テンソル積

2025 年 11 月 5 日

目次

1	双線型写像	2
2	テンソル積の定義	5
3	テンソル積の構成	8
4	準同型のテンソル積	11
5	テンソル積の性質	14
6	テンソル積関手	19

1 双線型写像

A を単位的可換環とする．[†1]

Def 1.1

A 加群 X, Y に対し，

$$\mathrm{Hom}_A(X,Y) := \{f\colon X \to Y \mid f\colon A \text{ 準同型}^{\dagger 2}\}$$

と定める．これは次の演算で A 加群となる．

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (af)(x) := af(x)$$

特に $Y = A$ のとき，

$$X^* := \mathrm{Hom}_A(X, A)$$

を X の**双対加群** (**dual module**) と云う．

Example 1.1. M を A 加群，$A^{\oplus m}$ を有限生成自由 A 加群とする．このとき，

$$\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$$

さらに，

$$\mathrm{Hom}_A(A^{\oplus m}, M) \cong \mathrm{Hom}_A(A, M)^{\oplus m} \cong M^{\oplus m}$$

($\because$) $\mathrm{Hom}_A(A, M) \to M,\ f \mapsto f(1)$ は A 同型．また $A^{\oplus m}$ の標準基底[†3]$\{e_j\}_{1 \leq j \leq m}$ を取れば，

$$\mathrm{Hom}_A(A^{\oplus m}, M) \to \mathrm{Hom}_A(A, M)^{\oplus m},\ f \mapsto (f_1, \cdots, f_m)$$

は A 同型．但し，$f_j : A \to M$ は $f_j(1) := f(e_j)$ で定める．前半と合わせると，

$$\mathrm{Hom}_A(A^{\oplus m}, M) \to M^{\oplus m},\ f \mapsto (f(e_1), \cdots, f(e_m))$$

は A 同型．

[†1] 可換を仮定しない場合は加群の左右を気にする必要があるが，今回は簡単のために可換環上で考える．
[†2] A 準同型を A 線型とも云う．
[†3] 標準基底以外の基底でもよい．

Def 1.2
X, Y, M を A 加群とする．$f\colon X \times Y \to M$ が

(1) 任意の $y \in Y$ に対し，$f(-, y) : X \to M,\ x \mapsto f(x, y)$ は A 準同型
(2) 任意の $x \in X$ に対し，$f(x, -) : Y \to M,\ y \mapsto f(x, y)$ は A 準同型

†4を充たすとき，f は A **双線型** (**A-bilinear**) であると云う．

$$B_A(X, Y; M) := \{f\colon X \times Y \to M \mid f\colon A \text{ 双線型}\}$$

と定める．これは次の演算で A 加群となる．

$$(f+g)(x, y) := f(x, y) + g(x, y), \quad (af)(x, y) := af(x, y)$$

Example 1.2. $\mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ 線型空間と考える．

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) := xy$$

は $\mathbb{R}$ 双線型であるが，$\mathbb{R}$ 線型ではない．一方，

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x, y) := x + y$$

は $\mathbb{R}$ 線型であるが，$\mathbb{R}$ 双線型ではない．

Remark 1.1. 有限生成自由 A 加群 $A^{\oplus m}, A^{\oplus n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ に対し，

$$\operatorname{rank} B_A(A^{\oplus m}, A^{\oplus n}; A) = mn = \operatorname{rank} A^{\oplus m} \operatorname{rank} A^{\oplus n}$$

$(\because)$ $A^{\oplus m}$ の基底 $\{x_i\}_{1 \le i \le m}$ と $A^{\oplus n}$ の基底 $\{y_j\}_{1 \le j \le n}$ を固定し，$f_{ij} \in B_A(A^{\oplus m}, A^{\oplus n}; A)$ を

$$f_{ij}(x_p, y_q) = \begin{cases} 1 & \text{if } (p, q) = (i, j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めると $\{f_{ij}\}_{1 \le j \le n}^{1 \le i \le m}$ は $B_A(A^{\oplus m}, A^{\oplus n}; A)$ の基底になる．

特に k が体，X, Y が有限次 k 線型空間のとき，†5

$$\dim B_k(X, Y; k) = \dim X \dim Y$$

†4 つまり，
(1) $\forall x_i \in X, \forall y \in Y, \forall a_i \in A,\ f(a_1x_1 + a_2x_2, y) = a_1 f(x_1, y) + a_2 f(x_2, y)$
(2) $\forall x \in X, \forall y_i \in Y, \forall a_i \in A,\ f(x, a_1y_1 + a_2y_2) = a_1 f(x, y_1) + a_2 f(x, y_2)$
†5 $X \cong k^{\oplus \dim X}, Y \cong k^{\oplus \dim Y}$

Prop 1.1

X, Y 及び M を A 加群とする．次の A 同型が成り立つ．

$$B_A(X,Y;M) \cong \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_A(Y,M))$$

Proof.

$$\Phi\colon B_A(X,Y;M) \to \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_A(Y,M))$$

$$f \mapsto [\Phi(f)\colon x \mapsto [f(x,-)\colon y \mapsto f(x,y)]]$$

とおくと，これは A 準同型である．また，

$$\Psi\colon \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_A(Y,M)) \to B_A(X,Y;M)$$

$$F \mapsto [\Psi(F)\colon (x,y) \mapsto F(x)(y)]$$

と定めると $\Psi^{-1} = \Phi$ である．

(∵) $f \in B_A(X,Y;M), (x,y) \in X \times Y$ に対し，

$$((\Psi \circ \Phi)(f))(x,y) = \Psi(\Phi(f))(x,y) = (\Phi(f)(x))(y) = f_x(y) = f(x,y)$$

$$\therefore (\Psi \circ \Phi)(f) = f \quad \therefore \Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{B_A(X,Y\colon M)}$$

また $F \in \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_A(Y,M)), (x,y) \in X \times Y$ に対し，

$$(\Phi \circ \Psi)(F)(x)(y) = \Phi(\Psi(F))(x)(y) = (\Psi(F)(x,-))(y) = F(x)(y)$$

$$\therefore (\Phi \circ \Psi)(F) = F \quad \therefore \Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(X,\mathrm{Hom}_A(Y,M))}$$

■

2　テンソル積の定義

Def 2.1
X, Y を A 加群とする．組 (T, ϕ) が次の (1),(2)[†6]を充たすとき，(T, ϕ) または T を X, Y の**テンソル積** (**tensor product**)，ϕ をテンソル積の**構造射** (**structure morphism**) と云う．

(1) T は A 加群，$\phi \in B_A(X, Y; T)$
(2) (S, ψ) も (1) を充たすとき，(つまり S は A 加群，$\psi \in B_A(X, Y; S)$ のとき)

$$\exists! f \in \mathrm{Hom}_A(T, S), \psi = f \circ \phi$$

Remark 2.1. (2) の条件式は次の図式を可換にすると云う意味である．

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", shift right=3ex] & \\
T \arrow[r, dashed, "\exists! f"'] & S
\end{tikzcd}$$

Prop 2.1 (テンソル積の一意性)
$(T_1, \phi_1), (T_2, \phi_2)$ が A 加群 X, Y のテンソル積であるとき，A 加群として

$$T_1 \cong T_2$$

つまりテンソル積は同型を除いて unique である．

Proof. (T_1, ϕ_1) の普遍性から，$\exists f \in \mathrm{Hom}_A(T_1, T_2)$，$\phi_2 = f \circ \phi_1$
また (T_2, ϕ_2) の普遍性から，$\exists g \in \mathrm{Hom}_A(T_2, T_1)$，$\phi_1 = g \circ \phi_2$

$$\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[dl, "\phi_1"'] \arrow[d, "\phi_2"] \arrow[dr, "\phi_1"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft", shift right=2ex] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", shift left=2ex] & \\
T_1 \arrow[r, dashed, "f"'] & T_2 \arrow[r, dashed, "g"'] & T_1
\end{tikzcd}$$

このとき，$g \circ f \in \mathrm{Hom}_A(T_1, T_1)$ は $(g \circ f) \circ \phi_1 = \phi_1$ を充たす．

[†6] この性質 (1)(2) をテンソル積の**普遍性** (**universality**) と云う．

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\phi_1"'] \arrow[dr, "\phi_1"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ T_1 \arrow[rr, dashed, "g \circ f"'] & & T_1 \end{tikzcd}$$

ところで，$\mathrm{id}_{T_1} \in \mathrm{Hom}_A(T_1, T_1)$ は $\phi_1 \circ \mathrm{id}_{T_1} = \phi_1$ を充たす．

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\phi_1"'] \arrow[dr, "\phi_1"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ T_1 \arrow[rr, dashed, "\mathrm{id}_{T_1}"'] & & T_1 \end{tikzcd}$$

よって (T_1, ϕ_1) の普遍性から，$g \circ f = \mathrm{id}_{T_1}$．
まったく同様の議論により，$f \circ g = \mathrm{id}_{T_2}$ が云えるので $f^{-1} = g$ を得る．以上より，

$$T_1 \cong T_2$$

■

Def 2.2
Prop 2.1 に基づいて，(T, ϕ) が A 加群 X, Y のテンソル積であるとき，T を $X \otimes_A Y$ または $X \otimes Y$ と表す．また $(x, y) \in X \times Y$ に対し，$\phi(x, y)$ を $x \otimes_A y$ または $x \otimes y$ と表す．

テンソル積の普遍性の意味を与えるのが次の命題である．

Prop 2.2
A 加群 X, Y, M に対し，

$$\mathrm{Hom}_A(X \otimes_A Y, M) \cong B_A(X, Y; M)$$

Proof. $(\because)$ $X \otimes_A Y$ の構造射を ϕ とする．

$$\Phi : \mathrm{Hom}_A(X \otimes_A Y, M) \to B_A(X, Y; M),\ f \mapsto f \circ \phi$$

とおくと，

$$\Phi \in \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(X \otimes_A Y, M), B_A(X, Y; M))$$

である．また，$\psi \in B_A(X, Y; M)$ に対して，$(X \otimes_A Y, \phi)$ の普遍性により，

$$\exists! \Psi(\psi) \in \mathrm{Hom}_A(X \otimes_A Y, M), \psi = \Psi(\psi) \circ \phi$$

である．これによって $\Psi : B_A(X,Y;M) \to \mathrm{Hom}_A(X \otimes_A Y, M)$ を定めると，

$$\Psi \in \mathrm{Hom}_A(B_A(X,Y;M), \mathrm{Hom}_A(X \otimes_A Y, M))$$

である．

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, dashed, "\Phi(f)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"'] & \\
X \otimes Y \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"'] & \\
X \otimes Y \arrow[r, dashed, "\Psi(\psi)"'] & M
\end{tikzcd}$$

このとき，$\Psi^{-1} = \Phi$ である．

> $f \in \mathrm{Hom}_A(X \otimes_A Y, M)$ に対し，
>
> $$(\Psi \circ \Phi)(f) \circ \phi = f \circ \phi$$
>
> だが uniqueness より $(\Psi \circ \Phi)(f) = f$．よって $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(X \otimes_A Y, M)}$．
> また $\psi \in B_A(X,Y;M)$ に対し，
>
> $$(\Phi \circ \Psi)(\psi) = \Psi(\psi) \circ \phi = \psi$$
>
> より $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{B_A(X,Y;M)}$．

■

Thm 2.1
[†7]A 加群 X, Y, M に対し，

$$\mathrm{Hom}_A(X \otimes_A Y, M) \cong \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_A(Y, M))$$

Proof. **Prop 1.1** と **Prop 2.2** を合わせて

$$\mathrm{Hom}_A(X \otimes_A Y, M) \cong B_A(X,Y;M) \cong \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_A(Y, M))$$

■

[†7] テンソル積関手は Hom 関手の左随伴であることを表す．

3　テンソル積の構成

Thm 3.1
任意の A 加群 X, Y に対し，テンソル積 $X \otimes_A Y$ が存在する．

Proof. $X \times Y$ を基底とする自由 A 加群を

$$F := \bigoplus_{(x,y)\in X\times Y} A(x,y) \cong A^{\oplus(X\times Y)}$$

とする．F の関係子の集合

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{(x_1+x_2,y)-(x_1,y)-(x_2,y) \mid x_1,x_2\in X, y\in Y\} \\ S_2 &:= \{(x,y_1+y_2)-(x,y_1)-(x,y_2) \mid x\in X, y_1,y_2\in Y\} \\ S_3 &:= \{(ax,y)-a(x,y), (x,ay)-a(x,y) \mid a\in A, x\in X, y\in Y\} \end{aligned}$$

で生成される A 加群を $R := \langle S_1\cup S_2\cup S_3\rangle$ とし，$T := F/R$ とおく．ここで，

$$\phi : X\times Y \to T,\ \phi(x,y) = (x,y)+R$$

とおくと，任意の $a\in A, x, x_1, x_2\in X, y, y_1, y_2\in Y$ に対し，

$$\begin{aligned} \phi(x_1+x_2,y) &= \phi(x_1,y)+\phi(x_2,y) \\ \phi(x,y_1+y_2) &= \phi(x,y_1)+\phi(x,y_2) \\ \phi(ax,y) &= a\phi(x,y) = \phi(x,ay) \end{aligned}$$

が成り立つ．これは ϕ が A 双線型であることを意味している．

(T,ϕ) がテンソル積の普遍性 (2) を充たすことを示す．A 加群 M と $\psi\in B_A(X,Y;M)$ に対し，$h\in \mathrm{Hom}_A(F,M)$ を，

$$h((x,y)) = \psi(x,y)$$

で定める．[†8] このとき，ψ の双線型性によって $h(S_i)=\{0\}$ $(i=1,2,3)$ であるから，$R\subset \operatorname{Ker} h$．よって A 準同型

$$f : T\to M,\ f((x,y)+R) = h((x,y)) = \psi(x,y)$$

が誘導され，$\psi = f\circ\phi$ である．

[†8] 基底 $X\times Y$ の各元の行き先を指定している．

$$
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[d, "\iota"] \arrow[dd, bend right, "\phi"'] \arrow[ddrr, "\psi"] & & \\
F \arrow[d, "\pi"] \arrow[drr, "h"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & & \\
T = F/R \arrow[rr, dashed, "\exists! f"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & & M
\end{tikzcd}
$$

一方，$\psi = f \circ \phi$ とすると，$f((x,y)+R) = \psi(x,y)$ を充たすのでこのような f は unique である． ■

Remark 3.1. $\pi\colon F \to X \otimes_A Y$ は全射なので $X \otimes_A Y$ の元は $\sum_i (x_i \otimes_A y_i)$ とかける．特に $\{x \otimes_A y\}_{(x,y)\in X\times Y}$ は $X \otimes_A Y$ の生成系である．

Prop 3.1

有限生成自由 A 加群 $A^{\oplus m}, A^{\oplus n}$ $(m,n \in \mathbb{N})$ に対し．

$$A^{\oplus m} \otimes_A A^{\oplus n} = A^{\oplus mn}$$

Proof. $A^{\oplus m}$ の基底 $\{x_i\}_{1\le i\le m}$，$A^{\oplus n}$ の基底 $\{y_j\}_{1\le j\le n}$，$A^{\oplus mn}$ の基底 $\{z_{ij}\}_{1\le j\le n}^{1\le i\le m}$ を固定し，$\phi\colon A^{\oplus m} \times A^{\oplus n} \to A^{\oplus mn}$ を $\phi(x_i, y_j) = z_{ij}$ を充たすように，

$$\phi\left(\sum_i a_i x_i, \sum_j b_j y_j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j z_{ij}$$

で定める．このとき ϕ は A 双線型である．

(∵) 第 1 成分の線型性のみ check する・

$$\begin{aligned}
\phi\left(\sum_i (a_i + a_i')x_i, \sum_j b_j y_j\right) &= \sum_{i,j}(a_i + a_i')b_j z_{ij} = \sum_{i,j} a_i b_j z_{ij} + \sum_{i,j} a_i' b_j z_{ij} \\
&= \phi\left(\sum_i a_i x_i, \sum_j b_j y_j\right) + \phi\left(\sum_i a_i' x_i, \sum_j b_j y_j\right)
\end{aligned}$$

$(A^{\oplus mn}, \phi)$ がテンソル積の普遍性 (2) を充たすことを示す．A 加群 M と A 双線型 $\psi\colon A^{\oplus m} \otimes_A A^{\oplus n} \to M$ に対し，A 準同型 $f\colon A^{\oplus mn} \to M$ を

$$f(z_{ij}) = \psi(x_i, y_j)$$

で定めると，$\psi = f \circ \phi$ である．

$$\begin{tikzcd}
A^{\oplus m} \times A^{\oplus n} \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "\circlearrowleft"] & \\
A^{\oplus mn} \arrow[r, dashed, "f"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(x_i, y_j) \arrow[d, mapsto, "\phi"'] \arrow[dr, mapsto, "\psi"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "\circlearrowleft"] & \\
z_{ij} \arrow[r, mapsto, "f"'] & \psi(x_i, y_j)
\end{tikzcd}$$

一方，$\psi = f \circ \phi$ とすると，$f(z_{ij}) = \psi(x_i, y_j)$ を充たすのでこのような f は unique である． ■

Remark 3.2. **Example 1.1** から A 加群 M に対し，

$$\mathrm{Hom}_A(A^{\oplus m}, M) \cong \mathrm{Hom}_A(A, M)^{\oplus m} \cong M^{\oplus m}$$

であるから，

$$\mathrm{Hom}_A(A^{\oplus m}, \mathrm{Hom}_A(A^{\oplus n}, M)) \cong (M^{\oplus n})^{\oplus m} \cong M^{\oplus mn} \cong \mathrm{Hom}_A(A^{\oplus mn}, M)$$

となり，**Prop 2.1** が check できる．

Cor 3.1

$A^{\oplus m}$ の基底 $\{x_i\}_{1 \le i \le m}$，$A^{\oplus n}$ の基底 $\{y_j\}_{1 \le j \le n}$ に対して，$\{x_i \otimes_A y_j\}_{1 \le j \le n}^{1 \le i \le m}$ は $A^{\oplus m} \otimes_A A^{\oplus n}$ の基底になる．特に，

$$\mathrm{rank}\, A^{\oplus m} \otimes_A A^{\oplus n} = mn = \mathrm{rank}\, A^{\oplus m}\, \mathrm{rank}\, A^{\oplus n}$$

Remark 3.3. k が体，X, Y が有限次 k 線型空間のとき，

$$\dim X \otimes_k Y = \dim X \dim Y$$

である．

4 準同型のテンソル積

Prop 4.1

X_1, X_2, Y_1, Y_2 を A 加群，$\phi_i : X_i \times Y_i \to X_i \otimes_A Y_i$ $(i = 1, 2)$ を構造射とする．$f \in \mathrm{Hom}_A(X_1, X_2), g \in \mathrm{Hom}_A(Y_1, Y_2)$ に対し，A 準同型

$$f \otimes_A g \colon X_1 \otimes_A Y_1 \to X_2 \otimes_A Y_2$$

であって，以下を可換にするものが unique に存在する．

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times Y_1 \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d, "\phi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_2 \times Y_2 \arrow[d, "\phi_2"] \\
X_1 \otimes_A Y_1 \arrow[r, dashed, "\exists! f \otimes_A g"'] & X_2 \otimes_A Y_2
\end{tikzcd}$$

Proof. まず $\phi_2 \circ (f \times g) \in B_A(X_1, Y_1; X_2 \otimes_A Y_2)$ である．

($\because$) まず第 1 成分について，

$$\begin{aligned}
\phi_2 \circ (f \times g)(a_1x_1 + a_2x_2, y) &= \phi_2(f(a_1x_1 + a_2x_2), g(y)) \\
&= \phi_2(a_1f(x_1) + a_2f(x_2), g(y)) \\
&= a_1\phi_2(f(x_1), g(y)) + a_2\phi_2(f(x_2), g(y)) \\
&= a_1\phi_2 \circ (f \times g)(x_1, y) + a_2\phi_2 \circ (f \times g)(x_2, y)
\end{aligned}$$

第 2 成分についても同様である．

よって $(X_1 \otimes_A Y_1, \phi_1)$ の普遍性より

$$\exists! h \in \mathrm{Hom}_A(X_1 \otimes_A Y_1, X_2 \otimes_A Y_2), \phi_2 \circ (f \times g) = h \circ \phi_1$$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times Y_1 \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d, "\phi_1"'] \arrow[dr] & X_2 \times Y_2 \arrow[d, "\phi_2"] \\
X_1 \otimes_A Y_1 \arrow[r, dashed, "\exists! h"'] & X_2 \otimes_A Y_2
\end{tikzcd}$$

一方，命題の図式を可換にする A 準同型 h は $(X_1 \otimes_A Y_1, \phi_1)$ の普遍性より unique である．よって $h = f \otimes_A g$ とすればよい． ■

Def 4.1

Prop 4.1 の $f \otimes_A g$ を f と g の**テンソル積**と云う.

Remark 4.1. $(x, y) \in X_1 \times Y_1$ に対し,

$$(f \otimes_A g)(x \otimes_A y) = f(x) \otimes_A g(x)$$

$$\begin{tikzcd}
(x, y) \arrow[r, mapsto, "f \times g"] \arrow[d, mapsto, "\phi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (f(x), g(y)) \arrow[d, mapsto, "\phi_2"] \\
x \otimes_A y \arrow[r, mapsto, "f \otimes_A g"'] & f(x) \otimes_A g(y)
\end{tikzcd}$$

Def 4.2

Prop 4.1 において $Y = Y_1 = Y_2$ のとき,

$$f \otimes_A Y := f \otimes_A \mathrm{id}_Y \in \mathrm{Hom}_A(X_1 \otimes_A Y, X_2 \otimes_A Y)$$

同様に $X = X_1 = X_2$ のとき,

$$X \otimes_A g := \mathrm{id}_X \otimes_A g \in \mathrm{Hom}_A(X \otimes_A Y_1, X \otimes_A Y_2)$$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times Y \arrow[r, "f \times \mathrm{id}_Y"] \arrow[d, "\phi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_2 \times Y \arrow[d, "\phi_2"] \\
X_1 \otimes_A Y \arrow[r, "f \otimes_A Y"'] & X_2 \otimes_A Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times Y_1 \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times g"] \arrow[d, "\phi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \times Y_2 \arrow[d, "\phi_2"] \\
X \otimes_A Y_1 \arrow[r, "X \otimes_A g"'] & X \otimes_A Y_2
\end{tikzcd}$$

Def 4.3

行列 $U=(u_{ij})\in M_{mn}(A), V=(v_{kl})\in M_{pq}(A)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
U\otimes V &:= \begin{pmatrix} u_{11}V & \cdots & u_{1n}V \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1}V & \cdots & u_{mn}V \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
u_{11}v_{11} & \cdots & u_{11}v_{1q} & \cdots & u_{1n}v_{11} & \cdots & u_{1n}v_{1q} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
u_{11}v_{p1} & \cdots & u_{11}v_{pq} & \cdots & u_{1n}v_{p1} & \cdots & u_{1n}v_{pq} \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
u_{m1}v_{11} & \cdots & u_{m1}v_{1q} & \cdots & u_{mn}v_{11} & \cdots & u_{mn}v_{1q} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
u_{m1}v_{p1} & \cdots & u_{m1}v_{pq} & \cdots & u_{mn}v_{p1} & \cdots & u_{mn}v_{pq}
\end{pmatrix} \in M_{mp,nq}(A)
\end{aligned}
$$

を U,V の **Kronecker 積** (**Kronecker product**) と云う.

Prop 4.2

有限生成自由 A 加群 $A^{\oplus m}, A^{\oplus n}, A^{\oplus p}, A^{\oplus q}$ に対し，それぞれ基底

$$\mathscr{X}=\{x_i\}_{1\le i\le m}, \mathscr{Y}=\{y_j\}_{1\le j\le n}, \mathscr{Z}=\{z_k\}_{1\le k\le p}, \mathscr{W}=\{w_l\}_{1\le l\le q}$$

を取る．$f\in \mathrm{Hom}_A(A^{\oplus m}, A^{\oplus n}), g\in \mathrm{Hom}_A(A^{\oplus p}, A^{\oplus q})$ に対し，$\mathscr{X},\mathscr{Y}$ に関する f の表現行列を U，$\mathscr{Z},\mathscr{W}$ に関する g の表現行列を V とする．つまり,

$$f(\mathscr{X})=\mathscr{Y}U,\ g(\mathscr{Z})=\mathscr{W}V$$

[†9] このとき,

$$(f\otimes g)(\mathscr{X}\otimes\mathscr{Z})=(\mathscr{Y}\otimes\mathscr{W})(U\otimes V)$$

つまり $f\otimes g$ の $\mathscr{X}\otimes\mathscr{Z},\mathscr{Y}\otimes\mathscr{W}$ に関する表現行列は $U\otimes V$．但し,

$$\mathscr{X}\otimes\mathscr{Z}:=\{x_1\otimes z_1,\cdots,x_1\otimes z_p,\cdots,x_m\otimes z_1,\cdots,x_m\otimes z_p\}$$

Proof. 書き下すことで次のように変形できる.

$$(f\otimes g)(\mathscr{X}\otimes\mathscr{Z})=f(\mathscr{X})\otimes g(\mathscr{Z})=(\mathscr{Y}U)\otimes(\mathscr{W}V)=(\mathscr{Y}\otimes\mathscr{W})(U\otimes V)$$

■

[†9] $f(\mathscr{X}):=\{f(x_i)\}_{1\le i\le m}$

5　テンソル積の性質

Prop 5.1
A 加群 X に対し，
$$A \otimes_A X \cong X$$

Proof. $\psi\colon A \times X \to X$ を $\psi(a,x) := ax$ で定めると，$\psi \in B_A(A,X;X)$ である．(X,ψ) が A と X のテンソル積の普遍性を充たすことを云う．A 加群 M と $\xi \in \mathrm{Hom}_A(A \times X, M)$ に対して，
$$f\colon X \to M,\ f(x) := \xi(1,x)$$
と定めれば，$f \in \mathrm{Hom}_A(X,M)$ であり，
$$f \circ \psi(a,x) = f(ax) = \xi(1,ax) = a\xi(1,x) = \xi(a,x)$$
より $f \circ \psi = \xi$ である．

ここで ψ は全射なので $f \circ \psi = \xi$ なる f は unique である．[†10]

よってテンソル積の uniqueness より $A \otimes_A X \cong X$． ■

$$\begin{tikzcd}
A \times X \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "\xi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", shift right=3ex] & \\
X \arrow[r, dashed, "\exists! f"'] & M
\end{tikzcd}$$

Prop 5.2
A 加群 X,Y に対し，
$$X \otimes_A Y \cong Y \otimes_A X$$

Proof. ϕ_1, ϕ_2 をそれぞれ $X \otimes_A Y, Y \otimes_A X$ の構造射とする．
$$f_1 : X \times Y \to Y \times X,\ (x,y) \mapsto (y,x)$$
$$f_2 : Y \times X \to X \times Y,\ (y,x) \mapsto (x,y)$$
とすると，
$$f_1 \in \mathrm{Hom}_A(X \times Y, Y \times X),\ f_2 \in \mathrm{Hom}_A(Y \times X, X \times Y)$$
であり，
$$f_2 \circ f_1 = \mathrm{id}_{X \times Y},\ f_1 \circ f_2 = \mathrm{id}_{Y \times X}$$

[†10] $f' : X \to M$ も $f' \circ \psi = \xi$ を充たすとすると，$f'(\psi(x)) = \xi(x) = f(\psi(x))$ だが，$\psi(x)$ が X 全体を走るので $f = f'$ を得る．

である．$\phi_2 \circ f_1 \in B_A(X, Y; Y \otimes_A X)$ より $(X \otimes_A Y, \phi_1)$ の普遍性から，

$$\exists ! g_1 \in \mathrm{Hom}_A(X \otimes_A Y, Y \otimes_A X), = \phi_2 \circ f_1 = g_1 \circ \phi_1$$

同様に $\phi_1 \circ f_2 \in B_A(Y, X; X \otimes_A Y)$ より $(Y \otimes_A X, \phi_2)$ の普遍性から，

$$\exists ! g_2 \in \mathrm{Hom}_A(Y \otimes_A X, X \otimes_A Y), = \phi_1 \circ f_2 = g_2 \circ \phi_2$$

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\phi_1"'] \arrow[dr] & Y \times X \arrow[r, "f_2(= f_1^{-1})"] \arrow[d, "\phi_2"] \arrow[dr] & X \times Y \arrow[d, "\phi_1"] \\
X \otimes_A Y \arrow[r, dashed, "\exists ! g_1"'] & Y \otimes_A X \arrow[r, dashed, "\exists ! g_2"'] & X \otimes_A Y
\end{tikzcd}$$

このとき次はそれぞれ可換である．

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "f_2 \circ f_1 (= \mathrm{id}_{X \times Y})"] \arrow[d, "\phi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \times Y \arrow[d, "\phi_1"] \\
X \otimes_A Y \arrow[r, "g_2 \circ g_1"'] & X \otimes_A Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\mathrm{id}_{X \times Y}"] \arrow[d, "\phi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \times Y \arrow[d, "\phi_1"] \\
X \otimes_A Y \arrow[r, "\mathrm{id}_{X \otimes_A Y}"'] & X \otimes_A Y
\end{tikzcd}$$

よって $(X \otimes_A Y, \phi_1)$ の普遍性から，$g_2 \circ g_1 = \mathrm{id}_{X \otimes_A Y}$ である．同様にして，$g_1 \circ g_2 = \mathrm{id}_{Y \otimes_A X}$ であり，$X \otimes_A Y \cong Y \otimes_A X$ を得る． ■

Def 5.1

$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を A 加群族，M を A 加群とする．$f : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to M$ は次を充たすときに A **多重線型** (A**-multilinear**) と云う；

任意の $\lambda_0 \in \Lambda$ と固定された元族 $\{x_\lambda\}_{\lambda \neq \lambda_0} \in \prod_{\lambda \neq \lambda_0} X_\lambda$ に対して，

$$f(\{x_\lambda\}_{\lambda \neq \lambda_0}, -) \colon X_{\lambda_0} \to M,\ x_{\lambda_0} \mapsto f\left((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\right)$$

は A 準同型．特に $\Lambda = \{1, \cdots, n\}$ のとき，A-n **重線型** (A-n**-linear**)[†11] と云う．

$$\mathrm{Mult}_A(\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}; M) := \{f \colon X \times Y \to M \mid f \colon A \text{ 多重線型}\}$$

と定める．これは次の演算で A 加群となる．

$$(f + g)(\{x_\lambda\}) := f(\{x_\lambda\}) + g(\{x_\lambda\}), \quad (af)(\{x_\lambda\}) := af(\{x_\lambda\})$$

Def 5.2

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A 加群族とする．組 (T,ϕ) が次の (1),(2) を充たすとき，(T,ϕ) または T を $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**テンソル積**，ϕ をテンソル積の**構造射**と云う．

(1) T は A 加群，$\phi \in \mathrm{Mult}_A(\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda};T)$

(2) (S,ψ) も (1) を充たすとき，(つまり S は A 加群，$\psi \in \mathrm{Mult}_A(\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda};S)$ のとき)

$$\exists! f \in \mathrm{Hom}_A(T,S), \psi = f\circ\phi$$

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"'] & \\
T \arrow[r, dashed, "\exists! f"'] & S
\end{tikzcd}$$

2 つの場合と同様にして，テンソル積は同型を除いて unique に存在することが示せる．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ のテンソル積を $\bigotimes_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ と表す．特に $\Lambda = \{1,\cdots,n\}$ のとき，$X_1 \otimes_A \cdots \otimes_A X_n$ とも表す．

Prop 5.3

A 加群 X,Y,Z に対し，

$$(X\otimes_A Y)\otimes_A Z \cong X\otimes_A (Y\otimes_A Z)$$

Proof. テンソル積と構造射の組を $(X\otimes_A Y,\phi_1),(X\otimes_A Y\otimes_A Z,\phi),((X\otimes_A Y)\otimes_A Z,\widetilde{\phi}_2)$ とする．$\widetilde{\phi}_2\circ(\phi_1\times \mathrm{id}_Z) \in \mathrm{Mult}_A(X,Y,Z;(X\otimes_A Y)\otimes_A Z)$ であるから $(X\otimes_A Y\otimes_A Z,\phi)$ の普遍性により，

$$\exists! f \in \mathrm{Hom}_A(X\otimes_A Y\otimes_A Z,(X\otimes_A Y)\otimes_A Z), \widetilde{\phi}_2\circ(\phi_1\times\mathrm{id}_Z) = f\circ\phi$$

また，$\psi\colon (X\otimes_A Y)\times Z \to X\otimes_A Y\otimes_A Z$ を $(x\otimes_A y,z)\mapsto x\otimes_A y\otimes_A z$ を充たすように，

$$\psi\left(\sum_i (x_i\otimes_A y_i), z\right) = \sum_i x_i\otimes_A y_i\otimes_A z$$

と定めると $\psi \in B_A((X\otimes_A Y)\times Z, X\otimes_A Y\otimes_A Z)$ である．$((X\otimes_A Y)\otimes_A Z,\widetilde{\phi}_2)$ の普遍性により，

$$\exists! g \in \mathrm{Hom}_A((X\otimes_A Y)\otimes_A Z, X\otimes_A Y\otimes_A Z), \psi = g\circ\widetilde{\phi}_2$$

ここで $\phi = \psi\circ\widetilde{\phi}_2$ であることに注意すると次の図式は可換である．

[†11] 2 重線型は双線型，1 重線型は準同型 (線型) である．

$$
\begin{tikzcd}
X \times Y \times Z \arrow[r, "\phi_1 \times \mathrm{id}_Z"] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr] & (X \otimes_A Y) \times Z \arrow[d, "\widetilde{\phi}_2"] \arrow[dr, "\psi"] & X \times Y \times Z \arrow[l, "\phi_1 \times \mathrm{id}_Z"'] \arrow[d, "\phi"] \\
X \otimes_A Y \otimes_A Z \arrow[r, dashed, "\exists! f"'] & (X \otimes_A Y) \otimes_A Z \arrow[r, dashed, "\exists! g"'] & X \otimes_A Y \otimes_A Z
\end{tikzcd}
$$

このとき次はそれぞれ可換である.

$$
\begin{tikzcd}
X \times Y \times Z \arrow[r, "\mathrm{id}_{X\times Y\times Z}"] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \times Y \times Z \arrow[d, "\phi"] \\
X \otimes_A Y \otimes_A Z \arrow[r, "g \circ f"'] & X \otimes_A Y \otimes_A Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times Y \times Z \arrow[r, "\mathrm{id}_{X\times Y\times Z}"] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \times Y \times Z \arrow[d, "\phi"] \\
X \otimes_A Y \otimes_A Z \arrow[r, "\mathrm{id}_{X\otimes_A Y\otimes_A Z}"'] & X \otimes_A Y \otimes_A Z
\end{tikzcd}
$$

よって $(X \otimes_A Y \otimes_A Z, \phi)$ の普遍性から，$g \circ f = \mathrm{id}_{X\otimes_A Y\otimes_A Z}$ である．同様にして，$f \circ g = \mathrm{id}_{Y\otimes_A X\otimes_A Z}$ であり，$X \otimes_A Y \otimes_A Z \cong (X \otimes_A Y) \otimes_A Z$ を得る．さらに同様にして，$X \otimes_A Y \otimes_A Z \cong X \otimes_A (Y \otimes_A Z)$ も得られ,

$$X \otimes_A (Y \otimes_A Z) \cong X \otimes_A Y \otimes_A Z \cong X \otimes_A (Y \otimes_A Z)$$

■

Prop 5.4

A 加群族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と A 加群 Y に対して,

$$\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \otimes_A Y \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda \otimes_A Y)$$

Proof. $\mu \in \Lambda$ とする．$\iota_\mu : X_\mu \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を自然な包含，つまり,

$$\iota_\mu(x)_\lambda = \begin{cases} x & (\lambda = \mu), \\ 0 & (\lambda \neq \mu). \end{cases}$$

とする．テンソル積と構造射の組を $(X_\mu \otimes_A Y, \phi_\mu), (\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \otimes_A Y, \phi)$ とする.

$$\phi \circ (\iota_\mu \times \mathrm{id}_Y) \in B_A(X, Y; \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \otimes_A Y)$$

であるから $(X_\mu \otimes_A Y, \phi_\mu)$ の普遍性より，

$$\exists! f_\mu \in \mathrm{Hom}_A(X_\mu \otimes_A Y, \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \otimes_A Y), \phi \circ (\iota_\mu \times \mathrm{id}_Y) = f_\mu \circ \phi_\lambda$$

$$\begin{tikzcd}
X_\mu \times Y \arrow[r, "\iota_\mu \times \mathrm{id}_Y"] \arrow[d, "\phi_\mu"'] \arrow[dr] \arrow[dr, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowright"] \arrow[dr, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowright"] & \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \times Y \arrow[d, "\phi"] \\
X_\mu \otimes_A Y \arrow[r, dashed, "\exists! f_\mu"'] & \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \otimes_A Y
\end{tikzcd}$$

$\left(\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \otimes_A Y, \{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ が $\{X_\lambda \otimes_A Y\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直和の普遍性[†12]を充たすことを示す.

A 加群 M と A 準同型族 $\{g_\lambda \colon X_\lambda \otimes_A Y \to M\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\Phi\colon \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \otimes_A Y \to M$ を

$$\forall \mu \in \Lambda, \forall x \in X_\mu, \forall y \in Y, \Phi(\iota_\mu(x) \otimes_A y) = g_\mu(x \otimes y)$$

を充たすように

$$\Phi\left(\{x_\lambda\}_\lambda \otimes_A y\right) := \sum_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda(x_\lambda \otimes_A y)$$

$$\Phi\left(\sum_i \left(\{x^i_\lambda\}_\lambda \otimes_A y^i\right)\right) := \sum_i \sum_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda(x^i_\lambda \otimes_A y^i)$$

と定めると, [†13]

$$\Phi \in \mathrm{Hom}_A(\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \otimes_A Y, M)$$

であり，$g_\mu = \Phi \circ f_\mu$.

$$\begin{tikzcd}
X_\mu \otimes_A Y \arrow[d, "f_\mu"'] \arrow[dr, "g_\mu"] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowright"] & \\
\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \otimes_A Y \arrow[r, dashed, "\Phi"'] & M
\end{tikzcd}$$

またこのような Φ は構成から unique であることがあることがわかる.

よって直和の普遍性が check でき，$\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) \otimes_A Y \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda \otimes_A Y)$ を得る.

■

[†13] $\{x_\lambda\}_\lambda$ は直和の元なので x_λ は有限個を除いて 0 であり，右辺の和は有限和であることに注意されたい.

[†13] 組 $(X, \{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ が A 加群族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直和の普遍性を充たすとは,

6　テンソル積関手

Def 6.1

A-**Mod** は A 加群を対象，A 準同型を射とする圏とする．

Remark 6.1. X が A 加群であることを $X \in A$-**Mod** で表すことにする．

Def 6.2

$M \in A$-**Mod** とする．$T_M = - \otimes_A M\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ を

$$\begin{array}{ll} X \in A\text{-}\mathbf{Mod} \text{ に対し，} & T_M(X) := X \otimes_A M \\ f \in \mathrm{Hom}_A(X_1, X_2) \text{ に対し，} & T_M(f) := f \otimes_A M \in \mathrm{Hom}_A(T_M(X_1), T_M(X_2)) \end{array}$$

で定義する．

$$\begin{tikzcd} A\text{-}\mathbf{Mod} \arrow[d, "T_M"'] & X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, mapsto, "T_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_2 \arrow[d, mapsto, "T_M"] \\ A\text{-}\mathbf{Mod} & X_1 \otimes_A M \arrow[r, "f \otimes_A M"'] & X_2 \otimes_A M \end{tikzcd}$$

Thm 6.1

$M \in A$-**Mod** に対し，$T_M = - \otimes_A M\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ は関手である．つまり，

(1) $T_M(g \circ f) = T_M(g) \circ T_M(f)$

(2) $T_M(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{T_M(X)}$

(1) X は A 加群，$\forall \lambda \in \Lambda, f_\lambda \in \mathrm{Hom}_A(X_\lambda, X)$

(2) $(M, \{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ が (1) を充たすとき，

$$\exists! \Phi \in \mathrm{Hom}_A(X, M), \forall \lambda \in \Lambda, g_\lambda = \Phi \circ f_\lambda$$

を充たすことを云う．このとき，$X \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ である．

$$\begin{tikzcd}
A\text{-}\mathbf{Mod} \arrow[d, "T_M"'] & X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[d, mapsto, "T_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, mapsto, "T_M"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_3 \arrow[d, mapsto, "T_M"] \\
A\text{-}\mathbf{Mod} & X_1 \otimes_A M \arrow[r, "f \otimes_A M"'] \arrow[rr, bend right, "(g \circ f) \otimes_A M"'] & X_2 \otimes_A M \arrow[r, "g \otimes_A M"'] & X_3 \otimes_A M
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A\text{-}\mathbf{Mod} \arrow[d, "T_M"'] & X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, mapsto, "T_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, mapsto, "T_M"] \\
A\text{-}\mathbf{Mod} & X \otimes_A M \arrow[r, "\mathrm{id}_X \otimes_A M"'] & X \otimes_A M
\end{tikzcd}$$

Proof. 　(1) A-**Mod** において $X_1 \xrightarrow{f} X_2 \xrightarrow{g} X_3$ とする．ϕ_i $(i = 1, 2, 3)$ を $X_i \otimes_A M$ の構造射とする．次の図式はそれぞれ可換である．

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times M \arrow[r, "(g \times \mathrm{id}_M) \circ (f \times \mathrm{id}_M)"] \arrow[d, "\phi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_3 \times M \arrow[d, "\phi_3"] \\
X_1 \otimes_A M \arrow[r, "(g \otimes_A M) \circ (f \otimes_A M)"'] & X_3 \otimes_A M
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times M \arrow[r, "(g \circ f) \times \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\phi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_3 \times M \arrow[d, "\phi_3"] \\
X_1 \otimes_A M \arrow[r, "(g \circ f) \otimes_A M"'] & X_3 \otimes_A M
\end{tikzcd}$$

$(g \circ f) \times \mathrm{id}_M = (g \times \mathrm{id}_M) \circ (f \times \mathrm{id}_M)$ であるから，**Prop 4.1** より，

$$T_M(g \circ f) = (g \circ f) \otimes_A M = (g \otimes_A M) \circ (f \otimes_A M) = T_M(g) \circ T_M(f)$$

(2) $X \in A$-**Mod**, ϕ を $X \otimes_A M$ の構造射とする．次の図式はそれぞれ可換である．

$$
\begin{tikzcd}
X \times M \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \times M \arrow[d, "\phi"] \\
X \otimes_A M \arrow[r, "\mathrm{id}_X \otimes_A M"'] & X \otimes_A M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times M \arrow[r, "\mathrm{id}_{X \times M}"] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \times M \arrow[d, "\phi"] \\
X \otimes_A M \arrow[r, "\mathrm{id}_{X \otimes_A M}"'] & X \otimes_A M
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{id}_X \times \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{X \times M}$ であるから，**Prop 4.1** より，

$$T_M(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X \otimes_A \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{X \otimes_A M} = \mathrm{id}_{T_M(X \times M)}$$

■

Remark 6.2. 同様にして関手 $M \otimes_A -\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ も定義される．これらを**テンソル積関手**と云う．

Thm 6.2

$M \in A\text{-}\mathbf{Mod}$ とする．$H_M = \mathrm{Hom}_A(M, -)\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ を

$X \in A\text{-}\mathbf{Mod}$ に対し，　$H_M(X) := \mathrm{Hom}_A(M, X)$
$f \in \mathrm{Hom}_A(X_1, X_2)$ に対し，　$H_M(f) := \mathrm{Hom}_A(M, f) \in \mathrm{Hom}_A(H_M(X_1), H_M(X_2))$

で定義するとこれは共変関手となる．(**Hom 関手**）但し，

$$\mathrm{Hom}_A(M, f)\colon \mathrm{Hom}_A(M, X_1) \to \mathrm{Hom}_A(M, X_2),\ g \mapsto f \circ g$$

$$
\begin{tikzcd}
A\text{-}\mathbf{Mod} \arrow[d, "H_M"'] & X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, mapsto, "H_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_2 \arrow[d, mapsto, "H_M"] \\
A\text{-}\mathbf{Mod} & \mathrm{Hom}_A(M, X_1) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(M, f)"'] & \mathrm{Hom}_A(M, X_2)
\end{tikzcd}
$$

Remark 6.3. 一般の (locally small な) 圏 $\mathcal{C}$ において Hom 関手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, -)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ が定義される．また同様にして $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, y)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ も定義されるが，こちらは反変関手[†14]になる．テンソル積関手 $- \otimes_A M, M \otimes_A -$ は Hom 関手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, -), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, y)$ と異なり両側とも共変関手である．

[†14] $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が反変関手であるとは，$F \circ -^{\mathrm{op}}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ が (共変) 関手であることを云う．

Thm 6.3
$M \in A$-**Mod** とする．テンソル積関手 T_M は H_M の左随伴関手[†15]，つまり $T_M \dashv H_M$.

Proof. **Thm 2.1** より，$X, Y \in A$-**Mod** に対し，

$$\mathrm{Hom}_A(X \otimes_A M, Y) \cong \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_A(M, Y))$$

つまり A 同型

$$\Phi_{XY} \colon \mathrm{Hom}_A(T_M(X), Y) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_A(X, H_M(Y))$$

が存在する．これは圏論的に自然な全単射であり，$T_M \dashv H_M$. ■

[†15] $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏，$F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を関手とする．F が G の**左随伴関手 (left adjoint)**（$F \dashv G$）とは，任意の $x \in \mathcal{C}, y \in \mathcal{D}$ に対し，自然な全単射

$$\Phi_{xy} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), y) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, G(y))$$

が存在することを云う．ここで全単射 Φ_{xy} が自然とは，

$$\Phi_{x-} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), -) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, G(-))$$
$$\Phi_{-y} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), y) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(y))$$

がそれぞれ自然変換になっていることを云う．

参考文献

[1] 特別編：テンソル積をつくる, 龍孫江, YouTube Playlist, 2020-. https://www.youtube.com/playlist?list=PLqz5clrDaQm_6pvth_h-JNJx3E_A-whve（2025 年 9 月 2 日閲覧）.

[2] 現代基礎数学 16 圏と加群，清水勇二，朝倉書店，2018.

[3] 代数学 2 環と加群とガロア理論 [第 2 版]，雪江明彦，2023.

[4] 代数学Ⅱ 環上の加群，桂利行，東京大学出版会，2007.