8.2 在无限集上求和

定义

1. (8.2.1 可数集上的级数) 设X是一个**可数集**，并且设$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数。称级数$\sum_{x\in X}f(x)$是**绝对收敛**的，当且仅当存在某个双射$g:\mathbb{N}\to X$使得级数$\sum_{n=0}^{\infty}f(g(n))$是**绝对收敛**的。此时我们定义：

$$\sum_{x\in X}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(g(n))$$

(根据命题7.4.3与命题3.6.4，可以证明这样的定义同g的选取无关，从而它是定义明确的)

2. (8.2.4 任意集合上求和的绝对收敛？) 设X是一个集合 (可以是**不可数**的)，并且设$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，那么级数$\sum_{x\in X}f(x)$是**绝对收敛**的，当且仅当：

$$\sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)|:A\subseteq X\text{且}A\text{是有限集}\right\}<\infty$$

命题

1. (8.2.2 无限和的富比尼定理) 设$f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$是一个使得$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}f(n,m)$**绝对收敛**的的一个函数，那么我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{m\in\mathbb{N}}f(n,m)\right)&=\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}f(n,m)\\&=\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}f(n,m)\\&=\sum_{m\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}f(n,m)\right)\end{aligned}$$

(换言之，只要级数是**绝对收敛**的，我们就可以任意交换无限和的求和顺序)

2. (8.2.3 绝对收敛级数的特征？) 设X是一个**至多可数的** (注意同8.2.4区分) 集合，并且设$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，那么级数$\sum_{x\in X}f(x)$是**绝对收敛**的，当且仅当：

$$\sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)|:A\subseteq X\text{且}A\text{是有限集}\right\}<\infty$$

3. (8.2.5 绝对收敛级数衍生？) 设X是一个集合 (可以是**不可数**的)，并且设$f:X\to\mathbb{R}$是一个使级数$\sum_{x\in X}f(x)$是绝对收敛的函数，那么集合$\{x\in X:f(x)\neq 0\}$是至多可数的。

(由此，对于不可数集上的任意一个绝对收敛的级数$\sum_{x\in X}f(x)$，我们可以定义它的值为$\sum_{x\in X}f(x):=\sum_{x\in X:f(x)\neq 0}f(x)$，于是我们成功将不可数集上的级数用可数集上的级数替换)

4. (8.2.6 绝对收敛级数的定律) 设X是一个集合 (可以是**不可数**的) ，并且设$f: X \to \mathbb{R}$，$g: X \to \mathbb{R}$是使级数$\sum_{x \in X} f(x)$与$\sum_{x \in X} g(x)$都绝对收敛的函数，则下述命题为真：

> 1. 级数$\sum_{x \in X}(f(x)+g(x))$是绝对收敛的，并且：
>
> $$\sum_{x \in X}(f(x)+g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x)$$
>
> 2. 若c是一个实数，那么$\sum_{x \in X} c \cdot f(x)$是绝对收敛的，并且：
>
> $$\sum_{x \in X} c \cdot f(x) = c \sum_{x \in X} f(x)$$
>
> 3. 若存在两个不相交的集合X_1，X_2使得$X_1 \cup X_2 = X$，那么$\sum_{x \in X_1} f(x)$和$\sum_{x \in X_2} f(x)$都是绝对收敛的，并且：
>
> $$\sum_{x \in X_1 \cup X_2} f(x) = \sum_{x \in X_1} f(x) + \sum_{x \in X_2} f(x)$$
>
> 反过来，如果$h: X \to \mathbb{R}$使得$\sum_{x \in X_1} h(x)$和$\sum_{x \in X_2} h(x)$都是绝对收敛的，那么$\sum_{x \in X_1 \cup X_2} h(x)$也是绝对收敛的，并且：
>
> $$\sum_{x \in X_1 \cup X_2} h(x) = \sum_{x \in X_1} h(x) + \sum_{x \in X_2} h(x)$$
>
> 4. 如果Y是另一个集合，并且$\phi: Y \to X$是一个双射，那么$\sum_{y \in Y} f(\phi(y))$也是绝对收敛的，并且：
>
> $$\sum_{y \in Y} f(\phi(y)) = \sum_{x \in X} f(x)$$

(当X是不可数集时，该结论的证明要用到选择公理)

5. (8.2.7 条件收敛的子级数？) 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$是一个条件收敛但是不绝对收敛的级数，定义集合$A_+ = \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0\}$，$A_- = \{n \in \mathbb{N} : a_n < 0\}$，于是有$A_+ \cup A_- = \mathbb{N}$与$A_+ \cap A_- = \varnothing$。那么级数$\sum_{n \in A_+} a_n$与$\sum_{n \in A_-} a_n$都不是条件收敛的。

(从而也不是绝对收敛的)

6. (8.2.8 格奥尔格·黎曼级数定理？) 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$是一个条件收敛但是不绝对收敛的级数，L是任意一个实数。于是存在一个双射$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$使得$\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$条件收敛于$L$。

课后习题

8.2.1 证明引理8.2.3（提示：习题3.6.3或许有用）

根据有限级数的知识，若X是有限的，那么无论条件是否成立$\sum_{x\in X}|f(x)|$总是有限的，特别地，$\sum_{x\in X}|f(x)|$也是绝对收敛的。因此只需要讨论X是可数集的情况，此时根据定义8.1.1存在一个双射$g:\mathbb{N}\to X$。

于是令有$S=\left\{\sum_{x\in A}|f(x)|:A\subseteq X且A是有限集\right\}$，$T=\left\{\sum_{i=0}^{n}|f(g(i))|:n\in\mathbb{N}\right\}$，记$S_N=\sum_{x\in N}|f(x)|$与$T_n=\sum_{i=0}^{n}|f(g(i))|$，在下面的证明中我们将使用这几个符号。

我们首先证明$\sup(S)=\sup(E)$：

对任意$S_A\in S$，其对应的$A\subseteq X$是X的有限子集，$g^{-1}(A)$也是有限的。又考虑到$g^{-1}(A)$是自然数集的子集，从而根据习题3.6.3，存在一个自然数M使得对任意$i\in g^{-1}(A)$都有$i\leq M$成立。于是使用命题7.1.11(c)，此时令$B_M=\{i\in\mathbb{N}:0\leq i\leq M\}$，此时有：

$$\sum_{x\in A}|f(x)|=\sum_{i\in g^{-1}(A)}|f(g(i))|$$

考虑到绝对值非负且$g^{-1}(A)\subseteq B_M$，于是又有：

$$\sum_{i\in g^{-1}(A)}|f(g(i))|\leq\sum_{i\in g^{-1}(A)}|f(g(i))|+\sum_{i\in B_M\backslash g^{-1}(A)}|f(g(i))|=\sum_{i\in B_M}|f(g(i))|$$

$$\sum_{i\in B_M}|f(g(i))|=\sum_{i=0}^{M}|f(g(i))|\ (命题7.1.11(d))$$

从而对任意$S_A\in S$，都存在一个M使得$S_A\leq T_M\leq\sup(T)$成立，于是$\sup(T)$是S的一个上界，即$\sup(T)\geq\sup(S)$成立。

而对任意$T_n\in T$，考虑到绝对值非负的性质，根据命题7.1.11(d)有：

$$T_n=\sum_{i=0}^{n}|f(g(i))|\leq\sum_{i=0}^{n+1}|f(g(i))|=\sum_{i\in\{j\in\mathbb{N}:0\leq j\leq n+1\}}|f(g(i))|$$

令$B_{n+1}=\{j\in\mathbb{N}:0\leq j\leq n+1\}$，考虑到$g$是双射，于是根据命题7.1.11(c)有：

$$\sum_{i\in\{j\in\mathbb{N}:0\leq j\leq n+1\}}|f(g(i))|=\sum_{i\in B_{n+1}}|f(g(i))|=\sum_{x\in g(B_{n+1})}|f(x)|=S_{B_{n+1}}$$

而$g(B_{n+1})$是X的一个子集，于是即对任意$T_n\in T$，都有一个$S_{B_{n+1}}\in S$使得$T_n\leq S_{B_{n+1}}\leq\sup(S)$成立，于是$\sup(S)$是$T$的一个上界，即$\sup(T)\leq\sup(S)$。

综上，可以得到$\sup(T)\geq\sup(S)$与$\sup(T)\leq\sup(S)$同时成立，于是只能有$\sup(T)=\sup(S)$。

然后我们证明$\sum_{x\in X}f(x)$绝对收敛当且仅当$\sup(S)<\infty$：

$\sum_{x\in X}f(x)$绝对收敛当且仅当$\sum_{x\in X}|f(x)|$收敛，这等价于$\sum_{i=0}^{\infty}|f(g(i))|$收敛。考虑到$T_{n+1}=T_n+|f(g(n+1))|\iff T_{n+1}\geq T_n$对任意$n\in\mathbb{N}$都成立，因此序列$(T_n)_{n=0}^{+\infty}$是一个递增序列，于是根据命题6.3.8，我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty}|f(g(i))| &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}|f(g(i))| \\ &= \sup\left(\left\{\sum_{i=0}^{n}|f(g(i))| : n \geq 0\right\}\right) \\ &= \sup(T)\end{aligned}$$

于是若$\sup(S) < \infty$时，由于绝对值非负我们同时也有$\sup(S) \geq 0$成立，从而：

$$\sum_{i=0}^{\infty}|f(g(i))| = \sup(T) = \sup(S) \iff 0 \leq \sum_{i=0}^{\infty}|f(g(i))| < \infty$$

从而即级数$\sum_{i=0}^{\infty}|f(g(i))|$收敛于某个确定的实数，于是级数$\sum_{x\in X}f(x)$绝对收敛；反过来，若级数$\sum_{x\in X}f(x)$绝对收敛，则级数$\sum_{i=0}^{\infty}|f(g(i))|$收敛于某个确定的实数，于是$\sup(S)$等于某个确定的实数，则必然有$\sup(S) < \infty$成立。

综上，于是结论成立。

8.2.2 证明引理8.2.5（提示：首先证明如果M是

$$M := \sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)| : A \subseteq X, A\text{是有限集}\right\}$$

那么对于任意的正整数n，集合$\{x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n}\}$都是有限集并且基数至多为$Mn$。然后利用习题8.1.9（其中会用到选择公理，参见8.4节））

令$M := \sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)| : A \subseteq X, A\text{是有限集}\right\}$，我们先证明下面的结论：

对于任意的正整数n，集合$X_n := \{x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n}\}$的基数至多为$Mn$。

证明：

使用反证法，不妨假设$\#(X_n)$的基数大于Mn，从而对X_n讨论：

- X_n是一个无限集。

于是此时使用选择公理，我们构建这样一个序列$(y_i)_{i=1}^{n}$：对任意给定自然数$1 \leq i \leq \lfloor Mn \rfloor + 2$，$y_i$是从集合$X_n \backslash \{y_j : 1 \leq j < i\}$中通过选择公理选取出的元素。即$y_1 \in X_n$，$y_2 \in X_n \backslash \{y_1\}$且$y_2 \neq y_1$等等。于是此时令集合$Y_n = \{y_j : 1 \leq j \leq \lfloor Mn \rfloor + 2\}$，其中对任意$y_j \in Y_n$都有$|f(y_j)| \geq \frac{1}{n}$成立，于是此时定义$g : Y_n \to \mathbb{R}$有$g(y) = \frac{1}{n}$，此时根据命题7.1.11(h)有：

$$\sum_{x\in Y_n}|f(x)| \geq \sum_{x\in Y_n}\frac{1}{n} = \frac{\lfloor Mn \rfloor + 2}{n} \geq \frac{Mn+1}{n} > M$$

而Y_n显然是一个有限集（基数为$\lfloor Mn \rfloor + 2$），且有$Y_n \subseteq X_n$（对任意$y_j \in Y_n$，都有$y_j \in X_n$），于是根据M定义，应该有：

$$\sum_{x\in Y_n}|f(x)| \leq M$$

此时导出矛盾，于是X_n不可能是一个无限集。

- X_n是一个有限集，且$\#(X_n) = c > Mn$。

于是此时定义$g: X_n \to \mathbb{R}$有$g(x) = \frac{1}{n}$，根据命题7.1.11(h)有：

$$\sum_{x \in X_n} |f(x)| \geq \sum_{x \in X_n} \frac{1}{n} = \frac{c}{n} > \frac{Mn}{n} = M$$

于是结论得证。

然后我们证明集合$\{x \in X : f(x) \neq 0\}$是至多可数的。

对任意自然数$n \in \mathbb{N}$，令有$A_n := \{x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n}\}$，其中特别定义$A_0 = \varnothing$，然后考虑集合$\{x \in X : |f(x)| > 0\}$与$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$的关系。

对任意$x_0 \in \{x \in X : |f(x)| > 0\}$，应当有$|f(x_0)| > 0$成立，根据习题5.4.4，于是存在一个正自然数$n$使得$|f(x_0)| > \frac{1}{n} > 0$成立，于是即存在$n \in \mathbb{N}$使得$x_0 \in A_n$成立，进而$x_0 \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$；对任意$x_0 \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$，应当有存在某个自然数$n \in \mathbb{N}$使得$x_0 \in A_n$，进而即存在某个正自然数$n \in \mathbb{N}$使得$|f(x_0)| > \frac{1}{n}$成立（显然不可能有$x_0 \in A_0$）。特别地，由于$n$是正数于是有$|f(x_0)| > 0$，从而可以推论出$x_0 \in \{x \in X : |f(x)| > 0\}$。

于是有$\{x \in X : |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$，而根据定义8.2.4与，若$\sum_{x \in X} f(x)$绝对收敛，则：

$$\sup\left\{\sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X\text{且}A\text{是有限集}\right\} = M < \infty$$

从而M是一个正实数；进而根据前辅助结论有对任意$n \in \mathbb{N}$，A_n都是一个有限集；此时习题8.1.9的结论有$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$是一个至多可数集，从而$\{x \in X : |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$也是至多可数的，于是引理8.2.5得证。

8.2.3 证明命题8.2.6（提示：你当然可以使用第7章中的所有结论）

对于一个绝对收敛的级数$\sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x)$，我们不需要考虑$\{x \in X : f(x) \neq 0\}$是一个有限集的情况，对有限集上的和讨论绝对收敛这个概念显然是没有意义，因为有限和总是计算出来的一个确定实数，因此在下面的证明中，我们总是默认$\{x \in X : f(x) \neq 0\}$是一个无限集然后加以证明

然后逐条证明：

1. 级数$\sum_{x \in X}(f(x) + g(x))$是绝对收敛的，并且：

$$\sum_{x \in X}(f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x)$$

证明：

先证明级数是绝对收敛的。

考虑集合$S = \left\{\sum_{x \in A} |f(x) + g(x)| : A \subseteq X\text{且}A\text{是有限集}\right\}$中任意的某个元素$\sum_{x \in A} |f(x) + g(x)|$，根据命题7.1.11有：

$$\begin{aligned}\sum_{x \in A} |f(x) + g(x)| &\leq \sum_{x \in A} |f(x)| + |g(x)| \\ &= \sum_{x \in A} |f(x)| + \sum_{x \in A} |g(x)|\end{aligned} \tag{1}$$

而根据定义8.2.4，有$M=\sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)|:A\subseteq X\text{且}A\text{是有限集}\right\}$与$N=\sup\left\{\sum_{x\in A}|g(x)|:A\subseteq X\text{且}A\text{是有限集}\right\}$均是有限实数，于是$(1)$可进一步化简有：

$$\sum_{x\in A}|f(x)+g(x)|\leq\sum_{x\in A}|f(x)|+\sum_{x\in A}|g(x)|\leq M+N \tag{2}$$

于是集合S是存在上界的，根据最小上界原理，于是其最小上界存在且$\sup(S)\leq M+N$，从而根据定义8.2.4有$\sum_{x\in X}(f(x)+g(x))$是绝对收敛的。

再证明级数的值：

由于级数是绝对收敛的，此时即证明：

$$\sum_{x\in X:f(x)+g(x)\neq 0}(f(x)+g(x))=\sum_{x\in X:f(x)\neq 0}f(x)+\sum_{x\in X:g(x)\neq 0}g(x)$$

令集合$S_1=\{x\in X:f(x)\neq 0\}$，$S_2=\{x\in X:g(x)\neq 0\}$，$S_3=\{x\in X:f(x)+g(x)\neq 0\}$，$S=\bigcup_{1\leq i\leq 3}S_i$。根据命题8.2.5与习题8.1.9的结论，我们有S_1，S_2，S_3与S均是可数的，此时考虑求值：

根据命题8.2.6(c)的结论，对$\sum_{x\in X:f(x)\neq 0}f(x)$，我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{x\in S}f(x)&=\sum_{x\in S_1}f(x)+\sum_{x\in S\setminus S_1}f(x)\\&=\sum_{x\in X:f(x)\neq 0}f(x)+\sum_{x\in X:g(x)\neq 0\text{且}f(x)=0}f(x)\\&=\sum_{x\in X:f(x)\neq 0}f(x)+0\\&=\sum_{x\in X:f(x)\neq 0}f(x)\end{aligned}$$

类似的，我们可以证明$\sum_{x\in X:g(x)\neq 0}g(x)=\sum_{x\in S}g(x)$与$\sum_{x\in X:f(x)+g(x)\neq 0}(f(x)+g(x))=\sum_{x\in S}(f(x)+g(x))$。

又根据前证明与题设，$\sum_{x\in S}f(x)$，$\sum_{x\in S}g(x)$与$\sum_{x\in S}(f(x)+g(x))$都是绝对收敛的，于是根据选择公理，可以选出双射$h:\mathbb{N}\to S$与$h_2:\mathbb{N}\to S$使得$\sum_{x\in S}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(h(n))$与$\sum_{x\in S}g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g(h(n))$成立，于是结合命题7.1.11与极限定律有：

$$
\begin{aligned}
\sum_{x\in S} f(x)+\sum_{x\in S} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(h(n))+\sum_{n=0}^{\infty} g(h(n)) \\
&= \lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{i} f(h(n))+\lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{i} g(h(n)) \\
&= \lim_{i\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{i} f(h(n))+\sum_{n=0}^{i} g(h(n))\right] \\
&= \lim_{i\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{i} f(h(n))+g(h(n))\right] \\
&= \sum_{x\in S}(f(x)+g(x))
\end{aligned}
$$

于是有
$\sum_{x\in S} f(x)+\sum_{x\in S} g(x)=\sum_{x\in S}(f(x)+g(x)) \iff \sum_{x\in X} f(x)+\sum_{x\in X} g(x)=\sum_{x\in X}(f(x)+g(x))$
，值的结论得证。

---

2. 若c是一个实数，那么$\sum_{x\in X} c\cdot f(x)$是绝对收敛的，并且：

$$
\sum_{x\in X} c\cdot f(x)=c\sum_{x\in X} f(x)
$$

证明：

先证明级数是绝对收敛的。

对任意$A\subseteq X$且A是有限集，根据命题7.1.11的结论，我们有：

$$
\sum_{x\in A}|c\cdot f(x)|=|c|\sum_{x\in A}|f(x)|
$$

若设$M=\sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)|:A\subseteq X\text{且}A\text{是有限集}\right\}$，则由定义8.2.4有对任意$A\subseteq X$且$A$是有限集：

$$
\sum_{x\in A}|f(x)|\le M \iff |c|\sum_{x\in A}|f(x)|\le |c|M
$$

于是$|c|M$是集合$\left\{\sum_{x\in A}|c\cdot f(x)|:A\subseteq X\text{且}A\text{是有限集}\right\}$的一个上界，从而根据最小上界原理与定义8.2.4可以得到级数$\sum_{x\in X} c\cdot f(x)$也是绝对收敛的。

然后证明它的值。

对任意情况的X，我们总有级数$\sum_{x\in X} f(x)=\sum_{x\in X:f(x)\neq 0} f(x)$，由$\sum_{x\in X:f(x)\neq 0} f(x)$绝对收敛，根据选择公理，于是有存在某个双射$h:\mathbb{N}\to\{x\in X:f(x)\neq 0\}$使得$\sum_{n=0}^{\infty} f(h(n))$绝对收敛，

于是根据极限定律与级数定义有：

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X:c\cdot f(x)\neq 0} c\cdot f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c\cdot f(h(n)) &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} c\cdot f(h(n)) \\ &= \lim_{m\to\infty} c\cdot\sum_{n=0}^{m} f(h(n)) \\ &= c\cdot\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} f(h(n)) \\ &= c\cdot\sum_{n=0}^{\infty} f(h(n)) \\ &= c\cdot\sum_{x\in X:f(x)\neq 0} f(x)\end{aligned}$$

于是即：

$$\sum_{x\in X} c\cdot f(x) = c\sum_{x\in X} f(x)$$

结论得证。

---

3. 若存在两个不相交的集合X_1，X_2使得$X_1\cup X_2 = X$，那么$\sum_{x\in X_1} f(x)$和$\sum_{x\in X_2} f(x)$都是绝对收敛的，并且：

$$\sum_{x\in X_1\cup X_2} f(x) = \sum_{x\in X_1} f(x) + \sum_{x\in X_2} f(x)$$

反过来，如果$h: X\to\mathbb{R}$使得$\sum_{x\in X_1} h(x)$和$\sum_{x\in X_2} h(x)$都是绝对收敛的，那么$\sum_{x\in X_1\cup X_2} h(x)$也是绝对收敛的，并且：

$$\sum_{x\in X_1\cup X_2} h(x) = \sum_{x\in X_1} h(x) + \sum_{x\in X_2} h(x)$$

证明：

令$S = \left\{\sum_{x\in A}|f(x)| : A\subseteq X\text{且}A\text{是有限集}\right\}$，$S_i = \left\{\sum_{x\in A}|f(x)| : A\subseteq X_i\text{且}A\text{是有限集}\right\}$（其中$i = 1$或2）。

证明前一个结论：

绝对收敛：

对任意$\sum_{x\in A_1}|f(x)|\in S_1$与$\sum_{x\in A_2}|f(x)|\in S_2$，我们有$A_1\subseteq X_1$与$A_2\subseteq X_2$，又有$X_1$，$X_2$是$X$的子集，于是$A_1$，$A_2$也是$X$的子集，从而有$\sum_{x\in A_1}|f(x)|\in S$与$\sum_{x\in A_2}|f(x)|\in S$成立，若$\sum_{x\in X} f(x)$绝对收敛，那么根据定义8.2.4有$\sup(S) < +\infty$，于是：

$$\sum_{x\in A_1}|f(x)| < \sup(S), \sum_{x\in A_2}|f(x)| < \sup(S)$$

即$\sup(S)$同时是S_1与S_2的上界。于是根据最小上界原理，$\sup(S_1)$与$\sup(S_2)$也存在并且小于无穷，进而根据定义8.2.4可以得到$\sum_{x\in X_1} f(x)$与$\sum_{x\in X_2} f(x)$都是绝对收敛的。

值的证明：

上文已经有证明$\sum_{x\in X_1}f(x)$与$\sum_{x\in X_2}f(x)$必然是绝对收敛的，于是根据选择公理，分别存在两个双射$h_1:\mathbb{N}\to\{x\in X_1:f(x)\neq 0\}$与$h_2:\mathbb{N}\to\{x\in X_2:f(x)\neq 0\}$使得两个对应级数绝对收敛。然后考虑令函数$h:\mathbb{N}\to\{x\in X:f(x)\neq 0\}$有：

$$h(n)=\begin{cases}h_1(\frac{n}{2}) & n\text{是偶数}\\ h_2(\frac{n-1}{2}) & n\text{是奇数}\end{cases}$$

显然有h是一个双射，于是考虑$\sum_{x\in X:f(x)\neq 0}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(h(n))$的值：

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X:f(x)\neq 0}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(h(n))&=\lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{i}f(h(n))\\&=\lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{2i-1}f(h(n))\\&=\lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{i-1}f(h(2n))+\lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{i-1}f(h(2n+1))\\&=\lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{i-1}f(h_1(n))+\lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{i-1}f(h_2(n))\\&=\sum_{x\in X_1:f(x)\neq 0}f(x)+\sum_{x\in X_2:f(x)\neq 0}f(x)\end{aligned}$$

这等价于$\sum_{x\in X}f(x)=\sum_{x\in X_1}f(x)+\sum_{x\in X_2}f(x)$，于是得到若$\sum_{x\in X_1}f(x)$和$\sum_{x\in X_2}f(x)$都是绝对收敛的，则必然有值的结论成立。

证明后一个结论：

绝对收敛：

对任意$\sum_{x\in A}|h(x)|\in S$，根据分配律可以将A写为$(A\cap X_1)\cup(A\cap X_2)$，于是再根据$X_1\cap X_2=\varnothing$与命题7.1.11(e)有：

$$\sum_{x\in A}|h(x)|=\sum_{x\in(A\cap X_1)\cup(A\cap X_2)}|h(x)|=\sum_{x\in(A\cap X_1)}|h(x)|+\sum_{x\in(A\cap X_2)}|h(x)|$$

又考虑到$A\cap X_1\subseteq X_1$，$A\cap X_2\subseteq X_2$，以及$\sum_{x\in X_1}h(x)$和$\sum_{x\in X_2}h(x)$都是绝对收敛，于是有：

$$\sum_{x\in A}|h(x)|=\sum_{x\in(A\cap X_1)}|h(x)|+\sum_{x\in(A\cap X_2)}|h(x)|\leq\sup(S_1)+\sup(S_2)<+\infty$$

于是即S有上界$\sup(S_1)+\sup(S_2)$，于是根据最小上界原理有$\sup(S)$存在且小于无穷。

值的证明：

证明同上一个结论值的证明基本类似，下面给出个人的版本：

$\sum_{x\in X_1}h(x)$与$\sum_{x\in X_2}h(x)$绝对收敛，于是根据选择公理存在双射$f_1:\mathbb{N}\to\{x\in X_1:h(x)\neq 0\}$与$f_2:\mathbb{N}\to\{x\in X_2:h(x)\neq 0\}$。然后考虑令函数$f:\mathbb{N}\to\{x\in X:h(x)\neq 0\}$有：

$$f(n) = \begin{cases} f_1(\frac{n}{2}) & n\text{是偶数} \\ f_2(\frac{n-1}{2}) & n\text{是奇数} \end{cases}$$

显然有f是一个双射，于是有：

$$\begin{aligned} \sum_{x\in X:h(x)\neq 0} h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h(f(n)) &= \lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{i} h(f(n)) \\ &= \lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{2i-1} h(f(n)) \\ &= \lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{i-1} h(f(2n)) + \lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{i-1} h(f(2n+1)) \\ &= \lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{i-1} h(f_1(n)) + \lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{i-1} h(f_2(n)) \\ &= \sum_{x\in X_1:h(x)\neq 0} h(x) + \sum_{x\in X_2:h(x)\neq 0} h(x) \end{aligned}$$

这等价于$\sum_{x\in X} h(x) = \sum_{x\in X_1} h(x) + \sum_{x\in X_2} h(x)$，于是值的结论成立。

---

4. 如果Y是另一个集合，并且$\phi : Y \to X$是一个双射，那么$\sum_{y\in Y} f(\phi(y))$也是绝对收敛的，并且：

$$\sum_{y\in Y} f(\phi(y)) = \sum_{x\in X} f(x)$$

证明：

绝对收敛：

令有$S_Y = \left\{\sum_{y\in A} |f(\phi(y))| : A\subseteq Y\text{且}A\text{是有限集}\right\}$与$S_X = \left\{\sum_{y\in A} |f(x)| : A\subseteq X\text{且}A\text{是有限集}\right\}$。对任意$\sum_{y\in A} |f(\phi(y))| \in S_Y$，有$A\subseteq Y$。由于$\phi$是一个双射，于是根据命题7.1.11(c)的结论，我们有$\phi(A)\in X$与$\sum_{y\in A} |f(\phi(y))| = \sum_{x\in\phi(A)} |f(x)|$成立。此时根据定义8.2.4，我们有$\sum_{x\in\phi(A)} |f(x)| \leq \sup(S_X) < +\infty$成立。于是即$\sup(S_X)$是$S_Y$的一个上界，根据最小上界原理，此时可以得到结论即$\sup(S_Y) \leq \sup(S_X) < +\infty$成立，于是根据定义8.2.4级数$\sum_{y\in Y} f(\phi(y))$也是绝对收敛的。

值的证明：

考虑限制ϕ值域与定义域得到新函数$\phi' : \phi^{-1}(\{x\in X : f(x)\neq 0\}) \to \{x\in X : f(x)\neq 0\}$与$\phi$有相同的映射关系，不难验证新的$\phi'$也是一个双射。

然后证明有$\phi^{-1}(\{x\in X : f(x)\neq 0\}) = \{y\in Y : f(\phi'(y))\neq 0\}$：

> 对任意$y \in \phi^{-1}(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$，有存在$x \in X$满足$f(x) \neq 0$且$\phi(y) = x$，于是进而有$f(\phi'(y)) \neq 0$，又考虑到$y \in Y$，于是$y \in \{y \in Y : f(\phi'(y)) \neq 0\}$；对任意$y \in \{y \in Y : f(\phi'(y)) \neq 0\}$，令有$x = \phi'(y)$，于是$f(\phi'(y)) \neq 0 \iff f(x) \neq 0$，而根据$\phi'$是双射，于是$x = \phi'(y) \in X$，从而$x \in \{x \in X : f(x) \neq 0\} \iff y \in \phi^{-1}(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$。于是结论得证，另两个集合是同一个集合。
>
> 于是有$\sum_{y\in Y} f(\phi(y)) = \sum_{y \in Y : f(\phi(y)) \neq 0} f(\phi(y)) = \sum_{y \in Y : f(\phi'(y)) \neq 0} f(\phi'(y))$。由于$\sum_{x \in X} f(x)$是绝对收敛的，于是由选择公理，总能选出一个双射$h : \mathbb{N} \to \{x \in X : f(x) \neq 0\}$使得$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(h(n))$，然后我们考虑到$\phi'^{-1} \circ h : \mathbb{N} \to \{y \in Y : f(\phi(y)) \neq 0\}$也是一个双射，于是：
>
> $$\begin{aligned}\sum_{y\in Y} f(\phi(y)) = \sum_{y \in Y : f(\phi'(y)) \neq 0} f(\phi'(y)) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(\phi'(\phi'^{-1} \circ h(n))) \\ &= \lim_{i \to \infty} \sum_{n=0}^{i} f(\phi'(\phi'^{-1} \circ h(n))) \\ &= \lim_{i \to \infty} \sum_{n=0}^{i} f(\phi'(\phi'^{-1}(h(n)))) \\ &= \lim_{i \to \infty} \sum_{n=0}^{i} f(h(n)) \\ &= \sum_{x \in X : f(x) \neq 0} f(x) \\ &= \sum_{x \in X} f(x)\end{aligned}$$
>
> 于是值的结论得证。

8.2.4 证明引理8.2.7 **（提示：利用反证法和极限定律）**

> 使用反证法，我们讨论$\sum_{n \in A_+} a_n$与$\sum_{n \in A_-} a_n$的可能情况。
>
> 1. $\sum_{n \in A_+} a_n$与$\sum_{n \in A_-} a_n$都是条件收敛的：
>
> 此时可以计算有$\sum_{n \in A_+} |a_n| = \sum_{n \in A_+} a_n$与$\sum_{n \in A_-} |a_n| = \sum_{n \in A_-} -a_n = -\sum_{n \in A_-} a_n$，于是这两个级数还是绝对收敛的。根据命题8.2.6此时我们有：
>
> $$\begin{aligned}\sum_{n \in A_+} a_n - \sum_{n \in A_-} a_n &= \sum_{n \in A_+} a_n + \sum_{n \in A_-} -a_n \\ &= \sum_{n \in A_+} |a_n| + \sum_{n \in A_-} |a_n| \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\end{aligned}$$
>
> 于是$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$也是收敛的，进而$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$绝对收敛，然而根据前提条件$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$应该条件收敛但是不绝对收敛的，于是此情况不可能。

2. $\sum_{n\in A_+} a_n$与$\sum_{n\in A_-} a_n$中有一个收敛一个发散：

考虑令有序列：

$$b_n = \begin{cases} a_n & n\in A_+ \\ 0 & n\in A_- \end{cases} \qquad c_n = \begin{cases} 0 & n\in A_+ \\ a_n & n\in A_- \end{cases}$$

不妨假设$\sum_{n\in A_+} a_n$收敛$\sum_{n\in A_-} a_n$发散，此时不难得知$\sum_{n\in A_+} a_n$同时也是绝对收敛的，于是根据命题8.2.6，此时有：

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A_+} a_n = \sum_{n\in A_+} b_n &= \sum_{n\in A_+} b_n + 0 \\ &= \sum_{n\in A_+} b_n + \sum_{n\in A_-} b_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n\end{aligned}$$

于是根据极限定律与命题7.1.4，我们有$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)$是绝对收敛的，并且：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n) = \lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{i}(a_n - b_n) = \lim_{i\to\infty}&\left[\sum_{n=0}^{i} a_n - \sum_{n=0}^{i} b_n\right] \\ &= \lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{i} a_n - \lim_{i\to\infty}\sum_{n=0}^{i} b_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n\end{aligned}$$

此外我们有对任意$n\in\mathbb{N}$，$a_n - b_n = c_n$，于是使用命题8.2.6对$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$化简有：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n &= \sum_{n\in A_+} c_n + \sum_{n\in A_-} c_n \\ &= 0 + \sum_{n\in A_-} a_n \\ &= \sum_{n\in A_-} a_n\end{aligned}$$

从而可以证明$\sum_{n\in A_-} a_n$也是收敛的，这同我们反证假设中$\sum_{n\in A_-} a_n$发散的假设矛盾，于是此情况不可能。

$\sum_{n\in A_-} a_n$收敛$\sum_{n\in A_+} a_n$发散的情况下证明同理，也可以得证$\sum_{n\in A_-} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$，进而证有$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n\in A_+} a_n$收敛同反证假设的发散相矛盾，于是此情况也不可能。

综上，于是反证结束，$\sum_{n\in A_+} a_n$与$\sum_{n\in A_-} a_n$必然都是不条件收敛的。

8.2.5 解释定理8.2.8的证明中标注（为什么?）的地方

> 逐个证明：
>
> 1. 设A_+与A_-是命题8.2.7中定义的集合，那么A_+与A_-都是无限集。
>
> 若A_+是有限集，那么由于有限级数必然是收敛的可以得到$\sum_{n\in A_+} a_n$是收敛的，这同命题8.2.7矛盾。类似地也可以得到A_-必然是一个无限集。
>
> ---
>
> 2. 根据命题8.1.5可以找到递增的双射$f_+:\mathbb{N}\to A_+$与$f_-:\mathbb{N}\to A_-$，于是级数$\sum_{m=0}^{\infty} a_{f_+(m)}$与$\sum_{m=0}^{\infty} a_{f_-(m)}$都不是绝对收敛的。
>
> 可以使用反证法，假设$\sum_{m=0}^{\infty} a_{f_+(m)}$是绝对收敛的，那么根据定义8.2.1有$\sum_{n\in A_+} a_n=\sum_{m=0}^{\infty} a_{f_+(m)}$也是绝对收敛的，这和命题8.2.7矛盾，于是$\sum_{m=0}^{\infty} a_{f_+(m)}$不可能是绝对收敛的。类似地也可以得到$\sum_{m=0}^{\infty} a_{f_-(m)}$不是绝对收敛的。
>
> ---
>
> 3. $j\mapsto n_j$是一个单射。
>
> 取缩写记号$B_+(j)=\min\{n\in A_+:\text{对任意}i<j\text{有}n_i\neq n_j\}$，
> $B_-(j)=\min\{n\in A_-:\text{对任意}i<j\text{有}n_i\neq n_j\}$，然后开始下文的证明。
>
> 对任意$j_1\neq j_2$，不妨假设有$j_1<j_2$，于是考虑n_{j_2}的定义，要么有$n_{j_2}=\min B_+(j_2)$，要么有$n_{j_2}=\min B_-(j_2)$。而根据良序原理，即$n_{j_2}\in B_+(j_2)$与$n_{j_2}\in B_-(j_2)$中恰有一个为真，这两种情况无论哪一种都满足对任意$i<j_2$有$n_i\neq n_{j_2}$，特别取$i=j_1$则可以得到$n_{j_1}\neq n_{j_2}$。
>
> 综上，于是对任意j_1，$j_2\in\mathbb{N}$且$j_1\neq j_2$，总有$n_{j_1}\neq n_{j_2}$成立，即$j\mapsto n_j$是一个单射。
>
> ---
>
> 4. 情景I出现了无限次，情景II同样也出现了无限次。
>
> > 情景I：若$\sum_{0\le i<j} a_{n_i}<L$，那么令
> >
> > $$n_j:=\min\{n\in A_+:\text{对任意}i<j\text{有}n_i\neq n_j\}$$
> >
> > 情景II：若$\sum_{0\le i<j} a_{n_i}\geq L$，那么令
> >
> > $$n_j:=\min\{n\in A_-:\text{对任意}i<j\text{有}n_i\neq n_j\}$$
>
> 显然对任意的$j\in\mathbb{N}$，情景I与情景II之中恰有一个出现。
>
> 对情景I，使用反证法。假设$j=j_0$时最后一次出现情景I，从而对任意$j>j_0$都有$\sum_{0\le i<j} a_{n_i}\geq L$，于是$n_j$使用情景$II$的定义并且对任意$j>j_0$，根据情景$II$的定义我们可以推有性质：
>
> - 性质1：$n_j<n_{j+1}$，并且若有$j_1<j_2$，则必然有$n_{j_1}<n_{j_2}$。考察n_j的定义即可得证这个结论。

- 性质2：对任意$a \in A_-$且$a \geq n_{j_0+1}$，必然存在一个$j > j_0$有$n_j = a$成立。使用反证法证明，若不存在j使得$n_j = a$，于是对于任意$j > j_0$总有$n_j < a$成立，又根据自然数的性质，可以归纳得到对任意n_j总有$n_j \geq n_{j_0} + (j - j_0)$成立，于是可以得到对任意自然数$n > n_j$都有$a > n_{(n-n_{j_0}+j_0)} \geq n$成立，这同$a$是自然数的前提矛盾，于是不成立。

取$f_- : \mathbb{N} \to A_-$是引理8.2.7中的单调递增函数，我们证明一个辅助结论：若对任意$j \geq j_0$，n_j的定义都是情景II的条件，那么存在一个整数$c = j_0 - f_-^{-1}(n_{j_0})$，使得对任意$j \geq j_0$都满足$f_-(j-c) = n_j$。

设$j = j_0 + a$，我们对a进行归纳：

对$a = 0$时：

即$f_-(j_0 - c) = n_{j_0} \iff f_-(f_-^{-1}(n_{j_0})) = n_{j_0} \iff n_{j_0} = n_{j_0}$，于是成立。

归纳性假设对$0 \leq a < b$的时候都有结论成立，考虑$a = b$的情况：

使用反证法，设此时$f(b + f_-^{-1}(n_{j_0})) = F \neq n_{j_0+b}$，由$F \in A_-$，则讨论其取值可能：

- $F < n_{j_0+b}$：由n_{j_0+b}的定义，则必然存在一个$j < j_0 + b$满足$F = n_j$。于是对比$F' = f(b - 1 + f_-^{-1}(n_{j_0})) = n_{j_0+b-1}$：由于$f$是单调递增的，于是应当有$F' < F$，即$n_{j_0+b-1} < n_j$；又由于$j \leq j_0 + b - 1$，于是必然有$n_{j_0+b-1} \geq n_j$。从而产生矛盾，于是此情况不可能。
- $F > n_{j_0+b}$：此时考察n_{j_0+b}，由于$n_{j_0+b} \in A_-$，于是必然存在$n' \in \mathbb{N}$满足$f(n') = n_{j_0+b}$，但是对任意自然数$m < b$，根据归纳假设应该有$f(m) = n_j\ (j < j_0 + b) < n_{j_0+b}$；对任意自然数$m \geq b$，则由$f$是严格递增的可知有$f(m) \geq F > n_{j_0+b}$，于是此情景下不存在任何自然数$n'$满足$f(n') = n_{j_0+b}$。从而产生矛盾，此情况不可能。

综上，结论得证。

于是对任意$j > j_0$，我们有：

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq i < j} a_{n_i} = \sum_{0 \leq i < j_0+1} a_{n_i} + \sum_{j_0+1 \leq i < j} a_{n_i} &= C_1 + \sum_{i=j_0+1}^{j-1} a_{f_-(i-c)} \qquad \left(C_1 = \sum_{0 \leq i < j_0+1} a_{n_j}\right) \\
&= C_1 + \sum_{i=j_0+1-c}^{j-1-c} a_{f_-(i)} \\
&= C_1 + \sum_{i=0}^{j-1-c} a_{f_-(i)} - \sum_{i=0}^{j_0-c} a_{f_-(i)}
\end{aligned}$$

对上述结果，由于$\sum_{i=0}^{j_0-c} a_{f_-(i)}$是一个确定的有限级数，于是不妨令其为$C_2$；而对$\sum_{i=0}^{j-1-c} a_{f_-(i)}$，由命题8.2.7我们知道级数$\sum_{i=0}^{\infty} a_{f_-(i)}$是发散的，并且根据$f_-$的定义应该有$a_{f_-(i)} < 0$对任意$i \in \mathbb{N}$成立，于是即对任意实数$l$，总存在自然数$N > 0$使得对任意$n > N$都有$\sum_{i=0}^{n} a_{f_-(i)} < l$成立。特别地，我们取$l = L - C_1 + C_2$，并记此时$N$为$N_0$，于是即对任意$n = j - 1 - c > N_0$有：

$$\sum_{0 \leq i < j} a_{n_i} = C_1 - C_2 + \sum_{i=0}^{j-1-c} a_{f_-(i)} < C_1 - C_2 + L - C_1 + C_2 = L$$

即在反证假设下，对任意$j > \max(N_0 + 1 + c, j_0)$的时候都会有$\sum_{0 \leq i < j} a_{n_i} < L$，于是此时$n_j$的定义应该满足情景$I$，这同$n_{j_0}$的定义是最后一次出现情景$I$的假设矛盾，于是情景$I$必然出现了无数次。

类似的，可以以同样的思路证明引理：若对任意$j \geq j_0$，n_j的定义都是情景I的条件，那么存在一个整数$c = j_0 - f_+^{-1}(n_{j_0})$，使得对任意$j \geq j_0$都满足$f_+(j - c) = n_j$。然后在反证假设情景$II$只出现$j_0$次时，证明得到总存在一个$J > j_0$满足对任意$j > J$都应该有$\sum_{0 \leq i < j} a_{n_i} > L$使得对$n_j$的定义符合情景$II$的场景，从而与反证假设出现矛盾。

---

5. $j \mapsto n_j$是一个满射。

值域是$\mathbb{N}$，于是即证明对任意$n \in \mathbb{N}$，总存在$j \in \mathbb{N}$满足$n_j = n$。

使用反证法，分情况讨论：

- $n \in A_+$：

设对任意$j \in \mathbb{N}$，都不存在$n_j = n$，于是即对任意的$j \in \mathbb{N}$且$n_j \in A_+$，考察情景I的定义可得都应该有$n_j < n$成立，从而对于A_+中元素m，只有当其属于集合$B_+ := \{m \in A_+ : m < n\}$时才存在$j \in \mathbb{N}$使得$n_j = m$。然而对于$B_+$，根据基数运算有：

$$\#(B_+) \leq \#(\{m \in \mathbb{N} : m < n\}) = n$$

换言之，情景I的出现次数不可能超过n次，这同(4)的结论矛盾，于是不成立。

- $n \in A_-$：

同理，设对任意$j \in \mathbb{N}$，都不存在$n_j = n$，于是即对任意的$j \in \mathbb{N}$且$n_j \in A_-$，考察情景II的定义可得都应该有$n_j < n$成立，从而对于A_-中元素m，只有当其属于集合$B_- := \{m \in A_- : m < n\}$时才存在$j \in \mathbb{N}$使得$n_j = m$。然而对于$B_-$，根据基数运算有：

$$\#(B_+) \leq \#(\{m \in \mathbb{N} : m < n\}) = n$$

换言之，情景II的出现次数不可能超过n次，这同(4)的结论矛盾，于是不成立。

---

6. $\lim_{j \to \infty} a_{n_j} = 0$。

即证明对任意$\varepsilon > 0$，总存在$J \in \mathbb{N}$满足对任意$j > J$总有$|a_{n_j}| < \varepsilon$成立。

由(3)与(5)，我们知道$j \mapsto n_j$构成一个双射，不妨令这个双射为$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，即$g(j) = n_j$。

根据命题7.2.6零判别法，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$条件收敛于是有$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$，从而对任意$\varepsilon > 0$，总存在$N > 0$满足对任意$n > N$都有$|a_n| < \varepsilon$。

取$f_+ : \mathbb{N} \to A_+$，$f_- : \mathbb{N} \to A_-$是引理8.2.7中的递增双射。由于f_+与f_-都是定义域为$\mathbb{N}$，值域为$\mathbb{N}$子集的严格递增函数，因此有$f_+(n) \geq n$与$f_-(n) \geq n$成立（该结论本书有习题证明，但是出处不记得位置了，可以用归纳法证明，此处引用）。

此外，对任意的$j_1 < j_2$，若有n_{j_1}与n_{j_2}同属于A_+或者A_-，则有$n_{j_1} < n_{j_2} \iff g(j_1) < g(j_2)$成立。

于是令$J=\max(g^{-1}\circ f_+(N),g^{-1}\circ f_-(N))$。对任意$j>J$，若$n_j\in A_+$，则由于$g(j)>f_+(N)\geq N$，从而由前结论必然有$|a_{n_j}|<\varepsilon$成立；若$n_j\in A_-$，则由于$g(j)>f_-(N)\geq N$，从而由前结论必然有$|a_{n_j}|<\varepsilon$成立。即对任意$j>J$都有$|a_{n_j}|<\varepsilon$成立，于是结论得证。

---

7. $\lim\limits_{j\to\infty}\sum\limits_{0\leq i<j}a_{n_i}=L$。

证明$\lim\limits_{j\to\infty}\sum\limits_{0\leq i<j}a_{n_i}=L$，即证明部分和$S_j=\sum\limits_{0\leq i<j}a_{n_j}$收敛于$L$。

由(6)中结论，我们有$\lim\limits_{j\to\infty}a_{n_j}=0$，从而对任意$\varepsilon>0$，总存在一个$J'\geq 0$满足对任意$j>J$都有$|a_{n_j}|<\varepsilon$成立，于是对$S_{J'}$可能的值做讨论：

- $S_{J'}\geq L$：

于是此时n_J的定义符合(4)中情景II的定义，而根据(4)中结论，必然在某个$J>J'$使得n_J首次满足情景I的定义，即对任意j满足$J'\leq j<J$都有n_j定义符合情景II，而n_J定义符合情景I。

- $S_{J'}<L$：

于是此时n_J的定义符合(4)中情景I的定义，而根据(4)中结论，必然在某个$J>J'$使得n_J首次满足情景II的定义，即对任意j满足$J'\leq j<J$都有n_j定义符合情景I，而n_J定义符合情景II。

对$j\geq J$时S_j的取值，给出结论：对任意$j\geq L$都有$|S_j-L|<\varepsilon$成立。取$j=J+a$（$a\in\mathbb{N}$），对a归纳证明这个结论：

对$a=0$时，即$j=J$，根据上面的讨论有：

> - 若$S_J\geq L$，则$S_{J-1}<L$，$a_{n_{J-1}}\geq 0$，并且由$J>J'$有$|a_{n_{J-1}}|<\varepsilon\implies 0\leq a_{n_{J-1}}<\varepsilon$。于是此时有：
>
> $$S_J=S_{J-1}+a_{n_{J-1}}<L+\varepsilon\xRightarrow{S_J\geq L}|S_J-L|<\varepsilon$$

> - 若$S_J<L$，则$S_{J-1}\geq L$，$a_{n_{J-1}}<0$，并且由$J>J'$有$|a_{n_{J-1}}|<\varepsilon\implies -\varepsilon<a_{n_{J-1}}<0$。于是此时有：
>
> $$S_J=S_{J-1}+a_{n_{J-1}}>L-\varepsilon\xRightarrow{S_J<L}|S_J-L|<\varepsilon$$

于是当$a=0$时总能得证有$|S_J-L|<\varepsilon$成立。

现归纳性假设$a=b$时有结论得证，对$a=b+1$时的情况证明：

根据归纳假设，于是有$|S_{J+b}-L|<\varepsilon$，此时根据(4)对S_{J+b}的可能取值讨论：

> - $L-\varepsilon<S_{J+b}<L$，则$a_{J+b}\geq 0$，并且由$J+b>J'$有$|a_{n_{J+b}}|<\varepsilon\implies 0\leq a_{n_{J-1}}<\varepsilon$，于是：
>
> $$L-\varepsilon+0<S_{J+b}+a_{n_{J+b}}<L+\varepsilon\implies|S_{J+(b+1)}-L|<\varepsilon$$

> - $L\leq S_{J+b}<L+\varepsilon$，则$a_{J+b}<0$，并且由$J+b>J'$有$|a_{n_{J+b}}|<\varepsilon\implies -\varepsilon<a_{n_{J+b}}<0$，于是：
>
> $$L+(-\varepsilon)<S_{J+b}+a_{n_{J+b}}<L+\varepsilon\implies|S_{J+(b+1)}-L|<\varepsilon$$

于是当$a=b$成立结论时，必然有$a=b+1$时也成立结论。综上，于是归纳得证结论。

> 根据上面的证明，于是可以总结得到结论：对任意$\varepsilon > 0$，总存在一个整数$J \geq 0$，使得对任意$j > J$均有$|S_j - L| < \varepsilon$成立，于是根据收敛序列的定义，即：
>
> $$\lim_{j\to\infty} S_j = \lim_{j\to\infty} \sum_{0\leq i<j} a_{n_i} = L$$
>
> 于是结论得证。

8.2.6 设$\sum_{m=0}^{\infty} a_n$是一个条件收敛但不绝对收敛的级数，证明：存在一个双射$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$使得$\sum_{m=0}^{\infty} a_{f(m)}$发散到$+\infty$，或者更准确地说，

$$\lim_{N\to\infty}\inf \sum_{m=0}^{N} a_{f(m)} = \lim_{N\to\infty}\sup \sum_{m=0}^{N} a_{f(m)} = +\infty$$

（当然，把$+\infty$替换成$-\infty$所得到的类似结论依然成立）

> 仿照定理8.2.8中的证明，我们给出下面一个递归序列n_m，然后证明$\lim_{N\to\infty}\inf \sum_{m=0}^{N} a_{n_m} = \lim_{N\to\infty}\sup \sum_{m=0}^{N} a_{n_m} = +\infty$。
>
> 同样沿用定理8.2.8证明中f_+，f_-，A_+，A_-的定义，n_m定义如下：
>
> > 情景I：若有$\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} < \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$，则令：
> >
> > $$n_m = \{n \in A_+ : 对任意i < m有n \neq n_i\}$$
> >
> > 情景II：若有$\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$，则令：
> >
> > $$n_m = \{n \in A_- : 对任意i < m有n \neq n_i\}$$
> >
> > 此定义通俗解释即对比$(\frac{1}{2}a_{f_+(i)})_{i=1}^{\infty}$的部分和，若如果大于则下一个项从$A_+$中挑一个正数，反之从$A_-$中挑一个负数。
>
> 我们用类似习题8.2.5的证明思路完成这个结论的证明。
>
> 在主结论证明之前，我们先证明一个辅助结论：
>
> - 结论0：对上面的递归定义，当你在$m_0 < m_1$时出现某个情景，而对任意$m_0 < m < m_1$（可以没有）都有n_m的定义不满足该情景，则必然有①$f_+^{-1}(n_{m_1}) = f_+^{-1}(n_{m_0}) + 1$（若$m_0$，$m_1$均为情景$I$）②$f_-^{-1}(n_{m_1}) = f_-^{-1}(n_{m_0}) + 1$（若$m_0$，$m_1$均为情景$II$），该结论只同其定义方式相关，与触发情景的条件无关。
>
> 证明：
>
> 考察n_{m_1}的定义，于是即对任意$i < m$有$n_{m_1} \neq n_i$，此外无论f_+与f_-都是单调递增的双射，所以由$n_{m_1} > n_{m_0}$可以推知它们对应的函数值也应该有同样的序关系。假设两者情景对应的函数为f，对应集合为A（即m_0，m_1满足情景I则$f := f_+$，$A := A_+$；满足情景II则$f := f_-$，$A := A_-$），从而考虑反证法：
>
> 若$f^{-1}(n_{m_1}) \neq f^{-1}(n_{m_0}) + 1$，从而只能有$f^{-1}(n_{m_1}) > f^{-1}(n_{m_0}) + 1$。于是令$j := f^{-1}(n_{m_0}) + 1$，由$j > f^{-1}(n_{m_0})$，于是应该有$f(j) > n_{m_0}$；同理有$f^{-1}(n_{m_1}) > j$有$n_{m_1} > f(j)$；而$f$是一个双射，因此$f(j) \in A$。于是综上我们有存在$f(j) \in A$满足：
>
> $$n_{m_0} < f(j) < n_{m_1}$$

然而考察n_{m_1}的定义，n_{m_1}的值应当有$f(j) > n_{m_1}$，于是导出矛盾。从而只能有$f^{-1}(n_{m_1}) = f^{-1}(n_{m_0}) + 1$，证明完毕。

仍然使用上面f与A的定义，在此辅助结论下我们可以导出下面子结论：

- 结论1：当对任意$m_0 \leq m \leq m_1$都满足某个情景，那么存在常数$c := f^{-1}(n_{m_0}) - m_0$使得：

$$\sum_{m_0 \leq m \leq m_1} a_{n_m} = \sum_{i=m_0+c}^{m_1+c} a_{f(i)}$$

这个结论是显然的，写有$\sum_{m_0 \leq m \leq m_1} a_{n_m} = \sum_{m_0 \leq m \leq m_1} a_{f(f^{-1}(n_m))}$，利用上结论归纳得到$f^{-1}(n_m) = f^{-1}(n_{m_0}) + m - m_0$即可得证。

- 结论2：对任意$m \geq 0$，总存在一个$k \geq 0$满足（准确来说，这个k就是该集合的基数减1，但是我们证明不需要用到这个k值，仅需要知道它的存在性就行）：

$$\sum_{i \in \{i \in \mathbb{N}: n_i \in A \text{且} 0 \leq i < m\}} a_{n_i} = \sum_{i=0}^{k} a_{f(i)}$$

可以尝试对$\{i \in \mathbb{N} : n_i \in A \text{且} 0 \leq i < m\}$的基数做归纳，当基数为0的时候左右两式均为0显然成立；当基数为某个自然数j时，可以将其中最大值$i_{\max}$提取出来，将原求和分为对一个基数为$j-1$的集合$\{i \in \mathbb{N} : n_i \in A \text{且} 0 \leq i < i_{\max}\}$求和与一个单独的项$a_{n_{i_{\max}}}$相加，同理将右式分为$1 \sim k-1$的求和与对$a_{f(k)}$的相加，然后利用归纳假设与结论0得证结论。

- 结论3：结论1中的c总是小于等于0的。

可以考虑$0 \leq m < m_0$内$f^{-1}(n_m)$与m的增长，显然当若m满足结论1对应的情景，只有当增加到下一个满足结论1对应的情景m'时可以根据结论0得到此时$f^{-1}(n_{m'}) = f^{-1}(n_m) + 1$，而$m' - m$至少是1，从而我们可以将$0 \leq m < m_0$中$f^{-1}(n_m)$的增长以1为单位分为有限个阶段，而这些有限阶段中$m$的增长必然要大于1。

---

1. $m \mapsto n_m$是单射。

对任意$m_1 < m_2$，考察n_{m_2}的定义，注意到有$n_{m_2} \neq n_i$对任意$i < m_2$都成立，特别地，取$i = m_1$即$n_{m_2} \neq n_{m_1}$，于是即对任意$m_1 \neq m_2$都有$n_{m_2} \neq n_{m_1}$，从而$m \mapsto n_m$是单射。

---

2. 情景I与情景II总是会无限次出现。

类似上题，使用反证法，假设情景I在对n_{m_0}的定义处最后一次出现，此后对任意$m > m_0$都有n_m的定义符合情景II，于是即对任意$m > m_0$都有：

$$\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$$

并且$a_{n_m} \in A_-$，于是我们将上式左端改写，并令有限级数$\sum_{i=0}^{m_0-1} a_{n_i}$为一个确定的正实数$M$，即：

$$M \geq \sum_{i=0}^{m_0-1} a_{n_i} + \sum_{i=m_0}^{m-1} a_{n_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$$

然而我们知道级数$\sum_{i=0}^{\infty} a_{f_+(i)}$发散，从而不可能存在$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$的上界，因此导出矛盾，不成立结论。

对情景II，同样使用反证法，假设情景II在对n_{m_0}的定义处最后一次出现，此后对任意$m > m_0$都有n_m的定义符合情景I，于是即对任意$m > m_0$都有：

$$\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} < \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$$

并且$a_{n_m} \in A_+$，于是我们将上面的式子改写为：

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m_0-1} a_{n_i} + \sum_{i=m_0}^{m-1} a_{n_i} &< \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{m_0-1} a_{f_+(i)} + \sum_{i=m_0}^{m-1} a_{f_+(i)}\right) \\ \left(\sum_{i=0}^{m_0-1} a_{n_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m_0-1} a_{f_+(i)}\right) + \sum_{i=m_0}^{m-1} a_{n_i} &< \frac{1}{2}\sum_{i=m_0}^{m-1} a_{f_+(i)} \\ M + \sum_{i=m_0}^{m-1} a_{n_i} &< \frac{1}{2}\sum_{i=m_0}^{m-1} a_{f_+(i)} \end{aligned}$$

其中$M := \sum_{i=0}^{m_0-1} a_{n_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m_0-1} a_{f_+(i)}$是一个确定的正实数。而根据结论1，上式又可以改为：

$$\begin{aligned} M + \sum_{i=m_0+c}^{m+c-1} a_{f_+(i)} &< \frac{1}{2}\sum_{i=m_0}^{m-1} a_{f_+(i)} \\ M + \sum_{i=m_0+c}^{m_0-1} a_{f_+(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i=m_0}^{m+c-1} a_{f_+(i)} &< \frac{1}{2}\sum_{i=m+c}^{m-1} a_{f_+(i)} \qquad (m \gg m_0) \\ M' + \frac{1}{2}\sum_{i=m_0}^{m+c-1} a_{f_+(i)} &< \frac{1}{2}\sum_{i=m+c}^{m-1} a_{f_+(i)} \end{aligned}$$

其中$M' := M + \sum_{i=m_0+c}^{m_0-1} a_{f_+(i)}$是一个确定的实数。这里我们假定了$m + c$足够大到能同时大于$m_0$与$m_0 + c$，由于我们只需要找到反证假设的漏洞，因此这样的假设是不影响证明的；对左式第2项，由于$\sum_{i=m_0}^{\infty} a_{f_+(i)}$是发散的，从而对任意实数$L$总能找到$m > 0$使得该项大于$L$，例如令$L = 2 - 2M'$；对右式第一项，考虑到零判别法有$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，从而对实数$\frac{1}{c}$，总能找到$N \geq 0$满足对任意$n \geq N$都有$|a_n| < \frac{1}{c}$，于是对任意$i \geq N$，总有$f_+(i) \geq f_+(N) \geq N$，于是取$m + c > N$时上式右项与原式有：

$$\frac{1}{2}\left|\sum_{i=m+c}^{m-1} a_{f_+(i)}\right| < \frac{1}{2}\left|\sum_{i=m+c}^{m-1} \frac{1}{c}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\text{左式} > M' + \frac{1}{2}(2 - 2M') = 1 > \frac{1}{2} > \text{右式}$$

综上于是当m足够大时，由反证假设出来的结论不成立。

---

3. $m \mapsto n_m$是满射。

使用反证法，我们假设存在$n \in \mathbb{N}$使得不存在任何m有$n_m = n$，不妨假设$n \in A$（A是A_+与A_-中的一个，证明过程两者没有区别）。于是根据定义，应该有对任意的$m \in \mathbb{N}$有$n_m \in A$，$n_m < n$总成立，于是集合$\{n_m \in \mathbb{N} : n_m \in A\}$必然是自然数集$\{i : 0 \leq i < n\}$的子集，也就是说它是有限的，即$A$所对应的那个情景（$A_+$对应情景$I$，$A_-$对应情景$II$）只出现了有限次，这同(2)中结论矛盾，于是$m \mapsto n_m$是满射。

---

4. $\lim\limits_{m \to \infty} a_{n_m} = 0$。

令函数$m \mapsto n_m$为$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，即$g(m) = n_m$。

根据零判别法有$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$，于是对任意$\varepsilon > 0$，总存在一个整数$N \geq 0$使得对任意$n \geq N$都有$|a_n| < \varepsilon$成立。考虑到$f_+$与$f_-$的性质以及$g$是一个双射，于是取整数$M = \max(g^{-1} \circ f_+(N), g^{-1} \circ f_-(N))$，对任意$m \geq M$讨论：

- $n_m \in A_+$，于是根据f_+是单调递增的，对任意$m > M$，都有$m > g^{-1} \circ f_+(N)$，又考虑到$g(m)$与$f_+(N)$都属于A_+，于是根据递归定义应该有$g(m) > f_+(N)$成立，从而有$g(m) > f_+(N) > N \implies |a_{n_m}| < \varepsilon$成立。
- $n_m \in A_-$，于是根据f_-是单调递增的，对任意$m > M$，都有$m > g^{-1} \circ f_-(N)$，又考虑到$g(m)$与$f_-(N)$都属于A_-，于是根据递归定义应该有$g(m) > f_-(N)$成立，从而有$g(m) > f_-(N) > N \implies |a_{n_m}| < \varepsilon$成立。

综上，于是对任意$\varepsilon > 0$，总能找到$M \geq 0$,使得对任意$m \geq M$都有$|a_{n_m}| < \varepsilon$，于是即$\lim\limits_{m \to \infty} a_{n_m} = 0$。

---

5. $\lim \inf\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{m=0}^{N} a_{f(m)} = \lim \sup\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{m=0}^{N} a_{f(m)} = +\infty$。

由于上下极限的性质，只要能证明$\lim \inf\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{m=0}^{N} a_{f(m)} = +\infty$，则由于上极限必然大于下极限即可推知题目结论。

$\lim \inf\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{m=0}^{N} a_{n_m} = +\infty$，等价于$\sup \left[\inf \left(\sum\limits_{i=0}^{j} a_{n_i} \right)_{j=M}^{+\infty} \right]_{M=0}^{+\infty} = +\infty$。于是即序列$\left[\inf \left(\sum\limits_{i=0}^{j} a_{n_i} \right)_{j=M}^{+\infty} \right]_{M=0}^{+\infty}$不存在任何上界，从而对任意实数$L$，总存在一个$M \geq 0$满足$\inf \left(\sum\limits_{i=0}^{j} a_{n_i} \right)_{j=M}^{+\infty} > L$。再结合下确界定义即对任意$m \geq M$，都有$\sum\limits_{i=0}^{m} a_{n_i} > L$成立。

于是题式可总结为：证明对任意实数L，总存在一个$M \geq 0$使得对任意$m \geq M$都有$\sum\limits_{i=0}^{m} a_{n_i} > L$成立，下面给出证明。

证明：

先列出一些从上面证明中可以得到的条件：

> 条件1：已知$\sum_{i=0}^{\infty} a_{f_+(i)}$发散，从而对给定的实数$L+1$，总能找到一个$m_0$使得$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m_0-1} a_{f_+(i)} > L+1$，并且由于$(a_{f_+(i)})_{i=0}^{\infty}$是一个非负序列，于是对任意$m > m_0$也有$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)} > L+1$成立。
>
> 条件2：已知(4)已证明$\lim_{m\to\infty} a_{n_m} = 0$，于是对任意$\varepsilon > 0$，总存在一个$M \geq 0$使得对任意$m \geq M$都有$|a_{n_m}| < \varepsilon$，特别地，对$\varepsilon = 1$，我们记其对应的$M$为$m_1$。
>
> 条件3：已知(2)已证明情景II会无限次出现，于是记在满足$m > \max(m_1, m_0)$的m中，第一次n_m定义满足情景II的m记为m_2。
>
> 于是对任意$m > m_2$进行讨论，我们证明该m_2+1就是我们结论中所要寻找的M：
>
> 考虑a_{n_m}对应不同场景对$\sum_{i=0}^{m} a_{n_i}$值的影响。根据条件2此时我们总有$|a_{n_m}| < 1$，于是讨论其情况：
>
> - 若n_m定义满足情景II，则$\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$，$-1 < a_{n_m} < 0$。于是此时：
>
> $$\sum_{i=0}^{m} a_{n_i} = \sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} + a_{n_m} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)} - 1 > L$$
>
> - 若n_m定义满足情景I，则$\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} \leq \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$，$0 \leq a_{n_m} < 1$。此时注意到定义的过程中，$n_{m-1}$的定义必然是两个情景中的一个：若其为情景$II$，则$\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i}$必然大于$L+1$，否则根据条件1有$\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} \leq L+1 < \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$于是$a_{n_m}$定义应该满足情景$II$，与我们讨论的前提$n_m$定义满足情景$I$不符；若其为情景$I$，则继续向前寻找找到一个$m'$是情景$II$（最低也能找到$m_2$，所以不会超出我们的讨论范围），然后再依据情景$I$下$a_{n_i}$总为正得到$\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i}$必然大于$L+1$。于是在这个隐性条件下有：
>
> $$\sum_{i=0}^{m} a_{n_i} = \sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} + a_{n_m} \geq L+1 > L$$
>
> 于是综上，对任意给定的实数L，我们都能通过上面的方法找到一个$M(m_2+1)$使得对任意$m \geq M$都有$\sum_{i=0}^{m} a_{n_i} > L$成立。于是令有$f(m) = n_m$，即有：
>
> $$\lim_{N\to\infty}\inf \sum_{m=0}^{N} a_{f(m)} = \lim_{N\to\infty}\sup \sum_{m=0}^{N} a_{f(m)} = +\infty$$
>
> 成立。此外，若想令重排后级数发散到$-\infty$，则我们可以给出递归定义：
>
> > 情景I：若有$\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} < \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} a_{f_-(i)}$，则令：
> >
> > $$n_m = \{n \in A_+ : \text{对任意} i < m \text{有} n \neq n_i\}$$

> > 情景II：若有$\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} a_{f_-(i)}$，则令：
> >
> > $$n_m = \{n \in A_- : \text{对任意} i < m \text{有} n \neq n_i\}$$
>
> 证明过程和上面类似，不多赘述。

本节相关跳转

实分析 3.6 集合的基数

实分析 6.1 收敛与极限定律

实分析 7.4 级数的重排列

实分析 8.1 可数性

实分析 8.4 选择公理