

# Elektromagnetische Wellen in Materie

# 8

Kapitel 8

8.1	Brechungsindex . . . . .	220
8.2	Absorption und Dispersion . . . . .	223
8.3	Wellengleichung für elektromagnetische Wellen in Materie . .	227
8.4	Wellen an Grenzflächen zwischen zwei Medien . . . . .	231
8.5	Lichtausbreitung in nichtisotropen Medien; Doppelbrechung . .	243
8.6	Erzeugung und Anwendung von polarisiertem Licht . . . . .	248
8.7	Nichtlineare Optik . . . . .	254
	Zusammenfassung . . . . .	258
	Übungsaufgaben . . . . .	259

Nachdem wir uns im vorigen Kapitel mit den Eigenschaften elektromagnetischer Wellen im Vakuum befasst haben, wollen wir nun untersuchen, welchen Einfluss Materie auf die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen hat. Wir müssen dazu die vereinfachten Maxwell-Gleichungen (7.1) im Vakuum, aus denen sich die Wellengleichung für Wellen im Vakuum ergab, durch Terme ergänzen, welche den Einfluss des Mediums enthalten.

Während die Ausbreitung und die Überlagerung elektromagnetischer Wellen in Materie durch eine solche klassische makroskopische Theorie, die auf den erweiterten Maxwell-Gleichungen basiert, gut beschrieben werden können, lassen sich die Erzeugung und Vernichtung von elektromagnetischen Wellen (Emission und Absorption) durch die Atome des Mediums im mikroskopischen Modell der Atomphysik nur durch die Quantentheorie richtig deuten (siehe Bd. 3).

Trotzdem gewinnt man durch das klassische Modell des gedämpften Oszillators für die absorbierenden oder emittierenden Atome, das wir bereits beim Hertz'schen Dipol verwendet haben, einen guten Einblick in die physikalischen Phänomene, die bei elektromagnetischen Wellen in Materie auftreten.

Wir wollen zuerst eine anschauliche phänomenologische Darstellung geben, bevor wir die Lösung der erweiterten Maxwell-Gleichungen behandeln.

## 8.1 Brechungsindex

Misst man die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_{\text{ph}}$  (Phasengeschwindigkeit) elektromagnetischer Wellen im Medium, so stellt man experimentell fest:

- Der Wert von  $v_{\text{ph}}$  ist um einen vom Medium abhängenden Faktor  $n > 1$  kleiner als die Lichtgeschwindigkeit  $c$  im Vakuum:

$$v_{\text{ph}}(n) = \frac{c}{n}. \quad (8.1)$$

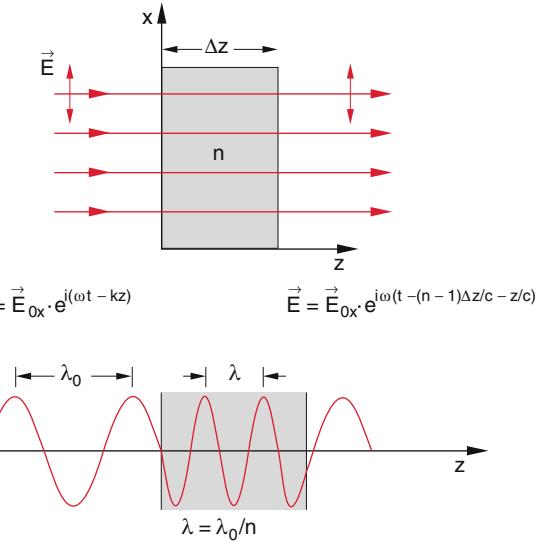
- Der Wert von  $n$  und damit auch die Geschwindigkeit  $v_{\text{ph}}$  hängen nicht nur vom Medium ab, sondern auch von der Wellenlänge  $\lambda$ :

$$n = n(\lambda) \Rightarrow v_{\text{ph}} = v_{\text{ph}}(\lambda) \quad (\text{Dispersion}).$$

Wie lässt sich dieses Ergebnis verstehen? Dazu betrachten wir in Abb. 8.1 eine ebene Lichtwelle,

$$\mathbf{E}_e = E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E_0 e^{i\omega(t-z/v_{\text{ph}})},$$

die in  $z$ -Richtung durch ein Medium (z. B. eine Gaschicht) der Dicke  $\Delta z$  läuft. Innerhalb des Mediums ist



**Abbildung 8.1** Durchgang einer ebenen Welle durch ein Medium mit Brechungsindex  $n$ . Die Reflexion an den Grenzflächen ist hier nicht berücksichtigt

die Wellenlänge  $\lambda = \lambda_0/n$  kleiner als außerhalb, während die Frequenz  $\omega$  gleich bleibt. In diesem Medium werden die Atomelektronen zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Diese schwingenden Dipole strahlen ihrerseits wieder elektromagnetische Wellen  $E_k$  der gleichen Frequenz  $\omega$  wie die der Erregerwelle aus, aber die Phase der erzwungenen Schwingung ist verzögert gegen die der Erregerschwingung (siehe Bd. 1, Abschn. 11.5).

Im Beobachtungspunkt  $P(z)$  hinter dem Medium überlagern sich Primär- und Sekundärwellen zu einem Gesamtwellenfeld

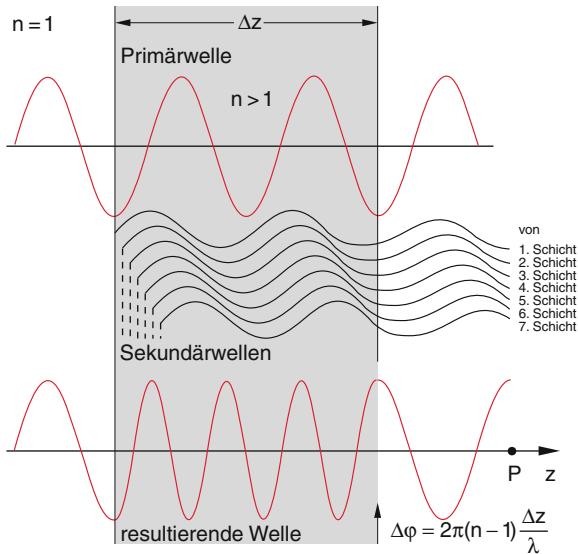
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \sum_k \mathbf{E}_k. \quad (8.2)$$

Wegen der Phasenverzögerung der Sekundärwellen  $E_k$  ist die gesamte Welle  $\mathbf{E}$  im Punkte  $P$  verzögert, d. h. sie kommt später an als ohne Medium, ihre Geschwindigkeit  $v_{\text{ph}}$  ist also im Medium kleiner als im Vakuum (Abb. 8.2).

Wir wollen diese Überlagerung zuerst pauschal durch den Brechungsindex  $n$  (oft auch Brechezahl genannt) beschreiben, bevor wir dann den Wert von  $n$  durch atomare Größen ausdrücken können.

### 8.1.1 Makroskopische Beschreibung

Im Vakuum würde die Welle für die Strecke  $\Delta z$  die Zeit  $t = \Delta z/c$  benötigen. Im Medium läuft sie mit der Geschwindigkeit  $c' = c/n$  und braucht daher die zusätzliche



**Abbildung 8.2** Anschauliche schematische Darstellung der Verzögerung einer Welle beim Durchgang durch ein transparentes Medium. Die einfallende Welle wird überlagert mit den phasenverzögerten Sekundärwellen, welche von den zu erzwungenen Schwingungen angeregten Dipolen in den einzelnen Schichten  $\Delta z$  des Mediums ausgehen. Die Dicke der Schichten entspricht einer atomaren Schicht ( $\approx 0,4 \text{ nm}$ ), ist hier aber stark vergrößert gezeichnet, um den Beginn der Sekundärwellen deutlich zu machen

Zeit

$$\Delta t = (n-1) \cdot \Delta z / c .$$

Nach Durchlaufen des Mediums wird die Welle im Punkte  $P(z)$  also beschrieben durch

$$\begin{aligned} E(z) &= E_0 e^{i\omega[t-(n-1)\Delta z/c-z/c]} \\ &= E_0 e^{i\omega(t-z/c)} \cdot e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} . \end{aligned} \quad (8.3)$$

Der erste Faktor in (8.3) gibt die *ungestörte* Welle an, die man ohne Medium erhalten würde.

Der Einfluss des Mediums kann also durch den zweiten Faktor

$$e^{-i\Delta\varphi} \quad \text{mit} \quad \Delta\varphi = \omega(n-1)\Delta z/c = 2\pi(n-1)\frac{\Delta z}{\lambda}$$

beschrieben werden. Ist die durch das Medium bewirkte Phasenverschiebung  $\Delta\varphi$  genügend klein (dies ist bei Gasen mit  $n-1 \ll 1$  häufig erfüllt, aber bei festen Stoffen im Allgemeinen nicht mehr), so können wir die Näherung

$$e^{-i\varphi} \approx 1 - i\varphi$$

verwenden und erhalten aus (8.3) die Überlagerung (8.2) in der Form:

$$\begin{aligned} E(z) &= \underbrace{E_0 e^{i\omega(t-\frac{z}{c})}}_{E_e} - i\omega(n-1) \underbrace{\frac{\Delta z}{c} E_0 e^{i\omega(t-\frac{z}{c})}}_{\sum_k E_k} \\ &= E_e + E_{\text{Medium}} \end{aligned} \quad (8.4)$$

womit der Einfluss der Sekundärwellen auf die Verzögerung der Primärwelle global durch den Brechungsindex  $n$  und die Dicke  $\Delta z$  der Materieschicht beschrieben wird.

### 8.1.2 Mikroskopisches Modell

Um den zweiten Term  $E_{\text{Medium}}$  in (8.4) mithilfe einer mikroskopischen, aber klassischen Theorie zu berechnen, beschreiben wir jedes Atomelektron, das durch die Lichtwelle  $\mathbf{E} = E_0 \cdot e^{i(\omega t-kz)}$  infolge der Kraft  $\mathbf{F} = -e \cdot \mathbf{E}$  zu erzwungenen Schwingungen angeregt wird, durch das Modell des gedämpften harmonischen Oszillators (siehe Bd. 1, Abschn. 11.4 und 11.5).

Aus der Bewegungsgleichung der durch eine in  $x$ -Richtung polarisierten Welle erzwungenen Schwingung des Oszillators:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Dx = -eE_0 e^{i(\omega t-kz)} \quad (8.5)$$

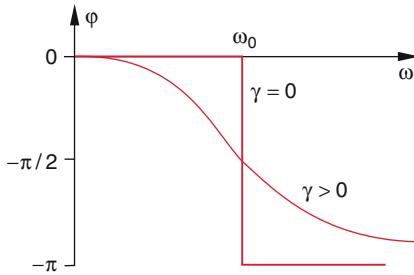
erhalten wir mit  $\omega_0^2 = D/m$ ,  $\gamma = b/m$  und dem Ansatz  $x = x_0 \cdot e^{i\omega t}$  für die Schwingung der Atomelektronen in der Ebene  $z = 0$  (siehe Gl. 6.43):

$$x_0 = -\frac{eE_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} . \quad (8.6a)$$

**Anmerkung.** Wir haben hier, im Gegensatz zu Bd. 1, Abschn. 11.4, den Dämpfungsfaktor für die Amplitude  $\gamma/2$  statt  $\gamma$  gewählt. Dadurch wird  $\gamma$  der Dämpfungsfaktor für die Leistung und die folgenden Formeln sind dann in Übereinstimmung mit dem überwiegenden Teil der Literatur.

Erweitern von (8.6a) mit  $[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega]$  liefert:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} E_0 \\ &= -(\alpha + i\beta)E_0 = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} E_0 e^{i\varphi} \\ \Rightarrow x &= -\frac{e/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} E_0 e^{i(\omega t + \varphi)} . \end{aligned} \quad (8.6b)$$



**Abbildung 8.3** Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Schwingungsamplitude  $x(t)$  des Dipols und Erregerwelle  $E(t)$  als Funktion der Erregerfrequenz  $\omega$  für verschiedene Werte der Dämpfungskonstanten  $\gamma$

Die Amplitude der erzwungenen Schwingung hängt also außer von  $E_0$  auch vom Frequenzabstand  $\omega_0 - \omega$  von der Eigenfrequenz  $\omega_0$  und von der Dämpfungskonstanten  $\gamma$  ab. Die Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Schwingungsamplitude  $x(t)$  und Erregerwelle  $E(t)$  hängt ab von  $\omega$  und  $\gamma$  (Abb. 8.3). Es gilt:

$$\tan \varphi = -\frac{\gamma \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (8.6c)$$

Diese schwingenden Dipole mit dem Dipolmoment  $p = -e \cdot x$  (die Valenz-Elektronen schwingen gegen die als ortsfest angenommenen positiven Ionenrumpfe) strahlen ihrerseits wieder Wellen aus (siehe Abschn. 6.4). Der Anteil  $E_D$  eines einzelnen Dipols zur Feldstärke  $E$  im Punkte  $P$  in der Entfernung  $r \gg x_0$  vom Dipol, gemessen zur Zeit  $t$ , ist nach (6.34d)

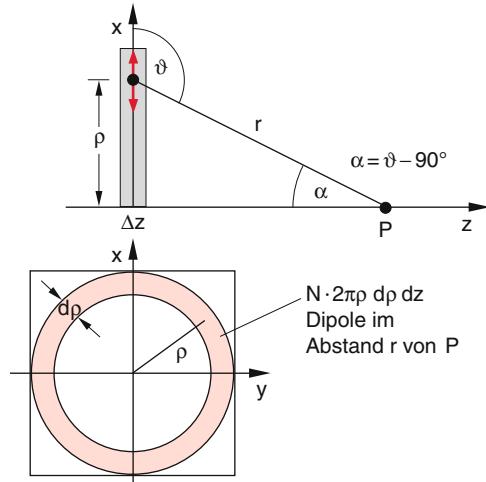
$$E_D(r, \vartheta) = -\frac{e\omega^2 x_0 \sin \vartheta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} e^{i\omega(t-r/c)}, \quad (8.7)$$

wobei die Retardierung, d. h. die Laufzeit der Welle vom Dipol zum Punkt  $P$  berücksichtigt wurde.

Sind in einer dünnen Schicht der Dicke  $\Delta z$  in der Ebene  $z = z_0$  insgesamt  $\Delta z \cdot \int N \cdot dA$  schwingende Dipole ( $N$  ist die räumliche Dichte der Dipole und  $dA = 2\pi \rho d\rho$  ist die Fläche des Kreisrings in der  $xy$ -Ebene), so ist das gesamte, von allen Dipolen der Schicht im Punkte  $P$  erzeugte Feld durch die Überlagerung aller dieser Anteile  $E_D$  gegeben (Abb. 8.4). Da der Abstand der Atome klein ist gegen die Wellenlänge  $\lambda$  des Lichtes, können wir die räumliche Dipolverteilung als kontinuierlich ansehen und erhalten durch Integration für das Feld aller Dipole in der Schichtdicke  $\Delta z$  um  $z = 0$

$$E(z) = -\frac{e\omega^2 x_0 e^{i\omega t}}{4\pi \epsilon_0 c^2} \Delta z \cdot \int_0^\infty N \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} \sin \vartheta 2\pi \rho d\rho. \quad (8.8a)$$

Wenn die einfallende Lichtwelle den Bündelradius  $\rho_{\max}$  hat, werden nur Oszillatoren im Bereich von  $\rho = 0$  bis



**Abbildung 8.4** Zur Herleitung der elektrischen Feldstärke  $E$  im Punkt  $P(z)$ , die von Dipolen in der Ebene  $z = 0$  bewirkt wird

$\rho = \rho_{\max}$  angeregt. Für  $z \gg \rho_{\max}$  können wir  $\vartheta \approx 90^\circ$  setzen  $\Rightarrow \sin \vartheta \approx 1$ .

Ist die Dichte  $N$  für  $z \leq \rho \leq \rho_{\max}$  konstant, so können wir  $N$  vor das Integral ziehen. Dies ergibt:

$$E(z) = -\frac{e\omega^2 x_0 e^{i\omega t}}{2\epsilon_0 c^2} N \cdot \Delta z \cdot \int \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} \rho d\rho. \quad (8.8b)$$

Wegen  $r^2 = z^2 + \rho^2 \Rightarrow r dr = \rho d\rho$  (in der Ebene  $z = z_0$  ist  $z$  konstant!) ergibt das Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} \rho d\rho &= \int_{r=z}^\infty e^{-i\omega r/c} dr \\ &= -\frac{c}{i\omega} \left[ e^{-i\omega r/c} \right]_z^\infty. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Wenn die einfallende Lichtwelle den Durchmesser  $d = 2\rho_{\max}$  hat, tragen die Bereiche  $\rho > d/2$  nichts zum Integral bei, weil dort keine Dipole angeregt werden, d. h. wir können den Beitrag der oberen Grenze zum Integral vernachlässigen, und wir erhalten für die Lösung von (8.8)

$$E(z) = \frac{i\omega e x_0 N}{2\epsilon_0 c} e^{i\omega(t-z/c)} \cdot \Delta z. \quad (8.10)$$

Setzen wir den Ausdruck (8.6a) für  $x_0$  ein, so ergibt sich die Feldamplitude  $E(z)$ , die von  $N \cdot \Delta z$  Dipolen in der Schicht mit der Dicke  $\Delta z$  erzeugt wird, zu:

$$\begin{aligned} E(z) &= -i\omega \frac{\Delta z}{c} \cdot \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m [(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma]} \\ &\cdot E_0 e^{i\omega(t-z/c)}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Dies ist der in (8.4) enthaltene zusätzliche Anteil  $\sum E_k$ . Der Vergleich mit (8.4) liefert dann für den Brechungsindex  $n$  den Ausdruck:

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m [(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma]} . \quad (8.12a)$$

Der Brechungsindex, auch *Brechzahl* genannt, ist eine komplexe Zahl! Wir schreiben ihn als  $n = n_r - i\cdot\kappa$ . Er hängt ab:

- von der Dichte  $N$  der schwingenden Dipole, d. h. von der Atomdichte des Mediums,
- von der Frequenzdifferenz  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$  zwischen der Frequenz  $\omega$  der elektromagnetischen Welle und der Resonanzfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{D/m}$  der schwingenden Atomelektronen, die durch die elektrostatische Rückstellkraft  $(-D \cdot x)$  der Elektronen an ihre Gleichgewichtslage und durch ihre Masse  $m = m_e$  festgelegt ist.

**Man beachte:** Die obige Herleitung für den Brechungsindex (8.12a) gilt eigentlich nur für *optisch dünne* Medien, bei denen der Brechungsindex nur wenig von 1 verschieden ist (d. h.  $(n - 1) \ll 1$ ), bei denen also die Dichte  $N$  der schwingenden Dipole genügend klein ist. Dies ist bei Gasen gut erfüllt.

### Beispiel

Der Brechungsindex von Luft bei Atmosphärendruck ist  $n = 1,0003$ , d. h.  $(n - 1) \ll 1$  (Tab. 8.1).

Die Näherung  $(n - 1) \ll 1$  wurde zweifach ausgenutzt. Einmal beim Übergang von (8.3) nach (8.4), wo  $e^{-i(n-1)} \approx 1 - i(n-1)$  verwendet wurde. Außerdem wurde angenommen, dass das von den Dipolen erzeugte Feld

**Tabelle 8.1** Realteil  $n_r$  des Brechungsindex von trockener Luft bei  $20^\circ\text{C}$  und 1 bar Luftdruck. Hier ist  $n_r \gg \kappa$

$\lambda/\text{nm}$	$(n - 1) \cdot 10^4$
300	2,915
400	2,825
500	2,790
600	2,770
700	2,758
800	2,750
900	2,745

## 8.2 Absorption und Dispersion

klein ist gegenüber dem Feld der einfallenden Welle, so dass für die Erregerfeldstärke  $E_0$  in (8.5) die Feldstärke der einfallenden Welle eingesetzt wurde, obwohl eigentlich die Gesamtfeldstärke (die im Medium von  $z$  abhängt) hätte verwendet werden müssen. Für  $(n - 1) \ll 1$ , d. h. kleine Dichte  $N$ , sind jedoch beide Näherungen gerechtfertigt.

Wir werden in Abschn. 8.3 diese Beschränkung ( $(n - 1) \ll 1$ ) fallen lassen und einen allgemein gültigen Ausdruck für den Brechungsindex aus den erweiterten Maxwell-Gleichungen herleiten.

## 8.2 Absorption und Dispersion

Um die physikalische Bedeutung der komplexen Brechzahl  $n$  zu verstehen, schreiben wir (8.12a) in der Form  $n = n_r - i\kappa$ . Durch Erweitern des Bruches in (8.12a) mit  $[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma]$  erhalten wir nämlich:

$$\begin{aligned} n &= 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \\ &= n_r - i\kappa . \end{aligned} \quad (8.12b)$$

Setzen wir dies in (8.3) ein, so ergibt sich für die Feldstärke  $E(z)$  der durch das Medium mit der Dicke  $\Delta z$  transmittierten Welle mit  $k_0 = \omega/c$

$$\begin{aligned} E(z) &= E_0 e^{-\omega\kappa \frac{\Delta z}{c}} \cdot e^{-i\omega(n_r - 1) \frac{\Delta z}{c}} \cdot e^{i(\omega t - k_0 z)} \\ &= A \cdot B \cdot E_0 \cdot e^{i(\omega t - k_0 z)} . \end{aligned} \quad (8.13)$$

Der Faktor  $A = e^{-\omega\kappa \Delta z/c}$  gibt die Abnahme der Amplitude beim Durchgang durch das Medium an. Nach der Strecke  $\Delta z = c/(\omega \cdot \kappa)$  ist die Amplitude der Welle auf 1/e der einfallenden Amplitude  $E_0$  abgesunken (**Absorption**).

Die Intensität  $I = c \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2$  erfährt dann die Abnahme

$$I = I_0 \cdot e^{-\alpha \Delta z} \quad (8.14)$$

(**Beer'sches Absorptionsgesetz**). Die Größe

$$\alpha = \frac{4\pi\kappa}{\lambda_0} = 2k_0\kappa \quad (8.15)$$

heißt **Absorptionskoeffizient**. Er hat die Maßeinheit  $[\alpha] = 1 \text{ m}^{-1}$ .

Der Absorptionskoeffizient ist proportional zum Imaginärteil  $\kappa$  der komplexen Brechzahl, wobei  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  die Wellenzahl der Welle im Vakuum ist.

Der Faktor  $B = e^{-i\omega(n_r-1)\Delta z/c}$  in (8.13) gibt die Phasenverzögerung der Welle beim Durchgang durch das Medium an. Diese zusätzliche Phasenverschiebung gegenüber dem Durchlaufen der Strecke  $\Delta z$  im Vakuum ist:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \omega(n_r - 1)\Delta z/c \\ &= 2\pi(n_r - 1)\Delta z/\lambda_0,\end{aligned}\quad (8.16)$$

d. h. die gesamte Phasenänderung der Welle über eine Laufstrecke  $\Delta z = \lambda_0$  ist im Medium  $\Delta\varphi = n_r \cdot 2\pi$ , während sie im Vakuum  $2\pi$  beträgt.

Da die Wellenlänge  $\lambda$  definiert ist als der räumliche Abstand zwischen zwei Phasenflächen, die sich um  $\Delta\varphi = 2\pi$  unterscheiden, folgt daraus, dass die Wellenlänge  $\lambda$  im Medium mit Brechungsindex  $n = n_r - ik$  kleiner wird als die Wellenlänge  $\lambda_0$  im Vakuum:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n_r}.\quad (8.17)$$

Weil die Frequenz  $\omega$  der Welle sich nicht ändert (siehe auch Abschn. 8.4) folgt für die Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{Ph}} = v \cdot \lambda = (\omega/2\pi) \cdot \lambda$  der Welle

$$v_{\text{Ph}} = \frac{c}{n_r}.\quad (8.18)$$

Eine elektromagnetische Welle hat in einem Medium mit Brechungsindex  $n = n_r - ik$  die Wellenlänge  $\lambda = \lambda_0/n_r$  und die Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{Ph}} = c/n_r$ .

Beschreibt man die Materialeigenschaften durch die relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  (Abschn. 1.7.2) und die relative Permeabilitätskonstante  $\mu$  (Abschn. 3.5.2) so wird die Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{Ph}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \mu \cdot \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}.\quad (8.19)$$

In nichtmagnetischen Materialien ist  $\mu \approx 1$ , sodass dann folgt:

$$v_{\text{Ph}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{n_r} \Rightarrow n_r = \sqrt{\epsilon}.\quad (8.20)$$

Bei allen durchsichtigen Medien (Beispiele: Glas, Wasser, Luft) ist der Absorptionskoeffizient für sichtbares Licht sehr klein (sonst wären sie nicht durchsichtig). Dann ist der Imaginärteil  $\kappa$  des komplexen Brechungsindex  $n = n_r - ik$  klein gegen den Realteil  $n_r$ , und man kann für diesen Fall

$$n \approx n_r$$

setzen. Deshalb erscheint in vielen Gleichungen der Optik einfach  $n$  statt  $n_r$ , weil hier überwiegend mit Stoffen kleiner Absorption (Linsen, Prismen) gearbeitet wird (Tab. 8.2). Man sollte aber im Gedächtnis behalten, dass dies genau genommen nur der Realteil des allgemeinen komplexen Brechungsindexes ist.

**Tabelle 8.2** Brechzahlen  $n \approx n_r$  einiger optischer Gläser und durchsichtiger Stoffe

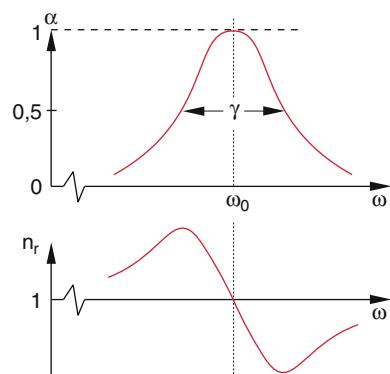
$\lambda/\text{nm}$	480	589	656
FK3	1,470	1,464	1,462
BK7	1,522	1,516	1,514
SF4	1,776	1,755	1,747
SFS1	1,957	1,923	1,910
Quarzglas	1,464	1,458	1,456
Lithiumfluorid LiF	1,395	1,392	1,391
Diamant	2,437	2,417	2,410

Aus (8.12b) erhalten wir für Real- und Imaginärteil des Brechungsindexes  $n = n_r - ik$  die **Dispersions-Relationen**

$$n_r = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2},\quad (8.21a)$$

$$\kappa = \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2},\quad (8.21b)$$

welche Absorption und Dispersion von elektromagnetischen Wellen in Materie mit Imaginär- und Realteil der komplexen Brechzahl  $n$  verknüpfen (Abb. 8.5).



**Abbildung 8.5** Absorptionskoeffizient  $\alpha(\omega) = 2k_0 \cdot \kappa(\omega)$  und Realteil des Brechungsindex in der Umgebung einer Absorptionslinie bei  $\omega_0$

**Man beachte:** Das Maximum der Funktion  $\kappa(\omega)$  liegt nicht genau bei  $\omega = \omega_0$ , sondern bei  $\omega_{\max} = \omega_0 \cdot [1 - \frac{\gamma^2}{3\omega_0^2}]^{+1/2}$ , wie man mit  $d\kappa/d\omega = 0$  ausrechnen kann (siehe Abschn. 10.9.2 und Aufg. 10.14). Da für sichtbares Licht  $\gamma/\omega_0 \ll 1$  gilt, ist jedoch  $\omega_{\max} \approx \omega_0$ .

Die oben hergeleitete Formel (8.12) für den Brechungsindex  $n$  beruhte auf dem Modell gedämpfter harmonischer Oszillatoren, die alle dieselbe Eigenfrequenz  $\omega_0$  und die gleiche Dämpfungskonstante  $\gamma$  hatten. Um sie auf wirkliche Medien mit realen Atomen anzuwenden, müssen wir noch folgende experimentellen Befunde berücksichtigen, die in Bd. 3 näher begründet werden:

- Die Atome einer absorbierenden Substanz besitzen viele Energiezustände  $E_k$ , zwischen denen durch Absorption von Licht mit Frequenzen  $\omega_k$  Übergänge stattfinden können. Für die Absorption vom tiefsten Zustand  $E_0$  aus gilt für die absorbierte Energie:

$$\Delta E = E_k - E_0 = \hbar\omega_k ,$$

wobei  $\hbar = h/2\pi$  das durch  $2\pi$  geteilte *Planck'sche Wirkungsquantum* ist (siehe Bd. 3, Abschn. 3.1).

- Wenn ein Atom mit einem anregbaren Elektron durch einen klassischen Oszillatator beschrieben wird, so ist die Wahrscheinlichkeit  $W_k$ , dass es auf einer bestimmten Frequenz  $\omega_k$  absorbiert, kleiner als die Wahrscheinlichkeit  $W = \sum W_k$ , dass es auf irgendeiner der vielen möglichen Frequenzen  $\omega_k$  absorbiert.

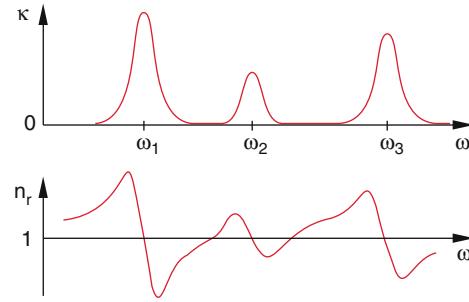
Für eine bestimmte Frequenz  $\omega_k$  hat das Atom nur den Bruchteil  $f_k$  ( $f_k < 1$ ) des Absorptions- oder Emissionsvermögens eines klassischen Oszillators. Diese Zahl  $f_k < 1$  heißt die *Oszillatorenstärke* des atomaren Übergangs. Summiert man die Absorptionswahrscheinlichkeit über alle möglichen Übergänge des Atoms, so muss gerade das Absorptions- bzw. Emissionsvermögen des klassischen Oszillators herauskommen, d. h. es muss gelten:

$$\sum_k f_k = 1 \quad (8.22)$$

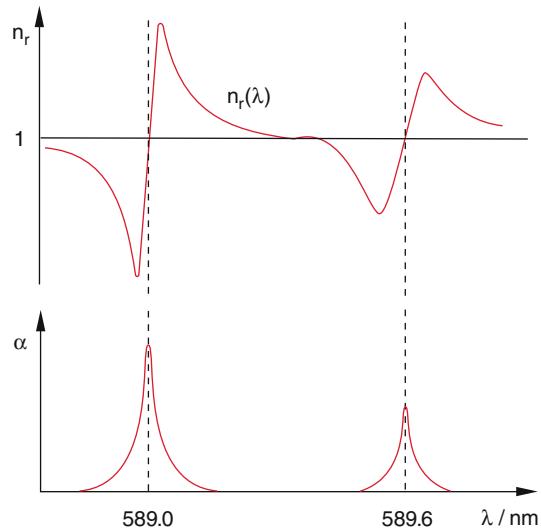
(Summenregel von Thomas, Reiche, Kuhn [8.1]).

Die einzelnen Atome können unabhängig voneinander auf einer ihrer Eigenfrequenzen  $\omega_k$  Energie aus der einfal- lenden Lichtwelle absorbieren. Die Gesamtabsoption ist dann die Summe der Anteile der einzelnen Atome. Entsprechend wird der Brechungsindex  $n$  statt (8.12a) durch die Formel

$$n = 1 + \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m_e} \sum_k \frac{N_k f_k}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2) + i\gamma_k \omega} \quad (8.23)$$



**Abbildung 8.6** Schematische Darstellung von  $\kappa(\omega)$  und  $n_r(\omega)$  für einen Frequenzbereich, in dem mehrere Absorptionsfrequenzen  $\omega_k$  liegen



**Abbildung 8.7** Beispiel von Dispersion und Absorption in der Umgebung der beiden Natrium D-Linien bei  $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$  und  $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$  (ohne Berücksichtigung der Hyperfeinstruktur)

bestimmt, wobei  $N_k$  die Zahl der Atome pro  $\text{m}^3$  ist, welche die Absorptionsfrequenz  $\omega_k$  haben. Absorptionskoeffizient  $\alpha(\omega)$  und Brechungsindex  $n_r(\omega)$  sehen also für Medien mit vielen Absorptionseigenfrequenzen  $\omega_k$  komplizierter aus als in Abb. 8.5 am Beispiel einer einzigen Absorptionsfrequenz  $\omega_0$  gezeigt wurde (Abb. 8.6). In Abb. 8.7 sind zur Illustration  $\alpha(\omega)$  und  $n_r(\omega)$  in der Umgebung der beiden gelben Natrium-D-Linien gezeigt.

Weil in Medien die Lichtgeschwindigkeit  $v_{\text{Ph}}(\omega)$  von der Frequenz  $\omega$  abhängt, unterscheiden sich Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (siehe Bd. 1, Abschn. 11.9.7). Es gilt wegen  $v_{\text{Ph}} = \omega/k$ :

$$v_G = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(v_{\text{Ph}} \cdot k) = v_{\text{Ph}} + k \cdot \frac{dv_{\text{Ph}}}{dk} .$$

Da  $k = k_0 \cdot n_r$  und  $v_{\text{Ph}} = c/n_r$  ist, lässt sich dies umformen in:

$$v_G = v_{\text{Ph}} + k_0 n_r \frac{d}{dk} \left( \frac{c}{n_r} \right)$$

$$= v_{\text{Ph}} - k_0 n_r c \frac{1}{n_r^2} \frac{dn_r}{dk} .$$

Nun gilt:

$$k = k_0 \cdot n_r = \frac{\omega}{c} n_r \Rightarrow dk = \frac{n_r}{c} d\omega + \frac{\omega}{c} dn_r$$

$$\Rightarrow \frac{dk}{dn_r} = \frac{n_r}{c} \frac{d\omega}{dn_r} + \frac{\omega}{c}$$

$$\Rightarrow v_G = v_{\text{Ph}} - \frac{v_{\text{Ph}} k_0}{\frac{1}{v_{\text{Ph}}} \frac{d\omega}{dn_r} + k_0} = \frac{v_{\text{Ph}}}{1 + \frac{\omega}{n_r} \frac{dn_r}{d\omega}}$$

$$v_G = \frac{c}{n_r + \omega \frac{dn_r}{d\omega}} . \quad (8.24)$$

Diese Relation bringt uns folgende Einsichten:

Aus Abb. 8.6 geht hervor, dass es Spektralbereiche gibt, in denen  $n_r < 1$  ist. Dort ist  $v_{\text{Ph}} = c/n_r > c$  also größer als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Um die Gruppengeschwindigkeit  $v_G$  zu bestimmen, berechnen wir aus (8.21a)  $dn_r/d\omega$  und erhalten:

$$\frac{dn_r}{d\omega} = \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{2\omega[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\gamma\omega_0)^2]}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]^2} . \quad (8.24a)$$

Für  $\omega_0^2 - \omega^2 > \gamma\omega_0$  wird  $dn_r/d\omega > 0$ . In diesem Bereich wird  $v_G < v_{\text{Ph}}$  und  $n_r$  nimmt mit zunehmender Wellenlänge  $\lambda$  ab! Man nennt dies das Gebiet der **normalen Dispersion**. Dann wird gemäß (8.24) immer  $v_G < v_{\text{Ph}}$ .

Den Bereich der **anomalen Dispersion**  $dn_r/d\omega < 0$  können wir wegen  $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$  auch darstellen als

$$\omega_0 - \gamma/2 \leq \omega \leq \omega_0 + \gamma/2 \Rightarrow \Delta\omega_{\text{ad}} = \gamma .$$

Dies ist der Frequenzbereich  $\Delta\omega$ , in dem gemäß (8.21b) die Absorption  $\kappa$  größer wird als die Hälfte des Maximalwertes  $\kappa(\omega_0)$ .

In den Bereichen anomaler Dispersion wird der Imaginärteil  $\kappa$  des komplexen Brechungsindex und daher auch der Absorptionskoeffizient  $\alpha(\omega)$  maximal.

Die Gruppengeschwindigkeit  $v_G$  wird gemäß (8.24) größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  für

$$n_r + \omega \frac{dn_r}{d\omega} < 1 .$$

Setzt man für  $n_r$  (8.21a) ein und bildet  $dn_r/d\omega$ , so erhält man die Bedingung

$$v_G > c \quad \text{für } |\omega_0 - \omega| < \gamma/2 , \quad (8.24b)$$

die gerade dem Bereich der anomalen Dispersion entspricht. Die Tatsache, dass  $v_G > c$  sein kann, ist auf den ersten Blick überraschend, weil es dem Postulat der Relativitätstheorie zu widersprechen scheint, die annimmt, dass die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  eine obere Schranke darstellt für alle Geschwindigkeiten, mit denen Signale übertragen werden können [8.2].

Das Ergebnis (8.24b) steht jedoch **nicht** im Widerspruch zu dieser Aussage. Dies sieht man folgendermaßen ein: Wir müssen unterscheiden zwischen verschiedenen Geschwindigkeiten:

- Die Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{Ph}} = c/n_r$
- Die Gruppengeschwindigkeit  $v_G = d\omega/dk$
- Die Energieflussgeschwindigkeit  $v_E$ , die durch  $I = v_E \cdot w_{\text{em}}$  definiert ist, wobei  $I$  die Intensität (Energieflussdichte) der elektromagnetischen Welle und  $w_{\text{em}}$  ihre Energiedichte angibt.

Es zeigt sich, dass in allen Medien immer gilt:

$$v_E \leq c .$$

Schließlich wird noch die Signalgeschwindigkeit  $v_S$  eingeführt, mit der Signale übertragen werden können. Auch für sie gilt:  $v_S \leq c$ . Um ein Signal zu übertragen, muss das einfallende Licht eine zeitspezifische Intensitätsänderung aufweisen, wie dies z. B. bei einem kurzen Lichtpuls der Fall ist, dessen Maximum als Signalzeit dient [8.2].

Im Bereich der anomalen Dispersion, in dem  $v_G > c$  wird, ändert sich  $n(\omega)$  sehr stark. Ein Puls mit der Länge  $\Delta T$  hat die Frequenzbreite  $\Delta\omega > 1/\Delta T$ , er enthält also ein umso breiteres Frequenzspektrum, je kürzer er ist (Fourier-Relation). Die einzelnen Frequenzanteile haben wegen des großen Wertes von  $dn/d\omega$  verschiedene große Phasengeschwindigkeiten. Die Überlagerung dieser Frequenzanteile nach Durchlaufen des Mediums gibt deshalb einen Puls, dessen zeitlicher Verlauf verschieden ist von dem beim Eintritt in das Medium. Ein solcher verformter Puls kann deshalb die Eingangsinformation nicht mehr oder nur in verzerrter Form enthalten. [8.2]. Das Maximum des Pulses läuft mit einer Geschwindigkeit  $v_S$ , die verschieden ist von  $v_G$ , und es zeigt sich, dass sie immer kleiner als  $c$  ist [8.3–8.5].

**Anmerkung.** In den letzten Jahren wurden Experimente gemacht, bei denen Licht durch ein speziell präpariertes Medium eines atomaren Gases geschickt wurde. Die Atome des Gases wurden durch optisches Pumpen in sogenannte „Dunkelzustände“ gebracht. Dabei wurde festgestellt, dass das Licht ungewöhnlich lang brauchte, um das Medium zu durchlaufen. Mittlere Geschwindigkeiten von wenigen m/s wurden gemessen [8.6]. Der Grund für diese extrem kleinen Geschwindigkeiten ist der folgende:

Die Atome in diesen speziellen Zuständen absorbieren das Licht und geben es erst nach relativ langer Zeit wieder als Emission ab. Zwischen zwei Absorptionen durch verschiedene Atome läuft das Licht mit der normalen Vakuum-Lichtgeschwindigkeit. Das Licht ist deshalb eigentlich nicht langsamer geworden, sondern wurde nur für einen großen Teil der Transitzeit durch das Medium in potentielle Energie der angeregten Atome umgewandelt. Dies ist analog zur Verlangsamung der Lichtgeschwindigkeit auf  $c_n = c/n$  beim Durchlaufen eines Mediums mit Brechzahl  $n$  (siehe Abschn. 8.1) [8.7].

**Anmerkung.** Oft wird die Wellenzahl  $k$  für Wellen in Materie als komplexe Zahl

$$k = n \cdot \omega/c = n \cdot k_0 = k_0(n_r - ik)$$

eingeführt. Dadurch kann man Wellen im Vakuum und in Materie durch die gleiche Formel

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - kz)} = \mathbf{E}_0 \cdot e^{-\kappa(\omega/c)z} \cdot e^{i(\omega t - n_r(\omega/c)z)} \\ &= \mathbf{E}_0 \cdot e^{-(\alpha/2)z} \cdot e^{i(\omega t - n_r k_0 z)} \end{aligned}$$

beschreiben.

### 8.3 Wellengleichung für elektromagnetische Wellen in Materie

Wir gehen aus von den Maxwell-Gleichungen (4.26), die aufgrund der Überlegungen in den Abschnitten 1.7.3 und 3.5.2 in Materie mit der freien Ladungsdichte  $\varrho$  und der Stromdichte  $\mathbf{j}$  die Form haben:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \mu_0 \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right), \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{aligned}$$

mit der dielektrischen Verschiebungsdichte

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

wobei  $\mathbf{P}$  die dielektrische Polarisation ist.

#### 8.3.1 Wellen in nichtleitenden Medien

In Isolatoren ist  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ , da hier keine Leitungsströme fließen. In ungeladenen Isolatoren sind auch keine freien Ladungsträger vorhanden, sodass  $\varrho = 0$  gilt.

Analog zu der Herleitung der Wellengleichung im Vakuum (Abschn. 7.1) erhalten wir die Wellengleichung

$$\Delta \mathbf{E} = \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{v_{\text{Ph}}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (8.25a)$$

für Wellen in Materie mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v_{\text{Ph}} = c' = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}}. \quad (8.26)$$

Eine analoge Gleichung

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (8.25b)$$

ergibt sich für das magnetische Feld.

Für nicht ferromagnetische Medien ist  $\mu \approx 1$  (siehe Abschn. 3.5).

Der Vergleich von (8.26) mit (8.1) zeigt, dass der Brechungsindex  $n$  mit der relativen Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  verknüpft ist durch:

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \quad (8.26a)$$

Setzt man in die Maxwell-Gleichung

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

den Ausdruck  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  ein, so erhält man mit  $\mu = 1$  statt (8.25) die völlig analoge Gleichung:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (8.25c)$$

Sie enthält in prägnanter Form das bereits im Abschnitt 8.1 diskutierte Ergebnis: Die Welle im Medium besteht aus der mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  (!) laufenden Primärwelle (1. Term in (8.25c)), der sich die durch die induzierten atomaren Dipole erzeugten Sekundärwellen überlagern (2. Term). Auch diese Sekundärwellen breiten sich mit der Geschwindigkeit  $c$  aus.

Die kleinere Geschwindigkeit  $c' = c/n$  kommt durch die Phasenverschiebung zwischen Sekundärwellen und Primärwelle zustande (Abb. 8.2).

Aus  $\mathbf{B} = 1/\omega (\mathbf{k} \times \mathbf{E})$  (7.16a) folgt mit  $\mathbf{k} = nk_0$  und  $|\mathbf{k}_0|/\omega = 1/c$ ,  $\hat{\mathbf{k}}_0 = \mathbf{k}_0/|\mathbf{k}_0|$

$$\mathbf{B} = \frac{n}{c} (\hat{\mathbf{k}}_0 \times \mathbf{E}) = \frac{|n|}{c} (\hat{\mathbf{k}}_0 \times \mathbf{E}) e^{i\varphi_B}, \quad (8.27)$$

wenn der komplexe Brechungsindex  $n = n_r - i\kappa$  geschrieben wird als

$$n = |n| \cdot e^{i\varphi_B} \quad \text{mit} \quad \tan \varphi_B = -\frac{\kappa}{n_r}.$$

Man sieht hieraus, dass in absorbierenden Medien ( $\kappa \neq 0$ ) elektrisches Feld  $\mathbf{E}$  und magnetisches Feld  $\mathbf{B}$  nicht mehr in Phase sind.

Für den einfachsten Fall eines isotropen und homogenen Mediums hat bei einer einfallenden ebenen Welle

$$\mathbf{E} = \{E_x, 0, 0\} = \left\{E_0 \cdot e^{i(\omega t - kz)}, 0, 0\right\}$$

die dielektrische Polarisation nur eine Komponente  $P_x$ , für die bei nicht zu großen Feldstärken (Bereich der linearen Optik) gilt:

$$P_x = N\alpha E_x = N\alpha E_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad (8.28)$$

wobei  $N$  die Zahl der induzierten Dipole pro Volumeneinheit und  $\alpha$  ihre Polarisierbarkeit ist (siehe Abschn. 1.7).

Setzt man (8.28) in (8.25c) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} -k^2 E_x &= -\frac{\omega^2}{c^2} E_x - \frac{\omega^2 N\alpha}{\epsilon_0 c^2} E_x \\ \Rightarrow k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} (1 + N\alpha/\epsilon_0). \end{aligned} \quad (8.29)$$

Mit  $v_{ph} = c/n = \omega/k \Rightarrow n = c \cdot k/\omega$  folgt

$$n^2 = 1 + N\alpha/\epsilon_0. \quad (8.30)$$

Dies ist der Zusammenhang zwischen Brechungsindex  $n$  und Polarisierbarkeit  $\alpha$  der Atome des Mediums.

Das induzierte Dipolmoment  $p = -ex$  jedes atomaren Dipols, bei dem die Ladung  $-e$  durch das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  der Welle die Auslenkung  $x$  erfährt, ist dann gemäß (8.6a)

$$p = \frac{e^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}.$$

Andererseits ist  $p = \alpha(\omega) \cdot E$ , sodass wir für die Polarisierbarkeit erhalten:

$$\alpha = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}. \quad (8.31)$$

Der Vergleich mit (8.30) gibt schließlich

$$n^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}. \quad (8.32)$$

Diese Relation gilt auch für größere Werte von  $(n-1)$ . Für  $(n-1) \ll 1$  geht (8.32) wegen  $(n^2 - 1) \approx (n-1) \cdot 2$  wieder in (8.12) über.

**Man beachte:** In magnetischen Materialien ist die magnetische relative Permeabilität  $\mu \neq 1$ . Für den Brechungsindex  $n$  gilt dann:

$$\begin{aligned} n^2 &= \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \mu \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2} \epsilon \mu \\ \Rightarrow n &= \pm \sqrt{\epsilon \mu}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Man kann seit kurzem mikroskopische Strukturen aus Induktivitäten und Kondensatoren realisieren, für die gilt:  $\epsilon < 0$  und  $\mu < 0$ . Man kann zeigen [8.8], dass für diese Fälle das Minuszeichen in (8.33) gilt, d.h. *der Brechungsindex wird negativ!* Dies hat zur Folge, dass der Poyntingvektor

$$\mathbf{S} = \epsilon \epsilon_0 c^2 \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

für  $\epsilon < 0$  in die entgegengesetzte Richtung wie der Wellenvektor  $\mathbf{k}$  zeigt.

Für *Medien mit negativem Brechungsindex* ist der Energiefloss entgegengerichtet zur Ausbreitungsrichtung der Welle [8.8] (siehe auch Abschn. 8.4.4).

### 8.3.2 Wellen in leitenden Medien

Wenn eine elektromagnetische Welle in ein leitendes Medium mit der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma$  eindringt, so erzeugt die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$  der Welle einen elektrischen Strom mit der Stromdichte  $\mathbf{j}$ . Man kann daher in der Maxwell-Gleichung (4.26b) nicht mehr wie bei Isolatoren  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$  setzen. Verfährt man zur Ableitung der Wellengleichung wie in Abschn. 8.3.1, so erhält man mit  $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$  statt (8.25a) die Wellengleichung in leitenden Medien:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{v_{ph}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (8.34)$$

### 8.3 Wellengleichung für elektromagnetische Wellen in Materie

Der zusätzliche Term  $\mu\mu_0\sigma \cdot \partial\mathbf{E}/\partial t$  entspricht dem Dämpfungsterm  $-\gamma dx/dt$  in der Bewegungsgleichung des gedämpften Oszillators. Die Lösung von (8.34) für eine ebene Welle, die in  $z$ -Richtung durch das Medium läuft, muss deshalb eine gedämpfte Welle

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 \cdot e^{-(\alpha/2)z} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \quad (8.35)$$

mit dem Absorptionskoeffizienten  $\alpha$  sein.

Wir wollen uns überlegen, wie der Absorptionskoeffizient  $\alpha$  mit der Leitfähigkeit  $\sigma$  zusammenhängt:

Bei einem elektrisch leitenden Medium liefern bei genügend hohen Frequenzen  $\omega$  die freien Leitungselektronen den Hauptanteil zum Brechungsindex. Da hier die Rückstellkraft null ist (im Gegensatz zu den gebundenen Atomelektronen, die durch Rückstellkräfte mit der Federkonstante  $k = m \cdot \omega_0^2$  an ihre Ruhelage gebunden sind), ist in (8.32)  $\omega_0 = 0$ . Wir erhalten daher für den Brechungsindex

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2/(\varepsilon_0 m)}{\omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (8.36)$$

Die Dämpfungskonstante  $\gamma$  ist durch Stöße der freien Leitungselektronen bestimmt. Für eine mittlere Zeit  $\tau$  zwischen zwei Stößen gilt:  $\gamma = 1/\tau$ .

Man kann (8.36) mithilfe der **Plasmafrequenz**

$$\omega_p = \sqrt{\frac{N \cdot q^2}{\varepsilon_0 \cdot m}} \quad (8.37)$$

beschreiben. Dabei ist  $\omega_p$  die Resonanzfrequenz, mit der Ladungsträger mit der Ladung  $q$  und der Teilchenzahl dichte  $N$  gegen die entgegengesetzt geladenen Teilchen eines Plasmas (= ionisiertes Gas), das als Ganzes neutral ist, schwingen. In Metallen sind die Ladungsträger die Leitungselektronen mit der Ladung  $q = -e$ , die gegen die positiven Ionen des Festkörpers schwingen. Setzt man (8.37) in (8.36) ein, so ergibt sich

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\gamma\omega} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \left(1 - \frac{i}{\omega\tau}\right)}. \quad (8.38)$$

Mit dem komplexen Brechungsindex  $n = n_r - ik \Rightarrow n^2 = (n_r - ik)^2 = n_r^2 - k^2 - 2in_r\kappa$  folgt nach Erweiterung des Bruchs in (8.38) mit  $1+i/(\omega\tau)$  durch Vergleich von Real- und Imaginärteilen

$$n_r^2 - k^2 = \frac{1 + \tau^2 (\omega^2 - \omega_p^2)}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (8.39a)$$

$$2n_r\kappa = \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega (1 + \omega^2 \tau^2)}. \quad (8.39b)$$

Um die elektrische Leitfähigkeit zu bestimmen, gehen wir von der Bewegungsgleichung eines gedämpften Elektrons ohne Rückstellkraft unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes  $E = E_0 \exp[-i\omega t]$  aus:

$$m \left( \frac{dv}{dt} + \gamma v \right) = e \cdot E_0 e^{-i\omega t}.$$

Mit dem Ansatz:  $v = v_0 \cdot e^{-i\omega t}$  erhält man

$$v_0 = \frac{eE_0}{m} \frac{1}{\gamma - i\omega}.$$

Da die mittlere Stromdichte bei einer Ladungsträgerkonzentration  $N$  durch  $j = \sigma_{el} \cdot E = N \cdot e \cdot v_0$  gegeben ist, (siehe Abschn. 2.2) erhalten wir mit  $\gamma = 1/\tau$  für die elektrische Leitfähigkeit

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &= \frac{Ne^2}{m} \frac{\tau}{1 - i\omega\tau} = \varepsilon_0 \omega_p^2 \frac{\tau}{1 - i\omega\tau} \\ &= \varepsilon_0 \omega_p^2 \frac{\tau (1 + i\omega\tau)}{1 + \omega^2 \tau^2}. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Der Vergleich zwischen Real- und Imaginärteil in (8.39a,b) und (8.40) ergibt den Zusammenhang

$$n_r^2 - k^2 = 1 - \frac{\text{Re}(\sigma_{el})}{\varepsilon_0/\tau}; \quad 2n_r\kappa = \frac{\text{Im}(\sigma_{el})}{\varepsilon_0 \omega^2 \tau} \quad (8.41)$$

zwischen Absorptionskoeffizient<sup>1</sup>  $\alpha$  und elektrischer Leitfähigkeit  $\sigma_{el}$ :

Es ist aufschlussreich, sich die beiden Grenzfälle kleiner Frequenzen ( $\omega\tau \ll 1$ ) und großer Frequenzen ( $\omega\tau \gg 1$ ) anzusehen.

a)  $\omega\tau \ll 1 \ll \omega_p\tau$

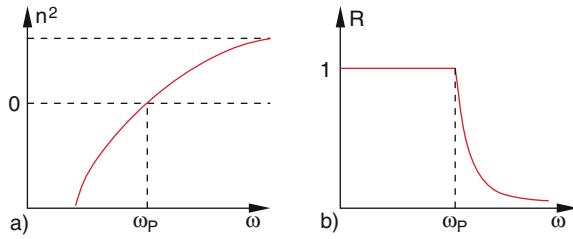
Für die Leitfähigkeit erhalten wir aus (8.40):

$$\sigma_{el} \approx \varepsilon_0 \cdot \tau \cdot \omega_p^2. \quad (8.42a)$$

Sie ist in dieser Näherung unabhängig von der Frequenz  $\omega$ . Für den komplexen Brechungsindex ergibt sich aus (8.38)

$$\begin{aligned} n_r - ik &= \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega(\omega\tau - i)}} \\ &\approx \sqrt{1 - i \cdot \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega}} \approx \sqrt{-i \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega}}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Leider werden Absorptionskoeffizient und Polarisierbarkeit mit dem gleichen Buchstaben  $\alpha$  benannt.



**Abbildung 8.8** a Quadrat des Brechungsindex  $n^2$  b Reflexionsvermögen  $R$  von Metallen als Funktion der Frequenz der einfallenden Welle

Wegen  $\sqrt{-i} = (1-i)/\sqrt{2}$  erhält man:

$$n_r = \kappa = \sqrt{\omega_p^2 \tau / 2\omega}. \quad (8.42b)$$

*Real- und Imaginärteil des Brechungsindex sind für  $\omega\tau \ll 1 \ll \omega_p\tau$  gleich groß!*

### Beispiel

In einem Metall ist  $N \approx 8 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \Rightarrow \omega_p = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ . Die mittlere Zeit zwischen Stößen der Elektronen ist  $\tau \approx 2 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ . Für Frequenzen  $\omega = 2 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$  ( $\lambda = 94 \mu\text{m}$ ) wird  $\omega\tau = 0,4$ ,  $\omega_p \cdot \tau = 320$ ,  $\omega_p^2 \cdot \tau = 5 \cdot 10^{18}$  und

$$n_r = \kappa = 354.$$

Die Eindringtiefe der elektromagnetischen Welle (auch Skintiefe genannt) ist

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{\lambda}{4\pi\kappa} = \frac{\lambda}{4775} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

Die Welle dringt also kaum in das Metall ein.

b)  $\omega_p\tau > \omega\tau \gg 1$

Hier wird die Leitfähigkeit

$$\sigma_{el} \approx i \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega} \quad (8.42c)$$

und aus (8.38) ergibt sich

$$n^2 \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (8.42d)$$

Für  $\omega < \omega_p$  wird  $n^2 < 0 \Rightarrow n = n_r - ik$  wird rein imaginär, d. h.  $n_r = 0$  (Abb. 8.8a). Die Welle pflanzt sich im Medium nicht fort, sondern wird total reflektiert (Abb. 8.8b). Sie dringt aber etwas in das Medium ein.

Der Absorptionskoeffizient ergibt sich zu

$$\alpha = \frac{4\pi\kappa}{\lambda} = \frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = \frac{2}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}. \quad (8.42e)$$

Die Eindringtiefe ist:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{c}{2\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}. \quad (8.42f)$$

Für  $\omega > \omega_p$  wird  $n$  reell. Das Medium wird durchsichtig!

Die Plasmafrequenz  $\omega_p$  hängt in diesem einfachen Modell nur von der Elektronendichte  $N$  ab, d. h. die Grenzfrequenz  $\omega_p$ , bei der Metalle durchsichtig werden, steigt mit  $\sqrt{N}$ .

**Anmerkung.** In diesem einfachen Modell wurde der Einfluss der gebundenen Atomelektronen vernachlässigt, welcher mit abnehmender Wellenlänge zunimmt, sodass auch für  $\omega > \omega_p$  eine Restabsorption bleibt, die auf die Absorption durch gebundene Elektronen zurückzuführen ist.

### Beispiele

- Für Kupfer ist  $\sigma \approx 6 \cdot 10^7 \text{ A/Vm}$ ,  $\tau = 2,7 \cdot 10^{-14} \text{ s} \Rightarrow \omega_p = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1} \Rightarrow v_p = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \Rightarrow \lambda = 120 \text{ nm}$ , d. h. für  $\lambda > 120 \text{ nm}$  ist der Brechungsindex von Kupfer imaginär, d. h. es tritt Absorption auf. Für  $\lambda < 120 \text{ nm}$  wird Kupfer transparent.
- Für  $\omega = 10^{13} \text{ s}^{-1}$  ( $\lambda = 180 \mu\text{m}$ ) ist  $\omega\tau \ll 1$  und  $n = 580(1-i) \Rightarrow \alpha = 3,8 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ . Die Eindringtiefe ist  $\delta = 1/\alpha \approx 26 \text{ nm}$ .
- Für  $\omega = 3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$  ( $\lambda = 600 \text{ nm}$ ) ist  $\omega\tau \gg 1$  und nach (8.42d)  $n^2 = -27 \Rightarrow n = n_r - ik$  mit  $n_r \approx 0$  und  $k = 5,2$ . Der Absorptionskoeffizient ist daher  $\alpha \approx 10^8 \text{ m}^{-1}$ . Die einlaufende Welle wird total reflektiert, dringt aber noch etwas in das Medium ein. Die Eindringtiefe ist jetzt nur noch  $\delta \approx 10^{-8} \text{ m} = 10 \text{ nm}$ .
- Für  $\omega = 3 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$  ( $\lambda \approx 600 \mu\text{m}$ )  $\Rightarrow n = 10^3(1-i)$  sind Real- und Imaginärteil gleich groß. Die Eindringtiefe wird  $\delta \approx 15 \text{ nm}$ . Allerdings versagt hier schon unser einfaches Modell, weil nicht nur die freien Elektronen, sondern auch die Atomschwingungen zur Absorption beitragen.
- In den ionisierten Gasschichten der Erdatmosphäre (Heaviside-Schicht, siehe Abschn. 7.9.4) ist  $N \approx 10^{11} \text{ m}^{-3} \Rightarrow \omega_p = 2 \cdot 10^7 \text{ rad/s} \Rightarrow v_p \approx 3 \text{ MHz}$ . Radiowellen mit  $v < 3 \text{ MHz}$  werden an dieser Schicht total reflektiert.

### 8.3.3 Die elektromagnetische Energie von Wellen in Medien

In einem isotropen Medium mit dem komplexen Brechungsindex  $n = n_r - i\kappa$  wird der Wellenvektor

$$\mathbf{k} = n \cdot \mathbf{k}_0 ,$$

wenn  $\mathbf{k}_0$  mit  $|\mathbf{k}_0| = \omega/c$  der Wellenvektor im Vakuum ist.

Für das Magnetfeld der Welle gilt nach (8.27)

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{1}{\omega}(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \frac{n}{c}(\hat{\mathbf{k}}_0 \times \mathbf{E}) \\ &= \frac{|n|}{c}(\hat{\mathbf{k}}_0 \times \mathbf{E}) e^{i\varphi_B} = \frac{1}{v_{ph}}(\hat{\mathbf{k}}_0 \times \mathbf{E}) e^{i\varphi_B} . \end{aligned}$$

$\mathbf{B}$  steht wie im Vakuum senkrecht auf  $\mathbf{E}$  und auf der Ausbreitungsrichtung. Bei komplexem Brechungsindex brauchen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{E}$  nicht mehr in Phase zu sein! Ist der Imaginärteil des Brechungsindex klein gegen den Realteil (geringe Absorption), so ist die Phasenverschiebung jedoch vernachlässigbar.

Der Poyntingvektor der Welle ist

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \epsilon\epsilon_0 v_{ph}^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) . \quad (8.43)$$

Setzen wir für  $\mathbf{E}$  den Ausdruck (8.35) ein und für  $\mathbf{B}$  die Relation (8.27), so erhalten wir mit

$$\mathbf{E} = E_0 \cdot e^{i\omega(t-nz/c)} = E_0 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}z} \cdot e^{+i\varphi}$$

( $\varphi = \omega(t - n_r z/c)$ ) für den Betrag des Poyntingvektors

$$|\mathbf{S}| = \epsilon\epsilon_0 v_{ph} E_0^2 e^{-\alpha z} \cos \varphi \cos(\varphi + \varphi_B) , \quad (8.44a)$$

wobei  $\alpha = 2k_0\kappa$  der Absorptionskoeffizient ist. Der zeitliche Mittelwert  $\langle \mathbf{S} \rangle$  kann wegen

$$\begin{aligned} &\langle \cos \varphi \cdot \cos(\varphi + \varphi_B) \rangle \\ &= \langle \cos^2 \varphi \cdot \cos \varphi_B - \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi_B \rangle \\ &= \frac{1}{2} \cos \varphi_B \end{aligned}$$

und wegen

$$\tan \varphi_B = -\kappa/n_r \Rightarrow \cos \varphi_B = \frac{n_r}{|n|}$$

geschrieben werden als

$$\langle |\mathbf{S}| \rangle = \frac{\epsilon\epsilon_0 c n_r}{2 |n|^2} E_0^2 . \quad (8.44b)$$

### 8.4 Wellen an Grenzflächen zwischen zwei Medien

Die zeitlich gemittelte Intensität einer Welle in einem Medium mit Brechzahl  $n$  ist daher

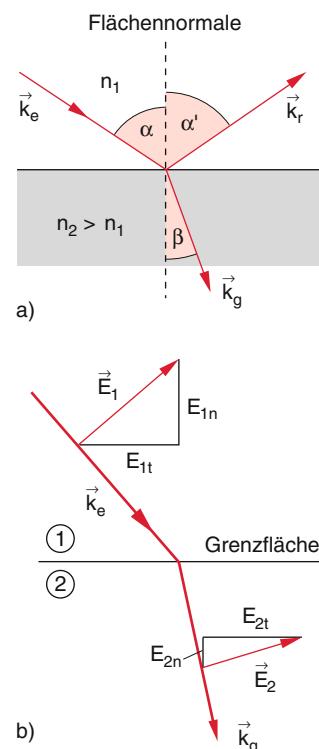
$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 c n_r / |n|^2 \cdot E_0^2 e^{-\alpha z} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 v_{ph} E_0^2 e^{-\alpha z} \cos \varphi_B \end{aligned} \quad (8.44)$$

### 8.4 Wellen an Grenzflächen zwischen zwei Medien

Eine ebene Welle

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{A}_e \cdot e^{i(\omega_e t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})} \quad (8.45a)$$

möge auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes  $n_1$  bzw.  $n_2$  treffen (Abb. 8.9). Nach den in Abschn. 8.2 entwickelten Vorstellungen regt die einfallende Welle in beiden Medien die



**Abbildung 8.9** a Wellenvektor von einfallender, gebrochener und reflektierter Welle an der ebenen Grenzfläche zwischen zwei Medien. b Zerlegung der elektrischen Feldstärke in Tangential- und Normalkomponente

Atomelektronen zu erzwungenen Schwingungen an. Die ausgestrahlten Sekundärwellen der schwingenden Dipole überlagern sich der Primärwelle. Die Frage ist nun, wie das gesamte Wellenfeld auf beiden Seiten der Grenzfläche aussieht.

Das Experiment zeigt, dass die einfallende Welle (8.45a) aufspaltet in

- eine gebrochene Welle

$$\mathbf{E}_g = A_g \cdot e^{i(\omega_g t - k_g \cdot r)}, \quad (8.45b)$$

die in das Medium 2 eindringt und im Allgemeinen eine andere Richtung hat als die einfallende Welle, und

- eine reflektierte Welle

$$\mathbf{E}_r = A_r \cdot e^{i(\omega_r t - k_r \cdot r)}. \quad (8.45c)$$

Wir wollen nun Relationen zwischen den Amplituden  $A_i$ , den Frequenzen  $\omega_i$  und den Wellenvektoren  $\mathbf{k}_i$  der drei Wellen finden.

#### 8.4.1 Randbedingungen für elektrische und magnetische Feldstärke

Wir zerlegen die Vektoren  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  in eine Komponente  $\mathbf{E}_t$  bzw.  $\mathbf{B}_t$  parallel zur Grenzfläche (Tangentialkomponente (Abb. 8.9b)) und eine Komponente  $\mathbf{E}_n$  bzw.  $\mathbf{B}_n$  senkrecht zur Grenzfläche (Normalkomponente). Wir schreiben die Vektoren also als  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_n$ ;  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_n$ . Dies gilt für eine beliebige Orientierung von  $\mathbf{E}_e \perp \mathbf{k}_e$ . Beim Übergang der Welle von Medium 1 zu Medium 2 müssen die Tangentialkomponente  $\mathbf{E}_t$  und die Normalkomponente  $\mathbf{B}_n$  stetig sein, d. h.  $\mathbf{E}_t(1) = \mathbf{E}_t(2)$ ;  $\mathbf{B}_n(1) = \mathbf{B}_n(2)$  (siehe Abschn. 1.7.3 und 3.5.7). Wir schreiben:  $E_t(1) = E_{1t}$ ,  $E_n(2) = E_{2n}$  etc.

Wie wir bereits im Abschn. 1.7 gesehen haben, sinkt die elektrische Feldstärke in einem Medium mit der relativen Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon$ , welches in das homogene Feld eines Plattenkondensators gebracht wird, auf  $1/\epsilon$  ihres Vakuumwertes.

Da sich die Tangentialkomponente  $\mathbf{E}_t$  nicht ändert, muss dieser Sprung allein auf die Normalkomponente zurückgeführt werden. Daher gilt beim Übergang zwischen zwei Medien mit den relativen Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_1, \epsilon_2$  die Relation

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{n_2^2}{n_1^2}, \quad (8.46)$$

weil für den Brechungsindex  $n \approx \sqrt{\epsilon}$  gilt, falls Absorption und magnetische Suszeptibilität vernachlässigt werden können.

Bei der magnetischen Feldstärke liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt. Hier gilt nach Abschn. 3.5.7

$$B_{1n} = B_{2n}; \quad \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (8.47)$$

Da jedoch für alle nicht ferromagnetischen Materialien die relative Permeabilitätskonstante  $\mu \approx 1$  ist, gilt hier im Allgemeinen auch  $B_{1t} \approx B_{2t}$ .

#### 8.4.2 Reflexions- und Brechungsgesetz

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass die Grenzfläche in der  $x$ - $z$ -Ebene liegt und der Wellenvektor  $\mathbf{k}_e$  der einfallenden Welle in der  $x$ - $y$ -Ebene (Abb. 8.10). Die Ebene, welche durch  $\mathbf{k}_e$  und die Normale  $N$  auf der Grenzfläche bestimmt ist, heißt **Einfallsebene** (in Abb. 8.10 ist dies die  $x$ - $y$ -Ebene). Für die drei Wellen (8.45a–c) folgt dann aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente  $E_t$ :

$$E_{et} + E_{rt} = E_{gt}. \quad (8.48a)$$

Für den Koordinatenursprung ( $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ) ergibt dies:

$$A_{et} e^{i(\omega_e t)} + A_{rt} e^{i(\omega_r t)} = A_{gt} e^{i(\omega_g t)}. \quad (8.48b)$$

Diese Gleichung hat für beliebige Zeiten  $t$  nur dann nicht-triviale Lösungen, wenn gilt:

$$\omega_e \equiv \omega_r \equiv \omega_g, \quad (8.49)$$

d. h. alle drei Wellen haben die gleiche Frequenz  $\omega$ .

Beim Übergang vom Medium 1 ins Medium 2, bei dem sich für verschiedene Brechzahlen  $n_1, n_2$  die Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph} = c' = c/n = v \cdot \lambda = \omega \cdot \lambda / 2\pi$$

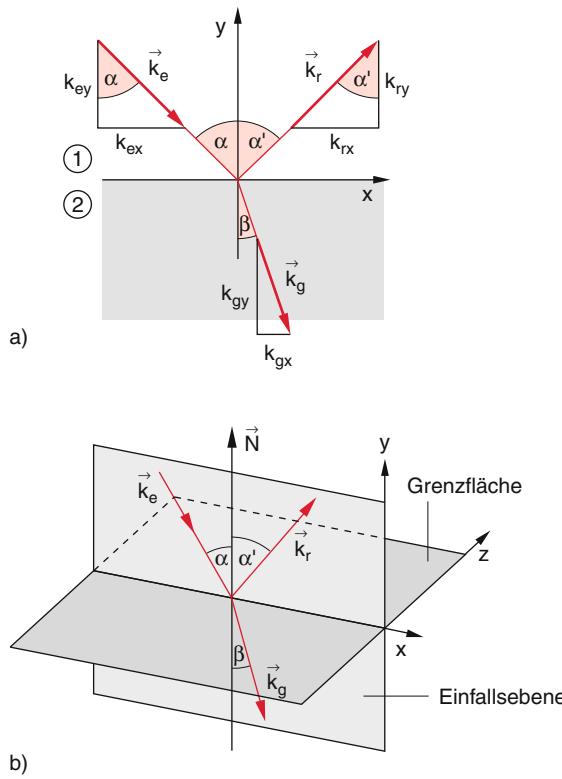
ändert, kann sich daher nur die Wellenlänge  $\lambda$  ändern, *nicht* die Frequenz  $\omega$ !

Aus der Bedingung (8.48a), die ja für beliebige Punkte  $\mathbf{r}$  der Grenzfläche gelten muss, folgt insbesondere, dass an jedem Ort  $\mathbf{r}$  der Grenzfläche die Phasen der drei Wellen gleich sein müssen. Zusammen mit (8.49) folgt daraus:

$$\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_g \cdot \mathbf{r}. \quad (8.50)$$

Da die Grenzfläche in Abb. 8.10 in der  $x$ - $z$ -Ebene liegt, gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x \hat{\mathbf{e}}_x + z \hat{\mathbf{e}}_z, \\ \mathbf{k}_e &= k_{ex} \hat{\mathbf{e}}_x + k_{ey} \hat{\mathbf{e}}_y. \end{aligned} \quad (8.51)$$



**Abbildung 8.10** Wahl des Koordinatensystems für die Beschreibung von Reflexion und Brechung. **a** Einfallsebene als Zeichenebene; **b** perspektivische Darstellung

Da wir über die Richtungen von  $\mathbf{k}_g$  und  $\mathbf{k}_r$  noch nichts wissen, setzen wir allgemein an:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_r &= k_{rx}\hat{\mathbf{e}}_x + k_{ry}\hat{\mathbf{e}}_y + k_{rz}\hat{\mathbf{e}}_z, \\ \mathbf{k}_g &= k_{gx}\hat{\mathbf{e}}_x + k_{gy}\hat{\mathbf{e}}_y + k_{gz}\hat{\mathbf{e}}_z.\end{aligned}$$

Einsetzen in (8.50) liefert mit (8.51)

$$k_{ex}x = k_{rx}x + k_{rz}z = k_{gx}x + k_{gz}z. \quad (8.52)$$

Da diese Gleichung für alle Punkte der Grenzfläche, d. h. für beliebige Werte von  $x$  und  $z$ , gelten muss, folgt:

$$\begin{aligned}k_{ex} &= k_{rx} = k_{gx}, \\ k_{rz} &= k_{gz} = 0.\end{aligned} \quad (8.53)$$

Das bedeutet:

Auch die Wellenvektoren von reflektierter und gebrochener Welle liegen in der Einfallsebene. Alle drei Wellen pflanzen sich in derselben Ebene fort.

## 8.4 Wellen an Grenzflächen zwischen zwei Medien

In Abb. 8.10a ist diese Einfallsebene die Bildebene. Man entnimmt der Zeichnung unmittelbar die Relationen:

$$\begin{aligned}k_{ex} &= k_e \cdot \sin \alpha, \\ k_{rx} &= k_r \cdot \sin \alpha', \\ k_{gx} &= k_g \cdot \sin \beta.\end{aligned} \quad (8.54)$$

Da für die Phasengeschwindigkeit  $v_{ph} = c'$  der elektromagnetischen Wellen gilt:  $v_{ph} = c/n$ , folgt für die Beträge der Wellenvektoren in einem Medium mit Brechungsindex  $n$ :

$$k = \frac{\omega}{c'} = n \cdot \frac{\omega}{c}. \quad (8.55)$$

Da  $\omega$  in beiden Medien denselben Wert hat, ergibt sich aus (8.55) mit (8.54)

$$\frac{\sin \alpha}{c'_1} = \frac{\sin \alpha'}{c'_1} = \frac{\sin \beta}{c'_2}. \quad (8.56)$$

Dies bedeutet:

$$\sin \alpha = \sin \alpha' \Rightarrow \alpha = \alpha'. \quad (8.57)$$

Einfallswinkel  $\alpha$  und Reflexionswinkel  $\alpha'$  sind gleich. Zwischen dem Einfallswinkel  $\alpha$  und dem Winkel  $\beta$  der gebrochenen Welle besteht folgende Beziehung:

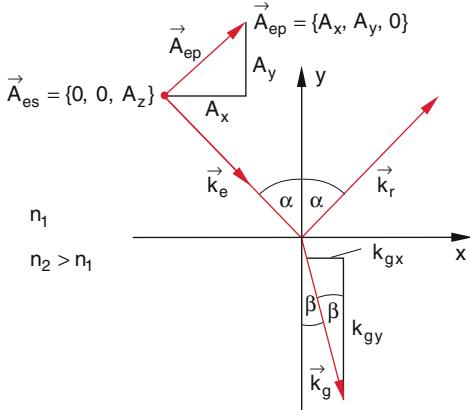
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c'_1}{c'_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (8.58)$$

(*Snellius'sches Brechungsgesetz*).

### 8.4.3 Amplitude und Polarisation von reflektierten und gebrochenen Wellen

Man kann die Amplitudenvektoren  $\mathbf{A}$  der drei Wellen (8.45) zerlegen in Komponenten  $\mathbf{A}_p$  parallel und  $\mathbf{A}_s$  senkrecht zur Einfallsebene (Abb. 8.11). Dies sollte nicht verwechselt werden mit den Komponenten  $\mathbf{E}_t$  bzw.  $\mathbf{E}_n$  parallel bzw. senkrecht zur Grenzfläche.

Bei unserer Wahl des Koordinatensystems hat die Parallelkomponente  $\mathbf{A}_p = \{A_x, A_y, 0\}$  eine  $x$ - und eine  $y$ -Komponente, während die senkrechte Komponente  $\mathbf{A}_s = \{0, 0, A_z\}$  in  $z$ -Richtung zeigt, also tangential zur Grenzfläche ist.



**Abbildung 8.11** Zur Herleitung der Fresnel-Gleichungen. Die Komponente  $A_{es}$  steht senkrecht auf der Zeichenebene

Aus der Stetigkeit von  $E_s$  an der Grenzfläche folgt mit (8.48b) und (8.49) sofort:

$$A_{es} + A_{rs} = A_{gs}. \quad (8.59a)$$

Für die Tangentialkomponenten des magnetischen Feldvektors folgt aus (8.47) und (8.27) für nicht ferromagnetische Materialien ( $\mu \approx 1$ ) wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{n}{c k_0} (\mathbf{k}_0 \times \mathbf{E}) = \frac{n}{\omega} (\mathbf{k}_0 \times \mathbf{E}) = 1/\omega (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \\ (\mathbf{k}_e \times \mathbf{E}_e)_x + (\mathbf{k}_r \times \mathbf{E}_r)_x &= (\mathbf{k}_g \times \mathbf{E}_g)_x, \end{aligned}$$

was für die Komponente  $E_s$  senkrecht zur Einfallsebene die Bedingung:

$$k_{ey} A_{es} + k_{ry} A_{rs} = k_{gy} A_{gs} \quad (8.59b)$$

ergibt. Da  $k_{ry} = -k_{ey}$  ist, folgt:

$$A_{es} - A_{rs} = \frac{k_{gy}}{k_{ey}} A_{gs}. \quad (8.60)$$

Aus (8.59a) und (8.60) erhält man:

$$\begin{aligned} A_{gs} &= \frac{2}{1+a} A_{es} \quad \text{mit } a = k_{gy}/k_{ey}, \\ A_{rs} &= \frac{1-a}{1+a} A_{es}. \end{aligned}$$

Aus Abb. 8.10 entnimmt man:

$$\frac{k_{ey}}{k_e} = \cos \alpha; \quad \frac{k_{gy}}{k_g} = \cos \beta.$$

Dies ergibt wegen  $k_g = (n_2/n_1)k_e$ :

$$a = \frac{n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha}.$$

Damit erhalten wir schließlich bei Verwendung von (8.58) die Amplitudenverhältnisse für reflektierte und gebrochene Welle (**Reflexionskoeffizient**  $\varrho_s$  bzw. **Transmissionskoeffizient**  $\tau_s$ ):

$$\begin{aligned} \varrho_s &= \frac{A_{rs}}{A_{es}} = \frac{1-a}{1+a} \\ &= \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \\ &= -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \end{aligned} \quad (8.61a)$$

$$\begin{aligned} \tau_s &= \frac{A_{gs}}{A_{es}} = \frac{2}{1+a} \\ &= \frac{2 n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \\ &= \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \end{aligned} \quad (8.61b)$$

Eine völlig analoge Überlegung für die zur Einfallsebene parallelen Komponenten  $E_p$  ergibt (siehe Aufg. 8.4)

$$\begin{aligned} \varrho_p &= \frac{A_{rp}}{A_{ep}} = \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} \\ &= \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}, \end{aligned} \quad (8.62a)$$

$$\begin{aligned} \tau_p &= \frac{A_{gp}}{A_{ep}} = \frac{2 n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} \\ &= \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}. \end{aligned} \quad (8.62b)$$

Die Gleichungen (8.61, 8.62) heißen **Fresnel-Formeln**. Sie bilden die Grundlage aller Berechnungen für die Reflexion oder Transmission elektromagnetischer Wellen an Grenzflächen zwischen zwei Medien mit Brechzahlen  $n_1$  bzw.  $n_2$ , wenn die einfallende Welle im Medium 1 läuft und unter dem Einfallswinkel  $\alpha$  auf die Grenzfläche trifft. Sie erlauben die Bestimmung der Polarisation von reflektierter und gebrochener Welle bei beliebiger Polarisation der einfallenden Welle [8.14].

Wir wollen die Anwendungen der Fresnel-Formeln nun an einigen Beispielen illustrieren.

## 8.4.4 Reflexions- und Transmissionsvermögen einer Grenzfläche

Der zeitliche Mittelwert  $\bar{I}_e$  der Intensität  $I_e$  der einfallenden Welle in einem Medium mit dem reellen Brechungsindex  $n_1$  ist nach (8.44):

$$\bar{I}_e = \varepsilon_0 \varepsilon_1 c'_1 \overline{E_e^2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_1 c'_1 A_e^2 \quad (8.63a)$$

mit  $A_e = (A_s^2 + A_p^2)^{1/2}$  und  $c'_1 = c/n_1$ . Der entsprechende Wert für die an der Grenzfläche reflektierte Intensität ist

$$\bar{I}_r = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_1 c'_1 A_r^2. \quad (8.63b)$$

Wir bezeichnen das Verhältnis

$$R = \frac{\bar{I}_r}{\bar{I}_e} = \frac{A_r^2}{A_e^2} \quad (8.64a)$$

als **Reflexionsvermögen** der Grenzfläche. Streng genommen müssten wir hierbei berücksichtigen, dass ein Strahl, der unter dem Winkel  $\alpha$  auf die Grenzfläche  $F$  auftrifft, im Medium 1 nur eine Querschnittsfläche  $F_\alpha = F \cos \alpha$  hat. Dadurch ist die Intensität (Energie pro Zeit und Fläche) um den Faktor  $1/\cos \alpha$  höher als die Intensität, die an der Grenzfläche herrscht. Deshalb sollten wir eigentlich schreiben:

$$R = \frac{\bar{I}_r \cos \alpha'}{\bar{I}_e \cos \alpha}. \quad (8.64b)$$

Weil aber bei der Reflexion gilt:  $\alpha' = \alpha$ , sind wir berechtigt, (8.64a) zu verwenden.

Im Falle der Transmission müssen wir aber beachten, dass  $\alpha \neq \beta$  ist, und das **Transmissionsvermögen** wird

$$T = \frac{\bar{I}_t \cos \beta}{\bar{I}_e \cos \alpha}. \quad (8.64c)$$

Für  $\bar{I}_t$  setzen wir ein:

$$\begin{aligned} \bar{I}_t &= \frac{1}{2} \varepsilon_2 \varepsilon_0 c'_2 A_g^2 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_2 \varepsilon_0 \mu_2 \mu_0 c'^2 \cdot \frac{1}{\mu_0 c'_2} A_g^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{n_2}{\mu_0 c} A_g^2, \end{aligned}$$

wobei wir die Tatsache  $c'^2 = 1/\varepsilon_2 \varepsilon_0 \mu_2 \mu_0$  und die Voraussetzung  $\mu_2 = 1$  ausnutzen. Analog ergibt sich

$$\bar{I}_e = \frac{1}{2} \frac{n_1}{\mu_0 c} A_e^2,$$

sodass wir mit (8.64c) erhalten:

$$T = \frac{n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha} \frac{A_g^2}{A_e^2}. \quad (8.64d)$$

## 8.4 Wellen an Grenzflächen zwischen zwei Medien

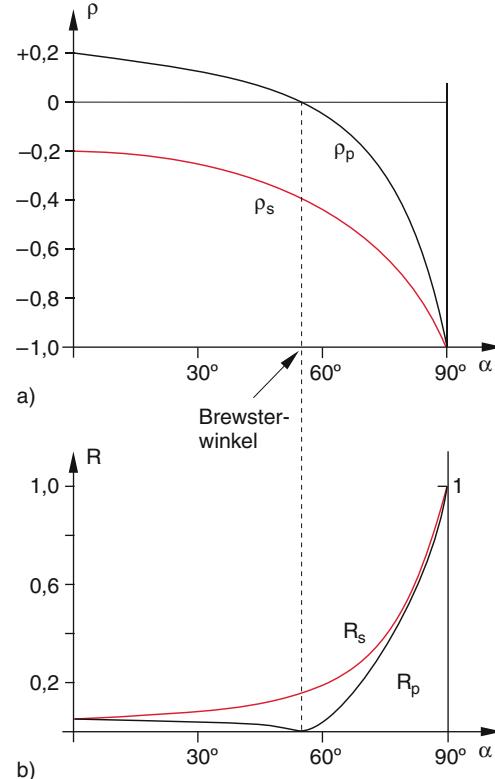
Da das Verhältnis  $A_r/A_e$  für die zur Einfallsebene parallele bzw. senkrechte Komponente von  $A_e$  unterschiedlich sein kann, hängt das Reflexionsvermögen nach den Fresnel-Formeln (8.61, 8.62) sowohl vom Einfallswinkel  $\alpha$  und von den Brechungsindizes  $n_1, n_2$  als auch von der Polarisierung der einfallenden Welle ab. Wir erhalten aus (8.61) für die zur Einfallsebene senkrechte Komponente:

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{A_{rs}^2}{A_{es}^2} = \left( \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right)^2, \end{aligned} \quad (8.65a)$$

während für die parallele Komponente gilt:

$$\begin{aligned} R_p &= \frac{A_{rp}^2}{A_{ep}^2} = \left( \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \right)^2. \end{aligned} \quad (8.65b)$$

In Abb. 8.12 sind Reflexionskoeffizient  $\varrho(\alpha)$  und Reflexionsvermögen  $R(\alpha)$  für die beiden Komponenten im Fall



**Abbildung 8.12** Reflexionskoeffizienten  $\varrho(\alpha)$  und Reflexionsvermögen  $R(\alpha) = \varrho^2(\alpha)$  einer Luft-Glas-Grenzfläche ( $n_1 = 1, n_2 = 1,5$ ) für die zur Einfallsebene senkrecht bzw. parallel polarisierte Komponente

$n_1 < n_2$  dargestellt. Bei senkrechtem Einfall ( $\alpha = 0^\circ$ ) ist das Reflexionsvermögen für beide Komponenten gleich, wie es aus Symmetriegründen auch sein muss. Aus (8.65a,b) folgt:

$$R(\alpha = 0) = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 . \quad (8.66)$$

### Beispiel

Das Reflexionsvermögen einer Luft-Glas-Grenzfläche ( $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1,5$ ) ist für  $\alpha = 0^\circ$  (senkrechter Einfall)

$$R = \left( \frac{0,5}{2,5} \right)^2 = 0,04 .$$

Es werden also 4 % der einfallenden Intensität reflektiert. Der Bruchteil

$$T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (8.67)$$

dringt durch die Grenzschicht in das Medium 2 ein.

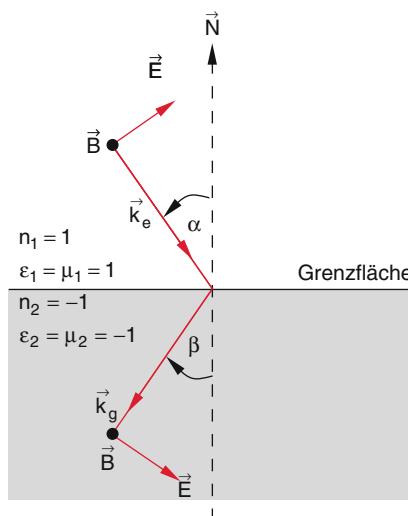
Allgemein kann man nachrechnen, dass ohne Absorption für die einzelnen Komponenten gilt:

$$T_p + R_p = 1 ,$$

$$T_s + R_s = 1 ,$$

wie auch insgesamt gilt:

$$T + R = 1 .$$



**Abbildung 8.13** Brechung einer elektromagnetischen Welle an der Grenzfläche eines Mediums mit negativem Brechungsindex

**Man beachte:** Für Materialien mit negativem Brechungsindex  $n$  (siehe Abschn. 8.4.10) liegt der gebrochene Strahl in Abb. 8.9 auf derselben Seite der Normale wie der einfallende Strahl (Abb. 8.13).

Mit  $n_1 = 1$  und  $n_2 < 0$  folgt aus (8.58)

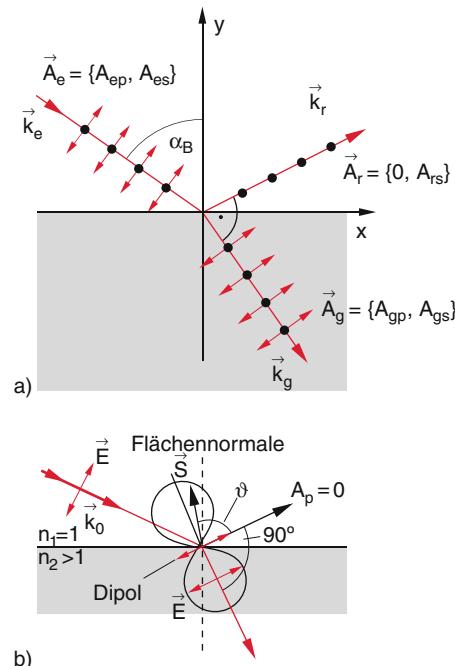
$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha = \frac{1}{n_2} \sin \alpha < 0$$

$\Rightarrow \beta < 0$ , d. h.  $k_g$  zeigt von der Normalen in Abb. 8.13 nach links unten.

### 8.4.5 Brewsterwinkel

Man sieht aus (8.62a), dass für  $\alpha + \beta = 90^\circ$  die Amplitude  $A_{rp} = 0$  wird, d. h. die reflektierte Welle hat keine Parallelkomponente der elektrischen Feldstärke (Abb. 8.14), sie ist vollständig polarisiert senkrecht zur Einfallsebene.

Der Einfallswinkel  $\alpha = \alpha_B$ , für den  $\alpha + \beta = 90^\circ$  wird, bei dem also die Wellenvektoren von reflektierter und gebrochener Welle senkrecht aufeinander stehen, heißt **Brewsterwinkel**. Für  $\alpha = \alpha_B$  wird das Reflexionsvermögen  $R_p$  null (Abb. 8.12).



**Abbildung 8.14** Linearpolarisation des reflektierten Lichts beim Einfall unter dem Brewsterwinkel  $\alpha_B$ . **a** Schematische Darstellung; **b** physikalische Erklärung mithilfe der Abstrahlcharakteristik der schwingenden Dipole

Dies lässt sich anschaulich verstehen. Die einfallende Welle regt die Elektronen der Atome in der Grenzschicht zu Schwingungen in Richtung des  $E$ -Vektors im Medium an (Abb. 8.14b). Der Betrag des Poyntingvektors  $S$  ist bei einem Winkel  $\vartheta$  von  $S$  gegen die Dipolachse proportional zu  $\sin^2 \vartheta$  (siehe Abschn. 6.5). Die induzierten Dipole strahlen keine Energie in Richtung der Dipolachse ( $\vartheta = 0^\circ$ ) ab.

Aus  $\sin \alpha / \sin \beta = n_2 / n_1$  und  $\alpha_B + \beta = 90^\circ$  folgt die Brewsterbedingung

$$\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (8.68)$$

### Beispiel

Für die Grenzfläche Luft-Glas ist  $n_1 = 1$  und  $n_2 = 1,5$  (bei  $\lambda = 600 \text{ nm}$ ). Damit wird  $\alpha_B = 56,3^\circ$ .

Lässt man einen linear polarisierten Laserstrahl mit dem Amplitudenvektor  $A = A_p$  unter  $56,3^\circ$  auf eine Glasplatte fallen, so geht der Strahl *ohne* Reflexionsverluste durch die Platte, weil  $A_r = 0$  wird. Dies wird ausgenutzt, wenn man bei Gaslasern (siehe Bd. 3) das Entladungsrohr mit Brewsterfenstern abschließt, um Reflexionsverluste zu vermeiden.

### 8.4.6 Totalreflexion

Lässt man eine Lichtwelle aus einem optisch dichtenen Medium 1 ins optische dünneren Medium 2 ( $n_1 > n_2$ ) laufen, so folgt aus dem Brechungsgesetz (8.58) für den Winkel  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{n_2}{n_1} \sin \beta.$$

Da  $\sin \beta$  nicht größer als 1 werden kann, muss für den Winkel  $\alpha$  gelten

$$\sin \alpha \leq n_2/n_1,$$

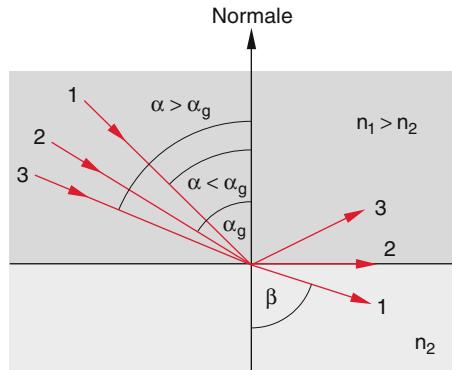
damit die Welle ins Medium 2 eintreten kann (Abb. 8.15).

Für Winkel  $\alpha$  mit  $\sin \alpha > n_2/n_1$  wird alles Licht an der Grenzfläche reflektiert (Totalreflexion). Man nennt den Winkel  $\alpha_g$ , für den

$$\sin \alpha_g = n_2/n_1 \quad (8.69)$$

ist, den **Grenzwinkel der Totalreflexion**.

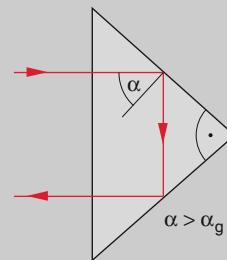
## 8.4 Wellen an Grenzflächen zwischen zwei Medien



**Abbildung 8.15** Zur Totalreflexion von Wellen, die aus dem optisch dichtenen Medium unter Winkeln  $\alpha > \alpha_g$  auf die Grenzfläche fallen

### Beispiel

Für  $n_1 = 1,5$  und  $n_2 = 1$  wird  $\alpha_g = 41,8^\circ$ . Man kann die Totalreflexion ausnutzen in  $90^\circ$ -Umkehrprismen (Abb. 8.16), bei denen der einfallende Lichtstrahl wieder in die gleiche Richtung, aber seitlich versetzt, reflektiert wird.



**Abbildung 8.16** Ausnutzung der Totalreflexion beim Retroreflektoren (Katzenauge)

Solche *Retro-Reflektoren* wurden z. B. von den Astronauten auf dem Mond installiert, sodass man von der Erde aus mit einem Laserstrahl diese Retro-Reflektoren anpeilen und das reflektierte Licht messen kann. Mit gepulsten Lasern kann aus der Messung der Lichtlaufzeit die Entfernung zwischen Messstation auf der Erde und Retroreflektor auf dem Mond bis auf 0,1 m genau (!) vermessen werden.

Die Totalreflexion wird in Lichtwellenleitern ausgenutzt, bei denen eine flexible dünne Quarzfaser einen Kern mit Brechungsindex  $n_1$  hat (Durchmesser  $3 \mu\text{m}$ –1 mm), der von einem Mantel mit niedrigerem Brechungsindex  $n_2 < n_1$  umgeben ist (Abb. 8.17).

## 8 Elektromagnetische Wellen in Materie

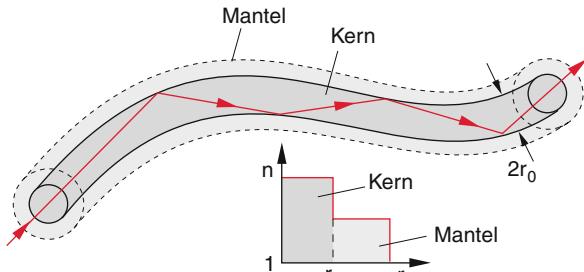
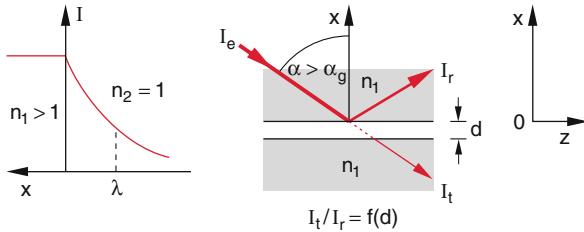


Abbildung 8.17 Totalreflexion in einer Lichtleitfaser aus Glas

Abbildung 8.18 Verhinderte Totalreflexion. a Über die Grenzfläche bei  $x = 0$  in das Medium mit  $n_2 < n_1$  eindringende Intensität. b Experimentelle Anordnung zur Demonstration der verhinderten Totalreflexion. Mit abnehmender Dicke  $d$  des Luftspalts steigt das Verhältnis  $I_t/I_r$ 

**Man beachte:**

- Totalreflexion tritt nur beim Übergang vom optisch dichteren zum optisch dünneren Medium auf, wenn  $\alpha \geq \alpha_g$  wird.
- Auch bei der Totalreflexion dringt die Welle etwas in das Medium 2 mit  $n_2 < n_1$  ein (etwa 1 Wellenlänge weit). Man kann diese „evanescente Welle“ (durch die gestrichelten Linien in Abb. 8.18b angedeutet) experimentell durch die „verhinderte“ Totalreflexion nachweisen (Abb. 8.18). Nähert man der total reflektierenden Grenzfläche Glas-Luft eine zweite Glasfläche, so tritt Licht in diese ein, wenn der Luftsput kleiner als  $\lambda$  wird. Solche Experimente zeigen, dass die Intensität der Welle im Medium 2 exponentiell abnimmt wie  $I = I_0 \cdot e^{-x/\lambda}$ . Ist das Medium 2 absorptionsfrei, so wird die Welle trotz des Eindringens in Medium 2 an der Grenzfläche 1–2 ohne Verluste reflektiert. Bringt man jedoch absorbierende Moleküle an die Grenzfläche im Medium 2, so fehlen die absorbierten Anteile im reflektierten Licht. Man kann auf diese Weise die Spektren dünner absorbierender Schichten messen.

#### 8.4.7 Änderung der Polarisation bei schrägem Lichteinfall

Lässt man linear polarisiertes Licht unter dem Winkel  $\alpha$  auf eine Grenzfläche fallen, so tritt bei der reflektierten

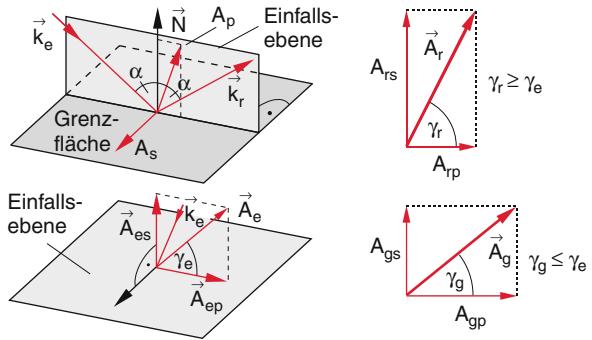


Abbildung 8.19 Zur Änderung der Polarisation bei der Reflexion

und bei der gebrochenen Welle im Allgemeinen eine Drehung der Polarisationsebene ein.

Sei  $\gamma_e$  der Winkel, den der elektrische Feldvektor  $E_e$  der einfallenden Welle mit der Einfallsebene bildet (Abb. 8.19). Dann ist

$$\tan \gamma_e = \frac{A_{es}}{A_{ep}} .$$

Für den Winkel  $\gamma_r$ , den der  $E$ -Vektor der reflektierten Welle mit der Einfallsebene bildet, folgt aus den Fresnel-Formeln (8.61, 8.62)

$$\tan \gamma_r = \frac{A_{rs}}{A_{rp}} = -\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \cdot \tan \gamma_e . \quad (8.70)$$

Da  $\cos(\alpha - \beta) > \cos(\alpha + \beta)$  ist, folgt:

$$\gamma_r > \gamma_e .$$

Bei der Reflexion wird die Polarisierungsrichtung von der Einfallsebene weggedreht.

Nur bei senkrechtem Einfall ( $\alpha = 0^\circ$ ) oder für  $\gamma_e = 0^\circ$  oder  $90^\circ$  bleibt die Polarisationsrichtung erhalten (abgesehen vom Brewster-Fall mit  $A_{es} = 0$ , für den man  $\gamma_r$  nicht mehr definieren kann).

Für die durchgelassene Welle erhalten wir den Winkel  $\gamma_g$  mit

$$\tan \gamma_g = \frac{A_{gs}}{A_{gp}} = \cos(\alpha - \beta) \cdot \tan \gamma_e . \quad (8.71)$$

Da  $\cos(\alpha - \beta) \leq 1$  ist, folgt  $\gamma_g \leq \gamma_e$ .

Bei der Brechung wird die Polarisationsebene zur Einfallsebene hingedreht.

### 8.4.8 Phasenänderung bei der Reflexion

Wir betrachten im Folgenden nur absorptionsfreie Medien ( $\kappa = 0$ ). Wird die Welle am optisch dichteren Medium 2 reflektiert ( $n_2 > n_1$ ), so folgt aus (8.61) wegen  $\cos \beta > \cos \alpha$ , dass die Amplitude  $A_{rs}$  der zur Einfallsebene senkrechten Komponente das Vorzeichen gegenüber  $A_{es}$  ändert. Das bedeutet:

Bei der Reflexion am optisch dichteren Medium tritt für die zur Einfallsebene senkrechte Komponente ein Phasensprung von  $\pi$  auf.

Für die zur Einfallsebene parallele Komponente  $A_p$  in Abb. 8.11 sagen wir, dass ein Phasensprung von  $\pi$  bei der Reflexion stattgefunden hat, wenn die  $y$ -Komponente ihr Vorzeichen wechselt.

Man sieht aus (8.62a), dass  $\varphi_p$  negativ wird für  $(\alpha + \beta) > \pi/2$ . Da  $\alpha + \beta = \pi/2$  die Bedingung für den Brewsterwinkel  $\alpha = \alpha_B$  ist, erfährt die Parallelkomponente nur für Einfallswinkel  $\alpha > \alpha_B$  einen Phasensprung von  $\pi$  bei der Reflexion am optisch dichteren Medium. Der Übergang von  $\alpha < \alpha_B$  zu  $\alpha > \alpha_B$  ist für  $A_p$  trotzdem nicht diskontinuierlich, weil  $A_p$  für  $\alpha = \alpha_B$  null wird (Abb. 8.20).

In Abb. 8.21 ist der Verlauf des Phasensprungs an einer Grenzfläche Luft-Glas für die beiden Komponenten illustriert.

**Anmerkung.** Bei senrektem Einfall ( $\alpha = 0^\circ$ ) wird die Unterscheidung zwischen  $A_p$  und  $A_s$  bedeutungslos, da alle Ebenen durch die Einfallsrichtung Einfallsebenen sind. Legt man für  $\alpha > 0^\circ$  die Einfallsebene fest, so folgt für

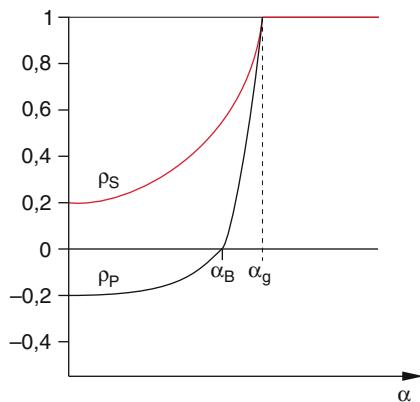


Abbildung 8.20 Amplitudenreflexionskoeffizienten  $\rho_s$  und  $\rho_p$  beim Übergang vom optisch dichten in das optisch dünnerne Medium

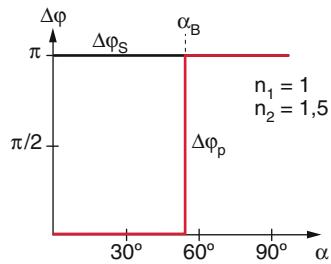


Abbildung 8.21 Phasensprung bei der Reflexion am optisch dichten Medium am Beispiel der Grenzfläche Luft/Glas

$\alpha \rightarrow 0$  aus (8.61a, 8.62a) für beide Komponenten:

$$\frac{A_{rs}}{A_{es}} = \frac{A_{rp}}{A_{ep}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} < 0$$

für  $n_2 > n_1$ , d. h. beide Komponenten erfahren einen Phasensprung, sodass man einfach sagen kann: Die Welle macht für  $n_2 > n_1$  einen Phasensprung von  $\pi$  bei der Reflexion.

Bei der Reflexion am optisch dünneren Medium ( $n_2 < n_1 \Rightarrow \alpha < \beta$ ) sieht man aus (8.61a), dass für die zur Einfallsebene senkrechte Komponente  $A_s$  *kein* Phasensprung auftritt. Für die parallele Komponente  $A_p$  ergibt (8.62a), dass für  $(\alpha + \beta) < \pi/2$ , d. h.  $\alpha < \alpha_B$ , ein Phasensprung von  $\pi$  auftritt, danach (bis zur Totalreflexion) tritt kein Phasensprung auf (Abb. 8.22).

Für die gebrochene Welle bleibt in jedem Fall das Vorzeichen erhalten, d. h. hier tritt in keinem der beiden Fälle ein Phasensprung auf.

Bei der Totalreflexion (Abb. 8.22) sind die Phasensprünge  $\Delta\varphi$  der beiden Komponenten verschieden groß. Man sieht dies, wenn man (8.61) bzw. (8.62) mithilfe von (8.69) umschreibt. So erhält man z. B. aus (8.61a) durch Kürzen

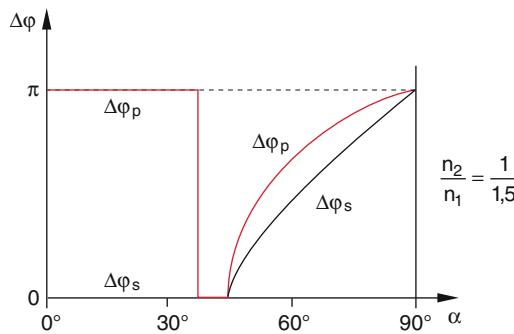


Abbildung 8.22 Phasensprünge für  $A_p$  und  $A_s$  bei der Totalreflexion als Funktion des Einfallswinkels  $\alpha$  für  $n_1 = 1,5 \cdot n_2$

mit  $n_1$ :

$$\varrho_s = \frac{\cos \alpha - \sqrt{\sin^2 \alpha_g - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha_g - \sin^2 \alpha}}. \quad (8.72)$$

Für  $\alpha > \alpha_g$  wird der Radikand negativ und Zähler und Nenner komplex. Wie man durch Nachrechnen erkennt, bleibt jedoch  $\varrho_s \cdot \varrho_s^* = 1$ , sodass das Reflexionsvermögen  $R = 1$  bleibt.

Der Phasensprung  $\Delta\varphi(\alpha)$  steigt von  $\Delta\varphi(\alpha_g) = 0$  bis  $\Delta\varphi(90^\circ) = \pi$  (Abb. 8.22). Genauere Details findet man in [8.15, 8.16].

Man erhält für die senkrecht polarisierte Komponente einer an der Grenzfläche total reflektierten Welle ( $n_2 < n_1$ ) den Phasensprung  $\Delta\varphi_s$  mit

$$\tan\left(\frac{\Delta\varphi_s}{2}\right) = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \quad (8.73a)$$

und für die parallele Komponente

$$\tan\left(\frac{\Delta\varphi_p}{2}\right) = \frac{n_1^2}{n_2^2 \cos \alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}. \quad (8.73b)$$

#### 8.4.9 Reflexion an Metalloberflächen

Metalle absorbieren elektromagnetische Wellen in einem weiten Frequenzbereich.

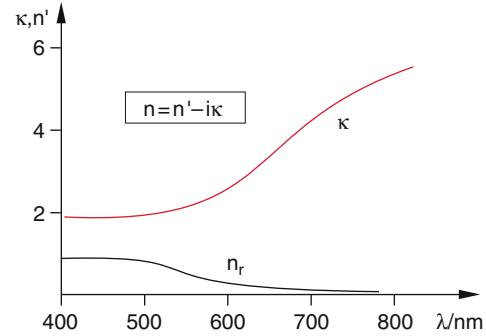
Der Imaginärteil  $\kappa$  des komplexen Brechungsindex ist im Sichtbaren für Metalle im Allgemeinen größer als der Realteil  $n_r$ ! (Siehe Abschn. 8.3.2).

Um aus den Fresnel-Formeln (8.61a, 8.62a) das Reflexionsvermögen einer Grenzfläche Luft-Metall zu bestimmen, müssen wir  $n_1 = 1$  und  $n_2 = n_r - i\kappa$  einsetzen. Dies ergibt bei reeller Amplitude der einfallenden Welle komplexe Ausdrücke für die Amplituden  $A_{rs}$  und  $A_{rp}$  der reflektierten Welle, was bedeutet, dass sich sowohl die Amplitude als auch die Phase bei der Reflexion ändern.

Die Phasensprünge  $\Delta\varphi$  zwischen reflektierter und einfallender Welle sind dann durch

$$\tan(\Delta\varphi) = -\frac{\text{Im}(A_r)}{\text{Re}(A_r)}$$

gegeben. Sie können Werte zwischen 0 und  $\pi$  annehmen und sind für  $A_{rs}$  und  $A_{rp}$  im Allgemeinen unterschiedlich



**Abbildung 8.23** Wellenlängenabhängigkeit von Real- und Imaginärteil des Brechungsindex von Gold

(siehe Aufg. 8.5). Deshalb ändert sich der Polarisationszustand der Welle bei der Reflexion, außer wenn linear polarisiertes Licht einfällt, dessen  $E$ -Vektor senkrecht bzw. parallel zur Einfallssebene liegt. Bei allen anderen Richtungen von  $E$  wird aus linear polarisiertem Licht bei der Reflexion elliptisch polarisiertes Licht.

Bei senkrechtem Einfall ( $\alpha = 0$ ) erhalten wir aus (8.66) mit  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = n_r - i\kappa$  das Reflexionsvermögen:

$$R = \left| \frac{n_r - i\kappa - 1}{n_r - i\kappa + 1} \right|^2 = \frac{(n_r - 1)^2 + \kappa^2}{(n_r + 1)^2 + \kappa^2}. \quad (8.74)$$

Es hängt vom Imaginär- und Realteil der komplexen Brezahlfzahl  $n_2 = n_r - i\kappa$  ab. Da diese beiden Größen gemäß (8.39) von der Frequenz  $\omega$  und damit von der Wellenlänge  $\lambda$  der einfallenden Strahlung abhängen (Abb. 8.23), wird  $R(\lambda)$  wellenlängenabhängig!

#### Beispiel

Für Aluminium ist der Brechungsindex bei  $\lambda = 600$  nm:  $n_r = 0,95$ ,  $\kappa = 6,4$ . Das Reflexionsvermögen ist daher bei senkrechtem Einfall  $R = 0,91$ .

Man sieht aus (8.74) dass für  $\kappa \gg n_r$  das Reflexionsvermögen  $R \approx 1$  wird.

Dies bedeutet: Die Grenzschicht von stark absorbierenden Medien hat ein großes Reflexionsvermögen (siehe Tab. 8.3)!

Das Transmissionsvermögen einer dünnen absorbierenden Schicht der Dicke  $\Delta z$  ist durch

$$T = \frac{I_t}{I_e} = e^{-\alpha \Delta z} = e^{-4\pi \kappa \Delta z / \lambda_0}$$

**Tabelle 8.3** Realteil  $n_r$  und Imaginärteil  $\kappa$  der Brechzahl  $n = n_r - i\kappa$  und Reflexionsvermögen  $R$  einiger Metalle bei 500 und 1000 nm

Wellenlänge in nm	Metall	$n_r$	$\kappa$	$R$
500	Kupfer	1,031	2,78	0,65
500	Silber	0,17	2,94	0,93
500	Gold	0,84	1,84	0,50
1000	Kupfer	0,147	6,93	0,99
1000	Silber	0,13	6,83	0,99
1000	Gold	0,18	6,04	0,98

gegeben. Der Absorptionskoeffizient  $\alpha(\lambda)$  und damit auch  $\kappa(\lambda)$  hängt von der Wellenlänge  $\lambda$  ab (siehe Abb. 8.6). Die Wellenlängen, für die  $\kappa$  maximal ist, werden nach (8.74) bevorzugt reflektiert.

An Grenzflächen von stark absorbierenden Medien, bei denen der Brechungsindex einen Sprung macht, ist der Reflexionskoeffizient proportional zum Absorptionskoeffizienten. Man beachte jedoch, dass dies nicht mehr gilt, wenn  $\alpha$  nicht plötzlich, sondern über eine Strecke von mehreren Wellenlängen ansteigt. Dann geht  $R$  gegen null und alles Licht wird absorbiert.

**Anmerkung.** In der Abbildung 8.24 ist zwar im Gegensatz zu (8.74), wo senkrechter Einfall vorausgesetzt wurde, schräger Einfall dargestellt, weil im Experiment das einfallende Lichtbündel vom reflektierten getrennt werden muss, die allgemeine Formel sagt aber sinngemäß dasselbe aus wie (8.74).

### Experiment

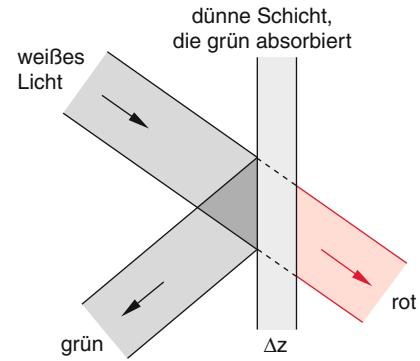
Malt man mit einem roten Folienschreiber auf eine transparente Folie, so erscheint das Schriftbild in Transmission rot, weil grün bevorzugt absorbiert wird (Abb. 8.24). Legt man die Folie auf einen dunklen Untergrund und beleuchtet sie von oben, so erscheint die Schrift in der Reflexion grün!

### 8.4.10 Medien mit negativem Brechungsindex

Wir haben weiter oben in diesem Kapitel diskutiert, dass die Phasengeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in Materie mit den Konstanten  $\mu$  und  $\varepsilon$  durch die Relation (8.19)

$$v_{\text{ph}} = (\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu \cdot \mu_0)^{-1/2} = c/n_r$$

### 8.4 Wellen an Grenzflächen zwischen zwei Medien



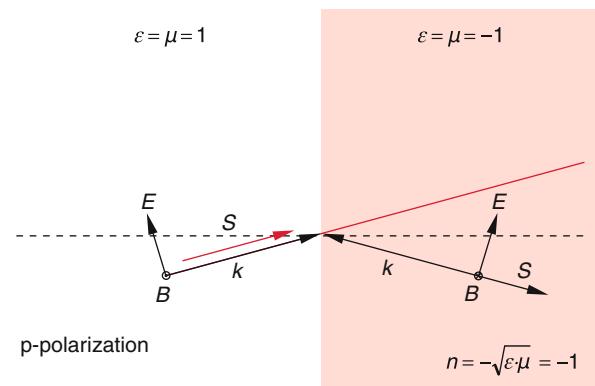
**Abbildung 8.24** Zur Demonstration, dass bei stark absorbierenden Medien Reflexions- und Absorptionsvermögen zueinander proportional sind

verknüpft ist, wobei  $n_r = \sqrt{\varepsilon \cdot \mu}$  der Realteil des Brechungsindex ist. Seit einigen Jahren ist es gelungen, Materialien mit speziellen periodischen Strukturen herzustellen, für die  $\mu$  und  $\varepsilon$  beide negativ sind, solange die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle größer ist als die „Gitterkonstante“  $a$  (d. h. die Länge der Elementarzelle) dieser periodischen Struktur. Es zeigt sich, dass für solche Materialien die Definition des Brechungsindex erweitert werden muss auf

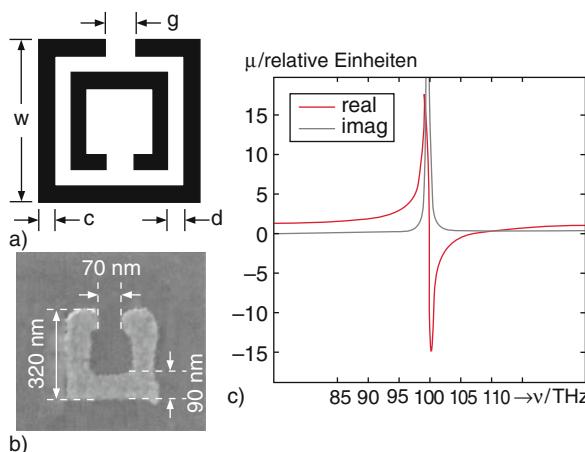
$$n_r = \pm \sqrt{\varepsilon \cdot \mu}$$

wobei wir bisher immer nur das +-Zeichen berücksichtigt hatten. In solchen künstlich hergestellten Materialien mit periodischen Strukturen  $a < \lambda$  gilt jedoch das Minuszeichen, sodass  $n_r < 0$  wird. Die Lichtausbreitung in solchen „Metamaterialien“ unterscheidet sich von dem gewohnten Bild der Ausbreitung in Medien mit  $n > 0$  [8.12].

Die periodischen Strukturen werden für den Mikrowellenbereich und inzwischen auch für den Infrarot- bis



**Abbildung 8.25** Ausbreitung einer Welle in „normalem“ Medium mit  $\varepsilon = \mu = 1$  (links) und in einem „Metamaterial“ mit  $\varepsilon = \mu = -1$  (rechts). Man beachte, dass der Ausbreitungsvektor  $k$  der Welle antiparallel zum Poyntingvektor  $S$  ist! (nach Wegener et al. [8.10])



**Abbildung 8.26** a Schematische Darstellung eines miniaturisierten LC-Resonators, b reale Ausführung; c Resonanzkurve für Real- und Imaginärteil der magnetischen relativen Permeabilität  $\mu$  [8.10]

sichtbaren Bereich aus einer räumlich periodisch angeordneten großen Zahl von Resonatoren in Aufdampftechnik hergestellt. Jeder dieser Resonatoren ist im Prinzip ein „geschrumpfter“ L-C-Kreis und besteht aus einem Quadrat mit der Dimension  $w < \lambda$  aus Silberwänden der Dicke  $c$  und einer Öffnung der Breite  $g$  (Abb. 8.26a), in dem sich ein kleineres Quadrat befindet. Die magnetische relative Permeabilität  $\mu$  in der Umgebung der Resonanzfrequenz in Abb. 8.26c zeigt, dass dicht oberhalb der Resonanzfrequenz der Realteil von  $\mu$  negative Werte annimmt.

Inzwischen ist es gelungen, die Strukturen zu verkleinern und zu vereinfachen und bei  $\lambda = 760$  nm einen Brechungsindex von  $n_r = -0,6$  zu erreichen. In Abb. 8.27 sind schematisch die vereinfachten, in Photolithographie-

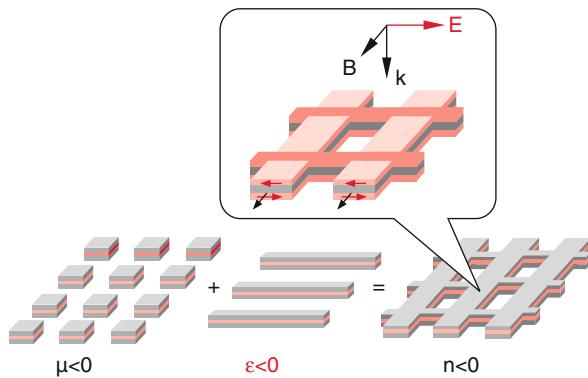
Verfahren herstellbaren Strukturen mit  $n_r < 0$  dargestellt. Sie bestehen aus periodisch angeordneten Mikroresonatoren als Schichtstrukturen mit  $\mu < 0$  und einer periodischen Folge von elektrisch leitenden dünnen Stäben, die bewirken, dass  $\epsilon < 0$  wird. Rechts ist die Gesamtstruktur gezeigt.

Pendry hat gezeigt, dass mit Linsen aus solchen Materialien mit negativer Brechzahl Licht besser fokussiert werden kann als mit konventionellen Linsen und die Begrenzung der räumlichen Auflösung durch Beugung (siehe Abschn. 11.3) wesentlich reduziert werden kann [8.11].

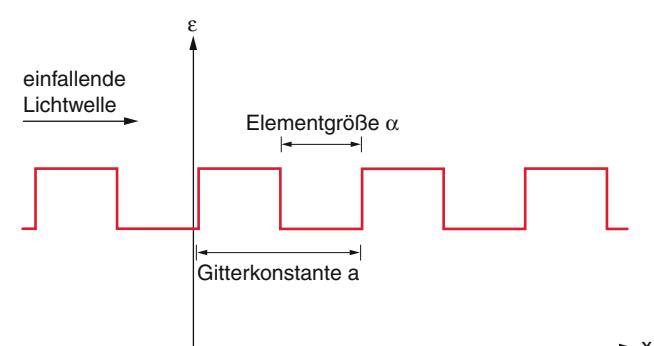
#### 8.4.11 Photonische Kristalle

Photonische Kristalle sind räumlich periodische Anordnungen von dielektrischen Medien mit unterschiedlicher Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  und damit unterschiedlichen Brechzahlen (Abb. 8.28). Man kann sie realisieren durch transparente Materialien (Glas, Halbleiter), in die periodische Strukturen (z. B. dielektrische Mikrozylinder oder Kugelchen) eingebaut sind, deren Abstände  $a$  in der Größenordnung der optischen Wellenlänge liegen. Sie beeinflussen deshalb die Ausbreitung von Licht in diesen Materialien.

Fällt eine Lichtwelle mit der Wellenlänge  $\lambda$  auf diese Struktur, so wird ein Teil der Wellenamplitude an den Grenzflächen der periodischen Struktur reflektiert. Für  $a = m \cdot \pi \cdot \lambda$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) überlagern sich die reflektierten Anteile phasenrichtig und addieren sich deshalb. Das Reflexionsvermögen des Kristalls wird erhöht. Für  $a = q \cdot \pi \cdot \lambda / 2$  ( $q = 2m - 1$ ) sind die Phasen der reflektierten Wellen um  $q \cdot \pi$  gegeneinander verschoben und die reflektierten Anteile löschen sich teilweise oder ganz aus.



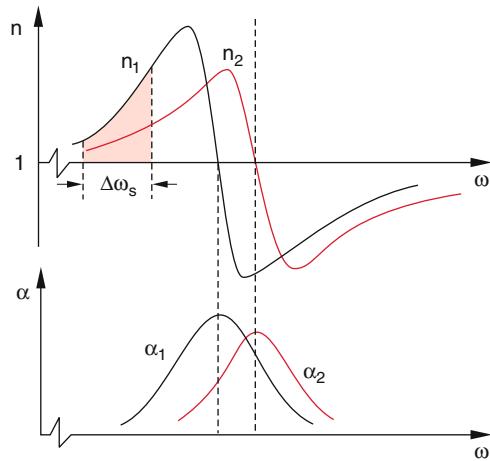
**Abbildung 8.27** Herstellung von Metamaterialen mit  $n_r < 0$  als Überlagerung von Mikroresonatoren ( $\mu < 0$ ) in Schichtstruktur und periodischer Anordnung von leitenden dünnen Stäben [8.10] und S. Zhang et al. Opt. Express **13**, 4922 (2005)



**Abbildung 8.28** Modell eines eindimensionalen optischen Kristalls mit räumlich periodischer Variation der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$

## 8.5 Lichtausbreitung in nichtisotropen Medien; Doppelbrechung

In optisch anisotropen Medien ist (im Modell des schwingenden Oszillators) die Rückstellkraft  $F_R = -k_R x$ , mit der ein schwingendes Elektron an seine Ruhelage gebunden ist, von der Richtung der Schwingung im Kristall abhängig. Dies bedeutet, dass die Eigenfrequenzen  $\omega_{0i} = (k_{Ri}/m)^{1/2}$  für die verschiedenen Polarisationsrichtungen der einfallenden Welle verschieden sind. Nach (8.32) hat dies zur Folge, dass der Brechungsindex  $n$  nicht nur von der Frequenz  $\omega$ , sondern auch von der Richtung des  $E$ -Vektors und des  $k$ -Vektors, d. h. von der Ausbreitungsrichtung der Welle abhängt (Abb. 8.29).

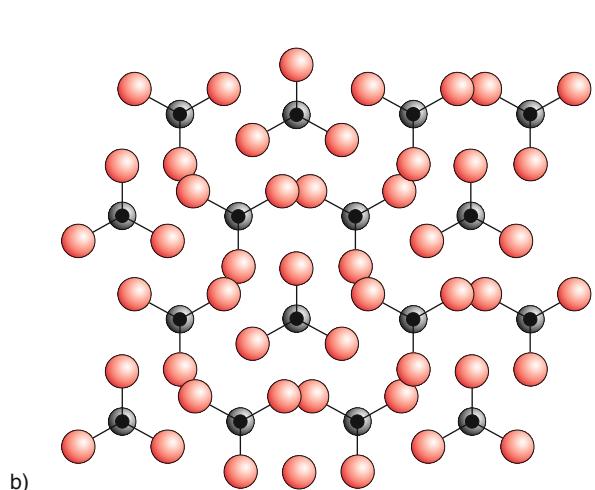
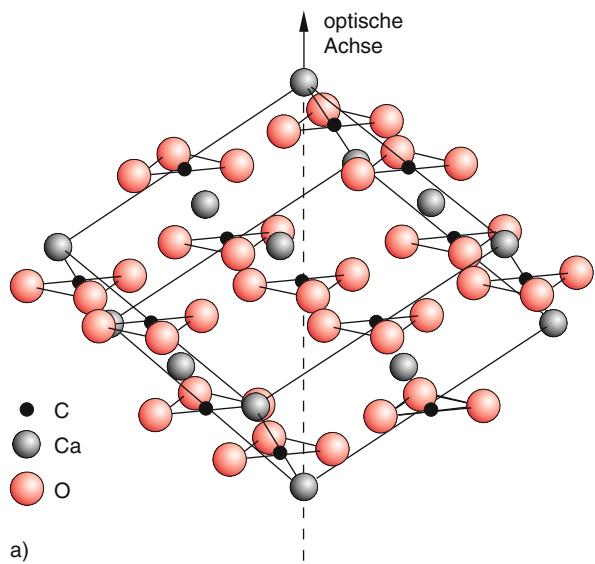


**Abbildung 8.29** Brechungsindizes  $n_1(\omega)$  und  $n_2(\omega)$  und Absorptionskoeffizienten  $\alpha(\omega)$  für zwei zueinander senkrecht polarisierte Wellen in einem anisotropen Kristall. Der sichtbare Spektralbereich ist durch  $\Delta\omega_s$  bezeichnet

Die optische Anisotropie hängt von der Kristallstruktur ab. In Abb. 8.30 ist die Anordnung der Atome in einem Kalkspatkristall  $\text{CaCO}_3$  illustriert. Man sieht, dass es eine Vorzugsrichtung gibt (optische Achse, senkrecht zur Ebene der Abb. 8.30b), dass die Atomanordnung jedoch *nicht* rotationssymmetrisch um diese Achse ist. Dies macht bereits anschaulich deutlich, dass die Rückstellkräfte auf die Elektronenhüllen auf Grund des anisotropen Kraftfeldes der positiv geladenen Kerne von der Richtung in der Ebene der Abb. 8.30b abhängen [8.13].

### 8.5.1 Ausbreitung von Lichtwellen in anisotropen Medien

Um dies genauer zu verstehen, führen wir ein einfaches analoges mechanisches Experiment (Abb. 8.31) durch.



**Abbildung 8.30** a Kristallstruktur von Kalkspat  $\text{CaCO}_3$ ; räumliche Anordnung der Atome. b Ebener Schnitt senkrecht zur optischen Achse durch einen  $\text{CaCO}_3$ -Kristall

Zwei verschieden starke Spiralfedern sind in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung auf einem weißen Brett ausgespannt. Der Verbindungspunkt  $P$  ist durch eine schwarze Scheibe markiert. zieht man jetzt die Scheibe mit einem Faden in die Diagonalrichtung, so folgt die Scheibe *nicht*, wie vielleicht erwartet, dieser Richtung, sondern dem Pfeil  $\Delta s$ , der gegen die Diagonale geneigt ist. In jedem Punkt dieser Bahn ist die Summe aller Kräfte (Zugkraft  $F_z$  und Rückstellkraft  $F_R = F_{R1} + F_{R2}$ ) null.

Für unser Oszillatormodell der Doppelbrechung bedeutet dies: Die Schwingungsrichtung der Oszillatoren im anisotropen Kristall ist nicht unbedingt parallel zum elektrischen Vektor der einfallenden Welle. Mathematisch lässt sich dies dadurch beschreiben, dass die relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  kein Skalar mehr ist, sondern ein

Tensor

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (8.75)$$

Der Zusammenhang zwischen dielektrischer Verschiebungsdichte  $\mathbf{D}$  und Feldstärke  $\mathbf{E}$  wird dann statt durch (1.64) durch die Gleichung:

$$\mathbf{D} = \tilde{\epsilon} \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (8.76a)$$

gegeben, was in Komponentenschreibweise heißt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z, \\ \frac{1}{\epsilon_0} D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z, \\ \frac{1}{\epsilon_0} D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z. \end{aligned} \quad (8.76b)$$

Man beachte, dass  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  im Allgemeinen *nicht* mehr parallel sind. Schreibt man die dielektrische Verschiebungsdichte als

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (8.76c)$$

so sieht man, dass die dielektrische Polarisation analog zu (1.58) geschrieben werden kann als

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (\tilde{\epsilon} - \tilde{1}) \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \cdot \tilde{\chi} \cdot \mathbf{E}. \quad (8.76d)$$

$\mathbf{P}$  ist dann im Allgemeinen nicht mehr parallel zu  $\mathbf{E}$ , d. h. analog zu unserem mechanischen Modell in Abb. 8.31a ist die Schwingungsrichtung der induzierten Dipole nicht unbedingt parallel zur erregenden Feldstärke  $\mathbf{E}$  der einfallenden Welle (Abb. 8.31b). Die Größe  $\tilde{\chi} = (\tilde{\epsilon} - \tilde{1})$  ist ein zweistufiger Tensor und (8.76d) kann in Komponenten geschrieben werden:

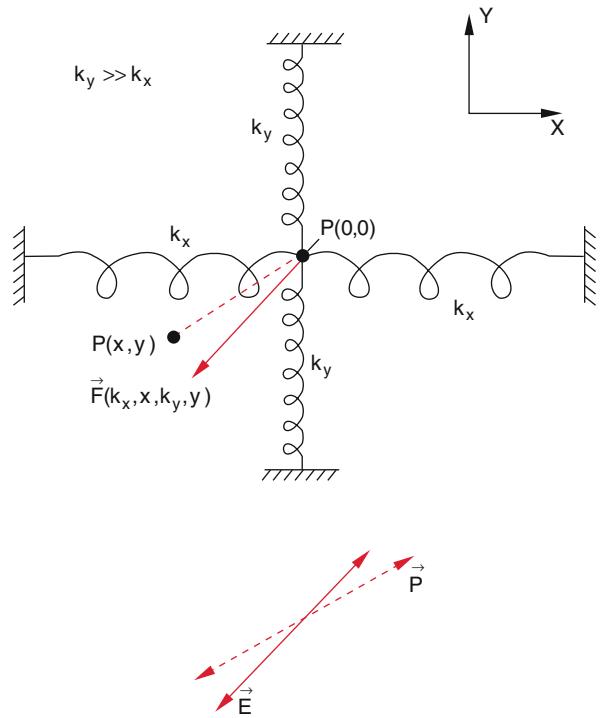
$$P_i = \epsilon_0 \cdot \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j \quad (i = x, y, z), \quad (8.76e)$$

was zeigt, dass jede Komponente  $P_i$  der dielektrischen Polarisation im Allgemeinen von allen drei Komponenten  $E_j$  der einfallenden Welle abhängen kann. Um die Ausbreitung einer ebenen elektromagnetischen Welle im anisotropen Kristall zu untersuchen, benutzen wir die beiden Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

in nichtleitenden und ladungsfreien ( $\rho = 0$ ) Medien. Aus ihnen folgt:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (8.77)$$



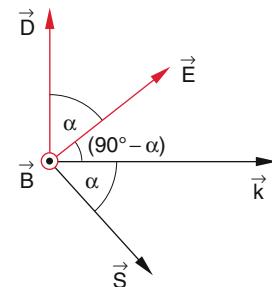
**Abbildung 8.31** a Mechanisches Analogmodell zur optischen Dopplereffekt. Kraft und Auslenkungsrichtung sind bei ungleichen Rückstellkräften nicht parallel. b Erregendes Feld und Polarisierung haben nicht mehr dieselbe Richtung

Sowohl  $\mathbf{D}$  als auch  $\mathbf{B}$  stehen senkrecht auf dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$ . Aus  $\mathbf{B} = (n/c) \cdot (\mathbf{k}_0 \times \mathbf{E})$  (8.27) folgt  $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$ . Aus der Definition des Poynting-Vektors

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (\text{für } \mu = 1)$$

folgt  $\mathbf{B} \perp \mathbf{S}$ . Da in Dielektrika (Isolatoren) kein Strom fließt, gilt:  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mu_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  (siehe Abschn. 8.3). Daraus folgt:  $\mathbf{B} \perp \mathbf{D}$ .

Da  $\mathbf{B}$  senkrecht auf  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{S}$  steht, müssen alle vier Größen in einer Ebene liegen (Abb. 8.32).  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$  bilden



**Abbildung 8.32** Bei der Ausbreitung einer Lichtwelle im anisotropen Kristall liegen die Vektoren  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{S}$  in einer Ebene, senkrecht zu  $\mathbf{B}$ , aber  $\mathbf{E}$  steht nicht mehr senkrecht auf  $\mathbf{k}$

## 8.5 Lichtausbreitung in nichtisotropen Medien; Doppelbrechung

einen Winkel  $\alpha$  miteinander, der durch (8.76), also durch den Dielektrizitätstensor  $\tilde{\epsilon}$ , bestimmt wird.

Die Richtung des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  ist nicht mehr identisch mit der des Energieflusses  $\mathbf{S}$ . Die beiden Vektoren  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{S}$  bilden den gleichen Winkel  $\alpha$  miteinander wie  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$ , weil  $\mathbf{E} \perp \mathbf{S}$  und  $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$ . Während die Phasenflächen senkrecht auf  $\mathbf{k}$  stehen, läuft die Energie (und damit auch die „Lichtstrahlen“ im Sinne der geometrischen Optik in Kap. 9) in Richtung von  $\mathbf{S}$ .

In anisotropen Kristallen sind im Allgemeinen Ausbreitungsrichtung der Lichtwelle und Energieflussrichtung voneinander verschieden.

Der elektrische Feldvektor  $\mathbf{E}$  steht senkrecht auf  $\mathbf{S}$  aber nicht auf  $\mathbf{k}$ . Die Welle ist nicht mehr völlig transversal.  $\mathbf{E}$  hat eine Komponente in Feldrichtung.

### 8.5.2 Brechungsindex-Ellipsoid

In nichtabsorbierenden Medien sind die Tensorelemente  $\epsilon_{ik}$  in (8.75) reell und bei nicht-optisch-aktiven Medien wird der Tensor symmetrisch, d. h.  $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$ . Dann reduziert sich die Zahl der Komponenten auf sechs. Es lässt sich immer ein Koordinatensystem ( $x, y, z$ ) finden, in dem  $\tilde{\epsilon}$  diagonal wird (Hauptachsen-Transformation).

$$\tilde{\epsilon}_{\text{HA}} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (8.78)$$

Die Hauptwerte  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  erhält man durch Diagonalisierung der dem Tensor entsprechenden Matrix (8.75). Diesen Hauptwerten entsprechen gemäß (8.26a) drei Werte des Brechungsindex

$$n_1 = \sqrt{\epsilon_1}, \quad n_2 = \sqrt{\epsilon_2}, \quad n_3 = \sqrt{\epsilon_3}.$$

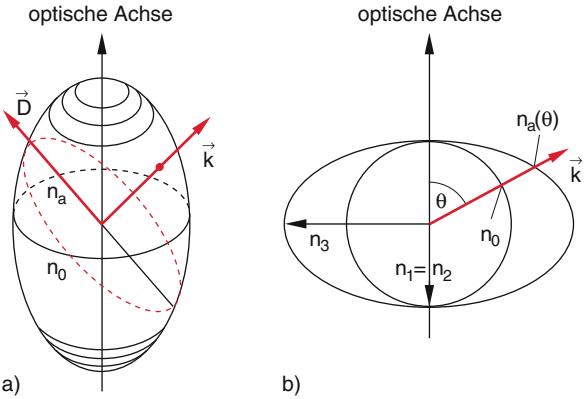
Trägt man in einem Hauptachsensystem ( $n_1, n_2, n_3$ ) einen Vektor

$$\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$$

vom Nullpunkt aus auf, so beschreibt sein Endpunkt ein Ellipsoid

$$\frac{n_x^2}{n_1^2} + \frac{n_y^2}{n_2^2} + \frac{n_z^2}{n_3^2} = 1, \quad (8.79)$$

welches **Indexellipsoid** heißt (Abb. 8.33). Die Länge der Hauptachsen dieses Ellipsoids geben die Hauptwerte  $n_i$  des Brechungsindex an.

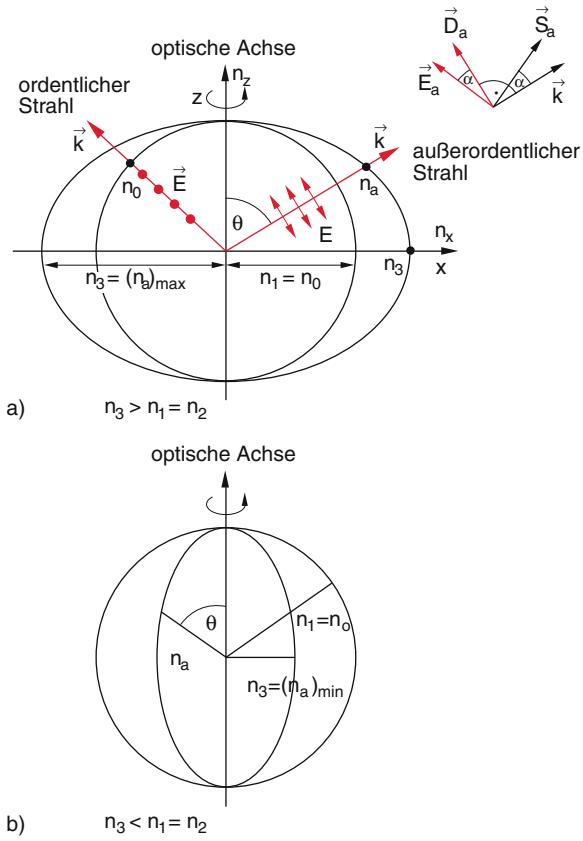


**Abbildung 8.33** a) Rotationssymmetrisches Indexellipsoid mit der Symmetriechse in Richtung der optischen Achse. b) Zweidimensionale Darstellung von  $n_a(\theta)$  und der nicht von  $\theta$  abhängigen Größe  $n_0$  für einen positiv einachsigen Kristall

Kristalle, für die  $n_1 = n_2 \neq n_3$  gilt, heißen **optisch einachsig**. Ihr Indexellipsoid ist rotationssymmetrisch um die  $z$ -Hauptachse als Symmetriechse. Ist  $n_3 > n_1 = n_2$ , so handelt es sich um optisch positive, für  $n_3 < n_1 = n_2$  um optisch negative einachsige Kristalle. Wenn eine elektromagnetische Welle in Richtung  $\mathbf{k}$  ihres Wellenvektors durch den Kristall läuft, so schneidet die Fläche durch den Nullpunkt senkrecht zu  $\mathbf{k}$ , in welcher der Vektor  $\mathbf{D}$  der Welle liegt, das Ellipsoid in einer Ellipse (Abb. 8.33 und 8.34). Die Länge der Strecke in Richtung von  $\mathbf{D}$  vom Nullpunkt zur Schnittkurve gibt den Brechungsindex  $n$  für diese Welle an und damit auch ihre Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{Ph}} = c/n$ . Es gibt eine ausgezeichnete Richtung von  $\mathbf{k}$ , bei der die Schnittfläche ein Kreis ist. Diese Richtung heißt **optische Achse** des Kristalls. Für diese Richtung von  $\mathbf{k}$  hängt der Brechungsindex nicht von der Orientierung von  $\mathbf{D}$  ab.

Im allgemeinen Fall  $n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq n_1$  gibt es zwei Richtungen von  $\mathbf{k}$ , für welche die Schnittfläche ein Kreis ist. In solchen **biaxialen Kristallen** gibt es zwei **optische Achsen**. Breitet sich die Welle in Richtung einer optischen Achse aus, so ist ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit unabhängig von der Richtung ihres  $\mathbf{E}$ -Vektors. In diesem Fall zeigen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$  in die gleiche Richtung.

Wählt man für einen optisch einachsigen Kristall die  $z$ -Richtung als Richtung der optischen Achse und zeichnet einen Schnitt in der  $x$ - $z$ -Ebene durch dieses Index-Ellipsoid (Hauptschnitt), so entsteht für eine Polarisationskomponente ( $\mathbf{E}$  in der  $x$ - $z$ -Ebene) eine Ellipse, für die dazu orthogonale Komponente ( $\mathbf{E}$  senkrecht zur  $x$ - $z$ -Ebene) ein Kreis (Abb. 8.34). Der zum Kreis gehörige Brechungsindex  $n_0$  hängt nicht vom Winkel  $\theta$  zwischen Ausbreitungsrichtung von  $\mathbf{k}$  und optischer Achse ab. Er verhält sich wie bei einem isotropen Medium und heißt daher **ordentlicher Brechungsindex**  $n_0$ , während der **au-**



**Abbildung 8.34** Schnitt durch das Indexellipsoid **a** für positiv, **b** für negativ optisch einachsige Kristalle. Die Schnittpunkte der Ausbreitungsrichtung mit Kreis bzw. Ellipse geben die Brechzahlen  $n_0$  bzw.  $n_a(\theta)$  an. Zwei verschiedene Wellen in zwei beliebigen Richtungen sind eingezeichnet, von denen einmal nur der ordentliche und einmal nur der außerordentliche Strahl gezeigt wird. Die Ellipsoide sind rotationssymmetrisch um die optische Achse

*βerordentliche* Brechungsindex  $n_a$  vom Winkel  $\theta$  abhängt. Sein Maximalwert  $(n_a)_{\max} = n_3$  wird für positiv einachsige Kristalle (Abb. 8.34a) für  $k \parallel x$  angenommen, sein Minimalwert  $(n_a)_{\min} = n_0$  für  $k \parallel z$ . Bei unserer Wahl der Koordinatenachsen sind die Lichtwellen mit  $E = \{0, E_y, 0\}$  ordentliche, die mit  $E = \{E_x, 0, E_z\}$  außerordentliche Wellen bzw. Strahlen. In Tab. 8.4 sind für einige optisch einachsige Kristalle die Brechzahlen  $n_0$  und  $n_a$  angegeben.

Bei Kristallen mit niedrigerer Symmetrie gibt es keine ausgezeichnete Richtung mehr, und die Strahlausbreitung in solchen Kristallen wird wesentlich komplizierter. Es gibt keinen ordentlichen Strahl mehr mit einer richtungs-unabhängigen Brechzahl, sondern zwei außerordentliche Strahlen, für welche die Brechzahlen richtungsabhängig sind. Für optisch zweiaxige Kristalle gibt es drei unterschiedliche Brechzahlen  $n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq n_1$ , und die Strahlenfläche ist kein Rotationsellipsoid mehr [8.14].

**Tabelle 8.4** Brechzahlen  $n_0 = n_1$  und  $n_a(90^\circ) = n_3$  für einige doppelbrechende optisch einachsige Kristalle bei  $\lambda = 589,3 \text{ nm}$

Kristall	$n_0$	$n_a$
Quarz	1,5443	1,5534
Kalkspat	1,6584	1,4864
Turmalin	1,669	1,638
ADP Ammonium-Dihydrogen-Phosphat	1,5244	1,4791
KDP Kalium-Dihydrogen-Phosphat	1,5095	1,4683
Cadmiumsulfid CdS	2,508	2,526

Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes in Materie ist:

$$\varrho_{\text{em}} = \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \rangle = \varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \cdot (\tilde{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}) \rangle .$$

Im Hauptachsensystem wird dies:

$$\varrho_{\text{em}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} \right) .$$

Die Flächen konstanter Energiedichte sind dreiachsiges Ellipsoide.

Mit dem Vektor  $\mathbf{r} = \{x, y, z\} = \frac{1}{\sqrt{\varrho_{\text{em}}}} \{D_x, D_y, D_z\}$  kann man dies wegen  $n_i^2 = \varepsilon_i / \varepsilon_0$ ,  $i = x, y, z$ , schreiben als:

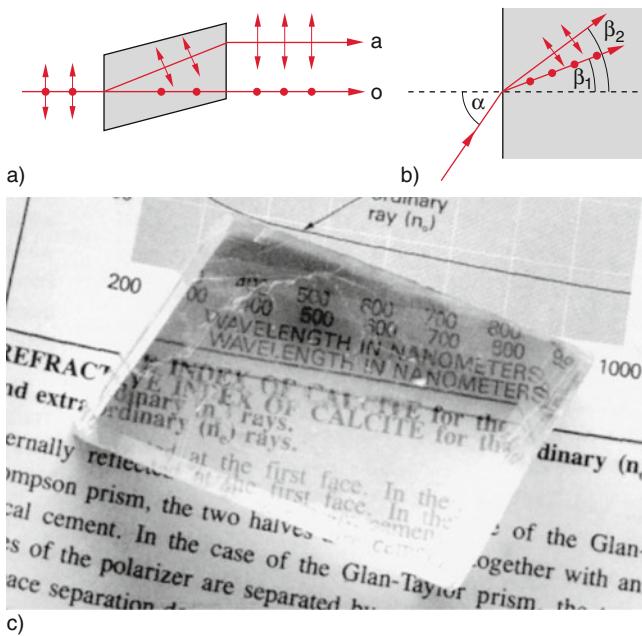
$$1 = \frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2}$$

und erhält das Index-Ellipsoid.

### 8.5.3 Doppelbrechung

Lässt man in einen Kalkspatkristall ein paralleles, unpolarisiertes Lichtbündel eintreten, so spaltet es (auch bei senkrechtem Einfall) in zwei Teilbündel auf (Abb. 8.35). Ein Bündel folgt dem Snelliuss'schen Brechungsgesetz (8.58) (d. h. bei  $\alpha = 0$  ist auch  $\beta = 0$ ). Es wird deshalb **ordentlicher Strahl** genannt (wie ein ordentlicher Bürger, der gesetzesstreu ist). Das andere Teilbündel hat auch für  $\alpha = 0$  einen Brechwinkel  $\beta \neq 0$  (**außerordentlicher Strahl**).

Misst man den Polarisationszustand der beiden Teilwellen, so stellt man fest, dass beide orthogonal zueinander polarisiert sind. Die ordentliche Welle ist senkrecht zur



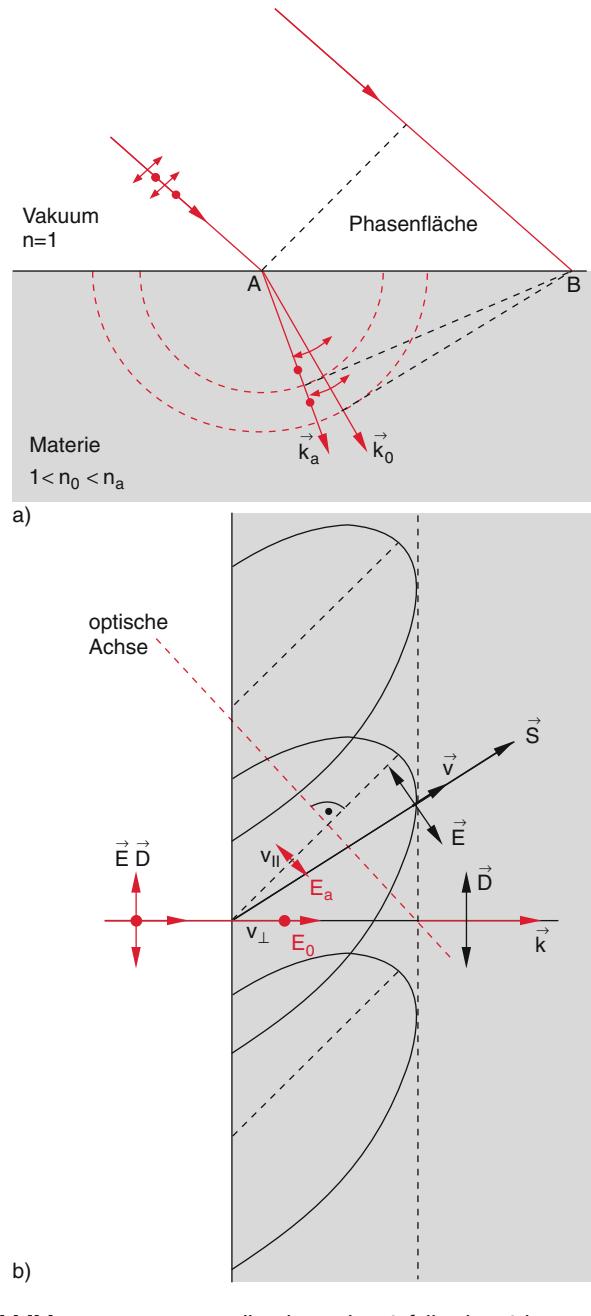
**Abbildung 8.35** Optische Doppelbrechung. **a** Senkrechter Einfall; **b** schräger Einfall; **c** Illustration der Doppelbrechung im Kalkspat-Kristall. Beim Einfall von unpolarisiertem Licht sind ordentlicher und außerordentlicher Strahl senkrecht zueinander linear polarisiert

optischen Achse des Kristalls polarisiert, die außerordentliche parallel zu ihr.

Wie in Bd. 1, Abschn. 11.11, erläutert wurde, kann man die Brechung mithilfe des Huygens'schen Prinzips verstehen. Die Ausbreitungsrichtung ist die Normale zur Einhüllenden der Wellenfronten der Elementarwellen.

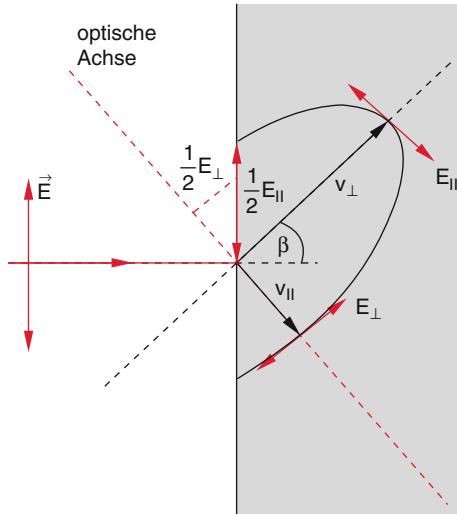
Trifft das einfallende Licht senkrecht zur optischen Achse auf den Kristall (Abb. 8.22a), so hängt für beide Polarisationsebenen die Ausbreitungsgeschwindigkeit nicht von der Ausbreitungsrichtung im Kristall ab, die in der  $x$ - $y$ -Ebene von Abb. 8.34 liegt. Die Phasenflächen für jede Elementarwelle (von denen in Abb. 8.36a nur eine gezeichnet ist, die vom Punkt A ausgeht) sind also für beide Polarisationsrichtungen Kugeln (ihre Schnitte in der  $x$ - $y$ -Ebene sind dann Kreise), aber die Ausbreitungsgeschwindigkeiten für die ordentliche und die außerordentliche Welle sind unterschiedlich, weil  $n_o$  von  $n_a$  verschieden ist. Die Tangenten vom Punkt B an diese Kreise geben dann die Phasenebenen der Gesamtwellen für die beiden Polarisationsrichtungen an und die Ausbreitungsvektoren  $k_0$  und  $k_a$  stehen senkrecht auf diesen Ebenen. Sie zeigen in unterschiedliche Richtungen.

Wenn die Einfallsrichtung schräg zur optischen Achse liegt (In Abb. 8.36b liegt die optische Achse in der Zeichenebene), hängt die Phasengeschwindigkeit der außerordentlichen Welle (Polarisationsrichtung parallel zur



**Abbildung 8.36** **a** Doppelbrechung des einfallenden Lichtes, wenn die optische Achse senkrecht zur Zeichenebene liegt. **b** Elliptische Wellenfronten für die außerordentliche Welle mit Poynting-Vektor  $S$  und Wellenvektor  $k$

optischen Achse) von der Richtung gegen die optische Achse ab (Abb. 8.34). Deshalb sind die Schnitte durch die Phasenflächen für die außerordentlichen Elementarwellen Ellipsen und für die ordentliche Welle (Polarisationsrichtung senkrecht zur optischen Achse) wie in Abb. 8.36a Kreise. Ist die Einfallsrichtung senkrecht zur Grenzfläche, so geht der ordentliche Strahl im Kristall geradeaus weiter, während der außerordentliche Strahl gebrochen wird.



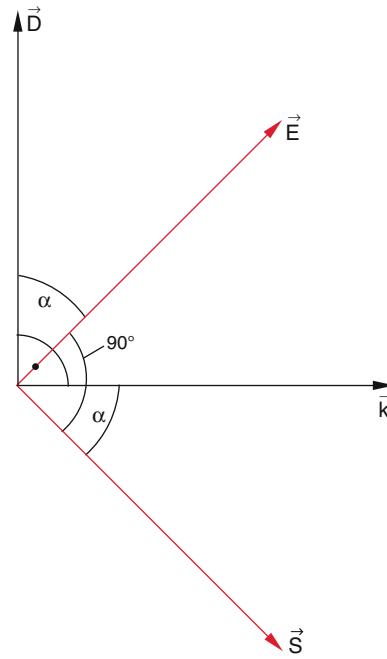
**Abbildung 8.37** Entstehung der elliptischen Phasenflächen in einem doppelbrechenden Kristall, wenn die Polarisationsrichtung der einfallenden Welle einen beliebigen Winkel gegen die optische Achse hat

In Abb. 8.37 wird das Zustandekommen der Ellipse noch einmal für den allgemeinen Fall erklärt. Der Polarisationsvektor  $\mathbf{E}$  der einfallenden Welle wird in eine Komponente  $E_{\parallel}$  parallel und eine Komponente  $E_{\perp}$  senkrecht zur optischen Achse zerlegt. Die Geschwindigkeiten für die beiden Polarisationsrichtungen sind  $v_{\parallel}$  bzw.  $v_{\perp}$ . Der Brechungswinkel  $\beta$  ergibt sich dann aus dem Brechungsgesetz  $v_{\parallel}/c = \sin \beta$ .

Die Größe der Aufspaltung in ordentlichen und außerordentlichen Strahl hängt ab von dem Winkel des einfallenden Strahls gegen die optische Achse und von der Differenz der Brechzahlen  $n_0$  und  $n_a$ .

Wegen der unterschiedlichen Geschwindigkeiten und Ausbreitungsvektoren  $\mathbf{k}$  für die beiden Polarisationsrichtungen haben Ausbreitungsvektor  $\mathbf{k}$  und Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$  in doppelbrechenden Kristallen im Allgemeinen unterschiedliche Richtungen. In Abb. 8.38 werden für den allgemeinen Fall die Richtungen von elektrischer Feldstärke  $\mathbf{E}$ , dielektrischer Verschiebungsdichte  $\mathbf{D}$ , Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$ , der die Richtung des Energieflusses angibt, illustriert. Die Tangentenebene an die Phasenflächen der einzelnen Elementarwellen ergibt die Phasenebene der Gesamtwellen. Der Ausbreitungsvektor  $\mathbf{k}$  steht senkrecht auf dieser Phasenebene. Die Richtung des Poynting-Vektors  $\mathbf{S}$  ist die Richtung des Energieflusses. Sie ergibt sich als  $\mathbf{S} \sim E_{\parallel}^2 v_{\parallel} + E_{\perp}^2 v_{\perp}$ .

Da  $\mathbf{S} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot v_{\text{ph}}^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$  gilt, steht  $\mathbf{E}$  senkrecht auf  $\mathbf{S}$ . Ebenso steht die dielektrische Erregung  $\mathbf{D}$  senkrecht auf dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$ . Zwischen den Richtungen von  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  und zwischen  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{S}$  liegt jeweils der Winkel  $\alpha$ , der



**Abbildung 8.38** Richtungen der verschiedenen Vektoren in Kristallen.  $\mathbf{E}$  steht senkrecht auf  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{D}$  senkrecht auf  $\mathbf{k}$

von den Komponenten des Dielektrizitäts-Tensors  $\epsilon$ , also von der Struktur des Kristalls abhängt. Fällt ein Lichtbündel mit kleinem Bündelquerschnitt ein, so wandert der Energiefluss bei genügend großer Dicke des Kristalls aus dem Strahlquerschnitt heraus, d.h. es wird dann keine Energie transportiert.

Fällt die optische Achse mit der Ausbreitungsrichtung zusammen, so findet keine Doppelbrechung statt. Beide Wellen haben dann gleiche Phasengeschwindigkeit.

## 8.6 Erzeugung und Anwendung von polarisiertem Licht

Wie in Abschn. 7.4 gezeigt wurde, kann eine ebene elektromagnetische Welle, die in  $z$ -Richtung läuft, immer dargestellt werden durch

$$\mathbf{E} = (A_x + A_y) e^{i(\omega t - kz)},$$

wobei die Amplituden

$$A_x = E_{0x} e^{i\varphi_1}, \quad A_y = E_{0y} e^{i\varphi_2}$$

im Allgemeinen komplexe Vektoren sind.

Für  $\varphi_1 = \varphi_2$  ist die Welle linear polarisiert (Abb. 7.4), für  $|A_x| = |A_y|$  und  $|\varphi_1 - \varphi_2| = \pi/2$  ist sie zirkular polarisiert (Abb. 7.5), und für  $|A_x| \neq |A_y|$  oder  $|\varphi_1 - \varphi_2| \notin \{0, \pi/2, \pi\}$  ist sie elliptisch polarisiert.

Gibt es keine zeitlich konstante, sondern eine statistisch schwankende Phasendifferenz  $\varphi_1 - \varphi_2$ , so variiert die Richtung von  $E$  statistisch in einer Ebene senkrecht zu  $z$ . Solche Wellen heißen *unpolarisiert*.

Eine Welle, die von einem schwingenden Dipol ausgesendet wird, ist in genügend großer Entfernung von Dipol ( $r \gg d_0$ ) linear polarisiert, wobei  $E$  parallel zur Dipolachse gerichtet ist (siehe Abschn. 6.4).

Lichtwellen werden von energetisch angeregten Atomen oder Molekülen ausgesandt. In den meisten Fällen (z. B. bei Stoßanregung der Atome) sind die Richtungen der atomaren Dipole statistisch in alle Richtungen verteilt. Deshalb ist das Licht üblicher Lichtquellen (z. B. Glühlampe, Gasentladung) im Allgemeinen unpolarisiert.

Die Frage ist nun, wie man aus solchem unpolarisiertem Licht polarisiertes Licht erzeugen kann. Dazu gibt es eine Reihe von Möglichkeiten, von denen einige hier kurz vorgestellt werden [8.17].

### 8.6.1 Erzeugung von linear polarisiertem Licht durch Reflexion

Lässt man unpolarisiertes Licht unter dem Brewsterwinkel  $\alpha_B$  auf eine Glasplatte fallen, so enthält der reflektierte Anteil nur eine Polarisationskomponente  $A_\perp$  senkrecht zur Einfallsebene (Abb. 8.14). Das reflektierte Licht ist daher vollständig linear polarisiert (siehe Abschn. 8.4.4). Das transmittierte Licht ist nur teilweise polarisiert. Man definiert als **Polarisationsgrad**  $PG$  von teilweise linear polarisiertem Licht den Quotienten

$$PG = \frac{I_\parallel - I_\perp}{I_\parallel + I_\perp}, \quad (8.80)$$

wobei  $I_\parallel, I_\perp$  die Intensitäten des Lichtes mit den  $E$ -Vektoren parallel bzw. senkrecht zu einer vorgegebenen Richtung sind.

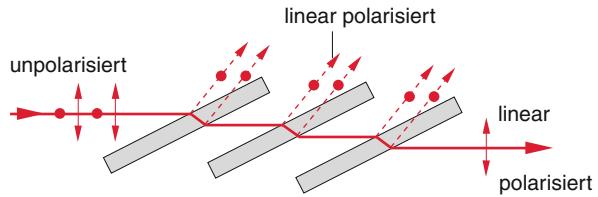
Aus (8.65a) für das Reflexionsvermögen des senkrechten Anteils kann man dann wegen  $R + T = 1$  ausrechnen, dass beim Brewsterwinkel die Intensität  $I_T$  des transmittierten Lichtes um etwa 15 % geschwächt wird.

Der Polarisationsgrad des transmittierten Lichtes ist für unpolarisiertes einfallendes Licht ( $I_\parallel = I_\perp = 0,5I_0$ ) beim Brewsterwinkel.

$$PG = \frac{0,5 - 0,5 \cdot 0,85}{0,5 + 0,5 \cdot 0,85} \approx 0,08,$$

also nur 8 %. Durch mehrmaligen Durchgang durch Brewstergrenzflächen (Abb. 8.39) lässt sich auch für das transmittierte Licht der Polarisationsgrad erhöhen. Weil

### 8.6 Erzeugung und Anwendung von polarisiertem Licht

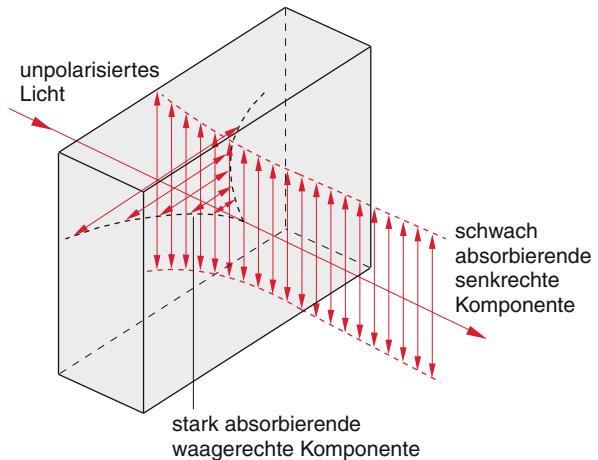


**Abbildung 8.39** Erzeugung von linear polarisiertem Licht durch Transmission durch viele Brewsterflächen

immer nur die Komponente  $I_\perp$  aus dem Lichtstrahl herausreflektiert wird, hat man keine Verluste für die Komponente  $I_\parallel$ . Die Intensität des transmittierten Lichtes strebt daher gegen  $I_\parallel = 0,5I_0$ , wenn die Zahl der Brewsterflächen wächst.

### 8.6.2 Erzeugung von linear polarisiertem Licht beim Durchgang durch dichroitische Kristalle

Die in der Praxis einfachste Methode zur Erzeugung von linear polarisiertem Licht bei Verwendung üblicher Lampen als Lichtquellen benutzt Polarisationsfolien, die aus **dichroitischen** („zweifarbig“) kleinen Kristallen bestehen, welche orientiert in eine Gelatineschicht eingebettet sind. Diese anisotropen Kristalle (z. B. Herapathit) haben richtungsabhängige Rückstellkräfte für die zu Schwingungen angeregten Atomelektronen. Deshalb sind ihre Eigenfrequenzen  $\omega_0$  in (8.21) und damit auch der Absorptionskoeffizient bei einer vorgegebenen Wellenlänge von der Richtung des  $E$ -Vektors der einfallenden Lichtwelle abhängig (Abb. 8.40).



**Abbildung 8.40** Grundprinzip des dichroitischen Polarisators (Polarisationsfolie), wo eine Polarisationskomponente stärker absorbiert wird als die dazu senkrecht polarisierte

Man kann die Folie so drehen, dass Licht der gewünschten Polarisation durchgelassen und solches der dazu senkrechten Polarisation absorbiert wird.

Eine solche optische Anisotropie lässt sich auch erreichen, indem eine Zellulosehydrat-Folie durch Streckung in einer Richtung dichroitisch gemacht wird (*Spannungsdoppelbrechung*, siehe Abschn. 8.6.6).

Der Nachteil der Polarisationsfolien ist ihre relativ große Abschwächung auch für die gewünschte Polarisationskomponente. Bei großen Lichtintensitäten (z. B. bei Laserstrahlen) führt die große Absorption leicht zum Verbrennen der Folie. Deshalb müssen in solchen Fällen doppelbrechende nichtabsorbierende Kristalle verwendet werden.

### 8.6.3 Doppelbrechende Polarisatoren

Mithilfe der optischen Doppelbrechung in optisch einachsigen durchsichtigen Kristallen lässt sich auch für große Intensitäten (z. B. für Laser) aus unpolarisiertem Licht linear oder elliptisch polarisiertes Licht machen.

Ein Beispiel für einen solchen Polarisator ist das **Nicol'sche Prisma** (Abb. 8.41a), das aus einem doppelbrechenden negativ optisch einachsigen Rhomboederkristall besteht, der entlang der diagonalen Fläche schräg zur optischen Achse aufgeschnitten wird und dann mit einem durchsichtigen Kleber wieder zusammengefügt wird. Fällt unpolarisiertes Licht auf die Eintrittsfläche, so wird es durch die Brechung in einen ordentlichen Strahl und einen außerordentlichen aufgespalten. Wegen  $n_o > n_a$  wird der ordentliche Strahl stärker gebrochen. Beide Strahlen treffen unter verschiedenen Winkeln auf die Klebefläche. Der Kleber (z. B. Kanadabalsam) hat einen Brechungsindex  $n_K = 1,54$ , der kleiner ist als der Brechungsindex  $n_o = 1,66$  des ordentlichen Strahls, aber größer als der des außerordentlichen Strahls ( $n_a = 1,49$ ). Ist der Winkel  $\beta_o$ , unter dem der ordentliche Strahl auf die Klebefläche trifft, größer als der Grenzwinkel  $\beta_g$  der Totalreflexion ( $\sin \beta_g = n_K/n_o$ ), so wird die ordentliche Welle vollständig reflektiert, sodass das transmittierte Licht nur noch den zur Einfallsfläche parallel polarisierten außerordentlichen Strahl enthält und deshalb vollständig linear polarisiert ist.

Da beim Nicol'schen Prisma Ein- und Austrittsfläche schräg zur Einfallsrichtung des Lichtes stehen, tritt ein Strahlversatz für den transmittierten außerordentlichen Strahl auf.

Dieser Nachteil wird beim **Glan-Thompson-Polarisator** (Abb. 8.41b) vermieden, der senkrechte Endflächen hat. Er ist so aus einem Kalkspatkristall geschnitten, dass

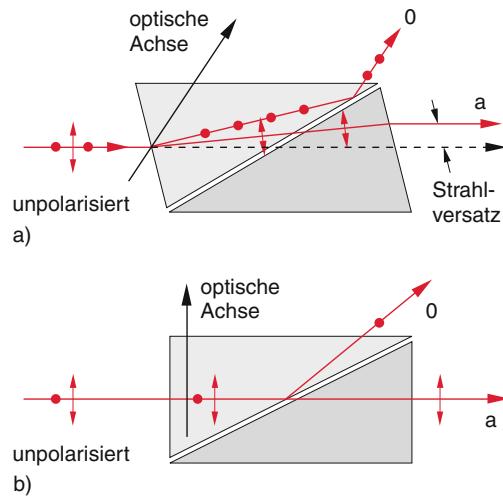


Abbildung 8.41 a Nicol'sches Prisma zur Erzeugung von linear polarisiertem Licht. b Glan-Thompson-Polarisator

die optische Achse parallel zur Eintrittsfläche liegt. Deshalb tritt beim Auftreffen von unpolarisiertem Licht keine Doppelbrechung auf. Ordentliche und außerordentliche Welle laufen parallel, jedoch mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten  $c/n_1$  bzw.  $c/n_3$  durch den Kristall bis zur Kittflächen, wo wieder, wie beim Nicol'schen Prisma, die ordentliche Welle total reflektiert wird.

Die Vorteile des Glan-Thompson-Polarisators sind:

- Es gibt keinen Strahlversatz.
- Die gesamte Eintrittsfläche kann genutzt werden.
- Man kommt mit kürzeren Gesamtlängen des Polarisators aus.

Um beide Polarisationsrichtungen nutzen zu können, wurden spezielle Strahlteilerwürfel (Abb. 8.42) entwickelt. Im Prinzip könnte man wie beim Glan-Thompson-Polarisator die Transmission des außerordentlichen Strahls und die Totalreflexion des ordentlichen Strahls ausnutzen, wenn der Unterschied der Brechungsindizes  $\Delta n = n_1 - n_K$  zur Kittschicht groß genug wird, dass  $\beta_g \geq 45^\circ$  wird. In der Praxis verwendet man jedoch überwie-

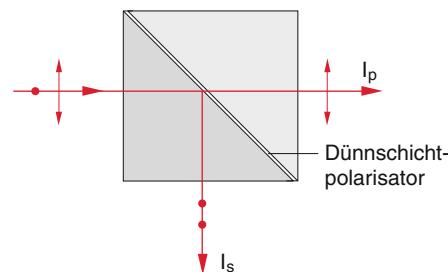
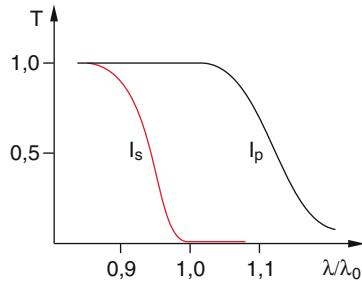


Abbildung 8.42 Polarisations-Strahlteilerwürfel



**Abbildung 8.43** Transmission  $T$  der dielektrischen Strahlteilerschicht für die parallele und senkrechte Polarisationskomponente innerhalb eines Wellenlängenbereichs um die optimale Wellenlänge  $\lambda_0$

geng Würfel aus isotropem Glas, die entlang der Diagonalfäche aufgeschnitten und mit einem Dünnenschichtpolarisator versehen werden, bevor sie wieder verkittet werden. Dieser besteht aus einer Vielzahl dünner dielektrischer Schichten mit Dicken von  $\lambda/2$ , deren Reflexionsvermögen für eine Polarisationskomponente groß, für die anderen klein ist (Abb. 8.43).

Mit doppelbrechenden Kristallen lässt sich aus linear polarisiertem einfallendem Licht elliptisch bzw. zirkular polarisiertes transmittiertes Licht erzeugen. Dazu dreht man den Kristall, der in Form einer dünnen, planparallelen Platte mit der optischen Achse in der Plattenebene geschnitten ist, so, dass die optische Achse um  $45^\circ$  gegen die Polarisationsrichtung  $E$  der einfallenden Welle

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}_0 = \{E_{0x}, E_{0y}, 0\}$$

geneigt ist (Abb. 8.44).

Die beiden zueinander senkrecht polarisierten Anteile der Welle mit  $E_{0x}$  und  $E_{0y}$  erfahren unterschiedliche Brechungsindizes  $n_1$  bzw.  $n_3$  (siehe Abb. 8.34) und haben daher nach Durchlaufen der Strecke  $d$  die relative Phasenverschiebung

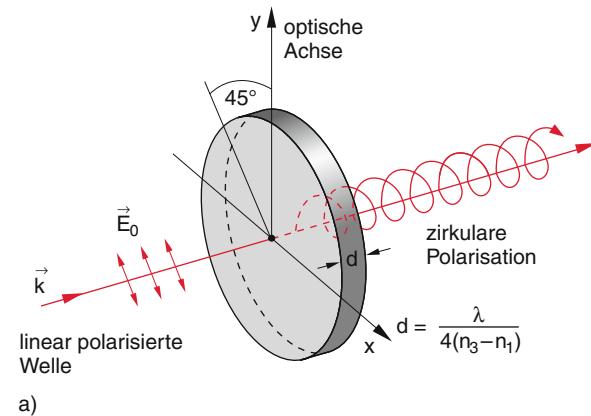
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(n_3 - n_1)$$

gegeneinander. Wird die Dicke  $d$  so gewählt, dass  $d(n_3 - n_1) = \lambda_0/4$  wird, also  $\Delta\varphi = \pi/2$ , so ist die austretende Welle für  $\alpha = 45^\circ$  ( $E_x = E_y$ ) zirkular polarisiert (**λ/4-Plättchen**) für andere Winkel  $\alpha$  ( $E_x \neq E_y$ ) ist sie elliptisch polarisiert.

### Beispiel

Verwendet man einen positiv optisch einachsigen Kristall mit  $n_1 = 1,55$  und  $n_3 = 1,58$ , so ergibt sich

$$d = \frac{\lambda}{4 \cdot 0,03} = 8,3\lambda .$$



**Abbildung 8.44** Prinzip des Zirkular-Polarisators ( $\lambda/4$ -Plättchen). **a** Anschauliche Darstellung; **b** Richtung des  $E$ -Vektors der einfallenden Welle

Man sieht, dass solche  $\lambda/4$ -Plättchen im Allgemeinen sehr dünn und deshalb mechanisch fragil sind. Um dies zu vermeiden, kann man entweder  $\Delta n$  sehr klein wählen, oder man betreibt die  $\lambda/4$ -Zirkularpolarisatoren in höherer Ordnung, d. h. man macht die Dicke so groß, dass  $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi/2$  mit  $m \gg 1$  gilt. Der Nachteil der Verwendung höherer Ordnungen ist die stärkere Abhängigkeit der Phasenverschiebung  $\Delta\varphi(\lambda)$  von der Wellenlänge  $\lambda$ .

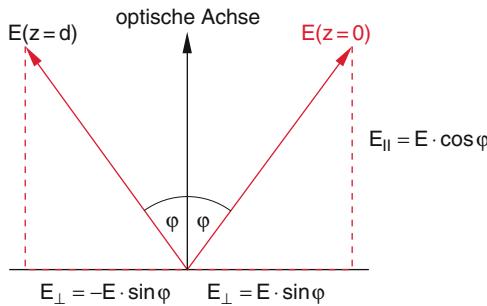
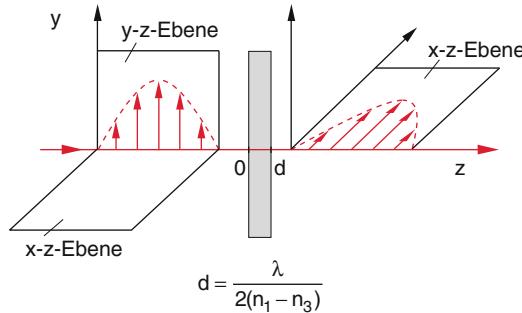
### 8.6.4 Polarisationsdreher

In der optischen Praxis tritt häufig das Problem auf, die Schwingungsebene von linear polarisiertem Licht um einen vorgegebenen Winkel  $\Delta\alpha$  zu drehen.

Dies lässt sich mit einer **λ/2-Platte** erreichen, welche die doppelte Dicke einer  $\lambda/4$ -Platte hat. Die optische Achse liegt wieder in der Plattenebene. Hat der  $E$ -Vektor der einfallenden Welle den Winkel  $\varphi$  gegen die optische Achse (Abb. 8.45), so lässt sich  $E_0$  in die beiden Komponenten

$$E_{0\parallel} = E_0 \cos \varphi \quad \text{und} \quad E_{0\perp} = E_0 \sin \varphi$$

parallel bzw. senkrecht zur optischen Achse zerlegen, die in der Eintrittsfläche in Phase sind. Nach Durchlaufen der



**Abbildung 8.45** Drehung der Polarisationsebene einer polarisierten Welle durch ein  $\lambda/2$ -Plättchen

doppelbrechenden Platte ist aufgrund der unterschiedlichen Laufzeiten der beiden Komponenten eine Phasendifferenz  $\Delta\varphi$  zwischen beiden Komponenten entstanden. Für  $d = \lambda/(2(n_1 - n_3))$  wird  $\Delta\varphi = \pi$ . Für  $z = d$  gilt dann mit  $(k_\perp - k_\parallel) \cdot d = \pi$

$$\begin{aligned} E_\parallel &= E_0 \cos \varphi \cdot e^{ik_\parallel d} e^{i\omega t}, \\ E_\perp &= E_0 \sin \varphi \cdot e^{ik_\perp d} e^{i\omega t}, \\ &= -E_0 \sin \varphi \cdot e^{ik_\parallel d} e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (8.81)$$

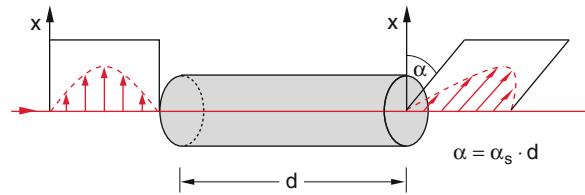
sodass der  $E$ -Vektor bei  $z = d$  sich um den Winkel  $\Delta\alpha = 2\varphi$  gedreht hat (Abb. 8.45). Durch Drehen des  $\lambda/2$ -Plättchens um die Einfallrichtung  $z$  lässt sich jeder Winkel  $\varphi$  und damit jede gewünschte Drehung  $\Delta\alpha = 2\varphi$  einstellen.

### 8.6.5 Optische Aktivität

Manche Stoffe drehen auch bei beliebiger Richtung der Polarisationsebene des einfallenden linear polarisierten Lichtes diese Ebene beim Durchgang durch die Schichtdicke  $d$  um einen Winkel

$$\alpha = \alpha_s \cdot d. \quad (8.82)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\alpha_s$  heißt spezifisches optisches Drehvermögen (Abb. 8.46). Man unterscheidet zwischen



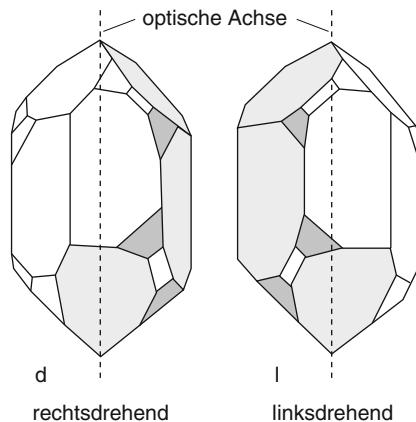
**Abbildung 8.46** Zur optischen Aktivität eines Mediums

rechtsdrehenden und linksdrehenden Substanzen, wobei der Drehsinn für einen Beobachter definiert ist, der gegen die Lichtrichtung schaut. Früher wurden die Bezeichnungen „d“ (von lat. *dexter*) und „l“ (*laevus*) verwendet. Heute findet man jedoch in der Literatur [8.16] durchgängig die Bezeichnung (+) für rechtsdrehende (positive Drehwinkel  $\alpha$ ) und (−) für linksdrehende Stoffe.

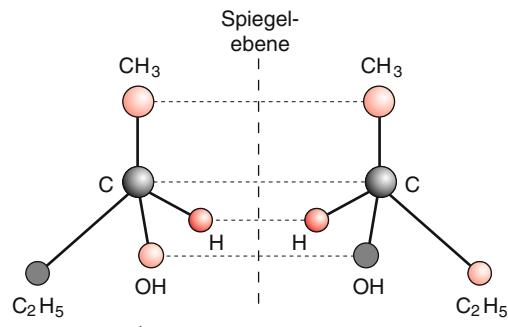
Der physikalische Grund für diese Drehung sind spezielle Symmetrieeigenschaften des Mediums. Es gibt eine Reihe von Substanzen, bei denen optische Aktivität nur in der festen, kristallinen Phase beobachtet wird, während die Drehung der Polarisationsebene im flüssigen oder gasförmigen Zustand verschwindet. Sie muss also durch die Symmetrie der Kristallstruktur bedingt sein. Ein Beispiel ist kristalliner Quarz, der als rechtsdrehender oder linksdrehender Quarz in der Natur vorkommt (Abb. 8.47).

Auf der anderen Seite gibt es auch Stoffe (wie z. B. Zucker oder Milchsäure), die auch im flüssigen Zustand optische Aktivität zeigen. Hier muss also die Symmetrie der Moleküle eine Rolle spielen.

Die physikalische Erklärung der optischen Aktivität ist korrekt nur mithilfe der Quantentheorie möglich. Ein anschauliches Modell kann jedoch die Grundzüge dieses Phänomens deutlich machen.



**Abbildung 8.47** Die zueinander spiegelbildlichen Kristallstrukturen von links- bzw. rechtsdrehendem Quarz



**Abbildung 8.48** Zwei isomere Formen des 2-Butanol-Moleküls, die zueinander spiegelbildlich sind bezüglich der Spiegellebene senkrecht zur Zeichenebene

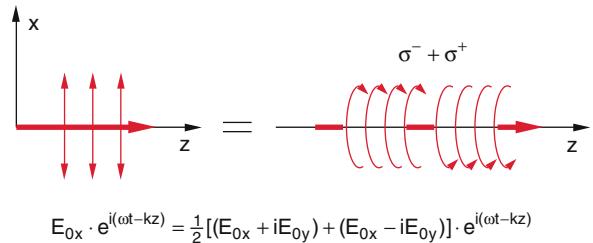
Analog zur Erzeugung von linearen Schwingungen der atomaren Dipole, die in einem homogenen Medium durch eine linear polarisierte Welle induziert werden, nimmt man hier an, dass die äußeren Elektronen dieser speziellen Moleküle bzw. Kristalle durch zirkular polarisiertes Licht zu elliptischen Spiralbewegungen um die Ausbreitungsrichtung angeregt werden. Dieses Modell wird auch in der Tat nahegelegt durch die spiralförmige Anordnung der Sauerstoff- und Silizium-Atome in kristallinem Quarz, wobei die Spirale rechtshändig für rechtsdrehenden und linkshändig für linksdrehenden Quarz ist. Man nennt solche Moleküle, die in zwei zueinander spiegelbildlichen Strukturen (*Spiegelisomerie*) vorkommen, auch **chirale** („händige“) **Moleküle**. Beispiele sind Zucker, Milchsäure oder 2-Butanol (Abb. 8.48). Wir können eine in  $x$ -Richtung linear polarisierte Welle

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_x E_{0x} e^{i(\omega t - kz)}$$

immer zusammensetzen aus zwei entgegengesetzt zirkular polarisierten Wellen (Abb. 8.49).

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^+ &= \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{e}}_x E_{0x} + i\hat{\mathbf{e}}_y E_{0y}) e^{i(\omega t - kz)} r \\ \mathbf{E}^- &= \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{e}}_x E_{0x} - i\hat{\mathbf{e}}_y E_{0y}) e^{i(\omega t - kz)}. \end{aligned} \quad (8.83)$$

Haben beide Komponenten im Medium unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten  $v^+ = c/n^+$  bzw.  $v^- = c/n^-$ ,



**Abbildung 8.49** Zusammensetzung einer linear polarisierten Welle aus links- und rechtszirkular polarisierten Komponenten. Zur Festlegung des Polarisationsinns  $\sigma$  siehe Abschn. 12.7

so ist die zusammengesetzte Welle nach der Strecke  $d$  wieder linear polarisiert, aber ihre Polarisationsebene hat sich um einen Winkel

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda_0} d(n^- - n^+)$$

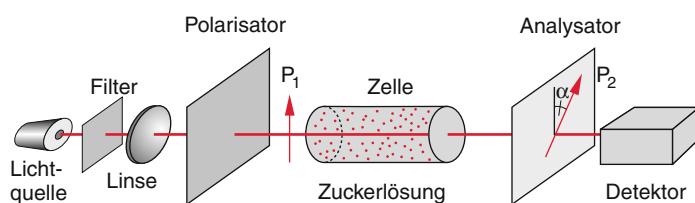
gedreht.

Die unterschiedlichen Brechungsindizes  $n^+$ ,  $n^-$  werden durch die unterschiedlichen Wechselwirkungen der links- bzw. rechts zirkular polarisierten Welle mit den sich in einem Vorzugsdrehsinn bewegenden Elektronen verursacht.

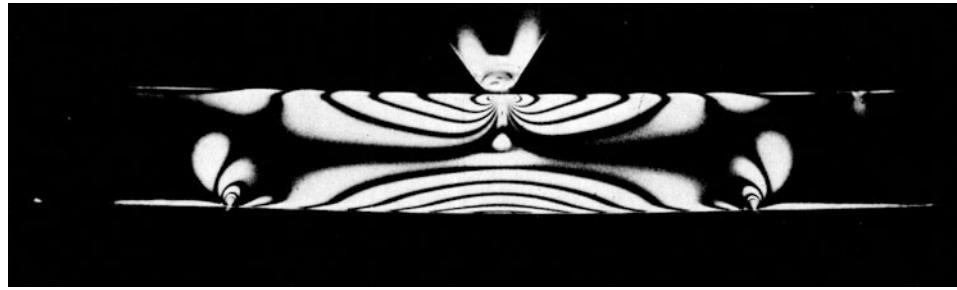
Man kann sich überlegen, dass auch in einer Flüssigkeit, in der ohne Lichtwelle die Orientierungen der Moleküle statistisch verteilt sind, durch die induzierten elektrischen und magnetischen Dipolmomente der chiralen Moleküle eine, wenn auch kleine, Orientierungszustände kommt, die dann die optische Aktivität bewirkt.

Sind in einer Flüssigkeit gleich viele links- wie rechtsdrehende Moleküle vorhanden, so heben sich ihre Effekte auf, und die optische Aktivität wird null.

Bei biologischen Molekülen bevorzugt die Natur offensichtlich eine der beiden Spiegelisomeren. So ist der Blutzucker linksdrehend. Mithilfe eines Polarimeters (Abb. 8.50) kann man aus dem Drehwinkel  $\alpha = \alpha_s \cdot c \cdot l$  einer Zuckerlösung mit der Konzentration  $c$  und der Flüssigkeitslänge  $l$  die Konzentration bestimmen. Dazu setzt man die Probe zwischen zwei Polarisatoren und misst, bei welchem Kreuzungswinkel der Durchlassrichtungen die transmittierte Intensität null wird [8.17].



**Abbildung 8.50** Zur Messung der Zuckerkonzentration mit einem Polarimeter



**Abbildung 8.51** Spannungsdoppelbrechung eines Balkens aus Plexiglas, der auf zwei Stützen ruht und in der Mitte belastet wird, sichtbar gemacht mithilfe der Polarimetrie. Aus M. Cagnet, M. Francon, J. C. Thierr, *Atlas optischer Erscheinungen* (Springer, Berlin, Göttingen 1962)

### 8.6.6 Spannungsdoppelbrechung

Auch in homogenen isotropen Medien lässt sich durch äußere Druck- oder Zugkräfte eine optische Doppelbrechung erzeugen. Dies führt zu orts- und richtungsabhängigen Brechungsindexänderungen  $\Delta n$ , aus deren Messung man Informationen über die mechanischen Spannungen im Medium und über ihre räumliche Verteilung erhält. Eine solche Messung kann mit der in Abb. 8.50 gezeigten Anordnung erfolgen, wenn das Lichtbündel so weit aufgeweitet wird, dass es das gesamte Werkstück durchstrahlt. Das zu untersuchende durchsichtige Medium wird von linear polarisiertem Licht durchstrahlt und trifft dann auf einen zweiten Polarisator  $P_2$ , dessen Durchlassrichtung senkrecht zu der des ersten Polarisators  $P_1$  steht. Ist das Medium isotrop, so sperrt  $P_2$  das transmittierte Licht, und das Gesichtsfeld ist dunkel. Wird jetzt eine mechanische Spannung auf das Medium ausgeübt, so bewirken die optisch doppelbrechenden Gebiete des Mediums eine Änderung der Polarisations-eigenschaften und damit eine von null verschiedene Transmission durch  $P_2$  (Abb. 8.51). Da die Phasenverschiebung

$$\Delta\varphi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \int_0^d \Delta n(x, y) dz$$

von der Wellenlänge  $\lambda_0$  abhängt, sieht man bei Einstrahlen von weißem Licht hinter  $P_1$  ein farbiges Flächenmuster (siehe Farbtafel 11), welches detaillierte Informationen über die mechanische Spannungsverteilung im Medium gibt.

Dieses Verfahren der *Polarimetrie* wird z. B. von Glasbläsern verwendet, um zu prüfen, ob nach der Bearbeitung eines Werkstückes aus Glas noch mechanische Spannungen vorhanden sind, die dann durch Temperi(n)en (Erwärmung auf eine hohe Temperatur, bei der durch Fließvorgänge die mechanischen Spannungen abgebaut werden, mit nachträglichem langsamen Abkühlen) beseitigt werden müssen.

Auch zur Untersuchung der Belastungsverteilung mechanischer Tragwerke kann man an Plexiglasmodellen die Verteilung der mechanischen Spannungen untersuchen [8.17].

## 8.7 Nichtlineare Optik

Bei genügend kleinen elektrischen Feldstärken der einfallenden Welle sind die Auslenkungen der Elektronen aus ihrer Ruhelage klein, und die Rückstellkräfte sind proportional zur Auslenkung (Hooke'scher Bereich). Die induzierten Dipolmomente  $p = \alpha \cdot E$  sind dann proportional zur elektrischen Feldstärke  $E$ , und die im Medium durch die Lichtwelle erzeugten Komponenten  $P_i$  der dielektrischen Polarisation

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j \quad (8.84)$$

sind linear von  $E$  abhängig, wobei  $\chi_{ij}$  die Komponenten des Tensors  $\tilde{\chi}$  der elektrischen Suszeptibilität sind (siehe (1.58)). Dies ist der Bereich der *linearen Optik*. Für isotrope Medien wird  $\chi_{ij} = \chi \cdot \delta_{ij}$ , wobei  $\chi$  ein Skalar ist.

### Beispiel

Die Feldstärke des auf die Erde auftreffenden Sonnenlichtes innerhalb einer Bandbreite von 1 nm bei  $\lambda = 500$  nm ist etwa 3 V/m. Die durch die Coulombkraft bewirkte inneratomare Feldstärke ist dagegen

$$E_C \approx \frac{10 \text{ V}}{10^{-10} \text{ m}} = 10^{11} \text{ V/m}.$$

Deshalb sind die durch das Sonnenlicht bewirkten Auslenkungen der Elektronen (z. B. bei der Rayleigh-Streuung) sehr klein gegen ihren mittleren Abstand vom Atomkern.

Bei größeren Lichtintensitäten, wie sie z. B. mit Lasern (siehe Bd. 3) erreicht werden, kann durchaus der nichtlineare Bereich der Auslenkung realisiert werden. Statt (8.84) muss man dann ansetzen:

$$P_i = \varepsilon_0 \left( \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j + \sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \sum_j \sum_k \sum_l \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \right), \quad (8.85)$$

wobei  $\chi^{(n)}$  die Suszeptibilität  $n$ -ter Ordnung ist, die durch einen Tensor  $(n+1)$ -ter Stufe dargestellt wird. Obwohl die Größen  $\chi^{(n)}$ , die von Art und Symmetrieeigenschaften des Mediums abhängen, mit wachsendem  $n$  schnell abnehmen, können die höheren Terme in (8.85) bei genügend großen Feldstärken  $E$  durchaus eine wesentliche Rolle spielen.

Läuft nun eine monochromatische Lichtwelle

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kz) \quad (8.86)$$

durch das Medium, so enthält die Polarisierung  $\mathbf{P}$  wegen der höheren Potenzen  $\mathbf{E}^m$  außer der Frequenz  $\omega$  der einfallenden Welle auch Anteile auf höheren harmonischen  $m \cdot \omega$  ( $m = 2, 3, 4, \dots$ ). Dies bedeutet: Die induzierten schwingenden Dipole strahlen elektromagnetische Wellen nicht nur auf der Grundfrequenz  $\omega$  (Rayleigh-Streuung) ab, sondern auch auf höheren harmonischen. Die Amplituden dieser Anteile mit Frequenzen  $m\omega$  hängen ab von der Größe der Koeffizienten  $\chi^{(n)}$  (also vom nichtlinearen Medium) und von der Amplitude  $\mathbf{E}_0$  der einfallenden Welle.

Wir wollen uns dieses Phänomen an einigen Beispielen verdeutlichen [8.18–8.21].

### 8.7.1 Optische Frequenzverdopplung

Setzen wir (8.86) in (8.85) ein, so ergibt sich bei Berücksichtigung höchstens quadratischer Terme in (8.85) und für den einfachsten Fall isotroper Medien am Ort  $z = 0$  für linear polarisiertes einfallendes Licht  $\mathbf{E}_0 = \{E_{0x}, 0, 0\}$  die Polarisierung

$$P_x = \varepsilon_0 \left( \chi^{(1)} E_{0x} \cos \omega t + \chi^{(2)} E_{0x}^2 \cos^2 \omega t \right).$$

Wegen  $\cos^2 x = 1/2(1 + \cos 2x)$  ergibt sich dann:

$$P_x = \varepsilon_0 \left( \chi^{(1)} E_{0x} \cos \omega t + \frac{1}{2} \chi^{(2)} E_{0x}^2 + \frac{1}{2} \chi^{(2)} E_{0x}^2 \cos 2\omega t \right). \quad (8.87)$$

Die Polarisierung  $P_x$  enthält also einen konstanten Term  $1/2\varepsilon_0\chi^{(2)}E_{0x}^2$ , einen von  $\omega$  abhängigen Term und einen Term, der den Schwingungsanteil auf der doppelten Frequenz  $2\omega$  beschreibt. Dies bedeutet: Jedes von der einfallenden Welle mit der Frequenz  $\omega$  getroffene Atom bzw. Molekül des Mediums strahlt eine Streuwelle auf der Frequenz  $\omega$  ab (Rayleigh-Streuung) und eine Oberwelle auf der Frequenz  $2\omega$ .

Die Amplitude der Oberwelle ist nach (8.87) proportional zum Quadrat der Amplitude der einfallenden Welle, d. h. die Intensität der Oberwelle  $I(2\omega)$  ist proportional zum Quadrat der einfallenden Intensität  $I(\omega)$ .

Damit die von den einzelnen Atomen ausgesandten „mikroskopischen“ Anteile sich zu einer „makroskopischen“ Welle mit genügend großer Amplitude überlagern, müssen die jeweiligen Phasen der mikroskopischen Anteile von den einzelnen Atomen sich an jedem Ort phasengleich überlagern.

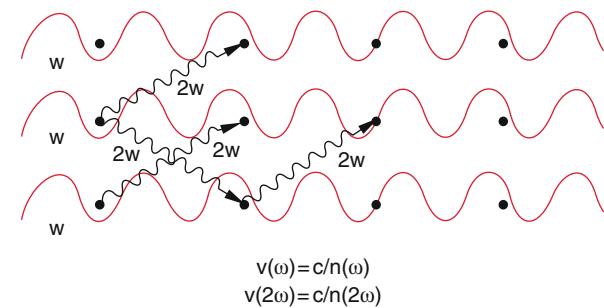
Dies verlangt, dass die Phasengeschwindigkeiten der Oberwellen und der sie erzeugenden einfallenden Welle gleich sein müssen.

### 8.7.2 Phasenanpassung

Läuft eine ebene Welle (8.86) in  $z$ -Richtung durch das Medium, so induziert sie in jeder Ebene  $z = z_0$  Dipole, deren Schwingungsphase von der Phase der Erregerwelle in dieser Ebene abhängt. In einer Nachbar-Ebene  $z = z_0 + \Delta z$  besteht die gleiche Phasendifferenz zwischen Dipolen und Erregerwelle.

Die von den Dipolen in der Ebene  $z = z_0$  abgestrahlten Wellen auf der Grundfrequenz  $\omega$  erreichen die Ebene  $z = z_0 + \Delta z$  in der gleichen Zeitspanne wie die Erregerwelle. Sie überlagern sich deshalb den dort erzeugten Sekundärwellen phasenrichtig (siehe Abschn. 8.1), sodass sich eine makroskopische Sekundärwelle aufbaut, die sich der primär einfallenden Welle überlagert und wegen ihrer Phasenverschiebung zur kleineren Geschwindigkeit  $v_{ph} = c/n$  der Gesamtwellen führt (siehe Abschn. 8.1).

Wegen der Dispersion des Mediums  $n(\omega)$  gilt diese phasenrichtige Überlagerung im Allgemeinen nicht mehr für die Oberwelle, da deren Phasengeschwindigkeit  $v_{ph}(2\omega) = c/n(2\omega) \neq v_{ph}(\omega) = c/n(\omega)$  verschieden von denjenigen der Grundwelle ist. Dadurch erreicht die in der Schicht  $z = z_0$  erzeugte Oberwelle die Atome in der Nachbarschicht  $z = z_0 + \Delta z$  mit einer Phasenverschiebung gegenüber der dort erzeugten Oberwelle. Das heißt: In homogenen isotropen Medien können die in den einzelnen Schichten des Mediums erzeugten Oberwellen sich *nicht* zu einer makroskopischen Welle aufaddieren.



**Abbildung 8.52** Schematische Darstellung der optischen Frequenzverdopplung

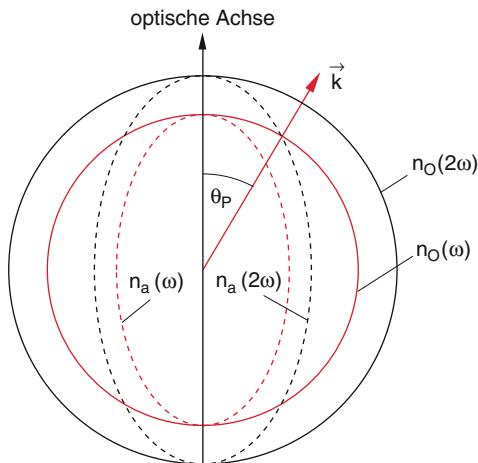
Nach einer Wegstrecke

$$\Delta z = \frac{\lambda/2}{n(2\omega) - n(\omega)} = l_c$$

ist die Oberwelle gegenüber der Grundwelle um  $\pi$  phasenverschoben. Sie ist daher gegenphasig zu den schwingenden Dipolen und verhindert deren Schwingung auf der Frequenz  $2\omega$ . Man nennt  $l_c$  die kritische Phasenanpassungsstrecke.

Dadurch wird die Konversion der Grundwelle in die Oberwelle, gemittelt über den gesamten Kristall, praktisch null, d.h. es wird kaum Energie von der Grundwelle in die Oberwelle transformiert (Abb. 8.52). Man muss also dafür sorgen, dass für die vorgesehene Ausbreitungsrichtung  $v_{ph}(\omega) = v_{ph}(2\omega)$  wird.

Hier hilft glücklicherweise die Doppelbrechung anisotropen Medien (siehe Abschn. 8.5). Kann man erreichen, dass z.B. in einer bestimmten Richtung  $\theta_p$  gegen die optische Achse der Brechungsindex  $n_a(2\omega)$  in einem optisch negativ einachsigen Kristall gleich  $n_o(\omega)$  ist (Abb. 8.53),



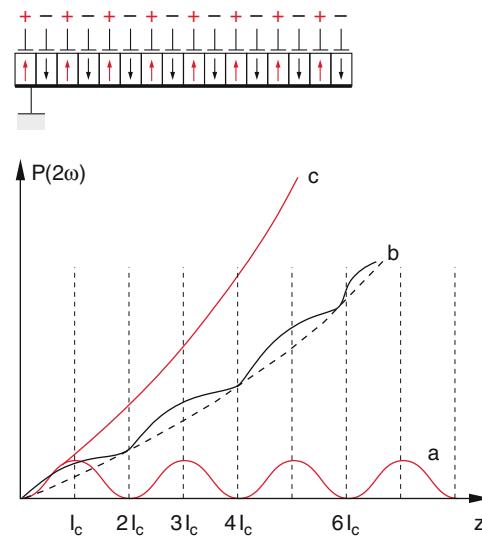
**Abbildung 8.53** Zur Phasenanpassung zwischen Grundwelle  $\omega$  und Oberwelle  $2\omega$  in doppelbrechenden Kristallen

so laufen Erregerwelle und die Sekundärwellen mit der Frequenz  $2\omega$  in dieser Richtung mit gleicher Phasengeschwindigkeit. Dann können sich alle in beliebigen Ebenen erzeugten Oberwellen phasenrichtig addieren zu einer makroskopischen Welle. In diesem Fall der richtigen *Phasenanpassung* wird also ein Teil der ankommenden Welle (8.86) in die in gleicher Richtung laufende Oberwelle umgewandelt (**optische Frequenzverdopplung**). Aus rotem Licht bei  $\lambda = 690 \text{ nm}$  (Rubin-Laser) wird dann z. B. ultraviolettes Licht bei  $\lambda = 345 \text{ nm}$ . Da die ordentliche und außerordentliche Welle orthogonal zueinander polarisiert sind, ist in diesem Fall  $\mathbf{E}(2\omega) \perp \mathbf{E}(\omega)$ .

Die Phasenanpassungsbedingung lautet also:

$$\begin{aligned} n_a(2\omega) &= n_o(\omega) \Rightarrow v_{ph}(\omega) = v_{ph}(2\omega) \\ &\Rightarrow \mathbf{k}(2\omega) = 2\mathbf{k}(\omega). \end{aligned} \quad (8.88)$$

Der Nachteil der doppelbrechenden Kristalle für die optische Frequenzverdopplung ist die eingeschränkte Phasenanpassung, die für eine vorgegebene Richtung  $\mathbf{k}$  mit dem Winkel  $\theta$  gegen die optische Achse nur für eine bestimmte Wellenlänge genau erfüllt ist. Will man für andere Wellenlängen die Phasenanpassung optimieren, muss die Kristallachse gedreht werden. In den letzten Jahren hat sich deshalb eine neue Methode, die *Quasiphasenanpassung* bewährt, bei der ein ferroelektrischer Kristall verwendet wird, der aus vielen dünnen Schichten besteht, in denen jeweils durch räumlich periodische elektrische Umpolung die Brechungsdifferenz  $\Delta n = n(2\omega) - n(\omega)$  periodisch ihr Vorzeichen wechselt, sodass die in jeder Schicht entstehende Phasendifferenz zwischen Funda-



**Abbildung 8.54** Phasenanpassung in periodisch gepolten Kristallen. Ausgangsleistung  $P^{(2)}(2\omega)$  als Funktion der Kristall-Länge. a Einzelkristall mit leichter Fehlanpassung; b Periodisch gepolter Kristall mit gleicher Fehlanpassung; c Einzelkristall mit idealer Phasenanpassung

mentalwelle und Oberwelle immer wieder ausgeglichen wird (Abb. 8.54). Die Intensität der Oberwelle steigt zwar nicht mehr so steil an mit wachsender Kristallänge, wie bei perfekter Phasenanpassung, aber dafür kann sie für einen weiten Wellenlängenbereich erreicht werden [8.22].

### 8.7.3 Optische Frequenzmischung

Werden zwei Lichtwellen

$$\mathbf{E}_1 = E_{01} \hat{\mathbf{e}}_x \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})$$

$$\mathbf{E}_2 = E_{02} \hat{\mathbf{e}}_x \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})$$

im optisch nichtlinearen Medium überlagert, so bewirkt die Gesamtfeldstärke  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  eine Polarisation, deren nichtlinearer Anteil  $P^{(2)}(\omega)$  nach (8.85) die folgenden Frequenzanteile enthält

$$\begin{aligned} P^{(2)}(\omega) &= \varepsilon_0 \chi^{(2)} [E_{01}^2 \cos^2 \omega_1 t + E_{02}^2 \cos^2 \omega_2 t \\ &\quad + 2E_{01}E_{02} \cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t] \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi^{(2)} [(E_{01}^2 + E_{02}^2) \\ &\quad + E_{01}^2 \cos 2\omega_1 t + E_{02}^2 \cos 2\omega_2 t \\ &\quad + 2E_{01}E_{02} (\cos(\omega_1 + \omega_2) t \\ &\quad + \cos(\omega_1 - \omega_2) t)] . \end{aligned} \quad (8.89)$$

Außer den Oberwellen mit  $\omega = 2\omega_1$  bzw.  $2\omega_2$  entstehen auch Wellen mit der Summenfrequenz  $(\omega_1 + \omega_2)$  und der Differenzfrequenz  $(\omega_1 - \omega_2)$ .

Wählt man die Phasenanpassung richtig, so kann man erreichen, dass sich für einen dieser Anteile alle Beiträge von den einzelnen Dipolen phasenrichtig überlagern und es daher zu einer makroskopischen Welle auf der entsprechenden Frequenz kommt (**optische Frequenzmischung**).

So heißt z. B. die Phasenanpassungsbedingung zur Erzeugung der Summenfrequenz:

$$\mathbf{k}_3(\omega_1 + \omega_2) = \mathbf{k}_1(\omega_1) + \mathbf{k}_2(\omega_2) \quad (8.90)$$

$$n_3 \cdot \omega_3 = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 \quad \text{mit} \quad n_i = n(\omega_i) .$$

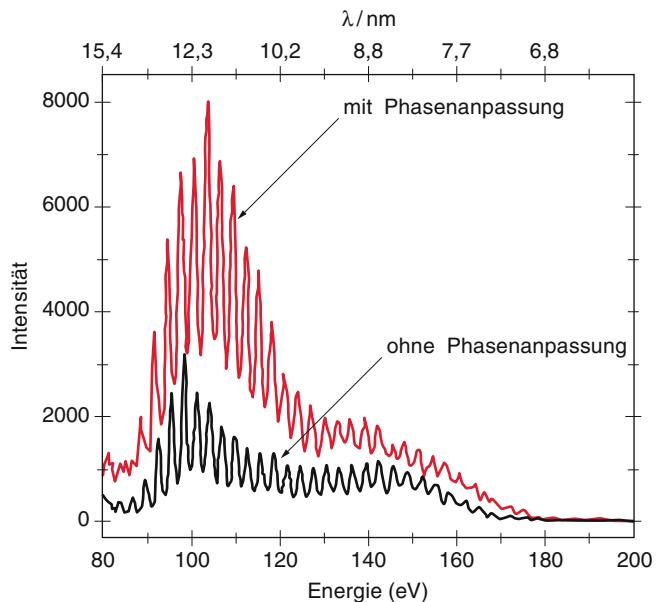
Sie lässt sich meistens leichter erfüllen als für die Frequenzverdopplung, weil man die Einfallrichtungen  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  der beiden Wellen in gewissen Grenzen frei wählen kann. Diese Möglichkeit der optischen Frequenzmischung in optisch nichtlinearen doppelbrechenden Kris-

tallen hat nicht nur zur Entwicklung von intensiven Strahlungsquellen in neuen Spektralbereichen geführt, wo bisher keine Laser existierten, sondern hat auch viel dazu beigetragen, die elektronische Struktur nichtlinearer Materialien genauer zu studieren (siehe [8.18, 8.19] und Bd. 3).

Da die Effizienz der nichtlinearen Mischprozesse (Verdopplung, Summen- bzw. Differenzfrequenzbildung) mit steigender Intensität der einfallenden Welle anwächst, wurden anfangs solche Experimente hauptsächlich mit gepulsten Lasern durchgeführt (siehe Bd. 3 und [8.20, 8.21]), da diese höhere Spitzenleistungen liefern. Inzwischen wurden jedoch neue optisch-nichtlineare Kristalle (z. B. Bariumtetraborat oder Lithiumjodat  $\text{LiJO}_3$ ) gezüchtet, mit großen nichtlinearen Koeffizienten des Tensors  $\chi^{(2)}$ , sodass auch mit kontinuierlichen Lasern verwendbare Verdopplungseffizienzen erzielt wurden.

### 8.7.4 Erzeugung hoher Harmonischer

In den letzten Jahren ist es durch die Verwendung sehr hoher Intensitäten ultrakurzer Laserpulse der Lichtfrequenz  $\omega$  gelungen, durch nichtlineare Effekte hohe Oberwellen mit Frequenzen  $n \cdot \omega$  ( $n = 2, 3, \dots, 300$ ) zu erzeugen. Dazu werden die Laserpulse in ein atomares Gas (z. B. Neon oder Argon) bei hohem Druck fokussiert. Die Gasatome werden durch die hohen Feldstärken



**Abbildung 8.55** Spektrum hoher Harmonischer Oberwellen der Laserstrahlung bei  $\lambda = 1,05 \mu\text{m}$  mit Quasi-Phasenanpassung (rote Kurve) und ohne Phasenanpassung (schwarze Kurve) [8.24]

in der Lichtwelle ionisiert und das freigesetzte Elektron wird im elektrischen Feld der Lichtwelle periodisch mit der Lichtfrequenz beschleunigt. Dabei strahlt es Energie in Form eines breiten Frequenzspektrums von elektromagnetischen Wellen ab [8.23] (siehe Abschn. 6.5.4). In Abb. 8.55 ist ein solches Spektrum gezeigt [8.24]. Dabei entspricht 160 eV in etwa der 150ten Oberwelle der Fundamentalwellenlänge  $\lambda = 1,05 \mu\text{m}$ .

### Beispiel

Für  $n = 100$  wird die Frequenz der Oberwelle bei einer Wellenlänge von 700 nm ( $\omega = 2\pi \cdot 4,3 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ ) der Grundwelle  $n \cdot \omega = 2\pi \cdot 4,3 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1} \rightarrow \lambda_n = 7 \text{ nm}$ . Die Oberwelle liegt also im weichen Röntgenbereich.

## Zusammenfassung

- Elektromagnetische Wellen haben in Materie mit der Brechzahl  $n$  die Phasengeschwindigkeit  $c' = c/n$ , die von der Frequenz  $\omega$  der Welle abhängt, da  $n = n(\omega)$  (Dispersion).
- Der Brechungsindex  $n$  ist eine komplexe Zahl

$$n = n' - ik .$$

Der Realteil gibt die Dispersion, der Imaginärteil  $k$  die Absorption der Welle an.  $n'$  und  $k$  sind miteinander verknüpft durch die Dispersionsrelation (8.21).

- Die Intensität einer in  $z$ -Richtung durch ein absorbierendes Medium laufenden Welle nimmt ab nach dem Beer'schen Absorptionsgesetz

$$I = I_0 \cdot e^{-\alpha z} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{4\pi}{\lambda_0} \kappa .$$

Dies gilt für nicht zu große Intensitäten, bei denen Sättigungseffekte vernachlässigbar sind.

- An der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechzahlen  $n_1$  und  $n_2$  treten Brechung und Reflexion auf. Amplituden und Polarisation von reflektierter und gebrochener Welle hängen vom Einfallswinkel ab und können aus den Fresnel-Formeln (8.61, 8.62) bestimmt werden.
- Für die Summe aus Reflexionsvermögen  $R$  und Transmissionsvermögen  $T$  gilt:

$$R + T = 1 ,$$

wenn keine Absorption stattfindet. Bei senkrechtem Einfall ist

$$R = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2 .$$

Grenzflächen von stark absorbierenden Materialien haben ein hohes Reflexionsvermögen.

- Beim Übergang vom optisch dichtenen in ein optisch dünneres Medium tritt für Winkel  $\alpha > \alpha_G$  Totalreflexion auf. Trotzdem dringt die Welle etwas ( $\Delta x < \lambda$ ) in das optisch dünneren Medium ein (evanescente Welle).
- Beim Brewsterwinkel  $\alpha_B$  mit  $\tan \alpha_B = n_2/n_1$  wird das Reflexionsvermögen  $R_p$  für die Parallel-Komponente  $A_p$  null.
- In nichtisotropen Medien sind elektrische Feldstärke  $E$  und dielektrische Verschiebung  $D$  im Allgemeinen nicht mehr parallel. Die Richtung des Poynting-Vektors bildet mit dem Wellenvektor  $k$  den gleichen Winkel  $\alpha$ , um den  $E$  gegen  $D$  geneigt ist. Eine einfallende Welle spaltet im Allgemeinen auf in eine ordentliche und eine außerordentliche Welle. Der Brechungsindex  $n$  hängt von der Polarisationsrichtung der Welle ab. Für den ordentlichen Strahl ist  $n_o$  wie im isotropen Medium, unabhängig von der Ausbreitungsrichtung, für den außerordentlichen Strahl hängt  $n_a$  von dem Winkel zwischen  $k$  und der optischen Achse ab.
- Polarisiertes Licht kann erzeugt werden durch Reflexion unter dem Brewsterwinkel, durch dichroitische Dünnschichtpolarisatoren und durch optisch doppelbrechende Kristalle.
- Wellen in Medien lassen sich durch eine aus den Maxwell-Gleichungen ableitbare Wellengleichung beschreiben. Diese enthält, zusätzlich zur Wellengleichung im Vakuum, einen Term, der die Polarisierung des Mediums durch die Welle beschreibt und der als Quelle für neue, von den induzierten Dipolen ausgesandte Wellen angesehen werden kann.
- Bei Bestrahlung mit genügend intensivem Licht (nicht-lineare Optik) wird der lineare Auslenkungsbereich der induzierten Dipole überschritten. Sie senden Oberwellen aus, die bei richtiger Wahl der Ausbreitungsrichtung in nichtisotropen Kristallen (Phasenanpassung) phasenrichtig verstärkt werden (optische Frequenzverdopplung).

## Übungsaufgaben

**8.1.** Berechnen Sie nach (8.12) den Brechungsindex von Luft bei Atmosphärendruck für Licht der Wellenlänge  $\lambda = 500 \text{ nm}$ , wenn die Resonanzfrequenz der Stickstoffmoleküle bei  $\omega_0 = 10^{16} \text{ s}^{-1}$  liegt. Was können Sie beim Vergleich mit Tab. 8.1 über den Wert der Oszillatorenstärke  $f$  in (8.23) sagen?

**8.2.** Unter welchem Winkel  $\alpha$  muss ein Lichtstrahl auf eine Luft-Glas-Grenzfläche fallen, damit der Winkel zwischen einfallendem und reflektiertem Strahl gleich dem Winkel zwischen einfallendem und gebrochenem Strahl wird?

**8.3.** An den 8 Ecken eines Würfels mit Kanten der Länge 100 nm in Richtung der  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Achse mögen 8 Atome sitzen, die von einer ebenen Lichtwelle ( $\lambda = 500 \text{ nm}$ ) in  $z$ -Richtung zu Schwingungen in  $x$ -Richtung angeregt werden. Wie groß ist der in  $y$ -Richtung gestreute Bruchteil der einfallenden Intensität  $I_0$ , wenn der Streuquerschnitt für ein einzelnes Atom  $\sigma = 10^{-30} \text{ m}^2$  ist?

**8.4.** Leiten Sie die Fresnel-Gleichungen (8.62a,b) her.

**8.5.** Bestimmen Sie aus den Fresnel-Formeln für den Übergang von Luft ( $n'_1 = 1$ ,  $\kappa_1 = 0$ ) nach Silber ( $n'_2 = 0,17$ ,  $\kappa_2 = 2,94$ ) die Amplitudenreflexionskoeffizienten  $\varrho_s$ ,  $\varrho_p$  und das Reflexionsvermögen für die Einfallswinkel  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$  und  $\alpha = 85^\circ$ .

**8.6.** Ein Lichtstrahl mit der Leistung  $P = 1 \text{ W}$  läuft durch ein absorbierendes Medium der Länge  $L = 3 \text{ cm}$  mit dem Absorptionskoeffizienten  $\alpha$ . Wie groß ist die absorbierte Leistung

- a) für  $\alpha = 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ ,
- b) für  $\alpha = 1 \text{ cm}^{-1}$ ?

**8.7.** Eine Lichtleitfaser hat einen Kerndurchmesser von  $10 \mu\text{m}$ . Die Brechzahl des Kerns sei  $n_1 = 1,60$ , die des Mantels  $n_2 = 1,59$ . Wie klein ist der minimale Krümmungsradius der Faser, bei der die Totalreflexion für Strahlen in der Krümmungsebene noch erhalten bleibt?

**8.8.** Zeigen Sie, dass man (8.12) für  $\omega - \omega_0 \gg \gamma$  schreiben kann als  $n - 1 = a + b/(\lambda^2 - \lambda_0^2)$ , um damit z. B. eine einfache Dispersionsformel für Luft zu erhalten.

**8.9.** Eine optische Welle der Frequenz  $\omega = 3,5 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$  ( $\lambda = 500 \text{ nm}$  und der Intensität  $I(\omega) = 10^{12} \text{ W/m}^2$ ) wird durch einen nichtlinearen negativ einachsigen Kristall mit der nichtlinearen Suszeptibilität  $\chi^{(2)}(\omega) = 8 \cdot 10^{-13} \text{ m/V}$  geschickt. Die Brechzahlen sind  $n_0(\omega) = 1,675$ ;  $n_a(2\omega, \theta = 90^\circ) = 1,615$ ;  $n_0(2\omega) = 1,757$ .

- a) Unter welchem Winkel  $\theta_{\text{opt}}$  gegen die optische Achse wird Phasenanpassung  $n_0(\omega) = n_a(2\omega, \theta_{\text{opt}})$  erreicht?
- b) Wie groß ist die Kohärenzlänge  $L_{\text{kohärent}}$ , wenn eine kleine Fehljustierung  $\theta = \theta_{\text{opt}} + 1^\circ$  vorliegt?
- c) Wie groß ist die Ausgangsintensität  $I(2\omega)$ , die durch die Relation:

$$I(2\omega, L) = I^2(\omega) \cdot \frac{2\omega^2 |\chi^{(2)}|^2 L^2}{n^3 c^3 \cdot \varepsilon_0} \frac{\sin^2(\Delta k \cdot L)}{(\Delta k \cdot L)^2}$$

gegeben ist, wenn  $L = L_{\text{kohärent}}$  ist?