

6.2 广义实数系

定义

- (6.2.1 广义实数系) 附加上两个额外元素 $+\infty$ 与 $-\infty$ 的实直线 \mathbb{R} 就是**广义实数系** \mathbb{R}^* , 其中 $+\infty$ 与 $-\infty$ 互不相同, 并且它们与每一个实数都不相同。一个**广义实数** x 是**有限的**, 当且仅当它是一个实数; 一个广义实数是**无限的**, 当且仅当它等于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 。
- (6.2.2 广义实数的负运算) 通过额外定义:

$$-(+\infty) := -\infty$$

$$-(-\infty) := +\infty$$

由此将 \mathbb{R} 上的负运算 $x \rightarrow (-x)$ **推广**到广义实数系 \mathbb{R}^* 上。于是每个广义实数都有一个负数, 且 $-(-x) = x$ 总是成立。

- (6.2.3 广义实数的排序) 称 $x \leq y$, 当且仅当下列三个命题有一个为真:

- x 和 y 都是实数, 并且满足 $x \leq y$ 。
- $y = +\infty$ 。
- $x = -\infty$ 。

如果 $x \leq y$ 且 $x \neq y$, 那么称 $x < y$ 。有时可以将 $x < y$ 与 $x \leq y$ 写作 $y > x$ 与 $y \geq x$ 。

- (6.2.6 广义实数的上确界与下确界) 设 E 是 \mathbb{R}^* 的一个子集, 则根据下述法则确定 E 的上确界或最小上界 $\sup(E)$:

- 如果 E 包含在 \mathbb{R} 中, 则根据定义5.5.10确定 $\sup(E)$ 。
- 如果 E 包含 $+\infty$, 则令 $\sup(E) := +\infty$ 。
- 如果 E 包含 $-\infty$ 且不包含 $+\infty$, 则令 $\sup(E) := \sup(E \setminus \{-\infty\})$ 从而根据结论(a)来确定 E 的最小上界。

又定义 E 的下确界 $\inf(E)$ 为:

$$\inf(E) := -\sup(-E)$$

(其中 $-E$ 为集合 $\{-x : x \in E\}$)

(顺便贴下[定义5.5.10](#)防查看麻烦):

设 E 是实数集的一个子集, 如果 E 是非空的并且存在一个上界, 则定义 $\sup(E)$ 为 E 的最小上界(由[定理5.5.9](#)可知, 该定义是明确的)。额外引入两个符号 $+\infty$ 与 $-\infty$ 。如果 E 是非空的并且没有上界, 则令 $\sup(E) := +\infty$; 如果 E 是空集, 则定义 $\sup(E) := -\infty$, 称 $\sup(E)$ 是 E 的**上确界**, 也可以记作 $\sup E$ 。

命题

- (6.2.5 广义实数的性质?) 设 x, y, z 为广义实数, 则下述命题为真:

- (自反性) $x \leq x$ 。
- (三歧性) $x < y, x = y, x > y$ 三者恰有一个为真。
- (传递性) 若有 $x < y$ 与 $y < z$ 成立, 则 $x < z$ 为真。
- (负运算改变序) 若有 $x \leq y$ 成立, 则有 $-y \leq -x$ 成立。

2. (6.2.11 上确界与下确界性质) 设 E 是 \mathbb{R}^* 的一个子集, 则有下列命题为真:

- 对任意 $x \in E$, 有 $x \geq \inf(E)$ 与 $x \leq \sup(E)$ 恒成立。
- 对任意 M 为 E 的上界, 有 $M \geq \sup(E)$ 。
- 对任意 M 为 E 的下界, 有 $M \leq \inf(E)$ 。

(M 是 E 的上界, 即对任意 $x \in E$, 有 $M \geq x$, 下界类似)

课后习题

6.2.1 证明命题6.2.5 (提示: 你可能会用到命题5.4.7)

即在 x, y, z 为广义实数的前提下证明:

- $x \leq x$ 。

不妨对 x 讨论:

- 若 x 是有限的, 那么根据命题5.4.7结论此时结论成立。
- 若 $x = +\infty$, 则此时根据定义6.2.3可得结论成立。
- 若 $x = -\infty$, 则此时根据定义6.2.3可得结论成立。

于是结论得证。

- $x < y, x = y, x > y$ 三者恰有一个为真。

我们对 x, y 讨论, 可以得到下表:

	x 是有限的	$x = -\infty$	$x = +\infty$
y 是有限的	根据命题5.4.7(a), 此时有结论成立	根据定义6.2.3, 此时有 $x < y$ 成立	根据定义6.2.3, 此时有 $x > y$ 成立
$y = -\infty$	根据定义6.2.3, 此时有 $y < x$ 成立	根据定义6.2.1, 此时有 $y = x$ 成立	根据定义6.2.3, 此时有 $y < x$ 成立
$y = +\infty$	根据定义6.2.3, 此时有 $x < y$ 成立	根据定义6.2.3, 此时有 $x < y$ 成立	根据定义6.2.1, 此时有 $y = x$ 成立

综上, 于是始终有 $x < y, x = y, x > y$ 三者恰有一个为真, 结论得证。

- 若有 $x < y$ 与 $y < z$ 成立, 则 $x < z$ 为真。

x, y, z 都是有限的情况下必然有结论成立, 我们考虑 x, y, z 中存在无限的情况。

首先我们注意到以下两个事实:

- x, y 不可能是 $+\infty$, 若有 x, y 是 $+\infty$ 那么根据前提条件有 $x < y$ 与 $y < z$, 根据定义6.2.3, $+\infty \leq a$ 当且仅当 $a = +\infty$, 但是此时必然有 $a = +\infty$, 于是不存在有 $+\infty < a$ 对某个广义实数 a 成立。
- y, z 不可能是 $-\infty$, 若有 y, z 是 $-\infty$ 那么根据前提条件有 $x < y$ 与 $y < z$, 根据定义6.2.3, $-\infty \geq a$ 当且仅当 $a = -\infty$, 但是此时必然有 $a = -\infty$, 于是不存在有 $-\infty > a$ 对某个广义实数 a 成立。

综上, 可以得到必然有: x 为 $-\infty$ 或有限; y 必然有限; z 必然有限或为 $+\infty$ 。

于是分类讨论，得到下表：

	x 有限	x 为 $-\infty$
z 有限	由命题5.4.7(c)得证结论。	由定义6.2.3，必然有 $x < z$ 成立。
z 为 $+\infty$	由定义6.2.3，必然有 $x < z$ 成立。	由定义6.2.3，必然有 $x < z$ 成立。

综上，于是结论得证。

- 若有 $x \leq y$ 成立，则有 $-y \leq -x$ 成立。

我们对 x, y 讨论，可以得到下表：

	x 是有限的	$x = -\infty$	$x = +\infty$
y 是有限的	根据命题5.4.7(d)，不等式两边同时加上 $-(x+y)$ ，此时不等式变为 $-y \leq -x$ ，于是结论成立。	根据定义6.2.2与定义6.2.3，此时有 $-y \leq -x \iff -y \leq +\infty$ ，由于 $-y$ 有限，于是不等式成立，于是结论成立。	此时 $x > y$ ，不在题目条件限制范围内。
$y = -\infty$	此时 $x > y$ ，不在题目条件限制范围内。	此时 $x = y$ ，不在题目条件限制范围内。	此时 $x > y$ ，不在题目条件限制范围内。
$y = +\infty$	根据定义6.2.2与定义6.2.3，此时有 $-y \leq -x \iff -\infty \leq -x$ ，由于 $-x$ 有限，于是不等式成立，于是结论成立。	根据定义6.2.2与定义6.2.3，此时有 $-y \leq -x \iff -\infty \leq +\infty$ 为真，于是结论成立。	根据定义6.2.2与定义6.2.3，此时有 $-y \leq -x \iff -\infty \leq -\infty$ 为真，于是不等式成立，于是结论成立。

综上，于是结论：若有 $x \leq y$ 成立，则有 $-y \leq -x$ 成立得证。

6.2.2 证明定理6.2.11 (提示：你可能要用到根据 $+\infty$ 和 $-\infty$ 是否属于 E 来分情况考虑。如果 E 中只包含实数，那么你当然可以利用定义5.5.10)

即证明对 E 是 \mathbb{R}^* 的子集，有：

- 对任意 $x \in E$ ，有 $x \geq \inf(E)$ 与 $x \leq \sup(E)$ 恒成立。

对 $x \leq \sup(E)$ 讨论：

- 根据定义6.2.6，对 E 包含 $+\infty$ 时的情况，此时 $\sup(E) = +\infty$ ，而对任意广义实数 x ，都有 $x \leq +\infty$ 成立，于是此时成立结论。
- 根据定义6.2.6，对 E 是 \mathbb{R} 的子集的情况，此时我们根据定义5.5.3进行讨论：
 - 若 E 无上界且非空，则此时 $\sup(E) = +\infty$ ，而对任意广义实数 x ，都有 $x \leq +\infty$ 成立，对任意 $x \in E$ ， x 都是广义实数，于是此时成立结论。
 - 若 E 有上界且非空，则此时 $\sup(E)$ 是 E 的最小上界，根据上界定义我们知道此时也有对任意 $x \in E$ ， $x \leq \sup(E)$ ，于是此时成立结论。
 - 若 E 为空，此时不存在 $x \in E$ ，于是 $\sup(E)$ 对任意广义实数都成立结论“对任意 $x \in E$ ， $x \leq \sup(E)$ ”。

- 根据定义6.2.6, 对 E 包含 $-\infty$ 而不含 $+\infty$ 时的情况, 此时 E 的上确界是 $E \setminus \{-\infty\}$ 的上确界, 并且我们知道对任意广义实数 x 都有 $-\infty \leq x$ 成立, 于是结合 E 是 \mathbb{R} 的子集的情况的讨论也可以得到成立结论。

综上, 对任意 $x \in E$, $x \leq \sup(E)$ 恒成立。

对 $x \geq \inf(E)$, 根据定义有 $\inf(E) = -\sup(-E)$, 其中 $-E$ 为集合 $\{-x : x \in E\}$ 。跟据前面的讨论, 我们知道对任意 $y \in -E$ 都有 $y \leq \sup(-E)$ 成立, 于是对任意 $x \in E$, 可以推论如下:

$$x \in E \iff -x \in -E \iff -x \leq \sup(-E) \iff x \geq -\sup(-E)$$

即 $x \geq \inf(E)$, 于是结论成立。

综上, 对任意 $x \in E$, $x \leq \sup(E)$ 与 $x \geq \inf(E)$ 恒成立。

- 对任意 M 为 E 的上界, 有 $M \geq \sup(E)$ 。

我们对 E 的情况进行讨论。

- 根据定义6.2.6, 对 E 包含 $+\infty$ 时的情况, 此时若 M 是 E 的上界那么必然有 $M \geq +\infty$ 成立, 根据定义6.2.3, 可以推知此时必然有 $M = +\infty$, 于是我们可以得到有 $M(+\infty) \geq \sup E(+\infty)$ 是成立的。
- 根据定义6.2.6, 对 E 是 \mathbb{R} 的子集的情况, 此时我们根据定义5.5.3进行讨论:
 - 若 E 无实数上界且非空, 则此时只有 $+\infty$ 是 E 的上界 (E 是广义实数集 \mathbb{R}^* 的子集, 而对任意广义实数 x 总有 $x \leq +\infty$ 成立), 此时 $\sup E = +\infty \leq +\infty$, 结论成立。
 - 若 E 有实数上界且非空, 则此时 $\sup E$ 是 E 的最小上界, 对任意 E 的实数上界 M 总有 $M \geq \sup E$ 成立, 此外, $+\infty$ 也是 E 的上界, 并且 $+\infty \geq \sup E$ 也成立, 于是此时结论成立。
 - 若 E 为空集, 则此时有 $\sup E = -\infty$ 。此时对任意广义 M 都应该有 M 是 E 的上界, 并且根据定义6.2.3有 $M \geq -\infty$ 始终成立, 于是此时结论成立。
- 根据定义6.2.6, 对 E 包含 $-\infty$ 且不包含 $+\infty$ 的情况, 我们先证明一个辅助结论:

对任意广义实数集 \mathbb{R}^* 的子集 E , M 是 E 的上界, 当且仅当 M 是 $E \setminus \{-\infty\}$ 的上界。

证明:

若 M 是 E 的上界, 那么对任意的 $x \in E$ 都有 $x \leq M$, 特别的, 由于 $E \setminus \{-\infty\}$ 是 E 的子集, 所以对任意 $x \in E \setminus \{-\infty\}$, 也有 $x \leq M$, 即 M 是 $E \setminus \{-\infty\}$ 的上界; 若 M 是 $E \setminus \{-\infty\}$ 的上界, 那么对任意 $x \in E \setminus \{-\infty\}$ 都有 $x \leq M$, 此外我们也有 $-\infty \leq M$ 始终成立, 于是对任意 $x \in (E \setminus \{-\infty\}) \cup \{-\infty\}$ 都有 $x \leq M$ 成立, 即对任意 $x \in E$ 都有 $x \leq M$, 于是 M 也是 E 的上界。

综上, 结论得证。

此时有 $\sup E = \sup(E \setminus \{-\infty\})$ 。对任意 M 是 E 的上界, 根据辅助结论有 M 是 $E \setminus \{-\infty\}$ 的上界。综合对 E 是 \mathbb{R} 的子集的情况的讨论, 应该有 $M \geq \sup(E \setminus \{-\infty\}) = \sup E$ 对任意 M 是 E 的上界成立, 于是此时结论成立。

综上, 题目结论得证。

- 对任意 M 为 E 的下界, 有 $M \leq \inf(E)$ 。

先证明一个辅助结论：

对任意广义实数集 \mathbb{R}^* 的子集 E ， M 为 E 的下界，当且仅当 $-M$ 为 $-E$ 的上界，其中 $-E$ 为集合 $\{-x : x \in E\}$ 。

证明：

若 M 为 E 的下界，则有对任意 $x \in E$ 都有 $x \geq M$ 成立，于是对任意 $-x \in -E$ ，有 $x \in E \iff x \geq M$ ，即 $-x \leq -M$ 。于是根据上界的定义，此时有 $-M$ 是 $-E$ 的上界。

若 $-M$ 是 $-E$ 的上界，则对任意的 $-x \in -E$ 都有 $-x \leq -M \iff x \geq M$ 成立，于是对任意 $x \in E$ ，有 $-x \in -E$ ，即 $x \geq M$ 成立，于是根据下界的定义，此时有 M 是 E 的下界。

综上，结论得证。

于是对于任意 M 是 E 的下界，根据辅助结论，于是 $-M$ 是 $-E$ 的上界，根据结论(b)，此时有 $-M \geq \sup(-E)$ 成立，这等价于结论 $M \leq -\sup(-E)$ ，根据下确界的定义，于是 $M \leq \inf(E)$ 成立，结论得证。

本节相关跳转

[实分析 5.4 对实数排序](#)

[实分析 5.5 最小上界性质](#)