微分幾何学 2 演習 問 3.3

菊地陽成

2025 年 11 月 5 日

$(M, \mathcal{D} = \{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda})$ を n 次元 C^∞ 多様体とする．

$$TM := \bigcup_{p\in M} T_pM = \coprod_{p\in M} T_pM$$

とする．これは非交和[†1]なので

$$\pi\colon TM \to M,\ T_pM \ni v \mapsto p$$

が定義できる．$(U, \phi = (x^1, \cdots, x^n)) \in \mathcal{D}$ に対し，$\widetilde{U} := \pi^{-1}(U)$ とし，

$$\widetilde{\phi}\colon \widetilde{U} \to \phi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n},\ v \mapsto (\phi\circ\pi(v), d\phi_{\pi(v)}(v))$$

と定める．但し $T_p\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ と同一視した．成分を明らかにして書くと，

$$\sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(v)} \mapsto (x^1(\pi(v)), \cdots, x^n(\pi(v)), v^1, \cdots, v^n)$$

となる．$\widetilde{\phi}$ は明らかに全単射であるから，各 $\widetilde{U}_\lambda$ に $\widetilde{\phi}_\lambda$ が同相となるような位相 $\mathcal{O}_\lambda$ が誘導される．ここで $\phi(U_\lambda) \times \mathbb{R}^n \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{2n}}$ に注意する．

$$\mathcal{O}_\lambda = \{O \subset \widetilde{U}_\lambda \mid \widetilde{\phi}_\lambda(O) \in \mathcal{O}_{\phi(U)\times\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{2n}}\}$$

このとき $\mathcal{B} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{O}_\lambda$ は開基の条件を充たすので，TM に開基 $\mathcal{B}$ で生成される位相 $\mathcal{O}_{TM}$ を入れる．$(TM, \widetilde{\mathcal{D}} := \{(\widetilde{U}_\lambda, \widetilde{\phi}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda})$ は $2n$ 次元 C^∞ 多様体となる．以下これを証明する．

Proof. (1) 各点 $v \in TM$ に対し，$\pi(v) \in U$ なる $(U, \phi) \in \mathcal{D}$ を選択すれば，$v \in \widetilde{U}$ である．よって $\{\widetilde{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は TM を被覆する．また各 λ に対し $\widetilde{U}_\lambda \in \mathcal{O}_{TM}$ で，$\mathcal{O}_{TM}|_{\widetilde{U}_\lambda} = \mathcal{O}_\lambda$[†2] に注意すると $\widetilde{\phi}_\lambda : \widetilde{U}_\lambda \to \phi(U_\lambda) \times \mathbb{R}^n$ は同相になる．

(2) $(TM, \mathcal{O}_{TM})$ は Hausdorff を示す．$v, w \in TM, v \neq w$ とする．

[†1] ここでの非交和は単に $p \neq q \Rightarrow T_pM \cap T_qM = \emptyset$ という意味とする．

[†2] 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と $A \subset X$ に対し，$\mathcal{O}_X|_A$ は A への相対位相

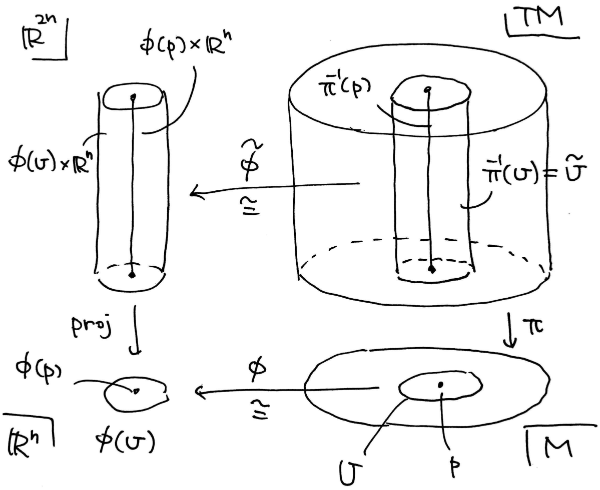

図１　接バンドルのイメージ

(a) $\pi(v)\neq\pi(w)$ のとき，M の Hausdorff 性から，

$$\exists V,W\in\mathcal{O}_M,\pi(v)\in V,\pi(w)\in V,V\cap W=\emptyset$$

このとき，$\pi^{-1}(V),\pi^{-1}(W)\in\mathcal{O}_{TM}$ で，

$$v\in\pi^{-1}(V),w\in\pi^{-1}(W),\pi^{-1}(V)\cap\pi^{-1}(W)=\emptyset$$

である．

(b) $\pi(v)=\pi(w)$ のとき，$\pi(v)\in U$ なる $(U,\phi)\in\mathcal{D}$ を取ると，(1) から同相 $\widetilde{\phi}\colon\pi^{-1}(U)\to\phi(U)\times\mathbb{R}^n$ が存在する．$\phi(U)\times\mathbb{R}^n$ は Hausdorff なので

$$\exists V,W\in\mathcal{O}_{\mathbb{R}^{2n}},\widetilde{\phi}(v)\in V,\widetilde{\phi}(w)\in V,V\cap W=\emptyset$$

このとき，$\widetilde{\phi}^{-1}(V),\widetilde{\phi}^{-1}(W)\in\mathcal{O}_{TM}$ で，

$$v\in\widetilde{\phi}^{-1}(V),w\in\widetilde{\phi}^{-1}(W),\widetilde{\phi}^{-1}(V)\cap\widetilde{\phi}^{-1}(W)=\emptyset$$

である．

(3) $\widetilde{\mathcal{D}}$ は微分構造であることを示す．まず $TM=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{U}_\lambda$ は明らか．$\widetilde{U}_\lambda\cap\widetilde{U}_\mu\neq\emptyset$ なる λ,μ に対して，

$$\widetilde{\phi}_\mu\circ\widetilde{\phi}_\lambda^{-1}\colon\phi_\lambda(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n\to\phi_\mu(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n$$

を考える．$\phi_\lambda=(x^1,\cdots,x^n),\phi_\mu=(y^1,\cdots,y^n)$ とし，$(x,v^1,\cdots,v^n)\in\widetilde{\phi}_\lambda(U_\lambda\cap$

$U_\mu) \times \mathbb{R}^n, p = \phi_\lambda^{-1}(x)$ とするとき，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\phi}_\mu \circ \widetilde{\phi}_\lambda^{-1}(x, v^1, \cdots, v^n) &= \widetilde{\phi}_\mu \left(\phi_\lambda^{-1}(x), \sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) \\
&= \widetilde{\phi}_\mu \left(\phi_\lambda^{-1}(x), \sum_{i=1}^n v^i \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial (y^j \circ \phi_\lambda^{-1})}{\partial x^i} \right|_x \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p \right) \\
&= \left(\phi_\mu \circ \phi_\lambda^{-1}(x), \sum_{i=1}^n v^i \left. \frac{\partial (y^1 \circ \phi_\lambda^{-1})}{\partial x^i} \right|_x, \cdots, \sum_{i=1}^n v^i \left. \frac{\partial (y^n \circ \phi_\lambda^{-1})}{\partial x^i} \right|_x \right)
\end{aligned}
$$

各成分は C^∞ 級なので $\widetilde{\phi}_\mu \circ \widetilde{\phi}_\lambda^{-1}$ は C^∞ 写像である．

■

Def 0.1
C^∞ 多様体 M に対し，組 (TM, M, π) または TM を M の**接束**または**接バンドル**という．

[以下参考]

Def 0.2
$F, E, (M, \mathcal{D})$ を C^∞ 多様体，$\pi\colon E \to M$ を C^∞ 級の全射とする．$(U, \phi) \in \mathcal{D}$ に対し，$\widetilde{\phi}\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$ が C^r 同型で $\mathrm{pr}_1 \circ \widetilde{\phi} = \pi_{\pi^{-1}(U)}$ を充たすとき，組 $(U, \widetilde{\phi})$ を F をファイバーとする U 上の C^r 級**局所自明化**という．各点 $p \in M$ に対し，F をファイバーとする p の周りの局所近傍上の C^r 級局所自明化が存在するとき，(E, M, π) を F をファイバーとする M 上の C^r 級**ファイバーバンドル**という．

Def 0.3
$k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ とする．(E, M, π) を k^n をファイバーとする M 上の C^r 級ファイバーバンドルとし，各ファイバー $E_p := \pi^{-1}(p)$ には n 次元 k 線型空間の構造が入っているとする．各点 $p \in M$ に対し，p の周りの局所近傍 U 上の C^r 級局所自明化 (U, ϕ) で，任意の $q \in U$ に対し $\mathrm{pr}_2 \circ \phi|_{E_q} : E_q \to k^n$ が k 線型同型となるものが存在するとき，(E, M, π) を階数 n の C^∞ 級 k **ベクトルバンドル**という．

Def 0.4
(E, M, π) を F をファイバーとする M 上の C^r 級ファイバーバンドルとする．$C^{r'}$ 写像 $s\colon M \to E$ であって，$\pi \circ s = \mathrm{id}_M$ を充たすものを $C^{r'}$ **切断**という．

Remark 0.1. C^∞ 多様体 M の接バンドルは C^∞ ベクトルバンドルの構造を持つ．ベクトル場とはベクトルバンドルの概念を用いると接バンドルの切断であるといえる．ベクトル場が

C^r 級であることは切断として C^r 級であることと同値である.

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "\rho(B)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V_2 \arrow[d, "\rho(B)"] \\
V_1 \arrow[r, "f_A"] & V_2
\end{tikzcd}
$$