加群とイデアル

-High Speed Review-

2025 年 8 月 9 日

目次

ここで環とは零環でない単位的可換環とする．

1 加群

Def 1.1
A を環，$(M,+)$ を Abel 群とする．$f: A\times M\to M, (a,x)\mapsto ax$ が

(1) $a(bx)=(ab)x$
(2) $(a+b)x=ax+bx$
(3) $a(x+y)=ax+ay$
(4) $1x=x$

を充たすとき，(M,f) を A **加群**といい，f を**作用**という．特に，K が体のとき，K 加群を K **線型空間**という．

Def 1.2
$S\subset M$ を部分集合とするとき，S の有限個の元の線型結合全体 $\langle S\rangle=\sum_{x\in S}Ax$ を S が**生成する部分** A **加群**という．$S=\{s_1,\cdots,s_n\}$ であるときは $\langle S\rangle$ を $\langle s_1,\cdots,s_n\rangle$ で表す．有限集合で生成される加群を**有限生成な** A **加群**という．

Def 1.3
M を A 加群，$S\subset M$ を部分集合とする．

(1) $S=\{s_1,\cdots,s_n\}$ とする．

$$a_1,\cdots,a_n\in A, s_1a_1+\cdots+s_na_n=0\Rightarrow a_1=\cdots=a_n=0$$

であるとき S は**線型独立**であるという．線型独立でないとき**線型従属**であるという．

(2) $\#S=\infty$ の場合，S の任意の有限部分集合が線型独立であるとき，S は線型独立であると定める．

Def 1.4
M を A 加群とする．部分集合 $S\subset M$ が線型独立で $\langle S\rangle=M$ となるとき，S は M の**基底**または A **基底**という．

Remark 1.1. 線型空間には必ず基底が存在するが，加群には基底が存在するとは限らない．例えば $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ 加群と考えられるが基底はないことが知られている．

Def 1.5

$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A 加群族とする．

(1) $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ は成分ごとに和と作用を定めることで A 加群となる．これを $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直積**という．$\forall\lambda\in\Lambda, M_\lambda = M$ であるとき，特に $\displaystyle\prod_{\Lambda} M$ とかく．

(2) 次のように定義される $\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ は $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ の部分 A 加群となる．これを $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直和**という．

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda := \left\{ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \mid \#\{\lambda \mid x_\lambda \neq 0\} < \infty \right\}$$

$\forall\lambda\in\Lambda, M_\lambda = M$ であるとき，特に $\displaystyle\bigoplus_{\Lambda} M$ とかく．

Def 1.6

$M \simeq \displaystyle\bigoplus_{\Lambda} A$ と表せる A 加群を**自由 A 加群**という．濃度 $|\Lambda|$ を M の**階数**といい，$\operatorname{rank} M$ で表す．

Remark 1.2. $n := |\Lambda| < \infty$ のとき，$\displaystyle\bigoplus_{\Lambda} A \simeq A^n$

Prop 1.1

M を自由 A 加群とする．M の階数 $\operatorname{rank} M$ は well-defind である．つまり，

$$M \simeq \bigoplus_{\Lambda_1} A \simeq \bigoplus_{\Lambda_2} A \;\Rightarrow\; |\Lambda_1| = |\Lambda_2|$$

Prop 1.2

A 加群 M が基底 S をもつとき，$M \simeq \bigoplus_S A$

2　k 代数

Def 2.1

k を可換環とする．

(1) 環 A と $s_A : k \to A$ を環準同型の組 (A, s_A) を k **代数**という．このとき，s_A を (A, s_A) の**構造射**という．

(2) $(A, s_A), (B, s_B)$ を k 代数とする．環準同型 $\varphi : A \to B$ が $\varphi \circ s_A = s_B$ を充たすとき，φ を k **準同型**という．(A, s_A) から (B, s_B) への k 準同型の全体を $\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{al}}(A, B)$ で表す．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] & & B \\ & k \arrow[ul, "s_A"] \arrow[ur, "s_B"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] & \end{tikzcd}$$

(3) k 準同型が同型であれば k **同型**という．k 代数 A の k 自己同型の全体は合成に関して群となる．これを A の k **自己同型群**といい，$\mathrm{Aut}_k^{\mathrm{al}}\, A$ で表す．

(4) k 準同型 $\varphi : A \to B$ が単射であれば A を $\varphi(A)$ を同一視して，$A \subset B$ と考えられる．このとき A を**部分** k **代数**という．

Remark 2.1. 構造射 s_A を省略して k 代数 A とかくことが多い．

Remark 2.2. 構造射には単射性を課す場合もある．単射の時は $k \subset A$ と見做せる．

Example 2.1. $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(n), m \to m + n\mathbb{Z}$ によって $\mathbb{Z}/(n)$ は $\mathbb{Z}$ 代数と見做せる．

Def 2.2

k を環，A を k 代数，$S \subset A$ を部分集合とする．A の部分 k 代数

$$k[S] := \{f(s_1, \cdots, s_n) \mid f \in A[T_1, \cdots, T_n], s_i \in S\}$$

を S で**生成される部分** k **代数**という．

3　イデアル

Def 3.1

環 A を A 加群と考えたとき，A の部分 A 加群を**イデアル**という．

Def 3.2

A を環，$S \subset A$ を部分集合とする．このとき，S を包む最小のイデアルを S の生成するイデアルといい，(S) で表す．特に有限集合で生成されるイデアル $(\{s_1, \cdots, s_n\})$ は**有限生成イデアル**といい，$(s_1, \cdots, s_n)$ で表す．特に単元集合で生成されるイデアルを**単項イデアル**という．

Remark 3.1. 零イデアル $(0) = 0$ と全体 $(1) = A$ を自明なイデアルという．

Def 3.3

I, J を環 A のイデアルとする．I, J のの和と積を

$$I + J := (I \cup J) = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$$

$$IJ := (\{xy \mid x \in I, y \in J\}) = \left\{\sum x_i y_i \mid x_i \in I, y_i \in J\right\}$$

と定める．

Remark 3.2. $IJ \subset I \cap J \subset I + J$

Remark 3.3. $\mathbb{Z}$ において

$$(m)(n) = (mn) \subset (m) \cap (n) = (\mathrm{lcm}(m,n)) \subset (m) + (n) = (\gcd(m,n))$$

Def 3.4

A を環 B の部分環，I を A のイデアルとする．このとき I を包む最小の B のイデアルを IB とかく．

Prop 3.1

A を環 B の部分環，I を B のイデアルとする．このとき $I \cap A$ は A のイデアル．$I \subsetneq B$ なら $I \cap A \subsetneq A$ である．

Proof. 前半は自明．$I \subsetneq B$ であれば $1 \notin I$ より $1 \notin I \cap A$. ■

Def 3.5
A を環とする．

(1) 剰余環 $A/\mathfrak{p}$ が整域となるようなイデアル $\mathfrak{p} \subsetneq A$ を**素イデアル**という．
(2) 剰余環 $A/\mathfrak{m}$ が体となるようなイデアル $\mathfrak{m} \subsetneq A$ を**極大イデアル**という．

Remark 3.4. 定義から直ちに　極大イデアル $\Rightarrow$ 素イデアル　がわかる．

Def 3.6
環 A に対し，$\mathrm{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \subset A : \text{素イデアル}\}$ と定める．またイデアル I に対し，$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$ とおくと，$\mathrm{Spec}(A)$ には

$$\mathcal{F} := \{V(I) \mid I \subset A : \text{イデアル}\} \subset \mathfrak{P}(\mathrm{Spec}(A))$$

を閉集合系とする位相が入る．この位相空間 $\mathrm{Spec}(A)$ を A の**スペクトラム**，位相を $\mathrm{Spec}(A)$ の **Zariski 位相**という．

Def 3.7
A を整域，$a \in A \backslash \{0\}$ とする．

(1) (a) が素イデアルとなるとき，a を**素元**という．
(2) $a \in A \backslash A^{\times}$ であって次を充たすとき a を**既約元**という．

$$\forall b, c \in A, [a = bc \Rightarrow b \in A^{\times} \vee c \in A^{\times}]$$

Prop 3.2
整域において，素元 $\Rightarrow$ 既約元

Def 3.8
$a, b \in A \backslash \{0\}$ とする．$\exists u \in A^{\times}, a = bu$ であるとき，a, b は**同伴**であるといい，$a \sim b$ で表す．

Def 3.9
任意の $a \in A \backslash (A^{\times} \cup \{0\})$ が，$a = p_1 \cdots p_n$ と有限個の素元の積に順序と同伴を除いて一意的に分解されるとき，整域 A を**一意分解整域** (UFD) という．

Remark 3.5. この分解を**素元分解**，$p_1, \cdots, p_n$ を a の**素因子**という．

Prop 3.3

一意分解整域においては，既約元 $\Rightarrow$ 素元

Def 3.10

任意のイデアルが単項イデアルとなる整域を**単項イデアル整域** (PID) という．

Prop 3.4

単項イデアル整域 $\Rightarrow$ 一意分解整域

参考文献

[1] 雪江明彦,『整数論 1 初等整数論から p 進数へ』, 日本評論社，2013