7.3 非负数的和

命题

1. (7.3.1 上界推断？）设$\sum\limits_{n=m}^{\infty}a_n$是一个**非负实数**的形式级数，则这个级数是收敛的，当且仅当存在一个实数M使得：

$$\sum_{n=m}^{N}a_n\leq M$$

对所有整数$N\geq m$成立。

推论：（7.3.2 比较判别法）设$\sum\limits_{n=m}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=m}^{\infty}b_n$是两个非负实数的形式级数，且对任意$n\geq m$均有$|a_n|\leq b_n$，则若有$\sum\limits_{n=m}^{\infty}b_n$收敛，那么$\sum\limits_{n=m}^{\infty}a_n$是绝对收敛的，并且有：

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty}a_n\right|\leq\sum_{n=m}^{\infty}|a_n|\leq\sum_{n=m}^{\infty}b_n$$

（比较判别法中常使用几何级数$\sum\limits_{q=0}^{\infty}x^q$）

2. （7.3.3 几何级数）设x是实数，若$|x|\geq 1$，则级数$\sum\limits_{q=0}^{\infty}x^q$发散，反之若$|x|<1$，则级数$\sum\limits_{q=0}^{\infty}x^q$绝对收敛，且有：

$$\sum_{q=0}^{\infty}x^q=\frac{1}{1-x}$$

3. （7.3.4 柯西准则）设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是一个**递减的非负实数**序列，则级数是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的，当且仅当级数：

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^ka_{2^k}=a_1+2a_2+4a_4+\ldots\ldots$$

是收敛的。

4. （7.3.6 柯西准则相关？）设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是一个**递减的非负实数**序列，则对任意的自然数K，有$S_{2^{K+1}-1}\leq T_K\leq 2S_{2^K}$，其中，$T_K=\sum\limits_{k=0}^{K}2^ka_{2^k}$，$S_N=\sum\limits_{n=0}^{N}a_n$。

（于是$S_{2^{K+1}-1}=\sum\limits_{n=0}^{2^{K+1}-1}a_n$，$2S_{2^K}=2\sum\limits_{n=0}^{2^K}a_n$。该引理用于柯西准则的证明）

5. （7.3.7 调和级数与柯西准则？）设$q>0$为有理数，那么当$q>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}$收敛；当$q\leq 1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}$发散。

课后习题

7.3.1 利用命题7.3.1证明推论7.3.2

> 根据题设有对任意$n \geq m$，$b_n \geq |a_n|$恒成立。我们取部分和$S_N = \sum_{n=m}^{N} b_n$，$S'_N = \sum_{n=m}^{N} |a_n|$。
>
> 根据命题7.3.1，有存在某个实数M使得对任意$N \geq m$，$S_N \leq M$恒成立。
>
> 根据命题7.1.4(f)的内容，我们又由对任意整数$N \geq m$都有$b_i \geq |a_i|$对任意$m \leq i \leq N$成立可以得到$S_N \geq S'_N$对任意$N \geq m$都成立。于是结合前文有存在某个实数M使得对任意$N \geq m$都有$S'_N \leq S_N \leq M$恒成立，于是根据命题7.3.1可以得到$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$绝对收敛。
>
> 现在已知三个级数均收敛，于是有$(S_N)_{N=m}^{\infty}$，$(S'_N)_{N=m}^{\infty}$收敛，于是它们的极限也就是它们的上极限（说下极限也可以），于是运用比较原理，由$S_N \geq S'_N$对任意$N \geq m$都成立我们可以得到：
>
> $$\sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=m}^{\infty} b_n$$
>
> 又根据7.2.9绝对收敛审敛法的结论可以将上面结论升级为：
>
> $$\left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=m}^{\infty} b_n$$
>
> 于是命题得证。

7.3.2 证明引理7.3.3（提示：对第一部分使用零判别法，对于第二部分，首先利用归纳法建立一个几何级数公式

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{(1 - x^{N+1})}{1 - x}$$

然后使用引理6.5.2）

> 分类讨论：
>
> 当$|x| \geq 1$时：
>
> 根据引理6.5.2，此时有$\lim_{n \to \infty} x^n$等于1或发散，从而根据命题7.2.6零判别法我们有此时$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$发散。
>
> 当$|x| \leq 1$时：
>
> 我们先对N做归纳，证明几何级数公式：
>
> 当$N = 0$时：
>
> 此时左式等于$x^0 = 1$，右式等于$\frac{1-x}{1-x} = 1(x \neq 1)$，于是此时成立结论。
>
> 现归纳性假设在$N = c$时成立结论，对$N = c + 1$时讨论：
>
> 此时有：

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{c+1} x^n &\xlongequal{\text{定义7.1.1}} \sum_{n=0}^{c} x^n + x^{c+1} \\
&\xlongequal{\text{归纳假设}} \frac{1-x^{c+1}}{1-x} + \frac{x^{c+1}-x^{c+2}}{1-x} \\
&\xlongequal{\text{化简}} \frac{1-x^{(c+1)+1}}{1-x}
\end{aligned}
$$

于是此时等式也成立，从而归纳结束，几何级数公式得证。

根据定义7.2.2与几何级数公式，可以得到有 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{N\to\infty} \frac{(1-x^{N+1})}{1-x} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1-x} - \lim_{N\to\infty} \frac{x^{N+1}}{1-x}$。前者是常数于是极限即为 $\frac{1}{1-x}$，后者分母是常数，分子根据引理6.5.2有 $\lim_{N\to\infty} x^{N+1} = 0$，于是使用极限定律有后者等于0。总结上面结论即有：

$$
\sum_{q=0}^{\infty} x^q = \frac{1}{1-x}
$$

于是结论得证。

7.3.3 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$是一个绝对收敛的实数级数，并且满足$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = 0$证明：对任意自然数$n$都有$a_n = 0$

为了下面的结论证明，我们要证明一个辅助结论：

假设对于每个自然数n我们都指定一个实数a_n，那么$S_N \leq S_M\ (N, M \in \mathbb{N})$对任意$M \geq N$都成立，其中$S_N = \sum_{n=0}^{N} |a_n|$。

对任意的自然数N，我们对M归纳证明：

当$M = N$时：

此时显然有$S_N \leq S_N = S_M$，成立结论。

现假设在$M = K$时成立结论，对$M = K + 1$时：

$$
S_{K+1} = \sum_{n=0}^{K+1} |a_n| = \sum_{n=0}^{K} |a_n| + |a_{K+1}| = S_K + |a_{K+1}|
$$

根据归纳假设，我们有$S_K \geq S_N$，又有$|a_{K+1}| \geq 0$，于是$S_K + |a_{K+1}| \geq S_N$，即$S_{K+1} \geq S_N$。

综上，结论得证。

使用反证法证明：

不妨假设存在$n_0 \geq 0$使得$a_{n_0} = k \neq 0$并且对任意$n < n_0$，$a_n = 0$（即a_{n_0}是第一个非0项）

定义$S_N = \sum_{n=0}^{N} |a_n|$，于是可以计算得到部分和$S_{n_0} = |a_{n_0}|$。

根据辅助结论，我们始终有$S_N \geq S_{n_0} = |a_{n_0}|$对任意$N \geq n_0$恒成立。

> 此时根据题设有 $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = 0$，那么对于$\varepsilon = \dfrac{|a_{n_0}|}{2}$，应当存在一个自然数$n_1$使得$n \geq n_1$时总有$d(S_n, 0) \leq \dfrac{|a_{n_0}|}{2}$恒成立，但是对任意$n \geq \max(n_0, n_1)$我们又应该有$d(S_n, 0) \geq |a_{n_0}|$，这导出了矛盾。
>
> 于是假设错误，题目结论得证。

本节相关跳转

实分析 6.5 一些基本的极限

实分析 7.2 无限级数