

9.3 函数的极限值

定义

- (9.3.1 ε -接近性) 设 X 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数, L 是一个实数, 并且设 $\varepsilon > 0$ 也是一个实数。我们称函数 f 是 ε -接近于 L 的, 当且仅当对任意 $x \in X$, 都有 $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ 。
- (9.3.3 局部 ε -接近性) 设 X 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数, L 是一个实数, x_0 是 X 的一个附着点, 并且设 $\varepsilon > 0$ 也是一个实数。我们称函数 f 在 x_0 附近是 ε -接近于 L 的, 当且仅当存在一个实数 $\delta > 0$ 使得当 f 被限制在集合 $\{x \in X: |x - x_0| \leq \delta\}$ 上时, 有 f 是 ε -接近于 L 的 (即 $f|_{[x_0-\delta, x_0+\delta]}$ 是 ε -接近于 L 的)。
- (9.3.6 函数在一点处收敛) 设 X 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数, E 是 X 的一个子集, x_0 是 E 的一个附着点, 并且设 L 是一个实数。我们称 f 在点 x_0 处沿着 E 收敛于 L , 并且记作 $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L$, 当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 被限制在 E 上的函数 f 都是在 x_0 附近是 ε -接近于 L 的。如果 f 在 x_0 处不收敛于任何数, 那么我们称 f 在 x_0 处是发散的, 并且此时认为 $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x)$ 是无定义的。

换言之, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L$ 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$ 使得 $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ 对任意满足 $|x - x_0| \leq \delta$ 的 $x \in E$ 均成立。

(注: 通常情况下, 我们会在一定上下文条件下忽略 E (即直接说 f 在 x_0 处收敛于 L , 或者说 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$), 但是这样的做法在事实上是有一定风险的, 举个例子, 当 E 不包含 x_0 时就可能对结果产生很大影响: 定义一个函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 当 $x = 0$ 时 $f(x) = 1$, 当 $x \neq 0$ 时 $f(x) = 0$, 此时我们有 $\lim_{x \rightarrow 0; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} f(x) = 0$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0; x \in \mathbb{R}} f(x)$ 无定义同时成立。此外, 这个定义也比较复杂, 我们通常会选择它的替代形式使用, 详情见命题 9.3.9)

命题

- (9.3.9 收敛定义的替换?) 设 X 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数, E 是 X 的一个子集, x_0 是 E 的一个附着点, 并且设 L 是一个实数。则下面两个命题在逻辑上是等价的:

- f 在点 x_0 处沿着 E 收敛于 L 。
- 对任意一个完全由 E 中元素构成并且收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, 序列 $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ 都收敛于 L 。

(注: 使用命题 9.3.9 里的符号, 我们可以得到推论: 如有 $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, 那么有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$)

- (9.3.12 函数极限的唯一性?) 设 X 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, E 是 X 的一个子集, x_0 是 E 的一个附着点, 并且设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数。那么 f 在 x_0 处沿着 E 至多只能有一个极限。
- (9.3.14 函数的极限定律) 设 X 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, E 是 X 的一个子集, x_0 是 E 的一个附着点, 并且设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 与 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 都是函数。假设 f 在 x_0 处沿着 E 收敛于 L , g 在 x_0 处沿着 E 收敛于 M 。那么有:

- $f + g$ 在 x_0 处沿着 E 收敛于 $L + M$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x)$$

2. $f - g$ 在 x_0 处沿着 E 收敛于 $L - M$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x)$$

3. $\max(f, g)$ 在 x_0 处沿着 E 收敛于 $\max(L, M)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} \max(f, g)(x) = \max \left(\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x) \right)$$

4. $\min(f, g)$ 在 x_0 处沿着 E 收敛于 $\min(L, M)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} \min(f, g)(x) = \min \left(\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x) \right)$$

5. fg 在 x_0 处沿着 E 收敛于 LM :

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x)$$

6. 如有 c 是一个实数, 则 cf 在 x_0 处沿着 E 收敛于 cL :

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} (cf)(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x)$$

7. 如有对任意 $x \in E$ 都有 $g(x) \neq 0$, 则 f/g 在 x_0 处沿着 E 收敛于 L/M :

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} (f/g)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x)}$$

(简写的话, 能根据上下文确定 E 时省略 $x \in E$ 也可以)

(注: 关于是否注明集合 E , 还是之前那个例子函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

有有 $\lim_{x \rightarrow 0; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} f(x) = 0$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0; x \in \mathbb{R}} f(x)$ 无定义, 这种情况下我们称 f 在 0 处有“可去奇点”或者“可去间断点”, 并且由于这种奇点的存在, 我们有时约定写 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 时默认将 x_0 排除在外, 例如在本书里就有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0; x \in X \setminus \{x_0\}} f(x)$

4. (9.3.18 极限是局部的) 设 X 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数, E 是 X 的一个子集, x_0 是 E 的一个附着点, 并且设 L 是一个实数, $\delta > 0$ 是一个实数。则我们有:

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L$$

当且仅当:

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x) = L$$

通俗来说即:

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x)$$

(即 x_0 处的极限值只与 x_0 附近的函数值有关, 与远离 x_0 的函数值无关)

课后习题

9.3.1 证明命题9.3.9

设 X 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数, E 是 X 的一个子集, x_0 是 E 的一个附着点, 并且设 L 是一个实数。分别证明充分必要条件:

- 若 f 在点 x_0 处沿着 E 收敛于 L , 则对任意一个完全由 E 中元素构成并且收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, 序列 $(f(a_n))_{n=0}^\infty$ 都收敛于 L 。

根据定义9.3.6, 于是有对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$ 使得 $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ 对任意满足 $|x - x_0| \leq \delta$ 的 $x \in E$ 都成立。又根据题设若序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 收敛于 x_0 , 从而对 δ , 总存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对任意 $n \geq N$ 都有 $|a_n - x_0| \leq \delta$ 成立。从而根据 f 在 x_0 处沿 E 收敛于 L , 即有对任意 $\varepsilon > 0$, 总存在 $N \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq N$ 都有 $|f(a_n) - L| \leq \varepsilon$ 成立, 从而根据序列收敛的定义, 即有序列 $(f(a_n))_{n=0}^\infty$ 都收敛于 L 。

- 若对任意一个完全由 E 中元素构成并且收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 都有序列 $(f(a_n))_{n=0}^\infty$ 都收敛于 L , 则 f 在点 x_0 处沿着 E 收敛于 L 。

根据题意, 即对任意的 $\varepsilon > 0$ 需要证明存在一个 $\delta > 0$ 满足若 $|x - x_0| \leq \delta$ 且 $x \in X$ 则有 $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ 成立。

使用反证法, 假设对 $\varepsilon_0 > 0$ 有对任意 $\delta > 0$ 都存在满足 $|x - x_0| \leq \delta$ 且 $x \in X$ 有

$|f(x) - L| > \varepsilon_0$ 。于是定义这样一个序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, 其项 a_n 定义为反证假设中令 δ 为 $\frac{1}{n+1}$ 时存在的 x 。从而根据该定义, 我们知道对任意的实数 $\varepsilon > 0$, 根据命题5.4.13阿基米德性质我们总存在一个正整数 N 满足 $N\varepsilon > 1 \iff \varepsilon > \frac{1}{N}$, 从而对任意的 $n \geq N$ 有:

$$|a_n - x_0| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

于是根据序列收敛的定义, $(a_n)_{n=0}^\infty$ 是收敛于 x_0 的, 但是对于序列 $(f(a_n))_{n=0}^\infty$, 根据 a_n 定义我们知道总存在 $|f(a_n) - L| > \varepsilon_0$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都成立, 从而序列 $(f(a_n))_{n=0}^\infty$ 肯定不收敛于 L , 于是这跟题设中序列 $(f(a_n))_{n=0}^\infty$ 必然收敛于 L 的前提矛盾, 导出反证假设不可能成立。

综上, 必然有对任意的 $\varepsilon > 0$ 需要证明存在一个 $\delta > 0$ 满足若 $|x - x_0| \leq \delta$ 且 $x \in X$ 则有 $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ 成立。即 f 在点 x_0 处沿着 E 收敛于 L 。

9.3.2 证明命题9.3.14中剩下的部分 (即除去第一条外的其它内容)

即假设有 X 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, E 是 X 的一个子集, x_0 是 E 的一个附着点, 并且设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 与 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 都是函数。假设 f 在 x_0 处沿着 E 收敛于 L , g 在 x_0 处沿着 E 收敛于 M 。

根据命题9.3.9, 于是对任意 E 中元素构成的收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, 必然有 $(f(a_n))_{n=0}^\infty$ 收敛于 L 与 $(g(a_n))_{n=0}^\infty$ 收敛于 M 。

然后证明:

1. $f - g$ 在 x_0 处沿着 E 收敛于 $L - M$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x)$$

证明:

根据命题6.1.9极限定律我们有:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (f - g)(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) - g(a_n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) \\
&= L - M
\end{aligned}$$

从而再根据命题9.3.9于是有 $f - g$ 在 x_0 处沿着 E 收敛于 $L - M$ 成立。即：

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x)$$

2. $\max(f, g)$ 在 x_0 处沿着 E 收敛于 $\max(L, M)$ ：

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} \max(f, g)(x) = \max \left(\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x) \right)$$

证明：

根据命题6.1.9极限定律我们有：

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (\max(f, g))(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max(f(a_n), g(a_n)) \\
&= \max \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n), \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) \right) \\
&= \max(L, M)
\end{aligned}$$

从而再根据命题9.3.9于是有 $\max(f, g)$ 在 x_0 处沿着 E 收敛于 $\max(L, M)$ 成立。即：

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} \max(f, g)(x) = \max \left(\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x) \right)$$

3. $\min(f, g)$ 在 x_0 处沿着 E 收敛于 $\min(L, M)$ ：

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} \min(f, g)(x) = \min \left(\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x) \right)$$

证明：

根据命题6.1.9极限定律我们有：

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (\min(f, g))(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \min(f(a_n), g(a_n)) \\
&= \min \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n), \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) \right) \\
&= \min(L, M)
\end{aligned}$$

从而再根据命题9.3.9于是有 $\min(f, g)$ 在 x_0 处沿着 E 收敛于 $\min(L, M)$ 成立。即：

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} \min(f, g)(x) = \min \left(\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x) \right)$$

4. fg 在 x_0 处沿着 E 收敛于 LM ：

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x)$$

证明：

根据命题6.1.9极限定律我们有：

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (fg)(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)g(a_n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) \\
&= LM
\end{aligned}$$

从而再根据命题9.3.9于是有 fg 在 x_0 处沿着 E 收敛于 LM 成立。即：

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x)$$

5. 如有 c 是一个实数，则 cf 在 x_0 处沿着 E 收敛于 cL ：

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} (cf)(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x)$$

证明：

根据命题6.1.9极限定律我们有：

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (cf)(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} cf(a_n) \\
&= c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \\
&= cL
\end{aligned}$$

从而再根据命题9.3.9于是有 cf 在 x_0 处沿着 E 收敛于 cL 成立。即：

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} (cf)(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x)$$

6. 如有对任意 $x \in E$ 都有 $g(x) \neq 0$ ，则 f/g 在 x_0 处沿着 E 收敛于 L/M ：

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} (f/g)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x)}$$

证明：

根据命题6.1.9极限定律我们有：

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (f/g)(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n)}{g(a_n)} \\
&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n)} \\
&= L/M
\end{aligned}$$

从而再根据命题9.3.9于是有 f/g 在 x_0 处沿着 E 收敛于 L/M 成立。即：

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} (f/g)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x)}$$

9.3.3 证明命题9.3.18

于是设有实数 $\delta > 0$ ，分别证明充分必要条件：

- 必要条件：若有 $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L$ ，则有 $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x) = L$ 。

证明：

根据定义9.3.6, f 在点 x_0 处沿 E 收敛于 L , 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\sigma > 0$ 满足对任意满足条件 $|x - x_0| \leq \sigma$ 且 $x \in E$ 的 x 均有 $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ 成立。我们令这样通过 $\varepsilon > 0$ 获取 $\sigma > 0$ 的方式为符号 g (即 $g(\varepsilon) := \sigma$, 需要注意这不是一个函数, 只是一个记号) 然后我们讨论 f 在点 x_0 处沿 $E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 收敛于 L 的条件:

根据定义9.3.6, f 在点 x_0 处沿 $E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 收敛于 L , 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在实数 $\sigma' > 0$ 满足对任意 $|x - x_0| \leq \sigma'$ 且 $x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 的 x 均有 $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ 成立。于是我们定义一个通过 $\varepsilon > 0$ 获取 $\sigma' > 0$ 的方式 g' 有:

$$g'(\varepsilon) := \min(0.5 \cdot \delta, g(\varepsilon))$$

对任意 x 满足 $|x - x_0| \leq \sigma'$, 由 $\sigma' < \delta$, 从而总是有 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; 而对任意 x 满足 $|x - x_0| \leq \sigma'$, 又由 $\delta \leq g(\varepsilon)$, 从而总是有 x 满足 $|x - x_0| \leq g(\varepsilon)$ 。于是对任意 x 满足 $|x - x_0| \leq \sigma'$ 且 $x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 则 x 也满足 $|x - x_0| \leq g(\varepsilon)$ 且 $x \in E$, 于是根据 f 在点 x_0 处沿 E 收敛于 L 即有 $|f(x) - L| \leq \varepsilon$, 于是综合有:

对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在实数 $\sigma' > 0$ 满足对任意 $|x - x_0| \leq \sigma'$ 且 $x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 的 x 均有 $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ 成立, 根据定义9.3.6即有 f 在点 x_0 处沿 $E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 收敛于 L 。

- 充分条件: 若有 $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x) = L$, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L$ 。

证明:

根据定义9.3.6, f 在点 x_0 处沿 $E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 收敛于 L , 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在实数 $\sigma > 0$ 满足对任意 $|x - x_0| \leq \sigma$ 且 $x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 的 x 均有 $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ 成立, 注意到 $x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies x \in E$, 从而该结论可改写为:

f 在点 x_0 处沿 $E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 收敛于 L , 则对任意实数 $\varepsilon > 0$ 都存在实数 $\sigma > 0$ 满足对任意满足 $|x - x_0| \leq \sigma$ 且 $x \in E$ 的 x 均有 $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ 成立。而后半段根据命题9.3.9即 f 在点 x_0 处沿 E 收敛于 L , 从而可证有:

若有 $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x) = L$, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = L$ 。

9.3.4 给出上极限 $\limsup_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x)$ 与下极限 $\liminf_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x)$ 的定义, 然后根据你给出的定义, 提出一个类似于命题9.3.9的结论 (附加挑战: 证明这个结论)

设 X 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数, E 是 X 的一个子集, x_0 是 E 的一个附着点, 并且设 L 是一个实数。

则给出上极限定义:

定义 f 在 x_0 处沿 E 的局部上确界 $F_{x_0}^+(\delta)$ (要求 $\delta > 0$) 为下面这样一个值:

$$F_{x_0}^+(\delta) := \sup\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in E \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\}$$

然后定义 f 在 x_0 处沿 E 的上极限为下面这样一个值 L^+ :

$$L^+ := \inf\{F_{x_0}^+(\delta) \in \mathbb{R} : \delta > 0\}$$

并记为 $\limsup_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x)$ 。

同时给出下极限定义:

定义 f 在 x_0 处沿 E 的局部下确界 $F_{x_0}^-(\delta)$ (要求 $\delta > 0$) 为下面这样一个值:

$$F_{x_0}^-(\delta) := \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in E \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\}$$

然后定义 f 在 x_0 处沿 E 的下极限为下面这样一个值 L^- :

$$L^- := \sup\{F_{x_0}^-(\delta) \in \mathbb{R} : \delta > 0\}$$

并记为 $\liminf_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x)$ 。

对上下极限, 有类似命题9.3.9的命题成立:

• 上极限:

设有实数 M , 下面两个命题是等价的:

- f 在 x_0 处沿 E 的上极限存在并且小于等于 M 。
- 对任意一个完全由 E 中元素组成并且收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, 都有上极限 $\limsup_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq M$ 。

• 下极限:

设有实数 M , 下面两个命题是等价的:

- f 在 x_0 处沿 E 的下极限存在并且大于等于 M 。
- 对任意一个完全由 E 中元素组成并且收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, 都有下极限 $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \geq M$ 。

下面证明这个上极限, 下极限的定义是满足该命题的:

分别证明充分必要条件:

• 上极限的证明:

- 必要条件: 若 f 在 x_0 处沿 E 的上极限存在并且小于等于 M , 则对任意一个由 E 中元素组成并且收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, 都有上极限 $\limsup_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq M$ 。

根据上定义, 我们设 f 在 x_0 处沿 E 的上极限为 L 。对任意收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$ 满足对任意的 $n \geq N$ 都有 $|a_n - x_0| \leq \varepsilon \iff a_n \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ 。又由于对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n \in E$, 于是应该有:

$$\forall n \geq N, a_n \in E \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \implies f(a_n) \leq \sup\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in E \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]\}$$

从而即局部上界 $F_{x_0}^+(\varepsilon)$ 是序列 $(f(a_n))_{n=N}^\infty$ 的上界, 即 $\sup(f(a_n))_{n=N}^\infty \leq F_{x_0}^+(\varepsilon)$ 。于是记有 $A_N^+ := \sup(f(a_n))_{n=N}^\infty$, 根据序列下极限的定义, 我们又有 $\limsup_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \inf(A_N^+)_{N=0}^\infty$, 而根据下确界的性质, 又有:

$$\forall N \geq 0, A_N^+ \geq \inf(A_N^+)_{N=0}^\infty$$

从而总结上面内容有:

对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \geq 0$ 使得局部上界 $F_{x_0}^+(\varepsilon)$ 有:

$$F_{x_0}^+(\varepsilon) \geq A_N^+ \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

从而 $\limsup_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ 是集合 $\{F_{x_0}^+(\delta) \in \mathbb{R} : \delta > 0\}$ 的一个下界, 根据下确界的性质应该有:

$$\inf\{F_{x_0}^+(\delta) \in \mathbb{R} : \delta > 0\} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \xrightarrow{\text{定义}} M \geq L \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

于是结论得证。

- 充分条件：若对任意一个完全由 E 中元素组成并且收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ，都有上极限 $\limsup_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq M$ ，则 f 在 x_0 处沿 E 的上极限存在并且小于等于 M 。

使用反证法，不妨假设有 f 在 x_0 处沿 E 的上极限 $L > M$ （它可能是一个实数，也可能是无穷大），从而根据我们的定义，对任意一个 $\varepsilon > 0$ 都有 $F_{x_0}^+(\varepsilon) \geq L > M$ （ L 是 $F_{x_0}^+(\delta)$ 的下确界）。

从而尝试创建一个序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ，其定义有对任意 $n \geq 0$ 满足：

$$P(n) := a_n \in E \wedge |a_n - x_0| \leq \frac{1}{n+1} \wedge f(a_n) \geq \frac{L+M}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

简单解释下为什么对任意 $n \geq 0$ 这个定义都是有效的：根据上面的结论，我们有

$F_{x_0}^+(\varepsilon) > \frac{L+M}{2}$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 都成立，于是根据上确界的性质，必然存在元素 $x \in E \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ 有：

$$f(x) \geq \frac{L+M}{2}$$

从而对任意的 $n \geq 0$ ，集合 $A_n := \{x \in X : P(n)\}$ 都是非空的，于是根据选择公理可以对任意 $n \geq 0$ 都指定一个 $a_n \in X$ 满足性质 $P(n)$ ，于是这样的定义总是有效的。

对这个序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ，我们显然有它是收敛于 x_0 的，从而根据题设，应当有

$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq M$ ；但是根据我们的构造，又有对任意 $n \geq 0$ 都有

$f(a_n) \geq \frac{L+M}{2}$ ，于是根据比较原理应该有

$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{L+M}{2} = \frac{L+M}{2} > M$ ，从而导出了矛盾，于是反证

假设不成立，只能有 f 在 x_0 处沿 E 的上极限存在并且小于等于 M 。

- 下极限的证明：（基本是一致的）

- 必要条件：若 f 在 x_0 处沿 E 的下极限存在并且大于等于 M ，则对任意一个由 E 中元素组成并且收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ，都有下极限 $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \geq M$ 。

根据上定义，我们设 f 在 x_0 处沿 E 的上极限为 L 。对任意收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ，对任意 $\varepsilon > 0$ ，都存在 $N \in \mathbb{N}$ 满足对任意的 $n \geq N$ 都有

$|a_n - x_0| \leq \varepsilon \iff a_n \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ 。又由于对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n \in E$ ，于是应该有：

$$\forall n \geq N, a_n \in E \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \implies f(a_n) \geq \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in E \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]\}$$

从而即局部下界 $F_{x_0}^-(\varepsilon)$ 是序列 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 的下界，即 $\inf(f(a_n))_{n=N}^{\infty} \geq F_{x_0}^-(\varepsilon)$ 。于是记

有 $A_N^- := \inf(f(a_n))_{n=N}^{\infty}$ ，根据序列下极限的定义，我们又有

$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \sup(A_N^-)_{N=0}^{\infty}$ ，而根据上确界的性质，又有：

$$\forall N \geq 0, A_N^- \leq \sup(A_N^+)_{N=0}^{\infty}$$

从而总结上面内容有：

对任意 $\varepsilon > 0$ ，都存在 $N \geq 0$ 使得局部下界 $F_{x_0}^-(\varepsilon)$ 有：

$$F_{x_0}^-(\varepsilon) \leq A_N^- \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

从而 $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ 是集合 $\{F_{x_0}^-(\delta) \in \mathbb{R} : \delta > 0\}$ 的一个上界, 根据上确界的性质应该有:

$$\sup\{F_{x_0}^+(\delta) \in \mathbb{R} : \delta > 0\} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \xrightarrow{\text{定义}} M \leq L \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

从而结论得证。

- 充分条件: 若对任意一个完全由 E 中元素组成并且收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, 都有下极限 $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \geq M$, 则 f 在 x_0 处沿 E 的下极限存在并且大于等于 M 。

使用反证法, 不妨假设有 f 在 x_0 处沿 E 的上极限 $L < M$ (它可能是一个实数, 也可能是负无穷), 从而根据我们的定义, 对任意一个 $\varepsilon > 0$ 都有 $F_{x_0}^-(\varepsilon) \leq L < M$ (L 是 $F_{x_0}^-(\delta)$ 的上确界)。

从而尝试创建一个序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, 其定义有对任意 $n \geq 0$ 满足:

$$P(n) := a_n \in E \wedge |a_n - x_0| \leq \frac{1}{n+1} \wedge f(a_n) \leq \frac{L+M}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

简单解释下为什么对任意 $n \geq 0$ 这个定义都是有效的: 根据上面的结论, 我们有

$F_{x_0}^-(\varepsilon) < \frac{L+M}{2}$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 都成立, 于是根据下确界的性质, 必然存在元素 $x \in E \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ 有:

$$f(x) \leq \frac{L+M}{2}$$

从而对任意的 $n \geq 0$, 集合 $A_n := \{x \in X : P(n)\}$ 都是非空的, 于是根据选择公理可以对任意 $n \geq 0$ 都指定一个 $a_n \in X$ 满足性质 $P(n)$, 于是这样的定义总是有效的。

对这个序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, 我们显然有它是收敛于 x_0 的, 从而根据题设, 应当有

$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \geq M$; 但是根据我们的构造, 又有对任意 $n \geq 0$ 都有

$f(a_n) \leq \frac{L+M}{2}$, 于是根据比较原理应该有

$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{L+M}{2} = \frac{L+M}{2} < M$, 从而导出了矛盾, 于是反证假设不成立, 只能有 f 在 x_0 处沿 E 的下极限存在并且大于等于 M 。

综上, 于是有内容得证。

9.3.5 (夹逼定理的连续形式) 设 X 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, E 是 X 的一个子集, x_0 是 E 的一个附着点, 并且设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 与 $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ 都是函数, 并且有 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ 对任意 $x \in E$ 都成立。若存在实数 L 有 $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} h(x) = L$, 则尝试证明:

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x) = L$$

根据命题 9.3.9, 则可以得到对任意一个完全由 E 中元素组成的收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, 都有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(a_n) = L$$

又根据命题 6.4.14 序列的夹逼定理, 由对任意 $a_n \in E$ 都有 $f(a_n) \leq g(a_n) \leq h(a_n)$ 我们有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = L$$

从而总结上面结论即有: 对任意一个完全由 E 中元素组成的收敛于 x_0 的序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$, 都有序列 $(g(a_n))_{n=0}^\infty$ 收敛于 L 。由命题 9.3.9, 这也即 $\lim_{x \rightarrow x_0; x \in E} g(x) = L$, 于是结论得证。

