線型同次漸化式の解（対角化可能な場合）

2026 年 1 月 19 日

記号については以下のようにする．

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$
- 数列 $\boldsymbol{a}$ の第 n 項を $(\boldsymbol{a})_n$ と書く．$\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ なら $(\boldsymbol{a})_n = a_n$
- 線型写像 $f\colon V \to W$ と V の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_N)$ に対し，

$$f(\mathcal{B}) \coloneqq (f(\boldsymbol{b}_1), \cdots, f(\boldsymbol{b}_N))$$

と定める．

Prob 0.1

$N \in \mathbb{N}$ を固定する．複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について，$a_1, \cdots, a_N \in \mathbb{C}$ が与えられ，$N+1$ 項目以降は $(N+1)$ 項間漸化式

$$a_{n+N} = \sum_{k=1}^{N} p_k a_{n+k-1}$$

$$(\forall k \in \{1, \cdots, N\}\colon p_k \in \mathbb{C},\ p_k = \mathrm{const.})$$

によって定義されるとする．但し，N 次方程式

$$\lambda^N - \sum_{k=1}^{N} p_k \lambda^{k-1} = 0$$

が全て異なる複素数解を持つと仮定する（この方程式を**特性方程式**という）．このとき $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の一般項 a_n $(n \geq N+1)$ を $a_1, \cdots, a_N$ の式で表せ．

Result 0.1

特性方程式の N 個の解を

$$\gamma_j \in \mathbb{C}, \quad j \in \{1, \cdots, N\}$$

とおく．N 次正方行列 $P \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ を

$$P = (\gamma_j^{i-1})_{i,j=1,\cdots,N} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1^{N-1} & \cdots & \gamma_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

とおくと，一般項 a_n $(n \geq N+1)$ は

$$a_n = \begin{pmatrix} \gamma_1^{n-1} & \cdots & \gamma_N^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

と書ける．特に

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Span}\left(\{\gamma_1^{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, \{\gamma_N^{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

が成り立つ．

Proof. $\mathbb{C}$ 線型空間

$$V \coloneqq \mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{C}\}$$

の N 次元部分空間 W を

$$W = \left(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid a_{n+N} = \sum_{k=1}^{N} p_k a_{n+k-1}\right)$$

で定める．

W の基底 $\mathcal{E} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_N)$ を

$$\boldsymbol{e}_j = (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \cdots, 0, \underbrace{p_j}_{N}, \cdots) \in W$$

で定める．実際，$\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_N, a_{N+1}, \cdots) \in W$ に対し

$$\boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^{N} a_j \boldsymbol{e}_j$$

と一意に表せる．

線型変換 $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ を

$$f(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \{a_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

と定めると，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = (0, \cdots, 0, \underbrace{p_1}_{N}, \cdots)$$

$$f(\boldsymbol{e}_j) = (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{j-1}, 0, \cdots, 0, \underbrace{p_j}_{N}, \cdots) \quad (j \geq 2)$$

である．よって $\mathcal{E}$ に関する表現行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_N \end{pmatrix}$$

である．

A の固有多項式は

$$\begin{aligned} F_A(\lambda) &= \det(\lambda E - A) \\ &= \lambda^N - \sum_{k=1}^{N} p_k \lambda^{k-1} \end{aligned}$$

であり，その相異なる N 個の根を γ_j とする．

$\gamma_j E - A$ を簡約化すると

$$\gamma_j^N - \sum_{k=1}^{N} p_k \gamma_j^{k-1} = 0$$

より，固有ベクトル $\boldsymbol{x}_j$ は

$$\boldsymbol{x}_j = (1, \gamma_j, \gamma_j^2, \cdots, \gamma_j^{N-1})^T$$

と取れる．

$$P = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N)$$

とおくと

$$AP = P\Gamma, \quad \Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \cdots, \gamma_N)$$

が成り立つ．

基底 $\mathcal{F} = \mathcal{E}P$ を取ると

$$f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}\Gamma$$

であり，

$$f(\boldsymbol{f}_j) = \gamma_j \boldsymbol{f}_j$$

を得る．初項 $(\boldsymbol{f}_j)_1 = 1$ より

$$(\boldsymbol{f}_j)_n = \gamma_j^{n-1}$$

である．

以上から

$$a_n = \begin{pmatrix} \gamma_1^{n-1} & \cdots & \gamma_N^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

が従う．

■

Example 0.1. 三項間漸化式

$$a_{n+2} = p_2 a_{n+1} + p_1 a_n \quad (p_2^2 + 4p_1 \neq 0)$$

特性方程式は

$$\lambda^2 - p_2 \lambda - p_1 = 0$$

であり,

$$\gamma_{1,2} = \frac{p_2 \pm \sqrt{p_2^2 + 4p_1}}{2}$$

である.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \begin{pmatrix} \gamma_2 & -1 \\ -\gamma_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \begin{pmatrix} \gamma_1^{n-1} & \gamma_2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2 & -1 \\ -\gamma_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{a_1\gamma_2 - a_2}{\gamma_2 - \gamma_1}\gamma_1^{n-1} - \frac{a_1\gamma_1 - a_2}{\gamma_2 - \gamma_1}\gamma_2^{n-1}. \end{aligned}$$