12.4 柯西序列和完备度量空间

定义

1. (12.4.1 子序列) 设$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$是度量空间(X,d)中的一个点列，设n_1，n_2，n_3，$\dots$是一个严格单调递增的整数序列，并且每一项都不小于m，即：

$$m \le n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

那么我们称序列$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$是原序列$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$的**子序列**。

(注：这个定义是定义6.6.1的推广；原书中这里写的是单调递增的整数序列，个人认为强调一下是个严格单调递增的序列会更好，符合它自己的描述)

2. (12.4.4 极限点) 设$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$是度量空间(X,d)中的一个点列，并设$L \in X$。我们称L是$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$的一个**极限点**，当且仅当对于任意的$N \ge m$和$\varepsilon > 0$，存在一个$n \ge N$使得$d(x^{(n)}, L) \le \varepsilon$。

(注：这个定义是定义6.4.1的推广)

3. (12.4.6 柯西序列) 设$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$是度量空间(X,d)中的一个点列。我们称$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$是一个**柯西序列**，当且仅当对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个$N \ge m$使得$d(x^{(j)}, x^{(k)}) < \varepsilon$对所有的$j$，$k \ge N$均成立。

(注：这个定义是定义6.1.3的推广；在命题6.4.18中我们说明了实数空间中收敛序列与柯西序列的等价性，但是这个结论并不能推广到任意的度量空间中，这和度量空间的完备性有关)

4. (12.4.10 完备度量空间) 度量空间(X,d)是**完备的**，当且仅当(X,d)中的每一个柯西序列在(X,d)中都是收敛的。

(注：根据完备度量空间的定义，我们不难发现实数空间$(\mathbb{R},d)$是完备的，但是有理数空间$(\mathbb{Q},d)$不是完备的；完备的度量空间有一些很好的性质，例如命题12.4.12的内容)

命题

1. (12.4.3) 设$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$是度量空间(X,d)中收敛于极限x_0的一个点列，那么它的每一个子序列$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$也收敛于$x_0$。

2. (12.4.5 极限点与子序列？) 设$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$是度量空间(X,d)中的一个点列，并设$L \in X$。那么下面的命题是等价的：

> - L是$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$的一个极限点。
> - $(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$存在一个收敛于L的子序列$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$。

3. (12.4.7 收敛序列是柯西序列) 设$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$是度量空间(X,d)中收敛于极限x_0的序列，那么$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$是柯西序列。

4. (12.4.9 柯西序列与子序列？) 设$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$是度量空间(X,d)中的柯西序列。如果该序列在X中存在一个收敛于极限x_0的子序列$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$，那么原序列$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$也收敛于$x_0$。

5. (12.4.12 完备度量空间的性质？) 下面的两个命题始终为真：

> 1. 设(X,d)是一个度量空间，并设$(Y,d_{Y\times Y})$是(X,d)的一个子空间，如果$(Y,d_{Y\times Y})$是完备的，那么Y一定是X中的闭集。
> 2. 反过来，如果(X,d)是一个完备度量空间，并且Y是X的一个闭子集，那么子空间$(Y,d_{Y\times Y})$也是完备的。

（注：这个命题的通俗解释就是完备度量空间总是闭的，无论放在哪个空间中，它总是一个闭集；对任意一个不完备的度量空间(X,d)，都可以通过**完备化**的操作将其变为一个更大的完备度量空间$(\overline{X},\overline{d})$包含$(X,d)$，关于这部分的内容，可以参考习题12.4.8）

课后习题

12.4.1 证明引理12.4.3（**提示：回顾对命题6.6.5的证明**）

> 根据题设$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$收敛于极限x_0，于是对任意的$\varepsilon>0$，存在$N\geq m$使得对任意的$n\geq N$都有$d(x^{(n)},x_0)\leq\varepsilon$。
>
> 然后考虑$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$是$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$的一个子序列，相应的，$(n_j)_{j=1}^{\infty}$是一个严格单调递增的整数序列，于是可以利用整数的性质归纳得到对任意的$j\geq 1$都有$n_j\geq m+j-1$，从而对任意的$j\geq N-m+1$，我们有$n_j\geq N$，于是
>
> $$d(x^{(n_j)},x_0)\leq\varepsilon$$
>
> 综上，于是根据定义12.1.14有$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$也收敛于$x_0$，于是命题12.4.3得证。

12.4.2 证明命题12.4.5（**提示：回顾对命题6.6.6的证明**）

> 分别证明充分必要性：
>
> 若L是$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$的一个极限点，则根据定义12.4.4，对于任意的$N\geq m$和$\varepsilon>0$，存在一个$n\geq N$使得$d(x^{(n)},L)\leq\varepsilon$。于是我们做归纳定义，先定义$n_0:=m$。然后对任意的$i>0$，我们定义有：
>
> $$n_i:=\min\left\{j\in\mathbb{N}:j>n_{i-1}\text{且}d(x^{(j)},L)\leq\frac{1}{i}\right\}$$
>
> 根据极限点的定义，集合$\left\{j\in\mathbb{N}:j>n_{i-1}\text{且}d(x^{(j)},L)\leq\frac{1}{i}\right\}$总是非空的，于是根据$\mathbb{N}$的良序性对任意的$i>0$，$n_i$的定义总是有效的，并且序列$(n_i)_{i=0}^{\infty}$是一个严格单调递增的序列（于是$(x^{(n_i)})_{i=1}^{\infty}$是$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$的一个子序列）。
>
> 然后我们来证明子序列$(x^{(n_i)})_{i=1}^{\infty}$收敛于$L$。
>
> 对任意的实数$\varepsilon>0$，根据阿基米德性质（命题5.4.13）都存在自然数N使得$\varepsilon>\frac{1}{N}$（显然N不会是0），然后对任意的$i\geq N$根据上面的递归定义我们有：
>
> $$d(x^{(n_i)},L)\leq\frac{1}{i}\leq\frac{1}{N}\leq\varepsilon$$
>
> 于是根据定义12.1.14可以得到$(x^{(n_i)})_{i=1}^{\infty}$收敛于$L$。
>
> ---
>
> 若$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$存在一个收敛于L的子序列$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$。由于$(n_j)_{j=1}^{\infty}$是一个严格单调递增的整数序列，于是我们可以利用整数的性质归纳得到对任意的$j\geq 1$都有$n_j\geq m+j-1$；又因为$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$收敛于$L$，于是对任意$\varepsilon>0$，总是存在一个$J\geq 1$使得对任意的$j\geq J$都有$d(x^{(n_j)},L)\leq\varepsilon$。
>
> 于是考虑任意的$\varepsilon>0$与任意的$N\geq m$。由于$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$收敛于$L$，于是存在$J\geq 1$使得对任意$j\geq J$都有$d(x^{(n_j)},L)\leq\varepsilon$；另一方面，根据我们上面的结论若$j\geq N+1-m$，则$n_j\geq n_{N+1-m}\geq N$。于是考虑$j=\max(J,N+1-m)$，于是对$n:=n_j$，它同时满足：
>
> - $j\geq N+1-m\implies n\geq N$。

- $j \geq J \Longrightarrow d(x^{(n)}, L) \leq \varepsilon$。

从而可以总结有：

对任意的$\varepsilon > 0$与任意的$N \geq m$，存在一个$n \geq N$使得$d(x^{(n)}, L) \leq \varepsilon$。

于是根据定义12.4.4，L是$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$的一个极限点。

12.4.3 证明引理12.4.7（提示：回顾对命题6.1.12的证明）

对于任意的$\varepsilon > 0$，令有$\varepsilon' := \dfrac{\varepsilon}{3}$。根据题设$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$收敛于$x_0$，于是存在$N \geq m$使得对任意$n \geq N$都有$d(x^{(n)}, x_0) \leq \varepsilon'$。

此时考虑任意的i，$j \geq N$，根据度量的三角不等式我们有：

$$d(x^{(i)}, x^{(j)}) \leq d(x^{(i)}, x_0) + d(x^{(j)}, x_0) \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$$

于是根据定义12.4.6，$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$是一个柯西序列。

12.4.4 证明引理12.4.9

根据题设，由于$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$是柯西序列，于是对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个$N \geq m$使得$d(x^{(j)}, x^{(k)}) < \varepsilon$对所有的$j$，$k \geq N$均成立；又有子序列$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$收敛于$x_0$，于是对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个$J \geq 1$使得$d(x^{(n_j)}, x_0) \leq \varepsilon$对所有的$j \geq J$均成立；最后由于$(n_j)_{j=1}^{\infty}$是一个严格单调递增的整数序列，于是我们可以利用整数的性质归纳得到对任意的$j \geq 1$都有$n_j \geq m + j - 1$。

于是考虑任意的$\varepsilon > 0$，取$\varepsilon' := \dfrac{\varepsilon}{2}$。根据上面的结论，首先存在一个$J' \geq 1$使得$d(x^{(n_j)}, x_0) \leq \varepsilon'$对所有的$j \geq J'$都成立；并且存在一个$N' \geq m$使得$d(x^{(i)}, x^{(k)}) < \varepsilon'$对所有的$j$，$k \geq N'$均成立。于是令有$j_0 := \max(J', N' + 1 - m)$，然后令$N := n_{j_0}$，可以讨论得到有：

- $j_0 \geq J' \Longrightarrow d(x^{(N)}, x_0) \leq \varepsilon'$。
- $j_0 \geq N' + m - 1 \xRightarrow[N=n_{j_0}]{(n_j)_{j=1}^{\infty}\text{严格单调递增}} N \geq n_{N'+1-m} \geq N'$，于是对任意$n \geq N$都有$d(x^{(N)}, x^{(n)}) < \varepsilon'$。
- $j_0 \geq J' \geq 1 \xRightarrow[N=n_{j_0}]{(n_j)_{j=1}^{\infty}\text{严格单调递增}} N \geq n_1 \geq m$。

于是对任意的$n \geq N$，根据度量的三角不等式我们有：

$$d(x^{(n)}, x_0) \leq d(x^{(N)}, x^{(n)}) + d(x^{(N)}, x_0) \leq 2\varepsilon' = \varepsilon$$

综合上面的讨论内容，我们可以得到：

对任意的$\varepsilon > 0$，都存在$N \geq m$使得对任意的$n \geq N$都有$d(x^{(n)}, x_0) \leq \varepsilon$。

于是根据定义12.1.14，$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$收敛于x_0。

12.4.5 设$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$是度量空间(X, d)中的一个点列，并设$L \in X$，证明：如果L是序列$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$的一个极限点，那么L就是集合$\{x^{(n)} : n \geq m\}$的附着点。并思考：逆命题成立吗

若L是序列$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$的一个极限点，则根据定义12.4.4，对于任意的$N \geq m$和$r > 0$存在一个$n \geq N$使得$d(x^{(n)}, L) \leq r$。特别地，我们只考虑$N = m$，于是对任意的$r > 0$，都存在$n \geq m$有：

$$d(x^{(n)}, L) \leq 0.5r \Longrightarrow x^{(n)} \in B(L, r)$$

> 换言之，球$B(L,r)\cap\{x^{(n)}:n\geq m\}$总是非空的，于是根据定义12.2.9有$L$是$\{x^{(n)}:n\geq m\}$的附着点。
>
> ---
>
> 逆命题显然是不成立的。事实上，由于对任意$n\geq m$都有$x^{(n)}$是$\{x^{(n)}:n\geq m\}$的一个附着点，如果逆命题成立的话根据命题12.4.5都存在一个$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$的子序列收敛于$x^{(n)}$。但是随便寻找一个收敛的点列$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$，根据命题12.4.3应该有$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$的所有子序列收敛于相同的值，而你显然不能说度量空间中任意一个收敛的点列其中的点都是同一个点。

12.4.6 证明：柯西序列最多有一个极限点

> 若柯西序列$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$存在极限点x_0，则根据命题12.4.5则存在柯西序列$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$的子序列$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$收敛于这个极限点$x_0$；再根据命题12.4.9，于是这个柯西序列$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$本身是收敛于这个极限点的；接着使用命题12.4.3，这个柯西序列$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$的任意子序列都应当收敛于这个极限点。于是对任意该柯西序列的极限点x，根据命题12.4.5最终只能推导出$x=x_0$，也就是说一个柯西序列$(x^{(n)})_{n=m}^{\infty}$最多只能有一个极限点。

12.4.7 证明引理12.4.12

> 需要注意到，对于任意一个完备的度量空间(X,d)来说，$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$是(X,d)中收敛于某个点x_0的序列当且仅当它是一个柯西序列，这是因为：
>
> > 根据命题12.4.7，若$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}(X,d)$中收敛于$x_0$的序列则$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$是一个柯西序列；若$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$是一个柯西序列则根据完备度量空间的定义我们有$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$收敛于某个点$x_0$，于是充分必要性得证，两者是等价的。
>
> 于是分别证明：
>
> - 证明：设(X,d)是一个度量空间，并设$(Y,d_{Y\times Y})$是(X,d)的一个子空间，如果$(Y,d_{Y\times Y})$是完备的，那么Y一定是X中的闭集。
>
> 如果$(Y,d_{Y\times Y})$是完备的，那么对任意的$(y^{(n)})_{n=0}^{\infty}$是Y中收敛于某个$x_0\in X$的序列，根据上面的推论我们知道$(y^{(n)})_{n=0}^{\infty}$也是Y中的柯西序列，于是根据完备度量空间的定义我们有$\lim\limits_{n\to\infty}y^{(n)}\in Y$，从而根据命题12.2.15(b)，我们有$Y$是$X$中的闭集。
>
> ---
>
> - 证明：反过来，如果(X,d)是一个完备度量空间，并且Y是X的一个闭子集，那么子空间$(Y,d_{Y\times Y})$也是完备的。
>
> 由于(X,d)是一个完备度量空间，因此根据推论任意X中的柯西序列都是X中的收敛序列，特别地这个结论也对X的子集Y中的收敛序列成立。于是对任意$(y^{(n)})_{n=0}^{\infty}$是Y中的柯西序列，$(y^{(n)})_{n=0}^{\infty}$也是Y中的收敛序列，然后根据命题12.2.15(b)可以由Y是闭集推出极限值$\lim\limits_{n\to\infty}y^{(n)}$属于$Y$。从而根据完备度量空间的定义$(Y,d_{Y\times Y})$也是完备的。
>
> 综上，题目结论证明完毕。

12.4.8 下列结构推广了第5章中利用有理数构造实数的思想，这样我们就能把每一个度量空间都看成一个完备度量空间的子空间，下面设(X,d)是一个度量空间

(a) 给定X中的任意一个柯西序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$，引入形式极限$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n$。如果形式极限$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n$和$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}y_n$满足$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$，那么我们称这两个形式极限是相等的。证明：这种相等关系遵循自反性，对称性和传递性公理

> - 自反性：
>
>   > 证明：对X中的任意一个柯西序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$，我们都有$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n$。
>   >
>   > 注意到由于度量满足的公理(a)我们总是有$d(x_n,x_n)=0$对任意的$n\geq 1$成立，很显然常数序列$(0)_{n=1}^{\infty}$的极限值$\lim\limits_{n\to\infty}0$为0。于是这种相等关系是满足自反性的。
>
> - 对称性：
>
>   > 证明：对X中的任意柯西序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$与$(y_n)_{n=1}^{\infty}$，若$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}y_n$，则$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}y_n=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n$。
>   >
>   > 根据定义$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}y_n$当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$，注意到由于度量满足的公理(c)我们总是有$d(x_n,y_n)=d(y_n,x_n)$对任意的$n\geq 1$成立，于是$\lim\limits_{n\to\infty}d(y_n,x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$，根据上面的定义也即有$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}y_n=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n$。
>
> - 传递性：
>
>   > 证明：对X中任意柯西序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$，$(y_n)_{n=1}^{\infty}$与$(z_n)_{n=1}^{\infty}$，若$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}y_n$且$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}y_n=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}z_n$，则有$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}z_n$。
>   >
>   > 根据定义由题设我们有$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$与$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,z_n)=0$，于是根据度量的三角不等式，非负性与比较原理我们有：
>   >
>   > $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}0 &\leq \lim_{n\to\infty}d(x_n,z_n)\leq \lim_{n\to\infty}[d(x_n,y_n)+d(y_n,z_n)]\\ =0 & \qquad\qquad\qquad = \lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)+\lim_{n\to\infty}d(y_n,z_n)\\ & \qquad\qquad\qquad = 0\end{aligned}$$
>   >
>   > 从而根据定义，我们有$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}z_n$。

(b) 设$\overline{X}$是由X中所有柯西序列的形式极限构成的空间，而且$\overline{X}$具有上述相等关系。定义度量$d_{\overline{X}}:\overline{X}\times\overline{X}\to\mathbb{R}^+$为

$$d_{\overline{X}}(\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n,\mathrm{LIM}_{n\to\infty}y_n):=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$$

证明：这个函数是定义明确的（这不仅意味着极限$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$存在，还意味着该函数需要满足替换公理，参见[引理5.3.7]），并给出$\overline{X}$的度量空间结构（这里应该是要证明$(\overline{X},d_{\overline{X}})$是一个度量空间吧（大概），没看到原书中有提到"the structure of a metric space"的具体定义）

> 证明：这个函数是定义明确的。
>
> 首先需要证明对X中的任意柯西序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$与$(y_n)_{n=1}^{\infty}$，极限$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$存在并且属于$\mathbb{R}^+$
>
> 。

首先$(d(x_n,y_n))_{n=0}^{\infty}$是一个正实数的序列（于是它是带有标准度量的完备度量空间$\mathbb{R}$中的序列）。于是注意到对任意的$\varepsilon>0$，令有$\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{2}$。由于$(x_n)_{n=1}^{\infty}$与$(y_n)_{n=1}^{\infty}$都是柯西序列，于是分别存在$N_x\geq 1$与$N_y\geq 1$使得对任意$i$，$j\geq N_x$有$d(x_i,x_j)<\varepsilon'$，对任意$i$，$j\geq N_y$有$d(y_i,y_j)<\varepsilon'$。令有$N:=\max(N_x,N_y)$，于是根据度量的三角不等式，对任意的$i$，$j\geq N$都有：

$$\begin{aligned}d(x_i,y_i)\leq d(x_i,x_j)+d(x_j,y_j)+d(y_j,y_i)\leq d(x_j,y_j)+2\varepsilon'\\ d(x_j,y_j)\leq d(x_j,x_i)+d(x_i,y_i)+d(y_i,y_j)\leq d(x_i,y_i)+2\varepsilon'\end{aligned}$$

于是即有$d(x_j,y_j)-2\varepsilon'\leq d(x_i,y_i)\leq d(x_j,y_j)+2\varepsilon'\implies|d(x_i,y_i)-d(x_j,y_j)|\leq\varepsilon$。

此时根据定义6.1.3我们可以得到$(d(x_n,y_n))_{n=0}^{\infty}$是一个柯西序列，然后由于$\mathbb{R}$的完备性我们可以得到$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)\in\mathbb{R}$。然后依据比较原理与度量的非负性，显然有$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)\geq 0$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^+$。

然后需要证明$d_{\overline{X}}$是满足替换公理的，即对任意$(x_n)_{n=1}^{\infty}$，$(x'_n)_{n=1}^{\infty}$与$(y_n)_{n=1}^{\infty}$是柯西序列，若有$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x'_n$，则有
$d_{\overline{X}}(\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n,\mathrm{LIM}_{n\to\infty}y_n)=d_{\overline{X}}(\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x'_n,\mathrm{LIM}_{n\to\infty}y_n)$。

根据题设即证明：若有$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x'_n)=0$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x'_n,y_n)$。

不妨记有$x_0:=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$与$x'_0:=\lim\limits_{n\to\infty}d(x'_n,y_n)$，于是根据收敛的定义我们有对任意的$\varepsilon>0$，都有：

- 存在$N_0\geq 1$使得对任意的$n\geq N_0$都有$d(x_n,x'_n)\leq\varepsilon$。
- 存在$N\geq 1$使得对任意的$n\geq N$都有$|d(x_n,y_n)-x_0|\leq\varepsilon$。
- 存在$N'\geq 1$使得对任意的$n\geq N'$都有$|d(x'_n,y_n)-x'_0|\leq\varepsilon$。

于是我们令有$M:=\max\{N_0,N,N'\}$，然后对任意的$n\geq M$，根据绝对值的三角不等式我们有：

$$|x_0-x'_0|\leq|x_0-d(x_n,y_n)|+|d(x_n,y_n)-d(x'_n,y_n)|+|d(x'_n,y_n)-x'_0|$$

然后根据度量的三角不等式，我们有：

$$\begin{aligned}d(x_n,y_n)\leq d(x_n,x'_n)+d(x'_n,y_n)\implies d(x_n,y_n)-d(x'_n,y_n)\leq d(x_n,x'_n)\\ d(x'_n,y_n)\leq d(x'_n,x_n)+d(x_n,y_n)\implies d(x'_n,y_n)-d(x_n,y_n)\leq d(x_n,x'_n)\end{aligned}$$

于是$|d(x_n,y_n)-d(x'_n,y_n)|\leq d(x_n,x'_n)$，从而有：

$$|x_0-x'_0|\leq|x_0-d(x_n,y_n)|+d(x_n,x'_n)+|d(x'_n,y_n)-x'_0|\leq 3\varepsilon$$

考虑到$|x_0-x'_0|$是与ε无关的常数值，并且ε是任意的，于是只能有
$|x_0-x'_0|=0\iff x_0=x'_0$。

于是$d_{\overline{X}}(\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n,\mathrm{LIM}_{n\to\infty}y_n)=d_{\overline{X}}(\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x'_n,\mathrm{LIM}_{n\to\infty}y_n)$得证。综上于是函数$d_{\overline{X}}$是定义明确的。

证明：$(\overline{X},d_{\overline{X}})$是一个度量空间。

于是要求证明：

- 对任意$x\in\overline{X}$，我们都有$d_{\overline{X}}(x,x)=0$。

> > 根据相等的定义，于是若有$x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} x_n$，则显然有$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_n) = 0$，于是$d_{\overline{X}}(x, x) = 0$。
>
> - 对任意x，$y \in \overline{X}$满足$x \neq y$，我们都有$d_{\overline{X}}(x, y) \neq 0$。
>
> > 根据相等的定义，于是若有$x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} x_n$与$y = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} y_n$，由$x \neq y$我们有$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \neq 0$。于是根据$d_{\overline{X}}$的定义我们有：
> >
> > $$d_{\overline{X}}(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \neq 0$$
> >
> > 于是总是满足此条件。
>
> - 对任意x，$y \in \overline{X}$，我们都有$d_{\overline{X}}(x, y) = d_{\overline{X}}(y, x)$。
>
> > 若有$x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} x_n$与$y = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} y_n$。由于$d$是度量满足公理(c)，于是对任意的$n$都有$d(x_n, y_n) = d(y_n, x_n)$，从而有：
> >
> > $$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n)$$
> >
> > 于是根据$d_{\overline{X}}$的定义即有$d_{\overline{X}}(x, y) = d_{\overline{X}}(y, x)$。
>
> - 对任意x，y与$z \in \overline{X}$，我们都有$d_{\overline{X}}(x, z) = d_{\overline{X}}(x, y) + d_{\overline{X}}(y, z)$。
>
> > 若有$x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} x_n$，$y = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} y_n$与$z = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} z_n$。由于由于$d$是度量满足度量的三角不等式，于是对任意的$n$都有$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$，从而根据比较原理有：
> >
> > $$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} [d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)] = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n)$$
> >
> > 根据$d_{\overline{X}}$的定义即有$d_{\overline{X}}(x, z) = d_{\overline{X}}(x, y) + d_{\overline{X}}(y, z)$。
>
> 综上，于是$(\overline{X}, d_{\overline{X}})$是一个度量空间。

(c) 证明度量空间$(\overline{X}, d_{\overline{X}})$是完备的

> 对任意$\overline{X}$中的柯西序列$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$，对任意的$n \geq 0$，我们设有$x^{(n)} = \mathrm{LIM}_{m\to\infty} x_m^{(n)}$，于是对任意的$n \geq 0$都有$(x_m^{(n)})_{m=0}^{\infty}$是$X$中一个柯西序列且其形式极限为$x^{(n)}$。
>
> 为证明度量空间$(\overline{X}, d_{\overline{X}})$是完备的，根据完备定义即证明存在$a \in \overline{X}$使得$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$依度量$d_{\overline{X}}$收敛于$a$。不妨设$a := \mathrm{LIM}_{m\to\infty} a_m$，于是$(a_m)_{m=0}^{\infty}$也是$X$中的柯西序列且形式极限为$a$。根据收敛的定义，即要求证明：对任意$\varepsilon > 0$都存在$N \geq 0$使得对任意的$n \geq N$都满足$d_{\overline{X}}(a, x^{(n)}) \leq \varepsilon$，即：
>
> $$\lim_{m\to\infty} d(a_m, x_m^{(n)}) \leq \varepsilon$$
>
> 由于在(b)中我们已经阐述了$d_{\overline{X}}$是定义明确的，于是这个极限值肯定存在，只需要证明其值小于等于ε即可。于是即只要能证明对任意的$n \geq N$都能指定一个整数$M_n \geq 0$满足对任意的$m \geq M_n$都有$d(a_m, x_m^{(n)}) \leq \varepsilon$，则根据比较原理可得有$\lim\limits_{m\to\infty} d(a_m, x_m^{(n)}) \leq \varepsilon$。
>
> 于是开始我们的证明。对任意的$m \in \mathbb{N}$，由于$(x_k^{(m)})_{k=0}^{\infty}$是一个柯西序列，于是存在$K_m \geq 0$使得对任意的$i$，$j \geq K_m$都有$d(x_i^{(k)}, x_j^{(k)}) \leq \dfrac{1}{k+1}$（在这一步中需要用到选择公理），特别地，我们需要用到$i = K_m$的情形。定义x_k有：
>
> $$a_m := x_{K_m}^{(m)}$$
>
> 然后我们证明$(a_m)_{m=0}^{\infty}$就是我们要找的X中柯西序列。

首先证明$(a_m)_{m=0}^{\infty}$是X中柯西序列:

> 于是即要证明，对任意$\varepsilon > 0$都存在$M \geq 0$使得对任意的i，$j \geq M$使得:
>
> $$d(a_i, a_j) \leq \varepsilon \Longrightarrow d(x_{K_i}^{(i)}, x_{K_j}^{(j)}) \leq \varepsilon$$
>
> 由于$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$是$\overline{X}$中的柯西序列，于是存在$N_0 \geq 0$使得对任意的k，$l \geq N_0$都有:
>
> $$d_{\overline{X}}(x^{(k)}, x^{(l)}) \leq \frac{\varepsilon}{4} \Longrightarrow \lim_{m\to\infty} d(x_m^{(k)}, x_m^{(l)}) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$
>
> 特别地，根据度量的非负性与实数序列收敛的定义，对$\frac{\varepsilon}{4}$存在一个整数$N_1 \geq 0$对任意的$m \geq N_1$都满足:
>
> $$|d(x_m^{(k)}, x_m^{(l)}) - d_{\overline{X}}(x^{(k)}, x^{(l)})| \leq \frac{\varepsilon}{4} \Longrightarrow d(x_m^{(k)}, x_m^{(l)}) \leq \frac{2\varepsilon}{4}$$
>
> 然后根据阿基米德性质，存在整数$N_2 \geq 0$满足$\frac{1}{N_2} \leq \frac{\varepsilon}{4}$，从而根据$(a_m)_{m=0}^{\infty}$的定义对任意$k \geq N_2$有:
>
> $$\forall\, l \geq K_k, d(x_{K_k}^{(k)}, x_l^{(k)}) \leq \frac{1}{k+1} < \frac{\varepsilon}{4}$$
>
> 于是此时我们定义$M := \max(N_0, N_2)$，并令有$k := \max(N_1, K_i, K_j)$。对任意的i，$j \geq M$我们可以根据度量的三角不等式讨论得到有:
>
> $$d(x_{K_i}^{(i)}, x_{K_j}^{(j)}) \leq d(x_{K_i}^{(i)}, x_k^{(i)}) + d(x_k^{(i)}, x_k^{(j)}) + d(x_k^{(j)}, x_{K_j}^{(j)})$$
>
> 由于$k \geq N_1$与i，$j \geq N_0$，于是根据上面的讨论可以得到$d(x_k^{(i)}, x_k^{(j)}) \leq \frac{2\varepsilon}{4}$；又因为$i$，$j \geq N_2$，$k \geq K_i$与$k \geq K_j$，于是根据上面的讨论可以得到$d(x_{K_i}^{(i)}, x_k^{(i)}) \leq \frac{\varepsilon}{4}$与$d(x_{K_j}^{(j)}, x_k^{(j)}) \leq \frac{\varepsilon}{4}$。从而可以推知:
>
> $$d(x_{K_i}^{(i)}, x_{K_j}^{(j)}) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{2\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$
>
> 考虑到$(a_m)_{m=0}^{\infty}$的定义，总结下上面的结论可以得到:
>
> 对任意的$\varepsilon > 0$，存在$M \geq 0$使得对任意的i，$j \geq M$都满足$d(a_i, a_j) < \varepsilon$。
>
> 于是根据定义12.4.6，$(a_m)_{m=0}^{\infty}$是X中柯西序列。

然后证明$(a_m)_{m=0}^{\infty}$是我们想要的序列，也就是证明对任意$\varepsilon > 0$都存在$N \geq 0$使得对任意的$n \geq N$都满足$\lim_{m\to\infty} d(a_m, x_m^{(n)}) \leq \varepsilon$:

> 由于$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$是$\overline{X}$中的柯西序列，于是存在$N_0 \geq 0$使得对任意的$n \geq N_0$都有:
>
> $$d_{\overline{X}}(x^{(n)}, x^{(N_0)}) \leq \frac{\varepsilon}{4} \Longrightarrow \lim_{m\to\infty} d(x_m^{(n)}, x_m^{(N_0)}) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$
>
> 我们令有$N := N_0$。考虑任意的$n \geq N$，度量的非负性与实数序列收敛的定义，对$\frac{\varepsilon}{4}$存在一个整数$N_1 \geq 0$对任意的$m \geq N_1$都满足:
>
> $$|d(x_m^{(N)}, x_m^{(n)}) - d_{\overline{X}}(x^{(N)}, x^{(n)})| \leq \frac{\varepsilon}{4} \Longrightarrow d(x_m^{(N)}, x_m^{(n)}) \leq \frac{2\varepsilon}{4}$$
>
> 此外，由于$(x_m^{(n)})_{m=0}^{\infty}$是$X$中一个柯西序列，于是根据柯西序列的定义，对$\frac{\varepsilon}{4}$存在一个整数$N_2 \geq 0$满足对任意的$k$，$l \geq N_2$都有:

> > $$d(x_k^{(n)},x_l^{(n)})\leq\frac{\varepsilon}{4}$$
> >
> > 最后，根据阿基米德性质可以得到存在整数$N_3\geq 0$满足$\dfrac{1}{N_3}\leq\dfrac{\varepsilon}{4}$，从而根据$(a_m)_{m=0}^{\infty}$的定义对任意$m\geq N_3$有：
> >
> > $$\forall\ k\geq K_m,d(x_{K_m}^{(m)},x_k^{(m)})\leq\frac{1}{k+1}<\frac{\varepsilon}{4}$$
> >
> > 于是我们令有$M:=\max\{N_0,N_2,N_3\}$，并令有$k:=\max\{K_m,N_1,N_2\}$，根据度量的三角不等式，对任意的$m\geq M$，可以变换$d(a_m,x_m^{(n)})$有：
> >
> > $$d(x_{K_m}^{(m)},x_m^{(n)})\leq d(x_{K_m}^{(m)},x_k^{(m)})+d(x_k^{(m)},x_k^{(n)})+d(x_k^{(n)},x_m^{(n)})$$
> >
> > 然后注意到对右边的三项，对第一项，由于$k\geq K_m$且$m\geq N_3$，于是根据上面的讨论我们有$d(x_{K_m}^{(m)},x_k^{(m)})\leq\dfrac{\varepsilon}{4}$；对第二项，由于$m$，$n\geq N_0$且$k\geq N_1$，于是根据上面的讨论我们有$d(x_k^{(m)},x_k^{(n)})\leq\dfrac{2\varepsilon}{4}$；对第三项，由于$m$，$k\geq N_2$，于是根据上面的讨论我们有$d(x_k^{(n)},x_m^{(n)})\leq\dfrac{\varepsilon}{4}$。于是上面的不等式可以化为：
> >
> > $$d(x_{K_m}^{(m)},x_m^{(n)})\leq\frac{\varepsilon}{4}+\frac{2\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$$
> >
> > 从而可以总结上面得到的结论有：
> >
> > 对任意$\varepsilon>0$都存在$N\geq 0$，使得对任意的$n\geq N$都可以指定一个整数$M\geq 0$满足对任意的$m\geq M$都有$d(x_{K_m}^{(m)},x_m^{(n)})\leq\varepsilon$成立。
> >
> > 于是根据比较原理，我们可以将这个结论化为：对任意$\varepsilon>0$都存在$N\geq 0$使得对任意的$n\geq N$都满足$\lim\limits_{m\to\infty}d(a_m,x_m^{(n)})\leq\varepsilon$，证明完毕。
>
> 综上，于是如同在证明开始前所述的内容，我们对任意$\overline{X}$中的柯西序列$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$都能找到$a\in\overline{X}$使得$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$依度量$d_{\overline{X}}$收敛于a。这表明了度量空间$(\overline{X},d_{\overline{X}})$是完备的。

(d) 我们将元素$x\in X$与$\overline{X}$中的x对应的形式极限$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x$等同起来。通过证明：$x=y$等价于$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}y$来证明这样的做法是合理的，利用这种等价关系证明$d(x,y)=d_{\overline{X}}(x,y)$，从而$(X,d)$可以视为$(\overline{X},d_{\overline{X}})$的子空间

> 注意到对任意x，$y\in X$有$x=y$当且仅当$d(x,y)=0$，又因为常数序列的极限$\lim\limits_{n\to\infty}d(x,y)=d(x,y)$。从而根据(a)中相等的定义，$x=y$当且仅当$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}y$。

(e) 证明：X在$\overline{X}$中的闭包就是$\overline{X}$（这解释了为什么用记号$\overline{X}$）

> X在$\overline{X}$中的闭包必然是包含于$\overline{X}$的，于是我们只需要证明$\overline{X}$包含于X的闭包就可以推出$\overline{X}$就是X的闭包。
>
> 考虑任意的$x\in\overline{X}$，根据定义存在X中的柯西序列$(x_n)_{n=0}^{\infty}$使得$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}x_n$，于是根据(f)的结论我们可以得到$(x_n)_{n=0}^{\infty}$是依度量$d_{\overline{X}}$收敛于$x$。于是根据命题12.2.10有$x$是$X$在$\overline{X}$中的附着点，即有$x$属于$X$的闭包。
>
> 于是综合即可得到$\overline{X}$包含于X的闭包，然后如同我们在最开始所说的，这表明了$\overline{X}$就是X的闭包。

(f) 证明：形式极限和真正的极限是一致的。换言之，如果$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是X中任意一个柯西序列，那么在$\overline{X}$中就有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \text{LIM}_{n\to\infty}x_n$

> 对任意$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是X中任意一个柯西序列，我们令有$x := \text{LIM}_{n\to\infty}x_n$，然后考虑任意的$\varepsilon > 0$。根据定义12.4.6，存在$N \geq 1$使得对任意$i$，$j \geq N$都有$d(x_i, x_j) \leq \varepsilon$成立。然后考虑任意的$n \geq N$，根据$d_{\overline{X}}$定义我们有：
>
> $$d_{\overline{X}}(x_n, x) = \lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m)$$
>
> （注意下标）
>
> 由于对任意的$m \geq N$，我们由柯西序列定义得到的结论告诉我们应该有$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$，然后考虑到实数序列的极限值同起点无关（习题6.1.3）与比较原理，我们有：
>
> $$\forall\, m \geq N, d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \implies \lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$
>
> 于是即有$d_{\overline{X}}(x_n, x) \leq \varepsilon$，综上我们可以总结有：
>
> 对任意的$\varepsilon > 0$，存在一个$N \geq 1$使得对任意的$n \geq N$都有$d_{\overline{X}}(x_n, x) \leq \varepsilon$。
>
> 于是根据定义12.1.14，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$依度量$d_{\overline{X}}$收敛于x，题目结论证明完毕。

本节相关跳转

[实分析 5.3 实数的构造]

[实分析 6.1 收敛与极限定律]

[实分析 6.4 上极限、下极限和极限点]

[实分析 6.6 子序列]