

線型同次漸化式の解（対角化可能な場合）

2026年1月19日

記号については以下のようにする.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- 数列 a の第 n 項を $(a)_n$ と書く. $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ なら $(a)_n = a_n$
- 線型写像 $f: V \rightarrow W$ と V の基底 $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N)$ に対し,

$$f(\mathcal{B}) := (f(\mathbf{b}_1), \dots, f(\mathbf{b}_N))$$

と定める.

Prob 0.1

$N \in \mathbb{N}$ を固定する. 複素数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ について, $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ が与えられ, $N+1$ 項目以降は $(N+1)$ 項間漸化式

$$a_{n+N} = \sum_{k=1}^N p_k a_{n+k-1}$$

$$(\forall k \in \{1, \dots, N\}: p_k \in \mathbb{C}, p_k = \text{const.})$$

によって定義されるとする. 但し, N 次方程式

$$\lambda^N - \sum_{k=1}^N p_k \lambda^{k-1} = 0$$

が全て異なる複素数解を持つと仮定する (この方程式を**特性方程式**という). このとき $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の一般項 a_n ($n \geq N+1$) を a_1, \dots, a_N の式で表せ.

Result 0.1

特性方程式の N 個の解を

$$\gamma_j \in \mathbb{C}, \quad j \in \{1, \dots, N\}$$

とおく. N 次正方行列 $P \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$ を

$$P = (\gamma_j^{i-1})_{i,j=1,\dots,N} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1^{N-1} & \cdots & \gamma_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

とおくと, 一般項 a_n ($n \geq N+1$) は

$$a_n = (\gamma_1^{n-1} \quad \cdots \quad \gamma_N^{n-1}) P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

と書ける。特に

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Span}(\{\gamma_1^{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}, \dots, \{\gamma_N^{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}})$$

が成り立つ。

Proof. \mathbb{C} 線型空間

$$V := \mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{C}\}$$

の N 次元部分空間 W を

$$W = \left\{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid a_{n+N} = \sum_{k=1}^N p_k a_{n+k-1} \right\}$$

で定める。

W の基底 $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N)$ を

$$\mathbf{e}_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0, \underbrace{p_j}_N, \dots) \in W$$

で定める。実際、 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N, a_{N+1}, \dots) \in W$ に対し

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^N a_j \mathbf{e}_j$$

と一意に表せる。

線型変換 $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(W)$ を

$$f(\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{a_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

と定めると、

$$f(\mathbf{e}_1) = (0, \dots, 0, \underbrace{p_1}_N, \dots)$$

$$f(\mathbf{e}_j) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j-1}, 0, \dots, 0, \underbrace{p_j}_N, \dots) \quad (j \geq 2)$$

である。よって \mathcal{E} に関する表現行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_N \end{pmatrix}$$

である。

A の固有多項式は

$$\begin{aligned} F_A(\lambda) &= \det(\lambda E - A) \\ &= \lambda^N - \sum_{k=1}^N p_k \lambda^{k-1} \end{aligned}$$

であり、その相異なる N 個の根を γ_j とする。

$\gamma_j E - A$ を簡約化すると

$$\gamma_j^N - \sum_{k=1}^N p_k \gamma_j^{k-1} = 0$$

より、固有ベクトル \mathbf{x}_j は

$$\mathbf{x}_j = (1, \gamma_j, \gamma_j^2, \dots, \gamma_j^{N-1})^T$$

と取れる。

$$P = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$$

とおくと

$$AP = P\Gamma, \quad \Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$$

が成り立つ。

基底 $\mathcal{F} = \mathcal{E}P$ を取ると

$$f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}\Gamma$$

であり、

$$f(\mathbf{f}_j) = \gamma_j \mathbf{f}_j$$

を得る。初項 $(\mathbf{f}_j)_1 = 1$ より

$$(\mathbf{f}_j)_n = \gamma_j^{n-1}$$

である。

以上から

$$a_n = (\gamma_1^{n-1} \quad \dots \quad \gamma_N^{n-1}) P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

が従う。

■

Example 0.1. 三項間漸化式

$$a_{n+2} = p_2 a_{n+1} + p_1 a_n \quad (p_2^2 + 4p_1 \neq 0)$$

特性方程式は

$$\lambda^2 - p_2 \lambda - p_1 = 0$$

であり,

$$\gamma_{1,2} = \frac{p_2 \pm \sqrt{p_2^2 + 4p_1}}{2}$$

である.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \begin{pmatrix} \gamma_2 & -1 \\ -\gamma_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} (\gamma_1^{n-1} \quad \gamma_2^{n-1}) \begin{pmatrix} \gamma_2 & -1 \\ -\gamma_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{a_1 \gamma_2 - a_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \gamma_1^{n-1} - \frac{a_1 \gamma_1 - a_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \gamma_2^{n-1}. \end{aligned}$$