BLM104 Elektrik Devre Temelleri ve Uygulamaları Dersi Çözümlü Örnekler 1

1. Bir telden 3 A` lik bir akım akıyor ise 1 saniyede bu telden kaç tane elektron akar. (hareket eder.) Bir elektronun yükü, e = $-1,602 \times 10^{-19}$ C dır.

Çözüm 1

Akım ile elektriksel yük arasındaki bağıntı

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

şeklindedir.

Akım zamanla değişmiyorsa yani

$i(t) = I$ ise $I = \frac{Q}{t}$ dir. ve $Q = It$ dir. (1.1)

ve $Q = It = 3[A] \times 1[s]$ =3 C dur.

Bir elektronun yükü $e = -1,602 \times 10^{-19}\ C$ dur.

Bir metal iletkende yük miktarı

$$Q = n\,e \tag{1.2}$$

Şeklinde verilebilir. 3 A `lik akım akıyorsa 1 s de 3 C`luk elektriksel yük oluşturmaktadır.

Denk. (1.2) den faydalanarak, 3 C ’ luk yükün kaç tane elektronda oluştuğunu bulabiliriz.

$n = \frac{Q}{n} = \frac{3\,[C]}{1,602x10^{-19}\,[C]} = 3 \times (6,242x10^{18}) = 1,872659 \times 10^{19}$ adet elektron, 3 C ’ luk yükü oluşturur.

2. Bir devrede $q = 20t\sin(8\pi t)\,\mathrm{mC}$ lik yük akmaktadır. Bu devreden t=2 s için akan akımı bulunuz.

Çözüm 2

Devreden akan akım

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(20t\sin 8\pi t)\left[\frac{mC}{s}\right] = 20\sin(8\pi t) + (160\pi t)\cos(8\pi t) \quad mA$$

$t = 2\,s$ için akım

$i = 20\sin(8\pi \times 2) + 160\pi \times 2\cos(8\pi \times 2) = 0 + 320\pi \times \cos(16\pi) = 320\pi = 1005{,}3096 \quad mA$

$i = 1{,}0053096\,A$ dir.

3. Bir devredeki bir elemana 50 J` luk enerji uygulandığında 10^{17} tane elektron hareket etmektedir. Bu durumda elemanın uçlarındaki gerilimi bulunuz. e = $-1{,}602\text{x}10^{-19}$ C

Çözüm 3

Bir elektrik devre elemanının uçlarını a, b ile gösterelim. Bu devre elemanının a ve b uçları arasındaki gerilim ;

$$V_{ab}(t) = \frac{dw(t)}{dq(t)} \tag{3.1}$$

şeklindedir. (3.1) bağıntısı daha basit bir şekilde aşağıdaki gibi verilebilir.

$$V_{ab}(t) = V = \frac{dw}{dq} \tag{3.2}$$

Eğer büyüklükler zamanla değişmiyorsa, yani büyüklük sabit ise (3.2) bağıntısı

$$V = \frac{W}{Q} \tag{3.3}$$

şekline dönüşür.

Bir devre elemanına 50 J’ lük bir enerji uygulandığında, bu enerjiden dolayı 10^{17}elektron hareket etmektedir. Bu nedenle oluşan gerilim

$$V = \frac{W}{Q} = \frac{W}{ne} = \frac{50[J]}{10^{17} \times 1{,}602 \times 10^{-19}[C]} = 50 \times 62{,}4219 = 3121{,}0986\,V$$

dur.

4. Direnç değerleri; 3,9 Ω, 56 Ω, 2,2 kΩ, 7,5 kΩ, 15 kΩ, 82 kΩ, 680 kΩ ve 4,7 MΩ olan direnç elamanlarının dirençlerini renk kodları ile veriniz. İlk 5 direncin toleransı % 5 ve geriye kalanların toleransı ise %10 dur.

Çözüm 4

Bu dirençlerin değerleri renk kodları ile çizelge 1 de verilmiştir.

Çizelge 1 Verilen dirençlerin renk kodları ile gösterilimi

	Direnç Değeri	Dirençlerin Renk Kodları
1	3,9 Ω , %5	Tu, Be, Al, Al
2	56 Ω , %5	Ye, Ma, Si, Al
3	2,2 k Ω , %5	Kı, Kı, Kı, Al
4	7,5 k Ω , %5	Mo, Ye, Kı, Al
5	15 k Ω , %5	Ka, Ye, Tu, Gü
6	82 k Ω , %10	Gri, Kı, Tu, Gü
7	680 k Ω , %10	Ma, Gri, Sa, Gü
8	47 M Ω , %10	

5. Bir evde kullanılan elektrikli ev aletlerin kurulu gücü 3 kW dır. Bu evde elektrikli ev aletleri günde ortalama 2 saat çalıştırılıyorlar, Mart 2011 ayında ödenen ücret 110 TL dir. Bu bölgedeki elektrik enerjisinin, 1 kWh`ın fiyatı ne kadardır.

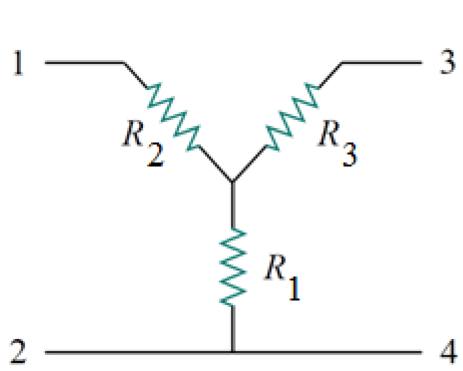
Çözüm 5

Söz konusu evde her ay harcanan enerji miktarı

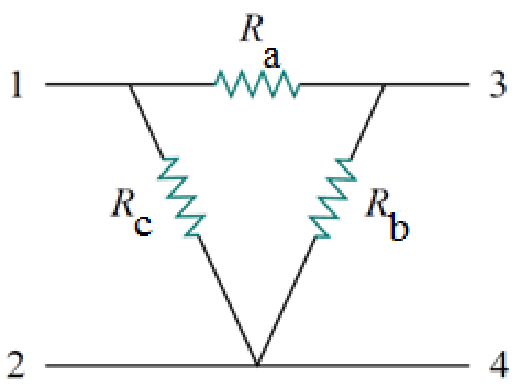
$$(3kW) \times \left(2\,{}^{Saat}\!/_{Gün}\right) \times (30\;gün) = 180\;kWh$$

$$1kWh\;\text{ücreti} = \frac{110\;TL}{180} \approx 0{,}611TL$$

6. Şekil 6.1 de ki şekilde üçgen (bağlı) devreden, yıldız bağlı devreye geçiş bağıntılarını bulunuz.



a) Üçgen bağlı devre

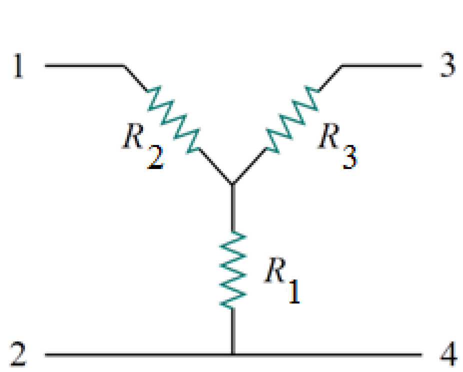


b) Üçgen bağlı devre

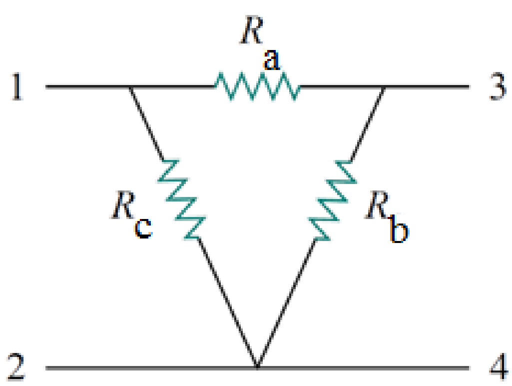
Şekil 6.1 Üçgen ve Yıldız bağlı devreler

Çözüm 6

Bazı devrelerde, üçgen devre yerine onun eşdeğeri olan Yıldız Devre ile çalışmak uygun olabilir. Bu nedenle üçgen devrenin dirençlerinin Yıldız devredeki dirençlerinin karşılığını elde edeceğiz. Bunun için iki devrenin benzer düğümleri arasındaki dirençler karşılaştıralım.



(a)



(b)

Eşdeğerlik

İki devre arasındaki eşdeğerlik; Üçgen devredeki bir çift düğüm arasındaki direncin, Yıldız devredeki aynı düğümler arasındaki dirence eşit olması düşüncesinden faydalanılarak elde edebilir.

Şekil 6 a ve Şekil 6 b deki 1-2 düğümleri arasındaki dirençler

$$R_{12}(Y) = R_2 + R_1 \tag{6.1.a}$$

$$R_{12}(\Delta) = R_c//(R_a + R_b) \tag{6.1.b}$$

Eşdeğerlik için iki devredeki aynı 1-2 düğümleri arasındaki dirençler eşit olmalı.

$$R_{12}(Y) = R_{12}(\Delta) \tag{6.2}$$

Buradan

$$R_1 + R_2 = \frac{R_c(R_a+R_b)}{R_a+R_b+R_c} \tag{6.3.a}$$

Elde edilir. Benzer şekilde 1-3 ve 3-4 düğümleri için de aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$R_{13} = R_2 + R_3 = R_a//(R_b + R_c) = \frac{R_a(R_b+R_c)}{R_a+R_b+R_c} \tag{6.3.b}$$

$$R_{34} = R_1 + R_3 = R_b//(R_a + R_c) = \frac{R_b(R_a+R_c)}{R_a+R_b+R_c} \tag{6.3.c}$$

Burada (6.3.a), (6.3.b) ve (6.3.c) gibi 3 denklemden R_1, R_2, R_3 bilinmeyenlerinden her birini bulabiliriz. Çözüm olarak (6.3.a), (6.3.b) ve (6.3.c) denklemlerinde bilinmeyenlerden birini yok etmek için (6.3.b)'yi , (6.3.a)'den çıkarabiliriz.

[(6.3.a) – (6.3.b)] 'in sol tarafı -> $R_{12} - R_{13} = (R_1 + R_2) - (R_2 + R_3) = R_1 - R_3$
(6.4.a)

sağ tarafı -> $R_{12} - R_{13} = \frac{R_c(R_a+R_b)}{R_a+R_b+R_c} - \frac{R_a(R_b+R_c)}{R_a+R_b+R_c}$

$$= \frac{R_aR_c+R_bR_c-R_aR_b-R_aR_c}{R_a+R_b+R_c} = \frac{R_b(R_c-R_a)}{R_a+R_b+R_c} \tag{6.4.b}$$

Bu fark denkleminin basitleştirilmiş sol (6.4.a) ve sağ tarafını (6.4.a) yeniden yazarsak;

[(6.3.a) – (6.3.b)] ->

$$R_1 - R_3 = \frac{R_b(R_c - R_a)}{R_a + R_b + R_c} \tag{6.5}$$

elde edilir.

Şimdi 3 bilinmeyeni çözmek için elde edilen denklem takımını yeniden yazalım;

$$R_1 + R_2 = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} = \frac{R_aR_c + R_bR_c}{R_a + R_b + R_c} \tag{6.5.a}$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_a(R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c} = \frac{R_aR_b + R_aR_c}{R_a + R_b + R_c} \tag{6.5.b}$$

$$R_1 + R_3 = \frac{R_b(R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c} = \frac{R_aR_b + R_bR_c}{R_a + R_b + R_c} \tag{6.5.c}$$

$$R_1 - R_3 = \frac{R_b(R_c - R_a)}{R_a + R_b + R_c} = \frac{R_bR_c - R_aR_b}{R_a + R_b + R_c} \tag{6.6}$$

Bu denklemleri inceleme ile R_1, R_2 ve R_3'ü elde edebiliriz.

Denk. 6.5.c) ve denk. (6.6)`1 taraf tarafa toplarsak;

(6.5.c)+(6.6)->

$$(R_1 + R_3) + (R_1 - R_3) = 2R_1 = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_bR_c - R_aR_b}{R_a + R_b + R_c}$$

$$= \frac{2R_bR_c}{R_a + R_b + R_c}$$

Yukarıdaki denklemden, R_1 `ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R_1 = \frac{R_bR_c}{R_a + R_b + R_c} \tag{6.7}$$

Denk. (6.5.c) ve denk. (6.6)`1 taraf tarafa çıkarırsak;

(6.5.c)- (6.6)->

$$(R_1 + R_3) - (R_1 - R_3) = 2R_3 = \frac{R_aR_b + R_bR_c - R_bR_c + R_aR_b}{R_a + R_b + R_c}$$

$$= \frac{2R_aR_b}{R_a + R_{b+}R_c}$$

Yukarıdaki denklemden, R_1 `ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R_3 = \frac{R_aR_b}{R_a+R_b+R_c} \qquad (6.8)$$

Denk. (6.5.c) ve denk. (6.6)`1 taraf tarafa çıkarırsak;

(6.5.c) – (6.6) -> $(R_1 + R_2) - (R_1) = R_2 = \frac{R_aR_c+R_bR_c}{R_a+R_b+R_c} - \frac{R_bR_c}{R_a+R_b+R_c} = \frac{R_aR_c+R_bR_c-R_bR_c}{R_a+R_b+R_c}$

$$= \frac{R_aR_c}{R_a + R_b + R_c}$$

Bu sonuçtan R_2 aşağıdaki gibi verilebilir.

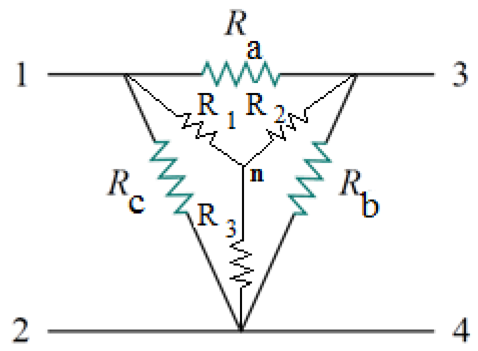
$$R_2 = \frac{R_aR_c}{R_a+R_b+R_c} \qquad (6.9)$$

Üçgen (bağlı) devreden, yıldız bağlı devreye geçiş için kural

Y (Yıldız) devresi ile Δ (Üçgen) devresini şekil 6.2 deki gibi uygun şekilde üst üste getirelim ,

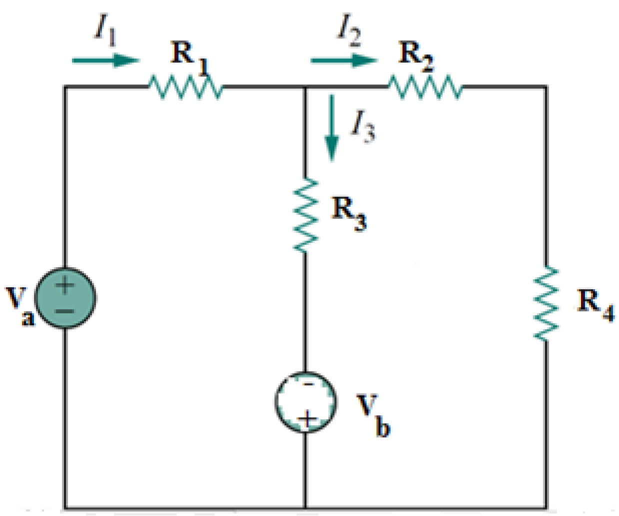
Y-Δ geçiş kuralı aşağıdaki gibi verilebilir.

Yıldız devresindeki her bir direnç; bu dirence komşu üçgen devresinin iki direncinin çarpımının, üçgen devresindeki 3 direncin toplamının, bölümüne eşittir.



Şekil 6.2 Y-Δ dirençlerinin geçiş bağıntılarının elde edilmesi için devre modeli

7. KVL ve ohm yasasını kullanarak Şekil 7.1 de ki devre için çevre akımları denklemlerini adım-adım (aşama- aşama) elde ediniz.

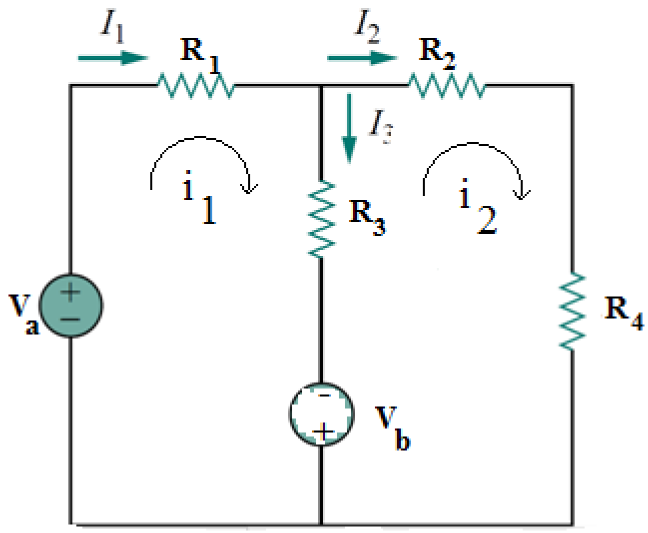


Şekil 7.1

Çözüm 7

Bir devrenin çevre akımları yöntemi ile çözümü için bağımsız çevreler (gözler,mesh) seçilir. Her bir çevre için rastgele akım dolaşım yönü seçilir. Bağımsız çevre sayısı kadar denklem elde edilir. Denklemler çözülerek bilenmeyenler bulunur.

Şekil 7.1 deki devrede bağımsız iki çevre için Şekil 7.2 de ki gibi çevre yönü seçerek, Kirchhoff \`ın Gerilim Yasasını (Kirchhoff's Voltage Law , KVL) uygulayalım.



Şekil 7.2

1. Birinci çevre için KVL' yi yazalım.

2. $$-V_a + V_{R1} + V_{R3} - V_b = 0 \quad (7.1)$$

   Direnç gerilimlerini, ohm yasasına göre $V = Ri$ şeklinde yazarsak,

   $$-V_a + R_1 I_1 + R_3 I_3 - V_b = 0 \quad (7.2)$$

   elde edilir.

3. Direnç akımlarının(I), çevre akımları(i) cinsinden karşılığını yazalım;

$$I_1 = i_1 \quad (7.3.a)$$
$$I_3 = i_1 - i_2 \quad (7.3.b)$$
$$I_2 = i_2 \quad (7.3.c)$$

4. Denk. (7.2)` de, denk. (7.3.a) ve denk. (7.3.b) ' yi kullanırsak; denk. (7.2) aşağıdaki gibi olur.

   $$-V_a + R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) - V_b = 0 \quad (7.4)$$

5. Denklem (7.2) 'i, 1. Çevre akımı (i_1) , ardından 2. Çevre akımı (i_2) ve kaynaklar şeklinde düzenlersek, denk. (2.4) ;

   $$(R_1 + R_3)i_1 - R_3 i_2 = V_a + V_b \quad (7.5)$$

   şekline dönüşür.

   İkinci çevre için aynı işlemleri yapalım;

6. İkinci çevre için KVL' ı yazalım

$$V_{R2} + V_{R4} + V_b - V_{R3} = 0 \quad (7.6)$$

7. Denklem (7.6)' deki direnç gerilimleri yerine ohm yasasındaki $v = Ri$ bağıntılarını kullanırsak; denk. (7.6) aşağıdaki gibi olur.

$$R_2I_2 + R_4I_2 + V_b - R_3I_3 = 0 \tag{7.7}$$

8. Direnç akımlarını (I), çevre akımları(i) cinsinden yazalım. Yani, denklem (7.3.b) ve denklem (7.3.c)' yi, denk. (7.7)'de kullanırsak, denk. (7.7) çevre akımları cinsinden ifade edilir.

$$R_2i_2 + R_4i_2 + V_b - R_3(i_1 - i_2) = 0 \tag{7.8}$$

9. Denklem (7.8)' yi, Çevre akımlarına göre sıra ile ve ardından kaynaklar şeklinde düzenlersek, denklem (7.8) aşağıdaki gibi olur;

$$-R_3i_1 + (R_2 + R_3 + R_4)i_2 = -V_b \tag{7.9}$$

10. Çevre akımları cinsinden düzenlenmiş, birinci ve ikinci çevrelerin gerilim denklemleri, denk. (7.5) ve denk. (7.9)'u yeniden alt alta yazalım;

$$(R_1 + R_3)i_1 - R_3i_2 = V_a + V_b \tag{7.10}$$
$$-R_3i_1 + (R_2 + R_3 + R_4)i_2 = -V_b \tag{7.11}$$

Böylece şekil 7.1deki devre için çevre akımları denklemlerini elde etmiş oluruz.

8. Şekil 7.1 deki devre için elde edilen çevre akımları denklemlerini matrissel düzende yazarak, bir devrede çevre akımları denklemlerini doğrudan elde etmek için kuralı veriniz.

Çözüm 8

Çevre akımları yöntemi için denk. (7.10) ve denk.(7.11)'i şöyle yorumlayabiliriz, 1. Çevre akımın, 1. çevre elemanlarından aktığını kabul ettiğimizden denklem (7.10) 1. Çevre akımının, 1. çevrede meydana getirdiği gerilime, 1. çevre ile ortak elemanı olan (komşu olan) çevrenin (burada 2. çevre) akımının (i_2), ortak elemanlardan aktığından dolayı ortak çevrenin akımının 1. çevrenin ortak elemanlar üzerinde oluşturduğu gerilime eklenmesi gerekiyor. Birinci ve ortak(ikinci) çevre akımlarının 1. çevrede meydana getirdiği gerilim, 1. çevredeki toplam kaynaklara eşit olması gerekmektedir. Ortak elemanda, ortak çevre akımının oluşturduğu gerilim yönü; her ortak elamandan çevre akımları aynı yönde geçiyorsa, bu ortak gerilim pozitif, çevre akımları ortak direnç üzerinden farklı yönlerde geçiyorsa bu ortak gerilim negatiftir. Denk.(7.10) ve denk.(7.11)' yi matris el şekilde yazalım;

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a + V_b \\ -V_b \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

Doğrusal dirençler ve bağımsız gerilim kaynaklarından oluşmuş devreler için çevre akımları denklemlerini ara işlemler yapmadan doğrudan devreye bakarak yazabiliriz. Çevre akımları yönteminin aslında, çevreler için KVL denklemi olduğunu hatırlayalım. Bu yöntemde dirençleri dolaşan her bir çevre akımı gerilim meydana getirir. Oluşan bu gerilimler o çevrede bulunan bağımsız gerilim kaynaklarının gerilimlerinin toplamına eşittir.

Birinci çevreden başlayalım; 1.çevredeki dirençlerin toplamı 1.çevre akımı ile çarpılır. Buna, birinci çevre ile ortak dirençleri olan çevrelerinin akımın meydana getirdiği gerilimler eklenir. Her iki çevre akımlarının yönü, ortak elemandan aynı yönde geçiyorsa bu gerilimlerin değeri pozitif, ters yönde geçiyorsa negatiftir. Denklemin sağ tarafında ise bağımsız kaynakların gerilimlerinin toplamı yazılır. 1.çevre akımının yönü, bağımsız gerilim kaynaklarının (-) ucundan giriyorsa pozitif, (-) ucundan giriyorsa negatiftir. Diğer çevreler içinde aynı düşünce ile gerilim denklemleri yazılır.

Aşağıda doğrusal dirençler ve bağımsız gerilim kaynaklarından oluşan devreler için çevre akımları denklemlerini içeren gerilim denklemleri matrissel şekilde verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{N1} & R_{N2} & \cdots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

Bu denklemi basitçe

$$[R][i] = [v] \tag{8.3}$$

şeklinde verebilir.

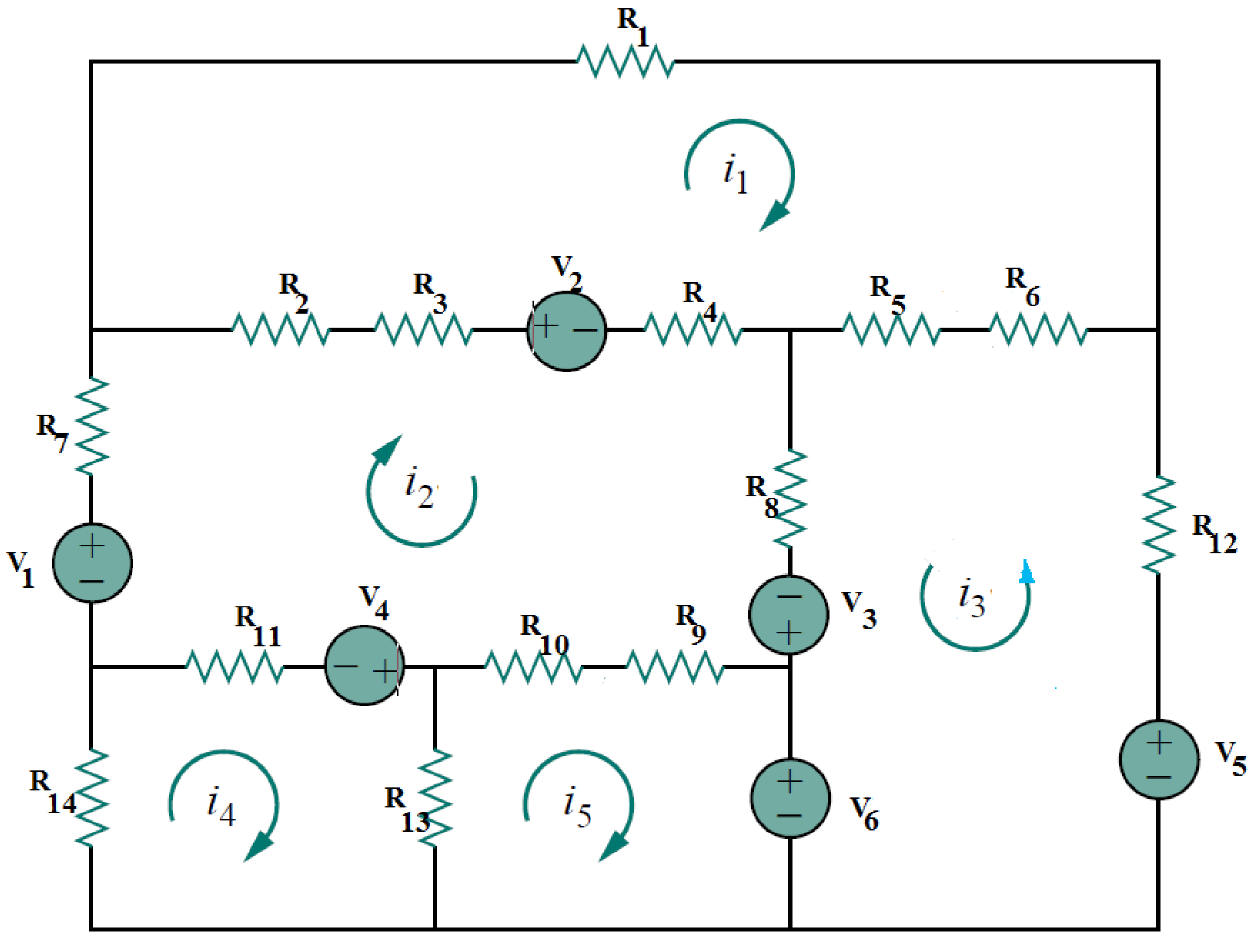
Burada;

$\boldsymbol{R_{kk}}$: k'ıncı çevredeki dirençlerin toplamını gösterir

$\boldsymbol{R_{kj}}$: Ortak dirençleri olan k' ıncı çevre ile j' inci çevrenin ortak dirençlerinin toplamını gösterir. k' ıncı ve j' inci çevre akımları, ortak elmandan aynı yönde geçiyorlarsa R_{kj}'nin işareti pozitif, ters yönde geçiyorlarsa R_{kj}'nin işareti negatiftir. $\boldsymbol{R_{kj}} = \boldsymbol{R_{jk}}$'dır. $(k \neq j)$. Çevre akımlarının yönü hep aynı yön seçilirse (örneğin saat yönünde) R_{kj}'nin işareti hep negatif olur.
$\boldsymbol{i_k}$, k'nıncı çevrenin akımıdır. (bilinmeyen)
$\boldsymbol{v_k}$: Bağımsız gerilim kaynaklarının gerilimlerinin toplamıdır. k. çevre akımı, bağımsız gerilim kaynağının (-) ucundan giriyorsa işareti pozitif, k çevre akımı bağımsız gerilim kaynağının (+) ucundan giriyorsa işareti negatiftir.

$[R]$ direnç matrisi, $[i]$ çıkış vektörü ve $[v]$ giriş vektörüdür. Bilinmeyen çevre akımları denk. (8.2) çözülerek elde edilir.

9. Şekil 9 daki devre için çevre akımları denklemlerini doğrudan yazınız.



Şekil 9

Çözüm 9

Bu devrede 5 çevre var, o halde direnç matrisinin mertebesi 5x5 dır. Çevre akımları denklemlerini Şekil 9 dan aşağıdaki gibi doğrudan yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & R_{35} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & R_{45} \\ R_{51} & R_{52} & R_{53} & R_{54} & R_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ V_1 - V_2 + V_3 - V_4 \\ V_3 + V_5 - V_6 \\ V_4 \\ -V_6 \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

Matrisin köşegen terimleri aşağıdaki gibidir.

$R_{11} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6$

$R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 + R_8 + R_9 + R_{10} + R_{11}$

$R_{33}= R_8 + R_{12}$

$R_{44}= R_{11}+R_{13}$

$R_{55}= R_9 + R_{10}+R_{11}$

Direnç matrisinin köşegende olmayan diğer terimleri ise aşağıdaki gibidir.

$R_{12}= R_{21} = -(R_2+R_3+R_4)$

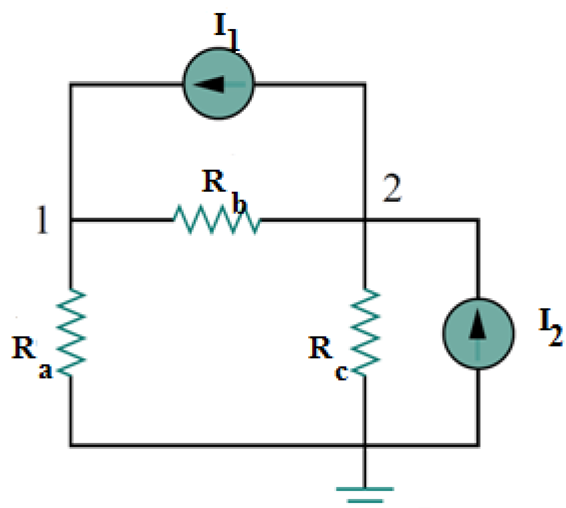
$R_{13}=R_{31} = R_5+R_6$

$R_{23}= R_{32} = R_8$

$R_{24}=R_{42} = - R_{11}$

$R_{25}= R_{52} = -(R_9 + R_{10})$

10. 7. KCL ve ohm yasasını kullanarak Şekil 10.1 de ki devre için düğüm gerilimleri denklemlerini adım-adım (aşama- aşama) elde ediniz.



Şekil 10.1

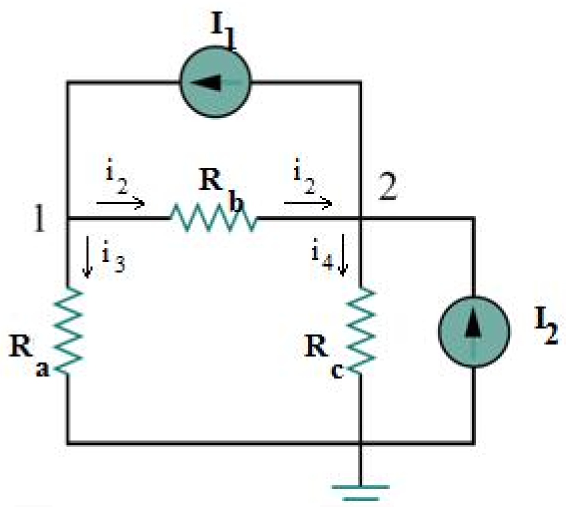
Çözüm 10

Düğüm gerilimleri yönteminde; devre değişkeni olarak, eleman gerilimleri yerine düğüm gerilimleri seçilmektedir. Devrenin yapısına bağlı olarak, aynı anda çözülecek denklem sayısı azalabilir. Aşağıdaki incelemelerde devrede gerilim kaynaklarının olmadığı kabul edilmiştir. Düğüm gerilimleri yönteminde, elde edilen denklem takımı çözülerek düğüm gerilimleri elde edilir. Eleman gerilimleri ve akımları; düğüm gerilimleri vasıtasıyla bulunur. Gerilim kaynağı bulunmayan **n** düğümlü bir devrede, düğüm gerilimleri yöntemi üç adımda elde edilebilir.

1. Bir düğüm referans düğümü olarak seçilir. Geri kalan (n-1) düğümün gerilimleri v_1, $v_2 \ldots . v_{n-1}$ olarak adlandırılır.
2. (n-1) düğümün her birine Kirchhoff `ın Akım Yasasını (Kirchhoff's Current Law , KCL) uygulanır. Ohm yasasını kullanarak dal (direnç) akımları düğüm gerilimleri cinsinden ifade edilir.
3. İşlemler sonucu oluşan denklem takımı, bilinmeyen düğüm gerilimlerini bulmak için çözülür.

Elemanların gerilim ve akımları ise, düğüm gerilimleri cinsinden bulunur.

Şimdi bu adımları Şekil 10.1`e uygulayarak düğüm gerilimleri denklem takımını elde edelim.



Şekil 10.2 Düğüm gerilimi denklemlerinin elde edilişli

1. Referans düğümü seçilir. Referans düğümünün gerilimi sıfır kabul edilir ve işareti ile gösterilir. Diğer 1. ve 2. Düğümler için düğüm gerilimleri v_1 ve v_2 olarak adlandırılır.
2. Birinci ve ikinci düğüm için KCL (KAY)' sı nı yazalım;
   1.düğüm için KAY denklemi;

$$I_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (10.1)$$

R_a ve R_b dirençleri için ohm yasasından i_2 ve i_3 akımlarını bulalım;

$$i_2 = \frac{v_1 - v_2}{R_b} \quad \text{veya } i_2 = G_b(v_1 - v_2) \quad (10.2.a)$$

$$i_3 = \frac{v_1}{R_a} \quad \text{veya} \quad i_3 = G_a v_1 \tag{10.2.b}$$

Denk. (10.2)' yı, denk. (10.1) 'de yerine koyarsak, denk. (10.2)

$$I_1 = \frac{1}{R_b}(v_1 - v_2) - \frac{1}{R_a}v_1 = 0 \tag{10.3.a}$$

şekline dönüşür. Denklem (10.3.a)' yi iletkenlik cinsinden yeniden yazarsak

$$I_1 - G_b(V_1 - V_2) - G_a v_1 = 0 \tag{10.3.b}$$

şeklinde olur. Denklem (10.3.b) denklemini bilinmeyen (çözülecek olan) düğüm gerilimlerini sırasıyla yeniden düzenlersek, denklem (10.3.b)

$$(G_a + G_b)v_1 - G_b v_2 = I_1 \tag{10.4}$$

şekline dönüşür.

2. düğüm için KCL denklemini yazalım

$$I_2 + i_2 - I_1 - i_4 = 0 \tag{10.5}$$

R_c direnci için ohm yasasından, i_4 akımını bulalım.

$$i_4 = \frac{v_2}{R_c} \text{ veya } i_4 = G_c v_2 \tag{10.6.a}$$

Denklem (10.2.a) ve (10.6.a) denklemlerini denklem (10.5) 'da yerine koyalım.

$$I_2 + G_b(v_1 - v_2) - I_1 - G_c v_2 = 0 \tag{10.6.b}$$

Denk. (10.6.b) ' da bilinmeyen düğüm gerilimlerini sırasıyla yeniden düzenlersek denk. (10.6.b);

$$-G_b v_1 + (G_b + G_c)v_2 = I_2 - I_1 \tag{10.7}$$

şekline dönüşür.

Denklem (10.4) ve denklem (10.7)'i yeniden alt alta yazalım;

$$(G_a + G_b)v_1 - G_b v_2 = I_1 \tag{10.8}$$

$$-G_b v_1 + (G_b + G_c)v_2 = I_2 - I_1 \tag{10.9}$$

Düğüm gerilimleri yöntemi; her düğüm için KCL denklemlerinin düğüm gerilimleri, cinsinden yeniden düzenlenmesi şeklindedir.

11. Şekil 10.1 deki devre için elde edilen düğüm gerilimleri denklemlerini matrissel düzende yazarak, bir devrede düğüm gerilimleri denklemlerini doğrudan elde etmek için kuralı veriniz.

Çözüm 11

Düğüm gerilimleri yönteminin düğümler için aslında KCL olduğunu hatırlayalım. Bu yöntemde; her bir düğüme bağlı dirençlerin akımlarının toplamı – bu düğümle ortak dirençleri olan düğümlerin bu düğümden akıttıkları akımlarının toplamı, bu düğüme bağlı bağımsız akım kaynaklarının akımlarının cebrik toplamına eşittir. (cebrik toplamın anlamı, düğüme giren akım kaynaklarının akımları pozitif, çıkanların değeri ise negatif alınarak elde edilen toplamdır.)

Denk.(10.8) ve denk.(10.9)’ yi matris el şekilde aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} G_a + G_b & -G_b \\ -G_b & G_b + G_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 - I_1 \end{bmatrix} \tag{11.1}$$

Doğrusal dirençlerden ve bağımsız akım kaynaklarından oluşmuş devreler için düğüm gerilimleri denklemleri ara işlemler yapmadan doğrudan devreye bakarak yazılabilir.

Doğrusal dirençler ve bağımsız akım kaynaklarından oluşan devreler için düğüm gerilimlerin denklemlerini içeren akım denklemleri, iletkenlik terimleri şeklinde aşağıda gibi verilebilir.

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \tag{11.2}$$

veya basitçe;

$$[G][v] = [i] \tag{11.3}$$

şeklindedir.

Burada;

G_{kk}: k’ıncı düğümdeki iletkenliklerin toplamı

$G_{kj} = G_{jk}$: k ve j düğümlerine doğrudan bağlı iletkenliklerin toplamının negatifidir. $k \neq j$

v_k: k’ ıncı düğümün gerilimidir.

i_k: k’ıncı düğüme doğrudan bağlı bağımsız akım kaynaklarının akımlarının toplamıdır. Bu toplamda giren akımlar pozitif, çıkan akımlar negatif değerlidir.

[G] `ye iletkenlik matrisi denir. $[v]$ çıkış vektörü ve $[i]$ giriş vektörüdür. Bilinmeyen düğüm gerilimleri, denk. (11.2) çözülerek elde edilir.

e.1-1 NTC termistör`ünde termistör`ün direnci sıcaklıkla $R = Ae^{\frac{B}{T}}$ şeklinde değişmektedir. T=25˚C, R=10KΩ ve T=30˚C'de R=8.06KΩ'dur. B' yi (Kelvin cinsinden) ve A' yı bulunuz.

Çöz.1-1 T_1 ve T_2 sıcaklıklardaki direnç $R_1 = Ae^{\frac{B}{T_1}}$ ve $R_2 = Ae^{\frac{B}{T_2}}$ dir.

$$\frac{R_1}{R_2} = e^{(\frac{B}{T_1}-\frac{B}{T_2})} \Rightarrow \ln\frac{R_1}{R_2} = B(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2})$$

$$B = \frac{\ln\frac{R_1}{R_2}}{\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}} = \frac{\ln\frac{10}{80,6}}{\frac{1}{298}-\frac{1}{303}} = 3894,969K^\circ$$

$T_1 = 25C^\circ = 298K$, $R_1 = 10\Omega$, $T_2 = 30C^\circ = 303K$, $R_2 = 8,06K\Omega$

$$\ln R_1 = \ln A + \frac{B}{T_1} \qquad \ln A = \ln R_1 - \frac{B}{T_1} = \ln 10.10^3 - \frac{3894,969}{298} = -3,859$$

$$A = e^{-3,859} = 0,02188$$

e.1-2 NTC termistors can be resperented by $R = Ae^{\frac{B}{T}}$ where R , resistance at absolute temoperature T , A and B are constants . The Resistance values which is measured at two temperatures T_1 and T_2 are R_1 and R_2 . Find constant B as a function of R_1, R_2, T_1 and T_2 . Determine B for T_1=25C , R_1=6.8 K , T2=40C , R_2=3,77 KΩ

Solution:1-2

The resistance value is measured at T_1 and T_2

$R_1 = Ae^{\frac{B}{T_1}}$ and $R_2 = Ae^{\frac{B}{T_2}}$

Dividing yields

$$\frac{R_1}{R_2} = e^{(\frac{B}{T_1}-\frac{B}{T_2})} \Rightarrow \ln\frac{R_1}{R_2} = B(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2})$$

$$B = \frac{\ln(\frac{R_1}{R_2})}{\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}}$$

for $T_1 = 298K$ $T_2 = 313K$ $R_1 = 6{,}8K$ and $R_2 = 3{,}77K$

$$B = \frac{\ln\frac{6{,}8}{3{,}77}}{\frac{4}{298}-\frac{1}{313}} = 3667{,}83K$$

Prob.1-3 NTC termistör`ü $R = Ae^{\frac{B}{T}}$ ile temsil edilmektedir. Burada R ,T sıcaklığındaki direnç , A ve B ise sabitlerdir.

a) NTC ' nin sıcaklıkla değişim katsayısı $\alpha = \frac{1}{R}\frac{dR}{dT}$ `i bulunuz. B=3750 K

b) Direncin T=25 Cº sıcaklıktaki değeri R=10 kΩ dır. Direncin değerinin R= 5,2 kΩ olduğu sıcaklığı bulunuz.

$\alpha = -\%$ 4,2 (1/K)`i alınız.

Çöz.1.3

a)

$$R = Ae^{\frac{B}{T}}$$

$$\alpha = \frac{1}{R}\frac{dR}{dT} = \frac{1}{R}A(-\frac{B}{T^2})e^{\frac{B}{T}} = \frac{1}{R}(-\frac{B}{T^2})Ae^{\frac{B}{T}} = \frac{1}{R}(-\frac{B}{T^2})R = (-\frac{B}{T^2})$$

$$\alpha = -\frac{B}{T^2} = -\frac{3750}{(273+25)^2} = -0{,}04223$$

b)

$$\alpha R = \frac{dR}{dT} \Rightarrow dT = \frac{dR}{\alpha R} = \frac{(5,2-10)}{0,042x10} = 21,978$$

$$T = 25 + \Delta T = 25 + 21,978 = 46,978C^{\circ}$$

Kaynaklar

1. C. K. Alexander, M. N. O. Sadiku, " Fundamentals of Electric Circuits" 3rd New York, Mc Graw-Hill, 2000
2. H. Dinçer "Elektronik Mühendisliğine Giriş, ***Genel Bilgiler, çözülmüş ve Ek problemler***" KOÜ Yayınları No 14, Haziran 1999 Kocaeli