14.1 函数的极限值

定义

1. (14.1.1 函数的极限值) 设(X,d_X)和(Y,d_Y)是两个度量空间，E是X的子集，并设$f:X\to Y$是一个函数。设$x_0\in X$是E的一个附着点且$L\in Y$。若对于任意的$\varepsilon>0$，都存在一个$\delta>0$使得只要$x\in E$满足$d_X(x,x_0)<\delta$，就有$d_Y(f(x),L)<\varepsilon$，那么我们称**当x沿着E收敛于x_0时$f(x)$沿着Y收敛于L**，并记作$\lim\limits_{x\to x_0;x\in E}f(x)=L$。

   (注：在部分教材中这个定义会排除$x=x_0$的情形，于是这时要将上面的定义改为$0<d_X(x,x_0)<\delta$，然后对应的记号改为$\lim\limits_{x\to x_0;x\in E\backslash\{x_0\}}f(x)=L$；此外，在定义13.1.1我们定义了连续性的概念，结合此处函数极限值的定义我们不难发现函数$f:X\to Y$在$x_0\in X$处连续当且仅当$\lim\limits_{x\to x_0;x\in X}f(x)=f(x_0)$，这和我们在第9章中的连续函数定义统一（第9章中先定义的函数极限值再据此给出连续性定义）；当清楚地知道x在空间X中变动时，我们可以忽略$x\in X$，并将$\lim\limits_{x\to x_0;x\in X}f(x)=L$简写为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$)

命题

1. (14.1.5) 设(X,d_X)和(Y,d_Y)是两个度量空间，E是X的子集，并设$f:X\to Y$是一个函数。设$x_0\in X$是X的一个附着点且$L\in Y$。那么下面四个命题在逻辑上是等价的：

   > - $\lim\limits_{x\to x_0;x\in E}f(x)=L$。
   > - 对于E中任意一个依度量d_X收敛于x_0的序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$，序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$都依度量$d_Y$收敛于$L$。
   > - 对于任意一个包含L的开集$V\subset Y$，都存在一个包含x_0的开集$U\subset X$使得$f(U\cap E)\subseteq V$。
   > - 如果把函数$g:E\cup\{x_0\}\to Y$定义为$g(x_0):=L$，且当$x\in E\backslash\{x_0\}$时$g(x):=f(x)$，那么g在x_0处是连续的；此外，如果$x_0\in E$，那么$f(x_0)=L$。

   (注：观察命题14.1.5(b)与命题12.1.20可以很容易得到：当x收敛于x_0时，函数$f(x)$最多只能收敛于一个极限L，这样就保证了函数极限值的唯一性；另一方面，为了保证函数极限值这个概念是有用的，x_0时E的附着点是必要的。如果x_0不是E的附着点，那么x_0作为E的外点当x沿着E收敛于x_0时$f(x)$收敛于L的概念本身是虚空的（存在$\varepsilon>0$使得不存在$x\in E$满足$d_X(x,x_0)<\varepsilon$）；如同之前在12.1节中提到的那样，严谨来说函数极限值的定义记号应该写成$d_Y-\lim\limits_{x\to x_0;x\in E}f(x)=L$以表明它是关于具体的度量$d_Y$的，但是一般问题中通常都可以明确$d_Y$从而省略)

课后习题

14.1.1 设(X,d_X)和(Y,d_Y)都是度量空间，E是X的子集，$f:E\to Y$是一个函数，并设x_0是E中的元素。证明：极限$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)$存在，当且仅当极限$\lim_{x\to x_0;x\in E\backslash\{x_0\}}f(x)$存在且等于$f(x_0)$。另外证明：如果极限$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)$存在，那么它一定等于$f(x_0)$

> 我们需要调换下证明的顺序，先证明后面的命题再证明前面的。
>
> ---
>
> 证明：如果极限$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)$存在，那么它一定等于$f(x_0)$。
>
> 不妨记有$L:=\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)$。根据定义14.1.1我们知道对任意的$\varepsilon>0$，都存在一个$\delta>0$使得只要$x\in E$满足$d_X(x,x_0)<\delta$，就有$d_Y(f(x),L)<\varepsilon$。然后由于$x_0\in E$且有$d_X(x_0,x_0)=0<\delta$，从而我们可以总结得到对任意$\varepsilon>0$都有：
>
> $$d_Y(f(x_0),L)<\varepsilon$$
>
> 于是$d_Y(f(x_0),L)$不可能是任意大于0的实数，考虑到度量的非负性于是只能有$d_Y(f(x_0),L)=0$，然后根据度量空间满足的公理我们知道这表明$f(x_0)=L$。
>
> 综上，于是只能有极限$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)$存在则必然等于$f(x_0)$。
>
> ---
>
> 证明：极限$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)$存在，当且仅当极限$\lim_{x\to x_0;x\in E\backslash\{x_0\}}f(x)$存在且等于$f(x_0)$。
>
> 分别证明充分必要性。
>
> 先考虑若有极限$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)$存在，则根据定义14.1.1与我们在上面证明了的结论，于是对任意的$\varepsilon>0$，都存在一个$\delta>0$使得只要$x\in E$满足$d_X(x,x_0)<\delta$，就有$d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$。从而对任意的$\varepsilon>0$，$\delta$都是使得只要$x\in E\backslash\{x_0\}$满足$d_X(x,x_0)<\delta$就有$d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$。从而根据定义14.1.1即有$\lim_{x\to x_0;x\in E\backslash\{x_0\}}f(x)=f(x_0)$。
>
> 另一方面，若有极限$\lim_{x\to x_0;x\in E\backslash\{x_0\}}f(x)$存在且等于$f(x_0)$。则根据定义14.1.1对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得只要$x\in E\backslash\{x_0\}$满足$d_X(x,x_0)<\delta$就有$d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$。特别地，对给定的$\varepsilon$与$\delta$，由于$x_0\in E$与$x_0$满足：
>
> $$d_X(x_0,x_0)=0<\delta$$
> $$d_Y(f(x_0),f(x_0))=0<\varepsilon$$
>
> 于是上面的结论可以拓展到对任意$x\in E$都成立，综合定义14.1.1即有$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)=f(x_0)$（那么自然极限值也是存在的）。
>
> 综上，于是结论得证。

14.1.2 证明命题14.1.5（提示：回顾定理13.1.4的证明）

> 我们只需要证明这四个命题可以推导彼此即可，于是即证明：
>
> - (a)可以推知(b)：
>
>   > 即证明：若有$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)=L$，则有对于$E$中任意一个依度量$d_X$收敛于$x_0$的序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$，序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$都依度量$d_Y$收敛于$L$。

> 根据定义14.1.1即有对任意的$\varepsilon > 0$，都存在一个$\delta > 0$使得只要$x \in E$满足$d_X(x, x_0) < \delta$，就有$d_Y(f(x), L) < \varepsilon$。于是对任意$E$中依度量$d_X$收敛于$x_0$的序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$，考虑任意$\varepsilon > 0$。根据函数极限的结论我们知道存在对应的$\delta > 0$。然后对$\delta$根据序列收敛的定义即有存在$N \geq 1$使得对任意$n \geq N$都有：
>
> $$d_X(x^{(n)}, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x^{(n)}), L) < \varepsilon$$
>
> 综合即有：对任意的$\varepsilon > 0$，存在$N \geq 1$使得对任意$n \geq N$都有$d_Y(f(x^{(n)}), L) < \varepsilon$。从而即有$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$都依度量$d_Y$收敛于$L$，于是结论得证。

- (b)可以推知(c)：

> 即证明：若有对于E中任意一个依度量d_X收敛于x_0的序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$，序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$都依度量$d_Y$收敛于$L$，则有对于任意一个包含$L$的开集$V \subset Y$，都存在一个包含$x_0$的开集$U \subset X$使得$f(U \cap E) \subseteq V$。
>
> 不妨使用反证，我们假设存在一个包含L的开集$V \subset V$使得对任意包含x_0的开集$U \subset X$都有$f(U \cap E)$不包含于V，换言之即存在$y \in f(U \cap E)$使得$y \notin V$，也即$f(U \cap E) \backslash V$是非空的。
>
> 于是对任意的整数$n \geq 1$，我们考虑度量球$B\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right)$，根据命题12.2.15(c)我们知道它是开的，并且根据度量球的定义我们知道它包含x_0。于是根据上面的反证假设应该有$f\left(B\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right) \cap E\right) \backslash V$是非空的，也就是说存在$x \in B\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right) \cap E$满足$f(x) \notin V$。于是使用选择公理，我们可以为每一个整数$n \geq 1$指定一个$x^{(n)}$满足：
>
> $$x^{(n)} \in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \cap E \wedge f(x^{(n)}) \notin V \Longrightarrow d_X(x^{(n)}, x_0) < \frac{1}{n} \wedge x^{(n)} \in E \wedge f(x^{(n)}) \notin V$$
>
> 于是$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$显然是E中依度量d_X收敛于x_0的序列，但是考虑序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$。由于$V$是开集且$L \in V$，因此根据命题12.2.15(a)存在$r > 0$使得$B(L, r) \subseteq V$；又因为对任意$n \geq 1$都有$f(x^{(n)}) \notin V \Longrightarrow f(x^{(n)}) \notin B(L, r)$，于是即对任意$n \geq 1$都有$d_Y(f(x^{(n)}), L) \geq r$。此时根据比较原理，我们有：
>
> $$\lim_{n \to \infty} d_Y(f(x^{(n)}), L) \geq r > 0$$
>
> 于是根据定义12.1.14我们有$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$不可能依度量$d_Y$收敛于$L$，这和条件"对于$E$中任意一个依度量$d_X$收敛于$x_0$的序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$，序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$都依度量$d_Y$收敛于$L$"矛盾，于是反证假设不成立，对于任意一个包含$L$的开集$V \subset Y$都应该存在一个包含$x_0$的开集$U \subset X$使得$f(U \cap E) \subseteq V$。

- (c)可以推知(a)：

> 即证明：若有对于任意包含L的开集$V \subset Y$，都存在包含x_0的开集$U \subset X$使得$f(U \cap E) \subseteq V$，则有$\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = L$。
>
> 对任意的$\varepsilon > 0$，我们考虑$V := B_{(Y, d_Y)}(L, \varepsilon)$，根据结论(c)可以得到存在一个包含$x_0$的开集$U \subset X$使得$f(U \cap E) \subseteq V$，即对任意$x \in U \cap E$都有：
>
> $$f(x) \in V \Longrightarrow d_Y(f(x), L) < \varepsilon$$
>
> 然后由于$x_0 \in U$，于是根据命题12.2.15(a)存在$\delta > 0$使得$B_{(X, d_X)}(x_0, \delta) \subseteq U$，于是上面的结论对任意$x \in B(x_0, \delta) \cap E$也成立，考虑到度量球的定义于是可以总结得到：
>
> 对任意的$\varepsilon > 0$，都存在一个$\delta > 0$使得只要$x \in E$满足$d_X(x, x_0) < \delta$，就有$d_Y(f(x), L) < \varepsilon$。

> 根据定义14.1.1即有$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)=L$，于是结论得证。

然后我们单独证明(a)等价于(d)：

> 注意到根据定义13.1.1，g在x_0处连续当且仅当对任意的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$使得只要$x\in E\cup\{x_0\}$满足$d_X(x,x_0)<\delta$，就有$d_Y(g(x),L)<\varepsilon$。特别地，对$x=x_0$的情况根据g定义有$d_Y(g(x_0),L)=0<\varepsilon$总是满足条件的，于是上面的结论等价于：对任意的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$使得只要$x\in E\backslash\{x_0\}$满足$d_X(x,x_0)<\delta$，就有$d_Y(g(x),L)<\varepsilon$。再次结合$g$的定义，这个结论等价于：对任意的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$使得只要$x\in E\backslash\{x_0\}$满足$d_X(x,x_0)<\delta$，就有$d_Y(f(x),L)<\varepsilon$。结合定义14.1.1这恰好是$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)=L$的定义。于是经过上面的推论我们得到了$g$在$x_0$处连续当且仅当$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)=L$。
>
> 此外的结论已经在习题3.1.1有所论述，不再讨论。

综上，于是结论得证。

14.1.3 根据命题14.1.5(c)，定义从一个拓扑空间$(X,\mathcal{F}_X)$到另一个拓扑空间$(Y,\mathcal{F}_Y)$的函数$f:X\to Y$的极限值的概念。然后证明：命题14.1.5(c)和命题14.1.5(d)是等价的。如果Y是一个豪斯道夫拓扑空间（参考习题13.5.4的定义），证明：注14.1.6的类比成立。如果Y不是豪斯道夫空间，那么上述结论还成立吗

注14.1.6的内容：

> 观察命题14.1.5(b)与命题12.1.20可知，当x收敛于x_0时，函数$f(x)$最多只能收敛于一个极限L。换言之，如果极限
>
> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)$$
>
> 存在，那么它只能取一个值。

我们先叙述在拓扑空间下函数极限值的概念：

> 设$(X,\mathcal{F}_X)$与$(Y,\mathcal{F}_Y)$都是拓扑空间，E是X的子集，并设$f:X\to Y$是一个函数。设$x_0\in X$是E的一个附着点且$L\in Y$。如果对于任意L的邻域V都存在一个x_0的邻域U使得$f(U\cap E)\subseteq V$，那么我们称当x沿着E收敛于x_0时$f(x)$沿着Y收敛于L，并记作$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)=L$。

然后证明在拓扑空间中的函数极限值的定义下，命题14.1.5(c)和命题14.1.5(d)是等价的。

首先证明结论(c)可以推导出结论(d)：对任意V是Y中L的邻域（也即$g(x_0)$的邻域），根据结论(c)我们知道存在x_0的一个邻域U使得$f(U\cap E)\subseteq V$。然后由$(X,\mathcal{F}_X)$导出的$E\cup\{x_0\}$上的拓扑$\mathcal{F}_X|_{E\cup\{x_0\}}$，对任意$x\in U\cap(E\cup\{x_0\})$，我们有：

$$\begin{cases}g(x_0)=L\Longrightarrow g(x_0)\in V & \text{if } x=x_0\\ g(x)=f(x)\xRightarrow{f(U\cap E)\subseteq V}g(x)\in V & \text{if } x\in E\backslash\{x_0\}\end{cases}$$

于是对任意$x\in U\cap(E\cup\{x_0\})$，我们都有$g(x)\in V$。考虑记有$W:=U\cap(E\cup\{x_0\})$，注意到W还是x的邻域（关于导出拓扑$\mathcal{F}_X|_{E\cup\{x_0\}}$），于是总结即有：

对任意V是Y中$g(x_0)$的邻域，存在W是$E\cup\{x_0\}$中x_0的邻域使得$g(W)\subseteq V$。

根据定义13.5.8即有g在x_0处连续。

> 然后证明结论(d)可以推导出结论(c)：对任意V是Y中L的邻域（也即$g(x_0)$的邻域），由于g在x_0处是连续的，于是根据定义13.5.8存在一个x_0的邻域U使得$f(U) \subseteq V$（这个邻域自然是关于导出拓扑$\mathcal{F}_X|_{E\cup\{x_0\}}$的）。根据导出拓扑的定义，存在一个$W \in \mathcal{F}_X$使得$U = W \cap (E \cup \{x_0\})$。从而即有：对任意$x$满足$x \in W$且$x \in E \cup \{x_0\}$都有$f(x) \in V$。特别地，这个结论也对任意$x$满足$x \in W$且$x \in E$成立，于是总结即有：
>
> 对任意V是Y中$g(x_0)$的邻域，存在W是X中x_0的邻域使得$f(W \cap E) \subseteq V$。
>
> 于是根据我们上面叙述的定义即有$\lim\limits_{x\to x_0;x\in E} f(x) = L$。
>
> 关于那个额外的结论，需要Y是一个豪斯道夫空间才成立。
>
> ---
>
> 证明：如果Y是一个豪斯道夫拓扑空间，注14.1.6的类比成立。
>
> 如果Y是一个豪斯道夫拓扑空间，不妨使用反证法，我们假设存在L_0，L_1满足我们叙述的定义且$L_0 \neq L_1$。则根据我们叙述的定义，对任意L_0的邻域V都存在一个x_0的邻域U使得$f(U \cap E) \subseteq V$，对L_1也有相同的结论。另外，由于Y是一个豪斯道夫空间且$L_0 \neq L_1$，于是存在L_0的邻域W_0和L_1的邻域W_1使得$W_0 \cap W_1 = \varnothing$。
>
> 然后对W_0和W_1应用函数极限值的结论，分别存在x_0的两个邻域U_0，U_1使得$f(U_0 \cap E) \subseteq W_0$与$f(U_1 \cap E) \subseteq W_1$。特别地，由于拓扑空间的有限个开集的交集也是开的我们可以得到$U_0 \cap U_1$也是x_0的邻域，然后由于x_0是E的附着点我们知道$U_0 \cap U_1$与E的交集也是非空的（定义13.5.6）。于是讨论任意$x \in U_0 \cap U_1 \cap E$我们有：
>
> $$\begin{cases} x \in U_0 \wedge x \in E \implies f(x) \in W_0 \\ x \in U_1 \wedge x \in E \implies f(x) \in W_1 \end{cases}$$
>
> 但是由于W_0与W_1不相交，因此不可能存在$f(x)$满足同时属于W_0和W_1，这导出了矛盾。
>
> ---
>
> 举例：如果Y不是一个豪斯道夫拓扑空间，那么注14.1.6的类比就不成立。
>
> 我们考虑一个最简单的例子，定义从$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的函数$f(x) := x$。注意其中定义域带有标准度量生成的拓扑，而值域带有平凡拓扑（习题13.5.1中提到的定义），显然带有平凡拓扑的实直线不是一个豪斯道夫拓扑空间。然后考虑x沿着$\mathbb{R}$收敛于0时$f(x)$沿着$\mathbb{R}$收敛的值。注意到对任意的实数$y \in \mathbb{R}$都有：
>
> 对任意y的邻域V（由于值域带有平凡拓扑，因此V只能是$\mathbb{R}$），存在0的邻域$(-1, 1)$使得$f((-1, 1) \cap \mathbb{R}) = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$。
>
> 于是可以看到，根据我们在上面叙述的定义即有$\lim\limits_{x\to 0;x\in\mathbb{R}} f(x) = x$，这显然是不满足注14.1.6的类比的要求的。

14.1.4 回顾习题13.5.5可知，广义实直线$\mathbb{R}^*$具有一个标准拓扑（序拓扑）。我们把自然数$\mathbb{N}$看作这个拓扑空间的子空间，并把$+\infty$看作$\mathbb{N}$在$\mathbb{R}^*$中的附着点。设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是在拓扑空间$(Y, \mathcal{F}_Y)$中取值的序列，并设$L \in Y$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty;n\in\mathbb{N}} a_n = L$（在习题14.1.3的意义下）当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$（在定义13.5.4的意义下）。这表明序列的极限值的概念和函数的极限值的概念是一致的（byd选学章节一直引用是吧）

> 我们需要证明一个辅助结论：
>
> > 结论：对任意的实数r，区间$(r, +\infty]$都是序拓扑下的开集。
> >
> > 证明：
> >
> > 考虑任意的$x \in (r, +\infty]$，我们有$x > r$。于是即有：

> $$x \in \{y \in \mathbb{R}^* : r < y\} \wedge \{y \in \mathbb{R}^* : r < y\} \subseteq V$$
>
> 于是根据序拓扑的定义即有$(r, +\infty]$是序拓扑下的开集。

分别证明其充分必要性：

先考虑若有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$成立，则对任意一个$L$的邻域$V$，都存在$N \geq m$使得对任意$n \geq N$均有$a_n \in V$。注意到$n \geq N \iff n \in \mathbb{N} \cap (N-1, +\infty]$，然后如果将$n \mapsto a_n$的映射关系视为一个函数，那么有：

$$n \mapsto a_n(\mathbb{N} \cap (N-1, +\infty]) = \{a_n : n \in \mathbb{N} \cap (N-1, +\infty]\} = \{a_n : n \geq N\} \subseteq V$$

于是总结可以得到：对任意一个L的邻域V，都存在$+\infty$的邻域$(N-1, +\infty]$使得$n \mapsto a_n(\mathbb{N} \cap (N-1, +\infty]) \subseteq V$。从而根据习题14.1.3中叙述的函数极限值定义我们有$\lim\limits_{n\to+\infty; n\in\mathbb{N}} a_n = L$。

反过来，若有$\lim\limits_{n\to+\infty; n\in\mathbb{N}} a_n = L$，则根据习题14.1.3的定义，对任意$L$的邻域$V$存在$+\infty$的一个邻域$U$使得$n \mapsto a_n(U \cap \mathbb{N}) \subseteq V$。注意到$U$是包含$+\infty$的开集，因此根据序拓扑的定义存在下面四种可能：

- $+\infty \in \mathbb{R}^*$且$\mathbb{R}^* \subseteq U$。
- 存在$a \in \mathbb{R}^*$使得$+\infty \in \{y \in \mathbb{R}^* : a < y\}$且$\{y \in \mathbb{R}^* : a < y\} \subseteq U$。
- 存在$b \in \mathbb{R}^*$使得$+\infty \in \{y \in \mathbb{R}^* : y < b\}$且$\{y \in \mathbb{R}^* : y < b\} \subseteq U$。
- 存在a，$b \in \mathbb{R}^*$使得$+\infty \in \{y \in \mathbb{R}^* : a < y < b\}$且$\{y \in \mathbb{R}^* : a < y < b\} \subseteq U$。

注意到$+\infty$的定义使得它不可能小于任何广义实数，因此第三，第四种情况都不可能。对第一种情况则此时必然有$U = \mathbb{R}^*$，于是可以得到$U \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$，取$N = 0$并应用函数极限值的结论即对任意自然数$n \geq N$都有$a_n \in V$；对第二种情况我们取$N = \lfloor a \rfloor + 1$，于是应用函数极限值的结论对任意$n \geq N$都有$n > a \implies a_n \in V$。

于是综合即有：对任意一个L的邻域V，都存在$N \geq m$使得对任意$n \geq N$均有$a_n \in V$。根据定义13.5.4即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$。

综上，于是充分必要性得证。

14.1.5 设(X, d_X)、(Y, d_Y)和(Z, d_Z)都是度量空间，$x_0 \in X$，$y_0 \in Y$，$z_0 \in Z$，并设$f : X \to Y$和$g : Y \to Z$都是函数，且E是X的子集。如果已知$\lim\limits_{x\to x_0; x\in E} f(x) = y_0$和$\lim\limits_{y\to y_0; y\in f(E)} g(x) = z_0$，那么证明：$\lim\limits_{x\to x_0; x\in E} g \circ f(x) = z_0$成立

> 根据题设，考虑E中任意一个依度量d_X收敛于x_0的序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$，根据命题14.1.5可知序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$依度量$d_Y$收敛于$y_0$。注意到$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$是$f(E)$中的的序列，于是再次使用命题14.1.5可得序列$(g(f(x^{(n)})))_{n=1}^{\infty}$依度量$d_Z$收敛于$z_0$，即$(g \circ f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$依度量$d_Z$收敛于$z_0$。从而即有：
>
> 对于E中任意一个依度量d_X收敛于x_0的序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$，序列$(g \circ f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$都依度量$d_Z$收敛于$z_0$。
>
> 然后根据命题14.1.5，这表明$\lim\limits_{x\to x_0; x\in E} g \circ f(x) = z_0$。

14.1.6 当X是一个度量空间，而不是$\mathbb{R}$的子集时，叙述并证明命题9.3.14中极限定律的类比（提示：利用推论13.2.3）

> 我们变叙述边证明我们给出的结论。
>
> 设(X,d)是一个度量空间，E是X的一个子集，并设$f:X\to\mathbb{R}$与$g:X\to\mathbb{R}$都是函数。设x_0是E的一个附着点且L，$M\in\mathbb{R}$。若在x沿着E收敛于x_0时$f(x)$沿着$\mathbb{R}$收敛于L且$g(x)$沿着$\mathbb{R}$收敛于M。那么有：
>
> 1. $(f+g)(x)$沿着$\mathbb{R}$收敛于$L+M$：
> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)+\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)$$
> 2. $(f-g)(x)$沿着$\mathbb{R}$收敛于$L-M$：
> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}(f-g)(x)=\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)-\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)$$
> 3. $(\max(f,g))(x)$沿着$\mathbb{R}$收敛于$\max(L,M)$：
> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}\max(f,g)(x)=\max\left(\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x),\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)\right)$$
> 4. $(\min(f,g))(x)$沿着$\mathbb{R}$收敛于$\min(L,M)$：
> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}\min(f,g)(x)=\min\left(\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x),\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)\right)$$
> 5. $(fg)(x)$沿着$\mathbb{R}$收敛于LM：
> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}(fg)(x)=\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)$$
> 6. 如有c是一个实数，则$(cf)(x)$沿着$\mathbb{R}$收敛于cL：
> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}(cf)(x)=c\cdot\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)$$
> 7. 如有对任意$x\in E$都有$g(x)\neq 0$，则$(f/g)(x)$沿着$\mathbb{R}$收敛于L/M：
> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}(f/g)(x)=\frac{\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)}{\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)}$$
>
> ---
>
> 然后我们给出第一条的的证明，其它的类似即可。
>
> 我们额外定义新的函数$f':E\cup\{x_0\}\to Y$与$g':E\cup\{x_0\}\to Y$为：
> $$f'(x):=\begin{cases}L & \text{if } x=x_0\\ f(x) & \text{if } x\in E\backslash\{x_0\}\end{cases}\qquad g'(x):=\begin{cases}M & \text{if } x=x_0\\ g(x) & \text{if } x\in E\backslash\{x_0\}\end{cases}$$
> 于是根据命题14.1.5与题设我们知道f'和g'都是在x_0处连续的，然后使用推论13.2.3，我们知道$f'+g'$也是在x_0处连续的。然后我们注意到函数$f'+g'$满足下面的内容：
> $$(f'+g')(x)=\begin{cases}L+M & \text{if } x=x_0\\ f(x)+g(x)=(f+g)(x) & \text{if } x\in E\backslash\{x_0\}\end{cases}$$
> 从而再次使用命题14.1.5，这表明有在x沿着E收敛于x_0时$(f+g)(x)$沿着$\mathbb{R}$收敛于$L+M$，于是结论得证。

本节相关跳转

实分析 9.3 函数的极限值

实分析 9.4 连续函数

实分析 12.1 定义和例子

实分析 13.1 连续函数

实分析 13.2 连续性和乘积空间

实分析 13.5 拓扑空间