5.3 实数的构造

定义

1. (5.3.1 实数) 实数被定义为形如$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$的对象，其中$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是有理数的一个**柯西序列**。称两个实数$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$与$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$是相等的，当且仅当序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$是**等价的柯西序列**。记由全体实数构成的集合为$\mathbb{R}$。
2. (5.3.2 形式极限) 称$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$为序列为$(a_n)_{n=1}^{\infty}$**形式极限**。

   (小节临时辅助定义，如同之前的形式减法与形式除法一样)
3. (5.3.4 实数的加法) 设$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$和$y=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$是实数，则定义它们的和$x+y$为$x+y:=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}(a_n+b_n)$。
4. (5.3.9 实数的乘法) 设$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$和$y=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$是实数，则定义它们的乘积$xy$为$xy:=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}(a_n\times b_n)$。
5. (5.3.12 远离0的有理数序列) 称有理数序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是远离0的，当且仅当存在一个有理数$c>0$使得$|a_n|\geq c$对一切$n\geq 1$均成立。
6. (5.3.16 实数的倒数) 设x是一个不为零的实数，设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是一个远离0的柯西序列并且使得$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$ (由引理5.3.14可证明这样的序列存在) ，则定义x^{-1}为$x^{-1}:=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}{a_n}^{-1}$。

   (由引理5.3.17可证明x^{-1}是一个实数)
7. (无编号 消去律) 如果x，y，z是实数，它们满足$xz=yz$且z不为零，则可以得到$x=y$。

命题

1. (5.3.3 形式极限是定义明确的) 设$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$，$y=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$是与$z=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}c_n$都是实数，则由定义可知，$x=x$。而且如果有$x=y$，则$y=x$。最后，若有$x=y$且$y=z$，则$x=z$。

   (自反，对称，可传递性)
2. (5.3.6 柯西序列的和是柯西序列) 设$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$和$y=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$都是实数，那么$x+y$同样也是一个实数。

   (即$(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$是有理数的一个柯西序列)
3. (5.3.7 等价的柯西序列之和是等价的) 设$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$，$x'=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a'_n$和$y=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$是实数，设$x=x'$，则有$x+y=x'+y$。

   (按理说这个才是定义明确的吧)
4. (5.3.10 乘法的定义是明确的) 设$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$，$x'=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a'_n$和$y=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$是实数，则$xy$也是实数，另外，如有$x=x'$，则有$xy=x'y$。
5. (5.3.11 实数的代数定律) 第四章中的所有代数定律 (命题4.2.4) 不止对于整数与有理数成立，对于实数也是成立的。内容见下：

   > - $x+y=y+x$。
   > - $(x+y)+z=x+(y+z)$。
   > - $x+0=0+x$。
   > - $x+(-x)=(-x)+x=0$。

> - $xy = yx$。
> - $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$。
> - $x(y+z) = xy + xz$。
> - $(y+z)x = yx + zx$。
> - $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x (x \neq 0)$。

6. (5.3.14 远离0的序列性质1) 设x是一个不为零的实数，那么存在某个远离0的柯西序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$使得$x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$。
7. (5.3.15 远离0的序列性质2) 设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是一个远离0的柯西序列，那么序列$(a_n^{-1})_{n=1}^{\infty}$也是一个的柯西序列。
8. (5.3.17 倒数运算是定义明确的) 现假设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$是两个远离0的柯西序列，且有$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} b_n$，则$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n^{-1} = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} b_n^{-1}$。

课后习题

5.3.1 证明命题5.3.3（提示：你也许会发现命题4.3.7对本题是有用的）

> 自反性：
>
> $x = x$，等价于$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是等价的柯西序列。显然对任意的柯西序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$，对任意$\varepsilon > 0$都有$d(a_n, a_n) \leq \varepsilon$对全体$n > 1$成立，于是结论得证。
>
> ---
>
> 对称性：
>
> 如果有$x = y$，则$y = x$，这等价于若有$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$等价，则$(b_n)_{n=1}^{\infty}$与$(a_n)_{n=1}^{\infty}$等价。若有$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$等价，则对任意$\varepsilon > 0$，都存在自然数$N \geq 1$使得$n \geq N$时有$d(a_n, b_n) \leq \varepsilon \iff d(b_n, a_n) \leq \varepsilon$恒成立，于是$(b_n)_{n=1}^{\infty}$与$(a_n)_{n=1}^{\infty}$等价，结论得证。
>
> ---
>
> 传递性：
>
> 若有$x = y$且$y = z$，则$x = z$，这等价于若有$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$等价与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$与$(c_n)_{n=1}^{\infty}$等价，则$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(c_n)_{n=1}^{\infty}$等价。对任意$\varepsilon > 0$，取$\varepsilon' = \varepsilon/2$，于是由$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$等价与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$与$(c_n)_{n=1}^{\infty}$等价，可以得到分别存在正自然数$N_1$，$N_2$使得$n \geq N_1$时有$d(a_n, b_n) \leq \varepsilon'$与$n \geq N_2$时有$d(b_n, c_n) \leq \varepsilon'$。此时取$N = \max(N_1, N_2)$，于是根据命题4.3.7，有对任意$\varepsilon > 0$，存在正自然数$N$使得$a_n$是$2\varepsilon' = \varepsilon$-接近于$c_n$的对任意$n \geq N$成立，于是$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(c_n)_{n=1}^{\infty}$等价。

5.3.2 证明命题5.3.10（提示：命题4.3.7对本题同样有用）

> xy也是实数：
>
> 即证明$(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$也是一个柯西序列。由$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$都是柯西序列，对任意有理数$\varepsilon > 0$，取ε'使得$\varepsilon'^2 + (A+B)\varepsilon' \leq \varepsilon$，其中$A$，$B$分别是$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$的一个界。于是对有理数$\varepsilon'$，我们总有存在自然数$N_1$，$N_2$使得对任意$i, j \geq N_1$，$a_i$与$a_j$都是$\varepsilon'$-接近的；对任意$i, j \geq N_2$，$b_i$与$b_j$是$\varepsilon'$-接近的。此时取$N = \max(N_1, N_2)$，根据命题4.3.7的结论，于是对任意$i, j \geq N$可以得到$a_i b_i$与$a_j b_j$是$\varepsilon'^2 + (|a_i| + |b_i|)\varepsilon'$-接近的。又有$\varepsilon'^2 + (|a_i| + |b_i|)\varepsilon' \leq \varepsilon'^2 + (A+B)\varepsilon' \leq \varepsilon$，于是$a_i b_i$与$a_j b_j$是$\varepsilon$-接近的。综上，$(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$也是一个柯西序列。
>
> ---
>
> 若$x = x'$，则$xy = x'y$：

> 即证明$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(a'_n)_{n=1}^{\infty}$是等价的柯西序列时，$(a_nb_n)_{n=1}^{\infty}$与$(a'_nb_n)_{n=1}^{\infty}$也是等价的柯西序列。于是对任意$\varepsilon > 0$，取$\varepsilon' = \varepsilon/B$，其中$B$是$(b_n)_{n=1}^{\infty}$的一个界。由于$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(a'_n)_{n=1}^{\infty}$是等价的，于是对$\varepsilon'$，总存在自然数$N \geq 1$使得$n \geq N$时总有$a_n$与$a'_n$是$\varepsilon'$-接近的，于是根据命题4.3.7结论，$a_nb_n$与$a'_nb_n$是$|b_n|\varepsilon'$-接近的，又$B$是$(b_n)_{n=1}^{\infty}$的一个界，于是对任意$n \geq N$，$B \geq |b_n|$，进而有$a_nb_n$与$a'_nb_n$也是$B\varepsilon'$-接近的。于是可以得到$a_nb_n$与$a'_nb_n$是$\varepsilon$-接近的，进而可以得到$(a_nb_n)_{n=1}^{\infty}$与$(a'_nb_n)_{n=1}^{\infty}$也是等价的柯西序列，于是原结论得证。

5.3.3 设a，b是有理数， 证明：$a = b$，当且仅当$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a = \mathrm{LIM}_{n\to\infty}b$（即柯西序列$a$，$a$，$\ldots$与$b$，$b$，$\ldots$是等价的，当且仅当$a = b$），这样我们能够明确的把有理数嵌入到实数中

> 充分性：
>
> $a = b$时，于是对任意$\varepsilon > 0$，对任意$n \geq 1$，都有$d(a, b) \leq \varepsilon$（可能有点怪，不过事实上就是序列$(a)_{n=1}^{\infty}$与$(b)_{n=1}^{\infty}$的第n项），于是可以得到序列$(a)_{n=1}^{\infty}$与$(b)_{n=1}^{\infty}$等价。
>
> ---
>
> 必要性：
>
> 对序列$(a)_{n=1}^{\infty}$与$(b)_{n=1}^{\infty}$，我们知道对其中任意$n \geq 0$，$d(a, b) = |a - b|$，又有$(a)_{n=1}^{\infty}$与$(b)_{n=1}^{\infty}$是等价的，于是对任意$\varepsilon > 0$，都应当存在自然数$N \geq 1$，使得$n \geq N$时$d(a, b) \leq \varepsilon$，这等价于对任意$\varepsilon > 0$，$d(a, b) \leq \varepsilon$。又根据$d(a, b) \geq 0$，于是$d(a, b) = 0$，即$a = b$。
>
> ---
>
> 综上，结论得证。

5.3.4 设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是一个有界的有理数序列，设$(b_n)_{n=1}^{\infty}$是等价于$(a_n)_{n=1}^{\infty}$的另一个有理数序列，证明：$(b_n)_{n=1}^{\infty}$也是有界的

> $(b_n)_{n=1}^{\infty}$等价于$(a_n)_{n=1}^{\infty}$，于是存在自然数$N \geq 1$使得对任意$n \geq N$有$d(a_n, b_n) \leq 1$。又a_n有界，于是存在正有理数A使得$|a_n| \leq A$恒成立，于是$|b_n| \leq |a_n| + d(a_n, b_n) \leq A + 1$对任意$n > N$都成立。根据命题5.1.14，有限序列必然有界，即$(b_n)_{n=1}^{N-1}$必然存在一个界B使得对任意$1 \leq n \leq N - 1$都有$|b_n| \leq B$。于是取$S = \max(A + 1, B)$，此时有$\forall n \in \mathbb{N}^*$，$|b_n| \leq S$，即$(b_n)_{n=1}^{\infty}$也是有界的。

5.3.5 证明：$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

> 即证$(\dfrac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$与$(0)_{n=1}^{\infty}$是等价的。对任意有理数$\varepsilon > 0$，根据命题4.4.1的结论，此时取$N = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$，于是此时对任意$n \geq N$，都有$\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| \leq \left|\dfrac{1}{N} - 0\right| \leq \varepsilon$。于是有$(\dfrac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$与$(0)_{n=1}^{\infty}$是等价的。

本节相关跳转

[实分析 4.3 绝对值与指数运算]