3.4 象和逆象

公理

策梅洛•弗兰克尔集合论公理其二

> 1. (3.10 幂集公理) 设X与Y都是集合，且存在一个集合记为Y^X，该集合由所有从X到Y的函数构成，即：
>
> $$f \in Y^X \to f\text{定义域是}X,\text{值域为}Y$$
>
> 2. (3.11 并集公理) 设A为一个集合，且A中所有元素也都是集合，则存在一个集合$\cup A$，它的元素恰好是A元素的元素，于是对任意的对象x有：
>
> $$x \in \cup A \to \text{存在}S \in A,\text{使得}x \in S$$
>
> 注：公理3.1 ~ 3.11 **(除去3.8的万有分类公理)** 统称为策梅洛•弗兰克尔集合论公理。
>
> > 补充2：由并集公理引申出了一个重要结论：
> >
> > 如果存在某个集合I，对每一个元素$\alpha \in I$均有一个集合A_α，则可定义：
> >
> > $$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \cup\{A_\alpha : \alpha \in I\}$$
> >
> > 来构造并集$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$，并且由替代公理与并集公理，它是一个集合。
> >
> > (例：$I = \{1, 2, 3\}$，$A_1 = \{2, 3\}$，$A_2 = \{3, 4\}$，$A_3 = \{4, 5\}$，则有$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{2, 3, 4, 5\}$)
> >
> > 更进一步地，对任意的对象y：
> >
> > $$y \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \to \text{存在}\alpha \in I\text{，使得}y \in A_\alpha$$
> >
> > 此时称I为指标集，元素$\alpha \in I$称为标签，所有集合A_α称为一个集族，由标签$\alpha \in I$来索引。且有I为$\varnothing$时，$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$为$\varnothing$。
> >
> > 在指标集I非$\varnothing$的情况下，可以类似地构造集族的交集：
> >
> > 1. 从I中取出一个元素β。
> > 2. 令$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x \in A_\beta : \text{对任意}\alpha \in I, \text{有}x \in A_\alpha\}$。
> > 3. 由分类公理得知它是一个集合。
> > 4. 存在下述命题成立。
> >
> > $$y \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \to \text{对任意}\alpha \in I, \text{有}y \in A_\alpha$$

定义

1. (3.4.1 集合的象) 如果$f : X \to Y$是从X到Y的函数，且S为X的一个子集，则定义$f(S)$为下述集合：

$$f(S) := \{f(x) : x \in S\}$$

该集合为Y的一个子集，并称其为S在映射f下的**象**（也称**前象**）。

2. （3.4.4 逆象）若U为Y的一个子集，则定义$f^{-1}(U)$为下述集合：

$$f^{-1}(U) := \{x \in X : f(x) \in U\}$$

换句话说，$f^{-1}(U)$包含了所有X中被映射到U的元素：

$$x \in f^{-1}(U) \iff f(x) \in U$$

称$f^{-1}(U)$为U的**逆象**。

（关于逆象，有一个并不明显的事实要注意，即$f(f^{-1}(U)) = U$并不总是成立的，这一点在直观上或许看着非常难以接受。比如一个例子$f : N \to N$，$f(x) = 2x$，取$U = \{1, 2, 3\}$，根据定义得到$f^{-1}(U) = \{1\}$，进而$f(f^{-1}(U)) = \{2\} \neq U$。可以看到，想要成立相等的前置条件，在于$U$中元素是否全部被映射到）

命题

1. （3.4.9 幂集）设X是一个集合，那么$\{Y : Y\text{是}X\text{的一个子集}\}$是一个集合。

（注：集合$\{Y : Y\text{是}X\text{的一个子集}\}$被称为$X$的**幂集**并记作$2^X$，例如，假如$a$，$b$是两个不同的元素，那么有：

$$2^{\{a,b\}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

当$\{a, b\}$有2个元素时，$2^{\{a,b\}}$有$2^2 = 4$个元素，这启示我们为什么把X的幂集记为2^X，在第八章还将回到这个问题的讨论）

课后习题

3.4.1 设$f : X \to Y$是一个双射函数，并且$f^{-1} : Y \to X$是它的逆，V是Y的任意一个子集，证明：V在f^{-1}下的前象与V在f下的逆象是同一个集合，于是对这两个集合同时使用$f^{-1}(V)$这样的表述并不存在任何不兼容问题

> 考虑在f^{-1}下V的前象（这里使用$f^{-1}_{前}(V)$来描述前象），于是对任意$x \in f^{-1}_{前}(V)$，应当有存在某个$y \in V$使得$f^{-1}(y) = x$，由f是双射，此时可以推知$y = f(x)$。考虑逆象定义，由于有$y = f(x) \in V$，于是此时可以得到$x \in f^{-1}_{前}(V)$。
>
> 另一方面，对任意V的逆象中元素x（这里使用$f^{-1}_{逆}(V)$来描述逆象），于是对任意$x \in f^{-1}_{逆}(V)$，应当有$f(x) = y \in V$，由于f是双射，于是即$x = f^{-1}(y)$且$y \in V$，根据前象定义，于是有$x \in f^{-1}_{前}(V)$。
>
> 综上，可以得到两者是同一个集合。

3.4.2 设$f : X \to Y$是一个函数，S是X的一个子集，U是Y的一个子集，一般情况下，S与$f^{-1}(f(S))$是什么关系？U与$f(f^{-1}(U))$呢？

> S与$f^{-1}(f(S))$：
>
> 考虑$f^{-1}(f(S))$的定义过程，对任意$x \in S$，$f(x) = y \in f(S)$，再根据逆象的定义，于是可以根据y得到$x \in f^{-1}(f(S))$（$f(x) \in f(S)$），但是对于上述过程，不难假想这样一个情景：x_1，$x_2 \in X$但$x_1 \in S$，$x_2 \notin S$，$x_1 \neq x_2$且$f(x_1) = f(x_2)$，此时会得到$x_2 \in f^{-1}(f(S))$但是$x_2 \notin S$，于是可以得到通常情况下$S \subseteq f^{-1}(f(S))$。

> U与$f(f^{-1}(U))$:
>
> 依旧考虑$f(f^{-1}(U))$的定义过程，对任意$y \in f(f^{-1}(U))$，至少存在一个$x \in f^{-1}(U)$使得$f(x) = y$，而对于$x \in f^{-1}(U)$，依据定义必然有$f(x) = y \in U$，于是推断可以得到对任意$y \in f(f^{-1}(U))$，$y \in U$，然而，对于任意的$y \in U$，并不一定存在$x \in X$使得y被映射，如在定义3.4.4处的举例。于是可以推断通常情况下有$f(f^{-1}(U)) \subseteq U$。

3.4.3 设A，B是集合X的两个子集，且$f: X \to Y$是一个函数，证明：$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$，$f(A) \backslash f(B) \subseteq f(A \backslash B)$，$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$。对于前两个结论，考虑能否把$\subseteq$关系加强为$=$关系

> $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$:
>
> 对任意$y \in f(A \cup B)$，应当有存在$x \in A \cup B$使得$f(x) = y$，对于x，要么它属于A，则有$f(x) = y \in f(A)$，要么它属于B，则有$f(x) = y \in f(B)$，于是推知$y \in f(A)$或$y \in f(B)$，于是$y \in f(A) \cup f(B)$
>
> 另一边，对任意$y \in f(A) \cup f(B)$，则有$y \in f(A)$或$y \in f(B)$，若$y \in f(A)$，则根据定义有存在$x \in A$使得$f(x) = y \iff$ 存在$x \in A \cup B$使得$f(x) = y \iff y \in f(A \cup B)$；若$y \in f(B)$，则根据定义有存在$x \in B$使得$f(x) = y \iff$ 存在$x \in A \cup B$使得$f(x) = y \iff y \in f(A \cup B)$，于是可以得到对任意$y \in f(A) \cup f(B)$，$y \in f(A \cup B)$。
>
> 综上，根据集合相等的定义，于是有$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$。
>
> ---
>
> $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$:
>
> 对任意$y \in f(A \cap B)$，应有存在$x \in A \cap B$使得$f(x) = y$，进而有同时成立“存在$x \in A$且$f(x) = y$”与“存在$x \in B$且$f(x) = y$”，即$y \in f(A)$且$y \in f(B) \iff y \in f(A) \cap f(B)$，即得证$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$。
>
> > 条件增强：
> > 对任意$y \in f(A) \cap f(B)$，同时有$y \in f(A)$与$y \in f(B)$成立。于是即同时成立“存在$x_1 \in A$且$f(x_1) = y$”与“存在$x_2 \in B$且$f(x_2) = y$”，考虑某个特殊情况，假设$A \cap B = \varnothing$，同时有$x_1 \in A$使得$f(x_1) = y$，$x_2 \in B$使得$f(x_2) = y$，于是此时有$y \in f(A) \cap f(B)$且$y \notin f(A \cap B) (= \varnothing)$。由此反例，可以得到这个增强条件是不被允许的。
>
> ---
>
> $f(A) \backslash f(B) \subseteq f(A \backslash B)$:
>
> 对任意$y \in f(A) \backslash f(B)$，同时有$y \in f(A)$与$y \notin f(B)$成立。于是同时成立“存在$x_1 \in A$且$f(x_1) = y$”与“对任意$x_2 \in B$且$f(x_2) \neq y$”，进而有存在$x_1 \in A$且$x_1 \notin B$使得$f(x_1) = y \iff x_1 \in A \backslash B$使得$f(x_1) = y \iff y \in f(A \backslash B)$。于是由此得证$f(A) \backslash f(B) \subseteq f(A \backslash B)$。
>
> > 条件增强：
> > 假设下面一个情景，x_1，$x_2 \in A$，但是存在$x_1 \in B$与$x_2 \notin B$，函数f满足$f(x_1) = f(x_2) = y$，此时不难发现，对$f(A \backslash B)$，应当有$y \in f(A \backslash B) (\exists x_2 \in A \backslash B$使得$f(x_2) = y)$，对$f(A) \backslash f(B)$，应当有$y \notin f(A) \backslash f(B) (y \in f(B))$，于是通过该例子可以得到，这个增强条件并不被许可。

3.4.4 设$f:X\to Y$是一个从集合X到集合Y函数，证明：$f(f^{-1}(S))=S$对任意$S\subseteq Y$都成立的充分必要条件是f是满射，$f^{-1}(f(S))=S$对任意$S\subseteq X$都成立的充分必要条件是f是单射

> 根据习题3.4.2中的结论有$f(f^{-1}(S))\subseteq S(S\subseteq Y)$与$S\subseteq f^{-1}(f(S))(S\subseteq X)$始终成立，于是仅需要论证下面两个命题：
>
> $S\subseteq f(f^{-1}(S))(S\subseteq Y)$与$f$是满射互为充要：
>
> > 当f为满射时：
> > 对任意$y\in S$，由于f是满射，于是存在至少一个$x\in X$使得$f(x)=y$且$x\in f^{-1}(S)$，于是由$f(f^{-1}(S))$的定义，$x\in f^{-1}(S)\iff f(x)=y\in f(f^{-1}(S))$，于是得证，当$f$为满射时，有$S\subseteq f(f^{-1}(S))$。
> > 当对任意$S\subseteq Y$都有$S\subseteq f(f^{-1}(S))$时：
> > 取$S=Y$，于是对任意$y\in Y$，都有$y\in f(f^{-1}(Y))\iff\exists x\in f^{-1}(Y)$使得$f(x)=y$，又有$f^{-1}(Y)\subseteq X$，于是即对任意$y\in Y$，存在$x\in X$使得$y=f(x)$。
>
> $f^{-1}(f(S))\subseteq S(S\subseteq X)$与$f$是单射互为充要：
>
> > 当f是单射时：
> > 对任意$x\in f^{-1}(f(S))$，存在$y\in f(S)$使得$f(x)=y$，对$y\in f(S)$，由前象定义必然存在$x\in S$使得$f(x'')=y$，由于f是单射，于是对其它$x'\in X$均有$f(x')\neq y$，所以x''唯一，只可能有$x''=x$，于是综上有对任意$x\in f^{-1}(f(S))$，均有$x\in S$，即$f^{-1}(f(S))\subseteq S(S\subseteq X)$。
> > 当$f^{-1}(f(S))\subseteq S$对任意$S\subseteq X$成立时：
> > 若此时f不为单射，于是存在至少一对x_1，$x_2\in X$有$f(x_1)=f(x_2)$且$x_1\neq x_2$，此时取$S=\{x_1\}$，会导出结论$f^{-1}(f(S))\subsetneq S$，于是f只可能是单射。
>
> 于是证毕。

3.4.6 证明引理3.4.9（提示：从集合$\{0,1\}^X$开始，利用替代公理把每一个f替换为$f^{-1}(\{1\})$，同时本题与习题3.5.11有联动）

> 由幂集公理，对任意集合X可知$A=\{0,1\}^X$是一个集合，于是对任意$f\in A$与任意对象y定义性质$P(f,y)$：
>
> $$P(f,y):=y=f^{-1}(\{1\})$$
>
> 使用替换公理构造下面这样一个集合：
>
> $$B=\{y:y=f^{-1}(\{1\})\text{对某}f\in A\text{成立}\}$$
>
> 证明该集合就是引理3.4.9所述的幂集：
>
> 对任意X的子集Y，考虑一个$f:X\to\{0,1\}$，定义$\forall x\in Y$，$f(x)=1$，$\forall x\in X\backslash Y$，$f(x)=0$。对此函数$f$显然有$f^{-1}(\{1\})=Y$，又根据幂集定义，$f\in A$，于是对任意$X$的子集$Y$，$Y\in B$。
>
> 对任意的$y\in B$，可知$x\in y\iff x\in X$且$f(x)=1$，于是可以得到$y\subseteq X$，即y是X的一个子集，进而y属于幂集。
>
> 综上，根据集合相等的定义，可以得到幂集$\{Y:Y\text{是}X\text{的一个子集}\}=\{y:y=f^{-1}(\{1\})\}$。

3.4.7 设X与Y是集合。对任意一个函数$f:X'\to Y'$，若它满足定义域X'是X的子集，且值域Y'是Y的子集，则称f是从集合X到集合Y的偏函数。证明：从X到Y的全体偏函数构成一个集合（提示：利用习题3.4.6，幂集公理，并集公理与替换公理）

> 由引理3.4.9结论，X与Y分别对应存在一个集合ι_X与ι_Y包含了它们所有的子集。对任意$X'\in\iota_X$，定义这样一个指定关系有：
>
> $$Y'\implies Y'^{X'}$$
>
> 于是此时可以对于给定的集合ι_Y，对任意$Y'\in\iota_Y$，指定一个集合$Y'^{X'}$，于是根据并集公理的引申结论，我们可以构造这样一个集合：
>
> $$\bigcup_{Y'\in\iota_Y}Y'^{X'}$$
>
> 对该集合中，包含了所有以X'为定义域，任意$Y'\in\iota_Y$为值域的函数（也即X到Y的偏函数）
>
> 于是根据上文所述，我们确定了一个这样的指定关系：
>
> $$X'\implies\bigcup_{Y'\in\iota_Y}Y'^{X'}$$
>
> 再次对集合ι_X使用并集公理的引申结论，可以得到下述集合
>
> $$\bigcup_{X'\in\iota_X}\bigcup_{Y'\in\iota_Y}Y'^{X'}$$
>
> 对该集合中，包含了所有以$X'\in\iota_X$为定义域，任意$Y'\in\iota_Y$为值域的函数（也即X到Y的偏函数）
>
> 从X到Y的全体偏函数构成的一个集合即为上文所构造的集合$\bigcup_{X'\in\iota_X}\bigcup_{Y'\in\iota_Y}Y'^{X'}$
>
> （为什么没用到替代公理，此题存疑）

3.4.8 证明公理3.4（并集）可以由公理3.1（集合是元素），公理3.3（单元素集与双元素集）与公理3.11（并集公理）推出

> 假设给定集合A与集合B，根据公理3.1，于是A与B都是元素，进而根据公理3.3，存在一个双元素集合$C=\{A,B\}$，再对C使用公理3.11，于是存在一个集合$\cup C$，对任意元素x有：
>
> $$x\in\cup C\iff 存在S\in C使得x\in S\iff x\in A或x\in B$$
>
> 即A与B的并集，于是推知了公理3.4。

3.4.9 证明若有β与β'是集合I中的两个元素，且对任意$\alpha\in I$，我们指定一个集合A_α，那么证明：

$$\{x\in A_\beta:对任意\alpha\in I,有x\in A_\alpha\}=\{x\in A_{\beta'}:对任意\alpha\in I,有x\in A_\alpha\}$$

于是并集公理引申给出的$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$定义并不依赖于$\beta$的选取

> 根据分类公理，对任意$x\in\{x\in A_\beta:对任意\beta\in I,有x\in A_\beta\}$，有$x\in\beta$且对任意$\alpha\in I$，有$x\in A_\alpha$，由于$\beta\in I$，于是该命题等价于对任意$\alpha\in I$，有$x\in A_\alpha$，考虑取$\beta'\in I$也应当有该命题成立即$x\in A_{\beta'}$。于是得到$x\in\{x\in A_{\beta'}:对任意\alpha\in I,有x\in A_\alpha\}$，反之同理。于是根据集合相等的定义有：
>
> $$\{x\in A_\beta:对任意\alpha\in I,有x\in A_\alpha\}=\{x\in A_{\beta'}:对任意\alpha\in I,有x\in A_\alpha\}$$
>
> 成立。

3.4.10 设I与J是两个集合，并且对于任意$\alpha \in I \cup J$，A_α是一个集合。证明：$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha$；如果$I$与$J$都是非空集合，证明：$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha$

> $\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right)$与$\bigcup_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha$：
>
> 对任意$x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right)$，应当有$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$或$x \in \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$，于是有存在$\alpha \in I$使得$x \in A_\alpha$或者存在$\alpha \in J$使得$x \in A_\alpha \iff$ 存在$\alpha \in I$或$\alpha \in J$使得$x \in A_\alpha \iff$ 存在$\alpha \in I \cup J$使得$x \in A_\alpha$，进而可以得到$x \in \bigcup_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha$。
>
> 反过来，对任意$x \in \bigcup_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha \iff$ 存在$\alpha \in I \cup J$使得$x \in A_\alpha \iff$ 存在$\alpha \in I$或$\alpha \in J$使得$x \in A_\alpha \iff$ 存在$\alpha \in I$使得$x \in A_\alpha$或者存在$\alpha \in J$使得$x \in A_\alpha \iff$ 有$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$或$x \in \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$，于是可以得到$x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right)$。
>
> 综上，根据集合相等的定义，有$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha$成立。
>
> ---
>
> $\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha\right)$与$\bigcap_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha$：
>
> 对任意$x \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha\right)$，应当有$x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$且$x \in \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$，于是有对任意$\alpha \in I$有$x \in A_\alpha$且对任意$\alpha \in J$使得$x \in A_\alpha \iff$ 对任意$\alpha \in I$与任意$\alpha \in J$使得$x \in A_\alpha \iff$ 对任意$\alpha \in I \cup J$有$x \in A_\alpha$，进而可以得到$x \in \bigcap_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha$。
>
> 反过来，对任意$x \in \bigcap_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha \iff$ 对任意$\alpha \in I \cup J$有$x \in A_\alpha \iff$ 对任意$\alpha \in I$与任意$\alpha \in J$都有$x \in A_\alpha \iff$ 对任意$\alpha \in I$有$x \in A_\alpha$且对任意$\alpha \in J$有$x \in A_\alpha \iff$ 有$x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$且$x \in \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$，于是可以得到$x \in \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha\right)$。
>
> 综上，根据集合相等的定义，有$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha$成立。

3.4.11 设X是一个集合，I是一个非空集合，并且对任意$\alpha \in I$，A_α是I的子集。证明：

$$X \backslash \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (X \backslash A_\alpha)$$
$$X \backslash \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \backslash A_\alpha)$$

将这个结论同命题3.1.28中的德摩根定律相对比（尽管由于I可能是无限集合，使我们无法直接从德摩根定律中推出上式）

> $X\backslash\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$与$\bigcap_{\alpha\in I}(X\backslash A_\alpha)$:
>
> 对任意$x\in X\backslash\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$，于是有$x\in X$且$x\notin\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\iff x\in X$且对任意$\alpha\in I$，$x\notin A_\alpha\iff$对任意$\alpha\in I$，$x\in X$且$x\notin A_\alpha\iff$对任意$\alpha\in I$，$x\in X\backslash A_\alpha\iff x\in\bigcap_{\alpha\in I}(X\backslash A_\alpha)$。
>
> 反过来，对任意$x\in\bigcap_{\alpha\in I}(X\backslash A_\alpha)$，有对任意$\alpha\in I$，$x\in X\backslash A_\alpha\iff$对任意$\alpha\in I$，$x\in X$且$x\notin A_\alpha\iff x\in X$且对任意$\alpha\in I$，$x\notin A_\alpha\iff x\in X$且$x\notin\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$，即$x\in X\backslash\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$。
>
> 于是综上，根据集合相等的定义，可以得到$X\backslash\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in I}(X\backslash A_\alpha)$。
>
> ---
>
> $X\backslash\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$与$\bigcup_{\alpha\in I}(X\backslash A_\alpha)$:
>
> 对任意$x\in X\backslash\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$，于是有$x\in X$且$x\notin\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\iff x\in X$且存在$\alpha\in I$，$x\notin A_\alpha\iff$存在$\alpha\in I$，$x\in X$且$x\notin A_\alpha\iff$存在$\alpha\in I$，$x\in X\backslash A_\alpha\iff x\in\bigcup_{\alpha\in I}(X\backslash A_\alpha)$。
>
> 反过来，对任意$x\in\bigcup_{\alpha\in I}(X\backslash A_\alpha)$，有存在$\alpha\in I$，$x\in X\backslash A_\alpha\iff$对某个$\alpha\in I$，$x\in X$且$x\notin A_\alpha\iff x\in X$且对某个$\alpha\in I$，$x\notin A_\alpha\iff x\in X$且$x\notin\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$，即$x\in X\backslash\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$。
>
> 于是综上，根据集合相等的定义，可以得到$X\backslash\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}(X\backslash A_\alpha)$。

本节相关跳转

实分析 3.1 基础知识

实分析 3.5 笛卡尔积