Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Sistemas Dinámicos
Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Otoño de 2020

Notaciones y definiciones básicas

Abordamos ahora el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Se tienen entonces dos variables de estado $x(t)$ y $y(t)$ para $t \in \mathbb{R}$ y dos ecuaciones diferenciales involucrando a ambas funciones:

$$x' = ax + by, \qquad y' = cx + dy$$

Para procesar mejor estas ecuaciones es conveniente usar notación vectorial:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

El sistema se planteará como una ecuación que involucra multiplicación de matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \vec{X}' = A\vec{X}, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Notaciones y definiciones básicas

Con esta notación, una solución del sistema es un vector $\vec{X}$ que hace cierta la ecuación $\vec{X}' = A\vec{X}$.

Se pueden también considerar valores iniciales, que en este caso toman la forma $\vec{X}(t_0) = \vec{X}_0$, es decir $\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, que abarca las condiciones $x(t_0) = x_0$ y $y(t_0) = y_0$.

Hablaremos de soluciones generales más adelante, cuando expliquemos más sobre los métodos para resolver ecuaciones.

Se pueden considerar también ecuaciones no homogéneas que escribiremos como

$$\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}\,, \quad \text{donde } \vec{B} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Si escribimos este sistema no homogéneo sin usar notación vectorial

$$x' = ax + by + e_1, \qquad y' = cx + dy + e_2$$

Notaciones y definiciones básicas

También consideraremos sistemas de ecuaciones no lineales que tienen la forma

$$\vec{X}' = \vec{F}(\vec{X}), \quad \text{donde } \vec{F}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{X}) \\ f_2(\vec{X}) \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, al considerar un sistema depredador-presa de la forma

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P - \beta PD, \qquad \frac{dD}{dt} = -\gamma D + \beta PD$$

se puede usar notación vectorial $\vec{X}' = \vec{F}(\vec{X})$ donde $\vec{X} = \begin{pmatrix} D \\ P \end{pmatrix}$

$$\vec{F}\begin{pmatrix} D \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha P - \beta PD \\ -\gamma D + \beta PD \end{pmatrix}$$

es decir $f_1(D, P) = \alpha P - \beta PD$ y $f_2(D, P) = -\gamma D + \beta PD$.

Repaso de temas de álgebra lineal

La herramienta fundamental que usaremos es el cálculo de valores propios y vectores propios de matrices.

Un número real o complejo λ es un valor propio asociado a la matriz A si es solución de la ecuación $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ para cierto vector no trivial $\vec{v}$ llamado el vector propio asociado a A.

Como se debe cumplir $A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0$, es decir $A\vec{v} - \lambda\mathbb{I}\vec{v} = 0$ para un vector no trivial $\vec{v}$ entonces debe cumplirse

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0, \qquad \text{donde } \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es la matriz identidad}$$

En otras palabras se debe cumplir

$$0 = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

Repaso de temas de álgebra lineal

Reordenando términos tendremos

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ podemos definir la traza como $\operatorname{Tr} A = a + d$ y entonces el polinomio caracerístico asociado a la matriz A es

$$\lambda^2 - (\operatorname{Tr} A)\lambda + (\det A)$$

Una vez más podríamos separar tres casos para las posibles situaciones para las raíces de este polinomio.

Repaso de temas de álgebra lineal

Una intuición que puede ayudar a ver la utilidad de los valores y vectores propios, se basa en la idea de que una matriz A hace una transformación del plano.

Entonces en el caso en que el polinomio característico de A tenga dos raíces reales diferentes, se tendrán $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ tales que

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1, \qquad A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$$

O sea que en vectores en la dirección de cada vector $\vec{v}_1$ o bien $\vec{v}_2$, multiplicar por la matriz A deja invariante su dirección.

No es que A sea la matriz identidad, pero se comporta como "un múltiplo de la identidad" en la dirección de cada vector propio.

Este es precisamente la idea de que A es diagonalizable: es *"similar"* a una matriz diagonal de la forma $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Repaso de temas de álgebra lineal

La discusión anterior sugiere que la ecuación homogénea $\vec{X}' = A\vec{X}$ tendrá dos soluciones que generan a una *"solución general"*: una en la dirección de $\vec{v}_1$ y otra en dirección de $\vec{v}_2$.

Tendríamos entonces que resolver un problema de la forma

$$x' = \lambda_1 x, \quad \text{en dirección de } \vec{v}_1, \qquad y' = \lambda_2 y \quad \text{en dirección de } \vec{v}_2$$

Las soluciones generales serán

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{en dirección de } \vec{v}_1, \qquad y(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{en dirección de } \vec{v}_2$$

Escribiremos la entonces la solución general como

$$\vec{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

Un ejemplo básico

El ejemplo más sencillo se tiene cuando A es una matriz diagonal, digamos $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En este caso el polinomio característico es $(\lambda - 3)(\lambda + 2)$ y entonces tenemos 2 valores propios $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -2$.

Los vectores propios asociados a cada valor se calculan resolviendo

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

O sea $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La sol. gral. es

$$\vec{X}(t) = C_1 e^{3t} \vec{v}_1 + C_2 e^{-2t} \vec{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Pero esto lo sabíamos de antemano al resolver $x' = 3x$ y $y' = -2y$.

Caso 1: dos valores propios reales distintos

Con el ejemplo anterior hemos tratado de ilustrar en qué sentido el procedimiento de valores y vectores propios generaliza un procedimiento cuando se tiene de inicio una matriz diagonal.

La discusión anterior nos permite concluir lo siguiente

Supóngase que tenemos el sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$, donde la matriz A tiene dos valores propios $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, y vectores propios $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respectivamente. Entonces la solución general del sistema es

$$\vec{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

Caso 1: dos valores propios reales distintos

De hecho para el caso particular de A una matriz diagonal ya vimos que

Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ *entonces los valores propios de* A *son* $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = d$ *y los vectores propios correspondientes son* $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Supongamos que A no es matriz diagonal y veamos cómo calcular fácilmente valores y vectores propios

IMPORTANTE: Recuérdese que en razonamientos anteriores lo que importa es la **dirección** del vector propio, por lo que basta tener **un representante** de esa dirección como vector propio.

Cálculo de un vector propio, si es conocido el valor propio

Supongamos que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene un valor propio λ.

Entonces un vector propio $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ asociado a λ debe cumplir $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, es decir

$$ax + by = \lambda x, \quad cx + dy = \lambda y \quad \Longleftrightarrow \quad x(a-\lambda) = -by \quad cx = y(\lambda - d)$$

Si $b \neq 0$ ponemos $x = b$ y de la primera ecuación obtenemos $y = \lambda - a$.

Por tanto, un vector propio asociado a λ es $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}$

Si $c \neq 0$ ponemos $y = c$ y de la segunda ecuación obtenemos $x = \lambda - d$.

Por tanto, un vector propio asociado a λ es $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix}$

Ejemplo para usar $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}$ o $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix}$

Consideremos el sistema con matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Determinar la solución general de sistema.

Para calcular valores propios buscamos raíces del polinomio $\lambda^2 - (\operatorname{Tr} A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 5)(\lambda - 1)$, es decir $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$.

Para calcular los vectores propios, como $b = -1 \neq 0$ entonces

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 - 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - 4 \end{pmatrix}$$

De este modo, la sol. gral. del sistema de ecuaciones es

$$X(t) = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Nótese que si se hubiera usado la otra forma de los vectores propios tendríamos

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ que son paralelos a los antes obtenidos

Caso 2: dos valores propios complejos conjugados

En este caso la matriz tendría valores propios de la forma $\alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Tomando $\lambda = \alpha + \beta i$, el vector propio correspondiente se escribiría por ejemplo como

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - d \\ c \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{r} + i\vec{s}$$

o bien

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \alpha - a \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} =: \vec{r} + i\vec{s}$$

Así, una solución podría escribirse como

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)t}\vec{v} &= e^{(\alpha+i\beta)t}\big(\vec{r} + i\vec{s}\big) = e^{\alpha t}\big[\cos(\beta t) + i\,\mathrm{sen}(\beta t)\big]\big(\vec{r} + i\vec{s}\big) \\ &= e^{\alpha t}\big(\vec{r}\cos(\beta t) - \vec{s}\,\mathrm{sen}(\beta t)\big) + ie^{\alpha t}\big(\vec{r}\,\mathrm{sen}(\beta t) + \vec{s}\cos(\beta t)\big) \end{aligned}$$

Caso 2: dos valores propios complejos conjugados

Con la experiencia previa de ecuaciones de segundo orden, como queremos soluciones de valores en $\mathbb{R}$, entonces proponemos las siguientes dos soluciones:

$$\vec{X}_1 = e^{\alpha t}\big(\vec{r}\cos(\beta t) - \vec{s}\,\mathrm{sen}(\beta t)\big) \quad \text{y} \quad \vec{X}_2 = e^{\alpha t}\big(\vec{r}\,\mathrm{sen}(\beta t) + \vec{s}\cos(\beta t)\big)$$

Los detalles pueden consultarse en las notas de G. Pastor, p. 124.

Si la matriz A asociada al sistema de ecuaciones $\vec{X}' = A\vec{X} = 0$ tiene valores propios complejos conjugados $\lambda = \alpha \pm i\beta$, entonces la solución general es de la forma

$$\vec{X}(t) = C_1 e^{\alpha t}\big(\vec{r}\cos(\beta t) - \vec{s}\,\mathrm{sen}(\beta t)\big) + C_2 e^{\alpha t}\big(\vec{r}\,\mathrm{sen}(\beta t) + \vec{s}\cos(\beta t)\big)$$

o bien

$$\vec{X}(t) = e^{\alpha t}\big[C_1\cos(\beta t) + C_2\,\mathrm{sen}(\beta t)\big]\vec{r} + e^{\alpha t}\big[C_2\cos(\beta t) - C_1\,\mathrm{sen}(\beta t)\big]\vec{s}.$$

Ejemplo

Consideremos el sistema con matriz asociada $A = \begin{pmatrix} -1 & -18 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$. Determinar la solución general de sistema.

Los valores propios son raíces del polinomio $\lambda^2 + 2\lambda + 10$, es decir $\lambda = -1 \pm 3i$

El vector propio puede escribirse como

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -1 + 3i + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} =: \vec{r} + i\vec{s}$$

La sol. gral. es entonces de la forma

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) = C_1 e^{-t}\Big[\cos(3t)\begin{pmatrix} -18 \\ 0 \end{pmatrix} - \operatorname{sen}(3t)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\Big] \\ + C_2 e^{-t}\Big[\operatorname{sen}(3t)\begin{pmatrix} -18 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(3t)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\Big] \\ = \begin{pmatrix} -18C_1 e^{-t}\cos(3t) - 18C_2 e^{-t}\operatorname{sen}(3t) \\ -3C_1 e^{-t}\operatorname{sen}(3t) + 3C_2 e^{-t}\cos(3t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Caso 3: un solo valor propio – Ejemplo preliminar

Con el siguiente ejemplo veremos que en la solución general del sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$ cuando A tiene un valor propio de multiplicidad 2 es un poco más elaborado que el caso de ecuaciones diferenciales.

Consideremos entonces una matriz triangular $A = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$; nótese que en efecto el polinomio característico tiene la foma $\lambda^2 - 2r\lambda + r^2$ y tiene una sola raíz $\lambda = r$

Para este valor propio se tiene el vector propio $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ r - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

O sea que una parte de la solución general es $C_1 e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; veremos a continuación que para completar una solución general no basta sumar un término de la forma $C_1 t e^{rt} \vec{v}_2$ para cierto vector $\vec{v}_2$

Caso 3: un solo valor propio – Ejemplo preliminar

Escribimos el anterior sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}' = A\vec{X}$ como

$$x' = rx + y, \qquad y' = ry$$

La segunda ecuación arroja de inmediato la solución general $y(t) = C_0 e^{rt}$

Al sustituir esta solución en la primera ecuación obtenemos $x' = rx + C_0 e^{rt}$

La solución general de esta ecuación lineal no homogénea de primer orden es
$x(t) = C_1 e^{rt} + C_0 t e^{rt}$ (¡Hacer los detalles!)

Así, la solución general del sistema queda

$$\begin{pmatrix} C_1 e^{rt} + C_0 t e^{rt} \\ C_0 e^{rt} \end{pmatrix} = C_1 e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_0 t e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_0 e^{rt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Caso 3: un solo valor propio – El teorema principal

Teorema

Supóngase que el sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$ es tal que A no es matriz diagonal y tiene una raíz λ de multiplicidad 2, con vector propio $\vec{v}$. Entonces

$$\vec{X}_2(t) = e^{\lambda t}\left[t\vec{v} + \vec{w}\right]$$

es también solución del sistema, donde $\vec{w}$ es un **vector propio generalizado***, es decir que cumple*

$$\left(A - \lambda\mathbb{I}\right)\vec{w} = \vec{v}$$

Podemos entonces plantear la solución general del sistema como

$$X(t) = C_1 e^{\lambda t}\vec{v} + C_2 e^{\lambda t}\left[t\vec{v} + \vec{w}\right]$$

Cálculo del vector propio generalizado

Supóngamos que se tiene la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$ y un solo valor propio $\lambda = \dfrac{a+d}{2}$. Un vector propio asociado a λ es $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}$

Planteamos ahora la ecuación que define al vector propio generalizado $(A - \lambda\mathbb{I})\vec{w} = \vec{v}$ con $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}$$

Nótese que $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}$ y que una solución es entonces $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pues $\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}$.

Cálculo del vector propio generalizado

Si ahora iniciamos con la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con $c \neq 0$ y un solo valor propio $\lambda = \dfrac{a+d}{2}$, un vector propio asociado a λ es $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} \\ c \end{pmatrix}$

Y para obtener un $\vec{w}$ planteamos $\left(A - \lambda \mathbb{I}\right)\vec{w} = \vec{v}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} \\ c \end{pmatrix}$$

Ahora una solución es $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, pues $\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} \\ c \end{pmatrix}$

Cálculo del vector propio generalizado

Tenemos entonces una ruta corta para calcular vectores propios generalizados:

Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *no es diagonal y tiene un solo valor propio* λ *con vector propio asociado* $\vec{v}$*, entonces para calcular vectores propios generalizados* $\vec{w}$ *tenemos dos posibilidades*

- *Si* $b \neq 0$ *entonces* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}$;
- *Si* $c \neq 0$ *entonces* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix}$;

Si la matriz hubiera sido diagonal, tendría que ser de la forma $A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $x' = rx$, $y' = ry$, cuyas soluciones generales son $x(t) = C_1 e^{rt}$ y $y(t) = C_2 e^{rt}$, es decir $X(t) = C_1 e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{rt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo

Supongamos que la matriz asociada al sistema de ecuaciones diferenciales es $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces el polinomio característico es $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$.

Un vector propio para el único valor propio $\lambda = 1$ es $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Y se puede proponer $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo que la solución general del sistema queda

$$\begin{aligned} X(t) &= C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^t \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 2C_1 e^t + 2C_2 t e^t + C_2 e^t \\ 2C_1 e^t + 2C_2 t e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo

Otra opción para resolver el sistema anterior sería usar el vector propio $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, para proponer $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y entonces la solución general queda:

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= C_1 e^t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^t \left[t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} -2C_1 e^t - 2C_2 t e^t \\ -2C_1 e^t - 2C_2 t e^t + C_2 e^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -2C_1 - 2C_2 t \\ -2C_1 - 2C_2 t + C_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Suponiendo que es dada la condición inicial $\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tendríamos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2C_1 \\ -2C_1 + C_2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{2},\ C_2 = -1$$

$$\therefore \quad \vec{X}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Al usar la misma condición inicial $\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en la solución antes obtenida

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2C_1 e^t + 2C_2 te^t + C_2 e^t \\ 2C_1 e^t + 2C_2 te^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2C_1 + 2C_2 t + C_2 \\ 2C_1 + 2C_2 t \end{pmatrix}$$

tendríamos que resolver

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 + C_2 \\ 2C_1 \end{pmatrix} \quad \iff \quad C_1 = 0,\ C_2 = 1$$

es decir

$$\vec{X}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 2t \end{pmatrix}$$

que coincide con la solución con el otro razonamiento.

SISTEMAS NO HOMOGENEOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Planteamiento y notaciones

Consideramos ahora sistemas de ecuaciones del tipo

$$x' = ax + by + e_1, \qquad y' = cx + dy + e_2$$

En notación vectorial podemos escribir este sistema como

$$\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}\,, \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Recuérdese que la variable de estado es ahora $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ y su derivada es $\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

Se puede también considerar una condición inicial de la forma $\vec{X}(t_0) = \vec{X}_0$, es decir $\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Estrategia de solución

Usaremos el principio que permite escribir la solución general de $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}$ como $\vec{X}(t) = \vec{X}_H(t) + \vec{X}_P$, donde

$\vec{X}_H$ es la solución general de la ecuación homogénea $\vec{X}' = A\vec{X}$

$\vec{X}_P$ es una solución particular de la ecuación no homogénea $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}$

$\vec{X}_H$ se obtiene con los métodos antes cubiertos.

$\vec{X}_P$ se propone de acuerdo a $\vec{B}$, que como es constante, nos lleva a proponer $\vec{X}_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Sustituyendo $\vec{X}_P$ en la ecuación llegamos al sistema $\vec{0} = A\vec{X}_P + \vec{B}$, o escrito de otra manera $A\vec{X}_P = -\vec{B}$

$$\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_1 \\ -e_2 \end{pmatrix}$$

Teorema principal

Nótese que la solución de este sistema tiene solución si $\det A \neq 0$

Teorema

La solución general del sistema no homogéneo $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}$, *donde* $\det A \neq 0$ *y* $\vec{B}$ *es un vector constante, está dada por*

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_H(t) + \vec{X}_P(t)$$

donde $\vec{X}_H$ *es la solución general de la ecuación homogénea* $\vec{X}' = A\vec{X}$

y $\vec{X}_P$ *es solución del sistema* $A\vec{X}_P = -\vec{B}$.

Ejemplo

Consideremos el sistema no homogéneo $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ y $\vec{B} = \begin{pmatrix} 16 \\ -18 \end{pmatrix}$ y dato inicial $\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Determinamos primero $\vec{X}_H$: Pol. caract.: $\lambda^2 + 5\lambda + 6$,

Raíces: $\lambda = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = -3, -2$

Vectores propios: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Sol. Gral.: $\vec{X}_H = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ejemplo

Determinamos ahora $\vec{X}_P$: Resolvemos el sistema $A\vec{X}_P = -\vec{B}$, es decir

$$x_1 + 4x_2 = -16 \qquad -3x_1 - 6x_2 = 18,$$

cuyas soluciones son $x_1 = 4$ y $x_2 = -5$, es decir que $\vec{X}_P = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

De este modo, **la solución general del sistema original** es

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_H + \vec{X}_P = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

O bien, en forma paramétrica:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4C_1 e^{-3t} + 4C_2 e^{-2t} + 4 \\ -4C_1 e^{-3t} - 3C_2 e^{-2t} - 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Ahora sustituimos la condición inicial $\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: en $t = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4C_1 + 4C_2 + 4 \\ -4C_1 - 3C_2 - 5 \end{pmatrix}$$

Y como la solución de este sistema es $C_1 = -7/4$ y $C_2 = 1$, tendremos la solución explícita del problema orignal dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7e^{-3t} + 4e^{-2t} + 4 \\ 7e^{-3t} - 3e^{-2t} - 5 \end{pmatrix}$$

Otro tipo de sistema no homogéneo

El método anterior es aplicable a sistemas de la forma $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}$ con $\vec{B} = \begin{pmatrix} K_1 e^{rt} \\ K_2 e^{rt} \end{pmatrix}$ para ciertos $r, K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

La rutina es de nuevo plantear la solución general como $\vec{X}(t) = \vec{X}_H + \vec{X}_P$, sólo que ahora se propone $X_p = \begin{pmatrix} Me^{rt} \\ Ne^{rt} \end{pmatrix}$.

Al sustituir en el sistema original se tendrá

$$\begin{pmatrix} Mre^{rt} \\ Nre^{rt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aMe^{rt} + be^{rt} + K_1 e^{rt} \\ cMe^{rt} + dNe^{rt} + K_2 e^{rt} \end{pmatrix}$$

Sin olvidar que las incógnitas son M y N, podemos resolver este sistema y así obtener una solución general del sistema original.

Otro tipo de sistema no homogéneo – Ejemplo

Si queremos determinar la solución general del sistema $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$...

...determinamos primero $\vec{X}_H$: Pol. caract.: $\lambda^2 - 5\lambda + 6$,

Raíces: $\lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = 3, 2$

Vectores propios: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sol. Gral.: $\vec{X}_H = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Otro tipo de sistema no homogéneo – Ejemplo

Luego proponemos $\vec{X}_P = \begin{pmatrix} K_1 e^t \\ K_2 e^t \end{pmatrix}$ y sustituimos en la ecuación $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{B}$ para obtener

$$\begin{pmatrix} K_1 e^t \\ K_2 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 e^t + K_2 e^t + 2e^t \\ -2K_1 e^t + 4K_2 e^t + e^t \end{pmatrix}$$

Para resolver este sistema primero factorizamos las exponenciales:

$$e^t \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} K_1 + K_2 + 2 \\ -2K_1 + 4K_2 + 1 \end{pmatrix}$$

De modo que $K_2 = -2$ y $-2 = -2K_1 - 8 + 1$, es decir $K_1 = -5/2$

Así que como $\vec{X}_P = \begin{pmatrix} (-5/2)e^t \\ -2e^t \end{pmatrix}$ entonces la sol. gral. del sistema queda

$$\vec{X}(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} e^t \\ -2e^t \end{pmatrix}$$

Otro tipo de sistema no homogéneo: Observaciones adicionales

- Nótese que la parte no homogénea admisible **tiene el mismo tipo de exponenciales** y sólo difieren en el coeficiente enfrente de estas exponenciales.
- Debemos notar también que para que la $\vec{X}_P$ propuesta funcione tiene que ocurrir que **las exponenciales no deben estar contenidas** en la $\vec{X}_H$, situación que siempre tendremos en este curso.

Conexión entre sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo orden

Una ecuación homogénea de segundo orden puede transformarse en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

Digamos que empezamos con $x'' + ax' + bx = 0$

Entonces introducimos la variable $y(t) = x'(t)$, de donde $y' = x''$ y tendremos

$$x' = y, \quad y' = -bx - ay \qquad \text{es decir} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es importante notar que se mantuvieron las variables en el mismo orden en cada ecuación y en el sistema.

Nótese además que la ecuación de segundo orden original, y el sistema que obtuvimos tienen el mismo polinomio característico: $\lambda^2 + a\lambda + b$.

Conexión entre sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo orden

Un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden puede transformarse en una ecuación homogénea de segundo orden.

Si ahora nos dan un sistema de la forma

$$x' = ax + by \quad y' = cx + dy \qquad \text{es decir} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Despejamos y de la primera ecuación: $y = \dfrac{1}{b}x' - \dfrac{a}{b}x$

Derivamos: $y' = \dfrac{1}{b}x'' - \dfrac{a}{b}x'$ y sustituimos en la segunda ecuación:

$$\frac{1}{b}x'' - \frac{a}{b}x' = cx + d\left(\frac{1}{b}x' - \frac{a}{b}x\right)$$

Al reordenar llegamos a $x'' - (a+d)x' + (ad - bc)x = 0$.