

8.3 不可数集

命题

1. (8.3.1 康托尔定理) 设 X 是任意一个集合 (可以是有限集, 也可以是无限集), 那么集合 X 与集合 2^X 不可能拥有同样的基数。

(注: 2^X 是 X 的幂集, 也即 X 所有子集的集合, 具体可以参考引理3.4.9)

2. (8.3.3 康托尔定理推论其一?) $2^{\mathbb{N}}$ 是不可数集。
3. (8.3.4 康托尔定理推论其二?) \mathbb{R} 是不可数集。

(注: 关于推论8.3.4有一些不在学习要求但是很有意思的事情, 由推论8.3.4我们可以得到实数集 \mathbb{R} 的基数是严格大于自然数集 \mathbb{N} 的, 由此可以延伸出一个有趣的问题, 即: 是否存在一类无限集, 它们的基数介于自然数集与实数集之间, 连续统假设断言不存在这样的集合。这个假设独立于集合论的其它公理, 也即既不能被那些公理证明, 也不能被那些公理否定。有兴趣可以自行了解。)

课后习题

8.3.1 设 X 是一个基数为 n 的有限集, 证明: 2^X 是一个基数为 2^n 的有限集 (提示: 对 n 使用归纳法)

8.3.2 设 A, B, C 是满足 $A \subseteq B \subseteq C$ 的集合, 并且假设存在一个单射 $f: C \rightarrow A$ 。如下递归地定义集合 D_0, D_1, \dots ; 令 $D_0 := B \setminus A$, 且对所有的自然数 n 令 $D_{n+1} := f(D_n)$ 。证明: 集合 D_0, D_1, \dots 是互不相交的集合 (即只要 $n \neq m$, 就有 $D_n \cap D_m = \emptyset$)。同时证明: 如果 $g: A \rightarrow B$ 被定义为如下函数: 当 $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ 时, 令 $g(x) := f^{-1}(x)$; 当 $x \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ 时, 令 $g(x) := x$, 那么 g 的确是把 A 映射到 B 的一个双射。特别的, A 和 B 有相同的基数

8.3.3 回顾习题3.6.7, 称集合 A 的基数小于或等于集合 B 的基数, 当且仅当存在一个从 A 到 B 的单射 $f: A \rightarrow B$ 。利用习题8.3.2证明: 如果集合 A 的基数小于或等于集合 B 的基数, 并且集合 B 的基数也小于或等于集合 A 的基数, 那么 A 和 B 有相同的基数 (这被称作施罗德—伯恩斯坦定理, 该定理以恩斯特·施罗德 (1841—1902) 和费利克斯·伯恩斯坦 (1878—1956) 的名字来命名)

8.3.4 如果集合 A 的基数小于或等于集合 B 的基数 (根据习题3.6.7), 但 A 的基数与 B 的基数不相同, 那么我们称集合 A 的基数严格小于集合 B 的基数。证明: 对任意的集合 X , X 的基数都严格小于 2^X 的基数。同时证明: 如果集合 A 的基数严格小于集合 B 的基数, 且集合 B 的基数严格小于集合 C 的基数, 那么集合 A 的基数严格小于集合 C 的基数

8.3.5 证明: 不存在可数无限的幂集 (集合 X 的幂集就是形如 2^X 的集合)

本节相关跳转

[实分析 3.4 象和逆象](#)

[实分析 3.6 集合的基数](#)