LA ESTRUCTURA MATEMÁTICA DEL SERIALISMO MUSICAL

Celia Rubio Madrigal

Instituto San Mateo
Universidad Complutense de Madrid

cursos 16-17 y 17-18

Dedicado a mis dos
grandes pasiones:
las matemáticas
y la música.

It has been observed that mathematics is the
most abstract of the sciences, music
the most abstract of the arts.

— David Wright [5]

Agradecimientos

Me gustaría dar las gracias a:

INTRODUCCIÓN AL TEXTO

Todas las estructuras musicales están basadas en estructuras matemáticas. Los elementos musicales de los que están compuestas las obras, como las notas, las dinámicas o los timbres, están agrupados en conjuntos, y, como tales, cumplen ciertas propiedades al relacionarse consigo mismos o con otros conjuntos.

A lo largo de la historia, los compositores han ido descubriendo e inventando estas propiedades musicales en las piezas que componían; por ejemplo, desde consonancias y disonancias entre notas, hasta la jerarquía según el pulso en el que la nota se encuentra. Las matemáticas son capaces de describir las propiedades de estos elementos musicales como para cualquier otro conjunto matemático.

Por ejemplo, las músicas serialistas se basan en la continua reiteración de secuencias de elementos musicales. Es decir, un compositor serialista tomará una secuencia ordenada de notas, dinámicas o timbres y la usará como único bloque constructivo de su obra. Puede, además, serializar más de un conjunto de elementos musicales, o incluso pretender serializar el máximo número de conjuntos – lo que a mediados del siglo XX se llamaría serialismo integral. Estas músicas se pueden describir matemáticamente por medio de las permutaciones.

Son en estas estructuras en las que se centrará el presente texto, y más específicamente en el dodecafonismo, el primer sistema compositivo serialista. Se explicarán los fundamentos matemáticos que lo posibilitan, las razones históricas por las que surgió y los postulados que lo definieron, proponiendo ejemplos analizados. Además, se investigará sobre el valor artístico del serialismo mediante el uso de escalas no cromáticas en busca de consonancia.

Índice general

Parte I

DODECAFONISMO

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN MATEMÁTICA DE PERMUTACIONES

1.1. CONJUNTOS Y GRUPOS

La teoría de conjuntos es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades y relaciones de los *conjuntos*. En matemáticas, un conjunto es una colección de objetos bien definidos y diferenciables entre sí que se llaman *elementos*.

Se dice que un conjunto está bien definido cuando, dado un elemento cualquiera, éste o pertenece al conjunto o no pertenece a él. Para definir un conjunto se puede o bien listar los objetos uno a uno, o bien describirlos por medio de un predicado: una o varias propiedades que caracterizan a todos los elementos de dicho conjunto.

Por ejemplo, el conjunto $\mathrm{K_i}$, formado por las doce notas de la escala cromática de una misma octava i, está bien definido porque podemos hacer una lista con ellas:

$$\mathrm{K_4} = \{\mathrm{Do_4}, \mathrm{Do\#_4}, \mathrm{Re_4}, \mathrm{Re\#_4}, \mathrm{Mi_4}, \mathrm{Fa_4}, \mathrm{Fa\#_4}, \mathrm{Sol_4}, \mathrm{Sol\#_4}, \mathrm{La_4}, \mathrm{La\#_4}, \mathrm{Si_4}\}$$

Nótese que, aun llamando a las notas de distinta manera, el conjunto, conceptualmente, es el mismo. Además, el hecho de listar algún elemento más de una vez no afecta a su definición. Como $\mathrm{Do\#_4} = \mathrm{Re\flat_4}$,[1] $\mathrm{K_4}$ también puede ser listado así:

$$\mathrm{K_4} = \{\mathrm{Do_4}, \mathrm{Do\#_4}, \mathrm{Re\flat_4}, \mathrm{Re_4}, \mathrm{Re\#_4}, \mathrm{Mi_4}, \mathrm{Fa_4}, \mathrm{Fa\#_4}, \mathrm{Sol_4}, \mathrm{Sol\#_4}, \mathrm{La_4}, \mathrm{La\#_4}, \mathrm{Si_4}\}$$

[1]En este texto se trabajará siempre con temperamento igual por convenio.

En cambio, el conjunto D, formado por las duraciones rítmicas elementales – sin ligaduras ni puntillos –, es infinito, por lo que no se puede listar de forma completa. Sin embargo, se puede expresar por medio de un predicado:

$$\mathrm{D} = \{2^n : n \in \mathbb{Z},\ n \leq 2\} = \{4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots\} = \{\text{𝅝},\ \text{𝅗𝅥},\ \text{♩},\ \text{♪},\ \ldots\}$$

Los elementos de un conjunto pueden combinarse mediante *operaciones* para dar otros objetos matemáticos, que pueden pertenecer o no al mismo conjunto. Se dice que un conjunto X no vacío y una operación ($*$) forman un *grupo* (X, $*$) cuando cumplen:

1. Si a y b pertenecen a X, $a * b$ pertenece a X.
2. Asociatividad: Si a, b y c pertenecen a X, $(a * b) * c = a * (b * c)$.
3. Existe un elemento e en X, llamado elemento identidad, tal que para todo a que pertenece a X se cumple que $e * a = a * e = a$. Se puede probar que el elemento identidad es único para cada grupo. $\exists!\ e \in \mathrm{X} : \forall a \in \mathrm{X}\ e{*}a = a{*}e = a$
4. Cada elemento a perteneciente a X tiene asociado otro elemento a^{-1} que pertenece también a X, llamado elemento inverso, tal que $a{*}a^{-1} = a^{-1}{*}a = e$. Se puede probar que el elemento inverso de cada elemento es único. $\forall a \in \mathrm{X}\ \exists!\ a^{-1} \in \mathrm{X} : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

1.2. FUNCIONES Y PERMUTACIONES

Una *función* es una regla que asocia a cada elemento de un primer conjunto, llamado *dominio*, un único elemento de un segundo conjunto, llamado *codominio*. Si la función se llama f, el dominio A y el codominio B, se denota $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$. El elemento asociado a x mediante f se denota $f(x)$.

Cuando varias funciones se aplican una detrás de la otra decimos que realizamos la operación de composición de funciones. Se representa con el símbolo ($\circ$). En ella, el codominio de la primera función será el dominio de la segunda, y así sucesivamente. Por ejemplo, aplicar una función $f(x)$ y después aplicar una función $g(x)$ se denota $g(f(x)) = g(x) \circ f(x)$.

Una *permutación* $\sigma(\mathrm{X})$ es una función sobre un conjunto X que asocia sus elementos biyectivamente a los elementos del mismo conjunto X. Es decir, asocia cada elemento a uno, y solo uno, de los elementos de su mismo conjunto ($\sigma : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$). [2]

El conjunto de todas las posibles permutaciones sobre un determinado conjunto X, junto con la operación de composición de funciones ($\circ$), forma un grupo denominado $\mathrm{S_x}$. Para probarlo, se debe comprobar que cumple todas las propiedades de los grupos.

1. Permutar dos veces es también una permutación.
2. La composición de funciones es asociativa.
3. La permutación que asigna un elemento a sí mismo es la identidad.
4. Como las permutaciones son biyectivas, cada una tiene una inversa que es también una permutación.

Cuando X es el conjunto de números naturales desde 1 hasta n, $\mathrm{X} = \{\mathrm{a} \in \mathbb{N} : 1 \leq \mathrm{a} \leq n\} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,\ n\}$, el grupo $\mathrm{S_x}$ se representa como S_n y se le denomina el grupo simétrico de orden n. El número de elementos en S_n, es decir, de posibles permutaciones, será $n!$. En nuestros ejemplos musicales, los conjuntos estarán numerados desde 0 hasta $n-1$, siendo n el número de elementos a permutar, en vez de desde 1 hasta n. Seguirán siendo grupos simétricos de orden n, pero con una numeración distinta.

La notación utilizada para representar una permutación σ perteneciente a S_n con la numeración desde 0 es:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & n-3 & n-2 & n-1 \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n-3) & \sigma(n-2) & \sigma(n-1) \end{pmatrix}$$

Capítulo 2

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA DEL DODECAFONISMO

2.1. RICHARD WAGNER Y LA EMANCIPACIÓN DE LA DISONANCIA

El periodo de la historia de la música predominante en el siglo XIX, comúnmente llamado Romanticismo, culminó con los dramas musicales de Richard Wagner (1813–1883), en los que todos los elementos de la obra estaban detalladamente estudiados por el compositor. A este concepto él lo llamaba *Gesamtkunstwerk*, es decir, «obra de arte total»[1], ya que creía poseer la responsabilidad de reunir todas las artes en una misma obra. Wagner se aseguraba personalmente que en sus óperas las artes escénicas, musicales, poéticas y visuales se combinaran entre sí a la perfección.

La idea del *Gesamtkunstwerk* la desarrolló alrededor de 1850, y la plasmó en su totalidad un cuarto de siglo después, en su ciclo de cuatro óperas *Der Ring des Nibelungen*, estrenado el 16 de agosto de 1876. Wagner controló y creó cada aspecto de la tetralogía, desde la música hasta el libreto, el vestuario y la escenografía. Incluso mandó crear su propia sala de conciertos en Bayreuth, el *Festspielhaus*, para que el lugar se adecuara a sus ideas sobre el pensamiento y la cultura musical.

De esta forma, a ojos de compositores posteriores, Wagner había agotado todas

[1]Ensayo *Oper und drama*, Richard Wagner, 1851

las posibilidades de la música tonal, y quizás ya había comenzado el viraje hacia el predominio de la disonancia con su abundante uso del cromatismo, como en el famoso primer acorde de *Tristan und Isolde* (1865). Por tanto, y siguiendo la mentalidad alemana del progreso como un camino ascendente, el paso siguiente para la composición musical debía consistir en deshacerse progresivamente de la tonalidad y desarrollar la «emancipación de la disonancia»[2]. Así fue como Arnold Schoenberg ideó sus teorías del pensamiento musical, y éstas dieron paso a la creación de la atonalidad. [3]

2.2. POSROMANTICISMO Y ATONALISMO LIBRE DE SCHOENBERG

Fuertemente influido por Wagner y Brahms desde su adolescencia, Schoenberg (1874–1951) comenzó componiendo al estilo posromántico de su época, llevando el cromatismo y la orquestación hasta el extremo. Sin embargo, y no espontáneamente, empezó a buscar en sus composiciones que cada sonido tuviera un valor independiente de su funcionalidad tonal.

Para él, la música no estaba intrínsecamente dirigida a una tónica. En las progresiones, lo importante era el paso de un acorde a otro, y no hacia dónde se dirigían éstos. Además, él opinaba que se debían poder utilizar las notas de los modos eclesiásticos libremente, por lo que consideraba las notas no diatónicas tan válidas como las diatónicas. Esto hacía imposible distinguir unas de otras, no pudiendo identificar ni siquiera la tónica. De esta forma, la jerarquía tonal quedaba desestabilizada. [3]

De esta época es su primera obra importante, *Noche transfigurada*, Op. 4. Compuesto en 1899, este sexteto de cuerdas está inspirado por el poema homónimo de Richard Dehmel. Aunque en la obra aún prevalece la armonía tradicional basada en acordes, Schoenberg se deshizo de cualquier centro tonal estable. Además, hizo uso del acorde de novena invertido, inexistente hasta entonces y, por tanto, rechazado por la crítica.

Tras pasar por la etapa tonal posromántica, y debido a su convicción en la irrevocabilidad histórica de la evolución de la música hacia el cromatismo total [1], en 1908 Schoenberg se desligó de la tonalidad completamente con el ciclo de canciones *Das Buch der Hängenden Gärten*. A partir de entonces se dedicó a componer fragmentos muy breves cuya estructura era definida por motivos y no por la armonía, como

[2] Ensayo *Composition with twelve tones*, recogido en *Style and Idea*, Arnold Schoenberg, 1950

solía ocurrir en formas musicales anteriores[3]. A este periodo en sus composiciones se le llama *atonalidad libre*, aunque cabe destacar que Schoenberg rechazaba fervientemente este término:

> "*Encuentro que la expresión* "música atonal" *es de lo más desafortunada – es como llamar a volar "el arte de no caer" o nadar "el arte de no ahogarse".*"

A este periodo pertenece también su famoso ciclo de canciones *Pierrot Lunaire*. La obra es una selección de 21 poemas del ciclo de poemas homónimo de Albert Giraud. Su nombre completo es "Tres veces siete poemas de Pierrot Lunaire de Albert Giraud", ya que está dividida en 3 grupos de 7 poemas cada uno.

Se encuentran en ella abundantes referencias al número 7: Schoenberg hace un uso extensivo de motivos de 7 notas a lo largo de la obra, mientras que el conjunto musical que la interpreta, incluyendo al director, consta de 7 miembros. De hecho, a este conjunto de instrumentos se le ha dado el nombre de ensemble Pierrot en su honor. Un ensemble Pierrot consta de flauta, clarinete, violín, violonchelo y piano, con la posible añadidura de una cantante.

La pieza es su Opus 21, contiene 21 poemas y fue comenzada el 12 de marzo de 1912. Otros números importantes en la obra son el 3 y el 13. Cada poema consiste de 13 líneas, mientras que la primera línea de cada poema aparece 3 veces: en las líneas 1, 7 y 13.

2.3. EL SURGIMIENTO DE UN SISTEMA

Schoenberg no estaba satisfecho con la técnica compositiva que utilizaba, ya que admiraba las obras extensas de los músicos románticos y pensaba que su atonalidad libre no podía sostener una obra de gran envergadura. Es decir, necesitaba un hilo conductor más potente que los motivos para poder componer obras atonales más largas.

Además, por aquella época sufrió una crisis en muchos aspectos de su vida. En lo personal, su mujer Matilde Zemlinsky acababa de abandonarlo por otro hombre, aunque posteriormente volvería junto al compositor. Y, en lo profesional, sus obras no eran del gusto del público, por lo que no contaba con suficiente dinero para

[3] La forma sonata es el ejemplo más destacado de estructura basada en la armonía.

mantener a su familia. Todas estas circunstancias, unidas al desarrollo de la Primera Guerra Mundial, no le permitieron componer muchas obras entre 1914 y 1923.

Tras el final de la guerra, en 1919, Schoenberg fundó la Sociedad para Interpretaciones Musicales Privadas junto a sus discípulos y amigos Alban Berg y Anton Webern. Schoenberg, Berg y Webern se autodenominaron la Segunda Escuela de Viena en honor al grupo de compositores del siglo XVIII Haydn, Mozart y Beethoven, quienes formaban la Primera Escuela de Viena.

En la Sociedad para Interpretaciones Musicales Privadas se presentaban músicas contemporáneas en circunstancias que favorecieran su adecuada apreciación. Así se evitaba que dichas obras, al no ser entendidas por el público, fueran inmediatamente rechazadas. Las obras de compositores como Mahler, Debussy, Bartók, Ravel, Strauss y Stravinsky fueron incluidas en los programas de conciertos organizados por la Sociedad.

En este contexto Schoenberg pudo reflexionar sobre sus técnicas compositivas, y al fin publicó en 1923 su ensayo *Método de composición con doce sonidos*, donde se describían por primera vez los axiomas del dodecafonismo: la solución al problema de la atonalidad libre que le había estado atormentando durante una década.

Su primera obra íntegramente dodecafónica, publicada también en 1923, es la Suite para piano Op. 25. Es la pieza más temprana en la que Schoenberg usa series dodecafónicas en cada uno de los movimientos. En dos obras anteriores a ella usa series dodecafónicas, pero en movimientos aislados: la Op. 23, *5 Stücke* (1920–23), en el movimiento de Waltz final; y su *Serenata*, Op. 24, en su Soneto central.

Las series utilizadas en la Suite Op. 25 servirán de ejemplo en este texto, y su tercer movimiento, Musette, será estudiado, analizado y modificado, con el fin de entender una obra dodecafónica real en toda su extensión.

Capítulo 3

EL SISTEMA DODECAFÓNICO DE SCHOENBERG

3.1. LOS POSTULADOS DEL DODECAFONISMO

El dodecafonismo es el sistema compositivo que predetermina las relaciones melódico-armónicas de una obra a partir de una ordenación de las doce notas de la escala cromática, llamada serie, y sus transformaciones [1]. Es decir, que los únicos conjuntos musicales serializados son la melodía y la armonía, mientras que el ritmo, la duración, el timbre y las dinámicas se dejan a discreción del compositor. No serializar el resto de conjuntos será la principal crítica al dodecafonismo por parte de los compositores serialistas que sucedieron a Schoenberg: los compositores de serialismo integral de mediados del siglo XX, como Pierre Boulez.

Esta predeterminación dodecafónica, aunque parece en primera instancia excesivamente limitante, permite realizaciones musicales y estilos de composición muy diferentes: Schoenberg daba un tratamiento tradicional a sus obras, ya que aún admiraba las formas clásicas; Berg iba más allá al utilizar series que recordaban a las tríadas tonales; y, en cambio, Webern evitaba radicalmente cualquier asociación con la tradición.

Schoenberg definió su sistema musical a partir de cuatro postulados que, en realidad, se basan en principios matemáticos:

1. La serie [sobre la que se construye la obra dodecafónica] *consta de las doce notas de la escala cromática dispuestas en un orden lineal específico.*

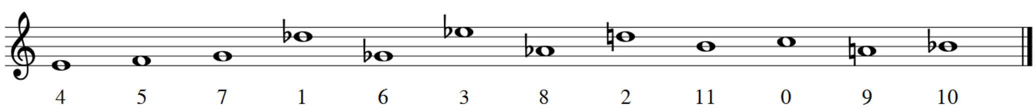
2. Ninguna nota aparece más de una vez en la serie.

Los dos primeros postulados expresan que una obra dodecafónica fundamenta su estructura sobre una permutación de la escala de doce semitonos. Dicha permutación σ es una biyección del conjunto numerado de las doce notas $\{$Do = 0, Do# = 1, Re = 2, Re# = 3, Mi = 4, Fa = 5, F# = 6, Sol = 7, Sol# = 8, La = 9, La# = 10, Si = 11$\}$ consigo mismo, y se representa de esta forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & \sigma(6) & \sigma(7) & \sigma(8) & \sigma(9) & \sigma(10) & \sigma(11) \end{pmatrix}$$

La permutación $\sigma(n)$, con $n \in \mathbb{Z}/(12)$[1], pertenece al grupo simétrico de orden 12: $\sigma \in \mathrm{S}_{12}$. Por ejemplo, en la Suite para piano Op. 25 Schoenberg utiliza como serie original en todos los movimientos de la obra la siguiente permutación P:

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 6 & 3 & 8 & 2 & 11 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$



3. La serie será expuesta en cualquiera de sus aspectos lineales: original, inversión, retrogradación del original y retrogradación de la inversión.

4. La serie puede usarse en sus cuatro aspectos desde cualquier nota de la escala.

Los dos últimos postulados amplían los recursos compositivos al admitir la transformación de la serie original mediante *inversión*, *retrogradación*, *inversión retrógrada* y *transposición*[2]. El compositor puede utilizar cualquiera de las transformaciones de una serie al componer su obra dodecafónica. El conjunto de series que puede utilizar, que viene dado por la serie original y todas sus posibles transformaciones, se conoce como *espectro serial.*

[1] $\mathbb{Z}/(12) = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}$, el grupo cíclico de orden 12.

[2] No confundir con un 2-ciclo. Una transposición musical se corresponde con una traslación matemática.

3.2. LAS TRANSFORMACIONES DE UNA SERIE

Transformar una serie es matemáticamente equivalente a aplicar una función sobre la serie que asocie su permutación a la permutación transformada. Por tanto, cualquier función transformativa Ψ se aplica sobre el conjunto de las permutaciones: S_{12}, el grupo simétrico de orden 12 ($\Psi : \ \mathrm{S}_{12} \rightarrow \mathrm{S}_{12}$).

3.2.1. TRANSPOSICIÓN

La *transposición*, mencionada en el cuarto postulado, consiste en subir o bajar la serie original un número determinado de semitonos. Por tanto, no se modifican los intervalos entre las notas, sino solamente la altura a la que está la serie. Ya que consideraremos todas las octavas equivalentes, debemos trabajar módulo 12.

La función que transporta k semitonos, $\mathrm{T_k}\left(\sigma\right)$, se construye sumando o restando k a σ (módulo 12):

$$\forall n \in \mathbb{Z}/(12) : \mathrm{T_k}\left(\sigma\left(n\right)\right) = \sigma\left(n\right) + \mathrm{k} \qquad \text{con k constante;}$$

$$\mathrm{T_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & 9 & 10 & 11 \\ \sigma\left(0\right) + \mathrm{k} & \sigma\left(1\right) + \mathrm{k} & \sigma\left(2\right) + \mathrm{k} & \cdots & \sigma\left(9\right) + \mathrm{k} & \sigma\left(10\right) + \mathrm{k} & \sigma\left(11\right) + \mathrm{k} \end{pmatrix}$$

Una segunda notación para $\mathrm{T_k}\left(\sigma\right)$ es $\mathrm{T}(\sigma + \mathrm{k})$, que será utilizada para los cálculos matemáticos, mientras que la notación $\mathrm{T_k}$ se utilizará cuando la permutación σ sobre la que se aplique la transposición sea redundante. La notación Ψ_{k} se usará en sustitución de la composición de la transposición $\mathrm{T_k}$ y otra función Ψ, en el respectivo orden:

$$\Psi_{\mathrm{k}} = \Psi \circ \mathrm{T_k} = \Psi\left(\mathrm{T_k}\right), \text{ es decir, transponer primero y aplicar } \Psi \text{ después.}$$

Una posible serie transportada sobre la permutación P de la Suite Op. 25, con k = 6, es la siguiente serie T_6:

$$\mathrm{T}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 1 & 7 & 0 & 9 & 2 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3.2.2. RETROGRADACIÓN

La *retrogradación* consiste en leer la serie original desde la nota final hacia atrás, es decir, aplicar a la serie una simetría especular. De este modo, la primera nota irá al último puesto, la segunda al penúltimo, y así sucesivamente.

La serie retrógrada se construye de esta forma:

$$\forall n \in \mathbb{Z}/(12) : \mathrm{R}\left(\sigma\left(n\right)\right) = \sigma\left(11 - n\right)$$

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \sigma(11) & \sigma(10) & \sigma(9) & \sigma(8) & \sigma(7) & \sigma(6) & \sigma(5) & \sigma(4) & \sigma(3) & \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(0) \end{pmatrix}$$

La serie retrógrada sobre la permutación P de la Suite Op. 25 es la siguiente serie R_0:

$$\mathrm{R}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 9 & 0 & 11 & 2 & 8 & 3 & 6 & 1 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

3.2.3. INVERSIÓN

La *inversión* consiste en cambiar la dirección –de ascendente a descendente, y viceversa– de los intervalos entre cada nota de la serie. Si el primer intervalo en la serie original σ es de $+n$, el primer intervalo en la serie invertida I será de $-n$ (mod. 12), por lo que debemos cambiar el signo de σ para construir I. Además, queremos que la primera nota de ambas series, I(0) y $\sigma(0)$, coincidan, así que debemos transportar la serie $-\sigma$ un número λ de semitonos para que esta condición se cumpla:

$$\mathrm{I}(0) = -\sigma\left(0\right) + \lambda = \sigma\left(0\right) \implies \lambda = 2\sigma(0)$$

Por tanto, la serie invertida se construye de esta forma:

$$\forall n \in \mathbb{Z}/(12) : \mathrm{I}\left(\sigma\left(n\right)\right) = -\sigma\left(n\right) + 2\sigma\left(0\right)$$

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & 10 & 11 \\ \sigma(0) & -\sigma(1) + 2\sigma(0) & -\sigma(2) + 2\sigma(0) & \dots & -\sigma(10) + 2\sigma(0) & -\sigma(11) + 2\sigma(0) \end{pmatrix}$$

La serie invertida sobre la permutación P de la Suite Op. 25 es la siguiente serie I_0:

$$\mathrm{I}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 2 & 5 & 0 & 6 & 9 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

En total, obtendremos 48 series pertenecientes a un solo espectro serial, ya que hay 12 series originales sobre cada una de las doce notas $\{\mathrm{T}_0 = \mathrm{P}, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \ldots\}$, 12 series retrógradas $\{\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2 \ldots\}$, 12 invertidas $\{\mathrm{I}_0, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2 \ldots\}$ y 12 series sobre las que se aplica tanto la retrogradación como la inversión $\{\mathrm{RI}_0, \mathrm{RI}_1, \mathrm{RI}_2 \ldots\}$.

3.2.4. RETROGRADACIÓN E INVERSIÓN

Si calculamos la retrogradación invertida y la inversión retrógrada, observamos que no conmutan, sino que dan dos series transportadas una de la otra, como se muestra a continuación:

Retrogradación invertida: $\mathrm{RI}(\sigma(n)) = \mathrm{I} \circ \mathrm{R}(\sigma(n)) = \mathrm{I}(\mathrm{R}(\sigma(n))) = -\mathrm{R}(\sigma(n)) + 2\mathrm{R}(\sigma(0)) = -\sigma(11-n) + 2\sigma(11-0) = -\sigma(11-n) + 2\sigma(11)$

$$\mathrm{RI} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 10 & 11 \\ -\sigma(11) + 2\sigma(11) & -\sigma(10) + 2\sigma(11) & \ldots & -\sigma(1) + 2\sigma(11) & -\sigma(0) + 2\sigma(11) \end{pmatrix}$$

Inversión retrógrada: $\mathrm{IR}(\sigma(n)) = \mathrm{R} \circ \mathrm{I}(\sigma(n)) = \mathrm{R}(\mathrm{I}(\sigma(n))) = \mathrm{R}(-\sigma(n) + 2\sigma(0)) = -\mathrm{R}(\sigma(n)) + 2\sigma(0) = -\sigma(11-n) + 2\sigma(0)$

$$\mathrm{IR} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 10 & 11 \\ -\sigma(11) + 2\sigma(0) & -\sigma(10) + 2\sigma(0) & \ldots & -\sigma(1) + 2\sigma(0) & -\sigma(0) + 2\sigma(0) \end{pmatrix}$$

Los únicos casos en los que podrían conmutar ocurrirían cuando $2\sigma(0) \equiv 2\sigma(11)$ (mod. 12):

$$12 + 2\sigma(0) = 2\sigma(11)\,;\; 6 + \sigma(0) = \sigma(11) \implies \sigma(11) - \sigma(0) = 6$$

Es decir, cuando la primera y la última nota de la serie original se distancian en 6 semitonos, como es el caso de nuestra permutación P en la Suite Op. 25 de Schoenberg:

$$\mathrm{IR}_0 = \mathrm{RI}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 8 & 9 & 6 & 0 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3.2.5. EL GRUPO DE KLEIN DE LAS TRANSFORMACIONES

La retrogradación, la inversión y la composición de ambas son funciones involutivas; es decir, aplicando dos veces una transformación se vuelve a la serie original. Si tomamos las series transportadas como equivalentes, el conjunto de series restantes forma un grupo especial llamado grupo de Klein, donde la función identidad Id es el elemento identidad y RI equivale a IR. En general, un grupo de Klein es el formado por cuatro elementos donde cada elemento es inverso de sí mismo.

$$\mathrm{Id}(\sigma) \circ \mathrm{Id}(\sigma) = \mathrm{Id}(\sigma) = \sigma$$

$$\mathrm{R}(\sigma) \circ \mathrm{R}(\sigma) = \mathrm{R}(11 - \sigma) = 11 - 11 + \sigma = \sigma$$

$$\mathrm{I}(\sigma) \circ \mathrm{I}(\sigma) = -\mathrm{I}(\sigma) + 2\mathrm{I}(0) = -(-\sigma + 2\sigma(0)) + 2\mathrm{I}(0) = \sigma + 2(\mathrm{I}(0) - \sigma(0)) = \sigma + \mathrm{k} \equiv \sigma$$

$$\mathrm{RI}(\sigma) \circ \mathrm{RI}(\sigma) = -\mathrm{RI}(11 - \sigma) + 2\mathrm{RI}(11) \equiv (11 - 11 + \sigma) + 2\sigma(11)) = \sigma - 2\sigma(11) \equiv \sigma$$

3.3. MATRICES DODECAFÓNICAS

El espectro serial de cualquier serie puede ordenarse para formar una matriz dodecafónica, la cual contiene todas las series que el compositor puede utilizar en una sola tabla.

He creado un programa informático que devuelve en formato LaTeX la matriz dodecafónica correspondiente a cualquier serie que se introduzca en teclado. Además, produce la nomenclatura adecuada para cada serie. El código, escrito en lenguaje C++, está incluido en el Anexo A, página 37, y está creado en base a las fórmulas de construcción de series y a la propiedad de invariancia de intervalos en las transportaciones.

A continuación, se incluye la matriz dodecafónica de la serie P de la Suite Op. 25 de Schoenberg. Mientras que en la mayoría de tablas las dos filas inferiores tienen numeración distinta, que se corresponde con las distintas nomenclaturas de RI e IR para una misma serie – ya que normalmente no conmutan –, en la matriz de la serie P sí coinciden, como se ha mencionado anteriormente.

	I_0	I_1	I_3	I_9	I_2	I_{11}	I_4	I_{10}	I_7	I_8	I_5	I_6	
T_0	4	5	7	1	6	3	8	2	11	0	9	10	R_0
T_{11}	3	4	6	0	5	2	7	1	10	11	8	9	R_{11}
T_9	1	2	4	10	3	0	5	11	8	9	6	7	R_9
T_3	7	8	10	4	9	6	11	5	2	3	0	1	R_3
T_{10}	2	3	5	11	4	1	6	0	9	10	7	8	R_{10}
T_1	5	6	8	2	7	4	9	3	0	1	10	11	R_1
T_8	0	1	3	9	2	11	4	10	7	8	5	6	R_8
T_2	6	7	9	3	8	5	10	4	1	2	11	0	R_2
T_5	9	10	0	6	11	8	1	7	4	5	2	3	R_5
T_4	8	9	11	5	10	7	0	6	3	4	1	2	R_4
T_7	11	0	2	8	1	10	3	9	6	7	4	5	R_7
T_6	10	11	1	7	0	9	2	8	5	6	3	4	R_6
	IR_0	IR_1	IR_3	IR_9	IR_2	IR_{11}	IR_4	IR_{10}	IR_7	IR_8	IR_5	IR_6	
	RI_0	RI_1	RI_3	RI_9	RI_2	RI_{11}	RI_4	RI_{10}	RI_7	RI_8	RI_5	RI_6	

Capítulo 4

ANÁLISIS DE UNA OBRA DODECAFÓNICA: OP. 25

4.1. SERIES UTILIZADAS EN LA SUITE OP. 25

Lo primero que hará un compositor dodecafónico antes de empezar a componer será escoger su serie original entre los casi 10 millones de posibilidades. Su elección nunca es una simple cuestión de azar; al contrario, ya que las singularidades de dicha serie darán un carácter especial a toda la obra. Por ejemplo, el compositor puede escoger una serie con simetrías, y así tendrá series repetidas entre su espectro serial. También puede tener simetrías internas entre los tricordios o tetracordios de la serie, es decir, simetrías solo en un fragmento de tres o cuatro notas, y de este modo podrá el compositor oscilar entre varias series del espectro que se parezcan entre sí.

En la Suite para Piano Op. 25, Schoenberg escoge su serie P para resaltar el intervalo de tritono (n = 6). A continuación, observamos los intervalos crecientes, en unidad de semitono, entre las notas de esta serie:

$$\mathrm{P} = \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 & & 10 & & 11 & \\ 4 & \mathbf{1} & 5 & \mathbf{2} & 7 & \mathbf{6} & 1 & \mathbf{5} & 6 & \mathbf{9} & 3 & \mathbf{5} & 8 & \mathbf{6} & 2 & \mathbf{9} & 11 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{9} & 9 & \mathbf{1} & 10 & \mathbf{6} \end{array}\right)$$

Y observamos que presenta repeticiones triples de los intervalos de tritono 6, de sexta mayor 9 y de segunda menor o semitono 1 – los intervalos más disonantes; una repetición doble de cuarta justa 5, y un intervalo de segunda mayor 2; además de una consecución de intervalos repetida: 9 – 1 – 9 – 1. Como se forma el intervalo de tritono al enlazar la serie original con una serie que empiece por la misma nota, se tiene en cuenta el intervalo de tritono 6 al final. En el dodecafonismo se evitan deliberadamente los intervalos de tercera mayor 4, ya que estos son la base de la eludida armonía tonal.

El intervalo de tritono tiene la particularidad de no modificarse en los procedimientos de inversión y transportación k = 6, por lo que estos intervalos aparecen en los lugares originales, mientras que en los procedimientos de retrogradación y retrogradación inversa ocupan sus lugares en retrógrado. En particular, Schoenberg utiliza entre los seis movimientos de la Suite solamente las ocho series de todo el espectro serial que cumplen estos requisitos: T_0, T_6, I_0, I_6, R_0, R_6, IR_0 e IR_6, que podemos observar en el Anexo C, página 45. Estas series tienen muchos elementos en común: todas comienzan o acaban por Mi♮ (nota 4) o por Si♭ (nota 10), lo que permite enlazar unas series con otras por medio del unísono o del tritono; se mantienen los intervalos de tritono en sus lugares originales o retrógrados, y coinciden en las dos primeras y las dos últimas notas dos a dos: T_0 con IR_6, T_6 con IR_0, R_0 con I_6 y R_6 con I_0.

Hay estudios – como los llevados a cabo por Martha Hyde y Robert Morgan – que limitan las series utilizadas en la Suite a cuatro: T_0, T_6, I_0 e I_6, pero ya que el objetivo de este texto no es analizar la obra entera se dejará esta cuestión para análisis posteriores.

4.2. DESCRIPCIÓN DE LA SUITE OP. 25

Schoenberg realiza en la serie P una partición isomórfica triple; es decir, la serie se divide en tres tetracordios, y cada uno de ellos contiene un intervalo de tritono. El último tetracordio, si se retrograda, consta de las notas 10 – 9 – 0 – 11, que en notación germánica es la secuencia BACH. Esto puede ser un homenaje al compositor Johann Sebastian Bach (1685—1750), ya que Schoenberg admiraba a los grandes compositores anteriores a él por las estructuras formales de sus obras.

Otro posible homenaje a Bach y sus contemporáneos barrocos es precisamente la forma de la obra: es una Suite, género cultivado durante los siglos XVII y XVIII que se compone de una variedad de danzas. La Suite de Schoenberg está formada por seis danzas: un Preludio, una Gavota, una Musette, un Intermezzo – que no tiene influencia barroca sino más bien de Brahms, otro modelo para Schoenberg –, un Minueto con Trío y una Giga. Además, el estilo, la textura – contrapuntística, típicamente barroca – y la estructura de cada danza se corresponden con los estilos, texturas y estructuras de las danzas homónimas del periodo bachiano.

Al componer la obra, Schoenberg trata cada tetracordio como una subunidad individual, y los superpone contra otras series del espectro también divididas, o utiliza sus notas como un solo acorde cuatríada. Estas divisiones no sólo sirven para hacer la serie más reconocible o añadir cohesión a la obra, sino que además facilitan el desarrollo de la serie específicamente en el estilo de cada danza.

4.3. ANÁLISIS DE LA MUSETTE

En el tercer movimiento de la Suite para Piano Op. 25, la Musette, Schoenberg recrea la danza barroca que toma su nombre del instrumento homónimo: la *cornamusa*, de la familia de la gaita.

La música compuesta para estos instrumentos consiste en una melodía acompañada por una nota pedal. Schoenberg imita esta textura a lo largo del movimiento mediante la presencia de un bordón sobre el Sol♮ (nota 7). Esta nota se extrae de cada una de las series utilizadas y se forma con ella un ostinato rítmico en la mano izquierda del piano. Con el resto de sonidos de cada serie, Schoenberg vuelve a emular el estilo de la danza barroca y articula un discurso polifónico a dos voces con ritmos esencialmente cortos.

A partir de la doble barra del compás 9, el Re♭ (nota 1) acompaña a Sol♮ y ambos crean un doble bordón en la mano izquierda. La elección de esas dos notas está estrechamente relacionada con la tradicional relación de quinta justa formada por Sol♮ y Re♮ en la música tonal. Schoenberg sustituye las quintas justas tonales por los intervalos de tritono dodecafónicos, subrayando aún más su «emancipación de la disonancia».

Además de las similitudes texturales, rítmicas y armónicas, la Musette de Schoenberg comparte estructura formal con las danzas barrocas. Y esta semejanza es quizás la más notable, ya que fue la búsqueda de estructura formal lo que inspiró a Schoenberg a desarrollar su método compositivo. La Musette barroca, como todos los movimientos de danza, presenta una estructura binaria con simetría tonal: empieza y acaba por la misma tonalidad, mientras que el centro es zona de desarrollo. Schoenberg despoja de funcionalidad tonal a esa simetría, madre de la forma sonata, y la aplica a su composición dodecafónica.

En este movimiento se pueden diferenciar a simple vista tres secciones, divididas en los compases 9 y 20, debido a cambios de textura, figuración y tempo. En la segunda sección se le añade melodía a la mano izquierda del piano, dejando más camuflado el bordón que en la primera sección, además de que éste se vuelve doble, mientras que vuelve a aparecer claramente en la tercera sección. También en la segunda sección aparece una nueva figuración, que es la semicorchea; y, por último, en los dos compases de división aparecen dos *a tempo*, que marcan el final de las dos primeras secciones tras dos zonas de variabilidad rítmica.

Para que esta estructura tríptica sea una forma binaria, la primera y la última parte deben mantener un parecido, que se observa a través del análisis de las series utilizadas en el movimiento. Estas series son T_0, T_6, I_0 e I_6.

Como cada una de estas series es o inversión o transposición k = 6 de otra serie del grupo, las cuatro series forman también un grupo de Klein. T_0 es el elemento identidad, ya que es el resultado de multiplicar cualquier serie sobre sí misma.

En la Musette, Schoenberg hace un uso casi absoluto de la tripartición serial, hasta el punto de individualizar los tetracordios por separado y concederles privilegios seriales, como la retrogradación. Por ejemplo, en el compás 7, en la voz inferior de la mano derecha aparece el tetracordio 4 – 5 – 2 – 3, que es o bien el primer tetracordio de IR_6 o la retrogradación del tercer tetracordio de I_6, mientras que los otros dos tetracordios de I_6, 10 – 9 – 7[1] – 1 en la voz superior y 8 – 11 – 6 – 0 en la mano izquierda, aparecen en el orden correcto. Entonces no se puede analizar el compás como IR_6, sino indicar que hay una alteración puntual de I_6.

Por tanto, es muy complicado analizar esta obra en su totalidad, ya que la flexibilidad en la ordenación de los tetracordios puede generar situaciones muy ambiguas. Debido a estas fragmentaciones y a las variadas combinaciones de tetracordios originales y retrógrados, se escucha un área de desarrollo hacia la sección media del movimiento. En cambio, las series al principio y al final de la pieza se presentan casi íntegramente, como una exposición y reexposición. He aquí un vínculo con la simetría de las formas binarias tonales.

Es más, incluso el orden de las series utilizadas en la primera y en la última sección coinciden, exceptuando dos repeticiones consecutivas y las series T_0 finales, que actúan como una cadencia serial:

c.1	T_0	I_6	T_6	I_0	T_0	I_0		T_6	I_6	I_6			**c.9**
c.22	T_0	I_6	T_6	I_0	T_0	I_0	I_0	T_6	I_6		T_0	T_0	**c.31**

En el Anexo D, página 49, se encuentra el análisis serial completo de la Musette, y en la pista 1 su reproducción con el programa Musescore.

[1] La nota 7 aparece como bordón y no en la misma voz que el resto del tetracordio, por lo que su posición es también excepcional.

Capítulo 5

MODIFICACIONES SERIALISTAS

5.1. EL VALOR INTRÍNSECO DEL DODECAFONISMO

En julio de 1921, tras haber ideado los fundamentos del dodecafonismo, Schoenberg dijo a su discípulo Josef Rufer: *"He realizado un descubrimiento que asegurará la supremacía de la música alemana durante los próximos cien años"*. Durante la mayor parte de su vida, Schoenberg creyó que el público general acabaría aceptando la música dodecafónica del mismo modo que se habían aceptado los sistemas tonales durante siglos.

Para él, la naturalidad del sistema dodecafónico residía en que era el resultado final de un proceso histórico: desde el contrapunto y el desarrollo motívico, practicado por los grandes maestros de la tradición alemana, hasta la disolución de la tonalidad, anticipada por la música postwagneriana e impresionista.

Tras su muerte en 1951 y durante dos décadas, su sistema compositivo fue venerado por los compositores jóvenes más brillantes, pero después se desvaneció de las salas de conciertos y de la memoria musical colectiva. Hoy en día la música dodecafónica está muerta. Ya solo vive académicamente: como un ejemplo que estudiar del éxito de las vanguardias elitistas del siglo XX, como una antigualla en la vitrina de un museo. Pero musicalmente ya nadie la disfruta, nadie desea escucharla ni tocarla.

¿Qué valor artístico tiene un arte que ya no se practica? Aún más, ¿qué valor tiene un arte que no gusta, no sólo a las mayorías desinformadas, sino incluso a los músicos más conocedores, un arte que solo gusta al propio autor y a su grupo de discípulos?

Si cuando se ideó tuvo valor artístico, fue por haber prescindido de algunas de las preconcepciones musicales más arraigadas, como la melodía, la consonancia o la tonalidad. Pero precisamente por eso el dodecafonismo es desagradable al oído, porque toma la disonancia y la pone al frente de toda la composición.

Para Schoenberg, la aprobación del público no era el objetivo de su arte, y, de hecho, el desagrado colectivo era un signo del alto nivel artístico y espiritual al que se encontraba:

> *"La belleza es una necesidad de los mediocres."*
>
> *"El valor de mercado es irrelevante para el valor intrínseco. Un juicio no cualificado puede como máximo decidir el valor de mercado - un valor que puede ser inversamente proporcional al valor intrínseco."*
>
> *"Para mí, un artista es como un manzano: cuando llega el momento, lo quiera o no, florece y comienza a producir manzanas. Y así como un manzano no conoce ni se informa acerca del valor que los expertos atribuirán a su producto, tampoco un compositor debe preguntarse si sus productos complacerán a los entendidos. Sólo sentirá que tiene algo que decir y lo dirá."*
>
> *"Ningún artista, ningún poeta, ningún filósofo y ningún músico, cuyo pensamiento se desenvuelve en la más alta esfera, habrá de descender a la vulgaridad para mostrarse complacientes con un eslogan tal como «Arte para todos». Porque si es arte no será para todos, y si es para todos no será arte."*

5.2. SERIALISMO DE ESCALAS NO CROMÁTICAS

Tras cien años de cambios históricos transcendentales como el desarrollo de la tecnología y la globalización, la definición de arte es muy diferente a la que

Schoenberg expresaba entonces. El arte está cada vez más cerca del ciudadano de a pie, y se le intenta explicar y simplificar por todos los medios el arte que no entiende.

Por ello, he decidido experimentar con la idea del dodecafonismo y despojarle de lo que, en mi opinión, provoca el rechazo general: la disonancia. Ya que esta proviene del cromatismo, la idea es utilizar escalas que no tengan intervalos de semitono, y con ellas crear un serialismo de menos notas. Modificaré las notas de una obra dodecafónica ya existente para que se adapte a la nueva escala utilizada, mientras que el ritmo, la duración, el timbre y las dinámicas, que siguen siendo producto del compositor original, se dejan intactas.

Tomando la música debussiana y las músicas orientales como referencia, he escogido la escala pentatónica para aplicarla a la Musette de la Suite para piano Op. 25 de Schoenberg. Para relacionar la escala dodecafónica con la nueva escala, se debe crear una función que relacione las notas de ambos conjuntos. Yo he tomado esta función:

Escala dodecafónica:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Escala pentatónica:	0	0	2	2	4	4	7	7	7	9	9	0

Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
Do	Do	Re	Re	Mi	Mi	Sol	Sol	Sol	La	La	Do

Se puede observar que, ya que 5 no es divisor de 12, no hay una repartición equitativa, por lo que en cada serie habrá notas que aparezcan más que otras. En mi función, las notas repetidas son el Do (nota 0) y el Sol (nota 7). Además, estas notas forman el bordón de la Musette, por lo que tendrá aspecto sonoro de Do Mayor. En el Anexo E, página 53 se encuentra la partitura de la modificación pentatónica, sin incluir las dinámicas por cuestión de simplificación, y en la pista 2 se encuentra la grabación de la misma, creada con el programa Musescore.

Un estudio ulterior muy interesante consistiría en probar con otras funciones que repitieran notas diferentes, o probar con otras escalas como la hexafónica (de tonos enteros) o la heptafónica (las escalas tonales), y sus respectivas funciones posibles, o incluso aplicarlo a diversas obras. La extensión de mi investigación no puede abarcar ese trabajo, además de que se necesitaría un programa que aplicara automáticamente las funciones a la partitura en vez de tener que cambiar cada nota manualmente.

Sin embargo, he hecho una prueba sobre la primera sección de la Musette con una única función de la escala hexafónica y otra de la heptafónica, para así justificar mi elección de la escala pentatónica como la mejor entre las tres.

Con la escala hexafónica habría una repartición equitativa en la función, por lo que la obra seguiría siendo estrictamente serialista y ninguna nota sobresaldría. El problema de esta escala es que tampoco suena natural al oído, como se puede comprobar en la pista 3 (partitura en el Anexo F, página 57), que es la modificación hexafónica de la primera sección de la Musette con la siguiente función:

Escala dodecafónica:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Escala hexafónica:	0	0	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10

Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
Do	Do	Re	Re	Mi	Mi	Fa#	Fa#	Sol#	Sol#	La#	La#

Por último, la escala heptafónica tiene el problema de contener dos intervalos de semitono, por lo que la obra modificada suena también disonante. Esto se muestra en la pista 4 (partitura en el Anexo G, página 59), que es la modificación heptafónica de la primera sección de la Musette con la siguiente función:

Escala dodecafónica:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Escala heptafónica:	0	0	2	2	4	5	5	7	7	9	9	11

Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
Do	Do	Re	Re	Mi	Fa	Fa	Sol	Sol	La	La	Si

Parte II

EL ENEFONISMO

Capítulo 6

LA MATEMÁTICA DEL DODECAFONISMO

6.1. ACCIÓN DE UN GRUPO SOBRE UN CONJUNTO

Dado un grupo (G, $*$) y un conjunto X, la *acción* de (G, $*$) sobre X es una función ϕ que asocia un elemento $g \in$ G y un elemento $x \in$ X – el par $(g,\ x)$ – a otro elemento $g \cdot x$ que también pertenece a X. [2]

$$\phi : (g, x) \to g \cdot x$$

La función ϕ, expresada mediante la operación $(\cdot)$, debe cumplir dos condiciones para ser considerada una acción:

1. Para todo $x \in$ X, se debe cumplir que $e \cdot x = x$, siendo e el elemento neutro del grupo.

2. Para todo $x \in$ X y para todo par $g, h \in$ G, se debe cumplir que $(g * h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$. La primera operación $(*)$ es la interna del grupo G, y la segunda operación $(\cdot)$ es la acción.

Como ya se ha visto en el apartado 3.2.5, la función identidad Id, la inversión I, la retrogradación R y la composición de ambas RI forman un grupo de Klein, que denotaremos Ξ. Se podrá definir entonces la acción ϕ de este grupo sobre el conjunto de permutaciones de orden n, tal que $\phi(\Psi,\ \sigma) = \Psi \circ \sigma = \Psi(\sigma) = \tau$, con $\Psi \in \Xi$ y $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_{12}$. Cumple las dos condiciones:

1. $\forall \sigma : \mathrm{Id} \circ \sigma = \mathrm{Id}(\sigma) = \sigma$.
2. Tanto la operación del grupo Ξ como la acción son la composición de funciones, y ésta es asociativa.

6.2. ÓRBITAS Y ESTABILIZADORES

Dada una acción de (G, $*$) sobre X, la *órbita* de un determinado elemento $x_0 \in$ X es el subconjunto de elementos x de X que pueden ser alcanzados desde x_0 mediante algún $g_0 \in$ G. Es decir, todos los x para los que existe un g_0 que al actuar sobre x_0 da x. Trivialmente, $x_0 \in Orb(x_0)$ ya que $e \cdot x_0 = x_0$.

$$Orb(x_0) = \{x \in X :\ \exists\ g_0 \in \mathrm{G},\ g_0 \cdot x_0 = x\}$$

Por ejemplo, dada una permutación σ, todas las permutaciones a las que se llega desde σ mediante algún $\Psi \in \Xi$ – que son las transformaciones de series del apartado 3.2.5 – conforman la órbita de σ. Por definición, las series a las que se puede llegar desde una serie original conforman su espectro serial, por lo que la órbita es en realidad el espectro serial, tomando las series transpuestas como equivalentes.

Para el mismo x_0 se define su *estabilizador* como el conjunto de elementos $g \in$ G que fijan x_0, es decir, que mandan x_0 a sí mismo. Mientras que una órbita es un subconjunto de X, un estabilizador es un subgrupo de G. Trivialmente, $e \in Stab(x)\ \forall x \in$ X, porque el elemento identidad fija cualquier otro elemento por definición.

$$Stab(x_0) = \{g \in \mathrm{G}\ :\ g \cdot x_0 = x_0\}$$

Si cada $g \in$ G llevara a x_0 a un x distinto, el número de elementos de $Orb(x_0)$ sería igual al número de elementos de G. Sin embargo, si un elemento $g_0 \in$ G fija x_0, entonces no dará nuevos elementos en la órbita de x. Por tanto, el tamaño de una órbita ($|Orb(x_0)|$) será el tamaño de G ($|\mathrm{G}|$) entre el número de elementos que fijan x_0; es decir, el tamaño de su estabilizador ($|Stab(x_0)|$). Además, es cierto para todo $x \in$ X. Este es el Teorema Órbita-Estabilizador:

$$|Orb(x)| = \frac{|\mathrm{G}|}{|Stab(x)|}, \text{ o lo que es lo mismo, } |\mathrm{G}| = |Orb(x)||Stab(x)|$$

Este teorema implica que los tamaños de cada órbita y cada estabilizador son divisores del tamaño del grupo. Como el tamaño del grupo Ξ es 4, cualquier estabilizador y cualquier órbita tendrán tamaño 1, 2 o 4.

Por ejemplo, una serie σ sin simetrías tendrá una serie distinta para cada una de sus transformaciones. Por tanto, su órbita será $\{\sigma,\ \mathrm{R}(\sigma),\ \mathrm{I}(\sigma),\ \mathrm{RI}(\sigma)\}$ y su estabilizador será solamente $\{\mathrm{Id}\}$. Cumple entonces el teorema: $4 \cdot 1 = 4$.

6.3. NÚMERO DE ÓRBITAS

Las diferentes órbitas, que son subconjuntos de X, forman una *partición* de X. Esto significa que los subconjuntos no se solapan: son subconjuntos disjuntos. Ningún x puede estar en dos órbitas distintas. Interesa entonces saber cuántos subconjuntos hay; es decir, el número de órbitas ($\#Orb$). El lema de Burnside[1], cuya demostración se encuentra en el Anexo B, página 41, afirma que se pueden calcular de esta forma:

$$\#Orb = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{x \in \mathrm{X}} |\mathrm{Stab}(x)|$$

[1] Aunque Burnside demostró este lema en una ocasión, citó a Frobenius como su autor. Sin embargo, Cauchy era conocedor del lema décadas antes. Para no confundirlo con otros lemas que sí son de Burnside, a veces se le llama *el lema que no es de Burnside.*

Capítulo 7

CONCLUSIONES

Anexos

Anexo A

Código para el cálculo de matrices dodecafónicas.

```
#include <iostream>
using namespace std;

const int N = 12;

int main() {

    int s[N + 3][N + 2];

    for (int i = 1; i < N + 1; ++i) {
        cin >> s[1][i];
        s[i][0] = (N - s[1][i] + s[1][1]) %N;
        s[i][N + 1] = s[i][0];
        s[0][i] = (N - s[i][0]) %N;
        s[N + 1][i] = s[0][i];
        s[N + 2][i] = (N + s[0][i] + 2 * (s[1][N] - s[1][1])) %N;
    }

    for (int i = 2; i < N + 1; ++i) {
        for (int j = 1; j < N + 1; ++j) {
            s[i][j] = (s[1][j] + s[i][0]) %N;
        }
    }

    cout << "\n$$\\begin{array}{l|";

    for (int i = 0; i < N; ++i) {
        cout << 'c';
    }

    cout << "|r}&";

    for (int i = 1; i < N + 1; ++i){
        cout << "\\text{I}_{" << s[0][i] << "}&";
    }

    cout << "\\\\\\hline";

    for (int i = 1; i < N + 1; ++i) {
        cout << "\\text{T}_{" << s[i][0] << "}&";

        for (int j = 1; j < N + 1; ++j) {
            cout << s[i][j] << "&";
        }

```

```
        cout << "\\text{R}_{" << s[i][N + 1] << "}\\\\";
    }

    cout << "\\hline&";

    for (int i = 1; i < N + 1; ++i) {
        cout << "\\text{IR}_{" << s[N + 1][i] << "}&";
    }

    cout << "\\\\\\hline&";

    for (int i = 1; i < N + 1; ++i) {
        cout << "\\text{RI}_{" << s[N + 2][i] << "}&";
    }

    cout << "\\end{array}$$\n";

    system("PAUSE");

    return 0;
}
```

Anexo B

Demostración del lema de Burnside.

Proof The first step in the proof of the lemma is to re-express the sum over the group elements $g \in$ G as an equivalent sum over the set of elements $x \in$ X:

$$\sum_{(g\in G)} |r(g)| = |\{(g,x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}| = \sum_{(x\in X)} |Stab(x)|.$$

(Here r(g) = $\{x \in$ X $\mid g \cdot x = x\}$ is the subset of all points of X fixed by $g \in$ G, whereas $Stab(x) = \{g \in$ G $\mid g \cdot x = x\}$ is the stabilizer subgroup of G that fixes the point $x \in$ X.)

The orbit-stabilizer theorem says that there is a natural bijection for each $x \in$ X between the orbit of x, $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in$ G$\} \subseteq$ X, and the set of left cosets G/$Stab(x)$ of its stabilizer subgroup Gx. With Lagrange's theorem this implies

$$|G \cdot x| = [G : Stab(x)] = |G|/|Stab(x)|.$$

Our sum over the set X may therefore be rewritten as

$$\sum_{(x\in X)} |G_x| = \sum_{(x\in X)} \frac{|G|}{|G \cdot x|}) = |G| \sum_{(x\in X)} \frac{1}{|G.x|}).$$

Finally, notice that X is the disjoint union of all its orbits in X/G, which means the sum over X may be broken up into separate sums over each individual orbit.

$$\sum_{(x\in X)} \frac{1}{|G.x|}) = \sum_{(A\in X/G)} \sum_{(x\in A)} \frac{1}{|A|}) = \sum_{(A\in X/G)} 1 = |X/G|.$$

Putting everything together gives the desired result:

$$\sum_{(g\in G)} |X^g| = |G| \cdot |X/G|.$$

This proof is essentially also the proof of the class equation formula, simply by taking the action of G on itself (X = G) to be by conjugation, g.x = gxg-1, in which case Gx instantiates to the centralizer of x in G.

S

S

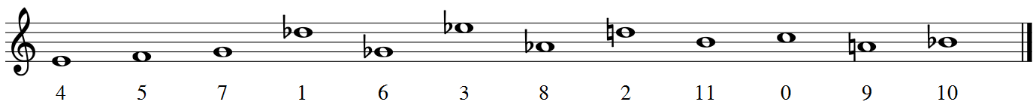
S

S

Anexo C

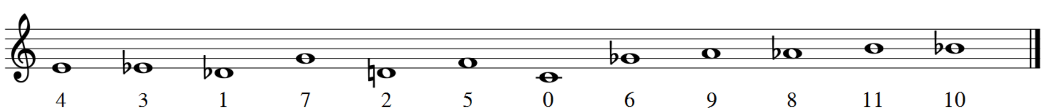
Series de la Suite Op. 25.

$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 6 & 3 & 8 & 2 & 11 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

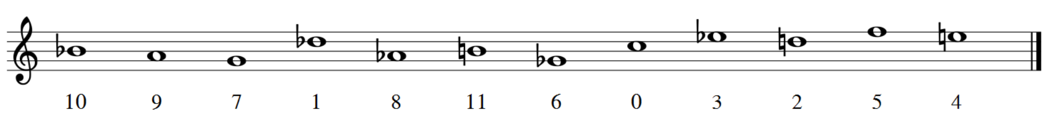


$$T_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 1 & 7 & 0 & 9 & 2 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

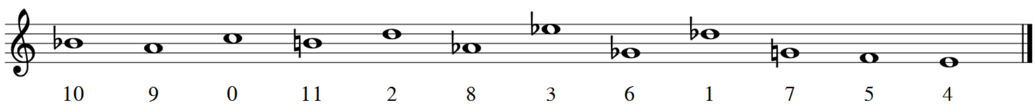
$$I_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 2 & 5 & 0 & 6 & 9 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$



$$I_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 9 & 7 & 1 & 8 & 11 & 6 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



$$R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 9 & 0 & 11 & 2 & 8 & 3 & 6 & 1 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



$$R_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 2 & 9 & 0 & 7 & 1 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$IR_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 8 & 9 & 6 & 0 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$IR_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 6 & 11 & 8 & 1 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Anexo D

Análisis serial de la Musette.


fp
f
accel.
rit.
a tempo
pp
ff
p
sf
Ped.


poco rit.
Ped.
tempo
molto legato
accel.
rit.
Gavotte da capo

Anexo E

Modificación pentatónica.


8
8
5
9
14


16
8
3
3
19
23
26
30
55

Anexo F

Modificación hexafónica.

Anexo G

Modificación heptafónica.

Bibliografía

[1] Clases y material de Historia de la Música, 5° y 6° de Enseñanzas Profesionales del Conservatorio Profesional de Música Arturo Soria, cursos 2014-15 y 2015-16. Prof. Fernando Delgado García.

[2] Armstrong, M. A. Chapter 6: "Permutations", Chapter 17: "Actions, Orbits, and Stabilizers", Chapter 18: "Counting Orbits", *Groups and Symmetry*, New York: Springer-Verlag (1988)

[3] Kinney, James P. *Twelve-tone Serialism: Exploring the Works of Anton Webern*, Undergraduate Honors Theses. Paper 1 (2015)

[4] Domínguez Romero, Manuel. *Las Matemáticas en el Serialismo Musical*, Sigma n.24 (2004).

[5] Wright, David. *Mathematics and Music*, American Mathematical Society (2009).

[6] Úcar, Iñaki. *¿Cuántas Series Dodecafónicas Diferentes Hay?*, Enchufa2 (2010)

[7] Clercq, Trevor de. *A Window into Tonality via the Structure of Schoenberg's "Musette"from the Piano Suite, op. 25*, Theory/Analysis of 20th-Century Music. Prof. David Headlam (2006)

[8] Xiao, June. *Bach's Influences in the Piano Music of Four 20th Century Composers*, Indiana University Jacobs School of Music. Doctoral Theses in Music (2014)

[9] Basomba García, Daniel. *El último Bach y el dodecafonismo como ideal musical: una lectura estética y sociológica*, Universidad Carlos III de Madrid. Tesis Doctoral en Ciencia Política y Sociología (2013)

[10] Díaz de la Fuente, Alicia. *Estructura y significado en la música serial y aleatoria*, Universidad Nacional de Educación a Distancia. Tesis Doctoral en Filosofía (2005)

[11] Bhalerao, Rasika. *The Twelve-Tone Method of Composition*, Math 336. Prof. Jim Morrow (2015)

[12] Hyde, Martha. Chapter 4: "Dodecaphonism: Schoenberg", *Models of Musical Analysis: Early Twentieth-century Music*, Ed. Mark Everist and Jonathan Dunsby. Oxford: Blackwell (1993)

[13] Morris, Robert. *Mathematics and the Twelve-Tone System: Past, Present, and Future*, Perspectives of New Music 45.2 (2007)

[14] Cook, Nicholas. Chapter 9: "Analyzing Serial Music", *A Guide to Musical Analysis*, New York: G. Braziller (1987)

[15] Roberts, Gareth E. *Composing with Numbers: Arnold Schoenberg and His Twelve-Tone Method*, Math/Music: Aesthetic Links (2012).