# 10.2 局部最大值、局部最小值以及导数

## 定义

1. (10.2.1 局部最大值和最小值) 设$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，并且设$x_0\in X$。我们称$f$在$x_0$处达到**局部最大值**，当且仅当存在一个实数$\delta>0$使得$f$在$X\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$上的限制函数$f|_{X\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)}$在$x_0$处达到最大值；我们称$f$在$x_0$处达到**局部最小值**，当且仅当存在一个实数$\delta>0$使得$f$在$X\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$上的限制函数$f|_{X\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)}$在$x_0$处达到最小值。

   (注：如果$f$在$x_0$处达到最大值，那么为了区分于局部最大值的概念，有时候会称$f$在$x_0$处达到**全局最大值**，显然全局最大值也是局部最大值（事实上对任意$\delta>0$它都是限制函数$f|_{X\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)}$的最大值），类似地我们也可以给出**全局最小值**的定义；作为回顾，应当将这个概念同9.6节中函数最大值的概念做比较)

---

## 命题

1. (10.2.6 局部最值是稳定的) 设$a<b$都是实数，并且设$f:(a,b)\to\mathbb{R}$是一个函数。若$x_0\in(a,b)$且$f$在$x_0$处是可微的，并且$f$在$x_0$处达到局部最大值或者局部最小值，那么$f'(x_0)=0$。
2. (10.2.7 罗尔定理) 设$a<b$都是实数，并且设$g:[a,b]\to\mathbb{R}$是一个连续函数，并且它在$(a,b)$上是可微的。若$g(a)=g(b)$，那么存在一个$x_0\in(a,b)$使得$g'(x_0)=0$。

   (注：注意，罗尔中值定理的成立前提只要求在开区间$(a,b)$上可微，不需要对区间的端点也有这样的要求；罗尔定理可以由命题10.2.6与最大值原理推出，具体见习题10.2.4)
3. (10.2.9 平均值定理) 设$a<b$都是实数，并且设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是一个在$[a,b]$上连续且在$(a,b)$上可微的函数。那么存在一个实数$x_0\in(a,b)$使得$f'(x_0)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$。

   (注：平均值定理在别的地方也叫拉格朗日中值定理，同罗尔定理（罗尔中值定理）一样是三大微分中值定理之一，可以参考维基百科)

---

## 课后习题

### 10.2.1 证明命题10.2.6

> 使用反证，不妨假设在$x_0$处导数$f'(x_0)=L\neq0$。此时我们设$f$在$X\cap(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$上的限制函数$f|_{X\cap(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)}$在$x_0$处达到最大值。根据命题10.1.7牛顿逼近法，于是对$\varepsilon=L/2$，存在一个$\delta_2$使得对任意$X\cap(x_0-\delta_2,x_0+\delta_2)$有：
>
> $$|f(x)-[f(x_0)+L(x-x_0)]|\leq\varepsilon|x-x_0|$$
>
> 此时取$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)/2$，于是既有在$X\cap[x_0-\delta,x_0+\delta]$上限制函数$f|_{X\cap[x_0-\delta,x_0+\delta]}$在$x_0$处达到最大值（或者最小值），又有在上不等式成立，此时我们考虑$L$的值：
>
> > - 若$L$是正数，则考虑$x=x_0-\delta$与$x=x_0+\delta$的$f(x)$值：
> >
> > | $x=x_0+\delta$ | $x=x_0-\delta$ |
> > |---|---|
> > | $\vert f(x)-[f(x_0)+L(x-x_0)]\vert\leq\varepsilon\vert x-x_0\vert$ | $\vert f(x)-[f(x_0)+L(x-x_0)]\vert\leq\varepsilon\vert x-x_0\vert$ |
> > | $\Downarrow$ | $\Downarrow$ |
> > | $f(x)\in\left[f(x_0)+L\delta-\frac{1}{2}L\delta,f(x_0)+L\delta+\frac{1}{2}L\delta\right]$ | $f(x)\in\left[f(x_0)-L\delta-\frac{1}{2}L\delta,f(x_0)-L\delta+\frac{1}{2}L\delta\right]$ |
> > | $\Downarrow$ | $\Downarrow$ |
> > | $f(x)\in\left[f(x_0)+\frac{1}{2}L\delta,f(x_0)+\frac{3}{2}L\delta\right]$ | $f(x)\in\left[f(x_0)-\frac{3}{2}L\delta,f(x_0)-\frac{1}{2}L\delta\right]$ |
> > | $\Downarrow$ | $\Downarrow$ |
> > | $f(x)<f(x_0+\delta)$ | $f(x)>f(x_0-\delta)$ |

> > 若$f|_{X\cap[x_0-\delta,x_0+\delta]}$在$x_0$处达到最大值，则根据上面的推论$f(x) < f(x_0+\delta)$导出矛盾；若$f|_{X\cap[x_0-\delta,x_0+\delta]}$在$x_0$处达到最小值，则根据上面的推论$f(x) > f(x_0-\delta)$导出矛盾；于是不可能有$L$是正数。
> >
> > - 若$L$是负数，则考虑$x = x_0-\delta$与$x = x_0+\delta$的$f(x)$值：
> >
> > | $x = x_0+\delta$ | $x = x_0-\delta$ |
> > | --- | --- |
> > | $\lvert f(x)-[f(x_0)+L(x-x_0)]\rvert \le \varepsilon\lvert x-x_0\rvert$ | $\lvert f(x)-[f(x_0)+L(x-x_0)]\rvert \le \varepsilon\lvert x-x_0\rvert$ |
> > | $\Downarrow$ | $\Downarrow$ |
> > | $f(x)\in\left[f(x_0)+L\delta+\frac{1}{2}L\delta, f(x_0)+L\delta-\frac{1}{2}L\delta\right]$ | $f(x)\in\left[f(x_0)-L\delta+\frac{1}{2}L\delta, f(x_0)-L\delta-\frac{1}{2}L\delta\right]$ |
> > | $\Downarrow$ | $\Downarrow$ |
> > | $f(x)\in\left[f(x_0)+\frac{3}{2}L\delta, f(x_0)+\frac{1}{2}L\delta\right]$ | $f(x)\in\left[f(x_0)-\frac{1}{2}L\delta, f(x_0)-\frac{3}{2}L\delta\right]$ |
> > | $\Downarrow$ | $\Downarrow$ |
> > | $f(x) > f(x_0+\delta)$ | $f(x) < f(x_0-\delta)$ |
> >
> > 若$f|_{X\cap[x_0-\delta,x_0+\delta]}$在$x_0$处达到最大值，则根据上面的推论$f(x) < f(x_0-\delta)$导出矛盾；若$f|_{X\cap[x_0-\delta,x_0+\delta]}$在$x_0$处达到最小值，则根据上面的推论$f(x) > f(x_0+\delta)$导出矛盾；于是不可能有$L$是负数。
>
> 综上，无论$L$不可能是除0以外的任何实数，于是这与反证假设$L\neq 0$导出了矛盾，反证结束，只能有$f'(x_0)=0$。

**10.2.2 举例说明，存在连续函数$f:(-1,1)\to\mathbb{R}$在$0$处达到全局最大值，但是在$0$处不可微。解释为什么这与命题10.2.6不矛盾**

> 考虑定义为$f(x):=-|x|$的函数，显然有$f$在0处达到全局最大值$0$（因为对任意实数$x$都有$-|x|\le 0$），但是$f$在$x_0$处不可微。命题10.2.6要求函数在达到最大值或最小值处可微，此处显然不满足$f$在0处可微的条件。

**10.2.3 举例说明，存在连续函数$f:(-1,1)\to\mathbb{R}$在$0$处的导数为$0$，但是在$0$处既没有达到局部最大值也没有达到局部最小值。解释为什么这与命题10.2.6不矛盾**

> 考虑函数定义为$f(x):=x^3$，在$x=0$处有导数$f'(0)=0$，显然对任意$x>0$都有$f(x)>f(0)$，对任意$x<0$都有$f(x)<f(0)$，即有$f$在$0$处既没有局部最大值也没有局部最小值。命题10.2.6要求函数在可微处达到最大值或最小值处，此处显然不满足$f$在$0$处达到局部最大值或最小值的条件。

**10.2.4 证明定理10.2.7（提示：利用推论10.1.12，最大值原理（命题9.6.7），然后使用命题10.2.6。注意，最大值原理并没有表明最大值一定是在$(a,b)$内达到，因此需要分类讨论，并且利用$g(a)=g(b)$的前提条件）**

> 根据最大值原理，由$g$是$[a,b]$上的连续函数可以得到至少存在$x_0,x_1\in[a,b]$使得$g$在$x_0$处达到最大值，在$x_1$处达到最小值。若$x_0$与$x_1$中有至少一个属于$(a,b)$，那么根据命题10.2.6与$g$在$(a,b)$上可微可以得到$g'(x_0)=0$或$g'(x_1)=0$（这取决于$x_0$或$x_1$是否属于$(a,b)$）。于是我们只需要考虑$x_0,x_1\notin(a,b)$的情况，即$g$在$a$，$b$处达到最大值与最小值的情况。
>
> 考虑到题设中$g(a)=g(b)$，从而$g$在$a$，$b$处达到最大值与最小值可以全部推得$g$在$a$与$b$处同时达到了最大值与最小值$g(a)(g(b))$，于是对任意的$x\in[a,b]$，都有$g(a)\le g(x)\le g(a) \iff g(x)=g(a)$，即$g$是在$[a,b]$上的常数函数，此时根据命题10.1.13(a)，任意取$x_0\in(a,b)$都有$g'(x_0)=0$成立。

**10.2.5 利用定理10.2.7证明推论10.2.9（提示：对某个谨慎选定的实数$c$，考虑形如$f(x)-cx$的函数）**

> 对题设给出函数$f$，考虑构造下面这样一个函数$g:[a,b]\to\mathbb{R}$：
>
> $$g(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)$$
>
> 为了方便编写，我们记有$L:=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$。
>
> 根据命题10.1.13与命题9.4.9我们可以很容易地得到$g$是在$[a,b]$上连续并且在$(a,b)$上可微的函数，并且我们注意到有：
>
> $$g(a)=f(a)-f(a)-L(a-a)=0$$
> $$g(b)=f(b)-f(a)-L(b-a)=0$$

> 从而$g$是一个满足罗尔定理的函数，于是存在$x_0 \in (a,b)$使得$g'(x_0)=0$，并且我们知道由命题10.1.13对任意$x \in (a,b)$都有：
>
> $$g'(x)=f'(x)-L \iff f'(x)=g'(x)+L$$
>
> 从而有$f'(x_0)=0+L=L$，平均值定理得证。

**10.2.6 设$M>0$，$a<b$都是实数，并且设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是一个在$[a,b]$上连续且在$(a,b)$上可微的函数，而且对所有的$x\in(a,b)$均有$|f'(x)|\leq M$（即$f$的导数是有界的）。证明，对任意的$x$，$y\in[a,b]$，不等式$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$均成立（提示：对$f$选择一个恰当的限制，然后对限制函数使用平均值定理（推论10.2.9））。满足$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$的函数被称为利普希茨连续（Lipschitz continuity）函数，其中$M$被称为利普希茨常数。因此，本题结论表明任意导数有界的函数都是利普希茨连续的（关于利普希茨连续，可以参考wiki）**

> 对任意的$x$，$y\in[a,b]$，考虑限制函数$f|_{[x,y]}$，可以得到无论$x$，$y$如何选取总是有$f|_{[x,y]}$在$[x,y]$上连续且在$(x,y)$上可微，根据平均值定理，于是存在$x_0\in(x,y)$使得：
>
> $$f'(x_0)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \iff f(x)-f(y)=f'(x_0)(x-y)$$
>
> 根据题设有$|f'(x_0)|\leq M$，于是又有：
>
> $$|f(x)-f(y)|=|f'(x_0)||x-y|\leq M|x-y|$$
>
> 于是结论得证，函数$f$是利普希茨连续的。

**10.2.7 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是一个可微函数，并且$f'$是有界的。证明：$f$是一致连续的（提示：利用习题10.2.6的结论）**

> 由习题10.2.6的结论我们知道$f$是利普希茨连续的，于是有对任意的$x$，$y\in\mathbb{R}$，不等式$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$均成立。
>
> 此时考虑任意的实数$\varepsilon>0$，考虑取$\delta=\varepsilon/M$，从而对任意的$x$，$y\in\mathbb{R}$，若$x$，$y$是$\delta$-接近的（即$|x-y|\leq\delta$），则有：
>
> $$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|=M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$
>
> 即$f(x)$与$f(y)$是$\varepsilon$-接近的，于是根据定义9.9.2，我们有$f$是一致连续的，结论得证。

---

# 本节相关跳转


[实分析 9.6 最大值原理]

[实分析 10.1 基本定义]