# 18.5 可测函数

## 定义

1. （18.5.1 可测函数）设$\Omega$是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$f:\Omega\to\mathbb{R}^m$是一个函数。那么我们称函数$f$是**可测的**，当且仅当对于每一个开集$V\subseteq\mathbb{R}^m$，$f^{-1}(V)$都是可测的。
2. （18.5.9 广义实数系上的可测函数）设$\Omega$是$\mathbb{R}^n$的可测子集。那么我们称函数$f:\Omega\to\mathbb{R}^*$是**可测的**，当且仅当对于每一个实数$a$，$f^{-1}((a,+\infty])$都是可测的。

   （注：引理18.5.8保证了在广义实数系$\mathbb{R}^*$上取值的函数的可测性概念是一致的）

---

## 命题

1. （18.5.2 连续函数是可测的）设$\Omega$是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$f:\Omega\to\mathbb{R}^m$是一个连续函数。那么$f$也是可测的。

   （注：回顾第12章和第13章的内容，回想一下连续函数对开集逆象的影响与相对拓扑的知识会对证明这个命题有所帮助）
2. （18.5.3 可测函数的等效定义？）设$\Omega$是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$f:\Omega\to\mathbb{R}^m$是一个函数。那么$f$是可测的，当且仅当对于每一个开盒子$B$，$f^{-1}(B)$都是可测的。

   （注：联系引理18.4.10）

   > 推论：
   >
   > 1. （18.5.4）设$\Omega$是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$f:\Omega\to\mathbb{R}^m$是一个函数。如果$f=(f_1,\dots,f_m)$，其中$f_j:\Omega\to\mathbb{R}$是$f$的第$j$个分量，那么$f$是可测的，当且仅当每一个独立的$f_i$都是可测的。
   >
   >    （注：比较可惜的是，两个可测函数的复合不一定是可测的，但是我们有一个关于复合函数弱一点的结论，参见引理18.5.5）
3. （18.5.5 连续函数与可测函数的复合？）设$\Omega$是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$W$是$\mathbb{R}^m$的开子集。如果$f:\Omega\to W$是可测的，并且$g:W\to\mathbb{R}^p$是一个连续函数。那么$g\circ f:\Omega\to\mathbb{R}^p$是可测的。

   > 推论：
   >
   > 1. （18.5.6）设$\Omega$是$\mathbb{R}^n$的可测子集，如果$f:\Omega\to\mathbb{R}$是一个可测函数，那么$|f|$，$\max(f,0)$和$\min(f,0)$也都是可测的。
   >
   >    （注：引理18.5.5作用于$g(x):=|x|$，$g(x):=\max(x,0)$和$g(x):=\min(x,0)$的特殊结论）
   > 2. （18.5.7）设$\Omega$是$\mathbb{R}^n$的可测子集，如果$f:\Omega\to\mathbb{R}$和$g:\Omega\to\mathbb{R}$都是可测函数，那么$f+g$、$f-g$、$fg$、$\max(f,g)$和$\min(f,g)$也都是可测函数。特别地，如果对于所有的$x\in\Omega$都有$g(x)\neq 0$，那么$f/g$也是可测的。
   >
   >    （注：使用引理18.5.5作用于$k(a,b):=a+b$、$k(a,b):=a-b$、$k(a,b):=ab$、$k(a,b):=\max(a,b)$、$k(a,b):=\min(a,b)$和$k(a,b):=a/b$的，同时考虑结合推论18.5.4，尝试与形如$h:=(f,g)$的函数做复合）
4. （18.5.8）设$\Omega$是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$f:\Omega\to\mathbb{R}$是一个函数。那么$f$是可测的，当且仅当对于每一个实数$a$，$f^{-1}((a,\infty))$都是可测的。

5. (18.5.10 可测函数序列的极限是可测的)设$\Omega$是$\mathbb{R}^n$的可测子集，对于每一个正整数$n$，设$f_n:\Omega\to\mathbb{R}^*$是一个可测函数，那么$\sup_{n\geq 1} f_n$、$\inf_{n\geq 1} f_n$、$\limsup_{n\to\infty} f_n$和$\liminf_{n\to\infty} f_n$也都是可测的。特别地，如果$f_n$逐点收敛于函数$f:\Omega\to\mathbb{R}^*$，那么$f$也是可测的。

(注：如同本节内容所述，我们对可测函数做任何事情几乎都能构造出另一个可测函数。这基本上解释了为什么我们在数学中处理的每一个函数差不多都是可测的；实际上，构造不可测函数的唯一方法就是认为的去构造，比如使用选择公理)

---

# 课后习题

#### 18.5.1 证明引理18.5.3 (提示：利用引理18.4.10和$\sigma$代数性质)

> 显然"对于每一个开集$V\subseteq\mathbb{R}^m$，$f^{-1}(V)$都是可测的"覆盖了"对于每一个开盒子$B$，$f^{-1}(B)$都是可测的"，因此我们只需要证明当有"对于每一个开盒子$B$，$f^{-1}(B)$都是可测的"时就有$f$可测即得证了充分必要性。
>
> 考虑任意的开集$V\subseteq\mathbb{R}^m$，根据引理18.4.10我们知道它可以表示成至多可数个开盒子$(B_j)_{j\in J}$的并集。然后我们注意到：
>
> $$f^{-1}(V)=f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J}B_j\right)=\bigcup_{j\in J}f^{-1}(B_j)$$
>
> 从而我们有$f^{-1}(V)$可以表示为至多可数个可测集的并集，然后根据可测集的$\sigma$代数性质即有$f^{-1}(V)$也是可测的的，从而根据可测函数的定义即有$f$是可测的。

#### 18.5.2 利用引理18.5.3推导出推论18.5.4

> 分别证明充分必要性。
>
> 若有$f$是可测的，则考虑$f$的分量函数$f_1$，并考虑区间$B_1\subseteq\mathbb{R}$是$\mathbb{R}$中的开盒子（也就是开区间）。然后注意到：
>
> $$\begin{aligned}f_1^{-1}((a_i,b_i))&=\{p\in\Omega:f_1(p)\in B_1\}\\&=\{p\in\Omega:f_1(p)\in B_1\wedge f_i(p)\in\mathbb{R}(2\leq i\leq m)\}\\&=\{p\in\Omega:(f_1(p),\dots,f_m(p))\in B_1\times\mathbb{R}^{m-1}\}\\&=\{p\in\Omega:f(p)\in B_1\times\mathbb{R}^{m-1}\}\\&=f^{-1}(B_1\times\mathbb{R}^{m-1})\end{aligned}$$
>
> 注意到$B_1\times\mathbb{R}^{m-1}$是一个开集，因此由$f$的可测性我们有$f^{-1}(B_1\times\mathbb{R}^{m-1})=f_1^{-1}(B_1)$也是可测的。从而根据引理18.5.3，由于$f_1$满足对所有的开盒子$B_1\subseteq\mathbb{R}$都有$f_1^{-1}(B_1)$是可测的，因此我们有$f_1$是可测的。其它分量函数也是类似地证明方法可以得证是可测的。
>
> 反过来，如果有每一个独立的$f_i$都是可测的，那么考虑$B=\prod_{i=1}^m B_i$是$\mathbb{R}^m$中的开盒子（其中每一个$B_i$都是$\mathbb{R}$中的开区间）。那么有：
>
> $$\begin{aligned}f^{-1}(B)&=\{x\in\Omega:f(x)\in B\}\\&=\{x\in\Omega:\forall\,1\leq i\leq m,f_i(x)\in B_i\}\\&=\bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(B_i)\end{aligned}$$
>
> 然后由于每一个$f_i$都是可测的且$B_i$都是$\mathbb{R}$中的开集，因此我们有每一个$f^{-1}(B_i)$都是可测的，然后根据引理18.4.4(d)可以得到$f^{-1}(B)$也是可测的。从而综上所述我们论证了对每一个$B\subseteq\mathbb{R}^m$是开盒子都有$f^{-1}(B)$是可测的，从而根据引理18.5.3我们有$f$可测。

> 综上，于是结论得证。

#### 18.5.3 证明引理18.5.5

> 考虑任意的开集$V \subseteq \mathbb{R}^p$，由于$g$是连续的，因此我们有$g^{-1}(V)$也是开的；然后由于$f$是可测的，因此我们有$f^{-1}(g^{-1}(V))$是可测的。然后注意到：
>
> > 对任意的$x \in f^{-1}(g^{-1}(V))$，我们有$f(x) \in g^{-1}(V)$，然后由逆象的定义有$g(f(x)) = g \circ f(x) \in V$，从而也即有$x \in (g \circ f)^{-1}(V)$；另一方面，对任意的$x \in (g \circ f)^{-1}(V)$，我们有$g \circ f(x) = g(f(x)) \in V$，从而有$f(x) \in g^{-1}(V)$，进而即有$x \in f^{-1}(g^{-1}(V))$。
>
> 于是即$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$。这说明上面的证明证明了对任意的开集$V \subseteq \mathbb{R}^p$都有$(g \circ f)^{-1}(V)$可测，也即有函数$g \circ f$可测。

#### 18.5.4 证明引理18.5.8（提示：使用引理18.5.3。作为一个预备步骤，你可能需要证明如果对于所有的$a$，$f^{-1}((a, \infty))$都是可测的，那么对于所有的$a$，$f^{-1}([a, \infty))$也是可测的）

> 显然“对于每一个开集$V \subseteq \mathbb{R}$，$f^{-1}(V)$都是可测的”覆盖了“对于每一个实数$a$，$f^{-1}((a, \infty))$都是可测的”，因此我们只需要证明当有“对于每一个实数$a$，$f^{-1}((a, \infty))$都是可测的”时就有$f$可测即得证了充分必要性。
>
> 我们首先证明一个子结论：若有对于每一个实数$a$，$f^{-1}((a, \infty))$都是可测的，那么对于每一个实数$a$，$f^{-1}([a, \infty))$都是可测的。
>
> > 我们尝试证明：
> >
> > $$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, \infty\right)\right) = f^{-1}([a, \infty))$$
> >
> > 设$a$是一个实数，考虑任意的$x \in f^{-1}([a, \infty))$。根据逆象的定义我们有$f(x) \in [a, \infty)$，于是有$f(x) \in \left(a - \frac{1}{n}, \infty\right)$对所有的$n \geq 1$成立，进而即有$x \in f^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, \infty\right)\right)$对所有的$n \geq 1$成立，也即有$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, \infty\right)\right)$；反过来，我们考虑任意的$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, \infty\right)\right)$，要求有$f(x) \in \left(a - \frac{1}{n}, \infty\right)$对所有的$n \geq 1$成立，从而只能有$f(x) \in [a, \infty)$，也即有$x \in f^{-1}([a, \infty))$。
> >
> > 从而综上我们证明了$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, \infty\right)\right) = f^{-1}([a, \infty))$。然后由于每一个$f^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, \infty\right)\right)$都是可测集，因此根据$\sigma$代数性质（引理18.4.9）有$f^{-1}([a, \infty))$也是可测的。
>
> 然后考虑$(a, b)$是$\mathbb{R}$中的一个开区间，此时我们可以注意到：
>
> $$\begin{aligned} f^{-1}((a, b)) &= \{x \in \Omega : a < f(x) < b\} \\ &= \{x \in \Omega : f(x) \in (a, \infty) \wedge f(x) \notin [b, \infty)\} \\ &= f^{-1}((a, \infty)) \backslash f^{-1}([b, \infty)) \end{aligned}$$
>
> 然后根据推论18.4.7与我们已经证明的子结论，我们有$f^{-1}((a, b))$也是可测的。从而综上我们证明了对任意一个开盒子$(a, b) \subseteq \mathbb{R}$都有$f^{-1}((a, b))$可测，然后根据引理18.5.3我们有$f$是可测的，结论得证。

**18.5.5 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是一个勒贝格可测函数，并设$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是一个函数，它在测度为零的集合之外与$f$相同，即存在一个测度为零的集合$A\subseteq\mathbb{R}^n$使得对于所有的$x\in\mathbb{R}^n\backslash A$均有$f(x)=g(x)$。证明：$g$也是勒贝格可测的（提示：利用习题18.4.10）**

> 考虑任意的$V\subseteq\mathbb{R}$是一个开集。注意到：
>
> $$\begin{aligned}g^{-1}(V)&=(g^{-1}(V)\cap A)\cup(g^{-1}(V)\backslash A)\\&=\{x\in A:g(x)\in V\}\cup\{x\in\mathbb{R}^n\backslash A:g(x)\in V\}\\&=\{x\in A:g(x)\in V\}\cup\{x\in\mathbb{R}^n\backslash A:f(x)\in V\}\\&=\{x\in A:g(x)\in V\}\cup(f^{-1}(V)\backslash A)\end{aligned}$$
>
> 然后我们注意到：由于$f$是可测的且$V$是开集，因此有$f^{-1}(V)$可测；由于$A$是一个测度为零的集合，因此$\{x\in A:g(x)\in V\}$与$f^{-1}(V)\cap A$作为$A$的子集也应该是可测的（习题18.4.10）；然后由于$f^{-1}(V)\cap A$是$f^{-1}(V)$的可测子集且$f^{-1}(V)\backslash A=f^{-1}(V)\backslash(f^{-1}(V)\cap A)$，因此运用推论18.4.7我们有$f^{-1}(V)\backslash A$也是可测的。最后综合上面的讨论，我们可以得到$g^{-1}(V)$可以表示为两个可测集的并集，因此根据引理18.4.4(c)我们也有$g^{-1}(V)$是可测的。
>
> 综上，于是我们证明了：对任意的$V\subseteq\mathbb{R}$是一个开集都有$g^{-1}(V)$是可测的。于是根据可测函数的定义我们有$g$也是勒贝格可测的。

---

# 本节相关跳转


实分析 12.3 相对拓扑

实分析 13.1 连续函数

实分析 18.4 可测集