6.6 子序列

定义

1. (6.6.1 子序列) 设有实数序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$和$(b_n)_{n=0}^{\infty}$，称有$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的一个子序列，当且仅当存在一个严格递增 (即对$\forall n\in\mathbb{N}$，均有$f(n+1)>f(n)$) 的函数$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$使得有：

$$\forall n\in\mathbb{N}, b_n=a_{f(n)}$$

(注：定义这里不对f做过多的假设，尽管它必然是一个单射)

命题

1. (6.6.4 自反与传递？) 设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$，$(c_n)_{n=0}^{\infty}$是实数序列，那么$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列。另外若有$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列，$(c_n)_{n=0}^{\infty}$是$(b_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列，那么$(c_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列。
2. (6.6.5 与极限相关联的子序列) 假设有$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个实数序列，并设L是一个实数，则下述两个命题在逻辑上是等价的：

   > - 序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于L。
   > - $(a_n)_{n=0}^{\infty}$的每一个子序列都收敛于L。

3. (6.6.6 与极限点相关的子序列) 假设有$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个实数序列，并设L是一个实数，则下述两个命题在逻辑上是等价的：

   > - L是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的极限点。
   > - 存在$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的一个子序列收敛于L。

4. (6.6.8 波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理) 设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个有界序列 (即存在一个实数$M>0$使得$|a_n|\le M$对全体$n\in\mathbb{N}$成立)，那么$(a_n)_{n=0}^{\infty}$至少有一个收敛的子序列。

   (注：波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理说明了如果一个序列是有界的，那么它**最终将收敛于某些地方，无法散布到广阔的空间中**，也**无法阻止自己捕获极限点**)

课后习题

6.6.1 证明引理6.6.4

> 逐条证明：
>
> - $(a_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列。
>
> 我们令有定义为$f(x):=x$的函数$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，于是我们有对任意$n\in\mathbb{N}$，都有$a_n=a_{f(n)}(a_n)$成立，于是根据定义6.6.1，此时可以得到$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列。
>
> ---
>
> - 若有$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列，$(c_n)_{n=0}^{\infty}$是$(b_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列，那么$(c_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列。

> 根据定义6.6.1，$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列，于是存在一个严格递增的函数$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$使得$b_n=a_{f(n)}$对任意$n\in\mathbb{N}$成立；$(c_n)_{n=0}^{\infty}$是$(b_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列，于是存在一个严格递增的函数$g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$使得$c_n=b_{g(n)}$对任意$n\in\mathbb{N}$成立。
>
> 于是对于函数$f\circ g$，由于g是严格递增的，于是对任意$n\in\mathbb{N}$，都有$g(n)<g(n+1)$成立；由于f是严格递增的，结合习题6.1.1将函数替换序列的结论，我们由$g(n)<g(n+1)$可以得到$f(g(n))<f(g(n+1))$对任意$n\in\mathbb{N}$成立，于是$f\circ g$是严格递增的；另外，对任意$n\in\mathbb{N}$，应该有：
>
> $$c_n=b_{g(n)}=a_{f(g(n))}=a_{f\circ g(n)}$$
>
> 于是根据子序列定义6.6.1，此时有$(c_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列。

6.6.2 你能否找到两个不同的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$和$(b_n)_{n=0}^{\infty}$使得其中的一个序列是另一个序列的子序列

> 定义序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$分别有$a_n=n$与$b_n=2n$，取函数$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$定义为$f(x)=2x$。显然$f$是严格递增的，并且对任意$n\in\mathbb{N}$，都有$b_n=a_{f(n)}$成立。于是根据定义6.6.1此时$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列。

6.6.3 设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个无界序列，证明：$(a_n)_{n=0}^{\infty}$有一个子序列$(b_n)_{n=0}^{\infty}$使得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}$存在且等于0

（提示：对任意自然数j，递归地引入量$n_j:=\min\{n\in\mathbb{N}:|a_n|\geq j;n>n_{j-1}\}$（当$j=0$时，忽略条件$n>n_{j-1}$），先解释为什么集合$\{n\in\mathbb{N}:|a_n|\geq j;n>n_{j-1}\}$是非空的，然后令$b_j:=a_{n_j}$）

> 首先我们需要证明一个辅助结论：
>
> 若$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个无界序列，则对任意$k\geq 0$，都有$(a_n)_{n=k}^{\infty}$是无界的。
>
> 不妨使用反证法。我们假设$(a_n)_{n=k}^{\infty}$是有界的，于是存在一个实数M使得$M\geq|a_n|$对任意$n\geq k$都成立；此外，根据命题5.1.14扩展到实数序列的结论，有限序列也是有界的，于是$(a_n)_{n=0}^{k-1}$是有界的，即存在一个实数N使得$N\geq|a_n|$对任意$k-1\geq n\geq 0$都成立。于是取实数$L=\max(M,N)$，综合可得$L\geq|a_n|$对任意$n\geq 0$都成立，于是L是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的上界，但是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个无界序列，于是导出矛盾，从而反证结束，$(a_n)_{n=k}^{\infty}$只能是无界的。
>
> ---
>
> 由于$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个无界序列，于是存在某个整数$l\geq 0$使得$|a_l|\geq 1$，此时我们记有$n_0=l$，于是对任意自然数j，我们递归地引入量n_j（$j\geq 1$），n_j的选取方式如下：对序列$(a_n)_{n=n_{j-1}}^{\infty}$，$n_j$要满足$|a_{n_j}|\geq j+1$且$n_j>n_{j-1}$。下面用归纳法证明这样的选取总是能选取到某个整数的。
>
> 对$j=1$时：
>
> 此时$n_{j-1}=n_0=l$，于是对序列$(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$，根据辅助结论，它是无界的，从而对$j+1$，存在某个整数$l'>n_0$使得$|a_{l'}|\geq j+1$，此时我们可选取$n_j=l'$，从而前述的选择方式在$j=1$时可以正确选取n_j。
>
> 现归纳地假设对$j=c$时成立结论，对$j=c+1$时：
>
> 由于对$j=c$成立结论，从而n_c是一个整数，于是对序列$(a_n)_{n=n_c}^{\infty}$，根据辅助结论，它是无界的，从而对$c+2$，存在某个整数$l'>n_c$使得$|a_{l'}|\geq c+2$，此时我们可选取$n_{c+1}=l'$，从而前述的选择方式在$j=c+1$时可以正确选取n_j。
>
> 归纳结束，上述的选择方式是有效的。
>
> 于是我们令$b_j=a_{n_j}$，下面证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=0$：

> 对任意实数$\varepsilon > 0$，根据习题5.4.4，存在某个正整数N使得$\varepsilon > \frac{1}{N} > 0$，又根据$b_n$性质，我们有：
>
> $$|b_n| \geq N (n \geq N-1) \iff \frac{1}{|b_n|} \leq \frac{1}{N} \overset{\varepsilon > \frac{1}{N}}{\iff} \left|\frac{1}{b_n}\right| \leq \varepsilon$$
>
> 也即存在整数$N-1$使得对任意$n \geq N-1$，都有$\left|\frac{1}{b_n} - 0\right| \leq \varepsilon$，于是根据序列极限定义，此时有$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0$，于是结论得证。

6.6.4 证明命题6.6.5（注意，两个蕴涵关系中有一个的证明非常简短）

> - 若序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于L，则$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的每一个子序列都收敛于L。
>
> 先证明一个辅助结论：若函数$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$是严格递增的，那么有$f(n) \geq n$对任意$n \in \mathbb{N}$成立。
>
> 使用归纳法证明：
>
> 对$n = 0$时：
>
> 首先我们有$f(0) \in \mathbb{N}$，然后根据对任意自然数x都有$x \geq 0$我们可以得到$f(0) \geq 0$成立。
>
> 现归纳性假设对$n = c$时成立结论，对$n = c+1$时：
>
> 根据归纳假设，于是有$f(c) \geq c \iff f(c) + 1 \geq c+1$成立。$f$是严格递增的，于是$f(c+1) > f(c)$，根据命题2.2.12(e)，这等价于$f(c+1) \geq f(c)$，于是再根据命题2.2.12自然数序的可传递性，此时有$f(c+1) \geq c+1$成立，于是结论得证。
>
> 综上，辅助结论得证。
>
> 然后我们来证明题目命题：
>
> 对$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的任意一个子序列$(b_n)_{n=0}^{\infty}$，不妨设有$b_n = a_{f(n)}$，其中函数$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$是严格递增的。对任意$\varepsilon > 0$，由于序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛，于是存在整数$N \geq 0$使得对任意$n \geq N$都有$|a_n - L| \leq \varepsilon$成立。根据辅助结论，对任意$n \geq f(N) (\geq N)$也成立这个结论，又根据严格递增函数的定义，于是对任意$n \geq N$，有$f(n) \geq f(N) \iff |a_{f(n)} - L| \leq \varepsilon$。于是可以总结有：
>
> 对任意$\varepsilon > 0$，存在整数$N \geq 0$使得对任意$n \geq N$都有$|b_n (= a_{f(n)}) - L| \leq \varepsilon$，于是即$(b_n)_{n=0}^{\infty}$也收敛于$L$。
>
> 综上，结论得证。
>
> ---
>
> - 若$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的每一个子序列都收敛于L，则序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于L。
>
> $(a_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$自己的子序列，从而根据$(a_n)_{n=0}^{\infty}$任意一个子序列收敛于L，可得$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于L。

6.6.5 证明命题6.6.6（提示：为了证明(a)蕴涵着(b)，对任意自然数j定义数$n_j := \min\{n > n_{j-1} : |a_n - L| \leq \frac{1}{j}\}$，其中令$n_0 := 0$；解释为什么集合$\{n > n_{j-1} : |a_n - L| \leq \frac{1}{j}\}$是非空的，然后考虑序列$(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$）

> - 若L是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的极限点，则存在$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的一个子序列收敛于L。

L是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的极限点，从而对任意$\varepsilon > 0$与任意整数$N \geq 0$，都存在整数$M \geq N$使得$|a_M - L| \leq \varepsilon$。于是对任意自然数$j$，我们递归地引入量$n_j$，$n_j$的选取方式如下：若$j = 0$，则我们令$n_0 = 0$，若$j \neq 0$，则要求有$|a_{n_j} - L| \leq \frac{1}{j}$且$n_j > n_{j-1}$。下面证明这样的选取总是有效的。

使用归纳法，我们归纳的假设$j = c$时这样的选取成立，对$j = c + 1$的情况讨论：

由于L是极限点，我们选取$\varepsilon = \frac{1}{j}$与$N = n_c + 1$，于是可得存在整数$M \geq n_c + 1 > n_c$有$|a_M - L| \leq \frac{1}{j}$成立，于是此时可选取$n_{c+1} = M$，即$j = c + 1$时选取也是有效的。

下面证明序列$\left(a_{n_j}\right)_{j=0}^{\infty}$收敛于$L$：

对任意$\varepsilon > 0$，根据习题5.4.4，存在某个正整数N使得$\varepsilon > \dfrac{1}{N} > 0$，根据$n_j$的性质，于是对任意$j \geq N$，我们都有：

$$|a_{n_j} - L| \leq \frac{1}{j} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

即对任意$\varepsilon > 0$，存在某个正整数N使得对任意$j \geq N$都有$|a_{n_j} - L| \leq \varepsilon$成立。于是即存在某个$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列收敛于$L$，题目结论得证。

- 若存在$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的一个子序列收敛于L，则L是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的极限点。

不妨设严格递增的函数$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$使得$(a_{f(n)})_{n=0}^{\infty}$收敛于$L$。对任意$\varepsilon > 0$与整数$N \geq 0$，由于$(a_{f(n)})_{n=0}^{\infty}$收敛于$L$，所以存在一个整数$M \geq 0$使得当$n \geq M$都有$|a_{f(n)} - L| \leq \varepsilon$成立。根据习题6.6.4的辅助结论，令有$H = \max(N, M)$，则有$N \leq H \leq f(H)$。同时也有$M \leq H$，所以根据子序列收敛的结论，我们有$|a_{f(H)} - L| \leq \varepsilon$，从而总结可以得到：

对任意$\varepsilon > 0$与整数$N \geq 0$，都存在一个整数$f(H) \geq N$使得$|a_{f(H)} - L| \leq \varepsilon$成立，于是根据极限点的定义，我们有$L$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的极限点，于是题目结论得证。