15.3 阿贝尔定理

命题

1. (15.3.1 阿贝尔定理)设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$是以$a$为中心，收敛半径为$0<R<\infty$的幂级数。如果$f$是在$a+R$处收敛，那么$f$在$a+R$处连续，也即有：

$$\lim_{x\to a+R;x\in(a-R,a+R)}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nR^n$$

类似地，如果f在$a-R$处收敛，那么f在$a-R$处连续，即有：

$$\lim_{x\to a-R;x\in(a-R,a+R)}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(-R)^n$$

(注：阿贝尔定理揭示了幂级数在边界点收敛时会表现出良好的性状)

2. (15.3.2 分部求和公式)设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$和$(b_n)_{n=0}^{\infty}$分别是收敛于极限A和B的实数序列，如果级数$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)b_n$是收敛的，那么级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}(b_{n+1}-b_n)$也是收敛的，并且有：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)b_n=AB-a_0b_0-\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}(b_{n+1}-b_n)$$

(注：应当将这个公式同分部积分公式比较，参考命题11.10.1，它应该是类似

$$\int_0^{\infty}f'(x)g(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

的变种；使用这个引理有助于证明阿贝尔定理，这部分内容参考原书)

课后习题

15.3.1 证明引理15.3.2 (提示：首先要找到级数$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)b_n$与级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}(b_{n+1}-b_n)$之间的关系)

> 根据极限定律我们知道有$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=AB$，于是根据习题7.2.6我们有级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n$收敛于$AB-a_0b_0$，结合前设中级数$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)b_n$也收敛，根据级数的运算定律我们有级数：
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n-(a_{n+1}-a_n)b_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}(b_{n+1}-b_n)$$
>
> 是收敛的，并且有：
>
> $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}(b_{n+1}-b_n)&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n\right)-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)b_n\right)\\&=AB-a_0b_0-\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}(b_{n+1}-b_n)\end{aligned}$$

> 于是题目结论得证。

本节相关跳转

[实分析 11.10 基本定理的推论]