3.6 集合的基数

定义

1. （无序号 集合的基数）对于任意一个一个元素个数有限的集合X，称其中元素的数目n为集合X的**基数**，并记为$\#(X) = n$。
2. （3.6.1 基数的相等）称两个集合X与Y有相同的基数，当且仅当存在一个$X \to Y$的双射$f : X \to Y$。

   （注：事实上这个定义无论X与Y是有限的还是无限的都是有效的，尽管这个时候我们尚且没有无限的定义，至于无限集相关的内容，有兴趣可以移步到第8章学习）
3. （3.6.5 基数定义）设n是一个自然数，称集合X的**基数**为n，当且仅当X与集合$\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$拥有相同的基数。另一种说法是称$X$中有$n$个元素，当且仅当$X$的基数为$n$。
4. （3.6.10 有限集）一个集合是**有限**的，当且仅当它的基数是某个自然数n，否则称这个集合为**无限集**。

命题

（设X，Y，Z为集合）

1. （3.6.4 自反性？）X与X有相同的基数。
2. （3.6.4 对称性？）如果X与Y有相同的基数，则Y与X有相同的基数
3. （3.6.4 可传递性？）如果X与Y有相同的基数，且Y与Z有也有相同的基数，则认为X与Z也有相同的基数。
4. （3.6.8 基数的唯一性）设集合X的基数为n，则X不可能还有其它的基数。换言之，对任意$m \neq n$，m不可能为X的基数。
5. （3.6.9）假设$n \geq 1$，且X的基数为n，那么X是非空的，而且若有x是X中任意一个元素，则有$X \backslash \{x\}$的基数为$n-1$。
6. （3.6.14 基数运算）集合的基数满足下述命题（设X，Y是有限集）：

   > - 设x是一个对象且x不是X中的元素，则$X \cup \{x\}$是有限的，且$\#(X \cup \{x\}) = \#(X) + 1$。
   > - $X \cup Y$是有限的，且$\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$，特别地，当$X \cap Y = \varnothing$时，有$\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$。
   > - 假定$f : X \to Y$是一个函数，那么$f(X)$是一个有限集且满足$\#(f(X)) \leq \#(X)$，特别地，当f是一个单射时，则有$\#(f(X)) = \#(X)$。
   > - 假定Y是X的子集，则Y是有限的，且$\#(Y) \leq \#(X)$，若Y是X的真子集，则有$\#(Y) < \#(X)$。
   > - 笛卡尔积$X \times Y$是有限的，且$\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y)$。
   > - 集合Y^X是有限的，且$\#(Y^X) = \#(Y)^{\#(X)}$。

7. （习题3.6.10 抽屉原理）设A_1，$\ldots$，A_n都是有限集，且有$\#\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) > n$，则存在$i \in \{1, \cdots, n\}$使得$\#(A_i) \geq 2$。

课后习题

3.6.1 证明命题3.6.4

> 分别证明：
>
> 自反性：
>
> X到X间有恒等映射$\iota_{X\to X}$为双射，于是成立结论。
>
> 对称性：
>
> X与Y有相同的基数，则存在$f:X\to Y$为双射，相应的$f^{-1}:Y\to X$也是一个双射，于是Y与X有共同的基数。
>
> 可传递性：
>
> X与Y有相同的基数，且Y与Z有也有相同的基数，于是存在两个函数$f:X\to Y$与$f:Y\to Z$为双射，根据习题3.3.7结论，则有$g\circ f:X\to Z$也是一个双射，于是X与Z有相同的基数。

3.6.2 证明：一个集合的基数为0，当且仅当它是空集

> 假定该集合为X，基数为0，于是存在双射$f:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq 0\}\to X$。又有$\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq 0\}=\varnothing$，于是即空函数$f:\varnothing\to X$为双射，根据习题3.3.3的讨论，可以得到空函数$f:\varnothing\to X$为双射，当且仅当$X=\varnothing$，于是结论得证。

3.6.3 设n是一个自然数，且$f:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq n\}\to\mathbb{N}$是一个函数，证明：存在一个自然数$M$使得对任意$1\leq i\leq n$，$f(i)\leq M$始终成立（提示：对$n$进行归纳，你可能还需要用到一个引理5.1.14）。由此我们有对任意自然数集$\mathbb{N}$的有限子集都是有界的。

> 对自然数n做归纳：
>
> 当$n=0$时：
>
> f是空函数，结论显然是成立的，此时取$M=0$即可。
>
> 现假设对$n=m$时成立结论，对$n=m+1$时：
>
> 将函数f变为如下形式：
>
> $$\begin{cases}f(x)=g(x) & 1\leq x\leq m\\ f(m+1)=C\end{cases}$$
>
> 其中C为某个自然数，$g:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq m\}\to\mathbb{N}$是一个函数，于是由归纳假设，有存在自然数$M$使得对任意$1\leq i\leq m$，$f(i)=g(i)\leq M$，于是对任意$1\leq i\leq m+1$，若有$M\leq C$，此时存在$f(i)\leq M\leq C$；反之，若有$M>C$，则$f(i)\leq M$依旧恒成立。此时我们取$M'=\max(M,C)$，于是对任意$1\leq i\leq m+1$，$f(i)\leq M'$恒成立，于是假设得证。
>
> 综上，结论得证。

3.6.4 证明命题3.6.14

> 1. 设x是一个对象且x不是X中的元素，则$X\cup\{x\}$是有限的，且$\#(X\cup\{x\})=\#(X)+1$。
>
> 假设存在双射$f:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq\#(X)\}\to X$，于是我们定义下面一个函数$g$，它的映射关系有：
>
> $$g(i)=\begin{cases}f(i) & 1\leq i\leq\#(X)\\ x & i=\#(X)+1\end{cases}$$

且g定义域为$\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le\#(X)+1\}$，值域为$X\cup\{x\}$。于是根据基数定义，可以得到$\#(X\cup\{x\})=\#(X)+1$。

---

2. $X\cup Y$是有限的，且$\#(X\cup Y)\le\#(X)+\#(Y)$，特别地，当$X\cap Y=\varnothing$时，有$\#(X\cup Y)=\#(X)+\#(Y)$。

不妨令$\#(X)=n$，$\#(Y)=m$，于是存在两个双射$f:X\to\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\}$与$g:Y\to\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le m\}$。于是我们取下面一个函数$h:X\cup Y\to\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n+m\}$：

$$h(i)=\begin{cases}f(i) & i\in X\\ g(i)+n & i\in Y\end{cases}$$

于是当$Y\cap X=\varnothing$，于是对任意i_1，$i_2\in X\cup Y$且$i_1\neq i_2$，可以分情况讨论得到$h(i_1)\neq h(i_2)$始终成立，于是得知h是单射，h同时又显然是满射，于是h是双射，进而得到$\#(X\cup Y)=\#(X)+\#(Y)$成立。

若存在$Y\cap X\neq\varnothing$，于是此时存在$a>n$与$1\le b\le n$使得$h(y)=a=b\ (y\in X\cup Y)$，所以此时h的映射关系使它不能成为一个函数，考虑修改h的定义，$h:X\cup Y\to\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le k\}$，其映射关系有：

$$h(i)=\begin{cases}f(i) & i\in X\\ g'(i)+n & i\in Y\cap X\end{cases}$$

其中$g':Y\cap X\to\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le m'\}$为双射，此时可以得到$h$是双射，且$k\le m+n$，进而$\#(X\cup Y)\le\#(X)+\#(Y)$成立。

---

3. 假定$f:X\to Y$是一个函数，那么$f(X)$是一个有限集且满足$\#(f(X))\le\#(X)$，特别地，当f是一个单射时，则有$\#(f(X))=\#(X)$。

令$\#(X)=n$，于是存在某个双射$g:\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\}\to X$，令函数$f':X\to f(X)$与$f$有完全相同的映射关系，根据象的定义于是有$f'$是满射。取函数$f'\circ g$，由习题3.3.2结论有$f'\circ g$是满射。当$f$是单射时，由于$f'$与$f$有相同的映射关系，于是$f'$也是单射，进而$f'\circ g:\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\}\to f(X)$是一个双射，于是根据基数定义有$\#(f(X))=n=\#(X)$。

当f不是单射时，此时$f'\circ g:\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\}\to f(X)$为满射。存在至少一对$i_1$，$i_2\le n(i_1\neq i_2)$使得$f'\circ g(i_1)=f'\circ g(i_2)$，考虑对所有这样的对做以下处理：取对中最小值$i_n$使得$h(i_n)$等于对中所有元素的函数值$f'\circ g(i_n)$，然后对所有对中其他元素$i'$，对所有$i'\le j\le n$执行操作$h(j-1)=f'\circ g(j)$。最终可以得到函数$h:\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le k\}\to f(X)$为双射且$k<n$，于是有$\#(f(x))\le\#(X)$。

---

4. 假定Y是X的子集，则Y是有限的，且$\#(Y)\le\#(X)$，若Y是X的真子集，则有$\#(Y)<\#(X)$。

我们有$X=Y\cup(X\backslash Y)$，于是根据2中结论，有若$Y=X$，于是$X\backslash Y=\varnothing$，$\#(X)=\#(Y)+\#(X\backslash Y)=\#(Y)+0$，若$Y$是$X$的真子集，于是$X\backslash Y\neq\varnothing$，进而$\#(X\backslash Y)\neq 0$，$\#(X)\ge\#(Y)$。于是结论得证。

---

5. 笛卡尔积$X\times Y$是有限的，且$\#(X\times Y)=\#(X)\times\#(Y)$。

> 我们有$\#(X)=n$，$\#(Y)=m$，且存在两个双射$f:X\to\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\}$与$g:Y\to\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le m\}$。然后定义函数$h:\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\times m\}\to X\times Y$，其映射关系定义如下：
>
> $$h(i)=(f(a),g(b))$$
>
> 其中有$i=a\times m+b$，根据欧几里得算法可以得到对任意的$1\le i\le n\times m$这样的一对(a,b)是唯一存在的，进而根据f，g的双射特性与有序对相等的特性得到h的单射性质。对任意$X\times Y$中的元素，由于始终有$1\le a\le n$与$1\le b\le m$，$(a\times m+b)$也可以被$\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\times m\}$中的某个$i$映射。于是可以得到$h$是双射，即$\#(X\times Y)=n\times m$。
>
> ---
>
> 6. 集合Y^X是有限的，且$\#(Y^X)=\#(Y)^{\#(X)}$。
>
> 令$\#(X)=n$，$\#(Y)=m$，并且我们假设存在两个双射$f:\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\}\to X$与$g:\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le m\}\to Y$。集合$Y^X$包含了全部以$X$为定义域，$Y$为值域的函数$f$，于是我们首先考虑这样一个函数$h:\{(z_i)_{1\le i\le n}\in\mathbb{N}^n:\forall 1\le i\le n,z_i\in\mathbb{N}且1\le z_i\le m\}\to Y^X$，它存在这样的映射关系：
>
> $$h((z_i)_{1\le i\le n})=h':X\to Y,其中有对任意i\in[1,n],h'\circ f(i)=g(z_i)$$
>
> 对任意$h'\in Y^X$，对每一个$h'(x)=y$（$x\in X$，$y\in Y$），总能找到一个i与z_i使得$f(i)=x$与$g(z_i)=y$，进而可以找到与之对应的有序n元组$(z_i)_{1\le i\le n}$。同时由于f与g是双射，这使得不同的有序n元组必然由h映射到不同的函数h'上，于是可以得到h是双射。
>
> 然后考虑令一个函数$l:\{(z_i)_{1\le i\le n}\in\mathbb{N}^n:\forall 1\le i\le n,z_i\in\mathbb{N}且1\le z_i\le m\}\to\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le m^n\}$，它具有下面的映射关系：
>
> $$l((z_i)_{1\le i\le n})=\sum_{i=1}^{n}z_im^{i-1}$$
>
> 对于l，它的满射与单射性质是非常容易证明的（重复性太高不赘述），于是此时取双射$h\circ l^{-1}$，进而有$\#(Y^X)=\#(Y)^{\#(X)}$成立。

3.6.5 设A与B是两个集合，试着构造一个双射证明$A\times B$与$B\times A$有相同的基数，然后利用命题3.6.14，尝试给出引理2.3.3的另一种证明方法

> 考虑下面一个双射$f:A\times B\to B\times A$:
>
> $$f((a,b))=(b,a)$$
>
> 对f，任意一个(b,a)（$b\in B$，$a\in A$）都存在一个$(a,b)\in A\times B$使得它被映射，对任意不同的(a,b)与(a',b')，(b,a)与(b',a')也是不同的。于是验证得到f是双射。
>
> ---
>
> 考虑引理2.3.3的另一种证明：
>
> 对任意两个自然数m，n，我们知道它们分别是集合$M=\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le m\}$与集合$N=\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\}$的基数。于是有$m\times n=\#(M\times N)=\#(N\times M)=n\times m$。
>
> 证毕。

3.6.6 设A，B，C是集合，通过构造一个明确的双射来证明：集合$(A^B)^C$与$A^{B\times C}$有相同的基数，由此推导出$(a^b)^c = a^{bc}$对任意自然数a，b，c均成立。利用类似的方法推导出$a^b \times a^c = a^{b+c}$对任意自然数a，b，c均成立

> 我们定义这样一个函数$h : (A^B)^C \to A^{B\times C}$，它有下述的映射关系：
>
> $$h(f : C \to A^B) = g : B \times C \to A$$
>
> 其中对每一个$c_0 \in C$，若$b \in B$，有$g((b, c_0)) = f(c)(b)$（看着有点奇怪，但是f本身会映射到函数的集合A^B，所以这里$f(c)$应该是某个新的函数$l : B \to A$，也就是$g((b, c_0)) = l(b)$））。
>
> 对于函数h，首先要明确集合$(A^B)^C$包含了全体可能的函数$f : C \to A^B$，于是对于任意的$g \in A^{B\times C}$，对每一个$c_0 \in C$必然存在一个函数f使得对任意的$b \in B$，$f(b) = g((b, c_0)) \in A$，进而这个函数定义域为B，值域为A，于是它属于$(A^B)^C$，所以g能通过h被$(A^B)^C$中的元素映射；反过来，对任意不同f_1，$f_2 \in (A^B)^C$，根据函数相等的定义，$h(f_1)$必然不等于$h(f_2)$（存在某个c_0使得$f_1(c_0)(= l_1) \neq f_2(c_0)(= l_2)$，于是存在$b_0 \in B$使得$l_1(b_0) \neq l_2(b_0)$，进而此时$h(f_1)((b_0, c_0)) \neq h(f_2)((b_0, c_0))$。）。于是综上$h$同时是满射与单射，进而$h$是双射，集合$(A^B)^C$与$A^{B\times C}$有相同的基数。
>
> 对于任意自然数a，b，c，我们有它们分别是三个集合$\{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le a\}$，$\{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le b\}$，$\{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le c\}$的基数，于是分别令这三个集合为$A$，$B$，$C$。根据前面的结论应当有$\#((A^B)^C) = \#(A^{B\times C})$，即$(a^b)^c = a^{bc}$。
>
> ---
>
> 先证明集合$A^B \times A^C$与$A^{B\cup C}$在$B \cap C = \varnothing$的条件下有相同的基数。构造函数$h : A^B \times A^C \to A^{B\cup C}$，其映射关系定义如下：
>
> $$h((f : B \to A, g : C \to A)) = l : B \cup C \to A$$
>
> 其中l有这样的定义：
>
> $$l(i) = \begin{cases} f(i) & i \in B \\ g(i) & i \in C \end{cases}$$
>
> 对任意的$l \in A^{B\cup C}$，有我们取函数$f : B \to A$与$g : C \to A$与l有相同的映射关系，由于$A^B \times A^C$中包含了所有的这样的(f, g)的组合。于是l必然能被$A^B \times A^C$中的元素通过h映射；此外，对任意不同的(f, g)与$(f', g') \in A^B \times A^C$，根据函数相等定义与$h$的定义，显然有$h((f, g)) \neq h((f', g'))$（话很长而且很不必要，随便写写就能知道了）。于是可以得到h为双射。
>
> 对于任意自然数a，b，c，我们有它们分别是三个集合$\{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le a\}$，$\{i \in \mathbb{N} : c + 1 \le i \le b + c\}$，$\{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le c\}$的基数，于是分别令这三个集合为$A$，$B$，$C$（显然有$B \cap C = \varnothing$）。于是根据上面的结论，有$\#(A^B \times A^C) = \#(A^{B\cup A})$，即$a^b \times a^c = a^{b+c}$对任意自然数$a$，$b$，$c$均成立。

3.6.7 设A与B是集合，如果存在一个从A到B的单射$f : A \to B$，则称集合A的基数小于或等于集合B的基数。证明集合A的基数小于或等于集合B的基数，当且仅当$\#(A) \le \#(B)$

> f是单射，于是有双射$f : A \to f(A)$（这个结论好像在以前的章节证明过，过程很好说明但是写起来很长，这里跳过）与集合$B - f(A)$，其中包含了所有B中不被f映射到的元素（可能为空）。于是令有$\#(A) = n$，$\#(B - f(A)) = m$，双射$a : \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n\} \to A$，$b' : \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le m\} \to (B - f(A))$。则定义函数$b : \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n + m\} \to B$有：
>
> $$b(i) = \begin{cases} a(i) & 1 \le i \le n \\ b'(i) & n + 1 \le i \le n + m \end{cases}$$

> 由于$B-f(A)$的基数大于等于0，于是必然有$\#(A)=n\leq n+m=\#(B)$，进而题目结论成立。

3.6.8 设A与B是集合，且存在一个从A到B的单射$f:A\to B$（也即集合A的基数小于或等于集合B的基数），证明：存在一个从B到A的满射$g:B\to A$（该命题的逆命题证明需要用到选择公理，详情参考习题8.4.3）

> 根据单个选择引理，我们可以从A中获得一个元素x。
>
> 于是给出g的映射关系如下：
>
> $$g(b)=\begin{cases}a & b\in f(A)\text{且}f(a)=b\\ x & b\in B\text{且}b\notin f(A)\end{cases}$$
>
> 由于f是一个单射，于是对任意$a_0\in A$，总是存在$f(a_0)\in B$使得$g(f(a_0))=a_0$（f要满足垂线测试）；同时，由于f是一个单射，于是对于任意a_1，$a_2\in A$且$a_1\neq a_2$，必然有$f(a_1)\neq f(a_2)$，这意味着对任意两个不同的a_1，$a_2\in A$，它们不可能由同一个b通过g映射得到，因此g是满足垂线测试的。
>
> 综上，g即要求的满射。

3.6.9 设A与B是两个有限集，证明$A\cup B$与$A\cap B$也是有限集，且$\#(A)+\#(B)=\#(A\cup B)+\#(A\cap B)$始终成立

> 根据习题3.6.4的结论，应当有$\#(A)+\#(B-A)=\#(A\cup B)$（$A\cap(B-A)=\varnothing$），又有$(B-A)\cap(B\cap A)=\varnothing$，于是$\#(B-A)+\#(B\cap A)=\#(B)$。综合两式可以得到：
>
> $$\begin{aligned}\#(A)+\#(B)&=(\#(A)+\#(B-A))+\#(B)-\#(B-A)\\&=\#(A\cup B)+\#(B\cap A)\end{aligned}$$
>
> 于是结论得证。

3.6.10 设A_1，...，A_n是有限集，并且有$\#(\bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}A_i)>n$，证明：存在$i\in\{1,\ldots,n\}$使得$\#(A_i)\geq 2$（这也被称为抽屉原理）

> 假设对任意$i\in\{1,\ldots,n\}$都有$\#(A_i)\leq 1$，于是我们有：
>
> $$\#(\bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}A_i)\leq\#(A_1)+\#(A_2)+\ldots+\#(A_n)=n$$
>
> 等号仅在对任意j，$i\in\{1,\ldots,n\}$，都有$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$时成立，这同$\#(\bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}A_i)>n$的假设矛盾，于是必然存在$i\in\{1,\ldots,n\}$使得$\#(A_i)\geq 2$，结论得证。

本节相关跳转

[实分析 2.3 乘法]

[实分析 5.1 柯西序列]

[实分析 8.1 可数性]

[实分析 8.4 选择公理]