14.3 一致收敛性与连续性

定义

1. (14.3.5 有界函数) 设$f: X \to Y$是从度量空间(X, d_X)到另一个度量空间(Y, d_Y)的函数。如果$f(X)$是有界集合，即Y中存在一个球$B_{(Y,d_Y)}(y_0, R)$使得对所有的$x \in X$都有$f(x) \in B_{(Y,d_Y)}(y_0, R)$，那么就称函数$f: X \to Y$是**有界的**。

命题

1. (14.3.1 一致极限保持连续性 I) 设$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是从度量空间(X, d_X)到另一个度量空间(Y, d_Y)的函数序列，并且该序列一致收敛于函数$f: X \to Y$，设x_0是X中的点。如果对每一个n，函数$f^{(n)}$都在x_0处连续，那么极限函数f也在x_0处连续。

   (注：于是一致连续的函数序列能保持连续性)

   > 推论：
   >
   > 1. (14.3.2 一致极限保持连续性 II) 设$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是从度量空间(X, d_X)到另一个度量空间(Y, d_Y)的函数序列，并设该序列一致收敛于函数$f: X \to Y$。如果对每一个n，函数$f^{(n)}$都在X上连续，那么极限函数f也在X上连续。
   >
   >   (注：应该把这个结论与例14.2.4比较)

2. (14.3.3 交换极限和一致极限的次序) 设(X, d_X)和(Y, d_Y)都是度量空间，其中Y是一个完备空间，E是X的子集。并设$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是从E到Y的函数序列，该序列在E上一致收敛于某个函数$f: X \to Y$。设x_0是E的附着点，并且对每一个n，极限$\lim_{x \to x_0; x \in E} f^{(n)}(x)$都存在。那么极限$\lim_{x \to x_0; x \in E} f(x)$也存在，并且等于序列$\left(\lim_{x \to x_0; x \in E} f^{(n)}(x)\right)_{n=1}^{\infty}$的极限。换言之，下面的两个极限运算的次序可以交换：

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0; x \in E} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to x_0; x \in E} \lim_{n \to \infty} f^{(n)}(x)$$

   (注：应该把这个结论与例14.2.5比较)

3. (14.3.4 序列的形式？) 设$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是从度量空间(X, d_X)到另一个度量空间(Y, d_Y)的连续函数序列，并且该序列一致收敛于函数$f: X \to Y$，设$x^{(n)}$是X中收敛于某极限x_0的序列，那么$f^{(n)}(x^{(n)})$（在Y中）收敛于$f(x_0)$。

4. (14.3.6 一致极限保持有界性) 设$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是从度量空间(X, d_X)到另一个度量空间(Y, d_Y)的函数序列，并且该序列一致收敛于函数$f: X \to Y$。如果对于每一个n，函数$f^{(n)}$在X上都是有界的，那么极限函数f在X上也是有界的。

   (注：逐点收敛是没有这些好性质的，本节的习题中我们会说明这点)

课后习题

14.3.1 证明定理14.3.1。简单解释一下为什么你的证明需要使用一致收敛，为什么逐点收敛不足以得出这个结论（提示：最简单的方法是利用定义13.1.1中连续性的“$\varepsilon-\delta$”定义来证明这个结论，你可能会用到下面的这个三角不等式

$$d_Y(f(x),f(x_0))\leq d_Y(f(x),f^{(n)}(x))+d_Y(f^{(n)}(x),f^{(n)}(x_0))+d_Y(f^{(n)}(x_0),f(x_0))$$

另外，你还需要把ε写成$\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3$的形式。最后，也可以用命题14.3.3来证明定理14.3.1，但是你可能会发现利用定义证明定理14.3.1会更容易一点）

> 先证明定理14.3.1，对任意的$\varepsilon>0$，由于$f^{(n)}$是一致收敛于f的，因此存在$N\geq 1$对任意的$x\in X$与$n\geq N$都有：
>
> $$d_Y(f^{(n)}(x),f(x))<\frac{\varepsilon}{3}$$
>
> 特别地，上面的结论对$n=N$与$x=x_0$时成立。然后根据题设$f^{(N)}$在x_0处连续，于是根据定义13.1.1，存在$\delta>0$使得对任意x满足$d_X(x,x_0)<\delta$都有$d_Y(f^{(N)}(x),f^{(N)}(x_0))<\varepsilon/3$。于是综合我们上面的结论对任意$x$满足$d_X(x,x_0)<\delta$我们有：
>
> $$d_Y(f(x),f(x_0))\leq d_Y(f(x),f^{(N)}(x))+d_Y(f^{(N)}(x),f^{(N)}(x_0))+d_Y(f^{(N)}(x_0),f(x_0))<3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$
>
> 于是综上，我们得到了：
>
> 对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得对任意x满足$d_X(x,x_0)<\delta$都有$d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$。
>
> 于是根据定义13.1.1即有f在x_0处连续。
>
> ---
>
> 然后说说为什么一定要一致收敛而逐点收敛不行。在上面的证明中我们先由一致收敛得到了对任意$x\in X$都成立
>
> $$d_Y(f^{(N)}(x),f(x))<\frac{\varepsilon}{3}$$
>
> 的$N>0$，对于逐点收敛而言，这个N必然同x关联，于是我们将它改写为N_x。然后同样由于$f^{(N_x)}$的连续性，存在$\delta_x>0$使得对任意x'满足$d_X(x',x_0)<\delta_x$都有$d_Y(f^{(N_x)}(x'),f^{(N_x)}(x_0))<\varepsilon/3$。但是在逐点收敛的假设下我们无法保证$x$满足$d_X(x',x_0)<\delta_x$，因此由于$f^{(N_x)}$不能确保这点所以上面的证明方法就必然是失效的。
>
> 事实上，逐点收敛不保持连续性的例子原书已经给过了（例14.2.4），所以这里就不再赘述了。

14.3.2 证明命题14.3.3（提示：这很像定理14.3.1.定理14.3.1无法用来证明命题14.3.3，但是命题14.3.3可以用来证明定理14.3.1）

> 我们先证明极限$L:=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0;x\in E}f^{(n)}(x)$是存在的，然后来证明极限$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)$也存在且$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)=L$。
>
> 证明：极限$L:=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0;x\in E}f^{(n)}(x)$存在。
>
> 考虑任意的$\varepsilon>0$。由于$f^{(n)}$是一致收敛于f的，于是根据定义14.3.1存在$N>0$使得对任意$n\geq N$与任意的$x\in X$都有：
>
> $$d_Y(f^{(n)}(x),f(x))<\frac{\varepsilon}{4}$$
>
> 然后考虑任意i，$j\geq N$，由于极限$L^{(i)}:=\lim_{x\to x_0;x\in E}f^{(i)}(x)$与极限$L^{(j)}:=\lim_{x\to x_0;x\in E}f^{(j)}(x)$存在，于是根据定义14.1.1分别存在存在$\delta_i>0$与$\delta_j>0$使得对任意$x\in E$都有：

$$d_X(x,x_0)<\delta_i \Longrightarrow d_Y(f^{(i)}(x),L^{(i)})<\frac{\varepsilon}{4}$$
$$d_X(x,x_0)<\delta_j \Longrightarrow d_Y(f^{(j)}(x),L^{(j)})<\frac{\varepsilon}{4}$$

此时令有$\delta:=\min(\delta_i,\delta_j)$。于是根据度量空间的三角不等式，考虑$x\in E$是满足$d_X(x,x_0)<\delta$的，我们有：

$$\begin{aligned}d_Y(L^{(i)},L^{(j)}) \leq & d_Y(L^{(i)},f^{(i)}(x))+d_Y(f^{(i)}(x),f(x)) \\ & +d_Y(f(x),f^{(j)}(x))+d_Y(f^{(j)}(x),L^{(j)}) \\ < & 4\cdot\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon\end{aligned}$$

总结即对任意的$\varepsilon>0$，存在$N>0$使得对任意i，$j\geq 0$都有$d_Y(L^{(i)},L^{(j)})<\varepsilon$。于是根据定义12.4.6$\left(\lim_{x\to x_0;x\in E}f^{(n)}(x)\right)_{n=1}^{\infty}$是$Y$中的柯西序列，然后由于$Y$的完备性，因此极限$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0;x\in E}f^{(n)}(x)$存在。

证明：$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)=L$。

考虑任意的$\varepsilon>0$。类似上面的证明，我们知道存在一个$N_1>0$使得对任意$n\geq N_1$与任意的$x\in X$都有：

$$d_Y(f^{(n)}(x),f(x))<\frac{\varepsilon}{3}$$

然后对任意$n>0$，由于极限$L^{(n)}:=\lim_{x\to x_0;x\in E}f^{(n)}(x)$存在，于是又存在一个$\delta_n>0$使得对任意$x\in E$满足$d_X(x,x_0)<\delta_n$我们有：

$$d_Y(f^{(n)}(x),L^{(n)})<\frac{\varepsilon}{3}$$

然后在上面的证明中，我们已经证明了序列$(L^{(n)})_{n=1}^{\infty}$收敛于L，于是存在一个$N_2>0$使得对任意$n\geq N_2$都有：

$$d_Y(L^{(n)},L)<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是令有$N:=\max(N_1,N_2)$且$\delta:=\delta_N$，然后根据上面的结论与度量空间的三角不等式，对任意$x\in E$满足$d_X(x,x_0)<\delta$都有：

$$d_Y(f(x),L)<d_Y(f(x),f^{(N)}(x))+d_Y(f^{(N)}(x),L^{(N)})+d_Y(L^{(N)}),L)<3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

于是根据定义14.1.1即有$\lim_{x\to x_0;x\in E}f(x)=L$，结论得证。

综上，于是证明完毕。

14.3.3 比较命题14.3.3和例14.2.5，你能否解释，为什么在例14.2.5中交换极限运算的次序会给出一个错误的结论，但命题14.3.3中交换极限运算的次序确实正确的

原书说是例12.2.8，但是那个例子在讨论离散度量下集合的内点和外点，反而例14.2.5确实是讨论极限交换的问题，个人感觉是题目搞错了。

其实原因很简单，就是因为x^n只是逐点收敛的而不是一致收敛的。

14.3.4 证明命题14.3.4（提示：尽管叙述稍有不同，但是这也与定理14.3.1和命题14.3.3类似，而且这个结论无法从另外两个结论中直接推出）

> 考虑任意的$\varepsilon > 0$。由于$f^{(n)}$是一致收敛于f的，于是根据定义14.3.1存在$N_1 > 0$使得对任意$n \geq N_1$与任意的$x \in X$都有：
>
> $$d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$$
>
> 特别地，这个结论对任意的$x^{(m)}$（其中$m > 0$）都成立。然后根据题设对任意的$n > 1$都有$f^{(n)}$是连续的，因此根据命题14.3.1即有f也是在X上连续的，从而对x_0，存在一个$\delta > 0$使得对任意$x \in X$满足$d_X(x_0, x) < \delta$都有$d_Y(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$。并且注意到由于$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是收敛于$x_0$的序列，因此存在一个$N_2 > 0$使得对任意$n \geq N_2$都有$d_X(x^{(n)}, x_0) < \delta$。
>
> 于是我们令有$N := \max(N_1, N_2)$，然后对任意的$n \geq N$，根据度量空间的三角不等式我们有：
>
> $$d_Y(f^{(n)}(x^{(n)}), f(x)) \leq d_Y(f^{(n)}(x^{(n)}), f(x^{(n)})) + d_Y(f(x^{(n)}), f(x_0)) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
>
> 于是根据定义12.1.14即有序列$(f^{(n)}(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$收敛于$f(x)$。
>
> ---
>
> 插个题外话，感觉这个命题里面对任意$f^{(n)}$的连续性要求有点多余，如上面证明的那样只需要f存在连续性就行了，过多的要求感觉反而容易造成误导。

14.3.5 举例说明：如果把"一致收敛"替换成"逐点收敛"，那么命题14.3.4就不成立（提示：之前在原书中就已经提到过某些例子了）

> 很显然对任意的$n \geq 1$，定义为$f^{(n)}(x) := x^n$的函数$f^{(n)} : [0,1] \to \mathbb{R}$都是连续函数，并且在14.2节我们已经证明过了这个函数序列是逐点收敛的但不一致收敛于任何函数（类似习题14.2.2(b)），然后我们考虑下面的序列：
>
> $$\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)_{n=1}^{\infty}$$
>
> 显然这是一个$[0,1]$中收敛于1的序列（命题6.5.3已经提到过了），并且我们主要到：
>
> $$\left(f^{(n)}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2}\right)_{n=1}^{\infty}$$
>
> 显然是收敛于$\frac{1}{2}$的，但是$f(1) = 1$（逐点极限是什么可以翻回原书例14.2.4），这显然与命题14.3.4不符。

14.3.6 证明命题14.3.6，讨论这个命题与[习题14.2.4](#)的不同之处

> 由于$f^{(n)}$是一致收敛于f的，于是根据定义14.3.1存在$N > 0$使得对任意$n \geq N$与任意的$x \in X$都有：
>
> $$d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) < 1$$
>
> 特别地，我们考虑这个结论在$n = N$的情形之下。由于假设中提到了$f^{(N)}$是有界的，于是存在球$B_{(Y,d_Y)}(y_0, r)$使得对任意$x \in X$都有$f^{(n)}(x) \in B_{(Y,d_Y)}(y_0, r) \implies d_Y(f^{(n)}(x), y_0) < r$。于是根据度量空间的三角不等式，对任意$x \in X$我们有：
>
> $$d_Y(f(x), y_0) \leq d_Y(f(x), f^{(n)}(x)) + d_Y(f^{(n)}(x), f(x)) < 1 + r$$
>
> 从而即对任意$x \in X$都有$f(x) \in B_{(Y,d_Y)}(y_0, 1 + r)$，于是根据定义14.3.5即有$f$是有界的。
>
> ---

> 这个命题与习题14.2.4的不同之处在于，习题14.2.4是通过一致极限的有界性得到了整个函数序列的一致有界性，这事实上表明了对任意函数序列中的函数都是有界的；而命题14.3.6是通过函数序列中每一个函数的有界性得到了一致极限的有界性。如果我们将这两个命题结合起来，那么我们事实上就可以得到函数序列的一致有界性和一致极限的有界性是等价的。

14.3.7 举例说明：如果把“一致收敛”替换成“逐点收敛”，那么命题14.3.6就不成立（提示：之前在原书中就已经提到过某些例子了）

> 考虑在习题14.2.2(c)中的例子（当然沿用里面的记号），我们知道部分和序列$\sum_{n=1}^{N} f^{(n)}$在开区间$(-1,1)$上逐点收敛于g，并且对任意的$N>0$，部分和序列$\sum_{n=1}^{N} f^{(n)}$是有界的（绝对值必然小于N），但是$g(x):=\frac{1}{1-x}$显然是在开区间$(-1,1)$上无界的。

14.3.8 设(X,d)是一个度量空间。对于每一个正整数n，设$f_n:X\to\mathbb{R}$和$g_n:X\to\mathbb{R}$都是函数，并且设$(f_n)_{n=1}^{\infty}$一致收敛于函数$f:X\to\mathbb{R}$，且$(g_n)_{n=1}^{\infty}$一致收敛于函数$g:X\to\mathbb{R}$。并设函数序列$(f_n)_{n=1}^{\infty}$和$(g_n)_{n=1}^{\infty}$是一致有界的（这个定义可以看习题14.2.4），即存在$M>0$使得对所有的$n\geq 1$与$x\in X$都有$|f_n(x)|\leq M$与$|g_n(x)|\leq M$成立。证明：函数序列$f_ng_n:X\to\mathbb{R}$一致收敛于$fg:X\to\mathbb{R}$

> 首先由于$(f_n)_{n=1}^{\infty}$和$(g_n)_{n=1}^{\infty}$是一致有界的，结合命题14.3.6即有f与g也是有界的，换言之，存在K_1，$K_2>0$使得对任意$x\in X$都有$|f(x)|\leq K_1$与$|g(x)|\leq K_2$。特别地，为了方便叙述，我们令有$S:=\max\{K_1,K_2,M\}$，这样对任意的$x\in X$与正整数n都有$|f(x)|\leq S$，$|g(x)|\leq S$，$|f_n(x)|\leq S$与$|g_n(x)|\leq S$。
>
> 考虑任意的$\varepsilon>0$。由于前设有$(f_n)_{n=1}^{\infty}$一致收敛于f与$(g_n)_{n=1}^{\infty}$一致收敛于g，于是分别存在N_1，$N_2>0$使得对任意的$n\geq N_1$都有$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2S}$，对任意$n\geq N_2$都有$|g_n(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2S}$。此时我们令有$N:=\max(N_1,N_2)$，对任意的$n\geq N$与任意的$x\in X$都有：
>
> $$\begin{aligned}|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)| &\leq |f_n(x)g_n(x)-f_n(x)g(x)|+|f_n(x)g(x)-f(x)g(x)|\\ &=|g_n(x)-g(x)|\cdot|f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|\cdot|g(x)|\\ &\leq |g_n(x)-g(x)|\cdot S+|f_n(x)-f(x)|\cdot S\\ &<\frac{\varepsilon}{2S}\cdot S+\frac{\varepsilon}{2S}\cdot S\\ &=\varepsilon\end{aligned}$$
>
> 综合可以得到：
>
> 对任意的$\varepsilon>0$，存在$N>0$使得对任意的$n\geq N$与任意的$x\in X$都有$|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)|$。
>
> 于是根据定义14.2.7即有序列$f_ng_n:X\to\mathbb{R}$一致收敛于$fg:X\to\mathbb{R}$。

本节相关跳转

[实分析 14.2 逐点收敛和一致收敛]