数学研究 2 はめ込み定理

1123034 菊地陽成

2025 年 12 月 18 日

1 準備

Def 1.1
M_1, M_2 を可微分多様体，$f\colon M_1 \to M_2$ を C^∞ 写像とする．$p \in M_1$ に対して $p, f(p)$ のそれぞれの局所チャート $(U, \varphi), (V, \psi)$ を取るとき，

$$(\operatorname{rank} f)(p) \coloneqq \operatorname{rank}[D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))]$$

を f の p における**階数** (**rank**) という．

$$\operatorname{rank} f\colon M_1 \to \{0, 1, \cdots, m\},\ p \mapsto (\operatorname{rank} f)(p)$$

と定める．但し $m \coloneqq \min\{\dim M_1, \dim M_2\}$ とした．

Def 1.2
$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\|x\| \coloneqq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

このノルムは $\mathbb{R}^n$ の標準的な位相を誘導する．また，$r > 0, p \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$C^n(p, r) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - p\| < r\}$$
$$C^n(r) \coloneqq C^n(0, r)$$

Def 1.3
$M(m, n)$ を (m, n) 型実行列の全体とする．$A = (a_{ij}) \in M(m, n)$ に対し，

$$\|A\| \coloneqq \max_{i,j} |a_{ij}|$$

このノルムは $M(m, n)$ に $\mathbb{R}^{mn}$ の標準的な位相を誘導する．また，$r > 0, P \in M(m, n)$

に対し,

$$C^{(m,n)}(P,r) \coloneqq \{A \in M(m,n) \colon \|A-P\| < r\}$$

と定める．さらに,

$$\begin{aligned} M(m,n;k) &\coloneqq \{A \in M(m,n) \colon \operatorname{rank} A = k\} \\ M(m,n;\leq k) &\coloneqq \{A \in M(m,n) \colon \operatorname{rank} A \leq k\} \\ M(m,n;\geq k) &\coloneqq \{A \in M(m,n) \colon \operatorname{rank} A \geq k\} \end{aligned}$$

Prop 1.1

$M(m,n)$ の位相において，$M(m,n;\leq k)$ は閉集合，$M(m,n;\geq k)$ は開集合である．特に $m \geq n$ のとき，$M(m,n;n)$ は開集合である．[†1]

Proof. rank: $M(m,n) \to \{0,1,\cdots,\min\{m,n\}\}$ の下半連続性[†2]から従う． ■

Prop 1.2

$A \in M(m,n), B \in M(n,k)$ に対し,

$$\|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$$

特に，$x \in \mathbb{R}^n, A \in M(m,n)$ に対し,

$$\|Ax\| \leq n\|A\|\|x\|$$

Proof. $A=(a_{ij}), B=(b_{jl}), AB=(c_{il})$ とする．

$$|c_{il}| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jl}\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||b_{jl}| \leq \sum_{j=1}^{n} \|A\|\|B\| \leq n\|A\|\|B\|$$

より，$\|AB\| = \max_{i,l} |c_{il}| \leq n\|A\|\|B\|$ を得る． ■

Thm 1.2 (テキスト p.28)

$2n \leq p$，$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合，$f \colon U \to \mathbb{R}^p$ を C^∞ 函数とする．このとき,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in M(p,n), \begin{cases} (1)\ \|A\| < \varepsilon \\ (2)\ g \colon U \to \mathbb{R}^n, g(x) = f(x) + Ax \text{ ははめ込み} \end{cases}$$

[†1] $n = \min m,n$ より $M(m,n;n) = M(m,n;\geq n)$

[†2] $M(m,n)$ の元は小さな摂動によって rank が下がることはあっても上がることはない．

Proof. テキスト参照 ■

Lem 1.7 (テキスト p.36)
M を n 次元 C^∞ 多様体，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を M の任意の開被覆とする．このとき次のような M の可算微分可能座標系 $\{(V_j, h_j)\}_{j\in J}$ ($\sharp J = \aleph_0$) が存在する．

(1) $\{V_j\}_{j\in J}$ は $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の局所有限な細分である．
(2) $h_j(V_j) = C^n(3)$
(3) $W_j \coloneqq h_j^{-1}(C^n(1))$ とおくと $\{W_j\}_{j\in J}$ は M の開被覆.

Proof. テキスト参照 ■

Lem 1.9 (テキスト p.37)
次を充たす C^∞ 函数 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が存在し，釣鐘函数という．

$$\varphi(x) \begin{cases} = 1 & \text{if } x \in \overline{C^n(1)} \\ \in (0,1) & \text{if } x \in C^n(2) \setminus \overline{C^n(1)} \\ = 0 & \text{if } x \in \mathbb{R}^n \setminus C^n(2) \end{cases}$$

Proof. 実際に次のように構成できる．

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \varphi(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^n \psi(x_i)$$
$$\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \psi(x) = \frac{\lambda(2+x)\lambda(2-x)}{\lambda(2+x)\lambda(2-x) + \lambda(x-1) + \lambda(-x-1)}$$
$$\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \lambda(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

■

2　はめ込み定理

Def 2.1
X を位相空間，(Y,d) を距離空間，$f,g\colon X\to Y$ とする．$\delta\colon X\to\mathbb{R}_+$ を連続函数とする．

$$\forall x\in X,\ d(f(x),g(x))<\delta(x)$$

を充たすとき，g は f の **δ-近似**という．

Thm 2.1 (**はめ込み定理**)
M を n 次元 C^∞ 多様体，$2n\leq p$，$f\colon M\to\mathbb{R}^p$ を C^∞ 写像とする．$\delta\colon M\to\mathbb{R}_+$ を任意の連続函数とすると，f の δ-近似であるはめ込み $g\colon M\to\mathbb{R}^p$ が存在する．
さらに閉集合 $N\subset M$ に対し $(\operatorname{rank} f)|_N=n$ であれば，g は $g|_N=f|_N$ となるように取れる．

Proof. 閉集合 $\emptyset\neq N\subset M$ に対し $(\operatorname{rank} f)|_N=n$ とする．[†3]このとき N のある開近傍 U が存在して $(\operatorname{rank} f)|_U=n$ である．[†4]

$$M=U\cup(M\setminus U)=U\cup(M\setminus N)$$

より $\mathcal{U}:=\{U,M\setminus N\}$ は M の開被覆である．**Lem 1.7** により与えられる，$\mathcal{U}$ の局所有限な細分である可算微分可能座標系 $\mathcal{D}_0:=\{(V_j,h_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ を取る．このとき，

$$h_j(W_j)=C^n(1),\ h_j(V_j)=C^n(3)$$

である．そこで $U_j:=h_j^{-1}(C^n(2))$（つまり $h_j(U_j)=C^n(2)$）とおく．また，$\{(V_j,h_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ の添字を並び替えて，

$$j>0\ \Leftrightarrow\ V_j\subset M\setminus N$$

となるようにする．[†5]$\overline{U_j}\simeq\overline{C^n(2)}$ はコンパクトなので

$$\varepsilon_j:=\min_{q\in\overline{U_j}}\delta(q)>0$$

が存在する．

[†3] $N=\emptyset$ の場合は $U=\emptyset$ として進め，$j>0$ の場合のみ考える．
[†4] $N\subset(Df)^{-1}(M(p,n;n))$
[†5] $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は $\mathcal{U}$ の細分なので，各 j に対し，$V_j\subset U$ または $V_j\subset M\setminus N$ である．よって添字を上のようにつけることができ，このとき $j\leq 0\Rightarrow V_j\subset U$ である．しかし $V_j\subset U\cap(M\setminus N)$ なる V_j があるかもしれないので，$j\geq 0\Leftrightarrow V_j\subset U$ とはいえない．

(発表範囲↓)
求める g を帰納的に構成する．$k \geq 0$ に対し，$N_k \coloneqq \displaystyle\bigcup_{-\infty < j \leq k} \overline{W_j} \subset M$ とおく．

まず，$f_0 = f\colon M \to \mathbb{R}^p$ とおく．このとき $(\operatorname{rank} f_0)|_U = n$ なので，$N_0 \subset U$[†6]から $(\operatorname{rank} f_0)|_{N_0} = n$ である．

次に $k \geq 1$ とし，$f_{k-1}\colon M \to \mathbb{R}^p$ は C^∞ 写像で，$(\operatorname{rank} f_{k-1})|_{N_{k-1}} = n$ を充たすと仮定する．このとき f_{k-1} の $\dfrac{\delta}{2^k}$-近似である C^∞ 写像 $f_k\colon M \to \mathbb{R}^p$ で，$(\operatorname{rank} f_k)|_{N_k} = n$ となるようなものを次のように構成する．$\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を **Lem 1.9** の釣鐘函数とする．$A \in M(p,n)$ に対し，

$$F_A\colon C^n(3) \to \mathbb{R}^p,\ F_A(x) = f_{k-1} \circ h_k^{-1}(x) + \varphi(x)Ax$$

と定義する．A は次の 3 条件を充たすように取ることができる．

(1) $K \coloneqq h_k(N_{k-1} \cap \overline{U_k}) \subset \mathbb{R}^n$[†7]に対し $(\operatorname{rank} F_A)|_K = n$ を充たす．これが実現できることを示す．まず

$$DF_A = D(f_{k-1} \circ h_k^{-1}) + AxD\varphi(x) + \varphi(x)A$$

である．ここで

$$\Phi\colon K \times M(p,n) \to M(p,n),\ (x, A) \mapsto DF_A(x)$$

は連続であり，**Prop 1.1** より $M(p,n;n)$ は $M(p,n)$ の開集合である．ここで，

$$F_0 = f_{k-1} \circ h_k^{-1} = (f_{k-1} \circ h_{k-1}^{-1}) \circ (h_{k-1} \circ h_k^{-1})^{\dagger 8}$$

であるから，仮定より $\operatorname{rank} F_0|_K = n$ である．[†9] よって，$\Phi(K \times \{0\}) \subset M(p,n;n)$ である．$x \in K$ とすると，$\Phi(x, 0)$ は $M(p,n;n)$ の内点なので，

$$\exists r_x, \rho_x > 0,\ \Phi(C^n(x, r_x) \times C^{(p,n)}(0, \rho_x)) \subset M(p,n;n)$$

$\{C^n(x, r_x)\}_{x \in K}$ は K の開被覆であるが，K はコンパクトなので有限部分被覆 $\{C^n(x_i, r_i)\}_{i \in I}$ が存在する．$\rho = \displaystyle\min_{i \in I} \rho_i > 0$ とすると $A \in C^{(p,n)}(0, \rho)$ に対して，

$$K \times \{A\} \subset K \times C^{(p,n)}(0, \rho) \subset \bigcup_{i \in I}(C^n(x, r_i) \times C^{(p,n)}(0, \rho_i))$$

$$\Phi(K \times \{A\}) \subset \bigcup_{i \in I} \Phi(C^n(x, r_i) \times C^{(p,n)}(0, \rho_i)) \subset M(p,n;n)$$

これは $\|A\| < \rho \Rightarrow (\operatorname{rank} F_A)|_K = n$ を意味する．

[†6] $j \leq 0 \Rightarrow V_j \subset U$ に注意.
[†7] $K = \emptyset$ のときは (1) を飛ばしてよい.
[†8] $h_k^{-1}(K) \subset V_{k-1}$ に注意.
[†9] $\operatorname{rank} D(h_{k-1} \circ h_k^{-1}) = n$

(2) $\|A\| < \dfrac{1}{3n}\dfrac{\varepsilon_k}{2^k}$ を充たすように小さく取る．このとき，**Prop 1.2** より，

$$\forall x \in C^n(3),\ \|Ax\| \leq n\|A\|\|x\| < 3n\|A\| < \frac{\varepsilon_k}{2^k}$$

(3) $\operatorname{rank}(f_{k-1} \circ h_k^{-1}(x) + Ax)\big|_{C^n(2)} = n$ [†10]となるように小さく取る．これは **Thm 1.2** によって実現される．具体的には $\varepsilon = \min\left\{\rho, \dfrac{1}{3n}\dfrac{\varepsilon_k}{2^k}\right\}$ として定理を適用することで，(1)(2)(3) を充たす A が取れる．

(発表範囲↑)

上のように A を取ったとして $f_k\colon M \to \mathbb{R}^p$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} f_k(q) &:= \begin{cases} F_A \circ h_k(q) & \text{if } q \in V_k \\ f_{k-1}(q) & \text{if } q \in M \setminus \overline{U_k} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_{k-1}(q) + \varphi(h_k(q))Ah_k(q) & \text{if } q \in V_k \\ f_{k-1}(q) & \text{if } q \in M \setminus \overline{U_k} \end{cases} \end{aligned}$$

釣鐘函数の条件より，これは well-defined である．つまり，

$$f_{k-1}(q) + \varphi(h_k(q))Ah_k(x) = f_{k-1}(q)\ (q \in V_k \setminus \overline{U_k})$$

また (1) と f_k の定義より $(\operatorname{rank} f_k)|_{N_{k-1}} = n,$[†11] (3) より $(\operatorname{rank} f_k)|_{\overline{W_k}} = n$ [†12] であるから，$N_k = N_{k-1} \cup \overline{W_k}$ より $(\operatorname{rank} f_k)|_{N_k} = n$ である．さらに (2) より，f_k は f_{k-1} の $\dfrac{\delta}{2^k}$-近似である．そこで，

$$g := M \to \mathbb{R}^p,\ g(q) = \lim_{k\to\infty} f_k(q)$$

で定義する．定義から g は C^∞ 写像で，$\operatorname{rank} g = n$，さらに f の δ-近似である．（証明は次の発表に詳しい.）また，$\displaystyle\bigcup_{j>0} \overline{U_j} \subset M \setminus N$ より，

$$N \subset M \setminus \bigcup_{j>0} \overline{U_j} = \bigcap_{j>0} (M \setminus \overline{U_j})$$

であるため，$q \in N$ とすると $\forall j \in \mathbb{N}, q \in M \setminus \overline{U_j}$ であるため，

$$f(q) = f_0(q) = f_1(q) = \cdots = g(q)$$

[†10] rank の中は $F_A(x)$ でないことに注意する．しかし $C^n(1)$ 上では一致，$\overline{C^n(1)}$ 上で rank が一致する．

[†11] (1) より $(\operatorname{rank} f_{k-1})|_{N_{k-1}\cap\overline{U_k}} = n$ であり，また $\varphi(h_k(q)) = 0$ $(q \in V_k \setminus \overline{U_k})$ に注意すると $(\operatorname{rank} f_k)|_{N_k\setminus\overline{U_k}} = (\operatorname{rank} f_{k-1})|_{N_k\setminus\overline{U_k}} = n$

[†12] $(D\varphi)|_{\overline{C^n(1)}} = 0$ に注意すると，

$$\begin{aligned} (\operatorname{rank} f_k)|_{\overline{W_k}} &= (\operatorname{rank} Df_k)|_{\overline{W_k}} = (\operatorname{rank}(D(f_{k-1} \circ h_k^{-1})(x) + A))\Big|_{\overline{W_k}} \\ &= (\operatorname{rank} D(f_{k-1} \circ h_k^{-1}(x) + Ax))\Big|_{\overline{W_k}} = n \end{aligned}$$

よって $g|_N = f|_N$ を得る． ■

Cor 2.1
任意の n 次元 C^∞ 多様体 M と $2n \leq p$ なる p に対し，M から $\mathbb{R}^p$ へのはめ込みが存在する．

Proof. $0\colon M \to \mathbb{R}^p$, $q \mapsto 0$ とすると，これは C^∞ 写像である．また $\delta\colon M \to \mathbb{R}_+$, $q \mapsto 1$ で定めるとこれは連続である．よって **Thm 2.1** より 0 の δ 近似であるはめ込み $M \to \mathbb{R}^p$ が存在する． ■