9.4 连续函数

定义

1. (9.4.1 连续) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，并且设x_0是X中的一个元素。我们称f在x_0处是**连续**的，当且仅当：

$$\lim_{x\to x_0;x\in X} f(x)=f(x_0)$$

换言之，即x沿X收敛于x_0时，$f(x)$的极限存在并且等于$f(x_0)$。我们称f**在**X**上是连续的**（或者简称是**连续的**），当且仅当对任意$x_0\in X$，$f(x_0)$都是连续的。我们称f在x_0处是**间断的**，当且仅当f在x_0处不是连续的。

命题

1. (9.4.7 连续性的等价表述) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，并且设x_0是X中的一个元素。那么下面几个命题在逻辑上是等价的：

> - f在x_0处是连续的。
> - 对任意一个由X中元素组成的序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$，若有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=x_0$，则有$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=x_0$。
> - 对任意一个实数$\varepsilon>0$，都存在一个实数$\delta>0$，使得$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$对所有满足$|x-x_0|<\delta$的$x\in X$都成立。
> - 对任意一个实数$\varepsilon>0$，都存在一个实数$\delta>0$，使得$|f(x)-f(x_0)|\le\varepsilon$对所有满足$|x-x_0|\le\delta$的$x\in X$都成立。

2. (9.4.9 算术运算保持连续性) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，$f:X\to\mathbb{R}$与$g:X\to\mathbb{R}$都是函数，并且设x_0是X中的一个元素。如果f和g在x_0处都是连续的，那么$f+g$，$f-g$，$\max(f,g)$，$\min(f,g)$和fg都在x_0处收敛，特别地，如果g在X上不为零，那么f/g也是在x_0处收敛的。
3. (9.4.10 指数运算是连续的 I) 设$a>0$是正实数，那么定义为$f(x):=a^x$的函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续的。
4. (9.4.11 指数运算是连续的 II) 设p是一个实数，那么定义为$f(x):=x^p$的函数$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$是连续的。
5. (9.4.12 绝对值是连续的) 定义为$f(x):=|x|$的函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续的。

课后习题