

昼の長さ

D : 秋分からの日数

L : 緯度 ($-90 < L < 90$)

$$\psi = \frac{D}{365} \times 2\pi, \quad \phi_0 = 23.4 \times \frac{\pi}{180}, \quad \theta = L \times \frac{\pi}{180}$$

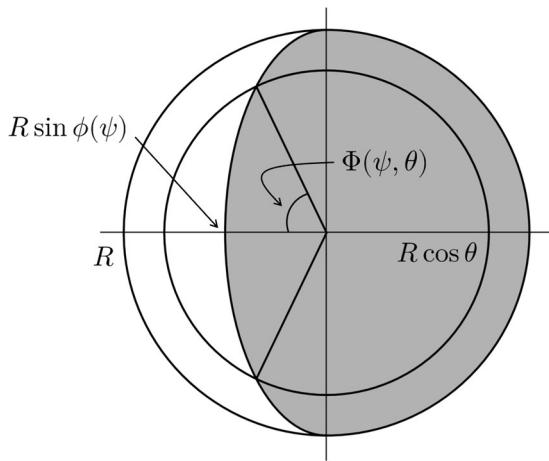
以上のようにパラメタを設定する。

$\phi(\psi)$: 太陽から地球を見たときの見かけの地軸の傾き
とすると,

$$\tan \phi(\psi) = \sin \psi \tan \phi_0$$

である。特に $\phi(0) = 0, \phi(\pi/2) = \phi_0$

次の図は地軸方向から秋分過ぎ頃の地球を見た図であり、影の部分が地上の夜を表す。



地球の半径を R とおくと、緯度 $L^\circ = \theta[\text{rad}]$ の点は半径 $R \cos \theta$ の円軌道を描く。

影の境界のうち左側（太陽側）は長径 R 、短径 $R \sin \phi(\psi)$ の橢円である。

$\Phi(\psi, \theta)$ を図のようく置くと、

$$\Phi(\psi, \theta) = \cos^{-1}(\tan \phi(\psi) \tan \theta)$$

但し、 $-\pi/2 + \phi_0 < \theta < \pi/2 - \phi_0$ とする。（この範囲でないと昼夜が入れ替わらない。）

[導出]

点の軌道と影の境界の交点を2通りで表すと、

$$(R \cos \theta \cos \Phi(\psi, \theta), R \cos \theta \sin \Phi(\psi, \theta)) = (R \sin \phi(\psi) \cos \Psi, R \sin \Psi)$$

それぞれノルムをとると、

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \sin^2 \phi(\psi) \cos^2 \Psi + \sin^2 \Psi = \sin^2 \phi(\psi) \cos^2 \Psi + (1 - \cos^2 \Psi) \\ &= 1 - \cos^2 \Psi (1 - \sin^2 \phi(\psi)) = 1 - \cos^2 \Psi \cos^2 \phi(\psi) \end{aligned}$$

$$\cos^2 \Psi = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \phi(\psi)} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \phi(\psi)}, \quad \cos \Psi = \frac{\sin \theta}{\cos \phi(\psi)}$$

$\cos \theta \cos \Phi(\psi, \theta) = \sin \phi(\psi) \cos \Psi$ から,

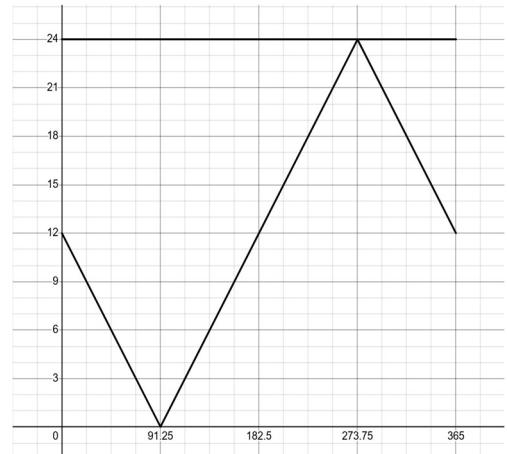
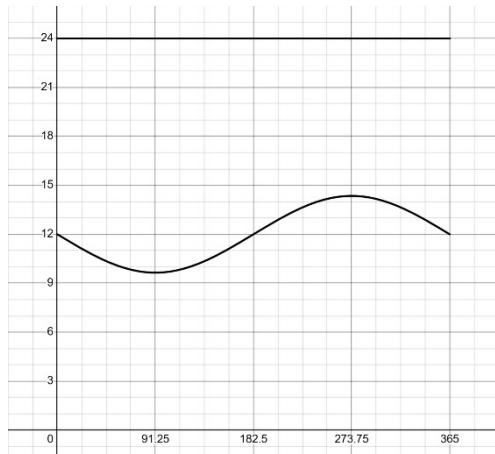
$$\cos \Phi(\psi, \theta) = \frac{\sin \phi(\psi) \cos \Psi}{\cos \theta} = \frac{\sin \phi(\psi)}{\cos \theta} \frac{\sin \theta}{\cos \phi(\psi)} = \tan \phi(\psi) \tan \theta$$

$$\Phi(\psi, \theta) = \cos^{-1}(\tan \phi(\psi) \tan \theta) \blacksquare$$

以上より, 昼の長さ $T(\psi, \theta)$ は,

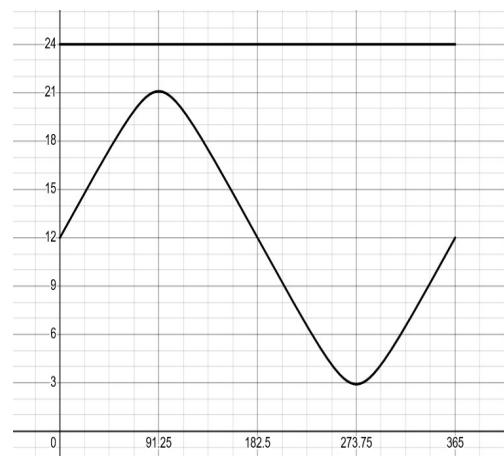
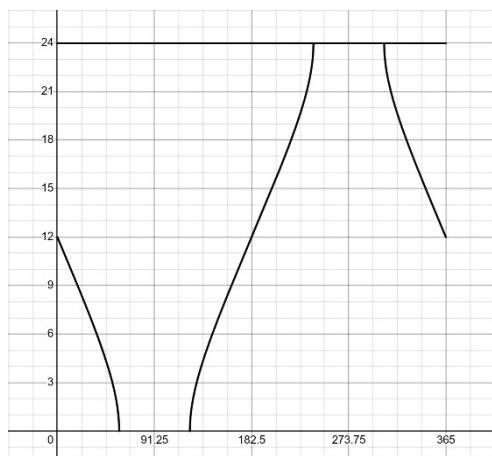
$$\begin{aligned} T(\psi, \theta) &= \frac{365}{360} \cdot \frac{24}{2\pi} 2\Phi(\psi, \theta) = \frac{365}{360} \cdot \frac{24}{\pi} \cos^{-1}(\tan \phi(\psi) \tan \theta) = \frac{365}{360} \cdot \frac{24}{\pi} \cos^{-1}(\sin \psi \tan \phi_0 \tan \theta) \\ &= \frac{365}{360} \cdot \frac{24}{\pi} \cos^{-1} \left(\tan \left(23.4 \times \frac{\pi}{180} \right) \tan \left(\frac{\pi L}{180} \right) \sin \left(\frac{2\pi D}{365} \right) \right) \end{aligned}$$

(e.g.) 北緯 35° (京都), 北緯 $(90 - 23.4)^\circ$ (極圏の境界)



(見やすさのため $365/360$ 倍を除いた)

(e.g.) 北緯 70° , 南緯 65°



左図の冬至付近は極夜, 夏至付近は白夜となっている。