7.5 根值判别法与比值判别法

命题

1. (7.5.1 根值判别法) 设$\sum\limits_{n=m}^{\infty}a_n$是一个实数级数，并且假设$\alpha=\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}$:

   > - 如果$\alpha<1$，那么级数$\sum\limits_{n=m}^{\infty}a_n$是绝对收敛的（相应的也是条件收敛的）。
   > - 如果$\alpha>1$，那么级数$\sum\limits_{n=m}^{\infty}a_n$不是条件收敛的（相应的也不是绝对收敛的）。
   > - 如果$\alpha=1$，那么给不出任何结论。

2. (7.5.2 级数的相关结论) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个**正数**序列，则有:

   $$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\liminf_{n\to\infty}a_n^{1/n}\le\limsup_{n\to\infty}a_n^{1/n}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

   推论： (7.5.3 比值判别法) 设$\sum\limits_{n=m}^{\infty}a_n$是一个所有项不为0的实数级数，并且假设有$\alpha=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$，则:

   > - 如果$\limsup\limits_{n\to\infty}\alpha<1$，那么级数$\sum\limits_{n=m}^{\infty}a_n$是绝对收敛的（相应的也是条件收敛的）。
   > - 如果$\liminf\limits_{n\to\infty}\alpha>1$，那么级数$\sum\limits_{n=m}^{\infty}a_n$不是条件收敛的（相应的也不是绝对收敛的）。
   > - 其他情况，不给出任何结论。

3. (7.5.4 另一个推论？) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$。

课后习题

7.5.1 证明引理7.5.2中的第一个不等式

> 即证明$\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\liminf\limits_{n\to\infty}a_n^{1/n}$:
>
> 我们令$L:=\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$。我们只需要考虑$L$是实数的情况（对正数序列$L$显然不可能是$+\infty$与$-\infty$）。
>
> 由于L是下极限，于是根据命题6.4.12(a)，对任意$\varepsilon>0$，总存在整数$N\ge m$使得对任意$n\ge N$有$\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge L-\varepsilon$始终成立。于是对任意$n\ge N$，不难归纳可得有$a_n\ge a_N(L-\varepsilon)^{n-N}$始终成立，此时我们令$A=\frac{a_N}{(L-\varepsilon)^N}$，于是即$a_n\ge A(L-\varepsilon)^n$等价于$(a_n)^{\frac{1}{n}}\ge A^{\frac{1}{n}}(L-\varepsilon)$对任意$n\ge N$成立。根据比较原理，此时即有:
>
> $$\liminf_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}\ge\liminf_{n\to\infty}A^{\frac{1}{n}}(L-\varepsilon)$$
>
> 根据命题6.5.3，极限定律与命题6.4.12(f)，我们有:

> $$\lim_{n\to\infty}\inf A^{\frac{1}{n}}(L-\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}A^{\frac{1}{n}}(L-\varepsilon)=L-\varepsilon$$
>
> 从而对任意$\varepsilon>0$我们都有$\lim_{n\to\infty}\inf\,(a_n)^{\frac{1}{n}}\geq L-\varepsilon$成立。
>
> 然后我们使用反证法，我们假设$\lim_{n\to\infty}\inf\,(a_n)^{\frac{1}{n}}<L$，那么存在一个正实数$c$满足$\lim_{n\to\infty}\inf\,(a_n)^{\frac{1}{n}}=L-c$。根据上面的结论，取$\varepsilon=c/2$，于是又有$L-c\geq L-c/2\iff 0\geq c$成立，这同$c>0$的前提矛盾，于是只能有$\lim_{n\to\infty}\inf\,(a_n)^{\frac{1}{n}}\geq L$成立，于是题式得证。

7.5.2 设x是一个满足$|x|<1$的实数，并设q是实数。证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^qx^n$是绝对收敛的，并且$\lim_{n\to\infty}n^qx^n=0$

> 根据比值判别法（命题7.5.3），比值$\alpha=\left|\frac{(n+1)^qx^{n+1}}{n^qx^n}\right|=\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^qx\right|$。于是根据极限定律与命题6.4.12(f)，不难得知：
>
> $$\lim_{n\to\infty}\sup\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^qx\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^qx\right|=|x|$$
>
> 而根据题设有$|x|<1$，于是根据比值判别法，我们有级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^qx^n$绝对收敛。 此时根据命题7.2.9与命题7.2.6零判别法，我们可以由$\sum_{n=1}^{\infty}n^qx^n$条件收敛得到$\lim_{n\to\infty}n^qx^n=0$成立，于是结论得证。

7.5.3 给出一个发散级数$\sum_{n=m}^{\infty}a_n$的例子，其中每一项a_n都是正数并且使得$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n^{1/n}=1$。另外给出一个收敛级数$\sum_{n=m}^{\infty}b_n$的例子，其中每一项都是正数并且使得$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}b_n^{1/n}=1$。（提示：利用推论7.3.7）这表明即使级数的所有项都是正的且所有的极限也都收敛，比值判别法和根值判别法也可能无法判定级数是否收敛

> 发散级数的例子：
>
> 考虑级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$，根据命题6.1.11，命题7.5.4与命题6.1.19我们有：
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}=1$$
>
> 但是根据推论7.3.7，我们知道级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的。
>
> ---
>
> 收敛级数的例子：
>
> 考虑级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，首先根据命题6.1.19，我们有：
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right)^2=1$$

> 此外，根据命题7.5.2，我们有：
>
> $$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{n^2}{(n+1)^2}(=1)\leq\lim_{n\to\infty}\inf(\frac{1}{n^2})^{1/n}\leq\lim_{n\to\infty}\sup(\frac{1}{n^2})^{1/n}\leq\lim_{n\to\infty}\sup\frac{n^2}{(n+1)^2}(=1)$$
>
> 于是根据命题6.4.12，我们由$\lim_{n\to\infty}\inf(\frac{1}{n^2})^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\sup(\frac{1}{n^2})^{1/n}=1$可以得到$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{n}}=1$。
>
> 同时根据推论7.3.7，我们也可以直接得出$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$是收敛的。

本节相关跳转

[实分析 7.3 非负数的和]