

# LA ESTRUCTURA MATEMÁTICA DEL SERIALISMO MUSICAL

Celia Rubio Madrigal

Instituto San Mateo  
Universidad Complutense de Madrid

cursos 16-17 y 17-18



*Dedicado a mis dos  
grandes pasiones:  
las matemáticas  
y la música.*

It has been observed that mathematics is the  
most abstract of the sciences, music  
the most abstract of the arts.

— David Wright [1]



# INTRODUCCIÓN AL TEXTO

Todas las estructuras musicales están basadas en estructuras matemáticas. Los elementos musicales de los que están compuestas las obras, como las notas, las dinámicas o los timbres, están agrupados en conjuntos, y, como tales, cumplen ciertas propiedades al relacionarse consigo mismos o con otros conjuntos.

A lo largo de la historia, los compositores han ido descubriendo e inventando estas propiedades musicales en las piezas que componían; por ejemplo, desde consonancias y disonancias entre notas, hasta la jerarquía según el pulso en el que la nota se encuentra. Las matemáticas son capaces de describir las propiedades de estos elementos musicales como para cualquier otro conjunto matemático.

Por ejemplo, las músicas serialistas se basan en la continua reiteración de secuencias de elementos musicales. Es decir, un compositor serialista tomará una secuencia ordenada de notas, dinámicas o timbres y la usará como único bloque constructivo de su obra. Puede, además, serializar más de un conjunto de elementos musicales, o incluso pretender serializar el máximo número de conjuntos – lo que a mediados del siglo XX se llamaría serialismo integral. Estas músicas se pueden describir matemáticamente por medio de las permutaciones.

Son en estas estructuras en las que se centrará el presente texto, y más específicamente en el dodecafonismo, el primer sistema compositivo serialista. Se explicarán los fundamentos matemáticos que lo posibilitan, las razones históricas por las que surgió y los postulados que lo definieron, proponiendo ejemplos analizados. Además, se investigará sobre el valor artístico del serialismo mediante el uso de escalas no cromáticas en busca de consonancia.



# Índice general

<b>I</b>	<b>DODECAFONISMO</b>	<b>1</b>
<b>1.</b>	<b>INTRODUCCIÓN MATEMÁTICA DE PERMUTACIONES</b>	<b>3</b>
1.1.	CONJUNTOS Y GRUPOS . . . . .	3
1.2.	FUNCIONES Y PERMUTACIONES . . . . .	4
<b>2.</b>	<b>INTRODUCCIÓN HISTÓRICA DEL DODECAFONISMO</b>	<b>7</b>
2.1.	R. WAGNER Y LA EMANCIPACIÓN DE LA DISONANCIA . .	7
2.2.	POSROMANTICISMO Y ATONALISMO DE SCHOENBERG . .	8
2.3.	EL SURGIMIENTO DE UN SISTEMA . . . . .	10
<b>3.</b>	<b>EL SISTEMA DODECAFÓNICO DE SCHOENBERG</b>	<b>11</b>
3.1.	LOS POSTULADOS DEL DODECAFONISMO . . . . .	11
3.2.	LAS TRANSFORMACIONES DE UNA SERIE . . . . .	13
3.2.1.	TRANSPOSICIÓN . . . . .	13
3.2.2.	RETROGRADACIÓN . . . . .	14
3.2.3.	INVERSIÓN . . . . .	14
3.2.4.	RETROGRADACIÓN E INVERSIÓN . . . . .	15
3.2.5.	EL GRUPO DE KLEIN . . . . .	16
3.3.	MATRICES DODECAFÓNICAS . . . . .	17
<b>4.</b>	<b>ANÁLISIS DE UNA OBRA DODECAFÓNICA: OP. 25</b>	<b>19</b>
4.1.	SERIES UTILIZADAS EN LA SUITE OP. 25 . . . . .	19
4.2.	DESCRIPCIÓN DE LA SUITE OP. 25 . . . . .	20
4.3.	ANÁLISIS DE LA MUSETTE . . . . .	21

<b>II</b>	<b>ENEFONISMO</b>	<b>25</b>
<b>5.</b>	<b>SURGIMIENTO DEL SERIALISMO INTEGRAL</b>	<b>27</b>
5.1.	ALBAN BERG Y ANTON VON WEBERN . . . . .	27
5.2.	DARMSTADT Y EL SERIALISMO INTEGRAL . . . . .	28
5.3.	PIERRE BOULEZ Y STRUCTURES . . . . .	28
5.4.	OLIVIER MESSIAEN Y LOS MODOS DE TRANSPOSICIÓN LIMITADA . . . . .	28
<b>6.</b>	<b>MÁS HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS</b>	<b>29</b>
6.1.	ACCIÓN DE UN GRUPO SOBRE UN CONJUNTO . . . . .	29
6.2.	ÓRBITAS Y ESTABILIZADORES . . . . .	30
6.3.	EL LEMA DE BURNSIDE . . . . .	31
<b>7.</b>	<b>LA MATEMATIZACIÓN DEL SERIALISMO</b>	<b>33</b>
7.1.	NÚMERO DE ESPECTROS SERIALES . . . . .	33
7.1.1.	ESTABILIZADORES $\{ID, R\}$ . . . . .	34
7.1.2.	ESTABILIZADORES $\{ID, RI\}$ . . . . .	35
7.1.3.	SUMA COMPLETA . . . . .	36
7.2.	MEDEFONISMO, MONOFONISMO Y DIFONISMO . . . . .	37
<b>8.</b>	<b>MODIFICACIONES SERIALISTAS</b>	<b>39</b>
8.1.	EL VALOR INTRÍNSECO DEL DODECAFONISMO . . . . .	39
8.2.	SERIALISMO DE ESCALAS NO CROMÁTICAS . . . . .	41
	<b>ANEXOS</b>	<b>43</b>
	Anexo A. Código para el cálculo de matrices dodecafónicas.	45
	Anexo B. Series de la Suite Op. 25.	49
	Anexo C. Análisis serial de la Musette.	53
	Anexo D. Modificación pentatónica.	57
	Anexo E. Modificación hexafónica.	61
	Anexo F. Modificación heptafónica.	65
	Bibliografía	69







**Parte I**

**DODECAFONISMO**



# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN MATEMÁTICA DE PERMUTACIONES

### 1.1. CONJUNTOS Y GRUPOS

La teoría de conjuntos es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades y relaciones de los *conjuntos*. En matemáticas, un conjunto es una colección de objetos bien definidos y diferenciables entre sí que se llaman *elementos*.

Se dice que un conjunto está bien definido cuando, dado un elemento cualquiera, éste o pertenece al conjunto o no pertenece a él. Para definir un conjunto se puede o bien listar los objetos uno a uno, o bien describirlos por medio de un predicado: una o varias propiedades que caracterizan a todos los elementos de dicho conjunto.

Por ejemplo, el conjunto  $K_i$ , formado por las doce notas de la escala cromática de una misma octava  $i$ , está bien definido porque podemos hacer una lista con ellas:

$$K_4 = \{\text{Do}_4, \text{Do}\#_4, \text{Re}_4, \text{Re}\#_4, \text{Mi}_4, \text{Fa}_4, \text{Fa}\#_4, \text{Sol}_4, \text{Sol}\#_4, \text{La}_4, \text{La}\#_4, \text{Si}_4\}$$

Nótese que, aun llamando a las notas de distinta manera, el conjunto, conceptualmente, es el mismo. Además, el hecho de listar algún elemento más de una vez no afecta a su definición. Como  $\text{Do}\#_4 = \text{Reb}_4$ ,<sup>1</sup>  $K_4$  también puede ser listado así:

$$K_4 = \{\text{Do}_4, \text{Do}\#_4, \text{Reb}_4, \text{Re}_4, \text{Re}\#_4, \text{Mi}_4, \text{Fa}_4, \text{Fa}\#_4, \text{Sol}_4, \text{Sol}\#_4, \text{La}_4, \text{La}\#_4, \text{Si}_4\}$$

---

<sup>1</sup>En este texto se trabajará siempre con temperamento igual por convenio.

## CAPÍTULO 1

---

En cambio, el conjunto D, formado por las duraciones rítmicas elementales – sin ligaduras ni puntillos –, es infinito, por lo que no se puede listar de forma completa. Sin embargo, se puede expresar por medio de un predicado:

$$D = \{2^n : n \in \mathbb{Z}, n \leq 2\} = \{4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\} = \{\circ, \downarrow, \downarrow, \downarrow, \dots\}$$

Los elementos de un conjunto pueden combinarse mediante *operaciones* para dar otros objetos matemáticos. Se dice que un conjunto X no vacío y una operación (\*) forman un *grupo* (X, \*) cuando cumplen:

1. Si  $a$  y  $b$  pertenecen a X,  $a * b$  pertenece a X.
2. Asociatividad: Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  pertenecen a X,  $(a * b) * c = a * (b * c)$ .
3. Existe un elemento  $e$  en X, llamado elemento identidad, tal que para todo  $a$  que pertenece a X se cumple que  $e * a = a * e = a$ . Se puede probar que el elemento identidad es único para cada grupo.
4. Cada elemento  $a$  perteneciente a X tiene asociado otro elemento  $a^{-1}$  en X, llamado elemento inverso, tal que  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ . Se puede probar que el elemento inverso de cada elemento es único.

## 1.2. FUNCIONES Y PERMUTACIONES

Una *función* es una regla que asocia a cada elemento de un primer conjunto, llamado *dominio*, un único elemento de un segundo conjunto, llamado *codominio*. Si la función se llama  $f$ , el dominio A y el codominio B, se denota  $f : A \rightarrow B$ . El elemento asociado a un  $x$  mediante  $f$  se denota  $f(x)$ .

Todos los  $x \in A$  tienen que estar asociados a un  $f(x) \in B$ , pero no todos los elementos de B tienen un elemento de A asociado. Los elementos de B que sí lo cumplen, es decir, los que se pueden escribir como  $f(x)$  para algún  $x$ , forman el conjunto *imagen* de la función:  $im(f) = \{ y \in B : \exists x \in A, f(x) = y \}$

Cuando varias funciones se aplican una detrás de la otra decimos que realizamos la operación de composición de funciones. Se representa con el símbolo ( $\circ$ ). La imagen de la primera función será el dominio de la segunda, y así sucesivamente. Por ejemplo, aplicar una función  $f(x)$  y después aplicar una función  $g(x)$  se denota  $g(f(x)) = g(x) \circ f(x)$ .

Una *permutación*  $\sigma(X)$  es una función sobre un conjunto  $X$  que asocia sus elementos biyectivamente a los elementos del mismo conjunto  $X$ . Es decir, asocia cada elemento a uno, y solo uno, de los elementos de su mismo conjunto ( $\sigma : X \rightarrow X$ ). [2]

El conjunto de todas las posibles permutaciones sobre un determinado conjunto  $X$ , junto con la operación de composición de funciones ( $\circ$ ), forma un grupo denominado  $S_X$ . Para probarlo, se debe comprobar que cumple todas las propiedades de los grupos.

1. Permutar dos veces es también una permutación.
2. La composición de funciones es asociativa.
3. La permutación que asigna un elemento a sí mismo es la identidad.
4. Como las permutaciones son biyectivas, cada una tiene una inversa que es también una permutación.

Cuando  $X$  es el conjunto de números naturales desde 1 hasta  $n$ ,  $X = \{a \in \mathbb{N} : 1 \leq a \leq n\} = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ , el grupo  $S_X$  se representa como  $S_n$  y se le denomina el grupo simétrico de orden  $n$ . El número de elementos en  $S_n$ , es decir, de posibles permutaciones, será  $n!$ .

En los ejemplos musicales de este texto, los conjuntos estarán numerados desde 0 hasta  $n-1$ , siendo  $n$  el número de elementos a permutar, en vez de desde 1 hasta  $n$ . Seguirán siendo grupos simétricos de orden  $n$ , pero con una numeración distinta.

La notación utilizada para representar una permutación  $\sigma$  perteneciente a  $S_n$  con la numeración desde 0 y con  $\sigma(m)$  siendo el elemento asociado a  $m$  mediante  $\sigma$ , es:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n-3) & \sigma(n-2) & \sigma(n-1) \end{pmatrix}$$



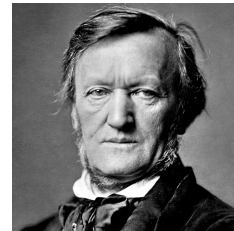


## Capítulo 2

# INTRODUCCIÓN HISTÓRICA DEL DODECAFONISMO

### 2.1. RICHARD WAGNER Y LA EMANCIPACIÓN DE LA DISONANCIA

El periodo de la historia de la música predominante en el siglo XIX, comúnmente llamado Romanticismo, culminó con los dramas musicales de Richard Wagner, en los que todos los elementos de la obra estaban detalladamente estudiados por el compositor. A este concepto lo llamaba *Gesamtkunstwerk* («obra de arte total»<sup>1</sup>), ya que creía poseer la responsabilidad de reunir todas las artes en una misma obra. Wagner se aseguraba personalmente de que en sus óperas las artes escénicas, musicales, poéticas y visuales se combinaran entre sí a la perfección.



Richard Wagner  
(1813–1883)

La idea del *Gesamtkunstwerk* la desarrolló alrededor de 1850, y la plasmó en su totalidad en su ciclo de cuatro óperas *Der Ring des Nibelungen*, estrenado el 16 de agosto de 1876. Wagner controló y creó cada aspecto de la tetralogía, desde la música hasta el libreto, el vestuario y la escenografía. Incluso mandó crear su propia sala de conciertos en Bayreuth, el *Festspielhaus*, para que el escenario se adecuara a sus ideas sobre el pensamiento y la cultura musical.

---

<sup>1</sup>Richard Wagner, *Oper und drama*, 1851.

Así, a ojos de compositores posteriores, Wagner había agotado todas las posibilidades de la música tonal, y quizás ya había comenzado el viraje hacia el predominio de la disonancia con su abundante uso del cromatismo, como en el famoso primer acorde del drama musical *Tristan und Isolde* (1865). Consta de las notas Fa, Si, Re# y Sol#, y sus intervalos desde el Fa son una cuarta aumentada, una sexta aumentada y una novena aumentada.

Siguiendo la mentalidad alemana del progreso como un camino ascendente, el paso siguiente para la composición musical debía consistir en deshacerse progresivamente de la tonalidad y desarrollar la «emancipación de la disonancia»<sup>2</sup>. Así fue como Arnold Schoenberg ideó sus teorías del pensamiento musical, y éstas dieron paso a la creación de la atonalidad. [3]

### 2.2. POSROMANTICISMO Y ATONALISMO DE SCHOENBERG

Fuertemente influido por Richard Wagner y Johannes Brahms (1833–1897) desde su adolescencia, Schoenberg comenzó componiendo al estilo posromántico de su época, llevando el cromatismo y la orquestación hasta el extremo. Sin embargo, y no espontáneamente, empezó a buscar en sus composiciones que cada sonido tuviera valor por sí mismo, un valor independiente de su funcionalidad tonal.



Arnold Schoenberg  
(1874–1951)

Para él, la música no estaba intrínsecamente dirigida a una tónica. En las progresiones, lo importante era el paso de un acorde a otro, y no hacia dónde se dirigían éstos. Además, él opinaba que se debían poder utilizar las notas de los modos eclesiásticos libremente, por lo que consideraba las notas no diatónicas tan válidas como las diatónicas. Esto hacía imposible distinguir unas de otras, no pudiendo identificar apenas la tónica. De esta, y de otras muchas formas, Schoenberg conseguía que la jerarquía tonal quedara desestabilizada. [3]

De esta época es su primera obra importante, *Verklärte Nacht* («Noche transfigurada»), Op. 4. Compuesto en 1899, este sexteto de cuerdas está inspirado por el poema homónimo de Richard Dehmel. La música, según su autor, expresa el paseo de un hombre y una mujer en medio del abrazo de la naturaleza. Aunque en la obra

---

<sup>2</sup>Arnold Schoenberg, *Composition with twelve tones*, en *Style and Idea*, 1950.

aún prevalece la armonía tradicional basada en acordes, Schoenberg sitúa al oyente en un terreno de indefinición tonal, no sólo en el plano armónico sino también en el melódico. Además, hace uso del acorde de novena invertido, inexistente hasta entonces y, por tanto, rechazado por la crítica. [4]

Tras pasar por la etapa tonal posromántica, y debido a su convicción en la irrevocabilidad histórica de la evolución de la música hacia el cromatismo total [5], en 1908 Schoenberg se desligó de la tonalidad completamente con el ciclo de canciones *Das Buch der Hängenden Gärten*. A partir de entonces se dedicó a componer fragmentos muy breves cuya estructura era definida por motivos y no por la armonía, como solía ocurrir en formas musicales anteriores<sup>3</sup>. A este periodo en sus composiciones se le llama *atonalidad libre*, aunque cabe destacar que Schoenberg rechazaba fervientemente este término:

*La expresión “música atonal” es de lo más desafortunada – es como llamar a volar “el arte de no caer” o nadar “el arte de no ahogarse”.<sup>4</sup>*

A este periodo pertenece también su famoso ciclo de canciones *Pierrot Lunaire*, Op. 21. Su nombre completo es “Tres veces siete poemas de Pierrot Lunaire de Albert Giraud”, ya que está dividida en 3 grupos de 7 canciones cada uno, cuyos textos son una selección de 21 poemas del ciclo homónimo de Albert Giraud.

Se encuentran en ella abundantes referencias al número 7: Schoenberg hace un uso extensivo de motivos de 7 notas a lo largo de la obra, mientras que el conjunto musical que la interpreta, incluyendo al director, consta de 7 miembros. De hecho, a este conjunto de instrumentos – flauta, clarinete, violín, violonchelo, piano y cantante – se le ha dado el nombre de ensemble Pierrot en su honor. Otros números importantes en la obra son el 3 y el 13. Cada poema consiste de 13 líneas, mientras que la primera línea de cada poema aparece 3 veces: en las líneas 1, 7 y 13.

En esta obra no sólo hay una ausencia total de relaciones tonales, sino que el tratamiento vocal evita también cualquier relación estética con las técnicas tradicionales: es un *Sprechgesang*, un canto hablado. De hecho, Schoenberg se refiere a estas piezas no como canciones, sino como melodramas. [4]

---

<sup>3</sup>La forma sonata es el ejemplo más destacado de estructura basada en la armonía.

<sup>4</sup>A. Schoenberg, *Hauer's Theories*, en *Style and Idea*, 1923.

### 2.3. EL SURGIMIENTO DE UN SISTEMA

Schoenberg no estaba satisfecho con la técnica compositiva que utilizaba, ya que admiraba las obras extensas de los músicos románticos y pensaba que su atonalidad no podía sostener una obra de gran envergadura. Es decir, necesitaba un hilo conductor mejor que los motivos para poder componer obras atonales más largas.

Además, por aquella época sufrió una crisis en muchos aspectos de su vida. En lo personal, su mujer Matilde Zemlinsky acababa de abandonarlo por otro hombre, aunque posteriormente volvería junto al compositor. Y, en lo profesional, sus obras no eran del gusto del público, por lo que no contaba con suficiente dinero para mantener a su familia. Todas estas circunstancias, unidas al desarrollo de la Primera Guerra Mundial, no le permitieron componer muchas obras entre 1914 y 1923.

Tras el final de la guerra, en 1919, Schoenberg fundó la Sociedad para Interpretaciones Musicales Privadas junto a sus discípulos y amigos Alban Berg y Anton von Webern. Schoenberg, Berg y Webern se autodenominaron la Segunda Escuela de Viena en honor al grupo de compositores del siglo XVIII Haydn, Mozart y Beethoven, quienes formaban la Primera Escuela de Viena. Las carreras compositivas de Berg y Webern se desarrollarán en el apartado 5.1.

En la Sociedad para Interpretaciones Musicales Privadas se presentaban músicas contemporáneas en circunstancias que favorecieran su adecuada apreciación. Así se evitaba que dichas obras, al no ser entendidas por el público, fueran inmediatamente rechazadas. Las obras de compositores como Mahler, Debussy, Bartók, Ravel, Strauss y Stravinsky fueron incluidas en los programas de conciertos organizados por la Sociedad.

En este contexto Schoenberg pudo reflexionar sobre sus técnicas compositivas, y al fin publicó en 1923 su ensayo *Método de composición con doce sonidos*, donde se describían por primera vez los axiomas del dodecafonismo: la solución al problema de la atonalidad libre que le había estado atormentando durante una década.

Su primera obra íntegramente dodecafónica, publicada también en 1923, es la Suite para piano Op. 25. Es la pieza más temprana en la que Schoenberg usa series dodecafónicas en cada uno de los movimientos. En dos obras anteriores a ella usa series dodecafónicas, pero en movimientos aislados: la Op. 23, *5 Stücke* (1920–23), en el movimiento de Waltz final; y su *Serenata*, Op. 24, en su Soneto central.

Las series utilizadas en la Suite Op. 25 servirán de ejemplo en este texto, y su tercer movimiento, Musette, será estudiado, analizado y modificado, con el fin de entender una obra dodecafónica en toda su extensión.

## Capítulo 3

# EL SISTEMA DODECAFÓNICO DE SCHOENBERG

### 3.1. LOS POSTULADOS DEL DODECAFONISMO

El dodecafonismo es el sistema compositivo que predetermina las relaciones melódico-armónicas de una obra a partir de una ordenación de las doce notas de la escala cromática, llamada serie, y sus transformaciones [5]. Es decir, que los únicos conjuntos musicales serializados son la melodía y la armonía, mientras que el ritmo, la duración, el timbre y las dinámicas se dejan a discreción del compositor. No serializar el resto de conjuntos será la principal crítica al dodecafonismo por parte de los compositores serialistas que sucedieron a Schoenberg: los compositores de serialismo integral de mediados del siglo XX, como Pierre Boulez (apartado 5.3).

Esta predeterminación dodecafónica, aunque parece en primera instancia excesivamente limitante, permite realizaciones musicales y estilos de composición muy diferentes: Schoenberg daba un tratamiento tradicional a sus obras, ya que aún admiraba las formas clásicas; Berg iba más allá al utilizar series que recordaban a las tríadas tonales; y, en cambio, Webern evitaba radicalmente cualquier asociación con la tradición.

Schoenberg definió su sistema musical a partir de cuatro postulados que, en realidad, se basan en principios matemáticos:

## CAPÍTULO 3

---

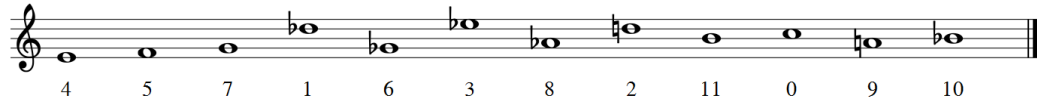
1. La serie [sobre la que se construye la obra dodecafónica] consta de las doce notas de la escala cromática dispuestas en un orden lineal específico.
2. Ninguna nota aparece más de una vez en la serie.

Los dos primeros postulados expresan que una obra dodecafónica fundamenta su estructura sobre una permutación de la escala de doce semitonos. Dicha permutación  $\sigma$  es una biyección del conjunto numerado de las doce notas {Do = 0, Do# = 1, Re = 2, Re# = 3, Mi = 4, Fa = 5, F# = 6, Sol = 7, Sol# = 8, La = 9, La# = 10, Si = 11} consigo mismo, y se representa de esta forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & \sigma(6) & \sigma(7) & \sigma(8) & \sigma(9) & \sigma(10) & \sigma(11) \end{pmatrix}$$

La permutación  $\sigma(m)$ , con  $m \in \mathbb{Z}/(12)^1$ , pertenece al grupo simétrico de orden 12:  $\sigma \in S_{12}$ . Por ejemplo, en la Suite para piano Op. 25 Schoenberg utiliza como serie original en todos los movimientos de la obra la siguiente permutación P:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 6 & 3 & 8 & 2 & 11 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$



3. La serie será expuesta en cualquiera de sus aspectos lineales: original, inversión, retrogradación de la original y retrogradación de la inversión.
4. La serie puede usarse en sus cuatro aspectos desde cualquier nota de la escala.

Los dos últimos postulados amplían los recursos compositivos al admitir la transformación de la serie original mediante *inversión*, *retrogradación*, *inversión retrógrada* y *transposición*<sup>2</sup>. El compositor puede utilizar cualquiera de las transformaciones de una serie al componer su obra dodecafónica. El conjunto de series que puede utilizar, que viene dado por la serie original y todas sus posibles transformaciones, se conoce como *espectro serial*. [6]

---

<sup>1</sup> $\mathbb{Z}/(12) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ , el grupo cíclico de orden 12.

<sup>2</sup>No confundir con un 2-ciclo. Una transposición musical se corresponde con una traslación matemática.

## 3.2. LAS TRANSFORMACIONES DE UNA SERIE

Transformar una serie es matemáticamente equivalente a aplicar una función sobre la serie que asocie su permutación a la permutación transformada. Por tanto, cualquier función transformativa  $\Psi$  se aplica sobre el conjunto de las permutaciones:  $S_{12}$ , el grupo simétrico de orden 12 ( $\Psi : S_{12} \rightarrow S_{12}$ ).

### 3.2.1. TRANSPOSICIÓN

La *transposición*, mencionada en el cuarto postulado, consiste en subir o bajar la serie original un número determinado de semitonos. Por tanto, no se modifican los intervalos entre las notas, sino solamente la altura a la que está la serie. Ya que consideraremos todas las octavas equivalentes, debemos trabajar módulo 12.

La función que transporta  $k$  semitonos,  $T_k(\sigma)$ , se construye sumando o restando  $k$  a  $\sigma$  (módulo 12):

$$\forall m \in \mathbb{Z}/(12) : T_k(\sigma(m)) = \sigma(m) + k \quad \text{con } k \text{ constante};$$

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 9 & 10 & 11 \\ \sigma(0) + k & \sigma(1) + k & \sigma(2) + k & \cdots & \sigma(9) + k & \sigma(10) + k & \sigma(11) + k \end{pmatrix}$$

Una segunda notación para  $T_k(\sigma)$  es  $T(\sigma + k)$ , que será utilizada para los cálculos matemáticos, mientras que la notación  $T_k$  se utilizará cuando la permutación  $\sigma$  sobre la que se aplique la transposición sea redundante. La notación  $\Psi_k$  se usará en sustitución de la composición de la transposición  $T_k$  y otra función  $\Psi$ , en el respectivo orden:

$\Psi_k = \Psi \circ T_k = \Psi(T_k)$ , es decir, transponer primero y aplicar  $\Psi$  después.

Una posible serie transportada sobre la permutación  $P$  de la Suite Op. 25, con  $k = 6$ , es la siguiente serie  $T_6$ :

$$T_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 1 & 7 & 0 & 9 & 2 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



### 3.2.2. RETROGRADACIÓN

La *retrogradación* consiste en leer la serie original desde la nota final hacia atrás, es decir, aplicar a la serie una simetría especular. De este modo, la primera nota irá al último puesto, la segunda al penúltimo, y así sucesivamente.

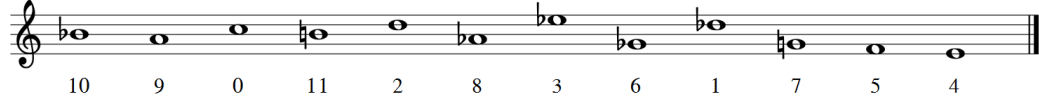
La serie retrógrada se construye de esta forma:

$$\forall m \in \mathbb{Z}/(12) : R(\sigma(m)) = \sigma(11 - m)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \sigma(11) & \sigma(10) & \sigma(9) & \sigma(8) & \sigma(7) & \sigma(6) & \sigma(5) & \sigma(4) & \sigma(3) & \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(0) \end{pmatrix}$$

La serie retrógrada sobre la permutación P de la Suite Op. 25 es la siguiente serie  $R_0$ :

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 9 & 0 & 11 & 2 & 8 & 3 & 6 & 1 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



### 3.2.3. INVERSIÓN

La *inversión* consiste en cambiar la dirección –de ascendente a descendente, y viceversa– de los intervalos entre cada nota de la serie. Si el primer intervalo en la serie original  $\sigma$  es de  $+k$ , el primer intervalo en la serie invertida I será de  $-k \pmod{12}$ , por lo que debemos cambiar el signo de  $\sigma$  para construir I. Además, queremos que la primera nota de ambas series,  $I(0)$  y  $\sigma(0)$ , coincidan, así que debemos transportar la serie  $-\sigma$  un número  $\lambda$  de semitonos para que esta condición se cumpla:

$$I(0) = -\sigma(0) + \lambda = \sigma(0) \implies \lambda = 2\sigma(0)$$

Por tanto, la serie invertida se construye de esta forma:

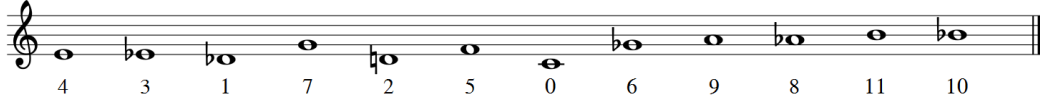
$$\forall m \in \mathbb{Z}/(12) : I(\sigma(m)) = -\sigma(m) + 2\sigma(0)$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 10 & 11 \\ \sigma(0) & -\sigma(1) + 2\sigma(0) & -\sigma(2) + 2\sigma(0) & \dots & -\sigma(10) + 2\sigma(0) & -\sigma(11) + 2\sigma(0) \end{pmatrix}$$



La serie invertida sobre la permutación P de la Suite Op. 25 es la siguiente serie  $I_0$ :

$$I_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 2 & 5 & 0 & 6 & 9 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$



En total, obtendremos 48 series pertenecientes a un solo espectro serial, ya que hay 12 series originales sobre cada una de las doce notas  $\{T_0 = P, T_1, T_2, \dots\}$ , 12 series retrógradas  $\{R_0, R_1, R_2, \dots\}$ , 12 invertidas  $\{I_0, I_1, I_2, \dots\}$  y 12 series sobre las que se aplica tanto la retrogradación como la inversión  $\{RI_0, RI_1, RI_2, \dots\}$ .

### 3.2.4. RETROGRADACIÓN E INVERSIÓN

Si calculamos la retrogradación invertida y la inversión retrógrada, observamos que no conmutan, sino que dan dos series transportadas una de la otra, como se muestra a continuación:

Retrogradación invertida:  $RI(\sigma(m)) = I \circ R(\sigma(m)) = I(R(\sigma(m))) = -R(\sigma(m)) + 2R(\sigma(0)) = -\sigma(11 - m) + 2\sigma(11 - 0) = -\sigma(11 - m) + 2\sigma(11)$

$$RI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 10 & 11 \\ -\sigma(11) + 2\sigma(11) & -\sigma(10) + 2\sigma(11) & \dots & -\sigma(1) + 2\sigma(11) & -\sigma(0) + 2\sigma(11) \end{pmatrix}$$

Inversión retrógrada:  $IR(\sigma(m)) = R \circ I(\sigma(m)) = R(I(\sigma(m))) = R(-\sigma(m) + 2\sigma(0)) = -R(\sigma(m)) + 2\sigma(0) = -\sigma(11 - m) + 2\sigma(0)$

$$IR = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 10 & 11 \\ -\sigma(11) + 2\sigma(0) & -\sigma(10) + 2\sigma(0) & \dots & -\sigma(1) + 2\sigma(0) & -\sigma(0) + 2\sigma(0) \end{pmatrix}$$

Los únicos casos en los que podrían conmutar ocurrirían cuando  $2\sigma(0) \equiv 2\sigma(11) \pmod{12}$ :

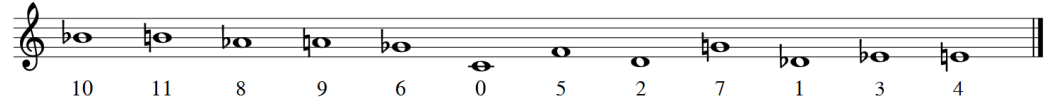
$$12 + 2\sigma(0) = 2\sigma(11); 6 + \sigma(0) = \sigma(11) \implies \sigma(11) - \sigma(0) = 6$$

## CAPÍTULO 3

---

Es decir, cuando la primera y la última nota de la serie original se distancian en 6 semitonos, como es el caso de nuestra permutación P en la Suite Op. 25 de Schoenberg:

$$IR_0 = RI_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 8 & 9 & 6 & 0 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



### 3.2.5. EL GRUPO DE KLEIN

La retrogradación, la inversión y la composición de ambas son funciones involutivas; es decir, aplicando dos veces una transformación se vuelve a la serie original. Si tomamos las series transportadas como equivalentes, el conjunto de series restantes forma un grupo especial llamado grupo de Klein, donde la función identidad Id es el elemento identidad y RI equivale a IR. En general, un grupo de Klein es el formado por cuatro elementos donde cada elemento es inverso de sí mismo. [10]



Felix Klein  
(1849–1925)

$$Id(\sigma) \circ Id(\sigma) = Id(\sigma) = \sigma$$

$$R(\sigma) \circ R(\sigma) = R(11 - \sigma) = 11 - 11 + \sigma = \sigma$$

$$I(\sigma) \circ I(\sigma) = -I(\sigma) + 2I(0) = -(-\sigma + 2\sigma(0)) + 2I(0) = \sigma + 2(I(0) - \sigma(0)) = \sigma + k \equiv \sigma$$

$$RI(\sigma) \circ RI(\sigma) = -RI(11 - \sigma) + 2RI(11) \equiv (11 - 11 + \sigma) + 2\sigma(11) = \sigma - 2\sigma(11) \equiv \sigma$$

El grupo de Klein, llamado así en honor al matemático alemán Felix Klein, es isomorfo al grupo  $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ , producto directo de dos copias del grupo cíclico de orden 2. También es isomorfo a  $A_4$ , el subgrupo alternante del grupo simétrico de orden 4,  $S_4$

### 3.3. MATRICES DODECAFÓNICAS

El espectro serial de cualquier serie puede ordenarse para formar una matriz dodecafónica, la cual contiene todas las series que el compositor puede utilizar en una sola tabla.

He creado un programa informático que devuelve en formato  $\text{\LaTeX}$  la matriz dodecafónica correspondiente a cualquier serie que se introduzca en teclado, además de producir la nomenclatura adecuada para cada serie. El código, escrito en lenguaje C++, está incluido en el Anexo A, página 45, y está creado en base a las fórmulas de construcción de series y a la propiedad de invariancia de intervalos en las transportaciones.

A continuación, se incluye la matriz dodecafónica de la serie P de la Suite Op. 25 de Schoenberg. Mientras que la mayoría de tablas tienen dos filas inferiores, que se corresponden con las distintas nomenclaturas de RI e IR para una misma serie – ya que normalmente no conmutan –, en la matriz de la serie P sí coinciden, como se ha mencionado en el apartado 3.2.4, por lo que solamente se incluye una de las dos.

	I <sub>0</sub>	I <sub>1</sub>	I <sub>3</sub>	I <sub>9</sub>	I <sub>2</sub>	I <sub>11</sub>	I <sub>4</sub>	I <sub>10</sub>	I <sub>7</sub>	I <sub>8</sub>	I <sub>5</sub>	I <sub>6</sub>	
T <sub>0</sub>	4	5	7	1	6	3	8	2	11	0	9	10	R <sub>0</sub>
T <sub>11</sub>	3	4	6	0	5	2	7	1	10	11	8	9	R <sub>11</sub>
T <sub>9</sub>	1	2	4	10	3	0	5	11	8	9	6	7	R <sub>9</sub>
T <sub>3</sub>	7	8	10	4	9	6	11	5	2	3	0	1	R <sub>3</sub>
T <sub>10</sub>	2	3	5	11	4	1	6	0	9	10	7	8	R <sub>10</sub>
T <sub>1</sub>	5	6	8	2	7	4	9	3	0	1	10	11	R <sub>1</sub>
T <sub>8</sub>	0	1	3	9	2	11	4	10	7	8	5	6	R <sub>8</sub>
T <sub>2</sub>	6	7	9	3	8	5	10	4	1	2	11	0	R <sub>2</sub>
T <sub>5</sub>	9	10	0	6	11	8	1	7	4	5	2	3	R <sub>5</sub>
T <sub>4</sub>	8	9	11	5	10	7	0	6	3	4	1	2	R <sub>4</sub>
T <sub>7</sub>	11	0	2	8	1	10	3	9	6	7	4	5	R <sub>7</sub>
T <sub>6</sub>	10	11	1	7	0	9	2	8	5	6	3	4	R <sub>6</sub>
	IR <sub>0</sub>	IR <sub>1</sub>	IR <sub>3</sub>	IR <sub>9</sub>	IR <sub>2</sub>	IR <sub>11</sub>	IR <sub>4</sub>	IR <sub>10</sub>	IR <sub>7</sub>	IR <sub>8</sub>	IR <sub>5</sub>	IR <sub>6</sub>	



## Capítulo 4

# ANÁLISIS DE UNA OBRA DODECAFÓNICA: OP. 25

### 4.1. SERIES UTILIZADAS EN LA SUITE OP. 25

Lo primero que hará un compositor dodecafónico antes de empezar a componer será escoger su serie original. Su elección nunca es una simple cuestión de azar; al contrario, ya que las singularidades de la serie darán un carácter especial a toda la obra. Por ejemplo, el compositor puede escoger una serie con simetrías, y así tendrá series repetidas entre su espectro serial. También puede tener simetrías internas solo en un fragmento de tres o cuatro notas, y de este modo podrá el compositor oscilar entre varias series del espectro que se parezcan entre sí.<sup>1</sup>

En la Suite para Piano Op. 25, Schoenberg escoge su serie P para resaltar el intervalo de tritono ( $n = 6$ ). A continuación, observamos los intervalos crecientes, en unidad de semitono, entre las notas de esta serie:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 5 & 6 & 9 & 3 & 5 & 8 & 6 & 2 & 9 & 11 & 1 & 0 & 9 & 9 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Y observamos que presenta repeticiones triples de los intervalos de tritono 6, de sexta mayor 9 y de segunda menor o semitono 1: los intervalos más disonantes; una repetición doble de cuarta justa 5, y un intervalo de segunda mayor 2; además de

---

<sup>1</sup>Para un estudio completo de las relaciones de similitud entre series se recomienda *On the Similarity of Twelve-Tone Rows*, de Tuukka Ilomäki. [15]

una consecución de intervalos repetida:  $9 - 1 - 9 - 1$ . Como se forma el intervalo de tritono al enlazar la serie original con una serie que empiece por la misma nota, se tiene en cuenta el intervalo de tritono 6 al final. En el dodecafonismo se evitan deliberadamente los intervalos de tercera mayor 4, ya que estos son la base de la eludida armonía tonal.

El intervalo de tritono tiene la particularidad de no modificarse en la inversión y transportación  $k = 6$ , por lo que estos intervalos aparecen en los lugares originales, mientras que en los procedimientos de retrogradación y retrogradación inversa ocupan sus lugares en retrógrado. En particular, Schoenberg utiliza entre los seis movimientos de la Suite solamente las ocho series de todo el espectro serial que cumplen estos requisitos:  $T_0$ ,  $T_6$ ,  $I_0$ ,  $I_6$ ,  $R_0$ ,  $R_6$ ,  $IR_0$  e  $IR_6$ , que podemos observar en el Anexo B, página 49.

Estas series tienen muchos elementos en común: todas comienzan o acaban por  $Mi\sharp$  o por  $Si\flat$ , lo que permite enlazar unas series con otras por medio del unísono o del tritono; se mantienen los intervalos de tritono en sus lugares originales o retrógrados, y coinciden en las dos primeras y las dos últimas notas dos a dos.

Se han realizado estudios – como el de Martha Hyde [11] – en los que se limitan las series utilizadas en la Suite a cuatro:  $T_0$ ,  $T_6$ ,  $I_0$  e  $I_6$ , pero ya que el objetivo de este texto no es analizar la obra entera se dejará esta cuestión para análisis posteriores.

## 4.2. DESCRIPCIÓN DE LA SUITE OP. 25

Schoenberg realiza en la serie P una partición triple; es decir, la serie se divide en tres tetracordios, y cada uno de ellos contiene un intervalo de tritono. El último tetracordio, si se retrograda, consta de las notas  $10 - 9 - 0 - 11$ , que en notación germánica es la secuencia BACH. Esto puede ser un homenaje al compositor Johann Sebastian Bach (1685—1750), ya que Schoenberg admiraba a los grandes compositores anteriores a él por las estructuras formales de sus obras. [7]

Otro posible homenaje a Bach y sus contemporáneos barrocos es precisamente la forma de la obra: es una Suite, género cultivado durante los siglos XVII y XVIII que se compone de una variedad de danzas. La Suite de Schoenberg está formada por seis danzas: un Preludio, una Gavota, una Musette, un Intermezzo – que no tiene influencia barroca sino más bien de Brahms, otro modelo para Schoenberg –, un Minueto con Trío y una Giga. Además, el estilo, la textura – contrapuntística, típicamente barroca – y la estructura de cada danza se corresponden con los estilos, texturas y estructuras de las danzas homónimas del periodo bachiano.

Al componer la obra, Schoenberg trata cada tetracordio como una subunidad individual, y los superpone contra otras series del espectro también divididas, o utiliza sus notas como un solo acorde cuatríada. Estas divisiones no sólo sirven para hacer la serie más reconocible o añadir cohesión a la obra, sino que además facilitan el desarrollo de la serie específicamente en el estilo de cada danza.

### 4.3. ANÁLISIS DE LA MUSETTE

En el tercer movimiento de la Suite para Piano Op. 25, la Musette, Schoenberg recrea la danza barroca que toma su nombre del instrumento homónimo: la *cornamusa*, de la familia de la gaita.

La música compuesta para estos instrumentos consiste en una melodía acompañada por una nota pedal. Schoenberg imita esta textura a lo largo del movimiento mediante la presencia de un bordón sobre el Sol $\sharp$  (nota 7). Esta nota se extrae de cada una de las series utilizadas y se forma con ella un ostinato rítmico en la mano izquierda del piano. Con el resto de sonidos de cada serie, Schoenberg vuelve a emular el estilo de la danza barroca y articula un discurso polifónico a dos voces con ritmos esencialmente cortos.

A partir de la doble barra del compás 9, el Re $\flat$  (nota 1) acompaña a Sol $\sharp$  y ambos crean un doble bordón en la mano izquierda. La elección de esas dos notas está estrechamente relacionada con la tradicional relación de quinta justa formada por Sol $\sharp$  y Re $\sharp$  en la música tonal. Schoenberg sustituye las quintas justas tonales por los intervalos de tritono dodecafónicos, subrayando aún más su «emancipación de la disonancia».

Además de las similitudes texturales, rítmicas y armónicas, la Musette de Schoenberg comparte estructura formal con las danzas barrocas. Y esta semejanza es quizás la más notable, ya que fue la búsqueda de estructura formal lo que inspiró a Schoenberg a desarrollar su método compositivo. La Musette barroca, como todos los movimientos de danza, presenta una estructura binaria con simetría tonal: empieza y acaba por la misma tonalidad, mientras que el centro es zona de desarrollo. Schoenberg despoja de funcionalidad tonal a esa simetría, madre de la forma sonata, y la aplica a su composición dodecafónica.

En este movimiento se pueden diferenciar a simple vista tres secciones, divididas en los compases 9 y 20, debido a cambios de textura, figuración y tempo. En la segunda sección se le añade melodía a la mano izquierda del piano, dejando más camuflado el bordón que en la primera sección, además de que éste se vuelve doble,

## CAPÍTULO 4

---

mientras que vuelve a aparecer claramente en la tercera sección. También en la segunda sección aparece una nueva figuración, que es la semicorchea; y, por último, en los dos compases de división aparecen dos *a tempo*, que marcan el final de las dos primeras secciones tras dos zonas de variabilidad rítmica. [8]

Para que esta estructura tríptica sea una forma binaria, la primera y la última parte deben mantener un parecido, que se observa a través del análisis de las series utilizadas en el movimiento. Estas series son  $T_0$ ,  $T_6$ ,  $I_0$  e  $I_6$ .

Como cada una de estas series es o inversión o transposición  $k = 6$  de otra serie del grupo, las cuatro series forman también un grupo de Klein.  $T_0$  es el elemento identidad, ya que es el resultado de multiplicar cualquier serie sobre sí misma.

En la Musette, Schoenberg hace un uso casi absoluto de la tripartición serial, hasta el punto de individualizar los tetracordios por separado y concederles privilegios seriales, como la retrogradación. Por ejemplo, en el compás 7, en la voz inferior de la mano derecha aparece el tetracordio  $4 - 5 - 2 - 3$ , que es o bien el primer tetracordio de  $IR_6$  o la retrogradación del tercer tetracordio de  $I_6$ , mientras que los otros dos tetracordios de  $I_6$ ,  $10 - 9 - 7^2 - 1$  en la voz superior y  $8 - 11 - 6 - 0$  en la mano izquierda, aparecen en el orden correcto. Entonces no se puede analizar el compás como  $IR_6$ , sino indicar que hay una alteración puntual de  $I_6$ .

Por tanto, es muy complicado analizar esta obra en su totalidad, ya que la flexibilidad en la ordenación de los tetracordios puede generar situaciones muy ambiguas. Debido a estas fragmentaciones y a las variadas combinaciones de tetracordios originales y retrógrados, se escucha un área de desarrollo hacia la sección media del movimiento. En cambio, las series al principio y al final de la pieza se presentan casi íntegramente, como una exposición y reexposición. He aquí un vínculo con la simetría de las formas binarias tonales. [8]

Es más, incluso el orden de las series utilizadas en la primera y en la última sección coinciden, exceptuando dos repeticiones consecutivas y las series  $T_0$  finales, que actúan como una cadencia serial:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 \text{c.1} & T_0 & I_6 & T_6 & I_0 & T_0 & I_0 & T_6 & I_6 & I_6 & & & & \text{c.9} \\
 \text{c.22} & T_0 & I_6 & T_6 & I_0 & T_0 & I_0 & I_0 & T_6 & I_6 & T_0 & T_0 & \text{c.31}
 \end{array}$$

En el Anexo C, página 53, se encuentra el análisis serial completo de la Musette, y en la pista 1 su reproducción con el programa Musescore.

---

<sup>2</sup>La nota 7 aparece como bordón y no en la misma voz que el resto del tetracordio, por lo que su posición es también excepcional.







## Parte II

# **ENEFONISMO**



## Capítulo 5

# SURGIMIENTO DEL SERIALISMO INTEGRAL

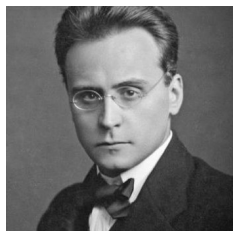
### 5.1. ALBAN BERG Y ANTON WEBERN: LA SEGUNDA ESCUELA DE VIENA



Alban Berg  
(1885–1935)

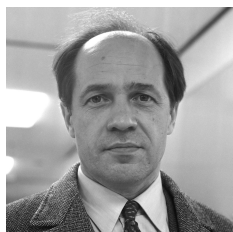
## 5.2. DARMSTADT Y EL SERIALISMO INTEGRAL

## 5.3. PIERRE BOULEZ Y STRUCTURES

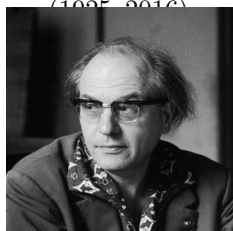


Anton von Webern  
(1883–1945)

## 5.4. OLIVIER MESSIAEN Y LOS MODOS DE TRANSPOSICIÓN LIMITADA



Pierre Boulez  
(1905–2016)



Olivier Messiaen  
(1908–1992)

## Capítulo 6

# MÁS HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

### 6.1. ACCIÓN DE UN GRUPO SOBRE UN CONJUNTO

Dado un grupo  $(G, *)$  y un conjunto  $X$ , la *acción* de  $(G, *)$  sobre  $X$  es una función  $\phi$  que asocia un elemento  $g \in G$  y un elemento  $x \in X$  – el par  $(g, x)$  – a otro elemento  $g \cdot x$  que también pertenece a  $X$  [2].  $\phi : (g, x) \rightarrow g \cdot x$

La función  $\phi$ , expresada mediante la operación  $(\cdot)$ , debe cumplir dos condiciones para ser considerada una acción:

1. Para todo  $x \in X$ , se debe cumplir que  $e \cdot x = x$ , siendo  $e$  el elemento neutro del grupo.
2. Para todo  $x \in X$  y para todo par  $g, h \in G$ , se debe cumplir que  $(g * h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ . La primera operación  $(*)$  es la interna del grupo  $G$ , y la segunda operación  $(\cdot)$  es la acción.

Como ya se ha visto en el apartado 3.2.5, la función identidad  $\text{Id}$ , la inversión  $I$ , la retrogradación  $R$  y la composición de ambas  $RI$  forman un grupo de Klein, que denotaremos  $\Xi$ . Se podrá definir entonces la acción  $\phi$  de este grupo sobre el conjunto de permutaciones de orden  $n$ , tal que  $\phi(\Psi, \sigma) = \Psi \circ \sigma = \Psi(\sigma) = \tau$ , con  $\Psi \in \Xi$  y  $\sigma, \tau \in S_n$ .

## 6.2. ÓRBITAS Y ESTABILIZADORES

Dada una acción de  $(G, *)$  sobre  $X$ , la *órbita* de un determinado elemento  $x_0 \in X$  es el subconjunto de elementos  $x$  de  $X$  que pueden ser alcanzados desde  $x_0$  mediante algún  $g_0 \in G$ . Es decir, todos los  $x$  para los que existe un  $g_0$  que al actuar sobre  $x_0$  da  $x$ . Trivialmente,  $x_0 \in Orb(x_0)$  ya que  $e \cdot x_0 = x_0$ .

$$Orb(x_0) = \{x \in X : \exists g_0 \in G, g_0 \cdot x_0 = x\}$$

Por ejemplo, dada una permutación  $\sigma$ , todas las permutaciones a las que se llega desde  $\sigma$  mediante algún  $\Psi \in \Xi$  – que son las transformaciones de series del apartado 3.2 – conforman la órbita de  $\sigma$ . Por definición, las series a las que se puede llegar desde una serie original conforman su espectro serial, por lo que la órbita es en realidad el espectro serial, tomando las series transpuestas como equivalentes.

Para el mismo  $x_0$  se define su *estabilizador* como el conjunto de elementos  $g \in G$  que fijan  $x_0$ , es decir, que mandan  $x_0$  a sí mismo. Mientras que una órbita es un subconjunto de  $X$ , un estabilizador es un subgrupo de  $G$ . Trivialmente,  $e \in Stab(x) \forall x \in X$ , porque el elemento identidad fija cualquier otro elemento por definición.

$$Stab(x_0) = \{g \in G : g \cdot x_0 = x_0\}$$

Si cada  $g \in G$  llevara a  $x_0$  a un  $x$  distinto, el número de elementos de  $Orb(x_0)$  sería igual al número de elementos de  $G$ . Sin embargo, si un elemento  $g_0 \in G$  fija  $x_0$ , entonces no dará nuevos elementos en la órbita de  $x$ . Por tanto, el tamaño de una órbita ( $|Orb(x_0)|$ ) será el tamaño de  $G$  ( $|G|$ ) entre el número de elementos que fijan  $x_0$ ; es decir, el tamaño de su estabilizador ( $|Stab(x_0)|$ ). Además, es cierto para todo  $x \in X$ . Este es el teorema Órbita-Estabilizador:

$$|Orb(x)| = \frac{|G|}{|Stab(x)|}, \text{ o lo que es lo mismo, } |G| = |Orb(x)| |Stab(x)|$$

Este teorema implica que los tamaños de cada órbita y cada estabilizador son divisores del tamaño del grupo. Como el tamaño del grupo  $\Xi$  es 4, cualquier estabilizador y cualquier órbita tendrán tamaño 1, 2 o 4. En concreto, como  $Id$  está siempre en el estabilizador, para todo  $\sigma$  será de una de estas formas:

$ Stab  = 1$	$\{Id\}$		
$ Stab  = 2$	$\{Id, R\}$	$\{Id, I\}$	$\{Id, RI\}$
$ Stab  = 4$	$\{Id, R, I, RI\}$		



Por ejemplo, una serie  $\sigma$  sin simetrías tendrá una serie distinta para cada una de sus transformaciones. Por tanto, su órbita será  $\{\sigma, R(\sigma), I(\sigma), RI(\sigma)\}$  y su estabilizador será solamente  $\{Id\}$ . Cumple entonces el teorema:  $4 \cdot 1 = 4$ .

### 6.3. EL LEMA DE BURNSIDE

Las órbitas, que son subconjuntos de  $X$ , forman una *partición* de  $X$ . Esto significa que son subconjuntos disjuntos: ningún  $x$  puede estar en dos órbitas distintas. Interesa entonces saber cuántos subconjuntos hay; es decir, el número de órbitas ( $\#Orb$ ). El lema de Burnside<sup>1</sup> afirma que se pueden calcular de esta forma:

$$\#Orb = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)|$$

Por el teorema Órbita-Estabilizador,  $|\text{Stab}(x)| = \frac{|G|}{|Orb(x)|}$ , por lo que la parte derecha se puede expresar así:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Orb(x)|} = \frac{|G|}{|G|} \sum_{x \in X} \frac{1}{|Orb(x)|} = \sum_{x \in X} \frac{1}{|Orb(x)|}$$

Además, como las órbitas forman una partición de  $X$ , la suma sobre  $X$  puede ser dividida en sumas separadas para cada órbita:

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|Orb(x)|} = \sum_{O \in \text{Órbitas}} \left( \sum_{x \in O} \frac{1}{|O|} \right) = \sum_{O \in \text{Órbitas}} 1 = \#Orb \quad \square$$

Este lema permite calcular el número de posibles espectros seriales distintos, ya que el espectro de una serie es igual al espectro de sus series transformadas. Un compositor serialista debe entonces escoger no una serie original, sino el espectro con el que construir la obra. O, más bien, si escoge una serie original está escogiendo el mismo material que si escogiera otra serie de ese mismo espectro.

---

<sup>1</sup>Aunque Burnside demostró este lema en una ocasión, citó a Frobenius como su autor. Sin embargo, Cauchy era conocedor del lema décadas antes. Para no confundirlo con otros lemas que sí son de Burnside, a veces se le llama *el lema que no es de Burnside*.



## Capítulo 7

# LA MATEMATIZACIÓN DEL SERIALISMO

### 7.1. NÚMERO DE ESPECTROS SERIALES

Para contar el número de espectros seriales, vamos a redefinir las funciones transformativas para una longitud serial arbitraria,  $n$ , que será mayor que 2. Para  $n = 0, 1$  y 2 se realizará el cálculo en el apartado 7.2. Además, como las transposiciones siempre son distintas entre sí, siempre pertenecen al mismo espectro. Se tomarán a partir de ahora todas ellas como equivalentes. Por el lema de Burnside:

$$\#Spec = \#Orb = \frac{1}{|\Xi|} \sum_{\sigma \in S_n} |\text{Stab}(\sigma)| = \frac{1}{4} \sum_{\sigma \in S_n} |\text{Stab}(\sigma)|$$

Al calcular con permutaciones se trabajará módulo  $n$ . La retrogradación se define como  $R(\sigma(m)) = \sigma(-1 - m) \forall m \in \mathbb{Z}/(n)$ . La inversión será  $I(\sigma(m)) = -\sigma(m)$ , omitiendo la transposición que ocurría en el dodecafonismo, que servía tan solo para numerar correctamente las series. La retrogradación invertida es, por tanto, la composición de ambas:  $RI(\sigma(m)) = I \circ R(\sigma(m)) = I(R(\sigma(m))) = -\sigma(-1 - m)$ .

El tamaño de los estabilizadores es siempre 1, 2 o 4, por lo que se puede calcular  $\sum |\text{Stab}(\sigma)|$  agrupando todas las permutaciones con igual tamaño de estabilizador. Si  $\#\sigma_i$  es el número de permutaciones cuyos estabilizadores tienen tamaño  $i$ :

$$\sum_{\sigma \in S_n} |\text{Stab}(\sigma)| = 1 \cdot (\#\sigma_1) + 2 \cdot (\#\sigma_2) + 4 \cdot (\#\sigma_4)$$

Primero, se ha de ver que una permutación nunca va a ser igual a su inversa.

$$-\sigma(m) \equiv \sigma(m) \quad \forall m \in \mathbb{Z}/(n) \implies 0 \equiv 2\sigma(m) \implies n \equiv 2\sigma(m) \implies \frac{n}{2} \equiv \sigma(m)$$

Así,  $\sigma(m)$  sería constante para todo  $m \in \mathbb{Z}/(n)$ , lo cual es imposible. Esto implica que ninguna permutación va a tener a I en su estabilizador, por lo que  $\#\sigma_4 = 0$ . Queda entonces calcular cuántas permutaciones son iguales a su retrogradación y cuántas a su retrogradación inversa. La suma de ambas dará  $\#\sigma_2$ .

### 7.1.1. ESTABILIZADORES {ID, R}

Las permutaciones que coinciden con alguna transposición de su retrogradación cumplen, para  $\gamma$  constante:

$$\gamma + \sigma(m) = R(\sigma(m)) = \sigma(-1 - m)$$

Aplicándolo a  $(-1 - m)$ :  $\gamma + \sigma(-1 - m) = \sigma(-1 - (-1 - m)) = \sigma(m)$

De ambas ecuaciones:  $\gamma = \sigma(-1 - m) - \sigma(m) = \sigma(m) - \sigma(-1 - m)$

$$2\sigma(m) \equiv 2\sigma(-1 - m) \implies 2\sigma(m) - 2\sigma(-1 - m) \equiv 0$$

$$2\sigma(m) - 2\sigma(-1 - m) = n \implies \sigma(m) - \sigma(-1 - m) = \frac{n}{2}$$

Entonces  $n$  debe ser par. Cuando  $n$  es impar este tipo de permutaciones no existe. Además, cumplen que sus elementos simétricos se distancian entre sí un intervalo de  $\frac{n}{2}$  unidades: son series con simetría par.

$$\gamma = \sigma(m) - \sigma(-1 - m) = \frac{n}{2}$$

En una serie de longitud  $n$ , existen  $\frac{n}{2}$  intervalos que miden  $\frac{n}{2}$ . Como no importa por cuál de ellos comience la serie, ya que las transportaciones son equivalentes, se fija el primero de los intervalos. Quedan los otros  $\frac{n}{2} - 1$  intervalos por escoger, así que el número de series con simetría par cuenta las permutaciones de  $\frac{n}{2} - 1$  intervalos y las dos posibles posiciones de cada intervalo – creciente y decreciente –. [17] Por ello, el número de series con simetría par es de:

$$2! \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)! = 2 \left(\frac{n-2}{2}\right)! = (n-2)(n-4) \dots = (n-2)!!^1$$

---

<sup>1</sup>Por definición, si  $n$  es par  $n!! = n(n-2)(n-4) \dots 4 \cdot 2$  y si  $n$  es impar  $n!! = n(n-2)(n-4) \dots 3 \cdot 1$ .

### 7.1.2. ESTABILIZADORES {ID, RI}

Las permutaciones que coinciden con alguna transposición de su retrogradación inversa cumplen, para un  $\gamma$  constante:

$$\begin{aligned}\sigma(m) &= \text{RI}(\sigma(m)) + \gamma = -\sigma(-1 - m) + \gamma \\ \gamma &= \sigma(m) + \sigma(-1 - m)\end{aligned}$$

Sus elementos simétricos suman una cantidad constante: son series con simetría impar. Tal y como se ha hecho en el apartado anterior, se puede fijar una de las notas, ya que las transportaciones son equivalentes. Si  $n$  es impar, la nota central es  $\sigma(\frac{n-1}{2})$ , que es igual a  $\sigma(-1 - \frac{n-1}{2})$ . Por tanto,  $\gamma = 2 \cdot \sigma(\frac{n-1}{2})$ . Si se escoge esta nota para ser fijada a 0, entonces  $\gamma = 2 \cdot 0 = 0$ . Es decir,  $\gamma$  puede ser fijada a 0 sin pérdida de generalidad.

Para el resto de notas,  $\sigma(m) = -\sigma(-1 - m)$ . Ya escogida la nota central, permite  $n - 1$  posibilidades para  $\sigma(0)$ . Ya escogidas la nota central, la primera y su simétrica, permiten  $n - 3$  posibilidades para  $\sigma(1)$ , y así sucesivamente hasta llegar a la nota anterior a la central, que es  $\frac{n-3}{2}$ . Por ello, para  $n$  impar, el número de series con simetría impar es de:

$$\begin{aligned}(n-1)(n-3) \dots (n-2 \cdot \frac{n-5}{2} - 1)(n-2 \cdot \frac{n-3}{2} - 1) &= \\ = (n-1)(n-3) \dots (n - (n-5) - 1)(n - (n-3) - 1) &= \\ = (n-1)(n-3) \dots 4 \cdot 2 = (n-1)!!\end{aligned}$$

Si  $n$  es par,  $\sigma(m) \neq \sigma(-1 - m) \forall m \in \mathbb{Z}/(n)$ , ya que no hay elemento central. Sea ahora  $\gamma = 2k$  un número par. Como  $2k \leq n$  y las permutaciones son suprayectivas, para algún  $m$  se cumple que  $\sigma(m) = k$ . Se tiene entonces  $k + \sigma(-1 - m) = 2k \implies \sigma(-1 - m) = k = \sigma(m)$ . Como esto es una contradicción,  $\gamma$  debe ser impar.

Fijando, por ejemplo,  $\sigma(0) = 0$ , se tienen  $\frac{n}{2}$  posibilidades para  $\sigma(-1 - m)$ , es decir, solamente las posibilidades para las que  $\gamma$  es impar. Para  $\sigma(1)$  hay  $(n-2)$  posibilidades, y ahora su simétrico ya viene determinado por el  $\gamma$  escogido. Para  $\sigma(2)$  hay  $(n-4)$ , y así sucesivamente. [17] Por tanto, para  $n$  par, el número de series con simetría impar es de:

$$\begin{aligned}\frac{n}{2} \cdot (n-2)(n-4) \dots (n-2 \cdot \frac{n-4}{2})(n-2 \cdot \frac{n-2}{2}) &= \\ = \frac{n}{2} \cdot (n-2)(n-4) \dots (n - (n-4))(n - (n-2)) &= \\ = \frac{n}{2} \cdot (n-2)(n-4) \dots 4 \cdot 2 = \frac{n}{2} \cdot (n-2)!!\end{aligned}$$

### 7.1.3. SUMA COMPLETA

Como ya se ha podido observar, el número de espectros seriales varía según la paridad de la longitud de las series.

	{Id, I}	{Id, R}	{Id, RI}	$\#\sigma_2$
$n$ impar	0	0	$(n-1)!!$	$(n-1)!!$
$n$ par	0	$(n-2)!!$	$\frac{n}{2} \cdot (n-2)!!$	$\frac{1}{2}(n+2)(n-2)!!$

Una vez se tiene  $\#\sigma_2$ , solo falta calcular  $\#\sigma_1$ . Como las permutaciones contadas  $\#\sigma$  son todas las de  $S_n$  exceptuando las transportaciones,  $\#\sigma = \frac{\#S_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$ . Por otro lado,  $\#\sigma_1 + \#\sigma_2 = \#\sigma$ . Entonces  $\#\sigma_1 = (n-1)! - \#\sigma_2$ .

Recuperando la fórmula del apartado 7.1:

$$\#\text{Spec} = \frac{1}{4} (\#\sigma_1 + 2 \cdot (\#\sigma_2)) = \frac{(n-1)! - \#\sigma_2 + 2\#\sigma_2}{4} = \frac{(n-1)! + \#\sigma_2}{4}$$

Para  $n$  impar:

$$\#\text{Spec} = \frac{(n-1)! + (n-1)!!}{4} = \frac{(n-1)!! \cdot ((n-2)!! + 1)}{4}$$

Para  $n$  par:

$$\#\text{Spec} = \frac{(n-1)! + (\frac{1}{2}(n+2)(n-2)!!)}{4} = \frac{2(n-1)! + (n+2)(n-2)!!}{8}$$

Para  $n = 12$ , es decir, para el dodecafonismo, la última fórmula proporciona el dato de 9985920 espectros seriales a escoger por el compositor. Como ejemplo de conjunto perteneciente al serialismo integral, podemos numerar este conjunto de dinámicas,  $\{\text{pianississimo}, \text{pianissimo}, \text{piano}, \text{mezzoforte}, \text{forte}, \text{fortissimo}, \text{fortississimo}\}$ , del 0 al 6:

$$\Delta = \{ppp, pp, p, mf, f, ff, fff\} \equiv \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \mathbb{Z}/(7)$$

Así, con la fórmula para  $n$  impar, se obtiene que hay 192 espectros seriales con series de longitud 7.

## 7.2. MEDEFONISMO, MONOFONISMO Y DIFONISMO

Con  $n = 0$  se da el caso de medefonismo. El grupo simétrico de orden 0 tiene  $0! = 1$  elemento. Por tanto, hay una sola posible serie,  $\sigma$ , que es la que no tiene ninguna nota. El medefonismo es comúnmente llamado silencio.

$$\sigma = () \quad \begin{array}{c} || \\ \hline || \\ \hline || \end{array}$$

Con  $n = 1$  se da el caso de monofonismo. Con solamente una posible nota, el grupo simétrico de orden 1 tiene  $1! = 1$  elemento. Por tanto, hay una sola posible serie,  $\sigma_0$ , que es igual a su inversa, a su retrogradación y a su retrogradación inversa:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c|c|c} & I_0 & \\ \hline T_0 & 0 & R_0 \\ \hline & IR_0 & \\ \hline & RI_0 & \end{array}$$

Con  $n = 2$  se da el caso de difonismo. Tiene dos posibles notas, así que su grupo simétrico, el de orden 2, tiene  $2! = 2$  elementos. Por tanto, hay dos series distintas,  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$ . Se puede observar que ambas pertenecen al mismo espectro serial, dado que  $\sigma_1 = T_1(\sigma_0)$ . Además, al igual que en el monofonismo, ambas coinciden con sus inversas, incumpliendo la regla general para  $n > 2$  probada en el apartado 7.1.

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c|c|c|c} & I_0 & I_1 & \\ \hline T_0 & 0 & 1 & R_0 \\ T_1 & 1 & 0 & R_1 \\ \hline & IR_0 & IR_1 & \\ \hline & RI_0 & RI_1 & \end{array} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$





## Capítulo 8

# MODIFICACIONES SERIALISTAS

### 8.1. EL VALOR INTRÍNSECO DEL DODE- CAFONISMO

En julio de 1921, tras haber ideado los fundamentos del dodecafonismo, Schoenberg dijo a su discípulo Josef Rufer:

*He realizado un descubrimiento que asegurará la supremacía de la música alemana durante los próximos cien años.*

Durante la mayor parte de su vida, Schoenberg creyó que el público general acabaría aceptando la música dodecafónica del mismo modo que se habían aceptado los sistemas tonales durante siglos. No solo eso, sino que pensaba que transcurridos esos cien años los niños cantarían canciones infantiles dodecafónicas por el mundo.

Para él, la naturalidad del sistema dodecafónico residía en que era el resultado final de un proceso histórico: desde el contrapunto y el desarrollo motivico, practicado por los grandes maestros de la tradición alemana, hasta la disolución de la tonalidad, anticipada por la música postwagneriana e impresionista.

Tras su muerte en 1951 y durante dos décadas más, su sistema compositivo fue venerado por los compositores jóvenes más brillantes, pero después se desvaneció de las salas de conciertos y de la memoria musical colectiva. Hoy en día la música

## CAPÍTULO 8

---

dodecafónica está muerta. Ya solo vive académicamente: como un ejemplo que estudiar del éxito de las vanguardias elitistas del siglo XX, como una antigualla en la vitrina de un museo. Pero musicalmente ya nadie la disfruta, nadie desea escucharla ni tocarla.

¿Qué valor artístico tiene un arte que ya no se practica? Aún más, ¿qué valor tiene un arte que no gusta, no sólo a las mayorías desinformadas, sino incluso a los músicos más conocedores, un arte que solo gusta al propio autor y a su grupo de discípulos? El dodecafonismo emplea los recursos matemáticos con el fin de dotar de una sintaxis a la atonalidad, pero si estos no son identificables a través de la escucha, ¿cuál es entonces su cometido? ¿En qué medida afectan las reglas dodecafónicas al discurso sonoro de una pieza? Apenas es posible distinguir auditivamente una pieza meramente atonal de una dodecafónica. [9]

Si cuando se ideó tuvo un valor intrínseco, fue por haber prescindido de algunas de las preconcepciones musicales más arraigadas, como la melodía, la consonancia o la tonalidad. Pero precisamente por eso el dodecafonismo es desagradable al oído, porque toma la disonancia y la pone al frente de toda la composición. Para Schoenberg, la aprobación del público no era el objetivo de su arte, y, de hecho, el desagrado colectivo era un signo del alto nivel artístico y espiritual al que se encontraba:

*La belleza es una necesidad de los mediocres.*<sup>1</sup>

*El valor de mercado es irrelevante para el valor intrínseco. Un juicio no cualificado puede como máximo decidir el valor de mercado - un valor que puede ser inversamente proporcional al valor intrínseco.*<sup>2</sup>

*Ningún artista, ningún poeta, ningún filósofo y ningún músico, cuyo pensamiento se desenvuelve en la más alta esfera, habrá de descender a la vulgaridad para mostrarse complacientes con un eslogan tal como «Arte para todos». Porque si es arte no será para todos, y si es para todos no será arte.*<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup>A. Schoenberg, *Harmonielehre*, 1922.

<sup>2</sup>A. Schoenberg, *An Artistic Impression* (1909) en *Style and Idea*, 1985.

<sup>3</sup>A. Schoenberg, *New Music, Outmoded Music, Style and Idea*, 1946.

## 8.2. SERIALISMO DE ESCALAS NO CROMÁTICAS

Tras cien años de cambios históricos transcendentales como el desarrollo de la tecnología y la globalización, la definición de arte es muy diferente a la que Schoenberg expresaba en su tiempo. El arte está cada vez más cerca del ciudadano de a pie, y se le intenta explicar y simplificar por todos los medios el arte que no entiende.

Por ello, he decidido experimentar con la idea del dodecafonismo y despojarle de lo que, en mi opinión, provoca el rechazo general: la disonancia. Ya que esta proviene del cromatismo, la idea es utilizar escalas que no tengan intervalos de semitono, y con ellas crear un serialismo de menos notas. Modificaré las notas de una obra dodecafónica ya existente para que se adapte a la nueva escala utilizada, mientras que el ritmo, la duración, el timbre y las dinámicas, que siguen siendo producto del compositor original, se dejan intactas.

Tomando la música debussiana y las músicas orientales como referencia, he escogido la escala pentatónica para aplicarla a la Musette de la Suite para piano Op. 25 de Schoenberg. Para relacionar la escala dodecafónica con la nueva escala, se debe crear una función que relacione las notas de ambos conjuntos. Yo he tomado esta función:

Escala dodecafónica:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Escala pentatónica:	0	0	2	2	4	4	7	7	7	9	9	0

Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
Do	Do	Re	Re	Mi	Mi	Sol	Sol	Sol	La	La	Do

Se puede observar que, ya que 5 no es divisor de 12, no hay una repartición equitativa, por lo que en cada serie habrá notas que aparezcan más que otras. En mi función, las notas repetidas son el Do (nota 0) y el Sol (nota 7). Además, estas notas forman el bordón de la Musette, por lo que tendrá aspecto sonoro de Do Mayor. En el Anexo D, página 57 se encuentra la partitura de la modificación pentatónica, sin incluir las dinámicas por cuestión de simplificación, y en la pista 2 se encuentra la grabación de la misma, creada con el programa Musescore.

Un estudio ulterior muy interesante consistiría en probar con otras funciones que repitieran notas diferentes, o probar con otras escalas como la hexafónica (de tonos enteros) o la heptafónica (las escalas tonales), y sus respectivas funciones posibles, o incluso aplicarlo a diversas obras. La extensión de mi investigación no

## CAPÍTULO 8

---

puede abarcar ese trabajo, además de que se necesitaría un programa que aplicara automáticamente las funciones a la partitura en vez de tener que cambiar cada nota manualmente.

Sin embargo, he hecho una prueba sobre la primera sección de la Musette con una única función de la escala hexafónica y otra de la heptafónica, para así justificar mi elección de la escala pentatónica como la mejor entre las tres.

Con la escala hexafónica habría una repartición equitativa en la función, por lo que la obra seguiría siendo estrictamente serialista y ninguna nota sobresaldría. El problema de esta escala es que tampoco suena natural al oído, como se puede comprobar en la pista 3 (partitura en el Anexo E, página 61), que es la modificación hexafónica de la primera sección de la Musette con la siguiente función:

Escala dodecafónica:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Escala hexafónica:	0	0	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10
Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	
Do	Do	Re	Re	Mi	Mi	Fa#	Fa#	Sol#	Sol#	La#	La#	

Por último, la escala heptafónica tiene el problema de contener dos intervalos de semitono, por lo que la obra modificada suena también disonante. Esto se muestra en la pista 4 (partitura en el Anexo F, página 65), que es la modificación heptafónica de la primera sección de la Musette con la siguiente función:

Escala dodecafónica:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Escala heptafónica:	0	0	2	2	4	5	5	7	7	9	9	11
Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	
Do	Do	Re	Re	Mi	Fa	Fa	Sol	Sol	La	La	Si	

# Anexos



## Anexo A

Código para el cálculo de  
matrices dodecafónicas.

---

```

1 #include <iostream>
2 using namespace std;
3
4 const int N = 12;
5
6 int main() {
7
8     int s[N + 3][N + 2];
9
10    for (int i = 1; i < N + 1; ++i) {
11        cin >> s[1][i];
12        s[i][0] = (N - s[1][i] + s[1][1]) % N;
13        s[i][N + 1] = s[i][0];
14        s[0][i] = (N - s[i][0]) % N;
15        s[N + 1][i] = s[0][i];
16        s[N + 2][i] = (N + s[0][i] + 2 * (s[1][N] - s[1][1])) % N;
17    }
18
19    for (int i = 2; i < N + 1; ++i) {
20        for (int j = 1; j < N + 1; ++j) {
21            s[i][j] = (s[1][j] + s[i][0]) % N;
22        }
23    }
24
25    cout << "\n\$\$\begin{array}{l|}";
26
27    for (int i = 0; i < N; ++i) {
28        cout << 'c';
29    }
30
31    cout << "|r}&";
32
33    for (int i = 1; i < N + 1; ++i){
34        cout << "\\text{I}_{-}" << s[0][i] << "&";
35    }
36
37    cout << "\\\\\\\hline";
38
39    for (int i = 1; i < N + 1; ++i) {
40        cout << "\\text{T}_{-}" << s[i][0] << "&";
41
42        for (int j = 1; j < N + 1; ++j) {
43            cout << s[i][j] << "&";
44        }
45

```



```

46     cout << "\\text{R}_{" << s[i][N + 1] << "}"\\\\";
47 }
48
49 cout << "\\hline&";
50
51 for (int i = 1; i < N + 1; ++i) {
52     cout << "\\text{IR}_{" << s[N + 1][i] << "}&";
53 }
54
55 cout << "\\\\\\\\\\hline&";
56
57 for (int i = 1; i < N + 1; ++i) {
58     cout << "\\text{RI}_{" << s[N + 2][i] << "}&";
59 }
60
61 cout << "\\end{array}$$\\n";
62
63 system("PAUSE");
64
65 return 0;
66 }

```

---



## Anexo B

### Series de la Suite Op. 25.

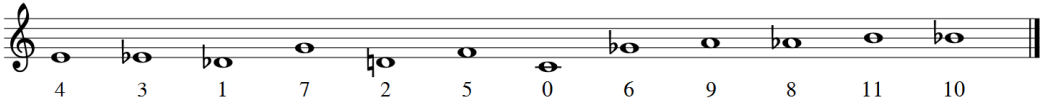
$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 6 & 3 & 8 & 2 & 11 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$



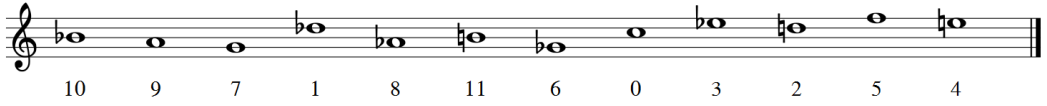
$$T_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 1 & 7 & 0 & 9 & 2 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



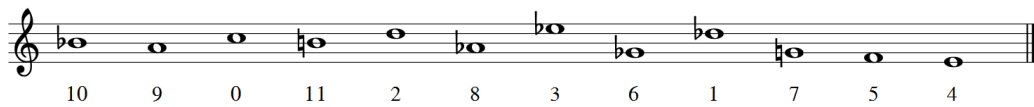
$$I_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 2 & 5 & 0 & 6 & 9 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$



$$I_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 9 & 7 & 1 & 8 & 11 & 6 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



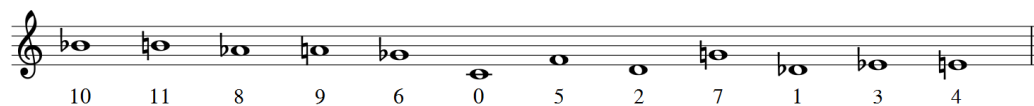
$$R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 9 & 0 & 11 & 2 & 8 & 3 & 6 & 1 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



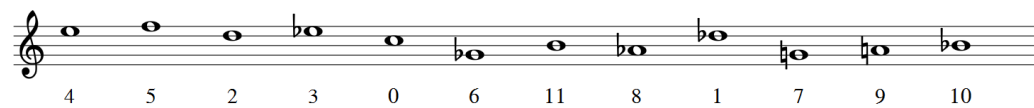
$$R_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 2 & 9 & 0 & 7 & 1 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$



$$IR_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 8 & 9 & 6 & 0 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



$$IR_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 6 & 11 & 8 & 1 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$





## **Anexo C**

### **Análisis serial de la Musette.**

T<sub>0</sub>

T<sub>6</sub>

I<sub>0</sub>

I<sub>6</sub>

Rascher (♩ = 88)

First system of musical notation (measures 1-4). The score is divided into four colored sections: pink (measures 1-2), light blue (measure 3), yellow (measure 4), and light green (measures 5-6). The key signature has two flats (B-flat and E-flat). The time signature is 2/2. Dynamics include *fp* (fortissimo piano) and *f* (forte). There are first and second endings marked with '1' and '2'.

Second system of musical notation (measures 7-10). The score is divided into four colored sections: pink (measures 7-8), light green (measure 9), yellow (measure 10), and light blue (measures 11-12). Dynamics include *ff* (fortississimo), *f* (forte), *pp* (pianissimo), and *p* (piano). There are first and second endings marked with '8'.

8 accel. - - - - rit. - - - - a tempo

Third system of musical notation (measures 13-16). The score is divided into four colored sections: pink (measures 13-14), light blue (measure 15), yellow (measure 16), and light green (measures 17-18). Dynamics include *pp* (pianissimo) and *f* (forte). The tempo markings are *accel.* (accelerando), *rit.* (ritardando), and *a tempo*. There is a first ending marked with '8'.

Fourth system of musical notation (measures 19-22). The score is divided into four colored sections: light green (measures 19-20), pink (measure 21), yellow (measure 22), and light blue (measures 23-24). Dynamics include *pp* (pianissimo) and *p* (piano). There is a first ending marked with '8'.

13 accel.

Fifth system of musical notation (measures 25-28). The score is divided into four colored sections: light green (measures 25-26), light blue (measure 27), yellow (measure 28), and pink (measures 29-30). Dynamics include *f* (forte) and *ff* (fortississimo). The tempo markings are *accel.* (accelerando) and *rit.* (ritardando). There is a first ending marked with '8'.



15 *p* *f* *pp* *poco rit..*

17 18 19

20 *tempo* 21 22 *molto legato*

23 24 25

26 27 28

29 *accel..* 30 *rit.* 31

Gavotte da capo



## Anexo D

### Modificación pentatónica.







## **Anexo E**

### **Modificación hexafónica.**









## **Anexo F**

### **Modificación heptafónica.**







# Bibliografía

- [1] WRIGHT, DAVID. *Mathematics and Music*, American Mathematical Society (2009).
- [2] ARMSTRONG, M. A. Chapter 6: “Permutations”, Chapter 17: “Actions, Orbits, and Stabilizers”, Chapter 18: “Counting Orbits”, *Groups and Symmetry*, New York: Springer-Verlag (1988)
- [3] KINNEY, JAMES P. *Twelve-tone Serialism: Exploring the Works of Anton Webern*, Undergraduate Honors Theses. Paper 1 (2015)
- [4] DÍAZ DE LA FUENTE, ALICIA. *Estructura y significado en la música serial y aleatoria*, Universidad Nacional de Educación a Distancia. Tesis Doctoral en Filosofía (2005)
- [5] Clases y material de Historia de la Música, 5º y 6º de Enseñanzas Profesionales del Conservatorio Profesional de Música Arturo Soria, cursos 2014-15 y 2015-16. Prof. Fernando Delgado García.
- [6] DOMÍNGUEZ ROMERO, MANUEL. *Las Matemáticas en el Serialismo Musical*, Sigma n.24 (2004).
- [7] XIAO, JUNE. *Bach’s Influences in the Piano Music of Four 20th Century Composers*, Indiana University Jacobs School of Music. Doctoral Theses in Music (2014)
- [8] CLERCQ, TREVOR DE. *A Window into Tonality via the Structure of Schoenberg’s “Musette” from the Piano Suite, op. 25*, Theory/Analysis of 20th-Century Music. Prof. David Headlam (2006)
- [9] BASOMBA GARCÍA, DANIEL. *El último Bach y el dodecafonismo como ideal musical: una lectura estética y sociológica*, Universidad Carlos III de Madrid. Tesis Doctoral en Ciencia Política y Sociología (2013)

- [10] BHALERAO, RASIKA. *The Twelve-Tone Method of Composition*, Math 336. Prof. Jim Morrow (2015)
- [11] HYDE, MARTHA. Chapter 4: “Dodecaphonism: Schoenberg”, *Models of Musical Analysis: Early Twentieth-century Music*, Ed. Mark Everist and Jonathan Dunsby. Oxford: Blackwell (1993)
- [12] MORRIS, ROBERT. *Mathematics and the Twelve-Tone System: Past, Present, and Future*, Perspectives of New Music 45.2 (2007)
- [13] COOK, NICHOLAS. Chapter 9: “Analyzing Serial Music”, *A Guide to Musical Analysis*, New York: G. Braziller (1987)
- [14] ROBERTS, GARETH E. *Composing with Numbers: Arnold Schoenberg and His Twelve-Tone Method*, Math/Music: Aesthetic Links (2012).
- [15] ILOMÄKI, TUUKKA. *On the Similarity of Twelve-Tone Rows*, Sibelius Academy (2008).
- [16] HUNTER, DAVID J.; VON HIPPELA, PAUL T. *How Rare Is Symmetry in Musical 12-Tone Rows?*, The American Mathematical Monthly, Vol. 110, No. 2 (2003).
- [17] REINER, DAVID L. *Enumeration in Music Theory*, The American Mathematical Monthly, Vol. 92, No. 1 (1985).