

12.2 度量空间中的一些点集拓扑知识

定义

1. (12.2.1 球) 设 (X, d) 是一个度量空间, x_0 是 X 中的一个点, 并设 $r > 0$ 。我们将 X 中依度量 d 以 x_0 为中心, 半径等于 r 的球 $B_{(X,d)}(x_0, r)$ 定义为集合:

$$B_{(X,d)}(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

如果我们能清楚的知道度量空间 (X, d) 是什么, 那么也可以将 $B_{(X,d)}(x_0, r)$ 简记为 $B(x_0, r)$ 。

(注: 考虑平面集上的几何直观或许有助于理解度量球的概念, 例如在二维欧几里得空间 \mathbb{R}^2 中, 球 $B_{(\mathbb{R}^2, d_{l_2})}((0, 0), 1)$ 是一个开圆盘; 如果将度量替换为出租车度量, 那么 $B_{(\mathbb{R}^2, d_{l_1})}((0, 0), 1)$ 是一个正方形; 如果使用离散度量, 那么球 $B_{(\mathbb{R}^2, d_{\text{disc}})}((0, 0), 1)$ 是一个单点集, 而球 $B_{(\mathbb{R}^2, d_{\text{disc}})}((0, 0), 2)$ 是整个空间 \mathbb{R}^2 ; 也有些不那么几何直观的球, 例如在具有通常度量 d 的度量空间 \mathbb{R} 中, 区间 $(3, 7)$ 就是球 $B_{(\mathbb{R}, d)}(5, 2)$)

2. (12.2.5 内点, 外点和边界点) 设 (X, d) 是一个度量空间, E 是 X 的一个子集, 并且设 x_0 是 X 中的一个点。如果能找到一个半径 $r > 0$ 的球 $B(x_0, r) \subseteq E$, 那么我们称 x_0 是 E 的**内点**; 如果能找到一个半径 $r > 0$ 的球 $B(x_0, r) \cap E = \emptyset$, 那么我们称 x_0 是 E 的**外点**; 如果 x_0 既不是 E 的内点也不是 E 的外点, 那么我们称 x_0 是 E 的**边界点**。

此外, 我们称 E 的所有内点所构成的集合叫做 E 的**内部**, 有时记为 $\text{int}(E)$; E 的所有外点所构成的集合叫做 E 的**外部**, 有时记为 $\text{ext}(E)$; E 的所有边界点所构成的集合叫做 E 的**边界**, 有时记为 ∂E 。

(注: 如果 x_0 是 E 的内点, 那么 x_0 肯定是 E 中的元素; 如果 x_0 是 E 的外点, 那么 x_0 肯定不是 E 中的元素。因此 x_0 不可能既是 E 的内点又是 E 的外点。如果 x_0 是 E 的边界点, 那么不能直接判断 x_0 是不是 E 中的元素, 并且边界点也并非总是存在的, 例如习题 12.2.1 中的例子)

3. (12.2.9 闭包) 设 (X, d) 是一个度量空间, E 是 X 的一个子集, 并且设 x_0 是 X 中的一个点。如果对任意的半径 $r > 0$, 球 $B(x_0, r)$ 与 E 的交集总是非空的, 那么我们称 x_0 是 E 的**附着点**。 E 的全体附着点构成的集合称为 E 的**闭包**, 并记为 \overline{E} 。

(注: 这些概念同我们曾经在实直线上定义的概念 (定义 9.1.8 与 定义 9.1.10) 是一致的, 不妨想想为什么)

4. (12.2.12 开集和闭集) 设 (X, d) 是一个度量空间, 并且设 E 是 X 的一个子集。如果 E 包含了自身所有的边界点, 也即 $\partial E \subseteq E$, 那么我们称 E 是**闭的**; 如果 E 不包含自身任何的边界点, 也即 $\partial E \cap E = \emptyset$, 那么我们称 E 是**开的**; 如果 E 包含了部分自身的边界点而不包含其余边界点, 那么 E 是既不是开的也不是闭的。

(注: 如果一个集合没有边界, 那么它就同时是开的或者闭的。在很多的情形下对度量空间 (X, d) , X 和 \emptyset 都是唯二既开又闭的集合, 但是也有例外, 例如在离散度量下所有的集合都是既开又闭的)

命题

1. (12.2.10) 设 (X, d) 是一个度量空间, E 是 X 的一个子集, 并且设 x_0 是 X 中的一个点。那么下面的命题在逻辑上是等价的:

1. x_0 是 E 的附着点。
2. x_0 要么是 E 的内点, 要么是 E 的边界点。
3. 在 E 中能够找到一个依度量 d 收敛于点 x_0 的序列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 。

(注：由于前两条命题等价，于是我们可以推出一个关于闭包的有用结论，也就是推论12.2.11)

推论：

1. (12.2.11) 设 (X, d) 是一个度量空间，并且设 E 是 X 的一个子集。那么有 $\overline{E} = \text{int}(E) \cup \partial E = X \setminus \text{ext}$ 成立。
2. (12.2.15 开集和闭集的基本性质) 设 (X, d) 是一个度量空间。
 1. 设 E 是 X 的一个子集，那么 E 是开的，当且仅当 $E = \text{int}(E)$ ，换言之， E 是开的，当且仅当对任意的 $x \in E$ ，存在一个 $r > 0$ 使得 $B(x, r) \subseteq E$ 。
 2. 设 E 是 X 的一个子集，那么 E 是闭的，当且仅当 E 包含了自身所有的附着点，换言之， E 是闭的，当且仅当对于 E 中的任意一个收敛序列 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ ，都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 属于 E 。
 3. 对于任意的 $x_0 \in X$ 和 $r_0 > 0$ ，球 $B(x_0, r_0)$ 都是开集，集合 $\{x \in X : d(x, x_0) \leq r_0\}$ 是闭集（这个集合有时候被称为以 x_0 为中心，半径为 r 的闭球）。
 4. 任何一个单点集 $\{x_0\}$ 都是闭的，其中 $x_0 \in X$ 。
 5. 如果 E 是 X 的一个子集，那么 E 是开的，当且仅当它的补集 $X \setminus E := \{x \in X : x \notin E\}$ 是闭的。
 6. 如果 E_1, E_2, \dots, E_n 是 X 中的有限个开集，那么 $E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$ 也是开的；如果 E_1, E_2, \dots, E_n 是 X 中的有限个闭集，那么 $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ 也是闭的。
 7. 如果 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 X 中的一簇开集（这里的指标集没有限制，可以是无限的或者有限的），那么并集 $\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ 也是开的；如果 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 X 中的一簇闭集，那么交集 $\bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha$ 也是闭的。
 8. 如果 E 是 X 的任意一个子集，那么 $\text{int}(E)$ 是包含在 E 中的最大开集。换言之， $\text{int}(E)$ 是开集，并且对任意给定的其它开集 $V \subseteq E$ 均有 $V \subseteq \text{int}(E)$ ；类似地， \overline{E} 是包含 E 中的最小闭集。换言之， \overline{E} 是闭集，并且对任意给定的其它闭集 $K \supseteq E$ 均有 $K \supseteq \overline{E}$ 。

课后习题

12.2.1 证明例12.2.8中的结论

例12.2.8：

如果集合 X 具有离散度量，并设 E 是 X 的任意一个子集，那么 E 中的每一个元素都是 E 的内点；任何不包含在 E 中的点都是 E 的外点，并且 E 没有边界点。

注意到对任意的 $e \in E$ ，球 $B(e, 0.5) = \{e\}$ ，从而有 $B(e, 0.5) \subseteq E$ 。于是根据定义12.2.5有 e 是 E 的一个内点。

然后对任意的 $x \in X \setminus E$ ，球 $B(x, 0.5) = \{x\}$ ，从而有 $B(x, 0.5) \cap E = \emptyset$ 。于是根据定义12.2.5有 x 是 E 的一个外点。

然后根据上面的讨论我们知道对任意 $x \in X$ ，若有 $x \in E$ 则 x 是 E 的一个内点； $x \notin E$ 则 x 是 E 的一个外点。于是不存在 $x \in X$ 既不是 E 的内点也不是 E 的外点，根据定义12.2.5有 E 不存在边界点。

12.2.2 证明命题12.2.10 (提示: 对某些蕴含关系的证明需要用到选择公理, 就像在引理8.4.5的证明中那样)

我们先证明(a)等价于(b), 然后再证明(a)等价于(c), 从而三个命题在逻辑上都是等价的。

- 证明: x_0 是 E 的附着点, 当且仅当 x_0 要么是 E 的内点, 要么是 E 的边界点。

若 x_0 是 E 的附着点, 则根据定义12.2.9有对任意的半径 $r > 0$, 球 $B(x_0, r)$ 与 E 的交集总是非空的。因此根据定义12.2.5, x_0 肯定不是 E 的外点 (不存在 $r > 0$ 使得 $B(x_0, r)$ 与 E 的交集为空)。又因为定义12.2.5我们知道 x_0 只可能是 E 的内点, 外点, 边界点 (不是内点也不是外点) 中的一个, 因此只能有 x_0 要么是 E 的内点, 要么是 E 的边界点。

反过来, 若 x_0 要么是 E 的内点, 要么是 E 的边界点, 则 x_0 肯定不是 E 的外点, 于是根据定义12.2.5应当有不存在 $r > 0$ 使得 $B(x_0, r)$ 与 E 的交集为空, 换言之即对任意的 $r > 0$ 都有 $B(x_0, r) \cap E \neq \emptyset$, 于是根据定义12.2.9即有 x_0 是 E 的附着点。

综上, x_0 是 E 的附着点, 当且仅当 x_0 要么是 E 的内点, 要么是 E 的边界点。

- 证明: x_0 是 E 的附着点, 当且仅当在 E 中能够找到一个依度量 d 收敛于点 x_0 的序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 。

若 x_0 是 E 的附着点, 则根据定义12.2.9对任意的半径 $r > 0$ 都有 $B(x_0, r) \cap E \neq \emptyset$ 。于是考虑指标集 $I := \{n \in \mathbb{N} : n \neq 0\}$, 然后对任意的 $\alpha \in I$ 令有:

$$A_\alpha = B\left(x_0, \frac{1}{\alpha}\right) \cap E$$

由上面的讨论我们知道对任意的 $\alpha \in I$ 都有 A_α 是非空的, 根据选择公理我们能为每个 I 中自然数 $\alpha \geq 1$ 都制定了一个 $x_\alpha \in A_\alpha$, 于是可以组成一个序列 $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ (也就是序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 根据 A_n 的定义我们显然有 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是完全由 E 中元素组成的)。然后我们对序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 讨论:

注意到对任意的实数 $\varepsilon > 0$, 根据阿基米德原理都存在一个自然数 $N \geq 1$ 使得 $\varepsilon > \frac{1}{N}$, 于是对任意的 $n \geq N$, 根据 A_n 的定义我们有:

$$x_n \in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \cap E \implies d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$$

又因为 $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$, 于是结合度量的始终大于0即可以推知对任意 $n \geq N$ 都有 $|d(x_n, x_0)| < \varepsilon$, 从而根据实数序列收敛的定义我们可以得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$, 再根据定义12.1.14我们有 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d 收敛于点 x_0 , 于是也即在 E 中能够找到一个依度量 d 收敛于点 x_0 的序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 。

反过来, 若在 E 中能够找到一个依度量 d 收敛于点 x_0 的序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 则根据定义12.1.14我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$, 于是对任意的实数 $r > 0$ 都存在一个自然数 $N \geq 1$ 使得对任意的 $n \geq N$ 都有 $d(x_n, x_0) < \varepsilon$, 也即有 $x_n \in B(x_0, r) \cap E$ 。于是在上面的讨论中得证了对任意的 $r > 0$ 都有球 $B(x_0, r)$ 与 E 的交集非空, 于是根据定义12.2.9有 x_0 是 E 的一个附着点。

综上, x_0 是 E 的附着点, 当且仅当在 E 中能够找到一个依度量 d 收敛于点 x_0 的序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 。

12.2.3 证明命题12.2.15 (提示: 可以使用前面的部分证明后面的部分)

先证明几个用得上的辅助结论:

辅助结论: 对任意的 E 是 X 的与任意的 $x \in X$, x 恰好是 E 的内点, 外点, 或者边界点中的一种。从而 E 的外部, 内部与边界凉凉不相交并且有 $\text{int}(E) \cup \text{ext}(E) \cup \partial E = X$ 。

证明:

首先根据定义12.2.5, 如果 x 是 E 的边界点, 那么 x 不是 E 的内点或者外点; 若 x 是 E 的内点, 则存在 $r > 0$ 使得 $B(x, r) \subseteq E$, 从而有 $x \in E$; 若 x 是 E 的外点, 则存在 $r > 0$ 使得 $B(x, r) \cap E = \emptyset$, 于是 $x \notin E$ 。从而 x 不可能既是 E 的内点又是 E 的外点。于是综合即有 x 至多能分类到这三种中的一种

另一方面, x 必然属于 E 的内点, 外点, 或者边界点中的一个, 因为若 x 不是 E 的内点或外点则根据定义12.2.5 x 是 E 的边界点, 于是 x 总能分类到这三种中的至少一种。

综上, 于是 x 恰好是 E 的内点, 外点, 或者边界点中的一种。

(其实这个结论在定义12.2.5几乎是直接显现的, 不过仍然在此简要说明)

然后我们逐条证明:

1. 设 E 是一个 X 的子集, 那么 E 是开的, 当且仅当 $E = \text{int}(E)$, 换言之, E 是开的, 当且仅当对任意的 $x \in E$, 存在一个 $r > 0$ 使得 $B(x, r) \subseteq E$ 。

若 E 是开的, 则对任意 $e \in E$, 根据定义12.2.12有 e 不是 E 的边界点, 然后根据辅助结论证明中的讨论 e 也不能是 E 的外点, 于是根据辅助结论 e 只能是 E 的内点, 从而 $E \subseteq \text{int}(E)$; 另一方面, 在辅助结论的证明我们也得到了对任意 e 是 E 的内点都有 $e \in E$, 于是有 $\text{int}(E) \subseteq E$, 综合即有 $E = \text{int}(E)$ 。

反过来, 若 $E = \text{int}(E)$, 于是根据辅助结论有 $E \cap \partial E = \text{int}(E) \cap \partial E = \emptyset$, 根据定义12.2.12即 E 是开的。

2. 设 E 是一个 X 的子集, 那么 E 是闭的, 当且仅当 E 包含了自身所有的附着点, 换言之, E 是闭的, 当且仅当对于 E 中的任意一个收敛序列 $(x_n)_{n=m}^{\infty}$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 属于 E 。

若 E 是闭的, 则 E 包含了自身所有的边界点, 而在辅助结论的证明中我们证明了 E 包含了自身所有的内点。于是根据命题12.2.10, 对任意 E 的附着点 e , 它要么是 E 的边界点, 要么是 E 的内点, 无论哪种情况都有 $e \in E$, 从而即 E 包含了自身所有的附着点。

若 E 包含了自身所有的附着点, 则根据命题12.2.10, 对任意 E 的边界点 e 都有 e 是 E 的附着点, 于是 $e \in E$, 从而即 $\partial E \subseteq E$ 。根据定义12.2.12, 即有 E 是闭的。

3. 对于任意的 $x_0 \in X$ 和 $r_0 > 0$, 球 $B(x_0, r_0)$ 都是开集, 集合 $\{x \in X : d(x, x_0) \leq r_0\}$ 是闭集 (这个集合有时候被称为以 x_0 为中心, 半径为 r 的闭球)。

我们先证明 $B(x_0, r_0) = \text{int}(B(x_0, r_0))$, 即对任意 $x \in B(x_0, r_0)$ 都有 x 是 $B(x_0, r_0)$ 的内点。

根据定义应该有 $r := d(x, x_0) < r_0$, 于是实数 $r' := r_0 - r$ 应该是大于0的, 此时我们考虑任意的 $x' \in B(x, r')$, 根据度量球的定义应该有 $d(x', x) < r'$, 进而根据度量空间的三角不等式, 应该有:

$$d(x', x_0) \leq d(x', x) + d(x, x_0) < r' + r = r_0$$

从而有 $d(x', x_0) < r_0 \implies x' \in B(x_0, r_0)$, 于是 $B(x, r') \subseteq B(x_0, r_0)$, 根据定义12.2.5有 x 是 $B(x_0, r_0)$ 的内点。

于是根据结论(a)我们有 $B(x_0, r_0)$ 是开集。

然后我们记 $C := \{x \in X : d(x, x_0) \leq r_0\}$, 证明闭球 C 包含了自身全部的附着点。

考虑任意 x 是 C 的附着点, 根据命题12.2.10, 存在一个完全由 C 中元素组成的序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x 。于是根据定义12.2.14对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \geq 1$ 使得对任意的 $n \geq N$ 都有 $d(x_n, x) \leq \varepsilon$ 成立。

又因为 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是由 C 中元素组成的, 于是对任意的 $n \geq 1$ 都有 $d(x_n, x_0) \leq r_0$ 。于是根据度量空间的三角不等式我们有:

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_0) \leq r_0 + \varepsilon$$

注意到这个结论对任意的 $\varepsilon > 0$ 都可以找到对应的 x_n 组成上面的三角不等式, 并且 $d(x, x_0)$ 是不依赖于 ε 的, 因此我们只能有 $d(x, x_0) \leq r_0$, 从而 $x \in C$ 。于是任意 x 是 C 的附着点都属于 C 。

于是根据结论(b)可以得到 C 是闭的。

4. 任何一个单点集 $\{x_0\}$ 都是闭的, 其中 $x_0 \in X$ 。

考虑任意 $x \in X$ 是 $\{x_0\}$ 的附着点, 根据命题12.2.10应该存在一个完全由 $\{x_0\}$ 中元素组成的序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x , 注意到由于 $\{x_0\}$ 是一个单元素集, 因此只能有对任意的 $n \geq 1$ 都有 $x_n = x_0$, 从而只能有 $x = x_0$ 。

于是 $\{x_0\}$ 只有唯一的附着点 x_0 , 进而由于 $\{x_0\}$ 包含了自身所有的附着点 (唯一的 x_0) 结合结论(b)有 $\{x_0\}$ 是闭的。

5. 如果 E 是 X 的一个子集, 那么 E 是开的, 当且仅当它的补集 $X \setminus E := \{x \in X : x \notin E\}$ 是闭的。

注意到对任意 $x \in X$, x 是 E 的内点当且仅当 x 是 $X \setminus E$ 的外点, 这是因为:

若 x 是 E 的内点, 则根据定义存在 $r > 0$ 使得 $B(x, r) \subseteq E$, 于是有 $B(x, r) \cap (X \setminus E) = \emptyset$, 根据定义12.2.5即有 x 是 E 的外点; 反过来, 若 x 是 $X \setminus E$ 的外点, 则存在 $r > 0$ 使得 $B(x, r) \cap (X \setminus E) = \emptyset$, 于是 $B(x, r) \subseteq E$, 根据定义12.2.5即有 x 是 E 的内点。

注意到上面的结论也蕴含了“对任意 $x \in X$, x 是 E 的外点当且仅当 x 是 $X \setminus E$ 的内点” (替换 $X \setminus E$ 为 E , E 为 $X \setminus E$ 即可)。于是我们可以得到: 对任意 $x \in X$, x 是 E 的边界点当且仅当 x 是 $X \setminus E$ 的边界点, 这是因为:

若 x 是 E 的边界点, 则 x 既不是 E 的内点或外点, 于是 x 相应的也不可能是 $X \setminus E$ 的外点或内点, 根据辅助结论于是 x 只能是 $X \setminus E$ 的边界点, 反过来也是类似。

于是若 E 是开的, 则根据上面的讨论对任意 $X \setminus E$ 的边界点 e , e 是 E 的边界点, 进而根据开集的定义有 $e \notin E \iff e \in X \setminus E$, 于是即有 $X \setminus E$ 包含了自身所有的边界点, 即有 $X \setminus E$ 是闭的; 反过来, 若 $X \setminus E$ 是闭的, 则根据上面的讨论对任意 E 的边界点 e , e 是 $X \setminus E$ 的边界点, 于是根据闭集的定义有 $e \notin X \setminus E \implies e \in E$, 于是 E 包含了自身所有的边界点, 即有 E 是开的。

综上, 于是结论得证。

6. 如果 E_1, E_2, \dots, E_n 是 X 中的有限个开集, 那么 $E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$ 也是开的; 如果 E_1, E_2, \dots, E_n 是 X 中的有限个闭集, 那么 $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ 也是闭的。

先证明第一个结论, 对任意 $e \in E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$, 于是对任意 $1 \leq m \leq n$, 我们可以定义下面的集合:

$$R_m := \{r > 0 : B(e, r) \subseteq E_m\}$$

根据结论(a), 由于对任意 $1 \leq m \leq n$ 都有 e 是 E_m 的内点, 因此 R_m 都是非空的。于是根据选择公理, 对任意 $1 \leq m \leq n$ 我们都可以指定一个 $r_m \in R_m$, 换句话说, 我们可以组成下面这样一个有限集 \mathcal{R} :

$$\mathcal{R} := \{r_m : 1 \leq m \leq n\}$$

由于 \mathcal{R} 是有限的, 因此其下确界必然属于自身, 换言之, 必然存在一个 $1 \leq m_0 \leq n$ 使得对任意 $1 \leq m \leq n$ 都有 $r_{m_0} \leq r_m$, 从而对任意 $1 \leq m \leq n$ 有:

$$B(e, r_{m_0}) \subseteq B(e, r_m) \subseteq E_m$$

于是任意 $x \in B(e, r_{m_0})$ 都满足对任意 $1 \leq m \leq n$ 有 $x \in E_m$, 从而有 $B(e, r_{m_0}) \subseteq E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$, 根据结论(a)可得 $E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$ 是开的。

然后证明第二个结论, 根据结论(b)即证明: 对于 $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ 中的任意一个收敛序列 $(x_i)_{i=0}^{\infty}$, 都有 $x := \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ 属于 $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ 。

注意到 $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ 必然满足: 至少存在一个 $1 \leq m \leq n$ 使得对任意的 $j \geq 0$, 都存在一个 $i > j$ 使得 $x_i \in E_m$ 。这是因为:

使用反证法, 假设对任意 $1 \leq m \leq n$ 都存在 $j_m \geq 0$ 使得对任意的 $i > j_m$ 都有 $x_i \notin E_m$, 注意到集合:

$$\{j_m : 1 \leq m \leq n\}$$

是有限的, 因此其上确界应当属于自身, 我们记为 j , 从而对任意的 $i > j$, 对任意 $1 \leq m \leq n$ 都有:

$$i > j \geq j_m \implies x_i \notin E_m$$

但是由于 $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ 是由 $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ 中元素构成的序列, 因此至少应该存在一个 $1 \leq m_0 \leq n$ 使得 $x_i \in E_{m_0}$, 于是导出了矛盾, 反正假设不成立。

于是我们可以构建下面的递推关系: 定义 $b(0) := \min\{i \in \mathbb{N} : x_i \in E_m\}$, 然后对任意 $i > 0$, 定义 $b(i)$ 为:

$$b(i) := \min\{j \in \mathbb{N} : j > b(i-1) \text{ 且 } x_j \in E_m\}$$

由于上面的性质, 因此这个定义总是有效的, 并且 $(x_{b(i)})_{i=0}^{\infty}$ 是一个完全由 E_m 中元素组成的点列。于是根据子序列的定义, 我们有序列 $(d(x_{b(i)}, x))_{i=0}^{\infty}$ 是序列 $(d(x_i, x))_{i=0}^{\infty}$ 的一个子序列, 于是根据命题6.6.5有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{b(i)}, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_i, x)$$

由于 $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ 依度量 d 收敛于 x , 于是根据依度量收敛的定义有上面的极限等于0, 进而 $(x_{b(i)})_{i=0}^{\infty}$ 是依度量 d 收敛于 x 的。根据命题12.2.10有 x 也是 E_m 的一个附着点, 从而根据 E_m 是闭的与结论(b)可以得到 $x \in E_m \implies x \in E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ 。

综上, 于是根据结论(b)可以得到 $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ 是闭的。

7. 如果 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 X 中的一簇开集 (这里的指标集没有限制, 可以是无限的或者有限的), 那么并集 $\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ 也是开的; 如果 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 X 中的一簇闭集, 那么交集 $\bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha$ 也是闭的。

先证明第一个结论, 如果 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 X 中的一簇开集, 则对任意 $e \in \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$, 存在一个 $\beta \in I$ 使得 $e \in E_\beta$ 。由于 E_β 是开集, 于是存在一个 $r > 0$ 使得 $B(e, r) \subseteq E_\beta \implies B(e, r) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$, 从而根据结论(a)可以得到 $\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ 是开的。

再证明第二个结论, 如果 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 X 中的一簇闭集, 则对 $\bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha$ 中的任意一个收敛序列 $(x_n)_{n=m}^\infty$, 特别地对任意 $\alpha \in I$ 都有 $(x_n)_{n=m}^\infty$ 是 E_α 中的收敛序列。由于 E_α 是闭集, 根据结论(b)应该有 $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 属于 E_α 。综合可得对任意 $\alpha \in I$ 都有 $x \in E_\alpha$, 即有 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha$, 于是此时根据结论(b)可以得到 $\bigcap_{\alpha \in I} E_\alpha$ 是闭的。

8. 如果 E 是 X 的任意一个子集, 那么 $\text{int}(E)$ 是包含在 E 中的最大开集。换言之, $\text{int}(E)$ 是开集, 并且对任意给定的其它开集 $V \subseteq E$ 均有 $V \subseteq \text{int}(E)$; 类似地, \overline{E} 是包含 E 中的最小闭集。换言之, \overline{E} 是闭集, 并且对任意给定的其它闭集 $K \supseteq E$ 均有 $K \supseteq \overline{E}$ 。

先证明第一个结论, 考虑任意的 V 是开集且 $V \subseteq E$, 则根据结论(a)对任意的 $v \in V$ 都存在 $r > 0$ 使得 $B(v, r) \subseteq V \implies B(v, r) \subseteq E$, 于是根据内点定义我们有 v 也是 E 的内点, 即有 $v \in \text{int}(E)$, 于是我们总能得到 $V \subseteq \text{int}(E)$ 。

然后证明 $\text{int}(E)$ 是开集, 对任意的 $e \in \text{int}(E)$, 都存在 $r > 0$ 使得 $B(e, r) \subseteq E$ 。根据结论(c)我们知道 $B(e, r)$ 是一个开集, 从而根据上面的讨论可以得到 $B(e, r) \subseteq \text{int}(E)$, 于是此时根据结论(a)可以直接得证 $\text{int}(E)$ 是开的, 第一个结论证明完毕。

接着证明第二个结论, 考虑任意的 K 是闭集且 $E \subseteq K$, 由于闭包 \overline{E} 包含了 E 所有的附着点, 于是根据命题12.2.10对任意的 $x \in \overline{E}$, 存在一个完全由 E 中元素组成的序列 $(x_n)_{n=m}^\infty$ 收敛于 x , 注意到由于 $E \subseteq K$ 因此 $(x_n)_{n=m}^\infty$ 也是完全由 K 中元素组成的, 因此结合 K 是闭集与结论(b)可以得到 $x \in K$, 于是我们总能得到 $\overline{E} \subseteq K$ 。

然后证明 \overline{E} 是闭的, 考虑任意的完全由 \overline{E} 中元素组成的收敛序列 $(b_n)_{n=0}^\infty$, 不妨设其依度量 d 收敛于 c , 即有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, c) = 0$$

然后由于 \overline{E} 中元素都是 E 的附着点, 于是根据附着点的定义, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 集合 $B(b_n, d(b_n, c)) \cap E$ 总是非空的。从而根据选择公理, 我们可以为每一个 $n \in \mathbb{N}$ 指定一个 $a_n \in B(b_n, d(b_n, c)) \cap E$ 。于是 a_n 满足 $a_n \in E$ 且:

$$d(a_n, b_n) \leq d(b_n, c) \implies d(a_n, c) \leq d(a_n, b_n) + d(b_n, c) \leq 2d(b_n, c)$$

于是对实数序列 $(d(a_n, c))_{n=0}^\infty$, 可以根据比较原理得到它的极限值为:

$$0 \leq d(a_n, c) \leq 2d(b_n, c) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, c) = 0$$

即有 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 是依度量 d 收敛于 c 的, 又因为 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 是完全由 E 中点组成的, 于是 c 也是 E 的附着点, 从而根据闭包的定义有 $c \in \overline{E}$, 然后根据结论(b)可以得到 \overline{E} 是闭的。

综上, 于是证明完毕。

12.2.4 设 (X, d) 是一个度量空间, x_0 是 X 中的一个点, 并设 $r > 0$ 。设 B 是开球 $B := B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$, 并设 C 是闭球 $C := \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$

(a) 证明: $\overline{B} \subseteq C$

根据命题12.2.15(c)我们有 C 是闭的, 并且注意到 $B \subseteq C$, 然后根据命题12.2.15(h)有 \overline{B} 是包含 B 的最小闭集, 于是只能有 $\overline{B} \subseteq C$ 。

(b) 举例说明, 存在度量空间 (X, d) , 点 x_0 与半径 r 使得 $\overline{B} \neq C$

考虑 $X = \{x_0, x_1\}$ 与离散度量 d_{disc} , 点 x_0 与半径1。此时可以得到:

$$\begin{aligned} B &= \{x \in X : d_{\text{disc}}(x, x_0) < 1\} = \{x_0\} \\ C &= \{x \in X : d_{\text{disc}}(x, x_0) \leq 1\} = \{x_0, x_1\} \end{aligned}$$

然后根据命题12.2.5(d)我们可以得到 $\overline{B} = B = \{x_0\}$, 从而此时有 $\overline{B} \neq C$ 。

本节相关跳转

[实分析 8.4 选择公理](#)

[实分析 9.1 实直线的子集](#)