函数的极限值

定义

1. (9.3.1 ε-接近性) 设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，L是一个实数，并且设$\varepsilon > 0$也是一个实数。我们称函数f是**ε-接近于L**的，当且仅当对任意$x \in X$，都有$|f(x) - L| \leq \varepsilon$。
2. (9.3.3 局部ε-接近性) 设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，L是一个实数，x_0是X的一个附着点，并且设$\varepsilon > 0$也是一个实数。我们称函数f**在x_0附近是ε-接近于**L的，当且仅当存在一个实数$\delta > 0$使得当f被限制在集合$\{x \in X : |x - x_0| \leq \delta\}$上时，有$f$是$\varepsilon$-接近于$L$的（即$f|_{[x_0-\delta, x_0+\delta]}$是$\varepsilon$-接近于$L$的）。
3. (9.3.6 函数在一点处收敛) 设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，E是X的一个子集，x_0是E的一个附着点，并且设L是一个实数。我们称f**在点x_0处沿着E收敛于**L，并且记作$\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = L$，当且仅当对任意的$\varepsilon > 0$，被限制在$E$上的函数$f$都是在$x_0$附近是$\varepsilon$-接近于$L$的。如果$f$在$x_0$处不收敛于任何数，那么我们称$f$在$x_0$处是**发散**，并且此时认为$\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x)$是无定义的。

   换言之，即$\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = L$当且仅当对任意$\varepsilon > 0$，存在一个$\delta > 0$使得$|f(x) - L| \leq \varepsilon$对任意满足$|x - x_0| \leq \delta$的$x \in E$均成立。

   (注：通常情况下，我们会在一定上下文条件下忽略E（即直接说f在x_0处收敛于E，或者说$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$），但是这样的做法在事实上是有一定风险的，举个例子，当E不包含x_0时就可能对结果产生很大影响：定义一个函数$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，当$x = 0$时$f(x) = 1$，当$x \neq 0$时$f(x) = 0$，此时我们有$\lim_{x \to 0; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} f(x) = 0$与$\lim_{x \to 0; x \in \mathbb{R}} f(x)$无定义同时成立。此外，这个定义也比较复杂，我们通常会选择它的替代形式使用，详情见命题9.3.9)

命题

1. (9.3.9 收敛定义的替换？) 设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，E是X的一个子集，x_0是E的一个附着点，并且设L是一个实数。则下面两个在逻辑上是等价的：

   > - f在点x_0处沿着E收敛于L。
   > - 对任意一个完全由E中元素构成并且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，序列$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$都收敛于L。

   (注：使用命题9.3.9里的符号，我们可以得到推论：如有$\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x) = L$且$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$，那么有$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = L$)
2. (9.3.12 函数极限的唯一性？) 设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，E是X的一个子集，x_0是E的一个附着点，并且设$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数。那么f在x_0处沿着E至多只能有一个极限。
3. (9.3.14 函数的极限定律) 设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，E是X的一个子集，x_0是E的一个附着点，并且设$f: X \to \mathbb{R}$与$g: X \to \mathbb{R}$都是函数。假设f在x_0处沿着E收敛于L，g在x_0处沿着E收敛于M。那么有：

   > 1. $f + g$在x_0处沿着E收敛于$L + M$;

> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)+\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)$$
>
> 2. $f-g$在x_0处沿着E收敛于$L-M$:
>
> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}(f-g)(x)=\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)-\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)$$
>
> 3. $\max(f,g)$在x_0处沿着E收敛于$\max(L,M)$:
>
> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}\max(f,g)(x)=\max(\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x),\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x))$$
>
> 4. $\min(f,g)$在x_0处沿着E收敛于$\min(L,M)$:
>
> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}\min(f,g)(x)=\min(\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x),\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x))$$
>
> 5. fg在x_0处沿着E收敛于LM:
>
> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}(fg)(x)=\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)$$
>
> 6. 如有c是一个实数，则cf在x_0处沿着E收敛于cL:
>
> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}(cf)(x)=c\cdot\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)$$
>
> 7. 如有对任意$x\in E$都有$g(x)\neq 0$，则f/g在x_0处沿着E收敛于L/M:
>
> $$\lim_{x\to x_0;x\in E}(f/g)(x)=\frac{\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)}{\lim_{x\to x_0;x\in E}g(x)}$$
>
> （简写的话，省略$x\in E$也可以）

（注：关于是否注明集合E，还是之前那个例子函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$f(x):=\begin{cases}1 & \text{if } x\neq 0\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$$

有有$\lim_{x\to 0;x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}f(x)=0$与$\lim_{x\to 0;x\in\mathbb{R}}f(x)$无定义，这种情况下我们称$f$在0处有“**可去奇点**”或者“**可去间断点**”，并且由于这种奇点的存在，我们有时约定写$\lim_{x\to x_0}f(x)$时默认将x_0排除在外，例如在本书里就有$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to 0;x\in X\setminus\{x_0\}}f(x)$）

4. （9.3.18 极限是局部的）设X是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，E是X的一个子集，x_0是E的一个附着点，并且设L是一个实数，$\delta>0$是一个实数。则我们有:

$$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)=L$$

当且仅当:

$$\lim_{x\to x_0;x\in E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)}f(x)=L$$

通俗来说即:

$$\lim_{x\to x_0;x\in E\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)}f(x)=\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)$$

（即x_0处的极限值只与x_0附近的函数值有关，与远离x_0的函数值无关）

课后习题