Nota sobre las propiedades de la función de utilidad indirecta

Diego A. Domínguez

Instituto Tecnológico Autónomo de México

La función de utilidad indirecta asigna a cada posible nivel de precios e ingreso el nivel de utilidad que obtiene una persona al escoger una canasta óptima dada su restricción presupuestal. En general esta función cumple con ciertas propiedades, en esta nota describiremos algunas de ellas.

1. Notación

Consideremos una persona que consume cantidades no negativas de dos comodidades x e y, y tiene una función de utilidad $u(x, y)$. Si la persona cuenta con un ingreso I y enfrenta precios competitivos p_x, p_y el problema de decisión de la persona es:

$$
\begin{array}{ll}
\text{máx}_{x,y} & u(x, y) \\
\text{s.a.} & \\
 & I - p_x x - p_y y \geq 0 \\
 & x \geq 0 \\
 & y \geq 0
\end{array}
$$

Los maximizadores del problema las llamamos **demandas marshalianas** y las denotamos $(x^M(p_x, p_y, I), y^M(p_x, p_y, I))$ y asignan a cada nivel de precios e ingreso el conjunto de canastas óptimas para la persona. A la función valor del problema la llamamos **función de utilidad indirecta** y la denotamos $V^M(p_x, p_y, I)$ y asigna a cada nivel de precios e ingreso la utilidad que obtiene la persona al consumir una canasta óptima, es decir, $V^M(p_x, p_y, I) = u(x^M(p_x, p_y, I), y^M(p_x, p_y, I))$.

Nota 1. Es importante notar que a diferencia de las demandas marshalianas, la función de utilidad indirecta depende de la función de utilidad específica que se utiliza para representar las preferencias de la persona, por lo tanto la función de utilidad indirecta cambia ante transformaciones monótonas de la función de utilidad.

2. Propiedades

Podemos clasificar las propiedades de la función de utilidad indirecta en tres tipos: (i) homogeneidad, (ii) respuesta ante cambios en precios e ingreso, y (iii) cuasiconvexidad. A continuación presentaremos cada una de estas propiedades.

2.1. Homogeneidad

Cuando los precios y el ingreso de la persona cambian en la misma proporción la restricción presupuestal no cambia en términos reales, y la persona puede comprar las mismas canastas, por lo tanto la utilidad máxima que puede obtener dada su nueva restricción es la misma que con los precios e ingreso originales; por lo tanto, la función de utilidad indirecta es homogénea de grado cero en precios e ingreso.

Proposición 1. *Para cada vector de precios* $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$*, cada ingreso* $I \in \mathbb{R}_+$ *y cada* $\lambda \in \mathbb{R}_+$*, tenemos* $V^M(p_x, p_y, I) = V^M(\lambda p_x, \lambda p_y, \lambda I)$.

2.2. Respuesta ante cambios en precios e ingreso

las siguientes propiedades describen como cambia la utilidad máxima que la persona obtiene cuando cambia ya sea un precio o el ingreso. Al disminuir el precio de una comodidad la persona puede comprar cada una de las canastas que podía comprar con el precio original (y puede comprar otras canastas que antes no podía), por lo tanto la utilidad máxima de la persona será mayor o igual con el nuevo precio que con el precio original; la siguiente proposición establece que la función de utilidad indirecta es no-creciente en precios:

Proposición 2. *Para cada comodidad* $l \in \{x, y\}$*, cada precio* $p_l \in \mathbb{R}_{++}$*, cada ingreso* $I \in \mathbb{R}_+$*, y cada par de precios de la comodidad* $k \neq l$ $p_k, p'_k \in \mathbb{R}_{++}$ *tal que* $p_k > p'_k$*,* $V^M(p_l, p_k, I) \leq V^M(p_l, p'_k, I)$.

Cuando la persona consume cero unidades de la comodidad cuyo precio disminuye es posible que después de un cambio en el precio se mantenga consumiendo la misma canasta, y su utilidad no cambie; por esta razón en la Proposición 2 no podemos concluir que la función de utilidad indirecta es decreciente en precios y únicamente podemos concluir que es no-creciente. Además, si la función de utilidad de la persona no es monótona, aún cuando ante una disminución en un precio pueda comprar canastas con mayor cantidad de comodidades, su utilidad podría no aumentar.

Cuando el ingreso aumenta la persona puede comprar cada una de las canastas que podía comprar con el ingreso original (y puede comprar otras canastas que antes no podía), por lo tanto la utilidad máxima de la persona será mayor con el nuevo ingreso; la siguiente proposición establece que la función de utilidad indirecta es no-decreciente en el ingreso:

Proposición 3. *Para cada vector de precios* $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2_{++}$*, y cada par de ingresos* $I, I' \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $I < I'$*, tenemos que* $V^M(p, I) \leq V^M(p, I')$.

Si la función de utilidad de la persona no es monótona entonces aún cuando su ingreso aumente y pueda comprar canastas con mayor cantidad de ambas comodidades su utilidad podría no aumentar; por esta razón en la Proposición 3 no podemos concluir que la función de utilidad indirecta es creciente en el ingreso y únicamente podemos concluir que es no-decreciente. Si la función de utilidad de la persona es monótona, entonces si podríamos concluir que la función de utilidad indirecta es estrictamente creciente en el ingreso.

2.3. Cuasiconvexidad

La propiedad de cuasiconvexidad nos dice que al tomar una combinación convexa de dos distintas restricciones presupuestales la utilidad que obtiene el persona de la combinación convexa de restricciones presupuestales es menor o igual a la utilidad que obtiene el persona de una de las restricciones presupuestales originales.

Proposición 4. *Para cada par de precios* $p, p' \in \mathbb{R}^2_{++}$*, cada par de ingresos* $I, I' \in \mathbb{R}_+$ *y cada* $\alpha \in (0,1)$*,* $\max\{V^M(p,I), V^M(p',I')\} \geq V^M(\alpha p + (1-\alpha)p', \alpha I + (1-\alpha)I')$*.*

Esta propiedad proviene del hecho de que al tomar una combinación convexa de dos restricciones presupuestales cualquier canasta dentro de esta nueva restricción presupuestal también esta dentro de una de las restricciones presupuestales originales y por lo tanto en alguna de las restricciones presupuestales originales el persona obtendrá una utilidad mayor o igual que en la combinación convexa. Para ejemplificar esta propiedad considere que un persona no sabe que restricción presupuestal va a enfrentar pero sabe que con con probabilidad α los precios y su ingreso son (p, I) y con probabilidad $1-\alpha$ son (p', I'), y además suponga que en estas dos restricciones presupuestales el persona obtiene la misma utilidad; la proposición anterior nos dice que el persona prefiere esta situación que una situación donde con certeza enfrenta una restricción correspondiente al promedio de precios e ingreso $(\alpha p + (1-\alpha)p'), \alpha I + (1-\alpha)I')$.