距離空間の条件全パターン

定義（距離空間）

X を集合とする．関数 $d : X^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ が次を満たすとき，(X, d) を距離空間という．

$(D1)\ \forall x \in X : d(x, x) = 0$
$(D2)\ d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
$(D3)\ \forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
$(D4)\ \forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

[1] 距離空間

■　$(D1)(D2)(D3)(D4)$ を満たすもの

$$X = \mathbf{R}^2, \qquad d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

これをマンハッタン距離といい，平安京上で採用される最も基本的な距離である．

[2] 4 つの条件のうち 1 つを満たさないもの

■　$(D1)$ を満たさないが $(D2)(D3)(D4)$ を満たすもの．

$$X = \mathbf{R}^2, \qquad d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + 1$$

$\because \forall x, y \in X : d(x, y) \neq 0 \longrightarrow (D1) \times$

■　$(D2)$ を満たさないが $(D1)(D3)(D4)$ を満たすもの

$$X = \mathbf{R}^2, \qquad d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := |x_2 - x_1|$$

$\because d\big((1,1), (1,2)\big) = 0 \ \wedge \ (1,1) \neq (1,2) \longrightarrow (D2) \times$

■　$(D3)$ を満たさないが $(D1)(D2)(D4)$ を満たすもの

$$X = \{e^{i\theta} \in \mathbf{C} : \theta \in \mathbf{R}\}\ , \qquad d(x, y) := \mathrm{Arg}\frac{y}{x}$$

但し，$\mathrm{Arg}\, z$ は $z = e^{i\theta} \wedge \ \theta \in [0, 2\pi)$ を満たすものとする．

$\because d(1, i) = \mathrm{Arg}\, i = \dfrac{\pi}{2}, \qquad d(i, 1) = \mathrm{Arg}\dfrac{1}{i} = \dfrac{3\pi}{2}, \qquad d(1, i) \neq d(i, 1) \ \longrightarrow (D3) \times$

■　$(D4)$ を満たさないが $(D1)(D2)(D3)$ を満たすもの

$$X = \mathbf{R}, \qquad d(x, y) := x^2 + y^2$$

$\because 4 = d(1, -1) > d(1,0) + d(0, -1) = 1 + 1 = 2 \longrightarrow (D4) \times$

[3] 4 つの条件のうち 2 つを満たさないもの

■ $(D1)(D2)$ を満たさないが $(D3)(D4)$ を満たすもの

$$X = \mathbf{R}, \qquad d(x,y) := \begin{cases} 0 \text{ if } (x,y) \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \\ 1 \text{ otherwise} \end{cases}$$

$\because d(2,2) = 1 > 0 \quad \longrightarrow (D1) \times$

$\because (d(0,1) = 0) \wedge (0 \neq 1) \ \longrightarrow (D2) \times$

■ $(D1)(D3)$ を満たさないが $(D2)(D4)$ を満たすもの

$$X = \mathbf{R}, \qquad d(x,y) := |x| + 2|y|$$

$\because d(1,1) = 3 > 0 \quad \longrightarrow (D1) \times$

$1 = d(1,0) \neq d(0,1) = 2 \ \longrightarrow (D3) \times$

■ $(D1)(D4)$ を満たさないが $(D2)(D3)$ を満たすもの

$$X = \mathbf{R}, \qquad d(x,y) := x^2 + y^2 + 1$$

$\because d(1,1) = 3 > 0 \quad \longrightarrow (D1) \times$

$5 = d(1,-1) > d(1,0) + d(0,-1) = 2 + 2 = 4 \quad \longrightarrow (D4) \times$

■ $(D2)(D3)$ を満たさないが $(D1)(D4)$ を満たすもの

$$X = \mathbf{C} \setminus \{0\}\ , \qquad d(x,y) := \operatorname{Arg} \frac{y}{x}$$

$\because (d(i,2i) = \operatorname{Arg} 2 = 0) \wedge (i \neq 2i) \ \longrightarrow (D2) \times$

$d(1,i) = \operatorname{Arg} i = \dfrac{\pi}{2}, \qquad d(i,1) = \operatorname{Arg} \dfrac{1}{i} = \dfrac{3\pi}{2}, \qquad d(1,i) \neq d(i,1) \ \longrightarrow (D3) \times$

■ $(D2)(D4)$ を満たさないが $(D1)(D3)$ を満たすもの

$$X = \mathbf{R}, \quad d(x,y) := x + y$$

$\because (d(1,-1) = 0) \wedge (1 \neq -1) \quad \longrightarrow (D2) \times$

$0 = d(0,0) > d(0,-1) + d(-1,0) = -2 \ \longrightarrow (D4) \times$

■ $(D3)(D4)$ を満たさないが $(D1)(D2)$ を満たすもの

$$X = \mathbf{R}, \quad d(x,y) := (y-x)^3$$

$\because -1 = d(1,0) \neq d(0,1) = 1 \ \longrightarrow (D3) \times$

$8 = d(-1,1) > d(-1,0) + d(0,1) = 2 \ \longrightarrow (D4) \times$

[4] 4 つの条件のうち 3 つを満たさないもの

■ $(D2)(D3)(D4)$ を満たさないが $(D1)$ を満たすもの

$$X = \mathbf{R}, \qquad d(x,y) := (x-y)x$$

$\because \big(d(0,1)\big) = 0 \wedge (0 \neq 1) \ \longrightarrow (D2) \times$

$1 = d(1,0) = 1 \neq d(0,1) = 0 \ \longrightarrow (D3) \times$

$2 = d(1,-1) > d(1,0) + d(0,-1) = 1 \ \longrightarrow (D4) \times$

■ $(D1)(D3)(D4)$ を満たさないが $(D2)$ を満たすもの

$$X = \mathbf{R}_{\geq 0}, \qquad d(x,y) := -(x^2 + 2y^2)$$

$\because d(1,1) = -3 \ \longrightarrow (D1) \times$

$-1 = d(1,0) \neq d(0,1) = -2 \longrightarrow (D3) \times$

$-3 = d(1,1) > d(1,1) + d(1,1) = -6 \ \longrightarrow (D4) \times$

■ $(D1)(D2)(D4)$ を満たさないが $(D3)$ を満たすもの

$$X = \mathbf{R}, \qquad d(x,y) := xy$$

$\because d(1,1) = 1 \ \longrightarrow (D1) \times$

$\big(d(0,1)\big) = 0 \wedge (0 \neq 1) \ \longrightarrow (D2) \times$

$1 = d(1,1) > d(1,0) + d(0,1) = 0 \ \longrightarrow (D4) \times$

■ $(D1)(D2)(D3)$ を満たさないが $(D4)$ を満たすもの

$$X = \mathbf{R}, \qquad d(x,y) := |x|$$

$\because d(1,1) = 1 \ \longrightarrow (D1) \times$

$\big(d(0,1)\big) = 0 \wedge (0 \neq 1) \ \longrightarrow (D2) \times$

$1 = d(1,0) \neq d(0,1) = 0 \ \longrightarrow (D3) \times$