10.3 单调函数及其导数

命题

1. （10.3.1 单调函数的导数？）设X是$\mathbb{R}$的子集，$x_0 \in X$是X的极限点，并且设$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数。如果f既单调递增又在x_0处可微，那么$f'(x_0) \geq 0$；如果f既单调递减又在x_0处可微，那么$f'(x_0) \geq 0$。

   （注：因为单调函数并不一定是可微的，因此必须要强调f在x_0处可微，否则对导数的讨论就没有了意义）
2. （10.3.3 导数与区间上的严格单调函数？）设$a < b$，并且设$f: [a, b] \to \mathbb{R}$是可微函数。如果对所有的$x \in [a, b]$均有$f'(x) > 0$，那么f就是严格单调递增的；如果对所有的$x \in [a, b]$均有$f'(x) < 0$，那么f就是严格单调递减的；如果对所有的$x \in [a, b]$均有$f'(x) = 0$，那么f是常数函数。

   （注：需要注意的是，并不能通过f严格单调递增与在x_0处可微而直接推断得到$f'(x_0) > 0$，对严格单调递减函数也是如此）

课后习题

10.3.1 证明命题10.3.1

> 题目即证明极限：
>
> $$L := \lim_{x \to x_0; x \in X - \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
>
> 在f单调递增的情况下值大于等于0，在f单调递减的情况下值小于等于0。为书写方便，我们记有$\delta(x) := \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$。
>
> 由于f在x_0是可微的，因此我们知道该极限必然收敛于某个值，于是根据命题9.3.9，我们有对任意完全由$X - \{x_0\}$中元素组成且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，都有$(\delta(a_n))_{n=0}^{\infty}$收敛于$L$。于是我们考虑$\delta(a_n)$的值：
>
> > - 若$a_n > x_0$，则此时若f是单调递增的，那么有$f(a_n) \geq f(x_0)$，于是此时$\delta(a_n) \geq 0$；若f是单调递减的，那么有$f(a_n) \leq f(x_0)$，于是此时$\delta(a_n) \leq 0$。
> > - 若$a_n < x_0$，则此时若f是单调递增的，那么有$f(a_n) \leq f(x_0)$，于是此时$\delta(a_n) \geq 0$；若f是单调递减的，那么有$f(a_n) \geq f(x_0)$，于是此时$\delta(a_n) \geq 0$。
>
> 从而我们得到对任意a_n满足$a_n \in X - \{x_0\}$都有在f单调递增时$\delta(a_n) \geq 0$，在f单调递减时$\delta(a_n) \leq 0$,。从而根据比较原理（命题6.4.13），我们有在f单调递增时$L \geq 0$，在f单调递减时$L \leq 0$，于是结论得证。

10.3.2 举例说明，存在一个连续且单调递增的函数$f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$在$0$处不可微。解释为什么这与命题10.3.1不矛盾

> 考虑这样一个函数$f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$：
>
> $$f(x) := \begin{cases} x & \text{if } x < 0 \\ 2x & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$
>
> 显然f在$(-1, 1)$上连续但是在0处不可微，并且f是单调递增的。

> 对命题10.3.1，命题10.3.1是在函数单调且在确定点满足可微的条件下能给出导数的限制，但是并不是说明连续单调函数必然可微，因此两者并不矛盾。

10.3.3 举例说明，存在一个严格单调递增的可微函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$在$0$处的导数等于$0$。解释为什么这与命题10.3.1和命题10.3.3不矛盾（提示：参见习题10.2.3）

> 本题可以使用与习题10.2.3一样的例子，考虑函数定义为$f(x):=x^3$，在$x=0$处有导数$f'(0)=0$，并且显然有f是严格单调的。
>
> 对命题10.3.1，f确实是一个满足命题10.3.1条件的函数，因此根据命题10.3.1，我们有$f'(0)\geq 0$，而$f'(0)=0$，并没有出现矛盾。
>
> 对命题10.3.3，命题10.3.3要求对区间上所有的点导数均大于0时可以得到f严格单调递增，并不是根据f单调递增可以推知在区间上所有点导数均大于0，因此这里也没有矛盾。

10.3.4 证明命题10.3.3（提示：目前你还没有进行到掌握积分与微积分基本定理的内容，因此在这道题中这些很方便的工具是禁止使用的，但是你可以使用前面所学习的内容，一个好的想法是使用平均值定理（推论10.2.9））

> 对任意的$x,y\in[a,b]$且$y>x$，考虑限制函数$f|_{[x,y]}$。由于可微函数也是连续的，因此我们不难推知必然有限制函数$f|_{[x,y]}$在$[x,y]$上连续且在(x,y)上可微，于是根据平均值定理，有存在$c\in(x,y)$使得：
>
> $$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)\iff f(y)-f(x)=f'(c)(x-y)$$
>
> 于是我们对命题10.3.3给出的三个情景依次讨论：
>
>> 1. 如果对所有的$d\in[a,b]$均有$f'(d)>0$，那么有$f'(c)>0$，从而$f(y)-f(x)>0\iff f(y)>f(x)$。于是即对任意的$x,y\in[a,b]$且$y>x$，都有$f(y)>f(x)$，根据定义，于是$f$是严格单调递增函数。
>> 2. 如果对所有的$d\in[a,b]$均有$f'(d)<0$，那么有$f'(c)<0$，从而$f(y)-f(x)<0\iff f(y)<f(x)$。于是即对任意的$x,y\in[a,b]$且$y>x$，都有$f(y)<f(x)$，根据定义，于是$f$是严格单调递减函数。
>> 3. 如果对所有的$d\in[a,b]$均有$f'(d)=0$，那么有$f'(c)>0$，从而$f(y)-f(x)=0\iff f(y)=f(x)$。于是即对任意的$x,y\in[a,b]$且$y>x$，都有$f(y)=f(x)$，根据定义，于是$f$是常数函数。
>
> 综上，于是结论得证。

10.3.5 举例说明，存在一个$\mathbb{R}$的子集$X\subset\mathbb{R}$和一个在X上可微的函数$f:X\to\mathbb{R}$使得对所有的$x\in X$均有$f'(x)>0$，并且f不是严格单调递增的（提示：注意这里的条件同命题10.3.3的条件的细微区别，不妨思考这个区别是什么？该如何利用这个细微的区别构造我们想要的例子）

> 考虑定义在$\mathbb{R}-\{0\}$上的函数$f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$有$f(x):=-\dfrac{1}{x}$。根据10.1节中的证明（习题10.1.6）有对任意$x\in\mathbb{R}-\{0\}$都有$f'(x)=\dfrac{1}{x^2}\geq 0$成立，但是$f$不是严格单调递增的。
>
> 本题的条件与命题10.3.3中最大的区别在于没有限定X是一个连续的区间，由于间断的存在使得在间断处可以达成不单调的结果。

本节相关跳转

实分析 10.2 局部最大值、局部最小值以及导数