14.7 一致收敛和导数

摘录

1. (一致连续保持导数，吗？) 在前面几节中我们已经了解到一致收敛能够很好地保持连续性，极限以及积分，因此很自然地我们会设想一致连续是否也能保持导数，具体来说即：如果f_n一致收敛于f，并且f_n都是可微的，那么这是否意味着：

    1. f也是可微的。
    2. f_n'也收敛于f'。

    但是对于第二个想法，很遗憾，答案是否定的。这里给出一个反例：考虑定义为$f_n(x) := n^{-1/2}\sin(nx)$的函数$f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$，并且设$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$是零函数$f(x) := 0$。显然我们可以计算有$d_\infty(f_n, f) = n^{1/2}$显然是收敛于0的，于是我们可以知道$f_n$是一致收敛于$f$的。但是注意到$f_n'(x) = n^{-1/2}\cos(nx)$，于是$d_\infty(f_n, f) \geq |f_n'(0) - f'(0)| = n^{1/2}$显然$f_n'$不是一致收敛于$f'$的。于是我们很遗憾的得到了

    $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$$

    而对第一个想法，很遗憾，答案还是否定的。依旧给出一个反例：考虑定义为$f_n(x) := \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$的函数$f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$的序列。这个序列中的函数都是可微的。并且不难检验对任意$x \in [-1, 1]$都有$|x| \leq f_n(x) \leq |x| + \frac{1}{n}$，于是根据夹逼定理显然可以得到$f_n$一致收敛于绝对值函数$|x|$，但是$|x|$在0处不可微。

    虽然上面的两个想法都非常遗憾的不能成立，但是我们仍然能够找到在某些条件下一致收敛与导数之间的关系。例如，在导函数序列f_n'一致收敛的前提下，如果给出原函数序列f_n在某点的逐点收敛性，那么我们就可以给出f_n的一致收敛性，并且此情景下成立第二个想法。

2. (魏尔斯特拉斯级数) 在这里我们给出一个**连续但不可微**的函数例子来破灭对可微与连续等价的幻想，这个特别的例子是由魏尔斯特拉斯发现的。在这个例子中，我们预先假设已经具备了三角函数的相关知识。考虑函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$为

    $$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}\cos(32^n\pi x)$$

    根据魏尔斯特拉斯M判别法，我们知道该级数是一致收敛的；因为每一个函数$4^{-n}\cos(32^n\pi x)$都是连续的，因此f也是连续的；但是f是不可微的 (参见习题15.7.10) ，事实上f是在定义域上**处处不可微**的。

命题

1. (14.7.1) 设$[a, b]$是一个区间。对于任意的整数$n \geq 1$，设$f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$是一个可微函数，并且其导函数$f_n' : [a, b] \to \mathbb{R}$是连续的。如果导函数序列$f_n'$一致收敛于函数$g : [a, b] \to \mathbb{R}$，并且存在一点$x_0$使得极限$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$存在，那么函数序列$f_n$就**一致收敛**于某个可微函数$f$，并且$f$的导函数是$g$。

    (注：这个定理表明：如果f_n'是一致收敛的，并且在某个x_0处$f_n(x_0)$收敛（也就是说f_n在x_0处逐点收敛），那么f_n也是一致收敛的，并且有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$；并且事实上，其实不假定$f_n'$是连续函数时这个结论依然成立，这点参考习题14.7.2)

    > 推论：
    >
    > 1. (14.7.3) 设$[a, b]$是一个区间。对于任意的整数$n \geq 1$，设$f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$是一个可微函数，并且其导函数$f_n' : [a, b] \to \mathbb{R}$是连续的。如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n'\|_\infty$是绝对收敛的，并且存在一点$x_0$使得极限$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$收敛，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$在$[a, b]$上一致收敛于某个可微函数，并且对于所有的$x \in [a, b]$，实际上都有：
    >
    > $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$$

课后习题

14.7.1 跟着原书的证明过程，补全定理14.7.1剩下的证明。把这个定理与例12.2.10进行比较，解释为什么这个例子不和定理矛盾

> 注释：我真的不知道例12.2.10是哪个...原书12.2.10是一个命题...
>
> ---
>
> 在原书中我们已经定义了函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$有
>
> $$f(x):=L-\int_{[a,x_0]}g+\int_{[a,x]}g$$
>
> 然后我们来证明f_n一致收敛于f与f的导数是g。
>
> 对任意的$\varepsilon>0$，由于f_n'是一致收敛于g的，因此存在一个$N>0$使得对任意$n\geq N_1$都有$d_\infty(f_n',g)<\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$。于是即：
>
> $$\forall\, x\in[a,b],|f_n'(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$
>
> 然后由于$L=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)$，于是存在某个$N_2>0$使得对任意$n\geq N_2$都有$|f_n(x_0)-L|<\varepsilon/3$。于是取$N:=\max(N_1,N_2)$，对任意$x\in X$与任意$n\geq N$，使用微积分第二基本定理可以计算有：
>
> $$\begin{aligned}|f(x)-f_n(x)|&=\left|L-\int_{[a,x_0]}g+\int_{[a,x]}g-(f_n(x)-f_n(a)+f_n(a)-f_n(x_0)+f_n(x_0))\right|\\&=\left|L-\int_{[a,x_0]}g+\int_{[a,x]}g-\left(\int_{[a,x]}f_n'-\int_{[a,x_0]}f_n'+f_n(x_0)\right)\right|\\&\leq|L-f_n(x_0)|+\left|\int_{[a,x]}g-\int_{[a,x]}f_n'\right|+\left|\int_{[a,x_0]}g-\int_{[a,x_0]}f_n'\right|\\&\leq|L-f_n(x_0)|+\int_{[a,x]}|g-f_n'|+\int_{[a,x_0]}|g-f_n'|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(x-a)+\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(x_0-a)\\&\leq\varepsilon\end{aligned}$$
>
> 于是综合即有：对任意的$\varepsilon>0$都存在$N>0$，对任意$n\geq N$与任意$x\in[a,b]$都有$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$。于是根据一致收敛的定义即有$f_n$在$[a,b]$上一致收敛于$f$。
>
> 对于证明f的导数是g，注意到由于f_n'一致收敛于g且f_n'都是连续的，于是根据命题14.3.2我们知道g也是连续的。然后根据微积分第一基本定理和g的连续性我们可以直接得到f的导数是g。
>
> 综上，于是证明完毕。

14.7.2 不假设f_n'是连续函数，证明定理14.7.1（提示：于是我们无法使用[微积分基本定理]，但是仍可以使用[平均值定理（推论10.2.9）]。利用该定理证明若$\sup\limits_{x\in X}|f_n'(x)-f_m'(x)|\leq\varepsilon$，则对所有的$x\in[a,b]$都有$|(f_n(x)-f_m(x))-(f_n(x_0)-f_m(x_0))|\leq\varepsilon|x-x_0|$。然后利用这个结论完成定理14.7.1的证明）

> 勘误：因为没有办法确认导函数的有界性，因此$d_\infty(f_n',f_m')\leq\varepsilon$应该改为$\sup\limits_{x\in X}|f_n'(x)-f_m'(x)|\leq\varepsilon$（尽管这实际上是个没那么容易发觉的错误，笔者还是看了陶本人的博客才知道的）
>
> ---
>
> 我们先证明提示里面的辅助结论：
>
> > 结论：对任意的$\varepsilon>0$，存在$N>0$使得对任意的i，$j\geq N$都有$|(f_i(x)-f_j(x))-(f_i(x_0)-f_j(x_0))|\leq\varepsilon|x-x_0|$对全部$x\in[a,b]$成立。
> >
> > 证明：

> 由于f_n'是一致收敛于g的，因此对任意的$\varepsilon>0$，存在$N>0$使得对任意的$n\geq N$与$x\in[a,b]$都有$|f_n'(x)-g(x)|<\varepsilon/2$，从而对任意的$i$，$j\geq N$根据三角不等式我们有$|f_i'(x)-f_j'(x)|\leq|f_i'(x)-g(x)|+|g(x)-f_j'(x)|<\varepsilon$对全部$x\in[a,b]$都成立，也即有$\sup\limits_{x\in X}|f_i'(x)-f_j'(x)|\leq\varepsilon$。
>
> 于是考虑任意的$\varepsilon>0$，我们知道存在$N>0$使得对任意i，$j\geq N$与任意的$x\in[a,b]$有$|f_i'(x)-f_j'(x)|<\varepsilon$。于是考虑函数$f_i-f_j$，根据题设我们知道$f_i-f_j$是在$[a,b]$上的可微函数并且其导函数为$f_i'-f_j'$。然后根据平均值定理，我们有：
>
> 1. 若有$x>x_0$：
>
> > 则此时存在$\xi\in(x_0,x)$（也即有$\xi\in[a,b]$）有：
> > $$\begin{aligned}\frac{(f_i-f_j)(x)-(f_i-f_j)(x_0)}{x-x_0}&=f_i'(\xi)-f_j'(\xi)\\ \Longrightarrow(f_i(x)-f_j(x))-(f_i(x_0)-f_j(x_0))&=(f_i'(\xi)-f_j'(\xi))(x-x_0)\end{aligned}$$
>
> 2. 若有$x<x_0$：
>
> > 则此时存在$\xi\in(x,x_0)$（也即有$\xi\in[a,b]$）有：
> > $$\begin{aligned}\frac{(f_i-f_j)(x)-(f_i-f_j)(x_0)}{x-x_0}&=f_i'(\xi)-f_j'(\xi)\\ \Longrightarrow(f_i(x)-f_j(x))-(f_i(x_0)-f_j(x_0))&=(f_i'(\xi)-f_j'(\xi))(x-x_0)\end{aligned}$$
>
> 然后注意到由于i，$j>N$有对任意的$x\in[a,b]$有$|f_i'(x)-f_j'(x)|<\varepsilon$，于是我们可以对任意的$x\in[a,b]\backslash\{x_0\}$作下面的推断：
>
> $$|(f_i(x)-f_j(x))-(f_i(x_0)-f_j(x_0))|=|f_i'(\xi)-f_j'(\xi)||x-x_0|\leq\varepsilon|x-x_0|$$
>
> 并且注意到还可以验证对$x=x_0$时有：
>
> $$|(f_i(x)-f_j(x))-(f_i(x_0)-f_j(x_0))|=0\leq\varepsilon|x-x_0|$$
>
> 于是即对任意的$x\in[a,b]$都有$|(f_i(x)-f_j(x))-(f_i(x_0)-f_j(x_0))|\leq\varepsilon|x-x_0|$。

然后下面开始正式的证明。

先证明存在函数f使得f_n一致收敛于f。

考虑任意的$\varepsilon>0$。一方面，由于极限$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)$存在，因此根据命题12.4.7有$(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$是$\mathbb{R}$中的柯西序列，于是存在$N_1>0$使得对任意$i$，$j\geq N_1$都有$|f_i(x_0)-f_j(x_0)|<\varepsilon/2$；另一方面，根据辅助结论存在$N_2>0$使得对任意$i$，$j\geq N_2$与任意的$x\in[a,b]$都有$|(f_i(x)-f_j(x))-(f_i(x_0)-f_j(x_0))|\leq\dfrac{\varepsilon|x-x_0|}{2(b-a)}\leq\varepsilon/2$。于是令$N:=\max(N_1,N_2)$，然后对任意的$x\in[a,b]$与任意的$i$，$j\geq N$可以计算有：

$$\begin{aligned}\forall\,x\in[a,b],|f_i(x)-f_j(x)|&\leq|(f_i(x_0)-f_j(x_0))-(f_i(x)-f_j(x))|+|f_i(x_0)-f_j(x_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

于是ε是集合$\{|f_i(x)-f_j(x)|:x\in[a,b]\}$的一个上界，即有$d_\infty(f_i,f_j)=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_i(x)-f_j(x)|<\varepsilon$。从而总结上面的讨论有：

> 对任意$\varepsilon>0$，存在$N>0$使得对任意i，$j\geq N$都有$d_\infty(f_i,f_j)<\varepsilon$。

于是上面我们证明了$(f_n)_{n=1}^{\infty}$是一个柯西序列，注意到由于f_n（$n\geq1$）都是有界连续函数，因此$(f_n)_{n=1}^{\infty}$是$C([a,b]\to\mathbb{R})$中的一个柯西序列，然后根据$C([a,b]\to\mathbb{R})$的完备性（命题14.4.5）我们可以得到必然存在某个有界连续的函数f使得$(f_n)_{n=1}^{\infty}$依L^∞度量收敛于f，也即f_n一致收敛于f。

然后我们证明f是可微的并且f的导函数就是g。

注意到辅助结论的证明事实上只依赖于在x_0处的逐点收敛性，而由于f_n一致收敛于f因此f_n在任意$c\in[a,b]$处都逐点收敛于f，从而辅助结论中将x_0替换为任意的$c\in[a,b]$都是成立的。然后考虑任意的$c\in[a,b]$，我们尝试证明下面的结论：

> > 结论：对任意的$\varepsilon > 0$，存在$N > 0$使得对任意的$n \geq N$都有
> > $|(f_n(x) - f(x)) - (f_n(c) - f(c))| \leq \varepsilon|x - c|$对全部$x \in [a, b]$成立。
> >
> > 证明：
> >
> > 根据辅助结论我们知道存在$N > 0$使得任意n，$m \geq N$都有
> > $|(f_n(x) - f(x)) - (f_n(c) - f(c))| \leq \varepsilon|x - c|$对任意$x \in [a, b]$成立；又因为$f_n$一致收敛于$f$，因此对任意的$\delta > 0$，总是存在一个$M_\delta > 0$使得对任意$m > M_\delta$都有$d_\infty(f_m, f) < \delta$，也即对任意的$x \in [a, b]$都有
> > $|f_m(x) - f(x)| < \delta$为真。
> >
> > 于是考虑任意的$n \geq N$，对任意的$\delta > 0$我们设$m := N + M_\delta$，显然m同时大于N与M_δ。此时根据三角不等式有：
> >
> > $$\begin{aligned} |(f_n(x) - f(x)) - (f_n(c) - f(c))| &\leq |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(c) - f_m(c))| + |f_m(x) - f(x)| + |f_m(c) - f(c)| \\ &< \varepsilon|x - c| + 2\delta \end{aligned}$$
> >
> > 注意到δ是任意选取的任意小正实数，因此从上面的结论我们可以引申得到：
> >
> > $$|(f_n(x) - f(x)) - (f_n(c) - f(c))| \leq \varepsilon|x - c|$$
> >
> > 也就是我们希望证明的结论。
>
> 然后我们定义从$[a, b]\backslash\{c\}$到$\mathbb{R}$的函数$F(x) := \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$，并对任意的$n > 0$定义
> $F_n(x) := \dfrac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}$。根据上面证明的结论对任意的$\varepsilon > 0$，存在$N > 0$使得对任意$x \in [a, b]\backslash\{c\}$与任意$n \geq N$有：
>
> $$|(f_n(x) - f(x)) - (f_n(c) - f(c))| \leq \varepsilon|x - c| \iff \left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}\right| \leq \varepsilon$$
>
> 也即$|F(x) - F_n(x)| \leq \varepsilon$，从而根据一致收敛的定义我们可以得到$F_n$一致收敛于$F$。注意到对任意的$n > 0$，极限
>
> $$\lim_{x \to c; x \in [a,b]\backslash\{c\}} F_n(x) = \lim_{x \to c; x \in [a,b]\backslash\{c\}} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} = f_n'(c)$$
>
> 存在，此时根据命题14.3.3我们有：
>
> $$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to c; x \in [a,b]\backslash\{c\}} F_n(x) = \lim_{x \to c; x \in [a,b]\backslash\{c\}} \lim_{n \to \infty} F_n(x)$$
>
> 然后化简有：
>
> $$\begin{aligned} \lim_{x \to c; x \in [a,b]\backslash\{c\}} \lim_{n \to \infty} F_n(x) &= \lim_{x \to c; x \in [a,b]\backslash\{c\}} F(x) \\ &= \lim_{x \to c; x \in [a,b]\backslash\{c\}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &= f'(c) \\ \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to c; x \in [a,b]\backslash\{c\}} F_n(x) &= \lim_{n \to \infty} f_n'(c) \\ &= g(c) \end{aligned}$$
>
> 于是根据导数定义即对任意的$c \in [a, b]$都有f在c处可微并且$f'(c) = g(c) \implies f$的导函数是g。从而我们证明了f是可微的并且f的导函数是g。
>
> 综上，于是我们证明了即使不假定f_n'是连续函数定理14.7.1依旧成立。

14.7.3 证明推论14.7.3

> 根据魏尔斯特拉斯M判别法，由级数$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n'\|_{\infty}$是收敛的我们可以得到无限级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n'$一致收敛于某个函数$f$的。特别地，根据导数的运算法则（命题10.1.13(c)）与题设（对于任意的整数$n\geq 1$有f_n是一个可微函数）我们可以归纳得到对任意的$N\geq 1$都有部分和$\sum_{n=1}^{N}f_n$是可微的并且它的导函数为$\sum_{n=1}^{N}f_n'$，然后根据命题9.4.9与题设（对于任意的整数$n\geq 1$有f_n'是一个连续函数）我们可以归纳得到$\sum_{n=1}^{N}f_n'$还是连续的。于是我们此时注意到题设表明有：
>
> 对任意的$N\geq 1$都有部分和$\sum_{n=1}^{N}f_n$都是在$[a,b]$上可微的，并且它的导函数$\sum_{n=1}^{N}f_n'$是在$[a,b]$上连续的；此外部分和序列$\sum_{n=1}^{N}f_n'$是在$[a,b]$上一致收敛某个函数f的；并且有存在某个一点x_0使得极限$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}f_n\right)(x_0)$收敛。
>
> 于是根据定理14.7.1，我们知道存在某个可微函数F使得部分和序列$\sum_{n=1}^{N}f_n$在$[a,b]$上一致收敛于F（即$\sum_{n=1}^{\infty}f_n=F$），并且F的导函数是f，于是即有：
>
> $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F=f \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}f_n=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n$$
>
> 也即对任意的$x\in[a,b]$都有：
>
> $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$$
>
> 于是推论14.7.3得证。

本节相关跳转

[实分析 10.2 局部最大值、局部最小值以及导数]

[实分析 11.9 微积分的两个基本定理]