9.4 连续函数

定义

1. (9.4.1 连续) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且设x_0是X中的一个元素。我们称f在x_0处是**连续**的，当且仅当：

$$\lim_{x \to x_0; x \in X} f(x) = f(x_0)$$

换言之，即x沿X收敛于x_0时，$f(x)$的极限存在并且等于$f(x_0)$。我们称**f在X上是连续的**（或者简称是**连续的**），当且仅当对任意$x_0 \in X$，$f(x_0)$都是连续的。我们称f在x_0处是**间断的**，当且仅当f在x_0处不是连续的。

命题

1. (9.4.7 连续性的等价表述) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且设x_0是X中的一个元素。那么下面几个命题在逻辑上是等价的：

> - f在x_0处是连续的。
> - 对任意一个由X中元素组成的序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$，若有$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$，则有$\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0)$。
> - 对任意一个实数$\varepsilon > 0$，都存在一个实数$\delta > 0$，使得$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$对所有满足$|x - x_0| < \delta$的$x \in X$都成立。
> - 对任意一个实数$\varepsilon > 0$，都存在一个实数$\delta > 0$，使得$|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$对所有满足$|x - x_0| \le \delta$的$x \in X$都成立。

2. (9.4.9 算术运算保持连续性) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，$f: X \to \mathbb{R}$与$g: X \to \mathbb{R}$都是函数，并且设x_0是X中的一个元素。如果f和g在x_0处都是连续的，那么$f+g$，$f-g$，$\max(f,g)$，$\min(f,g)$和fg都在x_0处收敛，特别地，如果g在X上不为零，那么f/g也是在x_0处收敛的。
3. (9.4.10 指数运算是连续的 I) 设$a > 0$是正实数，那么定义为$f(x) := a^x$的函数$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是连续的。
4. (9.4.11 指数运算是连续的 II) 设p是一个实数，那么定义为$f(x) := x^p$的函数$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$是连续的。
5. (9.4.12 绝对值是连续的) 定义为$f(x) := |x|$的函数$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是连续的。
6. (9.4.13 复合运算保持连续性) 设X与Y都是$\mathbb{R}$的子集，$f: X \to Y$与$g: Y \to \mathbb{R}$都是函数，并且设x_0是X中的点。如果f在x_0处是连续的，并且g在$f(x_0)$处是连续的，那么复合函数$g \circ f: X \to \mathbb{R}$在$x_0$处是连续的。

课后习题

9.4.1 证明命题9.4.7 **(提示：主要利用前面的命题和引理证明。注意，为了证明(a)，(b)，(c)是等价的，没必要证明全部六个等价关系，但是至少要证明三个，例如证明(a)蕴含(b)，然后证明(b)蕴含(c)，(c)蕴含(a)就够了，尽管这可能不是处理这个问题最简短或者最快的方法)**

> 证明它们之间是互相等价的：
>
> - (a)等价于(b)：
>
> 根据定义9.4.1，我们知道f在x_0处是连续的，当且仅当有$\lim_{x\to x_0;x\in X} f(x)=f(x_0)$；而根据定义9.3.9，又有$\lim_{x\to x_0;x\in X} f(x)=f(x_0)$当且仅当对任意由$X$中元素组成且满足$\lim_{n\to\infty} a_n=x_0$的序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$，都有$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(x_0)$。于是上面的内容可总结有：
>
> f在x_0处是连续的，当且仅当对任意由X中元素组成的序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$，若有$\lim_{n\to\infty} a_n=x_0$，则有$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(x_0)$。于是结论得证。
>
> ---
>
> - (a)等价于(d)：
>
> 根据定义9.4.1，我们知道f在x_0处是连续的，当且仅当有$\lim_{x\to x_0;x\in X} f(x)=f(x_0)$；根据定义9.3.6，$\lim_{x\to x_0;x\in X} f(x)=f(x_0)$当且仅当对任意$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$使得$|f(x)-f(x_0)|\le\varepsilon$对任意满足$|x-x_0|\le\delta$的$x\in X$均成立。
>
> 于是结论得证。
>
> ---
>
> - (c)等价于(d)：
>
> 先证明(d)包含了(c)：
>
> 对任意一个实数$\varepsilon>0$，我们取$\varepsilon'=0.9\varepsilon$。根据(d)，存在一个$\delta'>0$，使得对任意$x\in X$满足$|x-x_0|\le\delta'$有$|f(x)-f(x_0)|\le\varepsilon'$成立，此时考虑取$\delta=\delta'$，于是我们有：
>
> 对任意一个实数$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对任意的$x\in X$满足$|x-x_0|\le\delta$，都有：
>
> $$|f(x)-f(x_0)|\le 0.9\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$
>
> 即(c)成立。
>
> 再证明(c)包含了(d)：
>
> 对任意的$\varepsilon>0$，根据(c)，存在一个$\delta'>0$，使得对任意$x\in X$满足$|x-x_0|<\delta'$有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$成立，此时取$\delta=0.9\delta'$，于是我们有：
>
> 对任意一个实数$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对任意的$x\in X$满足$|x-x_0|\le\delta$，都有：
>
> $$|x-x_0|\le\delta \Longrightarrow |x-x_0|<\delta' \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|\le\varepsilon$$
>
> 即(d)成立。

9.4.2 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，并且设$c\in\mathbb{R}$。证明：定义为$f(x):=c$的常数函数$f:X\to\mathbb{R}$在X上是连续的；并证明：定义为$g(x):=x$的恒等函数$g:X\to\mathbb{R}$也是在X上是连续的

> 证明：定义为$f(x):=c$的常数函数$f:X\to\mathbb{R}$在X上是连续的。
>
> 对任意$x_0\in X$，考虑任意由X中元素组成的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，设有$\lim_{n\to\infty} a_n=x_0$。于是研究$\lim_{n\to\infty} f(a_n)$：

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} c$$

根据6.5节中的内容，我们知道有$\lim_{n\to\infty} c = c = f(x_0)$，于是总结即：

对任意$x_0 \in X$，任意由X中元素组成的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，若有$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$则有$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$，于是根据命题9.4.7(b)有题目结论成立。

证明：定义为$g(x) := x$的恒等函数$g : X \to \mathbb{R}$在X上是连续的。

对任意$x_0 \in X$，考虑任意由X中元素组成的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，设有$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$。于是研究$\lim_{n\to\infty} g(a_n)$：

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n = x_0 = g(x_0)$$

于是总结即：

对任意$x_0 \in X$，任意由X中元素组成的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，若有$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$则有$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(x_0)$，于是根据命题9.4.7(b)有题目结论成立。

9.4.3 证明命题9.4.10（提示：你可以把引理6.5.3，夹逼定理（推论6.4.14）以及命题6.7.3结合起来使用）

对任意$x_0 \in \mathbb{R}$，考虑任意由X中元素组成的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，设有$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$。于是研究$\lim_{n\to\infty} f(a_n)$：

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a^{a_n}$$

根据题目，于是我们期望能证明$\lim_{n\to\infty} a^{a_n}$收敛于$a^{x_0}$。

要证明$(a^{a_n})_{n=0}^{\infty}$收敛于a^{x_0}，则要证明对任意$\varepsilon > 0$，总存在$N \in \mathbb{N}$使得对任意$n \geq N$都有$|a^{a_n} - a^{x_0}| \leq \varepsilon$，而根据命题6.7.3，我们有：

$$|a^{a_n} - a^{x_0}| \leq \varepsilon \iff a^{x_0}|a^{a_n - x_0} - 1| \leq \varepsilon \iff |a^{a_n - x_0} - 1| \leq \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} := 2\varepsilon'$$

而我们又有两个结论：

- 根据引理6.5.3，我们知道有$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$与$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$，从而对$\varepsilon' > 0$，存在$N_1, N_2 \in \mathbb{N}$使得对任意$n \geq N_1$都有$|a^{\frac{1}{n}} - 1| \leq \varepsilon'$成立与对任意的$n \geq N_2$都有$|a^{-\frac{1}{n}} - 1| \leq \varepsilon'$。
- 根据题设，由$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$可知对任意$\varepsilon > 0$，都存在$N_0 \in \mathbb{N}$使得对任意$n \geq N_0$都有$|a_n - x_0| \leq \varepsilon$成立，特别地，$\varepsilon$可以选取$\frac{1}{n}(n \in \mathbb{N})$。

根据这两个结论，于是我们可以组织得到结论：

对ε'，存在$N_1, N_2 \in \mathbb{N}$有对任意$n \geq N_1$有$|a^{\frac{1}{n}} - 1| \leq \varepsilon'$与对任意$n \geq N_2$有$|a^{-\frac{1}{n}} - 1| \leq \varepsilon'$。特别地，取$N' = \max(N_1, N_2)$则有$|a^{\frac{1}{N'}} - 1| \leq \varepsilon'$与$|a^{-\frac{1}{N'}} - 1| \leq \varepsilon'$；而对$\frac{1}{N'}$，存在一个$N_0 \in \mathbb{N}$使得对任意$n \geq N_0$有$|a_n - x_0| \leq \frac{1}{N'}$。从而对任意$n \geq N_0$：

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{N'} \le a_n - x_0 \le \frac{1}{N'}\\
(\text{命题}6.7.3) \implies &\begin{cases} a^{-\frac{1}{N'}} \le a^{(a_n-x_0)} \le a^{\frac{1}{N'}} & \text{if } a \ge 1 \\ a^{-\frac{1}{N'}} \ge a^{(a_n-x_0)} \ge a^{\frac{1}{N'}} & \text{if } a < 1 \end{cases}\\
(1\text{也在}a^{\frac{1}{N'}}\text{与}a^{-\frac{1}{N'}}\text{之间}) \implies &|a^{(a_n-x_0)} - 1| \le |a^{-\frac{1}{N'}} - a^{\frac{1}{N'}}| \le 2\varepsilon'\\
\implies &|a^{(a_n-x_0)} - 1| \le \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}\\
\implies &|a^{a_n} - a^{x_0}| \le \varepsilon
\end{aligned}
$$

此时我们取$N = N_0$，从而综合上面的讨论即有：

对任意$\varepsilon > 0$，总存在$N \in \mathbb{N}$使得对任意$n \ge N$都有$|a^{a_n} - a^{x_0}| \le \varepsilon$。于是$\lim\limits_{n\to\infty} a^{a_n} = a^{x_0} = f(x_0)$，根据定义9.4.1，于是题目结论得证，对任意$a > 0$都有$f(x) := a^x$是连续的。

9.4.4 证明命题9.4.11（提示：利用极限定律（命题9.3.14）可以证明$\lim\limits_{x\to 1} x^n = 1$对所有的整数$n$都成立。利用这个命题和夹逼定理推导出$\lim\limits_{x\to 1} x^p = 1$对所有的实数$p$都成立。最后，使用命题6.7.3）

先证明$\lim\limits_{x\to 1} x^n = 1$对所有的整数$n$都成立。

首先使用归纳法证明对任意自然数n都是成立的：

当$n = 0$时，于是原式即$\lim\limits_{x\to 1} 1 = 1$显然成立。

现归纳性假设对$n = a$时成立结论，考虑$n = a + 1$时的情况：

根据极限定律，我们有：

$$\lim_{x\to 1} x^{a+1} = \lim_{x\to 1} x^a \lim_{x\to 1} x = 1 \cdot 1 = 1$$

于是当$n = a + 1$时依旧成立结论，从而归纳结束，原结论成立。

然后我们证明对n为整数的情况，若$n \ge 0$，则n是自然数我们已有结论成立；若$n < 0$，则根据极限定律有：

$$\lim_{x\to 1} x^n = \frac{\lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1} x^{-n}} = \frac{1}{1} = 1$$

于是也有结论成立。

综上，于是有$\lim\limits_{x\to 1} x^n = 1$对所有的整数$n$都成立。

然后证明$\lim\limits_{x\to 1} x^p = 1$对所有的实数$p$都成立。

令有集合$F := (0, +\infty)\backslash\{1\}$

由实数的性质我们知道存在整数$\lfloor p \rfloor$使得$\lfloor p \rfloor \le p < \lfloor p \rfloor + 1$成立，从而对任意$\varepsilon > 0$，由$\lim\limits_{x\to 1} x^n = 1$对整数成立于是有：

对任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta_1, \delta_2 > 0$满足对任意$x \in [1 - \delta_1, 1 + \delta_1]$且$x \in F$有$\left|x^{\lfloor p \rfloor} - 1\right| \le \varepsilon$与对任意$x \in [1 - \delta_2, 1 + \delta_2]$且$x \in F$有$\left|x^{\lfloor p \rfloor + 1} - 1\right| \le \varepsilon$成立。于是取$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，则对任意$x \in [1 - \delta, 1 + \delta]$且$x \in F$有$\left|x^{\lfloor p \rfloor} - 1\right| \le \varepsilon$与$\left|x^{\lfloor p \rfloor + 1} - 1\right| \le \varepsilon$同时成立。并且根据命题6.7.3，我们有：

$$\begin{cases} x^{\lfloor p\rfloor}\leq x^p\leq x^{\lfloor p\rfloor+1} & \text{if } x\geq 1\\ x^{\lfloor p\rfloor}>x^p>x^{\lfloor p\rfloor+1} & \text{if } x<1\end{cases}$$

于是根据命题4.3.7(f)，于是有$|x^p-1|\leq\varepsilon$对任意$x\in[1-\delta,1+\delta]$且$x\in F$也成立。此时总结有：

对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得对任意x满足$|x-1|\leq\delta$与$x\in F$，都有$|x^p-1|\leq\varepsilon$。从而根据定义9.3.6，这表明x^p在1处沿F收敛于1，即：

$$\lim_{x\to 1;x\in(0,+\infty)\setminus\{1\}}x^p=\lim_{x\to 1}x^p=1$$

于是结论得证。

最后证明函数$f(x):=x^p$是连续的对任意$p\in\mathbb{R}$成立。

对任意$x\in(0,+\infty)$，任意完全由$(0,+\infty)$中元素组成的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，设有序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于x。于是研究$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)$：

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n)^p$$

根据题目，我们期望能证明$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(x)=x^p$。

要证明$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^p=x^p$，即证明对任意$\varepsilon>0$，都存在一个$N\in\mathbb{N}$使得对任意$n\geq N$，都有$|(a_n)^p-x^p|\leq\varepsilon$成立。进一步可化简有：

$$|(a_n)^p-x^p|\leq\varepsilon\iff\left|\left(\frac{a_n}{x}\right)^p-1\right|\leq\frac{\varepsilon}{x^p}:=\varepsilon'$$

由题设我们有序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于$x\xrightarrow{\text{极限定律}}\left(\frac{a_n}{x}\right)_{n=0}^{\infty}$收敛于1，于是根据$\lim\limits_{x\to 1}x^p=1$与命题9.3.9，$\left(\left[\frac{a_n}{x}\right]^p\right)_{n=0}^{\infty}$也收敛于1。即对$\varepsilon'$，存在一个$N\in\mathbb{N}$满足对任意的$n\geq N$有$\left|\left(\frac{a_n}{x}\right)^p-1\right|\leq\varepsilon'\implies|(a_n)^p-x^p|\leq\varepsilon$，这表明题式得证。

9.4.5 证明命题9.4.13

根据定义9.4.1，要证明函数$g\circ f:X\to\mathbb{R}$在x_0处是连续的，则要证明$\lim\limits_{x\to x_0;x\in X}g\circ f(x)=g\circ f(x_0)$。

根据题设，有g在$f(x_0)$处连续，从而有$\lim\limits_{y\to f(x_0);y\in Y}g(y)=g\circ f(x_0)$，于是对任意$\varepsilon>0$，存在$\tau>0$有任意满足$|y-f(x_0)|\leq\tau$且$y\in Y$的$y$都有$|g(y)-g\circ f(x_0)|\leq\varepsilon$；又有$f$在$x_0$处连续，从而有$\lim\limits_{x\to x_0;x\in X}f(x)=f(x_0)$，于是对$\tau$，存在一个$\delta>0$有任意满足$|x-x_0|\leq\delta$且$x\in X$的$x$都有$|f(x)-f(x_0)|\leq\tau$。从而综上结论，对任意满足$|x-x_0|\leq\delta$且$x\in X$的$x$有：

- $f(x)\in Y$。（这是f作为一个函数所必要的）
- $|f(x)-f(x_0)|\leq\tau$。（f在x_0连续的结果）
- $|g(f(x))-g\circ f(x_0)|\leq\varepsilon$。（结合$g$在$f(x_0)$处连续的结论，$f(x)\in Y$与$|f(x)-f(x_0)|\leq\tau$）

从而有：

> 对任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$有对任意满足$|x - x_0| \leq \delta$且$x \in X$的x都有$|g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| \leq \varepsilon$成立。从而根据定义9.3.6，即有$\lim_{x \to x_0; x \in X} g \circ f(x) = g \circ f(x_0)$成立，从而函数$g \circ f : X \to \mathbb{R}$在$x_0$处是连续的得证。

9.4.6 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，并且设$f : X \to \mathbb{R}$是一个连续函数。如果Y是X的一个子集，证明：f在X上的限制函数$f|_Y : Y \to \mathbb{R}$也是连续的（提示：这是一个很简单的证明，但是要求你仔细遵循定义）

> 要证明限制函数$f|_Y : Y \to \mathbb{R}$也是连续的，则要证明对任意的$x \in Y$，都有$\lim_{y \to x; y \in Y} f|_Y(y) = f|_Y(x)$成立。
>
> 于是根据命题9.4.7，即证：对任意$x \in Y$与任意由Y中元素组成的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，若有$\lim_{n \to \infty} a_n = x$，则有$\lim_{n \to \infty} f|_Y(a_n) = x$。而根据题设，我们知道有$f : X \to \mathbb{R}$是一个连续函数，并且$Y$是$X$的子集，从而对任意的$x \in Y$与任意由$Y$中元素组成的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，若有$\lim_{n \to \infty} a_n = x$，则：
>
> $$\lim_{n \to \infty} f|_Y(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x) = f|_Y(x)$$
>
> 于是结论得证。

9.4.7 设$n \geq 0$是一个整数，并且设对每一个$0 \leq i \leq n$，设c_i是一个实数。设$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是函数：

$$P(x) := \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

这个函数被称为单变量多项式，比如一个例子$P(x) = 6x^3 - 4x^2 + 3$，证明：单变量多项式P都是连续的

> 使用数学归纳法，对n归纳证明：
>
> 当$n = 0$时，$P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = c_0$，根据习题9.4.2的结论我们知道此时显然有$P$在$\mathbb{R}$上是连续的。
>
> 现归纳性假设当$n = a$时结论成立，对$n = a + 1$的情况讨论：
>
> 于是我们可以化有：
>
> $$\begin{aligned} P_{a+1}(x) &= \sum_{i=0}^{a+1} c_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{a} c_i x^i + c_{a+1} x^{a+1} \\ &= P_a(x) + c_{a+1} x^{a+1} \end{aligned}$$
>
> 此处P的下标用来标记单变量多项式P的n从而加以区分。根据归纳假设，$P_a(x)$是$n = a$的单变量多项式，从而应该有P_a在$\mathbb{R}$上是连续的；而根据命题9.4.11，函数$c_{a+1} x^{a+1}$也应当在$\mathbb{R}$上是连续的。从而此时根据命题9.4.9，我们有它们的和也是连续的，即P_{a+1}也是在$\mathbb{R}$上连续的，于是当$n = a + 1$时，单变量多项式P依旧是在$\mathbb{R}$上连续的。
>
> 综上，于是归纳结束，题目结论得证。