

# 6.1 收敛与极限定律

## 定义

1. (6.1.1 两个实数间的距离) 给定两个实数 $x$ 和 $y$ , 定义它们的距离为 $d(x, y)$ , 有:

$$d(x, y) := |x - y|$$

2. (6.1.2  $\varepsilon$ -接近的实数) 设 $\varepsilon > 0$ 是一个实数, 称 $x$ 与 $y$ 是 $\varepsilon$ -接近的, 当且仅当 $d(x, y) \leq \varepsilon$ 。

(这个 $\varepsilon$ -接近性的定义与定义4.3.4的“ $\varepsilon$ -接近性”是一致的)

3. (6.1.3 实数的柯西序列) 设 $\varepsilon > 0$ 是一个实数, 则称从某个整数指标 $N$ 开始的实数序列 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 $\varepsilon$ -稳定的, 当且仅当对任意 $j, k \geq N$ 都有 $a_j$ 与 $a_k$ 是 $\varepsilon$ -接近的。

又有从某个整数指标 $m$ 开始的实数序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 被称为是最终 $\varepsilon$ -稳定的, 当且仅当存在一个整数 $N \geq m$ 使得 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 $\varepsilon$ -稳定的。

一个实数序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 被称为柯西序列, 当且仅当对每一个 $\varepsilon > 0$ , 该序列都是最终 $\varepsilon$ -稳定的。

(这些定义与有理数上的相关定义 (5.1.3, 5.1.6, 5.1.8) 是一致的, 在这两个意义下的有理数序列是一致的, 耳熟能详了已经)

4. (6.1.5 序列的收敛) 设 $\varepsilon > 0$ 是一个实数, 且 $L$ 也是一个实数。称实数序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是 $\varepsilon$ -接近于 $L$ 的, 当且仅当对任意的 $n \geq m$ ,  $a_n$ 与 $L$ 都是 $\varepsilon$ -接近的, 即有 $d(a_n, L) \leq \varepsilon$ 。

称序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 $\varepsilon$ -接近于 $L$ 的, 当且仅当存在一个 $N \geq m$ 使 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 $\varepsilon$ -接近于 $L$ 的。

称序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是收敛于 $L$ 的, 当且仅当对于任意实数 $\varepsilon > 0$ , 该序列都是最终 $\varepsilon$ -接近于 $L$ 的。

(展开的表述: 称序列 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是收敛于 $L$ 的, 当且仅当对于任意实数 $\varepsilon > 0$ , 存在一个 $N \geq m$ 使得 $|a_n - L| \leq \varepsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 成立)

5. (6.1.8 序列的极限) 如有序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于实数 $L$ , 那么序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是收敛的且它的极限为 $L$ , 用下式表示:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

6. (6.1.16 有界序列) 实数序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 以实数 $M$ 为界, 当且仅当存在有 $|a_n| \leq M$ 对全部 $n \geq m$ 成立。称实数序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是有界的, 当且仅当存在某个实数 $M > 0$ 使得该序列以 $M$ 为界。

(该定义同样可以证明与定义5.1.12是一致的)

## 命题

1. (6.1.4 柯西序列的定义是一致的?) 设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是从某个整数指标开始的有理数序列, 那么 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义5.1.8下的柯西序列, 当且仅当它是定义6.1.3下的柯西序列。
2. (6.1.7 极限的唯一性) 设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是从某个整数指标开始的实数序列, 且有 $L \neq L'$ 是两个不同的实数, 那么 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 不可能同时收敛于 $L$ 和 $L'$ 。
3. (6.1.11 收敛实例?) 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 。
4. (6.1.12 收敛序列也是柯西序列) 假设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是一个收敛的实数序列, 那么 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 也是一个柯西序列。
5. (6.1.15 形式极限是真正的极限) 假定有 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是某个有理数的柯西序列, 那么 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$ , 即有:

$$\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

(如同之前在定义有理数, 整数一样, 于此形式极限被真正的极限替代, 形式减法被真正的减法替代, 形式除法被真正的除法替代)

6. (6.1.17 引理5.1.15推论) 每一个收敛的实数序列都是有界的。

7. (6.1.19 极限定律) 设有  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  与  $(b_n)_{n=m}^{\infty}$  是收敛的实数序列, 并且设实数  $x, y$  有

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 与 } y := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

○ 序列  $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $x + y$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = x + y$$

○ 序列  $(a_n b_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $xy$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = xy$$

○ 对任意实数  $c$ , 序列  $(c \cdot a_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $c \cdot x$ , 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

○ 序列  $(a_n - b_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $x - y$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = x - y$$

○ 设  $y \neq 0$ , 且对全部  $n \geq m$  都有  $b_n \neq 0$ , 则序列  $(b_n^{-1})_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $y^{-1}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{-1} = (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)^{-1}$$

○ 设  $y \neq 0$ , 且对全部  $n \geq m$  都有  $b_n \neq 0$ , 则序列  $(a_n/b_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $x/y$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{x}{y}$$

○ 序列  $(\max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $\max(x, y)$ , 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max(a_n, b_n) = \max(x, y)$$

○ 序列  $(\min(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $\min(x, y)$ , 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min(a_n, b_n) = \min(x, y)$$

## 课后习题

6.1.1 设  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  是一个实数序列, 并且满足  $a_{n+1} > a_n$  对任意的自然数  $n$  均成立。证明: 只要  $n$  和  $m$  都是自然数且满足  $m > n$ , 那么  $a_m > a_n$  (我们把这种序列记作增序列)

由于序列指标总是自然数, 因此我们可以选择固定  $n$ , 然后使用归纳法证明对任意  $m > n$  均有  $a_m > a_n$  成立。由于自然数序关系, 我们可以由  $m > n$  得到  $m = n + c$ , 其中  $c$  是正自然数。我们对  $c$  归纳。

当  $c = 1$  时:

由题设条件我们有  $a_n < a_{n+1} = a_m$ , 于是成立结论。

现归纳性假设当  $c = b$  时成立结论, 对  $c = b + 1$  时:

根据题设条件我们有 $a_{n+b+1} > a_{n+b}$ 成立, 由归纳假设我们又有 $a_{n+b} > a_n$ 成立, 于是由实数序的传递性可以得到 $a_{n+b+1} > a_n$ 成立, 即 $a_{n+c} > a_n$ 。

综上, 于是归纳得证, 对 $n$ 和 $m$ 都是自然数且满足 $m > n$ , 那么 $a_m > a_n$ 。

**6.1.2 设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是一个实数序列, 且 $L$ 是一个实数。证明:  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $L$ , 当且仅当对于任意给定的实数 $\varepsilon > 0$ , 存在一个 $N \geq m$ 使得 $|a_n - L| \leq \varepsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立**

根据定义, 我们有 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $L$ , 当且仅当对于任意实数 $\varepsilon > 0$ , 序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 都是最终 $\varepsilon$ -接近于 $L$ 的。

根据最终 $\varepsilon$ -接近的定义, 这等价于对任意实数 $\varepsilon > 0$ , 序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 都存在一个整数 $N > m$ 使得实数序列 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 $\varepsilon$ -接近于 $L$ 的。

再根据 $\varepsilon$ -接近的定义, 这等价于对任意实数 $\varepsilon > 0$ , 序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 都存在一个整数 $N > m$ 使得对任意 $n \geq N$ 都有 $|a_n - L| \leq \varepsilon$ 成立。

于是整理上述内容, 即可得到 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $L$ , 当且仅当对于任意给定的实数 $\varepsilon > 0$ , 存在一个 $N \geq m$ 使得 $|a_n - L| \leq \varepsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立, 于是题目结论得证。

**6.1.3  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是一个实数序列,  $c$ 是一个实数, 且 $m' \geq m$ 是一个整数, 证明:  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $c$ , 当且仅当 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 收敛于 $c$  (于是极限与指标的起点无关)**

必要性:

$(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $c$ , 于是根据习题6.1.2的结论有此时对任意实数 $\varepsilon > 0$ , 总有 $N' \geq m$ 使得对任意 $n \geq N'$ 都有 $|a_n - c| \leq \varepsilon$ 成立。

于是对任意实数 $\varepsilon > 0$ , 我们定义整数 $N$ 选取规则有 $N = \max(N', m')$ , 其中 $N'$ 是在选定 $\varepsilon$ 代入上面结论中得到的整数 $N'$ 。根据选取规则, 我们有 $N \geq m'$ , 并且对任意 $n \geq N$ , 都会有 $n \geq N'$  (因为 $N \geq N'$ ), 于是此时有 $|a_n - c| \leq \varepsilon$ 成立, 进而根据收敛的定义可以得到有实数序列 $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 收敛于 $c$ 。

充分性:

$(a_n)_{n=m'}^{\infty}$ 收敛于 $c$ , 于是根据习题6.1.2的结论有此时对任意实数 $\varepsilon > 0$ , 总有 $N' \geq m'$ 使得对任意 $n \geq N'$ 都有 $|a_n - c| \leq \varepsilon$ 成立。

于是对任意实数 $\varepsilon > 0$ , 我们定义整数 $N$ 选取规则有 $N = N'$ , 其中 $N'$ 是在选定 $\varepsilon$ 代入上面结论中得到的整数 $N'$ 。根据上面结论, 我们有 $N \geq m$  (因为 $N' \geq m'$ 且 $m' \geq m$ ), 并且对任意 $n \geq N = N'$ , 于是此时有 $|a_n - c| \leq \varepsilon$ 成立, 进而根据收敛的定义可以得到有实数序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $c$ 。

**6.1.4 设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是一个实数序列,  $c$ 是一个实数, 且 $k \geq 0$ 是一个非负整数, 证明:  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $c$ , 当且仅当 $(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $c$  (于是极限与序列的指标无关)**

必要性:

$(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $c$ , 于是根据习题6.1.2的结论有此时对任意实数 $\varepsilon > 0$ , 总有 $N' \geq m$ 使得对任意 $n \geq N'$ 都有 $|a_n - c| \leq \varepsilon$ 成立。

于是对任意实数 $\varepsilon > 0$ , 我们定义整数 $N$ 选取规则有 $N = N'$ , 其中 $N'$ 是在选定 $\varepsilon$ 代入上面结论中得到的整数 $N'$ 。根据选取规则, 我们有 $N = N' \geq m$ ; 并且对任意 $n \geq N$ , 都会有 $n + k \geq N' + k \geq N'$  (因为 $N \geq N'$ ), 于是此时有 $|a_{n+k} - c| \leq \varepsilon$ 成立, 进而根据收敛的定义可以得到有实数序列 $(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $c$ 。

充分性:

$(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $c$ , 于是根据习题6.1.2的结论有此时对任意实数  $\varepsilon > 0$ , 总有  $N' \geq m$  使得对任意  $n \geq N'$  都有  $|a_{n+k} - c| \leq \varepsilon$  成立。

于是对任意实数  $\varepsilon > 0$ , 我们定义整数  $N$  选取规则有  $N = N' + k$ , 其中  $N'$  是在选定  $\varepsilon$  代入上面结论中得到的整数  $N'$ 。根据选取规则, 我们有  $N \geq N' \geq n$ ; 对任意  $n \geq N = N' + k$ , 不妨令  $n - k = l$ , 于是此时有  $l + k \geq N' + k \iff l \geq N'$ , 根据上面结论, 此时有  $|a_{l+k} - c| \leq \varepsilon \iff |a_n - c| \leq \varepsilon$  成立。于是综合上述内容, 根据收敛定义可以得到有实数序列  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $c$ 。

### 6.1.5 证明命题6.1.12 (提示: 利用三角不等式或者命题4.3.7)

不妨假设  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  收敛于实数  $L$ 。

对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ 。由收敛定义我们可知有存在整数  $N \geq 0$  使得对任意  $n \geq N$  都有  $|a_n - L| \leq \varepsilon'$  成立。于是根据三角不等式, 此时有对任意  $i, j \geq N$ :

$$|a_i - a_j| = |(a_i - L) + (L - a_j)| \leq |a_i - L| + |a_j - L| \leq 2\varepsilon'$$

又有  $2\varepsilon' = \varepsilon$ , 于是综合可以得到: 对任意实数  $\varepsilon > 0$ , 总存在整数  $N \geq 0$  使得对任意  $i, j \geq N$  都有  $|a_i - a_j| \leq \varepsilon$  成立。于是根据定义6.1.3, 可以得到  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  是柯西序列。

### 6.1.6 利用下述框架来证明命题6.1.15: 设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是一个有理数的柯西序列, 并且记 $L := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , 我们必须证明 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $L$ , 设 $\varepsilon > 0$ , 利用反证法, 假设序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 不是最终 $\varepsilon$ -接近于 $L$ 的。利用这一点以及 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是柯西序列的事实, 证明存在一个 $N \geq m$ 使得 $a_n > L + \frac{\varepsilon}{2}$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立, 或者 $a_n < L - \frac{\varepsilon}{2}$ 对所有的 $n \geq N$ 均成立, 然后利用习题5.4.8

使用反证法:

结论1: 我们假设有序列  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  不收敛于  $L$  的, 根据习题6.1.2的结论, 那么存在一个实数  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得对任意整数  $N \geq m$ , 总存在一个  $n \geq N$  使得  $|a_n - L| \geq \varepsilon_0$  成立。若此时有  $a_n > L$ , 那么我们有  $a_n - L > \varepsilon_0 \iff a_n > L + \varepsilon_0$ ; 若此时  $a_n < L$ , 那么我们有  $L - a_n > \varepsilon_0 \iff a_n < L - \varepsilon_0$ 。

结论2: 又根据  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  是一个有理数的柯西序列, 于是对于任意实数  $\varepsilon > 0$ , 存在一个整数  $N \geq m$  使得对任意  $n \geq N$  都有  $|a_n - L| \leq \varepsilon$  成立。于是我们选取  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$ , 并记对应整数为  $N_0$ 。

于是根据上面的结论, 根据结论1, 对整数  $N_0$ , 总存在一个  $n_0 \geq N_0$  使得  $|a_{n_0} - L| \geq \varepsilon_0$  成立, 并且根据结论2, 对任意  $n \geq N_0$  我们有  $|a_n - a_{n_0}| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ , 根据习题5.4.6于是此时有  $a_{n_0} - \frac{\varepsilon_0}{2} \leq a_n \leq a_{n_0} + \frac{\varepsilon_0}{2}$ , 于是对  $a_{n_0}$  讨论:

- 若有  $a_{n_0} > L$ , 则根据结论1, 有  $a_n > L + \varepsilon_0$ , 进而有对任意  $n \geq N_0$  有  $a_n \geq a_{n_0} - \frac{\varepsilon_0}{2} \geq L + \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = L + \frac{\varepsilon_0}{2}$  成立, 即对任意  $n \geq N_0$  有  $a_n \geq L + \frac{\varepsilon_0}{2}$  成立。
- 若有  $a_{n_0} < L$ , 则根据结论1, 有  $a_n < L - \varepsilon_0$ , 进而有对任意  $n \geq N_0$  有  $a_n \leq a_{n_0} + \frac{\varepsilon_0}{2} \leq L - \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0}{2} = L - \frac{\varepsilon_0}{2}$  成立, 即对任意  $n \geq N_0$  有  $a_n \leq L - \frac{\varepsilon_0}{2}$  成立。

于是根据习题5.4.8, 当 $a_{n_0} > L$ 时, 此时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq L + \frac{\varepsilon_0}{2}$ 即  
 $L \geq L + \frac{\varepsilon_0}{2} > L \iff L > L$ ; 当 $a_{n_0} < L$ 时, 此时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq L - \frac{\varepsilon_0}{2}$ 即  
 $L \leq L - \frac{\varepsilon_0}{2} < L \iff L < L$ . 无论哪种情况都会导致悖论, 于是反证假设不成立, 我们只  
 能有对任意有理数的柯西序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 必然有收敛于 $L$ 成立。

### 6.1.7 证明定义6.1.16与定义5.1.12是一致的 (即证明一个与命题6.1.4类似的结论, 其中命题6.1.4中的柯西序列被替换成有界序列)

即证明:  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是从某个整数指标开始的有理数序列, 那么 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义5.1.12下的有界序列, 当且仅当它是定义6.1.16下的柯西序列。

若序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义5.1.12下的有界序列, 那么根据定义5.1.12, 存在一个有理数 $M$ 使得对任意 $n \geq m$ 都有 $|a_n| \leq M$ 成立, 特别地, 我们知道 $M$ 是有理数的同时也是实数, 于是根据定义6.1.16, 序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义6.1.16下有界的。

若序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义6.1.16下的有界序列, 那么根据定义6.1.16, 存在一个实数 $M$ 使得对任意 $n \geq m$ 都有 $|a_n| \leq M$ 成立。根据习题5.4.3的结论, 对 $M$ 有 $M < \lfloor M \rfloor + 1$ 成立, 其中 $\lfloor M \rfloor$ 是 $M$ 的整数部分, 于是 $\lfloor M \rfloor + 1$ 是整数的同时也是有理数, 此时对任意 $n \geq m$ 我们都有  
 $|a_n| \leq M < \lfloor M \rfloor + 1 \iff |a_n| \leq \lfloor M \rfloor + 1$ , 于是根据定义5.1.12, 序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义5.1.12下有界的。

综上, 于是结论成立。

### 6.1.8 证明定理6.1.19 (提示: 你可以利用定理中的某些部分来证明其他的部分, 例如: (b)可以被用来证明(c), (a)和(c)可以用来证明(d), 并且(b)和(e)可以用来证明(f)。其证明类似于引理5.3.6, 命题5.3.10以及引理5.3.15的证明。对于(e), 你可能首先需要证明一个辅助的结果: 如果一个序列的所有元素都不为零, 并且该序列收敛于一个非零极限, 那么这个序列是远离0的)

即在前提设有 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 是收敛的实数序列, 并且设实数 $x, y$ 有 $x := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 与 $y := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 的条件下, 证明下述命题的成立:

- 序列 $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $x + y$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = x + y$$

证明:

对于任意实数 $\varepsilon > 0$ , 我们取 $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ , 于是根据习题6.1.2, 由序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 是收敛的可以得到对 $\varepsilon'$ 分别存在整数 $N \geq m$ 与整数 $M \geq m$ 使得有: 当 $n \geq N$ 时,  $|a_n - x| \leq \varepsilon'$ ; 当 $n \geq M$ 时,  $|b_n - y| \leq \varepsilon'$ . 于是取整数 $L = \max(N, M)$ , 此时我们对任意 $n \geq L$ 有:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (x + y)| &= |a_n + b_n - x - y| \\ &= |(a_n - x) + (b_n - y)| \\ &\leq |a_n - x| + |b_n - y| \\ &\leq \varepsilon' + \varepsilon' \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

于是总结得到对任意实数 $\varepsilon > 0$ , 总存在整数 $L \geq m$ 使得对任意 $n \geq L$ 都有  
 $|(a_n + b_n) - (x + y)| \leq \varepsilon$ 成立, 于是根据习题6.1.2结论此时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = x + y$ 成立。

- 
- 序列 $(a_n b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $xy$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = xy$$

证明:

对于任意实数  $\varepsilon > 0$ , 我们取  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{A + |y|}$ , 其中  $A$  是序列  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  的一个界, 根据命题 6.1.17, 这样的界是存在的。于是根据习题 6.1.2, 由序列  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  与  $(b_n)_{n=m}^{\infty}$  是收敛的可以得到对  $\varepsilon'$  分别存在整数  $N \geq m$  与整数  $M \geq m$  使得有: 当  $n \geq N$  时,  $|a_n - x| \leq \varepsilon'$ ; 当  $n \geq M$  时,  $|b_n - y| \leq \varepsilon'$ 。于是取整数  $L = \max(N, M)$ , 此时我们对任意  $n \geq L$  有:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - xy| &= |a_n b_n - a_n y + a_n y - xy| \\ &\leq |a_n| |b_n - y| + |y| |a_n - x| \\ &\leq A |b_n - y| + |y| |a_n - x| \\ &\leq (A + |y|) \varepsilon' \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

于是总结得到对任意实数  $\varepsilon > 0$ , 总存在整数  $L \geq m$  使得对任意  $n \geq L$  都有  $|a_n b_n - xy| \leq \varepsilon$  成立, 于是根据习题 6.1.2 结论此时有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = xy$  成立。

- 对任意实数  $c$ , 序列  $(c \cdot a_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $c \cdot x$ , 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

证明:

对任意实数  $c$ , 取序列  $b_n = c$ , 显然  $(b_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $c$ , 于是代入结论 (b) 即可得证有序列  $(c \cdot a_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $c \cdot x$  成立。

- 序列  $(a_n - b_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $x - y$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = x - y$$

证明:

对序列  $(-b_n)_{n=m}^{\infty}$ , 由序列  $(b_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛, 于是对任意  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $N \geq m$  使得对任意  $n \geq N$  都有  $|b_n - y| \leq \varepsilon$ , 又根据绝对值的性质, 此时有  $|b_n - y| = |y - b_n| = |(-b_n) - (-y)|$ , 于是根据习题 6.1.2 结论可得序列  $(-b_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $-y$  成立。

于是根据结论 (a), 我们有序列  $(a_n - b_n)_{n=m}^{\infty} \iff (a_n + (-b_n))_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $x + (-y) = x - y$ , 于是结论得证。

- 设  $y \neq 0$ , 且对全部  $n \geq m$  都有  $b_n \neq 0$ , 则序列  $(b_n^{-1})_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $y^{-1}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{-1} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)^{-1}$$

证明:

$(b_n)_{n=m}^{\infty}$  收敛, 于是存在  $N_0 \geq m$  使得对任意  $n \geq N_0$  都有  $|b_n - y| \leq \frac{|y|}{2}$  成立, 于是:

$$-\frac{|y|}{2} \leq b_n - y \leq \frac{|y|}{2} \implies \begin{cases} 0 \leq \frac{y}{2} \leq b_n \leq \frac{3y}{2} & y \geq 0 \\ 0 < -\frac{y}{2} \leq -b_n \leq -\frac{3y}{2} & y < 0 \end{cases} \iff \frac{|y|}{2} \leq |b_n| \leq \frac{3|y|}{2}$$

对任意实数 $\varepsilon > 0$ , 我们取 $\varepsilon' = \frac{|y|^2}{2}\varepsilon$ , 由序列 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛, 对 $\varepsilon'$ , 存在 $N \geq m$ 使得对任意 $n \geq N$ 都有 $|b_n - y| \leq \varepsilon'$ 。取整数 $L = \max(N, N_0)$ 。我们又有变形

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{y - b_n}{b_n y} \right| = \frac{|b_n - y|}{|y||b_n|} \leq \frac{\varepsilon'}{|b_n||y|}, \text{ 此时代入 } \varepsilon', \text{ 则有:}$$

$$\frac{\varepsilon'}{|b_n||y|} \leq \frac{2\varepsilon'}{|y|^2} = \varepsilon$$

于是总结可得对任意实数 $\varepsilon > 0$ , 总存在整数 $L \geq m$ 使得对任意 $n \geq L$ 都有 $|b_n^{-1} - y^{-1}| \leq \varepsilon$ 成立, 于是根据习题6.1.2结论此时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{-1} = y^{-1}$ 成立。

- 设 $y \neq 0$ , 且对全部 $n \geq m$ 都有 $b_n \neq 0$ , 则序列 $(a_n/b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $x/y$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{x}{y}$$

根据结论(e)与结论(b)可以直接推知有序列 $(a_n/b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $x/y$ 成立。

- 序列 $(\max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $\max(x, y)$ , 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max(a_n, b_n) = \max(x, y)$$

不妨假设有 $x \leq y$  (若 $y \geq x$ , 那么我们让 $a_n, b_n$ 相互替换就好), 于是此时即原命题等价于证明序列 $(\max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $y$ 。取 $\varepsilon' = \frac{y-x}{3}$ , 则是根据序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 是收敛的可以得到对 $\varepsilon'$ 分别存在整数 $N \geq m$ 与整数 $M \geq m$ 使得有: 当 $n \geq N$ 时,  $|a_n - x| \leq \varepsilon'$ ; 当 $n \geq M$ 时,  $|b_n - y| \leq \varepsilon'$ 于是, 代入 $\varepsilon'$ , 我们可以得到下面结论:

当 $n \geq L = \max(N, M)$ 时, 则有

$$\begin{aligned} \frac{4x}{3} - \frac{y}{3} \leq a_n &\leq \frac{y}{3} + \frac{2x}{3} & \frac{2y}{3} + \frac{x}{3} \leq b_n &\leq \frac{4y}{3} - \frac{x}{3} \\ &\Downarrow & & \\ a_n &\leq \frac{y}{3} + \frac{2x}{3} < \frac{2y}{3} + \frac{x}{3} & \leq b_n \\ &\Downarrow & & \\ &a_n < b_n \end{aligned}$$

于是即 $\max(a_n, b_n) = b_n$ 对任意 $n \geq L$ 成立, 又根据习题6.1.3的结论, 我们有序列 $(\max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$ 与 $(\max(a_n, b_n))_{n=L}^{\infty}$ 收敛于同一个值, 综合即得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y$$

于是结论得证。

- 序列 $(\min(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $\min(x, y)$ , 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min(a_n, b_n) = \min(x, y)$$

适当修改结论(g)的证明即可, 个人修改版本如下:



不妨假设  $x \geq y$  (若  $y \leq x$ , 那么我们让  $a_n, b_n$  相互替换就好), 于是此时即原命题等价于证明序列  $(\min(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$  收敛于  $y$ . 取  $\varepsilon' = \frac{x-y}{3}$ , 则根据序列  $(a_n)_{n=m}^{\infty}$  与  $(b_n)_{n=m}^{\infty}$  是收敛的可以得到对  $\varepsilon'$  分别存在整数  $N \geq m$  与整数  $M \geq m$  使得有: 当  $n \geq N$  时,  $|a_n - x| \leq \varepsilon'$ ; 当  $n \geq M$  时,  $|b_n - y| \leq \varepsilon'$  于是, 代入  $\varepsilon'$ , 我们可以得到下面结论:

当  $n \geq L = \max(N, M)$  时, 则有

$$\begin{aligned} \frac{y}{3} + \frac{2x}{3} &\leq a_n \leq \frac{4x}{3} - \frac{y}{3} & \frac{4y}{3} - \frac{x}{3} &\leq b_n \leq \frac{2y}{3} + \frac{x}{3} \\ &\Downarrow & & \\ b_n &\leq \frac{2y}{3} + \frac{x}{3} < \frac{y}{3} + \frac{2x}{3} & \leq a_n \\ &\Downarrow & & \\ &b_n < a_n \end{aligned}$$

于是即  $\min(a_n, b_n) = b_n$  对任意  $n \geq L$  成立, 又根据习题6.1.3的结论, 我们有序列  $(\min(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$  与  $(\min(a_n, b_n))_{n=L}^{\infty}$  收敛于同一个值, 综合即得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y$$

于是结论得证。

### 6.1.9 解释为什么当分母的极限为0时, 定理6.1.19(f)不成立。 (为了修复这个问题, 需要用到洛必达法则, 参见10.5节)

我们可以给出一个特例来证明这个结论在分母极限为0时是不可靠的。

不妨考虑序列  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ , 我们显然有该序列收敛于0, 于是根据定理6.1.19(f), 此时我们应该有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{0}{0}$$

由于  $\frac{0}{0}$  是无定义的, 因此这个结论是荒谬的。

但是在另一方面, 我们又有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

即序列  $\left(\frac{1/n}{1/n}\right)_{n=1}^{\infty}$  收敛于1, 这和无定义的结果  $\frac{0}{0}$  冲突, 然而收敛于1的结论是通过收敛定义得到的于是不会错, 因此, 定理6.1.19(f)在分母极限为0时是不可靠的。

### 6.1.10 证明: 当把定义5.2.6中的 $\varepsilon$ 由正有理数替换成正实数时, 等价的柯西序列这一概念不发生改变, 更准确地说, 如果 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 都是实数序列, 证明: 对于任意的有理数 $\varepsilon > 0$ , $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ 都是最终 $\varepsilon$ -接近的, 当且仅当对于任意的实数 $\varepsilon > 0$ 它们都是最终 $\varepsilon$ -接近的 (提示: 修改命题6.1.4的证明)

充分性:

若有对于任意的实数  $\varepsilon > 0$  有  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  和  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  都是最终  $\varepsilon$ -接近的。对任意有理数  $\varepsilon > 0$ , 我们知道  $\varepsilon$  同时也是一个实数, 于是根据前提可以得到对于任意的有理数  $\varepsilon > 0$ ,  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  和  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  都是最终  $\varepsilon$ -接近的成立。



必要性：

若有对于任意的有理数 $\varepsilon > 0$ 有 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 和 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 都是最终 $\varepsilon$ -接近的。对任意实数 $\varepsilon > 0$ ，根据习题5.4.4，我们知道此时存在一个正整数 $N$ 使得有 $\varepsilon > \frac{1}{N} > 0$ 成立，此外由于 $\frac{1}{N}$ 是有理数，于是根据前提有存在某个 $M \geq 0$ 使得对任意 $n \geq M$ 都有 $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{N}$ 成立，此时也有 $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ 。于是对任意实数 $\varepsilon > 0$ ，总有 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 和 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 都是最终 $\varepsilon$ -接近的，结论得证。

---

## 本节相关跳转

[实分析 4.3 绝对值与指数运算](#)

[实分析 5.1 柯西序列](#)

[实分析 5.2 等价的柯西序列](#)

[实分析 5.3 实数的构造](#)

[实分析 5.4 对实数排序](#)

[实分析 10.5 洛必达法则](#)