

# 昼の長さ

$D$  : 秋分からの日数

$L$  : 緯度 ( $-90 < L < 90$ )

$$\psi = \frac{D}{365} \times 2\pi, \quad \phi_0 = 23.4 \times \frac{\pi}{180}, \quad \theta = L \times \frac{\pi}{180}$$

以上のようにパラメタを設定する.

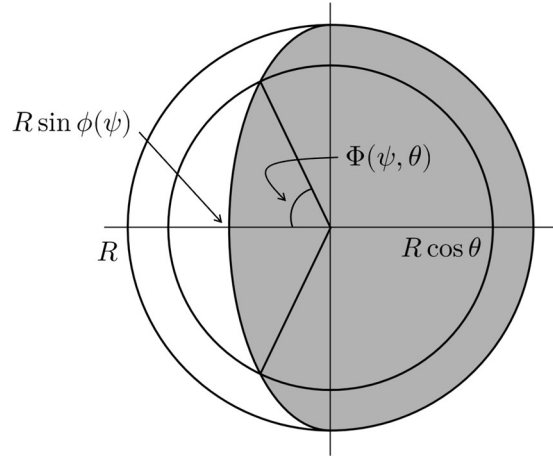
$\phi(\psi)$  : 太陽から地球を見たときの見かけの地軸の傾き

とすると,

$$\tan \phi(\psi) = \sin \psi \tan \phi_0$$

である. 特に  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi(\pi/2) = \phi_0$

次の図は地軸方向から秋分過ぎ頃の地球を見た図であり, 影の部分が地上の夜を表す.



地球の半径を  $R$  とおくと, 緯度  $L^\circ = \theta[\text{rad}]$  の点は半径  $R \cos \theta$  の円軌道を描く.

影の境界のうち左側 (太陽側) は長径  $R$ , 短径  $R \sin \phi(\psi)$  の楕円である.

$\Phi(\psi, \theta)$  を図のように置くと,

$$\Phi(\psi, \theta) = \cos^{-1}(\tan \phi(\psi) \tan \theta)$$

但し,  $-\pi/2 + \phi_0 < \theta < \pi/2 - \phi_0$  とする. (この範囲でないと昼夜が入れ替わらない.)

[導出]

点の軌道と影の境界の交点を2通りで表すと,

$$(R \cos \theta \cos \Phi(\psi, \theta), R \cos \theta \sin \Phi(\psi, \theta)) = (R \sin \phi(\psi) \cos \Psi, R \sin \Psi)$$

それぞれノルムをとると,

$$\cos^2 \theta = \sin^2 \phi(\psi) \cos^2 \Psi + \sin^2 \Psi = \sin^2 \phi(\psi) \cos^2 \Psi + (1 - \cos^2 \Psi)$$

$$= 1 - \cos^2 \Psi (1 - \sin^2 \phi(\psi)) = 1 - \cos^2 \Psi \cos^2 \phi(\psi)$$

$$\cos^2 \Psi = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \phi(\psi)} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \phi(\psi)}, \quad \cos \Psi = \frac{\sin \theta}{\cos \phi(\psi)}$$

$\cos \theta \cos \Phi(\psi, \theta) = \sin \phi(\psi) \cos \Psi$  から,

$$\cos \Phi(\psi, \theta) = \frac{\sin \phi(\psi) \cos \Psi}{\cos \theta} = \frac{\sin \phi(\psi)}{\cos \theta} \frac{\sin \theta}{\cos \phi(\psi)} = \tan \phi(\psi) \tan \theta$$

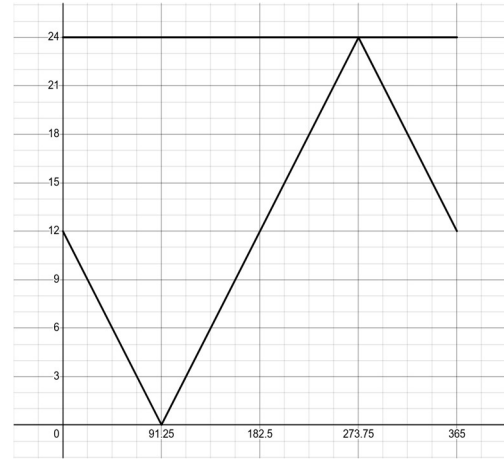
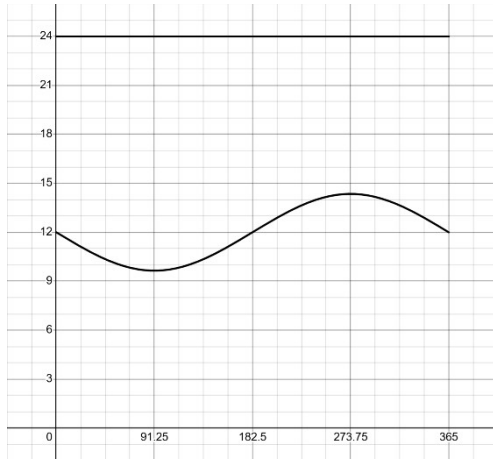
$$\Phi(\psi, \theta) = \cos^{-1}(\tan \phi(\psi) \tan \theta) \quad \blacksquare$$

以上より，昼の長さ  $T(\psi, \theta)$  は,

$$T(\psi, \theta) = \frac{365}{360} \cdot \frac{24}{2\pi} 2\Phi(\psi, \theta) = \frac{365}{360} \cdot \frac{24}{\pi} \cos^{-1}(\tan \phi(\psi) \tan \theta) = \frac{365}{360} \cdot \frac{24}{\pi} \cos^{-1}(\sin \psi \tan \phi_0 \tan \theta)$$

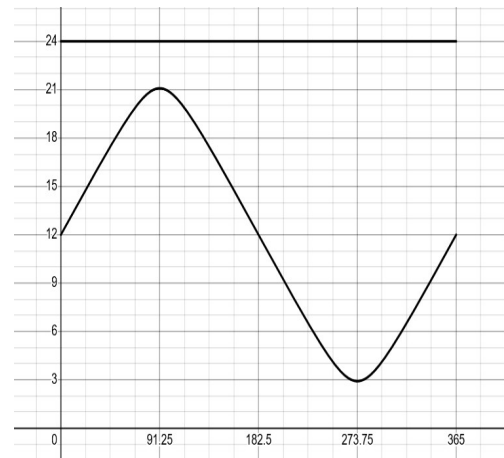
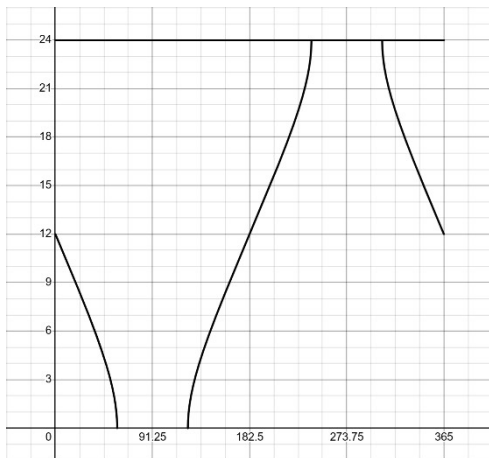
$$= \frac{365}{360} \cdot \frac{24}{\pi} \cos^{-1} \left( \tan \left( 23.4 \times \frac{\pi}{180} \right) \tan \left( \frac{\pi L}{180} \right) \sin \left( \frac{2\pi D}{365} \right) \right)$$

(e. g.) 北緯  $35^\circ$  (京都), 北緯  $(90 - 23.4)^\circ$  (極圏の境界)



(見やすさのため  $365/360$  倍を除いた)

(e. g.) 北緯  $70^\circ$ , 南緯  $65^\circ$



左図の冬至付近は極夜，夏至付近は白夜となっている。