微分可能多様体の向き付け

-

2026 年 1 月 19 日

1 微分可能多様体の定義 (後半：微分可能多様体の向き付け)

$n \geq 1$ とする．(0 次元多様体は考えない．)

1.1 微分可能構造

Def 1.1

M を位相多様体とする．

$$\mathscr{A}_M := \{\mathcal{S} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J} \mid \mathcal{S} : M \text{ の微分可能座標系}\}$$

とする．$\mathscr{A}_M$ 上の関係 $\sim$ を，$\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathscr{A}_M$ に対し，

$$\mathcal{S} \sim \mathcal{S}' \quad :\Leftrightarrow \quad \mathcal{S} \cup \mathcal{S}' \in \mathscr{A}_M$$

で定めるとこれは同値関係である．$\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$ のとき，$\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ は**同値である** (**equivalent**) という．$\mathcal{D} = [\mathcal{S}] \in \mathscr{A}_M / \sim$ を M 上の**微分可能構造** (**differentiable structure**) という．位相多様体 M と微分可能構造 $\mathcal{D} \in \mathscr{A}_M / \sim$ の組 $(M, \mathcal{D})$ を C^∞ 多様体という．

1.2 微分可能多様体の向き付け

$(M, \mathcal{D})$ を n 次元 C^∞ 多様体とする．$\mathcal{D} = [\mathcal{S}], \mathcal{S} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ とする．

$x \in V_i \cap V_j$ に対して，$a_{ji}(x)$ を $\psi_j \circ \psi_i^{-1} \colon \psi_i(V_i \cap V_j) \to \mathbb{R}^n$ の $\psi_i(x)$ における Jacobi 行列とする；

$$a_{ji}(x) := D(\psi_j \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)}, \ x \in V_i \cap V_j$$

このとき $x \in V_i \cap V_j \cap V_k$ に対して，

$$\begin{aligned} a_{kj}(x)a_{ji}(x) &= D(\psi_k \circ \psi_j^{-1})_{\psi_j(x)} D(\psi_j \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} \\ &= D(\psi_k \circ \psi_j^{-1} \circ \psi_j \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} \\ &= D(\psi_k \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} \\ &= a_{ki}(x) \end{aligned}$$

である．ここで，$k = i$ とおけば，

$$\begin{aligned} a_{ij}(x)a_{ji}(x) = a_{ii}(x) = D(\mathrm{id})_{\psi_i(x)} = E_n \\ a_{ji}(x)a_{ij}(x) = a_{jj}(x) = D(\mathrm{id})_{\psi_j(x)} = E_n \end{aligned}$$

より $a_{ji}(x)^{-1} = a_{ij}(x)$ で $a_{ji}(x) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$．よって，

$$a_{ji} \colon V_i \cap V_j \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),\ x \mapsto a_{ji}(x)$$

なる C^∞ 写像を得る．[†1]

Def 1.2

微分可能座標系 $\mathcal{S} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J} \in \mathscr{A}_M$ は，

$$\forall i, j \in J, \forall x \in V_i \cap V_j,\ \det a_{ij}(x) > 0$$

を充たすとき，**向き付けられている (oriented)** という．

$$\mathscr{O}_M := \{\mathcal{S} \in \mathscr{A}_M \mid \mathcal{S} \text{ は向き付けられている}\}$$

とする．このとき，$\mathscr{O}_M$ 上の関係 $\approx$ を，$\mathcal{S} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}, \mathcal{S}' = \{(V'_k, \psi'_k)\}_{k \in K} \in \mathscr{O}_M$ に対し，

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \approx \mathcal{S}' \quad &:\Leftrightarrow\ \mathcal{S} \cup \mathcal{S}' \in \mathscr{O}_M \\ &\Leftrightarrow\ \forall (j, k) \in J \times K, \forall x \in V_j \cap V'_k,\ \det D(\psi'_k \circ \psi_j^{-1})_{\psi_j(x)} > 0 \end{aligned}$$

で定めるとこれは同値関係である．

Proof. (同値関係であること) 反射律と対称律は明らか．

$$\mathcal{S} = \{(V_i, \psi_i)\}_{i \in I}, \mathcal{S}' = \{(V'_j, \psi'_j)\}_{j \in J}, \mathcal{S}'' = \{(V''_k, \psi''_k)\}_{k \in K} \in \mathscr{O}_M$$

に対し，$\mathcal{S} \approx \mathcal{S}', \mathcal{S}' \approx \mathcal{S}''$ とする．$(i, k) \in I \times K, x \in V_i \cap V''_k$ に対し，$x \in V'_j$ なる $j \in J$ を選択すると，

$$\begin{aligned} \det D(\psi''_k \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} &= \det D(\psi''_k \circ {\psi'}_j^{-1} \circ \psi'_j \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} \\ &= \det D(\psi''_k \circ {\psi'}_j^{-1})_{\psi'_j(x)} D(\psi'_j \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} \\ &= \det D(\psi''_k \circ {\psi'}_j^{-1})_{\psi'_j(x)} \det D(\psi'_j \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} > 0 \end{aligned}$$

[†1] 多様体間の C^∞ 写像は後の section で定義される．

より $\mathcal{S} \approx \mathcal{S}''$. ■

M が連結と仮定すると,

$$\mathcal{S} \not\approx \mathcal{S}' \Leftrightarrow \forall (i,j) \in J \times K, \forall x \in V_i \cap V_j',\ \det D(\psi_j' \circ \psi_i^{-1})_{\psi_i(x)} < 0$$

であるから，$\mathscr{O}_M \neq \emptyset$ なら $\mathscr{O}_M$ は $\approx$ によって 2 つの同値類に類別される．

Remark 1.1. M が非連結なら成り立つとは限らない．実際,

$$M = \mathbb{R}^2 \amalg \mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cup (\mathbb{R}^2 \times \{1\})$$

$$V_0 = \mathbb{R}^2 \times \{0\},\ V_1 = \mathbb{R}^2 \times \{1\},\ \psi_0 : V_0 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,0) \mapsto (x,y),$$

$$\psi_1 : V_1 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,1) \mapsto (x,y),\ \psi_1' : V_1 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,1) \mapsto (x,-y),$$

$$\mathcal{S} = \{(V_0,\psi_0),(V_1,\psi_1)\},\ \mathcal{S}' = \{(V_0,\psi_0),(V_1,\psi_1')\}$$

とすると $\mathcal{S},\mathcal{S}' \in \mathscr{O}_M$ である．このとき V_0 上で変換関数の Jacobian は正だが，V_1 上では負なので，$\forall (j,k), \forall x, \det D(\psi_k' \circ \psi_j^{-1})_{\psi_j(x)} < 0$ と $\forall (j,k), \forall x, \det D(\psi_k' \circ \psi_j^{-1})_{\psi_j(x)} > 0$ はどちらも成立しない.

Def 1.3
$\mathscr{O}_M \neq \emptyset$ のとき，M は**向き付け可能** (**orientable**) といい，$\mathscr{O}_M/\approx$ の元を M の**向き付け** (**orientation**) という．向き付け可能な M の向き付けを 1 つ固定し付随させて考えるとき，M は**向き付けられている** (**oriented**) という.

Example 1.1. $n \geq 1$ とする．n 次元球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ は向き付け可能であることを示す．まず立体射影を考えるために，$x^+ = (0,\cdots,0,1), x^- = (0,\cdots,0,-1) \in S^n$, $U^+ = S^n \setminus \{x^+\}, U^- = S^n \setminus \{x^-\}$ とし,

$$\phi^+ \colon U^+ \to \mathbb{R}^n,\ \phi^+(x) := \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$$

$$\phi^- \colon U^- \to \mathbb{R}^n,\ \phi^-(x) := \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right)$$

と定めると，$\mathcal{S} := \{(U^+,\phi^+),(U^-,\phi^-)\} \in \mathscr{A}_{S^n}$ だが,

$$\det D(\phi^- \circ (\phi^+)^{-1})_y < 0 \quad (y \in \phi^+(U^+ \cap U^-))$$

であり（下で補足)，$\mathcal{S} \notin \mathscr{O}_{S^n}$，つまり向き付けられていない．そこで

$$R \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ R(y_1,y_2,\cdots,y_n) = (-y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

と定め,

$$\widetilde{\phi}^- := R \circ \phi^- : U^- \to \mathbb{R}^n$$

とすれば，$\det DR = -1$ から，

$$\begin{aligned}\det D(\widetilde{\phi}^- \circ (\phi^+)^{-1})_y &= \det D(R \circ \phi^- \circ (\phi^+)^{-1})_y \\ &= \det DR \det D(\phi^- \circ (\phi^+)^{-1})_y \\ &= -\det D(\phi^- \circ (\phi^+)^{-1})_y > 0\end{aligned}$$

よって $\mathcal{S}' := \{(U^+, \phi^+), (U^-, \widetilde{\phi}^-)\} \in \mathscr{O}_{S^n}$ で，$\mathscr{O}_{S^n} \neq \emptyset$.

(補足) $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \phi^+(U^+ \cap U^-) \subset \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\phi^- \circ (\phi^+)^{-1}(y) = \left(\frac{y_1}{\|y\|^2}, \cdots, \frac{y_n}{\|y\|^2}\right)$$

であるから，

$$D(\phi^- \circ (\phi^+)^{-1})_y = \left(\frac{\delta_{ij}\|y\|^2 - 2y_iy_j}{\|y\|^4}\right)_{(i,j)} = \frac{1}{\|y\|^2}\left(E_n - \frac{2y^\top y}{\|y\|^2}\right)$$

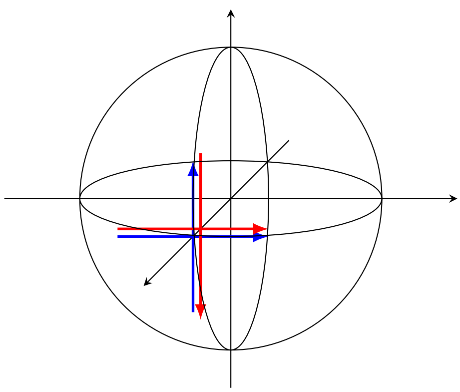
ここで $p = (1, 0, \cdots, 0) \in U^+ \cap U^-$ とすると，$\phi^+(p) = (1, 0, \cdots, 0)$ で，

$$\det D(\phi^- \circ (\phi^+)^{-1})_{\phi^+(p)} = \det \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = -1$$

ここで，

$$f := \det D(\phi^- \circ (\phi^+)^{-1}) \colon U^+ \cap U^- \to \mathbb{R}$$

は連続であり，$U^+ \cap U^-$ は連結なので像 $f(U^+ \cap U^-) \subset \mathbb{R}$ も連結．$\mathcal{S} \in \mathscr{A}_{S^n}$ より $0 \notin f(U^+ \cap U^-)$ で，先の計算から $-1 \in f(U^+ \cap U^-)$ なので，$f(U^+ \cap U^-) \subset (-\infty, 0)$，つまり $f < 0$ を得る．



Remark 1.2. 具体的に Jacobian を計算することもできる．$P = \dfrac{y^\top y}{\|y\|^2}$ とおくと, [†2]

$$yP = \frac{y(y^\top y)}{\|y\|^2} = \frac{\|y\|^2}{\|y\|^2}y = y, \quad y(E_n - 2P) = y - 2y = -y$$

また $z \in (\mathrm{Span}\{y\})^\perp$ に対し,

$$zP = \frac{z(y^\top y)}{\|y\|^2} = \frac{\langle z, y\rangle}{\|y\|^2}y = 0, \quad z(E_n - 2P) = z$$

なので $E_n - 2P$ は固有値 -1（固有空間は $\mathrm{Span}\{y\}$），固有値 1（固有空間は $(\mathrm{Span}\{y\})^\perp$）を持つ．$\dim \mathrm{Span}\{y\} = 1, \dim(\mathrm{Span}\{y\})^\perp = n - 1$ なので,

$$\det D(\phi^- \circ (\phi^+)^{-1})(y) = \det\left(\frac{1}{\|y\|^2}(E_n - 2P)\right) = \left(\frac{1}{\|y\|^2}\right)^n \cdot (-1) \cdot 1^{n-1} = -\frac{1}{\|y\|^{2n}} < 0$$

Example 1.2. $[0,1]^2$ 上の関係 $\sim$ を

$$(t,s) \sim (t',s') \iff (t,s) = (t',s') \text{ or } [\{t,t'\} = \{0,1\}, s = 1 - s']$$

で定めると，$M = [0,1]^2/\sim$ の開核 M° は 2 次元 C^∞ 多様体でありこれを Möbius の帯という．Möbius の帯は向き付け不可能な多様体である．

[†2] P は直線 $\mathrm{Span}\{y\}$ への正射影を表す行列である．