確率分布

2025 年 2 月 22 日

1 確率の定義

Def 1.1 (Laplace による素朴な確率の定義)
起こり得る場合の数が全体で n 個あり，それらの起こり方は全て同等であるとする．事象 A に対して A の起こる場合の数が全体の n 個のうち r 個であるとき，A の**確率** $P(A)$ を，

$$P(A) = \frac{r}{n}$$

と定義する．

Def 1.2 (σ-加法族，事象)
Ω を集合とする．また $\mathfrak{P}(\Omega) = \{A \mid A \subset \Omega\}$ とする．$\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ が，

(1) $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
(2) $\forall A \in \mathcal{F}, A^c \in \mathcal{F}$
(3) $\Omega \in \mathcal{F}$

を満たすとき，$\mathcal{F}$ を Ω の σ-**加法族**という．このとき $(\Omega, \mathcal{F})$ を**可測空間**といい，Ω を**標本空間**という．また $\mathcal{F}$ の元を**事象**という．Ω を**全事象**，$\emptyset$ を**空事象**という．$A \in \mathcal{F}$ に対し，$A^c \coloneqq \Omega \backslash A$ を A の**余事象**という．

Prop 1.1
$\mathcal{F}$ を Ω の σ-加法族とする．

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$
(2) $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Proof. (1) $\Omega \in \mathcal{F}$ より $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}$

(2) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ に対し，$A_i^c \in \mathcal{F}\ (\forall i \in \mathbb{N})$，$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{F}$ であるから，

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathcal{F}$$

■

Def 1.3 (Borel 集合族)
$\mathbb{R}^n$ において Euclid 距離が誘導する位相を $\mathcal{O}$ とする．$\mathcal{O}$ を含む最小の σ-加法族を $\mathbb{R}^n$ の *Borel* **集合族**といい，$\mathcal{B}_n$ で表す．

Def 1.4 (Kolmogorov による公理的な確率の定義)
Ω を集合とし，$\mathcal{F}$ を Ω の σ-加法族とする．写像 $P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$ が,

(P1) $\forall A \in \mathcal{F}, 0 \leq P(A) \leq 1$
(P2) $P(\Omega) = 1$
(P3) $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}, \left[(\forall\ i, j, i \neq\ j)\,[A_i \cap\ A_j = \emptyset] \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)\right]$

を満たすとき，P は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の**確率測度**であるといい，$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は**確率空間**であるという．また，$A \in \mathcal{F}$ に対し，$P(A)$ を事象 A の**確率**という．

Remark 1.1. (P3) は非交和の記号で次のようにかける．

$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Remark 1.2. (P1)(P2) を満たすとき P は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度であるといい，$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は測度空間であるという．

Remark 1.3. $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}_1 \subsetneq \mathfrak{P}(\Omega)$ とする．

$$P\left(A\right) = \frac{1}{2}\int_A \chi_{(0,2]}\left(t\right) dt \quad (A \in \mathcal{F})$$

と定義すると P は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ 上の確率測度となる．但し，χ_S は集合 S の特性関数である．

Prop 1.2
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間とする．

(1) $P(\emptyset) = 0$
(2) $A \in \mathcal{F}$ に対し，$P(A^c) = 1 - P(A)$

(3) $A, B \in \mathcal{F}$ に対し，$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$（単調性）

(4) $A, B \in \mathcal{F}$ に対し，$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(5) $\{A_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{F}$ に対し，$P\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) \leq \sum_{i=1}^N P(A_i)$

Proof. (1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$ で $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$ より，

$$P(\Omega) = P(\Omega \cap \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) \quad \therefore P(\emptyset) = 0$$

(2) $A^c \in \mathcal{F}$ で $A \cap A^c = \emptyset$ より，$P(A) + P(A^c) = P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$

(3) $B \backslash A \in \mathcal{F}$ で $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$ より，

$$P(B) = P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B \backslash A) \geq P(A)$$

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B \backslash A), P(B) = P(A \cap B) + P(B \backslash A)$

$\therefore P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B) \quad \therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(5) $P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) \cap P(A_2)$ より，

$$P\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{N-1} A_i\right) + P(A_N) \leq \cdots \leq \sum_{i=1}^N P(A_i)$$

■

Prop 1.3 (劣加法性)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間とする．$\{A_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{F}$ に対し，

$$P\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \leq \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$$

Proof. $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \backslash A_1, B_3 = A_3 \backslash (A_1 \cap A_2), \cdots, B_j = A_j \backslash \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$ とおくと，

$$\bigcup_{j=1}^\infty B_j = \bigcup_{i=1}^\infty A_i, \quad i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset, \quad \forall i \in \mathbb{N}, B_i \subseteq A_i$$

$$\therefore P\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^\infty B_i\right) = \sum_{i=1}^\infty P(B_i) \leq \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$$

■