19.3 绝对可积函数的积分

定义

1. (19.3.1 绝对可积函数) 设Ω是$\mathbb{R}^n$是可测子集。对于可测函数$f:\Omega\to\mathbb{R}^*$，如果积分$\int_\Omega |f|$是有限的，那么我们称f是**绝对可积**的。

   (注：绝对可积函数也被称为$L^{-1}(\Omega)$函数；如果$f:\Omega\to\mathbb{R}^*$，那么我们把它的**正部**$f^+:\Omega\to[0,\infty]$与**负部**$f^-:\Omega\to[0,\infty]$分别定义为：

   $$f^+:=\max(f,0)\qquad f^-:=-\min(f,0)$$

   根据推论18.5.6可知f^+与f^-都是可测的，并且显然f^+和f^-都是非负函数，同时有$f=f^+-f^-$与$|f|=f^++f^-$成立)

2. (19.3.2 勒贝格积分) 设$f:\Omega\to\mathbb{R}^*$是一个绝对可积函数，我们把f的勒贝格积分$\int_\Omega f$定义为

   $$\int_\Omega f=\int_\Omega f^+-\int_\Omega f^-$$

   (注：由于f是绝对可积的，因此由于$\int_\Omega f^+$与$\int_\Omega f^-$都小于等于$\int_\Omega |f|$，因此它们都是有限的，从而$\int_\Omega f$也总是有限的，不会遇见$+\infty-(+\infty)$这种不确定形式；关于勒贝格积分，我们还有一个常用的**三角不等式**，参见习题19.3.1)

3. (19.3.5 上勒贝格积分和下勒贝格积分) 设Ω是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$f:\Omega\to\mathbb{R}$是一个函数（不一定是可测的）。我们把**上勒贝格积分**$\overline{\int}_\Omega f$定义为：

   $$\overline{\int}_\Omega f:=\inf\left\{\int_\Omega g:g:\Omega\to\mathbb{R}\text{是从上方控制}f\text{的绝对可积函数}\right\}$$

   并把**下勒贝格积分**$\underline{\int}_\Omega f$定义为：

   $$\underline{\int}_\Omega f:=\sup\left\{\int_\Omega g:g:\Omega\to\mathbb{R}\text{是从下方控制}f\text{的绝对可积函数}\right\}$$

   (注：容易看出$\underline{\int}_\Omega f\le\overline{\int}_\Omega f$。当$f$绝对可积时，等式成立，并且其逆命题也成立)

命题

1. (19.3.3 勒贝格积分的性质？) 设Ω是一个可测集，并设$f:\Omega\to\mathbb{R}$和$g:\Omega\to\mathbb{R}$都是绝对可积函数，那么有：

   > 1. 对于任意的实数c（正数、零或负数），cf是绝对可积的，并且$\int_\Omega cf=c\int_\Omega f$。
   > 2. 函数$f+g$是绝对可积的，并且$\int_\Omega (f+g)=\int_\Omega f+\int_\Omega g$。
   > 3. 如果对于所有的$x\in\Omega$都有$f(x)\le g(x)$，那么$\int_\Omega f\le\int_\Omega g$。

> 4. 如果$f(x)=g(x)$几乎对于每一个$x\in\Omega$都成立，那么$\int_\Omega f=\int_\Omega g$。

2. (19.3.4 勒贝格控制收敛定理) 设Ω是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$f_1,f_2,\ldots$是一列从Ω到$\mathbb{R}^*$的可测函数，而且这个函数序列是逐点收敛的。如果存在一个绝对可积函数$F:\Omega\to[0,\infty]$使得对于所有的$x\in\Omega$和所有的$n=1,2,3,\ldots$都有$|f_n(x)|\le F(x)$，那么：

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f$$

(注：在19.2节中提到过极限运算和积分运算的顺序不能随意交换，而勒贝格控制收敛定理给出了一个允许交换的条件，即只要存在一个从上方控制每一个函数f_n的绝对可积函数F，那么积分与极限运算的顺序交换就是合理的)

3. (19.3.6) 设Ω是$\mathbb{R}^n$的可测子集，$f:\Omega\to\mathbb{R}$是一个函数（不一定是可测的），并设A是一个实数。如果$\overline{\int}_\Omega f=\underline{\int}_\Omega f=A$，那么$f$是绝对可积的，并且：

$$\int_\Omega f=\overline{\int}_\Omega f=\underline{\int}_\Omega f=A$$

(注：原书提到这个引理能给出一些有用的结果，但是压根没给出能证明哪些结果，emmm)

课后习题

19.3.1 证明：只要Ω是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并且f是绝对可积的函数，那么就有三角不等式：

$$\left|\int_\Omega f\right|\le\int_\Omega f^++\int_\Omega f^-=\int_\Omega|f|$$

> 根据勒贝格积分的定义，我们有：
>
> $$\left|\int_\Omega f\right|=\left|\int_\Omega f^+-\int_\Omega f^-\right|\le\left|\int_\Omega f^+\right|+\left|\int_\Omega f^-\right|$$
>
> 由于f^+,f^-都是非负可测函数，因此它们的积分也都是非负的，所以也即有：
>
> $$\left|\int_\Omega f^+\right|+\left|\int_\Omega f^-\right|=\int_\Omega f^++\int_\Omega f^-=\int_\Omega|f|$$
>
> 于是三角不等式得证。

19.3.2 证明命题19.3.3（提示：对于(b)，把f、g和$f+g$都分成正部与负部，利用引理19.2.10，试着只用非负函数的积分表示所有的量）

> 逐条证明：
>
> ---
>
> 1. 对于任意的实数c（正数、零或负数），cf是绝对可积的，并且$\int_\Omega cf=c\int_\Omega f$。
>
> 当$c=0$的时候结论是显然的，因此我们只需要考虑$c\neq 0$的情况。
>
> 若$c>0$，则此时注意到：
>
> $$(cf)^+=\max(cf,0)=c\max(f,0)=c(f)^+$$
> $$(cf)^-=-\min(cf,0)=-c\min(f,0)=c(f)^-$$
>
> 从而结合命题19.2.10有：

$$\int_\Omega cf = \int_\Omega (cf)^+ - \int_\Omega (cf)^- = c\left(\int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-\right) = c\int_\Omega f$$

若$c<0$，则此时注意到：

$$\begin{gathered}(cf)^+ = \max(cf, 0) = c\min(f, 0) = (-c)(f)^- \\ (cf)^- = -\min(cf, 0) = c\max(f, 0) = (-c)(f)^+\end{gathered}$$

从而结合命题19.2.10有：

$$\int_\Omega cf = \int_\Omega (cf)^+ - \int_\Omega (cf)^- = (-c)\left(\int_\Omega f^- - \int_\Omega f^+\right) = c\left(\int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-\right) = c\int_\Omega f$$

于是结论得证。

---

2. 函数$f+g$是绝对可积的，并且$\int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g$。

注意到：

$$f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$$

做移项可以得到$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$，由于式子左右两端都是非负可测函数，因此利用引理19.2.10，对左右式取积分即有：

$$\begin{gathered}\int_\Omega (f+g)^+ + \int_\Omega f^- + \int_\Omega g^- = \int_\Omega (f+g)^- + \int_\Omega f^+ + \int_\Omega g^+ \\ \Downarrow \\ \int_\Omega (f+g)^+ - \int_\Omega (f+g)^- = \left(\int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-\right) + \left(\int_\Omega g^+ - \int_\Omega g^-\right) \\ \Downarrow \\ \int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g\end{gathered}$$

于是结论得证。

---

3. 如果对于所有的$x\in\Omega$都有$f(x)\leq g(x)$，那么$\int_\Omega f \leq \int_\Omega g$。

由于对于所有的$x\in\Omega$都有$f(x)\leq g(x)$，因此我们也有：

$$\begin{gathered}g^+(x) = \max(g(x), 0) \leq \max(f(x), 0) = f^+(x) \\ f^-(x) = -\min(f(x), 0) \leq -\min(g(x), 0) = g^-(x)\end{gathered}$$

从而根据命题19.2.6(c)，我们有$\int_\Omega f^+ \geq \int_\Omega g^+$与$\int_\Omega f^- \leq \int_\Omega g^-$：

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^- \geq \int_\Omega g^+ - \int_\Omega g^- = \int_\Omega g$$

于是结论得证。

---

4. 如果$f(x)=g(x)$几乎对于每一个$x\in\Omega$都成立，那么$\int_\Omega f = \int_\Omega g$。

根据结论(b)，应该有：

> $$\int_{\Omega}(f-g)=\int_{\Omega}f-\int_{\Omega}g$$
>
> 由于$f(x)=g(x)$几乎对每一个$x\in\Omega$成立，因此也即有$(f-g)(x)=0$几乎对每一个$x\in\Omega$都成立。从而根据命题19.2.6(a)有：
>
> $$\int_{\Omega}|f-g|=0$$
>
> 从而结合习题19.3.1的三角不等式，我们有
> $\left|\int_{\Omega}(f-g)\right|\leq\int_{\Omega}|f-g|=0\Longrightarrow\int_{\Omega}(f-g)=0$，从而也即$\int_{\Omega}f=\int_{\Omega}g$得证。

19.3.3 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$和$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$都是绝对可积函数，且对于所有的$x\in\mathbb{R}$都有$f(x)\leq g(x)$，而且$\int_{\mathbb{R}}f=\int_{\mathbb{R}}g$。证明：$f(x)=g(x)$几乎对于每一个$x\in\mathbb{R}$都成立（即对于$\mathbb{R}$中除去一个测度为零的集合之外的每一点$x$，都有$f(x)=g(x)$）

> 于是我们有$g-f$显然是一个非负的可测函数，并且有：
>
> $$\int_{\mathbb{R}}(g-f)=\int_{\mathbb{R}}g-\int_{\mathbb{R}}f=0$$
>
> 于是根据命题19.2.6(a)，我们有$(g-f)(x)=g(x)-f(x)=0$几乎对每一个$x\in\mathbb{R}$成立，也即有$f(x)=g(x)$几乎对于每一个$x\in\mathbb{R}$都成立，结论得证。

本节相关跳转

[实分析 18.5 可测函数]

[实分析 19.2 非负可测函数的积分]