11.6 单调函数的黎曼可积性

命题

1. (11.6.1 闭区间上的单调函数是黎曼可积的？) 设$[a,b]$是一个有界闭区间，并且设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是单调函数，那么f在$[a,b]$上是黎曼可积的。

   (注：在习题9.8.5中我们给出了一个非分段连续的单调函数例子，因此证明这个命题不能通过命题11.5.6直接得到，只能从原始定义出发)

   > 推论：
   >
   > 1. (11.6.3 有界的单调函数是黎曼可积的) 设I是一个有界区间，并且设$f:I\to\mathbb{R}$是既单调又有界的，那么f在I上是黎曼可积的。

2. (11.6.4 积分判别法) 设$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$是一个**单调递减**的函数，并且它是**非负的**（即对所有的$x\geq 0$都有$f(x)\geq 0$），那么级数$\sum_{n=0}^{\infty}f(n)$是收敛的，当且仅当$\sup_{N>0}\int_{[0,N]}f$是有限的。

   > 推论：
   >
   > 1. (11.6.5) 设p是一个实数，那么当$p>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$是绝对收敛的，而当$p\leq 1$时，它是发散的。
   >
   >   (注：在推论7.3.7中我们已经阐述了这个命题的有理数形式，现在我们通过积分判别法将这个命题推广到实数)

课后习题

11.6.1 利用命题11.6.1证明推论11.6.3（提示：修改命题11.5.3的证明）

> 首先注意到如果I是一个单点集或者空集，那么结论是平凡的；如果I是一个形如$[a,b]$的闭区间，那么可以直接根据命题11.6.1得出结论。于是我们不妨假设I是形如$(a,b]$，$[a,b)$或(a,b)的区间，其中$a<b$。
>
> 由于f是有界的，于是设M是f的界（从而对任意$x\in I$都有$-M\leq f(x)\leq M$）。
>
> 然后设实数$0<\varepsilon<\frac{(b-a)}{2}$是一个很小的数，并且我们知道限制定义域不会影响函数的单调性与有界性，因此限制函数$f|_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}$是黎曼可积的。从而根据黎曼可积的定义，我们能够找到一个分段常数函数$h:[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\to\mathbb{R}$在$[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$上从上方控制$f|_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}$，并且：
>
> $$\int_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}f\leq\int_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}h\leq\int_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}f+\varepsilon$$
>
> 然后定义函数$\tilde{h}:I\to\mathbb{R}$有：
>
> $$\tilde{h}(x):=\begin{cases}h(x) & \text{if } x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\\ M & \text{if } x\notin[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\end{cases}$$
>
> 于是显然$\tilde{h}$是从上方控制f的函数，再根据定理11.4.1可以计算有：
>
> $$\overline{\int}_I f\leq\int_I\tilde{h}=\int_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}h+2M\varepsilon\leq\int_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}f+(2M+1)\varepsilon$$
>
> 类似地，可以对f的下黎曼积分给出结论：
>
> $$\underline{\int}_I f\geq\int_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}f-(2M+1)\varepsilon$$
>
> 从而有：
>
> $$\overline{\int}_I f-\underline{\int}_I f\leq(4M+2)\varepsilon$$

> 由于ε可以是任意小的，因此只能有$\overline{\int}_I f = \underline{\int}_I f$，从而$f$是黎曼可积的。

11.6.2 给出分段单调函数的一个合理的定义，然后证明：所有的有界分段单调函数都是黎曼可积的

> 分段单调函数的定义：
>
> > 设I是一个有界区间，并且设$f: I \to \mathbb{R}$是函数。称f在I上是**分段单调**的，当且仅当存在一个I的划分P，使得对任意的$J \in P$，$f|_J$都是J上的单调函数。
>
> ---
>
> 证明：所有的有界分段单调函数都是黎曼可积的。
>
> 考虑任意的有界区间I上的有界分段单调函数$f: I \to \mathbb{R}$，类似习题11.5.1的证明，稍作修改即可。证明如下：
>
> 根据上面分段单调函数的定义，存在划分P使得对任意$J \in P$，$f|_J$都是J上的单调函数。特别地，考虑到f是有界的，因此$f|_J$都是J上的有界单调函数，从而根据命题11.6.3，$f|_J$也是黎曼可积的。
>
> 于是然后对任意$J \in P$，我们定义函数$F_J: I \to \mathbb{R}$有：
>
> $$F_J(x) = \begin{cases} f|_J(x) & \text{if } x \in J \\ 0 & \text{if } x \notin J \end{cases}$$
>
> 由定理11.4.1(g)我们可以得到F_J是黎曼可积的，然后注意到对任意$x \in X$都有：
>
> $$f(x) = \sum_{J \in P} F_J(x)$$
>
> 因此我们有$f = F_{J_1} + \ldots + F_{J_n}(P = \{J_1, \ldots, J_n\})$，从而根据定理11.4.1(a)我们有$f$是黎曼可积的，题目结论得证。

11.6.3 证明命题11.6.4（提示：不妨思考$\sum_{n=1}^{N} f(n)$，$\sum_{n=0}^{N-1} f(n)$与积分$\int_{[0,N]} f$之间有什么联系？）

> 我们令记号$S_b^a := \sum_{n=b}^{a} f(n)$。
>
> 首先我们需要注意到，级数$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$是收敛的当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$是收敛的（命题7.2.14(c)），并且由于f是非负的，因此序列$(S_0^N)_{N=0}^{\infty}$与序列$(S_1^N)_{N=1}^{\infty}$都是单调递增的，从而根据命题6.3.8我们有$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$是收敛的当且仅当$(S_0^N)_{N=0}^{\infty}$是有界的，并且有：
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \lim_{N \to \infty} S_0^N = \sup(S_0^N)_{N=0}^{\infty}$$
>
> 对$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$与$(S_1^N)_{N=1}^{\infty}$也有类似的结论。
>
> 此外，需要注意到集合$T_{\mathbb{N}} := \left\{\int_{[0,N]} f : N \in \mathbb{N}\right\}$与$T_{\mathbb{R}} := \left\{\int_{[0,R]} f : R \in \mathbb{R}^+\right\}$有相同的上确界，这是因为：
>
> > 对任意自然数N都有N是一个实数，因此$\int_{[0,N]} f$也属于$T_{\mathbb{R}}$，从而应有$\int_{[0,N]} f \leq \sup T_{\mathbb{R}}$，即$\sup T_{\mathbb{R}}$是$T_{\mathbb{N}}$的一个上界，进而有$\sup T_{\mathbb{R}} \geq \sup T_{\mathbb{N}}$；另一方面，对任意正实数$R$都有$\lfloor R \rfloor + 1$是一个自然数，并且由于$f$非负于是总是有：
> >
> > $$\int_{(R, \lfloor R \rfloor + 1]} f \geq 0 \implies \int_{[0, \lfloor R \rfloor + 1]} f \geq \int_{[0,R]} f$$
> >
> > 于是对任意正实数R都有$\int_{[0,R]} f \leq \int_{[0, \lfloor R \rfloor + 1]} f \leq \sup T_{\mathbb{N}}$，于是$\sup T_{\mathbb{N}}$是$T_{\mathbb{R}}$的一个上界，进而有$\sup T_{\mathbb{N}} \geq \sup T_{\mathbb{R}}$。
> >
> > 综合上面的讨论即有$\sup T_{\mathbb{R}} = \sup T_{\mathbb{N}}$。

因此积分判别法中的$\sup\limits_{N>0}\int_{[0,N]} f$对$N$是自然数还是正实数没有差别，出于证明方便的考虑我们下面会默认N是自然数。

最后，我们对任意的自然数N定义集合：

$$P_U(N) := \{[a,a+1) : a \in \mathbb{N} \wedge 0 \le a < N\} \cup \{\{N\}\}$$
$$P_L(N) := \{(a,a+1] : a \in \mathbb{N} \wedge 0 \le a < N\} \cup \{\{0\}\}$$

容易验证$P_U(N)$与$P_L(N)$都是$[0,N]$的一个划分。

于是基于这样的前提，在下面的证明中我们分别证明积分判别法的充分性与必要性。

- 若$\sup\limits_{N>0}\int_{[0,N]} f$是有限的，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$是收敛的。

> 注意到对任意$N \in \mathbb{N}$都有：
>
> $$\int_{[0,N]} f \ge L(f, P_L(N)) = \sum_{J \in P_L(N)} \left(\inf_{x\in J} f(x)\right)|J| = \sum_{a=0}^{N-1} \left(\inf_{x\in(a,a+1]} f(x)\right)|(a,a+1]| + \left(\inf_{x\in\{0\}} f(x)\right)|\{0\}|$$
>
> 此时注意到对任意a满足$a \in \mathbb{N}$与$0 \le a < N$都有$|(a,a+1]| = 1$，并且由f是单调递减的有$\inf\limits_{x\in(a,a+1]} f(x) = f(a+1)$；此外还有$|\{0\}| = 0$，因此有：
>
> $$\begin{aligned} L(f, P_L(N)) &= \sum_{a=0}^{N-1} \left(\inf_{x\in(a,a+1]} f(x)\right)|(a,a+1]| + \left(\inf_{x\in\{0\}} f(x)\right)|\{0\}| \\ &= \sum_{a=0}^{N-1} f(a+1)\cdot 1 \\ &= \sum_{a=1}^{N} f(a) = S_1^N \end{aligned}$$
>
> 于是总结可以得到：对任意$N \in \mathbb{N}$，都有$\sup\limits_{c>0}\int_{[0,c]} f \ge \int_{[0,N]} f \ge S_1^N$，于是$\sup\limits_{c>0}\int_{[0,c]} f$是集合$\{S_1^c : c \ge 1\}$的一个上界，并且由于它是有限的，从而根据最前面的讨论，我们能得到此时$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$是收敛的，也即$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$是收敛的。

- 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$是收敛的，则$\sup\limits_{N>0}\int_{[0,N]} f$是有限的。

> 注意到对任意$N \in \mathbb{N}$都有：
>
> $$\int_{[0,N]} f \le U(f, P_U(N)) = \sum_{J \in P_U(N)} \left(\sup_{x\in J} f(x)\right)|J| = \sum_{a=0}^{N-1} \left(\sup_{x\in[a,a+1)} f(x)\right)|[a,a+1)| + \left(\sup_{x\in\{N\}} f(x)\right)|\{N\}|$$
>
> 此时注意到对任意a满足$a \in \mathbb{N}$与$0 \le a < N$都有$|(a,a+1]| = 1$，并且由f是单调递减的有$\sup\limits_{x\in[a,a+1)} f(x) = f(a)$；此外还有$|\{N\}| = 0$，因此有：
>
> $$\begin{aligned} U(f, P_U(N)) &= \sum_{a=0}^{N-1} \left(\sup_{x\in[a,a+1)} f(x)\right)|[a,a+1)| + \left(\sup_{x\in\{N\}} f(x)\right)|\{N\}| \\ &= \sum_{a=0}^{N-1} f(a)\cdot 1 \\ &= \sum_{a=0}^{N-1} f(a) = S_0^{N-1} \end{aligned}$$

> > 于是总结可以得到：对任意$N\in\mathbb{N}$，都有$\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\geq S_0^{N-1}\geq\int_{[0,N]}f$，于是$\sum_{n=0}^{\infty}f(n)$是集合$\left\{\int_{[0,N]}f:N\in\mathbb{N}\right\}$的一个上界（因此它大于等于集合的上确界），并且由于$\sum_{n=0}^{\infty}f(n)$是收敛的，因此它是有限的，从而$\sup_{N>0}\int_{[0,N]}f$也是有限的。
>
> 综上，于是我们证明了级数$\sum_{n=0}^{\infty}f(n)$是收敛的，当且仅当$\sup_{N>0}\int_{[0,N]}f$是有限的，积分判别法得证。

11.6.4 举例说明，如果没有假设f是单调递减的，那么积分判别法的充分性和必要性都不成立

> 对于$\sup_{N>0}\int_{[0,N]}f$有限但是$\sum_{n=0}^{\infty}f(n)$发散的情况，考虑下面的函数$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$：
>
> $$f(x):=\begin{cases}1 & \text{if }x\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{if }x\notin\mathbb{N}\end{cases}$$
>
> 不难计算得到对部分和$\sum_{n=0}^{N}f(n)=N$，于是显然可以得到$\sum_{n=0}^{\infty}f(n)$是发散的。但是又可以注意到$\sup_{N>0}\int_{[0,N]}f=0$是有限的（无论$N$为多少$\int_{[0,N]}f$都显然为0）。
>
> 对于$\sum_{n=0}^{\infty}f(n)$收敛但是$\sup_{N>0}\int_{[0,N]}f$不有限的情况，也可以存在相似的例子，考虑下面的函数$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$：
>
> $$f(x):=\begin{cases}0 & \text{if }x\in\mathbb{N}\\ 1 & \text{if }x\notin\mathbb{N}\end{cases}$$
>
> 不难计算得到对部分和$\sum_{n=0}^{N}f(n)=0$，从而$\sum_{n=0}^{\infty}f(n)$显然收敛并且值为0。但是又可以注意到对任意正实数N都有$\int_{[0,N]}f=N$，于是$\sup_{N>0}\int_{[0,N]}f=0$不可能是有限的。
>
> 于是我们可以看到，如果没有假设f是单调递减的，那么积分判别法的充分性和必要性都不成立。

11.6.5 利用命题11.6.4证明推论11.6.5

> $p\leq 0$时可以由零判别法（命题7.2.6）直接得到此时级数发散，于是我们只需要讨论$p>0$的情形。
>
> 根据积分判别法，由于$\frac{1}{n^p}$在$p>0$的时候总是在$[1,+\infty)$上是单调递减的，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛当且仅当$\sup_{N>0}\int_{[1,N]}\frac{1}{x^p}$有限。
>
> 于是对任意的自然数$N\geq 1$，定义集合$P(N)$有：
>
> $$P(N):=\{[2^c,2^{c+1}):c\in\mathbb{N}\wedge c\leq a\}\cup\{[2^{a+1},N]\}$$
>
> 其中a是满足$2^{a+1}\leq N\leq 2^{a+2}$的唯一自然数。显然$P(N)$是区间$[1,N]$的一个划分，并且由$\frac{1}{x^p}$上单调递减且连续我们有：
>
> $$\begin{cases}\inf_{x\in[2^c,2^{c+1})}\frac{1}{x^p}=\frac{1}{(2^p)^{c+1}},\sup_{x\in[2^c,2^{c+1})}\frac{1}{x^p}=\frac{1}{(2^p)^c},|[2^c,2^{c+1})|=2^c & \forall c\in\mathbb{N}\wedge c\leq a\\ \inf_{x\in[2^{a+1},N]}\frac{1}{x^p}=\frac{1}{(2^p)^N},\sup_{x\in[2^{a+1},N]}\frac{1}{x^p}=\frac{1}{(2^p)^{a+1}},|[2^{a+1},N)|=N-2^{a+1}<2^{a+1}\end{cases}$$
>
> 于是对p的不同情况进行讨论：
>
> - $p=1$：
>
>   > 此时由推论7.3.7可以直接得到此时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的。
>
> - $p>1$：

> 根据黎曼积分的定义我们有，对任意的自然数N都有：
>
> $$\int_{[1,N]} \frac{1}{x^p} \leq U\left(\frac{1}{x^p}, P(N)\right)$$
>
> 对上黎曼和$U\left(\frac{1}{x^p}, P(N)\right)$，又可以计算有：
>
> $$\begin{aligned} U\left(\frac{1}{n^p}, P(N)\right) &= \sum_{J\in P(N)} \left(\sup_{x\in J} \frac{1}{x^p}\right)|J| \\ &= \sum_{c=0}^{a} \frac{1}{(2^p)^c} 2^c + \frac{1}{(2^p)^{a+1}}(N - 2^{a+1}) \\ &= \sum_{c=0}^{a} (2^{1-p})^c + \frac{1}{(2^p)^{a+1}}(N - 2^{a+1}) \\ &= \frac{1-(2^{1-p})^{a+1}}{1-2^{1-p}} + \frac{1}{(2^p)^{a+1}}(N - 2^{a+1}) \end{aligned}$$
>
> 然后注意到$\frac{1}{(2^p)^{a+1}}(N - 2^{a+1}) < (2^{1-p})^{a+1}$，于是上式可进一步化为：
>
> $$\begin{aligned} U\left(\frac{1}{n^p}, P(N)\right) &< \frac{1-(2^{1-p})^{a+1}}{1-2^{1-p}} + (2^{1-p})^{a+1} \\ &= \frac{1}{1-2^{1-p}} + \frac{2-2^{1-p}}{1-2^{1-p}}(2^{1-p})^{a+1} \end{aligned}$$
>
> $p > 1$时有$2^{1-p} < 1$，于是根据$y < 1$时序列$(y^m)_{m=0}^{\infty}$单调递减可以得到，对任意的$N \in \mathbb{N}$，此时可得$a \in \mathbb{N}$，进而有：
>
> $$U\left(\frac{1}{n^p}, P(N)\right) < \frac{1}{1-2^{1-p}} + \frac{2-2^{1-p}}{1-2^{1-p}}(2^{1-p})^{a+1} < \frac{2}{1-2^{1-p}} + 1$$
>
> 从而可以总结有：
>
> 对任意$N \in \mathbb{N}$都有：
>
> $$\int_{[1,N]} \frac{1}{x^p} \leq U\left(\frac{1}{x^p}, P(N)\right) < \frac{2}{1-2^{1-p}} + 1$$
>
> 于是集合$\left\{\int_{[1,N]} \frac{1}{x^p} : N > 1\right\}$是有实数上界的，从而上确界$\sup\limits_{N>0} \int_{[1,N]} \frac{1}{x^p}$也应当是有限的，因此根据积分判别法，此情景下只能有级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$收敛。

- $p < 1$：

> 根据黎曼积分的定义我们有，对任意的自然数N都有：
>
> $$\int_{[1,N]} \frac{1}{x^p} \geq L\left(\frac{1}{x^p}, P(N)\right)$$
>
> 对下黎曼和$L\left(\frac{1}{x^p}, P(N)\right)$，又可以计算有：
>
> $$\begin{aligned} L\left(\frac{1}{n^p}, P(N)\right) &= \sum_{J\in P(N)} \left(\inf_{x\in J} \frac{1}{x^p}\right)|J| \\ &= \sum_{c=0}^{a} \frac{1}{(2^p)^{c+1}} 2^c + \frac{1}{(2^p)^N}(N - 2^{a+1}) \\ &= \frac{1}{2^p}\sum_{c=0}^{a} (2^{1-p})^c + \frac{1}{(2^p)^N}(N - 2^{a+1}) \\ &= \frac{(2^{1-p})^{a+1} - 1}{2-2^p} + \frac{1}{(2^p)^N}(N - 2^{a+1}) \end{aligned}$$

> 然后注意到$\frac{1}{(2^p)^N}(N-2^{a+1})$是非负的；并且$p<1$时有$2^{1-p}>1$与$2-2^p>0$成立，于是由于$y>1$时序列$(y^m)_{m=0}^{\infty}$是发散的我们可以得到对任意实数$C$都存在$a\in\mathbb{N}$使得项$\frac{(2^{1-p})^{a+1}-1}{2-2^p}>C$（此时$2^{a+1}\leq N\leq 2^{a+2}$）。于是总结即可得到结论：
>
> 对任意实数C都存在$N\in\mathbb{N}$使得：
>
> $$\int_{[1,N]}\frac{1}{x^p}\geq L\left(\frac{1}{x^p},P(N)\right)>C$$
>
> 于是任意实数C都不可能是集合$\left\{\int_{[1,N]}\frac{1}{x^p}:N>1\right\}$的上界，从而上确界$\sup_{N>0}\int_{[1,N]}\frac{1}{x^p}$不可能是有限的，因此根据积分判别法，此情景下只能有级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散。

综上，于是结论得证。

本节相关跳转

[实分析 7.3 非负数的和]

[实分析 9.8 单调函数]

[实分析 11.5 连续函数的黎曼可积性]