一次分数型漸化式

【Step.1】実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対し次の漸化式を考える．（$\alpha,\gamma,\delta=\text{const.}$）

$$a_{n+1}=\frac{\alpha a_n}{\gamma a_n+\delta}\quad(\alpha\gamma\neq 0,\alpha\neq\delta)$$

まず両辺の逆数をとって，

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{\gamma a_n+\delta}{\alpha a_n}=\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\delta}{\alpha}\cdot\frac{1}{a_n}$$

$1/a_n$ を新たな数列とみると，これはよくある漸化式（ $b_{n+1}=cb_n+d$ の形）になっている．
例によって次の ξ の一次方程式を解く．

$$\xi=\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\delta}{\alpha}\xi,\qquad \xi=\frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{1-\frac{\delta}{\alpha}}=\frac{\gamma}{\alpha-\delta}$$

この方程式は関数 $f(x)=\dfrac{\gamma}{\alpha}+\dfrac{\delta}{\alpha}x$ の不動点の座標を与えるものである．

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{\gamma}{\alpha-\delta}=\frac{\delta}{\alpha}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{\gamma}{\alpha-\delta}\right)$$

$$\frac{1}{a_n}=\frac{\gamma}{\alpha-\delta}+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{\gamma}{\alpha-\delta}\right)\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{n-1}$$

$$a_n=\frac{1}{\frac{\gamma}{\alpha-\delta}+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{\gamma}{\alpha-\delta}\right)\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{n-1}}$$

【Step.2】実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対し次の漸化式を考える．（$\alpha,\beta,\gamma,\delta=\text{const.}$）

$$a_{n+1}=\frac{\alpha a_n+\beta}{\gamma a_n+\delta}\quad(\gamma\neq 0)$$

[1] $\alpha\delta-\beta\gamma=0$ のとき，$\alpha:\beta=\gamma:\delta$ より，$a_n=\text{const.}$ つまり，$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1$
[2] $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ とする．次の方程式を考える．

$$\lambda=\frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}\gamma,\qquad \lambda^2+(\delta-\alpha)\lambda-\beta=0\ ,\qquad \lambda=\lambda_1,\lambda_2$$

方程式を $\beta-\lambda\delta=\lambda(\gamma\lambda-\alpha)\ \cdots(*)$ と変形できる．

この方程式は関数 $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ の不動点の座標を与えるものである．

ここで $a_{n+1}-\lambda$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-\lambda &= \frac{\alpha a_n+\beta}{\gamma a_n+\delta}-\lambda = \frac{(\alpha a_n+\beta)-\lambda(\gamma a_n+\delta)}{\gamma a_n+\delta} \\
&= \frac{(\alpha-\lambda\gamma)a_n+(\beta-\lambda\delta)}{\gamma a_n+\delta} \overset{(*)}{=} \frac{(\alpha-\lambda\gamma)a_n+\ \lambda(\gamma\lambda-\alpha)}{\gamma a_n+\delta} \\
&= \frac{(\alpha-\lambda\gamma)(a_n-\lambda)}{\gamma a_n+\delta}
\end{aligned}
$$

$a_n-\lambda$ を新たな数列とみることで Step.1 に帰着することができた.

(1) $\lambda_1=\lambda_2$ （重解）のとき，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ とすると，$\alpha-\lambda\gamma\neq 0$ （注意）が云えて，

$$
\frac{1}{a_{n+1}-\lambda} = \frac{1}{\alpha-\lambda\gamma}\ \frac{\gamma a_n+\delta}{a_n-\lambda} = \frac{1}{\alpha-\lambda\gamma}\left(\gamma+\frac{\gamma\lambda+\delta}{a_n-\lambda}\right)
$$

$\lambda=-\dfrac{\delta-\alpha}{2\gamma}$ から，　$2\gamma\lambda=\alpha-\delta,$　　$\gamma\lambda+\delta=\alpha-\lambda\gamma$

$$
\frac{1}{a_{n+1}-\lambda} = \frac{\gamma}{\alpha-\lambda\gamma}+\frac{1}{a_n-\lambda}
$$

これは等差数列型の漸化式なので，

$$
\frac{1}{a_n-\lambda} = \frac{1}{a_1-\lambda}+\frac{\gamma}{\alpha-\lambda\gamma}(n-1), \qquad \therefore a_n = \lambda+\frac{1}{\dfrac{1}{a_1-\lambda}+\dfrac{\gamma}{\alpha-\lambda\gamma}(n-1)}
$$

（注意）$\alpha-\lambda\gamma=0$ とすると，$\lambda=\dfrac{\alpha}{\gamma}$

$\gamma\lambda^2+(\delta-\alpha)\lambda-\beta=0$ から，$\gamma\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)^2+(\delta-\alpha)\dfrac{\alpha}{\gamma}-\beta=0$，　$\alpha\delta-\beta\gamma=0\ (\perp)$

(2) $\lambda_1\neq\lambda_2$ のとき，

$$
a_{n+1}-\lambda_1 = \frac{(\alpha-\lambda_1\gamma)(a_n-\lambda_1)}{\gamma a_n+\delta}, \qquad a_{n+1}-\lambda_2 = \frac{(\alpha-\lambda_2\gamma)(a_n-\lambda_2)}{\gamma a_n+\delta}
$$

辺々比を取り，次を得る.

$$
\frac{a_{n+1}-\lambda_1}{a_{n+1}-\lambda_2} = \frac{\alpha-\lambda_1\gamma}{\alpha-\lambda_2\gamma}\cdot\frac{a_n-\lambda_1}{a_n-\lambda_2}
$$

これは等比数列型の漸化式なので，

$$
\frac{a_n-\lambda_1}{a_n-\lambda_2} = \frac{a_1-\lambda_1}{a_1-\lambda_2}\cdot\left(\frac{\alpha-\lambda_1\gamma}{\alpha-\lambda_2\gamma}\right)^{n-1}, \qquad a_n-\lambda_1 = \frac{a_1-\lambda_1}{a_1-\lambda_2}\cdot\left(\frac{\alpha-\lambda_1\gamma}{\alpha-\lambda_2\gamma}\right)^{n-1}(a_n-\lambda_2)
$$

$$
\therefore a_n = \frac{\lambda_1-\lambda_2\cdot\dfrac{a_1-\lambda_1}{a_1-\lambda_2}\cdot\left(\dfrac{\alpha-\lambda_1\gamma}{\alpha-\lambda_2\gamma}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{a_1-\lambda_1}{a_1-\lambda_2}\cdot\left(\dfrac{\alpha-\lambda_1\gamma}{\alpha-\lambda_2\gamma}\right)^{n-1}}
$$