14.8 用多项式一致逼近

定义

1. (14.8.1 多项式？）设$[a,b]$是一个区间。$[a,b]$上的**多项式**是形如$f(x):=\sum_{j=0}^{n}c_jx^j$的函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$，其中$n\geq 0$是整数，$c_0$，…，$c_n$都是实数。如果$c_n\neq 0$，那么$n$就称为多项式$f$的**次数**。
2. (14.8.4 紧支撑函数）设$[a,b]$是一个区间，我们称$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是**支撑**在$[a,b]$上的，当且仅当对于所有的$x\notin[a,b]$都有$f(x)=0$；我们称$f$是**紧支撑**的，当且仅当它支撑在某个区间$[a,b]$上。如果函数$f$是连续的并且$f$支撑在$[a,b]$上，那么我们定义**反常积分**$\int_{-\infty}^{\infty}f$为$\int_{-\infty}^{\infty}f:=\int_{[a,b]}f$。

   (注：一个函数完全可以支撑在多个区间上，例如支撑在$[3,4]$上的函数必然也是支撑在$[2,5]$上，这或许会让我们怀疑我们对反常积分的定义是不确定的，但是不难推论出这样的疑虑是没有必要的（参见引理14.8.5））
3. (14.8.6 恒等逼近）设$\varepsilon>0$，并设$0<\delta<1$。我们称$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是$(\varepsilon,\delta)$**恒等逼近**的，当且仅当它满足下面三个性质：

   > 1. f支撑在$[-1,1]$上，并且对所有的$-1\leq x\leq 1$都有$f(x)\geq 0$。
   > 2. f是连续的，并且$\int_{-\infty}^{\infty}f=1$。
   > 3. 对所有的$\delta\leq|x|\leq 1$均有$|f(x)|\leq\varepsilon$。

   (注：恒等逼近事实上就是用（比较好分析的）连续函数来逼近（间断性很强的）狄拉克δ函数的一种方法)
4. (14.8.9 卷积）设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$与$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$都是连续的紧支撑函数，我们定义$f$与$g$的**卷积**$f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为函数

   $$(f*g)(x):=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$$

   (注：由于f和g都是连续的紧支撑函数，因此对每一个x函数$f(y)g(x-y)$都是连续且紧支撑的，从而上面的定义总是有意义的)

命题

1. (14.8.3 魏尔斯特拉斯逼近定理）设$[a,b]$是一个区间，$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是一个连续函数，并设$\varepsilon>0$是一个实数。那么存在$[a,b]$上的多项式P使得$d_\infty(P,f)\leq\varepsilon$（即对所有的$x\in[a,b]$都有$|P(x)-f(x)|\leq\varepsilon$）。

   (注：如果我们考虑$P([a,b]\to\mathbb{R})$是全体$[a,b]$上多项式组成的空间（带有一致度量d_∞），那么魏尔斯特拉斯逼近定理断言了任意一个连续函数f都是$P([a,b]\to\mathbb{R})$的附着点，从而有$\overline{P([a,b]\to\mathbb{R})}=C([a,b]\to\mathbb{R})$，也就是说多项式空间在连续函数空间中**依一致拓扑稠密**（关于稠密集的定义，可以参考维基百科—稠密集，简单来说就是一个集合是稠密的当且仅当它的闭包是整个空间）；魏尔斯特拉斯逼近定理还有个更广泛的形式叫**斯通-魏尔斯特拉斯逼近定理**，详细内容可以参考维基百科—斯通-魏尔斯特拉斯逼近定理，这里的魏尔斯特拉斯逼近定理事实上是第一逼近定理，还有一个有关周期函数与三角函数的第二逼近定理)
2. (14.8.5 反常积分的唯一性？）设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是一个连续函数。如果$f$不仅支撑在区间$[a,b]$上，还支撑在另一个区间$[c,d]$上，那么$\int_{[a,b]}f=\int_{[c,d]}f$。
3. (14.8.8 多项式可以作为恒等逼近）对每一个$\varepsilon>0$和$0<\delta<1$，都存在一个$[-1,1]$上的多项式P是(ε,δ)恒等逼近的。

（注：这是原书为了证明魏尔斯特拉斯逼近定理的第一个关键事实）

4. （14.8.11 卷积的基本性质）设$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$和$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$都是连续的紧支撑函数，那么下面的命题成立：

> 1. 卷积$f * g$也是连续的紧支撑函数。
> 2. （卷积是可交换的）我们有$f * g = g * f$，换言之即：
>
> $$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y) \mathrm{d}y \\ &= g * f(x) \end{aligned}$$
>
> 3. （卷积是线性的）我们有$f * (g+h) = f * g + f * h$；另外，对于任意的实数$c$，都有$f * (cg) = (cf) * g = c(f * g)$。

（注：卷积其实还有些重要性质。例如，卷积是可结合的，即$(f * g) * h = f * (g * h)$；卷积与导数可交换，当$f$和$g$都可微时，$(f * g)' = f' * g = f * g'$；狄拉克$\delta$函数还满足$f * \delta = \delta * f = f$，但是在接下来的内容中我们用不到这些内容，所以就不在此列出了）

5. （14.8.13 多项式的卷积仍然是多项式）设$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是支撑在$[0,1]$上的连续函数，$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是支撑在$[-1,1]$上的连续函数，并设$g$是$[-1,1]$上的多项式。那么$f * g$是$[0,1]$上的多项式。

（注：$f * g$在$[0,1]$之外可能就不是多项式了，这正是原书中为了证明魏尔斯特拉斯逼近定理的第二个关键事实）

6. （14.8.14）设$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是支撑在$[0,1]$上的连续函数，它以某个实数$M > 0$为界。设$\varepsilon > 0$，且$0 < \delta < 1$，它使得只要$x$，$y \in \mathbb{R}$且$|x-y| < \delta$就有$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$，并设$g$是任意一个$(\varepsilon, \delta)$恒等逼近。那么，对所有的$x \in [0,1]$都有

$$|f * g(x) - f(x)| \leq (1+4M)\varepsilon$$

（注：这是原书中为了证明魏尔斯特拉斯逼近定理的第三个关键事实）

> 推论：
>
> 1. （14.8.15 魏尔斯特拉斯逼近定理 I）设$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是支撑在$[0,1]$上的连续函数。那么对任意的$\varepsilon > 0$，存在一个函数$P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，它是$[0,1]$上的多项式，并且使得$|P(x) - f(x)| \leq \varepsilon$对所有的$x \in [0,1]$都成立。
>
>   （注：结合上面的三个事实我们就可以得到这个魏尔斯特拉斯逼近定理的预备形式）

7. （14.8.16）设$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是一个连续函数，它在$[0,1]$的边界上取值为$0$，即$f(0) = f(1) = 0$。设$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是具有如下定义的函数：当$x \in [0,1]$时，$F(x) := f(x)$；当$x \notin [0,1]$时，$F(x) := 0$。那么$F$也是连续的。

（注：这个函数F有时被称为f的**零延拓**）

> 推论：
>
> 1. （14.8.18 魏尔斯特拉斯逼近定理 II）设$f: [0,1] \to \mathbb{R}$是支撑在$[0,1]$上的连续函数，并且满足$f(0) = f(1) = 0$。那么对任意的$\varepsilon > 0$，存在一个多项式$P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$使得$|P(x) - f(x)| \leq \varepsilon$对所有的$x \in [0,1]$都成立。1
>
>   （注：结合推论14.8.5和引理14.8.16我们就可以得到这个形式的魏尔斯特拉斯逼近定理）
>
> 2. （14.8.19 魏尔斯特拉斯逼近定理 III）设$f: [0,1] \to \mathbb{R}$是支撑在$[0,1]$上的连续函数。那么对任意的$\varepsilon > 0$，存在一个多项式$P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$使得$|P(x) - f(x)| \leq \varepsilon$对所有的$x \in [0,1]$都成立。

> （注：考虑形如$F(x) := f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))$的函数与推论14.8.18就可以得到这个去掉$f(0) = f(1) = 0$假设的形式；然后使用这个形式，考虑任意闭区间$[a, b]$上的连续函数$f(x)$，我们考虑定义为$g(x) := f(a + (b - a)x)$的函数$g : [0, 1] \to \mathbb{R}$，根据上面的预备形式我们可以得到一个多项式$Q : [0, 1] \to \mathbb{R}$，然后令$P(y) := Q((y - a)/(b - a))$就可以得到魏尔斯特拉斯逼近定理，这样就完成了魏尔斯特拉斯逼近定理的证明）

课后习题

14.8.1 证明引理14.8.5

> 为了证明引理14.8.5，我们先证明一个更显而易见的辅助结论。
>
> > 结论：设$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是一个连续函数。如果$f$不仅支撑在区间$[a, b]$上，还支撑在另一个包含$[a, b]$的区间$[c, d]$上，那么$\int_{[a,b]} f = \int_{[c,d]} f$。
> >
> > 证明：
> >
> > 我们知道对任意$x \notin [c, d]$都有$x \notin [a, b]$，从而根据支撑的定义显然可以得到f是支撑在$[c, d]$上的。于是我们此时可以注意到限制函数$f|_{[c,d]}$满足：对任意$x \in [a, b]$有$f|_{[c,d]}(x) = f|_{[a,b]}(x)$；对任意$x \notin [a, b]$有$f|_{[c,d]}(x) = 0$。然后根据积分的运算定律（命题11.4.1(g)）我们可以直接得到：
> >
> > $$\int_{[c,d]} f|_{[c,d]} = \int_{[a,b]} f|_{[a,b]}$$
> >
> > 也就是我们所想要证明的结论。
>
> 然后我们正式开始对引理14.8.5的证明。
>
> ---
>
> 注意到我们事实上有$[a, b] \cap [c, d] = [\max(a, c), \min(c, d)]$，并且对任意的$x \notin [\max(a, c), \min(c, d)]$，$x$至少不属于$[a, b]$或者$[c, b]$中的某一个，于是分别根据$f$支撑在$[c, d]$上与$f$支撑在$[a, b]$上的题设我们可以得到$f(x) = 0$。综合即有$f$也是支撑在区间$[\max(a, c), \min(c, d)]$上的，此时应用我们证明的辅助结论即有：
>
> $$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]\cap[c,d]} f = \int_{[c,d]} f$$
>
> 于是我们证明了引理14.8.5。

14.8.2 尝试完成下面的内容

(a) 证明：对于任意的实数$0 \leq y \leq 1$和任意的自然数$n \geq 0$，$(1 - y)^n \geq 1 - ny$均成立（提示：对n使用归纳法，或者对y求导）

> $n = 0$时的结论时显然的，然后根据我们在微分相关章节学到的知识，我们知道对给定的$n > 0$，关于y的函数$(1 - y)^n$与$1 - ny$都是在$[0, 1]$上可微的，并且对应的它们的导函数$-n(1 - y)^{n-1}$与$-n$都是在$[0, 1]$上黎曼可积的，于是根据微积分第二基本定理，我们有对任意的$y \in [0, 1]$都有：
>
> $$\begin{aligned} (1 - y)^n &= \int_{[0,y]} -n(1 - x)^{n-1}\mathrm{d}x + (1 - 0)^n = 1 - n\int_{[0,x]} (1 - x)^{n-1}\mathrm{d}x \\ 1 - ny &= \int_{[0,1]} -n\mathrm{d}x + (1 - n \cdot 0) = 1 - n\int_{[0,y]} 1\mathrm{d}x \end{aligned}$$
>
> 而在$[0, 1]$上，由于$1 - y$始终小于等于0，因此对任意的$n > 0$根据实数幂次的运算知识（具体来说是命题5.6.3）我们知道有$(1 - x)^{n-1}$小于1对任意的$x \in [0, 1]$都成立，然后根据积分运算的运算法则我们知道有：
>
> $$\forall\, y \in [0, 1], \int_{[0,x]} (1 - x)^{n-1}\mathrm{d}x \leq \int_{[0,x]} 1\mathrm{d}x \implies (1 - y)^n \geq 1 - ny$$

> 于是结论得证。

(b) 证明： $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ **（提示：当$|x|\leq 1/\sqrt{n}$时，利用部分(a)的内容；当$|x|\leq 1/\sqrt{n}$时，只要利用$(1-x^2)^n$是正的就好；本题还可以使用三角替换求解，但是需要你能够明确你正在进行的证明的意义）**

> 根据(a)的结论与积分的运算定律，我们应该有：
>
> $$\begin{aligned}\forall\, x\in[-1,1], x^2\in[0,1] &\xRightarrow{\text{结论}(a)} \forall\, x\in[-1,1], (1-x^2)^n\geq 1-nx^2\\ &\xRightarrow{\text{命题11.4.1}} \int_{-1/\sqrt{n}}^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^n\mathrm{d}x \geq \int_{-1/\sqrt{n}}^{1/\sqrt{n}}1-nx^2\mathrm{d}x\\ &\qquad\qquad = \frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{n}{3\sqrt{n}^3}=\frac{5}{3\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$
>
> 然后又因为对任意的$x\in[-1,1]$都有$(1-x^2)^n$非负，因此又有：
>
> $$\int_{[-1,-1/\sqrt{n})}(1-x^2)^n\mathrm{d}x\geq 0 \quad \int_{(1/\sqrt{n},1]}(1-x^2)^n\mathrm{d}x\geq 0$$
>
> 综合即有：
>
> $$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x &= \int_{[-1,-1/\sqrt{n})}(1-x^2)^n\mathrm{d}x+\int_{-1/\sqrt{n}}^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^n\mathrm{d}x+\int_{(1/\sqrt{n},1]}(1-x^2)^n\mathrm{d}x\\ &\geq 0+\frac{5}{3\sqrt{n}}+0\geq\frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$
>
> 于是即证明了题目的结论。

(c) 证明引理14.8.8（提示：当$x\in[-1,1]$时，令$f(x)$等于$c(1-x^2)^N$；当$x\notin[-1,1]$时，令$f(x)=0$，其中N时一个足够大的数，而c使得f的积分为1，并使用(b)的结论）

> 要证明这个结论，我们需要证明一个辅助结论：
>
> > 结论：设$0<x<1$是一个实数，那么序列$(\sqrt{n}x^n)_{n=0}^{\infty}$收敛于0。
> >
> > 证明：
> >
> > 考虑令$N:=\left\lfloor\frac{x^2}{1-x^2}\right\rfloor+1$，$n\geq N$时有$\sqrt{\frac{n+1}{n}}x<1$，也即有：
> >
> > $$\frac{\sqrt{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n}x^n}<1\Longrightarrow\sqrt{n+1}x^{n+1}<\sqrt{n}x^n$$
> >
> > 也即子序列$(\sqrt{n}x^n)_{n=N}^{\infty}$是严格单调递减的，并且显然子序列以0为下界，因此根据命题6.3.8我们知道$(\sqrt{n}x^n)_{n=0}^{\infty}$肯定是收敛的；如果我们假设它收敛于$L$，那么序列$(\sqrt{n}x^{n+1})_{n=0}^{\infty}$根据极限定律应该收敛于$xL$，然后注意到：
> >
> > $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}x^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}x^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=L$$
> >
> > 因此即$xL=L$，而$x\neq 0$于是只可能有$L=0$。
>
> 下面正式开始我们的证明。
>
> ---
>
> 对给定的(ε,δ)，由于$1-\delta^2<1$，因此实数序列$(\sqrt{n}(1-\delta^2)^n)_{n=0}^{\infty}$收敛于0（辅助结论）可知必然存在一个$N\geq 0$使得对任意的$n\geq N$都有$\sqrt{n}(1-\delta^2)^n\leq\varepsilon$（当然也对$N$成立）；而对任意的$\delta\leq|x|\leq 1$，因为$1-x^2\leq 1-\delta^2$于是有$\sqrt{N}(1-x^2)^N\leq\varepsilon$（命题6.7.3）。
>
> 于是我们考虑定义下面的多项式$P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$：

> $$P(x):=\begin{cases}\frac{1}{L}(1-x^2)^N & \text{if } x\in[-1,1]\\ 0 & \text{if } x\notin[-1,1]\end{cases}$$
>
> 其中$L:=\int_{[-1,1]}(1-x^2)^N\mathrm{d}x$，根据(b)的结论我们知道有$L\geq\frac{1}{\sqrt{N}}$，从而对任意的$\delta\leq|x|\leq 1$我们有
>
> $$P(x)=\frac{1}{L}(1-x^2)^N\leq\sqrt{N}(1-x^2)^N\leq\varepsilon$$
>
> 而多项式函数显然是连续函数，并且P也是显然支撑在$[-1,1]$上的，因此总结即有：
>
> - P支撑在$[-1,1]$上，并且对所有的$-1\leq x\leq 1$都有$P(x)\geq 0$。
> - P是连续的，并且$\int_{-\infty}^{\infty}P=\frac{1}{L}\int_{[-1,1]}(1-x^2)^N\mathrm{d}x=1$。
> - 对所有的$\delta\leq|x|\leq 1$均有$|P(x)|\leq\varepsilon$。
>
> 于是根据定义14.8.6即有P是(ε,δ)恒等逼近的，引理14.8.8得证。

14.8.3 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是一个连续的紧支撑函数。证明：$f$是有界的，并且是一致连续的（提示：利用命题13.3.2和定理13.3.5，但是必须先处理f的定义域$\mathbb{R}$不是紧致的这一问题）

> 先证明f是有界的。由于f是紧支撑函数，因此存在某个区间$[a,b]$使得对任意$x\notin[a,b]$都有$f(x)=0$；而对$x\in[a,b]$，由于f是连续的并且$[a,b]$是紧致的（海涅-博雷尔定理），因此$f([a,b])$也应该是有界的，换言之即存在$M>0$使得$f(x)\in[-M,M]$。考虑到0（也就是f在$[a,b]$以外的函数值）同样属于$[-M,M]$，于是即对任意$x\in\mathbb{R}$都有$f(x)\in[-M,M]$，也即f是有界的。
>
> 然后证明f是一致连续的。同样由于f是连续的并且$[a,b]$是紧致的我们有f在$[a,b]$上是一致连续的（命题13.3.5）。即对任意的$\varepsilon>0$都存在$\delta>0$使得对任意的x，$x'\in[a,b]$满足$|x-x'|\leq\delta$都有$|f(x)-f(x')|\leq\varepsilon$；然后由于$f$是连续的我们可以得到$f(a)$与$f(b)$都等于0。于是我们考虑任意的$x$，$x'\in\mathbb{R}$满足$|x-x'|\leq\delta$，应该有：
>
> - x，$x'\in[a,b]$：
>
>   > 则根据f在$[a,b]$上一致连续的结论显然有$|f(x)-f(x')|\leq\varepsilon$。
>
> - x，$x'\in\mathbb{R}\backslash[a,b]$：
>
>   > 则由于f支撑在$[a,b]$上我们有$f(x)=f(x')=0\implies|f(x)-f(x')|=0\leq\varepsilon$。
>
> - $x\in[a,b]$且$x'\in\mathbb{R}\backslash[a,b]$：
>
>   > 若$x'>b$，则我们有$x\leq b<x'\implies|x-b|\leq\delta$，于是根据$f$在$[a,b]$上一致连续的结论有$|f(x)-f(b)|\leq\varepsilon$；若$x'<a$，则我们有$x'<a<x\implies|x-a|\leq\delta$，于是根据$f$在$[a,b]$上一致连续的结论有$|f(x)-f(a)|\leq\varepsilon$；又因为$f(x)$等于$f(a)$和$f(b)$都是0，因此综合上面的讨论即无论$x'$是什么情况总有$|f(x)-f(x')|\leq\varepsilon$。
>
> 于是综上我们证明了：对任意的$\varepsilon>0$都存在$\delta>0$使得任意的x，$x'\in\mathbb{R}$满足$|x-x'|\leq\delta$都有$|f(x)-f(x')|\leq\varepsilon$，这表明$f$是在$\mathbb{R}$上一致连续的，于是结论得证。

14.8.4 证明命题14.8.11（提示：利用习题14.8.3证明$f*g$是连续的）

> 由于函数支撑在区间上这个概念本身的性质，我们知道即使f，g，h支撑在三个完全不同的区间$[a,b]$，$[c,d]$，$[e,f]$上我们也可以选择一个足够大的区间（例如$[\min\{a,b,c,d,e,f\},\max\{a,b,c,d,e,f\}]$）使得$f$，$g$，$h$同时支撑在这个区间上，因此不失一般性地我们可以假设f，g，h支撑在同一个区间$[a,b]$上。然后逐条证明。
>
> 1. 卷积$f*g$也是连续的紧支撑函数。
>
>   > 首先证明$f*g$是一个紧支撑函数。注意到对给定的x，实数y要满足$y\in[a,b]$且$x-y\in[a,b]$才可能有$f(y)g(x-y)\neq 0$，即y满足：

$$\begin{aligned} y \in [a,b] \wedge (x-y) \in [a,b] &\iff y \in [a,b] \wedge y \in [x-a, x-b] \\ &\iff y \in [a,b] \cap [x-a, x-b] \end{aligned}$$

于是我们注意到若x满足$[a,b] \cap [x-b, x-a] = \varnothing$则对任意$y \in \mathbb{R}$都有$f(y)g(x-y) = 0$，也即关于$y$的函数$f(y)g(x-y)$是$\mathbb{R}$上的常数函数0。于是对应的，卷积函数$f * g(x)$显然也等于$0$；然后当$x > 2b$（也就是$x - b > b$）或$x < 2a$（也就是$x - a < a$）时显然有$[a,b] \cap [x-a, x-b] = \varnothing$，于是我们可以得到$f * g$是支撑在$[2a-1, 2b+1]$上的，也即$f * g$是一个紧支撑函数。

然后我们证明$f * g$是一个连续函数。由于$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$和$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$都是连续的紧支撑函数，根据习题14.8.3我们知道f和g都是有界的一致连续函数，不妨假设f以实数N为界。于是考虑任意的$\varepsilon > 0$，由于g一致连续因此存在$\delta > 0$使得任意的y，$y' \in \mathbb{R}$满足$|y - y'| \leq \delta$都有$|g(y) - g(y')| \leq \dfrac{\varepsilon}{N(b-a)}$，然后考虑任意的$x$，$x' \in \mathbb{R}$满足$|x - x'| \leq \delta$有：

$$|f * g(x) - f * g(x')| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x'-y)\mathrm{d}y\right|$$

而在上面的$f * g$紧支撑的证明中已知关于y的函数$f(y)g(x-y)$和$f(y)g(x'-y)$都支撑在$[a,b]$上，此时根据反常积分的定义即有：

$$\begin{aligned} \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x'-y)\mathrm{d}y\right| &= \left|\int_{[a,b]} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y - \int_{[a,b]} f(y)g(x'-y)\mathrm{d}y\right| \\ &= \left|\int_{[a,b]} f(y)[g(x-y) - g(x'-y)]\mathrm{d}y\right| \\ &\leq \int_{[a,b]} |f(y)||g(x-y) - g(x'-y)|\mathrm{d}y \end{aligned}$$

假设中我们令f以N为界，因此对任意的y总是有$|f(y)| \leq N$；由于$|(x-y) - (x'-y)| = |x - x'| \leq \delta$根据我们的推论此时有$|g(x-y) - g(x'-y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{N(b-a)}$。综合一下即可以得到：

$$\int_{[a,b]} |f(y)||g(x-y) - g(x'-y)|\mathrm{d}y \leq \int_{[a,b]} N\frac{\varepsilon}{N(b-a)}\mathrm{d}y = \varepsilon$$

总结下上面的内容，我们证明了：

对任意的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$使得任意的x，$x' \in \mathbb{R}$满足$|x - x'| \leq \delta$都有$|f * g(x) - f * g(x')| \leq \varepsilon$。

这表明$f * g$是在$\mathbb{R}$上一致连续的（当然也就是连续的），于是我们证明了$f * g$是一个连续函数。

2. 我们有$f * g = g * f$，换言之即：

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)\mathrm{d}y \\ &= g * f(x) \end{aligned}$$

考虑任意的$x \in \mathbb{R}$。在结论(a)的证明中我们知道关于y的函数$f(y)g(x-y)$支撑在$[a,b]$上；然后由于定义为$z(y) := x - y$的函数$z : [x-b, x-a] \to [a,b]$是可微的，因此根据变量替换公式（命题11.10.7，准确来说是习题11.10.4）有：

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{[a,b]} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{[x-b,x-a]} g(z)f(x-z)\mathrm{d}z \end{aligned}$$

> > 同样由于我们在结论(a)证明中的讨论我们知道关于z的函数$g(z)f(x-z)$是支撑在$[x-a,x-b]$上的，即有$\int_{[x-b,x-a]}g(z)f(x-z)\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{\infty}g(z)f(x-z)\mathrm{d}z=g*f(x)$。
> >
> > 综上，于是我们证明了对任意的$x\in\mathbb{R}$都有$f*g(x)=g*f(x)$，也即$f*g=g*f$。
>
> 3. 我们有$f*(g+h)=f*g+f*h$；另外，对于任意的实数c，都有$f*(cg)=(cf)*g=c(f*g)$。
>
> > 考虑任意的$x\in\mathbb{R}$。可以直接根据定义与结论(b)计算得到：
> >
> > $$\begin{aligned}[f*(g+h)](x)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)(g+h)(x-y)\mathrm{d}y\\&=\int_{[a,b]}f(y)(g+h)(x-y)\mathrm{d}y\\&=\int_{[a,b]}f(y)g(x-y)+f(y)h(x-y)\mathrm{d}y\\&=\int_{[a,b]}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y+\int_{[a,b]}f(y)h(x-y)\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{\infty}f(y)h(x-y)\mathrm{d}y\\&=f*g(x)+f*h(x)=(f*g+f*h)(x)\end{aligned}$$
> >
> > $$\begin{aligned}[(cf)*g](x)&=\int_{-\infty}^{\infty}(cf)(y)g(x-y)\mathrm{d}y\\&=\int_{[a,b]}(cf)(y)g(x-y)\mathrm{d}y\\&=c\cdot\int_{[a,b]}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y=c\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y=[c(f*g)](x)\\&=\int_{[a,b]}f(y)(cg)(x-y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)(cg)(x-y)\mathrm{d}y=[f*(cg)](x)\end{aligned}$$
> >
> > 这表明有$f*(g+h)=f*g+f*h$与$f*(cg)=(cf)*g=c(f*g)$成立。于是结论证明完毕。
>
> 综上，于是我们证明了命题14.8.11。

14.8.5 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$和$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$都是连续的紧支撑函数，设$f$支撑在区间$[0,1]$上，并设$g$在区间$[0,2]$上是常数，即存在某个实数$c$使得对任意$x\in[0,2]$都有$g(x)=c$。证明：卷积$f*g$在区间$[1,2]$上是常数

> 考虑任取$x\in[1,2]$，根据卷积的定义可以直接计算有：
>
> $$f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$$
>
> 注意到由于f是支撑在$[0,1]$上的因此$f(y)g(x-y)$也是支撑在$[0,1]$上的（y在$[0,1]$以外$f(y)$为0可以推知$f(y)g(x-y)=0$），于是可以写为：
>
> $$f*g(x)=\int_{[0,1]}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$$
>
> 由于$x\in[1,2]$，因此由积分变量$y\in[0,1]$可以得到$x-y\in[x-1,x-0]\subseteq[0,2]$；又由于$g$在$[0,2]$上都是常数，因此$g(x-y)$必然等于$c$，于是上面的积分就可以写为：
>
> $$f*g(x)=\int_{[0,1]}c\cdot f(y)\mathrm{d}y=c\int_{[0,1]}f(y)\mathrm{d}y$$
>
> 而f在$[0,1]$上的黎曼积分值是确定的，从而对任意的$x\in[1,2]$都有$f*g(x)=C$（$C:=c\int_{[0,1]}f(y)\mathrm{d}y$），也即$f*g$在区间$[1,2]$上是常数，题目结论得证。

14.8.6 尝试完成下面的内容

(a) 设g是一个(ε,δ)恒等逼近。证明： $1-2\varepsilon \le \int_{[-\delta,\delta]} g \le 1$

> 根据黎曼积分的运算定律（命题11.4.1）有：
>
> $$\int_{[-1,-\delta]} f+\int_{[-\delta,\delta]} f+\int_{[\delta,1]} f=\int_{[-1,1]} f \xlongequal{\text{定义14.8.6}(a)} \int_{-\infty}^{\infty} f \xlongequal{\text{定义14.8.6}(b)} 1$$
>
> 而根据定义14.8.6(a)，我们知道在整个$[-1,1]$上f都是非负的，因此$\int_{[-1,-\delta]} f$和$\int_{[\delta,1]} f$都应该是非负的，从而根据上面的式子我们可以得到：
>
> $$\int_{[-\delta,\delta]} f=1-\int_{[\delta,1]} f-\int_{[-1,-\delta]} f \le 1$$
>
> 另一方面，根据定义14.8.6(c)，我们知道f在$[-1,-\delta]$和$[\delta,1]$上有$f(x)\le\varepsilon$，于是再次使用黎曼积分的运算定律（命题11.4.1）有：
>
> $$\begin{aligned}\int_{[-\delta,\delta]} f=1-\int_{[\delta,1]} f-\int_{[-1,-\delta]} f &\ge 1-\int_{[\delta,1]} \varepsilon-\int_{[-1,-\delta]} \varepsilon\\ &=1-2\varepsilon(1-\delta)\\ &\ge 1-2\varepsilon\end{aligned}$$
>
> 综上即有$1-2\varepsilon \le \int_{[-\delta,\delta]} g \le 1$，于是结论证明完毕。

(b) 证明引理14.8.14（提示：从下面的恒等式入手

$$\begin{aligned}f*g(x)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\\ &=\int_{[-1,-\delta]} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y+\int_{[-\delta,\delta]} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\\ &\quad+\int_{[\delta,1]} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

解题的思路是证明第二个积分接近于$f(x)$，而第一和第三个积分都非常小。为了完成第一个任务，利用(a)以及$f(x)$和$f(x-y)$之间的距离不超过ε这一事实。为了完成后面的任务，利用恒等逼近的性质(c)以及f有界的这一事实)

> 根据卷积的定义，即证明对所有的$x\in[0,1]$都有：
>
> $$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y-f(x)\right| \le (1+4M)\varepsilon$$
>
> 在x给定的情况下我们不妨视$f(x)$为常数，由于g是一个(ε,δ)恒等逼近，因此我们有$\int_{-1}^{1} g(y)\mathrm{d}y=1$以及关于$y$的函数$g(y)f(x-y)$支撑在$[-1,1]$上，于是根据积分的运算定律即有：
>
> $$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y-f(x)\\ &=\int_{[-1,1]} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y-\int_{[-1,1]} f(x)g(y)\mathrm{d}y\\ &=\int_{[-1,-\delta]}(f(x-y)-f(x))g(y)\mathrm{d}y+\int_{[\delta,1]}(f(x-y)-f(x))g(y)\mathrm{d}y+\int_{[-\delta,\delta]}(f(x-y)-f(x))g(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$
>
> 然后对上面结果的前两项，由于f是有界的，因此$f(x-y)-f(x)\le|f(x-y)|+|f(x)|\le 2M$，结合结论(a)的证明内容我们可以得到：

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{[-1,-\delta]}(f(x-y)-f(x))g(y)\mathrm{d}y\right|+\left|\int_{[\delta,1]}(f(x-y)-f(x))g(y)\mathrm{d}y\right| \\
\leq &\int_{[-1,-\delta]}|f(x-y)-f(x)||g(y)|\mathrm{d}y+\int_{[\delta,1]}|f(x-y)-f(x)||g(y)|\mathrm{d}y \\
\leq &2M\left|\int_{[-1,-\delta]}g(y)\mathrm{d}y+\int_{[\delta,1]}g(y)\mathrm{d}y\right| \\
= &2M\left|1-\int_{[-\delta,\delta]}g(y)\mathrm{d}y\right| \\
\leq &4M\varepsilon
\end{aligned}
$$

而对第三项，由于积分变量$y\in[-\delta,\delta]$因此有$|x-(x-y)|=|y|\leq\delta$，根据引理14.8.14的假设即有$|f(x)-f(x-y)|\leq\varepsilon$；另一方面由于$g$是一个$(\varepsilon,\delta)$恒等逼近，因此$g$是非负的，并且根据结论(a)我们有$1-2\varepsilon\leq\int_{[-\delta,\delta]}g\leq 1$。于是根据积分的运算定律有：

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{[-\delta,\delta]}(f(x-y)-f(x))g(y)\mathrm{d}y\right| \\
\leq &\int_{[-\delta,\delta]}|f(x-y)-f(x)||g(y)|\mathrm{d}y \\
\leq &\varepsilon\int_{[-\delta,\delta]}|g(y)|\mathrm{d}y \\
\leq &\varepsilon
\end{aligned}
$$

于是综上，根据绝对值的三角不等式我们有：

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y-f(x)\right| \\
= &\left|\int_{[-1,-\delta]}(f(x-y)-f(x))g(y)\mathrm{d}y\right|+\left|\int_{[\delta,1]}(f(x-y)-f(x))g(y)\mathrm{d}y\right|+\left|\int_{[-\delta,\delta]}(f(x-y)-f(x))g(y)\mathrm{d}y\right| \\
\leq &\varepsilon+4M\varepsilon
\end{aligned}
$$

也就是$\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y-f(x)\right|\leq(1+4M)\varepsilon$对任意的$x\in[0,1]$都成立。

14.8.7 证明推论14.8.15 **(提示：结合使用习题14.8.3、引理14.8.8、引理14.8.13以及引理14.8.14)**

由于f是连续的紧支撑函数，因此根据习题14.8.3有f是有界的和一致连续的，不妨设f以M为界，然后根据一致连续的定义对给定的$\varepsilon>0$存在某个$\delta>0$使得对任意x，$y\in\mathbb{R}$满足$|x-y|\leq\delta$都有$|f(x)-f(y)|\leq\dfrac{\varepsilon}{1+4M}$。特别地，不失一般性的我们可以认为$\delta$是满足小于1的实数

于是首先使用引理14.8.8，对给定的$\varepsilon>0$与$0<\delta<1$存在某个$[-1,1]$上的多项式$p:[-1,1]\to\mathbb{R}$是一个$\left(\dfrac{\varepsilon}{1+4M},\delta\right)$恒等逼近；然后依据命题14.8.13，由于$f$是支撑在$[0,1]$上的连续函数并且$p$是支撑在$[-1,1]$上的连续函数，于是$f*p$是$[0,1]$上的多项式；最后，由于$f$满足性质"对给定的$\varepsilon$与$\delta$使得对任意$x$，$y\in\mathbb{R}$满足$|x-y|\leq\delta$都有$|f(x)-f(y)|\leq\dfrac{\varepsilon}{1+4M}$"并且多项式$p$是一个$\left(\dfrac{\varepsilon}{1+4M},\delta\right)$恒等逼近，于是应用引理14.8.14，对任意的$x\in[0,1]$有：

$$|f*p(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{1+4M}(1+4M)=\varepsilon$$

总结上面的讨论即有：

对任意的$\varepsilon>0$，存在函数$f*p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是$[0,1]$上的多项式，并且满足$|f*p(x)-f(x)|\leq\varepsilon$对任意的$x\in[0,1]$都成立。

于是推论14.8.15得证。

14.8.8 设$f:[0,1]\to\mathbb{R}$是一个连续函数，并设对于所有的非负整数$n=0，1，2，...$都有$\int_{[0,1]}f(x)x^n\mathrm{d}x=0$。证明：$f$一定是零函数$f\equiv 0$（提示：首先证明对所有多项式$P$都有$\int_{[0,1]}f(x)P(x)\mathrm{d}x=0$。然后利用魏尔斯特拉斯逼近定理证明$\int_{[0,1]}f(x)f(x)\mathrm{d}x=0$）

> 先证明对所有$[0,1]$上的多项式$P:[0,1]\to\mathbb{R}$都有$\int_{[0,1]}f(x)P(x)\mathrm{d}x=0$。
>
> 不妨假设$[0,1]$上的多项式$P:[0,1]\to\mathbb{R}$具有$P(x):=\sum_{j=0}^{n}c_jx^j$的形式，其中$c_j$（$1\leq j\leq n$）都是实数。于是根据积分的运算定律（命题11.4.1）我们有
>
> $$\begin{aligned}\int_{[0,1]}f(x)P(x)\mathrm{d}x&=\int_{[0,1]}f(x)\sum_{j=0}^{n}c_jx^j\mathrm{d}x\\&=\sum_{j=0}^{n}c_j\int_{[0,1]}f(x)x^j\mathrm{d}x\\&=\sum_{j=0}^{n}c_j\cdot 0=0\end{aligned}$$
>
> 于是便证明了我们的结论。
>
> ---
>
> 然后证明$\int_{[0,1]}f(x)f(x)\mathrm{d}x=0$。
>
> 由于f是闭区间$[0,1]$上的连续函数，因此根据命题9.6.3我们知道f是有界的，不妨设f以M为界；而根据魏尔斯特拉斯逼近定理I（推论14.8.15），对任意的$\varepsilon>0$都存在$[0,1]$上的多项式$P:[0,1]\to\mathbb{R}$使得对任意的$x\in[0,1]$都有$|P(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{M}$。于是结合我们之前证明了的结论$\int_{[0,1]}f(x)P(x)\mathrm{d}x=0$，可以计算有：
>
> $$\begin{aligned}\left|\int_{[0,1]}f(x)f(x)\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_{[0,1]}f(x)f(x)\mathrm{d}x-\int_{[0,1]}f(x)P(x)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int_{[0,1]}f(x)(f(x)-P(x))\mathrm{d}x\right|\\&\leq\int_{[0,1]}|f(x)||f(x)-P(x)|\mathrm{d}x\\&\leq\int_{[0,1]}M\frac{\varepsilon}{M}\mathrm{d}x\\&=\varepsilon\end{aligned}$$
>
> 即对任意$\varepsilon>0$都有$\left|\int_{[0,1]}f(x)f(x)\mathrm{d}x\right|\leq\varepsilon$，由于$\varepsilon$是任意的我们知道这表明$\int_{[0,1]}f(x)f(x)\mathrm{d}x=0$。然后考虑到平方函数$f\times f$显然是非负的，根据习题11.4.2于是只能有对任意的$x\in[0,1]$都有$f(x)f(x)=0\Longrightarrow f(x)=0$，于是$f$一定是零函数$f\equiv 0$。

14.8.9 证明引理14.8.16

> 对任意的$x_0\in\mathbb{R}$，考虑任意的$\varepsilon>0$。并且对x_0的情况分类讨论：
>
> - $x_0\in(0,1)$：
>
>   > 由于f在$[0,1]$上连续因此存在$\delta>0$使得任意$|x-x_0|\leq\delta$都有$|f(x)-f(x_0)|\leq\varepsilon$，特别地考虑$\sigma:=\min\{x_0,1-x_0,\delta\}$，于是对任意的$|x-x_0|\leq\sigma$都有$x\in[0,1]$且$|x-x_0|\leq\delta$，于是此时有$|F(x)-F(x_0)|=|f(x)-f(x_0)|\leq\varepsilon$。
>
> - $x_0\notin[0,1]$：

> > 此时由于x是$[0,1]$的外点（$[0,1]$是闭集）因此存在$\sigma > 0$使得$[x_0-\sigma, x_0+\sigma] \cap [0,1] = \varnothing$，于是对任意的$|x-x_0| \le \sigma$，都有$F(x) = 0 \implies |F(x)-F(x_0)| = |0| \le \varepsilon$。
>
> - $x_0 = 0$或$x_0 = 1$：
>
> > 此时有$F(x) = 0$，由于f在$[0,1]$上连续因此存在$\sigma > 0$使得任意$|x-x_0| \le \sigma$且$x \in [0,1]$都有$|F(x)-F(x_0)| \le \varepsilon$。而对$|x-x_0| \le \sigma$且$x \notin [0,1]$，由于$F(x) = 0$，于是也有$|F(x)-F(x_0)| \le \varepsilon$。
>
> 综上，于是我们证明了：
>
> 对任意的$\varepsilon > 0$，存在存在$\delta > 0$使得任意$x \in \mathbb{R}$满足$|x-x_0| \le \delta$都有$|F(x)-F(x_0)| \le \varepsilon$。
>
> 根据函数连续的定义，这表明F是在$\mathbb{R}$上连续的。

本节相关跳转

[实分析 13.3 连续性与紧致性]()