11.3 上黎曼积分和下黎曼积分

定义

1. (11.3.1 函数的控制) 设$f:I\to\mathbb{R}$与$g:I\to\mathbb{R}$是函数。如果对全部$x\in I$都有$g(x)\geq f(x)$，那么我们称g在I上从**上方控制**f；如果对全部$x\in I$都有$g(x)\leq f(x)$，那么我们称g在I上从**下方控制**f。

   (注：其实就是函数值大小的关系创造了一个新定义。知道上方控制就是大于等于，下方控制就是小于等于就行，这个概念主要是后面叙述方便)

2. (11.3.2 上黎曼积分和下黎曼积分) 设$f:I\to\mathbb{R}$是**定义在有界区间**I**上**的**有界函数**，我们定义**上黎曼积分**$\overline{\int}_I f$为：

   $$\overline{\int}_I f:=\inf\left\{p.c.\int_I g:g\text{是在}I\text{上从上方控制}f\text{的分段常数函数}\right\}$$

   并且定义**下黎曼积分**$\underline{\int}_I f$为：

   $$\underline{\int}_I f:=\sup\left\{p.c.\int_I g:g\text{是在}I\text{上从下方控制}f\text{的分段常数函数}\right\}$$

   (注：需要注意这里定义了上下黎曼积分都是对有界区间上的有界函数生效的概念，下面的黎曼积分也是如此)

3. (11.3.4 黎曼积分) 设$f:I\to\mathbb{R}$是定义在有界区间I上的有界函数，若有$\overline{\int}_I f=\underline{\int}_I f$成立，那么我们称$f$在$I$上是**黎曼可积**的，并且定义有：

   $$\int_I f:=\overline{\int}_I f=\underline{\int}_I f$$

   如果上黎曼积分和下黎曼积分不相等，则我们称f在I上**不是黎曼可积**的。

   (注：关于黎曼积分的定义，你可以尝试将它与序列的上下极限概念联系到一起，在序列的章节中我们知道只有当序列上下极限（上界的下界与下界的上界）相等时序列才收敛，类似地我们只有在上下黎曼积分（上控制积分的下界与下控制积分的上界）相等时才能给出黎曼积分的值；我们认为无界函数都是非黎曼可积的，涉及无界函数的积分被称为**反常积分**，利用更高级的积分方法（例如勒贝格积分）去计算这些积分是有可能的，我们将在第19章中讨论这些内容)

4. (11.3.9 黎曼和) 设$f:I\to\mathbb{R}$是定义在有界区间I上的有界函数，并且设P是I的一个划分。我们定义**上黎曼和**$U(f,P)$为：

   $$U(f,P):=\sum_{J\in P;J\neq\varnothing}\left(\sup_{x\in J}f(x)\right)|J|$$

   并且定义**下黎曼和**$L(f,P)$为：

   $$L(f,P):=\sum_{J\in P;J\neq\varnothing}\left(\inf_{x\in J}f(x)\right)|J|$$

（注：你或许已经在其它的教材中见到过黎曼和的概念，需要注意的是这里对$J\neq\varnothing$的限定是非常重要的，不然$\sup\limits_{x\in J}f(x)$与$\inf\limits_{x\in J}f(x)$会出现$-\infty$和$+\infty$的情况，但是我们并未给出过关于无穷与实数的运算（尽管在这情景下$|J|$稳定等于0）；命题11.3.13将黎曼和与黎曼积分的概念联系起来）

命题

1. (11.3.3 上下黎曼积分的估计？) 设$f:I\to\mathbb{R}$是定义在有界区间I上的有界函数，它以实数M为界（即对全部的$x\in I$都有$-M\leq f(x)\leq M$成立），那么我们有：

$$-M|I|\leq\overline{\int}_I f\leq\underline{\int}_I f\leq M|I|$$

特别地，上黎曼积分和下黎曼积分都是实数，即它们都不是无限的。

2. (11.3.7 黎曼积分与分段常值积分是一致的？) 设$f:I\to\mathbb{R}$是定义在有界区间I上的分段常数函数，那么f是在I上黎曼可积的，并且有$\int_I f=p.c.\int_I f$为真。

（注：这个引理告诉我们分段常值积分与黎曼积分的概念是一致的，因此有了这个引理后我们便不再使用分段常值积分$p.c.\int_I f$，而是始终使用黎曼积分$\int_I f$；需要注意的是引理11.3.7有一个特殊形式，即I为单点集或空的场景，此时我们有黎曼积分$\int_I f$自动为0，函数f也自动退化为常数函数）

3. (11.3.11) 设$f:I\to\mathbb{R}$是定义在有界区间I上的分段常数函数，若有g是在I上从上方控制f的函数，并且g还是关于I的某个划分P的分段常数函数，那么我们有：

$$U(f,P)\leq p.c.\int_I g$$

类似地，若有h是在I上从下方控制f的函数，并且h还是关于I的某个划分P的分段常数函数，那么我们有：

$$L(f,P)\geq p.c.\int_I h$$

4. (11.3.12) 设$f:I\to\mathbb{R}$是定义在有界区间I上的分段常数函数，那么有：

$$\overline{\int}_I f=\inf\{U(f,P):P\text{是}I\text{的一个划分}\}$$
$$\underline{\int}_I f=\sup\{L(f,P):P\text{是}I\text{的一个划分}\}$$

课后习题

11.3.1 设$f:I\to\mathbb{R}$，$g:I\to\mathbb{R}$和$h:I\to\mathbb{R}$都是函数。证明：如果f从上方控制g且g从上方控制h，那么f从上方控制h。证明：如果f和g互相从上方控制彼此，那么有$f=g$

> 证明：如果f从上方控制g且g从上方控制h，那么f从上方控制h
>
> 根据定义11.3.1，于是题设等价于对所有$x\in I$都有$f(x)\geq g(x)$且$g(x)\geq h(x)$为真，这表明有对所有$x\in I$都有$f(x)\geq h(x)$为真，于是根据定义11.3.1，f是从上方控制h的。
>
> ---

> 证明：如果f和g互相从上方控制彼此，那么有$f=g$
>
> 根据定义11.3.1，于是题设等价于对所有$x\in I$都有$f(x)\geq g(x)$且$g(x)\geq f(x)$为真，这等价于有对所有$x\in I$都有$f(x)=g(x)$为真，于是根据函数相等的定义我们有$f=g$。

11.3.2 设$f:I\to\mathbb{R}$，$g:I\to\mathbb{R}$和$h:I\to\mathbb{R}$都是函数。如果f从上方控制g，那么$f+h$是否从上方控制$g+h$？$f\cdot h$是否从上方控制$g\cdot h$？如果c是一个实数，cf是否从上方控制cg？尝试回答并给出理由

> 根据定义11.3.1，f从上方控制g表明对全部的$x\in I$都有$f(x)\geq g(x)$为真，基于此进行下面的讨论。
>
> ---
>
> - 如果f从上方控制g，那么$f+h$是否从上方控制$g+h$?
>
> 正确的，因为$f(x)\geq g(x)$等价于$f(x)+h(x)\geq g(x)+h(x)$，也即$(f+h)(x)\geq(g+h)(x)$，于是根据定义11.3.1有$f+h$是从上方控制$g+h$的。
>
> ---
>
> - 如果f从上方控制g，那么$f\cdot h$是否从上方控制$g\cdot h$?
>
> 不一定，考虑定义为$h(x):=-1$的常数函数，于是$f(x)\geq g(x)\iff -f(x)\leq -g(x)$，即$(f\cdot h)(x)\leq(g\cdot h)$，只要$f$和$g$不是同一个函数那么此时必然不能导出$f\cdot h$从上方控制$g\cdot h$的结论。
>
> ---
>
> - 如果f从上方控制g且c是一个实数，那么cf是否从上方控制cg?
>
> 取$c=-1$，这和"如果f从上方控制g，那么$f\cdot h$是否从上方控制$g\cdot h$? "证明中的例子一模一样，不再赘述。

11.3.3 证明引理11.3.7

> 根据定义11.3.4，于是即证明f的上黎曼积分与下黎曼积分均等于分段常值积分$p.c.\int_I f$。
>
> 考虑上黎曼积分$\overline{\int}_I f$，根据定义11.3.2，有：
>
> $$\overline{\int}_I f:=\inf S\quad\left(S:=\left\{p.c.\int_I g:g\text{是在}I\text{上从上方控制}f\text{的分段常数函数}\right\}\right)$$
>
> 首先，由于f显然是从上方控制f的，因此我们应当有$p.c.\int_I f\in S$，从而对任意$l\in\mathbb{R}$是S的下界（由命题11.3.3我们知道它肯定是有界的），都应该有$l\leq p.c.\int_I f$；另一方面，对任意g是从上方控制f的分段常数函数，设I的一个划分P是使得f和g都是关于P的分段常数函数（在习题11.2.4中我们说明了为什么这样的划分总是存在的）。根据定义11.3.1与定义11.2.1，应当有对任意$J\in P$，都有$f_J\leq g_J$成立，其中f_J与g_J表示f和g在区间J上的常数值。于是根据有限和的运算性质（命题7.1.11(h)）有：
>
> $$\sum_{J\in P}f_J|J|\leq\sum_{J\in P}g_J|J|\xLongrightarrow{\text{定义11.2.14}}p.c.\int_I f\leq p.c.\int_I g$$

从而我们得到：对任意$n \in S$，都应该有存在一个从上方控制f的分段常数函数g使得$n = p.c.\int_I g$，进而有$n \geq p.c.\int_I f$。即对任意$n \in S$都有$n \geq p.c.\int_I f$，这表明$p.c.\int_I f$是S的一个下界，结合前文中对任意$l \in \mathbb{R}$是S的下界，都应该有$l \leq p.c.\int_I f$我们可以得到$p.c.\int_I f = \inf S$，即$p.c.\int_I f = \overline{\int}_I f$。

我们可以用类似的方法证明$p.c.\int_I f = \underline{\int}_I f$，下面给出我的一个证明：

考虑下黎曼积分$\underline{\int}_I f$，根据定义11.3.2，有：

$$\underline{\int}_I f := \sup S' \quad \left(S' := \left\{p.c.\int_I g : g\text{是在}I\text{上从下方控制}f\text{的分段常数函数}\right\}\right)$$

首先，由于f显然是从下方控制f的，因此我们应当有$p.c.\int_I f \in S$，从而对任意$s \in \mathbb{R}$是S'的上界（由命题11.3.3我们知道它肯定是有界的），都应该有$s \geq p.c.\int_I f$；另一方面，对任意g是从下方控制f的分段常数函数，设I的一个划分P是使得f和g都是关于P的分段常数函数（在习题11.2.4中我们说明了为什么这样的划分总是存在的）。根据定义11.3.1与定义11.2.1，应当有对任意$J \in P$，都有$f_J \geq g_J$成立，其中f_J与g_J表示f和g在区间J上的常数值。于是根据有限和的运算性质（命题7.1.11(h)）有：

$$\sum_{J \in P} f_J|J| \geq \sum_{J \in P} g_J|J| \xRightarrow{\text{定义}11.2.14} p.c.\int_I f \geq p.c.\int_I g$$

从而我们得到：对任意$n \in S'$，都应该有存在一个从下方控制f的分段常数函数g使得$n = p.c.\int_I g$，进而有$n \leq p.c.\int_I f$。即对任意$n \in S'$都有$n \leq p.c.\int_I f$，这表明$p.c.\int_I f$是S'的一个上界，结合前文中对任意$s \in \mathbb{R}$是S'的上界，都应该有$s \geq p.c.\int_I f$。我们可以得到$p.c.\int_I f = \sup S'$。

综上，我们证明了有f的上黎曼积分与下黎曼积分均等于分段常值积分$p.c.\int_I f$，于是根据定义11.3.4，我们有：

$$\int_I f = p.c.\int_I f$$

此即引理11.3.7结论，证明完毕。

11.3.4 证明引理11.3.11

对分段常数函数g，h与区间$J \in P$，我们令有g_J与h_J分别表示g与h在J上的常数值。

由于g从上方控制f，因此对任意$J \in P$，我们都应该有$g(x) \geq f(x)$对任意$x \in J$成立，又因为g在J上常值的，因此对任意$x \in J$都有$g(x) = g_J$，于是可以得到$g_J \geq f(x)$对任意$x \in J$都为真，从而g_J是集合$\{f(x) : x \in J\}$的上界。

于是根据上确界性质，我们有$g_J \geq \sup_{x \in J} f(x)$，这个结论对任意$J \in P$都适用。结合有限和的运算性质（命题7.1.11(h)）有：

$$\sum_{J\in P;J\neq\varnothing}\left(\sup_{x\in J}f(x)\right)|J|\leq\sum_{J\in P;J\neq\varnothing}g_J|J|\xlongequal{|\varnothing|=0}\sum_{J\in P}g_J|J|$$

然后根据上黎曼和的定义（定义11.3.9）与分段常值积分的定义（定义11.2.14），上式即为：

$$U(f,P)\leq p.c.\int_I g$$

于是第一个结论得证，对第二个结论也可以用类似的方法证明，下面给出一个我个人的证明：

由于h从下方控制f，因此对任意$J\in P$，我们都应该有$h(x)\leq f(x)$对任意$x\in J$成立，又因为h在J上常值的，因此对任意$x\in J$都有$h(x)=h_J$，于是可以得到$h_J\leq f(x)$对任意$x\in J$都为真，从而h_J是集合$\{f(x):x\in J\}$的下界。

于是根据下确界性质，我们有$h_J\leq\inf\limits_{x\in J}f(x)$，这个结论对任意$J\in P$都适用。结合有限和的运算性质（命题7.1.11(h)）有：

$$\sum_{J\in P;J\neq\varnothing}\left(\inf_{x\in J}f(x)\right)|J|\geq\sum_{J\in P;J\neq\varnothing}h_J|J|\xlongequal{|\varnothing|=0}\sum_{J\in P}h_J|J|$$

然后根据下黎曼和的定义（定义11.3.9）与分段常值积分的定义（定义11.2.14），上式即为：

$$L(f,P)\geq p.c.\int_I h$$

11.3.5 证明引理11.3.12（注：或许引理11.3.11有助于你完成这个证明，尽管它应该最多只能完成一半的工作）

分别证明（事实上两个结论证明过程很相似，参考一个就行）：

- 证明：$\overline{\int}_I f=\inf\{U(f,P):P\text{是}I\text{的一个划分}\}$。

根据定义11.3.2，于是这等价于证明：

$$\inf S_1=\inf S_2$$

其中$S_1:=\left\{p.c.\int_I g:g\text{是在}I\text{上从上方控制}f\text{的分段常数函数}\right\}$，
$S_2:=\{U(f,P):P\text{是}I\text{的一个划分}\}$。

对划分P，定义函数$g:I\to\mathbb{R}$有映射关系$g(x):=\sup\limits_{x\in J}f(x)$，其中$J\in P$满足$x\in J$（根据划分的定义我们知道$J$是唯一的，因此$g$的定义是明确的）。显然对任意$J\in P$都有$g$在$J$上是常值的，因此$g$是关于$P$的分段常数函数。并且注意到显然有$g$从上方控制$f$。

于是令g_J为g在J上的常数值，g在I上的分段常值积分有：

$$\begin{aligned}p.c.\int_I g=\sum_{J\in P}g_J|J|&=\sum_{J\in P;J\neq\varnothing}g_J|J|+\sum_{J\in P;J=\varnothing}g_J|J|\\&=\sum_{J\in P;J\neq\varnothing}\left(\sup_{x\in J}f(x)\right)|J|+0\\&=U(f,P)\end{aligned}$$

因此对任意的划分P与函数$f:I\to\mathbb{R}$，都存在一个在I上从上方控制f的分段常数函数g使得$p.c.\int_I g=U(f,P)$。这个结论表明对任意$n\in S_2$都有$n\in S_1$。从而应该有$\inf S_1\leq n$对任意$n\in S_2$成立，即$\inf S_1$是S_2的下界，进而$\inf S_1\leq\inf S_2$。

又根据引理11.3.11，我们有对任意$n \in S_1$，存在一个在I上从上方控制f的分段常数函数g使得$n = p.c. \int_I g$，根据引理11.3.11，于是存在一个上黎曼和$U(f, P) \in S_2$使得$n \geq U(f, P) \geq \inf S_2$。总结有$\inf S_2 \leq n$对任意$n \in S_1$成立，即即$\inf S_2$是$S_1$的下界，进而$\inf S_2 \leq \inf S_1$。

综上，我们有$\inf S_1 \leq \inf S_2$且$\inf S_2 \leq \inf S_1$，于是即$\inf S_1 = \inf S_2$，题目结论得证。

- 证明：$\underline{\int}_I f = \sup\{L(f, P) : P\text{是}I\text{的一个划分}\}$。

根据定义11.3.2，于是这等价于证明：

$$\sup S_1 = \sup S_2$$

其中$S_1 := \left\{p.c. \int_I g : g\text{是在}I\text{上从下方控制}f\text{的分段常数函数}\right\}$，$S_2 := \{L(f, P) : P\text{是}I\text{的一个划分}\}$。

对划分P，定义函数$h : I \to \mathbb{R}$有映射关系$h(x) := \inf_{x \in J} f(x)$，其中$J \in P$满足$x \in J$（根据划分的定义我们知道$J$是唯一的，因此$g$的定义是明确的）。显然对任意$J \in P$都有$h$在$J$上是常值的，因此$h$是关于$P$的分段常数函数。并且注意到显然有$h$从下方控制$f$。

于是令h_J为h在J上的常数值，h在I上的分段常值积分有：

$$\begin{aligned} p.c. \int_I h = \sum_{J \in P} h_J |J| &= \sum_{J \in P; J \neq \varnothing} h_J |J| + \sum_{J \in P; J = \varnothing} h_J |J| \\ &= \sum_{J \in P; J \neq \varnothing} \left(\inf_{x \in J} f(x)\right) |J| + 0 \\ &= L(f, P) \end{aligned}$$

因此对任意的划分P与函数$f : I \to \mathbb{R}$，都存在一个在I上从下方控制f的分段常数函数h使得$p.c. \int_I h = L(f, P)$。这个结论表明对任意$n \in S_2$都有$n \in S_1$。从而应该有$\sup S_1 \geq n$对任意$n \in S_2$成立，即$\sup S_1$是S_2的上界，进而$\sup S_1 \geq \sup S_2$。

又根据引理11.3.11，我们有对任意$n \in S_1$，存在一个在I上从下方控制f的分段常数函数h使得$n = p.c. \int_I h$，根据引理11.3.11，于是存在一个下黎曼和$L(f, P) \in S_2$使得$n \leq L(f, P) \leq \sup S_2$。总结有$\sup S_2 \geq n$对任意$n \in S_1$成立，即即$\sup S_2$是$S_1$的上界，进而$\sup S_2 \geq \sup S_1$。

综上，我们有$\sup S_1 \geq \sup S_2$且$\sup S_2 \geq \sup S_1$，于是即$\sup S_1 = \sup S_2$，题目结论得证。

本节相关跳转

[实分析 19.2 非负可测函数的积分]