额外注释

> 这里用来放置一些内容，包括：
>
> - 课本未收录但是课本有所提及的内容
> - 课本收录了的，一些个人认为比较重要的定理的证明

目录

结构的相关解释

在这份笔记里，部分字体格式对应特殊的意义，具体效果解释如下：

1. 一级标题（#）

   小节的标题，只用于笔记的开头。

2. 二级标题（##）

   小节内内容的分块，具体包括：

   > - 公理：其对应部分抄录原书中的公理内容
   > - 定义：其对应部分抄录原书中的定义内容
   > - 摘录：其对应部分记录原书中无任何标头的重要内容，根据个人总结，会有所删改。同时，这部分内容也是没有编号的
   > - 命题：其对应部分抄录原书中的定理，引理与命题内容
   > - 课后习题：其对应部分抄录原书中的小节下习题与个人习题解答
   > - 本节相关跳转：其对应部分记录本节笔记中提到的其它章节的跳转链接

3. 三级标题（### **）

   定义，命题等模块下，若原文内容有明显分类则添加三级标题注明分类，例子有：实分析 4.3 绝对值与指数运算

4. 五级标题（##### **）

   小节的相关习题

5. 六级标题（###### **）

   小节某习题下的分小题

6. 红色字体（**）

   有两种应用区域，其一是内容的编号与简称，典型例子如：（8.5.15 佐恩引理），格式为：（原书编号 定理简称），若简称后方带有问号则表示该简称并非原书内容，只是本人所写；其二是在课后习题部分中，当题目介绍某个未曾在书中定理，引理，命题出现的概念时，使用红色字体标注。

7. 蓝色字体（**）

   有四种应用区域，其一是原书部分重要的例，当我觉得重要时会把该例单独放在相关内容下方，另起一行并用括号标注，格式是：（注：例内容）；其二是在引理中原书打括号的部分，当我觉得它需要额外醒目一点时，使用蓝色字体标注；其三是原书习题后面的提示，使用蓝色字体抄录，格式是：（提示：提示内容）；其四就是个人对一个命题或定义的理解，这种直接在对应命题后面用括号框住，格式大概是：（理解内容）。

8. **粗体字体**（__**__）

   注释一些需要醒目的内容，比如当某个概念第一次出现时一定要用粗体标出。

9. 跳转链接（[**](**)）

   当内容提到原书其它小节时，给出对应章节的跳转链接，比如4.3节，链接格式统一使用：..\..\第n章\pdf\实分析 n.m 标题.pdf的格式，其中n.m是引用的章节对应数字。特别的，如果是额外注释则不需要在文末的**本节相关跳转**中给出跳转链接。

10. 数学公式（$**$与$$\n**\n$$）

  当一个地方需要使用数学内容的时候则使用数学公式，此外，当这一部分数学内容设计很多推导过程时，更建议使用行间（）

上述字体格式允许在同一个地方应用多种格式。

一些符号总结

1. $\mathbb{N}$：自然数集
2. $\mathbb{N}^*$或者$\mathbb{N}^+$：正自然数集
3. $\mathbb{Z}$：整数集
4. $\mathbb{Q}$：有理数集
5. $\mathbb{R}$：实数集
6. $\mathbb{R}^*$：广义实数集（也即$\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$）

替换公理

代数替换公理（algebraic substitution axiom）：在任一代数恒等式中，每一个字母符号只是一个泛指的变量，因而可用**其它形式的字母**或**恒等的函数**表达式（只要用这些表达式替换后等式两边均仍有意义）替换，替换后等式仍成立。

详情可以参考替换公理—百科。

代数的函数

简单来说，即是不能通过有限次的加法（$+$），减法（$-$），乘法（$\times$），除法（$\div$），乘方，开方（$\sqrt{}$）等关于x的标准代数运算来表达，在本书中我们暂时用不到这个概念。

关于代数函数的具体定义，可以参考：代数函数—百科。

符号函数（sgn）

符号函数$\mathrm{sgn}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$定义如下：

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x>0\\ 0 & \text{if } x=0\\ -1 & \text{if } x<0\end{cases}$$

这个函数偶尔会被提到，故在此注明。

中值定理证明

定理内容：

> （9.7.1 中值定理）设$a<b$都是实数，$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是$[a,b]$上的连续函数，并且设y是介于$f(a)$与$f(b)$之间的一个实数（即要么有$f(a)\le y\le f(b)$要么$f(b)\le y\le f(a)$），那么存在实数$c\in[a,b]$使得$f(c)=y$。

证明：

定理包含两种情形$f(a)\le y\le f(b)$与$f(b)\le y\le f(a)$，这里我们给出第一种情况下的证明，第二种情况的证明类似。

若$y=f(a)$或$y=f(b)$，那么我们只需要相应的考虑令有$c=a$或$c=b$，于是只需要考虑$f(a)<y<f(b)$的情况。令E表示集合：

$$E:=\{x\in[a,b]:f(x)<y\}$$

那么对E我们有：

> - 显然E是$[a,b]$的子集，从而E是有界的。
> - 因为$f(a)<y$且$a\in[a,b]$，所以E也是非空的。

由最小上界原理，于是$c:=\sup(E)$是有限的。因为E包含a，于是$c\ge a$，又因为E以b为上界（E是$[a,b]$的子集），于是$c\in[a,b]$。现在证明$f(c)=y$，证明思路是从c的左侧证明$f(c)\le y$，然后从c的右侧证明$f(c)\ge y$。

左侧的证明：

设$n\ge 1$是一个整数，数$c-\dfrac{1}{n}$小于c，从而$c-\dfrac{1}{n}$不可能是E的上界，于是存在一个点，我们记为x_n，它满足$x_n\ge c-\dfrac{1}{n}$且$x_n\in E$。于是同时由$x_n\in E$有$x_n\le c$，于是：

$$c-\frac{1}{n}\leq x_n\leq c$$

根据夹逼定理，于是有$\lim_{n\to\infty} x_n=c$，又由于f是连续的，于是这蕴含着$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(c)$，此外，由于对任意$x_n$，都有$x_n\in E$，于是有$f(x_n)<y$，根据比较原理，于是有$f(c)\leq y$成立。

因为$f(b)>y\geq f(c)$，于是$c\neq b$，又根据c是E的上确界而b是E的上界，于是$c<b$。特别地，存在一个正整数N使得对任意$n\geq N$都有$c+\frac{1}{n}<b$即$c+\frac{1}{n}\in[a,b]$；并且因为$c+\frac{1}{n}>c$与c是上确界，所以$c+\frac{1}{n}\notin E$；结合可得有$f(c+\frac{1}{n})\geq y$。又有$c+\frac{1}{n}$收敛于c与f连续，根据比较原理，于是有$f(c)\geq y$成立。

综上，我们同时有$f(c)\leq y$与$f(c)\geq y$成立，于是只能有$f(c)=y$，此即我们要证明的结论。