Continuidad uniforme

Análisis Matemático 1
Prof. J. Rivera Noriega

ITAM

Primavera de 2020

Continuidad uniforme

Dada $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ y $A \subseteq D(f)$, se dice que f es uniformemente continua en A si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, u \in A$ que cumpla $\|x - u\| < \delta$ se tendrá $\|f(x) - f(u)\| < \epsilon$.

Nótese que si f es uniformemente continua en $A \subseteq D(f)$ entonces continua en todo $a \in A$.

Sin embargo el recíproco es falso:

Basta considerar la función $g(x) = \dfrac{1}{x}$ para $x > 0$.

Intuitivamente, dada la misma $\epsilon > 0$, entre más cerca estamos de $x = 0$, se va requiriendo una $\delta > 0$ más pequeña. Ésto puede verse al tratar de estimar

$$|g(x) - g(u)| = \frac{|u - x|}{ux} \leq \frac{\delta}{ux} \qquad \text{suponiendo } |x - u| < \delta$$

Al intentar que $\dfrac{\delta}{ux} < \epsilon$, entre más pequeñas son x y u se requerirá $\delta < \epsilon(ux)$ más pequeña. (ver detalles en [Bartle, pag. 159])

Criterio para la NO continuidad uniforme

- Para verificar que $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ NO es uniformemente continua en $A \subseteq D(f)$ basta exhibir una $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones (x_n) y (y_n) en A tales que, aunque $\|x_n - y_n\| < 1/n$, se cumplirá $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon_0$.

Por ejemplo, en el caso anterior, si $\varepsilon_0 = 1/2$ y elegimos $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{2n}$.

tendremos $|x_n - y_n| = \dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{n}$ pero

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \right| = n > \varepsilon_0$$

Teorema de la continuidad uniforme

Teorema

Sea $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ continua en su dominio. Si $K \subseteq D(f)$ es compacto entonces f es uniformemente continua en K

En [Bartle, pag. 160] hay dos demostraciones. Nosostros daremos la demostración a través de sucesiones.

Argumentando por contradicción, supongamos que existen $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones (x_n) y (y_n) en K tales que $\|x_n - y_n\| < 1/n$ pero $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon_0$.

Como K es compacto, ambas sucesiones tienen subsucesiones (x_k') y (y_k') que son convergentes al mismo límite $z \in K$.

Como f es continua en K debe ocurrir que $f(x_k')$ y $f(y_k')$ convergen a $f(z)$, por lo que dada $\epsilon > 0$ debería cumplirse para k suficientemente grande

$$\|f(x_k') - f(y_k')\| \leq \|f(x_k') - f(z)\| + \|f(z) - f(y_k')\| < \epsilon$$

lo cual contraviene la cosntrucción de las sucesiones. ∎

Funciones tipo Lipschitz y contracciones

Una clase de ejemplos de funciones uniformemente continuas en su dominio son aquellas para las que existe $M > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\| \qquad \text{para toda } x, y \in D(f)$$

A tales funciones se les llaman funciones de tipo Lipschitz.

Y dentro de esta clase serán de nuestro interés las contracciones, es decir aquellas para las que $0 < M < 1$.

Una observación importante es que no toda función uniformemente continua es de tipo Lipschitz.

Por ejemplo $f(x) = \sqrt{x}$ con $D(f) = [0, 1]$ es uniformemente continua en su dominio, pero no es de tipo Lipschitz, pues con $y = 0$ se tendría $\sqrt{x} \leq Mx$ para $x \in (0, 1]$, o sea que $x \geq 1/M$ para todo $x \in (0, 1]$, lo cual es falso.

Teorema del punto fijo para contracciones

Para $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, se dice que $u \in D(f)$ es un punto fijo de f si $f(u) = u$.

Teorema

Sea $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ una contracción. Entonces existe $u \in \mathbb{R}^p$ que es punto fijo de f.

Para la demostración construiremos una sucesión contractiva, cuyo límite será el punto fijo.

Iniciamos con $x_1 \in \mathbb{R}^p$ arbitrario, y recursivamente $x_{n+1} = f(x_n)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Por la propiedad de contracción se cumplirá:

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq M\|x_n - x_{n-1}\|, \qquad 0 < M < 1$$

Entonces ya hemos probado que las sucesiones contractivas como (x_n) son sucesiones de Cauchy, que por lo tanto serán convergentes. Digamos que $\lim x_n = u$.

Teorema del punto fijo para contracciones

Ahora veremos que u es punto fijo de f, sustituyendo en la fórmula recursiva para obtener $u = f(u)$.

Veremos ahora que además dicho punto fijo es único: Si $u, v \in \mathbb{R}^p$ cumplen $u = f(u)$, $v = f(v)$ entonces

$$\|u - v\| = \|f(u) - f(v)\| \leq \|u - v\|$$

Si ocurriera que $u \neq v$ obtendríamos $1 \leq M$ (!!) ∎

Recurriendo a la teoría de sucesiones contractivas, de hecho se puede calcular qué tan cerca está el término n-ésimo del líimite:

$$\|u - x_n\| \leq \frac{M^{n-1}}{1 - M}\|x_2 - x_1\|$$

Contracciones definidas en bolas euclidianas

Teorema

Supóngase que f *es una contracción definida en* $D = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| \leq B\}$ *con constante* $0 < C < 1$*, y que se cumple* $\|f(\vec{0})\| \leq B(1 - C)$*. Entonces la sucesión*

$$x_1 = \vec{0},\, x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$$

converge al único punto fijo de f *que está en* D*.*

En efecto si $x \in D$ entonces $\|f(x) - f(\vec{0})\| \leq \|x - \vec{0}\| \leq BC$. Por tanto

$$\|f(x)\| \leq \|f(\vec{0}) + CB \leq B(1 - C) + BC = B$$

Entonces $f(D) \subseteq D$, lo cual implica que la sucesión definida en la prueba del teorema está bien definida. La prueba anterior puede entonces seguirse literalmente. ■