16.5 傅里叶定理和Plancherel定理

命题

1. （16.5.1 傅里叶定理）对于任意的$f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e_n$都依$L^2$度量收敛于$f$。换言之有：

$$\lim_{N\to\infty}\left\|f-\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e_n\right\|_2=0$$

（注：证明见原书，主要是内积运算与魏尔斯特拉斯第二逼近定理的运用；需要注意的是，这个结论并不能直接简单地推广给逐点收敛和一致收敛，原书中给出了一个简单的结论：额外假定f可微可以将结论推广到逐点收敛；额外假定f二次连续可微可以将结论推广到一致收敛（证明自然是没有的，可能可以找本三角分析的书看看啥的））

2. （16.5.3 一致收敛的加强？）设$f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，如果级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|$是绝对收敛的，那么级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e_n$就一致收敛于$f$。换言之，我们有：

$$\lim_{N\to\infty}\left\|f-\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e_n\right\|_\infty=0$$

（注：给出了一个增强傅里叶定理的条件，毕竟一般一致收敛总是比依L^2度量收敛更好的）

3. （16.5.4 Plancherel定理）对$f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2$是绝对收敛的，并且：

$$\|f\|_2{}^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2$$

（注：也称为**帕塞瓦尔定理**，感觉比起Plancherel定理也没好记到哪去）

课后习题

16.5.1 设f是$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$中的函数，并且把三角傅里叶系数$a_n$、$b_n$（其中$n=0,1,2,3,\ldots$）定义为

$$a_n:=2\int_{[0,1]}f(x)\cos(2\pi nx)\mathrm{d}x\qquad b_n:=2\int_{[0,1]}f(x)\sin(2\pi nx)\mathrm{d}x$$

(a) 证明：级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(2\pi nx)+b_n\sin(2\pi nx))$$

依L^2度量收敛于f（提示：利用傅里叶定理，并把指数函数分解为正弦和余弦函数，把正的n项和负的n项合起来）

> 根据傅里叶定理，我们知道对任意的$\varepsilon>0$存在$N_0\geq 0$使得对任意的$N\geq N_0$有：
>
> $$\left\|f-\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e_n\right\|_2<\varepsilon$$
>
> 注意到$e_n=\mathrm{e}^{2\pi inx}=\cos(2\pi nx)+\mathrm{i}\sin(2\pi nx)$与$e_{-n}=\mathrm{e}^{-2\pi inx}=\cos(2\pi nx)-\mathrm{i}\sin(2\pi nx)$，因此我们合并$n$的绝对值相等的项，可以将这个级数变换有：

> $$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e_n&=\hat{f}(0)e_0+\sum_{n=1}^{N}[\hat{f}(n)e_n+\hat{f}(-n)e_n]\\&=\hat{f}(0)+\sum_{n=1}^{N}[(\hat{f}(n)+\hat{f}(-n))\cos(2\pi nx)+\mathrm{i}(\hat{f}(n)-\hat{f}(-n))\sin(2\pi nx)]\\&=\langle f,1\rangle+\sum_{n=1}^{N}\left[2\left\langle f,\frac{e_n+e_{-n}}{2}\right\rangle\cos(2\pi nx)+2\left\langle f,\frac{e_n-e_{-n}}{2\mathrm{i}}\right\rangle\sin(2\pi nx)\right]\end{aligned}$$
>
> （用到了傅里叶系数的定义与内积的运算法则，详情见定义16.3.7与命题16.2.5）
>
> 再结合三角函数的定义$\cos(2\pi nx)=\dfrac{\mathrm{e}^{2\pi nix}+\mathrm{e}^{-2\pi nix}}{2}=\dfrac{e_n+e_{-n}}{2}$与$\sin(2\pi nx)=\dfrac{\mathrm{e}^{2\pi nix}-\mathrm{e}^{-2\pi nix}}{2\mathrm{i}}=\dfrac{e_n-e_{-n}}{2\mathrm{i}}$与内积的定义，可以继续化简有：
>
> $$\begin{aligned}&\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e_n\\=&\frac{1}{2}\left(2\int_{[0,1]}f(y)\mathrm{d}y\right)+\sum_{n=1}^{N}\left[\left(2\int_{[0,1]}f(y)\cos(2\pi ny)\mathrm{d}y\right)\cos(2\pi nx)+\left(2\int_{[0,1]}f(y)\sin(2\pi ny)\mathrm{d}y\right)\sin(2\pi nx)\right]\\=&\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(2\pi nx)+b_n\sin(2\pi nx))\end{aligned}$$
>
> 从而傅里叶定理事实上等价于题目结论，因此结论成立。

(b) 证明：如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都是绝对收敛的，那么上述级数不仅依L^2度量收敛于f，还一致收敛于f（提示：利用定理16.5.3）

> 由于$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都是绝对收敛的，因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|$也是绝对收敛的。然后注意到在(a)的证明中事实上我们已经得到了$\hat{f}(n)=a_n-\mathrm{i}b_n$与$\hat{f}(-n)=a_n+\mathrm{i}b_n$（$n\geq 1$），因此对任意的$N\geq 1$，我们有：
>
> $$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N}|\hat{f}(n)|&=\sum_{n=-N}^{-1}|\hat{f}(n)|+|\hat{f}(0)|+\sum_{n=1}^{N}|\hat{f}(n)|\\&=|\hat{f}(0)|+\sum_{n=1}^{N}|\hat{f}(n)|+|\hat{f}(-n)|\\&\leq|\hat{f}(0)|+2\sum_{n=1}^{N}|a_n|+|b_n|\end{aligned}$$
>
> （注意复数的绝对值总是小于虚部与实部绝对值之和）
>
> 从而根据比较判别法，我们可以得到$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|$也是绝对收敛的，从而利用定理16.5.3我们可以得到傅里叶级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e_n$一致收敛于$f$；而在(a)的证明里我们阐述了傅里叶级数事实上与题目给出的级数是等价的，因此可以引申为题目的级数是一致收敛于f的。

16.5.2 当$x\in[0,1)$时，函数$f(x)$被定义为$f(x)=(1-2x)^2$，并且$f(x)$按照$\mathbb{Z}$周期延拓到整个实直线上

(a) 利用习题16.5.1证明：级数

$$\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2n^2}\cos(2\pi nx)$$

一致收敛于f

> 根据习题16.5.1，我们尝试计算f对应的每个a_n与b_n（$n\geq 1$）：
>
> $$\begin{aligned} a_0 &= 2\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x = \left[x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3\right]\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \\ a_n &= 2\int_{[0,1]} f(x)\cos(2\pi nx)\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi^2 n^2} \\ b_n &= 2\int_{[0,1]} f(x)\sin(2\pi nx)\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$
>
> （用两次分部积分可以计算，有点长就不写了）
>
> 从而即有级数：
>
> $$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(2\pi nx) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(2\pi nx)$$
>
> 依L^2度量收敛于f，再注意到$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = 0$都是绝对收敛的，因此根据习题16.5.1的结论我们知道这个级数也是一致收敛于f的，因此结论得证。

(b) 推导出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (提示：计算(a)中级数在$x=0$处的取值)

> 根据(a)的结论，我们知道：
>
> $$f(0) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2 n^2} = 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
>
> 于是结论得证。

(c) 推导出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (提示：用指数函数来表述余弦函数，并利用Plancherel定理)

> 在习题16.5.1中我们已经阐述了傅里叶级数与三角函数级数之间的等价关系，因此我们不妨将f改写为傅里叶级数的形式：
>
> $$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(2\pi nx) &= \frac{1}{3}e_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2 n^2}\frac{e_n + e_{-n}}{2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{2}{\pi^2 n^2}e_n + \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2 n^2}e_n \end{aligned}$$
>
> 从而根据Plancherel定理，我们有：
>
> $$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{4}{\pi^4 n^4} + \frac{1}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^4 n^4} = \int_{[0,1]} |1-2x|^4\mathrm{d}x = \frac{1}{5} \\ \iff &2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^4 n^4} = \frac{4}{45} \implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \end{aligned}$$
>
> 于是结论得证。

16.5.3 设f是$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$中的函数，并设$P$是一个三角多项式。证明：对所有的整数$n$，有

$$\widehat{f * P}(n) = \hat{f}(n)\hat{P}(n)$$

更一般地，如果$f, g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，那么证明：对于所有的整数$n$，有

$$\widehat{f*g}(n)=\hat{f}(n)\hat{g}(n)$$

（表述此事的一种奇特方式是，傅里叶变换把卷积和乘积缠绕在一起（见过将这个称为傅里叶变换的卷积定理的））

> 设$P=\sum_{m=-M}^{M}c_me_m$（其中$N\geq 0$）。先证明第一个结论，我们有：
>
> $$\begin{aligned}\widehat{f*P}(n)&=\int_{[0,1]}\mathrm{e}^{-2\pi nix}f*P(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{[0,1]}\mathrm{e}^{-2\pi nix}\left(\sum_{m=-N}^{N}c_m\int_{[0,1]}f(y)\mathrm{e}^{2\pi mi(x-y)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{[0,1]}\mathrm{e}^{-2\pi nix}\left(\sum_{m=-N}^{N}c_m\mathrm{e}^{2\pi mix}\hat{f}(m)\right)\mathrm{d}x\\&=\sum_{m=-N}^{N}c_m\hat{f}(m)\int_{[0,1]}\mathrm{e}^{2\pi(m-n)ix}\mathrm{d}x\\&=\begin{cases}c_n\hat{f}(n) & \text{if }|n|\leq N\\0 & \text{if }|n|>N\end{cases}\end{aligned}$$
>
> 而我们知道当$|n|\leq N$的时候$\hat{P}(n)=c_n$，当$|n|>N$的时候$\hat{P}(n)=0$，因此第一个结论得证。
>
> 然后我们来证明第二个结论。由于f有界（命题16.1.5(a)）因此不妨设f以M为上界。对任意的$\varepsilon>0$，根据魏尔斯特拉斯第二逼近定理（命题16.4.1）我们知道存在一个三角多项式Q满足$\|g-Q\|_\infty\leq\varepsilon$，然后我们注意到：
>
> $$\begin{aligned}\left|\widehat{f*g}(n)-\widehat{f*Q}(n)\right|&=|\langle f*g,e_n\rangle-\langle f*Q,e_n\rangle|\\&=|\langle f*(g-Q),e_n\rangle|\\&=\left|\int_{[0,1]}f(x)(g(x)-Q(x))\mathrm{e}^{-2\pi nix}\mathrm{d}x\right|\\&\leq\int_{[0,1]}M\varepsilon=M\varepsilon\end{aligned}$$
>
> 另一方面，我们有：
>
> $$\begin{aligned}\left|\hat{f}(n)\hat{g}(n)-\hat{f}(n)\hat{Q}(n)\right|&=\left|\hat{f}(n)\right|\left|\hat{g}(n)-\hat{Q}(n)\right|\\&=\left|\hat{f}(n)\right||\langle g-Q,e_n\rangle|\\&=\left|\hat{f}(n)\right|\left|\int_{[0,1]}(g(x)-Q(x))\mathrm{e}^{-2\pi nix}\mathrm{d}x\right|\\&\leq\left|\hat{f}(n)\right|\int_{[0,1]}\varepsilon=\left|\hat{f}(n)\right|\varepsilon\end{aligned}$$
>
> 结合本题第一个结论的$\widehat{f*Q}(n)=\hat{f}(n)\hat{Q}(n)$，从而利用三角不等式我们有：
>
> $$\begin{aligned}\left|\widehat{f*g}(n)-\hat{f}(n)\hat{g}(n)\right|&\leq\left|\widehat{f*g}(n)-\widehat{f*Q}(n)\right|+\left|\hat{f}(n)\hat{g}(n)-\hat{f}(n)\hat{Q}(n)\right|\\&\leq\left(M+\left|\hat{f}(n)\right|\right)\varepsilon\end{aligned}$$
>
> 由于ε是任意的，因此只能有$\left|\widehat{f*g}(n)-\hat{f}(n)\hat{g}(n)\right|=0$，换言之即$\widehat{f*g}(n)=\hat{f}(n)\hat{g}(n)$。

16.5.4 设$f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$是一个可微函数，并且它的导函数$f'$是连续的。证明：$f'$也属于$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，并且对所有的整数$n$有$\widehat{f'}(n)=2\pi ni\hat{f}(n)$ **（见过称这个为微分定理的，不过有一点不一样）**

> f'连续已经在题设中给出，因此只要证明f'是$\mathbb{Z}$周期的那么f就属于$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$。
>
> 注意到对任意的$x_0\in\mathbb{R}$，我们有：
>
> $$f'(x_0+1)=\lim_{x\to x_0;x\in\mathbb{R}\backslash\{x_0\}}\frac{f(x+1)-f(x_0+1)}{(x+1)-(x_0+1)}=\lim_{x\to x_0;x\in\mathbb{R}\backslash\{x_0\}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

因此f'是$\mathbb{Z}$周期的，第一个结论得证。

然后我们证明第二个结论，根据分部积分公式（命题11.10.1），考虑$F=f$与$G=e_{-n}$的情景，于是有：

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(n)=\langle f',e_n\rangle&=\int_{[0,1]}f'(x)\mathrm{e}^{-2\pi n\mathrm{i}x}\mathrm{d}x\\&=\left(f(1)\mathrm{e}^{-2\pi n\mathrm{i}}-f(0)\mathrm{e}^{0}\right)-\left(-2\pi n\mathrm{i}\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{e}^{-2\pi n\mathrm{i}x}\mathrm{d}x\right)\\&=2\pi n\mathrm{i}\langle f,e_n\rangle=2\pi n\mathrm{i}\hat{f}(n)\end{aligned}$$

于是结论得证。

16.5.5 设$f,g\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$。证明：帕塞瓦尔恒等式

$$\Re\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x=\Re\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$

（提示：对$f+g$和$f-g$使用Plancherel定理，然后把两者相减）进而推导出上面的实数部分可以去掉，于是有

$$\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$

（提示：利用第一个恒等式，其中的f替换成$\mathrm{i}f$）

由于$f+g$，$f-g$也属于$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，因此我们分别对它们应用Plancherel定理，有：

$$\|f+g\|_2{}^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f+g}(n)\right|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n)+\hat{g}(n)\right|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\overline{\hat{f}(n)}+\hat{g}(n)\overline{\hat{g}(n)}+\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}+\hat{g}(n)\overline{\hat{f}(n)}$$

$$\|f-g\|_2{}^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f-g}(n)\right|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n)-\hat{g}(n)\right|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\overline{\hat{f}(n)}+\hat{g}(n)\overline{\hat{g}(n)}-\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}-\hat{g}(n)\overline{\hat{f}(n)}$$

因此我们有：

$$\|f+g\|_2{}^2-\|f-g\|_2{}^2=2\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}+\hat{g}(n)\overline{\hat{f}(n)}$$

另一方面，直接根据L^2范数的定义又有：

$$\begin{aligned}\|f+g\|_2{}^2-\|f-g\|_2{}^2&=\langle f+g,f+g\rangle-\langle f-g,f-g\rangle\\&=\int_{[0,1]}|f(x)+g(x)|^2-|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\\&=2\int_{[0,1]}f(x)\overline{g(x)}+g(x)\overline{f(x)}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

注意到$\Re(\overline{a}b)=\Re(\overline{b}a)$对任意的复数$a,b$成立成立，因此上面的结论可以总结得到：

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}+\hat{g}(n)\overline{\hat{f}(n)}=\int_{[0,1]}f(x)\overline{g(x)}+g(x)\overline{f(x)}\mathrm{d}x\\\Longrightarrow&\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Re[\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}+\hat{g}(n)\overline{\hat{f}(n)}]=\int_{[0,1]}\Re[f(x)\overline{g(x)}+g(x)\overline{f(x)}]\mathrm{d}x\\\Longrightarrow&\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Re[\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}]=\int_{[0,1]}\Re[f(x)\overline{g(x)}]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

也即$\Re\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x=\Re\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$，结论得证。

然后我们证明第二个结论，注意到$\widehat{\mathrm{i}f}(n)=\mathrm{i}\hat{f}(n)$，因此我们考虑对$\mathrm{i}f$与$g$应用帕塞瓦尔恒等式，可以得到：

$$\Re\int_0^1\mathrm{i}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x=\Re\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{i}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$

注意到$\Re(\mathrm{i}a)=\Re(\mathrm{i}\Re(a)-\Im(a))=-\Im(a)$对所有的复数都成立，因此这表明有恒等式：

> $$\Im\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x=\Im\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$
>
> 从而结合一下帕塞瓦尔恒等式即有：
>
> $$\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$$
>
> 于是结论得证。

16.5.6 本题中我们对具有任意固定周期L的函数建立傅里叶级数理论。设$L>0$，并设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$是一个连续的$L$周期复值函数。对于每一个整数$n$，定义$c_n$为：

$$c_n:=\frac{1}{L}\int_{[0,L]}f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}mx/L}\mathrm{d}x$$

> 由于f是一个L周期函数，因此对任意的$x\in\mathbb{R}$都有$f(L(x+1))=f(Lx)$，也即函数$g(x):=f(Lx)$是一个$\mathbb{Z}$周期函数，这点对下面的讨论很有帮助。

(a) 证明：级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mx/L}$$

依L^2度量收敛于f。换言之即证明：

$$\lim_{N\to\infty}\int_{[0,L]}\left|f(x)-\sum_{n=-N}^{N}c_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mx/L}\right|^2\mathrm{d}x=0$$

(提示：对函数$f(Lx)$使用傅里叶定理)

> 根据傅里叶定理，因此有级数：
>
> $$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{g}(n)e_n$$
>
> 依L^2度量收敛于g，然后注意到对任意的$n\in\mathbb{Z}$有：
>
> $$\begin{aligned}\hat{g}(n)&=\int_{[0,1]}f(Lx)\mathrm{e}^{-2\pi ni x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{L}\int_{[0,L]}f(y)\mathrm{e}^{-2\pi ni y/L}\mathrm{d}y\\&=c_n\end{aligned}$$
>
> 从而有：
>
> $$\begin{aligned}\int_{[0,1]}\left|g(x)-\sum_{n=-N}^{N}\hat{g}(n)e_n\right|^2\mathrm{d}x&=\int_{[0,1]}\left|f(Lx)-\sum_{n=-N}^{N}c_ne_n\right|^2\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{L}\int_{[0,L]}\left|f(y)-\sum_{n=-N}^{N}c_n\mathrm{e}^{2\pi niy/L}\right|^2\mathrm{d}y\end{aligned}$$
>
> 因此由傅里叶定理给出了$\lim\limits_{N\to\infty}\int_{[0,1]}\left|g(x)-\sum\limits_{n=-N}^{N}\hat{g}(n)e_n\right|^2\mathrm{d}x=0$可以推知$\lim\limits_{N\to\infty}\int_{[0,L]}\left|f(y)-\sum\limits_{n=-N}^{N}c_n\mathrm{e}^{2\pi niy/L}\right|^2\mathrm{d}y=0$，也即级数$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}mx/L}$依$L^2$度量收敛于$f$，结论得证。

(b) 设级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$是绝对收敛的，证明：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} mx/L}$$

一致收敛于f

> 在(a)中我们已经论证了$c_n = \hat{g}(n)$，因此即级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n)$绝对收敛，从而依据命题16.5.3有级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) e_n$一致收敛于$g$。换言之，对任意的$\varepsilon > 0$，存在$N \geq 0$使得对任意的$n \geq N$与所有的$x \in \mathbb{R}$有：
>
> $$\left|\sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{2\pi n \mathrm{i} x} - f(Lx)\right| < \varepsilon$$
>
> 然后我们做替换$y = x/L$，因此上面的结论变为：对任意的$\varepsilon > 0$，存在$N \geq 0$使得对任意的$n \geq N$与所有的$x \in \mathbb{R}$有：
>
> $$\left|\sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{2\pi n \mathrm{i} y/L} - f(y)\right| < \varepsilon$$
>
> 也即级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi n \mathrm{i} y/L}$一致收敛于$f$，于是结论得证。

(c) 证明：

$$\frac{1}{L}\int_{[0,L]} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

(提示：对函数$f(Lx)$使用Plancherel定理；上面三个小题刚好是本节三个命题扩展到L周期函数的形式)

> 对g使用Plancherel定理，我们有：
>
> $$\|g\|_2{}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(n)|^2$$
>
> 注意到：
>
> $$\begin{aligned} \|g\|_2{}^2 &= \int_{[0,1]} |f(Lx)|^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{L}\int_{[0,L]} |f(y)|^2 \mathrm{d}y \end{aligned}$$
>
> 结合(a)中已有的$c_n = \hat{g}(n)$，于是即：
>
> $$\frac{1}{L}\int_{[0,L]} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$
>
> 结论得证。

本节相关跳转

[实分析 16.4 周期卷积]