# Leibniz の公式

2026 年 1 月 19 日

**Prop 0.1** (Leibniz の公式)
関数 $f, g$ が $n$ 回微分可能であるとき,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

*Proof.* 数学的帰納法による.
[1]$n = 1$ のとき,

$$(fg)' = \binom{1}{0} f' g + \binom{1}{1} f g'$$

であるから, $n = 1$ のとき成立する.
[2]$n = m$ のとき,

$$(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(m-k)} g^{(k)}$$

を仮定する. このとき $n = m + 1$ の場合を考える.

$$\begin{aligned}
(fg)^{(m+1)} &= \left\{ \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(m-k)} g^{(k)} \right\}' \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left\{ f^{(m-k)} g^{(k)} \right\}' \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left\{ f^{(m-k+1)} g^{(k)} + f^{(m-k)} g^{(k+1)} \right\} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(m-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(m-k)} g^{(k+1)} \\
&= \binom{m}{0} f^{(m+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} f^{(m-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} f^{(m-k)} g^{(k+1)} \\
&\quad + \binom{m}{m} f^{(0)} g^{(m+1)} \\
&= f^{(m+1)} g + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} f^{(m-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} f^{(m-k)} g^{(k+1)} + f g^{(m+1)}.
\end{aligned}$$

ここで $l = k + 1$ とおくと,

$$k = l - 1, \quad m - k = m + 1 - l$$

であるから,

$$(fg)^{(m+1)} = f^{(m+1)} g + \sum_{k=1}^{m} \left\{ \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right\} f^{(m+1-k)} g^{(k)} + f g^{(m+1)}.$$

ここで

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \frac{m!}{k!(m-k)!} + \frac{m!}{(k-1)!(m-k+1)!}$$
$$= \frac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!} = \binom{m+1}{k}$$

であるので,

$$(fg)^{(m+1)} = \binom{m+1}{0} f^{(m+1)} g + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} f^{(m+1-k)} g^{(k)} + \binom{m+1}{m+1} f^{(0)} g^{(m+1)}$$
$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} f^{(m+1-k)} g^{(k)}.$$

以上より，[1][2] から任意の自然数 $n$ について成立する． ■

*Remark* 0.1. $f^{(0)} = g^{(0)} = 1$ と約束すると公式は,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

という二項展開と似ている．