16.4 周期卷积

摘录

1. (第二个事实?)对任意的$f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$与任意的整数$n$,有:

$$f * e_n = \hat{f}(n)e_n$$

更一般地,结合引理16.4.4有,对任意一个三角多项式$P = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$,我们有:

$$f * P = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f * e_n) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)c_n e_n$$

于是$f * P$也是一个三角多项式。

(注:这个引理同第二个事实(也就是引理14.8.13)很像,它断定了任意一个$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$中的函数与三角多项式的周期卷积都还是一个三角多项式;证明过程原书也有给出,可以自行参考;第三个事实合并到定理16.4.1的证明中了(原书本节的末尾))

定义

1. (16.4.2 周期卷积)设$f, g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$,那么$f$和$g$的**周期卷积**$f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$被定义为:

$$f * g(x) := \int_{[0,1]} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$$

(注:注意同14.8节的关于紧支撑函数的卷积定义区分,两个定义的积分区间并不相同(事实上也不必要太注意,f, g不可能同时是紧支撑,周期,还非零的函数,因此只要明确了f, g是什么你就不会对卷积的内容有混淆))

2. (16.4.5 周期恒等逼近)设$\varepsilon > 0$且$0 < \delta < 1/2$,如果函数$f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$满足下列性质,那么$f$就被称为**周期$(\varepsilon, \delta)$恒等逼近**:

> 1. 对于所有的$x \in \mathbb{R}$,都有$f(x) \geq 0$;并且$\int_{[0,1]} f = 1$。
> 2. 对于所有的$\delta \leq |x| \leq 1-\delta$,都有$f(x) < \varepsilon$。

命题

1. (16.4.1 斯通-魏尔斯特拉斯第二逼近定理?)设$f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$,并设$\varepsilon > 0$。那么存在一个三角多项式$P$使得$\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$。

(注:这个定理断定任何一个连续的周期函数都可以用三角多项式一致逼近。就如同魏尔斯特拉斯逼近定理断定了连续函数空间$C([a,b] \to \mathbb{R})$是多项式空间$P([a,b] \to \mathbb{R})$的闭包,如果我们设$P(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$表示全体三角多项式的空间,那么$P(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$在$L^\infty$度量下的闭包就是$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$;这个定理可以通过多项式的魏尔斯特拉斯逼近定理来证明,事实上这两个定理都是**斯通-魏尔斯特拉斯定理**的特殊情形(详情请参考维基百科—斯通-魏尔斯特拉斯逼近定理),原书中不会对这两个定理之间的互相证明说明(这部分可以看维基百科),而是从卷积出发证明)

2. (16.4.4 周期卷积的基本性质)设$f, g, h \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$,那么有:

> 1. (封闭性)卷积$f * g$是连续的,并且也是$\mathbb{Z}$周期的,换言之即$f * g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$。
> 2. (交换性)$f * g = g * f$。
> 3. (双线性性质)$f * (g+h) = f * g + f * h$且$(f+g) * h = f * h + g * h$。对于任意的复数$c$,有$c(f * g) = (cf) * g = f * (cg)$。

3. (16.4.6)对于每一个$\varepsilon > 0$和$0 < \delta < 1/2$,都存在一个三角多项式P是一个(ε, δ)恒等逼近。

（注：在14.8节中为了证明魏尔斯特拉斯第一逼近定理的弱化形式，书中提到了三个事实，这个引理同第一个事实（也就是引理14.8.8）很像；该引理在原书中有证明，还给出了**费耶尔核**的定义，可以参考）

课后习题

16.4.1 证明：如果$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$既是紧支撑又是$Z$周期的，那么$f$只能是零函数，即对任意的$x\in\mathbb{R}$都有$f(x)=0$

> 我们设f是支撑在区间$[a,b]$上的，然后考虑区间$I:=[\lfloor b\rfloor+1,\lfloor b\rfloor+2]$内$f$的取值，由支撑的定义我们知道在这个区间内$f$只能是恒等于0的。注意到$\lfloor b\rfloor+1$也是一个整数，因此由于$f$还是$\mathbb{Z}$周期的，因此对任意的$x\in[0,1]$我们有：
>
> $$f(x)=f(x+\lfloor b\rfloor+1)=0$$
>
> 也即对任意的$x\in[0,1]$都有$f(x)=0$，再利用f是$\mathbb{Z}$周期的我们就可以推广得到对任意的$x\in\mathbb{R}$都有$f(x)=0$，即f是零函数。

16.4.2 证明引理16.4.4（提示：为了证明$f*g$连续，你或许需要用到f的有界性与g的一致连续性（反过来也行，看你喜欢哪个）；要想证明$f*g=g*f$，你或许需要利用周期性尝试"剪切和粘贴"$[0,1]$）

> 为了证明结论(a)，需要提到一个事实：
>
> > 结论：对任意在$[0,1]$上黎曼可积的函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$都有$\left|\int_{[0,1]}f\right|\leq\int_{[0,1]}|f|$。
> >
> > 证明：
> >
> > 我们不妨设$\int_{[0,1]}f=Ie^{i\theta}(I>0,\theta\in(-\pi,\pi])$（习题15.7.6），于是我们注意到：
> >
> > $$\left|\int_{[0,1]}f\right|=|Ie^{i\theta}|=I\iff\left|\int_{[0,1]}f\right|=e^{-i\theta}\int_{[0,1]}f$$
> >
> > 结合我们已经在习题16.2.1(c)中证明过的复值积分的乘法定律即有$\left|\int_{[0,1]}f\right|=\int_{[0,1]}e^{-i\theta}f$，考虑到绝对值必然是一个实数，因此有：
> >
> > $$\begin{aligned}\int_{[0,1]}e^{-i\theta}f&=\int_{[0,1]}\Re(e^{-i\theta}f)+i\int_{[0,1]}\Im(e^{-i\theta}f)\\&=\left|\int_{[0,1]}f\right|\end{aligned}\implies\begin{aligned}\int_{[0,1]}\Re(e^{-i\theta}f)&=\left|\int_{[0,1]}f\right|\\\int_{[0,1]}\Im(e^{-i\theta}f)&=0\end{aligned}$$
> >
> > 然后由于$\Re(e^{-i\theta}f)$实际上是个实值函数，因此运用实值函数积分运算定律可以得到：
> >
> > $$\int_{[0,1]}\Re(e^{-i\theta}f)\leq\int_{[0,1]}|e^{-i\theta}f|\iff\left|\int_{[0,1]}f\right|\leq\int_{[0,1]}|f|$$
> >
> > 于是jie'lu
>
> 然后我们逐条证明。
>
> ---
>
> 1. 卷积$f*g$是连续的，并且也是$\mathbb{Z}$周期的，换言之即$f*g\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$。
>
> $f*g$的周期性是显然的，因为对任意的$x\in\mathbb{R}$都有：
>
> $$f*g(x+1)=\int_{[0,1]}f(y)g((x-y)+1)dy=\int_{[0,1]}f(y)g(x-y)dy=f*g(x)$$
>
> 而关于$f*g$在x处的连续性，注意到由于f,g都是在$[0,1]$上连续的，因此它们也是在$[0,1]$与$[x-1,x]$上一致连续和有界的（命题13.3.5与引理16.1.5），因此不妨设f以实数M为界（于是对任意$y\in[0,1]$有$|f(y)|\leq M$）。

于是正式开始证明。考虑任意的$\varepsilon > 0$，由于g在$[x-1,x]$上一致连续，因此存在$\delta > 0$使得对任意$y_0, y_1 \in [0,1]$满足$|y_0 - y_1| < \delta$都有$|g(x-y_0) - g(x-y_1)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$。于是对任意的$x' \in [x-\delta, x+\delta]$有：

$$\begin{aligned}
|f*g(x) - f*g(x')| &= \left|\int_{[0,1]} f(y)[g(x-y) - g(x'-y)]\mathrm{d}y\right| \\
&\le \int_{[0,1]} |f(y)||g(x-y) - g(x'-y)|\mathrm{d}y \\
&= \int_{[0,1]} |f(y)||g(x-y) - g(x-((x-x')+y))|\mathrm{d}y \\
&< \int_{[0,1]} M\frac{\varepsilon}{M}\mathrm{d}y = \varepsilon
\end{aligned}$$

总结即有：对任意的$\varepsilon > 0$与$x \in \mathbb{R}$，存在$\delta > 0$使得对任意的$x' \in \mathbb{R}$满足$|x - x'| < \delta$都有$|f*g(x) - f*g(x')| < \varepsilon$。从而即$f*g$是连续的。综上于是结论得证。

（我怎么好像在哪里写过一模一样的证明，也是一个一致连续一个有界）

---

2. $f*g = g*f$。

注意到对任意的$x \in \mathbb{R}$：

$$\begin{aligned}
f*g(x) &= \int_{[0,1]} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{[x-1,x]} g(z)f(x-z)\mathrm{d}z \quad (z := x-y) \\
&= \int_{[x-1,\lfloor x\rfloor]} g(z)f(x-z)\mathrm{d}z + \int_{[\lfloor x\rfloor,x]} g(z)f(x-z)\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

然后由于f, g是$\mathbb{Z}$周期的，因此有：

$$\begin{gathered}
\forall z \in [x-1, \lfloor x\rfloor], z_0 := z - \lfloor x\rfloor - 1 \in [x - \lfloor x\rfloor, 1], f(z)g(x-z) = f(z_0)g(x-z_0) \\
\forall z \in [\lfloor x\rfloor, x], z_1 := z - \lfloor x\rfloor \in [0, x - \lfloor x\rfloor], f(z)g(x-z) = f(z_1)g(x-z_1)
\end{gathered}$$

于是有：

$$\begin{aligned}
\int_{[x-1,\lfloor x\rfloor]} g(z)f(x-z)\mathrm{d}z + \int_{[\lfloor x\rfloor,x]} g(z)f(x-z)\mathrm{d}z &= \int_{[x-\lfloor x\rfloor,1]} g(z_0)f(x-z_0)\mathrm{d}z_0 + \int_{[0,x-\lfloor x\rfloor]} g(z_1)f(x-z_1)\mathrm{d}z_1 \\
&= \int_{[0,1]} g(z)f(x-z)\mathrm{d}z \\
&= g*f(x)
\end{aligned}$$

从而我们得证了$f*g(x) = g*f(x)$对任意的$x \in \mathbb{R}$成立。

---

3. $f*(g+h) = f*g + f*h$且$(f+g)*h = f*h + g*h$。对于任意的复数c，有$c(f*g) = (cf)*g = f*(cg)$。

显然对任意的$x \in \mathbb{R}$有：

$$\begin{aligned}
(f*(g+h))(x) &= \int_{[0,1]} f(y)(g(x-y) + h(x-y))\mathrm{d}y \\
&= \int_{[0,1]} f(y)g(x-y) + f(y)h(x-y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{[0,1]} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y + \int_{[0,1]} f(y)h(x-y)\mathrm{d}y = f*g(x) + f*h(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((f+g)*h)(x)&=\int_{[0,1]}(f(y)+g(y))h(x-y)\mathrm{d}y\\&=\int_{[0,1]}f(y)h(x-y)+g(y)h(x-y)\mathrm{d}y\\&=\int_{[0,1]}f(y)h(x-y)\mathrm{d}y+\int_{[0,1]}g(y)h(x-y)\mathrm{d}y=f*h(x)+g*h(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c(f*g))(x)&=c\int_{[0,1]}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\\&=\int_{[0,1]}(c\cdot f(y))g(x-y)\mathrm{d}y=((cf)*g)(x)\\&=\int_{[0,1]}f(y)(c\cdot g)(x-y)\mathrm{d}y=(f*(cg))(x)\end{aligned}$$

（稍微用到我们在习题16.2.1(c)中提到的积分运算定律）

于是结论得证。

16.4.3 把引理16.4.6中标注了“为什么？”的地方补充完整（提示：对第一个恒等式，利用等式$|z|^2=z\overline{z}$，$\overline{e_n}=e_{-n}$和$e_ne_m=e_{n+m}$）

根据定义费耶尔核$F_N:=\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e_n$，我们逐条证明这几个“为什么？”。

---

1. 观察可知，恒等式：

$$F_N=\frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}e_n\right|^2$$

（眼力真好）

注意到有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}e_n\right|^2&=\frac{1}{N}\left(\sum_{n=0}^{N-1}e_n\right)\overline{\left(\sum_{n=0}^{N-1}e_n\right)}\\&=\frac{1}{N}\left(\sum_{n=0}^{N-1}e_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1}\overline{e_n}\right)\\&=\frac{1}{N}\left(\sum_{n=0}^{N-1}e_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1}e_{-n}\right)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=-(N-1)}^{0}e_ne_m\end{aligned}$$

注意到$e_ne_m=e_{n+m}$，因此我们考虑合并$S:=\{(n,m)\in\mathbb{Z}^2:n\in[0,N-1]\wedge m\in[1-N,0]\}$所有$n+m$相等的项，有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=-(N-1)}^{0}e_ne_m&=\frac{1}{N}\sum_{i=-(N-1)}^{N-1}\sum_{(n,m)\in S;n+m=i}e_{n+m}\\&=\frac{1}{N}\sum_{i=-(N-1)}^{N-1}(N-|i|)e_i\\&=\sum_{n=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e_n\end{aligned}$$

（$\sum_{(n,m)\in S;n+m=i}1=N-|i|$是显然的，对每一个$i$我们都有$n=i-m\in[0,N-1]\cap[i,N-1+i]$可能的取值有$N-|i|$个，而对每一个可能的$n$只有唯一的$m$满足$n+m=i$）

补充上恒等于0的$\left(1-\frac{|N|}{N}\right)e_N$与$\left(1-\frac{|-N|}{N}\right)e_{-N}$项，于是我们上面的证明得到了$F_N=\frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}e_n\right|^2$，结论得证。

---

2. 由几何级数公式（引理7.3.3）可知，如果x不是整数，那么：

$$\sum_{n=0}^{N-1}e_n(x)=\frac{e_N-e_0}{e_1-e_0}=\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}(N-1)x}\sin(\pi Nx)}{\sin(\pi x)}$$

我们先证明一下复数的几何级数公式（重复工作，其实跳过也行）：

> 结论：设$r\neq 1$是一个复数，那么对任意的自然数N有
>
> $$\sum_{n=0}^{N}r^n=\frac{1-r^{N+1}}{1-r}$$
>
> 证明：
>
> 我们尝试使用归纳法证明。$N=0$的情况是显然的，于是我们归纳性地假设对$N=a$的情况有结论成立，对$N=a+1$的情况讨论。可以注意结合归纳假设有：
>
> $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{a+1}r^n&=r^0+\sum_{n=1}^{a+1}r^n\\&=1+r\sum_{n=0}^{a}r^n\\&=1+r\frac{1-r^{a+1}}{1-r}=\frac{1-r+r-r^{a+2}}{1-r}=\frac{1-r^{a+2}}{1-r}\end{aligned}$$
>
> 于是对$N=a+1$时也有结论成立，从而归纳得证。

当x不是整数的时候我们有$e_1(x)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}\neq 1$，并且有$e_n(x)=\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}x}=e_1(x)^n$与$e_0(x)=1$，因此使用几何级数公式我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}e_n(x)=\frac{e_N(x)-e_0(x)}{e_1(x)-e_0(x)}&=\frac{\mathrm{e}^{2N\pi\mathrm{i}x}-1}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}-1}\\&=\frac{\mathrm{e}^{N\pi\mathrm{i}x}\frac{\mathrm{e}^{N\pi\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-N\pi\mathrm{i}x}}{2}}{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}x}\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}x}}{2}}\\&=\frac{\mathrm{e}^{(N-1)\pi\mathrm{i}x}\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)}\end{aligned}$$

于是结论得证。

---

3. 在任何情况下，对于任意的x都有$F_N(x)\geq 0$。另外还有：

$$\int_{[0,1]}F_N(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\int_{[0,1]}e_n=\left(1-\frac{|0|}{N}\right)1=1$$

第一个为什么已经给出了任意的x都有$F_N(x)\geq 0$（绝对值非负，因此平方再除以一个正数也必然非负），于是我们只需要证明后面这个式子。其中第一个等号是简单的积分运算，第三个等号是直接计算的结果，因此只需要证明第二个等号，即证明：

$$\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\int_{[0,1]}e_n=\left(1-\frac{|0|}{N}\right)1$$

注意到对任意的$n\neq 0$，利用三角函数的周期性我们有：

> $$\begin{aligned}\int_{[0,1]} e_n &= \int_0^1 \cos(2\pi nx)\mathrm{d}x + i\int_0^1 \sin(2\pi nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi n}\left[-\sin(2\pi ny)|_0^1 + \mathrm{i}\cos(2\pi ny)|_0^1\right] \\ &= 0\end{aligned}$$
>
> 因此级数$\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\int_{[0,1]} e_n$中只有$n=0$的项不为0，可以直接计算有$\left(1-\frac{|0|}{N}\right)\int_{[0,1]} e_0=\left(1-\frac{|0|}{N}\right)1$，从而结论得证。

本节相关跳转

[实分析 14.8 用多项式一致逼近]()