9.8 单调函数

定义

1. (9.8.1 单调函数) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，并设$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数。我们称f是**单调递增**的，当且仅当只要$x, y \in X$且$y > x$，就有$f(y) \geq f(x)$；我们称f是**严格单调递增**的，当且仅当只要$x, y \in X$且$y > x$，就有$f(y) > f(x)$；我们称f是**单调递减**的，当且仅当只要$x, y \in X$且$y > x$，就有$f(y) \leq f(x)$；我们称f是**严格单调递减**的，当且仅当只要$x, y \in X$且$y > x$，就有$f(y) < f(x)$。如果f是单调递增或单调递减的，那么我们称f是**单调**的；如果f是严格单调递增或严格单调递减的，那么我们称f是**严格单调**的。

   (如果一个函数同时是严格单调的并且是连续的，那么它就有很多良好的性质，比如，它是可逆的(见命题9.8.3与习题9.8.4))

命题

1. (9.8.3 单调函数) 设$a < b$都是实数，并且设$f: [a, b] \to \mathbb{R}$是$[a, b]$上的既连续又严格单调递增的函数。则f是从$[a, b]$到$[f(a), f(b)]$的双射，并且它的反函数$f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a, b]$也是既连续又严格单调递增的。

课后习题

9.8.1 解释为什么把"f是连续的"的假设替换成"f是单调的"或者"f是严格单调的"时，最大值原理依然成立 (提示：对于这两种情形，你可以使用同一种解释)

> 根据单调函数的性质，若f是单调递增或严格单调递增的，则对任意$x \in [a, b]$，都应当有$f(x) \leq f(b)$与$f(x) \geq f(a)$。从而根据定义9.6.5，有f在b处达到最大值，在a处达到最小值，此时最大值原理成立；若f是单调递减或严格单调递减的，则对任意$x \in [a, b]$，都应当有$f(x) \geq f(b)$与$f(x) \leq f(a)$。从而根据定义9.6.5，有f在b处达到最大值，在a处达到最小值，此时最大值原理成立。
>
> 综上，将"f是连续的"的假设替换成"f是单调的"或者"f是严格单调的"时，最大值原理依旧成立。

9.8.2 举例说明，如果把"f是连续的"的假设替换成"f是单调的"或者"f是严格单调的"，那么介值定理就不成立 (提示：对于这两种情形，你可以使用同一个反例)

> 考虑这样一个函数$f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$:
>
> $$f(x) := \begin{cases} x - 1 & \text{if } x < 0 \\ x + 1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$
>
> 容易验证这是一个严格单调的函数（也就是说它也是单调的）。若此时介值定理成立，应有对任意$y \in [-2, 2]$（$[f(-1), f(1)]$），都存在$x \in [-1, 1]$满足$f(x) = y$。此时考察0，注意到对任意$x < 0$，都有$f(x) < 0$；对任意$x \geq 0$，都有$f(x) > 0$。于是对任意的$x \in [-1, 1]$，都有$f(x) \neq 0$。于是导出了矛盾，只能有介值定理此时不成立。

9.8.3 设$a < b$都是实数，并且设$f : [a, b] \to \mathbb{R}$是既连续又一对一的函数。证明：$f$是严格单调的（提示：分三种情形：$f(a) < f(b)$，$f(a) = f(b)$与$f(a) > f(b)$。其中第二种情形会导出矛盾；对第一种情形，采用反证法和介值定理去证明f是严格单调递增的；对第三种情形，采用类似的方法去证明f是严格单调递减的）

> 分类讨论：
>
> - $f(a) = f(b)$：
>
> 此情况下f不是双射，同题设矛盾，故不必讨论。
>
> ---
>
> - $f(a) < f(b)$：
>
> 我们证明f是严格单调递增的。
>
> 不妨假设f是非严格单调递增的，从而至少存在一对$x_1, x_2 \in [a, b]$且$x_1 < x_2$满足$f(x_1) \geq f(x_2)$成立。由于f是一个双射，于是不可能有$f(x_1) = f(x_2)$，从而反证假设中只能有$f(x_1) > f(x_2)$。此时讨论$f(x_1)$的值：
>
> > - 若$f(a) \geq f(x_1)$：
> >
> > 此时由于$f(b) > f(a) > f(x_2)$，于是根据介值定理，又有存在实数$c \in [x_2, b]$使得$f(c) = f(a)$，于是得到存在$c, a \in [a, b]$且$c \neq a$满足$f(a) = f(c)$，这同f是双射的前提矛盾，于是此情况不可能。
> >
> > ---
> >
> > - 若$f(a) < f(x_1)$：
> >
> > 此时由于$f(a)$与$f(x_2)$都满足小于$f(x_1)$。由于f是双射因此不可能有$f(a) = f(x_2)$，于是不妨令有：
> >
> > $$c := \begin{cases} a & \text{if } f(a) > f(x_2) \\ x_2 & \text{if } f(a) < f(x_2) \end{cases}$$
> >
> > 该定义通俗来说即我们取c使得$f(c) = \max(f(a), f(x_2))$，从而总是有$f(c) \in [f(a), f(x_1)]$与$f(c) \in [f(x_2), f(x_1)]$。此时根据介值定理，分别存在$y_1 \in [a, x_1]$与$y_2 \in [x_1, x_2]$使得$f(y_1) = f(y_2) = f(c)$，这跟$f$是双射的前提矛盾，于是此情况也不可能。
>
> 综上，于是不可能有至少存在一对$x_1, x_2 \in [a, b]$且$x_1 < x_2$满足$f(x_1) \geq f(x_2)$成立，即f只能是严格单调递增的。
>
> ---
>
> - $f(a) > f(b)$：
>
> 我们证明f是严格单调递减的。
>
> 不妨假设f是非严格单调递减的，从而至少存在一对$x_1, x_2 \in [a, b]$且$x_1 < x_2$满足$f(x_1) \leq f(x_2)$成立。由于f是一个双射，于是不可能有$f(x_1) = f(x_2)$，从而反证假设中只能有$f(x_1) < f(x_2)$。此时讨论$f(x_1)$的值：
>
> > - 若$f(a) \leq f(x_1)$：
> >
> > 此时由于$f(b) < f(a) < f(x_2)$，于是根据介值定理，又有存在实数$c \in [x_2, b]$使得$f(c) = f(a)$，于是得到存在$c, a \in [a, b]$且$c \neq a$满足$f(a) = f(c)$，这同f是双射的前提矛盾，于是此情况不可能。
> >
> > ---

> > - 若$f(a) > f(x_1)$:
> >
> > 此时由于$f(a)$与$f(x_2)$都满足大于$f(x_1)$。由于f是双射因此不可能有$f(a) = f(x_2)$，于是不妨令有:
> >
> > $$c := \begin{cases} a & \text{if } f(a) < f(x_2) \\ x_2 & \text{if } f(a) > f(x_2) \end{cases}$$
> >
> > 该定义通俗来说即我们取c使得$f(c) = \min(f(a), f(x_2))$，从而总是有$f(c) \in [f(x_1), f(a)]$与$f(c) \in [f(x_1), f(x_2)]$。此时根据介值定理，分别存在$y_1 \in [a, x_1]$与$y_2 \in [x_1, x_2]$使得$f(y_1) = f(y_2) = f(c)$，这跟$f$是双射的前提矛盾，于是此情况也不可能。
>
> 综上，于是不可能有至少存在一对$x_1, x_2 \in [a, b]$且$x_1 < x_2$满足$f(x_1) \leq f(x_2)$成立，即f只能是严格单调递减的。
>
> 于是综合所有情况的讨论，我们有若$f : [a, b] \to \mathbb{R}$是既连续又一对一的函数，则必然有$f$是严格单调的，即题目结论得证。

9.8.4 证明命题9.8.3（提示：为了证明f^{-1}是连续的，最简单的方法是使用"ε-δ"定义，命题9.4.7(c)）。如果去掉连续性的假设，那么命题还成立吗？如果把严格单调性换成单调性，那么命题还成立吗？如果把严格单调递增的函数替换为严格单调递减的函数，那么原命题需要如何修改

> 1. 证明命题9.8.3:
>
> - 证明f是从$[a, b]$到$[f(a), f(b)]$的双射:
>
> > 对任意的$x_1, x_2 \in [a, b]$且$x_1 \neq x_2$，不妨假设$x_1 < x_2$，从而由于f是严格单调递增的函数，我们有:
> >
> > $$a \leq x_1 < x_2 \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(x_1) < f(x_2) \leq f(b)$$
> >
> > 于是即$f(x_1) \neq f(x_2)$，从而f是一个单射。
> >
> > 对任意的$y \in [f(a), f(b)]$，由于f是连续的，从而根据介值定理，对y必然存在$x \in [a, b]$满足$f(x) = y$，于是f是一个满射。
> >
> > 综上，于是$f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$既是单射也是满射，即$f$是双射。
>
> - f的反函数$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$是严格单调递增的:
>
> > 根据题设，我们有对任意的$x_1, x_2 \in [a, b]$且$x_1 < x_2$，都有$f(x_1) < f(x_2)$。不妨使用反证法，我们假设f^{-1}不是严格单调递增的，于是存在一对$y_1, y_2 \in [f(a), f(b)]$且$y_1 < y_2$，使得$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$。而根据介值定理，我们知道在$[a, b]$上存在实数$x_1$，$x_2$使得:
> >
> > $$f(x_i) = y_i \iff f^{-1}(y_i) = x_i \quad (i = 1, 2)$$
> >
> > 于是即:
> >
> > 存在x_1，x_2属于$[a, b]$使得同时满足"$x_1 \geq x_2$"与"$f(x_1) < f(x_2)$"，这同f是严格单调递增的前提相矛盾。
> >
> > 于是反证假设不成立，f^{-1}只能是严格单调递增的。
>
> - f的反函数$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$是连续的:
>
> > 证明f^{-1}是连续的，即证明对任意的$y_0 \in [f(a), f(b)]$，都有:
> >
> > $$\lim_{y \to y_0; y \in [f(a), f(b)]} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$$

> 即对任意的$y_0 \in [f(a), f(b)]$与$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$使得任意$y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \cap [f(a), f(b)]$有$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \le \varepsilon$成立。
>
> 不妨先考虑y_0不是$f(a)$或$f(b)$的情况，令有$f^{-1}(y_0) = x_0$，$x_{low} = \max(x_0 - \varepsilon, a)$，$x_{up} = \min(x_0 + \varepsilon, b)$。然后我们令有：
>
> $$\delta := \min(|f(x_{low}) - y_0|, |f(x_{up}) - y_0|)$$
>
> 显然$\delta > 0$，此时对任意的$y \in [f(a), f(b)]$且满足$|y - y_0| \le \delta$讨论：
>
> 首先，由于f是连续的，从而对于y，总是存在$x \in [a, b]$使得$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$；由于$f^{-1}$是严格单调递增的，于是又有$f^{-1}(y_0 - \delta) \le x \le f^{-1}(y_0 + \delta)$，考虑到$\delta$的定义与$f^{-1}$是严格单调递增的，可进一步化为：
>
> $$f^{-1}(f(x_{low})) \le x \le f^{-1}(f(x_{up})) \implies x_0 - \varepsilon \le x \le x_0 + \varepsilon$$
>
> 于是即$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |x - x_0| \le \varepsilon$，从而对任意$y_0 \in (f(a), f(b))$，$f^{-1}$都是在$y_0$上连续的。
>
> 对y_0等于$f(a)$或$f(b)$的时候，上面的δ会变成0而不满足连续定义的需求，于是我们特意指定：
>
> $$\delta := \begin{cases} |f(x_{up}) - y_0| & \text{if } y_0 = f(a) \\ |f(x_{low}) - y_0| & \text{if } y_0 = f(b) \end{cases}$$
>
> 显然$\delta > 0$，此时对任意的$y \in [f(a), f(b)]$且满足$|y - y_0| \le \delta$讨论：
>
> - $y_0 = f(a)$：
>
>   > 首先必然有$y \ge f(a)$；然后由于f是连续的，根据介值定理存在$x \in [a, b]$使得$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$；考虑到$f^{-1}$是严格单调递增的，于是进一步有$x \ge a$成立，且有$x \le f^{-1}(y_0 + \delta) = f^{-1}(f(x_{up})) \le a + \varepsilon$。于是即：
>   >
>   > $$a \le x \le a + \varepsilon \xRightarrow{x_0 = f^{-1}(y_0) = a} |x - x_0| \le \varepsilon$$
>
> - $y_0 = f(b)$：
>
>   > 首先必然有$y \le f(b)$；然后由于f是连续的，根据介值定理存在$x \in [a, b]$使得$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$；考虑到$f^{-1}$是严格单调递增的，于是进一步有$x \le b$成立，且有$x \ge f^{-1}(y_0 - \delta) = f^{-1}(f(x_{low})) \ge b - \varepsilon$。于是即：
>   >
>   > $$b - \varepsilon \le x \le b \xRightarrow{x_0 = f^{-1}(y_0) = b} |x - x_0| \le \varepsilon$$
>
> 综上，对y_0等于$f(a)$或$f(b)$，我们依旧有对任意$y \in [f(a), f(b)]$且$|y - y_0| \le \delta$满足$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |x - x_0| \le \varepsilon$成立，于是$f^{-1}$在$f(a)$与$f(b)$处也是连续的。
>
> 综上，即f^{-1}是$[f(a), f(b)]$上的连续函数。

---

2. 如果去掉连续性的假设，那么命题还成立吗？

不成立，例如一个简单的例子$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$：

$$f(x) := \begin{cases} 1 + x & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ -1 + x & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

> 我们曾在9.6节的习题中讨论过这个函数。可以看到f显然是不连续且严格单调递增的，虽然f是一个双射但值域并非是$[-2,2]$，且f^{-1}显然并不是一个在$[-2,2]$上的双射（f^{-1}在$(0,1)$与$(-1,0)$上是没有定义的），同时f^{-1}也不是一个连续的函数。
>
> ---
>
> 3. 如果把严格单调性换成单调性，那么命题还成立吗？
>
> 不成立，例如一个简单的例子$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$:
>
> $$f(x):=0$$
>
> 显然有f是连续的与单调的（说单调递增或者递减都是可以的），但是f不是一个双射，不存在逆映射（不满足垂线测试）。
>
> ---
>
> 4. 如果把严格单调递增的函数替换为严格单调递减的函数，那么原命题需要如何修改？
>
> 原结论可以修改为：
>
> > 设$a<b$都是实数，并且设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是$[a,b]$上的既连续又严格单调递减的函数。则f是从$[a,b]$到$[f(a),f(b)]$的双射，并且它的反函数$f^{-1}:[f(a),f(b)]\to[a,b]$也是既连续又严格单调递减的。
>
> 可以稍微修改1中的证明证明这个结论，下面给出个人修改的版本：
>
> - 证明f是从$[a,b]$到$[f(a),f(b)]$的双射：
>
>   > 对任意的$x_1,x_2\in[a,b]$且$x_1\neq x_2$，不妨假设$x_1<x_2$，从而由于f是严格单调递减的函数，我们有：
>   >
>   > $$a\le x_1<x_2\le b\Longrightarrow f(a)\ge f(x_1)>f(x_2)\ge f(b)$$
>   >
>   > 于是即$f(x_1)\neq f(x_2)$，从而f是一个单射。
>   >
>   > 对任意的$y\in[f(a),f(b)]$，由于f是连续的，从而根据介值定理，对y必然存在$x\in[a,b]$满足$f(x)=y$，于是f是一个满射。
>   >
>   > 综上，于是$f:[a,b]\to[f(a),f(b)]$既是单射也是满射，即f是双射。
>
> - f的反函数$f^{-1}:[f(a),f(b)]\to[a,b]$是严格单调递减的：
>
>   > 根据题设，我们有对任意的$x_1,x_2\in[a,b]$且$x_1<x_2$，都有$f(x_1)>f(x_2)$。不妨使用反证法，我们假设f^{-1}不是严格单调递减的，于是存在一对$y_1,y_2\in[f(a),f(b)]$且$y_1<y_2$，使得$f^{-1}(y_1)\le f^{-1}(y_2)$。而根据介值定理，我们知道在$[a,b]$上存在实数$x_1$，$x_2$使得：
>   >
>   > $$f(x_i)=y_i\iff f^{-1}(y_i)=x_i\quad(i=1,2)$$
>   >
>   > 于是即：
>   >
>   > 存在x_1，x_2属于$[a,b]$使得同时满足“$x_1\le x_2$”与“$f(x_1)<f(x_2)$”，这同f是严格单调递减的前提相矛盾。
>   >
>   > 于是反证假设不成立，f^{-1}只能是严格单调递增的。
>
> - f的反函数$f^{-1}:[f(a),f(b)]\to[a,b]$是连续的：
>
>   > 证明f^{-1}是连续的，即证明对任意的$y_0\in[f(a),f(b)]$，都有：
>   >
>   > $$\lim_{y\to y_0;y\in[f(a),f(b)]}f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)$$

即对任意的$y_0 \in [f(a), f(b)]$与$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$使得任意$y \in [y_0-\delta, y_0+\delta] \cap [f(a), f(b)]$有$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \le \varepsilon$成立。

不妨先考虑y_0不是$f(a)$或$f(b)$的情况，令有$f^{-1}(y_0) = x_0$，$x_{low} = \max(x_0 - \varepsilon, a)$，$x_{up} = \min(x_0 + \varepsilon, b)$。然后我们令有：

$$\delta := \min(|f(x_{low}) - y_0|, |f(x_{up}) - y_0|)$$

显然$\delta > 0$，此时对任意的$y \in [f(a), f(b)]$且满足$|y - y_0| \le \delta$讨论：

首先，由于f是连续的，从而对于y，总是存在$x \in [a, b]$使得$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$；由于$f^{-1}$是严格单调递减的，于是又有$f^{-1}(y_0 - \delta) \ge x \ge f^{-1}(y_0 + \delta)$，考虑到$\delta$的定义与$f^{-1}$是严格单调递减的，可进一步化为：

$$f^{-1}(f(x_{low})) \le x \le f^{-1}(f(x_{up})) \Longrightarrow x_0 - \varepsilon \le x \le x_0 + \varepsilon$$

于是即$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |x - x_0| \le \varepsilon$，从而对任意$y_0 \in (f(a), f(b))$，$f^{-1}$都是在$y_0$上连续的。

对y_0等于$f(a)$或$f(b)$的时候，上面的δ会变成0而不满足连续定义的需求，于是我们特意指定：

$$\delta := \begin{cases} |f(x_{up}) - y_0| & \text{if } y_0 = f(a) \\ |f(x_{low}) - y_0| & \text{if } y_0 = f(b) \end{cases}$$

显然$\delta > 0$，此时对任意的$y \in [f(a), f(b)]$且满足$|y - y_0| \le \delta$讨论：

- $y_0 = f(a)$：

  > 首先必然有$y \le f(a)$；然后由于f是连续的，根据介值定理存在$x \in [a, b]$使得$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$；考虑到$f^{-1}$是严格单调递减的，于是进一步有$x \ge a$成立，且有$x \le f^{-1}(y_0 + \delta) = f^{-1}(f(x_{up})) \le a + \varepsilon$。于是即：
  >
  > $$a \le x \le a + \varepsilon \xRightarrow{x_0 = f^{-1}(y_0) = a} |x - x_0| \le \varepsilon$$

- $y_0 = f(b)$：

  > 首先必然有$y \ge f(b)$；然后由于f是连续的，根据介值定理存在$x \in [a, b]$使得$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$；考虑到$f^{-1}$是严格单调递减的，于是进一步有$x \le b$成立，且有$x \ge f^{-1}(y_0 - \delta) = f^{-1}(f(x_{low})) \ge b - \varepsilon$。于是即：
  >
  > $$b - \varepsilon \le x \le b \xRightarrow{x_0 = f^{-1}(y_0) = b} |x - x_0| \le \varepsilon$$

综上，对y_0等于$f(a)$或$f(b)$，我们依旧有对任意$y \in [f(a), f(b)]$且$|y - y_0| \le \delta$满足$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |x - x_0| \le \varepsilon$成立，于是$f^{-1}$在$f(a)$与$f(b)$处也是连续的。

综上，即f^{-1}是$[f(a), f(b)]$上的连续函数。

9.8.5 本题中我们给出这样一个函数的例子，它在每一个有理点都是间断的，但在每一个无理点都是连续的。因为有理数集是可数的，于是记有$\mathbb{Q}=\{\mathfrak{q}(0),\mathfrak{q}(1),...\}$，其中$\mathfrak{q}:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$是从$\mathbb{N}$到$\mathbb{Q}$的双射。现定义函数$g:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$为$g(\mathfrak{q}(n)):=2^{-n}$（即$g(q)=2^{-\mathfrak{q}^{-1}(q)}$），其中$n$是任意的自然数。于是$g$把$\mathfrak{q}(0)$映射到$1$，把$\mathfrak{q}(1)$映射到$1/2$，等等。由于$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}$是绝对收敛的，所以$\sum_{q\in\mathbb{Q}}g(q)$也是绝对收敛的。现在定义函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$如下：

$$f(r):=\sum_{q\in\mathbb{Q};q<r}g(q)$$

由于$\sum_{q\in\mathbb{Q}}g(q)$是绝对收敛的，因此对任意$r\in\mathbb{R}$，$f(r)$都是有意义的。根据此定义完成以下的习题：

(a)证明：f是严格单调递增的（提示：你会用到命题5.4.14）

> 考虑任意的$r_1,r_2\in\mathbb{R}$且$r_1<r_2$，于是根据命题8.2.6(c)我们可以将$f(r_2)$写为：
>
> $$\begin{aligned}f(r_2)=\sum_{q\in\mathbb{Q};q<r_2}g(q)&=\sum_{q\in\mathbb{Q};q<r_1}g(q)+\sum_{q\in\mathbb{Q};r_1\leq q<r_2}g(q)\\&=f(r_1)+\sum_{q\in\mathbb{Q};r_1\leq q<r_2}g(q)\end{aligned}$$
>
> 第一项即为$f(r_1)$；对第二项，首先由于$g(q)$始终是正数，因此第二项至少是大于等于0的。而根据命题5.4.14，至少存在一个有理数$q_0\in(r_1,r_2)$，从而有：
>
> $$\sum_{q\in\mathbb{Q};r_1\leq q<r_2}g(q)\geq g(q_0)>0$$
>
> 即$f(r_2)>f(r_1)$对任意的$r_1,r_2\in\mathbb{R}$且$r_1<r_2$成立，从而根据严格单调函数的定义，f是严格单调递增的。

(b)证明：对于任意的有理数q，f在q处都是间断的（提示：根据q是有理数可知存在自然数n使得$\mathfrak{q}(n)=q$，证明对所有的$x>q$都有$f(x)\geq f(q)+2^{-n}$）

> 要证明对于任意的有理数q，f在q处都是间断的，即证明存在一个$\varepsilon>0$使得对任意的$\delta>0$，都存在$x\in[q-\delta,q+\delta]$有$f(q)$与$f(x)$距离大于ε。
>
> 于是我们考虑任意实数$x>q$的函数值，根据命题8.2.6(c)，我们可以变换$f(x)$有：
>
> $$\begin{aligned}f(x)=\sum_{i\in\mathbb{Q};i<x}g(i)&=\sum_{i\in\mathbb{Q};i<q}g(i)+\sum_{i\in\mathbb{Q};q\leq i<x}g(i)\\&=f(q)+\sum_{i\in\mathbb{Q};q\leq i<x}g(i)\end{aligned}$$
>
> 对上式第二项，由于$g(q)$始终是正数，因此第二项至少是大于等于0的；并且由于$q\in\mathbb{Q}$且$q\in[q,x)$，于是有：
>
> $$\sum_{i\in\mathbb{Q};q\leq i<x}g(i)\geq g(q)=2^{-n}\quad(\text{其中}q=\mathfrak{q}(n))$$
>
> 此时我们考虑令$\varepsilon:=2^{-n-1}$，于是对任意的$\delta>0$，任取一个x满足$q<x<q+\delta$，都有：
>
> $$f(x)\geq f(q)+2^{-n}>f(q)+2^{-n-1}\implies f(x)\notin[f(q)-\varepsilon,f(q)+\varepsilon]$$
>
> 于是得证对于任意的有理数q，f在q处都是间断的。

(c)证明：对于任意的无理数i，f在i处都是连续的（**提示：首先阐述函数**

$$f_n(r) := \sum_{q\in\mathbb{Q};q<r,g(r)\geq 2^{-n}} g(q)$$

在i处是连续的，并且$|f(x)-f_n(x)|\leq 2^{-n}$）

> 本文中不采用提示的方法，直接使用命题9.4.7的定义证明。
>
> 要证明对于任意的无理数i，f在i处都是连续的，即证明对任意的无理数i与任意的实数$\varepsilon > 0$，都存在实数$\delta > 0$使得对任意实数r满足$|r-i|\leq\delta$都有$|f(r)-f(i)|\leq\varepsilon$成立。
>
> 根据命题6.5.2，我们知道$\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$，从而对给定的$\varepsilon$，都存在整数$N\in\mathbb{N}$使得对任意$n\geq N$都有$|2^{-n}-0|\leq\varepsilon$，也即$2^{-n}\leq\varepsilon$成立。
>
> 于是取集合$A := \{q\in\mathbb{Q}: q = \mathrm{q}(n)且n\leq N\}$，显然$A$是一个有限非空集，然后我们给出下面这样的$\delta$选取方式：
>
> 额外令有集合$A_{left} := \{q\in A: q<i\}$与$A_{right} := \{q\in A: q>i\}$，显然有$A_{left}\cap A_{right} = \varnothing$与$A_{left}\cup A_{right} = A$同时成立，因此$A_{left}$与$A_{right}$至少有一个是非空的，于是分情况给出$\delta$的选取方式：
>
> $$2\delta := \begin{cases} \min A_{right} - i & \text{if } A_{left} = \varnothing \\ i - \max A_{left} & \text{if } A_{right} = \varnothing \\ \min(\min A_{right} - i, i - \max A_{left}) & \text{else} \end{cases}$$
>
> 其中min与max表示寻找集合的最大值，由于是有限集因此这样的最大值总是存在的。
>
> 不难验证该选取方式下δ始终满足$\delta > 0$的前提，对任意实数$r\in[i-\delta, i+\delta]$讨论：
>
> 首先我们考虑r是有理数，根据定义分类讨论：
>
> - $A_{left} = \varnothing$：
>
>   > 由A_{left}定义，我们知道若$r<i$都应该有$\mathrm{q}^{-1}(r)\geq N+1$；此外对$r>i$由于$r\leq i+\delta<\min A_{right}$，于是$r\notin A_{right}$，从而根据$A_{right}$定义也应当有$\mathrm{q}^{-1}(r)\geq N+1$。
>
> - $A_{right} = \varnothing$：
>
>   > 由A_{right}定义，我们知道若$r>i$都应该有$\mathrm{q}^{-1}(r)\geq N+1$；此外对$r<i$由于$r\geq i-\delta>\max A_{left}$，于是$r\notin A_{left}$，从而根据$A_{left}$定义也应当有$\mathrm{q}^{-1}(r)\geq N+1$。
>
> - 两者均非空时：
>
>   > 若$r>i$，则由$r\leq i+\delta<\min A_{right}$有$r\notin A_{right}$，从而根据$A_{right}$定义应有$\mathrm{q}^{-1}(r)\geq N+1$;
>   >
>   > 若$r<i$，则由$r\geq i-\delta<\max A_{right}$有$r\notin A_{left}$，从而根据$A_{left}$定义应有$\mathrm{q}^{-1}(r)\geq N+1$;
>
> 根据上面的讨论，于是我们知道对任意有理数$q\in[i-\delta, i+\delta]$，都有$\mathrm{q}^{-1}(q)\geq N+1 \iff g(q)\leq 2^{-(N+1)}$。
>
> 然后考虑回r是实数，我们对$f(r)$的值进行讨论：
>
> 根据命题8.2.6(c)，我们可以分情况将$f(r)$的值化为：

$$f(r)=\sum_{q\in\mathbb{Q};q<r}g(q)=\begin{cases}\sum\limits_{q\in\mathbb{Q};q<i}g(q)+\sum\limits_{q\in\mathbb{Q};i\le q<r}g(q) & \text{if } r\ge i\\ \sum\limits_{q\in\mathbb{Q};q<i}g(q)-\sum\limits_{q\in\mathbb{Q};r\le q<r}g(q) & \text{if } r<i\end{cases}$$

变换后的第一部分也就是$f(i)$；对第二部分，由于我们已知了对任意有理数$q\in[i-\delta,i+\delta]$都有$g(q)\le 2^{-(N+1)}$，于是可以化有：

$$\begin{aligned}\text{part 2}&\le\sum_{q\in\mathbb{Q};q\in[i-\delta,i+\delta]}g(q)\\&\le\sum_{q\in\mathbb{Q};g(q)\le 2^{N+1}}g(q)\\&\le\sum_{n=N+1}^{\infty}2^{-n}\\&=2^{-N}\\&\le\varepsilon\end{aligned}$$

其中part 2就是第二部分（注意不包括其符号），并且由于g是非负的，因此有$0<\text{part 2}\le\varepsilon$；此外由于$f$是严格单调递增的，因此对$r\ge i$有$f(r)\ge f(i)$，对$r<i$有$f(r)<f(i)$。

从而综合可得$f(i)-\varepsilon\le f(r)\le f(i)+\varepsilon \iff |f(r)-f(i)|\le\varepsilon$对任意$r\in[i-\delta,i+\delta]\iff|r-i|\le\delta$都成立。这表明$f$在任意无理点$i$处都是连续的。

本节相关跳转

[实分析 5.4 对实数排序]

[实分析 9.4 连续函数]

[实分析 9.6 最大值原理]

[实分析 9.7 介值定理]