# Работа 3.1.3
# Измерение магнитного поля Земли

Пискунова Ольга
Б06-205

28 февраля 2024 г.

# Цель работы

Определить характеристики шарообразных неодимовых магнитов и, используя законы взаимодействия магнитных моментов с полем, измерить горизонтальную и вертикальную составляющие индукции магнитного поля Земли и магнитное наклонение.

# В работе используются

12 одинаковых неодимовых магнитных шариков, тонкая нить для изготовления крутильного маятника, медная проволока диаметром $(0,5-0,6)$ мм, электронные весы, секундомер, измеритель магнитной индукции АТЕ-8702, штангенциркуль, брусок из немагнитного материала ($25\times30\times60$ мм$^3$), деревянная линейка, штатив из немагнитного материала; дополнительные неодимовые магнитные шарики ($\sim 20$ шт.) набор гирь и разновесов.

# Теоретическая справка

## Точечный магнитный диполь

Простейший магнитный диполь может быть образован витком с током или постоянным магнитом. По определению, магнитный момент $\vec{P_m}$ тонкого витка площадью $S$ с током $I$ равен:

$$\vec{P_m} = \frac{I}{c}\vec{S} = \frac{I}{c}S\vec{n}$$

где $c$ – скорость света в вакууме, $\vec{S} = S\vec{n}$ — вектор площади контура, образующий с направлением тока правовинтовую систему, $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к площадке $S$ (это же направление $\vec{P}_m$ принимается за направление $S \to N$ от южного ($S$) к северному ($N$) полюсу). Если размеры контура с током или магнитной стрелки малы по сравнению расстоянием до диполя, то соответствующий магнитный диполь $\vec{P}_m$ называют элементарным или точечным.

Поле точечного диполя определяется по следующей формуле:

$$\vec{B} = \frac{3\left(\vec{P_m}, \vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}_m}{r^3}$$

В магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ на точечный магнитный диполь $\vec{P}_m$ действует механический момент сил:

$$\vec{M} = \left[\vec{P_m}, \vec{B}\right]$$

Под действием вращающего момента $\vec{M}$ виток с током или постоянный магнит поворачивается так, чтобы его магнитный момент выстроился вдоль вектора индукции магнитного поля. Это — положение устойчивого равновесия: при отклонении от этого положения возникает механический момент внешних сил, возвращающий диполь к положению равновесия. В положении, когда $\vec{P_m}$ и $\vec{B}$ параллельны, но направлены противоположно друг другу, также имеет место равновесие ($M = 0$), но такое равновесие неустойчиво: малейшее отклонение от этого положения приведёт к появлению момента сил, стремящихся отклонить диполь ещё дальше от начального положения.

Магнитный диполь в магнитном поле обладает энергией:

$$W = -\left(\vec{P_m}, \vec{B}\right)$$

## Неодимовые магниты

В настоящей работе используются неодимовые магниты шарообразной формы. Для нас важно то, что:

1. шары намагничены однородно;

2. вещество, из которого изготовлены магниты, является магнитожёстким материалом.

Внутри такого шара магнитное поле равно

$$B_0 = \frac{2P_m}{R^3} \tag{1}$$

Полный магнитный момент $\vec{P_m}$ постоянного магнита определяется намагниченностью $\vec{p_m}$ вещества, из которого он изготовлен. По определению, намагниченность — это магнитный момент единицы объёма. Для однородно намагниченного шара намагниченность, очевидно, равна:

$$\vec{p_m} = \frac{\vec{P_m}}{V} \tag{2}$$

Намагниченность — важная характеристика вещества постоянных магнитов, определяющая, в частности, величину остаточной магнитной индукции $B_r = 4\pi p_m$ (остаточная индукция $B_r$ — одна из величин, которая, как правило, указывается в справочниках по магнитожёстким материалам).

$$\vec{B_P} = \frac{8\pi}{3}\vec{p_m} = \frac{2}{3}\vec{B_r} \tag{3}$$

## Экспериментальное определение величины магнитного момента магнитных шариков

$P_m$ можно определить из параметров шарика и из расстояния $r_{max}$, на котором они удерживаются в поле тяжести.

$$P_m = \sqrt{\frac{mgr_{max}^4}{6}} \tag{4}$$

$$\vec{B_p} = \frac{2\vec{P_m}}{R^3} \tag{5}$$

## Определение величины магнитного момента по силе сцепления магнитных шариков

Если сила сцепления двух одинаковых шаров равна

$$F_0 = \frac{6P_m^2}{d^4} \Rightarrow P_m = \sqrt{\frac{F_0 d^4}{6}} \tag{6}$$

то минимальный вес цепочки, при которой она оторвется от верхнего шарика равен:

$$F \approx 1,08F_0 \tag{7}$$

## Измерение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли

При отклонении "стрелки"на угол $\theta$ от равновесного положения в горизонтальной плоскости возникают крутильные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стрелки. Если пренебречь упругостью нити, то уравнение крутильных колебаний такого маятника определяется возвращающим моментом сил $M = -P_0 B_h \sin\theta$, действующим на "стрелку"со стороны магнитного поля Земли, и моментом инерции $I_n$ "стрелки"относительно оси вращения.

При малых амплитудах:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_n}{nP_mB_h}}$$

Пусть

$$T(n) = kn \Rightarrow$$

$$k = \pi\sqrt{\frac{md^2}{3P_mB_h}} \Rightarrow B_h = \frac{\pi^2 md^2}{3k^2P_m} \tag{8}$$

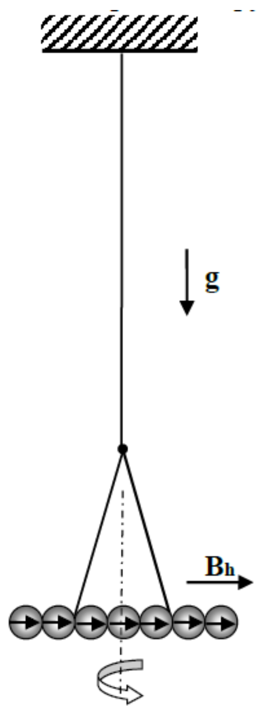


**Рис. 1: Крутильный маятник**

## Измерение вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли. Магнитное наклонение.

С помощью небольшого дополнительного грузика "стрелку"можно "выровнять расположив её горизонтально: в этом случае момент силы тяжести груза относительно точки подвеса будет равен моменту сил, действующих на "стрелку"со стороны магнитного поля Земли. Если масса уравновешивающего груза равна $m$, плечо силы тяжести $r$, а полный магнитный момент "стрелки"$P_0 = nP_m$, то в равновесии:

$$mgr = P_0B_v = nP_mB_v$$

Пусть $M(n) = An \Rightarrow$

$$B_v = \frac{A}{P_m} \tag{9}$$

## Погрешности

$$\varepsilon_{\mathfrak{m}_1} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta r_{max}}{r_{max}}\right)^2} \approx 3\%$$

$$\varepsilon_{\mathfrak{m}_2} = \sqrt{4\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2} \approx 4\%$$

$$\varepsilon_{B_\parallel} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \mathfrak{m}}{\mathfrak{m}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \frac{T_n}{n}}{\frac{T_n}{n}}\right)^2} \approx 5\%$$

$$\varepsilon_{B_\perp} = \sqrt{((\frac{\Delta a}{a})^2 + (\frac{\Delta \mathfrak{m}}{\mathfrak{m}})^2} \approx 6\%$$

# Ход работы

## Определение магнитного момента, намагниченности и остаточной магнитной индукции вещества магнитных шариков

### Метод А

Определим все данные наших шариков и запишем их в таблицу.

| Параметр | Среднее Значение | $\sigma$ |
|---|---|---|
| $m$, г | 0,839 | 0,001 |
| $d$, см | 0.60 | 0,01 |

**Таблица 1.** Параметры шариков.

Определим $r_{max}$ по расстоянию на котором шарики удерживают друг друга. Затем по формуле (4) определим $P_m$, по формуле (2) определим $p_m$, по формуле (5) определим $B_p$ и по формуле (3) определим $B_r$. Все полученные данные занесем в таблицу 2

| Величина | Значение | $\sigma$ |
|---|---|---|
| $r_{max}$, см | 2,50 | 0,01 |
| $P_m$, эрг/Гс | 72 | 2 |
| $p_m$, эрг/Гс$\cdot$ см$^3$ | 346 | 11 |
| $B_p$, кГс | 2.9 | 0,1 |
| $B_r$, кГс | 4.35 | 0,15 |

**Таблица 2.** Величины, определяемые в методе А.

Меряем $B_p$ с помощью магнитометра и получаем $B_p = (2.7 \pm 0.3)$ кГс. Табличная остаточная магнитная индукция NdFeB $B_r = 12 \pm 2$.

### Метод B

Составим цепочку и определим $F$ - вес грузиков, которые надо подвесить к этой цепочке, чтобы грузики оторвались.

По формуле (7) определим силу сцепления двух шаров. По формуле (6) найдем $P_m$ и запишем все данные в таблицу.

| Величина | Значение | $\sigma$ |
|---|---|---|
| $M$, г | 292,866 | 0,001 |
| $F$, кдин | 287 | 1 |
| $F_0$, кдин | 266 | 1 |
| $P_m$, эрг/Гс | 75 | 3 |

**Таблица 3.** Величины, определяемые в методе B.

В итоге получаем, что $P_m = (75 \pm 3)$ эрг/Гс. $B_p = (2.7 \pm 0.2)$ кГс. Метод А дает более точный результат т.к. его погрешность меньше, но оба довольно далеко от измеренного нами поля магнитометром.

## Определение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли

Для определения горизонтальной составляющей магнитного поля Земли нам нужно собрать установку для возбуждения крутильных колебаний и исследовать зависимость количество шариков от периода.

Перед этим удостоверимся, что при расчете периода упругость нити можно не учитывать, свернув стрелку в кольцо и измерив период крутильных колебаний (магнитный момент такой стрелки равен 0). Измерим период колебаний кольца. $T \approx 60$ с. Введем эффективный коэффициент упругости нити$\chi$: $I\ddot{\phi} + \chi\phi = 0$. Момент инерции кольца можно оценить как $I = \frac{12mR^2}{2} = 6.3\,\text{г}\cdot\text{см/с}^2$ Т.к. $T = 2\pi\sqrt{\chi/I}$, то $\chi_{\text{нити}} = (2\pi/T)^2 I \approx 6\cdot 10^{-2}\,\text{г}\cdot\text{см/с}^4$ Это означает, что мы можем пренебречь упругостью нитей. Будем измерять период колебаний стрелок различной длины. Время реакции возьмем 0.5с $\sigma T$=0.5/10 = 0.05 с.

| $n$ | $t$, с | $N$ | $T$, с |
|---|---|---|---|
| 12 | 45.7 | 10 | 4.57 |
| 11 | 43.7 | 10 | 4.37 |
| 10 | 43.1 | 11 | 3.92 |
| 9 | 33.7 | 10 | 3.37 |
| 8 | 30.5 | 10 | 3.05 |
| 7 | 26.2 | 10 | 2.62 |
| 6 | 22.4 | 10 | 2.24 |
| 5 | 19.0 | 10 | 1.90 |
| 4 | 14.9 | 10 | 1.49 |
| 3 | 12.2 | 10 | 1.12 |

**Таблица 4.** Зависимость крутильных колебаний от количества шариков $T(n)$

Построим график зависимости $T(n)$ и по формуле (8) найдем $B_h$.

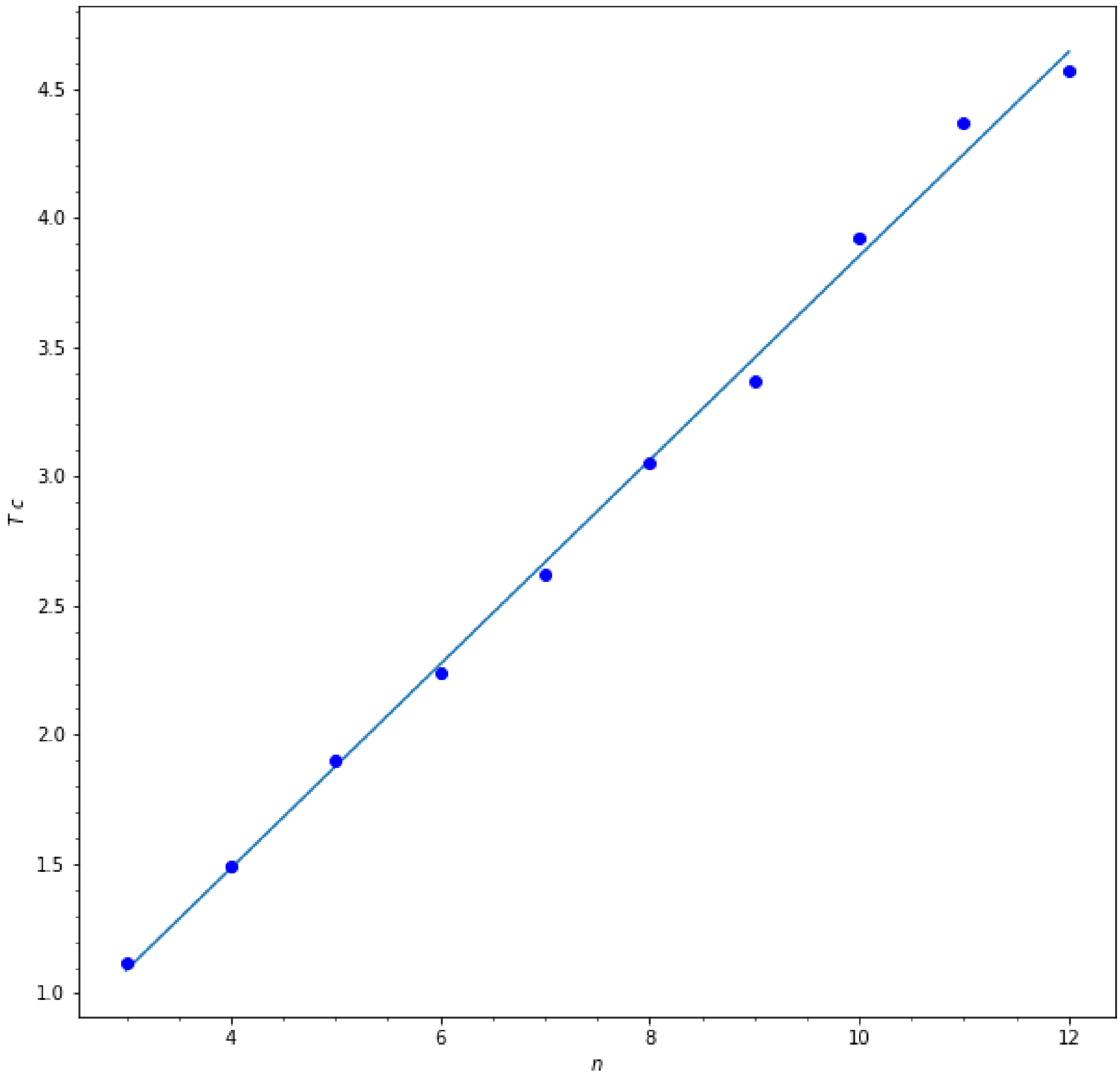


**График 1.** Зависимость $T(n) = k \cdot n$

По значению углового коэффициента $k = (0.394 \pm 0.007)c$ рассчитаем величину горизонтальной составляющей магнитного поля Земли по формуле (8). $B_h = (0.114 \pm 0,006)$ Гс

## Определение вертикальной составляющей магнитного поля Земли

Определяем механический момент сил, действующий со стороны магнитного поля Земли на горизонтально расположенную магнитную "стрелку". Для этого, с помощью одного или нескольких кусочков проволоки, уравновесьте "стрелку"в горизонтальном положении. Сделаем измерения для разных количеств шариков и занесем все в таблицу. $M = 980mr$

| $n$ | $m$, г | $r$, см | $M$, дин $\cdot$ см | $\epsilon_M, \%$ |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 0,18 | 3 | 529.2 | 5 |
| 10 | 0,208 | 2,4 | 489.2 | 5 |
| 8 | 0,24 | 1,8 | 423.36 | 5 |
| 6 | 0,264 | 1,2 | 310.5 | 5 |
| 4 | 0,427 | 0,6 | 251.08 | 5 |

**Таблица 5.** Зависимость момента сил M от $n$.

Построим график.

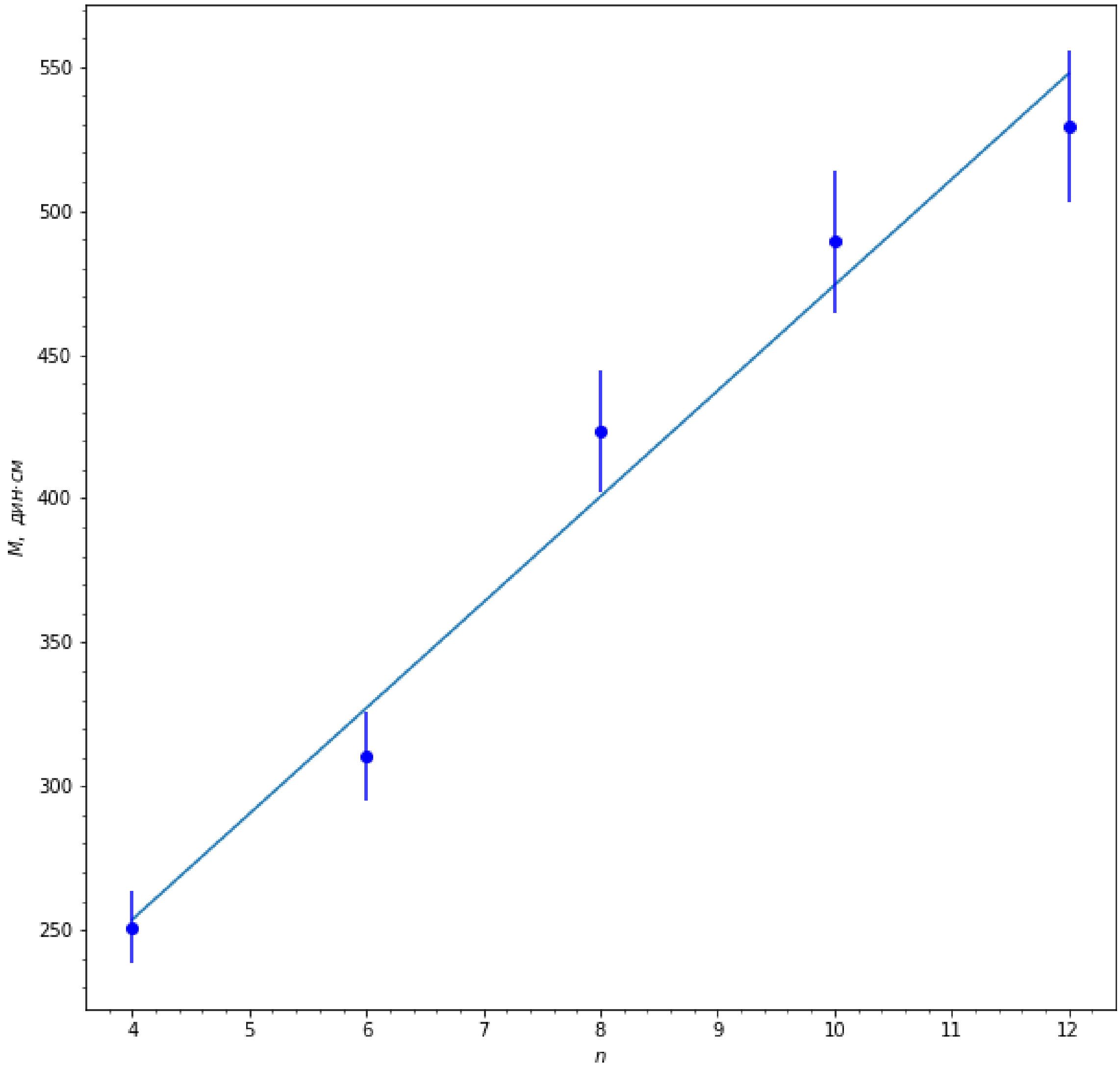


**График 2.** Зависимость $M(n) = A \cdot n$

Аддитивность магнитных моментов применима - точки относительно хорошо ложатся на прямую. По значению углового коэффициента $A = 36.8 \pm 3$. По формуле (9) определяем $B_v = (0.48 \pm 0,03)$ Гс.

В итоге получаем, что $B = \sqrt{B_v^2 + B_h^2} = (0.49 \pm 0.05)$ Гс и $\beta = \arctan(B_v/B_h) = (76 \pm 4)^\circ$

Пользуясь тем, что индукция $B = P_m/R^3$ и напряженность магнитного $H$ поля внутри сферы однородны, а также граничными условиями $B_{1n} = B_{2n}$ и $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ на границе раздела сред воздух/земля. Получаем магнитное наклонение $\vec{B}\,(\phi = 56^\circ)$

$$\beta = \arctan \frac{\frac{2P_m \cdot \sin\phi}{R^3}}{\frac{P_m \cdot \cos\phi}{R^3}} = \arctan(2\tan\phi) = 71^\circ \tag{10}$$

Справочные данные: $B_v = 0.5$ Гс, $B_h = 0.15 - 0.20$, $\beta = 70^\circ$