9.6 最大值原理

定义

1. (9.6.1 实值函数的界？) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，并设$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数。若存在一个实数M使得对所有$x\in X$均有$f(x)\le M$成立，那么我们称f是**有上界的**；若存在一个实数M使得对所有$x\in X$均有$f(x)\ge -M$成立，那么我们称f是**有下界的**；若存在一个实数M使得对所有$x\in X$均有$|f(x)|\le M$成立，那么我们称f是**有界的**。

   (注：一个函数如果是有界的，当且仅当它同时是有上界的与有下界的；另外，若$f:X\to\mathbb{R}$是有界的，当且仅当它的象$f(x)$是定义9.1.22下的有界集合；对于连续函数，若其定义域是一个有界的闭区间，那么它必然是有界的，见命题9.6.3)

2. (9.6.5 最大值与最小值) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，并且设有$x_0\in X$。若对所有$x\in X$都有$f(x_0)\ge f(x)$，那么我们称f在x_0处到达它的**最大值**；若对所有$x\in X$都有$f(x_0)\le f(x)$，那么我们称f在x_0处到达它的**最小值**。

   (注：如果一个函数在某点处达到它的最大值，那么它一定有上界，相应的，如果它在某点处达到它的最小值，那么它一定有下界。最大值与最小值的概念目前仍然是**全局性**的，在定义10.2.1中我们将给出其局部性的形式)

命题

1. (9.6.3 有界闭区间上的连续函数？) 设$a<b$都是实数，并且设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是$[a,b]$上的连续函数，那么f是一个有界函数。

2. (9.6.7 最大值原理) 设$a<b$都是实数，并且设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是$[a,b]$上的连续函数。那么f在某一点$x_{\max}\in[a,b]$处达到最大值；在某一点$x_{\min}\in[a,b]$处达到最小值。

   (注：我们简写$\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$记为$\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，并类似地定义$\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$。于是最大值原理断定了$m:=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$是一个实数，并且它是$f$在$[a,b]$上的**最大值**，即至少存在一个点$x_{\max}\in[a,b]$使得$f(x_{\max})=m$并且对任意$x\in X$都有$f(x_{\max})\ge f(x)$，类似地，也有$\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$是$f$的**最小值**)

课后习题

本节相关跳转

实分析 9.1 实直线的子集

实分析 10.2 局部最大值、局部最小值以及导数