10.4 反函数及其导数

命题

1. (10.4.1 反函数的导数？) 设$f:X\to Y$是一个可逆函数，它的反函数为$f^{-1}:Y\to X$，并且设$x_0\in X$与$y_0\in Y$使得$y_0=f(x_0)$（这同时蕴含了$x_0=f^{-1}(y_0)$）。若有f在x_0处是可微的，并且f^{-1}也在y_0处是可微的，那么有：

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

（注：这个引理可以通过链式法则（定理10.1.5）推知；需要注意的是，虽然这个引理看似给出了一个非常简单的反函数微分计算方法，但是它有一个重大的缺陷：必须假定f^{-1}也在y_0处可微，当面对反函数的可微性难以证明时这样的缺陷是致命的，因此我们给出下面条件更加宽松的反函数定理来解决这个问题）

2. (10.4.1 反函数定理) 设$f:X\to Y$是一个可逆函数，它的反函数为$f^{-1}:Y\to X$，并且设$x_0\in X$与$y_0\in Y$使得$y_0=f(x_0)$（这同时蕴含了$x_0=f^{-1}(y_0)$）。若有f在x_0处是可微的，f^{-1}在y_0处是连续的，且$f'(x_0)\neq 0$，那么f^{-1}在y_0处可微，并且有：

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

（注：反函数定理的证明需要用到极限定律与命题9.3.9，在翻回课本前不妨先大致设想一下怎么证明；本节的习题都是关于反函数定理的实际运用）

课后习题

10.4.1 设$n\geq 1$是一个自然数，并且设$g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$是函数$g(x):=x^{1/n}$

(a)证明：g在$(0,+\infty)$上是连续的（提示：利用命题9.8.3）

> 我们知道有g是定义为$f(y)=y^n$的函数$f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$的反函数，并且$f$显然是一个严格单调递增的连续函数，于是根据命题9.8.3，我们有g也是严格单调递增的连续函数。

(b)证明：g在$(0,+\infty)$上是可微的，并且对所有的$x\in(0,+\infty)$均有$g'(x)=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$（提示：利用反函数定理和(a)的结论）

> 接上(a)，根据习题10.1.5的结论，我们知道有f是在$(0,+\infty)$上可微的，并且对任意所有的$y\in(0,+\infty)$均有$f'(y)=ny^{n-1}$，于是根据反函数定理有：
>
> 对任意的$x\in(0,+\infty)$，g在x处是连续的，由于f是在$y=x^{1/n}$处可微的，并且$f'(y)=ny^{n-1}\neq 0$，于是g在x处可微，并且有：
>
> $$g'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{n(x^{(n-1)/n})}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$
>
> 于是结论得证。

10.4.2 设q是一个有理数，并且设$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$是函数$f(x):=x^q$

(a)证明：f在$(0,+\infty)$上是可微的，并且对所有的$x\in(0,+\infty)$均有$f'(x)=qx^{q-1}$（提示：利用习题10.4.1、微分计算（定理10.1.13）与链式法则（定理10.1.15））

> 由于q是有理数，不妨令有$q=a/b$，其中a，$b\in\mathbb{Z}$且$b>0$是一个正整数。于是有：
>
> $$f(x)=x^{\frac{a}{b}}=\left(x^{\frac{1}{b}}\right)^a$$
>
> 于是我们令有函数$g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$与$h:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$分别有$g(y):=y^a$与$h(x):=x^{\frac{1}{b}}$，于是即有$f=g\circ h$。根据习题10.4.1与习题10.1.5的结论，我们知道函数g和h在其定义域上都是可微的，从而根据链式法则可以得到f是在$(0,+\infty)$上可微的，并且对任意$x\in(0,+\infty)$都有：
>
> $$\begin{aligned}f'(x)=&g'(h(x))h'(x)\\=&a\left(x^{\frac{1}{b}}\right)^{a-1}\cdot\frac{1}{b}x^{\frac{1}{b}-1}\\=&\frac{a}{b}x^{\left(\frac{a}{b}-\frac{1}{b}+\frac{1}{b}-1\right)}\\=&qx^{q-1}\end{aligned}$$
>
> 于是结论得证。

(b)证明：$\lim_{x\to1;x\in(0,+\infty)\backslash\{1\}}\frac{x^q-1}{x-1}=q$对任意有理数$q$均成立（提示：利用(a)的结论和定义10.1.1，还有一种方法是使用下一节的洛必达法则，当然在这里由于进度还没到该节因此不推荐这么做）

> 注：本题中原书为证明$\lim_{x\to1;x\in(0,+\infty)}\frac{x^q-1}{x-1}=q$（这在原版和翻译版都是一样的），但是$\frac{x^q-1}{x-1}$在$x=1$处是没有定义的，因此此处个人认为是原书错误，应当将题目改为证明$\lim_{x\to1;x\in(0,+\infty)\backslash\{1\}}\frac{x^q-1}{x-1}=q$。
>
> ---
>
> 接上(a)，根据定义10.1.1与(a)中结论，我们有：
>
> $$\lim_{x\to1;x\in(0,+\infty)-\{1\}}\frac{x^q-1}{x-1}=\lim_{x\to1;x\in(0,+\infty)-\{1\}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=q$$
>
> 于是结论得证。

10.4.3 设α是一个实数，并且设$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$是函数$f(x):=x^\alpha$

(a)证明：$\lim_{x\to1;x\in(0,+\infty)\backslash\{1\}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\alpha$（提示：利用习题10.4.2和比较原理（命题6.4.13），你可能需要分别考虑右极限和左极限，命题5.4.14也会有帮助）

> 要证明$\lim_{x\to1;x\in(0,+\infty)\backslash\{1\}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\alpha$，根据命题9.3.9，这等价于对任意完全由$(0,+\infty)-\{1\}$中元素构成且收敛于1的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，都有$(\delta(a_n))_{n=0}^{\infty}$收敛于$\alpha$（其中$\delta(x):=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$，在下面的证明中我们还会使用到这个简写记号，下面不再重复说明）。
>
> 于是我们考虑任意的实数$\varepsilon>0$，根据命题5.4.14，我们有存在有理数p，q满足：
>
> $$\alpha-\varepsilon<p<\alpha<q<\alpha+\varepsilon$$
>
> 而此时根据命题6.4.13我们有：

$$\frac{x^q-1}{x-1}<\frac{x^\alpha-1}{x-1}<\frac{x^q-1}{x-1}\quad\forall x\in(0,+\infty)-\{1\}$$

而根据习题10.4.3的结论结合命题9.3.9，我们有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n)^q-1}{a_n-1}=q\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n)^p-1}{a_n-1}=p$$

于是根据比较原理与上下极限的性质（命题6.4.12），我们有：

$$\alpha-\varepsilon<p\leq\liminf_{n\to\infty}\delta(a_n)\leq\limsup_{n\to\infty}\delta(a_n)\leq q<\alpha+\varepsilon$$

该结论对任意的实数$\varepsilon>0$都成立，从而可以推知有：

$$\liminf_{n\to\infty}\delta(a_n)=\limsup_{n\to\infty}\delta(a_n)=\alpha$$

由于上下极限相等，根据命题6.4.12即有极限$\lim\limits_{n\to\infty}\delta(a_n)=\alpha$，从而我们得证对任意完全由$(0,+\infty)-\{1\}$中元素构成且收敛于1的序列$(a_n)_{n=0}^\infty$，都有$(\delta(a_n))_{n=0}^\infty$收敛于$\alpha$，从而有$\lim\limits_{x\to1;x\in(0,+\infty)\backslash\{1\}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\alpha$成立，结论得证。

(b)证明：f在$(0,+\infty)$上是可微的，并且$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ （提示：利用(a)的结论、指数运算定律（命题6.7.3）以及定义10.1.1)

即要证明：对所有的$x_0\in(0,+\infty)$，都有：

$$\lim_{x\to x_0;x\in(0,+\infty)-\{x_0\}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\alpha {x_0}^{\alpha-1}$$

若考虑到命题9.3.9，这等价于证明对任意完全由$(0,+\infty)-\{x_0\}$中元素构成且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^\infty$，都有$(\delta(a_n))_{n=0}^\infty$收敛于$\alpha {x_0}^{\alpha-1}$，（其中$\delta(x):=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，在下面的证明中我们还会使用到这个简写记号，下面不再重复说明）。

然后注意到：

$$\begin{aligned}\delta(x)=&\frac{x^\alpha-{x_0}^\alpha}{x-x_0}\\=&{x_0}^\alpha\frac{(x/x_0)^\alpha-1}{(x/x_0)-1}\\=&{x_0}^\alpha\delta'(x)\qquad\left[\delta'(x):=\frac{(x/x_0)^\alpha-1}{(x/x_0)-1}\right]\end{aligned}$$

而后根据序列的极限定律，有序列$(a_n/x_0)_{n=0}^\infty$收敛于1，于是根据(a)中结论，即有序列$(\delta'(a_n))_{n=0}^\infty$收敛于$\alpha$，于是根据序列的极限定律有序列$(\delta(a_n))_{n=0}^\infty$收敛于$\alpha {x_0}^{\alpha-1}$。

于是综上即对任意完全由$(0,+\infty)-\{x_0\}$中元素构成且收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^\infty$，都有$(\delta(a_n))_{n=0}^\infty$收敛于$\alpha {x_0}^{\alpha-1}$，于是结论得证。

本节相关跳转

实分析 5.4 对实数排序

实分析 6.4 上极限、下极限和极限点

实分析 6.7 实数的指数运算 II

[实分析 9.3 函数的极限值]

[实分析 9.8 单调函数]

[实分析 10.1 基本定义]

[实分析 10.5 洛必达法则]