

LA ESTRUCTURA MATEMÁTICA DEL SERIALISMO MUSICAL

Celia Rubio Madrigal

*Dedicado a mis dos
grandes pasiones:
las matemáticas
y la música.*

It has been observed that mathematics is the
most abstract of the sciences, music
the most abstract of the arts.

— David Wright [1]

Agradecimientos

Me gustaría dar las gracias a todos.

INTRODUCCIÓN AL TEXTO

Todas las estructuras musicales están basadas en estructuras matemáticas. Los elementos musicales de los que están compuestas las obras, como las notas, las dinámicas o los timbres, están agrupados en conjuntos, y, como tales, cumplen ciertas propiedades al relacionarse consigo mismos o con otros conjuntos.

A lo largo de la historia, los compositores han ido descubriendo e inventando estas propiedades musicales en las piezas que componían; por ejemplo, desde consonancias y disonancias entre notas, hasta la jerarquía según el pulso en el que la nota se encuentra. Las matemáticas son capaces de describir las propiedades de estos elementos musicales como para cualquier otro conjunto matemático.

Por ejemplo, las músicas serialistas se basan en la continua reiteración de secuencias de elementos musicales. Es decir, un compositor serialista tomará una secuencia ordenada de notas, dinámicas o timbres y la usará como único bloque constructivo de su obra. Puede, además, serializar más de un conjunto de elementos musicales, o incluso pretender serializar el máximo número de conjuntos – lo que a mediados del siglo XX se llamaría serialismo integral. Estas músicas se pueden describir matemáticamente por medio de permutaciones y grupos.

Son en estas estructuras en las que se centrará el presente texto, y más específicamente en el dodecafonismo, el primer sistema compo-

sitivo serialista. Se explicarán los fundamentos matemáticos que lo posibilitan, las razones históricas por las que surgió y los postulados que lo definieron, proponiendo ejemplos analizados. Además, se investigará sobre el valor artístico del serialismo mediante el uso de escalas no cromáticas en busca de consonancia.

Índice general

I	DODECAFONISMO	1
1.	EL SISTEMA DODECAFÓNICO DE SCHOENBERG	3
1.1.	Los postulados del dodecafonismo	3
1.2.	Las transformaciones de una serie	5
1.2.1.	Transposiciones	5
1.2.2.	Retrogradación	6
1.2.3.	Inversión	7
1.3.	Matrices dodecafónicas	8
2.	EL GRUPO DE LAS TRANSFORMACIONES	11
2.1.	Nuevas definiciones y nuevas transformaciones	11
2.2.	Diagramas de reloj	13
2.3.	El grupo: $D_{12} \times D_{12}$	16
2.4.	Conmutatividad entre los elementos del grupo	19
3.	CONTEO DE ESPECTROS SERIALES	23
3.1.	Espectros de las funciones $\{I, T, R\}$	23
3.1.1.	Elementos estables mediante R	25
3.1.2.	Elementos estables mediante RI	26
3.2.	Espectros del grupo $D_n \times D_n$	29
3.2.1.	Elementos estables mediante T	30
3.2.2.	Elementos estables mediante I	32
3.3.	Medefonismo, monofonismo y difonismo	33

II	MODIFICACIONES	35
4.	MODIFICACIÓN DE PARTITURAS SERIALISTAS	37
4.1.	Escalas y funciones del experimento	37
4.1.1.	Escalas interválicas, escalas y funciones	37
4.1.2.	Funciones bien distribuidas	39
4.1.3.	Funciones E-inducidas	40
4.1.4.	Escalas utilizadas	42
4.2.	Obras modificadas	42
5.	RESULTADOS DE LAS MODIFICACIONES	45
5.1.	Página de modificaciones y plugin	45
5.2.	Obra de Schoenberg	45
5.3.	Obras de Berg	47
5.4.	Obras de Webern	47
5.5.	Conclusiones	47
ANEXOS		49
Apéndice A.	Código para calcular matrices dodecafónicas	51
Apéndice B.	Series de la Suite Op. 25	55
Apéndice C.	Análisis serial de la Musette	59
Apéndice D.	Conmutatividad del grupo $D_{12} \times D_{12}$	63
Apéndice E.	Código para generar funciones E-inducidas	65
Bibliografía		75

Parte I

DODECAFONISMO

Capítulo 1

EL SISTEMA DODECAFÓNICO DE SCHOENBERG

1.1. Los postulados del dodecafonismo

El dodecafonismo es un sistema compositivo que predetermina la melodía y la armonía a partir de una ordenación de las doce notas de la escala cromática, que se llama *serie*. Ésta y algunas de sus transformaciones son los ladrillos con los que se construyen las alturas de las notas; son el único material que se puede utilizar.

El resto de elementos de la pieza, como el número de instrumentos, el ritmo, el carácter, la textura o las dinámicas, se dejan a discreción del compositor. No serializar todos los conjuntos será la principal crítica al dodecafonismo por parte de los compositores serialistas que sucedieron a Schoenberg: los compositores de serialismo integral de mediados del siglo XX, como Pierre Boulez. Para los serialistas integrales, aquello restaba cohesión al modelo compositivo; para los dodecafonistas, aportaba libertad.

Precisamente la predeterminación dodecafónica, aunque parece limi-

tante, permite realizaciones musicales y estilos de composición muy diferentes: Schoenberg daba un tratamiento tradicional a sus obras, ya que aún admiraba las formas clásicas; Berg iba más allá al utilizar series que recordaban a las triadas tonales; y, en cambio, Webern evitaba radicalmente cualquier asociación con la tradición.

Schoenberg definió su sistema musical a partir de cuatro postulados que, en realidad, se basan en principios matemáticos:

1. *La serie [sobre la que se construye la obra dodecafónica] consta de las doce notas de la escala cromática dispuestas en un orden lineal específico.*

2. *Ninguna nota aparece más de una vez en la serie.*

Los dos primeros postulados expresan que una obra dodecafónica fundamenta su estructura sobre una permutación de la escala de doce semitonos. Dicha permutación σ es una biyección del conjunto numerado de las doce notas {Do = 0, Do# = 1, Re = 2, Re# = 3, Mi = 4, Fa = 5, F# = 6, Sol = 7, Sol# = 8, La = 9, La# = 10, Si = 11} consigo mismo, y se representa de esta forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & \sigma(6) & \sigma(7) & \sigma(8) & \sigma(9) & \sigma(10) & \sigma(11) \end{pmatrix}$$

La permutación $\sigma(m)$, con $m \in \mathbb{Z}/(12)^1$, pertenece al grupo simétrico de orden 12: $\sigma \in S_{12}$. Por ejemplo, en la Suite para piano Op. 25 Schoenberg utiliza como serie original en todos los movimientos de la obra la siguiente permutación σ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 6 & 3 & 8 & 2 & 11 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$



¹ $\mathbb{Z}/(12) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

3. La serie será expuesta en cualquiera de sus aspectos lineales: original, inversión, retrogradación de la original y retrogradación de la inversión.

4. La serie puede usarse en sus cuatro aspectos desde cualquier nota de la escala.

Los dos últimos postulados amplían los recursos compositivos al admitir la transformación de la serie original mediante *inversión*, *retrogradación*, *inversión retrógrada* y *transposición*². El compositor puede utilizar cualquiera de las transformaciones de una serie al componer su obra dodecafónica. El conjunto de series que puede utilizar, que viene dado por la serie original y todas sus posibles transformaciones, se conoce como *espectro serial*.

1.2. Las transformaciones de una serie

Transformar una serie es matemáticamente equivalente a aplicar una función sobre la serie que asocie su permutación a la permutación transformada. Por tanto, cualquier función transformativa Ψ se aplica sobre el conjunto de las permutaciones: S_{12} , el grupo simétrico de orden 12 ($\Psi : S_{12} \rightarrow S_{12}$).

1.2.1. Transposiciones

La *transposición*, mencionada en el cuarto postulado, consiste en subir o bajar la serie original un número determinado de semitonos. Por tanto, no se modifican los intervalos entre las notas, sino solamente la altura a la que está la serie. Ya que consideraremos todas las octavas equivalentes, debemos trabajar módulo 12.

²No confundir con un 2-ciclo. Una transposición musical se corresponde con una traslación matemática.

La serie transportada k semitonos, $T^k(\sigma)$, se construye sumando k a $\sigma \pmod{12}$:

$$\forall m \in \mathbb{Z}/(12) : T^k(\sigma(m)) = \sigma(m) + k \quad \text{con } k \text{ constante;}$$

$$T^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 9 & 10 & 11 \\ \sigma(0) + k & \sigma(1) + k & \sigma(2) + k & \cdots & \sigma(9) + k & \sigma(10) + k & \sigma(11) + k \end{pmatrix}$$

A su vez, T^k se forma al componer k transposiciones de 1 semitono: $T^k = T^1 \circ T^1 \circ \dots \circ T^1$, k veces. Debido a que k es en realidad el exponente en la potencia de T , se coloca este número como superíndice.

Históricamente, la notación Ψ_k , Ψ^k o $\Psi(k)$ se ha usado en sustitución de la composición de la transposición T^k y otra función Ψ , en el respectivo orden: $\Psi^k = \Psi \circ T^k = \Psi(T^k)$. Sin embargo, esta notación es especialmente ambigua y confusa. Por ello, es preferible ceñirse a la notación estrictamente matemática; es decir, a la composición de funciones, aun omitiendo \circ : $\Psi_k, \Psi^k, \Psi(k) \rightarrow \Psi T^k$

Una posible serie transportada sobre la permutación σ de la Suite para piano Op. 25, con $k = 6$, es la siguiente serie T^6 :

$$T^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 1 & 7 & 0 & 9 & 2 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



1.2.2. Retrogradación

La *retrogradación* consiste en leer la serie original desde la nota final hacia atrás, es decir, aplicar a la serie una simetría especular. De este modo, la primera nota irá al último puesto, la segunda al penúltimo, y así sucesivamente.

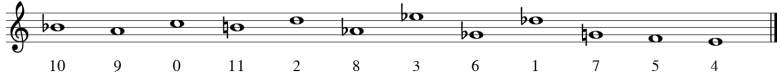
La serie retrógrada se construye de esta forma:

$$\forall m \in \mathbb{Z}/(12) : R(\sigma(m)) = \sigma(-1-m)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \sigma(11) & \sigma(10) & \sigma(9) & \sigma(8) & \sigma(7) & \sigma(6) & \sigma(5) & \sigma(4) & \sigma(3) & \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(0) \end{pmatrix}$$

La serie retrógrada sobre la permutación σ de la Suite Op. 25 es la siguiente serie R:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 9 & 0 & 11 & 2 & 8 & 3 & 6 & 1 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



1.2.3. Inversión

La *inversión* consiste en cambiar la dirección –de ascendente a descendente, y viceversa– de los intervalos entre cada nota de la serie. Si el primer intervalo en la serie original σ es de $+k$, el primer intervalo en la serie invertida I será de $-k \pmod{12}$, por lo que debemos cambiar el signo de σ para construir I. Además, queremos que la primera nota de ambas series, $I(0)$ y $\sigma(0)$, coincidan, así que debemos transportar la serie $(-\sigma)$ un número λ de semitonos para que esta condición se cumpla:

$$I(0) = -\sigma(0) + \lambda = \sigma(0) \implies \lambda = 2\sigma(0)$$

Por tanto, la serie invertida se construye de esta forma:

$$\forall m \in \mathbb{Z}/(12) : I(\sigma(m)) = -\sigma(m) + 2\sigma(0)$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 10 & 11 \\ \sigma(0) & -\sigma(1) + 2\sigma(0) & -\sigma(2) + 2\sigma(0) & \dots & -\sigma(10) + 2\sigma(0) & -\sigma(11) + 2\sigma(0) \end{pmatrix}$$

La serie invertida sobre la permutación σ de la Suite Op. 25 es la siguiente serie I:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 2 & 5 & 0 & 6 & 9 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$



En total, obtendremos 48 series – aunque no obligatoriamente distintas entre sí – pertenecientes a un solo espectro serial. Hay 12 series originales sobre cada una de las doce notas, 12 series retrógradas, 12 invertidas y 12 series sobre las que se aplica tanto la retrogradación como la inversión. A continuación se muestra la sintaxis simple junto a la matemática:

<u>Sintaxis simple</u>	<u>Sintaxis matemática</u>
$T_0, T_1, T_2 \dots$	$T^0, T^1, T^2 \dots$
$R_0, R_1, R_2 \dots$	$R, RT^1, RT^2 \dots$
$I_0, I_1, I_2 \dots$	$I, IT^1, IT^2 \dots$
$IR_0, IR_1, IR_2 \dots$	$IR, IRT_1, IRT_2 \dots$

1.3. Matrices dodecafónicas

Dada una serie, su matriz dodecafónica es una representación visual de su espectro serial; es decir, del conjunto de series derivadas de esa serie. El espectro serial es todo el material compositivo sonoro del que se dispone para la composición de una obra dodecafónica. Al poder ordenar y disponer la información en una tabla, el compositor puede acceder a toda ella al mismo tiempo sin tener que calcular cada serie individualmente.

La matriz se lee en la dirección en la que aparece el nombre de la serie. Las series T se leen de izquierda a derecha, mientras que las series R de derecha a izquierda. Las series I se leen de arriba a abajo y las IR/RI de abajo a arriba.

He creado un programa que devuelve en formato L^AT_EX la matriz correspondiente a cualquier serie dodecafónica que se introduzca en teclado, además de producir la nomenclatura simple para cada serie. El código, escrito en C++, está incluido en el Anexo A, página 51, y está creado en base a las fórmulas de construcción de series y a la propiedad de invariancia de intervalos en las transportaciones.

A continuación, se incluye la matriz dodecafónica de la serie P de la Suite Op. 25 de Schoenberg. Mientras que la mayoría de tablas tienen dos filas inferiores, que se corresponden con las distintas nomenclaturas de RI e IR para una misma serie – ya que normalmente no conmutan –, en la matriz de la serie P sí coinciden, como se mencionará en el apartado 2.4.

	I ₀	I ₁	I ₃	I ₉	I ₂	I ₁₁	I ₄	I ₁₀	I ₇	I ₈	I ₅	I ₆	
T ₀	4	5	7	1	6	3	8	2	11	0	9	10	R ₀
T ₁₁	3	4	6	0	5	2	7	1	10	11	8	9	R ₁₁
T ₉	1	2	4	10	3	0	5	11	8	9	6	7	R ₉
T ₃	7	8	10	4	9	6	11	5	2	3	0	1	R ₃
T ₁₀	2	3	5	11	4	1	6	0	9	10	7	8	R ₁₀
T ₁	5	6	8	2	7	4	9	3	0	1	10	11	R ₁
T ₈	0	1	3	9	2	11	4	10	7	8	5	6	R ₈
T ₂	6	7	9	3	8	5	10	4	1	2	11	0	R ₂
T ₅	9	10	0	6	11	8	1	7	4	5	2	3	R ₅
T ₄	8	9	11	5	10	7	0	6	3	4	1	2	R ₄
T ₇	11	0	2	8	1	10	3	9	6	7	4	5	R ₇
T ₆	10	11	1	7	0	9	2	8	5	6	3	4	R ₆
IR ₀	IR ₁	IR ₃	IR ₉	IR ₂	IR ₁₁	IR ₄	IR ₁₀	IR ₇	IR ₈	IR ₅	IR ₆		
RI ₀	RI ₁	RI ₃	RI ₉	RI ₂	RI ₁₁	RI ₄	RI ₁₀	RI ₇	RI ₈	RI ₅	RI ₆		

También he creado una página interactiva que genera matrices de cualquier serie para cualquier longitud serial, además de generar series aleatorias. Permite escoger entre dos numeraciones y dos nomenclaturas. Está escrita en Elm y el código puede encontrarse en

<https://gitlab.com/dodecafonismo/matrices>.



En el código QR está el enlace de la aplicación web. Sus instrucciones de uso se encuentran al final de la página. El enlace es *<https://matrices.netlify.com/>*.

Capítulo 2

EL GRUPO DE LAS TRANSFORMACIONES

2.1. Nuevas definiciones y nuevas transformaciones

Las fórmulas de las transformaciones del apartado 1.2 quedaron así:

$$T^k(\sigma(m)) = \sigma(m) + k$$

$$I(\sigma(m)) = -\sigma(m) + 2\sigma(0)$$

$$R(\sigma(m)) = \sigma(-1 - m)$$

Sin embargo, la importancia de estas definiciones radica en qué espectro serial forman, y no en cómo se nombra cada serie específica. No es distinguible a un nivel musical y, de hecho, hay más de un convenio para ello.

Han surgido a lo largo de la historia dos métodos para nombrar las series. El primero, el método tradicional, se ha usado desde al menos

1945. El segundo, el método de tonos absolutos, fue concebido por George Perle en su libro *Twelve Tone Tonality* (1977).

En el método tradicional, T_0 se usa para la primera serie que se encuentra en la composición; es decir, la serie original. En cambio, el método de tonos absolutos nombra las series T basándose solamente en la nota en la que comienzan: T_0 se usa para la serie que comienza por un Do, y así sucesivamente. Estas nomenclaturas no caracterizan adecuadamente el objeto matemático que deben representar, es decir, funciones aplicadas a las series. Son nombres arbitrarios que además producen ambigüedad al añadir otras funciones o al intentar describirlo matemáticamente.

En todo caso, cualquier convenio de notación tendrá fórmulas matemáticas distintas al resto, pero todas preservan el material compositivo de la obra. Eso quiere decir que se pueden redefinir algunas de las transformaciones, siempre que preserven el sentido musical.

Por ejemplo, la inversión puede prescindir de ser transportada para que la primera nota coincida con la original. Para distinguirla de la primera definición, ésta se llamará S de simetría: $S(\sigma(m)) = -\sigma(m)$.

E igual que la inversión es el cambio de signo por fuera, la retrogradación puede convertirse simplemente en el cambio de signo por dentro. Ésta se llamará V de volteo: $V(\sigma(m)) = \sigma(-m)$.

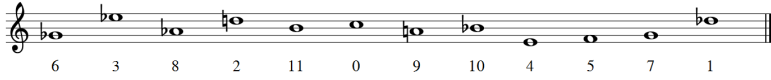
Así quedan dos transformaciones que se asemejan a reflexiones: una por *dentro* y otra por *fuera*; y una adición por *fuera*. Aquí *dentro* significa *antes* de aplicar σ y *fuera* significa *después* de aplicar σ , ya que no se debe olvidar que σ , la permutación, es una función en sí misma. Y ahora surge una cuestión consecuentemente: ¿cuál sería entonces el resultado de sumar *dentro*, es decir, *antes*?

Esta nueva transformación, cuya aparición resulta natural tras las otras tres, se llama *desplazamiento cíclico*. Inventada y usada tan solo por Alban Berg, y en algunas obras primerizas de Schoenberg, C^k desplaza el comienzo de la serie k posiciones más allá: $C^k(\sigma(m)) = \sigma(m + k)$.

$$C^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 9 & 10 & 11 \\ \sigma(k) & \sigma(k+1) & \sigma(k+2) & \cdots & \sigma(k+9) & \sigma(k+10) & \sigma(k+11) \end{pmatrix}$$

La serie 4-cíclica sobre la permutación P de la Suite Op. 25 es la siguiente serie C^4 :

$$C^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 3 & 8 & 2 & 11 & 0 & 9 & 10 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

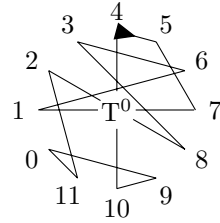


En resumen, se puede trabajar con un nuevo sistema de definiciones que mantienen el significado musical del serialismo pero varían la notación con la que se trabaja.

$$\begin{aligned} S(\sigma(m)) &= -\sigma(m) & V(\sigma(m)) &= \sigma(-m) \\ T^k(\sigma(m)) &= \sigma(m) + k & C^k(\sigma(m)) &= \sigma(m + k) \end{aligned}$$

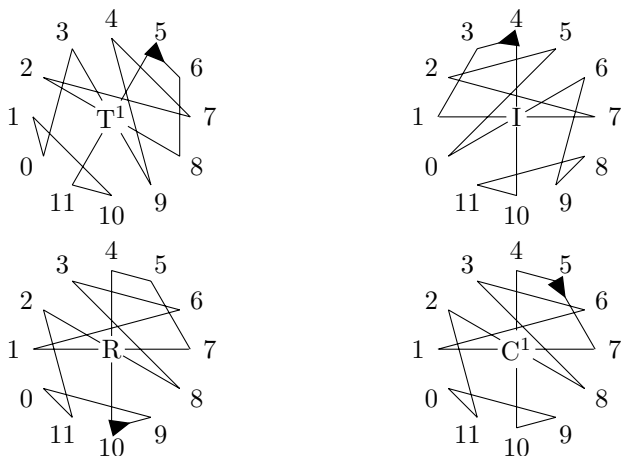
2.2. Diagramas de reloj

Para visualizar mejor cómo actúan las distintas transformaciones, las series se pueden representar mediante *diagramas de reloj*: una sucesión de aristas con una orientación establecida que conecta los vértices de un dodecágono en el orden de la serie. Ya que el desplazamiento cíclico actúa como si la serie fuese circular, hay añadida una arista desde la última nota a la primera. El comienzo de la serie y su orientación se marcan con una flecha.

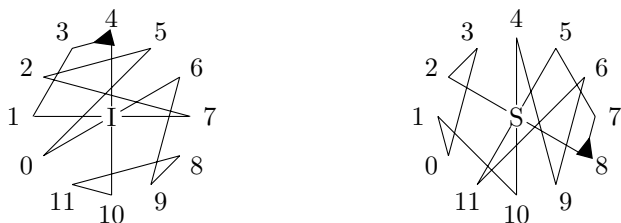


Arriba se incluye el diagrama de la serie original σ de la Suite Op. 25. Se pueden distinguir las características de la serie, como las tres diagonales, que son los tres intervalos de tritono. A continuación se

incluyen los diagramas de las transformaciones del apartado 1.2: la transposición, la inversión y la retrogradación; así como el nuevo desplazamiento cíclico del apartado 2.1



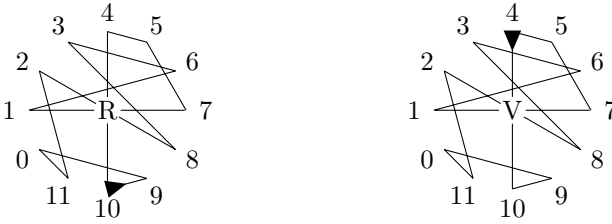
La transposición es una rotación en el sentido en el que apunta la flecha; la inversión es una reflexión con el eje de simetría en la diagonal que pasa por la flecha; la retrogradación es un cambio de orientación de la flecha; y el desplazamiento cíclico es el avance interno de la flecha por el recorrido de la serie.



La diferencia entre las inversiones I y S es precisamente la transpo-

sición de $2\sigma(0) = 8$ semitonos en este ejemplo. Comparando S con T^0 se puede además observar que S es una reflexión con el eje de simetría en 0, en vez de que el eje dependa de la propia permutación.

Por otro lado, la comparación entre las retrogradaciones R y V muestra que, aunque en principio más arbitraria, V es una transformación más natural, ya que deja fija la flecha. La diferencia entre ellas es en realidad un desplazamiento cíclico de -1.



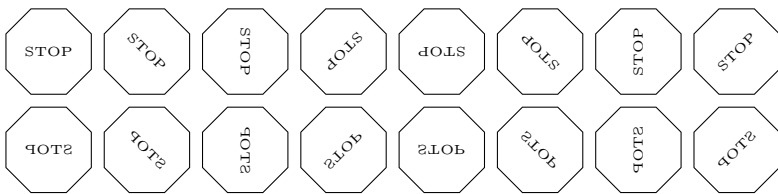
He creado una página interactiva que genera diagramas de reloj de cualquier serie para cualquier longitud serial, además de generar series aleatorias. También se pueden aplicar las transformaciones a la serie, tanto las originales como las del nuevo sistema, para ver cómo se comporta el diagrama. Está escrita en Elm y el código puede encontrarse en <https://gitlab.com/dodecafonismo/diagramas>.

En el código QR está el enlace de la aplicación web. Sus instrucciones de uso se encuentran al final de la página. El enlace es <https://diagramas.netlify.com/>.

2.3. El grupo: $D_{12} \times D_{12}$

El conjunto de transformaciones $\{S, T, V, C\}$ está compuesto por dos parejas con semejanzas entre sí. S es una reflexión y T una rotación de orden 12 – es decir, que al aplicarla 12 veces se vuelve a la identidad – y ambas se aplican a la figura entera; es como mover el diagrama por el papel. En cambio, V es una reflexión de la flecha en sí, y C una rotación – también de orden 12 – de la flecha sobre la línea; ambas aplicadas al interior de la figura.

Cada pareja genera un grupo muy conocido: el grupo diédrico o diedral. Se denota¹ por D_{12} y representa el grupo de simetrías de un polígono regular; en este caso, un dodecágono. Por ejemplo, aquí se muestran todas las simetrías de un octógono, que son los 16 elementos de D_8 , aplicados a una señal de STOP.



De igual manera, el conjunto de series de un espectro serial se consigue aplicando a la serie las distintas funciones transformativas; se obtiene entonces un grupo diédrico para ambas parejas de funciones.

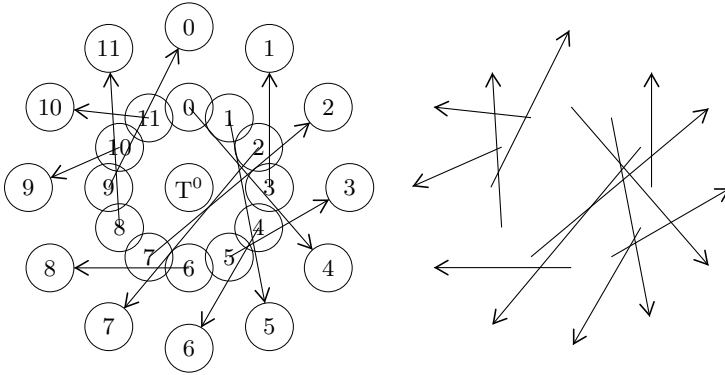
Al haber dos parejas distintas que actúan por separado dentro y fuera de la figura, el grupo completo que forman las cuatro transformaciones es el producto directo de dos copias del diédrico: $D_{12} \times D_{12}$.

Podemos observarlo claramente si representamos la serie de una segunda forma: como la correspondencia entre vértices de dos dodecágonos. La serie original, que es en realidad una permutación

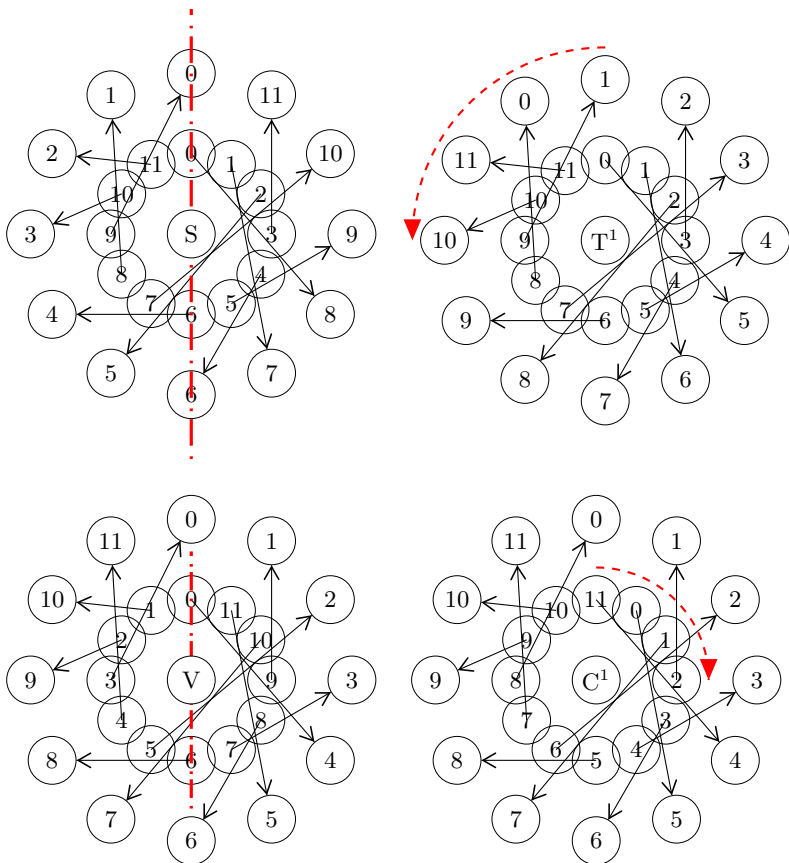
¹En otros ámbitos, D_n también se denota por D_{2n} , ya que $2 * n$ es el número de elementos que tiene el grupo.

de 12 elementos, se representa como una función: los vértices del dodecágono interno se envían biyectivamente a los vértices externos. Así, $m \mapsto \sigma(m)$. Este diagrama es similar al matricial pero enroscado en sí mismo, de tal forma que se aprecia la permutación escogida mediante las flechas, que son fijas, y facilita un significado del antes y el después de aplicarla.

Las dos primeras figuras describen esto mismo: la representación de la serie original y la representación de la permutación mediante las flechas, que se mantendrán constantes en el resto de figuras.



Las cuatro siguientes figuras representan las cuatro funciones transformativas, que son en realidad la reflexión y la rotación del grupo diédrico de cada dodecágono. Aplicarlo al de dentro es aplicarlo antes de las flechas; antes de la permutación. Aplicarlo fuera es transformar después de las flechas; después de la permutación.



2.4. Conmutatividad entre los elementos del grupo

La rotación (r) y la reflexión (s) de un grupo diédrico no conmutan, sino que cumplen esta relación: $r \cdot s = s \cdot r^{-1}$. Por otro lado, en los productos directos los elementos de un lado conmutan con los del otro. De esta forma, {S, T} no conmutan y {V, C} tampoco, pero el resto de parejas de transformaciones deben conmutar. Las verificaciones de estas afirmaciones, que confirman que el grupo formado es $D_{12} \times D_{12}$, se encuentran en el Anexo D, página 63.

Volviendo a las definiciones originales, al conjunto de transformaciones {I, T, R, C}, la estructura interna es bien distinta. El problema de I, a un nivel matemático, es que depende de la permutación escogida, por lo que a veces tiene unas propiedades y a veces otras. En cambio, la definición de V con respecto a R es meramente estética. Ya que no depende de la permutación, su conmutatividad se mantiene invariante.

Viendo cómo conmutan los elementos de este sistema se aprecia la dificultad definitoria de I. Curiosamente, la conmutatividad de {I, R} e {I, C} se pierde, pero se gana la de {I, T}. Así, T conmuta con todo en el sistema. Esto refleja que en realidad la motivación de la definición de I viene por esta conmutatividad.

I y R ya no conmutan:

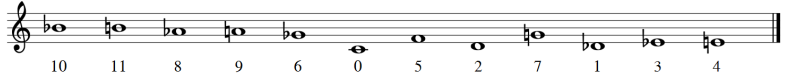
$$I \circ R(\sigma(m)) = I(R(\sigma(m))) = -R(\sigma(m)) + 2R(\sigma(0)) = -\sigma(-1 - m) + 2\sigma(-1 - 0) = -\sigma(-1 - m) + 2\sigma(-1)$$

$$R \circ I(\sigma(m)) = R(I(\sigma(m))) = R(-\sigma(m) + 2\sigma(0)) \stackrel{2}{=} R(-\sigma(m)) + 2\sigma(0) = -\sigma(-1 - m) + 2\sigma(0)$$

Los únicos casos en los que podrían conmutar ocurrirían cuando $2\sigma(0) \equiv 2\sigma(-1) \pmod{12}$: $12 + 2\sigma(0) = 2\sigma(-1) \implies 6 + \sigma(0) =$

$\sigma(-1) \implies \sigma(-1) - \sigma(0) = 6$. Es decir, cuando la primera y la última nota de la serie original se distancian en 6 semitonos, como es el caso de la permutación en la Suite Op. 25:

$$IR = RI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 8 & 9 & 6 & 0 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



I y C ya no conmutan:

$$I \circ C(\sigma(m)) = I(\sigma(m+1)) = -\sigma(m+1) + 2\sigma(1)$$

$$C \circ I(\sigma(m)) = C(-\sigma(m) + 2\sigma(0)) \stackrel{3}{=} C(-\sigma(m)) + 2\sigma(0) = -\sigma(m+1) + 2\sigma(0)$$

Los únicos casos en los que podrían conmutar son cuando $2\sigma(0) \equiv 2\sigma(1) \pmod{12}$: $12 + 2\sigma(0) = 2\sigma(1) \implies 6 + \sigma(0) = \sigma(1) \implies \sigma(1) - \sigma(0) = 6$. Es decir, cuando la primera y la segunda nota de la serie original se distancian en 6 semitonos.

Si se echan las cuentas con C^k en vez de con C^1 , pueden conmutar si $\sigma(k) - \sigma(0) = 6$. Como σ es una permutación, devuelve todos los valores de 0 a 11 y solamente una vez cada uno. Por tanto, también devuelve $6 + \sigma(0)$, así que **siempre existe un único k para el que I y C^k conmutan**. En el caso de la permutación de la Suite Op. 25, como $\sigma(0) = 4$ hay que encontrar el k para el que $\sigma(k) = 4 + 6 = 10$. En este caso, $k = 11$, pero depende por completo de la permutación original.

I y T ahora sí conmutan:

$$I \circ T(\sigma(m)) = I(\sigma(m) + 1) = -(\sigma(m) + 1) + 2(\sigma(0) + 1) = -\sigma(m) - 1 + 2\sigma(0) + 2 = -\sigma(m) + 2\sigma(0) + 1$$

$$T \circ I(\sigma(m)) = T(-\sigma(m) + 2\sigma(0)) = -\sigma(m) + 2\sigma(0) + 1$$

R y C no conmutan:

$$R \circ C(\sigma(m)) = R(\sigma(m + 1)) = \sigma(-(m + 1) - 1) = \sigma(-m - 2)$$

$$C \circ R(\sigma(m)) = C(\sigma(-m - 1)) = \sigma(-m - 1 + 1) = \sigma(-m)$$

T y R conmutan:

$$T \circ R(\sigma(m)) = T(\sigma(-m - 1)) = \sigma(-m - 1) + 1$$

$$R \circ T(\sigma(m)) = R(\sigma(m) + 1) = \sigma(-m - 1) + 1$$

T y C conmutan:

$$T \circ C(\sigma(m)) = T(\sigma(m + 1)) = \sigma(m + 1) + 1$$

$$C \circ T(\sigma(m)) = V(\sigma(m) + 1) = \sigma(m + 1) + 1$$

Capítulo 3

CONTEO DE ESPECTROS SERIALES

3.1. Espectros de las funciones $\{I, T, R\}$

Es interesante conocer el número de espectros seriales distintos que un compositor puede escoger. Al fin y al cabo, es irrelevante qué serie se escoge como la original dentro de su espectro serial, ya que produce el mismo material compositivo que cualquiera de su mismo espectro.



Felix Klein
(1849–1925)

Para calcular el número de espectros seriales se redefinirán las funciones transformativas para una longitud serial arbitraria, n , que será mayor que 2. Para $n = 0, 1$ y 2 se realizará el cálculo en el apartado 3.3.

Además, como las transposiciones siempre son distintas entre sí, siempre pertenecen al mismo espectro. Se tomarán a partir de ahora todas ellas como equivalentes, de manera que solo se necesita hacer el cálculo para $\{I, R\}$.

Al calcular con permutaciones se trabajará módulo n . La retrogradación sigue siendo $R(\sigma(m)) = \sigma(-1 - m)$. La inversión será $I(\sigma(m)) = -\sigma(m)$, omitiendo la transposición habitual, ya que se toman las series transpuestas como equivalentes. De esta forma $-\sigma(m) + 2\sigma(0) \equiv -\sigma(m)$. La retrogradación invertida es, por tanto, la composición de ambas:

$$RI(\sigma(m)) = I \circ R(\sigma(m)) = I(R(\sigma(m))) = -\sigma(-1 - m).$$

La retrogradación, la inversión y la composición de ambas cumplen que al aplicarlas dos veces se vuelve a la serie original. En teoría de grupos se diría que tienen orden 2. Entonces, $\{\text{Id}, I, R, IR\}$ forma un grupo especial llamado *grupo de Klein*, donde $RI \equiv IR$, ya que estamos tomando las series transpuestas como equivalentes.

En general, un grupo de Klein es el formado por cuatro elementos donde cada elemento es inverso de sí mismo. El grupo de Klein, llamado así en honor al matemático alemán Felix Klein, es el grupo $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$, producto directo de dos copias del grupo cíclico de orden 2.

Por el lema de Burnside:

$$\#\text{Spec} = \frac{1}{|\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)|} \sum_{\sigma \in S_n} |\text{Stab}(\sigma)| = \frac{1}{4} \sum_{\sigma \in S_n} |\text{Stab}(\sigma)|$$

Es decir, se deben calcular para cada posible serie $\sigma \in S_n$ cuántas funciones transformativas lo dejan igual o equivalente bajo transposición.

Como los estabilizadores son subgrupos, por el teorema de Lagrange su tamaño debe ser divisor del tamaño del grupo total. Entonces se pueden agrupar los estabilizadores por sus tamaños: 1, 2 o 4, y así calcular $\sum |\text{Stab}(\sigma)|$ agrupando todas las permutaciones con igual tamaño de estabilizador. Si $\#\sigma_i$ es el número de permutaciones cuyos estabilizadores tienen tamaño i :

$$\sum_{\sigma \in S_n} |\text{Stab}(\sigma)| = 1 \cdot (\#\sigma_1) + 2 \cdot (\#\sigma_2) + 4 \cdot (\#\sigma_4)$$

Primero, se ha de ver que una permutación nunca va a ser igual ni equivalente mediante transposiciones a su inversa.

$$-\sigma(m) \equiv \sigma(m) \implies 0 \equiv 2\sigma(m) \implies n \equiv 2\sigma(m) \implies \frac{n}{2} \equiv \sigma(m)$$

Así, $\sigma(m)$ sería constante para todo $m \in \mathbb{Z}/(n)$, lo cual es imposible. Esto implica que ninguna permutación va a tener a I en su estabilizador, por lo que $\#\sigma_4 = 0$. Queda entonces calcular cuántas permutaciones son equivalentes a su retrogradación y cuántas a su retrogradación inversa. La suma de ambas dará $\#\sigma_2$.

3.1.1. Elementos estables mediante R

Las permutaciones que coinciden con alguna transposición de su retrogradación cumplen, para γ constante:

$$\gamma + \sigma(m) = R(\sigma(m)) = \sigma(-1 - m)$$

Aplicándolo a $(-1 - m)$: $\gamma + \sigma(-1 - m) = \sigma(-1 - (-1 - m)) = \sigma(m)$

De ambas ecuaciones: $\gamma = \sigma(-1 - m) - \sigma(m) = \sigma(m) - \sigma(-1 - m)$

$$2\sigma(m) \equiv 2\sigma(-1 - m) \implies 2\sigma(m) - 2\sigma(-1 - m) \equiv 0$$

$$2\sigma(m) - 2\sigma(-1 - m) = n \implies \sigma(m) - \sigma(-1 - m) = \frac{n}{2}$$

Entonces n debe ser par. Cuando n es impar este tipo de permutaciones no existe. Además, cumplen que sus elementos simétricos se distancian entre sí un intervalo de $\frac{n}{2}$ unidades: son series con simetría par.

$$\gamma = \sigma(m) - \sigma(-1 - m) = \frac{n}{2}$$

En una serie de longitud n , existen $\frac{n}{2}$ intervalos que miden $\frac{n}{2}$. Como no importa por cuál de ellos comience la serie, ya que las transportaciones

son equivalentes, se fija el primero de los intervalos. Quedan los otros $\frac{n}{2} - 1$ intervalos por escoger, así que el número de series con simetría par cuenta las permutaciones de $\frac{n}{2} - 1$ intervalos y las dos posibles posiciones de cada intervalo – creciente y decreciente –. [18] Por ello, el número de series con simetría par es de:

$$2! \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)! = 2 \left(\frac{n-2}{2}\right)! = (n-2)(n-4) \dots = (n-2)!! \quad ^1$$

3.1.2. Elementos estables mediante RI

Las permutaciones que coinciden con alguna transposición de su retrogradación inversa cumplen, para un γ constante:

$$\begin{aligned} \sigma(m) &= \text{RI}(\sigma(m)) + \gamma = -\sigma(-1 - m) + \gamma \\ \gamma &= \sigma(m) + \sigma(-1 - m) \end{aligned}$$

Sus elementos simétricos suman una cantidad constante: son series con simetría impar. Tal y como se ha hecho en el apartado anterior, se puede fijar una de las notas, ya que las transportaciones son equivalentes. Si n es impar, la nota central es $\sigma(\frac{n-1}{2})$, que es igual a $\sigma(-1 - \frac{n-1}{2})$. Por tanto, $\gamma = 2 \cdot \sigma(\frac{n-1}{2})$. Si se escoge esta nota para ser fijada a 0, entonces $\gamma = 2 \cdot 0 = 0$. Es decir, γ puede ser fijada a 0 sin pérdida de generalidad.

Para el resto de notas, $\sigma(m) = -\sigma(-1 - m)$. Ya escogida la nota central, permite $n - 1$ posibilidades para $\sigma(0)$. Ya escogidas la nota central, la primera y su simétrica, permiten $n - 3$ posibilidades para $\sigma(1)$, y así sucesivamente hasta llegar a la nota anterior a la central, que es $\frac{n-3}{2}$. Por ello, para n impar, el número de series con simetría impar es de:

$$(n-1)(n-3) \dots (n-2 \cdot \frac{n-5}{2} - 1)(n-2 \cdot \frac{n-3}{2} - 1) =$$

¹Por definición, si n es par $n!! = n(n-2)(n-4) \dots 4 \cdot 2$ y si n es impar $n!! = n(n-2)(n-4) \dots 3 \cdot 1$.

$$\begin{aligned}
 &= (n-1)(n-3)\dots(n-(n-5)-1)(n-(n-3)-1) = \\
 &= (n-1)(n-3)\dots 4 \cdot 2 = (n-1)!!
 \end{aligned}$$

Si n es par, $\sigma(m) \neq \sigma(-1-m) \forall m \in \mathbb{Z}/(n)$, ya que no hay elemento central. Sea ahora $\gamma = 2k$ un número par. Como $2k \leq n$ y las permutaciones son suprayectivas, para algún m se cumple que $\sigma(m) = k$. Se tiene entonces $k + \sigma(-1-m) = 2k \implies \sigma(-1-m) = k = \sigma(m)$. Como esto es una contradicción, γ debe ser impar.

Fijando, por ejemplo, $\sigma(0) = 0$, se tienen $\frac{n}{2}$ posibilidades para $\sigma(-1-m)$, es decir, solamente las posibilidades para las que γ es impar. Para $\sigma(1)$ hay $(n-2)$ posibilidades, y ahora su simétrico ya viene determinado por el γ escogido. Para $\sigma(2)$ hay $(n-4)$, y así sucesivamente. [18] Por tanto, para n par, el número de series con simetría impar es de:

$$\begin{aligned}
 &\frac{n}{2} \cdot (n-2)(n-4)\dots(n-2 \cdot \frac{n-4}{2})(n-2 \cdot \frac{n-2}{2}) = \\
 &= \frac{n}{2} \cdot (n-2)(n-4)\dots(n-(n-4))(n-(n-2)) = \\
 &= \frac{n}{2} \cdot (n-2)(n-4)\dots 4 \cdot 2 = \frac{n}{2} \cdot (n-2)!!
 \end{aligned}$$

Suma completa

Como ya se ha podido observar, el número de espectros seriales varía según la paridad de la longitud de las series.

	{Id, I}	{Id, R}	{Id, RI}	$\#\sigma_2$
n impar	0	0	$(n-1)!!$	$(n-1)!!$
n par	0	$(n-2)!!$	$\frac{n}{2} \cdot (n-2)!!$	$\frac{1}{2}(n+2)(n-2)!!$

Una vez se tiene $\#\sigma_2$, solo falta calcular $\#\sigma_1$. Como las permutaciones contadas $\#\sigma$ son todas las de S_n exceptuando las transportaciones, $\#\sigma = \frac{\#S_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$. Por otro lado, $\#\sigma_1 + \#\sigma_2 = \#\sigma$. Entonces $\#\sigma_1 = (n-1)! - \#\sigma_2$.

Recuperando la fórmula del apartado 3.1:

$$\#\text{Spec} = \frac{1}{4} (\#\sigma_1 + 2 \cdot (\#\sigma_2)) = \frac{(n-1)! + \#\sigma_2}{4}$$

Para n impar:

$$\frac{(n-1)! + (n-1)!!}{4} = \frac{(n-1)!! \cdot ((n-2)!! + 1)}{4}$$

Para n par:

$$\frac{(n-1)! + \left(\frac{1}{2}(n+2)(n-2)!!\right)}{4} = \frac{2(n-1)! + (n+2)(n-2)!!}{8}$$

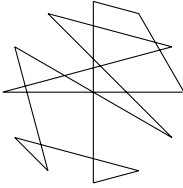
Para $n = 12$, es decir, para el dodecafonismo, la última fórmula proporciona el dato de 9985920 espectros seriales a escoger por el compositor.

Como ejemplo perteneciente al serialismo integral, podemos numerar las dinámicas del 0 al 6:

$$\{ppp, pp, p, mf, f, ff, fff\} \equiv \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \mathbb{Z}/(7)$$

Así, con la fórmula para n impar, se obtiene que hay 192 espectros seriales con series de longitud 7.

3.2. Espectros del grupo $D_n \times D_n$



Ahora se calcularán los espectros formados mediante todas las transformaciones del grupo generado por $\{S, T, V, C\}$. Volviendo a la representación mediante diagramas de reloj del apartado 2.2, el problema es equivalente a averiguar cuántos diagramas distintos, sin números ni flechas, se pueden dibujar. La flecha indica lo transformado

por V y C , mientras que los números indican lo transformado por S y T . Un diagrama sin estos dos elementos representa entonces todo un espectro serial. ¿Cuántos diagramas esencialmente distintos hay? De nuevo, por el lema de Burnside:

$$\#\text{Spec} = \frac{1}{|D_n \times D_n|} \sum_{\sigma \in S_n} |\text{Stab}(\sigma)| = \frac{1}{2n \cdot 2n} \sum_{\sigma \in S_n} |\text{Stab}(\sigma)|$$

En vez de expresar el sumatorio como “para cada σ , el número de Ψ que fijan σ ”, se puede expresar como “para cada Ψ , el número de σ fijados por Ψ ”. La fórmula queda de esta manera: $\#\text{Spec} = \frac{1}{4n^2} \sum_{\Psi \in D_n \times D_n} \text{Fij}(\Psi)$. Ahora hay que averiguar para cada elemento de $D_n \times D_n$ cuántas series estabiliza. Por ejemplo, trivialmente no hay permutaciones estables mediante C y R solamente.

3.2.1. Elementos estables mediante T

Los elementos estables mediante T^k son a los que se aplica una rotación de $\theta_k = \frac{2\pi k}{n}$, para $1 \leq k \leq n$, y quedan igual. Por tanto, los sumandos que aportan a la suma total son $\sum_{k=1}^n \text{Fij}(\theta_k)$.

Por otro lado, si $1 \leq p, q \leq n$ y $\gcd(n, p) = \gcd(n, q)$ entonces $\text{Fij}(\theta_p) = \text{Fij}(\theta_q)$. Esto permite que se puedan agrupar los sumandos con igual máximo común divisor con respecto a n . Si $n = 6$:

$$\begin{aligned} \text{Fij}(\theta_1) + \text{Fij}(\theta_2) + \text{Fij}(\theta_3) + \text{Fij}(\theta_4) + \text{Fij}(\theta_5) + \text{Fij}(\theta_6) &= \text{Fij}(\theta_1) + \\ \text{Fij}(\theta_2) + \text{Fij}(\theta_3) + \text{Fij}(\theta_2) + \text{Fij}(\theta_1) + \text{Fij}(\theta_6) &= 2 \cdot \text{Fij}(\theta_1) + 2 \cdot \text{Fij}(\theta_2) + \\ 1 \cdot \text{Fij}(\theta_3) + 1 \cdot \text{Fij}(\theta_6) \end{aligned}$$

Esos coeficientes son el número de *totativos* de cada divisor d de n , pero en orden contrario. Es decir, los totativos de $\frac{n}{d}$, que es el divisor opuesto a d . Los totativos de un número son los números menores que él y coprimos con él. La función que indica cuántos totativos tiene un número n se llama la función φ de Euler. Entonces $\sum_{k=1}^n \text{Fij}(\theta_k) = \sum_{d|n} \left(\varphi\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \text{Fij}(\theta_d) \right)$.

Para calcular $\text{Fij}(\theta_d)$ hay que analizar el método de construcción de diagramas invariantes respecto a una rotación. Estos diagramas deben tener varios loops iguales entre sí pero cada uno desde un punto distinto: desde cada múltiplo de d . El número de loops es, por tanto, $\frac{n}{d}$.

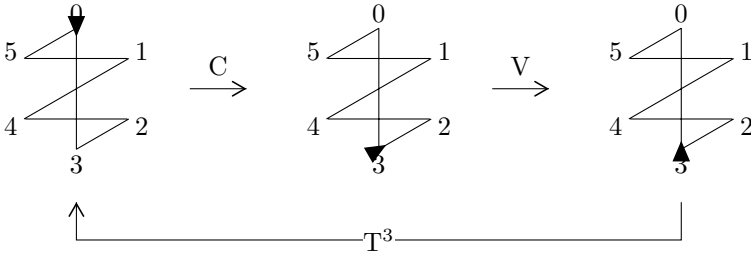
Al construir uno de estos diagramas, se escoge la primera nota entre las n . Después, se escoge la segunda, pero no se puede escoger los vértices múltiplos de d (de los que hay $\frac{n}{d}$), ya que van a ser el comienzo de los sucesivos loops. Hay entonces $n - \frac{n}{d}$ posibilidades. Después se escoge la tercera, pero sin escoger los múltiplos de d ni los múltiplos de d + la segunda posición. Hay $n - 2 \cdot \frac{n}{d}$ posibilidades, y así sucesivamente hasta terminar el primer loop:

$$n \left(n - \frac{n}{d} \right) \left(n - \frac{2n}{d} \right) \cdots \left(n - \frac{(d-1)n}{d} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= n^d \left(1 - \frac{1}{d}\right) \left(1 - \frac{2}{d}\right) \cdots \left(1 - \frac{d-1}{d}\right) = \\
 &= n^d \left(\frac{d-1}{d}\right) \left(\frac{d-2}{d}\right) \cdots \left(\frac{1}{d}\right) = n^d \cdot \frac{(d-1)!}{d^{d-1}} \cdot \frac{d}{d} = \left(\frac{n}{d}\right)^d \cdot d!
 \end{aligned}$$

Para escoger el segundo loop, su primera nota debe caer en el conjunto de vértices múltiplos de d , y se puede escoger de $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ formas. No son $\frac{n}{d}$ ya que tomar un vértice no coprimo implicaría que el polígono se cerraría antes de tiempo sin pasar por todos los vértices. Tras esto el polígono está totalmente determinado, y se puede formar de $\sum_{d|n} \left(\varphi^2\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \left(\frac{n}{d}\right)^d \cdot d!\right)$ maneras.

Solamente para n par hay un método más de construcción de polígono invariante mediante T, V y C a la vez, ya que al rotar $\frac{n}{2}$ el diagrama puede llegar con la orientación cambiada. Debajo hay un ejemplo de ello. Esto puede ocurrir cuando entre dos notas haya un intervalo – un salto – de $\frac{n}{2}$: una diagonal.



Primero se escoge la diagonal de entre $\frac{n}{2}$ posibilidades, con lo que queda dividida en dos la figura. De cada pareja de puntos antipodales se escoge el que irá primero en la ronda de elección. Esa elección para cada pareja opuesta se da de de $2^{\frac{n}{2}}$ formas. Tras lo cual se ordenan esos primeros miembros entre sí, de $\frac{n}{2}!$ formas. Esto lleva a las $\frac{n}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2}!$ formas de dibujar un polígono con las características buscadas.

3.2.2. Elementos estables mediante I

Los elementos estables mediante I son aquellos que quedan invariantes mediante reflexiones. En este punto se ha de separar por paridad de n .

Para n impar, existen n reflexiones para cada uno de los ejes de simetría que pasan por cada vértice. Después, hay n formas de escoger el primer vértice de la secuencia. Ahora hay $\frac{n-1}{2}$ parejas de vértices; se escoge los primeros miembros entre ellos de $2^{\frac{n-1}{2}}$ formas, tras lo cual éstos se ordenan de $\frac{n-1}{2}!$ formas. Esto da un resultado de $n^2 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n-1}{2}!$ polígonos invariantes.

Para n par se tienen dos simetrías: con ejes que pasan por vértices y con ejes que pasan por lados. De manera similar a la anterior, se escoge el eje, el primer vértice, los primeros miembros de las parejas de vértices y se ordenan. Para las simetrías con ejes que pasan por vértices, da un resultado de $\frac{n^2}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$. Para las simetrías con ejes que pasan por lados, da un resultado de $\frac{n^2}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{n}{2}!$.

Suma completa

En resumen, estos son los numeradores $\sum_{\Psi \in D_n \times D_n} \text{Fij}(\Psi)$. El resultado final del número de diagramas posibles, o espectros seriales distintos, es dicho numerador entre $4n^2$, el tamaño del grupo.²

	n IMPAR
Rotación	$\sum_{d n} \left(\varphi^2\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \left(\frac{n}{d}\right)^d \cdot d! \right)$
Reflexión	$n^2 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n-1}{2}!$
	$\sum_{d n} \left(\varphi^2\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \left(\frac{n}{d}\right)^d \cdot d! \right) + n^2 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n-1}{2}!$

²Este apartado es una explicación detallada del artículo [17]. La secuencia de números dada por las fórmulas demostradas se encuentra en la OEIS: <https://oeis.org/A000940>

	n PAR
Rotación I	$\sum_{d n} \left(\varphi^2\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \left(\frac{n}{d}\right)^d \cdot d! \right)$
Rotación II	$\frac{n}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2}!$
Reflexión vértices	$\frac{n^2}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$
Reflexión lados	$\frac{n^2}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{n}{2}!$
	$\sum_{d n} \left(\varphi^2\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \left(\frac{n}{d}\right)^d \cdot d! \right) + \frac{n(n+6)}{4} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2}!$

3.3. Medefonismo, monofonismo y difonismo

Con $n = 0$ se da el caso de medefonismo. El grupo simétrico de orden 0 tiene $0! = 1$ elemento. Por tanto, hay una sola posible serie, σ , que es la que no tiene ninguna nota. El medefonismo es comúnmente llamado silencio.

$$\sigma = () \quad \begin{array}{c} || \\ \hline || \\ \hline || \end{array}$$

Con $n = 1$ se da el caso de monofonismo. Con solamente una posible nota, el grupo simétrico de orden 1 tiene $1! = 1$ elemento. Por tanto, hay una sola posible serie, σ_0 , que es igual a su inversa, a su retrogradación y a su retrogradación inversa:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c|c|c} & I_0 & \\ \hline T_0 & 0 & R_0 \\ \hline & IR_0 & \\ \hline & RI_0 & \end{array}$$

Con $n = 2$ se da el caso de difonismo. Tiene dos posibles notas, así que su grupo simétrico, el de orden 2, tiene $2! = 2$ elementos. Por tanto, hay dos series distintas, σ_0 y σ_1 . Se puede observar que ambas pertenecen al mismo espectro serial, dado que $\sigma_1 = T^1(\sigma_0)$. Además, al igual que en el monofonismo, ambas coinciden con sus inversas, incumpliendo la regla general para $n > 2$ probada en el apartado 3.1.

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c|cc|c} & I_0 & I_1 & \\ \hline T_0 & 0 & 1 & R_0 \\ T_1 & 1 & 0 & R_1 \\ \hline & IR_0 & IR_1 & \\ \hline & RI_0 & RI_1 & \end{array} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Parte II

MODIFICACIONES

Capítulo 4

MODIFICACIÓN DE PARTITURAS SERIALISTAS

4.1. Escalas y funciones del experimento

4.1.1. Escalas interválicas, escalas y funciones

Una *escala interválica* es una secuencia ordenada de números naturales – una secuencia de intervalos entre notas – tales que la suma de todos ellos da 12. Así solo se consideran válidas las escalas equivalentes octava a octava: todos los intervalos de la escala deben sumar el número de semitonos de una octava. Por ejemplo, la escala diatónica jónica (o escala mayor) tiene como secuencia (2, 2, 1, 2, 2, 2, 1).

Dada una escala interválica de longitud L y una nota fija inicial, la secuencia de intervalos se plasma en una secuencia de notas de longitud $L+1$. Se construye comenzando por la nota inicial y sumando cada intervalo para conseguir la nota siguiente.

Con la escala mayor y la nota Re se consigue {Re, Mi, Fa#, Sol, La, Si, Do#, Re}, ya que es equivalente a $\{2, 2+2=4, 4+2=6, 6+1=7,$

$7+2=9, 9+2=11, 11+2=13, 13+1=14\}$. Por construcción, la última nota debe ser equivalente a la primera, ya que en el último paso habremos sumado a la nota inicial todos los términos de la secuencia interválica, y por definición suman 12.

De esta forma, se puede definir una *escala- k* como el conjunto de notas generadas por una escala interválica desde la nota k . Por ejemplo, el conjunto anterior sería la escala-2 mayor; es decir, la escala de Re mayor. Una escala generada por una secuencia de intervalos con longitud L tiene L notas, ya que como la última es repetida puede ignorarse. La longitud $L \leq 12$, ya que una escala- k definida de esta forma siempre es un subconjunto de la escala cromática: $E_k \subseteq \mathbb{Z}/(12)$

Una *función a una escala- k* es una función f que transforma cada nota de la escala cromática a un valor de la escala E_k . Entonces $f : \mathbb{Z}/(12) \rightarrow E_k$ reduce las notas de una melodía a solamente la escala escogida. Las funciones a escalas se representan de la siguiente manera, con la primera fila representando el dominio de f (la escala cromática), la segunda su imagen (la escala E_k), y la tercera su secuencia interválica:

$$\begin{array}{cccccc}
 0 & 1 & 2 & \dots & 10 & 11 \\
 f(0) & f(1) & f(2) & \dots & f(10) & f(11) \\
 f(1) - f(0) & f(2) - f(1) & f(3) - f(2) & \dots & f(11) - f(10) & 12 + f(0) - f(11)
 \end{array}$$

En realidad, la k de la escala- k no es especialmente relevante, porque una escala- $k + 1$ es la transportada de una k . Se puede escoger sin pérdida de generalidad $k = 0$ a partir de ahora, y así todas comenzarán en Do.

El proceso verdaderamente interesante está en averiguar, dada una escala E , cuál es la mejor función que transforma melodías cromáticas en melodías en E . Estas son las *funciones E -inducidas*.

¿Cuáles serán las características de esas funciones óptimas? Deben conservar la estructura serial y deben conservar el parecido con la melodía original.

4.1.2. Funciones bien distribuidas

La mayor prioridad es conservar la estructura serial de las piezas; por tanto, todas las notas deben aparecer con la menor frecuencia posible, y se debe evitar jerarquías entre las notas en la medida de lo posible. Si $|E| < 12$, f no puede ser inyectiva, por lo que va a haber elementos repetidos en la imagen. Queremos la f que mejor distribuya esas repeticiones, que distribuya las notas de E a lo largo de la escala cromática.

Lo óptimo sería que todas tuvieran la misma frecuencia. Eso solo pasará cuando $|E|$ divida a 12. Por ejemplo, si $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ (entonces $|E| = 6$), existen funciones tales que cada nota de la imagen se repite exactamente 2 veces. La siguiente función E -inducida f cumpliría la condición de buena distribución:

Cromática	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Escala E	a_1	a_1	a_2	a_2	a_3	a_3	a_4	a_4	a_5	a_5	a_6	a_6
Intervalos												...

En cambio, si $|E|$ no divide a 12 no hay funciones E -inducidas totalmente distribuidas. No existe una sola frecuencia que puedan compartir todas las notas de E . Sin embargo, sí se pueden encontrar dos frecuencias consecutivas, c y $c + 1$, tales que todos los elementos de E tengan o frecuencia c o frecuencia $c + 1$. Esto es lo más parecido a que todas tengan la misma frecuencia, y se va a probar a continuación que siempre es posible.

La situación es equivalente a que E se pueda dividir en dos subconjuntos disjuntos Q y R , con $|Q| = q$ y $|R| = r$ (entonces $q + r = |E|$), tales que la frecuencia de las notas en Q es c y la frecuencia de las notas en R es $c + 1$. En resumen, para probar que Q y R existen, debemos encontrar un c , un q y un r naturales para los que $cq + (c + 1)r = 12$.

$cq + (c + 1)r = cq + cr + r = c(q + r) + r = c|E| + r = 12$, lo cual se

cumple por el algoritmo de la división, que asegura que al dividir 12 entre $|E|$ existen su cociente c y su resto $r \geq 0$. \square

El siguiente gráfico describe, para cada posible $|E|$ en cada fila, la frecuencia óptima de sus elementos. Las columnas representan las frecuencias de los elementos, y los números de dentro son cada q y r (cuando es 0 no se escribe: no hay notas con esa frecuencia).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												1
2						2						
3				3								
4			4									
5		3	2									
6		6										
7	2	5										
8	4	4										
9	6	3										
10	8	2										
11	10	1										
12	12											

4.1.3. Funciones E-inducidas

Hay que pedir más requisitos a f para que no solo modifique las notas, sino que además las imágenes se parezcan lo máximo posible a sus preimágenes, a las notas originales.

- (1) f debe ser sobreyectiva: si no, la música resultante tendría una escala más reducida de la deseada.
- (2) f debe ser creciente: si no, las dos notas decrecientes se deberían intercambiar. También se podrá sumar o restar 12 a las notas que lo requieran. La monotonía debe conservarse, además, en

todas las octavas, por lo que las funciones deben acabar o por la nota con la que se empieza +12 o por una menor que ésta.

- (3) f debe tener el mayor número de puntos fijos posible: las notas que puedan mantenerse estables al aplicar f deben quedarse igual. Existen escalas para las que no se puede tener buena distribución, monotonía creciente y todas sus notas fijas, así que este criterio es menos prioritario.

Por ejemplo, para la escala $\{0, 1, 2\}$, si se fijan las tres notas, f empezaría con 0 1 2. Por (2), la nota asociada al 12 debe ser un 12. Entonces los otros tres 1's que faltan no se pueden asignar, ya que después del 2 no puede ir un 1 y antes del 12 no puede ir un 13. Por tanto, f no estaría bien distribuida. La solución es que solo se fijen dos de las tres notas.

Cromática	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	(12)
Escala E	0	1	2			χ			$\chi\mathfrak{J}$				(12)

- (4) Por último, de entre las f que queden, se escogerán aquellas cuya distancia a la cromática sea menor. Se calculará para todo i la expresión $|f(i) - i|$, y se sumarán todos los resultados. Esa suma será la *puntuación* de dicha f . Las funciones con menor puntuación son las funciones de mejor ajuste.

Si aún quedan varias f que cumplen todos los requisitos, se escogerá la más grave, la menor de ellas. De esta manera, dada cualquier escala E, la función E-inducida queda unívocamente determinada.

En el Anexo E, página 65, se encuentra el código en Haskell de un programa que, dado una escala, produce su función inducida óptima con las propiedades descritas anteriormente. También puede encontrarse en <https://gitlab.com/dodecafonismo/f-inducida>.

4.1.4. Escalas utilizadas

Las escalas escogidas para este experimento son cuatro escalas de distintos tamaños y sonoridades; desde el sonido oriental hasta el occidental clásico, pasando por el jazz moderno y el impresionismo.

Son la escala pentatónica, la escala hexafónica de tonos enteros, la escala heptafónica de Do Mayor y la escala octotónica. Estas son las funciones inducidas de dichas escalas, según el algoritmo del Anexo E:

Cromática:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Pentatónica (5):	0	0	2	2	4	4	7	7	7	9	9	0
Intervalos:		2		2		3			2		3	

Cromática:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Tonos enteros (6):	0	0	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10
Intervalos:		2		2		2		2		2		2

Cromática:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Diatónica en Do (7):	0	0	2	2	4	5	5	7	7	9	9	11
Intervalos:		2		2	1		2		2		2	1

Cromática:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Octotónica (8):	0	0	2	3	3	5	6	6	8	9	9	11
Intervalos:		2	1		2	1		2	1		2	1

4.2. Obras modificadas

Ahora se describirán las obras que pasarán por la modificación. Para abarcar distintos estilos compositivos y hacer este estudio más riguroso, se han escogido obras de los tres principales compositores dodecafónicos: Schoenberg, Berg y Webern.

Sin embargo, no se han escogido obras de compositores posteriores ni serialistas integrales. Uno de los motivos es porque interesa en

este estudio la relación entre los sonidos: no se modifican más que las alturas de las notas, y por tanto no importa el resto de elementos musicales. Que estén compuestos serialmente no afecta a las conclusiones de este experimento.

Por otro lado, los compositores posteriores a Schoenberg todavía no han pasado al dominio público. Eso impide, por desgracia, que se pueda trabajar libremente con su música.

Por último, el hecho de que cada nota tenga su propia dinámica, su propia articulación o su propio timbre hace de las obras serialistas integrales que sean difíciles de manipular. Además, como los audios están hechos mediante ordenador y no con intérpretes reales, la calidad y la intención musical de estas partituras tan complicadas nunca podrían plasmarse a la perfección.

La primera obra que pasará por el algoritmo de modificación serial es la *Suite para piano*, Op. 25 de Schoenberg.

Su serie original¹ es:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 6 & 3 & 8 & 2 & 11 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

La segunda obra es un arreglo para soprano y piano de una de las arias más destacadas de la segunda ópera de Alban Berg, *Lulu*. El libreto de la obra está basado en dos tragedias de Frank Wedekind: “El espíritu de la tierra” y “La Caja de Pandora”.

El aria, llamada *Lied der Lulu*, es parte de una dramática disputa entre Lulu y su marido por las infidelidades de ella, que acaba con el homicidio accidental de él.

La serie de Lulu² es:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & 4 & 5 & 2 & 7 & 9 & 6 & 8 & 11 & 10 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La tercera, *Der Wein*, es un aria de concierto para soprano y orquesta compuesta por Berg en 1929. La letra es una traducción al alemán de los tres poemas de Charles Baudelaire “*Le Vin*”. Son una celebración del vino y de la felicidad de quienes lo toman.

La pieza evoca aires tonales, ya que su serie está compuesta por la escala de Re menor y la de Sol bemol Mayor. Es una pieza simétrica que evoca también la forma sonata, con los tres poemas formando una exposición, un desarrollo y una recapitulación.

Su serie original³ es: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 9 & 10 & 1 & 6 & 8 & 0 & 11 & 3 \end{pmatrix}$

Webern: *Variations*, OP. 27

Su serie original⁴ es: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 11 & 10 & 2 & 1 & 0 & 6 & 4 & 7 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

Webern: *3 Lieder*, OP. 18

Schatzerl Klein

Su serie original⁵ es: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & 11 & 5 & 8 & 10 & 9 & 3 & 4 & 1 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Erlosung

Su serie original⁶ es: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 9 & 5 & 8 & 4 & 7 & 3 & 11 & 2 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ave, Regina Coelorum

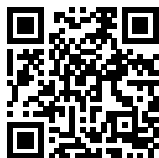
Su serie original⁷ es: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 7 & 6 & 5 & 11 & 10 & 2 & 1 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

Capítulo 5

RESULTADOS DE LAS MODIFICACIONES

5.1. Página de modificaciones y plugin

He creado una página interactiva que transforma cada nota de una partitura a la nota requerida. Está escrita en Elm y el código puede encontrarse en <https://gitlab.com/dodecafonismo/modificaciones>.



En el código QR está el enlace de la aplicación web. Sus instrucciones de uso se encuentran al final de la página. El enlace es <https://modificaciones.netlify.com/>.

5.2. Obra de Schoenberg

Tomando la música debussiana y las músicas orientales como referencia, he escogido la escala pentatónica para aplicarla a la Musette de la Suite para piano Op. 25 de Schoenberg. Para relacionar la escala

dodecafónica con la nueva escala, se debe crear una función que relacione las notas de ambos conjuntos. Yo he tomado esta función:

Escala dodecafónica:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Escala pentatónica:	0	0	2	2	4	4	7	7	7	9	9	0

Se puede observar que, ya que 5 no es divisor de 12, no hay una repartición equitativa, por lo que en cada serie habrá notas que aparezcan más que otras. En mi función, las notas repetidas son el Do (nota 0) y el Sol (nota 7). Además, estas notas forman el bordón de la Musette, por lo que tendrá aspecto sonoro de Do Mayor. En el Anexo , página se encuentra la partitura de la modificación pentatónica, sin incluir las dinámicas por cuestión de simplificación, y en la pista 2 se encuentra la grabación de la misma, creada con el programa Musescore.

Un estudio ulterior muy interesante consistiría en probar con otras funciones que repitieran notas diferentes, o probar con otras escalas como la hexafónica (de tonos enteros) o la heptafónica (las escalas tonales), y sus respectivas funciones posibles, o incluso aplicarlo a diversas obras. La extensión de mi investigación no puede abarcar ese trabajo, además de que se necesitaría un programa que aplicara automáticamente las funciones a la partitura en vez de tener que cambiar cada nota manualmente.

Sin embargo, he hecho una prueba sobre la primera sección de la Musette con una única función de la escala hexafónica y otra de la heptafónica, para así justificar mi elección de la escala pentatónica como la mejor entre las tres.

Con la escala hexafónica habría una repartición equitativa en la función, por lo que la obra seguiría siendo estrictamente serialista y ninguna nota sobresaldría. El problema de esta escala es que tampoco suena natural al oído, como se puede comprobar en la pista 3 (partitura en el Anexo , página), que es la modificación hexafónica

de la primera sección de la Musette con la siguiente función:

Escala dodecafónica: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Escala hexafónica: 0 0 2 2 4 4 6 6 8 8 10 10

Por último, la escala heptafónica tiene el problema de contener dos intervalos de semitono, por lo que la obra modificada suena también disonante. Esto se muestra en la pista 4 (partitura en el Anexo , página), que es la modificación heptafónica de la primera sección de la Musette con la siguiente función:

Escala dodecafónica: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Escala heptafónica: 0 0 2 2 4 5 5 7 7 9 9 11

5.3. Obras de Berg

5.4. Obras de Webern

5.5. Conclusiones

Anexos

Apéndice A

Código para calcular matrices dodecafónicas

```

1  #include <iostream>
   using namespace std;
3
   const int N = 12;
5
   int main() {
7
       int s[N + 2][N + 2];
9
       for (int i = 1; i < N + 1; ++i) {
11          cin >> s[1][i];
           s[i][0] = (N - s[1][i] + s[1][1]) % N;
13          s[i][N + 1] = s[i][0];
           s[0][i] = (N - s[i][0]) % N;
15          s[N + 1][i] = s[0][i];
       }
17
       for (int i = 2; i < N + 1; ++i)
19         for (int j = 1; j < N + 1; ++j)
21           s[i][j] = (s[1][j] + s[i][0]) % N;

       cout << "\n\\begin{array}{l}";
23       for (int i = 0; i < N; ++i) cout << 'c';
       cout << "|r}\n&";
25

       for (int i = 1; i < N + 1; ++i)
27         cout << "\\text{I}-{" << s[0][i] << "}&";
       cout << "\\\\\\n\\hline\\n";
29

       for (int i = 1; i < N + 1; ++i) {
31         cout << "\\text{T}-{" << s[i][0] << "}&";

           for (int j = 1; j < N + 1; ++j)
33             cout << s[i][j] << "&";

35
           cout << "\\text{R}-{" << s[i][N + 1] << "}&";
37       }

```

```

39     cout << "\\hline\\n&";
41     for (int i = 1; i < N + 1; ++i)
42         cout << "\\text{IR}_{-}" << s[N + 1][i] << "}&";
43     cout << "\\\\\\n\\hline\\n&";
45     const int DIF = 2 * (s[1][N] - s[1][1]);
46     for (int i = 1; i < N + 1; ++i)
47         cout << "\\text{RI}_{-}" << (N + s[0][i] + DIF) % N << "}&";
49     cout << "\\n\\end{array}\\\\\\n";
51     return 0;
}

```

Apéndice B

Series de la Suite Op. 25

$$T^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 6 & 3 & 8 & 2 & 11 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$



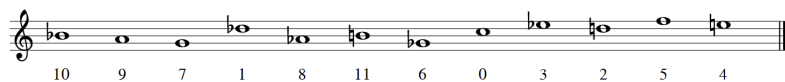
$$T^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 1 & 7 & 0 & 9 & 2 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



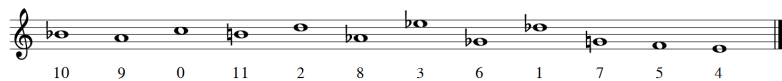
$$IT^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 2 & 5 & 0 & 6 & 9 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$



$$IT^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 9 & 7 & 1 & 8 & 11 & 6 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



$$\text{RT}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 9 & 0 & 11 & 2 & 8 & 3 & 6 & 1 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



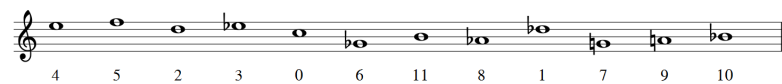
$$\text{RT}^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 2 & 9 & 0 & 7 & 1 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$



$$\text{IRT}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 8 & 9 & 6 & 0 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



$$\text{IRT}^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 6 & 11 & 8 & 1 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$



Apéndice C

Análisis serial de la Musette

Rascher($d = 88$)[illegible]

15 *p* *f* *pp* *poco rit.*

17 18 19

20 *tempo* 21 22 *sf* *pp* *molto legato*

23 24 25 *sf* *pp* *pp* *p* *f* *p*

26 27 28 *f* *mf* *sf* *fff* *sf* *sf*

29 *accel.* 30 *rit.* 31 *fp* *pp* *sf*

Gavotte da capo

Apéndice D

Conmutatividad del grupo $D_{12} \times D_{12}$

S y T no conmutan:

$$S \circ T(\sigma(m)) = S(\sigma(m) + 1) = -(\sigma(m) + 1) = -\sigma(m) - 1$$

$$T \circ S(\sigma(m)) = T(-\sigma(m)) = -\sigma(m) + 1$$

$$S \circ T^{-1}(\sigma(m)) = S(\sigma(m) - 1) = -(\sigma(m) - 1) = -\sigma(m) + 1 = \\ T \circ S(\sigma(m))$$

V y C no conmutan:

$$V \circ C(\sigma(m)) = V(\sigma(m + 1)) = \sigma(-(m + 1)) = \sigma(-m - 1)$$

$$C \circ V(\sigma(m)) = C(\sigma(-m)) = \sigma(-m + 1)$$

$$V \circ C^{-1}(\sigma(m)) = V(\sigma(m - 1)) = \sigma(-(m - 1)) = \sigma(-m + 1) = \\ C \circ V(\sigma(m))$$

S y V conmutan:

$$S \circ V(\sigma(m)) = S(\sigma(-m)) = -\sigma(-m)$$

$$V \circ S(\sigma(m)) = V(-\sigma(m)) = -\sigma(-m)$$

S y C conmutan:

$$S \circ C(\sigma(m)) = S(\sigma(m+1)) = -\sigma(m+1)$$

$$C \circ S(\sigma(m)) = C(-\sigma(m)) = -\sigma(m+1)$$

T y V conmutan:

$$T \circ V(\sigma(m)) = T(\sigma(-m)) = \sigma(-m) + 1$$

$$V \circ T(\sigma(m)) = V(\sigma(m) + 1) = \sigma(-m) + 1$$

T y C conmutan:

$$T \circ C(\sigma(m)) = T(\sigma(m+1)) = \sigma(m+1) + 1$$

$$C \circ T(\sigma(m)) = C(\sigma(m) + 1) = \sigma(m+1) + 1$$

Apéndice E

Código para generar funciones E-inducidas

```

1  import Control.Monad (forever, guard)
   import Data.List
3  import Data.Ord (comparing)
   --import Data.Function (on)
5  --import Debug.Trace (trace)

7
   type Scale = [Int]

9

11  -- Es la longitud de la escala cromática: el cardinal del dominio.
   long :: Int
13  long = 12

15
   main :: IO String
17  main
     = forever
19     $ do
         scale <- getLine
21         putStrLn
           "Calculando...\n"
23         showResult
           $ nub
25           $ induce
           $ readScale
27           scale
         putStrLn
29         "\nTerminado."

31
   -- TODO instance Read
33  readScale :: String -> Scale
   readScale scale
35     = (\x -> if length x > 12 then [] else x)
       $ map
37       (flip mod long . fst . head)

```

```

$ filter
39   (not . null)
$ map reads
41   $ words
    scale
43
45   -- TODO instance Show
46   -- Mostrar una escala.
47   showScale :: Scale -> String
48   showScale scale
49   = drop 1 -- Quita el primer espacio.
50   $ foldl
51   (\acc i ->
52     acc
53     ++ " "
54     ++ show i
55     -- Deja doble hueco en los números de una cifra.
56     ++ if i >= 0 && i < 10
57       then " "
58       else "")
59   ) "" scale
61
62   -- Mostrar varias escalas.
63   showScales :: [Scale] -> String
64   showScales scales
65   = drop 1
66   $ foldl
67   (\acc sc ->
68     acc
69     ++ "\n"
70     ++ showScale sc
71   ) "" scales
73
74   -- Mostrar el resultado del cálculo.
75   showResult :: [Scale] -> IO ()

```

```

77  -- 'best' requiere no vacío.
78  -- Si ponemos la restricción en 'best', entonces falla head aquí.
showResult []
79  = return ()

81  showResult scales
    = do
82      putStrLn
83          $ showScale [ 0 .. (long - 1) ]
84      putStrLn
85          $ replicate (long * 3 - 1) '—'
86      putStrLn
87          $ showScales scales
88      putStrLn
89          $ "\nMayor ajuste ("
90          ++ show bestPunct
91          ++ "):"
92      putStrLn
93          $ showScales bestFits
94      putStrLn
95          $ "\nLa más grave es:"
96      putStrLn
97          $ showScale
98          $ head
99          $ sort
100         bestFits
101  where
102      (bestFits, bestPunct) =
103          best scales
104
105
106
107  best :: [Scale] -> ([Scale], Int)
best scales
108  = ( map fst solution
109      , head $ map snd solution
110      )
111  where
112      solution
113

```

```

115   = head -- El primer grupo con la mínima distancia.
      $ groupBy
        (\x y -> snd x == snd y)
117   $ sortBy
        (comparing snd) -- La menor distancia.
119   $ map
        (\e ->
121     (e, sum -- La suma de las distancias
          $ map -- entre la función y la escala cromática.
            (\(x, i) -> abs (x-i))
          $ zip e [0..]
125     )
127     )
    scales

129
-- Llama a la función recursiva de fixed points.
131 induce :: Scale -> [Scale]
132 induce scale =
133   fxp (length scale) scale []

135
-- Obliga a que haya alguna fixed.
136
137 -- ¿Existe alguna solución que no tenga 1 fixed pero sí 0?
138 -- He puesto demasiados head fixed, supongamos que no.
139 fxp :: Int -> Scale -> [Scale] -> [Scale]
140 -- Si encontró solución, devuélvelo.
141 fxp _ _ xxs@(..:)
    = xxs
142
143 -- Si 0 fixed points, no hay solución.
144 fxp 0 _ _
    = []
145
146 -- Si quedan fixed points, llama a func y disminuye nfixed.
147 fxp nfixed scale _
    = fxp (nfixed - 1) scale (func nfixed scale)

148
-- TODO importarlo de sitio existente
149
150 -- #26 de H-99

```

```

combinations :: Int -> [a] -> [[a]]
153 combinations 0 _
    = [[]]
155 combinations _ []
    = []
157 combinations n (x:xs)
    = map
159   (x:)
    (combinations (n-1) xs)
161   ++ combinations n xs

163
dissonances :: Scale -> [Scale]
165 dissonances scale
    = combinations q scale
167   where
    e = length scale
169   q = e - mod long e

171
-- q es el tamaño del subconjunto de frecuencias menores.
173 -- c es la frecuencia menor.
-- long = qc + (e - q)(c + 1)
175 func :: Int -> Scale -> [Scale]
func nfixed scale
177   = let e = length scale
        c = div long e
179     in do
        fixed <-
181         combinations nfixed scale
        minFreq <-
183         dissonances scale
        start <- --[[h], [h,h], [h,h,h]]
185         let
            h = head fixed
187         hFreq =
            if h `elem` minFreq
189           then c

```



```

else c + 1
191   in
      take hFreq $ iterate (++) [h] [h]
193   -- Quito los que tienen el 2o fixed dentro del ámbito del 1o.
guard
195   (length fixed == 1
    || (fixed !! 1) - (head fixed) >= length start)
197 result <-
    let
199     h = head fixed
      ( ( first , freqFirst ) : oldFreqs )
201     = map
      (\ha ->
203       if ha 'elem' minFreq
        then (ha, c)
205        else (ha, c + 1)
      )
207     $ take e
      $ dropWhile (< h)
209     $ cycle
      scale
211 freqs -- Ponemos el h al final con su frecuencia ya restada.
      = oldFreqs
213     ++ if freqFirst /= length start
        then [ ( first , freqFirst - length start) ]
215         else []
newfixed
217   = take (nfixed - 1)
      $ dropWhile (<= h)
219     $ cycle
      fixed
221   in return $ oneCase newfixed freqs start
guard
223   (length result == long) -- Quito los que no tengan long (los []).
return $ normalize result
225
-- Pongo el índice 0 otra vez al principio
227 -- y lo pongo en orden creciente.

```

```

normalize :: Scale -> Scale
229 normalize []
    = []
231 normalize result@(h:_)
    = map (\i -> if i > h then i - long else i) before
233 ++ hh
    ++ map (\i -> if i <= h then i + long else i) after
235 where
    (hhafter, before)
237 = splitAt (long - h) result
    (hh, after)
239 = span (== h) hhafter

241
-- Dados los puntos fijos, las frecuencias y el resultado
243 oneCase :: Scale -> [(Int, Int)] -> Scale -> Scale
oneCase _ _ []
245 = [] -- Si no hay start ha habido un problema. No puede ocurrir.
oneCase _ [] x
247 = x -- Si no quedan frecuencias, hemos acabado bien.
oneCase [] ((next, nextFreq):freqs) start
249 = -- Si no quedan fixed points, simplemente rellenar.
    oneCase
251 []
    freqs $
253 start ++ replicate nextFreq next

255 -- Si quedan fixed points:
oneCase ffixed@(f:fixed) ((next, nextFreq):freqs) start@(s:_)
257 -- Si f es igual al siguiente índice,
-- next tiene que ser ese índice porque f es fijo.
259 | f==currentIndex && f==next
    = oneCase
261 fixed -- Ya hemos usado f; lo desechamos.
    ((eraseFreq next nextFreq) ++ freqs) $
263 start ++ [next]
-- Si no necesito fijar,
265 -- entonces next no puede pasarse del siguiente fixed point f.

```

```

267 | f/=currentIndex && f>=next
    = oneCase
      fixed
269   ((eraseFreq next nextFreq) ++ freqs) $
      start ++ [next]
271 | otherwise = []
where
273   currentIndex
    = s + length start
275   eraseFreq element freq
    = if freq == 1
277     then []
      else [(element, freq-1)]

```

Bibliografía

- [1] WRIGHT, DAVID. *Mathematics and Music*, American Mathematical Society (2009).
- [2] KINNEY, JAMES P. *Twelve-tone Serialism: Exploring the Works of Anton Webern*, Undergraduate Honors Theses. Paper 1 (2015)
- [3] DÍAZ DE LA FUENTE, ALICIA. *Estructura y significado en la música serial y aleatoria*, Universidad Nacional de Educación a Distancia. Tesis Doctoral en Filosofía (2005)
- [4] PROF. FERNANDO DELGADO GARCÍA. Clases y material de Historia de la Música, 5º y 6º de Enseñanzas Profesionales del Conservatorio Profesional de Música Arturo Soria, cursos 2014-15 y 2015-16.
- [5] DOMÍNGUEZ ROMERO, MANUEL. *Las Matemáticas en el Serialismo Musical*, Sigma n.24 (2004).
- [6] XIAO, JUNE. *Bach's Influences in the Piano Music of Four 20th Century Composers*, Indiana University Jacobs School of Music. Doctoral Theses in Music (2014)
- [7] CLERCQ, TREVOR DE. *A Window into Tonality via the Structure of Schoenberg's "Musette" from the Piano Suite, op. 25*, Theory/Analysis of 20th-Century Music. Prof. David Headlam (2006)

- [8] ARMSTRONG, M. A. Chapter 6: “Permutations”, Chapter 17: “Actions, Orbits, and Stabilizers”, Chapter 18: “Counting Orbits”, *Groups and Symmetry*, New York: Springer-Verlag (1988)
- [9] BASOMBA GARCÍA, DANIEL. *El último Bach y el dodecafonismo como ideal musical: una lectura estética y sociológica*, Universidad Carlos III de Madrid. Tesis Doctoral en Ciencia Política y Sociología (2013)
- [10] BHALERAO, RASIKA. *The Twelve-Tone Method of Composition*, Math 336. Prof. Jim Morrow (2015)
- [11] HYDE, MARTHA. Chapter 4: “Dodecaphonism: Schoenberg”, *Models of Musical Analysis: Early Twentieth-century Music*, Ed. Mark Everist and Jonathan Dunsby. Oxford: Blackwell (1993)
- [12] MORRIS, ROBERT. *Mathematics and the Twelve-Tone System: Past, Present, and Future*, Perspectives of New Music 45.2 (2007)
- [13] COOK, NICHOLAS. Chapter 9: “Analyzing Serial Music”, *A Guide to Musical Analysis*, New York: G. Braziller (1987)
- [14] ROBERTS, GARETH E. *Composing with Numbers: Arnold Schoenberg and His Twelve-Tone Method*, Math/Music: Aesthetic Links (2012).
- [15] ILOMÄKI, TUUKKA. *On the Similarity of Twelve-Tone Rows*, Sibelius Academy (2008).
- [16] HUNTER, DAVID J.; VON HIPPELA, PAUL T. *How Rare Is Symmetry in Musical 12-Tone Rows?*, The American Mathematical Monthly, Vol. 110, No. 2 (2003).
- [17] GOLOMB, S. W., WELCH, L. R. *On the enumeration of polygons*, The American Mathematical Monthly, Vol. 67, 349-353 (1960).
- [18] REINER, DAVID L. *Enumeration in Music Theory*, The American Mathematical Monthly, Vol. 92, No. 1 (1985).

- [19] LONDON, J., VON HIPPEL, P., HURON, D., CARTANO, J., KINGERY, K., OLSEN, B., SANTELLI, T. *Row forms in the serial works of Schoenberg, Berg, and Webern* [Computer database.] Stanford, CA: Center for Computer Assisted Research in the Humanities (www.ccarh.org/publications/data/humdrum/tonerow/) (2000/2001).

