11.10 基本定理的推论

命题

1. (11.10.1 分部积分法) 设$I=[a,b]$，设$F:I\to\mathbb{R}$和$G:I\to\mathbb{R}$都是$[a,b]$上的可微函数，并且F'和G'在I上都是黎曼可积的。那么我们有：

$$\int_I FG' = F(b)G(b)-F(a)G(a)-\int_I F'G$$

2. (11.10.2 黎曼-斯蒂尔杰斯积分与黎曼积分？) 设$\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$是一个在$[a,b]$上单调递增的可微函数，$\alpha'$是黎曼可积的，并且$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是$[a,b]$上的**分段常数函数**。那么$f\alpha'$在$[a,b]$上黎曼可积，并且：

$$\int_{[a,b]} f\mathrm{d}\alpha = \int_{[a,b]} f\alpha'$$

(注：这个定理使得我们可以在特定的条件下将一个黎曼-斯蒂尔杰斯积分写成黎曼积分，对于这个定理它有一个更为泛用的形式，即推论11.10.3)

> 推论：
>
> 1. (11.10.3) 设$\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$是一个在$[a,b]$上单调递增的可微函数，$\alpha'$是黎曼可积的，并且$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是$[a,b]$上的关于$\alpha$**黎曼-斯蒂尔杰斯可积**的函数。那么$f\alpha'$在$[a,b]$上黎曼可积，并且：
>
> $$\int_{[a,b]} f\mathrm{d}\alpha = \int_{[a,b]} f\alpha'$$
>
> (注：通俗来说，推论11.10.3断言了当α可微时，$f\mathrm{d}\alpha$和$f\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$本质上是等价的。但是黎曼-斯蒂尔杰斯积分的优势在于，即使α是一个不可微的函数，积分也是有意义的)

3. (11.10.5 变量替换公式 I) 设$[a,b]$是一个闭区间，并且设$\phi:[a,b]\to[\phi(a),\phi(b)]$是一个**单调递增的连续函数**，设$f:[\phi(a),\phi(b)]\to\mathbb{R}$是$[\phi(a),\phi(b)]$上的**分段常数函数**。那么$f\circ\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$是$[a,b]$上的分段常数函数，并且：

$$\int_{[a,b]} f\circ\phi\mathrm{d}\phi = \int_{[\phi(a),\phi(b)]} f$$

4. (11.10.6 变量替换公式 II) 设$[a,b]$是一个闭区间，并且设$\phi:[a,b]\to[\phi(a),\phi(b)]$是一个**单调递增的连续函数**，设$f:[\phi(a),\phi(b)]\to\mathbb{R}$是$[\phi(a),\phi(b)]$上的黎曼可积的函数。那么$f\circ\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$是$[a,b]$上关于$\phi$是**黎曼-斯蒂尔杰斯可积的**，并且：

$$\int_{[a,b]} f\circ\phi\mathrm{d}\phi = \int_{[\phi(a),\phi(b)]} f$$

5. (11.10.7 变量替换公式 III) 设$[a,b]$是一个闭区间，并且设$\phi:[a,b]\to[\phi(a),\phi(b)]$是一个**单调递增的可微函数**，而且$\phi'$是黎曼可积的。设$f:[\phi(a),\phi(b)]\to\mathbb{R}$是$[\phi(a),\phi(b)]$上的黎曼可积的函数。那么$(f\circ\phi)\phi':[a,b]\to\mathbb{R}$在$[a,b]$上是黎曼可积的，并且：

$$\int_{[a,b]} (f\circ\phi)\phi' = \int_{[\phi(a),\phi(b)]} f$$

(注：结合推论11.10.3与变量替换公式 II就可以得到本结论)

课后习题

11.10.1 证明命题11.10.1（提示：首先利用推论11.5.2和定理11.4.5证明FG'和$F'G$都是黎曼可积的，然后再使用乘积法则（定理10.1.13(d)））

> 由于F，G都是在I上的可微函数，因此根据命题10.1.10有F和G也是在I上连续的，进而根据推论11.5.2有F和G是在I上黎曼可积的。于是由于G'与F'也是在I上黎曼可积的，根据定理11.4.5有FG'与$F'G$都是黎曼可积的。
>
> 于是根据微积分第二基本定理，我们有：
>
> $$\int_I FG' + \int_I F'G = \int_I (FG' + F'G) = H(b) - H(a)$$
>
> 其中H是$FG' + F'G$的原函数，而根据乘积法则（定理10.1.13(d)）我们有H就是函数$F \cdot G$。于是上式即：
>
> $$\int_I FG' + \int_I F'G = F(b)G(b) - F(a)G(a) \iff \int_I FG' = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_I F'G$$
>
> 即分部积分法得证。

11.10.2 将引理11.10.5的证明中标注了（为什么？）的细节补充完整

> 1. 设P是$[\phi(a), \phi(b)]$的划分，对任意的区间$J \in P$，设$\phi^{-1}(J)$表示集合$\phi^{-1}(J) := \{x \in [a, b] : \phi(x) \in J\}$，那么$\phi^{-1}(J)$是连通的。
>
> 对任意$x < y$是$\phi^{-1}(J)$中的实数（因此有$\phi(x)$，$\phi(y)$属于J），考虑任意$z \in [x, y]$。我们知道x，y与z都属于定义域$[a, b]$，因此由于ϕ是单调递增的，我们有$\phi(x) \leq \phi(z) \leq (y)$。然后由于$J$是连通的（定理11.1.4），我们有$[\phi(x), \phi(y)] \subseteq J$，于是$\phi(z) \in J$，也即$z \in \phi^{-1}(J)$。
>
> 因此我们可以得到对任意$z \in [x, y]$都有$z \in \phi^{-1}(J)$，从而$[x, y] \subseteq \phi^{-1}(J)$，即$\phi^{-1}(J)$是连通的。
>
> ---
>
> 2. 此外，c_J（f在J上的常数值）也是$f \circ \phi$在$\phi^{-1}(J)$上的常数值。
>
> 由于c_J的定义我们有对任意$y \in J$，$f(y) = c_J$。然后对任意$x \in \phi^{-1}(J)$，我们有$\phi(x) \in J$，于是乎$f \circ \phi(x) = f(\phi(x)) = c_J$，即对任意$x \in \phi^{-1}(J)$都有$f \circ \phi(x) = c_J$，即$c_J$是$f \circ \phi$在$\phi^{-1}(J)$上的常数值。
>
> ---
>
> 3. 如果我们定义$Q := \{\phi^{-1}(J) : J \in P\}$，那么$Q$是$[a, b]$的一个划分。
>
> 考虑任意的$x \in [a, b]$，由于ϕ是单调递增的我们有$\phi(a) \leq \phi(x) \leq (b)$。由于$P$是$[\phi(a), \phi(b)]$的划分，因此存在一个区间$J_0 \in P$使得$\phi(x) \in J_0$，从而有$x \in \phi^{-1}(J_0)$。并且对任意区间$J \in P$满足$J \neq J_0$，根据划分的定义我们有$\phi(x) \notin J$，因此有$x \notin \phi^{-1}(J)$。因此$\phi^{-1}(J_0)$是唯一包含$x$的区间。
>
> ---
>
> 4. $f \circ \phi$是关于Q的分段常数函数。
>
> 在上面我们已经论证了对任意的$\phi^{-1}(J) \in Q$，$f \circ \phi$在$\phi^{-1}(J)$上都是常值的（并且常数值为c_J），因此$f \circ \phi$是关于Q的分段常数函数。
>
> ---
>
> 5. 对任意$J \in P$都有$\phi[\phi^{-1}(J)] = |J|$。

若$J=\varnothing$则显然有$\phi^{-1}(J)=\varnothing$，于是此时的情况是平凡的，可以根据定义得到$\phi[\phi^{-1}(J)]=|J|=0$。

于是考虑$J\neq\varnothing$的情景，我们注意到对非空区间I，无论I具有哪种形式，都有：

$$\phi[I]=\phi(\sup I)-\phi(\inf I)\qquad |I|=\sup I-\inf I$$

于是我们证明

$$\phi(\sup\phi^{-1}(J))=\sup J\qquad \phi(\inf\phi^{-1}(J))=\inf J$$

注意到对任意的$y\in J$，根据介值定理存在一个$x\in\phi^{-1}(J)$使得$\phi(x)=y$。由于ϕ是单调递增的，因此有：

$$\inf\phi^{-1}(J)\leq x\leq\sup\phi^{-1}(J)\implies\phi(\inf\phi^{-1}(J))\leq y\leq\phi(\sup\phi^{-1}(J))$$

于是我们有$\phi(\sup\phi^{-1}(J))$是J的一个上界，因此我们有$\phi(\sup\phi^{-1}(J))\geq\sup J$，同理$\phi(\inf\phi^{-1}(J))$是$J$的一个下界，因此我们有$\phi(\inf\phi^{-1}(J))\leq\inf J$。

然后对任意的$x\in\phi^{-1}(J)$，根据定义有$\phi(x)\in J$，即有$\inf J\leq\phi(x)\leq\sup J$，于是考虑$\sup\phi^{-1}(J)$的可能：若$\sup\phi^{-1}(J)$属于$\phi^{-1}(J)$，则可以得到$\phi(\sup\phi^{-1}(J))\leq\sup J$；若$\sup\phi^{-1}(J)$不属于$\phi^{-1}(J)$，则根据$\phi$是连续的有：

$$\lim_{x\to\sup\phi^{-1}(J);x\in\phi^{-1}(J)}\phi(x)=\phi(\sup\phi^{-1}(J))$$

然后根据命题9.3.7，对任意由$\phi^{-1}(J)$中元素组成的收敛于$\sup\phi^{-1}(J)$的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，都有$(\phi(a_n))_{n=0}^{\infty}$收敛于$\phi(\sup\phi^{-1}(J))$，于是结合比较原理与对任意$x\in\phi^{-1}(J)$都有$\phi(x)\leq\sup J$，我们可以得到$\phi(\sup\phi^{-1}(J))\leq\sup J$。类似地对$\inf\phi^{-1}(J)$讨论我们也可以得到总是有$\phi(\inf\phi^{-1}(J))\geq\inf J$。

综合即有$\phi(\sup\phi^{-1}(J))=\sup J$与$\phi(\inf\phi^{-1}(J))=\inf J$为真，于是可以计算有：

$$\begin{aligned}\phi[\phi^{-1}(J)]&=\phi(\sup\phi^{-1}(J))-\phi(\inf\phi^{-1}(J))\\&=\sup J-\inf J\\&=|J|\end{aligned}$$

于是此时也可以得到结论为真，从而对任意$J\in P$都有$\phi[\phi^{-1}(J)]=|J|$为真。

11.10.3 设$a<b$是实数，$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是黎曼可积的函数，并且设$g:[-b,-a]\to\mathbb{R}$被定义为$g(x):=f(-x)$。证明：g是黎曼可积的，并且$\displaystyle\int_{[-b,-a]}g=\int_{[a,b]}f$

对任意的区间I，我们定义$-I:=\{-x:x\in I\}$，显然能注意到对任意$x\in\mathbb{R}$与区间I都有$x\in I$当且仅当$-x\in -I$。然后为了完成下面的证明，我们需要证明一个结论：

$$|I|=|-I|$$

证明：

考虑I的形式，可以讨论有：

- 若I是单点集$\{a\}$或空集，则此时$-I$显然是单点集$\{-a\}$或空集，从而有$|I|=|-I|=0$。
- 若I是形如(a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$或$[a,b]$（$a<b$）的区间，则对应的$-I$是形如$(-b,-a)$，$[-b,-a)$，$(-b,-a]$或$[-b,-a]$的区间，于是根据长度的定义我们有$|I|=b-a$，$|-I|=-a-(-b)=b-a$，于是也有$|I|=|-I|$。

综上于是结论得证。

> 考虑任意的$\overline{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$是从上方控制$f$的分段常数函数，我们很容易注意到定义为$\overline{g}(x):=\overline{f}(-x)$的函数$\overline{g}:[-b,-a]\to\mathbb{R}$满足对任意的$x\in[-b,-a]$都有$\overline{g}(x)=\overline{f}(-x)\geq f(-x)=g(x)$，于是$\overline{g}$是从上方控制$g$的函数。
>
> 然后不妨假设$\overline{f}$是关于划分P的分段常数函数，然后我们令有集合$-P$:
>
> $$-P:=\{-I:I\in P\}$$
>
> 对任意的$x\in[-b,-a]$有$-x\in[a,b]$，然后由于P是$[a,b]$的一个划分，于是恰好存在唯一的$I\in P$使得$-x\in I\iff x\in -I$，从而$-P$是$[-b,-a]$的一个划分。然后令$h(K)$表示分段常数函数h在K上的常数值，注意到对任意$-I\in -P$，其中任意$x\in I$都有:
>
> $$\overline{g}(x)=\overline{f}(-x)\xlongequal{-x\in I}\overline{f}(I)$$
>
> 于是$\overline{g}$是关于$-P$的分段常数函数，并且对任意$-I\in P$我们都有$\overline{g}(-I)=\overline{f}(I)$。进而我们可以计算有:
>
> $$\begin{aligned}\int_{[-b,-a]}\overline{g}=\int_{[-P]}\overline{g}&=\sum_{-I\in -P}\overline{g}(-I)|-I|\\&=\sum_{-I\in -P}\overline{f}(I)|I|\\&=\sum_{I\in P}\overline{f}(I)|I|=\int_{[P]}\overline{f}=\int_{[a,b]}\overline{f}\end{aligned}$$
>
> 于是根据上黎曼积分的定义，我们有:
>
> $$\overline{\int}_{[-b,-a]}g\leq\int_{[-b,-a]}\overline{g}=\int_{[a,b]}\overline{f}$$
>
> 由于$\overline{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$是任意的从上方控制$f$的分段常数函数，从而根据上黎曼积分的定义上式有:
>
> $$\overline{\int}_{[-b,-a]}g\leq\overline{\int}_{[a,b]}f$$
>
> 类似地我们可以对从下方控制f的分段常数函数讨论得到$\underline{\int}_{[-b,-a]}g\geq\underline{\int}_{[a,b]}f$，然后根据命题11.10.3与$f$是黎曼可积的，我们可以直接得到:
>
> $$\overline{\int}_{[-b,-a]}g=\underline{\int}_{[-b,-a]}g=\int_{[a,b]}f$$
>
> 也即有$\int_{[-b,-a]}g=\int_{[a,b]}f$，于是结论得证。

11.10.4 如果把命题11.10.7中的ϕ替换成单调递减的ϕ，那么命题将变成什么样？（当ϕ既不单调递增也不单调递减时，情况将会明显复杂许多）

> 命题应当变为:
>
> 设$[a,b]$是一个闭区间，并且设$\phi:[a,b]\to[\phi(a),\phi(b)]$是一个单调递减的可微函数，而且$\phi'$是黎曼可积的。设$f:[\phi(a),\phi(b)]\to\mathbb{R}$是$[\phi(a),\phi(b)]$上的黎曼可积的函数。那么$(f\circ\phi)\phi':[a,b]\to\mathbb{R}$在$[a,b]$上是黎曼可积的，并且:
>
> $$\int_{[a,b]}(f\circ\phi)\phi'=-\int_{[\phi(a),\phi(b)]}f$$

> 简要证明：
>
> 不难看出有定义为$\psi(x) := \phi(-x)$的函数$\psi : [-b, -a] \to [\phi(a), \phi(b)]$是一个单调递增的可微函数，并且$\psi' : [-b, -a] \to \mathbb{R}$根据链式法则可以计算$\psi'(x) = -\phi'(-x)$，因此根据习题11.10.3与黎曼积分定律（命题11.4.1）可以得到有ψ'是黎曼可积的。于是根据命题11.10.7我们有：
>
> $$\int_{[-b,-a]} (f \circ \psi)\psi' = \int_{[\phi(a),\phi(b)]} f$$
>
> 然后注意到，对任意的$x \in [-b, -a]$，我们有：
>
> $$\begin{aligned}[(f \circ \psi)\psi'](x) &= f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) \\ &= f(\phi(-x)) \cdot (-\phi'(-x)) = -[(f \circ \phi)\phi'](-x)\end{aligned}$$
>
> 于是再次使用习题11.10.3与黎曼积分定律我们可以得到$(f \circ \phi)\phi'$也是黎曼可积的，并且：
>
> $$\int_{[a,b]} (f \circ \phi)\phi' = -\int_{[-b,-a]} (f \circ \psi)\psi' = -\int_{[\phi(a),\phi(b)]} f$$
>
> 这也就是我们对单调递减函数的变量替换公式。

本节相关跳转

[实分析 10.1 基本定义]

[实分析 11.4 黎曼积分的基本性质]

[实分析 11.5 连续函数的黎曼可积性]