# 9.7 介值定理

## 命题

1. (9.7.1 介值定理) 设$a<b$都是实数，$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是$[a,b]$上的连续函数，并且设$y$是介于$f(a)$与$f(b)$之间的一个实数（即要么有$f(a)\leq y\leq f(b)$要么$f(b)\leq y\leq f(a)$），那么存在实数$c\in[a,b]$使得$f(c)=y$。

   （证明已收录至额外注释：介值定理证明；翻译版本中本节的名字是中值定理，但是考虑到这与三大微分中值定理的名字重合，且原书中用词：The intermediate value theorem，个人认为这翻译成介值定理会更好，因此在此笔记中，中值定理将只指代三大微分中值定理，）

2. (9.7.4 推论 连续函数的象) 设$a<b$都是实数，$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是$[a,b]$上的连续函数。设$M:=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$与$m:=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$分别是$f$的最大值与最小值，并且设$y$是介于$m$与$M$之间的一个实数（即$m\leq y\leq M$）。那么存在一个$c\in[a,b]$使得$f(c)=y$，更进一步地，我们有$f([a,b])=[m,M]$。

---

## 课后习题

#### 9.7.1 证明推论9.7.4（提示：除了介值定理之外，你可能还要用到习题9.4.6）

> 根据最大值原理（命题9.6.7），我们知道存在$c,d\in[a,b]$有$f(c)=M$与$f(d)=m$成立，于是我们作限制函数有$f|_{[c,d]}$，根据习题9.4.6的结论有$f|_{[c,d]}$也是连续的，于是运用介值定理，我们有：
>
> 对任意一个$y$是介于$f(c)(M)$与$f(d)(m)$之间的一个实数，于是存在实数$e\in[c,d]$使得$f(e)=y$，特别地，考虑到$[c,d]$是$[a,b]$的子集，于是$e\in[a,b]$，从而推论9.7.4的第一部分得证。
>
> 然后来证明第二部分，根据$M$与$m$的定义，于是对任意的$x\in[a,b]$，都有$f(x)\in[m,M]$，从而根据像的定义应该有：
>
> $$\{f(x):x\in[a,b]\}\subseteq[m,M]\implies f([a,b])\subseteq[m,M]$$
>
> 而根据结论的第一部分，我们又有对任意的实数$y\in[m,M]$，都存在$e\in[a,b]$使得$f(e)=y$，于是应该有：
>
> $$[m,M]\subseteq\{f(x):x\in[a,b]\}\implies[m,M]\subseteq f([a,b])$$
>
> 于是根据集合相等的定义即有$f([a,b])=[m,M]$。

#### 9.7.2 设$f:[0,1]\to[0,1]$是一个连续函数。证明：在$[0,1]$中存在一个实数$x$使得$f(x)=x$（提示：对函数$f(x)-x$使用介值定理），这个点$x$被称为$f$的不动点，这个结果是不动点定理的一个基本例子，它在一定类型的分析理论里有重要的作用

> 考虑令函数$g:[0,1]\to\mathbb{R}$有$g(x):=f(x)-x$。由于$g(0)=f(0)-0=f(0)$，从而根据$f$的定义应当有$g(0)\in[0,1]$；又由于$g(1)=f(1)-1$，从而根据$f$的定义应当有$g(1)\in[-1,0]$。综合可得：
>
> $$g(1)\leq 0\leq g(1)$$
>
> 又因为$f(x)$与$x$都是连续函数，因此$g(x)$也是连续的，从而根据介值定理，存在一个$n\in[0,1]$，使得：

> $$g(n) = 0 \iff f(n) = n$$
>
> 于是结论得证。

---

## 本节相关跳转

[实分析 9.4 连续函数]