6.3 序列的上确界与下确界

定义

1. (6.3.1 序列的sup与inf) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，则定义$\sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$ (有时也记作$\sup\limits_{n\geq m} a_n$) 为集合$E$：

$$E = \{a_n : n \geq m\}$$

的**上确界**，并定义$\inf(a_n)_{n=m}^{\infty}$ (有时也记作$\inf\limits_{n\geq m} a_n$) 为同一个集合$E$的**下确界**。

命题

1. (6.3.6 最小上界性质) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，且设x是广义实数有：

$$x := \sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$$

那么$a_n \leq x$对所有$n \geq m$均成立，且只要$M \in \mathbb{R}^*$是$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的一个上界 (即对所有$n \geq m$均有$a_n \leq M$) ，则有$M \geq x$。最后，对每一个满足$y < x$的广义实数y，至少有存在一个$n \geq m$使得$y < a_n \leq x$。

2. (6.3.8 单调有界序列收敛) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，它存在一个上界$M \in \mathbb{R}$，并且它还是单调递增的 (即对全部$n \geq m$，均有$a_{n+1} \geq a_n$) 。那么$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是收敛的，并且实际上有：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(a_n)_{n=m}^{\infty} \leq M$$

类似的，我们有若$(a_n)_{n=m}^{\infty}$存在一个下界$M \in \mathbb{R}$，并且还是单调递减的，那么$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$\inf(a_n)_{n=m}^{\infty}$。

(对于一个序列，如果它是递增的或者是递减的，则我们称该序列是**单调的**，根据命题6.3.8与推论6.1.17我们可以得到：一个单调序列是收敛的，当且仅当它是有界的)

3. (6.3.10 一个特例？) 设$0 < x < 1$，那么有：

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

上式在$x > 1$时不成立。 (课本例1.2.3的谜团之一)

课后习题

6.3.1 证明例6.3.4中的结论

> 例6.3.4内容如下：
>
> > 设$a_n = 1/n$，于是$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是序列1，$1/2$，$1/3$，$...$。因此集合$\{a_n : n \geq 1\}$是一个可数集$\{1, 1/2, 1/3, ...\}$ (怎么又是没有学的概念先用了) ，于是$\sup(a_n)_{n=1}^{\infty} = 1$且$\inf(a_n)_{n=1}^{\infty} = 0$ (习题6.3.1) 。注意该序列的下确界事实上并不是集合中的元素，尽管最终这个下确界与集合非常接近。 (所以直接的认为上确界与下确界是“序列的最大元素”与“序列的最小元素”事实上是不太准确的。)

> 证明：
>
> 令有$A=\{1,1/2,1/3,\dots\}$。
>
> 先证明$\sup(a_n)_{n=1}^{\infty}=1$：
>
> > 首先对于任意$x\in A$，总有存在某个正整数n使得$x=1/n$，又有$1\geq 1/n$对任意正整数n成立，于是1是A的一个上界。
> >
> > 对任意A的上界y，使用反证法，若有$y<1$则此时y不满足对任意$x\in A$都有$y\geq x$（$1\in A$），于是y不是A的上界，导出矛盾。因此对任意A的上界y都有$y\geq 1$成立。
> >
> > 综上，于是1是A的最小上界，根据定义6.2.6此时有$\sup(a_n)_{n=1}^{\infty}=1$成立。
>
> 再证明$\inf(a_n)_{n=1}^{\infty}=0$：
>
> > 首先对任意$x\in A$，总有x是正数，于是$x\geq 0$始终成立，即0是A的一个下界。
> >
> > 对任意A的下界y，使用反证法，若有$y>0$，则根据习题5.4.4，此时存在一个正整数n_0使得$y>1/n_0>0$。又根据A的定义，有$1/n_0\in A$，于是此时y不是A的一个下界，导出矛盾。于是对任意A的下界y都有$y\leq 0$成立。
> >
> > 综上，于是0是A的最大下界，根据定义6.2.6此时有$\inf(a_n)_{n=1}^{\infty}=0$成立。
>
> 综上，于是例6.3.4结论得证。

6.3.2 证明命题6.3.6（提示：利用定理6.2.11）

> 分开证明，若有$x:=\sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$，则：
>
> - $a_n\leq x$对所有$n\geq m$均成立。
>
> 对任意$n\geq m$，都有$a_n\in\{a_n:n\geq m\}$，又x是集合$\{a_n:n\geq m\}$的上确界，于是根据定理6.2.11可以得到$a_n\leq x$。于是题目结论得证。
>
> ---
>
> - $M\in\mathbb{R}^*$是$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的一个上界（即对所有$n\geq m$均有$a_n\leq M$），则有$M\geq x$。
>
> 对任意$M\in\mathbb{R}^*$，若有对所有$n\geq m$均有$a_n\leq M$，于是M是集合$\{a_n:n\geq m\}$的一个上界。根据定理6.2.11，此时有$M\geq x$必然成立。于是结论成立。
>
> ---
>
> - 对每一个满足$y<x$的广义实数y，至少有存在一个$n\geq m$使得$y<a_n\leq x$。
>
> 根据结论(a)我们知道$a_n\leq x$的成立是显然的。
>
> 对存在a_n使得$y<a_n$，我们使用反证法。我们假设对任意$n\geq m$都有$a_n\leq y$成立，于是此时有y是序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的一个上界，于是根据结论(b)，此时有$y\geq x$成立，然而我们有$y<x$，于是此时与前置结论发生矛盾，反证结束。此时应该有存在至少一个$n\geq m$使得$y<a_n\leq x$成立，于是结论成立。

6.3.3 证明命题6.3.8（提示：利用命题6.3.6以及$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是递增序列的假设取证明$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$\sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$）

> 即证明递增有界序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$\sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$：
>
> 令有$x=\sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$，此时根据命题6.3.6我们有$M\geq x$成立；并且对任意$n\geq m$，都有$a_n\leq x$成立。
>
> 对任意正实数$\varepsilon>0$，根据命题6.3.6结论，我们知道至少存在一个$N\geq m$使得：

> $$x-\varepsilon<a_N\le x\iff -\varepsilon<a_N-x\le 0\iff |a_N-x|\le\varepsilon$$
>
> 此外，结合$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是递增的我们可以知道有对任意$n\ge N$有：
>
> $$x-\varepsilon<a_N\le a_n\le x\iff -\varepsilon<a_n-x\le 0\iff |a_n-x|\le\varepsilon$$
>
> 于是综合得到，对任意正实数$\varepsilon>0$，总存在整数$N\ge m$使得对任意$n\ge N$都有$d(a_n,x)\le\varepsilon$成立，于是根据习题6.1.2，此时有序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于x。
>
> 综上，即有下述结论成立：
>
> $$\lim_{n\to\infty}a_n=\sup(a_n)_{n=m}^{\infty}\le M$$

6.3.4 解释为什么当$x>1$时命题6.3.10不成立。实际上就是相当于证明当$x>1$时，序列$(x^n)_{n=1}^{\infty}$是发散的（提示：利用反证法，恒等式$\left(\frac{1}{x}\right)^n x^n=1$和定理6.1.19中的极限定律）。并将本结论与例1.2.3中的论述进行比较，现在你能理解为什么例1.2.3推理过程中存在缺陷吗？

> 使用反证法，不妨假设有当$x>1$时$\lim_{n\to\infty}x^n=L$。$x>1\iff 1>1/x$，由命题6.3.10，有$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=0$，于是根据极限定律，我们有：
>
> $$\lim_{n\to\infty}x^n\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=\lim_{n\to\infty}1=1$$
>
> 于是即$0\cdot L=1$，但是对任意实数L都应该有$0\cdot L=0$，于是导出矛盾，从而只能有当$x>1$时序列$(x^n)_{n=1}^{\infty}$是发散的。
>
> 对例1.2.3的推导过程，因为当$x>1$时序列$(x^n)_{n=1}^{\infty}$是发散的，于是从一开始使用极限定律的操作就是荒谬的，从而整个论证过程从开头就是不被允许的。

本节相关跳转

[实分析 1.2 为什么要做分析]

[实分析 6.1 收敛与极限定律]

[实分析 6.2 广义实数系]