Calcul de matrice d'impédance pour la simulation numérique des lignes de transmission multi-conducteur.

C. Giraudon, P. Helluy, T. Strub

18 juin 2014

IRMA, Strasbourg et AxesSim, Illkirch.

1 Problème physique

On considère $N+1$ conducteurs (câbles et blindages) circulaires de rayon r_i, $i = 0 \cdots N$. Un conducteur entourant un ou plusieurs autres conducteurs est appelé blindage. Le centre du conducteur w_i est au point $X_i = (x_i, y_i)$. On suppose que les conducteurs ne s'intersectent pas. On suppose que le conducteur w_0 est un blindage qui entoure les autres conducteurs. Les conducteurs sont perpendiculaires au plan (x, y) : le courant circule dans la direction z. Lorsque des courants circulent dans les câbles, le modèle des lignes de transmission permet de calculer de façon approchée le couplage entre les câbles. Ce modèle fait intervenir des équations différentielles sur les courants et les tensions dans les conducteurs, dans la direction z, ainsi que des matrices de couplages. Il est indispensable que ces matrices de couplages respectent certaines propriétés physiques (positivité, par exemple), sinon le modèle de transmission donne rapidement des résultats complètement faux.

Le modèle de transmission est le suivant. On considère le vecteur des courants qui passent dans les fils $I(z,t)$ et le vecteur des tensions $U(z,t)$. L'équation des lignes de transmissions prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= L\frac{\partial I}{\partial t} + RI, \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= C\frac{\partial U}{\partial t} + GU, \end{aligned}$$

où L est la matrice d'inductance, R la matrice des résistance (en général diagonale positive), C est la matrice de capacité et G la matrice de conductance, $G = R^{-1}$). Les matrices L et C sont symétriques définies positives et $L = C^{-1}$.

On passe en Fourier. En gardant les mêmes notations pour les courants et les tensions, on obtient

$(j^2 = -1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial z} &= ZI, \quad Z = R + j\omega L,\\ \frac{\partial I}{\partial z} &= YU, \quad Y = G + j\omega C.\end{aligned}$$

La matrice Z est la matrice d'impédance de la ligne et Y la matrice d'admittance.

Nous décrivons maintenant comment calculer la matrice d'inductance, le reste du calcul des autres matrices en découle facilement.

2 Cas d'un ensemble de câbles

Nous commençons par étudier le cas de n câbles entourés d'un blindage w_0. Le champ magnétique $B = (B_x(x,y), B_y(x,y), 0)$ dérive du potentiel vecteur $A = (0, 0, \varphi(x,y))$. La fonction scalaire φ est appelée flux (ou potentiel) magnétique.

$$B = \nabla \times A.$$

Il ne faut pas confondre le potentiel magnétique avec le potentiel électrique u. La relation entre φ et u est une conséquence de l'équation de Faraday

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = u$$

ou, en Fourier,

$$j\omega\varphi = u.$$

Par ailleurs, on sait que

$$\nabla \times B = j = (0, 0, j_z)$$

où j_z est la densité de courant électrique dans la direction z. Cette densité de courant est une distribution dont le support est inclus dans les conducteurs. Il s'ensuit que

$$-\Delta\varphi = j_z. \tag{1}$$

On intègre cette relation sur le conducteur w_k, $k = 1 \cdots N$, et on obtient

$$\int_{\partial w_k} \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} = I_k,$$

où I_k est le courant qui circule dans le câble k, n est le vecteur normal sur le bord du câble, dirigé vers l'intérieur du câble, et $\frac{\partial \varphi^-}{\partial n}$ est la trace extérieure de la dérivée normale sur le conducteur. Puisque le conducteur w_0 entoure les autres conducteurs, on trouve

$$\int_{\partial w_0} \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} = \sum_{k=1}^{N} I_k.$$

L'exposant + indique qu'il faut considérer la trace intérieure de $\partial\varphi/\partial n$ sur le blindage. Le courant I_s qui circule sur la peau du blindage est donné par

$$I_s = \int_{\partial w_0} \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} - \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} = \int_{\partial w_0} \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} - \sum_{k=1}^{N} I_k. \tag{2}$$

Cette relation est analogue à la loi des noeuds dans un circuit électrique. Il est commode de noter

$$I_0 = I_s + \sum_{k=1}^{N} I_k,$$

ainsi, on a également

$$\int_{\partial w_0} \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} = I_0.$$

On note $I = (I_1 \cdots I_n)$ le vecteur des courants.

Supposons maintenant que l'on se fixe une valeur constante de φ, notée Φ_k sur chaque câble. La linéarité de l'équation (1) fait qu'il existe une matrice carrée L de taille $n \times n$, appelée matrice d'inductance telle que

$$\Phi = LI.$$

Pour calculer L, on peut procéder de la façon suivante :

1. Pour $i = 0 \cdots N$, on fixe la valeur de φ_i à 1 sur le conducteur i et à 0 sur les autres
$$\varphi_i(X) = \delta_{ij}, \quad X \in \partial w_j, \quad j = 0 \cdots N \tag{3}$$
2. On résout les équations
$$-\Delta \varphi_i = 0 \quad \text{dans } \Omega = w_0 \backslash \cup_{k=1}^{N} w_k$$
avec ces conditions aux limites. On pose alors
$$M_{ij} = \int_{\partial w_i} \frac{\partial \varphi_j^-}{\partial n}.$$
La matrice M est alors définie par
$$M = (M_{ij})_{i=1 \cdots N, j=1 \cdots N} \tag{4}$$
La matrice M ressemble à une sorte d'opérateur "Dirichlet vers Neumann" moyenné sur le bord des câbles.
3. Alors la matrice d'inductance est donnée par
$$L = M^{-1}.$$
Au passage, cette relation nous donne aussi que M n'est rien d'autre que la matrice de capacité
$$M = C.$$

On peut montrer que M et L sont des matrices symétriques définies positives.

Dans certaines situations, les matrices L et M sont très mal conditionnées, et le calcul approché de ces matrices conduit à des matrices qui ne sont plus positives.

Remarque : dans l'étape 1, on a fixé la valeur de φ_i à une constante sur le blindage w_0. On peut donc prolonger le potentiel par cette constante en dehors de w_0. Alors

$$\forall (x,y) \in \partial w_0, \quad \frac{\partial \varphi_i^-}{\partial n}(x,y) = 0,$$

on en déduit que $M_{0,j} = 0$. Cela justifie que l'on ait pris $N \geq j \geq 1$ et $N \geq i \geq 1$ dans la définition de M (voir (4)), afin d'assurer que M est inversible. On en déduit aussi que $I_0 = 0$, donc

$$I_s = -\sum_{k=1}^{N} I_k. \tag{5}$$

En d'autres termes, le courant I_s circulant sur le blindage est le courant "de retour" de la ligne de transmission constituée des conducteurs w_k, $k = 1 \cdots N$. Si le blindage (contenant ses conducteurs internes) fait lui même partie d'une ligne de transmission, on ne peut plus prolonger le potentiel par une constante en dehors du blindage, et donc la relation (5) n'est plus vraie.

3 Cas des câbles et des blindages

On considère maintenant la possibilité que certains conducteurs soient des blindages qui entourent d'autres conducteurs. La présence d'un blindage découple les EDPs entre l'intérieur et l'extérieur du blindage. Il faut résoudre le problème précédent à l'intérieur du blindage. Il faut aussi résoudre le problème précédent à l'extérieur du blindage, en considérant celui-ci comme un unique conducteur. Pour calculer le courant du blindage, on utilise la loi des noeuds (2). En procédant ainsi de l'intérieur vers l'extérieur, on peut construire une matrice d'inductance globale prenant en compte tous les conducteurs.

On va décrire plus précisément une étape de cette procédure. On considère donc maintenant N conducteurs w_i qui peuvent être des blindages ou des câbles. Si un conducteur contient d'autres conducteurs, c'est un blindage. Comme dans le cas précédent, les conducteurs sont entourés d'un blindage de référence w_0. Pour chaque conducteur w_i on connaît la liste $k(i,j)$, $j = 1 \cdots N(i)$ des conducteurs qu'il contient. Si $N(i) = 0$, cette liste est vide. Pour chacun de ces conducteurs w_i, on peut donc calculer la matrice d'inductance L^i_{int}, de taille $N(i) \times N(i)$ des conducteurs qu'il contient. La matrice d'inductance des conducteurs extérieurs est notée L_{ext}. On trie la liste des conducteurs en deux paquets : les N_{ext} conducteurs extérieurs et les N_{int} conducteurs qui sont à l'intérieur d'un autre conducteur. De plus, dans la seconde liste, on range d'abord les conducteurs qui sont dans le conducteur w_1 puis ceux qui sont dans w_2, *etc.* jusqu'à $w_{N_{ext}}$. Sous forme matricielle, on a

$$\begin{bmatrix} \Phi_{ext} \\ \tilde{\Phi}^1_{int} \\ \vdots \\ \tilde{\Phi}^{N_{int}}_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ext} & & & \\ & L^1_{int} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L^{N_{int}}_{int} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{ext} \\ I^1_{int} \\ \vdots \\ I^{N_{int}}_{int} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Le vecteur $\tilde{\Phi}_{ext}$ est de taille N_{ext} et les vecteurs Φ^i_{int} de taille $N(i)$. De plus, $\sum_{i=1}^{N_{ext}} N(i) = N_{int}$. Donc on a bien $N_{ext} + N_{int} = N$. On introduit aussi les vecteurs

$$\tilde{\Phi}_{int} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}^1_{int} \\ \vdots \\ \tilde{\Phi}^{N_{int}}_{int} \end{bmatrix}, \quad I_{int} = \begin{bmatrix} I^1_{int} \\ \vdots \\ I^{N_{int}}_{int} \end{bmatrix},$$

de sorte que

$$\begin{bmatrix} \Phi_{ext} \\ \tilde{\Phi}_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ext} & \\ & L_{int} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{ext} \\ I_{int} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

En pratique, les blindages ne sont pas parfaits et on peut introduire des petits termes de couplages additionnels entre les conducteurs extérieurs et les conducteurs intérieurs

$$\begin{bmatrix} \Phi_{ext} \\ \tilde{\Phi}_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ext} & -\varepsilon \\ -\varepsilon^T & L_{int} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{ext} \\ I_{int} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Dans la forme matricielle (7) le vecteur $\tilde{I}_{ext}$ ne représente que le courant extérieur sur le blindage. Il nous faut une relation où intervient le courant I_{ext} qui circule sur l'extérieur et l'intérieur du blindage (courant extérieur et courant "de retour") : c'est ce courant qui est mesuré par un ampèremètre. Il s'ensuit, d'après la relation (2), que

$$\tilde{I}_{ext} = I_{ext} - \delta I_{int} \text{ , soit } \begin{bmatrix} \tilde{I}_{ext} \\ I_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ext} \\ I_{int} \end{bmatrix} = P_I \begin{bmatrix} I_{ext} \\ I_{int} \end{bmatrix},$$

où la matrice δ, de taille $N_{ext} \times N_{int}$ est définie par

$$\delta(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si le conducteur } j + N_{ext} \text{ est dans le conducteur } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, les potentiels magnétiques $\tilde{\Phi}_{int}$ des conducteurs intérieurs ont été calculés avec une condition de Dirichlet homogène sur le blindage qui les entoure (voir (3)). Dans le calcul global, cette condition n'est plus nulle et il faut tenir compte du décalage de potentiel magnétique

$$\Phi_{int} = \tilde{\Phi}_{int} + \delta^T \Phi_{ext} \text{ , soit } \begin{bmatrix} \Phi_{ext} \\ \Phi_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{ext} \\ \tilde{\Phi}_{int} \end{bmatrix} = P_\Phi^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_{ext} \\ \tilde{\Phi}_{int} \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs,

$$P_\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\delta^T & 1 \end{bmatrix} = P_I^T$$

On en déduit alors, grâce à ce changement de variables, la matrice d'inductance globale

$$\begin{bmatrix} \Phi_{ext} \\ \Phi_{int} \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} I_{ext} \\ I_{int} \end{bmatrix},$$

$$L = P_I^T \left[\begin{array}{cc} L_{ext} & 0 \\ 0 & L_{int} \end{array} \right] P_I.$$

Puisque $Z = R + j\omega L$, le même changement de variable s'applique pour la matrice d'impédance

$$L = P_I^T \left[\begin{array}{cc} Z_{ext} & 0 \\ 0 & Z_{int} \end{array} \right] P_I.$$

Malheureusement pour des raisons numériques, la matrice d'impédance ne vérifie plus les bonnes propriétés de positivité.

Le but de la SEME est de chercher à identifier d'où vient le défaut de positivité des matrices et à proposer une démarche pour résoudre ce problème.

Références

[1] Guillaume Andrieu. *Elaboration et application d'une méthode de faisceau équivalent pour l'étude des couplages électromagnetiques sur réseaux de câblages automobiles*. PhD thesis, Ph. D. thesis, Lille University, 2006.

[2] Harry E Green. The numerical solution of some important transmission-line problems. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 13(5) :676–692, 1965.

[3] Nathanaël Muot. *Stratégie d'hybridation de méthodes de simulation électromagnètique FDTD/MTL-application à l'étude de grands systèmes complexes*. PhD thesis, ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechique-Poitiers, 2013.

[4] Clayton R Paul and Arthur E Feather. Computation of the transmission line inductance and capacitance matrices from the generalized capacitance matrix. *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, (4) :175–183, 1976.

[5] Thierry Sartenaer and Paul Delogne. Powerline cables modelling for broadband communications. In *Proc. IEEE Int. Conf. Power Line Communications and Its Applications*, pages 331–337, 2001.