8.3 不可数集

命题

1. (8.3.1 康托尔定理) 设X是任意一个集合 (可以是有限集，也可以是无限集)，那么集合X与集合2^X不可能拥有同样的基数。

   (注：2^X是X的幂集，也即X所有子集的集合，具体可以参考引理3.4.9)

2. (8.3.3 康托尔定理推论其一？) $2^{\mathbb{N}}$是不可数集。
3. (8.3.4 康托尔定理推论其二？) $\mathbb{R}$是不可数集。

(注：关于推论8.3.4有一些不在学习要求但是很有意思的事情，由推论8.3.4我们可以得到实数集$\mathbb{R}$的基数是严格大于自然数集$\mathbb{N}$的，由此可以延伸出一个有趣的问题，即：是否存在一类无限集，它们的基数介于自然数集与实数集之间，连续统假设断言不存在这样的集合。这个假设独立于集合论的其它公理，也即既不能被那些公理证明，也不能被那些公理否定。有兴趣可以自行了解。)

课后习题

8.3.1 设X是一个基数为n的有限集，证明：2^X是一个基数为2^n的有限集 (提示：对n使用归纳法)

> 对n做归纳：
>
> 当$n=0$时，$X=\varnothing$，此时X的子集只有它本身，于是2^X基数为$1=2^0$，结论正确。
>
> 现归纳性假设对$n=b$时有结论成立，对$n=b+1$时：
>
> 根据单个选择，我们可以选择一个元素$x\in X$，从而将X写为$(X-\{x\})\cup\{x\}$的形式，我们令$X_1:=X-\{x\}$，$X_2=\{x\}$，并且令一个函数$f:2^{X_1}\to f(2^{X_1})$有$f(A)=A\cup X_2$，显然有f是一个双射。我们研究$f(2^{X_1})\cup 2^{X_1}$与2^X之间的关系：
>
> - 对任意$A\in 2^X$，其中任意$a\in A$都有$a\in X$，即$a\in X_1$或$a\in X_2$。若$x\notin A$，则a不可能属于X_2，从而对任意$a\in A$都有$a\in X_1$，即$A\in 2^{X_1}$；若$x\in A$，则取$A'=A-X_2$，于是对任意$a\in A'$，都有$a\in X_1$，从而$A'\in 2^{X_1}\implies A\in f(2^{X_1})$。从而对任意$A\in 2^X$，总有$A\in f(2^{X_1})\cup 2^{X_1}$。
> - 对任意$A\in f(2^{X_1})\cup 2^{X_1}$，有$A\in 2^{X_1}$或$A\in f(2^{X_1})$。若$A\in 2^{X_1}$，则对任意$a\in A$都有$a\in X_1\implies a\in X$，即$A\in 2^X$；若$A\in f(2^{X_1})$，则对任意$a\in A$都有$a\in X_1$或$a\in X_2\implies a\in X$，即$A\in 2^X$。从而对任意$A\in f(2^{X_1})\cup 2^{X_1}$有$A\in 2^X$。
>
> 于是$2^X=f(2^{X_1})\cup 2^{X_1}\implies \#(2^X)=\#[f(2^{X_1})\cup 2^{X_1}]$，另外我们还注意到对任意$A\in 2^{X_1}$，都有$x\notin A$；对任意$A\in f(2^{X_1})$，都有$x\in A$。于是$f(2^{X_1})\cap 2^{X_1}=\varnothing$，从而根据基数运算有：
>
> $$\#(2^X)=\#[f(2^{X_1})\cup 2^{X_1}]=\#[f(2^{X_1})]+\#(2^{X_1})=2\times\#(2^{X_1})$$
>
> 而根据归纳假设，X_1是一个基数为b的集合，于是应该有$\#(2^{X_1})=2^b$，于是$\#(2^X)=2\cdot 2^b=2^{b+1}$。

8.3.2 设A，B，C 是满足$A \subseteq B \subseteq C$的集合，并且假设存在一个单射$f: C \to A$。如下递归地定义集合$D_0$，$D_1$，$...$；令 $D_0 := B \backslash A$，且对所有的自然数n令$D_{n+1} := f(D_n)$。证明：集合D_0，D_1，$...$是互不相交的集合（即只要$n \neq m$，就有$D_n \cap D_m = \varnothing$）。同时证明：如果 $g: A \to B$ 被定义为如下函数：当$x \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$时，令$g(x) := f^{-1}(x)$；当$x \notin \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$时，令$g(x) := x$，那么$g$的确是把$A$映射到$B$的一个双射。特别的，$A$和$B$有相同的基数

> 证明：集合D_0，D_1，$...$是互不相交的集合。
>
> 使用反证法，不妨假设存在$0 \leq i < j$满足存在$d_i \in D_i$且$d_i \in D_j$。由于f是单射，于是只能有存在唯一$d_{i-1} \in C$满足$f(d_{i-1})$，根据$(D_n)_{n=0}^{+\infty}$的定义即有$d_{i-1} \in D_{i-1}$与$d_{i-1} \in D_{j-1}$。重复这样的过程，最终可以得到存在一个$d_0 \in C$满足$d_0 \in D_0$与$d_0 \in D_{j-i}$同时成立，但此时又有：
>
> - 由$d_0 \in D_{j-i}$可得存在$d' \in D_{j-i-1}$满足$f(d') = d_0$，于是d_0属于f的值域A。
> - $d_0 \in D_0 = B \backslash A$，于是$d_0$属于$B$而不属于$A$。
>
> 从而d_0既属于A又不属于A，导出矛盾，于是反证结束，对任意$i \neq j$都有。
>
> ---
>
> 证明：如果 $g: A \to B$ 被定义为如下函数：当$x \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$时，令$g(x) := f^{-1}(x)$；当$x \notin \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$时，令$g(x) := x$，那么$g$的确是把$A$映射到$B$的一个双射。
>
> 证明双射分两部分证明：
>
> - g是单射：
>
> 对任意$x_1 \neq x_2$且$x_1, x_2 \in A$，我们讨论它们可能的情况：

	$x_1 \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$	$x_1 \notin \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$
$x_2 \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$	于是$g(x_1) = g(x_2) = a$，则$f(a)$映射出两个值，这和f是函数是矛盾的。	于是$g(x_1) = x_1$，$g(x_2) = f^{-1}(x_2)$。于是由定义$g(x_2) \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$必然不等于$g(x_1) \notin \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$。
$x_2 \notin \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$	于是$g(x_1) = f^{-1}(x_1)$，$g(x_2) = x_2$。于是由定义$g(x_1) \in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$必然不等于$g(x_2) \notin \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$。	于是$g(x_1) = x_1$，$g(x_2) = x_2$，由$x_1 \neq x_2$可直接得到$g(x_1) \neq g(x_2)$。

> 于是对任意$x_1 \neq x_2$且$x_1, x_2 \in A$，总有$g(x_1) \neq g(x_2)$，即g是一个单射。

> - g是满射：
>
> 对任意$b \in B$，可以讨论：
>
> > - 若$b \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$，则首先我们有$b \notin D_0 = B \backslash A$，即$b \in A$。于是根据$g$的定义，$g(b) = b$，于是此时$b$总是被映射。
> > - 若$b \in \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$，则$f(b)$也有$f(b) \in \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$，于是$g[f(b)] = f^{-1}[f(b)] = b$，于是此时$b$总是被映射。
>
> 综上，于是对任意$b \in B$，总存在$a \in A$满足$g(a) = b$，于是g是一个满射。
>
> 综上，g是一个双射。

8.3.3 回顾习题3.6.7，称集合A的基数小于或等于集合B的基数，当且仅当存在一个从A到B的单射$f : A \to B$。利用习题8.3.2证明：如果集合A的基数小于或等于集合B的基数，并且集合B的基数也小于或等于集合A的基数，那么A和B有相同的基数（这被称作施罗德—伯恩斯坦定理，该定理以恩斯特·施罗德（1841—1902）和费利克斯·伯恩斯坦（1878—1956）的名字来命名）

> 利用习题8.3.2的证明：
>
> 不妨假设存在A到B的单射$f : A \to B$与从B到A的单射$g : B \to A$。对于这两个单射，我们限制其值域为定义域的像，继承其映射关系，于是可以得到双射$f' : A \to f(A)$与$g' : B \to g(B)$。于是，$f'(A) \subseteq B$是B的子集，此外还有$f'(g(B)) \subseteq f'(A)$是B的子集。然后注意到$f' \circ g' : B \to f'(g(B))$是一个单射，于是即：
>
> $f'(g(B))$，$f'(A)$，B是满足$f'(g(B)) \subseteq f'(A) \subseteq B$的集合，并且存在一个单射$f : B \to f'(g(B))$。于是根据习题8.3.2的结论，有存在双射$h : f'(A) \to f'(g(B))$，从而$f'(A)$与$f'(g(B))$有相同的基数。又由于$f'$与$g'$都是双射，于是$A$与$f'(A)$有相同的基数，$B$，$g(B)$与$f'(g(B))$有相同的基数，综合即$A$与$B$有相同的基数。

8.3.4 如果集合A的基数小于或等于集合B的基数（根据习题3.6.7），但A的基数与B的基数不相同，那么我们称集合A的基数严格小于集合B的基数。证明：对任意的集合X，X的基数都严格小于2^X的基数。同时证明：如果集合A的基数严格小于集合B的基数，且集合B的基数严格小于集合C的基数，那么集合A的基数严格小于集合C的基数

> 证明：对任意的集合X，X的基数都严格小于2^X的基数
>
> X为有限集的情况已在习题8.3.1中有论证（对任意$x \in \mathbb{N}$，总有$2^x \neq x$），于是下面的讨论中只需要讨论X是无限集的情况。
>
> 根据8.3.1康托尔定理，X总是不可能与2^X有相同的基数，于是若能找到一个从X到2^X的单射，即可得证题目结论。考虑下面的函数$f : X \to 2^X$有$f(x) = \{x\}$。显然对任意$x_1 \neq x_2$且$x_1, x_2 \in X$都有$f(x_1) \neq f(x_2)$，于是f是一个单射。
>
> 综上，对任意的集合X，总有X的基数都严格小于2^X的基数。
>
> ---
>
> 证明：如果集合A的基数严格小于集合B的基数，且集合B的基数严格小于集合C的基数，那么集合A的基数严格小于集合C的基数
>
> A的基数严格小于B的基数，于是存在一个从A到B的单射$f : A \to B$且A，B基数不同；B的基数严格小于C的基数，于是存在一个从B到C的单射$g : B \to C$且B，C基数不同。根据习题3.3.2的结论，有$g \circ f : A \to C$是一个单射，这表明A的基数小于等于C，于是考虑A，C基数的关系。

> A，C基数不相等则我们的结论得证，于是讨论若A，C基数相等时的情况。A，C基数相等，则存在一个双射$h : C \to A$。根据双射的性质，有$h(C) = A$，并且$f \circ h : C \to B$是一个单射$\implies C$的基数小于或等于，又$g : B \to C$是单射即B的基数小于等于C。由8.3.2结论，有B的基数等于C的基数，这同B，C基数不同的前提矛盾，于是不可能有A，C基数相等。
>
> 综上，于是有A的基数小于等于C且A，C基数不相等，即A的基数严格小于C的基数。

8.3.5 证明：不存在可数无限的幂集（集合X的幂集就是形如2^X的集合）

> 对任意一个集合X的情况讨论：
>
> - X是有限集：
>
> 根据习题8.3.1的结论，我们有当X的基数为n时，2^X基数为2^n也是有限集，此情况下不存在可数无限的幂集。
>
> - X是可数的无限集：
>
> 则根据康托尔定理，2^X同X基数不同，于是此情况下也不存在可数无限的幂集。
>
> - X是不可数的无限集：
>
> 于是根据选择公理，首先由X是非空的我们可以从X中获取一个元素x_0，然后给出递归定义：
>
> $$x_n := x\text{满足}x \in X \backslash \{x_i : 0 \leq i < n\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
>
> 由于$\{x_i : 0 \leq i < n\}$总是一个有限集，所以$X \backslash \{x_i : 0 \leq i < n\}$总是非空的，从而根据选择公理，上面的定义总是有效的。于是从上面的递归定义中得到了一个集合$X' := \{x_i \in X : i \in \mathbb{N}\}$。显然这个集合是一个可数的无限集，并且存在映射$\tau : X' \to X$有$\tau(x) = x$显然是一个单射。于是可以得到$X'$的基数严格小于$X$的基数，又根据习题8.3.4的结论，$X$的基数总是严格小于$2^X$的基数，综合推断得知$\mathbb{N}$的基数严格小于$2^X$的基数，于是此情景下也不存在是可数无限的幂集。
>
> 综上，不存在可数无限的幂集。

本节相关跳转

[实分析 3.4 象和逆象]

[实分析 3.6 集合的基数]