Olasılık Teorisi & İstatistik

Coşkunöz Vakfı - Veri Bilimci Eğitimi

Cem Yığman - 2022

Olasılık Teorisi

Rastgelelik (Randomness)

- Herhangi bir problemin modellenmesinde rastgelelik kavramı mutlaka hesaba katılmalıdır.
- Olaylar genelde deterministik yaklaşımlarla açıklanamayacak rastgelelik içerirler.
- Toplanan verinin büyüklüğü
- Değişkenlerin birbirleri ile olan karmaşık ilişkisi
- Özellikle insan davranışının işin içinde olduğu durumlar

Olasılık Teorisi

Tanımlar

Sample Space (Örnek Uzay): Bir deney sonucunda oluşabilecek bütün çıktılar.

$$\mathbf{S} = \{H, T\}$$

$$\mathbf{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathbf{S} = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

$$\mathbf{S} = [0, \infty)$$

Olasılık Teorisi

Tanımlar

S = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),

(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),

(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),

(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),

(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),

(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

Olasılık Teorisi

Tanımlar

Event (Olay): Örnek uzayın herhangi bir alt kümesi.

S = {H, T}

E = {T}

S = {(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)}

E = {(H,H), (H,T)}

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

E = {1}

Olasılık Teorisi

Kesişim (Intersection) & Birleşim (Union)

S = {(1,1), (1,2), (1,3), … ,(6,4), (6,5), (6,6)}

E = {(1,3), (2,2), (3,1)}

F = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)}

Kesişim (Intersection)

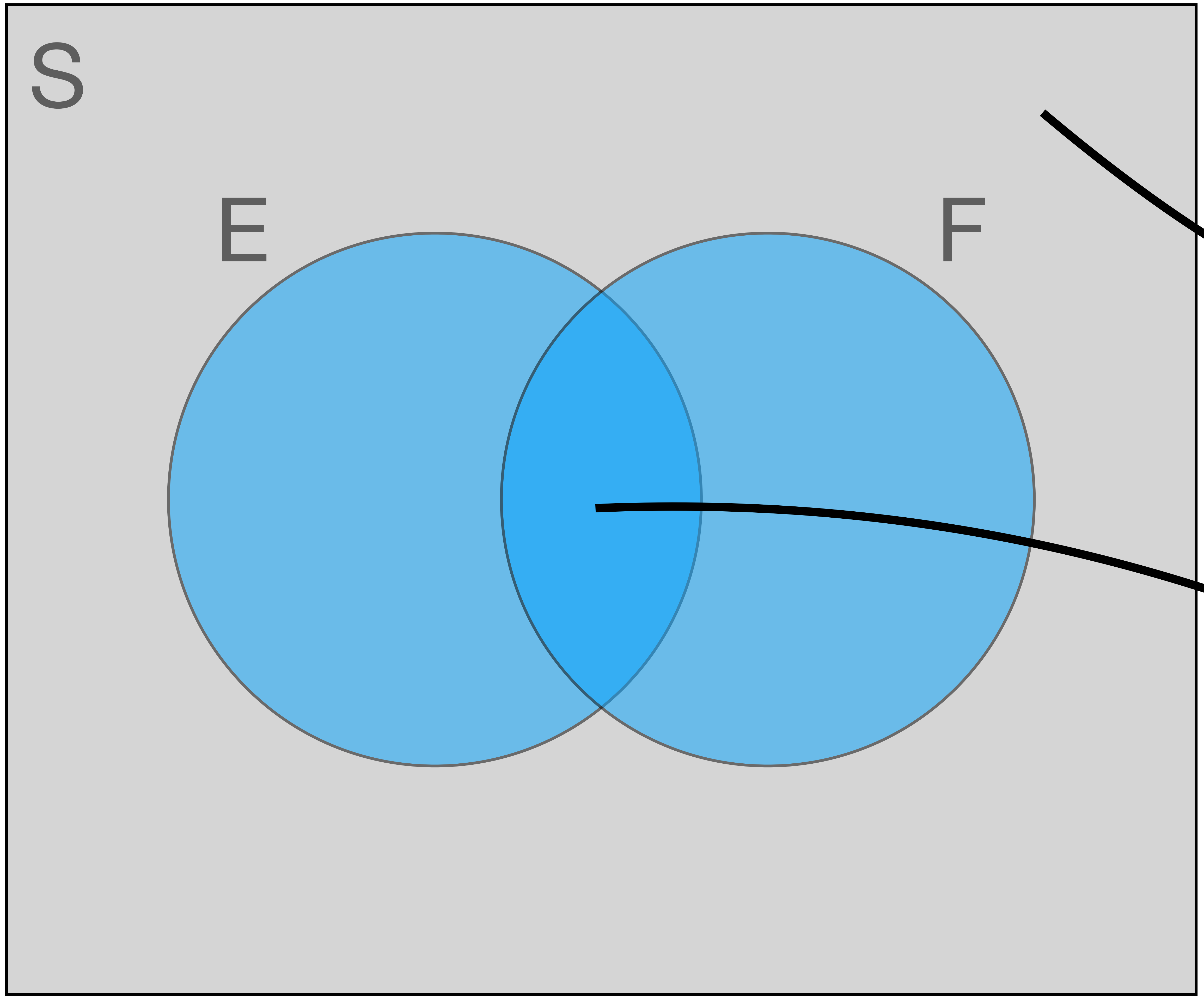
E∩F = {(1,3)}

Birleşim (Union)

E∪F = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (3,1)}

Olasılık Teorisi

Diğer Set Özellikleri

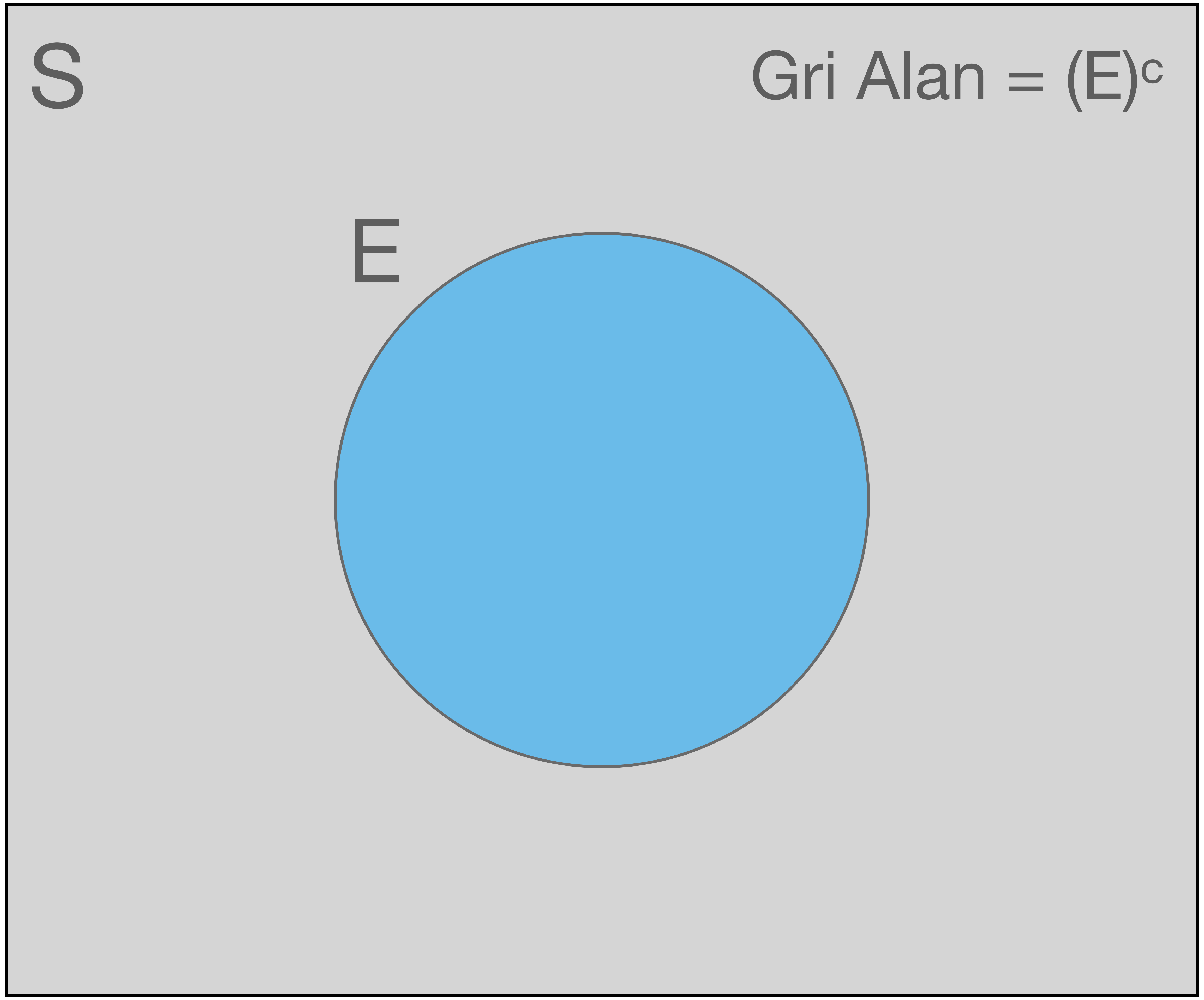


Gri Alan = $(E \cup F)^c$

Tüm Mavi Alan

Olasılık Teorisi

Diğer Set Özellikleri



Olasılık Teorisi

Tanımlar

S örnek uzayındaki her **E** olayı için **P(E)**, ilgili olayın gerçekleşme olasılığı olarak tanımlanır. **P(E)** aşağıdaki üç koşulu sağlar;

1 - $0 \leq P(E) \leq 1$

2 - $P(S) = 1$

3 - Aynı anda gerçekleşemeyen (Mutually Exclusive: $EF=\varnothing$) olaylar için;

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

Olasılık Teorisi

Tanımlar

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = 1/6$

$P(S) = 1 = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$

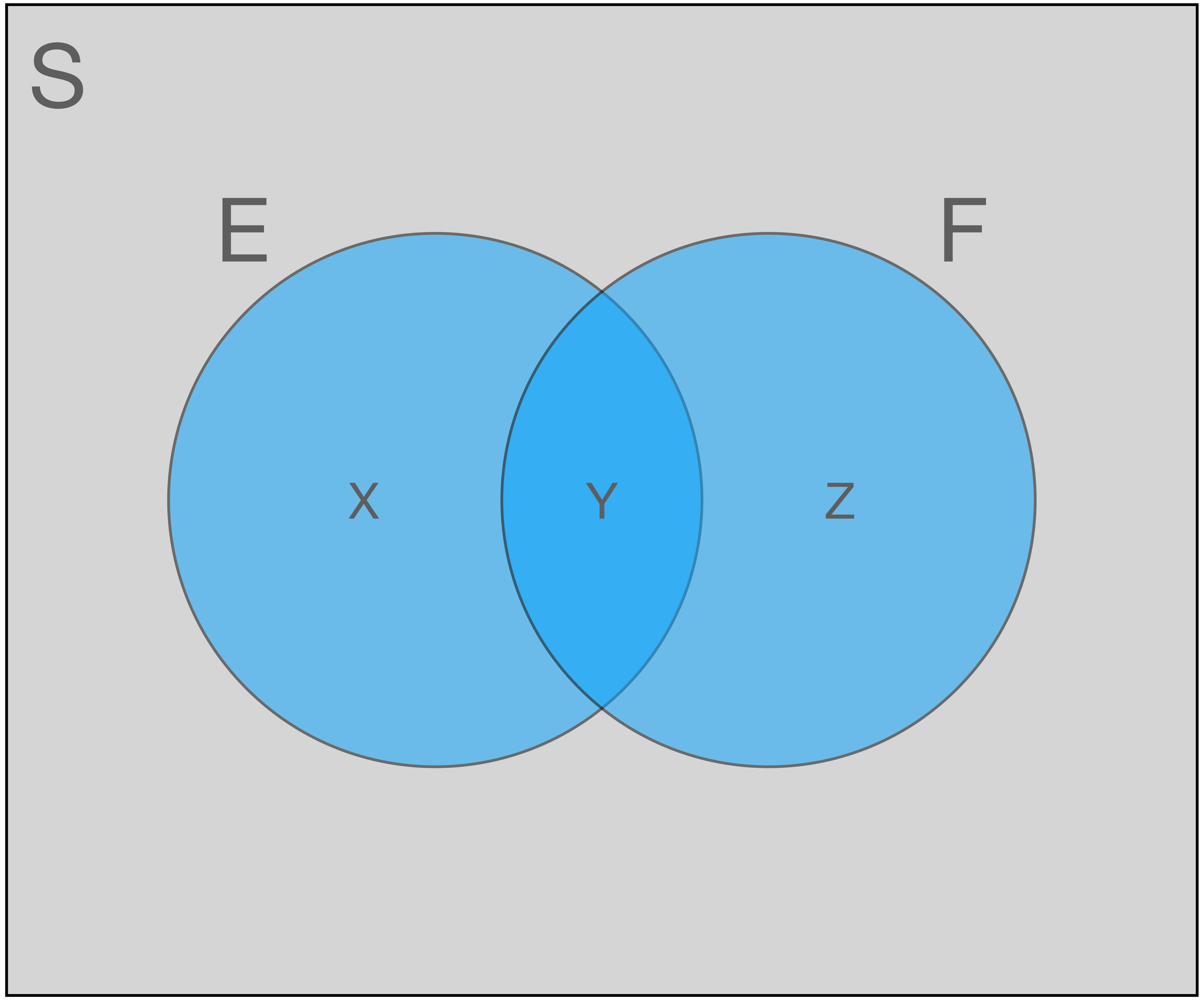
$P(\{1\}) = 1/6$

$P(\{1^c\}) = 5/6$

$P(\{1\}) + P(\{1^c\}) = 1/6 + 5/6 = 1$

Olasılık Teorisi

Diğer Set Özellikleri



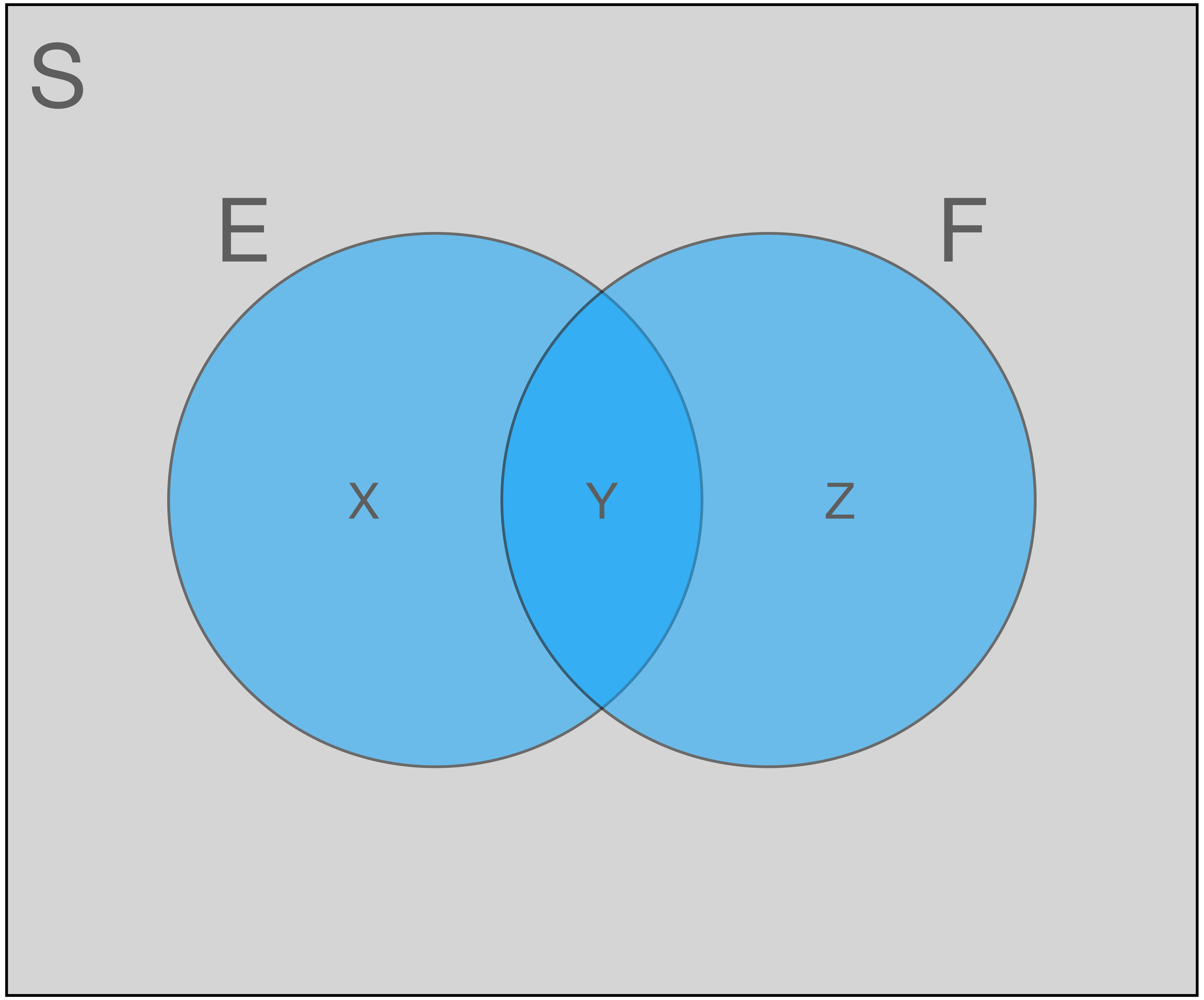
P(E) = x + y

P(F) = y + z

P(E∪F) = x + y + y + z ??????

Olasılık Teorisi

Diğer Set Özellikleri



P(E) = x + y

P(F) = y + z

~~**P(E∪F)** = x + y + y + z~~

P(E∪F) = P(E) + P(F) - P(EF)

Eğer P(EF) = ∅ ise;

P(E∪F) = P(E) + P(F)

Olasılık Teorisi

Koşullu Olasılık (Conditional Probability)

S = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),

(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),

(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),

(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),

(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),

(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

- Her olayın gerçekleşme olasılığı eşit
- 1/36
- İlk zarın 4 geldiğini biliyorsak, aynı olasılık geçerli mi?

Olasılık Teorisi

Koşullu Olasılık (Conditional Probability)

S = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),

(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),

(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),

(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),

(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),

(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

Olayların gerçekleşme olasılığı=1/36

- İlk zarın 4 geldiğini biliyorsak, aynı olasılık geçerli mi?
- S={(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)}
- P(4,1)=P(4,2)=P(4,3)=P(4,4)=P(4,5)=P(4,6)= 1/6
- P(E | F)
- P(ikinci zarın 1 gelmesi | ilk zarı 4 ise)
- P(ikinci zarin çift gelmesi) | ilk zarı 4 ise) ?

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Olasılık Teorisi

Koşullu Olasılık (Conditional Probability)

Örnek: 1'den 10'a kadar numaralar yazılan kartlar bir şapkanın içine atılıyor. Kartlardan biri şapkanın içinden rastgele çekiliyor. Kartı çeken kişi çıkan numaranın en az 5 olduğunu söylediğine göre, numaranın 10 olma olasılığı kaçtır?

Olasılık Teorisi

Koşullu Olasılık (Conditional Probability)

Örnek: 1'den 10'a kadar numaralar yazılan kartlar bir şapkanın içine atılıyor. Kartlardan biri şapkanın içinden rastgele çekiliyor. Kartı çeken kişi çıkan numaranın en az 5 olduğunu söylediğine göre, numaranın 10 olma olasılığı kaçtır?

P(E) = İkinci kartın 10 gelme olasılığı

P(F) = İlk kartın en az 5 gelme olasılığı

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$P(10|x > 5) = \frac{P(10 \cap x > 5)}{P(x > 5)}$$

$$P(10|x > 5) = \frac{1/10}{6/10} = \frac{1}{6}$$

Olasılık Teorisi

Koşullu Olasılık (Conditional Probability)

- İki olayın gerçekleşmesi birbirlerini etkilemiyorsa, bu tür olaylara bağımsız olaylar (independent events) denir.

- Bağımsız olaylar için;

$$P(E \cap F) = P(E) * P(F) \qquad P(E|F) = \frac{P(E) * P(F)}{P(F)} \qquad P(E|F) = P(E)$$

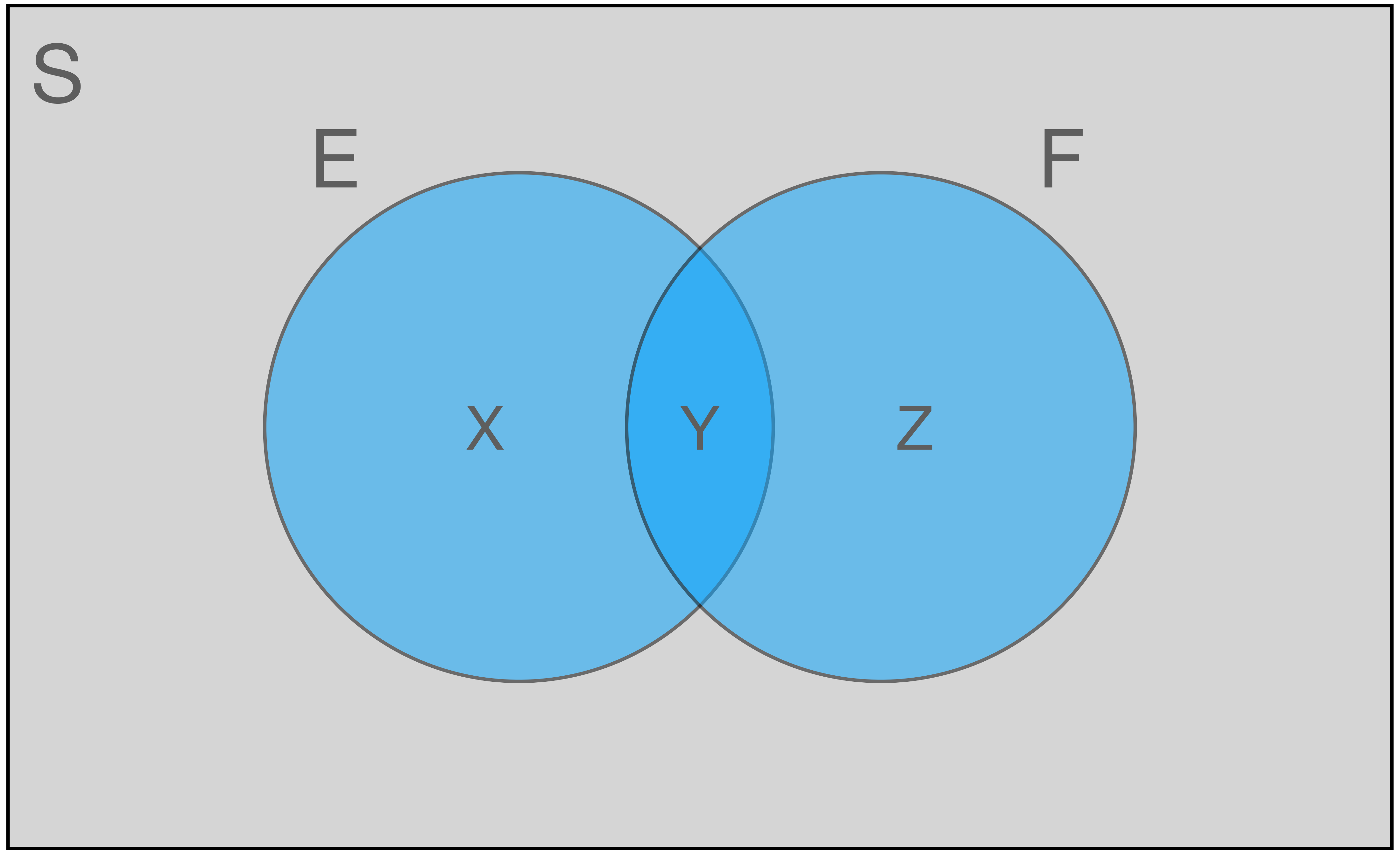
- Örnekler ???

Olasılık Teorisi

Bayes Formülü

- S örnek uzayındaki E ve F olaylarını aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz;

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$$



F^c = Gri alan + x

$E \cap F^c = x$

$E \cap F = y$

$E = (E \cap F) \cup E \cap F^c = x + y$

Olasılık Teorisi

Bayes Formülü

Hatırlatma

S örnek uzayındaki her **E** olayı için **P(E)**, ilgili olayın gerçekleşme olasılığı olarak tanımlanır. **P(E)** aşağıdaki üç koşulu sağlar;

1 - $0 \leq P(E) \leq 1$

2 - $P(S) = 1$

3 - Aynı anda gerçekleşemeyen (Mutually Exclusive: EF=∅) olaylar için;

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

Olasılık Teorisi

Bayes Formülü

$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$$

Koşullu olasılık kuralı; $P(E|F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$ $\longrightarrow$ $P(E \cap F) = P(E|F) * P(F)$

$$P(E) = P(E|F) * P(F) + P(E|F^c) * P(F^c)$$

$$P(E) = P(E|F) * P(F) + P(E|F^c) * (1 - P(F))$$

Olasılık Teorisi

Bayes Formülü

$$P(E) = P(E|F) * P(F) + P(E|F^c) * P(F^c)$$

Yukarıdaki formül, E olayının gerçekleşmesi olasılığının, F olayının gerçekleştiği ve gerçekleşmediği durumlara göre ağırlıklı ortalaması olduğunu gösterir.

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} \rightarrow P(F|E) = \frac{P(E|F) * P(F)}{P(E)}$$

$$P(F|E) = \frac{P(E|F) * P(F)}{(P(E|F) * P(F)) + P(E|F^c) * P(F^c))}$$

Olasılık Teorisi

Bayes Formülü

$$P(F \mid E) = \frac{P(E \mid F_j) * P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E \mid F_i) * P(F_i)} \quad = \quad P(F \mid E) = \frac{P(E \mid F) * P(F)}{P(E)}$$

Olasılık Teorisi

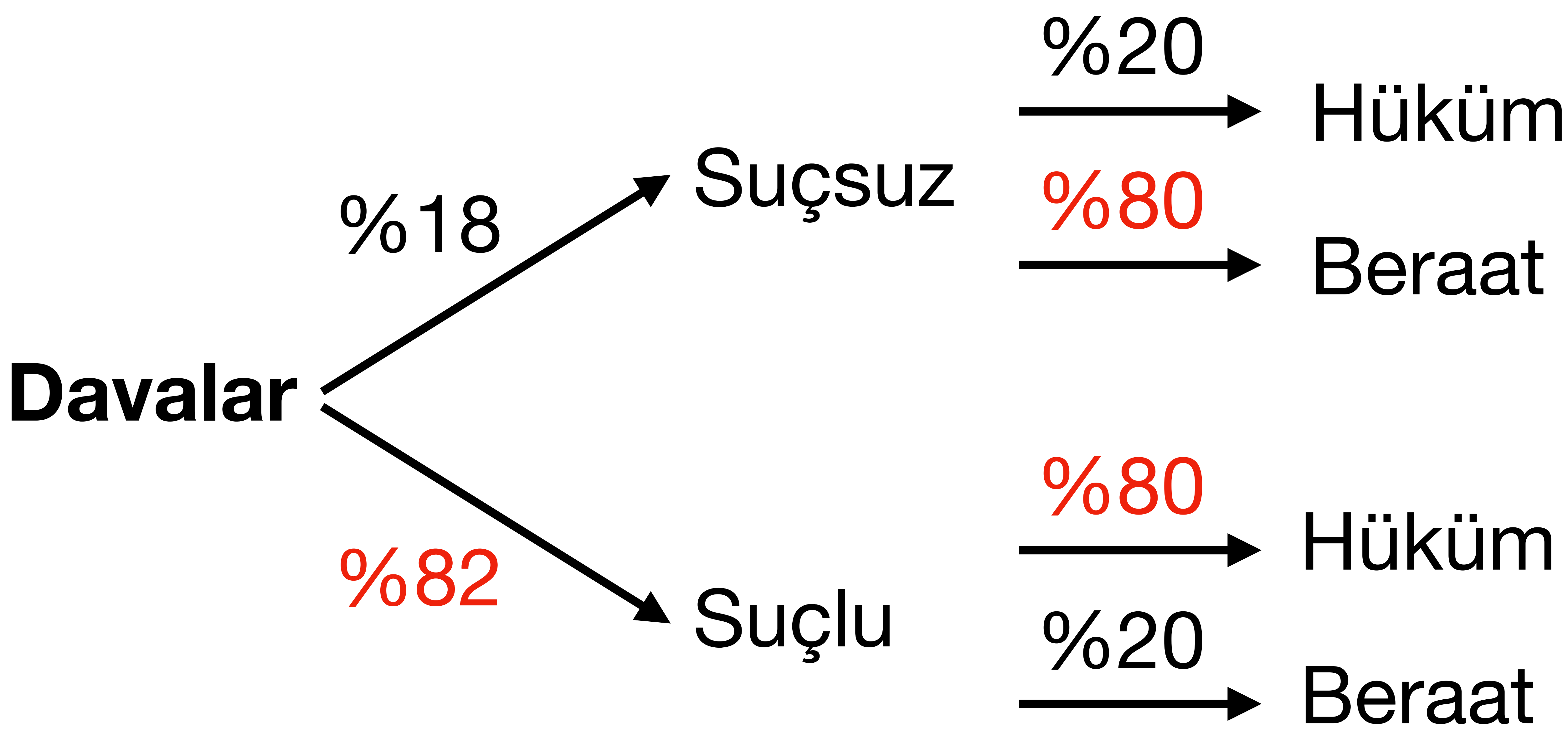
Bayes Formülü Örnek

- Bir ülkede daha önce görülen davalarda, suçlu bulunan kişilerin gerçekten suçlu olma oranı %90
- Beraat eden kişilerin ise gerçekten suçsuz olma oranı %85
- Davası görülen bütün kişilerin %82'sinin suçlu

Olasılık Teorisi

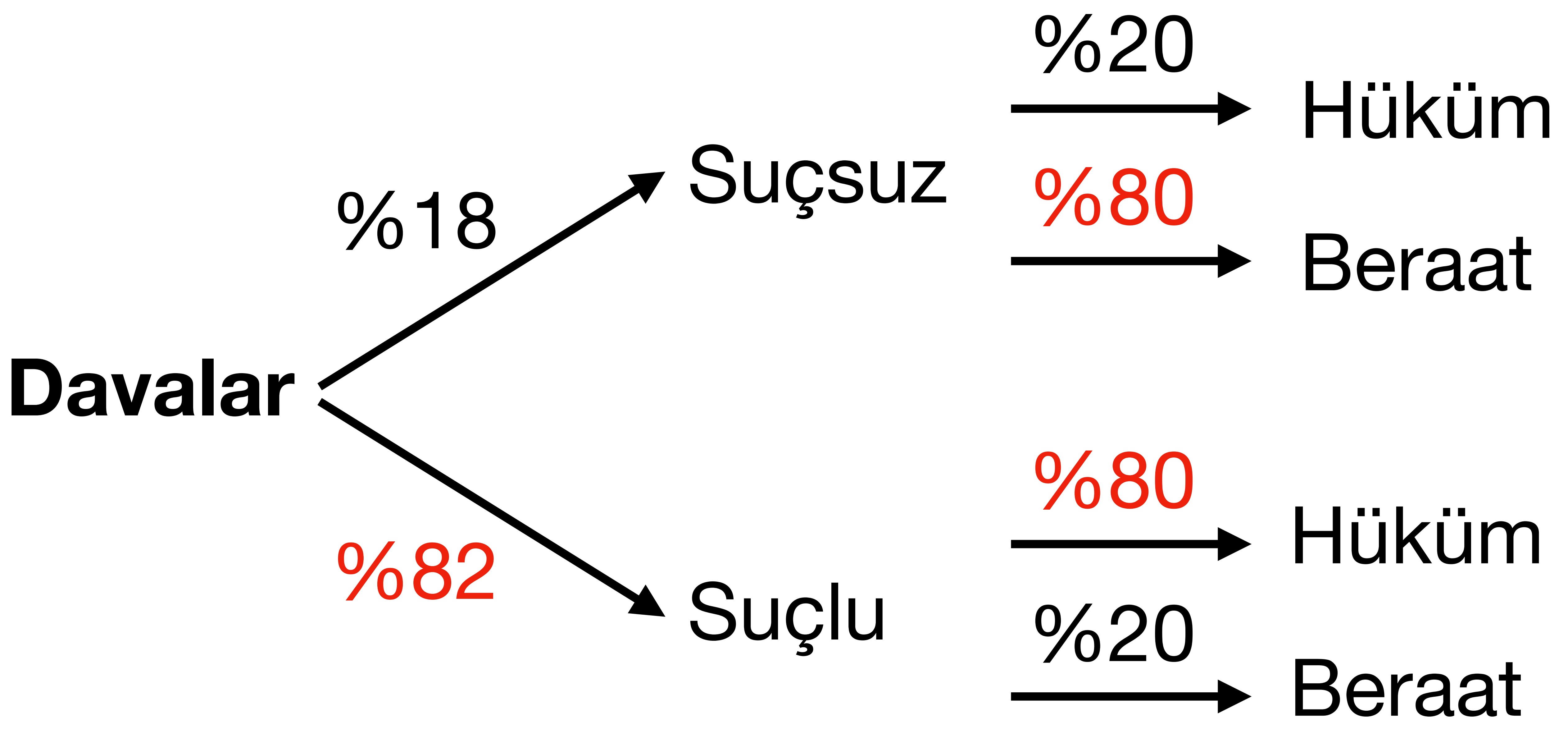
Bayes Formülü Örnek

- Bir ülkede daha önce görülen davalarda, suçlu bulunan kişilerin gerçekten suçlu olma oranı %80
- Beraat eden kişilerin ise gerçekten suçsuz olma oranı %80
- Davası görülen bütün kişilerin %82'si suçlu



Olasılık Teorisi

Bayes Formülü Örnek



Soru: Bu ülkede hüküm giyen bir kişinin gerçekte suçsuz olmasının olasılığı nedir?

P(Suçsuz | Hüküm) =?

Olasılık Teorisi

Bayes Formülü Örnek

$$P(F|E) = \frac{P(E|F) * P(F)}{(P(E|F) * P(F)) + P(E|F^c) * P(F^c))}$$

$$P(Sucsuz|Hukum) = \frac{P(Hukum|Sucsuz) * P(Sucsuz)}{(P(Hukum|Sucsuz) * P(Sucsuz)) + P(Hukum|Suclu) * P(Suclu))}$$

$$P(Sucsuz|Hukum) = \frac{(0.20 * 0.18)}{(0.20 * 0.18) + (0.80 * 0.82)}$$

$$P(Sucsuz|Hukum) \approx 0.052 \approx \% 5.2$$