第４講　級数

■　級数

数列 $\{a_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ に対して，$S_N=\sum_{n=1}^{N}a_n$ を第 N 部分和と云う．

第 N 部分和列 $\{S_N\}$ が $\sigma\in\boldsymbol{R}\cup\{\pm\infty\}$ に収束あるいは発散するとき，

$$\boxed{\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}a_n:=\lim_{N\to\infty}S_N=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n}$$

を級数の和と云う．紛らわしくないとき，次のように記号を省略することがある．

$$\sum a_n:=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

《収束の必要条件》

$$\boxed{\sum a_n \text{ が収束する．} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0}$$

〈proof〉$\varepsilon>0$ を任意に取る．$\{S_n\}$ が収束するので，Cauchy の定理より，

$$\exists N\in N: n\geq N\Rightarrow |S_{n+1}-S_n|=|a_n|<\varepsilon \ ■$$

逆は成り立たない．調和級数が代表的である．

■　絶対収束と条件収束

$$\boxed{\sum|a_n| \text{ が絶対収束する．} \Rightarrow \sum a_n \text{ が収束する．}}$$

〈proof〉$\sum a_n,\sum|a_n|$ の部分和列を $\{S_n\},\{\hat{S}_n\}$ とおく．

$$|S_m-S_n|=|a_{n+1}+\cdots+a_m|\leq|a_{n+1}|+\cdots+|a_m|=\left|\hat{S}_m-\hat{S}_n\right|$$

なので，$\{\hat{S}_n\}$ が Cauchy 列ならば $\{S_n\}$ も Cauchy 列である．■

$$\sum a_n \text{ が絶対収束する．} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sum|a_n| \text{ が収束する．}$$

$$\sum a_n \text{ が条件収束する．} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sum|a_n| \text{ は発散するが，} \sum a_n \text{ は収束する．}$$

《交代級数》$\forall n\in N: a_n>0$ であるとき，

$$\boxed{\sum(-1)^{n+1}a_n}$$

と云う級数を交代級数と云う．

《正項級数》

$\forall n \in N : a_n > 0$ であるとき，$\sum a_n$ を正項級数と云う．

正項級数 $\sum a_n$ が収束する． $\Leftrightarrow$ 部分和列 $\{S_n\}$ が有界である．

〈proof〉

(⇒) 収束列は有界である．

(⇐) $\forall n \in \boldsymbol{N} : S_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n$ より，$\{S_n\}$ は狭義単調増加列なので，$\{S_n\}$ が有界であるとき，単調有界定理から $\sum a_n$ は収束する．■

《Leibniz の定理》

$\{a_n\}$ を広義単調増加な正数列とする．

$a_n \to 0 \ \Rightarrow \sum(-1)^{n+1} a_n$ は収束する．

〈proof〉$\sum(-1)^{n+1}a_n$ の第 N 部分和を S_N とする．$k \in \boldsymbol{N}$ に対して，

$$S_{2k+1} = S_{2k-1} - (a_{2k} - a_{2k+1}) \leq S_{2k-1}, \qquad S_{2k+2} = S_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \geq S_{2k}$$

$\{S_{2k-1}\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ は広義単調減少，$\{S_{2k}\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ は広義単調増加である．また，

$$S_{2k-1} = \sum_{n=1}^{k-1}(a_{2n-1} - a_{2n}) + a_{2k-1} \geq 0, \qquad S_{2k} = a_1 - \sum_{n=1}^{k-1}(a_{2n} - a_{2n+1}) - a_{2k} \leq a_1$$

$\{S_{2k-1}\}$ は下に有界，$\{S_{2k}\}$ は上に有界である．単調収束定理により $\{S_{2k-1}\}$ と $\{S_{2k}\}$ は収束する．また $|S_{2k} - S_{2k-1}| = a_{2k} \to 0$ より，極限値は一致する．よって，$\sum(-1)^{n+1}a_n$ は収束する．■

《調和級数》

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$

〈proof〉部分和列を $\{S_N\}$ とする．

$$S_{2N} - S_N = \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} > \frac{1}{2N} \cdot N = \frac{1}{2}$$

よって，Cauchy の定理により発散する．■

《Euler 定数》

$\displaystyle\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \log N\right) = 0.5772156490\cdots$

現在，γ は無理数か否かすら分かっていない．

《交代調和級数》

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\log 2$$

Leibniz の定理により，交代調和級数は条件収束する．

交代調和級数は $\log(x+1)$ の Maclaurin 級数（Mercator 級数）で $x=1$ としたものである．

$$\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots,\qquad(-1<x\le 1)$$

《Leibniz 級数》

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

Leibniz の定理により，Leibniz 級数は条件収束する．

Leibniz 級数は $\arctan x$ の Maclaurin 級数（Gregory 級数）で $x=1$ としたものである．

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots,\qquad(-1\le x\le 1)$$

■　収束判定法

《比較判定法》

$\sum a_n, \sum b_n$ を正項級数とする．

$\exists C>0, \exists N\in N : n\ge N \Rightarrow a_n\le Cb_n$ を満たすとき，

（1）$\sum b_n$ が収束する．　$\Rightarrow$　$\sum a_n$ が収束する．

（2）$\sum a_n$ が発散する．　$\Rightarrow$　$\sum b_n$ が発散する．

〈proof〉

（1）$n\ge N$ のとき，$\sum a_n$ の部分和列は，

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+\cdots+a_{N-1}+a_N+\cdots+a_n\\&\le a_1+\cdots+a_{N-1}+Cb_N+\cdots+Cb_n\\&\le a_1+\cdots+a_{N-1}+C\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\infty\end{aligned}$$

部分和列が有界なので，$\sum a_n$ は収束する．

（2）正項級数は振動しないので，（1）の対偶である．■

《d'Alembert の収束判定法》

$\sum a_n$ を正項級数とする．

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1 \Rightarrow \text{収束する．}\quad \liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1 \Rightarrow \text{発散する．}$$

〈proof〉

$\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ならば，$\exists r\in\boldsymbol{R},\exists N\in\boldsymbol{N}: n\geq N\Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leq r<1$

$a_n\leq ra_{n-1}\leq\cdots\leq r^{n-1}a_1$ なので，

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{N-1}a_n+\sum_{n=N}^{\infty}a_n\leq\sum_{n=1}^{N-1}a_n+\sum_{n=N}^{\infty}r^{n-1}a_1=\sum_{n=1}^{N-1}a_n+a_1\frac{r^{N-1}}{1-r}$$

よって収束する．

$\displaystyle\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ ならば，$\exists r\in\boldsymbol{R},\exists N\in\boldsymbol{N}: n\geq N\Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\geq r>1$

$a_n\geq ra_{n-1}\geq\cdots\geq r^{n-1}a_1$ なので，

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{N-1}a_n+\sum_{n=N}^{\infty}a_n\geq\sum_{n=1}^{N-1}a_n+\sum_{n=N}^{\infty}r^{n-1}a_1=\infty$$

よって発散する．■

(註)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ のとき，収束する場合と発散する場合がある．

《Cauchy の収束判定法》

$\sum a_n$ を正項級数とする．

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1 \Rightarrow \text{収束する．}\quad \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}>1 \Rightarrow \text{発散する．}$$

〈proof〉

$\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$ ならば，$\exists r\in\boldsymbol{R},\exists N\in\boldsymbol{N}: n\geq N\Rightarrow \sqrt[n]{a_n}\leq r<1$

$a_n\leq r^na_{n-1}\leq r^Na_{n-1}$ で，$a_n\leq r^Na_{n-1}\leq\cdots\leq(r^N)^{n-1}a_1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{N-1}a_n+\sum_{n=N}^{\infty}a_n\leq\sum_{n=1}^{N-1}a_n+\sum_{n=N}^{\infty}(r^N)^{n-1}a_1=\sum_{n=1}^{N-1}a_n+a_1\frac{(r^N)^{N-1}}{1-r}$$

よって収束する．

$\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}>1$ ならば，$\exists r\in\boldsymbol{R},\exists N\in\boldsymbol{N}: n\geq N\Rightarrow \sqrt[n]{a_n}\geq r>1$

$a_n\geq r^na_{n-1}\geq r^Na_{n-1}$ で，$a_n\geq r^Na_{n-1}\geq\cdots\geq(r^N)^{n-1}a_1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{N-1}a_n+\sum_{n=N}^{\infty}a_n\leq\sum_{n=1}^{N-1}a_n+\sum_{n=N}^{\infty}(r^N)^{n-1}a_1=\infty$$

よって発散する．■

《積分判定法》

$f \in C\big([1,\infty)\big)\ \wedge\ f(x) > 0\ (\forall x \in [1,\infty))\ \wedge f$ は広義単調減少であるとする．

$$\boxed{\sum f(n)\ \text{が収束する．}\ \Leftrightarrow\ \int_1^\infty f(x)dx\ \text{が存在する．}}$$

〈proof〉

$(\Leftarrow)$ f は正で広義単調増加なので，$f(n) \le \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(x)dx$

条件から部分和は，

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f(n) \le f(1) + \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} f(x)dx = f(1) + \int_1^N f(x)dx < \infty$$

よって $\{S_n\}$ は上に有界∧広義単調増加ゆえ収束する．

$(\Rightarrow)$ f は正で広義単調増加なので，$f(n) \ge \displaystyle\int_{n}^{n+1} f(x)dx$

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \ge \sum_{n=1}^{N} \int_{n}^{n+1} f(x)dx = \int_1^{N+1} f(x)dx\ \to \infty$$

よって追い出しの原理により $\sum f(n)$ は発散する．■

(ex) $p > 0$ とする．次の級数は Riemann Zeta 関数と呼ばれる．

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$\zeta(p)$ は $0 < p \le 1$ のとき発散，$1 < p$ のとき収束する．

〈proof〉 $p = 1$ で調和級数．$p \ne 1$ のとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \left[\frac{x^{1-p}}{p-1}\right]_1^\infty = \begin{cases} \infty & (p<1) \\ \dfrac{1}{p-1} & (p>1) \end{cases}$$ ■

■　再配列

（編集中）

■ Riemann Zeta 関数

$s \in \boldsymbol{C}, n \in \boldsymbol{N}$ とする.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$\Re(s) > 1$ で絶対収束するが，解析接続により $\boldsymbol{C} \setminus \{1\}$ で正則関数となる.

s が負の偶数のとき，$\zeta(s) = 0$ でこれを自明な零点と云う.

$$\zeta(1) = \infty, \qquad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \qquad \cdots$$

（註） $1 + 2 + 3 + \cdots = -\dfrac{1}{12}$ と云う等式には注意されたい．解析接続された ζ において $\zeta(-1) = -\dfrac{1}{12}$

は正しいが，$\Re(s) > 1$ でない $s = -1$ に $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ を適用することはできない.

《Basel 問題》

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

〈Euler の解法〉$\sin x$ を下のように形式的に因数分解する.　　➤ Weierstrass の因数分解定理

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{n\pi}\right)\cdots$$

$$\iff \frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots \qquad \cdots\text{(A)}$$

また，$\sin x$ の Maclaurin 級数から

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad \iff \qquad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots \qquad \cdots\text{(B)}$$

(A)と(B)で x^2 の係数を比較して,

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \cdots + \frac{1}{n^2\pi^2} + \cdots\right) = -\frac{1}{3!}, \qquad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

《Riemann 予想》

$$\zeta(s) \text{ の非自明な零点の実部は } \frac{1}{2}$$

Riemann 予想は現在，数学における最も重要な未解決問題の 1 つであり，素数の分布に関わる.

Euler は $\zeta(s)$ が下の無限積，Euler 積に等しいことを示した．

$$\boxed{\zeta(s)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_j^s}}=\frac{1}{1-\frac{1}{p_1^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_2^s}}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}}\cdot\cdots}$$

$\{p_n\}$ は小さいものから並べた素数列である．

《素数分布》

正数 x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ とかき，素数計数関数と云う．

対数積分 $\mathrm{li}(x)$ ，Euler の対数積分 $\mathrm{Li}(x)$ を次で定義する．

$$\mathrm{li}(x)=\int_0^x\frac{dt}{\log t},\qquad \mathrm{Li}(x)=\mathrm{li}(x)-\mathrm{li}(2)=\int_2^x\frac{dt}{\log t}$$

$\mathrm{Li}(x)$ は特異点を回避している．$x\longrightarrow\infty$ のとき，次が成り立つ（素数定理)．

$$\pi(x)\sim\mathrm{li}(x)\sim\mathrm{Li}(x)$$

ここで，　$\mathrm{Li}(x)=\dfrac{x}{\log x}+\dfrac{1!\,x}{(\log x)^2}+\dfrac{2!\,x}{(\log x)^3}+\cdots\quad\sim\dfrac{x}{\log x}$　より

$$\boxed{\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}\ \text{(素数定理)}}$$

Riemann は $\pi(x)$ を Riemann Zeta 関数の零点を用いて表す式である Riemann の素数公式を発見した．

$$\boxed{\pi(x)=\sum_{m\le\log_2 x}\frac{\mu(m)}{m}\left(\mathrm{li}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)-\sum_{\rho}\mathrm{li}\left(x^{\frac{\rho}{m}}\right)-\log 2+\int_{x^{\frac{1}{m}}}^{\infty}\frac{dt}{t(t^2-1)\log t}\right)}$$

ρ は Riemann Zeta 関数の零点，$\mu(m)$は Möbius 関数，$\mathrm{li}(x)$ は対数積分である．

Riemann Zeta 関数の零点と素数分布が直接繋がっていることが分かる．

《 $\pi(x)$ の $\sigma(x)$ による評価》

素数の逆数和は発散する．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}=\infty$$

⟨proof⟩

（Step.1）$1\le n\le N$ に対し $p_n^N>N$ なので $n=p_1^{e_1(n)}\cdots p_N^{e_N(n)}$ $(0\le e_j(n)\le N,1\le j\le N)$と表せる．

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{p_1^{e_1(n)}\cdots p_N^{e_N(n)}}<\sum_{k_1=0}^{N}\cdots\sum_{k_n=0}^{N}\frac{1}{p_1^{k_1}\cdots p_N^{k_N}}=\left(\sum_{k_1=0}^{N}\frac{1}{p_1^{k_1}}\right)\cdots\left(\sum_{k_N=0}^{N}\frac{1}{p_1^{k_N}}\right)$$

$$=\left(\frac{1-\left(\frac{1}{p_1}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{p_1}}\right)\cdots\left(\frac{1-\left(\frac{1}{p_N}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{p_N}}\right)<\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_N}}=\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}$$

（Step.2）両辺対数を取って，

$$\log\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)<\log\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right)=\sum_{n=1}^{N}\log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right)=\sum_{n=1}^{N}\left\{-\log\left(1-\frac{1}{p_n}\right)\right\}$$

$$N\to\infty \text{ で } \log\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)\to\infty \text{ より，} \sum_{n=1}^{N}\left\{-\log\left(1-\frac{1}{p_n}\right)\right\}\to\infty$$

（Step. 3）$2x\ge-\log(1-x)$ $\left(0\le x\le\frac{1}{2}\right)$ なので，$x=\frac{1}{p_k}$ として Summation を取ると，

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{p_n}\ge\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left\{-\log\left(1-\frac{1}{p_n}\right)\right\} \blacksquare$$

（註）$2x\ge-\log(1-x)$ について

$$-\log(1-x)=\log\frac{1}{1-x}=\log\left(1+\frac{x}{1-x}\right)\le^{\dagger1}\frac{x}{1-x}\le^{\dagger2}2x$$

$$\dagger 1:\log(1+y)\le y\ (y>-1),\qquad \dagger 2:\ 0\le x\le\frac{1}{2} \text{ により，} 1-x\ge\frac{1}{2}$$

これと $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を比較することで，p_n よりも n^2 の方が発散速度が大きいことが分かる．

x 以下の平方数の個数を $\sigma(x)$ とすると，十分大きい x に対し，$\pi(x)$ は $\sigma(x)$ よりかなり大きいことが分かる．定量的な考察を試みよう．まず下が成立する．(証明は各自の演習問題とする．)

$$\sigma(x)\sim\sqrt{x}$$

これと素数定理から

$$\frac{\pi(x)}{\sigma(x)}\sim\frac{\sqrt{x}}{\log x}$$