11.4 黎曼积分的基本性质

命题

1. (11.4.1 黎曼积分定律) 设I是一个有界区间，并且$f: I \to \mathbb{R}$与$g: I \to \mathbb{R}$都是I上黎曼可积的函数，那么：

> 1. 函数$f+g$是黎曼可积的，并且$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$。
> 2. 对任意的实数c，函数cf都是黎曼可积的，并且$\int_I (cf) = c\int_I f$。
> 3. 函数$f-g$是黎曼可积的，并且$\int_I (f-g) = \int_I f - \int_I g$。
> 4. 如果对所有$x \in I$都有$f(x) \geq 0$，那么$\int_I f \geq 0$。
> 5. 如果对所有$x \in I$都有$f(x) \geq g(x)$，那么$\int_I f \geq \int_I g$。
> 6. 如果f是常数函数且对任意$x \in I$有$f(x) = c$，那么$\int_I f = c|I|$。
> 7. 设J是一个包含I的有界区间（即$I \subseteq J$），并且设$F: J \to \mathbb{R}$是函数：
>
> $$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in I \\ 0 & \text{if } x \notin I \end{cases}$$
>
> 那么F在J上是黎曼可积的，并且$\int_J F = \int_I f$。
> 8. 如果$\{J, K\}$是I的一个划分，它将I分成两个区间J和K，那么函数$f|_J: J \to \mathbb{R}$与$f|_K: K \to \mathbb{R}$分别在J上和在K上黎曼可积，并且：
>
> $$\int_I f = \int_J f|_J + \int_K f|_K$$

(注：我们有时候会把$\int_J f|_J$简写为$\int_J f$，尽管f是定义在比J大的区间上的)

2. (11.4.3 最大值与最小值保持可积性) 设I是一个有界区间，并且设$f: I \to \mathbb{R}$与$g: I \to \mathbb{R}$都是I上黎曼可积的函数，那么函数$\max(f, g)$与函数$\min(f, g)$都是在I上黎曼可积的。
3. (11.4.4 绝对值保持可积性) 设I是一个有界区间，并且设$f: I \to \mathbb{R}$与$g: I \to \mathbb{R}$都是I上黎曼可积的函数，那么正数部分$f_+ := \max(f, 0)$与负数部分$f_- := \min(f, 0)$都是在I上黎曼可积的，并且绝对值$|f| := f_+ - f_-$也是在I上黎曼可积的。
4. (11.4.5 乘积保持可积性) 设I是一个有界区间，并且设$f: I \to \mathbb{R}$与$g: I \to \mathbb{R}$都是I上黎曼可积的函数，那么函数fg是在I上黎曼可积的。

课后习题

11.4.1 证明定理11.4.1 **（提示：对于这里的证明定理11.2.6或许有一些帮助。对于(b)，首先考察$c > 0$的情形，然后再分别考察$c = -1$与$c = 0$的情形，利用这些结果完成对$c < 0$情形的证明。你可以使用前面的证明完成后面的证明）**

> 逐条证明：
>
> ---
>
> 1. 函数$f+g$是黎曼可积的，并且$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$。
>
> 证明：
>
> 考虑上黎曼积分的原始定义（定义11.3.2），由于上黎曼积分是下确界（命题6.3.6），因此对任意的实数$\varepsilon > 0$，都应当存在一个从上方控制f的分段常数函数$\overline{f}$与从上方控制g的分段常数函数$\overline{g}$使得：
>
> $$\overline{\int}_I f \leq \int_I \overline{f} < \left(\overline{\int}_I f\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$
> $$\overline{\int}_I g \leq \int_I \overline{g} < \left(\overline{\int}_I g\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$
>
> 于是并且注意到，对任意$x \in I$都有$f(x) \leq \overline{f}(x)$与$g(x) \leq \overline{g}(x)$可以推出$(f+g)(x) \leq \left(\overline{f}+\overline{g}\right)(x)$，因此$\overline{f}+\overline{g}$是从上方控制$f+g$的函数，并且根据命题11.2.8我们有$\overline{f}+\overline{g}$也是一个分段常数函数，于是有：
>
> $$\int_I (\overline{f}+\overline{g}) \in \left\{\int_I h : h\text{是在}I\text{上从上方控制}f+g\text{的分段常数函数}\right\} \Longrightarrow \int_I (\overline{f}+\overline{g}) \geq \overline{\int}_f (f+g)$$
>
> 于是即有结论：
>
> $$\overline{\int}_f (f+g) \leq \int_I (\overline{f}+\overline{g}) \leq \int_I \overline{f} + \int_I \overline{g} < \left(\overline{\int}_I f\right) + \left(\overline{\int}_I g\right) + \varepsilon$$
>
> 对任意实数$\varepsilon > 0$都成立，这表明只能有$\overline{\int}_f (f+g) \leq \left(\overline{\int}_I f\right) + \left(\overline{\int}_I g\right)$。通过类似的方法我们也可以对下黎曼积分讨论得到：
>
> $$\underline{\int}_f (f+g) \geq \left(\underline{\int}_I f\right) + \left(\underline{\int}_I g\right)$$
>
> 结合命题11.3.3的估计方法有：
>
> $$\left(\underline{\int}_I f\right) + \left(\underline{\int}_I g\right) \leq \underline{\int}_f (f+g) \leq \overline{\int}_f (f+g) \leq \left(\overline{\int}_I f\right) + \left(\overline{\int}_I g\right)$$
>
> 又因为f和g在I上黎曼可积，因此上黎曼积分和下黎曼积分应该相等。于是上面的结论可引申为：
>
> $$\underline{\int}_f (f+g) = \overline{\int}_f (f+g) = \int_I f + \int_I g$$
>
> 根据黎曼可积的定义（定义11.3.4），此即结论$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$，于是证明完毕。
>
> ---

2. 对任意的实数c，函数cf都是黎曼可积的，并且$\int_I (cf) = c\int_I f$。

证明：

考虑上下黎曼积分的黎曼和定义（命题11.3.12），我们有对任意实数$c > 0$都有：

对任意的区间$J \subseteq I$，任取其中$x \in I$，都有：

$$f(x) \leq \sup_{x\in J} f(x) \implies c\cdot f(x) \leq c\cdot\sup_{x\in J} f(x)$$

因此$c\cdot\sup_{x\in J} f(x)$是$\{cf(x) : x\in J\}$的一个上界；又因为上确界的性质，对任意$\{cf(x) : x\in J\}$的上界M应当有：

$$\forall x\in J, c\cdot f(x) \leq M \implies f(x) \leq \frac{M}{c}$$

于是即$\frac{M}{c}$是$\{f(x) : x\in J\}$的上界，从而应当有$\frac{M}{c} \geq \sup_{x\in J} f(x) \implies M \geq c\cdot\sup_{x\in J} f(x)$。
于是即$c\cdot\sup_{x\in J} f(x)$是$\{cf(x) : x\in J\}$的上确界，即有$c\cdot\sup_{x\in J} f(x) = \sup_{x\in J} cf(x)$。

于是对任意I的划分，使用有限和的运算性质（命题7.1.11）我们有：

$$\begin{aligned}
c\cdot U(f,P) &= c\cdot\sum_{J\in P;J\neq\varnothing}\left(\sup_{x\in J} f(x)\right)|J| \\
&= \sum_{J\in P;J\neq\varnothing} c\cdot\left(\sup_{x\in J} f(x)\right)|J| \\
&= \sum_{J\in P;J\neq\varnothing}\left(\sup_{x\in J} cf(x)\right)|J| = U(cf,P)
\end{aligned}$$

于是使用类似上面证明$c\cdot\sup_{x\in J} f(x) = \sup_{x\in J} cf(x)$的过程，我们可以证明结论：

$$\inf\{c\cdot U(f,P) : P\text{是}I\text{的一个划分}\} = c\cdot\inf\{U(f,P) : P\text{是}I\text{的一个划分}\} \iff c\cdot\overline{\int}_I f = \overline{\int}_I cf$$

类似地，我们也可以证明$c\cdot\underline{\int}_I f = \underline{\int}_I cf$。于是根据$f$是黎曼可积的可以得到$\overline{\int}_I cf = \underline{\int}_I cf = c\cdot\int_I f$，即题目结论在$c > 0$的情况下得证。

然后考察$c = 0$时，可以得到$0f$是一个常数函数且$f(x) = 0$对任意$x\in X$都为真，于是可以根据命题11.3.7直接计算得到其积分值有$\int_I (0f) = 0$，而$0\cdot\int_I f = 0$，于是$c = 0$时也成立结论。

然后考察$c = -1$时，注意到运用习题5.5.1的结论（包括没写出来但是也成立的对下确界的形式），对任意的P是I的划分，其中任意$J\in P$都满足：

$$\sup_{x\in J}[-f(x)] = -\inf_{x\in J} f(x) \qquad \inf_{x\in J}[-f(x)] = -\sup_{x\in J} f(x)$$

因此有：

$$\begin{aligned}
U(-f,P) &= \sum_{J\in P}\left(\sup_{x\in J}[-f(x)]\right)|J| = -\sum_{J\in P}\left(\inf_{x\in J} f(x)\right)|J| = -L(f,P) \\
L(-f,P) &= \sum_{J\in P}\left(\inf_{x\in J}[-f(x)]\right)|J| = -\sum_{J\in P}\left(\sup_{x\in J} f(x)\right)|J| = -U(f,P)
\end{aligned}$$

于是即：

$$\begin{aligned}\{U(-f,P):P\text{是}I\text{的一个划分}\}=\{-L(f,P):P\text{是}I\text{的一个划分}\}\\ \{L(-f,P):P\text{是}I\text{的一个划分}\}=\{-U(f,P):P\text{是}I\text{的一个划分}\}\end{aligned}$$

再次应用习题5.5.1的结论我们有：

$$\inf\{U(-f,P):P\text{是}I\text{的一个划分}\}=\sup\{L(f,P):P\text{是}I\text{的一个划分}\}\iff\overline{\int}_I -f=-\underline{\int}_I f$$

$$\sup\{L(-f,P):P\text{是}I\text{的一个划分}\}=\inf\{U(f,P):P\text{是}I\text{的一个划分}\}\iff\underline{\int}_I -f=-\overline{\int}_I f$$

于是根据f是黎曼可积的可以得到$-f$也是黎曼可积的，且$-1\cdot\overline{\int}_I f=\overline{\int}_I -f$，在$c=-1$的情况下也成立结论。

于是对$c<0$时，注意到$cf=-1\cdot(-c)\cdot f$，而$-c>0$，于是根据上面的证明有cf也是黎曼可积的，并且：

$$\int_I cf=-\int_I(-c)\cdot f=-(-c)\cdot\int_I f=c\cdot\int_I f$$

综上，于是对任意实数c题目结论都成立，结论得证。

---

3. 函数$f-g$是黎曼可积的，并且$\int_I(f-g)=\int_I f-\int_I g$。

证明：

由结论(a)与结论(b)我们由g是黎曼可积的可以得到$-g$也是黎曼可积的，进一步得到
$[f+(-g)]=f-g$也是黎曼可积的，且有：

$$\int_I(f-g)=\int_I f+(-1)\cdot\int_I g=\int_I f-\int_I g$$

于是题目结论得证。

---

4. 如果对所有$x\in I$都有$f(x)\geq 0$，那么$\int_I f\geq 0$。

证明：

于是对任意区间$J\subseteq I$，0都是$\{f(x):x\in J\}$的一个下界，即$\inf_{x\in J}f(x)\geq 0$。

于是根据有限和的运算性质（命题7.1.11），对任意P是I的划分我们有：

$$\sum_{J\in P;J\neq\varnothing}\left(\inf_{x\in J}f(x)\right)|J|\geq 0\iff L(f,P)\geq 0$$

于是任意下黎曼和$L(f,P)$都是非负的，从而应该有$\sup\{L(f,P):P\text{是}I\text{的一个划分}\}\geq 0$（因为上确界要大于任意集合中元素）。从而下黎曼积分$\underline{\int}_I f\geq 0$。

又因为f是黎曼可积的，于是$\int_I f=\underline{\int}_I f\geq 0$，结论得证。

---

5. 如果对所有$x \in I$都有$f(x) \geq g(x)$，那么$\int_I f \geq \int_I g$。

证明：

根据结论(c)即证明$\int_I f - \int_I g \geq 0 \iff \int_I f - g \geq 0$，由于$f(x) \geq g(x)$蕴含了$f(x) - g(x) \geq 0 \iff (f-g)(x) \geq 0$，因此根据结论(d)可以之间得证题目结论。

---

6. 如果f是常数函数且对任意$x \in I$有$f(x) = c$，那么$\int_I f = c|I|$。

证明：

考虑I的任意一个划分，我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{J \in P; J \neq \varnothing} \left(\sup_{x \in J} f(x)\right)|J| &= \sum_{J \in P; J \neq \varnothing} c|J| \\ &= c \cdot \sum_{J \in P; J \neq \varnothing} |J| \\ &= c|I|\end{aligned}$$

从而任意上黎曼和$U(f,P)$都等于$c|I|$，进一步可得上黎曼积分$\overline{\int}_I f$也等于$c|I|$（单元素集的下确界显然是其唯一元素）。

类似地也可以证明任意下黎曼和$L(f,P)$都等于$c|I|$，进一步可得下黎曼积分$\underline{\int}_I f$也等于$c|I|$，于是根据黎曼可积的定义我们可以得到f是黎曼可积的，并且$\int_I f = c|I|$，题目结论得证。

---

7. 设J是一个包含I的有界区间（即$I \subseteq J$），并且设$F: J \to \mathbb{R}$是函数：

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in I \\ 0 & \text{if } x \notin I \end{cases}$$

那么F在J上是黎曼可积的，并且$\int_J F = \int_I f$。

证明：

在开始证明之前需要给出一个辅助结论，在下面的证明中用得到：

> 结论：对任意A，B是实数集的非空子集且$A \subseteq B$，那么有$\inf A \geq \inf B$与$\sup A \leq \sup B$为真。
>
> 证明：
>
> 由于A是B的子集，于是根据上下确界的定义，应当有对任意$a \in A$（也就是说$a \in B$）都有$\inf B \leq a \leq \sup B$成立，于是$\sup B$是$A$的一个上界，应当有$\sup A \leq \sup B$为真；$\inf B$是$A$的一个下界，应当有$\inf A \geq \inf B$为真。

在习题11.2.4的证明中我们已经阐述过这样的一个结论：即若P_I是I的一个划分且I是非空的，那么形如

$$P_J := \{A, B\} \cup P_I$$

的集合是J的一个划分，其中中$A:=\{x\in J:\forall y\in I,y>x\}$与$B:=\{x\in J:\forall y\in I,y<x\}$都是有界区间。

于是对任意P_I是I的划分，考虑其对应的P_J，可以计算F的上黎曼和有：

$$\begin{aligned}U(F,P_J)&=\sum_{K\in P_J;K\neq\varnothing}\left(\sup_{x\in K}F(x)\right)|K|\\&=\sum_{K\in P_I;K\neq\varnothing}\left(\sup_{x\in K}F(x)\right)|K|+\sum_{K\in\{A,B\};K\neq\varnothing}\left(\sup_{x\in K}F(x)\right)|K|\end{aligned}$$

对结果的第一个部分，由于$K\in P_I$，因此根据F的定义有对任意$x\in K$都有$F(x)=f(x)$，所以有$\sup\limits_{x\in K}F(x)=\sup\limits_{x\in K}f(x)$；对结果的第二部分，我们知道如果$A$和$B$是非空的，那么它们就不是包含于$I$的。因此根据$F$的定义，此时有对任意$x\in K$都有$F(x)=0$，于是$\sup\limits_{x\in K}F(x)=0$，于是可以进一步计算有：

$$\begin{aligned}&\sum_{K\in P_I;K\neq\varnothing}\left(\sup_{x\in K}F(x)\right)|K|+\sum_{K\in\{A,B\};K\neq\varnothing}\left(\sup_{x\in K}F(x)\right)|K|\\=&\sum_{K\in P_I;K\neq\varnothing}\left(\sup_{x\in K}f(x)\right)|K|+\sum_{K\in\{A,B\};K\neq\varnothing}0\cdot|K|\\=&U(f,P_I)+0\\=&U(f,P_I)\end{aligned}$$

于是对任意P_I是I的一个划分，都存在J的一个划分P_J使得$U(f,P_I)=U(F,P_J)$。令有$S_{U(f)}:=\{U(f,P):P\text{是}J\text{的一个划分}\}$与$S_{U(F)}:=\{U(F,P):P\text{是}J\text{的一个划分}\}$，即对任意$P$是$I$的划分，都有$U(f,P)$属于集合$S_{U(F)}$，集合$S_{U(f)}$是$S_{U(F)}$的子集。于是进一步地可以由辅助结论得到$\inf S_{U(f)}\geq\inf S_{U(F)}$。

根据上黎曼积分的定义，$\inf S_{U(f)}\geq\inf S_{U(F)}$等价于$\overline{\int}_I f\geq\overline{\int}_J F$。通过类似的过程我们也可以得证$\underline{\int}_I f\leq\underline{\int}_J F$，再考虑到同一个函数上黎曼积分必然大于等于其下黎曼积分，于是综合即：

$$\overline{\int}_I f\geq\overline{\int}_J F\geq\underline{\int}_J F\geq\underline{\int}_I f$$

由根据题设，f是黎曼可积的，于是$\overline{\int}_I f=\underline{\int}_I f=\int_I f$，于是只能有$\overline{\int}_J F=\underline{\int}_J F=\int_J F=\int_I f$，于是$I$不为空集时题目结论成立。

若I为空，则题目结论等效于定理11.2.16(f)的情景，此情景下结论成立，于是题目结论得证。

---

8. 如果$\{J,K\}$是I的一个划分，它将I分成两个区间J和K，那么函数$f|_J:J\to\mathbb{R}$与$f|_K:K\to\mathbb{R}$分别在J上和在K上黎曼可积，并且：

$$\int_I f=\int_J f|_J+\int_K f|_K$$

证明：

首先我们需要证明函数$f|_J:J\to\mathbb{R}$与$f|_K:K\to\mathbb{R}$分别在J上和在K上黎曼可积。

考虑从上下黎曼积分的原始定义出发（定义11.3.2）。由于f是黎曼可积的，因此f的上下黎曼积分相等。对上黎曼积分，由于上黎曼积分是一个下确界，因此对任意实数$\varepsilon > 0$，都存在函数$\overline{f}$是从上方控制f的分段常数函数，使得：

$$\int_I f \le \int_I \overline{f} < \int_I f + \frac{\varepsilon}{2}$$

根据定理11.2.16，我们有$\overline{f}|_I$与$\overline{f}|_K$也是分段常数函数，并且有：

$$\int_I \overline{f} = \int_J \overline{f}|_J + \int_K \overline{f}|_K \Longrightarrow \int_I f \le \int_J \overline{f}|_J + \int_K \overline{f}|_K < \int_I f + \frac{\varepsilon}{2}$$

类似的，也存在从下方控制f的分段常数函数$\underline{f}$使得：

$$\int_I f - \frac{\varepsilon}{2} < \int_I \underline{f}|_J + \int_I \underline{f}|_K \le \int_I f$$

于是此时我们有：

$$\left(\int_I \overline{f}|_J + \int_I \overline{f}|_K\right) - \left(\int_I \underline{f}|_J + \int_I \underline{f}|_K\right) \le \varepsilon$$

并且注意到，$\overline{f}$显然是从上方控制$\underline{f}$的，两者还都是分段常数函数，于是根据定理11.2.16(e)我们有：

$$\int_J \overline{f}|_J - \int_J \underline{f}|_J \ge 0 \qquad \int_K \overline{f}|_K - \int_K \underline{f}|_K \ge 0$$

综合可以得到：

$$\int_J \overline{f}|_J - \int_J \underline{f}|_J \le \varepsilon \qquad \int_K \overline{f}|_K - \int_K \underline{f}|_K \le \varepsilon$$

然后根据上黎曼积分与下黎曼积分分别是下确界和上确界，并且结合在命题11.3.3中给出的上黎曼积分与下黎曼积分的关系，可以对$f|_J$与$f|_K$的上黎曼积分和下黎曼积分推导出下面的结论：

$$\int_J \underline{f}|_J \le \underline{\int}_J f|_J \le \overline{\int}_J f|_J \le \int_J \overline{f}|_J \xRightarrow{\int_J \overline{f}|_J - \int_J \underline{f}|_J \le \varepsilon} \overline{\int}_J f|_J - \underline{\int}_J f|_J \le \varepsilon$$
$$\int_K \underline{f}|_K \le \underline{\int}_K f|_K \le \overline{\int}_K f|_K \le \int_K \overline{f}|_K \xRightarrow{\int_K \overline{f}|_K - \int_K \underline{f}|_K \le \varepsilon} \overline{\int}_K f|_K - \underline{\int}_K f|_K \le \varepsilon$$

于是我们得到，对任意实数$\varepsilon > 0$都有上面的结论成立，从而可以推导出只能有$\overline{\int}_J f|_J = \underline{\int}_J f|_J$与$\overline{\int}_K f|_K = \underline{\int}_K f|_K$为真，于是$f|_J$与$f|_K$都是黎曼可积的。

然后注意到可以在I上定义函数$F_J : I \to \mathbb{R}$与$F_K : I \to \mathbb{R}$：

$$F_J(x) := \begin{cases} f|_J(x) & \text{if } x \in J \\ 0 & \text{if } x \notin J \end{cases} \qquad F_K(x) := \begin{cases} f|_K(x) & \text{if } x \in K \\ 0 & \text{if } x \notin K \end{cases}$$

根据结论(g)我们可以得到F_J与F_K在I上黎曼可积，并且有：

$$\int_J f|_J = \int_I F_J \qquad \int_K f|_K = \int_I F_K$$

并且注意到显然有$F_J + F_K = f$，于是根据结论(a)有：

> $$\int_I f = \int_I F_J + \int_I F_K = \int_J f|_J + \int_K f|_K$$
>
> 即题目结论得证。

11.4.2 设$a < b$是实数，并且设$f : [a, b] \to \mathbb{R}$是一个连续且非负（从而对任意$x \in [a, b]$都有$f(x) \geq 0$）的函数。若有$\int_{[a,b]} f = 0$，试证明：对任意$x \in [a, b]$都有$f(x) = 0$（提示：利用反证法）

> 使用反证法，我们不妨假设存在$x_0 \in [a, b]$使得$f(x_0) = y_0$，由于f是非负的，于是$y_0 > 0$。
>
> 然后由于f是连续的，于是根据命题9.4.7存在$\sigma > 0$使得对任意的$x \in [a, b] \cap [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$都有$|f(x) - f(x_0)| \leq y_0/2$，于是对任意$x \in [a, b] \cap [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$都有$f(x) \geq f(x_0) - y_0/2 = y_0/2$，于是我们定义函数$g : [a, b] \to \mathbb{R}$有：
>
> $$g(x) := \begin{cases} \frac{y_0}{2} & \text{if } x \in [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma] \\ 0 & \text{if } x \notin [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma] \end{cases}$$
>
> 对任意$x \in [a, b]$，若$x \in [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$，则$f(x) \geq \frac{y_0}{2} = g(x)$；若$x \notin [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$，由于$f$非负有$f(x) \geq 0 = g(x)$。于是总是有$f(x) \geq g(x)$，并且注意到$g$显然是黎曼可积的，从而根据命题11.4.1(e)有：
>
> $$\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$$
>
> 然后注意到：
>
> > - 对任意$x \in [\max(a, x_0 - \sigma), \min(b, x_0 + \sigma)]$，有$x \geq a$，$x \geq x_0 - \sigma$，$x \leq b$与$x \leq x_0 + \sigma$成立，于是$x \in [a, b]$与$x \in [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$为真。
> > - 对任意$x \in [a, b] \cap [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$，有$a \leq x \leq b$与$x_0 - \sigma \leq x \leq x_0 + \sigma$为真，于是有$x \geq a$，$x \geq x_0 - \sigma$，$x \leq b$与$x \leq x_0 + \sigma$成立，从而$x \geq \max(a, x_0 - \sigma)$且$x \leq \min(b, x_0 + \sigma)$，即$x \in [\max(a, x_0 - \sigma), \min(b, x_0 + \sigma)]$。
> >
> > 注意到有$x - \sigma < x_0 < x_0 + \sigma$与$a \leq x_0 \leq b$，于是有$x_0 \leq \min(b, x_0 + \sigma)$（当且仅当$x_0 = b$时成立左右相等）与$x_0 \geq \max(a, x_0 - \sigma)$（当且仅当$x_0 = a$时成立左右相等）。
>
> 于是$[a, b] \cap [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$的长度为$L := \min(b, x_0 + \sigma) - \max(a, x_0 - \sigma) > 0$。
>
> 于是根据定理11.4.1(f)与定理11.4.1(g)我们可以计算出$\int_{[a,b]} g = \frac{y_0 L}{2} > 0$，从而$\int_{[a,b]} f \geq \frac{y_0 L}{2} > 0$，和题设的$\int_{[a,b]} f = 0$导出矛盾，反证假设不成立，只能有对任意$x \in [a, b]$都有$f(x) = 0$。

11.4.3 设I是一个有界区间，$f : I \to \mathbb{R}$是I上黎曼可积的函数，并且设P是I的一个划分，证明：

$$\int_I f = \sum_{J \in P} \int_J f$$

> 由于P总是有限的，因此我们可以对P的基数n做归纳来证明这个结论：
>
> 对$n = 0$时，此时P是一个空划分，即I是一个空集，此时可以直接根据定义计算有：
>
> $$\int_\varnothing f = \sum_{J \in \varnothing} \int_J f = 0$$
>
> 现归纳性假设$n = c$时有结论成立，对$n = c + 1$时讨论：

> 若I是空集，则此时可以直接计算出左右两式均为0（空集的划分中只可能存在空集）。于是讨论I为非空区间的情况，如果I是一个单点集$\{a\}$，那么此时P中也只能存在唯一一个非空集的元素$\{a\}$（其余元素均为空集），此时根据定义可以直接计算出左右两式均为0。然后对I可能的情形讨论：
>
> - 若I是一个形如$[a, b]$，$(a, b]$的区间（$a < b$）：
>
>   > 此时根据划分的定义可以推知必然存在一个形如$[c, b]$或$(c, b]$（$c \leq b$）的区间L属于P，于是此时我们可以注意到下面的集合：
>   >
>   > $$P' := \{I - L, L\}$$
>   >
>   > 很显然P'构成了I的一个划分，于是根据定理11.4.1(h)我们有$f|_{I-L}$与$f|_L$是黎曼可积的，并且：
>   >
>   > $$\int_I f = \int_{I-L} f + \int_L f$$
>   >
>   > 然后注意到$P - \{L\}$很显然是$I - L$的一个划分，并且$P - \{L\}$的基数为c，于是根据归纳假设，上面的式子可进一步化为：
>   >
>   > $$\int_I f = \sum_{J \in P - \{L\}} \int_J f + \int_L f$$
>   >
>   > 然后根据基数定义，存在一个双射$g : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq c\} \to P - \{L\}$，对这个双射我们额外附加定义$g(c+1) = L$，然后分别将定义域扩展到$\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq c+1\}$，值域扩展到$P$，于是上面的式子可以根据有限集求和的定义化有：
>   >
>   > $$\begin{aligned}\int_I f &= \sum_{J \in P - \{L\}} \int_J f + \int_L f \\ &= \sum_{i=1}^{c} \int_{g(i)} f + \int_{g(c+1)} f \\ &= \sum_{i=1}^{c+1} \int_{g(i)} f = \sum_{J \in P} \int_J f\end{aligned}$$
>   >
>   > 于是此情景下可以推知结论成立。
>
> - 若I是一个形如(a, b)，$[a, b)$的区间：
>
>   > 此时根据习题11.1.3可以推知必然存在一个形如$[c, b)$或(c, b)（$c \leq b$）的区间L属于P，于是此时我们可以注意到下面的集合：
>   >
>   > $$P' := \{I - L, L\}$$
>   >
>   > 很显然P'构成了I的一个划分，于是根据定理11.4.1(h)我们有$f|_{I-L}$与$f|_L$是黎曼可积的，并且：
>   >
>   > $$\int_I f = \int_{I-L} f + \int_L f$$
>   >
>   > 然后注意到$P - \{L\}$很显然是$I - L$的一个划分，并且$P - \{L\}$的基数为c，于是根据归纳假设，上面的式子可进一步化为：
>   >
>   > $$\int_I f = \sum_{J \in P - \{L\}} \int_J f + \int_L f$$

> 然后根据基数定义，存在一个双射$g:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq c\}\to P-\{L\}$，对这个双射我们额外附加定义$g(c+1)=L$，然后分别将定义域扩展到$\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq c+1\}$，值域扩展到$P$，于是上面的式子可以根据有限集求和的定义化有：
>
> $$\begin{aligned}\int_I f&=\sum_{J\in P-\{L\}}\int_J f+\int_L f\\&=\sum_{i=1}^{c}\int_{g(i)}f+\int_{g(c+1)}f\\&=\sum_{i=1}^{c+1}\int_{g(i)}f=\sum_{J\in P}\int_J f\end{aligned}$$
>
> 于是此情景下可以推知结论成立。

综上，于是我们总是有假设$n=c$时有结论成立，对$n=c+1$时结论也成立，于是根据归纳原理我们可以得到对任意基数为自然数的划分都有题目结论成立，换言之，对任意I的划分P都成立题目结论，于是证明完毕。

11.4.4 不重复证明中的全部推理内容，简单解释一下为什么定理11.4.3与定理11.4.5的证明中所有剩下的情形都可以从书上已有证明的情形中自动地推导得到（提示：根据定理11.4.1我们可以知道如果f是黎曼可积的，那么$-f$也是黎曼可积的）

定理11.4.3的证明：

首先根据定理11.4.1我们知道若f是黎曼可积的，那么$-f$是黎曼可积的，并且在原书中已经给出了$\max(f,g)$是黎曼可积的证明，然后注意到对任意的$x\in I$都有：

$$\min(f,g)=-\max(-f,-g)$$

因为对任意$x\in X$，可以讨论$f(x)$与$g(x)$的关系：

- $f(x)<g(x)$：

  > $$\begin{aligned}f(x)<g(x)&\implies(\min(f,g))(x)=f(x)\\f(x)<g(x)&\implies-f(x)>-g(x)\\&\implies(\max(-f,-g))(x)=-f(x)\\&\implies(-\max(-f,-g))(x)=f(x)\end{aligned}$$

- $f(x)\geq g(x)$：

  > $$\begin{aligned}f(x)\geq g(x)&\implies(\min(f,g))(x)=g(x)\\f(x)\geq g(x)&\implies-f(x)\leq-g(x)\\&\implies(\max(-f,-g))(x)=-g(x)\\&\implies(-\max(-f,-g))(x)=g(x)\end{aligned}$$

于是根据定理11.4.1，由$-f$，$-g$黎曼可积可以得到$\max(-f,-g)$黎曼可积，进而$\min(f,g)=-\max(-f,-g)$是黎曼可积的。

定理11.4.5的证明：

在原书中已经给出了f与g的正数部分的乘积f_+g_+是黎曼可积的，然后我们注意到：

- $-f_-$是$-f$的正数部分。
- $-g_-$是$-g$的正数部分。
- 由题设与定理11.4.1，$-f$与$-g$都是黎曼可积的。

> 于是分别对$-f$与g，g与$-f$，$-f$与$-g$套用证明的结论，可以得到函数$-f_-g_+$，$-f_+g_-$，f_-g_-都是黎曼可积的，然后对函数$-f_-g_+$与$-f_+g_-$套用定理11.4.1就可以得到f_-g_+，f_+g_-是黎曼可积的，于是题目结论证明完毕。

本节相关跳转

[实分析 11.2 分段常数函数]