19.1 简单函数

定义

1. (19.1.1 简单函数) 设Ω是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$f:\Omega\to\mathbb{R}$是一个可测函数。如果象集$f(\Omega)$是一个有限集，那么我们称f是一个简单函数。也就是说，存在有限个实数$c_1,c_2,\ldots,c_N$，使得对于每一个$x\in\Omega$都存在一个$1\le j\le N$满足$f(x)=c_j$。

   (注：一个简单函数的例子，设Ω是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设E是Ω的可测子集，定义**特征函数**$\chi_E:\Omega\to\mathbb{R}$为：当$x\in E$时，$\chi_E(x)=1$；当$x\notin E$时，$\chi_E(x)=0$（在某些教材中，特征函数$\chi_E$也被写作$1_E$，并称为**指示函数**）。那么$\chi_E$是一个可测函数，并且它还是一个简单函数，因为象集$\chi_E(\Omega)=\{0,1\}$（或者，当$E=\varnothing$时$\chi_E(\Omega)=\{0\}$；当$E=\Omega$时$\chi_E(\Omega)=\{1\}$））

2. (19.1.6 简单函数的勒贝格积分) 设Ω是$\mathbb{R}^n$的可测子集，并设$f:\Omega\to\mathbb{R}$是一个非负的简单函数。那么f是可测的，象集$f(\Omega)$是有限集并且包含在$[0,+\infty)$中。于是，我们将f在Ω上的勒贝格积分$\int_\Omega f$定义为：

$$\int_\Omega f:=\sum_{\lambda\in f(\Omega);\lambda>0}\lambda m(\{x\in\Omega:f(x)=\lambda\})$$

   (注：我们有时也把$\int_\Omega f$记作$\int_\Omega f\mathrm{d}m$以此来强调勒贝格测度m的作用，或者如果黎曼积分时那样用一个像x这样的虚拟变量，比如$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x$；这个定义与我们对积分的直观概念相对应，即将积分看作函数图像下方的面积)

命题

1. (19.1.3) 设Ω是$\mathbb{R}^n$的一个可测子集，并设$f:\Omega\to\mathbb{R}$和$g:\Omega\to\mathbb{R}$是简单函数。那么$f+g$是一个简单函数，另外，对于任意的标量$c\in\mathbb{R}$，函数cf也是一个简单函数。

   (注：引理19.1.3给出了简单函数构成了向量空间这一基本性质)

2. (19.1.4) 设Ω是$\mathbb{R}^n$的一个可测子集，并设$f:\Omega\to\mathbb{R}$是一个简单函数。那么存在有限多个实数$c_1,\ldots,c_N$和Ω中的有限多个互不相交的可测集$E_1,E_2,\ldots,E_N$使得$f=\sum_{i=1}^N c_i\chi_{E_i}$。

   (注：引理19.1.4给出了简单函数是特征函数的线性组合这一基本性质)

3. (19.1.5) 设Ω是$\mathbb{R}^n$的一个可测子集，并设$f:\Omega\to\mathbb{R}$是一个可测函数。如果f始终是非负的，即对于所有的$x\in\Omega$都有$f(x)\ge 0$，那么存在一个简单函数序列$f_1,f_2,f_3,\ldots$，其中$f_n:\Omega\to\mathbb{R}$，使得序列f_n是非负且单调递增的：

$$\forall\ x\in\Omega, 0\le f_1(x)\le f_2(x)\le f_3(x)\le\ldots$$

   而且该序列逐点收敛于f：

$$\forall\ x\in\Omega,\ \lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

   (注：引理19.1.5给出了可测函数可以由简单函数逼近这一基本性质)

4. (19.1.9 非负简单函数积分的另一种表述？) 设Ω是$\mathbb{R}^n$的一个可测子集，并设$E_1,E_2,\ldots,E_N$是Ω的有限多个互不相交的可测子集。设$c_1,\ldots,c_N$都是非负数（不必两两不同），那么有

$$\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{N}c_j\chi_{E_j}=\sum_{j=1}^{n}c_jm(E_j)$$

5. （19.1.10 非负简单函数勒贝格积分的基本性质？）设Ω是$\mathbb{R}^n$的一个可测子集，并设$f:\Omega\to\mathbb{R}$和$g:\Omega\to\mathbb{R}$都是非负简单函数。那么有：

> 1. $0\le\int_{\Omega}f\le\infty$。另外，$\int_{\Omega}f=0$，当且仅当$m(\{x\in\Omega:f(x)\neq 0\})=0$。
> 2. $\int_{\Omega}(f+g)=\int_{\Omega}f+\int_{\Omega}g$。
> 3. 对于任意的正数c，有$\int_{\Omega}cf=c\int_{\Omega}f$。
> 4. 如果对于所有的$x\in\Omega$都有$f(x)\le g(x)$，那么$\int_{\Omega}f\le\int_{\Omega}g$。

（注：如果我们做一个约定：如果性质$P(x)$对于Ω中除了测度为零的集合之外的所有点都成立，那么我们称P**几乎**对于Ω中的每一点都成立。于是，(a)断定了$\int_{\Omega}f=0$当且仅当f几乎在Ω中的每一点处都等于零）

课后习题

19.1.1 证明引理19.1.3

> 我们先证明$f+g$也是一个简单函数。
>
> 注意到：
>
> $$(f+g)(\Omega)=\{f(x)+g(x):x\in\Omega\}\subseteq\{f(x)+g(y):x,y\in\Omega\}$$
>
> 于是这表明了$(f+g)(\Omega)$的基数小于等于$\{f(x)+g(y):x,y\in\Omega\}$的基数。
>
> 接着注意到我们可以建立从$f(\Omega)\times g(\Omega)$到$\{f(x)+g(y):x,y\in\Omega\}$的满射$h(a,b):=a+b$，于是利用这个满射，我们额外定义函数$h'$是从$\{f(x)+g(y):x,y\in\Omega\}$到$f(\Omega)\times g(\Omega)$的映射，它为每一个$a\in\{f(x)+g(y):x,y\in\Omega\}$指定一对从$h^{-1}(\{a\})$中挑选出来的元素。显然有$h'$是一个单射，从而我们有$\{f(x)+g(y):x,y\in\Omega\}$的基数小于等于$f(\Omega)\times g(\Omega)$的基数。
>
> 于是综上，我们论证了$(f+g)(\Omega)$是基数小于等于$f(\Omega)\times g(\Omega)$的集合。然后由于$f,g$都是简单函数，因此我们有象集$f(\Omega)$和$g(\Omega)$都是有限集。从而$f(\Omega)\times g(\Omega)$也是有限集，进而$(f+g)(\Omega)$也是有限的，也即$f+g$是简单函数。
>
> ---
>
> 然后我们证明cf也是一个简单函数。
>
> 若有$c=0$，则此时显然有$(cf)(\Omega)=\{0\}$是有限的；若$c\neq 0$，则我们可以建立从$f(\Omega)$到$(cf)(\Omega)$的双射$h(x):=cx$，因此此时有$(cf)(\Omega)$和$f(\Omega)$一样都是有限的。总而综合即对任意的实数c都有$(cf)(\Omega)$是有限的，也即cf是一个简单函数。

19.1.2 证明引理19.1.4

> 由于f是一个简单函数，因此我们不妨将它的象集$f(\Omega)$写成$\{c_1,\dots,c_N\}$的形式。然后我们注意到由于$\{c_i\}$是$\{c_1,\dots,c_N\}$中的开集（$1\le i\le N$），因此根据相对拓扑我们知道存在$\mathbb{R}$中的开集W_i使得$f(\Omega)\cap W_i=\{c_i\}$，接着由可测函数的定义有$f^{-1}(W_i)$可测（也就是$f^{-1}(\{c_i\})$）。于是我们令$E_i:=f^{-1}(\{c_i\})$（$1\le i\le N$），显然我们可以注意$E_1,\dots,E_N$之间两两互不相交到此时我们考察函数：

$$g=\sum_{i=1}^{N}c_i\chi_{E_i}$$

对任意的$x\in\Omega$，$f(x)$应当是$c_1,\dots,c_N$中的一个实数，我们不妨设它是c_j（从而$x\in E_j$）。那么计算$g(x)$，根据特征函数的性质我们必然有：

$$g(x)=\sum_{i=1}^{N}c_i\chi_{E_i}(x)=\sum_{1\le i\le N;i\neq j}c_i\cdot 0+\sum_{1\le i\le N;i=j}c_i\cdot 1=c_j$$

从而我们可以得证有$f(x)=g(x)$对任意的$x\in\Omega$成立，从而引理19.1.4得证。

19.1.3 证明引理19.1.5 **（提示：令**

$$f_n(x):=\sup\left\{\frac{j}{2^n}:j\in\mathbb{Z},\frac{j}{2^n}\le\min(f(x),2^n)\right\}$$

即$f_n(x)$是既不大于$f(x)$也不大于2^n的2^{-n}的最大整数倍，画一张图来看一下f_1,f_2,f_3等都是什么，然后证明f_n满足所需要的所有性质）

对任意的$n\ge 1$，我们定义函数$f_n:\Omega\to\mathbb{R}$为：

$$f_n(x):=\sup\left\{\frac{j}{2^n}:j\in\mathbb{Z},\frac{j}{2^n}\le\min(f(x),2^n)\right\}$$

我们首先证明每一个f_n都是简单函数。考察f_n的定义，注意到$\left\{\frac{j}{2^n}:j\in\mathbb{Z},\frac{j}{2^n}\le\min(f(x),2^n)\right\}$是有限集，因此上确界$f_n(x)$事实上就是这个集合的最大值；又因为$f(x)$与$2^n$都非负，因此显然有$0\in\left\{\frac{j}{2^n}:j\in\mathbb{Z},\frac{j}{2^n}\le\min(f(x),2^n)\right\}$，从而根据最大值的要求必然有$f_n(x)\ge 0$；另外，由于$\frac{j}{2^n}\le 2^n$，因此我们有$2^n$是$\left\{\frac{j}{2^n}:j\in\mathbb{Z},\frac{j}{2^n}\le\min(f(x),2^n)\right\}$的一个上界，也即有$f_n(x)\le 2^n$。

从而综合上面的内容，我们知道对每一个$x\in\Omega$都存在一个整数$k\in\mathbb{Z}$使得$f_n(x)=\frac{k}{2^n}$与$0\le f_n(x)\le 2^n$同时成立，显然k至多有4^n+1个取值可能，因此必然有$\#(f_n(\Omega))\le 4^n+1$，也即$f_n(\Omega)$是一个有限集。

然后考虑任意的实数a，考察：

$$f_n^{-1}([a,\infty))=\begin{cases}\Omega & \text{if } a\le 0\\ f^{-1}\left(\left[\frac{k+1}{2^n},\infty\right)\right) & \text{if } a\in(0,2^n]\wedge\frac{k}{2^n}<a\le\frac{k+1}{2^n}(k\in\mathbb{Z})\\ \varnothing & \text{if } a>2^n\end{cases}$$

> $a\le 0$与$a>2^n$的情况结论是显然的，主要需要关注第二种情况。$f_n^{-1}([a,\infty))$包含全体满足$f_n(x)\ge a$的$x\in\Omega$，而f_n又只会是2^{-n}的整数倍，因此事实上$f_n^{-1}([a,\infty))$就等于$f_n^{-1}\left(\left[\frac{k+1}{2^n},\infty\right)\right)$；然后我们回顾$f_n$的定义，设$x\in\Omega$是定义域中的一个元素。当$f(x)\ge 2^n$时，此时有$f_n(x)=2^n\in\left[\frac{k+1}{2^n},\infty\right)$；当$\frac{k+1}{2^n}\le f(x)<2^n$时，根据定义也可以得到$f_n(x)\ge\frac{k+1}{2^n}$，也即$x\in f_n^{-1}\left(\left[\frac{k+1}{2^n},\infty\right)\right)$；当$f(x)<\frac{k+1}{2^n}$时，根据定义有$f(x)\le f_n(x)<\frac{k+1}{2^n}$，也即$x\notin f_n^{-1}\left(\left[\frac{k+1}{2^n},\infty\right)\right)$。

> 从而综合我们可以得到$f_n^{-1}([a,\infty)) = f_n^{-1}\left(\left[\frac{k+1}{2^n},\infty\right)\right) = f^{-1}\left(\left[\frac{k+1}{2^n},\infty\right)\right)$，
>
> 这就是第二种情况下结论的由来。

再使用习题18.5.4中我们证明的辅助结论，我们可以得证$f^{-1}([a,\infty))$是可测的。从而同样是依据习题18.5.4证明的辅助结论，我们可以得到f_n是满足“对任意的实数a，都有$f_n^{-1}([a,\infty))$可测”的函数，也就是说f_n是可测的。

综上，于是我们证明了每一个f_n都是满足象集$f_n(\Omega)$有限的可测函数，于是得证每一个f_n都是简单函数。

然后我们证明f_n是逐点收敛于f的。

考虑任意的$x\in\Omega$。由于$(2^n)_{n=1}^{\infty}$是发散到无穷的序列，因此我们知道必然存在一个足够大的$N\geq 0$满足$2^n\geq f(x)$对所有的$n\geq N$都成立。于是我们考虑考察$n\geq N$时$f_n(x)$的取值，此时f_n的定义变为：

$$f_n(x) := \max\left\{\frac{j}{2^n} : j\in\mathbb{Z}, \frac{j}{2^n}\leq f(x)\right\}$$

于是我们有：

$$f_n(x)\leq f(x) < f_n(x)+2^{-n} \implies |f_n(x)-f(x)| < 2^{-n}$$

然后取极限，根据比较原理我们有：

$$0\leq \lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|\leq \lim_{n\to\infty}2^{-n}=0 \implies \lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|=0$$

从而根据命题12.1.1，这表明了$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$。由于此结论对所有的$x\in\Omega$都成立，因此也即$f_n$是逐点收敛于$f$的，结论得证。