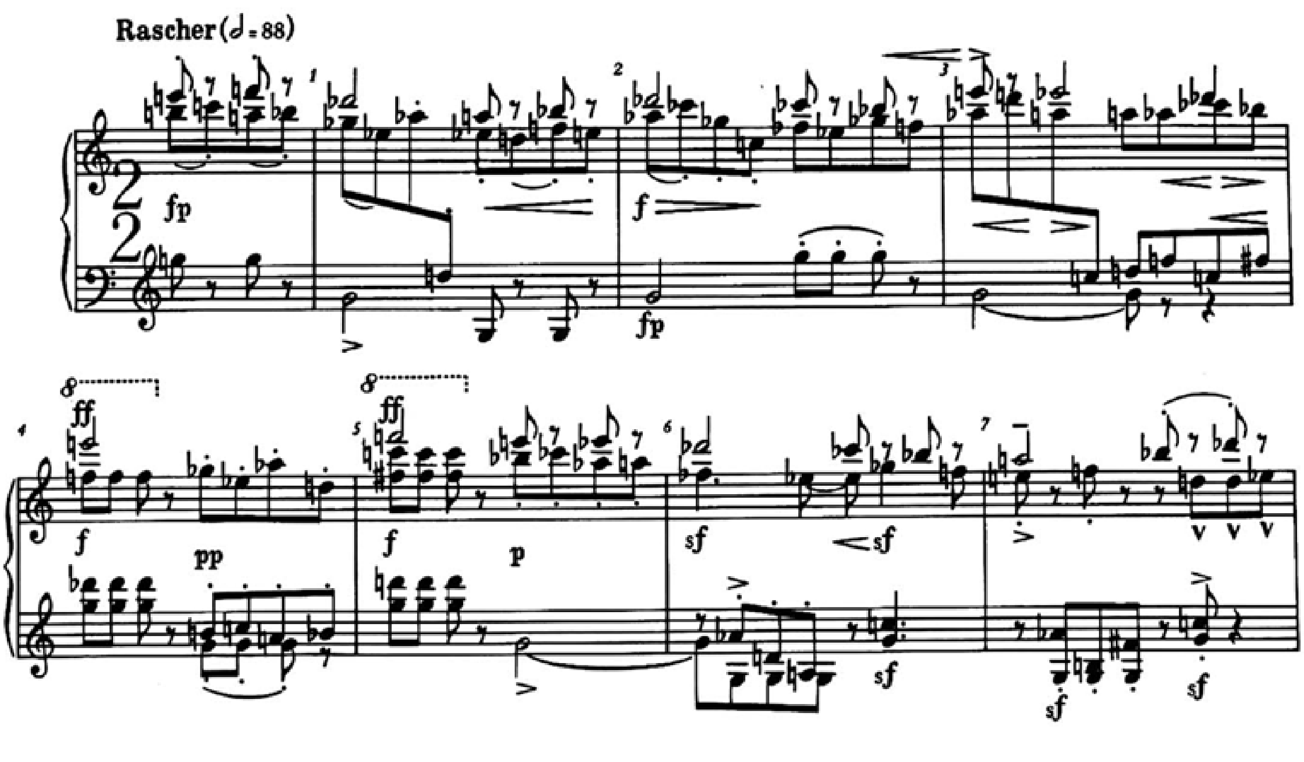
LA ESTRUCTURA MATEMÁTICA DEL SERIALISMO MUSICAL

Celia Rubio Madrigal

curso 2016-17

Dirigido por D. María Gaspar Alonso-Vega
IES San Mateo



Índice

1. INTRODUCCIÓN AL TEXTO

Todas las estructuras musicales están basadas en estructuras matemáticas. Los elementos musicales de los que están compuestas las obras, como las notas, las dinámicas o los timbres, están agrupados en conjuntos, y, como tales, cumplen ciertas propiedades al relacionarse consigo mismos o con otros conjuntos.

A lo largo de la historia, los compositores han ido descubriendo e inventando estas propiedades musicales en las piezas que componían; por ejemplo, desde consonancias y disonancias entre notas, hasta la jerarquía según el pulso en el que la nota se encuentra. Las matemáticas son capaces de describir las propiedades de estos elementos musicales como para cualquier otro conjunto matemático.

Por ejemplo, las músicas serialistas se basan en la continua reiteración de secuencias de elementos musicales. Es decir, un compositor serialista tomará una secuencia ordenada de notas, dinámicas o timbres y la usará como único bloque constructivo de su obra. Puede, además, serializar más de un conjunto de elementos musicales, o incluso pretender serializar el máximo número de conjuntos – lo que a mediados del siglo XX se llamaría serialismo integral. Estas músicas se pueden describir matemáticamente por medio de las permutaciones.

Son en estas estructuras en las que se centrará el presente texto, y más específicamente en el dodecafonismo, el primer sistema compositivo serialista. Se explicarán los fundamentos matemáticos que lo posibilitan, las razones históricas por las que surgió y los postulados que lo definieron, proponiendo ejemplos analizados. Además, se investigará sobre el valor artístico del serialismo mediante el uso de escalas no cromáticas en busca de consonancia.

2. INTRODUCCIÓN MATEMÁTICA DE PERMUTACIONES

2.1. CONJUNTOS

La teoría de conjuntos es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades y relaciones de los *conjuntos*. En matemáticas, un conjunto es una colección de objetos bien definidos y diferenciables entre sí que se llaman *elementos*.

Se dice que un conjunto está bien definido cuando, dado un elemento cualquiera, éste o pertenece al conjunto o no pertenece a él. Para definir un conjunto se puede o bien listar los objetos uno a uno, o bien describirlos por medio de un predicado: una o varias propiedades que caracterizan a todos los elementos de dicho conjunto.

Por ejemplo, el conjunto $\mathrm{K_i}$, formado por las doce notas de la escala cromática de una misma octava i, está bien definido porque podemos hacer una lista con ellas:

$$\mathrm{K_4} = \{\mathrm{Do_4}, \mathrm{Do\#_4}, \mathrm{Re_4}, \mathrm{Re\#_4}, \mathrm{Mi_4}, \mathrm{Fa_4}, \mathrm{Fa\#_4}, \mathrm{Sol_4}, \mathrm{Sol\#_4}, \mathrm{La_4}, \mathrm{La\#_4}, \mathrm{Si_4}\}$$

Nótese que, aun llamando a las notas de distinta manera, el conjunto, conceptualmente, es el mismo. Como $\mathrm{Do\#_4} = \mathrm{Re\flat_4}$,[1] $\mathrm{K_4}$ también puede ser listado así:

$$\mathrm{K_4} = \{\mathrm{Do_4}, \mathrm{Re\flat_4}, \mathrm{Re_4}, \mathrm{Re\#_4}, \mathrm{Mi_4}, \mathrm{Fa_4}, \mathrm{Fa\#_4}, \mathrm{Sol_4}, \mathrm{Sol\#_4}, \mathrm{La_4}, \mathrm{La\#_4}, \mathrm{Si_4}\}$$

En cambio, el conjunto D, formado por las posibles duraciones rítmicas de las notas, es infinito, por lo que no se puede listar de forma completa. Sin embargo, se puede expresar por medio de un predicado:

$$\mathrm{D} = \mathbb{Q}, \text{ es decir, que las notas pueden tomar cualquier valor racional.}$$

2.2. GRUPOS

Los elementos de un conjunto pueden combinarse mediante *operaciones* para dar otros objetos matemáticos, que pueden pertenecer o no al mismo conjunto. Se dice que un conjunto X no vacío y una operación $(*)$ forman un *grupo* $(\mathrm{X}, *)$ cuando cumplen:

1. Si a y b pertenecen a X, $a * b$ pertenece a X.
2. Asociatividad: Si a, b y c pertenecen a X, $(a * b) * c = a * (b * c)$.
3. Existe un elemento e en X, llamado elemento identidad, tal que para todo a que pertenece a X se cumple que $e * a = a * e = a$. Se puede probar que el elemento identidad es único para cada grupo.
$$\exists!\ e \in \mathrm{X} : \forall a \in \mathrm{X}\ e * a = a * e = a$$
4. Cada elemento a perteneciente a X tiene asociado otro elemento a^{-1} que pertenece también a X, llamado elemento inverso, tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Se puede probar que el elemento inverso de cada elemento es único.
$$\forall a \in \mathrm{X}\ \exists!\ a^{-1} \in \mathrm{X} : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

[1] En este texto se trabajará siempre con temperamento igual por convenio.

2.3. FUNCIONES Y PERMUTACIONES

Una *función* es una regla que asocia a cada elemento de un primer conjunto, llamado *dominio*, un único elemento de un segundo conjunto, llamado *codominio*. Cuando varias funciones se aplican una detrás de la otra decimos que realizamos la operación de composición de funciones. Se representa con el símbolo ($\circ$). En ella, el codominio de la primera función será el dominio de la segunda, y así sucesivamente. Por ejemplo, aplicar una función $f(x)$ y después aplicar una función $g(x)$ se escribe como $g(f(x)) = g(x) \circ f(x)$.

Una *permutación* $\sigma(\mathrm{X})$ es una función sobre un conjunto X que asocia sus elementos biyectivamente a los elementos del mismo conjunto X. Es decir, asocia cada elemento a uno, y solo uno, de los elementos de su mismo conjunto ($\sigma : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{X}$). Esto es equivalente a reordenar los elementos de X.

El conjunto de todas las posibles permutaciones sobre un determinado conjunto X, junto con la operación de composición de funciones ($\circ$), forma un grupo denominado $\mathrm{S_x}$. Para probarlo, debemos comprobar que (*Conjunto de permutaciones*, $\circ$) cumple todas las propiedades de los grupos.

1. Permutar dos veces es también una permutación.
2. La composición de funciones es asociativa.
3. La permutación que asigna un elemento a sí mismo es la identidad.
4. Como las permutaciones son biyectivas, cada una tiene una inversa que es también una permutación.

Cuando X es el conjunto de números naturales desde 1 hasta n, $\mathrm{X} = \{\mathrm{a} \in \mathbb{N} : 1 \leq \mathrm{a} \leq n\} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,\ n\}$, el grupo $\mathrm{S_x}$ se representa como S_n y se le denomina el grupo simétrico de orden n. El número de elementos en S_n, es decir, de posibles permutaciones, será $n!$. En nuestros ejemplos musicales, los conjuntos estarán numerados desde 0 hasta $n-1$, siendo n el número de elementos a permutar, en vez de desde 1 hasta n. Seguirán siendo grupos simétricos de orden n, pero con una numeración distinta.

La notación utilizada para representar una permutación σ perteneciente a S_n con la numeración desde 0 es:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & n-3 & n-2 & n-1 \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n-3) & \sigma(n-2) & \sigma(n-1) \end{pmatrix}$$

3. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA DEL DODECAFONISMO

3.1. ANTECESORES

El periodo de la historia de la música predominante en el siglo XIX, comúnmente llamado Romanticismo, culminó con los dramas musicales de Richard Wagner (1813–1883), en los que todos los elementos de la obra estaban detalladamente estudiados por el compositor. A este concepto él lo llamaba *Gesamtkunstwerk*, es decir, «obra de arte total»[2], ya que se aseguraba personalmente que en sus óperas las artes escénicas, musicales, poéticas y visuales se combinaran entre sí a la perfección.

La idea del *Gesamtkunstwerk* la desarrolló alrededor de 1850, y la plasmó en su totalidad en su ciclo de cuatro óperas *Der Ring des Nibelungen*, estrenado el 16 de agosto de 1876. Wagner controló y creó cada aspecto de la tetralogía, desde la música hasta el libreto, el vestuario y la escenografía. Incluso mandó crear su propia sala de conciertos en Bayreuth, el *Festspielhaus*, para que el lugar se adecuara a sus ideas sobre el pensamiento y la cultura musical.

De esta forma, a ojos de compositores posteriores, Wagner había agotado todas las posibilidades de la música tonal, y quizás ya había comenzado el viraje hacia el predominio de la disonancia con su abundante uso del cromatismo, como en el famoso primer acorde de *Tristan und Isolde* (1865). Por tanto, y siguiendo la mentalidad alemana del progreso como un camino ascendente, el paso siguiente para la composición musical debía consistir en deshacerse progresivamente de la tonalidad y desarrollar la «emancipación de la disonancia»[3]. Así fue como Arnold Schoenberg ideó sus teorías del pensamiento musical, y éstas dieron paso a la creación de la atonalidad.

3.2. ETAPAS PREVIAS AL DODECAFONISMO

Fuertemente influido por Wagner y Brahms desde su adolescencia, Schoenberg (1874–1951) comenzó componiendo al estilo posromántico de su época, llevando el cromatismo y la orquestación hasta el extremo. Sin embargo, y no espontáneamente, empezó a buscar en sus composiciones que cada sonido tuviera un valor independiente de su funcionalidad tonal.

Para él, la música no estaba intrínsecamente dirigida a una tónica. En las progresiones, lo importante era el paso de un acorde a otro, y no hacia dónde se dirigían éstos. Además, él opinaba que se debían poder utilizar las notas de los modos eclesiásticos libremente, por lo que consideraba las notas no diatónicas tan válidas como las diatónicas. Esto hacía imposible distinguir unas de otras, no pudiendo identificar ni siquiera la tónica. De esta forma, la jerarquía tonal quedaba desestabilizada.

Tras pasar por la etapa tonal posromántica, y debido a su convicción en la irrevocabilidad histórica de la evolución hacia el cromatismo total, en 1908 Schoenberg se desligó de la tonalidad con el ciclo de canciones *Das Buch der Hängenden Gärten*. A partir de entonces se dedicó a componer fragmentos muy breves cuya estructura era definida por motivos y no por la armonía, como solía ocurrir en formas musicales anteriores (la forma sonata es el ejemplo más destacado). A este periodo en sus composiciones se le llama *atonal libre*.

[2] Ensayo *Oper und drama*, Richard Wagner, 1851

[3] Ensayo *Composition with twelve tones*, recogido en *Style and Idea*, Arnold Schoenberg, 1950

3.3. CAUSAS DIRECTAS

Schoenberg no estaba satisfecho con la técnica compositiva que utilizaba, ya que admiraba las obras extensas de los músicos románticos y pensaba que su atonalidad libre no podía sostener una obra de gran envergadura. Es decir, necesitaba un hilo conductor más potente que los motivos para poder componer obras atonales más largas.

Además, por aquella época sufrió una crisis en muchos aspectos de su vida. En lo personal, su mujer Matilde Zemlinsky acababa de abandonarlo por otro hombre, aunque posteriormente volvería junto al compositor. Y, en lo profesional, sus obras no eran del gusto del público, por lo que no contaba con suficiente dinero para mantener a su familia. Todas estas circunstancias, unidas al desarrollo de la Primera Guerra Mundial, no le permitieron componer muchas obras entre 1914 y 1923.

Tras el final de la guerra, en 1919, Schoenberg fundó la Sociedad para Interpretaciones Musicales Privadas junto a sus discípulos y amigos Alban Berg y Anton Webern. En la Sociedad se presentaban músicas contemporáneas en circunstancias que favorecieran su adecuada apreciación. Así se evitaba que dichas obras, al no ser entendidas por el público, fueran inmediatamente rechazadas. Schoenberg, Berg y Webern se autodenominaron la Segunda Escuela de Viena en honor al grupo de compositores del siglo XVIII Haydn, Mozart y Beethoven, quienes formaban la Primera Escuela de Viena.

En este contexto Schoenberg pudo reflexionar sobre las técnicas compositivas, y al fin publicó en 1923 su ensayo *Método de composición con doce sonidos*, donde se describían por primera vez los axiomas del dodecafonismo: la solución al problema de la atonalidad libre que le había estado atormentando durante una década.

Su primera obra íntegramente dodecafónica, publicada también en 1923, es la Suite para piano Op. 25, cuyas series nos servirán de ejemplo y cuyo movimiento nº3 (Musette) será analizado en este texto.

4. EL SISTEMA DODECAFÓNICO

4.1. LOS POSTULADOS DEL DODECAFONISMO

El dodecafonismo es el sistema compositivo que predetermina las relaciones melódico-armónicas de una obra a partir de una ordenación de las doce notas de la escala cromática, llamada serie, y sus transformaciones. Es decir, que los únicos conjuntos musicales serializados son la melodía y la armonía, mientras que el ritmo, la duración, el timbre y las dinámicas se dejan a discreción del compositor. No serializar el resto de conjuntos será la principal crítica al dodecafonismo por parte de los compositores serialistas que sucedieron a Schoenberg: los compositores de serialismo integral de mediados del siglo XX, como Pierre Boulez.

Esta predeterminación dodecafónica, aunque parece en primera instancia excesivamente limitante, permite realizaciones musicales y estilos de composición muy diferentes: Schoenberg daba un tratamiento tradicional a sus obras, ya que aún admiraba las formas clásicas; Berg iba más allá al utilizar series que recordaban a las tríadas tonales; y, en cambio, Webern evitaba radicalmente cualquier asociación con la tradición.

Schoenberg definió su sistema musical a partir de cuatro postulados que, en realidad, se basan en principios matemáticos:

1. La serie [sobre la que se construye la obra dodecafónica] *consta de las doce notas de la escala cromática dispuestas en un orden lineal específico.*

2. Ninguna nota aparece más de una vez en la serie.

Los dos primeros postulados expresan que una obra dodecafónica fundamenta su estructura sobre una permutación de la escala de doce semitonos. Dicha permutación σ es una biyección del conjunto numerado de las doce notas {Do = 0, Do# = 1, Re = 2, Re# = 3, Mi = 4, Fa = 5, F# = 6, Sol = 7, Sol# = 8, La = 9, La# = 10, Si = 11} consigo mismo, y se representa de esta forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & \sigma(6) & \sigma(7) & \sigma(8) & \sigma(9) & \sigma(10) & \sigma(11) \end{pmatrix}$$

La permutación $\sigma(n)$, con $n \in \mathbb{Z}/(12)$[4], pertenece al grupo simétrico de orden 12: $\sigma \in \mathrm{S}_{12}$. Por ejemplo, en la Suite para piano Op. 25 Schoenberg utiliza como serie original en todos los movimientos de la obra la siguiente permutación P:

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 6 & 3 & 8 & 2 & 11 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

[4] $\mathbb{Z}/(12) = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}$, el grupo cíclico de orden 12.

3. La serie será expuesta en cualquiera de sus aspectos lineales: original, inversión, retrogradación del original y retrogradación de la inversión.

4. La serie puede usarse en sus cuatro aspectos desde cualquier nota de la escala.

Los dos últimos postulados amplían los recursos compositivos al admitir la transformación de la serie original mediante *inversión*, *retrogradación*, *inversión retrógrada* y *transposición*[5]. El compositor puede utilizar cualquiera de las transformaciones de una serie al componer su obra dodecafónica. El conjunto de series que puede utilizar, que viene dado por la serie original y todas sus posibles transformaciones, se conoce como *espectro serial.*

4.2. TRANSFORMACIONES DE UNA SERIE

Transformar una serie es matemáticamente equivalente a aplicar una función sobre la serie que asocie su permutación a la permutación transformada. Por tanto, cualquier función transformativa Ψ se aplica sobre el conjunto de las permutaciones: S_{12}, el grupo simétrico de orden 12 ($\Psi :\ \mathrm{S}_{12} \to \mathrm{S}_{12}$).

La *transposición*, mencionada en el cuarto postulado, consiste en subir o bajar la serie original un número determinado de semitonos. Por tanto, no se modifican los intervalos entre las notas, sino solamente la altura a la que está la serie. Ya que consideraremos todas las octavas equivalentes, debemos trabajar módulo 12.

La función que transporta k semitonos, $\mathrm{T_k}(\sigma)$, se construye sumando o restando k a σ (módulo 12):

$$\forall n \in \mathbb{Z}/(12) : \mathrm{T_k}(\sigma(n)) = \sigma(n) + \mathrm{k} \qquad \text{con k constante;}$$

$$\mathrm{T_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & 9 & 10 & 11 \\ \sigma(0)+\mathrm{k} & \sigma(1)+\mathrm{k} & \sigma(2)+\mathrm{k} & \cdots & \sigma(9)+\mathrm{k} & \sigma(10)+\mathrm{k} & \sigma(11)+\mathrm{k} \end{pmatrix}$$

Una segunda notación para $\mathrm{T_k}(\sigma)$ es $\mathrm{T}(\sigma + \mathrm{k})$, que será utilizada para los cálculos matemáticos, mientras que la notación $\mathrm{T_k}$ se utilizará cuando la permutación σ sobre la que se aplique la transposición sea redundante. La notación Ψ_k se usará en sustitución de la composición de la transposición $\mathrm{T_k}$ y otra función Ψ, en el respectivo orden:

$$\Psi_\mathrm{k} = \Psi \circ \mathrm{T_k} = \Psi(\mathrm{T_k}), \text{ es decir, transponer primero y aplicar } \Psi \text{ después.}$$

Una posible serie transportada sobre la permutación P de la Suite Op. 25, con k = 6, es la siguiente serie T_6:

$$\mathrm{T}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 1 & 7 & 0 & 9 & 2 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

[5] No confundir con un 2-ciclo. Una transposición musical se corresponde con una traslación matemática.

La *retrogradación* consiste en leer la serie original desde la nota final hacia atrás, es decir, aplicar a la serie una simetría especular. De este modo, la primera nota irá al último puesto, la segunda al penúltimo, y así sucesivamente.

La serie retrógrada se construye de esta forma:

$$\forall n \in \mathbb{Z}/(12) : \mathrm{R}\left(\sigma\left(n\right)\right) = \sigma\left(11 - n\right)$$

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \sigma(11) & \sigma(10) & \sigma(9) & \sigma(8) & \sigma(7) & \sigma(6) & \sigma(5) & \sigma(4) & \sigma(3) & \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(0) \end{pmatrix}$$

La serie retrógrada sobre la permutación P de la Suite Op. 25 es la siguiente serie R_0:

$$\mathrm{R}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 9 & 0 & 11 & 2 & 8 & 3 & 6 & 1 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Por último, la *inversión* consiste en cambiar la dirección –de ascendente a descendente, y viceversa– de los intervalos entre cada nota de la serie. Si el primer intervalo en la serie original σ es de $+n$, el primer intervalo en la serie invertida I será de $-n$ (mod. 12), por lo que debemos cambiar el signo de σ para construir I. Además, queremos que la primera nota de ambas series, $\mathrm{I}(0)$ y $\sigma(0)$, coincidan, así que debemos transportar la serie $-\sigma$ un número λ de semitonos para que esta condición se cumpla:

$$\mathrm{I}(0) = -\sigma\left(0\right) + \lambda = \sigma\left(0\right) \implies \lambda = 2\sigma(0)$$

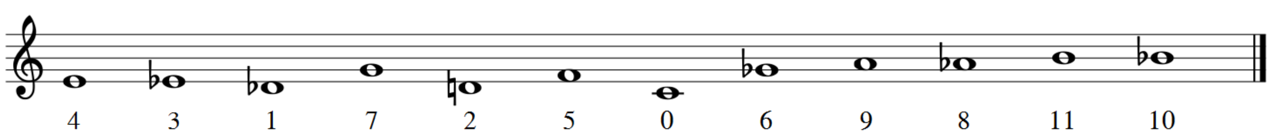
Por tanto, la serie invertida se construye de esta forma:

$$\forall n \in \mathbb{Z}/(12) : \mathrm{I}\left(\sigma\left(n\right)\right) = -\sigma\left(n\right) + 2\sigma\left(0\right)$$

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & 10 & 11 \\ \sigma(0) & -\sigma(1) + 2\sigma(0) & -\sigma(2) + 2\sigma(0) & \dots & -\sigma(10) + 2\sigma(0) & -\sigma(11) + 2\sigma(0) \end{pmatrix}$$

La serie invertida sobre la permutación P de la Suite Op. 25 es la siguiente serie I_0:

$$\mathrm{I}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 2 & 5 & 0 & 6 & 9 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$



En total, obtendremos 48 series pertenecientes a un solo espectro serial, ya que hay 12 series originales sobre cada una de las doce notas $\{\mathrm{T}_0 = \mathrm{P}, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \dots\}$, 12 series retrógradas $\{\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2 \dots\}$, 12 invertidas $\{\mathrm{I}_0, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2 \dots\}$ y 12 series sobre las que se aplica tanto la retrogradación como la inversión $\{\mathrm{RI}_0, \mathrm{RI}_1, \mathrm{RI}_2 \dots\}$.

Si calculamos la retrogradación invertida y la inversión retrógrada, observamos que no conmutan, sino que dan dos series transportadas una de la otra, como se muestra a continuación:

Retrogradación invertida: $\mathrm{RI}\left(\sigma\left(n\right)\right) = \mathrm{I}\circ\mathrm{R}\left(\sigma\left(n\right)\right) = \mathrm{I}\left(\mathrm{R}\left(\sigma\left(n\right)\right)\right) = -\mathrm{R}\left(\sigma\left(n\right)\right) + 2\mathrm{R}\left(\sigma\left(0\right)\right) = -\sigma\left(11-n\right) + 2\sigma\left(11-0\right) = -\sigma\left(11-n\right) + 2\sigma\left(11\right)$

$$\mathrm{RI} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 10 & 11 \\ -\sigma(11)+2\sigma(11) & -\sigma(10)+2\sigma(11) & \dots & -\sigma(1)+2\sigma(11) & -\sigma(0)+2\sigma(11) \end{pmatrix}$$

Inversión retrógrada: $\mathrm{IR}\left(\sigma\left(n\right)\right) = \mathrm{R}\circ\mathrm{I}\left(\sigma\left(n\right)\right) = \mathrm{R}\left(\mathrm{I}\left(\sigma\left(n\right)\right)\right) = \mathrm{R}\left(-\sigma\left(n\right) + 2\sigma\left(0\right)\right) = -R\left(\sigma\left(n\right)\right) + 2\sigma\left(0\right) = -\sigma\left(11-n\right) + 2\sigma\left(0\right)$

$$\mathrm{IR} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 10 & 11 \\ -\sigma(11)+2\sigma(0) & -\sigma(10)+2\sigma(0) & \dots & -\sigma(1)+2\sigma(0) & -\sigma(0)+2\sigma(0) \end{pmatrix}$$

Los únicos casos en los que podrían conmutar ocurrirían cuando $2\sigma\left(0\right) \equiv 2\sigma(11)$ (mod. 12):

$$12 + 2\sigma\left(0\right) = 2\sigma\left(11\right);\ 6 + \sigma\left(0\right) = \sigma\left(11\right);\ \sigma\left(11\right) - \sigma\left(0\right) = 6$$

Es decir, cuando la primera y la última nota de la serie original se distancian en 6 semitonos, como es el caso de nuestra permutación P en la Suite Op. 25 de Schoenberg:

$$\mathrm{IR} = \mathrm{RI} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 8 & 9 & 6 & 0 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4.3. MATRICES DODECAFÓNICAS

El espectro serial de cualquier serie puede ordenarse para formar una matriz dodecafónica, la cual contiene todas las series que el compositor puede utilizar en una sola tabla.

He creado un programa informático que devuelve la matriz dodecafónica correspondiente a cualquier serie que se introduzca en teclado. Además, produce la nomenclatura adecuada de cada serie, de tal forma que se puede encontrar inmediatamente cualquier serie. El código, escrito en lenguaje C++, está incluido en el Anexo A, en la página 13, y está creado en base a las fórmulas de construcción de series y a la propiedad de invariancia de intervalos en las transportaciones.

A continuación, se incluye la matriz dodecafónica de la serie P de la Suite Op. 25 de Schoenberg. Mientras que en la mayoría de tablas las dos filas inferiores tienen numeración distinta, que se corresponde con las distintas nomenclaturas de RI e IR para una misma serie – ya que normalmente no conmutan –, en la matriz de la serie P sí coinciden, como se ha mencionado anteriormente.

	I_0	I_1	I_3	I_9	I_2	I_{11}	I_4	I_{10}	I_7	I_8	I_5	I_6	
T_0	4	5	7	1	6	3	8	2	11	0	9	10	R_0
T_{11}	3	4	6	0	5	2	7	1	10	11	8	9	R_{11}
T_9	1	2	4	10	3	0	5	11	8	9	6	7	R_9
T_3	7	8	10	4	9	6	11	5	2	3	0	1	R_3
T_{10}	2	3	5	11	4	1	6	0	9	10	7	8	R_{10}
T_1	5	6	8	2	7	4	9	3	0	1	10	11	R_1
T_8	0	1	3	9	2	11	4	10	7	8	5	6	R_8
T_2	6	7	9	3	8	5	10	4	1	2	11	0	R_2
T_5	9	10	0	6	11	8	1	7	4	5	2	3	R_5
T_4	8	9	11	5	10	7	0	6	3	4	1	2	R_4
T_7	11	0	2	8	1	10	3	9	6	7	4	5	R_7
T_6	10	11	1	7	0	9	2	8	5	6	3	4	R_6
	IR_0	IR_1	IR_3	IR_9	IR_2	IR_{11}	IR_4	IR_{10}	IR_7	IR_8	IR_5	IR_6	
	RI_0	RI_1	RI_3	RI_9	RI_2	RI_{11}	RI_4	RI_{10}	RI_7	RI_8	RI_5	RI_6	

Anexos

A. Código para el cálculo de matrices dodecafónicas.

```
#include <iostream>
using namespace std;
const int N = 12; // Número de elementos en la serie

int main() {
int es[N + 3][N + 2]; // Matriz de Espectro Serial

for (int i = 1; i < N + 1; ++i) {
cin >> es[1][i]; // Introducción de serie original
es[i][0] = (N - es[1][i] + es[1][1]) % N; // Columna T
es[i][N + 1] = es[i][0]; // Columna R
es[0][i] = (N - es[i][0]) % N; // Columna I
es[N + 1][i] = es[0][i]; // Columna IR
es[N + 2][i] = (N + es[0][i] + 2 * (es[1][N] - es[1][1])) % N; // Columna RI
}

for (int i = 2; i < N + 1; ++i) for (int j = 1; j < N + 1; ++j)
es[i][j] = (es[1][j] + es[i][0]) % N; // Completar series internas

cout << "$$\\begin{array}{l|"; for (int i = 0; i < N; ++i) cout << 'c';
cout << "|r}&"; // Formato de matriz
for (int i = 1; i < N + 1; ++i) cout << "\\text{I}_{" << es[0][i] << "}&";
cout << "\\\\\\hline"; // Escribir fila de I

for (int i = 1; i < N + 1; ++i) {
cout << "\\text{T}_{" << es[i][0] << "}&";
for (int j = 1; j < N + 1; ++j) cout << es[i][j] << "&";
cout << "\\text{R}_{" << es[i][N + 1] << "}\\\\";
} // Escribir filas interiores: T, series, R

cout << "\\hline&";
for (int i = 1; i < N + 1; ++i)
cout << "\\text{IR}_{" << es[N + 1][i] << "}&"; // Escribir fila de IR

cout << "\\\\\\hline&";
for (int i = 1; i < N + 1; ++i)
cout << "\\text{RI}_{" << es[N + 2][i] << "}&"; // Escribir fila de RI
cout << "\\end{array}$$\n";

system("PAUSE"); return 0; }
```