

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа биологической и медицинской физики

Отчёт о выполнении лабораторной работы

3.6.1

Спектральный анализ электр. сигналов

Автор:
Пискунова Ольга
Б06-205

1 Аннотация

Цель работы: изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров; проверить справедливость соотношений неопределённостей; познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки

В работе используются: генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье или цифровой USB-осциллограф, подключённый к персональному компьютеру.

2 Теоретическое введение

Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется разложением в ряд Фурье.

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

Здесь $\frac{a_0}{2}$ - среднее значение функции $f(t)$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \quad (3)$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

1. **Периодическая последовательность прямоугольных импульсов** (рис. 1) с амплитудой V_0 , длительностью τ , частотой повторения $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения импульсов. Найдем коэффициенты разложения ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} = V_0 \frac{\tau}{T},$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \frac{\tau}{2})}{n\Omega_1 \frac{\tau}{2}} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (4)$$

Поскольку наша функция четная, все коэффициенты синусоидальных гармоник $b_n = 0$. Спектр a_n последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 2 (изображен случай, когда T кратно τ).

Назовем *шириной спектра* $\Delta\omega$ расстояние от главного максимума ($\omega = 0$) до первого нуля огибающей, возникающего при $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

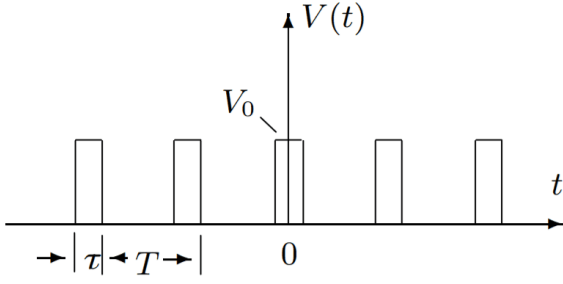


Рис. 1: Прямоугольные импульсы

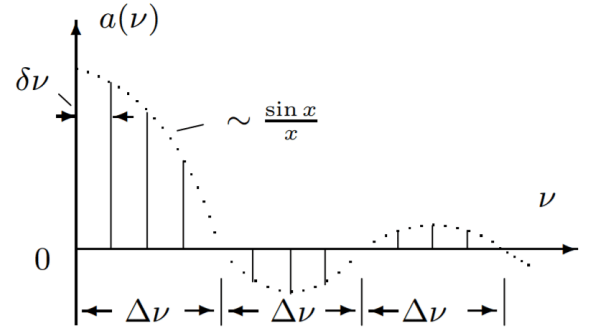


Рис. 2: Спектр последовательности прямоугольных импульсов

$$\Delta \omega \tau \simeq 2\pi$$

или

$$\Delta \nu \Delta t \simeq 1 \quad (5)$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов $\Delta \nu$ и Δt является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике.

2. **Периодическая последовательность цугов** гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T (рис. 3).

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n -й гармонике равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(\omega_0 t) \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right) \quad (6)$$

Зависимость для случая, когда $\frac{T}{\tau}$ равно целому числу, представлена на рис. 4. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и цугов мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0 .

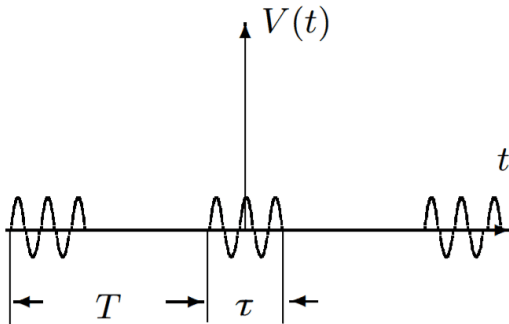


Рис. 3: Последовательность цугов

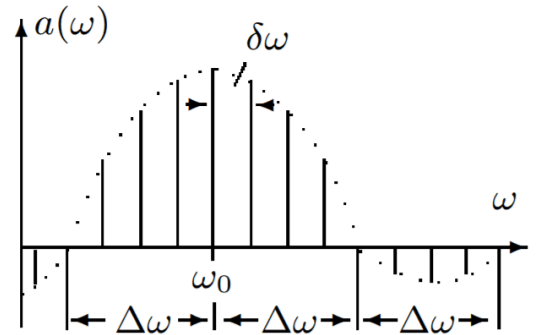


Рис. 4: Спектр последовательности цугов

3. **Амплитудно-модулированные колебания.** Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$) (рис. 5):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t \quad (7)$$

Коэффициент m называют **глубиной модуляции**. При $m < 1$ амплитуда колебаний меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \quad (8)$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно - модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (9)$$

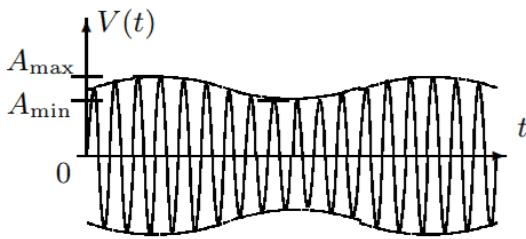


Рис. 5: Модулированные гармонические колебания

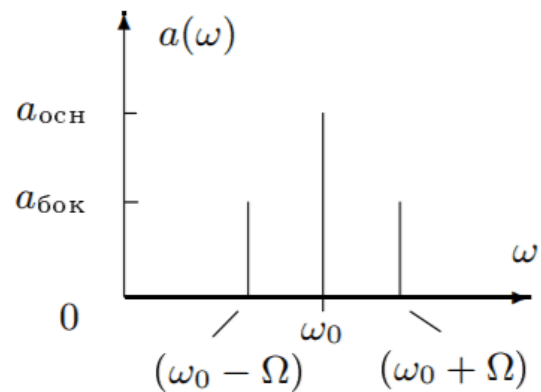


Рис. 6: Спектр модулированных гармонических колебаний

Спектр таких колебаний содержит три составляющих основную компоненту и две боковых (рис. 6). Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с основной (несущей) частотой ω_0 и амплитудой $a = A_0$. Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $\frac{m}{2}$ от амплитуды немодулированного колебания: $a = \frac{A_0 m}{2}$. Начальные фазы всех трех колебаний одинаковы.

3 Экспериментальная установка

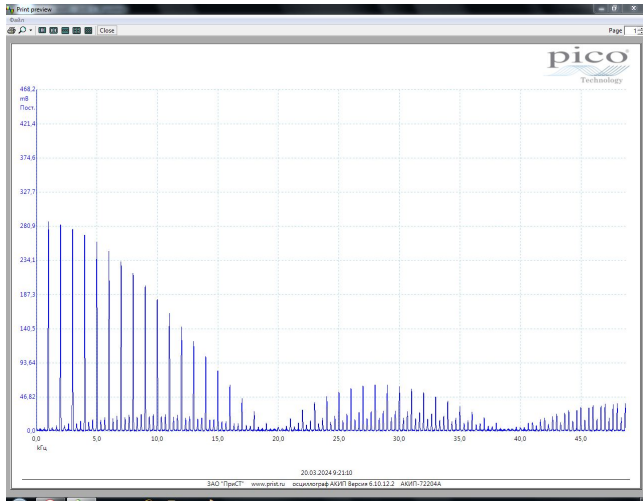
В работе изучаются спектры периодических электрических сигналов различной формы (последовательности прямоугольных импульсов и цугов, а также амплитудно- и фазо-модулированных гармонических колебаний). Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью спектроанализатора, входящего в состав USB-осциллографа и сравниваются с рассчитанными теоретически.

Функциональный генератор WaveStation 2012 позволяет сформировать два различных электрических сигнала, которые выводятся на два независимых канала – "CH1" и "CH2". Сигнал с канала "CH1" подается на вход "А" а сигнал с канала "CH2" – на вход "В" USB-осциллографа. Затем эти сигналы подаются на вход компьютера через USB-соединение. При работе USB-осциллографа в режиме осциллографа, на экране компьютера можно наблюдать каждый из сигналов в отдельности, а также их произведение. В режиме спектроанализатора можно наблюдать спектры этих сигналов. При включении функционального генератора, на его экране отображается информация о параметрах электрического сигнала.

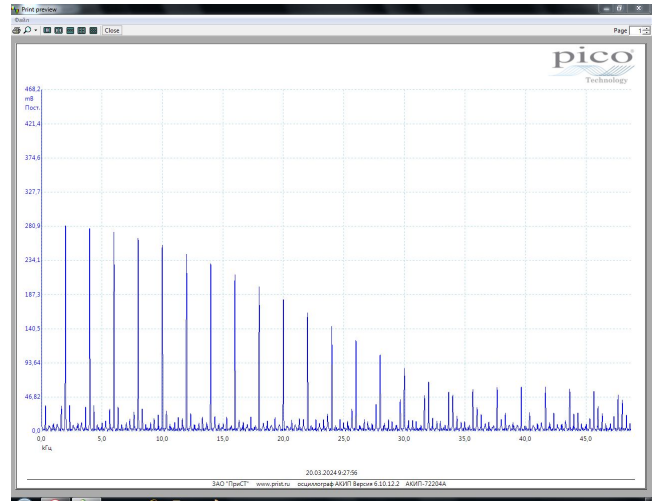
4 Ход работы

А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённости

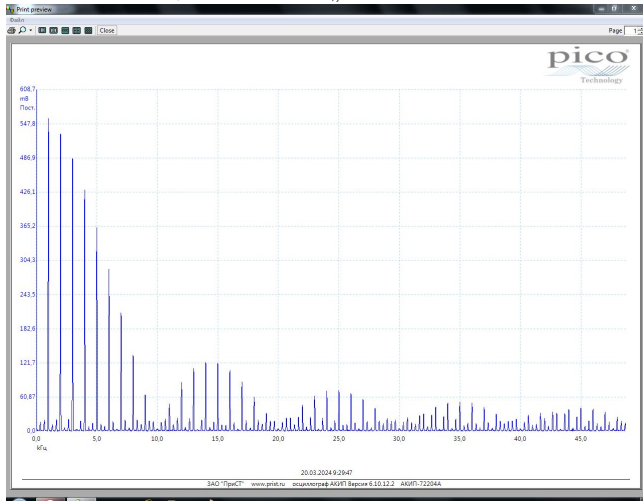
1. Настраиваем генератор на прямоугольные импульсы с частотой повторения $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц (период $T = 1$ мс) и длительностью импульса $\tau = T/20 = 50$ мкс.
2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.
 - а. Изменяем $\nu_{\text{повт}}$ при фиксированном $\tau = 50$ мкс и τ при $\nu = 1$ кГц получаем:



$$\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}, \tau = 50 \text{ мкс}$$



$$\nu_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}, \tau = 50 \text{ мкс}$$



$$\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}, \tau = 100 \text{ мкс}$$

Рис. 7: Вид спектра при изменении параметров.

Как видно из графиков, при увеличении частоты повторения сигнала увеличивается расстояние между компонентами спектра, при увеличении длительности сигнала уменьшается ширина спектра.

3. Измерим амплитуды a_n и частоты ν_n спектральных гармоник при фиксированных $\nu_{\text{повт}}$ и τ .

n гармоники	1	2	3	4	5	6	7	8
$\nu_n^{\text{эксп}}, \text{ кГц}$	1.047	2.016	3.026	3.995	5.005	6.014	7.024	7.993
$\nu_n^{\text{теор}}, \text{ кГц}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$ a_n ^{\text{эксп}}, \text{ мВ}$	279.6	273.8	270.2	262.0	252.6	239.7	227.9	211.5
$ a_n/a_1 ^{\text{эксп}}$	1	0.979	0.966	0.937	0.903	0.857	0.815	0.756
$ a_n/a_1 ^{\text{теор}}$	1	0.988	0.967	0.939	0.904	0.863	0.816	0.751

Здесь $a_1 = 279.6 \text{ мВ}$.

$$\nu_n^{\text{теор}} = \frac{n}{T}$$

$$|a_n|^{\text{теор}} = \frac{|\sin \frac{\pi n \tau}{T}|}{\pi n}$$

4. Зафиксируем период повторения прямоугольного сигнала $T = 1\text{мс}$, $\nu_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$. Изменяя длительность импульса τ в диапазоне от $\tau = T/50$ до $\tau = T/5$, измерим полную ширину спектра сигнала $\Delta\nu$ — от центра спектра ($\nu = 0$) до гармоники с нулевой амплитудой $a_n \approx 0$ и установим зависимость между $\Delta\nu$ и τ , полученную из формулы 5.

τ , мкс	20	33	50	100	150	200
$\Delta\nu$, кГц	48.02	31.03	19.99	10.01	6.98	5.01
$1/\tau \cdot 10^3$, с^{-1}	50	30.3	20	10	7	5

Таблица 1: Исследование зависимости $\Delta\nu$ и τ

Построим график $\Delta\nu$ ($\frac{1}{\tau}$). Используя МНК, получим $k = 0.965 \pm 0,075$, откуда с хорошей точностью можем заключить, что $\Delta\nu \frac{1}{\tau} = 1$, что экспериментально доказывает соотношение неопределённостей.

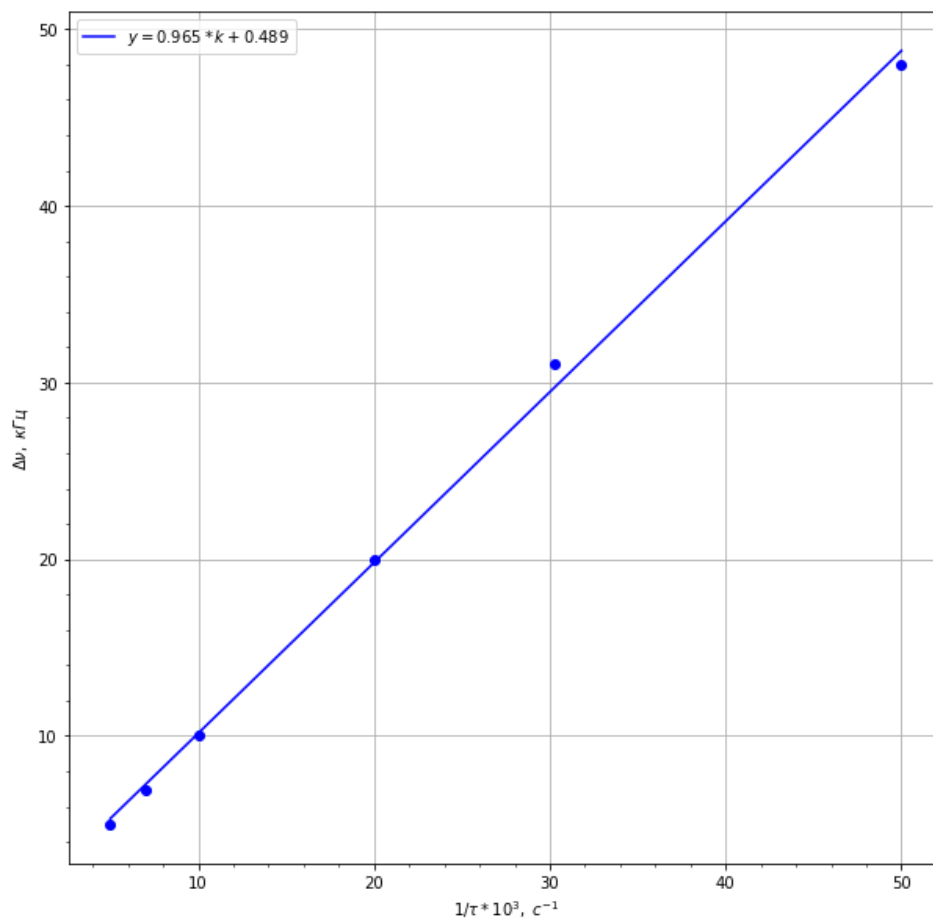


Рис. 8: Зависимость $\Delta\nu$ от $1/\tau$

5. Зафиксируем длительность импульса прямоугольного сигнала $\tau = 100\text{мкс}$. Изменяя период повторения T в диапазоне от 2τ до 50τ измерим расстояния $\delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n$ между соседними гармониками спектра.

$1/T$, с^{-1}	4	2	1	0.67	0.5	0.4
$\delta\nu$, кГц	3.998	2.019	1.009	0.686	0.484	0.404

Таблица 2: Зависимость $\delta\nu$ от $1/T$

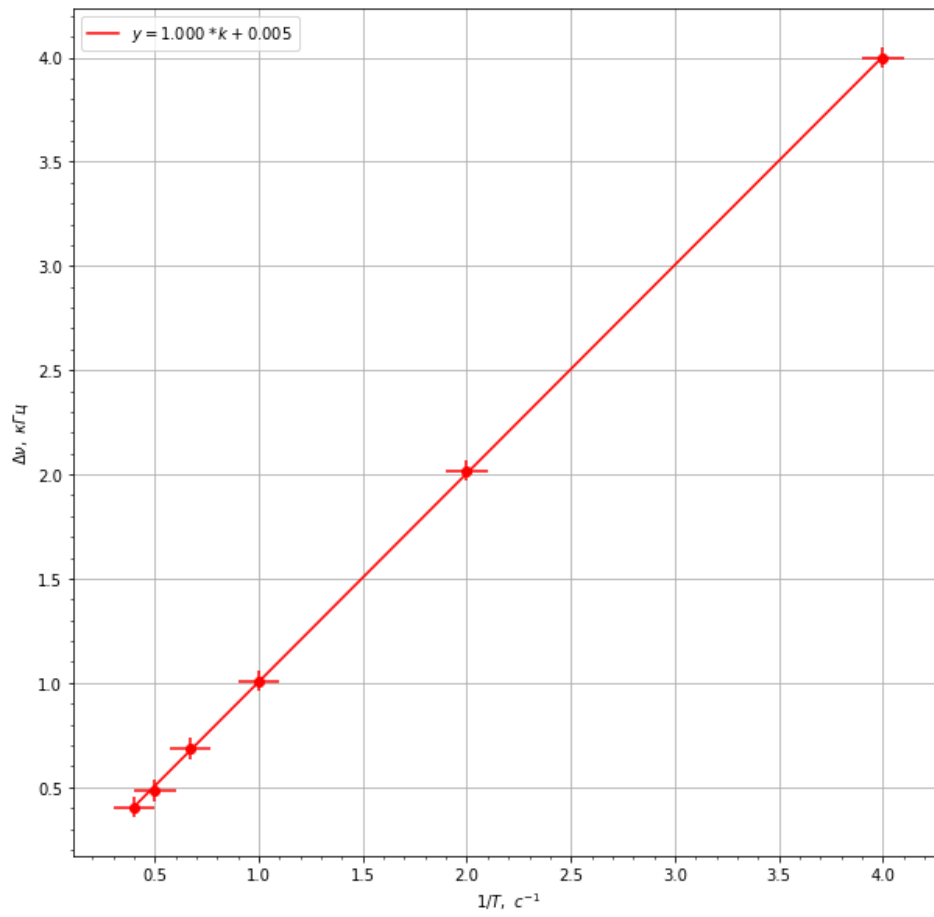


Рис. 9: Зависимость $\delta\nu$ от $1/T$

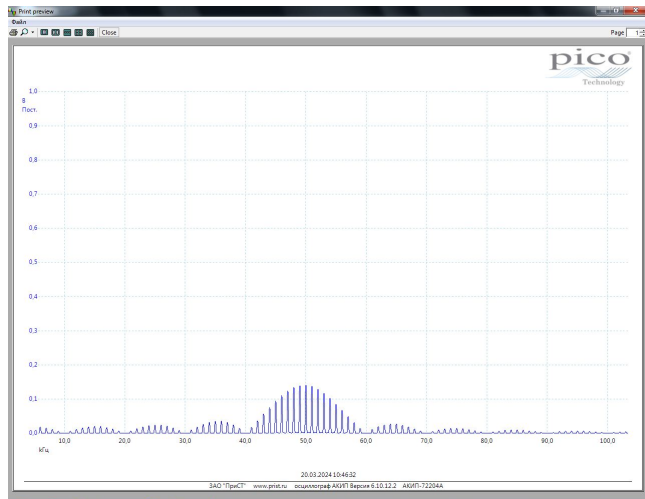
Построим график $\delta\nu \left(\frac{1}{T}\right)$. Используя МНК, получим $k = 1.000 \pm 0,032$, что экспериментально доказывает соотношение неопределённостей.

Б. Наблюдение спектра периодической последовательности цугов

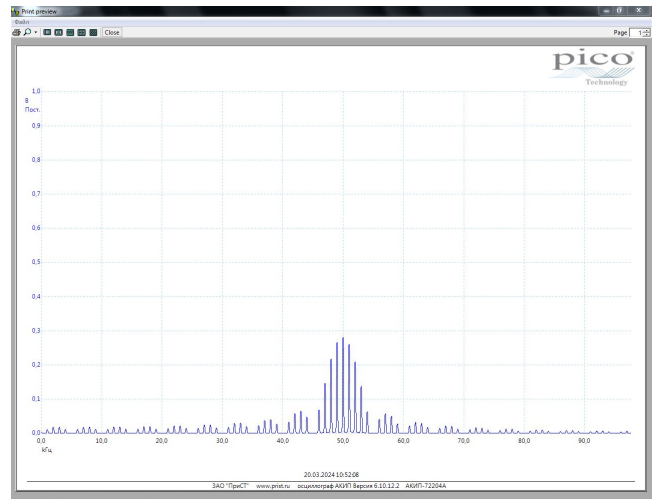
1. Настраиваем генератор на периодичные импульсы синусоидальной формы (цугов) с несущей частотой $\nu_0 = 50$ кГц, частотой повторения $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, число периодов синусоиды в одном импульсе $N = 5$ (что соответствует длительности импульса $\tau = N/\nu_0 = 100$ мкс).

2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.

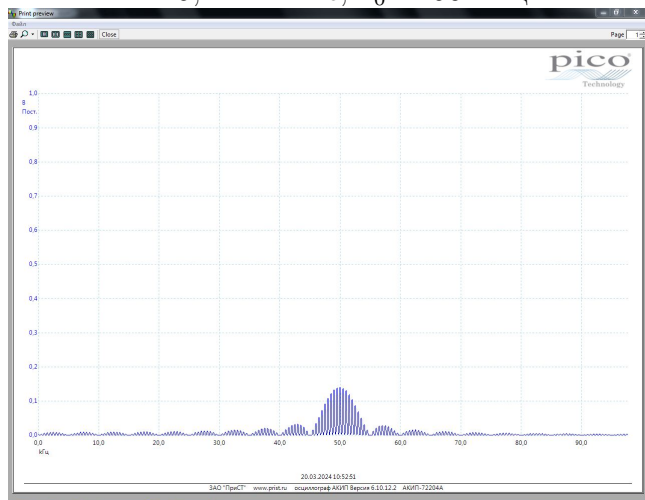
Изменяем параметры сигнала:



$N=5, T = 1 \text{ мс}, \nu_0 = 50 \text{ кГц}$



$N=10, T = 1 \text{ мс}, \nu_0 = 50 \text{ кГц}$



$N=10, T = 2 \text{ мс}, \nu_0 = 50 \text{ кГц}$

Рис. 10: Вид спектра при изменении параметров.

Видим, что спектр остаётся симметричным относительно одной и той же точки, однако "сжимается" к ней при увеличении N . При варьировании ν_0 спектр не меняет свою форму, однако его центр смещается в соответствии с изменением частоты несущей.

Соотношение неопределённостей (1): $T\delta\nu = 1 \cdot 0.97 \approx 1$
 $2\Delta\nu \cdot \frac{N}{\nu_0} = 20 \cdot 0.1 \approx 2$

Соотношение неопределённостей (2): $T\delta\nu = 1 \cdot 1.05 \approx 1$
 $2\Delta\nu \cdot \frac{N}{\nu_0} = 10.04 \cdot 0.2 \approx 2$

Соотношение неопределённостей (3): $T\delta\nu = 2 \cdot 0.56 \approx 1$
 $2\Delta\nu \cdot \frac{N}{\nu_0} = 10.12 \cdot 0.2 \approx 2$

Г. Наблюдение спектра амплитудно-модулированного сигнала

1. Настраиваем генератор в режим модулированного по амплитуде синусоидального сигнала с несущей частотой $\nu_0 = 50$ кГц, частотой модуляции $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц и глубиной модуляции $m = 0.5$.
2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала. Из спектра получим $A_{\text{max}} = 1.237\text{В}$ и $A_{\text{min}} = 415.7\text{мВ}$ и убедимся в справедливости соотношения

$$m = \frac{A_{\text{max}} - A_{\text{min}}}{A_{\text{max}} + A_{\text{min}}} = \frac{0.858}{1.688} \approx 0.5$$

Мы установили глубину модуляции на 0.5, из расчета у нас получилось 0,497, это доказывает, что формула 8 верна.

3. Изменяя на генераторе глубину модуляции m в диапазоне от 10 % до 100 % (всего 6-8 точек), измерим отношение амплитуд боковой и основной спектральных линий $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$. Построим график зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m и проверим, совпадает ли результат с теоретическим.

$m, \%$	10	20	40	50	70	100
$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$	0.047	0.096	0.201	0.251	0.347	0.497

Таблица 3. Исследование зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m .

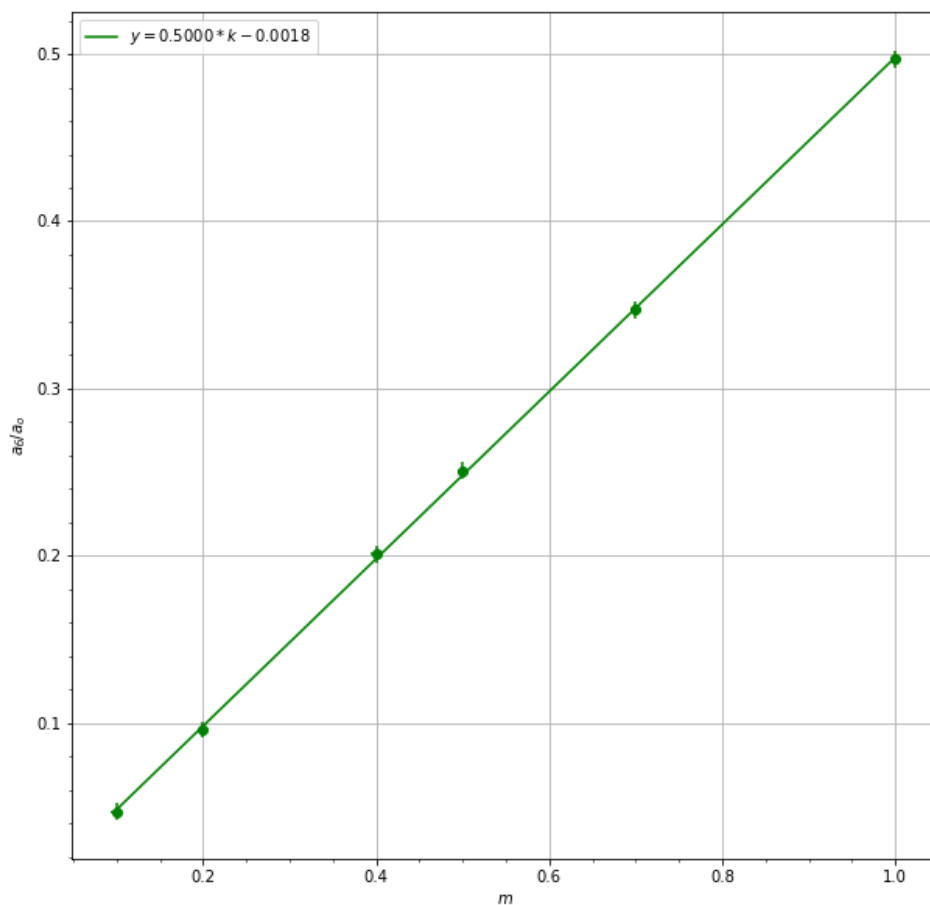
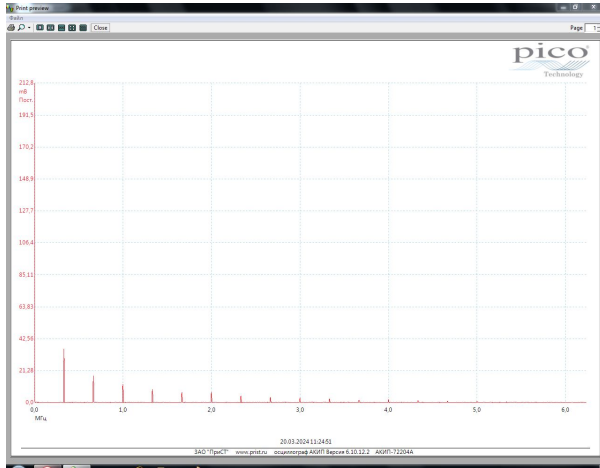


Рис. 11: Зависимость $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m

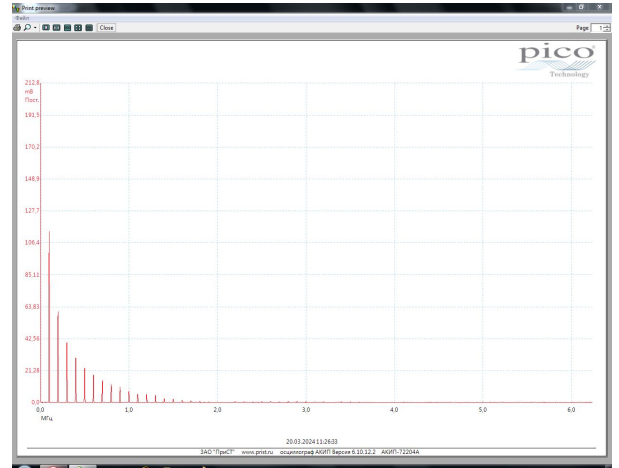
Построим график $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}(m)$. Используя МНК, получим $k = 0.500 \pm 0,004$, что подтверждает $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}} = \frac{m}{2}$, т.е. совпадает с теоретическим предсказанием.

Е. Изучение фильтрации сигналов

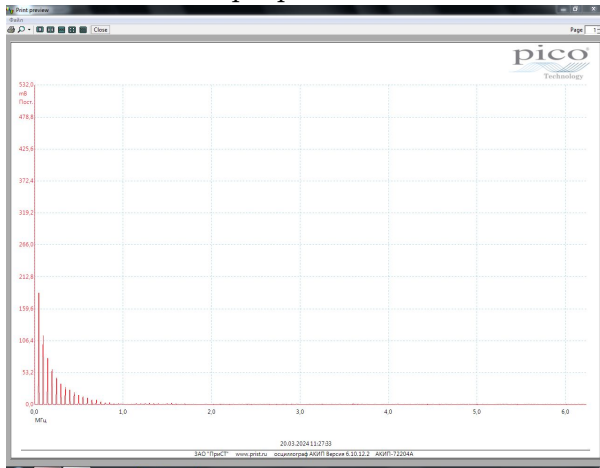
1. Подключаем RC цепочку с сопротивлением $R = 3$ кОм и ёмкостью $C = 1000$ пФ. Получаем характерное время $\tau_{RC} = RC = 3$ мкс. Подаём на вход RC -цепочки последовательность прямоугольных импульсов с периодом повторения $T \sim \tau_{RC}$.
2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.



Спектр при $T = 3$ мкс



Спектр при $T = 10$ мкс



Спектр при $T = 20$ мкс

Рис. 12: Вид спектра при изменении параметров.

3. При фиксированном периоде $T = 300$ мкс проведем измерения отношений амплитуд соответствующих спектральных гармоник (для 7–9 гармоник) фильтрованного и исходного сигналов: $K_n = |a_n^{\Phi}|/|a_n^0|$. Для измерения амплитуд a_n^0 спектра исходного сигнала переподключим генератор к осциллографу напрямую.

ν , Гц	50	100	150	200	250	300
a_n^{Φ} , мВ	35.16	15.88	10.34	5.67	3.4	3.4
a_n^0 , мВ	205.3	200.7	183.7	162.2	146.3	128.2
$K_n = a_n^{\Phi} / a_n^0 $	0.171	0.079	0.056	0.035	0.023	0.027

Таблица 3: Данные измерения коэффициента фильтрации

Построим график зависимости амплитудного коэффициента фильтрации $K(\nu)$ от частоты $\nu = n\nu_0$.

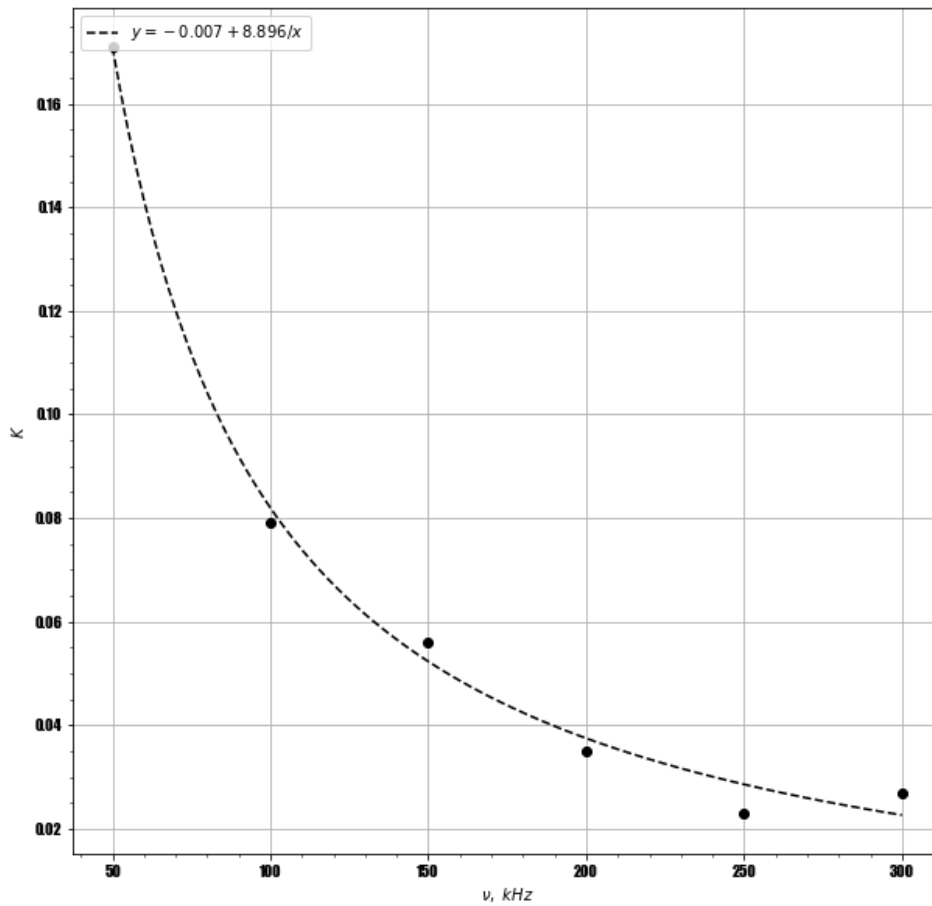


Рис. 13: Зависимость $K(\nu)$

Проверим, что экспериментальная зависимость совпадает с теоретической $K = \frac{1}{\tau_{RC}} \int_0^t f(t') dt'$. Т.к. мы подаём последовательность прямоугольных импульсов, то правая часть зависит линейно от t , т.е. обратно пропорционально ν . График соответствует этой зависимости

5 Обсуждение результатов и выводы

В данной работе исследовали спектральный состав периодических электрических сигналов, а точнее прямоугольных импульсов, цугов гармонических колебаний, гауссиан, гармонических сигналов, модулированных по амплитуде и частоте, а также проанализировали фильтрацию сигналов при прохождении их через RC контур. Проверили частный случай выполнения соотношения неопределённости.