

4.3 绝对值与指数运算

定义

绝对值

1. (4.3.1 绝对值) 如果 x 是一个有理数, 则其**绝对值** $|x|$ 有如下定义:

- 若 x 是正的, 则 $|x| := x$ 。
- 若 x 是负的, 则 $|x| := -x$ 。
- 若 x 是0, 则 $|x| := 0$ 。

2. (4.3.2 距离) 设 x 与 y 为有理数, 则称量 $|x - y|$ 为 x 与 y 之间的距离, 有时候记作 $d(x, y)$, 于是有 $d(x, y) := |x - y|$ 。如 $d(3, 5) = 2$ 。

3. (4.3.4 ε -接近性) 设 $\varepsilon > 0$ 是一个有理数, 并且设 x, y 为有理数, 并且称 x, y 有 x 是 ε -接近于 y 的, 当且仅当 $d(x, y) \leq \varepsilon$ 。

指数运算

1. (4.3.9 自然数次幂的指数运算) 设 x 是一个有理数, 为把 x 升到0次幂, 定义 $x^0 := 1$, 特别地, 定义 $0^0 = 1$, 现归纳性地假设对某自然数 n 已有 x^n 的定义, 于是定义 $x^{(n+1)} := x^n \times x$ 。

(比较此处定义与2.3.11处指数定义的不同)

2. (4.3.11 负整数次幂的指数运算) 设 x 是一个不为0的有理数, 则对任意负整数 $-n$, 定义 $x^{-n} := 1/(x^n)$ 。

命题

绝对值

1. (4.3.3 绝对值与距离的基本性质) 设 x, y, z 为有理数:

- (绝对值的非退化性) $|x| \geq 0$, 另外 $|x| = 0$ 当且仅当 x 为0。
- (绝对值的三角不等式) $|x + y| \leq |x| + |y|$ 。
- (不知道是啥) $-y \leq x \leq y$, 当且仅当 $y \geq |x|$, 特别地 $-x \leq |x| \leq x$ 。
- (绝对值的可乘性) $|xy| = |x| \times |y|$, 特别地 $|-x| = |x|$ 。
- (距离的非退化性) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$ 。
- (距离的对称性) $d(x, y) = d(y, x)$ 。
- (距离的三角不等式) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 。

2. (4.3.7 ε -接近性的基本性质?) 设 x, y, z, w 为有理数:

- 如果 $x = y$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, x 都是 ε -接近于 y 的, 两者互为充要条件。
- 设 $\varepsilon > 0$, 若 x 是 ε -接近于 y 的, 则 y 也是 ε -接近于 x 的。
- 设 $\varepsilon > 0$, 若 x 是 ε -接近于 y 的, y 是 σ -接近于 z 的, 则 x 是 $(\varepsilon + \sigma)$ -接近于 z 的。
- 设 $\sigma, \varepsilon > 0$, 若 x 与 y 是 ε -接近的, z 与 w 是 σ -接近的, 则有 $(x + z)$ 与 $(y + w)$ 是 $(\varepsilon + \sigma)$ -接近的, $(x - z)$ 与 $(y - w)$ 也相同。
- 设 $\sigma, \varepsilon > 0$, 若 x, y 是 ε -接近的, 则对任意 $\varepsilon' > \varepsilon$, x 与 y 是 ε' -接近的。
- 设 $\varepsilon > 0$, 若 y 与 z 都是 ε -接近于 x 的, 且 w 在 y 与 z 之间, 则 w 也是 ε -接近于 x 的。

- 设 $\varepsilon > 0$, 若 x, y 是 ε 接近的, 且 z 不为 0, 则 xz 与 yz 也是 $\varepsilon|z|$ -接近的。
- 设 $\sigma, \varepsilon > 0$, 如果 x, y 是 ε -接近的且 z 与 w 是 σ -接近的, 则 xz 与 yw 是 $(\varepsilon|z| + \sigma|x| + \sigma\varepsilon)$ -接近的。

指数运算

1. (4.3.10 指数的运算性质I) 设 x 与 y 为非零有理数, 并设 n 和 m 为自然数, 则有:

- $x^n \times x^m = x^{(n+m)}, (x^n)^m = x^{(nm)}, (xy)^n = x^n y^n$ 。
- 若 $x \geq y \geq 0$, 则有 $x^n \geq y^n \geq 0$, 若 $x > y \geq 0$ 且 $n > 0$ 时, 则有 $x^n > y^n \geq 0$ 。
- 若 $n > 0$, 则 $x^n = 0$ 当且仅当 $x = 0$ 。
- 有 $|x^n| = |x|^n$ 。

2. (4.3.12 指数的运算性质II) 设 x 与 y 为非零有理数, 并设 n 和 m 为整数, 则有:

- $x^n \times x^m = x^{(n+m)}, (x^n)^m = x^{(nm)}, (xy)^n = x^n y^n$ 。
- 若 $x \geq y \geq 0$, 则当 n 正数时有 $x^n \geq y^n > 0$, 当 n 负数时有 $0 < x^n \leq y^n$ 。
- 若 $x, y > 0, n \neq 0$ 并且 $x^n = y^n$, 那么 $x = y$ 。
- 有 $|x^n| = |x|^n$ 。

课后习题

4.3.1 证明命题4.3.3 (提示: 尽管所有的陈述都可以通过分成若干种情形的方法来证明, 比如可以分成: x 是正的、负的或者零这些情形。但是命题中许多陈述可以不必这样冗烦地分情况来证明。例如, 我们可以利用命题中前面的陈述来证明后面的陈述。)

- $|x| \geq 0$, 另外 $|x| = 0$ 当且仅当 $x = 0$ 。

根据整数的三歧性, 分情况讨论 x :

1. x 为正数, 于是 $|x| = x$ 为正数, $|x| > 0$ 。
2. x 为负数, 于是 $|x| = -x$ 为正数, $|x| > 0$ 。
3. $x = 0$, 于是 $|x| = 0$, 此时 $|x| = 0$ 。

综上, 总是有 $|x| \geq 0$ 成立, 并且当且仅当 $|x| = 0$ 时 $x = 0$ 。

- $|x + y| \leq |x| + |y|$ 。

使用到下面结论: 对任意正数有理数 y , $-y \leq x \leq y$, 当且仅当 $y \geq |x|$, 特别地 $-|x| \leq x \leq |x|$ 。

我们总有 $-|x| \leq x \leq |x|$ 与 $-|y| \leq y \leq |y|$, 于是

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

于是取绝对值, 可以得到 $|x + y| \leq |x| + |y|$, 又有 $|x|$ 与 $|y|$ 都是正有理数, 于是 $|x| + |y|$ 也是正有理数, 即 $|x| + |y| = |x| + |y|$, 即 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 始终成立。

- 对任意正数有理数 y , $-y \leq x \leq y$, 当且仅当 $y \geq |x|$, 特别地 $-|x| \leq x \leq |x|$ 。

证明其充分必要性:

充分性:

若有 $y \geq |x|$ ，则可以对 x 分类讨论：

1. x 为正数，于是此时有 $y \geq x \geq 0 \geq -y \iff y \geq x \geq -y$ 。
2. x 为0，由于 y 是正有理数于是此时有 $y \geq 0 \geq -y \iff y \geq x \geq -y$ 。
3. x 为负数，于是此时有 $y \geq -x \geq 0 \geq -y \iff -y \leq x \leq y$ 。

于是充分性得证。

必要性：

若有 $-y \leq x \leq y$ ，于是对 x 分类讨论：

1. x 为正数，于是此时有 $|x| = x \iff y \geq |x|$ 。
2. x 为0，于是此时有 $|x| = 0 = x \iff y \geq |x|$ 。
3. x 为负数，于是此时有 $|x| = -x, y \geq x \geq -y \iff -y \leq -x \leq y \implies |x| \leq y$ 。

于是必要性得证。特别地，我们可以看到若令 $y = |x|$ ，则显然有 $x \leq |x| (x \in \mathbb{Q})$ ，于是上面结论替换自然可以得到 $-|x| \leq x \leq |x|$ 。

-
- $|xy| = |x| \times |y|$ ，特别地 $|-x| = |x|$ 。

先证明 $|-x| = |x|$ ：

对任意 $x > 0$ ，总有 $-x < 0$ ，于是根据绝对值定义 $|-x| = -(-x) = x = |x|$ ；

对任意 $x < 0$ ，总有 $-x > 0$ ，于是根据绝对值定义 $|-x| = -x = |x|$ ；

对任意 $x = 0$ ，总有 $-x = 0$ ，于是根据绝对值定义 $|-x| = 0 = |x|$ ；

综上，总有 $|-x| = |x|$ 成立。

再证明 $|xy| = |x| \times |y|$ ：

先考虑 x, y 都是正有理数或0的情况：

根据绝对值定义，此时有：

$$|xy| = xy, |x| = x, |y| = y, \text{ 于是 } |xy| = xy = x \cdot y = |x| \times |y|,$$

对于 x, y 中存在负数时，不妨将等式中 xy, x, y 根据前结论 $|-x| = |x|$ 转为正有理数，再根据正有理数的证明得知他们成立。

-
- $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$ 。

不妨令有 $x - y = c$ ，于是自然根据前第一条结论有 $d(x, y) \geq 0$ 恒成立，等于号当且仅当 $c = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$ 时成立。

-
- $d(x, y) = d(y, x)$ 。

不妨令有 $x - y = c$ ，于是根据上第四条结论有 $|c| = |-c|$ ，即 $d(x, y) = d(y, x)$ 。

-
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 。

不妨令有 $x - y = c, y - z = d$ ，于是根据前第二条结论可直接得出。

4.3.2 证明命题4.3.7中剩下的陈述 (即除去教材已有证明的最后一条)

- 如果 $x = y$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, x 都是 ε -接近于 y 的, 两者互为充要条件。

必要性:

根据命题4.3.3中结论有 $x = y$ 时 $d(x, y) = 0$, 于是根据定义有对任意 $\varepsilon > 0$, $d(x, y)$ 都有 $d(x, y) \leq 0$ 始终成立。

充分性:

已知对任意 $\varepsilon > 0$, x 都是 ε -接近于 y 的, 于是对任意 $\varepsilon > 0$, 都有 $d(x, y) \leq \varepsilon$ 。由绝对值的性质可以知道 $d(x, y) \geq 0$, 若 $d(x, y) = a > 0$, 那么我们取 $\varepsilon = \frac{a}{2}$, 此时会得到存在 $\varepsilon > 0$, $d(x, y) > \varepsilon$, 这同前提条件矛盾了, 于是只能有 $d(x, y) = 0$ 。

-
- 设 $\varepsilon > 0$, 若 x 是 ε -接近于 y 的, 则 y 也是 ε -接近于 x 的。

根据命题4.3.3的结论, 有 $d(x, y) = d(y, x)$, 于是当 $d(x, y) \leq \varepsilon$ 时必然有 $d(y, x) \leq \varepsilon$, 即若 x 是 ε -接近于 y 的, 则 y 也是 ε -接近于 x 的。

-
- 设 $\varepsilon > 0$, 若 x 是 ε -接近于 y 的, y 是 σ -接近于 z 的, 则 x 是 $(\varepsilon + \sigma)$ -接近于 z 的。

x 是 ε -接近于 y 的, y 是 σ -接近于 z 的, 于是有 $d(x, y) \leq \varepsilon$ 与 $d(y, z) \leq \sigma$, 根据命题4.3.3有 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq \varepsilon + \sigma$ 。于是 x 是 $(\varepsilon + \sigma)$ -接近于 z 的。

-
- 设 $\sigma, \varepsilon > 0$, 若 x 与 y 是 ε -接近的, z 与 w 是 σ -接近的, 则有 $(x + z)$ 与 $(y + w)$ 是 $(\varepsilon + \sigma)$ 接近的, $(x - z)$ 与 $(y - w)$ 也相同。

x 与 y 是 ε -接近的, z 与 w 是 σ -接近的, 于是有 $d(x, y) \leq \varepsilon$ 与 $d(z, w) \leq \sigma$, 根据定义, 于是可以得到有

$$d(x + z, y + w) = |x + z - y - w| = |(x - y) + (z - w)|$$

再根据命题4.3.3结论, 于是有 $d(x + z, y + w) \leq d(x, y) + d(z, w) \leq \varepsilon + \sigma$, 即 $(x + z)$ 与 $(y + w)$ 是 $(\varepsilon + \sigma)$ 接近的。

-
- 设 $\varepsilon > 0$, 若 x, y 是 ε -接近的, 则对任意 $\varepsilon' > \varepsilon$, x 与 y 是 ε' -接近的。

根据定义, 若 x, y 是 ε -接近的, 于是 $d(x, y) \leq \varepsilon \leq \varepsilon'$, 于是 x, y 是 ε' -接近的。

-
- 设 $\varepsilon > 0$, 若 y 与 z 都是 ε -接近于 x 的, 且 w 在 y 与 z 之间, 则 w 也是 ε -接近于 x 的。

y 与 z 都是 ε -接近于 x , 于是有 $d(x, y) \leq \varepsilon$ 与 $d(x, z) \leq \varepsilon$, w 在 y 与 z 之间, 于是不妨写为 $w = ny + (1 - n)z$ ($n \in [0, 1]$), 于是

$d(x, w) = |x - w| = |n(x - y) + (1 - n)(x - z)| \leq n|x - y| + (1 - n)|x - z| \leq \varepsilon$, 即 w 也是 ε -接近于 x 的。

-
- 设 $\varepsilon > 0$, 若 x, y 是 ε -接近的, 且 z 不为0, 则 xz 与 yz 也是 $\varepsilon|z|$ -接近的。

根据定义, 若 x, y 是 ε -接近的, 于是 $d(x, y) \leq \varepsilon$,

$d(xz, yz) = |xz - yz| = |z||x - y| \leq |z|\varepsilon$, 于是 xz, yz 是 $\varepsilon|z|$ -接近的。

4.3.3 证明命题4.3.10 (提示: 利用归纳法)

- $x^n \times x^m = x^{(n+m)}$, $(x^n)^m = x^{(nm)}$, $(xy)^n = x^n y^n$.

对任意的自然数 m 固定, 我们对 n 进行归纳:

当 $n = 0$ 时:

显然有:

1. $x^m \times 1 = x^m$.
2. $(x^m)^0 = 1 = x^{m \times 0}$.
3. $(xy)^0 = 1 = x^0 y^0$.

现假设当 $n = j$ 时成立上面的结论, 当 $n = j + 1$ 时:

1. $x^{j+1} \times x^m = x \times x^j \times x^m = (x^{j+m}) \times x = x^{(j+1)+m}$.
2. $(x^m)^{j+1} = (x^m)^j \cdot x^m = x^{mj} \cdot x^m = x^{mj+m} = x^{m(j+1)}$.
3. $(xy)^{j+1} = (xy)^j \cdot (xy) = (x^j \cdot x)(y^j \cdot y) = x^{j+1} y^{j+1}$.

于是综上, 结论得证。

-
- 若 $x \geq y \geq 0$, 则有 $x^n \geq y^n \geq 0$, 若 $x > y \geq 0$ 且 $n > 0$ 时, 则有 $x^n > y^n \geq 0$.

对 n 作归纳:

$n = 0$ 时:

$x^0 \geq y^0 \geq 0$ 为真。

$n = 1$ 时:

$x^1 > y^1 \geq 0$ 为真。

现假设在 $n = j$ 时成立上述结论, 在 $n = j + 1$ 时:

$x^{j+1} = x^j \cdot x$, $y^{j+1} = y^j \cdot y$, 由于 $x \geq y \geq 0$, 并且根据假设 $x^j \geq y^j \geq 0$, 于是 $x^j \cdot x \geq y^j \cdot y \geq 0$, 即 $x^{j+1} \geq y^{j+1} \geq 0$; 若 $x > y \geq 0$, 则可得到 $x^{j+1} > y^{j+1} \geq 0$.

综上, 结论得证。

-
- 若 $n > 0$, 则 $x^n = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

对 n 做归纳:

当 $n = 1$ 时:

此时 $x^1 = x$, 于是 $x^1 = 0$ 当且仅当 $x = 0$, 结论得证。

现假设 $n = j$ 时结论成立, 对 $n = j + 1$ 时:

$x^{j+1} = x^j \cdot x$, 于是若有 $x^{j+1} = 0$, 则必然有 $x^j = 0$ 与 $x = 0$ 至少有一个成立, 根据假设 $x^j = 0$ 当且仅当 $x = 0$, 于是 $x^{j+1} = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

-
- 有 $|x^n| = |x|^n$.

对 n 做归纳:

当 $n = 0$ 时:

此时 $|x^0| = 1 = |x|^0$, 结论得证。

现假设 $n = j$ 时结论成立, 对 $n = j + 1$ 时:

$|x|^{j+1} = |x|^j \cdot |x|$, 根据归纳假设 $|x|^j = |x^j|$, 于是 $|x|^{j+1} = |x^j| \cdot |x| = |x^j \cdot x| = |x^{j+1}|$, 结论得证。

于是综上结论得证。

4.3.4 证明命题4.3.12 (提示: 本题不适合使用归纳法, 而是利用命题4.3.10)

先证明一个引理, 方便接下来的论证:

对任意自然数 n 与非零有理数 x , $\frac{1}{x}^n = \frac{1}{x^n}$ 。

证明:

对 n 做归纳:

$n = 0$ 时:

自然有 $1 = 1/1$ 成立。

现假设当 $n = j$ 时成立结论, 对 $n = j + 1$ 时:

左式:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(j+1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^j \cdot \frac{1}{x}$$

右式:

$$\frac{1}{x^{(j+1)}} = \frac{1}{x^j \cdot x} = \frac{1}{x^j} \cdot \frac{1}{x}$$

根据归纳假设可以得到左右两式相等, 于是结论得证。

综上, 结论得证。

$$\bullet \quad x^n \times x^m = x^{(n+m)}, \quad (x^n)^m = x^{(nm)}, \quad (xy)^n = x^n y^n.$$

对 $x^n \times x^m = x^{(n+m)}$:

当 n, m 都是自然数时, 这和之前的结论没有区别; 当 n, m 都是负数时, 不妨将原结论改写为 $\frac{1}{x^{-n}} \times \frac{1}{x^{-m}} = \frac{1}{x^{-(n+m)}} \iff x^{-n} \times x^{-m} = x^{-(n+m)}$, 这和前面的结论也没有区别; 当 n, m 中有一个负数一个正数时, 由于乘法交换律, 不妨考虑设 n 为正数, m 为负数, 那么原公式左端可以写为 $x^n \times \frac{1}{x^{-m}}$, 根据已有结论, 若 $n \geq -m$ 又可以写为 $x^{n+m} \times x^{-m} \times \frac{1}{x^{-m}} = x^{n+m}$, 若 $n < -m$ 又可以写为 $x^n \times \frac{1}{x^n} \times \frac{1}{x^{-m-n}} = x^{n+m}$, 最终结论都和原本结论一致。

对 $(x^n)^m = x^{(nm)}$:

当 n, m 都是自然数时, 这和之前的结论没有区别; 当 n, m 中有一个负数一个正数时, 考虑设 n 为正数, m 为负数, 即证明 $(x^n)^m = \left(\frac{1}{x^n}\right)^{-m} = \frac{1}{x^{-nm}} = x^{nm}$, 于是结论依旧成立, 当 n, m 都是负数时, 可以令 $y = \frac{1}{x}$, 于是即证明 $(y^{-n})^m = y^{-(nm)}$, 这样就归结到了 n 为正数的情况。

对 $(xy)^n = x^ny^n$:

当 n 是自然数时结论同命题4.3.10中结论一致。当 n 是负数时, 取 $x' = \frac{1}{x}$, $y' = \frac{1}{y}$, 于是即证明 $(x'y')^{(-n)} = x'^{(-n)}y'^{(-n)}$, 于是就回归到了正数的情况。

- 若 $x \geq y \geq 0$, 则当 n 正数时有 $x^n \geq y^n > 0$, 当 n 负数时有 $0 < x^n \leq y^n$ 。

n 是正数的结论命题4.3.10已经有证明, 当 n 是负数时则令 $x' = \frac{1}{x}$, $y' = \frac{1}{y}$, 于是由 $x \geq y \geq 0$ 可得 $y' \geq x' \geq 0$, 进而根据 n 为正数的结论可以得到 $y'^{(-n)} \geq x'^{(-n)} > 0$, 即 $y^n \geq x^n > 0$ 。

- 若 $x, y > 0$, $n \neq 0$ 并且 $x^n = y^n$, 那么 $x = y$ 。

n 是正数的结论命题4.3.10已经有证明, 当 n 是负数时则令 $x' = \frac{1}{x}$, $y' = \frac{1}{y}$ 。于是原结论等价于: $x'^{(-n)} = y'^{(-n)}$ 当且仅当 $x' = y'$, 此时 $-n$ 是正数, x', y' 都是正有理数, 于是可以根据 n 为正数的结论可以得证。

- 有 $|x^n| = |x|^n$ 。

n 是正数的结论命题4.3.10已经有证明, 当 n 是负数时则令 $x' = \frac{1}{x}$, 于是原命题等价于 $|x'^{(-n)}| = |x'|^{(-n)}$, 回到了正数时的结论。

4.3.5 证明: $2^N \geq N$ 对一切正整数 N 均成立 (提示: 使用归纳法)

对 N 进行归纳:

$N = 1$ 时:

此时有 $N = 1$, $2^N = 2$, 于是结论成立。

现假设该结论对某正自然数 $N = j$ 时成立, 对 $N = j + 1$ 时:

$2^{j+1} = 2^j \cdot 2 = 2^j + 2^j$, 又根据 $2^j \geq j \geq 1$ 的归纳假设, 于是有 $2^j + 2^j \geq j + 1$, 即 $2^{j+1} \geq j + 1$ 。

综上, 结论得证。

本节相关跳转

[实分析 2.3 乘法](#)