12.3 相对拓扑

定义

1. （12.3.3 相对拓扑）设(X,d)是一个度量空间，Y是X的一个子集，并设E是Y的一个子集。如果E在度量子空间$(Y,d|_{Y\times Y})$中是开的，那么我们称E是**关于Y相对开的**；类似的，如果E在度量子空间$(Y,d|_{Y\times Y})$中是闭的，那么我们称E是**关于Y相对闭的**。

   （开集和闭集的概念并不是集合的内在属性，也就是说，它不止和限制在Y上的度量函数$d|_{Y\times Y}$有关，还和它的环绕空间X相关）

命题

1. （12.3.4）设(X,d)是一个度量空间，Y是X的一个子集，并设E是Y的一个子集。那么有下面的两个命题成立：

   > 1. E是关于Y相对开的，当且仅当存在X中的开集$V\subseteq X$使得$E=V\cap Y$。
   > 2. E是关于Y相对闭的，当且仅当存在X中的闭集$K\subseteq X$使得$E=K\cap Y$。

课后习题

12.3.1 证明命题12.3.4(b)

> 考虑最简单的情形，不妨令有K是E的闭包（当然，是关于X的），于是K是一个闭集。对任意的$e\in E$，于是根据命题12.2.15(b)e是E的一个附着点，进而根据命题12.2.10存在一个E中依度量$d_{Y\times Y}$收敛于e的序列$(e_n)_{n=0}^{\infty}$。此时注意到$(e_n)_{n=0}^{\infty}$同样是K中依度量d收敛于e的序列与Y中依度量$d_{Y\times Y}$收敛于e的序列，于是由于Y，K分别是关于Y，K相对闭的可以得到$e\in K$与$e\in Y$，即有$e\in K\cap Y$；反之，对任意的$e\in K\cap Y$，由于K是E的闭包，于是e是E的附着点。又因为E关于Y是相对闭的且$e\in Y$，于是根据命题12.2.15(b)我们有E应该包含其所有在Y中的附着点，也就是说$e\in E$。综上于是我们可得$K\cap Y=E$。
>
> 反过来，若存在X中闭集$K\subseteq X$使得$E=K\cap Y$。对任意E中的收敛序列$(e_n)_{n=0}^{\infty}$，由于K是闭集并且$E\subseteq K$（即$(e_n)_{n=0}^{\infty}$也是K中的收敛序列），我们可以得到该序列收敛值$e:=\lim\limits_{n\to\infty}e_n\in K$；另一方面，对度量子空间$(Y,d|_{Y\times Y})$来说$Y$是关于$Y$相对闭的，于是由于$E\subseteq Y$（即$(e_n)_{n=0}^{\infty}$也是$Y$中的收敛序列）我们也可以得到$e\in Y$。从而$e\in K\cap Y=E$，综合即对任意$E$中的收敛序列$(e_n)_{n=0}^{\infty}$其收敛值$e$都属于$E$，根据命题12.2.15(b)即$E$是闭的。