

数学研究 2 発表資料 (発表後訂正)

菊地陽成

2025 年 10 月 4 日

1 微分可能多様体の定義 (後半：微分可能多様体の向き付け)

$n \geq 1$ とする. (0 次元多様体は考えない.)

1.1 微分可能構造

Def 1.1

M を位相多様体とする.

$$\mathcal{A}_M := \{S = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J} \mid S : M \text{ の微分可能座標系}\}$$

とする. \mathcal{A}_M 上の関係 \sim を, $S, S' \in \mathcal{A}_M$ に対し,

$$S \sim S' :\Leftrightarrow S \cup S' \in \mathcal{A}_M$$

で定めるとこれは同値関係である. $S \sim S'$ のとき, S, S' は同値である (equivalent) という. $\mathcal{D} = [S] \in \mathcal{A}_M / \sim$ を M 上の微分可能構造 (differentiable structure) という. 位相多様体 M と微分可能構造 $\mathcal{D} \in \mathcal{A}_M / \sim$ の組 (M, \mathcal{D}) を C^∞ 多様体という.

1.2 微分可能多様体の向き付け

(M, \mathcal{D}) を n 次元 C^∞ 多様体とする. $\mathcal{D} = [S], S = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ とする.

$x \in V_i \cap V_j$ に対して, $a_{ji}(x)$ を $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(V_i \cap V_j) \rightarrow \mathbb{R}^n$ の $\psi_i(x)$ における Jacobi 行列とする;

$$a_{ji}(x) := D(\psi_j \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)}, \quad x \in V_i \cap V_j$$

このとき $x \in V_i \cap V_j \cap V_k$ に対して,

$$\begin{aligned} a_{kj}(x)a_{ji}(x) &= D(\psi_k \circ \psi_j^{-1})_{\psi_j(x)} D(\psi_j \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} \\ &= D(\psi_k \circ \psi_j^{-1} \circ \psi_j \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} \\ &= D(\psi_k \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} \\ &= a_{ki}(x) \end{aligned}$$

である. ここで, $k = i$ とおけば,

$$\begin{aligned} a_{ij}(x)a_{ji}(x) &= a_{ii}(x) = D(\text{id})_{\psi_i(x)} = E_n \\ a_{ji}(x)a_{ij}(x) &= a_{jj}(x) = D(\text{id})_{\psi_j(x)} = E_n \end{aligned}$$

より $a_{ji}(x)^{-1} = a_{ij}(x)$ で $a_{ji}(x) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. よって,

$$a_{ji}: V_i \cap V_j \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}), \quad x \mapsto a_{ji}(x)$$

なる C^∞ 写像を得る.^{†1}

Def 1.2

微分可能座標系 $\mathcal{S} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J} \in \mathcal{A}_M$ は,

$$\forall i, j \in J, \forall x \in V_i \cap V_j, \det a_{ij}(x) > 0$$

を充たすとき, 向き付けられている (oriented) という.

$$\mathcal{O}_M := \{\mathcal{S} \in \mathcal{A}_M \mid \mathcal{S} \text{ は向き付けられている}\}$$

とする. このとき, \mathcal{O}_M 上の関係 \approx を, $\mathcal{S} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}, \mathcal{S}' = \{(V'_k, \psi'_k)\}_{k \in K} \in \mathcal{O}_M$ に対し,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \approx \mathcal{S}' &: \Leftrightarrow \mathcal{S} \cup \mathcal{S}' \in \mathcal{O}_M \\ &\Leftrightarrow \forall (j, k) \in J \times K, \forall x \in V_j \cap V'_k, \det D(\psi'_k \circ \psi_j^{-1})_{\psi_j(x)} > 0 \end{aligned}$$

で定めるとこれは同値関係である.

Proof. (同値関係であること) 反射律と対称律は明らか.

$$\mathcal{S} = \{(V_i, \psi_i)\}_{i \in I}, \mathcal{S}' = \{(V'_j, \psi'_j)\}_{j \in J}, \mathcal{S}'' = \{(V''_k, \psi''_k)\}_{k \in K} \in \mathcal{O}_M$$

に対し, $\mathcal{S} \approx \mathcal{S}', \mathcal{S}' \approx \mathcal{S}''$ とする. $(i, k) \in I \times K, x \in V_i \cap V''_k$ に対し, $x \in V'_j$ なる $j \in J$ を選択すると,

$$\begin{aligned} \det D(\psi''_k \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} &= \det D(\psi''_k \circ \psi_j'^{-1} \circ \psi'_j \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} \\ &= \det D(\psi''_k \circ \psi_j'^{-1})_{\psi'_j(x)} D(\psi'_j \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} \\ &= \det D(\psi''_k \circ \psi_j'^{-1})_{\psi'_j(x)} \det D(\psi'_j \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} > 0 \end{aligned}$$

^{†1} 多様体間の C^∞ 写像は後の section で定義される.

より $S \approx S''$. ■

M が連結と仮定すると,

$$S \not\approx S' \Leftrightarrow \forall (i, j) \in J \times K, \forall x \in V_i \cap V'_j, \det D(\psi'_j \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} < 0$$

であるから, $\mathcal{O}_M \neq \emptyset$ なら \mathcal{O}_M は \approx によって 2 つの同値類に類別される.

Remark 1.1. M が非連結なら成り立つとは限らない. 実際,

$$M = \mathbb{R}^2 \amalg \mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cup (\mathbb{R}^2 \times \{1\})$$

$$V_0 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}, V_1 = \mathbb{R}^2 \times \{1\}, \psi_0 : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, 0) \mapsto (x, y),$$

$$\psi_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, 1) \mapsto (x, y), \psi'_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, 1) \mapsto (x, -y),$$

$$S = \{(V_0, \psi_0), (V_1, \psi_1)\}, S' = \{(V_0, \psi_0), (V_1, \psi'_1)\}$$

とすると $S, S' \in \mathcal{O}_M$ である. このとき V_0 上で変換関数の Jacobian は正だが, V_1 上では負なので, $\forall (j, k), \forall x, \det D(\psi'_k \circ \psi_j^{-1})_{\psi_j(x)} < 0$ と $\forall (j, k), \forall x, \det D(\psi'_k \circ \psi_j^{-1})_{\psi_j(x)} > 0$ はどちらも成立しない.

Def 1.3

$\mathcal{O}_M \neq \emptyset$ のとき, M は向き付け可能 (orientable) といい, \mathcal{O}_M / \approx の元を M の向き付け (orientation) という. 向き付け可能な M の向き付けを 1 つ固定し付随させて考えるとき, M は向き付けられている (oriented) という.

Example 1.1. $n \geq 1$ とする. n 次元球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ は向き付け可能であることを示す. まず立体射影を考えるために, $x^+ = (0, \dots, 0, 1), x^- = (0, \dots, 0, -1) \in S^n$, $U^+ = S^n \setminus \{x^+\}, U^- = S^n \setminus \{x^-\}$ とし,

$$\phi^+ : U^+ \rightarrow \mathbb{R}^n, \phi^+(x) := \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

$$\phi^- : U^- \rightarrow \mathbb{R}^n, \phi^-(x) := \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right)$$

と定めると, $S := \{(U^+, \phi^+), (U^-, \phi^-)\} \in \mathcal{A}_{S^n}$ だが,

$$\det D(\phi^- \circ (\phi^+)^{-1})_y < 0 \quad (y \in \phi^+(U^+ \cap U^-))$$

であり (下で補足), $S \notin \mathcal{O}_{S^n}$, つまり向き付けられていない. そこで

$$R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, R(y_1, y_2, \dots, y_n) = (-y_1, y_2, \dots, y_n)$$

と定め,

$$\tilde{\phi}^- := R \circ \phi^- : U^- \rightarrow \mathbb{R}^n$$

とすれば, $\det DR = -1$ から,

$$\begin{aligned}\det D(\tilde{\phi}^- \circ (\phi^+)^{-1})_y &= \det D(R \circ \phi^- \circ (\phi^+)^{-1})_y \\ &= \det DR \det D(\phi^- \circ (\phi^+)^{-1})_y \\ &= -\det D(\phi^- \circ (\phi^+)^{-1})_y > 0\end{aligned}$$

よって $\mathcal{S}' := \{(U^+, \phi^+), (U^-, \tilde{\phi}^-)\} \in \mathcal{O}_{S^n}$ で, $\mathcal{O}_{S^n} \neq \emptyset$.

(補足) $y = (y_1, \dots, y_n) \in \phi^+(U^+ \cap U^-) \subset \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\phi^- \circ (\phi^+)^{-1}(y) = \left(\frac{y_1}{\|y\|^2}, \dots, \frac{y_n}{\|y\|^2} \right)$$

であるから,

$$D(\phi^- \circ (\phi^+)^{-1})_y = \left(\frac{\delta_{ij}\|y\|^2 - 2y_i y_j}{\|y\|^4} \right)_{(i,j)} = \frac{1}{\|y\|^2} \left(E_n - \frac{2y^\top y}{\|y\|^2} \right)$$

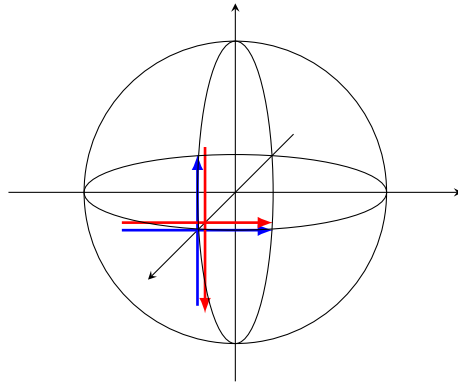
ここで $p = (1, 0, \dots, 0) \in U^+ \cap U^-$ とすると, $\phi^+(p) = (1, 0, \dots, 0)$ で,

$$\det D(\phi^- \circ (\phi^+)^{-1})_{\phi^+(p)} = \det \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = -1$$

ここで,

$$f := \det D(\phi^- \circ (\phi^+)^{-1}): U^+ \cap U^- \rightarrow \mathbb{R}$$

は連続であり, $U^+ \cap U^-$ は連結なので像 $f(U^+ \cap U^-) \subset \mathbb{R}$ も連結. $\mathcal{S} \in \mathcal{A}_{S^n}$ より $0 \notin f(U^+ \cap U^-)$ で, 先の計算から $-1 \in f(U^+ \cap U^-)$ なので, $f(U^+ \cap U^-) \subset (-\infty, 0)$, つまり $f < 0$ を得る.



Remark 1.2. 具体的に Jacobian を計算することもできる. $P = \frac{y^\top y}{\|y\|^2}$ とおくと,^{†2}

$$yP = \frac{y(y^\top y)}{\|y\|^2} = \frac{\|y\|^2}{\|y\|^2} y = y, \quad y(E_n - 2P) = y - 2y = -y$$

また $z \in (\text{Span}\{y\})^\perp$ に対し,

$$zP = \frac{z(y^\top y)}{\|y\|^2} = \frac{\langle z, y \rangle}{\|y\|^2} y = 0, \quad z(E_n - 2P) = z$$

なので $E_n - 2P$ は固有値 -1 (固有空間は $\text{Span}\{y\}$), 固有値 1 (固有空間は $(\text{Span}\{y\})^\perp$) を持つ. $\dim \text{Span}\{y\} = 1, \dim (\text{Span}\{y\})^\perp = n - 1$ なので,

$$\det D(\phi^- \circ (\phi^+)^{-1})(y) = \det \left(\frac{1}{\|y\|^2} (E_n - 2P) \right) = \left(\frac{1}{\|y\|^2} \right)^n \cdot (-1) \cdot 1^{n-1} = -\frac{1}{\|y\|^{2n}} < 0$$

Example 1.2. $[0, 1]^2$ 上の関係 \sim を

$$(t, s) \sim (t', s') \Leftrightarrow (t, s) = (t', s') \text{ or } [\{t, t'\} = \{0, 1\}, s = 1 - s']$$

で定めると, $M = [0, 1]^2 / \sim$ の開核 M° は 2 次元 C^∞ 多様体でありこれを Möbius の帯という. Möbius の帯は向き付け不可能な多様体である.

^{†2} P は直線 $\text{Span}\{y\}$ への正射影を表す行列である.