Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden – Parte 4

Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Otoño de 2020

Métodos adicionales

Ahora cubriremos los siguientes métodos adicionales:

- Ecuaciones con coeficientes homogéneos
- Ecuaciones exactas
- Campos de pendientes

Los primeros dos métodos son analíticos; en el primero, con un cambio de variable se cambia la ecuación en una nueva una cuya solución es más fácil de obtener; el segundo permite reconocer los coeficientes para que el lado izquierdo de la ecuación sea una derivada exacta.

El tercero es un método cualitativo que se apoya en una idea geométrica,

ECUACIONES CON COEFICIENTES HOMOGÉNEOS

Ecuaciones con coeficientes homogéneos

En este caso se admiten ecuaciones de la forma $N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = M(x,y)$, donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ cumplen ecuaciones de homogeneidad

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k M(x,y), \quad N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k N(x,y), \quad \text{para cierta } \ k > 0$$

Ésto implica que para cualquier t

$$\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)}$$

Con $t = 1/x$ y el cambio de variable $w = y/x$ llegamos a

$$y' = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} \quad \Leftrightarrow \quad xw' + w = \frac{M(1,y/x)}{N(1,y/x)}$$

Ecuaciones con coeficientes homogéneos

Notamos ahora que el lado derecho sólo depende de x/y, por lo que lo abreviamos como $G(y/x) := \dfrac{M(1, y/x)}{N(1, y/x)}$. Tenemos pues un nuevo modo de visualizar a esta ecuación:

$$xw' + w = G(x/y) \quad \Rightarrow \quad xw' = G(w) - w$$

que es una ecuación separable.

Ya vimos algunos ejemplos de este tipo de ecuación en los *Ejercicios Resueltos*, pero acá van algunos otros.

Ecuaciones con coeficientes homogéneos

- Consideremos $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ para $x > 0$ y $|y| < x$

Los coeficientes son $M(x,y) = x$ y $N(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2} + y$, que cumplen

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda x = \lambda M(x,y), \qquad N(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{\lambda^2(x^2 - y^2)} + \lambda y = \lambda N(x,y)$$

Ahora proponemos $w = \dfrac{y}{x}$, de donde $y = wx$, $y' = xw' + w$. Sustituyendo:

$$x(xw' + w) = \sqrt{x^2 - w^2x^2} + wx \qquad \Leftrightarrow \qquad xw' + w = \sqrt{1 - w^2} + w$$

Como es separable, integramos:

$$\int \frac{w'}{\sqrt{1 - w^2}}\, dt = \int \frac{dx}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \arcsin w = \ln x + C$$

La sol. gral. está en forma implícita: $\arcsin\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln x + C$.

Ecuaciones con coeficientes homogéneos

Una observación

Hacemos notar que el cambio de variable $u = \frac{x}{y}$ también funciona para convertir una ecuación con coeficientes homogéneos en una ecuación separable.

Por ejemplo consideremos $(-x + 2y)y' = x + y$, que tiene coeficientes homogéneos. Proponemos el cambio $u = \dfrac{x}{y}$, es decir $y = \dfrac{x}{u}$, $y' = \dfrac{u - xu'}{u^2}$:

$$\left(-x + \frac{2x}{u}\right)\frac{u - xu'}{u^2} = x + \frac{x}{u} \quad \Rightarrow \quad -\frac{x}{u} + \frac{x^2u'}{u^2} + \frac{2x}{u^2} - \frac{2x^2u'}{u^3} = x + \frac{x}{u}.$$

Lo que nos lleva a

$$\left(\frac{1}{u^2} - \frac{2}{u^3}\right)x^2u' = x\left(1 + \frac{2}{u} + \frac{2}{u^2}\right)$$

que es separable, pero más difícil de resolver...si hubiéramos propuesto el cambio $w = \dfrac{y}{x}$

Entonces, para la ecuación $(-x+2y)y' = x+y$ se propone $w = \dfrac{y}{x}$, y se tiene $y = xw$, $y' = w + xw'$, y sustituyendo:

$$(-x+2xw)(w+xw') = x+xw \quad \Rightarrow \quad (-1+2w)(w+xw') = 1+w$$

$$\Rightarrow \quad w+xw' = \frac{1+w}{2w-1} \quad \Rightarrow \quad xw' = \frac{1+w}{2w-1} - w \quad \Rightarrow \quad w' = \frac{1}{x}\frac{2-w}{2w-1}$$

ECUACIONES EXACTAS

Ecuaciones Exactas

Y ya que usamos la forma de la ecuación

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

nos podemos preguntar cuándo el lado izquierdo es una derivada exacta.

Una situación de este tipo encontramos cuando usábamos el factor integrante y el lado izquierdo de la ecuación que fue multiplicada por μ se escribía como $\big(\mu y\big)'$

Ahora algunos textos usan la notación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

y hacemos la misma pregunta: ¿es el lado izquierdo una derivada exacta?

Tendría que ocurrir que haya $F(x,y)$ de manera que su *derivada total* DF cumpla

$$DF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

Ecuaciones Exactas

O sea que

$$M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

De aquí podemos obtener un criterio para determinar si la ecuación es exacta.

Nótese que se debe cumplir

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Para resolver la ecuación, una vez que se ha detectado que es exacta, es simplemente obtener $F(x,y)$ e integrando las veces que sea necesario

Ecuaciones Exactas – Ejemplos

- Consideremos $(6xy - 2y^2 + 1)dx + (3x^2 - 4xy)dy$

¿Es exacta? Calculamos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x - 4y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x - 4y$$

Entonces buscamos determinar a $F(x, y)$ observando primero que se deberá cumplir $DF = 0$, es decir $F(x, y) = c$, y de aquí obtendríamos la solución.

Entonces como $M = \dfrac{\partial F}{\partial x}$ integrando respecto a x obtenemos

$$F(x, y) = \int M(x, y)\, dx = \int (6xy - 2y^2 + 1)\, dx = 3x^2y - 2xy^2 + x + \psi(y)$$

pues cualquier función de y se considera constante para esta integración.

Entonces como también $N = \dfrac{\partial F}{\partial y}$, derivamos la expresión anterior respecto a y

$$N = \frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 - 4xy + \psi'(y)$$

Ecuaciones Exactas – Ejemplos

Ésto implica que $\psi'(y) = 0$, o sea $\psi(y) = k$

Entonces $F(x, y) = 3x^2y - 2xy^2 + x + k$, y la solución general sería

$$3x^2y - 2xy^2 + x = C$$

Como siempre aquí estaríamos en condiciones de usar condiciones iniciales para determinar C.

Ecuaciones Exactas – Una observación

Las ecuaciones de la forma $y' + a(t)y = b(t)$ no es exacta.

En este caso se escribe como $y' = b(t) - a(t)y$, por lo que $M(t, y) = a(t)y - b(t)$ y $N(t, y) \equiv 1$.

Para que sea exacta se requiere que $a(t) = \dfrac{\partial M}{\partial y}$ sea igual a $0 = \dfrac{\partial N}{\partial t}$

Pero en este caso se reduce la ecuación original a la ecuación $y' = b(t)$, cuya solución se obtiene con una integración directa.

Por ésto es que se busca un factor integrante, que convierta a la ecuación en una ecuación exacta.

CAMPOS DE PENDIENTES / CAMPOS DE DIRECCIÓN

Idea básica

Se escribe la ecuación en la forma $y' = f(t, y)$.

Se hace una "malla de puntos" de coordenadas en el plano $t - y$, con coordenadas (t_j, y_j)

En cada punto (t_j, y_j) de la malla se coloca una pequña línea con la pendiente dada por $f(t_j, y_j)$

El flujo de las curvas de las soluciones debe seguir estas patrón de pequeñas líneas.

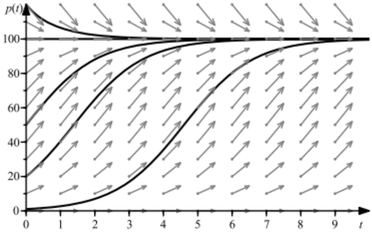

Figura: Campo de direcciones para la ecuación logística

Campos de dirección – Algunas estrategias

- Si la ecuación tiene la forma $y' = f(t)$, entonces hay un patrón de rectas que se repite en líneas verticales.
- Si la ecuación tiene la forma $y' = f(y)$, entonces hay un patrón de rectas que se repite en líneas horizontales.

Suponiendo que la ecuación tiene la forma $y' = f(t, y)$, algunas características de la f se reflejan en el campo de dirección.

- Si $f(t, y) = A(t)B(y)$ con $A(t) > 0$ y $B(y)$ es creciente o decreciente en y, entonces las pendientes de las rectas crecen o decrecen en líneas verticales. Una idea análoga aplica para el caso en que $B(y) > 0$ y $A(t)$ sea creciente o decreciente en t.
- Si $f(t, y) = A(t)B(y)$ y $A(t_0) = 0$ entonces hay rectas horizontales que se repiten en dirección vertical $t = t_0$; si $B(y_0) = 0$ entonces se repiten rectas horizontales en dirección horizontal $y = y_0$.
- Si la función $f(t, y)$ es periódica en y, entonces las rectas siguen un patrón periódico en líneas verticales. Una idea análoga aplica para el caso en que $f(t, y)$ es periódica en t.

Campos de dirección – Algunos ejemplos

Para los siguientes ejemplos nos auxiliaremos de la *Applet* proporcionada en el espacio de CANVAS.

- $y' = ky$ para $k > 0$ y $k < 0$
- $y' = 2x(A - x)$
- $y' = y(B - y)$
- $y' = 3x(y - 2)$
- $y' = x + \cos(3y)$
- $y' = -e^{-y} - C(1 - \cos x)$
- $y' = y - senx$
- $y' = y^2x$
- $y' = -x\sqrt{y^2 + 1}$