$(N+1)$ 項間漸化式を解く

[記号]

・$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$

・数列 $\boldsymbol{a}$ の第 n 項を $(\boldsymbol{a})_n$ とかく．$\boldsymbol{a}=\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ なら $(\boldsymbol{a})_n=a_n$

・線型写像 $f:V\to W$ と V の基底 $\mathcal{B}=(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_N)$ に対し，$f(\mathcal{B}):=\big(f(\boldsymbol{b}_1),\cdots,f(\boldsymbol{b}_N)\big)$

[問題]

$N\in\mathbf{N}$ を固定する．

複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ の $N+1$ 項目以降が，$(N+1)$ 項間漸化式

$$a_{n+N}=\sum_{k=1}^{N}p_k a_{n+k-1}$$

$$(\forall k\in\{1,\cdots,N\}:p_k\in\mathbf{C},p_k=\mathrm{const.})$$

で定義されるとする．但し，N 次方程式

$$\lambda^N-\sum_{k=1}^{N}p_k\lambda^{k-1}=0$$

が全て異なる複素数解を持つと仮定する．（この方程式を特性方程式という．）

このとき $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ の一般項 $a_n(n\geq N+1)$ を $a_1,\cdots,a_N$ の式で表せ．

[結論]

特性方程式の N 個の解を

$$\gamma_j\in\mathbf{C},\qquad j\in\{1,\cdots,N\}$$

とおく． N 次正方行列 $P\in\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ を

$$P=(\gamma_j^{i-1})_{i,j=1,\cdots,N}=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \gamma_1&\cdots&\gamma_N\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \gamma_1^{N-1}&\cdots&\gamma_N^{N-1}\end{pmatrix}$$

とおくと，一般項 a_n $(n\geq N+1)$ は，

$$\boxed{a_n=(\gamma_1^{n-1}\quad\cdots\quad\gamma_N^{n-1})\ P^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_N\end{pmatrix}}$$

とかける．特に，

$$\boxed{\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}\in\mathrm{Span}\{\{\gamma_1^{n-1}\}_{n\in\mathbf{N}},\cdots,\{\gamma_N^{n-1}\}_{n\in\mathbf{N}}\}}$$

が成り立つ．

[証明]

$\mathbf{C}$ 線型空間 $V := \mathbf{C}^{\mathbf{N}} := \{\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} : a_n \in \mathbf{C}\ (\forall n \in \mathbf{N})\}$ の N 次元部分空間 W を,

$$W = \left\{\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} : a_{n+N} = \sum_{k=1}^{N} p_k a_{n+k-1}\right\}$$

で定める．W の基底 $\mathcal{E} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_N)$ を,

$$\boldsymbol{e}_j = \left(0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \cdots, \underbrace{0}_{N}, p_j, \cdots\right) \in W$$

で定める．実際にこれが基底であることは，$\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_N, a_{N+1}, \cdots) \in W$ に対して,

$$\boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^{N} a_j \boldsymbol{e}_j$$

と 1 通りにかけることからわかる．線型変換 $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(W)$ を,

$$f(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}) = \{a_{n+1}\}_{n\in\mathbf{N}} = (a_2, a_3, \cdots)$$

と定めると,

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \left(0, \cdots, 0, \underbrace{p_1}_{N}, \cdots\right)$$

$$f(\boldsymbol{e}_j) = \left(0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{j-1}, 0, \cdots, 0, \underbrace{p_j}_{N}, \cdots\right) (j \geq 2)$$

であるから，$\mathcal{E}$ に関する表現行列 A は,

$$f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_N \end{pmatrix} = \mathcal{E}A, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_N \end{pmatrix}$$

である．A を対角化する．A の固有多項式

$$F_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & \cdots & \lambda - p_N \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -p_2 & -p_3 & \cdots & \lambda - p_N \end{vmatrix} + (-1)^{N+1}(-p_1)\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}}_{N-1}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -p_2 & -p_3 & \cdots & \lambda - p_N \end{vmatrix} - p_1 = \lambda(\lambda(\cdots(\lambda(\lambda - p_N) - p_{N-1})\cdots) - p_2) - p_1$$

$$= \lambda^N - \sum_{k=1}^{N} p_k \lambda^{k-1}$$

の相異なる N 個の複素数根を

$$\gamma_j \in \mathbf{C}, \qquad j \in \{1, \cdots, N\}$$

とおく．（根が全て異なることは仮定.）

以降 $j \in \{1, \cdots, N\}$ とする．$\gamma_j E - A$ を簡約化する．

$$\gamma_j E - A = \begin{pmatrix} \gamma_j & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_j & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_j & -1 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & \cdots & -p_{N-1} & \gamma_j - p_N \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \gamma_j & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_j & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_j & -1 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & \cdots & \gamma_j(\gamma_j - p_N) - p_{N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \cdots \to \begin{pmatrix} \gamma_j & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_j & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_j & -1 \\ \gamma_j(\gamma_j(\cdots(\gamma_j(\gamma_j - p_N) - p_{N-1})\cdots) - p_2) - p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \gamma_j & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_j & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_j & -1 \\ {\gamma_j}^N - \displaystyle\sum_{k=1}^{N} p_k {\gamma_j}^{k-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \gamma_j & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_j & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_j & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，A の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_j = (x_{1j}, \cdots, x_{Nj})^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}^N$ は，

$$\begin{cases} \gamma_j x_{1j} - x_{2j} = 0 \\ \qquad \vdots \\ \gamma_j x_{N-1,j} - x_{Nj} = 0 \end{cases}, \qquad \therefore \boldsymbol{x}_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_j \\ \gamma_j^2 \\ \vdots \\ \gamma_j^{N-1} \end{pmatrix}$$

である．よって，

$$P = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) = (\gamma_j^{i-1})_{i,j=1,\cdots,N} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1^{N-1} & \cdots & \gamma_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

とおくと，$A\boldsymbol{x}_j = \gamma_j \boldsymbol{x}_j$ より，

$$AP = P\mathit{\Gamma}, \qquad \mathit{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \gamma_N \end{pmatrix}$$

W の基底 $\mathcal{F} = (\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_N) \coloneqq (\boldsymbol{e}_1 P, \cdots, \boldsymbol{e}_N P) = \mathcal{E}P$ を取り直すと，

$$f(\mathcal{F}) = f(\mathcal{E}P) = f(\mathcal{E})P = \mathcal{E}AP = \mathcal{E}P\varGamma = \mathcal{F}\varGamma$$

が成り立つので，

$$f(\boldsymbol{f}_j) = \gamma_j \boldsymbol{f}_j$$

つまり，

$$f\big((a_1, a_2, \cdots)\big) = (a_2, a_3, \cdots) = \gamma_j (a_1, a_2, \cdots)$$

である．$(\boldsymbol{f}_j)_1 = 1$ （$\boldsymbol{f}_j$ の初項=1）に注意すると，

$$(\boldsymbol{f}_j)_n = \gamma_j (\boldsymbol{f}_j)_{n-1} = \gamma_j^{n-1}, \qquad \therefore \boldsymbol{f}_j = \{\gamma_j^{n-1}\}_{n \in \mathbf{N}}$$

以上から， $\boldsymbol{a} \in W$ に対して，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \sum_{j=1}^{N} a_j \boldsymbol{e}_j = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_N) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \mathcal{F} P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_N) P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = (\{\gamma_1^{n-1}\}_{n \in \mathbf{N}}, \cdots, \{\gamma_N^{n-1}\}_{n \in \mathbf{N}}) P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，

$$a_n = \begin{pmatrix} \gamma_1^{n-1} & \cdots & \gamma_N^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \ \blacksquare$$

[例]

三項間漸化式 $a_{n+2} = p_2 a_{n+1} + p_1 a_n \ (p_2^2 + 4p_1 \neq 0)$

特性方程式とその解は，

$$\lambda^2 - p_2 \lambda - p_1 = 0, \qquad \gamma_1 = \frac{p_2 + \sqrt{p_2^2 + 4p_1}}{2}, \qquad \gamma_2 = \frac{p_2 - \sqrt{p_2^2 + 4p_1}}{2}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \begin{pmatrix} \gamma_2 & -1 \\ -\gamma_1 & 1 \end{pmatrix}$$

一般項は，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \begin{pmatrix} \gamma_1^{n-1} & \gamma_2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2 & -1 \\ -\gamma_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{a_1 \gamma_2 - a_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \gamma_1^{n-1} - \frac{a_1 \gamma_1 - a_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \gamma_2^{n-1} \end{aligned}$$