9.3 函数的极限值

定义

1. (9.3.1 ε-接近性) 设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，L是一个实数，并且设$\varepsilon > 0$也是一个实数。我们称函数f是ε-**接近于**L的，当且仅当对任意$x \in X$，都有$|f(x) - L| \leq \varepsilon$。
2. (9.3.3 局部ε-接近性) 设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，L是一个实数，x_0是X的一个附着点，并且设$\varepsilon > 0$也是一个实数。我们称函数f**在**x_0**附近是**ε-**接近于**L的，当且仅当存在一个实数$\delta > 0$使得当f被限制在集合$\{x \in X : |x - x_0| \leq \delta\}$上时，有$f$是$\varepsilon$-接近于$L$的（即$f|_{[x_0-\delta, x_0+\delta]}$是$\varepsilon$-接近于$L$的）。
3. (9.3.6 函数在一点处收敛) 设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，E是X的一个子集，x_0是E的一个附着点，并且设L是一个实数。我们称f**在点**x_0**处沿着**E**收敛于**L，并且记作$\lim\limits_{x \to x_0; x \in E} f(x) = L$，当且仅当对任意的$\varepsilon > 0$，被限制在$E$上的函数$f$都是在$x_0$附近是$\varepsilon$-接近于$L$的。如果$f$在$x_0$处不收敛于任何数，那么我们称$f$在$x_0$处是**发散**，并且此时认为$\lim\limits_{x \to x_0; x \in E} f(x)$是无定义的。

   换言之，即$\lim\limits_{x \to x_0; x \in E} f(x) = L$当且仅当对任意$\varepsilon > 0$，存在一个$\delta > 0$使得$|f(x) - L| \leq \varepsilon$对任意满足$|x - x_0| \leq \delta$的$x \in E$均成立。

   （注：通常情况下，我们会在一定上下文条件下忽略E（即直接说f在x_0处收敛于E，或者说$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$），但是这样的做法在事实上是有一定风险的，举个例子，当E不包含x_0时就可能对结果产生很大影响：定义一个函数$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，当$x = 0$时$f(x) = 1$，当$x \neq 0$时$f(x) = 0$，此时我们有$\lim\limits_{x \to 0; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} f(x) = 0$与$\lim\limits_{x \to 0; x \in \mathbb{R}} f(x)$无定义同时成立。此外，这个定义也比较复杂，我们通常会选择它的替代形式使用，详情见命题9.3.9）

命题

1. (9.3.9 收敛定义的替换？) 设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，E是X的一个子集，x_0是E的一个附着点，并且设L是一个实数。则下面两个命题在逻辑上是等价的：

   > - f在点x_0处沿着E收敛于L。
   > - 对任意一个完全由E中元素构成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，序列$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$都收敛于L。

   （注：使用命题9.3.9里的符号，我们可以得到推论：如有$\lim\limits_{x \to x_0; x \in E} f(x) = L$且$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$，那么有$\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = L$）
2. (9.3.12 函数极限的唯一性？) 设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，E是X的一个子集，x_0是E的一个附着点，并且设$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数。那么f在x_0处沿着E至多只能有一个极限。
3. (9.3.14 函数的极限定律) 设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，E是X的一个子集，x_0是E的一个附着点，并且设$f: X \to \mathbb{R}$与$g: X \to \mathbb{R}$都是函数。假设f在x_0处沿着E收敛于L，g在x_0处沿着E收敛于M。那么有：

   > 1. $f + g$在x_0处沿着E收敛于$L + M$：
   >
   > $$\lim_{x \to x_0; x \in E} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) + \lim_{x \to x_0; x \in E} g(x)$$
   >
   > 2. $f - g$在x_0处沿着E收敛于$L - M$：

2. $f-g$在x_0处沿着E收敛于$L-M$:

$$\lim_{x\to x_0;x\in E}(f-g)(x)=\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)-\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)$$

3. $\max(f,g)$在x_0处沿着E收敛于$\max(L,M)$:

$$\lim_{x\to x_0;x\in E}\max(f,g)(x)=\max\left(\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x),\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)\right)$$

4. $\min(f,g)$在x_0处沿着E收敛于$\min(L,M)$:

$$\lim_{x\to x_0;x\in E}\min(f,g)(x)=\min\left(\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x),\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)\right)$$

5. fg在x_0处沿着E收敛于LM:

$$\lim_{x\to x_0;x\in E}(fg)(x)=\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)$$

6. 如有c是一个实数，则cf在x_0处沿着E收敛于cL:

$$\lim_{x\to x_0;x\in E}(cf)(x)=c\cdot\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)$$

7. 如有对任意$x\in E$都有$g(x)\neq 0$，则f/g在x_0处沿着E收敛于L/M:

$$\lim_{x\to x_0;x\in E}(f/g)(x)=\frac{\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)}{\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)}$$

（简写的话，能根据上下文确定E时省略$x\in E$也可以）

（注：关于是否注明集合E，还是之前那个例子函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$f(x):=\begin{cases}1 & \text{if } x\neq 0\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$$

有有$\lim_{x\to 0;x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}f(x)=0$与$\lim_{x\to 0;x\in\mathbb{R}}f(x)$无定义，这种情况下我们称$f$在0处有"**可去奇点**"或者"**可去间断点**"，并且由于这种奇点的存在，我们有时约定写$\lim_{x\to x_0}f(x)$时默认将x_0排除在外，例如在本书里就有$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to 0;x\in X\setminus\{x_0\}}f(x)$）

4. （9.3.18 极限是局部的）设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，E是X的一个子集，x_0是E的一个附着点，并且设L是一个实数，$\delta>0$是一个实数。则我们有:

$$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)=L$$

当且仅当:

$$\lim_{x\to x_0;x\in E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)}f(x)=L$$

通俗来说即:

$$\lim_{x\to x_0;x\in E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)}f(x)=\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)$$

（即x_0处的极限值只与x_0附近的函数值有关，与远离x_0的函数值无关）

课后习题

9.3.1 证明命题9.3.9

> 设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，E是X的一个子集，x_0是E的一个附着点，并且设L是一个实数。分别证明充分必要条件：
>
> - 若f在点x_0处沿着E收敛于L，则对任意一个完全由E中元素构成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，序列$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$都收敛于L。
>
> 根据定义9.3.6，于是有对任意$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$使得$|f(x)-L|\le\varepsilon$对任意满足$|x-x_0|\le\delta$的$x\in E$都成立。又根据题设若序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于x_0，从而对δ，总存在$N\in\mathbb{N}$使得对任意$n\ge N$都有$|a_n-x_0|\le\delta$成立。从而根据f在x_0处沿E收敛于L，即有对任意$\varepsilon>0$，总存在$N\in\mathbb{N}$满足$n\ge N$都有$|f(a_n)-L|\le\varepsilon$成立，从而根据序列收敛的定义，即有序列$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$都收敛于L。
>
> ---
>
> - 若对任意一个完全由E中元素构成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$都有序列$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$都收敛于L，则f在点x_0处沿着E收敛于L。
>
> 根据题意，即对任意的$\varepsilon>0$需要证明存在一个$\delta>0$满足若$|x-x_0|\le\delta$且$x\in X$则有$|f(x)-L|\le\varepsilon$成立。
>
> 使用反证法，假设对$\varepsilon_0>0$有对任意$\delta>0$都存在满足$|x-x_0|\le\delta$且$x\in X$有$|f(x)-L|>\varepsilon_0$。于是定义这样一个序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，其项a_n定义为反证假设中令δ为$\dfrac{1}{n+1}$时存在的x。从而根据该定义，我们知道对任意的实数$\varepsilon>0$，根据命题5.4.13阿基米德性质我们总存在一个正整数N满足$N\varepsilon>1\iff\varepsilon>\dfrac{1}{N}$，从而对任意的$n\ge N$有：
>
> $$|a_n-x_0|\le\frac{1}{n+1}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$
>
> 于是根据序列收敛的定义，$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是收敛于x_0的，但是对于序列$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$，根据a_n定义我们知道总存在$|f(a_n)-L|>\varepsilon_0$对任意$n\in\mathbb{N}$都成立，从而序列$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$肯定不收敛于L，于是这跟题设中序列$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$必然收敛于L的前提矛盾，导出反证假设不可能成立。
>
> 综上，必然有对任意的$\varepsilon>0$需要证明存在一个$\delta>0$满足若$|x-x_0|\le\delta$且$x\in X$则有$|f(x)-L|\le\varepsilon$成立。即f在点x_0处沿着E收敛于L。

9.3.2 证明命题9.3.14中剩下的部分（即除去第一条外的其它内容）

> 即假设有X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，E是X的一个子集，x_0是E的一个附着点，并且设$f:X\to\mathbb{R}$与$g:X\to\mathbb{R}$都是函数。假设f在x_0处沿着E收敛于L，g在x_0处沿着E收敛于M。
>
> 根据命题9.3.9，于是对任意E中元素构成的收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，必然有$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$收敛于L与$(g(a_n))_{n=0}^{\infty}$收敛于M。
>
> 然后证明：
>
> 1. $f-g$在x_0处沿着E收敛于$L-M$：
>
> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}(f-g)(x)=\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)-\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)$$
>
> 证明：
>
> 根据命题6.1.9极限定律我们有：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(f-g)(a_n) &= \lim_{n\to\infty} f(a_n)-g(a_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} f(a_n)-\lim_{n\to\infty} g(a_n)\\ &= L-M\end{aligned}$$

从而再根据命题9.3.9于是有$f-g$在x_0处沿着E收敛于$L-M$成立。即：

$$\lim_{x\to x_0;x\in E}(f-g)(x)=\lim_{x\to x_0;x\in E} f(x)-\lim_{x\to x_0;x\in E} g(x)$$

---

2. $\max(f,g)$在x_0处沿着E收敛于$\max(L,M)$：

$$\lim_{x\to x_0;x\in E}\max(f,g)(x)=\max\left(\lim_{x\to x_0;x\in E} f(x),\lim_{x\to x_0;x\in E} g(x)\right)$$

证明：

根据命题6.1.9极限定律我们有：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\max(f,g))(a_n) &= \lim_{n\to\infty}\max(f(a_n),g(a_n))\\ &= \max\left(\lim_{n\to\infty} f(a_n),\lim_{n\to\infty} g(a_n)\right)\\ &= \max(L,M)\end{aligned}$$

从而再根据命题9.3.9于是有$\max(f,g)$在x_0处沿着E收敛于$\max(L,M)$成立。即：

$$\lim_{x\to x_0;x\in E}\max(f,g)(x)=\max\left(\lim_{x\to x_0;x\in E} f(x),\lim_{x\to x_0;x\in E} g(x)\right)$$

---

3. $\min(f,g)$在x_0处沿着E收敛于$\min(L,M)$：

$$\lim_{x\to x_0;x\in E}\min(f,g)(x)=\min\left(\lim_{x\to x_0;x\in E} f(x),\lim_{x\to x_0;x\in E} g(x)\right)$$

证明：

根据命题6.1.9极限定律我们有：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\min(f,g))(a_n) &= \lim_{n\to\infty}\min(f(a_n),g(a_n))\\ &= \min\left(\lim_{n\to\infty} f(a_n),\lim_{n\to\infty} g(a_n)\right)\\ &= \min(L,M)\end{aligned}$$

从而再根据命题9.3.9于是有$\min(f,g)$在x_0处沿着E收敛于$\min(L,M)$成立。即：

$$\lim_{x\to x_0;x\in E}\min(f,g)(x)=\min\left(\lim_{x\to x_0;x\in E} f(x),\lim_{x\to x_0;x\in E} g(x)\right)$$

---

4. fg在x_0处沿着E收敛于LM：

$$\lim_{x\to x_0;x\in E}(fg)(x)=\lim_{x\to x_0;x\in E} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0;x\in E} g(x)$$

证明：

根据命题6.1.9极限定律我们有：

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(fg)(a_n) &= \lim_{n\to\infty} f(a_n)g(a_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot\lim_{n\to\infty} g(a_n) \\
&= LM
\end{aligned}
$$

从而再根据命题9.3.9于是有fg在x_0处沿着E收敛于LM成立。即:

$$
\lim_{x\to x_0;x\in E}(fg)(x) = \lim_{x\to x_0;x\in E} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0;x\in E} g(x)
$$

---

5. 如有c是一个实数，则cf在x_0处沿着E收敛于cL:

$$
\lim_{x\to x_0;x\in E}(cf)(x) = c\cdot\lim_{x\to x_0;x\in E} f(x)
$$

证明:

根据命题6.1.9极限定律我们有:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(cf)(a_n) &= \lim_{n\to\infty} cf(a_n) \\
&= c\cdot\lim_{n\to\infty} f(a_n) \\
&= cL
\end{aligned}
$$

从而再根据命题9.3.9于是有cf在x_0处沿着E收敛于cL成立。即:

$$
\lim_{x\to x_0;x\in E}(cf)(x) = c\cdot\lim_{x\to x_0;x\in E} f(x)
$$

---

6. 如有对任意$x\in E$都有$g(x)\neq 0$，则f/g在x_0处沿着E收敛于L/M:

$$
\lim_{x\to x_0;x\in E}(f/g)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0;x\in E} f(x)}{\lim_{x\to x_0;x\in E} g(x)}
$$

证明:

根据命题6.1.9极限定律我们有:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(f/g)(a_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} f(a_n)}{\lim_{n\to\infty} g(a_n)} \\
&= L/M
\end{aligned}
$$

从而再根据命题9.3.9于是有f/g在x_0处沿着E收敛于L/M成立。即:

$$
\lim_{x\to x_0;x\in E}(f/g)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0;x\in E} f(x)}{\lim_{x\to x_0;x\in E} g(x)}
$$

9.3.3 证明命题9.3.18

于是设有实数$\delta>0$，分别证明充分必要条件:

- 必要条件：若有$\lim_{x\to x_0;x\in E} f(x)=L$，则有$\lim_{x\to x_0;x\in E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)} f(x)=L$。

证明:

> 根据定义9.3.6，f在点x_0处沿E收敛于L，当且仅当对任意$\varepsilon > 0$都存在$\sigma > 0$满足对任意满足条件$|x - x_0| \leq \sigma$且$x \in E$的x均有$|f(x) - L| \leq \varepsilon$成立。我们令这样通过$\varepsilon > 0$获取$\sigma > 0$的方式为符号$g$（即$g(\varepsilon) := \sigma$，需要注意这不是一个函数，只是一个记号）然后我们讨论f在点x_0处沿$E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$收敛于$L$的条件：
>
> 根据定义9.3.6，f在点x_0处沿$E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$收敛于$L$，当且仅当对任意$\varepsilon > 0$都存在实数$\sigma' > 0$满足对任意$|x - x_0| \leq \sigma'$且$x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$的$x$均有$|f(x) - L| \leq \varepsilon$成立。于是我们定义一个通过$\varepsilon > 0$获取$\sigma' > 0$的方式$g'$有：
>
> $$g'(\varepsilon) := \min(0.5 \cdot \delta, g(\varepsilon))$$
>
> 对任意x满足$|x - x_0| \leq \sigma'$，由$\sigma' < \delta$，从而总是有$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$；而对任意$x$满足$|x - x_0| \leq \sigma'$，又由$\delta \leq g(\varepsilon)$，从而总是有$x$满足$|x - x_0| \leq g(\varepsilon)$。于是对任意$x$满足$|x - x_0| \leq \sigma'$且$x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，则$x$也满足$|x - x_0| \leq g(\varepsilon)$且$x \in E$，于是根据$f$在点$x_0$处沿$E$收敛于$L$即有$|f(x) - L| \leq \varepsilon$，于是综合有：
>
> 对任意$\varepsilon > 0$都存在实数$\sigma' > 0$满足对任意$|x - x_0| \leq \sigma'$且$x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$的$x$均有$|f(x) - L| \leq \varepsilon$成立，根据定义9.3.6即有$f$在点$x_0$处沿$E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$收敛于$L$。
>
> ---
>
> - 充分条件：若有$\lim\limits_{x \to x_0; x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x) = L$，则有$\lim\limits_{x \to x_0; x \in E} f(x) = L$。
>
> 证明：
>
> 根据定义9.3.6，f在点x_0处沿$E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$收敛于$L$，当且仅当对任意$\varepsilon > 0$都存在实数$\sigma > 0$满足对任意$|x - x_0| \leq \sigma$且$x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$的$x$均有$|f(x) - L| \leq \varepsilon$成立，注意到$x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies x \in E$，从而该结论可改写为：
>
> f在点x_0处沿$E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$收敛于$L$，则对任意实数$\varepsilon > 0$都存在实数$\sigma > 0$满足对任意满足$|x - x_0| \leq \sigma$且$x \in E$的$x$均有$|f(x) - L| \leq \varepsilon$成立。而后半段根据命题9.3.9即$f$在点$x_0$处沿$E$收敛于$L$，从而可证有：
>
> 若有$\lim\limits_{x \to x_0; x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x) = L$，则有$\lim\limits_{x \to x_0; x \in E} f(x) = L$。

9.3.4 给出上极限$\limsup\limits_{x \to x_0; x \in E} f(x)$与下极限$\liminf\limits_{x \to x_0; x \in E} f(x)$的定义，然后根据你给出的定义，提出一个类似于命题9.3.9的结论（附加挑战：证明这个结论）

> 设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数，E是X的一个子集，x_0是E的一个附着点，并且设L是一个实数。
>
> 则给出上极限定义：
>
> > 定义f在x_0处沿E的局部上确界$F^+_{x_0}(\delta)$（要求$\delta > 0$）为下面这样一个值：
> >
> > $$F^+_{x_0}(\delta) := \sup\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in E \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\}$$
> >
> > 然后定义f在x_0处沿E的上极限为下面这样一个值L^+：
> >
> > $$L^+ := \inf\{F^+_{x_0}(\delta) \in \mathbb{R} : \delta > 0\}$$
> >
> > 并记为$\limsup\limits_{x \to x_0; x \in E} f(x)$。
>
> 同时给出下极限定义：
>
> > 定义f在x_0处沿E的局部下确界$F^-_{x_0}(\delta)$（要求$\delta > 0$）为下面这样一个值：
> >
> > $$F^-_{x_0}(\delta) := \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in E \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\}$$

> 然后定义f在x_0处沿E的下极限为下面这样一个值L^-：
>
> $$L^- := \sup\{F^-_{x_0}(\delta) \in \mathbb{R} : \delta > 0\}$$
>
> 并记为$\liminf\limits_{x\to x_0;x\in E} f(x)$。

对上下极限，有类似命题9.3.9的命题成立：

- 上极限：

  > 设有实数M，下面两个命题是等价的：
  >
  > - f在x_0处沿E的上极限存在并且小于等于M。
  > - 对任意一个完全由E中元素组成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，都有上极限$\limsup\limits_{n\to\infty} f(a_n) \le M$。

- 下极限：

  > 设有实数M，下面两个命题是等价的：
  >
  > - f在x_0处沿E的下极限存在并且大于等于M。
  > - 对任意一个完全由E中元素组成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，都有下极限$\liminf\limits_{n\to\infty} f(a_n) \ge M$。

下面证明这个上极限，下极限的定义是满足该命题的：

分别证明充分必要条件：

- 上极限的证明：

  > - 必要条件：若f在x_0处沿E的上极限存在并且小于等于M，则对任意一个由E中元素组成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，都有上极限$\limsup\limits_{n\to\infty} f(a_n) \le M$。
  >
  > 根据上定义，我们设f在x_0处沿E的上极限为L。对任意收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，对任意$\varepsilon > 0$，都存在$N \in 0$满足对任意的$n \ge N$都有$|a_n - x_0| \le \varepsilon \iff a_n \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$。又由于对任意$n \in \mathbb{N}$都有$a_n \in E$，于是应该有：
  >
  > $$\forall n \ge N, a_n \in E \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \implies f(a_n) \le \sup\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in E \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]\}$$
  >
  > 从而即局部上界$F^+_{x_0}(\varepsilon)$是序列$(f(a_n))_{n=N}^{\infty}$的上界，即$\sup(f(a_n))_{n=N}^{\infty} \le F^+_{x_0}(\varepsilon)$。于是记有$A^+_N := \sup(f(a_n))_{n=N}^{\infty}$，根据序列下极限的定义，我们又有$\limsup\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \inf(A^+_N)_{N=0}^{\infty}$，而根据下确界的性质，又有：
  >
  > $$\forall N \ge 0, A^+_N \ge \inf(A^+_N)_{N=0}^{\infty}$$
  >
  > 从而总结上面内容有：
  >
  > 对任意$\varepsilon > 0$，都存在$N \ge 0$使得局部上界$F^+_{x_0}(\varepsilon)$有：
  >
  > $$F^+_{x_0}(\varepsilon) \ge A^+_N \ge \limsup_{n\to\infty} f(a_n)$$
  >
  > 从而$\limsup\limits_{n\to\infty} f(a_n)$是集合$\{F^+_{x_0}(\delta) \in \mathbb{R} : \delta > 0\}$的一个下界，根据下确界的性质应该有：

$$\inf\{F^+_{x_0}(\delta)\in\mathbb{R}:\delta>0\}\geq\limsup_{n\to\infty}f(a_n)\overset{\text{定义}}{\Longrightarrow}M\geq L\geq\limsup_{n\to\infty}f(a_n)$$

于是结论得证。

- 充分条件：若对任意一个完全由E中元素组成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^\infty$，都有上极限$\limsup_{n\to\infty}f(a_n)\leq M$，则$f$在$x_0$处沿$E$的上极限存在并且小于等于$M$。

使用反证法，不妨假设有f在x_0处沿E的上极限$L>M$（它可能是一个实数，也可能是无穷大），从而根据我们的定义，对任意一个$\varepsilon>0$都有$F^+_{x_0}(\varepsilon)\geq L>M$（$L$是$F^+_{x_0}(\delta)$的下确界）。

从而尝试创建一个序列$(a_n)_{n=0}^\infty$，其定义有对任意$n\geq 0$满足：

$$P(n):=a_n\in E\wedge|a_n-x_0|\leq\frac{1}{n+1}\wedge f(a_n)\geq\frac{L+M}{2}\quad(n\in\mathbb{N})$$

简单解释下为什么对任意$n\geq 0$这个定义都是有效的：根据上面的结论，我们有$F^+_{x_0}(\varepsilon)>\frac{L+M}{2}$对任意$\varepsilon>0$都成立，于是根据上确界的性质，必然存在元素$x\in E\cap[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$有：

$$f(x)\geq\frac{L+M}{2}$$

从而对任意的$n\geq 0$，集合$A_n:=\{x\in X:P(n)\}$都是非空的，于是根据选择公理可以对任意$n\geq 0$都指定一个$a_n\in X$满足性质$P(n)$，于是这样的定义总是有效的。

对这个序列$(a_n)_{n=0}^\infty$，我们显然有它是收敛于x_0的，从而根据题设，应当有$\limsup_{n\to\infty}f(a_n)\leq M$；但是根据我们的构造，又有对任意$n\geq 0$都有$f(a_n)\geq\frac{L+M}{2}$，于是根据比较原理应该有$\limsup_{n\to\infty}f(a_n)\geq\limsup_{n\to\infty}\frac{L+M}{2}=\frac{L+M}{2}>M$，从而导出了矛盾，于是反证假设不成立，只能有$f$在$x_0$处沿$E$的上极限存在并且小于等于$M$。

- 下极限的证明：（基本是一致的）

- 必要条件：若f在x_0处沿E的下极限存在并且大于等于M，则对任意一个由E中元素组成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^\infty$，都有下极限$\liminf_{n\to\infty}f(a_n)\geq M$。

根据上定义，我们设f在x_0处沿E的上极限为L。对任意收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^\infty$，对任意$\varepsilon>0$，都存在$N\in 0$满足对任意的$n\geq N$都有$|a_n-x_0|\leq\varepsilon\iff a_n\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$。又由于对任意$n\in\mathbb{N}$都有$a_n\in E$，于是应该有：

$$\forall n\geq N,a_n\in E\cap[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]\Longrightarrow f(a_n)\geq\inf\{f(x)\in\mathbb{R}:x\in E\cap[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]\}$$

从而即局部下界$F^-_{x_0}(\varepsilon)$是序列$(a_n)_{n=N}^\infty$的下界，即$\inf(f(a_n))_{n=N}^\infty\geq F^-_{x_0}(\varepsilon)$。于是记有$A^-_N:=\inf(f(a_n))_{n=N}^\infty$，根据序列下极限的定义，我们又有$\liminf_{n\to\infty}f(a_n)=\sup(A^+_N)_{N=0}^\infty$，而根据上确界的性质，又有：

$$\forall N\geq 0,A^-_N\leq\sup(A^+_N)_{N=0}^\infty$$

从而总结上面内容有：

对任意$\varepsilon>0$，都存在$N\geq 0$使得局部下界$F^-_{x_0}(\varepsilon)$有：

> > $$F^-_{x_0}(\varepsilon) \le A^-_N \le \liminf_{n\to\infty} f(a_n)$$
> >
> > 从而$\liminf_{n\to\infty} f(a_n)$是集合$\{F^-_{x_0}(\delta)\in\mathbb{R}:\delta>0\}$的一个上界，根据上确界的性质应该有：
> >
> > $$\sup\{F^+_{x_0}(\delta)\in\mathbb{R}:\delta>0\} \le \liminf_{n\to\infty} f(a_n) \overset{\text{定义}}{\Longrightarrow} M \le L \le \liminf_{n\to\infty} f(a_n)$$
> >
> > 从而结论得证。
> >
> > ---
> >
> > - 充分条件：若对任意一个完全由E中元素组成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^\infty$，都有下极限$\liminf_{n\to\infty} f(a_n)\ge M$，则$f$在$x_0$处沿$E$的下极限存在并且大于等于$M$。
> >
> > 使用反证法，不妨假设有f在x_0处沿E的上极限$L<M$（它可能是一个实数，也可能是负无穷），从而根据我们的定义，对任意一个$\varepsilon>0$都有$F^-_{x_0}(\varepsilon)\le L<M$（$L$是$F^-_{x_0}(\delta)$的上确界）。
> >
> > 从而尝试创建一个序列$(a_n)_{n=0}^\infty$，其定义有对任意$n\ge 0$满足：
> >
> > $$P(n):=a_n\in E\wedge|a_n-x_0|\le\frac{1}{n+1}\wedge f(a_n)\le\frac{L+M}{2}\quad(n\in\mathbb{N})$$
> >
> > 简单解释下为什么对任意$n\ge 0$这个定义都是有效的：根据上面的结论，我们有$F^-_{x_0}(\varepsilon)<\dfrac{L+M}{2}$对任意$\varepsilon>0$都成立，于是根据下确界的性质，必然存在元素$x\in E\cap[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$有：
> >
> > $$f(x)\le\frac{L+M}{2}$$
> >
> > 从而对任意的$n\ge 0$，集合$A_n:=\{x\in X:P(n)\}$都是非空的，于是根据选择公理可以对任意$n\ge 0$都指定一个$a_n\in X$满足性质$P(n)$，于是这样的定义总是有效的。
> >
> > 对这个序列$(a_n)_{n=0}^\infty$，我们显然有它是收敛于x_0的，从而根据题设，应当有$\liminf_{n\to\infty} f(a_n)\ge M$；但是根据我们的构造，又有对任意$n\ge 0$都有$f(a_n)\le\dfrac{L+M}{2}$，于是根据比较原理应该有$\liminf_{n\to\infty} f(a_n)\le\liminf_{n\to\infty}\dfrac{L+M}{2}=\dfrac{L+M}{2}<M$，从而导出了矛盾，于是反证假设不成立，只能有$f$在$x_0$处沿$E$的下极限存在并且大于等于$M$。
>
> 综上，于是有内容得证。

9.3.5 **(夹逼定理的连续形式)** **设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，E是X的一个子集，x_0是E的一个附着点，并且设$f:X\to\mathbb{R}$，$g:X\to\mathbb{R}$与$h:X\to\mathbb{R}$都是函数，并且有$f(x)\le g(x)\le h(x)$对任意$x\in E$都成立。若存在实数L有$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)=\lim_{x\to x_0;x\in E}h(x)=L$，则尝试证明：$\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)=L$**

> 根据命题9.3.9，则可以得到对任意一个完全由E中元素组成的收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^\infty$，都有：
>
> $$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}h(a_n)=L$$
>
> 又根据命题6.4.14序列的夹逼定理，由对任意$a_n\in E$都有$f(a_n)\le g(a_n)\le h(a_n)$我们有：
>
> $$\lim_{n\to\infty}g(a_n)=L$$
>
> 从而总结上面结论即有：对任意一个完全由E中元素组成的收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^\infty$，都有序列$(g(a_n))_{n=0}^\infty$收敛于L。由命题9.3.9，这也即$\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)=L$，于是结论得证。