9.6 最大值原理

定义

1. (9.6.1 实值函数的界？) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，并设$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数。若存在一个实数M使得对所有$x\in X$均有$f(x)\leq M$成立，那么我们称f是**有上界的**；若存在一个实数M使得对所有$x\in X$均有$f(x)\geq -M$成立，那么我们称f是**有下界的**；若存在一个实数M使得对所有$x\in X$均有$|f(x)|\leq M$成立，那么我们称f是**有界的**。

   (注：一个函数如果是有界的，当且仅当它同时是有上界的与有下界的；另外，若$f:X\to\mathbb{R}$是有界的，当且仅当它的象$f(x)$是定义9.1.22下的有界集合；对于连续函数，若其定义域是一个有界的闭区间，那么它必然是有界的，见命题9.6.3)

2. (9.6.5 最大值与最小值) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，并且设有$x_0\in X$。若对所有$x\in X$都有$f(x_0)\geq f(x)$，那么我们称f在x_0处到达它的**最大值**；若对所有$x\in X$都有$f(x_0)\leq f(x)$，那么我们称f在x_0处到达它的**最小值**。

   (注：如果一个函数在某点处达到它的最大值，那么它一定有上界，相应的，如果它在某点处达到它的最小值，那么它一定有下界。最大值与最小值的概念目前仍然是**全局性**的，在定义10.2.1中我们将给出其局部性的形式)

命题

1. (9.6.3 有界闭区间上的连续函数？) 设$a<b$都是实数，并且设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是$[a,b]$上的连续函数，那么f是一个有界函数。

2. (9.6.7 最大值原理) 设$a<b$都是实数，并且设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是$[a,b]$上的连续函数。那么f在某一点$x_{\max}\in[a,b]$处达到最大值；在某一点$x_{\min}\in[a,b]$处达到最小值。

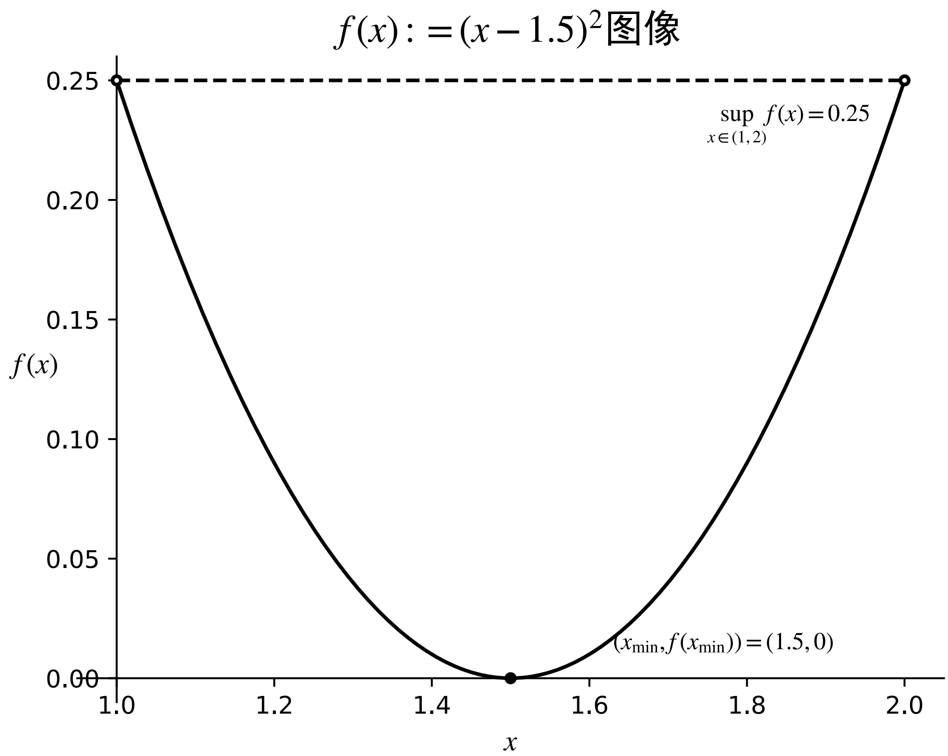
   (注：我们简写$\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$记为$\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，并类似地定义$\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$。于是最大值原理断定了$m:=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$是一个实数，并且它是$f$在$[a,b]$上的**最大值**，即至少存在一个点$x_{\max}\in[a,b]$使得$f(x_{\max})=m$并且对任意$x\in X$都有$f(x_{\max})\geq f(x)$，类似地，也有$\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$是$f$的**最小值**)

课后习题

9.6.1 举例说明

(a) 函数$f:(1,2)\to\mathbb{R}$是连续且有界的，并且在某一点处达到最小值，但是没有最大值

> 考虑令f映射关系有$f(x):=(x-1.5)^2$，其连续性是显然的，并且我们显然有$|f(x)|\leq 0.25$对任意$x\in(1,2)$都成立。显然有$x=1.5\in(1,2)$处f有最小值，但是对任意的$x\in(1,2)$，我们都有：
>
> $$\forall y\in(1,1.5-|x-1.5|),(y-1.5)^2\geq x$$
>
> 因此不存在最大值。
>
> 函数的图像如下：



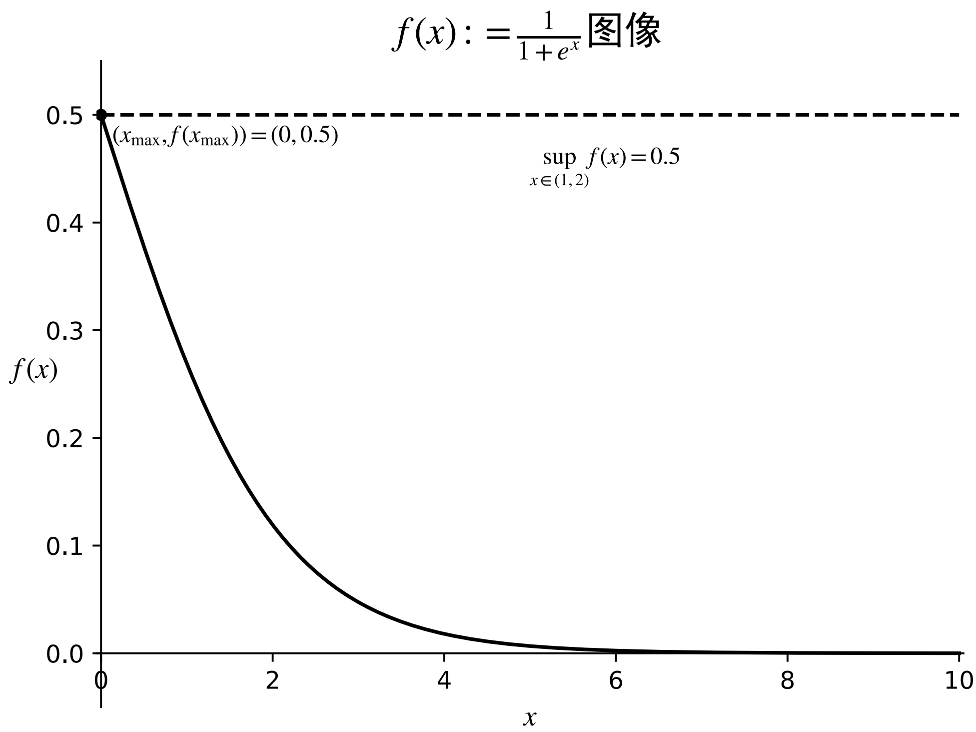
(b) 函数$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$是连续且有界的，并且在某一点处达到最大值，但是没有最小值

考虑令f映射关系有$f(x):=\dfrac{1}{1+e^x}$，其连续性是显然的，并且我们显然有$|f(x)|\leq 0.5$对任意$x\in[0,+\infty)$都成立。由于$e^x\geq 1$对任意$x\in[0,+\infty)$都成立，从而在$x=0\in[0,+\infty)$处取得f有最大值为$\dfrac{1}{2}$，但是对任意的$x\in[0,+\infty)$，我们都有：

$$\forall y\in(x,+\infty),\frac{1}{1+e^y}<\frac{1}{1+e^x}$$

因此不存在最小值。

函数图像如下：



(c) 函数$f: [-1,1] \to \mathbb{R}$是有界的，既没有最大值也没有最小值

考虑令f映射关系有：

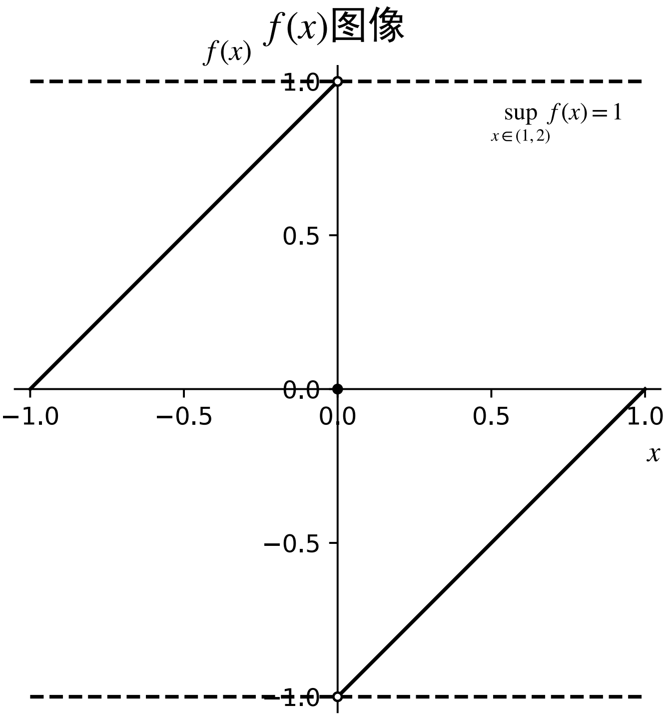
$$f(x) := \begin{cases} 1+x & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ -1+x & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

从而显然我们有对任意$x \in [-1,1]$有$|f(x)| \le 1$，因此f是有界的，但是对于任意的$x \in [-1,1]$，我们都有：

$$\forall y \in (-|x|, 0), f(y) > f(x)$$
$$\forall z \in (0, |x|), f(z) < f(x)$$

从而f不存在最大值与最小值。

函数图像如下：



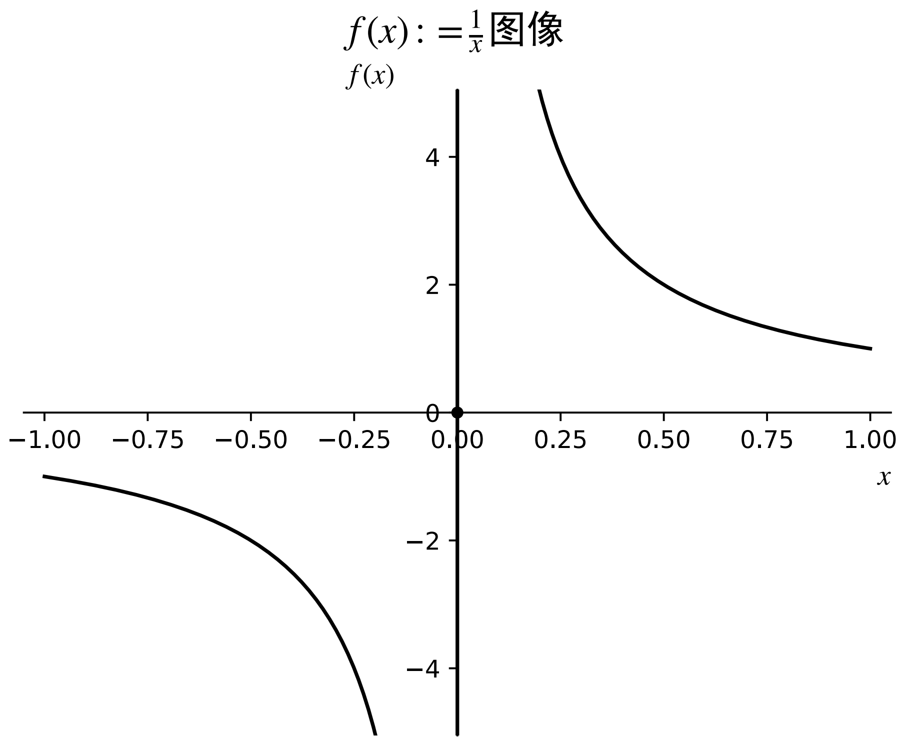
(d) 函数$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$既没有上界也没有下界

考虑令f映射关系有:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

显然f不存在上界与下界，并且f在$[-1,1]$上都是有定义的。

函数图像如下:



解释为什么你构造的例子都不违背最大值原理（注：仔细阅读假设条件）

> 上面四种情况都是不满足最大值原理的条件的，可以看到：
>
> - (a)和(b)的f都不是定义在闭区间上的函数。
> - (c)的f不满足连续。
> - (d)的f实际上是必然不连续的，因为连续的话f就应当是有界的（命题9.6.3）。
>
> 于是可以看到，这些例子都不是满足最大值原理的函数。

本节相关跳转

[实分析 9.1 实直线的子集]

[实分析 10.2 局部最大值、局部最小值以及导数]