9.5 左极限与右极限

定义

1. (9.5.1 左极限与右极限) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且设x_0是X中的一个元素。如果x_0是$X \cap (x_0, +\infty)$的附着点，那么我们定义f在x_0处的**右极限**$f(x_0+)$为：

$$f(x_0+) := \lim_{x \to x_0; x \in X \cap (x_0, +\infty)} f(x)$$

当然前提是该极限存在。类似的，如果x_0是$X \cap (-\infty, x_0)$的附着点，那么我们定义f在x_0处的**左极限**$f(x_0-)$为：

$$f(x_0-) := \lim_{x \to x_0; x \in X \cap (-\infty, x_0)} f(x)$$

当然前提也是该极限存在（因此左极限右极限常常是不存在的）。我们有时会采用下面的简化记号：

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0; x \in X \cap (x_0, +\infty)} f(x) = f(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0; x \in X \cap (-\infty, x_0)} f(x) = f(x_0)$$

此时我们必须要明确定义域X。

（注：为了使$f(x_0+)$与$f(x_0-)$有意义，f在x_0处的定义并不是必要的，一个比较简单的例子就是定义为$f(x) := x/|x|$的函数$f: \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$，可以很轻松地得到$f(0+) = 1$与$f(0-) = -1$，尽管$f$在0处是没有定义的）

命题

1. (9.5.3 左右极限与连续？) 设X是$\mathbb{R}$的一个包含x_0的子集，并且设x_0同时是$X \cap (-\infty, x_0)$与$X \cap (x_0, +\infty)$的附着点。如果$f(x_0+)$与$f(x_0-)$都存在并且等于$f(x_0)$，那么f在x_0处连续。

摘录

1. (间断点相关？) 我们知道，函数f在x_0处的右极限$f(x_0+)$与左极限$f(x_0-)$有可能不等，此时称f在x_0处有一个**跳跃间断点**，例如符号函数sgn在0处就有跳跃间断点。

  另外，函数f在x_0处的右极限$f(x_0+)$与左极限$f(x_0-)$有可能相等但不等于$f(x_0)$，此时我们称f在x_0处有一个**可去间断点**（或**可去奇点**），例如定义为：

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

的函数$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$就在0处有一个可去间断点。

  还有一种类型的间断点是f在x_0处趋于无穷的情形，例如定义为$f(x) := 1/x^2$的函数$f: \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$，我们显然有0是函数的间断点但既不是跳跃间断点也不是可去间断点，此时在0附近有$f(0+) = f(0-) = +\infty$。一般地，我们称左极限，右极限至少有一个不存在的间断点为**渐近间断点**（也有教材称其为**无穷间断点**）。渐近振荡点不强制要求f在x_0处有定义。

  最后一类间断点称为**振荡间断点**，其特征有f在x_0附近有界但是不存在极限，例如定义为：

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

的函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$在0处（事实上任意实数处都可以）有一个振荡间断点。

间断性（也叫**奇异性**）的研究也有许多意义，不过这超出了本书的范围。复分析中奇异性的研究就有关键的作用。

课后习题

9.5.1 设E是$\mathbb{R}$的一个子集，$f : E \to \mathbb{R}$是一个函数，并且设x_0是E的一个附着点，请给出关于极限$\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x)$存在且等于$+\infty$或$-\infty$的定义；若设函数$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$有$f(x) := \dfrac{1}{x}$，尝试用你的定义给出$f(0+) = +\infty$与$f(0-) = -\infty$的证明；最后，当$L = +\infty$或$L = -\infty$时尝试给出一个类似于命题9.3.9的结论，并证明它

> 极限$\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x)$存在且等于$+\infty$或$-\infty$的定义：
>
> > 设E是$\mathbb{R}$的一个子集，$f : E \to \mathbb{R}$是一个函数，并且设x_0是E的一个附着点。
> >
> > 称**f在x_0处沿E收敛于**$+\infty$，当且仅当对任意的实数M，都存在$\delta > 0$使得对任意x满足$|x - x_0| \leq \delta$且$x \in E$都有$f(x) \geq M$成立，并且记有：
> >
> > $$\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = +\infty$$
> >
> > 称**f在x_0处沿E收敛于**$-\infty$，当且仅当对任意的实数M，都存在$\delta > 0$使得对任意x满足$|x - x_0| \leq \delta$且$x \in E$都有$f(x) \leq M$成立，并且记有：
> >
> > $$\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = -\infty$$
>
> ---
>
> 使用此定义，我们证明题设函数$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$有结论$f(0+) = +\infty$与$f(0-) = -\infty$成立：
>
> > 使用上面的记号，即证明：
> >
> > $$\lim_{x \to x_0; x \in (0, +\infty)} \frac{1}{x} = +\infty$$
> > $$\lim_{x \to x_0; x \in (-\infty, 0)} \frac{1}{x} = -\infty$$
> >
> > 对任意的实数$M > 0$，显然有当$0 < x \leq \dfrac{1}{|M|}$时，$\dfrac{1}{x} \geq |M| \geq M$；当$-\dfrac{1}{|M|} \leq x < 0$时，$\dfrac{1}{x} \leq -|M| \leq M$，并且还有：
> >
> > $$0 < x \leq \frac{1}{|M|} \iff |x - 0| \leq \frac{1}{|M|}\text{且}x \in (0, +\infty)$$
> > $$-\frac{1}{|M|} \leq x < 0 \iff |x - 0| \leq \frac{1}{|M|}\text{且}x \in (-\infty, 0)$$
> >
> > 于是上面的内容记有：
> >
> > - 对任意实数$M > 0$，存在实数$\dfrac{1}{|M|} > 0$使得对任意x满足$|x - x_0| \leq \dfrac{1}{|M|}$且$x \in (0, +\infty)$都有$\dfrac{1}{x} \geq M$成立。

> - 对任意实数$M > 0$，存在实数$\frac{1}{|M|} > 0$使得对任意x满足$|x - x_0| \le \frac{1}{|M|}$且$x \in (0, +\infty)$都有$\frac{1}{x} \le M$成立。
>
> 这分别表明了$f(0+) = +\infty$与$f(0-) = -\infty$，从而结论得证。

类似于命题9.3.9，我们也能给出下面的结论：

设E是$\mathbb{R}$的一个子集，$f: E \to \mathbb{R}$是一个函数，并且设x_0是E的一个附着点。

则下面两个关于收敛于正无穷的命题在逻辑上是等价的：

> - f在点x_0处沿着E收敛于$+\infty$。
> - 对任意一个完全由E中元素构成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，序列$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$都是无上界的。

已及下面两个关于收敛于负无穷的命题在逻辑上是等价的：

> - f在点x_0处沿着E收敛于$-\infty$。
> - 对任意一个完全由E中元素构成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，序列$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$都是无下界的。

我们证明这个结论：

> 关于正无穷的结论：
>
> 若f在点x_0处沿着E收敛于$+\infty$，则对任意的实数M，都存在$\delta > 0$使得任意x满足$|x - x_0| \le \delta$且$x \in E$都有$f(x) \ge M$成立。而对任意一个完全由E中元素构成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，根据序列收敛的定义应该有：
>
> 对任意的$\delta > 0$，都存在$N \in \mathbb{N}$使得对任意$n \ge N$都有$|a_n - x_0| \le \delta$成立。从而对任意实数M，都有存在$N \in \mathbb{N}$得对任意$n \ge N$都有$f(a_n) \ge M$，即对任意的实数M，M都不是序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的上界，从而结论得证。
>
> 若对任意一个完全由E中元素构成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，序列$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$都是无上界的。则使用反证法，假设f在点x_0处沿着E不是收敛于$+\infty$的，从而存在一个实数M使得对任意的$\delta > 0$，若x满足$|x - x_0| \le \delta$且$x \in X$，都有$f(x) < M$成立。但是由于对任意一个完全由E中元素构成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$都是无上界的，于是对M，也应该存在至少一个$n_0 \in \mathbb{N}$使得$f(a_{n_0}) \ge M$成立，从而此时对a_{n_0}有：
>
> - $a_{n_0} \in E$且$|a_{n_0} - x_0| \le |a_{n_0} - x_0|$（注意这里右式的$|a_{n_0} - x_0|$是对上假设的$\delta$的替换，应当将其理解为一个特定的数），于是根据上结论有$f(a_{n_0}) < M$。
> - $f(a_{n_0}) \ge M$。
>
> 于是导出了矛盾，只能有f在点x_0处沿着E收敛于$+\infty$。
>
> ---
>
> 关于负无穷的结论：
>
> 若f在点x_0处沿着E收敛于$-\infty$，则对任意的实数M，都存在$\delta > 0$使得任意x满足$|x - x_0| \le \delta$且$x \in E$都有$f(x) \le M$成立。而对任意一个完全由E中元素构成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，根据序列收敛的定义应该有：
>
> 对任意的$\delta > 0$，都存在$N \in \mathbb{N}$使得对任意$n \ge N$都有$|a_n - x_0| \le \delta$成立。从而对任意实数M，都有存在$N \in \mathbb{N}$得对任意$n \ge N$都有$f(a_n) \le M$，即对任意的实数M，M都不是序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的下界，从而结论得证。

> > 若对任意一个完全由E中元素构成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，序列$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$都是无下界的。则使用反证法，假设f在点x_0处沿着E不是收敛于$-\infty$的，从而存在一个实数M使得对任意的$\delta > 0$，若x满足$|x - x_0| \leq \delta$且$x \in X$，都有$f(x) > M$成立。但是由于对任意一个完全由E中元素构成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$都是无下界的，于是对M，也应该存在至少一个$n_0 \in \mathbb{N}$使得$f(a_{n_0}) \leq M$成立，从而此时对a_{n_0}有：
> >
> > - $a_{n_0} \in E$且$|a_{n_0} - x_0| \leq |a_{n_0} - x_0|$（注意这里右式的$|a_{n_0} - x_0|$是对上假设的$\delta$的替换，应当将其理解为一个特定的数），于是根据上结论有$f(a_{n_0}) > M$。
> > - $f(a_{n_0}) \leq M$。
> >
> > 于是导出了矛盾，只能有f在点x_0处沿着E收敛于$-\infty$。
>
> 于是证明完毕。

本节相关跳转

[实分析 9.3 函数的极限值]