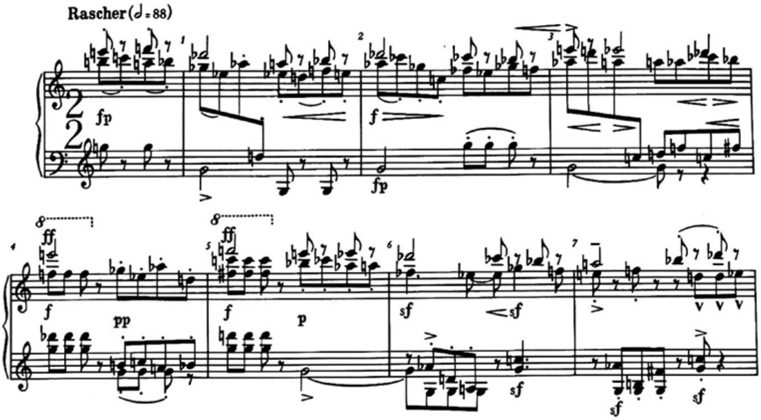


LA ESTRUCTURA MATEMÁTICA DEL SERIALISMO MUSICAL

Celia Rubio Madrigal

*Dedicado a mis dos
grandes pasiones:
las matemáticas
y la música.*

It has been observed that mathematics is the
most abstract of the sciences, music
the most abstract of the arts.

— David Wright [1]

INTRODUCCIÓN AL TEXTO

Todas las estructuras musicales están basadas en estructuras matemáticas. Los elementos musicales de los que están compuestas las obras, como las notas, las dinámicas o los timbres, están agrupados en conjuntos, y, como tales, cumplen ciertas propiedades al relacionarse consigo mismos o con otros conjuntos.

A lo largo de la historia, los compositores han ido descubriendo e inventando estas propiedades musicales en las piezas que componían; por ejemplo, desde consonancias y disonancias entre notas, hasta la jerarquía según el pulso en el que la nota se encuentra. Las matemáticas son capaces de describir las propiedades de estos elementos musicales como para cualquier otro conjunto matemático.

Por ejemplo, las músicas serialistas se basan en la continua reiteración de secuencias de elementos musicales. Es decir, un compositor serialista tomará una secuencia ordenada de notas, dinámicas o timbres y la usará como único bloque constructivo de su obra. Puede, además, serializar más de un conjunto de elementos musicales, o incluso pretender serializar el máximo número de conjuntos. Estas músicas se pueden describir matemáticamente por medio de permutaciones y grupos.

Son en estas estructuras en las que se centrará el presente texto, y más específicamente en el dodecafonismo, el primer sistema compositivo serialista. Se explicarán los fundamentos matemáticos que lo posibilitan y los postulados que lo definieron, extendiendo las definiciones habituales hacia el ámbito matemático.

Índice

Capítulo 0

INTRODUCCIÓN MATEMÁTICA

0.1. Conjuntos y grupos

Un *conjunto* es una colección de objetos bien definidos y distintos entre sí que se llaman *elementos*.

Para definir un conjunto se puede o bien listar los objetos uno a uno, o bien describirlos por medio de un predicado: una o varias propiedades que caracterizan a todos los elementos de dicho conjunto.

Por ejemplo, el conjunto $\mathrm{K_i}$, formado por las doce notas de la escala cromática de una misma octava i, está bien definido porque podemos hacer una lista con ellas: por ejemplo, $\mathrm{K}_4 =$

$\{\mathrm{Do}_4, \mathrm{Do}\#_4, \mathrm{Re}_4, \mathrm{Re}\#_4, \mathrm{Mi}_4, \mathrm{Fa}_4, \mathrm{Fa}\#_4, \mathrm{Sol}_4, \mathrm{Sol}\#_4, \mathrm{La}_4, \mathrm{La}\#_4, \mathrm{Si}_4\}$

Por un lado, aun llamando a las notas de distinta manera, el conjunto, conceptualmente, es el mismo. Además, el hecho de listar algún elemento más de una vez no afecta a su definición. Como

$\text{Do}\#_4 = \text{Re}\flat_4$,[1] K_4 también puede ser listado así:

$$\{\text{Do}_4, \text{Do}\#_4, \text{Re}\flat_4, \text{Re}_4, \text{Re}\#_4, \text{Mi}_4, \text{Fa}_4, \text{Fa}\#_4, \text{Sol}_4, \text{Sol}\#_4, \text{La}_4, \text{La}\#_4, \text{Si}_4\}$$

En cambio, el conjunto D, formado por las duraciones rítmicas elementales – sin ligaduras ni puntillos –, es infinito, por lo que no se puede listar de forma completa. Sin embargo, se puede expresar por medio de un predicado:

$$\mathrm{D} = \{2^n : n \in \mathbb{Z},\ n \leq 2\} = \{4,\ 2,\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \ldots\} = \{\text{𝅝},\ \text{𝅗𝅥},\ \text{♩},\ \text{♪},\ \ldots\}$$

La notación $n \in \mathbb{Z}$ significa que n pertenece a los números enteros. En este caso se han representado las duraciones mediante su ratio con la duración de la negra ♩.

Los elementos de un conjunto pueden combinarse mediante *operaciones* – como la suma o la multiplicación en el caso de los números – para dar otros objetos matemáticos.

Se dice que un conjunto G no vacío y una operación binaria $(*)$ forman la estructura de un *grupo* $(\mathrm{G}, *)$ cuando cumplen:

1. Su operación es interna: Si $a, b \in \mathrm{G}$, entonces $a * b \in \mathrm{G}$.

2. Su operación es asociativa: Si $a, b, c \in \mathrm{G}$, $(a * b) * c = a * (b * c)$.

3. Existe un elemento e en G, llamado elemento neutro o identidad, tal que para todo $x \in \mathrm{G}$ se cumple que $e * x = x * e = x$. Se puede probar que el neutro es único para cada grupo. A veces se incluye dentro de la definición del grupo: $(\mathrm{G}, *, e)$.

4. Cada $x \in \mathrm{G}$ tiene asociado otro elemento $x^{-1} \in \mathrm{G}$, llamado elemento inverso, tal que $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$. Se puede probar que el inverso de cada elemento es único.

$(\mathbb{Z}, +, 0)$ y $(\mathbb{Q}, +, 0)$ son grupos, pero $(\mathbb{N}, +, 0)$ no porque no existe el *inverso* de 2 con la suma: $-2 \notin \mathbb{N}$. $(\mathbb{R}, *, 1)$ y $(\mathbb{Q}, *, 1)$ son grupos, pero $(\mathbb{Z}, *, 1)$ no porque no existe el *inverso* de 2 con la multiplicación: $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

[1] En este texto se trabajará siempre con temperamento igual por convenio.

0.2. Funciones y permutaciones

Una *función* es una regla que asocia a cada elemento de un primer conjunto, llamado *dominio*, un único elemento de un segundo conjunto. Si la función se llama f, el dominio A y el segundo conjunto B, se denota $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$. El elemento asociado a un x mediante f se denota $f(x)$.

Todos los $x \in \mathrm{A}$ tienen que estar asociados a un $f(x) \in \mathrm{B}$, pero no todos los elementos de B tienen un elemento de A asociado. Los elementos de B que sí lo cumplen, es decir, los que se pueden escribir como $f(x)$ para algún x, forman el conjunto *imagen* de la función: $im(f) = \{\ y \in \mathrm{B} :\ \exists\ x \in \mathrm{A},\ f(x) = y\ \}$

Cuando varias funciones se aplican una detrás de la otra decimos que realizamos la operación de *composición de funciones*. Se representa con el símbolo $\circ$. La imagen de la primera función será el dominio de la segunda, y así sucesivamente. Por ejemplo, aplicar una función $f(x)$ y después aplicar una función $g(x)$ se denota $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

Una *permutación* $\sigma(\mathrm{X})$ es una función sobre un conjunto X que asocia sus elementos a los elementos del mismo conjunto X de manera unívoca. Es decir, asocia cada elemento a uno, y solo uno, de los elementos de su mismo conjunto ($\sigma : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$).

El conjunto de todas las posibles permutaciones sobre un determinado conjunto X, junto con la operación de composición de funciones ($\circ$), forma un grupo denotado por $\mathrm{S_X}$. Para probarlo, se debe comprobar que cumple todas las propiedades de los grupos.

1. Permutar dos veces es también una permutación.

2. La composición de funciones es asociativa.

3. La permutación que asigna un elemento a sí mismo es la función identidad.

4. Como las permutaciones son biyectivas, cada una tiene una inversa que es también una permutación.

Cuando X es el conjunto de números naturales desde 1 hasta n, el grupo $\mathrm{S_x}$ se representa como S_n y se le denomina el grupo simétrico de orden n. El número de elementos en S_n, es decir, de posibles permutaciones de n números, es $n!$.

En los ejemplos musicales de este texto, los conjuntos estarán numerados desde 0 hasta $n-1$, siendo n el número de elementos a permutar, en vez de desde 1 hasta n. Seguirán siendo grupos simétricos de orden n, pero con una numeración distinta.

La notación utilizada para representar una permutación σ perteneciente a S_n con la numeración desde 0 y con $\sigma(m)$ siendo el elemento asociado a m mediante σ, es:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & n-3 & n-2 & n-1 \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n-3) & \sigma(n-2) & \sigma(n-1) \end{pmatrix}$$

0.3. Aritmética modular

Fijado un $n \in \mathbb{N}$, se dice que a y b son *congruentes* (o equivalentes) módulo n si tienen el mismo resto al dividirlos entre n; es decir, que todos los números con el mismo resto se agrupan y se toman como equivalentes. Se expresa como $a \equiv b$ (mod. n).

De esta forma se pueden operar entre sí los números del 0 al $n-1$, ya que se conservan las operaciones de los números enteros, y si un resultado es $\geq n$ se puede seguir dividiendo entre n para que cumpla $0 \leq r < n$.

Se conserva la suma (y la resta), ya que si $a = nq_a + r_a$ y $b = nq_b + r_b$, entonces $a + b = (nq_a + r_a) + (nq_b + r_b) = n(q_a + q_b) + (r_a + r_b)$, así que el resto de $a + b$ es igual al de $r_a + r_b$.

La *aritmética modular* también se llama aritmética del reloj, porque funciona de la misma manera que las horas en un reloj. Como el 3 tiene el mismo resto entre 12 que el 15, las 15h son las 3h: $3 \equiv 15 \pmod{12}$. O, por ejemplo, 2 horas después de las 11 dan las 13, es decir, la 1: $2 + 11 = 13 \equiv 1 \pmod{12}$.

También se conserva la multiplicación: si $a = nq_a + r_a$ y $b = nq_b + r_b$, entonces $ab = (nq_a + r_a)(nq_b + r_b) = n^2 q_a q_b + nq_a r_b + nq_b r_a + r_a r_b = n(nq_a q_b + q_a r_b + q_b r_a) + r_a r_b$, así que el resto de ab es igual al de $r_a r_b$.

En música, la aritmética modular se puede encontrar en las escalas: todas las notas Do se toman como equivalentes, por ejemplo, y al sumarle 12 semitonos (una octava) se vuelve a obtener un Do. Si se asocian los números del 0 al 11 a las notas cromáticas del Do al Si, entonces $0 + 12 = 12 \equiv 0 \pmod{12}$.

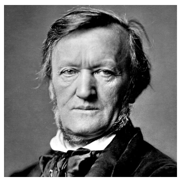
Parte I

DODECAFONISMO

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA DEL DODECAFONISMO

1.1. Richard Wagner y la emancipación de la disonancia



Richard Wagner
(1813–1883)

El periodo de la historia de la música predominante en el siglo XIX, comúnmente llamado Romanticismo, culminó con los dramas musicales de Richard Wagner, en los que todos los elementos de la obra estaban detalladamente estudiados por el compositor. A este concepto lo llamaba *Gesamtkunstwerk* («obra de arte total»[1]), ya que creía poseer la responsabilidad de reunir todas las artes en una misma obra. Wagner se aseguraba personalmente de que en sus óperas las artes escénicas, musicales, poéticas y visuales se combinaran entre sí a la perfección.

[1] Richard Wagner, *Oper und Drama*, 1851.

La idea del *Gesamtkunstwerk* la desarrolló alrededor de 1850, y la plasmó en su totalidad en su ciclo de cuatro óperas *Der Ring des Nibelungen*, estrenado el 16 de agosto de 1876. Wagner controló y creó cada aspecto de la tetralogía, desde la música hasta el libreto, el vestuario y la escenografía. Incluso mandó crear su propia sala de conciertos en Bayreuth, el *Festspielhaus*, para que el escenario se adecuara a sus ideas sobre el pensamiento y la cultura musical.

Así, a ojos de compositores posteriores, Wagner había agotado todas las posibilidades de la música tonal, y quizás ya había comenzado el viraje hacia el predominio de la disonancia con su abundante uso del cromatismo, como en el famoso primer acorde del drama musical *Tristan und Isolde* (1865). Consta de las notas Fa, Si, Re# y Sol#, y sus intervalos desde el Fa son una cuarta aumentada, una sexta aumentada y una novena aumentada.

Siguiendo la concepción del progreso como un camino ascendente, el paso siguiente para la composición musical debía consistir en deshacerse progresivamente de la tonalidad y desarrollar la «emancipación de la disonancia»[2]. Así fue como Arnold Schoenberg ideó sus teorías del pensamiento musical, y éstas dieron paso a la creación de la atonalidad. [2]

1.2. Hacia el atonalismo de Schoenberg

Fuertemente influido por Richard Wagner y Johannes Brahms desde su adolescencia, Schoenberg comenzó componiendo al estilo posromántico de su época, llevando el cromatismo y la orquestación hasta el extremo. Sin embargo, y no espontáneamente, empezó a buscar en sus composiciones que cada sonido tuviera valor por sí mismo, un valor independiente de su funcionalidad tonal.

[2] Arnold Schoenberg, *Composition with twelve tones*, en *Style and Idea*, 1950.

Arnold Schoenberg
(1874–1951)

Para él, la música no estaba intrínsecamente dirigida a una tónica. En las progresiones, lo importante era el paso de un acorde a otro, y no hacia dónde se dirigían éstos. Además, él opinaba que se debían poder utilizar las notas de los modos eclesiásticos libremente, por lo que consideraba las notas no diatónicas tan válidas como las diatónicas. Esto hacía imposible distinguir unas de otras, no pudiendo identificar apenas la tónica. De esta, y de otras muchas formas, Schoenberg conseguía que la jerarquía tonal quedara desestabilizada. [2]

De esta época es su primera obra importante, *Verklärte Nacht* («Noche transfigurada»), Op. 4. Compuesto en 1899, este sexteto de cuerdas está inspirado por el poema homónimo de Richard Dehmel. La música, según su autor, expresa el paseo de un hombre y una mujer en medio del abrazo de la naturaleza. Aunque en la obra aún prevalece la armonía tradicional basada en acordes, Schoenberg sitúa al oyente en un terreno de indefinición tonal, no sólo en el plano armónico sino también en el melódico. Además, hace uso del acorde de novena invertido, inexistente hasta entonces y, por tanto, rechazado por la crítica. [3]

Tras pasar por la etapa tonal posromántica, y debido a su convicción en la irrevocabilidad de la evolución de la música hacia el cromatismo total [4], en 1908 Schoenberg se desligó de la tonalidad completamente con el ciclo de canciones *Das Buch der Hängenden Gärten*. A partir de entonces se dedicó a componer fragmentos muy breves cuya estructura era definida por motivos y no por la armonía, como solía ocurrir en formas musicales anteriores[3]. A este periodo en sus composiciones se le llama *atonalidad libre*, aunque cabe destacar que Schoenberg rechazaba fervientemente este término:

[3] La forma sonata es el ejemplo más destacado de estructura basada en la armonía.

La expresión "música atonal" es de lo más desafortunada – es como llamar a volar "el arte de no caer" o nadar "el arte de no ahogarse".[4]

A este periodo – es de 1912 – pertenece también su famoso ciclo de canciones *Pierrot Lunaire*, Op. 21. Su nombre completo es "Tres veces siete poemas de Pierrot Lunaire de Albert Giraud", ya que está dividida en 3 grupos de 7 canciones cada uno, cuyos textos son una selección de 21 poemas del ciclo homónimo de Albert Giraud.

Se encuentran en ella abundantes referencias al número 7: Schoenberg hace un uso extensivo de motivos de 7 notas a lo largo de la obra, mientras que el conjunto musical que la interpreta, incluyendo al director, consta de 7 miembros. De hecho, a este conjunto de instrumentos – flauta, clarinete, violín, violonchelo, piano y cantante – se le ha dado el nombre de *ensemble Pierrot* en su honor.

Otros números importantes en la obra son el 3 y el 13. Cada poema consta de 13 líneas, mientras que la primera línea de cada poema aparece 3 veces: en las líneas 1, 7 y 13.

En esta obra no sólo hay una ausencia total de relaciones tonales, sino que el tratamiento vocal evita también cualquier relación estética con las técnicas tradicionales: es un *Sprechgesang*, un canto hablado. De hecho, Schoenberg se refiere a estas piezas no como canciones, sino como melodramas. [3]

1.3. El surgimiento de un sistema

Schoenberg no estaba aún satisfecho con su técnica compositiva, ya que admiraba las obras extensas de los músicos románticos y pensaba que su atonalidad no podía sostener una obra de gran envergadura. Es decir, necesitaba un hilo conductor mejor que los motivos para poder componer obras atonales más largas.

[4] A. Schoenberg, *Hauer's Theories*, en *Style and Idea*, 1923.

Además, por aquella época sufrió una crisis en muchos aspectos de su vida. En lo personal, su mujer Matilde Zemlinsky acababa de abandonarlo por otro hombre, aunque posteriormente volvería junto al compositor. Y, en lo profesional, sus obras no eran del gusto del público, por lo que no contaba con suficiente dinero para mantener a su familia. Todas estas circunstancias, unidas al desarrollo de la Primera Guerra Mundial, no le permitieron componer apenas entre 1914 y 1923.

Tras el final de la guerra, en 1919, Schoenberg fundó la Sociedad para Interpretaciones Musicales Privadas junto a sus discípulos y amigos Alban Berg y Anton Webern. Schoenberg, Berg y Webern se autodenominaron la Segunda Escuela de Viena en honor al grupo de compositores del siglo XVIII Haydn, Mozart y Beethoven, quienes formaban la Primera Escuela de Viena.[5]

En la Sociedad para Interpretaciones Musicales Privadas se presentaban músicas contemporáneas en circunstancias que favorecieran su adecuada apreciación. Así se evitaba que dichas obras, al no ser entendidas por el público, fueran inmediatamente rechazadas. Las obras de compositores como Mahler, Debussy, Bartók, Ravel, Strauss y Stravinsky fueron incluidas en los programas de conciertos organizados por la Sociedad.

En este contexto Schoenberg pudo reflexionar sobre sus técnicas compositivas, y al fin publicó en 1923 su ensayo *Método de composición con doce sonidos*, donde se describían por primera vez los axiomas del dodecafonismo: la solución al problema de la atonalidad libre que le había estado atormentando durante una década.

Su primera obra íntegramente dodecafónica, publicada también en 1923, es la Suite para piano Op. 25. Es la pieza más temprana en la que Schoenberg usa series dodecafónicas en cada uno de los movimientos. En dos obras anteriores a ella usa series dodecafónicas,

[5] Las carreras compositivas de Berg y Webern se desarrollarán en el apartado 5.1.

pero en movimientos aislados: la Op. 23, *5 Stücke* (1920–23), en el movimiento de Waltz final; y su *Serenata*, Op. 24, en su Soneto central.

Las series utilizadas en la Suite Op. 25 servirán de ejemplo en este texto, y su tercer movimiento, Musette, será estudiado y analizado en el apartado 3.3 con el fin de entender una obra dodecafónica en toda su extensión.

Capítulo 2

EL SISTEMA DODECAFÓNICO DE SCHOENBERG

2.1. Los postulados del dodecafonismo

El dodecafonismo es un sistema compositivo que predetermina la melodía y la armonía a partir de una ordenación de las doce notas de la escala cromática, que se llama *serie*. Ésta y algunas de sus transformaciones son los ladrillos con los que se construyen las alturas de las notas; son el único material que se puede utilizar. [4]

El resto de elementos de la pieza, como el número de instrumentos, el ritmo, el carácter, la textura o las dinámicas, se dejan a discreción del compositor. No serializar todos los conjuntos será la principal crítica al dodecafonismo por parte de los compositores serialistas que sucedieron a su creador, Arnold Schoenberg. Para los serialistas integrales, como Pierre Boulez, aquello restaba cohesión al modelo compositivo; para los dodecafonistas, aportaba libertad. [5]

Precisamente la predeterminación dodecafónica, aunque parece limitante, permite realizaciones musicales y estilos de composición muy diferentes: Schoenberg daba un tratamiento tradicional a sus obras, ya que aún admiraba las formas clásicas; Alban Berg iba más allá al utilizar series que recordaban a las tríadas tonales; y, en cambio, Anton Webern evitaba radicalmente cualquier asociación con la tradición. [4]

Schoenberg definió su sistema musical a partir de cuatro postulados que, en realidad, se basan en principios matemáticos [6]:

1. La serie [sobre la que se construye la obra dodecafónica] *consta de las doce notas de la escala cromática dispuestas en un orden lineal específico.*

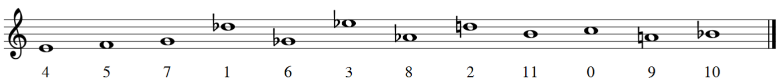
2. Ninguna nota aparece más de una vez en la serie.

Los dos primeros postulados expresan que una obra dodecafónica fundamenta su estructura sobre una permutación de la escala de doce semitonos. Dicha permutación σ es una biyección del conjunto numerado de las doce notas {Do = 0, Do# = 1, Re = 2, Re# = 3, Mi = 4, Fa = 5, F# = 6, Sol = 7, Sol# = 8, La = 9, La# = 10, Si = 11} consigo mismo, y se representa de esta forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & \sigma(6) & \sigma(7) & \sigma(8) & \sigma(9) & \sigma(10) & \sigma(11) \end{pmatrix}$$

La permutación $\sigma(m)$, con $m \in \mathbb{Z}/(12)$[1], pertenece al grupo simétrico de orden 12: $\sigma \in \mathrm{S}_{12}$. Por ejemplo, en la Suite para piano Op. 25 Schoenberg utiliza como serie original en todos los movimientos de la obra la siguiente permutación σ:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 6 & 3 & 8 & 2 & 11 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$



[1] $\mathbb{Z}/(12) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

3. La serie será expuesta en cualquiera de sus aspectos lineales: original, inversión, retrogradación de la original y retrogradación de la inversión.

4. La serie puede usarse en sus cuatro aspectos desde cualquier nota de la escala.

Los dos últimos postulados amplían los recursos compositivos al admitir la transformación de la serie original mediante *inversión*, *retrogradación*, *inversión retrógrada* y *transposición*[2]. El compositor puede utilizar cualquiera de las transformaciones de una serie al componer su obra dodecafónica. El conjunto de series que puede utilizar, que viene dado por la serie original y todas sus posibles transformaciones, se conoce como *espectro serial.* [6]

2.2. Las transformaciones de una serie

Transformar una serie es matemáticamente equivalente a aplicar una función sobre la serie, y que asocie esa permutación a la permutación transformada. Por tanto, cualquier función transformativa Ψ se aplica sobre el conjunto de las permutaciones, S_{12}.

2.2.1. Transposiciones

La *transposición*, mencionada en el cuarto postulado, consiste en subir o bajar la serie original un número determinado de semitonos. Por tanto, no se modifican los intervalos entre las notas, sino solamente la altura a la que está la serie. Ya que consideraremos todas las octavas equivalentes, debemos trabajar módulo 12.

[2] No confundir con un 2-ciclo. Una transposición musical se corresponde con una traslación matemática.

La serie transportada k semitonos (con k constante), $\mathrm{T}^{\mathrm{k}}(\sigma)$, se construye sumando k a σ (mod. 12):

$$\mathrm{T}^{\mathrm{k}}(\sigma(m)) = \sigma(m) + \mathrm{k}$$

$$\mathrm{T}^{\mathrm{k}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & 9 & 10 & 11 \\ \sigma(0)+\mathrm{k} & \sigma(1)+\mathrm{k} & \sigma(2)+\mathrm{k} & \cdots & \sigma(9)+\mathrm{k} & \sigma(10)+\mathrm{k} & \sigma(11)+\mathrm{k} \end{pmatrix}$$

A su vez, T^{k} se forma al componer k transposiciones de 1 semitono: $\mathrm{T}^{\mathrm{k}} = \mathrm{T}^1 \circ \mathrm{T}^1 \circ \ldots \circ \mathrm{T}^1$, k veces. Debido a que k es en realidad el exponente en la potencia de T, se coloca este número como superíndice.

Históricamente, la notación Ψ_{k}, Ψ^{k} o $\Psi(\mathrm{k})$ se ha usado en sustitución de la composición de la transposición T^{k} y otra función Ψ, en el respectivo orden: $\Psi^{\mathrm{k}} = \Psi \circ \mathrm{T}^{\mathrm{k}} = \Psi(\mathrm{T}^{\mathrm{k}})$. Sin embargo, esta notación es especialmente ambigua y confusa, sobre todo al trabajar con funciones no conmutativas. Por ello, es preferible ceñirse a la notación estrictamente matemática; es decir, a la composición de funciones, aun omitiendo $\circ$: $\cancel{\Psi_{\mathrm{k}}}$, $\cancel{\Psi^{\mathrm{k}}}$, $\cancel{\Psi(\mathrm{k})} \rightarrow \Psi\mathrm{T}^{\mathrm{k}}$

Una posible serie transportada sobre la permutación σ de la Suite para piano Op. 25, con k = 6, es la siguiente serie T^6:

$$\mathrm{T}^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 1 & 7 & 0 & 9 & 2 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2.2. Retrogradación

La *retrogradación* consiste en leer la serie original desde la nota final hacia atrás, es decir, aplicar a la serie una simetría especular. De este modo, la primera nota irá al último puesto, la segunda al penúltimo, y así sucesivamente.

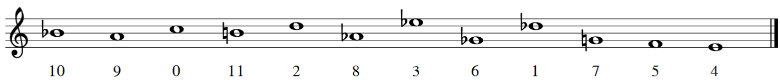
La serie retrógrada se construye de esta forma:

$$\mathrm{R}\left(\sigma\left(m\right)\right) = \sigma\left(-1-m\right)$$

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \sigma(11) & \sigma(10) & \sigma(9) & \sigma(8) & \sigma(7) & \sigma(6) & \sigma(5) & \sigma(4) & \sigma(3) & \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(0) \end{pmatrix}$$

La serie retrógrada sobre la permutación σ de la Suite Op. 25 es la siguiente serie R:

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 9 & 0 & 11 & 2 & 8 & 3 & 6 & 1 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



2.2.3. Inversión

La *inversión* consiste en cambiar la dirección –de ascendente a descendente, y viceversa– de los intervalos entre cada nota de la serie. Si el primer intervalo en la serie original σ es de $+k$, el primer intervalo en la serie invertida I será de $-k$ (mod. 12), por lo que debemos cambiar el signo de σ para construir I. Además, queremos que la primera nota de ambas series, I(0) y $\sigma(0)$, coincidan, así que debemos transportar la serie $(-\sigma)$ un número λ de semitonos para que esta condición se cumpla:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(0) = -\sigma\left(0\right) + \lambda = \sigma\left(0\right) \\ \implies \lambda = 2\sigma(0) \end{aligned}$$

Por tanto, la serie invertida se construye de esta forma:

$$\mathrm{I}\left(\sigma\left(m\right)\right) = -\sigma\left(m\right) + 2\sigma\left(0\right)$$

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & 10 & 11 \\ \sigma(0) & -\sigma(1)+2\sigma(0) & -\sigma(2)+2\sigma(0) & \ldots & -\sigma(10)+2\sigma(0) & -\sigma(11)+2\sigma(0) \end{pmatrix}$$

La serie invertida sobre la permutación σ de la Suite Op. 25 es la siguiente serie I:

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 2 & 5 & 0 & 6 & 9 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

En total, obtendremos 48 series – aunque no obligatoriamente distintas entre sí – pertenecientes a un solo espectro serial. Hay 12 series originales sobre cada una de las doce notas, 12 series retrógradas, 12 invertidas y 12 series sobre las que se aplica tanto la retrogradación como la inversión. A continuación se muestra la sintaxis simple junto a la matemática:

Sintaxis simple	Sintaxis matemática
T_0, T_1, T_2...	T^0, T^1, T^2...
R_0, R_1, R_2...	R, RT^1, RT^2...
I_0, I_1, I_2...	I, IT^1, IT^2...
IR_0, IR_1, IR_2...	IR, IRT^1, IRT^2...

2.3. Matrices dodecafónicas

Dada una serie, su matriz dodecafónica es una representación visual de su espectro serial; es decir, del conjunto de series derivadas de esa serie. El espectro serial es todo el material compositivo sonoro del que se dispone para la composición de una obra dodecafónica. Al poder ordenar y disponer la información en una tabla, el compositor puede acceder a toda ella al mismo tiempo sin tener que calcular cada serie individualmente.

La matriz se lee en la dirección en la que aparece el nombre de la serie. Las series T se leen de izquierda a derecha, mientras que las series R de derecha a izquierda. Las series I se leen de arriba a abajo y las IR/RI de abajo a arriba.

He creado un programa que devuelve en formato LaTeX la matriz correspondiente a cualquier serie dodecafónica que se introduzca en teclado, además de producir la nomenclatura simple para cada serie. El código, escrito en C++, está incluido en el Anexo A, página 67.

A continuación, se incluye la matriz dodecafónica de la serie P de la Suite Op. 25 de Schoenberg. Mientras que la mayoría de tablas tienen dos filas inferiores, que se corresponden con las distintas nomenclaturas de RI e IR para una misma serie – ya que normalmente no conmutan –, en la matriz de la serie P sí coinciden, como se mencionará en el apartado 4.4.

	I_0	I_1	I_3	I_9	I_2	I_{11}	I_4	I_{10}	I_7	I_8	I_5	I_6	
T_0	4	5	7	1	6	3	8	2	11	0	9	10	R_0
T_{11}	3	4	6	0	5	2	7	1	10	11	8	9	R_{11}
T_9	1	2	4	10	3	0	5	11	8	9	6	7	R_9
T_3	7	8	10	4	9	6	11	5	2	3	0	1	R_3
T_{10}	2	3	5	11	4	1	6	0	9	10	7	8	R_{10}
T_1	5	6	8	2	7	4	9	3	0	1	10	11	R_1
T_8	0	1	3	9	2	11	4	10	7	8	5	6	R_8
T_2	6	7	9	3	8	5	10	4	1	2	11	0	R_2
T_5	9	10	0	6	11	8	1	7	4	5	2	3	R_5
T_4	8	9	11	5	10	7	0	6	3	4	1	2	R_4
T_7	11	0	2	8	1	10	3	9	6	7	4	5	R_7
T_6	10	11	1	7	0	9	2	8	5	6	3	4	R_6
	IR_0	IR_1	IR_3	IR_9	IR_2	IR_{11}	IR_4	IR_{10}	IR_7	IR_8	IR_5	IR_6	
	RI_0	RI_1	RI_3	RI_9	RI_2	RI_{11}	RI_4	RI_{10}	RI_7	RI_8	RI_5	RI_6	

Por otro lado, he escrito otro programa en el propio lenguaje LaTeX que crea esta misma tabla con el comando `\dmatrix`, y tiene cualquier serie como argumento: `\dmatrix{4,5,7,1,6,3,8,2,11,0,9,10}`. El código se encuentra en el Anexo B, página 72. La tabla aparece sin el orlado de nomenclaturas:

4	5	7	1	6	3	8	2	11	0	9	10
3	4	6	0	5	2	7	1	10	11	8	9
1	2	4	10	3	0	5	11	8	9	6	7
7	8	10	4	9	6	11	5	2	3	0	1
2	3	5	11	4	1	6	0	9	10	7	8
5	6	8	2	7	4	9	3	0	1	10	11
0	1	3	9	2	11	4	10	7	8	5	6
6	7	9	3	8	5	10	4	1	2	11	0
9	10	0	6	11	8	1	7	4	5	2	3
8	9	11	5	10	7	0	6	3	4	1	2
11	0	2	8	1	10	3	9	6	7	4	5
10	11	1	7	0	9	2	8	5	6	3	4

También he creado una página interactiva que genera matrices de cualquier serie para cualquier longitud serial, además de generar series aleatorias. Permite escoger entre dos numeraciones y dos nomenclaturas. Está escrita en Elm y el código puede encontrarse en `https://gitlab.com/dodecafonismo/matrices`.

En el código QR está el enlace de la aplicación web. Sus instrucciones de uso se encuentran al final de la página. El enlace es `https://matrices.netlify.com/`.

Capítulo 3

ANÁLISIS DE UNA OBRA DODECAFÓNICA: OP. 25

3.1. Series de la Suite op. 25

Lo primero que hará un compositor dodecafónico antes de empezar a componer será escoger su serie original. Su elección nunca es una simple cuestión de azar; al contrario, ya que las singularidades de la serie darán un carácter especial a toda la obra. Por ejemplo, el compositor puede escoger una serie con simetrías, y así tendrá series repetidas entre su espectro serial. También puede tener simetrías internas solo en un fragmento de tres o cuatro notas, y de este modo podrá el compositor oscilar entre varias series del espectro que se parezcan entre sí.[1]

En la Suite para Piano Op. 25, Schoenberg escoge su serie σ para resaltar el intervalo de tritono (6 semitonos). A continuación se observan en negrita los intervalos entre las notas de esta serie, en

[1] Para un estudio completo de las relaciones de similitud entre series se recomienda *On the Similarity of Twelve-Tone Rows*, de Tuukka Ilomäki. [7]

unidad de semitono:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 & & 10 & & 11 & \\ 4 & \mathbf{1} & 5 & \mathbf{2} & 7 & \mathbf{6} & 1 & \mathbf{5} & 6 & \mathbf{9} & 3 & \mathbf{5} & 8 & \mathbf{6} & 2 & \mathbf{9} & 11 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{9} & 9 & \mathbf{1} & 10 & \mathbf{6} \end{array}\right)$$

Presenta repeticiones triples de los intervalos de tritono (6), de sexta mayor (9) y de segunda menor o semitono (1): los intervalos más disonantes; una repetición doble de cuarta justa (5), y un intervalo de segunda mayor (2); además de una consecución de intervalos repetida: $9 - 1 - 9 - 1$. Como se forma el intervalo de tritono al enlazar la serie original con una serie que empiece por la misma nota, se tiene en cuenta el intervalo de tritono (6) al final. En el dodecafonismo se evitan deliberadamente los intervalos de tercera mayor (4), ya que estos son la base de la eludida armonía tonal.

El intervalo de tritono tiene la particularidad de no modificarse en la inversión y transportación $k = 6$, por lo que estos intervalos aparecen en los lugares originales, mientras que en los procedimientos de retrogradación y retrogradación inversa ocupan sus lugares en retrógrado. En particular, Schoenberg utiliza entre los seis movimientos de la Suite solamente las ocho series de todo el espectro serial que cumplen estos requisitos: T^0, T^6, I, IT^6, R, RT^6, RI y RIT^6, que podemos observar en el Anexo C, página 77.

Estas series tienen muchos elementos en común: todas comienzan o acaban por Mi$\natural$ o por Si$\flat$, lo que permite enlazar unas series con otras por medio del unísono o del tritono; se mantienen los intervalos de tritono en sus lugares originales o retrógrados, y coinciden en las dos primeras y las dos últimas notas dos a dos.

Se han realizado estudios – como el de Martha Hyde [8] – en los que se limitan las series utilizadas en la Suite a cuatro: T^0, T^6, I e IT^6, pero ya que el objetivo de este texto no es analizar la obra entera se dejará esta cuestión para análisis posteriores.

3.2. Descripción de la Suite op. 25

Schoenberg realiza en la serie σ una partición triple; es decir, la serie se divide en tres tetracordios, y cada uno de ellos contiene un intervalo de tritono. El último tetracordio, si se retrograda, consta de las notas $10 - 9 - 0 - 11$, que en notación germánica es la secuencia BACH. Esto puede ser un homenaje al compositor Johann Sebastian Bach (1685—1750), ya que Schoenberg admiraba a los grandes compositores anteriores a él por las estructuras formales de sus obras. [9]

Otro posible homenaje a Bach y sus contemporáneos barrocos es precisamente la forma de la obra: es una Suite, género cultivado durante los siglos XVII y XVIII que se compone de una variedad de danzas. La Suite de Schoenberg está formada por seis danzas: un Preludio, una Gavota, una Musette, un Intermezzo – que no tiene influencia barroca sino más bien de Brahms, otro modelo para Schoenberg –, un Minueto con Trío y una Giga. Además, el estilo, la textura – contrapuntística, típicamente barroca – y la estructura de cada danza se corresponden con los estilos, texturas y estructuras de las danzas homónimas del periodo bachiano.

Por ser ésta su primera obra totalmente dodecafónica, Schoenberg la utilizó como una muestra al mundo de las posibilidades de su nuevo método compositivo. Fue también por lo que tomó un formato tan variado como una Suite: así podía en una misma obra componer con estilos tan distintos como los de las distintas danzas.

Al componer la obra, Schoenberg trata cada tetracordio como una subunidad individual. Los superpone contra otras series del espectro también divididas, o utiliza sus notas como un solo acorde cuatríada. Estas divisiones no sólo sirven para hacer la serie más reconocible o añadir cohesión a la obra, sino que además facilitan el desarrollo de la serie específicamente en el estilo de cada danza.

3.3. Análisis de la Musette

En el tercer movimiento de la Suite, la Musette, Schoenberg recrea la danza barroca que toma su nombre del instrumento homónimo: la *cornamusa*, de la familia de la gaita. La música compuesta para estos instrumentos suele consistir en una melodía acompañada por una nota pedal, que se traduce aquí en la presencia de un bordón sobre el Sol♮ (nota 7). Esta nota se extrae de cada una de las series utilizadas y se forma con ella un ostinato rítmico en la mano izquierda del piano. Con el resto de sonidos de cada serie, Schoenberg vuelve a emular el estilo de la danza barroca y articula un discurso polifónico a dos voces con ritmos esencialmente cortos.

A partir de la doble barra del compás 9, el Re♭ (nota 1) acompaña a Sol♮ y ambos crean un doble bordón en la mano izquierda. La elección de esas dos notas está estrechamente relacionada con la tradicional relación de quinta justa formada por Sol♮ y Re♮ en la música tonal. Schoenberg sustituye las quintas justas tonales por los tritonos dodecafónicos, subrayando aún más su «emancipación de la disonancia».

Además de las similitudes texturales, rítmicas y armónicas, la Musette de Schoenberg comparte estructura formal con las danzas barrocas. Y esta semejanza es quizás la más notable, ya que fue la búsqueda de estructura formal lo que inspiró a Schoenberg a desarrollar su método compositivo. La Musette barroca, como todos los movimientos de danza, presenta una estructura binaria con simetría tonal: empieza y acaba por la misma tonalidad, mientras que el centro es zona de desarrollo. Schoenberg despoja de funcionalidad tonal a esa simetría, madre de la forma sonata, y la aplica a su composición dodecafónica.

En este movimiento se pueden diferenciar a simple vista tres secciones, divididas en los compases 9 y 20, debido a cambios de textura, figuración y tempo. En la segunda sección se le añade melodía a la mano izquierda del piano, dejando más camuflado el bordón que en la primera sección, además de que éste se vuelve doble, mientras que vuelve a aparecer claramente en la tercera sección. También en la segunda sección aparece una nueva figuración, que es la semicorchea; y, por último, en los dos compases de división aparecen dos *a tempo*, que marcan el final de las dos primeras secciones tras dos zonas de variabilidad rítmica. [10]

Para que esta estructura tríptica sea una forma binaria, la primera y la última parte deben mantener un parecido, que se observa a través del análisis de las series utilizadas en el movimiento. Estas series son T^0, T^6, I e IT^6.

En la Musette, Schoenberg hace un uso casi absoluto de la tripartición serial, hasta el punto de individualizar los tetracordios por separado y concederles privilegios seriales, como la retrogradación. Por ejemplo, en el compás 7, en la voz inferior de la mano derecha aparece el tetracordio $4 - 5 - 2 - 3$, que es o bien el primer tetracordio de RIT^6 o la retrogradación del tercer tetracordio de IT^6, mientras que los otros dos tetracordios de IT^6, $10 - 9 - 7$[2] $- 1$ en la voz superior y $8 - 11 - 6 - 0$ en la mano izquierda, aparecen en el orden correcto. Entonces no se puede analizar el compás como RIT^6, sino indicar que hay una alteración puntual de IT^6.

Por tanto, es muy complicado analizar esta obra en su totalidad, ya que la flexibilidad en la ordenación de los tetracordios puede generar situaciones muy ambiguas. Debido a estas fragmentaciones y a las variadas combinaciones de tetracordios originales y retrógrados, se escucha un área de desarrollo hacia la sección media del movimiento. En cambio, las series al principio y al final de la pieza se presentan casi íntegramente, como una exposición y reexposición. He aquí un vínculo con la simetría de las formas binarias tonales. [10]

Es más, incluso el orden de las series utilizadas en la primera y en la última sección coinciden, exceptuando dos repeticiones consecutivas

[2] La nota 7 aparece como bordón y no en la misma voz que el resto del tetracordio, por lo que su posición es también excepcional.

y las series T^0 finales, que actúan como una cadencia serial:

c.1	T^0	IT^6	T^6	I	T^0		I	T^6	IT^6	IT^6			**c.9**
c.22	T^0	IT^6	T^6	I	T^0	I	I	T^6		IT^6	T^0	T^0	**c.31**

En el Anexo D, página 81, se encuentra el análisis serial completo de la Musette.

Capítulo 4

EL GRUPO DE LAS TRANSFORMACIONES

4.1. Nuevas definiciones y nuevas transformaciones

Las fórmulas de las transformaciones del apartado 2.2 quedaron de esta forma:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}(\sigma(m)) &= -\,\sigma(m) + 2\sigma(0)\\
\mathrm{T}^{\mathrm{k}}(\sigma(m)) &= \sigma(m) + \mathrm{k}\\
\mathrm{R}(\sigma(m)) &= \sigma(-1-m)
\end{aligned}
$$

Sin embargo, la importancia de estas definiciones radica en qué espectro serial forman, y no en cómo se nombra cada serie específica. No es distinguible a un nivel musical y, de hecho, hay más de un convenio para ello.

Han surgido a lo largo de la historia dos métodos para nombrar las series. El primero, el método tradicional, se ha usado desde al menos

1945. El segundo, el método de tonos absolutos, fue concebido por George Perle en su libro *Twelve Tone Tonality* (1977).

En el método tradicional, T_0 se usa para la primera serie que se encuentra en la composición; es decir, la serie original. En cambio, el método de tonos absolutos nombra las series T basándose solamente en la nota en la que comienzan: T_0 se usa para la serie que comienza por un Do, y así sucesivamente. En ambas, las series transpuestas se nombran como Ψ_{k}.

Estas nomenclaturas no caracterizan adecuadamente el objeto matemático que deben representar, es decir, funciones aplicadas a las series. Son nombres arbitrarios que además producen ambigüedad al añadir otras funciones o al intentar describirlo matemáticamente.

En todo caso, cualquier convenio de notación tendrá fórmulas matemáticas distintas al resto, pero todas preservan el material compositivo de la obra. Eso quiere decir que se pueden redefinir algunas de las transformaciones, siempre que preserven el sentido musical.

Por ejemplo, la inversión puede prescindir de ser transportada para que la primera nota coincida con la original. Para distinguirla de la primera definición, ésta se llamará S de simetría: $\mathrm{S}(\sigma(m)) = -\sigma(m)$.

E igual que la inversión es el cambio de signo por fuera, la retrogradación puede convertirse simplemente en el cambio de signo por dentro. Ésta se llamará V de volteo: $\mathrm{V}(\sigma(m)) = \sigma(-m)$. [1]

Así quedan dos transformaciones que se asemejan a reflexiones: una por *dentro* y otra por *fuera*; y una adición por *fuera*. Aquí *dentro* significa *antes* de aplicar σ y *fuera* significa *después* de aplicar σ, ya que no se debe olvidar que σ, la permutación, es una función en sí misma. Y ahora surge una cuestión consecuentemente: ¿cuál sería entonces el resultado de sumar *dentro*, es decir, *antes*?

Esta nueva transformación, cuya aparición resulta natural tras las

[1] Si no se añade la transformación C, entonces V no conserva el espectro serial de {I,T,R}.

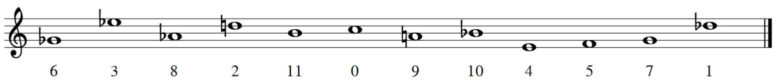
otras tres, se llama *desplazamiento cíclico*. Inventada y usada por Alban Berg, y en algunas obras primerizas de Schoenberg, $\mathrm{C^k}$ desplaza el comienzo de la serie k posiciones más allá:

$$\mathrm{C^k}\left(\sigma\left(m\right)\right) = \sigma\left(m + \mathrm{k}\right)$$

$$\mathrm{C^k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & 9 & 10 & 11 \\ \sigma\left(\mathrm{k}\right) & \sigma\left(\mathrm{k}+1\right) & \sigma\left(\mathrm{k}+2\right) & \cdots & \sigma\left(\mathrm{k}+9\right) & \sigma\left(\mathrm{k}+10\right) & \sigma\left(\mathrm{k}+11\right) \end{pmatrix}$$

La serie 4-cíclica sobre la permutación P de la Suite Op. 25 es la siguiente serie $\mathrm{C^4}$:

$$\mathrm{C^4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 3 & 8 & 2 & 11 & 0 & 9 & 10 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

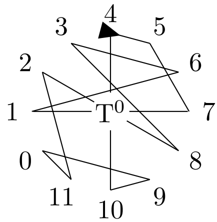


En resumen, se puede trabajar con un nuevo sistema de definiciones que mantienen el significado musical del serialismo pero varían la notación con la que se trabaja.

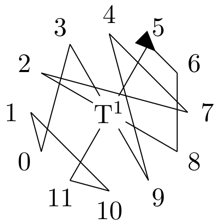
$$\mathrm{S}(\sigma(m)) = -\sigma(m) \qquad \mathrm{V}(\sigma(m)) = \sigma(-m)$$
$$\mathrm{T^k}(\sigma(m)) = \sigma(m) + \mathrm{k} \qquad \mathrm{C^k}(\sigma(m)) = \sigma(m + \mathrm{k})$$

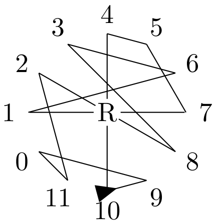
4.2. Diagramas de reloj

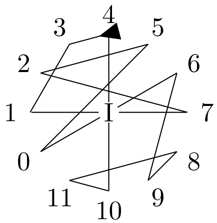
Para visualizar mejor cómo actúan las distintas transformaciones, las series se pueden representar mediante *diagramas de reloj*: una sucesión de aristas con una orientación establecida que conecta los vértices de un dodecágono en el orden de la serie [11]. Ya que el desplazamiento cíclico actúa como si la serie fuese circular, hay añadida una arista desde la última nota a la primera. El comienzo de la serie y su orientación se marcan con una flecha.

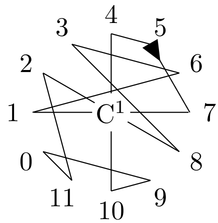


Arriba se incluye el diagrama de la serie original σ de la Suite Op. 25. Se pueden distinguir las características de la serie, como las tres diagonales, que son los tres intervalos de tritono. A continuación se incluyen los diagramas de las transformaciones del apartado 2.2: la transposición, la inversión y la retrogradación; así como el nuevo desplazamiento cíclico.



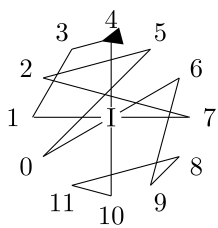


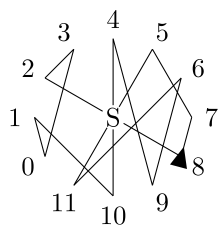




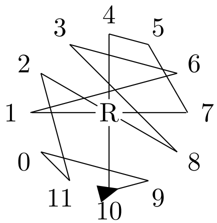
La transposición es una rotación en el sentido en el que apunta la flecha; la inversión es una reflexión con el eje de simetría en la diagonal que pasa por la flecha; la retrogradación es un cambio de orientación de la flecha; y el desplazamiento cíclico es el avance interno de la flecha por el recorrido de la serie.

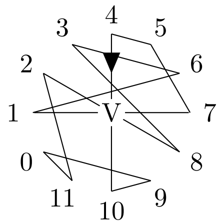
La diferencia entre las inversiones I y S es precisamente la transposición de $2\sigma(0) = 8$ semitonos en este ejemplo. Comparando S con T^0 se puede además observar que S es una reflexión con el eje de simetría en 0, en vez de que el eje dependa de la propia permutación.





Por otro lado, la comparación entre las retrogradaciones R y V muestra que, aunque en principio más arbitraria, V es una transformación más natural, ya que deja fija la flecha. La diferencia entre ellas es en realidad un desplazamiento cíclico de -1.





He creado una página interactiva que genera diagramas de reloj de cualquier serie para cualquier longitud serial, además de generar series aleatorias. También se pueden aplicar las transformaciones a la serie, tanto las originales como las del nuevo sistema, para ver cómo se comporta el diagrama. Está escrita en Elm y el código puede encontrarse en `https://gitlab.com/dodecafonismo/diagramas`.

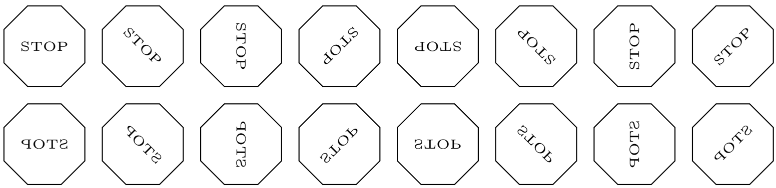
En el código QR está el enlace de la aplicación web. Sus instrucciones de uso se encuentran al final de la página. El enlace es `https://diagramas.netlify.com`.

Además, he creado un comando en LaTeX que dibuja estos diagramas dada su serie y su nombre, así como el número que está arriba: `\ddiagram[4]{4,5,7,1,6,3,8,2,11,0,9,10}{T$^0$}` – en este caso `[4]` no es necesario, ya que por defecto se coloca arriba la primera nota de la serie. El código se encuentra en el Anexo B, página 73.

4.3. El grupo: D_{12} x D_{12}

El conjunto de transformaciones {S, T, V, C} está compuesto por dos parejas con semejanzas entre sí. S es una reflexión y T una rotación de orden 12 – es decir, que al aplicarla 12 veces se vuelve a la identidad – y ambas se aplican a la figura entera; es como mover el diagrama por el papel. En cambio, V es una reflexión de la flecha en sí, y C una rotación – también de orden 12 – de la flecha sobre la línea; ambas aplicadas al interior de la figura.

Cada pareja genera un grupo muy conocido: el grupo diédrico o diedral. Se denota[2] por D_{12} y representa el grupo de simetrías de un polígono regular; en este caso, un dodecágono. Por ejemplo, aquí se muestran todas las simetrías de un octógono, que son los 16 elementos de D_8, aplicados a una señal de STOP.



De igual manera, el conjunto de series de un espectro serial se consigue aplicando a la serie las distintas funciones transformativas; se obtiene entonces un grupo diédrico para ambas parejas de funciones.

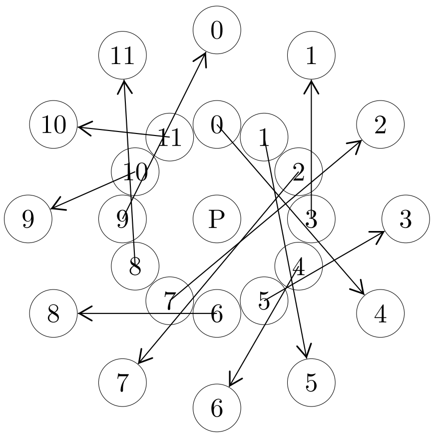
Al haber dos parejas distintas que actúan por separado dentro y fuera de la figura, el grupo completo que forman las cuatro transformaciones es el producto directo de dos copias del diédrico: $D_{12} \times D_{12}$.

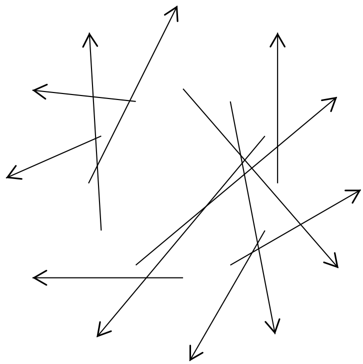
Podemos observarlo claramente si representamos la serie de una segunda forma: como la correspondencia entre vértices de dos dodecágonos. La serie original, que es en realidad una permutación de 12

[2]En otros ámbitos, D_n también se denota por D_{2n}, ya que $2 * n$ es el número de elementos que tiene el grupo.

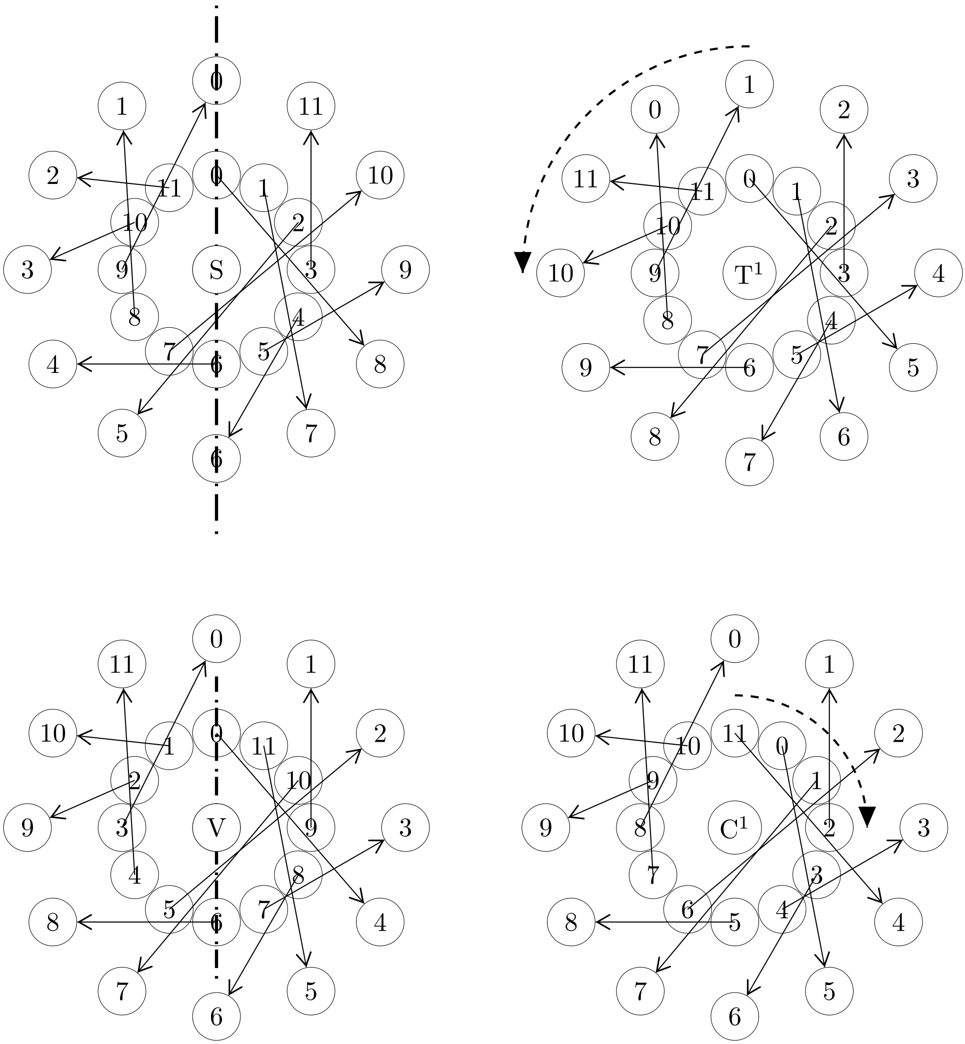
elementos, se representa como una función: los vértices del dodecágono interno se envían biyectivamente a los vértices externos. Así, $m \longmapsto \sigma(m)$. Este diagrama es similar al matricial pero enroscado en sí mismo, de tal forma que se aprecia la permutación escogida mediante las flechas, que son fijas, y facilita un significado del antes y el después de aplicarla.

Las dos primeras figuras describen esto mismo: la representación de la serie original y la representación de la permutación mediante las flechas, que se mantendrán constantes en el resto de figuras.





Las cuatro siguientes figuras representan las cuatro funciones transformativas, que son en realidad la reflexión y la rotación del grupo diédrico de cada dodecágono. Aplicarlo al de dentro es aplicarlo antes de las flechas; antes de la permutación. Aplicarlo fuera es transformar después de las flechas; después de la permutación.


S
T¹
V
C¹

He creado un comando en LaTeX que dibuja estos diagramas diédricos dada su serie original y las funciones aplicadas a ella: `t`, `s`, `c` y `v`. Se aplican en ese mismo orden, y por defecto están a 0. `\ddihedral[c=2,t=3,s=1]{4,5,7,1,6,3,8,2,11,0,9,10}`. El código se encuentra en el Anexo B, página 74.

4.4. Conmutatividad entre los elementos del grupo

La rotación (r) y la reflexión (s) de un grupo diédrico no conmutan, sino que cumplen $r \cdot s = s \cdot r^{-1}$. Por otro lado, en los productos directos los elementos de un lado conmutan con los del otro. Así, {S, T} y {V, C} no conmutan, pero el resto de parejas sí. La verificación de estas afirmaciones, que confirman que el grupo generado es $\mathrm{D}_{12} \times \mathrm{D}_{12}$, se encuentran en el Anexo E.

Volviendo a las definiciones originales {I, T, R, C}, su estructura interna es bien distinta. El problema de I es que depende de la permutación escogida, por lo que a veces tiene unas propiedades y a veces otras. En cambio, la definición de V con respecto a R es meramente estética: ya que no depende de la permutación, su conmutatividad se mantiene invariante.

Viendo cómo conmutan los elementos de este sistema se aprecia la dificultad de I. Curiosamente, la conmutatividad de {I, R} e {I, C} se pierde, pero se gana la de {I, T}. Así, T conmuta con todo en el sistema. Esto muestra una ventaja de la definición de I.

I y R ya no conmutan:

$$\begin{aligned} & \mathrm{I} \circ \mathrm{R}(\sigma(m)) \\ = & \, \mathrm{I}(\mathrm{R}(\sigma(m))) \\ = & \, - \mathrm{R}(\sigma(m)) + 2\mathrm{R}(\sigma(0)) \\ = & \, - \sigma(-1-m) + 2\sigma(-1-0) \\ = & \, - \sigma(-1-m) + 2\sigma(-1) \end{aligned}$$

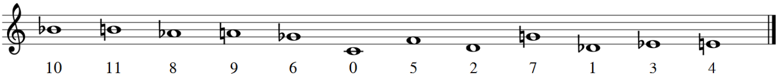
$$\begin{aligned} & \mathrm{R} \circ \mathrm{I}(\sigma(m)) \\ = & \, \mathrm{R}(\mathrm{I}(\sigma(m))) \\ = & \, \mathrm{R}(-\sigma(m) + 2\sigma(0)) \\ \overset{3}{=} & \, \mathrm{R}(-\sigma(m)) + 2\sigma(0) \\ = & \, - \sigma(-1-m) + 2\sigma(0) \end{aligned}$$

Los únicos casos en los que podrían conmutar ocurrirían cuando

$$\begin{aligned} 2\sigma\,(0) \equiv 2\sigma(-1) \text{ (mod. 12)} & \Longleftarrow \\ 12 + 2\sigma\,(0) = 2\sigma\,(-1) & \Longleftrightarrow \\ 6 + \sigma\,(0) = \sigma\,(-1) & \Longleftrightarrow \\ \sigma\,(-1) - \sigma\,(0) = 6 & \end{aligned}$$

Es decir, cuando la primera y la última nota de la serie original se distancian en 6 semitonos, como es el caso de la permutación en la Suite Op. 25:

$$\mathrm{IR} = \mathrm{RI} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 8 & 9 & 6 & 0 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



[3] R y T conmutan.

I y C ya no conmutan:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I} \circ \mathrm{C}(\sigma(m)) \\ =\ &\mathrm{I}(\sigma(m+1)) \\ =\ &-\sigma(m+1) + 2\sigma(1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{C} \circ \mathrm{I}(\sigma(m)) \\ =\ &\mathrm{C}(-\sigma(m) + 2\sigma(0)) \\ \overset{4}{=}\ &\mathrm{C}(-\sigma(m)) + 2\sigma(0) \\ =\ &-\sigma(m+1) + 2\sigma(0) \end{aligned}$$

Los únicos casos en los que podrían conmutar son cuando

$$\begin{aligned} 2\sigma(0) \equiv 2\sigma(1) \text{ (mod. 12)} &\Longleftarrow \\ 12 + 2\sigma(0) = 2\sigma(1) &\Longleftrightarrow \\ 6 + \sigma(0) = \sigma(1) &\Longleftrightarrow \\ \sigma(1) - \sigma(0) = 6 & \end{aligned}$$

Es decir, cuando la primera y la segunda nota de la serie original se distancian en 6 semitonos.

Si se echan las cuentas con C^{k} en vez de con C^1, pueden conmutar si $\sigma(\mathrm{k}) - \sigma(0) = 6$. Como σ es una permutación, devuelve todos los valores de 0 a 11 y solamente una vez cada uno. Por tanto, también devuelve $6 + \sigma(0)$, así que **siempre existe un único k para el que I y $\mathbf{C}^{\mathbf{k}}$ conmutan**. En el caso de la permutación de la Suite Op. 25, como $\sigma(0) = 4$ hay que encontrar el k para el que $\sigma(\mathrm{k}) = 4+6 = 10$. En este caso, $\mathrm{k} = 11$, pero depende por completo de la permutación original.

[4] C y T conmutan.

I y T ahora sí conmutan:

$$\begin{aligned} & \mathrm{I}\circ\mathrm{T}(\sigma(m)) \\ = {} & \mathrm{I}(\sigma(m)+1) \\ = {} & -(\sigma(m)+1)+2(\sigma(0)+1) \\ = {} & -\sigma(m)-1+2\sigma(0)+2 \\ = {} & -\sigma(m)+2\sigma(0)+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathrm{T}\circ\mathrm{I}(\sigma(m)) \\ = {} & \mathrm{T}(-\sigma(m)+2\sigma(0)) \\ = {} & -\sigma(m)+2\sigma(0)+1 \end{aligned}$$

R y C no conmutan:

$$\begin{aligned} & \mathrm{R}\circ\mathrm{C}(\sigma(m)) \\ = {} & \mathrm{R}(\sigma(m+1)) \\ = {} & \sigma(-(m+1)-1) \\ = {} & \sigma(-m-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}\circ\mathrm{R}(\sigma(m)) \\ = {} & \mathrm{C}(\sigma(-m-1)) \\ = {} & \sigma(-m-1+1) \\ = {} & \sigma(-m) \end{aligned}$$

T y R conmutan:

$$\begin{aligned} & \mathrm{T}\circ\mathrm{R}(\sigma(m)) \\ = {} & \mathrm{T}(\sigma(-m-1)) \\ = {} & \sigma(-m-1)+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathrm{R}\circ\mathrm{T}(\sigma(m)) \\ = {} & \mathrm{R}(\sigma(m)+1) \\ = {} & \sigma(-m-1)+1 \end{aligned}$$

T y C conmutan:

$$\begin{aligned} & \mathrm{T}\circ\mathrm{C}(\sigma(m)) \\ = {} & \mathrm{T}(\sigma(m+1)) \\ = {} & \sigma(m+1)+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}\circ\mathrm{T}(\sigma(m)) \\ = {} & \mathrm{V}(\sigma(m)+1) \\ = {} & \sigma(m+1)+1 \end{aligned}$$

Parte II

ENEFONISMO

Capítulo 5

EL SURGIMIENTO DEL SERIALISMO INTEGRAL

5.1. Alban Berg y Anton Webern: la Segunda Escuela de Viena

Además de Schoenberg, hubo dos compositores más que contribuyeron al desarrollo del dodecafonismo y que demostraron con sus diferentes estilos la versatilidad del sistema. Éstos fueron los discípulos de Schoenberg: Alban Berg y Anton Webern.

El maestro y sus dos alumnos formaron la autodenominada Segunda Escuela de Viena, llamada así en honor a los miembros de la Primera: Haydn, Mozart y Beethoven. Aparte del hecho de que Schoenberg, Berg y Webern nacieron y se formaron en Viena, el nombre también simboliza su autoproclamación como herederos legítimos de la tradición musical alemana proveniente del siglo XVIII.

La Segunda Escuela de Viena formó parte de las vanguardias artísticas europeas, opuestas a la tendencia neoclásica de Stravinsky o

Prokofiev. Los tres integrantes siguieron carreras compositivas similares en cuanto a estilo y concepción artística: una época tonal, una ruptura atonal y un desarrollo dodecafónico.

Con el ascenso del nazismo, Schoenberg, que era judío, se vio obligado a exiliarse a Estados Unidos. Sus discípulos se quedaron en Austria, pero pasaron penurias económicas debido a la censura impuesta por el gobierno: la música dodecafónica se descalificó como *Entartete Musik* («música degenerada»).

Alban Berg
(1885–1935)

Alban Berg se centró en la efusión emocional y el interés por lo humano, utilizando el método dodecafónico libremente y acercándose a formatos tonales. Su etapa atonal fue especialmente relevante, ya que compuso entonces su primera obra dramática, Wozzeck (1925). Es una ópera basada en la pieza teatral de Georg Büchner, en la cual Berg plasmó parte de sus propias experiencias como soldado en la Primera Guerra Mundial. Su segunda ópera, Lulú, quedó inconclusa debido a su muerte por septicemia en 1935, a los 50 años.

Anton Webern fue un compositor más riguroso en cuanto a las formas, siempre leal al sistema dodecafónico y a su maestro. Se deleitaba en los procedimientos formales más sutiles, aquellos que solo podían ser descubiertos al estudiar detenidamente la obra. Esto quedó reflejado en su dodecafónico Concierto para 9 instrumentos, Op. 24 (1934), cuya serie está construida por segmentos derivados de las tres primeras notas de la obra. Además, muestra tendencias a asignar duraciones, timbres y articulaciones a segmentos aislados, lo que más tarde inspiraría el serialismo integral.

Durante la ocupación de Viena, Webern salió de su casa una noche tras el toque de queda, y un soldado norteamericano, probablemente en estado de embriaguez, lo mató a tiros. Así, Schoenberg, el maestro y el más mayor de los tres, sobrevivió a sus dos alumnos exiliado en Estados Unidos.

5.2. La escuela de Darmstadt

Tras la Segunda Guerra Mundial, el mundo artístico estaba totalmente destruido. La violencia, la censura y la incomunicación habían impedido cualquier posible desarrollo creativo, y los artistas de la generación anterior se habían aislado, exiliado o habían fallecido. Volver a construir los pilares del arte era el cometido de la nueva generación de artistas, quienes compartían la sensación de que el mundo había renacido tras la tragedia.

En 1946 se crearon los Cursos de Verano de Darmstadt, fundados por Wolfgang Steinecke y patrocinados por las fuerzas americanas, con el objetivo de retomar la actividad musical en la Alemania de la posguerra. Se centraron en dar a conocer las técnicas compositivas de las generaciones anteriores. Aunque el primer año estuvo enfocado en el movimiento neoclásico, fue en los años posteriores cuando se desarrolló un mayor interés por las técnicas serialistas.

Los cursos resultaron en la aparición de una nueva escuela de compositores cuya finalidad artística era crear un lenguaje musical distinto y alejado de la tradición para, de esta forma, obtener una mayor libertad compositiva. Como dijo Karlheinz Stockhausen:

> *Los métodos nuevos cambian la experiencia, y las experiencias nuevas cambian al hombre.*[1]

Esta escuela tomó el nombre de la ciudad donde se realizaban los cursos: se llamó la Escuela de Darmstadt. El término fue acuñado por el compositor Luigi Nono en una de sus clases magistrales en 1957, y con él se describía a sí mismo y a sus compañeros compositores: Pierre Boulez, Karlheinz Stockhausen y Bruno Maderna. Para estos compositores, la tradición artística estaba demasiado relacionada con los fracasos políticos y las penurias sociales pasadas, y precisamente por ello creían necesario romper con todos los vínculos heredados.

[1] Karlheinz Stockhausen en el documental autobiográfico *Tuning In* (1981).

Sin embargo, para crear aquel nuevo lenguaje no tomaron como referencia el dodecafonismo de Schoenberg, ya que él veía su sistema como parte de la tradición musical, como un elemento más en la evolución de la música. Se centraron, en cambio, en la formalidad y abstracción del serialismo de Anton Webern, y desarrollaron a partir de sus métodos el denominado *serialismo integral*.

Anton Webern
(1883–1945)

Para la Escuela de Viena el estilo compositivo de Webern era tan solo un posible enfoque del amplio abanico que abarcaba el dodecafonismo, pero en Darmstadt se consideró un avance de éste.

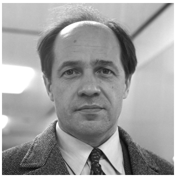
El serialismo integral es un sistema de composición musical que predetermina los materiales compositivos – la melodía, la armonía, el ritmo, el timbre – a partir de la ordenación serial de los diferentes parámetros musicales: alturas, intensidades, duraciones, ataques o instrumentos, entre otros.

Es un desarrollo del serialismo dodecafónico de Schoenberg, que serializa solamente las alturas, hacia los demás parámetros sonoros. Tiene, por tanto, un alto grado de planificación pre-composicional: se pretende que la determinación compositiva sea absoluta; y se tiende al automatismo del arte y sus formas, alejándolo de cualquier evocación decimonónica.

Desde sus comienzos, el serialismo integral suscitó numerosas críticas, incluso desde el propio colectivo vanguardista. Una de ellas fue la falta de elección del intérprete a la hora de transmitir la obra. El intérprete serialista debe reproducir con total exactitud cada detalle de la partitura, y, por tanto, no puede aportar carácter alguno.

Otra de las críticas más extendidas fue la incapacidad para interpretar estas obras correctamente debido a su complejidad técnica. Además, los detalles que precisamente las hacen complejas son, en su mayor parte, inapreciables por parte del oyente.

5.3. Pierre Boulez



Pierre Boulez
(1925–2016)

El compositor que creó y utilizó por primera vez el serialismo integral, además de instruirlo y difundirlo a los demás compositores de Darmstadt, fue el compositor francés Pierre Boulez. Otros músicos habían compuesto obras con tendencias serialistas y elementos predeterminados, como Olivier Messiaen en *Mode de valeurs et d'intensités*, pero fue Boulez quien sentó sus bases y su técnica. De hecho, los compositores precedentes influyeron prominentemente en la música de Boulez gracias a las clases impartidas en los cursos de Darmstadt.

Boulez consideraba necesaria y evidente la extensión de elementos a predeterminar más allá de la melodía, y le parecía incoherente el sistema dodecafónico de Schoenberg, que para él estaba incompleto. En su controvertido ensayo *Schoenberg ha muerto*, publicado un año después de la muerte del compositor, comentó:

> *En primer lugar, la exploración del campo serial ha sido conducida unilateralmente: allí falta el plano rítmico, e incluso el plano sonoro propiamente dicho: las intensidades y los ataques.* [...]
>
> *Pero la causa esencial de su fracaso reside en el desconocimiento profundo de las FUNCIONES seriales propiamente dichas, las funciones engendradas por el principio mismo de la serie.* [5]

Es decir, que para ampliar el concepto de serialismo se debía primeramente conocer el fundamento matemático de las series y sus funciones transformativas. Además de ser músico y compositor, Boulez había estudiado matemáticas, lo que le llevó a querer analizar matemáticamente el sistema compositivo y generalizarlo para series de longitudes arbitrarias. Para él, el serialismo no debía ser un mero recurso compositivo, sino la ley que rige todos los elementos de la obra. De hecho, más adelante en su ensayo declara:

> [...] *desde el descubrimiento de la Escuela de Viena, todo compositor alejado de los experimentos seriales ha resultado inútil.*

Su obra *Structures I* (1952), para dos pianos, fue compuesta siguiendo las técnicas de serialismo integral: tiene series de doce alturas, doce ataques, doce duraciones y doce tipos dinámicos, aunque más tarde reduciría algunas a diez.

Capítulo 6

MÁS HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

6.1. Acciones de grupos sobre conjuntos

Dado un grupo (G, $*$) y un conjunto X, la *acción* de (G, $*$) sobre X es una función ϕ que asocia un elemento $g \in$ G y un elemento $x \in$ X – el par (g, x) – a otro elemento $g \cdot x$ que también pertenece a X [12]. $\phi : (g, x) \to g \cdot x$

La acción ϕ, expresada mediante la operación ($\cdot$), debe cumplir dos condiciones:

1. Para todo $x \in$ X, $e \cdot x = x$, siendo e el elemento neutro del grupo.
2. Para todo $x \in$ X y para todo par $g, h \in$ G, se debe cumplir que $(g * h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$. La primera operación ($*$) es la interna del grupo G, y la segunda operación ($\cdot$) es la acción.

Como ya se ha visto en el apartado 4.3, las funciones {S,T,V,C} forman el grupo diédrico $D_n \times D_n$, con n la longitud de la serie. Se podrá definir entonces la acción ϕ de este grupo sobre el conjunto de permutaciones de orden n, tal que $\phi(\Psi,\ \sigma) = \Psi \circ \sigma = \Psi(\sigma) = \tau$, con $\Psi \in \mathrm{D}_n \times \mathrm{D}_n$ y $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_n$.

De igual manera, se puede definir el grupo que forman solamente I y R, que servirá más adelante. Como son dos reflexiones, forman el conocido grupo de Klein – a partir de ahora denotado por Ξ, con elementos Id, I, R e IR.

6.2. Órbitas y estabilizadores

Dada una acción de (G, $*$) sobre X, la *órbita* de un determinado elemento $x_0 \in$ X es el subconjunto de elementos x de X que pueden ser alcanzados desde x_0 mediante algún $g_0 \in$ G. Es decir, todos los x para los que existe un g_0 que al actuar sobre x_0 da x. Trivialmente, $x_0 \in Orb(x_0)$ ya que $e \cdot x_0 = x_0$.

$$Orb(x_0) = \{x \in X :\ \exists\ g_0 \in \mathrm{G},\ g_0 \cdot x_0 = x\}$$

Por ejemplo, dada una permutación σ, todas las permutaciones a las que se llega desde σ mediante algún $\Psi \in \mathrm{D}_n \times \mathrm{D}_n$ – que son las transformaciones de series del apartado 4.1 – conforman la órbita de σ. Por definición, las series a las que se puede llegar desde una serie original conforman su espectro serial, por lo que **la órbita es en realidad el espectro serial**.

Para el mismo x_0 se define su *estabilizador* como el conjunto de elementos $g \in$ G que fijan x_0, es decir, que mandan x_0 a sí mismo. Mientras que una órbita es un subconjunto de X, un estabilizador es un subgrupo de G. Trivialmente, $e \in Stab(x)\ \forall x \in$ X, porque el elemento identidad fija cualquier otro elemento por definición.

$$Stab(x_0) = \{g \in \mathrm{G}\ :\ g \cdot x_0 = x_0\}$$

Si cada $g \in$ G llevara a x_0 a un x distinto, el número de elementos de $Orb(x_0)$ sería igual al número de elementos de G. Sin embargo, si un elemento $g_0 \in$ G fija x_0, entonces no dará nuevos elementos en la órbita de x. Por tanto, el tamaño de la órbita disminuye. De hecho, el teorema de Órbita–Estabilizador dice que el tamaño de una órbita ($|Orb(x_0)|$) será el tamaño de G ($|\text{G}|$) entre el número de elementos que fijan x_0; es decir, el tamaño de su estabilizador ($|Stab(x_0)|$). Además, es cierto para todo $x \in$ X.

$$|Orb(x)| = \frac{|\text{G}|}{|Stab(x)|}, \text{ o lo que es lo mismo, } |\text{G}| = |Orb(x)||Stab(x)|$$

Este teorema implica que los tamaños de cada órbita y cada estabilizador son divisores del tamaño del grupo. Por ejemplo, como el tamaño del grupo Ξ es 4, cualquier estabilizador y cualquier órbita tendrán tamaño 1, 2 o 4. En concreto, como Id está siempre en el estabilizador, para todo σ será de una de estas formas:

$\lvert Stab\rvert = 1$		{Id}	
$\lvert Stab\rvert = 2$	{Id, R}	{Id, I}	{Id, RI}}
$\lvert Stab\rvert = 4$		{Id, R, I, RI}	

Una serie σ sin simetrías tendrá una serie distinta para cada una de sus transformaciones. Por tanto, su órbita será {σ, R(σ), I(σ), RI(σ)} y su estabilizador será solamente {Id}. Cumple entonces el teorema: $4 \cdot 1 = 4$.

6.3. El lema de Burnside

Las órbitas, que son subconjuntos de X, forman una *partición* de X. Esto significa que son subconjuntos disjuntos: ningún x puede estar en dos órbitas distintas. Interesa entonces saber cuántos subconjuntos hay; es decir, el número de órbitas ($\#Orb$). El lema de Burnside[1] afirma que se pueden calcular así:

$$\#Orb = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{x \in \mathrm{X}} |\mathrm{Stab}(x)|$$

Se prueba de esta forma: por el teorema de Órbita–Estabilizador, $|\mathrm{Stab}(x)| = \frac{|\mathrm{G}|}{|Orb(x)|}$, por lo que la parte derecha se puede expresar así:

$$\frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{x \in \mathrm{X}} |\mathrm{Stab}(x)| = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{x \in \mathrm{X}} \frac{|\mathrm{G}|}{|Orb(x)|} = \sum_{x \in \mathrm{X}} \frac{1}{|Orb(x)|}$$

Como las órbitas forman una partición de X, la suma sobre todo el conjunto X puede ser dividida en sumas separadas para cada órbita. Además, si por cada elemento de una órbita se suma el inverso del número de elementos de la órbita, esa suma dará uno. Solo queda ahora sumar uno por cada órbita.

$$\sum_{x \in \mathrm{X}} \frac{1}{|Orb(x)|} = \sum_{\mathrm{O} \in \text{Órbitas}} \left(\sum_{x \in \mathrm{O}} \frac{1}{|\mathrm{O}|} \right) = \sum_{\mathrm{O} \in \text{Órbitas}} 1 = \#Orb \quad \square$$

Este lema permite calcular el número de posibles espectros seriales distintos, ya que el espectro de una serie es igual al espectro de sus series transformadas. Un compositor serialista debe entonces escoger no una serie original, sino el espectro con el que construir la obra. O, más bien, si escoge una serie original está escogiendo el mismo material que si escogiera otra serie de ese mismo espectro.

---

[1] Aunque Burnside demostró este lema en una ocasión, citó a Frobenius como su autor. Sin embargo, Cauchy era conocedor del lema décadas antes. Para no confundirlo con otros lemas que sí son de Burnside, a veces se le llama *el lema que no es de Burnside.*

Capítulo 7

CONTEO DE ESPECTROS SERIALES

7.1. Espectros de las funciones {I, T, R}

Es interesante conocer el número de espectros seriales distintos que un compositor puede escoger. Al fin y al cabo, es irrelevante qué serie se escoge como la original dentro de su espectro serial, ya que produce el mismo material compositivo que cualquiera de su mismo espectro.

Para calcular el número de espectros seriales se redefinirán las funciones transformativas para una longitud serial arbitraria, n, que será mayor que 2. Para $n = 0,\ 1$ y 2 se realizará el cálculo en el apartado 7.3.

Además, como las transposiciones siempre son distintas entre sí, siempre pertenecen al mismo espectro. Se tomarán a partir de ahora todas ellas como equivalentes, de manera que solo se necesita hacer el cálculo para {I, R}.

Al calcular con permutaciones se trabajará módulo n. La retrogradación sigue siendo $\mathrm{R}(\sigma(m)) = \sigma(-1-m)$. La inversión será $\mathrm{I}(\sigma(m)) = -\sigma(m)$, omitiendo la transposición habitual, ya que se toman las series transpuestas como equivalentes. De esta forma $-\sigma(m)+2\sigma(0) \equiv -\sigma(m)$. La retrogradación invertida es, por tanto, la composición de ambas: $\mathrm{RI}(\sigma(m)) = \mathrm{I} \circ \mathrm{R}(\sigma(m)) = \mathrm{I}\left(\mathrm{R}(\sigma(m))\right) = -\sigma(-1-m)$.

La retrogradación, la inversión y la composición de ambas cumplen que al aplicarlas dos veces se vuelve a la serie original. En teoría de grupos se dice que tienen *orden 2*. Entonces $\{\mathrm{Id}, \mathrm{I}, \mathrm{R}, \mathrm{IR}\}$ forma un grupo especial llamado *grupo de Klein*, donde $\mathrm{RI} \equiv \mathrm{IR}$, ya que estamos tomando las series transpuestas como equivalentes.

En general, un grupo de Klein es el formado por cuatro elementos donde cada elemento es inverso de sí mismo. El grupo de Klein, llamado así en honor al matemático alemán Felix Klein, es el grupo $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$, producto directo de dos grupos cíclicos de orden 2.

Por el lema de Burnside:

$$\#\mathrm{Spec} = \frac{1}{|\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)|} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} |\mathrm{Stab}(\sigma)| = \frac{1}{4} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} |\mathrm{Stab}(\sigma)|$$

Es decir, se deben calcular para cada posible serie $\sigma \in \mathrm{S}_n$ cuántas funciones transformativas lo dejan igual o equivalente bajo transposición.

Como los estabilizadores son subgrupos, por el teorema de Lagrange su tamaño debe ser divisor del tamaño del grupo total. Entonces se pueden agrupar los estabilizadores por sus tamaños: 1, 2 o 4, y así calcular $\sum |\mathrm{Stab}(\sigma)|$ agrupando todas las permutaciones con igual tamaño de estabilizador. Si $\#\sigma_i$ es el número de permutaciones cuyos estabilizadores tienen tamaño i:

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} |\mathrm{Stab}(\sigma)| = 1 \cdot (\#\sigma_1) + 2 \cdot (\#\sigma_2) + 4 \cdot (\#\sigma_4)$$

Primero, se ha de ver que una permutación nunca va a ser igual ni equivalente mediante transposiciones a su inversa.

$$\begin{aligned} -\sigma(m) \equiv \sigma(m) &\iff \\ 0 \equiv 2\sigma(m) &\iff \\ n \equiv 2\sigma(m) &\iff \\ \frac{n}{2} \equiv \sigma(m) & \end{aligned}$$

Así, $\sigma(m)$ sería constante para todo $m \in \mathbb{Z}/(n)$, lo cual es imposible. Esto implica que ninguna permutación va a tener a I en su estabilizador, por lo que $\#\sigma_4 = 0$. Queda entonces calcular cuántas permutaciones son equivalentes a su retrogradación y cuántas a su retrogradación inversa. La suma de ambas dará $\#\sigma_2$.

7.1.1. Elementos estables mediante R

Las permutaciones que coinciden con alguna transposición de su retrogradación cumplen, para γ constante:

$$\gamma + \sigma(m) = \mathrm{R}(m) = \sigma(-1-m)$$

Aplicándolo a $(-1-m)$: $\gamma + \sigma(-1-m) = \sigma(m)$

De ambas ecuaciones: $\quad \gamma = \sigma(-1-m) - \sigma(m) = \sigma(m) - \sigma(-1-m)$

$2\sigma(m) \equiv 2\sigma(-1-m) \implies 2\sigma(m) - 2\sigma(-1-m) \equiv 0$

$2\sigma(m) - 2\sigma(-1-m) = n \implies \sigma(m) - \sigma(-1-m) = \frac{n}{2}$

Entonces n debe ser par. Cuando n es impar este tipo de permutaciones no existe. Además, cumplen que sus elementos simétricos se distancian entre sí un intervalo de $\frac{n}{2}$ unidades: son series con simetría par.

$$\gamma = \sigma(m) - \sigma(-1-m) = \frac{n}{2}$$

En una serie de longitud n, existen $\frac{n}{2}$ intervalos que miden $\frac{n}{2}$. Como no importa por cuál de ellos comience la serie, ya que las transportaciones son equivalentes, se fija el primero de los intervalos. Quedan los otros $\frac{n}{2} - 1$ intervalos por escoger, así que el número de series con simetría par cuenta las permutaciones de $\frac{n}{2} - 1$ intervalos y las dos posibles posiciones de cada intervalo – creciente y decreciente –. [14] Por ello, el número de series con simetría par es de:

$$2! \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)! = 2\left(\frac{n-2}{2}\right)! = (n-2)(n-4)\ldots = (n-2)!!\ ^{1}$$

7.1.2. Elementos estables mediante RI

Las permutaciones que coinciden con alguna transposición de su retrogradación inversa cumplen, para un γ constante:

$$\sigma(m) = \mathrm{RI}(\sigma(m)) + \gamma = -\sigma(-1-m) + \gamma$$

$$\gamma = \sigma(m) + \sigma(-1-m)$$

Sus elementos simétricos suman una cantidad constante: son series con simetría impar. Tal y como se ha hecho en el apartado anterior, se puede fijar una de las notas, ya que las transportaciones son equivalentes. Si n es impar, la nota central es $\sigma(\frac{n-1}{2})$, que es igual a $\sigma(-1 - \frac{n-1}{2})$. Por tanto, $\gamma = 2 \cdot \sigma(\frac{n-1}{2})$. Si se escoge esta nota para ser fijada a 0, entonces $\gamma = 2 \cdot 0 = 0$. Es decir, γ puede ser fijada a 0 sin pérdida de generalidad.

Para el resto de notas, $\sigma(m) = -\sigma(-1-m)$. Ya escogida la nota central, permite $n-1$ posibilidades para $\sigma(0)$. Ya escogidas la nota central, la primera y su simétrica, permiten $n-3$ posibilidades para $\sigma(1)$, y así sucesivamente hasta llegar a la nota anterior a la central,

[1] Por definición, si n es par $n!! = n(n-2)(n-4)\ldots 4 \cdot 2$ y si n es impar $n!! = n(n-2)(n-4)\ldots 3 \cdot 1$.

que es $\frac{n-3}{2}$. Por ello, para n impar, el número de series con simetría impar es de:

$$(n-1)(n-3)\ldots(n-2\cdot\frac{n-5}{2}-1)(n-2\cdot\frac{n-3}{2}-1)=$$

$$=(n-1)(n-3)\ldots(n-(n-5)-1)(n-(n-3)-1)=$$

$$=(n-1)(n-3)\ldots4\cdot2=(n-1)!!$$

Si n es par, $\sigma(m)\neq\sigma(-1-m)\ \forall m\in\mathbb{Z}/(n)$, ya que no hay elemento central. Sea ahora $\gamma=2k$ un número par. Como $2k\leq n$ y las permutaciones son suprayectivas, para algún m se cumple que $\sigma(m)=k$. Se tiene entonces $k+\sigma(-1-m)=2k\implies\sigma(-1-m)=k=\sigma(m)$. Como esto es una contradicción, γ debe ser impar.

Fijando, por ejemplo, $\sigma(0)=0$, se tienen $\frac{n}{2}$ posibilidades para $\sigma(-1-m)$, es decir, solamente las posibilidades para las que γ es impar. Para $\sigma(1)$ hay $(n-2)$ posibilidades, y ahora su simétrico ya viene determinado por el γ escogido. Para $\sigma(2)$ hay $(n-4)$, y así sucesivamente. [14] Por tanto, para n par, el número de series con simetría impar es de:

$$\frac{n}{2}\cdot(n-2)(n-4)\ldots(n-2\cdot\frac{n-4}{2})(n-2\cdot\frac{n-2}{2})=$$

$$=\frac{n}{2}\cdot(n-2)(n-4)\ldots(n-(n-4))(n-(n-2))=$$

$$=\frac{n}{2}\cdot(n-2)(n-4)\ldots4\cdot2=\frac{n}{2}\cdot(n-2)!!$$

Suma completa

Como ya se ha podido observar, el número de espectros seriales varía según la paridad de la longitud de las series.

	{Id, I}	{Id, R}	{Id, RI}	$\#\sigma_2$
n impar	0	0	$(n-1)!!$	$(n-1)!!$
n par	0	$(n-2)!!$	$\frac{n}{2}\cdot(n-2)!!$	$\frac{1}{2}(n+2)(n-2)!!$

Una vez se tiene $\#\sigma_2$, solo falta calcular $\#\sigma_1$. Como las permutaciones contadas $\#\sigma$ son todas las de S_n exceptuando las transportaciones, $\#\sigma = \frac{\#\mathrm{S}_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$. Por otro lado, $\#\sigma_1 + \#\sigma_2 = \#\sigma$. Entonces $\#\sigma_1 = (n-1)! - \#\sigma_2$.

Recuperando la fórmula del apartado 7.1:

$$\#\mathrm{Spec} = \frac{1}{4}\left(\#\sigma_1 + 2\cdot(\#\sigma_2)\right) = \frac{(n-1)! + \#\sigma_2}{4}$$

Para n impar:

$$\frac{(n-1)! + (n-1)!!}{4} = \frac{(n-1)!!\cdot((n-2)!!+1)}{4}$$

Para n par:

$$\frac{(n-1)! + \left(\frac{1}{2}(n+2)(n-2)!!\right)}{4} = \frac{2(n-1)! + (n+2)(n-2)!!}{8}$$

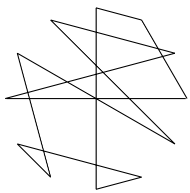
Para $n = 12$, es decir, para el dodecafonismo, la última fórmula proporciona el dato de 9985920 espectros seriales a escoger por el compositor.

Como ejemplo perteneciente al serialismo integral, podemos numerar las dinámicas del 0 al 6:

$$\{ppp,\ pp,\ p,\ mf,\ f,\ ff,\ fff\} \equiv \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} = \mathbb{Z}/(7)$$

Así, con la fórmula para n impar, se obtiene que hay 192 espectros seriales con series de longitud 7.

7.2. Espectros del grupo $\mathbf{D}_n$ x $\mathbf{D}_n$



Ahora se calcularán los espectros formados mediante todas las transformaciones del grupo generado por {S,T,V,C}. Volviendo a la representación mediante diagramas de reloj del apartado 4.2, el problema es equivalente a averiguar cuántos diagramas distintos, sin números ni flechas, se pueden dibujar. La flecha indica lo transformado por V y C, mientras que los números indican lo transformado por S y T. Un diagrama sin estos dos elementos representa entonces todo un espectro serial. ¿Cuántos diagramas esencialmente distintos hay? [13] De nuevo, por el lema de Burnside:

$$\#\text{Spec} = \frac{1}{|\mathrm{D}_n \times \mathrm{D}_n|} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} |\text{Stab}(\sigma)| = \frac{1}{2n \cdot 2n} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} |\text{Stab}(\sigma)|$$

En vez de expresar el sumatorio como “para cada σ, el número de Ψ que fijan σ”, se puede expresar como “para cada Ψ, el número de σ fijados por Ψ”. La fórmula queda de esta manera:

$$\#\text{Spec} = \frac{1}{4n^2} \sum_{\Psi \in \mathrm{D}_n \times \mathrm{D}_n} \text{Fij}(\Psi)$$

Ahora hay que averiguar para cada elemento de $\mathrm{D}_n \times \mathrm{D}_n$ cuántas series estabiliza. Por ejemplo, trivialmente no hay permutaciones estables mediante C y R solamente.

7.2.1. Elementos estables mediante T

Los elementos estables mediante T^{k} son a los que se aplica una rotación de $\theta_{\mathrm{k}} = \frac{2\pi \mathrm{k}}{n}$, para $1 \leq \mathrm{k} \leq n$, y quedan igual. Por tanto, los sumandos que aportan a la suma total son $\sum_{\mathrm{k}=1}^{n} \mathrm{Fij}(\theta_{\mathrm{k}})$.

Por otro lado, si $1 \leq p, q \leq n$ y $gcd(n, p) = gcd(n, q)$ entonces $\mathrm{Fij}(\theta_p) = \mathrm{Fij}(\theta_q)$. Esto permite que se puedan agrupar los sumandos con igual máximo común divisor con respecto a n. Si $n = 6$:

$$\mathrm{Fij}(\theta_1) + \mathrm{Fij}(\theta_2) + \mathrm{Fij}(\theta_3) + \mathrm{Fij}(\theta_4) + \mathrm{Fij}(\theta_5) + \mathrm{Fij}(\theta_6) =$$
$$\mathrm{Fij}(\theta_1) + \mathrm{Fij}(\theta_2) + \mathrm{Fij}(\theta_3) + \mathrm{Fij}(\theta_2) + \mathrm{Fij}(\theta_1) + \mathrm{Fij}(\theta_6) =$$
$$2 \cdot \mathrm{Fij}(\theta_1) + 2 \cdot \mathrm{Fij}(\theta_2) + 1 \cdot \mathrm{Fij}(\theta_3) + 1 \cdot \mathrm{Fij}(\theta_6)$$

Esos coeficientes son el número de *totativos* de cada divisor d de n, pero en orden contrario. Es decir, los totativos de $\frac{n}{d}$, que es el divisor opuesto a d. Los totativos de un número son los números menores que él y coprimos con él. La función que indica cuántos totativos tiene un número n se llama la función φ de Euler. Entonces $\sum_{\mathrm{k}=1}^{n} \mathrm{Fij}(\theta_{\mathrm{k}}) = \sum_{d|n} \left(\varphi(\frac{n}{d}) \cdot \mathrm{Fij}(\theta_d)\right)$.

Para calcular $\mathrm{Fij}(\theta_d)$ hay que analizar el método de construcción de diagramas invariantes respecto a una rotación. Estos diagramas deben tener varios loops iguales entre sí pero cada uno desde un punto distinto: desde cada múltiplo de d. El número de loops es, por tanto, $\frac{n}{d}$.

Al construir uno de estos diagramas, se escoge la primera nota entre las n. Después, se escoge la segunda, pero no se puede escoger los vértices múltiplos de d (de los que hay $\frac{n}{d}$), ya que van a ser el comienzo de los sucesivos loops. Hay entonces $n - \frac{n}{d}$ posibilidades. Después se escoge la tercera, pero sin escoger los múltiplos de d ni los múltiplos de d + la segunda posición. Hay $n - 2 \cdot \frac{n}{d}$ posibilidades, y así sucesivamente hasta terminar el primer loop:

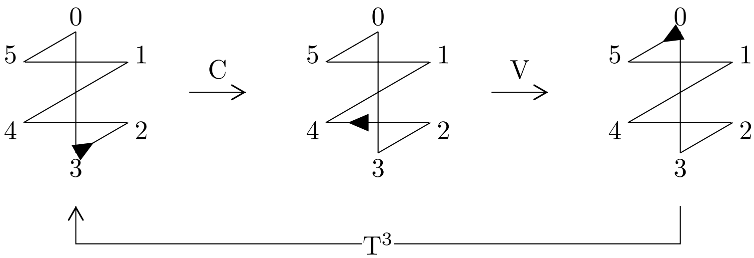
$$n\left(n-\frac{n}{d}\right)\left(n-\frac{2n}{d}\right)\cdots\left(n-\frac{(d-1)n}{d}\right)=$$

$$=n^d\left(1-\frac{1}{d}\right)\left(1-\frac{2}{d}\right)\cdots\left(1-\frac{d-1}{d}\right)=$$

$$=n^d\left(\frac{d-1}{d}\right)\left(\frac{d-2}{d}\right)\cdots\left(\frac{1}{d}\right)=n^d\cdot\frac{(d-1)!}{d^{d-1}}\cdot\frac{d}{d}=\left(\frac{n}{d}\right)^d\cdot d!$$

Para escoger el segundo loop, su primera nota debe caer en el conjunto de vértices múltiplos de d, y se puede escoger de $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ formas. No son $\frac{n}{d}$ ya que tomar un vértice no coprimo implicaría que el polígono se cerraría antes de tiempo sin pasar por todos los vértices. Tras esto el polígono está totalmente determinado, y se puede formar de $\sum_{d|n}\left(\varphi^2(\frac{n}{d})\cdot(\frac{n}{d})^d\cdot d!\right)$ maneras.

Solamente para n par hay un método más de construcción de polígono invariante mediante T, V y C a la vez, ya que al rotar $\frac{n}{2}$ el diagrama puede llegar con la orientación cambiada. Debajo hay un ejemplo de ello. Esto puede ocurrir cuando entre dos notas haya un intervalo – un salto – de $\frac{n}{2}$: una diagonal.



Primero se escoge la diagonal de entre $\frac{n}{2}$ posibilidades, con lo que queda dividida en dos la figura. De cada pareja de puntos antipodales se escoge el que irá primero en la ronda de elección. Esa elección para cada pareja opuesta se da de de $2^{\frac{n}{2}}$ formas. Tras lo cual se ordenan esos primeros miembros entre sí, de $\frac{n}{2}!$ formas. Esto lleva a las $\frac{n}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2}!$ formas de dibujar un polígono con las características buscadas.

7.2.2. Elementos estables mediante I

Los elementos estables mediante I son aquellos que quedan invariantes mediante reflexiones. En este punto se ha de separar por paridad de n.

Para n impar, existen n reflexiones para cada uno de los ejes de simetría que pasan por cada vértice. Después, hay n formas de escoger el primer vértice de la secuencia. Ahora hay $\frac{n-1}{2}$ parejas de vértices; se escoge los primeros miembros entre ellos de $2^{\frac{n-1}{2}}$ formas, tras lo cual éstos se ordenan de $\frac{n-1}{2}!$ formas. Esto da un resultado de $n^2 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n-1}{2}!$ polígonos invariantes.

Para n par se tienen dos simetrías: con ejes que pasan por vértices y con ejes que pasan por lados. De manera similar a la anterior, se escoge el eje, el primer vértice, los primeros miembros de las parejas de vértices y se ordenan. Para las simetrías con ejes que pasan por vértices, da un resultado de $\frac{n^2}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$. Para las simetrías con ejes que pasan por lados, da un resultado de $\frac{n^2}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{n}{2}!$.

Suma completa

En resumen, estos a continuación son los numeradores $\sum \mathrm{Fij}(\Psi)$. El resultado final del número de diagramas posibles, o espectros seriales distintos, es dicho numerador entre $4n^2$, el tamaño del grupo. [2]

	n **IMPAR**
Rotación	$\sum_{d\mid n}\left(\varphi^2(\frac{n}{d})\cdot\left(\frac{n}{d}\right)^d\cdot d!\right)$
Reflexión	$n^2\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{n-1}{2}!$
	$\sum_{d\mid n}\left(\varphi^2(\frac{n}{d})\cdot\left(\frac{n}{d}\right)^d\cdot d!\right)+n^2\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{n-1}{2}!$

	n **PAR**
Rotación I	$\sum_{d\mid n}\left(\varphi^2(\frac{n}{d})\cdot\left(\frac{n}{d}\right)^d\cdot d!\right)$
Rotación II	$\frac{n}{2}\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{n}{2}!$
Reflexión vértices	$\frac{n^2}{2}\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)!$
Reflexión lados	$\frac{n^2}{2}\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{n}{2}!$
	$\sum_{d\mid n}\left(\varphi^2(\frac{n}{d})\cdot\left(\frac{n}{d}\right)^d\cdot d!\right)+\frac{n(n+6)}{4}\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{n}{2}!$

7.3. Medefonismo, monofonismo y difonismo

Con $n = 0$ se da el caso de medefonismo. El grupo simétrico de orden 0 tiene $0! = 1$ elemento. Por tanto, hay una sola posible serie, σ, que es la que no tiene ninguna nota. El medefonismo es comúnmente llamado silencio.

[2] Este apartado es una explicación detallada del artículo [13]. La secuencia de números dada por las fórmulas demostradas se encuentra en la OEIS: `https://oeis.org/A000940`

$$\sigma = ()$$

Con $n = 1$ se da el caso de monofonismo. Con solamente una posible nota, el grupo simétrico de orden 1 tiene $1! = 1$ elemento. Por tanto, hay una sola posible serie, σ_0, que es igual a su inversa, a su retrogradación y a su retrogradación inversa:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

	I_0	
T_0	0	R_0
	IR_0	
	RI_0	

Con $n = 2$ se da el caso de difonismo. Tiene dos posibles notas, así que su grupo simétrico, el de orden 2, tiene $2! = 2$ elementos. Por tanto, hay dos series distintas, σ_0 y σ_1. Se puede observar que ambas pertenecen al mismo espectro serial, dado que $\sigma_1 = \mathrm{T}^1(\sigma_0)$. Además, al igual que en el monofonismo, ambas coinciden con sus inversas, incumpliendo la regla general para $n > 2$ probada en el apartado 7.1.

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

	I_0	I_1	
T_0	0	1	R_0
T_1	1	0	R_1
	IR_0	IR_1	
	RI_0	RI_1	

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ANEXOS

Anexo A

Código para calcular matrices dodecafónicas

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;

const int N = 12;

int main() {

    int s[N + 2][N + 2];

    for (int i = 1; i < N + 1; ++i) {
        cin >> s[1][i];
        s[i][0] = (N - s[1][i] + s[1][1]) % N;
        s[i][N + 1] = s[i][0];
        s[0][i] = (N - s[i][0]) % N;
        s[N + 1][i] = s[0][i];
    }

    for (int i = 2; i < N + 1; ++i)
        for (int j = 1; j < N + 1; ++j)
            s[i][j] = (s[1][j] + s[i][0]) % N;

    cout << "\n\\[\\begin{array}{l|";
    for (int i = 0; i < N; ++i) cout << 'c';
    cout << "|r}\n&";

    for (int i = 1; i < N + 1; ++i)
        cout << "\\text{I}_{" << s[0][i] << "}&";
    cout << "\\\\\n\\hline\n";

    for (int i = 1; i < N + 1; ++i) {
        cout << "\\text{T}_{" << s[i][0] << "}&";

        for (int j = 1; j < N + 1; ++j)
            cout << s[i][j] << "&";

        cout << "\\text{R}_{" << s[i][N + 1] << "}\\\\\n";
    }
    cout << "\\hline\n&";

    for (int i = 1; i < N + 1; ++i)
        cout << "\\text{IR}_{" << s[N + 1][i] << "}&";
    cout << "\\\\\n\\hline\n&";

```

```
    const int DIF = 2 * (s[1][N] - s[1][1]);
    for (int i = 1; i < N + 1; ++i)
        cout << "\\text{RI}_{" << (N + s[0][i] + DIF) % N << "}&";

    cout << "\n\\end{array}\\]\n";

    return 0;
}
```

Anexo B

Paquete de LaTeX: `ddphonism`

```
% ddphonism
%
% (c) Celia Rubio Madrigal
%
%% This program can be redistributed and/or modified under the terms
%% of the LaTeX Project Public License Distributed from CTAN archives
%% in directory macros/latex/base/lppl.txt.
%
\NeedsTeXFormat{LaTeX2e}[1994/06/01]
\ProvidesPackage{ddphonism}
[2019/04/05 v0.1 LaTeX package for dodecaphonism matrices, clock diagrams et al.]

\RequirePackage{ifthen}
\RequirePackage{xparse}
\RequirePackage{tikz}
\RequirePackage{xstring}
\RequirePackage{pgfkeys}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Matrices

\usetikzlibrary{matrix}

\ExplSyntaxOn
\DeclareExpandableDocumentCommand{\eval}{m}{\int_eval:n {#1}}
\ExplSyntaxOff

\newcounter{dfirst}
\newcounter{dsize}

\newcommand{\dSizeHead}[1]{
    \setcounter{dsize}{0}
    \setcounter{dfirst}{-1}

    \foreach \n in {#1}{
        \ifnum\thedfirst=-1
        \setcounter{dfirst}{\n}
        \fi
        \stepcounter{dsize}
    }
}

\newcommand{\md}[1]{ % mod
```

```
    \ifnum#1>\eval{\thedsize-1}
        \eval{#1-\thedsize}
    \else\ifnum#1<0
        \eval{#1+\thedsize}
    \else #1
    \fi\fi
}

\newcommand{\dmatrix}[1]{
    \dSizeHead{#1}
    \resizebox{\linewidth}{!}{
    \begin{tikzpicture}
%       \draw (0,0) -- (\thedsize,0); \draw (0,0) -- (0,-\thedsize/2);
        \foreach [count=\nj] \j in {#1} {
%           \draw (0,-\nj/2) -- (\thedsize,-\nj/2); \draw (\nj,0) -- (\nj,-\thedsize/2);
            \foreach [count=\ni] \i in {#1} {
                \draw node at (\ni-0.5,-\nj/2+0.25) {
                    \md{\eval{\i-\j+\thedfirst}}
                };
            }
        }
    \end{tikzpicture}
    }
}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Diagrams

\usetikzlibrary{shapes,arrows,decorations.markings,shapes.misc}

\tikzstyle ddiagramArrow=[decoration=
        {markings,mark=at position 0.25 with {\arrow[scale=1.25,>=triangle 45]{>}}},
    postaction={decorate}]

\newcounter{anterior}
\newcounter{var}
\newcommand{\ddiagram}[3][-1]{
    \dSizeHead{#2}

    \ifnum #1=-1
    \setcounter{var}{\thedfirst}
    \else
    \setcounter{var}{#1}
```

```
        \fi

        \begin{tikzpicture}[rotate=30*\thevar,
            minimum height=0pt,inner sep=0pt,outer sep=0pt,scale=0.65]
        \foreach \x in {0,...,\eval{\thedsize-1}} {
            \node at (90-30*\x:2) {\x};
            \node (\x) at (90-30*\x:1.6) {};
        };

        \setcounter{anterior}{-1}
        \foreach \x in {#2}{%
            \ifnum \theanterior=\thedfirst
            \draw [style=ddiagramArrow] (\theanterior) -- (\x);
            \else \ifnum \theanterior=-1
            \else
            \draw (\theanterior) -- (\x);
            \fi\fi
            \setcounter{anterior}{\x}
        };
        \draw (\theanterior) -- (\thedfirst);

        \node at (0,0) [circle, fill=white] {#3};
        \end{tikzpicture}
    }

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Dihedral diagrams

    \tikzstyle ddihedralArrow=[decoration=
            {markings,mark=at position 1 with {\arrow[scale=1.5,>=angle 60]{>}}},
        postaction={decorate}]

    \pgfkeys{
        /ddihedral/.is family, /ddihedral,
        default/.style = {t = 0, c = 0, s = 0, v = 0},
        t/.estore in = \ddihedralT,
        c/.estore in = \ddihedralC,
        s/.estore in = \ddihedralS,
        v/.estore in = \ddihedralV,
    }

    \newcommand{\darrows}[1]{
        \dSizeHead{#1}
```

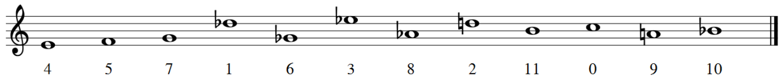
```
    \draw foreach \x in {0,...,\eval{\thedsize-1}} {(90-30*\x:2.5) node[circle] (\x) {}};
    \foreach \x [count=\y] in {#1} {
        \draw [style=ddihedralArrow] (90-30*\eval{\y-1}:1.25) -- (\x);
    };
}

\newcommand\ddihedral[2][]{%
    \pgfkeys{/ddihedral, default, #1}%

    \tikzset{inner sep=0,minimum height=18pt}

    \dSizeHead{#2}

    \draw foreach \x in {0,...,\eval{\thedsize-1}} {
        (\eval{(90+\ddihedralT*30)+(\ddihedralS*60-30)*\x}:2.5)
        node[very thin, circle ,draw] (\x) {\x}
    };

    \draw foreach \x in {0,...,\eval{\thedsize-1}} {
        (\eval{(90-\ddihedralC*30)+(\ddihedralV*60-30)*\x}:1.25)
        node[very thin, circle ,draw] {\x}
    };

    \darrows{#2}

    \node at (0,0) [very thin,draw,circle, fill=white] {\
        \ifnum\ddihedralV=0
        \ifnum\ddihedralC=0
        \ifnum\ddihedralS=0
        \ifnum\ddihedralT=0
        P
        \fi\fi\fi
        \else V \fi
        \ifnum\ddihedralC=0
        \else C$^{\ddihedralC}$ \fi
        \ifnum\ddihedralS=0
        \else S \fi
        \ifnum\ddihedralT=0
        \else T$^{\ddihedralT}$ \fi
    \ };
}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%% Rows

%\eval{\thedsize-1}

\newcommand{\drow}[1]{
    \ensuremath{
        \left(\begin{matrix}
            0&1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11\\
            \StrSubstitute{#1}{,}{&}\\
        \end{matrix}\right)
    }
}

\endinput

%%
%% End of file 'ddphonism.sty'.
```

Anexo C

Series de la Suite Op. 25

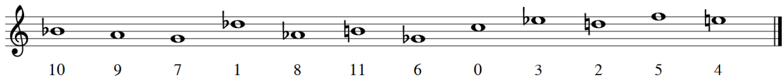
$$T^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 6 & 3 & 8 & 2 & 11 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$



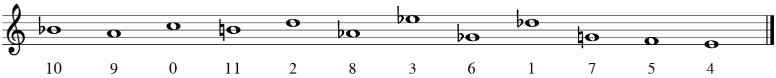
$$T^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 1 & 7 & 0 & 9 & 2 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$IT^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 2 & 5 & 0 & 6 & 9 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$IT^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 9 & 7 & 1 & 8 & 11 & 6 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

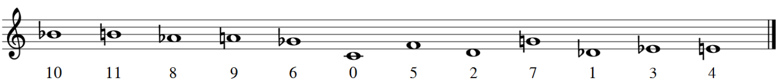


$$RT^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 9 & 0 & 11 & 2 & 8 & 3 & 6 & 1 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



$$RT^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 2 & 9 & 0 & 7 & 1 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$IRT^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 8 & 9 & 6 & 0 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

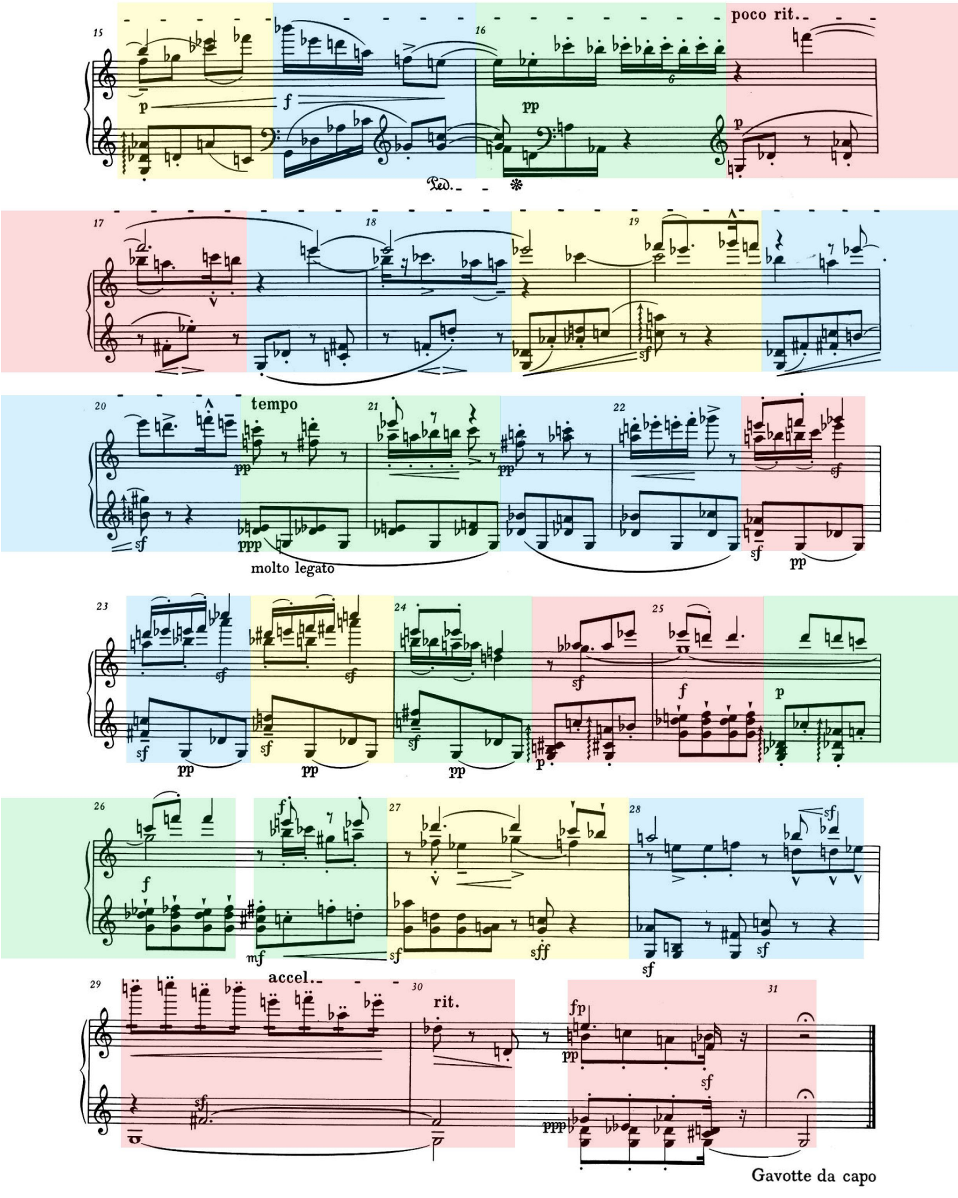


$$IRT^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 6 & 11 & 8 & 1 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Anexo D

Análisis serial de la Musette

T_0 T_6 I_0 I_6


poco rit.
tempo
molto legato
accel.
rit.
Gavotte da capo

Anexo E

Conmutatividad del grupo D_{12} x D_{12}

S y T no conmutan:

$$\begin{aligned} &\mathrm{S} \circ \mathrm{T}(\sigma(m)) \\ &= \mathrm{S}(\sigma(m)+1) \\ &= -(\sigma(m)+1) \\ &= -\sigma(m)-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{T} \circ \mathrm{S}(\sigma(m)) \\ &= \mathrm{T}(-\sigma(m)) \\ &= -\sigma(m)+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{S} \circ \mathrm{T}^{-1}(\sigma(m)) \\ &= \mathrm{S}(\sigma(m)-1) \\ &= -(\sigma(m)-1) \\ &= -\sigma(m)+1 \end{aligned}$$

V y C no conmutan:

$$\begin{aligned} &\mathrm{V} \circ \mathrm{C}(\sigma(m)) \\ &= \mathrm{V}(\sigma(m+1)) \\ &= \sigma(-(m+1)) \\ &= \sigma(-m-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{C} \circ \mathrm{V}(\sigma(m)) \\ &= \mathrm{C}(\sigma(-m)) \\ &= \sigma(-m+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{V} \circ \mathrm{C}^{-1}(\sigma(m)) \\ &= \mathrm{V}(\sigma(m-1)) \\ &= \sigma(-(m-1)) \\ &= \sigma(-m+1) \end{aligned}$$

S y V conmutan:

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}\circ\mathrm{V}(\sigma(m)) \\ =\ &\mathrm{S}(\sigma(-m)) \\ =\ &-\sigma(-m) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{V}\circ\mathrm{S}(\sigma(m)) \\ =\ &\mathrm{V}(-\sigma(m)) \\ =\ &-\sigma(-m) \end{aligned}$$

S y C conmutan:

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}\circ\mathrm{C}(\sigma(m)) \\ =\ &\mathrm{S}(\sigma(m+1)) \\ =\ &-\sigma(m+1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{C}\circ\mathrm{S}(\sigma(m)) \\ =\ &\mathrm{C}(-\sigma(m)) \\ =\ &-\sigma(m+1) \end{aligned}$$

T y V conmutan:

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}\circ\mathrm{V}(\sigma(m)) \\ =\ &\mathrm{T}(\sigma(-m)) \\ =\ &\sigma(-m)+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{V}\circ\mathrm{T}(\sigma(m)) \\ =\ &\mathrm{V}(\sigma(m)+1) \\ =\ &\sigma(-m)+1 \end{aligned}$$

T y C conmutan:

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}\circ\mathrm{C}(\sigma(m)) \\ =\ &\mathrm{T}(\sigma(m+1)) \\ =\ &\sigma(m+1)+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{C}\circ\mathrm{T}(\sigma(m)) \\ =\ &\mathrm{V}(\sigma(m)+1) \\ =\ &\sigma(m+1)+1 \end{aligned}$$

Bibliografía

[1] Wright, David. *Mathematics and Music*, American Mathematical Society (2009).

Capítulo 1

[2] Kinney, James P. *Twelve-tone Serialism: Exploring the Works of Anton Webern*, Undergraduate Honors Theses. Paper 1 (2015)

[3] Díaz de la Fuente, Alicia. *Estructura y significado en la música serial y aleatoria*, Universidad Nacional de Educación a Distancia. Tesis Doctoral en Filosofía (2005)

Capítulo 2

[4] Delgado García, Fernando. Clases y material de Historia de la Música, 5° y 6° de Enseñanzas Profesionales del Conservatorio Profesional de Música Arturo Soria, cursos 2014-15 y 2015-16.

[5] Boulez, Pierre. *Schoenberg is dead*, The Score (1952).

[6] DOMÍNGUEZ ROMERO, MANUEL. *Las Matemáticas en el Serialismo Musical*, Sigma n.24 (2004).

Capítulo 3

[7] ILOMÄKI, TUUKKA. *On the Similarity of Twelve-Tone Rows*, Sibelius Academy (2008).

[8] HYDE, MARTHA. Chapter 4: "Dodecaphonism: Schoenberg", *Models of Musical Analysis: Early Twentieth-century Music*, Ed. Mark Everist and Jonathan Dunsby. Oxford: Blackwell (1993)

[9] XIAO, JUNE. *Bach's Influences in the Piano Music of Four 20th Century Composers*, Indiana University Jacobs School of Music. Doctoral Theses in Music (2014)

[10] CLERCQ, TREVOR DE. *A Window into Tonality via the Structure of Schoenberg's "Musette" from the Piano Suite, op. 25*, Theory/Analysis of 20th-Century Music. Prof. David Headlam (2006)

Capítulo 4

[11] HUNTER, DAVID J.; VON HIPPELA, PAUL T. *How Rare Is Symmetry in Musical 12-Tone Rows?*, The American Mathematical Monthly, Vol. 110, No. 2 (2003).

Capítulo 6

[12] ARMSTRONG, M. A. Chapter 6: "Permutations", Chapter 17: "Actions, Orbits, and Stabilizers", Chapter 18: "Counting Orbits", *Groups and Symmetry*, New York: Springer-Verlag (1988)

Capítulo 7

[13] Golomb, S. W., Welch, L. R. *On the enumeration of polygons*, The American Mathematical Monthly, Vol. 67, 349-353 (1960).

[14] Reiner, David L. *Enumeration in Music Theory*, The American Mathematical Monthly, Vol. 92, No. 1 (1985).