9.9 一致连续性

定义

1. (9.9.2 一致连续) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，并设$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数。如果对任意$\varepsilon > 0$，都存在$\delta > 0$使得只要x，$x_0 \in X$是X中两个δ-接近的点，$f(x)$，$f(x_0)$就是ε-接近的，则我们称f是**一致连续的**。

   （注：我们应当把这个概念同函数的连续性做比较，两者的区别在于：对一个给出的ε，在一致连续中我们可以取到一个δ使这个δ对所有$x_0 \in X$满足，而在连续中不同的$x_0 \in X$可能使用不同的δ。因此，每个一致连续的函数都是连续的，反过来则不一定）

2. (9.9.5 等价序列) 设m是一个整数，$(a_n)_{n=m}^{\infty}$与$(b_n)_{n=m}^{\infty}$是两个实数序列，并且设$\varepsilon_0 > 0$是给定的。

   称$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是ε_0**-接近于**$(b_n)_{n=m}^{\infty}$的，当且仅当对任意$n \geq m$都有a_n是ε_0-接近于b_n的。

   称$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是**最终**ε_0**-接近于**$(b_n)_{n=m}^{\infty}$的，当且仅当存在一个$N \geq m$使得对$(a_n)_{n=N}^{\infty}$是ε_0-接近于$(b_n)_{n=N}^{\infty}$的。

   称$(a_n)_{n=m}^{\infty}$与$(b_n)_{n=m}^{\infty}$是**等价的**，当且仅当对任意$\varepsilon > 0$都有$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是最终ε-接近于$(b_n)_{n=m}^{\infty}$的。

   （注：在5.2节中我们学习了一个与之相似的概念，这里相比定义5.2.6，我们去掉了对ε的限制（在那节还没有实数的概念），对于这样的去除我们也在习题6.1.10中证明了这样的限制完全是无所谓的。）

命题

1. (9.9.7 等价序列的极限表述？) 设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$是两个实数序列（不一定是有界的或者是收敛的），则$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$是等价的当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$。

2. (9.9.8 一致连续的等价序列表述？) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，并设$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数。那么下面两个命题逻辑上是等价的：

   > - f在X上是一致连续的。
   > - 若$(x_n)_{n=0}^{\infty}$与$(y_n)_{n=0}^{\infty}$是完全由X中元素构成的等价序列，那么序列$(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$与$(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$也是等价的。

   （注：我们应当将这个命题同命题9.4.7比较，命题9.4.7断定若f是连续的，那么f将收敛的序列映射到收敛的序列；命题9.9.8断定若f是一致连续的，那么f将等价的序列映射到等价的序列。为找出两者的关联，根据引理9.9.7我们有$(x_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于x_*当且仅当序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$与$(x_*)_{n=1}^{\infty}$等价，从而我们可以将两个命题联系到一起）

3. (9.9.12 一致连续与柯西序列？) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，$f : X \to \mathbb{R}$是一个一致连续的函数，并且设$(x_n)_{n=0}^{\infty}$是完全由X中元素构成的柯西序列，那么$(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$也是一个柯西序列。

   （注：于是一致连续函数将柯西序列映射到柯西序列）

   > 推论：
   >
   > 1. (9.9.14) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，$f : X \to \mathbb{R}$是一个一致连续的函数，并且设x_0是X的附着点，那么极限$\lim\limits_{x\to x_0; x\in X} f(x)$存在（特别地，它还是一个实数）。

4. （9.9.15 一致连续与有界集？）设X是$\mathbb{R}$的一个子集，并设$f: X \to \mathbb{R}$是一个一致连续的函数。若E是X的一个有界子集，那么$f(E)$也是有界的。

   （注：于是一致连续函数将有界集映射到有界集）

5. （9.9.16 闭区间连续函数必然一致连续？）设$a < b$都是实数，并且设$f: [a, b] \to \mathbb{R}$是$[a, b]$上的连续函数，那么f也是一致连续的。

   （注：我们应当将引理9.6.3，命题9.9.15和定理9.9.16比较，这三者相互独立，获得任意两者都不能推出第三者，但是它们之间互相保持一致）

课后习题

本节相关跳转

实分析 5.2 等价的柯西序列

实分析 6.1 收敛与极限定律

实分析 9.4 连续函数

实分析 9.6 最大值原理