

## 8.2 在无限集上求和

### 定义

1. (8.2.1 可数集上的级数) 设  $X$  是一个可数集, 并且设  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  是一个函数。称级数  $\sum_{x \in X} f(x)$  是

**绝对收敛**的, 当且仅当存在某个双射  $g: \mathbb{N} \rightarrow X$  使得级数  $\sum_{n=0}^{\infty} f(g(n))$  是**绝对收敛**的。此时我们定义:

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(g(n))$$

(根据命题7.4.3与命题3.6.4, 可以证明这样的定义同  $g$  的选取无关, 从而它是定义明确的)

2. (8.2.4 任意集上求和的绝对收敛?) 设  $X$  是一个集合 (可以是不可数的), 并且设  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  是一个函数, 那么级数  $\sum_{x \in X} f(x)$  是**绝对收敛**的, 当且仅当:

$$\sup \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X \text{ 且 } A \text{ 是有限集} \right\} < \infty$$

### 命题

1. (8.2.2 无限和的富比尼定理) 设  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  是一个使得  $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} f(n,m)$  **绝对收敛** 的一个函数, 那么我们有:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} f(n,m) \right) &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} f(n,m) \\ &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} f(n,m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n,m) \right) \end{aligned}$$

(换言之, 只要级数是**绝对收敛**的, 我们就可以任意交换无限和的求和顺序)

2. (8.2.3 绝对收敛级数的特征?) 设  $X$  是一个至多可数的 (注意同8.2.4区分) 集合, 并且设  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  是一个函数, 那么级数  $\sum_{x \in X} f(x)$  是**绝对收敛**的, 当且仅当:

$$\sup \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X \text{ 且 } A \text{ 是有限集} \right\} < \infty$$

3. (8.2.5 绝对收敛级数衍生?) 设  $X$  是一个集合 (可以是不可数的), 并且设  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  是一个使级数  $\sum_{x \in X} f(x)$  是绝对收敛的函数, 那么集合  $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$  是至多可数的。

(由此, 对于不可数集上的任意一个绝对收敛的级数  $\sum_{x \in X} f(x)$ , 我们可以定义它的值为

$$\sum_{x \in X} f(x) := \sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x), \text{ 于是我们成功将不可数集上的级数用可数集上的级数替换})$$

4. (8.2.6 绝对收敛级数的定律) 设  $X$  是一个集合 (可以是不可数的), 并且设  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  是使级数  $\sum_{x \in X} f(x)$  与  $\sum_{x \in X} g(x)$  都绝对收敛的函数, 则下述命题为真:

1. 级数  $\sum_{x \in X} (f(x) + g(x))$  是绝对收敛的, 并且:

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x)$$

2. 若  $c$  是一个实数, 那么  $\sum_{x \in X} c \cdot f(x)$  是绝对收敛的, 并且:

$$\sum_{x \in X} c \cdot f(x) = c \sum_{x \in X} f(x)$$

3. 若存在两个不相交的集合  $X_1, X_2$  使得  $X_1 \cup X_2 = X$ , 那么  $\sum_{x \in X_1} f(x)$  和  $\sum_{x \in X_2} f(x)$  都是绝对收敛的, 并且:

$$\sum_{x \in X_1 \cup X_2} f(x) = \sum_{x \in X_1} f(x) + \sum_{x \in X_2} f(x)$$

反过来, 如果  $h: X \rightarrow \mathbb{R}$  使得  $\sum_{x \in X_1} h(x)$  和  $\sum_{x \in X_2} h(x)$  都是绝对收敛的, 那么  $\sum_{x \in X_1 \cup X_2} h(x)$  也是绝对收敛的, 并且:

$$\sum_{x \in X_1 \cup X_2} h(x) = \sum_{x \in X_1} h(x) + \sum_{x \in X_2} h(x)$$

4. 如果  $Y$  是另一个集合, 并且  $\phi: Y \rightarrow X$  是一个双射, 那么  $\sum_{y \in Y} f(\phi(y))$  也是绝对收敛的, 并且:

$$\sum_{y \in Y} f(\phi(y)) = \sum_{x \in X} f(x)$$

(当  $X$  是不可数集时, 该结论的证明要用到选择公理)

5. (8.2.7 条件收敛的子级数?) 设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  是一个条件收敛但是不绝对收敛的级数, 定义集合  $A_+ = \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0\}$ ,  $A_- = \{n \in \mathbb{N} : a_n < 0\}$ , 于是有  $A_+ \cup A_- = \mathbb{N}$  与  $A_+ \cap A_- = \emptyset$ . 那么级数  $\sum_{n \in A_+} a_n$  与  $\sum_{n \in A_-} a_n$  都不是条件收敛的。

(从而也不是绝对收敛的)

6. (8.2.8 格奥尔格·黎曼级数定理?) 设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  是一个条件收敛但是不绝对收敛的级数,  $L$  是任意一个实数。于是存在一个双射  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  使得  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$  条件收敛于  $L$ 。

## 课后习题

### 8.2.1 证明引理8.2.3 (提示: 习题3.6.3或许有用)

根据有限级数的知识, 若  $X$  是有限的, 那么无论条件是否成立  $\sum_{x \in X} |f(x)|$  总是有限的, 特别地,  $\sum_{x \in X} |f(x)|$  也是绝对收敛的。因此只需要讨论  $X$  是可数集的情况, 此时根据定义8.1.1存在一个双射  $g: \mathbb{N} \rightarrow X$ 。

于是令有  $S = \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X \text{ 且 } A \text{ 是有限集} \right\}$ ,  $T = \left\{ \sum_{i=0}^n |f(g(i))| : n \in \mathbb{N} \right\}$ , 记  $S_N = \sum_{x \in N} |f(x)|$  与  $T_n = \sum_{i=0}^n |f(g(i))|$ , 在下面的证明中我们将使用这几个符号。

我们首先证明  $\sup(S) = \sup(T)$ :

对任意  $S_A \in S$ , 其对应的  $A \subseteq X$  是  $X$  的有限子集,  $g^{-1}(A)$  也是有限的。又考虑到  $g^{-1}(A)$  是自然数集的子集, 从而根据习题3.6.3, 存在一个自然数  $M$  使得对任意  $i \in g^{-1}(A)$  都有  $i \leq M$  成立。于是使用命题7.1.11(c), 此时令  $B_M = \{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq M\}$ , 此时有:

$$\sum_{x \in A} |f(x)| = \sum_{i \in g^{-1}(A)} |f(g(i))|$$

考虑到绝对值非负且  $g^{-1}(A) \subseteq B_M$ , 于是又有:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in g^{-1}(A)} |f(g(i))| &\leq \sum_{i \in g^{-1}(A)} |f(g(i))| + \sum_{i \in B_M \setminus g^{-1}(A)} |f(g(i))| = \sum_{i \in B_M} |f(g(i))| \\ &= \sum_{i \in B_M} |f(g(i))| = \sum_{i=0}^M |f(g(i))| \quad (\text{命题7.1.11(d)}) \end{aligned}$$

从而对任意  $S_A \in S$ , 都存在一个  $M$  使得  $S_A \leq T_M \leq \sup(T)$  成立, 于是  $\sup(T)$  是  $S$  的一个上界, 即  $\sup(T) \geq \sup(S)$  成立。

而对任意  $T_n \in T$ , 考虑到绝对值非负的性质, 根据命题7.1.11(d)有:

$$T_n = \sum_{i=0}^n |f(g(i))| \leq \sum_{i=0}^{n+1} |f(g(i))| = \sum_{i \in \{j \in \mathbb{N} : 0 \leq j \leq n+1\}} |f(g(i))|$$

令  $B_{n+1} = \{j \in \mathbb{N} : 0 \leq j \leq n+1\}$ , 考虑到  $g$  是双射, 于是根据命题7.1.11(c)有:

$$\sum_{i \in \{j \in \mathbb{N} : 0 \leq j \leq n+1\}} |f(g(i))| = \sum_{i \in B_{n+1}} |f(g(i))| = \sum_{x \in g(B_{n+1})} |f(x)| = S_{B_{n+1}}$$

而  $g(B_{n+1})$  是  $X$  的一个子集, 于是即对任意  $T_n \in T$ , 都有一个  $S_{B_{n+1}} \in S$  使得  $T_n \leq S_{B_{n+1}} \leq \sup(S)$  成立, 于是  $\sup(S)$  是  $T$  的一个上界, 即  $\sup(T) \leq \sup(S)$ 。

综上, 可以得到  $\sup(T) \geq \sup(S)$  与  $\sup(T) \leq \sup(S)$  同时成立, 于是只能有  $\sup(T) = \sup(S)$ 。

然后我们证明  $\sum_{x \in X} f(x)$  绝对收敛当且仅当  $\sup(S) < \infty$ :

$\sum_{x \in X} f(x)$  绝对收敛当且仅当  $\sum_{x \in X} |f(x)|$  收敛, 这等价于  $\sum_{i=0}^{\infty} |f(g(i))|$  收敛。考虑到  $T_{n+1} = T_n + |f(g(n+1))| \iff T_{n+1} \geq T_n$  对任意  $n \in \mathbb{N}$  都成立, 因此序列  $(T_n)_{n=0}^{+\infty}$  是一个递增序列, 于是根据命题6.3.8, 我们有:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} |f(g(i))| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n |f(g(i))| \\ &= \sup \left( \left\{ \sum_{i=0}^n |f(g(i))| : n \geq 0 \right\} \right) \\ &= \sup(T)\end{aligned}$$

于是若  $\sup(S) < \infty$  时, 由于绝对值非负我们同时也有  $\sup(S) \geq 0$  成立, 从而:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f(g(i))| = \sup(T) = \sup(S) \iff 0 \leq \sum_{i=0}^{\infty} |f(g(i))| < \infty$$

从而即级数  $\sum_{i=0}^{\infty} |f(g(i))|$  收敛于某个确定的实数, 于是级数  $\sum_{x \in X} f(x)$  绝对收敛; 反过来, 若级数

$\sum_{x \in X} f(x)$  绝对收敛, 则级数  $\sum_{i=0}^{\infty} |f(g(i))|$  收敛于某个确定的实数, 于是  $\sup(S)$  等于某个确定的实数, 则必然有  $\sup(S) < \infty$  成立。

综上, 于是结论成立。

### 8.2.2 证明引理8.2.5 (提示: 首先证明如果 $M$ 是

$$M := \sup \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X, A \text{ 是有限集} \right\}$$

那么对于任意的正整数  $n$ , 集合  $\{x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n}\}$  都是有限集并且基数至多为  $Mn$ 。然后利用 [习题8.1.9](#) (其中会用到[选择公理](#), 参见[8.4节](#))

令  $M := \sup \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X, A \text{ 是有限集} \right\}$ , 我们先证明下面的结论:

对于任意的正整数  $n$ , 集合  $X_n := \{x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n}\}$  的基数至多为  $Mn$ 。

证明:

使用反证法, 不妨假设  $\#(X_n)$  的基数大于  $Mn$ , 从而对  $X_n$  讨论:

- $X_n$  是一个无限集。

于是此时使用选择公理, 我们构建这样一个序列  $(y_i)_{i=1}^n$ : 对任意给定自然数  $1 \leq i \leq \lfloor Mn \rfloor + 2$ ,  $y_i$  是从集合  $X_n \setminus \{y_j : 1 \leq j < i\}$  中通过选择公理选取出的元素。即  $y_1 \in X_n$ ,  $y_2 \in X_n \setminus \{y_1\}$  且  $y_2 \neq y_1$  等等。于是此时令集合  $Y_n = \{y_j : 1 \leq j \leq \lfloor Mn \rfloor + 2\}$ , 其中对任意  $y_j \in Y_n$  都有  $|f(y_j)| \geq \frac{1}{n}$  成立, 于是此时定义  $g: Y_n \rightarrow \mathbb{R}$  有  $g(y) = \frac{1}{n}$ , 此时根据命题 7.1.11(h) 有:

$$\sum_{x \in Y_n} |f(x)| \geq \sum_{x \in Y_n} \frac{1}{n} = \frac{\lfloor Mn \rfloor + 2}{n} \geq \frac{Mn + 1}{n} > M$$

而  $Y_n$  显然是一个有限集 (基数为  $\lfloor Mn \rfloor + 2$ ), 且有  $Y_n \subseteq X_n$  (对任意  $y_j \in Y_n$ , 都有  $y_j \in X_n$ ), 于是根据  $M$  定义, 应该有:

$$\sum_{x \in Y_n} |f(x)| \leq M$$

此时导出矛盾, 于是  $X_n$  不可能是一个无限集。

- $X_n$  是一个有限集, 且  $\#(X_n) = c > Mn$ 。

于是此时定义  $g: X_n \rightarrow \mathbb{R}$  有  $g(x) = \frac{1}{n}$ , 根据命题7.1.11(h)有:

$$\sum_{x \in X_n} |f(x)| \geq \sum_{x \in X_n} \frac{1}{n} = \frac{c}{n} > \frac{Mn}{n} = M$$

于是结论得证。

然后我们证明集合  $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$  是至多可数的。

对任意自然数  $n \in \mathbb{N}$ , 令有  $A_n := \{x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n}\}$ , 其中特别定义  $A_0 = \emptyset$ , 然后考虑集合  $\{x \in X : |f(x)| > 0\}$  与  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  的关系。

对任意  $x_0 \in \{x \in X : |f(x)| > 0\}$ , 应当有  $|f(x_0)| > 0$  成立, 根据习题5.4.4, 于是存在一个正自然数  $n$  使得  $|f(x_0)| > \frac{1}{n} > 0$  成立, 于是即存在  $n \in \mathbb{N}$  使得  $x_0 \in A_n$  成立, 进而  $x_0 \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ; 对任意  $x_0 \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , 应当有存在某个自然数  $n \in \mathbb{N}$  使得  $x_0 \in A_n$ , 进而即存在某个正自然数  $n \in \mathbb{N}$  使得  $|f(x_0)| > \frac{1}{n}$  成立 (显然不可能有  $x_0 \in A_0$ )。特别地, 由于  $n$  是正数于是有  $|f(x_0)| > 0$ , 从而可以推论出  $x_0 \in \{x \in X : |f(x)| > 0\}$ 。

于是有  $\{x \in X : |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , 而根据定义8.2.4与, 若  $\sum_{x \in X} f(x)$  绝对收敛, 则:

$$\sup \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X \text{ 且 } A \text{ 是有限集} \right\} = M < \infty$$

从而  $M$  是一个正实数; 进而根据前辅助结论有对任意  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$  都是一个有限集; 此时习题8.1.9的结论有  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  是一个至多可数集, 从而  $\{x \in X : |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  也是至多可数的, 于是引理8.2.5得证。

### 8.2.3 证明命题8.2.6 (提示: 你当然可以使用第7章中的所有结论)

对于一个绝对收敛的级数  $\sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x)$ , 我们不需要考虑  $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$  是一个有限集

的情况, 对有限集上的和讨论绝对收敛这个概念显然是没有意义, 因为有限和总是计算出来的一个确定实数, 因此在下面的证明中, 我们总是默认  $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$  是一个无限集然后加以证明

然后逐条证明:

1. 级数  $\sum_{x \in X} (f(x) + g(x))$  是绝对收敛的, 并且:

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x)$$

证明:

先证明级数是绝对收敛的。

考虑集合  $S = \left\{ \sum_{x \in A} |f(x) + g(x)| : A \subseteq X \text{ 且 } A \text{ 是有限集} \right\}$  中任意的某个元素  $\sum_{x \in A} |f(x) + g(x)|$ , 根据命题7.1.11有:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in A} |f(x) + g(x)| &\leq \sum_{x \in A} |f(x)| + |g(x)| \\ &= \sum_{x \in A} |f(x)| + \sum_{x \in A} |g(x)| \end{aligned} \quad (1)$$

而根据定义8.2.4, 有  $M = \sup \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X \text{ 且 } A \text{ 是有限集} \right\}$  与

$N = \sup \left\{ \sum_{x \in A} |g(x)| : A \subseteq X \text{ 且 } A \text{ 是有限集} \right\}$  均是有限实数, 于是(1)可进一步化简有:

$$\sum_{x \in A} |f(x) + g(x)| \leq \sum_{x \in A} |f(x)| + \sum_{x \in A} |g(x)| \leq M + N \quad (2)$$

于是集合  $S$  是存在上界的, 根据最小上界原理, 于是其最小上界存在且  $\sup(S) \leq M + N$ , 从而根据定义8.2.4有  $\sum_{x \in X} (f(x) + g(x))$  是绝对收敛的。

再证明级数的值:

由于级数是绝对收敛的, 此时即证明:

$$\sum_{x \in X: f(x)+g(x) \neq 0} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x) + \sum_{x \in X: g(x) \neq 0} g(x)$$

令集合  $S_1 = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ ,  $S_2 = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$ ,  $S_3 = \{x \in X : f(x) + g(x) \neq 0\}$ ,  $S = \bigcup_{1 \leq i \leq 3} S_i$ 。根据命题8.2.5与习题8.1.9的结论, 我们

有  $S_1, S_2, S_3$  与  $S$  均是可数的, 此时考虑求值:

根据命题8.2.6(c)的结论, 对  $\sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x)$ , 我们有:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S} f(x) &= \sum_{x \in S_1} f(x) + \sum_{x \in S \setminus S_1} f(x) \\ &= \sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x) + \sum_{x \in X: g(x) \neq 0 \text{ 且 } f(x)=0} f(x) \\ &= \sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x) + 0 \\ &= \sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x) \end{aligned}$$

类似的, 我们可以证明  $\sum_{x \in X: g(x) \neq 0} g(x) = \sum_{x \in S} g(x)$  与

$$\sum_{x \in X: f(x)+g(x) \neq 0} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in S} (f(x) + g(x)).$$

又根据前证明与题设,  $\sum_{x \in S} f(x)$ ,  $\sum_{x \in S} g(x)$  与  $\sum_{x \in S} (f(x) + g(x))$  都是绝对收敛的, 于是根据选

择公理, 可以选出双射  $h: \mathbb{N} \rightarrow S$  与  $h_2: \mathbb{N} \rightarrow S$  使得  $\sum_{x \in S} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(h(n))$  与

$\sum_{x \in S} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(h_2(n))$  成立, 于是结合命题7.1.11与极限定律有:

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in S} f(x) + \sum_{x \in S} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(h(n)) + \sum_{n=0}^{\infty} g(h(n)) \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^i f(h(n)) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^i g(h(n)) \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=0}^i f(h(n)) + \sum_{n=0}^i g(h(n)) \right] \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=0}^i f(h(n)) + g(h(n)) \right] \\
&= \sum_{x \in S} (f(x) + g(x))
\end{aligned}$$

于是有

$$\sum_{x \in S} f(x) + \sum_{x \in S} g(x) = \sum_{x \in S} (f(x) + g(x)) \iff \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x) = \sum_{x \in X} (f(x) + g(x))$$

, 值的结论得证。

2. 若 $c$ 是一个实数, 那么 $\sum_{x \in X} c \cdot f(x)$ 是绝对收敛的, 并且:

$$\sum_{x \in X} c \cdot f(x) = c \sum_{x \in X} f(x)$$

证明:

先证明级数是绝对收敛的。

对任意 $A \subseteq X$ 且 $A$ 是有限集, 根据命题7.1.11的结论, 我们有:

$$\sum_{x \in A} |c \cdot f(x)| = |c| \sum_{x \in A} |f(x)|$$

若设 $M = \sup \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X \text{ 且 } A \text{ 是有限集} \right\}$ , 则由定义8.2.4有对任意 $A \subseteq X$ 且 $A$ 是有限集:

$$\sum_{x \in A} |f(x)| \leq M \iff |c| \sum_{x \in A} |f(x)| \leq |c| M$$

于是 $|c|M$ 是集合 $\left\{ \sum_{x \in A} |c \cdot f(x)| : A \subseteq X \text{ 且 } A \text{ 是有限集} \right\}$ 的一个上界, 从而根据最小上界原理与定义8.2.4可以得到级数 $\sum_{x \in X} c \cdot f(x)$ 也是绝对收敛的。

然后证明它的值。

对任意情况的 $X$ , 我们总有级数 $\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x)$ , 由 $\sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x)$ 绝对收敛, 根据选择公理, 于是有存在某个双射 $h: \mathbb{N} \rightarrow \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} f(h(n))$ 绝对收敛,

于是根据极限定律与级数定义有:

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in X: c \cdot f(x) \neq 0} c \cdot f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot f(h(n)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m c \cdot f(h(n)) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} c \cdot \sum_{n=0}^m f(h(n)) \\
&= c \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m f(h(n)) \\
&= c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f(h(n)) \\
&= c \cdot \sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x)
\end{aligned}$$

于是即：

$$\sum_{x \in X} c \cdot f(x) = c \sum_{x \in X} f(x)$$

结论得证。

3. 若存在两个不相交的集合  $X_1, X_2$  使得  $X_1 \cup X_2 = X$ , 那么  $\sum_{x \in X_1} f(x)$  和  $\sum_{x \in X_2} f(x)$  都是绝对收敛的, 并且:

$$\sum_{x \in X_1 \cup X_2} f(x) = \sum_{x \in X_1} f(x) + \sum_{x \in X_2} f(x)$$

反过来, 如果  $h: X \rightarrow \mathbb{R}$  使得  $\sum_{x \in X_1} h(x)$  和  $\sum_{x \in X_2} h(x)$  都是绝对收敛的, 那么  $\sum_{x \in X_1 \cup X_2} h(x)$  也是绝对收敛的, 并且:

$$\sum_{x \in X_1 \cup X_2} h(x) = \sum_{x \in X_1} h(x) + \sum_{x \in X_2} h(x)$$

证明:

令  $S = \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X \text{ 且 } A \text{ 是有限集} \right\}$ ,  $S_i = \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X_i \text{ 且 } A \text{ 是有限集} \right\}$  (其中  $i = 1$  或  $2$ )。

证明前一个结论:

绝对收敛:

对任意  $\sum_{x \in A_1} |f(x)| \in S_1$  与  $\sum_{x \in A_2} |f(x)| \in S_2$ , 我们有  $A_1 \subseteq X_1$  与  $A_2 \subseteq X_2$ , 又有  $X_1, X_2$  是  $X$  的子集, 于是  $A_1, A_2$  也是  $X$  的子集, 从而有  $\sum_{x \in A_1} |f(x)| \in S$  与  $\sum_{x \in A_2} |f(x)| \in S$  成立, 若  $\sum_{x \in X} f(x)$  绝对收敛, 那么根据定义 8.2.4 有  $\sup(S) < +\infty$ , 于是:

$$\sum_{x \in A_1} |f(x)| < \sup(S), \quad \sum_{x \in A_2} |f(x)| < \sup(S)$$

即  $\sup(S)$  同时是  $S_1$  与  $S_2$  的上界。于是根据最小上界原理,  $\sup(S_1)$  与  $\sup(S_2)$  也存在并且小于无穷, 进而根据定义 8.2.4 可以得到  $\sum_{x \in X_1} f(x)$  与  $\sum_{x \in X_2} f(x)$  都是绝对收敛的。



值的证明:

上文已经有证明  $\sum_{x \in X_1} f(x)$  与  $\sum_{x \in X_2} f(x)$  必然是绝对收敛的, 于是根据选择公理, 分别存在两个双射  $h_1: \mathbb{N} \rightarrow \{x \in X_1: f(x) \neq 0\}$  与  $h_2: \mathbb{N} \rightarrow \{x \in X_2: f(x) \neq 0\}$  使得两个对应级数绝对收敛。然后考虑令函数  $h: \mathbb{N} \rightarrow \{x \in X: f(x) \neq 0\}$  有:

$$h(n) = \begin{cases} h_1(\frac{n}{2}) & n \text{ 是偶数} \\ h_2(\frac{n-1}{2}) & n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

显然有  $h$  是一个双射, 于是考虑  $\sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(h(n))$  的值:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(h(n)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^i f(h(n)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2i-1} f(h(n)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{i-1} f(h(2n)) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{i-1} f(h(2n+1)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{i-1} f(h_1(n)) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{i-1} f(h_2(n)) \\ &= \sum_{x \in X_1: f(x) \neq 0} f(x) + \sum_{x \in X_2: f(x) \neq 0} f(x) \end{aligned}$$

这等价于  $\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{x \in X_1} f(x) + \sum_{x \in X_2} f(x)$ , 于是得到若  $\sum_{x \in X_1} f(x)$  和  $\sum_{x \in X_2} f(x)$  都是绝对收敛的, 则必然有值的结论成立。

证明后一个结论:

绝对收敛:

对任意  $\sum_{x \in A} |h(x)| \in S$ , 根据分配律可以将  $A$  写为  $(A \cap X_1) \cup (A \cap X_2)$ , 于是再根据  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$  与命题 7.1.11(e) 有:

$$\sum_{x \in A} |h(x)| = \sum_{x \in (A \cap X_1) \cup (A \cap X_2)} |h(x)| = \sum_{x \in (A \cap X_1)} |h(x)| + \sum_{x \in (A \cap X_2)} |h(x)|$$

又考虑到  $A \cap X_1 \subseteq X_1$ ,  $A \cap X_2 \subseteq X_2$ , 以及  $\sum_{x \in X_1} h(x)$  和  $\sum_{x \in X_2} h(x)$  都是绝对收敛, 于是有:

$$\sum_{x \in A} |h(x)| = \sum_{x \in (A \cap X_1)} |h(x)| + \sum_{x \in (A \cap X_2)} |h(x)| \leq \sup(S_1) + \sup(S_2) < +\infty$$

于是即  $S$  有上界  $\sup(S_1) + \sup(S_2)$ , 于是根据最小上界原理有  $\sup(S)$  存在且小于无穷。

值的证明:

证明同上一个结论值的证明基本类似, 下面给出个人的版本:

$\sum_{x \in X_1} h(x)$  与  $\sum_{x \in X_2} h(x)$  绝对收敛, 于是根据选择公理存在双射  $f_1: \mathbb{N} \rightarrow \{x \in X_1: h(x) \neq 0\}$  与  $f_2: \mathbb{N} \rightarrow \{x \in X_2: h(x) \neq 0\}$ 。然后考虑令函数  $f: \mathbb{N} \rightarrow \{x \in X: h(x) \neq 0\}$  有:

$$f(n) = \begin{cases} f_1(\frac{n}{2}) & n \text{ 是偶数} \\ f_2(\frac{n-1}{2}) & n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

显然有  $f$  是一个双射, 于是有:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X: h(x) \neq 0} h(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(f(n)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^i h(f(n)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2i-1} h(f(n)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{i-1} h(f(2n)) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{i-1} h(f(2n+1)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{i-1} h(f_1(n)) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{i-1} h(f_2(n)) \\ &= \sum_{x \in X_1: h(x) \neq 0} h(x) + \sum_{x \in X_2: h(x) \neq 0} h(x) \end{aligned}$$

这等价于  $\sum_{x \in X} h(x) = \sum_{x \in X_1} h(x) + \sum_{x \in X_2} h(x)$ , 于是值的结论成立。

4. 如果  $Y$  是另一个集合, 并且  $\phi: Y \rightarrow X$  是一个双射, 那么  $\sum_{y \in Y} f(\phi(y))$  也是绝对收敛的, 并且:

$$\sum_{y \in Y} f(\phi(y)) = \sum_{x \in X} f(x)$$

证明:

绝对收敛:

令有  $S_Y = \left\{ \sum_{y \in A} |f(\phi(y))| : A \subseteq Y \text{ 且 } A \text{ 是有限集} \right\}$  与  $S_X = \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X \text{ 且 } A \text{ 是有限集} \right\}$ 。对任意  $\sum_{y \in A} |f(\phi(y))| \in S_Y$ , 有  $A \subseteq Y$ 。由于  $\phi$  是一个双射, 于是根据命题 7.1.11(c) 的结论, 我们有  $\phi(A) \in X$  与  $\sum_{y \in A} |f(\phi(y))| = \sum_{x \in \phi(A)} |f(x)|$  成立。此时根据定义 8.2.4, 我们有  $\sum_{x \in \phi(A)} |f(x)| \leq \sup(S_X) < +\infty$  成立。于是即  $\sup(S_Y)$  是  $S_Y$  的一个上界, 根据最小上界原理, 此时可以得到结论即  $\sup(S_Y) \leq \sup(S_X) < +\infty$  成立, 于是根据定义 8.2.4 级数  $\sum_{y \in Y} f(\phi(y))$  也是绝对收敛的。

值的证明:

考虑限制  $\phi$  值域与定义域得到新函数  $\phi': \phi^{-1}(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) \rightarrow \{x \in X : f(x) \neq 0\}$  与  $\phi$  有相同的映射关系, 不难验证新的  $\phi'$  也是一个双射。

然后证明有  $\phi^{-1}(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = \{y \in Y : f(\phi'(y)) \neq 0\}$ :

对任意  $y \in \phi^{-1}(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$ , 有存在  $x \in X$  满足  $f(x) \neq 0$  且  $\phi(y) = x$ , 于是进而有  $f(\phi'(y)) \neq 0$ , 又考虑到  $y \in Y$ , 于是  $y \in \{y \in Y : f(\phi'(y)) \neq 0\}$ ; 对任意  $y \in \{y \in Y : f(\phi'(y)) \neq 0\}$ , 令有  $x = \phi'(y)$ , 于是  $f(\phi'(y)) \neq 0 \iff f(x) \neq 0$ , 而根据  $\phi'$  是双射, 于是  $x = \phi'(y) \in X$ , 从而  $x \in \{x \in X : f(x) \neq 0\} \iff y \in \phi^{-1}(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$ . 于是结论得证, 另两个集合是同一个集合。

于是有  $\sum_{y \in Y} f(\phi(y)) = \sum_{y \in Y: f(\phi(y)) \neq 0} f(\phi(y)) = \sum_{y \in Y: f(\phi'(y)) \neq 0} f(\phi'(y))$ . 由于  $\sum_{x \in X} f(x)$  是绝对收敛的, 于是由选择公理, 总能选出一个双射  $h: \mathbb{N} \rightarrow \{x \in X : f(x) \neq 0\}$  使得  $\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(h(n))$ , 然后我们考虑到  $\phi'^{-1} \circ h: \mathbb{N} \rightarrow \{y \in Y : f(\phi(y)) \neq 0\}$  也是一个双射, 于是:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in Y} f(\phi(y)) &= \sum_{y \in Y: f(\phi'(y)) \neq 0} f(\phi'(y)) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\phi'(\phi'^{-1} \circ h(n))) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^i f(\phi'(\phi'^{-1} \circ h(n))) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^i f(\phi'(\phi'^{-1}(h(n)))) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^i f(h(n)) \\ &= \sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x) \\ &= \sum_{x \in X} f(x) \end{aligned}$$

于是值的结论得证。

#### 8.2.4 证明引理8.2.7 (提示: 利用反证法和极限定律)

使用反证法, 我们讨论  $\sum_{n \in A_+} a_n$  与  $\sum_{n \in A_-} a_n$  的可能情况。

1.  $\sum_{n \in A_+} a_n$  与  $\sum_{n \in A_-} a_n$  都是条件收敛的:

此时可以计算有  $\sum_{n \in A_+} |a_n| = \sum_{n \in A_+} a_n$  与  $\sum_{n \in A_-} |a_n| = \sum_{n \in A_-} -a_n = -\sum_{n \in A_-} a_n$ , 于是这两个级数还是绝对收敛的。根据命题8.2.6此时我们有:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in A_+} a_n - \sum_{n \in A_-} a_n &= \sum_{n \in A_+} a_n + \sum_{n \in A_-} -a_n \\ &= \sum_{n \in A_+} |a_n| + \sum_{n \in A_-} |a_n| \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \end{aligned}$$

于是  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  也是收敛的, 进而  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 然而根据前提条件  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  应该条件收敛但是不是绝对收敛的, 于是此情况不可能。

2.  $\sum_{n \in A_+} a_n$  与  $\sum_{n \in A_-} a_n$  中有一个收敛一个发散:

考虑令有序列:

$$b_n = \begin{cases} a_n & n \in A_+ \\ 0 & n \in A_- \end{cases} \quad c_n = \begin{cases} 0 & n \in A_+ \\ a_n & n \in A_- \end{cases}$$

不妨假设  $\sum_{n \in A_+} a_n$  收敛  $\sum_{n \in A_-} a_n$  发散, 此时不难得知  $\sum_{n \in A_+} a_n$  同时也是绝对收敛的, 于是根据命题 8.2.6, 此时有:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in A_+} a_n &= \sum_{n \in A_+} b_n = \sum_{n \in A_+} b_n + 0 \\ &= \sum_{n \in A_+} b_n + \sum_{n \in A_-} b_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \end{aligned}$$

于是根据极限定律与命题 7.1.4, 我们有  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)$  是绝对收敛的, 并且:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^i (a_n - b_n) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=0}^i a_n - \sum_{n=0}^i b_n \right] \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^i a_n - \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^i b_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \end{aligned}$$

此外我们有对任意  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n - b_n = c_n$ , 于是使用命题 8.2.6 对  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  化简有:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n = \sum_{n \in A_+} c_n + \sum_{n \in A_-} c_n \\ &= 0 + \sum_{n \in A_-} a_n \\ &= \sum_{n \in A_-} a_n \end{aligned}$$

从而可以证明  $\sum_{n \in A_-} a_n$  也是收敛的, 这同我们反证假设中  $\sum_{n \in A_-} a_n$  发散的假设矛盾, 于是此情况不可能。

$\sum_{n \in A_-} a_n$  收敛  $\sum_{n \in A_+} a_n$  发散的情况下证明同理, 也可以得证  $\sum_{n \in A_-} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ , 进而证有

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n \in A_+} a_n$  收敛同反证假设的发散相矛盾, 于是此情况也不可能。

综上, 于是反证结束,  $\sum_{n \in A_+} a_n$  与  $\sum_{n \in A_-} a_n$  必然都是不条件收敛的。

## 8.2.5 解释定理8.2.8的证明中标注(为什么?)的地方

逐个证明:

1. 设  $A_+$  与  $A_-$  是命题8.2.7中定义的集合, 那么  $A_+$  与  $A_-$  都是无限集。

若  $A_+$  是有限集, 那么由于有限级数必然是收敛的可以得到  $\sum_{n \in A_+} a_n$  是收敛的, 这同命题8.2.7矛盾。类似地也可以得到  $A_-$  必然是一个无限集。

2. 根据命题8.1.5可以找到递增的双射  $f_+ : \mathbb{N} \rightarrow A_+$  与  $f_- : \mathbb{N} \rightarrow A_-$ , 于是级数  $\sum_{m=0}^{\infty} a_{f_+(m)}$  与  $\sum_{m=0}^{\infty} a_{f_-(m)}$  都不是绝对收敛的。

可以使用反证法, 假设  $\sum_{m=0}^{\infty} a_{f_+(m)}$  是绝对收敛的, 那么根据定义8.2.1有  $\sum_{n \in A_+} a_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{f_+(m)}$  也是绝对收敛的, 这和命题8.2.7矛盾, 于是  $\sum_{m=0}^{\infty} a_{f_+(m)}$  不可能是绝对收敛的。类似地也可以得到  $\sum_{m=0}^{\infty} a_{f_-(m)}$  不是绝对收敛的。

3.  $j \mapsto n_j$  是一个单射。

取缩写记号  $B_+(j) = \min\{n \in A_+ : \text{对任意 } i < j \text{ 有 } n_i \neq n_j\}$ ,  
 $B_-(j) = \min\{n \in A_- : \text{对任意 } i < j \text{ 有 } n_i \neq n_j\}$ , 然后开始下文的证明。

对任意  $j_1 \neq j_2$ , 不妨假设有  $j_1 < j_2$ , 于是考虑  $n_{j_2}$  的定义, 要么有  $n_{j_2} = \min B_+(j_2)$ , 要么有  $n_{j_2} = \min B_-(j_2)$ 。而根据良序原理, 即  $n_{j_2} \in B_+(j_2)$  与  $n_{j_2} \in B_-(j_2)$  中恰有一个为真, 这两种情况无论哪一种都满足对任意  $i < j_2$  有  $n_i \neq n_{j_2}$ , 特别取  $i = j_1$  则可以得到  $n_{j_1} \neq n_{j_2}$ 。

综上, 于是对任意  $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$  且  $j_1 \neq j_2$ , 总有  $n_{j_1} \neq n_{j_2}$  成立, 即  $j \mapsto n_j$  是一个单射。

4. 情景I出现了无限次, 情景II同样也出现了无限次。

情景I: 若  $\sum_{0 \leq i < j} a_{n_i} < L$ , 那么令

$$n_j := \min\{n \in A_+ : \text{对任意 } i < j \text{ 有 } n_i \neq n_j\}$$

情景II: 若  $\sum_{0 \leq i < j} a_{n_i} \geq L$ , 那么令

$$n_j := \min\{n \in A_- : \text{对任意 } i < j \text{ 有 } n_i \neq n_j\}$$

显然对任意的  $j \in \mathbb{N}$ , 情景I与情景II之中恰有一个出现。

对情景I, 使用反证法。假设  $j = j_0$  时最后一次出现情景I, 从而对任意  $j > j_0$  都有

$\sum_{0 \leq i < j} a_{n_i} \geq L$ , 于是  $n_j$  使用情景II的定义并且对任意  $j > j_0$ , 根据情景II的定义我们可以推有

性质:

- 性质1:  $n_j < n_{j+1}$ , 并且若有  $j_1 < j_2$ , 则必然有  $n_{j_1} < n_{j_2}$ 。考察  $n_j$  的定义即可得证这个结论。

- 性质2：对任意 $a \in A_-$ 且 $a \geq n_{j_0+1}$ ，必然存在一个 $j > j_0$ 有 $n_j = a$ 成立。使用反证法证明，若不存在 $j$ 使得 $n_j = a$ ，于是对于任意 $j > j_0$ 总有 $n_j < a$ 成立，又根据自然数的性质，可以归纳得到对任意 $n_j$ 总有 $n_j \geq n_{j_0} + (j - j_0)$ 成立，于是可以得到对任意自然数 $n > n_j$ 都有 $a > n_{(n-n_{j_0}+j_0)} \geq n$ 成立，这同 $a$ 是自然数的前提矛盾，于是不成立。

取 $f_- : \mathbb{N} \rightarrow A_-$ 是引理8.2.7中的单调递增函数，我们证明一个辅助结论：若对任意 $j \geq j_0$ ， $n_j$ 的定义都是情景II的条件，那么存在一个整数 $c = j_0 - f_-^{-1}(n_{j_0})$ ，使得对任意 $j \geq j_0$ 都满足 $f_-(j - c) = n_j$ 。

设 $j = j_0 + a$ ，我们对 $a$ 进行归纳：

对 $a = 0$ 时：

即 $f_-(j_0 - c) = n_{j_0} \iff f_-(f_-^{-1}(n_{j_0})) = n_{j_0} \iff n_{j_0} = n_{j_0}$ ，于是成立。

归纳性假设对 $0 \leq a < b$ 的时候都有结论成立，考虑 $a = b$ 的情况：

使用反证法，设此时 $f(b + f_-^{-1}(n_{j_0})) = F \neq n_{j_0+b}$ ，由 $F \in A_-$ ，则讨论其取值可能：

- $F < n_{j_0+b}$ ：由 $n_{j_0+b}$ 的定义，则必然存在一个 $j < j_0 + b$ 满足 $F = n_j$ 。于是对比 $F' = f(b - 1 + f_-^{-1}(n_{j_0})) = n_{j_0+b-1}$ ：由于 $f$ 是单调递增的，于是应当有 $F' < F$ ，即 $n_{j_0+b-1} < n_j$ ；又由于 $j \leq j_0 + b - 1$ ，于是必然有 $n_{j_0+b-1} \geq n_j$ 。从而产生矛盾，于是此情况不可能。
- $F > n_{j_0+b}$ ：此时考察 $n_{j_0+b}$ ，由于 $n_{j_0+b} \in A_-$ ，于是必然存在 $n' \in \mathbb{N}$ 满足 $f(n') = n_{j_0+b}$ ，但是对任意自然数 $m < b$ ，根据归纳假设应该有 $f(m) = n_j$  ( $j < j_0 + b$ )  $< n_{j_0+b}$ ；对任意自然数 $m \geq b$ ，则由 $f$ 是严格递增的可知有 $f(m) \geq F > n_{j_0+b}$ ，于是此情景下不存在任何自然数 $n'$ 满足 $f(n') = n_{j_0+b}$ 。从而产生矛盾，此情况不可能。

综上，结论得证。

于是对任意 $j > j_0$ ，我们有：

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i < j} a_{n_i} &= \sum_{0 \leq i < j_0+1} a_{n_i} + \sum_{j_0+1 \leq i < j} a_{n_i} = C_1 + \sum_{i=j_0+1}^{j-1} a_{f_-(i-c)} \quad \left( C_1 = \sum_{0 \leq i < j_0+1} a_{n_i} \right) \\ &= C_1 + \sum_{i=j_0+1-c}^{j-1-c} a_{f_-(i)} \\ &= C_1 + \sum_{i=0}^{j-1-c} a_{f_-(i)} - \sum_{i=0}^{j_0-c} a_{f_-(i)} \end{aligned}$$

对上述结果，由于 $\sum_{i=0}^{j_0-c} a_{f_-(i)}$ 是一个确定的有限级数，于是不妨令其为 $C_2$ ；而对 $\sum_{i=0}^{j-1-c} a_{f_-(i)}$ ，由命题8.2.7我们知道级数 $\sum_{i=0}^{\infty} a_{f_-(i)}$ 是发散的，并且根据 $f_-$ 的定义应该有 $a_{f_-(i)} < 0$ 对任意 $i \in \mathbb{N}$ 成立，于是即对任意实数 $l$ ，总存在自然数 $N > 0$ 使得对任意 $n > N$ 都有 $\sum_{i=0}^n a_{f_-(i)} < l$ 成立。特别地，我们取 $l = L - C_1 + C_2$ ，并记此时 $N$ 为 $N_0$ ，于是即对任意 $n = j - 1 - c > N_0$ 有：

$$\sum_{0 \leq i < j} a_{n_i} = C_1 - C_2 + \sum_{i=0}^{j-1-c} a_{f_-(i)} < C_1 - C_2 + L - C_1 + C_2 = L$$

即在反证假设下, 对任意  $j > \max(N_0 + 1 + c, j_0)$  的时候都会有  $\sum_{0 \leq i < j} a_{n_i} < L$ , 于是此时  $n_j$  的定义应该满足情景  $I$ , 这同  $n_{j_0}$  的定义是最后一次出现情景  $I$  的假设矛盾, 于是情景  $I$  必然出现了无数次。

类似的, 可以以同样的思路证明引理: 若对任意  $j \geq j_0$ ,  $n_j$  的定义都是情景  $I$  的条件, 那么存在一个整数  $c = j_0 - f_+^{-1}(n_{j_0})$ , 使得对任意  $j \geq j_0$  都满足  $f_+(j - c) = n_j$ 。然后在反证假设情景  $II$  只出现  $j_0$  次时, 证明得到总存在一个  $J > j_0$  满足对任意  $j > J$  都应该有  $\sum_{0 \leq i < j} a_{n_i} > L$  使得对  $n_j$  的定义符合情景  $II$  的场景, 从而与反证假设出现矛盾。

5.  $j \mapsto n_j$  是一个满射。

值域是  $\mathbb{N}$ , 于是即证明对任意  $n \in \mathbb{N}$ , 总存在  $j \in \mathbb{N}$  满足  $n_j = n$ 。

使用反证法, 分情况讨论:

•  $n \in A_+$ :

设对任意  $j \in \mathbb{N}$ , 都不存在  $n_j = n$ , 于是即对任意的  $j \in \mathbb{N}$  且  $n_j \in A_+$ , 考察情景  $I$  的定义可得都应该有  $n_j < n$  成立, 从而对于  $A_+$  中元素  $m$ , 只有当其属于集合  $B_+ := \{m \in A_+ : m < n\}$  时才存在  $j \in \mathbb{N}$  使得  $n_j = m$ 。然而对于  $B_+$ , 根据基数运算有:

$$\#(B_+) \leq \#(\{m \in \mathbb{N} : m < n\}) = n$$

换言之, 情景  $I$  的出现次数不可能超过  $n$  次, 这同(4)的结论矛盾, 于是不成立。

•  $n \in A_-$ :

同理, 设对任意  $j \in \mathbb{N}$ , 都不存在  $n_j = n$ , 于是即对任意的  $j \in \mathbb{N}$  且  $n_j \in A_-$ , 考察情景  $II$  的定义可得都应该有  $n_j < n$  成立, 从而对于  $A_-$  中元素  $m$ , 只有当其属于集合  $B_- := \{m \in A_- : m < n\}$  时才存在  $j \in \mathbb{N}$  使得  $n_j = m$ 。然而对于  $B_-$ , 根据基数运算有:

$$\#(B_-) \leq \#(\{m \in \mathbb{N} : m < n\}) = n$$

换言之, 情景  $II$  的出现次数不可能超过  $n$  次, 这同(4)的结论矛盾, 于是不成立。

6.  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = 0$ 。

即证明对任意  $\varepsilon > 0$ , 总存在  $J \in \mathbb{N}$  满足对任意  $j > J$  总有  $|a_{n_j}| < \varepsilon$  成立。

由(3)与(5), 我们知道  $j \mapsto n_j$  构成一个双射, 不妨令这个双射为  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 即  $g(j) = n_j$ 。

根据命题7.2.6零判别法,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  条件收敛于是有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 从而对任意  $\varepsilon > 0$ , 总存在  $N > 0$  满足对任意  $n > N$  都有  $|a_n| < \varepsilon$ 。

取  $f_+: \mathbb{N} \rightarrow A_+$ ,  $f_-: \mathbb{N} \rightarrow A_-$  是引理8.2.7中的递增双射。由于  $f_+$  与  $f_-$  都是定义域为  $\mathbb{N}$ , 值域为  $\mathbb{N}$  子集的严格递增函数, 因此有  $f_+(n) \geq n$  与  $f_-(n) \geq n$  成立 (该结论本书有习题证明, 但是出处不记得位置了, 可以用归纳法证明, 此处引用)。

此外, 对任意的  $j_1 < j_2$ , 若有  $n_{j_1}$  与  $n_{j_2}$  同属于  $A_+$  或者  $A_-$ , 则有  $n_{j_1} < n_{j_2} \iff g(j_1) < g(j_2)$  成立。

于是令  $J = \max(g^{-1} \circ f_+(N), g^{-1} \circ f_-(N))$ 。对任意  $j > J$ , 若  $n_j \in A_+$ , 则由于  $g(j) > f_+(N) \geq N$ , 从而由前结论必然有  $|a_{n_j}| < \varepsilon$  成立; 若  $n_j \in A_-$ , 则由于  $g(j) > f_-(N) \geq N$ , 从而由前结论必然有  $|a_{n_j}| < \varepsilon$  成立。即对任意  $j > J$  都有  $|a_{n_j}| < \varepsilon$  成立, 于是结论得证。

$$7. \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq i < j} a_{n_i} = L.$$

证明  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq i < j} a_{n_i} = L$ , 即证明部分和  $S_j = \sum_{0 \leq i < j} a_{n_i}$  收敛于  $L$ 。

由(6)中结论, 我们有  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = 0$ , 从而对任意  $\varepsilon > 0$ , 总存在一个  $J' \geq 0$  满足对任意  $j > J'$  都有  $|a_{n_j}| < \varepsilon$  成立, 于是对  $S_{J'}$  可能的值做讨论:

- $S_{J'} \geq L$ :

于是此时  $n_J$  的定义符合(4)中情景  $II$  的定义, 而根据(4)中结论, 必然在某个  $J > J'$  使得  $n_J$  首次满足情景  $I$  的定义, 即对任意  $j$  满足  $J' \leq j < J$  都有  $n_j$  定义符合情景  $II$ , 而  $n_J$  定义符合情景  $I$ 。

- $S_{J'} < L$ :

于是此时  $n_J$  的定义符合(4)中情景  $I$  的定义, 而根据(4)中结论, 必然在某个  $J > J'$  使得  $n_J$  首次满足情景  $II$  的定义, 即对任意  $j$  满足  $J' \leq j < J$  都有  $n_j$  定义符合情景  $I$ , 而  $n_J$  定义符合情景  $II$ 。

对  $j \geq J$  时  $S_j$  的取值, 给出结论: 对任意  $j \geq L$  都有  $|S_j - L| < \varepsilon$  成立。取  $j = J + a$  ( $a \in \mathbb{N}$ ) , 对  $a$  归纳证明这个结论:

对  $a = 0$  时, 即  $j = J$ , 根据上面的讨论有:

- 若  $S_J \geq L$ , 则  $S_{J-1} < L$ ,  $a_{n_{J-1}} \geq 0$ , 并且由  $J > J'$  有  $|a_{n_{J-1}}| < \varepsilon \implies 0 \leq a_{n_{J-1}} < \varepsilon$ 。于是此时有:

$$S_J = S_{J-1} + a_{n_{J-1}} < L + \varepsilon \xrightarrow{S_J \geq L} |S_J - L| < \varepsilon$$

- 若  $S_J < L$ , 则  $S_{J-1} \geq L$ ,  $a_{n_{J-1}} < 0$ , 并且由  $J > J'$  有  $|a_{n_{J-1}}| < \varepsilon \implies -\varepsilon < a_{n_{J-1}} < 0$ 。于是此时有:

$$S_J = S_{J-1} + a_{n_{J-1}} > L - \varepsilon \xrightarrow{S_J < L} |S_J - L| < \varepsilon$$

于是当  $a = 0$  时总能得证有  $|S_J - L| < \varepsilon$  成立。

现归纳性假设  $a = b$  时有结论得证, 对  $a = b + 1$  时的情况证明:

根据归纳假设, 于是有  $|S_{J+b} - L| < \varepsilon$ , 此时根据(4)对  $S_{J+b}$  的可能取值讨论:

- $L - \varepsilon < S_{J+b} < L$ , 则  $a_{J+b} \geq 0$ , 并且由  $J + b > J'$  有  $|a_{n_{J+b}}| < \varepsilon \implies 0 \leq a_{n_{J+b}} < \varepsilon$ , 于是:

$$L - \varepsilon + 0 < S_{J+b} + a_{n_{J+b}} < L + \varepsilon \implies |S_{J+(b+1)} - L| < \varepsilon$$

- $L \leq S_{J+b} < L + \varepsilon$ , 则  $a_{J+b} < 0$ , 并且由  $J + b > J'$  有  $|a_{n_{J+b}}| < \varepsilon \implies -\varepsilon < a_{n_{J+b}} < 0$ , 于是:

$$L + (-\varepsilon) < S_{J+b} + a_{n_{J+b}} < L + \varepsilon \implies |S_{J+(b+1)} - L| < \varepsilon$$

于是当  $a = b$  成立结论时, 必然有  $a = b + 1$  时也成立结论。综上, 于是归纳得证结论。



根据上面的证明，于是可以总结得到结论：对任意  $\varepsilon > 0$ ，总存在一个整数  $J \geq 0$ ，使得对任意  $j > J$  均有  $|S_j - L| < \varepsilon$  成立，于是根据收敛序列的定义，即：

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq i < j} a_{n_i} = L$$

于是结论得证。

**8.2.6 设  $\sum_{m=0}^{\infty} a_n$  是一个条件收敛但不绝对收敛的级数，证明：存在一个双射  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  使得  $\sum_{m=0}^{\infty} a_{f(m)}$  发散到  $+\infty$ ，或者更准确地说，**

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf \sum_{m=0}^N a_{f(m)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \sum_{m=0}^N a_{f(m)} = +\infty$$

(当然，把  $+\infty$  替换成  $-\infty$  所得到的类似结论依然成立)

仿照定理8.2.8中的证明，我们给出下面一个递归序列  $n_m$ ，然后证明

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf \sum_{m=0}^N a_{n_m} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \sum_{m=0}^N a_{n_m} = +\infty。$$

同样沿用定理8.2.8证明中  $f_+$ ,  $f_-$ ,  $A_+$ ,  $A_-$  的定义， $n_m$  定义如下：

情景I：若有  $\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} < \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$ ，则令：

$$n_m = \{n \in A_+ : \text{对任意 } i < m \text{ 有 } n \neq n_i\}$$

情景II：若有  $\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$ ，则令：

$$n_m = \{n \in A_- : \text{对任意 } i < m \text{ 有 } n \neq n_i\}$$

此定义通俗解释即对比  $(\frac{1}{2} a_{f_+(i)})_{i=1}^{\infty}$  的部分和，若如果大于则下一个项从  $A_+$  中挑一个正数，反之从  $A_-$  中挑一个负数。

我们用类似习题8.2.5的证明思路完成这个结论的证明。

在主结论证明之前，我们先证明一个辅助结论：

- 结论0：对上面的递归定义，当你在  $m_0 < m_1$  时出现某个情景，而对任意  $m_0 < m < m_1$ （可以没有）都有  $n_m$  的定义不满足该情景，则必然有①  $f_+^{-1}(n_{m_1}) = f_+^{-1}(n_{m_0}) + 1$ （若  $m_0, m_1$  均为情景I）②  $f_-^{-1}(n_{m_1}) = f_-^{-1}(n_{m_0}) + 1$ （若  $m_0, m_1$  均为情景II），该结论只同其定义方式相关，与触发情景的条件无关。

证明：

考察  $n_{m_1}$  的定义，于是即对任意  $i < m$  有  $n_{m_1} \neq n_i$ ，此外无论  $f_+$  与  $f_-$  都是单调递增的双射，所以由  $n_{m_1} > n_{m_0}$  可以推知它们对应的函数值也应该有同样的序关系。假设两者情景对应的函数为  $f$ ，对应集合为  $A$ （即  $m_0, m_1$  满足情景I则  $f := f_+$ ,  $A := A_+$ ；满足情景II则  $f := f_-$ ,  $A := A_-$ ），从而考虑反证法：

若  $f^{-1}(n_{m_1}) \neq f^{-1}(n_{m_0}) + 1$ ，从而只能有  $f^{-1}(n_{m_1}) > f^{-1}(n_{m_0}) + 1$ 。于是令  $j := f^{-1}(n_{m_0}) + 1$ ，由  $j > f^{-1}(n_{m_0})$ ，于是应该有  $f(j) > n_{m_0}$ ；同理有  $f^{-1}(n_{m_1}) > j$  有  $n_{m_1} > f(j)$ ；而  $f$  是一个双射，因此  $f(j) \in A$ 。于是综上我们有存在  $f(j) \in A$  满足：

$$n_{m_0} < f(j) < n_{m_1}$$

然而考察 $n_{m_1}$ 的定义,  $n_{m_1}$ 的值应当有 $f(j) > n_{m_1}$ , 于是导出矛盾。从而只能有 $f^{-1}(n_{m_1}) = f^{-1}(n_{m_0}) + 1$ , 证明完毕。

仍然使用上面 $f$ 与 $A$ 的定义, 在此辅助结论下我们可以导出下面子结论:

- 结论1: 当对任意 $m_0 \leq m \leq m_1$ 都满足某个情景, 那么存在常数 $c := f^{-1}(n_{m_0}) - m_0$ 使得:

$$\sum_{m_0 \leq m \leq m_1} a_{n_m} = \sum_{i=m_0+c}^{m_1+c} a_{f(i)}$$

这个结论是显然的, 写有 $\sum_{m_0 \leq m \leq m_1} a_{n_m} = \sum_{m_0 \leq m \leq m_1} a_{f(f^{-1}(n_m))}$ , 利用上结论归纳得到 $f^{-1}(n_m) = f^{-1}(n_{m_0}) + m - m_0$ 即可得证。

- 结论2: 对任意 $m \geq 0$ , 总存在一个 $k \geq 0$ 满足 (准确来说, 这个 $k$ 就是该集合的基数减1, 但是我们证明不需要用到这个 $k$ 值, 仅需要知道它的存在性就行):

$$\sum_{i \in \{i \in \mathbb{N} : n_i \in A \text{ 且 } 0 \leq i < m\}} a_{n_i} = \sum_{i=0}^k a_{f(i)}$$

可以尝试对 $\{i \in \mathbb{N} : n_i \in A \text{ 且 } 0 \leq i < m\}$ 的基数做归纳, 当基数为0的时候左右两式均为0显然成立; 当基数为某个自然数 $j$ 时, 可以将其中最大值 $i_{\max}$ 提取出来, 将原求和分为对一个基数为 $j-1$ 的集合 $\{i \in \mathbb{N} : n_i \in A \text{ 且 } 0 \leq i < i_{\max}\}$ 求和与一个单独的项 $a_{n_{i_{\max}}}$ 相加, 同理将右式分为 $1 \sim k-1$ 的求和与对 $a_{f(k)}$ 的相加, 然后利用归纳假设与结论0得证结论。

- 结论3: 结论1中的 $c$ 总是小于等于0的。

可以考虑 $0 \leq m < m_0$ 内 $f^{-1}(n_m)$ 与 $m$ 的增长, 显然当若 $m$ 满足结论1对应的情景, 只有当增加到下一个满足结论1对应的情景 $m'$ 时可以根据结论0得到此时 $f^{-1}(n_{m'}) = f^{-1}(n_m) + 1$ , 而 $m' - m$ 至少是1, 从而我们可以将 $0 \leq m < m_0$ 中 $f^{-1}(n_m)$ 的增长以1为单位分为有限个阶段, 而这些有限阶段中 $m$ 的增长必然要大于1。

1.  $m \mapsto n_m$ 是单射。

对任意 $m_1 < m_2$ , 考察 $n_{m_2}$ 的定义, 注意到有 $n_{m_2} \neq n_i$ 对任意 $i < m_2$ 都成立, 特别地, 取 $i = m_1$ 即 $n_{m_2} \neq n_{m_1}$ , 于是即对任意 $m_1 \neq m_2$ 都有 $n_{m_2} \neq n_{m_1}$ , 从而 $m \mapsto n_m$ 是单射。

2. 情景I与情景II总是会无限次出现。

类似上题, 使用反证法, 假设情景I在对 $n_{m_0}$ 的定义处最后一次出现, 此后对任意 $m > m_0$ 都有 $n_m$ 的定义符合情景II, 于是即对任意 $m > m_0$ 都有:

$$\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$$

并且 $a_{n_m} \in A_-$ , 于是我们将上式左端改写, 并令有限级数 $\sum_{i=0}^{m_0-1} a_{n_i}$ 为一个确定的正实数 $M$ , 即:

$$M \geq \sum_{i=0}^{m_0-1} a_{n_i} + \sum_{i=m_0}^{m-1} a_{n_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$$

然而我们知道级数  $\sum_{i=0}^{\infty} a_{f_+(i)}$  发散，从而不可能存在  $\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$  的上界，因此导出矛盾，不成立结论。

对情景  $II$ ，同样使用反证法，假设情景  $II$  在对  $n_{m_0}$  的定义处最后一次出现，此后对任意  $m > m_0$  都有  $n_m$  的定义符合情景  $I$ ，于是即对任意  $m > m_0$  都有：

$$\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} < \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$$

并且  $a_{n_m} \in A_+$ ，于是我们将上面的式子改写为：

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m_0-1} a_{n_i} + \sum_{i=m_0}^{m-1} a_{n_i} &< \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^{m_0-1} a_{f_+(i)} + \sum_{i=m_0}^{m-1} a_{f_+(i)} \right) \\ \left( \sum_{i=0}^{m_0-1} a_{n_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m_0-1} a_{f_+(i)} \right) + \sum_{i=m_0}^{m-1} a_{n_i} &< \frac{1}{2} \sum_{i=m_0}^{m-1} a_{f_+(i)} \\ M + \sum_{i=m_0}^{m-1} a_{n_i} &< \frac{1}{2} \sum_{i=m_0}^{m-1} a_{f_+(i)} \end{aligned}$$

其中  $M := \sum_{i=0}^{m_0-1} a_{n_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m_0-1} a_{f_+(i)}$  是一个确定的正实数。而根据结论1，上式又可以改为：

$$\begin{aligned} M + \sum_{i=m_0+c}^{m+c-1} a_{f_+(i)} &< \frac{1}{2} \sum_{i=m_0}^{m-1} a_{f_+(i)} \\ M + \sum_{i=m_0+c}^{m_0-1} a_{f_+(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=m_0}^{m+c-1} a_{f_+(i)} &< \frac{1}{2} \sum_{i=m+c}^{m-1} a_{f_+(i)} \quad (m \gg m_0) \\ M' + \frac{1}{2} \sum_{i=m_0}^{m+c-1} a_{f_+(i)} &< \frac{1}{2} \sum_{i=m+c}^{m-1} a_{f_+(i)} \end{aligned}$$

其中  $M' := M + \sum_{i=m_0+c}^{m_0-1} a_{f_+(i)}$  是一个确定的实数。这里我们假定了  $m+c$  足够大到能同时大于

$m_0$  与  $m_0+c$ ，由于我们只需要找到反证假设的漏洞，因此这样的假设是不影响证明的；对左式第2项，由于  $\sum_{i=m_0}^{\infty} a_{f_+(i)}$  是发散的，从而对任意实数  $L$  总能找到  $m > 0$  使得该项大于  $L$ ，例如令

$L = 2 - 2M'$ ；对右式第一项，考虑到零判别法有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，从而对实数  $\frac{1}{c}$ ，总能找到  $N \geq 0$  满足对任意  $n \geq N$  都有  $|a_n| < \frac{1}{c}$ ，于是对任意  $i \geq N$ ，总有  $f_+(i) \geq f_+(N) \geq N$ ，于是取  $m+c > N$  时上式右项与原式有：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \sum_{i=m+c}^{m-1} a_{f_+(i)} \right| &< \frac{1}{2} \left| \sum_{i=m+c}^{m-1} \frac{1}{c} \right| = \frac{1}{2} \\ \text{左式} &> M' + \frac{1}{2}(2 - 2M') = 1 > \frac{1}{2} > \text{右式} \end{aligned}$$

综上于是当  $m$  足够大时，由反证假设出来的结论不成立。

---

3.  $m \mapsto n_m$  是满射。

使用反证法, 我们假设存在  $n \in \mathbb{N}$  使得不存在任何  $m$  有  $n_m = n$ , 不妨假设  $n \in A$  ( $A$  是  $A_+$  与  $A_-$  中的一个, 证明过程两者没有区别)。于是根据定义, 应该有对任意的  $m \in \mathbb{N}$  有  $n_m \in A$ ,  $n_m < n$  总成立, 于是集合  $\{n_m \in \mathbb{N} : n_m \in A\}$  必然是自然数集  $\{i : 0 \leq i < n\}$  的子集, 也就是说它是有限的, 即  $A$  所对应的那个情景 ( $A_+$  对应情景  $I$ ,  $A_-$  对应情景  $II$ ) 只出现了有限次, 这同(2)中结论矛盾, 于是  $m \mapsto n_m$  是满射。

$$4. \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_m} = 0.$$

令函数  $m \mapsto n_m$  为  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 即  $g(m) = n_m$ 。

根据零判别法有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 于是对任意  $\varepsilon > 0$ , 总存在一个整数  $N \geq 0$  使得对任意  $n \geq N$  都有  $|a_n| < \varepsilon$  成立。考虑到  $f_+$  与  $f_-$  的性质以及  $g$  是一个双射, 于是取整数  $M = \max(g^{-1} \circ f_+(N), g^{-1} \circ f_-(N))$ , 对任意  $m \geq M$  讨论:

- $n_m \in A_+$ , 于是根据  $f_+$  是单调递增的, 对任意  $m > M$ , 都有  $m > g^{-1} \circ f_+(N)$ , 又考虑到  $g(m)$  与  $f_+(N)$  都属于  $A_+$ , 于是根据递归定义应该有  $g(m) > f_+(N)$  成立, 从而有  $g(m) > f_+(N) > N \implies |a_{n_m}| < \varepsilon$  成立。
- $n_m \in A_-$ , 于是根据  $f_-$  是单调递增的, 对任意  $m > M$ , 都有  $m > g^{-1} \circ f_-(N)$ , 又考虑到  $g(m)$  与  $f_-(N)$  都属于  $A_-$ , 于是根据递归定义应该有  $g(m) > f_-(N)$  成立, 从而有  $g(m) > f_-(N) > N \implies |a_{n_m}| < \varepsilon$  成立。

综上, 于是对任意  $\varepsilon > 0$ , 总能找到  $M \geq 0$  使得对任意  $m \geq M$  都有  $|a_{n_m}| < \varepsilon$ , 于是即

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_m} = 0.$$

$$5. \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{m=0}^N a_{f(m)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{m=0}^N a_{f(m)} = +\infty.$$

由于上下极限的性质, 只要能证明  $\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{m=0}^N a_{f(m)} = +\infty$ , 则由于上极限必然大于下极限即可推知题目结论。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{m=0}^N a_{n_m} = +\infty, \text{ 等价于 } \sup \left[ \inf_{j=M} \left( \sum_{i=0}^j a_{n_i} \right)^{+\infty} \right]_{M=0}^{+\infty} = +\infty. \text{ 于是即序列}$$

$$\left[ \inf_{j=M} \left( \sum_{i=0}^j a_{n_i} \right)^{+\infty} \right]_{M=0}^{+\infty} \text{ 不存在任何上界, 从而对任意实数 } L, \text{ 总存在一个 } M \geq 0 \text{ 满足}$$

$$\inf_{j=M} \left( \sum_{i=0}^j a_{n_i} \right)^{+\infty} > L. \text{ 再结合下确界定义即对任意 } m \geq M, \text{ 都有 } \sum_{i=0}^m a_{n_i} > L \text{ 成立.}$$

于是题式可总结为: 证明对任意实数  $L$ , 总存在一个  $M \geq 0$  使得对任意  $m \geq M$  都有

$$\sum_{i=0}^m a_{n_i} > L \text{ 成立, 下面给出证明.}$$

证明:

先列出一些从上面证明中可以得到的条件:

条件1: 已知 $\sum_{i=0}^{\infty} a_{f_+(i)}$ 发散, 从而对给定的实数 $L + 1$ , 总能找到一个 $m_0$ 使得

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m_0-1} a_{f_+(i)} > L + 1, \text{ 并且由于 } (a_{f_+(i)})_{i=0}^{\infty} \text{ 是一个非负序列, 于是对任意 } m > m_0 \text{ 也有}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)} > L + 1 \text{ 成立。}$$

条件2: 已知(4)已证明  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_m} = 0$ , 于是对任意 $\varepsilon > 0$ , 总存在一个 $M \geq 0$ 使得对任意 $m \geq M$ 都有 $|a_{n_m}| < \varepsilon$ , 特别地, 对 $\varepsilon = 1$ , 我们记其对应的 $M$ 为 $m_1$ 。

条件3: 已知(2)已证明情景II会无限次出现, 于是记在满足 $m > \max(m_1, m_0)$ 的 $m$ 中, 第一次 $n_m$ 定义满足情景II的 $m$ 记为 $m_2$ 。

于是对任意 $m > m_2$ 进行讨论, 我们证明该 $m_2 + 1$ 就是我们结论中所要寻找的 $M$ :

考虑 $a_{n_m}$ 对应不同场景对 $\sum_{i=0}^m a_{n_i}$ 值的影响。根据条件2此时我们总有 $|a_{n_m}| < 1$ , 于是讨论其情况:

- 若 $n_m$ 定义满足情景II, 则 $\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}, -1 < a_{n_m} < 0$ 。于是此时:

$$\sum_{i=0}^m a_{n_i} = \sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} + a_{n_m} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)} - 1 > L$$

- 若 $n_m$ 定义满足情景I, 则 $\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}, 0 \leq a_{n_m} < 1$ 。此时注意到定义的过

程中,  $n_{m-1}$ 的定义必然是两个情景中的一个: 若其为情景II, 则 $\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i}$ 必然大于 $L + 1$ ,

否则根据条件1有 $\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} \leq L + 1 < \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} a_{f_+(i)}$ 于是 $a_{n_m}$ 定义应该满足情景II, 与我们

讨论的前提 $n_m$ 定义满足情景I不符; 若其为情景I, 则继续向前寻找找到一个 $m'$ 是情景II (最低也能找到 $m_2$ , 所以不会超出我们的讨论范围), 然后再依据情景I下 $a_{n_i}$ 总为正得到

$\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i}$ 必然大于 $L + 1$ 。于是在这个隐性条件下有:

$$\sum_{i=0}^m a_{n_i} = \sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} + a_{n_m} \geq L + 1 > L$$

于是综上, 对任意给定的实数 $L$ , 我们都能通过上面的方法找到一个 $M(m_2 + 1)$ 使得对任意

$m \geq M$ 都有 $\sum_{i=0}^m a_{n_i} > L$ 成立。于是令有 $f(m) = n_m$ , 即有:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{m=0}^N a_{f(m)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{m=0}^N a_{f(m)} = +\infty$$

成立。此外, 若想令重排后级数发散到 $-\infty$ , 则我们可以给出递归定义:

情景I: 若有 $\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} < \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} a_{f_-(i)}$ , 则令:

$$n_m = \{n \in A_+ : \text{对任意 } i < m \text{ 有 } n \neq n_i\}$$

情景II: 若有  $\sum_{i=0}^{m-1} a_{n_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} a_{f_-(i)}$ , 则令:

$$n_m = \{n \in A_- : \text{对任意 } i < m \text{ 有 } n \neq n_i\}$$

证明过程和上面类似, 不多赘述。

---

## 本节相关跳转

[实分析 3.6 集合的基数](#)

[实分析 6.1 收敛与极限定律](#)

[实分析 7.4 级数的重排列](#)

[实分析 8.1 可数性](#)

[实分析 8.4 选择公理](#)