19.2 非负可测函数的积分

定义

1. (19.2.1 从上方控制)设$f:\Omega\to\mathbb{R}$和$g:\Omega\to\mathbb{R}$都是函数。我们称f**从上方控制**g，或者g**从下方控制**f，当且仅当对于所有的$x\in\Omega$都有$f(x)\geq g(x)$。

   (注：这个概念同定义11.3.1是一样的；有时候我们使用"f支配g"来代替"f从上方控制g")

2. (19.2.2 非负函数的勒贝格积分)设Ω是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$f:\Omega\to[0,\infty]$是一个非负的可测函数。那么，我们把f在Ω上的**勒贝格积分**$\int_\Omega f$定义为：

   $$\int_\Omega f:=\sup\left\{\int_\Omega s: s\text{是一个简单函数，且}s\text{从下方控制}f\right\}$$

   (注：应当将这个概念同定义11.3.2中的下黎曼积分的概念作比较。有趣的是，在这里我们不需要让这个下积分与上积分相等（个人理解，因为可测函数上可以取到∞，而简单函数值域仍然限制在$\mathbb{R}$，追求上积分的数据有些情况下是不可能找到合适的简单函数）；如果Ω'是Ω的一个可测子集，那么通过把f限制到Ω'，我们也可以将$\int_{\Omega'}f$定义为$\int_{\Omega'}f:=\int_{\Omega'}f|_{\Omega'}$；特别地，我们需要注意到这个定义与19.1节中非负简单函数的勒贝格积分概念是一致的（这一点很好证明，如果需要思路可以参阅原书注19.2.4与注19.2.5之间的内容））

命题

1. (19.2.6)设Ω是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$f:\Omega\to[0,\infty]$是$g:\Omega\to[0,\infty]$都是非负可测函数，那么有：

   > 1. $0\leq\int_\Omega f\leq\infty$。另外，$\int_\Omega f=0$当且仅当$f(x)=0$几乎对于$\Omega$中的每一个$x$都成立。
   > 2. 对于任意的正数c，有$\int_\Omega cf=c\int_\Omega f$。
   > 3. 如果对于所有的$x\in\Omega$都有$f(x)\leq g(x)$，那么$\int_\Omega f\leq\int_\Omega g$。
   > 4. 如果$f(x)=g(x)$几乎对于Ω中的每一个x都成立，那么$\int_\Omega f=\int_\Omega g$。
   > 5. 如果$\Omega'\subseteq\Omega$是一个可测集，那么$\int_{\Omega'}f=\int_\Omega f\chi_{\Omega'}\leq\int_\Omega f$。

   (注：命题19.2.6(d)是一个相当有趣的结论，它指出我们可以修改函数在任意测度为零的集合上的值（例如，你可以修改函数在每一个有理数上的值），而且这不会对其积分值产生任何影响。这似乎表明测度为零的点集对函数积分的结果没有任何"贡献"，只有正测度的点集才会对积分产生影响；在黎曼积分的同一进度下我们还给出了积分和加法的可交换性（即$\int_\Omega(f+g)=\int_\Omega f+\int_\Omega g$），但是对于勒贝格积分，证明这一点并不那么容易，参见原书引理19.2.10的证明)

2. (19.2.9 勒贝格单调收敛定理)设Ω是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$(f_n)_{n=1}^\infty$是一个非负可测函数序列，其中$f_i:\Omega\to\mathbb{R}$，而且这个序列还是单调递增的，即对于每一个$x\in\Omega$都有：

   $$0\leq f_1(x)\leq f_2(x)\leq f_3(x)\leq\ldots$$

于是有：

$$0 \leq \int_\Omega f_1 \leq \int_\Omega f_2 \leq \int_\Omega f_3 \leq \ldots$$

和

$$\int_\Omega \sup_n f_n = \sup_n \int_\Omega f_n$$

3. (19.2.10 交换加法运算与积分运算的次序) 设Ω是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$f:\Omega \to [0,\infty]$是$g:\Omega \to [0,\infty]$都是可测函数，那么$\int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g$。

> 推论：
>
> 1. (19.2.11 无限和运算？) 设Ω是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$g_1, g_2, \ldots$是一个非负可测函数序列，其中$g_i:\Omega \to [0,\infty]$，那么有$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega g_n$。
>
>   (注：需要注意的是，我们不必对上面的和式做收敛性的假设（它们可以同时等于$+\infty$），但是有必要假定函数的非负性，参见习题19.2.4)

4. (19.2.13 法都引理) 设Ω是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$g_1, g_2, \ldots$是一个从Ω到$[0,\infty]$的非负可测函数序列，那么有：

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$$

(注：我们会很自然地提问能否交换极限运算与积分运算的次序，也就是问是否成立有等式$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$，但是很遗憾的是这个结论同黎曼积分时一样并不成立，一个很有用的例子就是所谓的"移动颠簸"函数序列，考虑$f_n:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$是函数$f_n = \chi_{[n,n+1)}$，那么显然对于每一个$x$有$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$且对每一个$n$有$\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$，从而得到$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n = 0$与$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n = 1$，也就是说极限函数$\lim_{n\to\infty} f_n$的积分最终将小于任何一个初始积分。但是，法都引理给出了一个结果，即反过来的结论是不成立的，极限函数的积分不可能大于初始积分的极限；这个引理的证明可以很简单地由勒贝格单调收敛定理得证，参见原书)

5. (19.2.14) 设Ω是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$f:\Omega \to [0,\infty]$是一个非负可测函数，并且$\int_\Omega f$是有限的。那么f几乎处处有限，也即有集合$\{x \in \Omega : f(x) = +\infty\}$的测度为$0$。

   (注：这个引理说明了只要积分是有限的，那么函数一定几乎处处有限)

6. (19.2.15 Borel-Cantelli引理) $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$是$\mathbb{R}^n$的一列可测子集，并且$\sum_{n=1}^{\infty} m(\Omega_n)$是有限的。那么集合：

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \text{存在无限多个}n\text{使得}x \in \Omega_n\}$$

的测度为零。换言之，几乎每一个点都只属于有限多个Ω_n。

课后习题

19.2.1 证明命题19.2.6（提示：不要试图模仿命题19.1.10的证明，而应该试着使用命题19.1.10和定义19.2.2。对于(a)的一个方向，从$\int_{\Omega} f = 0$入手推导出“对于每一个$n = 1, 2, 3, \ldots$都有$m(\{x \in \Omega : f(x) > 1/n\}) = 0$”，然后再使用可数次可加性。为了证明(e)，先证明它关于简单函数的结果）

> 逐条证明：
>
> ---
>
> 1. $0 \leq \int_{\Omega} f \leq \infty$。另外，$\int_{\Omega} f = 0$当且仅当$f(x) = 0$几乎对于$\Omega$中的每一个$x$都成立。
>
> 首先证明$0 \leq \int_{\Omega} f \leq \infty$。注意到常数函数$0 : \Omega \to \mathbb{R}$（$0(x) := 0$）显然是下方控制每一个$f$的简单函数，从而根据上确界的要求即有$0 \leq \int_{\Omega} f$；另一方面，简单函数的积分都小于等于$+\infty$，从而同样根据上确界的要求我们有$\int_{\Omega} f \leq +\infty$。
>
> 然后我们证明$\int_{\Omega} f = 0$当且仅当$f(x) = 0$几乎对于Ω中的每一个x都成立。若$f(x) = 0$几乎对于Ω中的每一个x都成立，那么我们设
>
> $$E := \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$$
>
> （于是$m(E) = 0$）。此时考虑任意一个从下方控制f的简单函数s，都有对于所有$x \in \Omega \backslash E$满足$s(x) \leq f(x) = 0 \implies s(x) = 0$，于是$s$也是满足$s(x) = 0$几乎对于$\Omega$中的每一个$x$都成立的函数，此时根据命题19.1.10(a)的结论有$\int_{\Omega} s = 0$。从而我们得到了：
>
> $$\left\{\int_{\Omega} s : s\text{是一个简单函数，且}s\text{从下方控制}f\right\} = \{0\} \implies \int_{\Omega} f = \sup\{0\} = 0$$
>
> 反过来，若有$\int_{\Omega} f = 0$，则我们考虑E_n（$n \geq 1$）是下面的集合：
>
> $$E_n := f^{-1}((1/n, \infty]) = \{x \in \Omega : f(x) > 1/n\}$$
>
> 根据可测函数的定义（定义18.5.9）我们有E_n都是可测的，然后我们可以注意到显然有$m(E_n) = 0$对所有$n = 1, 2, 3, \ldots$都成立。否则若有$j \geq 1$满足$m(E_j) \neq 0$，则我们可以定义下面的简单函数：
>
> $$s_j = \frac{1}{j}\chi_{E_j}$$
>
> 显然s_j是从下方控制f的函数，那么一方面根据定义有$\int_{\Omega} s_j \leq \int_{\Omega} f = 0$，另一方面又有$\int_{\Omega} s_j = \frac{1}{j}m(E_j) + 0 \cdot m(\Omega \backslash E_j) = 0$导出了矛盾。于是根据测度的可数次可加性我们有：
>
> $$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \implies m(\{x \in \Omega : f(x) > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$
>
> 由于测度非负从而我们有$m(\{x \in \Omega : f(x) > 0\}) = 0$，因此也即有$f(x) = 0$几乎对于$\Omega$中每一个$x$都成立。
>
> ---

2. 对于任意的正数c，有$\int_\Omega cf = c\int_\Omega f$。

我们需要注意到下面的事实，若s是一个从下方控制f的简单函数，那么cs就是从下方控制cf的简单函数；若s是一个从下方控制cf的简单函数，那么s/c就是从下方控制f的简单函数。（这一点是显然的）

于是我们令有：

$$E := \left\{\int_\Omega s : s\text{是一个简单函数，且}s\text{从下方控制}f\right\}$$
$$F := \left\{\int_\Omega s : s\text{是一个简单函数，且}s\text{从下方控制}cf\right\}$$

对任意的s是从下方控制f的简单函数，由于cs是从下方控制cf的简单函数，结合命题19.1.10(c)有：

$$c\int_\Omega s = \int_\Omega cs \leq \sup F = \int_\Omega cf$$

于是对$\int_\Omega s$取上确界即有$c\int_\Omega f \leq \int_\Omega cf$；反过来，对任意的$s$是从下方控制$cf$的简单函数，由于$s/c$是从下方控制$f$的简单函数，结合命题19.1.10(c)有：

$$\frac{1}{c}\int_\Omega s = \int_\Omega s/c \leq \sup E = \int_\Omega f$$

同样对$\int_\Omega s$取上确界即有$\frac{1}{c}\int_\Omega cf \leq \int_\Omega f \iff \int_\Omega cf \leq c\int_\Omega f$。于是综合即有$\int_\Omega cf = c\int_\Omega f$，结论得证。

---

3. 如果对于所有的$x \in \Omega$都有$f(x) \leq g(x)$，那么$\int_\Omega f \leq \int_\Omega g$。

考虑任意的s是从下方控制f的简单函数，那么显然它也是从下方控制g的简单函数，因此根据勒贝格积分的定义有：

$$\int_\Omega s \leq \int_\Omega g$$

从而我们得到$\int_\Omega g$是$\left\{\int_\Omega s : s\text{是一个简单函数，且}s\text{从下方控制}f\right\}$的一个上界，因此根据上确界的要求有$\int_\Omega f \leq \int_\Omega g$，结论得证。

---

4. 如果$f(x) = g(x)$几乎对于Ω中的每一个x都成立，那么$\int_\Omega f = \int_\Omega g$。

我们设$E := \{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$（于是$m(E) = 0$），然后我们考虑任意的$s$是从下方控制$f$的简单函数。那么根据命题19.1.10(b)，由于有$s = s\chi_E + s\chi_{\Omega\backslash E}$，因此我们有：

$$\int_\Omega s = \int_\Omega s\chi_E + \int_\Omega s\chi_{\Omega\backslash E}$$

注意到$s\chi_E$事实上是满足几乎对于Ω中的每一个x都成立$s\chi_E(x)=0$的函数，因此根据命题19.1.10(a)我们有$\int_\Omega s\chi_E=0$；另一方面，注意到由于对任意的$x\in\Omega\backslash E$都有$s\chi_{\Omega\backslash E}(x)=s(x)\leq f(x)=g(x)$，而对于所有的$x\in E$都有$s\chi_{\Omega\backslash E}(x)=0$，因此我们有$s\chi_{\Omega\backslash E}$是从下方控制$g$的简单函数，因此根据勒贝格积分的定义我们有：

$$\int_\Omega s\chi_{\Omega\backslash E}\leq\int_\Omega g\Longrightarrow 0+\int_\Omega s\chi_{\Omega\backslash E}=\int_\Omega s\leq\int_\Omega g$$

对$\int_\Omega s$取上确界，于是我们就得到了$\int_\Omega f\leq\int_\Omega g$。反过来对任意$t$是从下方控制$g$的简单函数讨论我们也可以得到$\int_\Omega g\leq\int_\Omega f$，于是综合即有$\int_\Omega f=\int_\Omega g$得证。

---

5. 如果$\Omega'\subseteq\Omega$是一个可测集，那么$\int_{\Omega'}f=\int_\Omega f\chi_{\Omega'}\leq\int_\Omega f$。

显然$f\chi_{\Omega'}(x)\leq f(x)$对所有的$x\in\Omega$都成立，因此后面的不等式$\int_\Omega f\chi_{\Omega'}\leq\int_\Omega f$可以直接根据结论(c)可以直接得到结论成立，因此我们只需要证明前面的等式，即要证明$\int_{\Omega'}f=\int_\Omega f\chi_{\Omega'}$即可得证结论。

先证明当f是一个简单函数时结论得证。根据引理19.1.4我们知道存在有限个非负实数$c_1,c_2,\dots,c_N$与Ω'中的有限个互不相交的可测子集$E_1,E_2,\dots,E_N$使得$f|_{\Omega'}=\sum_{n=1}^N c_n\chi_{E_n}$，于是我们可以得到其勒贝格积分为（引理19.1.9）：

$$\int_{\Omega'}f=\sum_{n=1}^N c_nm(E_n)$$

然后注意到$f\chi_{\Omega'}$可以表示为$f\chi_{\Omega'}=0\cdot\chi_{\Omega\backslash\Omega'}+\sum_{n=1}^N c_n\chi_{E_n}$，如果我们记有$c_0:=0$与$E_0:=\Omega\backslash\Omega'$，那么我们就可以得到其勒贝格积分为（引理19.1.9）：

$$\int_\Omega f\chi_{\Omega'}=\sum_{n=0}^N c_nm(E_n)=0+\sum_{n=1}^N c_nm(E_n)=\int_{\Omega'}f$$

于是在f是简单函数的情况下结论成立。

然后我们来考察f是一般的可测函数的情况，考虑$s:\Omega'\to\mathbb{R}$是从下方控制$f|\Omega'$的简单函数，此时定义函数$s':\Omega\to\mathbb{R}$：

$$s'(x):=\begin{cases}s(x) & \text{if } x\in\Omega'\\ 0 & \text{if } x\notin\Omega\end{cases}$$

从而显然有$s'|_{\Omega'}=s$且$s'\chi_{\Omega'}=s'$，那么根据我们已经证明了的在简单函数下成立的(e)结论即有：

$$\int_{\Omega'}s'=\int_\Omega s'\chi_{\Omega'}\iff\int_{\Omega'}s=\int_\Omega s'$$

此时再注意到显然有s'是从下方控制$f\chi_{\Omega'}$的函数，因此结合勒贝格积分的定义即有$\int_{\Omega'}s\leq\int_\Omega f\chi_{\Omega'}$对所有的$s$是从下方控制$f|\Omega'$的简单函数都成立。对$\int_{\Omega'}s$取上确界即有$\int_{\Omega'}f\leq\int_\Omega f\chi_{\Omega'}$。

反过来，考虑$t:\Omega\to\mathbb{R}$是从下方控制$f\chi_{\Omega'}$的简单函数，那么对于任意$x\in\Omega'$都有$t(x)\le(f\chi_{\Omega'})(x)=0$，也即有$t(x)=0$，从而我们有$t\chi_{\Omega'}=t$成立；另一方面，$t$限制在$\Omega'$上的函数$t|_{\Omega'}$显然是从下方控制$f|_{\Omega'}$的简单函数，于是根据我们已经证明了的在简单函数下成立的(e)结论有：

$$\int_{\Omega'} t=\int_{\Omega} t\chi_{\Omega'} \iff \int_{\Omega'} t=\int_{\Omega} t$$

然后由于$t|_{\Omega'}$是从下方控制$f|_{\Omega'}$的简单函数，因此有$\int_{\Omega} t\le\int_{\Omega'} f$，然后对$\int_{\Omega} t$取上确界即有$\int_{\Omega} f\chi_{\Omega'}\le\int_{\Omega'} f$。

从而综合即可得到有$\int_{\Omega'} f=\int_{\Omega} f\chi_{\Omega'}$，结论得证。

19.2.2 设Ω是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$f:\Omega\to[0,\infty]$是$g:\Omega\to[0,\infty]$都是可测函数。不使用定理19.2.9和引理19.2.10，证明：$\int_{\Omega}(f+g)\ge\int_{\Omega} f+\int_{\Omega} g$

考虑任意的$\varepsilon>0$，由于勒贝格积分的定义是上确界，因此分别存在从下方控制f,g的简单函数s,t满足：

$$\int_{\Omega} f\ge\int_{\Omega} s>\int_{\Omega} f-\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\int_{\Omega} g\ge\int_{\Omega} t>\int_{\Omega} g-\frac{\varepsilon}{2}$$

又因为$s+t$显然是从下方控制$f+g$的函数，因此结合命题19.1.10(b)的结论有：

$$\int_{\Omega}(f+g)\ge\int_{\Omega}(s+t)=\int_{\Omega} s+\int_{\Omega} t>\int_{\Omega} f+\int_{\Omega} g-\varepsilon$$

由于ε是任意的正数，因此也即有$\int_{\Omega}(f+g)\ge\int_{\Omega} f+\int_{\Omega} g$，结论得证。

19.2.3 证明推论19.2.11（提示：对$f_N:=\sum_{n=1}^{N} g_n$使用单调收敛定理）

对任意的$N\ge 1$，我们定义函数f_N：

$$f_N:=\sum_{n=1}^{N} g_n$$

由于g_n都是非负的，因此f_N显然是一个单调递增的可测函数序列，于是根据勒贝格单调收敛定理我们有：

$$\int_{\Omega}\sup_N f_N=\sup_N\int_{\Omega} f_N$$

但是另一方面，根据引理19.2.10与命题6.3.8，我们有：

$$\int_{\Omega}\sup_N f_N=\int_{\Omega}\sup_N\sum_{n=1}^{N} g_n=\int_{\Omega}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} g_n=\int_{\Omega}\sum_{n=1}^{\infty} g_n$$
$$\sup_N\int_{\Omega} f_N=\sup_N\left(\int_{\Omega}\sum_{n=1}^{N} g_n\right)=\sup_N\left(\sum_{n=1}^{N}\int_{\Omega} g_n\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{\Omega} g_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega} g_n$$

> 从而即有$\int_\Omega \sum_{n=1}^\infty g_n = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega g_n$，结论得证。

19.2.4 对于每一个$n = 1, 2, 3, \dots$，设$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是函数$f_n = \chi_{[n,n+1)} - \chi_{[n+1,n+2)}$。即当$x \in [n, n+1)$时，$f_n(x)$等于$+1$；当$x \in [n+1, n+2)$时，$f_n(x)$等于$-1$，并且在其它任何点处$f_n(x)$都等于零。证明：

$$\int_\mathbb{R} \sum_{n=1}^\infty f_n \neq \sum_{n=1}^\infty \int_\mathbb{R} f_n$$

解释一下，这为什么不与推论19.2.11相矛盾

> （假设在19.1节中定义的勒贝格积分概念可以用于计算存在负数取值的简单函数，且计算方法同原来一致）
>
> 我们可以注意到对每一个$n = 1, 2, 3, \dots$都有：
>
> $$\int_\mathbb{R} f_n = 1 \cdot m([n, n+1)) - 1 \cdot m([n+1, n+2)) = 1 - 1 = 0$$
>
> 于是也即有$\sum_{n=1}^\infty \int_\mathbb{R} f_n = \sum_{n=1}^\infty 0 = 0$；同时部分和函数：
>
> $$g_N := \sum_{n=1}^N f_n = \chi_{[1,2)} - \chi_{[2,3)} + \chi_{[2,3)} - \dots - \chi_{[N+1,N+2)} = \chi_{[1,2)} - \chi_{[N+1,N+2)}$$
>
> 从而显然有：
>
> $$\int_\mathbb{R} \sum_{n=1}^\infty f_n = \int_\mathbb{R} \lim_{N\to\infty} g_N = \int_\mathbb{R} \chi_{[1,2)} = 1 \cdot m([1,2)) = 1$$
>
> 从而即$\int_\mathbb{R} \sum_{n=1}^\infty f_n \neq \sum_{n=1}^\infty \int_\mathbb{R} f_n$得证。之所以不与推论19.2.11相矛盾是因为推论19.2.11要求可测函数序列是非负的情况下才成立结论，而f_n显然不是一个非负的可测函数列。

19.2.5 证明引理19.2.14

> 不妨使用反证法，若有f是满足$\int_\Omega f$是有限的且f并不是几乎在Ω中的每一点x处有限的可测函数。那么我们记有：
>
> $$I = \int_\Omega f$$
> $$E = \{x \in \Omega : f(x) = \infty\}$$
>
> 于是反证假设即$I \in \mathbb{R}^+$且$m(E) = l > 0$。于是我们定义函数$s : \Omega \to \mathbb{R}$有：
>
> $$s(x) := \begin{cases} (2I+1)/l & \text{if } x \in E \\ 0 & \text{if } x \notin E \end{cases}$$
>
> 那么显然s是一个简单函数，并且根据定义19.1.6可以直接计算它的勒贝格积分$\int_\Omega s = \frac{2I+1}{l} m(E) = 2I + 1$；但是另一方面，根据勒贝格积分的定义又要求$\int_\Omega s \leq \int_\Omega f = I$，而$I$作为一个正实数不可能大于等于$2I+1$，这就导出了矛盾，因此反证假设不成立，若有$\int_\Omega f$有限则$f$必须满足几乎在$\Omega$中的每一点$x$处有限。
>
> 综上，于是引理19.2.14得证。

19.2.6 利用推论19.2.11和引理19.2.14取证明引理19.2.15（提示：使用指示函数χ_{Ω_n}）

> 我们定义函数：
>
> $$f=\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{\Omega_i}$$
>
> 于是根据推论19.2.11我们显然有$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}f=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{\Omega_i}=\sum_{i=1}^{\infty}m(\Omega_i)$是有限的。于是根据引理19.2.14我们可以知道$f$几乎在$\mathbb{R}^n$中的每一点$x$处都是有限的。然后再注意到：
>
> $$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{\Omega_i}(x)=\#(\{i\geq 1:x\in\Omega_i\})$$
>
> 即f在x处的函数值恰好是包含x的Ω_i数量，从而由于$\{x\in\mathbb{R}^n:f(x)=+\infty\}$测度为0也就表明了集合
>
> $$\{x\in\mathbb{R}^n:\text{存在无限多个}n\text{使得}x\in\Omega_n\}$$
>
> 的测度为0，于是引理19.2.15得证。

19.2.7 设$p>2$且$c>0$，利用Borel-Cantellli引理证明集合

$$\left\{x\in[0,1]:\text{存在无限多个正整数}a\text{和}q\text{使得}\left|x-\frac{a}{q}\right|\leq\frac{c}{q^p}\right\}$$

的测度为0（提示：我们只需要考虑满足$0\leq a\leq q$的整数a（为什么？）。利用推论11.6.5证明和式$\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty}\frac{c(q+1)}{q^p}$是有限的）

> 对任意的正整数a,q，我们定义集合$\Omega(a,q)$有：
>
> $$\Omega(a,q):=\left[\frac{a}{q}-\frac{c}{q^p},\frac{a}{q}+\frac{c}{q^p}\right]\cap[0,1]$$
>
> 于是显然有$x\in\Omega(a,q)$当且仅当x满足$\left|x-\frac{a}{q}\right|\leq\frac{c}{q^p}$与$x\in[0,1]$同时成立。从而只要能够证明$\displaystyle\sum_{(a,q)\in\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+}m(\Omega(a,q))$是有限的，那么就可以根据Borel-Cantellli引理直接得到集合：
>
> $$\left\{x\in[0,1]:\text{存在无限多个正整数}a\text{和}q\text{使得}\left|x-\frac{a}{q}\right|\leq\frac{c}{q^p}\right\}$$
>
> 的测度为0。然后我们注意到：
>
> $$\sum_{(a,q)\in(\mathbb{N}^+)^2}m(\Omega(a,q))=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{\infty}m(\Omega(a,q))\tag{1}$$
>
> 我们尝试对这个级数做一些分割来完成它有限的证明。首先注意到对每一个给定的q，当a满足
>
> $$\frac{a}{q}-\frac{c}{q^p}>1\iff a\geq\frac{q^p+c}{q^{p-1}}$$
>
> 的时候，我们就可以得到$\Omega(a,q)=\varnothing$，从而有$m(\Omega(a,q))=0$，因此如果我们记$s(q):=\left\lfloor\dfrac{q^p+c}{q^{p-1}}\right\rfloor$，那么(1)式可以进一步化为：

$$\begin{aligned}\sum_{(a,q)\in\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+} m(\Omega(a,q)) &= \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{\infty} m(\Omega(a,q)) \\ &= \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{s(q)} m(\Omega(a,q))\end{aligned} \tag{2}$$

另一方面，当q满足：

$$\frac{c}{q^p} < \frac{1}{q} \iff c^{\frac{1}{p-1}} < q$$

时，我们可以得到$s(q) = q$。因此如果我们记$t := \max\left(\left\lfloor c^{\frac{1}{p-1}}\right\rfloor, 1\right)$我们可以对$(2)$式做进一步的划分：

$$\begin{aligned}\sum_{(a,q)\in(N^+)^2} m(\Omega(a,q)) &= \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{\infty} m(\Omega(a,q)) \\ &= \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{s(q)} m(\Omega(a,q)) \\ &= \sum_{q=1}^{t}\sum_{a=1}^{s(q)} m(\Omega(a,q)) + \sum_{q=t+1}^{\infty}\sum_{a=1}^{q} m(\Omega(a,q))\end{aligned} \tag{2}$$

由于第一部分是个有限级数，因此只要能证明第二部分的无限级数是有限的就能得证整个求和是有限的。然后我们考虑放缩，由于每一个$\Omega(a,q)$都是集合$\left[\frac{a}{q} - \frac{c}{q^p}, \frac{a}{q} + \frac{c}{q^p}\right]$的子集，因此根据测度的单调性要求我们有：

$$\sum_{a=1}^{q} m(\Omega(a,q)) \le \sum_{a=1}^{q} m\left(\left[\frac{a}{q} - \frac{c}{q^p}, \frac{a}{q} + \frac{c}{q^p}\right]\right) = \sum_{a=1}^{q}\frac{2c}{q^p} = \frac{2c}{q^{p-1}}$$

对所有的$q > t$都成立。然后根据推论11.6.5，由于$p > 2 \iff p - 1 > 1$，因此我们有级数：

$$\sum_{q=t+1}^{\infty}\frac{2c}{q^{p-1}}$$

收敛（于是也就是说它有限），从而再根据比较判别法我们有$\sum_{q=t+1}^{\infty}\sum_{a=1}^{q} m(\Omega(a,q))$也是收敛的（于是也是有限的），从而我们可以从$(2)$式得到级数$\sum_{(a,q)\in(\mathbb{N}^+)^2} m(\Omega(a,q))$是有限的，从而使用Borel-Cantellli引理我们得到集合：

$$\left\{x \in [0,1] : \text{存在无限多个正整数}a\text{和}q\text{使得}\left|x - \frac{a}{q}\right| \le \frac{c}{q^p}\right\}$$

的测度为0。

题外话：所以提示里面这个$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{c(q+1)}{q^p}$级数是哪冒出来的，想了半天也没拼出来，害得我陷入自我怀疑了都。

19.2.8 对于实数$x \in \mathbb{R}$，如果存在实数$p > 0$和$C > 0$，使得对于所有的非零整数q和所有的整数a都有$\left|x - \frac{a}{q}\right| > \frac{C}{|q|^p}$，那么就称$x$是丢番图数。利用习题19.2.7，证明：几乎每一个实数都是丢番图数（提示：先在区间$[0,1]$中考察，证明p和C都可以取有理数，并且还可以令$p > 2$。然后再利用"0测度集的可数并集仍然是测度为0的集合"这一事实）

> 于是也即要证明集合
>
> $$\{x \in \mathbb{R} : x\text{不是丢番图数}\}$$
>
> 的测度为0。
>
> 然后探讨一个实数x不是丢番图数的条件，根据定义我们知道x不是丢番图数当且仅当对任意的实数$p > 0$与$C > 0$，存在非零整数q与整数a满足$\left|x - \frac{a}{q}\right| \le \frac{C}{|q|^p}$。特别地，如果我们将$x$拆分成：
>
> $$\begin{cases} y = x - 1, z = 1 & \text{if } x \in \mathbb{Z} \\ y = \lfloor x \rfloor, z = x - y & \text{if } x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \implies x = y + z$$
>
> （为了防止忘了，$\lfloor x \rfloor$是x的整数部分）
>
> 那么此式子变为：
>
> $$\left|y + z - \frac{a}{q}\right| \le \frac{C}{|q|^p} \iff \left|z - \frac{a - qy}{q}\right| \le \frac{C}{|q|^p}$$
>
> 这表明x不是丢番图数当且仅当z也不是丢番图数，于是我们先考察$(0,1]$中的全体丢番图数。
>
> ---
>
> 于是我们考虑$x \in (0,1]$不是丢番图数。那么在一些特殊条件下我们可以对非丢番图数的要求做进一步地约束，例如当给定$p, C > 0$且满足$C < |x|$后，我们可以假定非丢番图数要求存在的非零整数q与整数a都是正整数：
>
> > 先证明q可以假定是正整数，令有性质$P(a,q,C,p)$表示$\left|x - \frac{a}{q}\right| \le \frac{C}{|q|^p}$成立。若有$q, a$分别是负整数与整数使得$P(a,q)$成立，那么可以注意到：
> >
> > $$\left|x - \frac{-a}{-q}\right| = \left|x - \frac{a}{q}\right| \le \frac{C}{|-q|^p}$$
> >
> > 从而也即正整数$-q$与整数$-a$同样使得$P(-a,-q)$成立，因此我们总是可以假设q是正的。
> >
> > 然后证明当q是正整数时a也可以假定是正整数，若有q, a分别是正整数与非正整数使得$P(a,q)$成立，那么我们有：
> >
> > $$\left|x - \frac{a}{q}\right| \le \frac{C}{|q|^p} \le C < |x| \le \left|x - \frac{a}{q}\right| \implies \left|x - \frac{a}{q}\right| < \left|x - \frac{a}{q}\right|$$
> >
> > 导出了矛盾，因此在$C < |x|$的条件下a只能是正整数。
>
> ---
>
> 然后对$x \in (0,1]$不是丢番图数，我们定义$C_1 := x/2$（于是$C_1 < |x|$），并且任意取一个实数$p > 2$（例如$p = 3$，此处不取具体的数字，因为用不到）。然后根据上面的子结论，由于x不是丢番图数因此存在正整数a_1, q_1满足$P(a_1, q_1, C_1, p)$成立。
>
> 然后对任意的$k \ge 2$，我们假定$C_{k-1}, a_{k-1}, q_{k-1}$都已经定义，于是我们归纳定义$C_k$为：
>
> $$C_k := \left|x - \frac{a_{k-1}}{q_{k-1}}\right| / 2$$

然后定义a_k, p_k是由x不是丢番图数预言的使得$P(a_k, q_k, C_k, p)$成立的正整数。在此定义下，我们可以注意到对每一个正自然数k都会有：

$$\left|x-\frac{a_{k+1}}{q_{k+1}}\right| \leq \frac{C_{k+1}}{(q_{k+1})^p} \leq C_{k+1} < \left|x-\frac{a_k}{q_k}\right|$$

从而必然有$(a_{k+1}, q_{k+1}) \neq (a_k, q_k)$，进一步可以引申得到对任意两个正自然数$k, s$满足$k \neq s$都有$(a_k, q_k) \neq (a_s, q_s)$。另一方面，对每一个正自然数$k$，我们都有：

$$C_{k+1} < \left|x-\frac{a_k}{q_k}\right| \leq \frac{C_k}{(q_k)^p} \leq C_k \Longrightarrow C_{k+1} < C_k$$

进一步可以引申得到对任意两个正自然数k, s满足$k < s$都有$C_k < C_s$。从而对每一个正自然数k都有：

$$\left|x-\frac{a_k}{q_k}\right| \leq \frac{C_k}{(q_k)^p} \leq \frac{C_1}{(q_k)^p} \leq \frac{1}{(q_k)^p}$$

如果令$C_0 := 1$，那么即存在给定的$p > 2$与$C_0 > 0$，x是满足属于$[0,1]$，且存在无限多个正整数a_k, q_k满足$\left|x-\frac{a_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{(q_k)^p}$成立的实数，从而即：

$$x \in \left\{y \in [0,1] : \text{存在无限多个正整数}a\text{和}q\text{使得}\left|y-\frac{a}{q}\right| \leq \frac{C_0}{q^p}\right\}$$

由于x是从$(0,1]$中任取的非丢番图数，因此上面的结论也即有：

$$\{x \in (0,1] : x\text{不是丢番图数}\} \subseteq \left\{y \in [0,1] : \text{存在无限多个正整数}a\text{和}q\text{使得}\left|y-\frac{a}{q}\right| \leq \frac{C_0}{q^p}\right\}$$

然后由于测度的单调性，结合习题19.2.7的结论即有$m(\{x \in (0,1] : x\text{不是丢番图数}\}) = 0$。

然后我们考虑k是任意一个整数，我们令有$\Omega_S := \{x \in S : x\text{不是丢番图数}\}$。于是考虑任意的$x \in \Omega_{(0,1]}$，根据非丢番图数的定义我们知道对任意的$p, C > 0$都存在整数$a$与非零整数$q$满足：

$$\left|x-\frac{a}{q}\right| \leq \frac{C}{|q|^p} \Longrightarrow \left|(x+k)-\frac{a-kq}{q}\right| \leq \frac{C}{|q|^p}$$

由于$a-kq$也是整数，因此这表明$x+k$也不是丢番图数，再考虑到$x+k \in (k, k+1]$，从而我们证明了$x+k \in \Omega_{(k,k+1]}$，进而也即有$k+\Omega_{(0,1]} \subseteq \Omega_{(k,k+1]}$。

另一方面，对任意的$y \in \Omega_{(k,k+1]}$，我们知道$y-k \in (0,1]$，并且对任意的$p, C > 0$都存在整数a与非零整数q满足：：

$$\left|y-\frac{a}{q}\right| \leq \frac{C}{|q|^p} \Longrightarrow \left|(y-k)-\frac{a+kq}{q}\right| \leq \frac{C}{|q|^p}$$

由于$a+kq$也是整数，因此这表明$y-k$也不是丢番图数，从而我们有$y \in k+\Omega_{(0,1]}$，进而即有$\Omega_{(k,k+1]} \subseteq k+\Omega_{(0,1]}$。综上我们得证了有对任意的整数$k$都有$\Omega_{(k,k+1]} = k+\Omega_{(0,1]}$。

最后我们来完成题目结论的证明。沿用上面Ω的定义，我们注意到：

$$\{x \in \mathbb{R} : x\text{不是丢番图数}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_{(k,k+1]} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} k+\Omega_{(0,1]}$$

而根据测度的平移不变性，我们知道对任意的整数k都有$m(k+\Omega_{(0,1]}) = m(\Omega_{(0,1]}) = 0$；另一方面，注意到对任意互不相同的两个整数$k_1, k_2$都有$k_1+\Omega_{(0,1]} \cap k_2+\Omega_{(0,1]} = \varnothing$，于是根据测度的可数可加性有：

> $$m(\{x\in\mathbb{R}:x\text{不是丢番图数}\})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}m(k+\Omega_{(0,1]})=0$$
>
> 从而题目结论得证。

19.2.9 对于每一个正整数n，设$f_n:\mathbb{R}\to[0,\infty)$是一个非负可测函数，它满足

$$\int_{\mathbb{R}}f_n\leq\frac{1}{4^n}$$

证明：对于任意的$\varepsilon>0$，存在一个勒贝格测度小于或等于ε的集合E，即$m(E)\leq\varepsilon$，它使得对于所有的$x\in\mathbb{R}\backslash E$，$f_n(x)$都收敛于零（提示：首先证明对于所有的$n=1,2,3,...$都有$m\left(\left\{x\in\mathbb{R}:f_n(x)>\frac{1}{\varepsilon 2^n}\right\}\right)\leq\frac{\varepsilon}{2^n}$，然后考察所有集合$\left\{x\in\mathbb{R}:f_n(x)>\frac{1}{\varepsilon 2^n}\right\}$的并集）

> 对每一个正整数n，定义下面的集合：
>
> $$\Omega_n:=\left\{x\in\mathbb{R}:f_n(x)>\frac{1}{\varepsilon 2^n}\right\}$$
>
> 使用反证法，我们来证明$m(\Omega_n)\leq\frac{\varepsilon}{2^n}$。若有$m(\Omega_n)>\frac{\varepsilon}{2^n}$，则考虑简单函数$s_n:=\frac{\chi_{\Omega_n}}{\varepsilon 2^n}$，则根据勒贝格积分的定义有：
>
> $$\int_{\mathbb{R}}f_n\geq\int_{\mathbb{R}}s_n=\frac{1}{\varepsilon 2^n}\cdot m(\Omega_n)>\frac{1}{\varepsilon 2^n}\frac{\varepsilon}{2^n}=\frac{1}{4^n}$$
>
> 导出了矛盾，从而反证假设不成立，必然有$m(\Omega_n)\leq\frac{\varepsilon}{2^n}$。
>
> 于是我们定义：
>
> $$E:=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$$
>
> 根据可数次可加性，我们有：
>
> $$m(E)\leq\sum_{n=1}^{\infty}m(\Omega_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$$
>
> 另一方面，对所有的$x\in\mathbb{R}\backslash E$，我们有对所有的$n\geq 1$都有$x\notin\Omega_n$，也即$f_n(x)\leq\frac{1}{\varepsilon 2^n}$，从而根据比较原理我们有：
>
> $$0\leq\lim_{n\to\infty}f_n(x)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varepsilon 2^n}=0\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$$
>
> 从而我们得证了题目结论。
>
> ---
>
> 题外话：这个结论似乎可以在一定程度上扩展？只要$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是满足$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$的实数序列且$(b_n)_{n=1}^{\infty}$是满足$\lim_{n\to\infty}b_n=0$的实数序列，同时对于每一个正整数n都有$\int_{\mathbb{R}}f_n\leq a_nb_n$，那么就有题目的结论成立。不过这么写的话那么证明思路相比题目就显得过分暴露了。

19.2.10 对于每一个正整数n，设$f_n:[0,1]\to[0,\infty)$是一个非负可测函数，而且函数序列f_n逐点收敛于0。证明：对于任意的$\varepsilon>0$，存在一个集合E，其勒贝格测度$m(E)\le\varepsilon$，它使得$f_n(x)$在$[0,1]\backslash E$上一致收敛于0（这是叶戈罗夫定理的一种特殊情形。为了证明这个结论，首先证明对于任意的正整数m，我们能够找到一个$N>0$使得$m(\{x\in[0,1]:f_n(x)>1/m\})\le\varepsilon/2^m$对所有的$n\ge N$都成立）。如果把$[0,1]$换成$\mathbb{R}$，那么结论是否仍然成立，给出说明

> 注：思路不是我的，我是菜狗抄别人的思路的。
>
> ---
>
> 设k是某个任意的正整数。对任意的正整数n，考虑定义集合：
>
> $$\Omega_k^{(n)}:=\left\{x\in[0,1]:f_n(x)>\frac{1}{k}\right\}$$
>
> 然后对任意的正整数n，考虑定义：
>
> $$F_k^{(n)}:=\bigcup_{i=n}^{\infty}\Omega_k^{(i)}$$
>
> 于是显然有$F_k^{(1)}\supseteq F_k^{(2)}\supseteq\dots$是一个单调递减的集合序列，并且我们有$m(F_k^{(1)})\le m([0,1])=1$是有限的。从而根据习题18.2.3(b)我们可以得到$m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}F_k^{(i)}\right)=\lim_{i\to\infty}m(F_k^{(i)})$。然后我们注意到，对任意的$x\in[0,1]$，由于$f_n$逐点收敛于0，因此存在$N_x>0$使得对任意的$n\ge N_x$都有$f_n(x)\le\frac{1}{k}$，从而也即有$x\notin\Omega_k^{(n)}$对任意的$n\ge N_x$成立。进而即有$x\notin F_k^{(i)}$对任意的$n\ge N_x$成立，于是也即我们最终可以得证$x\notin\bigcap_{i=1}^{\infty}F_k^{(i)}$，从而这表明$\bigcap_{i=1}^{\infty}F_k^{(i)}$必然是一个空集，于是即：
>
> $$\lim_{i\to\infty}m(F_k^{(i)})=m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}F_k^{(i)}\right)=0$$
>
> 于是对任意的$\sigma>0$，存在$N>0$使得对任意的$n\ge N$都有$m(F_k^{(n)})\le\sigma$。于是我们考虑$\sigma=\frac{\varepsilon}{2^k}$，存在一个与$k$对应的$N_k>0$使得对于任意的$n\ge N_k$都有$m(F_k^{(n)})\le\frac{\varepsilon}{2^k}$成立。
>
> 于是令：
>
> $$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k^{(N_k)}$$
>
> 于是根据测度的可数次可加性，我们有：
>
> $$m(E)\le\sum_{k=1}^{\infty}m(F_k^{(N_k)})\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon$$
>
> 另一方面，考虑任意的$\sigma>0$，我们知道存在一个整数K使得$\frac{1}{K}\le\sigma$，然后对任意的$x\in[0,1]\backslash E$有：
>
> $$x\in[0,1]\backslash E\implies x\notin F_K^{(N_K)}\implies\forall\ n\ge N_K,x\notin\Omega_K^{(n)}\implies\forall n\ge N_K,f_n(x)\le\frac{1}{K}\le\sigma$$
>
> 从而也即：存在整数$N_K\ge0$，对任意的$n\ge N_k$与任意的$x\in[0,1]\backslash E$都有$|f_n(x)|\le\sigma$。于是也即有f_n在$[0,1]\backslash E$上一致收敛于0的。
>
> ---

> 若定义域不是$[0,1]$而是$\mathbb{R}$，则这个结论不能成立（从上面的证明也看得出来，定义域为$\mathbb{R}$时$m(F_k^{(1)})$有限的结论就不成立了，所以上面的整个证明过程都不可以使用）。可以考虑非常经典的"移动颠簸"函数序列的例子，定义$f_n:\mathbb{R}\to[0,+\infty]$为：
>
> $$f_n:=\chi_{[n,n+1)}$$
>
> 那么显然f_n是逐点收敛于0的，如果题目结论在$\mathbb{R}$定义域的函数上成立，那么我们应该能找到一个满足$m(E)=1$的可测集E，f_n在$\mathbb{R}\backslash E$上一致收敛于0，从而存在$N\geq 0$使得对任意的$n\geq N$与任意的$x\in\mathbb{R}\backslash E$都有$|f_n(x)|\leq 1/2$。然后我们考虑对每一个整数$n\geq N$去检查区间$[n,n+1)$，其中的每一个$x\in[n,n+1)$都有$|f_n(x)|=1>1/2$，但是对所有的$y\in\mathbb{R}\backslash E$又有$|f_n(y)|\leq 1/2$，从而我们只能有$[n,n+1)$不与$\mathbb{R}\backslash E$相交，也即$[n,n+1)$是$E$的一个子集。由于这个结论是对所有的$n\geq N$都成立的结论，因此也即有：
>
> $$\bigcup_{n=N}^{\infty}[n,n+1)=[N,+\infty)\subseteq E$$
>
> 从而根据测度单调性的要求有，我们有$m(E)\geq m([N,+\infty))=\infty$，这与$m(E)=1$的前提导出了矛盾，因此结论不可能成立。

19.2.11 给出一个非负有界函数$f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$的例子，使得对于每一个$n$，$\sum_{m=1}^{\infty}f(n,m)$都是收敛的，并且对于每一个$m$，$\lim_{n\to\infty}f(n,m)$都存在，但$f$还满足下面这个不等式

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f(n,m)\neq\sum_{m=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}f(n,m)$$

（提示：修改"移动颠簸"的例子，甚至可以使用取值只有0和1的函数f）这表明交换极限运算与无限和运算的次序是危险的

> 考虑函数$f(n,m)$：
>
> $$f(n,m):=\begin{cases}1 & \text{if } n=m\\ 0 & \text{if } n\neq m\end{cases}$$
>
> 于是我们可以注意到，对每一个n，都有$\sum_{m=1}^{\infty}f(n,m)=1$；对每一个$m$，都有$\lim_{n\to\infty}f(n,m)=0$。然后注意到：
>
> $$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f(n,m)=\lim_{n\to\infty}1=1$$
> $$\sum_{m=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}f(n,m)=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$$
>
> 显然是不相等的，于是f就是我们要找的函数。

本节相关跳转

[实分析 11.3 上黎曼积分和下黎曼积分]

[实分析 11.6 单调函数的黎曼可积性]

[实分析 19.1 简单函数]