9.1 实直线的子集

定义

1. (9.1.1 区间) 设a，$b\in\mathbb{R}^*$是广义实数，定义**闭区间**$[a,b]$为：

   $$[a,b]:=\{x\in\mathbb{R}^*:a\le x\le b\}$$

   定义**半开区间**$[a,b)$与$(a,b]$分别为：

   $$[a,b):=\{x\in\mathbb{R}^*:a\le x<b\}$$
   $$(a,b]:=\{x\in\mathbb{R}^*:a<x\le b\}$$

   定义**开区间**(a,b)为：

   $$(a,b):=\{x\in\mathbb{R}^*:a<x<b\}$$

   我们称a为这些区间的**左端点**，b为这些区间的**右端点**，a与b称为这些区间的**端点**。

   （注：有时我们也会称某个端点为无穷（$+\infty$或$-\infty$）的区间为**半无限区间**；称两个端点都是无穷的区间为**双无限区间**；其余区间统称为**有界区间**。此外，当左端点a与右端点b相等时，我们可以证明有开区间(a,b)，半开区间$(a,b]$与$[a,b)$都是空集，闭区间$[a,b]$是单元素集$\{a\}$，此时我们称这些区间是**退化的**，通常来说，我们分析理论的讨论范围都是非退化的区间）

2. (9.1.5 ε-附着) 设X是$\mathbb{R}$的子集，实数$\varepsilon>0$，并且设$x\in\mathbb{R}$，我们称x是ε-附着于X的，当且仅当存在一个$y\in X$使得x与y是ε-接近的，即$|x-y|\le\varepsilon$。

   （注："ε-附着于"并不是文献中的标准术语，但是我们可以利用这个定义来构建实数集子集的附着点的概念（定义9.1.8），其中附着点是标准术语）

3. (9.1.8 实数集合的附着点) 设X是$\mathbb{R}$的子集，并且设$x\in\mathbb{R}$，我们称x是X的一个**附着点**，当且仅当对任意实数$\varepsilon>0$，x都是ε-附着于X的。

4. (9.1.10 闭包) 设X是$\mathbb{R}$的子集，定义X的**闭包**为X的全体附着点所构成的集合，有时我们把X的闭包记作$\overline{X}$。

5. (9.1.15 闭的？) 设X是$\mathbb{R}$的子集，如果有$X=\overline{X}$，即X的所有附着点都包含于X中，那么我们称X是**闭的**。

6. (9.1.17 极限点) 设X是实直线的一个子集，我们称x是X的一个**极限点**（**或聚点**），当且仅当x是$X\backslash\{x\}$的一个附着点。如果$x\in X$，并且存在某个$\varepsilon>0$使得对任意$y\in X\backslash\{x\}$都有$|x-y|\ge 0$成立，那么我们称x是X的**孤立点**。

7. (9.1.22 有界集合) 设X是实直线的一个子集，如果存在某个正实数$M>0$使得$X\subseteq[-M,M]$，那么称X是有界的。

命题

1. (9.1.11 闭包的初等性质) 设X，Y是$\mathbb{R}$的任意两个子集，那么$X\subseteq\overline{X}$，$\overline{X\cup Y}=\overline{X}\cup\overline{Y}$，且$\overline{X\cap Y}=\overline{X}\cap\overline{Y}$。此外，如果此时有$X\subseteq Y$，则有$\overline{X}\subseteq\overline{Y}$。

2. (9.1.12 区间的闭包) 设$a<b$都是实数，并且设I是区间(a,b)，$(a,b]$，$[a,b)$，$[a,b]$中的任意一个，那么此时有I的闭包是$[a,b]$；类似的，还有$(a,+\infty)$与$[a,+\infty)$的闭包是$[a,+\infty)$，$(-\infty,a)$与$(-\infty,a]$的闭包是$(-\infty,a]$，$(-\infty,+\infty)$的闭包是$(-\infty,+\infty)$。

3. (9.1.13 闭包的例子？）$\mathbb{N}$的闭包是$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$的闭包是$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$的闭包是$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}$的闭包是$\mathbb{R}$，$\varnothing$的闭包是$\varnothing$。
4. (9.1.14) 设X是$\mathbb{R}$的子集，并且设$x \in \mathbb{R}$。那么x是X的一个附着点，当且仅当存在一个完全由X中元素组成的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于x。

   （注：于是X的附着点都可以由X中的元素的极限而得到，借助这个引理，我们也可以重新定义闭包的概念）
5. (9.1.17 推论与闭包的重新定义）设X是$\mathbb{R}$的子集，如果X是闭的，并且$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个完全由X中元素组成的收敛序列，那么有$\lim\limits_{n \to \infty} a_n$也属于$X$；反过来，如果每一个由$X$中元素组成的收敛序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的极限也都属于$X$，那么$X$一定是闭的。
6. (9.1.21) 设I是一个区间（可以是无限的），即I是一个形如(a, b)，$(a, b]$，$[a, b)$，$[a, b]$，$(a, +\infty)$，$[a, +\infty)$，$(-\infty, a)$，$(-\infty, a]$或$(-\infty, +\infty)$的集合，并且对前四种情形有$a < b$成立，那么I中每一个元素都是I的极限点。
7. (9.1.24 直线上的海涅-博雷尔定理）设X是实直线的一个子集，那么下面两个命题是等价的：

   > - X是闭的且有界的。
   > - 给定任意一个在X中取值的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$（即对任意n均有$a_n \in X$），则存在一个它的子序列$(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$收敛于X中的某个数L。

   （注：该定理在本章后面几节有非常大的作用，以距离空间拓扑学的语言来说，该定理断定了实直线的任意一个闭的且有界的子集都是紧的，参见11.7节，该定理更一般的形式由爱德华·海涅与埃米尔·博雷尔给出，参见定理11.7.7）

课后习题

本节相关跳转

实分析 11.7 非黎曼可积的函数