有名な平面曲線

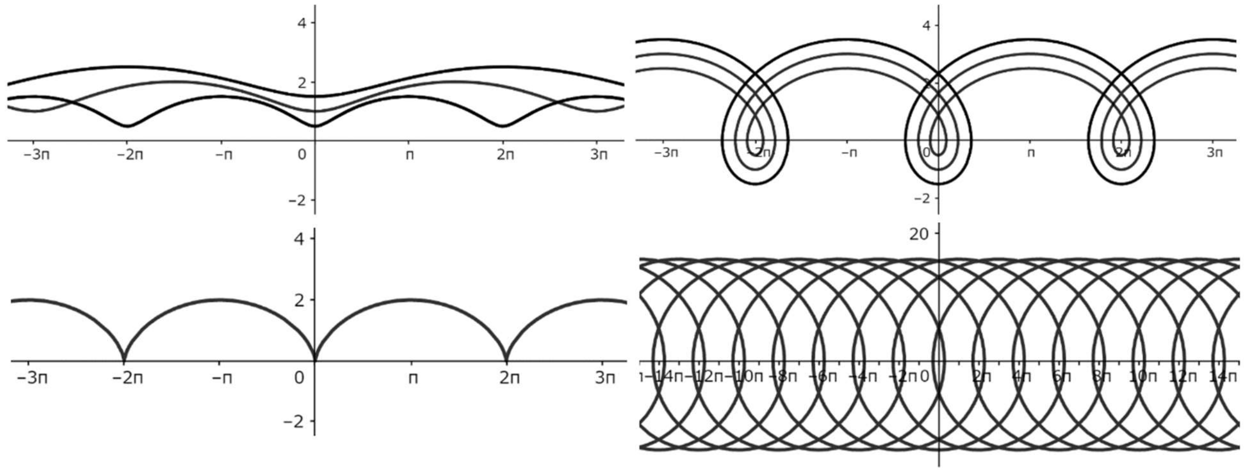
■　Trochoid 系

《Trochoid》

　定直線に接しながら円を滑らないように転がしたとき，その円の内部または外部の定点の軌跡.

動円（Moving circle）の半径を r_m ，描画点（Drawing point）の半径を r_d とする.

$$\begin{cases} x = r_m\theta - r_d \sin\theta \\ y = r_m - r_d \cos\theta \end{cases}$$



　$r_m = r_d$ のとき，つまり描画点が動円周上にあるとき，曲線は Cycloid になる.

《Hypotrochoid（内 Trochoid）》

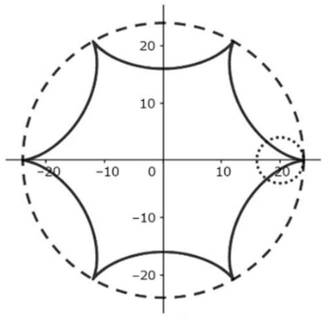
　定円に内接しながら円を滑らないように転がしたとき，その円の内部または外部の定点の軌跡.

定円（Constant circle）の半径を r_c ，動円の半径を r_m ，描画点の半径を r_d とする.

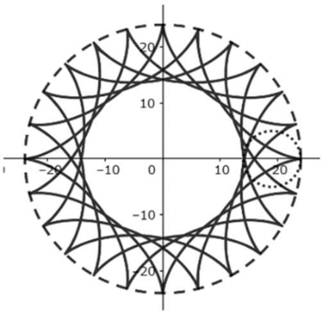
$$\begin{cases} x = (r_c - r_m)\cos\theta + r_d \cos\left(\dfrac{r_c - r_m}{r_m}\theta\right) \\ y = (r_c - r_m)\sin\theta - r_d \sin\left(\dfrac{r_c - r_m}{r_m}\theta\right) \end{cases}$$

　$r_m = r_d$ のとき，つまり描画点が動円周上にあるとき，曲線は Hypocycloid になる.

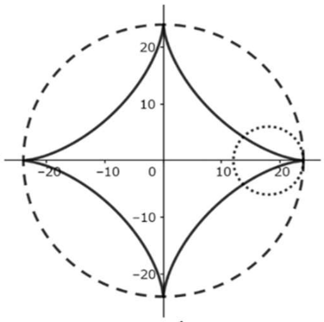
この下で，$r_m=\frac{1}{4}r_c$ のとき Asteroid（星芒形），$r_m=\frac{1}{3}r_c$のとき Deltoid（三尖形），$r_m=\frac{1}{2}r_c$のとき定円の直径となる．



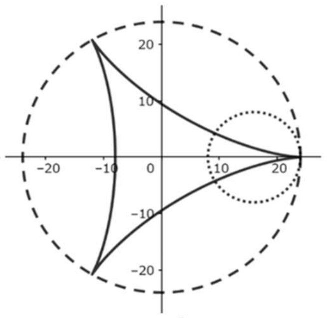
$r_m=\dfrac{1}{6}r_c$



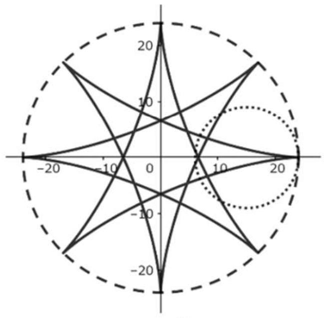
$r_m=\dfrac{5}{24}r_c$



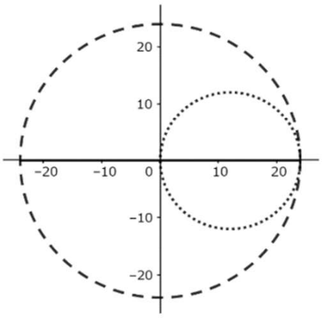
$r_m=\dfrac{1}{4}r_c$



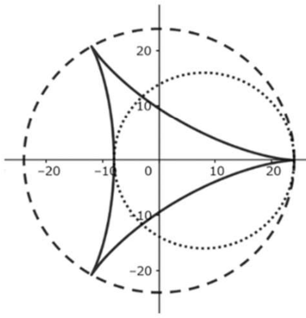
$r_m=\dfrac{1}{3}r_c$



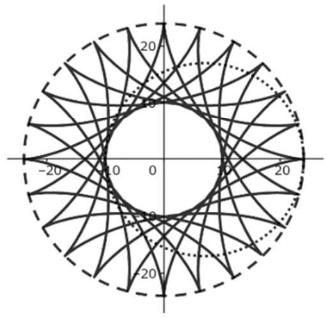
$r_m=\dfrac{3}{8}r_c$



$r_m=\dfrac{1}{2}r_c$

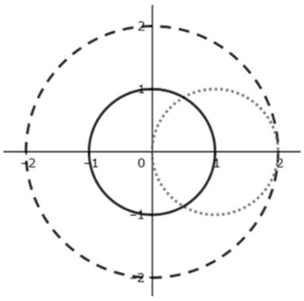


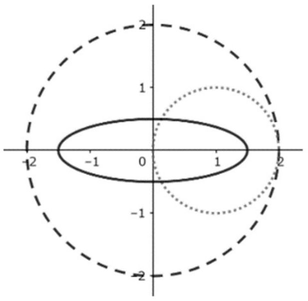
$r_m=\dfrac{2}{3}r_c$

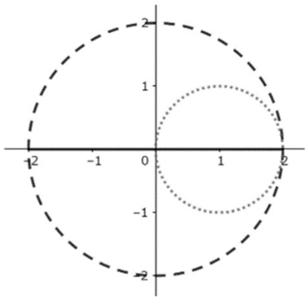


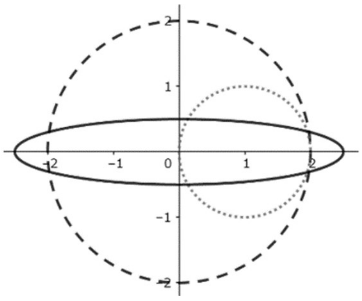
$r_m=\dfrac{17}{24}r_c$

$r_m=\frac{1}{5}r_c$ のとき，$r_m : r_d$ を　$2:1$,　　$1:1$,　　$1:2$,　　$1:6$　とした．

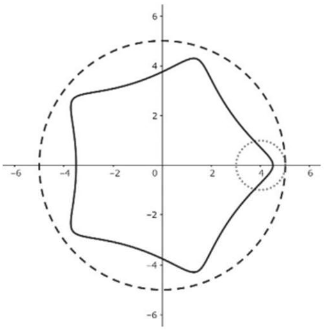


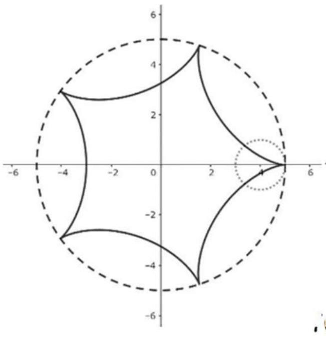


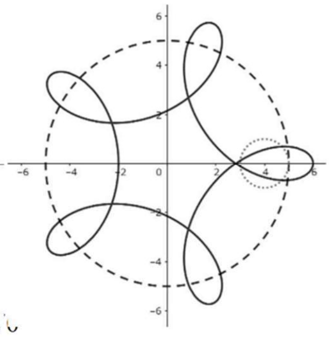


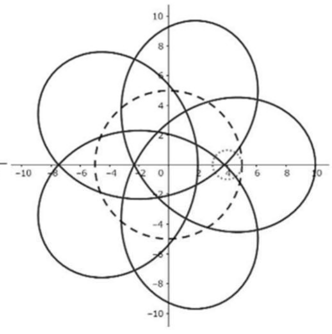


$r_m=\frac{1}{2}r_c$ のとき，$r_m : r_d$ を　$0:1$,　$2:1$,　$1:1$,　$2:3$　とした．軌跡が楕円を描くことを確認せよ．









《Epitrochoid（外 Trochoid）》

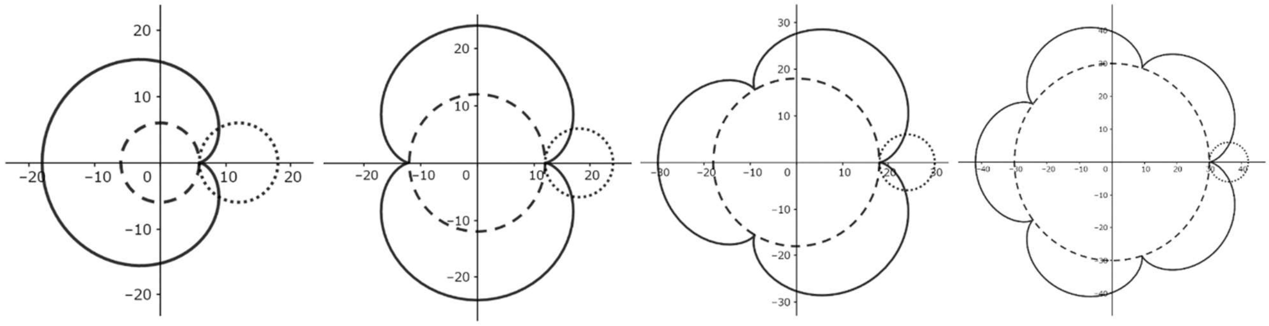
定円に外接しながら円を滑らないように転がしたとき，その円の内部または外部の定点の軌跡.

定円の半径を r_c ，動円の半径を r_m ，描画点の半径を r_d とする.

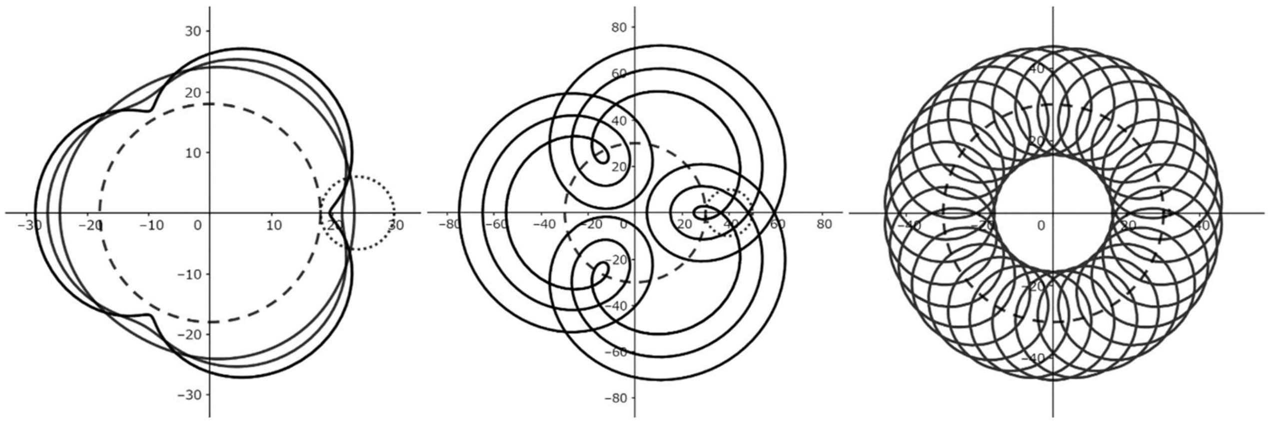
$$
\begin{cases}
x = (r_c + r_m)\cos\theta - r_d \cos\left(\dfrac{r_c + r_m}{r_m}\theta\right) \\
y = (r_c + r_m)\sin\theta - r_d \sin\left(\dfrac{r_c + r_m}{r_m}\theta\right)
\end{cases}
$$

$r_m = r_d$ のとき，つまり描画点が動円周上にあるとき，曲線は Epicycloid になる.

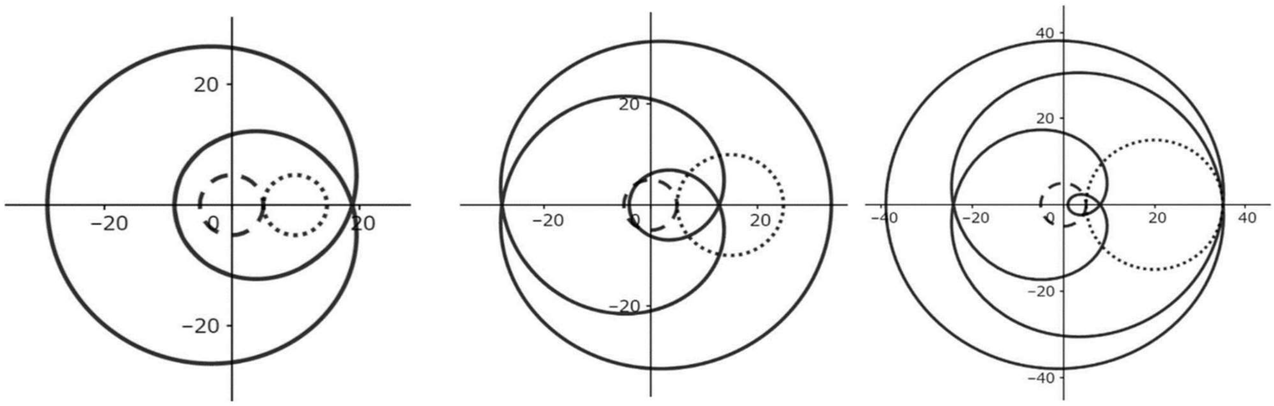
この下で， $r_m = r_c$ のとき Cardioid（心臓形）， $r_m = \frac{1}{2} r_c$のとき Nephroid（腎臓形）となる.



$r_m = \frac{1}{3} r_c$ のとき，$r_m : r_d$ を変えて，左，中央を得る． $\dfrac{r_m}{r_c}$ を小さくして右を得る.



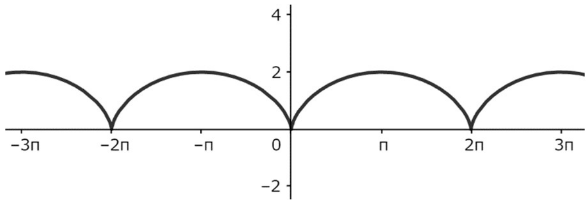
$r_m \geq r_c$ として，$r_m : r_d$ を変えること次を得る.



《特に有名な Trochoid》

① Cycloid（擺線）：$r_m = r_c$ の Trochoid

$$\begin{cases} x = r_c(\theta - \sin\theta) \\ y = r_c(1 - \cos\theta) \end{cases}$$



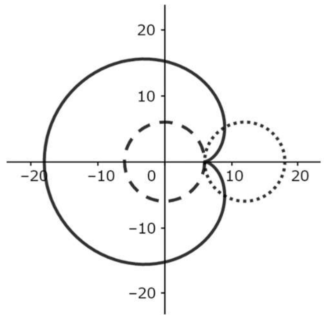
Cycloid は最速降下曲線かつ等時曲線であり，次の微分方程式の解となる．

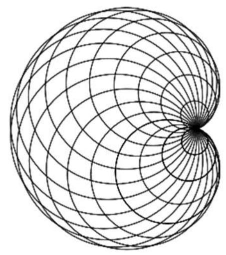
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2r_m}{y} - 1$$

② Cardioid（心臓形）：$r_m = r_c$ の Hypocycloid，$a = l$ の Limaçon

$$\begin{cases} x = r_c(1 + \sin\theta)\cos\theta \\ y = r_c(1 + \cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

極方程式　$r = r_c(1 + \cos\theta)$





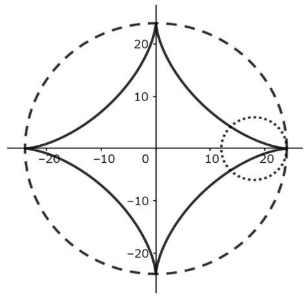
直交座標での方程式は

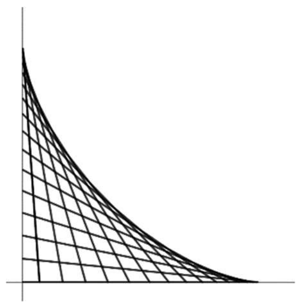
$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2r_c x) - r_c^2 y^2 = 0$$

③ Asteroid（星芒形）：$r_m = \frac{1}{4} r_c$ の Epicycloid

$$\begin{cases} x = r_c \cos^3\theta \\ y = r_c \sin^3\theta \end{cases}$$

陰関数表示　$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r_c^{\frac{2}{3}}$





端点が x 軸，y 軸上を動く，長さ r_c の線分が作る包絡線となる．

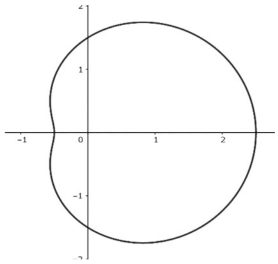
☞ 包絡線

■ Limaçon

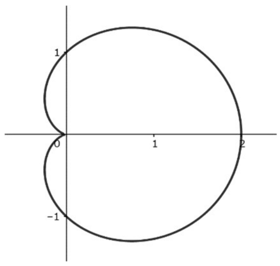
$$\text{極方程式}\quad r = a\cos\theta + l$$

直交座標での方程式は　$(x^2+y^2-ax)^2 - l^2(x^2+y^2) = 0$

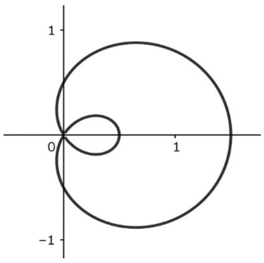
パラメタ表示は　$\begin{cases} x = a\cos^2\theta + l\cos\theta \\ y = a\cos\theta\sin\theta + l\sin\theta \end{cases}$



$a=1,\ \ l=1.5$



$a=1,\ \ l=1$



$a=1,\ \ l=0.5$

■ Lemniscate

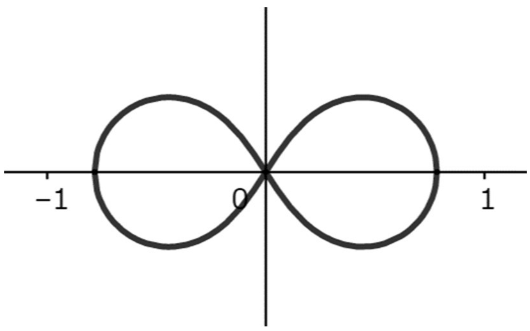
$$\text{極方程式}\quad r^2 = 2a^2\cos 2\theta$$

直交座標での方程式は　$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$

点 $(\pm a, 0)$ を Lemniscate の焦点と呼ぶ．焦点から Lemniscate 上の 2 点に至る距離の積は一定となる．

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$　とする．円周率と同様の Tension で Lemniscate 周率 ϖ なる数値があり，

$$\varpi = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}dr = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2\sqrt{2\pi}}$$



（註）第一種楕円積分

$$F(x,k) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}dx$$

$$F(\varphi,k) = \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta, \qquad \text{(Legendre の標準形)}$$

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2},k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}dx, \qquad (-1 \le k \le 1)$$

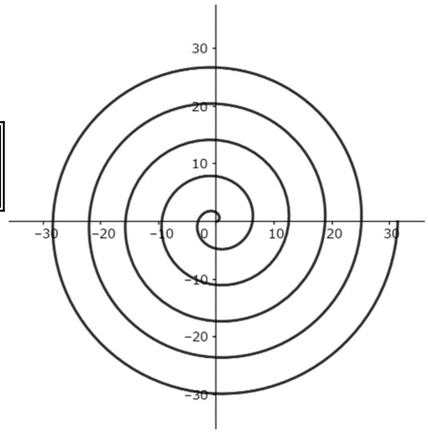
を用いて，

$$\varpi = \sqrt{2}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

（註）Lemniscate の弧長，振り子の周期，は第一種楕円積分，楕円の弧長，正弦曲線の弧長は第二種楕円積分で表される．

■　螺旋

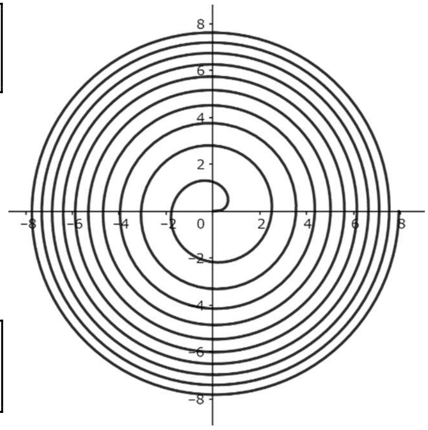
①　Archimedes の螺旋



$$\boxed{\text{極方程式}\quad r = a\theta}$$

パラメタ表示は　$\begin{cases} x = a\theta\cos\theta \\ y = a\theta\sin\theta \end{cases}$

②　放物螺旋



$$\boxed{\text{極方程式}\quad r = a\sqrt{\theta}}$$

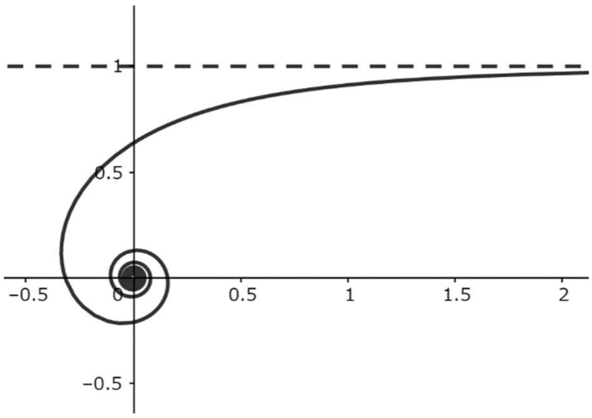
パラメタ表示は　$\begin{cases} x = a\sqrt{\theta}\cos\theta \\ y = a\sqrt{\theta}\sin\theta \end{cases}$

③　双曲螺旋

$$\boxed{\text{極方程式}\quad r = \frac{a}{\theta}}$$

パラメタ表示は　$\begin{cases} x = \dfrac{a\cos\theta}{\theta} \\ y = \dfrac{a\sin\theta}{\theta} \end{cases}$

直線 $y = 1$ に漸近する.

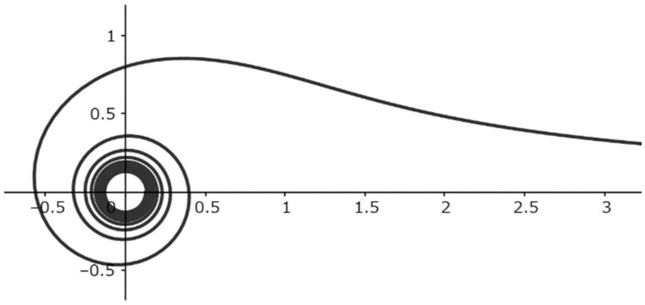


④　Lituus 曲線

$$\boxed{\text{極方程式}\quad r = \frac{a}{\sqrt{\theta}}}$$

パラメタ表示は　$\begin{cases} x = \dfrac{a\cos\theta}{\sqrt{\theta}} \\ y = \dfrac{a\sin\theta}{\sqrt{\theta}} \end{cases}$

x 軸に漸近する.



⑤　Bernoulli の螺旋（対数螺旋，等角螺旋）

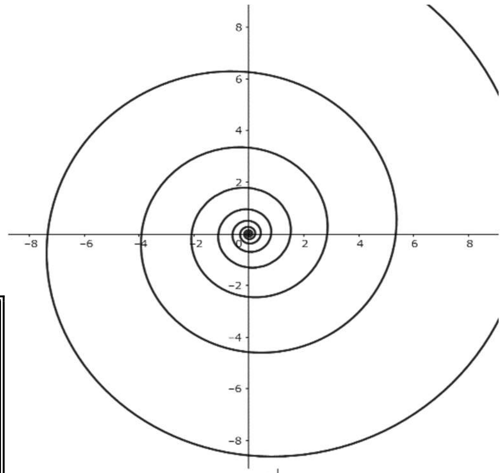
$$\boxed{\text{極方程式}\quad r = ae^{\theta}}$$

パラメタ表示は　$\begin{cases} x = ae^{\theta}\cos\theta \\ y = ae^{\theta}\sin\theta \end{cases}$

自己相似，伸開・閉縮に関して不変である等の性質がある．

（註）特に黄金螺旋が有名

極方程式　$r = \phi^{\frac{2}{\pi}\theta}$，$r = \phi^{-\frac{2}{\pi}\theta}$



⑥　Euler の螺旋（Clothoid 曲線）

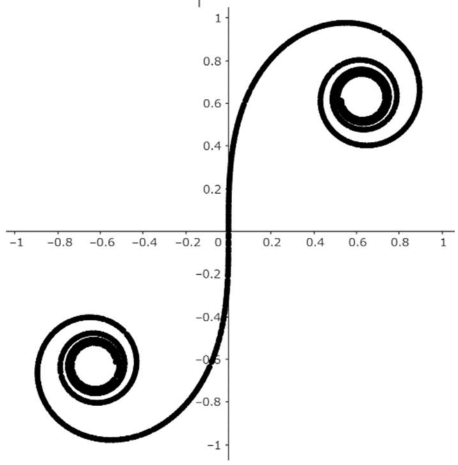
$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_0^t \cos\frac{\theta^2}{2}\,d\theta \\ y(t) = \displaystyle\int_0^t \sin\frac{\theta^2}{2}\,d\theta \end{cases}$$

Clothoid 曲線上の点 $P(t)$ での曲率 $\kappa(t)$ は原点 $P(0)$ から $P(t)$ へ至る弧長 $L(t)$ に比例する．　つまり，

$$\boxed{\frac{L(t)}{\kappa(t)} = \text{const.}}$$

道路のカーブ等で直線軌道から円軌道へ遷移する際に用いられる緩和曲線の 1 つである．

☞ Fresnel 積分

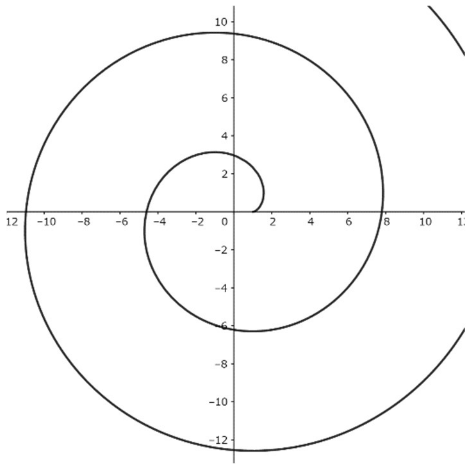


⑦　Involute 曲線

その法線が常に一つの定円に接するような曲線である．

$$\boxed{\begin{cases} x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta) \\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta) \end{cases}}$$

☞ 伸開線/閉縮線

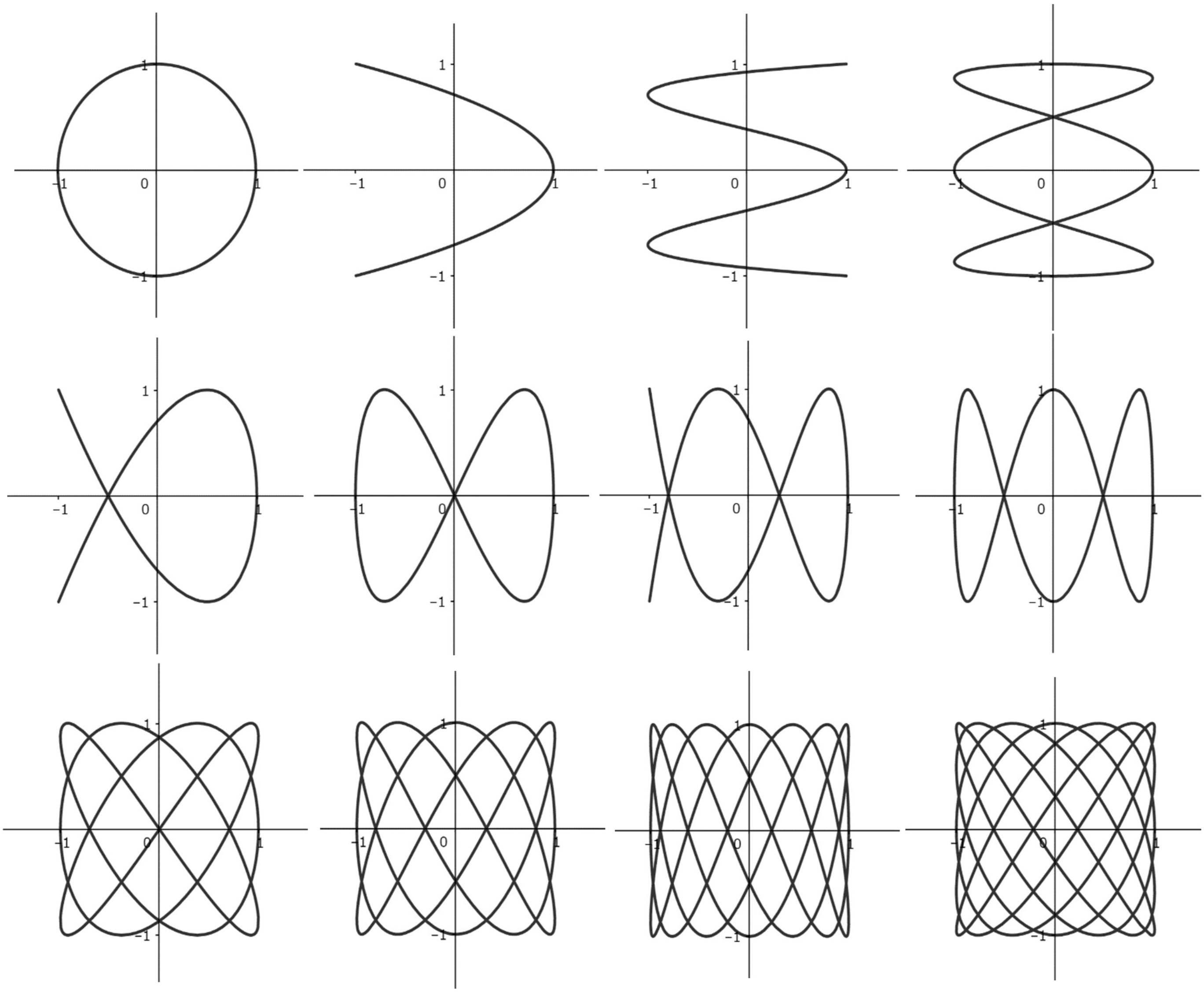


■ Lissajous 曲線

２つの単振動を合成して得られる曲線について考える．

$$\begin{cases} x = A\cos(a\theta + \delta) \\ y = B\sin b\theta \end{cases}$$

下は $A = B = 1,\ \delta = 0$ とし，a, b を整数値を取って動かしたものである．



位相差 $\delta = \frac{\pi}{6}$ のとき，次のようになる．