Nota sobre las propiedades de la correspondencia de demanda compensada

Diego A. Domínguez

Instituto Tecnológico Autónomo de México

La demanda compensada es una correspondencia que asigna a cada posible nivel de precios y de utilidad de referencia el conjunto de canastas que minimizan el gasto en que incurre una persona cuando está restringida a obtener al menos cierto nivel de utilidad de referencia. En general esta correspondencia cumple con ciertas propiedades y en esta nota describiremos algunas de ellas.

1. Notación

Consideremos una persona quien consume cantidades positivas de dos productos x e y, tiene una función de utilidad $u(x, y)$, enfrenta precios competitivos p_x, p_y y quiere obtener al menos el nivel de utilidad $\bar{u}$ al menor costo posible. Para encontrar la(s) canastas óptimas y el gasto mínimo que requiere se resuelve el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{mín}_{x,y} & p_x x + p_y y \\ \text{s.a.} & \\ & u(x,y) \geq \bar{u} \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

A los minimizadores del problema los llamamos **demandas compensadas** y las denotamos $(x^C(p, \bar{u}), y^C(p, \bar{u}))$ y asignan a cada nivel de precios y utilidad de referencia el conjunto de canastas que minimizan el gasto del consumidor. Es importante notar que, a diferencia de las demandas marshalianas, las demandas compensadas dependen de la función de utilidad específica y cambian ante transformaciones monótonas de la función de utilidad ya que al cambiar la función de utilidad y mantener la utilidad de referencia constante cambia el nivel real de bienestar de referencia.

Las demandas compensadas son en general una correspondencia ya que pueden existir múltiples soluciones al problema de minimización de gasto. Sin embargo, si la función de utilidad es estrictamente cuasicóncava entonces para cada nivel de precios y utilidad de referencia existe una solución única al problema de minimización y por lo tanto la demanda compensada es una función.

2. Propiedades

Podemos clasificar las propiedades de la demanda compensada en dos: (i) homogeneidad, (ii) respuesta ante cambios en los parámetros.

2.1. Homogeneidad

La correspondencia de demanda compensada es homogénea de grado cero en precios, es decir, si los precios de los bienes cambian en la misma proporción y la utilidad de referencia se mantiene constante entonces las canastas que minimizan el gasto se mantiene constantes.

Proposición 1. *Para cada $p \in \mathbb{R}^2_{++}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}_+$, tenemos $x^C(p, \bar{u}) = x^C(\lambda p, \bar{u})$ y $y^C(p, \bar{u}) = y^C(\lambda p, \bar{u})$.*

Esta propiedad proviene del hecho de que al cambiar los precios en la misma proporción el costo de cada canasta cambia en esa misma proporción, es decir, el mapa de curvas de isocostos se mantiene constante en términos ordinales y únicamente cambia el nivel de las curvas de isocostos, por lo tanto las canastas óptimas son las mismas antes y después del cambio en precios.

2.2. Respuesta ante cambios en parámetros

Estas propiedades nos hablan de como cambian las demandas compensadas cuando cambia uno de los parámetros. Al aumentar un precio la cantidad óptima de ese bien no aumenta, y en el caso de una función de utilidad monótona con dos bienes la cantidad del otro bien no disminuye.

Proposición 2. *Para cada nivel de utilidad de referencia $\bar{u} \in \mathbb{R}$, cada par de precios precio del bien x $p_x, p'_x \in \mathbb{R}_{++}$ tales que $p'_x > p_x$, y cada par de precios del bien y $p_y, p'_y \in \mathbb{R}_{++}$ tales que $p'_y > p_y$, entonces:*

(i) $x^C(p_x, p_y, \bar{u}) \geq x^C(p'_x, p_y, \bar{u})$ *y* $y^C(p_x, p_y, \bar{u}) \geq y^C(p_x, p'_y, \bar{u})$ ***(Ley de la demanda compensada).***

Además, si la función de utilidad es monótona y únicamente existen dos bienes,

(ii) $x^C(p_x, p_y, \bar{u}) \leq x^C(p_x, p'_y, \bar{u})$ *y* $y^C(p_x, p_y, \bar{u}) \leq y^C(p'_x, p_y, \bar{u})$.

La propiedad (i) proviene del hecho de que al aumentar el precio de un bien manteniendo la utilidad de referencia constante el costo de una canasta aumentara más mientras contenga una mayor cantidad del bien cuyo precio cambia; por lo tanto, la canasta que es óptima a los precios iniciales es más barata con los precios finales que cualquier canasta que proporcione una utilidad al menos igual al de referencia y que contenga una mayor cantidad del bien cuyo precio cambia.

La propiedad (ii) proviene del hecho de que si la función de utilidad es monótona, en una canasta que minimiza el gasto, el consumidor obtendrá exactamente la utilidad de referencia. Además, como únicamente hay dos bienes, si disminuye la cantidad del bien cuyo precio aumenta y la función de utilidad es monótona, entonces habrá que aumentar el consumo del otro bien para mantener el nivel de utilidad de referencia.