13.1 连续函数

定义

1. (13.1.1 连续函数) 设(X, d_X)是一个度量空间，(Y, d_Y)是另一个度量空间，并设$f: X \to Y$是一个函数。设$x_0 \in X$，我们称f**在点**x_0**处是连续的**，当且仅当对任意的$\varepsilon > 0$，存在一个$\delta > 0$使得只要$d_X(x, x_0) < \delta$，就有$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$。我们称$f$是**连续的**，当且仅当$f$在每一个点$x \in X$处都是连续的。

   (注：连续函数有时候也称为**连续映射**)

命题

1. (13.1.4 连续性保持收敛性) 设(X, d_X)和(Y, d_Y)是两个度量空间，$f: X \to Y$是函数，并设$x_0 \in X$是X中的一点。那么下面三个命题在逻辑上是等价的：

   > 1. f在x_0处是连续的。
   > 2. 如果$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是X中依度量d_X收敛于x_0的序列，那么序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$就依度量$d_Y$收敛于$f(x_0)$。
   > 3. 对于任意一个包含$f(x_0)$的开集$V \subset Y$，都存在一个包含x_0的开集$U \subset X$使得$f(U) \subseteq V$。

   (注：这部分内容是对第9章的推广)

2. (13.1.5) 设(X, d_X)是一个度量空间，(Y, d_Y)是另一个度量空间，并设$f: X \to Y$是一个函数。那么下面四个命题在逻辑上是等价的：

   > 1. f是连续的。
   > 2. 只要$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是X中依度量d_X收敛于某个点$x_0 \in X$的序列，那么序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$就依度量$d_Y$收敛于$f(x_0)$。
   > 3. 如果V是Y中的开集，那么集合$f^{-1}(V)$就是X中的开集。
   > 4. 如果F是Y中的闭集，那么集合$f^{-1}(F)$就是X中的闭集。

   (注：这个命题给我们展示了连续函数与开集，闭集的关系。它说明了连续性能够保证开集的逆象也是一个逆象。注意连续性不能从开集推出开集的前象也是开集，这点可以参考习题12.5.4与习题12.5.5中我们给出的两个反例)

   > 推论：
   >
   > 1. (13.1.7 复合运算保持连续性) 设(X, d_X)，(Y, d_Y)和(Z, d_Z)是三个度量空间，那么有下面的命题成立：
   >
   >   > 1. 如果$f: X \to Y$在点$x_0 \in X$处是连续的，并且$g: Y \to Z$在点$f(x_0)$处是连续的，那么$g \circ f: X \to Z$在x_0处就是连续的。
   >   > 2. 如果$f: X \to Y$是连续的，并且$g: Y \to Z$也是连续的，那么$g \circ f: X \to Z$就是连续的。

课后习题

13.1.1 证明定理13.1.4（提示：回顾命题9.4.7的证明）

> 证明它们之间可以互相推论即可。
>
> - 证明：(a)可以推出(b)。
>
> 即证明：若f在x_0处是连续的，则对任意$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是X中依度量d_X收敛于x_0的序列都有序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$就依度量$d_Y$收敛于$f(x_0)$。
>
> 于是要证明：
>
> $$\lim_{n\to\infty} d_Y(f(x^{(n)}), f(x_0)) = 0$$
>
> 从而考虑任意的$\varepsilon > 0$，根据连续性的定义我们知道存在$\delta > 0$使得只要$d_X(x, x_0) < \delta$就有$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$；又因为$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是收敛于$x_0$的序列，于是对$\delta$存在$N \geq 0$使得对任意的$n \geq N$都有$d_X(x^{(n)}, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$。于是综合可以得到：
>
> 对任意任意的$\varepsilon > 0$，存在$N \geq 0$使得对任意的$n \geq N$都有$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$。
>
> 从而根据定义12.1.14我们有序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$就依度量$d_Y$收敛于$f(x_0)$，结论得证。
>
> ---
>
> - 证明：(b)可以推出(c)。
>
> 即证明：若对任意$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是X中依度量d_X收敛于x_0的序列都有序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$就依度量$d_Y$收敛于$f(x_0)$，则对于任意一个包含$f(x_0)$的开集$V \subset Y$，都存在一个包含$x_0$的开集$U \subset X$使得$f(U) \subseteq V$。
>
> 首先由于V是开的，于是$f(x_0)$是V的一个内点，换言之，存在一个$r > 0$使得$B_{(Y,d_Y)}(f(x_0), r) \subseteq Y$。不妨使用反证法，假设存在某个包含$f(x_0)$的开集$V \subset Y$使得对任意包含$x_0$的开集$U \subset X$都有$f(U)$不包含于$V$，换言之即存在$y \in f(U)$使得$y \notin V$，从而集合$f(U) \backslash V$总是非空的，自然也有$f(U) \backslash B_{(Y,d_Y)}(f(x_0), r)$是非空的。
>
> 于是我们尝试构造下面的序列，我们知道任意的度量球都是非空的开集，于是对任意的$n \in \mathbb{N}^+$，考虑度量球
>
> $$U := B_{(X,d_X)}\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$$
>
> 根据上面的讨论，我们知道集合
>
> $$f\left(B_{(X,d_X)}\left(x_0, \frac{1}{n}\right)\right) \backslash B_{(Y,d_Y)}(f(x_0), r)$$
>
> 也是非空的，注意到这个集合依据定义可以化为：
>
> $$\left\{y \in Y : \exists\, x \in X, f(x) = y \wedge d_X(x, x_0) < \frac{1}{n} \wedge d_Y(y, f(x_0)) \geq r\right\}$$
>
> 于是这表明对任意的$n \in \mathbb{N}^+$，总是存在$x \in X$满足$d_X(x, x_0) < \dfrac{1}{n}$与$d_Y(f(x), f(x_0)) \geq r$，也就是说下面的集合
>
> $$S_n := \left\{x \in X : d_X(x, x_0) < \frac{1}{n} \wedge d_Y(f(x), f(x_0)) \geq r\right\}$$

总是非空的。于是运用选择公理，我们能对任意的$n\in\mathbb{N}^+$指定一个$x^{(n)}\in S_n$。根据S_n的定义我们显然可以得到序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是依度量d_X收敛于x_0的，但是对序列$(f(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$，我们注意到根据比较原理与$S_n$的定义应该有：

$$\lim_{n\to\infty} d_Y(f(x^{(n)}),f(x_0))\geq r>0$$

从而$(f(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$不可能依度量$d_Y$收敛于$f(x_0)$，这与结论(b)矛盾。于是反证假设不成立，若结论(b)成立则必然有结论(c)成立，证明完毕。

- 证明：(c)可以推出(a)。

即证明：若对于任意一个包含$f(x_0)$的开集$V\subset Y$，都存在一个包含x_0的开集$U\subset X$使得$f(U)\subseteq V$，则f在x_0处是连续的。

于是考虑任意的$\varepsilon>0$，我们知道球$B_{(Y,d_Y)}(f(x_0),\varepsilon)$是$Y$中一个包含$f(x_0)$的开集，于是根据结论(c)的内容存在一个包含$x_0$的开集$U\subset X$使得$f(U)\subseteq B_{(Y,d_Y)}(f(x_0),\varepsilon)$（从而对任意$x\in U$都有$f(x)\in B_{(Y,d_Y)}(f(x_0),\varepsilon)$）。然后因为$U$是开的，于是$x_0$是$U$的一个内点，从而存在实数$\delta>0$使得$B_{(X,d_X)}(x_0,\delta)\subseteq U$，结合前面的内容即有$f(B_{(X,d_X)}(x_0,\delta))\subseteq B_{(Y,d_Y)}(f(x_0),\varepsilon)$。

于是综上，我们可以总结有：

对任意的$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$使得对任意的$x\in B_{(X,d_X)}(x_0,\delta)$都有$f(x)\in B_{(Y,d_Y)}(f(x_0),\varepsilon)$。

结合度量球的定义，这个结论可以化为：

对任意的$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$使得对任意的$x\in X$满足$d_X(x,x_0)<\delta$都有$d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$。

根据定义13.1.1即f在x_0处是连续的，于是证明完毕。

综上，于是结论得证。

13.1.2 证明定理13.1.5 （提示：定理13.1.4已经表明了(a)和(b)是等价的）

如同提示里面说的那样，定理13.1.4已经说明了(a)和(b)是等价的（把定理13.1.4中(a)，(b)里的“x_0”改为“任意的x_0”就行了）。于是我们只需要证明(a)，(c)，(d)是等价的就行。

- 证明：(a)等价于(c)。

先证明：若f是连续的，则对任意V是Y中的开集都有集合$f^{-1}(V)$就是X中的开集。

对任意的$x_0\in f^{-1}(V)$，根据逆像定义有$f(x_0)\in V$；接着由V是开集可知$f(x_0)$是V的内点，即存在$\varepsilon>0$使得$B_{(Y,d_Y)}(f(x_0),\varepsilon)$包含于$V$。然后根据$f$的连续性我们知道存在$\delta>0$使得对任意$x\in X$满足$d_X(x,x_0)<\delta$都有$d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$（于是即有$f(x)$属于球$B_{(Y,d_Y)}(f(x_0),\varepsilon)$，进而$f(x)$属于$V$），从而可以推知$x\in f^{-1}(V)$。考虑到度量球的定义，我们可以总结目前推知的信息得到：

对任意的$x_0\in f^{-1}(V)$，存在$\delta>0$使得球$B_{(X,d_X)}(x_0,\delta)$包含于$f^{-1}(V)$。

然后根据命题12.2.15(a)我们可以直接得到$f^{-1}(V)$是开的。

然后证明：若对任意V是Y中的开集都有集合$f^{-1}(V)$就是X中的开集，则f是连续的。

对任意的$x_0\in X$，考虑任意的$\varepsilon>0$。我们令有$V:=B_{(Y,d_Y)}(f(x_0),\varepsilon)$，于是$V$是$Y$中的开集，进而根据结论(c)有$f^{-1}(V)$是$X$中的开集。注意到$x_0\in f^{-1}(V)$，于是$x_0$是$f^{-1}(V)$的内点，存在$\delta>0$使得$B_{(X,d_X)}(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}(V)$。考虑到度量球的定义即可总结有：

> 对任意的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$使得对任意$x \in X$满足$d_X(x_0, x) < \delta$，则有$x \in f^{-1}(V) \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$。
>
> 于是根据定义13.1.1可以得到f在任意的$x_0 \in X$处连续，从而f是连续的。
>
> 综上，于是结论(a)和结论(c)是等价的。
>
> ---
>
> - 证明：(c)等价于(d)。
>
> 先证明结论(c)可以导出结论(d)。
>
> 对任意F是Y中的闭集，根据命题12.2.15(e)我们知道必然有$V := Y \backslash F$是一个开集，于是根据结论(c)我们有集合$f^{-1}(V)$也是开集，并且注意到：
>
> $$\begin{aligned} X \backslash f^{-1}(V) &= X \backslash \{x \in X : f(x) \in V\} \\ &= \{x \in X : f(x) \notin V\} \\ &= \{x \in X : f(x) \in F\} \qquad (\text{注意到对任意}x \in X\text{都有}f(x) \in Y) \\ &= f^{-1}(F) \end{aligned}$$
>
> 于是根据命题12.2.15(e)可得$f^{-1}(F)$是闭的。
>
> 类似地我们可以证明能通过结论(d)导出结论(c)。大概如下面所示：
>
> 对任意V是Y中的开集，根据命题12.2.15(e)我们知道必然有$F := Y \backslash V$是一个闭集，于是根据结论(d)我们有集合$f^{-1}(F)$也是闭集，并且注意到：
>
> $$\begin{aligned} X \backslash f^{-1}(F) &= X \backslash \{x \in X : f(x) \in F\} \\ &= \{x \in X : f(x) \notin F\} \\ &= \{x \in X : f(x) \in V\} \qquad (\text{注意到对任意}x \in X\text{都有}f(x) \in Y) \\ &= f^{-1}(V) \end{aligned}$$
>
> 于是根据命题12.2.15(e)可得$f^{-1}(V)$是开的。
>
> 综上，于是结论(c)和结论(d)是等价的。
>
> 综上，于是命题13.1.5得证。

13.1.3 利用定理13.1.4和定理13.1.5证明推论13.1.7

> 注意到结论(a)实际上蕴含了结论(b)，于是我们只需要证明结论(a)就得证了推论13.1.7。
>
> 对某个$x_0 \in X$，考虑任意$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是X中依度量d_X收敛于x_0的序列，根据结论(a)的前设由f再x_0处连续与命题13.1.4(b)我们可以得到序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$就依度量$d_Y$收敛于$f(x_0)$，然后再由$g$再$f(x_0)$处连续与命题13.1.4(b)我们可以得到序列$(g(f(x^{(n)})))_{n=1}^{\infty}$就依度量$d_Z$收敛于$g(f(x_0))$。根据复合函数的定义于是有：
>
> 对任意$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是X中依度量d_X收敛于x_0的序列，那么序列$(g \circ f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$就依度量$d_Z$收敛于$g \circ f(x_0)$。
>
> 于是根据命题13.1.4我们知道这表明$g \circ f$在x_0处连续，于是推论13.1.7得证。

13.1.4 举例说明，存在函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$和函数$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$满足

(a) f不连续，但是g和$g \circ f$都连续

> 考虑下面的f与g：
>
> $$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) := x^2$$

> 于是$g\circ f(x)=1$是连续的常数函数。

(b) g不连续，但f和$g\circ f$都连续

> 考虑下面的f与g：
>
> $$f(x):=x^2\qquad g(x):=\begin{cases}1 & \text{if } x\geq 0\\ -1 & \text{if } x<0\end{cases}$$
>
> 于是$g\circ f(x)=1$是连续的常数函数。

(c) f和g都不连续，但$f\circ g$连续

> 考虑下面的f与g：
>
> $$f(x):=\begin{cases}1 & \text{if } x\geq 0\\ 0 & \text{if } x<0\end{cases}\qquad g(x):=\begin{cases}1 & \text{if } x\geq 0\\ -1 & \text{if } x<0\end{cases}$$
>
> 于是$g\circ f(x)=1$是连续的常数函数。

然后简要说明为什么这些例子都不与推论13.1.7矛盾

> 因为推论13.1.7是在f和g连续的情况下能够断定$g\circ f$的连续性，但是不是说f和g不连续则$g\circ f$就不连续。

13.1.5 设(X,d)是一个度量空间，并设$(E,d|_{E\times E})$是(X,d)的子空间。设$\iota_{E\to X}:E\to X$是一个包含映射，对任意的$x\in E$都有$\iota_{E\to X}(x):=x$。证明：$\iota_{E\to X}$是连续的

> 对任意的$x_0\in E$，对任意的$\varepsilon>0$，可以令有$\delta:=\varepsilon$，直接断言对任意$x\in E$满足$d|_{E\times E}(x,x_0)<\delta$，由于$d|_{E\times E}$是$d$的限制函数与$\iota_{E\to X}$的定义，我们可以得到：
>
> $$d(\iota_{E\to X}(x),\iota_{E\to X}(x_0))=d(x,x_0)\xlongequal{x,x_0\in E}d|_{E\times E}(x,x_0)<\varepsilon$$
>
> 于是根据定义13.1.1可以得到$\iota_{E\to X}$在x_0处是连续的，从而有$\iota_{E\to X}$是连续的。

13.1.6 设$f:X\to Y$是从度量空间(X,d_X)到另一个度量空间(Y,d_Y)的函数。设E是X的子集，（它具有导出度量$d_X|_{E\times E}$），并设$f|_E:E\to Y$是f在E上的限制函数。证明：如果$x_0\in E$且f在x_0处是连续的，那么$f|_E$也在x_0处连续。然后解释这个命题的逆命题是否成立。由此进一步推导出：如果f是连续的，那么$f|_E$就是连续的。因此，对函数定义域的限制不会破坏连续性（提示：利用习题13.1.5）

> 注意到$f|_E=f\circ\iota_{E\to X}$，于是运用习题13.1.5，$f$，$\iota_{E\to X}$在$x_0\in E$处连续与推论13.1.7综合可以得到$f|_E$是连续的。把这个结论的前设推广到任意的$x_0\in E$上就可以得到“如果$f$是连续的，那么$f|_E$就是连续的”。
>
> 注意这个命题的逆命题显然是不成立的，一个最简单的例子，当你将E限制为单点集$\{x_0\}$时，你会发现无论f是什么函数都能得到$f|_E$在x_0处是连续的，但是显然f不可能总是连续的。

13.1.7 设$f:X\to Y$是从度量空间(X,d_X)到另一个度量空间(Y,d_Y)的函数。设X的象$f(X)$包含在Y的某个子集$E\subset Y$中。设$g:X\to E$是与f一样的函数（即对任意$x\in E$均有$g(x)=f(x)$），但值域由Y变成了E，E的度量使用由Y导出的度量$d_Y|_{E\times E}$。证明，对任意的$x_0\in X$，f在x_0处是连续的，当且仅当g在x_0处是连续的。因此，对函数值域的限制不会影响函数的连续性

> 注意到对任意的x，$x'\in X$，由于$d_Y|_{E\times E}$是d_Y的限制函数，于是我们有：
>
> $$d_Y(f(x),f(x'))=d_Y|_{E\times E}(f(x),f(x'))=d_Y|_{E\times E}(g(x),g(x'))$$
>
> 然后根据定义13.1.1，我们可以列出下面这一大串等价关系：

> f在x_0处是连续的，当且仅当对任意的$\varepsilon > 0$，存在一个$\delta > 0$使得只要$d_X(x, x_0) < \delta$，就有$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$。这等价于对任意的$\varepsilon > 0$，存在一个$\delta > 0$使得只要$d_X(x, x_0) < \delta$，就有$d_Y|_{E\times E}(g(x), g(x_0)) < \varepsilon$，也即当且仅当$g$在$x_0$处是连续的。
>
> 综上，于是f在x_0处是连续的当且仅当g在x_0处是连续的。于是结论得证。

本节相关跳转

[实分析 9.4 连续函数]

[实分析 12.5 紧致度量空间]