13.3 连续性与紧致性

定义

1. (13.3.4 一致连续性) 设$f:X\to Y$是从度量空间(X,d_X)到另一个度量空间(Y,d_Y)的映射。如果对任意的$\varepsilon>0$，都存在一个$\delta>0$使得x，$x'\in X$满足$d_X(x,x')<\delta$就有$d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon$，那么我们称$f$是**一致连续的**。

命题

1. (13.3.1 连续映射保持紧致性) 设$f:X\to Y$是从度量空间(X,d_X)到另一个度量空间(Y,d_Y)的连续映射，并设$K\subseteq X$是X的任意一个紧致子集。那么K的象$f(K)$也是紧致的。
2. (13.3.2 最大值原理) 设(X,d)是一个紧致度量空间，并设$f:X\to\mathbb{R}$是一个连续函数，那么f是有界的。更进一步的，f在某个点$x_{\max}\in X$处达到最大值，并且在某个点$x_{\min}\in X$处达到最小值。

   (注：这是对命题9.6.7的推广；然后如同我们在习题9.6.1中看到的那样，如果X不是紧致的则最大值原理就不成立，我们应当把命题13.3.2与引理9.6.3，命题9.6.7进行比较)
3. (13.3.5) 设(X,d_X)和(Y,d_Y)是两个度量空间，并设(X,d_X)是紧致的。如果$f:X\to Y$是一个函数，那么f是连续的当且仅当f是一致连续的。

课后习题

13.3.1 证明定理13.3.1

> 考虑任意$f(K)$中的序列$(F^{(n)})_{n=0}^{\infty}$，根据象的定义与选择公理（以$\mathbb{N}$为指标集，注意到任意的集合$S_n:=\{x\in K:f(x)=F^{(n)}\}$是非空的），我们能选择出一个$K$中的序列$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$使得对任意的$n\in\mathbb{N}$都有$f(x^{(n)})=F^{(n)}$；然后由于$K$是紧致的，于是存在$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$的子序列$(x^{(n_j)})_{j=0}^{\infty}$是收敛的，特别地它应该收敛于某个$x\in K$；然后根据连续函数的性质（命题13.1.4(b)），于是我们知道序列$(f(x^{(n_j)}))_{j=0}^{\infty}$是收敛于$f(x)\in f(K)$的，注意到：
>
> $$(f(x^{(n_j)}))_{j=0}^{\infty}=(F^{(n_j)})_{j=0}^{\infty}$$
>
> 也即$(F^{(n_j)})_{j=0}^{\infty}$是$(F^{(n)})_{n=0}^{\infty}$的某个子序列且$(F^{(n_j)})_{j=0}^{\infty}$收敛于$f(x)\in f(K)$，于是综上即有：
>
> 对任意$f(K)$中的序列$(F^{(n)})_{n=0}^{\infty}$都存在它的一个子序列$(F^{(n_j)})_{j=0}^{\infty}$是收敛于$f(K)$中某个元素$f(x)$的。
>
> 根据紧致集的定义（定义12.5.1），于是$f(K)$也是紧致的。

13.3.2 证明命题13.3.2 **(提示：修改命题9.6.7的证明过程)**

> 先证明：f是有界的。
>
> 首先根据命题13.3.1，由于X是紧致的并且f是连续的我们可以得到象$f(X)$也是紧致的，于是根据命题12.5.5我们知道$f(X)$应该是在$\mathbb{R}$中有界的，从而应该存在实数M有：
>
> $$f(X)=\{f(x):x\in X\}\subseteq[-M,M]$$
>
> （在习题12.5.1中我们已经验证过度量空间下的有界集定义和实直线中有界集定义是等价的，因此可以选择方便证明的定义来使用）

从而对任意的$x \in X$，都有$f(x) \in [-M, M] \Longrightarrow |f(x)| \leq M$，于是根据定义9.6.1，我们知道$f$是一个有界函数。

然后证明：f在某个点$x_{\max} \in X$处达到最大值，并且在某个点$x_{\min} \in X$处达到最小值。

如同命题9.6.7证明中做的那样，我们也只给出最大值的证明，最小值使用类似的方法即可

根据最小上界原理（命题5.5.9）我们知道$f(X)$存在一个上确界$\sup(f(X))$，我们记有$m := f(X)$。

然后根据上确界的定义，对任意的$n \geq 1$，$m - \frac{1}{n}$都不是$f(X)$的一个上界，于是必然存在$f(x) \in f(X)$使得$m - \frac{1}{n} \leq f(x) \leq m$，也即有集合：

$$\left\{x \in X : m - \frac{1}{n} \leq f(x) \leq m\right\}$$

总是非空的。于是根据选择公理我们能选择出一个序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$使得对任意$n \geq 1$都有$m - \frac{1}{n} \leq f(x) \leq m$。然后由于$X$的紧致性于是$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$必然存在收敛的子序列$(x^{(n_j)})_{j=0}^{\infty}$（记有其收敛于$x_0 \in X$），根据$f$的连续性与命题13.1.4(b)我们知道$(f(x^{(n_j)}))_{j=0}^{\infty}$必然收敛于$f(x_0)$，而且不难验证得到序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$是收敛于$m$的，因此作为$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$子序列的$(f(x^{(n_j)}))_{j=0}^{\infty}$也应当收敛于$m$。于是综合我们就得到了存在$x_0 \in X$使得$f(x_0) = m$，也即在$x_0$处$f$达到了最大值。

最小值的情况类似，于是结论得证。

13.3.3 证明：每一个一致连续的函数都是连续的，并举例说明：并非所有的连续函数都是一致连续的

设(X, d_X)和(Y, d_Y)是度量空间，并设$f : X \to Y$是一个一致连续的函数。对任意的$\varepsilon > 0$，考虑任意的$x_0 \in X$。由于f是一致连续的，因此存在$\delta > 0$使得任意的x，$x' \in X$只要满足$d_X(x, x') < \delta$就有$d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$。于是我们考虑$x'$是$x_0$的情况，上面的结论就衍变为：

对任意的$\varepsilon > 0$与任意的$x_0 \in X$。存在$\delta > 0$使得任意的$x \in X$只要满足$d_X(x, x_0) < \delta$就有$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$。

于是根据连续函数的定义（定义13.1.1），f也是连续的。

关于连续但是非一致连续函数的例子，考虑从实直线到实直线的函数$f(x) := x^2$，这个函数就不是一致连续的但是是连续的。这是因为对任意的$\varepsilon > 0$，考虑任意的$\delta > 0$，我们都可以选择$x := \frac{\varepsilon}{\delta}$与$x' := \frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{\delta}{2}$使得：

$$|x^2 - x'^2| = \varepsilon + \frac{\delta^2}{4} > \varepsilon$$

因此f不可能是一致连续的。

13.3.4 设(X, d_X)，(Y, d_Y)和(Z, d_Z)都是度量空间，并设$f : X \to Y$和$g : Y \to Z$是两个一致连续的函数。证明：$g \circ f : X \to Z$也是一致连续的

对任意的$\varepsilon > 0$，由于g是一致连续的，于是存在$\sigma > 0$使得对任意y，$y' \in Y$满足$d_Y(y, y') < \sigma$就有$d_Z(g(y), g(y')) < \varepsilon$；又由于$f$是一致连续的，对$\sigma$应该存在一个$\delta > 0$使得对任意$x$，$x' \in X$满足$d_X(x, x') < \delta$，就有$d_Y(f(x), f(x')) < \sigma$。考虑到$f(x)$与$f(x')$都属于$Y$，于是应用第一个结论，我们就可以得到：

对任意$\varepsilon > 0$，存在一个$\delta > 0$使得对任意x，$x' \in X$满足$d_X(x, x') < \delta$，就有$d_Z(g(f(x)), g(f(x'))) < \varepsilon$。

> 然后结合复合函数的定义与一致连续函数的定义（定义13.3.4）即有$g\circ f$也是一致连续的。

13.3.5 设(X,d_X)是一个度量空间，并设$f:X\to\mathbb{R}$和$g:X\to\mathbb{R}$都是一致连续的函数。证明：直和$f\oplus g:X\to\mathbb{R}^2$是一致连续的

> 对任意的$\varepsilon>0$，由于f和g都是一致连续的，于是分别存在$\delta_f>0$与$\delta_g>0$使得对任意x，$x'\in X$都有：
>
> $$\begin{aligned}d_X(x,x')<\delta_f &\implies |f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}\\ d_X(x,x')<\delta_g &\implies |g(x)-g(x')|<\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$
>
> 于是取$\delta:=\min(\delta_f,\delta_g)$，对任意$x$，$x'\in X$满足$d_X(x,x')<\delta$，我们可以计算有：
>
> $$\begin{aligned}d_{l^2}(f\oplus g(x),f\oplus g(x'))&\leq d_{l^1}(f\oplus g(x),f\oplus g(x'))\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$
>
> 这里用到了例12.1.7中给出的不等式。于是综合即有：
>
> 对任意的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$使得对任意x，$x'\in X$满足$d_X(x,x')<\delta$，就有$d_{l^2}(f\oplus g(x),f\oplus g(x'))<\varepsilon$。
>
> 于是根据一致连续函数的定义（定义13.3.4），直和$f\oplus g$是一致连续的。

13.3.6 证明：加法函数$(x,y)\mapsto x+y$和减法函数$(x,y)\mapsto x-y$都是从$\mathbb{R}^2$到$\mathbb{R}$的一致连续函数，但乘法函数$(x,y)\mapsto xy$不是一致连续的。进一步推导出，如果$f:X\to\mathbb{R}$和$g:X\to\mathbb{R}$是度量空间(X,d)上的一致连续函数，那么$f+g:X\to\mathbb{R}$和$f-g:X\to\mathbb{R}$也是一致连续的。对于$\max(f,g)$，$\min(f,g)$，f/g和cf（其中c是实数），情况又如何呢

> 先证明$(x,y)\mapsto x+y$和$(x,y)\mapsto x-y$是一致连续的。
>
> 对任意的$\varepsilon>0$，我们考虑令$\delta:=\dfrac{\varepsilon}{2}$，于是对任意$(x,y)$，$(x',y')\in\mathbb{R}^2$满足$d_{l^2}((x,y),(x',y'))<\delta$，我们都有：
>
> $$\begin{aligned}|(x+y)-(x'+y')|\leq|x-x'|+|y-y'|\leq\sqrt{2}d_{l^2}((x,y),(x',y'))<\varepsilon\\ |(x-y)-(x'-y')|\leq|x-x'|+|y-y'|\leq\sqrt{2}d_{l^2}((x,y),(x',y'))<\varepsilon\end{aligned}$$
>
> 于是即有：
>
> 对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得对任意(x,y)，$(x',y')\in\mathbb{R}^2$满足$d_{l^2}((x,y),(x',y'))<\delta$都有$d(x+y,x'+y')<\varepsilon$与$d(x-y,x'-y')<\varepsilon$成立（$d$是标准度量）。
>
> 于是根据一致连续函数的定义我们有$(x,y)\mapsto x+y$和$(x,y)\mapsto x-y$是一致连续的。
>
> ---
>
> 然后来证明$(x,y)\mapsto xy$不是一致连续的。
>
> 对任意的$\varepsilon>0$与任意给出的$\delta>0$，我们都可以指定$\mathbb{R}^2$中点有$(x,y):=\left(\dfrac{\varepsilon}{\delta},\dfrac{\varepsilon}{\delta}\right)$与$(x',y'):=\left(\dfrac{\varepsilon}{\delta}+\dfrac{\delta}{2},\dfrac{\varepsilon}{\delta}+\dfrac{\delta}{2}\right)$，此时不难验算得到有$d_{l^2}((x,y),(x',y'))<\delta$，但是我们可以计算有：
>
> $$|xy-x'y'|=\varepsilon+\frac{\delta^2}{4}>\varepsilon$$
>
> 于是$(x,y)\mapsto xy$不可能是一致连续的。
>
> ---

> 最后我们给出题目最后的讨论的解答。
>
> 首先根据习题13.3.4与习题13.3.5的证明里面我们知道了在f与g都一致连续的情况下复合函数与直和函数都是一致连续的，于是注意到：
>
> $$f+g=((x,y)\mapsto x+y)\circ(f\oplus g)\qquad f-g=((x,y)\mapsto x-y)\circ(f\oplus g)$$
>
> 于是我们结合上面已经证明的推论即可得到$f+g$与$f-g$也是一致连续的。
>
> 关于fg不一致连续的例子，我们之前在习题13.3.3已经说明过二次函数不是一致连续的（它可以被视为两个函数$x\mapsto x$的乘积，而函数$x\mapsto x$的一致连续性是显然的）。
>
> 最后关于函数$\max(f,g)$，$\min(f,g)$，f/g和cf的一致连续性，我们可以逐个证明：
>
> - cf:
>
>   > 这个一致连续性可以直接证明。首先是$c\neq 0$的情况：由于f是一致连续的，于是对任意的$\varepsilon>0$，都存在一个$\delta>0$使得x，$x'\in X$满足$d_X(x,x')<\delta$就有$|f(x)-f(x')|<\dfrac{\varepsilon}{|c|}$，于是即有$|cf(x)-cf(x')|<\varepsilon$，进而可以直接根据定义13.3.1得到$cf$是一致连续的；然后对$c=0$的情况，显然$cf$是常数函数0，一致连续性是显然的。
>
> - $\max(f,g)$与$\min(f,g)$:
>
>   > 我们考虑证明函数$(x,y)\mapsto\max(x,y)$与$(x,y)\mapsto\min(x,y)$的一致连续性，然后类似$f+g$与$f-g$那样通过与直和的复合来得到$\max(f,g)$与$\min(f,g)$的一致连续性。
>   >
>   > 我们给出$(x,y)\mapsto\max(x,y)$的证明，对$(x,y)\mapsto\min(x,y)$可以用完全类似的方法讨论。对任意的$\varepsilon>0$，我们考虑令有$\delta:=\dfrac{\varepsilon}{2}$，于是对任意$(x,y)$，$(x',y')\in\mathbb{R}^2$满足$d_{l^2}((x,y),(x',y'))<\delta$，我们都有：
>   >
>   > $$|\max(x,y)-\max(x',y')|=\begin{cases}|x-x'| & \text{if } x\geq y\wedge x'\geq y'\\ |y-x'| & \text{if } x<y\wedge x'\geq y'\\ |x-y'| & \text{if } x\geq y\wedge x'<y'\\ |y-y'| & \text{if } x<y\wedge x'<y'\end{cases}$$
>   >
>   > 然后逐个讨论可以得到下表：
>   >
>   > | 情景 | 讨论 |
>   > | --- | --- |
>   > | $x\geq y\wedge x'\geq y'$ | 于是此时有$\|x-x'\|<d_{l^2}((x,y),(x',y'))<\varepsilon$。 |
>   > | $x<y\wedge x'\geq y'$ | 若$y\geq x'$，则$y\geq x'\geq y'$，由于$d_{l^2}((x,y),(x',y'))<\delta$，于是$\|y-y'\|<\delta$，从而由于$x'$在$y$与$y'$之间可得到$\|y-x'\|<\delta<\varepsilon$（绝对值相关的内容，忘了在哪一节了）；若$y<x'$，则有$x<y<x'$，然后类似讨论即可得到$\|y-x'\|<\varepsilon$。于是总是有$\|y-x'\|<\varepsilon$。 |
>   > | $x\geq y\wedge x'<y'$ | 类似情景“$x<y\wedge x'\geq y'$”下的讨论，总是可以得到$\|x-y'\|<\varepsilon$。 |
>   > | $x<y\wedge x'<y'$ | 于是此时有$\|y-y'\|<d_{l^2}((x,y),(x',y'))<\varepsilon$。 |
>   >
>   > 综上于是总有$|\max(x,y)-\max(x',y')|<\varepsilon$。此时依据一致连续函数的定义可以得到$(x,y)\mapsto\max(x,y)$是一致连续的，从而$\max(f,g)$也是一致连续的。
>   >
>   > 通过类似的方法可以证明$(x,y)\mapsto\min(x,y)$与$\min(f,g)$都是一致连续的。

- f/g:

> 这个不是一致连续的，考虑从$\mathbb{R}^+$到$\mathbb{R}$的函数$f(x) := 1$与$g(x) := x$（当然都具有标准度量），显然这两个函数都是一致连续的，但是函数$f/g(x) := \frac{1}{x}$不是一致连续的。对任意的$\varepsilon > 0$与给出的$\delta > 0$，我们取$m := \max\{2\varepsilon, 1/2\delta\}$，然后令有$x := \frac{1}{m}$与$x' := \frac{1}{2m}$。于是可以注意到$|x - x'| = \frac{1}{m} < \delta$，并且有：
>
> $$|f/g(x) - f/g(x')| = |m - 2m| = m > \varepsilon$$
>
> 这和一致连续的定义矛盾，因此f/g并不一定是一致连续的。
>
> （注：在本节中很多非一致连续的函数都使用了对任意的$\varepsilon > 0$完成证明，事实上这是不必要的，根据一致连续的定义只需要证明"存在一个$\varepsilon > 0$使得对任意$\delta > 0$都有一对x，$x' \in X$满足$d_X(x, x') < \delta$且$d_Y(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$"即可，证明选用任意的$\varepsilon > 0$主要是因为想不到什么特别的$\varepsilon$，正如证明里面写的，对任意的$\varepsilon$与$\delta$都可以找到不满足要求的$x$，$x'$）

总结一下即$\max(f, g)$，$\min(f, g)$和cf是一致连续的，但是f/g不是一致连续的。

本节相关跳转

[实分析 9.6 最大值原理]