GEOMETRÍA COMPUTACIONAL - 2022

Ejercicios prácticos voluntarios

Importante: Elegir un máximo de dos ejercicios para entregar antes del 18 de mayo de 2022. Cada uno de los dos ejercicios puntuará +0.5 puntos, contribuyendo al máximo de +2 puntos voluntarios que se sumarán al final. Todo ejercicio voluntario será INDIVIDUAL.

1. DIMENSIÓN DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

El triángulo de Sierpinski es una generalización del conjunto de Cantor aplicado a triángulos equiláteros. Se pide:

i) Programa un código en python para obtener una muestra aproximada (de 'resolución numérica' arbitraria) del triángulo de Sierpinski. Represéntalo gráficamente para una iteración deseada. [**+0.25 puntos**]

ii) A continuación, usando la medida de Hausdourff (con refinamiento de recubrimientos n-esféricos), programa un código en python para obtener la dimensión de Hausdorff de cualquier objeto fractal (al menos los contenidos en $\mathbb{R}^2$) y aplícalo a la muestra anterior para comprobar que el triángulo de Sierpinski tiene una dimensión log 3 /log 2. [**+0.25 puntos**]

2. COMPLEJIDAD DE CODIFICACIÓN

De acuerdo con la teoría, existen diferentes maderas de medir la complejidad de una codificación. En la Práctica 2 hemos analizado la entropía del código de Huffman para la variable aleatoria $S_{English}$ (ver archivo adjunto en la Práctica 2). En este ejercicio voluntario se pide:

i) Programa un código en python para estimar el índice de Gini y la diversidad ${}^2D$ de Hill para una muestra de una variable aleatoria y aplícalo al ejemplo $\{0, 1, 0, 0, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 2, 0, 1, 1\}$ para comprobar que está bien programado en comparación con el cálculo explícito para dicho ejemplo. [**+0.25 puntos**]

ii) Considera ahora la muestra de la variable aleatoria $S_{English}$. Calcula el índice de Gini y la diversidad ${}^2D$ de Hill.[**+0.25 puntos**]

3. COMPONENTES CONEXAS

Un Departamento de Planificación Urbana nos ha solicitado que realicemos una ordenación del territorio para un Área Metropolitana A de 1000 calles con çarriles bici"que se intersectan de forma caótica. Supondremos que una calle se representa por un segmento en el plano $\mathbb{R}^2$, dado por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). La plantilla '*GCOM2022-plantilla_conexas.py*' se muestra un conjunto de los 1000 segmentos $\ell_i, 1 \leq i \leq 1000$ que conforman el espacio metropolitano con carriles bici, $A = \bigcup_{i=1}^{1000} \ell_i$. Este espacio A es un subespacio del plano $\mathbb{R}^2$ con la topología inducida. Se pide:

i) Diseñar primero un algoritmo, y luego programarlo en Python, para calcular el numero de componentes conexas de la unión de N segmentos aleatorios cualesquiera del plano.

ii) Representar gráficamente el espacio A y usar el apartado anterior para calcular el número de componentes conexas. ¿Cuántos carriles bici adicionales se requieren para conseguir conectar correctamente todos los anterior?

4. REDES NEURONALES

Sean tres elementos con pares de estados $E_1 = (1, 1)$, $E_2 = (1, 0)$, $E_3 = (0, 1)$, deseamos clasificarlos mediante una sepación por la función $f(x, y) = 3x + 2y > 2$ (es decir, devuelve 1 si se cumple la desigualdad y 0 si no la cumple). Se pide:

i) Diseña un perceptrón simple y utiliza como función de activación la función sigmoide, una función de aprendizaje basada en la Regla Delta generalizada y un factor de aprendizaje $e = 0{,}5$. **[+0.25 puntos]**

ii) Implementa un algoritmo en python para obtener la clasificación deseada. Asigna valores aleatorios y pequeños, tanto positivos como negativos a los pesos sinápticos. Realiza sólo una iteración para cada uno de los patrones de entrada. Comprueba el resultado con la librería **Keras**. **[+0.25 puntos]**

5. DEFORMACIÓN CONTINUA DE LA ESFERA

Considera S_1^2 como la variedad diferencial dada por una 2-esfera de radio unitario, embebido en $\mathbb{R}^3$. Se pide representar gráficamente en 3D el difeomorfismo de una determinada proyección $\Pi : S_1^2 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Para ello, extraremos el punto $e_3 := (0, 0, -1) \in S_1^2$, y utilizamos las coordenadas cartesianas $(x, y, z) \in [-1, 1]^3$ para representar en $\mathbb{R}^3$.

- Utilizar las propiedades del dominio e imagen de las funciones tan y $\tan^{-1}$ para diseñar una familia paramétrica $g_t : S_1^2 \setminus \{(1, 0, 0)\} \to \mathbb{R}^3$ tal que existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ que $\lim_{t \to t_0} g_t \simeq \Pi$ y $g_0(p) = p \in S_1^2$. Usar la composición de tan y $\tan^{-1}$, de manera que para cierto t conduce a la identidad y para otro t envía a infinito el polo norte. Finalmente, obtender una **animación** de al menos 15 fotogramas de dicha familia paramétrica. [**+0.5 puntos**]

6. ATRACTOR DE LORENZ

En variedades diferenciables, los sistemas conservativos de Liouville presentan caos a partir de **3 dimensiones**. Probablemente el caso más famoso es el sistema de coordenadas de Lorenz $q = (q_1, q_2, q_3)$, determinado por:

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = \alpha(q_2 - q_1) \tag{1}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = \beta q_1 - q_2 - q_1 q_3 \tag{2}$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} = q_1 q_2 - \gamma q_3 \tag{3}$$

, donde los parámetros se fijan como $\alpha = 10$, $\beta = 28$ y $\gamma = 8/3$. Suponiendo que $p = \dot{q}/2$,

i) Discretiza el sistema de ecuaciones diferenciales Y Encuentra la órbita final de $q = (q_1, q_2, q_3)$ y $p = (p_1, p_2, p_3)$ para $q(0) \in D_0 = \{(1, 1, 1)\}$, usando para ello la representación 3D de q y p por separado (dos gráficas). [**+0.1 puntos**]

ii) Representa gráficamente el **espacio fásico** de los pares $\{(q_i, p_i)\}_{i=1}^3$ dado por el conjunto de condiciones iniciales $(q(0), p(0)) \in D_0 = [-1, 1]^3 \times [-1, 1]^3$ (por ejemplo en tres gráficas) [**+0.1 puntos**]

iii) De acuerdo con la definición de **medida de Hausdorff**, estima el d-volumen del espacio fásico de Lorenz con condiciones iniciales $(q(0), p(0)) \in D_0 = [-1, 1]^3 \times [-1, 1]^3$). [**0.3 puntos**]

7. SISTEMA DE NAVIER-STOKES

Sea un sistema dinámico continuo en $\mathbb{R}^3$, de posiciones $q = (x, y, z)$, de velocidad $\dot{q} = (v_x, v_y, v_z)$ y con cantidad de movimiento $p = \frac{1}{2}\dot{q}$, se dispone de las siguientes ecuaciones de evolución

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = \nu\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right] + g_x \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = \nu\left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right] + g_y \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = \nu\left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] + g_z \tag{6}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

donde $\nu \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria y $g = (g_x, g_y, g_z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una función cualquiera que depende de la posición q pero no de la velocidad v. Considera que las tres velocidades son campos vectoriales $v_i : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ que se evaluan en las posiciones $q \in \mathbb{R}^3$ y en el parámetro tiempo $t \in \mathbb{R}$ para representar los valores de las velocidades instantáneas en cada punto. Suponiendo unas **condiciones iniciales** q_0 y v_0 para $t = 0$, se pide:

i) Discretiza el sistema e implementa un algoritmo en python para estimar la evolución de dichos campos en cualquier instante. ¿Cuál es el conjunto de valores que debería conservarse en el tiempo según el teorema de Liouville? Identifica el isomorfismo y razona tu respuesta. [**+0.25 puntos**]

ii) Suponiendo $g = (0, 0, -1)$, $\nu = 0.01$ y $(q_0, p_0) \in [0, 1]^3 \times [0, 1]^3$, obtén una representación de su espacio de fases $F \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ en dos gráficas 3D, una para las componentes espaciales y otra para la velocidad. ¿Existen cuencas de atracción en F? Razona la respuesta. [**+0.25 puntos**]

Observaciones para cada ejercicio:

Cada memoria debe entregarse antes del **18 de mayo**.

Cada memoria, siempre en pdf, debe incluir **al menos** la siguiente información: (1) Introducción (motivación/objetivo de la práctica), (2) Material usado (método y datos), (3) Resultados, (4) Conclusión y (5) Anexo con el script/código utilizado.

La extensión máxima de cadala memoria **no superará las 2 páginas**, sin contar el código anexado (ilimitado). El total de la superficie de las figuras/tablas (si las hubiese) no podrán excederse del 50 % de la memoria.

Además, debe entregarse el código fuente como archivo '.py' independiente.