18.4 可测集

定义

1. (18.4.1 勒贝格可测性) 设E是$\mathbb{R}^n$的子集。我们称E是**勒贝格可测的**，或者简称为**可测的**，当且仅当对于$\mathbb{R}^n$的每一个子集A都有恒等式：

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E)$$

如果E是可测的，那么我们把E的**勒贝格测度**定义为$m(E) = m^*(E)$；如果E不可测，那么$m(E)$无定义。

(注：用自然语言解释即有E是可测的意味着当我们用任意的集合A将E划分为两个部分时，可加性保持不变。如果m^*是有限可加的那么所有集合都是可测的，但是由命题18.3.3我们已经知道并非所有集合都是有限可加的，我们可以将可测集看作能够使有限可加性成立的集合；有时候会将$m(E)$写成带有下标的$m_n(E)$来强调使用的是n维勒贝格测度；这个定义使用起来相对困难，但是可以用这个定义来证明可测集的一些有用的性质，然后依据这些性质来判断可测性，这些内容我们再本节课后习题中会进行阐述)

命题

1. (18.4.2 半空间是可测的) 半空间$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$是可测的。

   (注：还有显然可测的空集$\varnothing$与$\mathbb{R}^n$也是可测的；同理所有形如$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j > 0\}$或$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j < 0\}$ (其中$1 \leq j \leq n$) 的半空间都是可测的)

2. (18.4.4 可测集的性质) 可测集满足下面几个性质：

   > 1. 如果E是可测的，那么$\mathbb{R}^n \backslash E$也是可测的。
   > 2. (平移不变性) 如果E是可测的，并且$x \in \mathbb{R}^n$，那么$x + E$也是可测的，并且有$m(x+E) = m(E)$。
   > 3. 如果E_1和E_2都是可测的，那么$E_1 \cap E_2$和$E_1 \cup E_2$也都可测。
   > 4. (布尔代数性质) 如果$E_1, E_2, \ldots, E_N$是可测的，那么$\bigcup_{j=1}^{N} E_j$和$\bigcap_{j=1}^{N} E_j$也都是可测的。
   > 5. 每一个开盒子都是可测的，每一个闭盒子也都是可测的。
   > 6. 任意一个外测度为零的集合E (即$m^*(E) = 0$) 都是可测的。

3. (18.4.5 有限可加性) 如果$(E_j)_{j \in J}$是有限个不相交的可测集，而A是任意一个集合（不一定可测），那么有：

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{j \in J} E_j\right) = \sum_{j \in J} m^*(A \cap E_j)$$

另外，还有$m\left(\bigcup_{j \in J} E_j\right) = \sum_{j \in J} m(E_j)$。

(注：结合引理18.4.5与命题18.3.3就可以推出“存在不可测集”，见习题18.4.5)

> 推论：
>
> 1. (18.4.7) 如果$A \subseteq B$是两个可测集，那么$B \backslash A$也是可测的，并且

$$m(B\backslash A)=m(B)-m(A)$$

4. (18.4.8 可数可加性）如果$(E_j)_{j\in J}$是可数个不相交的可测集，那么$\bigcup_{j\in J}E_j$是可测的，并且

$$m\left(\bigcup_{j\in J}E_j\right)=\sum_{j\in J}m(E_j)。$$

(注：此引理在原书有证明，建议读一遍加深对外测度性质的运用能力）

5. (18.4.9 σ代数性质）如果$(\Omega_j)_{j\in J}$是任意可数个可测集（从而J是可数的），那么并集$\bigcup_{j\in J}\Omega_j$和$\bigcap_{j\in J}\Omega_j$也都是可测的。

6. (18.4.10）每一个开集都能写成可数个或有限个开盒子的并集。

   (注：此引理同样在原书有证明，并且这个证明还断定了这些盒子的坐标可以全都是有理数）

7. (18.4.11 博雷尔性质）每一个开集都是勒贝格可测的，每一个闭集也都是勒贝格可测的。

课后习题

18.4.1 设A是$\mathbb{R}$中的开区间。证明：$m^*(A)=m^*(A\cap(0,+\infty))+m^*(A\backslash(0,\infty))$

> 考虑这个区间具有$A=(a,b)$的形式，利用命题18.2.6与推论18.2.7可以分类讨论：
>
> 1. $b>a\geq 0$:
>
> > 此时有：
> >
> > $$\begin{aligned}m^*(A\cap(0,+\infty))+m^*(A\backslash(0,\infty))&=m^*((a,b))+m^*(\varnothing)\\&=b-a=m^*((a,b))\end{aligned}$$
> >
> > 结论成立。
>
> 2. $a<b\leq 0$:
>
> > 此时有：
> >
> > $$\begin{aligned}m^*(A\cap(0,+\infty))+m^*(A\backslash(0,\infty))&=m^*(\varnothing)+m^*((a,b))\\&=b-a=m^*((a,b))\end{aligned}$$
> >
> > 结论成立。
>
> 3. $a<0$且$b>0$:
>
> > 此时有：
> >
> > $$\begin{aligned}m^*(A\cap(0,+\infty))+m^*(A\backslash(0,\infty))&=m^*((b,0))+m^*((a,0])\\&=(b-0)+(0-a)\\&=b-a=m^*((a,b))\end{aligned}$$
> >
> > 结论成立。
>
> 综上，于是结论成立。

18.4.2 设A是$\mathbb{R}^n$中的开盒子，并设E是半平面$E := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$，证明：$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E)$ **(提示：利用习题18.4.1)**

> 我们设$A = \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$，然后令$A_{n-1} := \prod_{i=1}^{n-1}(a_i, b_i)$与$A' := (a_n, b_n)$。显然我们可以注意到下面的事实：
>
> $$\begin{aligned} A &= A_{n-1} \times A' \\ A \cap E &= A_{n-1} \times (A' \cap (0, +\infty)) \\ A \backslash E &= A_{n-1} \times (A' \backslash (0, +\infty)) \end{aligned}$$
>
> 于是首先根据外测度的有限次可加性，我们有
>
> $$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E)$$
>
> 另一方面，根据习题18.2.2与习题18.4.1的结论，我们有：
>
> $$\begin{aligned} m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E) &\leq m^*(A_{n-1})(m^*(A' \cap (0, +\infty)) + m^*(A' \backslash (0, +\infty))) \\ &= m^*(A_{n-1})m^*(A') \\ &= m^*(A) \end{aligned}$$
>
> （最后一步直接算就行，不用习题18.2.2的结论）
>
> 于是综合即只能有$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E)$成立。

18.4.3 证明引理18.4.2 **(提示：利用习题18.4.2)**

> 记有半空间$E := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$。考虑任意的$A \subseteq \mathbb{R}^n$，根据外测度的定义我们有：
>
> $$m^*(A) = \inf S \qquad \left(S := \left\{\sum_{j \in J} m^*(B_j) : \text{开盒子簇}(B_j)_{j \in J}\text{覆盖}A; J\text{是至多可数的}\right\}\right)$$
>
> 于是考虑$(B_j)_{j \in J}$是覆盖A的至多可数开盒子簇，显然有$(B_j \cap E)_{j \in J}$与$(B_j \backslash E)_{j \in J}$分别是覆盖$A \cap E$与$A \backslash E$的可数开盒子簇，从而结合习题18.4.2应该有：
>
> $$\begin{gathered} m^*(A \cap E) \leq \sum_{j \in J} m^*(B_j \cap E) \quad m^*(A \backslash E) \leq \sum_{j \in J} m^*(B_j \backslash E) \\ \Longrightarrow m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E) \leq \sum_{j \in J} m^*(B_j \cap E) + \sum_{j \in J} m^*(B_j \backslash E) = \sum_{j \in J} m^*(B_j) \end{gathered}$$
>
> 于是我们可以得到$m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E)$是$S$的一个下界，因此有$m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E) \leq m^*(A)$；另一方面，根据外测度有限可加性我们又有$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E)$，从而综合即有：
>
> $$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E)$$
>
> 对任意的$A \subseteq \mathbb{R}^n$成立，从而根据可测集的定义我们有半空间E是可测的。

18.4.4 证明引理18.4.4 **(提示：对于(c)，首先证明$m^*(A) = m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A \cap E_2 \backslash E_1) + m^*(A \backslash (E_1 \cup E_2))$，画一个Venn图可能会有所帮助。另外，你可能还会用到有限次可加性。利用(c)来证明(d)，并利用(b)，(d)与引理18.4.2的各种形式来证明(e))**

> 逐条证明：
>
> 1. 如果E是可测的，那么$\mathbb{R}^n \backslash E$也是可测的。
>
> 如果E可测，那么对任意的$A \subseteq \mathbb{R}^n$都有：

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E)$$

注意到$A \cap E = A \backslash (\mathbb{R}^n \backslash E)$与$A \backslash E = A \cap (\mathbb{R}^n \backslash E)$，因此上式也等价于：

$$m^*(A) = m^*(A \cap (\mathbb{R}^n \backslash E)) + m^*(A \backslash (\mathbb{R}^n \backslash E))$$

从而也即有$\mathbb{R}^n \backslash E$也是可测的。

---

2. 如果E是可测的，并且$x \in \mathbb{R}^n$，那么$x + E$也是可测的，并且有$m(x + E) = m(E)$。

考虑任意的$A \subseteq \mathbb{R}^n$，要证明$x + E$是可测的，我们要证明：

$$m^*(A) = m^*(A \cap (x + E)) + m^*(A \backslash (x + E))$$

根据外测度的平移不变性，我们只需要证明：

$$m^*(A - x) = m^*([A \cap (x + E)] - x) + m^*([A \backslash (x + E)] - x)$$

（$S - x := \{s - x : s \in S\}$）

化简之后即等价于要证明：

$$m^*(A - x) = m^*((A - x) \cap E) + m^*((A - x) \backslash E)$$

而根据E的可测性我们知道上面的式子始终成立，于是$x + E$可测得证。然后根据外测度的平移不变性有$m^*(x + E) = m^*(E)$，于是根据勒贝格测度的定义也即有$m(x + E) = m(E)$。

---

3. 如果E_1和E_2都是可测的，那么$E_1 \cap E_2$和$E_1 \cup E_2$也都可测。

我们先来证明$E_1 \cup E_2$是可测的。于是要证明对所有的$A \subseteq \mathbb{R}^n$都有：

$$m^*(A) = m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \backslash (E_1 \cup E_2))$$

由于E_1可测，因此考虑$A \cap (E_1 \cup E_2)$作为一个整体，它的外测度应该满足：

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) &= m^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + m^*([A \cap (E_1 \cup E_2)] \backslash E_1) \\ &= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \backslash E_1) \end{aligned}$$

另一方面，再考虑$A \backslash E_1$作为一个整体，利用E_2的可测性我们有：

$$\begin{aligned} m^*(A \backslash E_1) &= m^*((A \backslash E_1) \cap E_2) + m^*((A \backslash E_1) \backslash E_2) \\ &= m^*(A \cap E_2 \backslash E_1) + m^*(A \backslash (E_1 \cup E_2)) \end{aligned}$$

从而我们有：

$$\begin{aligned} &m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \backslash (E_1 \cup E_2)) \\ =&m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \backslash E_1) + m^*(A \backslash (E_1 \cup E_2)) \\ =&m^*(A \cap E_1) + m^*(A \backslash E_1) \\ =&m^*(A) \end{aligned}$$

最后一步再次利用了E_1的可测性，于是我们证明了$E_1 \cup E_2$是可测的。

然后我们来证明$E_1 \cap E_2$是可测的，由于E_1, E_2都是可测的，因此根据已证明的结论(a)我们有$\mathbb{R}^n \backslash E_1, \mathbb{R}^n \backslash E_2$也都是可测的；然后由于已经证明了可测集的并集也是可测的，因此也即有$(\mathbb{R}^n \backslash E_1) \cup (\mathbb{R}^n \backslash E_2)$是可测集；接着使用德摩根定律（命题3.1.28(h)）化简可得$(\mathbb{R}^n \backslash E_1) \cup (\mathbb{R}^n \backslash E_2)$等于$\mathbb{R}^n \backslash (E_1 \cap E_2)$；最后我们再使用结论(a)，由$\mathbb{R}^n \backslash (E_1 \cap E_2)$可测得到$E_1 \cap E_2$可测，从而证明了结论。

---

4. 如果$E_1, E_2, \ldots, E_N$是可测的，那么$\bigcup_{j=1}^{N} E_j$和$\bigcap_{j=1}^{N} E_j$也都是可测的。

我们只给出并集结论的证明，交集的结论使用一样的归纳法即可得证。

考虑对集合数N做归纳，当$N = 1$的时候结论显然是成立的，于是归纳性假设当$N = a$时结论成立，考虑$N = a + 1$时的情况。根据归纳假设我们有$\bigcup_{j=1}^{a} E_j$是可测的，然后利用结论(c)我们有$\left(\bigcup_{j=1}^{a} E_j\right) \cup E_{a+1} = \bigcup_{j=1}^{a+1} E_j$也是可测的，从而归纳得证。

---

5. 每一个开盒子都是可测的，每一个闭盒子也都是可测的。

我们只证明开盒子的结论，闭盒子的结论几乎是一样的证明方法。

记有$E_j(a) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j > a\}$与$F_j(a) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j < a\}$，然后考虑$A = \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$是任意一个开盒子。我们可以注意到$A$可以表示为下面的交集：

$$A = \bigcap_{i=1}^{n}(E_i(a_i) \cap F_i(b_i))$$

另一方面，我们还可以注意到所有的$E_j(a)$与$F_j(a)$都是可以通过对应的半空间$E_j(0)$与$F_j(0)$平移得到，而在引理18.4.2中我们已经证明了半空间都是可测的，从而结合结论(d)我们有A是可测的，结论得证。

（闭盒子只需要考虑$E'_j(a) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j \geq a\}$与$F'_j(a) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j \leq a\}$拼凑出交集组成闭盒子即可）

---

6. 任意一个外测度为零的集合E（即$m^*(E) = 0$）都是可测的。

设$A \subseteq \mathbb{R}^n$是$\mathbb{R}^n$的任意一个子集，并设E是一个外测度为零的集合，那么根据外测度的有限次可加性我们有：

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E)$$

另一方面，根据单调性的要求，我们又有：

$$m^*(A \backslash E) \leq m^*(A) \qquad m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0$$

从而我们有：

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E) \leq m^*(A) + 0 \Longrightarrow m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E)$$

于是E是可测的，结论得证。

18.4.5 证明：命题18.3.1和命题18.3.3的证明中所用的集合E是不可测集

题外话，话说这题是不是该和习题18.4.6换下位子，引理18.4.5的注解都提到了要结合引理18.4.5与命题18.3.3来证明这个题目。

即要证明$E = \{x_A : A \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}\}$是不可测的，其中$x_A$是利用选择公理从$A \cap [0, 1]$中选取的元素。

> 不妨使用反证法，假设E是可测的。套用命题18.3.3的证明过程，那么我们就可以将命题18.3.3证明中的这个等式：
>
> $$m^*\left(\bigcup_{q\in J}q+E\right)=\sum_{q\in J}m^*(q+E)=\sum_{q\in J}m^*(E)>3n\frac{1}{n}=3$$
>
> 从通过反证假设“m^*满足有限可加性”得到改为用引理18.4.5的结论得出，然后通过一样的证明过程可以导出矛盾，因此只能有E不是可测的。
>
> ---
>
> 附：
>
> 原书命题18.3.3的证明与证明E是不可测集需要改动的位置（括号标注）：
>
> > 我们用间接论证的方法完成证明。利用反证法，假设m^*满足有限可加性（E是可测集）。设E和X是敏体18.3.1中引入的集合。根据可数次可加性和平移不变性可得
> >
> > $$m^*(X)\leq\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}m^*(q+E)=\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}m^*(E)$$
> >
> > 因为已知$1\leq m^*(X)\leq 3$，所以$m^*(E)\neq 0$；否则的话，我们将得到$m^*(X)\leq 0$，这是一个矛盾。
> >
> > 由$m^*(E)\neq 0$可知，存在一个有限的整数$n>0$使得$m^*(E)>1/n$。现在令J表示$\mathbb{Q}\cap[-1,1]$的一个基数为$3n$的有限子集。如果m^*满足有限可加性（E是可测集），那么（根据引理18.4.5）有
> >
> > $$m^*\left(\bigcup_{q\in J}q+E\right)=\sum_{q\in J}m^*(q+E)=\sum_{q\in J}m^*(E)>3n\frac{1}{n}=3$$
> >
> > 但是，我们知道$\bigcup_{q\in J}q+E$是X的子集，而且它的外测度最多为3。这与单调性相矛盾。因此m^*不可能满足有限可加性。

18.4.6 证明引理18.4.5

> 我们先证明引理18.4.5对两个可测集E_1和E_2的特殊情况作为辅助证明的子结论，即只要可测集E_1,E_2互不相交，那么对任意的$A\subseteq\mathbb{R}^n$有：
>
> $$m^*(A\cap(E_1\cup E_2))=m^*(A\cap E_1)+m^*(A\cap E_2)$$
>
> 类似于我们在习题18.4.4中对引理18.4.4(c)的证明，当我们视$A\cap(E_1\cup E_2)$为一个整体去考虑E_1的可测性时有：
>
> $$m^*(A\cap(E_1\cup E_2))=m^*(A\cap E_1)+m^*(A\cap E_2\backslash E_1)$$
>
> 由于$E_1\cap E_2=\varnothing$，因此$A\cap E_2\backslash E_1=A\cap E_2$，从而有结论得证。
>
> ---
>
> 然后我们来证明引理18.4.5，由于已经强调了$(E_j)_{j\in J}$是有限的，因此不妨将$(E_j)_{j\in J}$写成$E_{j_1},\dots,E_{j_N}$（于是$J=\{j_1,\dots,j_N\}$）。我们考虑对可测集的数目N进行归纳证明。
>
> 当$N=1$时结论显然成立，于是归纳性假设当$N=a$时结论成立，考虑$N=a+1$时的情况。根据我们已经证明的子结论，结合引理18.4.4(d)有：
>
> $$m^*\left(A\cap\bigcup_{i=1}^{a+1}E_{j_i}\right)=m^*\left(A\cap E_{j_{a+1}}\right)+m^*\left(A\cap\bigcup_{i=1}^{a}E_{j_i}\right)$$

而根据归纳假设，由于$E_{j_1},\dots,E_{j_a}$是a个不相交的可测集，因此有$m^*\left(A\cap\bigcup_{i=1}^{a}E_{j_i}\right)=\sum_{i=1}^{a}m^*(A\cap E_{j_i})$，于是代入上式有：

$$\begin{aligned}m^*\left(A\cap\bigcup_{i=1}^{a+1}E_{j_i}\right)&=m^*\left(A\cap E_{j_{a+1}}\right)+\sum_{i=1}^{a}m^*(A\cap E_{j_i})\\&=\sum_{i=1}^{a+1}m^*(A\cap E_{j_i})\end{aligned}$$

于是归纳得证，我们证明完成了引理18.4.5的前半段。当我们考虑$A=\mathbb{R}^n$的特殊情况时，则上面的结论变为：

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{N}E_{j_i}\right)=\sum_{i=1}^{N}m^*(E_{j_i})\iff m\left(\bigcup_{i=1}^{N}E_{j_i}\right)=\sum_{i=1}^{N}m(E_{j_i})$$

（都是可测集因此外测度直接可以升级为测度）

从而引理18.4.5的后半段也得证。

18.4.7 利用引理18.4.5来证明推论18.4.7

先说明$B\backslash A$为什么是可测的。

我们注意到$B\backslash A$根据集合的运算定律可以表示为：

$$B\backslash A=B\cap(\mathbb{R}^n\backslash A)$$

从而$B\backslash A$事实上是两个可测集A,B通过有限次交集，补集运算得到的集合，因此根据引理18.4.4我们有$B\backslash A$也是一个可测集。

然后说明为什么有$m(B\backslash A)=m(B)-m(A)$。（提一句，应该有$m(B)<+\infty$的前提，不然这个式子根本无法计算）

由于$B\backslash A$与A互不相交且都是可测集，因此根据引理18.4.5有：

$$m(B\backslash A)+m(A)=m(B)\iff m(B\backslash A)=m(B)-m(A)$$

于是结论得证。

18.4.8 证明引理18.4.9（提示：对于可数并集的问题，记$J=\{j_1,j_2,\dots\}$，$F_N:=\bigcup_{k=1}^{N}\Omega_{j_k}$，并记$E_N:=F_N\backslash F_{N-1}$，其中$F_0$为空集，然后应用引理18.4.8，对于可数交集的问题，利用你做的证明以及引理18.4.4(a)）

我们先证明并集$\bigcup_{j\in J}\Omega_j$是可测的。

由于J可数，我们将J写成$J=\{j_1,j_2,\dots\}$，然后对$n\geq 0$定义有：

$$F_n:=\bigcup_{k=1}^{n}\Omega_{j_k}$$

特别地$n=0$时有$F_0=\varnothing$，根据引理18.4.4(d)我们有每一个F_n都是可测的。然后对$n\geq 1$定义：

$$E_n:=F_n\backslash F_{n-1}$$

根据推论18.4.7于是我们有每一个E_n也都是可测的。并且显然可以注意到：

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_{j_n}$$

然后根据引理18.4.8，我们有$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$是可测的，也即有$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_{j_n}$是可测的，结论得证。

然后我们证明交集$\bigcap_{j\in J} \Omega_j$也是可测的。

我们注意到有：

$$\bigcap_{j\in J} \Omega_j = \mathbb{R}^n \backslash \left(\bigcup_{j\in J} \mathbb{R}^n \backslash \Omega_j \right)$$

因此可数交集事实上是可数个可测集的并集的补集，于是运用已经证明了的可数并集的结论与引理18.4.4我们就可以得到交集$\bigcap_{j\in J} \Omega_j$也是可测的。

于是结论得证。

18.4.9 设$A \subseteq \mathbb{R}^2$是集合$A := [0,1]^2 \backslash \mathbb{Q}^2$。也就是说，$A$是由$[0,1]^2$中的坐标$x, y$不全为有理数的点$(x, y)$所构成的集合。证明：$A$是可测集并且$m(A) = 1$。但是$A$没有内点（提示：与运用第一性原理的解题思路相比，利用外测度和测度的性质来解题将更加容易，其中包括前几题中的结果）

我们先证明A是可测集并且$m(A) = 1$。

根据引理18.4.4(e)我们知道$\mathbb{Q}^2$与$[0,1]^2$都是可测的（它们都是闭集），因此结合推论18.4.7我们有$A = [0,1]^2 \backslash \mathbb{Q}^2$也是可测的。并且我们有：

$$m(A) = m([0,1]^2) - m(\mathbb{Q}^2) = 1 - m(\mathbb{Q}^2)$$

然后注意到由于$\mathbb{Q}^2$是可数的，因此根据引理18.4.5与命题18.2.6我们有：

$$m(\mathbb{Q}^2) = \sum_{(q_1,q_2)\in\mathbb{Q}^2} m(\{(q_1,q_2)\}) = \sum_{(q_1,q_2)\in\mathbb{Q}^2} m([q_1,q_1] \times [q_2,q_2]) = \sum_{(q_1,q_2)\in\mathbb{Q}^2} 0 = 0$$

于是也即有$m(A) = 1 - 0 = 1$。

然后我们来证明A没有内点。

使用反证法，我们设$(x, y) \in A$是A的一个内点，那么根据内点的定义应该存在一个$r > 0$使得球$B((x,y), r) \subseteq A$。此时注意到由于实数之间必然存在有理数（命题5.4.14），因此我们可以找到有理数a, b分别满足$x \leq a < x + r/2$与$y \leq b < y + r/2$。从而有：

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} \leq \sqrt{r^2/2} < r \implies (a, b) \in B((x,y), r)$$

但是我们又有$(a, b) \notin A$，这导出了矛盾。于是得证A没有内点。

18.4.10 设$A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$，证明：如果$B$是测度为0的勒贝格可测集，那么$A$也是测度为0的勒贝格可测集

由于B测度为0，因此也即有$m^*(B) = 0$，然后根据外测度的单调性与非负性，因此我们有：

$$A \subseteq B \implies m^*(A) = 0$$

然后根据引理18.4.4(f)我们有A也可测，结论得证。

本节相关跳转

[实分析 18.3 外测度是不可加的]