8.5 有序集

定义

1. (8.5.1 偏序集) **偏序集**是一个附加了关系$\leq_X$的集合X（于是对于任意两个对象$x,y\in X$，命题$x\leq_X y$要么是一个真命题，要么是一个假命题），此外我们假设这种关系遵守下面三个性质：

    > - (自反性) 对任意$x\in X$，$x\leq_X x$始终为真。
    > - (反对称性) 若任意$x,y\in X$满足$x\leq_X y$且$y\leq_X x$，那么$x=y$。
    > - (传递性) 若对任意$x,y,z\in X$满足$x\leq_X y$且$y\leq_X z$，那么$x\leq_X z$。

    称$\leq_X$为**序关系**，绝大多数情况下，我们可以通过上下文确定集合X是什么，于是这时我们可以简单的简写$\leq_X$为$\leq$，此外，若有$x\leq_X y$且$x\neq y$，那么可以记为$x<_X y$或者$x<y$。

    (注：比如说自然数集$\mathbb{N}$与通常的小于等于$\leq$关系就构成了一个偏序集，此外，比如X是一个集合的集合，附加上子集$\subseteq$的关系也是一个偏序集。正常情况下我们不能直接说一个集合X是偏序集，而应该写成$(X,\leq_X)$这样的形式来指明偏序关系，不过我们通常能在上下文中确定偏序关系从而直接写X来代指$(X,\leq_X)$。需要注意的是，一种偏序关系并不一定绑定某个集合，同一个集合也可以与不同种偏序关系组成偏序集)

2. (8.5.3 全序集) 设X是一个偏序集，$\leq_X$是X上的序关系，Y是X的一个子集。若对任意$y,y'\in Y$，我们都有$y\leq_X y'$或$y'\leq_X y$（或两者兼有），那么X的子集Y是**全序的**。如果X本身是全序的，那么我们称X是一个附加了序关系的**全序集**（或**链**）。

    (注：全序集首先必然是一个偏序集，同时对任意全序集的子集也必然是全序集，我们常见的自然数集$\mathbb{N}$，整数集$\mathbb{Z}$，有理数集$\mathbb{Q}$与实数集$\mathbb{R}$附加上常见的小于等于$\leq$关系后就是全序集。偏序集中也有不是全序集的存在，比如上文所举例的取X为$\{\{1,2\},\{2,3\},\{1\}\}$，偏序关系是子集关系$\subseteq$，因为$\{1,2\}$与$\{2,3\}$之间不能有一方为另一方子集，所以$(X,\subseteq)$并不是一个全序集，但$(X,\subseteq)$显然是偏序集)

3. (8.5.5 最大元素与最小元素) 设X是一个偏序集，其偏序关系为$\leq_X$，Y是X的一个子集。如果$y\in Y$且不存在$y'\in Y$使得$y<_X y'$，则称y是Y的**最大元素**；如果$y\in Y$且不存在$y'\in Y$使得$y'<_X y$，则称y是Y的**最小元素**。

    (注：尽管名字中带有最的字样，但是偏序集并不一定只有唯一的最小或最大元素，以X取集合$\{\{5\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$，偏序关系取子集$\subseteq$为例，不难发现$\{5\}$同时是$X$的最大元素与最小元素，同时$\{1,2,3\}$也是集合的最大元素，因此不要以常规印象来理解这个最大与最小)

4. (8.5.8 良序集) 设X是一个偏序集，Y是X的一个**全序**子集。如果Y的每一个非空子集都有最小元素，那么称Y是**良序的**。

    (注：良序集拥有更加严苛的条件，自然数集$\mathbb{N}$就是一个良序集，但是整数集$\mathbb{Z}$，有理数集$\mathbb{Q}$，实数集$\mathbb{R}$都不是良序集。良序集有许多特殊性质，比如良序集的任意子集都是良序集，有限的全序集也是良序集，而且良序集自动遵守强归纳法原理)

5. (8.5.12 上界和严格上界) 设X是一个以$\leq$为序关系的偏序集，并且设Y是X的一个子集。若$x\in X$，称x是Y的**上界**，当且仅当对所有$y\in Y$都有$y\leq x$；此外，若x还满足$x\notin Y$，那么称x是Y的**严格上界**。这等价于x是Y的**严格上界**当且仅当对所有$y\in Y$都有$y<x$。

命题

1. (8.5.10 强归纳法原理) 设X是一个以$\leq$为序关系的良序集，并且设$P(n)$是关于$n \in X$的性质 (即对任意的$n \in X$，$P(n)$要么为真命题，要么为伪命题) 。假设对每一个$n \in X$，都有下面这个蕴含关系：如果$P(m)$为真对任意$m < n$的$m \in X$成立，那么$P(n)$也为真。则此时对任意$n \in X$，$P(n)$为真。
2. (8.5.14) 设X是一个以$\leq$为序关系的偏序集，并且设x_0是X的一个元素，那么存在一个X的良序子集Y使得x_0是Y的最小元素且Y没有严格上界。

   (注：这个命题建议回顾课本中对这个命题的证明叙述，由这个命题我们可以推出超限归纳原理)
3. (8.5.15 佐恩引理) 设X是一个具有如下性质的非空偏序集：即X的每一个全序子集Y都有一个上界。那么X至少有一个最大元素。

   (注：**佐恩引理**也叫**超限归纳原理**)

课后习题

8.5.1 考虑具有空序关系$\leq_\varnothing$的空集 (这个关系是空的，因为空集中没有任何元素) 。这个集合是偏序的吗？是全序的吗？是良序的吗？请给出解释

> 这个集合是同时是偏序的，全序的与良序的。
>
> 原因在于偏序，全序，良序的定义都是基于集合中的元素与其关系，但是这个集合中不包含任何的元素，因此所有的条件都为真。

8.5.2 给出集合X和满足如下条件的关系$\leq$的例子：

(a)关系$\leq$是自反的和反对称的，但不是可传递的

> 考虑集合$X=\{a,b,c\}$有这样的关系$\leq_X$：
>
> | $\leq_X$ | a | b | c |
> |---|---|---|---|
> | a | `True` | `True` | `False` |
> | b | `False` | `True` | `True` |
> | c | `False` | `False` | `True` |
>
> 此表中x行y列表示$x \leq_X y$是否为真。根据此表可知：
>
> > - 对任意$x \in X$都有$x \leq_X x$，从而关系$\leq_X$是自反的；
> > - 一共有$(a \leq_X a)$，$(b \leq_X b)$，$(c \leq_X c)$，$(a \leq_X b)$，$(b \leq_X c)$成立，交换位置后可以看到其中$b \leq_X a$与$c \leq_X b$并不成立，因此若有$x \leq_X y$且$y \leq_X x$，则x与y必然相同且是a，b，c中的一个，从而关系$\leq_X$是反对称的；
> > - 可以看到$a \leq_X b$与$b \leq_X c$成立，但是$a \leq_X c$为假，所以关系$\leq_X$不是可传递的。
>
> 于是上面的关系$\leq_X$是自反，反对称但不是可传递的。

(b)关系$\leq$是自反的和可传递的，但不是反对称的

> 考虑集合$X=\{a,b,c\}$有这样的序关系$\leq_X$：

$\leq_X$	a	b	c
a	`True`	`True`	`True`
b	`True`	`True`	`True`
c	`False`	`False`	`True`

此表中x行y列表示$x \leq_X y$是否为真。根据此表可知：

> - 对任意$x \in X$都有$x \leq_X x$，从而关系$\leq_X$是自反的；
> - 注意到此关系下$a \leq_X b$与$b \leq_X a$同时成立，但是$a \neq b$，不符合反对称的要求。从而关系$\leq_X$不是反对称的；
> - 此关系下可以列出所有满足$x \leq_X y$，$y \leq_X z$的情况：
>
>   > - 若x为a（或b），则y可以是a，b，c。其中若y为a或b，则z可以是a，b，c，此时无论z是什么都有$x \leq_X z$成立；若y为c，则z只能是c，由于$\forall e \in X, e \leq_X c$，因此此时也必然有$x \leq_X z$成立。
>   > - 若x为c，则y只能是c，从而z也只能是c，此时根据表即有$x \leq_X z$成立。
>
>   综上，即对任意$x, y, z \in X$满足$x \leq_X y$，$y \leq_X z$，都有$x \leq_X z$成立，于是关系$\leq_X$是可传递的。

于是上面的关系$\leq_X$是自反，可传递但不是反对称的。

(c)关系$\leq$是反对称的和可传递的，但不是自反的

考虑集合$X = \{a, b, c\}$有这样的序关系$\leq_X$：

$\leq_X$	a	b	c
a	`True`	`True`	`False`
b	`False`	`True`	`False`
c	`False`	`False`	`False`

此表中x行y列表示$x \leq_X y$是否为真。根据此表可知：

> - 注意到$c \leq_X c$为假，这与自反性的要求不符，从而关系$\leq_X$不是自反的；
> - 一共有$(a \leq_X a)$，$(b \leq_X b)$，$(a \leq_X b)$成立，交换位置后可以看到其中$b \leq_X a$并不成立，因此若有$x \leq_X y$且$y \leq_X x$，则x与y必然相同且是a，b中的一个，从而关系$\leq_X$是反对称的；
> - 此关系下可以列出所有满足$x \leq_X y$，$y \leq_X z$的情况：
>
>   > - 若x为a，则y可以是a，b。其中若y为a，则z可以是a，b，此时无论z是什么都有$x \leq_X z$成立；若y为b，则z只能是b，此时也有$x \leq_X z$成立。
>   > - 若x为b，则y只能是b，进而z只能是b，此时有$x \leq_X z$成立。
>   > - 若x为c，则不存在元素e满足$c \leq_X e$，于是满足$x \leq_X y$，$y \leq_X z$时不可能有x为c。

于是上面的关系$\leq_X$是反对称，可传递但不是自反的。

8.5.3 给定两个正整数n，$m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$，如果存在一个正整数$a$，使得$m = na$，那么我们称$n$整除$m$，并记作$n|m$。证明：附加上序关系$|$的集合$\mathbb{N} \backslash \{0\}$是一个偏序集，但不是全序集。注意，这里的序关系不同于$\mathbb{N} \backslash \{0\}$上通常的序关系$\leq$

> 要证明附加上序关系$|$的集合$\mathbb{N} \backslash \{0\}$是一个偏序集，根据定义8.5.1，需要证明关系$|$满足：
>
> > - 自反性：对任意的$n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$，有$n = n \times 1$，因此$n$总是整除$n$自身的，从而有$n|n$成立，即$|$是自反的。
> > - 反对称性：对任意n，$m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$，若有$n|m$且$m|n$成立，则存在正整数$a$，$b$使得$m = na$与$n = mb$成立，即有$n = n(ab)$成立，即有$ab = 1$；又考虑到$a$，$b$都是正整数，于是只能有$a = 1$与$b = 1$同时成立，即$m = n$。于是$|$是反对称的。
> > - 可传递性：对任意$n, m, l \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$，若有$n|m$与$m|l$同时成立，则存在正整数$a$，$b$使得$m = na$与$l = mb$同时成立，于是即$l = n(ab)$，又由于$ab$也是正整数，即有$n|l$成立。于是$|$是可传递的。
>
> 于是根据定义8.5.1，集合$\mathbb{N} \backslash \{0\}$是一个偏序集，下面考虑集合$\mathbb{N} \backslash \{0\}$是否是一个全序集：
>
> > 考虑13，3是集合$\mathbb{N} \backslash \{0\}$中的元素，显然不存在正整数$a$使得$13 = 3a$或者$3 = 13a$，因此$3|13$与$13|3$都为伪。但是根据全序集的要求（定义8.5.3），$3|13$与$13|3$应当至少有一个为真，因此集合$\mathbb{N} \backslash \{0\}$肯定不是全序的。
>
> 于是$\mathbb{N} \backslash \{0\}$是一个偏序集，但$\mathbb{N} \backslash \{0\}$不是一个全序集。

8.5.4 证明：正实数集$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$没有最小元素

> 对任意实数$r \in \mathbb{R}^+$，有$r - \dfrac{1}{2}r = \dfrac{1}{2}r \in \mathbb{R}^+$是一个正实数，而根据实数序关系的定义（定义5.4.6），从而有$\dfrac{1}{2}r < r$始终成立，即对任意$r \in \mathbb{R}^+$，r都不是$\mathbb{R}^+$的最小元素。

8.5.5 设$f : X \to Y$是从一个集合X到另一个集合Y的函数，设Y是具有某种序关系$\leq_Y$的偏序集。在X上定义一个关系$\leq_X$使得$x \leq_X x'$当且仅当$f(x) <_Y f(x')$或$x = x'$。证明：关系$\leq_X$使X成为一个偏序集。如果关系$\leq_Y$使得Y是全序的，那么这是否意味着关系$\leq_X$也使得X也成为全序的？若答案是否定的，那么还需要对f附加什么样的假设才能保证$\leq_X$使得X成为全序的

> 根据定义8.5.1，若X是一个偏序集，那么关系$\leq_X$应该有：
>
> > - 自反性：对任意$x \in X$，由于$x = x$，于是根据题目定义有$x \leq_X x$始终成立，即关系$\leq_X$是自反的；
> > - 反对称性：对任意x，$x' \in X$，若有$x \leq_X x'$与$x' \leq_X x$同时成立，则根据题目定义，这等价于有条件1：“$f(x) <_Y f(x')$或$x = x'$”与条件2：“$f(x') <_Y f(x)$或$x' = x$”同时成立。又注意到有：
> >
> > $$\begin{aligned} & f(x) <_Y f(x') \text{且} f(x') <_Y f(x) \\ \iff & [f(x) \leq_Y f(x') \text{且} f(x) \neq f(x')] \text{且} [f(x') \leq_Y f(x) \text{且} f(x') \neq f(x)] \\ \iff & [f(x) \leq_Y f(x') \text{且} f(x') \leq_Y f(x)] \text{且} f(x) \neq f(x') \\ \overset{Y\text{偏序,反对称}}{\iff} & f(x) = f(x') \text{且} f(x) \neq f(x') \\ \iff & \text{伪} \end{aligned}$$
> >
> > 即若$x \neq x'$，则条件1与条件2必然不可能同时为真，于是此情况下只能有$x = x'$成立，从而关系$\leq_X$是反对称的；
> > - 可传递性：对任意$x_0, x_1, x_2 \in X$，若有$x_0 \leq_X x_1$与$x_1 \leq_X x_2$同时成立，根据定义即等价于条件1：“$f(x_0) <_Y f(x_1)$或$x_0 = x_1$”与条件2：“$f(x_1) <_Y f(x_2)$或$x_1 = x_2$”同时成立。然后分情况讨论可能性：

> > - 若两个条件里面有至少一个是因为等于关系而成立的，则此时可以将$x_0 \leq_X x_2$等价于$x_1 \leq_X x_2$或$x_0 \leq_X x_1$，两者都是题设条件之一因此$x_0 \leq_X x_2$为真。
> > - 若两个条件都不是因为等于关系成立的，则有$f(x_0) <_Y f(x_1)$与$f(x_1) <_Y f(x_2)$同时成立，由于$\leq_Y$是一个偏序关系，因此可以得到$f(x_0) <_Y f(x_2)$成立，根据题目定义，此时有$x_0 \leq_X x_2$为真。
> >
> > 综合即总有$x_0 \leq_X x_2$为真，于是关系$\leq_X$是可传递的；
>
> 综上，于是X是一个偏序集。
>
> 然后考察X成为全序集的条件，全序集要求关系$\leq_X$满足对任意x，$x' \in X$都有$x \leq_X x'$与$x' \leq_X x$中至少有一个为真。根据定义可引申为条件1："$f(x) <_Y f(x')$或$x = x'$"与条件2："$f(x') <_Y f(x)$或$x' = x$"至少有一个为真，这等价于"$f(x) <_Y f(x')$"，"$f(x') <_Y f(x)$"，"$x' = x$"中三者至少有一个为真。
>
> 若Y是一个全序集，那么对任意x，$x' \in X$，$f(x) \leq_Y f(x')$与$f(x') \leq_Y f(x)$至少有一个为真，从而即"$f(x) <_Y f(x')$"，"$f(x') <_Y f(x)$"，"$f(x) = f(x')$"三者中至少有一个为真。此时回到对X的性质判断，若出现一对x，$x' \in X$使得$x' \neq x$与$f(x) = f(x')$同时成立则X就不是全序的（此时$x \leq_X x'$与$x' \leq_X x$均为假），而Y是全序的并不能保证此情况不出现。从而对题目的第二问，Y是全序的并不能让关系$\leq_X$使得X也是全序的。
>
> 在Y是全序的基础上，可以看到只要f的性质能够保证"$x' \neq x$与$f(x) = f(x')$同时成立"这个情况不发生则X就是全序的，这等价于f是一个单射。于是对题目的第三问，在Y是全序的基础上，若f还同时是一个单射，那么关系$\leq_X$就是使得X全序的序关系。

8.5.6 设X是一个偏序集，对X中任意的元素，定义序理想$(x) \subset X$为集合$(x) := \{y \in X : y \leq x\}$。设$(X) := \{(x) : x \in X\}$是由全体序理想构成的集合，并且设$f : X \to (X)$为映射$f(x) := (x)$，它把每个元素$x$都映成了$x$的序理想。证明：$f$是一个双射，并且对任意给定的$x$，$y \in X$，$x \leq_X y$当且仅当$f(x) \subseteq f(y)$。本题表明任何偏序集都能由一个集合簇来表示，其中该集合簇上的序关系由集合的包含关系给出

> 先证明f是一个单射：
>
> 对任意的x_1，$x_2 \in X$且$x_1 \neq x_2$，考虑(x_1)与(x_2)的关系。
>
> 不妨使用反证法，假设$(x_1) = (x_2)$。从而对任意的$x \in (x_1)$，我们都有$x \in (x_2)$，反之亦然，从而根据序理想的定义，这表明对任意的$x \in X$都有$x \leq x_1$当且仅当$x \leq x_2$，特别地，由此可以得知$x_1 \leq x_2$与$x_2 \leq x_1$同时成立。此时由偏序集的序具有反对称性可以推知$x_1 = x_2$，这和前提中的$(x_1) \neq (x_2)$矛盾，因此反证假设不成立，对任意的x_1，$x_2 \in X$且$x_1 \neq x_2$都应当有$(x_1) \neq (x_2)$，即$f(x_1) \neq f(x_2)$。
>
> ---
>
> 然后证明f是一个满射：
>
> 对任意的$S \in (X)$，根据(X)的定义，存在$x \in X$使得$S = (x)$，从而即$S = f(x)$。因此对任意$S \in (X)$，都存在$x \in X$使得S通过f被映射，即f是满射。
>
> 综上，f既是单射又是满射，因此它是一个双射。

8.5.7 设X是一个偏序集，并且设Y是X的一个全序子集。证明：Y最多有一个最大元素，并且最多有一个最小元素

> 使用反证法，假设Y有不止一个最大元素，其中包括y_1与y_2，且$y_1 \neq y_2$，其序关系为$\leq_X$。由于y_1，y_2都是Y的最大元素，于是命题"$y_1 <_X y_2$"与"$y_2 <_X y_1$"均为假，此时结合$y_1 \neq y_2$的假设，于是即"$y_1 \leq_X y_2$"与"$y_2 \leq_X y_1$"均为假。但是根据全序集的定义的要求（定义8.5.3），"$y_1 \leq_X y_2$"与"$y_2 \leq_X y_1$"至少有一个为真，于是与Y是一个全序子集的前提条件导出矛盾。

> 类似地，使用反证，假设Y有不止一个最小元素，其中包括y_1与y_2，且$y_1 \neq y_2$，其序关系为$\leq_X$。由于y_1，y_2都是Y的最小元素，于是“$y_2 <_X y_1$”与“$y_1 <_X y_2$”均为假，此时结合$y_1 \neq y_2$的假设，于是即“$y_1 \leq_X y_2$”与“$y_2 \leq_X y_1$”均为假。但是根据全序集的定义的要求（定义8.5.3），“$y_1 \leq_X y_2$”与“$y_2 \leq_X y_1$”至少有一个为真，于是与Y是一个全序子集的前提条件导出矛盾。
>
> 综上，反证结束，Y最多有一个最大元素，并且最多有一个最小元素。

8.5.8 证明：全序集的任意一个有限的非空子集都有一个最小元素和一个最大元素（提示：利用归纳法）。特别地，每个有限的全序集都是良序的

> 设该全序集为Y，序关系为$\leq_Y$，对任意非空子集S的基数n作归纳：
>
> $n = 1$时：
>
> > 此时S为单元素集，不妨设其唯一元素为s（即$S = \{s\}$），于是显然$s <_Y s$为假，即s同时是S的最大元素与最小元素，此情况下结论成立。
>
> 现归纳性假设对S基数$n = a$时成立结论，考虑$n = a + 1$时的情况：
>
> > 根据单个选择引理（引理3.1.6），我们可以从S中选出一个元素s，于是S可以写为$S = (S - \{s\}) \cup \{s\}$的形式，此时我们知道$s \notin S - \{s\}$与$S - \{s\}$的基数为$n - 1 = a$。根据归纳假设，存在一个$s_{\text{max}} \in S - \{s\}$是$S - \{s\}$的最大元素与$s_{\text{min}} \in S - \{s\}$是$S - \{s\}$的最小元素。
> >
> > 于是考虑s，s_{max}，s_{min}的大小关系，由于$s \notin S - \{s\}$因此$s \neq s_{\text{max}}$且$s \neq s_{\text{min}}$，并且由于Y是全序的，从而$s <_Y s_{\text{max}}$与$s_{\text{max}} <_Y s$至少有一个为真，类似地也有$s <_Y s_{\text{min}}$与$s_{\text{min}} <_Y s$至少有一个为真。在此前提下开始下面的讨论：
> >
> > - 最大元素：
> >
> >   > 1. 若$s <_Y s_{\text{max}}$：
> >   >
> >   >   > 则对任意$s' \in S$，若$s' \in S - \{s\}$，则由于s_{max}本身就是$S - \{s\}$的最大元素于是不可能有$s_{\text{max}} <_Y s'$；若$s' \in \{s\}$（即s'就是s），则由于$s <_Y s_{\text{max}}$于是不可能有$s_{\text{max}} <_Y s'$。于是此时根据定义，s_{max}就是S的最大元素。
> >   >
> >   > 2. 若$s_{\text{max}} <_Y s$：
> >   >
> >   >   > 则对任意$s' \in S$，若$s' \in S - \{s\}$，则由于序关系的传递性不可能有$s <_Y s'$（否则会出现$s_{\text{max}} <_Y s <_Y s'$导出矛盾）；若$s' \in \{s\}$（即$s'$就是$s$），则显然不可能有$s < s'$。于是此时根据定义，$s$就是$S$的最大元素。
> >
> > - 最小元素：
> >
> >   > 1. 若$s <_Y s_{\text{min}}$：
> >   >
> >   >   > 则对任意$s' \in S$，若$s' \in S - \{s\}$，则由于序关系的传递性不可能有$s' <_Y s$（否则会出现$s' <_Y s <_Y s_{\text{min}}$导出矛盾）；若$s' \in \{s\}$（即$s'$就是$s$），则显然不可能有$s' < s$。于是此时根据定义，$s$就是$S$的最小元素。
> >   >
> >   > 2. 若$s_{\text{min}} <_Y s$：
> >   >
> >   >   > 则对任意$s' \in S$，若$s' \in S - \{s\}$，则由于s_{min}本身就是$S - \{s\}$的最小元素于是不可能有$s' <_Y s_{\text{min}}$；若$s' \in \{s\}$（即s'就是s），则由于$s_{\text{min}} <_Y s$于是不可能有$s' <_Y s_{\text{min}}$。于是此时根据定义，s_{min}就是S的最小元素。

> > 综上，于是我们得到无论什么情况，在S的基数为n时总是有S存在一个最大元素和一个最小元素，于是此情况下结论也成立，归纳得证。
>
> 综上，于是对全序集的任意一个有限的非空子集，总是有一个最小元素和一个最大元素。特别地，若这个全序集是有限的，则其所有非空子集都是有限集，因此总是存在一个最小元素，此时根据定义8.5.8，于是这个全序集是良序的。即任意有限的全序集都是良序的。

8.5.9 设X是一个全序集，并且X的每一个非空子集都既有最小元素又有最大元素。证明：X是有限集（提示：利用反证法，假设X是无限集。从X的最小元素x_0开始，在X中构造一个递增的序列$x_0 < x_1 < \ldots$）

> 使用反证法，假设X是一个无限集，于是我们可以通过下面的递归定义得到一个序列：
>
> $$x_i := x_i\text{是}X - \{x_j \in X : 0 \leq j \leq i-1\}\text{的最小元素}\ (i \in \mathbb{N})$$
>
> 特别地，当$i = 0$时x_0是X的最小元素。
>
> 然后我们考虑集合$S := \{x_i \in X : i \in \mathbb{N}\}$，根据题目假设可以得到$S$存在一个最大元素，不妨设$i = n$时的$x_n$就是$S$的最大元素，从而对任意的$i \in \mathbb{N}$，“$x_n < x_i$”都是伪命题，但是根据$x_n$的定义，我们有$x_n$是$X - \{x_j \in X : 0 \leq j \leq n-1\}$的最小元素，从而对任意的$x \in X - \{x_j \in X : 0 \leq j \leq n-1\}$，都有$x_n \leq_X x$成立，特别地，由于：
>
> $$\begin{gathered} x_{n+1}\text{是}X - \{x_j \in X : 0 \leq j \leq n\}\text{的最小元素} \\ \Downarrow \\ x_{n+1} \in X - \{x_j \in X : 0 \leq j \leq n\} \\ \Downarrow \\ x_{n+1} \in X - \{x_j \in X : 0 \leq j \leq n-1\}\text{且}x_n \neq x_{n+1} \end{gathered}$$
>
> 于是即有$x_n <_X x_{n+1}$，于是x_n不是S的最大元素，导出了矛盾，反证结束。
>
> 综上，于是X只能是个有限集。

8.5.10 不利用选择公理证明命题8.5.10（提示：考虑集合

$$Y := \{n \in X : \text{存在某个满足 } m \leq_X n \text{ 的 } m \in X \text{ 使得 } P(m)\text{为假}\}$$

并证明若Y不是空集就会导致矛盾）

> 贴一下命题8.5.10，上面的内容太多了不方便翻页：
>
> > 设X是一个以$\leq_X$为序关系的良序集，并且设$P(n)$是关于$n \in X$的性质（即对任意的$n \in X$，$P(n)$要么为真命题，要么为伪命题）。假设对每一个$n \in X$，都有下面这个蕴含关系：如果$P(m)$为真对任意$m <_X n$的$m \in X$成立，那么$P(n)$也为真。则此时对任意$n \in X$，$P(n)$为真。
>
> 考虑使用反证法，不妨假设存在$x \in X$使得$P(x)$为假。于是考虑这样的集合：
>
> $$Y := \{n \in X : \text{存在某个满足}m \leq_X n\text{的}m \in X\text{使得}P(m)\text{为假}\}$$
>
> 关于这个集合，需要注意到对任意的$n \in X$，如果$P(n)$为假那么n就是属于Y的（因为$n \leq_X n$始终成立）；此外Y显然是X的非空子集（因为至少$x \leq_X x$使得$P(x)$为假，所以$x \in Y$）；还有对任意$n \in Y$，至少存在一个$m <_X n$使得$P(m)$为假（若对任意的$m <_X n$都有$P(m)$为真，则根据强归纳法原理的蕴含关系可以推知$P(n)$也为真，从而对任意的$m \leq_X n$都有$P(m)$为真，不满足Y中元素的要求）。
>
> 此时由于X是良序的，根据定义8.5.8，Y应当存在一个最小元素x_0，此时我们注意到：：
>
> > - 对任意的$x \in X$满足$x <_X x_0$，由于x_0是最小元素，因此x不属于Y，从而根据上面的结论，因此应当有$P(x)$为真始终成立。

> - 由于$x_0 \in Y$，根据上面的结论，应当至少存在一个$x <_X x_0$使得$P(x)$为假。
>
> 于是导出了矛盾，反证结束，只能有对任意的$n \in X$，$P(n)$都为真。

8.5.11 设X是一个偏序集，并且设Y和Y'都是X的良序子集，证明：$Y \cup Y'$是良序的，当且仅当它是全序的

> 我们假设X的序关系为$\leq$。根据良序集定义，我们知道若$Y \cup Y'$是良序的则$Y \cup Y'$是全序的，因此只需要证明：若$Y \cup Y'$是全序的，那么$Y \cup Y'$是良序的。
>
> 若$Y \cup Y'$是全序的，考虑其非空子集S。我们记有：
>
> $$S_Y := \{x \in S : x \in Y\}$$
> $$S_{Y'} := \{x \in S : x \in Y'\}$$
>
> 显然有$S = S_Y \cup S_{Y'}$，并且有$S_Y \subseteq Y$与$S_{Y'} \subseteq Y'$。由于Y，Y'是良序的，于是存在s_Y是S_Y的最小元素，$s_{Y'}$是$S_{Y'}$的最小元素；又由于$Y \cup Y'$是全序的，从而"$s_Y \leq s_{Y'}$"与"$s_{Y'} \leq s_Y$"至少有一个为真。此时分类讨论s_Y与$s_{Y'}$的关系：
>
> - 只有$s_Y \leq s_{Y'}$为真：
>
>   > 此时对任意S中元素s，若$s \in Y$，则由于s_Y是S_Y的最小元素我们可以得到$s < s_Y$为伪；若$s \in Y'$，则不妨反证，假设有$s < s_Y$成立，那么根据偏序关系的可传递性有$s < s_Y \leq s_{Y'} \implies s < s_{Y'}$，这和$s_{Y'}$是$S_{Y'}$的最小元素的前提矛盾，于是只能有$s < s_Y$为伪；综合得到$s < s_Y$对任意$S$中元素$s$为伪，于是根据定义8.5.5，$s_Y$是$S$的最小元素。
>
> - 只有$s_{Y'} \leq s_Y$为真：
>
>   > 此时对任意S中元素s，若$s \in Y$，则不妨反证，设有$s < s_{Y'}$成立，根据偏序关系的可传递性有$s < s_{Y'} \leq s_Y \implies s < s_Y$，这和$s_Y$是$S_Y$的最小元素的前提矛盾，于是只能有$s < s_{Y'}$为伪；若$s \in Y'$，则由于$s_{Y'}$是$S_{Y'}$的最小元素可以得到$s < s_{Y'}$为伪。综合得到$s < s_{Y'}$对任意$S$中元素$s$为伪，于是根据定义8.5.5，$s_{Y'}$是$S$的最小元素。
>
> - $s_Y \leq s_{Y'}$与$s_Y \leq s_{Y'}$均为真：
>
>   > 此时由偏序关系的反对称性，有$s_Y = s_{Y'}$。于是对任意S中元素s，若$s \in Y$，则由于s_Y是S_Y的最小元素我们可以得到$s < s_Y$为伪；若$s \in Y'$，则由于s_Y也是$S_{Y'}$的最小元素也可以得到$s < s_Y$为伪。综合得到$s < s_Y$对此时对任意S中元素s为伪，于是根据定义8.5.5，s_Y是S的最小元素。
>
> 综上，于是对任意S是$Y \cup Y'$的非空子集，总有S存在一个最小元素，从而根据定义8.5.8，$Y \cup Y'$是良序的。
>
> 于是结论得证，我们有$Y \cup Y'$是良序的，当且仅当它是全序的。

8.5.12 设X和Y分别是具有序关系$\leq_X$和$\leq_Y$的偏序集，在笛卡尔积$X\times Y$上定义一个关系$\leq_{X\times Y}$如下：若$x<_X x'$或者若$x=x'$且$y\leq_Y y'$，则定义$(x,y)\leq_{X\times Y}(x',y')$（这被称作$X\times Y$上的字典顺序，它类似于单词的字母顺序。如果单词$\omega$的第一个字母比另一个单词$\omega'$的第一个字母更早出现在字母表中，或者两个单词的第一个字母相同但ω的第二个字母比ω'的第二个字母更早出现的在字母表中（以此类推），那么ω就比ω'更早出现在字典中）证明：$\leq_{X\times Y}$定义了$X\times Y$上的一个偏序关系。更进一步地证明：如果X和Y都是全序的，那么$X\times Y$也是全序的；如果X和Y都是良序的，那么$X\times Y$也是良序的

> 注：译版的题目有误，此关系实际定义为"若$x<_X x'$或者若$x=x'$且$y\leq_Y y'$"，原书内容为"if $x<_X x'$, or if $x=x'$ and $y\leq_Y y'$"，译版将"$x<_X x'$"错误写成了"$x\leq_X x'$"
>
> ---
>
> 对题目中的结论逐个证明：
>
> 证明：$\leq_{X\times Y}$定义了$X\times Y$上的一个偏序关系。
>
> 要证明$\leq_{X\times Y}$是$X\times Y$上的一个偏序关系，则需要证明$\leq_{X\times Y}$满足：
>
> - 自反性：
>
>   > 即证明对任意的$(x,y)\in X\times Y$都有$(x,y)\leq_{X\times Y}(x,y)$成立，由于$\leq_Y$满足自反性于是我们有$x=x$与$y\leq_Y y$成立，从而根据$\leq_{X\times Y}$的定义有$(x,y)\leq_{X\times Y}(x,y)$成立。自反性得证。
>
> - 反对称性：
>
>   > 即证明对任意的$(x,y),(x',y')\in X\times Y$，若有$(x,y)\leq_{X\times Y}(x',y')$与$(x',y')\leq_{X\times Y}(x,y)$成立，则有$(x,y)=(x',y')$成立。
>   >
>   > 考虑$\leq_{X\times Y}$的定义，"$(x,y)\leq_{X\times Y}(x',y')$"有"$x<_X x'$"或"$x=x'$且$y\leq_Y y'$"，若"$x<_X x'$"为真，那么对"$(x',y')\leq_{X\times Y}(x,y)$"，只能是"$x'<_X x$"为真（因为$x'\neq x$）。于是：
>   >
>   > $$x<_X x'\text{且}x'<_X x$$
>   > $$\Downarrow$$
>   > $$x\leq_X x'\text{且}x'\leq_X x\text{且}x\neq x'$$
>   > $$\Downarrow$$
>   > $$x=x'\text{且}x\neq x'$$
>   >
>   > 其中最后一步用到了$\leq_X$满足反对称性，从而此时导出了矛盾，于是此情况不可能。
>   >
>   > 然后考虑"$x=x'$且$y\leq_Y y'$"为真，那么对"$(x',y')\leq_{X\times Y}(x,y)$"，只能是"$x'=x$且$y'\leq_Y y$"为真（因为$x'=x$）。于是：
>   >
>   > $$x=x'\text{且}y\leq_Y y'\text{且}x'=x\text{且}y'\leq_Y y$$
>   > $$\Downarrow$$
>   > $$x=x'\text{且}y\leq_Y y'\text{且}y'\leq_Y y$$
>   > $$\Downarrow$$
>   > $$x=x'\text{且}y=y'$$
>   >
>   > 其中最后一步用到了$\leq_Y$满足反对称性，此时"$x=x'$且$y=y'$"即有$(x,y)=(x',y')$。
>   >
>   > 综上，于是若有$(x,y)\leq_{X\times Y}(x',y')$与$(x',y')\leq_{X\times Y}(x,y)$成立，则必有$(x,y)=(x',y')$成立，反对称性得证。
>
> - 可传递性：
>
>   > 即证明对任意的$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$，若有$(x_0,y_0)\leq_{X\times Y}(x_1,y_1)$与$(x_1,y_1)\leq_{X\times Y}(x_2,y_2)$成立，那么有$(x_0,y_0)\leq_{X\times Y}(x_2,y_2)$成立。

> 考虑$\leq_{X\times Y}$的定义，“$(x_1,y_1)\leq_{X\times Y}(x_2,y_2)$”有“$x_1<_X x_2$”或“$x_1=x_2$且$y_1\leq_Y y_2$”。于是考虑其可能的情况：
>
> - 若“$x_1<_X x_2$”为真：
>
>   > 则无论“$x_0<_X x_1$”与“$x_0=x_1$且$y_0\leq_Y y_1$”哪个为真，总会有$x_0\leq_X x_1<_X x_2\implies x_0<_X x_2$（偏序关系的可传递性），于是根据$\leq_{X\times Y}$的定义此时有$(x_0,y_0)\leq_{X\times Y}(x_2,y_2)$成立。
>
> - 若“$x_1=x_2$且$y_1\leq_Y y_2$”为真：
>
>   > “$(x_0,y_0)\leq_{X\times Y}(x_1,y_1)$”有“$x_0<_X x_1$”或“$x_0=x_1$且$y_0\leq_Y y_1$”，考虑其可能的情况：
>   >
>   > - 若“$x_0<_X x_1$”为真：
>   >
>   >   > 则根据偏序关系的可传递性，有$x_0<_X x_1\leq_X x_2\implies x_0<_X x_2$，于是根据$\leq_{X\times Y}$的定义此情况下有$(x_0,y_0)\leq_{X\times Y}(x_2,y_2)$成立。
>   >
>   > - 若“$x_0=x_1$且$y_0\leq_Y y_1$”为真：
>   >
>   >   > 此时由$x_0=x_1=x_2$。根据偏序关系的可传递性，又有$y_0\leq_Y y_1\leq_Y y_2\implies y_0\leq_Y y_2$，于是根据$\leq_{X\times Y}$的定义此情况下有$(x_0,y_0)\leq_{X\times Y}(x_2,y_2)$成立。
>
> 综上，于是若有$(x_0,y_0)\leq_{X\times Y}(x_1,y_1)$与$(x_1,y_1)\leq_{X\times Y}(x_2,y_2)$成立，那么总有$(x_0,y_0)\leq_{X\times Y}(x_2,y_2)$成立，可传递性得证。

于是$\leq_{X\times Y}$是$X\times Y$上的一个偏序关系得证。

证明：如果X和Y都是全序的，那么$X\times Y$也是全序的。

要证明$X\times Y$是全序的，即证明对任意的$(x,y),(x',y')\in X\times Y$，“$(x,y)\leq_{X\times Y}(x',y')$”与“$(x',y')\leq_{X\times Y}(x,y)$”中至少有一个为真。

不妨使用反证，我们假设存在一对$(x,y),(x',y')\in X\times Y$使得“$(x,y)\leq_{X\times Y}(x',y')$”与“$(x',y')\leq_{X\times Y}(x,y)$”全为伪，于是可以化简逻辑，该假设等价于有下面几个命题同时成立：

1. “$x<_X x'$”为伪。
2. “$x'<_X x$”为伪。
3. “$x\neq x'$”或“$y\leq_Y y'$为伪”。
4. “$x\neq x'$”或“$y'\leq_Y y$为伪”。

由于“$x<_X x'$”与“$x'<_X x$”都为伪，根据X全序的要求，只能有$x'=x$成立，于是第3和第4个命题同时成立只能是“$y\leq_Y y'$为伪”与“$y'\leq_Y y$为伪”同时成立，但是根据Y全序的要求，$y\leq_Y y'$与$y'\leq_Y y$至少要有一个为真，于是导出了矛盾，反证假设不成立。$X\times Y$只能是全序的。

证明：如果X和Y都是良序的，那么$X\times Y$也是良序的。

根据上面的结论，由于X和Y都是良序的，从而它们也是全序的，进而$X\times Y$也是全序的。于是此时只需要证明对$X\times Y$的任意非空子集都存在最小元素，那么$X\times Y$就是良序的。

设S是$X\times Y$的非空子集，然后考虑下面这样一个集合：

$$X':=\{x\in X:\text{存在}y\in Y\text{使得}(x,y)\in S\}$$

> 显然X'是X的非空子集，因此根据X是良序的，存在一个X'的最小元素x'。然后考虑下面的集合：
>
> $$Y' := \{y \in Y : (x', y) \in S\}$$
>
> 显然Y'是Y的非空子集，因此根据Y是良序的，存在一个Y'的最小元素x'。
>
> 然后我们考虑任意的$(x, y) \in S$，由于$x \in X'$与x'是X'的最小元素，因此有$x <_X x'$为伪。于是分类讨论：
>
> - 若没有$x = x'$，则此时"$x <_X x'$"，"$x = x'$且$y \leq_Y y'$"与"$(x, y) = (x', y')$"均不成立，于是$(x, y) <_{X \times Y} (x', y')$为伪。
> - 若有$x = x'$，则根据定义有$y \in Y'$，于是由于y'是Y'的最小元素有$y <_Y y'$为伪，即"$y \leq_Y y'$"与"$(x, y) \neq (x', y')$"不能同时成立，于是根据$\leq_{X \times Y}$的定义有$(x, y) <_{X \times Y} (x', y')$为伪。
>
> 于是对任意的$(x, y) \in S$都有$(x, y) <_{X \times Y} (x', y')$为伪，于是$(x', y')$是$S$的最小元素。
>
> 综上，于是对任意$X \times Y$的非空子集S，S都存在最小元素，于是根据定义8.5.8，$X \times Y$也是良序的，结论得证。

8.5.13 证明：引理8.5.14的证明中的结论，即$Y' \backslash Y$的每一个元素都是Y的上界，反之亦然（提示：利用命题8.5.10证明

$$\{y \in Y : y \leq a\} = \{y \in Y' : y \leq a\} = \{y \in Y \cap Y' : y \leq a\}$$

对所有的$a \in Y \cap Y'$均成立。推导出$Y \cap Y'$是好的，从而$s(Y \cap Y')$存在。证明如果$Y' \backslash Y$是非空的，那么$s(Y \cap Y') = \min(Y' \backslash Y)$。$Y$和$Y'$交换之后也有类似的结论。因为$Y' \backslash Y$和$Y \backslash Y'$是不相交的，所以我们可以断定两个集合中有一个为空集。基于这一点，很容易得出结论）

> 注：需要注意的是，原书证明中的s函数实际上是一个确定的函数，尽管由于它使用了选择公理我们不能给出它的取值过程，不要将其理解为s只是单纯的对输入的以x_0为最小元素的良序子集Y给出一个严格上界，理解这一点后你才能明白为什么"好的"集合是X的一类特殊良序子集，而不是单纯的一个以x_0为最小元素的良序子集（事实上，如果你按照"s输出一个严格上界"的想法理解你很可能会发现"好的"的要求是没有意义的，因为x显然是$\{y \in Y : y < x\}$的一个严格上界）。
>
> ---
>
> 我们先使用强归纳法（命题8.5.10）证明下面的性质
>
> $$P(n) := \{y \in Y : y \leq n\} = \{y \in Y' : y \leq n\} = \{y \in Y \cap Y' : y \leq n\}$$
>
> 对任意的$n \in Y \cap Y'$都成立，显然我们有$P(x_0)$为真。即证明，对任意的$n \in Y \cap Y'$都有这样的蕴含关系：若任意$m < n$的$m \in Y \cap Y'$都有$P(m)$为真，则有$P(n)$为真。
>
> 考虑任意的$n \in Y \cap Y'$，若任意$m < n$的$m \in Y \cap Y'$都有$P(m)$为真，于是对任意$i \in Y \cap Y'$且$i < n$，有$i \in Y$与$i \in Y'$；然后对任意的$i \in Y$且$i < n$，由于$P(i)$为真有：
>
> $$\{y \in Y : y \leq i\} = \{y \in Y \cap Y' : y \leq i\} \xrightarrow{i \in \{y \in Y : y \leq i\}} i \in \{y \in Y \cap Y' : y \leq i\} \implies i \in Y \cap Y'$$
>
> 于是有$i \in Y \cap Y'$，类似地我们也可以得到对任意的$i \in Y'$且$i < n$有$i \in Y \cap Y'$。此时根据集合相等的定义，我们有：
>
> $$\{y \in Y : y < n\} = \{y \in Y' : y < n\} = \{y \in Y \cap Y' : y < n\}$$
>
> 根据前设我们有$n \in Y \cap Y'$，从而$n \in Y$与$n \in Y'$为真，于是有：

$$\{y \in Y : y < n\} = \{y \in Y' : y < n\} = \{y \in Y \cap Y' : y < n\}$$
$$\Downarrow$$
$$\{y \in Y : y < n\} \cup \{n\} = \{y \in Y' : y < n\} \cup \{n\} = \{y \in Y \cap Y' : y < n\} \cup \{n\}$$
$$\Downarrow$$
$$\{y \in Y : y \leq n\} = \{y \in Y' : y \leq n\} = \{y \in Y \cap Y' : y \leq n\}$$

于是综合即有蕴含关系"若任意$m < n$的$m \in Y \cap Y'$都有$P(m)$为真，则$P(n)$为真"成立，于是根据强归纳法原理，我们有$P(n)$对任意的$n \in Y \cap Y'$都为真。

然后我们证明$Y \cap Y'$是一个好的集合，并且对任意的$Y \backslash Y'$或$Y' \backslash Y$中元素y，它都是$Y \cap Y'$的一个严格上界。

考虑任意的$n \in Y \cap Y'$且有$n \neq x_0$，在上面我们已经证明过有：

$$\{y \in Y : y < n\} = \{y \in Y' : y < n\} = \{y \in Y \cap Y' : y < n\}$$

于是由于Y（Y'也行）是好的，我们有：

$$s(\{y \in Y \cap Y' : y < n\}) = s(\{y \in Y : y < n\}) = n$$

又由于$Y \cap Y'$是Y的子集，因此它是良序的；对任意$y \in Y \cap Y'$，由于y也是属于Y的，因此对最小元素x_0应当有$y < x_0$为假，即x_0也是$Y \cap Y'$的最小元素。综合定义可以得到$Y \cap Y'$是一个好的集合。

然后对任意的$Y \backslash Y'$中元素e，不妨使用反证法，假设存在$n \in Y \cap Y'$使得$n \leq e$为假。由于全序的要求，因此这等价于$e < n$。根据上证明我们有$P(n)$为真，即：

$$\{y \in Y : y \leq n\} = \{y \in Y \cap Y' : y \leq n\}$$

于是由于$e \in Y$且$e \leq n$，我们有$e \in \{y \in Y : y \leq n\} \iff e \in \{y \in Y \cap Y' : y \leq n\}$，即$e \in Y \cap Y'$，这和前提的$e \in Y \backslash Y'$矛盾，反证假设不成立。只能有对任意的$n \in Y \cap Y'$都有$n \leq e$，即$e$是$Y \cap Y'$的一个上界，考虑到$e \notin Y \cap Y'$，于是这个结论可以升级为$e$是$Y \cap Y'$的一个严格上界。类似地，我们也可以证明对任意的$Y' \backslash Y$中元素$e$，$e$是是$Y \cap Y'$的一个严格上界。

最后我们证明，$Y' \backslash Y$的每一个元素都是Y的严格上界，$Y \backslash Y'$的每一个元素都是Y'的严格上界。

首先证明若$Y \backslash Y'$非空，则必有$s(Y \cap Y') = \min(Y \backslash Y')$。由于$Y \backslash Y'$是一个良序子集，因此存在最小元素$\min(Y \backslash Y')$；然后对任意$y \in Y$，若有$y < \min(Y \backslash Y')$，都有$y \notin Y \backslash Y'$，于是只能有$y \in Y \cap Y'$；而根据上面的结论，对任意$y \in Y \cap Y'$，都有$y \in Y$且$y < \min(Y \backslash Y')$成立。于是综合可以得到：

$$Y \cap Y' = \{y \in Y : y < \min(Y \backslash Y')\}$$

又根据Y是好的，于是有：

$$s(Y \cap Y') = s(\{y \in Y : y < \min(Y \backslash Y')\}) = \min(Y \backslash Y')$$

类似地我们也可以证明若$Y' \backslash Y$非空，则必有$s(Y \cap Y') = \min(Y' \backslash Y)$。

此时注意到$Y \backslash Y'$与$Y' \backslash Y$是两个不相交的集合，若假设它们均非空，则根据上面结论有$s(Y \cap Y')$同时属于这两者导出矛盾，于是这两者至少有一个是空集，此时有：

- 若$Y\backslash Y'$为空，则有$Y\subseteq Y'$与$Y=Y\cap Y'$成立，根据上结论我们有$Y'\backslash Y$的每一个元素都是Y的严格上界。
- 若$Y'\backslash Y$为空，则有$Y'\subseteq Y$与$Y'=Y\cap Y'$成立，根据上结论我们有$Y\backslash Y'$的每一个元素都是Y的严格上界。

> 于是结论得证。

8.5.14 利用引理8.5.14证明引理8.5.15（提示：首先证明如果X没有最大元素，那么X的任意一个有上界的子集也一定有严格上界）

> 不妨使用反证法，我们假设X不存在最大元素，从而根据定义对任意元素$x\in X$至少存在一个$x'\in X$满足$x<x'$为真。从而根据偏序关系的可传递性，若x恰好是X的某个全序子集M的上界，那么有：
>
> $$\begin{gathered}\forall\, m\in M, m\leq x<x'\\ \Downarrow\\ \forall\, m\in M, m\leq x'\text{且}m\neq x'\\ \Downarrow\\ x'\text{是}M\text{的严格上界}\end{gathered}$$
>
> 于是我们可以得到对任意X的全序子集M，M都是存在严格上界的。
>
> 然后根据X是非空的，从而存在$x_0\in X$，根据引理8.5.14有存在X的一个良序子集Y使得Y以x_0为最小元素且不存在严格上界；但是根据上面的推论，由于Y是良序的，特别地，它也是全序的，因此Y应当存在一个严格上界。于是导出了矛盾，反证假设不成立，X至少存在一个最大元素。
>
> 综上，于是佐恩引理得证。

8.5.15 设A和B是两个非空的集合，其中A的基数不小于或者等于B的基数。利用超限归纳原理证明B的基数小于或者等于A的基数（提示：对任意的子集 $X\subseteq B$，设$P(X)$表示性质：存在一个从X到A的单射）。本题（结合习题8.3.3）表明只要选择公理成立，任意两个集合的基数就是可比较的

> 注：本题目翻译版中写的是证明“B的基数不大于A的基数”，原文为“B has lesser or equal cardinality to A”，应当翻译为“B的基数小于或者等于A的基数”（特别是考虑到我们不曾给出过基数“大于”的定义）。
>
> 本证明灵感来自[知乎用户踟远陵歒](#)的[回答](#)，因此可能与原书提示思路有所不同。
>
> ---
>
> 于是即证明存在从B到A的单射。对一个函数$f:X\to Y$，我们记有它的图为$I_f:=\{(x,f(x)):x\in X\}$，并且我们知道图I_f是$X\times Y$的一个子集。于是考虑下面的集合：
>
> $$\mathcal{I}:=\{I_f\subseteq B\times A: f\text{是一个从}X\text{到}A\text{的单射}, X\text{是}B\text{的子集}\}$$
>
> 并且我们为集合$\mathcal{I}$附加关系“集合的包含$\subseteq$”，从而$\mathcal{I}$显然是一个偏序集。
>
> ---
>
> 考虑任意$\mathcal{I}$的全序子集I，我们证明由并集公理得到的集合$\cup I$是I的上界：
>
> 根据并集公理我们易得对任意图$I_f\in I$都有$I_f\subseteq\cup I$，于是只需要证明$\cup I$是属于$\mathcal{I}$的。
>
> 令集合$X:=\{x\in B:\text{存在}y\in A\text{使得}(x,y)\in\cup I\}$，显然$X$是$B$的子集。此时我们定义$P(b,a)$表示关于对象$a\in A$与对象$b\in X$的性质如下：
>
> $$P(b,a):=(b,a)\in\cup I$$

先证明P满足垂线测试：对任意$b \in X$，根据集合要求至少存在一个$a \in A$使得$(b, a) \in \cup I$，再根据并集定理即存在$I_f \in I$使得$(b, a) \in I_f$（于是$a = f(b)$）。此时使用反证法，假设存在一个$a' \in A$满足$a \neq a'$与$(b, a') \in \cup I$同时成立，根据并集定理即存在$I_{f'} \in I$使得$(b, a') \in I_{f'}$。根据I是全序集的要求，于是$I_f \subseteq I_{f'}$与$I_{f'} \subseteq I_f$中至少有一个为真，讨论：

- 若$I_f \subseteq I_{f'}$为真，于是$(b, a) \in I_{f'}$，从而根据图的定义有$f'(b) = a$与$f'(b) = a'$同时成立，这不符合垂线测试的要求。
- 若$I_{f'} \subseteq I_f$为真，于是$(b, a') \in I_f$，从而根据图的定义有$f(b) = a$与$f(b) = a'$同时成立，这不符合垂线测试的要求。

于是反证假设总是会引出矛盾，反证结束。只能存在唯一的$a \in A$使得$P(b, a)$为真，即P是满足垂线测试的，即可以由P定义一个定义域为X值域为A的函数$F : X \to A$。

接着证明由P定义的函数F是一个单射：对任意的b，$b' \in X$且$b \neq b'$，根据F定义我们有$(b, F(b)) \in \cup I$与$(b', F(b')) \in \cup I$，进而存在I_f，$I_{f'} \in I$使得$(b, F(b)) \in I_f$与$(b', F(b')) \in I_{f'}$成立。根据I是全序集的要求，于是$I_f \subseteq I_{f'}$与$I_{f'} \subseteq I_f$中至少有一个为真，讨论：

- 若$I_f \subseteq I_{f'}$为真，于是$(b, F(b)) \in I_{f'}$，从而根据f'是单射（$\mathcal{I}$的定义），由$b \neq b'$有$f'(b) \neq f'(b') \implies F(b) \neq F(b')$。
- 若$I_{f'} \subseteq I_f$为真，于是$(b', F(b')) \in I_f$，从而根据f是单射（$\mathcal{I}$的定义），由$b \neq b'$有$f(b) \neq f(b') \implies F(b) \neq F(b')$。

于是我们总是有$F(b) \neq F(b')$，即F是一个单射。

最后我们证明$\cup I$就是F的图$I_F = \{(b, F(b)) : b \in X\}$：对任意$(b, F(b)) \in I_F$，根据定义我们有$F(b)$满足$(b, F(b)) \in \cup I$；对任意$(b, a) \in \cup I$，根据$X$的定义我们有$b \in X$，然后由于$P(b, a)$为真我们有$F(b) = a$，从而根据$I_F$的定义我们有$(b, a) \in I_F$。结合集合相等的定义，于是$I_F = \cup I$。

综上，于是$\cup I$是函数F的图，并且F是一个定义域为B的子集，值域为A的单射，从而根据$\mathcal{I}$的定义有$\cup I \in \mathcal{I}$。再结合对任意图$I_f \in I$都有$I_f \subseteq \cup I$与定义8.5.12，于是$\cup I$是I的一个上界。

根据上结论我们有对任意$\mathcal{I}$的全序子集I都存在一个上界，于是根据佐恩引理，$\mathcal{I}$至少存在一个最大元素，我们记为I_g。注意到根据$\mathcal{I}$的定义g的值域为A，然后我们证明g的定义域只能是B：

不妨使用反证法，我们假设g的定义域为$B' \neq B$，根据$\mathcal{I}$的定义必须有$B' \subseteq B$，从而$B' \neq B$当且仅当$B - B' \neq \varnothing$，换言之，至少存在一个$b \in B$使得$b \notin B'$；然后由于g是一个单射，特别地，g不可能是一个满射（否则由函数$\tau \circ g^{-1} : A \to B$是单射我们可以直接得到$A$的基数小于或等于$B$与题设矛盾，其中$\tau : B' \to B$是定义为$\tau(b) := b$的恒等映射），于是存在$a \in A$使得对任意$b' \in B'$都有$g(b') \neq a$，然后此时我们考察函数$g' : B' \cup \{b\} \to A$，其定义如下：

$$g'(x) := \begin{cases} g(x) & \text{if } x \in B' \\ a & \text{if } x = b \end{cases}$$

由于g是一个单射显然有g'也是一个单射，并且有$I_{g'} = I_g \cup \{(b, a)\}$，于是即$I_g \subsetneq I_{g'}$与$I_{g'} \in \mathcal{I}$都成立。但是根据$I_g$是最大元素的要求，对$I_{g'}$也应当有$I_g \subsetneq I_{g'}$为假，于是导出了矛盾。反证假设不成立，只能有$g$是定义域为$B$值域为$A$的单射。

综上，于是存在单射$g : B \to A$，根据定义于是即B的基数小于或者等于A，证明完毕。

8.5.16 设 X 是一个集合，并且设P是由X的所有偏序关系构成的集合（例如：如果$X := N\backslash\{0\}$，那么通常的偏序关系$\leq$和习题8.5.3中的偏序关系都是P的元素）。我们称一个偏序关系$\leq\in P$比另一个偏序关系$\leq'\in P$更粗糙。如果对任意的x，$y\in X$，都有蕴涵关系$(x\leq y)\Longrightarrow(x\leq' y)$。比如，习题8.5.3中的偏序关系比通常的序关系$\leq$更粗糙。如果$\leq$比$\leq'$更粗糙，那么我们记$\leq\preceq\leq'$。证明：$\preceq$使得$P$成为一个偏序集，因此由$X$上的偏序关系所构成的集合其自身就是偏序的。$P$恰好有一个最小元素，这个最小元素是什么？证明：$P$的最大元素正是$X$的全序关系。利用佐恩引理证明：对于给定$X$的任意一个偏序关系$\leq$，总存在一个全序关系$\leq'$使得$\leq$比$\leq'$更粗糙

> 注：如果你从关系集合的定义来理解这个题目，那么更粗糙的定义本质上是集合之间的包含关系，这样的理解会更有助于去理解更粗糙到底表明了两个关系之间有怎么样的关联。在下面的证明中，我们会逐个给出题目中问题的解答。
>
> ---
>
> 证明：$\preceq$使得P成为一个偏序集。
>
> 于是需要证明$\preceq$满足自反性，反对称性与可传递性：
>
> - 自反性：
>
>   > 显然对任意偏序关系$\leq\in P$，我们有对任意的x，$y\in X$都有蕴含关系$(x\leq y)\Longrightarrow(x\leq y)$，于是根据上定义$\leq\preceq\leq$始终为真，从而$\preceq$是自反的。
>
> - 反对称性：
>
>   > 若对偏序关系$\leq$，$\leq'\in P$满足$\leq\preceq\leq'$与$\leq'\preceq\leq$，于是根据定义，对任意的x，$y\in X$有蕴含关系$(x\leq y)\Longrightarrow(x\leq' y)$与蕴含关系$(x\leq' y)\Longrightarrow(x\leq y)$，于是可以推知有$(x\leq y)\iff(x\leq' y)$，即$\leq=\leq'$，从而$\preceq$是对称的。
>
> - 可传递性：
>
>   > 若对偏序关系$\leq_0$，$\leq_1$与$\leq_2\in P$满足$\leq_0\preceq\leq_1$与$\leq_1\preceq\leq_2$，根据定义即对任意x，$y\in X$有蕴含关系$(x\leq_0 y)\Longrightarrow(x\leq_1 y)$与蕴含关系$(x\leq_1 y)\Longrightarrow(x\leq_2 y)$，于是可以推知有$(x\leq_0 y)\iff(x\leq_2 y)$，即$\leq_0\preceq\leq_2$，从而$\preceq$是可传递的。
>
> 于是我们得证$\preceq$满足自反性，反对称性与可传递性，即$\preceq$使得P成为一个偏序集，$\preceq$是一个偏序关系。
>
> ---
>
> 试回答：P恰好有一个最小元素，这个最小元素是什么？
>
> 是恒等关系$=\in P$，我们简单证明它就是P的唯一最小元素。
>
> 考虑任意一个偏序关系$\leq\in P$，由于自反性的要求，因此我们有对任意$x\in X$都有$x\leq x$为真，于是我们注意到有蕴含关系：
>
> $$\text{对任意}x, y\in X, (x=y)\Longrightarrow(x\leq y)$$
>
> 即我们有对任意$\leq\in P$都有$=\preceq\leq$成立。于是对任意$\leq\in P$若有$\leq\preceq=$，则由于$\preceq$是偏序的，反对称性要求必然有$(\leq)=_{\preceq}(=)$（即$\leq$就是恒等关系$=$，这里特意强调一下$=_{\preceq}$是表明这个“$=$”是指在P中的恒等关系，括号中的“$=$”是指X中的恒等关系），这表明不存在$\leq\in P$使得$\leq\preceq=$且$\leq\neq=$，于是根据最小元素的定义，$=$是P的最小元素。
>
> 然后我们使用反证证明$=$是P的唯一最小元素，不妨假设P中还存在别的最小元素$\leq'\in P$并且$\leq'\neq=$，从而根据定义对任意$\leq\in P$都有命题“$\leq\prec\leq'$” $\iff$ “$\leq\preceq\leq'$且$\leq\neq\leq'$”为假。但是根据我们上面的证明，有$=\preceq\leq'$，于是此时我们得到“$=\preceq\leq'$且$=\neq\leq'$”为真，导出了矛盾，从而反证假设不成立，只能有$=$是P的唯一最小元素。
>
> ---

> 证明：P的最大元素正是X的全序关系。
>
> 即证明：对任意$\leq \in P$，不存在$\leq' \in P$使得$\leq \prec \leq'$为真当且仅当$\leq$是X的全序关系。
>
> 分别证明其充分必要性：
>
> - 若不存在$\leq' \in P$使得$\leq \prec \leq'$为真，则$\leq$是X的全序关系。
>
>   > 不妨使用反证法，假设$\leq$不是全序的，于是根据定义，至少存在一对a，$b \in X$使得"$a \leq b$"与"$b \leq a$"都为伪。于是此时我们定义一个新的关系$\leq'$有：
>   >
>   > 对任意x，$y \in X$，$x \leq' y$当且仅当"$x \leq y$"或者"$x \leq a$且$b \leq y$"。
>   >
>   > 我们来证明这个关系是X的偏序关系，分别证明三个性质：
>   >
>   > - 自反性：
>   >
>   >   > 对任意$x \in X$，由于$\leq$是偏序的我们有$x \leq x$成立，于是根据$\leq'$定义我们有$x \leq' x$成立。从而$\leq'$是自反的。
>   >
>   > - 反对称性：
>   >
>   >   > 对任意x，$y \in X$，若有$x \leq' y$与$y \leq' x$同时为真，于是根据$\leq'$定义我们分类讨论，其中表格第一行表示$x \leq' y$成立的可能情况，第一列表示$y \leq' x$成立的可能情况：
>   >   >
>   >   > | | **$x \leq y$为真** | **$x \leq a$且$b \leq y$为真** |
>   >   > |---|---|---|
>   >   > | $y \leq x$为真 | 此时由于$\leq$是偏序的（满足反对称），于是此情况下有$x = y$。 | 此时由于$\leq$是偏序的（满足可传递），有$b \leq y \leq x \leq a$，即$b \leq a$，这和反证假设矛盾，此情景在反证假设下不可能出现。 |
>   >   > | $y \leq a$且$b \leq x$为真 | 此时由于$\leq$是偏序的（满足可传递），有$b \leq x \leq y \leq a$，即$b \leq a$，这和反证假设矛盾，此情景在反证假设下不可能出现。 | 此时由于$\leq$是偏序的（满足可传递），有$b \leq x \leq a$，即$b \leq a$，这和反证假设矛盾，此情景在反证假设下不可能出现。 |
>   >   >
>   >   > 于是我们有对任意x，$y \in X$，若有$x \leq' y$与$y \leq' x$同时为真，则必然有$x = y$。从而$\leq'$是反对称的。
>   >
>   > - 可传递性：
>   >
>   >   > 对任意x，y，$z \in X$，若有$x \leq' y$与$y \leq' z$同时为真，于是根据$\leq'$定义我们分类讨论，其中表格第一行表示$x \leq' y$成立的可能情况，第一列表示$y \leq' z$成立的可能情况：
>   >   >
>   >   > | | **$x \leq y$为真** | **$x \leq a$且$b \leq y$为真** |
>   >   > |---|---|---|

	$x \le y$**为真**	$x \le a$**且**$b \le y$**为真**
$y \le z$为真	此时由于$\le$是偏序的（满足可传递），于是此情况下有$x \le z$，即$x \le' z$。	此时由于$\le$是偏序的（满足可传递），有$b \le y \le z$，即$b \le z$，此时再根据$x \le a$与$\le'$的定义可以得到$x \le' z$。
$y \le a$且$b \le z$为真	此时由于$\le$是偏序的（满足可传递），有$x \le y \le a$，即$x \le a$，此时再根据$b \le z$与$\le'$的定义可以得到$x \le' z$。	此时由于$\le$是偏序的（满足可传递），有$b \le y \le a$，即$b \le a$，这和反证假设矛盾，此情景在反证假设下不可能出现。

> > 于是我们有对任意x，y，$z \in X$，若有$x \le' y$与$y \le' z$同时为真，则必然有$x \le' z$。从而$\le'$是可传递的。
>
> 综上，于是$\le'$是X的一个偏序关系，因此我们有$\le' \in P$，并且根据定义我们很容易得到$\le$是比$\le'$更粗糙的且两者不是同一个关系，即$\le \prec \le'$。但是根据条件，$\le$是最大元素，因此不存在$\le'' \in P$使得$\le \prec \le''$为真，于是导出了矛盾，反证假设不成立。从而只能有$\le$是一个全序关系。

- 若$\le$是X的全序关系，则不存在$\le' \in P$使得$\le \prec \le'$为真。

> 使用反证法，我们假设存在一个$\le' \in P$使得$\le \prec \le'$。于是存在一对a，$b \in X$使得$a \le b$与$a \le' b$给出不一样的结果（即一真一伪），又考虑到$\le \prec \le'$，于是若有$a \le b$为真则必然有$a \le' b$为真，于是只能有$a \le b$为假。
>
> 此时由于$\le$是全序的，因此$a \le b$与$b \le a$至少有一真$\Longrightarrow b \le a$为真，结合$\le \prec \le'$于是有$b \le' a$为真。然后根据$\le'$偏序（反对称）与$a \le' b$我们有$a = b$，从而应该有$a \le b$也为真，和前反证假设里面$a \le b$与$a \le' b$给出不一样结果矛盾，反证假设为假。只能有不存在$\le' \in P$使得$\le \prec \le'$为真，即$\le$是P的最大元素。

综上，我们得证P的最大元素正是X的全序关系。

证明：对于给定X的任意一个偏序关系$\le$，总存在一个全序关系$\le'$使得$\le$比$\le'$更粗糙。

令有集合Ω：

$$\Omega := \{\le' \in P : \le \preceq \le'\}$$

显然Ω是非空的（至少有$\le \in \Omega$），然后我们考虑Ω的任意非空全序子集S，定义关系$\le_{\text{sup}}$有：

$$\forall x, y \in X, x \le_{\text{sup}} y \iff \exists \le' \in S, x \le' y$$

这个关系显然是定义明确的，我们证明它是X的一个偏序关系，从而有$\le_{\text{sup}} \in P$：

- $\le_{\text{sup}}$是自反的：

> 由于S是非空的，于是存在一个偏序关系$\le' \in S$。对任意$x \in X$，由于偏序的要求我们有$x \le' x$为真，从而根据$\le_{\text{sup}}$定义我们有$x \le_{\text{sup}} x$，即$\le_{\text{sup}}$是自反的。

- $\le_{\text{sup}}$是反对称的：

> 对任意x，$y \in X$，若有$x \leq_{\sup} y$与$y \leq_{\sup} x$均为真，从而存在偏序关系$\leq_1$，$\leq_2 \in S$使得$x \leq_1 y$与$y \leq_2 x$为真。由于S是全序的，因此应当有$\leq_1 \preceq \leq_2$与$\leq_2 \preceq \leq_1$至少有一个为真。若$\leq_1 \preceq \leq_2$为真，那么有$x \leq_1 y \implies x \leq_2 y$，于是根据$\leq_2$是偏序的（反对称）我们有$x \leq_2 y \wedge y \leq_2 x \implies x = y$；若$\leq_2 \preceq \leq_1$为真，那么有$y \leq_2 x \implies y \leq_1 x$，于是根据$\leq_2$是偏序的（反对称）我们有$x \leq_1 y \wedge y \leq_1 x \implies x = y$。
>
> 综上，于是我们总是有对任意x，$y \in X$，若有$x \leq_{\sup} y$与$y \leq_{\sup} x$均为真，则$x = y$，即$\leq_{\sup}$是反对称的。

- $\leq_{\sup}$是可传递的：

> 对任意x，y，$z \in X$，若有$x \leq_{\sup} y$与$y \leq_{\sup} z$均为真，从而存在偏序关系$\leq_1$，$\leq_2 \in S$使得$x \leq_1 y$与$y \leq_2 z$为真。由于S是全序的，因此应当有$\leq_1 \preceq \leq_2$与$\leq_2 \preceq \leq_1$至少有一个为真。若有$\leq_1 \preceq \leq_2$，则有$x \leq_1 y \implies x \leq_2 y$，于是根据$\leq_2$是偏序的（可传递）我们有$x \leq_2 y \wedge y \leq_2 z \implies x \leq_2 z$，结合$\leq_{\sup}$的定义即$x \leq_{\sup} z$；若有$\leq_2 \preceq \leq_1$，则有$y \leq_2 z \implies y \leq_1 z$，于是根据$\leq_2$是偏序的（可传递）我们有$x \leq_1 y \wedge y \leq_1 z \implies x \leq_1 z$，结合$\leq_{\sup}$的定义即$x \leq_{\sup} z$。
>
> 综上，于是我们总是有对任意x，y，$z \in X$，若有$x \leq_{\sup} y$与$y \leq_{\sup} z$均为真，则$x \leq_{\sup} z$，即$\leq_{\sup}$是可传递的。

又因为对任意x，$y \in X$蕴含关系$(x \leq' y) \implies (x \leq_{\sup} y)$显然对任意$\leq' \in S$为真，从而对任意$\leq' \in S$都有$\leq' \preceq \leq_{\sup}$；再结合$\preceq$的传递性我们有$\leq' \preceq \leq_{\sup} \wedge \leq \preceq \leq' \Longrightarrow \leq \preceq \leq_{\sup}$，即$\leq_{\sup} \in \Omega$。结合"$\leq_{\sup} \in \Omega$"与"对任意$\leq' \in S$都有$\leq' \preceq \leq_{\sup}$"可以得到$\leq_{\sup}$是$S$的一个上界。

于是在上面的讨论中我们得到了对任意Ω的非空全序子集S，S都存在一个上界。然后对Ω的空全序子集S（习题8.5.1我们证明了空集总是良序的），显然有对任意$\leq' \in \Omega$都有$\leq'$是S的上界。于是对Ω的任意全序子集都存在一个上界，根据佐恩引理即Ω存在至少一个最大元素，我们记为$\leq_{\max}$（由于最大元素$\leq_{\max}$也属于Ω，因此其也满足$\leq \preceq \leq_{\max}$）。然后我们使用反证法证明$\leq_{\max}$也是P的一个最大元素：

> 不妨假设存在$\leq' \in P$使得$\leq_{\max} \prec \leq'$为真，那么根据$\preceq$是偏序的（可传递）有$\leq_{\max} \prec \leq' \wedge \leq \preceq \leq_{\max} \Longrightarrow \leq \preceq \leq'$，于是$\leq'$也是$\Omega$中的偏序关系；由于$\leq_{\max}$是$\Omega$的最大元素，因此对$\leq'$也应该有$\leq_{\max} \prec \leq'$为假的结论，于是导出了矛盾，反证假设不成立。

于是$\leq_{\max}$也是P的一个最大元素，根据上结论我们可以进一步得到$\leq_{\max}$是全序关系。于是对给定的$\leq \in P$，我们总是能通过上面的过程得到一个全序关系满足$\leq \preceq \leq_{\max}$，结论得证。

8.5.17 利用佐恩引理给出[习题8.4.2](#)中结论的另一种证明（提示：设Ω是全体$Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$构成的集合，其中对任意的$\alpha \in I$均有$\#(Y \cap X_\alpha) \leq 1$。即那些与每个$X_\alpha$都至多有一个公共元素的集合的全体就是$\Omega$。利用佐恩引理找出 Ω 的一个最大元素），推导出佐恩引理与选择公理在逻辑上确实是等价的（即从其中任意一个开始都能推导出另一个）

> 在这里贴出习题8.4.2中的结论，在下面的证明中为了方便我们将用"等价命题"来称呼这个命题（因为它等价于选择公理）。
>
> > 习题8.4.2结论：
> >
> > 设I是一个集合，并且对每一个$\alpha \in I$，设X_α是一个非空集合。假设所有的集合X_α互不相交，即对任意不同的α，$\beta \in I$都有$X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$成立，那么存在一个集合$Y$使得$\#(Y \cap X_\alpha) = 1$对所有的$\alpha \in I$均成立。
>
> ---

在课本中已经给出了利用选择公理证明引理8.5.14的过程，在习题8.5.14中我们又证明了由引理8.5.14可以推导出佐恩引理；又因为在习题8.4.2中我们证明了等价命题等价于选择公理，由此可以推知等价命题可以推导出佐恩引理。

于是只需要证明佐恩引理能够推导出等价命题，那么可以推知佐恩引理就是等价于等价命题的，进而佐恩引理在逻辑上和选择公理是等价的，下面开始证明：

考虑下面的集合S：

$$S := \left\{Y \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha : \forall \alpha \in I, \#(Y \cap X_\alpha) \leq 1\right\}$$

我们附加偏序关系"集合的包含$\subseteq$"给S，从而$(S, \subseteq)$显然是一个偏序集。

于是考虑任意S的全序子集S'，然后令有集合$Y_{\sup}$：

$$Y_{\sup} := \left\{x \in \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha : \exists\, Y \in S', x \in Y\right\}$$

即$x \in Y_{\sup}$当且仅当存在一个$Y \in S'$使得$x \in Y$。首先$Y_{\sup}$显然是S中的一个元素；然后对任意的$Y \in S'$，对其中任意元素$x \in Y$都有$x \in Y_{\sup}$（因为Y也是S中的元素，从而x总是满足"$x \in \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$"与"$\exists\, Y \in S', x \in Y$"），于是即$Y \subseteq Y_{\sup}$。从而根据定义8.5.12，$Y_{\sup}$是$S'$的一个上界。

于是我们证明了任意S的全序子集S'都存在一个上界，于是根据佐恩引理，S至少存在一个最大元素，我们记为$Y_{\max}$，然后我们证明对任意$\alpha \in I$都有$\#(Y_{\max} \cap X_\alpha) = 1$。

不妨使用反证，假设存在$\alpha_0 \in I$使得$\#(Y_{\max} \cap X_{\alpha_0}) \neq 1$，又因为$Y_{\max} \in S$，于是只能有$\#(Y_{\max} \cap X_\alpha) = 0$，即$Y_{\max} \cap X_{\alpha_0} = \varnothing$。又因为题设有$X_{\alpha_0}$是非空的，于是根据单个选择我们可以选择一个$x_0 \in X_{\alpha_0}$，然后构造下面的集合$Y'_{\max}$：

$$Y'_{\max} := Y_{\max} \cup \{x_0\}$$

显然有$Y_{\max} \subset Y'_{\max}$，并且注意到有：对任意的$\alpha \in I$，若$\alpha \neq \alpha_0$，那么应该有$Y'_{\max} \cap X_\alpha = Y_{\max} \cap X_\alpha$（因为对任意不同的$\gamma$，$\beta \in I$都有$X_\gamma \cap X_\beta = \varnothing$成立，于是$x_0$不可能属于$X_\alpha$），从而$\#(Y'_{\max} \cap X_\alpha) = \#(Y_{\max} \cap X_\alpha) \leq 1$；若$\alpha = \alpha_0$，则应该有$Y'_{\max} \cap X_\alpha = \{x_0\}$（因为反证假设有$Y_{\max} \cap X_{\alpha_0} = \varnothing$），从而$\#(Y'_{\max} \cap X_\alpha) = 1 \leq 1$。于是根据上面的定义有$Y'_{\max} \in S$，但是由于$Y_{\max}$是$S$的最大元素，因此根据定义8.5.5不应该存在$Y \in S$使得$Y_{\max} \subset Y$，导出了矛盾。

于是反证结束，反证假设不成立，只能有对任意$\alpha \in I$都有$\#(Y_{\max} \cap X_\alpha) = 1$。综合即可得到：若所有的集合$X_\alpha$互不相交，即对任意不同的$\alpha$，$\beta \in I$都有$X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$成立，那么存在一个集合$Y$使得$\#(Y \cap X_\alpha) = 1$对所有的$\alpha \in I$均成立，于是等价命题得证。

综上，于是佐恩引理在逻辑上和选择公理是等价的，证明完毕。

8.1.18 利用佐恩引理证明豪斯多夫最大性原理：如果X是一个偏序集，那么存在一个X的全序子集Y，它关于集合的包含关系是最大的（即不存在X的其他全序子集Y'使得Y包含在Y'中）。反过来，证明：如果豪斯多夫最大性原理成立，那么佐恩引理也成立。因此根据习题8.5.17，这两个命题在逻辑上与选择公理是等价的

分别证明它们可以推导彼此：

- 若佐恩引理成立，则豪斯多夫最大性原理成立。

对任意的偏序集X，令有集合Ω：

$$\Omega := \{Y \subseteq X : Y\text{是}X\text{的一个全序子集}\}$$

于是Ω是由全体X的全序子集构成的集合，然后我们为Ω附加偏序关系“集合的包含$\subseteq$”使得Ω成为一个偏序集。

然后考虑Ω的任意一个全序子集S，令有下面的集合$Y_{\sup}$：

$$Y_{\sup} := \{x \in X : \exists Y \in S, x \in Y\}$$

由此定义$Y_{\sup}$是X的一个子集，因此$Y_{\sup} \in \Omega$；并且对任意的$Y \in S$，都有$Y \subseteq Y_{\sup}$（对任意$x \in Y$根据上面的定义都有$x \in Y_{\sup}$），于是根据定义8.5.12，$Y_{\sup}$是S的一个上界。

于是根据上面的证明我们得到Ω的任意一个全序子集S都存在一个上界，于是根据佐恩引理，Ω至少存在一个最大元素，我们记为$Y_{\max}$。于是根据定义8.5.5，对任意X的全序子集Y都应该有$Y_{\max} \subset Y$为假，即不存在X的其它全序子集Y使得$Y_{\max}$包含在Y中，从而全序子集$Y_{\max}$就是豪斯多夫最大性原理所断定的关于集合的包含关系是最大的全序子集，豪斯多夫最大性原理成立。

- 若豪斯多夫最大性原理成立，则佐恩引理成立。

根据豪斯多夫最大性原理，存在一个X的全序子集$Y_{\max}$使得对任意X的全序子集Y都有$Y_{\max} \subset Y$为假，根据佐恩引理的条件我们又知道$Y_{\max}$存在一个上界$x_{\max} \in X$，我们来证明这个$x_{\max}$就是X的一个最大元素。

设X的序关系为$\leq$。不妨使用反证法，假设存在一个$x_0 \in X$使得$x_{\max} < x_0$。对任意$y \in Y_{\max}$，由于$\leq$是偏序的（可传递）与$x_{\max}$是$Y_{\max}$的上界，于是有$y \leq x_{\max} < x_0 \implies y < x_0 (y \neq x_0)$。然后考虑集合$Y_0$：

$$Y_0 := Y_{\max} \cup \{x_0\}$$

由于Y_0是X的子集，于是Y_0也是关于$\leq$的偏序集，并且对任意a，$b \in Y_0$，可以简单分类讨论下面的可能情况：

	$a \in Y_{\max}$	$a \in \{x_0\}$（即$a = x_0$）
$b \in Y_{\max}$	由$Y_{\max}$是全序的，于是$a \leq b$与$b \leq a$至少有一个为真。	此时有$b < x_0$，于是$b \leq a$为真。
$b \in \{x_0\}$（即$b = x_0$）	此时有$a < x_0$，于是$a \leq b$为真。	由$\leq$是自反的显然有$x_0 \leq x_0$，即$a \leq b$（反过来也对）

即总是有$a \leq b$与$b \leq a$至少有一个为真，因此Y_0是全序的，并且注意到由Y_0的定义显然有$Y_{\max} \subset Y_0$；但是根据豪斯多夫最大性原理，对任意X的全序子集Y都应该有$Y_{\max} \subset Y$为假，于是导出矛盾，反证假设不成立，只能有对任意$x \in X$都有$x_{\max} < x$为假，即$x_{\max}$是X的一个最大元素。

于是综合上证明可得：在豪斯多夫最大性原理成立的前提下，对任意的偏序集X，若有对任意X的全序子集Y都存在一个上界，那么X至少存在一个最大元素。这正是佐恩引理的内容，于是佐恩引理成立。

综上，于是我们证明了豪斯多夫最大性原理与佐恩引理在逻辑上是等价的。

8.5.19 设X是一个集合，并且设Ω是全体序对$(Y,\le)$构成的空间，其中Y是X的子集且$\le$是Y的一个良序关系。设$(Y,\le)$和$(Y',\le')$都是Ω的元素，如果存在一个$x\in Y'$使得 $Y:=\{y\in Y':y<'x\}$（因此特别有$Y\subsetneq Y'$），并且对任意的y，$y'\in Y$均有$y\le y'$，当且仅当$y\le' y'$，那么我们称$(Y,\le)$是$(Y',\le')$的一个前段。定义Ω上的一个关系$\preceq$，当$(Y,\le)=(Y',\le')$时或者当$(Y,\le)$是$(Y',\le')$的一个前段时，令$(Y,\le)\preceq(Y',\le')$。证明：$\preceq$是Ω的一个偏序关系。Ω恰有一个最小元素；这个最小元素是什么？证明：Ω的最大元素正是X的良序关系$(X,\le)$。利用佐恩引理推导出良序原理：每个集合X都至少有一个良序关系。反过来，利用良序原理证明选择公理，即公理8.1（提示：在$\bigcup\limits_{\alpha\in I}X_\alpha$上假设一个良序关系，然后考虑每个$X_\alpha$的最小元素）。所以选择公理，佐恩引理以及良序原理在逻辑上都是相互等价的

> 证明：$\preceq$是Ω的一个偏序关系。
>
> 分别证明自反性，反对称性和可传递性。
>
> - $\preceq$是自反的：
>
>   > 显然对任意序对$(Y,\le)$都有$(Y,\le)=(Y,\le)$，因此根据$\preceq$的定义有$(Y,\le)\preceq(Y,\le)$为真，这表明$\preceq$是自反的。
>
> - $\preceq$是反对称的：
>
>   > 考虑任意两个序对$(Y,\le)$与$(Y',\le')$属于Ω且满足$(Y,\le)\preceq(Y',\le')$与$(Y',\le')\preceq(Y,\le)$，于是可以讨论两个$\preceq$成立的情况：
>   >
>   > - 若$(Y,\le)=(Y',\le')$且$(Y',\le')=(Y,\le)$：
>   >
>   >   > 此时显然有$(Y,\le)=(Y',\le')$。
>   >
>   > - 若$(Y,\le)=(Y',\le')$且$(Y',\le')$是$(Y,\le)$的一个前段：
>   >
>   >   > 因为$(Y',\le')$是$(Y,\le)$的一个前段，于是存在$x\in Y$使得$Y'=\{y\in Y:y<x\}$，特别地，$x\notin Y'$；又因为$(Y,\le)=(Y',\le')$，于是应该有$Y=Y'$，从而由$x\in Y$可以得到$x\in Y'$，于是导出了矛盾，此情景不可能成立。
>   >
>   > - 若$(Y,\le)$是$(Y',\le')$的一个前段且$(Y',\le')=(Y,\le)$：
>   >
>   >   > 如同情景"$(Y,\le)=(Y',\le')$且$(Y',\le')$是$(Y,\le)$的一个前段"中的证明一样，这个情景可以被证明是不可能存在的。
>   >
>   > - 若$(Y,\le)$是$(Y',\le')$的一个前段且$(Y',\le')$是$(Y,\le)$的一个前段：
>   >
>   >   > 因为$(Y',\le')$是$(Y,\le)$的一个前段，于是存在$x\in Y$使得$Y'=\{y\in Y:y<x\}$；因为$(Y,\le)$又是$(Y',\le')$的一个前段，因此存在$x'\in Y'$使得$Y=\{y'\in Y':y'<'x'\}$，于是由于$x\in Y$我们有$x<'x'$，再根据"$(Y',\le')$是$(Y,\le)$的一个前段"的前提这表明$x<x'$，但是根据"$(Y',\le')$是$(Y,\le)$的一个前段"的结论，应当有$x'<x$（因为$Y'=\{y\in Y:y<x\}$且$x'\in Y'$），于是导出了矛盾，此情景不可能存在。
>   >
>   > 综上，于是我们有$(Y,\le)\preceq(Y',\le')$与$(Y',\le')\preceq(Y,\le)$当且仅当$(Y,\le)=(Y',\le')$，于是$\preceq$是反对称的。
>
> - $\preceq$是可传递的：
>
>   > 考虑任意三个序对$(Y_0,\le_0)$，$(Y_1,\le_1)$与$(Y_2,\le_2)$属于Ω且满足$(Y_0,\le_0)\preceq(Y_1,\le_1)$与$(Y_1,\le_1)\preceq(Y_2,\le_2)$，于是可以讨论两个$\preceq$成立的情况：

> - 若$(Y_0,\le_0)=(Y_1,\le_1)$且$(Y_1,\le_1)=(Y_2,\le_2)$:
>
>   > 此时显然有$(Y_0,\le_0)=(Y_2,\le_2)$，于是即$(Y_0,\le_0)\preceq(Y_2,\le_2)$。
>
> - 若$(Y_0,\le_0)=(Y_1,\le_1)$且$(Y_1,\le_1)$是$(Y_2,\le_2)$的一个前段:
>
>   > 此时显然有$(Y_0,\le_0)$是$(Y_2,\le_2)$的一个前段，于是即$(Y_0,\le_0)\preceq(Y_2,\le_2)$。
>
> - 若$(Y_0,\le_0)$是$(Y_1,\le_1)$的一个前段且$(Y_1,\le_1)=(Y_2,\le_2)$:
>
>   > 此时显然有$(Y_0,\le_0)$是$(Y_2,\le_2)$的一个前段，于是即$(Y_0,\le_0)\preceq(Y_2,\le_2)$。
>
> - 若$(Y_0,\le_0)$是$(Y_1,\le_1)$的一个前段且$(Y_1,\le_1)$是$(Y_2,\le_2)$的一个前段:
>
>   > 此时根据前段定义，存在$x_1\in Y_1$使得$Y_0=\{y_1\in Y_1:y_1<_1 x_1\}$，并且对任意$x_0$，$x_0'\in Y_0$都有$x_0\le_0 x_0'$当且仅当$x_0\le_1 x_0'$；存在$x_2\in Y_2$使得$Y_1=\{y_2\in Y_2:y_2<_2 x_2\}$，并且对任意$x_1$，$x_1'\in Y_1$都有$x_1\le_1 x_1'$当且仅当$x_1\le_2 x_1'$。
>   >
>   > 从上面的条件可以看出，由于$x_1\in Y_1$，于是x_1应当满足$x_1<_2 x_2$与$x_1\in Y_2$，并且对任意$x_0\in X_0$，都有$x_0<_1 x_1\implies x_0<_2 x_1$，于是$Y_0=\{y_2\in Y_2:y_2<_2 x_1\}$，然后注意到对任意$x_0$，$x_0'\in Y_0$都有$x_0\le_0 x_0'$当且仅当$x_0\le_1 x_0'$当且仅当$x_0\le_2 x_0'$，于是得到蕴含关系“对任意$x_0$，$x_0'\in Y_0$都有$x_0\le_0 x_0'$当且仅当$x_0\le_2 x_0'$”。
>   >
>   > 综上，于是$(Y_0,\le_0)$是$(Y_2,\le_2)$的一个前段，即$(Y_0,\le_0)\preceq(Y_2,\le_2)$
>
> 综上，于是我们有若满足$(Y_0,\le_0)\preceq(Y_1,\le_1)$与$(Y_1,\le_1)\preceq(Y_2,\le_2)$则必然有$(Y_0,\le_0)\preceq(Y_2,\le_2)$，于是$\preceq$是可传递的。

综上，于是$\preceq$是Ω的一个偏序关系。

试问：Ω恰有一个最小元素，这个最小元素是什么？

Ω的最小元素是空集与空关系的序对$(\varnothing,\le_\varnothing)$。

显然$(\varnothing,\le_\varnothing)$是属于$\Omega$的，然后注意到，对任意序对$(Y,\le)\in\Omega$，若$Y$是非空的则由于$\le$是良序的，因此$Y$存在最小元素$y_{\min}$，然后注意到空集$\varnothing$满足:

$$\varnothing=\{y\in Y:y<y_{\min}\}$$

并且对任意y，$y'\in\varnothing$都有$y\le_\varnothing y'$当且仅当$y\le y'$（因为不存在$y\in\varnothing$，因此此性质自动为真）。因此根据$\preceq$的定义我们有$(\varnothing,\le_\varnothing)\preceq(Y,\le)$；若$Y$是空的，注意到空集上的关系是唯一的（只能是空关系），因此此时$(Y,\le)=(\varnothing,\le_\varnothing)$，也即$(\varnothing,\le_\varnothing)\preceq(Y,\le)$。

因此对任意的序对$(Y,\le)\in\Omega$，若$(Y,\le)\prec(\varnothing,\le_\varnothing)$，则根据上面的结论与反对称性，我们可以得到$(\varnothing,\le_\varnothing)=(Y,\le)$与$(\varnothing,\le_\varnothing)\neq(Y,\le)$同时成立的矛盾结果，因此不存在序对$(Y,\le)\in\Omega$使得若$(Y,\le)\prec(\varnothing,\le_\varnothing)$，于是$(\varnothing,\le_\varnothing)$是$\Omega$的最小元素；另一方面，若对任意的序对$(Y,\le)\in\Omega$是$\Omega$的最小元素，那么由于$(\varnothing,\le_\varnothing)\preceq(Y,\le)$与最小元素的要求（不存在$(Y',\le')\in\Omega$使得$(Y',\le')\prec(Y,\le)$）只能有$(Y,\le)=(\varnothing,\le_\varnothing)$，因此$(\varnothing,\le_\varnothing)$是$\Omega$的唯一最小元素。

证明：Ω的最大元素正是X的良序关系$(X,\le)$。

对任意S是Ω的全序子集，考虑令有序对$(Y_{\sup},\le_{\sup})$有:

$$Y_{\sup} := \{x \in X : \exists\,(Y, \leq) \in S, x \in Y\}$$
$$\forall x, x' \in Y_{\sup}, x \leq_{\sup} x' \iff \exists\,(Y, \leq) \in S, x \leq x'$$

需要注意到，对$\leq_{\sup}$存在一个特殊的性质：对任意x，$x' \in Y_{\sup}$若有$x \leq_{\sup} x'$，则有对任意$(Y, \leq) \in S$，若有x，$x' \in Y$则必然有$x \leq x'$。这是因为：

> 根据$\leq_{\sup}$定义，于是存在$(Y_0, \leq_0) \in S$使得$x \leq_0 x'$为真，于是考虑任意$(Y_1, \leq_1) \in S$且$(Y_0, \leq_0) \neq (Y_1, \leq_1)$满足$x$，$x' \in Y_1$，由于$S$是全序的，因此只能有$(Y_0, \leq_0)$是$(Y_1, \leq_1)$的前段或者$(Y_1, \leq_1)$是$(Y_0, \leq_0)$的前段，无论哪种情况根据前段定义，我们知道$x \leq_0 x'$当且仅当$x \leq_1 x'$，从而也有$x \leq_1 x'$为真。
>
> 综上，于是对任意$(Y, \leq) \in S$，若有x，$x' \in Y$则必然有$x \leq x'$。

于是我们来证明$(Y_{\sup}, \leq_{\sup})$是S的一个上界，证明这个命题即证明"$(Y_{\sup}, \leq_{\sup}) \in \Omega$"与"对任意$(Y, \leq) \in S$都有$(Y, \leq) \preceq (Y_{\sup}, \leq_{\sup})$"为真，我们在下面分别证明这两个结论。

- $(Y_{\sup}, \leq_{\sup}) \in \Omega$：

  > 由$Y_{\sup}$的定义显然有$Y_{\sup}$是X的一个子集，于是只需要证明$\leq_{\sup}$是$Y_{\sup}$的良序关系。
  >
  > - 证明：$\leq_{\sup}$是自反的。
  >
  >   > 对任意$y \in Y_{\sup}$，都存在$(Y, \leq) \in S$使得$y \in Y$，从而由于$\leq$是良序的必然有$y \leq y$，即有$y \leq_{\sup} y$。于是$\leq_{\sup}$是自反的。
  >
  > - 证明：$\leq_{\sup}$是反对称的。
  >
  >   > 对任意y，$y' \in Y_{\sup}$满足$y \leq_{\sup} y'$且$y' \leq_{\sup} y$。首先根据$Y_{\sup}$定义分别存在$(Y_0, \leq_0)$与$(Y_0', \leq_0')$使得$y \in Y_0$与$y' \in Y_0'$为真，由于S是全序的，因此$(Y_0, \leq_0) \preceq (Y_0', \leq_0')$与$(Y_0', \leq_0') \preceq (Y_0, \leq_0)$中至少有一个为真。若有$(Y_0, \leq_0) \preceq (Y_0', \leq_0')$，则此时$Y_0$是$Y_0'$的子集，$y$与$y'$都属于$Y_0'$；若$(Y_0', \leq_0') \preceq (Y_0, \leq_0)$则能得到$y$与$y'$都属于$Y_0$，于是总能得到存在$(Y', \leq') \in S$使得$y$与$y'$都属于$Y'$。此时根据$\leq_{\sup}$的性质对任意$(Y, \leq) \in S$满足$y$，$y' \in Y$都有$y \leq y'$与$y' \leq y$为真，从而由于$\leq'$是$Y'$的良序关系，我们有$y = y'$。于是$\leq_{\sup}$是反对称的。
  >
  > - 证明：$\leq_{\sup}$是可传递的。
  >
  >   > 对任意y_0，y_1与$y_2 \in Y_{\sup}$满足$y_0 \leq_{\sup} y_1$与$y_1 \leq_{\sup} y_2$，类似反对称性证明中的讨论总能得到存在一个$(Y', \leq') \in S$使得y_0，y_1与y_2都属于Y'。然后根据$\leq_{\sup}$的性质对任意$(Y, \leq) \in S$满足y_0，y_1与$y_2 \in Y$都有$y_0 \leq y_1$与$y_1 \leq y_2$为真，从而由于$\leq'$是Y'的良序关系，我们有$y_0 \leq' y_2$，即有$y_0 \leq_{\sup} y_2$。于是$\leq_{\sup}$是可传递的。
  >
  > 于是在上面我们证明了$\leq_{\sup}$是偏序的。
  >
  > - 证明：对任意y，$y' \in Y_{\sup}$，$y \leq_{\sup} y'$与$y' \leq_{\sup} y$至少有一个为真，从而$\leq_{\sup}$是全序的。
  >
  >   > 如同上面反对称性的证明所讨论的，我们知道存在$(Y', \leq') \in S$使得y与y'都属于Y'。于是由于$\leq'$是良序的，我们有$y \leq' y'$与$y' \leq' y$至少有一个为真，即有$y \leq_{\sup} y'$与$y' \leq_{\sup} y$至少有一个为真，全序性得证。
  >
  > 于是$\leq_{\sup}$还是全序的，最后我们来证明$\leq'$是良序的。
  >
  > - 证明：对任意Y是$Y_{\sup}$的非空子集，Y都存在一个最小元素，从而$\leq_{\sup}$是良序的。
  >
  >   > 由于Y是非空的，于是至少存在一个$y_0 \in Y$，然后此时我们令有下面的集合：

$$Y' := \{y \in Y : y <_{\text{sup}} y_0\}$$

此时考察Y'的可能性。

若Y'是空集，则不存在$y \in Y$使得$y <_{\text{sup}} y_0$，从而根据定义8.5.5有y_0是Y的最小元素。

若Y'是非空的，则根据Y_{sup}的定义存在$(Y_0, \leq_0) \in S$使得$y_0 \in Y_0$，注意到Y'是Y_0的子集，因为：

> 对任意$y_1 \in Y'$，根据Y_{sup}的定义存在$(Y_1, \leq_1) \in S$使得$y_1 \in Y_1$。若$Y_1 = Y_0$则此时有$y_1 \in Y'$，我们需要考虑$(Y_1, \leq_1) \neq (Y_0, \leq_0)$的情况。
>
> 由于S是全序的，因此要么Y_0是Y_1的一个前段，要么Y_1是Y_0的一个前段。对前者根据前段的定义存在$y_1' \in Y_1$使得$Y_0 = \{y \in Y_1 : y <_1 y_1'\}$，并且有$y_0 \in Y_1$与$y_0 <_1 y_1'$为真。然后由于$\leq_{\text{sup}}$的性质与$y_1 <_{\text{sup}} y_0$，我们有$y_1 <_1 y_0$，于是根据$\leq_1$是良序的（可传递）我们有$y_1 <_1 y_1'$，因此有$y_1 \in Y_0$；对后者则有$Y_1 \subseteq Y_0$，于是有$y_1 \in Y_0$。
>
> 综上我们总是有$y_1 \in Y_0$，因此Y'是Y_0的子集。

于是Y'是Y_0的非空子集，由于$\leq_0$是良序的因此有Y'存在一个关于$\leq_0$的最小元素$y_{\min}$，不存在$y \in Y'$满足$y <_0 y_{\min}$，进而根据良序性（全序要求）可以引申为对任意$y \in Y'$都有$y_{\min} \leq_0 y$为真。于是对任意$y \in Y'$都有$y_{\min} \leq_{\text{sup}} y$为真。

于是根据$\leq_{\text{sup}}$的可传递性与Y'定义，我们有$y_{\min} \leq y_0$。进而考虑任意$y \in Y$，由于$\leq_{\text{sup}}$是良序的，于是$y \leq_{\text{sup}} y_0$与$y_0 \leq_{\text{sup}} y$中至少有一个为真，对前者从上面的讨论中已经可以得到$y_{\min} \leq_{\text{sup}} y$，对后者则由于$\leq_{\text{sup}}$是可传递的也有$y_{\min} \leq_{\text{sup}} y$为真。因此综合有，对任意$y \in Y$都有$y_{\min} \leq_{\text{sup}} y$为真，进而由于$\leq_{\text{sup}}$反对称只能有$y <_{\text{sup}} y_{\min}$为假（否则会导出$y = y_{\min}$且$y \neq y_{\min}$的矛盾结论），于是$y_{\min}$也是$Y$关于$\leq_{\text{sup}}$的最小元素。

综上，于是我们证明了：对任意Y是Y_{sup}的非空子集，Y都存在一个最小元素，于是$\leq_{\text{sup}}$是良序的。

综上，于是$(Y_{\text{sup}}, \leq_{\text{sup}})$满足$\Omega$的定义，因此有$(Y_{\text{sup}}, \leq_{\text{sup}}) \in \Omega$。

- 对任意$(Y, \leq) \in S$都有$(Y, \leq) \preceq (Y_{\text{sup}}, \leq_{\text{sup}})$：

  首先根据定义显然有Y是Y_{sup}的一个子集，于是考虑集合$Y' := Y_{\text{sup}} - Y$。

  - 若$Y' = \varnothing$：

    > 则此时我们有$Y = Y_{\text{sup}}$，并且注意到对任意的y，$y' \in Y(Y_{\text{sup}})$，若有$y \leq_{\text{sup}} y'$，则根据$\leq_{\text{sup}}$的性质有$y \leq y'$；反过来，若有$y \leq y'$，则根据$\leq_{\text{sup}}$定义有$y \leq_{\text{sup}} y'$。因此在此情景下对任意的y，$y' \in Y(Y_{\text{sup}})$，$y \leq y'$与$y \leq_{\text{sup}} y'$是等价的，即有$\leq = \leq_{\text{sup}}$。
    >
    > 于是此情况下我们有$(Y, \leq) = (Y_{\text{sup}}, \leq_{\text{sup}})$，也即$(Y, \leq) \preceq (Y_{\text{sup}}, \leq_{\text{sup}})$。

  - 若$Y' \neq \varnothing$：

    > 于是至少存在一个$y_0 \in Y'$，此时根据Y'定义，存在一个$(Y_0, \leq) \in S$使得$y_0 \in Y_0$。

> > > 由于S是全序的，因此$(Y_0,\le_0)\preceq(Y,\le)$与$(Y,\le)\preceq(Y_0,\le_0)$至少有一个为真，又因为$y_0\in Y_0$且$y_0\notin Y$，因此只可能有$(Y,\le)$是$(Y_0,\le_0)$的一个前段，从而根据前段的定义，存在一个$y_0'\in Y_0$使得$Y=\{y\in Y_0:y<_0 y_0'\}$，从而根据$Y_{\sup}$与$\le_{\sup}$的定义可以将上面的结论引申有：
> > >
> > > $$\exists\, y_0'\in Y_{\sup}, Y=\{y\in Y_0:y<_{\sup} y_0'\}$$
> > >
> > > 然后我们注意到，对任意$y\in Y_{\sup}$满足$y<_{\sup} y_0'$，只能有$y\in Y_0$，这是因为：
> > >
> > > > 根据$Y_{\sup}$的定义，不妨假设存在$(Y_1,\le_1)\in S$使得$y\in Y_1$且$Y_1\ne Y_0$。结合S是全序的我们可以得到要么$(Y_1,\le_1)$是$(Y_0,\le_0)$的前段，要么$(Y_0,\le_0)$是$(Y_1,\le_1)$的前段。对前者可以直接由前段定义得到$y\in Y_0$；对后者则可以由前段的定义得知存在一个$y_1'\in Y_1$使得$Y_0=\{y_1\in Y_1:y_1<_1 y_1'\}$，特别地有$y_0'<_1 y_1'$与$y_0'\in Y_1$。然后由$\le_1$的可传递性与$\le_{\sup}$的性质，我们可以推知$y<_{\sup} y_0'$可导出$y<_1 y_0'$，进而有$y<_1 y_1'$，因此$y\in Y_0$。
> > >
> > > 于是可以升级上面的结论为“$\exists\, y_0'\in Y_{\sup}, Y=\{y\in Y_{\sup}:y<_{\sup} y_0'\}$”。并且注意到对任意$y$，$y'\in Y$：若有$y\le y'$，则根据$\le_{\sup}$的定义有$y\le_{\sup} y'$；反之，若有$y\le_{\sup} y'$，则根据$\le_{\sup}$的性质可以推知$y\le y'$。从而我们得到蕴含关系“对任意$y$，$y'\in Y$有$y\le y'$当且仅当$y\le_{\sup} y'$”。综合得到此情景下$Y$是$Y_{\sup}$的一个前段，也即$(Y,\le)\preceq(Y_{\sup},\le_{\sup})$。
> >
> > 于是得证对任意$(Y,\le)\in S$都有$(Y,\le)\preceq(Y_{\sup},\le_{\sup})$。
>
> 于是综上我们得到任意S是Ω的全序子集都存在一个上界，因此根据佐恩引理，Ω存在至少一个最大元素，不妨记为$(Y_{\max},\le_{\max})$。我们来证明只能有$Y_{\max}=X$，从而$\le_{\max}$是X的良序关系。
>
> 不妨假设$Y_{\max}\ne X$，由于$Y_{\max}$是X的子集这个假设等价于存在$x\in X$满足$x\notin Y_{\max}$。于是我们定义下面的集合Y'与关系$\le'$：
>
> $$\begin{gathered}Y':=Y_{\max}\cup\{x\}\\ \forall y,y'\in Y', y\le' y' \iff y\le_{\max} y'\vee y'=x\end{gathered}$$
>
> 显然我们可以看到$Y_{\max}=\{y\in Y':y<' x\}$（因为对任意$y\in Y_{\max}$都有$y\le' x$且$y\ne x$）并且$Y'$是$X$的子集。并且对于$\le'$，若$y$与$y'$均属于$Y_{\max}$则$y\le' y'$当且仅当$y\le_{\max} y'$；若$y$与$y'$中至少有一个为$x$则$y\le y'$当且仅当$y'=x$。于是我们注意到：
>
> - $\le'$是自反的：
>
> > 对任意$y\in Y'$，若$y\in Y_{\max}$则有$y\le_{\max} y\implies y\le' y$；若$y=x$则也有$x\le' x$。因此总有$y\le' y$为真，$\le'$是自反的。
>
> - $\le'$是反对称的：
>
> > 对任意y，$y'\in Y'$满足$y\le' y'$与$y'\le' y$为真，则可以讨论y与y'的情况：若y与y'均属于$Y_{\max}$则等价于$y\le_{\max} y'$与$y'\le_{\max} y$为真，根据$\le_{\max}$是良序的（反对称）可以得到$y=y'$；若y与y'中至少有一个为x则等价于$y=x$且$y'=x$，于是也有$y=y'$。因此总是能得到$y=y'$，$\le'$是反对称的。
>
> - $\le'$是可传递的：
>
> > 对任意y_0，y_1与$y_2\in Y'$满足$y_0\le' y_1$与$y_1\le' y_2$，可以列表讨论：
> >
> > | | **若y_0与y_1均属于$Y_{\max}$** | **y_0与y_1中至少有一个为x** |
> > |---|---|---|

> | | 若y_0与y_1均属于$Y_{\max}$ | y_0与y_1中至少有一个为x |
> | --- | --- | --- |
> | 若y_1与y_2均属于$Y_{\max}$ | 则此时有$y_0 \leq_{\max} y_1$与$y_1 \leq_{\max} y_2$，由于$\leq_{\max}$是良序的有$y_0 \leq_{\max} y_2$，也即$y_0 \leq' y_2$。 | 则此时有$y_1 \in Y_{\max}$与$y_1 = x$，导出了矛盾，此情况不可能成立。 |
> | y_1与y_2中至少有一个为x | 则此时有$y_2 = x$，于是必然有$y_0 \leq' y_2$。 | 则此时有$y_1 = y_2 = x$，于是必然有$y_0 \leq' y_2$。 |
>
> 综上，于是总是有$y_0 \leq' y_2$，$\leq'$是可传递的。

因此$\leq'$是偏序的，然后不难发现$\leq'$是全序的，因为：

> 对任意的y，$y' \in Y'$，讨论y与y'的情况：若y与y'均属于$Y_{\max}$，则根据$\leq_{\max}$是良序的（全序要求）有$y \leq_{\max} y'$与$y' \leq_{\max} y$至少有一个为真，进而即$y \leq' y'$与$y' \leq' y$至少有一个为真；若y与y'中至少有一个为x，则根据$\leq'$定义对任意$e \in Y'$总有$e \leq' x$为真，因此也有$y \leq' y'$与$y' \leq' y$至少有一个为真。

然后还可以发现$\leq'$还是良序的，因为：

> 对任意Y是Y'的非空子集，若$Y = \{x\}$则显然x是Y的最小元素；若$Y \neq \{x\}$，则$Y - \{x\}$显然是$Y_{\max}$的非空子集，于是根据$\leq_{\max}$是良序的有$Y - \{x\}$存在一个关于$\leq_{\max}$的最小元素$y_{\min}$。于是对任意$y \in Y$，若$y \neq x$则我们有$y \in Y - \{x\}$，从而根据最小元素的定义与y，$y_{\min}$同时属于$Y_{\max}$有$y <' y_{\min}$为假；若$y = x$则有$y_{\min} \leq' y$。然后考虑到$y_{\min} \in Y_{\max}$，因此不可能有$y_{\min} = x$，进而根据反对称性的要求有$y <' y_{\min}$（否则会导出$y_{\min} = x$且$y_{\min} \neq x$的矛盾结论），因此综合有$y_{\min}$是Y的最小元素。
>
> 综上，于是Y总是存在一个最小元素。

于是Y'是X的子集并且$\leq'$是Y'的良序关系，从而$(Y', \leq') \in \Omega$；在上面我们也叙述过$Y_{\max} = \{y \in Y' : y <' x\}$与若$y$与$y'$均属于$Y_{\max}$则$y \leq' y'$当且仅当$y \leq_{\max} y'$为真，因此根据前段的定义我们有$(Y_{\max}, \leq_{\max})$是$(Y', \leq')$的一个前段，也即$(Y_{\max}, \leq_{\max}) \prec (Y', \leq')$。但是$(Y_{\max}, \leq_{\max})$是$\Omega$的最大元素，根据定义8.5.5应该有不存在$(Y, \leq) \in \Omega$使得$(Y_{\max}, \leq_{\max}) \prec (Y, \leq)$，于是导出了矛盾，反证假设不成立，只能有$Y_{\max} = X$。

综上，于是我们有Ω的最大元素存在并且只能是X与X的良序关系$\leq$所构成的序对$(X, \leq)$。

证明：从佐恩引理出发能推导出良序原理。

在上面我们已经通过佐恩引理推导出Ω的最大元素存在并且只能是X与X的良序关系$\leq$所构成的序对$(X, \leq)$。因此对任意的集合X，其对应的Ω最大元素都能给出X的一个良序关系$\leq$，这表明对任意的集合X都至少存在一个良序关系，因此良序原理得证。

证明：从良序原理出发能够证明选择公理。

对给出的X_α（$\alpha \in I$），考虑令集合$\mathcal{X} := \bigcup\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$。根据良序原理，于是$\mathcal{X}$存在一个良序关系$\leq$。从而我们可以定义函数$f : I \to \mathcal{X}$如下：

$$f(\alpha) := X_\alpha \text{在} \leq \text{下的最小元素}$$

> 注意到对任意的$\alpha \in I$，由于$\leq$是良序的并且X_α是$\mathcal{X}$的非空子集，因此根据良序的定义X_α的最小元素始终是存在的；另一方面，在习题8.5.7中我们已经证明过良序集的最小元素只能是唯一的。因此对每一个$\alpha \in I$函数f都恰好指定唯一$x \in \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$使得"$x$是$X_\alpha$在$\leq$下的最小元素"为真，于是$f$是满足垂线测试的。
>
> 于是f就是选择公理中所断定存在的函数$(x_\alpha)_{\alpha \in I}$，它对每一个$\alpha \in I$都指定了一个元素$x_\alpha \in X_\alpha$，选择公理得证。

8.5.20 设X是一个集合。$\Omega \subset 2^X$是由X的子集构成的集合，并且设Ω中不包括空集$\varnothing$。利用佐恩引理证明：存在子集$\Omega' \subseteq \Omega$使得Ω'中所有的元素互不相交（即如果A和B是Ω'中不同的元素，那么$A \cap B = \varnothing$），而且Ω中的每个元素都至少与Ω'中的一个元素相交（即定义任意的$C \in \Omega$，存在一个$A \in \Omega'$使得$C \cap A \neq \varnothing$）。（提示：考虑由$\Omega$的满足条件"全体元素都互不相交"的所有子集所构成的整体，并找到这个整体的一个最大元素）反过来，如果上述结论成立，证明：它蕴含了习题8.4.2的结论，从而这是另一个在逻辑上与选择公理等价的结论（提示：设Ω是由所有形如$\{(0,\alpha),(1,x_\alpha)\}$的序对集构成的集合，其中$\alpha \in I$且$x_\alpha \in X_\alpha$）

> 证明：存在子集$\Omega' \subseteq \Omega$使得Ω'中所有的元素互不相交，而且Ω中的每个元素都至少与Ω'中的一个元素相交。
>
> 考虑集合$\mathcal{G}$：
>
> $$\mathcal{G} := \{\Phi \subseteq \Omega : \text{若} A, B \in \Phi \text{且} A \neq B, \text{则} A \cap B = \varnothing\}$$
>
> 通俗来说，$\mathcal{G}$是Ω子集Φ所构成的集合，并且Φ满足只要其中元素A，B不相等则A与B是不相交的。然后我们为$\mathcal{G}$附加关系"集合的包含$\subseteq$"使得$\mathcal{G}$成为一个偏序集。
>
> 然后我们考虑$\mathcal{G}$的任意全序子集$\mathcal{G}_t$，令有集合$\Phi_{\sup}$：
>
> $$\Phi_{\sup} := \{A \in \Omega : \exists\, \Phi \in \mathcal{G}_t, A \in \Phi\}$$
>
> 我们证明$\Phi_{\sup}$是$\mathcal{G}_t$的一个上界：
>
> - 证明：$\Phi_{\sup} \in \mathcal{G}$。
>
>   > 很显然$\Phi_{\sup}$是Ω的子集，然后对任意A，$B \in \Phi_{\sup}$且$A \neq B$，根据定义存在Φ_0，$\Phi_1 \in \mathcal{G}_t$使得$A \in \Phi_0$与$B \in \Phi_1$。由于$\mathcal{G}_t$是全序的，因此$\Phi_0 \subseteq \Phi_1$与$\Phi_1 \subseteq \Phi_0$至少有一个为真，不妨假设$\Phi_0 \subseteq \Phi_1$为真，对$\Phi_1 \subseteq \Phi_0$的情况可以使用完全类似的方法讨论。
>   >
>   > 由于$\Phi_0 \subseteq \Phi_1$为真，因此有A与B都属于Φ_1，又由于$A \neq B$，于是由Φ_1满足$\mathcal{G}$的定义，即有$A \cap B = \varnothing$。
>   >
>   > 于是我们总是有对任意A，$B \in \Phi_{\sup}$满足$A \neq B$都有$A \cap B = \varnothing$，于是$\Phi_{\sup}$符合$\mathcal{G}$的定义，$\Phi_{\sup} \in \mathcal{G}$。
>
> - 证明：对任意$\Phi \in \mathcal{G}_t$，都有$\Phi \subseteq \Phi_{\sup}$。
>
>   > 根据定义，对任意$A \in \Phi$（也就是存在$\Phi \in \mathcal{G}_t$使得$A \in \Phi$），都有$A \in \Phi_{\sup}$，因此有$\Phi \subseteq \Phi_{\sup}$为真。
>
> 于是综上我们得到$\Phi_{\sup}$同时满足$\Phi_{\sup} \in \mathcal{G}$与对任意$\Phi \in \mathcal{G}_t$，都有$\Phi \subseteq \Phi_{\sup}$，根据上界的定义有$\Phi_{\sup}$是$\mathcal{G}_t$的上界。从而总结可以得到$\mathcal{G}$的任意全序子集$\mathcal{G}_t$都是存在上界的，于是根据佐恩引理，$\mathcal{G}$至少存在一个最大元素，我们不妨记为$\Phi_{\max}$。
>
> 然后我们证明：对任意的$C \in \Omega$，都存在$A \in \Phi_{\max}$使得$A \cap C \neq \varnothing$。
>
> 不妨使用反证法，我们假设存在一个$C_0 \in \Omega$使得对任意的$A \in \Phi_{\max}$都有$A \cap C_0 = \varnothing$，又因为Ω中元素都是X的非空子集，因此也有$A \neq C_0$。于是我们考虑令有集合Φ'：
>
> $$\Phi' := \Phi_{\max} \cup \{C_0\}$$

> 显然有$\Phi_{\max}\subset\Phi'$，并且显然对任意A，$B\in\Phi'$满足$A\neq B$，都应该有$A\cap B=\varnothing$。于是结合$\mathcal{G}$的定义有$\Phi'\in G$且$\Phi_{\max}\subset\Phi'$为真；另一方面，根据佐恩引理的结果$\Phi_{\max}$是$\mathcal{G}$的最大元素，于是对任意$\Phi\in\mathcal{G}$都应该有$\Phi_{\max}\subset\Phi$为假。从而导出了矛盾，反证假设不成立，只能有对任意的$C\in\Omega$，都存在$A\in\Phi_{\max}$使得$A\cap C\neq\varnothing$。
>
> 于是可以看到$\Phi_{\max}$正是题目中所要求的集合Ω'，题目结论得证。
>
> ---
>
> 证明：如果上述结论成立，那么它蕴含了习题8.4.2的结论。
>
> > 习题8.4.2结论：设I是一个集合，并且对每一个$\alpha\in I$，设X_α是一个非空集合。假设所有的集合X_α互不相交，即对任意不同的α，$\beta\in I$都有$X_\alpha\cap X_\beta=\varnothing$成立。那么存在一个集合$Y$使得$\#(Y\cap X_\alpha)=1$对所有的$\alpha\in I$均成立。
>
> 考虑Ω是所有形如$\{(0,\alpha),(1,x_\alpha)\}$的集合所构成的集合，其中有$\alpha\in I$与$x_\alpha\in X_\alpha$成立，即有：
>
> $$\Omega:=\left\{S\subseteq(\{0\}\times I)\cup\left(\{1\}\times\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha\right):\text{存在}\alpha\in I,x_\alpha\in X_\alpha\text{使得}S=\{(0,\alpha),(1,x_\alpha)\}\right\}$$
>
> 根据上面的命题我们可以得知存在一个集合Ω'使得Ω'中所有的元素互不相交，而且Ω中的每个元素都至少与Ω'中的一个元素相交。然后我们令有集合Y为：
>
> $$Y:=\left\{x\in\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha:\exists\ \alpha\in I,\{(0,\alpha),(1,x)\}\in\Omega'\right\}$$
>
> 我们来证明对任意$\alpha\in I$，都有$\#(Y\cap X_\alpha)=1$。
>
> 不妨使用反证法，我们假设存在一个$\alpha_0\in I$使得$\#(Y\cap X_{\alpha_0})\neq 1$，由于集合的基数总是非负的，于是我们分下面两个情况讨论：
>
> - $\#(Y\cap X_{\alpha_0})=0$:
>
>   > 于是对任意$x_{\alpha_0}\in X_{\alpha_0}$都有$\{(0,\alpha_0),(1,x_{\alpha_0})\}\notin\Omega'$。于是任取一个$x_0\in X_{\alpha_0}$，令有$S:=\{(0,\alpha_0),(1,x_0)\}$，显然$S$是满足$\Omega$定义的集合，因此有$S\in\Omega$。然后对任意的$\alpha\in I$，若$\alpha=\alpha_0$则根据我们的结论不存在形如$\{(0,\alpha_0),(1,x)\}$的集合属于$\Omega'$；若$\alpha\neq\alpha_0$，则由于$X_\alpha$是互不相交的，因此$x_0\notin X_\alpha$，从而对任意$x_\alpha\in X_\alpha$都有$\{(0,\alpha),(1,x_\alpha)\}\cap S=\varnothing$。
>   >
>   > 从而对$S'\in\Omega'$，都有$S\cap S'=\varnothing$，但是根据Ω'的要求S至少要与Ω'中的一个元素相交，于是导出了矛盾。
>
> - $\#(Y\cap X_{\alpha_0})>1$:
>
>   > 于是至少存在两个元素x与x'满足$\{(0,\alpha_0),(1,x)\}\in\Omega'$与$\{(0,\alpha_0),(1,x')\}\in\Omega'$，但是注意到$\{(0,\alpha_0),(1,x)\}$与$\{(0,\alpha_0),(1,x')\}$的交集为$\{(0,\alpha_0)\}\neq\varnothing$，而$\Omega'$要求$\Omega'$中所有的元素互不相交，于是导出了矛盾，此情况不可能出现。
>
> 综上，于是无论哪种情况都会导出矛盾，于是反证假设不成立，只能有$\#(Y\cap X_\alpha)=1$对所有的$\alpha\in I$均成立。于是本题的结论蕴含了习题8.4.2的结论。

本节相关跳转

[实分析 8.3 不可数集]

[实分析 8.4 选择公理]