Noether 環と Dedekind 環

2025 年 12 月 20 日

目次

ここで環とは零環でない単位的可換環とする．

1 Noether 環

Def 1.1
A を環とする．次の昇鎖条件を充たす環を **Noether 環**という．

(昇鎖条件) 任意のイデアルの昇鎖 $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ に対し，$\exists N \in \mathbb{N}, I_N = I_{N+1} = \cdots$

Prop 1.1
A を環とする．次の (1)-(3) は同値.

(1) A は Neother 環.
(2) A のイデアルの集合 $X \neq \emptyset$ は包含順序に関して極大元をもつ.
(3) A の任意のイデアルは有限生成.

Proof. (1)⇒(2) X に極大元が存在しないと仮定する．$I_1 \in X$ とすると I_1 は極大元でないので，$\exists I_2 \in X, I_1 \subsetneq I_2$ これを繰り返して真の昇鎖 $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots$ を得るがこれは矛盾.
(2)⇒(1) 昇鎖 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をイデアルの集合と考えると極大元 I_N を持つ．$n \geq N$ に対しては $I_N \subset I_n$(昇鎖) かつ $I_N \supset I_n$(極大性)，つまり $n \geq N \Rightarrow I_n = I_N$
(1)⇒(3) 有限生成でないイデアル $I \subset A$ があったと仮定する．$I = (0)$ ではないので $x_1 \in I \backslash \{0\}$ が取れる．$I \neq (x_1)$ より $x_2 \in I \backslash (x_1)$ が取れる．$I \neq (x_1, x_2)$ より $x_3 \in I \backslash (x_1, x_2)$ が取れる．これを繰り返して真の昇鎖 $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots$ を得るがこれは矛盾.
(3)⇒(1) $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ をイデアルの昇鎖とする．このとき $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ とおく．$a, b \in I$ に対し充分大きい j を取れば，$a, b \in I_j$ となり $a - b \in I_j \subset I, ra \in I_j \subset I$ $(\forall r \in A)$ であるから I はイデアル．I は有限生成なので $\exists x_1, \cdots, x_m, I = (x_1, \cdots, x_m)$．よって充分大きい N に対し，$I = (x_1, \cdots, x_m) \subset I_N$．このとき $n \geq N \Rightarrow I_n = I_N$ ■

Remark 1.1. (1)⇔(2) は一般の順序集合で同じ議論ができる．

Def 1.2
A を環とする．次の降鎖条件を充たす環を **Artin 環**という．

(降鎖条件) 任意のイデアルの降鎖 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ に対し，$\exists N \in \mathbb{N}, I_N = I_{N+1} = \cdots$

Remark 1.2. 環 A が Artin 環 ⇔ A のイデアルの集合 $X \neq \emptyset$ は包含順序に関して極小元をもつ．

Example 1.1. $\mathbb{Z}$ は PID なので任意のイデアルは有限生成であるから Neother 環である．

しかし，イデアルの真の降鎖 $(2) \supsetneq (2^2) \supsetneq (2^3) \supsetneq \cdots$ があるので Artin 環ではない．

Prop 1.2

A を Neother 環，M を有限生成 A 加群，$N \subset M$ を部分 A 加群とすると，N も有限生成 A 加群.

Proof. 略 ■

Prop 1.3

A が Neother 整域，$S \subset A$ が積閉集合であるとき，$S^{-1}A$ も Neother 環.

Proof. $I \subset S^{-1}A$ がイデアルであるとき，$I = (I \cap A)S^{-1}A$ である．
$\because$ $I \supset (I \cap A)S^{-1}A$ は明らか．$a/s \in I (a \in A, s \in S)$ とすると，$s(a/s) = a \in I \cap A$ より $a/s \in (I \cap A)S^{-1}A$. $\therefore I \subset (I \cap A)S^{-1}A$

よって $I, J \subset S^{-1}A$ がイデアルで $I \cap A = J \cap A$ であるとき，$I = J$ が従う (①)．ここで $S^{-1}A$ のイデアルの真の昇鎖 $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots$ が存在すると仮定すると，

$$I_1 \cap A \subsetneq I_2 \cap A \subsetneq \cdots$$

が A のイデアルの真の昇鎖となるが，これは①によると起こり得ない．よって $S^{-1}A$ も Neother 環. ■

2 Dedekind 環における素イデアル分解

2.1 Dedekind 環

Def 2.1
(0) でない素イデアルが極大イデアルとなる，体でない Noether 正規環を **Dedekind 環**という．Dedekind 環かつ局所環であるものを**離散付値環**（DVR）という．

Dedekind 環 A に関する次の条件を $(*)$ とする．

$$\mathrm{ch}\,\mathrm{Frac}(A) = 0 \text{ かつ } \forall x \in A\backslash\{0\}, |a/(x)| \leq \infty$$

Lem 2.1
A を Dedekind 環，$S \subset A$ を積閉集合とする．

(1) $S^{-1}A$ が体でない $\Rightarrow S^{-1}A$ も Dedekind 環
(2) A が $(*)$ を充たす．$\Rightarrow S^{-1}A$ も $(*)$ を充たす．

Proof. (1) **Prop 1.3** より $S^{-1}A$ は Neother 環.
(2)

■

Lem 2.2
A を Neother 正規環，$K = \mathrm{Frac}(A)$，L/K を有限次分離拡大，B を A の L における整閉包とする．このとき，$b \in B \Rightarrow N_{L/K}(b)/b \in B$
また，$I \subset B$ が (0) でないイデアルで，$b \in I\backslash\{0\}$ であれば $N_{L/K}(b) \in I \cap A$ である．特に $I \cap A \neq (0)$

Proof. ■

Cor 2.1
K が代数体，$I \subset \mathcal{O}_K$ が (0) でないイデアルなら $|\mathcal{O}_K/I| < \infty$

Proof. ■

Def 2.2
環 A の極大イデアル全体の交叉を $\mathrm{rad}(A)$ で表す．

Lem 2.3
A を環とする．$a \in \mathrm{rad}(A) \Rightarrow 1 - a \in A^{\times}$

Proof. $a \in \mathrm{rad}(A)$ かつ $1 - a \notin A^{\times}$ とすると，$(1-a) \subsetneq A$ より $(1-a) \subset \mathfrak{m} \subsetneq A$ なる極大イデアル $\mathfrak{m}$ がある．このとき $1 - x \in \mathfrak{m}$ であるが，$a \in \mathrm{rad}(A) \subset \mathfrak{m}$ であるから，$1 = (1-x) + x \in \mathfrak{m}$ となり $\mathfrak{m}$ が極大イデアルであることに矛盾する． ■

Thm 2.1 (中山の補題)
A を環，イデアル I は $I \subset \mathrm{rad}(A)$ を充たすとする．このとき有限生成 A 加群 M に対し，$IM = M \Rightarrow M = \{0\}$

Proof. M は有限生成なので，$M = Ax_1 + \cdots + Ax_n$ $(x_i \in M)$ と表せる．$M \neq \{0\}$ と仮定すると，$n \geq 1$ である．n が最小になるように $x_1, \cdots, x_n$ を取る．$I = IM$ より $\exists a_1, \cdots, a_n \in I, x_n = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$．このとき，$(1-a_n)x_n = a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}$ である．ここで **Lem 2.3** より $1 - a_n \in A^{\times}$ であるから，$x_n \in Ax_1 + \cdots + Ax_{n-1}$ となり $M = Ax_1 + \cdots + Ax_{n-1}$ を得る．これは n の取り方に矛盾する．従って $M = \{0\}$ ■

Remark 2.1. $(A, \mathfrak{m})$ が局所環であるとき, 有限生成 A 加群 M に対し, $\mathfrak{m}M = M \Rightarrow M = \{0\}$

Lem 2.4
$(A, \mathfrak{m})$ をを Neother 局所整域，$\mathfrak{m} \neq (0), n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とすると，$\mathfrak{m}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{m}^n$

Proof. まず $\mathfrak{m}^{n+1} \subset \mathfrak{m}^n$ であるから，$\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$ と仮定する．A は Neother 環なので $\mathfrak{m}$ は有限生成なイデアルである．仮定から $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^n$ なので中山の補題 (*Remark* 2.1) により $\mathfrak{m}^n = (0)$ である．よって $x \in \mathfrak{m}$ とすると $x^m = 0$ となるので $x = 0$，$\mathfrak{m} = (0)$ を得る．これは $\mathfrak{m} \neq (0)$ に矛盾．よって $\mathfrak{m}^{n+1} \neq \mathfrak{m}^n$ ■

Prop 2.1

2.2 分数イデアル

Def 2.3
A を Dedekind 環，$K = \mathrm{Frac}(A)$ とする．K の 0 でない部分 A 加群で，A 加群として有限生成であるものを**分数イデアル**という．$a \in K \backslash \{0\}$ とするとき，分数イデアル $(a) := aA = \{ra \in K \mid r \in A\}$ を**単項イデアル**という．

Remark 2.2. 分数イデアルと区別するため通常のイデアルを**整イデアル**ということもある.

Example 2.1. $\mathbb{Q} = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z})$ である.

(1) $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right\}$ で生成される $\mathbb{Z}$ 加群 $\left\{\dfrac{m}{6} \mid m \in \mathbb{Z}\right\}$ は分数イデアル.

(2) $\left\{\dfrac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ で生成される $\mathbb{Z}$ 加群 $\left\{\dfrac{m}{2^n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ は分数イデアルではない.

Def 2.4

A を Dedekind 環, $K = \mathrm{Frac}(A)$ とする. 分数イデアル I に対し,

$$I^{-1} := \{a \in K \mid aI \subset A\}$$

Example 2.2. $\mathbb{Q}$ の分数イデアルとして $(1/3)^{-1} = (3)$

Prop 2.2

A を Dedekind 環, $K = \mathrm{Frac}(A)$ とする.

(1) 分数イデアル $I \subset J$ に対し, $J^{-1} \subset I^{-1}$

(2) $a \in K \setminus \{0\}$ に対し, $(a)^{-1} = (a^{-1})$

(3) 分数イデアル I に対し, $\exists a \in A \setminus \{0\}, aI \subset A$

(4) I が分数イデアルなら, I^{-1} も分数イデアル.

Proof. (1) $a \in J^{-1}$ とすると, $\forall b \in J \subset I, ab \in A$ であるから $a \in I^{-1}$. $\therefore J^{-1} \subset I^{-1}$

(2) $b \in A$ に対し, $b \in (a)^{-1} \Leftrightarrow b(a) \subset A \Leftrightarrow ba \in A \Leftrightarrow b \in a^{-1}A \Leftrightarrow b \in (a^{-1})$

(3) $I = Ax_1 + \cdots + Ax_n$ $(x_i \in K)$ とする. $x_i = y_i/z_i$ $(y_i \in A, z_i \in A \setminus \{0\})$ とすると, $z_1 \cdots z_n \in A \setminus \{0\}$ であり, $z_1 \cdots z_n I \subset A$

(4) $a \in I \setminus \{0\}$ とすると, $I^{-1} \subset (a)^{-1} = (a)^{-1}$. (a^{-1}) は有限生成 A 加群なので, その部分加群 I^{-1} も有限生成. (3) より $I^{-1} \neq (0)$ なので I^{-1} も分数イデアル.

■

Def 2.5

A を Dedekind 環, $K = \mathrm{Frac}(A)$ とする. 分数イデアル I, J に対し, 積 IJ を $\{xy \mid x \in I, y \in J\}$ が生成する K の部分 A 加群で定める. つまり,

$$IJ := \langle \{xy \mid x \in I, y \in J\} \rangle$$

Remark 2.3. I, J は有限生成なので $I = \langle i_1, \cdots, i_s \rangle, J = \langle j_1, \cdots, j_t \rangle$ とすると, $IJ = \langle i_1 j_1, i_1 j_2, \cdots, i_s j_t \rangle$ であるから IJ も有限生成. また, $x \in I \setminus \{0\}, y \in J \setminus \{0\}$ に対し, $xy \in IJ \setminus \{0\}$ なので IJ も分数イデアルである.

2.3 離散付値環

Prop 2.3

A を整域，$K = \mathrm{Frac}(A)$，L/K を体拡大，M を L の部分 A 加群とする．このとき，

$$M = \bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}} M$$

但し，$A_{\mathfrak{m}} M := \{(a/s)m \mid a/s \in A_{\mathfrak{m}}, m \in M\} \subset L$ であり，$\bigcap_{\mathfrak{m}}$ の $\mathfrak{m}$ は A の極大イデアル全体を走る．

Proof. $N = \bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}} M$ とおく．$a_1/s_1, a_2/s_2 \in A_{\mathfrak{m}}, m_1, m_2 \in M, r \in A$ のとき，

$$\frac{a_1 m_1}{s_1} - \frac{a_2 m_2}{s_2} = \frac{a_1 s_2 m_1 - a_2 s_1 m_2}{s_1 s_2} \in A_{\mathfrak{m}} M$$
$$r \frac{a_1 m_1}{s_1} = \frac{r a_1 m_1}{s_1} \in A_{\mathfrak{m}} M$$

であるから $A_{\mathfrak{m}} M$ は L の部分 $A_{\mathfrak{m}}$ 加群．よって L の部分 A 加群．また定義から明らかに $M \subset N$ である．そこで $M \subsetneq N$ と仮定する．このとき $x \in N \backslash M$ が取れる．$I := \{a \in A \mid ax \in M\}$ とおくと，I は A のイデアルである．

$\because$ まず $0 \in I \neq \emptyset$．$a, b \in I$ なら $(a-b)x = ax - bx \in M$ より $a - b \in M$．また M は部分 A 加群なので $a \in I, r \in A$ なら $(ra)x = r(ax) \in M$

$x \notin M \ni 1$ より $1 \notin I$．よって極大イデアル $I \subset \mathfrak{m}$ がある．$x \in N = \bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}} M \subset A_{\mathfrak{m}} M$ であるから，$\exists s \in A \backslash \mathfrak{m}, sx \in M$．$s \in I \subset \mathfrak{m}$ となり $s \in A \backslash \mathfrak{m}$ に矛盾する．よって $M = N$ ■

Lem 2.5

$(A, \mathfrak{m})$ を離散付値環とし，$\mathfrak{m}^{-1} \supsetneq A$ とする．このとき，

(1) $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} = A$

(2) $\mathfrak{m}$ は単項イデアル

Proof. (1) まず $\mathfrak{m}^{-1}$ の定義から $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} \subset A$ である．$\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} \neq A$ と仮定すると $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ である．$\mathfrak{m}^{-1}$ の元は有限生成 A 加群を不変にするので **Prop ??**より A 上整．A は正規環なので $\mathfrak{m}^{-1} \subset A$ となり仮定 $\mathfrak{m}^{-1} \supsetneq A$ に矛盾する．

(2) $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} = A$ なので

$$\exists b_1, \cdots, b_t \in \mathfrak{m}^{-1}, \exists a_1, \cdots, b_t \in \mathfrak{m}, b_1 a_1 + \cdots + b_t a_t = 1$$

このとき $\exists i, b_i a_i \notin \mathfrak{m}$ で，$b_i (b_i a_i)^{-1} a_i = 1$ である．局所環の性質から $b_i a_i \in A^\times$ で，$a_i \in \mathfrak{m}$ なので $a := (b_i a_i)^{-1} a_i \in \mathfrak{m}$．このとき $\mathfrak{m} = (a)$ となっている．$\mathfrak{m} \supset (a)$ は自明

なので $\mathfrak{m} \subset (a)$ を示す．$c \in \mathfrak{m}$ を任意に取る．$b_i \in \mathfrak{m}^{-1}$ より $bc \in A$ で，$b_i^{-1} = a$ と合わせて $c \in b^{-1}A = aA = (a)$ を得る．$\therefore \mathfrak{m} = (a)$

■

Lem 2.6
A は $(*)$ を充たす Dedekind 環，$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Spec}(A)$ は相異なる素イデアル，$e_1, \cdots, e_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．このとき，

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{e_n} A_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{p}_i^{e_i} A_{\mathfrak{p}_i}$$

Proof. $I = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{e_n}$ とおく．$I \subset \mathfrak{p}_i^{e_i}$ なので，$IA_{\mathfrak{p}_i} \supset \mathfrak{p}_i^{e_i} A_{\mathfrak{p}_i}$ を示す．ここで $i = 1$ としても一般性を失わない．$x \in \mathfrak{p}_1^{e_1}$ とする．$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ の間に包含関係はないので，$s_2 \in \mathfrak{p}_2 \backslash \mathfrak{p}_1, \cdots, s_n \in \mathfrak{p}_n \backslash \mathfrak{p}_1$ が取れて，$s := s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n} \in \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{e_n} \backslash \mathfrak{p}_1$ である．よって局所環の性質から $s \in (A_{\mathfrak{p}_1})^{\times}$．$xs \in \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{e_n} = I$ なので，$xA_{\mathfrak{p}_1} = xsA_{\mathfrak{p}_1} \subset IA_{\mathfrak{p}_1}$ したがって $\mathfrak{p}_i^{e_i} A_{\mathfrak{p}_i} \subset IA_{\mathfrak{p}_i}$ ■

Prop 2.4
$(A, \mathfrak{p})$ が $(*)$ を充たす離散付値環であるとき，A は単項イデアル整域である．また $\mathfrak{p} = (\pi)$ であるとき，A の (0) でない任意のイデアルは $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて (π^n) と表せる．

Proof. $a \in \mathfrak{p} \backslash 0$ とする．$\mathfrak{p} = \mathfrak{p} + (a) \supset \mathfrak{p}^2 + (a) \supset \cdots \supset (a)$ となるが，$(*)$ より $|A/(a)| < \infty$ なので $\exists N \in \mathbb{Z}_{>0}, \mathfrak{p}^N + (a) = \mathfrak{p}^{N+1} + (a) = \mathfrak{p}(\mathfrak{p}^N + (a))$．中山の補題により，

$$(\mathfrak{p}^N + (a))/(a) = (0)(= A/(a) \text{の零イデアル})$$

である．よって $\mathfrak{p}^N + (a) = (a)$，つまり $\mathfrak{p}^N \subset (a)$ である．$l := \min\{t \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \mathfrak{p}^t \subset (a)\}$ とする．l の最小性により $p^{l-1} \not\subset (a)$ であるから $b \in \mathfrak{p}^{l-1} \backslash (a)$ が取れる．$c := a^{-1}b$ とおくと $c \notin A$ である．$c\mathfrak{p} = a^{-1}b\mathfrak{p} \subset a^{-1}\mathfrak{p}^l \subset a^{-1}(a) = A$ なので $c \in \mathfrak{p}^{-1}$．したがって $\mathfrak{p}^{-1} \supsetneq A$. **Lem 2.5** により $\mathfrak{p}$ は単項イデアル. ■

2.4 Dedekind 環の素イデアル分解

Thm 2.2 (素イデアル分解)
A は $(*)$ を充たす Dedekind 環とする．I が A の 0 でないイデアルであれば，

$$\exists \mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_t \in \mathrm{Spec}(A), \exists e_1, \cdots, e_t \in \mathbb{Z}_{>0}, I = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_t^{e_t}$$

$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_t$ が全て異なるとすると $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_t, e_1, \cdots, e_t$ は $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_t$ の順序を除いて unique である．この分解を I の**素イデアル分解**という．また $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_t$ を I の**素因子**

という.

Def 2.6

A は環，$I_1, I_2 \subset A$ を 0 でないイデアルとする．イデアル $J \subset A$ が存在して，$I_1 = I_2 J$ となるとき，I_2 は I_1 を**割る**といい，$I_2 \mid I_1$ とかく．特にイデアル $I \subset A$ と $x \in A$ が $I \mid (x)$ であるときは $I \mid x$ とかく．

Remark 2.4. $I \mid x \Leftrightarrow x \in I$

Prop 2.5

A は $(*)$ を充たす Dedekind 環とする．0 でないイデアル $I_1, I_2 \subset A$ に対し，

$$I_1 \subset I_2 \Rightarrow I_2 \mid I_1$$

Def 2.7

A は環とする．0 でないイデアル $I, J \subset A$ が共通の素因子を持たないとき，I, J は**互いに素**であるという．

参考文献

[1] 雪江明彦,『整数論 1 初等整数論から p 進数へ』, 日本評論社，2013