15.2 实解析函数

定义

1. (15.2.1 实解析函数) 设E是$\mathbb{R}$的子集，并设$f:E\to\mathbb{R}$是一个函数。设a是E的内点。如果E中存在一个开区间$(a-r,a+r)$（其中$r>0$），使得某个以a为中心的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$满足收敛半径大于等于$r$且该级数在$(a-r,a+r)$上收敛于$f$，则称$f$在$a$处是**实解析的**；如果$E$是一个开集，并且$f$在$E$中的每一点处都是实解析的，那么称$f$**在$E$上是实解析的**。

   （注：实解析的概念同**复解析**存在密切关联，但是这本书不讲）

2. (15.2.4 k次可微性) 设E是$\mathbb{R}$的子集。我们称函数$f:E\to\mathbb{R}$在E上是1**次可微的**，当且仅当f是可微的；对任意的$k\geq 2$，我们称$f:E\to\mathbb{R}$在E上是k**次可微的**（或者说f是k次可微的），当且仅当f是可微的并且f'是$k-1$次可微的。如果函数f是k次可微的，则我们定义f的1**次导函数**$f^{(1)}:E\to\mathbb{R}$为$f^{(1)}:=f'$，并利用递归法则对所有的$k\geq 2$定义f的k**次导函数**$f^{(k)}:E\to\mathbb{R}$为$f^{(k)}:=(f^{(k-1)})'$。特别地，我们定义f的0**次导函数**$f^{(0)}:=f$，并令有任何函数都是0次可微的。最后，我们称一个函数是**无限可微的**（或者**光滑的**），当且仅当对任意的$k\geq 0$该函数都是k次可微的。

   （注：根据定理15.1.6(c)，(d)的结论我们知道如果函数f在a处是实解析的，那么存在某个$r>0$使得f在$(a-r,a+r)$上都是连续且可微的，但是实解析函数的性质不止如此，在接下来的内容中我们可以看到实解析函数都是无限可微的）

命题

1. (15.2.6 实解析函数是k次可微的) 设E是$\mathbb{R}$的子集，a是E的内点，并设$f:E\to\mathbb{R}$是在a处实解析的函数。那么存在一个$r>0$使得对于所有的$x\in(a-r,a+r)$都有幂级数展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

   于是，对于每一个$k\geq 0$，函数f在$(a-r,a+r)$上都是k次可微的，并且f的k次导函数可以由下面的式子给出：

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+k}(n+1)(n+2)\dots(n+k)(x-a)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+k}\frac{(n+k)!}{n!}(x-a)^n\end{aligned}$$

   其中$x\in(a-r,a+r)$。

   > 推论：
   >
   > 1. (15.2.7 实解析函数是无限可微的) 设E是$\mathbb{R}$的开子集，并设$f:E\to\mathbb{R}$是E上的实解析函数。那么f在E上是无限可微的，并且f的所有导函数也都是E上的实解析函数。
   >
   >   （注：推论15.2.7的逆命题是不成立的，有些函数是无限可微但不是实解析的，在习题15.5.4中给出了一个例子）
   >
   > 2. (15.2.10 泰勒公式) 设E是$\mathbb{R}$的子集，a是E的内点，并设$f:E\to\mathbb{R}$是在a处实解析的函数。存在某个$r>0$，使得对于所有的$x\in(a-r,a+r)$，f都有幂级数展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

那么，对于任意的整数$k \geq 0$，有

$$f^{(k)}(a)=k!c_k$$

于是有泰勒公式：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

其中$x \in (a-r, a+r)$。

（注：这个公式由布鲁克·泰勒提出，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$有时被称为$f$在$a$附近的**泰勒级数**，泰勒公式断言了如果一个函数是实解析的，那么它就等于自身的泰勒级数；需要注意的是，泰勒公式只适用于实解析函数，有一些函数是无限可微的，但是泰勒公式对它们并不成立，例如习题15.5.4中的例子）

3. （15.2.12 幂级数的唯一性）设E是$\mathbb{R}$的子集，a是E的内点，并设$f: E \to \mathbb{R}$是在a处实解析的函数。如果f有两个以a为中心的幂级数展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

和

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$$

并且每个级数都有一个非0的收敛半径，那么对于所有的$n \geq 0$都有$c_n=d_n$。

（注：一个需要注意的误区就是，推论15.2.12断定实解析f在a处的幂级数必然是唯一的，但是在不同的点附近的幂级数却必然是不同的）

课后习题

15.2.1 设$n \geq 0$是一个整数，c和a都是实数，并设f是函数$f(x):=c(x-a)^n$。证明：f是无限可微的，并且对所有的整数$0 \leq k \leq n$，都有$f^{(k)}(x)=c\frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}$。当$k>n$时，情况又如何

> 为了证明这个结论，我们需要证明一个很直观的辅助结论
>
> > 结论：设E是$\mathbb{R}$的子集，$k \geq 1$是一个整数，$f: E \to \mathbb{R}$是一个$k-1$次可微的函数，并且f的$k-1$次导函数$f^{(k-1)}$也是可微的。那么我们有f是k次可微的。
> >
> > 证明：
> >
> > 首先根据定义15.2.4，由于f是$k-1$次可微的于是有f是可微的且f'（也就是$f^{(1)}$）是$k-2$次可微的，重复应用定义15.2.4，于是对任意的$1 \leq m \leq k-2$都有$f^{(m)}$是可微的；然后根据定义15.2.4，由于$f^{(k-1)}$是可微的（也即1次可微的），结合$f^{(k-2)}$是可微的（也即1次可微的）且$f^{(k-1)}=(f^{(k-2)})'$可以得到$f^{(k-2)}$是2次可微的，同样重复这样的流程，最终能够得到f是k次可微的，于是结论得证。
>
> ---

> 对0次导函数可以通过直接代入$k=0$验证$f^{(0)}=f$，我们只考虑$k\geq 1$的情况去证明f总是k次可微的。
>
> 显然当$k=1$时根据习题10.1.5我们有f是1次可微的并且$f^{(1)}(x)=c\frac{n!}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$为真。然后设$1\leq k\leq n$是一个整数，并设对任意的$1\leq m<k$都有$f$是$m$次可微的，并且有：
>
> $$f^{(m)}(x)=c\frac{n!}{(n-m)!}(x-a)^{n-m}$$
>
> 我们期望能够证明f对k也成立上面的结论，这样就可以通过强归纳法得到对任意的$1\leq k\leq n$都成立上面的结论。根据假设，我们知道f是$k-1$次可微于是$f^{(k-1)}$有：
>
> $$f^{(k-1)}(x)=c\frac{n!}{(n-k+1)!}(x-a)^{n-k+1}$$
>
> 根据习题10.1.5我们知道$f^{(k-1)}$是可微的，并且有
>
> $$(f^{(m-1)})'(x)=c\frac{n!}{(n-k+1)!}(n-k+1)(x-a)^{n-k}=c\frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}$$
>
> 于是根据辅助结论我们有f是k次可微的。综上再结合强归纳法原理，于是我们得到了：对任意的$1\leq k\leq n$都有f是k次可微的，并且对所有的整数$0\leq k\leq n$，都有$f^{(k)}(x)=c\dfrac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}$。
>
> 而对$k\geq n$的情况，我们同样使用强归纳法证明：对任意的$k>n$，f也是k次可微的，并且$f^{(k)}$是常数函数0。
>
> 当$k=n+1$时，由于上面已经证明f是n次可微的，并且注意到$f^{(n)}=cn!$是常数函数，于是根据命题10.1.13与辅助结论我们可以得到f是$n+1$次可微的，并且$f^{(n+1)}=(f^{(n)})'$是常数函数0。然后设对任意$n<m<k$都有f是m次可微的且$f^{(m)}$是常数函数0，则根据命题10.1.13有$f^{(k-1)}$是可微的且导函数为常数函数0，然后根据辅助结论可以得到f是k次可微的且$f^{(k)}$是常数函数0。
>
> 综上，于是结论得证。

15.2.2 证明：例15.2.2中定义的函数f在整个$\mathbb{R}\backslash\{1\}$上是实解析的

> 例15.2.2：
>
> > 考虑定义为$f(x):=\dfrac{1}{1-x}$的函数$f:\mathbb{R}\backslash\{1\}\to\mathbb{R}$。这个函数在0处是实解析的，因为存在一个以0为中心的幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$，它在区间$(-1,1)$上收敛于$\dfrac{1}{1-x}=f(x)$；该函数在2处也是实解析的，因为存在一个幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n$，它在区间$(1,3)$上收敛于$\dfrac{-1}{1-(-(x-2))}=\dfrac{1}{1-x}=f(x)$。实际上，这个函数在整个$\mathbb{R}\backslash\{1\}$上是实解析的，参见习题15.2.2。
>
> ---
>
> 考虑任意的$a\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$，我们取$r:=|1-a|$。然后我们考虑幂级数：
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1-a}\right)^{n+1}(x-a)^n$$

> 对任意的$x \in (a-r, a+r)$，根据r的定义可以得到$\left|\frac{x-a}{1-a}\right| \leq 1$，于是根据引理7.3.3这个幂级数在$(a-r, a+r)$上收敛于：
>
> $$\frac{\frac{1}{1-a}}{1-\frac{1}{1-a}(x-a)} = \frac{1}{1-a-x+a} = \frac{1}{1-x} = f(x)$$
>
> 于是即幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1-a}\right)^{n+1}(x-a)^n$在$(a-r, a+r)$上收敛于$f$，也即$f$是在$a$处实解析的。从而我们证明了$f$是在整个$\mathbb{R}\backslash\{1\}$上是实解析的。

15.2.3 证明命题15.2.6（提示：对k使用归纳法，并利用定理15.1.6(d)）

> 我们对k使用归纳法证明命题15.2.6。
>
> $k=0$的情况是显然成立的无需讨论，于是归纳地假设对$k=m$时结论成立，对$k=m+1$时的情况讨论：
>
> 根据归纳假设我们有f是m次可微的，并且有
>
> $$f^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}\frac{(n+m)!}{n!}(x-a)^n$$
>
> 对任意的n，我们令有$d_n := c_{n+m}\frac{(n+m)!}{n!}$，此时可以将上式改写为：
>
> $$f^{(m)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$$
>
> 注意到这也是一个幂级数，于是根据定理15.1.6(d)我们知道$f^{(m)}$也是可微的，并且有
>
> $$(f^{(m)})'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nd_n(x-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_{n+1}(x-a)^n$$
>
> 根据我们在习题15.2.1用的辅助结论我们知道这表明f是$m+1$次可微的，然后代入d_n的定义我们有：
>
> $$\begin{aligned} f^{(m+1)}(x) = (f^{(m)})'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+m+1}\frac{(n+m+1)!}{(n+1)!}(x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+(m+1)}\frac{(n+(m+1))!}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$
>
> 而在习题15.1.1的证明中我们已经叙述过了导函数级数与原始幂级数有相同的收敛半径，因此由归纳假设我们可以得到上式对任意的$x \in (a-r, a+r)$成立。
>
> 综上，于是归纳得证了结论。

15.2.4 利用命题15.2.6和习题15.2.1证明推论15.2.10

> 对于任意的整数$k \geq 0$，根据命题15.2.6我们知道有：
>
> $$f^{(k)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k}\frac{(n+k)!}{n!}(a-a)^n$$
>
> 注意到在这个级数中$n \geq 1$时有$(a-a)^n = 0^n = 0$，于是上面的级数显然收敛于$c_{0+k}\frac{(0+k)!}{0!}$，也就是$k!c_k$，这样就得到了：

> $$f^{(k)}(a) = k!c_k$$
>
> 将这个结果代入回到原始的幂级数$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$，我们就得到了泰勒公式$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n$成立。

15.2.5 设a，b是实数，并设$n \geq 0$是整数。证明：恒等式

$$(x-a)^n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}(x-b)^m$$

对任意的实数x均成立（提示：使用二项式公式，即习题7.1.4）。解释这个恒等式为什么与泰勒公式与习题15.2.1是一致的（但是需要注意，在验证习题15.2.6的结论之前，对泰勒公式的使用都是不严格的）

> 根据二项式公式，对任意的实数y，z都有
>
> $$(y+z)^n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} y^m z^{n-m}$$
>
> 代入$y = x - b$与$z = b - a$（于是$y + z = x - a$）就可以得到题目的恒等式成立，即
>
> $$(x-a)^n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!}(x-b)^m(b-a)^{n-m}$$
>
> 关于这个恒等式为什么和泰勒公式是一致的，我们暂且当作已知关于x的函数$f(x) := (x-a)^n$是在b处实解析的，并且其在b处的幂级数是在整个实数集$\mathbb{R}$上收敛于f的（事实上它就是）。然后根据我们在习题15.2.1中的计算结果，我们有：
>
> $$f^{(k)}(b) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}(b-a)^{n-k} & \text{if } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{if } k \geq n \end{cases}$$
>
> 于是根据泰勒公式，在b处f的幂级数为：
>
> $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}(b-a)^{n-k}(x-b)^n$$
>
> 这也就是我们在上面得到的恒等式。

15.2.6 利用习题15.2.5，证明：每一个一元多项式$P(x)$在$\mathbb{R}$上都是实解析的

> 不妨假定$P(x)$是形如$\sum_{i=0}^{n} c_i x^i$的一个多项式，其中$n \geq 0$是一个自然数。于是对任意的$a \in \mathbb{R}$，根据习题15.2.5的恒等式我们有：
>
> $$\forall\, 0 \leq i \leq n, x^i = \sum_{m=0}^{i} \frac{i!}{m!(i-m)!} a^{i-m}(x-a)^m$$
>
> 于是我们可以将$P(x)$改写为：

$$
\begin{aligned}
P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{m=0}^{i} c_i \frac{i!}{m!(i-m)!} a^{i-m}(x-a)^m \\
&= \sum_{m=0}^{n}\sum_{i=m}^{n} c_i \frac{i!}{m!(i-m)!} a^{i-m}(x-a)^m \\
&= \sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{i=m}^{n} c_i \frac{i!}{m!(i-m)!} a^{i-m}\right)(x-a)^m
\end{aligned}
$$

（第一行式子到第二行式子需要用到有限级数的富比尼定理（命题7.1.14）与一点小小的技巧，这里省略了）

如果我们对任意的整数$m \geq 0$定义实数d_m有：

$$
d_m := \begin{cases} \sum_{i=m}^{n} c_i \frac{i!}{m!(i-m)!} a^{i-m} & \text{if } m \leq n \\ 0 & \text{if } m > n \end{cases}
$$

则上面的结论可以引申为：

$$
P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m (x-a)^m
$$

对任意的$x \in \mathbb{R}$都成立。综上即有我们证明了对任意的$a \in \mathbb{R}$都存在以a为中心的幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} d_m(x-a)^m$在$\mathbb{R}$上收敛于$P$，从而根据定义15.2.1我们知道任意的多项式$P$都是在$\mathbb{R}$上实解析的。

15.2.7 设$m \geq 0$是一个正整数，并设$0 < x < r$是一个实数。利用[引理7.3.3]建立恒等式

$$
\frac{r}{r-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n r^{-n}
$$

利用命题15.2.6，推导出恒等式

$$
\frac{r}{(r-x)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} x^{n-m} r^{-n}
$$

对所有的整数$m \geq 0$和所有的$x \in (-r, r)$均成立。并解释上式右端的级数为什么是绝对收敛的

我们令$f : (-r, r) \to \mathbb{R}$为函数$f(x) := \frac{r}{r-x}$由于$-r < x < r$因此我们有$\left|\frac{x}{r}\right| < 1$，于是根据几何级数（引理7.3.3）我们有恒等式：

$$
\frac{r}{r-x} = \frac{1}{1-\frac{x}{r}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{r}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n r^{-n}
$$

于是题目所要求的第一个恒等式得证。显然我们可以计算得到这个幂级数的收敛半径为r。根据命题15.2.6，于是我们知道这表明函数$\frac{r}{r-x}$是在$(-r, r)$上无限可微的，并且有k阶导函数（$k \geq 0$）表达式：

$$
f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n r^{-n-k}
$$

而根据习题10.1.6，我们可以归纳得到有

> $$f^{(k)}(x)=\frac{r}{(r-x)^{k+1}}k!$$
>
> 于是上面的结论表明有恒等式
>
> $$\begin{aligned}\frac{r}{(r-x)^{k+1}}k! &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}x^n r^{-n-k}\\ \iff \frac{r}{(r-x)^{k+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{k!n!}x^n r^{-n-k}\\ \iff \frac{r}{(r-x)^{k+1}} &= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{n-k} r^{-n}\end{aligned}$$
>
> 也即题目所要求证明的第二个恒等式。
>
> 关于右边这个级数为什么是绝对收敛的，事实上结合我们在习题15.1.1的证明的结论我们可以归纳得到f的k次导函数对应的幂级数与f对应的幂级数有相同的收敛半径（也即在相同的区间上绝对收敛），而右边的级数本质上是f的k次导函数对应的幂级数除以一个常数$k!$，因此同样也是收敛的。

15.2.8 设E是$\mathbb{R}$的子集，a是E的内点，并设$f:E\to\mathbb{R}$是在a处的实解析函数，它在a处有幂级数展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

此幂级数在区间$(a-r,a+r)$上收敛。设$(b-s,b+s)$是$(a-r,a+r)$的任意一个子区间，其中$s>0$

(a) 证明：$|a-b|\le r-s$，从而有$|a-b|<r$ **（？这是在干嘛）**

> 由于$(b-s,b+s)$是$(a-r,a+r)$的子区间，因此应当有：
>
> $$\begin{aligned}b-s\ge a-r &\iff a-b\le r-s\\ b+s\le a+r &\iff a-b\ge s-r\end{aligned}$$
>
> 也即有$|a-b|\le r-s$。（这题意义不明啊，$|a-b|<r$不是直接可以得到的内容？）

(b) 证明：对于每一个$0<\varepsilon<r$，存在一个$C>0$，使得对于所有的整数$n\ge 0$都有$|c_n|\le C(r-\varepsilon)^{-n}$ **（提示：关于级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$的收敛半径，我们都知道些什么？）**

> 由于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$在区间$(a-r,a+r)$上收敛，因此我们知道它的收敛半径必然大于等于$r$，也即有
>
> $$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}}\ge r\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}\le r^{-1}$$
>
> 从而根据上极限的性质，由于$r-\varepsilon<r$我们可以得到
>
> $$(r-\varepsilon)^{-1}>r^{-1}\xRightarrow{\text{命题}6.4.12(a)}\exists\, N\ge 0,\forall\, n\ge N,|c_n|^{1/n}\le(r-\varepsilon)^{-1}\iff |c_n|\le(r-\varepsilon)^{-n}$$
>
> 而由于$\{|c_n|^{1/n}:1\le n\le N\}$是有限的，因此也是有界的，即存在$M\ge 0$使得对任意的$1\le n<N$有：
>
> $$|c_n|^{1/n}\le M\iff |c_n|\le M^n$$

> 于是我们定义有:
>
> $$C := \max(S) \qquad S := \{|c_0|, 1\} \cup \{M^n(r-\varepsilon)^n : 1 \le n < N\}$$
>
> 在这个定义下，我们可以分类讨论得到:
>
> $$\begin{cases} |c_0| \in S \implies |c_0| \le C \\ \qquad\qquad \implies |c_n| \le C(r-\varepsilon)^{-n} & \text{if } n = 0 \\ M^n(r-\varepsilon)^n \in S \implies M^n(r-\varepsilon)^n \le C \\ \qquad\qquad\qquad\quad \implies M^n \le C(r-\varepsilon)^{-n} & \text{if } 1 \le n < N \\ \qquad\qquad\qquad\quad \implies |c_n| \le C(r-\varepsilon)^{-n} \\ 1 \in S \implies 1 \le C \\ \qquad \implies |c_n| \le (r-\varepsilon)^{-n} \le C(r-\varepsilon)^{-n} & \text{if } n \ge N \end{cases}$$
>
> 于是题目结论得证，我们得到了总是存在一个C是满足题目要求的实数。

(c) 证明：由公式

$$d_m := \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}c_n \quad m \ge 0$$

给出定义的数字d_0，d_1，$\ldots$是良定义的，也就是说上面定义式里的级数是绝对收敛的（提示：使用结论(b)、比较判别法（即推论7.3.2）以及习题15.2.7）

> 由结论(a)我们知道有$|b-a| \le r-s$；又由结论(b)我们知道存在$C > 0$使得对任意$n \ge 0$都有$|c_n| \le C(r-0.5s)^{-n}$，于是有:
>
> $$\forall\, n \ge 0, \left|\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}c_n\right| \le C\frac{n!}{m!(n-m)!}(r-s)^{n-m}(r-0.5s)^{-n}$$
>
> 于是我们来考虑下面的级数:
>
> $$C\sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!}(r-s)^{n-m}(r-0.5s)^{-n}$$
>
> 然后由于$0 < r-s < r-0.5s$，我们应用习题15.2.7的结论就可以得到上面的级数绝对收敛于$C\frac{r-0.5s}{(0.5s)^m}$，于是使用比较判别法我们可以得到级数$\sum\limits_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}c_n$是绝对收敛的，从而对任意的$m \ge 0$都有$d_m$是良定义的。

(d) 证明：对于每一个$0 < \varepsilon < s$，都存在一个$C > 0$，使得对于所有的整数$m \ge 0$都有

$$|d_m| \le C(s-\varepsilon)^{-m}$$

（提示：使用比较判别法和习题15.2.7）

> 类似于我们在证明结论(c)的过程，由结论(a)我们知道有$|b-a| \le r-s$；又由结论(b)我们知道存在$C_0 > 0$使得对任意$n \ge 0$都有$|c_n| \le C(r-\varepsilon)^{-n}$，于是有:
>
> $$\forall\, n \ge 0, \left|\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}c_n\right| \le C_0\frac{n!}{m!(n-m)!}(r-s)^{n-m}(r-\varepsilon)^{-n}$$
>
> 然后考虑级数:
>
> $$C_0\sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!}(r-s)^{n-m}(r-\varepsilon)^{-n}$$

同样根据习题15.2.7的结论我们有该级数收敛于$\frac{C_0(r-\varepsilon)}{(r-\varepsilon-(r-s))^{m+1}}=\frac{C_0(r-\varepsilon)}{(s-\varepsilon)^{m+1}}$。此时我们令有$C:=C_0\frac{r-\varepsilon}{s-\varepsilon}$，根据比较判别法于是有：

$$|d_m|=\left|\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}c_n\right|\leq C(s-\varepsilon)^{-m}$$

于是结论得证。

(e) 证明：对于所有的$x\in(b-s,b+s)$，幂级数$\sum_{m=0}^{\infty}d_m(x-b)^m$都是绝对收敛的，并且它收敛于$f(x)$（提示：你可能需要使用关于无限级数的富比尼定理（定理8.2.2）以及习题15.2.5）

考虑任意的$x\in(b-s,b+s)$，此时有$|x-b|<s$，于是我们不妨记有$|x-b|=s-2\varepsilon$，其中$0<\varepsilon<s/2$。然后根据结论(d)我们知道存在$C>0$使得$|d_m|\leq C(s-\varepsilon)^{-m}$，此时即有：

$$\forall\, m\geq 0, |d_m(x-b)^m|\leq C\left(\frac{s-2\varepsilon}{s-\varepsilon}\right)^m$$

然后注意到$\left|\frac{s-2\varepsilon}{s-\varepsilon}\right|<1$，从而根据命题7.3.3我们知道级数$\sum_{m=0}^{\infty}C\left(\frac{s-2\varepsilon}{s-\varepsilon}\right)^m$是绝对收敛的，然后根据比较判别法我们可以得知级数$\sum_{m=0}^{\infty}d_m(x-b)^m$也是绝对收敛的。此时使用无限级数的富比尼定理，我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}d_m(x-b)^m&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}c_n(x-b)^m\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}c_n(x-b)^m\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}c_n(x-b)^m\end{aligned}$$

（如同我们曾经在习题15.2.5中说的那样，应用富比尼定理需要你适当地在级数中添加0项方便变更求和顺序）

然后应用习题15.2.5的结论，上式可以化为：

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}d_m(x-b)^m&=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}(b-a)^{n-m}(x-b)^m\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n\\&=f(x)\end{aligned}$$

即幂级数$\sum_{m=0}^{\infty}d_m(x-b)^m$收敛于$f(x)$，于是题目结论得证。

(f) 推导出f在$(a-r,a+r)$中的每一点都是实解析的

根据结论(e)，由于假设中b是任意的，于是结论(e)的结论可以表述为：

> 对任意b是$(a-r,a+r)$的内点，$(a-r,a+r)$中存在一个开区间$(b-s,b+s)$（其中$s>0$），使得某个以b为中心的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-b)^n$满足收敛半径大于等于$s$且该级数在$(b-s,b+s)$上收敛于$f$。
>
> （关于收敛半径由于我们已经在证明结论(e)的时候证明了幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-b)^n$在$(b-s,b+s)$上收敛，因此根据命题15.1.6我们知道收敛半径必然大于s）
>
> 于是根据定义15.2.1我们知道这表明f在$(a-r,a+r)$中的每一点都是实解析的，结论(f)得证。

本节相关跳转

[实分析 7.1 有限级数]

[实分析 7.3 非负数的和]

[实分析 8.2 在无限集上求和]

[实分析 15.1 形式幂级数]

[实分析 15.5 指数函数和对数函数]