6.5 一些基本的极限

命题

1. (无编号) 常数序列c，c，$\ldots$的极限$\lim\limits_{n\to\infty} c = c$。
2. (6.5.1) 对任意整数$k \geq 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{k}}} = 0$均成立。
3. (6.5.2) 设x是一个实数，当$|x| < 1$时，极限$\lim\limits_{n\to\infty} x^n$存在，并且等于$0$。

   当$x = 1$时，极限$\lim\limits_{n\to\infty} x^n$存在，并且等于$1$。

   当$x = -1$或$|x| > 1$时，极限$\lim\limits_{n\to\infty} x^n$是发散的。
4. (6.5.3) 对于任意$x > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$均成立。

课后习题

6.5.1 证明：对任意有理数$q > 0$，均有$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^q} = 0$。（提示：利用推论6.5.1、极限定律以及定理6.1.19）推导出极限$\lim\limits_{n\to\infty} n^q$不存在（提示：采用反证法并利用定理6.1.19(e)）

> 证明：对任意有理数$q > 0$，均有$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^q} = 0$。
>
> 对任意的有理数$q > 0$，根据有理数定义，我们可以将它写为$q = a/b$，其中a，b都是正整数。于是有：
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{a}{b}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{b}}}\right)^a$$
>
> 于是我们对任意固定b，对a使用归纳法。
>
> 当$a = 1$时：
>
> 由推论6.5.1可知此时结论成立。
>
> 现归纳地假设$a = k$时结论成立，对$a = k + 1$时：
>
> 根据极限定律(b)，我们有：
>
> $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{b}}}\right)^{k+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{b}}}\right)^k \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{b}}}\right) = 0 \cdot 0 = 0$$
>
> 于是此时也成立结论。
>
> 综上，归纳假设得证，于是结论得证。
>
> ---
>
> 证明：对任意有理数$q > 0$，极限$\lim\limits_{n\to\infty} n^q$不存在。
>
> 不妨假设$\lim\limits_{n\to\infty} n^q = M$，其中$M$是某个实数，于是根据极限定律，我们有：
>
> $$\lim_{n\to\infty} n^q \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^q}{n^q} = 0 \cdot M = 0$$

> 但是又有：
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^q}{n^q}=\lim_{n\to\infty}1=1$$
>
> 此时有矛盾，于是只能有极限$\lim\limits_{n\to\infty}n^q$不存在。

6.5.2 证明引理6.5.2（提示：利用[命题6.3.10]，[习题6.3.4]以及[夹逼定理]）

> 当$|x|<1\iff -1<x<1$时：
>
> 根据命题6.3.10，我们有$0<x<1$时$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$，于是根据序列极限定义，对任意$\varepsilon>0$，总存在$N\geq 1$使得对任意$n\geq N$都有$|x^n-0|\leq\varepsilon$成立。此外我们有$|x^n|=|x|^n=|-x|^n=|(-x)^n|$。于是综合有对任意$\varepsilon>0$，总存在$N\geq 1$使得对任意$n\geq N$都有$|(-x)^n-0|\leq\varepsilon(0<x<1)\iff|x^n-0|\leq\varepsilon(-1<x<0)$成立，即对任意$-1<x<0$，我们也有$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$成立；对$x=0$，此时我们有$x^n=0$对任意$n\geq 1$成立，于是$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$也成立。
>
> ---
>
> 当$|x|=1$时：
>
> $x=1$时，此时$x^n=1$对任意$n\geq 1$成立，于是$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=1$成立结论。$x=-1$时，我们考虑任意实数$\varepsilon>0$与整数$N\geq 1$，总有$|x^{2N}-1|=0\leq\varepsilon$与$|x^{2N+1}-(-1)|=0\leq\varepsilon$。于是1与$-1$是序列$((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$的极限点。根据命题6.4.5，于是序列$((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$
>
> 不收敛，从而$\lim\limits_{n\to\infty}x^n$在$x=-1$时是发散的。
>
> ---
>
> 当$|x|>1$时：
>
> 此时我们有$0<\dfrac{1}{|x|}<1\iff -1<\dfrac{1}{x}<1(\dfrac{1}{x}\neq 0)$，于是对任意$x$满足$|x|>1$，不妨假设$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=L$，其中$L$是实数，于是根据极限定律，结合$|x|<1$的结论此时应该有：
>
> $$\lim_{n\to\infty}x^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=\lim_{n\to\infty}1\iff 0\cdot L=1$$
>
> 然而对任意实数L，都应该有$0\cdot L=0$，于是假设导出矛盾，此时只能有$\lim\limits_{n\to\infty}x^n$发散。

6.5.3 证明引理6.5.3（提示：你可能要分为$x\geq 1$和$x<1$两种情形来考虑。你或许愿意先利用引理6.5.2这样一个预备结论：对任意的$\varepsilon>0$和任意的实数$M>0$，存在一个n使得$M^{\frac{1}{n}}\leq 1+\varepsilon$）

> 我们证明一个辅助结论：
>
> 证明：对任意实数$\varepsilon>0$与任意实数$M>0$，总存在一个整数$n\geq 1$使得$1-\varepsilon\leq M^{\frac{1}{n}}\leq 1+\varepsilon$成立。
>
> 不妨限制ε范围有$0<\varepsilon<1$，于是此时$1-\varepsilon$与$1+\varepsilon$都是正实数，根据命题6.5.2的结论，我们有：
>
> > - 由于$0<1-\varepsilon<1$，于是序列$((1-\varepsilon)^n)_{n=1}^{\infty}$收敛于0。从而对实数$M$，根据序列收敛的定义，存在一个$n_1\geq 1$使得：
> >
> > $$|a_n-0|\leq M\xRightarrow{a_n=(1-\varepsilon)^n}(1-\varepsilon)^n\leq M\iff 1-\varepsilon\leq M^{\frac{1}{n}}$$
> >
> >   对任意$n\geq n_1$成立。

> > - 由于$1+\varepsilon>1$，我们使用反证法，对给定的M，不妨假设不存在整数n使得$M^{\frac{1}{n}}\leq 1+\varepsilon \iff M\leq(1+\varepsilon)^n$，即对任意$n\geq 1$，我们有$(1+\varepsilon)^n<M$恒成立，于是$M$是序列$((1+\varepsilon)^n)_{n=1}^{\infty}$的一个上界；另外，我们有：
> >
> > $$(1+\varepsilon)^{n+1}=(1+\varepsilon)^n+\varepsilon(1+\varepsilon)^n>(1+\varepsilon)^n$$
> >
> > 对任意$n\geq 1$都成立，从而序列$((1+\varepsilon)^n)_{n=1}^{\infty}$是单调递增的。根据命题6.3.8，此时有$((1+\varepsilon)^n)_{n=1}^{\infty}$收敛，这同命题6.5.2结论矛盾。于是反证结束，必然存在一个整数$n_2\geq 1$使得$M^{\frac{1}{n_2}}\leq 1+\varepsilon$成立。此外，由于序列$((1+\varepsilon)^n)_{n=1}^{\infty}$是单调递增的，于是对任意$n\geq n_2$，都应该有$M\leq(1+\varepsilon)^n \iff M^{\frac{1}{n_2}}\leq 1+\varepsilon$成立
>
> 于是根据上面讨论，取整数$n'=\max(n_1,n_2)\geq 1$，于是对n'，此时有$1-\varepsilon\leq M^{\frac{1}{n'}}\leq 1+\varepsilon$，并且事实上对任意$n\geq n'$都有结论成立，于是辅助结论得证。
>
> ---
>
> 证明：对任意$x>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{n}}=1$。
>
> 对任意$\varepsilon>0$，根据辅助结论，我们有总存在整数$n'\geq 1$使得对任意$n\geq n'$，都有：
>
> $$1-\varepsilon\leq x^{\frac{1}{n}}\leq 1+\varepsilon \iff |x^{\frac{1}{n}}-1|\leq\varepsilon$$
>
> 于是根据收敛的定义，有序列$(x^{\frac{1}{n}})_{n=1}^{\infty}$收敛于$1$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{n}}=1$。

本节相关跳转

[实分析 6.1 收敛与极限定律]()

[实分析 6.3 序列的上确界与下确界]()

[实分析 6.4 上极限、下极限和极限点]()