9.1 实直线的子集

定义

1. (9.1.1 区间) 设a，$b\in\mathbb{R}^*$是广义实数，定义**闭区间**$[a,b]$为：

$$[a,b]:=\{x\in\mathbb{R}^*:a\leq x\leq b\}$$

定义**半开区间**$[a,b)$与$(a,b]$分别为：

$$[a,b):=\{x\in\mathbb{R}^*:a\leq x<b\}$$
$$(a,b]:=\{x\in\mathbb{R}^*:a<x\leq b\}$$

定义**开区间**(a,b)为：

$$(a,b):=\{x\in\mathbb{R}^*:a<x<b\}$$

我们称a为这些区间的**左端点**，b为这些区间的**右端点**，a与b称为这些区间的**端点**。

（注：有时我们也会称某个端点为无穷（$+\infty$或$-\infty$）的区间为**半无限区间**；称两个端点都是无穷的区间为**双无限区间**；其余区间统称为**有界区间**。此外，当左端点a与右端点b相等时，我们可以证明有开区间(a,b)，半开区间$(a,b]$与$[a,b)$都是空集，闭区间$[a,b]$是单元素集$\{a\}$，此时我们称这些区间是**退化的**，通常来说，我们分析理论的讨论范围都是非退化的区间）

2. (9.1.5 ε-附着) 设X是$\mathbb{R}$的子集，实数$\varepsilon>0$，并且设$x\in\mathbb{R}$，我们称x是ε-附着于X的，当且仅当存在一个$y\in X$使得x与y是ε-接近的，即$|x-y|\leq\varepsilon$。

（注："ε-附着于"并不是文献中的标准术语，但是我们可以利用这个定义来构建实数集子集的附着点的概念（定义9.1.8），其中附着点是标准术语）

3. (9.1.8 实数集合的附着点) 设X是$\mathbb{R}$的子集，并且设$x\in\mathbb{R}$，我们称x是X的一个**附着点**，当且仅当对任意实数$\varepsilon>0$，x都是ε-附着于X的。

4. (9.1.10 闭包) 设X是$\mathbb{R}$的子集，定义X的**闭包**为X的全体附着点所构成的集合，有时我们把X的闭包记作$\overline{X}$。

5. (9.1.15 闭的？) 设X是$\mathbb{R}$的子集，如果有$X=\overline{X}$，即X的所有附着点都包含于X中，那么我们称X是**闭的**。

6. (9.1.18 极限点) 设X是实直线的一个子集，我们称x是X的一个**极限点**（或**聚点**），当且仅当x是$X\backslash\{x\}$的一个附着点。如果$x\in X$，并且存在某个$\varepsilon>0$使得对任意$y\in X\backslash\{x\}$都有$|x-y|\geq\varepsilon$成立，那么我们称x是X的**孤立点**。

7. (9.1.22 有界集合) 设X是实直线的一个子集，如果存在某个正实数$M>0$使得$X\subseteq[-M,M]$，那么称X是有界的。

命题

1. (9.1.11 闭包的初等性质) 设X，Y是$\mathbb{R}$的任意两个子集，那么$X\subseteq\overline{X}$，$\overline{X\cup Y}=\overline{X}\cup\overline{Y}$，且$\overline{X\cap Y}\subseteq\overline{X}\cap\overline{Y}$。此外，如果此时有$X\subseteq Y$，则有$\overline{X}\subseteq\overline{Y}$。

2. (9.1.12 区间的闭包) 设$a<b$都是实数，并且设I是区间(a,b)，$(a,b]$，$[a,b)$，$[a,b]$中的任意一个，那么此时有I的闭包是$[a,b]$；类似的，还有$(a,+\infty)$与$[a,+\infty)$的闭包是$[a,+\infty)$，$(-\infty,a)$与$(-\infty,a]$的闭包是$(-\infty,a]$，$(-\infty,+\infty)$的闭包是$(-\infty,+\infty)$。

3. (9.1.13 闭包的例子？) $\mathbb{N}$的闭包是$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$的闭包是$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$的闭包是$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}$的闭包是$\mathbb{R}$，$\varnothing$的闭包是$\varnothing$。
4. (9.1.14) 设X是$\mathbb{R}$的子集，并且设$x \in \mathbb{R}$。那么x是X的一个附着点，当且仅当存在一个完全由X中元素组成的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于x。

   (注：于是X的附着点都可以由X中的元素的极限而得到，借助这个引理，我们也可以重新定义闭包的概念)
5. (9.1.17 推论与闭包的重新定义) 设X是$\mathbb{R}$的子集，如果X是闭的，并且$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个完全由X中元素组成的收敛序列，那么有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$也属于$X$；反过来，如果每一个由$X$中元素组成的收敛序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的极限也都属于$X$，那么$X$一定是闭的。
6. (9.1.21) 设I是一个区间 (可以是无限的) ，即I是一个形如(a,b)，$(a,b]$，$[a,b)$，$[a,b]$，$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,a)$，$(-\infty,a]$或$(-\infty,+\infty)$的集合，并且对前四种情形有$a<b$成立，那么I中每一个元素都是I的极限点。
7. (9.1.24 直线上的海涅-博雷尔定理) 设X是实直线的一个子集，那么下面两个命题是等价的：

   > - X是闭的且有界的。
   > - 给定任意一个在X中取值的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ (即对任意n均有$a_n \in X$) ，则存在一个它的子序列$(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$收敛于X中的某个数L。

   (注：该定理在本章后面几节有非常大的作用，以距离空间拓扑学的语言来说，该定理断定了实直线的任意一个闭的且有界的子集都是紧的，参见11.7节，该定理更一般的形式由爱德华·海涅与埃米尔·博雷尔给出，参见定理11.7.7)

课后习题

9.1.1 设X是实直线的任意一个子集，并且设Y是满足$X \subseteq Y \subseteq \overline{X}$的集合，证明$\overline{Y} = \overline{X}$

> 对任意$x \in \overline{X}$:
>
> 根据定义9.1.8，对任意$\varepsilon > 0$，都存在$e \in X$满足$|x-e| \le \varepsilon$。根据题目条件有$X \subseteq Y$，从而$e \in Y$。于是上结论可改为对任意$\varepsilon > 0$，都存在$e \in Y$满足，$|x-e| \le \varepsilon$，Y的极限点。从而根据闭包定义有$x \in \overline{Y}$成立。
>
> 对任意$y \in \overline{Y}$:
>
> 对任意$\varepsilon > 0$，我们取$\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$。根据定义9.1.8，对$\varepsilon'$存在$e \in Y$满足$|y-e| \le \varepsilon'$。根据题目条件有$Y \subseteq \overline{X}$，从而$e \in \overline{X}$。又由于$e$是$X$的一个附着点，于是对$\varepsilon'$存在一个$e' \in X$满足$|e'-e| \le \varepsilon'$。综合一下有：
>
> $$\text{对任意}\varepsilon > 0,\text{存在}e' \in X\text{与}e \in \overline{X}\text{有}|y-e'| \le |y-e| + |e'-e| \le \varepsilon$$
>
> 即y是X的一个附着点，从而$y \in \overline{X}$。
>
> 综上，对任意$x \in \overline{X}$，都有$x \in \overline{Y}$；对任意$y \in \overline{Y}$，都有$y \in \overline{X}$。于是得证$\overline{X} = \overline{Y}$。

9.1.2 证明引理9.1.11

> 对引理中的结论逐条证明：
>
> 1. $X \subseteq \overline{X}$。
>
> 对任意$x \in X$，都有对任意$\varepsilon > 0$存在$x \in X$满足$|x-x| = 0 \le \varepsilon$，从而$x$就是$X$的一个附着点，即$x \in \overline{X}$。于是有$X \subseteq \overline{X}$。
>
> ---

2. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$。

对任意$e \in \overline{X \cup Y}$:

根据定义有对任意$\varepsilon > 0$都存在$e' \in X \cup Y$有$|e - e'| \leq \varepsilon$成立。然后考虑$e$的性质:

- 若e不属于$\overline{X}$:

> 即存在一个$\varepsilon' > 0$，对任意$x \in X$都有$|e - x| > \varepsilon'$。而根据上面的前提，又应该有对任意$0 < \varepsilon < \varepsilon'$都存在$e' \in X \cup Y$满足$|e - e'| > \varepsilon'$，综合只能有$e' \in Y$（实际上是$e' \in Y \backslash X$，但是我们只要用到$e' \in Y$），于是我们定义一个取$e_\varepsilon$的方式:
>
> $$e_\varepsilon := \begin{cases} e_{\frac{1}{2}\varepsilon'} & \text{若}\varepsilon \geq \varepsilon' \\ e'(\text{即通过上面的条件获取的}e') & \text{若}0 < \varepsilon < \varepsilon' \end{cases}$$
>
> 从而对任意$\varepsilon > 0$，总有存在$e_\varepsilon \in Y$满足$|e - e_\varepsilon| < \varepsilon$成立，于是$e$是$Y$的附着点，即$e \in \overline{Y}$。

- 若e不属于$\overline{Y}$:

> 即存在一个$\varepsilon' > 0$，对任意$y \in Y$都有$|e - y| > \varepsilon'$。而根据上面的前提，又应该有对任意$0 < \varepsilon < \varepsilon'$都存在$e' \in X \cup Y$满足$|e - e'| > \varepsilon'$，综合只能有$e' \in X$（实际上是$e' \in X \backslash Y$，但是我们只要用到$e' \in Y$），于是我们定义一个取$e_\varepsilon$的方式:
>
> $$e_\varepsilon := \begin{cases} e_{\frac{1}{2}\varepsilon'} & \text{若}\varepsilon \geq \varepsilon' \\ e'(\text{即通过上面的条件获取的}e') & \text{若}0 < \varepsilon < \varepsilon' \end{cases}$$
>
> 从而对任意$\varepsilon > 0$，总有存在$e_\varepsilon \in X$满足$|e - e_\varepsilon| < \varepsilon$成立，于是$e$是$X$的附着点，即$e \in \overline{X}$。

所以无论什么情况e总会属于$\overline{X}$或属于$\overline{Y}$，即$e \in \overline{X} \cup \overline{Y}$。

对任意$e \in \overline{X} \cup \overline{Y}$:

即$e \in \overline{X}$或$e \in \overline{Y}$，于是分类讨论（两者证明方法是一模一样的，同模板）:

- $e \in \overline{X}$:

> 于是根据定义，有对任意$\varepsilon > 0$，都存在$x \in X$满足$|e - x| \leq \varepsilon$。特别地，考虑到$x \in X \cup Y$，于是该结论可直接改为：对任意$\varepsilon > 0$，都存在$x \in X \cup Y$满足$|e - x| \leq \varepsilon$。即e是$X \cup Y$的附着点，从而$e \in \overline{X \cup Y}$。

- $e \in \overline{Y}$:

> 于是根据定义，有对任意$\varepsilon > 0$，都存在$y \in Y$满足$|e - y| \leq \varepsilon$。特别地，考虑到$y \in X \cup Y$，于是该结论可直接改为：对任意$\varepsilon > 0$，都存在$y \in X \cup Y$满足$|e - x| \leq \varepsilon$。即e是$X \cup Y$的附着点，从而$e \in \overline{X \cup Y}$。

综合即$e \in \overline{X \cup Y}$。

于是综上有若$e \in \overline{X \cup Y}$，则$e \in \overline{X} \cup \overline{Y}$；若$e \in \overline{X} \cup \overline{Y}$，则$e \in \overline{X \cup Y}$。

---

3. $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$。

对任意$e \in \overline{X \cap Y}$，根据定义有对任意$\varepsilon > 0$，都存在$e' \in X \cap Y$满足$|e - e'| \leq \varepsilon$。特别地，由与$e' \in X \cap Y \iff e' \in X$且$e' \in Y$，于是上面的条件可以分开写有:

- 对任意$\varepsilon > 0$，都存在$e' \in X$满足$|e - e'| \leq \varepsilon \iff e \in \overline{X}$。
- 对任意$\varepsilon > 0$，都存在$e' \in Y$满足$|e - e'| \leq \varepsilon \iff e \in \overline{Y}$。

从而即$e \in \overline{X} \cap \overline{Y}$，于是即$\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$得证。

---

4. 若有$X \subseteq Y$，则有$\overline{X} \subseteq \overline{Y}$。

则对任意的$e \in \overline{X}$，根据定义有对任意$\varepsilon > 0$，都存在$e' \in X$满足$|e - e'| \leq \varepsilon$。又根据题设，有$X \subseteq Y$，于是$e' \in Y$。代入该结论后即有：对任意$\varepsilon > 0$，都存在$e' \in Y$满足$|e - e'| \leq \varepsilon$。于是根据定义，这表明$e$是$Y$的附着点，即$e \in \overline{Y}$。

综上，对任意的$e \in \overline{X}$，都有$e \in \overline{Y}$，即$\overline{X} \subseteq \overline{Y}$。

9.1.3 证明引理9.1.13（提示：为了证明$\mathbb{Q}$的闭包是$\mathbb{R}$，你可能需要用到命题5.4.14）

逐个证明：

1. $\varnothing$的闭包是$\varnothing$。

根据定义对任意$n \in \overline{\varnothing}$，都有：对任意实数$\varepsilon > 0$，都有$n_\varepsilon \in \varnothing$满足$|n - n_\varepsilon| \leq \varepsilon$。然而根据空集的性质，不存在任何元素$n_\varepsilon \in \varnothing$，从而前命题是恒伪的，于是只能有$\overline{\varnothing} = \varnothing$。

---

2. $\mathbb{N}$的闭包是$\mathbb{N}$。

根据定义对任意$n \in \overline{\mathbb{N}}$，都有：对任意实数$\varepsilon > 0$，都有$n_\varepsilon \in \mathbb{N}$满足$|n - n_\varepsilon| \leq \varepsilon$。若$n \in \mathbb{N}$，则由引理9.1.11即可得到$n \in \overline{\mathbb{N}}$；若$n \notin \mathbb{N}$，则考虑令$n_0 = \lfloor n \rfloor$（可能不是自然数），有$n_0 \leq n < n_0 + 1$，并取$d = \min(|n_0 - n|, |n_0 + 1 - n|)$。然后对$\varepsilon = \dfrac{d}{2}$，注意到对$n_0$与$n_0 + 1$有$|n_0 - n| > \varepsilon$与$|n_0 + 1 - n| > \varepsilon$。并且对任意非$n_0$与$n_0 + 1$的自然数$n_1$，可以讨论：

$$\begin{cases} n_1 > n_0 + 1 \Longrightarrow |n_1 - n| = n_1 - n > n_0 + 1 - n > \varepsilon \\ n_1 < n_0 \Longrightarrow |n_1 - n| = n - n_1 > n - n_0 > \varepsilon \ (\text{此情况不一定存在}) \end{cases}$$

于是总是有对任意自然数$n_1 \in \mathbb{N}$，都有$|n - n_1| > \varepsilon$，这表明n不是$\mathbb{N}$的一个附着点，也即$n \notin \overline{\mathbb{N}}$。

综上，于是得证有$\mathbb{N}$的闭包是$\mathbb{N}$。

---

3. $\mathbb{Z}$的闭包是$\mathbb{Z}$。

根据定义对任意$z \in \overline{\mathbb{Z}}$，都有：对任意实数$\varepsilon > 0$，都有$z_\varepsilon \in \mathbb{Z}$满足$|z - z_\varepsilon| \leq \varepsilon$。若$z \in \mathbb{Z}$，则由引理9.1.11即可得到$z \in \overline{\mathbb{Z}}$；若$z \notin \mathbb{Z}$，则考虑令$z_0 = \lfloor n \rfloor$，有$z_0 \leq z < z_0 + 1$，并取$d = \min(|z_0 - z|, |z_0 + 1 - z|)$。然后对$\varepsilon = \dfrac{d}{2}$，注意到对$z_0$与$z_0 + 1$有$|z_0 - z| > \varepsilon$与$|z_0 + 1 - z| > \varepsilon$。并且对任意非$z_0$与$z_0 + 1$的整数$z_1$，可以讨论：

$$\begin{cases} z_1 > z_0 + 1 \Longrightarrow |z_1 - z| = z_1 - z > z_0 + 1 - z > \varepsilon \\ z_1 < z_0 \Longrightarrow |z_1 - z| = z - z_1 > z - z_0 > \varepsilon \end{cases}$$

于是总是有对任意整数$z_1 \in \mathbb{Z}$，都有$|z - z_1| > \varepsilon$，这表明z不是$\mathbb{Z}$的一个附着点，也即$z \notin \overline{\mathbb{N}}$。

综上，于是得证有$\mathbb{Z}$的闭包是$\mathbb{Z}$。

> 4. $\mathbb{Q}$的闭包是$\mathbb{R}$。
>
> 根据定义对任意$q \in \overline{\mathbb{Q}}$，都有：对任意实数$\varepsilon > 0$，都有$q_\varepsilon \in \mathbb{Q}$满足$|q - q_\varepsilon| \leq \varepsilon$。于是对任意给定$r \in \mathbb{R}$，考虑任意的$\varepsilon > 0$。根据命题5.4.14我们总有存在一个$q_\varepsilon \in \mathbb{Q}$有$r - \varepsilon < q_\varepsilon < r$。这表明对任意$r \in \mathbb{R}$都有$r \in \overline{\mathbb{Q}}$；又根据定义9.1.8，对任意$\mathbb{Q}$的附着点$r$（即$r \in \overline{\mathbb{Q}}$），都有$r \in \mathbb{R}$，于是有$\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R}$。于是综合即有$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$，即$\mathbb{Q}$的闭包是$\mathbb{R}$。
>
> ---
>
> 5. $\mathbb{R}$的闭包是$\mathbb{R}$。
>
> 根据定义9.1.8，对任意$\mathbb{R}$的附着点r（即$r \in \overline{\mathbb{R}}$），都有$r \in \mathbb{R}$，于是有$\overline{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}$；而根据引理9.1.11，又有$\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$。综合即$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$，即$\mathbb{R}$的闭包是$\mathbb{R}$得证。

9.1.4 举例说明，实直线的子集X，Y满足$\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$

> 考虑最简单的一个例子：
>
> 令$X = [-1, 0)$，$Y = (0, 1]$。计算后不难得到有$\overline{X} = [-1, 0]$与$\overline{Y} = [0, 1]$，于是有：
>
> $$\overline{X \cap Y} = \overline{\varnothing} = \varnothing \quad \overline{X} \cap \overline{Y} = \{0\}$$
>
> 显然$\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$。

9.1.5 证明引理9.1.14（提示：为了证明两个蕴含关系中的其中一个，你需要用到[选择公理]，就像在[引理8.4.5]的证明里那样）

> 分别证明充分必要条件：
>
> - 必要条件：若x是X的一个附着点，则存在一个完全由X中元素组成的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于x。
>
> 由于x是X的一个附着点，从而根据定义，对任意的$\varepsilon > 0$都有存在$x' \in X$满足$|x - x'| \leq \varepsilon$。于是进一步对任意的自然数$n \in \mathbb{N}$，集合$X_n := \left\{x' \in X : |x - x'| \leq \dfrac{1}{n+1}\right\}$都是非空的。根据选择公理，于是存在一个函数$f \in \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n\right)^{\mathbb{N}}$满足对任意的$n \in \mathbb{N}$都指定了一个$a_n \in X_n$。
>
> 然后探讨序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的收敛情况，根据命题5.4.13阿基米德性质，对任意$\varepsilon > 0$，总存在自然数N满足$N\varepsilon > 1 \iff \varepsilon > \dfrac{1}{N}$，于是对任意$n \geq N$，根据$X_n$定义，总有$|a_n - x| \leq \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{N} < \varepsilon$成立。根据定义，这说明序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于$x$，于是结论得证。
>
> ---
>
> - 充分条件：若存在一个完全由X中元素组成的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于x，则x是X的一个附着点。
>
> 根据序列收敛的定义，从而对任意$\varepsilon > 0$，都存在$N \in \mathbb{N}$满足对任意$n \geq N$都有$|a_n - x| \leq \varepsilon$，特别地，$|a_N - x| \leq \varepsilon$，考虑到序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是完全$X$中元素组成的，于是上结论可改为：对任意$\varepsilon > 0$，都存在$a_N \in X$满足$|a_N - x| \leq \varepsilon$成立。这也就是附着点的定义，从而$x$是$X$的一个附着点。

9.1.6 设X是$\mathbb{R}$的子集，证明：$\overline{X}$是闭的（即$\overline{X}=\overline{\overline{X}}$）。另外证明：如果$Y$是任意一个包含$X$的闭集，那么$Y$也包含$\overline{X}$，从而$X$的闭包$\overline{X}$是包含$X$的最小闭集（注：注意区分闭包和闭集（闭的集合）的概念，一个是来自已有集合的构造，另一个则是描述集合的所拥有的性质）

> 证明：$\overline{X}$是闭的。
>
> 对任意$x\in\overline{\overline{X}}$，根据闭包定义，对任意$\varepsilon>0$，总存在$x'\in\overline{X}$满足$|x'-x|\leq\varepsilon$成立。而根据引理9.1.11，由$X\subseteq\overline{X}$，于是即前结论又可改为：对任意$x\in\overline{X}$有对任意$\varepsilon>0$，总存在$x'\in\overline{X}$满足$|x'-x|\leq\varepsilon$成立。于是$x$是$\overline{X}$的附着点，即$x\in\overline{\overline{X}}$，从而有$\overline{X}\subseteq\overline{\overline{X}}$。
>
> 对任意$x\in\overline{\overline{X}}$，考虑任意$\varepsilon>0$，我们令$\varepsilon'=\dfrac{1}{2}\varepsilon$。根据闭包定义，总存在$x_0'\in\overline{X}$满足$|x_0'-x|\leq\varepsilon'$成立。又由于$\overline{X}$也是闭包，于是根据闭包定义，总存在一个$x_1'\in X$满足$|x_1'-x|\leq\varepsilon'$。于是上结论可总结有：
>
> 任意$\varepsilon>0$，令$\varepsilon'=\dfrac{1}{2}\varepsilon$，则存在一个$x_1'\in X$与$x_0'\in\overline{X}$满足：
>
> $$|x-x_1'|\leq|x-x_0'|+|x_0'-x_1'|\leq 2\varepsilon'=\varepsilon$$
>
> 总结即对任意$\varepsilon>0$，总存在一个$x_1'\in X$满足$|x-x_1'|\leq\varepsilon$。即x是X的附着点，从而$x\in\overline{X}$，即有$\overline{\overline{X}}\subseteq\overline{X}$。
>
> 综上，于是有$\overline{X}=\overline{\overline{X}}$得证，即$\overline{X}$是闭的。
>
> ---
>
> 证明：如果Y是任意一个包含X的闭集，那么Y也包含$\overline{X}$。
>
> 对任意$x\in\overline{X}$，根据闭包定义，对任意$\varepsilon>0$，总存在$x'\in X$满足$|x'-x|\leq\varepsilon$成立。而根据题设，于是又有$x'\in X\implies x'\in Y$。替换前结论即对任意$\varepsilon>0$，总存在$x'\in Y$满足$|x'-x|\leq\varepsilon$成立，从而x是Y的附着点，即$x\in\overline{Y}$。又根据Y是闭的，根据定义即有$Y=\overline{Y}$。综合即有对任意$x\in\overline{X}$，都有$x\in Y$，即$\overline{X}\subseteq Y$。

9.1.7 设$n\geq 1$是一个正整数，并且设X_1，X_2，...，X_n都是$\mathbb{R}$的闭子集。证明：$X_1\cup X_2\cup...\cup X_n$也是闭集

> 使用数学归纳法证明结论：
>
> 当$n=1$时，即证明X_1是闭集，这根据题设即可得到结论。
>
> 现归纳性假设当$n=k$时成立结论，对$n=k+1$时：
>
> $$X_1\cup X_2\cup...\cup X_{k+1}=(X_1\cup X_2\cup...\cup X_k)\cup X_{k+1}$$
>
> 而根据归纳假设与题设，我们有：
>
> $$X_1\cup X_2\cup...\cup X_k=\overline{X_1\cup X_2\cup...\cup X_k}\qquad X_{k+1}=\overline{X_{k+1}}$$
>
> 再根据引理9.1.11，又有：
>
> $$\overline{X_1\cup X_2\cup...\cup X_k}\cup\overline{X_{k+1}}=\overline{X_1\cup X_2\cup...\cup X_{k+1}}$$
>
> 于是综合即有：
>
> $$X_1\cup X_2\cup...\cup X_{k+1}=\overline{X_1\cup X_2\cup...\cup X_{k+1}}$$
>
> 从而$X_1\cup X_2\cup...\cup X_{k+1}$也是闭集。

> 综上，于是归纳得证，我们得到若X_1，X_2，$\dots$，X_n都是$\mathbb{R}$的闭子集，则$X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$也是闭集。

9.1.8 设I是一个集合（可以是无限的），并且对任意$\alpha \in I$，设X_α为$\mathbb{R}$的闭子集。证明（式(3.3)（并集公理下方内容）中定义的）的交集$\bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha$也是闭集

> 令有$A := \bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha$，在下面的证明中我们不会写$\bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha$而是用$A$替代。
>
> 考虑x是A的附着点（即$x \in \overline{A}$），于是根据定义应有对任意$\varepsilon > 0$，都存在$x' \in A$满足$|x - x'| \leq \varepsilon$。由$A$的定义，我们又有对任意的$\alpha \in I$，都有$x' \in X_\alpha$。于是对任意$\alpha \in I$我们都可以得出下面的结论：
>
> 对任意$\varepsilon > 0$，都存在$x' \in X_\alpha$满足$|x - x'| \leq \varepsilon$，于是$x \in \overline{X_\alpha}$，又由于$X_\alpha$是闭的于是即$x \in X_\alpha$。
>
> 即对任意$\alpha \in I$，都有$x \in X_\alpha$，从而根据A的定义，应有$x \in A$。综上即对任意$x \in \overline{A}$都有$x \in A$，即$\overline{A} \subseteq A$。而根据引理9.1.11，又有$A \subseteq \overline{A}$，综合有$A = \overline{A}$，即集合$A := \bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha$是一个闭集得证。

9.1.9 设X是实直线的一个子集，证明：X的每一个附着点要么是X的极限点，要么是X的孤立点，但不可能同时是X的孤立点和极限点。反过来，证明X的每一个极限点和孤立点都是X的附着点

> 证明：X的每一个附着点要么是X的极限点，要么是X的孤立点，但不可能同时是X的孤立点和极限点。
>
> 设x是X的附着点。根据附着点的定义，于是对任意的$\varepsilon > 0$，都存在$x' \in X$满足$|x - x'| \leq \varepsilon$。此时对$\varepsilon > 0$令有集合$S_\varepsilon$：
>
> $$S_\varepsilon := \{e \in X : |e - x| \leq \varepsilon\}$$
>
> 根据上结论于是对任意$\varepsilon > 0$，S_ε都是非空的；并且可以注意到对任意$\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1 > 0$，总有$S_{\varepsilon_1} \subseteq S_{\varepsilon_1}$成立。基于这两个结论，我们讨论对任意$\varepsilon > 0$，集合$S_\varepsilon \backslash \{x\}$的可能：
>
> 1. 对任意$\varepsilon > 0$，$S_\varepsilon \backslash \{x\}$总是非空的。
>
>   > 从而在此情景下，对任意$\varepsilon > 0$，都有$S_\varepsilon \backslash \{x\}$非空$\iff$存在$x' \in X$且$x' \notin \{x\}$满足$|x' - x| \leq \varepsilon \iff$存在$x' \in X \backslash \{x'\}$满足$|x' - x| \leq \varepsilon$。这表明$x$是$X \backslash \{x\}$的一个附着点，从而根据定义9.1.18，$x$是$X$的极限点。
>
> 2. 存在某个$\varepsilon_0 > 0$，使得$S_{\varepsilon_0} \backslash \{x\}$是一个空集。
>
>   > 从而在此情景下，对$\varepsilon_0 > 0$，有$S_{\varepsilon_0} \backslash \{x\}$为空$\iff$对任意$x' \in X$且$x' \notin \{x\}$有$|x' - x| > \varepsilon \iff$对任意$x' \in X \backslash \{x'\}$都有$|x' - x| > \varepsilon \iff |x' - x| \geq \varepsilon$；又考虑有$S_{\varepsilon_0}$是非空的，从而只能$S_{\varepsilon_0} = \{x\}$，即$x \in X$。从而根据定义9.1.18，$x$是$X$的孤立点。
>
> 此外讨论极限点与附着点的定义：若x是极限点，则对任意$\varepsilon > 0$都有存在$y \in X$满足$|y - x| \leq \varepsilon$；若x为孤立点，则存在$\varepsilon_0 > 0$满足对任意$y \in X$都有$|y - x| \geq \varepsilon_0$成立。则若$x$同时是$X$的极限点与孤立点，则考虑$\frac{\varepsilon_0}{2}$的情况：$x$是极限点，从而存在$y_0 \in X$满足$|y_0 - x| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$；$x$是孤立点，从而对任意$y \in X$都有$|y - x| \geq \varepsilon_0$成立。于是$y_0$同时满足：
>
> $$|y_0 - x| \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \qquad |y_0 - x| \geq \varepsilon_0$$

两者是矛盾的，从而对任意实直线的子集X都不可能存在一个$x \in X$满足x同时是X的极限点与孤立点。

综上，对任意X的附着点，其要么是X的极限点，要么是X的孤立点，但不可能同时是X的孤立点和极限点。

证明：X的每一个极限点和孤立点都是X的附着点。

两种情况分别讨论：

1. x是X的极限点。

> 则x是$X\backslash\{x\}$的极限点，即对任意$\varepsilon > 0$，都存在$x' \in X\backslash\{x\}$满足$|x'-x| \leq \varepsilon$，特别地，$x' \in X\backslash\{x\} \implies x' \in X$，于是上结论即可写有：对任意$\varepsilon > 0$，都存在$x' \in X$满足$|x'-x| \leq \varepsilon$，即$x$是$X$的附着点。

2. x是X的孤立点。

> 则$x \in X$，从而对任意$\varepsilon > 0$，都存在$x \in X$满足$|x-x| = 0 \leq \varepsilon$，从而根据定义即有$x$是$X$的附着点。

综上即有X的每一个极限点和孤立点都是X的附着点。

9.1.10 设X是$\mathbb{R}$的一个非空子集，证明：X是有界的，当且仅当$\inf(X)$与$\sup(X)$都是有限的

分别证明充分必要条件：

- 必要条件：若X是有界的，则$\inf(X)$与$\sup(X)$都是有限的。

X有界，则根据定义9.1.22,有存在正实数M满足对任意$x \in X$都有$|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M$，从而$X$是有上界与下界的，此时根据最小上界原理与最大下界原理，$\sup(X)$与$\inf(X)$均存在并且有对任意$x \in X$满足：

$$-M \leq \inf(X) \leq x \leq \sup(X) \leq M$$

从而$\inf(X)$与$\sup(X)$都是有限的。

- 充分条件：若$\inf(X)$与$\sup(X)$都是有限的，则X是有界的。

此时我们选取实数$M := \max(|\sup X|, |\inf X|) + 1$，于是对任意的$x \in X$，讨论有：

若$x \geq 0$，则根据$\sup(X)$的定义，有$0 \leq x \leq \sup(X) \implies |x| \leq |\sup(X)|$，从而$|x| \leq |\sup(X)| \leq M$成立；若$x < 0$，则根据$\inf(X)$的定义，有$\inf(X) \leq x < 0 \implies |x| \leq |\inf(X)|$，从而$|x| \leq |\inf(X)| \leq M$成立。讨论

于是即存在实数M满足对任意的$x \in X$都有$|x| \leq M$，于是$X \subseteq [-M, M]$，根据定义9.1.22即X是有界的。

9.1.11 证明：如果X是$\mathbb{R}$的一个有界子集，则闭包$\overline{X}$是有界的

设X的界为M。对任意的$x \in \overline{X}$，根据定义9.1.8有对任意$\varepsilon > 0$都存在$x' \in X$满足$|x-x'| \leq \varepsilon$。从而我们考虑一个小于1的ε，并记此时的x'为x_ε，于是有：

$$|x| \leq |x'| + |x-x'| \leq M + \varepsilon < M + 1$$

于是即存在实数$M+1$满足对任意的$x \in \overline{X}$都有$|x| \leq M+1$，即$\overline{X}$是有界的。

9.1.12 证明：$\mathbb{R}$的任意有限多个有界子集的并集仍然是一个有界集合。思考：如果换成$\mathbb{R}$的任意无限多个有界子集，那么结论还成立吗

> 由于是有限多个，从而集合的数量总是一个已知的自然数n，于是我们分别记有这些有界子集为$A_i(1\leq i\leq n)$，使用归纳法证明：
>
> 对$n=0$时，此时有$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\varnothing$，而根据定义9.1.22，对任意正实数$M$都有$M$是$\varnothing$的界，于是此情景下结论得证。
>
> 现归纳性假设对$n=k$时有结论成立，于是对$n=k+1$时讨论：
>
> 此时有：
>
> $$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)\cup A_{k+1}$$
>
> 根据归纳假设，我们有$\bigcup_{i=1}^{k}A_i$是一个有界的，于是我们设其满足为$[-N,N]$的子集；而根据题设，我们有A_{k+1}是有界的，于是我们设其满足为$[-M,M]$的子集，此时我们令有实数$L:=\max(M,N)$，对任意$x\in\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i$，讨论：
>
> - $x\in A_{k+1}$：
>
>   > 根据有界的定义，于是有$|x|\leq M\leq L$，于是$|x|\leq L$。
>
> - $x\in\bigcup_{i=1}^{k}A_i$：
>
>   > 根据有界的定义，于是有$|x|\leq N\leq L$，于是$|x|\leq L$。
>
> 综上即对任意$x\in\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i$都有$|x|\leq L\iff\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i\subseteq[-L,L]$，从而$\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i$是有界的，于是此情况下结论得证。
>
> 综上，于是归纳可得证结论$\mathbb{R}$的任意有限多个有界子集的并集仍然是一个有界集合。
>
> ---
>
> 思考：
>
> 对$\mathbb{R}$的任意无限多个有界子集的并集，上面的结论显然是不成立的。不妨对任意$i\in\mathbb{N}$令有$A_i=\{i\}$，显然A_i是有界的，从而我们获得了无限个$\mathbb{R}$的有界子集，但是它们的并集$\mathbb{N}$显然是一个无界集合。

9.1.13 证明定理9.1.24（提示：利用波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理（定理6.6.8）和推论9.1.17去证明(a)蕴含着(b)；采用反证法证明(b)蕴含着(a)，其中利用推论9.1.17证明X是闭的，还要用选择公理证明X是有界的，就像在引理8.4.5中那样）

> 分别证明充分必要条件：
>
> - 必要条件：若X是闭的且有界的，则给定任意一个在X中取值的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，都存在一个它的子序列$(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$收敛于X中的某个数L。

根据题设，由于X是有界的，从而根据定义，存在正实数M满足$X \subseteq [-M, M]$。从而对任意$n \in \mathbb{N}$，都有$|a_n| \leq M$成立，即序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是有界的。此时根据波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理有存在一个序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列$(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$使得该子序列收敛。再根据推论9.1.17有$\lim\limits_{j \to \infty} a_{n_j} \in X$，从而综合有：

若X是闭的且有界的，则给定任意一个在X中取值的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，都存在一个它的子序列$(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$收敛于X中的某个数L。

于是结论得证。

- 充分条件：若给定任意一个在X中取值的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，都存在一个它的子序列$(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$收敛于X中的某个数L，则X是闭的且有界的。

证明X是闭的：

我们考虑任意在X中取值且收敛的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，此时根据命题6.6.5的结论我们有$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的任意一个子序列都与$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于相同的值，而根据题设，存在$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列收敛于X中的某个数L。从而结合有对任意在X中取值且收敛的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$都收敛于X中的某个数L。根据推论9.1.17，这表明X是闭的。

证明X是有界的：

不妨使用反证法，我们假设X不是有界的，从而对任意的正实数M，都不应当存在$X \subseteq [-M, M]$，换言之即对任意正实数M都存在$X \backslash [-M, M]$是非空的。特别地，我们对自然数集中的元素应用这个结论，于是可以得到一系列非空的集合$S_i (i \in \mathbb{N})$有：

$$S_i := X \backslash [-i, i]$$

（严格意义上来说应该只能直接得到$i > 0$的S_i是非空的，但是我们可以通过S_1非空推知$X \backslash \{0\}$也是非空的，从而S_0的定义无伤大雅）

于是根据选择公理，我们可以得知存在一个函数f满足对任意$n \in \mathbb{N}$指定一个$s_n \in S_n$，此时考虑序列$(s_n)_{n=0}^{\infty}$。根据题设我们应该有存在一个$(s_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列$(s_{n_j})_{j=0}^{\infty}$满足其收敛于某个X中元素L，即对任意$\varepsilon > 0$，总能找到$J \geq 0$满足$|a_{n_j} - L| \leq \varepsilon$对任意$j \geq J$都成立，我们记$\varepsilon$取1时对应的$J$为$J_1$；又根据$s_i$的定义我们有对任意$i \geq \lfloor L \rfloor + 2$都有$|s_i| \geq \lfloor L \rfloor + 2$。由子序列的定义又$n_j \geq j$对任意$j \in \mathbb{N}$成立，从而我们考虑任意的$j \geq \max(\lfloor L \rfloor + 2, J_1)$，有：

$$\begin{cases} j > J_1 \implies |a_{n_j} - L| \leq 1 \implies |a_{n_j}| \leq |a_{n_j} - L| + |L| \leq L + 1 \\ \\ j > \lfloor L \rfloor + 2 \implies n_j \geq \lfloor L \rfloor + 2 \implies |a_{n_j}| \geq \lfloor L \rfloor + 2 \implies |a_{n_j}| > L + 1 \end{cases}$$

从而导出了矛盾，于是X只能是有界的。

综上，若给定任意一个在X中取值的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，都存在一个它的子序列$(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$收敛于X中的某个数L，则X是闭的且有界的。

9.1.14 证明：$\mathbb{R}$的任意一个有限子集既是闭的也是有界的

对$\mathbb{R}$的任意一个有限子集X，若其基数为n，则根据基数定义存在唯一一个双射$f : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\} \to X$，于是我们可以将$X$写有：

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad (\forall 1 \leq i \leq n, A_i := \{f(i)\})$$

并且对任意的$1 \leq i \leq n$，都显然有A_i都是有界的且闭的。于是此时根据习题9.1.7与习题9.1.12的结论，可以得证X作为它们的并集也既是闭的又是有界的。

9.1.15 设E是$\mathbb{R}$的一个有界子集，并且设$S := \sup(E)$是E的最小上界（注：根据最小上界原理（即定理5.5.9）可知，S是一个实数）。证明：S是E的一个附着点，同时也是$\mathbb{R} \backslash E$的一个附着点

> 根据最小上界的性质，我们有：
>
> > - 对任意实数$M > S$，都有M是E的上界，即对任意$e \in E$都有$e < M$。
> > - 对任意实数$N < S$，都有N不是E的上界，即总存在$e \in E$满足$N \le e \le S$。
> > - 对任意$e \in E$，都有$e \le S$。
>
> 明确了上面的性质后，下面我们来证明题目的结论：
>
> 1. 证明：S是E的一个附着点。
>
> > 对任意$\varepsilon > 0$，根据上面的性质，我们总有存在元素$e \in E$满足$S - \varepsilon \le e \le S$，于是即$|e - S| \le \varepsilon$，从而根据附着点的定义，$S$是$E$的一个附着点。
>
> 2. 证明：S是$\mathbb{R} \backslash E$的一个附着点。
>
> > 对任意$\varepsilon > 0$，根据上面的性质，有任意的实数$r \in (S, S + \varepsilon]$都有$r \notin E$，从而有$S + 0.5\varepsilon \in \mathbb{R} \backslash E$且$|S + 0.5\varepsilon - S| \le \varepsilon$，于是根据定义，有$S$是$\mathbb{R} \backslash E$的一个附着点。
>
> 综上，于是S同时是E与$\mathbb{R} \backslash E$的附着点。

本节相关跳转

实分析 3.4 象和逆象

实分析 5.4 对实数排序

实分析 6.6 子序列

实分析 8.4 选择公理

实分析 11.7 非黎曼可积的函数