13.4 连续性与连通性

定义

1. (13.4.1 连通空间) 设(X, d)是一个度量空间，我们称X是**不连通的**，当且仅当存在不相交的非空开集V和W使得$V \cup W = X$；我们称X是**连通的**，当且仅当X是非空的且不是不连通的。

   (注：这个定义换一种说法即：X是不连通的，当且仅当X包含一个既闭又开的非空真子集；空集是一种很特殊的情况，它既不是不连通的，也不是连通的，应该认为空集是“无连通性的”；注意上面定义中V与W都是关于X相对开的，作为一个例子，考虑具有标准度量的集合$X := [1, 2] \cup [3, 4]$，这个空间是不连通的，因为$[1, 2]$和$[3, 4]$是X中的开集)

2. (13.4.3 连通空间) 设(X, d)是一个度量空间，并设Y是X的子集。我们称Y是**连通的**，当且仅当度量空间$(Y, d|_{Y\times Y})$是连通的；我们称Y是**不连通的**，当且仅当度量空间$(Y, d|_{Y\times Y})$是不连通的。

   (注：很显然这个定义是内在的，它只与Y上的度量相关而与环绕空间X无关)

命题

1. (13.4.5 实直线上的连通集？) 设X是实直线$\mathbb{R}$的子集，那么下述命题是等价的：

   > 1. X是连通的。
   > 2. 只要x，$y \in X$且$x < y$，那么区间$[x, y]$就包含在X中。
   > 3. X是一个区间（在定义9.1.1意义下）。

   (注：因此定义13.4.1可以视为对定义11.1.1的推广)

2. (13.4.6 连续性保持连通性) 设$f : X \to Y$是从度量空间(X, d_X)到度量空间(Y, d_Y)的连续映射，并设E是X的任意一个连通子集。那么$f(E)$也是连通的。

3. (13.4.7 介值定理) 设$f : X \to Y$是从度量空间(X, d_X)到实直线$\mathbb{R}$的连续映射，设E是X的任意一个连通子集，a、b是E中任意两个元素，并设y是介于$f(a)$和$f(b)$之间的实数。那么存在$c \in E$使得$f(c) = y$。

   (注：这是对定理9.7.1的推广)

课后习题

13.4.1 设(X, d_{disc})是具有离散度量的度量空间，设E是X的子集，并且E中至少包含两个元素。证明：E是不连通的

> 在习题12.2.1中我们论述过离散度量下空间内的集合不存在边界点（从而集合必然是又闭又开的），由于E至少存在两个元素，若设有$e \in E$是E中元素，则$E \backslash \{e\}$是非空的，于是E可以表示为$\{e\} \cup (E \backslash \{e\})$，这两个集合满足不相交，非空且都是开集。于是根据定义13.4.1 E不是连通的。

13.4.2 设$f: X \to Y$是从度量空间(X,d)到度量空间(Y,d_{disc})的函数，其中(X,d)是连通的空间，(Y,d_{disc})具有离散度量。证明：f是连续的，当且仅当f是常数函数（提示：利用习题13.4.1）

> 分别证明充分必要性：
>
> 若f是常数函数则对任意的$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是X中依度量d收敛于某个点$x_0 \in X$的序列，序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$是一个常数序列必然收敛于$f(x_0)$（对任意$x \in X$都有$f(x) = f(x_0)$），从而根据命题13.1.5我们有$f$是连续的。
>
> 反过来，如果f是连续的，那么由于X是连通的，结合定理13.4.6于是$f(X)$也应该是连通的。由于f是一个函数因此$f(X)$不可能为空；又由于我们在习题13.4.1中讨论的，$f(X)$是连通的则它不可能包含超过两个元素。综合即有$f(X)$是一个单元素集，若设有$f(X) = \{y\}$，则根据象的定义即：
>
> $$\forall\, x \in X, f(x) \in \{y\} \iff f(x) = y$$
>
> 于是f是一个常数函数。
>
> 综上，于是充分必要性得证，证明完毕。

13.4.3 证明：定理13.4.5中的命题(b)与(c)是等价的

> 分别证明这两个命题能互相推知：
>
> 若对任意x，$y \in X$满足$x < y$都有区间$[x,y]$就包含在X中。由于X是$\mathbb{R}$的子集，根据上下确界的定义（5.5节）知道它的上确界$s := \sup(X)$和下确界$i := \inf(X)$都必然存在，我们证明X是一个形如$[i,s]$，$[i,s)$，$(i,s]$或(i,s)的区间。为了证明这一点，我们只需要证明$(i,s) \subseteq X$且$X \subseteq [i,s]$，这样X的形式只与i，s是否属于X有关，而X始终是一个区间。
>
> 首先根据命题6.2.11我们知道对任意$x \in X$都有$i \leq x \leq s$，于是$X \subseteq [i,s]$得证；另一方面，对任意$i < x < s$，由于$x < s$，从而x不可能是X的上界（命题6.2.11），因此必然存在一个$y \in X$使得$x < y \leq s$；同时$x > i$表明x不可能是X的下界，因此必然存在一个$z \in X$使得$i \leq z < x$。然后使用前设我们知道$[z,y] \subseteq X$，从而必然有$x \in X$。于是$(i,s) \subseteq X$也得证。
>
> 于是综上我们有X肯定是形如$[i,s]$，$[i,s)$，$(i,s]$或(i,s)的区间。
>
> 反过来，若X是一个区间，则我们以X为形如$[a,b]$的区间为例子，其它区间也是类似：此时对任意x，$y \in X$且$x < y$都有：
>
> $$a \leq x < y \leq b$$
>
> 于是对任意$z \in [x,y]$，我们都有：
>
> $$a \leq x \leq z \leq y \leq b \Longrightarrow a \leq z \leq b \Longrightarrow z \in [a,b]$$
>
> 即有$z \in X$，于是区间$[x,y]$是包含于X的，对形如(a,b)，$(a,b]$，$[a,b)$的情形类似地证明即可。

13.4.4 证明定理13.4.6（提示：[定理13.1.5(c)](#)中对于连续性的表述在这里是最方便的）

> 不妨使用反证法，我们假设$f(E)$不是连通的，那么存在$f(E)$中的两个非空不相交开集V，W使得$f(E) = V \cup W$。于是根据定理13.1.5(c)即有$f^{-1}(V)$与$f^{-1}(W)$都是开集。此时注意到对任意$x \in E$，我们都有$f(x) \in E \implies f(x) \in V$或$f(x) \in W$，于是$x$要么属于$f^{-1}(V)$要么属于$f^{-1}(W)$。
>
> 于是使用命题12.3.4，我们知道$f^{-1}(V) \cap E$与$f^{-1}(W) \cap E$也是开的，然后在上面的讨论中我们知道$f^{-1}(V) \cap E$与$f^{-1}(W) \cap E$是不相交且非空的（由于V，W非空因此至少分别存在x，$y \in E$使得$f(x) \in V$与$f(y) \in W$为真），并且根据布尔代数有：

> $$(f^{-1}(V)\cap E)\cup(f^{-1}(W)\cap E)=E\cap(f^{-1}(V)\cup f^{-1}(W))=E$$
>
> 于是根据不连通的定义有E是不连通的，这和定理13.4.6中E是连通的”的前提矛盾。
>
> 综上，于是只能有$f(E)$是连通的。

13.4.5 利用定理13.4.6证明推论13.4.7

> $f(a)=f(b)$的话则x可以直接取a或b，结论显然是成立的。我们只考虑$f(a)\neq f(b)$的情况。
>
> 根据定理13.4.6，由于E是连通的我们知道$f(E)$也是连通的。进而由于$f(E)$是实直线的子集，使用命题13.4.5我们知道区间$[f(a),f(b)]$（这里不失一般性地假定$f(a)<f(b)$）是包含于$f(E)$，因此$y\in[f(a),f(b)]$也必然有$y\in E$。从而根据象的定义，我们知道必然存在一个$c\in E$使得$f(c)=y$。
>
> 综上，于是推论13.4.7得证。

13.4.6 设(X,d)是一个度量空间，$(E_\alpha)_{\alpha\in I}$是X中的一簇连通集，并设$\bigcap\limits_{\alpha\in I}E_\alpha$是非空的。证明：$\bigcup\limits_{\alpha\in I}E_\alpha$是连通的

> 使用反证法，我们假设$\bigcup\limits_{\alpha\in I}E_\alpha$是不连通的，于是存在$\bigcup\limits_{\alpha\in I}E_\alpha$中非空且不相交的两个开集$V$与$W$使得$\bigcup\limits_{\alpha\in I}E_\alpha=V\cup W$。然后注意到如果存在某个$\alpha\in I$使得$E_\alpha\cap V$与$E_\alpha\cap W$都是非空的（这两个不可能同时为空，不然就会导出$E_\alpha$为空的结论与连通性相悖），那么根据命题12.3.4的结论由于这两个集合都是开集并且：
>
> $$(E_\alpha\cap V)\cup(E_\alpha\cap W)=E_\alpha\cap(V\cup W)=E_\alpha$$
>
> 这会导出E_α是不连通的，与我们的题设相悖，从而对任意的$\alpha\in I$，$E_\alpha\cap V$与$E_\alpha\cap W$中恰好有一个为空，换言之即E_α要么包含于V要么包含于W。然后注意到若存在两个α_1，$\alpha_2\in I$使得$E_{\alpha_1}\subseteq V$且$E_{\alpha_2}\subseteq W$，则由于V和W是不相交的于是$\bigcap\limits_{\alpha\in I}E_\alpha=\varnothing$，这与题设中$\bigcap\limits_{\alpha\in I}E_\alpha$非空的前提矛盾，从而对全体$\alpha\in I$只能有$E_\alpha$同时包含于$V$或者同时包含于$W$。
>
> 但是注意到若对任意的$\alpha\in I$都有$E_\alpha\subseteq V$则会导出$\bigcup\limits_{\alpha\in I}E_\alpha\subseteq V$，结合$V$是$\bigcup\limits_{\alpha\in I}E_\alpha$的子集于是即有$\bigcup\limits_{\alpha\in I}E_\alpha=V\implies W=\varnothing$；“对任意的$\alpha\in I$都有$E_\alpha\subseteq W$”的情况我们也可以类似推出$V$是空集，这和$V$与$W$都非空的反证假设矛盾，反证假设不成立。
>
> 综上，于是$\bigcup\limits_{\alpha\in I}E_\alpha$只能是是连通的。

13.4.7 设(X,d)是一个度量空间，并设E是X的子集。我们称E是**道路连通的**，当且仅当对于任意的x，$y\in E$，存在一个从单位区间$[0,1]$到E的连续函数$\gamma:[0,1]\to E$使得$\gamma(0)=x$，$\gamma(1)=y$。证明：每一个道路连通的集合都是连通的（逆命题是不成立的，证明这一点需要一点技巧，然后原书没说怎么搞）

> 对一个(X,d)中的道路连通集E，我们不妨假设它不是连续的，从而根据定义13.4.1存在E中的两个不相交的非空开集V，W使得$E=V\cup W$。特别地，由于这两个集合都是非空的，因此我们可以分别选取两个元素$x\in V$与$y\in W$，然后根据道路连通集的定义，存在一个$[0,1]$到E的连续函数$\gamma:[0,1]\to E$使得$\gamma(0)=x$，$\gamma(1)=y$。
>
> 由于$[0,1]$是一个区间，根据命题13.4.5我们知道$[0,1]$是连通的，从而根据命题13.4.6我们知道$\gamma([0,1])$也是连通的，并且注意到x和y都属于象$\gamma([0,1])$。又由V和W是E中的开集，且$\gamma([0,1])$是E的子集，根据命题12.3.4可以知道$V\cap\gamma([0,1])$和$W\cap\gamma([0,1])$都是$\gamma([0,1])$中的开集。并且注意到两者显然是不相交且非空的（$x\in V\cap\gamma([0,1])$，$y\in W\cap\gamma([0,1])$），然后

> 有：
>
> $$(V\cap\gamma([0,1]))\cup(W\cap\gamma([0,1]))=\gamma([0,1])\cap(V\cup W)=\gamma([0,1])$$
>
> 于是根据定义13.4.1我们知道$\gamma([0,1])$是不连通的，这与$\gamma([0,1])$连通的前提矛盾。
>
> 综上，于是任意道路连通的集合都是连通的。
>
> ---
>
> 关于逆命题，并不是所有的连通集合都是道路连通的。

13.4.8 设(X,d)是一个度量空间，并设E是X的子集。证明：如果E是连通的，那么E的闭包$\overline{E}$也是连通的，并解释逆命题是否成立

> 不妨使用反证，假设$\overline{E}$不是连通的，于是存在两个$\overline{E}$中的非空不相交开集V，W使得$\overline{E}=V\cup W$。由于V是开集，于是对任意$x\in V$都存在一个$\varepsilon>0$使得球$B(x,\varepsilon)\subseteq V$；又由于闭包的性质$x$应该是$E$的附着点，从而$B(x,\varepsilon)$与$E$的交集是非空的。从而我们得到$V$和$E$的交集$V\cap E$是非空的，类似地我们也可以证明$W$与$E$的交集$W\cap E$也是非空的。
>
> 然后根据命题12.3.4，$V\cap E$和$W\cap E$是E中的开集，由于V，W不相交因此显然$V\cap E$和$W\cap E$是不相交的。并且由布尔代数我们有：
>
> $$(V\cap E)\cup(W\cap E)=E\cap(V\cup W)=E\cap\overline{E}$$
>
> 然后根据命题12.2.15(h)我们知道有$E\subseteq\overline{E}$，于是$E\cap\overline{E}=E$。总结下上面得到的内容即有：
>
> 存在E中的两个非空不相交开集$V\cap E$和$W\cap E$使得$(V\cap E)\cup(W\cap E)=E$。
>
> 于是根据定义13.4.1，我们有E是不连通的，这和题设中E是连通的前提矛盾。
>
> 综上，于是只能有$\overline{E}$也是连通的。
>
> ---
>
> 关于逆命题，显然是不成立的，考虑$\mathbb{R}$中的集合$[0,2]$，它显然是集合$[0,1)\cup(1,2]$的闭包，但是$[0,1)\cup(1,2]$是不连通的（$[0,1)$和$(1,2]$都是$[0,1)\cup(1,2]$中的开集且两者不相交）。

13.4.9 设(X,d)是一个度量空间，我们定义一个X上的关系$x\sim y$：我们称$x\sim y$，当且仅当在X中存在一个同时包含x和y的连通子集。证明：这是一种等价关系（也就是说，它满足自反性，对称性和传递性公理）。另外，证明：这种关系的等价类（即形如$\{y\in X:y\sim x\}$的集合，其中$x\in X$）全是连通的闭集（提示：利用习题13.4.6和习题13.4.8），这些集合被称为X的连通分支

> 证明：$\sim$是一种等价关系。
>
> 于是要证明：
>
> - $\sim$满足自反性公理：对任意$x\in X$我们都有$x\sim x$。
>
>   > 显然单元素集$\{x\}$肯定是X中连通的子集（凑不出两个不相交的非空开集），因此对任意$x\in X$根据上面的定义总有$x\sim x$为真。
>
> - $\sim$满足对称性公理：对任意x，$y\in X$，若有$x\sim y$，则有$y\sim x$。
>
>   > $x\sim y$当且仅当存在X的包含x与y的连通子集，这也表明$y\sim x$（换一种表述形式而已），于是对称性公理也总是满足的。
>
> - $\sim$满足传递性公理：对任意x，y与$z\in X$，若有$x\sim y$且$y\sim z$，则有$x\sim z$。

> > $x \sim y$表明X中存在一个包含x与y的连通子集S_{xy}；$y \sim z$表明X中存在一个包含y与z的连通子集S_{yz}。注意到y是S_{xy}与S_{yz}的都包含的元素，因此$S_{xy} \cap S_{yz}$必然是非空的。于是此时我们令有$S_{xz} := S_{xy} \cup S_{yz}$，显然有$S_{xz}$是包含了$x$与$z$的$X$的子集，并且根据习题13.4.6由于$S_{xy} \cap S_{yz}$非空因此$S_{xz}$是连通的。
> >
> > 于是综合即存在X的连通子集S_{xz}包含x与z，从而根据定义即有$x \sim z$。
>
> 综上，于是结论得证。
>
> ---
>
> 证明：$\sim$的等价类都是连通的闭集。
>
> 我们先证明对任意$x \in X$，集合$\{y \in X : y \sim x\}$都是连通的。
>
> 使用反证，我们假设$\{y \in X : y \sim x\}$是不连通的，于是存在两个非空且不相交的开集V，W使得$V \cup W = \{y \in X : y \sim x\}$。于是我们设有$v \in V$与$w \in W$，然后由于$\sim$满足传递性公理，于是我们可以从$v \sim x$与$w \sim x$推知$v \sim w$，即存在一个$X$中的连通子集$S$包含$v$和$w$。
>
> 然后对任意的$s \in S$，由于$x \in S$且S是连通的，于是根据$\sim$的定义也有$s \sim x \implies s \in \{y \in X : y \sim x\}$，也即$\{y \in X : y \sim x\}$包含了$S$。于是根据命题12.3.4我们知道$V \cap S$与$W \cap S$也是开集；并且由于$v \in S$与$w \in S$我们知道这两个集合是非空的；由于$V$，$W$不相交我们知道这两个集合也是不相交的，最后使用布尔代数可以得到：
>
> $$(V \cap S) \cup (W \cap S) = S \cap (V \cup W) = S$$
>
> 于是根据定义13.4.1我们知道S是不连通的，这导出了矛盾。从而反证假设不成立，$\{y \in X : y \sim x\}$只能是连通的。
>
> 然后我们证明对任意$x \in X$，集合$\{y \in X : y \sim x\}$都是闭的。
>
> 仍然使用反证，我们假设$\{y \in X : y \sim x\}$不是闭的，于是存在x_0是$\{y \in X : y \sim x\}$的附着点且$x_0 \notin \{y \in X : y \sim x\}$（这表明$x_0 \sim x$为假）。由于对任意集合闭包都是包含原集合的（命题12.2.15(h)），因此应该有x属于$\{y \in X : y \sim x\}$的闭包；此外，根据闭包定义闭包包含了原集合的任意附着点，于是x_0也属于$\{y \in X : y \sim x\}$的闭包；最后根据习题13.4.8，由于$\{y \in X : y \sim x\}$是连通的，我们有$\{y \in X : y \sim x\}$的闭包也是连通的。于是综合上面的内容即有：
>
> 存在X的连通子集（$\{y \in X : y \sim x\}$的闭包）包含x_0和x。
>
> 根据$\sim$的定义，于是即有$x_0 \sim x \implies x_0 \in \{y \in X : y \sim x\}$，这与反证假设矛盾。于是反证假设不成立，只能有$\{y \in X : y \sim x\}$是闭的。
>
> 综上，于是我们得证了$\sim$的等价类都是连通的闭集。

13.4.10 结合[命题13.3.2]和推论13.4.7，推导出关于紧致连通区域上的连续函数的定理，它推广了[推论9.7.4]

> 我们先给出这个结论，然后再给出证明：
>
> > 紧致连通区域上的连续函数的定理：设(X, d)是一个度量空间，E是X的一个紧致连通子集，并设$f : E \to \mathbb{R}$是E上的连续函数。我们令$M := \sup_{x \in [a,b]} f(x)$与$m := \inf_{x \in [a,b]} f(x)$分别是$f$的最大值与最小值，并且设$y$是介于$m$与$M$之间的一个实数。那么存在至少一个$c \in E$使得$f(c) = y$，更进一步地，我们有$f(E) = [m, M]$。
>
> 下面是证明：

> 首先由于E是紧致的并且f是连续的，因此根据命题13.3.2我们知道f在某点$x_{\max} \in E$处达到最大值（也即$f(x_{\max}) = M$），在某某点$x_{\min} \in E$处达到最大值（也即$f(x_{\min}) = m$）；然后由于E是连通的并且f是连续的，根据推论13.4.7，对任意$y \in [m, M]$都存在至少一个$c \in E$使得$f(c) = y$。因此，我们可以总结得到：
>
> 对任意$y \in [m, M]$都存在$c \in E$使得$f(c) = y$，于是对任意$y \in [m, M]$都有$y \in f(E)$；对任意$c \in E$由于M是f在E上的最大值且m是f在E上的最小值，于是对任意$f(c) \in f(E)$都有$m \leq f(c) \leq M \Longrightarrow f(c) \in [m, M]$。
>
> 综上即有$f(E) \subseteq [m, M]$且$[m, M] \subseteq f(E) \Longrightarrow f(E) = [m, M]$。
>
> 于是我们证明了我们的结论。

本节相关跳转

[实分析 9.1 实直线的子集]

[实分析 9.7 介值定理]

[实分析 11.1 划分]

[实分析 13.1 连续函数]

[实分析 13.3 连续性与紧致性]