17.5 二阶导数和克莱罗定理

定义

1. (17.5.1 二次连续可微性) 设E是$\mathbb{R}^n$的开子集，并设$f: E \to \mathbb{R}^m$是一个函数。如果偏导数$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$都存在并且都在$E$上连续，那么我们称$f$是**连续可微**的；如果$f$是连续可微的，并且偏导数$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$也都是连续可微的，那么我们称$f$是**二次连续可微**的。

   (注：有时候，连续可微的函数被称为C^1函数，二次连续可微的函数被称为C^2函数)

命题

1. (17.5.4 克莱罗定理) 设E是$\mathbb{R}^n$的开子集，并设$f: E \to \mathbb{R}^m$是E上的二次连续可微函数。那么对于所有的$1 \leq i, j \leq n$和所有的$x_0 \in E$，都有：

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

   (注：必须要有"二阶导数连续"的前提才能成立克莱罗定理，详见习题17.5.1与原书证明)

课后习题

17.5.1 设$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$是一个函数，其定义为：当$(x, y) \neq (0, 0)$时，$f(x, y) := \frac{xy^3}{x^2+y^2}$；当$(x, y) = (0, 0)$时，$f(x, y) = 0$。证明：$f$是连续可微的，其二阶偏导数$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$都存在，但是它们在$(0, 0)$处的取值不相等。解释这为什么不与克莱罗定理矛盾

> 我们首先证明f是连续可微的。
>
> 直接去计算f关于x, y的偏导数（其中$(x, y) \neq (0, 0)$），我们有：
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
>
> 都是连续的，特别地，对$(0, 0)$单独按照定义计算有：
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \to 0}\frac{0}{(t^2+0^2)t} = 0$$
> $$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \to 0}\frac{0}{(0^2+t^2)t} = 0$$
>
> 另一方面我们又有：
>
> $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$
>
> (转换为序列的极限问题后使用比较原理即可，参考的对比对象是$\pm y(\partial_x f)$与$\pm 3x(\partial_y f)$)
>
> 于是$\frac{\partial f}{\partial y}$与$\frac{\partial f}{\partial x}$都是在$(0, 0)$处连续的。综上即有$f$是连续可微的。

然后我们去证明f的二阶偏导数$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$都存在，但是它们在$(0,0)$处的取值不相等。

根据定义，我们直接计算有：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)&=\lim_{t\to 0}\frac{t^3(t^2-0^2)}{(0^2+t^2)^2t}=1\\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)&=\lim_{t\to 0}\frac{t0^2(3t^2+0^2)}{(t^2+0^2)^2t}=0\end{aligned}$$

是不相等的。之所以不与克莱罗定理矛盾，这是因为在$(x,y)\neq(0,0)$，我们可以求导有：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{-3x^4y^2+6x^2y^4+y^6}{(x^2+y^2)^3}\\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\frac{-3x^4y^2+6x^2y^4+y^6}{(x^2+y^2)^3}\end{aligned}$$

在$(0,0)$处，我们可以考察从不同方向收敛于$(0,0)$的序列（以$((0,1/n))_{n=1}^{\infty}$与$((1/n,0))_{n=1}^{\infty}$为例），此时有：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,1/n)&=\frac{(1/n)^6}{((1/n)^2)^3}=1\\ \lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(1/n,0)&=\frac{0}{((1/n)^2)^3}=0\end{aligned}$$

是不相等的，因此$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$不是在$(0,0)$处连续的函数（同理$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$也是一样），于是不能应用克莱罗定理。