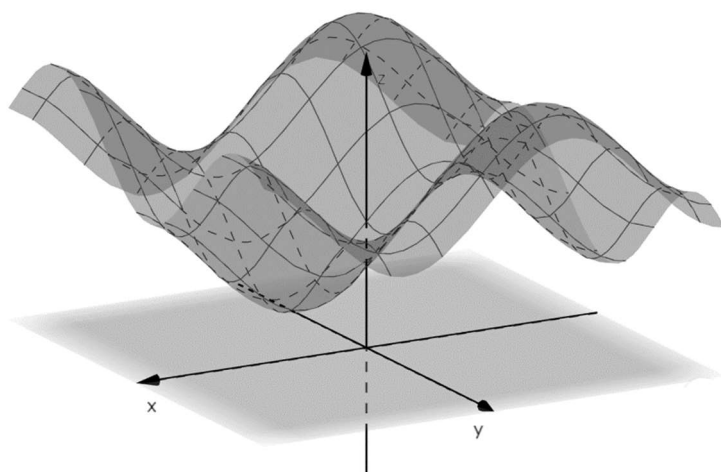


高校生のための積分

FRONTIER



目次

| | |
|-------------------------------|----|
| § 1. 積分の定義 | 1 |
| § 2. 定積分の性質 | 4 |
| § 3. 初等関数 | 6 |
| § 4. 初等関数の原始関数 | 10 |
| § 5. 有理関数の積分 | 15 |
| § 6. 部分積分 | 18 |
| § 7. 三角関数に関する積分 | 20 |
| § 8. 置換積分 | 22 |
| § 9. 逆関数の積分 | 28 |
| § 10. 積分漸化式 | 29 |
| § 11. Wallis 積分 | 32 |
| § 12. 広義積分 | 34 |
| § 13. Gamma 関数と Beta 関数 | 36 |
| § 14. 面積 | 40 |
| § 15. 二重積分 | 44 |
| § 16. 共通部分の体積 | 49 |
| § 17. 回転体の体積 | 51 |

本教材を読むにあたっての注意点

・本教材は理系の高校生が教養として触れておくべきであると私が勝手に判断した「積分」に関する知識や考え方をまとめたものである。数学Ⅲの微分や極限の知識を仮定しているので、もし不十分であれば適宜復習してほしい。中には高校数学で説明しきれなかったり、数式が複雑になったりする部分があるが、全てを無理に理解しようとする必要はなく、むしろ興味のあるところを見つけて読んでもらうだけでも充分価値がある（と思う）。

・登場する関数は必要に応じて微分可能性や導関数の連続性を仮定する。1つ1つの定理に厳密な条件を記述すると分量が多くなってしまい本質的な部分が見えにくくなってしまうからである。

・数学の学習では何が定義で何が定理か、常に注意していただきたい。

本教材で用いる表記

(e.g.) … 例

(cf.) … 参照

(註) … 注意

i.e. … つまり

定義 定理 のように囲むことにする.

〈proof〉 … 証明

■ … 証明終了

$A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} B$ … A を B で定義する.

$A := B$ … A を B で定義する.

$\forall x \in D : P(x)$ … 任意の $x \in D$ に対して $P(x)$ が成立する.

$\exists x \in D : P(x)$ … ある $x \in D$ が存在して $P(x)$ が成立する.

$p \wedge q, \begin{cases} p \\ q \end{cases}$ … p かつ q

$p \vee q$ … p または q

$\Re z, \Im z$ … $z \in \mathbf{C}$ の実部, 虚部

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_i x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

$$\prod_{i=1}^n x_i = \prod_i x_i = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$$

$\max\{a, b\}, \min\{a, b\}$ … a, b のうち小さい方, 大きくない方

$\max A, \min A$ … 集合 A の最大元, 最小元

$\log x$ … 自然対数 (e を底とする対数)

$0(x)$ … 恒等的に 0 を取る関数, $f(x) = 0(x) \Leftrightarrow \forall x : f(x) = 0$

const. … 定数

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4) \cdots 4 \cdot 2 & (\text{if } n \in 2\mathbf{N}) \\ n(n-2)(n-4) \cdots 3 \cdot 1 & (\text{if } n \in 2\mathbf{N} - 1) \end{cases}$$

但し, $0!! = (-1)!! = 1$

数学でよく使われる表現として後置修飾に気を付ける必要がある.

(e.g.) 「実数 x は, \sim .」を「 $x \in \mathbf{R}$ は, \sim .」とかく.

■ 数の集合

| 記号 | 集合 | 数式による説明 | 記号の由来 |
|-----------------------------------|--|--|-----------------------|
| \mathbf{N} | 自然数全体の集合 (ここでは <u>0 を含まないとする.</u>) | $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ | Natural number |
| \mathbf{Z} | 整数全体の集合 | $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ | Zahlen (独) |
| \mathbf{Q} | 有理数全体の集合 | $\left\{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{N}\right\}$ | Quoziente (伊) |
| \mathbf{R} | 実数全体の集合 | $\{x \mid x \text{ は実数}\}$ | Real number |
| \mathbf{C} | 複素数全体の集合 | $\{x + iy \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ | Complex number |
| $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ | 無理数全体の集合 | $\{x \in \mathbf{R} \mid x \notin \mathbf{Q}\}$ | 実数と有理数の差集合 |
| $\mathbf{R}_{\geq 0}$ | 非負実数全体の集合 | $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ | 0 以上の実数 |
| $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ | 非負整数全体の集合 | $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ | 0 以上の整数 |
| $2\mathbf{N} - 1$ | 正の奇数全体の集合 | $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ | 自然数を 2 倍して 1 引いて得られる数 |
| $2\mathbf{N}$ | 正の偶数全体の集合 | $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ | 自然数を 2 倍して得られる数 |

(e. g.) $n \in \mathbf{N}$, $\pi \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, $6 \in 2\mathbf{Z}$, $m \in 2\mathbf{N} - 1$

《区間》 $a < b$ なる $a, b \in \mathbf{R}$ に対し次の記号が定義される. (註) $[a, a]$ 等は考えない.

| 記号 | 集合 | 数式による説明 |
|---------------------|-----------------------------------|---|
| (a, b) | a より大きく b 未満の実数全体の集合 (有界开区間) | $\{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ |
| $[a, b]$ | a 以上 b 以下の実数全体の集合 (有界閉区間) | $\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ |
| $(a, b]$ | a より大きく b 以下の実数全体の集合 (有界半开区間) | $\{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ |
| (a, ∞) | a より大きい実数全体の集合 | $\{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$ |
| $(-\infty, \infty)$ | 実数全体の集合 (全区間) | \mathbf{R} |

《ベクトル空間》

| 記号 | 集合 | 数式による説明 |
|----------------|-----------------------------|---|
| \mathbf{R}^2 | 2 次元実ベクトル全体の集合, または 2 次元平面. | $\{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ |
| \mathbf{R}^3 | 3 次元実ベクトル全体の集合, または 3 次元空間. | $\{(x, y, z) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}\}$ |

§ 1. 積分の定義

■ 定積分の定義

関数 $f(x)$ が有界閉区間 $I = [a, b]$ において有界で $f(x) \geq 0$ であるとする. 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および2直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形 D を考える. (有界とは有限の範囲という意味.)

区間 I を n 個の小区間に等分割すると, i 番目の分点の x 座標は

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}i$$

となる. ここで右図の n 個の長方形の面積の和は

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

となる. $n \rightarrow \infty$ としたとき, S_n は図形 D の面積 S に近づく.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

この極限値を

$$\int_a^b f(x) dx$$

とかき, $f(x)$ の a から b までの**定積分**という.

一般に $f(x) \geq 0$ を満たすとは限らない有界な関数についても数式上同様に定義する. また,

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

とする.

■ 定積分の性質

a, b, c を定義域内の任意の3点とする. このとき次が成立し, これを積分の**加法性**という.

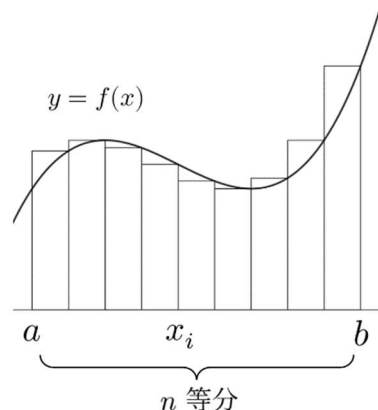
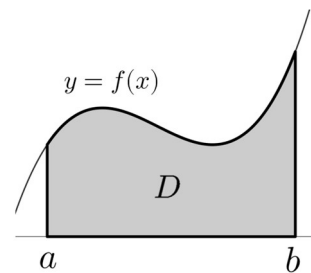
$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

(証明略)

α, β を定数とする. このとき次が成立し, これを積分の**線型性**という.

$$\int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\} dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

〈proof〉 Σ と極限の線型性により成立することがわかる. ■



■ 不定積分の定義

関数 $f(x)$ の定義域内の点 c を適当に選び,

$$F_0(x) = \int_c^x f(t)dt$$

として定義される関数を $f(x)$ の**不定積分**という. この関数を

$$\int f(x)dx$$

とかく. 関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを「積分する」といい, $f(x)$ を**被積分関数**という.

定積分や不定積分は上記の**区分求積法**によって定義されるため, 定義に従って具体的に計算することは容易ではない. そこで実際の計算では微分積分学の基本定理に基づき, いわゆる「微分の逆」として積分を計算していくことになる.

■ 微分積分学の基本定理

$F_0(x)$ を $f(x)$ の不定積分とすると次が成り立つ.

$$\frac{d}{dx}F_0(x) = f(x)$$

これを**微分積分学の基本定理**という. 平均値の定理によって示される. (証明略)

■ 原始関数の定義

関数 $f(x)$ が与えられたとき,

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

を満たす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という. 次の①②を確認しよう.

① $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば, C を定数とするとき $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数である.

$$\langle \text{proof} \rangle \quad \frac{d}{dx}\{F(x) + C\} = \frac{d}{dx}F(x) + 0 = f(x) \blacksquare$$

② $F(x), G(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば, ある定数 C を用いて, $G(x) = F(x) + C$ と表せる.

$$\langle \text{proof} \rangle \quad \frac{d}{dx}\{G(x) - F(x)\} = f(x) - f(x) = 0(x)$$

恒等的に微分係数が 0 である連続関数は定数関数なので, ある定数 C を用いて $G(x) - F(x) = C$ と表せる. ■

① ②から次がいえ.

1 つ原始関数を見つければ, 全ての原始関数はそれと定数の和で表せる.

■ 積分の計算

(1) 不定積分 $F_0(x) = \int_c^x f(t)dt = \int f(x)dx$ を計算することを考える.

微分積分学の基本定理により $F_0(x)$ は $f(x)$ の原始関数の 1 つであるから, $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とするとき, ある C を用いて

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

と表される. 定数 C は**積分定数**という. 以下, C は積分定数を表すものとする.

原始関数と不定積分はそれぞれ定義が異なるが, 微分積分学の基本定理により定数の差を除いて同一視できる. そこで等号に「両辺の関数は定数の差を許して等しい」という意味を持たせて積分定数を省略することもある. 本教材では積極的に積分定数を省略し, = で結ばれた関数の定数差を無視する.

(2) 次に定積分 $\int_a^b f(t)dt$ を計算することを考える.

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とするとき, 次が成り立つ.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

〈proof〉 $F_0(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C$ とできる. $F_0(a) = 0$ に注意すると,

$$\int_a^b f(x)dx = F_0(b) - F_0(a) = \{F(a) + C\} - \{F(b) + C\} = F(b) - F(a) \quad \blacksquare$$

(註) $F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$ とかく.

■ 不定積分の性質

α, β を定数とする. 不定積分にも線型性がある.

$$\int \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

〈proof〉 定積分の線型性によりいえる. \blacksquare

§ 2. 定積分の性質

(1) **積分変数**は何でも良い.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

(註) 積分変数や Σ の走る添え字など具体的な数値を入れることができない変数を**束縛変数**という.

(2) 下端・上端の入れ替えると符号が変わる.

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

(3) 積分の線型性

$k_i (i = 1, \dots, n)$ は定数とする. § 1 で述べた線型性の式から帰納的に導かれる.

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n k_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \left(k_i \int_a^b f_i(x) dx \right)$$

(4) 奇関数・偶関数の積分

$\forall x: f(x) = f(-x)$ を満たすとき, 関数 $f(x)$ は**偶関数**であるという.

$\forall x: f(x) = -f(-x)$ を満たすとき, 関数 $f(x)$ は**奇関数**であるという.

偶関数の関数グラフは y 軸対称, 奇関数の関数グラフは原点对称となる.

(e.g.) $f(x) = 1 + 3x^2 - |x| \cos 2x$ は偶関数, $g(x) = x^3 - \tan x$ は奇関数である. 次が成立する.

$$f(x) \text{ が偶関数} \implies \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

$$f(x) \text{ が奇関数} \implies \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

(e.g.) 上端+下端=0 であるときの多項式の積分は偶数次項のみ計算すればよい.

$$\int_{-a}^a \sum_i k_i x^i dx = \int_{-a}^a \sum_j (k_{2j} x^{2j} + k_{2j+1} x^{2j+1}) dx = 2 \int_0^a \sum_j k_{2j} x^{2j} dx = \sum_j k_{2j} \left[\frac{x^{2j+1}}{2j+1} \right]_0^a = \sum_j k_{2j} \frac{a^{2j+1}}{2j+1}$$

(5) 積分の単調性

$$(5.1) \quad \forall x: f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (\text{等号成立は } f(x) = 0(x) \text{ のとき})$$

$$(5.2) \quad \forall x: f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (\text{等号成立は } \forall x: f(x) = g(x) \text{ のとき})$$

〈proof〉

(5.1) 定積分の定義と極限の性質からわかる.

(5.2) (5.1) において $f(x)$ を $g(x) - f(x)$ に置き換えれば,

$$\int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \blacksquare$$

(6)有名不等式

$$(6.1) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (\text{等号成立は } f(x) \text{ が定符号のとき})$$

$$(6.2) \quad \left\{ \int_a^b f(x)g(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \int_a^b \{g(x)\}^2 dx$$

(等号成立は $f(x) = 0(x) \vee g(x) = 0(x) \vee \exists k = \text{const.} : f(x) = kg(x)$ のとき)

(6.1) は**三角不等式**, (6.2) は**Cauchy-Schwartz の不等式**と呼ばれる.

〈proof〉 Cauchy-Schwartz の不等式のみ示す.

$$(6.2) \quad F(b) = \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \int_a^b \{g(x)\}^2 dx - \left\{ \int_a^b f(x)g(x) dx \right\}^2 \quad \text{とおくと, } F(b) = 0$$

$$\begin{aligned} F'(b) &= \{f(b)\}^2 \int_a^b \{g(x)\}^2 dx + \{g(b)\}^2 \int_a^b \{f(x)\}^2 dx - 2f(b)g(b) \int_a^b f(x)g(x) dx \\ &= \int_a^b \{f(b)g(x) - f(x)g(b)\}^2 dx \geq 0, \quad \therefore F(b) \geq 0 \end{aligned}$$

$f(x) = 0(x) \vee g(x) = 0(x) \vee f(b)g(x) - f(x)g(b) = 0(x)$ のとき $F'(b) = 0(b)$ (i.e. $F(b) = \text{const.}$) かつ $F(a) = 0$ より $F(b) = 0(b)$. その他の場合は $F(b) > 0$. ■

■ 積分の平均値の定理

連続関数 $f(x)$ の $[a, b]$ における最小値を m , 最大値を M とする.

$$(1) \quad m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

$$(2) \quad c \in [a, b] : \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

(2)を**積分の平均値の定理**という.

〈proof〉

$$(1) \quad m \leq f(x) \leq M \quad (a \leq x \leq b)$$

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx, \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a), \quad \therefore m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

(2)(1) と中間値の定理より従う. ■

§ 3. 初等関数

■ 正弦/余弦/正接 以外の三角関数（余割/正割/余接）

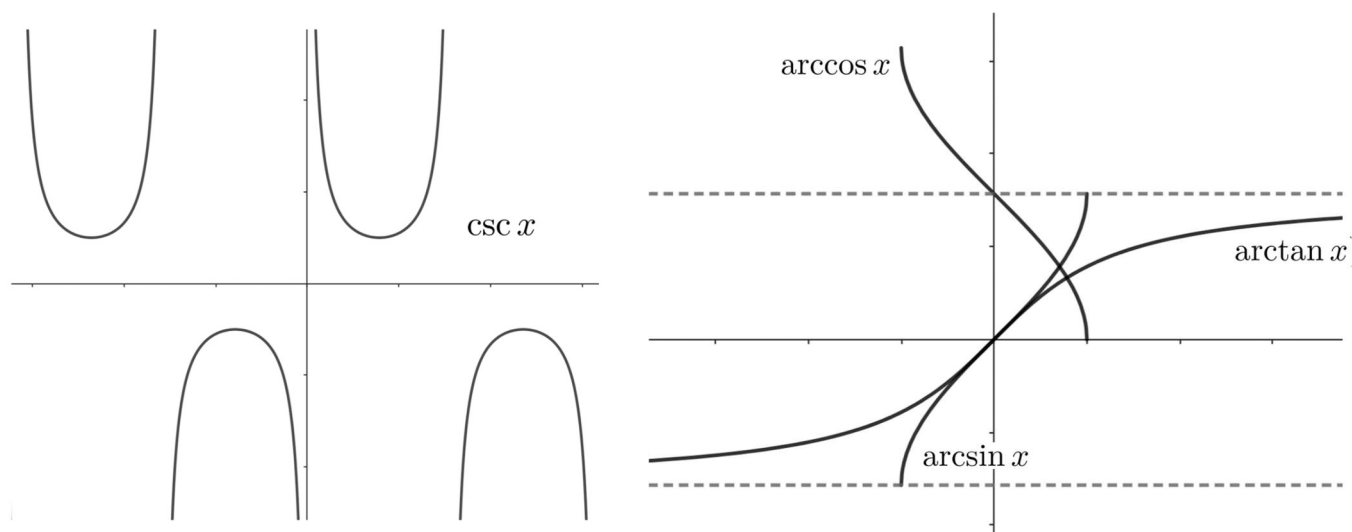
正弦，余弦，正接の逆数を返す関数をそれぞれ**余割**，**正割**，**余接**という．

$$\csc x := \frac{1}{\sin x}, \quad \sec x := \frac{1}{\cos x}, \quad \cot x := \frac{1}{\tan x}$$

■ 逆三角関数

三角関数は周期関数であり一対一対応しない．そこで定義域を絞って逆関数を定義する．これを**逆三角関数**という．

| 三角関数 | 逆三角関数 | 定義域 | 値域 |
|----------|---|----------------------------------|--|
| $\sin x$ | $\arcsin x = \sin^{-1} x$ | $[-1, 1]$ | $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ |
| $\cos x$ | $\arccos x = \cos^{-1} x$ | $[-1, 1]$ | $[0, \pi]$ |
| $\tan x$ | $\arctan x = \tan^{-1} x$ | \mathbf{R} | $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ |
| $\csc x$ | $\operatorname{arccsc} x = \csc^{-1} x$ | $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ | $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ |
| $\sec x$ | $\operatorname{arcsec} x = \sec^{-1} x$ | $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ | $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ |
| $\cot x$ | $\operatorname{arccot} x = \cot^{-1} x$ | \mathbf{R} | $(0, \pi)$ |



■ 双曲線関数

次の6つの関数を**双曲線関数**という.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{coth} x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

(註) $y = \cosh x$ のグラフは紐を垂らしたときにできる曲線であり**懸垂線** (Catenary) と呼ばれる.

《公式》

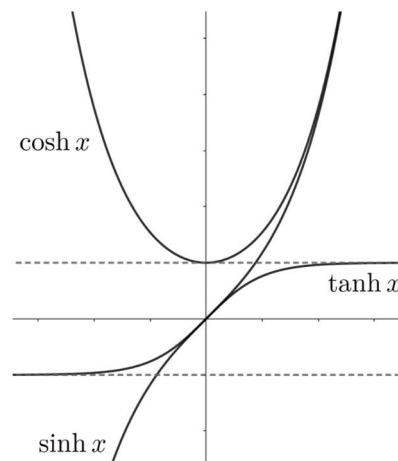
双曲線関数は三角関数と似た性質がある. 所々三角関数の公式とは符号が異なることに注意されたい. (その背景は後述.)

[1] 奇関数/偶関数

$$\sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \cosh x, \quad \tanh(-x) = -\tanh x$$

[2] 相互関係

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$



[3] 加法定理

$$\sinh(\theta \pm \phi) = \sinh \theta \cosh \phi \pm \cosh \theta \sinh \phi$$

$$\cosh(\theta \pm \phi) = \cosh \theta \cosh \phi \pm \sinh \theta \sinh \phi$$

$$\tanh(\theta \pm \phi) = \frac{\tanh \theta \pm \tanh \phi}{1 \pm \tanh \theta \tanh \phi}$$

[4] 2倍角の公式

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \left(= \frac{2}{1 - t^2} \right)$$

$$\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1 = 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \left(= \frac{1 + t^2}{1 - t^2} \right)$$

$$\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x} \left(= \frac{2t}{1 + t^2} \right)$$

但し, $\tanh x = t$ とした.

[5] 3倍角の公式

$$\sinh 3x = 3 \sinh x + 4 \sinh^3 x, \quad \cosh 3x = 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x, \quad \tanh 3x = \frac{3 \tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3 \tanh^2 x}$$

[6] 半角の公式

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}, \quad \cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}, \quad \tanh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{\cosh 2x + 1}$$

[7] 積和の公式

$$\sinh \theta \cosh \phi = \frac{1}{2} \{ \sinh(\theta + \phi) + \sinh(\theta - \phi) \}$$

$$\cosh \theta \cosh \phi = \frac{1}{2} \{ \cosh(\theta + \phi) + \cosh(\theta - \phi) \}$$

$$\sinh \theta \sinh \phi = \frac{1}{2} \{ \cosh(\theta + \phi) - \cosh(\theta - \phi) \}$$

[8] 和積の公式

$$\sinh \theta + \sinh \phi = 2 \sinh \frac{\theta + \phi}{2} \cosh \frac{\theta - \phi}{2}, \quad \sinh \theta - \sinh \phi = 2 \cosh \frac{\theta + \phi}{2} \sinh \frac{\theta - \phi}{2}$$

$$\cosh \theta + \cosh \phi = 2 \cosh \frac{\theta + \phi}{2} \cosh \frac{\theta - \phi}{2}, \quad \cosh \theta - \cosh \phi = 2 \sinh \frac{\theta + \phi}{2} \sinh \frac{\theta - \phi}{2}$$

《導関数》

$$\begin{aligned} (\sinh x)' &= \cosh x, & (\cosh x)' &= \sinh x, & (\tanh x)' &= \operatorname{sech}^2 x \\ (\operatorname{csch} x)' &= -\coth x \operatorname{csch} x, & (\operatorname{sech} x)' &= -\tanh x \operatorname{sech} x, & (\coth x)' &= -\operatorname{csch}^2 x \end{aligned}$$

〈proof〉 $(\sinh x)'$ のみ示す.

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \blacksquare$$

《“双曲線”関数である理由》

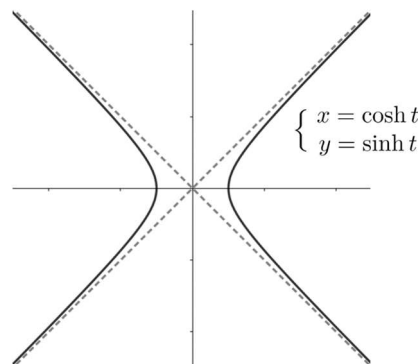
双曲線関数のグラフは双曲線ではないのになぜ双曲線関数というのか. 三角関数と比較する.

$$\text{曲線 } \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} (t \in \mathbf{R}) \text{ は単位円 } x^2 + y^2 = 1$$

これに対して,

$$\text{曲線 } \begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases} (t \in \mathbf{R}) \text{ は単位双曲線 } x^2 - y^2 = 1$$

⇒ 上で定義した関数を双曲線関数と呼ぶ.



《複素関数との関係》 (Euler の公式の知識を要求する.)

Euler の公式から, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

辺々加減して, $x \in \mathbf{R}$ を $z \in \mathbf{C}$ とすると下の複素三角関数の定義を得る.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

ここで双曲線関数を使うと, 次のような三角関数と双曲線関数の関係を得る.

$$\sin z = \frac{1}{i} \sinh(iz), \quad \cos z = \cosh(iz)$$

双曲線関数の性質における三角関数の公式といくつか符号の違いは虚数 i との関係による.

■ 逆双曲線関数

双曲線関数の逆関数 (**逆双曲線関数**) は積分の問題で頻繁に見かける形である.

| 双曲線関数 | 逆双曲線関数 | 定義域 | 値域 |
|-----------|--|----------------|---------------|
| $\sinh x$ | $\operatorname{arcsinh} x = \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ | \mathbf{R} | \mathbf{R} |
| $\cosh x$ | $\operatorname{arccosh} x = \cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ | $[-1, \infty)$ | $[0, \infty)$ |
| $\tanh x$ | $\operatorname{arctanh} x = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ | $(-1, 1)$ | \mathbf{R} |

$$y = \operatorname{arcsinh} x \Leftrightarrow \sinh y = x \Leftrightarrow e^y - e^{-y} = 2x \Leftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \Leftrightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$e^y > 0 \text{ より } \operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(註) 次の形も重要である.

$$\operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} = \log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right) = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \log a$$

§ 4. 初等関数の原始関数

積分定数を省略する. この § では後述の積分計算方法を使っているので適宜他の章を参照されたい.

■ 冪関数の原始関数

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} & ((\alpha \in \mathbf{R}, \alpha \neq -1)) \\ \log x & (\alpha = -1) \end{cases}$$

■ 指数・対数関数の原始関数

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int \log x dx = x \log x - x$$

■ 三角関数と三角関数の平方

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \sec x dx = \log|\sec x + \tan x|$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \csc x dx = -\log|\csc x + \cot x|$$

$$\int \tan x dx = -\log|\cos x|$$

$$\int \cot x dx = \log|\sin x|$$

〈proof〉 $\sec x$ と $\csc x$ のみ示す.

$$\begin{aligned} I &:= \int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) dx = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{\cos x}{\sin x - 1} - \frac{\cos x}{\sin x + 1} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} (\log|\sin x - 1| - \log|\sin x + 1|) = \frac{1}{2} (\log|\sin x + 1| - \log|\sin x - 1|) \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) \end{aligned}$$

[別解 1]

$$I = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

〈 $u = \sec x + \tan x$ 〉 $\curvearrowright du = (\sec x \tan x + \sec^2 x) dx$

$$I = \int \frac{1}{u} du = \log|u| = \log|\sec x + \tan x|$$

[別解 2] Weirstrass 置換を用いる.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{1}{1-t^2} dt = -2 \int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt \\ &= \log \left| \frac{t+1}{t-1} \right| = \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 1} \right| \end{aligned}$$

$$J := \int \csc x \, dx = \int \sec \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx = -\log \left| \sec \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right| = -\log |\csc x + \cot x| \quad \blacksquare$$

| | |
|---|---|
| $\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$ | $\int \sec^2 x \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$ |
| $\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$ | $\int \csc^2 x \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\cot x$ |
| $\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x$ | $\int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x$ |

〈proof〉 $\sin^2 x$ と $\tan^2 x$ のみ示す.

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}, \quad \int \tan^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x \quad \blacksquare$$

■ 逆三角関数

| | |
|--|---|
| $\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ | $\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$ |
| $\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$ | $\int \operatorname{arcsec} x \, dx = x \operatorname{arcsec} x + \log(x - \sqrt{x^2 - 1}) = x \operatorname{arcsec} x - \operatorname{arctanh} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$ |
| $\int \operatorname{arccsc} x \, dx = x \operatorname{arccsc} x + \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) = x \operatorname{arccsc} x + \operatorname{arccosh} x$ | $\int \operatorname{arccot} x \, dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$ |

〈proof〉 $\arcsin x$ のみ示す. 〈 $y = \arcsin x$ 〉として,

$$\int \arcsin x \, dx = \int y \cos y \, dy = y \sin y - \int \sin y \, dy = y \sin y + \cos y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \quad \blacksquare$$

■ 逆三角関数の導関数 ($a > 0$)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} = -\arccos \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

〈proof〉

[上] 途中で $\langle au = x \rangle$ とした.

$$\langle \arcsin u = y \rangle \Rightarrow \langle u = \sin y \rangle \text{ から } \frac{du}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - u^2} \therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$\left\{ \arcsin \frac{x}{a} \right\}' = \{ \arcsin u \}' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

[下] 途中で $\langle au = x \rangle$ とした.

$$\langle \arctan u = y \rangle \Rightarrow \langle u = \tan y \rangle \text{ から } \frac{du}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + u^2 \therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{1 + u^2}$$

$$\left\{ \arctan \frac{x}{a} \right\}' = \{ \arctan u \}' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1 + u^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x^2 + a^2} \quad \blacksquare$$

■ 双曲線関数の原始関数

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x \qquad \int \operatorname{sech} x \, dx = 2 \arctan e^x$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x \qquad \int \operatorname{csch} x \, dx = \log \left(\tanh \frac{x}{2} \right)$$

$$\int \tanh x \, dx = \log(\cosh x) \qquad \int \coth x \, dx = \log(\sinh x)$$

〈proof〉 $\operatorname{sech} x$ と $\operatorname{csch} x$ のみ示す.

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx = 2 \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = 2 \arctan e^x,$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{csch} x \, dx &= \int \frac{2}{e^x - e^{-x}} dx = 2 \int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx = \int \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx \\ &= \log \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| = \log \left| \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} \right| = \log \left(\tanh \frac{x}{2} \right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

■ 逆双曲線関数の導関数

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} = \log(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \quad (x \geq a > 0)$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{arctanh} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \log \left(\frac{x-a}{x+a} \right) \quad (a > 0)$$

〈proof〉

[上] 途中で $\langle au = x \rangle$ とした. [中] も同様.

$$\left\{ \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \right\}' = \left\{ \log \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1} \right) + \log a \right\}' = \frac{1 + \frac{2u}{2\sqrt{u^2 + 1}}}{u + \sqrt{u^2 + 1}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

[下] 途中で $\langle au = x \rangle$ とした.

$$\begin{aligned} \left\{ \operatorname{arctanh} \frac{x}{a} \right\}' &= \left\{ \operatorname{arctanh} u \right\}' = \frac{1}{2} \left\{ \log \left(\frac{1+u}{1-u} \right) \right\}' \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) = \frac{1}{a(1-u^2)} = \frac{a}{a^2 - x^2} \\ \therefore \left\{ -\frac{1}{a} \operatorname{arctanh} \frac{x}{a} \right\}' &= \left\{ -\frac{1}{2a} \log \left(\frac{\frac{x}{a} + 1}{\frac{x}{a} - 1} \right) \right\}' = \left\{ \frac{1}{2a} \log \left(\frac{x-a}{x+a} \right) \right\}' = \frac{1}{x^2 - a^2} \blacksquare \end{aligned}$$

■ 逆双曲線関数

$$\int \operatorname{arcsinh} x \, dx = \int \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \, dx = x \operatorname{arcsinh} x - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\int \operatorname{arccosh} x \, dx = \int \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \, dx = x \operatorname{arccosh} x - \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\int \operatorname{arctanh} x \, dx = \frac{1}{2} \int \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \, dx = x \operatorname{arctanh} x - \frac{1}{2} \log(1-x^2)$$

〈proof〉

[上] [中] も同様.

$$\langle \operatorname{arcsinh} x = y \rangle \implies x = \sinh y \quad \text{から} \quad \frac{dx}{dy} = \cosh y (= \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arcsinh} x \, dx &= \int y \frac{dx}{dy} \, dy = \int y \cosh y \, dy = y \sinh y - \int \sinh y \, dy \\ &= y \sinh y - \cosh y = x \operatorname{arcsinh} x - \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

[下]

$$\int 1 \cdot \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \, dx = x \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \int x \cdot \frac{2}{1-x^2} \, dx = 2x \operatorname{arctanh} x - \log(1-x^2) \blacksquare$$

■ 直角双曲線標準形・円標準形の方程式 ($a > 0$)

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} \{ x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \} = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} \right)$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \{ x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \} = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} \right)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right)$$

〈proof〉

[上] $\langle x = a \cosh t \rangle$ として, $\cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t$ から,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \int \sqrt{a^2 \cosh^2 t - a^2} \cdot a \sinh t dt = a^2 \int \sinh^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (\cosh 2t - 1) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \sinh 2t - t \right) + C = \frac{a^2}{2} (\sinh t \cosh t - \log(x + \sqrt{x^2 - a^2})) + C' \\ &= \frac{1}{2} \{ x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \} + C' \end{aligned}$$

[中] $\langle x = a \sinh t \rangle$ として, $\sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t$ から,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \int \sqrt{a^2 \sinh^2 t + a^2} \cdot a \cosh t dt = a^2 \int \cosh^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (\cosh 2t + 1) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \sinh 2t + t \right) + C = \frac{a^2}{2} (\sinh t \cosh t + \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})) + C' \\ &= \frac{1}{2} \{ x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \} + C' \end{aligned}$$

[下] $\langle x = a \sin \theta \rangle$ として, $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ から,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = a^2 \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{a^2}{2} \int (\cos 2\theta + 1) d\theta = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \right) \\ &= \frac{a^2}{2} (\sin \theta \cos \theta + \theta) = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) \blacksquare \end{aligned}$$

(cf.) § 部分積分では置換を使わない方法を紹介している.

■ 直角双曲線標準形の導関数 ($a > 0$)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2}$$

〈proof〉 右辺を微分して左辺を得る. ■

§ 5. 有理関数の積分

■ 部分分数分解

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} \right)$$

(e. g. 1)

$$\int \frac{1}{x^2(1-x)} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \log|x| - \frac{1}{x} - \log|1-x|$$

(e. g. 2) $I = \int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \\ &= \frac{A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (5A+4B+3C)x + (6A+3B+2C)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \end{aligned}$$

これは恒等式であるから, $\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+4B+3C=0 \\ 6A+3B+2C=1 \end{cases} \Leftrightarrow (A, B, C) = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2} \right)$

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{2} \log|x+1| - \log|x+2| + \frac{1}{2} \log|x+3| \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{|(x+1)(x+3)|}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

■ 分子の次数下げ

$D(x) \neq 0(x), N(x), Q(x), R(x)$ は多項式関数である. 次のように変形することができる.

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \quad \deg Q(x) < \deg D(x)$$

〈proof〉 除法の原理により,

$$\exists Q(x), R(x) : \{N(x) = Q(x)D(x) + R(x) \wedge \deg Q(x) < \deg D(x)\}$$

$$\therefore \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \quad \blacksquare$$

(e.g.)

$$\int \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x(x^2 + 1) + x}{x^2 + 1} dx = \int \left(x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$$

■ 一般論

実係数有理関数 $Q(x)$ の不定積分は初等関数（分数関数, \log , \arctan とそれらの合成）で表される.

$Q(x)$ の分子が分母より低次である場合（次数下げが施された状態）を考える. このとき多項式 $N(x), D(x)$ を用いて $Q(x)$ は次のように表せる. (註) $\deg f(x)$ は $f(x)$ の次数を表す.

$$Q(x) = \frac{N(x)}{D(x)}, \quad \deg N(x) < \deg D(x)$$

代数学の基本定理により, $D(x)$ を実数の範囲で因数分解して次のようにできる.

$$D(x) = x^k \prod_i (x + a_i)^{m_i} \prod_j (x^2 + 2b_j x + c_j)^{n_j}, \quad k, m_i, n_j \geq 0, \forall i: a_i \neq 0, \forall j: b_j^2 - c_j < 0$$

$Q(x)$ を部分分数分解して次のようにできる.

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{r_1}{x} + \cdots + \frac{r_k}{x^k} + \sum_i \left(\frac{p_{i,1}}{x + a_i} + \cdots + \frac{p_{i,m_i}}{(x + a_i)^{m_i}} \right) + \sum_j \left(\frac{q_{j,1}x + r_{j,1}}{(x + b_j)^2 + e_j^2} + \cdots + \frac{q_{j,n_j}x + r_{j,n_j}}{\{(x + b_j)^2 + e_j^2\}^{n_j}} \right) \\ &= \sum_{w=1}^k \frac{r_w}{x^w} + \sum_i \sum_{u=1}^{m_i} \frac{p_{i,u}}{(x + a_i)^u} + \sum_j \sum_{v=1}^{n_j} \frac{q_{j,v}x + r_{j,v}}{\{(x + b_j)^2 + e_j^2\}^v} \end{aligned}$$

各項を次を用いて積分しよう.

$$\begin{aligned} I_m(t) &= \int \frac{1}{(t+1)^m} dx = \begin{cases} \log|t+1| & (\text{if } m=1) \\ -\frac{1}{m-1} \frac{1}{(t+1)^{m-1}} & (\text{if } m>1) \end{cases} \\ J_n(t) &= \int \frac{t}{(t^2+1)^n} dt = \begin{cases} \frac{1}{2} \log(t^2+1) & (\text{if } n=1) \\ -\frac{1}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} & (\text{if } n>1) \end{cases} \\ K_n(t) &= \int \frac{1}{(t^2+1)^n} dt, K_n(t) = \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} K_{n-1}(t), K_1(t) = \int \frac{1}{t^2+1} dt = \arctan t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{p_{i,u}}{(x + a_i)^u} dx &= \frac{p_{i,u}}{a_i^u} \int \frac{1}{(a_i^{-1}x + 1)^u} dx = \frac{p_{i,u}}{a_i^{u-1}} I_u(a_i^{-1}x) \\ \int \frac{q_{j,v}x + r_{j,v}}{\{(x + b_j)^2 + e_j^2\}^v} dx &= \frac{q_{j,v}}{e_j^{2v}} \int \frac{x}{\{(e_j^{-1}x + e_j^{-1}b_j)^2 + 1\}^v} dx + \frac{r_{j,v}}{e_j^{2v}} \int \frac{1}{\{(e_j^{-1}x + e_j^{-1}b_j)^2 + 1\}^v} dx \\ &= \frac{q_{j,v}}{e_j^v} J_v(e_j^{-1}x + e_j^{-1}b_j) + \frac{r_{j,v}}{e_j^v} K_v(e_j^{-1}x + e_j^{-1}b_j) \end{aligned}$$

有理関数の積分結果は初等関数で表せることがいえた.

$$\begin{aligned} \int Q(x) dx &= r_1 \log|x| + \sum_{w=2}^k \frac{r_w}{(w-1)x^{w-1}} + \sum_i \sum_{u=1}^{m_i} \frac{p_{i,u}}{a_i^{u-1}} I_u\left(\frac{x}{a_i}\right) + \sum_j \sum_{v=1}^{n_j} \left\{ \frac{q_{j,v}}{e_j^v} J_v\left(\frac{x+b_j}{e_j}\right) + \frac{r_{j,v}}{e_j^v} K_v\left(\frac{x+b_j}{e_j}\right) \right\} \end{aligned}$$

(参考: 木村光一, 数学 微分方程式・複素整数 分野別標準問題精講, 旺文社)

$$(\text{e.g.}) \int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx$$

部分分数分解, 微分形の接触, $x = a \tan \theta$ 型の置換 を駆使する.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} dx$$

ここで,

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

とおくと,

$$(A, B, C) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{-x+2}{x^2-x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2-x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \log|x+1| - \frac{1}{6} \log|x^2-x+1| \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \left[\frac{1}{6} \log(x+1)^2 - \frac{1}{6} \log|x^2-x+1| \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \end{aligned}$$

$$\left\langle x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta \right\rangle \text{ と置換すると, } dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{6} \left[\log \frac{(x+1)^2}{|x^2-x+1|} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{7}{6}\pi} \frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2 \theta + 1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{6} \left[\log \frac{(x+1)^2}{|x^2-x+1|} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{7}{6}\pi} \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{6} \left[\log \frac{(x+1)^2}{|x^2-x+1|} \right]_0^1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{7}{6}\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{6} \left[\log \frac{(x+1)^2}{|x^2-x+1|} \right]_0^1 + \frac{\sqrt{3}}{3} [\theta]_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{7}{6}\pi} \\ &= \frac{1}{6} \left(\log \frac{4}{1} - \log \frac{1}{1} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{7}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi \right) \\ &= \frac{1}{3} \log 2 + \frac{\sqrt{3}}{9} \pi \end{aligned}$$

| x | $0 \rightarrow 1$ |
|---|--|
| $x - \frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ |
| $\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right)$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| θ | $\frac{5}{6}\pi \rightarrow \frac{7}{6}\pi$ |

§ 6. 部分積分

■ 定積分の部分積分

次のような変形を**部分積分**という

$G'(x) = g(x)$ であるとき,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$$

〈proof〉 $(f(x)G(x))' = f'(x)G(x) + f(x)g(x)$ (積の微分公式) の両辺を a から b まで x で積分すると,

$$\int_a^b (f(x)G(x))' dx = [f(x)G(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)G(x)dx + \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx \blacksquare$$

■ 不定積分の部分積分

$G'(x) = g(x)$ であるとき,

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$$

〈proof〉 上記の定積分の部分積分で b を変数にすることで得られる. (定数差を無視している.) ■

■ 瞬間部分積分 (USA 式部分積分, テーブル法)

ここでは次のような記法を採用する. (一般的ではない.) $n, m \in \mathbf{N}$ とする.

$$f^{(0)} := f, \quad f^{(1)} := \frac{d}{dx} f, \quad f^{(n)} := \frac{d}{dx} f^{(n-1)}, \quad f^{(-1)} := \int f dx, \quad f^{(-m)} := \int f^{(-m+1)} dx$$

(整式) \times (三角関数), (整式) \times (指数関数), (対数関数)ⁿ の積分計算に役立つことがある.

$$\int f^{(0)} g^{(0)} dx = f^{(0)} g^{(-1)} - f^{(1)} g^{(-2)} + f^{(2)} g^{(-3)} - f^{(3)} g^{(-4)} + \dots$$

(註) 見づらいため $f(x)$ を f と表している.

〈proof〉

$$\begin{aligned} \int f^{(0)} g^{(0)} dx &= f^{(0)} g^{(-1)} - \int f^{(1)} g^{(-1)} dx \\ &= f^{(0)} g^{(-1)} - f^{(1)} g^{(-2)} + \int f^{(2)} g^{(-2)} dx \\ &= f^{(0)} g^{(-1)} - f^{(1)} g^{(-2)} + f^{(2)} g^{(-3)} - \int f^{(3)} g^{(-3)} dx \\ &= f^{(0)} g^{(-1)} - f^{(1)} g^{(-2)} + f^{(2)} g^{(-3)} - f^{(3)} g^{(-4)} + \dots \blacksquare \end{aligned}$$

(e.g.)

$$\begin{aligned}\int x^4 e^{-x} dx &= x^4(-e^{-x}) - 4x^3 e^{-x} + 12x^2(-e^{-x}) - 24x e^{-x} + 24(-e^{-x}) \\ &= -e^{-x}(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24)\end{aligned}$$

■ $f(x) = 1 \cdot f(x)$ で部分積分

$$\int f(x) = x f(x) - \int x f'(x) dx$$

(e.g.)

$$\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - x$$

■ 同形出現

元の式と同じ形が出現したとき (**同形出現**) は、同じ文字で置いて整理する.

(e.g.) $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$ を示す.

$$\begin{aligned}I &= \int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \right) = e^x \cos x + e^x \sin x - I \\ \therefore 2I &= e^x \cos x + e^x \sin x, \quad I = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)\end{aligned}$$

(cf.) (指数関数) \times (三角関数)

(e.g.) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2 + a^2} - a^2 \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}))$ ($a > 0$) を示す.

§ 初等関数の原始関数では置換積分を用いたが、ここでは “ $f(x) = 1 \cdot f(x)$ で部分積分” を使う.

$$\begin{aligned}I &= \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \int 1 \cdot \sqrt{x^2 + a^2} dx = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \\ &= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \left(\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) dx = x \sqrt{x^2 + a^2} - a^2 \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - I \\ \therefore 2I &= x \sqrt{x^2 + a^2} - a^2 \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}), \quad I = \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2 + a^2} - a^2 \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}))\end{aligned}$$

(註) 途中で $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ ($a > 0$) を用いた.

§ 7. 三角関数に関する積分

■ (指数関数) × (三角関数)

教科書等では上述の同形出現により導出されることが多いが, より smooth な 2 解答を紹介する.

$$\begin{aligned}\int e^{\lambda x} \sin \omega x \, dx &= \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} e^{\lambda x} (\lambda \sin \omega x - \omega \cos \omega x) \\ \int e^{\lambda x} \cos \omega x \, dx &= \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} e^{\lambda x} (\lambda \cos \omega x + \omega \sin \omega x)\end{aligned}$$

〈proof 1〉 微分からの逆算

$$(e^{\lambda x} \sin \omega x)' = \lambda e^{\lambda x} \sin \omega x + \omega e^{\lambda x} \cos \omega x \quad \dots (A)$$

$$(e^{\lambda x} \cos \omega x)' = \lambda e^{\lambda x} \cos \omega x - \omega e^{\lambda x} \sin \omega x \quad \dots (B)$$

$\lambda(A) - \omega(B)$, $\omega(A) + \lambda(B)$ より,

$$\begin{aligned}(\lambda e^{\lambda x} \sin \omega x - \omega e^{\lambda x} \cos \omega x)' &= (\lambda^2 e^{\lambda x} \sin \omega x + \lambda \omega e^{\lambda x} \cos \omega x) - (\lambda \omega e^{\lambda x} \cos \omega x - \omega^2 e^{\lambda x} \sin \omega x) \\ &= (\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda x} \sin \omega x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\omega e^{\lambda x} \sin \omega x - \lambda e^{\lambda x} \cos \omega x)' &= (\lambda \omega e^{\lambda x} \sin \omega x + \omega^2 e^{\lambda x} \cos \omega x) + (\lambda^2 e^{\lambda x} \cos \omega x - \lambda \omega e^{\lambda x} \sin \omega x) \\ &= (\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda x} \cos \omega x\end{aligned}$$

各式 $(\lambda^2 + \omega^2)$ で両辺を割り, 積分して上式を得る.

$$(e^{ax} \sin bx)' = ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx \dots (1)$$

$$(e^{ax} \cos bx)' = ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx \dots (2) \quad \blacksquare$$

〈proof 2〉 複素指数関数の積分

(註) $z \in \mathbf{C}$ に対し, $\Re z$ は z の実部, $\Im z$ は z の虚部を表す.

(註) **Euler の公式**

$$e^{\alpha + \beta i} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

これを用いる.

$$\begin{aligned}\int e^{\lambda x} \cos \omega x \, dx &= \int \Re e^{(\lambda + i\omega)x} \, dx = \Re \int e^{(\lambda + i\omega)x} \, dx = \Re \left(\frac{1}{\lambda + i\omega} e^{(\lambda + i\omega)x} \right) \\ &= \Re \left(\frac{\lambda - i\omega}{\lambda^2 + \omega^2} e^{\lambda x} (\cos \omega x + i \sin \omega x) \right) = \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} e^{\lambda x} (\lambda \cos \omega x + \omega \sin \omega x) \\ \int e^{\lambda x} \sin \omega x \, dx &= \int \Im e^{(\lambda + i\omega)x} \, dx = \Im \int e^{(\lambda + i\omega)x} \, dx = \Im \left(\frac{1}{\lambda + i\omega} e^{(\lambda + i\omega)x} + C \right) \\ &= \Im \left(\frac{\lambda - i\omega}{\lambda^2 + \omega^2} e^{\lambda x} (\cos \omega x + i \sin \omega x) \right) = \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2} e^{\lambda x} (\lambda \sin \omega x - \omega \cos \omega x) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

■ $\sin mx \cos nx$ の定積分

$m, n \in \mathbf{Z}$ とする.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx &= \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= 0\end{aligned}$$

Fourier 解析に背景を持つ問題で登場する.

(註) $[-\pi, \pi]$ 上の連続関数 $f(x), g(x)$ の内積を次のように定義する.

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx$$

このとき内積が満たしてほしい性質 (双線型性, 対称性, 正値性) が積分の性質により満たされる.

$\langle f(x), g(x) \rangle = 0$ であるとき, $f(x)$ と $g(x)$ は**直交する**といい, $f(x) \perp g(x)$ とかく. 上の結果は三角関数 $\sin mx$ や $\cos nx$ の間の直交性を表している.

■ $\sin^m \theta \cos^n \theta$ の定積分

$m, n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して次が成立する.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} \theta \cos^{2n+1} \theta \, d\theta &= \frac{1}{2} \frac{m! n!}{(m+n+1)!} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} \theta \cos^{2n} \theta \, d\theta &= \frac{(2m-1)!! (2n-1)!!}{(m+n)! 2^{2m+2n-1}}\end{aligned}$$

(cf.) § Gamma 関数と Beta 関数を参照せよ.

(e.g.)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos^7 \theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2 \cdot 2+1} \theta \cos^{2 \cdot 3+1} \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{2! 3!}{6!} = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{120}$$

正攻法では, 微分形の接触を用いて,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos^7 \theta \, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 \cos^7 \theta \, d\theta = - \int_1^0 (1 - t^2)^2 t^7 \, dt \\ &= \int_0^1 (t^{11} - 2t^9 + t^7) \, dt = \frac{1}{12} - \frac{2}{10} + \frac{1}{8} = \frac{1}{120}\end{aligned}$$

§ 8. 置換積分

■ 定積分の置換積分

次のような積分計算を**置換積分**という.

$x = \varphi(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) と置換 (変数変換) する. $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$ とおくと,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \frac{d\varphi(t)}{dt} dt$$

(註) 本テキストではこの置換を $\langle x = \varphi(t) \rangle$ とかくことにする.

$\langle \text{proof} \rangle$ $F'(x) = f(x)$ とする.

$\varphi(t)$ を t の微分可能な関数として, $x = \varphi(t)$ とおくとき, 微分の連鎖律 (合成関数の微分) より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(\varphi(t)) &= f(\varphi(t)) \frac{d\varphi(t)}{dt} \\ \therefore \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} F(\varphi(t)) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \frac{d\varphi(t)}{dt} dt \quad \blacksquare \end{aligned}$$

■ 不定積分の置換積分

$x = \varphi(t)$ と置換する.

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \frac{d\varphi(t)}{dt} dt$$

$\langle \text{proof} \rangle$ 上記の定積分の置換積分において b を変数にすることで得られる. ■

実際の計算では, 「左辺→右辺」「右辺→左辺」の両方の変形を行うことになる.

■ $f(ax+b)$ の積分

a, b は定数とする. また $F'(x) = f(x)$ とする.

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$$

$\langle \text{proof} \rangle$ $\langle u = ax+b \rangle$ と置換すると, $\frac{dx}{du} = \frac{1}{a}$ であるから,

$$\int f(ax+b) dx = \int f(u) \frac{dx}{du} du = \frac{1}{a} \int f(u) du = \frac{1}{a} F(ax+b) \quad \blacksquare$$

■ 微分形の接触

次のような変形を**微分形の接触**ということがある． $\langle u = g(x) \rangle$ としての置換積分の結果に他ならない．

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

形式的には， $g'(x)dx = du$ ということを意味している．

《冪関数型》

$$\int \{f(x)\}^\alpha f'(x) dx = \frac{1}{\alpha+1} \{f(x)\}^{\alpha+1} \quad (\alpha \in \mathbf{R}, \alpha \neq -1)$$

(e.g.)

$$\int \sin^4 x \cos x \, dx = \frac{1}{5} \sin^5 x$$

《一次分数関数型》

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)|$$

(e.g.1)

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(-\sin x)}{\cos x} dx = \log|\cos x|$$

(e.g.2) (MIT Integration Bee 2020)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x-1} + \frac{\sum_{i=0}^{2018} (i+1)x^i}{\sum_{i=0}^{2019} x^i} dx &= \log|x-1| + \int \frac{1+2x+3x^2+\dots+x^{2018}}{1+x+x^2+\dots+x^{2019}} dx \\ &= \log|x-1| + \log|1+x+x^2+\dots+x^{2019}| \\ &= \log|x^{2020}-1| \end{aligned}$$

(e.g.3)

$$\begin{aligned} \int_e^{e^e} \frac{\log x \log \log x}{x} dx &= \int_1^e u \log u \, du \leftarrow \langle u = \log x \rangle \curvearrowright du = \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} u^2 \log u \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e u \, du = \left[\frac{1}{2} u^2 \log u \right]_1^e - \left[\frac{1}{4} u^2 \right]_1^e \\ &= \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 \right) + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

$$x \quad e \rightarrow e^e$$

$$u \quad 1 \rightarrow e$$

■ まるごと置換

$$\begin{aligned} & \langle \sqrt{ax+b} = t \rangle \text{ i.e. } \left\langle x = \frac{t^2-b}{a} \right\rangle \rightsquigarrow dx = \frac{2t}{a} dt \\ \text{一般に } & \left\langle \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \right\rangle \text{ i.e. } \left\langle \frac{ax+b}{cx+d} = t^n \right\rangle (ad-bc \neq 0, n \in \mathbf{N}) \text{ と置換するとよい} \end{aligned}$$

(e.g.) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{2x+1}} dx$

$$\langle \sqrt{2x+1} = t \rangle \text{ i.e. } \left\langle x = \frac{t^2-1}{2} \right\rangle, \quad dx = \frac{2t}{2} dt$$

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{2x+1}} dx = \int \frac{\frac{t^2-1}{2} + 1}{\frac{t^2-1}{2} \cdot t} \cdot \frac{2t}{2} dt = \frac{t^2+1}{t^2-1} dt = \int 1 + \frac{2}{t^2+1} dt = \int \left(1 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= t + \log|t-1| - \log|t+1| = t + \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right|$$

$$= \sqrt{2x+1} + \log \frac{|\sqrt{2x+1}-1|}{\sqrt{2x+1}+1}$$

■ $\langle x = \sin \theta \rangle$

$$\sqrt{a^2-x^2} \ (a>0) \rightarrow \langle x = a \sin \theta \rangle \rightsquigarrow dx = a \cos \theta d\theta, \quad \sqrt{a^2-x^2} = a|\cos \theta|$$

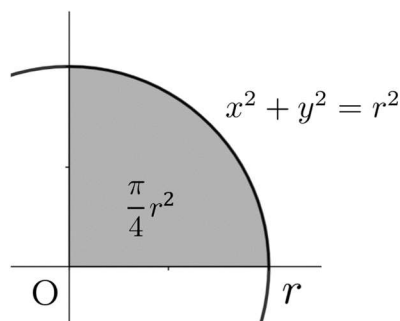
(e.g.) $I = \int_0^r \sqrt{r^2-x^2} dx \ (r>0)$

$$\langle x = r \sin \theta \rangle, \quad dx = r \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2-r^2 \sin^2 \theta} r \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 \theta d\theta \left(\because \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos \theta \geq 0 \right) \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta = \frac{r^2}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{r^2}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \sin 2 \cdot 0 + 0 \right) \right\} \\ &= \frac{r^2}{2} \left(0 + \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4} r^2 \end{aligned}$$

(註) I は半径 r の四分円の面積を表している。

$$\begin{array}{lcl} x : & 0 & \rightarrow r \\ \theta : & 0 & \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$



■ $\langle x = \tan \theta \rangle$

$$a^2 + x^2 \rightarrow \langle x = a \tan \theta \rangle \text{ で } dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad a^2 + a^2 \tan^2 \theta = a^2(1 + \tan^2 \theta) = \frac{a^2}{\cos^2 \theta}$$

(e.g.) $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx$ を求める.

$$\langle x = \tan \theta \rangle, \quad dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int d\theta = \theta = \arctan x$$

■ $\langle x = \sinh t \rangle$

$$a^2 + x^2 \rightarrow \langle x = a \sinh t \rangle \text{ で } dx = a \cosh t dt$$

$$a^2 + a^2 \sinh^2 t = a^2(1 + \sinh^2 t) = a^2 \cosh^2 t \quad (\because \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1)$$

(e.g.) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$ ($a > 0$) を求める.

$$\langle x = a \sinh t \rangle, \quad dx = a \cosh t dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 \sinh^2 t + a^2}} \cdot a \cosh t dt = \int \frac{1}{|a \cosh t|} \cdot a \cosh t dt = \int dt \quad (\because \forall t, a \cosh t > 0)$$

$$= t = \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} = \log \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} \right) = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \quad *$$

(註) 双曲線正弦関数の逆関数 $\operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$$\because y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

$$e^x > 0 \text{ より } \operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \blacksquare$$

(註) $\langle x = \cosh t \rangle$

$$x^2 - a^2 \rightarrow \langle x = a \cosh t \rangle \text{ で } dx = a \sinh t dt, \quad a^2 \cosh^2 t - a^2 = a^2(\cosh^2 t - 1) = a^2 \sinh^2 t$$

$$(\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1)$$

■ Weierstrass 置換

三角関数の有理式の積分は $\tan \frac{x}{2} = t$ と置換することによって必ず計算できる.

$$\left\langle \tan \frac{x}{2} = t \right\rangle \quad \text{で} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

この置換は **Weierstrass 置換** と呼ばれる.

$$\langle \text{proof} \rangle \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{2}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1-t^2} \quad \blacksquare$$

$$(\text{e.g.}) \quad I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$\left\langle \tan \frac{x}{2} = t \right\rangle, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 4 \int \frac{t}{\{2t + (1-t^2)\}(1+t^2)} dt \\ &= -4 \int \frac{t}{(t^2+1)(t-1+\sqrt{2})(t-1-\sqrt{2})} dt = -4 \int \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{t-1+\sqrt{2}} + \frac{D}{t-1-\sqrt{2}} dt \end{aligned}$$

$$(A, B, C, D) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$$

$$\begin{aligned} I &= \int \left\{ \frac{t+1}{t^2+1} - \frac{1}{2(t-1+\sqrt{2})} - \frac{1}{2(t-1-\sqrt{2})} \right\} dt \\ &= \int \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{2(t-1+\sqrt{2})} - \frac{1}{2(t-1-\sqrt{2})} \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \log(t^2+1) + \arctan t - \frac{1}{2} \log|t-1+\sqrt{2}| - \frac{1}{2} \log|t-1-\sqrt{2}| \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{t^2+1}{|(t-1+\sqrt{2})(t-1-\sqrt{2})|} + \arctan t \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{t^2+1}{|t^2-2t-1|} + \arctan t \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \log|\sin x + \cos x| \end{aligned}$$

■ **King Property** (対称性)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b \{f(x) + f(a+b-x)\} dx$$

〈proof〉 $a+b-x=u$ と置換すると, $-dx=du$

$$\int_a^b f(a+b-x) dx = \int_b^a f(u)(-du) = \int_a^b f(x) dx \blacksquare$$

(e.g.1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2} [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

(e.g.2) (MIT Integration Bee 2020)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(\sin x - x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{\sin(\sin x - x) + \sin(-\sin x - (2\pi - x))\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{\sin(\sin x - x) - \sin x(\sin x + (2\pi - x))\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{\sin(\sin x - x) - \sin x(\sin x - x + 2\pi)\} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \{\sin(\sin x - x) - \sin x(\sin x - x)\} dx = \int_0^{2\pi} 0 dx = 0 \end{aligned}$$

(e.g.3)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + (\sin x)^{\cos x}} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{1 + (\sin x)^{\cos x}} + \frac{1}{1 + (\sin(\pi - x))^{\cos(\pi - x)}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{1 + (\sin x)^{\cos x}} + \frac{1}{1 + (\sin x)^{-\cos x}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{1 + (\sin x)^{\cos x}} + \frac{(\sin x)^{\cos x}}{\{1 + (\sin x)^{-\cos x}\}(\sin x)^{\cos x}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 + (\sin x)^{\cos x}}{1 + (\sin x)^{\cos x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(e.g.4)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\sin^2 \pi x}{1 + e^x} dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{\sin^2 \pi x}{1 + e^x} + \frac{\sin^2 \pi x}{1 + e^{-x}} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{\sin^2 \pi x}{1 + e^x} + \frac{e^x \sin^2 \pi x}{(1 + e^{-x})e^x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(1 + e^x) \sin^2 \pi x}{1 + e^x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sin^2 \pi x dx = \int_0^1 \sin^2 \pi x dx = \frac{1 - \cos 2x}{2} \end{aligned}$$

§ 9. 逆関数の積分

逆関数の定積分 → 関数グラフの面積を考える.

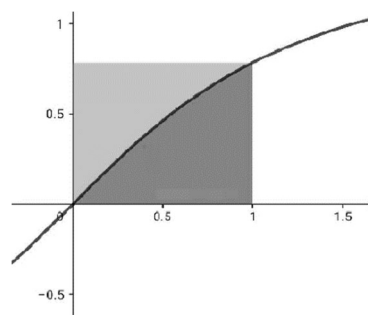
(e. g.) $\int_0^1 \arctan x \, dx$

〈解 1〉 原始関数を使う.

$$\begin{aligned} \langle y = \arctan x \rangle \text{ i. e. } \langle \tan y = x \rangle \text{ で } \frac{1}{\cos^2 y} dy = dx \\ \int_0^1 \arctan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{y}{\cos^2 y} dy = [y \tan y]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan y \, dy \\ = \frac{\pi}{4} - [-\log|\cos y|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

〈解 2〉 与えられた積分は右図濃い色の部分の面積を表す.

$$\int_0^1 \arctan x \, dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan y \, dy = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$$



一般化すると次のようになる.

$$\int_a^b f^{-1}(x) \, dx = b f^{-1}(b) - a f^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(y) \, dy$$

〈proof〉

$$\int_a^b f^{-1}(x) \, dx = \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} y \frac{df(y)}{dy} dy = [y f(y)]_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(y) \, dy = b f^{-1}(b) - a f^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(y) \, dy \blacksquare$$

■ 積分形の Yaung の不等式

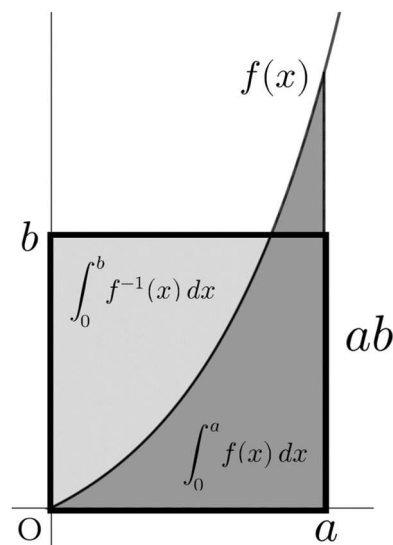
$f(0) = 0, f'(x) > 0 (x > 0)$ を満たすとする.

$$\int_0^a f(x) \, dx + \int_0^b f^{-1}(x) \, dx \geq ab$$

(等号成立は $f(a) = b$ のときのみ)

これを**積分形の Yaung の不等式**という. 右図を見ることによって成立を確認されたい.

(cf.) Yaung の不等式



§ 10. 積分漸化式

■ 不定積分の漸化式

数を並べたものを数列というように、関数を並べたものを**関数列**といい、 $\{f_n(x)\}$ のように表す.

(註) 関数 $f(x)$ に対し、 $\{f(x)\}^0 = 1$ とする. ($\exists x : f(x) = 0$ でもかまわない.)

$$(1) S_n(x) = \int \sin^n x \, dx \quad (n \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

$$S_n(x) = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} S_{n-2}(x), \quad S_0(x) = x, \quad S_1(x) = -\cos x$$

$$\begin{aligned} \langle \text{proof} \rangle \quad S_n(x) &= \int \sin^{n-1} x \sin x \, dx = \sin^{n-1} x (-\cos x) + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \left(\int \sin^{n-2} x \, dx - \int \sin^n x \, dx \right) \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(S_{n-2}(x) - S_n(x)), \quad \text{整理して上を得る.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$(2) C_n(x) = \int \cos^n x \, dx \quad (n \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

$$C_n(x) = -\frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} C_{n-2}(x), \quad C_0(x) = x, \quad C_1(x) = -\cos x$$

$\langle \text{proof} \rangle$ $\sin^n x$ と同様. \blacksquare

$$(3) T_n(x) = \int \tan^n x \, dx \quad (n \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

$$T_n(x) = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - T_{n-2}(x), \quad T_0(x) = x, \quad T_1(x) = -\log|\cos x|$$

$$\begin{aligned} \langle \text{proof} \rangle \quad T_n(x) &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x \, dx = \int \tan^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x (\tan x)' dx - \int \tan^{n-2} x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - T_{n-2}(x) \end{aligned}$$

整理して上を得る. \blacksquare

一般項は,

$$T_n(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \frac{\tan^{2i} x}{2i} + (-1)^{k+1} \log|\cos x| & (\text{if } n = 2k - 1) \\ \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \frac{\tan^{2i-1} x}{2i-1} + (-1)^k x & (\text{if } n = 2k) \end{cases}$$

$$(4) L_n(x) = \int (\log x)^n dx \quad (n \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

$$L_n(x) = x(\log x)^n - nL_{n-1}, \quad L_0(x) = x, \quad L_1(x) = x \log x - x$$

$$\langle \text{proof} \rangle L_n(x) = \int 1 \cdot (\log x)^n dx = x(\log x)^n - n \int x(\log x)^{n-1} \frac{1}{x} dx = x(\log x)^n - nL_{n-1}(x)$$

整理して上を得る. ■

一般項は,

$$L_n(x) = x \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!} (\log x)^{n-i}$$

$$(5) K_n(x) = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx \quad (n \in \mathbf{Z}_{\geq 1})$$

$$K_n(x) = \frac{x}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} K_{n-1}(x), \quad K_1(x) = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x$$

$$\begin{aligned} \langle \text{proof} \rangle K_{n-1}(x) &= \int 1 \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)^{n-1}} dx = \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + (n-1) \int \frac{2x^2}{(x^2 + 1)^n} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{(x^2 + 1) - 1}{(x^2 + 1)^n} dx = \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + 2(n-1)(K_{n-1} - K_n) \end{aligned}$$

整理して上を得る. ■

(cf.) § 有理関数の積分

■ 定積分の漸化式

$$(1) S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad (n \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

$$\therefore S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}, \quad S_0 = \frac{\pi}{2}, \quad S_1 = 1$$

$$\begin{aligned} \langle \text{proof} \rangle \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \, dx &= [\sin^{n-1} x (-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= [\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= (1 \cdot 0 - 0 \cdot 1) + (n-1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \right) \\ &= (n-1)(S_{n-2} - S_n) = (n-1)S_{n-2} - nS_n + S_n \end{aligned}$$

$$(\text{註}) \quad C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \quad \text{とおくと,} \quad \{S_n\} = \{C_n\} \quad (n \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad (\because \text{King Property}) \quad \blacksquare$$

$$(2) T_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx \quad (n \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

$$T_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - T_{n-2}, \quad T_0 = \frac{\pi}{4}, \quad T_1 = \frac{1}{2} \log 2$$

$$\begin{aligned} \langle \text{proof} \rangle \quad T_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \tan^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x (\tan x)' \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - T_{n-2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$(3) L_n = \int_1^e (\log x)^n \, dx \quad (n \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

$$L_n = e - nL_{n-1}, \quad L_0 = e - 1$$

$$\begin{aligned} \langle \text{proof} \rangle \quad L_n &= \int_1^e 1 \cdot (\log x)^n \, dx = [x(\log x)^n]_1^e - n \int_1^e x (\log x)^{n-1} \frac{1}{x} \, dx \\ &= e - n \int_1^e (\log x)^{n-1} \, dx = e - nL_{n-1} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

§ 11. Wallis 積分

前の § で扱った $S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ ($n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$) について考える.

$$S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2} \quad (n \in \mathbf{Z}_{\geq 2}), \quad S_0 = \frac{\pi}{2}, \quad S_1 = 1$$

これを **Wallis 積分** という.

この漸化式は (階差型ならぬ) 階比型であるから簡単に解ける. 奇数と偶数のときで場合分けする.

$$S_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$S_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$n \in \mathbf{N}$ に対し, **二重階乗** $n!!$ とは,

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4) \cdots 4 \cdot 2 & (\text{if } n \in 2\mathbf{N}) \\ n(n-2)(n-4) \cdots 3 \cdot 1 & (\text{if } n \in 2\mathbf{N}-1) \end{cases}$$

二重階乗に関する以下の等式も確認せよ.

$$(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4) \cdots 4 \cdot 2 = 2^n n!$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

■ Wallis の公式

次の公式を **Wallis の公式** という.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}}_{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!}}_{(2)} = \sqrt{\pi}$$

〈proof〉 $0 \leq \sin x \leq 1$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) より, $\sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x \leq \sin^{2n-2} x$, $\therefore S_{2n} \leq S_{2n-1} \leq S_{2n-2}$

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \leq \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2n(2n-1)!!}{(2n-1)(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \therefore \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!! (2n-2)!!}{\{(2n-1)!!\}^2} \leq \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

挟撃ちの定理により,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!! (2n-2)!!}{\{(2n-1)!!\}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \frac{\{(2n)!!\}^2}{\{(2n-1)!!\}^2} \rightarrow (1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{2n \left\{ \frac{(2n)!}{2^n n!} \right\}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \right)^2 \rightarrow (2) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

次の無限積を **Wallis 積** という.

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots$$

$$\begin{aligned} \langle \text{proof} \rangle \quad \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \frac{\{(2n)!!\}^2}{\{(2n-1)!!\}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{(2n)^2}{(2n+1)(2n-1)} \cdot \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n-3)} \cdots \frac{4^2}{5 \cdot 3} \cdot \frac{2^2}{3 \cdot 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

■ Stirling の公式

次の極限を **Stirling の公式** という.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n} \right)^n = \sqrt{2\pi}$$

(証明略)

Stirling の公式により階乗を滑らかな関数で近似することができる. 充分大きな $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

§ 12. 広義積分

■ 有界区間の端点で発散する関数の積分

(1) 片方の端点で発散する関数の積分

$f(x)$ は $[a, b)$ 上で定義されている連続関数とする.

$$\lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta f(x) dx$$

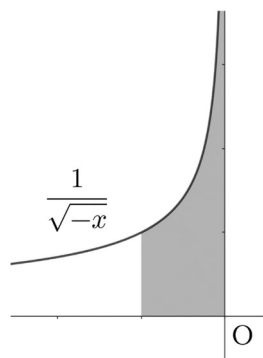
が有限値に収束するとき $[a, b)$ 上の**広義積分**を次で定義する.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta f(x) dx$$

(註) $(a, b]$ 上の広義積分も同様に定義する.

(e. g.) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}} dx$ の被積分関数は $x \rightarrow -0$ のとき発散する.

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}} dx = \lim_{\beta \rightarrow -0} \int_{-1}^\beta \frac{1}{\sqrt{-x}} dx = -2 \lim_{\beta \rightarrow -0} [\sqrt{-x}]_{-1}^\beta = -2 \lim_{\beta \rightarrow -0} \sqrt{-\beta} + 2 = 2$$



(2) 両端点で発散する関数の積分

$f(x)$ は (a, b) 上で定義されている連続関数とする. ある $\xi \in (a, b)$ が存在して,

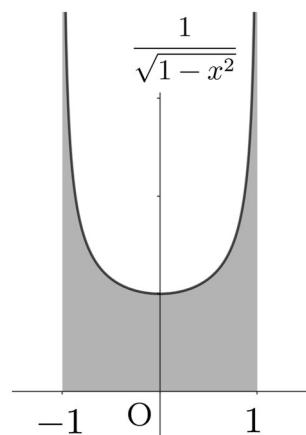
$$\lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_\alpha^\xi f(x) dx, \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_\xi^\beta f(x) dx$$

がそれぞれ有限値に収束するとき, (a, b) 上の**広義積分**を次で定義する.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_\alpha^\xi f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_\xi^\beta f(x) dx$$

(e. g.) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ の被積分関数は $x \rightarrow \pm 1$ のときに発散する.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow -1} \int_\alpha^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \lim_{\beta \rightarrow 1} \int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -1} [\arcsin x]_\alpha^0 + \lim_{\beta \rightarrow 1} [\arcsin x]_0^\beta \\ &= -\lim_{\alpha \rightarrow -1} \arcsin \alpha + \lim_{\beta \rightarrow 1} \arcsin \beta = \pi \end{aligned}$$



■ 非有界区間上の積分

(1) 半無限区間上の積分

$f(x)$ は $[a, \infty)$ 上で定義されている連続関数とする.

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta f(x) dx$$

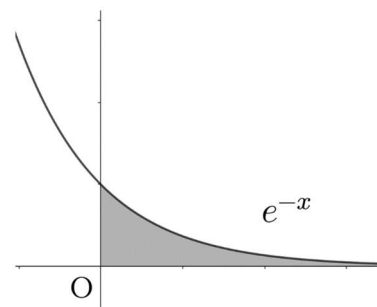
が有限値に収束するとき $[a, \infty)$ 上の広義積分を次で定義する.

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta f(x) dx$$

(註) $(-\infty, b]$ 上の広義積分も同様に定義する.

(e. g.) $\int_0^\infty e^{-x} dx$ は非有界区間 $[0, \infty)$ 上の積分.

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^\beta e^{-x} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^\beta = e^0 - \lim_{\beta \rightarrow +\infty} e^{-\beta} = 1$$



(2) 全区間 \mathbf{R} 上の積分

$f(x)$ は \mathbf{R} 上で定義されている連続関数とする. ある $\xi \in (a, b)$ が存在して,

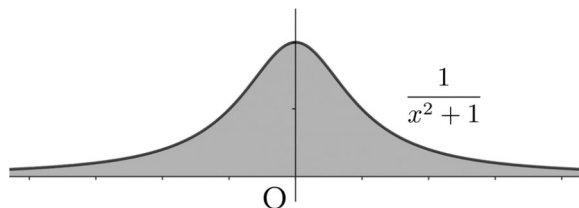
$$\lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_\alpha^\xi f(x) dx, \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_\xi^\beta f(x) dx$$

がそれぞれ有限値に収束するとき, \mathbf{R} 上の広義積分を次で定義する.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_\alpha^\xi f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \int_\xi^\beta f(x) dx$$

(e. g.) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx$ は非有界区間 $\mathbf{R} = [-\infty, \infty)$ 上の積分.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_\alpha^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^\beta \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} [\arctan x]_\alpha^0 + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^\beta \\ &= -\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \arctan \alpha + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \arctan \beta = \pi \end{aligned}$$



§ 13. Gamma 関数と Beta 関数

■ Gamma 関数

$n \in \mathbf{N}$ について定義された階乗 $n!$ の定義域を正の実数全体まで拡張しよう.

次の広義積分で定義される関数を **Gamma 関数** という. (第 2 種 Euler 積分ともいう.)

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds \quad (x > 0)$$

(註) Gamma 関数の収束を示す. (単調収束定理, Tayler 展開の知識を要求する.)

被積分関数が非有界である部分と積分区間が非有界の部分に分ける. x を定数扱いすることに注意.

$$\int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds = \underbrace{\int_0^1 s^{x-1} e^{-s} ds}_I + \underbrace{\int_1^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds}_J$$

$$\alpha \in (0, 1) \text{ とすると, } I_{\alpha} := \int_{\alpha}^1 s^{x-1} e^{-s} ds < \int_{\alpha}^1 s^{x-1} ds = \left[\frac{1}{x} s^x \right]_{\alpha}^1 = \frac{1}{x} (1 - \alpha^x) < \frac{1}{x}$$

I_{α} は α に関して単調かつ有界であるから単調収束定理により, 広義積分 $I = \lim_{\alpha \rightarrow +0} I_{\alpha}$ は収束する.

$m > x$ なる $m \in \mathbf{N}$ をとる. $e^s = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \cdots > \frac{s^m}{m!}$ ($s > 0$) であるから,

$$\beta > 1 \text{ とすると, } J_{\beta} := \int_1^{\beta} s^{x-1} e^{-s} ds < \int_1^{\beta} \frac{m!}{s^{m-x+1}} ds = -\frac{m!}{m-x} \left[\frac{1}{s^{m-x}} \right]_1^{\beta} = \frac{m!}{m-x} \left(1 - \frac{1}{\beta^{m-x}} \right) < \frac{m!}{m-x}$$

J_{β} は β に関して単調かつ有界であるから単調収束定理により, 広義積分 $J = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} J_{\beta}$ は収束する. ■

《重要性質》

次の性質から Gamma 関数は階乗の一般化になっていることがわかる.

$$(G1) \quad \Gamma(1) = 1$$

$$(G2) \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$(G3) \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad (n \in \mathbf{N})$$

〈proof〉

$$(G1) \quad \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-s} ds = 1 \quad (\text{cf. } \S \text{ 広義積分})$$

$$(G2) \quad \Gamma(x+1) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} s^x e^{-s} ds = -\lim_{\beta \rightarrow +\infty} [s^x e^{-s}]_0^{\beta} + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} x \int_0^{\beta} s^{x-1} e^{-s} ds = x \int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds = x\Gamma(x)$$

(註) 途中で $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} [s^x e^{-s}]_0^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\beta^x}{e^{\beta}} = 0$ を用いた.

(G3) $n \in \mathbf{N}$ とする. (G2) を繰り返し用いれば,

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)! \quad \blacksquare$$

(註) $\Gamma(n) = n!$ ではないことに注意されたい.

$$(G4) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$(G5) \quad \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2m-1)!!}{2^{2m-1}} \sqrt{\pi} \quad (m \in \mathbf{N})$$

〈proof〉

(G4) $\langle s = t^2 \rangle$ と置換すると, $ds = 2t \, dt$ であり, $s: 0 \rightarrow \infty$ のとき, $t: 0 \rightarrow \infty$ であるから,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} e^{-s} ds = \int_0^\infty t^{-1} e^{-t^2} \cdot 2t \, dt = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

(註) 最後に Gauss 積分を用いた. (cf.) Gauss 積分

$$(G5) \quad \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \left(m - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right) = \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2m-1}{2} \cdot \frac{2m-3}{2} \cdots \frac{2m-(2m-1)}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{(2m-1)!!}{2^{2m-1}} \sqrt{\pi} \quad \blacksquare$$

$$(e.g.) \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{15}{8} \sqrt{\pi}$$

■ Beta 関数

$x, y > 0$ に対し定義される次の 2 変数関数を **Beta 関数** という. (第 1 種 Euler 積分とも呼ばれる.)

$$B(x, y) = \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^{y-1} ds$$

(註) Beta 関数の収束を示す. 積分区間を分割して考える. x, y を定数扱いすることに注意.

$$\int_0^1 s^{x-1} (1-s)^{y-1} ds = \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} s^{x-1} (1-s)^{y-1} ds}_I + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 s^{x-1} (1-s)^{y-1} ds}_J$$

$M = \max \left\{ \frac{1}{2^{y-1}}, 1 \right\}$ とおくと, $s^{x-1} (1-s)^{y-1} \leq M s^{x-1} \left(\frac{1}{2} < s < 1 \right)$ であるから,

$$\alpha \in (0, 1) \text{ とすると, } I_\alpha = \int_\alpha^{\frac{1}{2}} s^{x-1} (1-s)^{y-1} ds \leq M \int_\alpha^{\frac{1}{2}} s^{x-1} ds = M \left[\frac{1}{x} s^x \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{M}{x 2^x} < \infty$$

よって広義積分 $I = \lim_{\alpha \rightarrow +0} I_\alpha$ は収束する. 同様に J も収束する. \blacksquare

《重要性質》

Beta 関数に関して次が成り立つ.

$$(B1) \quad B(x, y) = B(y, x)$$

$$(B2) \quad xB(x, y+1) = yB(x+1, y)$$

$$(B3) \quad B(x, y) = B(x+1, y) + B(x, y+1)$$

$$(B4) \quad (x+y)B(x+1, y) = xB(x, y)$$

〈proof〉

$$(B1) \quad B(x, y) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1} ds = \int_1^0 (1-t)^{x-1}t^{y-1} (-dt) = \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1} ds = B(y, x)$$

$$\begin{aligned} (B2) \quad xB(x, y+1) &= \int_0^1 xs^{x-1}(1-s)^y ds = [s^x(1-s)^y]_0^1 + \int_0^1 s^x y(1-s)^{y-1} ds \\ &= y \int_0^1 s^x(1-s)^{y-1} ds = yB(x+1, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B3) \quad B(x+1, y) + B(x, y+1) &= \int_0^1 s^x(1-s)^{y-1} ds + \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^y ds \\ &= \{s + (1-s)\} \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1} ds = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1} ds = B(x, y) \end{aligned}$$

$$(B4) \quad (x+y)B(x+1, y) = xB(x+1, y) + yB(x+1, y) = xB(x+1, y) + xB(x, y+1) = xB(x, y) \quad \blacksquare$$

■ Gamma 関数と Beta 関数との関係式

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

〈proof〉 (重積分の変数変換の知識を要求する.)

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}ds \int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty \int_0^\infty s^{x-1}t^{y-1}e^{-(s+t)}ds dt$$

$(s, t) = \Phi(u, v) = (uv, u(1-v))$ と置換すると,

$$|J\Phi(u, v)| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix} \right| = u$$

$\Phi^{-1}((0, \infty) \times (0, \infty)) = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < uv, 0 < u(1-v)\} = (0, \infty) \times (0, 1)$ であるから,

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty s^{x-1}t^{y-1}e^{-(s+t)}ds dt = \int_0^1 \int_0^\infty u^{x-1}v^{x-1}u^{y-1}(1-v)^{y-1}e^{-u}u du dv \\ &= \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1} dv \int_0^\infty u^{x+y-1}e^{-u} du = B(x, y)\Gamma(x+y) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(cf.) § 二重積分

《三角関数の積分》

$x, y > 0$ に対して次が成立する.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

定義式において, $t = \sin^2 \theta$ と置換すると, $dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(x-1)} \theta (1 - \sin^2 \theta)^{y-1} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta \blacksquare \end{aligned}$$

$$t : 0 \rightarrow 1$$

$$\theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

特に指数が整数のときを考える. $m, n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して次が成立する.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} \theta \cos^{2n+1} \theta d\theta &= \frac{1}{2} \frac{m! n!}{(m+n+1)!} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} \theta \cos^{2n} \theta d\theta &= \frac{(2m-1)!! (2n-1)!!}{(m+n)! 2^{2m+2n-1}} \end{aligned}$$

$$(e.g. 1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos^7 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2 \cdot 3-1} \theta \cos^{2 \cdot 4-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(3, 4) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{1}{2} \frac{2! 3!}{6!} = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{120}$$

$$(e.g. 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^5 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2 \cdot \frac{5}{2}-1} \theta \cos^{2 \cdot 3-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, 3\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot 2!}{\frac{13}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{1}{\frac{13}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{32}{45045}$$

《Beta 関数の積分公式》

次の式は **Beta 関数の積分公式** と呼ばれ, 1/6 公式の一般化 になっている.

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta-x)^n dx = \frac{m! n!}{(m+n+1)!} (\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

$\langle x - \alpha = t \rangle$, $\langle t = (\beta - \alpha)s \rangle$ と 2 回置換すると,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta-x)^n dx &= \int_0^{\beta-\alpha} t^m (\beta-\alpha-t)^n dt = (\beta-\alpha)^{m+n+1} \int_0^1 s^m (1-s)^n ds \\ &= (\beta-\alpha)^{m+n+1} B(m+1, n+1) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)} (\beta-\alpha)^{m+n+1} \\ &= \frac{m! n!}{(m+n+1)!} (\beta-\alpha)^{m+n+1} \blacksquare \end{aligned}$$

(註) 部分積分を帰納的に用いて初等的にも示せる.

§ 14. 面積

■ 1/6 公式とその仲間

《1/6 公式》

次の式は **1/6 公式** と呼ばれる.

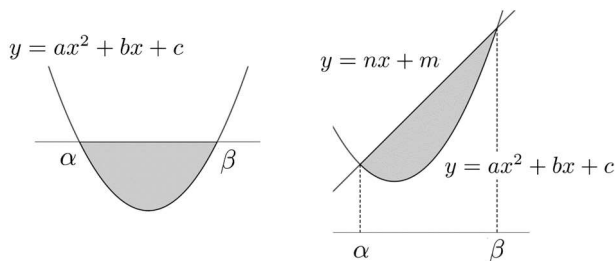
$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

〈proof〉

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)\{(x - \alpha) - (\beta - \alpha)\} dx = \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(x - \alpha)^2 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \blacksquare \end{aligned}$$

右のような部分の面積を求めるのに有効である.

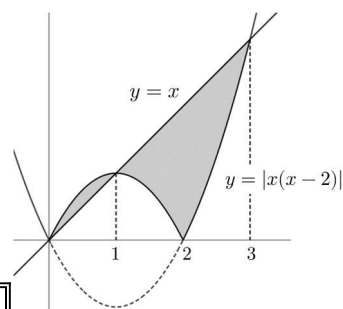
(註) 面積は二次関数の二次の項の係数倍される.



工夫することで適用先は広い.

(e.g.) 曲線 $y = |x(x - 2)|$ と直線 $y = x$ が囲む部分の面積 S を求める.

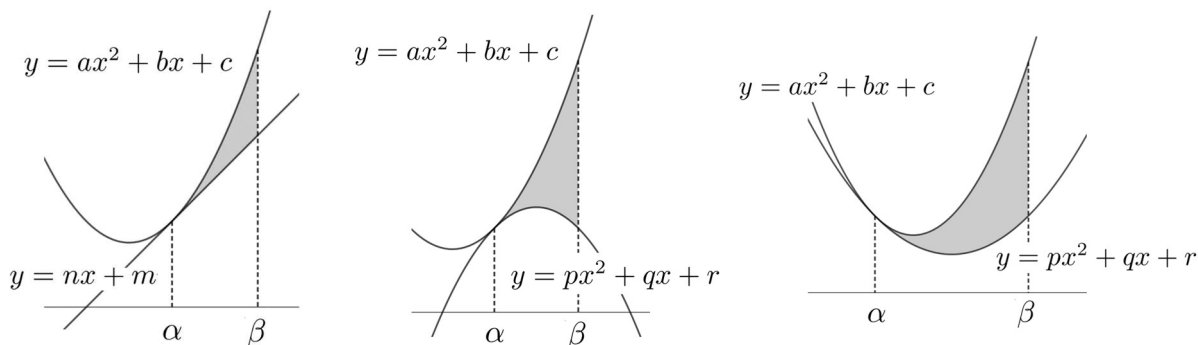
$$\begin{aligned} S &= \left\{ -\int_0^3 x(x - 3) dx \right\} - 2 \left\{ -\int_0^2 x(x - 2) dx \right\} + 2 \left\{ -\int_0^1 x(x - 1) dx \right\} \\ &= \frac{3^3}{6} - 2 \cdot \frac{2^3}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{13}{6} \end{aligned}$$



《1/3 公式》

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 dx = \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3$$

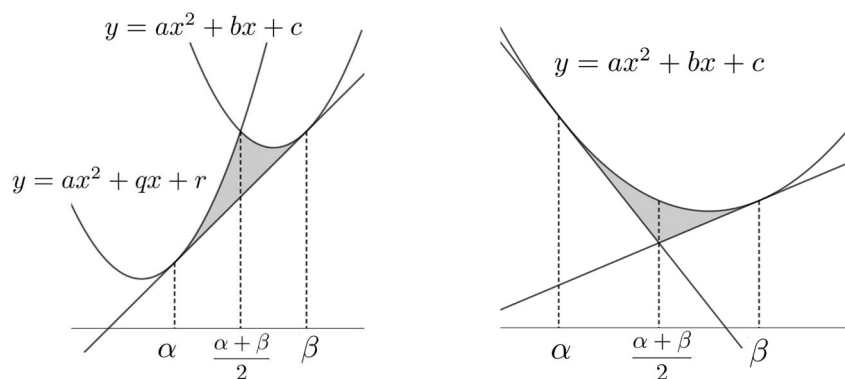
一瞬にして導ける. 以下のような部分の面積を求める場合に有効である. 全て本質的には同じである.



《1/12 公式 I》

$$\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)^2 dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x-\beta)^2 dx = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$$

以下のような部分の面積を求める場合に有効である．どちらもは本質的に同じものである．



接線を共有する2つの放物線の交点の x 座標は2つの接点の x 座標の平均となる．また，1つの放物線に接する2つの接線の交点の x 座標は2つの接点の x 座標の平均となる．

《1/12 公式 II》

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2(x-\beta) dx = -\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

〈proof〉

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2(x-\beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2\{(x-\alpha) - (\beta-\alpha)\} dx = \left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4 - \frac{1}{3}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= -\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \blacksquare \end{aligned}$$

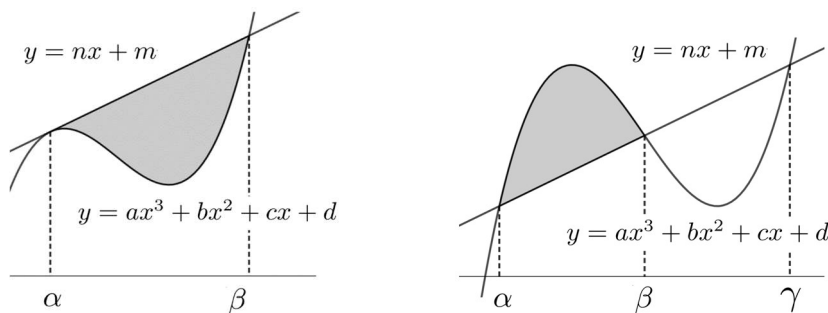
α で接点になっていない場合を考える．

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) dx = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3(2\gamma-\beta-\alpha)$$

〈proof〉 $\alpha < \beta < \gamma$ を満たす $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ に対し，

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\beta-\alpha)^3} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) dx &= \frac{1}{(\beta-\alpha)^3} \int_0^{\beta-\alpha} x(x-(\beta-\alpha))(x-(\gamma-\alpha)) dx \\ &= \frac{1}{(\beta-\alpha)^3} \int_0^{\beta-\alpha} x^2(x-(\beta-\alpha)) dx + \frac{\gamma-\alpha}{(\beta-\alpha)^3} \int_0^{\beta-\alpha} x(x-(\beta-\alpha)) dx \\ &= \frac{1}{(\beta-\alpha)^3} \cdot \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 - \frac{\gamma-\alpha}{(\beta-\alpha)^3} \cdot \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{12}((\beta-\alpha) - 2(\gamma-\alpha)) = \frac{\beta+\alpha-2\gamma}{12} \blacksquare \end{aligned}$$

以下のような部分の面積を求める場合に有効である.



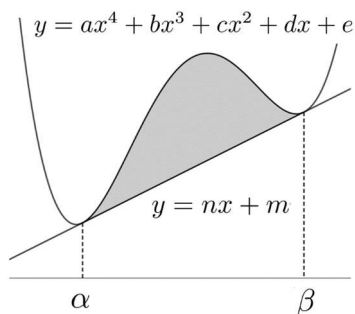
《1/30 公式》

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 (x - \beta)^2 dx = \frac{1}{30} (\beta - \alpha)^5$$

〈proof〉

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 (x - \beta)^2 dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 \{(x - \alpha) - (\beta - \alpha)\}^2 dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x - \alpha)^4 - 2(\beta - \alpha)(x - \alpha)^3 + (\beta - \alpha)^2(x - \alpha)^2\} dx \\ &= \left[\frac{1}{5}(x - \alpha)^5 - \frac{2}{4}(\beta - \alpha)(x - \alpha)^4 + \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^2(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{30} (\beta - \alpha)^5 \blacksquare \end{aligned}$$

以下のような部分の面積を求める場合に有効である.



《一般的な公式 (Beta 関数の積分公式)》

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m! n!}{(m + n + 1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

(cf.) Beta 関数の § に詳しい.

■ 極座標やパラメタで表示された領域の面積

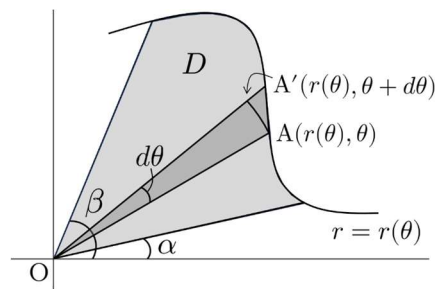
曲線 $r = r(\theta)$, 2 直線 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ で囲まれる領域 D の面積を S とする.

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^2 d\theta$$

〈proof〉 微小角度 $d\theta$ に対する微小面積変化は中心角 $d\theta$ の微小扇形 $O - \widehat{AA'}$ に近似できるので,

$$dS = \frac{1}{2} r(\theta)^2 d\theta$$

これを α から β まで積分して S を得る. ■



《Gauss-Green の定理》

曲線 $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ において, $a \leq t \leq b$ で t の増加に伴い $P(x(t), y(t))$ が原点中心反時計回りに動く

とき, 動径 OP が掃く領域の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt$$

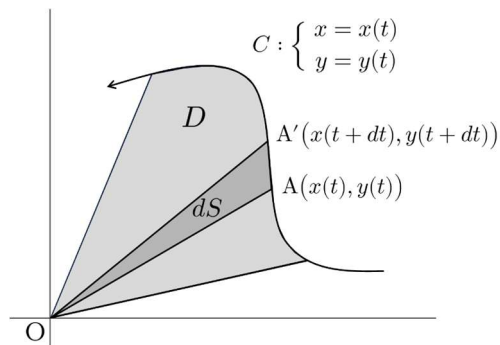
(註) $\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt}$

これを **Gauss-Green の定理** という.

〈proof〉 微小変化 dt に対する微小面積変化は 3 点 $O(0,0), A(x(t), y(t)), A'(x(t+dt), y(t+dt))$ を結んで得られる微小三角形に近似できるので,

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{2} \{x(t)y(t+dt) - x(t+dt)y(t)\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ x(t) \frac{y(t+dt) - y(t)}{dt} - \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} y(t) \right\} dt = \frac{1}{2} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt \end{aligned}$$

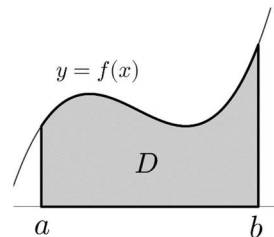
これを a から b まで積分して S を得る. ■



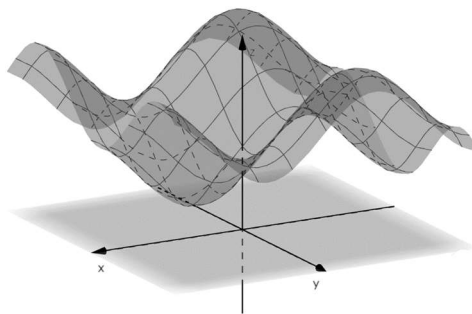
(註) $C: \begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta \\ y = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$ とすれば, $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^2 d\theta$ となる.

§ 15. 二重積分

1 変数関数の定積分はある有界閉区間上の関数グラフと x 軸の間の面積を表しているのであった。



ここでは 2 変数関数を有界閉領域上で積分することを考える（閉領域は境界を含む領域）。2 変数関数 $z = f(x, y)$ の関数グラフは 3 次元空間内の曲面となる（右図）。有界閉領域上の曲面と xy 平面の間の体積がここで計算したい**二重積分**である。



■ 矩形領域上での積分

二変数関数 $f(x, y)$ を矩形（長方形）領域

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$$

上で積分することを考える。求めたい積分は立体図形

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in D\}$$

の体積である。多変数の問題を考えるときは 1 つずつ変数を動かすことが基本となる。 $y_0 \in (y_1, y_2)$ で y を固定すると $f(x, y_0)$ は x の 1 変数関数である。 K を平面 $y = y_0$ で切断した断面積 $S(y_0)$ は

$$S(y_0) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_0) dx$$

である。 K の体積は $S(y)$ を y 軸に沿って積分したものであるから、

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy$$

$$(\text{註}) \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy := \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx \right\} dy$$

$$(\text{e. g.}) \iint_D (x^2 + y \cos xy) dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y \cos xy) dx dy &= \int_0^\pi \int_0^1 (x^2 + y \cos xy) dx dy = \int_0^\pi \left[\frac{1}{3} x^3 + \sin xy \right]_0^1 dy \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{3} + \sin y \right) dy = \left[\frac{1}{3} y - \cos y \right]_0^\pi = \frac{1}{3} \pi + 2 \end{aligned}$$

被積分関数が $f(x)g(y)$ という変数分離できる形のときは次のように計算できる。

$$\iint_D f(x)g(y) dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \int_{y_1}^{y_2} g(y) dy$$

$$(\text{e. g.}) \iint_D x e^{-x^2} \sin 2y dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$$

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x e^{-x^2} \sin 2y dx dy = \int_0^1 x e^{-x^2} dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2y dy = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 \left[-\frac{1}{2} \cos 2y \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

■ 逐次積分

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y), y_1 \leq y \leq y_2\}$$

と表される閉領域上の積分は次のように計算できる.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx dy$$

$$(\text{註}) \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx dy := \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy$$

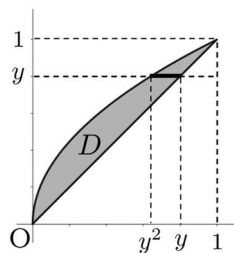
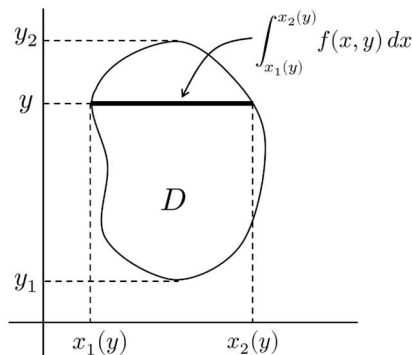
このように変数を1つずつ動かして二重積分を計算することを

逐次積分という.

$$(\text{e.g.}) \iint_D (x-y)^2 dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D (x-y)^2 dx dy &= \int_0^1 \int_{y^2}^y (x-y)^2 dx dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (x-y)^3 \right]_{x=y^2}^{x=y} dy \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^1 (y^2 - y)^3 dy = -\frac{1}{3} \int_0^1 y^3 (y-1)^3 dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{3!3!}{7!} = \frac{1}{420} \end{aligned}$$

(註) Beta 関数の積分公式を用いた.



■ 置換積分 (偏微分, 線型代数の知識を要求する.)

《Jacobian》

$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ という関数を考える. 2次元ベクトルに2次元ベクトルを対応させる関数 (正確には写像) である. $(x, y) = \Phi(u, v)$ とすると, これは $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ という変数変換を表す.

Φ に対して定義される次の行列を **Jacobi 行列**といい, 左辺や中辺の記号でかく.

$$D\Phi(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Jacobi 行列は一変数関数における導関数に対応している. Jacobi 行列の行列式を **Jacobian** という.

$$J\Phi(u, v) := \det D\Phi(u, v) = \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

曲がった変換であっても微小な変化量を考えると線型変換に近似できる. 行列式はその行列が定める線型写像の拡大率を表すので Jacobian は微小量 $dx dy$ と $du dv$ の符号付変換比率を与えてくれる. つまり,

$$dx dy = |J\Phi(u, v)| du dv$$

但し, 絶対値が付くことに注意されたい. 1変数の置換積分における $dx = \frac{dx}{dt} dt$ の $\frac{dx}{dt}$ にあたる.

(註) 1変数と事情が違い重積分には向きがないので絶対値が付く.

《変数変換の公式》

Φ が一対一対応で $A = \Phi^{-1}(D)$ とすると, 次の**変数変換の公式**が成立する. いわゆる置換積分である.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_A f(x(u, v), y(u, v)) |J\Phi(u, v)| du dv$$

(註) $\Phi^{-1}(D) := \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid \Phi(u, v) \in D\}$

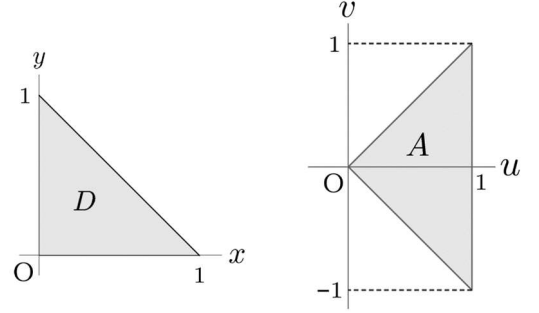
(e. g.) $\iint_D \frac{(x-y)^2}{(x+y)^4+1} dx dy,$

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Φ を $\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases}$ という変数変換とすると,

$$A := \Phi^{-1}(D) = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, -u \leq v \leq u\}$$

Jacobian は, $J\Phi(u, v) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$



$$\begin{aligned} \iint_D \frac{(x-y)^2}{(x+y)^4+1} dx dy &= \iint_A \frac{v^2}{u^4+1} |-2| du dv \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{u^4+1} \int_{-u}^u v^2 dv du = 2 \int_0^1 \frac{1}{u^4+1} \left[\frac{1}{3} v^3 \right]_{-u}^u du \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{4u^3}{u^4+1} du = \frac{1}{3} [\log(u^4+1)]_0^1 = \frac{1}{3} \log 2 \end{aligned}$$

(註) 一般次元の重積分でも Jacobian も同様に定義され, 重積分の変数変換の公式が成立する.

変換 $\Phi: U(\subset \mathbf{R}^N) \rightarrow \mathbf{R}^N$ を考える. $u = (u_1, \dots, u_N) \in U$ に対し, $\Phi(u) = (\Phi_1(u), \dots, \Phi_N(u))$ とする.

このとき, 次の行列を Jacobi 行列という.

$$D\Phi(u) = \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_N)}{\partial(u_1, \dots, u_N)} := \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} \right)_{i,j=1, \dots, N} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_N}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_N}{\partial u_N} \end{pmatrix}$$

Jacobi 行列の行列式を Jacobian という.

$$J\Phi(u) := \det D\Phi(u) = \det \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_N)}{\partial(u_1, \dots, u_N)} = \det \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} \right)_{i,j=1, \dots, N}$$

Φ が一対一対応で $A = \Phi^{-1}(D)$ とすると, 次の変数変換の公式が成立する.

$$\int_D f(x) dx = \int_A f(\Phi(u)) |J\Phi(u)| du$$

■ 極座標変換

2次元極座標変換 $\Phi: \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq r, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ では Jacobian は,

$$J\Phi(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \geq 0$$

から, $A = \Phi^{-1}(D)$ とすると, 次が成り立つ.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_A f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

(e. g.) $\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad D_R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$

Φ を $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ という変数変換とすると, $A := \Phi^{-1}(D_R) = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$

$$\begin{aligned} \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \iint_A e^{-(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r e^{-r^2} dr d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-r^2)' e^{-r^2} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e^{R^2}} \right) \end{aligned}$$

(cf.) Gauss 積分

3次元極座標変換 $\Phi: \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (0 \leq r, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi)$ では,

$$J\Phi(r, \theta, \phi) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin \theta \geq 0$$

から, $A = \Phi^{-1}(D)$ とすると, 次が成り立つ.

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

(e. g.) $\iiint_{B_R} 1 dx dy dz, \quad B_R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$

$$\begin{aligned} \iiint_{B_R} 1 dx dy dz &= \iiint_{\{(r, \theta, \phi) \mid r \leq R\}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

(註) これは半径 R の球の体積である.

■ Gauss 積分

次の広義積分は **Gauss 積分** と呼ばれ、大変重要な積分である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

〈proof〉 1 変数関数の積分であるが二重積分を用いて値を求めることができる。

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ を示そう. } R > 0 \text{ とする.}$$

$$\left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_0^R e^{-x^2} dx \int_0^R e^{-y^2} dy = \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{E_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

但し, $E_R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\}$ とした。

この § では極座標変換を用いて, $D_R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ に対し,

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e^{R^2}} \right)$$

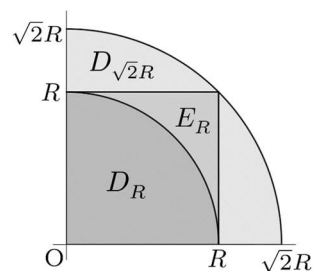
を導いている。 $D_R \subset E_R \subset D_{\sqrt{2}R}$ により,

$$\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e^{R^2}} \right) = \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{E_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e^{2R^2}} \right)$$

$$\text{挟み撃ちの原理により, } \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{E_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \left\{ \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \blacksquare$$

また, 定数 $a > 0, b$ に対して次が直ちに従う。(置換積分でわかる.)



$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

《統計学的な意味》

正規分布 (Gauss 分布, 誤差分布) $N(\mu, \sigma^2)$ は確率密度関数が次の形で表される。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

係数は全確率が 1 となるように調整している。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき, n が十分大きいならば X は正規分布 $N(np, np(1-p))$ に近似的に従う。(de Moivre-Laplace の定理) 証明には Stirling の公式を使う。

(註) $X \sim B(n, p)$ のとき, 平均 $E(X) = np$, 分散 $V(X) = np(1-p)$ である。

§ 16. 共通部分の体積

■ 重積分の利用

(e.g.) 直交 3 円柱の交叉

3 本の直交する半径 1 の円柱がの交叉の体積を V とする. ここでは V を重積分で無理やり求めてみる. $1/16$ の切片の体積が重積分で表されることが幾何学的にわかる

$\langle t = \sin \theta \rangle$ の置換に注意して,

$$\begin{aligned} \frac{V}{16} &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_s^{\sqrt{1-s^2}} \sqrt{1-t^2} dt ds = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{\sin^{-1} s}^{\cos^{-1} s} \cos^2 \theta d\theta ds \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{\sin^{-1} s}^{\cos^{-1} s} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta ds \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{\sin^{-1} s}^{\cos^{-1} s} ds \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \right]_{\sin^{-1} s}^{\cos^{-1} s} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\cos^{-1} s - \sin^{-1} s) ds \end{aligned}$$

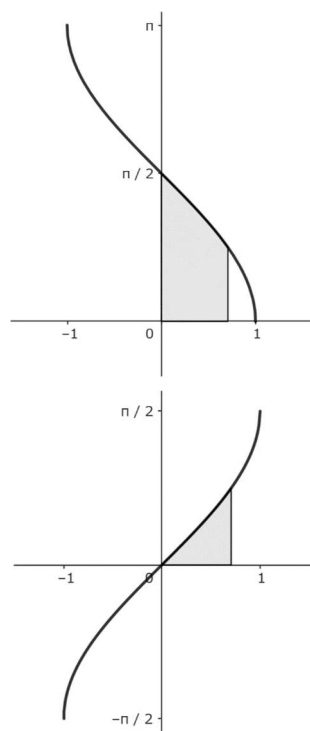
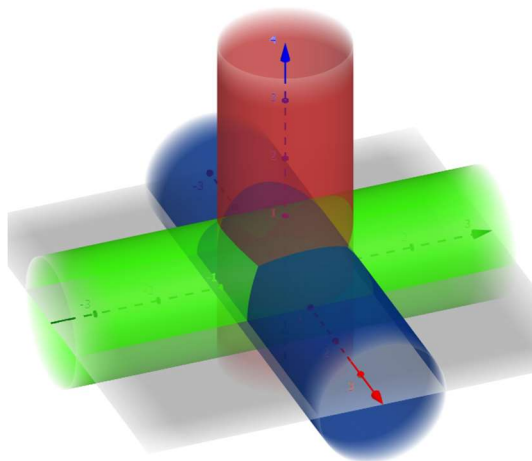
逆関数の定積分は右図のように関数グラフから考察することにより簡単に得ることができる.

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos^{-1} s ds - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin^{-1} s ds \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \right\} - \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \right\} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) = 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

以上より,

$$V = 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 - \sqrt{2}) = 8(2 - \sqrt{2})$$

(註) z 軸に垂直な平面で切った断面を積分する方法が入試では正攻法である. また, 対称性に気付けば, 内接する立方体を除いた立体の $1/6$ を正方形断面の積分により求めることで大幅に計算量を減らすことができる.



■ イメージしにくい共通部分の体積

“共通部分の断面は断面の共通部分” → 立体から平面へ

(e.g.) xyz 空間に $P(0,0,2), A(0,2,0), B(\sqrt{3},-1,0), C(-\sqrt{3},-1,0)$ をとる. 四面体 $PABC$ の $x^2 + y^2 \geq 1$ を満たす部分 K の体積を求めよ. (東京工業大学 2012 年)

四面体 $PABC$ の底面は単位円に外接する正三角形である.

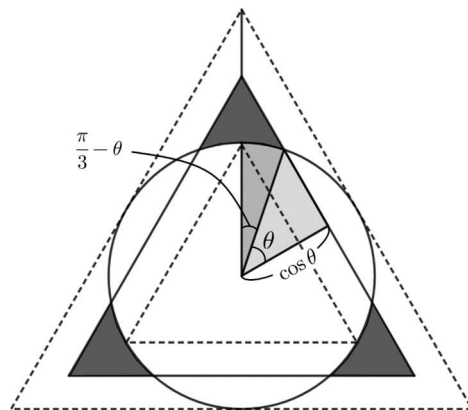
K を平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 2$) で切った断面積を $S(t)$ とする.

また, 右図のように θ とおくと,

$$\frac{1}{2}(2-t) = \cos \theta, \quad dt = 2 \sin \theta d\theta, \quad \theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{3} \quad (t : 0 \rightarrow 1)$$

断面積 (右図の黒い部分) は,

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(2-t)^2 - 6 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \right\} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(2-t)^2 + 3 \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) - 3 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

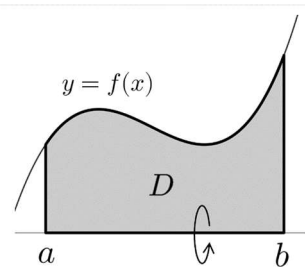


$$\begin{aligned} \int_0^1 S(t) dt &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \int_0^1 (2-t)^2 dt + 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \cdot 2 \sin \theta d\theta - 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta \cos \theta \cdot 2 \sin \theta d\theta \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \left[-\frac{1}{3}(2-t)^3 \right]_0^1 + 6 \left[\left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \cdot (-\cos \theta) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-\cos \theta) d\theta - 6 \left[\frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (8-1) - 6 \cdot \frac{\pi}{3} + 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = 4\sqrt{3} - 2\pi \end{aligned}$$

§ 17. 回転体の体積

■ 回転体の体積

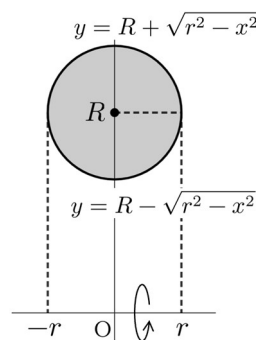
右図のように曲線 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) と x 軸の間の領域を x 軸周りに回転して得られる立体の体積を V とする.



$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

〈proof〉 $(x, 0)$ を通り x 軸に垂直な平面で切断した断面積 $S(x) = \pi\{f(x)\}^2$ を a から b まで積分して得られる. ■

(e.g.) 円板 $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + (y - R)^2 \leq r^2\}$ ($0 < r \leq R$) を x 軸周りに回転して得られる立体の体積を V とする.



D の境界は $y = f_1(x) := R + \sqrt{r^2 - x^2}$ のグラフと $y = f_2(x) := R - \sqrt{r^2 - x^2}$ のグラフに分割できる. V は $f_1(x)$ の回転体から $f_2(x)$ の回転体を除いた部分の体積であるから,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r \{f_1(x)\}^2 dx - \pi \int_{-r}^r \{f_2(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_{-r}^r \{R + \sqrt{r^2 - x^2}\}^2 dx - \pi \int_{-r}^r \{R - \sqrt{r^2 - x^2}\}^2 dx \\ &= \pi \int_{-r}^r (\{R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2)\} - \{R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2)\}) dx \\ &= 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4\pi R \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R \end{aligned}$$

(cf.) Pappus=Guldinus の定理

■ 斜回転体の体積

右図のように曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = (\tan \theta)x$ の囲む領域を $y = (\tan \theta)x$ 周りに回転して得られる立体の体積を V とする.

$$V = \pi \cos \theta \int_a^b \{f(x) - (\tan \theta)x\}^2 dx$$

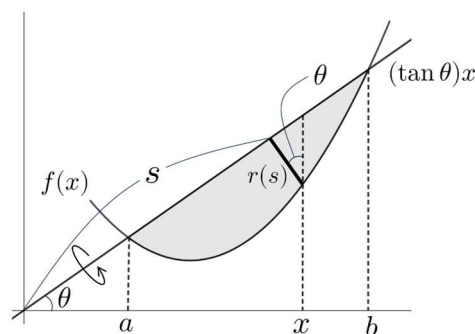
〈proof〉 直線 $y = (\tan \theta)x$ を s 軸と考える.

このとき, s と x の関係は,

$$s = \frac{x}{\cos \theta} - \{(\tan \theta)x - f(x)\} \sin \theta, \quad ds = \left\{ \frac{1}{\cos \theta} - (\tan \theta - f'(x)) \right\} dx$$

s 軸に関する座標が s である点と曲線 $y = f(x)$ の距離を $r(s)$ とすると,

$$r(s) = \{(\tan \theta)x - f(x)\} \cos \theta$$



回転体の体積の式から,

$$V = \pi \int_{\frac{a}{\cos \theta}}^{\frac{b}{\cos \theta}} r(s)^2 ds = \pi \int_a^b \{(\tan \theta)x - f(x)\}^2 \cos^2 \theta \left\{ \frac{1}{\cos \theta} - (\tan \theta - f'(x)) \right\} dx$$

$$= \pi \cos \theta \int_a^b \{(\tan \theta)x - f(x)\}^2 dx - \cos^2 \theta \underbrace{\left[\frac{1}{3} \{(\tan \theta)x - f(x)\}^3 \right]_a^b}_0 \quad \blacksquare$$

(註) 右のように s と曲線 $y = f(x)$ の点が一対一対応しない場合でも,

$$r(s) = \begin{cases} r_1(s) & (s_2 \leq s \leq s_1) \\ r_2(s) & (s_1 \leq s \leq s_3) \end{cases}$$

と定めると, 上と同じように計算できる.

$$V = \pi \int_{s_2}^{s_3} r_2(s)^2 ds - \pi \int_{s_2}^{s_1} r_1(s)^2 ds$$

$$= \pi \int_{s_1}^{s_2} r_1(s)^2 ds + \pi \int_{s_2}^{s_3} r_2(s)^2 ds = \pi \int_{s_1}^{s_3} r(s)^2 ds$$

■ バウムクーヘン分割

右図のように曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq a \leq x \leq b$) と x 軸の間の領域を y 軸周りに回転して得られる立体の体積を V とする.

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

この積分の方法を**バウムクーヘン分割**という.

〈proof〉 微小量 dx の上の矩形を y 軸周りに回転させて得られる円筒の微小体積 dV は,

$$dV = 2\pi x f(x) dx$$

これを a から b まで積分して得られる. ■

(e.g.) $f(x) = e^{-x^2}$, $R > 0$ に対し, 領域

$$D_R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x), 0 \leq x \leq R\}$$

を y 軸周りに回転して得られる立体の体積を V_R とする.

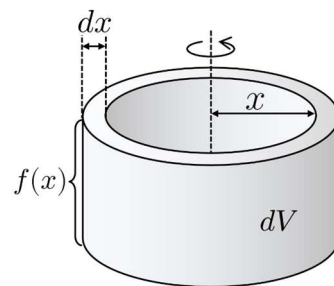
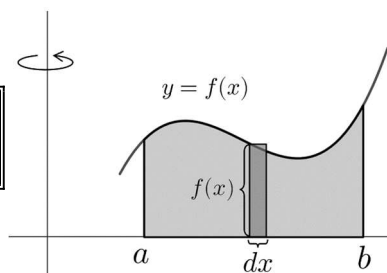
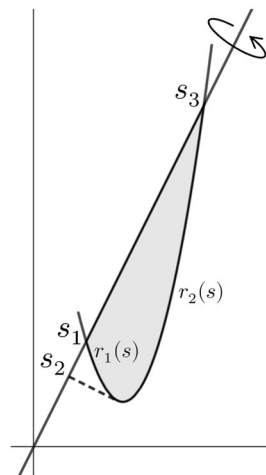
$$V_R = \int_0^R 2\pi x e^{-x^2} dx = \pi [e^{-x^2}]_0^R = \pi(1 - e^{-R^2})$$

$R \rightarrow +\infty$ の極限をとると,

$$V = \lim_{R \rightarrow \infty} V_R = \pi$$

(cf.) 東京工業大学 2015 年

(cf.) Gauss 積分



■ Pappus=Guldinus の定理

平面上にある図形 F の面積を S とし, F と同じ平面上にあり F 外にある軸の周りで F を回転させて得られる立体の体積を V とする. 軸と F の重心 G の距離を l とすると,

$$V = 2\pi l S$$

が成り立つ. これを **Pappus=Guldinus の定理** という.

(註) パッポス=ギュルダンと読む.

〈proof〉 軸に垂直に x 軸を取り, F を軸に平行に切断した切り口の長さを $f(x)$ とする. バウムクーヘン分割を用いれば,

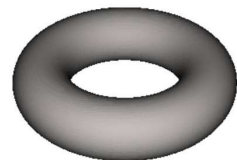
$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx = 2\pi \cdot \frac{1}{S} \int_a^b x f(x) dx \cdot S = 2\pi l S \blacksquare$$

(註) $l = x_G$ である.

(e.g.) 右図のように小円の円周を大円に沿って回転して得られる面を**トーラス**という.

大円の半径が R , 小円の半径が r であるようなトーラスが囲む領域の体積 V は,

$$V = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R$$



(註) 曲線 $y = f(x) \geq 0$, x 軸, 2 直線 $x = \alpha$, $x = \beta$ ($\alpha < \beta$) が囲む図形 F の重心 G の x 座標 x_G は

$$x_G := \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx}{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx} = \frac{1}{S} \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx, \quad S = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

重心とはおもみ付き平均位置である. 物理的に考えてみる.

N 個の質点の位置を x_1, \dots, x_N , それぞれの体積を m_1, \dots, m_N とすると, この質点系の重心は,

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i$$

これを連続化する. 質量密度関数を $\rho(x)$ とすると, この系の重心は,

$$x_G = \frac{\int_V \rho(x) x dV}{\int_V \rho(x) dV} = \frac{\int_V \rho(x) x dV}{M}, \quad M = \int_V \rho(x) dV$$

質量密度を関数グラフ $y = f(x)$ の高さに対応させると上のような重心の式を得ることができる.

■ イメージしにくい回転体の体積

“回転体の断面は断面の回転体” → 立体から平面へ

(e.g.) xyz 空間内の 3 点 $O(0,0,0), A(1,0,0), B(1,0,1)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸周りに回転させて得られる円錐を C とする. 円錐 C を z 軸周りに回転して得られる立体の体積 V を求めよ.

(大阪大学 2013 年)

C の回転体の断面を C の断面の回転体として考える.

回転体を平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 1$) で切断した断面積を $S(t)$ とする. C の断面

C_{slice} において, z 軸からの距離の最大値と最小値をそれぞれ R, r とする.

つまり,

$$R = \max\{\sqrt{x^2 + y^2} \mid (x, y, t) \in C_{\text{slice}}\}$$

$$r = \min\{\sqrt{x^2 + y^2} \mid (x, y, t) \in C_{\text{slice}}\}$$

これらを幾何学的に求めると,

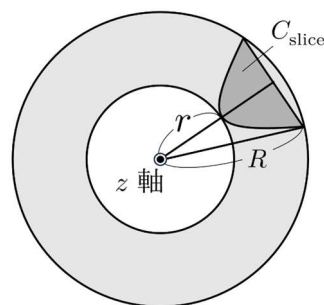
$$R = \sqrt{1^2 + (\sqrt{1-t^2})^2} = \sqrt{2-t^2}, \quad r = t$$

C_{slice} を z 軸周りに回転させると, CD (コンパクト・ディスク) のような形になりその面積は,

$$S(t) = \pi R^2 - \pi r^2 = 2\pi(1-t^2)$$

C の回転体は xy 平面に対して対称であるから,

$$V = 2 \int_0^1 S(t) dt = 4\pi \int_0^1 (1-t^2) dt = \frac{8}{3}\pi$$

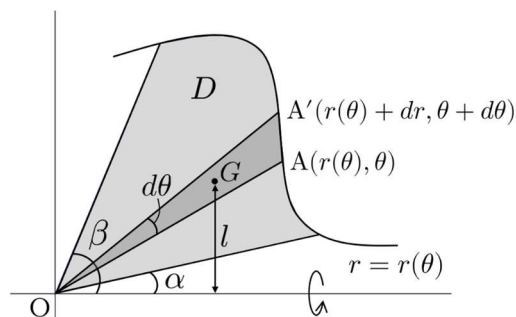


■ 極座標で記述される領域の回転体

曲線 $r = r(\theta)$, 2 直線 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ で囲まれる領域 D

を始線周りに回転して得られる立体の体積を V とする.

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^3 \sin \theta d\theta$$



〈proof〉 微小角度 $d\theta$ に対する微小面積変化は 3 点 $O(0,0), A(r(\theta), \theta), A'(r(\theta) + dr, \theta + d\theta)$ を結んだ微小三角形に近似できるので, 始線と微小変化の重心 G の距離 l は,

$$l = \frac{0 + r(\theta) \sin \theta + (r(\theta) + dr) \sin(\theta + d\theta)}{3} = \frac{2}{3} r(\theta) \sin \theta$$

Pappus=Guldinus の定理から

$$dV = 2\pi l dS = 2\pi \cdot \frac{2}{3} r(\theta) \sin \theta \cdot \frac{1}{2} r(\theta)^2 d\theta = \frac{2}{3} \pi r(\theta)^3 \sin \theta d\theta$$

これを α から β まで積分して V を得る. ■

(cf.) 極座標で記述される領域の面積

