11.1 划分

定义

1. (11.1.1 连通性？) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，我们称X是**连通的**，当且仅当它满足：只要x和y是X中满足$x < y$的元素，有界区间$[x, y]$就是X的子集（即介于x和y之间 每一个数都属于X）。

   (注：在13.4节中我们定义出一个适用于任何度量空间的连通性概念)

2. (11.1.8 区间的长度) 如果I是一个有界区间，那么我们通过下述的方法定义I的**长度**，并记为$|I|$，如下：如果I是满足形式$[a, b]$，(a, b)，$[a, b)$，$(a, b]$中任意一个的区间（其中$a < b$都是实数），则定义$|I| := b - a$；若I是单点集或者空集，则定义$|I| = 0$。

3. (11.1.10 划分) 设I是一个有界区间，I的一个**划分**是由**有限个**包含在I中的**区间**构成的一个集合P，它使得对I中的每个元素x都**恰好**属于P中的一个有界区间J。

   (注：可以看到，划分是集合的集合。划分的定义换言之，每个划分中包了有限个集合，其中每个集合都是实数的有界区间；需要注意的是，划分对这些区间是有要求的，它必须要使得原集合中的任意一个元素都恰好属于划分中的一个区间)

4. (11.1.14 更细和更粗糙的划分) 设I是一个有界区间，并且设P和P'是I的两个划分。如果对P'中的每一个区间J都存在P中的一个区间K使得$J \subseteq K$，那么我们称P'比P**更细**，或者称P比P'**更粗糙**。

   (注：不存在最细的划分，不妨想想为什么；另外，更细或者更粗糙的概念只能对同一个区间的不同划分讨论，例如我们不能给出$[0, 1]$的一个划分是否比$[-1, 2]$的一个划分更细还是更粗糙（即使它们可能满足了上面的命题））

5. (11.1.16 公共加细) 设I是一个有界区间，并且设P和P'是I的两个划分，则我们定义P和P'的**公共加细**$P\#P'$为下面这样一个集合：

$$P\#P' := \{K \cap J : K \in P \text{且} J \in P'\}$$

命题

1. (11.1.4 有界集的连通性与有界区间？) 设X是实直线的一个子集，那么下面两个命题在逻辑上是等价的：

   > - X是有界的并且是连通的。
   > - X是一个有界区间。

   (注：注意，区间也可以是单点集，例如退化区间$[2, 2] = \{2\}$，甚至也可以是一个空集)

2. (11.1.6 有界区间的交集也是有界区间？) 若有I和J都是有界区间，那么它们的交集$I \cap J$也是一个有界区间。

3. (11.1.13 长度是有限可加的) 设I是一个有界区间，n是一个自然数，并且设P是I的一个基数为n的划分，那么有：

$$|I| = \sum_{J \in P} |J|$$

   (注：可以对n归纳证明这个结论，归纳过程需要用到习题11.1.3的结论)

4. (11.1.18 公共加细得到更细的划分？) 设I是一个有界区间，并且设P和P'是I的两个划分，那么$P\#P'$也是I的一个划分，并且$P\#P'$既比P更细，也比P'更细。

课后习题

11.1.1 证明引理11.1.4（提示：为了证明当X不是空集时(a)蕴含着(b)，可以考虑X的上确界和下确界）

> 分别证明其充分性和必要性：
>
> - 若X是有界的并且是连通的，则X是一个有界区间。
>
> 由于X是有界的，因此根据最小上界原理（命题5.5.9）我们知道X的上确界和下确界存在并且是一个实数。
>
> 考虑任意实数$x\in(\inf X,\sup X)$。不妨使用反证法，假设不存在$a\in X$使得$\sup X>a>x$，于是此时对任意$e\in X$都有$x\geq e$，从而根据定义x是X的一个上界，应该有x大于上确界即$x\geq\sup X$，这与$x<\sup X$的前提条件矛盾。反证得到只能有必然存在一个$a\in X$使得$\sup X>a>x$成立，类似地我们也可以证明必然存在一个$b\in X$使得$x>b>\inf X$。然后由于X是连通的，从而根据定义11.1.1，对$a>b$有对任意$e\in[b,a]$都有$e\in X$成立，于是特别地，由于$x\in[b,a]$可以得到x也是X中的元素。
>
> 于是得到$(\inf X,\sup X)\subseteq X$，然后考虑上下确界的定义有对任意$x\in X$都有$\inf X\leq x\leq\sup X$，于是$X\subseteq[\inf X,\sup X]$，于是此时不妨考虑$\sup X$与$\inf X$是否属于$X$，具体来说有：
>
> | | $\sup X\in X$ | $\sup X\notin X$ |
> |---|---|---|
> | $\inf X\in X$ | 此时X是闭区间$[\inf X,\sup X]$ | 此时X是半开区间$[\inf X,\sup X)$ |
> | $\inf X\notin X$ | 此时X是半开区间$(\inf X,\sup X]$ | 此时X是开区间$(\inf X,\sup X)$ |
>
> 最终都会得到X是一个有界区间。
>
> ---
>
> - 若X是一个有界区间，则X是有界的并且是连通的。
>
> 以X为形如(a,b)的区间为例子，形如$(a,b]$，$[a,b)$，$[a,b]$的区间是同样的道理。
>
> X的有界性不需要论证，于是只需要证明X是连通的，考虑任意$x<y$满足x，$y\in X$，从而根据开区间的定义，我们有：
>
> $$a<x<y<b$$
>
> 从而对任意$c\in[x,y]$，我们有：
>
> $$a<x\leq c\leq y<b\Longrightarrow a<c<b$$
>
> 于是有$c\in(a,b)\iff c\in X$，从而根据定义11.1.1，X是连通的。

11.1.2 证明推论11.1.6（提示：利用引理11.1.4，并且解释为什么两个有界集合的交集是有界的，为什么两个连通集合的交集是连通的）

> 根据引理11.1.4，我们知道如果$I\cap J$是一个有界的连通集合，那么$I\cap J$就是一个有界区间。此外，我们也能根据引理11.1.4得到I与J是有界的并且连续的集合。
>
> 于是考虑I与J是有界的，因此存在实数M_I与M_J使得对任意$i\in I$有$|i|\leq M_I$，对任意$j\in J$有$|j|\leq M_J$。于是对任意$e\in I\cap J$都应当有$|e|\leq M_I$与$|e|\leq M_J$，即$I\cap J$是一个有界集合。

> 然后考虑I与J是连通的，因此对任意$a < b$满足a，$b \in I \cap J$（即a，b同时属于I与J），我们有$[a,b] \subseteq I$与$[a,b] \subseteq J$。从而对任意$e \in [a,b]$，我们有$e \in I$与$e \in J$均成立，即$e \in I \cap J$，于是$[a,b]$也是$I \cap J$的子集。此时根据定义11.1.1，$I \cap J$是一个连通的集合。
>
> 综上，于是我们可以得到$I \cap J$是有界的并且连续的集合，根据引理11.1.4我们有$I \cap J$是一个有界区间。

11.1.3 设I是一个形如$I = (a,b)$或$I = [a,b)$的有界区间，其中$a < b$都是实数，并且设I_1，I_2，$\dots$，I_n是I的一个划分。证明：在这个划分中存在一个形如$I_j = (c,b)$或$I_j = [c,b)$的区间I_j，其中$a \leq c \leq b$（提示：使用反证法证明，首先证明如果对任意的$a \leq c \leq b$，I_j都不是形如$[c,b)$和(c,b)的区间，那么$\sup I_j$就严格小于b）

> 记划分I_1，I_2，$\dots$，I_n为P。
>
> 假设$c < d$都是实数，我们注意到有界区间总是为这六种形式之一：(c,d)，$[c,d)$，$(c,d]$，$[c,d]$，$\{d\}$，$\varnothing$。并且很容易根据上下确界的定义得到，对于满足前四种形式的区间有上确界为b与下确界c，第五种形式的上下确界均为d。
>
> 使用反证法，假设对任意I_j属于P，我们假设它都是不满足形式(c,b)或$[c,b)$的（其中$a \leq c \leq b$），于是根据上面的讨论，设$c < d$都是实数，对任意的I_j属于P我们可以讨论它所满足的形式：
>
> - 若I_j是一个形如(c,d)或$[c,d)$的区间，于是根据假设，我们有$d < b$，从而此时由前讨论有$\sup I_j = d < b$。
> - 若I_j是一个形如$(c,d]$，$[c,d]$，$\{d\}$的区间，根据划分的定义我们应当有$d \in I$，从而不可能有$d = b$，从而此时由前讨论有$\sup I_j = d < b$。
> - 若I_j是一个形如$\varnothing$的区间，则我们有I_j是一个形如(b,b)的退化区间，这与假设矛盾，故再假设下不可能有I_j为空。
>
> 于是我们可以得到假设下有对任意P中区间都有$\sup I_j < b$。此时取实数$i := \max\{\sup I_j : I_j \in P\}$，显然有$i < b$，于是又取实数$n \in I$满足$i < n < b$，此时我们注意到：
>
> - 对任意I_j属于P，都有对任意$e \in I_j$都有$e \leq \sup I_j \leq i < n \implies e \neq n$，即$n \notin I_j$。
> - 根据划分的定义，应当恰好存在一个I_j属于P使得$n \in I_j$。
>
> 于是导出了矛盾，反证假设不成立。

11.1.4 证明引理11.1.18

> 根据定义11.1.10我们逐条证明$P \# P'$是一个划分：
>
> 1. $P \# P'$是一个有限集：
>
> > 这可以引申为对两个元素均为集合的有限集合$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$，集合$S := \{A \cap B : A \in \mathcal{A}且B \in \mathcal{B}\}$也是有限的，该结论我们可以通过归纳来证明。
> >
> > 不妨假设$\mathcal{A}$的基数为n，我们对$\mathcal{B}$的基数m作归纳：
> >
> > 对$m = 0$时，此时即有S为空集显然是有限集合。
> >
> > 于是假设对$m = a$时成立结论，对$m = a + 1$时，由于此时$\mathcal{B}$必然是非空的，于是有存在$B_0 \in \mathcal{B}$，此时我们有：
> >
> > $$\begin{aligned} S &= \{A \cap B : A \in \mathcal{A}且B \in (\mathcal{B} - \{B_0\}) \cup \{B_0\}\} \\ &= \{A \cap B : A \in \mathcal{A}且B \in \mathcal{B} - \{B_0\}\} \cup \{A \cap B : A \in \mathcal{A}且B \in \{B_0\}\} \end{aligned}$$

> > 并且注意到$B-\{B_0\}$是基数为a的集合，于是根据归纳假设集合$\{A\cap B:A\in\mathcal{A}且B\in\mathcal{B}-\{B_0\}\}$是有限的；另一方面，对集合$\{A\cap B:A\in\mathcal{A}且B\in\{B_0\}\}$，根据基数运算（命题3.6.14(c)）我们知道有其有限且基数小于或等于n。从而由于有限集的并也是有限集我们可以得到S也是有限的。
> >
> > 综上，于是归纳结束，结论得证。对划分P与P'应用该结论即可得到公共加细$P\#P'$也是有限的。
>
> 2. $P\#P'$中任意元素都是包含于I的区间：
>
> > 根据定义，对任意$L\in P\#P'$，存在有界区间$K\in P$与$J\in P'$使得$L=K\cap J$，于是根据推论11.1.6，L也是一个有界区间。
>
> 3. 对任意I中元素i都恰好存在一个$L\in P\#P'$使得$i\in L$：
>
> > 由于P和P'都是划分，于是根据定义，恰好存在唯一的$K\in P$与$L\in P'$使得$i\in K$与$i\in L$成立，即有$i\in K\cap L$。于是根据公共加细的定义我们有$K\cap L$即为题目所要求的唯一$I\in P\#P'$。
>
> 于是经过上面的证明我们证明了公共加细$P\#P'$是一个划分，然后对任意$L\in P\#P'$，根据公共加细定义恰好存在唯一的$K\in P$与$J\in P'$使得$L=K\cap J$，也即有$L\subseteq K$与$L\subseteq J$。于是根据定义11.1.14我们知道$P\#P'$是比P和P'更细的划分。

本节相关跳转

[实分析 13.4 连续性与连通性]