14.6 一致收敛和积分

命题

1. (14.6.1 一致极限与积分可交换运算？) 设$[a,b]$是一个区间。对于每一个整数$n\geq 1$，设$f^{(n)}:[a,b]\to\mathbb{R}$是一个黎曼可积的函数。设$f^{(n)}$在$[a,b]$上一致收敛于函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$。那么$f$是黎曼可积的，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}f^{(n)}=\int_{[a,b]}f$$

(注：这个定理告诉我们可以交换一致极限与积分的运算顺序，即$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}f^{(n)}=\int_{[a,b]}\lim_{n\to\infty}f^{(n)}$)

> 推论：
>
> 1. (14.6.2) 设$[a,b]$是一个区间，并设$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是$[a,b]$上黎曼可积函数的序列。如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}$一致收敛，那么
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[a,b]}f^{(n)}=\int_{[a,b]}\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}$$
>
> (注：这个推论结合魏尔斯特拉斯M判别法（定理14.5.7）一起使用会有更好的效果)

课后习题

14.6.1 利用定理14.6.1证明推论14.6.2

> 由于$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是$[a,b]$上黎曼可积函数的序列，因此根据黎曼积分定律（命题11.4.1(a)）我们知道对任意的$N>1$都有部分和$\sum_{n=1}^{N}f^{(n)}$也是在$[a,b]$上黎曼可积的（使用归纳法），然后根据定义14.5.2与定理14.6.1，由于$\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}$是部分和$\sum_{n=1}^{N}f^{(n)}$的一致极限，因此有：
>
> $$\lim_{N\to\infty}\int_{[a,b]}\sum_{n=1}^{N}f^{(n)}=\int_{[a,b]}\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}$$
>
> 然后再次使用黎曼积分定律（也是命题11.4.1(a)），对任意的$N>0$我们有：
>
> $$\int_{[a,b]}\sum_{n=1}^{N}f^{(n)}=\sum_{n=1}^{N}\int_{[a,b]}f^{(n)}$$
>
> （需要用一下归纳，这里省略了）于是即有：
>
> $$\lim_{N\to\infty}\int_{[a,b]}\sum_{n=1}^{N}f^{(n)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{[a,b]}f^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[a,b]}f^{(n)}$$
>
> 总结即有：

> $$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[a,b]} f^{(n)} = \int_{[a,b]} \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$$
>
> 于是推论14.6.2得证。

本节相关跳转

[实分析 14.5 函数级数与魏尔斯特拉斯M判别法]