10.2 局部最大值、局部最小值以及导数

定义

1. (10.2.1 局部最大值和最小值) 设$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，并且设$x_0\in X$。我们称f在x_0处达到**局部最大值**，当且仅当存在一个实数$\delta>0$使得f在$X\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$上的限制函数$f|_{X\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)}$在$x_0$处达到最大值；我们称$f$在$x_0$处达到**局部最小值**，当且仅当存在一个实数$\delta>0$使得$f$在$X\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$上的限制函数$f|_{X\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)}$在$x_0$处达到最小值。

   （注：如果f在x_0处达到最大值，那么为了区分于局部最大值的概念，有时候会称f在x_0处达到**全局最大值**，显然全局最大值也是局部最大值（事实上对任意$\delta>0$它都是限制函数$f|_{X\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)}$的最大值），类似地我们也可以给出**全局最小值**的定义；作为回顾，应当将这个概念同9.6节中函数最大值的概念做比较）

命题

1. (10.2.6 局部最值是稳定的) 设$a<b$都是实数，并且设$f:(a,b)\to\mathbb{R}$是一个函数。若$x_0\in(a,b)$且f在x_0处是可微的，并且f在x_0处达到局部最大值或者局部最小值，那么$f'(x_0)=0$。
2. (10.2.7 罗尔定理) 设$a<b$都是实数，并且设$g:[a,b]\to\mathbb{R}$是一个连续函数，并且它在(a,b)上是可微的。若$g(a)=g(b)$，那么存在一个$x_0\in(a,b)$使得$g'(x_0)=0$。

   （注：注意，罗尔中值定理的成立前提只要求在开区间(a,b)上可微，不需要对区间的端点也有这样的要求；罗尔定理可以由命题10.2.6与最大值原理推出，具体见习题10.2.4）
3. (10.2.9 平均值定理) 设$a<b$都是实数，并且设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是一个在$[a,b]$上连续且在(a,b)上可微的函数。那么存在一个实数$x_0\in(a,b)$使得$f'(x_0)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$。

   （注：平均值定理在别的地方也叫拉格朗日中值定理，同罗尔定理（罗尔中值定理）一样是三大微分中值定理之一，可以参考维基百科）

课后习题

10.2.1 证明命题10.2.6

10.2.2 举例说明，存在连续函数$f:(-1,1)\to\mathbb{R}$在0处达到全局最大值，但是在0处不可微。解释为什么这与命题10.2.6不矛盾

10.2.3 举例说明，存在连续函数$f:(-1,1)\to\mathbb{R}$在0处的导数，但是在0处既没有达到局部最大值也没有达到局部最小值。解释为什么这与命题10.2.6不矛盾

10.2.4 证明定理10.2.7（提示：利用推论10.1.12，最大值原理（命题9.6.7），然后使用命题10.2.6。注意，最大值原理并没有表明最大值一定是在(a,b)内达到，因此需要分类讨论，并且利用$g(a)=g(b)$的前提条件）

10.2.5 利用定理10.2.7证明推论10.2.9（提示：对某个谨慎选定的实数c，考虑形如$f(x)-cx$的函数）

10.2.6 设$M>0$，$a<b$都是实数，并且设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是一个在$[a,b]$上连续且在(a,b)上可微的函数，而且对所有的$x\in(a,b)$均有$|f'(x)|\le M$（即f的导数是有界的）。证明，对任意的x，$y\in[a,b]$，不等式$|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$均成立（提示：对f选择一个恰当的限制，然后对限制函数使用平均值定理（推论10.2.9））。满足$|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$的函数被称为利普希茨连续（Lipschitz continuity）函数，其中M被称为利普希茨常数。因此，本题结论表明任意导数有界的函数都是利普希茨连续的（关于利普希茨连续，可以参考wiki）

10.2.7 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是一个可微函数，并且$f'$是有界的。证明：$f$是一致连续的（提示：利用习题10.2.6的结论）

本节相关跳转

[实分析 9.6 最大值原理]

[实分析 10.1 基本定义]