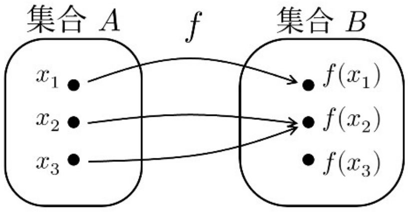
写像について

定義 1　集合 A から集合 B への**写像** f とは，

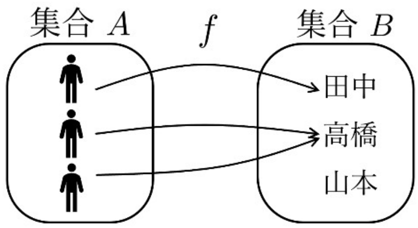
$$\boldsymbol{A} \text{ の各要素 } \boldsymbol{x} \text{ に対し，} \boldsymbol{B} \text{ のある要素 } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \text{ を対応させる規則}$$

のことである．A から B への写像 f を $f : A \to B$ とかく．



A を**定義域**，B を**終域**という．（値域ではないことに注意）

(例 1) A をとある 3 人からなる集合，B を 3 つの苗字からなる集合 としたとき，
A に属するそれぞれの人に苗字を対応させる規則 f は
A から B への写像となっている．



ただし，どの人にも 1 つだけ苗字があるものとする．
同じ苗字の人がいても良いし（右では高橋），誰にも当てはまらない苗字が存在しても良い．（右では山本）

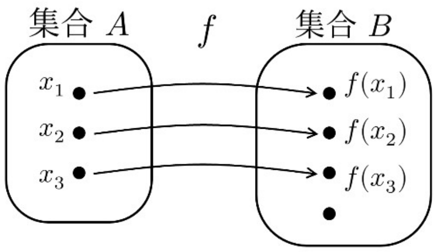
定義 2　写像 f が**単射**であるとは，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) \Rightarrow \boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2}$$

が成り立つこと．対偶を取って，

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

としても同じ．

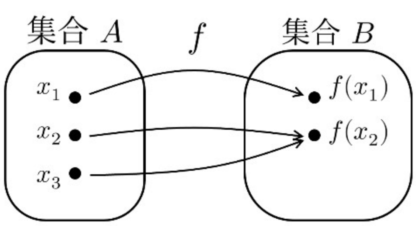


定義 3　写像 $f : A \to B$ が**全射**であるとは，

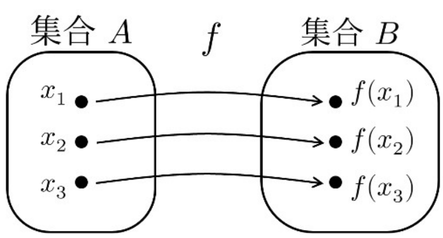
　　$\boldsymbol{B}$ **の全ての要素** $\boldsymbol{y}$ **に対し，**

　　[$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ **を満たす** $\boldsymbol{A}$ **の要素** $\boldsymbol{x}$ **が存在する．]**

が成り立つこと．



定義 4　写像 f が**全単射**であるとは，単射かつ全射であること．
全単射な写像を**一対一対応**ともいう．



記号

自然数全体の集合を $\mathbf{N}$ とかく．つまり，$\mathbf{N} = \{1,2,3,4,\cdots\}$

整数全体の集合を $\mathbf{Z}$ とかく．つまり，$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$

実数全体の集合を $\mathbf{R}$ とかく．

開区間 $\{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ を (a, b) とかき，閉区間 $\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ を $[a, b]$ とかく．

また，$\{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$ を (a, ∞) とかいたり，$\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ を $[a, b)$ とかいたりする．

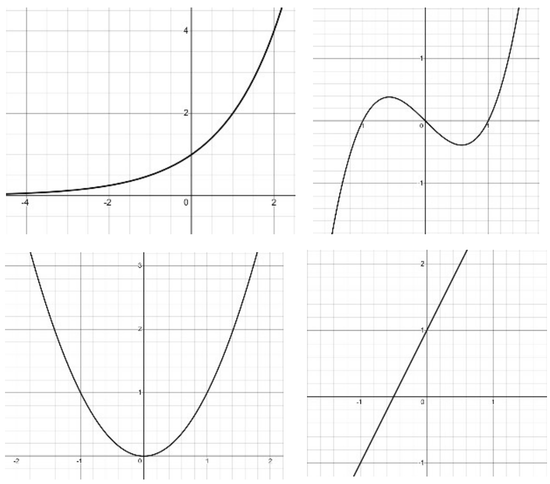
(例 2) 数列 $\{a_n\}$ は写像 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}, f(n) = a_n$ であると考えられる．

定義 5 $\mathbf{R}$ の部分集合 A から $\mathbf{R}$ への写像 $f : A \to \mathbf{R}$ を**関数**という．

(例 3) 写像 $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \log_2 x$ は関数

(例 4) 写像 $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt{x}$ は関数

(例 5) 写像 $f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ は関数



関数の例を用いて，単射と全射について考えよう．

(例 6) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = 2^x$ は単射だが，全射でない．

(例 7) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^3 - x$ は単射でないが，全射．

(例 8) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2$ は単射でも全射でもない．

(例 9) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = 2x + 1$ は全単射

定義 6 写像 $f : A \to B$ に対して，終域 B の部分集合

$\{f(x) \mid x \in A\}$ を f の**値域**という．

(例 10) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \sin x$ の値域は $[-1,1]$ である．

(例 11) $f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ の値域は $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

(注意) 全射でない写像でも終域を値域に設定し直すことで全射となる．

例えば，$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \sin x$ は全射でないが，$g : \mathbf{R} \to [-1,1],\ g(x) = \sin x$ とすればこれは全射．

定義 7　$f: A \to B$ は全単射な写像とする．B の各要素 y に対して，$y = f(x)$ を満たす A の要素 x がただ一つ存在する．各 y にこの x を対応させる写像 $f^{-1}: B \to A$ を f の**逆写像**という．

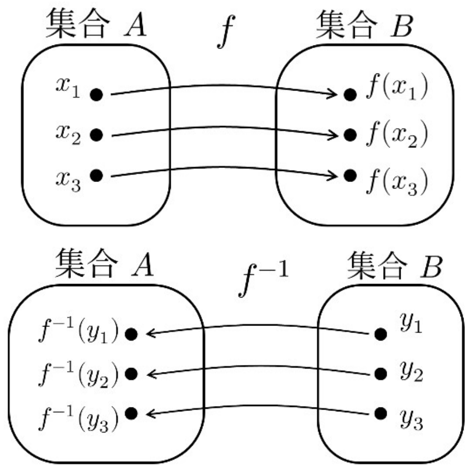
つまり，$\boldsymbol{y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$

(例 12) 関数 $f: [0, \infty) \to [0, \infty), f(x) = x^2$ は全単射であり，

$$f^{-1}: [0, \infty) \to [0, \infty), f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

(例 13) 関数 $f: \mathbf{R} \to (0, \infty),\ f(x) = 2^x$ は全単射であり，

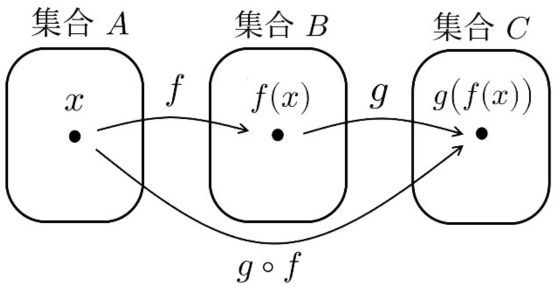
$$f^{-1}: (0, \infty) \to \mathbf{R}, f^{-1}(x) = \log_2 x$$



f が全単射な関数のときは，逆写像（逆関数）$y = f^{-1}(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称移動したものになる．

定義 8　$f: A \to B, g: B \to C$ をそれぞれ写像とする．
A の各要素 x に対して, C の要素 $g\big(f(x)\big)$ を対応させる写像 $g \circ f: A \to C$ を f と g の**合成写像**という．

つまり，$\boldsymbol{(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)}$



(例 14) 関数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2$ と $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = \sin x$ に対して，

$$g \circ f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = \sin(x^2)$$
$$f \circ g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(\sin x) = \sin^2 x$$

(注意) 例からも分かるように，$g \circ f$ と $f \circ g$ は一般には異なる．
(注意) 逆写像の定義から，$(f \circ f^{-1})(x) = f\Big(f^{-1}(x)\Big) = x, (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = x$
(注意) f の値域が g の定義域に包まれている場合でないと合成写像は定義できない．次の例を見よう．

(例 15) 関数 $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \log_2 x$ と $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = \sin x$ に対して，

$$g \circ f: (0, \infty) \to \mathbf{R}, (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(\log_2 x) = \sin(\log_2 x)$$

は定義できるが,

$$f \circ g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(\sin x) = \log_2(\sin x)$$

は定義できない．sin の値域 [−1,1]が log の定義域 $(0, \infty)$ に収まっていないからである．