

Serialismo y matemáticas - III

Celia Rubio Madrigal

Octubre de 2019

1 Escalas y funciones del experimento

1.1 Escalas interválicas, escalas y funciones

Una **escala interválica** es una secuencia ordenada de números naturales – una secuencia de intervalos entre notas – tales que la suma de todos ellos da 12. Así solo se consideran válidas las escalas equivalentes octava a octava: todos los intervalos de la escala deben sumar el número de semitonos de una octava. Esto debe ocurrir para poder considerar transformaciones de la escala cromática en escalas menores, aunque es generalizable a cualquier longitud. Diremos entonces que la escala cromática es la **súper-escala** de las **sub-escalas** con las que trabajaremos. Por ejemplo, la escala diatónica jónica (o escala mayor) tiene como secuencia (2, 2, 1, 2, 2, 2, 1).

Dada una escala interválica de longitud L y una nota fija inicial, la secuencia de intervalos se convierte en una secuencia de notas de longitud $L+1$. Se construye comenzando por la nota inicial y sumando cada intervalo para conseguir la nota siguiente.

Con la escala mayor y la nota Re se consigue (Re, Mi, Fa#, Sol, La, Si, Do#, Re), ya que es equivalente a (2, 2+2=4, 4+2=6, 6+1=7, 7+2=9, 9+2=11, 11+2=13, 13+1=14). Por construcción, la última nota debe ser equivalente a la primera, ya que en el último paso habremos sumado a la nota inicial todos los términos de la secuencia interválica, y por definición suman 12.

De esta forma, se puede definir una **escala- k** como el conjunto de notas generadas por una escala interválica desde la nota k . Por ejemplo, el conjunto anterior sería la escala-2 mayor; es decir, la escala de Re mayor. Una escala generada por una secuencia de intervalos con longitud L tiene L notas, ya que como la última es repetida no hay por qué considerarla. La longitud $L \leq 12$, ya que una escala- k definida de esta forma siempre es un subconjunto de la escala cromática: $E_k \subseteq \mathbb{Z}/(12)$. Al generalizarlo a cualquier súper-escala, habría que considerar las notas distintas según su escala o formular otras definiciones más adecuadas.

Una **función a una escala- k** es una función f que transforma cada nota de la escala cromática a un valor de la escala E_k . Entonces $f : \mathbb{Z}/(12) \rightarrow E_k$ reduce las notas de una melodía a solamente la escala escogida. Las funciones a escalas se representan de la siguiente manera, con la primera fila representando el dominio de f (la escala cromática), la segunda su imagen (la escala E_k), y la tercera su secuencia interválica:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & 10 & 11 \\ f(0) & f(1) & f(2) & \dots & f(10) & f(11) \\ f(1) - f(0) & f(2) - f(1) & f(3) - f(2) & \dots & f(11) - f(10) & 12 + f(0) - f(11) \end{array}$$

En realidad, la k de la escala- k no es especialmente relevante, porque una escala- $k+1$ es la transportada de una k . Se puede escoger sin pérdida de generalidad $k=0$ a partir de ahora, y así todas comenzarán en Do.

El proceso verdaderamente interesante está en averiguar, dada una escala E , cuál es la mejor función que transforma melodías cromáticas en melodías en E . Estas son las **funciones E -inducidas**.

¿Cuáles serán las características de esas funciones óptimas? Deben conservar la estructura

serial y deben conservar el parecido con la melodía original.

1.2 Funciones bien distribuidas

La mayor prioridad es conservar la estructura serial de las piezas; por tanto, todas las notas deben aparecer con la menor frecuencia posible, y se debe evitar jerarquías entre las notas en la medida de lo posible. Si $|E| < 12$, f no puede ser inyectiva, por lo que va a haber elementos repetidos en la imagen. Queremos la f que mejor distribuya esas repeticiones, que distribuya las notas de E a lo largo de la escala cromática.

Lo óptimo sería que todas tuvieran la misma frecuencia. Eso solo pasará cuando $|E|$ divida a 12. Por ejemplo, si $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ (entonces $|E| = 6$), existen funciones tales que cada nota de la imagen se repite exactamente 2 veces. La siguiente función E -inducida f cumpliría la condición de buena distribución:

Cromática	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Escala E	a_1	a_1	a_2	a_2	a_3	a_3	a_4	a_4	a_5	a_5	a_6	a_6
Intervalos												

En cambio, si $|E|$ no divide a 12 no hay funciones E -inducidas totalmente distribuidas. No existe una sola frecuencia que puedan compartir todas las notas de E . Sin embargo, sí se pueden encontrar dos frecuencias consecutivas, c y $c + 1$, tales que todos los elementos de E tengan o frecuencia c o frecuencia $c + 1$. Esto es lo más parecido a que todas tengan la misma frecuencia, y se va a probar a continuación que siempre es posible.

La situación es equivalente a que E se pueda dividir en dos subconjuntos disjuntos Q y R , con $|Q| = q$ y $|R| = r$ (entonces $q + r = |E|$), tales que la frecuencia de las notas en Q es c y la frecuencia de las notas en R es $c + 1$. En resumen, para probar que Q y R existen, debemos encontrar un c , un q y un r naturales para los que $cq + (c + 1)r = 12$.

$cq + (c + 1)r = cq + cr + r = c(q + r) + r = c|E| + r = 12$, lo cual se cumple por el algoritmo de la división, que asegura que al dividir 12 entre $|E|$ existen su cociente c y su resto $r \geq 0$. \square

El siguiente gráfico describe, para cada posible $|E|$ en cada fila, la frecuencia óptima de sus elementos. Las columnas representan las frecuencias de los elementos, y los números de dentro son cada q y r (cuando es 0 no se escribe: no hay notas con esa frecuencia).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												1
2						2						
3				3								
4			4									
5		3	2									
6		6										
7	2	5										
8	4	4										
9	6	3										
10	8	2										
11	10	1										
12	12											

1.3 Funciones E-inducidas

Hay que pedir más requisitos a f para que no solo modifique las notas, sino que además las imágenes se parezcan lo máximo posible a sus preimágenes, a las notas originales.

1. f debe ser sobreyectiva: si no, la música resultante tendría una escala más reducida de la deseada.
2. f debe ser creciente: si no, las dos notas decrecientes se deberían intercambiar. También se podrá sumar o restar 12 a las notas que lo requieran. La monotonía debe conservarse, además, en todas las octavas, por lo que las funciones deben acabar o por la nota con la que se empieza +12 o por una menor a ella.
3. f debe tener el mayor número de puntos fijos posible: las notas que puedan mantenerse estables al aplicar f deben quedarse igual. Existen escalas para las que no se puede tener buena distribución, monotonía creciente y todas sus notas fijas, así que este criterio es menos prioritario.

Por ejemplo, para la escala $\{0, 1, 2\}$, si se fijan las tres notas, f empezaría con 0 1 2. Por (2), la nota asociada al 12 debe ser un 12. Entonces los otros tres 1's que faltan no se pueden asignar, ya que después del 2 no puede ir un 1 y antes del 12 no puede ir un 13. Por tanto, f no estaría bien distribuida. La solución es que solo se fijen dos de las tres notas.

Cromática	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	(12)
Escala E	0	1	2			1			13				(12)

4. Por último, de entre las f que queden, se escogerán aquellas cuya distancia a la cromática sea menor. Se calculará para todo i la expresión $|f(i) - i|$, y se sumarán todos los resultados. Esa suma será la *puntuación* de dicha f . Las funciones con menor puntuación son las funciones de mejor ajuste.

Si aún quedan varias f que cumplen todos los requisitos, se escogerá la más grave, la menor de ellas. De esta manera, dada cualquier escala E, la función E-inducida queda unívocamente determinada.

En el enlace <https://gitlab.com/dodecafonismo/f-inducida> se encuentra el código en Haskell de un programa que, dado una escala, produce su función inducida óptima con las propiedades descritas anteriormente.

1.4 Escalas utilizadas

Las escalas escogidas para este experimento son cuatro escalas de distintos tamaños y sonoridades; desde el sonido oriental hasta el occidental clásico, pasando por el jazz moderno y el impresionismo.

Son la escala pentatónica, la escala de tonos enteros, la escala heptafónica de Do Mayor y la escala octotónica. Estas son las funciones inducidas de dichas escalas según el algoritmo:

Cromática:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Pentatónica (5):	0	0	2	2	4	4	7	7	7	9	9	0	
Intervalos:		2		2		3			2		3		
Cromática:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Tonos enteros (6):	0	0	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10	
Intervalos:		2		2		2		2		2		2	
Cromática:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Diatónica en Do (7):	0	0	2	2	4	5	5	7	7	9	9	11	
Intervalos:			2		2	1		2		2		2	1
Cromática:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Octotónica (8):	0	0	2	3	3	5	6	6	8	9	9	11	
Intervalos:		2	1		2	1		2	1		2	1	

Bibliografia