12.2 度量空间中的一些点集拓扑知识

定义

1. (12.2.1 球) 设(X,d)是一个度量空间，x_0是X中的一个点，并设$r>0$。我们将X中依度量d以x_0为中心，半径等于r的**球**$B_{(X,d)}(x_0,r)$定义为集合：

$$B_{(X,d)}(x_0,r):=\{x\in X:d(x,x_0)<r\}$$

如果我们能清楚的知道度量空间(X,d)是什么，那么也可以将$B_{(X,d)}(x_0,r)$简记为$B(x_0,r)$。

(注：考虑平面集上的几何直观或许有助于理解度量球的概念，例如在二维欧几里得空间$\mathbb{R}^2$中，球$B_{(\mathbb{R}^2,d_{l^2})}((0,0),1)$是一个开圆盘；如果将度量替换为出租测度量，那么$B_{(\mathbb{R}^2,d_{l^1})}((0,0),1)$是一个正方形；如果使用离散度量，那么球$B_{(\mathbb{R}^2,d_{\text{disc}})}((0,0),1)$是一个单点集，而球$B_{(\mathbb{R}^2,d_{\text{disc}})}((0,0),2)$是整个空间$\mathbb{R}^2$；也有些不那么几何直观的球，例如在具有通常度量$d$的度量空间$\mathbb{R}$中，区间$(3,7)$就是球$B_{(\mathbb{R},d)}(5,2)$)

2. (12.2.5 内点，外点和边界点) 设(X,d)是一个度量空间，E是X的一个子集，并且设x_0是X中的一个点。如果能找到一个半径$r>0$的球$B(x_0,r)\subseteq E$，那么我们称x_0是E的**内点**；如果能找到一个半径$r>0$的球$B(x_0,r)\cap E=\varnothing$，那么我们称$x_0$是$E$的**外点**；如果$x_0$既不是$E$的内点也不是$E$的外点，那么我们称$x_0$是$E$的**边界点**。

此外，我们称E的所有内点所构成的集合叫做E的**内部**，有时记为$\text{int}(E)$；E的所有外点所构成的集合叫做E的**外部**，有时记为$\text{ext}(E)$；E的所有边界点所构成的集合叫做E的**边界**，有时记为∂E。

(注：如果x_0是E的内点，那么x_0肯定是E中的元素；如果x_0是E的外点，那么x_0肯定不是E中的元素。因此x_0不可能既是E的内点又是E的外点。如果x_0是E的边界点，那么不能直接判断x_0是不是E中的元素，并且边界点也并非总是存在的，例如习题12.2.1中的例子)

3. (12.2.9 闭包) 设(X,d)是一个度量空间，E是X的一个子集，并且设x_0是X中的一个点。如果对任意的半径$r>0$，球$B(x_0,r)$与E的交集总是非空的，那么我们称x_0是E的**附着点**。E的全体附着点构成的集合称为E的**闭包**，并记为$\overline{E}$。

(注：这些概念同我们曾经在实直线上定义的概念（定义9.1.8与定义9.1.10）是一致的，不妨想想为什么)

4. (12.2.12 开集和闭集) 设(X,d)是一个度量空间，并且设E是X的一个子集。如果E包含了自身所有的边界点，也即$\partial E\subseteq E$，那么我们称E是**闭的**；如果E不包含自身任何的边界点，也即$\partial E\cap E=\varnothing$，那么我们称$E$是**开的**；如果$E$包含了部分自身的边界点而不包含其余边界点，那么$E$是既不是开的也不是闭的。

(注：如果一个集合没有边界，那么它就同时是开的或者闭的。在很多的情形下对度量空间(X,d)，X和$\varnothing$都是唯二既开又闭的集合，但是也有例外，例如在离散度量下所有的集合都是既开又闭的)

命题

1. (12.2.10) 设(X,d)是一个度量空间，E是X的一个子集，并且设x_0是X中的一个点。那么下面的命题在逻辑上是等价的：

> 1. x_0是E的附着点。
> 2. x_0要么是E的内点，要么是E的边界点。
> 3. 在E中能够找到一个依度量d收敛于点x_0的序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$。

（注：由于前两条命题等价，于是我们可以推出一个关于闭包的有用结论，也就是推论12.2.11）

> 推论：
>
> 1. （12.2.11）设(X,d)是一个度量空间，并且设E是X的一个子集。那么有$\overline{E}=\text{int}(E)\cup\partial E=X\backslash\text{ext}$成立。

2. （12.2.15 开集和闭集的基本性质）设(X,d)是一个度量空间。

> 1. 设E是X的一个子集，那么E是开的，当且仅当$E=\text{int}(E)$，换言之，E是开的，当且仅当对任意的$x\in E$，存在一个$r>0$使得$B(x,r)\subseteq E$。
> 2. 设E是X的一个子集，那么E是闭的，当且仅当E包含了自身所有的附着点，换言之，E是闭的，当且仅当对于E中的任意一个收敛序列$(x_n)_{n=m}^{\infty}$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$属于$E$。
> 3. 对于任意的$x_0\in X$和$r_0>0$，球$B(x_0,r_0)$都是开集，集合$\{x\in X:d(x,x_0)\le r_0\}$是闭集（这个集合有时候被称为以$x_0$为中心，半径为$r$的闭球）。
> 4. 任何一个单点集$\{x_0\}$都是闭的，其中$x_0\in X$。
> 5. 如果E是X的一个子集，那么E是开的，当且仅当它的补集$X\backslash E:=\{x\in X:x\notin E\}$是闭的。
> 6. 如果E_1，E_2，$\ldots$，E_n是X中的有限个开集，那么$E_1\cap E_2\cap\ldots\cap E_n$也是开的；如果$E_1$，$E_2$，$\ldots$，$E_n$是$X$中的有限个闭集，那么$E_1\cup E_2\cup\ldots\cup E_n$也是闭的。
> 7. 如果$\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$X$中的一簇开集（这里的指标集没有限制，可以是无限的或者有限的），那么并集$\bigcup\limits_{\alpha\in I}E_\alpha$也是开的；如果$\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$X$中的一簇闭集，那么交集$\bigcap\limits_{\alpha\in I}E_\alpha$也是闭的。
> 8. 如果E是X的任意一个子集，那么$\text{int}(E)$是包含在E中的最大开集。换言之，$\text{int}(E)$是开集，并且对任意给定的其它开集$V\subseteq E$均有$V\subseteq\text{int}(E)$；类似地，$\overline{E}$是包含E中的最小闭集。换言之，$\overline{E}$是闭集，并且对任意给定的其它闭集$K\supseteq E$均有$K\supseteq\overline{E}$。

课后习题

12.2.1 证明例12.2.8中的结论

> 例12.2.8：
>
> > 如果集合X具有离散度量，并设E是X的任意一个子集，那么E中的每一个元素都是E的内点；任何不包含在E中的点都是E的外点，并且E没有边界点。
>
> ---
>
> 注意到对任意的$e\in E$，球$B(e,0.5)=\{e\}$，从而有$B(e,0.5)\subseteq E$。于是根据定义12.2.5有e是E的一个内点。
>
> 然后对任意的$x\in X\backslash E$，球$B(x,0.5)=\{x\}$，从而有$B(x,0.5)\cap E=\varnothing$。于是根据定义12.2.5有$x$是$E$的一个外点。
>
> 然后根据上面的讨论我们知道对任意$x\in X$，若有$x\in E$则x是E的一个内点；$x\notin E$则x是E的一个外点。于是不存在$x\in X$既不是E的内点也不是E的外点，根据定义12.2.5有E不存在边界点。

12.2.2 证明命题12.2.10（提示：对某些蕴含关系的证明需要用到选择公理，就像在引理8.4.5的证明中那样）

> 我们先证明(a)等价于(b)，然后再证明(a)等价于(c)，从而三个命题在逻辑上都是等价的。
>
> - 证明：x_0是E的附着点，当且仅当x_0要么是E的内点，要么是E的边界点。
>
> 若x_0是E的附着点，则根据定义12.2.9有对任意的半径$r>0$，球$B(x_0,r)$与E的交集总是非空的。因此根据定义12.2.5，x肯定不是E的外点（不存在$r>0$使得$B(x_0,r)$与E的交集为空）。又因为定义12.2.5我们知道x_0只可能是E的内点，外点，边界点（不是内点也不是外点）中的一个，因此只能有x_0要么是E的内点，要么是E的边界点。
>
> 反过来，若x_0要么是E的内点，要么是E的边界点，则x_0肯定不是E的外点，于是根据定义12.2.5应当有不存在$r>0$使得$B(x_0,r)$与E的交集为空，换言之即对任意的$r>0$都有$B(x_0,r)\cap E\neq\varnothing$，于是根据定义12.2.9即有$x_0$是$E$的附着点。
>
> 综上，x_0是E的附着点，当且仅当x_0要么是E的内点，要么是E的边界点。
>
> ---
>
> - 证明：x_0是E的附着点，当且仅当在E中能够找到一个依度量d收敛于点x_0的序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$。
>
> 若x_0是E的附着点，则根据定义12.2.9对任意的半径$r>0$都有$B(x_0,r)\cap E\neq\varnothing$。于是考虑指标集$I:=\{n\in\mathbb{N}:n\neq 0\}$，然后对任意的$\alpha\in I$令有：
>
> $$A_\alpha=B\left(x_0,\frac{1}{\alpha}\right)\cap E$$
>
> 由上面的讨论我们知道对任意的$\alpha\in I$都有A_α是非空的，根据选择公理我们能为每个I中自然数$\alpha\geq 1$都制定了一个$x_\alpha\in A_\alpha$，于是可以组成一个序列$(x_\alpha)_{\alpha\in I}$（也就是序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$，根据A_n的定义我们显然有序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是完全由E中元素组成的）。然后我们对序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$讨论：
>
> 注意到对任意的实数$\varepsilon>0$，根据阿基米德原理都存在一个自然数$N\geq 1$使得$\varepsilon>\frac{1}{N}$，于是对任意的$n\geq N$，根据A_n的定义我们有：
>
> $$x_n\in B\left(x_0,\frac{1}{n}\right)\cap E\implies d(x_n,x_0)<\frac{1}{n}$$
>
> 又因为$\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\varepsilon$，于是结合度量的始终大于0即可以推知对任意$n\geq N$都有$|d(x_n,x_0)|<\varepsilon$，从而根据实数序列收敛的定义我们可以得到$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x_0)=0$，再根据定义12.1.14我们有$(x_n)_{n=1}^{\infty}$依度量$d$收敛于点$x_0$，于是也即在$E$中能够找到一个依度量$d$收敛于点$x_0$的序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$。
>
> 反过来，若在E中能够找到一个依度量d收敛于点x_0的序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$，则根据定义12.1.14我们有$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x_0)=0$，于是对任意的实数$r>0$都存在一个自然数$N\geq 1$使得对任意的$n\geq N$都有$d(x_n,x_0)<\varepsilon$，也即有$x_n\in B\left(x_0,r\right)\cap E$。于是在上面的讨论中得证了对任意的$r>0$都有球$B\left(x_0,r\right)$与$E$的交集非空，于是根据定义12.2.9有$x_0$是$E$的一个附着点。
>
> 综上，x_0是E的附着点，当且仅当在E中能够找到一个依度量d收敛于点x_0的序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$。

12.2.3 证明命题12.2.15（提示：可以使用前面的部分证明后面的部分）

> 先证明几个用得上的辅助结论：
>
> > 辅助结论：对任意的E是X的与任意的$x\in X$，x恰好是E的内点，外点，或者边界点中的一种。从而E的外部，内部与边界凉凉不相交并且有$\text{int}(E)\cup\text{ext}(E)\cup\partial E=X$。
> >
> > 证明：

> 首先根据定义12.2.5，如果x是E的边界点，那么x不是E的内点或者外点；若x是E的内点，则存在$r>0$使得$B(x,r)\subseteq E$，从而有$x\in E$；若x是E的外点，则存在$r>0$使得$B(x,r)\cap E=\varnothing$，于是$x\notin E$。从而x不可能既是E的内点又是E的外点。于是综合即有x至多能分类到这三种中的一种。
>
> 另一方面，x必然属于E的内点，外点，或者边界点中的一个，因为若x不是E的内点或外点则根据定义12.2.5x是E的边界点，于是x总能分类到这三种中的至少一种。
>
> 综上，于是x恰好是E的内点，外点，或者边界点中的一种。
>
> （其实这个结论在定义12.2.5几乎是直接显现的，不过仍然在此简要说明）

然后我们逐条证明：

---

1. 设E是一个X的子集，那么E是开的，当且仅当$E=\operatorname{int}(E)$，换言之，E是开的，当且仅当对任意的$x\in E$，存在一个$r>0$使得$B(x,r)\subseteq E$。

若E是开的，则对任意$e\in E$，根据定义12.2.12有e不是E的边界点，然后根据辅助结论证明中的讨论e也不能是E的外点，于是根据辅助结论e只能是E的内点，从而$E\subseteq\operatorname{int}(E)$；另一方面，在辅助结论的证明我们也得到了对任意$e$是$E$的内点都有$e\in E$，于是有$\operatorname{int}(E)\subseteq E$，综合即有$E=\operatorname{int}(E)$。

反过来，若$E=\operatorname{int}(E)$，于是根据辅助结论有$E\cap\partial E=\operatorname{int}(E)\cap\partial E=\varnothing$，根据定义12.2.12即$E$是开的。

---

2. 设E是一个X的子集，那么E是闭的，当且仅当E包含了自身所有的附着点，换言之，E是闭的，当且仅当对于E中的任意一个收敛序列$(x_n)_{n=m}^{\infty}$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$属于$E$。

若E是闭的，则E包含了自身所有的边界点，而在辅助结论的证明中我们证明了E包含了自身所有的内点。于是根据命题12.2.10，对任意E的附着点e，它要么是E的边界点，要么是E的内点，无论哪种 情况都有$e\in E$，从而即E包含了自身所有的附着点。

若E包含了自身所有的附着点，则根据命题12.2.10，对任意E的边界点e都有e是E的附着点，于是$e\in E$，从而即$\partial E\subseteq E$。根据定义12.2.12，即有E是闭的。

---

3. 对于任意的$x_0\in X$和$r_0>0$，球$B(x_0,r_0)$都是开集，集合$\{x\in X:d(x,x_0)\leq r_0\}$是闭集（这个集合有时候被称为以$x_0$为中心，半径为$r$的闭球）。

我们先证明$B(x_0,r_0)=\operatorname{int}(B(x_0,r_0))$，即对任意$x\in B(x_0,r_0)$都有$x$是$B(x_0,r_0)$的内点。

> 根据定义应该有$r:=d(x,x_0)<r_0$，于是实数$r':=r-r_0$应该是大于0的，此时我们考虑任意的$x'\in B(x,r')$，根据度量球的定义应该有$d(x',x)<r'$，进而根据度量空间的三角不等式，应该有：
>
> $$d(x',x_0)\leq d(x',x)+d(x,x_0)<r'+r=r_0$$
>
> 从而有$d(x',x_0)<r_0\implies x'\in B(x_0,r_0)$，于是$B(x,r')\subseteq B(x_0,r_0)$，根据定义12.2.5有$x$是$B(x_0,r_0)$的内点。

于是根据结论(a)我们有$B(x_0,r_0)$是开集。

然后我们记$C:=\{x\in X:d(x,x_0)\leq r_0\}$，证明闭球$C$包含了自身全部的附着点。

> 考虑任意x是C的附着点，根据命题12.2.10，存在一个完全由C中元素组成的序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于x。于是根据定义12.2.14对任意的$\varepsilon>0$，都存在$N\geq 1$使得对任意的$n\geq N$都有$d(x_n,x)\leq\varepsilon$成立。
>
> 又因为$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是由C中元素组成的，于是对任意的$n\geq 1$都有$d(x_n,x_0)\leq r_0$。于是根据度量空间的三角不等式我们有：
>
> $$d(x,x_0)\leq d(x,x_n)+d(x_n,x_0)\leq r_0+\varepsilon$$
>
> 注意到这个结论对任意的$\varepsilon>0$都可以找到对应的x_n组成上面的三角不等式，并且$d(x,x_0)$是不依赖于ε的，因此我们只能有$d(x,x_0)\leq r_0$，从而$x\in C$。于是任意x是C的附着点都属于C。

于是根据结论(b)可以得到C是闭的。

---

4. 任何一个单点集$\{x_0\}$都是闭的，其中$x_0\in X$。

考虑任意$x\in X$是$\{x_0\}$的附着点，根据命题12.2.10应该存在一个完全由$\{x_0\}$中元素组成的序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于x，注意到由于$\{x_0\}$是一个单元素集，因此只能有对任意的$n\geq 1$都有$x_n=x_0$，从而只能有$x=x_0$。

于是$\{x_0\}$只有唯一的附着点x_0，进而由于$\{x_0\}$包含了自身所有的附着点（唯一的x_0）结合结论(b)有$\{x_0\}$是闭的。

---

5. 如果E是X的一个子集，那么E是开的，当且仅当它的补集$X\backslash E:=\{x\in X:x\notin E\}$是闭的。

注意到对任意$x\in X$，x是E的内点当且仅当x是$X\backslash E$的外点，这是因为：

> 若x是E的内点，则根据定义存在$r>0$使得$B(x,r)\subseteq E$，于是有$B(x,r)\cap(X\backslash E)=\varnothing$，根据定义12.2.5即有$x$是$E$的外点；反过来，若$x$是$X\backslash E$的外点，则存在$r>0$使得$B(x,r)\cap(X\backslash E)=\varnothing$，于是$B(x,r)\subseteq E$，根据定义12.2.5即有$x$是$E$的内点。

注意到上面的结论也蕴含了“对任意$x\in X$，x是E的外点当且仅当x是$X\backslash E$的内点”（替换$X\backslash E$为E，E为$X\backslash E$即可）。于是我们可以得到：对任意$x\in X$，x是E的边界点当且仅当x是$X\backslash E$的边界点，这是因为：

> 若x是E的边界点，则x既不是E的内点或外点，于是x相应的也不可能是$X\backslash E$的外点或内点，根据辅助结论于是x只能是$X\backslash E$的边界点，反过来也是类似。

于是若E是开的，则根据上面的讨论对任意$X\backslash E$的边界点e，e是E的边界点，进而根据开集的定义有$e\notin E\iff e\in X\backslash E$，于是即有$X\backslash E$包含了自身所有的边界点，即有$X\backslash E$是闭的；反过来，若$X\backslash E$是闭的，则根据上面的讨论对任意$E$的边界点$e$，$e$是$X\backslash E$的边界点，于是根据闭集的定义有$e\notin X\backslash E\implies e\in E$，于是$E$包含了自身所有的边界点，即有$E$是开的。

综上，于是结论得证。

---

6. 如果E_1，E_2，...，E_n是X中的有限个开集，那么$E_1\cap E_2\cap...\cap E_n$也是开的；如果$E_1$，$E_2$，...，$E_n$是$X$中的有限个闭集，那么$E_1\cup E_2\cup...\cup E_n$也是闭的。

先证明第一个结论，对任意$e\in E_1\cap E_2\cap...\cap E_n$，于是对任意$1\leq m\leq n$，我们可以定义下面的集合：

$$R_m:=\{r>0:B(e,r)\subseteq E_m\}$$

根据结论(a)，由于对任意$1 \leq m \leq n$都有e是E_m的内点，因此R_m都是非空的。于是根据选择公理，对任意$1 \leq m \leq n$我们都可以指定一个$r_m \in R_m$，换句话说，我们可以组成下面这样一个有限集$\mathcal{R}$：

$$\mathcal{R} := \{r_m : 1 \leq m \leq n\}$$

由于$\mathcal{R}$是有限的，因此其下确界必然属于自身，换言之，必然存在一个$1 \leq m_0 \leq n$使得对任意$1 \leq m \leq n$都有$r_{m_0} \leq r_m$，从而对任意$1 \leq m \leq n$有：

$$B(e, r_{m_0}) \subseteq B(e, r_m) \subseteq E_m$$

于是任意$x \in B(e, r_{m_0})$都满足对任意$1 \leq m \leq n$有$x \in E_m$，从而有$B(e, r_{m_0}) \subseteq E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n$，根据结论(a)可得$E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n$是开的。

然后证明第二个结论，根据结论(b)即证明：对于$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$中的任意一个收敛序列$(x_i)_{i=0}^{\infty}$，都有$x := \lim\limits_{i \to \infty} x_i$属于$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$。

注意到$(x_i)_{i=0}^{\infty}$必然满足：至少存在一个$1 \leq m \leq n$使得对任意的$j \geq 0$，都存在一个$i > j$使得$x_i \in E_m$。这是因为：

> 使用反证法，假设对任意$1 \leq m \leq n$都存在$j_m \geq 0$使得对任意的$i > j_m$都有$x_i \notin E_m$，注意到集合：
>
> $$\{j_m : 1 \leq m \leq n\}$$
>
> 是有限的，因此其上确界应当属于自身，我们记为j，从而对任意的$i > j$，对任意$1 \leq m \leq n$都有：
>
> $$i > j \geq j_m \implies x_i \notin E_m$$
>
> 但是由于$(x_i)_{i=0}^{\infty}$是由$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$中元素构成的序列，因此至少应该存在一个$1 \leq m_0 \leq n$使得$x_i \in E_{m_0}$，于是导出了矛盾，反证假设不成立。

于是我们可以构建下面的递推关系：定义$b(0) := \min\{i \in \mathbb{N} : x_i \in E_m\}$，然后对任意$i > 0$，定义$b(i)$为：

$$b(i) := \min\{j \in \mathbb{N} : j > b(i-1) \text{且} x_j \in E_m\}$$

由于上面的性质，因此这个定义总是有效的，并且$(x_{b(i)})_{i=0}^{\infty}$是一个完全由$E_m$中元素组成的点列。于是根据子序列的定义，我们有序列$(d(x_{b(i)}, x))_{i=0}^{\infty}$是序列$(d(x_i, x))_{i=0}^{\infty}$的一个子序列，于是根据命题6.6.5有：

$$\lim_{n \to \infty} d(x_{b(i)}, x) = \lim_{n \to \infty} d(x_i, x)$$

由于$(x_i)_{i=0}^{\infty}$依度量d收敛于x，于是根据依度量收敛的定义有上面的极限等于0，进而$(x_{b(i)})_{i=0}^{\infty}$是依度量$d$收敛于$x$的。根据命题12.2.10有$x$也是$E_m$的一个附着点，从而根据$E_m$是闭的与结论(b)可以得到$x \in E_m \implies x \in E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$。

综上，于是根据结论(b)可以得到$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$是闭的。

---

7. 如果$\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$是$X$中的一簇开集（这里的指标集没有限制，可以是无限的或者有限的），那么并集$\bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$也是开的；如果$\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$是$X$中的一簇闭集，那么交集$\bigcap\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$也是闭的。

先证明第一个结论，如果$\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$X$中的一簇开集，则对任意$e\in\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha$，存在一个$\beta\in I$使得$e\in E_\beta$。由于$E_\beta$是开集，于是存在一个$r>0$使得$B(e,r)\subseteq E_\beta\implies B(e,r)\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha$，从而根据结论(a)可以得到$\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha$是开的。

再证明第二个结论，如果$\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$X$中的一簇闭集，则对$\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha$中的任意一个收敛序列$(x_n)_{n=m}^{\infty}$，特别地对任意$\alpha\in I$都有$(x_n)_{n=m}^{\infty}$是$E_\alpha$中的收敛序列。由于$E_\alpha$是闭集，根据结论(b)应该有$x:=\lim_{n\to\infty}x_n$属于$E_\alpha$。综合可得对任意$\alpha\in I$都有$x\in E_\alpha$，即有$x\in\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha$，于是此时根据结论(b)可以得到$\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha$是闭的。

---

8. 如果E是X的任意一个子集，那么$\mathrm{int}(E)$是包含在E中的最大开集。换言之，$\mathrm{int}(E)$是开集，并且对任意给定的其它开集$V\subseteq E$均有$V\subseteq\mathrm{int}(E)$；类似地，$\overline{E}$是包含$E$中的最小闭集。换言之，$\overline{E}$是闭集，并且对任意给定的其它闭集$K\supseteq E$均有$K\supseteq\overline{E}$。

先证明第一个结论，考虑任意的V是开集且$V\subseteq E$，则根据结论(a)对任意的$v\in V$都存在$r>0$使得$B(v,r)\subseteq V\implies B(v,r)\subseteq E$，于是根据内点定义我们有$v$也是$E$的内点，即有$v\in\mathrm{int}(E)$，于是我们总能得到$V\subseteq\mathrm{int}(E)$。

然后证明$\mathrm{int}(E)$是开集，对任意的$e\in\mathrm{int}(E)$，都存在$r>0$使得$B(e,r)\subseteq E$。根据结论(c)我们知道$B(e,r)$是一个开集，从而根据上面的讨论可以得到$B(e,r)\subseteq\mathrm{int}(E)$，于是此时根据结论(a)可以直接得证$\mathrm{int}(E)$是开的，第一个结论证明完毕。

接着证明第二个结论，考虑任意的K是闭集且$E\subseteq K$，由于闭包$\overline{E}$包含了E所有的附着点，于是根据命题12.2.10对任意的$x\in\overline{E}$，存在一个完全由E中元素组成的序列$(x_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于x，注意到由于$E\subseteq K$因此$(x_n)_{n=m}^{\infty}$也是完全由K中元素组成的，因此结合K是闭集与结论(b)可以得到$x\in K$，于是我们总能得到$\overline{E}\subseteq K$。

然后证明$\overline{E}$是闭的，考虑任意的完全由$\overline{E}$中元素组成的收敛序列$(b_n)_{n=0}^{\infty}$，不妨设其依度量d收敛于c，即有：

$$\lim_{n\to\infty}d(b_n,c)=0$$

然后由于$\overline{E}$中元素都是E的附着点，于是根据附着点的定义，对任意的$n\in\mathbb{N}$，集合$B(b_n,d(b_n,c))\cap E$总是非空的。从而根据选择公理，我们可以为每一个$n\in\mathbb{N}$指定一个$a_n\in B(b_n,d(b_n,c))\cap E$。于是$a_n$满足$a_n\in E$且：

$$d(a_n,b_n)\le d(b_n,c)\implies d(a_n,c)\le d(a_n,b_n)+d(b_n,c)\le 2d(b_n,c)$$

于是对实数序列$(d(a_n,c))_{n=0}^{\infty}$，可以根据比较原理得到它的极限值为：

$$0\le d(a_n,c)\le 2d(b_n,c)\implies\lim_{n\to\infty}d(a_n,c)=0$$

即有$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是依度量d收敛于c的，又因为$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是完全由E中点组成的，于是c也是E的附着点，从而根据闭包的定义有$c\in\overline{E}$，然后根据结论(b)可以得到$\overline{E}$是闭的。

综上，于是证明完毕。

12.2.4 设(X,d)是一个度量空间，x_0是X中的一个点，并设$r>0$。设B是开球$B:=B(x_0,r)=\{x\in X:d(x,x_0)<r\}$，并设$C$是闭球$C:=\{x\in X:d(x,x_0)\le r\}$

(a) 证明：$\overline{B}\subseteq C$

> 根据命题12.2.15(c)我们有C是闭的，并且注意到$B\subseteq C$，然后根据命题12.2.15(h)有$\overline{B}$是包含B的最小闭集，于是只能有$\overline{B}\subseteq C$。

(b) 举例说明，存在度量空间(X,d)，点x_0与半径r使得$\overline{B}\neq C$

> 考虑$X=\{x_0,x_1\}$与离散度量d_{disc}，点x_0与半径1。此时可以得到：
>
> $$\begin{aligned}B=\{x\in X:d_{\text{disc}}(x,x_0)<1\}=\{x_0\}\\C=\{x\in X:d_{\text{disc}}(x,x_0)\le 1\}=\{x_0,x_1\}\end{aligned}$$
>
> 然后根据命题12.2.5(d)我们可以得到$\overline{B}=B=\{x_0\}$，从而此时有$\overline{B}\neq C$。

本节相关跳转

[实分析 8.4 选择公理]

[实分析 9.1 实直线的子集]