可換環の局所化

2025 年 8 月 11 日

ここで環とは零環でない単位的可換環とする．

Def 0.1

A を環とする．$S \subset A$ が次の条件 (1)(2) を充たすとき，**積閉集合**という．

(1) $1 \in S, 0 \notin S$

(2) $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$

Prop 0.1

A を環，S を A の積閉集合とする．$A \times S$ 上の関係 $\sim$ を

$$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \iff \exists s \in S, s(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$$

で定めるとこれは同値関係となる．

Proof. $1 \in S$ に対し，$1(as - as) = 0$ より $(a, s) \sim (a, s)$
$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$ ならば $(a_2, s_2) \sim (a_1, s_1)$ は明らか.
$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2), (a_2, s_2) \sim (a_3, s_3)$ とすると，

$$\exists s, s' \in S, s(a_1 s_2 - a_2 s_1) = s'(a_2 s_3 - a_3 s_2) = 0$$

このとき，

$$ss's_2(a_1 s_3 - a_3 s_1) = s's_3 s(a_1 s_2 - a_2 s_1) + ss_1 s'(a_2 s_3 - a_3 s_2) = 0$$

であり，S は積閉集合なので $ss's_2 \in S$ であるから，$(a_1, s_1) \sim (a_3, s_3)$ ■

Remark 0.1. $\exists s \in S$ の条件が無いと（つまり $a_1 s_2 - a_2 s_1 = 0$ のみだと），推移律が一般には成立しないため同値関係とならない．

Def 0.2

A を環, S を A の積閉集合とする. $A \times S$ の **Prop 0.1** の同値関係による商 $(A \times S)/\sim$ を $S^{-1}A$ とかき，同値類 $[(a, s)]$ を $a/s, \dfrac{a}{s}, s^{-1}a$ 等とかく．$a_1/s_1, a_2/s_2 \in S^{-1}A$ に対し，

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} := \frac{a_1 s_2 + a_2 s_1}{s_1 s_2}, \quad \frac{a_1}{s_1}\frac{a_2}{s_2} := \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2}$$

と定義するとこれは well-defind となる．この和と積によって $S^{-1}A$ は単位的環となる．この環 $S^{-1}A$ を A の S による**局所化**という．

Remark 0.2. $0/1$ は加法単位元，$1/1$ は乗法単位元となるが，$0/1 = 1/1$ と仮定すると，

$$\exists s \in S, s(1 - 0) = s = 0$$

であるが，これは積閉集合の定義に反するので $S^{-1}A$ は零環ではない．

Proof. (和と積の well-defind 性)
$(a_1,s_1)\sim(a_1',s_1'),(a_2,s_2)\sim(a_2',s_2')$ とする．このとき，

$$\exists s,s'\in S, s(a_1s_1'-a_1s_1)=s'(a_2s_2'-a_2's_2)=0$$

$ss'\in S$ であり，

$$\begin{aligned}&ss'((a_1s_2+a_2s_1)s_1's_2'-(a_1's_2'+a_2's_1')s_1s_2)\\&\qquad=s's_2s_2's(a_1s_1'-a_1's_1)-ss_1s_1's'(a_2s_2'-a_2's_2)=0\end{aligned}$$

$$\therefore(a_1s_2+a_2s_1,s_1s_2)\sim(a_1's_2'+a_2's_1',s_1's_2')\quad\therefore\frac{a_1s_2+a_2s_1}{s_1s_2}=\frac{a_1's_2'+a_2's_1'}{s_1's_2'}$$

$$\begin{aligned}ss'(a_1a_2s_1's_2'-a_1'a_2's_1s_2)&=ss'(a_1a_2s_1's_2'-a_1'a_2s_1's_2+a_1'a_2s_1's_2-a_1'a_2's_1s_2)\\&=ss'(a_2s_2'(a_1s_1'-a_1s_1)+a_1's_1(a_2s_2'-a_2's_2))\\&=s'a_2s_2's(a_1s_1'-a_1s_1)+sa_1's_1s'(a_2s_2'-a_2's_2)=0\end{aligned}$$

$$\therefore(a_1a_2,s_1s_2)\sim(a_1'a_2',s_1's_2')\quad\therefore\frac{a_1a_2}{s_1s_2}=\frac{a_1'a_2'}{s_1's_2'}$$

■

Def 0.3
A を環，S を A の積閉集合とする．準同型 $\iota:A\hookrightarrow S^{-1}A, a\mapsto a/1$ を**局所化に付随する準同型**という．この準同型により $A\subset S^{-1}A$ と考えることがある．以降 $0/1,1/1$ を $0,1$ とかくことにする．

Remark 0.3. $s\in S$ であれば $(s/1)(1/s)=1\in S^{-1}A$ なので，$S\subset S^{-1}A$ である（正確には $\iota(S)\subset S^{-1}A$）．$S^{-1}A$ はこの条件を充たす普遍的な環である．

Prop 0.2 (局所化の普遍性)
A,B を環, $S\subset A$ を積閉集合, $\iota:A\hookrightarrow S^{-1}A$ を局所化に付随する準同型, $\varphi:A\to B$ を準同型とする．$\varphi(S)\subset B^\times$ であれば，準同型 $\psi:S^{-1}A\to B$ で，

$$\psi\circ\iota=\varphi\ \ (\text{i.e. }\forall a\in A,\psi(a/1)=\varphi(a))$$

なるものが unique に存在する．

Remark 0.4. $\psi\circ\iota=\varphi$ とは次の図式を可換にするということである．

$$
\begin{tikzcd}
S^{-1}A \arrow[r, dashed, "\exists!\psi"] & B \\
A \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"]
\end{tikzcd}
$$

Proof. $\psi : S^{-1}A \to B$ を $\psi(a/s) := \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ と定義するとこれは well-defind.
$\because$ $a_1/s_1 = a_2/s_2 \in S^{-1}A$ とすると，$\exists s \in S, s(a_1s_2 - a_2s_1) = 0$ である．このとき，$\varphi(s)(\varphi(a_1)\varphi(s_2) - \varphi(a_2)\varphi(s_1)) = 0$ であるが，$\varphi(s) \in B^\times$ より $\varphi(a_1)\varphi(s_2) - \varphi(a_2)\varphi(s_1) = 0$
$\varphi(s_1)^{-1}\varphi(s_2)^{-1}$ をかけて，$\varphi(a_1)\varphi(s_1)^{-1} = \varphi(a_2)\varphi(s_2)^{-1} = 0$
ψ は環準同型になる．$\forall a \in A, \psi(a/1) = \varphi(a)$ より $\psi \circ \iota = \varphi$ を充たす．
また ψ が条件を充たす準同型であれば，$\varphi(a) = \psi(a/1) = \psi(a/s)\psi(s/1) = \psi(a/s)\varphi(s)$ より，$\psi(a/s) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ となる．よって ψ は unique. ■

Def 0.4 (f による局所化)
A を環，$f \in A$ を非零因子とする．$f^n (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ は非零因子であるから $S := \{f^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は積閉集合となる．このときの $S^{-1}A$ を A の f **による局所化**といい，A_f または $A[1/f]$ で表す．

Example 0.1. $\mathbb{Z}[1/3] = \{n/3^m \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$

Def 0.5
A を環，$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ とする．$1 \notin \mathfrak{p}, 0 \in \mathfrak{p}$ より $S := A \setminus \mathfrak{p}$ とおくと，$1 \in S, 0 \notin S$ であり素イデアルの定義から S は積に関して閉じているので，S は積閉集合となる．このときの $S^{-1}A$ を A の $\mathfrak{p}$ **による局所化**といい，$A_\mathfrak{p}$ で表す．

Example 0.2. $\mathbb{Z}_{(3)} = \{n/m \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \setminus (3)\}$

Def 0.6
A を環とする．$S = \{s \in A \mid s : 零因子\}$ とするとこれは積閉集合で，$S^{-1}A$ を A の**全商環**という．A が整域であれば零因子全体は $S = A \setminus \{0\}$ である．$a, b \in A \setminus \{0\}$ なら $(a/b)(b/a) = 1$ となるので，A の全商環は体である．これをの**商体**といい，$\mathrm{Frac}(A)$ とかく．

Remark 0.5. 整域 A の商体は素イデアル (0) による局所化 $A_{(0)}$ である．

Example 0.3. (1) 有理数体 $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Z}$ の商体と定義する．
(2) 体 K 上の多項式環 $K[x_1, \cdots, x_n]$ の商体を**有理関数体**といい $K(x_1, \cdots, x_n)$ でかく．

Def 0.7
A を環とする．A の極大イデアルが $\mathfrak{m}$ のみであるとき，$(A, \mathfrak{m})$ を**局所環**という．
$(A, \mathfrak{m}), (B, \mathfrak{n})$ が局所環で，$\varphi : A \to B$ が $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$ なる準同型であるとき，φ は**局所的な準同型**であるいう．

Prop 0.3
A を環，$\mathfrak{m} \subsetneq A$ をイデアルとする．このとき以下は同値.

(1) $(A, \mathfrak{m})$ は局所環
(2) $A \setminus \mathfrak{m} \subset A^\times$

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2)　$a \in A \setminus A^\times$ とすると a を含む A の極大イデアルが存在する．(1) からそれは $\mathfrak{m}$ に一致するので $a \in \mathfrak{m}$．したがって $A \setminus A^\times \subset \mathfrak{m}$，つまり $A \setminus \mathfrak{m} \subset A^\times$
(2) $\Rightarrow$ (1)　$\mathfrak{m} \subsetneq I$ がイデアルであるなら，$a \in I \setminus \mathfrak{m}$ が取れる．このとき $a \in A \setminus \mathfrak{m} \subset A^\times$ なので $I = A$ となる．よって $\mathfrak{m}$ は極大イデアル．また $\mathfrak{n}$ が $\mathfrak{m}$ と異なる極大イデアルであれば，$a \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{m}$ が取れるが (2) より $a \in A^\times$．よって $\mathfrak{n} = A$ となり矛盾．よって $(A, \mathfrak{m})$ は局所環. ■

Prop 0.4
A を整域，$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ とする．

(1) $A_\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ を極大イデアルとする局所環である．
(2) $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{p}$
(3) 準同型 $\bar{\iota} : A/\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ は同型 $\mathrm{Frac}\,(A/\mathfrak{p}) \simeq A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ を誘導する．
　特に，$\mathfrak{p}$ が極大イデアルなら $A/\mathfrak{p} \simeq A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$
(4) $\mathfrak{p}$ が極大イデアルなら，$\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \mathfrak{p}^n A_\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{p}^n$

Remark 0.6. A が環 B の部分環で $I \subset A$ がイデアルであるとき，I で生成された B のイデアルを IB とかく．$\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}$ で生成された $A_\mathfrak{p}$ のイデアル．

Remark 0.7. 局所化に付随する準同型 $\iota : A \hookrightarrow A_\mathfrak{p}$ によって $A \subset A_\mathfrak{p}$ と考えている．

Remark 0.8. (3) の $\bar{\iota}$ について．$\pi_1 : A \to A/\mathfrak{p}, \pi_2 : A_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ を自然な射影とする．$f := \pi_2 \circ \iota : A \to A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ と定義すると，f は準同型である．$a \in \mathfrak{p}$ とすると $\iota(a) \in \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ より $f(a) = (\pi_2 \circ \iota)(a) = 0$ である．よって $a \in \mathrm{Ker}\, f$ であり $\mathfrak{p} \subset \mathrm{Ker}\, f$ が従う．準同型定理により，準同型 $\bar{\iota} : A/\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ が存在して，$f = \bar{\iota} \circ \pi_1$ となる．

$$\begin{tikzcd}
A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\pi_2"] & A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \\
A \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[r, "\pi_1"'] & A/\mathfrak{p} \arrow[u, dashed, "\exists\bar{\iota}"']
\end{tikzcd}$$

Example 0.4. $(3) \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ は極大イデアルである．

(1) $\mathbb{Z}_{(3)}$ は $(3)\mathbb{Z}_{(3)} = \{n/m \mid n \in (3), m \in \mathbb{Z} \setminus (3)\}$ を極大イデアルとする局所環
(2) $(3)\mathbb{Z}_{(3)} \cap \mathbb{Z} = (3)$
(3) $\mathbb{Z}/(3) \simeq \mathbb{Z}_{(3)}/(3)\mathbb{Z}_{(3)}$
(4) $(3^n)\mathbb{Z}_{(3)} \cap \mathbb{Z} = \{n/m \mid n \in (3^n), m \in \mathbb{Z} \setminus (3)\} \cap \mathbb{Z} = (3^n)$

Proof. (1) $S := A \setminus \mathfrak{p}$ とおく．$a/s \in A_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} (a \in A, s \in S)$ とすると，$a \notin \mathfrak{p}$．よって $a \in S$ なので $a/s \in (A_{\mathfrak{p}})^{\times}$．したがって **Prop 0.3** により，$A_{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ を極大イデアルとする局所環.

(2) $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ と $\mathfrak{p} \subset A$ から $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cap A$ である．$a \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cap A$ とすると，$\exists b \in \mathfrak{p}, \exists s \in A \setminus \mathfrak{p}, a = b/s$．このとき $a, s \in A$ かつ $sa = b \in \mathfrak{p}$ であるが $s \notin \mathfrak{p}$ と $\mathfrak{p}$ が素イデアルであることから $a \in \mathfrak{p}$．よって $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cap A \subset \mathfrak{p}$

(3) *Remrk* 0.8 から $\iota : A \to A_{\mathfrak{p}}$ は準同型 $\bar{\iota} : A/\mathfrak{p} \to A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ を誘導する．$\bar{S} := (A/\mathfrak{p}) \setminus \{0\}$ の元は S の元で代表されていて，その $\bar{\iota}$ での行先は $A_{\mathfrak{p}}$ での単元なので $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ でも単元である．よって $\bar{\iota}(A_{\mathfrak{p}}) \subset (A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^{\times}$ である．したがって **Prop 0.2** を適用すると，準同型 $\psi : \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p}) = \bar{S}^{-1}(A/\mathfrak{p}) \to A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ が誘導される．$\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ は体なので ψ は単射．$a \in A, s \in S$ なら $\psi((a+\mathfrak{p})(s+\mathfrak{p})^{-1}) = a/s \mod \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ なので ψ は全射．よって ψ は同型.

(4) $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}}$ と $\mathfrak{p}^n \subset A$ から $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}}$ である．$a \in \mathfrak{p}^n, s \notin \mathfrak{p}$ で $b := a/s \in A$ とする．$\mathfrak{p}$ の極大性と $s \notin \mathfrak{p}$ から $\mathfrak{p} + (s) = A$ である．よって $\exists c \in \mathfrak{p}, \exists d \in A, c + ds = 1$ である．このとき，$\exists e \in A, 1 = (c+ds)^n = c^n + es$ であり，$bs = a$ なので，$b = bc^n + bes = bc^n + ae \in \mathfrak{p}^n$．したがって $\mathfrak{p}^n \supset \mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}}$

■

参考文献

[1] 雪江明彦,『整数論 1 初等整数論から p 進数へ』, 日本評論社，2013