13.2 连续性和乘积空间

定义

1. （无编号 直和）设(X,d_X)，(Y,d_Y)与(Z,d_Z)是度量空间，并设两个函数$f:X\to Y$与$g:X\to Z$，我们可以定义它们的**直和**$f\oplus g:X\to Y\times Z$为：

$$f\oplus g(x):=(f(x),g(x))$$

（注：这个定义其实已经在习题3.5.7中提到过了）

命题

1. （13.2.1 直和保持连续性？）设(X,d)是度量空间，并设$f:X\to\mathbb{R}$与$g:X\to\mathbb{R}$是两个函数，并且$f\oplus g:X\to\mathbb{R}^2$是它们的直和，并设$\mathbb{R}^2$具有欧几里得度量。那么下面的命题为真：

> 1. 设$x_0\in X$，那么f与g在x_0处是连续的，当且仅当$f\oplus g$是在x_0处是连续的。
> 2. f与g是连续的，当且仅当$f\oplus g$是连续的。

2. （13.2.2）加法函数$(x,y)\mapsto x+y$、减法函数$(x,y)\mapsto x-y$、乘法函数$(x,y)\mapsto x-y$、最大值函数$(x,y)\mapsto x-y$与最小值函数$(x,y)\mapsto x-y$都是从$\mathbb{R}^2$到$\mathbb{R}$的连续函数；除法函数$(x,y)\mapsto x-y$是从$\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash\{0\})$到$\mathbb{R}$的连续函数；对任意的实数$c$，函数$x\mapsto cx$是从$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的连续函数。
3. （13.2.3）设(X,d)是度量空间，$f:X\to\mathbb{R}$与$g:X\to\mathbb{R}$是两个函数，并设c是一个实数。

> 1. 如果$x_0\in X$，且f和g都在x_0处连续，那么函数$f+g:X\to\mathbb{R}$、$f-g:X\to\mathbb{R}$、$fg:X\to\mathbb{R}$、$\max(f,g):X\to\mathbb{R}$、$\min(f,g):X\to\mathbb{R}$以及$cf:X\to\mathbb{R}$也都是在x_0处连续的。如果对所有的$x\in X$都有$g(x)\neq 0$，那么$f/g:X\to\mathbb{R}$也在x_0处连续。
> 2. 如果f和g都是连续的，那么函数$f+g:X\to\mathbb{R}$、$f-g:X\to\mathbb{R}$、$fg:X\to\mathbb{R}$、$\max(f,g):X\to\mathbb{R}$、$\min(f,g):X\to\mathbb{R}$以及$cf:X\to\mathbb{R}$也都是连续的。如果对所有的$x\in X$都有$g(x)\neq 0$，那么$f/g:X\to\mathbb{R}$也是连续的。

（注：关于这些函数的定义，可以参考定义9.2.1自己推广）

课后习题

13.2.1 证明引理13.2.1 **（提示：利用命题12.1.18和定理13.1.4）**

> 先证明结论(a)：
>
> 考虑任意一个$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是X中依度量d_X收敛于x_0的序列，根据命题13.1.4我们知道f和g是在x_0处连续的当且仅当序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$收敛于$f(x_0)$与序列$(g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$收敛于$g(x_0)$。于是根据命题12.1.18我们知道序列$(f(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$收敛于$f(x_0)$与序列$(g(x^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$收敛于$g(x_0)$当且仅当序列$((f(x^{(n)}),g(x^{(n)})))_{n=1}^{\infty}$是收敛于$(f(x_0),g(x_0))$的序列。注意到$(f(x),g(x))=f\oplus g(x)$，于是再次使用命题13.1.4我们知道序列$((f(x^{(n)}),g(x^{(n)})))_{n=1}^{\infty}$是收敛于$(f(x_0),g(x_0))$的序列当且仅当$f\oplus g$是在$x_0$处连续的。
>
> 于是综上我们得到f和g是连续的当且仅当$f\oplus g$是在x_0处连续的。
>
> 然后证明结论(b)：
>
> f与g是连续的当且仅当对任意$x_0\in X$都有f和g在x_0处连续，根据结论(a)这等价于在任意$x_0\in X$都有$f\oplus g$在x_0处连续，也即$f\oplus g$是连续的。
>
> 综上，于是结论得证。

13.2.2 证明引理13.2.2（提示：利用定理13.1.5和极限定律（定理6.1.19））

> 我们以$f+g$为例子，其它的函数都是类似的（不如说是一模一样，改下函数名找对应的极限定律就行）。
>
> 对任意$\mathbb{R}^2$中收敛于(x_0,y_0)的序列$((x^{(n)},y^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$。根据命题12.1.18可以得到实数序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$收敛于$x_0$与实数序列$(y^{(n)})_{n=1}^{\infty}$收敛于$y_0$，从而根据极限定律(a)，我们有序列$(x^{(n)}+y^{(n)})_{n=0}^{\infty}$收敛于$x_0+y_0$，注意到这正好是加法函数在$(x_0,y_0)$处的函数值，于是综合即有：
>
> 对任意$\mathbb{R}^2$中收敛于(x_0,y_0)的序列$((x^{(n)},y^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$，都有序列$((x,y)\mapsto x+y(x^{(n)},y^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$收敛于$(x,y)\mapsto x+y(x_0,y_0)$。从而根据定理13.1.5可以得到加法函数$(x,y)\mapsto x+y$是连续的。
>
> 其它函数分别取对应的极限定律即可得证其连续性。

13.2.3 证明：如果$f:X\to\mathbb{R}$是一个连续函数，那么定义为$|f|(x):=|f(x)|$的函数$|f|:X\to\mathbb{R}$也是连续函数

> 令有$\mathbf{0}:X\to\mathbb{R}$是常数函数0，注意到对任意$x\in X$绝对值函数事实上有：
>
> $$|f(x)|=\max(f(x),0)-\min(f(x),0)$$
>
> 即有$|f|=\max(f,\mathbf{0})-\min(f,\mathbf{0})$，于是根据推论13.2.3可以直接得到$|f|$是连续的。

13.2.4 设函数$\pi_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$和$\pi_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$分别是函数$\pi_1(x,y):=x$和$\pi_2(x,y):=y$（这两个函数有时被称为$\mathbb{R}^2$上的坐标函数）。证明$\pi_1$和$\pi_2$都是连续的。由此进一步导出，如果$f:\mathbb{R}\to X$是映射到度量空间$(X,d)$的任意一个连续函数，那么定义为$g_1(x,y):=f(x)$和$g_2(x,y):=f(y)$的函数$g_1:\mathbb{R}^2\to X$与$g_2:\mathbb{R}^2\to X$也都是连续的

> 对任意$\mathbb{R}^2$中收敛于$(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$的序列$((x^{(n)},y^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$。根据命题12.1.18可以得到实数序列$(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$收敛于$x_0$与实数序列$(y^{(n)})_{n=1}^{\infty}$收敛于$y_0$，注意到：
>
> $$\forall\, n\in\mathbb{N},\pi_1(x^{(n)},y^{(n)})=x^{(n)},\pi_2(x^{(n)},y^{(n)})=y^{(n)}$$
> $$\pi_1(x_0,y_0)=x_0,\pi_2(x_0,y_0)=y_0$$
>
> 于是总结可以得到：
>
> 对任意$\mathbb{R}^2$中收敛于$(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$的序列$((x^{(n)},y^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$，有序列$(\pi_1(x^{(n)},y^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$收敛于$\pi_1(x_0,y_0)$与序列$(\pi_2(x^{(n)},y^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$收敛于$\pi_2(x_0,y_0)$。
>
> 于是根据命题13.1.5我们可以得到π_1和π_2是连续的。
>
> 对于进一步命题的证明，不难发现有$g_1=f\circ\pi_1$与$g_2=f\circ\pi_2$，于是根据推论13.1.7，f与π_1，π_2的连续性我们可以得到这两个复合函数都是连续的。

13.2.5 设n，$m\geq 0$都是整数。假设对每一个$0\leq i\leq n$和$0\leq j\leq m$，我们都有一个实数c_{ij}。构造函数$P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$为：

$$P(x,y):=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}c_{ij}x^iy^i$$

（这样的函数被称为二元多项式）证明：P是连续的（提示：利用习题13.2.4和推论13.2.3）。进一步推出：如果$f:X\to\mathbb{R}$和$g:X\to\mathbb{R}$都是连续函数，那么定义为$P(f,g)(x):=P(f(x),g(x))$的函数$P(f,g):X\to\mathbb{R}$也是连续的

> 注意到在这个求和中，每一个项$I(x,y):=c_{ij}x^iy^j$都是可以视为这样的复合：
>
> $$I(x,y):=c_{ij}x^iy^j=c_{ij}\pi_1(x,y)^i\pi_2(x,y)^j$$
>
> 其中π_1和π_2是习题13.2.4中所定义的函数，上面的结论也即：
>
> $$I=c_{ij}\pi_1^i\pi_2^j$$
>
> 然后根据推论13.2.3，由于连续函数相乘或乘以一个常数都会得到连续函数，于是我们根据习题13.2.4中已经证明的π_1，π_2的连续性可以知道I也是连续的。然后注意到P本身是n^2个不同的I相加，于是根据推论13.2.3可以得到P也是连续的。
>
> 对于进阶的结论，注意到$P(f,g)$可以表示为下面的复合函数形式：
>
> $$P(f,g)=P\circ(f\oplus g)$$

> 于是由于P和$f \oplus g$是连续函数（$f \oplus g$的连续性需要用到f，g的连续性与命题13.2.1），根据推论13.1.7于是$P(f,g)$作为两者的复合也是连续的。

13.2.6 设$\mathbb{R}^m$与$\mathbb{R}^n$是欧几里得空间。如果$f: X \to \mathbb{R}^m$和$g: X \to \mathbb{R}^n$都是连续函数，证明：$f \oplus g: X \to \mathbb{R}^{m+n}$也是连续的（或许这里会看着很奇怪，因为这个函数和直和的定义显然不同，但是可以注意到$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$显然是与$\mathbb{R}^{m+n}$是等价的（你可以在这两个空间中建立一个“缩并”的双射），因此这里这个没有说明的“缩并”行为实际上是合理的），并解释逆命题是否成立

> 考虑任意一个X中收敛于X中某点x的序列$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$，根据命题13.1.5我们可以得到序列$(f(x^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$收敛于$f(x)$与序列$(g(x^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$收敛于$g(x)$。由于这两个序列都是依欧几里得度量收敛的，于是根据命题12.1.18我们知道对任意的$1 \leq i \leq m$都有序列$(f(x^{(n)})_i)_{n=0}^{\infty}$收敛于$f(x)_i$与对任意$1 \leq i \leq n$都有序列$(g(x^{(n)})_i)_{n=0}^{\infty}$收敛于$g(x)_i$（这里我们用下标$i$表示第$i$个坐标分量）。
>
> 然后注意到下面的等式关系：
>
> $$f \oplus g(x) = (f(x)_1, \dots, f(x)_m, g(x)_1, \dots, g(x)_n)$$
>
> （也就是蓝字中提到的“缩并”$((f(x)_1, \dots, f(x)_m), (g(x)_1, \dots, g(x)_n)) \mapsto (f(x)_1, \dots, f(x)_m, g(x)_1, \dots, g(x)_n)$操作，这事实上是一个双射，于是$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$是与$\mathbb{R}^{m+n}$是等价的）
>
> 从而由上面的结论，对任意$1 \leq i \leq n+m$都有序列$(f \oplus g(x^{(n)})_i)_{n=0}^{\infty}$是收敛的且收敛于$f \oplus g(x)_i$。结合命题12.1.18我们可以推论得到：
>
> 对任意一个X中收敛于X中某点x的序列$(x^{(n)})_{n=0}^{\infty}$，都有序列$(f \oplus g(x^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$是收敛的且收敛于$f \oplus g(x)$。
>
> 于是根据命题13.1.5我们可以得到$f \oplus g$也是连续的。
>
> 关于逆命题显然也是同样成立的，我们可以类似地讨论序列$(f \oplus g(x^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$的分量序列的收敛性，最终得到$f$与$g$的连续性。

13.2.7 设$k \geq 1$，I是$\mathbb{N}^k$的一个有限子集，并设$c: I \to \mathbb{R}$是个函数。构造函数$P: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$为：

$$P(x_1, \dots, x_k) := \sum_{(i_1,\dots,i_k) \in I} c(i_1, \dots, i_k) x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}$$

（这样的函数被称为k元多项式）证明：P是连续的（提示：对k使用归纳法，利用习题13.2.6，习题13.2.5或引理13.2.2）

> 对一个k元组i，我们令有i_n表示其第n个坐标分量（无论是$\mathbb{N}^k$中元素还是$\mathbb{R}^k$中元素）。于是对任意的给定的I，c与P，我们考虑下面的“补全”操作：
>
> > 首先由于I是有限的，于是对任意的$1 \leq m \leq k$，集合
> >
> > $$I_m := \{n \in \mathbb{N} : \exists\, i \in I, i_m = n\}$$
> >
> > 也是有限的。考虑到它是自然数集的子集，于是应该存在一个最大元素，记为n_m，并定义$N_m := \{n \in \mathbb{N} : 0 \leq n \leq n_m\}$。然后我们对函数$c$的定义域完成下面的“拓展定义域”操作使得$c$成为定义在$N_1 \times \dots \times N_k$上的函数。
> >
> > 考虑$\mathbb{N}^k$中的一个k元组$i = (i_1, \dots, i_k)$，其中对任意的$1 \leq m \leq k$都有$0 \leq i_m \leq n_m$，我们覆盖定义c有：若$i \in I$，则定义$c(i_1, \dots, i_k)$的值仍为题设函数的对应函数值；若$i \notin I$，则定义$c(i_1, \dots, i_k) := 0$。
> >
> > 然后注意到，在这个新定义下有：
> >
> > $$\begin{aligned} &\sum_{(i_1,\dots,i_k) \in N_1 \times \dots \times N_k} c(i_1, \dots, i_k) x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} \\ =& \sum_{(i_1,\dots,i_k) \in I} c(i_1, \dots, i_k) x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} + \sum_{(i_1,\dots,i_k) \in (N_1 \times \dots \times N_k) \setminus I} c(i_1, \dots, i_k) x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} \\ =& \sum_{(i_1,\dots,i_k) \in I} c(i_1, \dots, i_k) x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} + \sum_{(i_1,\dots,i_k) \in (N_1 \times \dots \times N_k) \setminus I} 0 \cdot x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} \\ =& \sum_{(i_1,\dots,i_k) \in I} c(i_1, \dots, i_k) x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} \\ =& P(x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$
> >
> > 于是我们可以将P的定义替换为：

> $$P(x_1,\dots,x_k):=\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in N_1\times\dots\times N_k}c(i_1,\dots,i_k)x_1^{i_1}\dots x_k^{i_k}$$
>
> 根据上面的计算我们知道这总是和原始的P函数是等价的（对任意$(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$都有值相等）。并且在这个形式下根据有限集上求和的定义我们可以将P写为另一个形式：
>
> $$P(x_1,\dots,x_k):=\sum_{i_1=0}^{n_1}\dots\sum_{i_k=0}^{n_k}c(i_1,\dots,i_k)x_1^{i_1}\dots x_k^{i_k}$$
>
> 这个形式下使用归纳法证明题目结论非常方便。

经过上面的"补全"操作，我们使用覆盖后的新定义与归纳法证明题目结论。

$k=1$与$k=2$的情况我们已有证明（习题13.2.5），于是我们归纳性假设对$k=a$时有结论成立，考虑$k=a+1$时的情况：

根据我们上面给出的新定义：

$$\begin{aligned}P(x_1,\dots,x_{a+1})&=\sum_{i_1=0}^{n_1}\dots\sum_{i_k=0}^{n_{a+1}}c(i_1,\dots,i_k)x_1^{i_1}\dots x_{a+1}^{i_{a+1}}\\&=x_1^0\sum_{i_2=0}^{n_2}\dots\sum_{i_k=0}^{n_{a+1}}c(0,i_2,\dots,i_{a+1})x_2^{i_2}\dots x_{a+1}^{i_{a+1}}+\dots+x_1^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}\dots\sum_{i_{a+1}=0}^{n_{a+1}}c(n_1,i_2,\dots,i_{a+1})x_2^{i_2}\dots x_{a+1}^{i_{a+1}}\end{aligned}$$

也就是说P可以看作n_1+1个a元多项式与x_1的幂次的和。我们可以用类似于习题13.2.4中的证明函数$\pi_1(x_1,\dots,x_{a+1}):=x_1$也是连续的，然后根据推论13.2.3与归纳假设，我们可以直接得到$k=a+1$时题目结论也是成立的，$a+1$元多项式也是连续的。

综上，于是结论成立。

13.2.8 设(X,d_X)与(Y,d_Y)都是度量空间，定义度量$d_{X\times Y}:(X\times Y)\times(X\times Y)\to\mathbb{R}^+$ （也就是说这是空间$X\times Y$上的度量）为：

$$d_{X\times Y}((x,y),(x',y')):=d_X(x,x')+d_Y(y,y')$$

证明：$(X\times Y,d_{X\times Y})$是度量空间，并推出与命题12.1.18和引理13.2.1类似的结论

> 先证明$(X\times Y,d_{X\times Y})$是度量空间。
>
> 于是要证明$d_{X\times Y}$满足：
>
> - 对任意$(x,y)\in X\times Y$，都有$d_{X\times Y}((x,y),(x,y))=0$：
>
>   > 可以直接根据定义有$d_{X\times Y}((x,y),(x,y))=d_X(x,x)+d_Y(y,y)$，然后由于$d_X$与$d_Y$都是度量直接能得到$d_X(x,x)$与$d_Y(y,y)$都等于0，从而此条件总是满足的。
>
> - 对任意(x,y)，$(x',y')\in X\times Y$且$(x,y)\neq(x',y')$，都有$d_{X\times Y}((x,y),(x',y'))>0$：
>
>   > 根据定义有$d_{X\times Y}((x,y),(x',y'))=d_X(x,x')+d_Y(y,y')$，由于$(x,y)\neq(x',y')$于是要么有$x\neq x'$要么有$y\neq y'$，然后由$d_X$，$d_Y$都是度量这等价于要么$d_X(x,x')>0$要么$d_Y(y,y')>0$，然后根据度量的非负性即有$d_{X\times Y}((x,y),(x',y'))>0$。从而此条件总是满足的。
>
> - 对任意(x,y)，$(x',y')\in X\times Y$，都有$d_{X\times Y}((x,y),(x',y'))=d_{X\times Y}((x',y'),(x,y))$：
>
>   > 根据定义有：
>   >
>   > $$\begin{aligned}d_{X\times Y}((x,y),(x',y'))=d_X(x,x')+d_Y(y,y')\\d_{X\times Y}((x',y'),(x,y))=d_X(x',x)+d_Y(y',y)\end{aligned}$$
>   >
>   > 然后由d_X，d_Y都是度量有$d_X(x,x')=d_X(x',x)$与$d_Y(y,y')=d_Y(y',y)$，于是有
>   >
>   > $$d_{X\times Y}((x,y),(x',y'))=d_{X\times Y}((x',y'),(x,y))$$
>   >
>   > 从而此条件总是满足的。
>
> - 对任意(x_0,y_0)，(x_1,y_1)与$(x_2,y_2)\in X\times Y$，都有三角不等式：
>
> $$d_{X\times Y}((x_0,y_0),(x_2,y_2))\leq d_{X\times Y}((x_0,y_0),(x_1,y_1))+d_{X\times Y}((x_1,y_1),(x_2,y_2))$$

> 根据定义上面的不等式等价于：
>
> $$d_X(x_0,x_2)+d_Y(y_0,y_2)\le d_X(x_0,x_1)+d_Y(y_0,y_1)+d_X(x_1,x_2)+d_Y(y_1,y_2)$$
>
> 注意到由于d_X与d_Y都满足三角不等式，即有：
>
> $$\begin{gathered}d_X(x_0,x_2)\le d_X(x_0,x_1)+d_X(x_1,x_2)\\ d_Y(y_0,y_2)\le d_Y(y_0,y_1)+d_Y(y_1,y_2)\end{gathered}$$
>
> 于是即有：
>
> $$\begin{gathered}d_X(x_0,x_2)+d_Y(y_0,y_2)\le d_X(x_0,x_1)+d_X(x_1,x_2)+d_Y(y_0,y_1)+d_Y(y_1,y_2)\\ \Downarrow\\ d_{X\times Y}((x_0,y_0),(x_2,y_2))\le d_{X\times Y}((x_0,y_0),(x_1,y_1))+d_{X\times Y}((x_1,y_1),(x_2,y_2))\end{gathered}$$
>
> 从而此条件总是满足的。

综上，于是$(X\times Y,d_{X\times Y})$也是一个度量空间。

然后我们给出一个命题12.1.18类似的结论：

> 在上面的假设下，我们额外假设$(p^{(k)})_{k=m}^{\infty}$是$X\times Y$中的一个点列，并记$p^{(k)}=(x^{(k)},y^{(k)})$，设$p=(x,y)$是$X\times Y$中的一个点。那么两个命题在逻辑上是等价的：
>
> - 序列$(p^{(k)})_{k=m}^{\infty}$是依度量$d_{X\times Y}$收敛于p的。
> - 序列$(x^{(k)})_{k=m}^{\infty}$依度量d_X收敛于x且序列$(y^{(k)})_{k=m}^{\infty}$依度量d_Y收敛于y。

证明：

若序列$(p^{(k)})_{k=m}^{\infty}$是依度量$d_{X\times Y}$收敛于p的，则根据序列收敛的定义，我们有对任意的$\varepsilon>0$都存在一个整数$K\ge m$使得对任意的$k\ge K$都有$d_{X\times Y}(p^{(k)},p)\le\varepsilon$。然后根据$d_{X\times Y}$的定义即有：

$$d_X(x^{(k)},x)+d_Y(y^{(k)},y)\le\varepsilon$$

由于度量是非负的，于是即有$d_X(x^{(k)},x)\le\varepsilon$与$d_Y(y^{(k)},y)\le\varepsilon$。于是综合可以得到：

对任意的$\varepsilon>0$都存在一个整数$K\ge m$使得对任意的$k\ge K$都有$d_X(x^{(k)},x)\le\varepsilon$与$d_Y(y^{(k)},y)\le\varepsilon$。

于是根据序列收敛的定义即有序列$(x^{(k)})_{k=m}^{\infty}$依度量d_X收敛于x且序列$(y^{(k)})_{k=m}^{\infty}$依度量d_Y收敛于y。

反过来，若有序列$(x^{(k)})_{k=m}^{\infty}$依度量d_X收敛于x且序列$(y^{(k)})_{k=m}^{\infty}$依度量d_Y收敛于y。则对任意的$\varepsilon>0$，分别存在$K_x\ge m$与$K_y\ge m$使得对任意的$k\ge K_x$都有$d_X(x^{(k)},x)\le\varepsilon/2$，对任意的$k\ge K_y$都有$d_Y(y^{(k)},y)\le\varepsilon/2$。于是令$K:=\max(K_x,K_y)$，对任意$k\ge K$都有：

$$d_X(x^{(k)},x)+d_Y(y^{(k)},y)\le\varepsilon\Longrightarrow d_{X\times Y}(p^{(k)},p)\le\varepsilon$$

于是即有：

对任意的$\varepsilon>0$都存在一个整数$K\ge m$使得对任意的$k\ge K$都有$d_{X\times Y}(p^{(k)},p)\le\varepsilon$。

于是根据序列收敛的定义我们有序列$(p^{(k)})_{k=m}^{\infty}$是依度量$d_{X\times Y}$收敛于p的。

综上于是我们给出的命题得证（事实上这个结论应该可以扩展到对任意有限个度量空间的笛卡儿积与这个变种出租车度量都成立，不过本题并没有定义因此按下不表，证明的方法是类似的）。

然后我们给出一个命题13.2.1类似的结论：

> 在上面的假设下，设(Z,d_Z)是度量空间，并设$f:Z\to X$与$g:Z\to Y$是两个函数，并且$f\oplus g:Z\to X\times Y$是它们的直和，并设$X\times Y$具有度量$d_{X\times Y}$。那么下面的命题为真：
>
> - 设$z_0\in Z$，那么f与g在z_0处是连续的，当且仅当$f\oplus g$是在z_0处是连续的。
> - f与g是连续的，当且仅当$f\oplus g$是连续的。

证明：

注意到第一个结论蕴含了第二个结论，于是我们只需要证明第一个结论即可。

> 根据命题13.1.5与直和的定义，这等价于要证明：
>
> 对任意$(z^{(n)})_{n=0}^{\infty}$是(Z, d_Z)中收敛于z_0的序列，序列$(f(z^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$依度量$d_X$收敛于$f(z_0)$且序列$(g(z^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$依度量$d_Y$收敛于$g(z_0)$当且仅当序列$((f(z^{(n)}), g(z^{(n)})))_{n=0}^{\infty}$依度量$d_{X\times Y}$收敛于$(f(z_0), g(z_0))$。
>
> 根据我们上面已经证明的类似命题12.1.8的结论我们知道这个命题为真，于是结论成立（类似上一个结论，这个结论也应该可以扩展到对任意有限个度量空间的笛卡儿积与这个变种出租车度量都成立，依旧是因为没有提及的原因此处按下不表）。

13.2.9 设$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$是从$\mathbb{R}^2$到$\mathbb{R}$的函数，并设$(x_0, y_0)$是$\mathbb{R}^2$中的点。如果$f$在$(x_0, y_0)$处是连续的，证明：

$$\lim_{x\to x_0}\limsup_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\limsup_{x\to x_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$
$$\lim_{x\to x_0}\liminf_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\liminf_{x\to x_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

（回顾$\limsup\limits_{x\to x_0} f(x) := \inf\limits_{r>0}\sup\limits_{|x-x_0|<r} f(x)$和$\liminf\limits_{x\to x_0} f(x) := \sup\limits_{r>0}\inf\limits_{|x-x_0|<r} f(x)$，这个定义在习题9.3.4中要求自己diy过）特别地，我们有

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

上式成立的前提是等号两端的极限都存在（注意，在一般情况下，极限不一定存在。例如考察函数$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，当$xy = 0$时定义$f(x,y) = y\sin\dfrac{1}{x}$，$xy = 0$时$f(x,y) = 0$），将此结果与例12.2.7进行比较（这和内点有什么关系吗？没看懂）

> 本题证明的全部讨论篇幅太长，因此只给出一部分作为例子，其余等式可以通过类似的方法讨论得证。
>
> 我们先证明第一个结论。
>
> 以$\lim\limits_{x\to x_0}\limsup\limits_{y\to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$为例，于是我们需要证明：对任意$\varepsilon > 0$都存在$\delta \geq 0$，对任意$x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$都有
>
> $$\left|\inf_{r>0}\sup_{|y-y_0|<r} f(x,y) - f(x_0,y_0)\right| \leq \varepsilon$$
>
> 由于f在(x_0,y_0)处是连续的，于是根据连续性的定义对给出的ε存在一个$\sigma > 0$使得对任意(x,y)满足$d_{l^2}((x,y),(x_0,y_0)) < \sigma$都有$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$（标准度量）。于是我们令有$\delta := \sigma/2$，能够直接计算得到对任意$(x,y)$满足$|x-x_0| \leq \delta$与$|y-y_0| \leq \delta$都有$d_{l^2}((x,y),(x_0,y_0)) < \sigma$。
>
> 然后根据上确界的性质，我们知道对任意的$x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$，由于$\inf\limits_{r>0}\sup\limits_{|y-y_0|<r} f(x,y)$是一个下确界，于是根据下确界定义有：
>
> $$\inf_{r>0}\sup_{|y-y_0|<r} f(x,y) \leq \sup_{|y-y_0|<\delta} f(x,y) < f(x_0,y_0)+\varepsilon$$
>
> 另一方面，由于上确界的性质，我们又应该有：
>
> $$\forall\, r>0,\ \sup_{|y-y_0|<r} f(x,y) \geq f(x,y_0) \xRightarrow[\text{下确界大于任意下界}]{f(x,y_0)\text{是下界}} \inf_{r>0}\sup_{|y-y_0|<r} f(x,y) \geq f(x,y_0)$$
>
> 然后根据连续性的结论有$f(x,y_0) > f(x_0,y_0)-\varepsilon$，于是综合上面的内容，我们有：
>
> $$\left|\inf_{r>0}\sup_{|y-y_0|<r} f(x,y) - f(x_0,y_0)\right| \leq \varepsilon$$
>
> 对任意$x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$都成立，综上于是我们为每一个$\varepsilon > 0$都能指定一个$\delta > 0$满足上面的条件，于是题目的极限式得证。类似地，我们也可以分别证明另外三个极限式。
>
> ---
>
> 然后我们证明第二个结论。
>
> 以$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$为例子，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$的情况类似证明即可。

我们假设对一个足够小的δ，极限$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$总是在$x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$处存在，并且我们记有$F(x):=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$。于是题目即要证明$\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=f(x_0,y_0)$。

注意到对任意的$x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$，我们有：

$$\forall\, y'\in\mathbb{R},\quad \sup_{|y-y_0|<2|y'-y_0|} f(x,y)>f(x,y')$$

于是根据函数极限的运算定律，我们应该有：

$$\lim_{y'\to y_0}\sup_{|y-y_0|<2|y'-y_0|} f(x,y)\geq\lim_{y'\to y_0} f(x,y)\ (F(x))$$

注意到对右边，由于下确界的定义，对任意$\varepsilon>0$，都应该存在$r_0>0$使得：

$$\inf_{r>0}\sup_{|y-y_0|<r} f(x,y)\leq\sup_{|y-y_0|<r_0} f(x,y)\leq\inf_{r>0}\sup_{|y-y_0|<r} f(x,y)+\varepsilon$$

并且根据上确界的定义，我们知道上面的结论将r_0替换为任意$r'\leq r_0$也是成立的。然后我们令有$\delta:=r_0/2$，于是可以得到：

对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得对任意$y'\in[y_0-\delta,y_0+\delta]\implies 2|y'-y_0|\leq r_0$都有：

$$\left|\sup_{|y-y_0|<2|y'-y_0|} f(x,y)-\inf_{r>0}\sup_{|y-y_0|<r} f(x,y)\right|\leq\varepsilon$$

即有$\lim\limits_{y'\to y_0}\sup\limits_{|y-y_0|<2|y'-y_0|} f(x,y)=\inf\limits_{r>0}\sup\limits_{|y-y_0|<r} f(x,y)\left(\limsup\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)$。于是综合上面的讨论我们可以得到：

$$\limsup_{y\to y_0} f(x,y)\geq\lim_{y'\to y_0} f(x,y)\ (F(x))$$

类似地讨论，我们也可以证明对任意的$x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$都有$\liminf\limits_{y\to y_0} f(x,y)\leq\lim\limits_{y'\to y_0} f(x,y)\ (F(x))$，综合即有：

$$\liminf_{y\to y_0} f(x,y)\leq F(x)\leq\limsup_{y\to y_0} f(x,y)$$

然后应用我们在前面证明的结论与比较原理，我们有：

$$f(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\liminf_{y\to y_0} f(x,y)\leq\lim_{x\to x_0} F(x)\leq\lim_{x\to x_0}\limsup_{y\to y_0} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

即有$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=f(x_0,y_0)$。

（如同在本题中蓝字注释的那样，这个证明需要基于在一个很小的范围内极限存在的基础假设上才成立）

13.2.10 设$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是一个连续函数，证明：对每一个$x\in\mathbb{R}$，函数$y\mapsto f(x,y)$都在$\mathbb{R}$上连续；对每一个$y\in\mathbb{R}$，函数$x\mapsto f(x,y)$都在$\mathbb{R}$上连续。因此，关于$(x,y)$联合连续的函数$f(x,y)$分别关于每一个变量$x$和$y$连续

以函数$y\mapsto f(x,y)$为例，函数$x\mapsto f(x,y)$的连续性也是类似地证明。

首先明确函数$y\mapsto f(x,y)$是从实数集到实数集的函数（于是带有标准度量）。根据命题13.1.5，$y\mapsto f(x,y)$是连续的当且仅当对任意$\mathbb{R}$中的收敛于某个$y_0\in\mathbb{R}$序列$(y^{(n)})_{n=0}^\infty$都有序列$(f(x,y^{(n)}))_{n=0}^\infty$收敛于$f(x,y_0)$。

特别地，我们注意到对标准度量d与欧几里得度量d_{l^2}之间有如下关系：

$$\forall\, y,y'\in\mathbb{R}, d(y,y')=d_{l^2}((x,y),(x,y'))$$

于是直接使用序列收敛的定义我们可以得到$((x,y^{(n)}))_{n=0}^\infty$是$\mathbb{R}^2$中收敛的序列（并且收敛于$(x,y_0)$），从而由于$f$是连续的，根据命题13.1.5我们必然有$(f(x,y^{(n)}))_{n=0}^\infty$收敛于$f(x,y_0)$。

综上，于是函数$y\mapsto f(x,y)$是连续的。类似地可以得到函数$x\mapsto f(x,y)$也是连续的。

13.2.11 设$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$是一个函数，其定义为：当$(x,y)\neq(0,0)$时，$f(x,y):=\frac{xy}{x^2+y^2}$；当$(x,y)=(0,0)$时，$f(x,y):=0$。证明：对每一个固定的$x\in\mathbb{R}$，函数$y\mapsto f(x,y)$都在$\mathbb{R}$上连续；对每一个固定的$y\in\mathbb{R}$，函数$x\mapsto f(x,y)$都在$\mathbb{R}$上连续。但是，函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$在$\mathbb{R}^2$上不连续。这表明习题13.2.10的逆命题不成立，关于两个变量不联合连续的函数有可能分别关于每一个变量连续

> 首先我们证明对每一个固定的$x\in\mathbb{R}$，函数$y\mapsto f(x,y)$都在$\mathbb{R}$上连续；对每一个固定的$y\in\mathbb{R}$，函数$x\mapsto f(x,y)$都在$\mathbb{R}$上连续。
>
> 注意到对给定的x，如果$x=0$则函数$y\mapsto f(x,y)$是常数函数0，此时显然连续；若$x\neq 0$则函数$y\mapsto f(x,y)$是函数$\frac{xy}{x^2+y^2}$，根据引理13.2.3我们可以直接得到这个函数是连续的。类似地我们也可以证明函数$x\mapsto f(x,y)$是连续的。
>
> 然后我们来证明f是不连续的。
>
> 考虑序列$\left(\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$，显然它是依欧几里得度量收敛于$(0,0)$的，然后注意到：
>
> $$\left(f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}=\left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}\right)_{n=1}^{\infty}=\left(\frac{1}{2}\right)_{n=1}^{\infty}$$
>
> 是一个常数序列并且显然收敛于$\frac{1}{2}$，如果f是连续的则根据连续性的要求应该有它收敛于$f(0,0)=0$，这显然导出了矛盾，因此f不可能是在$\mathbb{R}^2$上连续的。

本节相关跳转

[实分析 3.5 笛卡尔积]

[实分析 6.1 收敛与极限定律]

[实分析 9.2 实值函数的代数]

[实分析 12.1 定义和例子]

[实分析 12.2 度量空间中的一些点集拓扑知识]

[实分析 13.1 连续函数]