Sistemas de ecuaciones en Diferencias

Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Otoño de 2020

Notaciones y definiciones básicas

Abordamos ahora el estudio de sistemas de ecuaciones en diferencias. Se tienen ahora dos variables de estado x_t y y_t para $t \in \mathbb{N}$ y dos ecuaciones en diferencias de primer orden que involucran a ambas funciones:

$$x_{t+1} = ax_t + by_t, \qquad y_{t+1} = cx_t + dy_t$$

De nuevo nos será conveniente usar notación vectorial:

$$\vec{X}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t$$

Con esta notación, una solución del sistema es un vector $\vec{X}_t$ que hace cierta la ecuación.

Se pueden también considerar valores iniciales, que en este caso toman la forma $\vec{X}_{t_0} = \vec{X}_0$, es decir $\begin{pmatrix} x_{t_0} \\ y_{t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Notaciones y definiciones básicas

Se pueden considerar también ecuaciones no homogéneas que escribiremos como

$$\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t + \vec{B}\,, \quad \text{donde } \vec{B} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Si escribimos este sistema no homogéneo sin usar notación vectorial

$$x_{t+1} = ax_t + by_t + e_1, \qquad y_{t+1} = cx_t + dy_T + e_2$$

Solución del sistema homogéneo – Polinomio característico

De nuevo, la herramienta fundamental que usaremos es el cálculo de valores propios y vectores propios de matrices.

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ podemos el polinomio caracerístico asociado a la matriz A como

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - (\operatorname{Tr} A)\lambda + (\det A)$$

Las raíces de este polinomio dan lugar a los valores propios, al que se le puede asociar un vector propio.

Para ésto podemos adoptar la estrategia mencionada en la dinámica continua.

Solución del sistema homogéneo – Valores y vectores propios

- Si la matriz es diagonal, digamos $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, entonces realmente se resuelve cada ecuación independiente de la otra.

Más en concreto, se tendrán ecuaciones de la forma $x_{t+1} = ax_t$, $y_t = dy_t$, que tienen una *fórmula memorizable*.

- Si la matriz digamos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ no es diagonal entonces tenemos dos posibles casos:
  - Si $b \neq 0$ entonces se propone como vector propio a $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}$
  - Si $c \neq 0$ entonces se propone como vector propio a $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix}$.

Solución del sistema homogéneo

Tenemos de nuevo que estudiar las posibilidades que pueden ocurrir al calcular los valores propios de A, y proponer ahora que dos soluciones puedan generar a una *"solución general"*

A diferencia de la dinámica continua, ahora propondríamos que en la dirección del vector propio $\vec{v}$, proveniente del valor propio λ, se tenga la solución $(\lambda)^t \vec{v}$.

Esta es una buena elección, pues al sustituir en la ecuación vectorial tendríamos:

$$A\Big((\lambda^t)\vec{v}\Big) = (\lambda)^t \left(A\vec{v}\right) = (\lambda)^t \lambda\vec{v} = (\lambda)^{t+1}\vec{v}$$

Solución del sistema homogéneo - valores propios reales distintos

Este es el caso más fácil de describir, pues se tienen directamente dos soluciones que pueden combinarse para dar lugar a la solución general.

Supóngase que tenemos el sistema $\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t$*, donde la matriz* A *tiene dos valores propios* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *con* $\lambda_1 \neq \lambda_2$*, y vectores propios* $\vec{v}_1$ *y* $\vec{v}_2$ *respectivamente. Entonces la solución general del sistema es*

$$\vec{X}_t = C_1(\lambda_1)^t\vec{v}_1 + C_2(\lambda_2)^t\vec{v}_2$$

Ejemplo

Si el sistema de ecuaciones en diferencias tiene como matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, entonces su polinomio característico es $\lambda^2 - 5\lambda + 6$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$.

Para cada valor propio podemos calcular un vector propio:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{para} \ \ \lambda_1 = 3, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{para} \ \ \lambda_2 = 2$$

La solución general es entonces $\vec{X}_t = C_1(3)^t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2(2)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Incidentalmente, el comportamiento a largo plazo de esta solución general es no convergente.

Solución del sistema homogéneo - dos valores propios complejos conjugados

En este caso la matriz tendría valores propios de la forma $\alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Tomando $\lambda = \alpha + \beta i$, el vector propio correspondiente se escribiría por ejemplo como

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - d \\ c \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{r} + i\vec{s}$$

o bien

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \alpha - a \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} =: \vec{r} + i\vec{s}$$

Así, usando la forma polar del número complejo $\alpha + i\beta$, una solución podría escribirse como

$$\begin{aligned}(\alpha + i\beta)^t \vec{v} &= (\rho\, e^{i\theta})^t (\vec{r} + i\vec{s}) = (\rho)^t \left[\cos(\theta t) + i \operatorname{sen}(\theta t)\right] (\vec{r} + i\vec{s}) \\ &= (\rho)^t \Big(\vec{r}\cos(\theta t) - \vec{s}\operatorname{sen}(\theta t)\Big) + i\,(\rho)^t \Big(\vec{r}\operatorname{sen}(\theta t) + \vec{s}\cos(\theta t)\Big)\end{aligned}$$

Solución del sistema homogéneo - dos valores propios complejos conjugados

Con la experiencia previa de ecuaciones de segundo orden y sistemas de ecuaciones diferenciales, como queremos soluciones de valores en $\mathbb{R}$, entonces proponemos las siguientes dos soluciones:

$$(\rho)^t\Big(\vec{r}\cos(\theta t) - \vec{s}\,\mathrm{sen}(\theta t)\Big) \quad \text{y} \quad (\rho)^t\Big(\vec{r}\,\mathrm{sen}(\theta t) + \vec{s}\cos(\theta t)\Big)$$

Si la matriz A asociada al sistema de ecuaciones $\vec{X}' = A\vec{X} = 0$ tiene valores propios complejos conjugados $\lambda = \alpha \pm i\beta$, entonces la solución general es de la forma

$$\vec{X}(t) = C_1(\rho)^t\Big(\vec{r}\cos(\theta t) - \vec{s}\,\mathrm{sen}(\theta t)\Big) + C_2(\rho)^t\Big(\vec{r}\,\mathrm{sen}(\theta t) + \vec{s}\cos(\theta t)\Big)$$

Solución del sistema homogéneo - dos valores propios complejos conjugados

Vale la pena dar un *"atajo"* de cómo calcular los componentes de la representación polar.

Para ésto, recordemos que cuando las raíces del polinomio $\lambda^2 - (\mathrm{Tr}\, A)\lambda + (\det A)$ son complejas $\alpha \pm \beta$, es porque

$$\alpha = \frac{\mathrm{Tr}\, A}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4 \det A - (\mathrm{Tr}\, A)^2}}{2}$$

Nótese que hemos usado que $(\mathrm{Tr}\, A)^2 - 4 \det A < 0$.

De aquí que $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(\mathrm{Tr}\, A)^2 + 4 \det A - (\mathrm{Tr}\, A)^2} = \sqrt{\det A}$

Y también obtenemos $\theta = \arccos\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{\det A}}\right)$

Ejemplo

Consideremos el sistema con matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Determinar la solución general de sistema.

Los valores propios son raíces del polinomio $\lambda^2 - 10\lambda + 29$, es decir

$$\lambda = \alpha \pm i\beta, \qquad \text{con } \alpha = \frac{\operatorname{Tr} A}{2} = 5, \quad \beta = \frac{\sqrt{4(29) - 100}}{2} = 2$$

Tenemos entonces $\rho = \sqrt{29} \approx 5{,}385$, $\theta = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right) \approx 0{,}38$

El vector propio puede escribirse como

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 + 2i - 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{r} + i\vec{s}$$

La sol. gral. es entonces de la forma

$$\vec{X}_t = C_1(\rho)^t \Big[\cos(\theta t) \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \operatorname{sen}(\theta t) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Big] \\ + C_2(\rho)^t \Big[\operatorname{sen}(\theta t) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \cos(\theta t) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Big]$$

Solución del sistema homogéneo - un solo valor propio

Supóngase que el sistema $\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t$ es tal que A no es matriz diagonal y tiene una raíz λ de multiplicidad 2, con vector propio $\vec{v}$.

Queremos un vector $\vec{w}$ linealmente independiente de $\vec{v}$ para que cualquier solución del sistema se escriba como $\vec{X}_t = \alpha_t \vec{v} + \beta_t \vec{w}$

Tenemos entonces

$$\alpha_{t+1}\vec{v} + \beta_{t+1}\vec{w} = \vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t = A\left(\alpha_t \vec{v} + \beta_t \vec{w}\right) = \alpha_t \lambda \vec{v} + \beta_t A(\vec{w})$$

Ahora recordemos que al elegir $\vec{w}$ se puede hacer de modo que sea un vector propio generalizado. En este caso se tiene $A\vec{w} = \vec{v} + \lambda\vec{w}$. Por tanto:

$$\alpha_{t+1}\vec{v} + \beta_{t+1}\vec{w} = \alpha_t \lambda \vec{v} + \beta_t A(\vec{w}) = \alpha_t \lambda \vec{v} + \beta_t \left(\vec{v} + \lambda \vec{w}\right)$$

Reordenando términos $\alpha_{t+1}\vec{v} + \beta_{t+1}\vec{w} = \left(\lambda\alpha_t + \beta_t\right)\vec{v} + \lambda\beta_t\vec{w}$

Solución del sistema homogéneo - un solo valor propio

En otras palabras, α_t y β_t cumplen

$$\alpha_{t+1} = \lambda\alpha_t + \beta_t, \qquad \beta_{t+1} = \lambda\beta_t$$

La sol. gral de la segunda ecuación es $\beta_t = C_2(\lambda)^t$. Al sustituir en la primera ecuación obtenemos la ecuación no homogénea $\alpha_{t+1} = \lambda\alpha_t + C_2(\lambda)^t$

La solución general tiene la forma $\alpha_t = C_1(\lambda)^t + At(\lambda)^t$.

Al calcular A planteamos como sol. particular $At(\lambda)^t$ que lleva a

$$A(t+1)(\lambda)^{t+1} = \lambda At(\lambda)^t + C_2(\lambda)^t \iff A(t+1)\lambda = At\lambda + C_2$$

Lo cual implica que $A = C_2/\lambda$. La sol. gral para la primera ecuación del sistema original es $\alpha_t = C_1(\lambda)^t + \frac{C_2}{\lambda}t(\lambda)^t$

Solución del sistema homogéneo - un solo valor propio

Recordemos que habíamos planteado que la solución general del sistema $\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t$ se escribiera en la forma $\vec{X}_t = \alpha_t \vec{v} + \beta_t \vec{w}$

Ahora que ya tenemos expresiones para α_t y β_t tendremos

$$\vec{X}_t = \left(C_1(\lambda)^t + \frac{C_2}{\lambda} t(\lambda)^t \right) \vec{v} + C_2(\lambda)^t \vec{w}$$

Supóngase que el sistema $\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t$ es tal que A no es matriz diagonal y tiene una raíz λ de multiplicidad 2, con vector propio $\vec{v}$. Entonces la solución general es

$$\vec{X}_t = C_1(\lambda)^t \vec{v} + \widetilde{C}_2(\lambda)^t \left(t\vec{v} + \lambda\vec{w} \right)$$

Ejemplo

Supongamos que el sistema de ecuaciones en diferencias $\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t$ tiene como matriz a $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinar la solución general de sistema.

En este caso el polinomio característico es $\lambda^2 - 4\lambda + 4$, que tiene sólo una raíz: $\lambda = 2$. Un vector propio asociado a éste es $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, y se propone $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Entonces la solución general del sistema es

$$\vec{X}_t = C_1(2)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2(2)^t \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

SISTEMAS NO HOMOGENEOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Planteamiento y notaciones

Aquí se consideran sistemas de ecuaciones del tipo

$$x_{t+1} = ax_t + by_t + e_1, \qquad y_{t+1} = cx_t + dy_t + e_2$$

En notación vectorial esto es

$$\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t + \vec{B}\,, \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Se puede también considerar una condición inicial de la forma $\vec{X}_{t_0} = \vec{X}_0$, es decir $\begin{pmatrix} x_{t_0} \\ y_{t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Estrategia de solución

Usaremos de nuevo el principio que permite escribir la solución general de $\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t + \vec{B}$ como $\vec{X}_t t = \vec{X}_t^H + \vec{X}_t^P$, donde

$\vec{X}^H$ es la solución general de la ecuación homogénea $\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t$

$\vec{X}^P$ es una solución particular de la ecuación no homogénea $\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t + \vec{B}$

$\vec{X}^H$ se obtiene con los métodos antes cubiertos.

$\vec{X}^P$ se propone como $\vec{X}^P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vector constante

Sustituyendo $\vec{X}_t^P$ en la ecuación llegamos al sistema $X^P = A\vec{X}^P + \vec{B}$, que se reescribe como $\big(A - \mathbb{I}\big)\vec{X}^P = -\vec{B}$, es decir

$$\begin{pmatrix} (a-1)x_1 + bx_2 \\ cx_1 + (d-1)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_1 \\ -e_2 \end{pmatrix}$$

Teorema principal

Teorema

La solución general del sistema no homogéneo $\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t + \vec{B}$, *donde* $\vec{B}$ *es un vector constante, está dada por*

$$\vec{X}_t = \vec{X}_t^H + \vec{X}^P$$

donde $\vec{X}_t^H$ *es la solución general de la ecuación homogénea* $\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t$

y $\vec{X}^P$ *es un vector constante que es solución del sistema* $\left(A - \mathbb{I}\right)\vec{X}^P = -\vec{B}$.

Ejemplo

Consideremos el sistema no homogéneo $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Determinamos primero $\vec{X}_H$: Pol. caract.: $\lambda^2 - 3\lambda - 4$,

Raíces: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$

Vectores propios: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Sol. Gral.: $\vec{X}_t^H = C_1(4)^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2(-1)^t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ejemplo

Determinamos ahora $\vec{X}_P$: Resolvemos el sistema $\left(A - \mathbb{I}\right)\vec{X}^P = -\vec{B}$, es decir

$$x_1 + 3x_2 = -3 \qquad 2x_1 = 6,$$

cuyas soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$, es decir que $\vec{X}^P = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

De este modo, **la solución general del sistema original** es

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_H + \vec{X}_P = C_1(4)^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2(-1)^t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Estabilidad

Dada la forma de las soluciones generales podemos deducir que la solución es estable si los valores propios cumplen

- Si los valores están en $\mathbb{R}$, se tiene que cumplir $|\lambda| < 1$;
- Si los valores están en $\mathbb{C}$ entonces se debe cumplir $\rho < 1$

Con estas premisas, la solución general de la ecuación homogénea converge hacia la solución estacionaria dada por el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La solución general de la ecuación no homogénea converge hacia la $\vec{X}^P$ propuesta.

Comercio entre dos naciones

Presentamos ahora un modelo de comercio entre dos naciones, en el que para cada país, el ingreso consta de 4 componentes: el consumo, la inversión, las exportaciones al otro país y las importaciones provenientes del otro país.

Se añadirán otras premisas que nos llevarán a un sistema de dos ecuaciones, a partir de las cuales podremos obtener las funciones de ingreso para cada nación.

Con estas funciones podremos dar condiciones naturales para que haya una solución estacionaria estable hacia la que se aproximen las funciones de ingreso de las naciones.

Ejemplo

Denotemos por y_t^1 y y_t^2 las funciones de ingreso de las dos naciones en el tiempo t.

La primera premisa del modelo puede escribirse como el par de ecuaciones

$$y_t^1 = c_t^1 + i_t^1 + x_t^1 - m_1^1, \quad y_t^2 = c_t^2 + i_t^2 + x_t^2 - m_1^2.$$

Comercio entre dos naciones

Ejemplo (Continuación)

En las anteriores ecuaciones, para $j = 1, 2$ tenemos:

c_t^j *es el consumo en el tiempo t de la nación j;*

i_t^j *es la inversión al tiempo t de la nación j:*

x_t^j *denota el ingreso por exportaciones al tiempo t de la nación j:*

m_t^j *denota el gasto por importaciones al tiempo t de la nación j.*

Para cada nación supondremos que hay un consumo doméstico d_t^1 y d_t^2 que cumplen

$$d_t^1 = c_t^1 - m_t^1, \qquad d_t^2 = c_t^2 - m_t^2,$$

es decir que al consumo se le descuenta la ganancia por importaciones.

Comercio entre dos naciones

Ejemplo (Continuación)

Supondremos también que el consumo doméstico y las importaciones en un periodo son proporcionales al ingreso nacional del periodo anterior, es decir

$$d_{t+1}^1 = a_{11} y_t^1, \quad d_{t+1}^2 = a_{22} y_t^2, \quad m_{t+1}^1 = a_{21} y_t^1, \quad m_{t+1}^2 = a_{12} y_t^2$$

con $0 < a_{11}, a_{22}, a_{21}, a_{12} < 1$

Finalmente, la premisa de que hay comercio exclusivo entre las naciones puede escribirse como

$$m_t^1 = x_t^2, \qquad m_t^2 = x_t^1,$$

es decir, las importaciones de un país son las exportaciones del otro país.

Comercio entre dos naciones

Ejemplo (Continuación)

Podemos ahora poner toda la información junta para obtener:

$$y_t^1 = c_t^1 + i_t^1 + x_t^1 - m_1^1 = d_t^1 + i_t^1 + x_t^1 = a_{11}y_t^1 + i_{t+1}^1 + a_{12}y_t^2$$

Y similarmente obtendremos

$$y_t^2 = a_{22}y_t^2 + i_{t+1}^2 + a_{21}y_t^1$$

Finalmente, supondremos que la inversión en cada país permanece constante, digamos i^1 e i^2, respectivamente.

Comercio entre dos naciones

Ejemplo (Continuación)

Reordenando los términos, tenemos dos ecuaciones

$$y_t^1 = a_{11} y_t^1 + a_{12} y_t^2 + i^1 \,, \qquad y_t^2 = a_{22} y_t^2 + a_{21} y_t^1 + i^2$$

que podemos escribir en notación vectorial como

$$\begin{pmatrix} y_{t+1}^1 \\ y_{t+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix}$$

Dejando de lado la discusión de la solución general de la ecuación homogénea, recordemos que habrá una solución particular constante $\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$ de la ecuación no homogénea, que debe cumplir

$$\begin{pmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^1 \\ -i^2 \end{pmatrix}$$

Comercio entre dos naciones

Podemos ahora invocar un teorema del álgebra que nos permitirá obtener conclusiones sobre la estabilidad del sistema.

Teorema

Supóngase que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *tiene entradas* $a, b, c, d > 0$, *cumpliendo además* $a + c < 1$ *y* $b + d < 1$. *Entonces los valores propios de* A *son reales y tienen valor absoluto* < 1.

En nuestro caso deberíamos mirar las condiciones

$$a_{11} + a_{21} < 1, \qquad a_{22} + a_{12} < 1$$

para obtener una solución estacionaria estable, pues por el teorema se tendrían valore propios reales con $|\lambda| < 1$.

Comercio entre dos naciones

Multiplicando la primera desigualdad por y_t^1 y la segunda desigualdad por y_t^2 obtendremos

$$a_{11}y_t^1 + a_{21}y_t^1 < y_t^1, \qquad a_{22}y_t^2 + a_{12}y_t^2 < y_t^2$$

que por las identidades descritas en el inicio de este ejemplo nos llevan a

$$d_{t+1}^1 + m_{t+1}^1 < y_t^1, \qquad d_{t+1}^2 + m_{t+1}^2 < y_t^2$$

Estas desigualdades en esencia dicen que la suma del consumo doméstico y las importaciones debe ser menor al ingreso del periodo previo.

Y esto es razonable asumir esto para tener una economía estable.