15.1 形式幂级数

定义

1. （15.1.1 形式幂级数）设a是一个实数，任何形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

的级数都可以称为**以a为中心的形式幂级数**。其中c_0，c_1，$...$是与x无关的实数序列，我们称c_n是级数的**第n个系数**，级数中每一项$c_n(x-a)^n$都是关于实变量x的函数。

（注：说这些幂级数是形式的是因为还没有具体给出级数收敛在哪些x（这是在说什么？））

2. （15.1.3 收敛半径）设$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$是一个形式幂级数，则该级数的**收敛半径**$R$定义为：

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}}$$

并且在计算收敛半径时我们额外约定$\frac{1}{0}=+\infty$与$\frac{1}{+\infty}=0$。

命题

1. （15.1.6）设$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$是一个形式幂级数，并且设$R$是该级数的收敛半径，那么有：

> 1. （在收敛半径外发散）如果$x\in\mathbb{R}$满足$|x-a|>R$，那么对于这个x值，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$是发散的。
> 2. （在收敛半径内收敛）如果$x\in\mathbb{R}$满足$|x-a|<R$，那么对于这个x值，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$是绝对收敛的。
>
> 如果我们假定$R>0$（也就是说幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$至少在除$a$以外的一点处收敛），然后我们设$f:(a-R,a+R)\to\mathbb{R}$定义为$f(x):=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$，那么有下面的三条结论成立：
>
> 3. （在收敛半径内收敛）对于任意的$0<r<R$，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$在紧致区间$[a-r,a+r]$上一致收敛于$f$，
> 4. （幂级数的微分）函数f是在$(a-R,a+R)$上可微的。对任意的$0<r<R$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$在区间$[a-r,a+r]$上一致收敛于$f'$。
> 5. （幂级数的积分）对任意一个包含在$(a-R,a+R)$内的闭区间$[y,z]$，有
>
> $$\int_{[y,z]} f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-a)^{n+1}-(y-a)^{n+1}}{n+1}$$

（注：定理15.1.6的(a)和(b)也给出了一个求收敛半径的方法，即通过审敛法先判断收敛范围，再根据得到的收敛范围获取收敛半径；对$|x-a|=R$的情况，幂级数的收敛性是不确定的，收敛或发散都是有可能的；最后，定理15.1.6并没有说明幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$是在区间$(a-R,a+R)$上一致收敛的，事实上，这个定理只保证了幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$是在区间$(a-R,a+R)$上逐点收敛）

课后习题

15.1.1 证明定理15.1.6（提示：对(a)和(b)使用根值判别法（定理7.5.1）；对(c)使用魏尔斯特拉斯M判别法（定理14.5.7）；对(d)使用定理14.7.1；对(e)使用推论14.6.2）

> 在证明前我们需要证明一些辅助结论：
>
> > 结论1：对任意的实数集合E，设c是正实数，并设$L^+:=\sup(E)$与$L^-:=\inf(E)$。那么我们有
> >
> > $$\sup\{c\cdot e:e\in E\}=c\cdot L^+$$
> > $$\inf\{c\cdot e:e\in E\}=c\cdot L^-$$
> >
> > 证明：
> >
> > 我们只证明上确界的结论，对下确界的讨论是类似且显然的。对任意的$e\in E$，根据上确界的定义我们有$e\leq L^+$，由于c是正数因此也有$c\cdot e\leq c\cdot L^+$，这表明$c\cdot L^+$是$\{c\cdot e:e\in E\}$的一个上界；另一方面，对任意M是$c\cdot L^+$是$\{c\cdot e:e\in E\}$的上界，我们有对任意的$e\in E$都有$c\cdot e\leq M\implies e\leq M/c$，即$M/c$是$E$的上界，进而由上确界定义有$M/c\geq L^+\implies M\geq c\cdot L^+$，于是$L^+$是最小的上界。根据上确界的定义，即有$c\cdot L^+$是$\{c\cdot e:e\in E\}$的上确界。
> >
> > 于是证明完毕。
> >
> > ---
> >
> > 结论2：$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$。
> >
> > 证明：
> >
> > 首先根据幂次运算的性质我们知道对任意的$n\geq 1$都有$n^{\frac{1}{n}}\geq 1$，因此我们不妨对任意的$n\geq 1$将$n^{\frac{1}{n}}$写为$1+a_n$的形式，其中a_n是一个非负数，然后根据二项式公式（参见习题7.1.4）我们有：
> >
> > $$\begin{aligned}n=(1+a_n)^n&=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}a_n^m\\&\geq\frac{n(n-1)}{2}a_n^2\end{aligned}$$
> >
> > （大于等于号是通过a_n的非负性确定的）上面的不等式也即有：
> >
> > $$n\geq\frac{n(n-1)}{2}a_n^2\implies a_n\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$
> >
> > 结合$a_n\geq 0$，根据夹逼定理即可得到$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，也即
> >
> > $$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}1+a_n=1$$

> 于是证明完毕。

然后逐条证明：

---

1. 如果$x \in \mathbb{R}$满足$|x-a| > R$，那么对于这个x值，级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$是发散的。

使用根值判别法，考虑令

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty} |c_n(x-a)^n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}|x-a|$$

而根据辅助结论1，由于$|x-a|$是与n无关的正数，因此根据上极限的定义我们显然可以得到

$$\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}|x-a| = |x-a| \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \implies \alpha = \frac{|x-a|}{R}$$

由于$|x-a| > R$，于是即有$\alpha > 1$，从而根据根值判别法我们知道级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$不是条件收敛的，也即$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$是发散的。

---

2. 如果$x \in \mathbb{R}$满足$|x-a| < R$，那么对于这个x值，级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$是绝对收敛的。

同结论(a)的讨论过程，当条件变更为$|x-a| < R$时我们可以得到$\alpha < 1$，于是根据根值判别法我们知道级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$是绝对收敛的。

---

3. 对于任意的$0 < r < R$，级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$在紧致区间$[a-r, a+r]$上一致收敛于$f$，于是$f$是在$(a-R, a+R)$上连续的。

考虑使用魏尔斯特拉斯M判别法，对任意的$n \geq 0$，根据定义上确界范数有：

$$\|c_n(x-a)^n\|_\infty = \sup\{|c_n(x-a)^n| : x \in [a-r, a+r]\}$$

而根据我们的辅助结论，可以进一步化简得到：

$$\|c_n(x-a)^n\|_\infty = |c_n| \cdot \sup\{|x-a|^n : x \in [a-r, a+r]\}$$

而当$x \in [a-r, a+r]$时我们由$|x-a| \in [0, r]$，从而根据幂次运算的法则我们知道$|x-a|^n \leq r^n$，从而我们有：

$$\|c_n(x-a)^n\|_\infty \leq |c_n|r^n$$

此时使用根值判别法，利用类似结论(a)中证明的方法我们可以计算级数$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|r^n$的根值有：

$$\limsup_{n\to\infty} ||c_n|r^n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} r = \frac{r}{R} < 1$$

这表明级数$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$是绝对收敛的，而根据比较判别法（命题7.3.2）我们可以进一步得到$\sum_{n=0}^{\infty}\|c_n(x-a)^n\|_\infty$是绝对收敛的，此时根据魏尔斯特拉斯M判别法就可以得到$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$在紧致区间$[a-r,a+r]$上一致收敛于$f$，考虑到一致极限保持函数序列的连续性（命题14.3.2）与多项式函数的连续性，因此对任意的r都有f在$[a-r,a+r]$上连续，也即f是在$(a-R,a+R)$上连续的。

---

4. 函数f是在$(a-R,a+R)$上可微的。对任意的$0<r<R$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1}$在区间$[a-r,a+r]$上一致收敛于$f'$。

考虑计算级数$\sum_{n=0}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1}$的收敛半径$R'$，根据定义有

$$R'=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}|nc_n|^{1/n}}$$

一方面，根据幂次运算的性质我们知道对任意的$n\geq 1$有$n^{\frac{1}{n}}\geq 1$，因此根据比较原理我们有$\limsup_{n\to\infty}|nc_n|^{1/n}\geq\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}$；另一方面，根据辅助结论2我们知道对任意的$\varepsilon>0$都存在$N\geq 0$使得对任意的$n\geq N$都有$n^{1/n}\leq 1+\varepsilon$，此时结合比较原理，辅助结论1与习题6.4.2我们有：

$$\limsup_{n\to\infty}|nc_n|^{1/n}\leq\limsup_{n\to\infty}(1+\varepsilon)|c_n|^{1/n}=(1+\varepsilon)\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}$$

由于是对任意的$\varepsilon>0$都成立，因此这表明$\limsup_{n\to\infty}|nc_n|^{1/n}\leq\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}$。综上即有$\limsup_{n\to\infty}|nc_n|^{1/n}=\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}$，也即$R'=R$。根据结论(c)，我们知道对任意的$r<R$都有级数$\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1}$在区间$[a-r,a+r]$上一致收敛于某个函数$g$；而对任意的$N\geq 0$，部分和$\sum_{n=1}^{N}nc_n(x-a)^{n-1}$都是$\sum_{n=0}^{N}c_n(x-a)^n$的导函数；最后，$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$显然是在$a$处收敛的，结合这三个条件与定理14.7.1我们可以得到$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$在$[a-r,a+r]$上一致收敛于的函数$f$是可微的并且$f$的导函数正是$g$，也即有级数$\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1}$在区间$[a-r,a+r]$上一致收敛于$f'$，结论得证。

---

5. 对任意一个包含在$(a-R,a+R)$内的闭区间$[y,z]$，有

$$\int_{[y,z]}f=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{(z-a)^{n+1}-(y-a)^{n+1}}{n+1}$$

根据结论(c)我们有$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$是在$[y,z]$上一致收敛的（取$r:=\max(|a-y|,|a-z|)$，然后将结论(c)应用在区间$[a-r,a+r]$上），然后根据推论14.6.2我们有：

$$\int_{[y,z]}f=\int_{[y,z]}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{[y,z]}c_n(x-a)^n$$

> 然后根据微积分第二基本定理我们可以得到：
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{[y,z]}c_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{(z-a)^{n+1}-(y-a)^{n+1}}{n+1}$$
>
> 于是结论得证。

15.1.2 给出以0为中心，收敛半径为1的形式幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$的例子，要求满足

(a) 在$x=1$和$x=-1$处都发散

> 考虑幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，显然其收敛半径$R=1$。然后在$x=1$处幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$为级数$\sum_{n=0}^{\infty}1$发散到无穷，在$x=-1$处幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$为级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$也是发散的（部分和序列有两个极限点1和0）。

(b) 在$x=1$处发散，但在$x=-1$处收敛

> 考虑幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$，显然其收敛半径$R=1$。然后根据命题7.3.7在$x=1$处幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$为级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$发散到无穷，在$x=-1$处幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$为级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$是收敛的。

(c) 在$x=1$处收敛，但在$x=-1$处发散

> 考虑幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$，显然其收敛半径$R=1$。这个级数在$x=1$和$x=-1$处跟(b)刚好是相反的。

(d) 在$x=1$和$x=-1$处都收敛

> 考虑幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$，显然其收敛半径$R=1$。然后根据命题7.3.7在$x=1$处幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$为级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，在$x=-1$处幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$为级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$也是收敛的。

(e) 在$(-1,1)$上逐点收敛，但在$(-1,1)$上不一致收敛

> 同样是考虑幂级数考虑幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$（这相当于令系数$c_0=0$，然后对任意$n\geq 1$都令$c_n=1$），在习题14.2.2(c)中我们已经证明了这个幂级数在$(-1,1)$上逐点收敛于函数$g(x):=\frac{x}{1-x}$（尽管在写这题的时候我们还没给出函数级数的定义）但不是一致收敛的，因此它就是我们要找的例子。

本节相关跳转

[实分析 7.5 根值判别法与比值判别法]

[实分析 14.5 函数级数与魏尔斯特拉斯M判别法]

[实分析 14.6 一致收敛和积分]

[实分析 14.7 一致收敛和导数]