Trabalho 1: Cálculo dos Elementos Orbitais

Prof. José Eduardo Costa, *Dep. Astronomia - Instituto de Física - UFRGS*

30 de agosto de 2021

O objetivo deste trabalho é familiarizá-lo com conceitos de *mecânica celeste* aplicados ao cálculo dos *elementos orbitais* dos planetas do Sistema Solar. O método aqui apresentado foi introduzido por *Johannes Kepler* no século XVII, sendo utilizado até hoje, não somente no cálculo posição dos planetas, mas também para calcular a posição das luas, de satélites artificiais e até de planetas extrassolares em relação à estrela em torno da qual orbitam.

O Método de Kepler

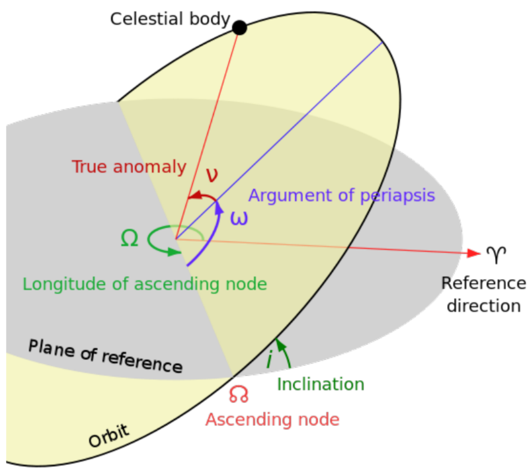
1. calcular a **anomalia média** (M):
$$M \equiv \frac{2\pi}{P}$$
2. calcular a **anomalia excêntrica** (E):
$$M = E - e\,\sin E$$
3. calcular a **anomalia verdadeira** (ν):
$$\tan\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{(1+e)}{(1-e)}}\,\tan\frac{E}{2}$$
4. calcular a **distância** do planeta ao Sol (r):
$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1+e\,\cos\nu}$$

Elementos Orbitais

O método de Kepler utiliza um sistema de *coordenadas heliocêntricas*, onde a posição do planeta em sua órbita é expressa por $(r,\,\nu)$, sendo r a *distância do planeta ao Sol* e ν a *anomalia verdadeira* do planeta.

Notações

$$\begin{aligned} \Omega &= \text{longitude do nodo ascendente} \\ i &= \text{inclinação em relação ao plano orbital da Terra} \\ \omega &= \text{argumento de periélio} \\ a &= \text{semieixo maior da órbita} \\ e &= \text{excentricidade da órbita} \\ M &= \text{anomalia média} \end{aligned}$$



A anomalia verdadeira é o ângulo medido sobre o *plano orbital do planeta*, no sentido anti-horário, entre a linha Sol-Planeta e a a *direção de periélio* (indicado, na figura abaixo, pela reta azul). Cada planeta tem um sistema próprio de coordenadas com uma orientação espacial diferente dos demais planetas, o que torna necessário expressar a orientação de cada órbita e a posição de cada planeta em relação a um sistema de coordenadas comum.

O plano orbital da Terra (plano da eclíptica) é utilizado como *plano de referência* para o sistema de *coordenadas eclípticas.* e a linha imaginária entre o Sol e o ponto-γ (*ponto vernal*), é utilizada como *linha de referência.*

Se o plano orbital tem um *ângulo de inclinação* i em relação ao plano de referência, a órbita do planeta intercepta o plano de referência em dois pontos chamados *nodos*: um, onde o planeta passa do hemisfério sul para o hemisfério norte celeste (*nodo ascendente*) e outro onde passa do hemisfério norte para o hemisfério sul (*nodo descendente*). A linha que passa pelos dois nodos e pelo Sol é chamada de *linha nodal* e sua orientação pode ser expressa pela *longitude do nodo ascendente*, Ω, isto é, o ângulo entre a direção do ponto-γ e a direção do nodo ascendente, medido no sentido anti-horário sobre o plano de referência.

Como a linha nodal é uma linha comum entre os dois planos, a direção do nodo ascendente pode ser usada como referência para indicar a posição angular da direção de periélio. Isso é feito através do *argumento de periélio*, ω.

Cálculo dos Elementos Orbitais

A medida que um planeta se desloca ao longo de sua órbita, a anomalia média varia, $M = M(t)$. Os demais elementos orbitais, Ω, i, ω, a e e, seriam constantes se o movimento do planeta ao redor do Sol não sofresse ação de forças externas. Mas, as interações gravitacionais entre os planetas causam perturbações nos movimentos orbitais fazendo com que esses elementos orbitais variem lentamente ao longo do tempo, junto com a evolução dinâmica do sistema.

Por este motivo, no cálculo de órbitas planetárias para um dado instante de tempo t, deve-se usar para Ω, i, ω, a e e os valores para aquele instante de tempo. Estes valores são obtidos por meio de *equações polinomiais empíricas* do tipo:

$$x = x(t) = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 + ... \quad ,$$

onde x representa um elemento orbital qualquer, e a_0, a_1, a_2, etc, são coeficientes numéricos determinados empiricamente a partir de observações. Quanto maior for a *ordem* do polinômico, i.e., quanto maior o número de coeficientes considerados na equação, maior será a exatidão no cálculo de x.

A seguir, são apresentadas as equações emp.íricas de primeira ordem, para cálculo dos elementos orbitais de cada planeta do Sistema Solar Com exceção da excentricidade e que é adimensional, todo os demais elementos são expressos em graus (de arco). No cálculo dos semieixos maiores, a, deve-se usar para a *unidade astronômica* (au), seu valor de definição:

$$1 \;\; \text{ua} = 149\,597\,870\,700 \quad \text{metros} \; .$$

Elementos orbitais de Mercúrio:

$$\begin{aligned}
\Omega &= 48^o.3313 + 3.24587 \times 10^{-5} * t \\
i &= 7^o.0047 + 5.00 \times 10^{-8} * t \\
\omega &= 29^o.1241 + 1.01444 \times 10^{-5} * t \\
a &= 0.387098 \text{ (au)} \\
e &= 0.205635 + 5.59 \times 10^{-10} * t \\
M &= 168^o.6562 + 4^o.0923344368 * t
\end{aligned}$$

Elementos orbitais de Vênus:

$$\begin{aligned}
\Omega &= 76^o.6799 + 2.46590 \times 10^{-5} * t \\
i &= 3^o.3946 + 2.75 \times 10^{-8} * t \\
\omega &= 54^o.8910 + 1.38374 \times 10^{-5} * t \\
a &= 0.723330 \text{ (au)} \\
e &= 0.006773 - 1.302 \times 10^{-9} * t \\
M &= 48^o.0052 + 1^o.6021302244 * t
\end{aligned}$$

Elementos orbitais da Terra:

$$\begin{aligned}
\Omega &= 0^o.0 \\
i &= 0^o.0 \\
\omega &= 282^o.9404 + 4.70935 \times 10^{-5} * t \\
a &= 1.000000 \text{ (au)} \\
e &= 0.016709 - 1.151 \times 10^{-9} * t \\
M &= 356^o.0470 + 0^o.9856002585 * t
\end{aligned}$$

Elementos orbitais de Marte:

$$\begin{aligned}
\Omega &= 49^o.5574 + 2.11081 \times 10^{-5} * t \\
i &= 1^o.8497 - 1.78 \times 10^{-8} * t \\
\omega &= 286^o.5016 + 2.92961 \times 10^{-5} * t \\
a &= 1.523688 \text{ (au)} \\
e &= 0.093405 + 2.516 \times 10^{-9} * t \\
M &= 18^o.6021 + 0^o.5240207766 * t
\end{aligned}$$

Elementos orbitais de Júpiter:

$$\begin{aligned}
\Omega &= 100^o.4542 + 2.76854 \times 10^{-5} * t \\
i &= 1^o.3030 - 1.557 \times 10^{-7} * t \\
\omega &= 273^o.8777 + 1.64505 \times 10^{-5} * t \\
a &= 5.20256 \text{ (au)} \\
e &= 0.048498 + 4.469 \times 10^{-9} * t \\
M &= 19^o.8950 + 0^o.0830853001 * t
\end{aligned}$$

Elementos orbitais de Saturno:

$$\begin{aligned}
\Omega &= 113^o.6634 + 2.38980 \times 10^{-5} * t \\
i &= 2^o.4886 - 1.081 \times 10^{-7} * t \\
\omega &= 339^o.3939 + 2.97661 \times 10^{-5} * t \\
a &= 9.55475 \text{ (au)} \\
e &= 0.055546 - 9.499 \times 10^{-9} * t \\
M &= 316^o.9670 + 0^o.0334442282 * t
\end{aligned}$$

Elementos orbitais de Urano:

$$\begin{aligned}
\Omega &= 74^o.0005 + 1.3978 \times 10^{-5} * t \\
i &= 0^o.7733 + 1.9 \times 10^{-8} * t \\
\omega &= 96^o.6612 + 3.0565 \times 10^{-5} * t \\
a &= 19.18171 - 1.55 \times 10^{-8} * t \text{ (au)} \\
e &= 0.047318 + 7.45 \times 10^{-9} * t \\
M &= 142^o.5905 + 0^o.011725806 * t
\end{aligned}$$

Elementos orbitais de Netuno:

$$\begin{aligned}
\Omega &= 131^o.7806 + 3.0173 \times 10^{-5} * t \\
i &= 1^o.7700 - 2.55 \times 10^{-7} * t \\
\omega &= 272^o.8461 - 6.027 \times 10^{-6} * t \\
a &= 30.05826 + 3.313 \times 10^{-8} * t \text{ (au)} \\
e &= 0.008606 + 2.15 \times 10^{-9} * t \\
M &= 260^o.2471 + 0^o.005995147 * t
\end{aligned}$$

Nas equações acima, para a unidade astronômica (au), deve-se usar o valor de definição:

$$1 \quad \text{ua} = 149\,597\,870\,700 \quad \text{metros} \ .$$

Tempo

O tempo t nas equações anteriores é expresso em *dias* e computado a partir de 0.0 UT de 01/01/2000. Portanto, $t = 0$ às 0h UT de 01/01/2000, $t < 0$ para datas anteriores e $t > 0$ para datas posteriores. Horas e minutos são expressas como frações de um dia: 1/24 e 1/1440, respectivamente. Computar segundos é irrelevante neste cálculo.

Para calcular t para uma data qualquer, utilize:

$$t = 367\,y - \left\lfloor \frac{7\ \left(y + \left\lfloor \frac{m+9}{12} \right\rfloor\right)}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{275\,m}{9} \right\rfloor + d - 730\,530$$

onde y =ano (com 4 dígitos), m =mês (1-12), d =dia (0-31). O *função piso*[1], $\lfloor x \rfloor$, retorna a *parte inteira* de x, sem arredondamentos; por exemplo, $\lfloor 9.78 \rfloor = 9$ e $\lfloor 5.12 \rfloor = 5$. Portanto, as divisões na equação acima são divisões INTEIRAS. Considere apenas a parte inteira do resultado, sem arredondamentos.

Finalmente, adicione a hora e minutos:

$$t = t + \frac{\text{hora}}{24} + \frac{\text{minutos}}{1440} \quad .$$

Por exemplo, para a data 19/Set/1990, $d = 19$; $m = 9$; $y = 1\,990$, o tempo t é:

[1]Formalmente: $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.

$$\begin{aligned} t &= 367\times 1\,990 - \left\lfloor \frac{7\,\left(1\,990 + \lfloor\frac{9+9}{12}\rfloor\right)}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{275\times 9}{9}\right\rfloor + 19 \\ &\quad -730\,530 \\ &= 730\,330 - \left\lfloor\frac{7\,(1\,990 + \lfloor 1.5\rfloor)}{4}\right\rfloor + \lfloor 275\rfloor - 730\,511 \\ &= -181 - \left\lfloor\frac{7\,(1\,990+1)}{4}\right\rfloor + 275 \\ &= 94 - \lfloor 3\,484.25\rfloor \\ &= 94 - 3\,484 \\ &= -3\,390 \end{aligned}$$

Portanto, $t = -3390$ dias, sendo negativo porque a data é anterior a 1/1/2000.

Precisão

Para qualquer tempo t dentro de um intervalo de 1 000 anos antes ou depois de 1/1/2000, o erro estimado na posição (M) do Sol e dos planetas internos é da ordem de 1 arcmin (minuto de arco). Para intevalos maiores do que 1 000 anos ou para cálculos mais acurados é necessário incluir nas equações termos de ordem 2 ou maior.

Um erro de 1 arcmin é equivalente a 1/60 de 1^o, ou seja, $\sim 0^o.02$. Portanto, você não deve usar menos do que 2 casas decimais para expressar o valor final de M, porque senão estaria perdendo informação, nem usar mais do que 3 casas decimais, porque elas não são significantes. Utilize 3 casas decimais para expressar o valor final de M.

Cálculo da Anomalia Excêntrica

Tendo calculado a *anomalia média* M e a *excentricidade* e para o instante t, torna-se possível o cálculo da *anomalia excêntrica* E a partir da equação de Kepler:

$$M = E - e\,\sin E \quad .$$

sendo que as anomalias M e E são dadas em radianos.

A equação de Kepler é uma equação transcendental, sem solução analítica, podendo ser resolvida apenas numericamente ou por métodos gráficos. Abaixo, é descrito um método iterativo que permite estimar E, com excelente precisão, a partir de um valor aproximado, $\tilde{E}$, e calcular a correção ΔE que deve ser somada a este "chute" para se obter um valor mais próximo, $E \simeq \tilde{E} + \Delta E$:

1. assuma como valor aproximado inicial: $\tilde{E} = M$;
2. calcule a correção de $\tilde{E}$:
$$\Delta E = \frac{M - \tilde{E} + e\,\sin\tilde{E}}{1 - e\,\cos\tilde{E}}$$
3. calcule uma melhor aproximação para E:
$$E \simeq \tilde{E} + \Delta E$$
4. se $|\Delta E| > 5\times 10^{-6}$, faça $\tilde{E}$ igual ao valor obtido no passo (3) e volte para o passo (2). Se $|\Delta E| \leq 5\times 10^{-6}$, o valor que você encontrou para E já está suficientemente bom como solução da equação de Kepler.

Cálculo da Anomalia Verdadeira

Tendo calculado a anomalia excêntrica E, pode-se agora calcular a *anomalia verdadeira* ν para o instante t a partir da equação:

$$\tan\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{(1+e)}{(1-e)}}\,\tan\frac{E}{2} \quad .$$

Cálculo da Distância do Planeta

A distância do planeta ao Sol, r, no instante t pode ser calculada por:

$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1+e\,\cos\nu} \quad ,$$

sendo que r é dado em termos do valor de definição da unidade astronômica.

Cálculo das Coordenadas Cartesianas

A partir da posição $(r,\,\nu)$ do planeta em sua órbita e dos elementos orbitais Ω, ω e i, pode-se calcular a posição do planeta em termos de coordenadas

(X, Y, Z) em um sistema de *coordenadas cartesianas*, cujo plano XY de referência é o plano da eclíptica, com o eixo-X orientado na direção do ponto-γ e o eixo-Z perpendicular ao plano da eclíptica:

$$\begin{aligned} X &= r\,[\cos\Omega\cos(\omega+\nu) - \sin\Omega\sin(\omega+\nu)\cos i] \\ Y &= r\,[\sin\Omega\cos(\omega+\nu) + \cos\Omega\sin(\omega+\nu)\cos i] \\ Z &= r\,\sin(\omega+\nu)\sin i \end{aligned}$$

As coordenadas cartesianas (X, Y, Z) são expressas em unidades de comprimento, em geral em km e utilizadas em cálculos computacionais e como um passo intermediário para o cálculo da posição do planeta em outros sistemas de coordenadas, como é o caso de coordenadas eclípticas.

Cálculo das Coordenadas Eclípticas Heliocêntricas

As coordenadas eclípticas heliocêntricas são (λ, β), onde λ é a *longitude eclíptica* e β a *latitude eclíptica* do planeta, as quais podem ser calculadas por:

$$\begin{aligned} \tan\lambda &= \frac{Y}{X} \quad , \\ \tan\beta &= \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} \quad . \end{aligned}$$

A longitude λ é expressa em graus, com valores entre 0^o e 360^o. Caso, em seus cálculos seja obtido $\lambda < 0^o$, basta somar 360^o ao valor encontrado. Exemplo: $\lambda = -30^o$ fica $\lambda = 330^o$. A latitude β é expressa em graus, com valores entre -90^o e +90^o.

Procedimento

1. Para cada estudante foi definida aleatoriamente uma **data** e **hora**. Veja no Moodle que data lhe corresponde. Todos os cálculos a seguir serão feitos para o instante de tempo t correspondente a esta data e hora. Anote a data e hora utilizadas em seus cálculos nos correspondentes do formulário anexo.
2. Calcule os elementos orbitais Ω, i, a, e e M para o instante t, para os planetas Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno. Expresse valores angulares em graus, utilizando não mais do que 3 casas decimais.
3. Calcule a anomalia excêntrica E no instante t, para cada um dos planetas. Expresse o valor em graus, utilizando não mais do que 3 casas decimais.
4. Calcule a anomalia verdadeira ν no instante t, para cada um dos planetas. Expresse o valor em graus, utilizando não mais do que 3 casas decimais.
5. Calcule a distância de cada planeta ao Sol no instante t. Expresse o valor em termos de unidades astronômicas.
6. Calcule as coordenadas cartesianas (X, Y, Z) de cada planeta. Expresse as coordenadas em km, sem nenhuma casa após o ponto decimal.
7. Calcule as coordenadas eclípticas (λ, β) de cada planeta. Expresse as coordenadas em graus, utilizando não mais do que 3 casas decimais.
8. Utilize a longitude heliocêntrica para expressar a posição angular de cada planeta no instante t, no gráfico polar anexo, em relação à direção do ponto-γ (indicada pelo semieixo a 0^o).

Enviando os Resultados

Escreva seus resultados na tabela a seguir. Expresse a e r em termos de unidades astronômicas (ua) e as demais grandezas em termos de graus de arco, num intervalo de 0^o a 360^o (ou de -90^o a +90^o para i e β), observando o número de algarismos significantes. Anexe uma cópia de seus cálculos.

* * * * *

FIS02015 – Trabalho 1: Cálculo dos Elementos Orbitais

1. **Data & hora:**

Data:	
Hora:	

Nome:	
Cartão:	

2. **Elementos orbitais:**

Planeta	Ω (^{o})	i (^{o})	ω (^{o})	a (ua)	e	M (^{o})	E (^{o})	ν (^{o})	r (ua)
Mercúrio									
Vênus									
Terra									
Marte									
Júpiter									
Saturno									
Urano									
Netuno									

3. **Coordenadas**

	Planeta	X (km)	Y (km)	Z (km)	λ (^{o})	β (^{o})
1	Mercúrio					
2	Vênus					
3	Terra					
4	Marte					
5	Júpiter					
6	Saturno					
7	Urano					
8	Netuno					

4. **Posições angulares dos planetas:**