9.10 在无限处的极限

定义

1. （9.10.1 无限附着点）设X是$\mathbb{R}$的一个子集，我们称$+\infty$是**附着于**X的，当且仅当对任意的$M \in \mathbb{R}$都存在一个$x \in X$使得$x > M$；我们称$-\infty$是**附着于**X的，当且仅当对任意的$M \in \mathbb{R}$都存在一个$x \in X$使得$x < M$。换言之，$+\infty$是附着于X的，当且仅当X没有上界（即$\sup(X) = +\infty$）；类似地，$-\infty$是附着于X的，当且仅当X没有下界（即$\inf(X) = +\infty$）。于是一个集合是有界的，当且仅当$+\infty$与$-\infty$都不是它的附着点。

   （注：这个定义同我们在定义9.1.8中看到的附着概念相当不同，但是利用广义实数系$\mathbb{R}^*$的拓扑结构我们可以将它们统一起来，这里我们不作展开讨论，仅需要知道这点即可）

2. （9.10.3 在无限处的极限）设X是$\mathbb{R}$的一个子集，并且$+\infty$是X的附着点，设$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数。我们称当$x \to +\infty$时，$f(x)$沿着X收敛于L，并记为$\lim\limits_{x \to +\infty; x \in X} f(x) = L$，当且仅当对于任意$\varepsilon > 0$都存在一个$M$使得$f$在$X \cap (M, +\infty)$上是$\varepsilon$-接近于$L$的。（即对所有满足$x > M$的$x \in X$，均有$|f(x) - L| \leq \varepsilon$）；类似地，我们称当$x \to -\infty$时，$f(x)$收敛于$L$，当且仅当对于任意$\varepsilon > 0$都存在一个$M$使得$f$在$X \cap (-\infty, M)$上是$\varepsilon$-接近于$L$的。

课后习题

本节相关跳转

[实分析 9.1 实直线的子集]