15.7 三角函数

定义

1. (15.7.1 三角函数) 如果z是一个复数，那么定义函数：

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

并且我们把$\cos$和$\sin$分别称为**余弦函数**和**正弦函数**。特别地，注意到$\exp$幂级数定义有：

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$
$$e^{-iz} = 1 - iz - \frac{z^2}{2!} + \frac{iz}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots$$

因此我们也可以将上面三角函数的定义写为幂级数的形式有：

$$\cos(z) := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$
$$\sin(z) := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

(注：我们所熟悉的三角函数通常是通过几何概念来给出的定义，而这里给出了从解析的概念角度来定义的方式。这个公式是由莱昂哈德·欧拉在1748年发现的，他给出了指数函数与三角函数之间的关联)

2. (15.7.4 圆周率) 我们定义π为数

$$\pi := \inf\{x \in (0, +\infty) : \sin(x) = 0\}$$

(注：设$E := \{x \in (0, +\infty) : \sin(x) = 0\}$是$\sin$在$(0, +\infty)$上全体根的集合。一个或许很容易被忽略的事实是，我们仍然要对上面的定义讨论$\sin(\pi) = 0$是否为真，不过这个结论并不困难，利用定理13.1.5(d)的结论与$\sin$的连续性我们很容易得到E是闭集，从而E包含了自身所有的附着点，也就是说包含了$\inf(E)$；然后，通过导数的推断我们不难判断得到$\cos(\pi) = -1$)

命题

1. (15.7.2 三角恒等式) 设x，y都是实数，那么有：

> 1. $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$。于是，对于所有的$x \in \mathbb{R}$都有$\sin(x) \in [-1, 1]$与$\cos(x) \in [-1, 1]$。
> 2. $\sin'(x) = \cos(x)$且$\cos'(x) = -\sin(x)$。
> 3. $\sin(-x) = -\sin(x)$且$\cos(-x) = \cos(x)$。
> 4. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$且$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$。
> 5. $\sin(0) = 0$且$\cos(0) = 1$。
> 6. $e^{ix} = \cos(x) + \sin(x)i$且$e^{-ix} = \cos(x) - \sin(x)i$。于是，$\cos(x) = \Re(e^{ix})$且$\sin(x) = \Im(e^{ix})$。

(注：耳熟能详了)

2. (15.7.3 π的存在性？) 存在一个正数x使得$\sin(x)$等于0。
3. (15.7.5 三角函数的周期性) 设x是一个实数，那么有：

> 1. $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$且$\sin(x+\pi)=-\sin(x)$。特别地，有$\cos(x+2\pi)=\cos(x)$和$\sin(x+2\pi)=\sin(x)$，也就是说正弦函数sin和余弦函数cos都是以2π为周期的周期函数。
> 2. $\sin(x)=0$，当且仅当x/π是一个整数。
> 3. $\cos(x)=0$，当且仅当x/π是一个整数加上$1/2$。

（注：我们还可以定义其它所有的三角函数：正切，余切，正割，余割函数，并建立我们所熟知的全部三角恒等式，不过暂时没有这个必要，在习题中我们会讨论部分相关内容）

课后习题

15.7.1 证明定理15.7.2（提示：尽可能用指数函数的语言写出所有的内容）

> 逐条证明：
>
> ---
>
> 1. $\sin(x)^2+\cos(x)^2=1$。于是，对于所有的$x\in\mathbb{R}$都有$\sin(x)\in[-1,1]$与$\cos(x)\in[-1,1]$。
>
> 根据定义可以直接计算有：
>
> $$\begin{aligned}\cos(x)^2+\sin(x)^2&=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2\\&=\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{4}+\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{-4}\\&=\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+2-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{4}\\&=\frac{4}{4}=1\end{aligned}$$
>
> 于是结论成立。
>
> ---
>
> 2. $\sin'(x)=\cos(x)$且$\cos'(x)=-\sin(x)$。
>
> 根据定义可以直接求导得到：
>
> $$\begin{aligned}\cos'(x)&=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)'\\&=\frac{1}{2}(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\\&=\frac{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\\&=-\sin(x)\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\sin'(x)&=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)'\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\\&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\\&=\cos(x)\end{aligned}$$
>
> 于是结论得证。
>
> ---
>
> 3. $\sin(-x)=-\sin(x)$且$\cos(-x)=\cos(x)$。
>
> 根据定义有：
>
> $$\begin{aligned}\cos(-x)&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-x)}}{2}\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\\&=\cos(x)\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\sin(-x)&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-x)}}{2\mathrm{i}}\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\\&=-\sin(x)\end{aligned}$$
>
> 于是结论得证。
>
> ---

4. $\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$且$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$。

根据定义有:

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+y)}}{2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y})+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y})}{4} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y})}{2\cdot 2}-\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y})}{2\mathrm{i}\cdot 2\mathrm{i}} \\
&= \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y) \\
\sin(x+y) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+y)}}{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y})+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y})}{4\mathrm{i}} \\
&= \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y})}{2\mathrm{i}\cdot 2}-\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y})}{2\cdot 2\mathrm{i}} \\
&= \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

（有点结果论的样子，不过暂且这样了）

于是结论得证。

---

5. $\sin(0)=0$且$\cos(0)=1$。

直接代入定义就可以得到:

$$\begin{aligned}
\sin(0) &= \frac{\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^0}{2\mathrm{i}}=0 \\
\cos(0) &= \frac{\mathrm{e}^0+\mathrm{e}^0}{2}=1
\end{aligned}$$

于是结论得证。

---

6. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos(x)+\sin(x)\mathrm{i}$且$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}=\cos(x)-\sin(x)\mathrm{i}$。于是，$\cos(x)=\Re(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$且$\sin(x)=\Im(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$。

显然根据定义我们有:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}+\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \\
&= \cos(x)+\sin(x)\mathrm{i}
\end{aligned}$$

然后根据结论(c)我们有$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}=\cos(-x)+\sin(-x)\mathrm{i}=\cos(x)-\sin(x)\mathrm{i}$，于是结论得证。

15.7.2 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是在$x_0$处可微的函数，$f(x_0)=0$且$f'(x_0)\neq 0$。证明：存在一个$c>0$使得只要$0<|x_0-y|<c$，$f(y)$就不为零。据此判定存在一个$c>0$，使得对于所有的$0<x<c$都有$\sin(x)\neq 0$

> 我们令$k:=f'(x_0)$。根据牛顿逼近法（命题10.1.7）我们知道存在$\delta>0$使得对任意的$|x-x_0|<\delta$都有：
>
> $$|f(x)-(f(x_0)+k(x-x_0))|<\frac{k}{2}|x-x_0|\Longrightarrow|f(x)-k(x-x_0)|<\frac{|k|}{2}|x-x_0|$$
>
> 从而对任意的$0<|x-x_0|<\delta$，我们如果假设$f(x)=0$，则会导出$|f(x)-k(x-x_0)|>\dfrac{|k|}{2}|x-x_0|$的矛盾结论，于是即对任意$0<|x-x_0|<\delta$都只能有$f(x)\neq 0$。
>
> 特别地，根据定理15.7.2我们知道$\sin'(0)=\cos(0)=1\neq 0$且$\sin(0)=0$，于是应用上面的结论即可断定存在一个$c>0$使得对于所有的$0<x<c$都有$\sin(x)\neq 0$。

15.7.3 证明定理15.7.5（提示：对于(c)，首先计算$\sin(\pi/2)$和$\cos(\pi/2)$，然后再把$\sin(x+\pi/2)$和$\cos(x)$联系起来）

> 逐条证明：
>
> ---
>
> 1. $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$且$\sin(x+\pi)=-\sin(x)$。特别地，有$\cos(x+2\pi)=\cos(x)$和$\sin(x+2\pi)=\sin(x)$，也就是说正弦函数sin和余弦函数cos都是以2π为周期的周期函数。
>
> 通过原书的证明我们已经知道了$\sin(\pi)=0$与$\cos(\pi)=-1$，于是可以根据三角恒等式（命题15.7.2(d)）计算有：
>
> $$\begin{aligned}\cos(x+\pi)=\cos(x)\cos(\pi)-\sin(x)\sin(\pi)=-\cos(x)\\ \sin(x+\pi)=\sin(x)\cos(\pi)+\cos(x)\sin(\pi)=-\sin(x)\end{aligned}$$
>
> 然后应用两遍这个结论就可以得到$\cos(x+2\pi)=-\cos(x+\pi)=\cos(x)$与$\sin(x+2\pi)=-\sin(x+\pi)=\sin(x)$，于是结论得证。
>
> ---
>
> 2. $\sin(x)=0$，当且仅当x/π是一个整数。
>
> 我们知道$\sin(x)=0$当且仅当$|\sin(x)|=0$，然后根据结论(a)我们知道$|\sin(x)|$是关于x的以π为周期的周期函数。
>
> 于是我们可以做如下讨论：对任意的实数$x\in\mathbb{R}$，我们知道它总是可以表示为形如$x=k\pi+y$的形式（在实数的章节我们介绍过任意实数r都存在整数N使得$N\leq r<N+1$（习题5.4.3），然后对$r=x/\pi$应用这个结论），其中k是一个整数而y是一个满足$0\leq y<\pi$的实数，于是利用周期性我们有$|\sin(x)|=|\sin(y)|$。然后根据π的定义与命题15.7.2(e)可知对实数$r\in[0,\pi)$有$|\sin(r)|=0$当且仅当$r=0$，于是也即有$\sin(x)=0$当且仅当$x=k\pi$，也即$x/\pi=k$是一个整数。
>
> ---
>
> 3. $\cos(x)=0$，当且仅当x/π是一个整数加上$1/2$。
>
> 我们尝试展示sin与cos之间的联系（事实上这属于常识的范畴）。
>
> 考虑计算$\sin(\pi/2)$与$\cos(\pi/2)$的值，根据命题15.7.2有：
>
> $$\begin{aligned}\cos(\pi/2)^2-\sin(\pi/2)^2=\cos(\pi)=-1\\ \cos(\pi/2)^2+\sin(\pi/2)^2=1\end{aligned}$$
>
> 由此我们可以得到$\sin(\pi/2)^2=1$，结合原书中已经论证过sin在$(0,\pi)$上是非负的可得$\sin(\pi/2)=1$，进而有$\cos(\pi/2)=0$。于是对任意的$x\in\mathbb{R}$我们可以发现有：
>
> $$\cos(x)=\sin(x)\cdot 0+\cos(x)\cdot 1=\sin(x+\pi/2)$$

> 于是$\cos(x)=0$等价于$\sin(x+\pi/2)=0$，根据结论(b)我们有这当且仅当$(x+\pi/2)/\pi=x/\pi+1/2$是一个整数z，于是也即当且仅当$x/\pi=(z-1)+1/2$是一个整数加上$1/2$。

15.7.4 设x，y都是实数，并且满足$x^2+y^2=1$。证明：恰好存在一个实数$\theta\in(-\pi,\pi]$，使得$x=\sin(\theta)$且$y=\cos(\theta)$（提示：你或许需要对x，y是正，负或0的情况进行讨论）

> 注意到$x^2+y^2=1$的条件已经限制了$x\in[-1,1]$与$y\in[-1,1]$，我们不难发现当x，y中有一个为0的时候结论是显然的，事实上可以列出下面的列表：
>
> | 情景 | θ值 |
> | --- | --- |
> | $x=0$且$y=1$ | 0 |
> | $x=0$且$y=-1$ | $-\pi$ |
> | $x=1$且$y=0$ | $\pi/2$ |
> | $x=-1$且$y=0$ | $-\pi/2$ |
>
> 于是我们只需要考虑x，y均不为-1，0与1的情形。此时我们考虑先证明恰好存在两个θ_0，θ_1满足正弦值为x，然后这两个θ值里面恰好有一个满足余弦值为y。
>
> 我们只给出$x>0$的情况的证明，$x<0$的情况是完全类似的。我们知道sin只在$(0,\pi)$上大于0，并且有$\sin(0)=\sin(\pi)=0$与$\sin(\pi/2)=1$。于是根据介值定理（命题9.7.1）我们知道分别存在$\theta_0\in[0,\pi/2]$与$\theta_1\in[\pi/2,\pi]$满足$\sin(\theta_0)=\sin(\theta_1)=x$，并且显然可以验证有$\theta_0$与$\theta_1$都不等于0，$\pi/2$，$\pi$（$x$不是$-1$，0或1）。然后注意到$\sin'=\cos$在$(0,\pi/2)$上大于0，在$(\pi/2,\pi)$上小于0，因此我们可以得到sin是在$(0,\pi/2)$上严格单调递增，在$(\pi/2,\pi)$上严格单调递减的函数，这也意味着sin限制在对应区间上时是一个双射，也即θ_0与θ_1分别是它们所在区间内唯一满$\sin(\theta_0)=\sin(\theta_1)=x$的值。
>
> 然后我们来证明θ_0与θ_1中必然有一个满足余弦值为y。根据三角恒等式（命题15.7.2(a)）显然有
>
> $$\cos(\theta_0)^2=\cos(\theta_1)^2=1-x^2=y^2$$
>
> 于是也即$|y|=|\cos(\theta_0)|=|\cos(\theta_1)|$，若此时$y>0$，则由于cos在$(0,\pi/2)$上大于0我们可以知道这表明$y=\cos(\theta_0)$；若$y<0$，$\sin'=\cos$在$(\pi/2,\pi)$上小于0我们可以知道这表明$y=\cos(\theta_1)$。并且这两个情况显然总是恰好成立一个，于是我们证明了当$x>0$时恰好存在唯一的θ满足$x=\sin(\theta)$且$y=\cos(\theta)$。对$x<0$的情况，只需要类似地在区间$(-\pi,0)$上讨论即可。
>
> 综上，于是结论得证。

15.7.5 证明：如果r，$s>0$都是正实数，θ和α都是使得$re^{i\theta}=se^{i\alpha}$成立的实数，那么$r=s$且存在一个整数$k$使得$\theta=\alpha+2\pi k$

> 于是根据命题15.7.2(f)即有$r\cos(\theta)+r\sin(\theta)\mathrm{i}=s\cos(\alpha)+s\sin(\alpha)\mathrm{i}$成立，也即：
>
> $$\begin{aligned}r\cos(\theta)&=s\cos(\alpha)\\ r\sin(\theta)&=s\sin(\alpha)\end{aligned}$$
>
> 特别地，根据命题15.7.2(a)有：
>
> $$r^2=r^2\cos(\theta)^2+r^2\sin(\theta)^2=s^2\cos(\alpha)+s^2\cos(\alpha)=s^2$$
>
> 然后由于r，s都是正实数，因此即有$r=s$，从而上面的条件即有：
>
> $$\begin{aligned}r\cos(\theta)=s\cos(\alpha)&\overset{r=s}{\Longleftrightarrow}\cos(\theta)=\cos(\alpha)=x\\ r\sin(\theta)=s\sin(\alpha)&\overset{r=s}{\Longleftrightarrow}\sin(\theta)=\sin(\alpha)=y\end{aligned}$$

> 然后然后我们考虑写有$\alpha := a + 2m\pi$与$\theta := b + 2n\pi$，其中n，m是整数且a，$b \in (-\pi, \pi]$，于是根据sin和cos的周期性即有$\cos(a) = \cos(b) = x$与$\sin(a) = \sin(b) = y$。然后根据习题15.7.4我们有在$(-\pi, \pi]$内只存在唯一实数c满足$\sin(c) = y$与$\cos(c) = x$。于是上面的讨论可以总结有：
>
> $$a = b = c \Longrightarrow \theta - \alpha = 2(n - m)\pi$$
>
> 如果我们记$k := n - m$，则上面的结论即存在整数k使得$\theta = \alpha + 2\pi k$，于是结论得证。

15.7.6 设z是一个非零复数。利用习题15.7.4证明：恰好存在一对实数r，θ使得$r > 0$，$\theta \in (-\pi, \pi]$且$z = re^{i\theta}$（这个式子有时被称为z的标准极坐标表达式）

> 我们设$z = a + bi$，其中a，b都是实数。于是我们令$r := \sqrt{a^2 + b^2}$，显然有$r > 0$。然后注意到有：
>
> $$z = r\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r}\mathrm{i}\right) \qquad \frac{a}{r}^2 + \frac{b}{r}^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$
>
> 于是根据习题15.7.4的结论，我们知道恰好存在一个$\theta \in (-\pi, \pi]$使得$\cos(\theta) = \frac{a}{r}$且$\sin(\theta) = \frac{b}{r}$，从而也即有：
>
> $$z = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\mathrm{i}) = re^{i\theta}$$
>
> 然后根据习题15.7.5的结论，我们显然可以得到这样的r，θ是唯一的，于是结论得证。

15.7.7 对于任意的实数θ和整数n，证明棣莫弗恒等式：

$$\cos(n\theta) = \Re((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n) \quad \sin(n\theta) = \Im((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n)$$

> 注意到根据命题15.7.2(f)有：
>
> $$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n$$
>
> $n = 0$时显然题目结论成立，我们先证明$n > 0$的情况，根据复指数函数的性质（习题15.6.16）我们显然可以归纳得到：
>
> $$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$
>
> 于是此时再根据命题15.7.2(f)可以直接得到题目结论得证。而对$n < 0$的情况，我们有：
>
> $$(e^{i\theta})^n = \frac{1}{(e^{i\theta})^{-n}} = \frac{1}{e^{-in\theta}} = e^{in\theta}$$
>
> （注意到$e^{in\theta}e^{-in\theta} = \exp(\mathrm{i}(n - n)\theta) = 1$）
>
> 于是依然可以根据命题15.7.2(f)可以直接得到题目结论得证。综上即棣莫弗恒等式对任意的整数n与实数θ成立。

15.7.8 设$\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$是正切函数$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$。证明：$\tan$可微且单调递增，并且有$\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan(x)^2$，$\lim_{x \to \pi/2}\tan(x) = +\infty$和$\lim_{x \to -\pi/2}\tan(x) = -\infty$。然后利用这些结论推导出$\tan$实际上是$(-\pi/2, \pi/2)$到$\mathbb{R}$的双射，于是我们令有反函数$\tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$（该函数被称为反正切函数）。最后证明：$\tan^{-1}$是可微的，并且$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

> 我们先证明$\tan$是可微且单调的且$\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan(x)^2$。
>
> 注意到$\cos$是在$(-\pi/2, \pi/2)$上非负的且$\sin$和$\cos$都是在$(-\pi/2, \pi/2)$上可微的。于是根据微分的运算定律（命题10.1.13）我们有$\tan$是在$(-\pi/2, \pi/2)$上可微的，且有：
>
> $$\tan'(x) = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$$

然后由于平方的非负性于是我们可以得到$\tan'$在$(-\pi/2,\pi/2)$上始终大于1，这表明$\tan$是$(-\pi/2,\pi/2)$上严格单调递增的（命题10.3.3）。

然后我们证明$\lim\limits_{x\to\pi/2}\tan(x)=+\infty$和$\lim\limits_{x\to-\pi/2}\tan(x)=-\infty$。

我们已经知道了$\sin(\pi/2)=1$，$\sin(-\pi/2)=-1$与$\cos(\pi/2)=\cos(-\pi/2)=0$，于是由于$\sin$和$\cos$的连续性，我们有：

- 存在$\delta_1>0$使得对任意的$x\in(-\pi/2,\pi/2)$满足$|x-\pi/2|<\delta_1$都有$|\sin(x)-1|<1/2$，即有$\sin(x)>1/2$。
- 存在$\delta_2>0$使得对任意的$x\in(-\pi/2,\pi/2)$满足$|x-(-\pi/2)|<\delta_2$都有$|\sin(x)-(-1)|<1/2$，即有$\sin(x)<-1/2$。
- 对任意给定的$\varepsilon>0$，存在某个$\delta>0$使得对任意的$x\in(-\pi/2,\pi/2)$满足$|x-\pi/2|<\delta$或$|x-(-\pi/2)|<\delta$都有$|\cos(x)|<\varepsilon$成立。特别地，由于$\cos$是在$(-\pi/2,\pi/2)$上非负的，因此也即$0<\cos(x)<\varepsilon$。

然后我们可以发现对任意的实数M，我们考虑$\varepsilon=\dfrac{1}{2|M|}$，应用上面三个结论有：

$$\exists\,\delta>0,\forall\,\pi/2-\delta_1<x\wedge|x-\pi/2|<\delta,\tan(x)>\frac{1}{2\cos(x)}>|M|\geq M$$
$$\exists\,\delta>0,\forall\,-\pi/2+\delta_2>x\wedge|x-(-\pi/2)|<\delta,\tan(x)<-\frac{1}{2\cos(x)}<-|M|\leq M$$

于是上面的结论即有$\lim\limits_{x\to\pi/2;x\in(\pi/2-\delta_1,\pi/2)}\tan(x)=+\infty$和$\lim\limits_{x\to-\pi/2;x\in(-\pi/2,-\pi/2+\delta_2)}\tan(x)=-\infty$。然后由于局域极限可以推广到更大范围内的函数极限（命题9.3.18），于是即有$\lim\limits_{x\to\pi/2}\tan(x)=+\infty$和$\lim\limits_{x\to-\pi/2}\tan(x)=-\infty$。

接着推导出$\tan$是从$(-\pi/2,\pi/2)$到$\mathbb{R}$的双射。

由于$\tan$是严格单调递增的因此$\tan$显然是一个单射。然后对任意的$y\in\mathbb{R}$，若$y>0$则根据$\lim\limits_{x\to\pi/2}\tan(x)=+\infty$我们知道存在某个$\delta>0$是的对任意的$\delta<x<\pi/2$都有$\tan(x)>y$；若$y<0$则根据$\lim\limits_{x\to-\pi/2}\tan(x)=-\infty$我们知道存在某个$\delta<0$是的对任意的$-\pi/2<x<\delta$都有$\tan(x)<y$。注意到$\tan(0)=0$且$\tan$连续，于是运用介值定理（命题9.7.1）总能得到存在$x\in(-\pi/2,\pi/2)$满足$\tan(x)=y$，也即证明了$\tan$是一个满射。

综上即有$\tan$是从$(-\pi/2,\pi/2)$到$\mathbb{R}$的双射。

最后我们来证明$\tan^{-1}$是可微的且$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$。

显然$\tan^{-1}$是一个连续函数，于是根据反函数定理（命题10.4.2）可以得到对任意的$x\in\mathbb{R}$满足$x=\tan(y)$有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}(x)=\frac{1}{\tan'(y)}=\frac{1}{1+\tan(y)^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

于是结论得证。

15.7.9 回顾习题15.7.8中的反正切函数$\tan^{-1}$，通过修改定理15.5.6(e)的证明来建立下面这个恒等式：

$$\tan^{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, x\in(-1,1)$$

利用阿贝尔定理（定理15.3.1），把这个恒等式推广到$x=1$时的情形，进而推导出恒等式：

$$\pi=4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\ldots=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

（注意，由于交错级数判别法（命题7.2.12）可知，上面这个级数时收敛的）由此推导出$4-\frac{4}{3}<\pi<4$（当然可以用这个式子计算$\pi=3.1415926...$的更高精确度值，但如果可以，仍然建议使用其它的公式去计算π，因为这个级数收敛的太慢了）

> 对任意的$x\in(-1,1)$，由于$-x^2\in(-1,0]$，于是根据几何级数（命题7.3.3）我们有：
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$$
>
> 这也表明函数$f(x):=\frac{1}{1+x^2}$是在$(-1,1)$上实解析的，于是利用幂级数的性质（命题15.1.6(e)）对任意的$0\leq x<1$我们有：
>
> $$\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$
>
> 类似地对任意的$-1<x<0$有：
>
> $$\int_x^0\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$
>
> 然后结合微积分第二基本定理（命题11.9.4），由于在习题中我们已经证明了$\tan^{-1}$是$f(x):=\frac{1}{1+x^2}$的原函数，于是上面的内容即有：
>
> $$\forall\, x\in(-1,1),\tan^{-1}(x)-\tan^{-1}(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$
>
> （$x=0$处结论可以直接验证，这里就省略了）
>
> 然后注意到$\tan(0)=0\iff\tan^{-1}(0)=0$，因此上面的内容即：
>
> $$\tan^{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, x\in(-1,1)$$
>
> 然后对$x=1$处显然可以判断得到$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$是收敛的，于是根据阿贝尔定理我们有：
>
> $$\tan^{-1}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$
>
> 而我们能够凑巧地发现这样一个事实（常识）：
>
> $$\begin{cases}\cos(\pi/4)^2-\sin(\pi/4)^2=\cos(\pi/2)=0\\ \cos(\pi/4)^2+\sin(\pi/4)^2=1\\ \forall\, x\in(0,\pi/2),\sin(x)>0\land\cos(x)>0\end{cases}\implies\cos(\pi/4)=\sin(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2},\tan(\pi/4)=1$$
>
> 于是即有：

$$\pi = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

结论得证。

15.7.10 设$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$是函数

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \cos(32^n \pi x)$$

(a) 证明：这个级数是一致收敛的，并且f是连续的

注意到对任意的$n \geq 1$都有关于x的函数$4^{-n}\cos(32^n\pi x)$是有界且连续的，因此考虑使用魏尔斯特拉斯M判别法。显然我们有：

$$\|4^{-n}\cos(32^n\pi x)\|_\infty = 4^{-n}$$

因此我们有：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|4^{-n}\cos(32^n\pi x)\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

是收敛的，因此根据魏尔斯特拉斯M判别法（命题14.5.7）我们可以得到函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}\cos(32^n\pi x)$一致收敛且$f$连续。

(b) 证明：对于每一个整数j和每一个整数$m \geq 1$，都有

$$\left| f\left(\frac{j+1}{32^m}\right) - f\left(\frac{j}{32^m}\right) \right| \geq 4^{-m}$$

（提示：对于特定的序列a_n，使用恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + a_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

另外，利用余弦函数以2π为周期的事实，以及对于任意的$|r| < 1$都有几何级数公式$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$，最后还要用到：对任意的实数$x$和$y$都有不等式$|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x-y|$。这个不等式可以用平均值定理（推论10.2.9）或微积分基本定理（定理11.9.4）来证明）

可以计算有：

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{j+1}{32^m}\right) - f\left(\frac{j}{32^m}\right) \\ =&\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}[\cos(32^{n-m}\pi(j+1)) - \cos(32^{n-m}\pi j)] \\ =&\sum_{n=1}^{m-1} 4^{-n}[\cos(32^{n-m}\pi(j+1)) - \cos(32^{n-m}\pi j)]+ \\ &4^{-m}\cos(\pi(j+1)) - 4^{-m}\cos(\pi j)+ \\ &\sum_{n=m+1}^{\infty} 4^{-n}[\cos(32^{n-m}\pi(j+1)) - \cos(32^{n-m}\pi j)] \end{aligned} \tag{1}$$

其中对于(1)第二行的内容，根据命题15.7.5我们可以得到这一部分实际上等于$-2\cdot 4^{-m}\cos(\pi j)$，当$j$是一个奇数时此项等于$2\cdot 4^{-m}$，当$j$是一个偶数时此项等于$-2\cdot 4^{-m}$；而对于第三行的内容，由于其中每一项都有$n > m$因此$32^{n-m}(j+1)$和$32^{n-m}j$都是2的倍数，因此$\cos(32^{n-m}(j+1)\pi) = \cos(32^{n-m}j\pi) = 1$，也即第三行的级数每一项都是$0$，从而该级数收敛于$0$。

然后我们考虑第一行的级数。这一部分是一个有限级数，作$-n+m \mapsto i$的双射我们可以将它改成下面的形式：

$$\frac{1}{4^m}\sum_{i=1}^{m-1} 4^i[\cos(32^{-i}\pi(j+1)) - \cos(32^{-i}\pi j)]$$

然后利用不等式$|\cos(x)-\cos(y)| \leq |x-y|$对任意的实数$x$，$y$都成立（关于这个不等式的证明，我们会放到本题最后面），因此即有：

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{4^m}\sum_{i=1}^{m-1} 4^i[\cos(32^{-i}\pi(j+1)) - \cos(32^{-i}\pi j)]\right| &\leq \frac{1}{4^m}\sum_{i=1}^{m-1} 4^i|32^{-i}\pi(j+1) - 32^{-i}\pi j| \\ &= \frac{\pi}{4^m}\sum_{i=1}^{m-1} 8^{-i} \\ &= 4^{-m}\pi\frac{8^{-1}(1-8^{-m+1})}{1-8^{-1}} \\ &= 4^{-m}\frac{\pi}{7}(1-8^{-m+1}) \\ &\leq \frac{1}{2}4^{-m}\end{aligned}$$

然后我们在式子中分别使用part 1和part 2代表(1)第一行和第二行的内容，则我们有：

$$\begin{aligned}&\left|f\left(\frac{j+1}{32^m}\right) - f\left(\frac{j}{32^m}\right)\right| \\ =&|\text{part } 1 + \text{part } 2| \\ =&\begin{cases}|\text{part } 1 - 2\cdot 4^{-m}| & j\text{是偶数} \\ |\text{part } 1 + 2\cdot 4^{-m}| & j\text{是奇数}\end{cases}\end{aligned}$$

然后在上面由于我们证明了$|\text{part } 1| \leq \frac{1}{2}4^{-m} \iff -\frac{1}{2}4^{-m} \leq \text{part } 1 \leq \frac{1}{2}4^{-m}$，因此我们有：

j**是偶数**	j**是奇数**
$-\frac{5}{2}4^{-m} \leq \text{part } 1 - 2\cdot 4^{-m} \leq -\frac{3}{2}4^{-m}$	$\frac{3}{2}4^{-m} \leq \text{part } 1 + 2\cdot 4^{-m} \leq \frac{5}{2}4^{-m}$

也即总有$\left|f\left(\frac{j+1}{32^m}\right) - f\left(\frac{j}{32^m}\right)\right| \geq \frac{3}{2}4^{-m} \geq 4^{-m}$，于是结论得证。

> 附：不等式$|\cos(x)-\cos(y)| \leq |x-y|$对任意的实数$x$，$y$都成立。
>
> 证明：
>
> 我们知道cos是在整个$\mathbb{R}$上可微，连续的，并且它的导函数为sin。因此根据平均值定理，我们知道存在$\xi \in (x,y)$使得：
>
> $$\sin(\xi) = \frac{\cos(x)-\cos(y)}{x-y}$$
>
> 然后由于$|\sin(\xi)| \leq 1$始终成立，因此即有：
>
> $$\frac{|\cos(x)-\cos(y)|}{|x-y|} \leq 1 \iff |\cos(x)-\cos(y)| \leq |x-y|$$
>
> 也即题目不等式得证。

(c) 利用(b)证明：对于任意的实数x_0，函数f在x_0处不可微（提示：根据习题5.4.3，对于任意的x_0和任意的$m \geq 1$，存在一个整数j使得$j \leq 32^m x_0 \leq j+1$）

> 不妨假设存在实数$x_0 \in \mathbb{R}$使得f在x_0处可微，于是我们记有$L := f'(x_0)$。根据牛顿逼近法（命题10.1.7），对任意的$\varepsilon > 0$都存在对应的$\delta > 0$使得对任意的$|x - x_0| \leq \delta$都有：
>
> $$|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| \leq \varepsilon |x - x_0|$$
>
> 我们考虑$\varepsilon = 1$的情况，于是存在对应的$\delta_1 > 0$使得对任意的$|x - x_0| \leq \delta_1$都有：
>
> $$|f(x) - (f(x_0) + L(x - x_0))| \leq |x - x_0| \tag{1}$$
>
> 然后我们考虑设正整数m满足：
>
> $$\begin{cases} (|L|+1)32^{-m} < 4^{-m} \\ 32^m \delta_1 > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 8^m > |L|+1 \\ 32^m > \frac{1}{\delta_1} \end{cases}$$
>
> 由于指数函数的性质我们知道这样的整数m总是存在的，然后根据习题5.4.3我们知道对应地存在整数j满足：
>
> $$32^m(x_0 - \delta_1) \leq j \leq 32^m x_0 \leq j+1 \leq 32^m(x_0 + \delta_1) \iff x_0 - \delta_1 \leq \frac{j}{32^m} \leq x_0 \leq \frac{j+1}{32^m} \leq x_0 + \delta_1$$
>
> 从而根据绝对值三角不等式有：
>
> $$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{j+1}{32^m}\right) - f\left(\frac{j}{32^m}\right) \right| \leq & \left| f\left(\frac{j+1}{32^m}\right) - \left(f(x_0) + L\left(\frac{j+1}{32^m} - x_0\right)\right) \right| + \\ & \left| \left(f(x_0) + L\left(\frac{j+1}{32^m} - x_0\right)\right) - \left(f(x_0) + L\left(\frac{j}{32^m} - x_0\right)\right) \right| + \\ & \left| \left(f(x_0) + L\left(\frac{j}{32^m} - x_0\right)\right) - f\left(\frac{j}{32^m}\right) \right| \end{aligned} \tag{2}$$
>
> 其中(2)第二部分可以直接计算有：
>
> $$\begin{aligned} & \left| \left(f(x_0) + L\left(\frac{j+1}{32^m} - x_0\right)\right) - \left(f(x_0) + L\left(\frac{j}{32^m} - x_0\right)\right) \right| \\ = & \left| L\left(\frac{j+1}{32^m} - x_0 + x_0 - \frac{j}{32^m}\right) \right| \\ = & \frac{|L|}{32^m} \end{aligned}$$
>
> 然后对(2)第一部分与第三部分，应用结论(1)再代入回(2)有：
>
> $$\left| f\left(\frac{j+1}{32^m}\right) - f\left(\frac{j}{32^m}\right) \right| \leq \left| \frac{j+1}{32^m} - x_0 \right| + \frac{|L|}{32^m} + \left| \frac{j}{32^m} - x_0 \right|$$
>
> 然后由于$j \leq 32^m x_0 \leq j+1$因此我们可以直接去除绝对值，结合m的定义进一步化简有：
>
> $$\left| f\left(\frac{j+1}{32^m}\right) - f\left(\frac{j}{32^m}\right) \right| \leq \frac{j+1}{32^m} - \frac{j}{32^m} + \frac{|L|}{32^m} = \frac{|L|+1}{32^m} < 4^{-m}$$
>
> 但是根据(b)的结论应该有$\left| f\left(\frac{j+1}{32^m}\right) - f\left(\frac{j}{32^m}\right) \right| \geq 4^{-m}$，这导出了矛盾，于是反证假设不成立，$f$只能是处处不可微的。

(d) 简单解释(c)的结论为什么不与推论14.7.3矛盾

> 原因是显然的，对任意的$n \geq 1$可以计算导函数有：
>
> $$[4^{-n}\cos(32^n \pi x)]' = -8^n \pi \sin(32^n \pi x)$$
>
> 然后去计算上确界范数可以得到：

$$\| -8^n\pi\sin(32^n\pi x)\|_\infty = 8^n$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}8^n$显然是发散的，所以题目的级数并不符合推论14.7.3的要求，自然也无法使用推论14.7.3说明它的可微性。

本节相关跳转

实分析 5.4 对实数排序

实分析 7.2 无限级数

实分析 10.2 局部最大值、局部最小值以及导数

实分析 11.9 微积分的两个基本定理

实分析 13.1 连续函数

实分析 14.7 一致收敛和导数

实分析 15.5 指数函数和对数函数