16.2 周期函数的内积

定义

1. (16.2.1 内积) 如果$f,g\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，则我们定义**内积**$\langle f,g\rangle$为：

$$\langle f,g\rangle:=\int_{[0,1]}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

   (注：为了计算一个复值函数$f(x)=g(x)+\mathrm{i}h(x)$的积分，我们定义$\int_{[a,b]}f:=\int_{[a,b]}g+\mathrm{i}\int_{[a,b]}h$，也就是说分别对实部和虚部作积分。容易验证实值函数的全体微积分基本法则（分部积分法，微积分基本定理和变量替换法等）对复值函数同样成立；然后对于内积，我们需要说明的是上面的定义总是有效的，因为f,g都是连续且有界的函数。最后内积一般都是一个复数)

2. (无编号 L^2范数) 从内积的正性出发，自然地我们可以对任意的函数$f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$定义它的$L^2$**范数**$\|f\|_2$为：

$$\|f\|_2:=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\left(\int_{[0,1]}f(x)\overline{f(x)}\mathrm{d}x\right)^{1/2}=\left(\int_{[0,1]}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

   因此对任意的f都有$\|f\|_2\geq 0$。范数$\|f\|_2$有时被称为f的**均方根**。

   (注：L^2范数与L^∞范数之间存在某些联系，我们会在课后习题中揭示这一点)

3. (无编号 L^2度量) 对任意的$f,g\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，我们定义$L^2$**度量**$d_{L^2}:C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})\times C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})\to\mathbb{R}^+$有：

$$d_{L^2}(f,g):=\|f-g\|_2=\left(\int_{[0,1]}|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

   我们可以验证d_{L^2}确实是一个度量，这一部分讨论将放在习题16.2.2中进行。

   (注：事实上，L^2度量与欧几里得空间上的l^2度量非常相似，应当将它们放在一起作比较；依L^2度量收敛不同于一致收敛与逐点收敛，这一点我们会在习题中说明；最后，L^2度量的性质并不如L^∞度量好，比如具有L^2度量的度量空间$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$并不是完备的，但是使用$L^\infty$度量时是完备的)

命题

1. (16.2.5 内积的性质？) 设$f,g,h\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，那么有：

   > 1. (厄米特性质) $\langle g,f\rangle=\overline{\langle f,g\rangle}$。
   > 2. (正性) $\langle f,f\rangle\geq 0$，更进一步地$\langle f,f\rangle=0$当且仅当$f=0$（即对所有的$x\in\mathbb{R}$有$f(x)=0$）。
   > 3. (关于第一个变量的线性性质) $\langle f+g,h\rangle=\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle$，对任意的复数$c$有$\langle cf,g\rangle=c\langle f,g\rangle$。
   > 4. (关于第二个变量的反线性性质) $\langle f,g+h\rangle=\langle f,g\rangle+\langle f,h\rangle$，对任意的复数$c$有$\langle f,cg\rangle=\overline{c}\langle f,g\rangle$。

2. (16.2.7 L^2范数的性质？) 设$f,g\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，那么有：

   > 1. (非退化性) $\|f\|_2=0$，当且仅当$f=0$。
   > 2. (柯西-施瓦茨不等式) $|\langle f,g\rangle|\leq\|f\|_2\|g\|_2$。
   > 3. (三角不等式) $\|f+g\|_2\leq\|f\|_2+\|g\|_2$。
   > 4. (毕达哥拉斯定理) 如果$\langle f,g\rangle=0$，那么$\|f+g\|_2{}^2=\|f\|_2{}^2+\|g\|_2{}^2$。
   > 5. (齐次性) 对任意的复数c有$\|cf\|_2=|c|\|f\|_2$。

   (注：根据毕达哥拉斯定理，我们有时称f与g**相互正交**当且仅当$\langle f,g\rangle=0$)

课后习题

16.2.1 证明引理16.2.5（提示：(b)的最后一个部分可能会比较棘手，一个可能的方法是使用反证法，假设f不是零函数，然后证明$\int_{[0,1]}|f(x)|^2\mathrm{d}x$是严格正的。如果使用这个方法，你或许需要利用到"$f$是连续的，从而$|f|$也是连续的"这一事实）

> 我们设$f=f_1+f_2\mathrm{i}$，$g=g_1+g_2\mathrm{i}$和$h=h_1+h_2\mathrm{i}$，其中f_1,f_2,g_1,g_2,h_1,h_2都是实值函数。然后逐条证明：
>
> ---
>
> 1. $\langle g,f\rangle=\overline{\langle f,g\rangle}$。
>
> 根据定义我们有：
>
> $$\begin{aligned}\langle g,f\rangle&=\int_{[0,1]}(g_1(x)+g_2(x)\mathrm{i})(f_1(x)-f_2(x)\mathrm{i})\mathrm{d}x\\&=\overline{\int_{[0,1]}(g_1f_1+f_2g_2)(x)\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{[0,1]}(g_2f_1-g_1f_2)(x)\mathrm{d}x}\\&=\overline{\int_{[0,1]}(g_1f_1+f_2g_2)(x)\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{[0,1]}(g_1f_2-g_2f_1)(x)\mathrm{d}x}\\&=\int_{[0,1]}(g_1(x)-g_2(x)\mathrm{i})(f_1(x)+f_2(x)\mathrm{i})\mathrm{d}x=\overline{\langle f,g\rangle}\end{aligned}$$
>
> 于是结论得证。
>
> ---
>
> 2. $\langle f,f\rangle\geq 0$，更进一步地$\langle f,f\rangle=0$当且仅当$f=0$（即对所有的$x\in\mathbb{R}$有$f(x)=0$）。
>
> 根据定义有：
>
> $$\langle f,f\rangle=\int_{[0,1]}f(x)\overline{f(x)}\mathrm{d}x=\int_{[0,1]}|f(x)|^2\mathrm{d}x$$
>
> 由于$|f(x)|^2\geq 0$对任意的$x\in\mathbb{R}$都成立，因此根据实值函数积分的运算定律（命题11.4.1(d)）我们显然有$\langle f,f\rangle\geq 0$。然后对第二个命题，显然当$f=0$时有$\langle f,f\rangle=0$，于是我们只需要证明$\langle f,f\rangle=0$时有$f=0$。
>
> 我们使用反证法，我们假设存在$f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$满足$f\neq 0$且$\langle f,f\rangle=0$。于是存在某个$x_0\in[0,1]$使得$f(x_0)\neq 0$。考虑到若有$f$连续则必有$|f|^2$连续（结合习题13.2.3与命题13.2.3），因此$|f|^2$也是连续的。于是设$L=|f(x_0)|^2>0$，由于$|f|^2$连续，因此存在$\delta>0$使得对任意的$x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap[0,1]$都有$||f(x)|^2-L|\leq L/2$，即$|f(x)|^2\geq L/2>0$。
>
> 然后注意到由于$x_0\in[0,1]$，因此$[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap[0,1]=[\max(x_0-\delta,0),\min(x_0+\delta,1)]$不可能是一个长度为0的区间（注意到$\min(x_0-\delta,0)\leq x_0\leq\max(x_0+\delta,1)$的两个等于号不可能同时成立），于是我们不妨将它写成$[a,b]$（其中$a<b$）。然后考虑一个包含$[a,b]$的划分P，根据黎曼积分的定义我们有：
>
> $$\int_{[0,1]}|f(x)|^2\mathrm{d}x\geq\sum_{I\in P}\left(\inf_{x\in I}f(x)\right)\cdot|I|\geq\frac{L}{2}(b-a)+\sum_{I\in P;I\neq[a,b]}0\cdot|I|>0$$
>
> 也即$\langle f,f\rangle>0$，这导出了矛盾。于是反证结束，反证假设不成立，若有$\langle f,f\rangle=0$则必然有$f=0$。
>
> 综上，于是结论得证。
>
> ---
>
> 3. $\langle f+g,h\rangle=\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle$，对任意的复数$c$有$\langle cf,g\rangle=c\langle f,g\rangle$。
>
> 设$c=a+b\mathrm{i}$（$a,b\in\mathbb{R}$），我们先证明两个积分的运算定律再来证明这个命题，记号沿用上面的记号：
>
> > 结论：设$f,g\in\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$满足$f_1,f_2,g_1,g_2$都在$[0,1]$上黎曼可积且$c$是复数，则有：
> >
> > $$\int_{[0,1]}(f+g)=\int_{[0,1]}f+\int_{[0,1]}g\qquad\int_{[0,1]}cf=c\int_{[0,1]}f$$
> >
> > 证明：
> >
> > 根据定义有：

> $$\begin{aligned}\int_{[0,1]}(f+g) &= \int_{[0,1]}(f_1+g_1)+\mathrm{i}\int_{[0,1]}(f_2+g_2)\\ &= \left(\int_{[0,1]}f_1+\mathrm{i}\int_{[0,1]}f_2\right)+\left(\int_{[0,1]}g_1+\mathrm{i}\int_{[0,1]}g_2\right)\\ &= \int_{[0,1]}f+\int_{[0,1]}g\end{aligned}$$
>
> $$\begin{aligned}\int_{[0,1]}cf &= \int_{[0,1]}(a+\mathrm{i}b)(f_1+\mathrm{i}f_2)\\ &= \int_{[0,1]}(af_1-bf_2)+\mathrm{i}\int_{[0,1]}(af_2+bf_1)\\ &= a\int_{[0,1]}f_1-b\int_{[0,1]}f_2+\mathrm{i}\left(a\int_{[0,1]}f_2+b\int_{[0,1]}f_1\right)\\ &= (a+b\mathrm{i})\left(\int_{[0,1]}f_1+\mathrm{i}\int_{[0,1]}f_2\right)\\ &= c\int_{[0,1]}f\end{aligned}$$
>
> 于是结论得证。

利用上面证明的积分运算定律，我们有：

$$\begin{aligned}\langle f+g,h\rangle &= \int_{[0,1]}(f(x)+g(x))\overline{h(x)}\mathrm{d}x\\ &= \int_{[0,1]}f(x)\overline{h(x)}+g(x)\overline{h(x)}\mathrm{d}x\\ &= \int_{[0,1]}f(x)\overline{h(x)}\mathrm{d}x+\int_{[0,1]}g(x)\overline{h(x)}\mathrm{d}x\\ &=\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle cf,h\rangle &= \int_{[0,1]}cf(x)\overline{h}(x)\mathrm{d}x\\ &=c\int_{[0,1]}f(x)\overline{h}(x)\mathrm{d}x\\ &=c\langle f,h\rangle\end{aligned}$$

于是结论得证。

---

4. $\langle f,g+h\rangle=\langle f,g\rangle+\langle f,h\rangle$，对任意的复数$c$有$\langle f,cg\rangle=\overline{c}\langle f,g\rangle$。

同样利用证明结论(c)时使用的运算定律，我们有：

$$\begin{aligned}\langle f,g+h\rangle &= \int_{[0,1]}f(x)\overline{(g(x)+h(x))}\mathrm{d}x\\ &= \int_{[0,1]}f(x)\overline{g(x)}+f(x)\overline{h(x)}\mathrm{d}x\\ &= \int_{[0,1]}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x+\int_{[0,1]}f(x)\overline{h(x)}\mathrm{d}x\\ &=\langle f,g\rangle+\langle f,h\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle cf,h\rangle &= \int_{[0,1]}f(x)\overline{ch(x)}\mathrm{d}x\\ &= \int_{[0,1]}f(x)\cdot\overline{c}\cdot\overline{h(x)}\mathrm{d}x\\ &=\overline{c}\int_{[0,1]}f(x)\overline{h(x)}\mathrm{d}x\\ &=\overline{c}\langle f,h\rangle\end{aligned}$$

于是结论得证。

16.2.2 证明：$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$上的$L^2$度量$d_{L^2}$的确使$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$成为一个度量空间（参见习题12.1.6）

> 于是需要证明：
>
> - 对任意的$f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，都有$d_{L^2}(f,f)=0$。
>
> > 显然有：
> >
> > $$d_{L^2}(f,f)=\|f-f\|_2=\left(\int_{[0,1]}|0|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}=0$$
> >
> > 此条件总是满足的。
>
> - 对任意不同的$f,g\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，都有$d_{L^2}(f,g)>0$。
>
> > 由于f,g不同，因此至少存在一个$x_0\in[0,1]$使得$f(x_0)\neq g(x_0)\iff f-g\neq 0$。注意到$f-g\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$（命题16.1.5(b)），因此根据命题16.2.5(b)我们知道有：
> >
> > $$d_{L^2}(f,g)=\|f-g\|_2=\langle f-g,f-g\rangle^{1/2}>0$$
> >
> > 此条件总是满足的。
>
> - 对任意的$f,g\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，都有$d_{L^2}(f,g)=d_{L^2}(f,g)$。
>
> > 根据命题16.2.5(c)，(d)有：
> >
> > $$\langle f-g,f-g\rangle=(-1)\langle g-f,f-g\rangle=(-1)(-1)\langle g-f,g-f\rangle=\langle g-f,g-f\rangle$$
> >
> > 因此根据定义有：
> >
> > $$d_{L^2}(f,g)=\sqrt{\langle f-g,f-g\rangle}=\sqrt{\langle g-f,g-f\rangle}=d_{L^2}(f,g)$$
> >
> > 此条件总是满足的。
>
> - 对任意的$f,g,h\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，都有$d_{L^2}(f,h)\leq d_{L^2}(f,g)+d_{L^2}(g,h)$。
>
> > 我们先证明一个子结论：
> >
> > > 结论：设$a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$与$b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$都是$[0,1]$上非负的黎曼可积函数，那么有：
> > >
> > > $$\left(\int_{[0,1]}ab\right)^2\leq\int_{[0,1]}a^2\int_{[0,1]}b^2$$
> > >
> > > 证明：
> > >
> > > ab，a^2，b^2显然都是在$[0,1]$上黎曼可积的函数，因此我们只需要讨论其下黎曼积分就等价于讨论黎曼积分。根据定义，对任意$[0,1]$的划分P，设f,g是分别是从上方控制a,b的关于划分P的分段常数函数（于是它们也都是非负的，我们分别用f_I,g_I表示f,g在区间I上的常数值）。此时根据柯西-施瓦茨不等式（习题12.1.5）我们有：
> > >
> > > $$\left(\sum_{I\in P}f_Ig_I|I|\right)^2\leq\left(\sum_{I\in P}{f_I}^2|I|\right)\left(\sum_{I\in P}{g_I}^2|I|\right)$$
> > >
> > > （考虑替换$a_I=f_I\sqrt{|I|}$与$b_I=g_I\sqrt{|I|}$）
> > >
> > > 注意到fg是从上方控制ab的分段常数函数，从而根据上黎曼积分的定义，我们可以将上面的结论引申为：
> > >
> > > $$\left(\overline{\int}_{[0,1]}ab\right)^2\leq\left(\sum_{I\in P}{f_I}^2|I|\right)\left(\sum_{I\in P}{g_I}^2|I|\right)$$
> > >
> > > 也即$\left(\overline{\int}_{[0,1]}ab\right)^2$是集合$S$的一个下界：
> > >
> > > $$S:=\left\{\left(\sum_{I\in P}{f_I}^2|I|\right)\left(\sum_{I\in P}{g_I}^2|I|\right):f,g\text{是从上方控制}a,b\text{的关于划分}P\text{的分段常数函数}\right\}$$
> > >
> > > 再依据上黎曼积分的定义，我们可以得到如下事实：
> > >
> > > - $\overline{\int}_{[0,1]}a^2\overline{\int}_{[0,1]}b^2$也是$S$的一个下界。

> > > 因为对于满足要求的分段常数函数f,g分别有：
> > >
> > > $$\overline{\int}_{[0,1]} a^2 \le \sum_{I\in P} {f_I}^2|I| \qquad \overline{\int}_{[0,1]} b^2 \le \sum_{I\in P} {g_I}^2|I|$$
> > >
> > > 成立。
> >
> > - 对任意的$M > \overline{\int}_{[0,1]} a^2 \overline{\int}_{[0,1]} b^2$，$M$都不是$S$的下界。
> >
> > > 我们考虑取$\varepsilon > 0$同时满足：
> > >
> > > $$\varepsilon < \overline{\int}_{[0,1]} a^2 + \overline{\int}_{[0,1]} b^2 \qquad \varepsilon < \frac{M - \overline{\int}_{[0,1]} a^2 \overline{\int}_{[0,1]} b^2}{2\left(\overline{\int}_{[0,1]} a^2 + \overline{\int}_{[0,1]} b^2\right)}$$
> > >
> > > 然后根据上黎曼积分是下确界的性质，我们知道存在f,g是从上方控制a,b的分段常数函数满足：
> > >
> > > $$\sum_{I\in P} {f_I}^2|I| \le \overline{\int}_{[0,1]} a^2 + \varepsilon \qquad \sum_{I\in P} {g_I}^2|I| \le \overline{\int}_{[0,1]} b^2 + \varepsilon$$
> > >
> > > 从而即：
> > >
> > > $$\begin{aligned} s = \left(\sum_{I\in P} {f_I}^2|I|\right)\left(\sum_{I\in P} {g_I}^2|I|\right) &\le \left(\overline{\int}_{[0,1]} a^2 + \varepsilon\right)\left(\overline{\int}_{[0,1]} b^2 + \varepsilon\right) \\ &= \overline{\int}_{[0,1]} a^2 \overline{\int}_{[0,1]} b^2 + \varepsilon\left(\overline{\int}_{[0,1]} a^2 + \overline{\int}_{[0,1]} b^2 + \varepsilon\right) \\ &< \overline{\int}_{[0,1]} a^2 \overline{\int}_{[0,1]} b^2 + \frac{M - \overline{\int}_{[0,1]} a^2 \overline{\int}_{[0,1]} b^2}{2\left(\overline{\int}_{[0,1]} a^2 + \overline{\int}_{[0,1]} b^2\right)} 2\left(\overline{\int}_{[0,1]} a^2 + \overline{\int}_{[0,1]} b^2\right) \\ &= M \end{aligned}$$
> > >
> > > 于是存在$s \in S$使得$s < M$，M不是S的一个下界。
> >
> > 综上即$\overline{\int}_{[0,1]} a^2 \overline{\int}_{[0,1]} b^2$是$S$的下确界，因此必然有下界$\left(\overline{\int}_{[0,1]} ab\right)^2 \le \overline{\int}_{[0,1]} a^2 \overline{\int}_{[0,1]} b^2$，把这个结论改写为黎曼积分就得到了我们需要的子结论
>
> 根据定义，于是我们可以将这个不等式转变成积分的形式（左右取平方），即要证明：
>
> $$\int_{[0,1]} |f-h|^2 \le \int_{[0,1]} |f-g|^2 + \int_{[0,1]} |g-h|^2 + 2\left(\int_{[0,1]} |f-g|^2 \int_{[0,1]} |g-h|^2\right)^{1/2}$$
>
> 我们记上面不等式右端为expr_1。注意到绝对值的三角不等式，对任意的$x \in \mathbb{R}$有：
>
> $$\begin{gathered} |(f-h)(x)| \le |(f-g)(x)| + |(g-h)(x)| \\ \Updownarrow \\ |(f-h)(x)|^2 \le |(f-g)(x)|^2 + 2|(f-g)(g-h)(x)| + |(g-h)(x)|^2 \end{gathered}$$
>
> 于是对根据实值函数的积分定律有：
>
> $$\int_{[0,1]} |f-h|^2 \le \int_{[0,1]} |f-g|^2 + \int_{[0,1]} |g-h|^2 + 2\int_{[0,1]} |f-g||g-h|$$
>
> 记上面不等式右端为expr_2。运用上面的辅助结论有$\int_{[0,1]} |f-g||g-h| \le \left(\int_{[0,1]} |f-g|^2 \int_{[0,1]} |g-h|^2\right)^{1/2}$，因此我们可以得到：
>
> $$\int_{[0,1]} |f-h|^2 \le \text{expr}_2 \le \text{expr}_1$$
>
> 于是题目的三角不等式得证，此条件总是满足的。

综上，于是$(C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C}), d_{L^2})$确实是一个度量空间。

题外话：写题的时候没看到L^2度量的定义在引理16.2.7后面，三角不等式的证明可以直接用引理16.2.7解决方便快捷，上面的内容仅作参考。

16.2.3 设$f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$是一个非零函数。证明：$0 < \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$。反过来，设$0 < A \leq B$都是实数，证明：存在一个非零函数$f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$使得$\|f\|_2 = A$且$\|f\|_\infty = B$（提示：设$g$是$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$中一个非负实值函数，并且$g$不是常数函数，然后考察形如$f = (c+dg)^{1/2}$的函数$f$，其中$c, d > 0$是实值常数）

> 如果我们考虑定义常数函数$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$有$g(x) := \sup_{y\in[0,1]} f(y) = \|f\|_\infty$，于是对任意的$x \in [0,1]$我们总是有$|f(x)|^2 \leq |g(x)|^2$，从而根据积分的运算定律我们有：
>
> $$\int_{[0,1]} |f|^2 \leq \int_{[0,1]} |g|^2 \iff \|f\|_2 \leq \sqrt{{\|f\|_\infty}^2 \cdot |[0,1]|} = \|f\|_\infty$$
>
> 然后由于f不是零函数因此根据命题12.2.5我们有$\|f\|_2 > 0$，综合即第一个结论得证。
>
> 然后证明第二个结论。考虑函数$g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，然后考虑令有常数$c, d > 0$，并令$f = (c+dg)^{1/2}$（显然$f$属于$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$）。我们希望有：
>
> $$\begin{cases} \|f\|_\infty = B \\ \|f\|_2 = A \end{cases} \iff \begin{cases} \sup_{x\in[0,1]} (c+dg(x))^{1/2} = B & (1) \\ \int_{[0,1]} c+dg = A^2 & (2) \end{cases}$$
>
> 对条件(1)，根据最大值原理我们知道g必然在某个$x_{\max} \in [0,1]$处达到最大值，由于$c, d > 0$因此f也是在$x_{\max}$处达到最大值$(c+dg(x_{\max}))^{1/2}$；对于条件(2)，我们可以直接计算得到$\int_{[0,1]} c+dg = c + d\int_{[0,1]} g$。从而上面的条件可以变为：
>
> $$\begin{cases} c+dg(x_{\max}) = B^2 \\ c+\left(\int_{[0,1]} g\right)d = A^2 \end{cases} \iff \begin{cases} d = \frac{B^2-A^2}{g(x_{\max})-\int_{[0,1]} g} \\ c = \frac{g(x_{\max})A^2 - B^2\int_{[0,1]} g}{g(x_{\max})-\int_{[0,1]} g} \end{cases}$$
>
> $B^2 \geq A^2$与$g(x_{\max}) \geq \int_{[0,1]} g$是显然的，于是只要$g$满足$g(x_{\max})A^2 - B^2\int_{[0,1]} g > 0$，那么我们就可以通过上面的推论过程得到对应的$c, d > 0$与对应满足$\|f\|_\infty = B$与$\|f\|_2 = A$的函数$f$。
>
> 于是考虑定义g在$[0,1]$上有：
>
> $$g(x) := \begin{cases} x^{\frac{B^2}{A^2}} & \text{if } x \in [0, 0.5) \\ (1-x)^{\frac{B^2}{A^2}} & \text{if } x \in [0.5, 1] \end{cases}$$
>
> 显然$g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，且$g$在$0.5$处有最大值。于是有：
>
> $$\frac{g(x_{\max})}{\int_{[0,1]} g} = \frac{(\frac{B^2}{A^2}+1)0.5^{\frac{B^2}{A^2}}}{2\cdot 0.5^{\frac{B^2}{A^2}+1}} = \frac{B^2}{A^2}+1 > \frac{B^2}{A^2}$$
>
> 正是我们所需要的函数，可以计算对应的题目所需要的函数f为：
>
> $$f(x) := \left(\frac{A^4}{B^2} + \frac{B^4-A^4}{B^2}2^{\frac{B^2}{A^2}}g(x)\right)^{1/2} \qquad x \in [0,1]$$
>
> 可以验证这个f是满足题目要求的函数。

16.2.4 证明引理16.2.7（提示：反复利用引理16.2.5。对于柯西-施瓦茨不等式，从正性$\langle f, f\rangle \geq 0$入手，你或许需要考虑函数$f{\|g\|_2}^2 - \langle f, g\rangle g$，然后利用引理16.2.5进行化简。对$\|g\|_2 = 0$的情况你或许需要单独考察，利用柯西-施瓦茨不等式去证明三角不等式）

> 逐条证明：
>
> ---
>
> 1. $\|f\|_2 = 0$，当且仅当$f = 0$。
>
> 根据引理16.2.5我们有$\langle f, f\rangle = 0$当且仅当$f = 0$，从而$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = 0$当且仅当$f = 0$。
>
> ---
>
> 2. $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2\|g\|_2$。
>
> 对任意的$f, g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$，考虑定义函数$h = f{\|g\|_2}^2 - \langle f, g\rangle g \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$。由于内积的正性有$\langle h, h\rangle \geq 0$，也即有：

$$
\begin{aligned}
&\langle f\|g\|_2{}^2-\langle f,g\rangle g, f\|g\|_2{}^2-\langle f,g\rangle g\rangle\\
=&\langle f\|g\|_2{}^2, f\|g\|_2{}^2-\langle f,g\rangle g\rangle-\langle\langle f,g\rangle g, f\|g\|_2{}^2-\langle f,g\rangle g\rangle\\
=&\langle f\|g\|_2{}^2, f\|g\|_2{}^2\rangle-\langle f\|g\|_2{}^2,\langle f,g\rangle g\rangle-\langle\langle f,g\rangle g, f\|g\|_2{}^2\rangle+\langle\langle f,g\rangle g,\langle f,g\rangle g\rangle\\
=&\|g\|_2{}^4\|f\|_2{}^2-\|g\|_2{}^2\langle g,f\rangle\langle f,g\rangle-\langle f,g\rangle\|g\|_2{}^2\langle g,f\rangle+\langle f,g\rangle\langle g,f\rangle\|g\|_2{}^2\\
=&\|g\|_2{}^4\|f\|_2{}^2-\|g\|_2{}^2|\langle f,g\rangle|^2\geq 0
\end{aligned}
$$

注意到L^2范数的正性，g非零（也即$\|g\|_2\neq 0$，结论(a)）的情况下可以约去$\|g\|_2{}^2$，即：

$$
\|g\|_2{}^2\|f\|_2{}^2-|\langle f,g\rangle|^2\geq 0 \iff \|g\|_2{}^2\|f\|_2{}^2\geq|\langle f,g\rangle|^2
$$

而对$g=0$的情况，可以直接验证柯西施瓦茨不等式左右两端都是0，此时显然成立。

---

3. $\|f+g\|_2\leq\|f\|_2+\|g\|_2$。

注意到有：

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_2{}^2&=\langle f+g,f+g\rangle\\
&=\langle f,f\rangle+\langle g,f\rangle+\langle f,g\rangle+\langle g,g\rangle\\
&=\|f\|_2{}^2+\|g\|_2{}^2+\langle f,g\rangle+\overline{\langle f,g\rangle}\\
&=\|f\|_2{}^2+\|g\|_2{}^2+2\Re(\langle f,g\rangle)\\
&\leq\|f\|_2{}^2+\|g\|_2{}^2+2|\langle f,g\rangle|
\end{aligned}
$$

然后根据结论(b)，上面的内容可以进一步引申为：

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_2{}^2&\leq\|f\|_2{}^2+\|g\|_2{}^2+2|\langle f,g\rangle|\\
&\leq\|f\|_2{}^2+\|g\|_2{}^2+2\|f\|_2\|g\|_2\\
&=(\|f\|_2+\|g\|_2)^2
\end{aligned}
$$

由于范数都是正数，因此上面的不等式等价于$\|f+g\|_2\leq\|f\|_2+\|g\|_2$。

---

4. 如果$\langle f,g\rangle=0$，那么$\|f+g\|_2{}^2=\|f\|_2{}^2+\|g\|_2{}^2$。

同结论(c)的证明，不过在中间由$\langle f,g\rangle=0$有：

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_2{}^2&=\langle f,f\rangle+\langle g,f\rangle+\langle f,g\rangle+\langle g,g\rangle\\
&=\|f\|_2{}^2+\|g\|_2{}^2
\end{aligned}
$$

---

5. 对任意的复数c有$\|cf\|_2=|c|\|f\|_2$。

根据L^2范数定义与引理16.2.5(c)，(d)可以直接计算有：

$$
\begin{aligned}
\|f\|_2{}^2&=\sqrt{\langle cf,cf\rangle}\\
&=\sqrt{c\overline{c}\langle f,f\rangle}\\
&=\sqrt{|c|^2\langle f,f\rangle}\\
&=|c|\sqrt{\langle f,f\rangle}=|c|\|f\|_2
\end{aligned}
$$

综上，于是结论得证。

16.2.5 找出一个连续周期函数的序列，使得该序列依L^2度量收敛于一个不连续的周期函数（提示：试试收敛于方波函数）

对任意的$n\geq 1$，定义$f_n\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$在$[0,1)$上有：

$$
f_n(x):=\begin{cases}
0.5+0.5(4x)^{1/n} & \text{if } x\in[0,0.25)\\
0.5+0.5(2-4x)^{1/n} & \text{if } x\in[0.25,0.5)\\
0.5-0.5(4x-2)^{1/n} & \text{if } x\in[0.5,0.75)\\
0.5-0.5(4-4x)^{1/n} & \text{if } x\in[0.75,1)
\end{cases}
$$

然后考虑$\mathbb{Z}$周期函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$在$[0,1)$上有：

$$
f_n(x):=\begin{cases}
0.5 & \text{if } x=0,0.5\\
1 & \text{if } x\in(0,0.5)\\
0 & \text{if } x\in(0.5,1)
\end{cases}
$$

> 对任意的$n\geq 1$，运用变量替换法可以计算有：
>
> $$\begin{aligned}d_{L^2}(f_n,f)&=\left(\int_{[0,1]}|f-f_n|^2\right)^{1/2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int_0^{0.25}(1-(4x)^{1/n})^2\mathrm{d}x+\int_{0.25}^{0.5}(1-(2-4x)^{1/n})^2\mathrm{d}x+\right.\\&\qquad\left.\int_{0.5}^{0.75}(1-(4x-2)^{1/n})^2\mathrm{d}x+\int_{0.75}^{1}(1-(4-4x)^{1/n})^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\\&=\left(\int_0^1(1-y^{1/n})^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\\&=\left(\frac{2}{2+3n+n^2}\right)^{1/2}\leq\frac{2}{n}\end{aligned}$$
>
> 从而对任意的$\varepsilon>0$，根据阿基米德性质可知存在$N\geq 1$使得$\frac{2}{N}<\varepsilon$，从而对任意的$n\geq N$都有$d_{L^2}(f_n,f)<\varepsilon$，于是$(f_n)_{n=1}^\infty$依$L^2$度量收敛于$f$，但是$f$显然是一个不连续的$\mathbb{Z}$周期函数。
>
> ---
>
> 话说不在$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$内的函数按定义不应该有$d_{L^2}$度量，有点怪。

16.2.6 设$f\in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$，并设$(f_n)_{n=1}^\infty$是$C(\mathbb{R}/\mathbb{Z};\mathbb{C})$中的函数序列：

(a) 证明：如果f_n一致收敛于f，那么f_n也依L^2度量收敛于f

> 若f_n一致收敛于f，则对任意的$\varepsilon>0$，存在$N\geq 1$使得对任意的$n\geq N$与全体$x\in\mathbb{R}$都有$|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$。考虑到$f,f_n$都是$\mathbb{Z}$周期函数，因此我们只需要用到$x\in[0,1]$上的结论。此时根据$L^2$度量的定义我们有：
>
> $$d_{L^2}(f_n,f)=\|f-f_n\|_2=\left(\int_{[0,1]}|f_n-f|^2\right)^{1/2}\leq\left(\int_{[0,1]}\varepsilon^2\right)^{1/2}=\varepsilon$$
>
> 从而上面的结论即：对任意的$\varepsilon>0$，存在$N\geq 1$使得对任意的$n\geq N$与都有$d_{L^2}(f_n,f)\leq\varepsilon$，也即$f_n$也依$L^2$度量收敛于$f$。

(b) 举例：存在序列f_n依L^2度量收敛于f，但不一致收敛于f (提示：取$f=0$，并试着让函数列f_n有较大的上确界范数)

> 取$f=0$，对任意的$n\geq 0$，考虑f_n有：
>
> $$f_n(x):=\begin{cases}(2x)^n & \text{if } x\in[0,0.5)\\(2-2x)^n & \text{if } x\in[0.5,1)\end{cases}$$
>
> 于是显然有：
>
> $$d_{L^2}(f_n,f)=\left(\int_{[0,1]}|f_n-f|^2\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$$
>
> 因此显然有f_n依L^2度量收敛于f，但是又有：对$\varepsilon=0.5>0$，对任意的$n\geq 1$都存在$0.5\in\mathbb{R}$有$|f_n(0.5)-f(0.5)|=1>0.5$。于是直接依据一致收敛的定义我们知道f_n不是一致收敛于f的。

(c) 举例：存在序列f_n依L^2度量收敛于f，但不逐点收敛于f (提示：取$f=0$，并试着让函数列f_n在某一点处较大)

> 同样用题(b)中的例子，注意到对0.5有$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0.5)=1\neq 0(f(0.5))$，从而即$f_n$也不是逐点收敛于$f$的。

(d) 举例：存在序列f_n逐点收敛于f，但不依L^2度量收敛于f (提示：取$f=0$，并试着让函数列f_n有较大的L^2范数)

> 取$f=0$，对任意的$n\geq 0$，考虑f_n在$[0,1]$上有：
>
> $$f_n(x):=\begin{cases}\sqrt{2^{n+2}(x-2^{-n-1})} & \text{if } x\in[2^{-n-1},2^{-n-1}+2^{-n-2})\\\sqrt{2^{n+2}(2^{-n}-x)} & \text{if } x\in[2^{-n-1}+2^{-n-2},2^{-n})\\0 & \text{else}\end{cases}$$
>
> 显然，对任意的$x\in[0,1)$，我们总是能找到$N\geq 1$使得$2^{-n}<x$对任意的$n\geq N$都成立。从而有：
>
> $$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}0=f(x)$$
>
> 于是f_n逐点收敛于f，但是另一方面，我们可以计算有：
>
> $$d_{L^2}(f_n,f)=\left(\int_{[0,1]}|f_n-f|^2\right)^{1/2}=1$$

> 从而f_n不可能依L^2度量收敛于f，于是结论得证。

本节相关跳转

[实分析 12.1 定义和例子]