额外注释

> 这里用来放置一些内容，包括：
>
> - 笔记未收录但是课本有所提及的内容（当然，至少我得认为这部分比较有用）
> - 课本收录了的，一些个人认为比较重要的定理的证明
> - 一些课本没有的扩展内容
>
> 需要注意的是，对于这里面打了tag的公式，其tag只在其内容内奏效，不会涉及外部的tag。

目录

结构的相关解释

在这份笔记里，部分字体格式对应特殊的意义，具体效果解释如下：

1. 一级标题（#）

   小节的标题，只用于笔记的开头。

2. 二级标题（##）

   小节内内容的分块，具体包括：

   > - 公理：其对应部分抄录原书中的公理内容
   > - 定义：其对应部分抄录原书中的定义内容
   > - 摘录：其对应部分记录原书中无任何标头的重要内容，根据个人总结，会有所删改。同时，这部分内容也是没有编号的
   > - 命题：其对应部分抄录原书中的定理，引理与命题内容
   > - 课后习题：其对应部分抄录原书中的小节下习题与个人习题解答
   > - 本节相关跳转：其对应部分记录本节笔记中提到的其它章节的跳转链接

3. 三级标题（### **）

   定义，命题等模块下，若原文内容有明显分类则添加三级标题注明分类，例子有：实分析 4.3 绝对值与指数运算

4. 五级标题（##### **）

   小节的相关习题

5. 六级标题（###### **）

小节某习题下的分小题

6. 红色字体（**）

   有两种应用区域，其一是内容的编号与简称，典型例子如：（8.5.15 佐恩引理），格式为：（原书编号 定理简称），若简称后方带有问号则表示该简称并非原书内容，只是本人所写；其二是在课后习题部分中，当题目介绍某个未曾在书中定理，引理，命题出现的概念时，使用红色字体标注。

7. 蓝色字体（**）

   有四种应用区域，其一是原书部分重要的例，当我觉得重要时会把该例单独放在相关内容下方，另起一行并用括号标注，格式是：（注：例内容）；其二是在引理中原书打括号的部分，当我觉得它需要额外醒目一点时，使用蓝色字体标注；其三是原书习题后面的提示，使用蓝色字体抄录，格式是：（提示：提示内容）；其四就是个人对一个命题或定义的理解，这种直接在对应命题后面用括号框住，格式大概是：（理解内容）。

8. **粗体字体**（**）

   注释一些需要醒目的内容，比如当某个概念第一次出现时一定要用粗体标出。

9. 跳转链接（[**](**)）

   当内容提到原书其它小节时，给出对应章节的跳转链接，比如4.3节，链接格式统一使用：..\..\第n章\pdf\实分析 n.m 标题.pdf的格式，其中n.m是引用的章节对应数字。特别的，如果是额外注释则不需要在文末的**本节相关跳转**中给出跳转链接。

10. 数学公式（$**$与$$**$$）

当一个地方需要使用数学内容的时候则使用数学公式，此外，当这一部分数学内容设计很多推导过程时，更建议使用行间。

上述字体格式允许在同一个地方应用多种格式。

一些符号总结

1. $\mathbb{N}$：自然数集
2. $\mathbb{N}^*$或者$\mathbb{N}^+$：正自然数集
3. $\mathbb{Z}$：整数集
4. $\mathbb{Q}$：有理数集
5. $\mathbb{R}$：实数集
6. $\mathbb{R}^*$：广义实数集（也即$\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$）

替换公理

代数替换公理（algebraic substitution axiom）：在任一代数恒等式中，每一个字母符号只是一个泛指的变量，因而可用**其它形式的字母**或**恒等的函数**表达式（只要用这些表达式替换后等式两边均仍有意义）替换，替换后等式仍成立。

详情可以参考替换公理—百科。

代数的函数

简单来说，即是不能通过有限次的加法（$+$），减法（$-$），乘法（$\times$），除法（$\div$），乘方，开方（$\sqrt{}$）等关于x的标准代数运算来表达，在本书中我们暂时用不到这个概念。

关于代数函数的具体定义，可以参考：代数函数—百科。

符号函数（sgn）

符号函数$\text{sgn}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$定义如下：

$$\text{sgn}(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x>0\\ 0 & \text{if } x=0\\ -1 & \text{if } x<0\end{cases}$$

这个函数偶尔会被提到，故在此注明。

介值定理证明

定理内容：

> （9.7.1 介值定理）设$a<b$都是实数，$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是$[a,b]$上的连续函数，并且设y是介于$f(a)$与$f(b)$之间的一个实数（即要么有$f(a)\leq y\leq f(b)$要么$f(b)\leq y\leq f(a)$），那么存在实数$c\in[a,b]$使得$f(c)=y$。

证明：

定理包含两种情形$f(a)\leq y\leq f(b)$与$f(b)\leq y\leq f(a)$，这里我们给出第一种情况下的证明，第二种情况的证明类似。

若$y=f(a)$或$y=f(b)$，那么我们只需要相应的考虑令有$c=a$或$c=b$，于是只需要考虑$f(a)<y<f(b)$的情况。令E表示集合：

$$E:=\{x\in[a,b]:f(x)<y\}$$

那么对E我们有：

> - 显然E是$[a,b]$的子集，从而E是有界的。
> - 因为$f(a)<y$且$a\in[a,b]$，所以E也是非空的。

由最小上界原理，于是$c := \sup(E)$是有限的。因为E包含a，于是$c \geq a$，又因为E以b为上界（E是$[a,b]$的子集），于是$c \in [a,b]$。现在证明$f(c) = y$，证明思路是从c的左侧证明$f(c) \leq y$，然后从c的右侧证明$f(c) \geq y$。

左侧的证明：

设$n \geq 1$是一个整数，数$c - \dfrac{1}{n}$小于c，从而$c - \dfrac{1}{n}$不可能是E的上界，于是存在一个点，我们记为x_n，它满足$x_n \geq c - \dfrac{1}{n}$且$x_n \in E$。于是同时由$x_n \in E$有$x_n \leq c$，于是：

$$c - \frac{1}{n} \leq x_n \leq c$$

根据夹逼定理，于是有$\lim_{n \to \infty} x_n = c$，又由于$f$是连续的，于是这蕴含着$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(c)$，此外，由于对任意$x_n$，都有$x_n \in E$，于是有$f(x_n) < y$，根据比较原理，于是有$f(c) \leq y$成立。

因为$f(b) > y \geq f(c)$，于是$c \neq b$，又根据c是E的上确界而b是E的上界，于是$c < b$。特别地，存在一个正整数N使得对任意$n \geq N$都有$c + \dfrac{1}{n} < b$即$c + \dfrac{1}{n} \in [a,b]$；并且因为$c + \dfrac{1}{n} > c$与$c$是上确界，所以$c + \dfrac{1}{n} \notin E$；结合可得有$f(c + \dfrac{1}{n}) \geq y$。又有$c + \dfrac{1}{n}$收敛于$c$与$f$连续，根据比较原理，于是有$f(c) \geq y$成立。

综上，我们同时有$f(c) \leq y$与$f(c) \geq y$成立，于是只能有$f(c) = y$，此即我们要证明的结论。

自然数集$\mathbb{N}$是最小的无限集

使用反证法，不妨假设A是一个基数小于$\mathbb{N}$的无限集，从而存在一个自然数集$\mathbb{N}$的子集B与A有相同的基数，然后我们考虑下面这样一个递归定义所给出的函数$f : \mathbb{N} \to B$：

$$f(i) := \min(B \backslash \{f(j) : j < i\}) \quad (i \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

由于$\{f(j) : j < i\}$对任意$i \in \mathbb{N}$都是有限集，而B根据假设应当是无限集，所以集合$B \backslash \{f(j) : j < i\}$总是非空的；由于自然数集是良序的，从而根据良序原理，$B \backslash \{f(j) : j < i\}$的最小元素总是存在的。因此，上面的递归定义对任意$i \in \mathbb{N}$都是有效的。

然后我们考虑函数f的性质：

- f是单射吗？

> 对任意i_1，$i_2 \in \mathbb{N}$且$i_1 \neq i_2$，不妨考虑设$i_1 < i_2$。于是根据定义(1)，我们有：
>
> $$f(i_2) = \min(B \backslash \{f(j) : j < i_2\})$$
>
> 由于良序原理，于是有$f(i_2) \in B \backslash \{f(j) : j < i_2\} \iff f(i_2) \in B$且$f(i_2) \notin \{f(j) : j < i_2\}$，这表明对任意的$j < i_2$，都应该有$f(i_2) \neq f(j)$（不然就有$f(i_2) \in \{f(j) : j < j_2\}$了），特别地，有$f(i_2) \neq f(i_1)$。于是对任意$i_1$，$i_2 \in \mathbb{N}$且$i_1 \neq i_2$，我们都有$f(i_2) \neq f(i_1)$，即$f$确实是一个单射。
>
> 特别地，我们还需要注意到$f(i_2) \in [B \backslash \{f(j) : j < i_2\}] \cup \{f(j) : i_1 \leq j < i_2\} = B \backslash \{f(j) : j < i_1\}$（因为$f(i_2)$属于这个并集的第一个），而根据定义$(1)$，我们有：
>
> $$f(i_1) = \min(B \backslash \{f(j) : j < i_1\})$$

> 即$f(i_1)$是$B\backslash\{f(j):j<i_1\}$的最小元素，结合$f(i_2)\neq f(i_1)$于是只能有$f(i_1)<f(i_2)$，从而$f$还是一个严格单调递增的函数。因此，不难归纳得到对任意的$i\in\mathbb{N}$，都有$i\leq f(i)$成立。

- f是满射吗？

> 不妨使用反证法，假设它不是满射，从而存在$j\in B$使得对任意$i\in\mathbb{N}$都有$f(i)\neq j$成立，换言之，即集合：
>
> $$S=\{y\in B:\forall\, i\in\mathbb{N},f(i)\neq y\}\tag{2}$$
>
> 是非空的。根据良序原理，存在S的最小元素，于是我们令有：
>
> $$k=\min(S)$$
>
> 良序原理告诉我们$k\in S$。又根据我们在单射证明中的结论，我们知道有f是严格单调递增的且$k\leq f(k)$，于是即对任意$i\geq k$，都有$k\leq f(i)$，于是对集合$S\cup\{f(i):i\geq k\}$中的任意元素y，我们都有$k\leq y$；进而由于$k\in S\cup\{f(i):i\geq k\}$（因为$k$属于$S$），因此$k$就是集合$S\cup\{f(i):i\geq k\}$的最小元素。然后注意到有：
>
> $$\begin{aligned}S\cup\{f(i):i\geq k\}&\iff\{y\in B:\forall\, i\in\mathbb{N},f(i)\neq y\}\cup\{f(i)\in B:i\geq k\}\\&\iff\{y\in B:[\text{对任意 } i\in\mathbb{N}\text{都有}f(i)\neq y]\text{ 或 }[\text{存在}i\geq k\text{使得}f(i)=y]\}\\&\iff\{y\in B:\text{对任意}i\in\mathbb{N}\text{且}i<k\text{都有}f(i)\neq y\}\\&\iff B\backslash\{f(i):i<k\}\end{aligned}$$
>
> 于是即$k=\min(B\backslash\{f(i):i<k\})$，此时返回定义$(1)$，于是即有$f(k)=k$。从而即“存在一个自然数$k$使得$f(k)=k$”，和$S$定义里面的“对任意自然数$i$都有$f(i)\neq k$”矛盾，反证假设不成立，反证结束。
>
> 综上，即有对任意的$j\in B$，都存在$i\in\mathbb{N}$使得$f(i)=j$，即f是满射。

经过上面的探究我们发现$f:\mathbb{N}\to B$同时是单射和满射。也就是说，存在B到$\mathbb{N}$的双射，换言之B与$\mathbb{N}$有相同的基数，这跟我们反证假设中假设的B基数小于$\mathbb{N}$矛盾，于是反证假设不成立，对任意的无限集其基数都不会小于$\mathbb{N}$。

非道路连通但是连通的集合

本例来自知乎用户长白山在问题怎么证明：拓扑学家的曲线连通但不道路连通？下的回答，有删改和变动。

考虑下面的集合：

$$\begin{aligned}I&:=A\cup B\\A&:=\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right):x\in\mathbb{R}^+\right\}\\B&:=\{(0,x):x\in[-1,1]\}\end{aligned}$$

先证明I是连通的。

显然B和A都是道路连通的（前者不用多说，后者本身是个连续函数的图，因此道路连通性是显然的），因此根据习题13.4.7中的结论我们知道这两个集合都是连通的。如果I本身是不连通的，那么A和B就是I的两个不同的连通分支，根据习题13.4.9的结论同时有A和B都是I中的闭集。但是注意到对$(0,0)\in B$，对任意的$\varepsilon>0$都存在$N\geq 0$使得$\frac{1}{2N\pi}<\varepsilon$，从而$A$中的点$\left(\frac{1}{2N\pi},0\right)$距离$(0,0)$小于$\varepsilon$，这表明$(0,0)$是$B$的附着点却不属于$B$，和$B$是闭集的结论矛盾。因此导出矛盾后只能有$I$是连通的。

然后证明I不是道路连通的。

如果I是道路连通的，那么根据道路连通集定义存在某个连续函数$\gamma:[0,1]\to I$满足$\gamma(0)=(0,0)$与$\gamma(1)=(1,\sin(1))$。相应的，通过对第一个坐标不断应用介值定理，可以得到存在递减的有界序列$(t_n)_{n=1}^{\infty}$满足：

$$\gamma(t_n)=\left(\frac{2}{(2n+1)\pi},(-1)^n\right)$$

注意到$(t_n)_{n=1}^{\infty}$递减且有界因此收敛，不妨设其收敛于t，然后由于γ是连续的可以得到序列$\gamma(t_n)$收敛于$\gamma(t)$，但是$\gamma(t_n)$本身发散（第二个坐标不收敛），因此导出了矛盾，I不可能是道路连通的。