

## 8.5 有序集

### 定义

1. (8.5.1 偏序集) 偏序集是一个附加了关系 $\leq_X$ 的集合 $X$  (于是对于任意两个对象 $x, y \in X$ , 命题 $x \leq_X y$ 要么是一个真命题, 要么是一个假命题), 此外我们假设这种关系遵守下面三个性质:

- (自反性) 对任意 $x \in X$ ,  $x \leq_X x$ 始终为真。
- (反对称性) 若任意 $x, y \in X$ 满足 $x \leq_X y$ 且 $y \leq_X x$ , 那么 $x = y$ 。
- (传递性) 若对任意 $x, y, z \in X$ 满足 $x \leq_X y$ 且 $y \leq_X z$ , 那么 $x \leq_X z$ 。

称 $\leq_X$ 为序关系, 绝大多数情况下, 我们可以通过上下文确定集合 $X$ 是什么, 于是这时我们可以简单的简写 $\leq_X$ 为 $\leq$ , 此外, 若有 $x \leq_X y$ 且 $x \neq y$ , 那么可以记为 $x <_X y$ 或者 $x < y$ 。

(注: 比如说自然数集 $\mathbb{N}$ 与通常的小于等于 $\leq$ 关系就构成了一个偏序集, 此外, 比如 $X$ 是一个集合的集合, 附上子集 $\subseteq$ 的关系也是一个偏序集。正常情况下我们不能直接说一个集合 $X$ 是偏序集, 而应该写成 $(X, \leq_X)$ 这样的形式来指明偏序关系, 不过我们通常能在上下文中确定偏序关系从而直接写 $X$ 来代指 $(X, \leq_X)$ 。需要注意的是, 一种偏序关系并不一定绑定某个集合, 同一个集合也可以与不同种偏序关系组成偏序集)

2. (8.5.3 全序集) 设 $X$ 是一个偏序集,  $\leq_X$ 是 $X$ 上的序关系,  $Y$ 是 $X$ 的一个子集。若对任意 $y, y' \in Y$ , 我们都有 $y \leq_X y'$ 或 $y' \leq_X y$  (或两者兼有), 那么 $X$ 的子集 $Y$ 是全序的。如果 $X$ 本身是全序的, 那么我们称 $X$ 是一个附加了序关系的全序集 (或链)。

(注: 全序集首先必然是一个偏序集, 同时对任意全序集的子集也必然是全序集, 我们常见的自然数集 $\mathbb{N}$ , 整数集 $\mathbb{Z}$ , 有理数集 $\mathbb{Q}$ 与实数集 $\mathbb{R}$ 附上常见的小于等于 $\leq$ 关系后就是全序集。偏序集中也有不是全序集的存在, 比如上文所举例的取 $X$ 为 $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1\}\}$ , 偏序关系是子集关系 $\subseteq$ , 因为 $\{1, 2\}$ 与 $\{2, 3\}$ 之间不能有一方为另一方子集, 所以 $(X, \subseteq)$ 并不是一个全序集, 但 $(X, \subseteq)$ 显然是偏序集)

3. (8.5.5 最大元素与最小元素) 设 $X$ 是一个偏序集, 其偏序关系为 $\leq_X$ ,  $Y$ 是 $X$ 的一个子集。如果 $y \in Y$ 且不存在 $y' \in Y$ 使得 $y <_X y'$ , 则称 $y$ 是 $Y$ 的最大元素; 如果 $y \in Y$ 且不存在 $y' \in Y$ 使得 $y' <_X y$ , 则称 $y$ 是 $Y$ 的最小元素。

(注: 尽管名字中带有最的字样, 但是偏序集并不一定只有唯一的最小或最大元素, 以 $X$ 取集合 $\{\{5\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ , 偏序关系取子集 $\subseteq$ 为例, 不难发现 $\{5\}$ 同时是 $X$ 的最大元素与最小元素, 同时 $\{1, 2, 3\}$ 也是集合的最大元素, 因此不要以常规印象来理解这个最大与最小)

4. (8.5.8 良序集) 设 $X$ 是一个偏序集,  $Y$ 是 $X$ 的一个全序子集。如果 $Y$ 的每一个非空子集都有最小元素, 那么称 $Y$ 是良序的。

(注: 良序集拥有更加严苛的条件, 自然数集 $\mathbb{N}$ 就是一个良序集, 但是整数集 $\mathbb{Z}$ , 有理数集 $\mathbb{Q}$ , 实数集 $\mathbb{R}$ 都不是良序集。良序集有许多特殊性质, 比如良序集的任意子集都是良序集, 有限的全序集也是良序集, 而且良序集自动遵守强归纳法原理)

5. (8.5.12 上界和严格上界) 设 $X$ 是一个以 $\leq$ 为序关系的偏序集, 并且设 $Y$ 是 $X$ 的一个子集。若 $x \in X$ , 称 $x$ 是 $Y$ 的上界, 当且仅当对所有 $y \in Y$ 都有 $y \leq x$ ; 此外, 若 $x$ 还满足 $x \notin Y$ , 那么称 $x$ 是 $Y$ 的严格上界。这等价于 $x$ 是 $Y$ 的严格上界当且仅当对所有 $y \in Y$ 都有 $y < x$ 。

### 命题

1. (8.5.10 强归纳法原理) 设 $X$ 是一个以 $\leq$ 为序关系的良序集, 并且设 $P(n)$ 是关于 $n \in X$ 的性质 (即对任意的 $n \in X$ ,  $P(n)$ 要么为真命题, 要么为伪命题)。假设对每一个 $n \in X$ , 都有下面这个蕴含关系: 如果 $P(m)$ 为真对任意 $m < n$ 的 $m \in X$ 成立, 那么 $P(n)$ 也为真。则此时对任意 $n \in X$ ,  $P(n)$ 为真。
2. (8.5.14) 设 $X$ 是一个以 $\leq$ 为序关系的偏序集, 并且设 $x_0$ 是 $X$ 的一个元素, 那么存在一个 $X$ 的良序子集 $Y$ 使得 $x_0$ 是 $Y$ 的最小元素且 $Y$ 没有严格上界。  
(注: 这个命题建议回顾课本中对这个命题的证明叙述, 由这个命题我们可以推出超限归纳原理)
3. (8.5.15 佐恩引理) 设 $X$ 是一个具有如下性质的非空偏序集: 即 $X$ 的每一个全序子集 $Y$ 都有一个上界。那么 $X$ 至少有一个最大元素。  
(注: 佐恩引理也叫超限归纳原理)

## 课后习题

8.5.1 考虑具有空序关系 $\leq_\emptyset$ 的空集 (这个关系是空的, 因为空集中没有任何元素)。这个集合是偏序的吗? 是全序的吗? 是良序的吗? 请给出解释

这个集合是同时是偏序的, 全序的与良序的。

原因在于偏序, 全序, 良序的定义都是基于集合中的元素与其关系, 但是这个集合中不包含任何的元素, 因此所有的条件都为真。

8.5.2 给出集合 $X$ 和满足如下条件的关系 $\leq$ 的例子:

(a) 关系 $\leq$ 是自反的和反对称的, 但不是可传递的

考虑集合 $X = \{a, b, c\}$ 有这样的关系 $\leq_X$ :

$\leq_X$	$a$	$b$	$c$
$a$	True	True	False
$b$	False	True	True
$c$	False	False	True

此表中 $x$ 行 $y$ 列表示 $x \leq_X y$ 是否为真。根据此表可知:

- 对任意 $x \in X$ 都有 $x \leq_X x$ , 从而关系 $\leq_X$ 是自反的;
- 一共有 $(a \leq_X a)$ ,  $(b \leq_X b)$ ,  $(c \leq_X c)$ ,  $(a \leq_X b)$ ,  $(b \leq_X c)$ 成立, 交换位置后可以看到其中 $b \leq_X a$ 与 $c \leq_X b$ 并不成立, 因此若有 $x \leq_X y$ 且 $y \leq_X x$ , 则 $x$ 与 $y$ 必然相同且是 $a, b, c$ 中的一个, 从而关系 $\leq_X$ 是反对称的;
- 可以看到 $a \leq_X b$ 与 $b \leq_X c$ 成立, 但是 $a \leq_X c$ 为假, 所以关系 $\leq_X$ 不是可传递的。

于是上面的关系 $\leq_X$ 是自反, 反对称但不是可传递的。

(b) 关系 $\leq$ 是自反的和可传递的, 但不是反对称的

考虑集合 $X = \{a, b, c\}$ 有这样的序关系 $\leq_X$ :

$\leq_X$	$a$	$b$	$c$
$a$	True	True	True
$b$	True	True	True
$c$	False	False	True

此表中 $x$ 行 $y$ 列表示 $x \leq_X y$ 是否为真。根据此表可知：

- 对任意 $x \in X$ 都有 $x \leq_X x$ ，从而关系 $\leq_X$ 是自反的；
- 注意到此关系下 $a \leq_X b$ 与 $b \leq_X a$ 同时成立，但是 $a \neq b$ ，不符合反对称的要求。从而关系 $\leq_X$ 不是反对称的；
- 此关系下可以列出所有满足 $x \leq_X y, y \leq_X z$ 的情况：
  - 若 $x$ 为 $a$ （或 $b$ ），则 $y$ 可以是 $a, b, c$ 。其中若 $y$ 为 $a$ 或 $b$ ，则 $z$ 可以是 $a, b, c$ ，此时无论 $z$ 是什么都有 $x \leq_X z$ 成立；若 $y$ 为 $c$ ，则 $z$ 只能是 $c$ ，由于 $\forall e \in X, e \leq_X c$ ，因此此时也必然有 $x \leq_X z$ 成立。
  - 若 $x$ 为 $c$ ，则 $y$ 只能是 $c$ ，从而 $z$ 也只能是 $c$ ，此时根据表即有 $x \leq_X z$ 成立。

综上，即对任意 $x, y, z \in X$ 满足 $x \leq_X y, y \leq_X z$ ，都有 $x \leq_X z$ 成立，于是关系 $\leq_X$ 是可传递的。

于是上面的关系 $\leq_X$ 是自反，可传递但不是反对称的。

### (c)关系 $\leq$ 是反对称的和可传递的，但不是自反的

考虑集合 $X = \{a, b, c\}$ 有这样的序关系 $\leq_X$ ：

$\leq_X$	$a$	$b$	$c$
$a$	True	True	False
$b$	False	True	False
$c$	False	False	False

此表中 $x$ 行 $y$ 列表示 $x \leq_X y$ 是否为真。根据此表可知：

- 注意到 $c \leq_X c$ 为假，这与自反性的要求不符，从而关系 $\leq_X$ 不是自反的；
- 一共有 $(a \leq_X a), (b \leq_X b), (a \leq_X b)$ 成立，交换位置后可以看到其中 $b \leq_X a$ 并不成立，因此若有 $x \leq_X y$ 且 $y \leq_X x$ ，则 $x$ 与 $y$ 必然相同且是 $a, b$ 中的一个，从而关系 $\leq_X$ 是反对称的；
- 此关系下可以列出所有满足 $x \leq_X y, y \leq_X z$ 的情况：
  - 若 $x$ 为 $a$ ，则 $y$ 可以是 $a, b$ 。其中若 $y$ 为 $a$ ，则 $z$ 可以是 $a, b$ ，此时无论 $z$ 是什么都有 $x \leq_X z$ 成立；若 $y$ 为 $b$ ，则 $z$ 只能是 $b$ ，此时也有 $x \leq_X z$ 成立。
  - 若 $x$ 为 $b$ ，则 $y$ 只能是 $b$ ，进而 $z$ 只能是 $b$ ，此时有 $x \leq_X z$ 成立。
  - 若 $x$ 为 $c$ ，则不存在元素 $e$ 满足 $c \leq_X e$ ，于是满足 $x \leq_X y, y \leq_X z$ 时不可能有 $x$ 为 $c$ 。

于是上面的关系 $\leq_X$ 是反对称，可传递但不是自反的。

**8.5.3 给定两个正整数**  $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , **如果存在一个正整数**  $a$ , **使得**  $m = na$ , **那么我们称**  $n$  **整除**  $m$ , **并记作**  $n|m$ . **证明: 附加上序关系**  $|$  **的集合**  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  **是一个偏序集, 但不是全序集. 注意, 这里的序关系不同于**  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  **上通常的序关系**  $\leq$

要证明附加上序关系  $|$  的集合  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  是一个偏序集, 根据定义 8.5.1, 需要证明关系  $|$  满足:

- 自反性: 对任意的  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , 有  $n = n \times 1$ , 因此  $n$  总是整除  $n$  自身的, 从而有  $n|n$  成立, 即  $|$  是自反的。
- 反对称性: 对任意  $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , 若有  $n|m$  且  $m|n$  成立, 则存在正整数  $a, b$  使得  $m = na$  与  $n = mb$  成立, 即有  $n = n(ab)$  成立, 即有  $ab = 1$ ; 又考虑到  $a, b$  都是正整数, 于是只能有  $a = 1$  与  $b = 1$  同时成立, 即  $m = n$ . 于是  $|$  是反对称的。
- 可传递性: 对任意  $n, m, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , 若有  $n|m$  与  $m|l$  同时成立, 则存在正整数  $a, b$  使得  $m = na$  与  $l = mb$  同时成立, 于是即  $l = n(ab)$ , 又由于  $ab$  也是正整数, 即有  $n|l$  成立。于是  $|$  是可传递的。

于是根据定义 8.5.1, 集合  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  是一个偏序集, 下面考虑集合  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  是否是一个全序集:

考虑 13, 3 是集合  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  中的元素, 显然不存在正整数  $a$  使得  $13 = 3a$  或者  $3 = 13a$ , 因此  $3 \nmid 13$  与  $13 \nmid 3$  都为伪。但是根据全序集的要求 (定义 8.5.3),  $3 \nmid 13$  与  $13 \nmid 3$  应当至少有一个为真, 因此集合  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  肯定不是全序的。

于是  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  是一个偏序集, 但  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  不是一个全序集。

**8.5.4 证明: 正实数集**  $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  **没有最小元素**

对任意实数  $r \in \mathbb{R}^+$ , 有  $r - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r \in \mathbb{R}^+$  是一个正实数, 而根据实数序关系的定义 (定义 5.4.6), 从而有  $\frac{1}{2}r < r$  始终成立, 即对任意  $r \in \mathbb{R}^+$ ,  $r$  都不是  $\mathbb{R}^+$  的最小元素。

**8.5.5 设**  $f: X \rightarrow Y$  **是从一个集合**  $X$  **到另一个集合**  $Y$  **的函数, 设**  $Y$  **是具有某种序关系**  $\leq_Y$  **的偏序集. 在**  $X$  **上定义一个关系**  $\leq_X$  **使得**  $x \leq_X x'$  **当且仅当**  $f(x) <_Y f(x')$  **或**  $x = x'$ . **证明: 关系**  $\leq_X$  **使**  $X$  **成为一个偏序集. 如果关系**  $\leq_Y$  **使得**  $Y$  **是全序的, 那么这是否意味着关系**  $\leq_X$  **也使得**  $X$  **也成为全序的? 若答案是肯定的, 那么还需要对**  $f$  **附加什么样的假设才能保证**  $\leq_X$  **使得**  $X$  **成为全序的**

根据定义 8.5.1, 若  $X$  是一个偏序集, 那么关系  $\leq_X$  应该有:

- 自反性: 对任意  $x \in X$ , 由于  $x = x$ , 于是根据题目定义有  $x \leq_X x$  始终成立, 即关系  $\leq_X$  是自反的;
- 反对称性: 对任意  $x, x' \in X$ , 若有  $x \leq_X x'$  与  $x' \leq_X x$  同时成立, 则根据题目定义, 这等价于有条件 1: “ $f(x) <_Y f(x')$  或  $x = x'$ ” 与 条件 2: “ $f(x') <_Y f(x)$  或  $x' = x$ ” 同时成立。又注意到有:

$$\begin{aligned}
 & f(x) <_Y f(x') \text{ 且 } f(x') <_Y f(x) \\
 \iff & [f(x) \leq_Y f(x') \text{ 且 } f(x) \neq f(x')] \text{ 且 } [f(x') \leq_Y f(x) \text{ 且 } f(x') \neq f(x)] \\
 \iff & [f(x) \leq_Y f(x') \text{ 且 } f(x') \leq_Y f(x)] \text{ 且 } f(x) \neq f(x') \\
 \stackrel{Y \text{ 偏序, 反对称}}{\iff} & f(x) = f(x') \text{ 且 } f(x) \neq f(x') \\
 \iff & \text{伪}
 \end{aligned}$$

即若  $x \neq x'$ , 则条件 1 与 条件 2 必然不可能同时为真, 于是此情况下只能有  $x = x'$  成立, 从而关系  $\leq_X$  是反对称的;

- 可传递性: 对任意  $x_0, x_1, x_2 \in X$ , 若有  $x_0 \leq_X x_1$  与  $x_1 \leq_X x_2$  同时成立, 根据定义即等价于条件 1: “ $f(x_0) <_Y f(x_1)$  或  $x_0 = x_1$ ” 与 条件 2: “ $f(x_1) <_Y f(x_2)$  或  $x_1 = x_2$ ” 同时成立。然后分情况讨论可能性:

- 若两个条件里面有至少一个是因为等于关系而成立的，则此时可以将 $x_0 \leq_X x_2$ 等价于 $x_1 \leq_X x_2$ 或 $x_0 \leq_X x_1$ ，两者都是题设条件之一因此 $x_0 \leq_X x_2$ 为真。
- 若两个条件都不是因为等于关系成立的，则有 $f(x_0) <_Y f(x_1)$ 与 $f(x_1) <_Y f(x_2)$ 同时成立，由于 $\leq_Y$ 是一个偏序关系，因此可以得到 $f(x_0) <_Y f(x_2)$ 成立，根据题目定义，此时有 $x_0 \leq_X x_2$ 为真。

综合即总有 $x_0 \leq_X x_2$ 为真，于是关系 $\leq_X$ 是可传递的；

综上，于是 $X$ 是一个偏序集。

然后考察 $X$ 成为全序集的条件，全序集要求关系 $\leq_X$ 满足对任意 $x, x' \in X$ 都有 $x \leq_X x'$ 与 $x' \leq_X x$ 中至少有一个为真。根据定义可引申为条件1：“ $f(x) <_Y f(x')$ 或 $x = x'$ ”与条件2：“ $f(x') <_Y f(x)$ 或 $x' = x$ ”至少有一个为真，这等价于“ $f(x) <_Y f(x')$ ”，“ $f(x') <_Y f(x)$ ”，“ $x' = x$ ”中三者至少有一个为真。

若 $Y$ 是一个全序集，那么对任意 $x, x' \in X$ ， $f(x) \leq_Y f(x')$ 与 $f(x') \leq_Y f(x)$ 至少有一个为真，从而即“ $f(x) <_Y f(x')$ ”，“ $f(x') <_Y f(x)$ ”，“ $f(x) = f(x')$ ”三者中至少有一个为真。此时回到对 $X$ 的性质判断，若出现一对 $x, x' \in X$ 使得 $x' \neq x$ 与 $f(x) = f(x')$ 同时成立则 $X$ 就不是全序的（此时 $x \leq_X x'$ 与 $x' \leq_X x$ 均为假），而 $Y$ 是全序的并不能保证此情况不出现。从而对题目的第二问， $Y$ 是全序的并不能让关系 $\leq_X$ 使得 $X$ 也是全序的。

在 $Y$ 是全序的基础上，可以看到只要 $f$ 的性质能够保证“ $x' \neq x$ 与 $f(x) = f(x')$ 同时成立”这个情况不发生则 $X$ 就是全序的，这等价于 $f$ 是一个单射。于是对题目的第三问，在 $Y$ 是全序的基础上，若 $f$ 还同时是一个单射，那么关系 $\leq_X$ 就是使得 $X$ 全序的序关系。

**8.5.6 设  $X$  是一个偏序集，对  $X$  中任意的元素，定义序理想  $(x) \subset X$  为集合  $(x) := \{y \in X : y \leq x\}$ 。设  $(X) := \{(x) : x \in X\}$  是由全体序理想构成的集合，并且设  $f : X \rightarrow (X)$  为映射  $f(x) := (x)$ ，它把每个元素  $x$  都映成了  $x$  的序理想。证明： $f$  是一个双射，并且对任意给定的  $x, y \in X$ ， $x \leq_X y$  当且仅当  $f(x) \subseteq f(y)$ 。本题表明任何偏序集都能由一个集合簇来表示，其中该集合簇上的序关系由集合的包含关系给出**

先证明 $f$ 是一个单射：

对任意的 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，考虑 $(x_1)$ 与 $(x_2)$ 的关系。

不妨使用反证法，假设 $(x_1) = (x_2)$ 。从而对任意的 $x \in (x_1)$ ，我们都有 $x \in (x_2)$ ，反之亦然，从而根据序理想的定义，这表明对任意的 $x \in X$ 都有 $x \leq x_1$ 当且仅当 $x \leq x_2$ ，特别地，由此可以得知 $x_1 \leq x_2$ 与 $x_2 \leq x_1$ 同时成立。此时由偏序集的序具有反对称性可以推知 $x_1 = x_2$ ，这和前提中的 $(x_1) \neq (x_2)$ 矛盾，因此反证假设不成立，对任意的 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$ 都应当有 $(x_1) \neq (x_2)$ ，即 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 。

然后证明 $f$ 是一个满射：

对任意的 $S \in (X)$ ，根据 $(X)$ 的定义，存在 $x \in X$ 使得 $S = (x)$ ，从而即 $S = f(x)$ 。因此对任意 $S \in (X)$ ，都存在 $x \in X$ 使得 $S$ 通过 $f$ 被映射，即 $f$ 是满射。

综上， $f$ 既是单射又是满射，因此它是一个双射。

**8.5.7 设  $X$  是一个偏序集，并且设  $Y$  是  $X$  的一个全序子集。证明： $Y$  最多有一个最大元素，并且最多有一个最小元素**

使用反证法，假设 $Y$ 有不只一个最大元素，其中包括 $y_1$ 与 $y_2$ ，且 $y_1 \neq y_2$ ，其序关系为 $\leq_X$ 。由于 $y_1, y_2$ 都是 $Y$ 的最大元素，于是命题“ $y_1 <_X y_2$ ”与“ $y_2 <_X y_1$ ”均为假，此时结合 $y_1 \neq y_2$ 的假设，于是即“ $y_1 \leq_X y_2$ ”与“ $y_2 \leq_X y_1$ ”均为假。但是根据全序集的定义的要求（定义8.5.3），“ $y_1 \leq_X y_2$ ”与“ $y_2 \leq_X y_1$ ”至少有一个为真，于是与 $Y$ 是一个全序子集的前提条件导出矛盾。

类似地, 使用反证, 假设 $Y$ 有不止一个最小元素, 其中包括 $y_1$ 与 $y_2$ , 且 $y_1 \neq y_2$ , 其序关系为 $\leq_X$ 。由于 $y_1, y_2$ 都是 $Y$ 的最小元素, 于是“ $y_2 <_X y_1$ ”与“ $y_1 <_X y_2$ ”均为假, 此时结合 $y_1 \neq y_2$ 的假设, 于是即“ $y_1 \leq_X y_2$ ”与“ $y_2 \leq_X y_1$ ”均为假。但是根据全序集的定义的要求(定义8.5.3), “ $y_1 \leq_X y_2$ ”与“ $y_2 \leq_X y_1$ ”至少有一个为真, 于是与 $Y$ 是一个全序子集的前提条件导出矛盾。

综上, 反证结束,  $Y$ 最多有一个最大元素, 并且最多有一个最小元素。

### 8.5.8 证明: 全序集的任意一个有限的非空子集都有一个最小元素和一个最大元素 (提示: 利用归纳法)。特别地, 每个有限的全序集都是良序的

设该全序集为 $Y$ , 序关系为 $\leq_Y$ , 对任意非空子集 $S$ 的基数 $n$ 作归纳:

$n = 1$ 时:

此时 $S$ 为单元素集, 不妨设其唯一元素为 $s$  (即 $S = \{s\}$ ), 于是显然 $s <_Y s$ 为假, 即 $s$ 同时是 $S$ 的最大元素与最小元素, 此情况下结论成立。

现归纳性假设对 $S$ 基数 $n = a$ 时成立结论, 考虑 $n = a + 1$ 时的情况:

根据单个选择引理(引理3.1.6), 我们可以从 $S$ 中选出一个元素 $s$ , 于是 $S$ 可以写为 $S = (S - \{s\}) \cup \{s\}$ 的形式, 此时我们知道 $s \notin S - \{s\}$ 与 $S - \{s\}$ 的基数为 $n - 1 = a$ 。根据归纳假设, 存在一个 $s_{\max} \in S - \{s\}$ 是 $S - \{s\}$ 的最大元素与 $s_{\min} \in S - \{s\}$ 是 $S - \{s\}$ 的最小元素。

于是考虑 $s, s_{\max}, s_{\min}$ 的大小关系, 由于 $s \notin S - \{s\}$ 因此 $s \neq s_{\max}$ 且 $s \neq s_{\min}$ , 并且由于 $Y$ 是全序的, 从而 $s <_Y s_{\max}$ 与 $s_{\max} <_Y s$ 至少有一个为真, 类似地也有 $s <_Y s_{\min}$ 与 $s_{\min} <_Y s$ 至少有一个为真。在此前提下开始下面的讨论:

#### • 最大元素:

##### 1. 若 $s <_Y s_{\max}$ :

则对任意 $s' \in S$ , 若 $s' \in S - \{s\}$ , 则由于 $s_{\max}$ 本身就是 $S - \{s\}$ 的最大元素于是不可能 $s_{\max} <_Y s'$ ; 若 $s' \in \{s\}$  (即 $s'$ 就是 $s$ ), 则由于 $s <_Y s_{\max}$ 于是不可能 $s_{\max} <_Y s'$ 。于是此时根据定义,  $s_{\max}$ 就是 $S$ 的最大元素。

##### 2. 若 $s_{\max} <_Y s$ :

则对任意 $s' \in S$ , 若 $s' \in S - \{s\}$ , 则由于序关系的传递性不可能有 $s <_Y s'$  (否则会出现 $s_{\max} <_Y s <_Y s'$ 导出矛盾); 若 $s' \in \{s\}$  (即 $s'$ 就是 $s$ ), 则显然不可能有 $s < s'$ 。于是此时根据定义,  $s$ 就是 $S$ 的最大元素。

#### • 最小元素:

##### 1. 若 $s <_Y s_{\min}$ :

则对任意 $s' \in S$ , 若 $s' \in S - \{s\}$ , 则由于序关系的传递性不可能有 $s' <_Y s$  (否则会出现 $s' <_Y s <_Y s_{\min}$ 导出矛盾); 若 $s' \in \{s\}$  (即 $s'$ 就是 $s$ ), 则显然不可能有 $s' < s$ 。于是此时根据定义,  $s$ 就是 $S$ 的最小元素。

##### 2. 若 $s_{\min} <_Y s$ :

则对任意 $s' \in S$ , 若 $s' \in S - \{s\}$ , 则由于 $s_{\min}$ 本身就是 $S - \{s\}$ 的最小元素于是不可能 $s' <_Y s_{\min}$ ; 若 $s' \in \{s\}$  (即 $s'$ 就是 $s$ ), 则由于 $s_{\min} <_Y s$ 于是不可能 $s' <_Y s_{\min}$ 。于是此时根据定义,  $s_{\min}$ 就是 $S$ 的最小元素。

综上, 于是我们得到无论什么情况, 在 $S$ 的基数为 $n$ 时总是有 $S$ 存在一个最大元素和一个最小元素, 于是此情况下结论也成立, 归纳得证。



综上，于是对全序集的任意一个有限的非空子集，总是有一个最小元素和一个最大元素。特别地，若这个全序集是有限的，则其所有非空子集都是有限集，因此总是存在一个最小元素，此时根据定义8.5.8，于是这个全序集是良序的。即任意有限的全序集都是良序的。

**8.5.9 设  $X$  是一个全序集，并且  $X$  的每一个非空子集都既有最小元素又有最大元素。证明：  $X$  是有限集**  
(提示：利用反证法，假设  $X$  是无限集。从  $X$  的最小元素  $x_0$  开始，在  $X$  中构造一个递增的序列  $x_0 < x_1 < \dots$ )

使用反证法，假设  $X$  是一个无限集，于是我们可以通过下面的递归定义得到一个序列：

$$x_i := x_i \text{ 是 } X - \{x_j \in X : 0 \leq j \leq i-1\} \text{ 的最小元素 } (i \in \mathbb{N})$$

特别地，当  $i = 0$  时  $x_0$  是  $X$  的最小元素。

然后我们考虑集合  $S := \{x_i \in X : i \in \mathbb{N}\}$ ，根据题目假设可以得到  $S$  存在一个最大元素，不妨设  $i = n$  时的  $x_n$  就是  $S$  的最大元素，从而对任意的  $i \in \mathbb{N}$ ，" $x_n < x_i$ " 都是伪命题，但是根据  $x_n$  的定义，我们有  $x_n$  是  $X - \{x_j \in X : 0 \leq j \leq n-1\}$  的最小元素，从而对任意的  $x \in X - \{x_j \in X : 0 \leq j \leq n-1\}$ ，都有  $x_n \leq_X x$  成立，特别地，由于：

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\text{ 是 } X - \{x_j \in X : 0 \leq j \leq n\} \text{ 的最小元素} \\ &\downarrow \\ x_{n+1} &\in X - \{x_j \in X : 0 \leq j \leq n\} \\ &\downarrow \\ x_{n+1} &\in X - \{x_j \in X : 0 \leq j \leq n-1\} \text{ 且 } x_n \neq x_{n+1} \end{aligned}$$

于是即有  $x_n <_X x_{n+1}$ ，于是  $x_n$  不是  $S$  的最大元素，导出了矛盾，反证结束。

综上，于是  $X$  只能是个有限集。

**8.5.10 不利用选择公理证明命题8.5.10 (提示：考虑集合**

$$Y := \{n \in X : \text{存在某个满足 } m \leq_X n \text{ 的 } m \in X \text{ 使得 } P(m) \text{ 为假}\}$$

**并证明若  $Y$  不是空集就会导致矛盾)**

贴一下命题8.5.10，上面的内容太多了不方便翻页：

(8.5.10 强归纳法原理) 设  $X$  是一个以  $\leq_X$  为序关系的良序集，并且设  $P(n)$  是关于  $n \in X$  的性质 (即对任意的  $n \in X$ ， $P(n)$  要么为真命题，要么为伪命题)。假设对每一个  $n \in X$ ，都有下面这个蕴含关系：如果  $P(m)$  为真对任意  $m <_X n$  的  $m \in X$  成立，那么  $P(n)$  也为真。则此时对任意  $n \in X$ ， $P(n)$  为真。

考虑使用反证法，不妨假设存在  $x \in X$  使得  $P(x)$  为假。于是考虑这样的集合：

$$Y := \{n \in X : \text{存在某个满足 } m \leq_X n \text{ 的 } m \in X \text{ 使得 } P(m) \text{ 为假}\}$$

关于这个集合，需要注意到对任意的  $n \in X$ ，如果  $P(n)$  为假那么  $n$  就是属于  $Y$  的 (因为  $n \leq_X n$  始终成立)；此外  $Y$  显然是  $X$  的非空子集 (因为至少  $x \leq_X x$  使得  $P(x)$  为假，所以  $x \in Y$ )；还有对任意  $n \in Y$ ，至少存在一个  $m <_X n$  使得  $P(m)$  为假 (若对任意的  $m <_X n$  都有  $P(m)$  为真，则根据强归纳法原理的蕴含关系可以推知  $P(n)$  也为真，从而对任意的  $m \leq_X n$  都有  $P(m)$  为真，不满足  $Y$  中元素的要求)。

此时由于  $X$  是良序的，根据定义8.5.8， $Y$  应当存在一个最小元素  $x_0$ ，此时我们注意到：

- 对任意的  $x \in X$  满足  $x <_X x_0$ ，由于  $x_0$  是最小元素，因此  $x$  不属于  $Y$ ，从而根据上面的结论，因此应当有  $P(x)$  为真始终成立。
- 由于  $x_0 \in Y$ ，根据上面的结论，应当至少存在一个  $x <_X x_0$  使得  $P(x)$  为假。

于是导出了矛盾，反证结束，只能有对任意的  $n \in X$ ， $P(n)$  都为真。

**8.5.11 设  $X$  是一个偏序集，并且设  $Y$  和  $Y'$  都是  $X$  的良序子集，证明：  $Y \cup Y'$  是良序的，当且仅当它是全序的**

我们假设  $X$  的序关系为  $\leq$ 。根据良序集定义，我们知道若  $Y \cup Y'$  是良序的则  $Y \cup Y'$  是全序的，因此只需要证明：若  $Y \cup Y'$  是全序的，那么  $Y \cup Y'$  是良序的。

若  $Y \cup Y'$  是全序的，考虑其非空子集  $S$ 。我们记有：

$$S_Y := \{x \in S : x \in Y\}$$

$$S_{Y'} := \{x \in S : x \in Y'\}$$

显然有  $S = S_Y \cup S_{Y'}$ ，并且有  $S_Y \subseteq Y$  与  $S_{Y'} \subseteq Y'$ 。由于  $Y, Y'$  是良序的，于是存在  $s_Y$  是  $S_Y$  的最小元素， $s_{Y'}$  是  $S_{Y'}$  的最小元素；又由于  $Y \cup Y'$  是全序的，从而“ $s_Y \leq s_{Y'}$ ”与“ $s_{Y'} \leq s_Y$ ”至少有一个为真。此时分类讨论  $s_Y$  与  $s_{Y'}$  的关系：

- 只有  $s_Y \leq s_{Y'}$  为真：

此时对任意  $S$  中元素  $s$ ，若  $s \in Y$ ，则由于  $s_Y$  是  $S_Y$  的最小元素我们可以得到  $s < s_Y$  为伪；若  $s \in Y'$ ，则不妨反证，假设有  $s < s_Y$  成立，那么根据偏序关系的可传递性有  $s < s_Y \leq s_{Y'} \implies s < s_{Y'}$ ，这和  $s_{Y'}$  是  $S_{Y'}$  的最小元素的前提矛盾，于是只能有  $s < s_Y$  为伪；综合得到  $s < s_Y$  对任意  $S$  中元素  $s$  为伪，于是根据定义 8.5.5， $s_Y$  是  $S$  的最小元素。

- 只有  $s_{Y'} \leq s_Y$  为真：

此时对任意  $S$  中元素  $s$ ，若  $s \in Y$ ，则不妨反证，设有  $s < s_{Y'}$  成立，根据偏序关系的可传递性有  $s < s_{Y'} \leq s_Y \implies s < s_Y$ ，这和  $s_Y$  是  $S_Y$  的最小元素的前提矛盾，于是只能有  $s < s_{Y'}$  为伪；若  $s \in Y'$ ，则由于  $s_{Y'}$  是  $S_{Y'}$  的最小元素可以得到  $s < s_{Y'}$  为伪。综合得到  $s < s_{Y'}$  对任意  $S$  中元素  $s$  为伪，于是根据定义 8.5.5， $s_{Y'}$  是  $S$  的最小元素。

- $s_Y \leq s_{Y'}$  与  $s_{Y'} \leq s_Y$  均为真：

此时由偏序关系的反对称性，有  $s_Y = s_{Y'}$ 。于是对任意  $S$  中元素  $s$ ，若  $s \in Y$ ，则由于  $s_Y$  是  $S_Y$  的最小元素我们可以得到  $s < s_Y$  为伪；若  $s \in Y'$ ，则由于  $s_Y$  也是  $S_{Y'}$  的最小元素也可以得到  $s < s_Y$  为伪。综合得到  $s < s_Y$  对任意  $S$  中元素  $s$  为伪，于是根据定义 8.5.5， $s_Y$  是  $S$  的最小元素。

综上，于是对任意  $S$  是  $Y \cup Y'$  的非空子集，总有  $S$  存在一个最小元素，从而根据定义 8.5.8， $Y \cup Y'$  是良序的。

于是结论得证，我们有  $Y \cup Y'$  是良序的，当且仅当它是全序的。

**8.5.12 设  $X$  和  $Y$  分别是具有序关系  $\leq_X$  和  $\leq_Y$  的偏序集，在笛卡尔积  $X \times Y$  上定义一个关系  $\leq_{X \times Y}$  如下：若  $x <_X x'$  或者若  $x = x'$  且  $y \leq_Y y'$ ，则定义  $(x, y) \leq_{X \times Y} (x', y')$ （这被称作  $X \times Y$  上的字典顺序，它类似于单词的字母顺序。如果单词  $\omega$  的第一个字母比另一个单词  $\omega'$  的第一个字母更早出现在字母表中，或者两个单词的第一个字母相同但  $\omega$  的第二个字母比  $\omega'$  的第二个字母更早出现的在字母表中（以此类推），那么  $\omega$  就比  $\omega'$  更早出现在字典中）证明：  $\leq_{X \times Y}$  定义了  $X \times Y$  上的一个偏序关系。更进一步地证明：如果  $X$  和  $Y$  都是全序的，那么  $X \times Y$  也是全序的；如果  $X$  和  $Y$  都是良序的，那么  $X \times Y$  也是良序的**

注：译版的题目有误，此关系实际定义为“若  $x <_X x'$  或者若  $x = x'$  且  $y \leq_Y y'$ ”，原书内容为“if  $x <_X x'$ , or if  $x = x'$  and  $y \leq_Y y'$ ”，译版将“ $x <_X x'$ ”错误写成了“ $x \leq_X x'$ ”

对题目中的结论逐个证明：

证明：  $\leq_{X \times Y}$  定义了  $X \times Y$  上的一个偏序关系。

要证明  $\leq_{X \times Y}$  是  $X \times Y$  上的一个偏序关系，则需要证明  $\leq_{X \times Y}$  满足：



- 自反性:

即证明对任意的  $(x, y) \in X \times Y$  都有  $(x, y) \leq_{X \times Y} (x, y)$  成立, 由于  $\leq_Y$  满足自反性于是我们有  $x = x$  与  $y \leq_Y y$  成立, 从而根据  $\leq_{X \times Y}$  的定义有  $(x, y) \leq_{X \times Y} (x, y)$  成立。自反性得证。

- 反对称性:

即证明对任意的  $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ , 若有  $(x, y) \leq_{X \times Y} (x', y')$  与  $(x', y') \leq_{X \times Y} (x, y)$  成立, 则有  $(x, y) = (x', y')$  成立。

考虑  $\leq_{X \times Y}$  的定义, “ $(x, y) \leq_{X \times Y} (x', y')$ ”有“ $x <_X x'$ ”或“ $x = x'$ 且  $y \leq_Y y'$ ”, 若“ $x <_X x'$ ”为真, 那么对“ $(x', y') \leq_{X \times Y} (x, y)$ ”, 只能是“ $x' <_X x$ ”为真 (因为  $x' \neq x$ )。于是:

$$\begin{aligned} x <_X x' \text{ 且 } x' <_X x \\ \Downarrow \\ x \leq_X x' \text{ 且 } x' \leq_X x \text{ 且 } x \neq x' \\ \Downarrow \\ x = x' \text{ 且 } x \neq x' \end{aligned}$$

其中最后一步用到了  $\leq_X$  满足反对称性, 从而此时导出了矛盾, 于是此情况不可能。

然后考虑“ $x = x'$ 且  $y \leq_Y y'$ ”为真, 那么对“ $(x', y') \leq_{X \times Y} (x, y)$ ”, 只能是“ $x' = x$ 且  $y' \leq_Y y$ ”为真 (因为  $x' = x$ )。于是:

$$\begin{aligned} x = x' \text{ 且 } y \leq_Y y' \text{ 且 } x' = x \text{ 且 } y' \leq_Y y \\ \Downarrow \\ x = x' \text{ 且 } y \leq_Y y' \text{ 且 } y' \leq_Y y \\ \Downarrow \\ x = x' \text{ 且 } y = y' \end{aligned}$$

其中最后一步用到了  $\leq_Y$  满足反对称性, 此时“ $x = x'$ 且  $y = y'$ ”即有  $(x, y) = (x', y')$ 。

综上, 于是若有  $(x, y) \leq_{X \times Y} (x', y')$  与  $(x', y') \leq_{X \times Y} (x, y)$  成立, 则必有  $(x, y) = (x', y')$  成立, 反对称性得证。

- 可传递性:

即证明对任意的  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ , 若有  $(x_0, y_0) \leq_{X \times Y} (x_1, y_1)$  与  $(x_1, y_1) \leq_{X \times Y} (x_2, y_2)$  成立, 那么有  $(x_0, y_0) \leq_{X \times Y} (x_2, y_2)$  成立。

考虑  $\leq_{X \times Y}$  的定义, “ $(x_1, y_1) \leq_{X \times Y} (x_2, y_2)$ ”有“ $x_1 <_X x_2$ ”或“ $x_1 = x_2$ 且  $y_1 \leq_Y y_2$ ”。于是考虑其可能的情况:

- 若“ $x_1 <_X x_2$ ”为真:

则无论“ $x_0 <_X x_1$ ”与“ $x_0 = x_1$ 且  $y_0 \leq_Y y_1$ ”哪个为真, 总会有  $x_0 \leq_X x_1 <_X x_2 \implies x_0 <_X x_2$  (偏序关系的可传递性), 于是根据  $\leq_{X \times Y}$  的定义此时有  $(x_0, y_0) \leq_{X \times Y} (x_2, y_2)$  成立。

- 若“ $x_1 = x_2$ 且  $y_1 \leq_Y y_2$ ”为真:

“ $(x_0, y_0) \leq_{X \times Y} (x_1, y_1)$ ”有“ $x_0 <_X x_1$ ”或“ $x_0 = x_1$ 且  $y_0 \leq_Y y_1$ ”, 考虑其可能的情况:

- 若“ $x_0 <_X x_1$ ”为真:

则根据偏序关系的可传递性, 有  $x_0 <_X x_1 \leq_X x_2 \implies x_0 <_X x_2$ , 于是根据  $\leq_{X \times Y}$  的定义此情况下有  $(x_0, y_0) \leq_{X \times Y} (x_2, y_2)$  成立。

- 若“ $x_0 = x_1$ 且 $y_0 \leq_Y y_1$ ”为真：

此时由 $x_0 = x_1 = x_2$ 。根据偏序关系的可传递性，又有

$y_0 \leq_Y y_1 \leq_Y y_2 \implies y_0 \leq_Y y_2$ ，于是根据 $\leq_{X \times Y}$ 的定义此情况下有  
( $x_0, y_0$ )  $\leq_{X \times Y}$  ( $x_2, y_2$ )成立。

综上，于是若有( $x_0, y_0$ )  $\leq_{X \times Y}$  ( $x_1, y_1$ )与( $x_1, y_1$ )  $\leq_{X \times Y}$  ( $x_2, y_2$ )成立，那么总有  
( $x_0, y_0$ )  $\leq_{X \times Y}$  ( $x_2, y_2$ )成立，可传递性得证。

证明：如果 $X$ 和 $Y$ 都是全序的，那么 $X \times Y$ 也是全序的。

要证明 $X \times Y$ 是全序的，即证明对任意的 $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ ，“ $(x, y) \leq_{X \times Y} (x', y')$ ”与  
“ $(x', y') \leq_{X \times Y} (x, y)$ ”中至少有一个为真。

不妨使用反证，我们假设存在一对 $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ 使得“ $(x, y) \leq_{X \times Y} (x', y')$ ”与  
“ $(x', y') \leq_{X \times Y} (x, y)$ ”全为伪，于是可以化简逻辑，该假设等价于有下面几个命题同时成立：

1. “ $x <_X x'$ ”为伪。
2. “ $x' <_X x$ ”为伪。
3. “ $x \neq x'$ ”或“ $y \leq_Y y'$ ”为伪”。
4. “ $x \neq x'$ ”或“ $y' \leq_Y y$ ”为伪”。

由于“ $x <_X x'$ ”与“ $x' <_X x$ ”都为伪，根据 $X$ 全序的要求，只能有 $x' = x$ 成立，于是第3和第4个  
命题同时成立只能是“ $y \leq_Y y'$ ”为伪”与“ $y' \leq_Y y$ ”为伪”同时成立，但是根据 $Y$ 全序的要求， $y \leq_Y y'$   
与 $y' \leq_Y y$ 至少要有一个为真，于是导出了矛盾，反证假设不成立。 $X \times Y$ 只能是全序的。

证明：如果 $X$ 和 $Y$ 都是良序的，那么 $X \times Y$ 也是良序的。

根据上面的结论，由于 $X$ 和 $Y$ 都是良序的，从而它们也是全序的，进而 $X \times Y$ 也是全序的。于是  
此时只需要证明对 $X \times Y$ 的任意非空子集都存在最小元素，那么 $X \times Y$ 就是良序的。

设 $S$ 是 $X \times Y$ 的非空子集，然后考虑下面这样一个集合：

$$X' := \{x \in X : \text{存在 } y \in Y \text{ 使得 } (x, y) \in S\}$$

显然 $X'$ 是 $X$ 的非空子集，因此根据 $X$ 是良序的，存在一个 $X'$ 的最小元素 $x'$ 。然后考虑下面的集  
合：

$$Y' := \{y \in Y : (x', y) \in S\}$$

显然 $Y'$ 是 $Y$ 的非空子集，因此根据 $Y$ 是良序的，存在一个 $Y'$ 的最小元素 $y'$ 。

然后我们考虑任意的 $(x, y) \in S$ ，由于 $x \in X'$ 与 $x'$ 是 $X'$ 的最小元素，因此有 $x <_X x'$ 为伪。于  
是分类讨论：

- 若没有 $x = x'$ ，则此时“ $x <_X x'$ ”，“ $x = x'$ 且 $y \leq_Y y'$ ”与“ $(x, y) = (x', y')$ ”均不成立，于是  
( $x, y$ )  $<_{X \times Y}$  ( $x', y'$ )为伪。
- 若有 $x = x'$ ，则根据定义有 $y \in Y'$ ，于是由于 $y'$ 是 $Y'$ 的最小元素有 $y <_Y y'$ 为伪，即“  
 $y \leq_Y y'$ ”与“ $(x, y) \neq (x', y')$ ”不能同时成立，于是根据 $\leq_{X \times Y}$ 的定义有  
( $x, y$ )  $<_{X \times Y}$  ( $x', y'$ )为伪。

于是对任意的 $(x, y) \in S$ 都有( $x, y$ )  $<_{X \times Y}$  ( $x', y'$ )为伪，于是( $x', y'$ )是 $S$ 的最小元素。

综上，于是对任意 $X \times Y$ 的非空子集 $S$ ， $S$ 都存在最小元素，于是根据定义8.5.8， $X \times Y$ 也是良  
序的，结论得证。

**8.5.13 证明：**引理8.5.14的证明中的结论，即 $Y' \setminus Y$ 的每一个元素都是 $Y$ 的上界，反之亦然（提示：利用命题8.5.10证明）

$$\{y \in Y : y \leq a\} = \{y \in Y' : y \leq a\} = \{y \in Y \cap Y' : y \leq a\}$$

对所有的 $a \in Y \cap Y'$ 均成立。推导出 $Y \cap Y'$ 是好的，从而 $s(Y \cap Y')$ 存在。证明如果 $Y' \setminus Y$ 是非空的，那么 $s(Y \cap Y') = \min(Y' \setminus Y)$ 。 $Y$ 和 $Y'$ 交换之后也有类似的结论。因为 $Y' \setminus Y$ 和 $Y \setminus Y'$ 是不相交的，所以我们可以断定两个集合中有一个为空集。基于这一点，很容易得出结论）

注：需要注意的是，原书证明中的 $s$ 函数实际上是一个确定的函数，尽管由于它使用了选择公理我们不能给出它的取值过程，不要将其理解为 $s$ 只是单纯的对输入的以 $x_0$ 为最小元素的良序子集 $Y$ 给出一个严格上界，理解这一点后你才能明白为什么“好的”集合是 $X$ 的一类特殊良序子集，而不是单纯的一个以 $x_0$ 为最小元素的良序子集（事实上，如果你按照“ $s$ 输出一个严格上界”的想法理解你可能会发现“好的”的要求是没有意义的，因为 $x$ 显然是 $\{y \in Y : y < x\}$ 的一个严格上界）。

我们先使用强归纳法（命题8.5.10）证明下面的性质

$$P(n) := \{y \in Y : y \leq n\} = \{y \in Y' : y \leq n\} = \{y \in Y \cap Y' : y \leq n\}$$

对任意的 $n \in Y \cap Y'$ 都成立，显然我们有 $P(x_0)$ 为真。即证明，对任意的 $n \in Y \cap Y'$ 都有这样的蕴含关系：若任意 $m < n$ 的 $m \in Y \cap Y'$ 都有 $P(m)$ 为真，则有 $P(n)$ 为真。

考虑任意的 $n \in Y \cap Y'$ ，若任意 $m < n$ 的 $m \in Y \cap Y'$ 都有 $P(m)$ 为真，于是对任意 $i \in Y \cap Y'$ 且 $i < n$ ，有 $i \in Y$ 与 $i \in Y'$ ；然后对任意的 $i \in Y$ 且 $i < n$ ，由于 $P(i)$ 为真有：

$$\{y \in Y : y \leq i\} = \{y \in Y \cap Y' : y \leq i\} \xrightarrow{i \in \{y \in Y : y \leq i\}} i \in \{y \in Y \cap Y' : y \leq i\} \implies i \in Y \cap Y'$$

于是有 $i \in Y \cap Y'$ ，类似地我们也可以得到对任意的 $i \in Y'$ 且 $i < n$ 有 $i \in Y \cap Y'$ 。此时根据集合相等的定义，我们有：

$$\{y \in Y : y < n\} = \{y \in Y' : y < n\} = \{y \in Y \cap Y' : y < n\}$$

根据前设我们有 $n \in Y \cap Y'$ ，从而 $n \in Y$ 与 $n \in Y'$ 为真，于是有：

$$\begin{aligned} \{y \in Y : y < n\} &= \{y \in Y' : y < n\} = \{y \in Y \cap Y' : y < n\} \\ &\downarrow \\ \{y \in Y : y < n\} \cup \{n\} &= \{y \in Y' : y < n\} \cup \{n\} = \{y \in Y \cap Y' : y < n\} \cup \{n\} \\ &\downarrow \\ \{y \in Y : y \leq n\} &= \{y \in Y' : y \leq n\} = \{y \in Y \cap Y' : y \leq n\} \end{aligned}$$

于是综合即有蕴含关系“若任意 $m < n$ 的 $m \in Y \cap Y'$ 都有 $P(m)$ 为真，则 $P(n)$ 为真”成立，于是根据强归纳法原理，我们有 $P(n)$ 对任意的 $n \in Y \cap Y'$ 都为真。

然后我们证明 $Y \cap Y'$ 是一个好的集合，并且对任意的 $Y \setminus Y'$ 或 $Y' \setminus Y$ 中元素 $y$ ，它都是 $Y \cap Y'$ 的一个严格上界。

考虑任意的 $n \in Y \cap Y'$ 且有 $n \neq x_0$ ，在上面我们已经证明过有：

$$\{y \in Y : y < n\} = \{y \in Y' : y < n\} = \{y \in Y \cap Y' : y < n\}$$

于是由于 $Y$ （ $Y'$ 也行）是好的，我们有：

$$s(\{y \in Y \cap Y' : y < n\}) = s(\{y \in Y : y < n\}) = n$$

又由于 $Y \cap Y'$ 是 $Y$ 的子集, 因此它是良序的; 对任意 $y \in Y \cap Y'$ , 由于 $y$ 也是属于 $Y$ 的, 因此对最小元素 $x_0$ 应当有 $y < x_0$ 为假, 即 $x_0$ 也是 $Y \cap Y'$ 的最小元素。综合定义可以得到 $Y \cap Y'$ 是一个好的集合。

然后对任意的 $Y \setminus Y'$ 中元素 $e$ , 不妨使用反证法, 假设存在 $n \in Y \cap Y'$ 使得 $n \leq e$ 为假。由于全序的要求, 因此这等价于 $e < n$ 。根据上证明我们有 $P(n)$ 为真, 即:

$$\{y \in Y : y \leq n\} = \{y \in Y \cap Y' : y \leq n\}$$

于是由于 $e \in Y$ 且 $e \leq n$ , 我们有 $e \in \{y \in Y : y \leq n\} \iff e \in \{y \in Y \cap Y' : y \leq n\}$ , 即 $e \in Y \cap Y'$ , 这和前提的 $e \in Y \setminus Y'$ 矛盾, 反证假设不成立。只能有对任意的 $n \in Y \cap Y'$ 都有 $n \leq e$ , 即 $e$ 是 $Y \cap Y'$ 的一个上界, 考虑到 $e \notin Y \cap Y'$ , 于是这个结论可以升级为 $e$ 是 $Y \cap Y'$ 的一个严格上界。类似地, 我们也可以证明对任意的 $Y' \setminus Y$ 中元素 $e$ ,  $e$ 是 $Y \cap Y'$ 的一个严格上界。

最后我们证明,  $Y' \setminus Y$ 的每一个元素都是 $Y$ 的严格上界,  $Y \setminus Y'$ 的每一个元素都是 $Y'$ 的严格上界。

首先证明若 $Y \setminus Y'$ 非空, 则必有 $s(Y \cap Y') = \min(Y \setminus Y')$ 。由于 $Y \setminus Y'$ 是一个良序子集, 因此存在最小元素 $\min(Y \setminus Y')$ ; 然后对任意 $y \in Y$ , 若有 $y < \min(Y \setminus Y')$ , 都有 $y \notin Y \setminus Y'$ , 于是只能有 $y \in Y \cap Y'$ ; 而根据上面的结论, 对任意 $y \in Y \cap Y'$ , 都有 $y \in Y$ 且 $y < \min(Y \setminus Y')$ 成立。于是综合可以得到:

$$Y \cap Y' = \{y \in Y : y < \min(Y \setminus Y')\}$$

又根据 $Y$ 是好的, 于是有:

$$s(Y \cap Y') = s(\{y \in Y : y < \min(Y \setminus Y')\}) = \min(Y \setminus Y')$$

类似地我们也可以证明若 $Y' \setminus Y$ 非空, 则必有 $s(Y \cap Y') = \min(Y' \setminus Y)$ 。

此时注意到 $Y \setminus Y'$ 与 $Y' \setminus Y$ 是两个不相交的集合, 若假设它们均非空, 则根据上面结论有 $s(Y \cap Y')$ 同时属于这两者导出矛盾, 于是这两者至少有一个是空集, 此时有:

- 若 $Y \setminus Y'$ 为空, 则有 $Y \subseteq Y'$ 与 $Y = Y \cap Y'$ 成立, 根据上结论我们有 $Y' \setminus Y$ 的每一个元素都是 $Y$ 的严格上界。
- 若 $Y' \setminus Y$ 为空, 则有 $Y' \subseteq Y$ 与 $Y' = Y \cap Y'$ 成立, 根据上结论我们有 $Y \setminus Y'$ 的每一个元素都是 $Y'$ 的严格上界。

于是结论得证。

#### 8.5.14 利用引理8.5.14证明引理8.5.15 (提示: 首先证明如果 $X$ 没有最大元素, 那么 $X$ 的任意一个有上界的子集也一定有严格上界)

不妨使用反证法, 我们假设 $X$ 不存在最大元素, 从而根据定义对任意元素 $x \in X$ 至少存在一个 $x' \in X$ 满足 $x < x'$ 为真。从而根据偏序关系的可传递性, 若 $x$ 恰好是 $X$ 的某个全序子集 $M$ 的上界, 那么有:

$$\begin{aligned} \forall m \in M, m \leq x < x' \\ \Downarrow \\ \forall m \in M, m \leq x' \text{ 且 } m \neq x' \\ \Downarrow \\ x' \text{ 是 } M \text{ 的严格上界} \end{aligned}$$

于是我们可以得到对任意 $X$ 的全序子集 $M$ ,  $M$ 都是存在严格上界的。

然后根据 $X$ 是非空的, 从而存在 $x_0 \in X$ , 根据引理8.5.14有存在 $X$ 的一个良序子集 $Y$ 使得 $Y$ 以 $x_0$ 为最小元素且不存在严格上界; 但是根据上面的推论, 由于 $Y$ 是良序的, 特别地, 它也是全序的, 因此 $Y$ 应当存在一个严格上界。于是导出了矛盾, 反证假设不成立,  $X$ 至少存在一个最大元素。

综上, 于是佐恩引理得证。

**8.5.15 设 $A$ 和 $B$ 是两个非空的集合, 其中 $A$ 的基数不小于或者等于 $B$ 的基数。利用超限归纳原理证明 $B$ 的基数小于或者等于 $A$ 的基数 (提示: 对任意的子集 $X \subseteq B$ , 设 $P(X)$ 表示性质: 存在一个从 $X$ 到 $A$ 的单射)。本题 (结合习题8.3.3) 表明只要选择公理成立, 任意两个集合的基数就是可比较的**

注: 本题目翻译版中写的是证明“ $B$ 的基数不大于 $A$ 的基数”, 原文为“ $B$  has lesser or equal cardinality to  $A$ ”, 应当翻译为“ $B$ 的基数小于或者等于 $A$ 的基数” (特别是考虑到我们不曾给出过基数“大于”的定义)。

本证明灵感来自[知乎用户蹴远陵歆](#)的[回答](#), 因此可能与原书提示思路有所不同。

于是即证明存在从 $B$ 到 $A$ 的单射。对一个函数 $f: X \rightarrow Y$ , 我们记有它的图为 $I_f := \{(x, f(x)) : x \in X\}$ , 并且我们知道图 $I_f$ 是 $X \times Y$ 的一个子集。于是考虑下面的集合:

$$\mathcal{I} := \{I_f \subseteq B \times A : f \text{ 是一个从 } X \text{ 到 } A \text{ 的单射, } X \text{ 是 } B \text{ 的子集}\}$$

并且我们为集合 $\mathcal{I}$ 附加关系“集合的包含 $\subseteq$ ”, 从而 $\mathcal{I}$ 显然是一个偏序集。

考虑任意 $\mathcal{I}$ 的全序子集 $I$ , 我们证明由并集公理得到的集合 $\cup I$ 是 $I$ 的上界:

根据并集公理我们易得对任意图 $I_f \in I$ 都有 $I_f \subseteq \cup I$ , 于是只需要证明 $\cup I$ 是属于 $\mathcal{I}$ 的。

令集合 $X := \{x \in B : \text{存在 } y \in A \text{ 使得 } (x, y) \in \cup I\}$ , 显然 $X$ 是 $B$ 的子集。此时我们定义 $P(b, a)$ 表示关于对象 $a \in A$ 与对象 $b \in X$ 的性质如下:

$$P(b, a) := (b, a) \in \cup I$$

先证明 $P$ 满足垂线测试: 对任意 $b \in X$ , 根据集合要求至少存在一个 $a \in A$ 使得 $(b, a) \in \cup I$ , 再根据并集定理即存在 $I_f \in I$ 使得 $(b, a) \in I_f$  (于是 $a = f(b)$ )。此时使用反证法, 假设存在一个 $a' \in A$ 满足 $a \neq a'$ 与 $(b, a') \in \cup I$ 同时成立, 根据并集定理即存在 $I_{f'} \in I$ 使得 $(b, a') \in I_{f'}$ 。根据 $I$ 是全序集的要求, 于是 $I_f \subseteq I_{f'}$ 与 $I_{f'} \subseteq I_f$ 中至少有一个为真, 讨论:

- 若 $I_f \subseteq I_{f'}$ 为真, 于是 $(b, a) \in I_{f'}$ , 从而根据图的定义有 $f'(b) = a$ 与 $f'(b) = a'$ 同时成立, 这不符合垂线测试的要求。
- 若 $I_{f'} \subseteq I_f$ 为真, 于是 $(b, a') \in I_f$ , 从而根据图的定义有 $f(b) = a$ 与 $f(b) = a'$ 同时成立, 这不符合垂线测试的要求。

于是反证假设总是会引出矛盾, 反证结束。只能存在唯一的 $a \in A$ 使得 $P(b, a)$ 为真, 即 $P$ 是满足垂线测试的, 即可以由 $P$ 定义一个定义域为 $X$ 值域为 $A$ 的函数 $F: X \rightarrow A$ 。

接着证明由 $P$ 定义的函数 $F$ 是一个单射: 对任意的 $b, b' \in X$ 且 $b \neq b'$ , 根据 $F$ 定义我们有 $(b, F(b)) \in \cup I$ 与 $(b', F(b')) \in \cup I$ , 进而存在 $I_f, I_{f'} \in I$ 使得 $(b, F(b)) \in I_f$ 与 $(b', F(b')) \in I_{f'}$ 成立。根据 $I$ 是全序集的要求, 于是 $I_f \subseteq I_{f'}$ 与 $I_{f'} \subseteq I_f$ 中至少有一个为真, 讨论:

- 若 $I_f \subseteq I_{f'}$ 为真, 于是 $(b, F(b)) \in I_{f'}$ , 从而根据 $f'$ 是单射 ( $\mathcal{I}$ 的定义), 由 $b \neq b'$ 有 $f'(b) \neq f'(b') \iff F(b) \neq F(b')$ 。
- 若 $I_{f'} \subseteq I_f$ 为真, 于是 $(b', F(b')) \in I_f$ , 从而根据 $f$ 是单射 ( $\mathcal{I}$ 的定义), 由 $b \neq b'$ 有 $f(b) \neq f(b') \iff F(b) \neq F(b')$ 。

于是我们总是有 $F(b) \neq F(b')$ , 即 $F$ 是一个单射。

最后我们证明 $\cup I$ 就是 $F$ 的图 $I_F = \{(b, F(b)) : b \in X\}$ : 对任意 $(b, F(b)) \in I_F$ , 根据定义我们有 $F(b)$ 满足 $(b, F(b)) \in \cup I$ ; 对任意 $(b, a) \in \cup I$ , 根据 $X$ 的定义我们有 $b \in X$ , 然后由于 $P(b, a)$ 为真我们有 $F(b) = a$ , 从而根据 $I_F$ 的定义我们有 $(b, a) \in I_F$ 。结合集合相等的定义, 于是 $I_F = \cup I$ 。

综上, 于是 $\cup I$ 是函数 $F$ 的图, 并且 $F$ 是一个定义域为 $B$ 的子集, 值域为 $A$ 的单射, 从而根据 $\mathcal{I}$ 的定义有 $\cup I \in \mathcal{I}$ 。再结合对任意图 $I_f \in \mathcal{I}$ 都有 $I_f \subseteq \cup I$ 与定义8.5.12, 于是 $\cup I$ 是 $\mathcal{I}$ 的一个上界。

根据上结论我们有对任意 $\mathcal{I}$ 的全序子集 $I$ 都存在一个上界, 于是根据佐恩引理,  $\mathcal{I}$ 至少存在一个最大元素, 我们记为 $I_g$ 。注意到根据 $\mathcal{I}$ 的定义 $g$ 的值域为 $A$ , 然后我们证明 $g$ 的定义域只能是 $B$ :

不妨使用反证法, 我们假设 $g$ 的定义域为 $B' \neq B$ , 根据 $\mathcal{I}$ 的定义必须有 $B' \subseteq B$ , 从而 $B' \neq B$ 当且仅当 $B - B' \neq \emptyset$ , 换言之, 至少存在一个 $b \in B$ 使得 $b \notin B'$ ; 然后由于 $g$ 是一个单射, 特别地,  $g$ 不可能是一个满射 (否则由函数 $\tau \circ g^{-1} : A \rightarrow B$ 是单射我们可以直接得到 $A$ 的基数小于或等于 $B$ 与题设矛盾, 其中 $\tau : B' \rightarrow B$ 是定义为 $\tau(b) := b$ 的恒等映射), 于是存在 $a \in A$ 使得对任意 $b' \in B'$ 都有 $g(b') \neq a$ , 然后此时我们考察函数 $g' : B' \cup \{b\} \rightarrow A$ , 其定义如下:

$$g'(x) := \begin{cases} g(x) & \text{if } x \in B' \\ a & \text{if } x = b \end{cases}$$

由于 $g$ 是一个单射显然有 $g'$ 也是一个单射, 并且有 $I_{g'} = I_g \cup \{(b, a)\}$ , 于是即 $I_g \subsetneq I_{g'}$ 与 $I_{g'} \in \mathcal{I}$ 都成立。但是根据 $I_g$ 是最大元素的要求, 对 $I_{g'}$ 也应当有 $I_g \subsetneq I_{g'}$ 为假, 于是导出了矛盾。反证假设不成立, 只能有 $g$ 是定义域为 $B$ 值域为 $A$ 的单射。

综上, 于是存在单射 $g : B \rightarrow A$ , 根据定义于是即 $B$ 的基数小于或者等于 $A$ , 证明完毕。

**8.5.16** 设  $X$  是一个集合, 并且设  $P$  是由  $X$  的所有偏序关系构成的集合 (例如: 如果  $X := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , 那么通常的偏序关系  $\leq$  和习题8.5.3中的偏序关系都是  $P$  的元素)。我们称一个偏序关系  $\leq \in P$  比另一个偏序关系  $\leq' \in P$  更粗糙。如果对任意的  $x, y \in X$ , 都有蕴涵关系  $(x \leq y) \implies (x \leq' y)$ 。比如, 习题8.5.3中的偏序关系比通常的序关系  $\leq$  更粗糙。如果  $\leq$  比  $\leq'$  更粗糙, 那么我们记  $\leq \preceq \leq'$ 。证明:  $\preceq$  使得  $P$  成为一个偏序集, 因此由  $X$  上的偏序关系所构成的集合其自身就是偏序的。  $P$  恰好有一个最小元素, 这个最小元素是什么? 证明:  $P$  的最大元素正是  $X$  的全序关系。利用佐恩引理证明: 对于给定  $X$  的任意一个偏序关系  $\leq$ , 总存在一个全序关系  $\leq'$  使得  $\leq$  比  $\leq'$  更粗糙

**8.5.17** 利用佐恩引理给出习题8.4.2中结论的另一种证明 (提示: 设  $\Omega$  是全体  $Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$  构成的集合,

其中对任意的  $\alpha \in I$  均有  $\#(Y \cap X_\alpha) \leq 1$ 。即那些与每个  $X_\alpha$  都至多有一个公共元素的集合的全体就是  $\Omega$ 。利用佐恩引理找出  $\Omega$  的一个最大元素), 推导出佐恩引理与选择公理在逻辑上确实是等价的 (即从其中任意一个开始都能推导出另一个)

**8.1.18** 利用佐恩引理证明豪斯多夫最大性原理: 如果  $X$  是一个偏序集, 那么存在一个  $X$  的全序子集  $Y$ , 它关于集合的包含关系是最大的 (即不存在  $X$  的其他全序子集  $Y'$  使得  $Y$  包含在  $Y'$  中)。反过来, 证明: 如果豪斯多夫最大性原理成立, 那么佐恩引理也成立。因此根据习题 8.5.17, 这两个命题在逻辑上与选择公理是等价的



8.5.19 设  $X$  是一个集合，并且设  $\Omega$  是全体序对  $(Y, \leq)$  构成的空间，其中  $Y$  是  $X$  的子集且  $\leq$  是  $Y$  的一个良序关系。设  $(Y, \leq)$  和  $(Y', \leq')$  都是  $\Omega$  的元素，如果存在一个  $x \in Y'$  使得  $Y := \{y \in Y' : y <' x\}$  (因此特别有  $Y \subsetneq Y'$ )，并且对任意的  $y, y' \in Y$  均有  $y \leq y'$ ，当且仅当  $y \leq' y'$ ，那么我们称  $(Y, \leq)$  是  $(Y', \leq')$  的一个前段。定义  $\Omega$  上的一个关系  $\preceq$ ，当  $(Y, \leq) = (Y', \leq')$  时或者当  $(Y, \leq)$  是  $(Y', \leq')$  的一个前段时，令  $(Y, \leq) \preceq (Y', \leq')$ 。证明： $\preceq$  是  $\Omega$  的一个偏序关系。 $\Omega$  恰有一个最小元素；这个最小元素是什么？证明： $\Omega$  的最大元素正是  $X$  的良序关系  $(X, \leq)$ 。利用佐恩引理推导出良序原理：每个集合  $X$  都至少有一个良序关系。反过来，利用良序原理证明选择公理，即公理 8.1 (提示：在  $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$  上假设一个良序关系，然后考虑每个  $X_\alpha$  的最小元素)。所以选择公理，佐恩引理以及良序原理在逻辑上都是相互等价的

8.5.20 设  $X$  是一个集合。 $\Omega \subset 2^X$  是由  $X$  的子集构成的集合，并且设  $\Omega$  中不包括空集  $\emptyset$ 。利用佐恩引理证明：存在子集  $\Omega' \subseteq \Omega$  使得  $\Omega'$  中所有的元素互不相交 (即如果  $A$  和  $B$  是  $\Omega'$  中不同的元素，那么  $A \cap B = \emptyset$ )，而且  $\Omega$  中的每个元素都至少与  $\Omega'$  中的一个元素相交 (即定义任意的  $C \in \Omega$ ，存在一个  $A \in \Omega'$  使得  $C \cap A \neq \emptyset$ )。(提示：考虑由  $\Omega$  的满足条件“全体元素都互不相交”的所有子集所构成的整体，并找到这个整体的一个最大元素) 反过来，如果上述结论成立，证明：它蕴含了习题 8.4.2 的结论，从而这是另一个在逻辑上与选择公理等价的结论 (提示：设  $\Omega$  是由所有形如  $\{(0, \alpha), (1, x_\alpha)\}$  的序对集构成的集合，其中  $\alpha \in I$  且  $x_\alpha \in X_\alpha$ )

---

## 本节相关跳转

[实分析 8.3 不可数集](#)

[实分析 8.4 选择公理](#)