

3.6 集合的基数

定义

1. (无序号 集合的基数) 对于任意一个元素个数有限的集合 X , 称其中元素的数目 n 为集合 X 的**基数**, 并记为 $\#(X) = n$ 。
2. (3.6.1 基数的相等) 称两个集合 X 与 Y 有相同的基数, 当且仅当存在一个 $X \rightarrow Y$ 的双射 $f: X \rightarrow Y$ 。
(注: 事实上这个定义无论 X 与 Y 是有限的还是无限的都是有效的, 尽管这个时候我们尚且没有无限的定义, 至于无限集相关的内容, 有兴趣可以移步到第8章学习)
3. (3.6.5 基数定义) 设 n 是一个自然数, 称集合 X 的**基数**为 n , 当且仅当 X 与集合 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 拥有相同的基数。另一种说法是称 X 中有 n 个元素, 当且仅当 X 的基数为 n 。
4. (3.6.10 有限集) 一个集合是**有限的**, 当且仅当它的基数是某个自然数 n , 否则称这个集合为**无限集**。

命题

(设 X, Y, Z 为集合)

1. (3.6.4 自反性?) X 与 X 有相同的基数。
2. (3.6.4 对称性?) 如果 X 与 Y 有相同的基数, 则 Y 与 X 有相同的基数
3. (3.6.4 可传递性?) 如果 X 与 Y 有相同的基数, 且 Y 与 Z 有也有相同的基数, 则认为 X 与 Z 也有相同的基数。
4. (3.6.8 基数的唯一性) 设集合 X 的基数为 n , 则 X 不可能还有其它的基数。换言之, 对任意 $m \neq n$, m 不可能为 X 的基数。
5. (3.6.9) 假设 $n \geq 1$, 且 X 的基数为 n , 那么 X 是非空的, 而且若有 x 是 X 中任意一个元素, 则有 $X \setminus \{x\}$ 的基数为 $n - 1$ 。
6. (3.6.14 基数运算) 集合的基数满足下述命题 (设 X, Y 是有限集) :
 - 设 x 是一个对象且 x 不是 X 中的元素, 则 $X \cup \{x\}$ 是有限的, 且 $\#(X \cup \{x\}) = \#(X) + 1$ 。
 - $X \cup Y$ 是有限的, 且 $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$, 特别地, 当 $X \cap Y = \emptyset$ 时, 有 $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$ 。
 - 假定 $f: X \rightarrow Y$ 是一个函数, 那么 $f(X)$ 是一个有限集且满足 $\#(f(X)) \leq \#(X)$, 特别地, 当 f 是一个单射时, 则有 $\#(f(X)) = \#(X)$ 。
 - 假定 Y 是 X 的子集, 则 Y 是有限的, 且 $\#(Y) \leq \#(X)$, 若 Y 是 X 的真子集, 则有 $\#(Y) < \#(X)$ 。
 - 笛卡尔积 $X \times Y$ 是有限的, 且 $\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y)$ 。
 - 集合 Y^X 是有限的, 且 $\#(Y^X) = \#(Y)^{\#(X)}$ 。
7. (习题3.6.10 抽屉原理) 设 A_1, \dots, A_n 都是有限集, 且有 $\#(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i) > n$, 则存在 $i \in \{1, \dots, n\}$ 使得 $\#(A_i) \geq 2$ 。

课后习题

3.6.1 证明命题3.6.4

分别证明：

自反性：

X 到 X 间有恒等映射 $\iota_{X \rightarrow X}$ 为双射，于是成立结论。

对称性：

X 与 Y 有相同的基数，则存在 $f: X \rightarrow Y$ 为双射，相应的 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 也是一个双射，于是 Y 与 X 有共同的基数。

可传递性：

X 与 Y 有相同的基数，且 Y 与 Z 也有相同的基数，于是存在两个函数 $f: X \rightarrow Y$ 与 $g: Y \rightarrow Z$ 为双射，根据习题3.3.7结论，则有 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 也是一个双射，于是 X 与 Z 有相同的基数。

3.6.2 证明：一个集合的基数为0，当且仅当它是空集

假定该集合为 X ，基数为0，于是存在双射 $f: \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq 0\} \rightarrow X$ 。又有 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq 0\} = \emptyset$ ，于是即空函数 $f: \emptyset \rightarrow X$ 为双射，根据习题3.3.3的讨论，可以得到空函数 $f: \emptyset \rightarrow X$ 为双射，当且仅当 $X = \emptyset$ ，于是结论得证。

3.6.3 设 n 是一个自然数，且 $f: \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\} \rightarrow \mathbb{N}$ 是一个函数，证明：存在一个自然数 M 使得对任意 $1 \leq i \leq n$ ， $f(i) \leq M$ 始终成立 (提示：对 n 进行归纳，你可能还需要用到一个引理5.1.14)。由此我们有对任意自然数集 \mathbb{N} 的有限子集都是有界的。

对自然数 n 做归纳：

当 $n = 0$ 时：

f 是空函数，结论显然是成立的。

现假设对 $n = m$ 时成立结论，对 $n = m + 1$ 时：

将函数 f 变为如下形式：

$$\begin{cases} f(x) = g(x) & 1 \leq x \leq m \\ f(m+1) = C \end{cases}$$

其中 C 为某个自然数， $g: \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq m\} \rightarrow \mathbb{N}$ 是一个函数，于是由归纳假设，有存在自然数 M 使得对任意 $1 \leq i \leq m$ ， $f(i) = g(i) \leq M$ ，于是对任意 $1 \leq i \leq m + 1$ ，若有 $M \leq C$ ，此时存在 $f(i) \leq M \leq C$ ；反之，若有 $M > C$ ，则 $f(i) \leq M$ 依旧恒成立。此时我们取 $M' = \max(M, C)$ ，于是对任意 $1 \leq i \leq m + 1$ ， $f(i) \leq M'$ 恒成立，于是假设得证。

综上，结论得证。

3.6.4 证明命题3.6.14

1. 设 x 是一个对象且 x 不是 X 中的元素，则 $X \cup \{x\}$ 是有限的，且 $\#(X \cup \{x\}) = \#(X) + 1$ 。

假设存在双射 $f: \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq \#(X)\} \rightarrow X$ ，于是我们定义下面一个函数 g ，它的映射关系有：

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & 1 \leq i \leq \#(X) \\ x & i = \#(X) + 1 \end{cases}$$

且 g 定义域为 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq \#(X) + 1\}$, 值域为 $X \cup \{x\}$ 。于是根据基数定义, 可以得到 $\#(X \cup \{x\}) = \#(X) + 1$ 。

2. $X \cup Y$ 是有限的, 且 $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$, 特别地, 当 $X \cap Y = \emptyset$ 时, 有 $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$ 。

不妨令 $\#(X) = n$, $\#(Y) = m$, 于是存在两个双射 $f: X \rightarrow \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 与 $g: Y \rightarrow \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq m\}$ 。于是我们取下面一个函数 $h: X \cup Y \rightarrow \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n + m\}$:

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & i \in X \\ g(i) + n & i \in Y \end{cases}$$

于是当 $Y \cap X = \emptyset$, 于是对任意 $i_1, i_2 \in X \cup Y$ 且 $i_1 \neq i_2$, 可以分情况讨论得到 $h(i_1) \neq h(i_2)$ 始终成立, 于是得知 h 是单射, h 同时又显然是满射, 于是 h 是双射, 进而得到 $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$ 成立。

若存在 $Y \cap X \neq \emptyset$, 于是此时存在 $a > n$ 与 $1 \leq b \leq n$ 使得 $h(y) = a = b$ ($y \in X \cup Y$), 所以此时 h 的映射关系使它不能成为一个函数, 考虑修改 h 的定义,
 $h: X \cup Y \rightarrow \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq k\}$, 其映射关系有:

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & i \in X \\ g'(i) + n & i \in Y \cap X \end{cases}$$

其中 $g': Y \cap X \rightarrow \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq m'\}$ 为双射, 此时可以得到 h 是双射, 且 $k \leq m + n$, 进而 $\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$ 成立。

3. 假定 $f: X \rightarrow Y$ 是一个函数, 那么 $f(X)$ 是一个有限集且满足 $\#(f(X)) \leq \#(X)$, 特别地, 当 f 是一个单射时, 则有 $\#(f(X)) = \#(X)$ 。

令 $\#(X) = n$, 于是存在某个双射 $g: \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\} \rightarrow X$, 令函数 $f': X \rightarrow f(X)$ 与 f 有完全相同的映射关系, 根据象的定义于是有 f' 是满射。取函数 $f' \circ g$, 由习题3.3.2结论有 $f' \circ g$ 是满射。当 f 是单射时, 由于 f' 与 f 有相同的映射关系, 于是 f' 也是单射, 进而 $f' \circ g: \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\} \rightarrow f(X)$ 是一个双射, 于是根据基数定义有 $\#(f(X)) = n = \#(X)$ 。

当 f 不是单射时, 此时 $f' \circ g: \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\} \rightarrow f(X)$ 为满射。存在至少一对 $i_1, i_2 \leq n$ ($i_1 \neq i_2$)使得 $f' \circ g(i_1) = f' \circ g(i_2)$, 考虑对所有这样的对做以下处理: 取对中最小值 i_n 使得 $h(i_n)$ 等于对中最小元素的函数值 $f' \circ g(i_n)$, 然后对所有对中其他元素 i' , 对所有 $i' \leq j \leq n$ 执行操作 $h(j-1) = f' \circ g(j)$ 。最终可以得到函数 $h: \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq k\} \rightarrow f(X)$ 为双射且 $k < n$, 于是有 $\#(f(x)) \leq \#(X)$ 。

4. 假定 Y 是 X 的子集, 则 Y 是有限的, 且 $\#(Y) \leq \#(X)$, 若 Y 是 X 的真子集, 则有 $\#(Y) < \#(X)$ 。

我们有 $X = Y \cup (X \setminus Y)$, 于是根据2中结论, 有若 $Y = X$, 于是 $X \setminus Y = \emptyset$, $\#(X) = \#(Y) + \#(X \setminus Y) = \#(Y) + 0$, 若 Y 是 X 的真子集, 于是 $X \setminus Y \neq \emptyset$, 进而 $\#(X \setminus Y) \neq 0$, $\#(X) \geq \#(Y)$ 。于是结论得证。

5. 笛卡尔积 $X \times Y$ 是有限的, 且 $\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y)$ 。

我们有 $\#(X) = n$, $\#(Y) = m$, 且存在两个双射 $f: X \rightarrow \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 与 $g: Y \rightarrow \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq m\}$ 。然后定义函数 $h: \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n \times m\} \rightarrow X \times Y$, 其映射关系定义如下:

$$h(i) = (f(a), g(b))$$

其中有 $i = a \times m + b$, 根据欧几里得算法可以得到对任意的 $1 \leq i \leq n \times m$ 这样的一对 (a, b) 是唯一存在的, 进而根据 f, g 的双射特性与有序对相等的特性得到 h 的单射性质。对任意 $X \times Y$ 中的元素, 由于始终有 $1 \leq a \leq n$ 与 $1 \leq b \leq m$, $(a \times m + b)$ 也可以被 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n \times m\}$ 中的某个 i 映射。于是可以得到 h 是双射, 即 $\#(X \times Y) = n \times m$ 。

6. 集合 Y^X 是有限的, 且 $\#(Y^X) = \#(Y)^{\#(X)}$ 。

令 $\#(X) = n$, $\#(Y) = m$, 并且我们假设存在两个双射 $f: \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\} \rightarrow X$ 与 $g: \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq m\} \rightarrow Y$ 。集合 Y^X 包含了全部以 X 为定义域, Y 为值域的函数 f , 于是我们首先考虑这样一个函数

$h: \{(z_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{N}^n : \forall 1 \leq i \leq n, z_i \in \mathbb{N} \text{ 且 } 1 \leq z_i \leq m\} \rightarrow Y^X$, 它存在这样的映射关系:

$$h((z_i)_{1 \leq i \leq n}) = h': X \rightarrow Y, \text{ 其中有对任意 } i \in [1, n], h' \circ f(i) = g(z_i)$$

对任意 $h' \in Y^X$, 对每一个 $h'(x) = y$ ($x \in X, y \in Y$), 总能找到一个 i 与 z_i 使得 $f(i) = x$ 与 $g(z_i) = y$, 进而可以找到与之对应的有序 n 元组 $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$ 。同时由于 f 与 g 是双射, 这使得不同的有序 n 元组必然由 h 映射到不同的函数 h' 上, 于是可以得到 h 是双射。

然后考虑令一个函数

$l: \{(z_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{N}^n : \forall 1 \leq i \leq n, z_i \in \mathbb{N} \text{ 且 } 1 \leq z_i \leq m\} \rightarrow \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq m^n\}$, 它具有下面的映射关系:

$$l((z_i)_{1 \leq i \leq n}) = \sum_{i=1}^n z_i m^{i-1}$$

对于 l , 它的满射与单射性质是很容易证明的 (重复性太高不赘述), 于是此时取双射 $h \circ l^{-1}$, 进而有 $\#(Y^X) = \#(Y)^{\#(X)}$ 成立。

3.6.5 设 A 与 B 是两个集合, 试着构造一个双射证明 $A \times B$ 与 $B \times A$ 有相同的基数, 然后利用命题 3.6.14, 尝试给出引理 2.3.3 的另一种证明方法

考虑下面一个双射 $f: A \times B \rightarrow B \times A$:

$$f((a, b)) = (b, a)$$

对 f , 任意一个 (b, a) ($b \in B, a \in A$) 都存在一个 $(a, b) \in A \times B$ 使得它被映射, 对任意不同的 (a, b) 与 (a', b') , (b, a) 与 (b', a') 也是不同的。于是验证得到 f 是双射。

考虑引理 2.3.3 的另一种证明:

对任意两个自然数 m, n , 我们知道它们分别是集合 $M = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq m\}$ 与集合 $N = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 的基数。于是有 $m \times n = \#(M \times N) = \#(N \times M) = n \times m$ 。

证毕。

3.6.6 设 A, B, C 是集合, 通过构造一个明确的双射来证明: 集合 $(A^B)^C$ 与 $A^{B \times C}$ 有相同的基数, 由此推导出 $(a^b)^c = a^{bc}$ 对任意自然数 a, b, c 均成立。利用类似的方法推导出 $a^b \times a^c = a^{b+c}$ 对任意自然数 a, b, c 均成立

我们定义这样一个函数 $h : (A^B)^C \rightarrow A^{B \times C}$, 它有下列的映射关系:

$$h(f : C \rightarrow A^B) = g : B \times C \rightarrow A$$

其中对每一个 $c_0 \in C$, 若 $b \in B$, 有 $g((b, c_0)) = f(c_0)(b)$ (看着有点奇怪, 但是 f 本身会映射到函数的集合 A^B , 所以这里 $f(c)$ 应该是某个新的函数 $l : B \rightarrow A$, 也就是 $g((b, c_0)) = l(b)$)。

对于函数 h , 首先要明确集合 $(A^B)^C$ 包含了全体可能的函数 $f : C \rightarrow A^B$, 于是对于任意的 $g \in A^{B \times C}$, 对每一个 $c_0 \in C$ 必然存在一个函数 f 使得对任意的 $b \in B$, $f(b) = g((b, c_0)) \in A$, 进而这个函数定义域为 B , 值域为 A , 于是它属于 $(A^B)^C$, 所以 g 能通过 h 被 $(A^B)^C$ 中的元素映射; 反过来, 对任意不同 $f_1, f_2 \in (A^B)^C$, 根据函数相等的定义, $h(f_1)$ 必然不等于 $h(f_2)$ (存在某个 c_0 使得 $f_1(c_0) = l_1 \neq l_2 = f_2(c_0)$, 于是存在 $b_0 \in B$ 使得 $l_1(b_0) \neq l_2(b_0)$, 进而此时 $h(f_1)((b_0, c_0)) \neq h(f_2)((b_0, c_0))$)。于是综合上 h 同时是满射与单射, 进而 h 是双射, 集合 $(A^B)^C$ 与 $A^{B \times C}$ 有相同的基数。

对于任意自然数 a, b, c , 我们有它们分别是三个集合 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq a\}$, $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq b\}$, $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq c\}$ 的基数, 于是分别令这三个集合为 A, B, C 。根据前面的结论应当有 $\#((A^B)^C) = \#(A^{B \times C})$, 即 $(a^b)^c = a^{bc}$ 。

先证明集合 $A^B \times A^C$ 与 $A^{B \cup C}$ 在 $B \cap C = \emptyset$ 的条件下有相同的基数。构造函数

$h : A^B \times A^C \rightarrow A^{B \cup C}$, 其映射关系定义如下:

$$h((f : B \rightarrow A, g : C \rightarrow A)) = l : B \cup C \rightarrow A$$

其中 l 有这样的定义:

$$l(i) = \begin{cases} f(i) & i \in B \\ g(i) & i \in C \end{cases}$$

对任意的 $l \in A^{B \cup C}$, 有我们取函数 $f : B \rightarrow A$ 与 $g : C \rightarrow A$ 与 l 有相同的映射关系, 由于 $A^B \times A^C$ 中包含了所有的这样的 (f, g) 的组合。于是 l 必然能被 $A^B \times A^C$ 中的元素通过 h 映射; 此外, 对任意不同的 (f, g) 与 $(f', g') \in A^B \times A^C$, 根据函数相等定义与 h 的定义, 显然有 $h((f, g)) \neq h((f', g'))$ (话很长而且很不必要, 随便写写就能知道了)。于是可以得到 h 为双射。

对于任意自然数 a, b, c , 我们有它们分别是三个集合 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq a\}$, $\{i \in \mathbb{N} : c+1 \leq i \leq b+c\}$, $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq c\}$ 的基数, 于是分别令这三个集合为 A, B, C (显然有 $B \cap C = \emptyset$)。于是根据上面的结论, 有 $\#(A^B \times A^C) = \#(A^{B \cup C})$, 即 $a^b \times a^c = a^{b+c}$ 对任意自然数 a, b, c 均成立。

3.6.7 设 A 与 B 是集合, 如果存在一个从 A 到 B 的单射 $f : A \rightarrow B$, 则称集合 A 的基数小于或等于集合 B 的基数。证明集合 A 的基数小于或等于集合 B 的基数, 当且仅当 $\#(A) \leq \#(B)$

f 是单射, 于是有双射 $f : A \rightarrow f(A)$ (这个结论好像在以前的章节证明过, 过程很好说明但是写起来很长, 这里跳过) 与集合 $B - f(A)$, 其中包含了所有 B 中不被 f 映射到的元素 (可能为空)。于是令有 $\#(A) = n$, $\#(B - f(A)) = m$, 双射 $a : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\} \rightarrow A$, $b' : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq m\} \rightarrow (B - f(A))$ 。则定义函数 $b : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n+m\} \rightarrow B$ 有:

$$b(i) = \begin{cases} a(i) & 1 \leq i \leq n \\ b'(i) & n+1 \leq i \leq n+m \end{cases}$$

由于 $B - f(A)$ 的基数大于等于 0，于是必然有 $\#(A) = n \leq n + m = \#(B)$ ，进而题目结论成立。

3.6.8 设 A 与 B 是集合，且存在一个从 A 到 B 的单射 $f: A \rightarrow B$ （也即集合 A 的基数小于或等于集合 B 的基数），证明：存在一个从 B 到 A 的满射 $g: B \rightarrow A$ （该命题的逆命题证明需要用到选择公理，详情参考习题 8.4.3）

根据单个选择引理，我们可以从 A 中获得一个元素 x 。

于是给出 g 的映射关系如下：

$$g(b) = \begin{cases} a & b \in f(A) \text{ 且 } f(a) = b \\ x & b \in B \text{ 且 } b \notin f(A) \end{cases}$$

由于 f 是一个单射，于是对任意 $a_0 \in A$ ，总是存在 $f(a_0) \in B$ 使得 $g(f(a_0)) = a_0$ （ f 要满足垂线测试）；同时，由于 f 是一个单射，于是对于任意 $a_1, a_2 \in A$ 且 $a_1 \neq a_2$ ，必然有 $f(a_1) \neq f(a_2)$ ，这意味着对任意两个不同的 $a_1, a_2 \in A$ ，它们不可能由同一个 b 通过 g 映射得到，因此 g 是满足垂线测试的。

综上， g 即要求的满射。

3.6.9 设 A 与 B 是两个有限集，证明 $A \cup B$ 与 $A \cap B$ 也是有限集，且 $\#(A) + \#(B) = \#(A \cup B) + \#(A \cap B)$ 始终成立

根据习题 3.6.4 的结论，应当有 $\#(A) + \#(B - A) = \#(A \cup B)$ （ $A \cap (B - A) = \emptyset$ ），又有 $(B - A) \cap (B \cap A) = \emptyset$ ，于是 $\#(B - A) + \#(B \cap A) = \#(B)$ 。综合两式可以得到：

$$\begin{aligned} \#(A) + \#(B) &= (\#(A) + \#(B - A)) + \#(B) - \#(B - A) \\ &= \#(A \cup B) + \#(B \cap A) \end{aligned}$$

于是结论得证。

3.6.10 设 A_1, \dots, A_n 是有限集，并且有 $\#(\bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i) > n$ ，证明：存在 $i \in \{1, \dots, n\}$ 使得 $\#(A_i) \geq 2$ （这也被称为抽屉原理）

假设对任意 $i \in \{1, \dots, n\}$ 都有 $\#(A_i) \leq 1$ ，于是我们有：

$$\#(\bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i) \leq \#(A_1) + \#(A_2) + \dots + \#(A_n) = n$$

等号仅在对任意 $j, i \in \{1, \dots, n\}$ ，都有 $A_i \cap A_j = \emptyset$ （ $i \neq j$ ）时成立，这同 $\#(\bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i) > n$ 的假设矛盾，于是必然存在 $i \in \{1, \dots, n\}$ 使得 $\#(A_i) \geq 2$ ，结论得证。

本节相关跳转

[实分析 2.3 乘法](#)

[实分析 5.1 柯西序列](#)

[实分析 8.1 可数性](#)

[实分析 8.4 选择公理](#)

