19.5 富比尼定理

命题

1. (19.5.1 富比尼定理) 设$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是一个绝对可积的函数。那么，存在绝对可积的函数$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$和$G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对于几乎每一个$x$，$f(x,y)$关于$y$是绝对可积的，并且有：

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x,y)\mathrm{d}y$$

同时，对于几乎每一个y，$f(x,y)$关于x是绝对可积的，并且有：

$$G(y)=\int_{\mathbb{R}}f(x,y)\mathrm{d}x$$

最后，还有

$$\int_{\mathbb{R}}F(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^2}f=\int_{\mathbb{R}}G(y)\mathrm{d}y$$

(注：非常粗略地说，富比尼定理表明：

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^2}f=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

于是在计算二维积分时，可以把它分解成两个一维积分的计算；没有将富比尼定理写成上述形式的原因是积分$\int_{\mathbb{R}}f(x,y)\mathrm{d}y$可能并不对每一个$x$都存在，类似地，积分$\int_{\mathbb{R}}f(x,y)\mathrm{d}x$可能并不对每一个$y$都存在，富比尼定理只能断言这些积分几乎对每一个$x$和$y$成立。一个很简单的例子，考虑函数$f(x,y)$满足：当$y>0$且$x=0$时，$f(x,y)=1$；当$y<0$且$x=0$时，$f(x,y)=-1$；其它任何情形下$f(x,y)=0$，那么$f$在$\mathbb{R}^2$上是绝对可积的，并且$\int_{\mathbb{R}^2}f=0$（因为$f$在$\mathbb{R}^2$上几乎处处为零）。但是，当$x=0$时，$\int_{\mathbb{R}}f(x,y)\mathrm{d}y$不是绝对可积的（尽管对于其他任意一个$x$，$\int_{\mathbb{R}}f(x,y)\mathrm{d}y$都是绝对可积的））