18.3 外测度是不可加的

命题

1. (18.3.1 可数可加性不成立)在$\mathbb{R}$中存在可数个互不相交的子集$(A_j)_{j\in J}$，使得

$$m^*\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \neq \sum_{j\in J} m^*(A_j)$$

   (注：由于本节较短，因此在此注释一下原书证明此结论的大概思路。考虑$\mathbb{Q}$的全体陪集构成的集合$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$，为其中每一个陪集$A$使用选择公理选择出对应的$x_A$组成一个集合$E$。然后考虑$E$与$[-1,1]$中有理数$q$构成的全体陪集的并集$X$，通过单调性（比较$X$，$[0,1]$和$[-1,2]$）可以给出它的外测度值范围；但是另一方面，在承认可数可加性的前提下通过平移不变性将X的外测度表示为$m^*(E)$的可数和，从而导出X的外测度必然只能是0或$+\infty$中的一个。导出矛盾后只能承认已经证明过的外测度单调性，从而否定外测度满足可数可加性的可能；需要注意到是这个证明使用了了选择公理，如果不假定选择公理，那么我们就可能得到一个外测度满足可数可加性的数学模型)

2. (18.3.3 有限可加性不成立)在$\mathbb{R}$中存在有限个互不相交的子集$(A_j)_{j\in J}$，使得

$$m^*\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \neq \sum_{j\in J} m^*(A_j)$$

   (注：由于本节较短，因此在此注释一下原书证明此结论的大概思路。利用命题18.3.1定义的X与E与单调性给出的X的外测度的范围，结合可数次可加性得证E的外测度并不为0，再然后使用反证法证明如果有有限可加性成立，那么E的外测度不可能大于任意小的一个实数（取足够数量的有理数$q\in[-1,1]$与E组成陪集然后取并集，根据有限可加性堆到超过X的外测度即可导出矛盾）；这些例子同**巴拿赫-塔斯基悖论**有关，它讲述了利用选择公理将$\mathbb{R}^3$中的单位球划分为有限多块，就可以通过旋转和平移操作将这有限多块组成两个完整的单位球，这个划分涉及到了不可测集的内容)