Límite superior y límite inferior

Recordemos que si iniciamos con una sucesión $X=(x_n)$ acotada, el teorema de Bolzano-Weierstrass implica que X tiene una subsucesión convergente

Cuando $L \in \mathbb{R}$ es límite de alguna subsucesión de X, se dice que L es <u>límite subsucesional</u> de X.

Denotemos por S al conjunto de límites subsucesionales de X

Por ejemplo para $x_n = (-1)^n + \frac{2}{n}$ se tiene

$S = \{-1, 1\}$

Para la sucesión (r_n) de racionales en $[0,1]$ se tiene $S=[0,1]$ pues todo punto de $[0,1]$ es límite de alguna sucesión de racionales

Se define el <u>límite superior</u> de $X = (x_n)$ como

$$x^* = \sup S$$

El <u>límite inferior</u> de X es $\quad x_* = \inf S$

Escribiremos

$$x^* = \limsup x_n \qquad x_* = \liminf x_n$$

Propiedades

(a) $x^* = \inf_{m \in \mathbb{N}} \left[\sup_{n \geq m} x_n \right]$

<u>Dem</u>

Escribimos temporalmente

$$\overline{x}^* = \inf_{m \in \mathbb{N}} \left[\sup_{n \geq m} x_n \right]$$

Notemos que $y_m = \sup_{n \geq m} x_n$ es una sucesión decreciente por lo que

$$\overline{x}^* = \lim_{m \to \infty} \left[\sup_{n \geq m} x_n \right]$$

Sea $X' = (x_{n_k})$ una subsucesión convergente de $X = (x_n)$. Como $n_k \geq k$, tenemos

$$x_{n_k} \leq u_k := \sup\{x_n : n \geq k\}$$

De aquí que $\lim X' \leq \lim u_k = \overline{x}^*$

y por tanto $x^* \leq \overline{x}^*$

Para la otra desigualdad, usamos la sucesión (u_m) para determinar una subsucesión de X.

Elegimos n_1 t.q. $u_1 - 1 \leq x_{n_1} \leq u_1$

e inductivamente $n_{k+1} > n_k$ tal que

$$u_k - \frac{1}{k+1} < x_{n_{k+1}} < u_k$$

Como $\overline{x}^* = \lim\limits_{m \to \infty} u_m$, por el T. del Sandwich

$$\overline{x}^* = \lim x_{n_{k+1}}$$

O sea $\overline{x}^* \in S$ $\therefore$ $\overline{x}^* \leq x^*$

(a') $x_* = \sup_{n \geq m} \left[\inf_{m \geq n} x_m \right] = \lim_{n \to \infty} \left[\inf_{m \geq n} x_m \right]$

pues en este caso $w_n = \inf_{m \geq n} x_m$ es

una sucesión creciente.

(b) Dadas $Y = (y_n)$, $X = (x_n)$ sucesiones acotadas en $\mathbb{R}$ se tiene

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n$$

$$\liminf (c x_n) = c \liminf x_n \quad \text{si } c \geq 0$$

$$\limsup (c x_n) = c \limsup x_n \quad \text{si } c \geq 0$$

$$\liminf (c x_n) = c \limsup (x_n) \quad \text{si } c \leq 0$$

$$\limsup (c x_n) = c \liminf (x_n) \quad \text{si } c \leq 0$$

$$\liminf (x_n) + \liminf (y_n) \leq \liminf (x_n + y_n)$$

$$\limsup (x_n + y_n) \leq \limsup (x_n) + \limsup (y_n)$$

Se deja de ejercicio intentar probar estas propiedades

Teorema

Una sucesión $X = (x_n)$ es convergente si y sólo si

$\lim\sup x_n = \lim\inf x_n$

$\Rightarrow$) En este supuesto $S = \{L\}$ donde $x_n \to L$

Y es claro que $\lim\sup x_n = \lim\inf x_n$

$\Leftarrow$) Si ahora suponemos $\lim\sup x_n = \lim\inf x_n$

entonces $\sup S = \inf S = \alpha$.

Suponiendo $\alpha \in S$. Si existiera otro

$L \in S$ por tricotomía debemos eliminar la

posibilidad de que $L < \alpha$, $L > \alpha$