16.1 周期函数

摘录

1. (周期函数的描述) 为简单起见，从现在开始我们只研究$\mathbb{Z}$周期函数（关于L周期函数的傅里叶理论，可以参考习题16.5.6）。为了能够完全了解一个$\mathbb{Z}$周期函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$，我们只需要了解它在$[0,1)$上的取值，然后对每一个实数$x$都可以写为$x=k+y$的形式，其中$k$是一个整数（被称为$x$的**整数部分**，有时记为$[x]$）且$y\in[0,1)$（被称为$x$的**小数部分**，有时记为$\{x\}$）。然后为了描述$f$，我们只需要将$[0,1)$上的取值周期性地推广到整个$\mathbb{R}$上即可（也即$f(x)=f(y)$）。

   (注：这个小数部分和整数部分的记号多少带点符号复用灾难，还是不用为好)

2. (连续$\mathbb{Z}$周期复值函数的空间) 连续的$\mathbb{Z}$周期复值函数的空间记作$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$（$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$这个记号来自代数学中加法群$\mathbb{R}$关于加法群$\mathbb{Z}$的商群，这一部分的知识不做深入，有兴趣可以自行查阅资料）。需要强调的是这里的"连续"指的是在整个定义域上连续，仅仅在单个周期上的连续性可能会因为边界上左右极限不一致产生间断。我们已经接触的几个周期函数函数$\cos(2\pi nx)$、$\sin(2\pi nx)$、$e^{2\pi inx}$都属于$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，正如常数函数也属于$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$。

   在这个定义的基础上，我们为$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$引入在14.4节中定义的，一致收敛的上确界范数度量：

$$d_\infty(f,g)=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|=\sup_{x\in[0,1)}|f(x)-g(x)|$$

   于是我们将$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$变成了一个度量空间。

定义

1. (16.1.1 周期函数？) 设$L>0$是一个实数，如果对于每一个实数x都有$f(x+L)=f(x)$，那么称函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$**以$L$为周期**，或者说是**$L$周期的**。

   (注：如果函数f是L周期的，那么对于任意的整数k，f都是kL周期的，特别地，如果函数f是1周期的，那么对任意的$k\in\mathbb{Z}$都有$f(x+k)=f(x)$。因此1周期的函数有时也被称为**$\mathbb{Z}$周期的**，同理L周期的函数有时也被称为**$L\mathbb{Z}$周期的**；对任意的整数n，函数$\cos(2\pi nx)$、$\sin(2\pi nx)$、$e^{2\pi inx}$都是$\mathbb{Z}$周期函数。还有个$\mathbb{Z}$周期函数的例子是具有如下定义的函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$：对任意的整数$n$，当$x\in[n,n+0.5)$时$f(x):=1$；当$x\in[n+0.5,n+1)$时$f(x):=0$。这个函数同样也是方波的例子)

命题

1. (16.1.5 $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$的基本性质) 对$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，下面的命题为真：

   > 1. (有界性) 如果$f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，那么$f$是有界的。即存在一个实数$M>0$使得对所有的$x\in\mathbb{R}$都有$|f(x)|\le M$。
   > 2. (向量空间和代数性质) 如果$f,g\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，那么函数$f+g$、$f-g$和$fg$也都属于$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$。另外，如果$c$是任意一个复数，那么函数$cf$也在$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$中。
   > 3. (一致极限下的封闭性) 设$(f_n)_{n=1}^\infty$是$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$中的函数序列，如果该序列一致收敛于函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$，那么$f$也属于$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$。

课后习题

16.1.1 证明：每一个实数x都恰好能用一种方式写成$x = k + y$的形式，其中k是一个整数并且$y \in [0, 1)$（提示：为了证明这种形式的存在性，令$k := \sup\{l \in \mathbb{Z} : l \le x\}$）

> 我们先证明必然存在一对实数k, y满足要求。考虑令$k := \sup\{l \in \mathbb{Z} : l \le x\}$。显然这个集合以$x$为上界，因此根据最小上界原理（命题5.5.9）我们知道k必然存在。然后令$y = x - k$，必然有$y \in [0, 1)$（否则会和k的定义矛盾），于是这样的实数对必然存在。
>
> 然后我们证明这样的实数对k, y是唯一的。我们设存在某个实数x有两个实数对k, y与k', y'都是满足要求的，并且$k \neq k'$与$y \neq y'$至少有一个成立。于是我们可以检验有：
>
> - 若$k \neq k'$：
>
>   > 我们不妨假设$k < k'$，于是有：
>   >
>   > $$x = k + y < k + 1 \le k' \le k' + y = x$$
>   >
>   > 导出矛盾，此情况不可能。
>
> - 若$y \neq y'$：
>
>   > 注意到：
>   >
>   > $$y + k = y' + k' \iff y - y' = k - k'$$
>   >
>   > 左端由于$y, y' \in [0, 1)$因此显然可以得到$y - y' \in (-1, 1)$，但是$k - k'$是一个整数。于是只能有$y - y' = 0$，导出了矛盾，此情况不可能。
>
> 综上，于是总是会导出矛盾，不可能存在超过一对实数对k, y满足条件，样的实数对k, y只能是唯一的。
>
> 于是证明完毕。
>
> ---
>
> 题外话，按照道理来说习题5.4.3已经阐述过这个性质了吧，看不懂为什么要再写一遍。

16.1.2 证明引理16.1.5（提示：对于(a)，首先证明f在$[0, 1]$上有界）

> 逐条证明：
>
> ---
>
> 1. 如果$f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}; \mathbb{C})$，那么$f$是有界的。即存在一个实数$M > 0$使得对所有的$x \in \mathbb{R}$都有$|f(x)| \le M$。
>
> 注意到$[0, 1]$是$\mathbb{R}$内的有界闭集，因此根据海涅-博雷尔定理（命题12.5.7）我们有$[0, 1]$是紧致的，进而由于f是连续映射我们可以得到$f([0, 1])$也是紧致的（命题13.3.1），也即$f([0, 1])$是$\mathbb{C}$中的有界闭集（命题12.5.5）。换言之即存在$r > 0$与$y_0 \in \mathbb{C}$使得对任意的$y \in f([0, 1])$都有：
>
> $$|y - y_0| < r \implies |y| \le |y - y_0| + |y_0| < r + |y_0|$$
>
> 即若我们令$M := |y_0| + r$，则对任意的$x \in [0, 1]$都有$|f(x)| \le M$。
>
> 然后由于f是$\mathbb{Z}$周期的，因此对任意的$x \in \mathbb{R}$我们都有$f(x) = f(y)$，其中y是x的小数部分满足$y \in [0, 1)$，结合上面的结论即：
>
> $$|f(x)| = |f(y)| \le M$$
>
> 也即f是有界的，结论得证。

2. 如果$f, g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，那么函数$f+g$、$f-g$和$fg$也都属于$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$。另外，如果$c$是任意一个复数，那么函数$cf$也在$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$中。

结合复数的极限定律（命题15.6.4），命题13.1.5我们显然可以得到$f+g$、$f-g$、fg和cf都是连续的复值函数，因此我们只需要验证它们都是$\mathbb{Z}$周期的就可以得到它们属于$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，于是对任意的$x \in \mathbb{R}$，我们可以列出下表的验证：

函数	证明
$f+g$	$f(x+1)+g(x+1) \xlongequal{f,g\text{是}\mathbb{Z}\text{周期的}} f(x)+g(x)$
$f-g$	$f(x+1)-g(x+1) \xlongequal{f,g\text{是}\mathbb{Z}\text{周期的}} f(x)-g(x)$
fg	$f(x+1)g(x+1) \xlongequal{f,g\text{是}\mathbb{Z}\text{周期的}} f(x)g(x)$
cf	$c \cdot f(x+1) \xlongequal{f,g\text{是}\mathbb{Z}\text{周期的}} c \cdot f(x)$

于是结论成立。

---

3. 设$(f_n)_{n=1}^{\infty}$是$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$中的函数序列，如果该序列一致收敛于函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$，那么$f$也属于$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$。

根据命题14.3.2我们知道一致极限f也是连续的复值函数，于是我们只需要验证f是$\mathbb{Z}$周期的就可以得到$f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$。即需要证明对任意的$x \in \mathbb{R}$都有：

$$f(x+1) = f(x)$$

由于一致收敛的函数都是逐点收敛的，因此也即只需要证明：

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x+1) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

由于f_n都是$\mathbb{Z}$周期的，因此有$f(x+1)=f(x)$，从而这两个极限显然相等，也即f是$\mathbb{Z}$周期的，于是结论得证。

16.1.3 证明：具有上确界范数度量d_{∞}的$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$是一个度量空间。并进一步证明：这个度量空间是完备的

首先我们证明$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$是一个度量空间，于是即要证明：

- 对任意$f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，$d_{\infty}(f,f)=0$。

  > 显然可以计算有：
  >
  > $$d_{\infty}(f,f) = \sup\{|f(x)-f(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \sup\{0\} = 0$$
  >
  > 于是此条件总是满足的。

- 对任意两个不同的$f, g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，我们都有$d_{\infty}(f,g) > 0$。

  > 由于$f \neq g$，因此至少存在一个$x_0 \in \mathbb{R}$使得$f(x_0) \neq g(x_0)$，于是有：
  >
  > $$d_{\infty}(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)-g(x)| \geq |f(x_0)-g(x_0)| > 0$$
  >
  > 于是此条件总是满足的。

- 对任意的$f,g\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，我们有$d_\infty(f,g)=d_\infty(g,f)$。

> 根据绝对值的性质（$|z|=|-z|$对任意的复数z都成立）可以直接得到：
>
> $$d_\infty(f,g)=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)-f(x)|=d_\infty(g,f)$$
>
> 于是此条件总是满足的。

- 对任意的$f,g,h\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，我们有$d_\infty(f,h)\le d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h)$。

> 根据绝对值的三角不等式，对任意的$x\in\mathbb{R}$都有：
>
> $$|f(x)-h(x)|\le|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|$$
>
> 然后由于$d_\infty(f,g)$和$d_\infty(g,h)$都是上确界，因此也即：
>
> $$|f(x)-h(x)|\le d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h)$$
>
> 对任意的$x\in\mathbb{R}$都成立。因此$d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h)$是$\{|f(x)-h(x)|:x\in\mathbb{R}\}$的一个上界，因此根据上确界必然小于等于集合的上界即可得到：
>
> $$d_\infty(f,h)\le d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h)$$
>
> 于是此条件总是满足的。

综上，于是结论得证。

> 其实注意到习题14.4.1中的证明不依赖于函数或定义域空间，值域空间的性质，因此习题14.4.1的证明在此处也是完全适用的，这里就当作再验证一次吧。

然后我们证明$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$是一个完备空间，于是即要证明：对任意的$(f_n)_{n=0}^\infty$是$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$中的柯西序列，都存在$f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$使得$(f_n)_{n=0}^\infty$收敛于$f$。

由于$(f_n)_{n=0}^\infty$是柯西序列，因此根据定义即对任意的$\varepsilon>0$，存在$N\ge0$使得对任意的$i,j\ge N$都有：

$$d_\infty(f_i,f_j)\le\varepsilon\Longrightarrow\forall\,x\in\mathbb{R},|f_i(x)-f_j(x)|\le\varepsilon$$

换言之即对任意的$x\in\mathbb{R}$，$(f_n(x))_{n=0}^\infty$都是$\mathbb{C}$中的柯西序列，因此根据复数空间的完备性（习题15.6.10）我们知道$(f_n(x))_{n=0}^\infty$必然是收敛的，于是我们定义函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$有：

$$\forall\,x\in\mathbb{R},f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

然后我们尝试证明$(f_n)_{n=0}^\infty$一致收敛于f。对任意的$\varepsilon>0$，由于$(f_n)_{n=0}^\infty$是柯西序列，因此存在$N\ge0$使得对任意的$i,j\ge N$都有$d_\infty(f_i,f_j)\le\varepsilon/2$，也即对任意的$x\in\mathbb{R}$都有$|f_i(x)-f_j(x)|\le\varepsilon/2$；又由于对任意的$x\in\mathbb{R}$有$f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$，因此存在$N_x\ge N$使得$|f_{N_x}(x)-f(x)|\le\varepsilon/2$（注意这个$N_x$会随$x$的变化而改变，但我们只需要它存在即可）。于是根据绝对值的三角不等式，对任意的$n\ge N$与任意的$x\in\mathbb{R}$有：

$$|f_n(x)-f(x)|\le|f_n(x)-f_{N_x}(x)|+|f_{N_x}(x)-f(x)|\le\varepsilon$$

从而我们证明了$(f_n)_{n=0}^\infty$一致收敛于f，在根据命题16.1.5(c)我们可以得到$f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，从而综合一下就证明可以得到对任意的$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$中的柯西序列都是收敛的。

综上，于是结论得证。

> 其实基本就是拿习题14.4.3的证明修改。

本节相关跳转

[实分析 14.4 一致收敛的度量]

[实分析 16.5 傅里叶定理和Plancherel定理]