7.2 无限级数

定义

1. (7.2.1 形式无限级数) 一个(**形式**)**无限级数**是形如

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

的表达式，其中m是整数并且对任意$n \geq m$，a_n是一个实数，有时也可以写成

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots\ldots$$

(这只是个形式的定义)

2. (7.2.2 级数的收敛) 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个形式无穷级数，对任意的整数$N \geq m$，定义N部分和为$S_N := \sum_{n=m}^{N} a_n$，于是显然$S_N$是一个实数。

如果当$N \to \infty$时，序列$(S_N)_{N=m}^{\infty}$**收敛**于某个实数L，则称无限级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是**收敛**的，并且称它收敛于L，也记有$L = \sum_{n=m}^{\infty} a_n$，称$L$是无限级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$的和。

对应的，如果部分和序列是$(S_N)_{N=m}^{\infty}$**发散**的，则称无限级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是**发散**的，并且不对这个级数指定任何实数值。

(注：极限的唯一性保证了无限级数和的唯一性，因此可以放心讨论收敛级数的和)

3. (7.2.8 绝对收敛) 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个实数的形式无限级数，则称其是**绝对收敛**的，当且仅当级数$\sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$是收敛的。

命题

1. (7.2.5 部分和的收敛性) 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个实数的形式无限级数。有$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$收敛，当且仅当对任意实数$\varepsilon > 0$都存在一个整数$N \geq m$使得：

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n\right| \leq \varepsilon$$

对全部$p, q \geq N$均成立。

2. (7.2.6 零判别法) 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个收敛的形式无限级数，那么一定有$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。换言之，若有$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$或发散，那么级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是发散的。

3. (7.2.9 绝对收敛判别法) 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个实数的形式无限级数。若这个级数是绝对收敛的，那么它也是条件收敛的（注意这里定义中条件收敛并不与绝对收敛互斥，但是别的教材有时会定义两者互斥来方便分类），并且此时有三角不等式：

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$$

4. (7.2.12 交错级数判别法) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个非负并且递减的实数序列。于是对任意$n \geq m$均有$a_n \geq 0$与$a_n \geq a_{n+1}$。则形式级数$\sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n a_n$是收敛的，当且仅当$n \to \infty$时序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$0$。

5. (7.2.14 级数定律) 有下述命题为真：

> 1. (无限级数的加和？) 如果$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个收敛于x的实数级数，$\sum_{n=m}^{\infty} b_n$是一个收敛于y的实数级数，则$\sum_{n=m}^{\infty} (a_n + b_n)$也是一个收敛的级数，并且它收敛于$x+y$。特别的，有：
>
> $$\sum_{n=m}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} b_n$$
>
> 2. (无限级数的数乘？) 如果$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个收敛于x的实数级数，c是一个实数，则$\sum_{n=m}^{\infty} c \cdot a_n$也是一个收敛的级数，并且它收敛于$c \cdot x$。特别的，有：
>
> $$\sum_{n=m}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=m}^{\infty} a_n$$
>
> 3. (无限级数的拆分？) 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个实数级数，k是一个自然数。若级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=m+k}^{\infty} a_n$中有一个是收敛的，那么另一个也是收敛的，并且有恒等式：
>
> $$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=m}^{m+k-1} a_n + \sum_{n=m+k}^{\infty} a_n$$
>
> 4. (约束变量不影响无限和) 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个收敛于x的实数级数，且设k是一个整数，则$\sum_{n=m+k}^{\infty} a_{n-k}$也收敛于$x$。

6. (7.2.15 嵌套级数) 设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个收敛于0的实数序列，即$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，那么级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n - a_{n+1}$收敛于$a_0$。

课后习题

7.2.1 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$是收敛的还是发散的？证明你的结论。你现在能否解决例1.2.2中的难题？

> @Homological-algebra的解法：
>
> 设若该级数收敛，设其极限为L，前 N 项部分和为 S_N ，根据命题6.6.5的结论有：
>
> $$\lim_{N\to\infty} S_{2N} = \lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = L$$
>
> 对于 $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，使得
>
> $|S_{2N}-L| = |S_{2N}-S_{2N+1}| < \varepsilon$
>
> 但是$S_{2N}=0$，$S_{2N+1}=1$。（这可以通过数学归纳法得到）
>
> 从而导出矛盾，该级数不收敛。
>
> 至于例 1.2.2 中的前面一个问题，显然级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$是收敛的 （可以用比值审敛法验证这个结果），因此它符合命题7.2.14，可以加和。同理级数 $\sum_{n=0}^{\infty}2^n$ 不收敛，无法使用加和，想必证明一个发散到无穷的无穷级数不能加和并不困难，一个很直观的观点是∞这个元素并不像常规实数那样遵守运算律。不存在极限的发散级数同理。
>
> ---
>
> 个人的解法：
>
> 使用反证法：
>
> 不妨假设$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$是条件收敛的，那么根据定义，部分和$S_N=\sum_{n=1}^{N}(-1)^n$的序列应该是收敛的，于是根据命题6.1.12，序列$(S_N)_{N=1}^{\infty}$是柯西序列，于是对任意$\varepsilon>0$，总存在自然数N使得$d(S_{2N},S_{2N+1})\le\varepsilon$成立，但是根据定义，我们又有
>
> $$d(S_{2N},S_{2N+1}) = |(-1)^{2N+1}| = 1$$
>
> 而1显然不可能满足对所有正实数ε都有$1\le\varepsilon$。于是假设结论错误，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$是发散的。
>
> 现在回到例1.2.2，我们不难得到，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$是收敛的，于是它可以像命题7.2.14那样的进行运算，相应的，级数$\sum_{n=0}^{\infty}2^n$与$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$是发散的，因此在前面讨论它们的所谓和与重排计算都是没有意义的，因为根据定义，没有任何一个实数与它们对应，讨论这样的加减法是荒谬而没有逻辑的。

7.2.2 证明命题7.2.5（提示：利用命题6.1.12和定理6.4.18）

> 当$q<p$时，根据有限级数的定义，不难得知此时有$\left|\sum_{n=p}^{q}a_n\right|=0\le\varepsilon$对任意$\varepsilon>0$恒成立，于是我们只需要讨论$q\ge p$的情况。
>
> 充分性：

> 若对任意$\varepsilon > 0$存在一个$N \geq m$使得当$q \geq p \geq N$时总有$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n\right| \leq \varepsilon$成立，特别地，这个结论对任意$q \geq p \geq N+1$也成立。此时不妨令有部分和$S_i = \sum_{n=m}^{i} a_n$，于是该结论等价于当$q \geq p \geq N+1$时总有$|S_q - S_{p-1}| \leq \varepsilon$成立。我们令$p' = p-1$，于是可得有$p' \geq N$与$q \geq p \geq N+1$；另外，我们假设$q = p'$，于是此时有$|S_q - S_{p'}| = 0 \leq \varepsilon$，于是对$q' \geq p' \geq N$也有$|S_{q'} - S_{p'}| \leq \varepsilon$成立。于是总结有：
>
> 对任意$\varepsilon > 0$存在一个$N \geq m$使得当$q' \geq p' \geq N$时总有$|S_{q'} - S_{p'}| \leq \varepsilon$成立。
>
> 于是根据柯西序列的定义，$(S_n)_{n=m}^{\infty}$是柯西序列。于是结合定理6.4.18有$(S_n)_{n=m}^{\infty}$收敛，即$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$收敛。
>
> ---
>
> 必要性：
>
> 若$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$收敛，则定义部分和$S_i = \sum_{n=m}^{i} a_n$，于是序列$(S_n)_{n=m}^{\infty}$收敛，根据命题6.1.12，即$(S_n)_{n=m}^{\infty}$是柯西序列，于是有：
>
> 对任意$\varepsilon > 0$存在一个$N \geq m$使得当$q' \geq p' \geq N$时总有$|S_{q'} - S_{p'}| \leq \varepsilon$成立。
>
> 化简有$|S_{q'} - S_{p'}| = \left|\sum_{n=p'+1}^{q'} a_n\right|$，于是我们不妨令$p = p'+1$，限制$q = q'$范围有$q \geq N+1$，于是此时有存在整数$N+1$使得$q$，$p \geq N+1$时有$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n\right| \leq \varepsilon$。
>
> 于是即对任意实数$\varepsilon > 0$，都存在整数$N+1$使得当p，$q > N+1$时总有$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n\right| \leq \varepsilon$成立，
>
> 于是必要性得证。

7.2.3 利用命题7.2.5证明推论7.2.6

> 若级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$收敛，由命题 7.2.5，可以得到：
>
> 对任意实数$\varepsilon > 0$，都存在一个整数$N \geq m$使得$\left|\sum_{n=p}^{p} a_n\right| = |a_p - 0| < \varepsilon$对于所有$p \geq N$成立
>
> 根据序列收敛的定义，于是可以得到此时即$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，于是结论得证。

7.2.4 证明命题7.2.9 （提示：利用命题7.2.5和命题7.1.4(e)）

> 既然$\sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$收敛，则按照命题 7.2.5
>
> 对任意实数$\varepsilon > 0$都存在一个整数$N \geq m$使得：
>
> $$\left|\sum_{n=p}^{q} |a_n|\right| \leq \varepsilon$$
>
> 对全部$p, q \geq N$均成立。
>
> 由命题7.1.4(e)，又有

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n\right| \leq \left|\sum_{n=p}^{q} |a_n|\right| \leq \varepsilon$$

于是综合得到对任意实数$\varepsilon > 0$都存在一个整数$N \geq m$使得$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n\right| \leq \varepsilon$对任意$p, q \geq N$恒成立，根据命题7.2.5，可以判断有$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是条件收敛的。

证明三角不等式$\left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$：

首先有条件：级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$绝对收敛。

构造部分和序列$(S_N)_{N=m}^{\infty}$、$(S'_N)_{N=m}^{\infty}$，其中$S_N = \sum_{n=m}^{N} |a_n|$，$S'_N = \left|\sum_{n=m}^{N} a_n\right|$。根据命题7.1.4(e)，我们有$S_N \geq S'_N$对任意$N \geq m$恒成立。同时，由于级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$绝对收敛，于是序列$(S_N)_{N=m}^{\infty}$、$(S'_N)_{N=m}^{\infty}$也是收敛的。

可以计算得到$\sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$、$\left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n\right|$分别为$(S_N)_{N=m}^{\infty}$、$(S'_N)_{N=m}^{\infty}$的极限，又因为收敛的序列只有唯一的极限点，因此$(S_N)_{N=m}^{\infty}$、$(S'_N)_{N=m}^{\infty}$的各自的上下极限即为它们各自的极限；

因此根据比较原理，柯西列$(S_N)_{N=m}^{\infty}$的极限大于柯西列$(S'_N)_{N=m}^{\infty}$。

因此$\sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \geq \left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n\right|$成立。

7.2.5 证明命题7.2.14（提示：利用定理6.1.19）

1. 如果$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个收敛于x的实数级数，$\sum_{n=m}^{\infty} b_n$是一个收敛于y的实数级数，则$\sum_{n=m}^{\infty} (a_n + b_n)$也是一个收敛的级数，并且它收敛于$x + y$。特别的，有：

$$\sum_{n=m}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} b_n$$

证明：

取部分和$S_i^{(1)} = \sum_{n=m}^{i} a_n$，$S_i^{(2)} = \sum_{n=m}^{i} b_n$，$S_i^{(3)} = \sum_{n=m}^{i} a_n + b_n$，于是根据命题7.1.4(c)，有$S_i^{(1)} + S_i^{(2)} = S_i^{(3)}$，根据极限定律，这又等价于$\lim_{i\to\infty} S_i^{(1)} + \lim_{i\to\infty} S_i^{(2)} = \lim_{i\to\infty} S_i^{(3)}$，再根据无限级数的定义（定义7.2.2），这个结论等价于：

$$\sum_{n=m}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} b_n$$

于是结论得证。

---

2. 如果$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个收敛于x的实数级数，c是一个实数，则$\sum_{n=m}^{\infty} c \cdot a_n$也是一个收敛的级数，并且它收敛于$c \cdot x$。特别的，有：

$$\sum_{n=m}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

证明：

取部分和$S_i^{(1)} = \sum_{n=m}^{i} a_n$，$S_i^{(2)} = \sum_{n=m}^{i} c \cdot a_n$，根据命题7.1.4(c)，有$c \cdot S_i^{(1)} = S_i^{(2)}$，又由极限定律有$c \cdot \lim_{i\to\infty} S_i^{(1)} = \lim_{i\to\infty} S_i^{(2)}$，再根据无限级数的定义（定义7.2.2），这个结论等价于：

$$\sum_{n=m}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

于是结论得证。

---

3. 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个实数级数，k是一个自然数。若级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=m+k}^{\infty} a_n$中有一个是收敛的，那么另一个也是收敛的，并且有恒等式：

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=m}^{m+k-1} a_n + \sum_{n=m+k}^{\infty} a_n$$

证明：

取部分和$S_i^{(1)} = \sum_{n=m}^{i} a_n$，$S_i^{(2)} = \sum_{n=m+k}^{i} a_n$，并取$S = \sum_{n=m}^{m+k-1} a_n$。由于$S$是有限级数，所以$S$显然是一个实数。根据命题7.1.4(a)，我们有$S_i^{(1)} = S_i^{(2)} + S$对任意$i \geq m+k$成立，于是若序列$\left(S_i^{(1)}\right)_{i=m+k}^{\infty}$与$\left(S_i^{(2)}\right)_{i=m+k}^{\infty}$中任何一个收敛，根据极限定律我们也可得到另一个序列收敛，并且根据极限定律与定义7.2.2，我们有：

$$\lim_{i\to\infty} S_i^{(1)} = \lim_{i\to\infty} S_i^{(2)} + S \xLeftrightarrow{\text{定义}7.2.2} \sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=m}^{m+k-1} a_n + \sum_{n=m+k}^{\infty} a_n$$

于是结论得证。

---

4. 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个收敛于x的实数级数，且设k是一个整数，则$\sum_{n=m+k}^{\infty} a_{n-k}$也收敛于$x$。

证明：

取部分和$S_i^{(1)} = \sum_{n=m}^{i} a_n$，$S_i^{(2)} = \sum_{n=m+k}^{i+k} a_{n-k}$。根据命题7.1.4，有$S_i^{(1)} = S_i^{(2)}$对任意$i \geq m$都成立，即$\lim_{i\to\infty} S_i^{(1)} = \lim_{i\to\infty} S_i^{(2)}$成立，根据定义，$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{i\to\infty} S_i^{(1)}$，$\sum_{n=m+k}^{\infty} a_{n-k} = \lim_{i\to\infty} \sum_{n=m+k}^{i} a_{n-k} = \lim_{i\to\infty} S_{i-k}^{(2)}$，根据习题6.1.4，我们知道$\left(S_{i-k}^{(2)}\right)_{i=m}^{\infty}$与$\left(S_i^{(2)}\right)_{i=m}^{\infty}$有相同的极限，于是上结论即：

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=m+k}^{\infty} a_{n-k}$$

于是结论成立。

7.2.6 证明引理7.2.15（提示：首先算出部分和$\sum_{n=0}^{N}(a_n - a_{n+1})$应该是什么，并利用归纳法证明你的判断）如果我们假设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$不收敛于0而收敛于另外的某个实数L，那么该如何修改这个命题？

> 首先证明$S_N = \sum_{n=0}^{N}(a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{N+1}$：
>
> 对N做归纳：
>
> 当$N = 0$时：
>
> 原式有$\sum_{n=0}^{0}(a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_1 = a_0 - a_{N+1}$，于是得证。
>
> 设当$N = K$时等式成立，则当$N = K + 1$时：
>
> $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{K+1}(a_n - a_{n+1}) &= \sum_{n=0}^{K}(a_n - a_{n+1}) + a_{K+1} - a_{K+2} \\ &= a_m - a_{K+1} + a_{K+1} - a_{K+2} \\ &= a_m - a_{(K+1)+1}\end{aligned}$$
>
> 于是结论得证。
>
> ---
>
> 根据定义7.2.2和$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$可知有：
>
> $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) &= \lim_{N\to\infty} S_N \\ &= \lim_{N\to\infty} a_0 - \lim_{N\to\infty} a_{N+1} \\ &= a_0 \ (\lim_{n\to\infty} a_n = 0)\end{aligned}$$
>
> 同理 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 不收敛于 0 而收敛于另外的某个实数 L时
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_0 - L$$

本节相关跳转

[实分析 1.2 为什么要做分析]

[实分析 6.1 收敛与极限定律]

[实分析 6.4 上极限、下极限和极限点]

[实分析 7.1 有限级数]