9.9 一致连续性

定义

1. (9.9.2 一致连续) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，并设$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数。如果对任意$\varepsilon > 0$，都存在$\delta > 0$使得只要x，$x_0 \in X$是X中两个δ-接近的点，$f(x)$，$f(x_0)$就是ε-接近的，则我们称f是**一致连续的**。

   (注：我们应当把这个概念同函数的连续性做比较，两者的区别在于：对一个给出的ε，在一致连续中我们可以取到一个δ使这个δ对所有$x_0 \in X$满足，而在连续中不同的$x_0 \in X$可能使用不同的δ。因此，每个一致连续的函数都是连续的，反过来则不一定)

2. (9.9.5 等价序列) 设m是一个整数，$(a_n)_{n=m}^{\infty}$与$(b_n)_{n=m}^{\infty}$是两个实数序列，并且设$\varepsilon_0 > 0$是给定的。

   称$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是ε_0**-接近于**$(b_n)_{n=m}^{\infty}$的，当且仅当对任意$n \geq m$都有a_n是ε_0-接近于b_n的。

   称$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是**最终**ε_0**-接近于**$(b_n)_{n=m}^{\infty}$的，当且仅当存在一个$N \geq m$使得对$(a_n)_{n=N}^{\infty}$是ε_0-接近于$(b_n)_{n=N}^{\infty}$的。

   称$(a_n)_{n=m}^{\infty}$与$(b_n)_{n=m}^{\infty}$是**等价的**，当且仅当对任意$\varepsilon > 0$都有$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是最终ε-接近于$(b_n)_{n=m}^{\infty}$的。

   (注：在5.2节中我们学习了一个与之相似的概念，这里相比定义5.2.6，我们去掉了对ε的限制（在那节还没有实数的概念），对于这样的去除我们也在习题6.1.10中证明了这样的限制完全是无所谓的。)

命题

1. (9.9.7 等价序列的极限表述？) 设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$是两个实数序列（不一定是有界的或者是收敛的），则$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$是等价的当且仅当$\lim\limits_{n \to \infty}(a_n - b_n) = 0$。

2. (9.9.8 一致连续的等价序列表述？) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，并设$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数。那么下面两个命题逻辑上是等价的：

   > - f在X上是一致连续的。
   > - 若$(x_n)_{n=0}^{\infty}$与$(y_n)_{n=0}^{\infty}$是完全由X中元素构成的等价序列，那么序列$(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$与$(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$也是等价的。

   (注：我们应当将这个命题同命题9.4.7比较，命题9.4.7断定若f是连续的，那么f将收敛的序列映射到收敛的序列；命题9.9.8断定若f是一致连续的，那么f将等价的序列映射到等价的序列。为找出两者的关联，根据引理9.9.7我们有$(x_n)_{n=1}^{\infty}$收敛于x_*当且仅当序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$与$(x_*)_{n=1}^{\infty}$等价，从而我们可以将两个命题联系到一起)

3. (9.9.12 一致连续与柯西序列？) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，$f : X \to \mathbb{R}$是一个一致连续的函数，并且设$(x_n)_{n=0}^{\infty}$是完全由X中元素构成的柯西序列，那么$(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$也是一个柯西序列。

   (注：于是一致连续函数将柯西序列映射到柯西序列)

   > 推论：
   >
   > 1. (9.9.14) 设X是$\mathbb{R}$的一个子集，$f : X \to \mathbb{R}$是一个一致连续的函数，并且设x_0是X的附着点，那么极限$\lim\limits_{x \to x_0; x \in X} f(x)$存在（特别地，它还是一个实数）。

4. (9.9.15 一致连续与有界集？）设X是$\mathbb{R}$的一个子集，并设$f: X \to \mathbb{R}$是一个一致连续的函数。若E是X的一个有界子集，那么$f(E)$也是有界的。

   （注：于是一致连续函数将有界集映射到有界集）

5. (9.9.16 闭区间连续函数必然一致连续？）设$a < b$都是实数，并且设$f: [a, b] \to \mathbb{R}$是$[a, b]$上的连续函数，那么f也是一致连续的。

   （注：我们应当将引理9.6.3，命题9.9.15和定理9.9.16比较，这三者相互独立，获得任意两者都不能推出第三者，但是它们之间互相保持一致）

课后习题

9.9.1 证明引理9.9.7

> 分别证明其充分必要性。
>
> - 若$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$是等价的，则有$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$：
>
> 根据定义9.9.5，于是由$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$是等价的，有对任意的实数$\varepsilon > 0$，都存在$N \geq 1$，使得对任意的$n \geq N$，a_n与b_n都是ε-接近的。换言之，$|a_n - b_n| \leq \varepsilon$，于是即$|(a_n - b_n) - 0| \leq \varepsilon$，整理上面的表述，于是有：
>
> 对任意的实数$\varepsilon > 0$，都存在$N \geq 1$，使得对任意的$n \geq N$都有$|(a_n - b_n) - 0| \leq \varepsilon$。根据序列极限的定义，即$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$成立，结论得证。
>
> ---
>
> - 若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$，则有$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$是等价的：
>
> 根据序列极限的定义，由$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$可得对任意的实数$\varepsilon > 0$，都存在$N \geq 1$，使得对任意的$n \geq N$，都有$|(a_n - b_n) - 0|$小于等于$\varepsilon$成立，换言之也就是有$|a_n - b_n| \leq \varepsilon$成立。
>
> 从而总结上内容可以得到：对任意的实数$\varepsilon > 0$，都存在$N \geq 1$，使得对任意的$n \geq N$都有$|a_n - b_n| \leq \varepsilon$成立，即序列$(a_n)_{n=N}^{\infty}$与序列$(b_n)_{n=N}^{\infty}$是$\varepsilon$-接近的$\Longrightarrow$序列$(a_n)_{n=N}^{\infty}$与序列$(b_n)_{n=N}^{\infty}$是最终$\varepsilon$-接近的$\Longrightarrow(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$是等价的，于是结论得证。
>
> 综上，于是引理9.9.7得证。

9.9.2 证明命题9.9.8（提示：不应该使用引理9.9.7，而是应当回归到定义9.9.5中等价序列的定义）

> 分别证明其充分必要性。
>
> - 若f在X上是一致连续的，则对任意$(x_n)_{n=0}^{\infty}$与$(y_n)_{n=0}^{\infty}$是完全由X中元素构成的等价序列，序列$(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$与$(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$也是等价的。
>
> 对任意的$(x_n)_{n=0}^{\infty}$与$(y_n)_{n=0}^{\infty}$是完全由X中元素构成的等价序列，尝试证明序列$(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$与$(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$是等价的。考虑任意的实数$\varepsilon > 0$，根据定义9.9.2存在一个$\delta > 0$使得对任意的$x_1, x_2 \in X$且x_1，x_2是δ-接近的，都有$f(x_1)$与$f(x_2)$是ε-接近的。
>
> 又由于$(x_n)_{n=0}^{\infty}$与$(y_n)_{n=0}^{\infty}$是完全由X中元素构成的等价序列，根据定义9.9.5，对δ，存在一个整数$N \geq 0$使得对任意$n \geq N$，都有x_n与y_n是δ-接近的，综合上结论即$f(x_n)$与$f(y_n)$是ε-接近的。从而我们有：
>
> 对任意的实数$\varepsilon > 0$，存在一个整数$N \geq 0$使得对任意$n \geq N$都有$f(x_n)$与$f(y_n)$是ε-接近的。根据定义9.9.5，这表明$(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$与$(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$是等价的。
>
> ---

- 若对任意$(x_n)_{n=0}^{\infty}$与$(y_n)_{n=0}^{\infty}$是完全由X中元素构成的等价序列，序列$(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$与$(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$也是等价的，则f在X上是一致连续的。

考虑使用反证法，假设f在X上是非一致连续的。

根据定义9.9.2，若f在X上是非一致连续的，则存在一个实数$\varepsilon > 0$，使得对任意的$\delta > 0$，都存在至少一对$x_1, x_2 \in X$且x_1，x_2是δ-接近的，都有$f(x_1)$与$f(x_2)$满足$|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$，即集合$\{(x, y) \in X \times X : |x - y| \leq \delta$且$|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\}$是非空的。

于是考虑定义集合$A_n := \left\{(x, y) \in X \times X : |x - y| \leq \frac{1}{n+1}\text{且}|f(x) - f(y)| > \varepsilon\right\}$。根据上面的结论，对任意的自然数$n$集合$A_n$总是非空的，于是根据选择公理，我们可以获得一个函数对任意的自然数n指定一个有序对$(x_n, y_n) \in X \times X$。然后我们考虑序列$(x_n)_{n=0}^{\infty}$与$(y_n)_{n=0}^{\infty}$的性质。

根据上定义，我们有$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1}$对任意的$n \geq 0$都成立，从而对任意的实数$\sigma > 0$，根据阿基米德性质我们都有存在一个实数$N$满足$\sigma \geq \frac{1}{N}$，于是对任意的$n \geq N$，都有$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N} \leq \sigma$。于是根据定义9.9.5，序列$(x_n)_{n=0}^{\infty}$与$(y_n)_{n=0}^{\infty}$是等价的；而根据上定义，又有$|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$对任意$n \geq 0$都成立，于是序列$(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$与$(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$不可能是最终$\varepsilon$接近的，更进一步地，序列$(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$与$(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$不可能是等价的。

于是综合上内容，即存在一对完全由X中元素构成的等价序列$(x_n)_{n=0}^{\infty}$与$(y_n)_{n=0}^{\infty}$满足序列$(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$与$(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$不是等价的，这跟问题中"对任意$(x_n)_{n=0}^{\infty}$与$(y_n)_{n=0}^{\infty}$是完全由X中元素构成的等价序列，序列$(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$与$(f(y_n))_{n=0}^{\infty}$也是等价的"的前提矛盾，于是导出矛盾，f只能是在X上一致连续的。

综上，于是命题9.9.8得证。

9.9.3 证明命题9.9.12 **（提示：直接使用定义9.9.2）**

设$(x_n)_{n=0}^{\infty}$是完全由X中元素构成的柯西序列，考虑序列$(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$的性质：

对任意的实数$\varepsilon > 0$，由于f是在X上的一致连续函数，于是存在实数$\delta > 0$使得对任意$a, b \in X$且a，b是δ-接近的，都有$f(a)$与$f(b)$是ε-接近的；又由于$(x_n)_{n=0}^{\infty}$是柯西序列，从而对δ，存在一个整数$N \geq 0$使得对任意的$n_1, n_2 \geq N$，都有x_{n_1}与x_{n_2}是δ-接近的，从而即$f(x_{n_1})$与$f(x_{n_2})$是ε-接近的。于是总结即：

对任意的实数$\varepsilon > 0$，存在一个整数$N \geq 0$使得对任意的$n_1, n_2 \geq N$，$f(x_{n_1})$与$f(x_{n_2})$都是ε-接近的。根据柯西序列的定义（定义6.1.3），于是$(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$也是一个柯西序列。

9.9.4 利用命题9.9.12证明推论9.9.14，利用这个推论对例9.9.10中的结果给出另一种证明

证明推论9.9.14：

考虑任意的完全由X中元素组成的收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$。根据命题6.4.18，我们可以知道它是一个柯西序列，从而根据命题9.9.12的结论，可以得到$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$也是一个柯西序列，再根据命题6.4.18我们可以得知$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$是收敛的。

此时再考虑另一个完全由X中元素组成的收敛于x_0的序列$(b_n)_{n=0}^{\infty}$，通过同样的推理我们可以得到$(f(b_n))_{n=0}^{\infty}$也是收敛的。此外，根据极限定理与命题9.9.7的结论，由$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = x_0 - x_0 = 0$可得$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$等价，进而根据命题9.9.8，由$f$的一致连续性可以得到$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$与$(f(b_n))_{n=0}^{\infty}$也是等价的。此时根据命题9.9.7，即有：

$$\lim_{n\to\infty}[f(a_n) - f(b_n)] = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

> 于是综上我们可以总结得到：
>
> 对任意的完全由X中元素组成的收敛于x_0的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$，$(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$都是收敛的且收敛于同一个实数（我们姑且称之为L），于是根据命题9.3.9的结论，这等价于f在x_0处沿X收敛于L，即$\lim_{x\to x_0;x\in X} f(x) = L$。于是结论得证。
>
> ---
>
> 关于例9.9.10：
>
> 先贴出例9.9.10的内容：
>
> > 考虑定义为$f(x) := 1/x$的函数$f : (0,2) \to \mathbb{R}$。根据引理9.9.7可知，序列$(1/n)_{n=1}^{\infty}$与$(1/2n)_{n=1}^{\infty}$是$(0,2)$中的等价序列，但是序列$(f(1/n))_{n=1}^{\infty}$与$(f(1/2n))_{n=1}^{\infty}$不是等价的。（为什么？再次使用引理9.9.7），所以根据命题9.9.8可知，f不是一致连续的。（这些序列从1开始而不是从0开始，但读者能够容易看出这并不影响上面的讨论。）
>
> 考虑另一种思路，由于0是$(0,2)$的附着点，从而根据推论9.9.14，若f在$(0,2)$上一致连续则应当有$\lim_{x\to 0;x\in(0,2)} f(x)$存在且是一个实数，但是我们不难发现$f$在0处是发散的，从而导出了矛盾。

9.9.5 证明命题9.9.15（提示：模仿引理9.6.3的证明。某些地方你需要用到命题9.9.12或推论9.9.14）

> 利用反证法，不妨假设$f(E)$是无界的，从而对任意的实数M，都存在$x \in E$满足$|f(x)| \geq M$。从而集合$\{x \in E : |f(x)| \geq M\}$对任意实数$M$都是非空的。
>
> 于是根据选择公理，对任意的自然数$n \in \mathbb{N}$，我们都可以指定一个$a_n \in \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$，即$|f(a_n)| \geq n$对任意$n \in \mathbb{N}$成立。又根据波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理（命题6.6.8）与E的有界性，从而至少存在一个$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的子序列$(b_n)_{n=m}^{\infty}$是收敛的，进一步地，$(b_n)_{n=m}^{\infty}$是一个柯西序列。此时我们讨论$(b_n)_{n=m}^{\infty}$的性质：
>
> > - 根据命题9.9.12，于是由f的一致连续性应当有$(f(b_n))_{n=m}^{\infty}$也是一个柯西序列，进一步地由柯西序列的有界性，$(f(b_n))_{n=m}^{\infty}$也是有界的。
> > - 根据子序列的定义，应当有$|f(b_n)| \geq n$对任意$n \in \mathbb{N}$成立，从而对任意的实数M，M都不可能是$(f(b_n))_{n=m}^{\infty}$的界，即序列$(f(b_n))_{n=m}^{\infty}$是无界的。
>
> 于是$(f(b_n))_{n=m}^{\infty}$同时是有界的和无界的，这导出了矛盾，从而反证假设不成立，只能有$f(E)$是有界的。

9.9.6 设X，Y，Z是$\mathbb{R}$的子集。设$f : X \to Y$是X上的一致连续函数，并设$g : Y \to Z$是Y上的一致连续函数。证明：$g \circ f : X \to Z$是X上一致连续函数

> 考虑任意的实数$\varepsilon > 0$，由g是一致连续的，于是存在实数$\delta > 0$使得对任意$y_1, y_2 \in Y$且$|y_1 - y_2| \leq \delta$，都有$|g(y_1) - g(y_2)| \leq \varepsilon$成立；而对$\delta$，由$f$是一致连续的，于是存在实数$\sigma > 0$使得对任意$x_1, x_2 \in Y$且$|x_1 - x_2| \leq \sigma$，都有$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \delta$成立，考虑到$f(x_1)$与$f(x_2)$都属于$Y$，于是根据上结论即有$|g(f(x_1)) - g(f(x_2))| \leq \varepsilon$。
>
> 结合起来即有：对任意的实数$\varepsilon > 0$，存在实数$\sigma > 0$使得对任意$x_1, x_2 \in Y$且$|x_1 - x_2| \leq \sigma$，都有$|g \circ f(x_1) - g \circ f(x_2)| \leq \varepsilon$成立，从而根据定义9.9.2，即$g \circ f : X \to Z$是$X$上一致连续函数，题目结论得证。

本节相关跳转

实分析 5.2 等价的柯西序列

实分析 6.1 收敛与极限定律

实分析 9.4 连续函数

实分析 9.6 最大值原理