Nota sobre propiedades de la función de utilidad

Diego A. Domínguez

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Una función de utilidad es una forma de representar los gustos de una persona por ciertas alternativas. En el modelo de consumo clásico las personas tienen gustos por canastas compuestas de cantidades no negativas de comodidades y aunque distintas personas tienen distintos gustos existen algunas propiedades que normalmente se asume que la función de utilidad satisface. Estas propiedades tienen cierta interpretación a nivel intuitivo de los gustos de las personas además de que facilitan el análisis del modelo. En esta nota estudiaremos 3 tipos de propiedades: (i) propiedades de monotonía, (ii) propiedades de cuasiconcavidad, y (iii) homoteticidad.

1. Monotonía

En el modelo de consumo clásico con dos comodidades las personas tienen una función de utilidad que representan sus gustos por canastas compuestas de cantidades no-negativas de comodidades x e y. Las primeras dos propiedades que estudiaremos reflejan la idea de que estas comodidades son deseables y que el bienestar de la persona aumenta mientras más consume. La primera propiedad nos dice que si aumentamos el consumo de cualquier comodidad aumenta la utilidad de la persona:

Definición 1. Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es **estrictamente monótona** si para cada par de canastas distintas $(x, y),\ (x', y') \in \mathbb{R}^2_+$ tales que $x \geq x'$ e $y \geq y'$ tenemos que $u(x, y) > u(x', y')$.

Para ciertas comodidades monotonía estricta es una propiedad muy fuerte y poco intuitiva,[1] ya que si hay gran complementariedad entre las comodidades aumentar el consumo de una manteniendo constante la otra no aumentaría el bienestar de la persona. La siguiente propiedad captura la idea de que las comodidades son deseables, pero permite que aumentar el consumo de una sola comodidad no aumente el bienestar de la persona:

Definición 2. Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es **monótona** si para cada par de canastas $(x, y),\ (x', y') \in \mathbb{R}^2_+$ tales que $x > x'$ e $y > y'$ tenemos que $u(x, y) > u(x', y')$.

Monotonía implica que las curvas de indiferencia son "delgadas" en el sentido de que un aumento en el consumo de ambas comodidades, por más pequeño que sea, aumentará la utilidad de la persona y cambiará de curva de indiferencia. Cuando la función de utilidad es monótona hablamos de que una comodidad es un bien.

[1] Considere el caso en que x denota la cantidad de zapatos izquierdos e y denota la cantidad de zapatos derechos, suponga que cuando consume 5 zapatos izquierdos y 5 zapatos derechos la persona obtiene una utilidad de 10; si aumentamos el consumo de zapatos derechos a 6 sin cambiar el consumo de zapatos izquierdos podríamos esperar que la utilidad de la persona no aumente, y por lo tanto sus preferencias no serían estrictamente monótonas.

Nota 1. Es importante notar que monotonía es una propiedad más débil que estricta monotonía, y por lo tanto, si una función de utilidad es estrictamente monótona entonces también es monótona.

2. Cuasiconcavidad

Las siguientes dos propiedades reflejan preferencias por canastas intermedias en el sentido de que si una canasta es preferida sobre otra, entonces la persona también debe preferir cualquier canasta intermedia sobre esta. Estas propiedades también se interpretan como preferencias por "consumo balanceado" en el sentido de que si la persona está indiferente entre dos canastas, entonces cada canasta intermedia es preferida o indiferente a estas; sin embargo es importante notar que al hablar de canastas intermedias implica que el consumo es balanceado relativamente a las canastas iniciales y estas canastas pueden no tener un consumo balanceado en términos absolutos.

Definición 3. Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es **estrictamente cuasicóncava** si para cada par de canastas distintas (x, y), $(x', y') \in \mathbb{R}^2_+$ y cada $\alpha \in (0, 1)$, entonces si $(x'', y'') = \alpha(x, y) + (1 - \alpha)(x', y')$ tenemos que $u(x'', y'') > \text{mín}\{u(x, y), u(x', y')\}$.

Cuasiconcavidad estricta refleja una preferencia estricta por canastas intermedias y para ciertas comodidades es poco intuitivo,[2] ya que si es muy fácil sustituir un bien por otro entonces las canastas intermedias pudieran ser equivalentes en términos de bienestar que las extremas. La siguiente propiedad permite este clase de indiferencia.

Definición 4. Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es **cuasicóncava** si para cada par de canastas (x, y), $(x', y') \in \mathbb{R}^2_+$ y cada $\alpha \in [0, 1]$, entonces si $(x'', y'') = \alpha(x, y) + (1 - \alpha)(x', y')$ tenemos que $u(x'', y'') \geq \text{mín}\{u(x, y), u(x', y')\}$.

Gráficamente cuando la función de utilidad es **monótona y cuasicóncava** tenemos que las curvas de indiferencia del consumidor son convexas al origen; sin embargo, si la función de utilidad no satisface cualquiera de estas dos propiedades entonces las curvas de indiferencia no son necesariamente convexas al origen.

Nota 2. Es importante notar que cuasiconcavidad es una propiedad más débil que estricta cuasiconcavidad, y por lo tanto, si una función de utilidad es estrictamente cuasicóncava entonces también es cuasicóncava.

3. Homoteticidad

La última propiedad que estudiaremos refleja la idea de que la magnitud del consumo no debe afectar la preferencia relativa entre canastas, es decir que si una persona prefiere una canasta sobre otra y ambas canastas las aumentamos o reducimos en la misma proporción la preferencia entre las canastas resultantes debe ser la misma que las originales.

Definición 5. Una función de utilidad $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es **homotética** si para cada par de canastas (x, y), $(x', y') \in \mathbb{R}^2_+$ y cada $\lambda > 0$, si $u(x, y) \geq u(x', y')$ entonces tenemos que $u(\lambda x, \lambda y) \geq u(\lambda x', \lambda y')$.

[2] Considere el caso en que x denota la cantidad de coca-cola en botella de litro e y la cantidad de coca-cola en botella de dos litros, muchas personas estarían indiferentes entre la canasta $(4, 0)$ y la canasta $(0, 2)$ ya que contiene la misma cantidad de coca-cola, además muchas de estas personas estarían indiferentes entre estas canastas y la canasta intermedia $(2, 1)$, y su función de utilidad no sería estrictamente cuasicóncava.

Gráficamente homoteticidad implica que la tasa marginal de sustitución permanece constante en rayos que parten del origen, es decir, que la tasa marginal de sustitución únicamente depende del cociente de consumo $\frac{y}{x}$ independientemente del valor absoluto de x y de y.

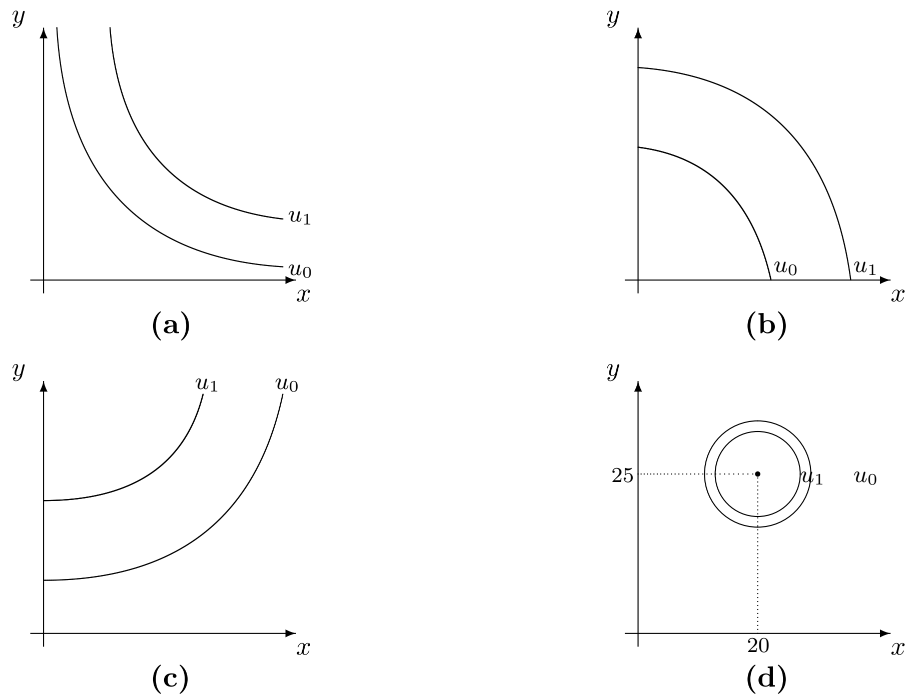

Figura 1: **Curvas de indiferencia para distintas funciones.** (a) Curvas de la función $u(x,y) = x^{1/2}y^{1/2}$, esta función es estrictamente monótona (por lo tanto $u_0 < u_1$), estrictamente cuasicóncava, y homotética. (b) Curvas de la función $u(x,y) = x^2 + y^2$, esta función es estrictamente monótona (por lo tanto $u_0 < u_1$), no es cuasicóncava, y es homotética. (c) Curvas de la función $u(x,y) = -x + y^{1/2}$, esta función no es monótona (porque la utilidad aumenta cuando el consumo de la comodidad x disminuye), es estrictamente cuasicóncava, no es homotética. (d) Curvas de la función $u(x,y) = -(x-20)^2 - (y-25)^2$ esta función no es monótona, es estrictamente cuasicóncava, y no es homotética.