10.5 洛必达法则

命题

1. (10.5.1 洛必达法则 I) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，$f : X \to \mathbb{R}$和$g : X \to \mathbb{R}$都是函数，并且设$x_0 \in X$是X的极限点。如果有$f(x_0) = g(x_0) = 0$，f和g都在x_0处可微，并且$g'(x_0) \neq 0$，那么存在$\delta > 0$使得对所有的$x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]$都有$g(x) \neq 0$，并且有：

$$\lim_{x \to x_0; x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

(注：你可能会疑惑为什么在这里会突然出现一个δ，事实上这是为了保证商$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在集合上始终有定义，因为$g(x)$可能在除x_0以外的某点处为零，不能保证商$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在$X - \{x_0\}$中所有点都有意义)

2. (10.5.2 洛必达法则 II) 设$a < b$都是实数，并且设$f : [a, b] \to \mathbb{R}$和$g : [a, b] \to \mathbb{R}$都是$[a, b]$上的可微函数。如果有$f(a) = g(a) = 0$，并且$g'$在$[a, b]$上不为零（即对所有的$x \in [a, b]$都有$g'(x) \neq 0$），且极限$\lim\limits_{x \to a; x \in (a, b]} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在并且等于$L$，那么对所有的$x \in (a, b]$都有$g(x) \neq 0$，且极限$\lim\limits_{x \to a; x \in (a, b]} \dfrac{f(x)}{g(x)}$存在并等于$L$。

(注：这个命题值考虑了a右侧的极限，对a左侧和a两侧的极限，也存在类似的命题。我们很容易叙述并证明这些命题，通俗来说，这个命题给出了

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

当然，你必须得保证这个命题的所有条件均成立。命题10.5.2也可以看做是命题10.5.1的高级形式)

课后习题

10.5.1 证明命题10.5.1（提示：为了证明在x_0附近$g(x) \neq 0$，你或许需要用到[牛顿逼近法（命题10.1.7）](#)，对命题中剩下的部分，利用[极限定律（命题9.3.14）](#)）

> 我们分别证明两个结论：
>
> - 证明：存在$\delta > 0$使得对所有的$x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]$都有$g(x) \neq 0$。
>
> 根据牛顿逼近法，由于g在x_0处可微并且$L := g'(x_0) \neq 0$，于是对$|L/2| > 0$，存在$\delta > 0$使得对任意的$x \in X$满足$|x - x_0| \leq \delta$都有：
>
> $$|g(x) - (g(x_0) + L(x - x_0))| \leq |L(x - x_0)/2|$$
>
> 又考虑到$g(x_0) = 0$，对任意$x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]$讨论，上式可以化简为：

$$|g(x)-L(x-x_0)| \le |L(x-x_0)/2|$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} 0 < \frac{L}{2}(x-x_0) \le g(x) & \text{if } x > x_0, L > 0 \\ g(x) \le \frac{L}{2}(x-x_0) < 0 & \text{if } x < x_0, L > 0 \\ g(x) \le \frac{L}{2}(x-x_0) < 0 & \text{if } x > x_0, L < 0 \\ 0 < \frac{L}{2}(x-x_0) \le g(x) & \text{if } x < x_0, L < 0 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{无论}g'(x_0)\text{为什么值, 都有}g(x) \neq 0$$

于是综合即有：对所有的$x \in [(X \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)) - \{x_0\}]$，都有$g(x) \neq 0$，结论得证。

- 证明：有$\lim\limits_{x \to x_0; x \in [(X \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)) - \{x_0\}]} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$成立。

我们可以做下面的变化：

$$\begin{aligned} &\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \\ =&\frac{\lim\limits_{x \to x_0; x \in [(X \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)) - \{x_0\}]} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x \to x_0; x \in [(X \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)) - \{x_0\}]} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \\ =&\lim_{x \to x_0; x \in [(X \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)) - \{x_0\}]} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \\ =&\lim_{x \to x_0; x \in [(X \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)) - \{x_0\}]} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \\ =&\lim_{x \to x_0; x \in [(X \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)) - \{x_0\}]} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} \\ =&\lim_{x \to x_0; x \in [(X \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)) - \{x_0\}]} \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

其中第二步里我们用到了极限定律（命题9.3.14(g)），于是结论得证。

10.5.2 解释为什么例1.2.12与本节中的每一个命题都不矛盾（其实就是两个洛必达法则）

对例1.2.12中给出的例子，我们可以注意到其中有：

1. 作为分子的函数$f(x) := x^2\sin(x^{-4})$在$x=0$处是不可微的，于是这个式子是不满足洛必达法则I和洛必达法则II的
2. 导数分式的极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x^2\sin(x^{-4}))'}{(x)'}$不存在，于是这个式子是不满足洛必达法则II的。

（事实上，这两条结论本质上是同一件事情）

因此这个式子不是满足洛必达法则要求的极限式，所以不能应用洛必达法则。

本节相关跳转

实分析 1.2 为什么要做分析

实分析 9.3 函数的极限值

实分析 10.1 基本定义