la demanda marshaliana es:

$$\begin{array}{l} \text{máx}_{x,y}\, u(x,y) \\ \text{sujeto a:} \\ I - p_x x - p_y y \geq 0 \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{array}$$

Denotamos el lagrangeano del problema de maximización de utilidad:

$$\mathcal{L}^M(x, y, \lambda, \mu_x, \mu_y, p_x, p_y, I) = u(x, y) + \lambda(I - p_x x - p_y y) + \mu_x x + \mu_y y,$$

las demandas marshalianas $x^M(p_x, p_y, I), y^M(p_x, p_y, I)$, el multiplicador de lagrange $\lambda^M(p_x, p_y, I)$, y la función de utilidad indirecta $V^M(p_x, p_y, I)$.

Dados los precios de los bienes $p_x, p_y \in \mathbb{R}_{++}$ y la dotación de bienes del consumidor $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^+$ el problema de maximización de utilidad para obtener la demanda walrasiana es:

$$\begin{array}{l} \text{máx}_{x,y}\, U(x,y) \\ \text{sujeto a:} \\ p_x\bar{x} + p_y\bar{y} - p_x x - p_y y \geq 0 \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{array}$$

Denotamos el lagrangeano del problema de maximización de utilidad:

$$\mathcal{L}^W(x, y, \lambda, \mu_x, \mu_y, p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}) = u(x, y) + \lambda(p_x\bar{x} + p_y\bar{y} - p_x x - p_y y) + \mu_x x + \mu_y y,$$

las demandas walrasianas $x^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}), y^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y})$, el multiplicador de lagrange $\lambda^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y})$, y la función de utilidad indirecta $V^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y})$.

2. Relación entre la demanda marshaliana y la demanda walrasiana

Para ver la relación entre demanda walrasiana y demanda marshaliana notamos que el problema de maximización de utilidad dados los precios y su dotación es equivalente al problema de maximización de utilidad dados los precios y un ingreso exógeno igual al valor de mercado de su dotación.

Para formalizar esta relación dados los precios y la dotación llamamos al valor de mercado de la dotación del consumidor su ingreso walrasiano:

Definición 1. Para cada vector de precios $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ y cada dotación de bienes $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2_{++}$ el ingreso walrasiano del consumidor es

$$I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}) = p_x \bar{x} + p_y \bar{y}.$$

Dada esta relación entre dotación e ingreso del consumidor tenemos que si evaluamos la demanda marshaliana en el ingreso walrasiano obtenemos la demanda walrasiana.

Proposición 1. *Para cada vector de precios* $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ *y cada dotación* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2_{+}$*:*

$$x^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}) = x^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y})),$$

$$y^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}) = y^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y})).$$

De la misma forma, la utilidad que obtiene un consumidor con una dotación de bienes y ciertos precios competitivos es igual a la utilidad que obtiene el mismo consumidor que enfrenta los mismos precio y tiene un ingreso exógeno igual al valor de mercado de su dotación:

Proposición 2. *Para cada vector de precios* $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ *y cada dotación* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2_{+}$*:*

$$V^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}) = V^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y})).$$

Diferenciando la expresión anterior respecto al ingreso, y utilizando el teorema de la envolvente se obtiene una relación entre el multiplicador del problema de maximización de utilidad correspondiente a la demanda marshaliana y el multiplicador de lagrange del problema de maximización de utilidad correspondiente a la demanda walrasiana.

Proposición 3. *Para cada vector de precios* $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ *y cada dotación* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2_{+}$*:*

$$\lambda^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y})) = \lambda^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}).$$

2.1. Ecuación de slutsky para la demanda walrasiana

Diferenciando la relación entre la demanda marshaliana y la demanda compensada de un bien respecto al precio de ese bien podemos obtener una relación entre la derivada de la demanda walrasiana y la demanda marshaliana:

Proposición 4. *Para cada vector de precios* $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ *y cada dotación* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2_{+}$*:*

$$\frac{\partial x^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y})}{\partial p_x} = \frac{\partial x^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial p_x} + \frac{\partial x^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial I}\bar{x},$$

$$\frac{\partial y^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y})}{\partial p_y} = \frac{\partial y^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial p_y} + \frac{\partial y^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial I}\bar{y}.$$

Utilizando la ecuación de slutsky podemos relacionar la pendiente de la demanda walrasiana y la demanda compensada de la siguiente forma:

Proposición 5. *Para cada vector de precios* $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ *y cada dotación* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2_{+}$*:*

$$\frac{\partial x^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y})}{\partial p_x} = \frac{\partial x^C(p_x, p_y, V^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial p_x} - \frac{\partial x^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial I}\left(x^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}) - \bar{x}\right),$$

$$\frac{\partial y^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y})}{\partial p_y} = \frac{\partial y^C(p_x, p_y, V^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial p_y} - \frac{\partial y^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial I}\left(y^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}) - \bar{y}\right).$$

Estas expresiones nos dicen que el cambio total en la demanda walrasiana de un bien respecto a su propio precio se puede descomponer en un efecto sustitución medido como la derivada de la demanda compensada respecto a su propio precio y un efecto ingreso que corresponde a la derivada de la demanda marshaliana respecto al ingreso por la demanda neta del bien, el cual llamamos el efecto ingreso neto.

Diferenciando la relación entre la demanda marshaliana y la demanda compensada de un bien respecto al precio del otro bien podemos obtener una relación entre la derivada de la demanda walrasiana respecto al bien cruzado y la demanda marshaliana respecto al bien cruzado:

Proposición 6. *Para cada vector de precios* $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ *y cada dotación* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2_{+}$*:*

$$\frac{\partial x^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y})}{\partial p_y} = \frac{\partial x^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial p_y} + \frac{\partial x^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial I}\bar{y},$$

$$\frac{\partial y^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y})}{\partial p_x} = \frac{\partial y^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial p_x} + \frac{\partial y^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial I}\bar{x}.$$

Utilizando la ecuación de slutsky podemos relacionar la pendiente de la demanda walrasiana respecto al bien cruzado y la derivada de la demanda compensada respecto al bien cruzado de la siguiente forma:

Proposición 7. *Para cada vector de precios* $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ *y cada dotación* $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2_{+}$*:*

$$\frac{\partial x^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y})}{\partial p_y} = \frac{\partial x^C(p_x, p_y, V^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial p_y} - \frac{\partial x^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial I}\left(y^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}) - \bar{y}\right),$$

$$\frac{\partial y^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y})}{\partial p_x} = \frac{\partial y^C(p_x, p_y, V^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial p_x} - \frac{\partial y^M(p_x, p_y, I^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}))}{\partial I}\left(x^W(p_x, p_y, \bar{x}, \bar{y}) - \bar{x}\right).$$

Estas expresiones nos dicen que el cambio total en la demanda walrasiana de un bien respecto al precio cruzado se puede descomponer en un efecto sustitución cruzado medido como la derivada de la demanda compensada respecto al precio cruzado, y un efecto ingreso que corresponde a la derivada de la demanda marshaliana respecto al ingreso por la demanda neta del bien cruzado, el cual llamamos el efecto ingreso cruzado neto.