

3.1 基础知识

公理

策梅洛-弗兰克尔集合论公理（其七）

1. **(3.1 集合是对象)** 如果 A 是一个集合集合，则 A 是一个对象。
2. **(3.2 空集)** 存在一个集合 \emptyset 被称为空集，它不包含任意元素，即任意对象 x ， $x \notin \emptyset$ 。
3. **(3.3 单元素集与双元素集)** 如果 a 是一个对象，则存在一个集合 a 只含单一元素 a ，同理若 a ， b 均为对象，则存在集合 $\{a, b\}$ 只含有元素 a 与 b 。称前者为单元素集，后者为双元素集。
4. **(3.4 并集)** 给定任意两个集合 A 与 B ，存在一个集合 $A \cup B$ ，称为 A 与 B 的并集，它包含了 A 与 B 它有下列性质：
对任意对象 x ， $x \in A \cup B$ 则有 $x \in A$ 或 $x \in B$ ，换言之：

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ 或 } x \in B$$

5. **(3.5 分类公理)** 设 A 为一个集合，对任意的 $x \in A$ ，令 $P(x)$ 表示关于 x 的一个性质，对任意给定的 x ， $P(x)$ 的真伪均可确定，则可以证明存在一个集合 $\{x \in A : P(x)\}$ 满足下述性质：

对任意对象 y ， $y \in \{x \in A : P(x)\}$ ，则有 $y \in A$ 且 $P(y)$ 为真。

6. **(3.6 替代公理)** A 是一个集合，对任意 $x \in A$ 与任意对象 y ，设存在一个关于 x ， y 的性质 $P(x, y)$ ，使得对任意 $x \in A$ ，最多可以找到一个对象 y 使得 $P(x, y)$ 为真，则存在一个集合 $\{y : P(x, y) \text{ 对某 } x \in A \text{ 为真}\}$ ，使对任意的对象 z 有下列性质：

$z \in \{y : P(x, y) \text{ 对某 } x \in A \text{ 为真}\}$ ，则有对某 $x \in A$ ，有 $P(x, z)$ 为真。

7. **(3.7 无穷大公理与自然数集)** 存在一个集合 \mathbb{N} （自然数集），对象 0 在 \mathbb{N} 中，且由每一个自然数 $n \in \mathbb{N}$ 所指定满足皮亚诺公理的对象 $n++$ 也在 \mathbb{N} 中。 [\(结合第二章内容观看\)](#)

定义

1. **(3.1.1 非正式的)** 集合 A 被定义为任意一堆没有次序的对象（例如 $\{3, 8, 5, 2\}$ 是一个集合），如果 x 是这堆对象中的一个，则称 x 是 A 中元素，记有 $x \in A$ ；否则，记有 $x \notin A$ （例如， 1 是 $\{1, 2, 3\}$ 中的元素，有 $1 \in \{1, 2, 3\}$ ，而 $7 \notin \{1, 2, 3\}$ ）。
2. **(3.1.4 集合的相等)** 称两个集合 A 与 B 是相等的，即 $A = B$ ，当且仅当 A 中的每一个元素都是 B 中的元素， B 中的每一个元素都是 A 中的元素。 [\(换句话说互为子集，证明时严格按这样写\)](#)
3. **(3.1.15 子集)** 设 A 和 B 都是集合，称 A 是 B 的子集，记为 $A \subseteq B$ ，当且仅当 A 中每一元素都是 B 中元素，等价于下述命题为真：

对任意的对象 x ， $x \in A \rightarrow x \in B$

特别地，若有 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ 则称 A 是 B 的真子集，记为 $A \subsetneq B$ 。

4. **(3.1.23 交集)** 两个集合的交集 $A \cap B$ ，被定义为这样一个集合： $\{x \in A : x \in B\}$ ，即 $A \cap B$ 是由同时属于 A 与 B 的元素构成，于是对任意的对象 x 有：

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ 且 } x \in B$$

5. (3.1.27 差集) 给定两个集合 A 与 B , 定义 $A - B$ 或 A/B 是由 A 中所有不属于 B 的元素构成的集合, 即有:

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$$

命题

- (3.1.6 单个选择) 设 A 是一个非空集合, 则存在一个对象 x , 使得 $x \in A$.
- (3.1.13 并集的运算) 若 a, b 均为对象, 则 $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$, 如果 A, B, C 均为集合, 则求并运算是可交换的, 即 $A \cup B = B \cup A$, 同时并集运算也是可结合的, 即有 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, 特别地, 应该有 $A \cup A = A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.
- (3.1.18 集合的包含关系与集合是偏序的) 设 A, B, C 为集合, 如果 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$, 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$, 若 $A \subsetneq B$ 且 $A \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$.
- (3.1.28 布尔代数) 假定 A, B, C 为集合, X 有 A, B, C 均为其子集.
 - (最小元) $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$.
 - (最大元) $A \cup X = X, A \cap X = A$.
 - (恒等) $A \cup A = A, A \cap A = A$.
 - (交换律) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
 - (结合律) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 与 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ 恒成立。
 - (分配律) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
 - (分拆法) $A \cup (X \setminus A) = X, A \cap (X \setminus A) = \emptyset$.
 - (德·摩根定律) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$,
 $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

课后习题

3.1.1 证明集合相等的定义是自反的, 对称的, 可传递的

自反性 (证明对任意集合 A , $A = A$ 成立) :

对 A 中任意元素 x , x 是 A 中的元素, 于是任意 A 中元素均是 A 中元素, 于是得证有 $A = A$

对称性 (证明对集合 A, B , 若有 $A = B$ 为真, 则有 $B = A$ 成立) :

对任意元素 x , 由 $A = B$ 可知 $x \in A \implies x \in B$ 且 $x \in B \implies x \in A$. 于是根据集合相等的定义, 可以得到 $B = A$. 得证。

可传递性 (证明对集合 A, B, C , 若有 $A = B, B = C$, 则有 $A = C$) :

对任意元素 $x \in A$, 根据题设可以推知: $x \in A \implies x \in B \implies x \in C$.

相应的, 对任意元素 $y \in C$, 由题设可以推知: $y \in C \implies y \in B \implies y \in A$.

于是综上有: 对任意 A 中元素 x , 可以推知 $x \in C$, 对任意 C 中元素 y , 可以推知 $y \in A$.

于是根据集合相等的定义可以推知两者相等, 得证。

综上, 结论得证。

3.1.2 仅使用集合相等的定义，公理3.1，3.2与3.3证明四个集合 $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 两两之间互不相等。

先证明 \emptyset 同另外三者不等：

对于另外三者中的元素，假设 \emptyset 与它们相等，根据公理3.3，可以得到另外三个集合中分别有元素 $\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset$ ，根据假设与集合相等的定义，此时应有： $\emptyset \in \emptyset$ 和 $\{\emptyset\} \in \emptyset$ 。根据空集公理，这个结论违背了任意元素均不属于空集的定义，于是可以得到 \emptyset 同其他三个集合均不相等。

再证明 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 与 $\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ 之间不相等：

根据双元素集的公理 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 中有两个元素 $\{\emptyset\}$ 与 \emptyset ，假设 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 与 $\{\{\emptyset\}\}$ 和 $\{\emptyset\}$ 之间是相等的。那么根据集合相等的定义，可以简单推知 $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$ 与 $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$ ，再根据单元素集公理，于是即存在： $\emptyset = \{\emptyset\}$ ，根据上文证明， $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ ，于是假设不成立， $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 与 $\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ 之间不相等。

最后证明 $\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ 之间不相等：

根据集合相等的定义，若两者相等，要求 $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$ ， $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$ ，再由单元素集公理，根据单元素集公理， $\{\{\emptyset\}\}$ 唯一元素： $\{\emptyset\}$ ， $\{\emptyset\}$ 唯一元素： \emptyset 。于是若结论成立，只能有： $\emptyset = \{\emptyset\}$ ，这已经被证明是不成立的了，于是假设错误，结论得证。

于是证明完毕。

3.1.3 证明并集的运算中的全部性质

课本上已有结合律的证明

证明：若 a, b 均为对象，则 $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$ 。

由公理3.3可知 $\{a\}, \{b\}$ 是单元素集， $\{a, b\}$ 是双元素集，于是有：

$\{a\}$ 中单元素 a ， $\{b\}$ 中单元素 b ， $\{a, b\}$ 中双元素 a, b 。

根据并集定义 $\{a\} \cup \{b\}$ 中的任意元素 x 应具有性质： $x \in \{a\}$ 或 $x \in \{b\}$ ，结合 $\{a\}, \{b\}$ 是单元素集的事实，于是该性质等价于 $x = a$ 或 $x = b$ ，于是可以得到 $x \in \{a, b\}$ 。

对于任取的元素 $x \in \{a, b\}$ ，可以分类讨论 $x = a$ 与 $x = b$ 的情况，于是有 $x \in \{a\}$ 与 $x \in \{b\}$ ，根据并集定义，这两种情况下都有 $x \in \{a, b\}$ 。

根据上文的讨论，得到关系： $\forall x \in \{a\} \cup \{b\}, x \in \{a, b\}, \forall y \in \{a, b\}, y \in \{a\} \cup \{b\}$ 。于是根据集合相等的定义，有 $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$ 。

证明： $A \cup B = B \cup A$

对 $\forall x \in A \cup B, x \in A$ 或 $x \in B$ ，这等同于 $x \in B$ 或 $x \in A$ ，表明 $x \in B \cup A$ 。反过来，同理可推知 $\forall y \in B \cup A, y \in A \cup B$ 。于是根据集合相等的定义，可以推知 $A \cup B = B \cup A$ 。

3.1.4 证明集合包含的关系 (3.1.18)

第一个命题的证明在课本，对后两个命题证明

证明： $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则 $A = B$

根据子集的定义， $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则有 $\forall x, y, x \in A \rightarrow x \in B, x \in B \rightarrow x \in A$ 。根据集合相等的定义，这就可以直接推知 $A = B$ 。

证明：若 $A \subsetneq B$ 且 $A \subsetneq C$ ，则 $A \subsetneq C$

$A \subsetneq B$, 于是存在有: ①对任意元素 $x \in A, x \in B$ 。②存在元素 $y \in B, y \notin A$ 。又有 $B \subsetneq C$, 于是: ①对任意元素 $x \in A, x \in B \implies x \in C$ 。②存在元素 $y \in C, y \in B, y \notin A$ 。于是得到 $A \subseteq C$, 且 $A \neq C (y \notin C)$, 进而 $A \subsetneq C$ 。

3.1.5 设 A, B 是集合, 证明命题 $A \subseteq B, A \cup B = B, A \cap B = A$ 是等价的命题

对任意对象 $x \in A \cup B$, 有 $x \in A$ 或者 $x \in B$ 成立, 又由子集定义 $A \subseteq B, x \in A \rightarrow x \in B$ 。

于是即有 $x \in A \cup B, x \in B$, 可得 $A \cup B = B$ 。

反之, 若有 $A \cup B = B$, 则有 $\forall x \in A$ 或 $x \in B, x \in B \implies \forall x \in A, x \in B$ 。

根据子集的定义, 即有 $A \subseteq B$, 于是得证 $A \subseteq B \iff A \cup B = B$ 。

对任意对象 $x \in A \cap B$, 有 $x \in A$ 且 $x \in B$ 成立, 又根据子集定义 $A \subseteq B, x \in A \rightarrow x \in B$ 。

于是即有 $x \in A \cap B, x \in A$ 则 $x \in B$, 于是 $x \in A$ 且 $x \in B \iff x \in A$ 。

对全部 $x \in A$, 又根据子集定义有 $x \in B$, 于是 $x \in A \cap B$ 。

于是 $A \cap B = A$ 。

反过来, 若有 $A \cap B = A$, 则 $\forall x \in A, x \in A$ 且 $x \in B \iff x \in B$ 。

根据子集的定义, 即有 $A \subseteq B$, 于是得证 $A \subseteq B \iff A \cap B = A$ 。

综上, 三者是等价命题。

3.1.6 证明布尔代数中的全部结论 (提示: 可以应用其中的一些论述去证明其他的论述, 有些论述曾在 3.1.13 出现过)

$$1. A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$$

前者在并集的运算中已有, 对于后者, $\forall x, x \in A \cap \emptyset \iff x \in A$ 且 $x \in \emptyset$, 又根据空集定义, 有 $\forall x, x \notin \emptyset$, 于是可以得到: $\forall x, x \notin A \cap \emptyset$ 。即 $A \cap \emptyset = \emptyset$ 。

$$2. A \cup X = X, A \cap X = A$$

$\forall x \in A \cup X, x \in A$ 或 $x \in X$, 又根据 A 是 X 的子集, 于是该命题等价于 $x \in X$ 。再有 $\forall x \in X, x \in A \cup X$ 可得到 $X = A \cup X$ 。

$\forall x \in A \cap X, x \in A$ 且 $x \in X$, 又根据 A 是 X 的子集, 于是 $\forall x \in A, x \in X$, 于是

$$3. A \cup A = A, A \cap A = A$$

$\forall x \in A \cup A$, 有 $x \in A$ 或 $x \in A$, 于是有 $x \in A$; 对 $x \in A$, 满足条件于是 $x \in A \cup A$ 。于是综上, 根据集合相等的定义可知 $A \cup A = A$ 。

$\forall x \in A \cap A$, 有 $x \in A$ 且 $x \in A$, 于是有 $x \in A$; 对 $x \in A$, 满足条件于是 $x \in A \cap A$ 。于是综上, 根据集合相等的定义可知 $A \cap A = A$ 。

$$4. A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

前者在并集的运算中已有证明, 对于后者, 可以考察到对任意元素 $x, "x \in A$ 且 $x \in B"$ 与 $"x \in B$ 且 $x \in A"$ 是两个完全等价的叙述。于是从定义出发, 有 $A \cap B = B \cap A$ 。

$$5. (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ 与 } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ 恒成立。}$$

$\forall x \in (A \cup B) \cup C \iff x \in A \cup B \text{ 或 } x \in C \iff x \in A \text{ 或 } x \in B \text{ 或 } x \in C$ 。

又有 $\forall x \in A \cup (B \cup C) \iff x \in A \text{ 或 } x \in B \cup C \iff x \in A \text{ 或 } x \in B \text{ 或 } x \in C$ 。

。

于是可以依据集合相等的定义，推知两者相等。

$\forall x \in (A \cap B) \cap C \iff x \in A \cap B \text{ 且 } x \in C \iff x \in A \text{ 且 } x \in B \text{ 且 } x \in C$ 。

又有 $\forall x \in A \cap (B \cap C) \iff x \in A \text{ 且 } x \in B \cap C \iff x \in A \text{ 且 } x \in B \text{ 且 } x \in C$ 。

。

于是可以依据集合相等的定义，推知两者相等。

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\forall x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A \text{ 且 } x \in B \cup C \iff x \in A \text{ 且 } x \in B \text{ 或 } x \in A \text{ 且 } x \in C$ 。

$\forall x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \iff x \in A \cap B \text{ 且 } x \in A \cap C \iff x \in A \text{ 且 } x \in B \text{ 或 } x \in A \text{ 且 } x \in C$ 。

于是可以看到，两者集合间元素是等价的，对于任意 x 属于其中一者，必然可以推知它也属于另外一个。于是根据集合相等定义，有 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

$\forall x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in A \text{ 或 } x \in B \cap C \iff x \in A \text{ 或 } x \in B \text{ 且 } x \in A \text{ 或 } x \in C$ 。

$\forall x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \iff x \in A \cup B \text{ 且 } x \in A \cup C \iff x \in A \text{ 或 } x \in B \text{ 且 } x \in A \text{ 或 } x \in C$ 。

于是可以看到，两者集合间元素是等价的，对于任意 x 属于其中一者，必然可以推知它也属于另外一个。于是根据集合相等定义，有 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。

7. $A \cup (X \setminus A) = X$, $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$

对于任意元素 $x \in A \cup (X \setminus A)$ ，根据定义应该有 $x \in A$ 或 $x \in X \setminus A$ ，即有 $x \in A$ ($x \in X$) 或 $x \in X$ 且 $x \notin A \implies x \in X$ 成立。

对任意 $x \in X$ ，分类讨论：若 $x \in A$ ，则满足条件可得 $x \in A \cup (X \setminus A)$ ，若 $x \notin A$ ，又有 $x \in X$ 于是 $x \in X \setminus A$ ，进而 $x \in A \cup (X \setminus A)$ 。于是综上有 $\forall x \in X$ ， $x \in A \cup (X \setminus A)$ 。

根据集合相等的定义，此时有 $A \cup (X \setminus A) = X$ 成立。

对任意元素 $x \in A \cap (X \setminus A)$ 应当有 $x \in A$ 且 $x \in X \setminus A$ ，即有 $x \in A$ 且 “ $x \in X$ 且 $x \notin A$ ”。于是出现矛盾 “ $x \in A$ 且 $x \notin A$ ”，可以推知 $\forall x$ ， $x \notin A \cap (X \setminus A)$ ，即 $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ 。

8. $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ 。

$\forall x \in X \setminus (A \cup B)$ ，有 $x \in X$ 且 $x \notin A \cup B \iff x \in X$ 且 “ $x \notin A$ 且 $x \notin B$ ” \iff “ $x \in X$ 且 $x \notin A$ ” 且 “ $x \in X$ 且 $x \notin B$ ”。

$\forall x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ ，有 $x \in (X \setminus A)$ 且 $x \in (X \setminus B) \iff$ “ $x \in X$ 且 $x \notin A$ ” 且 “ $x \in X$ 且 $x \notin B$ ”。

于是可以看到，两者集合间元素是等价的，对于任意 x 属于其中一者，必然可以推知它也属于另外一个。于是根据集合相等定义，有 $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ 。

$\forall x \in X \setminus (A \cap B)$, 有 $x \in X$ 且 $x \notin A \cap B \iff x \in X$ 且" $x \notin A$ 或 $x \notin B$ " \iff
" $x \in X$ 且 $x \notin A$ "或" $x \in X$ 且 $x \notin B$ "。

$\forall x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, 有 $x \in (X \setminus A)$ 或 $x \in (X \setminus B) \iff$ " $x \in X$ 且 $x \notin A$ "或" $x \in X$ 且 $x \notin B$ "。

于是可以看到，两者集合间元素是等价的，对于任意 x 属于其中一者，必然可以推知它也属于另外一个。于是根据集合相等定义，有 $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ 。

3.1.7 设 A, B, C 都是集合，证明 $A \cap B \subseteq A$ 且 $A \cap B \subseteq B$ ，更进一步地，证明 $C \subseteq A \cap B$ ，当且仅当 $C \subseteq A$ 且 $C \subseteq B$ 。类似的，证明 $A \subseteq A \cup B$ 与 $B \subseteq A \cup B$ ，进一步地 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq C$ ，当且仅当 $A \cup B \subseteq C$

$\forall x \in A \cap B$, $x \in A$ 且 $x \in B$, 根据子集的定义，可以得到 $A \cap B$ 是 A 与 B 的子集。

对后一个结论，假设已有 $C \subseteq A \cap B$, 则对 $\forall x \in C \rightarrow x \in A \cap B$, 于是 $x \in A$ 且 $x \in B$, 就得到两个结论：

$\forall x \in C \rightarrow x \in A$; $\forall x \in C \rightarrow x \in B$

于是分别可以得到 $C \subseteq A$ 与 $C \subseteq B$ 成立。

假设有 $C \subseteq A$ 与 $C \subseteq B$ 成立，则有结论：

$\forall x \in C \rightarrow x \in A$; $\forall x \in C \rightarrow x \in B$

同时成立，于是有 $\forall x \in C$, $x \in A \cap B$ 。即 $C \subseteq A \cap B$ 。

于是得证两者之间等价。

考虑这样一个变换， $D = A \cup B$, $E = A$ 或 B , 于是这个命题可以等效为 $E \subseteq D \cap E$, 根据前一个命题的结论直接得到它的成立。

对于后一个结论，假设有 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq C$, 于是得到结论：

$\forall x \in A \rightarrow x \in C$; $\forall x \in B \rightarrow x \in C$

于是对任意 $x \in A$ 或 B , $x \in C$, 即 $A \cup B \subseteq C$ 。

假设有 $A \cup B \subseteq C$, 则对任意 $x \in A$ 或 B , $x \in C$ 。

由此可以衍生得到：

$\forall x \in A \rightarrow x \in C$; $\forall x \in B \rightarrow x \in C$

于是推出 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq C$

于是得证两者等价。

3.1.8 设 A, B 是集合，证明吸收律： $A \cup (A \cap B) = A$ 与 $A \cap (A \cup B) = A$

$\forall x \in A \cup (A \cap B)$, $x \in A$ 或者 $x \in A \cap B \iff x \in A$ 或者同时有 $x \in A$ 且 $x \in B$ 。

于是对任意 $x \in A \cup (A \cap B)$, $x \in A$ (否则即可根据上述内容推知 $x \notin A \cup (A \cap B)$)。

$\forall x \in A$, 由于满足两个条件中的前者，于是可以推知 $x \in A \cup (A \cap B)$ 。

于是根据集合相等的定义，可以得到 $A \cup (A \cap B) = A$ 。

$\forall x \in A \cap (A \cup B), x \in A \text{ 且 } x \in A \cup B \iff x \in A \text{ 且 任意有 } x \in A \text{ 或 } x \in B \text{ 成立}。$

于是对任意 $x \in A \cup (A \cap B), x \in A$ (否则即可根据上述内容推知 $x \notin A \cap (A \cup B)$)。

$\forall x \in A$, 由于同时满足两个条件中 (第二个条件满足前者), 于是可以推知 $x \in A \cap (A \cup B)$ 。

于是根据集合相等的定义, 可以得到 $A \cap (A \cup B) = A$ 。

3.1.9 令 A, B, X 为集合, 并且满足 $A \cup B = X$ 与 $A \cap B = \emptyset$, 证明 $A = X \setminus B$ 与 $B = X \setminus A$

根据题设条件有:

- $\forall x \in X, x \in A \text{ 或 } x \in B$ 至少有一个成立。
- $\forall y$ 为对象, $y \in A$ 与 $y \in B$ 不能同时成立。

于是对任意 $x \in X \setminus A, x \in X$ 且 $x \notin A$, 又根据①, 于是只能有 $x \in B$

对任意 $x \in B, x \in X$ (习题3.1.7), 又根据②, 此时有 $x \notin A$, 于是综合可得 $x \in X \setminus A$

随即根据集合相等的定义, 可以得到 $B = X \setminus A$ 。

$A = X \setminus B$ 的证明同上完全一致, 将 A, B 位置替换即可。

3.1.10 设 A, B 是集合, 证明 $A \setminus B, A \cap B, B \setminus A$ 是互不相交的, 且有三者并集为 $A \cup B$

证明两两之间不相交的关系:

1. $A \setminus B$ 与 $B \setminus A$

若两者之间存在交集, 则应当存在元素 x 有 " $x \in A$ 且 $x \notin B$ " 与 " $x \in B$ 且 $x \notin A$ " 同时成立, 其中存在矛盾 " $x \in A$ 且 $x \notin A$ " 与 " $x \in B$ 且 $x \notin B$ ", 所以两者之间不相交。

2. $A \setminus B$ 与 $A \cap B$

若两者之间存在交集, 则应当存在元素 x 有 " $x \in A$ 且 $x \notin B$ " 与 " $x \in B$ 且 $x \in A$ " 同时成立, 其中存在矛盾 " $x \in B$ 且 $x \notin B$ ", 所以两者之间不相交。

3. $B \setminus A$ 与 $A \cap B$

若两者之间存在交集, 则应当存在元素 x 有 " $x \in B$ 且 $x \notin A$ " 与 " $x \in B$ 且 $x \in A$ " 同时成立, 其中存在矛盾 " $x \in A$ 且 $x \notin A$ ", 所以两者之间不相交。

证明 $(B \setminus A) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$:

对任意 $x \in (B \setminus A) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, 分类讨论:

1. $x \in B \setminus A$ 。

有 $x \in B$ 且 $x \notin A$, 进而满足 $x \in B \iff x \in A \cup B$ 。

2. $x \in A \cap B$ 。

有 $x \in B$ 且 $x \in A$, 进而满足 $x \in B \iff x \in A \cup B$ 。

3. $x \in A \setminus B$ 。

有 $x \in A$ 且 $x \notin B$, 进而满足 $x \in A \iff x \in A \cup B$ 。

于是对任意 $x \in (B \setminus A) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, $x \in A \cup B$ 。

对任意 $x \in A \cup B$, 有 $x \in A$ 与 $x \in B$ 至少有一个为真, 于是可以得到三种情况:

1. $x \in A$ 且 $x \notin B \rightarrow x \in A \setminus B$ 。
2. $x \in A$ 且 $x \in B \rightarrow x \in A \cap B$ 。
3. $x \in B$ 且 $x \notin A \rightarrow x \in B \setminus A$ 。

于是对任意 $x \in A \cup B$, $x \in (B \setminus A) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ 。

于是根据集合相等定义, $(B \setminus A) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$ 。

3.1.11 证明替代公理能推导出分类公理。

替代公理与分类公理:

(3.5 分类公理) 设 A 为一个集合, 对任意的 $x \in A$, 令 $P(x)$ 表示关于 x 的一个性质, 对任意给定的 x , $P(x)$ 的真伪均可确定, 则可以证明存在一个集合 $\{x \in A : P(x)\}$ 满足下述性质:

对任意对象 $y, y \in \{x \in A : P(x)\}$, 则有 $y \in A$ 且 $P(y)$ 为真。

(3.6 替代公理) A 是一个集合, 对任意 $x \in A$ 与任意对象 y , 设存在一个关于 x, y 的性质 $Q(x, y)$, 使得对任意 $x \in A$, 最多可以找到一个对象 y 使得 $Q(x, y)$ 为真, 则存在一个集合 $\{y : P(x, y) \text{ 对某 } x \in A \text{ 为真}\}$, 使对任意的对象 z 有下述性质:

$z \in \{y : Q(x, y) \text{ 对某 } x \in A \text{ 为真}\}$, 则有对某 $x \in A$, 有 $Q(x, z)$ 为真。

对于给定的性质 $P(x)$, 假设 $Q(x, y)$ 表示这样的性质:

$$Q(x, y) := y = x \text{ 且 } P(x) \text{ 为真}$$

于是利用替代公理构造出这么一个集合 $C = \{y : \text{对某 } x \in A, y = x \text{ 且 } P(x) \text{ 为真}\}$, 对其中任意元素 z , 有:

$$z \in C, \text{ 则有对某 } x \in A, z = x \text{ 且 } P(x) \text{ 为真} \iff z \in A \text{ 且 } P(z) \text{ 为真}$$

可以看到, 构造出来的集合即是根据分类公理构造的集合 $\{x \in A : P(x)\}$ 。