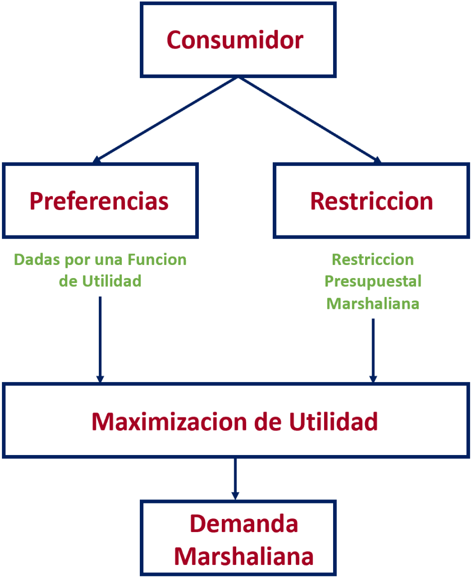
Decisiones de los Consumidores: Demanda Marshaliana

Alberto Ramírez de Aguilar

ITAM

Otoño 2020

Modelo Marshaliano



Modelo Marshaliano

- A continuación estudiaremos el modelo de **Demanda Marshaliana**.
- Los principales ingredientes de este modelo son:
  1. Un agente (consumidor) que jerarquiza sus preferencias de acuerdo a una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$.
  2. Este agente esta sujeto a una restricción presupuestal Marshaliana con parámetros (P_x, P_y, I).
  3. El agente busca maximizar su utilidad sujeto a las restricciones que enfrenta.

Modelo Marshaliano

- El problema a resolver es entonces:

$$\max_{\{x,y\}} \quad u(x,y) \;\; \text{sujeto a:}$$

$$P_x x + P_y y \leq I,$$

$$x \geq 0,$$

$$y \geq 0.$$

- Por lo tanto, el Lagrangeano del problema esta dado por:

$$\mathcal{L}(x, y, P_x, P_y, I, \mu_R, \mu_x, \mu_y) =$$

$$u(x,y) + \mu_R[I - P_x x - P_y y] + \mu_x x + \mu_y y.$$

Condiciones de Primer Orden

- Las condiciones de primer orden son las siguientes:
  1. Con respecto a la variable de decisión x:
  $$umg_x(x^\star, y^\star) = P_x \mu_R^\star - \mu_x^\star.$$
  2. Con respecto a la variable de decisión y:
  $$umg_y(x^\star, y^\star) = P_y \mu_R^\star - \mu_y^\star.$$
  3. Con respecto al multiplicador μ_R:
  $$P_x x^\star + P_y y^\star \leq I, \quad \mu_R^\star \geq 0, \quad \mu_R^\star [I - P_x x^\star - P_y y^\star] = 0.$$
  4. Con respecto al multiplicador μ_x:
  $$x^\star \geq 0, \quad \mu_x^\star \geq 0, \quad \mu_x^\star x^\star = 0.$$
  5. Con respecto al multiplicador μ_y:
  $$y^\star \geq 0, \quad \mu_y^\star \geq 0, \quad \mu_y^\star y^\star = 0.$$

Soluciones del Modelo

- Ahora analizemos las condiciones que se deben cumplir en un óptimo. Como lo hemos hecho hasta ahora, haremos un análisis por casos.

- Utilizando las condiciones de primer orden, si suponemos que en el óptimo $P_x x^\star + P_y y^\star = I$ entonces:
  - Si $x^\star > 0, y^\star > 0$ entonces en el óptimo:

$$TMS(x^\star, y^\star) = \frac{P_x}{P_y}.$$

  - Si $y^\star = 0$ entonces en el óptimo:

$$TMS\left(\frac{I}{P_x}, 0\right) \geq \frac{P_x}{P_y}.$$

  - Si $x^\star = 0$ entonces en el óptimo:

$$TMS\left(0, \frac{I}{P_y}\right) \leq \frac{P_x}{P_y}.$$

Soluciones del Modelo

- Tarea: cómo se ven las condiciones para los ótpimos del modelo en el caso donde $P_x x^\star + P_y y^\star < I$?

Demanda Marshaliana

- **Definición**: A la solución óptima del problema $(x^\star, y^\star)$ se le conoce como **Demandas Marshalianas**. Usualmente se denotan:

$$x^\star = x^M(P_x, P_y, I) \quad y^\star = y^M(P_x, P_y, I).$$

- **Definición**: La **Función de Utilidad Indirecta**, denotada $V(P_x, P_y, I)$, es la función valor del problema Marshaliano:

$$V(P_x, P_y, I) = u\left(x^M(P_x, P_y, I), y^M(P_x, P_y, I)\right)$$

Simplificaciones del Problema Marshaliano

- Dada una función $u(x, y)$, dónde podemos esperar que se encuentre la solución del problema Marshaliano?
  - Las **simplificaciones del problema Marshaliano** nos ayudan a no tener que estar revisando todos los posibles casos y así encontrar de una manera más eficiente el óptimo del problema.
  - **Advertencia**: las siguientes simplificaciones **solamente** son válidas de usar en el contexto del problema Marshaliano. En general, pueden no ser ciertas en otros contextos.

- **Teorema (Ley de Walrás)**: Si $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es una función monótona, entonces en la solución óptima $(x^\star, y^\star)$ se cumple que:

$$P_x x^\star + P_y y^\star = I.$$

Simplificaciones del Problema Marshaliano

- **Teorema (Condiciones de Inada)**: Sea $u : \mathbb{R}^2_+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona y diferenciable.

  1. Si es el caso que:
  $$\lim_{x \to 0} TMS(x, y) = \infty,$$
  entonces $x^\star > 0$.
  2. Por otro lado, si es el caso que:
  $$\lim_{y \to 0} TMS(x, y) = 0,$$
  entonces $y^\star > 0$.

- **Teorema (Teorema de Unicidad)**: Si $u : \mathbb{R}^2_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente cuasicóncava, entonces la solución al problema Marshaliando es única.

Propiedades de la Función de Utilidad Indirecta

- A continuación se listan una serie de propiedades de $V(P_x, P_y, I)$.

1. Homogenea de grado cero en precios e ingreso. Es decir, para toda $\lambda > 0$ y para todo vector (P_x, P_y, I) se cumple que:

$$V(\lambda P_x, \lambda P_y, \lambda I) = V(P_x, P_y, I).$$

2. No creciente en P_x. Es decir, si $P_x < \hat{P}_x$ entonces:

$$V(\hat{P}_x, P_y, I) \leq V(P_x, P_y, I).$$

3. No creciente en P_y. Es decir, si $P_y < \hat{P}_y$ entonces:

$$V(P_x, \hat{P}_y, I) \leq V(P_x, P_y, I).$$

4. No decreciente en I. Es decir si $I < \hat{I}$ entonces:

$$V(P_x, P_y, I) \leq V(P_x, P_y, \hat{I}).$$

Propiedades de las Demandas Marshalianas

- En general las demandas Marshalianas solamente cumplen las siguientes dos propiedades.

1. Homogéneas de grado cero en precios e ingreso. Es decir, para toda $\lambda > 0$ se cumple que:

$$x^M(\lambda P_x, \lambda P_y, \lambda I) = x^M(P_x, P_y, I).$$

$$y^M(\lambda P_x, \lambda P_y, \lambda I) = y^M(P_x, P_y, I).$$

2. Si $V(P_x, P_y, I)$ es diferenciable, entonces:

$$x^M(P_x, P_y, I) = -\frac{\frac{\partial V}{P_x}(P_x, P_y, I)}{\frac{\partial V}{I}(P_x, P_y, I)},$$

$$y^M(P_x, P_y, I) = -\frac{\frac{\partial V}{P_y}(P_x, P_y, I)}{\frac{\partial V}{I}(P_x, P_y, I)}.$$

A esta propiedad se le conoce como **Identidades de Roy**.

Estática Comparativa en el Problema Marshaliano

- La pregunta que buscamos responder es: qué sucede con las demandas cuando cambiamos un parámetro?

- **Definición**: Consideremos un parámetro $P \in \{P_x, P_y, I\}$. La elasticidad del bien X con respecto al parámetro P se define como:

$$E_{x,P}(P_x, P_y, I) = \frac{\partial x^M}{\partial P}(P_x, P_y, I)\frac{P}{x^M(P_x, P_y, I)}.$$

De manera análoga se define la elasticidad del bien Y con respecto a P.

Estática Comparativa en el Problema Marshaliano

- **Definición**: Para cambios en el precio propio, decimos que un bien es:
  - **Ordinario** si la elasticidad del precio propio del bien es negativa.
  - **Inelástico** si la elasticidad del precio propio del bien es igual a cero.
  - **Giffen** si la elasticidad del precio propio del bien es positiva.
- **Definición**: Para cambios en el precio cruzado, decimos que un bien es:
  - **Complemento** si la elasticidad del precio cruzado del bien es negativa.
  - **Independiente** si la elasticidad del precio cruzado del bien es igual a cero.
  - **Sustituto** si la elasticidad del precio cruzado del bien es positiva.
- **Definición**: Para cambios en el ingreso, decimos que un bien es:
  - **Inferior** si la elasticidad del ingreso del bien es negativa.
  - **Neutro** si la elasticidad del ingreso del bien es igual a cero.
  - **Normal** si la elasticidad del ingreso del bien es positiva.

Agregaciones del Problema Marshaliano

- Las agregaciones son una manera de relacionar las distintas elasticidades de un bien con respecto a distintos parámetros.

- **Definición**: Sea $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ una función monótona. El gasto de un consumidor en el bien X se define como:

$$s_x(P_x, P_y, I) = \frac{P_x x^M(P_x, P_y, I)}{I}.$$

  Análogo para el bien Y.

- **Teorema (Agregación de Engel)**: Sea $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces:

$$s_x(P_x, P_y, I)E_{x,I}(P_x, P_y, I) + s_y(P_x, P_y, I)E_{y,I}(P_x, P_y, I) = 1.$$

Agregaciones del Problema Marshaliano

- **Teorema (Agregación de Cournot)**: Sea $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces:

$$s_x(P_x, P_y, I) + s_x(P_x, P_y, I)E_{x,P_x}(P_x, P_y, I) + s_y(P_x, P_y, I)E_{y,P_x}(P_x, P_y, I) = 0,$$

$$s_y(P_x, P_y, I) + s_y(P_x, P_y, I)E_{y,P_y}(P_x, P_y, I) + s_x(P_x, P_y, I)E_{x,P_y}(P_x, P_y, I) = 0.$$

- **Teorema (Agregación de Euler)**:

$$E_{x,P_x}(P_x, P_y, I) + E_{x,P_y}(P_x, P_y, I) + E_{x,I}(P_x, P_y, I) = 0,$$

$$E_{y,P_x}(P_x, P_y, I) + E_{y,P_y}(P_x, P_y, I) + E_{y,I}(P_x, P_y, I) = 0.$$