Serialismo y matemáticas - III

Celia Rubio Madrigal

Octubre de 2019

1 Introducción

Este artículo es el tercero y último de la colección "Serialismo y matemáticas". Las músicas serialistas son aquellas que permiten construir castillos con un solo grano de arena: una serie particular, una permutación de notas, dinámicas o timbres. La serie se coloca en la obra secuencialmente, siempre igual o con alguna modificación que la adorne. Y es que para esta música, la serie es el ladrillo y las matemáticas son la pintura con la que decorarlos, ya que las transformaciones que se le puede aplicar a una serie forman preciosas estructuras matemáticas enmarcadas en la Teoría de Grupos.

En el primer artículo [4] nos centramos en el dodecafonismo, en sus orígenes y en comentar una de sus obras. En el segundo artículo [5] ampliamos las definiciones dodecafónicas para encontrar el grupo diédrico, y descubrimos la historia de los discípulos de Schoenberg y del serialismo integral. En esta tercera entrega proporcionaremos herramientas matemáticas relacionadas con **acciones**, **órbitas** y **estabilizadores** de Teoría de Grupos (sección 2), para después contar de dos maneras distintas el número de espectros seriales, que son el número de órbitas del grupo de transformaciones, que un compositor puede utilizar en sus obras (sección 3). Y de esta manera habremos hecho un recorrido a fondo por el serialismo y habremos explorado sus posibilidades musicales y matemáticas.

2 Acciones, órbitas y estabilizadores

2.1 Acciones de grupos sobre conjuntos

Dado un grupo $(G, *)$ y un conjunto X, la *acción* de $(G, *)$ sobre X es una función ϕ que asocia un elemento $g \in G$ y un elemento $x \in X$ − el par (g, x) − a otro elemento $g \cdot x$ que también pertenece a X [1]. $\phi : (g, x) \to g \cdot x$

La acción ϕ, expresada mediante la operación $(\cdot)$, debe cumplir dos condiciones:

1. Para todo $x \in X$, $e \cdot x = x$, siendo e el elemento neutro del grupo.
2. Para todo $x \in X$ y para todo par $g, h \in$ G, se debe cumplir que $(g * h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$. La primera operación $(*)$ es la interna del grupo G, y la segunda operación $(\cdot)$ es la acción.

Como ya se ha visto, las funciones $\{S,\ T,\ V,\ C\}$ forman el grupo diédrico $D_n \times D_n$, con n la longitud de la serie. Se podrá definir entonces la acción ϕ de este grupo sobre el conjunto de permutaciones de orden n, tal que $\phi(\Psi,\ \sigma) = \Psi \circ \sigma = \Psi(\sigma) = \tau$, con $\Psi \in D_n \times D_n$ y $\sigma, \tau \in S_n$.

De igual manera, se puede definir el grupo que forman solamente I y R, que servirá más adelante. Como son dos reflexiones, forman el conocido grupo de Klein —a partir de ahora denotado por Ξ, con elementos Id, I, R e IR.

2.2 Órbitas y estabilizadores

Dada una acción de $(G,\ *)$ sobre X, la *órbita* de un determinado elemento $x_0 \in X$ es el subconjunto de elementos x de X que pueden ser alcanzados desde x_0 mediante algún $g_0 \in G$. Es decir, todos los x para los que existe un g_0 que al actuar sobre x_0 da x. Trivialmente, $x_0 \in Orb(x_0)$ ya que $e \cdot x_0 = x_0$.

$$Orb(x_0) = \{x \in X :\ \exists\ g_0 \in G,\ g_0 \cdot x_0 = x\}$$

Por ejemplo, dada una permutación σ, todas las permutaciones a las que se llega desde σ mediante algún $\Psi \in D_n \times D_n$ conforman la órbita de σ. Por definición, las series a las que se puede llegar desde una serie original conforman su espectro serial, por lo que **la órbita es en realidad el espectro serial**.

Para el mismo x_0 se define su *estabilizador* como el conjunto de elementos $g \in G$ que fijan x_0, es decir, que mandan x_0 a sí mismo. Mientras que una órbita es un subconjunto de X, un estabilizador es un subgrupo de G. Trivialmente, $e \in Stab(x)\ \forall x \in X$, porque el elemento identidad fija cualquier otro elemento por definición.

$$Stab(x_0) = \{g \in G\ :\ g \cdot x_0 = x_0\}$$

Si cada $g \in G$ llevara a x_0 a un x distinto, el número de elementos de $Orb(x_0)$ sería igual al número de elementos de G. Sin embargo, si un elemento $g_0 \in G$ fija x_0, entonces no dará nuevos elementos en la órbita de x. Por tanto, intuitivamente el tamaño de la órbita disminuye. De hecho, el teorema de Órbita–Estabilizador dice que el tamaño de una órbita ($|Orb(x_0)|$) será el tamaño de G ($|G|$) entre el número de elementos que fijan x_0; es decir, el tamaño de su estabilizador ($|Stab(x_0)|$). Además, es cierto para todo $x \in X$.

$$|Orb(x)| = \frac{|G|}{|Stab(x)|}, \text{ o lo que es lo mismo, } |G| = |Orb(x)||Stab(x)|$$

Este teorema implica que los tamaños de cada órbita y cada estabilizador son divisores del tamaño del grupo. Por ejemplo, como el tamaño del grupo Ξ es 4, cualquier estabilizador y cualquier órbita tendrán tamaño 1, 2 o 4. En concreto, como Id está siempre en el estabilizador, para todo σ será de una de estas formas:

$\lvert Stab\rvert = 1$		$\{Id\}$	
$\lvert Stab\rvert = 2$	$\{Id,\ I\}$	$\{Id,\ R\}$	$\{Id,\ IR\}$
$\lvert Stab\rvert = 4$		$\{Id,\ I,\ R,\ IR\}$	

Una serie σ sin simetrías tendrá una serie distinta para cada una de sus transformaciones. Por tanto, su órbita será $\{\sigma,\ R(\sigma),\ I(\sigma),\ IR(\sigma)\}$ y su estabilizador será solamente $\{Id\}$. Cumple entonces el teorema: $4 \cdot 1 = 4$.

2.3 El lema de Burnside

Las órbitas, que son subconjuntos de X, forman una *partición* de X. Esto significa que son subconjuntos disjuntos: ningún x puede estar en dos órbitas distintas. Interesa entonces saber cuántos subconjuntos hay; es decir, el número de órbitas ($\#Orb$). El lema de Burnside afirma que se pueden calcular así:

$$\#Orb = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X} |Stab(x)|$$

Se prueba de esta forma: por el teorema de Órbita–Estabilizador, $|Stab(x)| = \frac{|G|}{|Orb(x)|}$, por lo que la parte derecha se puede expresar así:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in X} |Stab(x)| = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X} \frac{|G|}{|Orb(x)|} = \sum_{x\in X} \frac{1}{|Orb(x)|}$$

Como las órbitas forman una partición de X, la suma sobre todo el conjunto X puede ser dividida en sumas separadas para cada órbita. Además, si por cada elemento de una órbita se suma el inverso del número de elementos de la órbita, esa suma dará uno. Solo queda ahora sumar uno por cada órbita.

$$\sum_{x\in X} \frac{1}{|Orb(x)|} = \sum_{O\in \text{Órbitas}} \left(\sum_{x\in O} \frac{1}{|O|}\right) = \sum_{O\in \text{Órbitas}} 1 = \#Orb \qquad \square$$

Este lema permite calcular el número de posibles espectros seriales distintos, ya que el espectro de una serie es igual al espectro de sus series transformadas. Un compositor serialista debe entonces escoger no una serie original, sino el espectro con el que construir la obra. O, más bien, si escoge una serie original está escogiendo el mismo material que si escogiera otra serie de ese mismo espectro.

3 Conteo de espectros seriales

3.1 Espectros de las funciones {I, T, R}

Es interesante conocer el número de espectros seriales distintos que un compositor puede escoger. Al fin y al cabo, es irrelevante qué serie se escoge como la original dentro de su espectro serial, ya que produce el mismo material compositivo que cualquiera de su mismo espectro.

Para calcular el número de espectros seriales se redefinirán las funciones transformativas para una longitud serial arbitraria, n, que será mayor que 2. Para $n = 0,\ 1$ y 2 se realizará el cálculo en el apartado 3.3.

Además, como las transposiciones siempre son distintas entre sí, siempre pertenecen al mismo espectro. Se tomarán a partir de ahora todas ellas como equivalentes, de manera que solo se necesita hacer el cálculo para $\{I,\ R\}$.

Al calcular con permutaciones se trabajará módulo n. La retrogradación sigue siendo $R(\sigma(m)) = \sigma(-1-m)$. La inversión será $I(\sigma(m)) = -\sigma(m)$, omitiendo la transposición habitual, ya que se toman las series transpuestas como equivalentes. De esta forma $-\sigma(m) + 2\sigma(0) \equiv -\sigma(m)$. La retrogradación invertida es, por tanto, la composición de ambas: $RI(\sigma(m)) = I \circ R(\sigma(m)) = I\left(R(\sigma(m))\right) = -\sigma(-1-m)$.

La retrogradación, la inversión y la composición de ambas cumplen que al aplicarlas dos veces se vuelve a la serie original. En teoría de grupos se dice que tienen *orden 2*. Entonces $\{Id,\ I,\ R,\ IR\}$ forma el ya mencionado grupo de Klein (Ξ), donde $RI \equiv IR$, ya que estamos tomando las series transpuestas como equivalentes.

En general, un grupo de Klein es el formado por cuatro elementos donde cada elemento es inverso de sí mismo. El grupo de Klein, llamado así en honor al matemático alemán Felix Klein, es el grupo $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$, producto directo de dos grupos cíclicos de orden 2.

Por el lema de Burnside:

$$\#\text{Espectros} = \frac{1}{|\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)|} \sum_{\sigma \in S_n} |Stab(\sigma)| = \frac{1}{4} \sum_{\sigma \in S_n} |Stab(\sigma)|$$

Es decir, se deben calcular para cada posible serie $\sigma \in S_n$ cuántas funciones transformativas lo dejan igual o equivalente bajo transposición.

Como los estabilizadores son subgrupos, por el teorema de Lagrange su tamaño debe ser divisor del tamaño del grupo total. Entonces se pueden agrupar los estabilizadores por sus tamaños: 1, 2 o 4, y así calcular $\sum |Stab(\sigma)|$ agrupando todas las permutaciones con igual tamaño de estabilizador. Si $\#\sigma_i$ es el número de permutaciones cuyos estabilizadores tienen tamaño i:

$$\sum_{\sigma \in S_n} |Stab(\sigma)| = 1 \cdot (\#\sigma_1) + 2 \cdot (\#\sigma_2) + 4 \cdot (\#\sigma_4)$$

Primero, se ha de ver que una permutación nunca va a ser igual ni equivalente mediante transposiciones a su inversa.

$$\begin{aligned} -\sigma(m) \equiv \sigma(m) &\iff \\ 0 \equiv 2\sigma(m) &\iff \\ n \equiv 2\sigma(m) &\iff \\ \frac{n}{2} \equiv \sigma(m) & \end{aligned}$$

Así, $\sigma(m)$ sería constante para todo $m \in \mathbb{Z}/(n)$, lo cual es imposible. Esto implica que ninguna permutación va a tener a I en su estabilizador, por lo que $\#\sigma_4 = 0$. Queda entonces calcular cuántas permutaciones son equivalentes a su retrogradación y cuántas a su retrogradación inversa. La suma de ambas dará $\#\sigma_2$.

3.1.1 Elementos estables mediante $\boldsymbol{R}$

Las permutaciones que coinciden con alguna transposición de su retrogradación cumplen, para γ constante:

$$\gamma + \sigma(m) = R(m) = \sigma(-1-m)$$

Aplicándolo a $(-1-m)$: $\gamma + \sigma(-1-m) = \sigma(m)$

De ambas ecuaciones: $\quad \gamma = \sigma(-1-m) - \sigma(m) = \sigma(m) - \sigma(-1-m)$

$2\sigma(m) \equiv 2\sigma(-1-m) \implies 2\sigma(m) - 2\sigma(-1-m) \equiv 0$

$2\sigma(m) - 2\sigma(-1-m) = n \implies \sigma(m) - \sigma(-1-m) = \frac{n}{2}$

Entonces n debe ser par. Cuando n es impar este tipo de permutaciones no existe. Además, cumplen que sus elementos simétricos se distancian entre sí un intervalo de $\frac{n}{2}$ unidades: son series con simetría par.

$$\gamma = \sigma(m) - \sigma(-1-m) = \frac{n}{2}$$

En una serie de longitud n, existen $\frac{n}{2}$ intervalos que miden $\frac{n}{2}$. Como no importa por cuál de ellos comience la serie, ya que las transportaciones son equivalentes, se fija el primero de los intervalos. Quedan los otros $\frac{n}{2}-1$ intervalos por escoger, así que el número de series con simetría par cuenta las permutaciones de $\frac{n}{2}-1$ intervalos y las dos posibles posiciones de cada intervalo —creciente y decreciente [3]—. Por ello, el número de series con simetría par es de:

$$2! \cdot \left(\frac{n}{2}-1\right)! = 2\left(\frac{n-2}{2}\right)! = (n-2)(n-4)\ldots = (n-2)!!$$

Por definición, si n es par $n!! = n(n-2)(n-4)\ldots 4\cdot 2$ y si n es impar $n!! = n(n-2)(n-4)\ldots 3\cdot 1$.

3.1.2 Elementos estables mediante $\boldsymbol{RI}$

Las permutaciones que coinciden con alguna transposición de su retrogradación inversa cumplen, para un γ constante:

$$\sigma(m) = RI(\sigma(m)) + \gamma = -\sigma(-1-m) + \gamma$$

$$\gamma = \sigma(m) + \sigma(-1-m)$$

Sus elementos simétricos suman una cantidad constante: son series con simetría impar. Tal y como se ha hecho en el apartado anterior, se puede fijar una de las notas, ya que las transportaciones son equivalentes. Si n es impar, la nota central es $\sigma(\frac{n-1}{2})$, que es igual a $\sigma(-1-\frac{n-1}{2})$. Por tanto, $\gamma = 2\cdot\sigma(\frac{n-1}{2})$. Si se escoge esta nota para ser fijada a 0, entonces $\gamma = 2\cdot 0 = 0$. Es decir, γ puede ser fijada a 0 sin pérdida de generalidad.

Para el resto de notas, $\sigma(m) = -\sigma(-1-m)$. Ya escogida la nota central, permite $n-1$ posibilidades para $\sigma(0)$. Ya escogidas la nota central, la primera y su simétrica, permiten $n-3$

posibilidades para $\sigma(1)$, y así sucesivamente hasta llegar a la nota anterior a la central, que es $\frac{n-3}{2}$. Por ello, para n impar, el número de series con simetría impar es de:

$$(n-1)(n-3)\dots(n-2\cdot\frac{n-5}{2}-1)(n-2\cdot\frac{n-3}{2}-1) =$$
$$= (n-1)(n-3)\dots(n-(n-5)-1)(n-(n-3)-1) =$$
$$= (n-1)(n-3)\dots 4\cdot 2 = (n-1)!!$$

Si n es par, $\sigma(m) \neq \sigma(-1-m)\ \forall m \in \mathbb{Z}/(n)$, ya que no hay elemento central. Sea ahora $\gamma = 2k$ un número par. Como $2k \leq n$ y las permutaciones son suprayectivas, para algún m se cumple que $\sigma(m) = k$. Se tiene entonces $k + \sigma(-1-m) = 2k \implies \sigma(-1-m) = k = \sigma(m)$. Como esto es una contradicción, γ debe ser impar.

Fijando, por ejemplo, $\sigma(0) = 0$, se tienen $\frac{n}{2}$ posibilidades para $\sigma(-1-m)$, es decir, solamente las posibilidades para las que γ es impar. Para $\sigma(1)$ hay $(n-2)$ posibilidades, y ahora su simétrico ya viene determinado por el γ escogido. Para $\sigma(2)$ hay $(n-4)$, y así sucesivamente [3]. Por tanto, para n par, el número de series con simetría impar es de:

$$\frac{n}{2}\cdot(n-2)(n-4)\dots(n-2\cdot\frac{n-4}{2})(n-2\cdot\frac{n-2}{2}) =$$
$$= \frac{n}{2}\cdot(n-2)(n-4)\dots(n-(n-4))(n-(n-2)) =$$
$$= \frac{n}{2}\cdot(n-2)(n-4)\dots 4\cdot 2 = \frac{n}{2}\cdot(n-2)!!$$

Suma completa

Como ya se ha podido observar, el número de espectros seriales varía según la paridad de la longitud de las series.

	$\{Id,\ I\}$	$\{Id,\ R\}$	$\{Id,\ RI\}$	$\#\sigma_2$
n impar	0	0	$(n-1)!!$	$(n-1)!!$
n par	0	$(n-2)!!$	$\frac{n}{2}\cdot(n-2)!!$	$\frac{1}{2}(n+2)(n-2)!!$

Una vez se tiene $\#\sigma_2$, solo falta calcular $\#\sigma_1$. Como las permutaciones contadas $\#\sigma$ son todas las de S_n exceptuando las transportaciones, $\#\sigma = \frac{\#\mathrm{S}_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$. Por otro lado, $\#\sigma_1 + \#\sigma_2 = \#\sigma$. Entonces $\#\sigma_1 = (n-1)! - \#\sigma_2$.

Recuperando la fórmula del apartado 3.1:

$$\#\text{Espectros} = \frac{1}{4}\left(\#\sigma_1 + 2\cdot(\#\sigma_2)\right) = \frac{(n-1)! + \#\sigma_2}{4}$$

Para n impar:

$$\frac{(n-1)! + (n-1)!!}{4} = \frac{(n-1)!!\cdot((n-2)!!+1)}{4}$$

Para n par:

$$\frac{(n-1)! + \left(\frac{1}{2}(n+2)(n-2)!!\right)}{4} = \frac{2(n-1)! + (n+2)(n-2)!!}{8}$$

Para $n = 12$, es decir, para el dodecafonismo, la última fórmula proporciona el dato de 9985920 espectros seriales a escoger por el compositor.

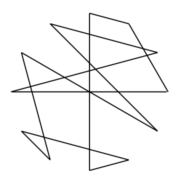
Como ejemplo perteneciente al serialismo integral, podemos numerar las dinámicas del 0 al 6:

$$\{ppp,\ pp,\ p,\ mf,\ f,\ ff,\ fff\} \equiv \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} = \mathbb{Z}/(7)$$

Así, con la fórmula para n impar, se obtiene que hay 192 espectros seriales con series de longitud 7.

3.2 Espectros del grupo $D_n \times D_n$

Este apartado es una explicación detallada del artículo [2]. La secuencia de números dada por las fórmulas que obtendremos se encuentra en la OEIS: `https://oeis.org/A000940`.



Ahora calcularemos los espectros formados mediante todas las transformaciones del grupo generado por $\{S,\ T,\ V,\ C\}$; es decir, por $D_n \times D_n$. Volviendo a la representación mediante diagramas de reloj, el problema es equivalente a averiguar cuántos diagramas distintos, sin números ni flechas, se pueden dibujar. La flecha indica lo transformado por V y C, mientras que los números indican lo transformado por S y T. Un diagrama sin estos dos elementos representa entonces todo un espectro serial. Â¿Cuántos diagramas esencialmente distintos hay? De nuevo, por el lema de Burnside:

$$\#\text{Espectros} = \frac{1}{|D_n \times D_n|} \sum_{\sigma \in S_n} |Stab(\sigma)| = \frac{1}{2n \cdot 2n} \sum_{\sigma \in S_n} |Stab(\sigma)|$$

En vez de expresar el sumatorio como “para cada σ, el número de Ψ que fijan σ”, se puede expresar como “para cada Ψ, el número de σ fijados por Ψ”. La fórmula queda de esta manera:

$$\#\text{Espectros} = \frac{1}{4n^2} \sum_{\Psi \in D_n \times D_n} Fij(\Psi)$$

Ahora hay que averiguar para cada elemento de $D_n \times D_n$ cuántas series estabiliza. Por ejemplo, trivialmente no hay permutaciones estables mediante C y V solamente.

3.2.1 Elementos estables mediante T

Los elementos estables mediante T^k son a los que, tras aplicar una rotación de $\theta_k = \frac{2\pi k}{n}$, para $1 \leq k \leq n$, quedan igual. Por tanto, los sumandos que aportan a la suma total son $\sum_{k=1}^{n} Fij(\theta_k)$.

Por otro lado, si $1 \leq p, q \leq n$ y $gcd(p,n) = gcd(q,n)$ entonces $Fij(\theta_p) = Fij(\theta_q)$, ya que por el lema de Bézout lo que genera la rotación θ_p es igual a lo que genera la rotación $\theta_{gcd(p,n)}$. Esto permite que se puedan agrupar los sumandos con igual máximo común divisor con respecto a n. Es decir, $\sum_{k=1}^{n} Fij(\theta_k) = \sum_{d|n} (\mathcal{C} \cdot Fij(\theta_d))$, con d divisor de n. Por ejemplo, si $n = 6$:

$$\begin{aligned}
&Fij(\theta_1) + Fij(\theta_2) + Fij(\theta_3) + Fij(\theta_4) + Fij(\theta_5) + Fij(\theta_6) = \\
&Fij(\theta_1) + Fij(\theta_2) + Fij(\theta_3) + Fij(\theta_2) + Fij(\theta_1) + Fij(\theta_6) = \\
&2 \cdot Fij(\theta_1) + 2 \cdot Fij(\theta_2) + 1 \cdot Fij(\theta_3) + 1 \cdot Fij(\theta_6)
\end{aligned}$$

Ahora queremos encontrar el coeficiente $\mathcal{C}$ de $Fij(\theta_d)$, es decir, el número de $k \leq n$ con igual máximo común divisor d. Pero que $k \leq n$ y $gcd(k,n) = d$ es equivalente a que $\frac{k}{d} \leq \frac{n}{d}$ y $gcd\left(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$. Por tanto, el número de k con máximo comun divisor d es $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$. La función $\varphi(x)$ se llama la función *phi* de Euler, y muestra precisamente la cantidad de números menores que él y coprimos con él. Entonces $\sum_{k=1}^{n} Fij(\theta_k) = \sum_{d|n} \left(\varphi(\frac{n}{d}) \cdot Fij(\theta_d)\right)$.

Para calcular $Fij(\theta_d)$ hay que analizar cómo se construyen los diagramas invariantes respecto a una rotación. Estos diagramas deben tener varios *ciclos* iguales entre sí —para que queden invariantes al rotarlos— pero cada uno desde un punto distinto: desde cada múltiplo de d. El número de ciclos es, por tanto, $\frac{n}{d}$.

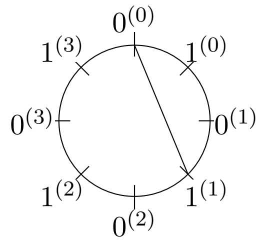
Al construir uno de estos diagramas, se escoge la primera nota entre las n. Después se escoge la segunda, pero no se pueden escoger los vértices múltiplos de d (de los que hay $\frac{n}{d}$), ya que van a ser el comienzo de los sucesivos ciclos. Hay entonces $n - \frac{n}{d}$ posibilidades. Después se escoge la tercera, pero sin escoger los múltiplos de d ni los múltiplos de d + la segunda posición. Hay $n - 2 \cdot \frac{n}{d}$ posibilidades, y así sucesivamente hasta terminar el primer ciclo:

$$n\left(n - \frac{n}{d}\right)\left(n - \frac{2n}{d}\right)\cdots\left(n - \frac{(d-1)n}{d}\right) =$$

$$= n^d \left(1 - \frac{1}{d}\right)\left(1 - \frac{2}{d}\right)\cdots\left(1 - \frac{d-1}{d}\right) =$$

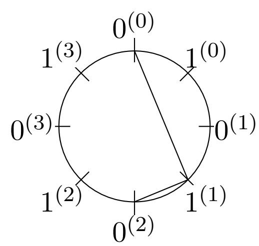
$$= n^d \left(\frac{d-1}{d}\right)\left(\frac{d-2}{d}\right)\cdots\left(\frac{1}{d}\right) = n^d \cdot \frac{(d-1)!}{d^{d-1}} \cdot \frac{d}{d} = \left(\frac{n}{d}\right)^d \cdot d!$$

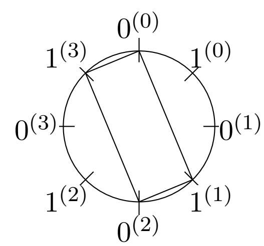
Por ejemplo, si $d = 2$ y $n = 8$, supongamos que escogemos el punto $0^{(0)}$ como el primero. Después, si cogiéramos alguno de los puntos $0^{(*)}$ luego no podríamos tener simetría al rotarlo un ángulo de θ_2. Entonces hay que escoger alguno de los $1^{(*)}$. Supongamos que es $1^{(1)}$. En este ejemplo nuestro *ciclo* quedaría de la siguiente manera:



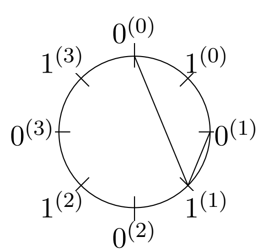
Para escoger el segundo ciclo, su primera nota debe caer en el conjunto de vértices múltiplos de d —de los que hay $\frac{n}{d}$. En el ejemplo serían los $0^{(*)}$. Sin embargo, no podría ser cualquier múltiplo, ya que si se escoge uno con posición no coprima, el polígono se cerraría antes de tiempo sin pasar por todos los vértices. Entonces hay que escoger entre los vértices coprimos, de los que hay $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$. Tras esto el polígono está totalmente determinado, y se puede formar de $\sum\limits_{d|n}\left(\varphi^2(\frac{n}{d})\cdot\left(\frac{n}{d}\right)^d\cdot d!\right)$ maneras.

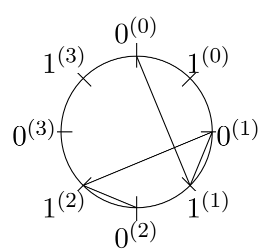
En nuestro ejemplo, si escogemos el siguiente comienzo del ciclo como el $0^{(2)}$, como 2 no es coprimo con $\frac{n}{d}=4$, quedaría de esta manera:

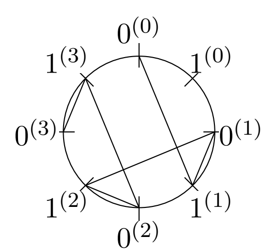


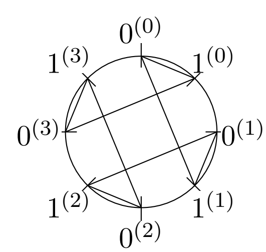


Efectivamente, el diagrama se cierra antes de pasar por todos los vértices. En cambio, si escogemos $0^{(1)}$:

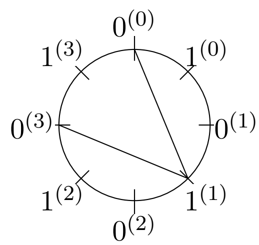


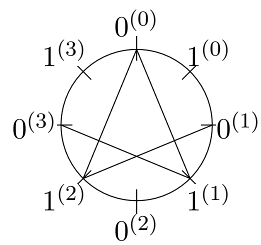


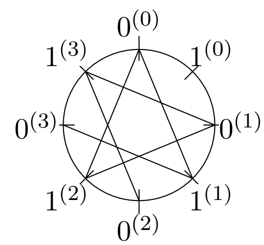


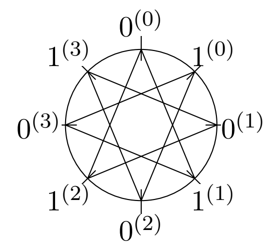


Y con $0^{(3)}$:

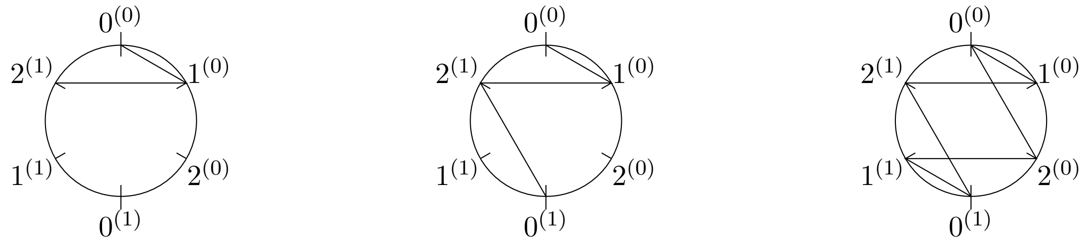




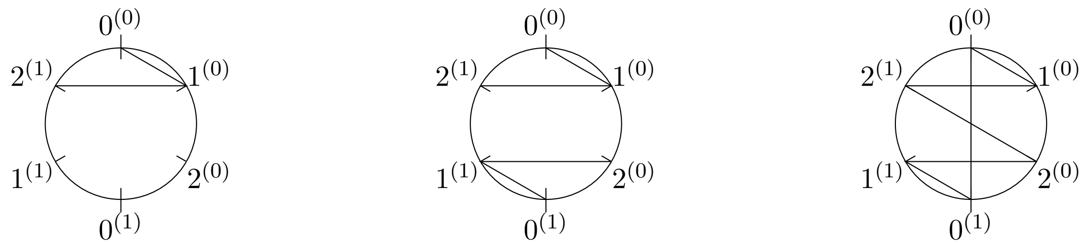




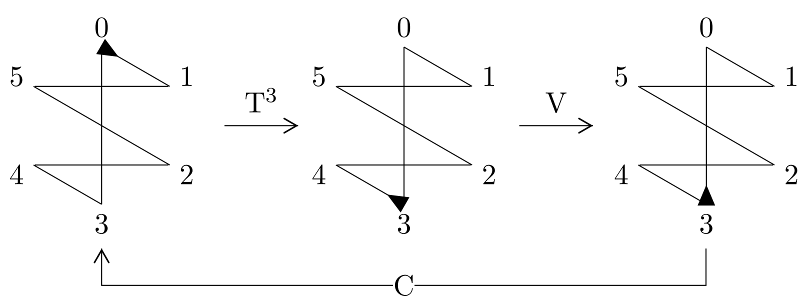
Sea $d=3$ y $n=6$. Escogiendo el primer número como $0^{(0)}$, el segundo como $1^{(0)}$ y el tercero como $2^{(1)}$, no queda más remedio que escoger como comienzo del segundo ciclo el $0^{(1)}$.



Pero también podría aparecer este mismo comienzo con la parte final dada la vuelta, simétrica, de esta manera: $0^{(0)}$, $1^{(0)}$, $2^{(1)}$, $2^{(0)}$, $1^{(1)}$, $0^{(1)}$. Esta construcción no está incluida en lo descrito anteriormente, y sin embargo es invariante con respecto a T, V y C a la vez.



Y es que con n par, al rotar $\theta_{n/2}$ el diagrama, éste puede llegar con la orientación cambiada. Esto puede ocurrir cuando haya una diagonal; es decir, cuando entre dos notas haya un intervalo de $\frac{n}{2}$.



Se escoge el primer punto de entre $\frac{n}{2}$ posibilidades. No son n ya que saldría la misma figura si se escoge el punto antipodal. Con una rotación de $\theta_{n/2}$, el primer ciclo se escoge igual que antes, de $\left(\frac{n}{n/2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2}! = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2}!$ maneras. Y con esto ya queda la figura determinada. Esto lleva a las $\frac{n}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2}!$ formas de dibujar un polígono con las características buscadas.

3.2.2 Elementos estables mediante S

Los elementos estables mediante S son aquellos que quedan invariantes mediante reflexiones. En este punto se ha de separar por paridad de n.

Para n impar, existen n reflexiones para cada uno de los ejes de simetría que pasan por cada vértice. Después, hay n formas de escoger el primer vértice de la secuencia. Ahora hay $\frac{n-1}{2}$ parejas de vértices; se escoge los primeros miembros entre ellos de $2^{\frac{n-1}{2}}$ formas, tras lo cual éstos se ordenan de $\frac{n-1}{2}!$ formas. Esto da un resultado de $n^2 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n-1}{2}!$ polígonos invariantes.

Para n par se tienen dos simetrías: con ejes que pasan por vértices y con ejes que pasan por lados. De manera similar a la anterior, se escoge el eje, el primer vértice, los primeros miembros de las parejas de vértices y se ordenan. Para las simetrías con ejes que pasan por vértices, da un resultado de $\frac{n^2}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$. Para las simetrías con ejes que pasan por lados, da un resultado de $\frac{n^2}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{n}{2}!$.

Suma completa

En resumen, estos a continuación son los numeradores $\sum Fij(\Psi)$. El resultado final del número de diagramas posibles, o espectros seriales distintos, es dicho numerador entre $4n^2$, el tamaño del grupo.

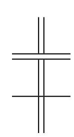
	***n* IMPAR**
Rotación	$\sum_{d\mid n} \left(\varphi^2(\frac{n}{d}) \cdot \left(\frac{n}{d}\right)^d \cdot d!\right)$
Reflexión	$n^2 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n-1}{2}!$
	$\sum_{d\mid n} \left(\varphi^2(\frac{n}{d}) \cdot \left(\frac{n}{d}\right)^d \cdot d!\right) + n^2 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n-1}{2}!$

	***n* PAR**
Rotación I	$\sum_{d\mid n} \left(\varphi^2(\frac{n}{d}) \cdot \left(\frac{n}{d}\right)^d \cdot d!\right)$
Rotación II	$\frac{n}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2}!$
Reflexión vértices	$\frac{n^2}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$
Reflexión lados	$\frac{n^2}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{n}{2}!$
	$\sum_{d\mid n} \left(\varphi^2(\frac{n}{d}) \cdot \left(\frac{n}{d}\right)^d \cdot d!\right) + \frac{n(n+6)}{4} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2}!$

3.3 Medefonismo, monofonismo y difonismo

Con $n = 0$ se da el caso de medefonismo. El grupo simétrico de orden 0 tiene $0! = 1$ elemento. Por tanto, hay una sola posible serie, σ, que es la que no tiene ninguna nota. El medefonismo es comúnmente llamado silencio.

$$\sigma = ()$$



Con $n = 1$ se da el caso de monofonismo. Con solamente una posible nota, el grupo simétrico de orden 1 tiene $1! = 1$ elemento. Por tanto, hay una sola posible serie, σ_0, que es igual a su inversa, a su retrogradación y a su retrogradación inversa:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

	I_0	
T_0	0	R_0
	IR_0	
	RI_0	

Con $n = 2$ se da el caso de difonismo. Tiene dos posibles notas, así que su grupo simétrico, el de orden 2, tiene $2! = 2$ elementos. Por tanto, hay dos series distintas, σ_0 y σ_1. Se puede observar que ambas pertenecen al mismo espectro serial, dado que $\sigma_1 = T^1(\sigma_0)$. Además, al igual que en el monofonismo, ambas coinciden con sus inversas, incumpliendo la regla general para $n > 2$ probada en el apartado 3.1.

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

	I_0	I_1	
T_0	0	1	R_0
T_1	1	0	R_1
	IR_0	IR_1	
	RI_0	RI_1	

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bibliografía

[1] Mark A. Armstrong. *Groups and Symmetry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. Chapter 6: "Permutations". Chapter 17: "Actions, Orbits, and Stabilizers". Chapter 18: "Counting Orbits". `https://books.google.es/books?id=f2AFCAAAQBAJ`.

[2] S. W. Golomb and L. R. Welch. On the enumeration of polygons. *The American Mathematical Monthly*, 67:349–353, 04 1960. `https://oeis.org/A000939/a000939.pdf`.

[3] David L. Reiner. Enumeration in Music Theory. *The American Mathematical Monthly*, 92:51–54, 01 1985. `https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH379/2.%20%CE%86%CF%81%CE%B8%CF%81%CE%B1%3A%20American%20Mathematical%20Monthly/Enumeration%20in%20Music%20Theory.pdf`.

[4] Celia Rubio Madrigal. Serialismo y matemáticas - I. *Divulgamat*, septiembre de 2019. `url`.

[5] Celia Rubio Madrigal. Serialismo y matemáticas - II. *Divulgamat*, septiembre de 2019. `url`.