

はめ込み定理

2026 年 1 月 19 日

1 準備

Def 1.1

M_1, M_2 を可微分多様体, $f: M_1 \rightarrow M_2$ を C^∞ 写像とする. $p \in M_1$ に対して $p, f(p)$ のそれぞれの局所チャート $(U, \varphi), (V, \psi)$ を取るとき,

$$(\text{rank } f)(p) := \text{rank}[D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))]$$

を f の p における**階数 (rank)** という.

$$\text{rank } f: M_1 \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}, \quad p \mapsto (\text{rank } f)(p)$$

と定める. 但し $m := \min\{\dim M_1, \dim M_2\}$ とした.

Def 1.2

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\|x\| := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

このノルムは \mathbb{R}^n の標準的な位相を誘導する. また, $r > 0, p \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\begin{aligned} C^n(p, r) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < r\} \\ C^n(r) &:= C^n(0, r) \end{aligned}$$

Def 1.3

$M(m, n)$ を (m, n) 型実行列の全体とする. $A = (a_{ij}) \in M(m, n)$ に対し,

$$\|A\| := \max_{i,j} |a_{ij}|$$

このノルムは $M(m, n)$ に \mathbb{R}^{mn} の標準的な位相を誘導する. また, $r > 0, P \in M(m, n)$

に対し,

$$C^{(m,n)}(P, r) := \{A \in M(m, n) : \|A - P\| < r\}$$

と定める. さらに,

$$M(m, n; k) := \{A \in M(m, n) : \text{rank } A = k\}$$

$$M(m, n; \leq k) := \{A \in M(m, n) : \text{rank } A \leq k\}$$

$$M(m, n; \geq k) := \{A \in M(m, n) : \text{rank } A \geq k\}$$

Prop 1.1

$M(m, n)$ の位相において, $M(m, n; \leq k)$ は閉集合, $M(m, n; \geq k)$ は開集合である. 特に $m \geq n$ のとき, $M(m, n; n)$ は開集合である.^{†1}

Proof. $\text{rank}: M(m, n) \rightarrow \{0, 1, \dots, \min\{m, n\}\}$ の下半連続性^{†2}から従う. ■

Prop 1.2

$A \in M(m, n), B \in M(n, k)$ に対し,

$$\|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$$

特に, $x \in \mathbb{R}^n, A \in M(m, n)$ に対し,

$$\|Ax\| \leq n\|A\|\|x\|$$

Proof. $A = (a_{ij}), B = (b_{jl}), AB = (c_{il})$ とする.

$$|c_{il}| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jl} \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}||b_{jl}| \leq \sum_{j=1}^n \|A\|\|B\| \leq n\|A\|\|B\|$$

より, $\|AB\| = \max_{i,l} |c_{il}| \leq n\|A\|\|B\|$ を得る. ■

Thm 1.2 (テキスト p.28)

$2n \leq p$, $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ を C^∞ 関数とする. このとき,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in M(p, n), \begin{cases} (1) \|A\| < \varepsilon \\ (2) g: U \rightarrow \mathbb{R}^n, g(x) = f(x) + Ax \text{ ははめ込み} \end{cases}$$

^{†1} $n = \min m, n$ より $M(m, n; n) = M(m, n; \geq n)$

^{†2} $M(m, n)$ の元は小さな摂動によって rank が下がることはあっても上がることはない.

Proof. テキスト参照 ■

Lem 1.7 (テキスト p.36)

M を n 次元 C^∞ 多様体, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を M の任意の開被覆とする. このとき次のような M の可算微分可能座標系 $\{(V_j, h_j)\}_{j \in J}$ ($\#J = \aleph_0$) が存在する.

- (1) $\{V_j\}_{j \in J}$ は $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の局所有限な細分である.
- (2) $h_j(V_j) = C^n(3)$
- (3) $W_j := h_j^{-1}(C^n(1))$ とおくと $\{W_j\}_{j \in J}$ は M の開被覆.

Proof. テキスト参照 ■

Lem 1.9 (テキスト p.37)

次を充たす C^∞ 関数 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し, 釣鐘関数という.

$$\varphi(x) \begin{cases} = 1 & \text{if } x \in \overline{C^n(1)} \\ \in (0, 1) & \text{if } x \in C^n(2) \setminus \overline{C^n(1)} \\ = 0 & \text{if } x \in \mathbb{R}^n \setminus C^n(2) \end{cases}$$

Proof. 実際に次のように構成できる.

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \psi(x_i) \\ \psi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \frac{\lambda(2+x)\lambda(2-x)}{\lambda(2+x)\lambda(2-x) + \lambda(x-1) + \lambda(-x-1)} \\ \lambda: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$
■

2 はめ込み定理

Def 2.1

X を位相空間, (Y, d) を距離空間, $f, g: X \rightarrow Y$ とする. $\delta: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ を連続関数とする.

$$\forall x \in X, d(f(x), g(x)) < \delta(x)$$

を満たすとき, g は f の δ -近似という.

Thm 2.1 (はめ込み定理)

M を n 次元 C^∞ 多様体, $2n \leq p$, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^p$ を C^∞ 写像とする. $\delta: M \rightarrow \mathbb{R}_+$ を任意の連続関数とすると, f の δ -近似であるはめ込み $g: M \rightarrow \mathbb{R}^p$ が存在する.

さらに閉集合 $N \subset M$ に対し $(\text{rank } f)|_N = n$ であれば, g は $g|_N = f|_N$ となるように取れる.

Proof. 閉集合 $\emptyset \neq N \subset M$ に対し $(\text{rank } f)|_N = n$ とする.^{†3} このとき N のある開近傍 U が存在して $(\text{rank } f)|_U = n$ である.^{†4}

$$M = U \cup (M \setminus U) = U \cup (M \setminus N)$$

より $\mathcal{U} := \{U, M \setminus N\}$ は M の開被覆である. **Lem 1.7** により与えられる, \mathcal{U} の局所有限な細分である可算微分可能座標系 $\mathcal{D}_0 := \{(V_j, h_j)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ を取る. このとき,

$$h_j(W_j) = C^n(1), h_j(V_j) = C^n(3)$$

である. そこで $U_j := h_j^{-1}(C^n(2))$ (つまり $h_j(U_j) = C^n(2)$) とおく. また, $\{(V_j, h_j)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ の添字を並び替えて,

$$j > 0 \Leftrightarrow V_j \subset M \setminus N$$

となるようにする.^{†5} $\overline{U_j} \simeq \overline{C^n(2)}$ はコンパクトなので

$$\varepsilon_j := \min_{q \in \overline{U_j}} \delta(q) > 0$$

が存在する.

^{†3} $N = \emptyset$ の場合は $U = \emptyset$ として進め, $j > 0$ の場合のみ考える.

^{†4} $N \subset (Df)^{-1}(M(p, n; n))$

^{†5} $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ は \mathcal{U} の細分なので, 各 j に対し, $V_j \subset U$ または $V_j \subset M \setminus N$ である. よって添字を上のようにつけることができ, このとき $j \leq 0 \Rightarrow V_j \subset U$ である. しかし $V_j \subset U \cap (M \setminus N)$ なる V_j があるかもしれないので, $j \geq 0 \Leftrightarrow V_j \subset U$ とはいえない.

(発表範囲↓)

求める g を帰納的に構成する. $k \geq 0$ に対し, $N_k := \bigcup_{-\infty < j \leq k} \overline{W_j} \subset M$ とおく.

まず, $f_0 = f: M \rightarrow \mathbb{R}^p$ とおく. このとき $(\text{rank } f_0)|_U = n$ なので, $N_0 \subset U^{\dagger 6}$ から $(\text{rank } f_0)|_{N_0} = n$ である.

次に $k \geq 1$ とし, $f_{k-1}: M \rightarrow \mathbb{R}^p$ は C^∞ 写像で, $(\text{rank } f_{k-1})|_{N_{k-1}} = n$ を充たすと仮定する. このとき f_{k-1} の $\frac{\delta}{2^k}$ -近似である C^∞ 写像 $f_k: M \rightarrow \mathbb{R}^p$ で, $(\text{rank } f_k)|_{N_k} = n$ となるようなものを次のように構成する. $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を **Lem 1.9** の釣鐘函数とする. $A \in M(p, n)$ に対し,

$$F_A: C^n(3) \rightarrow \mathbb{R}^p, F_A(x) = f_{k-1} \circ h_k^{-1}(x) + \varphi(x)Ax$$

と定義する. A は次の 3 条件を充たすように取ることができる.

- (1) $K := h_k(N_{k-1} \cap \overline{U_k}) \subset \mathbb{R}^{n \dagger 7}$ に対し $(\text{rank } F_A)|_K = n$ を充たす. これが実現できることを示す. まず

$$DF_A = D(f_{k-1} \circ h_k^{-1}) + Ax D\varphi(x) + \varphi(x)A$$

である. ここで

$$\Phi: K \times M(p, n) \rightarrow M(p, n), (x, A) \mapsto DF_A(x)$$

は連続であり, **Prop 1.1** より $M(p, n; n)$ は $M(p, n)$ の開集合である. ここで,

$$F_0 = f_{k-1} \circ h_k^{-1} = (f_{k-1} \circ h_{k-1}^{-1}) \circ (h_{k-1} \circ h_k^{-1})^{\dagger 8}$$

であるから, 仮定より $\text{rank } F_0|_K = n$ である.^{†9} よって, $\Phi(K \times \{0\}) \subset M(p, n; n)$ である. $x \in K$ とすると, $\Phi(x, 0)$ は $M(p, n; n)$ の内点なので,

$$\exists r_x, \rho_x > 0, \Phi(C^n(x, r_x) \times C^{(p, n)}(0, \rho_x)) \subset M(p, n; n)$$

$\{C^n(x, r_x)\}_{x \in K}$ は K の開被覆であるが, K はコンパクトなので有限部分被覆 $\{C^n(x_i, r_i)\}_{i \in I}$ が存在する. $\rho = \min_{i \in I} \rho_i > 0$ とすると $A \in C^{(p, n)}(0, \rho)$ に対して,

$$K \times \{A\} \subset K \times C^{(p, n)}(0, \rho) \subset \bigcup_{i \in I} (C^n(x, r_i) \times C^{(p, n)}(0, \rho_i))$$

$$\Phi(K \times \{A\}) \subset \bigcup_{i \in I} \Phi(C^n(x, r_i) \times C^{(p, n)}(0, \rho_i)) \subset M(p, n; n)$$

これは $\|A\| < \rho \Rightarrow (\text{rank } F_A)|_K = n$ を意味する.

^{†6} $j \leq 0 \Rightarrow V_j \subset U$ に注意.

^{†7} $K = \emptyset$ のときは (1) を飛ばしてよい.

^{†8} $h_k^{-1}(K) \subset V_{k-1}$ に注意.

^{†9} $\text{rank } D(h_{k-1} \circ h_k^{-1}) = n$

(2) $\|A\| < \frac{1}{3n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$ を充たすように小さく取る. このとき, **Prop 1.2** より,

$$\forall x \in C^n(3), \|Ax\| \leq n\|A\|\|x\| < 3n\|A\| < \frac{\varepsilon_k}{2^k}$$

(3) $\text{rank}(f_{k-1} \circ h_k^{-1}(x) + Ax)|_{C^n(2)} = n^{\dagger 10}$ となるように小さく取る. これは **Thm 1.2** によって実現される. 具体的には $\varepsilon = \min \left\{ \rho, \frac{1}{3n} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right\}$ として定理を適用することで, (1)(2)(3) を充たす A が取れる.

(発表範囲 \uparrow)

上のように A を取ったとして $f_k: M \rightarrow \mathbb{R}^p$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} f_k(q) &:= \begin{cases} F_A \circ h_k(q) & \text{if } q \in V_k \\ f_{k-1}(q) & \text{if } q \in M \setminus \overline{U_k} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_{k-1}(q) + \varphi(h_k(q))Ah_k(q) & \text{if } q \in V_k \\ f_{k-1}(q) & \text{if } q \in M \setminus \overline{U_k} \end{cases} \end{aligned}$$

釣鐘函数の条件より, これは well-defined である. つまり,

$$f_{k-1}(q) + \varphi(h_k(q))Ah_k(q) = f_{k-1}(q) \quad (q \in V_k \setminus \overline{U_k})$$

また (1) と f_k の定義より $(\text{rank } f_k)|_{N_{k-1}} = n^{\dagger 11}$ (3) より $(\text{rank } f_k)|_{\overline{W_k}} = n^{\dagger 12}$ であるから, $N_k = N_{k-1} \cup \overline{W_k}$ より $(\text{rank } f_k)|_{N_k} = n$ である. さらに (2) より, f_k は f_{k-1} の $\frac{\delta}{2^k}$ -近似である. そこで,

$$g := M \rightarrow \mathbb{R}^p, g(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(q)$$

で定義する. 定義から g は C^∞ 写像で, $\text{rank } g = n$, さらに f の δ -近似である. (証明は次の発表に詳しい.) また, $\bigcup_{j>0} \overline{U_j} \subset M \setminus N$ より,

$$N \subset M \setminus \bigcup_{j>0} \overline{U_j} = \bigcap_{j>0} (M \setminus \overline{U_j})$$

であるため, $q \in N$ とすると $\forall j \in \mathbb{N}, q \in M \setminus \overline{U_j}$ であるため,

$$f(q) = f_0(q) = f_1(q) = \cdots = g(q)$$

^{†10} rank の中は $F_A(x)$ でないことに注意する. しかし $C^n(1)$ 上では一致, $\overline{C^n(1)}$ 上で rank が一致する.

^{†11} (1) より $(\text{rank } f_{k-1})|_{N_{k-1} \cap \overline{U_k}} = n$ であり, また $\varphi(h_k(q)) = 0$ ($q \in V_k \setminus \overline{U_k}$) に注意すると $(\text{rank } f_k)|_{N_k \setminus \overline{U_k}} = (\text{rank } f_{k-1})|_{N_k \setminus \overline{U_k}} = n$

^{†12} $(D\varphi)|_{\overline{C^n(1)}} = 0$ に注意すると,

$$\begin{aligned} (\text{rank } f_k)|_{\overline{W_k}} &= (\text{rank } Df_k)|_{\overline{W_k}} = (\text{rank}(D(f_{k-1} \circ h_k^{-1})(x) + A))|_{\overline{W_k}} \\ &= (\text{rank } D(f_{k-1} \circ h_k^{-1}(x) + Ax))|_{\overline{W_k}} = n \end{aligned}$$

よって $g|_N = f|_N$ を得る. ■

Cor 2.1

任意の n 次元 C^∞ 多様体 M と $2n \leq p$ なる p に対し, M から \mathbb{R}^p へのはめ込みが存在する.

Proof. $0: M \rightarrow \mathbb{R}^p, q \mapsto 0$ とすると, これは C^∞ 写像である. また $\delta: M \rightarrow \mathbb{R}_+, q \mapsto 1$ で定めるとこれは連続である. よって **Thm 2.1** より 0 の δ 近似であるはめ込み $M \rightarrow \mathbb{R}^p$ が存在する. ■