

## 10.4 反函数及其导数

### 命题

1. (10.4.1 反函数的导数?) 设  $f: X \rightarrow Y$  是一个可逆函数, 它的反函数为  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ , 并且设  $x_0 \in X$  与  $y_0 \in Y$  使得  $y_0 = f(x_0)$  (这同时蕴含了  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ )。若有  $f$  在  $x_0$  处是可微的, 并且  $f^{-1}$  也在  $y_0$  处是可微的, 那么有:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

(注: 这个引理可以通过链式法则 (定理10.1.5) 推知; 需要注意的是, 虽然这个引理看似给出了一个非常简单的反函数微分计算方法, 但是它有一个重大的缺陷: 必须假定  $f^{-1}$  也在  $y_0$  处可微, 当面对反函数的可微性难以证明时这样的缺陷是致命的, 因此我们给出下面条件更加宽松的反函数定理来解决这个问题)

2. (10.4.1 反函数定理) 设  $f: X \rightarrow Y$  是一个可逆函数, 它的反函数为  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ , 并且设  $x_0 \in X$  与  $y_0 \in Y$  使得  $y_0 = f(x_0)$  (这同时蕴含了  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ )。若有  $f$  在  $x_0$  处是可微的,  $f^{-1}$  在  $y_0$  处是连续的, 且  $f'(x_0) \neq 0$ , 那么  $f^{-1}$  在  $y_0$  处可微, 并且有:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

(注: 反函数定理的证明需要用到极限定理与命题9.3.9, 在翻回课本前不妨先大致设想一下怎么证明; 本节的习题都是关于反函数定理的实际运用)

### 课后习题

10.4.1 设  $n \geq 1$  是一个自然数, 并且设  $g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  是函数  $g(x) := x^{1/n}$

(a) 证明:  $g$  在  $(0, +\infty)$  上是连续的 (提示: 利用命题9.8.3)

我们知道有  $g$  是定义为  $f(y) = y^n$  的函数  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  的反函数, 并且  $f$  显然是一个严格单调递增的连续函数, 于是根据命题9.8.3, 我们有  $g$  也是严格单调递增的连续函数。

(b) 证明:  $g$  在  $(0, +\infty)$  上是可微的, 并且对所有的  $x \in (0, +\infty)$  均有  $g'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$  (提示: 利用反函数定理和(a)的结论)

接上(a), 根据习题10.1.5的结论, 我们知道有  $f$  是在  $(0, +\infty)$  上可微的, 并且对任意所有的  $y \in (0, +\infty)$  均有  $f'(y) = ny^{n-1}$ , 于是根据反函数定理有:

对任意的  $x \in (0, +\infty)$ ,  $g$  在  $x$  处是连续的, 由于  $f$  是在  $y = x^{1/n}$  处可微的, 并且  $f'(y) = ny^{n-1} \neq 0$ , 于是  $g$  在  $x$  处可微, 并且有:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{n(x^{(n-1)/n})} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

于是结论得证。

10.4.2 设 $q$ 是一个有理数, 并且设 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是函数 $f(x) := x^q$

(a)证明:  $f$ 在 $(0, +\infty)$ 上是可微的, 并且对所有的 $x \in (0, +\infty)$ 均有 $f'(x) = qx^{q-1}$  (提示: 利用习题10.4.1、微分计算 (定理10.1.13) 与链式法则 (定理10.1.15))

由于 $q$ 是有理数, 不妨令有 $q = a/b$ , 其中 $a, b \in \mathbb{Z}$ 且 $b > 0$ 是一个正整数。于是有:

$$f(x) = x^{\frac{a}{b}} = \left(x^{\frac{1}{b}}\right)^a$$

于是我们令有函数 $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 与 $h: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 分别有 $g(y) := y^a$ 与 $h(x) := x^{\frac{1}{b}}$ , 于是即有 $f = g \circ h$ 。根据习题10.4.1与习题10.1.5的结论, 我们知道函数 $g$ 和 $h$ 在其定义域上都是可微的, 从而根据链式法则可以得到 $f$ 是在 $(0, +\infty)$ 上可微的, 并且对任意 $x \in (0, +\infty)$ 都有:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(h(x))h'(x) \\ &= a\left(x^{\frac{1}{b}}\right)^{a-1} \cdot \frac{1}{b}x^{\frac{1}{b}-1} \\ &= \frac{a}{b}x^{\left(\frac{a}{b}-\frac{1}{b}+\frac{1}{b}-1\right)} \\ &= qx^{q-1} \end{aligned}$$

于是结论得证。

(b)证明:  $\lim_{x \rightarrow 1; x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}} \frac{x^q - 1}{x - 1} = q$ 对任意有理数 $q$ 均成立 (提示: 利用(a)的结论和定义10.1.1, 还有一种方法是使用下一节的洛必达法则, 当然在这里由于进度还没到该节因此不推荐这么做)

注: 本题中原书为证明  $\lim_{x \rightarrow 1; x \in (0, +\infty)} \frac{x^q - 1}{x - 1} = q$  (这在原版和翻译版都是一样的), 但是  $\frac{x^q - 1}{x - 1}$  在 $x = 1$ 处是没有定义的, 因此此处个人认为是原书错误, 应当将题目改为证明  $\lim_{x \rightarrow 1; x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}} \frac{x^q - 1}{x - 1} = q$ 。

接上(a), 根据定义10.1.1与(a)中结论, 我们有:

$$\lim_{x \rightarrow 1; x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}} \frac{x^q - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1; x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = q$$

于是结论得证。

10.4.3 设 $\alpha$ 是一个实数, 并且设 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是函数 $f(x) := x^\alpha$

(a)证明:  $\lim_{x \rightarrow 1; x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \alpha$  (提示: 利用习题10.4.2和比较原理 (命题6.4.13), 你可能需要分别考虑右极限和左极限, 命题5.4.14也会有帮助)

要证明  $\lim_{x \rightarrow 1; x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \alpha$ , 根据命题9.3.9, 这等价于对任意完全由  $(0, +\infty) - \{1\}$  中元素构成且收敛于1的序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ , 都有 $(\delta(a_n))_{n=0}^\infty$ 收敛于 $\alpha$  (其中  $\delta(x) := \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ , 在下面的证明中我们还会使用到这个简写记号, 下面不再重复说明)。

于是我们考虑任意的实数 $\varepsilon > 0$ , 根据命题5.4.14, 我们有存在有理数 $p, q$ 满足:

$$\alpha - \varepsilon < p < \alpha < q < \alpha + \varepsilon$$

而此时根据命题6.4.13我们有:

$$\frac{x^q - 1}{x - 1} < \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} < \frac{x^q - 1}{x - 1} \quad \forall x \in (0, +\infty) - \{1\}$$

而根据习题10.4.3的结论结合命题9.3.9, 我们有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n)^q - 1}{a_n - 1} = q \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n)^p - 1}{a_n - 1} = p$$

于是根据比较原理与上下极限的性质 (命题6.4.12), 我们有:

$$\alpha - \varepsilon < p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \delta(a_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta(a_n) \leq q < \alpha + \varepsilon$$

该结论对任意的实数  $\varepsilon > 0$  都成立, 从而可以推知有:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \delta(a_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta(a_n) = \alpha$$

由于上下极限相等, 根据命题6.4.12即有极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(a_n) = \alpha$ , 从而我们得证对任意完全由  $(0, +\infty) - \{1\}$  中元素构成且收敛于1的序列  $(a_n)_{n=0}^\infty$ , 都有  $(\delta(a_n))_{n=0}^\infty$  收敛于  $\alpha$ , 从而有

$$\lim_{x \rightarrow 1; x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \alpha \text{ 成立, 结论得证.}$$

**(b)证明:**  $f$  在  $(0, +\infty)$  上是可微的, 并且  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$  (提示: 利用(a)的结论、指数运算定律 (命题6.7.3) 以及定义10.1.1)

即要证明: 对所有的  $x_0 \in (0, +\infty)$ , 都有:

$$\lim_{x \rightarrow x_0; x \in (0, +\infty) - \{x_0\}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha x_0^{\alpha-1}$$

若考虑到命题9.3.9, 这等价于证明对任意完全由  $(0, +\infty) - \{x_0\}$  中元素构成且收敛于  $x_0$  的序列  $(a_n)_{n=0}^\infty$ , 都有  $(\delta(a_n))_{n=0}^\infty$  收敛于  $\alpha x_0^{\alpha-1}$ , (其中  $\delta(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , 在下面的证明中我们还会使用到这个简写记号, 下面不再重复说明)。

然后注意到:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} \\ &= x_0^\alpha \frac{(x/x_0)^\alpha - 1}{(x/x_0) - 1} \\ &= x_0^\alpha \delta'(x) \quad \left[ \delta'(x) := \frac{(x/x_0)^\alpha - 1}{(x/x_0) - 1} \right] \end{aligned}$$

而后根据序列的极限定律, 有序列  $(a_n/x_0)_{n=0}^\infty$  收敛于1, 于是根据(a)中结论, 即有序列  $(\delta'(a_n))_{n=0}^\infty$  收敛于  $\alpha$ , 于是根据序列的极限定律有序列  $(\delta(a_n))_{n=0}^\infty$  收敛于  $\alpha x_0^{\alpha-1}$ 。

于是综上即对任意完全由  $(0, +\infty) - \{x_0\}$  中元素构成且收敛于  $x_0$  的序列  $(a_n)_{n=0}^\infty$ , 都有  $(\delta(a_n))_{n=0}^\infty$  收敛于  $\alpha x_0^{\alpha-1}$ , 于是结论得证。

## 本节相关跳转

[实分析 5.4 对实数排序](#)

[实分析 6.4 上极限、下极限和极限点](#)

[实分析 6.7 实数的指数运算 II](#)

[实分析 9.3 函数的极限值](#)

[实分析 9.8 单调函数](#)

[实分析 10.1 基本定义](#)

[实分析 10.5 洛必达法则](#)