8.1 可数性

公理

策梅洛-弗兰克尔-选择系统（终章）

> 1. （8.1 选择公理）设I是一个集合，并且对任意$\alpha \in I$，假设X_α是一个非空集合，那么集合$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$也是非空的。换言之，存在一个函数$(x_\alpha)_{\alpha \in I}$对每个$\alpha \in I$指定了一个元素$x_\alpha \in X_\alpha$。

（虽然选择公理是8.4节的内容，但是这节的习题好多都要用到选择公理，故在此先贴出，在8.4节会再次重复一遍）

定义

1. （8.1.1 可数集）集合X是**可数无限的**（或简称**可数的**），当且仅当X与自然数集$\mathbb{N}$有相同的基数。集合X是**至多可数**的，当且仅当X是可数的或者是有限的。如果一个集合无限的并且不是可数的，则称这个集合是**不可数的**。（可数无限集也被称作可列集）

命题

1. （8.1.4 良序原理）设X是自然数集$\mathbb{N}$的一个非空子集，则恰好存在一个元素$n \in X$，使得对所有的$m \in X$均有$m \geq n$。换言之，对任意自然数集$\mathbb{N}$的非空子集均有一个最小元素。（由良序原理给出的元素n一般称作X的最小值，记为$\min(X)$，这个最小值显然与定义5.5.10中X的下确界是一致的）
2. （8.1.5）设X是自然数集$\mathbb{N}$的一个无限子集，那么存在唯一一个递增双射$f : \mathbb{N} \to X$（递增即对任意$n \in \mathbb{N}$，有$f(n+1) > f(n)$）。特别地，X与$\mathbb{N}$具有相同的基数，所以X是可数的。

   > 推论：
   >
   > 1. （8.1.6）自然数的所有子集都是至多可数的。
   > 2. （8.1.7）如果X是一个至多可数的集合，并且Y是X的一个子集，那么Y也是至多可数的。

3. （8.1.8）设Y是一个集合，并且$f : \mathbb{N} \to Y$是一个函数，那么$f(\mathbb{N})$是至多可数的。

   > 推论：
   >
   > 1. （8.1.9）设X是一个可数集，并且设$f : X \to Y$是一个函数。那么$f(X)$是至多可数的。

4. （8.1.10）设X是一个可数集，并且设Y也是一个可数集，那么$X \cup Y$也是一个可数集。

   > 推论：
   >
   > 1. （8.1.11）整数集$\mathbb{Z}$也是一个可数集。

5. （8.1.12）集合$A := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 0 \leq m \leq n\}$是可数集。

   > 推论：

> 1. (8.1.13) 集合$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$是可数集。
> 2. (8.1.14) 如果X和Y都是可数集，那么$X\times Y$也是可数集。
> 3. (8.1.15) 有理数集$\mathbb{Q}$是可数集。

课后习题

8.1.1 设X是一个集合，证明：X是无限集，当且仅当存在X的一个真子集$Y\subsetneq X$与X具有相同的基数（本题要用到选择公理和公理8.1）

> 必要性：
>
> 若X是无限集，根据选择公理，对集合X存在一个元素$x\in X$。于是对集合$Y=X\backslash\{x\}$，显然Y是X的真子集，假设Y是一个有限集，于是存在整数n使得$\#(Y)=n$，又根据基数运算（命题3.6.14(b)）与$\{x\}$是单元素集，于是$\#(Y\cup\{x\})=\#(X)=n+1$，这同X是无限集的假设矛盾，于是此时Y只能是无限集。
>
> 若X存在一个真子集$Y\subsetneq X$与X基数相同：
>
> 不妨假设X是有限集，那么由于$Y\subsetneq X$，根据基数运算（命题3.6.14(d)），此时有$\#(Y)<\#(X)$，这同$\#(Y)=\#(X)$的前提矛盾，于是此时X不可能为有限集，只能是无限集。
>
> 于是题目结论得证。

8.1.2 证明命题8.1.4（提示：可以利用归纳法、无穷递降原理、习题 4.4.2、最小上界（或最大下界）原理或定理5.5.9）如果把良序原理中的自然数替换成整数，那么该原理还成立吗？如果把自然数替换成正有理数，结果又如何？请给出解释

> 考虑使用反证法：
>
> 我们假设良序原理不成立，那么存在自然数集$\mathbb{N}$的一个非空子集X，对其中任意元素n总能找到一个元素$m\in X$使得$m<x$。于是使用选择公理，我们可以从X中选取一个元素x，记为$a_0=x$。然后利用上面结论，我们递归的给出$a_n(n>0)$的定义：对于给出的a_{n-1}，我们定义a_n为利用上述结论给出的X中元素，它满足$a_n\in X$与$a_n<a_{n-1}$。于是根据无穷递降序列的定义，序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$就是一个无穷递降的自然数列，然而根据我们在习题4.4.2中的证明，不可能存在一个无穷递降的自然数列，于是反证假设不成立，良序原理得证。
>
> 对自然数替换整数与有理数时，结论显然是不成立的，例如集合$\mathbb{Z}$与集合$\{i\in\mathbb{N}:1/i\}$，这两个集合分别是整数集$\mathbb{Z}$与有理数集$\mathbb{Q}$的子集，但是它们都没有最小元素。

8.1.3 把命题8.1.5中标记（？）的细节补充完整

> 对所有带（？）标记的内容逐一证明：
>
> （其中$a_n:=\min\{x\in X:\text{对任意}m<n\text{均有}x\neq a_m\}$）
>
> ---
>
> 1. 我们可以证明$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个递增的序列，即$a_0<a_1<a_2<\ldots$或者说对任意$n\geq 0$都有$a_n<a_{n+1}$成立。
>
> 不妨反证假设存在某个$n\geq 0$使得$a_n\geq a_{n+1}$成立。于是对a_{n+1}，根据定义它等于$\min\{x\in X:\text{对任意}m<n+1\text{均有}x\neq a_m\}$，于是它只可能小于$a_n$（取$m=n$即有$x\neq a_n$，并且根据良序原理有$a_{n+1}\in X$），并且我们对任意$m<n$也有$a_{n+1}\neq a_m$成立。此时我们检查$a_n$，根据递归定义$a_n=\min\{x\in X:\text{对任意}m<n\text{均有}x\neq a_m\}$，$a_{n+1}$也满足对任意$m<n$也有$a_{n+1}\neq a_m$成立，于是根据$a_n$的定义，此时依据良序原理应该有$a_n<a_{n+1}$，但是我们反证假设又有$a_n\geq a_{n+1}$。于是导出矛盾，$(a_n)_{n=0}^{\infty}$只能是递增的序列。

2. 并且对任意$n \neq m$都有$a_n \neq a_m$。

对任取n，m，不妨假设有$n < m$（$n > m$时则替换两者位置即可），于是检查集合$X_m = \{x \in X : \text{对任意}i < m\text{均有}x \neq a_i\}$，我们取$i = n$，于是对任意$x \in X$都应该满足$x \neq a_n$都成立，而根据良序原理，$a_m = \min(X_m)$应该有$a_m \in X_m$成立，于是$a_m \neq a_n$成立。

---

3. 此外，对任意自然数n，均有$a_n \in X$。

根据良序原理，对任意自然数n，集合$X_n = \{x \in X : \text{对任意}m < n\text{均有}x \neq a_m\}$的最小值$a_n = \min(X_n)$都应该有$a_n \in X_n$成立，特别地，于是$a_n \in X$也成立。

---

4. 令$x \in X$，假设对每一个n都有$x \neq a_n$，那么这表明对所有n都有$x \in \{x \in X : \text{对任意}m < n\text{均有}x \neq a_m\}$。

对每一个给定的n，根据题设，对任意$i < n$都有$x \neq i$，并且$x \in X$，于是$x \in \{x \in X : \text{对任意}m < n\text{均有}x \neq a_m\}$。

---

5. 因为$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个自然数的递增序列，所以$a_n \geq n$。

这个在习题6.6.5已经有过证明，替换$f(n) = a_n$即可。

---

6. 假设存在另一个递增双射$g \neq f$，定义$m = \min\{n \in \mathbb{N} : g(n) \neq f(n)\}$，那么$g(m) \neq f(m)$，并且对任意$n < m$，都有$g(n) = f(n)$，但是此时必然有：

$$g(m) = \min\{x \in X : \text{对任意}t < m\text{均有}x \neq a_t\} = a_m$$

于是导出矛盾。

使用反证法，假设$g(m) \neq a_m$，然后我们对$g(m)$的取值讨论：

$g(m) < a_m$：

首先由于g是双射，于是$g(m) \in X$必须成立，又$g(m) < a_m$，从而$g(m) \notin \{x \in X : \text{对任意}t < m\text{均有}x \neq a_t\}$，于是$g(m)$应当属于集合$\{x \in X : \text{存在}t < m\text{使得}x = a_t\}$，但是又根据$g$递增的特性，对任意$n < m$都应该有$g(m) > g(n) = a_n$成立，于是此情况导出矛盾，不可能有$g(m) < a_m$成立。

$g(m) > a_m$：

此时我们考虑a_m，首先根据上文3处的结论我们有$a_m \in X$，于是根据g是一个双射，存在一个$c \in \mathbb{N}$使得$g(c) = a_m$成立，但是对任意$n < m$，$g(n) = a_n \neq a_m$；对m，$g(m) > a_m \iff g(m) \neq a_m$；对任意$n > m$，又有$g(n) > g(m) > a_m$，即$g(n) \neq a_m$。于是此时我们可以得到对任意$n \in \mathbb{N}$，都应该有$g(n) \neq a_m$，这同$g$是双射的结论矛盾。

于是综上，此时只可能有$g(m) = \min\{x \in X : \text{对任意}t < m\text{均有}x \neq a_t\} = a_m$成立。

8.1.4 证明命题8.1.8（提示：这里基本的问题是没有假设f是一对一的。定义A为集合

$$A := \{n \in \mathbb{N} : f(m) \neq f(n)\text{对所有的}0 \leq m < n\text{均成立}\}$$

通俗地说，A是由满足如下条件的自然数n构成的集合：n所对应的$f(n)$不出现在序列$f(0)$，$f(1)$，...，$f(n-1)$中。证明如果把f限制在A上，那么f就成为从A到$f(A)$的双射，然后利用命题8.1.5）

> 定义A为集合：
>
> $$A := \{n \in \mathbb{N} : f(m) \neq f(n)\text{对所有的}0 \leq m < n\text{均成立}\}$$
>
> 我们来证明$f(A) = f(\mathbb{N})$与$f : A \to f(A)$是一个双射。
>
> 1. $f(A) = f(\mathbb{N})$。
>
> 对任意$x \in f(A)$，于是存在一个$n \in A$使得$x = f(n)$。$x \in A$，特别地有$x \in \mathbb{N}$，于是$x \in f(\mathbb{N})$；对任意$x \in f(\mathbb{N})$，于是存在一个$n \in \mathbb{N}$使得$x = f(n)$。于是讨论n：
>
> 若有$n \in A$，于是此时有$f(n) = x \in f(A)$；若有$n \in \mathbb{N}$而且$n \notin A$，则有集合$\mathbb{N} \backslash A = \{m \in \mathbb{N} : f(m) = f(n)\text{且}0 \leq m < n\}$是一个自然数集的非空子集。于是使用良序原理，最小值$m = \min(\mathbb{N} \backslash A)$也应该有$f(m) = f(n)$成立，并且对任意$t$满足$0 \leq t < m$，都应该有$f(t) \neq f(m)$（否则有$t \in \mathbb{N} \backslash A$，进而$m \neq \min(\mathbb{N} \backslash A)$），于是根据$A$定义有$m \in A$，即$f(n) = f(m) \in f(\mathbb{N})$成立。
>
> 综上，即对任意$x \in f(A)$，都有$x \in f(\mathbb{N})$；任意$x \in f(\mathbb{N})$，都有$x \in f(A)$，于是由集合相等定义可得证$f(A) = f(\mathbb{N})$。
>
> 2. $f : A \to f(A)$是一个双射。
>
> 对任意x_1，$x_2 \in A$，若有$x_1 \neq x_2$，不妨假设$x_1 < x_2$，于是根据A的定义，对$x_1 < x_2$可得$f(x_1) \neq f(x_2)$，反之若$x_1 > x_2$也可得到相同结论，于是$f : A \to f(A)$是一个单射。
>
> 对任意$y \in f(A)$，首先存在一个$x \in A$使得$f(x) = y$，于是对任意$y \in f(A)$总是能被映射的，即$f : A \to f(A)$是一个满射。
>
> 综上，于是$f : A \to f(A)$是一个双射。
>
> ---
>
> 下面来证明命题8.1.8：
>
> 根据推论8.1.6，于是集合A是至多可数的。又根据结论$f : A \to f(A)$是一个双射，于是$f(A) = f(\mathbb{N})$与A有一致的基数，即$f(\mathbb{N})$是至多可数的，于是命题8.1.8得证。

8.1.5 利用命题8.1.8证明推论8.1.9

> X是可数集，于是根据可数集定义存在一个双射$g : \mathbb{N} \to X$。
>
> 我们证明$f(X) = f \circ g(\mathbb{N})$：
>
> 对任意$y \in f(X)$，存在一个$x \in X$使得$y = f(x)$，又由g是双射，于是存在一个$n \in \mathbb{N}$有$g(n) = x$，也即$y = f \circ g(n)$成立，于是可以得到此时$y \in f \circ g(\mathbb{N})$。
>
> 对任意$y \in f \circ g(\mathbb{N})$，存在一个$n \in \mathbb{N}$满足$y = f \circ g(n)$，令$x = g(n)$，可以得到$x \in X$并且$y = f(x)$，于是可得$y \in f(X)$。
>
> 综上，于是我们有$f(X) = f \circ g(\mathbb{N})$成立。
>
> 然后使用命题8.1.8，我们知道$f \circ g : \mathbb{N} \to Y$是一个函数且$Y$是一个集合，故$f \circ g(\mathbb{N})$是一个至多可数的集合，也即$f(X)$是至多可数的。

8.1.6 设A是集合，证明：A是至多可数的，当且仅当存在从A到$\mathbb{N}$的单射$f : A \to \mathbb{N}$

> 充分性：
>
> 若存在一个A到$\mathbb{N}$的单射$f : A \to \mathbb{N}$，取函数$f' : A \to f(A)$继承f的映射关系（即对任意$a \in A$，$f'(a) := f(a)$），我们证明f'是一个双射：
>
> 根据题设我们可得对任意x_1，$x_2 \in A$，有$x_1 \neq x_2$当且仅当$f(x_1) \neq f(x_2)$，于是f'也是一个单射；此外对任意$y \in f(A)$，应该有存在一个$x \in A$使得$y = f(x)$，于是f'是一个满射。于是综合可得证f'是双射。
>
> 然后由于对任意$x \in A$，都有$f(x) \in \mathbb{N}$，于是$f(A) \subseteq \mathbb{N}$。根据推论8.1.6可以得到$f(A)$是至多可数的，又根据$f' : A \to f(A)$是双射，于是$A$和$f(A)$一样也是至多可数的。
>
> ---
>
> 必要性：
>
> 若A是至多可数的，于是我们对A的基数做讨论：
>
> - A是可数集：
>
> 则根据可数集此时存在一个从A到$\mathbb{N}$的双射f，特别地f也是一个单射。
>
> - A是有限集：
>
> 于是此时根据基数定义，若$\#(A) = n$，于是存在一个双射$f : A \to \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$，此时我们对$f$的定义域额外扩充至$\mathbb{N}$，于是此时$f : A \to \mathbb{N}$仍然是一个单射，但是不再是一个满射（不存在$a \in A$满足$f(a) = 0$）.于是$f : A \to \mathbb{N}$就是我们要找的单射。
>
> 综上，于是当A是至多可数的集合时，必然存在从A到$\mathbb{N}$的单射$f : A \to \mathbb{N}$。

8.1.7 证明命题8.1.10（提示：根据假设，我们有双射$f : \mathbb{N} \to X$和双射$g : \mathbb{N} \to Y$。现定义$h : \mathbb{N} \to X \cup Y$如下：对任意的自然数$n$，令$h(2n) := f(n)$且$h(2n+1) := g(n)$，证明$h(\mathbb{N}) = X \cup Y$。然后利用推论8.1.9并证明$X \cup Y$不可能是有限集）

> 若X，Y均是可数集，于是根据可数集定义存在两个双射$f : \mathbb{N} \to X$与$g : \mathbb{N} \to Y$。于是我们定义函数$h : \mathbb{N} \to X \cup Y$有下述映射关系：
>
> $$h(n) := \begin{cases} f(\frac{n}{2}) & \text{if } \exists m \in \mathbb{N}, n = 2m \\ g(\frac{n-1}{2}) & \text{if } \exists m \in \mathbb{N}, n = 2m+1 \end{cases}$$
>
> 这个定义也等价于对任意自然数$n \in \mathbb{N}$，定义$h(2n) := f(n)$与$h(2n+1) := g(n)$。于是我们证明$h(\mathbb{N}) = X \cup Y$：
>
> 由于象定义自带结论$h(\mathbb{N}) \subseteq X \cup Y$，于是只需要证明$X \cup Y \subseteq h(\mathbb{N})$。对任意$a \in X \cup Y$，$a$要么属于$X$要么属于$Y$，于是不妨分类讨论：
>
> - $a \in X$：
>
> 于是根据f是双射，存在一个元素$n \in \mathbb{N}$使得$f(n) = a \iff h(2n) = a$，又根据$2n \in \mathbb{N}$，于是根据象定义，此时有$a \in h(\mathbb{N})$成立。
>
> - $a \in Y$：
>
> 于是根据g是双射，存在一个元素$n \in \mathbb{N}$使得$g(n) = a \iff h(2n+1) = a$，又根据$2n+1 \in \mathbb{N}$，于是根据象定义，此时有$a \in h(\mathbb{N})$成立。
>
> 综上，于是对任意$a \in X \cup Y$，都有$a \in h(\mathbb{N})$成立，于是可得$X \cup Y \subseteq h(\mathbb{N})$，结合前文即$X \cup Y = h(\mathbb{N})$得证。

于是根据命题8.1.9，我们可以由$h:\mathbb{N}\to X\cup Y$与$\mathbb{N}$是可数集推断有$X\cup Y$是至多可数的集合，即$X\cup Y$要么是有限集，要么是可数集。

使用反证法，我们假设$X\cup Y$是一个有限集，根据命题3.6.14基数运算(d)，我们可以得到$X\cup Y$的子集X与Y都应该是有限集，这同X与Y都是可数集的题设矛盾。于是反证导出矛盾，只可能有$X\cup Y$是可数集。

8.1.8 利用推论8.1.13证明推论8.1.14

若X，Y均是可数集，于是根据可数集定义存在两个双射$f:\mathbb{N}\to X$与$g:\mathbb{N}\to Y$。于是定义函数$h:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to X\times Y$具有如下所述的映射关系：

$$h((n,m)):=(f(n),g(m))$$

我们证明h是一个双射：

对任意(n,m)，$(n',m')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$，若有$(n,m)\neq(n',m')$，那么利用$f$与$g$是双射的前置条件即有$n\neq n'\iff f(n)\neq f(n')$与$m\neq m'\iff g(m)\neq g(m')$至少有一个成立，于是即$(f(n),g(m)\neq(f(n'),g(m'))\iff h((n,m))\neq h((n',m'))$。从而我们可以得到$h$是一个单射。

然后对任意$(x,y)\in X\times Y$，即$x\in X$与$y\in Y$。由于f与g是双射，于是分别存在n，$m\in\mathbb{N}$使得$f(n)=x$与$g(m)=y$成立，这等价于有$(f(n),g(m))=(x,y)\iff h((n,m))=(x,y)$。于是对于每一个$(x,y)\in X\times Y$，总存在一对$(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$使得有$h((n,m))=(x,y)$成立，于是$h$是一个满射。

综上，于是h是一个双射，进一步地可以得到$X\times Y$与$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$有相同的基数，而根据推论8.1.13有$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$是一个可数集，于是$X\times Y$也是一个可数集。

8.1.9 设I是一个至多可数的集合，并且对每个$\alpha\in I$，令A_α为一个至多可数的集合。证明：集合$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$也是至多可数的。特别的，可数个可数集的并集是可数集（本题要用到选择公理，参见8.4节）

我们约定下面几个符号，在后文中我们会直接用函数名字引用它而不再对它们的性质做过多重复：

label：若I是有限集，那么我们令label函数为基数定义指定的双射$\text{label}:\{i\in\mathbb{N}:0\leq i\leq n-1\}\to I$（其中$n=\#(I)$），若$I$是无限集，那么我们令label函数为可数集定义指定的双射$\text{label}:\mathbb{N}\to I$。（有限时选0作为起点是为了能和可数集情况统一）

$A'_{\text{label}(i)}$：我们令$A'_{\text{label}(i)}=A_{\text{label}(i)}\backslash\{x:存在n<i使得x\in A_{\text{label}(n)}成立\}$。

$\text{tag}_{\text{label}(i)}$：我们先指定一个集合$B_i$：若$A'_{\text{label}(i)}$为有限集，则令$B_i$为集合$\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq\#(A'_{\text{label}(i)})\}$；若$A'_{\text{label}(i)}$是无限集，则令$B_i$为集合$\mathbb{N}$。于是对于每一个$i\in\mathbb{N}$，我们都可以指定一个非空集合$\{f:f是双射且f\in B_i^{\left(A'_{\text{label}(i)}\right)}\}$，于是定义$\text{tag}_{\text{label}(i)}$是利用选择公理对每个$i\in\mathbb{N}$所指定的属于$\{f:f是双射且f\in B_i^{\left(A'_{\text{label}(i)}\right)}\}$的双射函数。

证明：

于是构建函数$h:\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$，其映射关系定义如下：

对任意$x\in\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$，我们对变量$i$从0开始，在依次在$A'_{\text{label}(i)}$中寻找$x$，假设在$i=n$时找到了$x$，并且有$\text{tag}_{\text{label}(n)}(x)=m$，那么我们定义有$h(x)=(n,m)$。

我们先证明h是一个函数，然后我们证明h同时也是一个单射：

函数的证明：

要证明h是一个函数，那么即证明对任意$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$，都应该存在唯一一个有序对$(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$使得$h(x) = (n, m)$成立。我们先证明$h(x)$是存在的，再证明$h(x)$是唯一的。

$h(x)$的存在性：

对任意$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$，根据定义，至少存在一个$\alpha \in I$使得$x \in A_\alpha$，此时定义集合$B = \{\alpha : \alpha \in I 且 x \in A_\alpha\}$，于是$B \neq \varnothing$。然后根据label是双射，可以建立另一个集合$B' = \{\text{label}^{-1}(\alpha) \in \mathbb{N} : \alpha \in B\}$。于是使用良序原理，选取自然数$n' = \min(B')$，此时可以得到：

- 对任意$0 \leq i < n'$，都有$x \notin A_{\text{label}(i)}$。
- $x \in A_{\text{label}(n')}$。

于是考虑集合$A'_{\text{label}(n')} = A_{\text{label}(n')} \backslash \{x : 存在 m < n' 使得 x \in A_{\text{label}(m)} 成立\}$，显然对任意$0 \leq i < n'$，都有$x \notin A_{\text{label}(i)}$。于是$x$不是$\{x : 存在 m < n 使得 x \in A_{\text{label}(m)} 成立\}$中的元素，又由$x \in A_{\text{label}(n)}$于是可得$x \in A'_{\text{label}(n)}$，于是我们得到了上面$h$定义中所需的$n$；确定$n'$后$\text{tag}_{\text{label}(n')}$也就是已知的双射，于是此时可以计算得到$m' = \text{tag}_{\text{label}(n')}(x)$，从而得到上面$h$定义所需的$m$。于是对任意$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$，我们总能找到符合$h$定义的有序对$(n, m)$使得$h(x) = (n, m)$。

$h(x)$的唯一性：

我们假设某个$x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$在上文$h$的定义下会同时出现$h(x) = (n, m)$与$h(x) = (n', m')$，我们证明必然有$(n, m) = (n', m')$。考虑到定义内容，事实上有$h(x) = (n, \text{tag}_{\text{label}(n)}(x))$，$x$固定，$\text{tag}_{\text{label}(n)}$是由$n$决定的双射，于是若$n = n'$，则必然有$m = m'$，于是$(n, m) = (n', m')$当且仅当$n = n'$。

我们假设n是依据h定义过程所找到的满足$x \in A'_{\text{label}(n)}$的自然数，然后我们来考虑$n'$的情况：

- n'小于n。

根据$A'_{\text{label}(n)}$的定义，应当有对任意$0 \leq i < n$都有$x \notin A_{\text{label}(i)}$，特别地由$n'$小于$n$应该有$x \notin A_{\text{label}(n')}$。而若有$h(x) = (n', m')$则依据$h$定义应该有$x \in A'_{\text{label}(n')} \implies x \in A_{\text{label}(n')}$，于是此情况导出矛盾，不可能有$n' < n$。

- n'等于n。

这时显然n'是符合h定义的，并且依据h定义此时有$(n, m) = (n', m')$。

- n'大于n。

根据$A'_{\text{label}(n')}$的定义，应当有对任意$0 \leq i < n'$都有$x \notin A_{\text{label}(i)}$，特别地由$n'$大于$n$应该有$x \notin A_{\text{label}(n)}$，但是根据前置条件又有$x \in A'_{\text{label}(n)} \implies x \in A_{\text{label}(n)}$，于是导出矛盾，不可能有$n' > n$。

于是若有$h(x) = (n, m)$与$h(x) = (n', m')$同时成立，那么必然有$(n, m) = (n', m')$。

综上，可以得证h是满足垂线测试的，于是h确实是一个函数。

单射的证明：

任意x_1，$x_2 \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$，若$x_1 \neq x_2$，我们设$h(x_1)=(n,m)$，$h(x_2)=(n',m')$，基于$h(x_1)$的值讨论$h(x_2)$的可能性。

- 若$x_2 \notin A'_{\mathrm{label}(n)}$：

那么依据h的定义，必然有$n' \neq n$（若$n'=n$那么必然有$x_2 \in A'_{\mathrm{label}(n)}$），于是有$(n,m) \neq (n',m')$，即$h(x_1) \neq h(x_2)$。

- 若$x_2 \in A'_{\mathrm{label}(n)}$：

那么依据h的定义，必然有$n'=n$。于是依据h定义有$m=\mathrm{tag}_{\mathrm{label}(n)}(x_1)$，$m'=\mathrm{tag}_{\mathrm{label}(n)}(x_2)$。然后又根据$\mathrm{tag}_{\mathrm{label}(n)}$是双射与$x_1 \neq x_2$，则此时可以得到$m \neq m' \iff (n,m) \neq (n',m')$，即$h(x_1) \neq h(x_2)$。

综上，于是有对任意x_1，$x_2 \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$，若$x_1 \neq x_2$，则必然有$h(x_1) \neq h(x_2)$，即$h$是单射。

题目结论的证明：

我们已经构建了一个单射$h:\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$，而根据推论8.1.13，我们又可根据$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$是可数的获得一个双射$g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，于是可以得到复合函数$g\circ h:\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \to \mathbb{N}$是一个单射。于是根据习题8.1.6，可以得证$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$是至多可数的，于是题目结论成立。

8.1.10 找到一个从自然数集到有理数集的双射$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$（注意：真正找到一个具体的$f$需要非常高超的技巧，并且使得$f$同时是单射和满射是很困难的）

对任意自然数$n\in\mathbb{N}$，定义下面这样的集合A_n：

$$A_n := \left\{\frac{a}{b} : |a|+b=n\text{且}a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^+\right\}$$

于是可以得到有$A_0=\varnothing$，$A_2=\{0,1,-1\}$等等，并且对任意$n\in\mathbb{N}$，都可以证明A_n都是有限集。于是对任意自然数$n\in\mathbb{N}$，再定义下面这样的集合B_n：

$$B_n := A_n \backslash \bigcup_{i=0}^{n-1} A_n$$

由于A_n都是有限集，于是也可以推证得到B_n也是有限集，于是我们定义$C_n=\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq \#(B_n)\}$，并令有$c_n=\#(B_n)$。根据基数定义，对任意$n\in\mathbb{N}$存在一个从$B_n$到$C_n$的双射函数$f_n:B_n\to C_n$。

然后我们定义一个从$\mathbb{Q}$到$\mathbb{N}$的函数g，其定义如下：

对任意$q=a/b$（对整数的情况可以直接参考有理数的内容，令$q=q/1$），令有$n=|a|+b$，于是我们定义$g(q)$有：

$$g(q) := f_n(q) - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} c_i$$

我们证明g是一个双射：

单射：

对任意q_1，$q_2 \in \mathbb{Q}$，设$q_1 = a_1/b_1$，$q_2 = a_2/b_2$，不妨分类讨论：

- 若$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = n$:

此时依据定义，$g(q_1) = f_n(q_1) - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} c_i$，$g(q_2) = f_n(q_2) - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} c_i$。由于$f_n$是双射，于是$f_n(q_1) \neq f_n(q_1)$进而等价于$g(q_1) \neq g(q_2)$。

- 若$a_1 + b_1 \neq a_2 + b_2$:

于是令$n_1 = a_1 + b_1$，$n_2 = a_2 + b_2$。于是$g(q_1) := f_{n_1}(q_1) - 1 + \sum_{i=0}^{n_1-1} c_i$，$g(q_2) := f_{n_2}(q_2) - 1 + \sum_{i=0}^{n_2-1} c_i$。假设有$n_1 < n_2$，那么可以变换有：

$$\begin{aligned} g(q_1) - g(q_2) &= f_{n_1}(q_1) - f_{n_2}(q_1) + \sum_{i=0}^{n_1-1} c_i - \sum_{i=0}^{n_2-1} c_i \\ &= f_{n_1}(q_1) - f_{n_2}(q_1) - \sum_{i=n_1}^{n_2-1} c_i \end{aligned} \tag{1}$$

又考虑f_{n_1}与f_{n_2}的值域，于是我们可以得到：

$$1 \leq f_{n_1}(q_1) \leq c_{n_1} \quad 1 \leq f_{n_2}(q_2) \leq c_{n_2}$$

又因为序列c_n是一个非负级数（有限集基数自然是非负的）并且$n_2 - 1 \geq n_1$，于是：

$$\sum_{i=n_1}^{n_2-1} c_i \geq c_{n_1}$$

于是(1)可继续化简有：

$$\begin{aligned} g(q_1) - g(q_2) &\leq f_{n_1}(q_1) - f_{n_2}(q_1) - c_{n_1} \\ &\leq -f_{n_2}(q_2) \\ &< 0 \end{aligned}$$

于是此时也有$g(q_1) \neq g(q_2)$。

综上即对任意q_1，$q_2 \in \mathbb{Q}$且$q_1 \neq q_2$，都有$g(q_1) \neq g(q_2)$，于是g是一个单射。

满射：

对任意的自然数n，我们先证明总存在一个自然数m使得$\sum_{i=0}^{m} c_i \leq n < \sum_{i=0}^{m+1} c_i$，然后证明总存在一个有理数$q$使得$g(q) = n$。

首先对任意自然数l，我们考虑集合B_l：首先根据定义，$\frac{1}{l-1}$必然属于A_l；并且对任意$i < l$，$|1| + l - 1 = l > i$，于是根据定义必然有$\frac{1}{l-1} \notin A_i$对任意$i < l$成立。从而根据B_l定义，必然有$\frac{1}{l-1} \in B_l$成立，从而B_l是非空的。由于B_l非空对任意自然数l成立，于是$c_l \geq 1$对任意自然数l始终成立。

为证明对任意的自然数n，总存在一个自然数m使得$\sum_{i=0}^{m} c_i \leq n < \sum_{i=0}^{m+1} c_i$，我们对$n$做归纳：

对$n=0$时：

显然我们可以计算有$c_0=0$，$c_1=1$，于是此时令$m=0$，我们有：

$$\sum_{i=0}^{m} c_i \le n < \sum_{i=0}^{m+1} c_i$$

于是$n=0$时成立结论。

现归纳性假设当$n=l$时结论成立，对$n=l+1$时：

根据归纳假设，于是存在自然数m'有：

$$\sum_{i=0}^{m'} c_i \le l < \sum_{i=0}^{m'+1} c_i$$

于是我们讨论$l+1$，若$\sum_{i=0}^{m'+1} c_i = l+1$，并且考虑到$c_{m'+2} \ge 1$，于是我们此时有：

$$\sum_{i=0}^{m'+1} c_i = l+1 \implies \sum_{i=0}^{m'+1} c_i \le l+1$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m'+2} c_i &= \sum_{i=0}^{m'+1} c_i + c_{m'+2} \\ &= l+1+c_{m'+2} \\ &> l+1\end{aligned}$$

于是此时我们指定$m=m'+1$，对m有：

$$\sum_{i=0}^{m} c_i \le l+1 < \sum_{i=0}^{m+1} c_i$$

若$\sum_{i=0}^{m'+1} c_i \ne l+1$，首先不可能有$\sum_{i=0}^{m'+1} c_i < l+1$，因为这等价于$\sum_{i=0}^{m'+1} c_i \le l$同归纳假设矛盾；于是仅需要考虑$\sum_{i=0}^{m'+1} c_i > l+1$，此时又依据归纳假设，有$\sum_{i=0}^{m'} c_i \le l \iff \sum_{i=0}^{m'} c_i \le l+1$。于是令$m=m'$，对$m$有：

$$\sum_{i=0}^{m} c_i \le l+1 < \sum_{i=0}^{m+1} c_i$$

综上即对$n=l+1$时也有结论成立，于是归纳结束，结论成立。

然后证明对任意$n \in \mathbb{N}$，总存在一个有理数q使得$g(q)=n$。

根据上面结论，存在一个自然数m使得$\sum_{i=0}^{m} c_i \le n < \sum_{i=0}^{m+1} c_i$成立，于是根据序关系，令$n=\sum_{i=0}^{m} c_i + d$（其中$0 \le d < c_{m+1}$并且$d$是自然数）。于是有：

$$n = \sum_{i=0}^{m} c_i + d = \sum_{i=0}^{m} c_i + (d+1) - 1 \tag{2}$$

> 其中$1 \leq d+1 \leq c_{m+1}$，又由于$f_{m+1}: B_{m+1} \to C_{m+1}$是一个双射，于是存在一个$q \in B_{m+1}$使得$f_{m+1}(q) = d+1$。特别地，根据$B_n$定义设$q = a/b$，那么有$q$是一个有理数且$|a| + b = m+1$，于是$(2)$又可化有：
>
> $$n = f_{m+1}(q) - 1 + \sum_{i=0}^{m} c_i = g(q)$$
>
> 综合即对任意$n \in \mathbb{N}$，总存在一个有理数q使得$g(q) = n$，于是g也是满射。
>
> 于是g即为题目所要求双射。

本节相关跳转

[实分析 2.1 皮亚诺公理]

[实分析 4.4 有理数中的间隙]

[实分析 5.5 最小上界性质]

[实分析 8.4 选择公理]