9.7 中值定理

命题

1. (9.7.1 中值定理) 设$a < b$都是实数，$f : [a, b] \to \mathbb{R}$是$[a, b]$上的连续函数，并且设$y$是介于$f(a)$与$f(b)$之间的一个实数（即要么有$f(a) \leq y \leq f(b)$要么$f(b) \leq y \leq f(a)$），那么存在实数$c \in [a, b]$使得$f(c) = y$。

   (证明已收录至额外注释：中值定理证明)

2. (9.7.4 推论 连续函数的象) 设$a < b$都是实数，$f : [a, b] \to \mathbb{R}$是$[a, b]$上的连续函数。设$M := \sup_{x \in [a,b]} f(x)$与$m := \inf_{x \in [a,b]} f(x)$分别是$f$的最大值与最小值，并且设$y$是介于$m$与$M$之间的一个实数（即$m \leq y \leq M$）。那么存在一个$c \in [a, b]$使得$f(c) = y$，更进一步地，我们有$f([a, b]) = [m, M]$。

课后习题

9.7.1 证明推论9.7.4（提示：除了中值定理之外，你可能还要用到习题9.4.6）

> 根据最大值原理（命题9.6.7），我们知道存在$c, d \in [a, b]$有$f(c) = M$与$f(d) = m$成立，于是我们作限制函数有$f|_{[c,d]}$，根据习题9.4.6的结论有$f|_{[c,d]}$也是连续的，于是运用中值定理，我们有：
>
> 对任意一个y是介于$f(c)(M)$与$f(d)(m)$之间的一个实数，于是存在实数$e \in [c, d]$使得$f(e) = y$，特别地，考虑到$[c, d]$是$[a, b]$的子集，于是$e \in [a, b]$，从而推论9.7.4的第一部分得证。
>
> 然后来证明第二部分，根据M与m的定义，于是对任意的$x \in [a, b]$，都有$f(x) \in [m, M]$，从而根据像的定义应该有：
>
> $$\{f(x) : x \in [a, b]\} \subseteq [m, M] \implies f([a, b]) \subseteq [m, M]$$
>
> 而根据结论的第一部分，我们又有对任意的实数$y \in [m, M]$，都存在$e \in [a, b]$使得$f(e) = y$，于是应该有：
>
> $$[m, M] \subseteq \{f(x) : x \in [a, b]\} \implies [m, M] \subseteq f([a, b])$$
>
> 于是根据集合相等的定义即有$f([a, b]) = [m, M]$。

9.7.2 设$f : [0, 1] \to [0, 1]$是一个连续函数。证明：在$[0, 1]$中存在一个实数x使得$f(x) = x$（提示：对函数$f(x) - x$使用中值定理），这个点x被称为f的不动点，这个结果是不动点定理的一个基本例子，它在一定类型的分析理论里有重要的作用

> 考虑令函数$g : [0, 1] \to \mathbb{R}$有$g(x) := f(x) - x$。由于$g(0) = f(0) - 0 = f(0)$，从而根据$f$的定义应当有$g(0) \in [0, 1]$；又由于$g(1) = f(1) - 1$，从而根据$f$的定义应当有$g(1) \in [-1, 0]$。综合可得：
>
> $$g(1) \leq 0 \leq g(1)$$
>
> 又因为$f(x)$与x都是连续函数，因此$g(x)$也是连续的，从而根据中值定理，存在一个$n \in [0, 1]$，使得：
>
> $$g(n) = 0 \iff f(n) = n$$

> 于是结论得证。

本节相关跳转

[实分析 9.4 连续函数]