

距離空間の完備化と \mathbb{Q}_p の構成

2026 年 1 月 19 日

目次

1	距離空間の完備化	2
1.1	距離空間と等長埋込み	2
1.2	完備化	4
2	p 進体	11
2.1	p 進距離	11
2.2	p 進体	16

1 距離空間の完備化

1.1 距離空間と等長埋込み

Def 1.1 (距離空間)

集合 X と関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ によって与えられる組 (X, d) が**距離空間**であるとは,

- (1) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (2) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$,
- (3) $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (**三角不等式**).

を充たすことをいう.^{†1}

Remark 1.1. 距離空間 (X, d) と $Y \subset X$ に対し, $(Y, d|_{Y \times Y})$ は距離空間となる.

Example 1.1. $d_\infty : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $d_\infty(x, y) := |x - y|$ と定義すると,^{†2} (\mathbb{R}, d_∞) は距離空間となる. また $(\mathbb{Z}, d_\infty|_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}})$ や $(\mathbb{Q}, d_\infty|_{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}})$ ^{†3} も距離空間となる.

Def 1.2 (距離位相)

(X, d) を距離空間とする. $x \in X, r > 0$ に対して,

$$B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

を x の r 近傍という.

$$\mathcal{B}_d := \{B(x, r) \in 2^X \mid x \in X, r > 0\}$$

を開基とする X の位相を**距離 d が誘導する位相**^{†4}といふ.

Remark 1.2. 以降, 距離空間はこの位相が入った位相空間と考える.

Remark 1.3. 距離空間 (X, d) 内の点列 $\{x_n\}$ と $x \in X$ に対し,

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

^{†1} (1)(2)(3) から $d(x, y) \geq 0$ が従う.

^{†2} この節において $|\cdot|$ は通常の絶対値を表す.

^{†3} $d_\infty|_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ や $d_\infty|_{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}$ も d_∞ とかくことにする.

^{†4} 距離位相は Hausdorff である. よって点列の極限は存在すれば unique である.

Lem 1.1

(X, d) を距離空間とする。 $x, y, z \in X$ に対し,

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

Proof. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ より, $d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y)$. 対称性から y と z を交換すると, $d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$. よって, $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$ ■

Def 1.3 (Cauchy 列)

距離空間 (X, d) 内の点列 $\{x_n\}$ が Cauchy 列であるとは,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

を充たすことをいう。

Example 1.2. \mathbb{Q} 内の点列

$$x_n := \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

は Cauchy 列である。

Prop 1.1

距離空間 (X, d) 内の点列 $\{x_n\}$ がある点 $x \in X$ に収束するならば, Cauchy 列である。

Proof. $\varepsilon > 0$ を任意に取る。 $x_n \rightarrow x$ から,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$m, n \geq N$ のとき,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

よって $\{x_n\}$ は Cauchy 列。■

Def 1.4 (完備)

距離空間 (X, d) が完備であるとは, X 内の任意の Cauchy 列が X のある点に収束することを言う。

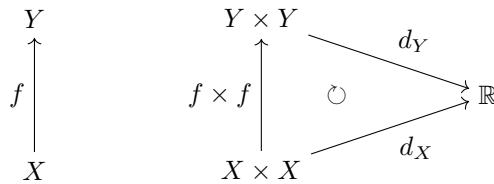
Example 1.3. \mathbb{Q} は完備ではない。Example 1.2 において $x_n \rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ からわかる。一方, (\mathbb{R}, d_∞) や (\mathbb{Z}, d_∞) ^{†5} は完備距離空間である。

Def 1.5 (等長埋込み)

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする。このとき, $f : X \rightarrow Y$ が等長埋込みであるとは,

$$\forall (x_1, x_2) \in X \times X, d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$$

を充たすことをいう。



Prop 1.2

等長埋込みは単射である。

Proof. Def 1.5 の文字を使う, $x_1, x_2 \in X$ とする.

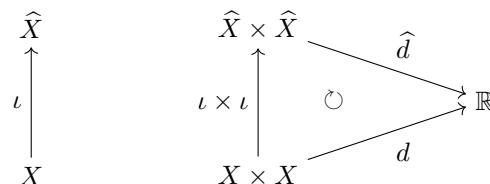
$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

■

1.2 完備化

Def 1.6 (完備化)

(X, d) を距離空間とする。完備距離空間 (\hat{X}, \hat{d}) と等長埋込み $\iota : X \hookrightarrow \hat{X}$ の組 $((\hat{X}, \hat{d}), \iota)$ で, X が $\iota(X)$ で稠密^{†6}であるようなものを (X, d) の完備化という。



Example 1.4. \mathbb{R} は包含によって \mathbb{Q} の完備化である。しかし, \mathbb{Q} は \mathbb{R}^2 で稠密でないので \mathbb{Q} の完備化でない。

^{†5} (\mathbb{Z}, d_∞) の位相は離散位相であることに注意されたい。

^{†6} 位相空間 X において, $A \subset X$ が稠密とは $\overline{A} = X$ が成り立つことをいう。

Thm 1.1 (完備化の存在性定理)

距離空間 (X, d) に対して、完備化 $((\hat{X}, \hat{d}), \iota)$ は存在する。

以降 (X, d) は距離空間とする。この定理をいくつかの STEPS に分けて証明しよう。

Def 1.7

(X, d) 上の Cauchy 列の全体を $\mathcal{C}(X, d)$ とおく。

$$\mathcal{C}(X, d) := \{\{x_n\} \in X^{\mathbb{N}} \mid \{x_n\} \text{ は Cauchy 列}\}.$$

この集合上に次の同値関係を定義する： $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{C}(X, d)$ に対して、

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} : \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Lem 1.2

Def 1.7 の \sim は同値関係である。

Proof. (反射律) $d(x_n, x_n) = 0 \rightarrow 0$ より、 $\{x_n\} \sim \{x_n\}$

(対称律) d の対称性から明白。

(推移律) $\{x_n\} \sim \{y_n\}, \{y_n\} \sim \{z_n\}$ とする。

$$0 \leq d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) \rightarrow 0$$

より、 $\{x_n\} \sim \{z_n\}$ を得る。 ■

Lem 1.3

$$\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{C}(X, d) \Rightarrow \{d(x_n, y_n)\} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, d_\infty)$$

Proof. $\varepsilon > 0$ を任意に取る。 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を Cauchy 列とすると、

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

よって、

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| &= |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_n) + d(x_m, y_n) - d(x_m, y_m)| \\ &\leq |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_n)| + |d(x_m, y_n) - d(x_m, y_m)| \\ &\leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

よって $\{d(x_n, y_n)\}$ は \mathbb{R} 内の Cauchy 列である。 ■

Def 1.8

$\widehat{X} := \mathcal{C}(X, d) / \sim$ とし, $[\{x_n\}]$ を $\{x_n\}$ の同値類とする. \widehat{X} 上に次の距離を定める:

$$\widehat{d}([\{x_n\}], [\{y_n\}]) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

Lem 1.4

Def 1.8 の \widehat{d} は well-defined である.

Proof. まず左辺の極限は **Lem 1.3** と \mathbb{R} の完備性から収束する.

同値類の代表の選び方によらず値が定まることを示す. そこで,

$$\begin{aligned} \{x_n\} &\sim \{x'_n\}, \{y_n\} \sim \{y'_n\} \\ (\{x_n\}, \{x'_n\}, \{y_n\}, \{y'_n\}) &\in \mathcal{C}(X, d) \end{aligned}$$

とする. このとき, $d(x_n, x'_n), d(y_n, y'_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) から,

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| &= |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y_n) + d(x'_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \\ &\leq |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y_n)| + |d(x'_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \\ &\leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$\therefore \widehat{d}([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x'_n, y'_n) = \widehat{d}([\{x'_n\}], [\{y'_n\}])$$

■

Lem 1.5

Def 1.8 の $(\widehat{X}, \widehat{d})$ は距離空間である.

Proof. (1) $\widehat{d}([\{x_n\}], [\{x_n\}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_n) = 0$ である.

また, $\widehat{d}([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = 0$ とすると, \widehat{d} と \sim の定義から $\{x_n\} \sim \{y_n\}$. つまり, $[\{x_n\}] = [\{y_n\}]$. 以上より,

$$\widehat{d}([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = 0 \Leftrightarrow [\{x_n\}], [\{y_n\}]$$

(2) d の対称性から明白.

(3) $d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$ から,

$$\widehat{d}([\{x_n\}], [\{z_n\}]) \leq \widehat{d}([\{x_n\}], [\{y_n\}]) + \widehat{d}([\{y_n\}], [\{z_n\}])$$

■

Lem 1.6

Def 1.8 の $(\widehat{X}, \widehat{d})$ は完備距離空間である.

Proof. \widehat{X} 内の Cauchy 列 $\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}\}_{k=1}^{\infty}$ ^{†7}を考える. すなわち,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall k, \ell \geq N_{\varepsilon}, \widehat{d}(\{x_n^{(k)}\}_n, \{x_n^{(\ell)}\}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^{(k)}, x_n^{(\ell)}) < \varepsilon$$

また各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ は \mathbb{R} の Cauchy 列なので,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists M_k \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq M_k, d(x_n^{(k)}, x_m^{(k)}) < \frac{1}{k}$$

ここで $n, k, \ell \in \mathbb{N}$ に対して, 三角不等式から,

$$d(x_{M_k}^{(k)}, x_{M_{\ell}}^{(\ell)}) \leq d(x_{M_k}^{(k)}, x_n^{(k)}) + d(x_n^{(k)}, x_n^{(\ell)}) + d(x_n^{(\ell)}, x_{M_{\ell}}^{(\ell)})$$

$n \rightarrow \infty$ とすると,

$$d(x_{M_k}^{(k)}, x_{M_{\ell}}^{(\ell)}) \leq \frac{1}{k} + \widehat{d}(\{x_n^{(k)}\}_n, \{x_n^{(\ell)}\}_n) + \frac{1}{\ell}$$

$\varepsilon > 0$ に対して, $\widetilde{N}_{\varepsilon} := \max \left\{ N_{\varepsilon/3}, \left\lfloor \frac{3}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \right\}$ とおくと,

$$\forall k, \ell \geq \widetilde{N}_{\varepsilon}, d(x_{M_k}^{(k)}, x_{M_{\ell}}^{(\ell)}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

よって $z := \{x_{M_n}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ とおけば, z は (X, d) の Cauchy 列であり, $z \in \widehat{X}$ となる.

$$\widehat{d}(\{x_n^{(k)}\}_n, [z]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n^{(k)}, x_{M_n}^{(n)})$$

ここで, $n \geq M_k, n, k \geq \widetilde{N}_{\varepsilon/2} = \max \left\{ N_{\varepsilon/6}, \left\lfloor \frac{6}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \right\}$ ならば,

$$\begin{aligned} d(x_n^{(k)}, x_{M_n}^{(n)}) &\leq d(x_n^{(k)}, x_{M_k}^{(k)}) + d(x_{M_k}^{(k)}, x_{M_n}^{(n)}) \\ &< \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \forall n \geq \widetilde{N}_{\varepsilon/2}, \widehat{d}(\{x_n^{(k)}\}_n, [z]) \leq \frac{2\varepsilon}{3}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{d}(\{x_n^{(k)}\}_n, [z]) = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \{x_n^{(k)}\}_n = [z] \in \widehat{X}$$

よって $(\widehat{X}, \widehat{d})$ は完備距離空間である.

■

^{†7} ここでは止まった添字と走る添字を区別するため, 走る添字を {} の外に明記する.

Def 1.9

$\iota : X \rightarrow \widehat{X}$ を次で定める.

$$\iota(x) := [\{x, x, x, \dots\}] \in \widehat{X}$$

Lem 1.7

Def 1.9 の ι は等長埋込みである.

Proof. $x, y \in X$ に対し,

$$\widehat{d}(\iota(x), \iota(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\iota(x)_n, \iota(y)_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y) = d(x, y)$$

であるから. ι は等長埋込み. ■

Lem 1.8

Def 1.9 で $\iota(X)$ は \widehat{X} において稠密である.

Proof. $[\{x_n\}_n] \in \widehat{X}$ を任意に取ると、 $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\exists N > 0, \forall m, n \geq N, d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

$m, n \geq N$ とすると,

$$d(x_n, \iota(x_m)_n) = d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

であるから、 $m \geq N$ に対し,

$$\widehat{d}([\{x_n\}_n], [\iota(x_m)]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

従って,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{d}([\{x_n\}_n], [\iota(x_m)]) = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [\iota(x_m)] = [\{x_n\}]$$

よって、 $\iota(X)$ は \widehat{X} で稠密である. †8 ■

以上より **Thm 1.1** が示された.

Remark 1.4 (重要). 以降 $\iota(X)$ と X を同一視する.

Thm 1.2 (完備化の一意性定理)

距離空間 (X, d) の完備化は同型を除いて unique である. つまり、 $((X_1, d_1), \iota_1), ((X_2, d_2), \iota_2)$ を (X, d) の完備化としたとき、 $\phi \circ \iota_1 = \iota_2$ なる全射等長埋込み $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ が存在する.

†8 位相空間 X において $A \subset X$ が稠密 $\Leftrightarrow X$ の任意の点 x に対し、 $x_n \rightarrow x$ なる $\{x_n\} \subset A$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc}
 & X_2 & \\
 \nearrow \iota_2 & & \downarrow \exists \phi \\
 X & \circlearrowleft & X_1 \\
 \searrow \iota_1 & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 X_2 \times X_2 & & \mathbb{R} \\
 \uparrow \phi \times \phi & \searrow d_2 & \swarrow d_1 \\
 X_1 \times X_1 & \circlearrowleft &
 \end{array}$$

Proof. $x \in X_1$ に対して, $X \subset X_1$ の稠密性より,

$$X_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

なる $\{x_n\}_n \subset X$ が取れる.^{†9} これは収束列なので X 上の Cauchy 列であり, X_2 の完備性から,

$$\phi(x) := X_2 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

が定義できる. このとき, $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ は well-defined, つまり $\{x_n\}_n$ の取り方に依らない.

(.:) $\{x'_n\}_n \subset X$ を

$$X_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x$$

なる $\{x_n\}_n$ とは他の点列とする. このとき,

$$d(x_n, x'_n) = d_1(x_n, x'_n) \leq d_1(x_n, x) + d_1(x, x'_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

よって,

$$\phi'(x) := X_2 - \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n$$

とすると, $\phi(x) = \phi'(x)$ でなければならない.

$x \in X$ なら $\{x_n\}_n \subset X$ として, $\{x, x, x, \dots\}$ を取れるので, ϕ は x を動かさない.^{†10} つまり, $\phi \circ \iota_1 = \iota_2$ である.

ϕ が全射等長埋込みであることを示す. $x, y \in X_1$ とする. $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n \subset X$ を

$$X_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad X_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

なる点列とする. $d_1(x_n, x) \rightarrow 0, d_1(y_n, y) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ であるから,

$$\begin{aligned}
 |d_1(x, y) - d_1(x_n, y_n)| &\leq |d_1(x, y) - d_1(x, y_n)| + |d_1(x, y_n) - d_1(x_n, y_n)| \\
 &\leq d_1(y_n, y) + d_1(x_n, x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

従って,

$$d_1(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

^{†9} $X_1 - \lim_{n \rightarrow \infty}$ は X_1 内の点列としての極限を表すこととする.

^{†10} ι_i は $\iota_i : X \rightarrow X_i, x \mapsto [x, x, x, \dots]$ という写像であった. 今は $x \in X$ と $\iota_i(x) \in X_i$ を同一視している.

一方, $d_2(x_n, \phi(x)) \rightarrow 0$, $d_2(y_n, \phi(y)) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であるから,

$$\begin{aligned} & |d_2(\phi(x), \phi(y)) - d_2(x_n, y_n)| \\ & \leq |d_2(\phi(x), \phi(y)) - d_2(\phi(x), y_n)| + |d_2(\phi(x), y_n) - d_2(x_n, y_n)| \\ & \leq d_2(y_n, \phi(y)) + d_2(x_n, \phi(x)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

従って,

$$d_2(\phi(x), \phi(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

以上より,

$$d_2(\phi(x), \phi(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d_1(x, y)$$

であり ϕ は等長埋込みである. また X は X_2 で稠密なので, ϕ は全射である. ■

2 p 進体

2.1 p 進距離

Def 2.1 (加法的付値)

体 K 上の関数 $v : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ ^{†11}が加法的付値であるとは,

- (1) $v(1) = 0, v(0) = +\infty$
- (2) $\forall x, y \in K, v(xy) = v(x) + v(y)$
- (3) $\forall x, y \in K, v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

を充たすことをいう.

Example 2.1. 体 K 上の関数 $v : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ を

$$v(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \in K^\times \\ +\infty & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

で定めると, これは加法的付値となる. これを自明な加法的付値という.

Def 2.2 (p に関する order)

p を素数とする. $x \in \mathbb{Q}^\times$ に対し,

$$x = p^n \frac{a}{b}, \quad n, a, b \in \mathbb{Z}, \quad \gcd(p, ab) = 1$$

と表したとき,

$$\text{ord}_p(x) := n$$

と定義する. また, $\text{ord}_p(0) := +\infty$ とする. このとき, $\text{ord}_p : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ を x の p に関する order または p 進加法付値という.

Example 2.2.

$$\text{ord}_3(45) = 2, \quad \text{ord}_3\left(\frac{91}{108}\right) = -4, \quad \text{ord}_3(1000000) = \text{ord}_3\left(\frac{1}{1000000}\right) = 0$$

Prop 2.1

素数 p に関する order は \mathbb{Q} 上の加法的付値である.

Proof. (1) $\text{ord}_p(1) = \text{ord}_p(p^0) = 0, \text{ord}_p(0) := +\infty$ である.

^{†11} $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ には自然な和と積を定義する.

(2) $x = 0 \vee y = 0$ のときは明白. $x, y \in \mathbb{Q}^\times$ に対し,

$$x = p^n \frac{a}{b}, \quad y = p^m \frac{c}{d}, \quad \gcd(p, ab) = \gcd(p, cd) = 1$$

と表したとき,

$$xy = p^n \frac{a}{b} p^m \frac{c}{d} = p^{n+m} \frac{ac}{bd}, \quad \gcd(p, acbd) = 1$$

であるから,

$$\text{ord}_p(xy) = n + m = \text{ord}_p(x) + \text{ord}_p(y)$$

(3) $x = 0 \vee y = 0$ のときは明白. $x, y \in \mathbb{Q}^\times$ に対し,

$$x = p^n \frac{a}{b}, \quad y = p^m \frac{c}{d}, \quad \gcd(p, ab) = \gcd(p, cd) = 1$$

と表したとき, $n \leq m$ としても一般性を失わない.

$$x + y = p^n \frac{a}{b} + p^m \frac{c}{d} = p^n \frac{ad + p^{m-n}bc}{bd}$$

であるから,^{†12}

$$ad + p^{m-n}bc = p^k e, \quad k, e \in \mathbb{Z}, \quad \gcd(p, e) = 1$$

なる k によって,

$$x + y = p^{n+k} \frac{e}{bd}, \quad \gcd(p, ebd) = 1$$

と表せるので,

$$\text{ord}_p(x + y) = n + k \geq n = \min\{\text{ord}_p(x), \text{ord}_p(y)\}$$

■

Remark 2.1. (3) の証明において, $m \neq n$ のとき, $k = 0$ である. よって,

$$\text{ord}_p(x) \neq \text{ord}_p(y) \Rightarrow \text{ord}_p(x + y) = \min\{\text{ord}_p(x), \text{ord}_p(y)\}$$

Def 2.3 (非 Archimedes 付値)

体 K 上の関数 $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が非 Archimedes 付値であるとは,

- (1) $\forall x \in K, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (2) $\forall x, y \in K, |xy| = |x||y|$
- (3) $\forall x, y \in K, |x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ (強三角不等式)

を充たすことをいう.

^{†12} $m - n \geq 0$ より $ad + p^{m-n}bc \in \mathbb{Z}$ である.

Remark 2.2. 強三角不等式は三角不等式より強い条件である。実際,

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|$$

Example 2.3. 体 K 上の関数 $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$|x| := \chi_{K^\times}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in K^\times \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

で定めると、これは非 Archimedes 付値となる。これを**自明な非 Archimedes 付値**という。

Example 2.4. \mathbb{R} 上の通常の絶対値は非 Archimedes 付値ではない。(Archimedes 付値である。) 実際、 $2 = |1 + 1| > \max\{|1|, |1|\}|1| = 1$ である。

Prop 2.2

$|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を体 K 上の非 Archimedes 付値とする。このとき,

- (1) $|1| = 1$
- (2) $|-x| = |x|$

Proof. (1) $|1| = |1 \cdot 1| = |1||1|$ であり、 $|1| \neq 0$ より、 $|1| = 1$

(2) $1 = |1| = |(-1)(-1)| = |-1||-1|$ であり、 $|-1| \geq 0$ より、 $|-1| = 1$ 。よって、
 $|-x| = |(-1)x| = |-1||x| = |x|$

■

Def 2.4 (非 Archimedes 距離)

集合 X 上の距離 $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ が非 Archimedes 距離であるとは,

$$\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} \quad (\text{強三角不等式})$$

を充たすことをいう。

Remark 2.3. 強三角不等式は三角不等式より強い条件である。実際,

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Def 2.5 (非 Archimedes 付値が誘導する非 Archimedes 距離)

$|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を体 K 上の非 Archimedes 付値とする。このとき,

$$d : K \times K \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) := |x - y|$$

と定め、これを**非 Archimedes 付値が誘導する非 Archimedes 距離**という。

Remark 2.4. $x \in K$ に対して $|x| = d(x, 0)$ である。

Prop 2.3

体 K 上の非 Archimedes 付値が誘導する非 Archimedes 距離 d は K 上の非 Archimedes 距離である。

Proof. (1) $x, y \in K$ に対し,

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(2) $x, y \in K$ に対し,

$$d(x, y) = |x - y| = |-(x - y)| = d(y, x)$$

(3) $x, y, z \in K$ に対し,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \\ &\leq \max\{|x - y|, |y - z|\} = \max\{d(x, y), d(y, z)\} \end{aligned}$$

■

Def 2.6 (p 進付値)

$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を,

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-\text{ord}_p(x)} & \text{if } x \in \mathbb{Q}^\times \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

と定める。これを p 進付値という。

Remark 2.5. p 進付値は可算集合 $\Gamma_p \cup \{0\}$, $\Gamma_p := \{p^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ にしか値を取らない。

Example 2.5.

$$|45|_3 = \frac{1}{9}, \quad \left| \frac{91}{108} \right|_3 = 81, \quad |1000000|_3 = \left| \frac{1}{1000000} \right|_3 = 1$$

Prop 2.4

p 進付値は \mathbb{Q} 上の非 Archimedes 付値である。

Proof. (1) 定義から明白

(2) $x = 0 \vee y = 0$ のときは明白。 $x, y \in \mathbb{Q}^\times$ に対し,

$$|xy|_p = p^{-\text{ord}_p(xy)} = p^{-(\text{ord}_p(x)+\text{ord}_p(y))} = p^{-\text{ord}_p(x)}p^{-\text{ord}_p(y)} = |x|_p|y|_p$$

(3) $x = 0 \vee y = 0$ のときは明白。 $x, y \in \mathbb{Q}^\times$ に対し,

$$\begin{aligned} |x+y|_p &= p^{-\text{ord}_p(x+y)} \leq p^{-\min\{\text{ord}_p(x), \text{ord}_p(y)\}} \\ &= \max\{p^{-\text{ord}_p(x)}, p^{-\text{ord}_p(y)}\} = \max\{|x|_p, |y|_p\} \end{aligned}$$

■

Remark 2.6. *Remark 2.1* から,

$$|x|_p \neq |y|_p \Rightarrow |x+y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$$

Def 2.7 (p 進距離)

p 進付値が誘導する \mathbb{Q} 上の非 Archimedes 距離 d_p を p 進距離という. また, p 進距離が誘導する位相を p 進位相といいう.

Example 2.6.

$$d_3(12, 45) = \frac{1}{9}, \quad d_3\left(\frac{1}{6561}, \frac{1}{6560}\right) = 6561 (= 3^8)$$

Example 2.7. p 進位相での収束列の重要な例を挙げる.

(1) $\{p^n\} \subset \mathbb{Q}$ は p 進位相で収束する.

$$d_p(p^n, 0) = |p^n|_p = \frac{1}{p^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

より,

$$p^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(2) $\left\{\sum_{k=0}^n p^k\right\}_n \subset \mathbb{Q}$ は p 進位相で収束する.

$$\begin{aligned} d_p\left(\sum_{k=0}^n p^k, \frac{1}{1-p}\right) &= \left| \sum_{k=0}^n p^k - \frac{1}{1-p} \right|_p = \left| \frac{1-p^{n+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right|_p \\ &= \left| \frac{p^{n+1}}{1-p} \right|_p = \frac{1}{p^{n+1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

より,

$$\sum_{k=0}^n p^k \rightarrow \frac{1}{1-p} \quad (n \rightarrow \infty)$$

Remark 2.7. (\mathbb{Q}, d_p) は完備ではない. 実際, $\left\{\sum_{k=0}^n p^{k^2}\right\}_n \subset \mathbb{Q}$ は Cauchy 列だが \mathbb{Q} の元に収束しない.

2.2 p 進体**Def 2.8** (p 進数)

\mathbb{Q} の p 進距離による完備化を $(\mathbb{Q}_p, \hat{d}_p)$ と表し, \mathbb{Q}_p の元を p 進数という.

Def 2.9 (位相群)

位相構造を持つ群 G が位相群であるとは,

- (1) $G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy$ は連続^{†13}
- (2) $G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$ は連続

を充たすことをいう.

Example 2.8. n 次実正方行列全体 $M_n(\mathbb{R})$ には全単射

$$\Phi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}, \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$$

により \mathbb{R}^{n^2} から位相が誘導される. 一般線型群

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$$

には M_n の相対位相が入り, 位相群^{†14}となる.

Def 2.10 (位相環)

位相構造を持つ環 A が位相環であるとは,

- (1) 加法に関して位相群
- (2) $A \times A \rightarrow A, (x, y) \mapsto xy$ は連続

を充たすことをいう.

Remark 2.8. A が位相環であっても, $A^\times \rightarrow A^\times, x \mapsto x^{-1}$ が連続になるとは限らない. 特に A^\times が位相群になるとは限らない.

Example 2.9. (1) \mathbb{Z} は \mathbb{R} の相対位相 (離散位相) により位相環になる.

(2) n 次実正方行列環 $M_n(\mathbb{R})$ は Example 2.8 の位相により位相環になる.

^{†13} $G \times G$ には直積位相を考える.

^{†14} さらに多様体の構造を与えることで Lie 群の構造をもつ.

Def 2.11 (位相体)

位相構造を持つ体 K が位相体であるとは,

- (1) 環構造に関して位相環
- (2) $K^\times \rightarrow K^\times, x \mapsto x^{-1}$ は連続

を充たすことをいう.

Example 2.10. 通常の距離が誘導する位相により \mathbb{Q} は位相体になる.

Prop 2.5

p 進距離が誘導する位相により \mathbb{Q} は位相体になる.

Proof. $\varepsilon > 0$ を任意に取る.

- (1) (和の連続性) $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Q}, |x_1 - x_2|_p, |y_1 - y_2|_p < \varepsilon$ とする.

$$\begin{aligned} |(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)|_p &= |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)|_p \\ &\leq \max\{|x_1 - x_2|_p, |y_1 - y_2|_p\} < \varepsilon \end{aligned}$$

よって和は連続.

- (2) (積の連続性) $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Q}, |x_1 - x_2|_p, |y_1 - y_2|_p < \varepsilon$ とすると,

$$|x_1|_p \leq \max\{|x_1 - x_2|_p, |x_2|_p\} < \max\{\varepsilon, |x_2|_p\}$$

から, この範囲で $|x_1|_p, |x_2|_p$ は有界と考えてよい. $|y_i|_p$ も同様にして,

$$\exists C > 0, \forall i, j = 1, 2, |x_i|_p, |y_j|_p < C$$

よって,

$$\begin{aligned} |x_1 y_1 - x_2 y_2|_p &= |x_1(y_1 - y_2) + (x_1 - x_2)y_2|_p \\ &\leq \max\{|x_1|_p|y_1 - y_2|_p, |x_1 - x_2|_p|y_2|_p\} \\ &< \varepsilon \max\{|x_1|_p, |y_2|_p\} < \varepsilon C \end{aligned}$$

よって積は連続.

- (3) (逆元を取る操作の連続性) $x \in \mathbb{Q}^\times, y \in \mathbb{Q}, |x - y|_p < \varepsilon$ とする.

$$|x|_p \leq |y|_p + |x - y|_p < |y|_p + \varepsilon \quad \therefore |y|_p > |x|_p - \varepsilon$$

であるから, 充分小さい ε を取れば, $y \neq 0$ で, $|y|_p > \frac{1}{2}|x|_p$ とできる.

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|_p = \left| \frac{y - x}{xy} \right|_p = \frac{|y - x|_p}{|xy|_p} < \frac{2\varepsilon}{|x|_p^2}$$

よって逆元を取る操作 $x \mapsto x^{-1}$ は連続.

Def 2.12 (p 進付値)

$|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $|x|_p = \hat{d}_p(x, 0)$ で定義し、これも p 進付値という。^{†15}

Lem 2.1 (1) p 進付値 $|\cdot|_p$ の値域は完備化によって不变である。つまり、

$$\{|x|_p \mid x \in \mathbb{Q}_p\} = \Gamma_p \cup \{0\}, \quad \Gamma_p := \{p^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

(2) $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}_p, x_n \rightarrow x \in \mathbb{Q}_p$ とする。 $|x|_p \neq 0$ であれば、

$$N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n|_p = |x|_p$$

つまり充分大きい n に対して、 $|x_n|_p$ は定数。

Proof. (1) $x \in \mathbb{Q}_p$ とすると $x_n \rightarrow x$ なる $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ が取れる。 $\varepsilon > 0$ を任意に取るとき、

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n|_p - |x|_p = \left| \hat{d}_p(x_n, 0) - \hat{d}_p(x, 0) \right| \leq \hat{d}_p(x_n, x) < \varepsilon$$

$n \geq N$ のとき、 $|x_n|_p \in B(|x|_p, \varepsilon)$ 。^{†16} $\varepsilon > 0$ を充分小さく取れば、この範囲に存在する $\Gamma_p \cup \{0\}$ の元は唯一になる。よって充分大きい n に対して、 $|x_n|_p = |x|_p \in \Gamma_p \cup \{0\}$ であり、 $|x|_p \in \Gamma_p \cup \{0\}$

(2) (1) で $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ の場合は示した。 p 進付値の値域は完備化によって不变なので、 $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}_p$ の場合も同様の議論によって示される。

Prop 2.6

$|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は \mathbb{Q}_p 上の非 Archimedes 付値である。

Proof. (1) $|0|_p = 0$ は成立する。 $|x|_p = 0$ とすると、 $\hat{d}_p(x, 0) = 0$ で $x = 0$ を得る。

(2) $x, y \in \mathbb{Q}_p$ とすると、 $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ なる $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{Q}$ が取れる。 n が充分大きいとき、

$$|xy|_p = |x_n y_n|_p = |x_n|_p |y_n|_p = |x|_p |y|_p$$

(3) (2) 同じ文字を使う。 n が充分大きいとき、

$$|x + y|_p = |x_n + y_n|_p \leq \max\{|x_n|_p, |y_n|_p\} \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} \quad (*)$$

^{†15} これは明らかに \mathbb{Q} における p 進付値の拡張になっているので、同じ記号 $|\cdot|_p$ を用いる。

^{†16} $B(x, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ は x の ε 近傍

Remark 2.9. *Remark 2.6* の事実

$$|x|_p \neq |y|_p \Rightarrow |x+y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$$

も成り立つ.

(\therefore) **Prop 2.2** (2) に注意すると,

$$|y|_p = |(x+y) - x|_p \leq \max\{|x+y|_p, |-x|_p\} \leq \max\{|x+y|_p, |x|_p\} \quad (**)$$

$|y|_p > |x|_p$ としても一般性を失わない. このとき, (*) より $|x+y|_p \leq |y|_p$, (**) より $|y|_p \leq |x+y|_p$. よって, $|x+y|_p = |y|_p$.

Thm 2.1

\mathbb{Q}_p には \mathbb{Q} から連続な演算が誘導され, 位相体となる.

この定理をいくつかの STEPS に分けて証明しよう.

Lem 2.2

$$\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}, d_p) \Rightarrow \{x_n + y_n\}, \{x_n y_n\} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}, d_p)$$

Proof. $\varepsilon > 0$ を任意に取る. 仮定より,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, |x_m - x_n|_p, |y_m - y_n|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

このとき,

$$|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)|_p \leq |x_m - x_n|_p + |y_m - y_n|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

であるから, $\{x_n + y_n\}$ も Cauchy 列である. また, 充分大きい m, n に対し, $|x_m|_p, |x_n|_p$ は一定である. よって,

$$\exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, |x_m|_p, |x_n|_p < C$$

$m, n \geq N$ とすると,

$$\begin{aligned} |x_m y_m - x_n y_n|_p &= |x_m(y_m - y_n) + (x_m - x_n)y_n|_p \\ &\leq |x_m|_p |y_m - y_n|_p + |x_m - x_n|_p |y_n|_p < 2C\varepsilon \end{aligned}$$

よって, $\{x_n y_n\}$ も Cauchy 列である. ■

Def 2.13 (\mathbb{Q}_p における和と積)

$x, y \in \mathbb{Q}_p$ とすると, $x = [\{x_n\}], y = [\{y_n\}]$ なる $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}, d_p)$ が取れる。このとき, **Lem 2.2** により,

$$x + y := [\{x_n + y_n\}] = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n), \quad xy := [\{x_n y_n\}] = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n$$

と定義できる。

Lem 2.3

Def 2.13 は well-defined である。つまり, $\{x_n\}, \{y_n\}$ の取り方に依らない。

Proof. $x, y \in \mathbb{Q}_p, \{x_n\}, \{x'_n\}, \{y_n\}, \{y'_n\} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}, d_p), [\{x_n\}] = [\{x'_n\}], [\{y_n\}] = [\{y'_n\}]$ とする。このとき,

$$|(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)|_p \leq |x_n - x'_n|_p + |y_n - y'_n|_p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

より,

$$\{x_n + y_n\} \sim \{x'_n + y'_n\}$$

また, 充分大きい n に対し, $|x_n|_p, |x'_n|_p$ は一定である。よって,

$$\exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n|_p, |x'_n|_p < C$$

$n \geq N$ とすると,

$$\begin{aligned} |x_n y_n - x'_n y'_n|_p &= |x_n(y_n - y'_n) + (x_n - x'_n)y'_n|_p \\ &\leq |x_n|_p |y'_n - y_n|_p + |x_n - x'_n|_p |y'_n|_p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

より,

$$\{x_n y_n\} \sim \{x'_n y'_n\}$$

Lem 2.4

\mathbb{Q}_p は **Def 2.13** の和と積に関して位相環である。

Proof. \mathbb{Q} の点列の極限を考えることによって環の公理を充たすことが確認できる。また, **Prop 2.5(1)(2)** と同様の議論により, 和と積の連続性ことがわかる。 ■

Lem 2.5

\mathbb{Q}_p は体であり, 逆元を取る操作 $\mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times, x \mapsto x^{-1}$ は連続。

Proof. $x \neq 0$ のとき, $x_n \rightarrow x$ なる Cauchy 列 $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ が取れる. n が充分大きいとき, $|x_n|_p$ は定数 $C \neq 0$. m, n が充分大きいとき,

$$\left| \frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n} \right|_p = \left| \frac{x_n - x_m}{x_m x_n} \right|_p = \frac{|x_n - x_m|_p}{C^2}$$

よって, $\{x_n^{-1}\}$ は Cauchy 列であるから, ある $y \in \mathbb{Q}_p$ に収束する. ここで, $x_n x_n^{-1} = 1$ ので, 積の連続性から $xy = 1$. よって $y = x^{-1}$ で, \mathbb{Q}_p は体. **Prop 2.5(3)** と同様の議論により逆元を取る操作は連続で, よって \mathbb{Q}_p は位相体. ■

以上より **Thm 2.1** が示された.

References

- [1] 保秀一, 本多尚文, 『テキスト理系の数学6 位相空間』, 数学書房, 2010
- [2] 江明彦, 『整数論1 初等整数論から p 進数へ』, 日本評論社, 2013