素数の逆数和

素数の逆数和は発散する．$\{p_n\}$ を素数列とする．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}=\infty$$

⟨proof⟩

（Step.1）$1\le n\le N$ に対し $p_n^N>N$ なので $n=p_1^{e_1(n)}\cdots p_N^{e_N(n)}$ $(0\le e_j(n)\le N, 1\le j\le N)$と表せる．

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{p_1^{e_1(n)}\cdots p_N^{e_N(n)}}<\sum_{k_1=0}^{N}\cdots\sum_{k_n=0}^{N}\frac{1}{p_1^{k_1}\cdots p_N^{k_N}}=\left(\sum_{k_1=0}^{N}\frac{1}{p_1^{k_1}}\right)\cdots\left(\sum_{k_N=0}^{N}\frac{1}{p_1^{k_N}}\right)$$

$$=\left(\frac{1-\left(\frac{1}{p_1}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{p_1}}\right)\cdots\left(\frac{1-\left(\frac{1}{p_N}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{p_N}}\right)<\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_N}}=\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}$$

（Step.2）両辺対数を取って，

$$\log\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)<\log\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right)=\sum_{n=1}^{N}\log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right)=\sum_{n=1}^{N}\left\{-\log\left(1-\frac{1}{p_n}\right)\right\}$$

$$N\to\infty \text{ で } \log\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)\to\infty \text{ より，} \sum_{n=1}^{N}\left\{-\log\left(1-\frac{1}{p_n}\right)\right\}\to\infty$$

（Step. 3）$2x\ge-\log(1-x)$ $\left(0\le x\le\frac{1}{2}\right)$ なので，$x=\frac{1}{p_k}$ として Summation を取ると，

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{p_n}\ge\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left\{-\log\left(1-\frac{1}{p_n}\right)\right\}\ \blacksquare$$

（註）$2x\ge-\log(1-x)$ について

$$-\log(1-x)=\log\frac{1}{1-x}=\log\left(1+\frac{x}{1-x}\right)\le^{\dagger1}\frac{x}{1-x}\le^{\dagger2}2x$$

$$\dagger 1:\log(1+y)\le y\ (y>-1),\qquad \dagger 2:\ 0\le x\le\frac{1}{2} \text{ により，} 1-x\ge\frac{1}{2}$$

（註）平方数と素数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を比較することで，p_n よりも n^2 の方が発散速度が大きいことが分かる．