全ての公式は Stokes の定理である.

2025 年 11 月 9 日

目次

1　多様体

Def 1.1 (多様体)
M を第二可算公理を充たす Hausdorff 空間，$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を M の開被覆，$(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合族，$(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を同相写像 $\varphi_\lambda\colon U_\lambda \to V_\lambda$ の族とする．このとき，$\mathcal{D} := (U_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を**アトラス**，組 $(M, \mathcal{D})$ を n **次元多様体**という．また，各 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ を**局所チャート**，U_λ を**局所座標近傍**，φ_λ を**局所座標**という．局所チャート (U, φ) に対し，$\varphi = (x^1, \cdots, x^n)$ によって定まる U 上の関数 x^i を**局所座標関数**という．

Remark 1.1. Context judgement 可能な場合にはアトラスを省略して「多様体 M」などということがある．

Def 1.2 (局所コンパクト)
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が**局所コンパクト**であるとは任意の点 $p \in X$ に対し，そのコンパクト閉近傍が存在することをいう．

Remark 1.2. $\mathbb{R}^n$ の開集合は局所コンパクトである．（各点に対し充分小さい閉球がコンパクト閉近傍となる．）また多様体は局所的に $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相であるから局所コンパクトである．

Def 1.3 (局所有限とパラコンパクト)
$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$,$(V_\mu)_{\mu\in M}$ を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の開被覆とする．$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $(V_\mu)_{\mu\in M}$ の**細分**であるとは,

$$\forall\lambda \in \Lambda, \exists\mu \in M, U_\lambda \subset V_\mu$$

を充たすことである．位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が**局所有限**であるとは,任意の $x \in X$ に対して，X のある開近傍 V が存在して,

$$\#\{\lambda \in \Lambda \mid V \cap A_\lambda \neq \emptyset\} < \infty$$

となることをいう．位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が**パラコンパクト**であるとは任意の開被覆に対して局所有限な細分が存在することをいう．

Prop 1.1
第二可算かつ局所コンパクトな Hausdorff 空間はパラコンパクトである．

Remark 1.3. 多様体は第二可算かつ局所コンパクトな Hausdorff 空間であるからパラコンパクトである．Hausdorff 性とパラコンパクト性により後に定義される（局所近傍系に従属す

る）1 の分割の存在が保証される．

Def 1.4 (可微分多様体)
$(M,\mathcal{D})$ を n 次元多様体，$r \geq 0$ とする．$U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ のとき，座標変換関数

$$\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}|_{\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)} : \mathbb{R}^n \supset \varphi_\lambda(U_\lambda \cap\ U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap\ U_\mu) \subset \mathbb{R}^n$$

が C^r 級 $(r \geq 0)$ であるならば，$(M,\mathcal{D})$ を n **次元** C^r **多様体**という．
特に，C^0 多様体 $(r=0)$ を**位相多様体**，C^∞ 多様体 $(r=\infty)$ を**滑らかな多様体**，C^ω 多様体 $(r=\omega)$ を**解析的多様体**という．

Def 1.5 (C^r 写像)
M,N を C^∞ 多様体, $f: M \to N$ を連続写像とする. $p \in M$ の局所チャート (U^M,φ^M) と $f(p) \in N$ の局所チャート (U^N,φ^N) に対し，

$$\varphi^N \circ f \circ \left(\varphi^M\right)^{-1} : \varphi^M\left(U^M \cap f^{-1}\left(U^N\right)\right) \to \varphi^N\left(f\left(U^M\right) \cap U^N\right)$$

が点 $\varphi^M(p)$ において C^r 級であるとき，f は p で C^r 級であるという．f が M の各点で C^r 級であるとき，f を C^r **写像**という．特に M から $\mathbb{R}$ への C^r 写像を M 上の C^r **級関数**といい，その全体を $C^r(M)$ とかく．
また，$f: M \to N$ が全単射で，f, f^{-1} が共に C^r 写像であるとき，f を C^r **微分同相写像**という．さらに，M から N への C^r 微分同相写像が存在するとき，M と N は C^r **微分同相**であるという．

Remark 1.4. 座標変換が滑らかなのでこれは well-defined，つまり局所チャートの選び方に依らない．

Remark 1.5. $\mathbb{R}^n$ は $\mathcal{D} = (\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ をアトラスとする n 次元 C^ω 多様体と見なせる．特に $\mathbb{R}$ は $\mathcal{D} = (\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ をアトラスとする 1 次元 C^ω 多様体と見なせる．

Def 1.6 (接空間)
M を C^∞ 多様体とする．C^r 写像 $c: (a,b) \to M$ を M 上の C^r **曲線**という．$p \in M$ に対して，p を通る C^∞ 曲線 $c : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M, c(0) = p$ の全体を $\mathcal{C}^\infty_{M,p}$ とする．$c \in \mathcal{C}^\infty_{M,p}$ と p の局所座標近傍 U 上の関数 $f \in C^\infty(U)$ に対し，$f \circ c : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ であるから，

$$\left.\frac{d}{dt} f(c(t))\right|_{t=0}$$

が考えられる．$f \in C^\infty(U), c_1, c_2 \in \mathcal{C}^\infty_{M,p}$ に対し，関係 $\sim$ を

$$c_1 \sim c_2 :\Leftrightarrow \left.\frac{d}{dt} f(c_1(t))\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} f(c_2(t))\right|_{t=0}$$

と定めると，これは $\mathcal{C}^\infty_{M,p}$ 上の同値関係になる．１つの類 $[c] \in \mathcal{C}^\infty_{M,p}/\sim$ は,

$$v_c : f \mapsto \left.\frac{d}{dt} f(c(t))\right|_{t=0}$$

という $C^\infty(U)$ 上の微分作用素 v_c を定める．この微分作用素を p における c に沿った M の**接ベクトル**という（これは well-defined，つまり局所チャートの選び方に依らない）．$p \in M$ における接ベクトルの全体は自然な演算 ($\rightarrow$*Remark* 1.6) により実線型空間になる．これを p における M の**接空間**といい，T_pM とかく．$v \in T_pM$ に対して $v(f)$ を f の v に関する**方向微分**という．

Remark 1.6. 自然な演算とは以下で定める和とスカラ倍である．

$v_1, v_2 \in T_pM$ に対し，$v_i = v_{c_i}$ $(c_i \in \mathcal{C}^\infty_{M,p})$ とかける．そこで M 上の曲線 c_3 を

$$c_3(t) := \varphi^{-1}\left(\varphi(p) + \sum_{i=1}^{2}\{\varphi(c_i(t)) - \varphi(p)\}\right)$$

で定めると $c_3 \in \mathcal{C}^\infty_{M,p}$ である．このとき $v_1 + v_2 := v_{c_3}$ と定義する．

同様にして $v = v_c \in T_pM$ $(c \in \mathcal{C}^\infty_{M,p}), a \in \mathbb{R}$ に対し，M 上の曲線 c_4 を

$$c_4(t) := \varphi^{-1}\left(\varphi(p) + a\{\varphi(c(t)) - \varphi(p)\}\right)$$

で定めると $c_4 \in \mathcal{C}^\infty_{M,p}$ である．このとき $av := v_{c_4}$ と定義する．

これらは well-defined，つまり局所チャートの選び方に依らない．

Def 1.7 ($\dfrac{\partial}{\partial x^i}$)
M を C^∞ 多様体とする．$p \in M$ の局所チャート $(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^n))$ と関数 $f \in C^\infty(U)$ に対し，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p : f \mapsto \left(\frac{\partial\left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}$$

と定義する．このとき，M 上の曲線

$$c_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, c_i(t) := \varphi^{-1}\left(x^1(p), \cdots, x^i(p+t), \cdots, x^n(p)\right)$$

（この曲線 c_i を x^i **曲線**という．）に対して，

$$\left.\frac{d}{dt} f\left(c_i(t)\right)\right|_{t=0} = \left(\frac{\partial\left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}$$

であるから，$\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \in T_pM$ である．

Remark 1.7. $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ を $(\partial_i)_p$ とかくこともある．

Prop 1.2 (自然基底)
$\left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \left(\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right\}$ は T_pM の基底になる．これを (U, φ) の p における**自然基底**という．

Proof.（線型独立性）$\displaystyle\sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)} = 0$ としよう．このとき，加法とスカラ倍の定義により，

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\left(\sum_{i=1}^n a^i \left(\varphi \circ c_i\right)(t)\right)\right)\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)\right)_p$$

ここで $f = x^j$ とすると左辺は，

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\left(x^j \circ \varphi^{-1}\right)\left(\sum_{i=1}^n a^i \left(\varphi \circ c_i\right)(t)\right)\right)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\left(a^j\left(x^j + t\right)\right)\right|_{t=0} = a^j \ (\forall j)$$

また右辺は仮定から 0 なので，$a^j = 0 \ (\forall j)$

（生成性）$[c] \in \mathcal{C}^{\infty}_{M,p}/\sim$ が定める接ベクトル $v_c \in T_pM$ は，

$$\begin{aligned} v_c(f) &= \left.\frac{d}{dt} f\left(c(t)\right)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\left(\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\circ(\varphi\circ c)\right)(t)\right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)} \left.\frac{d(x^i\circ c)}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}\left.\frac{d(x^i\circ c)}{dt}\right|_{t=0}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) \end{aligned}$$

$$\therefore v_c = \sum_{i=1}^{n}\left.\frac{d(x^i\circ c)}{dt}\right|_{t=0}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \in \mathrm{Span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right\}$$

■

Remark 1.8. この式から接ベクトルの速度ベクトル的なイメージを抱かれたい．

$$v_c = \sum_{i=1}^{n}\left.\frac{d(x^i\circ c)}{dt}\right|_{t=0}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

Prop 1.3 (自然基底の変換則)
$(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^n)), (V, \psi = (y^1, \cdots, y^n))$ を p の局所チャートとすると，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial(y^j\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p$$

Proof. 生成性の証明の式から，

$$\left.\frac{d}{dt} f\left(c(t)\right)\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n}\left.\frac{d(y^j\circ c)}{dt}\right|_{t=0}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p (f)$$

において，x^i 曲線 $c_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, c_i(t) := \varphi^{-1}\left(x^1(p), \cdots, x^i(p+t), \cdots, x^n(p)\right)$ を用いて，

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) &= \left.\frac{d}{dt} f\left(c_i(t)\right)\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n}\left.\frac{d(y^j\circ c_i)}{dt}\right|_{t=0}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p (f) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left(\left(y^j\circ\varphi^{-1}\right)\left(x^1(p), \cdots, x^i(p)+t, \cdots, x^n(p)\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p (f) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\left(y^j\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p (f) \end{aligned}$$

■

2　テンソル

この § では K を体，V を n 次元 K 線型空間（n は有限）とする．また，**Einstein の縮約記法**を採用する．

Def 2.1 (双対空間)

$$V^* := \{f : V \to K \mid f \text{ is linear}\}\,(= \mathrm{Hom}_K(V, K))$$

は次の加法とスカラ倍により K 線型空間となる．

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v), \quad (kf)(v) = kf(v)$$

これを V の**双対空間**という．V の基底を $\{e_1, \cdots, e_n\}$ とする．

$$e^i : V \to K, \quad a^j e_j \mapsto a^i$$

と定めると，$e^i \in V^*$ である．さらに $\{e^1, \cdots, e^n\}$ は V^* の基底となる．これを $\{e_1, \cdots, e_n\}$ の**双対基底**という．

Remark 2.1. $e^j\,(e_i) = \delta_i^j$

Remark 2.2. 双対基底が基底となっていることを check する．
（線型独立性）各 i に対して，

$$\left(a_j e^j\right)(e_i) = a_j e^j(e_i) = a_j \delta_i^j = a_i$$

であるから，$a_j e^j = 0$ とすると，$\forall j, a_j = 0$
（生成性）$f \in V^*$ とすると，$f = f(e_j)e^j \in \mathrm{Span}\{e^1, \cdots, e^n\}$ である．実際，

$$\left(f(e_j)e^j\right)(e_i) = f(e_j)e^j(e_i) = f(e_j)\delta_i^j = f(e_i)$$

なので f と一致している．■

Prop 2.1
V の 2 つの基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}, \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ に関して，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ から $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ への基底変換行列が $a = (a^i_j) \in GL_n(K)$ であったとする．つまり，

$$e'_j = a^i_j e_i$$

このとき，$\{e^1, \cdots, e^n\}$ から $\{e'^1, \cdots, e'^n\}$ への基底変換行列は a^{-1} である．つまり，

$$e'^j = \left(a^{-1}\right)^j_i e^i$$

Proof. $e'^j = b^j_i e^i$ とすると，

$$\delta^j_k = e'^j\left(e'_k\right) = b^j_i e^i\left(e'_k\right) = b^j_i e^i\left(a^l_k e_l\right) = b^j_i a^l_k e^i\left(e_l\right) = b^j_i a^l_k \delta^i_l = b^j_i a^i_k \quad \therefore\ b^j_i = \left(a^{-1}\right)^j_i$$

■

Prop 2.2 (成分の変換の反変性と共変性)
V の 2 つの基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}, \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ に関して，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ から $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ への基底変換行列が $a = (a^i_j) \in GL_n(K)$ であったとする．このとき，$v \in V$ が $v = v^i e_i = v'^i e'_i$，$f \in V^*$ が $f = f_i e^i = f'_i e'^i$ と成分表示されているならば，

$$v'^j = \left(a^{-1}\right)^j_i v^i, \quad f'_j = a^i_j f_i$$

Remark 2.3. この成分の変換規則から $v \in V$ を**反変ベクトル**，$f \in V^*$ を**共変ベクトル**ということがある．

Proof. $v = v^i e_i = v'^j e'_j = v'^j a^i_j e_i \quad \therefore\ v^i = v'^j a^j_j \quad \therefore v'^j = \left(a^{-1}\right)^j_i v^i$
$f'_j = a^i_j f_i$ は V の話を V^* に置き換えればよい． ■

Def 2.2 (テンソル)
$p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする．

$$\Phi : (V^*)^p \times V^q \to K \quad (f^1, \cdots, f^p, v_1, \cdots, v_q) \mapsto \Phi(f^1, \cdots, f^p, v_1, \cdots, v_q)$$

が多重線型であるとき，Φ を V 上の p **階反変** q **階共変テンソル**，または (p, q)-テンソルという．特に $(0, q)$-テンソルを単に q-**テンソル**（q-**次線型形式**）という．(p, q)-テンソル全体の集合

$$\mathcal{T}^{(p,q)}(V) = \bigotimes^p V \otimes \bigotimes^q V^* = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q}$$

は次の加法とスカラ倍により n^{p+q} 次元 K 線型空間となる．

$$(\Phi + \Psi)(f^1, \cdots, f^p, v_1, \cdots, v_q) := \Phi(f^1, \cdots, f^p, v_1, \cdots, v_q) + \Psi(f^1, \cdots, f^p, v_1, \cdots, v_q)$$

$$(k\Phi)(f^1, \cdots, f^p, v_1, \cdots, v_q) := k\Phi(f^1, \cdots, f^p, v_1, \cdots, v_q)$$

これを V 上の p **階反変** q **階共変テンソル空間**，または (p, q)-テンソル空間という．

Remark 2.4. $f \in V^*$ は V 上の 1-テンソルである．

Def 2.3 (テンソル積)
$\Phi \in \mathcal{T}^{(p,q)}(V), \Psi \in \mathcal{T}^{(t,s)}(V)$ に対して,

$$\Phi \otimes \Psi : (V^*)^{p+t} \times V^{q+s} \to K$$

$$\begin{aligned}(f^1, \cdots, f^p, g^1, \cdots, g^t, v_1, \cdots, v_q, w_1, \cdots, w_s)\\ \mapsto \Phi(f^1, \cdots, f^p, v_1, \cdots, v_q)\Psi(g^1, \cdots, g^t, w_1, \cdots, w_s)\end{aligned}$$

で定め，これを Φ と Ψ の**テンソル積**という．このとき，$\Phi \otimes \Psi \in \mathcal{T}^{(p+t,q+s)}(V)$ である．

Prop 2.3 (結合律)
$\Phi \in \mathcal{T}^{(p,q)}(V), \Psi \in \mathcal{T}^{(t,s)}(V), \Omega \in \mathcal{T}^{(u,v)}(V)$ に対して,

$$(\Phi \otimes \Psi) \otimes \Omega = \Phi \otimes (\Psi \otimes \Omega)$$

この結合性から単に $\Phi \otimes \Psi \otimes \Omega$ と表し，帰納的に $\Phi_1 \otimes \cdots \otimes \Phi_N$ を定義する．

Remark 2.5. 厳密には定義域が違うが同一視する．

$$\begin{aligned}(\Phi \otimes \Psi) \otimes \Omega &: ((V^*)^{p+t} \times V^{q+s}) \times ((V^*)^u \times V^v) \to K\\ \Phi \otimes (\Psi \otimes \Omega) &: ((V^*)^p \times V^q) \times ((V^*)^{t+u} \times V^{s+v}) \to K\\ \Phi \otimes \Psi \otimes \Omega &: (V^*)^{p+t+u} \times V^{q+s+v} \to K\end{aligned}$$

Def 2.4 (標準基底)
$\mathcal{T}^{(p,q)}(V)$ の基底として

$$\{e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_q} \ ; 1 \leq j_1, \cdots, j_p, i_1, \cdots, i_q \leq n\}$$

がとれる．これを $\{e_1, \cdots, e_n\}$ に関する $\mathcal{T}^{(p,q)}(V)$ の**標準基底**という．特に $\dim(\mathcal{T}^{(p,q)}(V)) = n^{p+q}$ であり，$\Phi \in \mathcal{T}^{(p,q)}(V)$ は次のように表せる．

$$\Phi = \Phi^{j_1, \cdots, j_p}_{i_1, \cdots, i_q} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_q}$$

Remark 2.6. V の基底ベクトル e_i を

$$e_i : V^* \to K, \quad f \mapsto f(e_i)$$

という写像と同一視している．これは V^* 上の $(0,1)$-テンソル（線型写像）になっている．（つまり $e_i \in (V^*)^*$ と考えるということ．）

Remark 2.7. Einstein の縮約を用いずに表すと,

$$\Phi = \sum_{j_1,\cdots,j_p=1}^{n} \sum_{i_1,\cdots,i_q=1}^{n} \Phi^{j_1,\cdots,j_p}_{i_1,\cdots,i_q} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_q}$$

Remark 2.8. 標準基底が基底となっていることを check する.
（線型独立性）各 $k_1, \cdots, k_p, l_1, \cdots, l_q$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\left(\Phi^{j_1,\cdots,j_p}_{i_1,\cdots,i_q} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_q}\right)(e^{k_1}, \cdots, e^{k_p}, e_{l_1}, \cdots, e_{l_q}) \\
&= \Phi^{j_1,\cdots,j_p}_{i_1,\cdots,i_q} e_{j_1}(e^{k_1}) \cdots e_{j_p}(e^{k_p}) e^{i_1}(e_{l_1}) \cdots e^{i_q}(e_{l_q}) \\
&= \Phi^{j_1,\cdots,j_p}_{i_1,\cdots,i_q} \delta^{k_1}_{j_1} \cdots \delta^{k_p}_{j_p} \delta^{i_1}_{l_1} \cdots \delta^{i_q}_{l_q} = \Phi^{k_1,\cdots,k_p}_{l_1,\cdots,l_q}
\end{aligned}$$

であるから, $\Phi^{j_1,\cdots,j_p}_{i_1,\cdots,i_q} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_q} = 0$ とすると,

$$\forall\, k_1, \cdots, k_p, l_1, \cdots, l_q, \Phi^{k_1,\cdots,k_p}_{l_1,\cdots,l_q} = 0$$

（生成性（$\mathcal{T}^{(p,q)}(V)$ を張ること））$\Phi \in T^{(p,q)}(V)$ とすると,

$$\Phi = \Phi(e^{j_1}, \cdots, e^{j_p}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_q}) e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_q}$$

実際,

$$\left(\Phi\left(e^{j_1}, \cdots, e^{j_p}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_q}\right) e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_q}\right)\left(e^{k_1}, \cdots, e^{k_p}, e_{l_1}, \cdots, e_{l_q}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi\left(e^{j_1}, \cdots, e^{j_p}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_q}\right) e_{j_1}(e^{k_1}) \cdots e_{j_p}(e^{k_p}) e^{i_1}(e_{l_1}) \cdots e^{i_q}(e_{l_q}) \\
&= \Phi\left(e^{j_1}, \cdots, e^{j_p}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_q}\right) \delta^{k_1}_{j_1} \cdots \delta^{k_p}_{j_p} \delta^{i_1}_{l_1} \cdots \delta^{i_q}_{l_q} \\
&= \Phi\left(e^{k_1}, \cdots, e^{k_p}, e_{l_1}, \cdots, e_{l_q}\right)
\end{aligned}$$

なので Φ と一致している. ■

Prop 2.4 (成分の変換規則)
V の 2 つの基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}, \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ に関して, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ から $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ への基底変換行列が $a = \left(a^i_j\right) \in GL_n(K)$ であったとする.（つまり, $e'_j = a^i_j e_i$）
このとき, $\Phi \in \mathcal{T}^{(p,q)}(V)$ が

$$\begin{aligned}
\Phi &= \Phi^{j_1,\cdots,j_p}_{i_1,\cdots,i_q} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_q} \\
&= \Psi^{j_1,\cdots,j_p}_{i_1,\cdots,i_q} e'_{j_1} \otimes \cdots \otimes e'_{j_p} \otimes e'^{i_1} \otimes \cdots \otimes e'^{i_q}
\end{aligned}$$

と成分表示されているならば,

$$\Psi^{k_1,\cdots,k_p}_{l_1,\cdots,l_q} = \left(a^{-1}\right)^{k_1}_{j_1} \cdots \left(a^{-1}\right)^{k_p}_{j_p} a^{i_1}_{l_1} \cdots\ a^{i_q}_{l_q} \Phi^{j_1,\cdots,j_p}_{i_1,\cdots,i_q}$$

Proof. $e'_j = a^i_j e_i$, $e'^j = \left(a^{-1}\right)^j_i e^i$ に注意すると，

$$\Phi = \Phi^{j_1,\cdots,j_p}_{i_1,\cdots,i_q} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_q} = \Psi^{k_1,\cdots,k_p}_{l_1,\cdots,l_q} e'_{k_1} \otimes \cdots \otimes e'_{k_p} \otimes e'^{l_1} \otimes \cdots \otimes e'^{l_q}$$

$$= \Psi^{k_1,\cdots,k_p}_{l_1,\cdots,l_q} \left(a^{j_1}_{k_1} e_{j_1}\right) \otimes \cdots \otimes \left(a^{j_p}_{k_p} e_{j_p}\right) \otimes \left(\left(a^{-1}\right)^{l_1}_{i_1} e^{i_1}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\left(a^{-1}\right)^{l_q}_{i_q} e^{i_q}\right)$$
$$= a^{j_1}_{k_1} \cdots\ a^{j_p}_{k_p} \left(a^{-1}\right)^{l_1}_{i_1} \cdots \left(a^{-1}\right)^{l_q}_{i_q} \Psi^{k_1,\cdots,k_p}_{l_1,\cdots,l_q} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_q}$$

$$\therefore\ \Phi^{j_1,\cdots,j_p}_{i_1,\cdots,i_q} = a^{j_1}_{k_1} \cdots\ a^{j_p}_{k_p} \left(a^{-1}\right)^{l_1}_{i_1} \cdots \left(a^{-1}\right)^{l_q}_{i_q} \Psi^{k_1,\cdots,k_p}_{l_1,\cdots,l_q}$$

$$\therefore\ \Psi^{k_1,\cdots,k_p}_{l_1,\cdots,l_q} = \left(a^{-1}\right)^{k_1}_{j_1} \cdots \left(a^{-1}\right)^{k_p}_{j_p} a^{i_1}_{l_1} \cdots\ a^{i_q}_{l_q} \Phi^{j_1,\cdots,j_p}_{i_1,\cdots,i_q}$$

■

Def 2.5 (置換作用素)
q-テンソル $\Phi \in \mathcal{T}^{(0,q)}(V)$ と q 次置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_q$ に対して，q-テンソル $\sigma\Phi \in \mathcal{T}^{(0,q)}(V)$ を

$$\sigma\Phi(v_1, \cdots, v_q) = \Phi\left(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(q)}\right), ((v_1, \cdots, v_q) \in V^q)$$

で定める．この $\sigma : \mathcal{T}^{(0,q)}(V) \to\ \mathcal{T}^{(0,q)}(V)$ を**置換作用素**という.

Def 2.6 (対称テンソル)
q-テンソル $\Phi \in \mathcal{T}^{(0,q)}(V)$ が q **次対称テンソル**（q **次対称形式**）とは,

$$\forall\sigma \in \mathfrak{S}_q,\ \sigma\Phi = \Phi$$

つまり,

$$\forall\sigma \in \mathfrak{S}_q, \forall(v_1, \cdots, v_q) \in V^q, \Phi\left(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(q)}\right) = \Phi(v_1, \cdots, v_q)$$

が成り立つことである.

3 交代テンソル

引き続きこの § でも K を体，V を n 次元 K 線型空間（n は有限）とする．

Def 3.1 (交代テンソル)
q-テンソル $\Phi \in \mathcal{T}^{(0,q)}(V)$ が q **次交代テンソル**（q **次交代形式**）とは，

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_q,\ \sigma\Phi = \mathrm{sgn}(\sigma)\Phi$$

つまり，

$$\forall (v_1, \cdots, v_q) \in V^q, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_q, \Phi(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(q)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\Phi(v_1, \cdots, v_q)$$

が成り立つことである．q 次交代形式の全体を $\bigwedge^{q} V^*$ で表す．このとき $\bigwedge^{q} V^*$ は $\mathcal{T}^{(0,q)}(V)$ の線型部分空間となっている．
$q = 1$ のとき，$\bigwedge^{1} V^* = V^* = \mathcal{T}^{(0,1)}(V)$ である．

Example 3.1. $V = K^n, \Phi : \prod^{n} K^n \to K, \Phi(v_1, \cdots, v_n) := \det(v_1, \cdots, v_n)$ とすると，$\Phi \in \bigwedge^n K^n$

Def 3.2 (交代化作用素)
q-テンソル $\Phi \in \mathcal{T}^{(0,q)}(V)$ に対し，q-テンソル $A_q(\Phi) \in \mathcal{T}^{(0,q)}(V)$ を

$$A_q(\Phi) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\Phi$$

で定める．$A_q := \mathcal{T}^{(0,q)}(V) \to \mathcal{T}^{(0,q)}(V)$ を**交代化作用素**という．このとき，

$$\forall \Phi \in \mathcal{T}^{(0,q)}(V),\ A_q(\Phi) \in \bigwedge^{q} V^*$$

Remark 3.1. 交代化作用を check しよう．$\tau \in \mathfrak{S}_q$ とする．$\tau A_q(\Phi) = \mathrm{sgn}(\tau) A_q(\Phi)$ を示す．

$$
\begin{aligned}
\tau A_q(\Phi)(v_1, \cdots, v_q) &= \tau \left(\frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sgn}(\sigma) \sigma \Phi \right) (v_1, \cdots, v_q) \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sgn}(\sigma) \sigma \Phi (v_{\tau(1)}, \cdots, v_{\tau(q)}) \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sgn}(\sigma) \Phi (v_{\sigma\tau(1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(q)}) \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sgn}(\sigma) \,\mathrm{sgn}(\tau^{-1}) \Phi (v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(q)}) \\
&= \mathrm{sgn}(\tau) \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sgn}(\sigma) \sigma \Phi (v_1, \cdots, v_q) \\
&= \mathrm{sgn}(\tau) A_q(\Phi)(v_1, \cdots, v_q) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Def 3.3 (外積)

$\Phi \in \bigwedge^q V^*, \Psi \in \bigwedge^s V^*$ に対して，$\Phi \wedge \Psi \in \mathcal{T}^{(0,q+s)}(K)$ を

$$\Phi \wedge \Psi := A_{q+s}(\Phi \otimes \Psi)$$

つまり，

$$\Phi \wedge \Psi = \frac{1}{(q+s)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{q+s}} \mathrm{sgn}(\sigma) \sigma (\Phi \otimes \Psi)$$

と定め，これを Φ と Ψ の**外積（ウェッジ積）**という．このとき，$\Phi \wedge \Psi \in \bigwedge^{q+s} V^*$ である．

Prop 3.1 (外積の性質)

外積について以下が成り立つ．

(1) $\Phi \in \bigwedge^q V^*, \Psi \in \bigwedge^s V^*, \Omega \in \bigwedge^t V^*$ に対して，

$$(\Phi \wedge \Psi) \wedge \Omega \ = \Phi \wedge (\Psi \wedge \Omega)$$

(2) $\Phi_i \in \bigwedge^q V^*, a_i \in K$ に対して，

$$
\begin{aligned}
(a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2) \wedge \Psi &= a_1 \Phi_1 \wedge \Psi + a_2 \Phi_2 \wedge \Psi \\
\Psi \wedge (a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2) &= a_1 \Psi \wedge \Phi_1 + a_2 \Psi \wedge \Phi_2
\end{aligned}
$$

(3) $\Phi \in \bigwedge^q V^*, \Psi \in \bigwedge^s V^*$ に対して，

$$\Phi \wedge \Psi = (-1)^{qs} (\Psi \wedge \Phi)$$

特に 1-テンソル $f, g \in V^*$ に対し，$f \wedge g = -g \wedge f$，$f \wedge f = 0$

Remark 3.2. (1) の結合性からこれを $\Phi \wedge \Psi \wedge \Omega$ と表す．さらに帰納的に $\Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_N$ $(\Phi_i \in \bigwedge^{q_i} V^*)$ を定義する．このとき

$$\Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_N = A_q(\Phi_1 \otimes \cdots \otimes \Phi_N), \quad q := \sum_{i=1}^{N} q_i$$

Remark 3.3. (3) から，$f^i = f^j$ なる $1 \leq i, j \leq q,\ i \neq j$ が存在すれば，$f^1 \wedge \cdots \wedge f^q = 0$

Example 3.2. $f^i \in V^*(1 \leq i \leq q)$ に対し，$f^1 \wedge \cdots \wedge f^q \in \bigwedge^q V^*$ であり，

$$(f^1 \wedge \cdots \wedge f^q)(v_1, \cdots, v_q) = \frac{1}{q!} \det\left(f^i(v_j)\right) = \frac{1}{q!} \det \begin{pmatrix} f^1(v_1) & \cdots & f^1(v_q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^2(v_1) & \cdots & f^2(v_q) \end{pmatrix}$$

Def 3.4 (標準基底)
$\bigwedge^q V^*$ の基底として，

$$\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_q}\ ; 1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n\}$$

がとれる．これを $\{e_1, \cdots, e_n\}$ に関する $\bigwedge^q V^*$ の**標準基底**という．特に $\dim \bigwedge^q V^* = {}_nC_q$ であり，$\Phi \in \bigwedge^q V^*$ は次のように表せる．

$$\Phi = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} \Phi_{i_1, \cdots, i_q}\ e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_q} \quad (\Phi_{i_1, \cdots, i_q} \in \mathbb{R})$$

Remark 3.4. q 個の相異なる $j_1, \cdots, j_q \in \{1, \cdots, n\}$ に対し，$\sigma \in \mathfrak{S}_q$ を用いて，$(j_1 \ \cdots \ j_q) = \sigma(i_1 \ \cdots \ i_q), (1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n)$ と表せる．このとき，$\Phi_{j_1, \cdots, j_q} := \mathrm{sgn}(\sigma)\Phi_{i_1, \cdots, i_q}$ ($\Phi_{i_1, \cdots, i_q}$ は標準基底の成分) と定義する．また重複がある $j_1, \cdots, j_q$ に関しては $\Phi_{j_1, \cdots, j_q} := 0$ とでも定めておく．($e^i \wedge e^i = 0$ であるからこの項は消えるので 0 でなくてもよい．) このとき，

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} \Phi_{i_1, \cdots, i_q}\ e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_q} \\ &= \frac{1}{q!} \sum_{j_1, \cdots, j_q = 1}^{n} \Phi_{j_1, \cdots, j_q} e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_q} \\ &= \frac{1}{q!} \Phi_{j_1, \cdots, j_q} e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_q} \end{aligned}$$

この和の取り方では Einstein の縮約記法が使える．(3 行目)

Remark 3.5. 標準基底が基底となっていることを check する．

（線型独立性）各 $j_1, \cdots, j_q$ $(1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n)$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} \Phi_{i_1, \cdots, i_q}\ e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_q}\right)(e_{j_1}, \cdots, e_{j_q}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} \left[\Phi_{i_1, \cdots, i_q}(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_q})(e_{j_1}, \cdots, e_{j_q})\right] \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} \left[\Phi_{i_1, \cdots, i_q} \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sgn}(\sigma)(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_q})(e_{\sigma(j_1)}, \cdots, e_{\sigma(j_q)})\right] \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} \left[\Phi_{i_1, \cdots, i_q} \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sgn}(\sigma) e^{i_1}(e_{\sigma(j_1)}) \cdots e^{i_q}(e_{\sigma(j_q)})\right] \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} \left[\Phi_{i_1, \cdots, i_q} \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sgn}(\sigma) \delta^{i_1}_{\sigma(j_1)} \cdots \delta^{i_q}_{\sigma(j_q)}\right] \\
&= \frac{1}{q!} \Phi_{j_1, \cdots, j_q}
\end{aligned}$$

であるから，$\displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} \Phi_{i_1, \cdots, i_q}\ e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_q} = 0$ とすると，$\forall j_1, \cdots, j_q$，$\Phi_{j_1, \cdots, j_q} = 0$

（生成性（($\bigwedge^q V^*$ を張ること)）$\Phi \in \bigwedge^q V^*$ とすると，

$$\Phi = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} q! \Phi(e_{i_1}, \cdots, e_{i_q}) e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_q}$$

実際，$j_1, \cdots, j_q$ $(1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n)$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} q! \Phi(e_{i_1}, \cdots, e_{i_q})\ e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_q}\right)(e_{j_1}, \cdots, e_{j_q}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} \left[q! \Phi(e_{i_1}, \cdots, e_{i_q}) \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sgn}(\sigma)(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_q})(e_{\sigma(j_1)}, \cdots, e_{\sigma(j_q)})\right] \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} \left[\Phi(e_{i_1}, \cdots, e_{i_q}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sgn}(\sigma) e^{i_1}(e_{\sigma(j_1)}) \cdots e^{i_q}(e_{\sigma(j_q)})\right] \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} \left[\Phi(e_{i_1}, \cdots, e_{i_q}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sgn}(\sigma) \delta^{i_1}_{\sigma(j_1)} \cdots \delta^{i_q}_{\sigma(j_q)}\right] \\
&= \Phi(e_{j_1}, \cdots, e_{j_q})
\end{aligned}$$

なので Φ と一致している．■

4　微分形式

Def 4.1 (写像の微分（押し出し）)
M を m 次元 C^∞ 多様体，N を n 次元 C^∞ 多様体，$f : M \to N$ を C^r 写像，$p \in M, q = f(p) \in N$ とする．
このとき，$v \in T_pM$ を $c \in \mathcal{C}^\infty_{M,p}$ に沿った M の接ベクトルとすると，$f \circ c \in \mathcal{C}^\infty_{N,q}$ であるから，$f \circ c$ に沿った N 上の微分作用素（つまり q における N の接ベクトル）

$$df_p(v) : g \mapsto \frac{d}{dt}\left(g \circ f \circ c\right)(t)\bigg|_{t=0} \qquad (g \in C^\infty(V))$$

が自然に誘導される．但し (ψ, V) は $q \in N$ の局所チャートである．（これは well-defined，つまり局所チャートの選び方に依らない．）さらに

$$df_p : T_pM \to T_qN, \quad v \mapsto df_p(v)$$

で定義される対応 df_p を f の p における**微分**または**押し出し**（push forward）という．

Remark 4.1. df を $(f_*)_p$ で表すこともある．（後に定義される引き戻しの双対概念であることが強調される．）

Remark 4.2. この定義を書き下すことで Euclid 空間上の写像の微分の一般化になっていることを check する．$(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^m))$ を p の局所チャート，$(V, \psi = (y^1, \cdots, y^n))$ を q の局所チャートとする．

$$\begin{aligned}
df_p(v)(g) &:= \frac{d}{dt}(g \circ f \circ c)(t)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}(g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c)(t)\bigg|_{t=0} \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial\left(g \circ \psi^{-1}\right)}{\partial y^j}\right)_{\psi(q)} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial\left(y^j \circ f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)} \frac{d(x^i \circ c)}{dt}\bigg|_{t=0}
\end{aligned}$$

$$\therefore df_p(v) = \sum_{j=1}^n \left\{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial\left(y^j \circ f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)} \frac{d(x^i \circ c)}{dt}\bigg|_{t=0}\right\} \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q \in T_qN$$

ここで，x^k 曲線 $c_k : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, c_k(t) := \varphi^{-1}\left(x^1(p), \cdots, x^k(p+t), \cdots, x^n(p)\right)$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
df_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p\right) &= \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\left(y^j \circ f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)} \left.\frac{d(x^i \circ c_k)}{dt}\right|_{t=0}\right\}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\left(y^j \circ f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)} \delta^i_k\right\}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\left(y^j \circ f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^k}\right)_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q
\end{aligned}
$$

以上から df_p は線型写像であり，その表現行列は (j,k) 成分が

$$
\left(\frac{\partial\left(y^j \circ f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^k}\right)_{\varphi(p)} \qquad (1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m)
$$

である (n,m) 行列であることが明らかとなった．これを p における f の **Jacobi 行列**といい，$(Jf)_p$ で表す． $M = (\mathbb{R}^m, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}), N = (\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}), f = (f_1, \cdots, f_n)$ とすると，

$$
(Jf)_p = \left(\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^k}\right)_p\right)
$$

であって Euclid 空間上の写像で定義される Jacobi 行列となっている．

Prop 4.1
$p \in M$ の局所チャートが $(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^n))$ であるとき，$T_p\mathbb{R} = \mathbb{R}$ と同一視すると，$(dx^i)_p \in T^*_pM$ であり，$\{(dx^1)_p, \cdots, (dx^n)_p\}$ は T_pM の自然基底 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right\}$ の双対基底である．

Remark 4.3. $\mathbb{R}$ は $\mathcal{D} = (\mathbb{R}, id_{\mathbb{R}})$ をアトラスとする 1 次元 C^ω 多様体と見なせる. $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, c(0) = p, c'(0) = v, f \in C^\infty(U(p))$ に対して，

$$
\left.\frac{d}{dt}f(c(t))\right|_{t=0} = c'(0)\left.\frac{d}{dt}\right|_{x=p} = v\left.\frac{d}{dt}\right|_{x=p}
$$

$\left.\frac{d}{dx}\right|_{x=p} \in T_p\mathbb{R}$ と $v \in \mathbb{R}$ を同一視する．

Proof. $c_j : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, c_j(t) := \varphi^{-1}(x^1(p), \cdots, x^j(p) + t, \cdots, x^n(p)),\ g \in C^\infty\left(U(x^i(p))\right)$ とする．

$$
(dx^i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right)(g) = \left.\frac{d}{dt}g\left(x^i(c_j(t))\right)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}g\left(x^i(p) + t\right)\right|_{t=0} = \left(\frac{\partial(x^i \circ g)}{\partial x^j}\right)_{x^i(p)}
$$

Remark 4.2 の同一視により,

$$(dx^i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) = \delta^i_j$$

■

Prop 4.2

m 次元 C^∞ 多様体 M 上の C^∞ 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ の $p \in M$ における微分 $(df)_p$ は, $T_p\mathbb{R} = \mathbb{R}$ の同一視の下で $(df)_p \in T^*_pM$ であり, $p \in M$ の局所チャート $(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^n))$ 上で,

$$(df)_p = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}\right)_{\varphi(p)}(dx^j)_p$$

と成分表示される.

Proof. *Remark* 4.2 において $(df)_p : T_pM \to \mathbb{R}$ が線型であることを確認したので $(df)_p \in T^*_pM = \mathrm{Span}\left\{(dx^1)_p, \cdots, (dx^n)_p\right\}$ がわかる. そこで係数を決定する.

$$(df)_p = \sum_{j=1}^{n} a_j (dx^j)_p$$

とすると,

$$df_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j(dx^j)\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j\delta^j_k = a_k$$

また, *Remark* 4.2 の式から

$$df_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x^k}\right)_{\varphi(p)}$$

である. (但し $\left(\dfrac{d}{dy}\right)_q = 1$ という同一視に注意したい.) よって,

$$a_k = \left(\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x^k}\right)_{\varphi(p)}$$

■

Def 4.2 (多様体上のテンソル場)

M を C^∞ 多様体とする. $s, q \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ とする. $p \in M$ に対し, T_pM 上の (s, q) テ

ンソル

$$
\begin{aligned}
\Phi(p) &: (T_p^* M)^s \times (T_p M)^q \to \mathbb{R} \\
&\in \mathcal{T}^{(s,q)}(T_p M) = \bigotimes^s (T_p M) \otimes \bigotimes^q (T_p^* M)
\end{aligned}
$$

を対応させる対応 $\Phi : p \mapsto \Phi(p)$ を M 上の (s,q) **テンソル場**という．p の局所チャート $(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^n))$ 上で，

$$
\Phi(p) = \Phi^{j_1,\cdots,j_s}_{i_1,\cdots,i_q}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)_p \otimes (dx^{i_1})_p \otimes \cdots \otimes (dx^{i_q})_p
$$

とかける．このとき，関数 $\Phi^{j_1,\cdots,j_s}_{i_1,\cdots,i_q} : U \to \mathbb{R}$ を Φ の (U,φ) に関する**成分**という．各チャートの各成分が C^r 級であるとき，テンソル場 Φ は C^r 級であるという．

Remark 4.4.

$$
\Phi^{j_1,\cdots,j_s}_{i_1,\cdots,i_q}(p) = \Phi\left((dx^{j_1})_p, \cdots, (dx^{j_s})_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_q}}\right)_p\right)
$$

Prop 4.3 (成分の変換規則)

p の局所チャート $(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^n)), (V, \psi = (y^1, \cdots, y^n))$ 上で，M 上の (s,q) テンソル場 Φ が

$$
\begin{aligned}
\Phi(p) &= \Phi^{j_1,\cdots,j_s}_{i_1,\cdots,i_q}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)_p \otimes (dx^{i_1})_p \otimes \cdots \otimes (dx^{i_q})_p \\
&= \Psi^{j_1,\cdots,j_p}_{i_1,\cdots,i_q}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial y^{j_r}}\right)_p \otimes (dy^{i_1})_p \otimes \cdots \otimes (dy^{i_q})_p
\end{aligned}
$$

と成分表示されているならば，

$$
\begin{aligned}
\Psi^{k_1,\cdots,k_s}_{l_1,\cdots,l_q}(s) = &\left(\frac{\partial(y^{k_1} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^{j_1}}\right)_{\varphi(p)} \cdots \left(\frac{\partial(y^{k_s} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^{j_p}}\right)_{\varphi(p)} \\
&\left(\frac{\partial(x^{i_1} \circ \psi^{-1})}{\partial y^{l_1}}\right)_{\psi(p)} \cdots \left(\frac{\partial(x^{i_q} \circ \psi^{-1})}{\partial y^{l_q}}\right)_{\psi(p)} \Phi^{j_1,\cdots,j_s}_{i_1,\cdots,i_q}(p)
\end{aligned}
$$

と変換される．

Proof.

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \left(\frac{\partial(y^j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p
$$

とテンソルの成分の変換規則から従う． ■

Def 4.3 (多様体上の微分形式)
M を C^∞ 多様体とする．$p \in M$ に T_pM 上の q 次交代テンソル $\omega_p \in \bigwedge^q (T_p^*M)$ を対応させるテンソル場 $\omega : p \mapsto \omega_p$ を，M 上の q **次微分形式**という．M 上の C^∞ 級の q 次微分形式の全体を $\Omega^q(M)$ で表す．p の局所チャート $(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^n))$ に対して，$\omega \in \Omega^q(M)$ は，$\omega_{i_1,\cdots,i_q} : U \to \mathbb{R}$ を用いて

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_q \leq n} \omega_{i_1,\cdots,i_q}(p)(dx^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{i_q})_p$$

と表せる．

Def 4.4 (外微分)
M を C^∞ 多様体とする．

(1) $d_0 : \Omega^0(M) = C^\infty(M) \to \Omega^1(M),\ f \mapsto d_0 f$ を次で定める．

$$(d_0 f)_p := df_p \ (p \in M)$$

(2) $d_q : \Omega^q(M) \to \Omega^{q+1}(M),\ \omega \mapsto d_q\omega \ (q \in \mathbb{N})$ を次で定める．局所チャート $(U,\ \varphi = (x^1, \cdots, x^n))$ 上で，$\omega \in \Omega^q(M)$ が，

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_q \leq n} \omega_{i_1,\cdots,i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}$$

と表されているとするとき，

$$(d\omega)_{(U,\ \varphi)} := \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_q \leq n} d(\omega_{i_1,\cdots,i_q}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}$$

と定める．$U \cap V \neq \emptyset$ なる他の局所チャート (V, ψ) に対して，$(d\omega)_{(U,\varphi)} = (d\omega)_{(V,\psi)}$ である．$(d\omega)_{(U,\varphi)}$ を張り合わせることで $d_q\omega \in \Omega^{q+1}(M)$ を得る．これを ω の**外微分**という．また

$$d_q : \Omega^q(M) \to \Omega^{q+1}(M), \omega \mapsto d_q\omega \ (q \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

を**外微分作用素**という．d_q を d と略記することがある．

Remark 4.5. 局所チャート $(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^n))$ 上で，$\omega \in \Omega^q(M)$ が，

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_q \leq n} \omega_{i_1,\cdots,i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}$$

と表されているとき，微分の成分表示から，

$$d\omega = \sum_{1 < i_1 < \cdots < i_q < n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial(\omega_{i_1 \cdots i_q} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \circ \varphi \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}$$

Prop 4.4 (外微分の性質)
$\omega \in \Omega^q(M), \eta \in \Omega^s(M)$ とする．

(1) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^q \omega \wedge d\eta$
特に $f \in \Omega^0(M)$ に対し，$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$
(2) $d^2\omega := d_{q+1}(d_q\omega) = 0$，つまり $d^2 = 0$

Proof. (1) *Remark* 3.4 の表記を用いて，

$$\omega = \frac{1}{q!}\omega_{i_1,\cdots,i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q},\ \eta = \frac{1}{s!}\eta_{k_1,\cdots,k_s} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_s}$$

と表されるとする．（縮約記法に注意されたい．）このとき，

$$\omega \wedge \eta = \frac{1}{q!s!}\omega_{i_1,\cdots,i_q}\eta_{k_1,\cdots,k_s} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} \wedge dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_s}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \eta) &= \frac{1}{q!s!}\frac{\partial(\omega_{i_1\cdots i_q}\eta_{k_1,\cdots,k_s} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} \wedge dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_s} \\
&= \frac{1}{q!s!}\left(\frac{\partial(\omega_{i_1\cdots i_q} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\eta_{k_1,\cdots,k_s} + \omega_{i_1\cdots i_q}\frac{\partial(\eta_{k_1,\cdots,k_s} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\right) \\
&\qquad dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} \wedge dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_s} \\
&= \frac{1}{q!}\frac{\partial(\omega_{i_1\cdots i_q} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} \wedge \frac{1}{s!}\eta_{k_1,\cdots,k_s} dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_s} \\
&\qquad + (-1)^q \frac{1}{q!}\omega_{i_1\cdots i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} \wedge \frac{1}{s!}\frac{\partial(\eta_{k_1,\cdots,k_s} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_s} \\
&= d\omega \wedge \eta + (-1)^q \omega \wedge d\eta
\end{aligned}$$

(2) $\omega = \displaystyle\sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_q \le n} \omega_{i_1,\cdots,i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}$ と表されているとする．

$$\begin{aligned}
d^2\omega &= d \sum_{1<i_1<\cdots<i_q<n}\sum_{j_1=1}^{n}\left(\frac{\partial(\omega_{i_1\cdots i_q} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^{j_1}} \circ \varphi\right) dx^{j_1} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} \\
&= \sum_{1<i_1<\cdots<i_q<n}\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\left(\frac{\partial^2(\omega_{i_1\cdots i_q} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^{j_2}\partial x^{j_1}} \circ \varphi\right) dx^{j_2} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} = 0
\end{aligned}$$

■

Remark 4.6. $d^2 = 0$ から系列

$$0 \xrightarrow{0} \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{q-1}} \Omega^q(M) \xrightarrow{d_q} \Omega^{q+1}(M) \xrightarrow{d_{q+1}} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d_n} 0$$

がコチェイン複体であることがわかる．これを de Rham **複体**という．

Def 4.5 (閉形式と完全形式)
M を C^∞ 多様体とする．

$$\begin{aligned} Z^q(M) &:= \operatorname{Ker} d_q = \{\omega \in \Omega^q(M) \mid d\omega = 0\} \\ B^q(M) &:= \operatorname{Im} d_{q-1} = \{d\omega \in \Omega^q(M) \mid \omega \in \Omega^{q-1}(M)\} \end{aligned}$$

と定め，$Z^q(M)$ の元を q **次閉形式**，$B^q(M)$ の元を q **次完全形式**という．

Remark 4.7. 完全形式ならば閉形式である．de Rham 複体の q 次コホモロジー群は M の q **次 de Rham コホモロジー群**とよばれ，$H^q_{dR}(M)$ とかく．

$$H^q_{dR}(M) := Z^q(M)/B^q(M)$$

M が**可縮**な多様体であるときには $H^q_{dR}(M) = 0$ $(q > 0)$，つまり閉形式が完全形式となる．（Poincaré **の補題**）

Def 4.6 (微分形式の引き戻し)
M, N を C^∞ 多様体，$f : M \to N$ を C^r 写像，$\omega \in \Omega^q(N)$ とする．このとき，$f^*\omega \in \Omega^q(M)$ を

$$f^*\omega(v_1, \cdots, v_q) := \omega_p(df_p(v_1), \cdots, df_p(v_q)) \quad (p \in M, v_i \in T_pM)$$

で定め，これを ω の f による**引き戻し**（pullback）という．

5　Stokes の定理

Def 5.1 (1 の分割)
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$\mathcal{U} = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の局所有限な開被覆とする．X 上の連続関数族 $(\rho_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が次を充たすとき，これを $\mathcal{U}$ に従属する **1 の分割**という．

(1) $\forall\lambda \in \Lambda, 0 \le \rho_\lambda \le 1$
(2) 各 ρ_λ はコンパクト台をもつ．つまり $\operatorname{supp}\rho_\lambda := \overline{\{p \in X \mid \rho_\lambda(p) \neq 0\}}$ はコンパクト．
(3) $\forall\lambda \in \Lambda, \operatorname{supp}\rho_\lambda \subset U_\lambda$
(4) $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda = 1$

Remark 5.1. $\mathcal{U}$ の局所有限性の仮定により (4) は各点の充分小さい近傍上で有限和になる．

Prop 5.1 (1 の分割定理)
パラコンパクトな Hausdorff 空間には任意の開被覆に対してそれに従属する 1 の分割が存在する．

Remark 5.2. 多様体はパラコンパクトな Hausdorff 空間であるから，局所近傍系に従属する 1 の分割が存在する．

Def 5.2 (向き付けられた多様体)
n 次元 C^∞ 多様体 M が向き付け可能であるとは，アトラス $\mathcal{D} = (U_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を，

$$\forall\lambda, \mu \in \Lambda \text{ s.}t.\ U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset,\ \det J(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}) > 0$$

を充たすように取れることである．このとき $\mathcal{D}$ は M に向き $\mathcal{O}$ を与えると考えられる．またこのようなアトラスが与えられた多様体を**向き付けられた多様体**という．

Remark 5.3. $\varphi_\lambda = (x^1, \cdots, x^n)$，$\varphi_\mu = (y^1, \cdots, y^n)$ とすると，

$$J(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}) = \frac{\partial\left((y^1, \cdots, y^n) \circ \varphi_\lambda^{-1}\right)}{\partial(x^1, \cdots, x^n)} \circ \varphi_\lambda = \left(\frac{\partial(y^j \circ {\varphi_\lambda}^{-1})}{\partial x^i} \circ \varphi_\lambda\right)_{1\le i,j\le n}$$

Remark 5.4. 例えば **Möbius の帯**は向き付け不可能な 2 次元多様体である．

Def 5.3 (微分形式の積分)
$(M, \mathcal{D})$ を向き付けられた n 次元 C^∞ 多様体とし，$\mathcal{D} = (U_\lambda, \varphi_\lambda = (x_\lambda^1, \cdots, x_\lambda^n))_{\lambda\in\Lambda}$

とする．ω をコンパクト台を持つ M 上の C^0 級 n 次微分形式とする．

(1) ある局所チャート $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ が存在して $\operatorname{supp}\omega \subset U_\lambda$ となる場合
ω が U_λ 上で $\omega = \omega_\lambda\ dx_\lambda^1 \wedge \cdots \wedge dx_\lambda^n$ と成分表示されるとする．

$$\int_M \omega := \int_{\varphi_\lambda(U_\lambda)} \omega_\lambda \circ \varphi_\lambda^{-1} dx^1 \cdots dx^n$$

と定義する．

(2) 一般の場合
$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $\operatorname{supp}\omega$ の開被覆であり，$\operatorname{supp}\omega$ はコンパクトなので，有限部分被覆 $(U_j)_{j\in J}$ $(J \subset \Lambda)$ が存在する．$(U_j)_{j\in J}$ に従属する 1 の分割 $(\rho_j)_{j\in J}$ を選択する．ω は U_j 上で $\omega|_{U_j} = \omega_j\ dx_j^1 \wedge \cdots \wedge\ dx_j^n$ と成分表示されるとする．これを用いて，

$$\int_M \omega := \sum_{j\in J} \int_{U_j} \rho_\lambda\ \omega|_{U_j} = \sum_{j\in J} \int_{\varphi_j(U_j)} (\rho_j \omega_j) \circ \varphi_j^{-1} dx^1 \cdots dx^n$$

と定義し，この $\displaystyle\int_M \omega$ を ω の M 上の積分という．

Remark 5.5. 向き付け可能性から (1) は局所近傍が $\operatorname{supp}\omega$ を包む局所チャートの選び方に依らない．また (2) は $(U_j)_{j\in J}$ に従属する 1 の分割 $\{\rho_j\}_{j\in J}$ の選び方に依らない．

Def 5.4 (滑らかな境界をもつ領域)
D を n 次元 C^∞ 多様体 M の連結開集合とする．任意の $p \in \partial D$ に対して p を含む局所チャート $(U, \varphi = (x^1, \cdots, x^n))$ が存在して

$$U \cap \overline{D} = \{q \in U \mid x^n(q) \geq x^n(p)\} \quad \cdots (*)$$

となるとき D を**滑らかな境界をもつ領域**という．このとき

$$\partial D \cap U \cong \{\varphi(q) \in \varphi(U) \mid u^n(q) = u^n(p) = \text{const.}\} \subset \mathbb{R}^n$$

である．$p \in \partial D$ の ∂D に関する局所チャート $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi} = (\widetilde{x}^1, \cdots, \widetilde{x}^{n-1}))$ を

$$\widetilde{U} := \partial D \cap U,\ \widetilde{x}^i = x^i\big|_{\widetilde{U}} \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

と定めることによって ∂D は $n-1$ 次元 C^∞ 多様体であることがわかる．

Prop 5.2
$(M, \mathcal{D})$ を向き付けられた n 次元 C^∞ 多様体とするとき，その滑らかな境界をもつ領

域 D の境界 ∂D にも向きが定まる．

Proof. $p \in \partial D$ とする．$(*)$ を充たす M に関する 2 つの局所チャート $(U_\lambda, \varphi_\lambda = (x^1, \cdots, x^n)), (U_\mu, \varphi_\mu = (y^1, \cdots, y^n))$ が交叉をもつとき，$\partial D \cap U_\lambda \cap U_\mu$ 上で

$$\frac{\partial(y^n \circ {\varphi_\lambda}^{-1})}{\partial x^i} \circ \varphi_\lambda = 0 \ (1 \leq i \leq n-1)$$

である．よって第 n 行での余因子展開を考えることにより，

$$\begin{aligned}
J(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}) &= \frac{\partial\left((y^1, \cdots, y^n) \circ \varphi_\lambda^{-1}\right)}{\partial(x^1, \cdots, x^n)} \circ \varphi_\lambda \\
&= \left((-1)^{n+n} \frac{\partial\left((\widetilde{y}^1, \cdots, \widetilde{y}^{n-1}) \circ \widetilde{\varphi}_\lambda^{-1}\right)}{\partial(\widetilde{x}^1, \cdots, \widetilde{x}^n)} \circ \widetilde{\varphi}_\lambda\right) \left(\frac{\partial(y^n \circ \varphi_\lambda^{-1})}{\partial x^n} \circ \varphi_\lambda\right) \\
&= J(\widetilde{\varphi}_\mu \circ \widetilde{\varphi}_\lambda^{-1}) \left(\frac{\partial(y^n \circ \varphi_\lambda^{-1})}{\partial x^n} \circ \varphi_\lambda\right)
\end{aligned}$$

$(*)$ から $q \in D$ に対して $x^n(q) - x^n(p) \geq 0, y^n(q) - y^n(p) \geq 0$ より，

$$\frac{\partial(y^n \circ \varphi_\lambda)}{\partial x^n} \circ \varphi_\lambda^{-1} = \lim_{q \to p} \frac{y^n(q) - y^n(p)}{x^n(q) - x^n(p)} \geq 0$$

$J(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}) > 0$ により

$$J(\widetilde{\varphi}_\mu \circ \widetilde{\varphi}_\lambda^{-1}) > 0$$

この不等式は ∂D に向きを定める． ■

Remark 5.6. 上の状況で，$(-1)^n J(\widetilde{\varphi}_\mu \circ \widetilde{\varphi}_\lambda^{-1})$ を正とする向きを ∂D の M **から自然に誘導される向き**という．

次の定理を Stokes **の定理**という．

Thm 5.1 (Stokes の定理)
M を向き付けられた n 次元 C^∞ 多様体とする．D を M に滑らかな境界を持つ領域とし，$\overline{D}$ はコンパクトであるとする．$\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ とする．このとき，

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \iota^* \omega$$

但し，$\iota : \partial D \to M$ は包含写像，$\iota^* \omega$ は ι による ω の pull back である．また ∂D は M から自然に誘導される向きをもつとする．

Proof. $p \in M$ とその局所チャート $(U_\lambda, \varphi_\lambda = (x^1, \cdots, x^n))$ に対して，$p \in M$ を含む正方形領域

$$V_p := \varphi_\lambda^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)^n) \subset U_\lambda$$

がとれる．$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の細分 $(V_p)_{p\in\overline{D}}$ は $\overline{D}$ の開被覆であり，$\overline{D}$ はコンパクトなので有限部分被覆 $(V_j)_{j\in J}$ がとれる．$(V_j)_{j\in J}$ に従属する 1 の分割 $(\rho_j)_{j\in J}$ を選択する．$V_j \subset U_\lambda$ が $\partial D\cap V_j \neq \emptyset$ であるときには

$$\overline{D}\cap V_j = \{p\in V_j \mid x^n(p)\geq 0\} = \varphi_\lambda^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)^{n-1}\times[0,\varepsilon))$$

とかかれるものとする．定理左辺の積分は次のように表せる．

$$\int_D d\omega = \sum_{j\in J}\int_{V_j} d(\rho_j\omega)$$

(1) $\partial D\cap V_j = \emptyset$，つまり $V_j\subset D$ であるとき
$V_j\subset U_\lambda$ とする．ω が U_λ 上で $\omega=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\omega_i\ dx^1\wedge\cdots\wedge \hat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$ と成分表示されるとする．但し $\hat{dx^i}$ は dx^i を除くことを表す．このとき，

$$\begin{aligned} d(\rho_j\omega) &= \sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\left(\frac{\partial(\rho_j\omega_i\circ\varphi_\lambda^{-1})}{\partial x^i}\circ\varphi_\lambda\right)dx^i\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge\hat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial(\rho_j\omega_i\circ\varphi_\lambda^{-1})}{\partial x^i}\circ\varphi_\lambda\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n \end{aligned}$$

よって積分は

$$\begin{aligned} \int_{V_j} d(\rho_j\omega) &= \sum_{i=1}^n\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^n}\frac{\partial(\rho_\lambda\omega_i\circ\varphi_\lambda^{-1})}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cdots\hat{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}}\cdots\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\{(\rho_j\omega_i(\varphi_\lambda^{-1}(x_1,\cdots,\varepsilon,\cdots,x_n))) \\ &\qquad -(\rho_j\omega_i(\varphi_\lambda^{-1}(x_1,\cdots,-\varepsilon,\cdots,x_n)))\}\ dx^1\cdots\hat{dx^i}\cdots dx^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

最後は $\operatorname{supp}\rho_j\subset V_j$ による．

(2) $\partial D\cap V_j\neq\emptyset$ のとき
$\overline{D}\cap V_j=\varphi_\lambda^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)^{n-1}\times[0,\varepsilon))$ から，

$$\begin{aligned} \int_{V_j} d(\rho_j\omega) &= \sum_{i=1}^n\int_0^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cdots\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\partial(\rho_j\omega_i\circ\varphi_\lambda^{-1})}{\partial x^i}\ dx^1\cdots dx^n \\ &= -\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cdots\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(\rho_j\omega_n(\varphi_\lambda^{-1}(x_1,\cdots,x_{n-1},0)))\ dx^1\cdots dx^{n-1} \end{aligned}$$

一方，$q=\widetilde{\varphi}_\lambda^{-1}(x_1,\cdots,x_{n-1})$ において，

$$(\iota^*\omega)_q = (-1)^{n-1}\omega_n(\varphi_\lambda^{-1}(x_1,\cdots,x_{n-1},0))\ dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}$$

であり，誘導される ∂D の向きに $(-1)^n$ が含まれていたことに注意すると，

$$\int_{\partial D\cap V_j}\iota^*(\rho_j\omega) = -\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cdots\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(\rho_j\omega_n(\varphi_\lambda^{-1}(x_1,\cdots,x_{n-1},0)))\ dx^1\cdots dx^{n-1}$$

以上より,

$$\int_D d\omega = \sum_{j\in J}\int_{V_j} d(\rho_j\omega) = \sum_{j\in J}\int_{\partial D\cap V_j} \iota^*(\rho_j\omega) = \int_{\partial D}\iota^*\omega$$

■

Remark 5.7. Stokes の定理において特に M が閉多様体（コンパクトで境界を持たない多様体）の場合,

$$\int_M d\omega = 0$$

Remark 5.8. Stokes の定理は以下のような定理の一般化になっている.

(1) $M=\mathbb{R}$ のとき，微分積分学の基本定理

$$\int_a^b \frac{df}{dx}dx = f(b)-f(a)$$

(2) $M=\mathbb{R}^2$ のとき，Green の定理

$$\int_D\left(\frac{\partial X_2}{\partial x^1}-\frac{\partial X_1}{\partial x^2}\right)dx^1dx^2 = \oint_{\partial D}(X_1dx^1+X_2dx^2)$$

(3) $M=\mathbb{R}^3$ のとき，古典的な Gauss の発散定理

$$\int_D \mathrm{div}\boldsymbol{X}\ dx^1dx^2dx^3 = \int_{\partial D}\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{S}$$

(4) $M=S$（C^∞ 曲面）のとき，古典的な Stokes の定理

$$\int_D \mathrm{rot}\,\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{\partial D}\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{r}$$

ほとんどの全てのベクトル解析の公式は Stokes の定理である.

参考文献

[1] 細野忍，微分幾何，朝倉書店, 2001.

[2] 小池直之，積分公式で啓くベクトル解析と微分幾何学 -ストークスの定理から変分公式まで-，共立出版, 2022.

[3] 松本幸夫，多様体の基礎，東京大学出版会, 1988.

[4] 佐古彰史，ゲージ理論・一般相対性理論のための微分幾何入門，森北出版, 2021.