

**MODELO DE PROPAGACIÓN DE ONDA LARGA (LWAVE)
COASTAL ECOSYSTEM MANAGEMENT NETWORK
CEMAN**

Rivillas-Ospina, Germán
Profesor Departamento de Ingeniería Civil
Universidad del Norte

MODELACIÓN NUMÉRICA DE LA PROPGACIÓN DE OLEAJE

En el documento se hace una revisión y descripción de las teorías de propagación del oleaje, abarcando desde las ondas cortas hasta las ondas largas. La descripción de todas las teorías sirve de base para el enfoque final al que se pretende dar en esta primera versión, al profundizar con detalle en la teoría de ondas largas.

El ejercicio académico que se desea alcanzar no va más allá de la presentación de un problema teórico-práctico que genere interrogantes y cuestionamientos en el estudiante y lo conduzcan finalmente, hacia el mundo de la modelación numérica. Por lo que al final, se hace un desarrollo de las ecuaciones de continuidad y momento para la solución aproximada de una onda larga que se propaga sobre fondo constante, bajo un esquema de diferencias finitas.

ANTECEDENTES

La teoría de ondas de pequeña amplitud parte de la solución de la ecuación de Laplace, mediante el establecimiento de la condición de frontera de superficie libre y la condición de contorno de fondo. Para la condición del fondo deben ser establecidos dos tipos de fronteras linealizadas y se aplican al nivel medio del mar (NMM).

Generalmente, para la aplicación de las condiciones de frontera deben ser establecidas dos hipótesis: a) la relación entre la altura de ola y la profundidad sobre la cual se propaga ésta debe ser menor que la unidad ($H/d < 1$); b) la relación entre la altura de ola y la longitud de onda debe ser menor que uno ($H/L < 1$).

Lo interesante de esta metodología es que puede ser aplicada a una amplia gama de profundidades relativas (d/L), pero queda limitada para ondas de pequeña amplitud relativas a la profundidad (ondas en aguas someras) y la longitud de onda (ondas en aguas profundas).



Matemáticamente es posible afirmar que no existe una solución general para la ecuación de Laplace y los tres tipos de condición de frontera. Por lo tanto, cualquier teoría de ondas requiere invariablemente algún tipo de aproximación. Comúnmente, la teoría de ondas de amplitud finita suaviza el requisito establecido que (H/d) y (H/L) sean pequeñas, lo que permite la formulación de una teoría que es aplicable para este tipo de ondas para un amplio rango de condiciones de oleaje. Al definir un (H/d) finito es posible definir una teoría muy útil en problemas de aguas someras, al tiempo que si se define un (H/L) finito se puede recorrer un camino hacia una teoría aplicable en aguas profundas (Sorensen, 2003).

OBJETIVOS

- Introducir al público en general en la teoría de ondas
- Analizar de manera general la teoría de ondas de amplitud finita
- Estudiar y analizar con detalle la teoría de onda larga
- Proponer un modelo numérico para la solución de ondas largas sobre fondo constante en el lenguaje de programación Julia ®.

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE ONDAS

Existen en la literatura dos tipos de teorías que se enfocan en el estudio de las ondas de amplitud finita. Los métodos numéricos que se emplean usualmente son el método de diferencias finitas, el método de elemento finito o el método de elementos finitos. Los métodos descritos son utilizados para resolver la ecuación de Laplace y las condiciones de contorno de fondo y superficie libre.

Matemáticamente, existen teorías analíticas que permiten la resolución de la ecuación de Laplace mediante el establecimiento de series de potencias, al resolver el problema por medio de aproximaciones sucesivas o por medio de métodos de perturbación.

Los desarrollos numéricos requieren por lo tanto de información de entrada relacionada con las características del oleaje tal como la superficie libre, las velocidades y aceleraciones de las partículas, la presión dinámica, la energía asociada a las ondas, el flujo de momento, entre otros. Características que deben ser establecidas en función de los valores de la altura de ola, periodo y profundidad sobre la cual se está propagando la onda.

Al mismo tiempo, las teorías analíticas se encuentran establecidas por medio de ecuaciones particulares que también consideran las propiedades características del oleaje, escritas en términos de la altura de ola, el periodo y la profundidad del lecho marino. Sin embargo, es importante aclarar en este punto que ambas técnicas (numéricas y teóricas) son solo aproximaciones del problema de valor de frontera de una onda.



MÉTODOS

ONDAS DE AMPLITUD FINITA

Como se mencionó en un principio si la amplitud de la onda es mayor que un porcentaje infinitesimal de la longitud de onda L ($H/L > 0.01$) o la profundidad d ($H/d > 0.1$), entonces la teoría de ondas de pequeña amplitud no es capaz de reproducir de manera adecuada la propagación de la ola (Koutitas, 1988). En tal caso, cuando la longitud de onda L es menor que la profundidad (ondas cortas) las teorías de Stokes de orden superior son más precisas; y, por el contrario, cuando la longitud de onda L es mayor que la profundidad (ondas largas) la teoría Cnoidal es mucho adquiere más relevancia por su precisión.

Teoría de Onda Corta

La teoría de Stokes de cualquier orden emplea términos de orden superior en el desarrollo de las series de potencias.

$$\phi = \phi^1 + \phi^2 + \phi^3$$

$$\phi^2 = \phi^1 \frac{H}{L}$$

$$\phi^3 = \phi^1 \frac{H^2}{L^2}$$

El proceso de solución de la teoría de Stokes consiste en la sustitución de las series en el modelo matemático, la conservación de los términos no lineales en la condición cinemática de superficie libre y la formulación de las ecuaciones en términos del parámetro que relaciona la profundidad y la longitud de onda (H/L).

La ecuación de superficie libre está representada por:

$$\eta = \eta^1 + \eta^2$$

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - wt) + \frac{kH^2}{16} \{3\coth^3(kh) - \coth(kh)\} \cos 2(kx - wt)$$

Entre mayor sea el número de orden de la teoría de Stokes, el valle de la onda es más plano y la cresta más empinada. Esto indica que, a mayor orden, los resultados se acercan más a los valores medidos en campo.

La función que representa la componente horizontal de la velocidad es:

$$u = u^1 + u^2$$

$$u = u^1 + \frac{3c(kh)^2 \cosh[2k(z+h)]}{16 \sinh^4(kh)} \cos 2(kx - wt) - \frac{gH^2}{8ch}$$



El transporte de masa y energía en la dirección de propagación de la onda aparece como una constante en los términos periódicos, y se conocen como flujo de Stokes.

La distribución de la presión hidrostática está dada por la ecuación de segundo orden:

$$p_{dinámica} = p^1 + p^2$$

$$p_{dinámica} = p^1 + A$$

$$A = \frac{\rho g k H^2}{8 \sinh(2kh)} \left[\left(\frac{3 \cosh 2k(z+h)}{\sinh^2(kh)} - 1 \right) \cos 2(kx - \omega t) - \cosh 2k(z+h) + 1 \right]$$

p^1 : presión hidrostática

Teoría Cnoidal

En la literatura ha sido ampliamente reportado que la aplicabilidad de la teoría de Stokes pierde precisión a medida que la onda se aproxima hacia aguas intermedias y someras. De acuerdo con Keulegan (1950) existe un rango recomendado para el empleo de la teoría de Stokes desde aguas profundas hasta un punto donde la profundidad relativa es igual a 0.1. Sin embargo, es importante mencionar que el límite de la teoría de Stokes en aguas intermedias depende fundamentalmente del grado de peraltamiento del oleaje y de la profundidad relativa. Para oleaje muy peraltado, aun en aguas profundas, esta teoría presenta problemas por los términos de alto orden definidos en ella.

Para el tratamiento del oleaje en aguas someras se emplean las teorías de amplitud finita, particularmente la teoría Cnoidal, y para aguas extremadamente someras se trabaja usualmente con la teoría de onda solitaria.

La teoría Cnoidal se basa en las ecuaciones desarrolladas por Korteweg (1895), y su fundamento está basado en funciones elípticas Jacobianas denominadas “cn”, de allí parte el nombre de Cnoidal. Esta teoría está caracterizada en diversos desarrollos que van desde el empleo de la teoría de ondas de pequeña amplitud para el límite de aguas profundas; y para aguas someras se emplea la teoría de onda solitaria. Ahora bien, dada la complejidad en la aplicación de la teoría Cnoidal, la literatura recomienda emplear las teorías de Ondas de Pequeña Amplitud, Stokes de Alto Orden y la teoría de Onda Solitaria para cubrir el mayor espectro posible de aplicación posible de esta teoría.

La forma más comúnmente empleada y usada de la teoría Cnoidal es la presentada por Wiegel (1960). Quien presentó un trabajo resumido de investigaciones a partir de diversas fuentes y describe los resultados de una manera práctica y sencilla. Estos resultados pueden ser vistos en U.S Army Coastal Engineering Research Center (1984).

Teoría de Onda Larga

Cerca de la costa la relación que define la profundidad relativa H/L es menor que la unidad. Se acepta que la relación $HL/h^2 < (20 - 30)$ es válida aun cuando ya se siente el efecto de la capa límite, considerado despreciable, y el potencial de velocidades para el flujo se asume bajo el concepto de irrotacional.



Cuando se resuelve el potencial ϕ en series respecto al datum es posible obtener:

$$\phi = \phi^0(x, t) + \phi^1(x, t)(z + h) + \phi^2(x, t)(z + h)^2 + \dots +$$

El desarrollo de la ecuación anterior permite obtener una ecuación lineal para ondas largas, de tal modo que:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = C_o^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$C_o = \sqrt{gh}$$

Al despejar el término del primer orden de aproximación, considerando los valores que toma el oleaje de acuerdo con el criterio de profundidad relativa ($\delta = H/L$ y $\varepsilon = h/L$) se pueden presentar tres escenarios:

- Se puede dar el caso que $\delta \ll \varepsilon^2$ o que el Número de Ursell sea menor a la unidad ($U_r = \ll 1$). En ese caso la ecuación diferencial para la superficie libre y la velocidad puede ser linealizada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t}$$

- Otro caso que se puede presentar es $\delta \gg \varepsilon^2$ o $U_r = HL^2/h^3 \gg 1$. Para esta condición la ecuación toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta)u] = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

Que corresponde a una ecuación no lineal de onda larga. La principal característica es que esta ecuación no es dispersiva en la frecuencia, pero si lo es para la amplitud, así que la velocidad de la onda se calcula con la ecuación mostrada a continuación:

$$c = \sqrt{g(h + \eta)}$$

- El último caso que se puede presentar es cuando $\delta = O[\varepsilon^2]$ o el número de Ursell sea igual a la unidad ($U_r = 1$). En este caso, las ecuaciones toman la forma de las famosas ecuaciones de Boussinesq.



$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta)u] + \frac{1}{3} h^3 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

Existe un caso especial para una onda progresiva que viaja unidireccionalmente (Korteweg-De Vries, 1895) y esta descrito por la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{gh}} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2x} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

La solución de la ecuación se puede realizar por medio de la teoría de onda solitaria de periodo infinito, definiendo las condiciones de frontera específicas para esta teoría. La solución general de esta se realiza expresando la superficie libre en términos de la longitud de onda, el periodo y el parámetro θ .

$$\frac{\theta}{2k} = \frac{t}{T} - \frac{x}{L}$$

La relación $\theta/2k$ representa la onda Cnoidal, que se propaga en aguas someras sobre un fondo constante antes de la zona de rotura.

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE ONDA LARGA

Como se explicó en las secciones anteriores, una onda larga se puede definir como aquella onda cuya longitud es mayor que la altura de ola y la profundidad sobre la cual ésta se está propagando, y esto hace de su estudio un tema muy importante en la ingeniería de costas y áreas afines.

El alcance de esta teoría abarca a diferentes tipos de ondas, como ondas gravitacionales, mareas, ondas generadas por oscilaciones en sistemas acuáticos, tsunamis y pueden ser descritas por un modelo de onda larga.

Para el desarrollo de un modelo numérico enfocado en la teoría de onda larga deben plantearse las ecuaciones fundamentales de la mecánica newtoniana, que consideran el principio de conservación de la masa y el momento.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (h + \eta) + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta)u] = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones toma en consideración las condiciones de frontera cinemática y dinámica de superficie libre, una condición inicial para la profundidad, y como variables desconocidas a la velocidad y la superficie libre.



El flujo se asume como incompresible y debe ser planteado el concepto de viscosidad en la ecuación de momento para los esfuerzos cortantes. Los tensores de esfuerzos que corresponden a las componentes de orden superior de la ecuación de momento se pueden plantear de la siguiente manera:

$$\frac{\tau_b}{\rho} = k \cdot |u|u$$

En la ecuación anterior k representa un coeficiente de rugosidad de fondo.

El cálculo de la celeridad de la onda gravitacional que se pretende modelar se calcula con la siguiente ecuación:

$$c = \sqrt{g(h + \eta)}$$

Si se considera una onda larga de amplitud dispersiva cuyo frente de onda se propaga hacia la costa, en el momento que el efecto del fondo se siente, aparecen en la ecuación términos no lineales que hacen de su estudio un tema complejo. Para este modelo, los términos no lineales no serán considerados pues solo se analiza el caso de fondo constante. En este sentido, las ecuaciones a utilizar son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

La simplificación de la ecuación de masa y momento conduce a surgimiento de una ecuación hiperbólica de segundo orden para el cálculo de la superficie libre:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_o^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$c_o = \sqrt{gh}$$

Esta ecuación describe la propagación de la onda hacia la costa sin considerar transformaciones o rotura de la ola.

Para la solución numérica de esta ecuación se plantea un esquema en diferencias finitas, tomando en consideración la propagación de ondas lineales y no lineales que se propagan hacia la costa con la hipótesis de profundidad constante.



Las condiciones de frontera que se emplean para la solución del sistema de ecuaciones son las siguientes:

- Condición de Frontera de superficie libre sin reflexión. Conocida como una condición absorbente, o una condición de frontera ficticia, que se implementa con el objetivo de mantener finito nuestro dominio computacional. La aplicación de esta condición de frontera parte de los principios de conservación de la Mecánica Newtoniana a la onda que se propaga hacia la costa. Sin duda alguna, esta condición considera el movimiento de la superficie libre y la velocidad de las partículas del fluido

$$n \cdot u = \frac{n}{h} \sqrt{gh}$$

n : vector unitario normal a las caras del volumen de control

- Condición de frontera incidente. Que toma en consideración el oleaje que ingresa al dominio de cálculo como dato de entrada, además que esta condición permite la interacción con ondas reflejadas cruzando la frontera. Una característica muy interesante de esta frontera es la manera como permite evaluar la función que representa la superficie libre. Es decir, una superficie libre incidente y una superficie de radiación. La condición de radiación se resuelve mediante la ecuación diferencial presentada a continuación, la cual describe la propagación de la perturbación de manera unidireccional.

$$\frac{\partial \eta_r}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial \eta_r}{\partial x} = 0$$

- Condición de Frontera de Radiación. En esta frontera la velocidad normal se elimina, lo que lleva a que la componente que evalúa la variación de la superficie libre respecto a la dirección normal ($\partial \eta / \partial n = 0$) desaparezca.



Propagación de una onda larga con profundidad constante

La solución numérica del modelo planteado se llevó a cabo a través de la aplicación del método de Diferencias Finitas con un sistema de llama regular estacionaria. Por las características del mallado, las componentes de la velocidad y la superficie libre se calculan en puntos diferentes. Las velocidades en las caras laterales de las celdas y la superficie libre en la frontera superior, como se muestra en la Figura - 1.

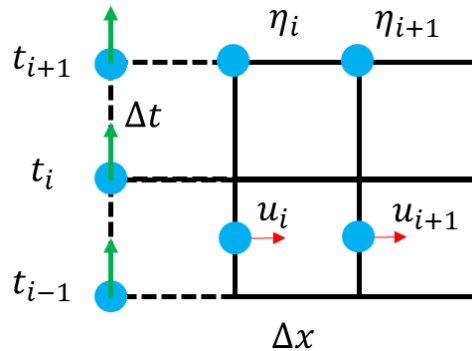


Figura - 1. Dominio de cálculo. Discretización espacial y temporal

En particular, se aplican para este caso práctico un esquema de diferencias hacia adelante para las derivadas temporales y un esquema centrado para las derivadas espaciales. Por lo que las ecuaciones de continuidad y momento expresadas en el lenguaje de las matemáticas discretas se ven de la siguiente manera:

$$\frac{\eta_i^{n+1} - \eta_i^n}{\Delta t} = - \frac{(h_i^n + h_{i+1}^n)u_{i+1}^n - (h_i^n + h_{i-1}^n)u_i^n}{2\Delta x}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = - \frac{(u_{i+1}^n + u_i^n)^2 - (u_i^n + u_{i-1}^n)^2}{8\Delta x} - \frac{g(\eta_i^n - \eta_{i-1}^n)}{\Delta x}$$

La estabilidad numérica puede ser evaluada mediante la aplicación de un esquema explícito, de tal forma que sea evaluado el número de Courant.

$$(u + \sqrt{gh}) \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$$

Modelo Numérico de onda larga LWAVE

A continuación, se presenta el modelo numérico LWAVE. Un ejercicio académico para quienes están iniciando con el tema de la modelación numérica. Está escrito en el lenguaje Julia ® y resuelve el esquema de diferencias centradas planteado en la sección anterior. El modelo tiene los forzamientos en la frontera izquierda, tomando como datos de entrada la altura de ola y el periodo de onda.



```
# NONLINEAR 1-D LONG WAVE MODEL FOR PROPAGATION OVER CONSTANT DEPTH
#CEMAN: COASTAL ECOSYSTEM MANAGEMENT NETWORK
# BY: GERMAN RIVILLAS-OSPINA
# DATE: JUNIO DE 2020
#LUGAR: BARRANQUILLA-COLOMBIA
```

using Plots

```
# CONSTANT VALUES
```

```
const g=9.81
```

```
const T=50.0
```

```
const dt=0.5
```

```
const dx=100.0
```

```
const Ho=150.0
```

```
function LW()
```

```
    # INITIAL CONDITIONS
```

```
    C=(g*Ho)^0.5
```

```
    L=C*T
```

```
    # DEFINING THE DOMAIN
```

```
    xmax=0:20.0:L
```

```
    xin=length(xmax)
```

```
    tin=round.(Int,L)
```



#DEFINING VALUES TO PHYSICAL VARIABLES

```
 $\eta$ =zeros(1,xin)  
 $H_oA$ =fill( $H_o$ , (1,xin))  
 $H$ =fill( $H_o$ , (1,xin))  
 $H_n$ =zeros(1,xin)  
 $H_1$ =zeros(1,xin)  
 $H_2$ =zeros(1,xin)  
 $H_r$ =zeros(1,xin)  
 $U$ =zeros(1,xin)  
 $U_1$ =zeros(1,xin)  
 $U_2$ =zeros(1,xin)  
 $U_n$ =zeros(1,xin)
```

```
 $\eta_o$ =1.5  
dtmax=round.(Int,tin/2)  
N=0  
 $\eta_1$ =0.0  
 $\eta_2$ =0.0  
pi=4*atan(1.)
```

```
while N < dtmax
```

```
    #TEMPORAL INCREMENTS  
    N=N+1
```



```

#COURANT NUMBER
TERM1=(N-1)*dt
TERM2=dx/C

# FREE SURFACE ELEVATION CALCULATION
if TERM1<TERM2

    D=sin(2*pi*(N)*(dt/T))
    η[1]=ηo*D+η1

else

    A=sin(2*pi*(N-1)*dt/T)
    B=sin((2*pi*(N-1)*dt)/T-(dx/L))
    η1=η[1]-ηo*A
    η2=η[2]-ηo*B

    η1=η1+(dt/dx)*C*(η2-η1)
    D=sin(2*pi*(N)*(dt/T))
    η[1]=ηo*D+η1

end

for i = 2:xin-1
    # DETERMINING WATER DEPTH VARIATION
    Hn[1]=HoA[1]+η[1]

    H1[i]=(H[i+1]+H[i])*U[i+1]

    H2[i]=(H[i]+H[i-1])*U[i]

    Hr[i]=H1[i]-H2[i]

    Hn[i]=H[i]-(dt/(2*dx))*Hr[i]

```



```

# WATER VELOCITIES FIELD CALCULATION
     $\eta[i] = H_n[i] - H_o A[i]$ 

     $U_1[i] = (U[i+1] + U[i])^2 - (U[i] + U[i-1])^2$ 
     $U_2[i] = g * (\eta[i] - \eta[i-1])$ 

     $U_n[i] = U[i] - (dt/(8dx)) U_1[i] - (dt/dx) U_2[i]$ 
    println( $U_n[i]$ , " ",  $\eta[i]$ )
end

     $U_n[1] = U_n[2]$ 
     $U_n[xin] = U_n[xin-1] * (g/H_n[xin-1])^{0.5}$ 

    for i = 1:xin
         $H[i] = H_n[i]$ 
         $U[i] = U_n[i]$ 
    end
end
# CONVERT RANGE TO VECTORS
# RETURN U AND  $\eta$  AS VECTORS, NOT 2D ARRAYS
return collect(xmax), U[1,:],  $\eta$ [1,:]

end
# DEFINING THE RESULTS IN VECTORS
x, u,  $\eta$  = LW()

```

PLOTTING RESULTS

```

plot(
    x,
    [ $\eta$  u],
    title = ["Surface Elevation" "Velocity field"],
    layout = (2, 1),
    color = ["blue" "green"],
    legend = false
)
savefig("G:\\My Drive\\Uninorte\\Modelacion\\Julia\\LongWaves\\result.png")

```



RESULTADOS DEL MODELO LWAVE

Se presentan a continuación los resultados la modelación de una onda con un periodo de onda de 50 s, una profundidad de 150 m, un incremento temporal de 0.5 s, un incremento espacial de 100 m, y superficie libre de 1.5 m.

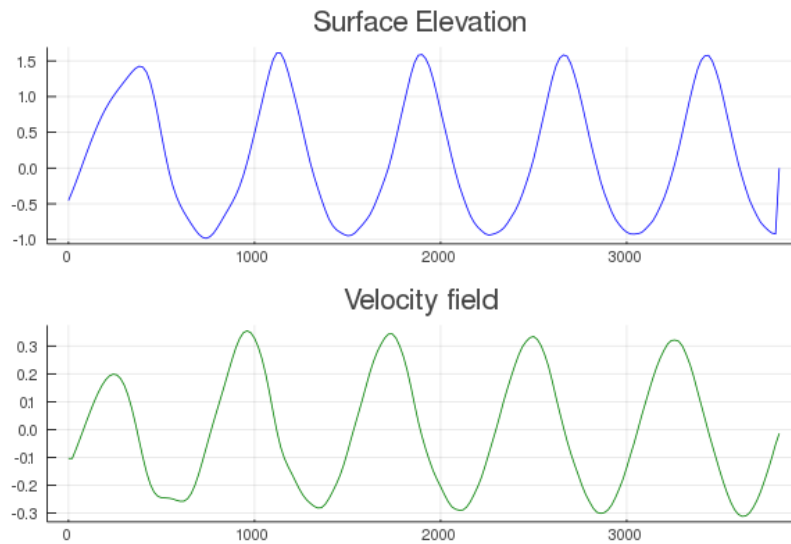


Figura - 2. Panel superior: Elevación de la superficie libre; Panel inferior: Campo de velocidades

Se puede observar en la Figura - 2 la propagación de la onda para un periodo de tiempo de 3800 segundos. Los resultados evidencian, como lo afirma la teoría, que el modelo es no dispersivo en la frecuencia, pues si se reduce la profundidad del fondo marino, el oleaje se inicia un proceso de transformación. Como se puede observar a continuación (Figura - 3).

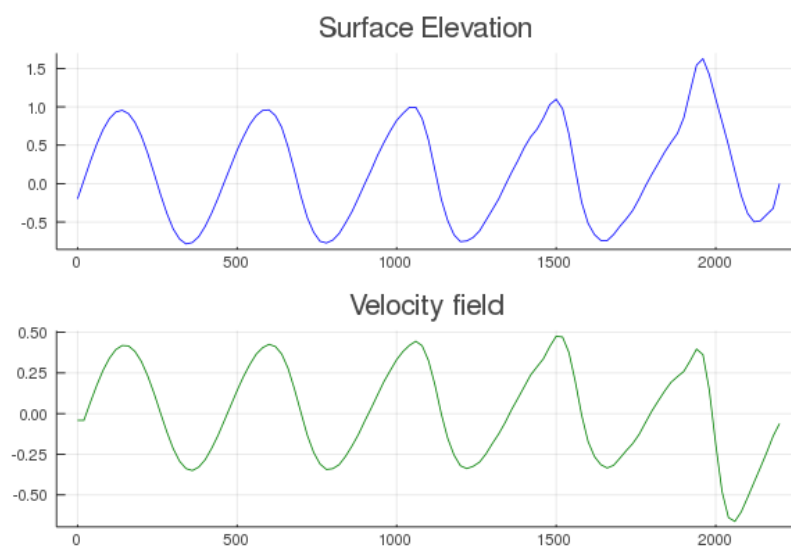


Figura - 3. Modelación de la superficie libre a 50 m de profundidad



REFERENCIAS

Keulegan, G. H. (1950). Wave Motion. Engineering Hydraulics. Rouse Editor, John Wiley, New York, Ch. 11.

Korteweg, D.J. Vries, G. (1895). On the Change Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Channel and on a New Type of Long Stationary Waves. Philosophical Magazine, Series 5, Vol. 39, pp. 422-443.

Koutitas, C. (1988). Mathematical models in Coastal Engineering. Pentech Press Ltd, London. 166 pp.

Sorensen R. M. (2003). Basic Wave Mechanics for Coastal and Ocean Engineers. John Wiley & Sons Inc. New York.

U.S Army Coastal Engineering Research Center (1984). Shore Protection Manual, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.

Wiegel, R. L. (1960). A presentation of Cnoidal Wave Theory for Practical Application. Journal of Fluid Mechanics. Vol. 7, pp. 273-286.

