9.5 左极限与右极限

定义

1. (9.5.1 左极限与右极限) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且设x_0是X中的一个元素。如果x_0是$X \cap (x_0, +\infty)$的附着点，那么我们定义f在x_0处的**右极限**$f(x_0+)$为:

   $$f(x_0+) := \lim_{x \to x_0; x \in X \cap (x_0, +\infty)} f(x)$$

   当然前提是该极限存在。类似的，如果x_0是$X \cap (-\infty, x_0)$的附着点，那么我们定义f在x_0处的**左极限**$f(x_0-)$为:

   $$f(x_0-) := \lim_{x \to x_0; x \in X \cap (-\infty, x_0)} f(x)$$

   当然前提也是该极限存在（因此左极限右极限常常是不存在的）。我们有时会采用下面的简化记号:

   $$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0; x \in X \cap (x_0, +\infty)} f(x) = f(x_0)$$
   $$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0; x \in X \cap (-\infty, x_0)} f(x) = f(x_0)$$

   此时我们必须要明确定义域X。

   （注：为了使$f(x_0+)$与$f(x_0-)$有意义，f在x_0处的定义并不是必要的，一个比较简单的例子就是定义为$f(x) := x/|x|$的函数$f: \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$，可以很轻松地得到$f(0+) = 1$与$f(0-) = -1$，尽管$f$在0处是没有定义的）

命题

1. (9.5.3 左右极限与连续？) 设X是$\mathbb{R}$的一个包含x_0的子集，并且设x_0同时是$X \cap (-\infty, x_0)$与$X \cap (x_0, +\infty)$的附着点。如果$f(x_0+)$与$f(x_0-)$都存在并且等于$f(x_0)$，那么f在x_0处连续。

摘录

1. (间断点相关？) 我们知道，函数f在x_0处的右极限$f(x_0+)$与左极限$f(x_0-)$有可能不等，此时称f在x_0处有一个**跳跃间断点**，例如符号函数sgn在0处就有跳跃间断点。

   另外，函数f在x_0处的右极限$f(x_0+)$与左极限$f(x_0-)$有可能相等但不等于$f(x_0)$，此时我们称f在x_0处有一个**可去间断点**（或**可去奇点**），例如定义为:

   $$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

   的函数$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$就在0处有一个可去间断点。

   还有一种类型的间断点是f在x_0处趋于无穷的情形，例如定义为$f(x) := 1/x^2$的函数$f: \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$，我们显然有0是函数的间断点但既不是跳跃间断点也不是可去间断点，此时在0附近有$f(0+) = f(0-) = +\infty$。一般地，我们称左极限，右极限至少有一个不存在的间断点为**渐近间断点**（也有教材称其为**无穷间断点**）。渐近振荡点不强制要求f在x_0处有定义。

   最后一类间断点称为**振荡间断点**，其特征有f在x_0附近有界但是不存在极限，例如定义为:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

的函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$在0处（事实上任意实数处都可以）有一个振荡间断点。

间断性（也叫**奇异性**）的研究也有许多意义，不过这超出了本书的范围。复分析中奇异性的研究就有关键的作用。

课后习题