Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ВОПРОСЫ К КОЛЛОКВИУМУ

I СЕМЕСТР

Лектор: *Редкозубов Вадим Витальевич*

h\nu

Автор: *Головко Денис*
Проект на Github

осень 2022

1. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.
2. Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани множества.
3. -
4. Единственность предела сходящейся последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности.
5. -
6. Арифметические операции со сходящимися последовательностями.
7. Свойства пределов, связанные с неравенствами.
8. Теорема о пределе ограниченной монотонной последовательности.
9. Экспонента действительного числа.
10. Теорема Кантора о вложенных отрезках.
11. -
12. Верхний и нижний пределы числовой последовательности.
13. Теорема Больцано–Вейерштрасса.
14. -
15. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
16. Открытые и замкнутые подмножества действительной прямой и их свойства. Критерии замкнутости. Лемма Гейне–Бореля для отрезка.
17. Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне, их эквивалентность.
18. Критерий Коши существования предела функции.
19. Существование односторонних пределов у монотонных функций.
20. Непрерывность функции в точке. Непрерывность сложной функции.
21. (22.) Ограниченность функции, непрерывной на отрезке. Достижение точной верхней и точной нижней граней функцией, непрерывной на отрезке.
22. -
23. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.
24. Теорема об обратной функции.

Содержание

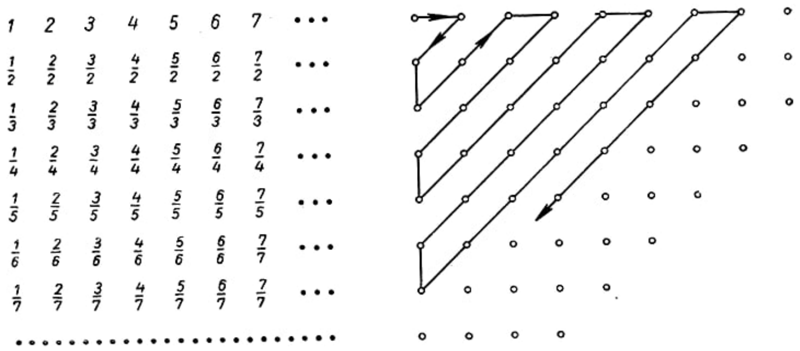
1. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

Определение. Два множества, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию), называются равномощными. Обозначение: $A \cong B$.

Определение. Множество А называется счётным, если оно равномощно множеству натуральных чисел.

Теорема. *Множество всех рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Расположим все рациональные числа в таблицу, содержащую бесконечное число строк и столбцов, следующим образом:



Предположим, что все свободные места, или "клеточки", в таблице заполнены соответствующими числами, а затем проведем по таблице непрерывную ломаную линию, которая пройдет через все клеточки. Если мы выбросим теперь все дроби, у которых числитель и знаменатель имеют отличные от 1 общие делители, то останется последовательность, в которой каждое рациональное число встретится в точности один раз. Так, множество всех рациональных чисел счетно. □

Лемма. *Интервал (0, 1) равномощен действительной прямой* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим биекцию $\text{tg}(\pi(x - \frac{1}{2}))$. □

Теорема. *Множество всех действительных чисел несчётно.*

Доказательство. Построим доказательство на основе диагонального метода Кантора. Достаточно установить, что множество действительных чисел интервала (0, 1) образует несчетное множество. Допустим противное. Тогда все точки интервала можно пронумеровать. Будем использовать двоичную систему счисления. Удобно считать все числа бесконечными, дописывая справа к конечным неограниченную последовательность нулей. Получится некоторый список:
1-е число: 0.01001000...
2-е число: 0.11111000...
3-е число: 0.01110101...
...
Другими словами, у нас есть бинарная функция (равная 0 или 1) вида $R_n(i)$, где n – номер числа, а i – номер двоичной цифры в числе после точки. В примере выше $R_1(2) = 1$. Построим число, первая цифра после точки которого не равна первой цифре первого числа, вторая не равна второй цифре второго числа, и т.д. В примере выше начало этого числа $R = 0.100...$. Это новое число не входит в нашу последовательность, так как оно отличается от первого числа первой цифрой, от второго — второй, и т.д. Мы пришли к противоречию с утверждением, что все вещественные числа были пронумерованы. Следовательно, этого нельзя сделать, и множество вещественных чисел несчётно.

□

2. Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани множества.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Множество E называется *ограниченным* сверху, если $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in E\ (x \leqslant m)$. m – верхняя грань. Множество E называется *ограниченным* снизу, если $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in E\ (x \geqslant m)$. Множество E называется *ограниченным*, если E ограниченно и сверху, и снизу.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$. Наименьшая из верхних граней E называется точной верхней гранью (супремумом $sup(E)$). Наибольшая из нижних граней E называется точной нижней гранью (инфимум $inf(E)$).

$$c = sup(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E(x \leqslant c) \\ \forall c^{'} < c\ \exists x \in E(x > c^{'}) \end{cases}$$

$$c = inf(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E(x \geqslant c) \\ \forall c^{'} > c\ \exists x \in E(x < c^{'}) \end{cases}$$

Замечание. Не всякое $E \neq \varnothing$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань. Необходимым (и достаточным) условием их существования является ограниченность сверху/снизу.

Аксиома непрерывности. Пусть $A, B \subset F(A \neq \varnothing, B \neq \varnothing)$, причём A лежит левее B. Тогда $\exists c \in F$, разделяющий A и B.

Теорема. ***Принцип полноты Вейерштрасса***
Всякое непустое ограниченое сверху (снизу) множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ и A – ограничено сверху. Рассмотрим $B = \{b \in \mathbb{R} |\ \forall a \in A\ (a \leqslant b)\}$ – множество верхних граней A. $\Rightarrow$ $B \neq \varnothing$ и A лежит левее B. Тогда, по аксиоме непрерывности,

$$\exists c \in \mathbb{R}\ \forall a \in A\ \forall b \in B\ (a \leqslant c \leqslant b)$$

Имеем, что $a \leqslant c\ \forall a \in A$. Пусть $\exists c^{'} < c$. Т.к. $c \leqslant b$, то $c^{'} < b \Rightarrow c^{'} \notin B \Rightarrow c^{'}$ – не является верхней гранью. Тогда $c = sup(A)$.
Существование инфимума у непустого ограниченного снизу множества устанавливается аналогично. □

4. Единственность предела сходящейся последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Пишут $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, или $a_n \to a$ при $n \to \infty$, или $a_n \to a$.

Теорема. *Теорема о единственности.*
Если $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, *то* $a = b$.

Доказательство. Пусть $a \neq b$, тогда $|a-b| > 0$. Положим, $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$, тогда:
$\exists N_1\ \forall n \geqslant N_1(|a_n - a| < \varepsilon)$
$\exists N_2\ \forall n \geqslant N_2(|a_n - b| < \varepsilon)$
Положим $N = max\{N_1, N_2\}$, тогда:

$$|a - b| = |a - a_N + a_N - b| \leqslant |a_N - a| + |a_N - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|$$

Противоречие. □

Определение. Числовая последовательность, имеющая некоторое число своим пределом, называется *сходящейся*, иначе – *расходящейся*.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной* сверху/снизу, если множество её значений $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено сверху/снизу.

Теорема. *Теорема об ограниченности.*
Если последовательность $\{a_n\}$ *сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $a_n \to a \in \mathbb{R}$.
По определению предела ($\varepsilon = 1$):

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N(a - 1 < a_n < a + 1)$$

Положим, $m = min\{a - 1, a_1, ..., a_{N-1}\}$, $M = max\{a + 1, a_1, ..., a_{N-1}\}$.
Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ (m \leqslant a_n \leqslant M)$. □

6. Арифметические операции со сходящимися последовательностями.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ (n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Пишут $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, или $a_n \to a$ при $n \to \infty$, или $a_n \to a$.

Теорема. *Об арифметических операциях с пределами.*
Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, *тогда:*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. $b \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} \ (b_n \neq 0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$

Доказательство.

1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела:
   $\exists N_1 \in \mathbb{N} \ n \geqslant N_1 \ (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$
   $\exists N_2 \in \mathbb{N} \ n \geqslant N_2 \ (|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2})$
   Положим $N = max\{N_1, N_2\}$, тогда
   $\forall n \geqslant N \ |(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2. Так как $\{a_n\}$ – сходящаяся, то $\{a_n\}$ – ограниченная, то есть $\exists C > 0$, что $\forall n \in \mathbb{N} \ (|a_n| \leqslant C)$.
   Увеличивая C, если необходимо, можно считать, что $|b| \leqslant C$.
   Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела
   $\exists N_1 \ \forall n \geqslant N_1 \ (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C})$
   $\exists N_2 \ \forall n \geqslant N_2 \ (|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C})$
   Положим $N = max\{N_1, N_2\}$, тогда при $n \geqslant N$ имеем:
   $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leqslant |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon$

3. Так как $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, тогда по пункту 2 достаточно показать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.
   Поскольку $|b| \neq 0$, то по определению предела:
   $\exists N_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N_1 \ (|b_n - b| < \frac{|b|}{2})$. При этом $|b| = |b - b_n + b_n| \leqslant |b_n - b| + |b_n| < \frac{|b|}{2} + |b_n|$,
   откуда $|b_n| > \frac{|b|}{2}$.
   Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела:
   $\exists N_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N_2 \ (|b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2})$
   Положим $N = max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n \geqslant N$ имеем $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|} < \frac{2}{|b|^2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{|b|^2}{2} = \varepsilon$

$\square$

Замечание. Обратные утверждения к данной теореме неверны.

7. Свойства пределов, связанные с неравенствами.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ (n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Пишут $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, или $a_n \to a$ при $n \to \infty$, или $a_n \to a$.

Теорема. *О пределе в неравенствах.*
Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда:*
1) $a < b \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ (a_n < b_n)$
2) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_0 \ (a_n \leqslant b_n) \Rightarrow a \leqslant b$

Доказательство.
1) Положим $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.
Тогда $\varepsilon > 0$ и по определению предела:
$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(a_n < a + \varepsilon)$
$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N(b_n > b - \varepsilon)$
Положим $N = max\{N_1, N_2\}$.
Тогда при $n \geqslant N$ имеем $a_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = b - \varepsilon < b_n$.
2) Второе утверждение вытекает из первого по правилу контрапозиции. □

Замечание. Предельный переход не обязан сохранять строгие неравенства:
Пример: $a_n = 0, b_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ (0 < \frac{1}{n})$, но $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Теорема. *О зажатой последовательности.*
Пусть $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ *для всех* $n \geqslant n_0$, *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = a$, *тогда существует* $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела:
$\exists N_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N_1 \ (a - \varepsilon < a_n)$
$\exists N_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N_2 \ (b_n < a + \varepsilon)$.
Положим $N = max\{N_1, N_2\}$, тогда при $n \geqslant N$ имеем:

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < a + \varepsilon \Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

□

8. Теорема о пределе ограниченной монотонной последовательности.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Множество E называется *ограниченным* сверху, если $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in E\ (x \leqslant m)$. m – верхняя грань. Множество E называется *ограниченным* снизу, если $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in E\ (x \geqslant m)$. Множество E называется *ограниченным*, если E ограниченно и сверху, и снизу.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$. Наименьшая из верхних граней E называется точной верхней гранью (супремумом $sup(E)$). Наибольшая из нижних граней E называется точной нижней гранью (инфимум $inf(E)$).

$$c = sup(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E(x \leqslant c) \\ \forall c' < c\ \exists x \in E(x > c') \end{cases}$$

$$c = inf(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E(x \geqslant c) \\ \forall c' > c\ \exists x \in E(x < c') \end{cases}$$

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху/снизу, если множество её значений $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено сверху/снизу.

Определение. 1) Последовательность $\{a_n\}$ называется *нестрого(строго)* возрастающей, если $a_n \leqslant a_{n+1}$ $(a_n < a_{n+1})$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
2) Последовательность $\{a_n\}$ называется *нестрого(строго)* убывающей, если $a_n \geqslant a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
3) Нестрого возрастающие и нестрого убывающие последовательности называются *монотонными*.

Соглашение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Если E неограничено сверху, то будем писать $sup(E) = +\infty$. Если E неограничено снизу, то будем писать $inf(E) = -\infty$.

Теорема. *О пределе монотонной последовательности*
1) Если последовательность $\{a_n\}$ нестрого возрастает, то существует $\lim_{n\to\infty} a_n = sup\{a_n\}$. Если к тому же $\{a_n\}$ ограничена сверху, то $\{a_n\}$ – сходящаяся.
2) Если последовательность $\{a_n\}$ нестрого убывает, то существует $\lim_{n\to\infty} a_n = inf\{a_n\}$. Если к тому же $\{a_n\}$ ограничена снизу, то $\{a_n\}$ – сходящаяся.

Доказательство. 1) Пусть $\{a_n\}$ ограничена сверху. Тогда $c = sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению супремума выполнено: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}(a_n \leqslant c) \\ \exists N \in \mathbb{N}(a_N > c - \varepsilon) \end{cases}$
В силу возрастания при $n \geqslant N$:

$$c - \varepsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant c < c + \varepsilon$$

Значит, $|a_n - c| < \varepsilon$. Т.к. $\varepsilon > 0$ – любое, то $c = \lim_{n\to\infty} a_n$.
Пусть $\{a_n\}$ неограничена сверху, $sup\{a_n\} = +\infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N \in \mathbb{N}(a_N > \frac{1}{\varepsilon})$ и в силу возрастания $a_n \geqslant a_N > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall n \geqslant N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
2) Аналогично пункту 1. □

9. Экспонента действительного числа.

Лемма. *Неравенство Бернулли*
Если $n \in \mathbb{N}$ *и* $x > -1$, *то*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Доказательство. Докажем М.М.И. по n. База: $n = 1$: $1 + x \geqslant 1 + 1x$ – верно.
Пусть неравенство верно для n. Тогда

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) \geqslant 1 + (n+1)x$$

□

Теорема. *Для любого* $x \in \mathbb{R}$ *существует конечный* $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = exp(x)$. *Кроме того,* $exp(x+y) = exp(x) \cdot exp(y)$ *для всех* $x, y \in \mathbb{R}$.

Доказательство. 1) Докажем сходимость последовательности $a_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$. Зафиксируем натуральное $m > |x|$. Тогда при $n \geqslant m$ верно $a_n(x) > 0$ и

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{(1+\frac{x}{n})^n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{(1+\frac{x}{n+1})}{(1+\frac{x}{n})}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}$$

Выражение

$$-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{(1+\frac{x}{n})} > 0 \text{ при } x < 0, \text{ и } \geqslant -1 \text{ при } x \geqslant 0$$

По неравенству Бернулли: $\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \geqslant (1+\frac{x}{n})\left(1-\frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) = 1$, следовательно $\{a_n(x)\}$ нестрого возрастает при $n \geqslant m$.
Т.к. $a_n(-x) \geqslant a_m(-x)$ $\forall n \geqslant m$, то

$$a_n(x) \cdot a_n(-x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$$

Следовательно, $a_n(x) \leqslant \frac{1}{a_n(-x)} \leqslant \frac{1}{a_m(-x)}$ $\forall n \geqslant m$.
Поэтому, последовательность $\{a_n(x)\}$ – сходится.
2) При $n > |x+y|$:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n$$

Положим $\alpha_n = \frac{xy}{n+x+y}$.
Для завершения доказательства достаточно показать, что $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n = 1$.
Выберем N так, что $|\alpha_n| < 1$ при $n \geqslant N$.
Поскольку $\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)^n = \left(1-\frac{\alpha_n^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$, по н-ву Бернулли при $n \geqslant N$:

$$1+\alpha_n \leqslant \left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{(1-\frac{\alpha_n}{n})^n} \leqslant \frac{1}{1-\alpha_n}$$

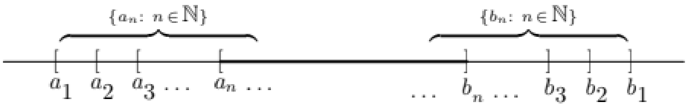
$\Rightarrow$ по теореме о зажатой последовательности $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)^n = 1$. □

Замечание. $a_n(x) \geqslant a_m(x) > 0 \Rightarrow exp(x) > 0$.

10. Теорема Кантора о вложенных отрезках.

Определение. Последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ называется *вложенной*, если $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Если к тому же $\{b_n - a_n\} \to 0$, то $\{[a_n, b_n]\}$ называется *стягивающейся*.

Теорема. *Теорема Кантора*
Всякая последовательность вложенных отрезков имеет общую точку. Если последовательность стягивающейся, то такая точка единственная.



Доказательство. Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ – последовательность вложенных отрезков.
Поскольку $a_1 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b_1$ $\forall n$, то
$\{a_n\}$ – нестрого возрастает и ограничена сверху числом b_1,
$\{b_n\}$ – нестрого убывает и ограничена снизу числом a_1.
По теореме о пределе монотонной последовательности обе последовательности сходятся $a_n \to \alpha$ и $b_n \to \beta$.

Переходя в неравенстве $a_n \leqslant b_n$ $\forall n$ к пределу при $n \to \infty$, получим $\alpha \leqslant \beta$. Ввиду монотонности $a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n$ $\forall n$, следовательно $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \supset [\alpha, \beta]$, значит $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \varnothing$.

Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ – стягивающаяся, и $x, y \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. Так как $x, y \in [a_n, b_n]$ $\forall n \Rightarrow |x - y| \leqslant b_n - a_n$ $\forall n$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $x = y$, то есть $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{x\}$, где $x = \alpha = \beta$. $\square$

12. Верхний и нижний пределы числовой последовательности.

Определение. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность, $\{n_k\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{b_k\}$, где $b_k = a_{n_k}$ $\forall k$, называется *подпоследовательностью* $\{a_n\}$ и обозначается $\{a_{n_k}\}$.

Определение. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *частичным пределом* последовательности $\{a_n\}$, если a – предел некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$.

Для последовательности $\{a_n\}$ определим $M_k = \sup_{n\geqslant k}\{a_n\}$, $m_k = inf_{n\geqslant k}\{a_n\}$. Так как при переходе к подмножеству, sup не увеличивается, а inf не уменьшается, то имеем следующую цепочку неравенств:

$$m_k \leqslant m_{k+1} \leqslant M_{k+1} \leqslant M_k \ \forall k$$

Следовательно, $\{m_k\}$ нестрого возрастает, а $\{M_k\}$ нестрого убывает, и значит, эти последовательности имеют предел в $\overline{\mathbb{R}}$.

Замечание. Если $\{a_n\}$ не ограничена сверху (снизу), то $M_k = +\infty$ $(m_k = -\infty)$ $\forall k$. Будем считать, что $\lim_{k\to\infty} M_k = +\infty$ $(\lim_{k\to\infty} m_k = -\infty)$.

Определение.
$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k}\{a_n\}$ называется *верхним пределом* $\{a_n\}$
$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geqslant k}\{a_n\}$ называется *нижним пределом* $\{a_n\}$

Теорема. *Верхний (нижний) предел – это наибольший (наименьший) из частичных пределов последовательности в* $\overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. $M = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, $m = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$
Нужно показать, что m, M – частичные пределы и все частичные пределы лежат между $[m, M]$.
Докажем, что M – это частичный предел $\{a_n\}$:

1. Пусть $M \in \mathbb{R}$. Так как $M - 1 < M_1 = \sup\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, то существует n_1 такой, что $M - 1 < a_{n_1} \leqslant M_{n_1}$. Так как $M - \frac{1}{2} < M_{n_1+1} = \sup_{n\geqslant n_1+1}\{a_n\}$, то существует номер $n_2 > n_1$ такой, что $M - \frac{1}{2} < a_{n_2} \leqslant M_{n_2}$ и т.д.
   По индукции будет построена подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, такая что
   $M - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leqslant M_{n_k}$ $\forall k$.
   Поскольку $\lim_{k\to\infty}(M - \frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty}(M_{n_k}) = M$, то по теореме о зажатой последовательности $\{a_{n_k}\} \to M$.

2. Пусть $M = +\infty \Rightarrow M_k = +\infty$ $\forall k$.
   Так как $\{a_n\}$ не ограничена сверху, то существует номер n_1, такой что $1 < a_{n_1}$.
   Так как $\{a_n\}$ не ограничена сверху, то существует n_2, такой что $2 < a_{n_2}$.
   По индукции будет построена $\{a_n\}$, такая что $k < a_{n_k}$. Так как последовательность $\{k\}_{k=1}^{\infty} \to +\infty$, то $a_{n_k} \to +\infty$.

3. Пусть $M = -\infty$. Так как $a_k \leqslant M_k$ $\forall k$
   $M_k \to -\infty$, то $a_k \to -\infty$.

В любом из случаев M – частичный предел $\{a_n\}$.
Доказательство для m аналогично.
Пусть a – частичный предел $\{a_n\}$, $a_{n_k} \to a$. Т.к. $n_k \geqslant k$, то

$$m_k \leqslant a_{n_k} \leqslant M_k \ \forall k$$

Перейдем к пределу при $k \to \infty$. Получим $m \leqslant a \leqslant M$. □

Следствие.

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n \text{ в } \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n = a$$

Доказательство. 1) Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = a = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.
2) Поскольку $m_k \leqslant a_k \leqslant M_k\ \forall k$, то, переходя к пределу, при $k \to \infty$, получим: $m \leqslant a_k \leqslant M$, тогда $a_{n_k} \to a$, где $a = m = M$. □

13. Теорема Больцано–Вейерштрасса.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху/снизу, если множество её значений $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено сверху/снизу.

Определение. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность, $\{n_k\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{b_k\}$, где $b_k = a_{n_k}$ $\forall k$, называется *подпоследовательностью* $\{a_n\}$ и обозначается $\{a_{n_k}\}$.

Теорема. *Больцано - Вейерштрасса*
Всякая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ – ограничена, тогда $a_n \in [c, d]$ $\forall n$.
Положим $[c_1, d_1] = [c, d]$.
Положим $y = \frac{c_1+d_1}{2}$, тогда:
$[c_{k+1}, d_{k+1}] = \begin{cases} [c_k, y], \text{ если } \{m : a_m \in [c_k, y]\} \text{ – бесконечно} \\ [y, d_k] \text{ - иначе} \end{cases}$

По индукции будет построена последовательность вложенных отрезков $[c_k, d_k]$, каждый из которых содержит значения бесконечного множества членов a_n.
По теореме Кантора (о вложенных отрезках) существует общая точка $a = \lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} d_k$.
Построим строго возрастающую последовательность номеров $\{n_k\}$.
Положим $n_1 = 1$, если номер n_k найден, то выберем номер $n_{k+1} > n_k$ так, что $a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}, d_{k+1}]$.
Т.к. по построению $c_k \leqslant a_{n_k} \leqslant d_k$ $\forall k$, то по теореме о зажатой последовательности $\{a_{n_k}\} \to a$. □

15. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

Определение. Последовательность a_n называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \in \mathbb{N} (n \geqslant N, m \geqslant N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$$

Лемма. *Всякая фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ фундаментальна. Тогда

$$\exists N \ \forall n, m \geqslant N (|a_n - a_m| < 1)$$

В частности, $\forall n \geqslant N \ (a_N - 1 < a_n < a_N + 1)$. Положим $\alpha = min\{a_1, ..., a_{N-1}, a_N - 1\}, \beta = max\{a_1, ..., a_{N-1}, a_N + 1\}$, тогда $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta \ \forall n \in \mathbb{N}$. □

Теорема. *Критерий Коши.*
Последовательность $\{a_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. 1) Пусть $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела $\exists N$ $\forall n \geqslant N \ (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$. Тогда при $n, m \geqslant N$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, последовательность $\{a_n\}$ – фундаментальна.
2) Пусть $\{a_n\}$ фундаментальна. По лемме $\{a_n\}$ ограничена. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists \{a_{n_k}\}, a_{n_k} \to a$$

Покажем, что $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению фундаментальной последовательности $\exists N \ \forall n{,}m \geqslant N(|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2})$. Покажем, что N – подходящий номер в определении предела $\{a_n\}$ для ε. В силу сходимости $\{a_{n_k}\}$ $\exists K \ \forall k \geqslant K \ (|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2})$. Положим $M = max\{N, K\}$. Тогда $n_M \geqslant M \geqslant N, n_M \geqslant M \geqslant K$ и, значит, при $n \geqslant N$:

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_M}| + |a_{n_M} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$, то $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. □

16. Открытые и замкнутые подмножества действительной прямой и их свойства. Критерии замкнутости. Лемма Гейне–Бореля для отрезка.

Определение. Пусть $\varepsilon > 0, a \in \mathbb{R}$. Введем обозначения

1. $B_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ – ε–окрестность в точке a.
2. $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(a) = B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ – проколотая ε–окрестность в точке a.

Классифицируем точки по отношению к заданному множеству.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$.

1. Точка x называется *внутренней* точкой множества E, если $\exists \varepsilon > 0 \ (B_\varepsilon(x) \subset E)$. Обозначение $int(E)$ – множество всех внутренних точек E.
2. Точка x называется *внешней* точкой множества E, если $\exists \varepsilon > 0 \ (B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E)$. Обозначение $ext(E)$ – множество всех внешних точек E.
3. Точка x называется *граничной* точкой множества E, если $\forall \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(a) \cap E \neq \varnothing$, $B_\varepsilon(a) \cap R \setminus E \neq \varnothing$. Обозначение $\delta(E)$ – множество всех граничных точек E.

Замечание.

$$\mathbb{R} = int(E) \cup ext(E) \cup \delta(E), \text{ и } int(E), ext(E), \delta(E) \text{ попарно не пересекаются.}$$

Определение. Множество $G \subset \mathbb{R}$ называется *открытым*, если все его точки являются внутренними. То есть $G = int(G)$. Множество $F \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если $\mathbb{R} \setminus F$ открыто.

Лемма.

1. *Если G_λ – открытое $\forall \lambda \in \Lambda$, то $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ – открытое множество.*
2. *Если $G_1, G_2, ..., G_m$ – открытые, то $\bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k$ – открытое множество.*
3. *$\mathbb{R}, \varnothing$ – открытые множества.*

Доказательство. 1) Пусть $G = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. Пусть $x \in G \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda (x \in G_{\lambda_0})$.
G_{λ_0} – открытое, $x \in G_{\lambda_0} \Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset G_{\lambda_0} \subset G$, т. е. x – внутренняя точка G.
2) Пусть $G = \bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k$, $x \in G$. Тогда $\forall k = 1, .., m : (x \in G_k)$, G_k – открытое $\Rightarrow \exists B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k$.
Положим $\varepsilon = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} \{\varepsilon_k\}$, тогда $\varepsilon > 0$ и $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k$ для $k = 1, .., m \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k = G$, т. е. x – внутренняя точка G.
3) Вытекает из определения. □

Лемма.

1. *Если F_λ – замкнутое $\forall \lambda \in \Lambda$, то $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ – замкнутое.*
2. *Если $F_1, ..., F_m$ – замкнуто, то $\bigcup\limits_{k=1}^{m} F_k$ – замкнутое.*
3. *$\mathbb{R}, \varnothing$ – замкнутые.*

Доказательство. 1) $\mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (\mathbb{R} \setminus F_\lambda)$.

2) $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} F_k = \bigcap\limits_{k=1}^{m} (\mathbb{R} \setminus F_k)$, то утверждение следует из леммы 1 и законов Де Моргана.

3) Оба множества замкнуты, т.к. мы доказалаи, что дополнения к ним открыты. □

Определение. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $E \in \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0$ $(\mathring{B}_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing)$. Множество предельных точек обозначается $E^{'}$.

Теорема. *Критерий замкнутости.*
Пусть $E \subset \mathbb{R}$, тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. *E замкнуто*
2. *E содержит все свои граничные точки*
3. *E содержит все свои предельные точки*

Доказательство.

1. $1 \Rightarrow 2$
   $x \in \mathbb{R} \setminus E$ (открытое) $\Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E \Rightarrow x$ – внешняя точка $E \Rightarrow x \neq \delta E \Rightarrow E \supset \delta E$.
2. $2 \Rightarrow 3$
   Любая предельная точка – внутренняя или граничная. $int(E) \subset E, \delta E \subset E \Rightarrow E^{'} \subset E$.
3. $3 \Rightarrow 1$
   $x \in \mathbb{R} \setminus E \Rightarrow x \notin E' \Rightarrow \exists \mathring{B}_\varepsilon(x) \cap E = \varnothing \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E \Rightarrow \mathbb{R} \setminus E$ – открыто $\Rightarrow E$ – замкнуто.
   □

Определение. Семейство $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ называется *покрытием* множества E, если $E \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$. Если все множества G_λ открыты, то покрытие называется *открытым*.

Теорема. *Гейне-Борель*
Если $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – открытое покрытие $[a, b]$, то $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Lambda$ $([a, b] \subset G_{\lambda_1} \cup G_{\lambda_2} \cup ... \cup G_{\lambda_n})$

Доказательство. Предположим, $[a, b]$ не покрывается никаким конечным набором G_λ. Разделим $[a, b]$ пополам и обозначим $[a_1, b_1]$ ту половину, которая не покрывается конечным набором G_λ. Разделим пополам $[a_1, b_1]$ и т.д. По индукции будет построена $\{[a_n, b_n]\}$ – стягивающаяся $(b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0)$, каждый из её отрезков не покрывается конечным набором G_λ. По теореме Кантора $\exists c \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. $c \in [a, b] \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda$ $(c \in G_{\lambda_0})$. G_{λ_0} – открыто $\Rightarrow \exists B_\varepsilon(c) \subset G_{\lambda_0}$.
$a_n \to c, b_n \to c \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists k : c - a_k < \varepsilon,$ $b_k - c < \varepsilon \Rightarrow [a_k, b_k] \subset B_\varepsilon(c) \subset G_{\lambda_0}$. Противоречие с выбором $[a_k, b_k]$. □

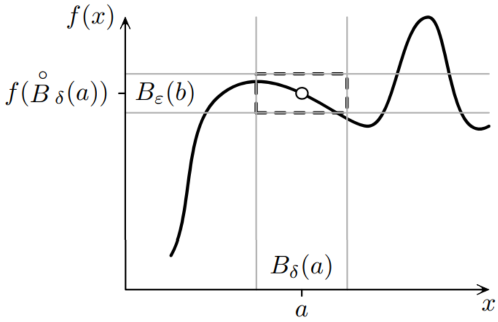
17. Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне, их эквивалентность.

Пусть $E \subset \mathbb{R},\ a,b \in \overline{\mathbb{R}}, f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

Определение. *Коши.* Точка b называется *пределом* функции f в точке a, если a – предельная точка множества E и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b))$$

Пишут $\lim_{x\to a} f(x) = b$, или $f(x) \to b$ при $x \to a$.



Определение. *Гейне.* Точка b называется *пределом* функции f в точке a, если a – предельная точка E и выпонено следующее:

$$\forall \{x_n\} \subset E \setminus \{a\}\ (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b)$$

Пишут $\lim_{x\to a} f(x) = b$, или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Теорема. *Определения пределов по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Пусть $f : E \longrightarrow R$, a – предельная точка множества E.
$\Rightarrow$ Пусть $b = \lim_{x\to a} f(x)$ по Коши. Рассмотрим произвольную $\{x_n\} \subset E \setminus \{a\}$, $x_n \to a$. Докажем, что $f(x_n) \to b$.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела $\exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b))$. Т.к. $x_n \to a$, то $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ (x_n \in B_\delta(a))$. По условию $x_n \in E \setminus \{a\}$ и, значит, $\forall n \geqslant N\ (x_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E)$. Тогда $\forall n \geqslant N : f(x_n) \in B_\varepsilon(b) \Rightarrow f(x_n) \to b$. Определение предела по Гейне выполняется.
$\Leftarrow$ Пусть b – предел f в точке a по Гейне. Покажем, что b – предел функции по Коши. Пусть так, и предположим, что b не является пределом f в точке a по Коши. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in E(x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \text{ и } f(x) \notin B_\varepsilon(b))$$

Положим $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ и соответствующее значение x обозначим x_n. По построению $\{x_n\} \subset E\setminus\{a\}$ и $x_n \to a$ (т.к. $x_n \in \overset{\circ}{B}_{\frac{1}{n}}(a)$). По определению предела по Гейне $f(x_n) \to b$, значит $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ (f(x_n) \in B_\varepsilon(b))$. Противоречие по построению (все $f(x_n) \notin B_\varepsilon(b)$). $\square$

18. Критерий Коши существования предела функции.

Теорема. *Критерий Коши.*
Пусть $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, a *– предельная точка множества* E. *Функция* f *имеет конечный предел в точке* a *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E\ (|f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Доказательство.
$\Rightarrow$ Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела функции $\exists \delta > 0\ \forall x \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E\ (|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2})$. Тогда $\forall x, x' \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$ имеем

$$|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x) - b| + |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Так как $\varepsilon > 0$ – любое, то условия теоремы выполняются.
$\Leftarrow$ Пусть f удовлетворяет условию теоремы. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем соответствующее $\delta > 0$. Рассмотрим произвольную последовательность точек $x_n \in E$ со свойствами $x_n \to a$ и $x_n \neq a$. Найдется такой номер N, что $\forall n \geqslant N\ (x_n \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E)$ и, значит, $\forall n, m \geqslant N\ (|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon)$. Таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}$ – фундаментальна. По критерию Коши для последовательностей $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу b. Рассмотрим еще последовательность точек $y_n \in E$ со свойствами $y_n \to a$ и $y_n \neq a$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\ (x_n, y_n \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E)$ и, значит, по условию $\forall n \geqslant n_0\ (|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon)$. Это означает, что $f(x_n) - f(y_n) \to 0$, так что $f(y_n) \to b$. По определению Гейне $b = \lim_{x\to a} f(x)$. $\square$

19. Существование односторонних пределов у монотонных функций.

Определение. Пусть $f : X \longrightarrow Y$, $A \subset X$. *Сужением* f на множестве A называется

$$f|_A : A \longrightarrow Y,\ (f|_A)(x) = f(x)\ \forall x \in A$$

Пусть $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, и $a \in \mathbb{R}$.

Определение. Если a – предельная точка $(a, +\infty) \cap E$, то предел сужения $f|_{(a,+\infty)\cap E}$ в точке a называется *пределом справа* функции f в точке a и обозначается $f(a + 0)$, или $\lim_{x\to a+0} f(x)$.
Если a – предельная точка $(-\infty, a) \cap E$, то предел сужения $f|_{(-\infty,a)\cap E}$ в точке a называется *пределом слева* функции f в точке a и обозначается $f(a - 0)$, или $\lim_{x\to a-0} f(x)$.
Пределы функции слева и справа называются *односторонними*.

Определение. Пусть $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, и $D \subset E$.
Функция f называется *нестрого возрастающей (нестрого убывающей)* на D, если для любых $x, x' \in D$ из условия $x < x'$ следует $f(x) \leqslant f(x')(f(x) \geqslant f(x'))$.
Если вместо $\leqslant$ ($\geqslant$) написать $<$ ($>$), то функцию называют *строго возрастающей (строго убывающей)*.
Нестрого возрастающие и нестрого убывающие функции называются *монотонными*.

Теорема. *О пределах монотонной функции.*
Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. *Если функция* f *нестрого возрастает на* (a, b), *то существуют* $\lim_{x\to b-0} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$ *и* $\lim_{x\to a+0} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$.
В случае нестрогого убывания sup *и* inf *меняются местами.*

Доказательство. Предположим, что f нестрого возрастает на (a, b). Пусть $s = \sup_{(a,b)} f(x)$. По определению супремума для любого $r < s$ существует такое $x_r \in (a,b)$, что $r < f(x_r)$. Тогда в силу возрастания $r < f(x) \leqslant s$ для всех $x \in (x_r, b)$.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Положим $r = s - \varepsilon$, если $s \in \mathbb{R}$, и $r = \frac{1}{\varepsilon}$, если $s = +\infty$. Тогда $f(x) \in B_\varepsilon(s)$ для всех $x \in (x_r, b)$.
Для завершения доказательства осталось показать, что существует такое $\delta > 0$, что (x_r, b) включает интервал $(b-\delta, b)$ в случае $b \in \mathbb{R}$, и луч $(\frac{1}{\delta}, +\infty)$ в случае $b = +\infty$. В первом случае подходит $\delta = b - x_r$, во втором $\delta = \frac{1}{|x_r|+1}$.
Остальные равенства рассматриваются аналогично. □

Билет 20. Непрерывность функции в точке. Непрерывность сложной функции.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, задана функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ и $a \in E$. Функция f называется *непрерывной* в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

или, что эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Теорема 4.4. *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$, $a \in E$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *функция f непрерывна в точке a;*

(2) $\forall \{x_n\},\ x_n \in E\ (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a))$;

(3) *a — изолированная точка множества E, или a — предельная точка E и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

□ (1) $\Rightarrow$ (2) Рассмотрим произвольную последовательность точек $x_n \in E$, сходящуюся к a. Покажем, что $f(x_n) \to f(a)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению непрерывности найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ для всех $x \in B_\delta(a) \cap E$. Так как $x_n \to a$, то существует такой номер N, что $x_n \in B_\delta(a) \cap E$ при всех $n \geqslant N$ и, значит, $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Если a — предельная точка E, то в силу (2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ по определению Гейне предела функции. Если a не является предельной точкой E, то по определению a — изолированная точка E.

(3) $\Rightarrow$ (1) Если a изолирована, то $B_{\delta_0}(a) \cap E = \{a\}$ для некоторого $\delta_0 > 0$. Тогда определение непрерывности в точке a выполняется для $\delta = \delta_0$. Пусть a предельная точка E. По определению Коши предела функции $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$. Но последняя импликация очевидно выполняется и для $x = a$. Значит, функция f непрерывна в точке a. ■

Следствие. *Если функции f, $g\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке a, то в точке a непрерывны функции $f \pm g$, $f \cdot g$ и при дополнительном условии $g \neq 0$ на E также $\dfrac{f}{g}$.*

Теорема 4.5 (о непрерывности композиции). *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$, и $g\colon D \to \mathbb{R}$, причем $f(E) \subset D$. Если функция f непрерывна в точке a, функция g непрерывна в точке $f(a)$, то композиция $g \circ f\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке a.*

□ Пусть $x_n \in E$ и $x_n \to a$. Тогда $f(x_n) \to f(a)$ в силу непрерывности f в точке a, и $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ в силу непрерывности g в точке $f(a)$. По теореме 4.4 функция $g \circ f$ непрерывна в точке a. ■

Билет 21-22. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке. Достижение точной верхней и точной нижней граней функцией, непрерывной на отрезке.

Определение. Функция называется *непрерывной* на D, если она непрерывна в каждой точке множества D.

Лемма 4.2. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.*

□ *Первый способ.* Предположим, что f не является ограниченной. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $a_n \in [a, b]$, что $|f(a_n)| > n$. По теореме 2.9 Больцано–Вейерштрасса $\{a_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность, $a_{n_k} \to x_0$. Переходя в неравенстве $a \leqslant a_{n_k} \leqslant b$ к пределу при $k \to \infty$ или пользуясь замкнутостью $[a, b]$, получаем $x_0 \in [a, b]$. Тогда по непрерывности $f(a_{n_k}) \to f(x_0)$, но по построению $\{f(a_{n_k})\}$ неограничена, т.к. $|f(a_{n_k})| > n_k \geqslant k$, что приводит к противоречию.

Теорема 4.7 (Вейерштрасс). *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то существуют $x_m, x_M \in [a, b]$, такие что $f(x_M) = \sup\limits_{x\in[a, b]} f(x)$ и $f(x_m) = \inf\limits_{x\in[a, b]} f(x)$.*

□ По лемме 4.2 множество значений $f([a, b])$ ограничено и, значит, определены числа $M = \sup f(x)$ и $m = \inf f(x)$. Проведем доказательство для супремума, для инфимума — аналогично.

Первый способ. По определению супремума для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $x_n \in [a, b]$, что $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M$ и, значит, $f(x_n) \to M$. По теореме 2.9 Больцано–Вейерштрасса существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_M$. Тогда по непрерывности $f(x_{n_k}) \to f(x_M)$. С другой стороны, $f(x_{n_k}) \to M$. В силу единственности предела $f(x_M) = M$.

Билет 23. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.

Определение. Функция называется *непрерывной* на D, если она непрерывна в каждой точке множества D.

Лемма 4.3. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и $f(a)f(b) <$ < 0, то существует такое $c \in (a, b)$, что $f(c) = 0$.*

$\square$ Заменяя f на $-f$, если необходимо, можно считать, что $f(a) <$ $< 0 < f(b)$.

Первый способ. Положим $[a_1, b_1] = [a, b]$. Если $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) = 0$, то $c = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Иначе положим

$$[a_2, b_2] = \begin{cases} \left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right], & \text{если } f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) > 0, \\ \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right], & \text{если } f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) < 0. \end{cases}$$

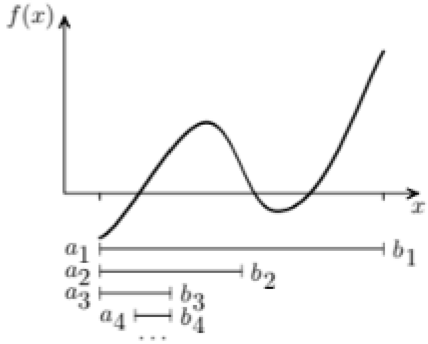


Рис. 4.5

Разделим $[a_2, b_2]$ пополам и повторим процесс. Если на некотором шаге функция f обнулится в середине отрезка, то точка c найдена. Иначе будет построена стягивающаяся последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, что $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ (см. рис. 4.5). По теореме 2.8 Кантора существует точка c — общая для всех отрезков $[a_n, b_n]$, причем $a_n \to c$ и $b_n \to c$. Тогда $f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c)$, т.е. $f(c) = 0$.

Теорема 4.8 (Коши о промежуточных значениях). *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то для любого числа s, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$, найдется такое $c \in [a, b]$, что $f(c) = s$.*

$\square$ Если s совпадает с $f(a)$ или $f(b)$, то в качестве точки c можно взять a или b соответственно. В противном случае рассмотрим функцию $g = f - s$. Функция g непрерывна и $g(a)g(b) < 0$. По лемме 4.3 существует $c \in (a, b)$, что $g(c) = 0$, т.е. $f(c) = s$. $\blacksquare$

Следствие. *Если функция f непрерывна на промежутке I, то $f(I)$ — промежуток.*

$\square$ Пусть $y_1, y_2 \in f(I)$, тогда найдутся точки $x_1, x_2 \in I$, такие что $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Если $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, то по теореме 4.8 существует точка x из отрезка с концами x_1 и x_2, такая что $f(x) = y$. Так как I — промежуток, то $x \in I$ и, значит, $y \in f(I)$. $\blacksquare$

Билет 24. Теорема об обратной функции.

Определение.

Если $f\colon X \to Y$ — биекция, то для каждого $y \in Y$ уравнение $y = f(x)$ имеет единственное решение. Определим функцию $f^{-1}\colon Y \to X$ по правилу $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$. Функция f^{-1} называется *обратной* к f. Очевидно, выполняются равенства $f^{-1} \circ f = id_X, \quad f \circ f^{-1} = id_Y$.

Определение. Функция называется *непрерывной* на D, если она непрерывна в каждой точке множества D.

Лемма 4.4. *Если функция f монотонна на промежутке I и $f(I)$ — промежуток, то f непрерывна.*

☐ Пусть f нестрого возрастает на I. Предположим, функция f имеет разрыв в точке $c \in I$. Поскольку $f(c-0) \leqslant f(c) \leqslant f(c+0)$ (если c — концевая точка, то существует только один из односторонних пределов, для которого и проводятся рассуждения), то хотя бы одно из неравенств строгое и, значит, хотя бы один из интервалов $(f(c-0),\, f(c))$ или $(f(c),\, f(c+0))$ не пуст.

Пусть интервал $J := (f(c),\, f(c+0))$ не пуст (случай непустого $(f(c-0),\, f(c))$ рассматривается аналогично). Тогда $f(t) \leqslant f(c)$ для любого $t \in I$, $t \leqslant c$, и $f(t) \geqslant \inf\limits_{(c,\,\sup I)} f(x) = f(c+0)$ для любого $t \in I$, $t > c$. Таким образом, интервал J не пересекается с $f(I)$, но с обеих сторон имеются точки из $f(I)$. Это означает, что $f(I)$ не является промежутком. ■

Теорема 4.9 (об обратной функции). *Если функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ строго монотонна и непрерывна на промежутке I, то $f(I)$ — промежуток, f — биекция I на $f(I)$ и обратная функция $f^{-1}\colon f(I) \to I$ также строго монотонна и непрерывна.*

☐ По следствию из теоремы 4.8 множество $J = f(I)$ является промежутком. Если $x_1, x_2 \in I$ и $x_1 \neq x_2$, то в силу строгой монотонности $f(x_1) \neq f(x_2)$ и, значит, f — инъекция. Поэтому $f\colon I \to J$ — биекция и существует обратная функция $f^{-1}\colon J \to I$.

Пусть f строго возрастает на I. Пусть $y_1, y_2 \in J$ и $y_1 < y_2$. Положим $x_1 = f^{-1}(y_1)$ и $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Если $x_1 \geqslant x_2$, то $y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$, противоречие. Следовательно, $x_1 < x_2$ и функция f^{-1} строго возрастает. Так как $f^{-1}(J) = I$ — промежуток, то по лемме 4.4 функция f^{-1} непрерывна на J. ■

Пример. Если $x \geqslant 0$ и $n \in \mathbb{N}$, то существует единственный $y \geqslant 0$, такой что $y^n = x$ (пишут $y = \sqrt[n]{x}$). Функция $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, непрерывна и строго возрастает.

☐ Функция $g(y) = y^n$ непрерывна и строго возрастает на $[0, +\infty)$. Кроме того, $g(0) = 0$ и $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = +\infty$, так что $g([0, +\infty)) = [0, +\infty)$. По теореме 4.9 существует непрерывная и строго возрастающая функция $f = g^{-1}\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. ■