7.4 级数的重排列

命题

1. (7.4.1 非负级数的重排列？）设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$是一个**收敛的非负实数**级数，并且$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$是一个**双射**，那么$\sum_{n=0}^{\infty}a_{f(n)}$也是收敛的，并且与原级数有相同的和，即：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{f(n)}$$

2. (7.4.3 级数的重排列）设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$是一个**绝对收敛**的实数级数，并且$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$是一个**双射**，那么$\sum_{n=0}^{\infty}a_{f(n)}$也是收敛的，并且与原级数有相同的和，即：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{f(n)}$$

课后习题

7.4.1 设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$是一个绝对收敛的实数级数，设$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$是一个增函数（即对所有的$n\in\mathbb{N}$都有$f(n+1)>f(n)$）。证明：$\sum_{n=0}^{\infty}a_{f(n)}$也是绝对收敛的级数（提示：试着把$\sum_{n=0}^{\infty}a_{f(n)}$的每一个部分和与$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$（略有不同）的部分和进行比较）

> 在习题6.6.4中，我们已经证明了对f存在性质：$f(n)\geq n$对任意$n\in\mathbb{N}$成立。于是对任意$n\in\mathbb{N}$，我们指定集合X_n与Y_n分别有$X_n=\{i\in\mathbb{N}:0\leq i\leq n\}$与$Y_n=\{i\in\mathbb{N}:0\leq i\leq f(n)\}$，于是此时依据$f$是单射我们有$\#(X_n)=\#(f(X_n))\leq Y_n$与$f(X_n)\subseteq Y_n$成立。
>
> 然后我们考虑部分和$S'_N=\sum_{n=0}^{N}|a_{f(n)}|$，不难证明$S'_N$也可以写为$\sum_{x\in X_N}|a_{f(x)}|=\sum_{x\in f(X_N)}|a_x|$，于是根据有限和的性质（命题7.1.11(e)），我们有对任意$N\geq 0$都有：
>
> $$\sum_{x\in Y_N}|a_x|=\sum_{x\in f(X_N)}|a_x|+\sum_{x\in(Y_N\setminus f(X_N))}|a_x| \tag{1}$$
>
> 其中$S_N=\sum_{x\in Y_N}|a_x|=\sum_{n=0}^{f(n)}|a_n|$是$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$的部分和。然后根据绝对值非负的特点，$(1)$中右端两个部分均不小于$0$，于是由$(1)$可进而导出序关系，对任意$N\geq 0$有：
>
> $$\sum_{x\in Y_N}|a_x|\geq\sum_{x\in f(X_N)}|a_x| \tag{2}$$
>
> 然后根据命题7.3.1上界推断，(2)可进一步升级为存在一个实数M使得对任意$N\geq 0$有：

$$M \geq \sum_{x \in Y_N} |a_x| \geq \sum_{x \in f(X_N)} |a_x|$$

$$\Downarrow$$

$$M \geq \sum_{n=0}^{N} |a_{f(n)}|$$

再根据上界推断，此时$\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$也绝对收敛，结论得证。