12.5 紧致度量空间

定义

1. (12.5.1 紧致性) 我们称度量空间(X,d)是**紧致的**，当且仅当(X,d)中每一个序列都至少存在一个收敛的子序列。如果(X,d)的子空间$(Y,d|_{Y\times Y})$是紧致的，那么我们称X的子集Y是**紧致的**。

   (注：集合的紧致性是集合的内在属性，只与限制在Y上的度量函数$d|_{Y\times Y}$相关，与环绕空间X无关，这和定义12.4.10中的完备性与定义12.4.10中的有界性相同；关于非内在属性，例如开集与闭集的定义就不是，详情可以参考12.3节的内容)

2. (12.5.3 有界集合) 设(X,d)是一个度量空间，并设Y是X的子集，我们称Y是**有界的**，当且仅当X中存在一个包含Y的球$B(x,r)$。

   (注：这个定义同定义9.1.22中的有界集合概念一致)

命题

1. (12.5.5 紧致度量空间的完备性与有界性？) 设(X,d)是一个紧致度量空间，那么(X,d)既是完备的又是有界的。

   > 推论：
   >
   > 1. (12.5.6 紧致集是闭的与有界的) 设(X,d)是一个度量空间，并设Y是X的一个紧致子集，那么Y是闭的且有界的。
   >
   >   (注：这个推论恰好是定理9.1.24海涅-博雷尔定理推广形式的一半，对于海涅-博雷尔定理的另一半并不总是成立，例如考虑具有离散度量的整数集$\mathbb{Z}$是一个有界闭集，但它不是紧致的（$(n)_{n=1}^{\infty}$不存在收敛的子序列），还有个例子可以参见习题12.5.8；不过至少海涅-博雷尔定理在欧几里得空间中是成立的，参见定理12.5.7；最后，如果我们将闭性替换为完备性，有界性替换成更强的完全有界性，那么修改后的海涅-博雷尔定理又是成立的，参见习题12.5.10)

2. (12.5.7 海涅-博雷尔定理) 设$(\mathbb{R}^n,d)$是一个欧几里得空间，它具有欧几里得度量，出租车度量或者上确界范数度量，并且设E是$\mathbb{R}^n$的子集，那么E是紧致的，当且仅当E是一个有界闭集。

3. (12.5.8 拓扑语言下的紧致集？) 设(X,d)是一个度量空间，并设Y是X的一个紧致子集。设$(V_\alpha)_{\alpha\in I}$是X中的一簇开集。如果

   $$Y\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}V_\alpha$$

   (即集簇$(V_\alpha)_{\alpha\in I}$覆盖了Y），那么存在I的一个有限子集F使得

   $$Y\subseteq\bigcup_{\alpha\in F}V_\alpha$$

   (注：这个命题说明紧致集合的每一个开覆盖都有一个有限子覆盖；这个命题的逆命题也是成立的，也即若集合Y满足性质“每个开覆盖都有一个有限子覆盖”，那么Y是紧致的。事实上，比起基于序列的紧致性定义这个性质通常被视为更基本的紧致性定义，对度量空间来说这两个定义是等价的，但是对一般的拓扑空间则并非如此，可以参考习题13.5.8)

   > 推论：
   >
   > 1. (12.5.9) 设(X,d)是一个度量空间，并设K_1，K_2，K_3，$\ldots$是由X的非空紧致子集组成的序列，并且满足

> $$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$$
>
> 那么交集$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$是非空的。

4. (12.5.10 紧致集的性质?) 设(X, d)是一个度量空间，那么有:

> 1. 如果Y是X的紧致子集，并且$Z \subseteq Y$，那么Z是紧致的，当且仅当Z是闭的。
> 2. 如果Y_1，$\dots$，Y_n是由X的紧致子集组成的一个有限集簇，那么它们的并集$Y_1 \cup \dots \cup Y_n$也是紧致的。
> 3. X的任意一个有限子集（包括空集）都是紧致的。

课后习题

12.5.1 证明：在谈论具有标准度量的实直线的子集，[定义9.1.22](#)和定义12.5.3是等价的

> 注意到在标准度量下的实直线中，球$B(x, r)$为:
>
> $$\begin{aligned} B(x, r) &= \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < r\} \\ &= (x - r, x + r) \end{aligned}$$
>
> 于是在谈论具有标准度量的实直线子集，定义12.5.3变为:
>
> > 我们称X是有界的，当且仅当$\mathbb{R}$中存在一个实数x与实数r使得$X \subseteq (x - r, x + r)$。
>
> 然后对比定义9.1.22的定义:
>
> > 如果存在某个正实数$M > 0$使得$X \subseteq [-M, M]$，那么称X是有界的。
>
> 注意到对$\mathbb{R}$的子集X，如果X是在定义9.1.22下有界的，那么我们可以取$x = 0$，$r = M + 1$，于是有:
>
> $$X \subseteq [-M, M] \subseteq (0 - (M + 1), 0 + (M + 1))$$
>
> 从而X是在定义12.5.3下有界的集合；反过来，如果X是在定义12.5.3下有界的，那么我们可以取$M := |x| + |r|$，从而有$M \geq x + r$与$-M \leq x - r$，于是有:
>
> $$X \subseteq (x - r, x + r) \subseteq [-M, M]$$
>
> 从而X是在定义9.1.22下有界的集合。
>
> 综上，于是在讨论实直线的子集时，定义9.1.22和定义12.5.3是等价的。

12.5.2 证明命题12.5.5（提示：分别证明完备性和有界性。对这两部分的证明都可以使用反证法。并且如同在[引理8.4.5](#)的证明中那样，你可能需要用到选择公理）

> 分别证明完备性与有界性。
>
> 完备性:
>
> 于是即要证明对任意$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$是(X, d)中的柯西序列，$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$都是收敛的。
>
> 注意到(X, d)是紧致的，于是根据定义12.5.1存在$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$的一个子序列是收敛的，然后根据命题12.4.9，我们知道$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$也是收敛的，从而得证完备性。
>
> ---
>
> 有界性:

不妨使用反证法，我们假设X不是有界的，换言之，对任意的$r\in\mathbb{R}^+$与$x\in X$都有$B(x,r)$不包含X，于是$X\backslash B(x,r)$总是非空的。

从而我们选择一个$x\in X$，对任意自然数n，根据选择公理我们都能指定一个$x^{(n)}\in X\backslash B(x,n+1)$，于是我们可以构建出一个序列$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$，然后根据$X$的紧致性，存在$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$的某个子序列$(x^{(n_j)})_{j=0}^{\infty}$收敛于$X$中的某个点$x_0$。

由于$(x^{(n_j)})_{j=0}^{\infty}$收敛于$x_0$，于是存在$J\geq 0$使得对任意的$j\geq J$都满足$d(x^{(n_j)},x_0)\leq 0.5$；又因为我们可以归纳得到对任意$j\geq 0$都有$n_j\geq j$，于是对任意的$j\geq 0$根据$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$的定义我们有$d(x^{(n_j)},x)\geq j+1$；最后，我们令有$r_0:=d(x,x_0)$，于是对任意$j\geq\max(J,r_0)$，根据度量空间的三角不等式我们有：

$$d(x^{(n_j)},x)\leq d(x^{(n_j)},x_0)+d(x_0,x)\leq r_0+0.5$$
$$d(x^{(n_j)},x)\geq j+1\geq\max(J,r_0)+1>r_0+0.5$$

于是导出了矛盾，反证假设不成立，只能有(X,d)是有界的。

综上，于是命题12.5.5得证。

题外话：单纯按上面的定义这个结论好像对空度量空间是不生效的，空度量空间毫无疑问是紧致和完备的（因为里面压根就不存在序列），但是如果整个度量空间都是空的话就不可能存在球（球的定义需要一个球心属于度量空间）包含空集，那么空度量空间自身不可能是有界的才对，大概也有一个解决方法就是对任意的度量空间额外定义空集也是一个球（取$r=0$的情况球心无论为什么球都是空的，就是需要额外表明空集作为球不是依赖球心的），因此上面的证明中我们其实默认了X非空的前提下才完成的证明。

12.5.3 证明定理12.5.7（提示：利用命题12.1.18和定理9.1.24）

由于命题12.5.5中已经证明了在任意度量空间下紧致集都是有界且完备的，于是根据命题12.4.12我们可以推知紧致集是有界且闭的，于是此时要证明海涅-博雷尔定理只需要证明任意欧几里得空间中的有界闭集都是紧致的即可。

对任意$y\in\mathbb{R}^n$我们记有y_j表示y的第j个坐标分量。设E是$\mathbb{R}^n$中的任意有界闭集，然后考虑任意E中的序列$(x^{(m)})_{m=0}^{\infty}$。由于E是有界的，于是根据定义存在球$B(x,r)$包含E（这里我们考虑在上确界范数度量下有界，事实上根据12.1节中给出的两个不等式我们很容易推知集合在l^1，l^2和l^∞度量下有界是相互等价的）。然后考虑到上确界范数度量的定义，于是有：

$$\forall\, y\in E,|y_i-x_i|\leq r(i=1,2,\dots,n)$$

于是我们使用下面的方法来创建一个$(x^{(m)})_{m=0}^{\infty}$的子序列$(x^{(m;n)})_{m=0}^{\infty}$，并且通过我们对实数序列曾经学习过的结论来证明这个子序列是收敛的。

首先考虑$x^{(m)}$的第1个坐标分类$x_1^{(m)}$所构成的序列，这是一个实数序列，并且注意到根据上面我们通过有界性得出的结论有：

$$\forall\, m\geq 0,|x_1^{(m)}-x_1|\leq r\Longrightarrow\forall\, m\geq 0,|x_1^{(m)}|\leq|x_1|+|r|$$

从而对带有标准度量的实直线，序列$(x_1^{(m)})_{m=0}^{\infty}$是一个有界序列。于是根据波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理（命题6.6.8）可以得到序列$(x_1^{(m)})_{m=0}^{\infty}$存在一个收敛的子序列$(x_1^{(m_j)})_{j=0}^{\infty}$（不妨记有收敛于$L_1$），于是此时我们令有：

$$\forall\, l\geq 0,x^{(l;1)}:=x^{(m_l)}$$

显然$(x^{(m;1)})_{m=0}^{\infty}$是$(x^{(m)})_{m=0}^{\infty}$的子序列。并且根据我们上面所述，这个子序列中每个点的第1个坐标分量所组成的序列$(x_1^{(m;1)})_{m=0}^{\infty}$是收敛于$L_1$的，于是取$(x^{(m;1)})_{m=0}^{\infty}$的任意子序列，其中每个点的第1个坐标分量所组成的序列都是收敛于L_1的。

然后考虑$x^{(m;1)}$的第2个坐标分类$x_2^{(m;1)}$所构成的序列，同样这是一个实数序列，并且通过有界性的讨论我们有：

$$\forall\, m \geq 0, |x_2^{(m;1)} - x_2| \leq r \Longrightarrow \forall\, m \geq 0, |x_2^{(m;1)}| \leq |x_2| + |r|$$

（因为$(x^{(m;1)})_{m=0}^{\infty}$是$(x^{(m)})_{m=0}^{\infty}$的子序列，因此对所有$x^{(m)}$生效的性质也可以直接继承到所有$x^{(m;1)}$上）然后类似上面的方法使用波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理得到一个收敛于L_2的序列$(x_1^{(m_j;1)})_{j=0}^{\infty}$，并定义：

$$\forall\, l \geq 0, x^{(l;2)} := x^{(m_l;1)}$$

显然$(x^{(m;2)})_{m=0}^{\infty}$是$(x^{(m;1)})_{m=0}^{\infty}$的子序列（从而它也是$(x^{(m)})_{m=0}^{\infty}$的子序列）。对所有坐标分量执行这样的流程，最终我们可以得到一个$(x^{(m)})_{m=0}^{\infty}$的子序列$(x^{(m;n)})_{m=0}^{\infty}$，对任意的$1 \leq i \leq n$，$(x_i^{(m;n)})_{m=0}^{\infty}$都收敛于$L_i$。于是根据命题12.1.18，序列$(x^{(m;n)})_{m=0}^{\infty}$是依欧几里得度量/出租车度量/上确界范数度量收敛于$L := (L_1, L_2, \ldots, L_n)$的，然后由于$E$是闭的且$(x^{(m;n)})_{m=0}^{\infty}$是$E$中的序列，于是$L \in E$。

综上，于是我们证明了：

对任意E是$\mathbb{R}^n$中的有界闭集与任意E中的序列$(x^{(m)})_{m=0}^{\infty}$，都存在一个$(x^{(m)})_{m=0}^{\infty}$的子序列$(x^{(m;n)})_{m=0}^{\infty}$依欧几里得度量/出租车度量/上确界范数度量收敛于某个$L \in E$。

于是根据集合紧致的定义可以得到E是紧致的。综上，于是海涅-博雷尔定理得证。

12.5.4 设$(\mathbb{R}, d)$是具有标准度量的实直线，举例说明：存在连续函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$和开集$V \subseteq \mathbb{R}$满足$f(V)$不是开的

考虑开集$V := (-\pi, \pi)$与连续函数$f(x) := \sin(x)$，可以求得$f(V) = [-1, 1]$是一个闭的集合（当然也就不是开的）。

12.5.5 设$(\mathbb{R}, d)$是具有标准度量的实直线，举例说明：存在连续函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$和闭集$F \subseteq \mathbb{R}$满足$f(F)$不是闭的

考虑闭集$F := [1, +\infty)$与连续函数$f(x) := \dfrac{1}{x}$，可以求得$f(F) = (0, 1]$是既不是闭集也不是开集。

12.5.6 证明推论12.5.9（提示：在紧致度量空间$(K_1, d|_{K_1 \times K_1})$中考察集合$V_n := K_1 \backslash K_n$，它们都是$K_1$上的开集。利用反证法，假设$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$，然后使用定理12.5.8）

在紧致度量空间$(K_1, d|_{K_1 \times K_1})$中对任意的$n \geq 1$，考虑令有集合：

$$V_n := K_1 \backslash K_n$$

根据命题12.5.5，命题12.4.12与命题12.2.15(e)，我们有对任意$n \geq 1$都有K_n都是K_1上的闭集，从而V_n都是K_1上的开集。于是我们使用反证法，假设$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$，于是$K_1 \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = K_1$，然后注意到：

$$
\begin{aligned}
K_1 \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n &= K_1 \backslash \{k \in K_1 : \forall\, n \geq 1, k \in K_n\} \\
&= \{k \in K_1 : \exists\, n \geq 1, k \notin K_n\} \\
&= \{k \in K_1 : \exists\, n \geq 1, k \in V_n\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n
\end{aligned}
$$

即有$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = K_1$，于是集簇$(V_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$构成了一个$K_1$的开覆盖。然后根据定理12.5.8，应该存在一个$\mathbb{N}^+$的有限子集$F$使得：

$$K_1 \subseteq \bigcup_{n\in F} V_n$$

又因为F是有限的，从而其最大元素$\max(F)$也应该存在并且属于F，然后我们注意到根据题设与V_n的定义，应该有：

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots$$

于是即有：

$$K_1 \subseteq \bigcup_{n\in F} V_n = V_{\max(F)} = K_1 \backslash K_{\max(F)}$$

又因为题设中$K_{\max(F)}$是非空的且$K_{\max(F)} \subset K_1$，于是显然不可能有$K_1 \subseteq K_1 \backslash K_{\max(F)}$，导出了矛盾。

综上，于是反证假设不成立，只能有$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$非空。

12.5.7 证明定理12.5.10（提示：利用(b)来证明(c)，先证明每一个单点集都是紧致的）

分条证明：

- 证明：如果Y是X的紧致子集，并且$Z \subseteq Y$，那么Z是紧致的，当且仅当Z是闭的。

首先证明若Z是闭集则Z是紧致的。对任意Z中的序列$(x_n)_{n=0}^{\infty}$，考虑到它也是Y中的序列，因此由于Y本身是紧致的我们可以得到存在一个$(x_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列$(x_{n_j})_{j=0}^{\infty}$是收敛的，不妨记有其极限为L，从而$L \in Y$。然后根据命题12.2.10，于是L是Z的一个附着点，根据Z是闭的即可推知$L \in Z$。综合即对任意$(Z, d_{Z\times Z})$中的序列$(x_n)_{n=0}^{\infty}$都存在一个子序列$(x_{n_j})_{j=0}^{\infty}$是收敛的，于是根据定义12.5.1我们有Z也是紧致的。

然后证明Z是紧致的则Z是闭的，根据命题12.5.6可以直接得到这个结论是成立的。

综上，于是结论得证。

- 证明：如果Y_1，$\dots$，Y_n是由X的紧致子集组成的一个有限集簇，那么它们的并集$Y_1 \cup \dots \cup Y_n$也是紧致的。

我们需要证明一个结论（事实上我们已经在习题12.2.3中证明了这个结论，但是为了方便看复制一下也不花时间）：

> 结论：设序列$(x_i)_{i=0}^{\infty}$是完全由$Y_1 \cup \dots \cup Y_n$中元素组成的序列，那么必然存在一个$1 \leq m \leq n$使得对任意的$j \geq 0$，都存在一个$i \geq j$满足$x_i \in Y_m$。
>
> 证明：

> 使用反证法，假设对任意$1 \leq m \leq n$都存在$j_m \geq 0$使得对任意的$i > j_m$都有$x_i \notin Y_m$，注意到集合：
>
> $$\{j_m : 1 \leq m \leq n\}$$
>
> 是有限的，因此其上确界应当属于自身，我们记为j，从而对任意的$i > j$，对任意$1 \leq m \leq n$都有：
>
> $$i > j \geq j_m \Longrightarrow x_i \notin Y_m$$
>
> 但是由于$(x_i)_{i=0}^{\infty}$是由$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$中元素构成的序列，因此至少应该存在一个$1 \leq m_0 \leq n$使得$x_i \in Y_{m_0}$，于是导出了矛盾，反证假设不成立。

于是类似习题12.2.3，任取$Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$中序列$(x_i)_{i=0}^{\infty}$，我们可以构建下面的递推关系：定义$b(0) := \min\{i \in \mathbb{N} : x_i \in Y_m\}$，然后对任意$i > 0$，定义$b(i)$为：

$$b(i) := \min\{j \in \mathbb{N} : j > b(i-1)且x_j \in E_m\}$$

由于上面的结论，因此这个定义总是有效的，并且$(x_{b(i)})_{i=0}^{\infty}$是一个完全由$Y_m$中元素组成的$(x_i)_{i=0}^{\infty}$的子序列。然后由于$Y_m$是紧致的，于是$(x_{b(i)})_{i=0}^{\infty}$存在一个收敛的子序列$(x_{b(i_j)})_{j=0}^{\infty}$（其极限$L \in Y_m$），并且$(x_{b(i_j)})_{j=0}^{\infty}$根据子序列定义也是$(x_i)_{i=0}^{\infty}$的子序列，于是综合上面的内容可以得到：

对任意$Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$中序列$(x_i)_{i=0}^{\infty}$都存在一个子序列$(x_{b(i_j)})_{j=0}^{\infty}$收敛于$L \in Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$。

于是根据定义12.5.1，$Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$是紧致的。

- 证明：X的任意一个有限子集（包括空集）都是紧致的。

空集的紧致性是显然的（你不可能从空集中找出一个序列），我们先证明单元素集的紧致性。

考虑任意$\{x\}$是X的子集，对任意$\{x\}$中的序列$(x_n)_{n=0}^{\infty}$，我们注意到有对任意$n \geq 0$都有$x_n \in \{x\} \iff x_n = x$，于是$(x_n)_{n=0}^{\infty}$本身（它自己就是自己的一个子序列）是收敛的。然后根据定义12.5.1，这表明$\{x\}$是紧致的。

然后来证明题目结论（因为空集的紧致性已经有了，所以只需要考虑非空集的紧致性）。

对一个X的有限子集Y，不妨假设其基数$\#(Y) = n$，于是存在从$\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$到$Y$的双射$f$，然后我们定义：

$$\forall\, 1 \leq i \leq n, Y_n := \{f(i)\}$$

显然$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$，然后应用结论(b)可以直接得到$Y$是紧致的，于是任意$X$的一个有限子集都是紧致的。

综上，于是结论得证。

12.5.8 设(X, d_{l^1})是[习题12.1.15]中的度量空间。对每一个自然数n，设$e^{(n)} := (e_j^{(n)})_{j=0}^{\infty}$是$X$中的序列，并且当$n = j$时，$e_j^{(n)} := 1$；当$n \neq j$时，$e_j^{(n)} := 0$。证明：集合$\{e^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$是$X$的一个有界闭子集，但它不是紧致的（尽管$(X, d_{l^1})$是一个完备度量空间，但是上面的结论仍然成立。此处不对(X, d_{l^1})的完备性做证明。这个问题的关键不在于X的完备性而在于X是“无限维”的，对此我们也不进行讨论（注：合着就是啥都不说））

> 注：由于题目没说，我就当是讨论度量是无限维出租车度量了（实际上用哪个度量都差不多）。
>
> 首先我们证明$\{e^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$是有界的。
>
> 考虑常数序列$e := (0)_{j=0}^{\infty}$，不难发现可以计算有：

> $$\begin{aligned}\forall\, n\in\mathbb{N}, d_{l^1}(e,e^{(n)}) &= \sum_{j=0}^{\infty}|e_j^{(n)}-0|\\ &=|e_n^{(n)}|\\ &=1\end{aligned}$$
>
> 从而我们有对任意$n\in\mathbb{N}$都有$d_{l^1}(e,e^{(n)})<2$，换言之即$\{e^{(n)}:n\in\mathbb{N}\}\subseteq B(e,2)$，于是根据定义12.5.3即$\{e^{(n)}:n\in\mathbb{N}\}$是有界的。
>
> 然后我们证明$\{e^{(n)}:n\in\mathbb{N}\}$是闭的。
>
> 考虑任意由$\{e^{(n)}:n\in\mathbb{N}\}$中元素组成的收敛序列$(q_n)_{n=0}^{\infty}$，注意到对任意$i$，$j\geq 0$且$i\neq j$都有：
>
> $$\begin{aligned}d_{l^1}(e^{(i)},e^{(j)}) &= \sum_{n=0}^{\infty}|e_n^{(i)}-e_n^{(j)}|\\ &=|e_i^{(i)}|+|e_j^{(j)}|\\ &=2\end{aligned}$$
>
> 由于$(q_n)_{n=0}^{\infty}$是收敛的，因此它也必然是一个柯西序列（引理12.4.7），于是必然存在一个$N\geq 0$使得对任意i，$j\geq N$都有$d_{l^1}(q_i,q_j)<1$。结合上面的结论，于是只能有对任意$n\geq N$都有$q_n=e^{(m)}$（m是某个自然数），从而$(q_n)_{n=0}^{\infty}$的极限就在$\{e^{(n)}:n\in\mathbb{N}\}$中。根据命题12.2.15(b)可以得到这表明$\{e^{(n)}:n\in\mathbb{N}\}$是闭的。
>
> 最后我们来证明$\{e^{(n)}:n\in\mathbb{N}\}$不是紧致的。
>
> 不妨直接考虑序列$(e^{(n)})_{n=0}^{\infty}$的任意子序列$(e^{(n_j)})_{j=0}^{\infty}$，根据我们上面的结论与子序列的定义，我们知道对任意的$J\geq 0$，都有$n_J\neq n_{J+1}\implies d_{l^1}(e^{(n_J)},e^{(n_{J+1})})=2$，于是$(e^{(n_j)})_{j=0}^{\infty}$不可能是一个柯西序列，从而由于收敛序列都是柯西序列我们知道$(e^{(n_j)})_{j=0}^{\infty}$不可能是收敛的。于是$(e^{(n)})_{n=0}^{\infty}$不存在收敛的子序列。根据定义12.5.1即有$\{e^{(n)}:n\in\mathbb{N}\}$不是紧致的。
>
> 综上，于是结论得证。

12.5.9 证明：度量空间(X,d)是紧致的，当且仅当X中的每一个序列都至少有一个极限点

> 注意到“存在一个收敛的子序列”等价于“原序列存在一个极限点”（根据命题12.4.5），于是紧致性的定义（定义12.5.1）可以改写为：
>
> > 我们称度量空间(X,d)是紧致的，当且仅当(X,d)中每一个序列都至少存在一个极限点。
>
> 于是题目得证。

12.5.10 如果对任意的$\varepsilon>0$，都存在一个正整数n和有限个球$B(x^{(1)},\varepsilon)$，...，$B(x^{(n)},\varepsilon)$使得X被这些球覆盖（即$X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}B(x^{(i)},\varepsilon)$），则我们称度量空间$(X,d)$是完全有界的

(a) 证明：每一个完全有界的空间都是有界的

> 对完全有界的空间(X,d)，我们考虑$\varepsilon=1$的情况，根据定义存在有限个球$B(x^{(1)},1)$，...，$B(x^{(n)},1)$使得$X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}B(x^{(i)},1)$。注意到由于球的数量是有限的，因此下面的集合：
>
> $$\{d(x^{(1)},x^{(i)}):1\leq i\leq n\}$$
>
> 是有限的，并且它还是正实数集的子集，于是根据最小上界原理我们知道它的上确界存在，不妨记为r。

> 于是，对任意的$x \in X$，由于$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x^{(i)}, 1)$，于是必然存在一个$1 \leq i \leq n$使得$x \in B(x^{(i)}, 1)$。然后我们可以计算有：
>
> $$d(x, x^{(1)}) \leq d(x, x^{(i)}) + d(x^{(i)}, x^{(1)}) < 1 + r$$
>
> 从而对任意的$x \in X$我们都有$x \in B(x^{(1)}, r+1)$，换言之即$X \subseteq B(x^{(1)}, r+1)$。然后根据有界度量空间的定义（定义12.5.3）我们可以得到X也是有界的。
>
> 综合即任意完全有界的空间(X, d)都是有界的，于是结论得证。

(b) 证明下述加强形式的命题12.5.5：如果(X, d)是紧致的，那么X既是完备的又是完全有界的（提示：如果X不是完全有界的，那么存在某个$\varepsilon > 0$使得X无法被有限多个ε-球覆盖。利用习题8.5.20找到一个由球$B(x^{(n)}, \varepsilon/2)$组成的无限序列，并使这些球两两不相交。最后，据此构造一个序列，使其不存在收敛的子序列）

> 紧致集的完备性可以直接通过命题12.5.5得证，于是我们只需要证明X是完全有界的。
>
> 不妨使用反证法，我们假设X不是完全有界的。换言之，存在某个$\varepsilon > 0$使得对X无法被有限个ε-球覆盖，于是对任意给定的有限个X中的点$x^{(1)}$，$\ldots$，$x^{(n)}$，都有：
>
> $$X \neq \bigcup_{i=1}^{n} B(x^{(i)}, \varepsilon) \implies X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} B(x^{(i)}, \varepsilon) \neq \varnothing$$
>
> 从而我们可以通过下面的方式递归获得一个点列：
>
> 首先从X中选出某个$x \in X$，记为$x^{(1)}$；然后对任意的$n \geq 2$，我们使用选择公理从集合：
>
> $$X \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x^{(i)}, \varepsilon)$$
>
> 中选出一个元素x，并记为$x^{(n)} := x$。在这个定义下我们能注意到对任意的$n \geq 1$与任意的$1 \leq i \leq n-1$，我们有：
>
> $$d(x^{(i)}, x^{(n)}) \geq \varepsilon$$
>
> 然后考虑序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$的任意子序列$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$，应用上面的结论就可以得到对$\varepsilon/2$有对任意$j_1$，$j_2 \geq 1$都有
>
> $$d(x^{(n_{j_1})}, x^{(n_{j_2})}) > \frac{\varepsilon}{2}$$
>
> 于是$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$不可能收敛，这和紧致的定义矛盾了，反证假设不成立。
>
> 综上，于是X只能是完全有界的。
>
> ---
>
> 还有一种方法是对给定$\varepsilon > 0$取所有$x \in X$创造一个X的开覆盖$\bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon)$，然后利用命题12.5.8获得这个覆盖的一个有限子覆盖来证明X是完全有界的。这个方法不是我想出来的，我只是觉得这个方法很酷所以在这里提一嘴。

(c) 反过来证明：如果X既是完备的又是完全有界的，那么X是紧致的（提示：如果$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是X中的序列，那么利用完全有界的假设，对于每一个正整数j，递归地构造一个它的子序列$(x^{(n;j)})_{n=1}^{\infty}$使得对每一个$j$，序列$(x^{(n;j)})_{n=1}^{\infty}$的元素都包含在单独一个半径为$1/j$的球中。同时，还要使得每一个序列$(x^{(n;j+1)})_{n=1}^{\infty}$都是前一个序列$(x^{(n;j)})_{n=1}^{\infty}$的子序列。然后证明"对角线"序列$(x^{(n;n)})_{n=1}^{\infty}$是柯西序列，并运用完备性的假设）

> 于是即要证明：对任意$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是X中的序列，都存在一个收敛的子序列$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$。
>
> 我们先证明一个辅助结论：
>
> > 结论：对任意集合X与X中的序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$，设X存在一个有限覆盖$\bigcup_{i=1}^{n} V_i$（即$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$），则至少存在一个$1 \leq m \leq n$使得对任意的$k \geq 1$，都存在一个$l \geq k$使得$x^{(l)} \in V_m$。
> >
> > 证明：
> >
> > 使用反证法，不妨假设对任意$1 \leq i \leq n$都存在一个对应的$k_i \geq 1$使得对任意对任意$l \geq k_i$都有$x^{(l)} \notin V_i$。于是集合：
> >
> > $$\{k_i : 1 \leq i \leq n\}$$
> >
> > 是有限的，从而它必然存在一个最大元素，我们记为k。于是对任意的$l \geq k$，我们应该有对任意$1 \leq i \leq n$都有$x^{(l)} \notin V_i$；但是因为$\bigcup_{i=1}^{n} V_i$是X的一个有限覆盖，于是如果对任意$1 \leq i \leq n$都有$x^{(l)} \notin V_i$那么应该有$x^{(l)} \notin \bigcup_{i=1}^{n} V_i$，自然也就有$x^{(l)} \notin X$，这与$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是$X$中的序列的前提相矛盾。
> >
> > 综上，于是反证假设不成立，只能有辅助结论为真。
>
> 对任意的整数$j \geq 1$，由于X是完全有界的，于是存在n_j个X中的球使得$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_j} B\left(x^{(i)}, \frac{1}{j}\right)$。
>
> 于是我们使用递归的方式构造一个序列$(x^{(n;1)})_{n=1}^{\infty}$：首先考虑$j = 1$的情况，根据我们的辅助结论我们知道存在一个$1 \leq m_1 \leq n_1$使得对任意的$k \geq 1$都存在一个$l \geq k$使得$x^{(l)} \in B(x^{(m_1)}, 1)$。于是对1存在$l_1 \geq 1$使得$x^{(l_1)} \in B(x^{(m_1)}, 1)$，此时令有$x^{(1;1)} := x^{(l_1)}$；之后对任意的$i \geq 2$，我们令有：
>
> $$l_i := \min\{l > l_{i-1} : x^{(l)} \in B(x^{(m_1)}, 1)\}$$
>
> 由于辅助定理我们知道这个集合总是非空的，因此其最小元素的存在性可以由自然数集的良序性保证。然后我们令有$x^{(i;1)} := x^{(l_i)}$。这样我们就得到了一个序列$(x^{(n;1)})_{n=1}^{\infty}$，显然这是$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$的一个子序列，并且这个序列中任意的元素都属于$B(x^{(m_1)}, 1)$。
>
> 然后我们对任意的整数$j \geq 2$，我们通过递归的方法定义序列$(x^{(n;j)})_{n=1}^{\infty}$：首先由于$(x^{(n;j-1)})_{n=1}^{\infty}$也是$X$中的序列，然后根据上面给出的辅助结论与完全有界性的结论，由于$\bigcup_{i=1}^{n_j} B\left(x^{(i)}, \frac{1}{j}\right)$是$X$的一个有限覆盖，于是必然存在$1 \leq m_j \leq n_j$使得对任意的$k \geq 1$都存在$l \geq k$使得$x^{(l)} \in B\left(x^{(m_j)}, \frac{1}{j}\right)$。然后类似$j = 1$的情景，先对1找到第一个$x^{(l_1;j-1)} \in B\left(x^{(m_j)}, \frac{1}{j}\right)$并设为$x^{(1;j)}$，之后对任意$i \geq 2$递归找到对应$l_i$并设有$x^{(i;j)} := x^{(l_i;j-1)}$。这样我们就定义了序列$(x^{(n;j)})_{n=1}^{\infty}$，并且它还是序列$(x^{(n;j-1)})_{n=1}^{\infty}$的子序列。

然后基于上面的定义基础上，我们定义一个新的序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$，其定义为：

$$\forall\, n \geq 1, a_n := x^{(n;n)}$$

显然$(a_n)_{n=1}^{\infty}$也是$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$的一个子序列，我们来证明序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是一个柯西序列：

对任意的$\varepsilon > 0$，根据阿基米德性质我们知道存在$N \geq 1$使得$\dfrac{2}{N} < \varepsilon$。于是对任意的$i$，$j \geq N$，根据上面的定义，我们知道$x^{(i;i)}$与$x^{(j;j)}$都属于球$B\left(x^{m_N}, \dfrac{1}{N}\right)$，于是可以计算有：

$$d_X(x^{(i;i)}, x^{(j;j)}) \leq d_X(x^{(i;i)}, x^{m_N}) + d_X(x^{m_N}, x^{(i;i)}) < \frac{2}{N} < \varepsilon$$

综合即有：

对任意$\varepsilon > 0$，存在一个$N \geq m$使得$d(a_i, a_j) < \varepsilon$对所有的$i$，$j \geq N$均成立。

根据柯西序列的定义（定义12.4.6），于是$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是一个柯西序列。此时根据X的完备性我们知道$(a_n)_{n=1}^{\infty}$必然是收敛的。综上于是我们证明了对任意$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是X中的序列都存在一个收敛的子序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$，从而根据紧致集的定义（定义12.5.1）即有X是紧致的。

12.5.11 设(X, d)具有如下性质：X的每一个开覆盖都有一个有限子覆盖。证明X是紧致的（提示：如果X不是紧致的，那么由习题12.5.9可知，存在一个序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$不存在极限点。于是，对于每一个$x \in X$，都存在一个包含x的球$B(x, \varepsilon)$，它最多包含序列中有限多个元素，然后使用假设条件）

不妨使用反证法，我们假设X不是紧致的，于是存在X的某个序列$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$不存在收敛的子序列，根据习题12.5.9即有$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$不存在任何极限点，根据极限点的定义（定义12.4.4）即：

对任意的$x \in X$都存在一对$N \geq 0$与$\varepsilon > 0$，使得对任意的$n \geq N$都有$d_X(x, x^{(n)}) > \varepsilon$。

从度量球$B(x, \varepsilon)$的角度，它至多只能包含序列$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$的前N个元素（不一定有N个）。从而利用选择公理，我们为每一个$x \in X$都能指定这样一对$N_x \geq 0$与$\varepsilon_x \geq 0$，然后构造对应的度量球，最终获得下面的并集：

$$\bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon_x)$$

根据度量球的定义于是对任意$x \in X$都有$x \in B(x, \varepsilon_x) \implies x \in \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon_x)$，并且根据命题12.2.15(c)任意的度量球都是X中的开集，从而$\bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon_x)$是$X$的一个开覆盖，根据我们的题设，于是存在$\mathcal{F}$是$X$的一个有限子集使得：

$$X \subseteq \bigcup_{x \in \mathcal{F}} B(x, \varepsilon_x)$$

但是根据我们上面的讨论，由于$\mathcal{F}$是有限的，因此集合

$$\{N_x : x \in \mathcal{F}\}$$

也应该是有限的，于是它存在最大元素，记为$N_{\mathcal{F}}$。根据上面讨论的结论，对任意$n \geq N_{\mathcal{F}}$都应该有：

$$\forall\, x \in \mathcal{F}, n \geq N_{\mathcal{F}} \geq N_x \implies d_X(x, x^{(n)}) > \varepsilon \iff x^{(n)} \notin B(x, \varepsilon_x)$$

于是即有对任意$n \geq N_{\mathcal{F}}$，$x^{(n)} \notin \bigcup_{x \in \mathcal{F}} B(x, \varepsilon_x) \implies x^{(n)} \notin X$，这和$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$是$X$中序列的前提矛盾，于是反证假设不成立。

综上，只能有X是紧致的。

12.5.12 设(X, d_{disc})是具有离散度量d_{disc}的度量空间

(a) 证明：X是完备的

> 考虑任意$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$是X中的柯西序列，根据定义，对0.5应该存在一个$N \geq 0$使得对任意i，$j \geq N$都有$d_{\text{disc}}(x^{(i)}, x^{(j)}) < 0.5$。此时考虑离散度量的定义，于是只能有$d_{\text{disc}}(x^{(i)}, x^{(j)}) = 0$，也即$x^{(i)} = x^{(j)}$。
>
> 从而对任意的$\varepsilon > 0$，我们都能研究得到任意$n \geq N$都有：
>
> $$d_{\text{disc}}(x^{(n)}, x^{(N)}) = 0 < \varepsilon$$
>
> 根据依度量收敛的定义，这表明序列$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$收敛于$x^{(N)}$。从而我们证明了任意$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$是X中的柯西序列都是收敛的，根据完备度量空间的定义（定义12.4.10）即有(X, d_{disc})是完备的。

(b) X什么时候是紧致的？什么时候是不紧致的？证明你的结论（提示：海涅-博雷尔定理在这里是没啥用的，因为它只适用于欧几里得空间（emmm，认真看了的都不会用吧））

> 在习题12.5.10中我们讨论了完全有界性，完备性与紧致性的关系，考虑到我们已经在(a)中证明了X是完备的，因此此时我们可以讨论得到：X是紧致的当且仅当它是完全有界的。
>
> 于是不妨来讨论X在什么情况下是完全有界的，根据完全有界集的定义我们知道对任意的$\varepsilon > 0$都必须要能找到有限个X中的度量球$B(x^{(1)}, \varepsilon)$，…，$B(x^{(n)}, \varepsilon)$使得$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x^{(i)}, \varepsilon)$；而离散度量的特殊性质使得当$\varepsilon > 1$时，任取$x \in X$都有球$B(x, \varepsilon) = X$，因此在$\varepsilon > 1$时完全有界性不对$X$作出任何要求；而对于$\varepsilon < 1$的情景，球$B(x, \varepsilon)$退化为单点集$\{x\}$。于是完全有界性的要求在$\varepsilon < 1$时就变为：
>
> 要求能找到有限个X中的单点集$\{x^{(1)}\}$，…，$\{x^{(n)}\}$使得$X = \bigcup_{i=1}^{n} \{x^{(i)}\} = \{x^{(i)} : 1 \leq i \leq n\}$。
>
> 这表明X时完全有界的当且仅当X是一个有限集。于是综上即有X是紧致的当且仅当X是有限的。

12.5.13 设E和F是$\mathbb{R}$（具有标准度量$d(x, y) = |x - y|$）的两个紧致子集。证明：笛卡尔积$E \times F := \{(x, y) : x \in E, y \in F\}$是$\mathbb{R}^2$（具有欧几里得度量$d_{l^2}$）的紧致子集

> 考虑$E \times F$中的序列$((x^{(n)}, y^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$，考虑分量序列$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$与$(y^{(n)})_{n=0}^{\infty}$，它们分别是$E$与$F$中的序列。
>
> 首先考虑$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$，由于E是紧致的，因此$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$至少存在一个收敛的子序列$(x^{(n_j)})_{j=0}^{\infty}$，我们记它收敛于$x$。根据命题12.4.3我们知道$(x^{(n_j)})_{j=0}^{\infty}$的任意子序列也收敛于$x$。
>
> 然后考虑$(y^{(n)})_{n=0}^{\infty}$，根据子序列定义可知$(y^{(n_j)})_{n=0}^{\infty}$也是$(y^{(n)})_{n=0}^{\infty}$的子序列，并且$(y^{(n_j)})_{n=0}^{\infty}$是$F$中的序列。于是由于$F$也是紧致的我们有$(y^{(n_j)})_{n=0}^{\infty}$至少存在一个收敛的子序列$(y^{(n_{j;i})})_{i=0}^{\infty}$，我们记有它收敛于$y$。
>
> 此时我们回顾$((x^{(n)}, y^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$，考虑序列$((x^{(n_{j;i})}, y^{(n_{j;i})}))_{i=0}^{\infty}$，根据子序列的定义可知$((x^{(n_{j;i})}, y^{(n_{j;i})}))_{i=0}^{\infty}$显然是$((x^{(n)}, y^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$的一个子序列，并且有：
>
> - $(y^{(n_{j;i})})_{i=0}^{\infty}$依标准度量收敛于$y$。
> - $(x^{(n_{j;i})})_{i=0}^{\infty}$是$(x^{(n_j)})_{j=0}^{\infty}$的子序列，因此$(x^{(n_{j;i})})_{i=0}^{\infty}$也依标准度量收敛于$x$。
>
> 从而根据命题12.1.18可知$((x^{(n_{j;i})}, y^{(n_{j;i})}))_{i=0}^{\infty}$是依欧几里得度量收敛于$(x, y)$的。于是综合上面的内容，我们证明了对任意$E \times F$中的序列$((x^{(n)}, y^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$都至少存在一个收敛的子序列，从而根据紧致集的定义，我们有$E \times F$是紧致的。
>
> 综上，于是结论得证。

12.5.14 设(X,d)是一个度量空间，E是X的非空紧致子集，并设x_0是X中的一点。证明：存在点$x\in E$使得

$$d(x_0,x)=\inf\{d(x_0,y):y\in E\}$$

也就是说，x是E中距离x_0最近的点（提示：设R为量$R:=\inf\{d(x_0,y:y\in E)\}$。构造$E$中序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$，使得$d(x_0,x^{(n)})\leq R+\frac{1}{n}$，然后利用$E$的紧致性）

> 设$R:=\inf\{d(x_0,y):y\in E\}$，然后对任意的正整数$n$，由于$R$是下确界，于是$R+\frac{1}{n}$不可能是$\{d(x_0,y):y\in E\}$的下界，换言之，集合：
>
> $$Y_n:=\left\{y\in E:R\leq d(x_0,y)\leq R+\frac{1}{n}\right\}$$
>
> 是非空的。于是根据选择公理，我们可以为任意的$n\geq 1$指定一个$x^{(n)}\in Y_n$，从而我们获得了一个E中的序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$。又因为E是紧致的，于是$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$至少存在一个收敛的子序列$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$，它依度量$d$收敛于$X$中的某点$x$。
>
> 于是我们来尝试计算$d(x,x_0)$，由于$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$依度量$d$收敛于$x$，于是对任意的$\varepsilon>0$，存在$J\geq 1$使得对任意$j\geq J$都有：
>
> $$d(x_0,x)\leq d(x_0,x^{(n_j)})+d(x^{(n_j)},x)\leq R+\frac{1}{n_j}+\varepsilon\leq R+\frac{1}{j}+\varepsilon$$
>
> （关于$n_j\geq j$这个推论我真的不想再归纳一次了，总之就是通过子序列的性质可以直接推断的，在前面的章节这个结论少说用过七八次了）
>
> 由于这个结论对任意的$j\geq J$都成立，于是只能有$d(x_0,x)\leq R+\varepsilon$，同理由于$\varepsilon$也是任意的，因此只能有$d(x_0,x)\leq R$；另一方面，若有$d(x_0,x)<R$，我们不妨设有$d(x_0,x)=R-\varepsilon$，由于$(x^{(n_j)})_{j=1}^{\infty}$依度量$d$收敛于$x$，因此对$\varepsilon/2$存在一个$J\geq 1$使得对任意的$j\geq J$有：
>
> $$d(x^{(n_j)},x_0)\leq d(x^{(n_j)},x)+d(x,x_0)\leq R-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}<R$$
>
> 这和$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$的定义矛盾，于是只能有$d(x_0,x)\geq R$。
>
> 综上，即有$d(x_0,x)=R$，于是题目结论得证。

12.5.15 设(X,d)是一个紧致度量空间，设$(K_\alpha)_{\alpha\in I}$是X中的一簇闭集，它具有如下性质：其中任意有限多个集合的交集都是非空的，即对任意的有限集$F\subseteq I$均有$\bigcap_{\alpha\in F}K_\alpha\neq\varnothing$（这个性质也被称为有限交性质）。证明：该集簇中所有集合的交集是非空的，即$\bigcap_{\alpha\in I}K_\alpha\neq\varnothing$。举反例说明，若$X$不是紧致的，则上述结论不成立

> 证明：若(X,d)是紧致度量空间，则该集簇中所有集合的交集是非空的。
>
> 利用题设给出的$(K_\alpha)_{\alpha\in I}$，我们创造一个新的集合簇$(V_\alpha)_{\alpha\in I}$，其定义为：
>
> $$V_\alpha:=X\backslash K_\alpha$$
>
> 即对任意的$\alpha\in I$都有V_α是K_α的补集，根据命题12.2.15(e)我们知道由于K_α都是闭的，于是V_α都是开的。
>
> 于是我们可以将有限交性质表述为另一个形式：对任意有限集$F\subseteq I$均有$X\backslash\bigcup_{\alpha\in F}V_\alpha\neq\varnothing$（使用了习题3.4.11的结论）。此时我们可以很自然的联系命题12.5.8然后将有限交性质进一步转化为一个等价结论：

> $\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$不是$X$的一个开覆盖。

（如果是那么必然存在一个I的有限子集F使得$X \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$，这样就和$X \backslash \bigcup_{\alpha \in F} V_\alpha \neq \varnothing$的前提矛盾了）

从而必然有$X \subsetneq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \implies X \backslash \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \neq \varnothing$，再次使用习题3.4.11的结论即有$\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \varnothing$。

举例：若(X, d)不是紧致度量空间，则该集簇中所有集合的交集可能是空的。

考虑度量空间$(\mathbb{R}, d_{\text{disc}})$带有离散度量，根据我们在习题12.5.12(b)中的讨论我们知道它肯定不是紧致的。然后考虑集合簇$(K_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$定义为：

$$K_\alpha := [0, 1] \backslash \{\alpha\}$$

在习题12.2.1中我们已经有论证过带有离散度量的空间的特殊性质：即每个空间中的子集同时是开集和闭集。因此K_α都是闭集，然后注意到任意有限集$F \subseteq [0, 1]$，我们有：

$$\bigcap_{\alpha \in F} K_\alpha = [0, 1] \backslash F \neq \varnothing$$

（无限集去掉一个有限集自然不会是空集）

但是又有：

$$\bigcap_{\alpha \in [0,1]} K_\alpha = [0, 1] \backslash [0, 1] = \varnothing$$

于是这就是我们想要的例子。

本节相关跳转

实分析 8.4 选择公理

实分析 8.5 有序集

实分析 9.1 实直线的子集

实分析 12.1 定义和例子

实分析 12.3 相对拓扑

实分析 12.4 柯西序列和完备度量空间

实分析 13.5 拓扑空间