

11.2 分段常数函数

定义

1. (11.2.1 常数函数) 设 X 是 \mathbb{R} 的子集, 并且设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数。我们称 f 是**常数函数**, 当且仅当存在一个实数 c 使得对所有的 $x \in X$ 均有 $f(x) = c$ 。设 E 是 X 的一个子集, 如果 f 在 E 上的限制函数 $f|_E$ 是常数函数 (即存在一个实数 c 使得对任意 $x \in E$ 均有 $f(x) = c$), 则我们称 f 在 E 上是**常值的**, 并将 c 称为 f 在 E 上的**常数值**。

(注: 如果 E 是一个非空的集合并且 f 在 E 上是常值的, 那么 f 的常数值必然是唯一的, 例如 f 不可能在 E 上始终等于 3 又等于 4 (回忆下垂线测试)。然而, 如果 E 是空集, 那么每一个实数 c 都是 f 在 E 上的常数值)

2. (11.2.3 分段常数函数I) 设 I 是一个有界区间, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数, 并且设 P 是 I 的一个划分。若有对任意的 $J \in P$, f 在 J 上都是常值的, 那么我们称 f 是**关于 P 的分段常数函数**。

(注: 需要注意这个分段常数函数的定义依赖于一个指定的划分)

3. (11.2.5 分段常数函数II) 设 I 是一个有界区间, 并且设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数, 如果存在一个 I 的划分 P 使得 f 是关于 P 的分段常数函数, 那么我们称 f 是 **I 上的分段常数函数**。

4. (11.2.9 分段常值积分I) 设 I 是一个有界区间, P 是 I 的一个划分, 并且设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是关于 P 的分段常数函数。那么我们定义 f 关于划分 P 的**分段常值积分** $p. c. \int_{[P]} f$ 是:

$$p. c. \int_{[P]} f := \sum_{J \in P} c_J |J|$$

其中对任意 $J \in P$, 我们令有 c_J 为 f 在 J 上的常数值。

(注: 关于这个定义, 首先让人容易联想到的就是当划分中存在空集时, c_J 的值是不固定的, 但是在前面的定义中我们也知道 J 为空时其长度 $|J|$ 为 0, 从而这样的定义又是没有问题的; 此外还需要注意的是, 由于划分 P 是一个有限的集合, 因此分段常值积分作为一个有限和总是有意义的, 不存在发散或者无限大的可能; 最后这个符号只是一个临时的定义, 为的是引出一个更有用的定义获得区间上的分段常值积分; 至于记号的意义, 我想应该是取 piecewise constant integral 的前两个单词首字母再加上我们所熟知的积分号得到的)

5. (11.2.14 分段常值积分II) 设 I 是一个有界区间, 并且设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是 I 上的分段常数函数。那么我们定义 f 的**分段常值积分** $p. c. \int_I f$ 是:

$$p. c. \int_I f := p. c. \int_{[P]} f$$

其中 P 是 I 的任意一个使得 f 是关于 P 的分段常数函数的划分。

(注: 命题 11.2.13 告诉我们划分的选取是无关紧要的)

命题

1. (11.2.7) 设 I 是一个有界区间, P 是 I 的一个划分, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是关于 P 的分段常数函数, 并且设 P' 是一个比 P 更细的划分, 那么 f 也是关于 P' 的分段常数函数。

2. (11.2.8 函数的运算保持分段常数函数?) 设 I 是一个有界区间, 并且设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 与 $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ 都是 I 上的分段常数函数, 那么函数 $f+g$, $f-g$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ 以及 fg 也都是 I 上的分段常数函数。如果有 g 在 I 中任何位置都不为 0 (即对所有的 $x \in I$ 都有 $g(x) \neq 0$), 那么 f/g 也都是 I 上的分段常数函数。
3. (11.2.13 分段常值积分是独立于划分的) 设 I 是一个有界区间, 并且设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数。如果 P 和 P' 都是 I 的划分, 并且 f 关于 P 和 P' 都是分段常值函数, 那么有 $p.c. \int_{[P]} f = p.c. \int_{[P']} f$ 。
4. (11.2.16 积分定律) 设 I 是一个有界区间, 并且设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 与 $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ 都是 I 上的分段常数函数, 那么有下面的命题成立:

1. $p.c. \int_I (f+g) = p.c. \int_I f + p.c. \int_I g$ 。
2. 对任意的实数 c , 有 $p.c. \int_I (cf) = c \cdot \left(p.c. \int_I f \right)$ 。
3. $p.c. \int_I (f-g) = p.c. \int_I f - p.c. \int_I g$ 。
4. 如果对所有的 $x \in I$ 均有 $f(x) \geq 0$, 那么 $p.c. \int_I f \geq 0$ 。
5. 如果对所有的 $x \in I$ 均有 $f(x) \geq g(x)$, 那么 $p.c. \int_I f \geq p.c. \int_I g$ 。
6. 设 J 是一个包含 I 的有界区间 (即 $I \subseteq J$), 并且设 $F: J \rightarrow \mathbb{R}$ 是函数:

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in I \\ 0 & \text{if } x \notin I \end{cases}$$

那么 F 是 J 上的分段常数函数, 并且 $p.c. \int_J F = p.c. \int_I f$ 。

7. 如果 $\{J, K\}$ 是 I 的一个划分, 它将 I 分成两个区间 J 和 K , 那么函数 $f|_J: J \rightarrow \mathbb{R}$ 与 $f|_K: K \rightarrow \mathbb{R}$ 分别是 J 上和 K 上的分段常数函数, 并且:

$$p.c. \int_I f = p.c. \int_J f|_J + p.c. \int_K f|_K$$

(注: 这些基本性质最终将被黎曼积分的相关定律 (定理11.4.1) 取代)

课后习题

11.2.1 证明引理11.2.7

由于 P' 是比 P 更细的一个划分, 从而对任意区间 $J \in P'$, 都存在一个 $K \in P$ 使得 $J \subseteq K$ 。又因为 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是关于 P 的分段常数函数, 所以对任意 $K \in P$, f 在 K 上都是常值的, 不妨设 f 在 K 上的常数值为 c_K 。

于是对任意 $J \in P'$, 我们有对任意 $x \in J$, 都有存在一个 $K \in P$ 使得 $x \in K$; 再结合 f 在 K 上都是常值的, 于是有 $f(x) = c_K$ 。综合即对任意 $J \in P'$, f 在 J 上都是常值的, 因此 f 是关于 P' 的分段常数函数。

11.2.2 证明引理11.2.8 (提示: 利用引理11.1.18和引理11.2.7, 使得 f 和 g 是关于 I 的同一个划分的两个分段常数函数)

根据定义11.2.5, 我们不妨设 f 是在关于划分 P_1 的分段常数函数, g 是关于划分 P_2 的分段常数函数, 其中 P_1, P_2 都是 I 的划分。根据引理11.2.7与命题11.1.18, 我们可以得到 f 和 g 都是在关于公共加细 $P_1 \# P_2$ 的分段常数函数。

于是我们可以对任意的 $X \in P_1 \# P_2$, 我们记有 f 在 X 上的常数值为 $f \cdot c_X$, g 在 I 上的常数值为 $g \cdot c_X$, 可以讨论有:

- $f + g$: 对任意 $x \in X$ 我们应该有 $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f \cdot c_X + g \cdot c_X$ 。
- $f - g$: 对任意 $x \in X$ 我们应该有 $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = f \cdot c_X - g \cdot c_X$ 。
- $\max(f, g)$: 对任意 $x \in X$ 我们应该有 $(\max(f, g))(x) = \max(f(x), g(x)) = \max(f \cdot c_X, g \cdot c_X)$ 。
- $\min(f, g)$: 对任意 $x \in X$ 我们应该有 $(\min(f, g))(x) = \min(f(x), g(x)) = \min(f \cdot c_X, g \cdot c_X)$ 。
- fg : 对任意 $x \in X$ 我们应该有 $(fg)(x) = f(x)g(x) = f \cdot c_X \cdot g \cdot c_X$ 。
- f/g : 对任意 $x \in X$ 我们应该有 $(f/g)(x) = f(x)/g(x) = f \cdot c_X / g \cdot c_X$ 。(这一个证明需要用到对任意 $x \in I$ 都有 $g(x) \neq 0$ 的前提才能保证始终有意义)

于是可以看到函数 $f + g, f - g, \max(f, g), \min(f, g)$ 以及 fg 都在 X 上是常值的, 即有它们都是关于划分 $P_1 \# P_2$ 的分段常数函数; 如果有 g 在 I 中任何位置都不为0, 那么 f/g 也是在 X 上是常值的, 即它也是关于划分 $P_1 \# P_2$ 的分段常数函数。

又由于 $P_1 \# P_2$ 是 I 的划分, 因此上面的结论可以根据定义11.2.5引申为:

函数 $f + g, f - g, \max(f, g), \min(f, g)$ 以及 fg 都是 I 上的分段常数函数, 并且如果有 g 在 I 中任何位置都不为0, 那么 f/g 也是 I 上的分段常数函数。

这也正是引理11.2.8的结论, 证明完毕。

11.2.3 证明命题11.2.13 (提示: 首先利用定理11.1.13证明两个积分都等于 $p. c. \int_{[P \# P']} f$)

我们先证明一个辅助结论1:

设 I 是一个有界区间, P, P' 都是 I 的划分并且 P' 比 P 更细, 那么对任意非空区间 $K \in P$, 集合

$$S_K := \{J \in P' : J \subseteq K \text{ 且 } J \neq \emptyset\}$$

是 K 的一个划分。并且有:

$$\bigcup_{K \in P; K \neq \emptyset} S_K = \{J \in P' : J \neq \emptyset\}$$

证明:

很显然 S_K 是包含有限个(S_K 是 P' 子集, 基数不会超过 P' 的基数)区间(P' 是划分, 因此其元素都是区间)的集合, 并且其中任意一个区间都是包含于 K 的, 于是对照定义11.1.10, 我们只需要证明对任意 $x \in K$, 都恰好存在一个 $J \in S_K$ 使得 $x \in J$ 。

由于 P 是一个划分, 因此对任意 $x \in K$, K 应当是 P 中唯一包含 x 的集合, 并且应当有 $x \in I$; 由于 P' 也是 I 的划分, 因此恰好存在唯一 $J \in P'$ 使得 $x \in J$; 由于 P' 比 P 更细, 因此存在 $K' \in P$ 使得 $J \subseteq K'$, 从而有 $x \in K'$ 。但是在前面的讨论中我们知道 K 应当是 P 中唯一包含 x 的集合, 于是只能有 $K' = K$, 即 $J \subseteq K$ 。

综上所述我们知道对任意 $x \in K$, 都存在唯一 $J \in P'$ 且使得同时满足 $J \subseteq K$ 与 $x \in J$ 成立, 这同时隐含了 $J \neq \emptyset$ 的结论, 因此我们有 $J \in S_K$; 并且由于 S_K 是 P' 的子集, 因此 J 也应当是 S_K 中唯一满足 $x \in J$ 的区间 (否则就会导出 J 不是 P' 中唯一包含 x 的区间的矛盾结论)。

于是综上, 结论得证, 我们有对任意非空区间 $K \in P$, S_K 是 K 的一个划分。

然后对任意非空区间 $J \in P'$, 由于 P' 比 P 更细, 所以存在一个 $K \in P$ 使得 $J \subseteq K$, 从而有 $J \in S_K \implies J \in \bigcup_{K \in P; K \neq \emptyset} S_K$; 反过来, 对任意 $J \in \bigcup_{K \in P; K \neq \emptyset} S_K$, 存在一个非空区间 $K \in P$ 使得 $J \in S_K$, 于是根据 S_K 定义有 $J \in P'$ 且 J 非空, 因此 J 属于集合 $\{J \in P' : J \neq \emptyset\}$ 。从而根据集合相等的定义有 $\bigcup_{K \in P; K \neq \emptyset} S_K = \{J \in P' : J \neq \emptyset\}$ 。

然后证明一个辅助结论2, 通过这个结论我们可以很轻松地得证命题11.2.13:

设 I 是一个有界区间, P, P' 都是 I 的划分并且 P' 比 P 更细, f 是关于 P 的分段常数函数 (因此根据引理11.2.7 f 也是关于 P' 的分段常数函数)。那么有:

$$p. c. \int_{[P]} f = p. c. \int_{[P']} f$$

证明:

根据定义11.2.9, 我们有:

$$p. c. \int_{[P]} f = \sum_{K \in P} c_K |K|$$

其中对任意 $K \in P$, 我们令有 c_K 为 f 在 K 上的常数值。然后使用辅助结论1, 定理11.1.13与 $|\emptyset| = 0$ 我们可以化简有:

$$\begin{aligned} \sum_{K \in P} c_K |K| &= \sum_{K \in P; K \neq \emptyset} c_K |K| + \sum_{K \in P; K = \emptyset} c_K |K| \\ &= \sum_{K \in P; K \neq \emptyset} \left[c_K \sum_{J \in S_K} |J| \right] + 0 \\ &= \sum_{K \in P; K \neq \emptyset} \left[\sum_{J \in S_K} c_K |J| \right] \end{aligned}$$

又考虑到对任意非空区间 $K_1, K_2 \in P$, S_{K_1} 与 S_{K_2} 都是不相交的, 于是根据有限和的加和公式与辅助结论1, 上面的式子可以化为:

$$\begin{aligned} \sum_{K \in P; K \neq \emptyset} \left[\sum_{J \in S_K} c_K |J| \right] &= \sum_{J \in \bigcup_{K \in P; K \neq \emptyset} S_K} c_{K(J)} |J| \\ &= \sum_{J \in P'; J \neq \emptyset} c_{K(J)} |J| \end{aligned}$$

这里我们令有 $c_{K(J)}$ 为 f 在 K 上的常数值, 其中 $K \in P$ 满足 $J \in S_K$ 成立, 显然这种指定是唯一的。考虑到 $J \in S_K$ 表明 $J \subseteq K$, 于是由于 f 在 K 上是常值的可以推知 f 在 K 的子集 J 上也是常值的, 并且它们的常数值相同, 于是上面的式子又可以化为:

$$\sum_{J \in P'; J \neq \emptyset} c_{K(J)} |J| = \sum_{J \in P'; J \neq \emptyset} c_J |J|$$

其中对任意 $J \in P'$, 我们令有 c_J 为 f 在 J 上的常数值。根据定义, 上式右端就是 $p. c. \int_{[P']} f$, 于是结论得证。

最后我们来证明命题11.2.13:

证明:

我们知道公共加细 $P \# P'$ 是比 P 和 P' 都要更细的划分, 因此根据辅助结论2, 我们有:

$$p. c. \int_{[P]} f = p. c. \int_{[P \# P']} f = p. c. \int_{[P']} f \implies p. c. \int_{[P]} f = p. c. \int_{[P']} f$$

于是命题11.2.13得证。

11.2.4 证明定理11.2.16 (提示: 你可以利用定理前面的部分证明定理后面的内容, 也可以参考习题11.2.2的提示)

由于命题11.2.13的结论, 我们知道分段常数积分的值同划分的选取无关, 于是若 f 的分段常数积分是关于 P_1 的, g 的分段常数积分是关于 P_2 的, 我们也能根据命题11.2.13将它们的等效替换为关于 $P_1 \# P_2$ 的分段常数积分。故在下面的讨论中, 对于涉及到 f 与 g 两个函数的命题我们将在 I 上的分段常数积分统一转变为关于划分 P 的分段常数积分 (其中划分 P 是 I 的一个划分, 并且满足 f 和 g 都是关于划分 P 的分段常数函数)。

然后我们令 h_i 表示函数 h 在区间 i 上的常数值, 下面逐条给出证明:

$$1. p. c. \int_I (f + g) = p. c. \int_I f + p. c. \int_I g.$$

即证明:

$$\sum_{J \in P} (f + g)_J |J| = \sum_{J \in P} f_J |J| + \sum_{J \in P} g_J |J|$$

由于我们有 $(f + g)_J |J| = f_J |J| + g_J |J|$ 对任意 $J \in P$ 都成立, 因此根据有限和运算法则 (命题7.1.11(f)) 可以直接得证结论成立。

$$2. \text{对任意的实数 } c, \text{ 有 } p. c. \int_I (cf) = c \cdot \left(p. c. \int_I f \right).$$

即证明:

$$\sum_{J \in P} (cf)_J |J| = c \sum_{J \in P} f_J |J|$$

由于我们有 $(cf)_J |J| = c \cdot f_J |J|$ 对任意 $J \in P$ 都成立, 因此根据有限和运算法则 (命题7.1.11(g)) 可以直接得证结论成立。

$$3. p. c. \int_I (f - g) = p. c. \int_I f - p. c. \int_I g.$$

即证明:

$$\sum_{J \in P} (f - g)_J |J| = \sum_{J \in P} f_J |J| - \sum_{J \in P} g_J |J|$$

由于我们有 $(f - g)_J|J| = f_J|J| + (-g_J|J|)$ 对任意 $J \in P$ 都成立, 因此根据有限和运算法则 (命题7.1.11(f)) 可以直接得证结论成立。

4. 如果对所有的 $x \in I$ 均有 $f(x) \geq 0$, 那么 $p. c. \int_I f \geq 0$.

即证明:

$$\sum_{J \in P} f_J|J| \geq 0$$

考虑取常值函数 $g(x) := 0$, 于是根据有限和运算法则 (命题7.1.11(h)) 可以直接得证结论。

5. 如果对所有的 $x \in I$ 均有 $f(x) \geq g(x)$, 那么 $p. c. \int_I f \geq p. c. \int_I g$.

即证明:

$$\sum_{J \in P} f_J|J| \geq \sum_{J \in P} g_J|J|$$

根据有限和运算法则 (命题7.1.11(h)) 可以直接得证结论。

6. 设 J 是一个包含 I 的有界区间 (即 $I \subseteq J$), 并且设 $F: J \rightarrow \mathbb{R}$ 是函数:

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in I \\ 0 & \text{if } x \notin I \end{cases}$$

那么 F 是 J 上的分段常数函数, 并且 $p. c. \int_J F = p. c. \int_I f$.

不妨设有 I 的划分 P_I 是使得 f 是关于 P_I 的分段常数函数, 然后考虑下面这样一个集合:

$$P_J := \{A, B\} \cup P_I$$

其中 $A := \{x \in J : \forall y \in I, y > x\}$, $B := \{x \in J : \forall y \in I, y < x\}$. 显然有对任意 $x, y \in A$, 都有 $[x, y] \subseteq A$, 因此 A 是一个有界的连通集合, 从而根据命题11.1.4有 A 是一个有界区间。类似地我们也很容易证明 B 也是一个有界区间。

于是我们来证明 P_J 是 J 的一个划分: 显然 P_J 中由有限个包含于 J 的区间组成的集合, 因此只需要证明对 J 中的每个元素 j 都恰好属于 P_J 中的一个有界区间 S . 对任意 $j \in J$, 若其属于 I , 则由于 P_I 是 I 的划分我们知道必然恰好存在一个 $S \in P_I$ 使得 $j \in S$, 并且 j 不属于 A, B 中的任何一个 (否则总会导出 $j < j$ 的谬误); 若其不属于 I , 则 j 不等于任何 I 中元素 (也即不存在 $S \in P_I$ 使得 $j \in S$)。于是若对任意 I 中元素 y 都有 $y < j$, 那么 $j \in B$ 且 $j \notin A$; 若对任意 I 中元素 y 都有 $y > j$, 那么 $j \in A$ 且 $j \notin B$; 我们不可能有存在一对 I 中元素 x, y 使得 $x < j < y$, 由于 I 的连通性这会导出 $j \in I$ 的矛盾结论。于是我们总是有对 J 中的每个元素 j , 它都恰好属于 P_J 中的某个有界区间。

然后我们证明 F 是关于 P_J 的分段常数函数, 由于 f 是关于 P_I 的分段常数函数, 因此对任意 $S \in P_J$ 且 $S \in P_I$, f 在 S 上是常值的, 从而根据 F 的定义 F 在 S 上也是常值的; 然后对任意 $S \in P_J$ 且 $S \notin P_I$, 那么对任意 $x \in S$, 都有 $x \notin I \implies F(x) = 0$, 于是 F 在 S 上也是常值的。综合即对任意 $S \in P_J$ 都有 F 在 S 上是常值的。

最后我们证明题式成立, 题式即证明:

$$\sum_{S \in P_I} F_S |S| = \sum_{S \in P_I} f_S |S|$$

根据有限和的运算性质，我们可以对左式变换有：

$$\begin{aligned} \sum_{S \in P_I} F_S |S| &= \sum_{S \in P_I} F_S |S| + F_A |A| + F_B |B| \\ &= \sum_{S \in P_I} F_S |S| + 0 \cdot |A| + 0 \cdot |B| \\ &= \sum_{S \in P_I} F_S |S| \end{aligned}$$

考虑到对任意 $S \in P_I$ ，我们有 $S \subseteq I \implies F_S = f_S$ ，于是上式等于 $\sum_{S \in P_I} f_S |S|$ ，于是题式得证。

7. 如果 $\{J, K\}$ 是 I 的一个划分，它将 I 分成两个区间 J 和 K ，那么函数 $f|_J : J \rightarrow \mathbb{R}$ 与 $f|_K : K \rightarrow \mathbb{R}$ 分别是 J 上和 K 上的分段常数函数，并且：

$$p.c. \int_I f = p.c. \int_J f|_J + p.c. \int_K f|_K$$

不妨设有 I 的划分 P 是使得 f 是关于 P 的分段常数函数，我们先证明 $f|_J$ 与 $f|_K$ 分别是 J 上和 K 上的分段常数函数。

取公共加细 $P' := \{J, K\} \# P$ ，并且令有集合 $P_J := \{S \in P' : S \subseteq J \text{ 且 } S \neq \emptyset\}$ 与 $P_K := \{S \in P' : S \subseteq K \text{ 且 } S \neq \emptyset\}$ ，显然 P_J 与 P_K 都是由有限个区间构成的集合，我们证明 P_J 是 J 的划分与 P_K 是 K 的划分。

考虑 P_J ，显然其中每一个区间都是包含于 J 的。对任意 $j \in J$ ，由于 P' 是一个划分，于是存在一个恰好存在一个非空区间 $S \in P'$ 使得 $j \in S$ ；又根据公共加细的定义，应当有 S 是 J 或者 K 的子集。若 S 是 K 的子集则我们有 $j \in K$ ，于是 j 同时属于 J 与 K ，这与 $\{J, K\}$ 是划分的前提矛盾。于是只能有 S 是 J 的子集，即 $S \in P_J$ ，从而得证：对任意 $j \in J$ 都恰好存在一个 $S \in P_J$ 使得 $j \in S$ 。结合前结论可得 P_J 是 J 的划分，类似地我们也可以证明 P_K 是 K 的一个划分。

然后证明 $f|_J$ 与 $f|_K$ 分别是 J 上和 K 上的分段常数函数。根据题设有 f 是关于 P 的分段常数函数，由引理 11.2.7 有 f 也是关于 P' 的分段常数函数，从而根据定义 11.2.3，对任意 $S \in P'$ ， f 在 S 上都是常值的。考虑到 P_J 与 P_K 都是 P' 的子集，因此对任意 S 属于 P_J 或者 P_K ， f 在 S 上都是常值的。从而 $f|_J$ 与 $f|_K$ 分别是关于 P_J 和 P_K 的分段常数函数，也即 $f|_J$ 与 $f|_K$ 分别是 J 上和 K 上的分段常数函数。

最后我们来证明题式成立，题式即证明：

$$\sum_{S \in P'} f_S |S| = \sum_{S \in P_J} f_S |S| + \sum_{S \in P_K} f_S |S|$$

其中由于 $f|_J$ ， $f|_K$ ， f 只是定义域不同，但是在对应区间上常数值不会变，因此我们也可以用 f_S 来替代 $(f|_J)_S$ 与 $(f|_K)_S$ 的繁琐写法。

由于 $|\emptyset| = 0$ ，于是注意到：

$$\sum_{S \in P'} f_S |S| = \sum_{S \in P'; S \neq \emptyset} f_S |S| + \sum_{S \in P'; S = \emptyset} f_S |S| = \sum_{S \in P'; S \neq \emptyset} f_S |S|$$

并且我们有 $\{S \in P' : S \neq \emptyset\} = P_J \cup P_K$ 与 $P_J \cap P_K = \emptyset$ ，于是根据有限和运算性质（命题 7.1.11(e)），我们可以直接得证结论。

本节相关跳转

[实分析 11.1 划分](#)

[实分析 11.4 黎曼积分的基本性质](#)