14.5 函数级数与魏尔斯特拉斯M判别法

摘录

1. （实值函数？）我们称值域为$\mathbb{R}$的函数为**实值函数**。

   （注：考察实值函数事实上是一个相当朴素的想法，因为在实数集上我们已经定义了相当多的运算，而这样的运算并非是在任意的度量空间上都能找到的，例如下面我们将要提到的函数级数）

2. （有限和？）设$f^{(1)}$，$\dots$，$f^{(N)}$是给定的任意**有限**多个从X到$\mathbb{R}$的函数，我们定义它们的**有限和**$\sum_{i=1}^{N} f^{(i)}$为：

$$\left(\sum_{i=1}^{N} f^{(i)}\right)(x) := \sum_{i=1}^{N} f^{(i)}(x)$$

   （注：和有限级数的内容很相似，并且我们很容易证明，有界函数的有限和是有界的，连续函数的有限和是连续的）

定义

1. （14.5.2 无限级数）设(X, d_X)是一个度量空间，$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是从X到$\mathbb{R}$的函数序列，并设f是从X到$\mathbb{R}$的寒素。当$N \to \infty$时，如果部分和$\sum_{n=1}^{N} f^{(i)}$在X上逐点收敛于f，那么我们称无限级数$\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$**逐点收敛于**$f$，并记有$f = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$；如果部分和$\sum_{n=1}^{N} f^{(n)}$在$X$上一致收敛于$f$，那么我们称无限级数$\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$**一致收敛于**$f$，并同样记有$f = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$。

   （注：当出现$f = \sum_{i=n}^{\infty} f^{(n)}$的表述的时候需要分辨具体是那种收敛；如果$\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$不逐点收敛于$f$也不能说明它就是逐点发散的，它有可能在部分$x \in X$处收敛于$f$；其实我觉得这个定义完全可以不用说$X$是度量空间的，可以稍微扩宽一下，毕竟一致收敛和逐点收敛事实上都不依赖于定义域的数学结构（度量或者拓扑））

2. （14.5.5 上确界范数）如果$f : X \to \mathbb{R}$是一个**有界**实值函数，那么我们定义f的**上确界范数**$\|f\|_{\infty}$为：

$$\|f\|_{\infty} := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

   换言之即$\|f\|_{\infty} = d_{\infty}(f, 0)$，其中$0 : X \to \mathbb{R}$是零函数$0(x) := 0$。

命题

1. （14.5.7 魏尔斯特拉斯M判别法）设(X, d_X)是一个度量空间，$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是从X上使得级数$\sum_{n=1}^{\infty} \|f^{(n)}\|_{\infty}$收敛有界连续函数序列。那么，级数$\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}$是在$X$上一致收敛于某个连续函数$f$的。

   （注：魏尔斯特拉斯M判别法可以简述为：上确界范数的绝对收敛蕴含着函数级数的一致收敛；魏尔斯特拉斯M判别法在处理幂级数的时候会经常用到，这都是15章的后话了）

课后习题

14.5.1 设$f^{(1)}$，...，$f^{(N)}$是从度量空间(X,d_X)到$\mathbb{R}$的有界函数的有限序列。证明：$\sum_{i=1}^{N}f^{(i)}$也是有界的，并且证明将“有界”替换成“连续”后的类似结论。讨论：如果把“连续”替换成“一致连续”，情况又如何

> 证明：设$f^{(1)}$，...，$f^{(N)}$是从度量空间(X,d_X)到$\mathbb{R}$的有界函数的有限序列，那么$\sum_{i=1}^{N}f^{(i)}$也是有界的。
>
> 于是根据有界性的定义，对任意的$1\leq i\leq N$都存在$M_i>0$使得$f^{(i)}(X)\subseteq[-M_i,M_i]$。于是我们令有$M:=\sum_{i=1}^{N}M_i$。于是对任意的$x\in X$都有：
>
> $$-\sum_{i=1}^{N}M_i\leq\left(\sum_{i=1}^{N}f^{(i)}\right)(x)=\sum_{i=1}^{N}f^{(i)}(x)\leq\sum_{i=1}^{N}M_i$$
>
> 于是即$\left(\sum_{i=1}^{N}f^{(i)}\right)(X)\subseteq[-M,M]$，从而$\sum_{i=1}^{N}f^{(i)}$也是有界的。
>
> ---
>
> 证明：设$f^{(1)}$，...，$f^{(N)}$是从度量空间(X,d_X)到$\mathbb{R}$的连续函数的有限序列，那么$\sum_{i=1}^{N}f^{(i)}$也是连续的。
>
> 考虑任意的$\varepsilon>0$，由于$f^{(1)}$，...，$f^{(N)}$是从连续函数的有限序列，于是对任意$1\leq i\leq N$与任意的$x_0\in X$都存在$\delta_i>0$使得对任意x满足$d_X(x,x_0)<\delta_i$就有$|f^{(i)}(x)-f^{(i)}(x_0)|<\varepsilon/N$。从而令$\delta:=\min\{\delta_i:1\leq i\leq N\}$，然后对任意$x$满足$d_X(x,x_0)<\delta$都有：
>
> $$\begin{aligned}&\left|\left(\sum_{i=1}^{N}f^{(i)}\right)(x)-\left(\sum_{i=1}^{N}f^{(i)}\right)(x_0)\right|\\=&\left|\sum_{i=1}^{N}f^{(i)}(x)-\sum_{i=1}^{N}f^{(i)}(x_0)\right|\\=&\left|\sum_{i=1}^{N}(f^{(i)}(x)-f^{(i)}(x_0))\right|\\\leq&\sum_{i=1}^{N}|f^{(i)}(x)-f^{(i)}(x_0)|\\<&\varepsilon\end{aligned}$$
>
> 从而$\sum_{i=1}^{N}f^{(i)}$在任意的$x_0\in X$处都是连续的，换言之即$\sum_{i=1}^{N}f^{(i)}$在X上连续（也即是连续的）。
>
> ---
>
> 如果把“连续”替换成“一致连续”，结论也是成立的，我们来证明这个结论：
>
> 证明：设$f^{(1)}$，...，$f^{(N)}$是从度量空间(X,d_X)到$\mathbb{R}$的一致连续函数的有限序列，那么$\sum_{i=1}^{N}f^{(i)}$也是一致连续的。

考虑任意的$\varepsilon>0$，由于$f^{(1)}$，$...$，$f^{(N)}$是从连续函数的有限序列，于是对任意$1\le i\le N$都有存在$\delta_i>0$使得只要x，$x'\in X$满足$d_X(x,x')<\delta_i$，就有$|f^{(i)}(x)-f^{(i)}(x_0)|<\varepsilon/N$。从而令$\delta:=\min\{\delta_i:1\le i\le N\}$，然后对任意$x$满足$d_X(x,x_0)<\delta$都有：

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\sum_{i=1}^N f^{(i)}\right)(x)-\left(\sum_{i=1}^N f^{(i)}\right)(x_0)\right|\\
=&\left|\sum_{i=1}^N f^{(i)}(x)-\sum_{i=1}^N f^{(i)}(x_0)\right|\\
=&\left|\sum_{i=1}^N (f^{(i)}(x)-f^{(i)}(x_0))\right|\\
\le&\sum_{i=1}^N |f^{(i)}(x)-f^{(i)}(x_0)|\\
<&\varepsilon
\end{aligned}$$

从即$\sum\limits_{i=1}^N f^{(i)}$在$X$上是一致连续的（也即是一致连续的）。

14.5.2 证明定理14.5.7（提示：首先证明序列$\sum\limits_{i=1}^N f^{(i)}$是$C(X\to\mathbb{R})$中的柯西序列，然后利用定理14.4.5）

由于级数$\sum\limits_{n=1}^\infty \|f^{(n)}\|_\infty$收敛，因此根据命题7.2.5，对任意的$\varepsilon>0$都存在一个$N>0$使得对任意的$p$，$q\ge N$都有：

$$\left|\sum_{n=p}^q \|f^{(n)}\|_\infty\right|<\varepsilon \xRightarrow{\|f^{(n)}\|_\infty\ge 0} \sum_{n=p}^q \|f^{(n)}\|_\infty<\varepsilon$$

然后注意到，对任意的i，$j\ge N$，我们有：

$$\begin{aligned}
d_\infty\left(\sum_{k=1}^i f^{(k)},\sum_{k=1}^j f^{(k)}\right)&=\sup_{x\in X}\left|\sum_{k=1}^i f^{(k)}(x)-\sum_{k=1}^j f^{(k)}(x)\right|\\
&=\sup_{x\in X}\left|\sum_{k=\min(i,j)}^{\max(i,j)} f^{(k)}(x)\right|\\
&\le\sup_{x\in X}\left(\sum_{k=\min(i,j)}^{\max(i,j)} |f^{(k)}(x)|\right)\\
&\le\sup_{x\in X}\sum_{k=\min(i,j)}^{\max(i,j)} \|f^{(k)}\|_\infty\\
&=\sum_{k=\min(i,j)}^{\max(i,j)} \|f^{(k)}\|_\infty
\end{aligned}$$

倒数第二步利用了$\|f^{(k)}\|_\infty\ge|f^{(k)}(x)|$（也就是上确界的性质）。而注意到由于$i$，$j\ge N$因此必然有$\min(i,j)$，$\max(i,j)\ge N$。于是根据前面所述内容即有$d_\infty\left(\sum\limits_{k=1}^i f^{(k)},\sum\limits_{k=1}^j f^{(k)}\right)<\varepsilon$。综合下我们的讨论即：

> 对任意的$\varepsilon > 0$，存在一个$N > 0$使得对任意的i，$j \geq N$都有$d_\infty\left(\sum_{k=1}^{i} f^{(k)}, \sum_{k=1}^{j} f^{(k)}\right) < \varepsilon$。
>
> 于是根据柯西序列的定义（定义12.4.6）我们证明了$\left(\sum_{k=1}^{N} f^{(k)}\right)_{N=1}^{\infty}$是一个柯西序列（在带有$L^\infty$度量的空间$B(X \to \mathbb{R})$下），并且注意到由于$(f^{(n)})_{n=1}^{\infty}$是有界连续函数序列，因此根据习题14.5.1对任意的$N > 0$部分和$\sum_{k=1}^{N} f^{(k)}$都是有界连续函数，从而序列$\left(\sum_{k=1}^{N} f^{(k)}\right)_{N=1}^{\infty}$也是空间$C(X \to \mathbb{R})$中的序列。结合$\mathbb{R}$的完备性与定理14.4.5，于是我们可以得到$\left(\sum_{k=1}^{N} f^{(k)}\right)_{N=1}^{\infty}$收敛于某个有界连续的函数$f : X \to \mathbb{R} \in C(X \to \mathbb{R})$。

本节相关跳转

[实分析 7.1 有限级数]

[实分析 14.4 一致收敛的度量]