Лабораторная работа 3.2.4+3.2.5

Свободные и вынужденные колебания в электрическом контуре

Пискунова Ольга Б06-205

27 февраля 2024 г.

Цель работы: Исследование свободных и вынужденных колебаний в колебательном контуре.

В работе используются: Осциллограф АКТАКОМ ADS-6142H, генератор сигналов специальной формы АКИП-3409/4, магазин сопротивления МСР-60, магазин емкости Р5025, магазин индуктивности Р567 типа МИСП, соединительная коробка с шунтирующей емкостью, соединительные одножильные и коаксиальные провода.

Задачи:

1. Изучение свободных колебаний в RLC контуре:
   - Сравнить зависимость периода колебаний цепи от ёмкости с теоретической.
   - Определение зависимости логарифмического декремента затухания от сопротивления цепи.
   - Определение критического сопротивления контура.
2. Изучение вынужденных колебаний в RLC контуре:
   - Построение резонансных кривых колебательного контура: АЧХ и ФЧХ.
   - Определение декремента затухания колебательного контура по нарастанию колебаний и по их затуханию.
   - Проанализировать картину биений.
3. Определение добротности контура различными способами.

1. Введение

Свободные колебания – колебания, происходящие за счёт энергии заранее запасённой в системе (в процессе колебаний энергия в систему не попадает). Обозначим как $\gamma = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания, тогда возникает классификация «режимов» колебаний в контуре:

1. Затухающие ($0 < \gamma < \omega_0$).
2. Критический режим ($\gamma = \omega_0$) .
3. Апериодический режим ($\gamma > \omega_0$).

Критическое сопротивление – сопротивление цепи, при котором происходит переход на апериодический режим *Вынужденные колебания* – колебания, происходящие за счёт действия периодической внешней силы. В данной работе мы будем изучать различные свойства и параметры как свободных, так и вынужденных колебаний в RLC контуре.

Экспериментальная установка

Колебательный контур состоит из постоянной индуктивности L с активным сопротивлением RL, переменной емкости C и сопротивления R. Картина колебаний напряжения на емкости наблюдается на экране двухканального осциллографа. Для возбуждения затухающих колебаний используется генератор сигналов специальной формы. Сигнал с генератора поступает через конденсатор C1 на вход колебательного контура. Данная емкость необходима чтобы выходной импеданс генератора был много меньше импеданса колебательного контура и не влиял на процессы, проходящие в контуре.

Установка предназначена для исследования не только возбужденных, но и свободных колебаний в электрической цепи. При изучении свободно затухающих колебаний генератор специальных сигналов на вход колебательного контура подает периодические короткие импульсы, которые заряжают конденсатор C. За время между последовательными импульсами происходит разрядка конденсатора через резистор и катушку индуктивности.

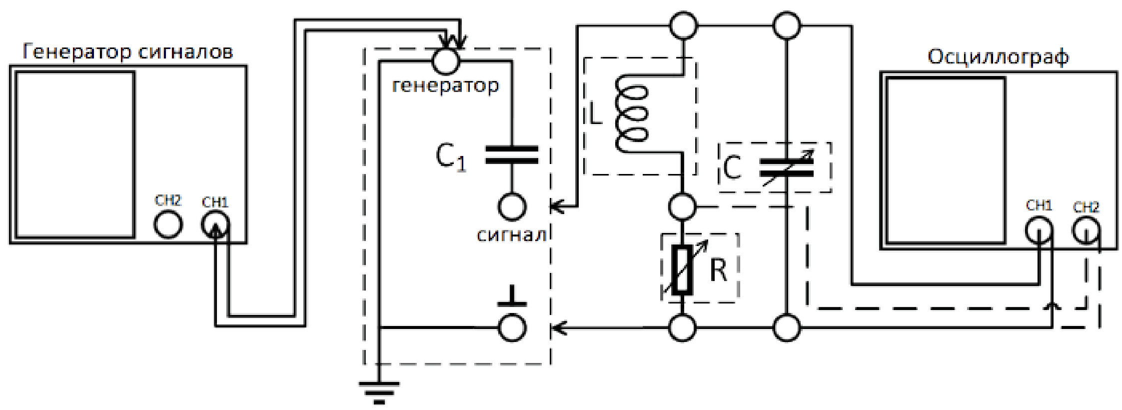


Рис. 1: Схема установки для исследования вынужденных колебаний

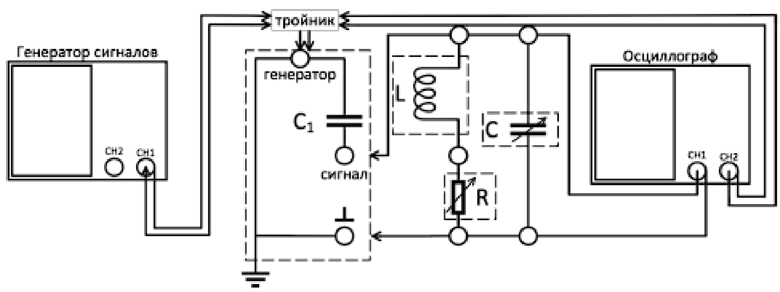


Рис. 2: Схема установки для исследования АЧХ и ФЧХ

2. Теоретическая часть

Для RLC контура (рис. 1) применим 2 правило Кирхгофа:

$$RI + U_C + L\frac{dI}{dt} = 0. \tag{1}$$

Подставив в уравнение (1) выражение для тока через 1-ое правило Кирхгофа, и разделив обе части уравнения на CL, получим:

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{CL} = 0. \tag{2}$$

Произведём замены $\gamma = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ – собственная круговая частота, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ – период собственных колебаний. Тогда уравнение (2) примет вид:

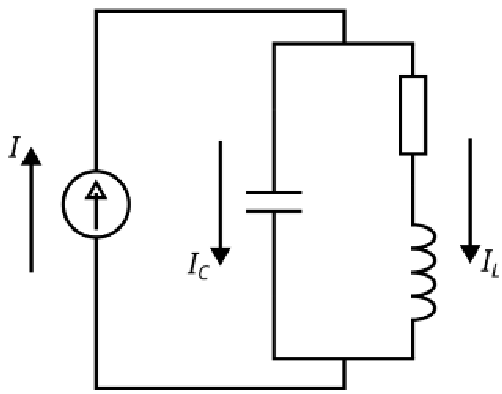


Рис. 1. Описываемый RLC контур

$$\ddot{U_C} + 2\gamma\dot{U_C} + \omega_0^2 U_C = 0, \tag{3}$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени. Будем искать решение данного дифференциального уравнения в классе функций следующего вида:

$$U_C(t) = U(t)e^{-\gamma t}.$$

Получим:

$$\ddot{U} + \omega_1^2 U = 0, \tag{4}$$

где

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \tag{5}$$

Для случая затухания $\gamma < \omega_0$ в силу того, что $\omega_1 > 0$, получим:

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi_0). \tag{6}$$

Для получения фазовой траектории представим формулу (6) в другом виде:

$$U_C(t) = e^{-\gamma t}(a\cos\omega_1 t + b\sin\omega_1 t), \tag{7}$$

где a и b получаются по формулам:

$$a = U_0\cos\varphi_0, \qquad b = -U_0\sin\varphi_0.$$

В более удобном виде запишем выражения для напряжения на конденсаторе и токе через катушку:

$$U_C(t) = U_{C0} \cdot e^{-\gamma t}(\cos\omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1}\sin\omega_1 t), \quad (8)$$

$$I(t) = C\dot{U_C} = -\frac{U_{C0}}{\rho}\frac{\omega_0}{\omega_1}e^{-\gamma t}\sin\omega_1 t. \quad (9)$$

Введём некоторые характеристики колебательного движения:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R}, \quad (10)$$

где τ – время затухания (время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз).

$$\Theta = \ln\frac{U_k}{U_{k+1}} = \gamma T_1 = \frac{1}{N_\tau} = \frac{1}{n}\ln\frac{U_k}{U_{k+n}}, \quad (11)$$

где Θ – логарифмический декремент затухания, U_k и U_{k+1} – два последовательных максимальных отклонения величины в одну сторону, N_τ – число полных колебаний за время затухания τ.

Теперь рассмотрим случай *вынужденных колебаний* под действием внешней внешнего синусоидального источника. Для этого воспользуемся методом *комплексных амплитуд* для схемы на рисунке (рис. 1):

$$\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega^2 I = -\varepsilon\frac{\Omega}{L}e^{i\Omega t}. \quad (12)$$

Решая данное дифференциальное уравнение получим решение:

$$I = B \cdot e^{-\gamma t}\sin(\omega t - \Theta) + \frac{\varepsilon_0\Omega}{L\phi_0}\sin(\Omega t - \varphi). \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что частота резонанса будет определяться формулой:

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (14)$$

Способы измерения **добротности**:

1. с помощью потери амплитуды свободных колебаний:

$$Q = \frac{1}{n}\ln\frac{U_k}{U_{k+n}}, \quad (15)$$

2. с помощью амплитуды резонанса можно получить добротность (в координатах U_C/U_0, где U_0 – амплитуда колебаний напряжения источника, от частоты генератора). Отсюда нетрудно определить декремент затухания $\gamma = \frac{\omega_0}{2Q}$,

3. с помощью среза АЧХ на уровне 0.7 от максимальной амплитуды, тогда «дисперсия» ($\Delta\Omega$) будет численно равна коэффициенту γ, то есть $Q = \frac{\nu_0}{2\Delta\Omega}$.

4. с помощью нарастания амплитуд в вынужденных колебаниях:

$$Q = \frac{\omega_0 n}{2\ln\frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}}}. \quad (16)$$

В ходе вычислений погрешностей в основном использовалась классическая модель погрешности:

$$\sigma = \sqrt{(\sigma_{\text{случ}})^2 + (\sigma_{\text{систем}})^2}.$$

Для обычных математических операций использовалась модель о сумме квадратов относительных погрешностей величин, входящих в формулу:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}.$$

Для обработки случайных погрешностей при повторных измерениях использовалась следующая модель:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\sum_i (x_i - x_{\text{ср}})^2}.$$

Погрешность при линеаризации (МНК):

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{n-2}(\frac{\langle y \rangle^2}{\langle x \rangle^2} - k^2)}$$

3. Ход работы

3.1. Измерение периодов свободных колебаний

Соберем установку с рисунка 1, выставим $R = 0$ Ом, $L = 100$ мГн, $C = 0$ нФ, однако контур сам по себе обладает некоторым C_0, благодаря которому в контуре реализуются свободные колебания

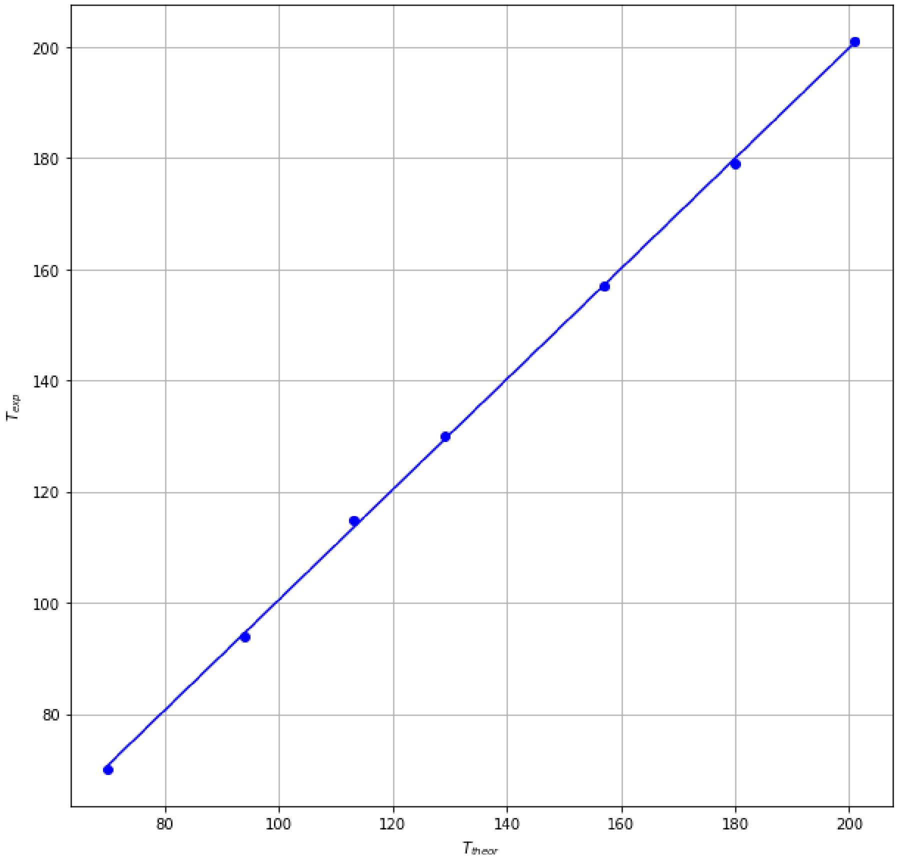
Измерим с помощью осцилографа период затухающих колебаний T = 70 мкс, по периоду колебаний вычисляем значение емкости C_0, по формуле

$$C_0 = \frac{T^2}{4\pi^2 L} = 1{,}24\,\text{нф}$$

Изменяя емкость C проведем измерения 7 периодов

C, нф	1.24	2.24	3.24	4.24	6.24	8.24	10.24
T, мкс	70	94	115	130	157	179	201
T_{theor}, мкс	70	94	113	129	157	180	201

Построим график $T_{exp} = f(T_{theor})$



Погрешность $\sigma_x = 0.1$.

экспериментальная $\sigma_T = T\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2} = 2$ мкс

$T = 2\pi\sqrt{LC}$, где $L = 200$ мГн, $\sigma_L = 10$ мГн

теоретическая $\sigma_T = \frac{1}{2}\frac{\sigma_L}{L} = 2.5$ мкс

Из графика видно, что результаты совпали, общая погрешность 1%.

3.2. Критическое сопротивление и декремент затухания

Рассчитаем С, при котором собственная частота колебаний $\nu = 1/(2\pi\sqrt{LC}) = 6500$ Гц, $C = 6$ нф. Для выбранных L и С* = (С+1.24) нф рассчитаем критическое сопротивление контура по формуле $R_{cr} = 2\sqrt{L/C^*}$ $R_{cr} = 7433$ Ом.

Установим на магазине емкость, близкую к расчитанной увеличивая сопротивление до критической, пронаблюдаем картину затухающих колебаний. Измеренное с помощью измерителя LCR R_L на частотах $50-1500$ Гц сохранялось в пределах приборной погрешности и составило $18.5 - 19.5$ Ом $L = 50.0$ мГн, далее пренебрегаем. Измения сопротивление в диапазоне 400-2050 Ом запишем зависимость логарифмического декремента, рассчитанного по (11), от сопротивления.

R,Ом	406	730	1100	1370	1720
U_1, mV	790	668	552	472	396
U_2	556	360	228	168	108
U_3	376	200	108	64	—
U_4	268	116	52	—	—
θ	0.36	0.58	0.79	1.00	1.30

Построим график $1/\theta^2 = f[1/R^2]$

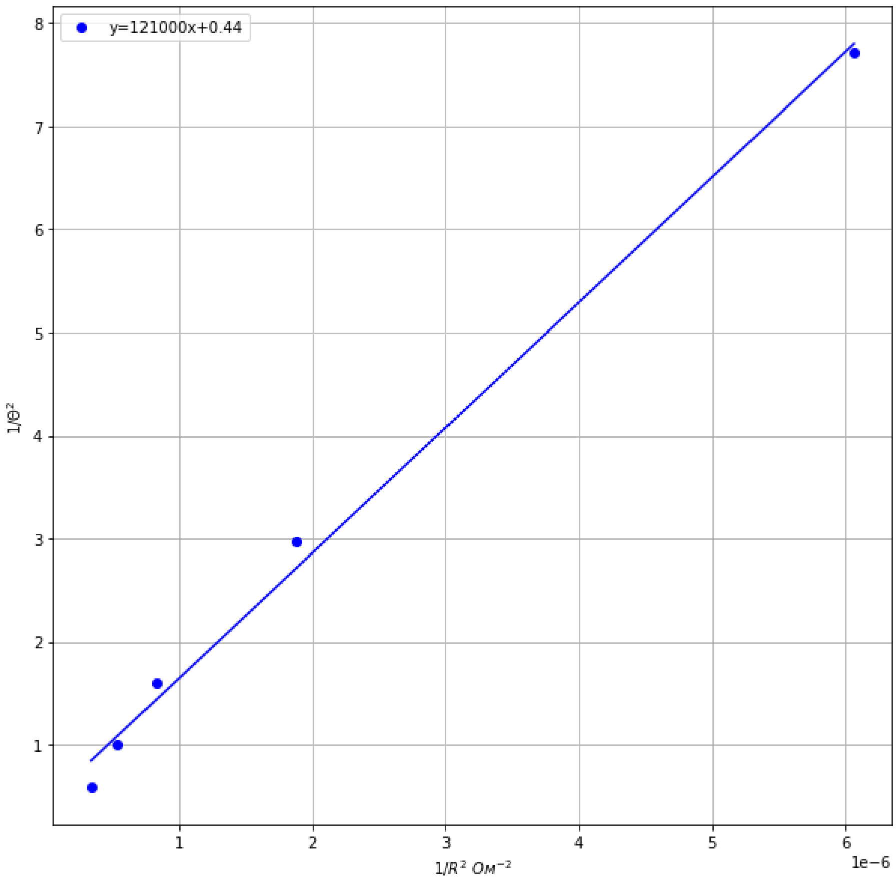


Рис. 2. Зависимость $1/\theta^2 = f[1/R^2]$

Коэффициент наклона $k = 1215000 \pm 5000$ Ом$^{-2}$ Зная коэффициент наклона, найдем R_{cr}, по формуле $R_{cr} = 2\pi\sqrt{K} = 6900 \pm 200$ Ом, что близко с теоретическим значением $R_{cr} = 7433$ Ом Погрешности амплитуд $\sigma_{U_k} = \sigma_{U_{k+n}} = 0{,}1$, т.е.

$$\sigma_\Theta = \Theta\sqrt{\left(\frac{\sigma_{U_k}}{U_k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{U_{k+n}}}{U_{k+n}}\right)^2} = 0.1 \qquad (17)$$

$$\sigma_{\frac{1}{\Theta^2}} = 2\frac{1}{\Theta^2}\frac{\sigma_\Theta}{\Theta} = 0.6 \tag{18}$$

3.3. Свободное колебание на фазовой плоскости

Проведем аналогичные измерение, но уже на фазовой плоскости и запишем результату в таблицу.

R,Ом	400	730	1100	1370
U_1, mV	800	640	540	430
U_2	560	360	255	160
U_3	380	200	—	—
U_4	250	—	—	—
θ	0.39	0.58	0.75	0.99

Расчитаем добротность для максимального и минимального значения θ и теоретическое с теми же параметрами.

- Вычисление добротности контура по $Q = \pi/\theta$ по секции 3.2 $\sigma_Q = Q\frac{\sigma_\Theta}{\Theta}$:

$$Q(\theta_{min}) = 8.7 \pm 0.9 \qquad Q(\theta_{max}) = 3.14 \pm 0.3$$

- Вычисление добротности контура по секции 3.3:

$$Q(\theta_{min}) = 8.26 \pm 0.8 \qquad Q(\theta_{max}) = 3.17 \pm 0.3$$

- Вычисление добротности контура теоретически $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ в случае слаб затухания $\sigma_Q = Q\frac{1}{2}\frac{\sigma_L}{L}$:

$$Q(\theta_{min}) = 9.16 \pm 0.2 \qquad Q(\theta_{max}) = 2.71 \pm 0.07$$

3.4. Исследование резонансных кривых

Изменяя частоту генератора вблизи резонансной частоты, находим резонансную частоту $\nu = 6420$ Гц и ее амплитуду $2U_{res} = 22.2$ В.

Снимем АЧХ вблизи резонанса R=400 Ом

ν, Гц	5700	5790	5880	5970	6060	6150	6240	6330	6420
$2U$, В	8.8	10.2	11.2	13.7	15.6	17.8	20.0	21.7	22.2
Δx,мкс	72.8	68.8	66	62.4	58.8	53.6	48.4	42	35.6
ν, Гц	6420	6660	6750	6840	6930	7020	7160	7320	7490
$2U$, В	8.8	10.2	11.2	13.7	15.6	17.8	20.0	21.7	22.2
Δx,мкс	35.6	21.2	18	14.4	12.4	11.2	9.2	8.4	6

R = 1370 Ом

ν, Гц	6420	6660	6750	6840	7020	7320	7490	5700	5880	6060	6240
$2U$, В	7.88	7.84	7.80	7.76	7.52	7.04	6.84	5.84	6.52	7.00	7.52
Δx,мкс	32	25	23	21	19	15	12	51	45	41	35

Построим АЧХ $U/U_{res} = f(\nu/\nu_{res})$

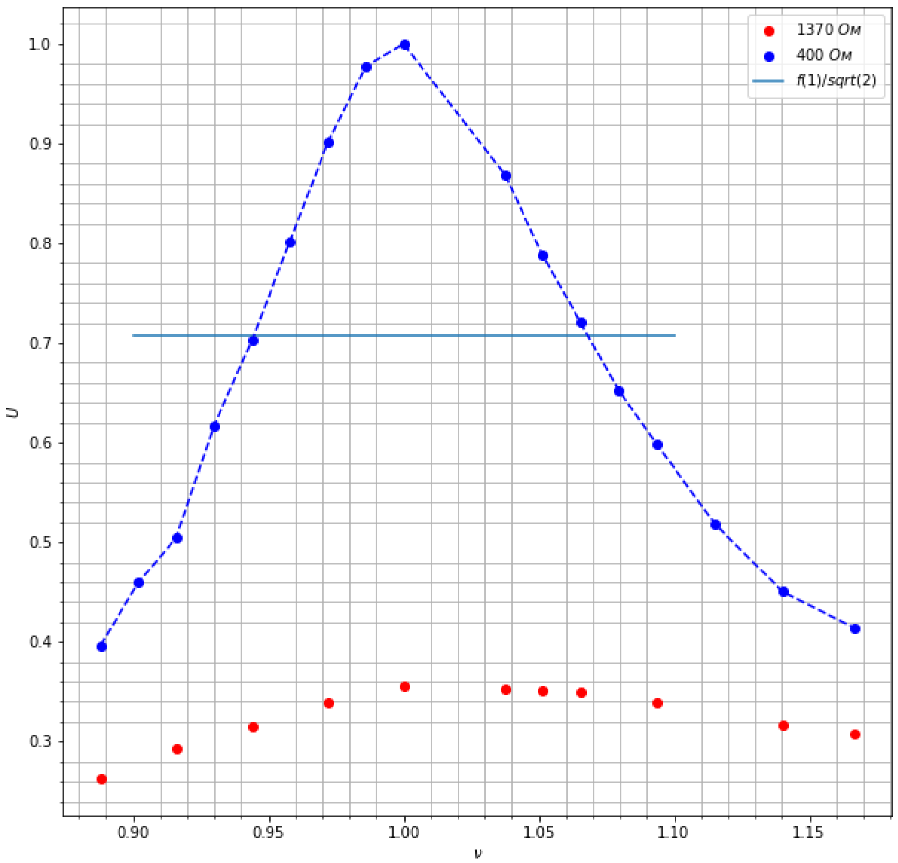


Рис. 3. Зависимость $U/U_0 = f(\nu/\nu_0)$

Рассчитаем добротность по формуле $Q = 1/2\Delta\Omega = 1/1.25 = 8.00 \pm 0.09$ ФЧХ

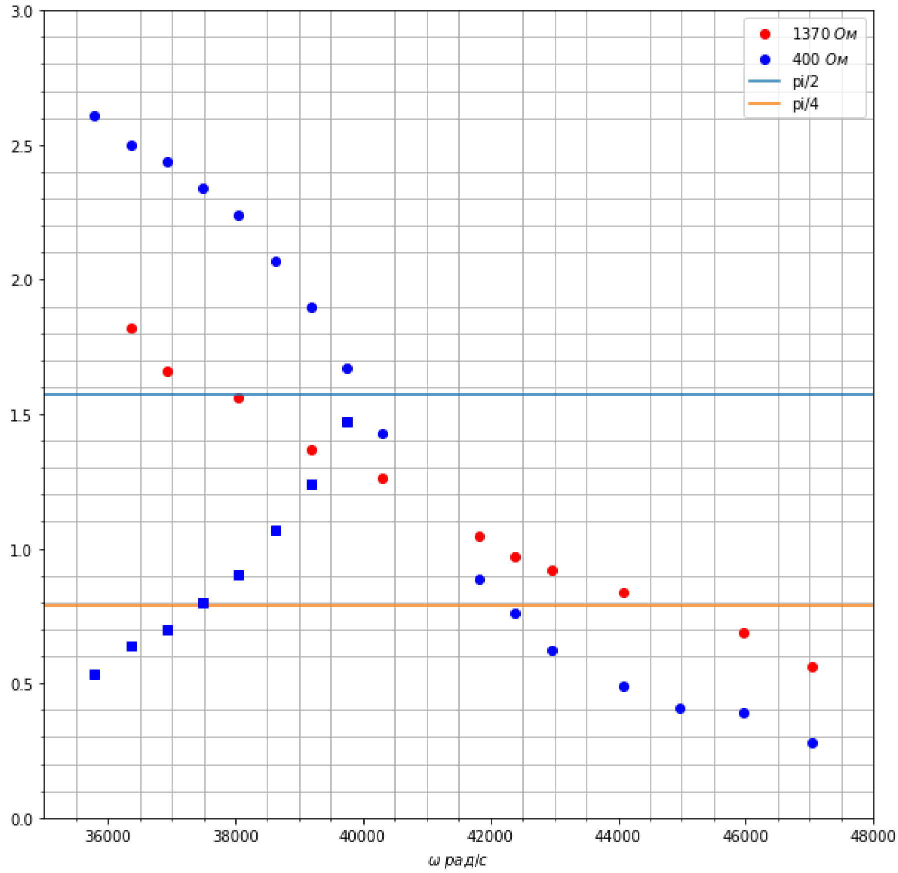


Рис. 4. Зависимость разности фаз от циклической частоты сигнала (ФЧХ)

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{6420}{5000 * 0.159} = 8.07 \tag{19}$$

Рассчитаем добротность контура по скорости нарастания и затухания колебаний.

затухание	R=400,Ом	1370	нарастание	400	1370
U_1, V	7.9	0.724	U_{-1}	10.5	0.744
U_2	5.4	0.244	U_{-2}	10.1	0.700
U_3	3.9	0.08	U_{-3}	9.6	0.544
U_4	2.8	—	U_{-4}	8.8	0.200
U_0	11.2	0.784	U_{-5}	7.8	
θ	0.31	1.23		0.39	0.89

$$\Theta = \frac{1}{n} ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}} \tag{20}$$

4. Вывод

1. С учетом емкости системы, значения периодов эксперимента идеально совпали с теоретическими значениями периодов.

2. Удалось снять зависимость логарифмического декремента затухания от активного сопротивления цепи (погрешность составила порядка 3%)

3. Определили критическое сопротивление, при котором характер колебаний меняется на апериодический, тремя способами: теоретическим $R = 7.433\,\text{кОм}$, по наклону графика зависимости логарифмического декремента затухания от сопротивления цепи $R_{\text{кр}} = 6.9 \pm 0{,}2$ кОм, с помощью наблюдением за картиной колебаний $R_{\text{кр}} = 6$ кОм.

4. Результаты расчетов добротности сведены в таблицу:

	Свободные колебания			Вынужденные колебания			
R, Ом	f(LCR)	f(ν)	Спираль	АЧХ	ФЧХ	Нарастание	Затухание
400	9.16	8.7	8.26	8.0 ±0.09	8.07±0.09	10.1±0.15	8.1±0.3
1370	2.71	3.14	3.17	-	-	2.55±0.2	3.5±1