LAS MATEMÁTICAS EN EL SERIALISMO MUSICAL

MANUEL DOMÍNGUEZ ROMERO (*)

El comienzo del siglo XX fue una época de cambios para la música –al igual que para el resto de artes–. El sistema de composición, utilizado para componer toda la música en occidente desde el Renacimiento, la tonalidad –que se caracteriza principalmente por una jerarquía fija, que determina las relaciones entre las distintas notas de la escala– estaba llegando a su fin y cada vez eran más los compositores que daban muestras de querer desligarse de él.

La corriente de compositores más importante, los *serialistas,* estuvo encabezada por Arnold Schönberg, Alban Berg y Anton von Webern. Hizo uso de un modelo científico para crear un sistema radicalmente nuevo, como ya ocurriese de algún modo con los cubistas en la pintura. En la Geometría Axiomática se parte de unos elementos primarios que se definen indirectamente mediante una lista de axiomas tomados como verdaderos. De igual modo, Arnold Schönberg partió de la noción de *serie* definiéndola mediante los cuatro axiomas siguientes para determinar su *geometría serial*:

1. La serie consta de las doce notas de la escala cromática.
2. Ninguna nota aparece más de una vez en la serie.
3. La serie puede ser expuesta en cualquiera de sus aspectos lineales: aspecto básico, inversión, retrogradación e inversión retrogradada.
4. La serie puede usarse en sus cuatro aspectos desde cualquier nota de la escala.

A cualquiera que no esté familiarizado con la jerga musical los cuatro axiomas anteriores puede que no le sugieran nada. Pero son muy sencillos de interpretar sin nociones musicales, como veremos a continuación. En la segunda parte del artículo se muestra hasta qué punto el material usado por un serialista para componer su música está regido por leyes matemáticas.

LOS CUATRO POSTULADOS DE SCHÖNBERG

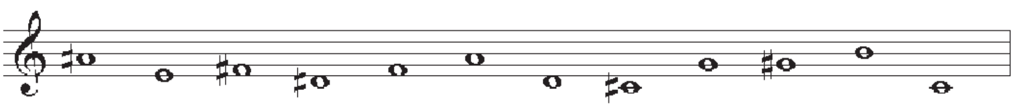
1. Los *dos primeros postulados* implican que cada una de las doce notas aparece una única vez en la serie, de modo que ésta no es más que una permutación de la escala cromática:

Numerando las notas del 0 al 11 como en la figura, dar una serie no es más que establecer una biyección _:{0,1,2,...,11}_ {0,1,2,...,11}, de modo que por _(i) entendemos el número de la nota que en la serie ocupa el puesto i-ésimo. Esta permutación –al grupo de permutaciones de n elementos se le conoce como *grupo simétrico* S_n– suele representarse del siguiente modo:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 11 \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(11) \end{pmatrix}$$

(*) Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Salamanca. Licenciado en Flauta de Pico por el Conservatorio Superior de Salamanca.

Por ejemplo, una de las obras más conocidas de Schönberg, *"Variaciones para Orquesta op. 31"* (de 1928) está compuesta a partir de la siguiente serie:



Esta serie la utilizaremos en todos los siguientes ejemplos y la denotaremos por *serie V,* mientras que a la correspondiente permutación la denotaremos υ:

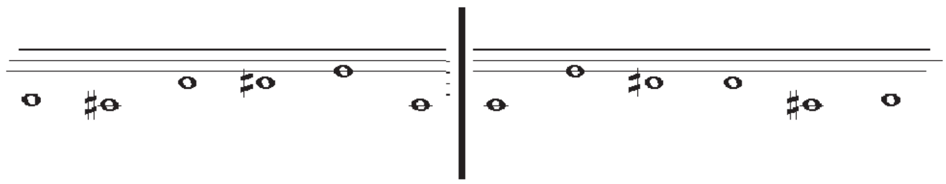
$$\upsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 4 & 6 & 3 & 5 & 9 & 2 & 1 & 7 & 8 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Estudiemos ahora el significado del **tercer postulado**. Si únicamente se pudiese utilizar la serie de partida sin ninguna alteración, la obra sería sumamente monótona, y el compositor apenas tendría campo en el que trabajar. Para aumentar sus recursos, Schönberg admite en el sistema dos maneras de transformar una serie: *la retrogradación y la inversión*.

La *retrogradación* (*retrogradus* = andar hacia atrás) consiste simplemente en leer del final al principio la serie dada; de modo que la primera nota de la serie original (serie básica S) será la última de la serie retrogradada (R), y recíprocamente, la primera de ésta corresponde a la última de aquélla.

Por ejemplo, la retrogradación de la serie anterior será:

También puede conseguirse la retrogradación mediante una simetría especular. En la figura se muestran las últimas 6 notas de la serie original y las primeras seis de la retrogradada:



Invito al lector a que escriba la permutación correspondiente a esta serie y a que la compare con la permutación de la serie original.

Si la retrogradación de una serie consistía en poner de delante hacia atrás lo que estaba desde atrás hacia adelante, la *inversión* consiste en "subir lo que baje y bajar lo que suba la misma distancia". Se construye la serie invertida (I) de manera que dos notas consecutivas de ésta disten tantos semitonos como las correspondientes de la serie a invertir, pero en sentido contrario. (Semitonos son las distancias que hay entre dos notas consecutivas en la escala cromática). Para entender el proceso de inversión nada más ilustrativo que un ejemplo; invirtamos nuestra serie V.

Partiendo del La# (nota número 10), el primer salto es hasta el Mi (4). Se han saltado 4-10 = -6; 6 semitonos descendentemente. Por tanto, la segunda nota de la serie invertida resultará de subir el La# (10) seis semitonos, esto es, 10+6=16. El número obtenido es mayor que once, lo que significa que hemos pasado a la octava siguiente. Como lo que nos importa es únicamente el "nombre" de la nota y no la octava en la que se encuentre, reducimos 16 módulo 12 para regresar a nuestra octava. 10+6=16(4 mod 12, es decir, la segunda nota vuelve a ser un Mi.

Calculemos la tercera. En la serie original el salto de la segunda a la tercera es de un Mi (4) a un Fa# (6), es decir 6-4 = +2; dos semitonos ascendentes. La tercera nota de la inversión de V resultará de bajar Mi (4) dos semitonos: 4-2 = 2 que es un Re. Procedemos del mismo modo hasta obtener la inversión buscada. Luego la serie inversión de V (I() es:

¿Cuántas series distintas obtenemos a partir de una dada mediante las transformaciones de inversión y retrogradación? Se ve fácilmente que ambas transformaciones son involutivas: la retrogradación (inversión) de la serie retrogradada (invertida) es la serie de origen. A partir de una serie S obtenemos 4 transformadas o aspectos lineales: el aspecto básico, inversión, retrogradación e inversión retrogradada. La retrogradación invertida, como veremos coincide con la inversión retrogradada salvo transportaciones.

3. Para acabar esta sección aclaremos el *cuarto postulado*. *Transportar* significa subir (o bajar) una secuencia de sonidos sin modificar las distancias entre ellos –la *melodía* no se altera, sólo la nota de comienzo–. Por ejemplo, para transportar dos semitonos la secuencia Re-La#-Sol, sumamos 2 a la serie de números correspondiente, 2-10-7. Se obtiene: 2+2 = 4 (nota Mi); 10 + 2 = 12 (0 mod 12 (nota Do); 7+2 = 9 (nota La). La secuencia resultante es Mi - Do - La. De nuevo hemos de tener en cuenta que trabajamos (mod 12).

Mediante una transportación conveniente, podemos hacer que una serie comience por la nota deseada. Supongamos, por ejemplo que queremos escribir nuestra serie V desde el Fa (5). Como su nota inicial es el La# (10), tendremos que transportarla 5-10 = -5; 5 semitonos descendentemente. Y como restar 5 módulo 12 es lo mismo que sumar 7:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 4 & 6 & 3 & 5 & 9 & 2 & 1 & 7 & 8 & 11 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+7} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 11 & 1 & 10 & 0 & 4 & 9 & 8 & 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

por tanto la serie obtenida transportando V 7 semitonos ascendentemente (T^7_υ) resulta:

A partir de ahora vamos a identificar cada serie S con su permutación σ y denotaremos por I_σ, R_σ y T_σ^k a la inversión, retrogradación y transportación (de k semitonos) de σ.

Puesto que cada una de las tres transformaciones es una biyección de las doce notas, es natural pensar que existirán elementos ι, ρ, τ_k del grupo simétrico S_{12} tales que al multiplicarlos por la serie σ resulten las permutaciones I_σ, R_σ y T_σ^k respectivamente. Nuestro objetivo es encontrar dichas permutaciones y estudiar alguna de sus propiedades.

LA TRANSPORTACIÓN COMO GRUPO CÍCLICO

Comencemos por la búsqueda de τ_k. Como transportar k semitonos es lo mismo transportar un semitono k veces, si encontramos τ_1 tendrá que verificarse que $\tau_k = \tau_1 \circ \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_1 = (\tau_1)^k$. Bastará encontrar τ_1. Según definimos la transportación de una serie, $\tau_1 \circ \sigma$, debe verificar:

$$\tau_1 \circ \sigma(m) \equiv \sigma(m)+1 \quad (\text{mod } 12) \quad \text{cualquiera que sea } m= 0,1,\ldots,11$$

luego τ_1 es la permutación que a r asigna r+1 (mod 12), ésta es:

$$\tau = \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 11 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

En efecto, la permutación τ es la deseada. El lector puede entrenarse transportando un semitono la serie V de partida y comprobando que el resultado coincide con $\tau \circ \upsilon$.

Para transportar k semitonos σ no hay más que calcular τ^k (que evidentemente verifica $\tau^k(r) = r+k$ (mod 12); r = 0,1,...11) y después $\tau^k \circ \sigma$. Compruébese que $\tau^7 \circ \upsilon$ es la permutación que habíamos obtenido antes como transportada de υ 7 semitonos.

En el lenguaje del álgebra suele decirse que el conjunto $G_\tau = \{Id, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{11}\} = \langle\tau\rangle$ es un subgrupo cíclico de S_{12}. G_τ actúa sobre las series de S_{12} multiplicando por la izquierda. Si identificamos en S_{12} las series que "suenan igual", es decir, que pueden obtenerse transportando una serie dada los semitonos convenientes, el conjunto obtenido se denota por S_{12}/G_τ y se llama conjunto de órbitas de S_{12} módulo G_τ . S_{12}/G_τ tiene 12!/12= 11! elementos y no es un grupo. (G_τ no es un subgrupo normal del simétrico. Por la teoría de grupos, el cociente por un subgrupo es de nuevo grupo precisamente si este era normal. De hecho, el único subgrupo normal de S_n para $n \neq 4$ es A_n: el subgrupo alternado de permutaciones pares).

LA INVERSIÓN Y LA RETROGRADACIÓN COMO EL GRUPODE KLEIN

Pasemos a buscar la permutación ρ que genera el retrogradado de una serie σ. En el fondo, lo que hacemos al retrogradar σ es primeramente considerar el orden inverso 11,10, ...,1,0 en lugar del usual 0,1,...11; y luego asignarle a cada puesto la correspondiente nota de σ. La permutación que transforma 0,1,...,11 en 11,10,...,0 es:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 11 \\ 11 & 10 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que R_σ vale $\sigma \circ \rho$. ($\sigma \circ \rho(r) \equiv$ ($\sigma(11-r)$ mod12). A modo de comprobación, retrográdese cualquiera de las series con las que se ha trabajado, y compárese el resultado obtenido con la permutación obtenida multiplicando por la derecha por ρ.

Nos queda por último, determinar la permutación que se corresponde con invertir σ. Este problema es ligeramente más complicado y el resultado que se obtiene, tras un laborioso trabajo, es $I_\sigma = \tau^{2\sigma(0)} \circ \iota \circ \sigma$, donde ι es la permutación $\iota = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 11 \\ 0 & 11 & 10 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, y $\tau^{2\sigma(0)}$ transporta $\iota \circ \sigma$ los semitonos $2\sigma(0)$. Comprobémoslo mediante el ejemplo de siempre:

$$I_\upsilon = \tau^{2\sigma(0)} \circ \iota \circ \upsilon = \tau^8 \circ \iota \circ \upsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 11 \\ 8 & 9 & \dots & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 11 \\ 0 & 11 & \dots & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 11 \\ 10 & 4 & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 11 \\ 10 & 4 & \dots & 8 \end{pmatrix}$=, que es precisamente la inversión de υ. Obsérvese que el resultado de calcular $\iota \circ \sigma(r)$ es $-\sigma(r)$ mod 12 y que, por tanto la r-ésima nota de la inversión de σ es $-\sigma(r)+2\sigma(0)$.

Ahora que disponemos una expresión algebraica para calcular inversiones y retrogradaciones, podemos ver que ambas transformaciones no conmutan:

$$I(R_\sigma)(k) = I_{\sigma\circ\rho}(k) = \tau^{2\sigma\circ\rho(0)}\circ\iota\circ\sigma\circ\rho(k) = \tau^{2\sigma(11-0)}\circ\iota\circ\sigma(11-k) = 2\sigma(11)-\sigma(11-k)$$

$$R(I_\sigma)(k) = R(\tau^{2\sigma\circ\rho(0)}\circ\iota\circ\sigma)(k) = 2\sigma(0)-\sigma(11-k)$$

Pero si trabajamos en S_{12}/G_τ entonces $I_\sigma \equiv \iota\circ\sigma$ módulo transportaciones y la inversión y retrogradación SI conmutan:

$$R(I_\sigma) = (\iota\circ\sigma)\circ\rho = \iota\circ(\sigma\circ\rho) = I(R_\sigma)$$

Entonces {Id, I, R, IR=RI} es un verdadero grupo que opera sobre S_{12}/G_τ y cuya tabla de ley de grupo es:

	Id	I	R	IR
Id	Id	I	R	IR
I	I	Id	IR	R
R	R	IR	Id	I
IR	IR	R	I	Id

¡Que es precisamente la tabla del grupo de Klein $K_4 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$

Esta nueva acción define otro conjunto de órbitas: $\left(S_{12}/G_\tau\right)/K_4$. Cada clase de equivalencia

está formada por las 48 series que se pueden obtener a partir de una mediante las tres transformaciones que Schönberg legitima en sus postulados. Cada clase de equivalencia se conoce como **espectro serial** y es la *paleta de colores* con la que el compositor serial *pintará* cualquiera de sus obras.

Invito a aquel que tenga la oportunidad de escuchar una pieza compuesta en estilo serial, a tratar de distinguir las distintas series de las 48 que utilizará el compositor. Puede llegar a ser un ejercicio fascinante la identificación de los distintos elementos... y al principio garantizo que no es sencillo.

Pero con la práctica, nuestra atención puede centrarse en distinguir las series amigas cuando éstas suenan en instrumentos distintos simultáneamente. Esto supone ya un reto para los oídos más entrenados. Además el oyente puede fijarse en cómo el compositor ha distribuido el espectro serial a lo largo del tiempo, o cómo afectan los demás parámetros del sonido (intensidad, ritmo,...) a las distintas series,...

...y por descontado, puede relajarse, disfrutando de los rincones sonoros que depare la pieza, y dejar por un momento la actitud de análisis, característica de los iniciados en las matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

Smith Brindle, R. (1975): "The New Music. The Avant-Garde since 1945".
Oxford University Press.

Perle, G. (1999): "Composición Serial y Atonalidad". Idea Música.

Hammel, B. (2000): "Essey on patterns in musical composition transformations, mathematical groups, and the nature of musical substance".
URL: http://graham.main.nc.us/~bhammel/MUSIC/compose.html (Octubre- 2003).

Clark, A.: "Elementos de Álgebra Abstracta". Ed. Alambra.