

Bölüm 6

ZAMAN VE FREKANS

DOMENLERİNDE ÖRNEKLEME

VE ÖRTÜŞME

6.1 GİRİŞ

Bu bölümün amacı, verilen bir işaretin zaman veya frekans domenlerinden birinde örneklenmesinin diğer domene olan etkisini incelemektir.

sürekli zamanlı bir $f(t)$ işaretinin zaman domeninde örneklenmesinin, frekans domeninde periyodik bir dalga formu oluşturduğu gösterilecektir.

Sınırlı bant genişlikli bir $f(t)$ işaretini, $f(nT)$ örnekleri yardımıyla tamamen belirleyen Shannon teoreminin ispatı verilecektir.

6.2 FREKANS DOMENİNDE ÖRNEKLEME

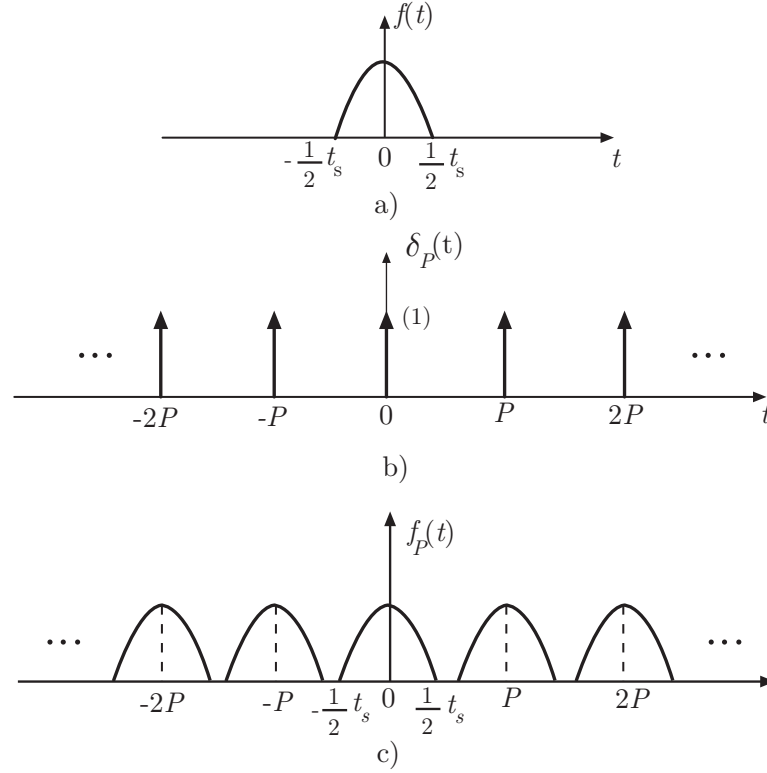
zaman domeninde konvolüsyon işlemi frekans domeninde çarpıma karşı düşmektedir.

P periyotlu impuls treninin $f(t)$ işareti ile konvolüsyonundan, periyodik $f_P(t)$ dalga formunun elde edilmesi Şekil 6.1'de gösterilmektedir.

Buna göre, sonsuz uzunlukta bir impuls treni

$$\delta_P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kP) \quad (6.1)$$

biçiminde yazılabilir.



Şekil 6.1 Aperiyojik bir fonksiyonun impuls treni ile konvolüsyonunun elde edilmesi;

a) Zaman domeninde sınırlı $f(t)$ işareti; b) Periyodik impuls treni, $P > t_s$;

c) Periyodik işaret.

Buradan, $f(t)$ işaretinin periyodik olarak tekrarlanmış biçimi

$$\begin{aligned} f_P(t) &= f(t) * \delta_P(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau - kP) d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kP) \end{aligned} \tag{6.2}$$

olarak elde edilir. Zaman domenindeki konvolüsyonun frekans domeninde çarpmaya karşı düşme özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_P(t)] &= \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kP)\right] \\ &= F(\omega)\mathcal{F}[\delta_P(t)]\end{aligned}\tag{6.3}$$

$f_P(t)$ 'nin Fourier dönüşümü bulunur.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_P(t)] &= \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kP)\right] \\ &= \frac{2\pi}{P}F(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)\end{aligned}\tag{6.4}$$

6.3 ZAMAN DOMENİNDE ÖRNEKLEME

Verilen bir $f(t)$ işaretini örnekleme işlemi, $f(t)$ ve periyodu T olan bir impuls dizisinin çarpımı ile ifade edilir. T periyotlu impuls dizisi

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (6.5)$$

olduğuna göre, $f(t)$ 'nin (6.5) ile çarpımı

$$f(nT) = f(t)\delta_T(t) \quad (6.6)$$

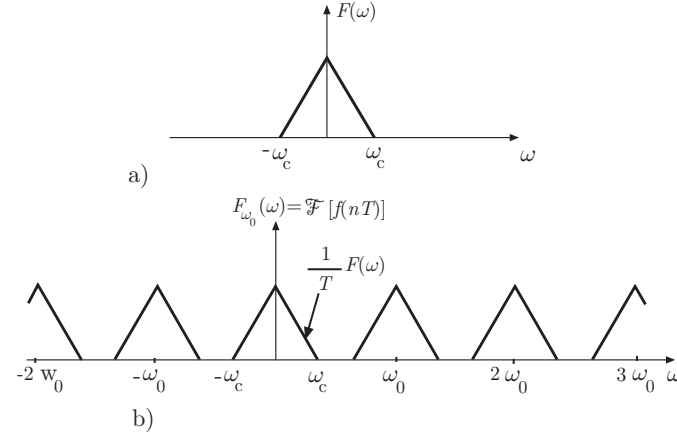
örneklenmiş işareti göstermektedir. Zaman domeninde çarpım frekans domeninde konvolüsyona karşı düştüğünden,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(nT)] &= (1/2\pi)\{F(\omega) * \mathcal{F}[\delta_T(t)]\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ F(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/T) \right\} \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n2\pi/T)
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

elde edilir.

(6.7)'deki ilişkide örneklenmiş işaretin Fourier dönüşümünün, orijinal $f(t)$ işaretinin Fourier integralinden nasıl bulunacağı görülmektedir. Buna göre, $f(nT)$ 'nin spektrumu, $F(\omega)$ 'nin

$2\pi/T'$ 'nin tam sayı katları kadar kaydırılmış kopyalarının toplanıp $1/T$ ile çarpımından bulunur. Şekil 6.3'te bu durum görülmektedir.



Şekil 6.2 Örtüşmesiz ideal örnekleme; a) Sınırlı bantlı bir $f(t)$ işaretinin Fourier dönüşümü; b) $T < \pi/\omega_c$ için örneklenmiş $f(nT)$ işaretinin Fourier dönüşümü ($\omega_0 = 2\pi/T$).

Aıklama 6.1 $f(t)$ 'nin frekans spektrumu

$$F(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_c \quad \text{için} \quad (6.8)$$

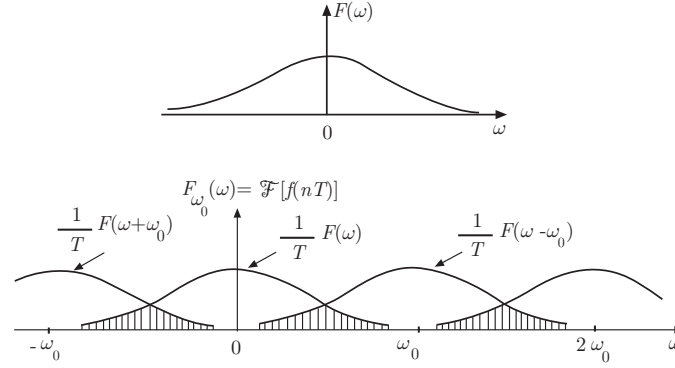
koşulunu sağlarsa, $f(t)$ işareti ω_c rad/sn'ye bant-sınırlı denir. Şekil 6.3'ten görüldüğü üzere, bant-sınırlı bir işaretin $T < \pi/\omega_c$ aralıklarında örneklenmesi durumunda, örneklenmiş işaretin spektrumu birbiri ile çakışmayan (örtüşmeyen) periyodik kopyalardan oluşmaktadır. Bu gözlem, örnekleme teoremi yada Shannon teoreminin ifadesi ve ispatında kullanılacaktır.

6.4 FREKANS DOMENİNDE ÖRTÜŞME

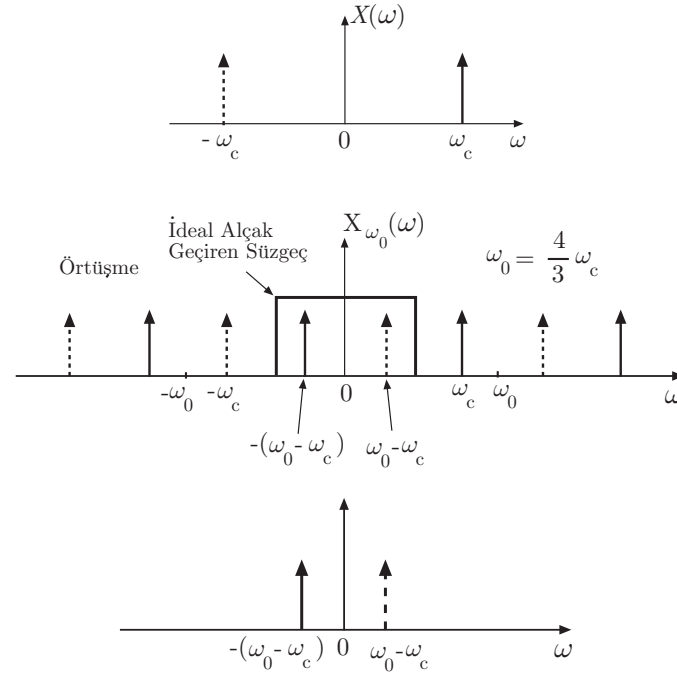
(6.7)'den, örnekleme analog işaretin spektrumuna ek olarak bir dizi ikincil spektrum ortaya çıkardığı görülmektedir. Orijinal işaretin elde edilmesi bu ikincil spektrumun uygun bir analog alçak geçiren süzgeç ile ortadan kaldırılmasıyla mümkündür. Analog işaret, (6.8)'de tanımlandığı gibi bant-sınırlı bir işaret değilse, orijinal spektrum ile ikincil spektrum arasında bir çakışma (veya örtüşme) olur. Şekil 6.4'te bu örtüşme görülmektedir.

İşaretin bant-sınırlı olmamasından dolayı olan bu örtüşme, analog işaretin örnekleme öncesi bir alçak geçiren süzgeçten

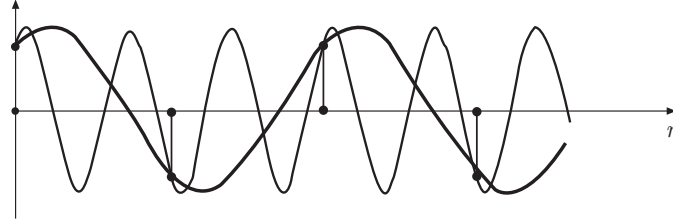
geçirilmesi ile önlenir. En büyük frekans bileşeni ω_c olan bant-sınırlı işaret, $T < \pi/\omega_c$ aralıkları ile örneklenirse örtüşmenin olmadığı grafiklerden görülmektedir. Sınırlı bantlı bir işarete örtüşmenin etkisini görebilmek için aşağıdaki örneği inceleyelim.



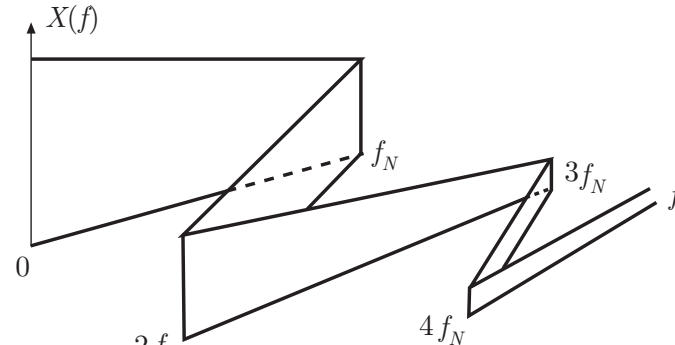
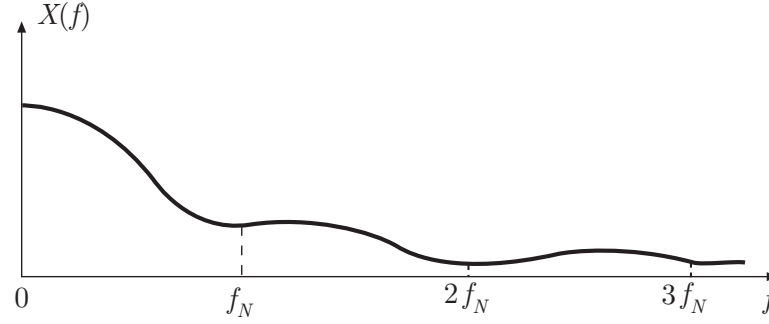
Şekil 6.3 Sınırlı bantlı olmayan işaretin örneklenmesi ile oluşan örtüşme; a) Sınırlı bantlı olmayan $f(t)$ analog işaretinin spektrumu; b) Herhangi bir örnekleme aralığı $T = 2\pi/\omega_0$ için örneklenmiş $f(nT)$ ayrık-zamanlı işaretinin spektrumu. Taralı alan örtüşen frekans bölümlerini göstermektedir.



Şekil 6.4 Alçak frekansta örnekleme nin frekans domenindeki etkisi; a) Orijinal ω_c frekanslı sinüzoidal işaret; b) $\omega_0 < 2\omega_c$ ile örneklenmiş işaretin spektrumu; c) İdeal alçak geçiren süzgeçten geçen işaretin spektrumu.



Şekil 6.5 Sinüzoidal bir işaretten örnekleme ile daha düşük frekanslı bir sinüzoid elde edilmesi.



rnek 6.1 $x(t) = A \cos \omega_c t$, $\omega_c = 2\pi 3000$ rad/sn olan analog işaretin, $T = 1/4000$ saniye aralıklarla örneklenmesi durumunda $x(nT)$ 'nin frekans spektrumunu inceleyelim.

$T < \pi/\omega_c$ koşulu sağlanmadığından örtüşme olacaktır. Bu durum Şekil 6.5'te görülmektedir. Ayrıca, örneklenmiş ayırık-zamanlı işaretin frekansı $1/2T'$ den daha küçük 1000 Hz'lik bir dalga formuna karşı düştüğü hem frekans domeninde, hem de zaman domeninde görülmektedir.

Gerçekten, $x(nT)$ 'nin frekans domeninde alt kesim frekansı $1000 + \varepsilon$ Hz olan bir ideal alçak geçiren analog süzgeçten geçirilmesi

sonucu $\omega'_c = 2\pi 1000$ rad/sn'lik bir sinüzoid elde edilir. Şekil 6.6'da, zaman domeninde sinüzoidal ayırık-zamanlı işaretten daha düşük frekanslı bir sinüzoidin geçtiği görülmektedir.

Her iki domende de görülen bu frekans değişiminin nedeni örtüşmedir. Sınırlı bantlı işarete gösterilen bu örtüşme etkisinin sınırlı bantlı olmayan işaretlerde de göstermek mümkündür [3].

Pratikte karşılaşılan pek çok işaret sınırlı bantlı değildir. Örnekleme frekansı ne kadar büyük seçilirse seçilsin yine de örtüşme olacaktır. **Nyquist frekansı** veya katlama frekansı olarak adlandırılan $f_N = 1/2T$ frekans değeri, bu örtüşmenin

etkisini belirlemede çok önemlidir. Katlama kavramı Şekil 6.7’de gösterilmiştir. Buna göre, f_N (Nyquist frekansı) üzerindeki frekans bileşenleri katlanarak sıfır ve f_N frekansı arasındaki bileşenlerin üzerine gelmektedir.

6.5 SHANNON ÖRNEKLEME TEOREMİ

Analog işaret işleme ile sayısal işaret işleme disiplinleri arasındaki köprü örneklememe teoremidir. Bu önemli özellik sayesinde, analog sistemlerin ve yöntemlerin sayısal olarak gerçekleştirilmesi mümkün olmaktadır.

6.5.1 Örnekleme Teoremi

Bant-sınırlı analog $f(t)$ işareti, ayrık zamanlarda $f(nT)$ şeklinde örneklenmiş değerlerinden yeniden elde edilebilir.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\sin \{(t - nT)\omega_0/2\}}{\{(t - nT)\omega_0/2\}} \quad (6.9)$$

Burada,

$$F(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_0 \text{ için} \quad (6.10)$$

Yani $f(t)$ işareti ω_0 ile bant-sınırlı olmaktadır. Örnekleme frekansı ω_0 ise aşağıdaki koşulu sağlamalıdır.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_0 \quad (6.11)$$

Tanıt. (6.7)'den $\mathcal{F}[f(nT)]$ 'nin ω değişkenine göre periyodik bir işaret olduğu görülmektedir. O halde, Fourier serisine açılımı yapılabilir.

$$\begin{aligned} F_{\omega_0}(\omega) &= \mathcal{F}[f(nT)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk(2\pi/\omega_0)\omega} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jkT\omega} \end{aligned} \tag{6.12}$$

Burada, Fourier serisi katsayıları,

$$\begin{aligned}
 F_k &= \frac{1}{\omega_{\ddot{o}}} \int_{-\omega_{\ddot{o}}/2}^{\omega_{\ddot{o}}/2} F(\omega) e^{-jk(2\pi/\omega_{\ddot{o}})\omega} d\omega \\
 &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_{\ddot{o}}/2}^{\omega_{\ddot{o}}/2} F(\omega) e^{-jkT\omega} d\omega
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

ilişkisinden bulunur. (??)'deki ters Fourier integralinden,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\ddot{o}}/2}^{\omega_{\ddot{o}}/2} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{6.14}$$

yazılabilir. (6.13)'nin (6.14) ile karşılaştırılmasından

$$F_k = T f(-kT) \tag{6.15}$$

bulunur. O halde, $F_{\omega_0}(\omega)$ 'nın Fourier serisi açılımı, (6.15) ve (6.12)'dan

$$F_{\omega_0}(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(-kT)e^{jkT\omega} = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-jkT\omega} \quad (6.16)$$

olur. (6.6)'daki ifadede, $f(t)$ 'nin $t = kT; k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$ ayrık anlarındaki değerlerinin, periyodik frekans domeni fonksiyonu $F_{\omega_0}(\omega)$ 'nın Fourier serisi katsayılarını belirlediği görülmektedir.

$$F(\omega) = F_{\omega_0}(\omega), \quad -\frac{\omega_0}{2} < \omega < \frac{\omega_0}{2} \text{ için} \quad (6.17)$$

olduğuna dikkat ederek, (6.16) ve (6.14)'den sürekli $f(t)$ işareti yeniden elde edilir.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\ddot{o}}/2}^{\omega_{\ddot{o}}/2} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_{\ddot{o}}/2}^{\omega_{\ddot{o}}/2} \left\{ \sum_{K=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-jkt\omega} \right\} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{T}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \int_{-\omega_{\ddot{o}}/2}^{\omega_{\ddot{o}}/2} e^{-j(t-kT)\omega} d\omega \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin \{(t-kT)\omega_{\ddot{o}}/2\}}{\{(t-kT)\omega_{\ddot{o}}/2\}}
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Bu denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \text{sinc}[F_{\text{ö}}(t - kT)] \quad (6.19)$$

$\text{sinc}(a)$ fonksiyonu, $\text{sinc}(a) = \frac{\sin \pi a}{\pi a}$ olarak tanımlanır. (6.19)'deki interpolasyon denklemine bir kez daha baktığımızda, bunun bir konvolüsyon işlemi olduğunu görebiliriz. $\text{sinc}(F_{\text{ö}}t)$ ideal alçak geçiren bir süzgecin impuls cevabıdır. Böylece, bu interpolasyon işlemi, $f(kT)$ örneklenmiş işaretinin ideal alçak geçiren bir süzgeçten geçirilmesine eşdeğer olmaktadır.

REFERANSLAR

1. A. Papoulis, *Signal Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1977.
2. R.W. Hamming, *Digital Filters*, Dover Publications, 1998.
3. L.B. Jackson, *Digital Filters and Signal Processing*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
4. V. K. Ingle and John G. Proakis, *Digital Signal Processing Using MATLAB*, Brooks Cole, 1999.

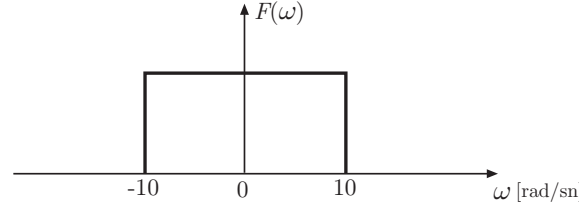
PROBLEMLER

6.1 Sürekli-zamanlı bir işaretin spektrumu Şekil 6.13'te gösterildiğine göre, aşağıdaki örnekleme frekansları için örneklenmiş işaretin spektrumunu bulunuz.

(a) $\omega_0 = 30 \text{ rad/sn}$

(b) $\omega_0 = 15 \text{ rad/sn}$

(c) $\omega_0 = 10 \text{ rad/sn}$



Şekil 6.7

6.2 $x(t) = \sin 2\pi t$ işareti $T = 0.5$ saniye örnekleme aralıkları ile örneklensin. Ayrık-zamanlı $x(nT)$ işaretinden $x(t)$ 'yi elde etmek mümkün müdür? Bu durum, örnekleme teoremi koşullarını sağlar mı?

- 6.3 İnsanlardaki beyin dalgaları 0 Hz ile 45 Hz frekansları arasındadır. Bu işaretleri sayısal olarak işleyebilmek için alınabilecek en büyük örnekleme aralığı nedir?
- 6.4 $u(t) = \cos 2\pi 10^3 t + 0.5 \cos 2\pi 3 \cdot 10^3 t$ işaretinden saniyede 5000 örnek alınarak elde edilen $x(n)$ örneklenmiş işaretinin, kesim frekansı 2.5 kHz olan bir alçak geçiren süzgeçten geçirilmesi durumunda çıkış nedir?
- 6.5 $x(t)$ analog işaretinin bant genişliği $f_0 = 5 \text{ Hz}$ olarak verilmektedir. Bu işaret frekansı $\omega_g = 75\pi$ olan sinüzoidal bir gürültü işareti $x_g(t)$ ile bozulmaktadır. Bozulmuş

işaret $x_b(t) = x(t) + x_g(t)$, $\omega_{\text{ö}}$ örnekleme frekansı ile örneklenmektedir.

a) $\omega_{\text{ö}} = 50\pi$ için örneklenmiş işaretin frekans spektrumunu çiziniz. $x(t)$ işaretini alçak geçiren süzgeçleme ile elde edebilir miyiz?

b) $\omega_{\text{ö}} = 70\pi$ için örneklenmiş işaretin frekans spektrumunu çiziniz. $x(t)$ işaretini alçak geçiren süzgeçleme ile elde edebilir miyiz?

MATLAB UYGULAMALARI

M6.1 $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a = 1500$ işareti için Fourier integralini MATLAB kullanarak bulunuz. Bu işaret, $f_1 = 5 \text{ kHz}$ ve $f_2 = 2 \text{ kHz}$ örnekleme frekanslarıyla örneklendiğinde elde edilecek örneklenmiş işaretler için Fourier dönüşümlerini çizdiriniz. Örnek ??'de kullanılan MATLAB programlarından gerekli değişiklikleri yaparak faydalanabilirsiniz. Sonuçları yorumlayınız.