7.1 有限级数

定义

1. (7.1.1 有限级数) 设m，n是整数，并且$(a_i)_{i=m}^{n}$是一个有限实数列。其中，对每一个m，n间的整数$i(m \leq i \leq n)$都指定了一个实数a_i，那么根据下述递推公式来定义**有限和**（**有限级数**）$\sum\limits_{i=m}^{n} a_i$：

> 1. $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i := 0 \quad (n < m)$。
> 2. $\sum\limits_{i=m}^{n+1} a_i := \left(\sum\limits_{i=m}^{n} a_i\right) + a_{n+1} \quad (n \geq m-1)$。

2. (7.1.6 有限集上的求和运算) 设X是含有n个元素的有限集（其中$n \in \mathbb{N}$），并且设$f : X \to \mathbb{R}$是一个从X到实数集$\mathbb{R}$的函数（即f对X中每一个元素x都指定了一个实数$f(x)$）。于是首先任意选取一个$\{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq n\}$到$X$的双射$g$（根据假定的$X$中有$n$个元素可以得知这样的双射是存在的）。则定义**有限和**$\sum\limits_{x \in X} f(x)$为：

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(g(i))$$

（注：变量i（也称为**求和指标**）是一个**约束变量**（也作**虚拟变量**），表达式实际上并不依赖于任何被称为i的量。特别地，可以用任何其它符号代替求和指标i并得到同样的结果）

命题

1. (7.1.4 一些有限级数相关？) 下述命题成立：

> 1. 设$m \leq n \leq p$都是整数，并且对任意的整数$i(m \leq i \leq p)$都指定了一个实数a_i，则有：
>
> $$\sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{p} a_i = \sum_{i=m}^{p} a_i$$
>
> 2. (指标不影响有限和？) 设$m \leq n$都是整数，k是另一个整数，并且对任意的整数$m \leq i \leq n$都指定了一个实数a_i，则：
>
> $$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m+k}^{n+k} a_{j-k}$$
>
> 3. (有限级数的加和？) 设$m \leq n$都是整数，并且对任意的整数$m \leq i \leq n$都指定了实数a_i和b_i，则：
>
> $$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$
>
> 4. (有限和的数乘？) 设$m \leq n$都是整数，c是另一个实数，并且对任意的整数$m \leq i \leq n$都指定了一个实数a_i，则：
>
> $$\sum_{i=m}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right)$$
>
> 5. (有限级数的三角不等式) 设$m \leq n$都是整数，并且对任意的整数$m \leq i \leq n$都指定了一个实数a_i，则：
>
> $$\sum_{i=m}^{n} |a_i| \geq \left|\sum_{i=m}^{n} a_i\right|$$
>
> 6. (有限级数的比较判别法) 设$m \leq n$都是整数，并且对任意的整数$m \leq i \leq n$都指定了实数a_i和b_i。若对全部$m \leq i \leq n$有$a_i \leq b_i$，则：
>
> $$\sum_{i=m}^{n} a_i \leq \sum_{i=m}^{n} b_i$$

2. (7.1.8 有限求和是定义明确的) 设X是含有n个元素的有限集（其中$n \in N$），并且设$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且假设有$g : \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n\} \to X$与$h : \{i \in \mathbb{N}: 1 \le i \le n\} \to X$都是双射，则：

$$\sum_{i=1}^{n} f(g(i)) = \sum_{i=1}^{n} f(h(i))$$

(注：在无限集上的求和的时候，情况要更加复杂些，可以看8.2节)

3. (7.1.11 有限集上求和运算的基本性质) 下述命题是正确的：

> 1. (空函数) 如果X是空集，且$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数（即f是空函数），则有：
>
> $$\sum_{x \in X} f(x) = 0$$
>
> 2. (单元素集) 如果X是由单独的一个元素构成的集合（即$X = \{x_0\}$），则有：
>
> $$\sum_{x \in X} f(x) = f(x_0)$$
>
> 3. (替换法I) 若X是一个有限集，$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且$g : Y \to X$是一个双射，则：
>
> $$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{y \in Y} f(g(y))$$
>
> 4. (替换法II) 设$n \le m$都是整数，且X为集合$X = \{i \in \mathbb{Z} : n \le i \le m\}$，若是对每一个整数$i \in X$都指定了一个实数$a_i$，则：
>
> $$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i \in X} a_i$$
>
> 5. (有限集求和加和？) 设X与Y是两个不相交的有限集（$X \cap Y = \varnothing$），且$f : X \cup Y \to \mathbb{R}$是一个函数，则：
>
> $$\sum_{x \in X \cup Y} f(x) = \left(\sum_{x \in X} f(x)\right) + \left(\sum_{y \in Y} f(y)\right)$$
>
> 6. (线性性质I) 设X是一个有限集，并且设$f : X \to \mathbb{R}$和$g : X \to \mathbb{R}$都是函数，则：
>
> $$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x)$$
>
> 7. (线性性质II) 设X是一个有限集，设$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且设c是一个实数，则：
>
> $$\sum_{x \in X} c \cdot f(x) = c \cdot \left(\sum_{x \in X} f(x)\right)$$
>
> 8. (单调性) 设X是一个有限集，并且设$f : X \to \mathbb{R}$和$g : X \to \mathbb{R}$是使得$f(x) \le g(x)$对全部$x \in X$成立的两个函数，则：
>
> $$\sum_{x \in X} f(x) \le \sum_{x \in X} g(x)$$
>
> 9. (三角不等式) 设X是一个有限集，并且设$f : X \to \mathbb{R}$是函数，则：
>
> $$\sum_{x \in X} |f(x)| \ge \left|\sum_{x \in X} f(x)\right|$$

4. (7.1.13 笛卡尔积？) 设X与Y是有限集，且设$f : X \times Y \to \mathbb{R}$是一个函数，则：

$$\sum_{x \in X} \left(\sum_{y \in Y} f(x, y)\right) = \sum_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y)$$

5. (7.1.14 有限级数的富比尼定理) 设X与Y是有限集，且设$f : X \times Y \to \mathbb{R}$是一个函数，则：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in Y}f(x,y)\right)\\
=&\sum_{(x,y)\in X\times Y}f(x,y)\\
=&\sum_{(y,x)\in Y\times X}f(x,y)\\
=&\sum_{y\in Y}\left(\sum_{x\in X}f(x,y)\right)
\end{aligned}
$$

课后习题

7.1.1 证明引理7.1.4（提示：利用归纳法，而且最基本的情形并不一定在0处）

> 逐条证明：
>
> 1. 设$m\leq n\leq p$都是整数，并且对任意的整数$i(m\leq i\leq p)$都指定了一个实数a_i，则有：
>
> $$\sum_{i=m}^{n}a_i+\sum_{i=n+1}^{p}a_i=\sum_{i=m}^{p}a_i$$
>
> 我们使用归纳法证明：
>
> 由于$p\geq n$，于是根据整数序的性质我们有存在自然数k使得$p=n+k$，于是我们假设m，n是已经给出的某个整数，对k做归纳。
>
> 对$k=0$时：
>
> 于是$p=n$，从而原式可化为$\sum\limits_{i=m}^{n}a_i+\sum\limits_{i=n+1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=m}^{n}a_i\iff\sum\limits_{i=m}^{n}a_i+0=\sum\limits_{i=m}^{n}a_i$，于是此时显然成立结论。
>
> 现归纳性假设$k=c$的时候有成立结论，对$k=c+1$的情况有：
>
> 根据有限级数定义，于是我们可以化$\sum\limits_{i=n+1}^{n+c+1}a_i=\sum\limits_{i=n+1}^{n+c}a_i+a_{n+c+1}$，又根据归纳假设，于是可以化简有：
>
> $$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n}a_i+\sum_{i=n+1}^{n+c+1}a_i&\xlongequal{\text{定义7.1.1}}\sum_{i=m}^{n}a_i+\sum_{i=n+1}^{n+c}a_i+a_{n+c+1}\\&\xlongequal{\text{归纳假设}}\sum_{i=m}^{n+c}a_i+a_{n+c+1}\\&\xlongequal{\text{定义7.1.1}}\sum_{i=m}^{n+c+1}a_i\end{aligned}$$
>
> 于是即$\sum\limits_{i=m}^{n}a_i+\sum\limits_{i=n+1}^{n+c+1}a_i=\sum\limits_{i=m}^{n+c+1}a_i$，从而在$p=n+c+1(k=c+1)$的情况下也成立结论。
>
> 于是归纳得证，可以得到题目结论成立。
>
> ---
>
> 2. 设$m\leq n$都是整数，k是另一个整数，并且对任意的整数$m\leq i\leq n$都指定了一个实数a_i，则：
>
> $$\sum_{i=m}^{n}a_i=\sum_{j=m+k}^{n+k}a_{j-k}$$
>
> 使用归纳法证明：
>
> 由于$n\geq m$，根据整数序性质存在自然数b有$n=m+b$，于是我们假设m，k是任意给定整数，对b做归纳。
>
> 当$b=0$时：
>
> 此时原结论有$\sum\limits_{i=m}^{m}a_i=\sum\limits_{j=m+k}^{m+k}a_{j-k}\iff a_m=a_{(m+k)-k}$，显然此时有结论成立。
>
> 现归纳性地假设$b=c$时有结论成立，对$b=c+1$时：

于是对我们可化 $\sum_{i=m+k}^{m+c+1+k} a_{i-k}$有：

$$\begin{aligned}\sum_{i=m+k}^{m+c+1+k} a_{i-k} &\xlongequal{\text{定义7.1.1}} \sum_{i=m+k}^{m+c+k} a_{i-k} + a_{(m+c+1+k)-k} \\ &\xlongequal{\text{归纳假设}} \sum_{i=m}^{m+c} a_i + a_{m+c+1} \\ &\xlongequal{\text{定义7.1.1}} \sum_{i=m}^{m+c+1} a_i\end{aligned}$$

于是即 $\sum_{i=m+k}^{m+c+1+k} a_{i-k} = \sum_{i=m}^{m+c+1} a_i$，从而在$n = m + c + 1(b = c + 1)$时也有结论成立。

于是归纳得证，可以得到题式成立。

---

3. 设$m \leq n$都是整数，并且对任意的整数$m \leq i \leq n$都指定了实数a_i和b_i，则：

$$\sum_{i=m}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$

使用归纳法证明：

由于$n \geq m$，根据整数序性质存在自然数k有$n = m + k$，于是我们假设m是任意给定整数，对k做归纳。

当$k = 0$时：

此时即证$\sum_{i=m}^{m}(a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{m} a_i + \sum_{i=m}^{m} b_i \iff (a_m + b_m) = a_m + b_m$，显然此时结论成立。

现归纳性地假设$k = c$时有结论成立，对$k = c + 1$时：

于是此时可化 $\sum_{i=m}^{m+c+1} (a_i + b_i)$有：

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{m+c+1} (a_i + b_i) &\xlongequal{\text{定义7.1.1}} \sum_{i=m}^{m+c}(a_i + b_i) + a_{m+c+1} + b_{m+c+1} \\ &\xlongequal{\text{归纳假设}} \sum_{i=m}^{m+c} a_i + \sum_{i=m}^{m+c} b_i + a_{m+c+1} + b_{m+c+1} \\ &\xlongequal{\text{定义7.1.1}} \sum_{i=m}^{m+c+1} a_i + \sum_{i=m}^{m+c+1} b_i\end{aligned}$$

于是即 $\sum_{i=m}^{m+c+1} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{m+c+1} a_i + \sum_{i=m}^{m+c+1} b_i$，从而在$n = m + c + 1(k = c + 1)$时也有结论成立。

于是归纳得证，可以得到题式成立。

---

4. 设$m \leq n$都是整数，c是另一个实数，并且对任意的整数$m \leq i \leq n$都指定了一个实数a_i，则：

$$\sum_{i=m}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right)$$

使用归纳法证明：

由于$n \geq m$，根据整数序性质存在自然数k有$n = m + k$，于是我们假设m是任意给定整数，对k做归纳。

当$k = 0$时：

此时即证$\sum_{i=m}^{m} c \cdot a_i = c \cdot \left(\sum_{i=m}^{m} a_i\right) \iff c \cdot a_m = c \cdot (a_m)$，显然此时结论成立。

现归纳性地假设$k = d$时有结论成立，对$k = d + 1$时：

于是此时可化 $\sum_{i=m}^{m+d+1} c\cdot a_i$有：

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{m+d+1} c\cdot a_i &\xlongequal{\text{定义}7.1.1} \sum_{i=m}^{m+d} c\cdot a_i + c\cdot a_{m+d+1}\\ &\xlongequal{\text{归纳假设}} c\cdot\left(\sum_{i=m}^{m+d} a_i\right) + c\cdot a_{m+d+1}\\ &\xlongequal{\text{结合律}} c\cdot\left(\sum_{i=m}^{m+d} a_i + a_{m+d+1}\right)\\ &\xlongequal{\text{定义}7.1.1} c\cdot\left(\sum_{i=m}^{m+d+1} a_i\right)\end{aligned}$$

于是即 $\sum_{i=m}^{m+d+1} c\cdot a_i = c\cdot\left(\sum_{i=m}^{m+d+1} a_i\right)$，从而在$n=m+d+1(k=d+1)$时也有结论成立。

于是归纳得证，可以得到题式成立。

---

5. 设$m\leq n$都是整数，并且对任意的整数$m\leq i\leq n$都指定了一个实数a_i，则：

$$\sum_{i=m}^{n}|a_i|\geq\left|\sum_{i=m}^{n}a_i\right|$$

使用归纳法证明：

由于$n\geq m$，根据整数序性质存在自然数k有$n=m+k$，于是我们假设m是任意给定整数，对k做归纳。

当$k=0$时：

此时即证$\sum_{i=m}^{m}|a_i|\geq\left|\sum_{i=m}^{m}a_i\right| \iff |a_m|\geq|a_m|$，显然此时结论成立。

现归纳性地假设$k=c$时有结论成立，对$k=c+1$时：

于是此时可化有：

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{m+c+1}|a_i| &= \sum_{i=m}^{m+c}|a_i| + |a_{m+c+1}| \quad (\text{定义}7.1.1)\\ &\geq \left|\sum_{i=m}^{m+c}a_i\right| + |a_{m+c+1}| \quad (\text{归纳假设})\\ &\geq \left|\sum_{i=m}^{m+c}a_i + a_{m+c+1}\right| \quad (\text{三角不等式})\\ &= \left|\sum_{i=m}^{m+c+1}a_i\right| \quad (\text{定义}7.1.1)\end{aligned}$$

于是即 $\sum_{i=m}^{m+c+1}|a_i|\geq\left|\sum_{i=m}^{m+c+1}a_i\right|$，从而在$n=m+c+1(k=c+1)$时也有结论成立。

于是归纳得证，可以得到题式成立。

---

6. 设$m\leq n$都是整数，并且对任意的整数$m\leq i\leq n$都指定了实数a_i和b_i。若对全部$m\leq i\leq n$有$a_i\leq b_i$，则：

$$\sum_{i=m}^{n}a_i\leq\sum_{i=m}^{n}b_i$$

使用归纳法证明：

由于$n\geq m$，根据整数序性质存在自然数k有$n=m+k$，于是我们假设m是任意给定整数，对k做归纳。

当$k=0$时：

此时即证$\sum_{i=m}^{m}a_i\leq\sum_{i=m}^{m}b_i \iff a_m\leq b_m$，显然此时结论成立。

现归纳性地假设$k=c$时有结论成立，对$k=c+1$时：

于是此时可化有：

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{m+c+1}a_i&=\sum_{i=m}^{m+c}a_i+a_{m+c+1}\quad(\text{定义}7.1.1)\\&\le\sum_{i=m}^{m+c}b_i+a_{m+c+1}\quad(\text{归纳假设})\\&\le\sum_{i=m}^{m+c}b_i+b_{m+c+1}\quad(\text{题设})\\&=\sum_{i=m}^{m+c+1}b_i\quad(\text{定义}7.1.1)\end{aligned}$$

于是即$\sum\limits_{i=m}^{m+c+1}a_i\le\sum\limits_{i=m}^{m+c+1}b_i$，从而在$n=m+c+1(k=c+1)$时也有结论成立。

于是归纳得证，可以得到题式成立。

7.1.2 证明命题7.1.11 **（提示：这个证明并不像看上去那么冗长，关键在于恰当的双射把这些集合上的和转换为有限级数，然后利用引理 7.1.4）**

逐条证明：

1. 如果X是空集，且$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，则有：

$$\sum_{x\in X}f(x)=0$$

由于空集基数为0，故考虑空函数$g:\{i\in\mathbb{N}:\ 1\le i\le 0\}\to\varnothing$，于是可化有$\sum\limits_{x\in X}f(x)=\sum\limits_{i=1}^{0}f(g(i))$，于是根据定义7.1.1即结果等于$0$，于是题式得证。

---

2. 如果X是由单独的一个元素构成的集合（即$X=\{x_0\}$），则有：

$$\sum_{x\in X}f(x)=f(x_0)$$

单元素集基数为1，于是考虑函数$g:\{1\}\to\{x_0\}$，其中定义有$g(1)=x_0$，于是可化有

$$\sum_{x\in X}f(x)=\sum_{i=1}^{1}f(g(i))=f(g(1))=f(x_0)$$

于是题式得证。

---

3. 若X是一个有限集，$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，并且$g:Y\to X$是一个双射，则：

$$\sum_{x\in X}f(x)=\sum_{y\in Y}f(g(y))$$

由于g是双射，于是根据集合基数相等的定义（定义3.6.1）我们可知有$\#(X)=\#(Y)$，于是不妨设一个整数$n=\#(X)$，分别取两个函数$h_1:\{i\in\mathbb{N}:\ 1\le i\le n\}\to X$与$h_2:\{i\in\mathbb{N}:\ 1\le i\le n\}\to Y$，其中我们假设$h_1$已知（根据集合基数的定义这样的函数选取是可行的），我们定义h_2满足$h_1(i)=g\circ h_2(i)$对任意$1\le i\le n$，显然有h_2是一个满足我们假设的双射。

于是根据有限和定义，我们有：

$$\sum_{x\in X}f(x)=\sum_{i=1}^{n}f(h_1(i))\quad\sum_{y\in Y}f(g(y))=\sum_{i=1}^{n}f(g(h_2(i)))$$

于是我们根据对任意$1\le i\le n$，根据引理7.1.4(c)与(d)，有：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(h_1(i)) - \sum_{i=1}^{n} f(g(h_2(i))) &= \sum_{i=1}^{n} f(h_1(i)) - f(g(h_2(i))) \\ &= \sum_{i=1}^{n} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

于是可以证明有$\sum_{i=1}^{n} f(h_1(i)) = \sum_{i=1}^{n} f(g(h_2(i)))$，也即$\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{y\in Y} f(g(y))$，题式得证。

---

4. 设$n \leq m$都是整数，且X为集合$X = \{i \in \mathbb{Z} : n \leq i \leq m\}$，若是对每一个整数$i \in X$都指定了一个实数$a_i$，则：

$$\sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{i\in X} a_i$$

考虑这样一个函数$f : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq m - n + 1\} \to X$，定义$f(x) = x + n - 1$，显然我们有$f$是双射。于是我们额外定义双射$g : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq m - n + 1\} \to \mathbb{R}$，其定义有$g(i) = a_{f(i)}$，于是可化题式有：

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m-n+1} a_{i+n-1}$$

根据引理7.1.4(b)，于是题式成立。

---

5. 设X与Y是两个不相交的有限集（$X \cap Y = \varnothing$），且$f : X \cup Y \to \mathbb{R}$是一个函数，则：

$$\sum_{x\in X\cup Y} f(x) = \left(\sum_{x\in X} f(x)\right) + \left(\sum_{y\in Y} f(y)\right)$$

令有$n = \#(X)$，$m = \#(Y)$，于是存在两个双射$g_1 : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\} \to X$与$g_2 : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq m\} \to Y$，又根据命题3.6.14(b)我们有$\#(X \cup Y) = n + m$，于是我们定义下面的函数$h : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n + m\} \to X \cup Y$：

$$h(i) = \begin{cases} g_1(i) & \text{if } 1 \leq i \leq n \\ g_2(i-n) & \text{if } n+1 \leq i \leq n+m \end{cases}$$

显然有h是双射，于是题式根据有限和定义与引理7.1.4可以化简有：

$$\sum_{i=1}^{n+m} f(h(i)) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(g_1(i))\right) + \left(\sum_{i=n+1}^{n+m} f(g_2(i-n))\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{i=1}^{n+m} f(h(i)) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(h(i))\right) + \left(\sum_{i=n+1}^{n+m} f(h(i))\right)$$

于是根据引理7.1.4，题式成立。

---

6. 设X是一个有限集，并且设$f : X \to \mathbb{R}$和$g : X \to \mathbb{R}$都是函数，则：

$$\sum_{x\in X}(f(x) + g(x)) = \sum_{x\in X} f(x) + \sum_{x\in X} g(x)$$

令$n = \#(X)$，函数$h : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\} \to X$是一个双射，于是题式可化简有：

$$\sum_{i=1}^{n}(f(h(i)) + g(h(i))) = \sum_{i=1}^{n} f(h(i)) + \sum_{i=1}^{n} g(h(i))$$

根据引理7.1.4，于是有题式成立。

---

7. 设X是一个有限集，设$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且设c是一个实数，则：

$$\sum_{x\in X} c \cdot f(x) = c \cdot \left(\sum_{x\in X} f(x)\right)$$

令$n = \#(X)$，函数$g : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\} \to X$是一个双射，于是题式可化简有：

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot f(g(i)) = c \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} f(g(i))\right)$$

根据引理7.1.4，于是有题式成立。

---

8. 设X是一个有限集，并且设$f: X \to \mathbb{R}$和$g: X \to \mathbb{R}$是使得$f(x) \le g(x)$对全部$x \in X$成立的两个函数，则：

$$\sum_{x \in X} f(x) \le \sum_{x \in X} g(x)$$

令$n = \#(X)$，函数$h: \{i \in \mathbb{N}: 1 \le i \le n\} \to X$是一个双射，于是题式可化简有：

$$\sum_{i=1}^{n} f(h(i)) \le \sum_{i=1}^{n} g(h(i))$$

根据引理7.1.4，于是有题式成立。

---

9. 设X是一个有限集，并且设$f: X \to \mathbb{R}$是函数，则：

$$\sum_{x \in X} |f(x)| \ge \left|\sum_{x \in X} f(x)\right|$$

令$n = \#(X)$，函数$g: \{i \in \mathbb{N}: 1 \le i \le n\} \to X$是一个双射，于是题式可化简有：

$$\sum_{i=1}^{n} |f(g(i))| \ge \left|\sum_{i=1}^{n} f(g(i))\right|$$

根据引理7.1.4，于是有题式成立。

7.1.3 构造有限乘积$\prod_{i=1}^{n} a_i$和$\prod_{x \in X} f(x)$的定义。在上述关于有限级数的结论中，哪些对于有限乘积也有类似的结论？（注意，使用对数是有风险的，因为某些a_i或$f(x)$可能是0或者是负数。另外，我们还没有定义对数）

有限乘积的定义：

设m，n是整数，并且$(a_i)_{i=m}^{n}$是一个有限实数列。其中，对每一个m，n间的整数$i(m \le i \le n)$都指定了一个实数a_i，那么根据下述递推公式来定义**有限乘积**$\prod_{i=m}^{n} a_i$：

> 1. $\prod_{i=m}^{n} a_i := 1 \quad (n < m)$。
> 2. $\prod_{i=m}^{n+1} a_i := \left(\prod_{i=m}^{n} a_i\right) \cdot a_{n+1} \quad (n \ge m-1)$。

有限集上乘积的定义：

设X是含有n个元素的有限集（其中$n \in \mathbb{N}$），并且设$f: X \to \mathbb{R}$是一个从X到实数集$\mathbb{R}$的函数（即f对X中每一个元素x都指定了一个实数$f(x)$）。于是首先任意选取一个$\{i \in \mathbb{N}$：$1 \le i \le n\}$到X的双射g（根据假定的X中有n个元素可以得知这样的双射是存在的）。则定义**有限乘积**$\prod_{x \in X} f(x)$为：

$$\prod_{x \in X} f(x) = \prod_{i=1}^{n} f(g(i))$$

关于上面有关有限级数的结论，以下列出的结论是对有限乘积成立的：

下面有限乘积成立的结论：

1. 设$m \le n \le p$都是整数，并且对任意的整数$i(m \le i \le p)$都指定了一个实数a_i，则有：

$$\prod_{i=m}^{n} a_i \cdot \prod_{i=n+1}^{p} a_i = \prod_{i=m}^{p} a_i$$

2. （指标不影响有限乘积？）设$m \le n$都是整数，k是另一个整数，并且对任意的整数$m \le i \le n$都指定了一个实数a_i，则：

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{j=m+k}^{n+k} a_{j-k}$$

3. **(有限乘积的乘积？)** 设$m \le n$都是整数，并且对任意的整数$m \le i \le n$都指定了实数a_i和b_i，则：

$$\prod_{i=m}^{n}(a_i \cdot b_i) = \prod_{i=m}^{n} a_i \cdot \prod_{i=m}^{n} b_i$$

4. **(有限乘积的指数运算？)** 设$m \le n$都是整数，c是另一个实数，并且对任意的整数$m \le i \le n$都指定了一个实数a_i，则：

$$\prod_{i=m}^{n}\left({a_i}^c\right) = \left(\prod_{i=m}^{n} a_i\right)^c$$

5. **(有限乘积的绝对值？)** 设$m \le n$都是整数，并且对任意的整数$m \le i \le n$都指定了一个实数a_i，则：

$$\prod_{i=m}^{n} |a_i| = \left|\prod_{i=m}^{n} a_i\right|$$

6. **(有限乘积的比较判别法？)** 设$m \le n$都是整数，并且对任意的整数$m \le i \le n$都指定了实数a_i和b_i。若对全部$m \le i \le n$有$0 \le a_i \le b_i$，则：

$$\prod_{i=m}^{n} a_i \le \prod_{i=m}^{n} b_i$$

以上内容基本变形于引理7.1.4与乘法相关的运算定律与序关系，证明基本类似于习题7.1.1，考虑篇幅原因在此就不列出了（全是复制粘贴的归纳法证明，要是有兴趣可以复制习题7.1.1的解答稍作修改）

下面是有限集上的乘积所成立的结论：

1. **(有限求和是定义明确的)** 设X是含有n个元素的有限集（其中$n \in N$），并且设$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且假设有$g : \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n\} \to X$与$h : \{i \in \mathbb{N}: 1 \le i \le n\} \to X$都是双射，则：

$$\prod_{i=1}^{n} f(g(i)) = \prod_{i=1}^{n} f(h(i))$$

2. **(空函数？)** 如果X是空集，且$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数（即f是空函数），则有：

$$\prod_{x \in X} f(x) = 1$$

3. **(单元素集？)** 如果X是由单独的一个元素构成的集合（即$X = \{x_0\}$），则有：

$$\prod_{x \in X} f(x) = f(x_0)$$

4. **(替换法I？)** 若X是一个有限集，$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且$g : Y \to X$是一个双射，则：

$$\prod_{x \in X} f(x) = \prod_{y \in Y} f(g(y))$$

5. **(替换法II？)** 设$n \le m$都是整数，且X为集合$X = \{i \in \mathbb{Z} : n \le i \le m\}$，若是对每一个整数$i \in X$都指定了一个实数$a_i$，则：

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{i \in X} a_i$$

6. **(有限集求和加和？)** 设X与Y是两个不相交的有限集（$X \cap Y = \varnothing$），且$f : X \cup Y \to \mathbb{R}$是一个函数，则：

$$\prod_{x \in X \cup Y} f(x) = \left(\prod_{x \in X} f(x)\right) \cdot \left(\prod_{y \in Y} f(y)\right)$$

7. **(非线性性质I？)** 设X是一个有限集，并且设$f : X \to \mathbb{R}$和$g : X \to \mathbb{R}$都是函数，则：

$$\prod_{x \in X}(f(x)g(x)) = \prod_{x \in X} f(x) \cdot \prod_{x \in X} g(x)$$

8. **(非线性性质II？)** 设X是一个有限集，设$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且设c是一个实数，则：

> $$\sum_{x\in X} f(x)^c = \left(\sum_{x\in X} f(x)\right)^c$$
>
> 9. （单调性？）设X是一个有限集，并且设$f:X\to\mathbb{R}$和$g:X\to\mathbb{R}$是使得$0\le f(x)\le g(x)$对全部$x\in X$成立的两个函数，则：
>
> $$\sum_{x\in X} f(x) \le \sum_{x\in X} g(x)$$
>
> 10. （绝对值？）设X是一个有限集，并且设$f:X\to\mathbb{R}$是函数，则：
>
> $$\sum_{x\in X} |f(x)| = \left|\sum_{x\in X} f(x)\right|$$
>
> 同样的，以上内容基于命题7.1.8，命题7.1.11，乘法运算律与序性质的变形，证明基本类似于习题7.1.2和课本，考虑篇幅原因在此就不列出了（全是复制粘贴的构造函数与引用引理7.1.4，要是有兴趣可以复制习题7.1.2的解答稍作修改）

7.1.4 利用递归定义来定义关于自然数n的阶乘函数$n!$：$0! := 1$且$(n+1)! := n!\times(n+1)$。如果x和y是实数，证明：二项式公式

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j}$$

对所有自然数 n 均成立（提示：对n使用归纳法）

> 我们对n进行归纳：
>
> 当$n=0$时：
>
> 左式有$(x+y)^0=1$，右式有$\sum_{j=0}^{0}\frac{0!}{j!(0-j)!}x^jy^{0-j}=\frac{0!}{0!0!}x^0y^0=1$，于是左式等于右式，结论成立。
>
> 现归纳性假设当 $n=k$ 时结论成立，则当 $n=k+1$ 时：
>
> $$\begin{aligned} & (x+y)^{k+1} \\ = & (x+y)^k(x+y) \end{aligned}$$
>
> 根据归纳假设，于是有$(x+y)^k=\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}x^jy^{n-j}$，于是：
>
> $$\begin{aligned} &= (x+y)^k(x+y) \\ &= (x+y)\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}x^jy^{k-j}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}x^{j+1}y^{k-j} + \sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}x^jy^{k-j+1} \\ &= x^{k+1} + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{k!}{j!(k-j)!}x^{j+1}y^{k-j} + \sum_{i=0}^{0}\frac{k!}{i!(k-i)!}x^iy^{k+1-i} + \sum_{i=1}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}x^iy^{k+1-i} \\ &= x^{k+1} + y^{k+1} + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{k!}{j!(k-j)!}x^{j+1}y^{k-j} + \sum_{i=1}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}x^iy^{k+1-i} \end{aligned}$$
>
> 由于求和指标不影响有限级数，于是我们取$j\to i-1$，于是可以得到：

> $$= x^{k+1} + y^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \frac{k!}{(i-1)!(k+1-i)!} x^i y^{k+1-j} + \sum_{i=1}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} x^i y^{k+1-i}$$
> $$= x^{k+1} + y^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \left[\left(\frac{k!}{(i-1)!(k+1-i)!} + \frac{k!}{i!(k-i)!} \right) x^i y^{k+1-i} \right]$$
> $$= x^{k+1} + y^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \left[\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{k+1-i} \right) \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!} x^i y^{k+1-i} \right]$$
> $$= \frac{(k+1)!}{0!(k+1)!} x^{k+1} + \frac{(k+1)!}{(k+1)!0!} y^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \frac{k+1}{i(k+1-i)} \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!} x^i y^{k+1-i}$$
> $$= \sum_{i=k+1}^{k+1} \frac{(k+1)!}{i!((k+1)-i)!} x^i y^{k+1-i} + \sum_{i=0}^{0} \frac{(k+1)!}{i!((k+1)-i)!} x^i y^{k+1-i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{(k+1)!}{i!((k+1)-i)!} x^i y^{k+1-i}$$
> $$= \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{i!((k+1)-i)!} x^i y^{(k+1)-i}$$
>
> 即$n = k+1$时，结论依然成立。
>
> 综上，原式证明完毕。

7.1.5 设X是一个有限集，m是一个整数，并且对任意的$x \in X$，设$(a_n(x))_{n=m}^{\infty}$是一个收敛的实数序列。证明：序列$\left(\sum_{x \in X} a_n(x)\right)_{n=m}^{\infty}$是收敛的，并且

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{x \in X} a_n(x) = \sum_{x \in X} \lim_{n \to \infty} a_n(x)$$

（提示：对X的基数使用归纳法，并利用定理6.1.19(a)）于是我们总是可以交换有限和与收敛极限的次序。但对于无限和，情况将更加复制。参见习题19.2.11

> 我们对X的基数做归纳，以证明这个结论对任意有限集合X都是成立的：
>
> $\#(X) = 0$时：
>
> 依据命题7.1.11，于是此时左式有 $\lim_{n \to \infty} \sum_{x \in X} a_n(x) \lim_{n \to \infty} 0 = 0$，右式有$\sum_{x \in X} \lim_{n \to \infty} a_n(x) = 0$，从而左右两端相等，此时结论成立。
>
> 现归纳性假设当$\#(X) = k$时成立结论，对$\#(X) = k+1$时的情况讨论：
>
> 根据命题3.1.6单个选择，我们可以从X中选取处元素x_0，从而我们令$X = (X \backslash \{x_0\}) \cup (\{x_0\})$，显然$(X \backslash \{x_0\}) \cap (\{x_0\}) = \varnothing$，于是根据命题7.1.11，对$\lim_{n \to \infty} \sum_{x \in X} a_n(x)$可以做下述变形：
>
> $$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \sum_{x \in X} a_n(x) &= \lim_{n \to \infty} \sum_{x \in (X \backslash \{x_0\}) \cup (\{x_0\})} a_n(x) \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{x \in X \backslash \{x_0\}} a_n(x) + \sum_{x \in \{x_0\}} a_n(x) \right) \end{aligned}$$
>
> 根据极限定律(a)，于是又有：
>
> $$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{x \in X \backslash \{x_0\}} a_n(x) + \sum_{x \in \{x_0\}} a_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{x \in X \backslash \{x_0\}} a_n(x) + \lim_{n \to \infty} \sum_{x \in \{x_0\}} a_n(x)$$
>
> 其中对等式右侧的两项，我们知道$\#(X \backslash \{x_0\}) = k$，于是根据归纳假设，有$\lim_{n \to \infty} \sum_{x \in X \backslash \{x_0\}} a_n(x) = \sum_{x \in X \backslash \{x_0\}} \lim_{n \to \infty} a_n(x)$；对另一个项，根据有限和定义有$\lim_{n \to \infty} \sum_{x \in \{x_0\}} a_n(x) = \lim_{n \to \infty} a_n(x_0) = \sum_{x \in \{x_0\}} \lim_{n \to \infty} a_n(x)$。于是我们可接着化简有：
>
> $$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \sum_{x \in X \backslash \{x_0\}} a_n(x) + \lim_{n \to \infty} \sum_{x \in \{x_0\}} a_n(x) &\xlongequal{\text{上述结论}} \sum_{x \in X \backslash \{x_0\}} \lim_{n \to \infty} a_n(x) + \sum_{x \in \{x_0\}} \lim_{n \to \infty} a_n(x) \\ &\xlongequal{\text{引理7.1.11}} \sum_{x \in X} \lim_{n \to \infty} a_n(x) \end{aligned}$$
>
> 于是结论对$\#(X) = k+1$时也成立，归纳证明完毕。
>
> 综上，于是题目结论得证。

本节相关跳转

[实分析 6.1 收敛与极限定律]

[实分析 8.2 在无限集上求和]

[实分析 19.2 非负可测函数的积分]