11.5 连续函数的黎曼可积性

定义

1. (11.5.4 分段连续？) 设I是一个有界区间，并且设$f: I \to \mathbb{R}$是函数。称f在I上是**分段连续**的，当且仅当存在一个I的划分P，使得对任意的$J \in P$，$f|_J$都是J上的连续函数。

命题

1. (11.5.1 一致连续函数是黎曼可积的？) 设I是一个有界区间，并且设是$f: I \to \mathbb{R}$定义在I上的一致连续函数，那么f是黎曼可积的。

   > 推论：
   >
   > 1. (11.5.2 闭区间上的连续函数是黎曼可积的？) 设$[a, b]$是一个闭区间，并且设$f: [a, b] \to \mathbb{R}$是连续的，那么f是黎曼可积的。
   >
   >   (注：结合定理11.5.1与定理9.9.16即可)

2. (11.5.3 有界的连续函数是黎曼可积的？) 设I是一个有界区间，并且设$f: I \to \mathbb{R}$是定义在I上的有界并且连续的函数，那么f是黎曼可积的。
3. (11.5.6) I是一个有界区间，并且设$f: I \to \mathbb{R}$既是分段连续又是有界的，那么f是黎曼可积的。

课后习题

11.5.1 证明命题11.5.6 (提示：利用定理11.4.1的(a)和(h))

> 根据定义11.5.4，存在划分P使得对任意$J \in P$，$f|_J$都是J上的连续函数。特别地，考虑到f是有界的，因此$f|_J$都是J上的连续有界函数，从而根据命题11.5.3，$f|_J$也是黎曼可积的。
>
> 于是然后对任意$J \in P$，我们定义函数$F_J: I \to \mathbb{R}$有：
>
> $$F_J(x) = \begin{cases} f|_J(x) & \text{if } x \in J \\ 0 & \text{if } x \notin J \end{cases}$$
>
> 由定理11.4.1(g)我们可以得到F_J是黎曼可积的，然后注意到对任意$x \in X$都有：
>
> $$f(x) = \sum_{J \in P} F_J(x)$$
>
> 因此我们有$f = F_{J_1} + \ldots + F_{J_n}(P = \{J_1, \ldots, J_n\})$，从而根据定理11.4.1(a)我们有$f$是黎曼可积的，题目结论得证。
>
> (所以为什么提示里面说要用到定理11.4.1(h)，没看懂怎么用)

本节相关跳转

[实分析 9.9 一致连续性]

[实分析 11.4 黎曼积分的基本性质]