凸函数

2026 年 1 月 20 日

1　凸函数の定義

I を開区間とする．

Def 1.1
$f\colon I \to \mathbb{R}$ とする．f が**下に広義凸**であるとは，

$$\forall a, b \in I, \forall t \in [0,1], f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

を充たすことを云う．下に広義凸な函数を**広義凸函数**と云う．
f が**下に狭義凸**であるとは，

$$\forall a, b \in I(a < b), \forall t \in (0,1), f(ta + (1-t)b) < tf(a) + (1-t)f(b)$$

を充たすことを云う．下に狭義凸な函数を**狭義凸函数**と云う．

Remark 1.1. 今後，単に凸と云ったときは広義凸を表すとする．

Prop 1.1
(1) f が広義凸函数のとき，

$$\forall a, b \in I(a < b), \forall x \in (a,b), \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

(2) f が狭義凸函数のとき，

$$\forall a, b \in I(a < b), \forall x \in (a,b), \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

Proof. (1) のみ示す．$a, b \in I(a < b), x \in [a,b]$ を任意に取ると，

$$\exists t \in [0,1], x = ta + (1-t)b$$

このとき

$$t = \frac{b - x}{b - a}, \qquad 1 - t = \frac{x - a}{b - a}$$

また凸性より

$$f(x) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

したがって

$$f(x) \leq \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b) = \frac{(b - x)f(a) + (x - a)f(b)}{b - a}$$

よって

$$f(x) - f(a) \leq \frac{(x - a)\{f(b) - f(a)\}}{b - a}$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

同様に

$$f(b)-f(x) \geq \frac{(b-x)\{f(b)-f(a)\}}{b-a}$$
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

以上で示された. ■

Prop 1.2
$f \in C^2(I)$ とする.
(1) f が広義凸 $\Leftrightarrow \forall x \in I, f''(x) \geq 0$
(2) f が狭義凸 $\Leftarrow \forall x \in I, f''(x) > 0$

Proof. (1) のみ示す.
$(\Rightarrow)$ $x_1 < x < x_2$ となる $x_1, x, x_2 \in I$ を任意に取る．前の命題より

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

よって

$$f'(x_1) = \lim_{x\to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \lim_{x\to x_2} \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(x_2)$$

したがって

$$f''(x_1) = \lim_{x_2\to x_1} \frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$$

x_1 は任意なので $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$.
$(\Leftarrow)$ $c = ta + (1-t)b$ $(t \in [0,1])$ とおく.
$t = 0, 1$ のときは明らか．$t \in (0,1)$ のとき $a < c < b$ であり，平均値の定理より

$$\exists \xi_1 \in (a,c), f(c)-f(a) = f'(\xi_1)(c-a)$$
$$\exists \xi_2 \in (c,b), f(b)-f(c) = f'(\xi_2)(b-c)$$

$\xi_1 < \xi_2$ かつ $f'' \geq 0$ より $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$．よって

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

整理すると

$$(b-c)f(a) + (c-a)f(b) \geq (b-a)f(c)$$

$c = ta + (1-t)b$ を代入し,

$$tf(a) + (1-t)f(b) \geq f\left(ta + (1-t)b\right)$$

が従う. ■

Remark 1.2. (2) の $(\Rightarrow)$ は例えば $f(x) = x^4 (x \in \mathbb{R})$ では成り立たない.

2 Jensen の不等式

Thm 2.1 (Jensen の不等式)
f を広義凸函数とする．$x_1,\dots,x_n \geq 0, \lambda_1,\dots,\lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ のとき，

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)$$

Proof. 数学的帰納法による．$n=2$ は定義から明らか．$n=k$ で成立すると仮定し，$\Lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$ とおくと

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i) &= \Lambda \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\Lambda} f(x_i) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\ &\geq \Lambda f\left(\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i\right) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \geq f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right)\end{aligned}$$

■

Cor 2.1 (相加相乗平均の大小関係 (AM-GM 不等式))
$x_1,\dots,x_n > 0$ であるとき，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

ただし等号成立は $\forall i,j, x_i = x_j$ のときである．

Proof. $f(x) = -\log x \ (x>0)$ とおく．

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

より f は狭義凸函数である．Jensen の不等式から

$$-\log\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (-\log x_i) = -\log\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$-\log x$ は狭義単調減少なので

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \geq \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

■

Cor 2.2 (重み付き相加相乗平均の大小関係)
$x_1, \dots, x_n \geq 0,\ w_1, \dots, w_n \geq 0, \sum_{i=1}^n w_i = 1$ のとき,

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{w_i}$$

ただし等号成立は $\forall i, j, x_i = x_j$ のときである.

Proof. $f(x) = -\log x\ (x > 0)$ とおく.

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

より f は狭義凸函数である. Jensen の不等式から

$$-\log\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n w_i(-\log x_i) = -\log\left(\prod_{i=1}^n x_i^{w_i}\right)$$

$-\log x$ は狭義単調減少なので

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{w_i}$$

■

Prob 2.1
(1) $a, b > 0, c > 1$ のとき,

$$(a+b)^c \leq 2^{c-1}(a^c + b^c)$$

を示せ.
(2) $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4}$ のとき,

$$\sqrt{\tan\alpha\tan\beta} \leq \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{2}$$

を示せ. (1991 年 京都大学)

Proof. (1) $f(x) = x^c\ (x > 0, c > 1)$ とおく.

$$f''(x) = c(c-1)x^{c-2} > 0$$

より f は狭義凸函数である. したがって

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^c \leq \frac{a^c + b^c}{2}$$

よって

$$(a+b)^c \leq 2^{c-1}(a^c + b^c)$$

(2) (右) $f(x) = \tan x$ $(0 < x < \frac{\pi}{4})$ とおく．

$$f''(x) = \frac{4\sin x}{\cos^5 x} \geq 0$$

より f は広義凸函数である．したがって

$$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{2}$$

(左) $g(x) = -\log(\tan x)$ $(0 < x < \frac{\pi}{4})$ とおく．

$$g''(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x \cos x)^2} \geq 0$$

より g は広義凸函数である．したがって

$$-\log\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq -\frac{\log\tan\alpha + \log\tan\beta}{2}$$

$$\therefore\ \sqrt{\tan\alpha\tan\beta} \leq \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

■

別解．(1)

$$(a+b)^c \leq 2^{c-1}(a^c + b^c) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}+1\right)^c \leq 2^{c-1}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^c + 1\right)$$

$x = \frac{a}{b}$ とおくと x は $(0, \infty)$ 全体を走る．

$$f(x) = 2^{c-1}(x^c + 1) - (x+1)^c$$

とおくと

$$f'(x) = c\{(2x)^{c-1} - (x+1)^{c-1}\}$$

$(2x)^{c-1} - (x+1)^{c-1}$ の符号は $2x - (x+1) = x - 1$ の符号と一致するので増減表がかける．

x	$+0$	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$	$-c$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	$2^{c-1}-1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\therefore f(x) \geq f(1) = 0$$

$$\therefore 2^{c-1}(a^c + b^c) - (a+b)^c \geq 0$$

(2) (右)

$$f(\alpha, \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{2} - \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

とおく.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\tan^2 \alpha - \tan^2 \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\tan \alpha + \tan \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\tan \alpha - \tan \frac{\alpha+\beta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

α	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha, \beta)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha, \beta)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$$
\therefore f(\alpha, \beta) \leq f(\beta, \beta) = 0
$$

$$
\therefore \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{2} - \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq 0
$$

■