6.7 实数的指数运算 II

定义

1. (6.7.2 实数次幂的指数运算) 设$x>0$是一个实数，且α是一个实数，则我们定义x^α为$x^\alpha=\lim_{n\to\infty}x^{(q_n)}$，其中$(q_n)_{n=1}^{\infty}$是任意一个收敛于$\alpha$的有理数序列。

命题

1. (6.7.1 指数运算的连续性) 设$x>0$且α是一个实数。令$(q_n)_{n=1}^{\infty}$是任意一个收敛于α的有理数序列，那么$(x^{(q_n)})_{n=1}^{\infty}$也是一个收敛的序列。更进一步的，如果$(p_n)_{n=1}^{\infty}$是另外任意一个收敛于$\alpha$的有理数序列，那么$(x^{(p_n)})_{n=1}^{\infty}$与$(x^{(q_n)})_{n=1}^{\infty}$有相同的极限：

$$\lim_{n\to\infty}x^{q_n}=\lim_{n\to\infty}x^{p_n}$$

2. (6.7.3 定理升级？) 引理5.6.9中对有理数q与r成立的结论对全部实数q与r也成立。

   (贴一下引理5.6.9：)

   > (5.6.9 有理数次幂的运算性质？) 设x，$y>0$是正实数，且q与r是有理数，则：
   >
   > > - x^q是一个正实数。
   > > - $x^{q+r}=x^q\cdot x^r$且有$x^{qr}=(x^q)^r$。
   > > - $x^{-q}=\dfrac{1}{x^q}$。
   > > - 如有$q>0$，则$x>y$当且仅当$x^q>y^q$。
   > > - 如有$x>1$，则$x^q>x^r$当且仅当有$q>r$；如有$x<1$，则$x^q>x^r$当且仅当有$q<r$。

课后习题

6.7.1 证明命题6.7.3中剩余的部分 (即除去$x^{q+r}=x^q\cdot x^r$以外的全部内容)

> 不妨假设有$(q_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于q，$(r_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于r。我们证明下面的命题：
>
> - x^q是一个正实数。
>
> 根据命题6.1.17，由$(q_n)_{n=1}^{\infty}$收敛可得$(q_n)_{n=1}^{\infty}$有界，不妨假设其有一个界M，取整数部分于是有$-\lfloor M\rfloor-1\le q_n\le\lfloor M\rfloor+1$。从而对任意$n\ge 1$，根据有理数幂性质(e)，可以讨论：
>
> > - $x>1$，于是$x^{-\lfloor M\rfloor-1}\le x^{q_n}\le x^{\lfloor M\rfloor+1}$。
> > - $x=1$，于是$x^{-\lfloor M\rfloor-1}=x^{q_n}=x^{\lfloor M\rfloor+1}=1$，此情况下可直接得到$x^q=1$是正实数故无需后续讨论。
> > - $x<1$，于是$x^{-\lfloor M\rfloor-1}\ge x^{q_n}\ge x^{\lfloor M\rfloor+1}$。
>
> 对第一和第三种情况，根据有理数次幂的性质(a)，可得$x^{\lfloor M\rfloor+1}$与$x^{-\lfloor M\rfloor-1}$都是正实数，于是根据习题5.4.8有：
>
> $$\begin{cases}x^{q_n}\ge x^{-\lfloor M\rfloor-1}>0\iff x^q\ge x^{-\lfloor M\rfloor-1}>0 & \text{if } x>1\\ x^{q_n}\ge x^{\lfloor M\rfloor+1}>0\iff x^q\ge x^{\lfloor M\rfloor+1}>0 & \text{if } x<1\end{cases}$$

综上即x^q是正实数。

- $x^{qr}=(x^q)^r$。

先证明当$q\in\mathbb{R}$，$r\in\mathbb{Q}$时上面的等式是成立的。

由于$r\in\mathbb{Q}$，不妨假设$r=a/b$，其中a为整数，b为非0整数。于是即证：

$$x^{\frac{qa}{b}}=(x^q)^{\frac{a}{b}}\xLeftrightarrow{\text{命题5.6.6}}x^{(\frac{qa}{b})b}=(x^q)^{(\frac{a}{b}b)}\iff x^{qa}=(x^q)^a\ (a\in\mathbb{Z})$$

于是对a分类讨论：

> - $a=0$，于是左式$x^0=1$，右式$(x^q)^0=1$，于是此时成立。
> - $a>0$，于是根据有理数幂的性质(b)，我们有$x^{q_na}=(x^{q_n})^a$对任意$n\geq 0$成立，从而有：
>
> $$\lim_{n\to\infty}x^{q_na}=\lim_{n\to\infty}(x^{q_n})^a$$
>
>   对上式左端，根据实数次幂定义与极限定律我们可以得到左端等于x^{qa}；对上式右端，由于$a>0$，所以$a\in\mathbb{N}$，可以利用极限定律与归纳法证明右式等于$\left(\lim\limits_{n\to\infty}x^{q_n}\right)^a=(x^q)^a$，从而上式等价于$x^{qa}=(x^q)^a$，于是此时得证。
> - $a<0$，于是根据有理数幂的性质(c)，极限定律与$a>0$时的结论，有：
>
> $$(x^q)^a=\frac{1}{(x^q)^{-a}}=\frac{1}{x^{-qa}}$$
> $$x^{qa}=\lim_{n\to\infty}x^{q_na}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{-q_na}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}x^{-q_na}}=\frac{1}{x^{-qa}}$$
>
>   从而$x^{qa}=(x^q)^a$，于是此时得证。

于是可得$x^{qa}=(x^q)^a$始终成立，即$q\in\mathbb{R}$，$r\in\mathbb{Q}$时$x^{qr}=(x^q)^r$始终成立。

然后证明当q，$r\in\mathbb{R}$时等式也成立。

由于即$q\in\mathbb{R}$，$r\in\mathbb{Q}$时结论成立，于是对任意$n\geq 1$，都有$x^{qr_n}=(x^q)^{r_n}$成立，从而有：

$$\lim_{n\to\infty}x^{qr_n}=\lim_{n\to\infty}(x^q)^{r_n}$$

对右端，根据实数次幂的定义有右端等于$(x^q)^r$；对左端，根据命题6.7.1，我们可以使用与$(qr_n)_{n=0}^{\infty}$拥有一样极限的序列来替代，显然，根据极限定律我们有$\lim\limits_{n\to\infty}qr_n=\lim\limits_{n\to\infty}q_nr_n$，于是右端等于$\lim\limits_{n\to\infty}x^{q_nr_n}=x^{qr}$。综合即$x^{qr}=(x^q)^r$对$q$，$r\in\mathbb{R}$时也成立。

- $x^{-q}=\dfrac{1}{x^q}$。

根据(b)我们有$x^{qr}=(x^q)^r$成立，于是不妨令$r=-1$，可得$x^{-q}=(x^q)^{-1}\iff x^{-q}=\dfrac{1}{x^q}$，于是结论得证。

- 如有$q>0$，则$x>y$当且仅当$x^q>y^q$。

根据有理数次幂的结论，$x>y$等价于对任意$n\geq 1$都有$x^{q_n}>y^{q_n}$成立，从而根据比较原理与极限点相关内容，我们有$x^q\geq y^q$成立，又$x\neq y$与$q\neq 0$，所以$x^q\neq y^q$，从而只能有$x^q>y^q$。

> - 如有$x>1$，则$x^q>x^r$当且仅当有$q>r$；如有$x<1$，则$x^q>x^r$当且仅当有$q<r$。
>
> 必要性：
>
> 若$x^q>x^r$，则$x^{q-r}>1$。若有$x>1$，不妨假设有$q<r$（$q=r$显然不可能），于是此时$q-r<0$。根据性质(d)，可由$1>\dfrac{1}{x}$得到$1^{r-q}>\dfrac{1}{x^{r-q}}$，又有题设$x^{q-r}>1$，于是由性质(c)有$x^{q-r}>1\iff\dfrac{1}{x^{r-q}}>1$，导出矛盾，此时只能有$q>r$；若有$x<1$，不妨假设$q>r$（$q=r$显然不可能），那么根据性质(d)此时有$x^{q-r}<1^{q-r}$，与$x^{q-r}>1$矛盾，此时只能有$q<r$。
>
> 充分性：
>
> 当$x>1$时，$q>r$，那么存在一个正远离0的有理数序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$（定义5.4.3）使得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=q-r$与存在某个正有理数$c$使得对任意$n\geq 1$都有$a_n\geq c$。于是根据有理数次幂的性质(e)，即$x^{a_n}\geq x^c$对任意$n\geq 1$成立，于是根据习题5.4.8，即：
>
> $$\lim_{n\to\infty}x^{a_n}\geq\lim_{n\to\infty}x^c>1\iff x^{q-r}\geq x^c>1$$
>
> 即$x^{q-r}>1\Longrightarrow x^q>x^r$，结论得证；
>
> 当$x<1$时，$q<r$，那么存在一个正远离0的有理数序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$（定义5.4.3）使得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=r-q$与存在某个正有理数$c$使得对任意$n\geq 1$都有$a_n\geq c$。于是根据有理数次幂的性质(e)，即$x^{a_n}\geq x^c$对任意$n\geq 1$成立，于是根据习题5.4.8，即：
>
> $$\lim_{n\to\infty}x^{a_n}\geq\lim_{n\to\infty}x^c>1\iff x^{r-q}\geq x^c>1$$
>
> 即$x^{r-q}>1\Longrightarrow x^q<x^r$，结论得证。

本节相关跳转

[实分析 5.6 实数的指数运算 I]