17.6 压缩映射定理

定义

1. (17.6.1 压缩) 设(X,d)是一个度量空间，并设$f:X\to X$是一个映射。如果对于所有的$x,y\in X$都有$d(f(x),f(y))\le d(x,y)$，那么我们称f是一个**压缩映射**。如果存在一个常数$0<c<1$，使得对于所有的$x,y\in X$都有$d(f(x),f(y))\le cd(x,y)$，那么我们称f是一个**严格压缩映射**，c被称为f的**压缩常数**。

   (注：这节是为了反函数定理做铺垫的，因此如果只是为了研究多元微积分那么本节只有引理17.6.6是重要的内容，但是压缩映射定理本身作为不动点定理的例子也有足够的研究价值；关于压缩映射的例子，本节习题与原书中都给出了一些例子)

2. (17.6.3 不动点) 设$f:X\to X$是一个映射，并设$x\in X$。如果$f(x)=x$，则我们称x是f的**不动点**。

命题

1. (17.6.4 压缩映射定理) 设(X,d)是一个度量空间，并设$f:X\to X$是一个严格压缩映射，那么f最多有一个不动点。另外，如果假设X是一个非空的完备空间，那么f恰好有一个不动点。

   (注：压缩映射定理是**不动点定理**的一个例子)

2. (17.6.6) 设$B(0,r)$是$\mathbb{R}^n$中以原点为中心的球，并设$g:B(0,r)\to\mathbb{R}^n$是一个映射，它使得$g(0)=0$，并且对于所有的$x,y\in B(0,r)$都有：

$$\|g(x)-g(y)\|\le\frac{1}{2}\|x-y\|$$

   那么定义为$f(x):=x+g(x)$的函数$g:B(0,r)\to\mathbb{R}^n$是一对一的，并且f的像包含了球$B(0,r/2)$。

课后习题

17.6.1 设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是一元可微函数，并且使得对于所有的$x\in[a,b]$都有$|f'(x)|\le 1$，证明：f是压缩映射（提示：利用平均值定理，即推论10.2.9）。另外，证明：如果对于所有的$x\in[a,b]$都有$|f'(x)|<1$且f'是连续的，那么f是一个严格压缩映射

> 由于f是可微的，因此对于任意的$x,y\in[a,b]$满足$x<y$，应用平均值定理我们有：
>
> $$\exists\,\xi\in(x,y),\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi)\Longrightarrow|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)||x-y|$$
>
> 若有对于所有的$x\in[a,b]$都有$|f'(x)|\le 1$，则上式表明$|f(x)-f(y)|\le|x-y|$，即f是一个压缩映射。
>
> 若对于所有的$x\in[a,b]$都有$|f'(x)|<1$且f'连续，则根据最大值原理（命题9.6.7）我们知道分别存在$x_{\max},x_{\min}\in[a,b]$使得$f'$达到最大值与最小值，再结合对于所有的$x\in[a,b]$都有$|f'(x)|<1$于是有：
>
> $$\forall\,\xi\in[a,b],-1<f'(x_{\min})\le f'(\xi)\le f'(x_{\max})<1\Longrightarrow|f'(\xi)|\le\max(|f'(x_{\max})|,|f'(x_{\min})|)<1$$
>
> 从而上面的结论可以引申为f是一个压缩系数为$\max(|f'(x_{\max})|,|f'(x_{\min})|)$的严格压缩映射。
>
> ($x=y$的情形不需要讨论，此情况下结论是平凡的)

17.6.2 证明：如果$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是一个可微的压缩映射，那么$|f'(x)|\leq 1$对所有的$x\in[a,b]$都成立

> 考虑任意的$x_0\in[a,b]$，由于f在x_0处可微，因此由牛顿逼近法（命题10.1.7）对任意$\varepsilon>0$存在$\delta>0$使得对任意的$|x-x_0|<\delta$都有：
>
> $$0\leq|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)|\leq\varepsilon|x-x_0|$$
>
> 于是利用三角不等式，我们有：
>
> $$|f'(x_0)||x-x_0|\leq|f(x)-f(x_0)|\leq(|f'(x_0)|+\varepsilon)|x-x_0|$$
>
> 再结合f是一个压缩映射，因此有：
>
> $$|f'(x_0)||x-x_0|\leq|f(x)-f(x_0)|\leq|x-x_0|\implies|f'(x_0)|\leq 1$$
>
> 于是结论得证。

17.6.3 给出函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$的一个例子，使得f是连续可微的函数，并且对于所有不同的$x,y\in[a,b]$都有$|f(x)-f(y)|<|x-y|$，但是同时在$[a,b]$中至少存在一个x使得$|f'(x)|=1$

> 考虑函数$f:[0,1]\to\mathbb{R}$有：
>
> $$f(x):=\frac{1}{2}x^2$$
>
> 显然，对于任意的$x,y\in[0,1]$满足$x\neq y$有：
>
> $$|f(x)-f(y)|=\frac{1}{2}|x^2-y^2|\leq\frac{1}{2}|x-y||x+y|<|x-y|$$
>
> （注意到$x\neq y$时有$0<x+y<2$）
>
> 但是在$x=1$处，我们可以求导有$|f'(x)|=1$。f就是题目要求的函数。

17.6.4 给出函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$的一个例子，使得f是一个严格压缩映射，但是同时在$[a,b]$中至少存在一个x使得f在x处不可微

> 考虑函数$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$有：
>
> $$f(x):=\frac{1}{2}|x|$$
>
> 显然，对于任意的$x,y\in[-1,1]$：
>
> $$|f(x)-f(y)|=\frac{1}{2}||x|-|y||\leq\frac{1}{2}|x-y|$$
>
> （注意到$|x|\leq|x-y|+|y|\iff|x|-|y|\leq|x-y|$）
>
> 但是在$x=0$处f是不可微的。f就是题目要求的函数。

17.6.5 验证例17.6.2中的结论

> 例17.6.2内容如下：
>
> > 定义为$f(x):=x+1$的映射$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是一个压缩映射，但它不是严格压缩映射。定义为$f(x):=x/2$的映射$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是一个严格压缩映射。定义为$f(x):=x-x^2$的映射$f:[0,1]\to[0,1]$是一个压缩映射，但不是严格压缩映射。
>
> ---
>
> 我们分别验证这三个函数的性质。
>
> 1. $f(x):=x+1$：

> > 对任意的$x, y \in \mathbb{R}$，我们有：
> >
> > $$|f(x) - f(y)| = |x + 1 - y - 1| = |x - y| \le |x - y|$$
> >
> > 于是$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是一个压缩映射。
>
> 2. $f(x) := x/2$：
>
> > 对任意的$x, y \in \mathbb{R}$，我们有：
> >
> > $$|f(x) - f(y)| = |x/2 - y/2| = |x - y|/2 \le \frac{1}{2}|x - y|$$
> >
> > 于是$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是一个严格压缩映射。
>
> 3. $f(x) := x - x^2$：
>
> > 对任意的$x, y \in [0, 1]$，我们有：
> >
> > $$|f(x) - f(y)| = |x - x^2 - y + y^2| = |x - y||1 - x - y|$$
> >
> > 注意到由于$x, y \in [0, 1]$因此有$|1 - x - y| \in [0, 1]$，从而上式即有$|f(x) - f(y)| \le |x - y|$，于是$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是一个压缩映射。
>
> 综上，结论得证。

17.6.6 证明：定义在度量空间X上的每一个压缩映射都是连续的

> 设X具有度量d，并设$f : X \to X$是一个压缩映射，然后考虑任意的$x_0 \in X$。对任意的$\varepsilon > 0$，我们令$\delta := \varepsilon$，从而对任意的$x \in X$满足$d(x, x_0) < \delta$，我们有：
>
> $$d(f(x), f(x_0)) \le d(x, x_0) < \varepsilon$$
>
> 也即f在x_0处连续，从而我们证明了f是X上的连续函数。

17.6.7 证明定理17.6.4（提示：利用反证法来证明最多有一个不动点。为了证明至少有一个不动点，任取一点$x_0 \in X$，递归地定义$x_1 = f(x_0)$，$x_2 = f(x_1)$，$\ldots$，然后利用归纳法证明$d(x_{n+1}, x_n) \le c^n d(x_1, x_0)$（利用引理7.3.3的几何级数公式），进而利用完备空间的性质证明这个序列的极限就是f的不动点）

> 我们先证明严格压缩映射$f : X \to X$（其压缩常数为c）至多存在一个不动点。
>
> 使用反证法，我们设f同时存在两个不同的不动点x_0, x_1，则我们有：
>
> $$d(x_0, x_1) = d(f(x_0), f(x_1)) \le cd(x_0, x_1) < d(x_0, x_1)$$
>
> 与f是一个严格压缩映射的前提存在矛盾，因此f至多只能存在一个不动点。
>
> ---
>
> 然后我们再来证明当X是一个非空完备空间时f至少存在一个不动点（从而结合前面的结论即f恰有一个不动点）。考虑某个$x_0 \in X$，如果x_0就是f的不动点则我们完成了我们的寻找；如果x_0不是f的不动点，则我们递归地定义序列$(x_n)_{n=0}^{\infty}$有：
>
> $$\forall n \ge 0, x_{n+1} := f(x_n)$$
>
> 然后我们可以注意到一个显然的结论：对任意的$n \ge 0$都有$d(x_{n+1}, x_n) \le c^n d(x_0, x_1)$这是因为：
>
> > 使用归纳法证明。$n = 0$的情况显然成立，于是归纳地假设$n = a$时成立结论，对$n = a + 1$的情况，结合归纳假设我们有：

> > $$d(x_{a+2},x_{a+1})=d(f(x_{a+1}),f(x_a))\leq cd(x_{a+1},x_a)\leq c^{a+1}d(x_0,x_1)$$
> >
> > （最后一个$\leq$用到了归纳假设）
> >
> > 于是对$n=a+1$的情况也成立结论，综合即有归纳得证。
>
> 从而我们不妨令有$l:=d(x_0,x_1)$。此时对任意的$\varepsilon>0$，我们令有N是使得$c^Nl<\varepsilon(1-c)$成立的最小自然数（由于$n\to\infty$时c^n收敛于0，因此这样的自然数肯定是存在的），然后讨论任意的$i,j\geq N$（不妨设$i\leq j$），根据三角不等式与几何级数公式有：
>
> $$d(x_i,x_j)\leq\sum_{k=i}^{j-1}d(x_k,x_{k+1})\leq\sum_{k=N}^{\infty}d(x_k,x_{k+1})\leq\sum_{k=N}^{\infty}c^kl=\frac{c^Nl}{1-c}<\varepsilon$$
>
> 这表明$(x_n)_{n=0}^{\infty}$是X中的一个柯西序列，从而由于X是完备的因此$(x_n)_{n=0}^{\infty}$应当收敛于某个$x\in X$。注意到在习题17.6.6中我们证明了f的连续性，因此根据命题13.1.4我们有：
>
> $$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x$$
>
> 综上我们证明了至少存在一个$x\in X$满足$f(x)=x$（即x是f的不动点），证明完毕。

17.6.8 设(X,d)是一个完备度量空间，并设$f:X\to X$和$g:X\to X$是X上的两个严格压缩映射，它们的压缩常数分别是c和c'。由定理17.6.4可知，f有某个不动点x_0且g有某个不动点y_0。假设存在一个$\varepsilon>0$使得对于所有的$x\in X$都有$d(f(x),g(x))\leq\varepsilon$（也即$f$和$g$的一致度量不超过$\varepsilon$），然后证明：$d(x_0,y_0)\leq\varepsilon/(1-\min(c,c'))$。这个结论表明相近的压缩映射具有相近的不动点

> 我们可以从两个方面考虑应用度量的三角不等式。
>
> 一方面，考虑$g(x_0)$参与三角不等式，此时我们有：
>
> $$d(x_0,y_0)\leq d(x_0,g(x_0))+d(g(x_0),y_0)$$
>
> 考虑不动点的性质。由于x_0同时也是$f(x_0)$，因此由f,g的性质我们有$d(x_0,g(x_0))\leq\varepsilon$；由于$y_0$同时也是$g(y_0)$，因此由严格压缩映射的性质我们有$d(g(x_0),y_0)\leq c'd(x_0,y_0)$。于是上面的不等式可以化为：
>
> $$d(x_0,y_0)\leq\varepsilon+c'd(x_0,y_0)\iff(1-c')d(x_0,y_0)\leq\varepsilon$$
>
> 另一方面，考虑$f(y_0)$参与三角不等式，此时我们有：
>
> $$d(x_0,y_0)\leq d(x_0,f(y_0))+d(f(y_0),y_0)$$
>
> 同样考虑不动点的性质。由于x_0同时也是$f(x_0)$，因此由严格压缩映射的性质我们有$d(x_0,f(y_0))\leq cd(x_0,y_0)$；由于$y_0$同时也是$g(y_0)$，因此由$f,g$的性质我们有$d(f(y_0),y_0)\leq\varepsilon$。于是上面的不等式可以化为：
>
> $$d(x_0,y_0)\leq cd(x_0,y_0)+\varepsilon\iff(1-c)d(x_0,y_0)\leq\varepsilon$$
>
> 综合上面两个不等式，于是我们得到了一个新的不等式：
>
> $$\max(1-c',1-c)d(x_0,y_0)\leq\varepsilon\iff d(x_0,y_0)\leq\frac{\varepsilon}{\max(1-c',1-c)}$$
>
> 最后再注意到：
>
> $$\max(1-c',1-c)=1+\max(-c',-c)=1-\min(c,c')$$
>
> 综上从而我们证明了必然有$d(x_0,y_0)\leq\dfrac{\varepsilon}{1-\min(c,c')}$，证明完毕。

本节相关跳转

实分析 7.3 非负数的和

实分析 10.2 局部最大值、局部最小值以及导数