18.1 目标：勒贝格测度

摘录

1. （定义可测集）本章的目标需要定义**可测集**的概念，它是$\mathbb{R}^n$的一类特殊子集。我们希望可测集需要满足下列性质：

> - （博雷尔性质）$\mathbb{R}^n$中的每一个开集都是可测集，每一个闭集也都是可测集。
> - （互补性）如果Ω是可测集，那么$\mathbb{R}^n\backslash\Omega$也是可测集。
> - （布尔代数性质）如果$(\Omega_j)_{j\in J}$是任意的有限多个可测集（于是J是有限的），那么它们的并集$\bigcup_{j\in J}\Omega_j$和交集$\bigcap_{j\in J}\Omega_j$也都是可测集。
> - （σ-代数性质）如果$(\Omega_j)_{j\in J}$是任意可数个可测集（于是J是可数的），那么它们的并集$\bigcup_{j\in J}\Omega_j$和交集$\bigcap_{j\in J}\Omega_j$也都是可测集。

需要注意的是，上面的一些性质之间可以互相推导（例如σ-代数性质事实上蕴含了布尔代数性质），这个定义使得我们所考察的几乎每一个集合都是可测的。

（注：仍需注意，这样的定义并不囊括了所有$\mathbb{R}^n$的子集（尽管它看起来相当宽泛并且很难找到反例），不可测的集合仍然存在）

2. （定义勒贝格测度）对于每一个可测集Ω，我们指派一个满足如下性质的**勒贝格测度**$m(\Omega)$：

> - （空集）空集$\varnothing$的测度是$m(\varnothing)=0$。
> - （正性）对于每一个可测集Ω，都有$0\le m(\Omega)\le+\infty$。
> - （单调性）若有可测集A,B满足$A\subseteq B$，那么$m(A)\le m(B)$。
> - （有限次可加性）如果$(A_j)_{j\in J}$是有限多个可测集，那么$m\left(\bigcup_{j\in J}A_j\right)\le\sum_{j\in J}m(A_j)$。
> - （有限可加性）如果$(A_j)_{j\in J}$是有限多个彼此不相交的可测集，那么$m\left(\bigcup_{j\in J}A_j\right)=\sum_{j\in J}m(A_j)$。
> - （可数次可加性）如果$(A_j)_{j\in J}$是可数个可测集，那么$m\left(\bigcup_{j\in J}A_j\right)\le\sum_{j\in J}m(A_j)$。
> - （可数可加性）如果$(A_j)_{j\in J}$是可数个彼此不相交的可测集，那么$m\left(\bigcup_{j\in J}A_j\right)=\sum_{j\in J}m(A_j)$。
> - （正规化）单位立方体$[0,1]^n:=\{(x_1,\ldots,x_n):\forall\,1\le j\le n,0\le x_j\le1\}$的测度为$m([0,1]^n)=1$。
> - （平移不变性）如果Ω是一个可测集，并且$x\in\mathbb{R}^n$，那么$x+\Omega:=\{x+y:y\in\Omega\}$也是一个可测集，并且$m(x+\Omega)=m(\Omega)$。

同样地，上面的性质中也存在一些多余的内容（例如可数可加性与可数次可加性蕴含了有限可加性与有限次可加性）。需要注意的是$m(\Omega)$可以是$+\infty$（由于正性存在因此不会遇到$-\infty++\infty$这种不确定形式）。

命题

1. (18.1.1 勒贝格测度的存在性)存在可测集的概念，同时还存在一种方法，使得每一个可测集$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$都能被指派一个数字$m(\Omega)$，并保证本节摘录中公理1~13全部成立。

   (注：这也就是本章的最终目标。事实上，勒贝格测度是唯一的，其它任何满足公理1~13的概念都会与勒贝格测度有极大的重合；另外，我们还可能对欧几里得空间$\mathbb{R}^n$以外的其它区域上的测度感兴趣，这部分就引出了**测度论**的内容，在本书中不做讨论。在现代概率论与分析学更深入的研究中(如广义函数论)，测度的概念十分重要)