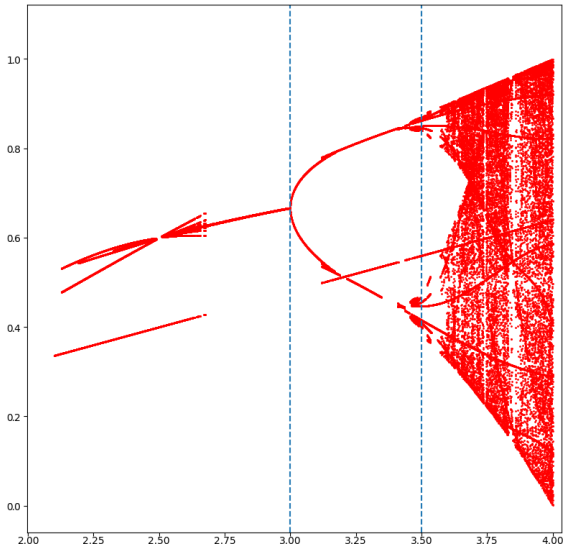
Práctica 1 - GCOMP

Celia Rubio Madrigal

9 de febrero de 2022

Índice



La primera gráfica que imprimí al empezar esta práctica.

1. Introducción

En esta práctica analizamos la convergencia de un sistema dinámico no lineal. En este caso, la transformación asociada viene dada por la función logística: $f_r(x) = r \cdot x \cdot (1 - x)$. Se usa para representar el crecimiento de poblaciones cuando la capacidad del ambiente es limitada.

Esta función es dependiente de un parámetro $r \in \mathbb{R}$, por lo que el sistema cambia de comportamiento al modificar este parámetro. Veremos cómo son las cuencas de atracción para algunos valores de r, y cuáles tienen un tamaño determinado.

2. Material usado y metodología

Vamos a tomar un margen de error de $\varepsilon = 0.001$ para todos los apartados. Además, en general, tomaremos el estado inicial $x_0 = 0.200$. Tomamos $N_0 = 200$ como nuestra máxima capacidad de cómputo; supondremos que más allá perdemos precisión por errores de la computadora. También consideramos periodos de, como máximo, $N = 20$.

Los cálculos se realizarán en un *script* de Python, adjuntado en la sección 4.

2.1. Apartado *i)*

En primer lugar, tomaremos dos valores del parámetro r en $(3, 3.544)$. Para cada uno, calculamos la órbita de ese sistema (hasta el término N_0), aplicando la función logística iterativamente.

Después, calculamos hasta qué paso de iteración —o tiempo transcurrido— la órbita empieza a mantenerse estable. Nos quedaremos con la subórbita de tamaño N a partir de $m \in \mathbb{N}$ tal que su diámetro y el de la subórbita siguiente no difieren de más de ε. Es decir, si $D(S) = \text{máx}(S) - \text{mín}(S)$:

$$\left| D\left(\{f_r^i(x_0)\}_{i=m-N}^{m}\right) - D\left(\{f_r^i(x_0)\}_{i=m}^{m+N}\right) \right| < \varepsilon$$

Calculamos su conjunto atractor. Buscamos el periodo de la órbita: el primer $1 < p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left| f_r^{m-1}(x_0) - f_r^{m-p}(x_0) \right| < \varepsilon$$

El conjunto atractor serán los p últimos valores de la subórbita calculada hasta el paso m.

Calcularemos el intervalo de error del valor de la r tomando valores cercanos a los escogidos y asegurándonos de que el conjunto atractor permanece estable. Es decir, si el conjunto atractor es $V_r(x_0)$, encontraremos un $\delta > 0$ tal que, para $0 < d < \delta$, $|V_r(x_0) - V_{r\pm d}(x_0)|_\infty < \varepsilon$.

Además veremos si cambiando el estado inicial x_0 también permanece estable. Encontraremos un $\delta > 0$ para el que, si $0 < d < \delta$, $|V_r(x_0) - V_r(x_0 \pm d)|_\infty < \varepsilon$.

2.2. Apartado *ii)*

En segundo lugar, buscamos los valores de r tales que su cuenca de atracción es igual a 8.

Para ello, calculamos para cada valor $r \in (3.544, 4)$ —tomándolos de ε en ε— su conjunto de atracción, y comprobamos si su tamaño es 8.

Si lo es, comprobamos que al cambiar el estado inicial $x_0 \pm \varepsilon$ el conjunto atractor sigue siendo el mismo.

3. Resultados y conclusiones

3.1. Apartado *i)*

Tomaremos $r = 3.141$ y $r = 3.515$.

Para $r = 3.141 \pm 0.003$, el conjunto atractor calculado es $[0.538, 0.781] \pm \varepsilon$. Ha usado $m = 60$ pasos para que el error cometido estuviera en el margen dado. Hemos calculado que, para $\delta = 0.003$, $r + \delta$ da un conjunto atractor de $[0.536,\ 0.782]\ \pm\varepsilon$.

Para $r = 3.515 \pm 0.002$, el conjunto atractor calculado es $[0.375, 0.509, 0.824, 0.878] \pm \varepsilon$. Ha usado $m = 20$ pasos, muchos menos que para el valor anterior. Hemos calculado que, para $\delta = 0.002$, $r + \delta$ da un conjunto atractor de $[0.374, 0.511, 0.824, 0.879] \pm \varepsilon$.

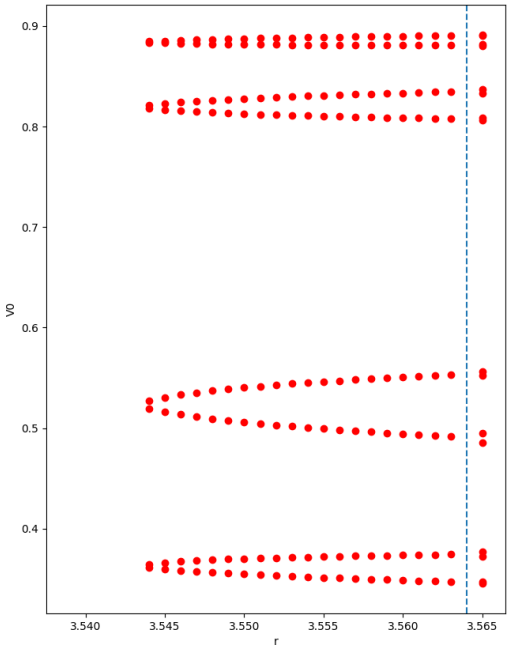
En ambos casos, la elección de estado inicial $x_0 \in (0, 1)$ es irrelevante, ya que es suficientemente estable. También hemos comprobado que el mayor r tiene un intervalo de error $\pm\delta$ menor. Por tanto, el conjunto atractor se ve modificado más rápidamente.

Entre ambos puntos escogidos hay al menos un punto de bifurcación, ya que el tamaño de la primera cuenca es 2 y la segunda es de 4.

3.2. Apartado *ii)*

Hemos calculado, para $r \in (3.544, 3.563) \pm \varepsilon$, que todas sus cuencas de atracción tienen 8 elementos. Además, hemos comprobado que con $x_0 = 0.200 \pm \varepsilon$ sus cuencas de atracción se mantienen estables.

Por ejemplo, para $r = 3.550 \pm \varepsilon$ se tiene el conjunto $[0.355, 0.370, 0.506, 0.540, 0.813, 0.828, 0.882, 0.887]\ \pm\varepsilon$. A la derecha se encuentra la gráfica de cada conjunto identificado en función de su r.



A partir de $r = 3.565 \pm \varepsilon$ el conjunto de atracción ya no tiene 8 elementos sino 16, por lo que ha habido un punto de bifurcación en $3.564 \pm \varepsilon$. Después, no volvemos a encontrar valores de r con cuencas de atracción de tamaño 8.

La bifurcación previa debe estar antes del valor $r = 3.544$, ya que en el apartado $i)$ encontramos un conjunto de 4 elementos para $r = 3.515$, así que debe haber alguna bifurcación entre ambos.

Con este experimento hemos analizado cómo se comporta el sistema dinámico logístico para algunos valores de su parámetro r. Hemos visto algunas de sus características en los intervalos de $(3.1, 3.544)$ y $(3.544, 4)$, calculando sus conjuntos atractores y midiendo las cotas de error en nuestros cálculos.

4. Código

```
# Práctica 1 de Celia Rubio Madrigal

import numpy as np

""" Funciones """

# Función logística
# R es global
def logistica(x):
    return R * x * (1 - x)


# Calcula la subórbita de f desde x0 aplicada n veces
# Mejorada a O(n)
def orbita(x0, f, n):
    orb = np.empty([n])
    orb[0] = f(x0)
    for i in range(n - 1):
        orb[i + 1] = f(orb[i])
    return orb


# Calcula el m tal que el diámetro de la órbita no cambia más que epsilon
# desde m hasta m+N, donde N es una constante global predefinida
def tiempo_transitorio(orb, epsilon=0.001):
    n = len(orb)
    m = 0
    next_sup, next_inf = max(orb[N : 2 * N]), min(orb[N : 2 * N])
    while m + N <= n:
        sup, inf = max(orb[m : m + N]), min(orb[m : m + N])
        if abs((sup - inf) - (next_sup - next_inf)) < epsilon:
            return m + N
        m += N
        next_sup, next_inf = sup, inf
    return n


# Calcula el periodo de la subórbita, suponiendo que el tiempo transitorio ya
    es estable
def periodo(suborb, epsilon=0.001):
    n = len(suborb)
    for i in range(1, n):
        if abs(suborb[n - 1] - suborb[n - i - 1]) < epsilon:
            return i
    return n
```

```python
# Calcula la cuenca de atracción de f desde x0
def atrac(x0, f, epsilon=0.001):
    orb = orbita(x0, f, N0)
    m = tiempo_transitorio(orb, epsilon)
    suborb = orb[-m:]
    p = periodo(suborb, epsilon)
    v0 = np.sort(suborb[-p:])
    return v0,m


eps = 0.001 # predefinido el error
N0 = 200 # nuestra capacidad de cómputo máxima
N = 20 # sabemos de antemano que nuestro conjunto será menor
X0 = 0.2

""" Apartado i) """

# Comprueba si dos vectores son iguales con precisión de epsilon
def equals_vectors(v1, v2, epsilon=0.001):
    if len(v1) != len(v2):
        return False
    for i, j in zip(v1, v2):
        if abs(i - j) >= epsilon:
            return False
    return True


# Comprueba la estabilidad (moviendo x0) y las bifurcaciones (moviendo R)
def test_v0(v0, epsilon=0.001):
    global R
    r = R
    print(v0)

    # Error de x0: en estos casos, todos los valores de x0 dan el mismo
        resultado
    for x0 in np.arange(epsilon, 1, epsilon):
        v1,_ = atrac(x0, logistica, epsilon)
        if not equals_vectors(v0, v1, epsilon):
            print("X0", x0, "no estable")

    # Error de R: mover R hasta que no dé el mismo resultado
    for delta in np.arange(epsilon, 1, epsilon):
        R = r + delta
        v1,_ = atrac(X0, logistica, epsilon)
        if not equals_vectors(v0, v1, epsilon):
            print("R", R, "es distinto (delta=", delta, ")")
            print("\t", v0)
            print("\t", v1)
            break
```

```
        R = r - delta
        v2,_ = atrac(X0, logistica, epsilon)
        if not equals_vectors(v0, v2, epsilon):
            print("R", R, "es distinto (delta=", delta, ")")
            print("\t", v0)
            print("\t", v2)
            break
    R = r


print("-" * 10)
print("Conjunto atractor a)")


R = 3.141
v0,m = atrac(X0, logistica, eps)
print("Pasos M=",m)
test_v0(v0, eps)

print("-" * 10)
print("Conjunto atractor b)")

R = 3.515
v0,m = atrac(X0, logistica, eps)
print("Pasos M=",m)
test_v0(v0, eps)


""" Apartado ii) """
print("-" * 10)

rss = []
vss = {}

first = True
for r in np.arange(3.544, 4, eps):
    R = r
    v0,m = atrac(X0, logistica, eps)

    # Primero, calculo si la cuenca de atracción tiene 8 elementos
    if len(v0) == 8:
        # Y después, si al mover x0 con error epsilon se mantiene el resultado
        test = True
        v1,_ = atrac(X0 + eps, logistica, eps)
        if not equals_vectors(v0, v1, eps):
            test = False
        v1,_ = atrac(X0 - eps, logistica, eps)
        if equals_vectors(v0, v1, eps):
            rss += [r]
```

```
            vss[r] = v0
            print("R", R, "\t", v0)
            print("Pasos M=",m)
    elif first and len(v0) > 8:
        first = False
        rss += [r]
        vss[r] = v0
        print("NO R", R, "\t", v0)

""" Gráfica """

import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure(figsize=(7.5, 10))

for r in rss:
    n = len(vss[r])
    plt.scatter([r] * n, vss[r], color="red")
plt.xlabel("r")
plt.ylabel("V0")

plt.axvline(x=3.564, ls="--")
plt.savefig("grafica.png")
```