# 15.6 说一说复数

## 摘录

1. （实数系并入复数系？）结合定义15.6.1到定义15.6.6的内容，然后像我们在定义实数，有理数时所做的那样，我们需要将实数系$\mathbb{R}$并入复数系$\mathbb{C}$。通过让每一个实数$x$都等于一个复数$(x,0)$，于是$x\equiv(x,0)$。注意到等同关系与复数的相等（$x=y$当且仅当$(x,0)=(y,0)$），加法（$x_1+x_2=x_3$当且仅当$(x_1,0)+(x_2,0)=(x_3,0)$），负运算（$x=-y$当且仅当$(x,0)=-(y,0)$），乘法（$x_1x_2=x_3$当且仅当$(x_1,0)(x_2,0)=(x_3,0)$）都是一致的。因此，我们不必区分实数与复数的相等，负运算，加法以及乘法运算。同时我们可以注意到$0\equiv0_{\mathbb{C}}$与$1\equiv1_{\mathbb{C}}$，于是我们可以删掉下标只写0和1。

   特别地，我们定义i为复数$\mathrm{i}=(0,1)$，于是我们可以将复数的非正式定义通过一个引理（也就是引理15.6.7）合理化。

---

## 定义

1. （15.6.1 复数的非正式定义）**复数系**$\mathbb{C}$是全体形如$a+b\mathrm{i}$的数所构成的集合，其中$a$，$b$都死实数，i是$-1$的平方根，即$\mathrm{i}^2=-1$。

   （注：显然这不是一个让人满意的定义，这个定义一没有给出复数之间我们在实数系上熟知的加法乘法运算方式，二没有拓展我们在实数上熟知的序关系。为了严格地构造出复数系，我们需要类似第4第5章所做的那样，先引入一个形式化概念，然后给出复数的真正定义）

2. （15.6.2 复数的正式定义）**复数**是形如$(a,b)$的有序对，其中$a$，$b$都是实数。我们称复数$(a,b)$和$(c,d)$是相等的，当且仅当$a=c$且$b=d$。我们记全体复数的集合为$\mathbb{C}$。

   （注：做完这个定义后你或许会注意到，这个定义下$\mathbb{C}$和笛卡尔平面$\mathbb{R}^2$没有任何区别，事实上也确实如此。在后面的定义中我们会为复数系定义各类的运算，因此你可以将复数系视为添加了大量附加数学结构的$\mathbb{R}^2$；然后在后面的定义中，需要满足我们在复数非正式定义里的直观想法定义复数的运算）

3. （15.6.3 复数的加法运算）若$z=(a,b)$和$w=(c,d)$是两个复数，那么它们的**和**$z+w$就被定义为复数$z+w:=(a+c,b+d)$；此外，$z$的**负数**$-z$被定义为复数$-z:=(-a,-b)$；我们还定义**复数零**$0_{\mathbb{C}}$为复数$0_{\mathbb{C}}:=(0,0)$。

   （注：显然复数的加法和负运算都是定义明确的且满足我们所熟知的几个运算定律；我们通常将$z+(-w)$简写为$z-w$）

4. （15.6.5 复数的乘法运算）若$z=(a,b)$和$w=(c,d)$是两个复数，那么它们的**乘积**$zw$就被定义为复数$z+w:=(ac-bd,ad+bc)$。此外，我们还引入**复数的单位元**$1_{\mathbb{C}}:=(1,0)$。

   （注：这个乘法定义来自于我们最开始的非正式定义，容易验证这个运算定义也是定义明确的且满足我们熟知的几个运算定律；单位元的定义更多是来自于群论的观点（当然也和实数上乘法本身有关））

5. （15.6.8 实部和虚部）设$z=a+b\mathrm{i}$是一个复数，其中$a$，$b$都是实数。则我们称$a$是$z$的**实部**，并记作$\mathfrak{R}(z):=a$；称$b$是$z$的**虚部**，并记作$\mathfrak{I}(z):=a$。因此一般地，我们有$z=\mathfrak{R}(z)+\mathfrak{I}(z)\mathrm{i}$。显然可以注意到$z$是实数当且仅当$\mathfrak{I}(z)=0$，于是我们称$z$是**虚数**当且仅当$\mathfrak{R}(z)=0$。最后，我们定义$z$的**复共轭**$\overline{z}$为$\overline{z}:=\mathfrak{R}(z)-\mathfrak{I}(z)\mathrm{i}$。

   （注：这个记号有点怪的，我见过的记号基本都是$\mathrm{Re}$和$\mathrm{Im}$分别代表实部和虚部）

6. （15.6.10 复数的绝对值）设$z=a+b\mathrm{i}$是一个复数，其中$a$，$b$都是实数，那么$z$的**绝对值**$|z|$为实数$|z|:=\sqrt{a^2+b^2}=(a^2+b^2)^{1/2}$。

(注：在习题5.6.3中我们提到了绝对值的另一个表达式$|x| = \sqrt{x^2}$，定义15.6.10正是这个式子的推广)

7. (15.6.12 复数的倒数) 设$z$是一个非零的复数，那么$z$的倒数$z^{-1}$就被定义为复数$z^{-1} := |z|^{-2}\overline{z}$。当$z = 0$时，我们不给出$0^{-1}$的定义。于是我们可以得到：

$$zz^{-1} = z^{-1}z = |z|^{-2}\overline{z}z = |z|^{-2}|z|^2 = 1$$

这也是我们所期望的倒数，于是对任意的两个复数$z$，$w$（其中$w \neq 0$），我们可以按照通常的方式，定义它们的**商**$z/w := zw^{-1}$。

8. (15.6.15 复指数函数) 设$z$是一个复数，那么我们定义函数$\exp(z)$为：

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(注：可以通过将比较判别法推广到复数级数来证明对任意的$z$，$\exp(z)$都是收敛的。事实上，定理15.5.2中许多性质也都是成立的，例如$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$，另一个有用的结果是$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$；对复对数函数，情形会更加微妙，其一是exp在复数下已经不是可逆函数，其二是关于对数函数的各种幂级数都只有一个有限的收敛半径)

---

# 命题

1. (15.6.4 复数系是一个加法群) 若$z_1$，$z_2$，$z_3$都是复数，那么它们具有可交换性：$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$，结合性：$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$，恒等性：$z_1 + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z_1 = z_1$以及逆元性：$z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0_{\mathbb{C}}$。

2. (15.6.6 复数乘法的运算定律？) 若$z_1$，$z_2$，$z_3$都是复数，那么它们具有可交换性：$z_1 z_2 = z_2 z_1$，结合性：$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$，恒等性：$z_1 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} z_1 = z_1$以及分配性：$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$和$(z_2 + z_3) z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1$。

   (注：也可以直接说$\mathbb{C}$是一个交换环)

3. (15.6.7) 每一个复数$z \in \mathbb{C}$都可以写为$z = a + b\mathrm{i}$，其中$a$，$b$是唯一确定的一对实数。另外我们$\mathrm{i}^2 = -1$与$-z = (-1)z$。

4. (15.6.9 复共轭是一种对合) 设$z$，$w$都是复数，那么有$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$，$\overline{-z} = -\overline{z}$和$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$。此外，$\overline{\overline{z}} = z$。最后，我们有$\overline{z} = \overline{w}$当且仅当$z = w$；$\overline{z} = z$当且仅当$z$是一个实数。

   (注：对合有很多个领域内的不同意义，这里应该是说复共轭映射$z \mapsto \overline{z}$是一个对合函数，也即满足对任意定义域内$x$都有$f(f(x)) = x$的函数，又或者说逆映射为自身的函数；对合还有群论，线性代数领域上的意义，这里就不多赘述了，有兴趣可以自行查阅资料)

5. (15.6.11 复数绝对值的性质) 设$z$，$w$都是复数。那么$|z|$是一个非负实数，并且$|z| = 0$当且仅当$z = 0$。另外还有恒等式$z\overline{z} = |z|^2$，从而有$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$。于是$|zw| = |z||w|$且$|\overline{z}| = |z|$，最后，我们有不等式：

$$-|z| \leq \Re(z) \leq |z| \qquad -|z| \leq \Im(z) \leq |z| \qquad |z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$$

与三角不等式$|z+w| \leq |z| + |w|$。

6. (15.6.13) 定义两个复数$z$和$w$之间的距离为$d(z, w) := |z - w|$，那么具有度量$d$的复数系$\mathbb{C}$构成一个度量空间。若$(z_n)_{n=1}^{\infty}$是一个复数序列，并且$z$是一个复数，那么在这个度量空间中，$\lim_{n\to\infty} z_n = z$当且仅当$\lim_{n\to\infty} \Re(z_n) = \Re(z)$且$\lim_{n\to\infty} \Im(z_n) = \Im(z)$。

   (注：这个度量空间既是完备的又是连通的，但是它不是紧致的，这部分我们会在课后习题中展示这一点，另外，它也满足一般的极限定律)

7. (15.6.14 复数的极限定律)设$(z_n)_{n=1}^{\infty}$和$(w_n)_{n=1}^{\infty}$都是收敛的复数序列，并设$c$是一个复数。那么序列$(z_n+w_n)_{n=1}^{\infty}$、$(z_n-w_n)_{n=1}^{\infty}$、$(cz_n)_{n=1}^{\infty}$、$(z_nw_n)_{n=1}^{\infty}$和$(\overline{z_n})_{n=1}^{\infty}$也都是收敛的，并且有：

$$\begin{gathered}
\lim_{n\to\infty} z_n+w_n=\lim_{n\to\infty} z_n+\lim_{n\to\infty} w_n\\
\lim_{n\to\infty} z_n-w_n=\lim_{n\to\infty} z_n-\lim_{n\to\infty} w_n\\
\lim_{n\to\infty} cz_n=c\lim_{n\to\infty} z_n\\
\lim_{n\to\infty} z_nw_n=\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} w_n\right)\\
\lim_{n\to\infty} \overline{z_n}=\overline{\lim_{n\to\infty} z_n}
\end{gathered}$$

此外，如果全体$w_n$都是非零的，并且$\lim\limits_{n\to\infty} w_n$也是非零的，那么$(z_nw_n)_{n=1}^{\infty}$就是一个收敛序列，并且：

$$\lim_{n\to\infty} z_n/w_n=\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right)/\left(\lim_{n\to\infty} w_n\right)$$

(注：事实上，我们在本书中证明过有关实值函数的很多结论也都适用于复值函数。我们只需要将证明中的“实数”替换成“复数”就行了，例如逐点收敛和一致收敛的理论)

---

# 课后习题

### 15.6.1 证明引理15.6.4

> 我们不妨对$i=1，2，3$设有$z_i=(a_i,b_i)$，然后逐条证明结论：
>
> ---
>
> 1. $z_1+z_2=z_2+z_1$。
>
> 即证明等式$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_2,b_2)+(a_1,b_1)$。注意到根据定义15.6.3，等式的左边等于$(a_1+a_2,b_1+b_2)$，等式的右边等于$(a_2+a_1,b_2+b_1)$；然后根据实数的加法交换律我们知道$a_1+a_2=a_2+a_1$与$b_1+b_2=b_2+b_1$，从而根据复数相等的定义可以得证等式$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_2,b_2)+(a_1,b_1)$结论成立。
>
> ---
>
> 2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$。
>
> 可以直接计算左边有：
>
> $$\begin{aligned}(z_1+z_2)+z_3&=((a_1,b_1)+(a_2,b_2))+(a_3,b_3)\\&=(a_1+a_2,b_1+b_2)+(a_3,b_3)\\&=(a_1+a_2+a_3,b_1+b_2+b_3)\end{aligned}$$
>
> 类似地右边有：
>
> $$\begin{aligned}z_1+(z_2+z_3)&=(a_1,b_1)+((a_2,b_2)+(a_3,b_3))\\&=(a_1,b_1)+(a_2+a_3,b_2+b_3)\\&=(a_1+a_2+a_3,b_1+b_2+b_3)\end{aligned}$$
>
> 于是等式成立。
>
> ---
>
> 3. $z_1+0_{\mathbb{C}}=0_{\mathbb{C}}+z_1=z_1$。

根据定义可以直接计算有$z_1+0_{\mathbb{C}}=(a_1,b_1)+(0,0)=(a_1,b_1)=z_1$，同理也可以直接计算得到$0_{\mathbb{C}}+z_1=z_1$。

---

4. $z_1+(-z_1)=(-z_1)+z_1=0_{\mathbb{C}}$。

根据定义可以直接计算有$z_1+(-z_1)=(a_1,b_1)+(-a_1,-b_1)=(0,0)=0_{\mathbb{C}}$，同理也可以直接计算得到$(-z_1)+z_1=0_{\mathbb{C}}$。

#### 15.6.2 证明引理15.6.6

我们不妨对$i=1$，$2$，$3$设有$z_i=(a_i,b_i)$，然后逐条证明结论：

---

1. $z_1z_2=z_2z_1$。

根据定义我们有：

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(a_1,b_1)(a_2,b_2)\\&=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2)\\&=(a_2a_1-b_2b_1,a_2b_1+b_2a_1)\\&=(a_2,b_2)(a_1,b_1)\\&=z_2z_1\end{aligned}$$

于是结论得证。

---

2. $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$。

根据定义我们有：

$$\begin{aligned}(z_1z_2)z_3&=((a_1,b_1)(a_2,b_2))(a_3,b_3)\\&=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2)(a_3,b_3)\\&=(a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-a_1b_2b_3-b_1a_2b_3,a_1a_2b_3-b_1b_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3)\\&=(a_1(a_2a_3-b_2b_3)-b_1(a_2b_3+b_2a_3),a_1(a_2b_3+b_2a_3)+b_1(a_2a_3-b_2b_3))\\&=(a_1,b_1)(a_2a_3-b_2b_3,a_2b_3+b_2a_3)\\&=(a_1,b_1)((a_2,a_3)(a_3,b_3))\\&=z_1(z_2z_3)\end{aligned}$$

于是结论得证。

---

3. $z_11_{\mathbb{C}}=1_{\mathbb{C}}z_1=z_1$。

可以直接根据定义计算得到：

$$\begin{aligned}z_11_{\mathbb{C}}=(a_1,b_1)(1,0)&=(a_1\cdot 1-b_1\cdot 0,a_1\cdot 0+b_1\cdot 1)\\&=(a_1,b_1)\\&=z_1\end{aligned}$$

再根据结论(a)有$z_11_{\mathbb{C}}=1_{\mathbb{C}}z_1$，于是结论得证。

---

4. $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$和$(z_2+z_3)z_1=z_2z_1+z_3z_1$。

可以根据定义计算有：

$$
\begin{aligned}
z_1(z_2+z_3) &= (a_1,b_1)(a_2+a_3,b_2+b_3) \\
&= (a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3), a_1(b_2+b_3)+b_1(a_2+a_3)) \\
&= ((a_1a_2-b_1b_2)+(a_1a_3-b_1b_3), (a_1b_2+b_1a_2)+(a_1b_3+b_1a_3)) \\
&= (a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2)+(a_1a_3-b_1b_3, a_1b_3+b_1a_3) \\
&= (a_1,b_1)(a_2,b_2)+(a_1,b_1)(a_3,b_3) \\
&= z_1z_2+z_1z_3
\end{aligned}
$$

然后根据结论(a)我们有$z_1(z_2+z_3)=(z_2+z_3)z_1$与$z_1z_2+z_1z_3=z_2z_1+z_3z_1$，因此等式$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$实际上蕴含了$(z_2+z_3)z_1=z_2z_1+z_3z_1$。综上于是结论得证。

### 15.6.3 证明引理15.6.7

首先证明对任意的$z\in\mathbb{C}$，都存在$a$，$b\in\mathbb{R}$使得$z=a+b\mathrm{i}$。根据定义15.6.2，不妨设复数$z=(a,b)$（于是$a$，$b\in\mathbb{R}$），于是可以注意到：

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+(b,0)(0,1)=a+b\mathrm{i}$$

于是我们证明了对任意的$z\in\mathbb{C}$，都存在$a$，$b\in\mathbb{R}$使得$z=a+b\mathrm{i}$。

然后我们来证明对任意的$z\in\mathbb{C}$，只存在唯一一对$a$，$b\in\mathbb{R}$使得$z=a+b\mathrm{i}$。不妨设$z$同时可以写成$z=a_1+b_1\mathrm{i}$与$z=a_2+b_2\mathrm{i}$，于是根据复数运算定义可以得到：

$$c+d\mathrm{i}=(c,0)+(d,0)(0,1)=(c,d)$$

从而假设也即$z=(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$，然后根据复数相等的定义我们知道这表明$a_1=a_2$且$b_1=b_2$，也即能使得$z=a+b\mathrm{i}$的实数对$a$，$b$是唯一的。

对于另外两个结论，我们可以直接通过定义运算得证（设$z=(a,b)$）：

$$
\begin{gathered}
\mathrm{i}^2=(0,1)(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)=-1 \\
-z=(-a,-b)=((-1\cdot a)-0\cdot b,(-1\cdot b)+0\cdot a)=(-1,0)(a,b)=(-1)z
\end{gathered}
$$

于是结论得证。

### 15.6.4 证明引理15.6.9

逐条证明：

---

1. $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$。

根据定义有：

$$
\begin{aligned}
\overline{z+w} &= \overline{\Re(z)+\Re(w)+(\Im(z)+\Im(w))\mathrm{i}} \\
&= \Re(z)+\Re(w)-(\Im(z)+\Im(w))\mathrm{i} \\
&= \Re(z)-\Im(z)\mathrm{i}+\Re(w)-\Im(w)\mathrm{i} \\
&= \overline{z}+\overline{w}
\end{aligned}
$$

于是结论成立。

---

2. $\overline{-z}=-\overline{z}$。

根据定义有：

$$
\begin{aligned}
\overline{-z} &= \overline{-\Re(z)-\Im(z)\mathrm{i}} \\
&= -\Re(z)+\Im(z)\mathrm{i} \\
&= -(\Re(z)-\Im(z)\mathrm{i}) \\
&= -\overline{z}
\end{aligned}
$$

于是结论成立。

---

3. $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$。

根据定义有：

$$\begin{aligned}\overline{zw}&=\overline{\Re(z)\Re(w)-\Im(z)\Im(w)+(\Re(z)\Im(w)+\Im(z)\Re(w))\mathrm{i}}\\&=\Re(z)\Re(w)-\Im(z)\Im(w)+(-\Re(z)\Im(w)-\Im(z)\Re(w))\mathrm{i}\\&=(\Re(z)-\Im(z)\mathrm{i})(\Re(w)-\Im(w)\mathrm{i})\\&=\overline{z}\,\overline{w}\end{aligned}$$

于是结论成立。

---

4. $\overline{\overline{z}}=z$。

根据定义有：

$$\begin{aligned}\overline{\overline{z}}&=\overline{\overline{\Re(z)+\Im(z)\mathrm{i}}}\\&=\overline{\Re(z)-\Im(z)\mathrm{i}}\\&=\Re(z)+\Im(z)\mathrm{i}\\&=z\end{aligned}$$

于是结论成立。

---

5. $\overline{z}=\overline{w}$当且仅当$z=w$。

根据复数相等的定义我们知道$\overline{z}=\overline{w}$当且仅当$\Re(z)=\Re(w)$且$-\Im(z)=-\Im(w)$，注意到由于虚部也是实数，因此根据实数的性质我们知道$\Im(z)=\Im(w)\iff-\Im(z)=-\Im(w)$，于是也即：

$$\overline{z}=\overline{w}\iff\Re(z)=\Re(w)\wedge\Im(z)=\Im(w)\iff z=w$$

于是结论成立。

---

6. $\overline{z}=z$当且仅当$z$是一个实数。

根据复数相等的定义我们知道$\overline{z}=z$当且仅当$\Re(z)=\Re(z)$且$\Im(z)=-\Im(z)$，其中$\Re(z)=\Re(z)$显然是恒成立的，而虚部$\Im(z)$是一个实数，因此有$\Im(z)=-\Im(z)$当且仅当$\Im(z)=0$。综合即有$\overline{z}=z$当且仅当$\Im(z)=0$，也即$z$是一个实数。于是结论成立。

**15.6.5 设$z$是一个复数，证明：$\Re(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$和$\Im(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$成立**

可以直接根据定义计算有：

$$\begin{aligned}\frac{z+\overline{z}}{2}&=\frac{\Re(z)+\Im(z)\mathrm{i}+\Re(z)-\Im(z)\mathrm{i}}{2}\\&=\frac{2\Re(z)}{2}=\Re(z)\\\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}&=(\Re(z)+\Im(z)\mathrm{i}-\Re(z)+\Im(z)\mathrm{i})\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\\&=2\Im(z)\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)=\Im(z)\end{aligned}$$

于是结论得证。

> （题外话，这题放在这是不是有点不对啊，下面的题才到引理15.6.11，除法还没定义呢）

**15.6.6 证明引理15.6.11** **（提示：为了证明三角不等式，首先证明$\Re(z\overline{w}) \leq |z||w|$，从而有（利用习题15.6.5）$z\overline{w}+\overline{z}w \leq 2|z||w|$，然后把$|z|^2+|w|^2$加到这个不等式的两端）**

> 逐条证明：
>
> ---
>
> 1. $|z|$是一个非负实数。
>
> 根据定义5.6.4我们知道一个实数的$1/2$次幂必然大于等于$0$，这个结论是显然成立的。
>
> ---
>
> 2. $|z|=0$当且仅当$z=0$。
>
> 我们知道$|z|=\sqrt{\Re(z)^2+\Im(z)^2}$，于是若$|z|=0$当且仅当有$\Re(z)^2+\Im(z)^2=0$，然后由于实数的平方总是非负的，因此$\Re(z)^2+\Im(z)^2=0$当且仅当$\Re(z)=0$且$\Im(z)=0$，也即$z=0+0\mathrm{i}=0$。于是结论得证。
>
> ---
>
> 3. $z\overline{z}=|z|^2$，从而有$|z|=\sqrt{z\overline{z}}$。
>
> 可以直接计算有：
>
> $$\begin{aligned} z\overline{z} &= (\Re(z)+\Im(z)\mathrm{i})(\Re(z)-\Im(z)\mathrm{i}) \\ &= \Re(z)^2+\Im(z)^2+(\Re(z)\Im(z)-\Im(z)\Re(z))\mathrm{i} \\ &= \Re(z)^2+\Im(z)^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$
>
> 于是结论得证。
>
> ---
>
> 4. $|zw|=|z||w|$且$|\overline{z}|=|z|$。
>
> 根据定义可以计算有：
>
> $$\begin{aligned} |zw| &= \sqrt{\Re(zw)^2+\Im(zw)^2} \\ &= \sqrt{[\Re(z)\Re(w)-\Im(z)\Im(w)]^2+[\Re(z)\Im(w)+\Im(z)\Re(w)]^2} \\ &= \sqrt{\Re(z)^2\Re(w)^2+\Im(z)^2\Im(w)^2+\Re(z)^2\Im(w)^2+\Im(z)^2\Re(w)^2} \\ &= \sqrt{\Re(z)^2+\Im(z)^2}\sqrt{\Re(w)^2+\Im(w)^2} \\ &= |z||w| \end{aligned}$$
>
> 特别地，结合$z\overline{z}=|z|^2$我们有$|z\overline{z}|=|z||\overline{z}|=|z|^2$（实数的绝对值是显然容易计算的），因此对任意非零的复数$z$通过消去律我们可以直接得到$|\overline{z}|=|z|$，而$z=0$时显然可以直接验证$|\overline{z}|=|z|$，综合即对任意$z\in\mathbb{C}$都有$|\overline{z}|=|z|$。于是结论得证。
>
> ---
>
> 5. 证明不等式：
>
> $$-|z| \leq \Re(z) \leq |z| \qquad -|z| \leq \Im(z) \leq |z| \qquad |z| \leq |\Re(z)|+|\Im(z)|$$
>
> 可以注意到对任意的$z\in\mathbb{C}$都有：
>
> $$|\Re(z)| = \sqrt{\Re(z)^2} \leq \sqrt{\Re(z)^2+\Im(z)^2} = |z|$$

从而也即$-|z|\leq\Re(z)\leq|z|$，类似地可以得证$-|z|\leq\Im(z)\leq|z|$。然后又可以注意到：

$$|z|=\sqrt{\Re(z)^2+\Im(z)^2}\leq\sqrt{\Re(z)^2+2|\Re(z)||\Im(z)|+\Im(z)^2}=|\Re(z)|+|\Im(z)|$$

于是得证了第二个不等式$|z|\leq|\Re(z)|+|\Im(z)|$。综上结论得证。

---

6. $|z+w|\leq|z|+|w|$。

由于绝对值都是正数，因此我们知道$|z+w|\leq|z|+|w|$当且仅当$(|z+w|)^2\leq(|z|+|w|)^2$，也即：

$$|z+w|^2\leq|z|^2+2|z||w|+|w|^2$$

然后由于$z\overline{z}=|z|^2$，因此我们可以将上面的不等式改写为等价的形式：

$$\begin{gathered}(z+w)(\overline{z}+\overline{w})\leq z\overline{z}+w\overline{w}+2|z||w|\\ \Updownarrow\\ z\overline{w}+w\overline{z}\leq 2|z||w|\end{gathered}$$

（注意这里$z\overline{w}+w\overline{z}$是一个实数，上面的化简事实上都只涉及实数的加减）

由于$z\overline{w}$是$w\overline{z}$的复共轭，因此有：

$$z\overline{w}+w\overline{z}=(\Re(z\overline{w})+\Re(z\overline{w}))+(\Im(z\overline{w})-\Im(z\overline{w}))\mathrm{i}=2\Re(z\overline{w})$$

然后结合前面已经证明过的结论（(d)和(e)）注意到：

$$\Re(z\overline{w})\leq|z\overline{w}|=|z||\overline{w}|=|z||w|$$

因此得证不等式$z\overline{w}+w\overline{z}\leq 2|z||w|$成立，然后根据前面的讨论这表明$|z+w|\leq|z|+|w|$也成立。综上于是结论得证。

**15.6.7 证明：若$z$和$w$都是复数，并且$w\neq 0$，那么$|z/w|=|z|/|w|$**

根据定义我们有：

$$\begin{aligned}|z/w|=|zw^{-1}|&=|z||w^{-1}|\\&=|z||w|^{-1}\\&=|z|/|w|\end{aligned}$$

于是结论得证。

**15.6.8 设$z$，$w$都是非零复数，证明：$|z+w|=|z|+|w|$当且仅当存在一个正实数$c>0$使得$z=cw$**

分别证明充分必要性。

若存在一个正实数$c>0$使得$z=cw$，则有

$$\begin{gathered}|z|+|w|=c|w|+|w|\\|z+w|=|(c+1)w|=(c+1)|w|\end{gathered}$$

显然此时有$|z+w|=|z|+|w|$成立。

反过来，若有$|z+w|=|z|+|w|$，则我们设$z=a+b\mathrm{i}$与$w=c+d\mathrm{i}$，于是有：

$$(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$
$$\Updownarrow$$
$$(ac+bd)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$
$$\Updownarrow$$
$$2acbd=b^2c^2+a^2d^2$$
$$\Updownarrow$$
$$2=\frac{bc}{ad}+\frac{ad}{bc}$$

于是我们不妨设$x=\dfrac{bc}{ad}$（$x\neq 0$），于是即$x+\dfrac{1}{x}=2\Longrightarrow(x-1)^2=0$，也即有$x=1$，从而我们有：

$$\frac{bc}{ad}=1\iff\frac{b}{d}=\frac{a}{c}=C$$

其中$C$是某个实数，也即我们得到有$z=C(c+d\mathrm{i})=Cw$，于是题目结论得证。

#### 15.6.9 证明引理15.6.13

要证明$(\mathbb{C},d)$是一个度量空间，即要证明：

1. 对任意$x\in\mathbb{C}$，$d(x,x)=0$。

   > 显然有$x-x=0$，然后直接根据定义就可以计算得到$|0|=0$，于是结论得证。

2. 对任意两个不同的$x$，$y\in\mathbb{C}$，我们都有$d(x,y)>0$。

   > 由于$x$，$y$不同因此有$x-y\neq 0$，然后根据引理15.6.11我们可以得到$d(x,y)=|x-y|>0$，于是结论得证。

3. 对任意的$x$，$y\in\mathbb{C}$，我们有$d(x,y)=d(y,x)$。

   > 根据引理15.6.11我们可以得到$|-z|=|z|$对任意的复数$z$都成立，因此也有$|y-x|=|x-y|$成立，于是结论得证。

4. 对任意的$x$，$y$，$z\in\mathbb{C}$，我们有$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$。

   > 注意到$x-z=(x-y)+(y-z)$，因此根据引理15.6.11的三角不等式我们可以直接得到$|x-z|\leq|x-y|+|y-z|$，也即有$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$，于是结论得证。

综上，于是我们证明了$(\mathbb{C},d)$是一个度量空间。然后我们来证明$\lim_{n\to\infty}z_n=z$当且仅当$\lim_{n\to\infty}\Re(z_n)=\Re(z)$且$\lim_{n\to\infty}\Im(z_n)=\Im(z)$。

一方面，根据度量空间中收敛的定义，若有$\lim_{n\to\infty}z_n=z$则对任意的$\varepsilon>0$，存在$N\geq 0$使得对任意$n\geq N$都有$|z_n-z|<\varepsilon$。然后根据引理15.6.11的不等式，我们知道有：

$$|\Re(z_n)-\Re(z)|\leq|z_n-z|<\varepsilon\qquad|\Im(z_n)-\Im(z)|\leq|z_n-z|<\varepsilon$$

于是结合起来即有$\lim_{n\to\infty}\Re(z_n)=\Re(z)$且$\lim_{n\to\infty}\Im(z_n)=\Im(z)$；反过来，若有$\lim_{n\to\infty}\Re(z_n)=\Re(z)$且$\lim_{n\to\infty}\Im(z_n)=\Im(z)$同时成立，则对任意的$\varepsilon>0$，分别存在$N_1\geq 0$与$N_2\geq 0$使得：

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\begin{cases}n\geq N_1\Longrightarrow|\Re(z_n)-\Re(z)|<\varepsilon/2\\ n\geq N_2\Longrightarrow|\Im(z_n)-\Im(z)|<\varepsilon/2\end{cases}$$

> 于是取$N := \max(N_1, N_2)$，于是根据引理15.6.11对任意$n \geq N$都有$|z_n - z| \leq |\Re(z_n) - \Re(z)| + |\Im(z_n) - \Im(z)| < \varepsilon$，即此时有$\lim_{n\to\infty} z_n = z$成立。
>
> 综上，于是我们证明了充分必要性，题目结论得证。
>
> （说个题外话，既然在定义的时候复数系$\mathbb{C}$事实上就是笛卡尔平面$\mathbb{R}^2$，度量显然也是独立于加法乘法的数学结构，那么或许本题只需要说明定义的距离函数事实上就是欧几里得度量$d_{l^2}$，然后直接引用度量空间里证明过的结论（欧几里得度量为什么是一个度量空间以及分量收敛和序列收敛的关系在12.1节已经叙述过了）应该也可以算是一种证明思路？上面的证明只是一种稳定的方案，使用责这个方案应该会快速许多）

**15.6.10 证明：具有通常度量$d$的复数系$\mathbb{C}$构成一个完备的度量空间**

> 也即要证明：任意一个复数柯西序列$(z_n)_{n=0}^{\infty}$都收敛于某个复数$z$。
>
> 首先，由于$(z_n)_{n=0}^{\infty}$是一个柯西序列，因此对任意的$\varepsilon > 0$都存在$N > 0$使得对任意$i$，$j \geq 0$都有$|z_i - z_j| < \varepsilon$。然后根据引理15.6.11我们可以得到：
>
> $$|\Re(z_i) - \Re(z_j)| < \varepsilon \qquad |\Im(z_i) - \Im(z_j)| < \varepsilon$$
>
> 也即实部序列$(\Re(z_n))_{n=0}^{\infty}$和虚部序列$(\Im(z_n))_{n=0}^{\infty}$都是柯西序列（在实直线上），因此由于实数集是完备的我们知道$(\Re(z_n))_{n=0}^{\infty}$和$(\Im(z_n))_{n=0}^{\infty}$都是收敛的，不妨设它们分别收敛于$a$与$b$。于是根据引理15.6.13我们知道这表明$(z_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于复数$a + b\mathrm{i}$。于是我们证明了$(\mathbb{C}, d)$的完备性。

**15.6.11 设$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$是映射$f(a, b) := a + b\mathrm{i}$。证明：$f$是一个双射，并且$f$和$f^{-1}$都是连续映射**

> 首先证明$f$是一个单射。对任意$(a, b)$与$(a', b')$满足$(a, b) \neq (a', b')$，于是至少有$a \neq a'$与$b \neq b'$中的某一个成立，也即$a + b\mathrm{i} \neq a' + b'\mathrm{i}$（$f(a, b) \neq f(a', b')$）。于是$f$是单射得证。
>
> 然后证明$f$是一个满射。对任意的$z \in \mathbb{C}$根据引理15.6.7我们知道存在实数对$(a, b)$使得$z = a + b\mathrm{i}$，也即$f(a, b) = z$。于是$f$是满射得证。
>
> 最后我们证明$f$和$f^{-1}$都是连续映射（我们默认使用欧几里得度量$d_{l^2}$）。首先证明$f$是连续的，对任意的$(a, b) \in \mathbb{R}^2$与$\varepsilon > 0$，我们显然可得存在$\delta := \varepsilon > 0$使得对任意$(a', b') \in \mathbb{R}^2$满足$d_{l^2}((a, b), (a', b')) < \delta$都有：
>
> $$|f(a, b) - f(a', b')| = ((a - a')^2 + (b - b')^2)^{1/2} = d_{l^2}((a, b), (a', b')) < \varepsilon$$
>
> （走个形式，看看就好）
>
> 于是综上即$f$是一个连续映射，类似地可以证明$f^{-1}$也是连续映射。
>
> （题外话，所以早点把复数的距离和欧几里得度量关联更好，好几道题都不用写了）

**15.6.12 证明：具有通常度量$d$的复数系$\mathbb{C}$构成一个连通的度量空间（提示：首先证明$\mathbb{C}$是道路连通的，就像在[习题13.4.7](#)里做的那样）**

> 对任意的复数$z_1$与$z_2$，我们考虑函数$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$有：
>
> $$\gamma(x) := z_1 + x(z_2 - z_1)$$
>
> 显然可以验证$\gamma(0) = z_1$与$\gamma(1) = z_2$。然后对任意$x \in [0, 1]$与$\varepsilon > 0$，令$\delta := \dfrac{\varepsilon}{|z_2 - z_1|}$。则对任意$x' \in [0, 1]$满足$|x - x'| < \delta$都有：
>
> $$\begin{aligned} |\gamma(x) - \gamma(x')| &= |(x - x')(z_2 - z_1)| \\ &= |x - x'||z_2 - z_1| \\ &< \delta|z_2 - z_1| \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

> 于是我们得到了$\gamma$是一个连续函数。由于$z_1$，$z_2$都是任意的，因此上面的结论可以引申得到$\mathbb{C}$是道路连通的度量空间，结合习题13.4.7的结论即有$\mathbb{C}$是连通的度量空间。

**15.6.13 设$E$是$\mathbb{C}$的子集，证明：$E$是紧致的，当且仅当$E$既是闭的又是有界的（提示：把习题15.6.11和海涅-博雷尔定理（[定理12.5.7]）结合使用）。然后证明：$\mathbb{C}$不是紧致的**

> 由于紧致集都是有界闭集（命题15.2.6），因此我们只需要证明：若$E$是一个有界闭集则有$E$是紧致的。为了证明这个结论，我们需要使用习题15.6.11中的函数$f$。
>
> 考虑$E$是$\mathbb{C}$的一个有界闭子集，于是存在某个$z_0 = a_0 + b_0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$与$r > 0$使得$E \subseteq B_{(\mathbb{C},d)}(z_0, r)$。然后注意到对$f^{-1}(E)$，由于$f^{-1}$连续因此$f^{-1}(E)$也是闭集（命题13.1.5），并且对任意的$(a,b) \in f^{-1}(E)$都有：
>
> $$\begin{aligned} d_{l^2}((a,b),(a_0,b_0)) &= \sqrt{(a-a_0)^2 + (b-b_0)^2} \\ &= |a + b\mathrm{i} - a_0 - b_0\mathrm{i}| \\ &< r \end{aligned}$$
>
> 也即有$f^{-1}(E) \subseteq B_{(\mathbb{R}^2, d_{l^2})}((a_0,b_0), r)$，从而$f^{-1}(E)$也是有界的。此时使用海涅-博雷尔定理，我们可以得到$f^{-1}(E)$是紧致的。最后使用命题13.3.1，由于$f$是连续的我们可以得到$E = f(f^{-1}(E))$也是紧致的（这需要用到$f$是一个双射）。
>
> 综上，于是我们证明了$\mathbb{C}$的子集$E$是紧致的，当且仅当$E$既是闭的又是有界的。而对于复数集$\mathbb{C}$本身，显然$\mathbb{C}$不是有界的，因此$\mathbb{C}$不可能是紧致的（话说随便水一个收敛于无穷的实数序列就可以证明这个结论了吧）。

**15.6.14 证明引理15.6.14（提示：分别把$z_n$和$w_n$划分成实部和虚部，然后使用通常的极限定律（[引理6.1.19]）和引理15.6.13）**

> 为了方便编辑，我们设对任意的$n \geq 1$都有$z_n = a_n + b_n\mathrm{i}$与$w_n = c_n + d_n\mathrm{i}$，并设$(z_n)_{n=1}^{\infty}$和$(w_n)_{n=1}^{\infty}$分别收敛于复数$z = a + b\mathrm{i}$与$w = c + d\mathrm{i}$（其中$a_n$，$b_n$，$c_n$，$d_n$，$a$，$b$，$c$，$d$都是实数）；然后为了不和题设冲突，我们会用大写的$C$替换原前设中的$c$；最后，在这个证明中需要大量使用到引理15.6.13，所以不会特意强调出来（比如说题设表明序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$，$(b_n)_{n=1}^{\infty}$，$(c_n)_{n=1}^{\infty}$，$(d_n)_{n=1}^{\infty}$分别收敛于$a$，$b$，$c$，$d$）。于是我们逐条证明引理15.6.14：
>
> ---
>
> 1. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n + w_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n + \lim\limits_{n\to\infty} w_n$。
>
> 根据极限定律我们有$(a_n + c_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于$a + c$与$(b_n + d_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于$b + d$，于是即有：
>
> $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} z_n + w_n &= \lim_{n\to\infty} (a_n + c_n) + (b_n + d_n)\mathrm{i} \\ &= (a + c) + (b + d)\mathrm{i} \\ &= z + w \end{aligned}$$
>
> 于是结论得证。
>
> ---
>
> 2. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n - w_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n - \lim\limits_{n\to\infty} w_n$。
>
> 根据极限定律我们有$(a_n - c_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于$a - c$与$(b_n - d_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于$b - d$，于是即有：
>
> $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} z_n - w_n &= \lim_{n\to\infty} (a_n - c_n) + (b_n - d_n)\mathrm{i} \\ &= (a - c) + (b - d)\mathrm{i} \\ &= z - w \end{aligned}$$
>
> 于是结论得证。
>
> ---

3. $\lim\limits_{n\to\infty} Cz_n = C\lim\limits_{n\to\infty} z_n$。

设$C = A + B\mathrm{i}$，根据极限定律我们有$(Aa_n - Bb_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于$Aa - Bb$与$(Ab_n + Ba_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于$Ab + Ba$，于是即有：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} Cz_n &= \lim_{n\to\infty}(A + B\mathrm{i})(a_n + b_n\mathrm{i})\\ &= \lim_{n\to\infty}(Aa_n - Bb_n) + (Ab_n + Ba_n)\mathrm{i}\\ &= (Aa - Bb) + (Ab + Ba)\mathrm{i}\\ &= Cz\end{aligned}$$

于是结论得证。

---

4. $\lim\limits_{n\to\infty} z_nw_n = \left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} w_n\right)$。

根据极限定律我们有$(a_nc_n - b_nd_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于$ac - bd$与$(a_nd_n + b_nc_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于$ad + bc$，于是即有：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} z_nw_n &= \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n\mathrm{i})(c_n + d_n\mathrm{i})\\ &= \lim_{n\to\infty}(a_nc_n - b_nd_n) + (a_nd_n + b_nc_n)\mathrm{i}\\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}\\ &= zw\end{aligned}$$

于是结论得证。

---

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}$。

根据极限定律我们有$(-b_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于$-b$，于是即有：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} &= \lim_{n\to\infty} a_n - b_n\mathrm{i}\\ &= a - b\mathrm{i}\\ &= \overline{z}\end{aligned}$$

于是结论得证。

---

6. 如果全体$w_n$都是非零的，并且$\lim\limits_{n\to\infty} w_n$也是非零的，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n/w_n = \left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n\right)/\left(\lim\limits_{n\to\infty} w_n\right)$。

这里我们不再考虑实部序列和虚部序列而选择直接证明。首先根据结论(e)，我们可以知道$\lim\limits_{n\to\infty} \overline{w_n}$收敛于$\overline{w}$。然后根据结论(d)与命题15.6.11，我们知道有：

$$\lim_{n\to\infty} |w_n|^2 = \lim_{n\to\infty} w_n\overline{w_n} = w\overline{w} = |w|^2$$

然后由于$(|w_n|^2)_{n=1}^{\infty}$是一个实数序列并且每一个项都是非零的，因此可以应用极限定律有：

$$\lim_{n\to\infty} |w_n|^{-2} = 1/\lim_{n\to\infty} |w_n|^2 = |w|^{-2}$$

于是使用结论(d)，结论(e)与复数除法的定义，我们可以得到：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} z_n/w_n = \lim_{n\to\infty} z_n(w_n)^{-1} &= \lim_{n\to\infty} z_n|w_n|^{-2}\overline{w_n}\\ &= z|w|^{-2}\overline{w}\\ &= zw^{-1} = z/w\end{aligned}$$

> 于是结论得证。

**15.6.15 本题会向你解释为什么不将复数如同实数那样划分为正的和负的。假设存在一个合理的“正复数”和“负复数”的概念，并且它们遵守下列合理的公理：**

- **（三歧性）对每一个复数$z$，下列命题中恰好有一个成立：$z$是正的，$z$是负的，$z$等于$0$。**
- **（负运算）如果$z$是一个正复数，那么$-z$就是负的；如果$z$是一个负复数，那么$-z$就是正的。**
- **（可加性）如果$z$和$w$都是正复数，那么$z+w$也是正的。**
- **（可乘性）如果$z$和$w$都是正复数，那么$zw$也是正的。**

**证明：这四个公理是不一致的，换句话说，我们可以从这些公理中推出矛盾（提示：首先，利用公理推出$1$是正的，从而$-1$是负的。然后，对$z=\mathrm{i}$应用三歧性公理，并且推出这三种情形无论哪一种都会导出矛盾）**

> 我们先推导出$-1$是负的。
>
> 显然$-1$不是$0$，因此根据三歧性公理$-1$要么是正数要么是负数。若$-1$是一个正数，则根据负运算公理有$1$是一个负数，但是同时根据可乘性公理有$1=(-1)^2$是一个正数，这会导致矛盾。因此$-1$只能是负数。
>
> 然后根据负运算公理我们有$1$是一个正数，接下来我们证明$\mathrm{i}$不可能是正数，负数，$0$中的任意一类，因此上面的四个公理是不一致的。
>
> 显然$\mathrm{i}$不是$0$，于是我们考虑$\mathrm{i}$的可能：若$\mathrm{i}$是正数，则根据可乘性公理应该有$-1=\mathrm{i}^2$也是一个正数，这和我们前面的$-1$是负数的结论矛盾；若$\mathrm{i}$是负数，则相应的根据负运算公理$-\mathrm{i}$是一个正数，则根据可乘性公理应该有$-1=(-\mathrm{i})^2$也是一个正数，这同样与前面的结论矛盾。
>
> 于是综上，我们证明了这四个公理并不是一致的。

**15.6.16 证明关于复数级数的比值判别法，并利用它来证明：用来定义复指数函数的级数是绝对收敛的。然后证明：$\exp(z+w)=\exp(z)\exp(w)$对所有的复数$z$，$w$都成立**

> 我们先给出复数级数的比值判别法，然后证明我们给出的结论。
>
> > 复数的比值判别法：设$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$是一个所有项不为0的复数级数，并且令有$\alpha=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$，则：
> >
> > > - 如果$\limsup\limits_{n\to\infty}\alpha<1$，那么级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$是绝对收敛的。
> > > - 如果$\liminf\limits_{n\to\infty}\alpha>1$，那么级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$不是条件收敛的。
>
> 证明：
>
> - 证明：如果$\limsup\limits_{n\to\infty}\alpha<1$，那么级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$是绝对收敛的。
>
> > 我们设$\limsup\limits_{n\to\infty}\alpha=\varepsilon$，并假设某个实数$\varepsilon<\delta<1$。然后根据上极限的性质，我们知道存在某个$N\geq 0$使得对任意$n\geq N$都有$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\delta$，于是我们可以归纳得到对任意的$n\geq N$都有$|a_n|\leq|a_N|\delta^{n-N}$。然后对任意的$m\geq N$有：

> $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m}|a_n| &= \sum_{n=0}^{N-1}|a_n| + \sum_{n=N}^{m}|a_n| \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1}|a_n| + \sum_{n=N}^{m}|a_N|\delta^{m-N} \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1}|a_n| + |a_N|\frac{1}{1-\delta}\end{aligned}$$
>
> 于是部分和$\sum_{n=0}^{m}|a_n|$是有界的，并且注意到部分和$\sum_{n=0}^{m}|a_n|$是单调的，结合即可以得到部分和$\sum_{n=0}^{m}|a_n|$收敛，也即级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$是绝对收敛的。

- 证明：如果$\liminf_{n\to\infty}\alpha > 1$，那么级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$不是条件收敛的。

> 我们设$\limsup_{n\to\infty}\alpha = \varepsilon$，并假设某个实数$\varepsilon > \delta > 1$。然后根据下极限的性质，我们知道存在某个$N \geq 0$使得对任意$n \geq N$都有$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \delta$，于是我们可以归纳得到对任意的$n \geq N$都有$|a_n| \geq |a_N|\delta^{n-N}$。
>
> 于是我们使用反证法，假设级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$是条件收敛的，也即部分和序列$(S_m)_{m=0}^{\infty}$（$S_m := \sum_{n=0}^{m}a_n$）是收敛的。于是根据命题15.6.13可以得到序列$(\Re(S_m))_{m=0}^{\infty}$和$(\Im(S_m))_{m=0}^{\infty}$都是收敛的，注意到显然有：
>
> $$\Re(S_m) = \sum_{n=0}^{m}\Re(a_n) \qquad \Im(S_m) = \sum_{n=0}^{m}\Im(a_n)$$
>
> 于是即级数$\sum_{n=0}^{\infty}\Re(a_n)$与$\sum_{n=0}^{\infty}\Im(a_n)$都是条件收敛的，于是根据零判别法有$\lim_{n\to\infty}|\Re(a_n)| = \lim_{n\to\infty}|\Im(a_n)| = 0$，进而结合比较原理与命题15.6.11我们可以得到$\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$。然而根据上面的结论，我们有对任意的$n \geq N$都有$|a_n| \geq |a_N|\delta^{n-N}$，因此极限$\lim_{n\to\infty}|a_n|$是收敛于$+\infty$的，这导出了矛盾。
>
> 综上，于是反证假设不成立，级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$不是条件收敛的。

---

然后我们来证明用来定义复指数函数的级数是绝对收敛的。

对任意的$z \in \mathbb{C}$，我们可以直接计算比值有：

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{n!z^{n+1}}{(n+1)!z^n}\right| = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{z}{n+1}\right| = 0$$

（这个可以直接看到是收敛的，因此上极限等于极限）

从而根据比值判别法我们可以得到定义定义复指数函数的级数是在整个复平面$\mathbb{C}$上绝对收敛的。

---

最后我们来证明$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$对所有的复数$z$，$w$都成立。

根据定义有：

$$
\begin{aligned}
\exp(z+w) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{z^{n-m}w^m}{(n-m)!m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{w^m}{m!} = \exp(z)\exp(w)
\end{aligned}
$$

（这部分具体操作可以参考习题15.5.1(d)的内容，需要用到无限级数的富比尼定理，此处不再重复赘述）

于是结论成立。

---

## 本节相关跳转


[实分析 5.6 实数的指数运算 I]

[实分析 6.1 收敛与极限定律]

[实分析 12.5 紧致度量空间]

[实分析 13.4 连续性与连通性]