9.10 在无限处的极限

定义

1. (9.10.1 无限附着点) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，我们称$+\infty$是**附着于**X的，当且仅当对任意的$M\in\mathbb{R}$都存在一个$x\in X$使得$x>M$；我们称$-\infty$是**附着于**X的，当且仅当对任意的$M\in\mathbb{R}$都存在一个$x\in X$使得$x<M$。换言之，$+\infty$是附着于X的，当且仅当X没有上界（即$\sup(X)=+\infty$）；类似地，$-\infty$是附着于X的，当且仅当X没有下界（即$\inf(X)=+\infty$）。于是一个集合是有界的，当且仅当$+\infty$与$-\infty$都不是它的附着点。

   （注：这个定义同我们在定义9.1.8中看到的附着概念相当不同，但是利用广义实数系$\mathbb{R}^*$的拓扑结构我们可以将它们统一起来，这里我们不作展开讨论，仅需要知道这点即可）

2. (9.10.3 在无限处的极限) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，并且$+\infty$是X的附着点，设$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数。我们称当$x\to+\infty$时，$f(x)$沿着X收敛于L，并记为$\lim\limits_{x\to+\infty;x\in X}f(x)=L$，当且仅当对于任意$\varepsilon>0$都存在一个$M$使得$f$在$X\cap(M,+\infty)$上是$\varepsilon$-接近于$L$的。（即对所有满足$x>M$的$x\in X$，均有$|f(x)-L|\le\varepsilon$）；类似地，我们称当$x\to-\infty$时，$f(x)$收敛于$L$，当且仅当对于任意$\varepsilon>0$都存在一个$M$使得$f$在$X\cap(-\infty,M)$上是$\varepsilon$-接近于$L$的。

课后习题

9.10.1 设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个实数序列，那么a_n也可以看作是$\mathbb{N}$到$\mathbb{R}$的函数，它将每一个自然数n映射成一个实数a_n。证明：

$$\lim_{n\to+\infty;n\in\mathbb{N}}a_n=\lim_{n\to\infty}a_n$$

其中，左侧的极限是由定义9.10.3定义的，而右侧的极限是由定义6.1.8定义的。更准确的说，证明：如果上述两个极限中有一个存在，那么另一个也一定存在，并且它们具有相同的值。因此，这里两个极限的概念是一致的

> - 若$\lim\limits_{n\to+\infty;n\in\mathbb{N}}a_n$存在并且等于$L$：
>
> > 根据定义9.10.3，若$\lim\limits_{n\to+\infty;n\in\mathbb{N}}a_n$存在，则对任意实数$\varepsilon>0$，都存在实数$M$使得$|a_n-L|\le\varepsilon$对任意$n$属于$\mathbb{N}$且$n$大于$M$都是成立的，特别地，该结论是对任意$n$属于$\mathbb{N}$且$n$大于等于$\lfloor M\rfloor+1$都成立。从而即：
> >
> > 对任意实数$\varepsilon>0$，都存在一个自然数$\lfloor M\rfloor+1$使得对任意$n\ge\lfloor M\rfloor+1$都有$|a_n-L|\le\varepsilon$成立。
> >
> > 于是根据定义6.1.8，即有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$成立。
>
> - 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在并且等于$L$：
>
> > 则对任意实数$\varepsilon>0$，都存在一个自然数N使得对任意$n\ge N$都有$|a_n-L|\le\varepsilon$成立。并且注意到：
> >
> > $$\forall n\in\mathbb{N},n\ge N\iff n\in\mathbb{N}\cap(N-1,+\infty)$$
> >
> > 从而即有对任意实数$\varepsilon>0$，都存在一个$N-1$使得对任意$n\in\mathbb{N}\cap(N-1,+\infty)$都有$|a_n-L|\le\varepsilon$成立，于是根据定义9.10.3，即有$\lim\limits_{n\to+\infty;n\in\mathbb{N}}a_n=L$。

> 综上，因此这两个概念是一致的。

本节相关跳转

实分析 6.1 收敛与极限定律

实分析 9.1 实直线的子集