16.3 三角多项式

摘录

1. (傅里叶反演公式) 由推论16.3.6可知，只要$f=\sum_{n=-N}^{N}c_ne_n$是一个三角多项式，那么就有：

$$f=\sum_{n=-N}^{N}\langle f,e_n\rangle e_n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle f,e_n\rangle e_n$$

从而我们可以得到**傅里叶反演公式**：

$$f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e_n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\mathrm{e}^{2\pi inx}$$

上式右端即为本章前言中提到的f的**傅里叶级数**。另外，结合推论16.3.6的第二个恒等式，我们有**Plancherel公式**：

$$\|f\|_2{}^2=\sum_{n=-N}^{N}|\hat{f}(n)|^2$$

需要注意上面的结论都只是在f是一个三角多项式的情况下得到的。事实上，这里的绝大多数傅里叶系数$\hat{f}(n)$都是零，这里的无限和实际上也是一个有限和，因此不存在收敛的讨论（有限级数总是一致收敛的，也即逐点收敛和依L^2度量收敛的）。

（注：在后面的章节中，如同在幂级数章节所做的那样，我们希望用三角多项式去一致逼近连续的周期函数，并将傅里叶反演公式和Plancherel公式推广到$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$中的一般函数上）

定义

1. (16.3.1 特征) 对于每一个整数n，令$e_n\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$表示函数：

$$e_n(x):=\mathrm{e}^{2\pi inx}$$

该函数有时也被称为**频率为n的特征**。

2. (16.3.2 三角多项式) 设f是$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$中的函数。如果存在一个整数$N\geq 0$和一个复数序列$(c_n)_{n=-N}^{N}$使得$f=\sum_{n=-N}^{N}c_ne_n$，则我们称函数$f$是一个**三角多项式**。

（注：一些常见的例子：对任意的整数n，函数$\cos(2\pi nx)=\dfrac{1}{2}e_{-n}+\dfrac{1}{2}e_n$和$\sin(2\pi nx)=\dfrac{-1}{2\mathrm{i}}e_{-n}+\dfrac{1}{2\mathrm{i}}e_n$都是三角多项式。事实上，正弦余弦函数的任意线性组合都是三角多项式；傅里叶级数与三角多项式的关系同幂级数与多项式的关系类似，可以进行类比）

3. (16.3.7 傅里叶变换) 对于任意的函数$f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$和任意的整数$n\in\mathbb{Z}$，我们定义$f$的**第$n$个傅里叶系数**$\hat{f}(n)$为：

$$\hat{f}(n):=\langle f,e_n\rangle=\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{e}^{-2\pi inx}\mathrm{d}x$$

函数$\hat{f}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$被称为$f$的**傅里叶变换**。

命题

1. （16.3.5 全体特征构成一个标准正交系）对于任意的整数n和m，当$n=m$时，$\langle e_n, e_m\rangle = 1$；当$n\neq m$时，$\langle e_n, e_m\rangle = 0$。同时还有$\|e_n\|_2 = 1$。

> 推论：
>
> 1. （16.3.6 三角多项式的系数？）设$f=\sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e_n$是一个三角多项式，那么对于所有的整数$-N\leq n\leq N$，有如下公式：
>
> $$c_n = \langle f, e_n\rangle$$
>
> 另外，只要$n>N$或者$n<-N$，我们就有$0=\langle f, e_n\rangle$。最后，我们还有恒等式：
>
> $$\|f\|_2{}^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

课后习题

16.3.1 证明：任意两个三角多项式的和以及乘积也都是三角多项式

> 我们设$f=\sum\limits_{n=-N}^{N} a_n e_n$与$g=\sum\limits_{m=-M}^{M} b_m e_m$是三角多项式（于是$N,M\in\mathbb{Z}$是非负整数，$(a_n)_{n=-N}^{N}$与$(b_n)_{n=-M}^{M}$都是有限的复数序列）。不失一般性地，我们假设$N\geq M$。此时有：
>
> ---
>
> $$f+g=\sum_{n=-N}^{-N} a_n e_n + \sum_{n=-M}^{M}(a_n+b_n)e_n + \sum_{n=M}^{N} a_n e_n$$
>
> 如果我们考虑定义复数序列$(c_n)_{n=-N}^{N}$有：
>
> $$c_n := \begin{cases} a_n & \text{if } M<|n|\leq N \\ a_n+b_n & \text{if } 0\leq |n|\leq M \end{cases}$$
>
> 则可以直接合并有：
>
> $$f+g=\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$$
>
> 即$f+g$也是一个三角多项式。
>
> ---
>
> $$\begin{aligned} fg &= \left(\sum_{n=-N}^{N} a_n e_n\right)\left(\sum_{m=-M}^{M} b_n e_n\right) \\ &= \sum_{n=-N}^{N}\left(a_n e_n \sum_{m=-M}^{M} b_m e_m\right) \\ &= \sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-M}^{M} a_n b_m e_n e_m \\ &= \sum_{(n,m)\in S} a_n b_m e_n e_m \qquad (S:=[-N,N]\times[-M,M]\cap\mathbb{Z}^2) \end{aligned}$$

> 注意到有下面的事实：
>
> $$e_n e_m = \mathrm{e}^{2\pi i n x}\mathrm{e}^{2\pi i m x} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(n+m)x} = e_{n+m}$$
>
> $$\begin{aligned} S &= \{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 : |n|\le N \wedge |m|\le N\} \\ &= \bigcup_{-N-M\le i\le N+M} \{(n,m)\in\mathbb{S} : n+m=i\} \end{aligned}$$
>
> 据此我们合并这个有限级数中的部分项（$n+m$值相同的项），可以得到：
>
> $$\begin{aligned} \sum_{(n,m)\in S} a_n b_m e_n e_m &= \sum_{(n,m)\in S} a_n b_m e_{n+m} \\ &= \sum_{i=-N-M}^{N+M}\left(\sum_{(n,m)\in S; n+m=i} a_n b_m e_{n+m}\right) \\ &= \sum_{i=-N-M}^{N+M}\left(\sum_{(n,m)\in S; n+m=i} a_n b_m\right) e_i \end{aligned}$$
>
> 此时我们令有$c_i := \sum_{(n,m)\in S;n+m=i} a_n b_m$，则上面的式子即$fg = \sum_{i=-N-M}^{N+M} c_i e_i$是一个三角多项式，于是结论得知。

16.3.2 证明引理16.3.5

> 对任意的整数n,m，根据内积定义有：
>
> $$\begin{aligned} \langle e_n, e_m\rangle &= \int_{[0,1]} \mathrm{e}^{2\pi i n x}\mathrm{e}^{-2\pi i m x}\mathrm{d}x \\ &= \int_{[0,1]} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(n-m)x}\mathrm{d}x \\ &= \int_{[0,1]} \cos(2\pi(n-m)x)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{[0,1]} \sin(2\pi(n-m)x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$
>
> 当$n=m$的时候，上面的积分变为简单的常数函数积分（$\cos(2\pi(n-m)x)\equiv 1$和$\sin(2\pi(n-m)x)\equiv 0$），可以直接计算得到$\langle e_n, e_m\rangle = 1$；当$n\neq m$的时候，使用微积分第二基本定理（命题11.9.4）我们可以得到：
>
> $$\begin{aligned} \langle e_n, e_m\rangle &= \frac{\sin(2\pi(n-m)) - \sin(0)}{2\pi(n-m)} + \mathrm{i}\frac{-\cos(2\pi(n-m)) + \cos(0)}{2\pi(n-m)} \\ &= 0 + \mathrm{i}0 = 0 \end{aligned}$$
>
> 特别地，我们有$\|e_n\|_2 = \langle e_n, e_m\rangle = 1$。综上，于是结论得证。

16.3.3 证明推论16.3.6 **（提示：利用引理16.3.5。对于第二个恒等式，既可以利用[毕达哥拉斯定理（引理16.2.7(d)）](#)和归纳法，也可以代入$f = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$并展开所有的表达式）**

> 我们对N做归纳来证明这个推论。
>
> 考虑$N=0$的情况，此时$f=c_0$是某个常数函数，唯一满足$-0\le m\le 0$的整数是0。于是显然可以验证有$\langle f, e_0\rangle = c_0$与$\|f\|_2{}^2 = |c_0|^2$，并且对任意的$m>0$或$m<0$，根据引理16.3.5我们都有：
>
> $$\langle f, e_m\rangle = \langle c_0 e_0, e_m\rangle = c_0\langle e_0, e_m\rangle = 0$$

然后我们归纳地假设当$N=a$时结论成立，对$N=a+1$时的情况讨论，此时有：

$$f=\sum_{n=-a-1}^{a+1}c_ne_n=c_{-a-1}e_{-a-1}+\sum_{n=-a}^{a}c_ne_n+c_{a+1}e_{a+1}$$

令有$g:=\sum_{n=-a}^{a}c_ne_n$，于是根据内积的运算定律（命题16.2.5），结合归纳假设我们有：

$$\begin{aligned}\langle f,e_m\rangle&=\langle c_{-a-1}e_{-a-1},e_m\rangle+\langle g,e_m\rangle+\langle c_{a+1}e_{a+1},e_m\rangle\\&=\begin{cases}c_{-a-1}&\text{if }m=-a-1\\c_m&\text{if }-a\le m\le a\\c_{a+1}&\text{if }m=a+1\\0&\text{else}\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{\|f\|_2}^2=\langle f,f\rangle=&\langle(c_{-a-1}e_{-a-1}+g+c_{a+1}e_{a+1}),(c_{-a-1}e_{-a-1}+g+c_{a+1}e_{a+1})\rangle\\=&\langle c_{-a-1}e_{-a-1},c_{-a-1}e_{-a-1}\rangle+\langle c_{-a-1}e_{-a-1},g\rangle+\langle c_{-a-1}e_{-a-1},c_{a+1}e_{a+1}\rangle+\\&\langle g,c_{-a-1}e_{-a-1}\rangle+\langle g,g\rangle+\langle g,c_{a+1}e_{a+1}\rangle+\\&\langle c_{a+1}e_{a+1},c_{-a-1}e_{-a-1}\rangle+\langle c_{a+1}e_{a+1},g\rangle+\langle c_{a+1}e_{-a-1},c_{a+1}e_{a+1}\rangle\\=&|c_{-a-1}|^2+\sum_{n=-a}^{a}|c_n|^2+|c_{a+1}|^2\\=&\sum_{n=-a-1}^{a+1}|c_n|^2\left(\sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2\right)\end{aligned}$$

从而归纳得证，对任意的自然数N我们证明了推论16.3.6。

本节相关跳转

[实分析 16.2 周期函数的内积]