11.8 黎曼-斯蒂尔杰斯积分

摘录

1. （分段常值黎曼-斯蒂尔杰斯积分独立于划分？）设I是一个有界区间，$\alpha : X \to \mathbb{R}$是定义在某个包含$I$的区域$X$上的函数，并且设$f : I \to \mathbb{R}$是一个函数。如果$P$和$P'$都是$I$的划分，并且$f$关于$P$和$P'$都是分段常值函数，那么有$p.c. \int_{[P]} f \mathrm{d}\alpha = p.c. \int_{[P']} f \mathrm{d}\alpha$。
2. （区间上的分段常值黎曼-斯蒂尔杰斯积分？）设I是一个有界区间，$\alpha : X \to \mathbb{R}$是定义在某个包含$I$的区域$X$上的函数，并且设$f : I \to \mathbb{R}$是$I$上的分段常数函数。那么定义有：

$$p.c. \int_I f \mathrm{d}\alpha := p.c. \int_{[P]} f \mathrm{d}\alpha$$

其中P是I的任意一个使得f是关于P的分段常数函数的划分。

3. （黎曼-斯蒂尔杰斯积分满足积分定律？）若令有α是一个**单调递增**的函数，那么将积分$p.c. \int_I f$全部替换为$p.c. \int_I f \mathrm{d}\alpha$，长度$|I|$替换为$\alpha$-长度$\alpha[I]$时，定理11.2.16中的全部结论仍然成立。
4. （上黎曼-斯蒂尔杰斯积分与下黎曼-斯蒂尔杰斯积分？）设I是一个有界区间，$\alpha : X \to \mathbb{R}$是定义在某个包含$I$的区域$X$上的单调递增函数，并且设$f : I \to \mathbb{R}$是一个函数。那么定义**上黎曼-斯蒂尔杰斯积分**$\overline{\int}_I f \mathrm{d}\alpha$与**下黎曼-斯蒂尔杰斯积分**$\underline{\int}_I f \mathrm{d}\alpha$为：

$$\overline{\int}_I f \mathrm{d}\alpha := \inf\left\{p.c. \int_I g \mathrm{d}\alpha : g\text{是在}I\text{上从上方控制}f\text{的分段常数函数}\right\}$$
$$\underline{\int}_I f \mathrm{d}\alpha := \sup\left\{p.c. \int_I g \mathrm{d}\alpha : g\text{是在}I\text{上从上方控制}f\text{的分段常数函数}\right\}$$

5. （黎曼-斯蒂尔杰斯可积？）设I是一个有界区间，$\alpha : X \to \mathbb{R}$是定义在某个包含$I$的区域$X$上的单调递增函数，并且设$f : I \to \mathbb{R}$是一个函数。如果$f$的上黎曼-斯蒂尔杰斯积分与下黎曼-斯蒂尔杰斯相等，则称f在I上关于α是**黎曼-斯蒂尔杰斯可积**的，此时令：

$$\int_I f \mathrm{d} := \alpha \overline{\int}_I f \mathrm{d}\alpha = \underline{\int}_I f \mathrm{d}\alpha$$

（注：若取$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是恒等函数$\alpha(x) := x$，则黎曼-斯蒂尔杰斯积分就等于黎曼积分，因此黎曼-斯蒂尔杰斯积分是黎曼积分的一个推广（在推论11.10.3中还会对这两种积分做另外的比较），因此有时候也写有黎曼积分$\int_I f$为$\int_I f \mathrm{d}x$或$\int_I f(x) \mathrm{d}x$；大部分黎曼积分的理论都可以直接推广到黎曼-斯蒂尔杰斯积分中，只需要将黎曼积分替换成黎曼-斯蒂尔杰斯积分，并把长度替换成α-长度即可，但但是也有些例外。例如，当α在某些关键的地方间断时，定理11.4.1(g)，命题11.5.3以及命题11.5.6不一定成立（例如，如果f，α在同一点处间断，那么$\int_I f \mathrm{d}\alpha$可能没有定义），但是定理11.5.1依旧成立）

定义

1. （11.8.1 α-长度）设I是一个有界区间，并且设$\alpha : X \to \mathbb{R}$是定义在某个包含$I$的区域$X$上的函数。则定义区间$I$的**$\alpha$-长度**$\alpha[I]$如下：若$I$是一个单点集或者空集，则令$\alpha[I] := 0$；若$I$是一个形如$[a, b]$，$[a, b)$，$(a, b]$或$(a, b)$的区间（其中$b > a$），那么令$\alpha[I] = \alpha(b) - \alpha(a)$。

（注：若取$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是恒等函数$\alpha(x) := x$，则对于任意有界区间$I$都有$\alpha[I] = |I|$，从而区间长度的概念是$\alpha$-长度的一个特殊情形；有时候也会用$\alpha|_a^b$或者$\alpha(x)|_{x=a}^{x=b}$的写法来替代$\alpha[[a, b]]$）

2. （11.8.5 分段常值黎曼-斯蒂尔杰斯积分）设I是一个有界区间，P是I的一个划分，$\alpha : X \to \mathbb{R}$是定义在某个包含$I$的区域$X$上的函数，并且设$f : I \to \mathbb{R}$是关于$P$的分段常数函数，那么定义有：

$$p.c.\int_{[P]} f \mathrm{d}\alpha := \sum_{J\in P} c_J\alpha[J]$$

其中对任意$J \in P$，我们令有c_J为f在J上的常数值。

命题

1. （11.8.4）设I是一个有界区间，$\alpha : X \to \mathbb{R}$是定义在某个包含$I$的区域$X$上的函数，并且设$P$是$I$的一个划分，那么我们有：

$$\alpha[I] = \sum_{J\in P}\alpha[J]$$

课后习题

11.8.1 证明引理11.8.4（提示：修改定理11.1.13的证明）

> 由于划分总是有限的，于是我们可以对划分P的基数n做归纳证明：
>
> 对$n = 0$时的情况，此时可以注意到I必然是空集，因此此时的情况是平凡的，只能有$\alpha[\varnothing] = \sum_{J\in\varnothing}\alpha[J] = 0$。
>
> 于是归纳性地假设当$n = d$时结论成立，对$n = d + 1$的情况讨论：
>
> 若I为空集，则此时P中元素也只能全为空，此时的情况是平凡的，可以直接计算得到引理式左右两边均为0；若I为单点集，则P中也只能存在一个单点集，其余元素均为空，此时的情况也可以直接计算得到引理式左右两边均为0。
>
> 于是我们不妨令有I是一个形如$[a, b]$，$[a, b)$，$(a, b]$或(a, b)的区间（其中$a < b$）。于是此时可以讨论：
>
> - I是形如$[a, b]$，$(a, b]$的区间（因此$b \in I$）：
>
>   > 由于$b \in I$，因此此时根据划分的要求必然存在一个形如$[c, b]$，$(c, b]$或$\{b\}$的区间$K \in P$（其中$c \leq b$）。特别地此时$I - K$对应是一个形如$[a, c)/(a, c)$，$[a, c]/(a, c]$或$[a, b)/(a, b)$的区间（这取决于I的形式），并且$P - \{K\}$是$I - K$的一个基数为d的划分，因此根据归纳假设，我们有：
>   >
>   > $$\sum_{J\in P-\{K\}}\alpha[J] = \alpha[I - K] = \begin{cases}\alpha(c) - \alpha(a) & \text{if } I - K = [a, c)/(a, c)/[a, c]/(a, c] \\ \alpha(b) - \alpha(a) & \text{if } I - K = [a, b)/(a, b)\end{cases}$$
>   >
>   > 然后对K的情景对应讨论我们有：
>   >
>   > $$\alpha[K] = \begin{cases}\alpha(b) - \alpha(c) & \text{if } K = [c, b]/(c, b] \\ 0 & \text{if } K = \{b\}\end{cases}$$
>   >
>   > 注意上面的"/"表示可能的情景而不是除号。
>   >
>   > 而无论是哪种情形，最终都可以得到：
>   >
>   > $$\begin{aligned}\sum_J \alpha[J] &= \sum_{J\in P-\{K\}}\alpha[J] + \alpha[K] \\ &= \alpha[I - K] + \alpha[K] \\ &= \alpha(b) - \alpha(a) \\ &= \alpha[I]\end{aligned}$$
>   >
>   > 于是此情景下，我们有当$\#(P) = d + 1$时同样成立结论。
>
> - I是形如$[a, b)$，(a, b)的区间（因此$b \notin I$）：

> > 根据习题11.1.3的结论必然存在一个形如$[c,b)$或(c,b)的区间$K\in P$（其中$c\leq b$）。特别地此时$I-K$对应是一个形如$[a,c)/(a,c)$或$[a,c]/(a,c]$的区间（这取决于I的形式），并且$P-\{K\}$是$I-K$的一个基数为d的划分，因此根据归纳假设，我们有：
> >
> > $$\sum_{J\in P-\{K\}}\alpha[J]=\alpha[I-K]=\alpha(c)-\alpha(a)$$
> >
> > 然后对K的情景对应讨论我们有：
> >
> > $$\alpha[K]=b-c$$
> >
> > 注意上面的"/"表示可能的情景而不是除号，对$b=c$的情况$K=\varnothing$，$\alpha[K]=0=b-b$，因此上面的结论总是有效的。
> >
> > 而无论是哪种情形，最终都可以得到：
> >
> > $$\begin{aligned}\sum_J\alpha[J]&=\sum_{J\in P-\{K\}}\alpha[J]+\alpha[K]\\&=\alpha[I-K]+\alpha[K]\\&=\alpha(b)-\alpha(a)\\&=\alpha[I]\end{aligned}$$
> >
> > 于是此情景下，我们有当$\#(P)=d+1$时同样成立结论。
>
> 综上，于是归纳假设得证，综合可以得到归纳得证，对任意的划分P都有$\alpha[I]=\sum\limits_{J\in P}\alpha[J]$成立，于是引理11.8.4得证。

11.8.2 叙述并证明关于黎曼-斯蒂尔杰斯积分的命题11.2.13

> 关于黎曼-斯蒂尔杰斯积分的命题11.2.13：
>
> > 设I是一个有界区间，$\alpha:X\to\mathbb{R}$是定义在某个包含I的区域X上的函数，并且设$f:I\to\mathbb{R}$是一个函数。如果P和P'都是I的划分，并且f关于P和P'都是分段常值函数，那么有$p.c.\int_{[P]}f\mathrm{d}\alpha=p.c.\int_{[P']}f\mathrm{d}\alpha$。
>
> ---
>
> 如同在习题11.2.3中证明命题11.2.13的方法，我们先证明一个辅助结论，然后通过这个结论直接导出关于黎曼-斯蒂尔杰斯积分的命题11.2.13成立，从而分段常值黎曼-斯蒂尔杰斯积分是与划分无关的。
>
> > 辅助结论：
> >
> > 设I是一个有界区间，$\alpha:X\to\mathbb{R}$是定义在某个包含I的区域X上的函数，并且设$f:I\to\mathbb{R}$是一个函数。如果P和P'都是I的划分，f关于P和P'都是分段常值函数，并且P'是比P更细的划分，那么有$p.c.\int_{[P]}f\mathrm{d}\alpha=p.c.\int_{[P']}f\mathrm{d}\alpha$。
>
> 在习题11.2.3中我们已经证明了对任意$K\in P$，形如$S_K:=\{K\in P':K\neq\varnothing\}$的集合构成了$J$的一个划分，并且有结论：
>
> $$\bigcup_{K\in P}S_K=\{J\in P':J\neq\varnothing\}$$
>
> 于是根据定义11.2.9，我们先可以计算$p.c.\int_{[P]}f\mathrm{d}\alpha$有：
>
> $$p.c.\int_{[P]}f\mathrm{d}\alpha=\sum_{K\in P}c_K\alpha[K]$$
>
> 其中对任意$K\in P$，我们令有c_K为f在K上的常数值。然后使用定理11.8.4与$\alpha[\varnothing]=0$我们可以化简有：

$$
\begin{aligned}
\sum_{K\in P} c_K\alpha[K] &= \sum_{K\in P;K\neq\varnothing} c_K\alpha[K] + \sum_{K\in P;K=\varnothing} c_K\alpha[K] \\
&= \sum_{K\in P;K\neq\varnothing}\left[c_K\sum_{J\in S_K}\alpha[K]\right] + 0 \\
&= \sum_{K\in P;K\neq\varnothing}\left[\sum_{J\in S_K} c_K\alpha[J]\right]
\end{aligned}
$$

又考虑到对任意非空区间K_1，$K_2\in P$，S_{K_1}与S_{K_2}都是不相交的，于是根据有限和的加和公式与辅助结论1，上面的式子可以化为：

$$
\begin{aligned}
\sum_{K\in P;K\neq\varnothing}\left[\sum_{J\in S_K} c_K\alpha[J]\right] &= \sum_{J\in\bigcup_{K\in P;K\neq\varnothing} S_K} c_{K(J)}\alpha[J] \\
&= \sum_{J\in P';J\neq\varnothing} c_{K(J)}\alpha[J]
\end{aligned}
$$

这里我们令有$c_{K(J)}$为f在K上的常数值，其中$K\in P$满足$J\in S_K$成立，显然这种指定是唯一的。考虑到$J\in S_K$表明$J\subseteq K$，于是由于f在K上是常值的可以推知f在K的子集I上也是常值的，并且它们的常数值相同，于是上面的式子又可以化为：

$$
\sum_{J\in P';J\neq\varnothing} c_{K(J)}\alpha[J] = \sum_{J\in P';J\neq\varnothing} c_J\alpha[J] + 0 = \sum_{J\in P'} c_J\alpha[J]
$$

其中对任意$J\in P'$，我们令有c_J为f在J上的常数值。根据定义，上式右端就是$p.c.\int_{[P']} f\mathrm{d}\alpha$，于是结论得证。

然后我们来证明关于黎曼-斯蒂尔杰斯积分的命题11.2.13，我们知道公共加细$P\#P'$是比P和P'都细的划分，因此使用辅助结论可以得到：

$$
p.c.\int_{[P]} f\mathrm{d}\alpha = p.c.\int_{[P\#P']} f\mathrm{d}\alpha = p.c.\int_{[P']} f\mathrm{d}\alpha
$$

因此关于黎曼-斯蒂尔杰斯积分的命题11.2.13是成立的。

11.8.3 叙述并证明关于黎曼-斯蒂尔杰斯积分的定理11.2.16

关于黎曼-斯蒂尔杰斯积分的定理11.2.16：

> 设I是一个有界区间，$\alpha: X\to\mathbb{R}$是定义在某个包含I的区域X上的单调递增函数，并且设$f: I\to\mathbb{R}$与$g: I\to\mathbb{R}$都是I上的分段常数函数，那么有下面的命题成立：
>
> 1. $p.c.\int_I (f+g)\mathrm{d}\alpha = p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha + p.c.\int_I g\mathrm{d}\alpha$。
> 2. 对任意的实数c，有$p.c.\int_I (cf)\mathrm{d}\alpha = c\cdot\left(p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha\right)$。
> 3. $p.c.\int_I (f-g)\mathrm{d}\alpha = p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha - p.c.\int_I g\mathrm{d}\alpha$。
> 4. 如果对所有的$x\in I$均有$f(x)\geq 0$，那么$p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha\geq 0$。
> 5. 如果对所有的$x\in I$均有$f(x)\geq g(x)$，那么$p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha\geq p.c.\int_I g\mathrm{d}\alpha$。
> 6. 设J是一个包含I的有界区间（即$I\subseteq J$），并且设$F: J\to\mathbb{R}$是函数：
>
> $$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x\in I \\ 0 & \text{if } x\notin I \end{cases}$$
>
>   那么F是J上的分段常数函数，并且$p.c.\int_J F\mathrm{d}\alpha = p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha$。

> 7. 如果$\{J,K\}$是I的一个划分，它将I分成两个区间J和K，那么函数$f|_J:J\to\mathbb{R}$与$f|_K:K\to\mathbb{R}$分别是J上和K上的分段常数函数，并且：
>
> $$p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha=p.c.\int_J f|_J\mathrm{d}\alpha+p.c.\int_K f|_K\mathrm{d}\alpha$$

类似习题11.2.4中所述，由于分段常值黎曼-斯蒂尔杰斯积分是关于划分无关的，因此我们不失一般性地假设f和g都是关于I的划分P的分段常数函数，并将它们在区间I上的黎曼-斯蒂尔杰斯积分转变为关于划分P的黎曼-斯蒂尔杰斯积分，因此在下面不特意强调时我们都默认这个前提，然后将令有h_J表示分段常数函数h在J上的常数值，逐条证明：

---

1. $p.c.\int_I(f+g)\mathrm{d}\alpha=p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha+p.c.\int_I g\mathrm{d}\alpha$。

即证明：

$$\sum_{J\in P}(f+g)_J\alpha[J]=\sum_{J\in P}f_J\alpha[J]+\sum_{J\in P}g_J\alpha[J]$$

由于我们有$(f+g)_J\alpha[J]=f_J\alpha[J]+g_J\alpha[J]$对任意$J\in P$都成立，因此根据有限和运算法则（命题7.1.11(f)）可以直接得证结论成立。

---

2. 对任意的实数c，有$p.c.\int_I(cf)\mathrm{d}\alpha=c\cdot\left(p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha\right)$。

即证明：

$$\sum_{J\in P}(cf)_J\alpha[J]=c\sum_{J\in P}f_J\alpha[J]$$

由于我们有$(cf)_J\alpha[J]=c\cdot f_J\alpha[J]$对任意$J\in P$都成立，因此根据有限和运算法则（命题7.1.11(g)）可以直接得证结论成立。

---

3. $p.c.\int_I(f-g)\mathrm{d}\alpha=p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha-p.c.\int_I g\mathrm{d}\alpha$。

即证明：

$$\sum_{J\in P}(f-g)_J\alpha[J]=\sum_{J\in P}f_J\alpha[J]-\sum_{J\in P}g_J\alpha[J]$$

由于我们有$(f-g)_J\alpha[J]=f_J\alpha[J]+(-g_J\alpha[J])$对任意$J\in P$都成立，因此根据有限和运算法则（命题7.1.11(f)）可以直接得证结论成立。

---

4. 如果对所有的$x\in I$均有$f(x)\geq 0$，那么$p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha\geq 0$。

即证明：

$$\sum_{J\in P}f_J\alpha[J]\geq 0$$

由于$\alpha[J]$是非负的，因此对任意$J\in P$都有$f_J\alpha[J]\geq 0$，于是考虑取常值函数$g(x):=0$，于是根据有限和运算法则（命题7.1.11(h)）可以直接得证结论。

---

5. 如果对所有的$x\in I$均有$f(x)\geq g(x)$，那么$p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha\geq p.c.\int_I g\mathrm{d}\alpha$。

即证明：

$$\sum_{J\in P} f_J\alpha[J] \geq \sum_{J\in P} g_J\alpha[J]$$

由于$\alpha[J]$是非负的，因此对任，意$J\in P$都有$f_J\alpha[J]\geq g_J\alpha[J]$，于是根据有限和运算法则（命题7.1.11(h)）可以直接得证结论。

---

6. 设J是一个包含I的有界区间（即$I\subseteq J$），并且设$F: J\to\mathbb{R}$是函数：

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x\in I \\ 0 & \text{if } x\notin I \end{cases}$$

   那么F是J上的分段常数函数，并且$p.c.\int_J F\mathrm{d}\alpha = p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha$。

$I=\varnothing$时结论是平凡的，显然有$p.c.\int_J F\mathrm{d}\alpha = p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha = 0$，于是只需要考虑$I\neq\varnothing$的情况。

在习题11.2.4中我们已经证明了：若f是关于划分P_I的分段常数函数，则F是关于划分$P_J:=\{A,B\}\cup P_I$的分段常数函数，其中$A:=\{x\in J:\forall y\in I, x<y\}$，$B:=\{x\in J:\forall y\in I, x>y\}$。

于是根据定义11.8.5，计算有：

$$\begin{aligned} p.c.\int_J F\mathrm{d}\alpha &= \sum_{K\in P_J} F_J\alpha[J] \\ &= \sum_{K\in P_I} F_J\alpha[J] + F_A\alpha[A] + F_B\alpha[B] \\ &= \sum_{K\in P_I} f_J\alpha[J] + 0 + 0 \\ &= p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

于是证明完毕。

---

7. 如果$\{J,K\}$是I的一个划分，它将I分成两个区间J和K，那么函数$f|_J: J\to\mathbb{R}$与$f|_K: K\to\mathbb{R}$分别是J上和K上的分段常数函数，并且：

$$p.c.\int_I f\mathrm{d}\alpha = p.c.\int_J f|_J\mathrm{d}\alpha + p.c.\int_K f|_K\mathrm{d}\alpha$$

在习题11.2.4中我们已经证明$f|_J$与$f|_K$分别是J上和K上的分段常数函数，并且证明了：若I的划分P使得f关于P是分段常数函数，那么$P':=P\#\{I,K\}$也使得f关于P'是分段常数函数，并且函数$f|_J$是关于划分$P_J:=\{S\in P': S\subseteq J\text{且}S\neq\varnothing\}$的分段常数函数，函数$f|_K$是关于划分$P_K:=\{S\in P': S\subseteq K\text{且}S\neq\varnothing\}$的分段常数函数。于是只需要证明题式成立，题式即证明：

$$\sum_{S\in P'} f_S\alpha[S] = \sum_{S\in P_J} f_S\alpha[S] + \sum_{S\in P_K} f_S\alpha[S]$$

其中由于$f|_J$，$f|_K$，f只是定义域不同，但是在对应区间上常数值不会变，因此我们也可以用f_S来替代$(f|_J)_S$与$(f|_K)_S$的繁琐写法。

由于$|\varnothing|=0$，于是注意到：

$$\sum_{S\in P'} f_S\alpha[S] = \sum_{S\in P';S\neq\varnothing} f_S\alpha[S] + \sum_{S\in P';S=\varnothing} f_S\alpha[S] = \sum_{S\in P';S\neq\varnothing} f_S\alpha[S]$$

并且我们有$\{S\in P': S\neq\varnothing\} = P_J\cup P_K$与$P_J\cap P_K=\varnothing$，于是根据有限和运算性质（命题7.1.11(e)），我们可以直接得证结论。

11.8.4 叙述并证明关于黎曼-斯蒂尔杰斯积分的定理11.5.1（提示：证明过程中需要小心，在某些涉及长度$|J_k|$的地方，$|J_k|$应当保持不变，而在另外一些涉及长度$|J_k|$的地方，则应该把$|J_k|$替换成α-长度$\alpha[J_k]$。基本上，所有出现在求和符号内的$|J_k|$都应该替换成$\alpha[J_k]$，而其它的$|J_k|$都保持不变）

> 关于黎曼-斯蒂尔杰斯积分的定理11.5.1：
>
> > 设I是一个有界区间，$\alpha: X\to\mathbb{R}$是定义在某个包含I的区域X上的单调递增函数，并且设是$f: I\to\mathbb{R}$定义在I上的一致连续函数，那么f是黎曼-斯蒂尔杰斯可积的。
>
> ---
>
> 为了证明这个定理，我们还需要用到关于黎曼-斯蒂尔杰斯积分的引理11.3.3，在这个部分中我们先证明这个引理。
>
> > 关于黎曼-斯蒂尔杰斯积分的引理11.3.3：
> >
> > 设$\alpha: X\to\mathbb{R}$是定义在某个包含I的区域X上的单调递增函数，$f: I\to\mathbb{R}$是定义在有界区间I上的有界函数，它以实数M为界（即对全部的$x\in I$都有$-M\leq f(x)\leq M$成立），那么我们有：
> >
> > $$-M\alpha[I]\leq\overline{\int}_I f\mathrm{d}\alpha\leq\underline{\int}_I f\mathrm{d}\alpha\leq M\alpha[I]$$
> >
> > 特别地，上黎曼-斯蒂尔杰斯积分和下黎曼-斯蒂尔杰斯积分都是实数，即它们都不是无限的。
>
> 由于M是f的界，因此考虑分别定义I上的常数函数$g(x):=-M$与常数函数$h(x):=M$，根据上黎曼-斯蒂尔杰斯积分和下黎曼-斯蒂尔杰斯积分的定义即有：
>
> $$\begin{aligned}\overline{\int}_I f\mathrm{d}\alpha\leq p.c.\int_I h\mathrm{d}\alpha=M\alpha[I]\\ \underline{\int}_I f\mathrm{d}\alpha\geq p.c.\int_I g\mathrm{d}\alpha=-M\alpha[I]\end{aligned}$$
>
> 然后考虑对任意的g是从上方控制f的分段常数函数与任意的h是从下方控制f的分段常数函数，根据黎曼-斯蒂尔杰斯积分的定理11.2.16我们总是有：
>
> $$p.c.\int_I g\mathrm{d}\alpha\geq p.c.\int_I h\mathrm{d}\alpha$$
>
> 对这个结论，取g的下确界即可引申为$\overline{\int}_I f\mathrm{d}\alpha\geq p.c.\int_I h\mathrm{d}\alpha$对任意$h$是从下方控制$f$的分段常数函数成立，然后取$h$的上确界即可引申为$\overline{\int}_I f\mathrm{d}\alpha\geq\underline{\int}_I f\mathrm{d}\alpha$，于是结论得证。
>
> ---
>
> 可以使用和课本中类似的方法证明这个结论，即寻找所谓的“等长度划分”。
>
> 若I是空集或单点集则此情况是平凡的，必然能得出f是黎曼-斯蒂尔杰斯可积的并且$\int_I f\mathrm{d}\alpha=0$。于是只需要考虑$I$不是空集或单点集的情况，换言之$I$是一个形如$[a,b]$，$(a,b)$，$(a,b]$或$[a,b)$的区间（其中$a<b$）。我们以$I$是形如$(a,b)$的集合的情况做例子，并且在证明此情景结束后阐述其它情况下证明的区别。
>
> 由于f是一致连续的，从而根据一致连续函数的定义，对任意实数$\varepsilon>0$，都存在实数$\delta>0$使得对任意x，$x'\in I$若有$|x-x'|\leq\delta$则有$|f(x)-f(x')|\leq\varepsilon$。
>
> 根据阿基米德性质我们知道存在一个自然数n使得$n\cdot\delta>b-a\iff\delta>\dfrac{b-a}{n}$，于是令$d:=\dfrac{b-a}{n}$，然后定义集合$P$：
>
> $$P:=\{(a+md,a+(m+1)d]:m\in\mathbb{N}\wedge m<n-1\}\cup\{(a+(n-1)d,b)\}$$
>
> 显然对任意$J\in P$都有$|J|=d$，并且我们有P是(a,b)的一个划分，于是此时我们定义分段常数函数$\overline{f}: I\to\mathbb{R}$与分段常数函数$\underline{f}: I\to\mathbb{R}$有：

> $$\forall J\in P,\forall x\in J,\begin{cases}\overline{f}(x):=\sup\limits_{y\in J}f(y)\\ \underline{f}(x):=\inf\limits_{y\in J}f(y)\end{cases}$$
>
> 不难得到对任意$x\in(a,b)$都有$\overline{f}(x)\geq f(x)\geq \underline{f}(x)$，从而$\overline{f}$是从上方控制$f$的，$\underline{f}$是从下方控制$f$的。于是根据黎曼-斯蒂尔杰斯积分与下黎曼-斯蒂尔杰斯积分的定义有：
>
> $$\overline{\int}_I f\mathrm{d}\alpha\leq p.c.\int_I\overline{f}\mathrm{d}\alpha=\sum_{J\in P}\left(\sup_{y\in J}f(y)\right)\alpha[J]$$
> $$\underline{\int}_I f\mathrm{d}\alpha\geq p.c.\int_I\underline{f}\mathrm{d}\alpha=\sum_{J\in P}\left(\inf_{y\in J}f(y)\right)\alpha[J]$$
>
> 于是有$\overline{\int}_I f\mathrm{d}\alpha-\underline{\int}_I f\mathrm{d}\alpha\leq p.c.\int_I\overline{f}\mathrm{d}\alpha-p.c.\int_I\underline{f}\mathrm{d}\alpha$。然后可以计算得到：
>
> $$\begin{aligned}&p.c.\int_I\overline{f}\mathrm{d}\alpha-p.c.\int_I\underline{f}\mathrm{d}\alpha\\&=\sum_{J\in P}\left(\sup_{y\in J}f(y)-\inf_{y\in J}f(y)\right)\alpha[J]\end{aligned}$$
>
> 然后注意到：对任意$J\in P$，其中任意两个元素x，x'都有$|x-x'|\leq|J|<\delta$，从而有$|f(x)-f(x')|\leq\varepsilon$。换言之，对任意的$x\in J$，都有对任意的$x'\in J$都有：
>
> $$f(x')-\varepsilon\leq f(x)\leq f(x')+\varepsilon$$
>
> 进一步的，应该有对任意的$x'\in J$都有：
>
> $$\sup_{x\in J}f(x)\leq f(x')+\varepsilon\qquad\inf_{x\in J}f(x)\geq f(x')+\varepsilon$$
>
> 于是对任意$J\in P$都有$\sup\limits_{y\in J}f(y)-\inf\limits_{y\in J}f(y)\leq 2\varepsilon$。回到上面的式子，由于$\alpha[J]$始终是非负的，因此根据有限和运算法则（命题7.1.11(h)）与引理11.8.4有：
>
> $$\sum_{J\in P}\left(\sup_{y\in J}f(y)-\inf_{y\in J}f(y)\right)\alpha[J]\leq\sum_{J\in P}2\varepsilon\cdot\alpha[J]=2\varepsilon\sum_{J\in P}\alpha[J]=2\alpha[I]\varepsilon$$
>
> 于是对任意给出的实数$\varepsilon>0$我们都有$\overline{\int}_I f\mathrm{d}\alpha-\underline{\int}_I f\mathrm{d}\alpha\leq 2\alpha[I]\varepsilon$，于是通过引理11.3.3在黎曼-斯蒂尔杰斯积分下的形式我们可以推断得到只能有$\overline{\int}_I f\mathrm{d}\alpha=\underline{\int}_I f\mathrm{d}\alpha$，从而根据定义有一致连续函数$f$是在$I$形如$(a,b)$的情况下黎曼-斯蒂尔杰斯可积的。
>
> 对I形如$[a,b]$，$(a,b]$或$[a,b)$的情况，可以在上面的划分P中分别依据a，b是否属于I加入单点集$\{a\}$，$\{b\}$，然后在计算分段常值黎曼-斯蒂尔杰斯积分差$p.c.\int_I\overline{f}\mathrm{d}\alpha-p.c.\int_I\underline{f}\mathrm{d}\alpha$的时候可以注意到由于单点集的$\alpha$-长度为0，因此可以在求和中去掉包含单点集的项，于是后面的证明便与I形如(a,b)的情况一致。

11.8.5 设$\mathrm{sgn}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是符号函数：

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1&\text{if }x>0\\0&\text{if }x=0\\-1&\text{if }x<0\end{cases}$$

设$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$是一个连续函数。证明：f关于sgn是黎曼-斯蒂尔杰斯可积的，并且：

$$\int_{[-1,1]}f\mathrm{d}\,\mathrm{sgn}=2f(0)$$

（提示：对每一个$\varepsilon > 0$，找到从上方控制f和从下方控制f的分段常数函数，使得它们的黎曼-斯蒂尔杰斯积分是ε-接近于$2f(0)$的）

> 由于f是有界闭区间上的连续函数，从而根据定理9.9.16有f是一致连续的，进而根据命题9.9.15，f是有界的。于是不妨设实数M为f的界，从而对任意$x \in [-1, 1]$都有$-M \leq f(x) \leq M$成立。
>
> 由于f在0处是连续的，从而根据连续函数的要求（命题9.4.7），对任意给出的实数$\varepsilon > 0$，都存在$\delta > 0$使得对任意$x \in [-\delta, +\delta]$且$x \in [-1, 1]$，都有$|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon/2$，即$f(0) - \varepsilon/2 \leq f(x) \leq f(0) + \varepsilon/2$。特别地，即使有$\delta > 1$我们也可以直接取一个$\sigma$满足$\sigma < 1$得到在$[-1, 1]$的子区间$[-\sigma, \sigma]$上也成立这个结论，因此我们可以不失一般性的假定$\delta < 1$，从而$[-\delta, \delta]$是$[-1, 1]$的子区间，于是集合$P := \{[-1, -\delta), [-\delta, \delta], (\delta, 1]\}$显然是$[-1, 1]$的一个划分。
>
> 于是定义下面的分段常数函数$\overline{f} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$：
>
> $$\overline{f}(x) := \begin{cases} M & \text{if } x \notin [-\delta, \delta] \\ f(0) + \varepsilon/2 & \text{if } x \in [-\delta, \delta] \end{cases}$$
>
> 于是根据上面的讨论，显然有对任意$x \in [-1, 1]$都有$\overline{f}(x) \geq f(x)$，即$\overline{f}$是从上方控制$f$的函数。类似地我们定义另一个分段常数函数$\underline{f} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$：
>
> $$\underline{f}(x) := \begin{cases} -M & \text{if } x \notin [-\delta, \delta] \\ f(0) - \varepsilon/2 & \text{if } x \in [-\delta, \delta] \end{cases}$$
>
> 类似地我们也可以得到$\underline{f}$是从下方控制f的函数，于是根据上黎曼-斯蒂尔杰斯积分与下黎曼-斯蒂尔杰斯积分的定义（本节摘录4）与分段常值黎曼-斯蒂尔杰斯积分的定义，有：
>
> $$\begin{aligned} \overline{\int}_{[-1,1]} f \mathrm{d}\operatorname{sgn} &\leq p.c. \int_{[-1,1]} \overline{f} \mathrm{d}\operatorname{sgn} \\ &= \sum_{J \in P} c_J \cdot \operatorname{sgn}[J] \\ &= M \cdot (\operatorname{sgn}(-\delta) - \operatorname{sgn}(-1)) + \left(f(0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot (\operatorname{sgn}(\delta) - \operatorname{sgn}(-\delta)) + M \cdot (\operatorname{sgn}(1) - \operatorname{sgn}(\delta)) \\ &= 2f(0) + \varepsilon \end{aligned}$$
>
> $$\begin{aligned} \underline{\int}_{[-1,1]} f \mathrm{d}\operatorname{sgn} &\geq p.c. \int_{[-1,1]} \underline{f} \mathrm{d}\operatorname{sgn} \\ &= \sum_{J \in P} c_J \cdot \operatorname{sgn}[J] \\ &= -M \cdot (\operatorname{sgn}(-\delta) - \operatorname{sgn}(-1)) + \left(f(0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot (\operatorname{sgn}(\delta) - \operatorname{sgn}(-\delta)) - M \cdot (\operatorname{sgn}(1) - \operatorname{sgn}(\delta)) \\ &= 2f(0) - \varepsilon \end{aligned}$$
>
> 又由于上黎曼-斯蒂尔杰斯积分和下黎曼-斯蒂尔杰斯积分要满足$\underline{\int}_{[-1,1]} f \mathrm{d}\operatorname{sgn} \leq \overline{\int}_{[-1,1]} f \mathrm{d}\operatorname{sgn}$，并且由于$\varepsilon$是任取的与上/下黎曼-斯蒂尔杰斯积分值无关。综合可以得到f是关于sgn黎曼-斯蒂尔杰斯可积的，并且有：
>
> $$\int_{[-1,1]} f \mathrm{d}\operatorname{sgn} = \underline{\int}_{[-1,1]} f \mathrm{d}\operatorname{sgn} = \overline{\int}_{[-1,1]} f \mathrm{d}\operatorname{sgn} = 2f(0)$$
>
> 于是题目结论得证。

本节相关跳转

[实分析 11.1 划分]

[实分析 11.2 分段常数函数]

[实分析 11.4 黎曼积分的基本性质]

[实分析 11.5 连续函数的黎曼可积性]

[实分析 11.10 基本定理的推论]