11.2 分段常数函数

定义

1. (11.2.1 常数函数) 设X是$\mathbb{R}$的子集，并且设$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数。我们称f是**常数函数**，当且仅当存在一个实数c使得对所有的$x\in X$均有$f(x)=c$。设E是X的一个子集，如果f在E上的限制函数$f|_E$是常数函数（即存在一个实数c使得对任意$x\in E$均有$f(x)=c$），则我们称f在E上是**常值**的，并将c称为f在E上的**常数值**。

   （注：如果E是一个非空的集合并且f在E上是常值的，那么f的常数值必然是唯一的，例如f不可能在E上始终等于3又等于4（回忆下垂线测试）。然而，如果E是空集，那么每一个实数c都是f在E上的常数值）

2. (11.2.3 分段常数函数I) 设I是一个有界区间，$f:I\to\mathbb{R}$是一个函数，并且设P是I的一个划分。若有对任意的$J\in P$，f在J上都是常值的，那么我们称f是**关于P的分段常数函数**。

   （注：需要注意这个分段常数函数的定义依赖于一个指定的划分）

3. (11.2.5 分段常数函数II) 设I是一个有界区间，并且设$f:I\to\mathbb{R}$是一个函数，如果存在一个I的划分P使得f是关于P的分段常数函数，那么我们称f是**I上的分段常数函数**。

4. (11.2.9 分段常值积分I) 设I是一个有界区间，P是I的一个划分，并且设$f:I\to\mathbb{R}$是关于P的分段常数函数。那么我们定义f关于划分P的**分段常值积分**$p.c.\int_{[P]}f$是：

   $$p.c.\int_{[P]}f:=\sum_{J\in P}c_J|J|$$

   其中对任意$J\in P$，我们令有c_J为f在J上的常数值。

   （注：关于这个定义，首先让人容易联想到的就是当划分中存在空集时，c_J的值是不固定的，但是在前面的定义中我们也知道J为空时其长度$|J|$为0，从而这样的定义又是没有问题的；此外还需要注意的是，由于划分P是一个有限的集合，因此分段常值积分作为一个有限和总是有意义的，不存在发散或者无限大的可能；最后这个符号只是一个临时的定义，为的是引出一个更有用的定义获得区间上的分段常值积分；至于记号的意义，我想应该是取piecewise constant integral的前两个单词首字母再加上我们所熟知的积分号得到的）

5. (11.2.14 分段常值积分II) 设I是一个有界区间，并且设$f:I\to\mathbb{R}$是I上的分段常数函数。那么我们定义f的**分段常值积分**$p.c.\int_I f$是：

   $$p.c.\int_I f:=p.c.\int_{[P]}f$$

   其中P是I的任意一个使得f是关于P的分段常数函数的划分。

   （注：命题11.2.13告诉我们划分的选取是无关紧要的，在11.3节中我们将给出黎曼积分的概念并替换掉分段常值积分，因此不需要特别记忆这个过渡概念（就像实数章节中我们用到的LIM概念一样））

命题

1. (11.2.7) 设I是一个有界区间，P是I的一个划分，$f:I\to\mathbb{R}$是关于P的分段常数函数，并且设P'是一个比P更细的划分，那么f也是关于P'的分段常数函数。

2. （11.2.8 函数的运算保持分段常数函数？）设I是一个有界区间，并且设$f: I \to \mathbb{R}$与$g: I \to \mathbb{R}$都是I上的分段常数函数，那么函数$f+g$、$f-g$，$\max(f,g)$，$\min(f,g)$以及fg也都是I上的分段常数函数。如果有g在I中任何位置都不为0（即对所有的$x \in I$都有$g(x) \neq 0$），那么f/g也都是I上的分段常数函数。
3. （11.2.13 分段常值积分是独立于划分的）设I是一个有界区间，并且设$f: I \to \mathbb{R}$是一个函数。如果P和P'都是I的划分，并且f关于P和P'都是分段常值函数，那么有$p.c.\int_{[P]} f = p.c.\int_{[P']} f$。
4. （11.2.16 积分定律）设I是一个有界区间，并且设$f: I \to \mathbb{R}$与$g: I \to \mathbb{R}$都是I上的分段常数函数，那么有下面的命题成立：

> 1. $p.c.\int_I (f+g) = p.c.\int_I f + p.c.\int_I g$。
> 2. 对任意的实数c，有$p.c.\int_I (cf) = c\cdot\left(p.c.\int_I f\right)$。
> 3. $p.c.\int_I (f-g) = p.c.\int_I f - p.c.\int_I g$。
> 4. 如果对所有的$x \in I$均有$f(x) \geq 0$，那么$p.c.\int_I f \geq 0$。
> 5. 如果对所有的$x \in I$均有$f(x) \geq g(x)$，那么$p.c.\int_I f \geq p.c.\int_I g$。
> 6. 设J是一个包含I的有界区间（即$I \subseteq J$），并且设$F: J \to \mathbb{R}$是函数：
> $$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in I \\ 0 & \text{if } x \notin I \end{cases}$$
> 那么F是J上的分段常数函数，并且$p.c.\int_J F = p.c.\int_I f$。
> 7. 如果$\{J, K\}$是I的一个划分，它将I分成两个区间J和K，那么函数$f|_J: J \to \mathbb{R}$与$f|_K: K \to \mathbb{R}$分别是J上和K上的分段常数函数，并且：
> $$p.c.\int_I f = p.c.\int_J f|_J + p.c.\int_K f|_K$$

（注：这些基本性质最终将被黎曼积分的相关定律（定理11.4.1）取代）

课后习题

11.2.1 证明引理11.2.7

> 由于P'是比P更细的一个划分，从而对任意区间$J \in P'$，都存在一个$K \in P$使得$J \subseteq K$。又因为$f: I \to \mathbb{R}$是关于P的分段常数函数，所以对任意$K \in P$，f在K上都是常值的，不妨设f在K上的常数值为c_K。
>
> 于是对任意$J \in P'$，我们有对任意$x \in J$，都有存在一个$K \in P$使得$x \in K$；再结合f在K上都是常值的，于是有$f(x) = c_K$。综合即对任意$J \in P'$，f在J上都是常值的，因此f是关于P'的分段常数函数。

11.2.2 证明引理11.2.8（提示：利用引理11.1.18和引理11.2.7，使得f和g是关于I的同一个划分的两个分段常数函数）

> 根据定义11.2.5，我们不妨设f是在关于划分P_1的分段常数函数，g是关于划分P_2的分段常数函数，其中P_1，P_2都是I的划分。根据引理11.2.7与命题11.1.18，我们可以得到f和g都是在关于公共加细$P_1\#P_2$的分段常数函数。
>
> 于是我们可以对任意的$X\in P_1\#P_2$，我们记有f在X上的常数值为$f.c_X$，g在I上的常数值为$g.c_X$，可以讨论有：
>
> - $f+g$：对任意$x\in X$我们应该有$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=f.c_X+g.c_X$。
> - $f-g$：对任意$x\in X$我们应该有$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=f.c_X-g.c_X$。
> - $\max(f,g)$：对任意$x\in X$我们应该有$(\max(f,g))(x)=\max(f(x),g(x))=\max(f.c_X,g.c_X)$。
> - $\min(f,g)$：对任意$x\in X$我们应该有$(\min(f,g))(x)=\min(f(x),g(x))=\min(f.c_X,g.c_X)$。
> - fg：对任意$x\in X$我们应该有$(fg)(x)=f(x)g(x)=f.c_X\cdot g.c_X$。
> - f/g：对任意$x\in X$我们应该有$(f/g)(x)=f(x)/g(x)=f.c_X/g.c_X$。（这一个证明需要用到对任意$x\in I$都有$g(x)\neq 0$的前提才能保证始终有意义）
>
> 于是可以看到函数$f+g$、$f-g$，$\max(f,g)$，$\min(f,g)$以及fg都在X上是常值的，即有它们都是关于划分$P_1\#P_2$的分段常数函数；如果有g在I中任何位置都不为0，那么f/g也是在X上是常值的，即它也是关于划分$P_1\#P_2$的分段常数函数。
>
> 又由于$P_1\#P_2$是I的划分，因此上面的结论可以根据定义11.2.5引申为：
>
> 函数$f+g$、$f-g$，$\max(f,g)$，$\min(f,g)$以及fg都是I上的分段常数函数，并且如果有g在I中任何位置都不为0，那么f/g也是I上的分段常数函数。
>
> 这也正是引理11.2.8的结论，证明完毕。

11.2.3 证明命题11.2.13（提示：首先利用定理11.1.13证明两个积分都等于$p.c.\int_{[P\#P']}f$）

> 我们先证明一个辅助结论1：
>
> > 设I是一个有界区间，P，P'都是I的划分并且P'比P更细，那么对任意非空区间$K\in P$，集合
> >
> > $$S_K:=\{J\in P':J\subseteq K\text{且}J\neq\varnothing\}$$
> >
> > 是K的一个划分。并且有：
> >
> > $$\bigcup_{K\in P;K\neq\varnothing}S_K=\{J\in P':J\neq\varnothing\}$$
>
> 证明：
>
> 很显然S_K是包含有限个（S_K是P'子集，基数不会超过P'的基数）区间（P'是划分，因此其元素都是区间）的集合，并且其中任意一个区间都是包含于K的，于是对照定义11.1.10，我们只需要证明对任意$x\in K$，都恰好存在一个$J\in S_K$使得$x\in J$。
>
> 由于P是一个划分，因此对任意$x\in K$，K应当是P中唯一包含x的集合，并且应当有$x\in I$；由于P'也是I的划分，因此恰好存在唯一$J\in P'$使得$x\in J$；由于P'比P更细，因此存在$K'\in P$使得$J\subseteq K'$，从而有$x\in K'$。但是在前面的讨论中我们知道K应当是P中唯一包含x的集合，于是只能有$K'=K$，即$J\subseteq K$。

> 综上所述我们知道对任意$x\in K$，都存在唯一$J\in P'$且使得同时满足$J\subseteq K$与$x\in J$成立，这同时隐含了$J\neq\varnothing$的结论，因此我们有$J\in S_K$；并且由于S_K是P'的子集，因此J也应当是S_K中唯一满足$x\in J$的区间（否则就会导出J不是P'中唯一包含x的区间的矛盾结论）。
>
> 于是综上，结论得证，我们有对任意非空区间$K\in P$，S_K是K的一个划分。
>
> 然后对任意非空区间$J\in P'$，由于P'比P更细，所以存在一个$K\in P$使得$J\subseteq K$，从而有$J\in S_K\implies J\in\bigcup_{K\in P;K\neq\varnothing}S_K$；反过来，对任意$J\in\bigcup_{K\in P;K\neq\varnothing}S_K$，存在一个非空区间$K\in P$使得$J\in S_K$，于是根据$S_K$定义有$J\in P'$且$J$非空，因此$J$属于集合$\{J\in P':J\neq\varnothing\}$。从而根据集合相等的定义有$\bigcup_{K\in P;K\neq\varnothing}S_K=\{J\in P':J\neq\varnothing\}$。
>
> ---
>
> 然后证明一个辅助结论2，通过这个结论我们可以很轻松地得证命题11.2.13：
>
> > 设I是一个有界区间，P，P'都是I的划分并且P'比P更细，f是关于P的分段常数函数（因此根据引理11.2.7f也是关于P'的分段常数函数）。那么有：
> >
> > $$p.c.\int_{[P]}f=p.c.\int_{[P']}f$$
>
> 证明：
>
> 根据定义11.2.9，我们有：
>
> $$p.c.\int_{[P]}f=\sum_{K\in P}c_K|K|$$
>
> 其中对任意$K\in P$，我们令有c_K为f在K上的常数值。然后使用辅助结论1，定理11.1.13与$|\varnothing|=0$我们可以化简有：
>
> $$\begin{aligned}\sum_{K\in P}c_K|K|&=\sum_{K\in P;K\neq\varnothing}c_K|K|+\sum_{K\in P;K=\varnothing}c_K|K|\\&=\sum_{K\in P;K\neq\varnothing}\left[c_K\sum_{J\in S_K}|J|\right]+0\\&=\sum_{K\in P;K\neq\varnothing}\left[\sum_{J\in S_K}c_K|J|\right]\end{aligned}$$
>
> 又考虑到对任意非空区间K_1，$K_2\in P$，S_{K_1}与S_{K_2}都是不相交的，于是根据有限和的加和公式与辅助结论1，上面的式子可以化为：
>
> $$\begin{aligned}\sum_{K\in P;K\neq\varnothing}\left[\sum_{J\in S_K}c_K|J|\right]&=\sum_{J\in\bigcup_{K\in P;K\neq\varnothing}S_K}c_{K(J)}|J|\\&=\sum_{J\in P';J\neq\varnothing}c_{K(J)}|J|\end{aligned}$$
>
> 这里我们令有$c_{K(J)}$为f在K上的常数值，其中$K\in P$满足$J\in S_K$成立，显然这种指定是唯一的。考虑到$J\in S_K$表明$J\subseteq K$，于是由于f在K上是常值的可以推知f在K的子集I上也是常值的，并且它们的常数值相同，于是上面的式子又可以化为：
>
> $$\sum_{J\in P';J\neq\varnothing}c_{K(J)}|J|=\sum_{J\in P';J\neq\varnothing}c_J|J|$$

其中对任意$J\in P'$，我们令有c_J为f在J上的常数值。根据定义，上式右端就是$p.c.\int_{[P']}f$，于是结论得证。

最后我们来证明命题11.2.13：

证明：

我们知道公共加细$P\#P'$是比P和P'都要更细的划分，因此根据辅助结论2，我们有：

$$p.c.\int_{[P]}f=p.c.\int_{[P\#P']}f=p.c.\int_{[P']}f\Longrightarrow p.c.\int_{[P]}f=p.c.\int_{[P']}f$$

于是命题11.2.13得证。

11.2.4 证明定理11.2.16（提示：你可以利用定理前面的部分证明定理后面的内容，也可以参考习题11.2.2的提示）

由于命题11.2.13的结论，我们知道分段常值积分的值同划分的选取无关，于是若f的分段常值积分是关于P_1的，g的分段常值积分是关于P_2的，我们也能根据命题11.2.13将它们的等效替换为关于$P_1\#P_2$的分段常值积分。故在下面的讨论中，对于涉及到f与g两个函数的命题我们将在I上的分段常值积分统一转变为关于划分P的分段常值积分（其中划分P是I的一个划分，并且满足f和g都是关于划分P的分段常数函数）。

然后我们令h_i表示函数h在区间i上的常数值，下面逐条给出证明：

---

1. $p.c.\int_I(f+g)=p.c.\int_I f+p.c.\int_I g$。

即证明：

$$\sum_{J\in P}(f+g)_J|J|=\sum_{J\in P}f_J|J|+\sum_{J\in P}g_J|J|$$

由于我们有$(f+g)_J|J|=f_J|J|+g_J|J|$对任意$J\in P$都成立，因此根据有限和运算法则（命题7.1.11(f)）可以直接得证结论成立。

---

2. 对任意的实数c，有$p.c.\int_I(cf)=c\cdot\left(p.c.\int_I f\right)$。

即证明：

$$\sum_{J\in P}(cf)_J|J|=c\sum_{J\in P}f_J|J|$$

由于我们有$(cf)_J|J|=c\cdot f_J|J|$对任意$J\in P$都成立，因此根据有限和运算法则（命题7.1.11(g)）可以直接得证结论成立。

---

3. $p.c.\int_I(f-g)=p.c.\int_I f-p.c.\int_I g$。

即证明：

$$\sum_{J\in P}(f-g)_J|J|=\sum_{J\in P}f_J|J|-\sum_{J\in P}g_J|J|$$

由于我们有$(f-g)_J|J| = f_J|J| + (-g_J|J|)$对任意$J \in P$都成立，因此根据有限和运算法则（命题7.1.11(f)）可以直接得证结论成立。

---

4. 如果对所有的$x \in I$均有$f(x) \geq 0$，那么$p.c.\int_I f \geq 0$。

即证明：

$$\sum_{J \in P} f_J|J| \geq 0$$

考虑取常值函数$g(x) := 0$，于是根据有限和运算法则（命题7.1.11(h)）可以直接得证结论。

---

5. 如果对所有的$x \in I$均有$f(x) \geq g(x)$，那么$p.c.\int_I f \geq p.c.\int_I g$。

即证明：

$$\sum_{J \in P} f_J|J| \geq \sum_{J \in P} g_J|J|$$

根据有限和运算法则（命题7.1.11(h)）可以直接得证结论。

---

6. 设J是一个包含I的有界区间（即$I \subseteq J$），并且设$F : J \to \mathbb{R}$是函数：

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in I \\ 0 & \text{if } x \notin I \end{cases}$$

那么F是J上的分段常数函数，并且$p.c.\int_J F = p.c.\int_I f$。

不妨设有I的划分P_I是使得f是关于P_I的分段常数函数且I是非空的，然后考虑下面这样一个集合：

$$P_J := \{A, B\} \cup P_I$$

其中$A := \{x \in J : \forall y \in I, y > x\}$，$B := \{x \in J : \forall y \in I, y < x\}$。显然有对任意$x$，$y \in A$，都有$[x, y] \subseteq A$，因此$A$是一个有界的连通集合，从而根据命题11.1.4有$A$是一个有界区间。类似地我们也很容易证明$B$也是一个有界区间。

于是我们来证明P_J是J的一个划分：显然P_J中由有限个包含于J的区间组成的集合，因此只需要证明对J中的每个元素j都恰好属于P_J中的一个有界区间S。对任意$j \in J$，若其属于I，则由于P_I是I的划分我们知道必然恰好存在一个$S \in P_I$使得$j \in S$，并且j不属于A，B中的任何一个（否则总会导出$j < j$的谬误）；若其不属于I，则j不等于任何I中元素（也即不存在$S \in P_I$使得$j \in S$）。于是若对任意I中元素y都有$y < j$，那么$j \in B$且$j \notin A$；若对任意I中元素y都有$y > j$，那么$j \in A$且$j \notin B$；我们不可能有存在一对I中元素x，y使得$x < j < y$，由于I的连通性这会导出$j \in I$的矛盾结论。于是我们总是有对J中的每个元素j，它都恰好属于P_J中的某个有界区间。

然后我们证明F是关于P_J的分段常数函数，由于f是关于P_I的分段常数函数，因此对任意$S \in P_J$且$S \in P_I$，f在S上是常值的，从而根据F的定义F在S上也是常值的；然后对任意$S \in P_J$且$S \notin P_I$，那么对任意$x \in S$，都有$x \notin I \implies F(x) = 0$，于是$F$在$S$上也是常值的。综合即对任意$S \in P_J$都有$F$在$S$上是常值的。

最后我们证明题式成立，题式即证明：

$$\sum_{S\in P_J} F_S|S| = \sum_{S\in P_I} f_S|S|$$

根据有限和的运算性质，我们可以对左式变换有：

$$\begin{aligned}\sum_{S\in P_J} F_S|S| &= \sum_{S\in P_I} F_S|S| + F_A|A| + F_B|B| \\ &= \sum_{S\in P_I} F_S|S| + 0\cdot|A| + 0\cdot|B| \\ &= \sum_{S\in P_I} F_S|S|\end{aligned}$$

考虑到对任意$S\in P_I$，我们有$S\subseteq I \Longrightarrow F_S = f_S$，于是上式等于$\sum\limits_{S\in P_I} f_S|S|$，$I$非空时题式成立。

若I为空集，则显然有$p.c.\int_J F = p.c.\int_I f = 0$，于是题式得证。

---

7. 如果$\{J, K\}$是I的一个划分，它将I分成两个区间J和K，那么函数$f|_J : J\to\mathbb{R}$与$f|_K : K\to\mathbb{R}$分别是J上和K上的分段常数函数，并且：

$$p.c.\int_I f = p.c.\int_J f|_J + p.c.\int_K f|_K$$

不妨设有I的划分P是使得f是关于P的分段常数函数，我们先证明$f|_J$与$f|_K$分别是J上和K上的分段常数函数。

取公共加细$P' := \{J, K\}\#P$，并且令有集合$P_J := \{S\in P' : S\subseteq J且S\neq\varnothing\}$与$P_K := \{S\in P' : S\subseteq K且S\neq\varnothing\}$，显然$P_J$与$P_K$都是由有限个区间构成的集合，我们证明$P_J$是$J$的划分与$P_K$是$K$的划分。

考虑P_J，显然其中每一个区间都是包含于J的。对任意$j\in J$，由于P'是一个划分，于是存在一个恰好存在一个非空区间$S\in P'$使得$j\in S$；又根据公共加细的定义，应当有S是J或者K的子集。若S是K的子集则我们有$j\in K$，于是j同时属于J与K，这与$\{J, K\}$是划分的前提矛盾。于是只能有S是J的子集，即$S\in P_J$，从而得证：对任意$j\in J$都恰好存在一个$S\in P_J$使得$j\in S$。结合前结论可得P_J是J的划分，类似地我们也可以证明P_K是K的一个划分。

然后证明$f|_J$与$f|_K$分别是J上和K上的分段常数函数。根据题设有f是关于P的分段常数函数，由引理11.2.7有f也是关于P'的分段常数函数，从而根据定义11.2.3，对任意$S\in P'$，f在S上都是常值的。考虑到P_J与P_K都是P'的子集，因此对任意S属于P_J或者P_K，f在S上都是常值的。从而$f|_J$与$f|_K$分别是关于P_J和P_K的分段常数函数，也即$f|_J$与$f|_K$分别是J上和K上的分段常数函数。

最后我们来证明题式成立，题式即证明：

$$\sum_{S\in P'} f_S|S| = \sum_{S\in P_J} f_S|S| + \sum_{S\in P_K} f_S|S|$$

其中由于$f|_J$，$f|_K$，f只是定义域不同，但是在对应区间上常数值不会变，因此我们也可以用f_S来替代$(f|_J)_S$与$(f|_K)_S$的繁琐写法。

由于$|\varnothing| = 0$，于是注意到：

$$\sum_{S\in P'} f_S|S| = \sum_{S\in P';S\neq\varnothing} f_S|S| + \sum_{S\in P';S=\varnothing} f_S|S| = \sum_{S\in P';S\neq\varnothing} f_S|S|$$

> 并且我们有$\{S \in P' : S \neq \varnothing\} = P_J \cup P_K$与$P_J \cap P_K = \varnothing$，于是根据有限和运算性质（命题7.1.11(e)），我们可以直接得证结论。

本节相关跳转

[实分析 11.1 划分]

[实分析 11.4 黎曼积分的基本性质]