18.2 第一步：外测度

定义

1. (18.2.1 开盒子) $\mathbb{R}^n$中的一个**开盒子**（或者简称为**盒子**）B就是一个形如

$$B=\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i):=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:x_i\in(a_i,b_i);1\le i\le n\}$$

的集合，其中$b_i\geq a_i$都是实数，这个盒子的**体积**$\mathrm{vol}(B)$被定义为数字

$$\mathrm{vol}(B):=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\ldots(b_n-a_n)$$

（注：开盒子的例子可以参考单位立方体$(0,1)^n$，它的体积就是1；容易验证所有的开盒子都是开集；如果存在某个i使得$b_i=a_i$，那么这个盒子就是体积为0的空集$\varnothing$，尽管这看起来非常地不合理，但是我们仍然将它成为一个盒子；有时候为了强调处理的是n维体积，我们也可以将$\mathrm{vol}(B)$写成$\mathrm{vol}_n(B)$；体积的概念是符合我们一般直觉的，所以如同我们对测度的期望，我们肯定希望盒子的测度$m(B)$与盒子的体积$\mathrm{vol}(B)$是一样的）

2. (18.2.3 开盒覆盖) 设$\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$是$\mathbb{R}^n$的子集，我们称一簇盒子$(B_j)_{j\in J}$**覆盖**了$\Omega$，当且仅当$\Omega\subseteq\bigcup_{j\in J}B_j$。

（注：暂时以盒子的测度与体积一致为前提，如果我们希望Ω是一个被有限个或可数个盒子$(B_j)_{j\in J}$覆盖的可测集，它的测度满足单调性与次可加性，那么就要求有：

$$m(\Omega)\le m\left(\bigcup_{j\in J}B_j\right)\le\sum_{j\in J}m(B_j)=\sum_{j\in J}\mathrm{vol}(B_j)$$

于是自然可以引申出：

$$m(\Omega)\le\inf\left\{\sum_{j\in J}\mathrm{vol}(B_j):(B_j)_{j\in J}\text{覆盖}\Omega;J\text{是至多可数的}\right\}$$

这对外测度的定义有一定的启发）

3. (18.2.4 外测度) 设Ω是一个集合，我们定义Ω的外测度$m^*(\Omega)$为：

$$m^*(\Omega):=\inf\left\{\sum_{j\in J}\mathrm{vol}(B_j):(B_j)_{j\in J}\text{覆盖}\Omega;J\text{是至多可数的}\right\}$$

（注：有时候，我们将$m^*(\Omega)$写成$m_n^*(\Omega)$以强调它是使用的n维外测度；注意，对每一个集合（不仅是可测集）都可以定义外测度的概念）

命题

1. (18.2.5 外侧度的性质) 外测度满足如下六条性质：

> - (空集) 空集$\varnothing$的外测度是$m^*(\varnothing)=0$。
> - (正性) 对于每一个集合Ω，都有$0\le m^*(\Omega)\le+\infty$。
> - (单调性) 若有$A\subseteq B\subseteq\mathbb{R}^n$，那么$m^*(A)\le m^*(B)$。

- （有限次可加性）如果$(A_j)_{j\in J}$是$\mathbb{R}^n$的有限个子集，那么
  $m^*\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \le \sum_{j\in J} m^*(A_j)$。
- （可数次可加性）如果$(A_j)_{j\in J}$是$\mathbb{R}^n$的可数个子集，那么
  $m^*\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \le \sum_{j\in J} m^*(A_j)$。
- （平移不变性）如果Ω是$\mathbb{R}^n$的一个子集，并且$x \in \mathbb{R}^n$，那么
  $x+\Omega := \{x+y : y\in\Omega\}$的外测度满足$m^*(x+\Omega) = m^*(\Omega)$。

（注：分别对应了18.1节中的性质5、6、7、8、10、13）

2. （18.2.6 闭盒子的外测度）对于任意的闭盒子

$$B = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] := \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i\in[a_i,b_i]; 1\le i\le n\}$$

我们有

$$m^*(B) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

（注：于是外测度符合了我们对盒子“测度=体积”的期望，原书中给出了一些集合的外测度计算例子，例如$m^*(\mathbb{R}) = m^*(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = +\infty$，$m^*(\mathbb{Q}) = 0$与$m^*([0,1]\backslash\mathbb{Q}) = 1$等）

> 推论：
>
> 1. （18.2.7 开盒子的外测度）对于任意的开盒子
>
> $$B = \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) := \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i\in(a_i,b_i); 1\le i\le n\}$$
>
> 我们有
>
> $$m^*(B) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$
>
> 特别地，外测度就满足了正规化性质（第12条）。

课后习题

18.2.1 证明引理18.2.5（提示：你必须使用下确界的定义，而且还可能需要引入参数ε。你需要把某些外测度等于$+\infty$的情况分开来处理。(f)可以从(e)和(a)中推到出来。对于(e)，把指标集J记作$J=\{j_1,j_2,j_3,\dots\}$。另外，对于每一个A_j，用一簇总体积之和不超过$m^*(A_j)+\varepsilon/2^j$的盒子来覆盖A_j）

> 1. 空集$\varnothing$的外测度是$m^*(\varnothing) = 0$。
>
> 考虑一个n维开盒子
>
> $$B_\varepsilon := (0,\varepsilon)\times\prod_{i=1}^{n-1}(0,1) \qquad (\varepsilon > 0)$$
>
> 显然它的体积有$\operatorname{vol}(B_\varepsilon) = \varepsilon$，同时由于这个盒子覆盖了空集，因此根据外测度的定义，我们应当有$m^*(\varnothing)\le\operatorname{vol}(B_\varepsilon) = \varepsilon$。由于$\varepsilon$是任意的，因此这表明只能有$m^*(\varnothing)\le 0$，再结合结论(b)的内容就可以得到只能有$m^*(\varnothing) = 0$。

2. 对于每一个集合Ω，都有$0 \leq m^*(\Omega) \leq +\infty$。

先证明总有$0 \leq m^*(\Omega)$。由于开盒子的体积是非负的，因此考虑每一个覆盖Ω的盒子簇$(B_j)_{j\in J}$，都应该有：

$$\sum_{j\in J}\mathrm{vol}(B_j) \geq \sum_{j\in J}0 = 0$$

从而这表明0是集合$\left\{\sum_{j\in J}\mathrm{vol}(B_j) : (B_j)_{j\in J}\text{覆盖}\Omega; J\text{是至多可数的}\right\}$的下界，然后根据下确界的性质我们知道必然有$0 \leq m^*(\Omega)$成立。

然后对$m^*(\Omega) \leq +\infty$，由于外测度肯定是一个广义实数，因此此结论是显然的。

---

3. 若有$A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$，那么$m^*(A) \leq m^*(B)$。

考虑一簇盒子$(B_j)_{j\in J}$覆盖B满足J至多可数，那么根据覆盖的定义，应该有$A \subseteq B \subseteq \bigcup_{j\in J}B_j$，从而$(B_j)_{j\in J}$也是覆盖$A$的盒子簇，进而有：

$$\sum_{j\in J}\mathrm{vol}(B_j) \in \left\{\sum_{j\in J}\mathrm{vol}(A_j) : (A_j)_{j\in J}\text{覆盖}A; J\text{是至多可数的}\right\}$$

从而根据下确界的要求，应该有$m^*(A) \leq \sum_{j\in J}\mathrm{vol}(B_j)$，由于此结论是对每一个覆盖$B$的至多可数盒子簇$(B_j)_{j\in J}$成立，因此这表明有$m^*(A)$是集合$\left\{\sum_{j\in J}\mathrm{vol}(B_j) : (B_j)_{j\in J}\text{覆盖}B; J\text{是至多可数的}\right\}$的下界，从而根据下确界的要求即有$m^*(A) \leq m^*(B)$成立，于是结论得证。

---

4. 如果$(A_j)_{j\in J}$是$\mathbb{R}^n$的有限个子集，那么$m^*\left(\bigcup_{j\in J}A_j\right) \leq \sum_{j\in J}m^*(A_j)$。

当存在$j \in J$使得$m^*(A_j) = +\infty$的时候结论显然成立，因此我们只需要考虑所有的$j \in J$都有$m^*(A_j)$是一个正实数的情景。

设J是一个基数为n的指标集（于是我们可以将J写成$J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$的形式），然后对任意的$\varepsilon > 0$，根据外测度的定义与下确界的性质（命题6.3.6），我们知道对每一个$1 \leq i \leq n$都存在一个对应的至多可数的覆盖A_{j_i}的盒子簇$(B_k^{(i)})_{k\in K_i}$满足：

$$m^*(A_{j_i}) \leq \sum_{k\in K_i}\mathrm{vol}(B_k^{(i)}) < m^*(A_{j_i}) + \varepsilon/n$$

此时注意到盒子簇$(B_k^{(i)})_{1\leq i\leq n; k\in K_i}$（这个写法感觉有点不够标准，总之意思就是所有的$B_k^{(i)}$所组成的盒子簇）也至多可数且覆盖了$\bigcup_{j\in J}A_j$，于是根据外测度的定义应当有：

$$m^*\left(\bigcup_{j\in J}A_j\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\in K_i}\mathrm{vol}(B_k^{(i)}) < \sum_{j\in J}m^*(A_j) + \varepsilon$$

由于ε是任意的，因此上面的结论表明必然有$m^*\left(\bigcup_{j\in J}A_j\right) \leq \sum_{j\in J}m^*(A_j)$成立。

---

5. 如果$(A_j)_{j\in J}$是$\mathbb{R}^n$的可数个子集，那么$m^*\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \le \sum_{j\in J} m^*(A_j)$。

当存在$j \in J$使得$m^*(A_j) = +\infty$的时候结论显然成立，因此我们只需要考虑所有的$j \in J$都有$m^*(A_j)$是一个正实数的情景。

由于J可数因此我们可以将J写成$J = \{j_1, j_2, j_3, \dots\}$的形式），然后对任意的$\varepsilon > 0$，根据外测度的定义与下确界的性质（命题6.3.6），我们知道对每一个$1 \le i \le n$都存在一个对应的至多可数的覆盖A_{j_i}的盒子簇$(B_k^{(i)})_{k\in K_i}$满足：

$$m^*(A_{j_i}) \le \sum_{k\in K_i} \mathrm{vol}(B_k^{(i)}) < m^*(A_{j_i}) + \varepsilon/2^i$$

此时注意到盒子簇$(B_k^{(i)})_{1\le i\le n; k\in K_i}$也至多可数且覆盖了$\bigcup_{j\in J} A_j$，于是根据外测度的定义应当有：

$$m^*\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{k\in K_i} \mathrm{vol}(B_k^{(i)}) < \sum_{j\in J} m^*(A_j) + \varepsilon$$

由于ε是任意的，因此上面的结论表明必然有$m^*\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \le \sum_{j\in J} m^*(A_j)$成立。

---

6. 如果Ω是$\mathbb{R}^n$的一个子集，并且$x \in \mathbb{R}^n$，那么$x + \Omega := \{x + y : y \in \Omega\}$的外测度满足$m^*(x + \Omega) = m^*(\Omega)$。

考虑每一个覆盖Ω的至多可数盒子簇$(B_j)_{j\in J}$，那么显然有$(x + B_j)_{j\in J}$也是一个至多可数的盒子簇，并且显然它覆盖了$x + \Omega$。然后注意到根据体积的定义对任意的$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$与任意的盒子$B := \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$显然有：

$$\mathrm{vol}(B) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \prod_{i=1}^{n}[(b_i + x_i) - (a_i + x_i)] = \mathrm{vol}(x + B)$$

于是我们有

$\sum_{j\in J} \mathrm{vol}(B_j) = \sum_{j\in J} \mathrm{vol}(x + B_j) \in \left\{\sum_{j\in J} \mathrm{vol}(A_j) : (A_j)_{j\in J}\text{覆盖}x + \Omega; J\text{是至多可数的}\right\}$对每一个覆盖$\Omega$的至多可数盒子簇$(B_j)_{j\in J}$成立。

反过来，如果对每一个集合$S \subseteq \mathbb{R}^n$我们都记有$S - x := \{y - x : y \in S\}$。则考虑每一个覆盖$x + \Omega$的至多可数盒子簇$(A_j)_{j\in J}$，类似地有$(A_j - x)j \in J$是一个覆盖$\Omega$且至多可数的盒子簇。并且有：

$$\sum_{j\in J} \mathrm{vol}(A_j) = \sum_{j\in J} \mathrm{vol}(A_j - x) \in \left\{\sum_{j\in J} \mathrm{vol}(B_j) : (B_j)_{j\in J}\text{覆盖}\Omega; J\text{是至多可数的}\right\}$$

于是综上我们已经证明了有：

$$\left\{\sum_{j\in J} \mathrm{vol}(A_j) : (A_j)_{j\in J}\text{覆盖}x + \Omega; J\text{是至多可数的}\right\} = \left\{\sum_{j\in J} \mathrm{vol}(B_j) : (B_j)_{j\in J}\text{覆盖}\Omega; J\text{是至多可数的}\right\}$$

由于这两个集合是相同的，因此它们也应该有相同的下确界，即有$m^*(x + \Omega) = m^*(\Omega)$成立，结论得证。

18.2.2 设A是$\mathbb{R}^n$的子集，并设B是$\mathbb{R}^m$的子集，那么注意到，笛卡尔积 $A\times B:=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$就是$\mathbb{R}^{n+m}$的子集。证明：$m_{n+m}^*(A\times B)\leq m_n^*(A)m_m^*(B)$
（实际上，有$m_{n+m}^*(A\times B)=m_n^*(A)m_m^*(B)$，但是证明这一点相当困难）

> 需要分情形讨论证明：
>
> ---
>
> 1. $m^*(A)=0$或$m^*(B)=0$。
>
> 只需要讨论$m^*(A)=0$的情况，$m^*(B)=0$的情况同理，我们需要证明$m^*(A\times B)=0$。
>
> 考虑任意的$\varepsilon>0$。由于B是$\mathbb{R}^m$的子集，而$\mathbb{R}^m$可以通过下面的盒子簇覆盖：
>
> $$\left(\left(\frac{j_1}{2},\frac{j_1}{2}+1\right)\times\dots\times\left(\frac{j_m}{2},\frac{j_m}{2}+1\right)\right)_{(j_1,j_2,\dots,j_m)\in\mathbb{R}^m}$$
>
> 这同样也是覆盖了B的一个盒子簇，并且满足盒子簇可数且其中每一个盒子的体积都为1。由于这个盒子簇可数因此为了方便我们将这个盒子簇写为$(B_j)_{j\in\mathbb{N}^+}$的形式。
>
> 然后由于$m^*(A)=0$，因此根据下确界的性质我们知道存在对任意的$i\in\mathbb{N}^+$都存在一个至多可数的覆盖A的盒子簇$(A_k^{(i)})_{k\in K_i}$满足：
>
> $$\sum_{k\in K_i}\mathrm{vol}(A_k^{(i)})<\frac{\varepsilon}{2^i}$$
>
> 此时考虑盒子簇$(A_k^{(i)}\times B_i)_{i\in\mathbb{N}^+;k\in K_i}$，这个盒子簇是至多可数的，并且它覆盖了$A\times B$，因为：
>
> > 考虑任意的$(a,b)\in A\times B$。因为$b\in B$且$(B_j)_{j\in\mathbb{N}^+}$覆盖了B，因此存在$i\in\mathbb{N}^+$使得$b\in B_i$；因为$a\in A$且$(A_k^{(i)})_{k\in K_i}$覆盖了A，因此存在$k\in K_i$使得$a\in A_k^{(i)}$。综合即有$(a,b)\in A_k^{(i)}\times B_i$成立。于是我们证明了$A\times B\subseteq\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}^+}\bigcup\limits_{k\in K_i}A_k^{(i)}\times B_i$，也即盒子簇$(A_k^{(i)}\times B_i)_{i\in\mathbb{N}^+;k\in K_i}$覆盖了$A\times B$。
>
> 然后根据外测度的定义，应当有：
>
> $$m^*(A\times B)\leq\sum_{i\in\mathbb{N}^+}\sum_{k\in K_i}\mathrm{vol}(A_k^{(i)}\times B_i)=\sum_{i\in\mathbb{N}^+}\sum_{k\in K_i}\mathrm{vol}(A_k^{(i)})<\varepsilon$$
>
> 由于ε是任意的，因此这就表明只能有$m^*(A\times B)=0$，结论得证。
>
> ---
>
> 2. $m^*(A)=+\infty$或$m^*(B)=+\infty$且两者都不等于0。
>
> 此情况$m^*(A)m^*(B)=+\infty$，因此结论是显然的。
>
> ---
>
> 3. $m^*(A)$与$m^*(B)$都是正实数。
>
> 考虑任意的$\varepsilon>0$，根据下确界的性质我们知道分别存在覆盖A的至多可数的盒子簇$(A_j)_{j\in J}$与覆盖B的至多可数的盒子簇$(B_k)_{k\in K}$满足：
>
> $$m^*(A)\leq\sum_{j\in J}\mathrm{vol}(A_j)<m^*(A)+\frac{\varepsilon}{3\max\{m^*(A),m^*(B),\varepsilon,1\}}$$
> $$m^*(B)\leq\sum_{k\in K}\mathrm{vol}(B_k)<m^*(B)+\frac{\varepsilon}{3\max\{m^*(A),m^*(B),\varepsilon,1\}}$$
>
> 此时注意到盒子簇$(A_j\times B_k)_{j\in J;k\in K}$覆盖了$A\times B$，于是根据外测度的定义有：

$$
\begin{aligned}
m^*(A\times B) &\le \sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\mathrm{vol}(A_j\times B_k)\\
&= \sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\mathrm{vol}(A_j)\mathrm{vol}(B_k)\\
&= \left(\sum_{j\in J}\mathrm{vol}(A_j)\right)\left(\sum_{k\in K}\mathrm{vol}(B_k)\right)\\
&\le m^*(A)m^*(B)+\frac{\varepsilon(m^*(A)+m^*(B)+\frac{\varepsilon}{3\max\{m^*(A),m^*(B),\varepsilon,1\}})}{3\max\{m^*(A),m^*(B),\varepsilon,1\}}\\
&\le m^*(A)m^*(B)+\frac{\varepsilon(m^*(A)+m^*(B)+1/3)}{3\max\{m^*(A),m^*(B),\varepsilon,1\}}\\
&\le m^*(A)m^*(B)+\varepsilon\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\\
&\le m^*(A)m^*(B)+\varepsilon
\end{aligned}
$$

由于ε的任意性，因此上面的结论即得证了有$m^*(A\times B)\le m^*(A)m^*(B)$成立。

综上，于是结论得证。

在习题18.2.3~18.2.5中，我们假设$\mathbb{R}^n$是一个欧几里得空间，并假设在$\mathbb{R}^n$中有可测集的概念（它可能与勒贝格可测集的概念重合，也可能不重合）和测度的概念（它可能与勒贝格测度的概念重合，也可能不重合），并且这个测度满足公理(i)~(xiii)，基于此前提完成下面的习题。

18.2.3 完成下面的证明

(a) 证明：如果$A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\ldots$是一个单调递增的可测集序列（因此对于每一个正整数$j$都有$A_j\subseteq A_{j+1}$），那么有$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right)=\lim_{j\to\infty}m(A_j)$

考虑令有集合序列：

$$
B_i:=\begin{cases}A_1 & \text{if } i=1\\ A_i-A_{i-1} & \text{if } i>1\end{cases}
$$

从而我们有$(B_i)_{i=1}^{\infty}$是一个互不相交的可测集序列（见公理2，3）。然后根据可数可加性与有限可加性，我们有：

$$
m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right)=m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}m(B_j)=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}m(B_j)=\lim_{k\to\infty}m(A_k)
$$

从而结论得证。

(b) 证明：如果$A_1\supseteq A_2\supseteq A_3\supseteq\ldots$是一个单调递减的可测集序列（因此对于每一个正整数$j$都有$A_j\supseteq A_{j+1}$），并且有$m(A_1)<+\infty$，那么有$m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j\right)=\lim_{j\to\infty}m(A_j)$

考虑令有集合序列：

$$
C_i:=A_1-A_i
$$

从而我们有$(C_i)_{i=1}^{\infty}$是一个单调递增的可测集序列。然后根据(a)的结论，有限可加性与可数可加性，应当有：

$$
\begin{aligned}
m\left(A_1-\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) \\
&= \lim_{j\to\infty} m(C_j) \\
&= \lim_{j\to\infty} m(A_1-A_j)
\end{aligned}
$$

由于已经假定有$m(A_1)<+\infty$，因此有：

$$\lim_{j\to\infty}[m(A_1)-m(A_j)]=\lim_{j\to\infty} m(A_1-A_j)=m\left(A_1-\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j\right)=m(A_1)-m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j\right)$$

从而也即有$m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}A_j\right)=\lim_{j\to\infty} m(A_j)$，结论得证。

18.2.4 证明：对于任意的正整数$q>1$，开盒子

$$(0,1/q)^n:=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:0<x_j<1/q;1\le j\le n\}$$

和闭盒子

$$[0,1/q]^n:=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:0<x_j<1/q;1\le j\le n\}$$

的测度都是q^{-n}（提示：首先证明，对于每一个$q\ge 1$都有$m((0,1/q)^n)\le q^{-n}$，采用的方法是用$(0,1/q)^n$的某些平移来覆盖$(0,1)^n$。按照类似的论述证明$m([0,1/q]^n)\ge q^{-n}$。然后证明，对于任意的$\varepsilon>0$都有$m([0,1/q]^n\backslash(0,1/q)^n)\le\varepsilon$，采用的方法是用一些非常小的盒子来覆盖$[0,1/q]^n$的边界）

对任意的有理数序对$(p_1,p_2,\dots,p_n)$与给定的正整数$q>1$，我们记有

$$
\begin{aligned}
B_q(p_1,p_2,\dots,p_n)&:=(p_1,p_1+1/q)\times(p_2,p_2+1/q)\times\dots\times(p_n,p_n+1/q)\\
C_q(p_1,p_2,\dots,p_n)&:=[p_1,p_1+1/q]\times[p_2,p_2+1/q]\times\dots\times[p_n,p_n+1/q]
\end{aligned}
$$

显然，根据平移不变性公理，无论$(p_1,p_2,\dots,p_n)$的值我们总有：

$$
\begin{aligned}
m(B_q(p_1,p_2,\dots,p_n))&=m((0,1/q)^n)\\
m(C_q(p_1,p_2,\dots,p_n))&=m([0,1/q]^n)
\end{aligned}
$$

基于此完成下面的作答。

首先证明对于每一个$q\ge 1$都有$m((0,1/q)^n)\le q^{-n}$。

考虑这样一个数量为q^n个的盒子簇：

$$(B_q(i_1/q,i_2/q,\dots,i_n/q))_{(i_1,i_2,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n;0\le i_1,i_2,\dots,i_n\le q-1}$$

可以注意到这个盒子簇中的盒子两两之间互不相交，并且它们的并集仍然包含于$[0,1]^n$，因此根据正规化，有限可加性与单调性公理，我们有：

$$\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n;0\le i_1,i_2,\dots,i_n\le q-1} m(B_q(i_1/q,i_2/q,\dots,i_n/q))=q^n m((0,1/q)^n)\le m([0,1]^n)=1$$

从而我们有$m((0,1/q)^n)\le q^{-n}$。

然后证明对于每一个$q\ge 1$都有$m([0,1/q]^n)\ge q^{-n}$。

类似地，考虑下面这样一个数量为q^n个的盒子簇：

$$(C_q(i_1/q, i_2/q, \dots, i_n/q))_{(i_1,i_2,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n; 0\le i_1,i_2,\dots,i_n\le q-1}$$

显然这个盒子簇满足：

$$\bigcup_{(i_1,i_2,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n; 0\le i_1,i_2,\dots,i_n\le q-1} C_q(i_1/q, i_2/q, \dots, i_n/q) = [0,1]^n$$

从而根据有限次可加性公理，应当有：

$$1 = m([0,1]^n) \le \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n; 0\le i_1,i_2,\dots,i_n\le q-1} m(C_q(i_1/q, i_2/q, \dots, i_n/q)) = q^n m([0,1/q]^n)$$

从而我们有$m([0,1/q]^n) \ge q^{-n}$。

接着我们来证明对于每一个$q \ge 1$都有$m([0,1/q]^n \backslash (0,1/q)^n) = 0$。

我们先证明$m(\{0\} \times (0,1/q)^{n-1}) = 0$。考虑任意的$\varepsilon > 0$，我们知道必然存在一个正整数$k \ge 1$使得$1/k \le \min(\varepsilon, 1)$成立。然后首先我们注意到根据平移不变性公理我们有：

$$m(\{0\} \times (0,1/q)^{n-1}) = m(\{1/(2qk)\} \times (0,1/q)^{n-1})$$

然后我们可以观察到有$\{1/(2qk)\} \times (0,1/q)^{n-1} \subseteq (0,1/(qk)) \times (0,1/q)^{n-1}$，于是根据单调性公理有：

$$m(\{1/(2qk)\} \times (0,1/q)^{n-1}) \le m((0,1/(qk)) \times (0,1/q)^{n-1}))$$

再注意到盒子簇

$$\left(\left(\frac{i}{qk}, \frac{i+1}{qk}\right) \times (0,1/q)^{n-1}\right)_{i=0}^{m-1}$$

的并集包含于$(0,1/q)^n$，并且此盒子簇中每一个盒子的测度都相等（平移不变性公理易得），于是使用有限可加性与单调性公理有：

$$\sum_{i=0}^{k-1} m\left(\left(\frac{i}{qk}, \frac{i+1}{qk}\right) \times (0,1/q)^{n-1}\right) = k \cdot m((0,1/(qk)) \times (0,1/q)^{n-1})) \le m((0,1/q)^n) \le q^{-n}$$

也即有$m((0,1/(qk)) \times (0,1/q)^{n-1})) \le q^{-n}k^{-1} \le \varepsilon$。综上即有：

$$m(\{0\} \times (0,1/q)^{n-1}) \le \varepsilon$$

由于ε是任意的，因此这表明了只能有$m(\{0\} \times (0,1/q)^{n-1}) = 0$。然后利用平移不变性公理有$m(\{1/q\} \times (0,1/q)^{n-1}) = 0$，接着注意到上面的证明可以并不对$\{0\}$所在维度有要求，因此上面的证明同样可以证明所有形如$(0,1/q)^j \times \{0\} \times (0,1/q)^{n-j-1}$（$1 \le j \le n-1$）的1个单元素集与$n-1$个开区间$(0,1/q)$的笛卡尔积都有其$n$维测度为0。

然后我们考虑由2个单元素集与$n-2$个开区间的笛卡尔积的测度，以$\{0\}^2 \times (0,1/q)^{n-2}$为例，根据平移不变性公理我们有：

$$m(\{0\}^2 \times (0,1/q)^{n-2}) = m(\{0\} \times \{1/2q\} \times (0,1/q)^{n-2})$$

由于$\{0\} \times \{1/2q\} \times (0,1/q)^n \subseteq \{0\} \times (0,1/q)^{n-1}$，因此根据单调性公理我们有：

$$m(\{0\}^2 \times (0,1/q)^{n-2}) \le m(\{0\} \times (0,1/q)^{n-1}) = 0 \Longrightarrow m(\{0\}^2 \times (0,1/q)^{n-2}) = 0$$

类似地使用平移不变性公理和单调性公理，我们就可以得到只要是单元素集（至少一个）与开区间$(0,1/q)$的笛卡尔积其n维测度必然都是0。

最后我们来观察$[0,1/q]^n \backslash (0,1/q)^n$，它事实上可以改写成下面的等价形式：

$$\begin{aligned}&\{(p_1,\ldots,p_n):\exists\, 1\le j\le n, p_j=0\vee 1/p\}\\ =&\bigcup_{1\le j\le n}\{(p_1,\ldots,p_n):\text{恰好有}j\text{个分量等于}0\text{或}1/p\}\\ =&[\{0\}\times(0,1/q)^n]\cup[\{1/q\}\times(0,1/q)^n]\cup\ldots\end{aligned}$$

根据我们上面的结论，于是我们便可以发现$[0,1/q]^n \backslash (0,1/q)^n$事实上可以表示为有限多个互不相交且测度为0的集合的并集，因此根据有限可加性公理我们有$m([0,1/q]^n \backslash (0,1/q)^n)$。

最后我们来证明题目的结论，根据有限可加性我们有：

$$m((0,1/q)^n)+m([0,1/q]^n \backslash (0,1/q)^n)=m([0,1/q]^n)\implies m((0,1/q)^n)=m([0,1/q]^n)$$

于是再结合我们证明的结论，于是我们就得到了$q^{-n}\le m((0,1/q)^n)\le q^{-n}$与$q^{-n}\le m([0,1/q]^n)\le q^{-n}$，从而也就只能有

$$m((0,1/q)^n)=m([0,1/q]^n)=q^{-n}$$

于是结论得证。

18.2.5 证明：对于任意的盒子B，有$m(B)=\mathrm{vol}(B)$（提示：首先，利用习题18.2.4去证明当坐标a_j, b_j都是有理数时的结论。然后设法取极限，进而得到当坐标都是实数时的一般结论）

我们只需要证明闭盒子的结论，其它的盒子都是类似的。

首先我们先证明对每一个坐标a_i, b_i都是有理数的盒子$B=\prod_{i=1}^n [a_i,b_i]$都有结论成立。

根据平移不变性公理可知任意盒子$B=\prod_{i=1}^n [a_i,b_i]$都可以通过$i$维上移动$a_i$个单位得到其测度与盒子$B'=\prod_{i=1}^n [0,b_i-a_i]$相等，因此我们只需要证明对所有形如$B=\prod_{i=1}^n [0,c_i]$（其中$c_i$都是有理数）的盒子都成立即可；由于坐标数量是有限的，因此我们可以找到所有坐标c_i的公分母，将$B=\prod_{i=1}^n [0,c_i]$改写成$B=\prod_{i=1}^n \left[0,\frac{d_i}{d}\right]$（$c_i=d_i/d$且$d_i, d$都是正整数）的形式。

注意到B可以

$$\begin{aligned}B&=\prod_{i=1}^n \left[0,\frac{d_i}{d}\right]\\ &=\prod_{i=1}^n\left(\left[0,\frac{1}{d}\right)+\left[\frac{1}{d},\frac{2}{d}\right)+\ldots+\left[\frac{d_i-1}{d},\frac{d_i}{d}\right]\right)\\ &=\prod_{i=1}^n\left[0,\frac{1}{d}\right)+\ldots+\prod_{i=1}^n\left[\frac{d_i-1}{d},\frac{d_i}{d}\right]\end{aligned}$$

表示成$d_1d_2\ldots d_n$个盒子的并集，并且其中每一个盒子的测度都等于d^{-n}（习题18.2.5），因此根据有限可加性公理我们有：

$$m(B)=\frac{d_1d_2\ldots d_n}{d^n}=c_1c_2\ldots c_n=\mathrm{vol}(B)$$

于是结论得证。

然后我们证明对每一个坐标a_i, b_i都是实数的盒子$B=\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$都有结论成立。

对每一个$1\leq i\leq n$，考虑单调递增有理数序列$\left(a_i^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$与单调递减有理数序列$\left(b_i^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$分别收敛于$a_i, b_i$（这样的有理数序列是很好寻找的，一个方法是将$a_i, b_i$改写成十进制的形式，然后逐位逼近$a_i, b_i$，例如当$a_i$或$b_i$等于$\pi$的时候，可以分别得到递增与递减序列$3, 3.1, 3.14, \dots$与$4, 3.2, 3.15, \dots$）。从而我们显然可以得到盒子序列：

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\left[a_i^{(k)}, b_i^{(k)}\right]\right)_{k=1}^{\infty}$$

是一个单调递减的盒子序列且$m\left(\prod_{i=1}^{n}\left[a_i^{(1)}, b_i^{(1)}\right]\right)<+\infty$，同时它还满足：

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}\left[a_i^{(k)}, b_i^{(k)}\right]\right)=\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$$

于是根据习题18.2.3的结论，我们有：

$$\begin{aligned}
m\left(\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]\right)&=\lim_{k\to\infty} m\left(\prod_{i=1}^{n}\left[a_i^{(k)}, b_i^{(k)}\right]\right)\\
&=\lim_{k\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(b_i^{(k)}-a_i^{(k)}\right)\\
&=\prod_{i=1}^{n}\lim_{k\to\infty}\left(b_i^{(k)}-a_i^{(k)}\right)\\
&=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=\operatorname{vol}\left(\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]\right)
\end{aligned}$$

于是$m(B)=\operatorname{vol}(B)$得证。

18.2.6 利用引理18.2.5和命题18.2.6，给出“实数集是不可数集”的另一种证明（即重新证明推论8.3.4）

使用反证法，我们假设$\mathbb{R}$是一个可数集，那么它的元素可以排列成一个序列$(r_i)_{i=0}^{\infty}$的形式，于是根据正性，可数次可加性与命题18.2.6我们有：

$$m(\mathbb{R})\leq\sum_{i=1}^{\infty}m([r_i, r_i])=\sum_{i=1}^{\infty}0=0\implies m(\mathbb{R})=0$$

但是另一方面，根据单调性的要求又因该有$m(\mathbb{R})\geq m([0,1])=1$，于是这导出了矛盾，实数集必然不可能是可数的。

本节相关跳转

实分析 8.3 不可数集

实分析 18.1 目标：勒贝格测度