# 10.1 基本定义

## 定义

1. (10.1.1 在一点处的可微性) 设$X$是$\mathbb{R}$的一个子集，$x_0 \in X$既是$X$中元素又是$X$的一个**极限点**，并且设$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数。若极限：

$$\lim_{x \to x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

收敛于某个实数$L$，那么称$f$在$X$中的$x_0$处**可微**，并且**导数**是$L$，记作$f'(x_0) := L$。如果极限不存在，或者$x_0$不是$X$中的元素，又或者$x_0$不是$X$的极限点，那么此时认为$f'(x_0)$**无定义**，并且$f$在$X$中的$x_0$处**不可微**。

(注：需要注意的是，可微的概念只对极限点有效，对孤立点我们并不给出导数与可微的概念。当然在实际问题中，绝大多数函数的定义域都是一个区间，从而根据引理9.1.21，集合中每一个点都是极限点，于是便不需要特意考虑这些问题；另外，我们有时候也会使用$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$来代替$f'$这个记号。但是这个记号在多元微积分中可能会产生一些混淆的歧义，因此使用这种记号的时候，必须要确保自变量$x$是$f$的唯一输入时这样的写法才是安全的)

2. (10.1.11 在定义域上的可微性) 设$X$是$\mathbb{R}$的一个子集，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数。如果对每个极限点$x \in X$，函数$f$在$X$中的$x$处都是可微的，那么称$f$在$X$上是**可微的**。

---

## 命题

1. (10.1.7 牛顿逼近法) 设$X$是$\mathbb{R}$的一个子集，$x_0 \in X$既是$X$中元素又是$X$的一个极限点，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且设$L$是实数。那么下面两个命题在逻辑上是等价的：

> - $f$在$X$中的$x_0$处是可微的，并且导数为$L$。
> - 对任意的$\varepsilon > 0$都存在一个$\delta > 0$使得，只要$x \in X$是$\delta$-接近于$x_0$的，那么$f(x)$就是$\varepsilon|x - x_0|$-接近于$f(x_0) + L(x - x_0)$的。即如果$x \in X$且$|x - x_0| \leq \delta$，则有：
>
> $$|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| \leq \varepsilon |x - x_0|$$

(注：这表明了在$x_0$处可微的函数在$x_0$附近是近似线性的。通俗点说的话，就是如果$f$在$x_0$处是可微的，那么我们有近似式$f(x) \approx f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$，反之亦然)

2. (10.1.10 可微性蕴涵着连续性) 设$X$是$\mathbb{R}$的一个子集，$x_0 \in X$既是$X$中元素又是$X$的一个极限点，并且设$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数。如果$f$在$x_0$处是可微的，那么$f$在$x_0$处也是连续的。

> 推论：
>
> 1. (10.1.12 可微函数的连续性？) 设$X$是$\mathbb{R}$的一个子集，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数。如果$f$是一个在$X$上可微的函数，那么$f$也是在$X$上也是连续的。

3. (10.1.13 微分计算) 设$X$是$\mathbb{R}$的一个子集，$x_0 \in X$既是$X$中元素又是$X$的一个**极限点**，并且设$f: X \to \mathbb{R}$与$g: X \to \mathbb{R}$都是函数。那么有下面的命题成立：

> 1. 若$f$是一个常数函数，即存在一个实数$c$使得对所有的$x \in X$都有$f(x) = c$，那么$f$在$x_0$处是可微的且$f'(x_0) = 0$。
> 2. 若$f$是一个恒等函数，即对所有的$x \in X$都有$f(x) = x$，那么$f$在$x_0$处是可微的且$f'(x_0) = 1$。
> 3. (和法则) 如果$f$和$g$都在$x_0$处可微，那么$f + g$在$x_0$处也是可微的，且$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$。
> 4. (积法则) 如果$f$和$g$都在$x_0$处可微，那么$fg$在$x_0$处也是可微的，且$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$。
> 5. 如果$f$在$x_0$处是可微的，且$c$是一个实数，那么$cf$在$x_0$处也是可微的，且$(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$。
> 6. (差法则) 如果$f$和$g$都在$x_0$处可微，那么$f - g$在$x_0$处也是可微的，且$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$。
> 7. 如果$g$在$x_0$处是可微的，且$g$在$X$上不为零，那么$\dfrac{1}{g}$在$x_0$处也是可微的，且$\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$。

> 8. （商法则）如果$f$和$g$都在$x_0$处可微，且$g$在$X$上不为零，那么$\frac{f}{g}$在$x_0$处也是可微的，且$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$。

（注：乘积法则又称**莱布尼兹法则**）

4. （10.1.15 链式法则）设$X$，$Y$都是$\mathbb{R}$的子集，$x_0\in X$是$X$的极限点，$y_0\in Y$是$Y$的极限点，$f:X\to Y$是在$x_0$处可微的函数，并且设$f(x_0)=y_0$。若$g:Y\to\mathbb{R}$是在$y_0$处可微的函数，那么$g\circ f:X\to\mathbb{R}$在$x_0$处是可微的，且：

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$$

（注：若将$f(x)$记为$y$，将$g(y)$记为$z$，那么链式法则可以写为看起来更加直观的$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。但是正如前文所述，这样的记法可能会造成误解，例如这样的记法会带来因变量与自变量的模糊（特别是$y$，它同时扮演了自变量与因变量的角色）；同时也可能在直观上带来$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$与$\mathrm{d}z$可以类似实数处理的错觉。事实上，我们还没有赋予它们任何意义，这样的错觉在多元链式法则中可能会带来额外的困扰。因此如果不是非常清楚自己在做什么，不建议使用这样的记号）

---

# 课后习题

**10.1.1 设$X$是$\mathbb{R}$的子集，$x_0$是$X$的极限点，$f:X\to\mathbb{R}$是在$x_0$处可微的函数，设$Y\subset X$且$x_0\in Y$是$Y$的极限点。证明：限制在$Y$上的函数$f|_Y:Y\to\mathbb{R}$也在$x_0$处可微，并且其导数与$f$在$x_0$处的导数相同。解释为什么这与注10.1.2中的讨论不矛盾**

> 注10.1.2内容：
>
> > 注意，为了使$x_0$附着于$X-\{x_0\}$，我们需要让$x_0$成为极限点，否则极限
> >
> > $$\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
> >
> > 将自动地无定义。特别地，我们不定义一个函数在孤立点处的导数。例如，如果我们将定义为$f(x):=x^2$的函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$限制到定义域$X:=[1,2]\cup\{3\}$上，那么这个限制函数在$3$处就不可微了。实际上，绝大多数情况下定义域$X$都是一个区间，从而根据引理9.1.21，集合中每一个点都是极限点，于是便不需要特意考虑这些问题。
>
> 证明：
>
> 令有$\delta(x):=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，该记号用于简化下文表述（注意，这只是一个记号，不是一个函数）。
>
> 由于$f:X\to\mathbb{R}$是在$x_0$处可微的函数，于是根据定义10.1.1，不妨假设其在$x_0$的导数为$L$，于是即极限
>
> $$\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\delta(x)=L$$
>
> 从而根据命题9.3.9，这等价于对任意一个由$X-\{x_0\}$中元素组成且收敛于$x_0$的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，都有序列$(\delta(a_n))_{n=0}^{\infty}$收敛于$L$。特别地，对任意一个由$Y-\{x_0\}$中元素组成且收敛于$x_0$序列$(b_n)_{n=0}^{\infty}$，由于$Y\subset X$，因此这也是一个由$X-\{x_0\}$中元素组成的序列，即有序列$(\delta(b_n))_{n=0}^{\infty}$收敛于$L$。总结即：
>
> > 对任意一个由$Y-\{x_0\}$中元素组成且收敛于$x_0$序列$(b_n)_{n=0}^{\infty}$，序列$(\delta(b_n))_{n=0}^{\infty}$收敛于$L$。
>
> 根据命题9.3.9，于是即极限
>
> $$\lim_{x\to x_0;x\in Y-\{x_0\}}\frac{f|_Y(x)-f|_Y(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0;x\in Y-\{x_0\}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L$$
>
> 从而根据定义10.1.1，$f|_Y$在$Y$中的$x_0$处可微，且其导数值和$f$在$x_0$处的导数值相同（为$L$）。
>
> 对于注10.1.2，不难看到给出的例子中3是限制后定义域的一个孤立点，但是题目中$x_0$是限制后定义域的一个极限点，对于微分的定义来说，如果点不是限制后定义域的极限点那么定义中的极限会由于不满足条件而直接无效。

**10.1.2 证明命题10.1.7（提示：对$x=x_0$和$x\neq x_0$的情况要分类讨论）**

> 分别证明：
>
> - 若$f$在$X$中的$x_0$处是可微的，并且导数为$L$，则对任意的$\varepsilon>0$都存在一个$\delta>0$使得，只要$x\in X$是$\delta$-接近于$x_0$的，那么$f(x)$就是$\varepsilon|x-x_0|$-接近于$f(x_0)+L(x-x_0)$的：

由于$f$在$X$的$x_0$处导数为$L$，于是即：

$$\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L$$

根据极限的定义，即对任意的$\varepsilon>0$，总存在一个$\delta>0$使得对任意的$x\in X-\{x_0\}$且$|x-x_0|\le\delta$，有：

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-L\right|\le\varepsilon &\iff |f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)|\le\varepsilon|x-x_0|\\ &\iff |f(x)-(f(x_0)+L(x-x_0))|\le\varepsilon|x-x_0|\end{aligned}$$

即对任意的$\varepsilon>0$，总存在一个$\delta>0$使得只要$x\in X-\{x_0\}$是$\delta$-接近于$x_0$的，那么$f(x)$就是$\varepsilon|x-x_0|$-接近于$f(x_0)+L(x-x_0)$的。

此时再额外考虑$x=x_0$的情况，可以看到$f(x_0)[f(x_0)]$显然是$0[\varepsilon(x_0-x_0)]$-接近于$f(x_0)[f(x_0)+L(x_0-x_0)]$的，于是上面的结论可以额外从$X-\{x_0\}$扩展到对任意$X$中的$x$都成立。即：

对任意的$\varepsilon>0$，总存在一个$\delta>0$使得只要$x\in X$是$\delta$-接近于$x_0$的，那么$f(x)$就是$\varepsilon|x-x_0|$-接近于$f(x_0)+L(x-x_0)$的。

于是结论得证。

---

- 若对任意的$\varepsilon>0$都存在一个$\delta>0$使得，只要$x\in X$是$\delta$-接近于$x_0$的，那么$f(x)$就是$\varepsilon|x-x_0|$-接近于$f(x_0)+L(x-x_0)$的，则$f$在$X$中的$x_0$处是可微的，并且导数为$L$：

此时即对任意的$\varepsilon>0$都存在一个$\delta>0$使得，只要$x\in X$是$\delta$-接近于$x_0$的，那么有：

$$\begin{aligned}|f(x)-(f(x_0)+L(x-x_0))|\le\varepsilon|x-x_0| &\iff |f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)|\le\varepsilon|x-x_0|\\ &\iff \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-L\right|\le\varepsilon\end{aligned}$$

从而根据极限的定义，即有极限：

$$\lim_{x\to x_0;x\in X}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L$$

又根据命题9.3.9，这表明对任意的由$X$中元素构成且收敛于$x_0$的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，都有$\left(\frac{f(a_n)-f(x_0)}{a_n-x_0}\right)_{n=0}^{\infty}$收敛于$L$。特别地，考虑任意的由$X-\{x_0\}$中元素构成且收敛于$x_0$的序列$(b_n)_{n=0}^{\infty}$，由于$X-\{x_0\}$是$X$的子集，因此$(b_n)_{n=0}^{\infty}$也由$X$中元素构成的，即有$\left(\frac{f(b_n)-f(x_0)}{b_n-x_0}\right)_{n=0}^{\infty}$收敛于$L$，根据命题9.3.9即：

$$\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L$$

从而根据定义10.1.1，即$f$在$X$中的$x_0$处是可微的，并且导数为$L$，结论得证。

**10.1.3 证明命题10.1.10（提示：利用极限定律（命题9.3.14）或者命题10.1.7）**

根据定义10.1.1，由$f$在$X$中的$x_0$处是可微的（不妨设导数为$L$），于是有

$$\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L$$

根据极限定律（命题9.3.14(g)），于是有：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}f(x)-f(x_0)&=\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}x-x_0\cdot\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\&=0\cdot L\\&=0\end{aligned}$$

于是根据极限定义，即对任意的$\varepsilon>0$都存在$\delta>0$，对任意满足$x\in X-\{x_0\}$且$x$是$\delta$-接近于$x_0$的，都有$|f(x)-f(x_0)|\le\varepsilon$。特别地，注意到对任意的$\varepsilon>0$与$\delta>0$，都有$x_0\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$且$|f(x_0)-f(x_0)|=0\le\varepsilon$，于是上面的结论可以扩展为对任意的$x\in(X-\{x_0\})\cup\{x_0\}\iff x\in X$成立，于是总结有：

> 对任意的$\varepsilon>0$都存在$\delta>0$，对任意满足$x\in X$且$x$是$\delta$-接近于$x_0$的，都有$|f(x)-f(x_0)|\leq\varepsilon$，根据极限的定义，即极限
>
> $$\lim_{x\to x_0;x\in X}f(x)=f(x_0)$$
>
> 从而根据函数连续的定义（定义9.4.1），$f$在$x_0$处是连续的。
>
> 综上，若$f$在$X$中的$x_0$处是可微的，那么$f$在$x_0$处是连续的，于是命题10.1.10得证。

**10.1.4 证明定理10.1.13（提示：利用极限定律（命题9.3.14），也可以用该定理的前面的部分证明后面的部分。对乘积法则，可以利用等式：**

$$\begin{aligned}&f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)\\=&f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)\\=&f(x)(g(x)-g(x_0))+(f(x)-f(x_0))g(x_0)\end{aligned}$$

**这种加上并减去一个中间项的技巧有时被称为“中间人把戏”，这个技巧在分析理论中非常有用）**

> 逐条证明：
>
> 1. 若$f$是一个常数函数，即存在一个实数$c$使得对所有的$x\in X$都有$f(x)=c$，那么$f$在$x_0$处是可微的且$f'(x_0)=0$。
>
> 直接根据定义计算，对任意$x_0\in X$有：
>
> $$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{c-c}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}0\\&=0\end{aligned}$$
>
> 即对任意$x_0\in X$，常数函数$f$都是在$X$中的$x_0$处可微并且其导数$f'(x_0)$为0。
>
> ---
>
> 2. 若$f$是一个恒等函数，即对所有的$x\in X$都有$f(x)=x$，那么$f$在$x_0$处是可微的且$f'(x_0)=1$。
>
> 直接根据定义计算，对任意$x_0\in X$有：
>
> $$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{x-x_0}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}1\\&=1\end{aligned}$$
>
> 即对任意$x_0\in X$，恒等函数$f$都是在$X$中的$x_0$处可微并且其导数$f'(x_0)$为1。
>
> ---
>
> 3. 如果$f$和$g$都在$x_0$处可微，那么$f+g$在$x_0$处也是可微的，且$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$。
>
> 根据极限定律（命题9.3.14(a)），有：
>
> $$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{[f(x)+g(x)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{x-x_0}\\=&\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{[f(x)-f(x_0)]+[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}\\=&\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\=&f'(x_0)+g'(x_0)\end{aligned}$$
>
> 于是根据定义10.1.1，即有$f+g$在$x_0$处也是可微的，且$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$成立。
>
> ---
>
> 4. 如果$f$和$g$都在$x_0$处可微，那么$fg$在$x_0$处也是可微的，且$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$。
>
> 根据极限定律（命题9.3.14），有：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\
=&\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}} \frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\
=&\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}} \frac{f(x)[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}+\frac{[f(x)-f(x_0)]g(x_0)}{x-x_0} \\
=&\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\cdot \lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\
=&\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}} f(x)\cdot g'(x_0)+g(x_0)\cdot f'(x_0)
\end{aligned}
$$

又考虑到根据命题10.1.10，由于$f$是可微的，从而$f$也是连续的，于是根据连续的定义应当有$\lim_{x\to x_0;x\in X} f(x)=f'(x_0)$，特别地，根据命题9.3.9的结论，可以得到$\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}} f(x)=f'(x_0)$。于是上式可得到：

$$=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0)$$

于是根据定义10.1.1，即有$fg$在$x_0$处也是可微的，且$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$成立。

---

5. 如果$f$在$x_0$处是可微的，且$c$是一个实数，那么$cf$在$x_0$处也是可微的，且$(cf)'(x_0)=cf'(x_0)$。

根据结论(a)与结论(d)可以直接得证常数函数$g(x):=c$与任意可微函数$f(x)$的乘积函数$cf$是在$X$中的$x_0$处可微的且在$x_0$处的导数有$(cf)'(x_0)=cf'(x_0)$。

---

6. 如果$f$和$g$都在$x_0$处可微，那么$f-g$在$x_0$处也是可微的，且$(f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$。

根据结论(a)，(c)与结论(d)，由$f-g=f+(-1)\cdot g$有$f-g$在$X$中的$x_0$处也是可微的，且有：

$$(f-g)'(x_0)=[f+(-1)\cdot g]'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$$

---

7. 如果$g$在$x_0$处是可微的，且$g$在$X$上不为零，那么$\frac{1}{g}$在$x_0$处也是可微的，且$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$。

根据极限定律（命题9.3.14），有：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}} \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} \\
=&\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}} \frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)\cdot g(x_0)\cdot (x-x_0)} \\
=&\frac{\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}} 1}{\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}} g(x)}\cdot\frac{1}{g(x_0)}\cdot \lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}} \frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0} \\
=&\frac{1}{\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}} g(x)}\cdot\frac{-g'(x_0)}{g(x_0)}
\end{aligned}
$$

然后如同前面结论(d)证明一样，由$g$的可微性可以得到它的连续性，进而可以得到$\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}} g(x)=g(x_0)$，于是上式等于：

$$=\frac{1}{g(x_0)}\frac{-g'(x_0)}{g(x_0)}=-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

于是根据定义10.1.1，即有$\frac{1}{g}$在$x_0$处也是可微的，且有$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$成立。

---

8. 如果$f$和$g$都在$x_0$处可微，且$g$在$X$上不为零，那么$\frac{f}{g}$在$x_0$处也是可微的，且$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$。

> 根据结论(d)与结论(g)，由$\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$有$\frac{f}{g}$在$X$中的$x_0$处也是可微的，且在$x_0$处的导数有：
>
> $$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)&=f'(x_0)\cdot\left[\frac{1}{g(x_0)}\right]+f(x_0)\cdot\left[-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right]\\&=\frac{f'(x_0)g(x_0)}{g(x_0)^2}-\frac{f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\\&=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\end{aligned}$$

**10.1.5 设$n$是一个自然数，并且设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是函数$f(x):=x^n$。证明：$f$在$\mathbb{R}$上是可微的，并且对所有的$x\in\mathbb{R}$均有$f'(x)=nx^{n-1}$（提示：利用定理10.1.13和归纳法）**

> 使用归纳法证明该命题：
>
> 对$n=0$的情况：
>
> > 此时$f(x):=1$，根据定理10.1.13，常数函数$f$是在$\mathbb{R}$上对任意$x_0\in\mathbb{R}$都是可微的（即$f$在$\mathbb{R}$上是可微的），且常数函数的导数$f'$对任意$x_0\in\mathbb{R}$都有$f'(x_0):=0\ (0\cdot {x_0}^{0-1})$，此情况下结论成立。
>
> 现归纳性假设对$n=a$时成立结论，对$n=a+1$时的情况讨论：
>
> > 由$f(x)=x^{a+1}=x^a\cdot x$，不妨令有定义为$g'(x):=x^a$的函数$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，于是根据定理10.1.13与归纳假设，由$g$与恒等函数对任意的$x_0\in\mathbb{R}$都是可微的可以得到$f$也是$\mathbb{R}$上对任意$x_0\in\mathbb{R}$都是可微的（即$f$在$\mathbb{R}$上是可微的），且有：
> >
> > $$f'(x_0)=g'(x_0)x_0+g(x_0)=a{x_0}^a+{x_0}^a=(a+1){x_0}^a$$
> >
> > 于是即对任意的$x_0\in\mathbb{R}$都有$f'(x_0)=n{x_0}^{n-1}$成立，归纳得证。
>
> 综上，结论得证。

**10.1.6 设$n$是一个负整数，并且设$f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$是函数$f(x):=x^n$。证明：$f$在$\mathbb{R}-\{0\}$上是可微的，并且对所有的$x\in\mathbb{R}-\{0\}$均有$f'(x)=nx^{n-1}$（提示：利用定理10.1.13和习题10.1.5）**

> 对任意的$n$是一个负整数，我们有$f(x)=x^n=1/x^{-n}\ (-n\in\mathbb{N})$，于是根据定理10.1.13与习题10.1.5，$f$在$\mathbb{R}$上对任意$x_0\in\mathbb{R}$都是可微的（即$f$在$\mathbb{R}$上是可微的），并且有：
>
> $$f'(x_0)=-\frac{(-n)\cdot {x_0}^{-n-1}}{{x_0}^{-2n}}=n{x_0}^{n-1}$$
>
> 于是结论得证。

**10.1.7 证明定理10.1.15（提示：一种方法是采用牛顿逼近法（命题10.1.7）；另一种方法是利用命题9.3.9和命题10.1.10，把这个问题转化成关于序列极限的问题。但是使用后面这种方法时，需要单独处理$f'(x_0)=0$的情形，因为在此情形下可能会出现用零作除数的情况）**

> 根据定义10.1.1，考虑下面的极限：
>
> $$\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0}$$
>
> 需要证明该极限存在且值为$g'(y_0)f'(x_0)$。注意到：
>
> $$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0}\\=&\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}\tag{1}$$
>
> 对任意$\varepsilon>0$，由$g$是在$Y$中的$y_0$处是可微的与牛顿逼近法，存在一个$\delta>0$使得对任意的$y\in Y$且$|y-y_0|\le\delta$都有：
>
> $$|g(y)-[g(y_0)+g'(y_0)(y-y_0)]|\le\varepsilon|y-y_0|$$
>
> 对$\delta$，由$f$是在$X$中的$x_0$处是可微的，因此由命题10.1.10，$f$是$x_0$处是连续的，于是根据定义，存在$\sigma>0$使得对任意的$x\in X$（特别地，我们只需要对任意的$x\in X-\{x_0\}$）满足$|x-x_0|\le\sigma$都有：
>
> $$|f(x)-f(x_0)|\le\delta\iff|f(x)-y_0|\le\delta$$

> 并且注意到$f(x)\in Y$，于是可以得到对任意的$x\in X$满足$|x-x_0|\le\sigma$都满足：
>
> $$\frac{g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))-\varepsilon|f(x)-f(x_0)|}{f(x)-f(x_0)}\le\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\le\frac{g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))+\varepsilon|f(x)-f(x_0)|}{f(x)-f(x_0)}$$
> $$\Downarrow$$
> $$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\in[g'(f(x_0))-\varepsilon,g'(f(x_0))+\varepsilon]$$
>
> 于是即：
>
> $$\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}=g'(f(x_0))=g'(y_0)$$
>
> 从而对$(1)$式，根据极限定律的乘法法则可以计算得到：
>
> $$\begin{aligned}&=g'(y_0)\lim_{x\to x_0;x\in X-\{x_0\}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\&=g'(y_0)f'(x_0)\end{aligned}$$
>
> 于是定理10.1.15得证。

---

## 本节相关跳转

[实分析 9.1 实直线的子集]

[实分析 9.3 函数的极限值]