17.8 隐函数定理

摘录

1. (关于函数的图) 在习题3.5.10中我们曾经定义了函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的**图**的概念:

$$\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}\}$$

这是一个$\mathbb{R}^2$的子集，几何上它是$\mathbb{R}^2$平面内的一个曲线。当然由于垂线测试的要求，并不是任意的曲线都是函数的图，例如单位圆周$x^2+y^2=1$在$(1,0)$与$(-1,0)$附近的部分都不是关于变量x的图，但是它们是关于变量y的图。

类似地，任意一个函数$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$都给出了一个图$\{(x,g(x)):x\in\mathbb{R}^n\}$，该图在$\mathbb{R}^{n+1}$中表现为某个$n$维曲面 (用专业术语来说就是**超曲面**) 。反过来，我们会去问什么样的超曲面（也就是说某个$\mathbb{R}^{n+1}$的子集）确实是某个函数的图？并且进一步地，我们会去思考当这个超曲面确实对应了某个函数的图时，是否能通过这个图去推断函数自身的性质（例如是否连续，是否可微）？

如果从几何角度给出一个超曲面，那么我们就可以利用垂线测试来判断这个超曲面是否是一个函数的图。但是在维度更高的情况下，并非什么时候都能给出几何角度的曲面。更一般地，我们通常遇到的都是从代数语言给出的曲面，例如$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\text{：}xy+yz+zx=-1\}$，或者更一般地，形如$\{x\in\mathbb{R}^n:g(x)=0\}$的超曲面，该如何去判定这些曲面是否是某个具体函数的图？**隐函数定理**给出了一个判断超曲面（至少局部地）是不是一个图的方法。

命题

1. (17.8.1 隐函数定理) 设E是$\mathbb{R}^n$的开子集，$f:E\to\mathbb{R}$是连续可微的，并设$y=(y_1,\dots,y_n)$是E中满足$f(y)=0$和$\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(y)\neq 0$的点。那么在$\mathbb{R}^{n-1}$中村子啊一个包含$(y_1,\dots,y_{n-1})$的开集$U$，在$E$中存在一个包含$y$的开集$V$，并且还存在一个函数$g:U\to\mathbb{R}$，使得$g(y_1,\dots,y_{n-1})=y_n$，且有:

$$\begin{aligned}&\{(x_1,\dots,x_n)\in V:f(x_1,\dots,x_n)=0\}\\=&\{(x_1,\dots,x_{n-1},g(x_1,\dots,x_{n-1})):(x_1,\dots,x_{n-1})\in U\}\end{aligned}$$

即$\{x\in V:f(x)=0\}$是定义在U上的函数g的图。另外，g是在$(y_1,\dots,y_{n-1})$处可微的，并且对于所有的$1\leq j\leq n-1$有:

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(y_1,\dots,y_{n-1})=-\frac{\partial f}{\partial x_j}(y)/\frac{\partial f}{\partial x_n}(y)$$

(注：关于导数的结论，可以利用所谓的**隐函数微分法**推导出来。在已知了:

$$f(x_1,\dots,x_n)=0$$

那么变量x_n就被另外$n-1$个变量隐式地确定了，并且我们可以通过链式法则求出上面这个式子沿着x_j方向的微分有:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_j}=0$$

这也就是上面导数的结论（前提是$\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\neq 0$）。这个定理事实上是反函数定理的一个推论，详情见原书证明；根据隐函数定理，我们知道只要某个偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$不为$0$，那么变量$x_j$就可以由另外$n-1$个变量确定。于是，只要梯度$\nabla f$不全为$0$，集合$\{x\in\mathbb{R}^n:f(x)=0\}$就可以写成某个变量$x_j$关于另外$n-1$个变量的函数图。如果梯度$\nabla f$在某个点$x_0$处不存在，那么我们称$f$在$x_0$处有**临界点**，此时函数在该点的性状会变得非常复杂。例如$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2-y^2=0\}$在$(0,0)$处就不能看成任何函数的图（它是两个直线的并集）；如果一个集合在每一点处都能看作连续函数的图，那么这个集合被称为**流形**。根据隐函数定理我们知道只要集合$\{x\in\mathbb{R}^n:f(x)=0\}$不包含$f$的临界点，那么它就是一个流形，流形理论是现代几何学（尤其是微分几何学和代数几何学）中的重要内容，不过本书不涉及这部分内容）

本节相关跳转

实分析 3.5 笛卡尔积

实分析 17.7 多元微积分的反函数定理