14.4 一致收敛的度量

定义

1. (14.4.2 有界函数的度量空间) 设(X,d_X)和(Y,d_Y)都是度量空间，我们用$B(X\to Y)$表示从X到Y的**有界函数空间**（使用幂集公理与分类公理可以知道这是一个集合）

   $$B(X\to Y):=\{f:f:X\to Y\text{是有界函数}\}$$

   并定义度量$d_\infty:B(X\to Y)\times B(X\to Y)\to\mathbb{R}^+$为：对任意的$f$，$g\in B(X\to Y)$有：

   $$d_\infty(f,g):=\sup_{x\in X}d_Y(f(x),g(x))=\sup\{d_Y(f(x),g(x)):x\in X\}$$

   这个度量有时被称为**上确界范数度量**或者L^∞**度量**。我们也用$d_{B(X\to Y)}$来表示d_∞。

   （注：由于f和g都是有界的，因此$d_\infty(f,g)$也总是有限的；我们也可以证明d_∞是一个度量空间，该度量下的收敛性就是函数的一致收敛性（这部分内容可以参考本节习题））

2. (无编号 有界连续函数空间) 设(X,d_X)和(Y,d_Y)都是度量空间，我们令有$C(X\to Y)$表示从X到Y的**有界连续函数空间**，显然它是$B(X\to Y)$的一个子集。

命题

1. (14.4.4 一致收敛性与L^∞度量下的收敛性？) 设(X,d_X)和(Y,d_Y)都是度量空间，$(f^{(n)})_{n=1}^\infty$是$B(X\to Y)$中的函数序列，并设f是$B(X\to Y)$中的函数。那么$(f^{(n)})_{n=1}^\infty$依度量$d_{B(X\to Y)}$收敛于f，当且仅当$(f^{(n)})_{n=1}^\infty$一致收敛于f。
2. (14.4.5 连续函数空间是完备的) 设(X,d_X)是一个度量空间，并设(Y,d_Y)是一个完备的度量空间，那么空间$(C(X\to Y),d_{B(X\to Y)}|_{C(X\to Y)\times C(X\to Y)})$是$(B(X\to Y),d_{B(X\to Y)})$的一个完备子空间。换言之，$C(X\to Y)$中的每一个柯西函数序列都收敛于$C(X\to Y)$中的一个函数。

课后习题

14.4.1 设(X,d_X)和(Y,d_Y)都是度量空间。证明：定义14.4.2中定义的具有度量$d_{B(X\to Y)}$的空间$B(X\to Y)$实际上是一个度量空间

> 于是只要证明，$d_{B(X\to Y)}$满足：
>
> - 对任意$f\in B(X\to Y)$，都有$d_\infty(f,f)=0$。
>
>   > 显然可以计算有：
>   >
>   > $$d_\infty(f,f)=\sup\{d_Y(f(x),f(x)):x\in X\}=\sup\{0\}=0$$
>   >
>   > 于是此条件总是满足的。
>
> - 对任意f，$g\in B(X\to Y)$且$f\neq g$，都有$d_\infty(f,g)>0$。
>
>   > 由于$f\neq g$，因此至少存在一个$x_0\in X$使得$f(x_0)\neq g(x_0)\implies d_Y(f(x_0),g(x_0))>0$，于是根据上确界的性质我们有：
>   >
>   > $$d_\infty(f,g)=\sup\{d_Y(f(x),g(x)):x\in X\}\geq d_Y(f(x_0),g(x_0))>0$$
>   >
>   > 于是此条件总是满足的。

- 对任意f，$g \in B(X \to Y)$，都有$d_\infty(f,g) = d_\infty(g,f)$。

  > 根据度量的性质我们知道对任意的$x \in X$都有$d_Y(f(x),g(x)) = d_Y(g(x),f(x))$，于是即有：
  >
  > $$\{d_Y(f(x),g(x)) : x \in X\} = \{d_Y(g(x),f(x)) : x \in X\}$$
  >
  > 从而这两个集合应该拥有相同的上确界，即$d_\infty(f,g) = d_\infty(g,f)$。于是此条件总是满足的。

- 对任意f，g与$h \in B(X \to Y)$，都有三角不等式$d_\infty(f,h) \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$。

  > 注意到对任意的$x \in X$根据度量的三角不等式都有：
  >
  > $$\begin{aligned} d_Y(f(x),h(x)) &\leq d_Y(f(x),g(x)) + d_Y(g(x),h(x)) \\ &\leq \sup\{d_Y(f(y),g(y)) : y \in X\} + \sup\{d_Y(g(y),h(y)) : y \in X\} \\ &= d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h) \end{aligned}$$
  >
  > 于是$d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$是集合$\{d_Y(f(y),h(y)) : y \in X\}$的一个上界，然后根据上确界的性质我们知道上确界必然小于任何上界，于是即：
  >
  > $$d_\infty(f,h) = \sup\{d_Y(f(y),h(y)) : y \in X\} \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$$
  >
  > 于是此条件总是满足的。

综上，于是我们证明了$(B(X \to Y), d_{B(X \to Y)})$确实是一个度量空间。

14.4.2 证明命题14.4.4

分别证明充分必要性。

若$(f^{(n)})_{n=1}^\infty$依度量$d_{B(X\to Y)}$收敛于f，则对任意的$\varepsilon > 0$都存在一个$N > 0$使得对任意$n \geq N$都有$d_\infty(f^{(n)}, f) < \varepsilon$，也即：

$$\sup_{x \in X} d_Y(f(x), f^{(n)}(x)) < \varepsilon \xRightarrow{\text{上确界性质}} \forall\, x \in X, d_Y(f(x), f^{(n)}(x)) < \varepsilon$$

于是总结即有：对任意的$\varepsilon > 0$，存在一个$N > 0$使得对任意$n \geq N$与$x \in X$都有$d_Y(f(x), f^{(n)}(x)) < \varepsilon$。于是根据定义14.2.7即有$f^{(n)}$是一致收敛于$f$的。

反过来，若有$f^{(n)}$是一致收敛于f的，则对任意的$\varepsilon > 0$都存在一个$N > 0$使得对任意$n \geq N$与$x \in X$都有$d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) < \varepsilon$。从而我们知道对任意的$n \geq N$，$\varepsilon$都是集合$\{d_Y(f(x), f^{(n)}(x)) : x \in X\}$的一个上界，然后由于上界必然大于上确界即有：

$$d_\infty(f^{(n)}, f) = \sup\{d_Y(f(x), f^{(n)}(x)) : x \in X\} < \varepsilon$$

于是总结即有：对任意的$\varepsilon > 0$，存在一个$N > 0$使得对任意$n \geq N$都有$d_\infty(f^{(n)}, f) < \varepsilon$。于是根据定义12.1.14即有$(f^{(n)})_{n=1}^\infty$依度量$d_{B(X\to Y)}$收敛于$f$。

14.4.3 证明定理14.4.5 **（提示：这个命题的证明与定理14.3.1的证明类似，但不完全相同）**

考虑$(f^{(n)})_{n=1}^\infty$是空间$(C(X \to Y), d_{B(X\to Y)}|_{C(X\to Y)\times C(X\to Y)})$中的一个柯西序列。首先我们注意到，对任意的$\varepsilon > 0$，由于$(f^{(n)})_{n=1}^\infty$是柯西序列于是存在$N > 0$使得对任意的$i$，$j \geq N$都有$d_{B(X\to Y)}(f^{(i)}, f^{(j)}) < \varepsilon$，于是任意的$x \in X$有：

$$d_Y(f^{(i)}(x), f^{(j)}(x)) \leq d_{B(X\to Y)}(f^{(i)}, f^{(j)}) < \varepsilon$$

这表明对任意的$x \in X$，$(f^{(n)}(x))_{n=1}^\infty$都是收敛的柯西序列（注意这是一个由$Y$中元素组成的序列），然后根据$Y$的完备性我们知道$(f^{(n)}(x))_{n=1}^\infty$也必然是收敛的。

于是我们定义函数$f : X \to Y$有：

$$\forall\, x \in X, f(x) := \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$$

（Y的完备性使得这个定义总是有效的）

然后我们证明$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是依度量$d_{B(X\to Y)}|_{C(X\to Y)\times C(X\to Y)}$收敛于$f$的。

考虑任意的$\varepsilon > 0$，根据柯西序列的定义存在$N > 0$使得对任意i，$j \geq N$都有$d_{B(X\to Y)}(f^{(i)}, f^{(j)}) < \varepsilon/3$。然后对任意的$x \in X$，我们已经定义$f(x) := \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$，于是对$\varepsilon$存在一个$N_x \geq N$使得对任意的$n \geq N_x$都有：

$$d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) < \varepsilon/3$$

然后又因为对任意i，$j \geq N$都有$d_{B(X\to Y)}(f^{(i)}, f^{(j)}) < \varepsilon/2$，于是即$d_Y(f^{(i)}(x), f^{(j)}(x)) < \varepsilon/2$。从而对任意$n \geq N$都有：

$$d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) \leq d_Y(f^{(n)}(x), f^{(N_x)}(x)) + d_Y(f^{(N_x)}(x), f(x)) < \frac{2\varepsilon}{3}$$

注意到这个结论对任意的$x \in X$都成立，于是$\frac{2\varepsilon}{3}$是集合$\{d_Y(f(x), f^{(n)}(x)) : x \in X\}$的一个上界，于是即：

$$d_{B(X\to Y)}(f^{(n)}, f) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), f^{(n)}(x)) < \varepsilon$$

总结下上面我们的推论即：

对任意$\varepsilon > 0$，存在$N > 0$使得对任意$n \geq N$都有$d_{B(X\to Y)}(f^{(n)}, f) < \varepsilon$。

根据定义12.1.14，这表明$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是依度量$d_{B(X\to Y)}$收敛于f。而命题14.4.4表明依度量$d_{B(X\to Y)}$收敛等价于一致收敛，因此$f^{(n)}$也是一致收敛于f的。然后根据命题14.3.2与命题14.3.6我们可以由每一个$f^{(n)}$都是有界连续函数推知f也是有界连续的函数，从而有$f \in C(X \to Y)$。

综上，我们证明了任意$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是空间$(C(X \to Y), d_{B(X\to Y)}|_{C(X\to Y)\times C(X\to Y)})$中的柯西序列都收敛于某个$f \in C(X \to Y)$，于是根据完备度量空间的定义即有$(C(X \to Y), d_{B(X\to Y)}|_{C(X\to Y)\times C(X\to Y)})$是完备的，题目结论得证。

14.4.4 设(X, d_X)和(Y, d_Y)都是度量空间，并设$Y^X := \{f : f : X \to Y\}$是从$X$到$Y$的全体函数的空间（参见公理3.10幂集公理）。设$x_0 \in X$，$V$是$Y$中的开集，并设$V^{(x_0)} \subseteq Y^X$是集合

$$V^{(x_0)} := \{f \in Y^X : f(x_0) \in V\}$$

设E是Y^X的子集，如果对于每一个$f \in E$，都存在有限个点x_1，...，$x_n \in X$和有限个开集V_1，...，$V_n \subseteq Y$使得

$$f \in V_1^{(x_1)} \cap \ldots \cap V_n^{(x_n)} \subseteq E$$

那么我们称E是开的

(a) 证明：如果$\mathcal{F}$是Y^X的开集簇，那么$(Y^X, \mathcal{F})$就是一个拓扑空间

> 根据拓扑空间的定义，于是需要证明：
>
> - 空集$\varnothing$与整个集合本身Y^X都是开集，也即$\varnothing \in \mathcal{F}$与$Y^X \in \mathcal{F}$。
>
> > 空集显然是满足乘积拓扑要求的集合（不包含任何函数）。对于整个空间Y^X，考虑任意的$f \in Y^X$。注意到Y本身就是Y中的开集，于是有：
> >
> > $$f(x_0) \in Y \implies f \in Y^{(x_0)} \subseteq Y^X$$
> >
> > （事实上$Y^{(x_0)}$就是Y^X）于是根据乘积拓扑的定义即有Y^X也是开的，即$Y^X \in \mathcal{F}$。

- 任意有限多个开集的交都是开集，也即若有V_1，...，V_n都是$\mathcal{F}$中的元素，那么$V_1 \cap ... \cap V_n$也属于$\mathcal{F}$。

  > 考虑任意$f \in V_1 \cap ... \cap V_n$，根据乘积拓扑定义对任意$1 \leq i \leq n$都存在$m_i$个点$x_{i,1}$，...，$x_{i,m_i} \in X$与$m_i$个开集$W_{i,1}$，...，$W_{i,m_i} \subseteq Y$使得：
  >
  > $$f \in W_{i,1}^{(x_{i,1})} \cap ... \cap W_{i,m_i}^{(x_{i,m_i})} \subseteq V_i$$
  >
  > 于是我们考虑下面的交集：
  >
  > $$W := \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m_i} W_{i,j}^{(x_{i,j})} \text{ (也就是} W_{1,1}^{(x_{1,1})} \cap ... \cap W_{1,m_1}^{(x_{1,m_1})} \cap W_{2,1}^{(x_{2,1})} \cap ... \cap W_{n,m_n}^{(x_{n,m_n})}\text{)}$$
  >
  > 首先这个交集肯定是非空的，因为f属于W；然后对任意的$g \in W$，注意到对任意$1 \leq i \leq n$都有：
  >
  > $$g \in \bigcap_{j=1}^{m_i} W_{i,j}^{(x_{i,j})} \xRightarrow{W_{i,1}^{(x_{i,1})} \cap ... \cap W_{i,m_i}^{(x_{i,m_i})} \subseteq V_i} g \in V_i$$
  >
  > 从而即有$g \in V_1 \cap ... \cap V_n$，这表明$W \subseteq V_1 \cap ... \cap V_n$。总结上文即有：
  >
  > 对任意的$f \in V_1 \cap ... \cap V_n$，存在$m_1 + ... + m_n$个点$x_{1,1}$，...，$x_{n,m_n} \in X$与$m_1 + ... + m_n$个开集$W_{1,1}$，...，$W_{n,m_n} \subseteq Y$使得：
  >
  > $$f \in W_{1,1}^{(x_{1,1})} \cap ... \cap W_{n,m_n}^{(x_{n,m_n})} \subseteq V_1 \cap ... \cap V_n$$
  >
  > 此时依据乘积拓扑的定义即有$V_1 \cap ... \cap V_n$是开的，即$V_1 \cap ... \cap V_n \in \mathcal{F}$。

- 任意多个（包括无限个）开集的并都是开集，也即若有$(V_\alpha)_{\alpha \in I}$是$\mathcal{F}$中的一簇集合，那么$\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$也属于$\mathcal{F}$。

  > 考虑任意的$f \in \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$，那么至少存在一个$\alpha_0 \in I$使得$f \in V_{\alpha_0}$。于是根据乘积拓扑的定义，存在$n$个点$x_1$，...，$x_n \in X$与$n$个开集$W_1$，...，$W_n \subseteq Y$使得：
  >
  > $$f \in W_1^{(x_1)} \cap ... \cap W_n^{(x_n)} \subseteq V_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$$
  >
  > 从而根据乘积拓扑的定义，我们可以知道$\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$也是开的，即$\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \in \mathcal{F}$。

综上，于是$(Y^X, \mathcal{F})$是一个拓扑空间。

(b) 对于每一个自然数n，设$f^{(n)}: X \to Y$是从X到Y的函数，并设$f: X \to Y$是从X到Y的函数。证明：函数序列$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$依拓扑$\mathcal{F}$收敛于f（在定义13.5.4的意义下），当且仅当$f^{(n)}$逐点收敛于f（在定义14.2.1的意义下）

> 首先我们需要叙述乘积拓扑的一个很显然的辅助结论，这有利于我们的证明：
>
> > 结论：对任意的V是Y中的开集与$x \in X$，都有$V^{(x)}$是乘积拓扑下的开集。
> >
> > 证明：
> >
> > 注意到对任意的$f \in V^{(x)}$，存在有限个（就一个）开集$V \subseteq Y$与有限个点$x \in X$使得$f \in V^{(x)} \subseteq V^{(x)}$，于是根据乘积拓扑的定义可以直接得到$V^{(x)}$是开的。
>
> 下面开始正式的证明。
>
> ---

分别证明充分必要性。

若函数序列$f^{(n)}$依拓扑$\mathcal{F}$收敛于f，则依据定义13.5.4对任意f的邻域V，存在$N > 0$使得对任意$n \geq N$都有$f^{(n)} \in V$。特别地，我们考虑任意的$x \in X$。对任意的$\varepsilon > 0$，我们知道度量球$B_{(Y,d_Y)}(f(x), \varepsilon)$是$Y$中的开集（根据命题12.2.15(c)），因此根据辅助结论有$B_{(Y,d_Y)}(f(x), \varepsilon)^{(x)}$是乘积拓扑中的一个开集；特别地，由于$f(x) \in B_{(Y,d_Y)}(f(x), \varepsilon)$我们可以得到$f \in B_{(Y,d_Y)}(f(x), \varepsilon)^{(x)}$，于是$B_{(Y,d_Y)}(f(x), \varepsilon)^{(x)}$还是$f$的一个邻域，此时应用拓扑下收敛的结论，存在$N > 0$使得对任意$n \geq N$都有：

$$f^{(n)} \in B_{(Y,d_Y)}(f(x), \varepsilon)^{(x)} \xRightarrow{\text{题目定义}} f^{(n)}(x) \in B_{(Y,d_Y)}(f(x), \varepsilon) \xRightarrow{\text{度量球定义}} d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) < \varepsilon$$

总结一下即有：

考虑任意的$x \in X$，对任意$\varepsilon > 0$都存在$N > 0$使得对任意$n \geq N$都有$d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) < \varepsilon$

。

于是根据度量空间中收敛序列的定义（定义12.1.14）即对任意$x \in X$都有$\lim\limits_{n \to \infty} f^{(n)}(x) = f(x)$

，根据逐点收敛的定义（定义14.2.1）我们知道这表明$f^{(n)}$逐点收敛于f。

反过来，若有$f^{(n)}$逐点收敛于f，则根据定义14.2.1对任意$x \in X$都有$\lim\limits_{n \to \infty} f^{(n)}(x) = f(x)$。于是我们考虑$f$的任意一个邻域$V$，由于$V$是乘积拓扑下的开集于是存在有限个点$x_1$，$\ldots$，$x_n \in X$和有限个开集$V_1$，$\ldots$，$V_n \subseteq Y$使得

$$f \in V_1^{(x_1)} \cap \ldots \cap V_n^{(x_n)} \subseteq V$$

注意到对任意$1 \leq i \leq n$都有$f \in V_i^{(x_i)} \iff f(x_i) \in V_i$并且$V_i$是开集，因此存在$\varepsilon_i > 0$使得度量球$B_{(Y,d_Y)}(f(x_i), \varepsilon_i) \subseteq V_i$（命题12.2.15(a)）；而根据逐点收敛的定义对ε_i存在$N_i > 0$使得对任意$m \geq N_i$都有$d_Y(f^{(m)}(x_i), f(x_i)) < \varepsilon_i$，也即有$f^{(m)}(x_i)$属于球$B_{(Y,d_Y)}(f(x_i), \varepsilon_i)$（也就是属于$V_i$）。于是我们令$N := \max\{N_i : 1 \leq i \leq n\}$，由于这是个有限集因此最大元素必然属于集合中（于是N肯定是个大于0的整数），然后总结上面的结论我们有：

$$\begin{aligned}
&\forall\, m \geq N, \forall\, 1 \leq i \leq n, m \geq N \geq N_i \implies f^{(m)}(x_i) \in V_i \\
\implies &\forall\, m \geq N, \forall\, 1 \leq i \leq n, f^{(m)} \in V_i^{(x_i)} \\
\implies &\forall\, m \geq N, f^{(m)} \in V_1^{(x_1)} \cap \ldots \cap V_i^{(x_i)} \subseteq V
\end{aligned}$$

于是即：对任意V是f一个邻域，存在一个$N > 0$使得对任意$n \geq N$都有$f^{(n)} \in V$。从而根据定义13.5.4，于是函数序列$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是依拓扑$\mathcal{F}$收敛于f的。

这里的拓扑$\mathcal{F}$被称为逐点收敛拓扑，原因就不用多说了。它也被称作乘积拓扑。这个习题的结论表明逐点收敛可以看作拓扑空间中更为一般的收敛概念的特殊情形

本节相关跳转

[实分析 3.1 基础知识]

[实分析 3.4 象和逆象]

[实分析 13.5 拓扑空间]

[实分析 14.2 逐点收敛和一致收敛]

[实分析 14.3 一致收敛性与连续性]