

10.5 洛必达法则

命题

1. (10.5.1 洛必达法则 I) 设 X 是 \mathbb{R} 的一个子集, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 都是函数, 并且设 $x_0 \in X$ 是 X 的极限点. 如果有 $f(x_0) = g(x_0) = 0$, f 和 g 都在 x_0 处可微, 并且 $g'(x_0) \neq 0$, 那么存在 $\delta > 0$ 使得对所有的 $x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]$ 都有 $g(x) \neq 0$, 并且有:

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

(注: 你可能会疑惑为什么在这里会突然出现一个 δ , 事实上这是为了保证商 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在集合上始终有定义, 因为 $g(x)$ 可能在除 x_0 以外的某点处为零, 不能保证商 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $X - \{x_0\}$ 中所有点都有意义)

2. (10.5.2 洛必达法则 II) 设 $a < b$ 都是实数, 并且设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 都是 $[a, b]$ 上的可微函数. 如果有 $f(a) = g(a) = 0$, 并且 g' 在 $[a, b]$ 上不为零 (即对所有的 $x \in [a, b]$ 都有 $g'(x) \neq 0$), 且极限 $\lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在并且等于 L , 那么对所有的 $x \in (a, b]$ 都有 $g(x) \neq 0$, 且极限 $\lim_{x \rightarrow a; x \in (a, b]} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在并等于 L .

(注: 这个命题值考虑了 a 右侧的极限, 对 a 左侧和 a 两侧的极限, 也存在类似的命题. 我们很容易叙述并证明这些命题, 通俗来说, 这个命题给出了

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

当然, 你必须得保证这个命题的所有条件均成立. 命题 10.5.2 也可以看做是命题 10.5.1 的高级形式)

课后习题

10.5.1 证明命题 10.5.1 (提示: 为了证明在 x_0 附近 $g(x) \neq 0$, 你或许需要用到生顿逼近法 (命题 10.1.7), 对命题中剩下的部分, 利用极限定律 (命题 9.3.14))

我们分别证明两个结论:

- 证明: 存在 $\delta > 0$ 使得对所有的 $x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]$ 都有 $g(x) \neq 0$.

根据牛顿时逼近法, 由于 g 在 x_0 处可微并且 $L := g'(x_0) \neq 0$, 于是对 $|L/2| > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意的 $x \in X$ 满足 $|x - x_0| \leq \delta$ 都有:

$$|g(x) - (g(x_0) + L(x - x_0))| \leq |L(x - x_0)|/2$$

又考虑到 $g(x_0) = 0$, 对任意 $x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]$ 讨论, 上式可以化简为:

$$\begin{aligned}
& |g(x) - L(x - x_0)| \leq |L(x - x_0)/2| \\
& \Downarrow \\
& \begin{cases} 0 < \frac{L}{2}(x - x_0) \leq g(x) & \text{if } x > x_0, L > 0 \\ g(x) \leq \frac{L}{2}(x - x_0) < 0 & \text{if } x < x_0, L > 0 \\ g(x) \leq \frac{L}{2}(x - x_0) < 0 & \text{if } x > x_0, L < 0 \\ 0 < \frac{L}{2}(x - x_0) \leq g(x) & \text{if } x < x_0, L < 0 \end{cases} \\
& \Downarrow \\
& \text{无论 } g'(x_0) \text{ 为什么值, 都有 } g(x) \neq 0
\end{aligned}$$

于是综合即有：对所有的 $x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]$ ，都有 $g(x) \neq 0$ ，结论得证。

- 证明：有 $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ 成立。

我们可以做下面的变化：

$$\begin{aligned}
& \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}}{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}}{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0}}{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]} \frac{f(x)}{g(x)}} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]} \frac{f(x)}{g(x)}}{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in [(X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) - \{x_0\}]} \frac{f(x)}{g(x)}}
\end{aligned}$$

其中第二步里我们用到了极限定律（命题9.3.14(g)），于是结论得证。

10.5.2 解释为什么例1.2.12与本节中的每一个命题都不矛盾（其实就是两个洛必达法则）

对例1.2.12中给出的例子，我们可以注意到其中有：

1. 作为分子的函数 $f(x) := x^2 \sin(x^{-4})$ 在 $x = 0$ 处是不可微的，于是这个式子是不满足洛必达法则I和洛必达法则II的
2. 导数分式的极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \sin(x^{-4}))'}{(x)')}$ 不存在，于是这个式子是不满足洛必达法则II的。

（事实上，这两条结论本质上是同一件事情）

因此这个式子不是满足洛必达法则要求的极限式，所以不能应用洛必达法则。

本节相关跳转

[实分析 1.2 为什么要做分析](#)

[实分析 9.3 函数的极限值](#)

[实分析 10.1 基本定义](#)

