Calcul de matrice d'impédance pour la simulation numérique des lignes de transmission multiples.

C. Giraudon, P. Helluy, T. Strub

15 juin 2014

IRMA, Strasbourg et AxesSim, Illkirch.

1 Problème physique

On considère $N+1$ conducteurs (câbles et blindages) circulaires de rayon r_i, $i = 0 \cdots N$. Un conducteur entourant un ou plusieurs autres conducteurs est appelé blindage. Le centre du conducteur w_i est au point $X_i = (x_i, y_i)$. On suppose que les conducteurs ne s'intersectent pas. On suppose que le conducteur w_0 est un blindage qui entoure les autres conducteurs. Les conducteurs sont perpendiculaires au plan (x, y) : le courant circule dans la direction z. Lorsque des courants circulent dans les câbles, le modèle des lignes de transmission permet de calculer de façon approchée le couplage entre les câbles. Ce modèle fait intervenir des équations différentielles sur les courants et les tensions dans les conducteurs, dans la direction z, ainsi que des matrices de couplages. Il est indispensable que ces matrices de couplages respectent certaines propriétés physiques (positivité, par exemple), sinon le modèle de transmission donnent rapidement des résultats complètement faux.

2 Cas d'un ensemble de câbles

Nous commençons par étudier le cas de n câbles entourés d'un blindage w_0. Le champ magnétique $B = (B_x(x,y), B_y(x,y), 0)$ dérive du potentiel vecteur $A = (0, 0, \varphi(x,y))$

$$B = \nabla \times A.$$

On sait que

$$\nabla \times B = j = (0, 0, j_z)$$

où j_z est la densité de courant électrique dans la direction z. Cette densité de courant est une distribution dont le support est inclus dans les conducteurs. Il s'ensuit que

$$-\Delta\varphi = j_z. \tag{1}$$

On intègre cette relation sur le conducteur w_k et on obtient

$$\int_{\partial w_k} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = I_k,$$

où I_k est le courant qui circule dans le câble k, et n est le vecteur normal sur le bord du câble, dirigé vers intérieur du câble. On note $I = (I_0, I_1 \cdots I_n)$ le vecteur des courants circulant dans les câbles.

Supposons maintenant que l'on se fixe une valeur constante de φ, notée Φ_k sur chaque câble. La linéarité de l'équation (1) fait qu'il existe une matrice carrée L de taille $(n+1) \times (n+1)$, appelée matrice d'inductance telle que

$$\Phi = LI.$$

Pour calculer L, on peut procéder de la façon suivante :

1. Pour $i = 1 \cdots n$, on fixe la valeur de φ_i à 1 sur le conducteur i et à 0 sur les autres
$$\varphi_i(X) = \delta_{ij}, \quad X \in \partial w_j, \quad j = 0 \cdots n$$
2. On résout les équations
$$-\Delta\varphi_i = 0 \quad \text{dans } \Omega = w_0 \setminus \cup_{k=1}^{N} w_k$$
avec ces conditions aux limites. On pose alors
$$M_{ij} = \int_{\partial w_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}.$$
La matrice M ressemble à une sorte d'opérateur "Dirichlet to Neumann" moyenné sur le bord des câbles.
3. Alors la matrice d'inductance est donnée par
$$L = M^{-1}.$$

On peut montrer que M et L sont des matrices symétriques définies positives.

Dans certaines situations, les matrices L et M sont très mal conditionnées, et le calcul approchée de ces matrices conduit à des matrices qui ne sont plus positives.

3 Cas des câbles et des blindages

On considère maintenant la possibilité que certains conducteurs soient des blindages qui entourent d'autres conducteurs. La présence d'un blindage découple les EDPs entre l'intérieur et l'extérieur du blindage. Il faut résoudre le problème précédent à l'intérieur du blindage. Il faut aussi résoudre le problème précédent à l'extérieur du blindage, en considérant celui-ci comme un unique conducteur. Pour calculer le courant du blindage, on utilise la loi des noeuds. Pour calculer la tension on utilise la loi des mailles. En procédant ainsi de l'intérieur vers l'extérieur, on peut construire une matrice d'inductance globale prenant en compte tous les conducteurs.

Malheureusement pour des raison numériques, cette matrices n'est plus exactement définie positive.

Le but de la SEME est de chercher à identifier d'où vient le défaut de positivité des matrices et à proposer une démarche pour résoudre ce problème.

Références

[1] Paul. Computation of the Capacitance Matrix for Systems of Dielectric-Coated Cylindrical Conductors.

[2] Paul. Computation of the Transmission Line Inductance and Capacitance Matrices from the Generalized Capacitance Matrix.

[3] J.P. parmantier. Compatibilité électromagnétique, des concepts de base aux applications.

[4] N. Muot. Stratégie d'hybridation de méthodes de simulation électromagnétiques FDTD/TLM. page 51.

[5] `http://www.jpier.org/PIER/pier103/14.10020506.pdf`

[6] `http://www.hsu-hh.de/download-1.4.1.php?brick_id=gqrSUn4GYMAR4Efd`, page 143