5.5 最小上界性质

定义

1. （5.5.1上界）设E是$\mathbb{R}$的一个子集，并假设M是一个实数。称M是E的一个**上界**，当且仅当对于E中任意一个元素x，均有$x \leq M$。
2. （5.5.5 最小上界）设E是$\mathbb{R}$的一个子集，且M是一个实数。称M是E的**最小上界**，当且仅当下述两个命题同时成立：

   > - M是E的一个上界。
   > - E的任意其它上界M'一定大于或等于M。

3. （5.5.10 上确界）设E是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，如果E是非空的并且存在一个上界，则定义$\sup(E)$为E的最小上界（由定理2可知，该定义是明确的）。额外引入两个符号$+\infty$与$-\infty$。如果E是非空的并且没有上界，则令$\sup(E) := +\infty$；如果E是空集，则定义$\sup(E) := -\infty$，称$\sup(E)$是E的**上确界**，也可以记作$\sup E$。（关于$+\infty$与$-\infty$的性质，之后会在6.2节详细展开）
4. （无编号 下界与下确界）同样的，可以类似定义5.5.1，5.5.5，5.5.10地定义实数集子集E的**下界**，**最大下界**与**下确界**及其相关命题与定理，下确界记作$\inf(E)$或$\inf E$。

   （这个看个人发挥了，就是改改内容而已，放一个个人的版本）

   > 1. （下界）设E是$\mathbb{R}$的一个子集，并假设M是一个实数。称M是E的一个**下界**，当且仅当对于E中任意一个元素x，均有$x \geq M$。
   > 2. （最大下界）设E是$\mathbb{R}$的一个子集，且M是一个实数。称M是E的**最大下界**，当且仅当下述两个命题同时成立：
   >
   >   > - M是E的一个下界。
   >   > - E的任意其它下界M'一定小于或等于M。
   >
   > 3. （下确界）设E是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，如果E是非空的并且存在一个下界，则定义$\inf(E)$为E的最大下界。额外引入两个符号$+\infty$与$-\infty$。如果E是非空的并且没有下界，则令$\inf(E) := -\infty$；如果E是空集，则定义$\inf(E) := +\infty$，称$\inf(E)$是E的**下确界**，也可以记作$\inf E$。

命题

1. （5.5.8 最小上界的唯一性）设E是$\mathbb{R}$的一个子集，则E最多有一个最小上界。
2. （5.5.9 最小上界的存在性（最小上界原理））设E是$\mathbb{R}$的一个非空子集，如果E有一个上界，那么它必定恰好有一个最小上界。
3. （5.5.12 优越性？）存在一个正实数x，有$x^2 = 2$。

课后习题

5.5.1 设E是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，并且假设E的最小上界是M，即$M=\sup(E)$。设$-E$表示集合：

$$-E:=\{-x:x\in E\}$$

证明：$-M$是$-E$的最大下界，即$-M=\inf(-E)$（本题疑似存在错误，即最大下界并不是$\inf$，最小上界也不是$\sup$，这节还没学到到[广义实数系]，所以我们没法对上面的$-\infty$与$+\infty$做负运算，这里暂且当做我们知晓对$+\infty$与$-\infty$的负运算法则，下面将给出两种情况的解答）

> 证明：若E的最小上界是M，则$-M$是$-E$的最大下界。
>
> 根据最小上界性质，对于M，我们有下面两个命题成立：
>
> > - 对任意$x\in E$，有$x\leq M$。
> > - 如有实数M'是E的一个上界，那么有$M'\geq M$。
>
> 于是，对任意$-x\in -E$，有$x\leq M\iff -x\geq -M$，于是$-M$是$-E$的一个下界。
>
> 另一方面，若M'是E的一个上界，那么根据前面的推证有$-M'$是$-E$的一个下界，并且根据最小上界的性质可推知结论有$M'\geq M\iff -M'\leq -M$，即对任意$-E$的下界$-M'$，总有$-M'\leq -M$。
>
> 于是根据最大下界的定义，此时有$-M$是$-E$的最大下界。
>
> ---
>
> 证明：若$M=\sup(E)$，则$-M=\inf(-E)$。
>
> 我们讨论E的可能。
>
> > - 若E是非空的并且存在上界，此时$-E$可得也是非空的并且存在下界。此时有若$M=\sup(E)$，则M是E的最大上界，于是根据前结论，$-M$是$-E$的最大下界，进而根据下确界的定义有$-M=\inf(-E)$成立。
> > - 若E是非空的并且不存在上界，那么此时$M=+\infty$，$-M=-\infty$。E非空，于是$-E$也是非空的；若E不存在上界，那么此时对任意实数x都应该存在元素$y\in E$使得$y>x$成立，这等价于对任意实数$-x$存在某个元素$-y\in -E$使得$-y<-x$成立，于是$-E$不存在下界。综合可得$-E$非空且不存在下界，于是根据下确界定义有$\inf(-E)=-\infty=-M$，结论成立。
> > - 若E是空集，那么$M=\sup(E)=-\infty$，于是$-M=+\infty$。E为空集，于是$-E$也是空集，此时根据下确界的定义此时有$\inf(-E)=+\infty=-M$，于是结论成立。
>
> 综上，此时总有$M=\sup(E)$，则$-M=\inf(-E)$始终成立。

5.5.2 设E是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，$n\geq 1$是一个整数，并且设$L<K$是两个整数。假设K/n是E的一个上界，但是L/n不是E的上界。不使用引理5.5.9，证明：存在一个整数$L<m\leq K$使得m/n是L的一个上界，而$(m-1)/n$不是L的上界（提示：使用反证法来证明，并使用归纳法，对这种情形下作图的方法也可能有所帮助）

> 由于$L<K$，于是根据整数序的性质，于是可写K为$K=L+c$，其中c是不为0的自然数，于是我们假设已知整数L，对c做归纳法证明题目结论。
>
> 当$c=1$时：
>
> 此时我们有K满足①$L<K\leq K$。②K/n是E的一个上界。③L/n不是E的上界。于是此时成立题目结论。
>
> 现归纳性假设当$c=a$时成立结论，对$c=a+1$的情景：
>
> 已知$(L+a)/n$可能为E的一个上界或不为E的上界，对$(L+a)/n$做讨论：
>
> > - $(L+a)/n$为E的一个上界。

> > 令$K' = L + a$，于是K'/n是E的一个上界，但是L/n不是E的上界。此时根据归纳假设，必然存在一个整数$L < m \leq K$使得m/n是L的一个上界，而$(m-1)/n$不是L的上界，于是m存在。
> >
> > - $(L+a)/n$不为E的上界。
> >
> >   令$K' = L + a$，于是此时K'满足①$L < K' \leq K$。②K/n是E的一个上界。③K'/n不是E的上界，于是K'就是我们要寻找的m，即m存在。
>
> 综上，当$c = a + 1$时，满足条件的m也是存在的。
>
> 于是归纳法证明完成，题目结论成立。

5.5.3 设E是实数集$\mathbb{R}$的一个子集，$n \geq 1$是一个整数，并且设m，m'是具有下述性质的整数：m/n与m'/n都是E的上界，$(m-1)/n$与$(m'-1)/n$都不是E的上界，证明：$m = m'$，于是习题5.5.2所构造的整数m是唯一的（提示：同样的，作图会对本题的证明有所帮助）

> 使用反证法，不妨假设$m > m'$（对于$m < m'$的情况只需要令$m = m'$与$m' = m$即可），根据整数序的性质，于是$m > m'$，当且仅当存在正自然数使得$m = m' + c$，根据命题2.2.12自然数序的性质，c为正当且仅当$c \geq 1$，于是我们应该有$m \geq m' + 1$，即$m - 1 \geq m'$。又根据题设条件，m'/n是E的一个上界，于是对任意$x \in E$都有$m'/n \geq x$成立，$(m-1)/n$不是E的上界，于是必然存在$x_0 \in E$使得$x_0 > (m-1)/n$，于是综上可以得到x_0满足：
>
> $$x_0 > (m-1)/n \geq m'/n \geq x_0 \iff x_0 > x_0$$
>
> 于是导出了悖论，归纳假设不成立，于是只能有$m = m'$。
>
> （所以画图有什么帮助？想不明白）

5.5.4 设q_1，q_2，q_3，$...$（$(q_n)_{n=1}^{\infty}$）是一个有理数序列，并且该序列满足：只要$M \geq 1$是一个整数并且整数$n', n \geq M$，那么有结论$|q_n - q_{n'}| \leq \dfrac{1}{M}$成立。证明：$q_1$，$q_2$，$q_3$，$...$是柯西序列。另外，若令$S := \mathrm{LIM}_{n\to\infty} q_n$，证明：$|q_M - S| \leq \dfrac{1}{M}$对任意$M \geq 1$成立。（提示：利用习题5.4.8）

> 证明：q_1，q_2，q_3，$...$是柯西序列。
>
> 对任意$\varepsilon > 0$，取整数$N = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$，根据整数部分性质我们有：$\left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$。于是对任意$i, j \geq N$，根据题目条件，总有：
>
> $$|q_n - q_{n'}| \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$
>
> 于是根据柯西序列定义，$(q_n)_{n=1}^{\infty}$是柯西序列。
>
> ---
>
> 证明：$|q_M - S| \leq \dfrac{1}{M}$对任意$M \geq 1$成立。
>
> 先证明一个辅助结论：对任意$a \geq 0$，我们都有柯西序列$(q_n)_{n=k}^{\infty}$与序列$(q_{n+a})_{n=k}^{\infty}$等价。
>
> 对任意$\varepsilon > 0$，由于$(q_n)_{n=j}^{\infty}$是柯西序列，于是存在一个整数$N \geq k$使得对任意$i, j \geq N$都有$|q_i - q_j| \leq \varepsilon$，特别的，指定$j = i + a$就有对任意$i \geq N$都有$|q_i - q_{i+a}| \leq \varepsilon$。于是根据等价柯西序列的定义，可以得到序列$(q_n)_{n=k}^{\infty}$与序列$(q_{n+a})_{n=k}^{\infty}$等价。
>
> 于是对于任意$M \geq 1$，根据题目条件有：对任意$n \geq M$，我们都有$|q_M - q_n| \leq \dfrac{1}{M}$始终成立，又根据习题5.4.6，这结论等价于：

> $$q_M-\frac{1}{M}\le q_n\le q_M+\frac{1}{M}$$
>
> 于是根据习题5.4.8结论，序列$(q_{n+M-1})_{n=1}^{\infty}$所对应实数$S'$满足$q_M-\frac{1}{M}\le S'\le q_M+\frac{1}{M}\iff|q_M-S'|\le\frac{1}{M}$恒成立，又根据辅助结论，$(q_{n+M-1})_{n=1}^{\infty}$与$(q_n)_{n=1}^{\infty}$是等价的，于是$S'=S$，即题式$|q_M-S|\le\frac{1}{M}$得证。

5.5.5 构造一个类似于命题5.4.14的命题，其中命题5.4.14中的“有理数”被替换成“无理数”

> 构造出的命题：
>
> 给定任意两个实数$x<y$，可以找到一个无理数r使得$x<q<y$。
>
> ---
>
> 证明：
>
> 根据命题5.4.14，我们知道在x，y中存在有理数p使得$x<p<y$，对p与y使用命题5.4.14我们可以得到有理数q使得$p<q<y$，现在我们命一个实数r为$r=p+(q-p)/x$，其中x就是命题5.5.12中所述的实数。由于$x\geq 1$可以得到有$p<p+(q-p)/x<q$，进一步可以延伸结论有$x<r<y$。此外，r必然是无理数，因为如果r是有理数那么应该有$x=(q-p)/(r-p)$也是有理数，这同命题4.4.4相悖。于是得证结论：给定任意两个实数$x<y$，可以找到一个无理数r使得$x<q<y$。

本节相关跳转

实分析 5.4 对实数排序

实分析 6.2 广义实数系