# Re-escalando música

Celia Rubio Madrigal

## 1 El serialismo en la filosofía del arte

### 1.1 La visión artística de Schoenberg

En julio de 1921, tras haber ideado los fundamentos del dodecafonismo, Schoenberg anunció a su discípulo Josef Rufer [4]:

> *He realizado un descubrimiento que asegurará la supremacía de la música alemana durante los próximos cien años.*

Durante la mayor parte de su vida, Schoenberg creyó que el público general acabaría aceptando la música dodecafónica del mismo modo que se habían aceptado los sistemas tonales durante siglos. Para él, la naturalidad del sistema dodecafónico residía en que era un paso más en el proceso musical histórico: desde el contrapunto y el desarrollo motívico, practicado por los grandes maestros de la tradición alemana, hasta la disolución de la tonalidad, anticipada por la música postwagneriana e impresionista. Era parte de un continuo, del desarrollo de la historia de la música. En palabras de Schoenberg [3]:

> *Yo creo que la composición con doce sonidos y la que muchos llaman erróneamente "música atonal", no es el final de un viejo período, sino el comienzo de otro nuevo. Una vez más, como hace dos siglos, hay algo a lo que se llama anticuado; y una vez más, no se trata de ninguna obra en particular, [...] sino que otra vez sucede que es un estilo el condenado al ostracismo.*

Tras la muerte de Schoenberg en 1951, y durante algunas décadas más, su sistema compositivo fue venerado por los compositores jóvenes más brillantes, pero pronto se desvaneció de las salas de conciertos. El serialismo siempre se consideró una música académica, difícil de entender, apenas musical sino teórica. La complejidad de percibir esta música meramente por su estructura formal impidió, y todavía impide, que se disfrutara más allá de su estudio. Schoenberg intentó eximirse culpando al oyente, al que no creyó suficientemente preparado [3]:

> *La composición con doce sonidos no tiene otra finalidad que la comprensión. A la vista de ciertos acontecimientos en la historia musical reciente, ésto puede causar asombro, ya que las obras escritas en este estilo no han sido entendidas [...] Solo el compositor perfectamente preparado será quien componga para el oyente musical igualmente bien dispuesto.*

Al contrario de lo que Schoenberg creía, incluso el *oyente experto*, el que describe T. W. Adorno en su "Introducción a la sociología de la música", tiene grandes dificultades para distinguir auditivamente todos los elementos que caracterizan el serialismo. Somos capaces de retener, a lo sumo, motivos de seis o siete notas, pero no de doce [2]; mucho menos de reconocer si una serie es transformación de otra. ¿En qué medida afectan las reglas dodecafónicas al discurso sonoro de una pieza?

El dodecafonismo puede atribuirse el haber prescindido de algunas de las preconcepciones musicales más arraigadas, como la melodía, la consonancia o la tonalidad. Pero precisamente por eso es impopular, porque toma la disonancia y la pone al frente de toda la composición. Para Schoenberg, la aprobación del público no era el objetivo de su arte, y, de hecho, el desagrado colectivo era un signo del alto nivel artístico y espiritual al que se encontraba [3]:

> *El valor de mercado es irrelevante para el valor intrínseco. Un juicio no cualificado puede como máximo decidir el valor de mercado - un valor que puede ser inversamente proporcional al valor intrínseco.*

> *Ningún artista, ningún poeta, ningún filósofo y ningún músico, cuyo pensamiento se desenvuelve en la más alta esfera, habrá de descender a la vulgaridad para mostrarse complacientes con un eslogan tal como "Arte para todos". Porque si es arte no será para todos, y si es para todos no será arte.*

Sin embargo, el rechazo a no ser rechazado ha dejado de tener cabida en nuestro contexto artístico. El academicismo ya no es excluyente a la divulgación o a la búsqueda de belleza sensorial. De las técnicas serialistas se puede tomar aquello que es interesante intelectualmente e incorporarlo a otras técnicas que son interesantes estéticamente.

Este es el experimento que he querido proponer: despojar al serialismo de lo que, en mi opinión, provoca el rechazo general: la disonancia. Ya que esta proviene del cromatismo, el propósito del experimento es utilizar escalas que no tengan intervalos de semitono para crear con ellas un serialismo de menos notas.

Se modificarán las notas de una obra dodecafónica ya existente para que se adapte a la nueva escala utilizada, mientras que el ritmo, la duración, el timbre y las dinámicas, que siguen siendo producto del compositor original, se dejan intactas. El propósito final es intentar conservar la estructura matemática renovando, en cambio, la percepción colectiva de estas músicas.

Para describir el proceso de modificación de las obras debemos definir lo que entendemos por escala y cuáles son las funciones óptimas entre escalas.

## 2 Escalas y funciones del experimento

### 2.1 Escalas interválicas, escalas y funciones

Una **escala interválica** es una secuencia ordenada de números naturales – una secuencia de intervalos entre notas – tales que la suma de todos ellos da 12. Así solo consideramos válidas las escalas equivalentes octava a octava. Esto debe ocurrir para poder considerar transformaciones de la escala cromática en escalas menores, aunque es generalizable a cualquier longitud. Diremos entonces que la escala cromática es la **súper-escala** de las **sub-escalas** con las que trabajaremos. Por ejemplo, la escala diatónica jónica (o escala mayor) tiene como secuencia (2, 2, 1, 2, 2, 2, 1).

Dada una escala interválica de longitud L y una nota fija inicial, la secuencia de intervalos se convierte en una secuencia de notas de longitud L+1. Se construye comenzando por la nota inicial y sumando cada intervalo para conseguir la nota siguiente.

Con la escala mayor y la nota Re se consigue (Re, Mi, Fa#, Sol, La, Si, Do#, Re), ya que es equivalente a (2, 2+**2**=4, 4+**2**=6, 6+**1**=7, 7+**2**=9, 9+**2**=11, 11+**2**=13, 13+**1**=14). Por construcción, la última nota debe ser equivalente a la primera, ya que en el último paso habremos sumado a la nota inicial todos los términos de la secuencia interválica, y por definición suman 12.

De esta forma, se puede definir una **escala-*k*** como el conjunto de notas generadas por una escala interválica desde la nota $k$. Por ejemplo, el conjunto anterior sería la escala-2 mayor; es decir, la escala de Re mayor. Una escala generada por una secuencia de intervalos con longitud L tiene L notas, ya que como la última es repetida no hay por qué considerarla. Su longitud L $\leq 12$, ya que una escala-$k$ definida de esta forma siempre es un subconjunto de la escala cromática: $E_k \subseteq \mathbb{Z}/(12)$. Al generalizarlo a cualquier súper-escala, habría que considerar las notas distintas según su escala o formular otras definiciones más adecuadas.

Una **función a una escala-*k*** es una función $f$ que transforma cada nota de la escala cromática a un valor de la escala $E_k$. Entonces $f : \mathbb{Z}/(12) \to E_k^*$ reduce las notas de una melodía a solamente la escala escogida, donde $E_k^*$ está formado por las notas de $E_k$ pero quizás en octavas distintas. Las funciones a escalas se representan de la siguiente manera, con la primera fila representando el dominio de $f$ (la escala cromática), la segunda su imagen (la escala $E_k^*$), y la tercera su secuencia interválica:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & 10 & 11 \\ f(0) & f(1) & f(2) & \dots & f(10) & f(11) \\ f(1)-f(0) & f(2)-f(1) & f(3)-f(2) & \dots & f(11)-f(10) & 12+f(0)-f(11) \end{array}$$

El proceso verdaderamente interesante está en averiguar, dada una escala $E$, cuál es la mejor función que transforma melodías cromáticas en melodías en $E$. Estas son las **funciones *E*-inducidas**.

¿Cuáles serán las características de esas funciones óptimas? Deben ser sobreyectivas: si no, la música resultante tendría una escala más reducida de la deseada. Pero además deben conservar la estructura serial y deben conservar el parecido con la melodía original.

## 2.2 Funciones bien distribuidas

La mayor prioridad es conservar la estructura serial de las piezas; por tanto, todas las notas deben aparecer con la menor frecuencia posible, y se debe evitar jerarquías entre las notas en la medida de lo posible. Si $|E| < 12$, $f$ no puede ser inyectiva, por lo que va a haber elementos repetidos en la imagen. Queremos la $f$ que mejor distribuya esas repeticiones, que distribuya las notas de $E$ a lo largo de la escala cromática.

Lo óptimo sería que todas tuvieran la misma frecuencia. Eso solo pasará cuando $|E|$ divida a 12. Por ejemplo, si $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ (entonces $|E| = 6$), existen funciones tales que cada nota de la imagen se repite exactamente 2 veces. La siguiente función $E$-inducida $f$ cumpliría la condición de buena distribución:

| Cromática | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Escala E | $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_6$ |
| Intervalos | | | | | | ... | | | | | | |

En cambio, si $|E|$ no divide a 12 no hay funciones $E$-inducidas totalmente distribuidas. No existe una sola frecuencia que puedan compartir todas las notas de $E$. Sin embargo, sí se pueden encontrar dos frecuencias consecutivas, $c$ y $c + 1$, tales que todos los elementos de $E$ tengan o frecuencia $c$ o frecuencia $c + 1$. Esto es lo más parecido a que todas tengan la misma frecuencia, y se va a probar a continuación que siempre es posible.

La situación es equivalente a que $E$ se pueda dividir en dos subconjuntos disjuntos $Q$ y $R$, con $|Q| = q$ y $|R| = r$ (entonces $q + r = |E|$), tales que la frecuencia de las notas en Q es $c$ y la frecuencia de las notas en $R$ es $c + 1$. En resumen, para probar que $Q$ y $R$ existen, debemos encontrar un $c$, un $q$ y un $r$ naturales para los que $cq + (c + 1)r = 12$.

$cq + (c + 1)r = cq + cr + r = c(q + r) + r = c|E| + r = 12$, lo cual se cumple por el algoritmo de la división, que asegura que al dividir 12 entre $|E|$ existen su cociente $c$ y su resto $r \geq 0$. $\square$

Estas funciones forman parte del numeroso conjunto de elementos musicales de **máxima regularidad**. Un ejemplo importante de ellos son los ritmos euclídeos —para más información ver [1].

## 2.3 Funciones E-inducidas

Hay que pedir más requisitos a $f$ para que no solo modifique las notas, sino que además las imágenes se parezcan lo máximo posible a sus preimágenes, a las notas originales. En esencia, lo que se busca es una escala a **distancia mínima** en cuanto a unos criterios concretos.

La manera matemática de formalizar esos criterios es definir una **métrica** para estas funciones; es decir, una manera de medirlas para poder compararlas, y así encontrar cuál de ellas es la menor.

| Cromática | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | (12) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Escala E | 0 | 1 | 2 | | | $\cancel{1}$ | | | $\cancel{13}$ | | | | (12) |

Si aún quedan varias $f$ que cumplen todos los requisitos, se escogerá la más grave, la menor de ellas. De esta manera, dada cualquier escala E, la función E-inducida queda unívocamente determinada.

En el enlace `https://gitlab.com/dodecafonismo/f-inducida` se encuentra el código en Haskell de un programa que, dado una escala, produce su función inducida óptima con las propiedades descritas anteriormente.

### 2.4 Escalas utilizadas

Las escalas escogidas para este experimento son cuatro escalas de distintos tamaños y sonoridades; desde el sonido oriental hasta el occidental clásico, pasando por el jazz moderno y el impresionismo.

Son la escala pentatónica, la escala de tonos enteros, la escala heptafónica de Do Mayor y la escala octotónica. Estas son las funciones inducidas de dichas escalas según el algoritmo:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cromática: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Pentatónica (5): | 0 | 0 | 2 | 2 | 4 | 4 | 7 | 7 | 7 | 9 | 9 | 0 |
| Intervalos: | | 2 | | 2 | | 3 | | | 2 | | 3 | |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cromática: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Tonos enteros (6): | 0 | 0 | 2 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 8 | 8 | 10 | 10 |
| Intervalos: | | 2 | | 2 | | 2 | | 2 | | 2 | | 2 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cromática: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Diatónica en Do (7): | 0 | 0 | 2 | 2 | 4 | 5 | 5 | 7 | 7 | 9 | 9 | 11 |
| Intervalos: | | 2 | | 2 | 1 | | 2 | | 2 | | 2 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cromática: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Octotónica (8): | 0 | 0 | 2 | 3 | 3 | 5 | 6 | 6 | 8 | 9 | 9 | 11 |
| Intervalos: | | 2 | 1 | | 2 | 1 | | 2 | 1 | | 2 | 1 |

## Bibliografía


[1] Paco Gómez. Ritmos euclídeos y ritmos equilibrados. `http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=17815:89-marzo-2018-ritmos-euclideos-y-ritmos-equilibrados&catid=67:ma-y-matemcas&directory=67`, marzo de 2018. Consultado en octubre de 2019.

[2] George A. Miller. The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information. *Psychological Review*, 63, 1956. `http://psychclassics.yorku.ca/Miller/`.

[3] Arnold Schoenberg. Style and Idea. `http://music.ucsc.edu/sites/default/files/14.SchoenbergTwelveTone.pdf`, 1950.

[4] H. H. Stuckenschmidt. *Schoenberg: his life, world, and work*. Calder, 1977. `https://books.google.es/books?id=ApwZAQAAIAAJ`.