11.9 微积分的两个基本定理

定义

1. （11.9.3 原函数）设I是一个有界区间，并且设$f: I \to \mathbb{R}$是一个函数，如果函数$F: I \to \mathbb{R}$在I上**可微**，并且对所有的$x \in I$均有$F'(x) = f(x)$，那么我们称F是f的**原函数**。

命题

1. （11.9.1 微积分第一基本定理）设$a < b$都是实数，$f: [a, b] \to \mathbb{R}$是**黎曼可积**的函数，并且设$F: [a, b] \to \mathbb{R}$是函数：

$$F(x) := \int_{[a,x]} f$$

   那么F是**连续的**。此外，如果有$x_0 \in [a, b]$并且f在x_0处**连续**，那么F在x_0处可微并且$F'(x_0) = f(x_0)$。

   （注：通俗来说，微积分第一基本定理断言f在特定的假设前提下有$\left(\int_{[a,x]} f\right)'(x) = f(x)$，即积分的导数变回了原来的函数；下面的微积分第二基本定理则给出了一个看起来反过来的结论，即导数的积分变回了原来的函数）

2. （11.9.4 微积分第二基本定理）设$a < b$都是实数，$f: [a, b] \to \mathbb{R}$是**黎曼可积**的函数。如果$F: [a, b] \to \mathbb{R}$是f的原函数，那么：

$$\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a)$$

   （注：看到上面的第二基本定理，就能发现只要能找到被积函数的一个原函数，那么就可以使用微积分第二基本定理去简单地计算积分，而微积分第一基本定理保证了每个黎曼可积的连续函数都存在原函数，关于不连续的函数则情况回更为复杂，在此处我们不对它进行讨论；另外，不是所有存在原函数的函数都是黎曼可积的，例如考虑有如下定义的函数$F: [-1, 1] \to \mathbb{R}$：$x \neq 0$时$F(x) := x^2 \sin(1/x^3)$，$x = 0$时$F(x) := 0$。由于$F$在任意位置都是可微的，因此$F'$有原函数，但是$F'$是无界的，因此$F'$不是黎曼可积的。正如两个微积分基本定理中我们粗体强调的那样，首先需要保证f是黎曼可积的）

3. （11.9.5 +C描述？）设I是一个有界区间，$f: I \to \mathbb{R}$是一个函数，并且设$F: I \to \mathbb{R}$和$G: I \to \mathbb{R}$是f的两个原函数。那么存在一个实数C使得对所有的$x \in I$都有$F(x) = G(x) + C$。

课后习题

11.9.1 设$f:[0,1]\to\mathbb{R}$是习题9.8.5中的函数，证明：对任意的有理数$q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$，定义为$F(x):=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y$的函数$F:[0,1]\to\mathbb{R}$在$q$处不可微

> 为方便查看，在此处贴出习题9.8.5的函数定义：
>
> 因为有理数集是可数的，于是记有$\mathbb{Q}=\{\mathfrak{q}(0),\mathfrak{q}(1),\dots\}$，其中$\mathfrak{q}:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$是从$\mathbb{N}$到$\mathbb{Q}$的双射。现定义函数$g:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$为$g(\mathfrak{q}(n)):=2^{-n}$（即$g(q)=2^{-\mathfrak{q}^{-1}(q)}$），其中$n$是任意的自然数。于是$g$把$\mathfrak{q}(0)$映射到$1$，把$\mathfrak{q}(1)$映射到$1/2$，等等。由于$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}$是绝对收敛的，所以$\sum_{q\in\mathbb{Q}}g(q)$也是绝对收敛的。现在定义函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$如下：
>
> $$f(r):=\sum_{q\in\mathbb{Q};q<r}g(q)$$
>
> 由于$\sum_{q\in\mathbb{Q}}g(q)$是绝对收敛的，因此对任意$r\in\mathbb{R}$，$f(r)$都是有意义的。
>
> ---
>
> 在习题9.8.5中我们已经证明过了f在q处总是不连续的，并且对任意$x<q$都有$f(q)>f(x)+g(q)$；然后还证明了f是严格单调递增的，从而对任意$x>q$都有$f(x)>f(q)$。
>
> 于是考虑微分的定义，我们知道F在q处可微当且仅当极限：
>
> $$\lim_{x\to q;x\in[0,1]\backslash\{q\}}\frac{F(x)-F(q)}{x-q}$$
>
> 存在，相应的其左右极限应当都存在并且相等，但是注意到对右极限：
>
> $$\lim_{x\to q;x\in(q,1]}\frac{F(x)-F(q)}{x-q}=\lim_{x\to q;x\in(q,1]}\frac{\int_{(q,x]}f}{x-q}$$
>
> 由于对任意的$x>q$都有$f(x)>f(q)$，从而常数函数$f(q)$是在$(q,1]$上从下方控制f的函数，进而根据比较原理有：
>
> $$\lim_{x\to q;x\in(q,1]}\frac{\int_{(q,x]}f}{x-q}\geq\lim_{x\to q;x\in(q,1]}\frac{\int_{(q,x]}f(q)}{x-q}=\lim_{x\to q;x\in(q,1]}\frac{f(q)(x-q)}{x-q}=f(q)$$
>
> 然后对左极限：
>
> $$\lim_{x\to q;x\in[0,q)}\frac{F(x)-F(q)}{x-q}=\lim_{x\to q;x\in[0,q)}\frac{\int_{[x,q)}f}{q-x}$$
>
> 由于对任意$x<q$都有$f(q)>f(x)+g(q)$，从而常数函数$f(q)-g(q)$是在$[0,q)$上从上方控制f的函数，因此根据比较原理有：
>
> $$\lim_{x\to q;x\in[0,q)}\frac{\int_{(x,q]}f}{q-x}\leq\lim_{x\to q;x\in[0,q)}\frac{\int_{(x,q]}f(q)-g(q)}{q-x}=\lim_{x\to q;x\in[0,q)}\frac{(f(q)-g(q))(q-x)}{q-x}=f(q)-g(q)$$
>
> 因此综合可以得到左极限与右极限必然是不相等的，因此F在q处不是可微的。

11.9.2 证明引理11.9.5（提示：对函数$F-G$使用平均值定理，即推论10.2.9；当然也可以使用微积分第二基本定理来证明该引理，不过需要小心，在引理11.9.5中并没有假设f是黎曼可积的）

> 考虑$F-G$，根据定义我们有$F'=G'=f$，于是根据命题10.1.13有对任意$x\in I$都有$(F-G)'(x)=f(x)-f(x)=0$，也即$F-G$的导数在I上处处为0。
>
> 于是根据平均值定理我们有，设$(F-G)(a)=C$，那么对任意$x\in I$且$x\neq a$都有存在$\zeta\in(a,x)$有：
>
> $$\frac{(F-G)(x)-(F-G)(a)}{x-a}=(F-G)'(\zeta)$$
>
> 然后又因为$(F-G)'(\zeta)=0$，于是即：
>
> $$(F-G)(x)=(F-G)(a)=C$$
>
> 综合即对任意$x\in I$都有$F(x)-G(x)=C\iff F(x)=G(x)+C$，引理11.9.5得证。

11.9.3 设$a<b$都是实数，$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是单调递增的函数。如果$F:[a,b]\to\mathbb{R}$是函数$F(x):=\int_{[a,x]}f$，并且设x_0是$[a,b]$中的元素。证明：F在x_0处可微，当且仅当f在x_0处连续（提示：在充分性和必要性中，其中有一个可以使用一个微积分基本定理来证明；对另一个，考虑f的左极限和右极限，并使用反证法）

> 由命题11.6.1我们知道f是黎曼可积的，并且注意到根据微积分第一基本定理我们有若f在x_0处连续则有F在x_0处可微，因此只需要证明有：“若F在x_0处可微，则f在x_0处连续。”即可得证这两者是等价的。
>
> 于是即证明若F在x_0处可微，则有极限：
>
> $$\lim_{x\to x_0;x\in[a,b]\backslash\{x_0\}}f(x)=f(x_0)$$
>
> 于是我们考虑左极限$\lim\limits_{x\to x_0;x\in[a,x_0)}f(x)$与右极限$\lim\limits_{x\to x_0;x\in(x_0,b]}f(x)$，若两者均等于$f(x_0)$则我们由命题9.5.3可以直接得到$f$是连续的。
>
> 设F在x_0处导数为L，于是根据牛顿逼近法有对任意的$\varepsilon>0$都存在$\delta>0$使得对任意$x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap[a,b]$都有：
>
> $$|F(x)-F(x_0)-L(x-x_0)|\leq\varepsilon|x-x_0|$$
>
> 不失一般性地，我们可以认为δ足够小到使得$[x_0-\delta,x_0+\delta]$是包含于$[a,b]$的。
>
> 于是考虑$x>x_0$，我们有牛顿逼近法的结论等价于：
>
> $$\left|\int_{(x_0,x]}f-L(x-x_0)\right|\leq\varepsilon|x-x_0|\iff(L-\varepsilon)|x-x_0|\leq\int_{(x_0,x]}f\leq(L+\varepsilon)|x-x_0|$$
>
> 于是由于f是单调递增的，从而对任意的$x\in(x_0,x_0+\delta]$都有$f(x)\geq f(x_0)$，于是在$(x_0,x_0+\delta]$上常数函数$f(x_0)$是从下方控制f的，于是结牛顿逼近法的结论有：
>
> $$\int_{(x_0,x_0+\delta]}f(x_0)\leq\int_{(x_0,x_0+\delta]}f\Longrightarrow f(x_0)|\delta|\leq\int_{(x_0,x_0+\delta]}f\leq(L+\varepsilon)|\delta|$$
>
> 于是即$f(x_0)\leq L+\varepsilon$。类似地对$x<x_0$的情况讨论，我们可以得到$f(x_0)\geq L-\varepsilon$，由于$f(x_0)$的值与ε无关并且ε是任意的，因此综合可以得到结论只能有$f(x_0)=L$。
>
> 并且注意到，在上面$x>x_0$的牛顿逼近法结论已经可以断言至少存在一个$x_1\in(x_0,x_0+\delta]$使得$f(x_1)\leq L+\varepsilon$。我们可以使用反证法证明这个结论：

> > 不妨假设对任意$x \in (x_0, x_0+\delta]$都有$f(x) > L+\varepsilon$，从而常数函数$L+\varepsilon$是在$(x_0, x_0+\delta]$上从下方控制f的，进而有：
> >
> > $$\int_{(x_0,x_0+\delta]}(L+\varepsilon) < \int_{(x_0,x_0+\delta]} f \Longrightarrow (L+\varepsilon)|\delta| < \int_{(x_0,x_0+\delta]} f$$
> >
> > 和牛顿归纳法的结论矛盾。
>
> 于是由于f是单调递增的，从而此时对任意$x \in (x_0, x_1]$都有$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \leq f(x_0)+\varepsilon$，即有$|f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$。于是此时取$\sigma := |x_1 - x_0|$，综合上面的结论即有：
>
> 对任意$\varepsilon > 0$，都存在实数$\sigma > 0$使得对任意$x \in (x_0, b]$且x满足$|x-x_0| \leq \sigma$，都有$|f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$。
>
> 于是根据函数极限的定义即有$\lim\limits_{x \to x_0; x \in (x_0, b]} f(x) = f(x_0)$。使用类似的方法，我们也可以得到左极限$\lim\limits_{x \to x_0; x \in [a, x_0)} f(x) = f(x_0)$，于是我们得证了左极限等于右极限，于是$f$在$x_0$处连续，题目结论得证。

本节相关跳转

[实分析 9.8 单调函数]

[实分析 10.2 局部最大值、局部最小值以及导数]