15.5 指数函数和对数函数

定义

1. (15.5.1 指数函数) 对任意的实数x，我们将**指数函数**$\exp(x)$定义为下面的实数：

$$\exp(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

2. (15.5.3 欧拉数) **欧拉数**e被定义为

$$\mathrm{e}:=\exp(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots$$

   我们有估计值$\mathrm{e}=2.71828183\dots$。

3. (15.5.5 对数函数) 我们把**自然对数函数**$\log:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ (也叫$\ln$) 定义为指数函数的反函数。因此有$\exp(\log(x))=x$并且$\log(\exp(x))=x$。

   (注：通过命题15.5.2和命题15.5.4我们可以得到$\exp$是从$\mathbb{R}$到$(0,+\infty)$的双射，这保证了我们对于对数函数的定义是合理的；习惯上，我们通常将自然对数函数记为$\ln$，$\log$则用于常用对数函数)

命题

1. (15.5.2 指数函数的基本性质) 可以验证指数函数满足下面的性质：

   > 1. 对于任意的实数x，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$是绝对收敛的。于是对于任意的$x\in\mathbb{R}$，$\exp(x)$都存在并且是一个实数，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$的收敛半径是$\infty$，而且$\exp$是$(-\infty,+\infty)$上的实解析函数。
   > 2. $\exp$在$\mathbb{R}$上是可微的，并且对于任意的$x\in\mathbb{R}$，$\exp'(x)=\exp(x)$。
   > 3. $\exp$在$\mathbb{R}$上是连续的，并且对于任意的区间$[a,b]$，都有$\int_{[a,b]}\exp(x)\mathrm{d}x=\exp(b)-\exp(a)$。
   > 4. 对于任意的x，$y\in\mathbb{R}$，都有$\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$。
   > 5. 我们有$\exp(0)=1$。另外，对于任意的$x\in\mathbb{R}$，$\exp(x)$都是正的，并且$\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$。
   > 6. $\exp$是严格单调递增的。换言之，如果x和y都是实数，那么$\exp(y)>\exp(x)$当且仅当$y>x$。

   (注：这些都是在数学分析里面耳熟能详的内容了)

2. (15.5.4 指数函数的另一种形式？) 对于任意的实数x，我们有$\exp(x)=\mathrm{e}^x$。
3. (15.5.6 对数函数的基本性质) 可以验证对数函数满足下面的性质：

   > 1. 对于任意的$x\in(0,+\infty)$都有$\ln'(x)=\frac{1}{x}$。于是根据微积分基本定理可知，对于$(0,+\infty)$内任意一个区间$[a,b]$，都有$\int_{[a,b]}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(b)-\ln(a)$。

2. 对于任意的x，$y \in (0,+\infty)$都有$\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$。
3. 对于任意的$x \in (0,+\infty)$都有$\ln(1)=0$和$\ln(1/x)=-\ln(x)$。
4. 对于任意的$x \in (0,+\infty)$和$y \in \mathbb{R}$都有$\ln(x^y)=y\ln(x)$。
5. 对于任意的$x \in (-1,1)$，有

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

于是$\ln$在1处是解析的，并且有幂级数展开式：

$$\ln(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \qquad x \in (0,2)$$

该级数收敛半径为1。

（注：终于能用指数和对数了，意外的有点感动（？）；关于对数函数，原书还有一个结合了阿贝尔定理给出的结论，即我们曾证明过收敛的级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$，通过对数函数的幂级数展开式可以为这个级数给出一个具体的收敛值，即$\ln(2)$）

课后习题

15.5.1 证明定理15.5.2 **（提示：对于(a)，利用比值判别法；对于(b)和(c)，利用定理15.1.6；对于(d)，利用定理15.4.1；对于(e)，利用(d)；对于(f)，利用(d)并证明当x是正数的时候$\exp(x)>1$。你或许会发现习题7.1.4中的二项式公式可能会很有用）**

逐条证明：

---

1. 对于任意的实数x，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$是绝对收敛的。于是对于任意的$x \in \mathbb{R}$，$\exp(x)$都存在并且是一个实数，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$的收敛半径是$\infty$，而且$\exp$是$(-\infty,+\infty)$上的实解析函数。

首先证明级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$是在任意的实数$x$处收敛的。根据比值判别法，对于任意的$x \in \mathbb{R}$考虑值

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = |x|\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|$$

注意到序列$\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n=0}^{\infty}$收敛于$0$，因此$\alpha$必然等于$0$，从而根据比值判别法这表明幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$对任意的$x \in \mathbb{R}$都是绝对收敛的。

然后我们来证明关于收敛半径的结论。根据定理15.1.6，如果我们设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$的收敛半径为$R$，那么上面的结论表明对任意的$x \in \mathbb{R}$都有$|x| \leq R$，即只能有$R=+\infty$。

最后我们来证明exp是在$(-\infty,+\infty)$上的实解析函数。首先exp的定义已经表明了exp是在0处实解析的，并且由于收敛半径为$+\infty$因此幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$是在$(-\infty,+\infty)$上收敛于exp的。此时根据习题15.2.8的结论我们可以得到exp是在$(-\infty,+\infty)$上实解析的。

---

2. exp在$\mathbb{R}$上是可微的，并且对于任意的$x\in\mathbb{R}$，$\exp'(x)=\exp(x)$。

对任意$y\in\mathbb{R}$，根据定理15.1.6(d)，我们可以得到级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

在任意$\mathbb{R}$的闭区间$[-|y|,|y|]$收敛于$\exp'$，注意到这正好是exp的定义，从而如果我们只关注y这个点，那么即

$$\exp'(y)=\exp(y)$$

对任意的$y\in\mathbb{R}$都是成立的，于是结论得证。

---

3. exp在$\mathbb{R}$上是连续的，并且对于任意的区间$[a,b]$，都有$\int_{[a,b]}\exp(x)\mathrm{d}x=\exp(b)-\exp(a)$。

由于exp是在$[a,b]$上可微的因此exp也是在$[a,b]$上黎曼可积的（可微$\Longrightarrow$连续$\Longrightarrow$闭区间上黎曼可积），并且exp是自己的原函数，因此根据微积分第二基本定理（命题11.9.4）我们有：

$$\int_{[a,b]}\exp(x)\mathrm{d}x=\exp(b)-\exp(a)$$

于是结论成立。

---

4. 对于任意的x，$y\in\mathbb{R}$，都有$\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$。

根据exp的定义有：

$$\begin{aligned}\exp(x+y)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}x^iy^{n-i}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}x^i\frac{1}{(n-i)!}y^{n-i}\end{aligned}$$

如果我们对任意的$i\geq 0$与$n\geq i$定义$a_i:=\frac{1}{i!}x^i$和$b_{ni}:=\frac{1}{(n-i)!}y^{n-i}$，并且对任意的$i>n$定义$b_{ni}:=0$，则上面的级数可以改写为：

$$\exp(x+y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}a_ib_{ni}$$

然后因为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n$本身是绝对收敛的，因此对于上面这个级数它显然也是绝对收敛的，从而使用无限级数的富比尼定理（命题8.2.2），我们有：

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_i b_{ni} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i!}x^i \sum_{n=i}^{\infty}\frac{1}{(n-i)!}y^{n-i}\right)\end{aligned}$$

然后注意到对任意的$i \geq 0$，我们都可以做替换$m := n-i$，从而有：

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i!}x^i \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}y^m\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i!}x^i \exp(y)\right) \\ &= \exp(y)\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}x^i \\ &= \exp(y)\exp(x)\end{aligned}$$

于是我们证明了对任意的实数x，$y \in \mathbb{R}$都有$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$，题目结论得证。

---

5. 我们有$\exp(0) = 1$。另外，对于任意的$x \in \mathbb{R}$，$\exp(x)$都是正的，并且 $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$。

当$x = 0$的时候可以直接计算级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!} = 1$，于是根据exp函数的定义我们有$\exp(0) = 1$；然后根据(d)的结论，对任意的实数$x \in \mathbb{R}$都有：

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1 \Longrightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

于是便证明了第二个结论。

---

6. exp是严格单调递增的。换言之，如果x和y都是实数，那么$\exp(y) > \exp(x)$当且仅当 $y > x$。

设$c > 0$是一个正实数，于是对任意的$n \geq 0$都有$c^n \geq 0(0^n)$，从而根据比较判别法可以直接得到：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!} \geq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{0^n}{n!} \Longrightarrow \exp(c) \geq \exp(0) = 1$$

特别地，结合结论(e)我们可以得到对任意的负实数c都有$\exp(c) < 0$。然后对任意的实数x，y有$\exp(y) > \exp(x)$当且仅当：

$$\exp(y) = \exp(x)\exp(y-x) > \exp(x) \iff \exp(y-x) > 1$$

而在上面的讨论中我们已经知道$\exp(y-x) > 1$当且仅当$y - x > 0 \iff y > x$。于是结论得证，exp是严格单调递增的。

15.5.2 证明：对于任意的整数$n \geq 3$，都有

$$0 < \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots < \frac{1}{n!}$$

（提示：首先证明对于所有的$k = 1，2，3，\ldots$都有$(n+k)! > 2^k n!$）并推导出对于任意的$n \geq 3$，$n!$e都不是整数，由此进一步推导出e是无理数（提示：利用反证法）

> 我们先使用归纳法证明提示中的结论（稍微改了一下）：
>
> > 结论：对于任意的整数$n \geq 3$与任意的$k \geq 1$，都有$(n+k)! > 3^k n!$。
> >
> > 证明：
> >
> > 对k进行归纳。当$k = 1$时我们有$(n+k)! = (n+1)n! > 3^1 n! = 3^k n!$成立。
> >
> > 于是归纳性地假设当$k = a$时成立结论，对$k = a+1$时有：
> >
> > $$(n+a+1)! = (n+a+1)(n+a)! > 3^a n!(n+a+1) > 3^{a+1} n!$$
> >
> > 于是归纳完毕，我们得到了对于任意的整数$n \geq 3$与任意的$k \geq 1$都有$(n+k)! > 3^k n!$。
>
> 然后应用这个结论，比较判别法和几何级数的结论，我们有：
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{n!}\frac{1}{2} < \frac{1}{n!}$$
>
> 于是我们证明了第一个结论。
>
> 而对于第二个结论，我们注意到根据欧拉数e的定义有：
>
> $$\begin{aligned} n!\mathrm{e} &= n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} \end{aligned}$$
>
> 其中对第一部分的有限级数，可以注意到其任意项都是整数，因此第一部分必然是一个整数，而对于第二部分，根据我们上面的结论有：
>
> $$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = n! \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)!} \implies 0 < n! \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)!} < \frac{n!}{n!} < 1$$
>
> 于是第二部分必然是一个属于$(0,1)$的实数，综合即$n!$e是一个整数加上一个$(0,1)$之间的实数，因此$n!$e不可能是一个整数。
>
> 最后我们来证明e必然是一个无理数，使用反证法，我们假设e是一个有理数，那么存在整数a与正整数b使得$\mathrm{e} = a/b$。然后可以讨论(b)的情况：
>
> - $b = 1$或$b = 2$：
>
>   > 则此时有：
>   >
>   > $$\begin{aligned} \mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} &= \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{n!} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \frac{8}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3+k)!} \end{aligned}$$
>   >
>   > 根据结论(a)，又有：

> $$\frac{8}{3}<\frac{8}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3+k)!}<\frac{8}{3}+\frac{1}{6}=\frac{17}{6}$$
>
> 当$b=1$或$b=2$时，我们有$2\mathrm{e}$肯定是一个整数，但是有：
>
> $$5<\frac{16}{3}<2\mathrm{e}<\frac{17}{3}<6$$
>
> 不可能是一个整数，因此b不可能等于1或2。

- $b\geq 3$:

> 则$\mathrm{e}\cdot b!=a\cdot(b-1)!$应该是一个整数，但是根据结论(b)，我们知道对任意的$b\geq 3$都有$\mathrm{e}\cdot b!$不可能是一个整数。于是导出了矛盾，不可能有$b\geq 3$。

综上，于是e不可能是一个有理数。

15.5.3 证明命题15.5.4（提示：首先证明当x是自然数时的结论，其次证明x是整数时的结论，然后证明x是有理数时的结论。接着利用"实数是有理数的极限"这一事实取证明关于实数的结论，你或许会发现指数定律（命题6.7.3）可能会很有用）

我们首先使用归纳法证明命题15.5.4是对任意的自然数x都是成立的。

对x进行归纳，当$x=0$时我们有$\exp(0)=1=\mathrm{e}^0$，此时结论成立。然后归纳性假设$x=a$时结论成立，对$x=a+1$的情况，根据命题15.5.2(d)我们有：

$$\exp(a+1)=\exp(a)\exp(1)$$

然后根据归纳假设有$\exp(a)=\mathrm{e}^a$，根据欧拉数e的定义又有$\mathrm{e}=\exp(1)$，于是即：

$$\exp(a+1)=\mathrm{e}^a\cdot\mathrm{e}=\mathrm{e}^{a+1}$$

从而归纳得证，我们得到了对任意的自然数x命题15.5.4都是成立的。

然后我们证明命题15.5.4对任意的整数x都是成立的。

我们已经证明了对任意的自然数x（相当于所有整数$x\geq 0$）都成立，于是只需要再证明对任意的负整数x成立即可。此时我们令有$x=-y$，于是y是一个正整数，从而根据命题15.5.2(e)我们有：

$$\exp(x)=\exp(-y)=\frac{1}{\exp(y)}=\frac{1}{\mathrm{e}^y}=\mathrm{e}^{-y}=\mathrm{e}^x$$

于是命题15.5.4对任意的负整数x都是成立的，综合即对任意的整数x都有命题15.5.4成立。

然后我们证明命题15.5.4对任意的有理数x都是成立的。

由于x是有理数，因此不妨设$x=a/b$，其中a是一个整数b是一个正整数。根据命题6.7.3与命题，于是我们有：

$$\begin{aligned}\exp(x)=\mathrm{e}^x\iff&\exp\left(\frac{a}{b}\right)=\mathrm{e}^{\frac{a}{b}}\\\iff&\left(\exp\left(\frac{a}{b}\right)\right)^b=\left(\mathrm{e}^{\frac{a}{b}}\right)^b\\\iff&\exp(a)=\mathrm{e}^a\end{aligned}$$

（第二行到第三行左半段，需要注意到b是一个正整数，因此通过b次应用命题15.5.2(d)我们就可以得到需要的结果）

由于a是一个整数，因此应用我们已经证明了的整数的命题15.5.4可以得到$\exp(a)=\mathrm{e}^a$为真，因此等价的$\exp(x)=\mathrm{e}^x$也是成立的。综上即命题15.5.4对任意的有理数x都是成立的。

最后我们来证明命题15.5.4（也就是要证明对任意的实数x都成立结论）。

对任意的实数x，我们考虑$(q_n)_{n=0}^{\infty}$是收敛于x的有理数序列，于是根据实数次幂的定义我们有：

$$\mathrm{e}^x=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{q_n}$$

然后由于命题15.5.4是对任意的有理数成立的，因此即有：

$$\mathrm{e}^x=\lim_{n\to\infty}\exp(q_n)$$

由于exp是实解析的，因此在$\mathbb{R}$上exp是一个连续函数（命题15.1.6与命题14.3.1），从而根据命题13.1.4我们知道有$\lim\limits_{n\to\infty}\exp(q_n)=\exp(x)$。

综上，于是我们证明了命题15.5.4。

15.5.4 设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$定义为：当$x>0$时，$f(x):=\exp(-1/x)$；当$x\leq 0$时，$f(x):=0$。证明：$f$是无限可微的，并且对于任意的整数$k\geq 0$都有$f^{(k)}(0)=0$，但$f$在0处不是实解析的

先来证明f是无限可微的，也即要证明：对任意的整数$k\geq 0$。

对任意的$x\in(-\infty,0)$，显然我们可以计算有：

$$f'(x)=\lim_{y\to x;y\in\mathbb{R}}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x;y\in\mathbb{R}}\frac{0}{y-x}=0$$

从而f在x处可微，并且导函数$f'(x)=f(x)=0$。于是对任意的整数$k\geq 0$都可以重复计算k次（反正都是常函数求导）得到f是在$(-\infty,0)$上k次可微的并且$f^{(k)}$是常函数0，于是f是在$(-\infty,0)$上无限可微的。

然后对任意的$x\in(0,+\infty)$，根据链式法则我们知道f是可微的，并且可以计算有：

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}\exp(-1/x)=p(1/x)\exp(1/x)$$

其中$p(z):=z^2$是一个多项式。于是我们来证明对任意的整数$k\geq 0$都有f是在$(0,+\infty)$上k次可微的。

> 结论：对任意的整数$k\geq 0$都有f是在$(0,+\infty)$上k次可微的，并且对任意的$x\in(0,+\infty)$，f的k次导函数有
>
> $$f^{(k)}(x)=p(1/x)\exp(-1/x)$$
>
> 其中p是一个多项式。
>
> 证明：
>
> 在上面我们已经说明过了$k=0$与$k=1$的情况都成立结论，于是我们归纳性假设对$k=a$时成立结论，对$k=a+1$时讨论。
>
> 根据归纳假设，我们知道$f^{(k)}$有
>
> $$\forall\,x\in(0,+\infty),f^{(k)}(x)=p(1/x)\exp(-1/x)$$
>
> 注意到由于多项式p，exp与$\dfrac{1}{x}$都是在$(0,+\infty)$上可微的，因此根据微分的计算法则与链式法则我们可以得到$f^{(k)}$也是可微的，并且有：

> $$\begin{aligned}(f^{(k)})'(x) &= [p'(1/x)\exp(-1/x) + p(1/x)\exp(-1/x)]\frac{1}{x^2} \\ &= P(1/x)\exp(-1/x)\end{aligned}$$
>
> 其中$P(z) := z^2(p(z) + p'(z))$也是一个多项式，于是归纳结束，结论得证。

然后对$x = 0$处，根据上面的结论我们有显然对任意的整数$k \geq 1$，左极限：

$$\lim_{x\to 0; x\in(-\infty,0)} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0; x\in(-\infty,0)} \frac{0}{x} = 0$$

而右极限有：

$$\lim_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0; x\in(-\infty,0)} \frac{p(1/x)\exp(-1/x)}{x}$$

我们不妨假设多项式p具有$p(z) := \sum_{i=0}^{n} c_i z^i$的形式（其中$c_0$，...，$c_n$都是实数），那么上面的式子可以化为：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} \sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^{i+1}} \\ &= \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \lim_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^{i+1}} \\ &= \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \lim_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} \frac{(\frac{1}{x})^{i+1}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\end{aligned}$$

而使用习题15.5.8的结论（因为习题14.5.8的证明并不依赖于这个例子，因此提前用一下问题不大），我们可以得到：

> 考虑任意的$\varepsilon > 0$。通过求导可得关于x的函数$\frac{x^{i+1}}{\mathrm{e}^z}$在$(i+1, +\infty)$上严格单调递减，然后根据习题15.5.8有$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{i+1}}{\mathrm{e}^x} = 0$，因此我们可以找到一个足够大的$N > 0$满足$N > i + 1$并且对任意的整数$n \geq N$都有$\left|\frac{n^{i+1}}{\mathrm{e}^n}\right| < \varepsilon$，结合$\frac{x^{i+1}}{\mathrm{e}^z}$在$(i+1, +\infty)$上严格单调递减就可以得到对任意的实数$x \in [N, +\infty)$都有$\left|\frac{x^{i+1}}{\mathrm{e}^x}\right| < \varepsilon$。
>
> 于是令有$\delta := \frac{1}{N}$，对任意的$0 < x < \delta$都有$\frac{1}{x} > N$，于是即有$\left|\frac{(\frac{1}{x})^{i+1}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\right| < \varepsilon$。从而即得证了$\lim_{x\to 0; x\in(0,+\infty)} \frac{(\frac{1}{x})^{i+1}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = 0$。

于是我们可以得到右极限也是0，从而左右极限相等，根据导数定义可得对任意的整数$k \geq 0$都有f在0处k次可微且$f^{(k)}(0) = 0$。这样综上我们便证明了f是在$\mathbb{R}$上无限可微的，并且顺带地我们也证明了题目中第二个结论。

然后我们来证明f在0处不是实解析的。不妨使用反证法，我们假设f是在0处实解析的，然后根据泰勒公式，我们可以得到f在0处可以展开为幂级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n = 0$$

> 在某个开区间$(-r,r)$（$r>0$）上收敛于f，但是注意到对任意的$x>0$都有$f(x)>0$，因此不可能存在$r>0$使得这个幂级数在$(0,r)$上收敛于f。于是导出了矛盾，反证假设不成立，f不可能在0处实解析。

15.5.5 证明定理15.5.6（提示：对于(a)，利用反函数定理（[定理10.4.2](#)）或者链式法则（[定理10.1.15](#)）；对于(b)，(c)，(d)，利用定理15.5.2和指数定律（[命题6.7.3](#)）；对于(e)，从几何级数公式（[引理7.3.3](#)）入手，并利用[定理15.1.6](#)来计算积分）

> 逐条证明定理15.5.6：
>
> ---
>
> 1. 对于任意的$x\in(0,+\infty)$都有$\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$。于是根据微积分基本定理可知，对于$(0,+\infty)$内任意一个区间$[a,b]$，都有$\displaystyle\int_{[a,b]}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(b)-\ln(a)$。
>
> 由于$\ln$是在$(0,+\infty)$上连续的且$\exp$是在$\mathbb{R}$上可微的，因此对任意的$x\in(0,+\infty)$，我们设有$x=\exp(y)$，于是根据反函数定理有：
>
> $$\ln'(x)=\frac{1}{\exp'(y)}=\frac{1}{\exp(y)}=\frac{1}{x}$$
>
> 于是就证明了第一个结论。这个结论同样表明$\ln x$是$\dfrac{1}{x}$的原函数，应用微积分基本第二定理（命题11.9.4）就可以得到第二个结论。
>
> ---
>
> 2. 对于任意的x，$y\in(0,+\infty)$都有$\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$。
>
> 根据对数函数的定义与定理15.5.2我们知道有：
>
> $$\begin{aligned}\exp(\ln(x)+\ln(y))&=\exp(\ln(x))\exp(\ln(y))\\&=xy\\&=\exp(\ln(x+y))\end{aligned}$$
>
> 同样根据定理15.5.2我们知道$\exp$是严格单调递增的连续函数，因此$\exp$是一个双射，从而$\exp(\ln(x)+\ln(y))=\exp(\ln(xy))$成立等价于$\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$成立，结论得证。
>
> ---
>
> 3. 对于任意的$x\in(0,+\infty)$都有$\ln(1)=0$和$\ln(1/x)=-\ln(x)$。
>
> 注意到$\exp(0)=1$，因此根据反函数定义即有$\ln(1)=0$，然后根据结论(b)对任意$x\in(0,+\infty)$都有
>
> $$\ln(x)+\ln(1/x)=\ln(1)=0\iff\ln(1/x)=-\ln(x)$$
>
> 于是第二个结论也得证。
>
> ---
>
> 4. 对于任意的$x\in(0,+\infty)$和$y\in\mathbb{R}$都有$\ln(x^y)=y\ln(x)$。
>
> 使用指数形式下的$\exp$函数与指数定律，我们有：
>
> $$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\ln(x^y)}&=x^y\\&=(\mathrm{e}^{\ln(x)})^y\\&=\mathrm{e}^{y\ln(x)}\end{aligned}$$
>
> 然后根据$\exp$是一个双射我们知道这表明$\ln(x^y)=y\ln(x)$，结论得证。
>
> ---

5. 对于任意的$x \in (-1,1)$，有

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

于是ln在1处是解析的，并且有幂级数展开式：

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \qquad x \in (0,2)$$

该级数收敛半径为1。

通过链式法则我们可以得到$\ln(1-x)$是在$(-\infty,1)$上可微的，并且有$\ln'(1-x) = -\frac{1}{1-x}$。然后注意到几何级数（引理7.3.3）的结论对任意的$x \in (-1,1)$有：

$$\sum_{n=0}^{\infty} -x^n = -\frac{1}{1-x}$$

这也表明$-\frac{1}{1-x}$是在$(-1,1)$上实解析的，于是利用命题15.1.6和微积分第二基本定理可以计算有：

$$\begin{cases} \ln(1-x) - \ln(1) = \int_{[0,x]} -\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}-0}{n+1} & \text{if } 0 \leq x \geq 1 \\ \ln(1-x) - \ln(1) = -\int_{[x,0]} -\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0-x^{n+1}}{n+1} & \text{if } -1 < x < 0 \end{cases}$$

注意到$\ln(1) = 0$，因此上面的结论可以总结为：

$$\forall\, x \in (-1,1), \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

于是第一个结论得证，然后我们做替换$y := 1-x = (-1)(x-1)$就可以得到：

$$\forall\, y \in (0,2), \ln(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(y-1)^n$$

其收敛半径显然是1。

15.5.6 证明：自然对数函数在$(0,+\infty)$上是实解析的

对任意的$a \in (0,+\infty)$，考虑幂级数：

$$P(x) := \ln(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{na^n}(x-a)^n$$

（$\ln(a)$实际上就是$\ln(a)(x-a)^0$，不方便合并到级数里因此单独列出）

注意到对任意的$x \in (0,2a)$都有$\frac{a-x}{a} \in (-1,1)$，根据定理15.5.6我们知道有：

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \ln(a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{a-x}{a}\right)^n \\
&= \ln(a) + \ln\left(1 - \frac{a-x}{a}\right) \\
&= \ln(a - a + x) \\
&= \ln(x)
\end{aligned}
$$

也即有幂级数P是在$(0, 2a)$上收敛于$\ln$的，即$\ln$是在a处实解析的。然后由于我们假设$a \in (0, +\infty)$是任意的，因此这表明自然对数函数$\ln$在$(0, +\infty)$上是实解析的，证明完毕。

15.5.7 设$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$是正的实解析函数，它使得对于所有的$x \in \mathbb{R}$都有$f'(x) = f(x)$。证明：存在一个正数$C$使得$f(x) = C\mathrm{e}^x$，并说明理由（提示：主要有三种不同的证明思路，其一是利用对数函数，其二是利用函数e^{-x}，第三种方法是利用幂级数。当然，写题的时候只需要给出一种证明方法即可）

我们三种方法都给出一个参考的解答：

- 利用对数函数。

考虑定义函数$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$有：

$$g(x) := \ln(f(x))$$

根据链式法则（命题10.1.15），我们知道g是在$\mathbb{R}$上可微的，并且可以求导有：

$$g'(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)} = 1$$

从而使用微积分第二基本定理（命题11.9.4），我们可以得到g'的原函数$g(x) = x + c$（其中c是一个常数，事实上，它等于$\ln(f(0))$）。进而即有：

$$\ln(f(x)) = x + c \iff f(x) = \mathrm{e}^{x+c} = C\mathrm{e}^x (C := \mathrm{e}^c)$$

也即题目结论得证。

- 利用函数e^{-x}。

考虑定义函数$g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$有：

$$g(x) := f(x)\mathrm{e}^{-x}$$

根据微分的运算定律（命题10.1.13(d)），我们知道g是在$\mathbb{R}$上可微的，并且可以求导有：

$$g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{-x} - f(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$$

从而我们知道g必然是一个常数函数（也即存在实数C使得$g(x) = C$对任意的$x \in \mathbb{R}$成立），于是有：

$$f(x)\mathrm{e}^{-x} = C \iff f(x) = C\mathrm{e}^x$$

也即题目结论得证。

- 利用幂级数。

由于f是在$\mathbb{R}$上实解析的，于是我们考虑它在0处的幂级数，根据泰勒公式（命题15.2.10）我们有：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

由于$f'(x)=f(x)$，因此显然我们可以归纳得到对任意的$k\geq 0$都有$f^{(k)}(0)=f(0)$，于是上面的结论可以进一步化为：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(0)}{n!}x^n=f(0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

再根据exp函数的定义，我们令$C:=f(0)$，于是即有：

$$f(x)=C\mathrm{e}^x$$

也即题目结论得证。

15.5.8 设$m>0$是一个整数。证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^m}=+\infty$$

（提示：当$x\to+\infty$时，$\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{(x+1)^m}$和$\frac{\mathrm{e}^x}{x^m}$的比值会如何变化？）

我们记有$a_n:=\frac{\mathrm{e}^n}{n^m}$，然后考察序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$中前后两项的比值：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)^m}}{\frac{\mathrm{e}^n}{n^m}}=\mathrm{e}\left(\frac{n}{n+1}\right)^m$$

由于序列$\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^m\right)_{n=1}^{\infty}$是收敛于1的，因此我们知道存在整数$N_0\geq 1$使得对任意$n\geq N_0$都有$\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^m-1\right|<1-\frac{2}{e}$（也就是有$\left(\frac{n}{n+1}\right)^m>\frac{2}{e}$），于是对任意的$n\geq N_0$都有：

$$\forall\, n\geq N_0,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}>e\frac{2}{e}=2\implies a_n>2^{n-N_0}a_{N_0}$$

从而我们可以得到对任意的实数M都存在整数$N:=\lfloor N_0+M/a_{N_0}\rfloor+1$，对任意的$n\geq N$有：

$$n\geq M/a_{N_0}\wedge n\geq N_0\implies a_n>2^{n-N_0}a_{N_0}>(n-N_0)a_{N_0}>\frac{M}{a_{N_0}}a_{N_0}=M$$

于是得证有$\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$，也即有$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^m}=+\infty$，题目结论得证。

15.5.9 设$P(x)$是一个多项式，并设$c>0$。证明：存在一个实数$N>0$，使得对所有的$x>N$都有$\mathrm{e}^{cx}>|P(x)|$。因此，一个指数型增长的函数，无论其增长速度c有多小，最终都将超过任何一个给定的多项式$P(x)$，无论这个$P(x)$有多大（提示：利用习题15.5.8）

我们设$P(x)$具有形式：

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i\qquad(\forall\,0\leq i\leq n,c_i\in\mathbb{R}\wedge c_n\neq 0)$$

于是相应的，应该有：

$$\forall x \in \mathbb{R}, |P(x)| \leq \sum_{i=0}^{n} |c_i||x|^i$$

而我们知道习题15.5.8的证明同样可以得到结论对任意的$0 \leq i \leq n$都有$\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{y^i}{\mathrm{e}^y} = 0$；而通过求导可知对任意的$0 \leq i \leq n$都有$\dfrac{y^i}{\mathrm{e}^y}$是关于$y$在$(i, +\infty)$上严格单调递减的函数。因此，对任意的$0 \leq i \leq n$与任意的$\varepsilon > 0$，我们知道存在自然数$N_i \geq i$使得对任意实数$y \geq N_i$都有：

$$\left|\frac{y^i}{\mathrm{e}^y}\right| \leq \frac{\varepsilon c^i}{(n+1)|c_i|}$$

也即对任意的$cx \geq N_i$都有$\left|\dfrac{(cx)^i}{\mathrm{e}^{(cx)}}\right| \leq \dfrac{\varepsilon c^i}{(n+1)|c_i|} \iff \dfrac{|c_i||x|^i}{\mathrm{e}^{cx}} \leq \dfrac{\varepsilon}{n+1}$。于是令$N := \max\{N_i/c : 0 \leq i \leq n\}$，对任意的实数$x \geq N$都有：

$$\frac{|P(x)|}{\mathrm{e}^{cx}} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{|c_i||x|^i}{\mathrm{e}^{cx}} \leq \frac{\varepsilon}{n+1} \cdot (n+1) = \varepsilon$$

综上我们证明了有极限$\lim\limits_{x \to +\infty; x \in (0, +\infty)} \dfrac{|P(x)|}{\mathrm{e}^{cx}} = 0$。特别地，令$\varepsilon = 0.5$则上面的结论表明存在实数$N > 0$使得对任意的$x > N$都有$\dfrac{|P(x)|}{\mathrm{e}^{cx}} \leq 0.5 \implies |P(x)| < \mathrm{e}^{cx}$，也即题目结论得证。

15.5.10 设$f : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是指数函数$f(x, y) := x^y$，证明：$f$是连续的（提示：注意命题9.4.10和命题9.4.11只表明了f关于每个变量都是连续的，但是这并不能证明你的结论，就像我们在习题13.2.11里面展示的那样；最容易的解决方案是将f写成$f(x, y) = \exp(y \ln x)$，利用exp和ln的连续性。你还可以尝试挑战一下自己，在不使用对数函数的前提下完成本题的证明）

为了证明f是连续的，使用exp和ln的方法，可以考虑将f写为下面的形式：

$$f(x, y) = x^y = \mathrm{e}^{y \ln x} = \exp(y \ln x) = \exp(\pi_2(x, y) \ln(\pi_1(x, y)))$$

这里我们引用了习题13.2.4中的记号。注意到由于exp，ln，π_1和π_2都是连续的，因此反复引用命题13.1.7和命题13.2.3我们可以得到f是连续的，这也就证明了这个结论。

如果不使用exp和ln函数的连续性，则考虑任意的$(x_0, y_0) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$和任意的$\varepsilon > 0$。根据命题9.4.10可知函数$g(y) := {x_0}^y$是在$y_0$处连续的，因此存在$a > 0$使得对任意的$|y - y_0| \leq a$都有：

$$|{x_0}^y - {x_0}^{y_0}| \leq \frac{\varepsilon}{5}$$

然后对$y_0 - a$和$y_0 + a$，根据命题9.4.11我们知道对应的函数$h_1(x) := x^{y_0 - a}$和$h_2(x) := x^{y_0 + a}$都是在x_0处连续的，因此分别存在实数$b_1 > 0$与$b_2 > 0$使得对任意的$x \in (0, +\infty)$有：

$$|x - x_0| \leq b_1 \implies |x^{y_0 - a} - {x_0}^{y_0 - a}| \leq \frac{\varepsilon}{5}$$
$$|x - x_0| \leq b_2 \implies |x^{y_0 + a} - {x_0}^{y_0 + a}| \leq \frac{\varepsilon}{5}$$

于是令有$b := \min(b_1, b_2)$与$\delta := \min(a, b)$，然后设$(x, y) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$满足$d_{l^2}((x, y), (x_0, y_0)) \leq \delta$。显然有$|x - x_0| \leq \delta$和$|y - y_0| \leq \delta$成立，于是可以根据绝对值三角不等式有：

$$|x^y - {x_0}^{y_0}| \leq |x^y - {x_0}^y| + |{x_0}^y - {x_0}^{y_0}|$$

由于$|y-y_0|\le\delta\le a$，因此我们可以得到$|{x_0}^y-{x_0}^{y_0}|\le\frac{\varepsilon}{5}$；另一方面，由于$y$给定因此根据命题6.7.3，我们知道$x^y$与${x_0}^y$都应该在$(x_0-\delta)^y$与$(x_0+\delta)^y$之间，从而有$|x^y-{x_0}^y|\le|(x_0-\delta)^y-(x_0+\delta)^y|$；然后同理，由于$x_0-\delta$和$x_0+\delta$都是给定的，因此根据命题6.7.3可得$(x_0-\delta)^y$处于$(x_0-\delta)^{y_0+a}$与$(x_0-\delta)^{y_0-a}$之间与$(x_0+\delta)^y$处于$(x_0+\delta)^{y_0+a}$与$(x_0+\delta)^{y_0-a}$之间，于是有：

$$|(x_0-\delta)^y-(x_0+\delta)^y|\le M-m$$

其中$M:=\max(S)$，$m:=\min(S)$且$S:=\{(x_0-\delta)^{y_0-a},(x_0-\delta)^{y_0+a},(x_0+\delta)^{y_0-a},(x_0+\delta)^{y_0+a}\}$。然后以$(x_0-\delta)^{y-a}$为例，我们注意到有：

$$\begin{aligned}|(x_0-\delta)^{y_0-a}-{x_0}^{y_0}|&\le|(x_0-\delta)^{y_0-a}-{x_0}^{y_0-a}|+|{x_0}^{y_0-a}-{x_0}^{y_0}|\\&\le\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}\quad(|(y_0-a)-y_0|\le a\wedge|(x_0-\delta)-x_0|\le b)\\&=\frac{2\varepsilon}{5}\end{aligned}$$

因此我们可以得到S中任意一个数字都属于$\left[{x_0}^{y_0}-\frac{2\varepsilon}{5},{x_0}^{y_0}+\frac{2\varepsilon}{5}\right]$，也即有$M-m\le\frac{4\varepsilon}{5}$。于是综上我们可以得到：

$$|x^y-{x_0}^{y_0}|\le\frac{4\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon$$

总结一下即有：对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，只要$(x,y)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}$满足$d_{l^2}((x,y),(x_0,y_0))\le\delta$就有$|x^y-{x_0}^{y_0}|\le\varepsilon$。这表明$f(x,y):=x^y$是在任意的$(x_0,y_0)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}$处连续的，也即$f$是连续的。

本节相关跳转

[实分析 6.7 实数的指数运算 II]

[实分析 7.1 有限级数]

[实分析 7.3 非负数的和]

[实分析 7.5 根值判别法与比值判别法]

[实分析 9.4 连续函数]

[实分析 10.1 基本定义]

[实分析 10.4 反函数及其导数]

[实分析 13.2 连续性和乘积空间]

[实分析 15.1 形式幂级数]

[实分析 15.4 幂级数的乘法]