PROMETHEUS

94 21 073

ISBN 80-7196-178-7

Matematika PRO GYMNÁZIA Stereometrie

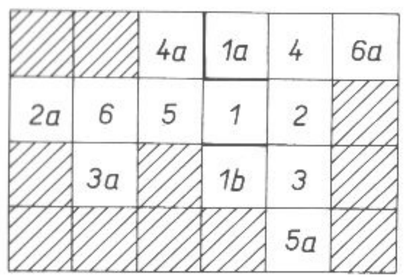
Matematika

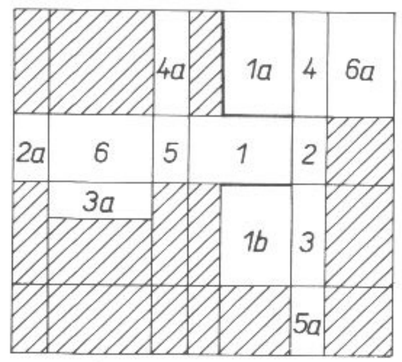
PROMETHEUS®

PRO GYMNÁZIA

Stereometrie

Fč / m+f





Překreslíte-li si ve vhodné velikosti obrázky, nejlépe na tvrdý papír, můžete si zhotovit skládací papírový model krychle a hranolu. Vyšrafovanou část odstřihněte a tučně vytažené linky nastřihněte. Stěny označené týmiž čísly se kryjí. Stěna 2a se zasune naposledy.

Matematika

PRO GYMNÁZIA

Stereometrie

RNDr. Eva POMYKALOVÁ

Matematika

PRO GYMNÁZIA

Stereometrie

Prometheus

Učebnice byla připravena ve spolupráci s JČMF.

Lektorovali doc. RNDr. Jarolím Bureš, CSc.
a Mgr. Petr Drahotský

Koordinátor učebnic matematiky pro gymnázia
doc. RNDr. Leo Boček, CSc.

Revizi výsledků provedl Mgr. Petr Drahotský.

Schválilo MŠMT ČR dne 12. 3. 2002, č. j. 13435/2002-23,
k zařazení do seznamu učebnic pro gymnázia
s dobou platnosti šest let.

Dotisk 3. vydání

© Eva Pomykalová, 1995

ISBN 80-7196-178-7

OBSAH

Předmluva 7

1 ÚVOD 8

1.1 Stereometrie 8
1.2 Tělesa 9
1.3 Volné rovnoběžné promítání 11
První výlet do historie geometrie 17

2 POLOHOVÉ VLASTNOSTI 18

2.1 Základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami 18
2.2 Vzájemná poloha dvou přímek 22
2.3 Vzájemná poloha přímky a roviny 25
2.4 Vzájemná poloha dvou rovin 27
2.5 Rovnoběžnost přímek a rovin 29
2.6 Vzájemná poloha tří rovin 34
2.7 Řešení polohových konstrukčních úloh 38
2.8 Úlohy k opakování 54
Druhý výlet do historie geometrie 57

3 METRICKÉ VLASTNOSTI 58

3.1 Odchylka přímek 58
3.2 Kolmost přímek a rovin 63
3.3 Odchylky přímek a rovin 74
3.4 Vzdálenost bodu od přímky a od roviny 84
3.5 Vzdálenosti přímek a rovin 91
3.6 Úlohy k opakování 100
Třetí výlet do historie geometrie 103

4 ZOBRAZENÍ 104

4.1 Shodné zobrazení v prostoru 104

4.2 Rovinová souměrnost 105

4.3 Středová a osová souměrnost 110

4.4 Otočení a posunutí 114

4.5 Skládání shodných zobrazení 116

4.6 Podobná zobrazení 120

4.7 Úlohy k opakování 121

Čtvrtý výlet do historie geometrie 122

5 TĚLESA 123

5.1 Mnohostěny 123

5.2 Rotační tělesa 134

5.3 Objem a povrch tělesa 149

5.4 Objem a povrch mnohostěnů 151

5.5 Objem a povrch rotačních těles 166

5.6 Úlohy k opakování 183

Pátý výlet do historie geometrie 189

VÝSLEDKY ÚLOH 190

Seznam používaných symbolů 218

Doporučená literatura 220

Rejstřík pojmů 221

PŘEDMLUVA

Vážení přátelé,

máte před sebou další z nové řady učebnic matematiky pro gymnázia – učebnici Stereometrie. Je určena sice pro gymnázia, ale může být použita při výuce stereometrie na kterékoli jiné střední škole.

Stereometrie je považována za jednu z nejobtížnějších částí školské matematiky. Základním problémem při studiu stereometrie bývá nedostatek prostorové představivosti, kterou je však možno zdokonalovat a rozvíjet. Především k tomu má sloužit tato učebnice. Nejenom technik potřebuje při své práci dobrou geometrickou představivost, potřebujeme ji všichni ke správnému vnímání světa kolem nás.

Řešení geometrických úloh usnadňují modely. Tradičním modelem částí přímek a rovin jsou tužky a listy papíru. Nebojte se však používat i „větší" modely, např. stěny místnosti. Modely běžných těles máte jistě ve škole, můžete si však drátěné či papírové modely zhotovit sami.

Geometrické představy znázorněné graficky jsou mnohdy lepším dorozumívacím prostředkem než slovní či symbolické zápisy. Zobrazovat prostorové útvary pomocí volného rovnoběžného promítání se naučíte v 1. kapitole. Od 2. kapitoly se začíná v učebnici systematicky probírat stereometrie. Při studiu učebnice se postupně seznámíte s polohovými a metrickými vlastnostmi přímek a rovin, poznáte základy zobrazení v prostoru. Poslední, 5. kapitola je věnována tělesům.

Tak, jak jste zvyklí z předcházejících učebnic gymnaziální řady, důležitá sdělení jsou v textu podložena, definice navíc zdůrazněny rámečkem. V jednotlivých článcích učebnice jsou jednak řešené úlohy, jednak problémové úlohy. Vyřešení problémů značených **?** není pro studium dalšího textu nutné, vede však k hlubšímu pochopení probírané látky. Za každým článkem a na konci každé kapitoly jsou zařazeny opakovací úlohy, obtížnější úlohy jsou označeny *. Jejich výsledky najdete na konci učebnice.

Učivo, označené následující značkou, je rozšiřující. Je určeno těm z vás, kteří se o matematiku zajímají. V seznamu literatury na konci učebnice jsou uvedeny doporučené obsáhlejší publikace, které jistě mají vaši učitelé matematiky nebo jsou ve školní knihovně.

Měli byste si občas udělat i „výlet" do historie geometrie. Historické poznámky jsou zařazeny vždy za každou kapitolou. V mnohých z vás možná vzbudí tyto historické poznámky zájem o starobylé matematické knihy a matematické pravdy v nich obsažené.

Součástí učebnice je přehled používaných symbolů a rejstřík pojmů.

1 ÚVOD

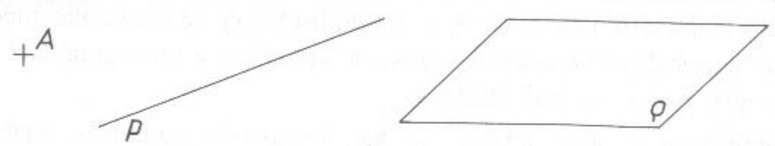
1.1 Stereometrie

V učebnici Planimetrie jsme se zabývali vlastnostmi rovinných útvarů. Jistě však znáte útvary, které do roviny umístit nelze, např. hranol, válec, jehlan, kužel. Takové **útvary** nazýváme **prostorové**. Studiem prostorových vztahů se zabývá část geometrie, která se nazývá **stereometrie**. Slovo stereometrie je řeckého původu a jeho volný překlad je „měření těles". Tento překlad ale nevystihuje obsah stereometrie, jen připomíná, že geometrické poznatky vznikaly v dávných dobách z potřeb praktického života.

Všechny geometrické útvary, se kterými jsme v planimetrii pracovali, ležely v jedné rovině. V **prostoru** máme rovin nekonečně mnoho. V planimetrii jsou základními geometrickými útvary **bod** a **přímka**. Ve stereometrii řadíme mezi základní geometrické útvary i **rovinu**. Pro body a přímky používáme stejné značení jako v planimetrii, roviny značíme malými písmeny řecké abecedy (α, β, ρ, σ, τ, ...).

Bod, přímka a rovina jsou útvary myšlené, vznikají v našem vědomí abstrakcí poznatků reálného světa: bod z drobných předmětů jako jsou zrnka písku, špička jehly, přímka z napjatých tenkých předmětů, jako jsou provazce, dráty, rovina z napjatých tenkých blán, vodní hladiny. Je nutné, abyste si vytvořili správné představy těchto pojmů. Jak říká Eukleides: „Bod je to, co nemá délku, šířku ani výšku, přímka má jen délku, rovina má jen délku a šířku."

Pro lepší pochopení prostorových vztahů je vhodné používat modely, které si snadno zhotovíte z dřevěných nebo plastelínových kuliček (body), špejlí, drátů (přímky), papíru (roviny). Rychlejší než modelování je grafické znázorňování. Body a přímky znázorňujeme stejně jako v planimetrii, roviny libovolným rovinným útvarem, nejčastěji rovnoběžníkem (obr. 1). Aby byl obraz co nejnázornější, znázorňujeme většinou útvar jako neprůhledný.



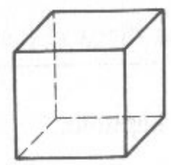
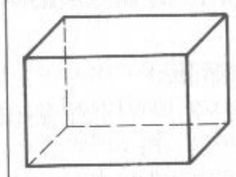
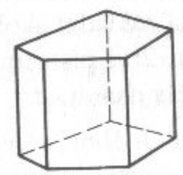
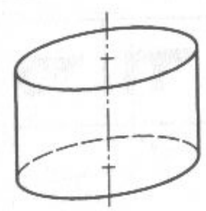
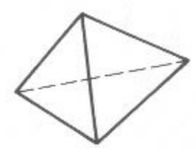
Obr. 1

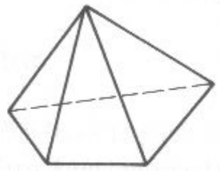
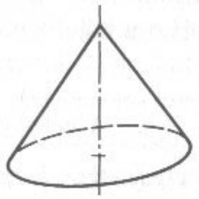
Přímka a rovina obsahují nekonečně mnoho bodů, jsou to neomezené útvary. Při modelování i grafickém znázorňování musíme stále pamatovat na to, že modelujeme či znázorňujeme vždy jen část přímky, popř. část roviny.

Uvažujeme-li pouze útvary, které leží v určité rovině v prostoru, můžeme využít všech dosavadních znalostí z planimetrie.

1.2 Tělesa

K modelování různých prostorových situací budeme potřebovat tělesa. Zpočátku vystačíme s těmi, která znáte ze základní školy. Připomeňme si v přehledu, která to jsou, a zopakujme si přitom jejich charakteristické vlastnosti.

Název	Obrázek	Charakteristika
Krychle		všechny stěny jsou shodné čtverce
Kvádr		protější stěny jsou shodné obdélníky, popř. čtverce
Hranol		podstavy jsou shodné mnohoúhelníky, boční stěny jsou rovnoběžníky, pravidelný n-boký hranol – podstavy jsou pravidelné n-úhelníky, boční stěny jsou shodné obdélníky, popř. čtverce
Rotační válec		vznikne rotací obdélníku, popř. čtverce kolem přímky, která obsahuje jeho jednu stranu
Čtyřstěn		všechny stěny jsou trojúhelníky, pravidelný čtyřstěn – všechny stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky

Název	Obrázek	Charakteristika
Jehlan		podstavou je mnohoúhelník, boční stěny jsou trojúhelníky, pravidelný n-boký jehlan – podstavou je pravidelný n-úhelník, boční stěny jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky
Rotační kužel		vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem přímky, která obsahuje jeho jednu odvěsnu

K tělesům se podrobněji vrátíme v 5. kapitole.

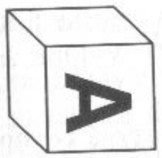
Úlohy

1.1 Charakterizujte pravidelný hranol (jehlan)
a) trojboký, b) čtyřboký, c) šestiboký.

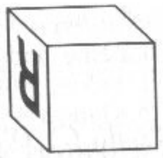
1.2 Rozdělte krychli na shodné jehlany.

1.3 Se sítěmi krychle jste se setkali již na základní škole. Na obr. 2a je síť „krychle s písmeny". Doplňte v obr. 2b-i písmena na prázdné stěny krychlí tak, aby doplněné krychle měly danou síť.

Obr. 2a

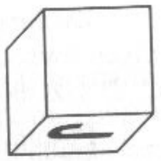


Obr. 2b

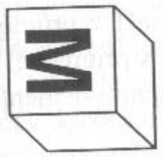


Obr. 2c

Obr. 2d

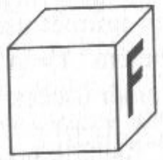


Obr. 2e

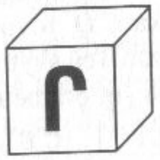


Obr. 2f

Obr. 2g



Obr. 2h



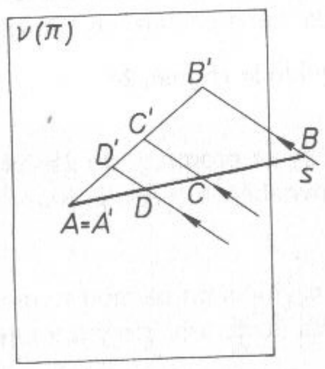
Obr. 2i

1.4 Zhotovte z drátů či špejlí modely krychle, kvádru, pravidelného čtyřstěnu.

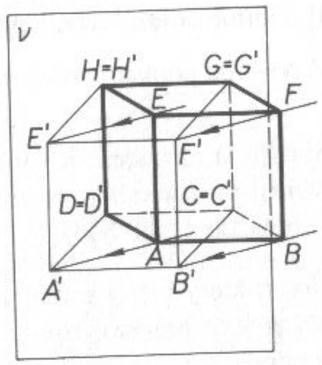
1.3 Volné rovnoběžné promítání

Zobrazovat prostorové útvary do roviny je možné různými způsoby a zabývá se tím **deskriptivní geometrie.** Při řešení jednodušších stereometrických úloh, zejména při zobrazování těles a jejich částí, používáme většinou zobrazení, které se nazývá **volné rovnoběžné promítání**.

Představme si, že $\nu(\pi)$ je svislá (vodorovná) rovina; modelem její části může být např. tabule (sešit). Vezměme špejli, která představuje úsečku s krajními body A, B, a podržme ji před tabulí (nad sešitem) tak, aby se o ni (něj) opírala v krajním bodě A (obr. 3). Veďme druhým krajním bodem B přímku s tak, aby protínala rovinu $\nu(\pi)$ v bodě B' ($B' \neq A$). Spojnice bodů A, B' v rovině $\nu(\pi)$ je úsečka AB'.



Obr. 3

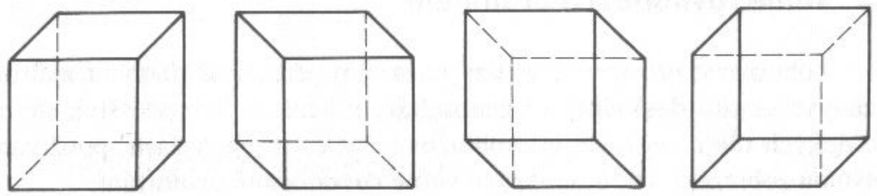


Obr. 4

Zvolíme-li na úsečce AB další body, např. C, D, a vedeme-li každým z nich rovnoběžku s přímkou BB', dostaneme body C', D'. Vidíme, že body C', D' leží na úsečce AB'.

Postup, kterým jsme určili body B', C', D', se nazývá **rovnoběžné promítání** ($BB' \parallel CC' \parallel DD'$). Rovina $\nu(\pi)$ se nazývá **průmětna**, přímka BB' určuje **směr promítání**. Bod B' se nazývá **rovnoběžný průmět bodu** B, úsečka $C'D'$ rovnoběžný průmět úsečky CD. Bod A, který leží v průmětně, je zároveň svým průmětem ($A = A'$). Každý útvar, který leží v průmětně, je také svým průmětem. Poměr úseček na téže přímce se promítáním nemění, např. $|A'C'| : |C'B'| = |AC| : |CB|$.

Vezměme nyní drátěný model krychle $ABCDEFGH$ a umístěme ho tak, aby stěna $DCGH$ ležela v průmětně ν (obr. 4). Vrcholem A veďme přímku tak, aby protínala průmětnu ν v bodě A', který neleží ani na přímce CD, ani na přímce DH. Promítněme pak všechny ostatní vrcholy krychle směrem určeným přímkou AA'. V průmětně dostaneme některý z obr. 5a, b, c, d. Je to rovnoběžný průmět krychle.



Obr. 5a Obr. 5b Obr. 5c Obr. 5d

Obr. 5a, b odpovídají pohledu na krychli shora dolu – krychle je zobrazena v **nadhledu** (obr. 5a **pravý nadhled**, tj. vidíme horní, pravou a přední stěnu, obr. 5b **levý nadhled**, tj. vidíme horní, levou a přední stěnu). Na obr. 5c, d je pohled na krychli zdola nahoru – krychle je zobrazena v **podhledu** (obr. 5c **pravý podhled**, tj. vidíme dolní, pravou a přední stěnu, obr. 5d **levý podhled,** tj. vidíme dolní, levou a přední stěnu).

Z postupu popisujícího zobrazení krychle je zřejmé, že:

Shodné a navzájem rovnoběžné úsečky se promítají do úseček, které jsou také shodné a navzájem rovnoběžné (nebo je průmětem každé z nich bod).

Útvar, který leží v průmětně nebo v rovině s průmětnou rovnoběžné (tzv. průčelné rovině), se promítá do útvaru, který je s ním shodný.

? V jakém případě je průmětem úsečky bod?

Obrazy útvarů můžeme kreslit přímo, aniž bychom je opravdu promítali, a to tak, že důsledně dodržujeme uvedená pravidla. Tento způsob zobrazení se nazývá **volné rovnoběžné promítání**, protože i při dodržování základních pravidel rovnoběžného promítání máme určitou volnost. Na obrázcích označení bodů a jejich průmětů (obrazů) většinou nerozlišujeme.

Tělesa zobrazujeme zpravidla tak, aby některá jejich část (hrana, stěna, ...) ležela v průčelné rovině. Úsečky kolmé k průmětně zobrazíme do úseček, které s obrazem vodorovných úseček svírají úhel 45° a jejich délka je polovina skutečné délky. Striktní dodržování úhlu 45° a zkrácení na polovinu však není nutné, důležité je, aby vzniklý obrázek byl jasný a srozumitelný. V souladu s technickou praxí budeme tělesa zobrazovat v nadhledu. V podhledu se zobrazují většinou jen stavební prvky – klenby, římsy, balkony.

Příklad 1

Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte

a) krychli s hranou délky $a = 4$ cm,

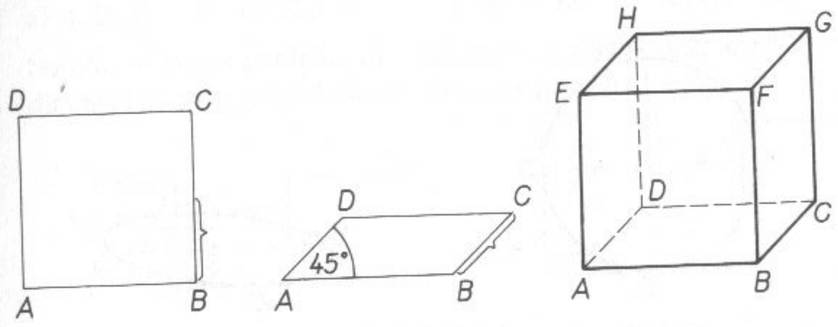
b) pravidelný čtyřstěn s hranou délky $a = 4$ cm,

c) pravidelný šestiboký jehlan s podstavnou hranou délky $a = 2{,}5$ cm a výškou $v = 3$ cm.

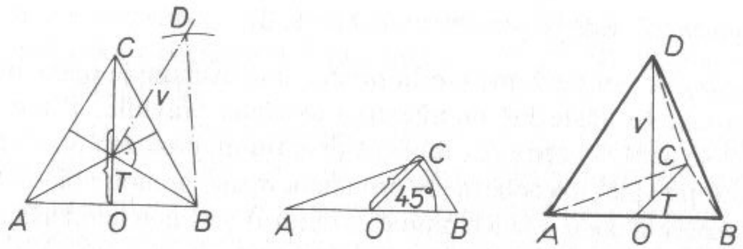
Uvažujte svislou průmětnu ν a tělesa zobrazte v tzv. **průčelné poloze**: jednu stěnu (a, b), či podstavu tělesa (c) umístěte do vodorovné roviny, další stěnu (a), výšku (b) či hranu (c) umístěte do průčelné roviny.

Řešení

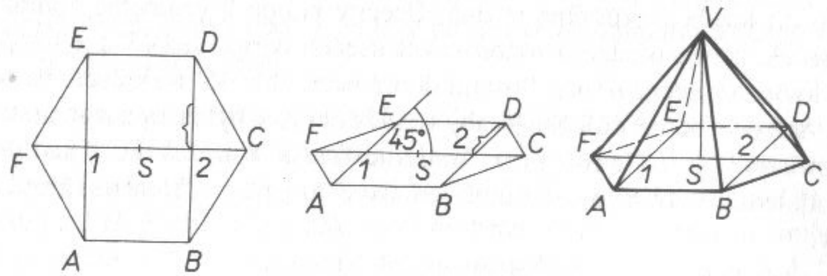
Na obrázcích 6a, b, c jsou zobrazeny po řadě podstava tělesa, volný rovnoběžný průmět podstavy a volný rovnoběžný průmět tělesa.



Obr. 6a



Obr. 6b



Obr. 6c

Příklad 2

Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte

a) kružnici s poloměrem $r = 2{,}5$ cm,

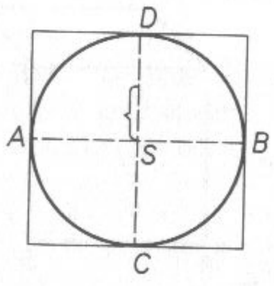
b) rotační válec s poloměrem podstavy $r = 2{,}5$ cm a výškou $v = 4{,}5$ cm,

c) rotační kužel s poloměrem podstavy $r = 2{,}5$ cm a výškou $v = 4{,}5$ cm.

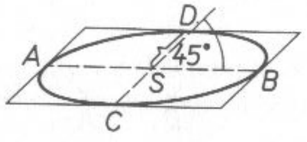
Pracujte se svislou průmětnou a kružnici (a), podstavu válce (b) i kužele (c) umístěte do vodorovné roviny.

Řešení

a) Obrazem kružnice k (obr. 7a) je v daném případě elipsa (obr. 7b). Elipsa je rovinná křivka, s níž se v matematice blíže seznámíte v analytické geometrii.

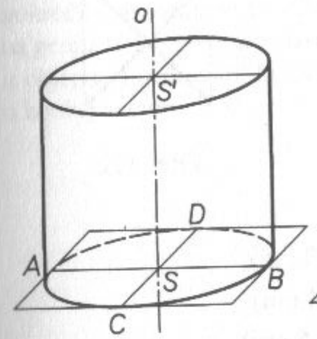


Obr. 7a

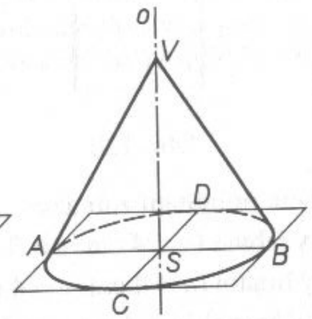


Obr. 7b

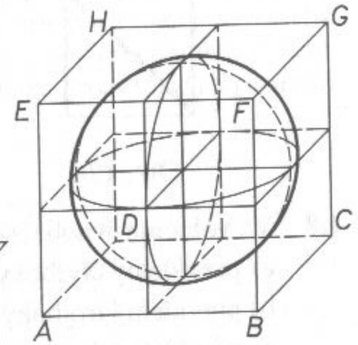
b) (obr. 8) Podstavnými hranami válce jsou shodné kružnice, které zobrazíme jako shodné elipsy. Obrys (tj. hranici obrazu) tvoří dvě poloviny elipsy a dvě shodné úsečky. Pokud zobrazujeme válec v nadhledu, je viditelná horní podstava.



Obr. 8



Obr. 9



Obr. 10

c) (obr. 9) Podstavnou hranou kužele je stejně jako u válce kružnice a jejím průmětem je elipsa. Obrys získáme pomocí tečen vedených k elipse z průmětu vrcholu. Je tvořen částí elipsy mezi body dotyku tečen a elipsy a dvěma úsečkami s jedním společným krajním bodem v průmětu vrcholu a dalšími krajními body v bodech dotyku. Při zobrazení kužele v nadhledu není viditelná jeho podstava.

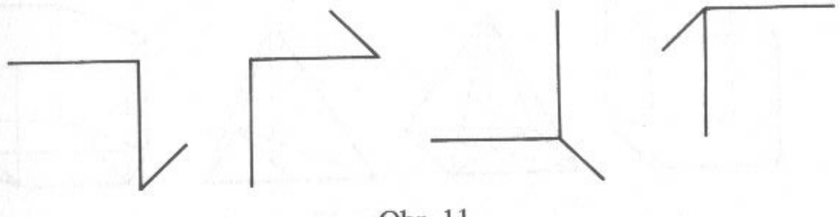
V této učebnici se seznámíte také s koulí. Obrysem koule ve volném rovnoběžném promítání je elipsa. Na obr. 10 je naznačeno zobrazení koule vepsané do krychle.

Úlohy

1.5 Sestrojte rovnoběžný průmět pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ se středem S, znáte-li rovnoběžné průměty bodů

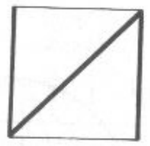
a) A, B, S, b) A, B, C, c) A, B, D, d) A, C, E.

1.6 Na obr. 11 jsou ve volném rovnoběžném promítání dány obrazy tří viditelných hran krychle. Určete obraz celé krychle.



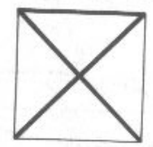
Obr. 11

1.7 Na skleněné krychli je nakreslena lomená čára. Na obrázku je pohled shora (obr. 12a), zepředu (obr. 12b) a z boku (obr. 12c). Načrtněte volný rovnoběžný průmět této krychle včetně lomené čáry.



Obr. 12a

Obr. 12b



Obr. 12c

1.8 Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte

a) pravidelný čtyřboký jehlan ($a = 4$ cm, $v = 5$ cm),

b) pravidelný trojboký hranol ($a = 4$ cm, $v = 4$ cm),

c) pravidelný šestiboký hranol ($a = 4$ cm, $v = 5$ cm).

Volte svislou průmětnu a tělesa zobrazte v průčelné poloze.

1.9 Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte

a) pravidelný pětiboký hranol ($a = 3$ cm, $v = 8$ cm),

b) válec ($r = 3$ cm, $v = 7$ cm),

s podstavou v průčelné rovině.

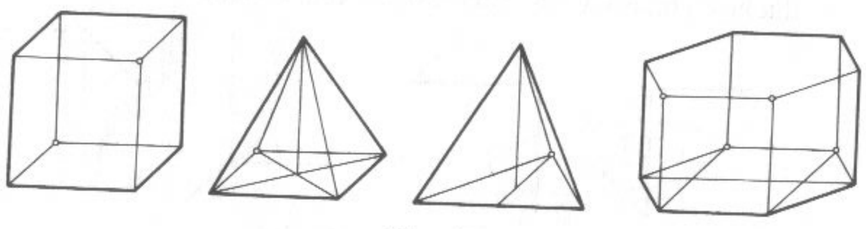
1.10 Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte krychli $ABCDEFGH$ s hranou délky $a = 6$ cm.

a) Vepište jí pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, kde V je střed stěny $EFGH$.

b) Vepište jí pravidelný čtyřstěn, jehož vrcholy jsou ve vrcholech krychle.

c) Vyjměte z krychle kvádr $ABKLA'B'K'L'$, kde K je střed hrany BC a bod A' je bodem hrany AE, přitom $|AA'| = \frac{3}{4}|AE|$.

1.11 Zhotovte si šablony pro rychlé náčrtky krychle, pravidelného čtyřbokého jehlanu, pravidelného čtyřstěnu a pravidelného šestibokého hranolu (obr. 13).



Obr. 13

První výlet do historie geometrie

První, **nejjednodušší stereometrické představy** vznikaly obdobně jako první planimetrické úvahy z praktických potřeb. Už v pozdní době ledové vyráběl člověk nástroje geometrických tvarů. Neolitické nálezy potvrzují, že geometrické představy pokročily se vznikem hrnčířství, tkalcovství, stavební techniky a umění. Velký vliv na geometrické představy mělo zemědělství, zejména tím, že si vynutilo měření ploch a objemů. Pozorování hvězdné oblohy přispělo ke vzniku geometrických poznatků o kouli.

2 POLOHOVÉ VLASTNOSTI

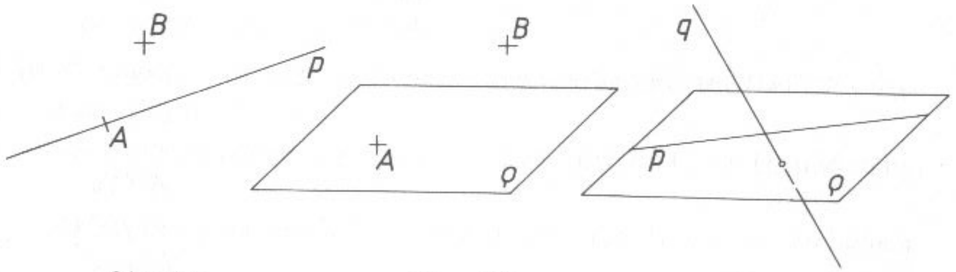
V této kapitole budeme studovat vzájemnou polohu bodů, přímek a rovin.

2.1 Základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami

Prostor se skládá z bodů, přímky a roviny jsou jeho podmnožiny.

Uvažujeme-li dvojice bod a přímka, bod a rovina, přímka a rovina, je možné, že bod **leží** (**neleží**) na přímce, bod leží (neleží) v rovině, přímka leží (neleží) v rovině. Říkáme také, že přímka **prochází** (**neprochází**) bodem, rovina prochází (neprochází) bodem a rovina prochází (neprochází) přímkou. Pro vyjádření těchto základních vztahů používáme někdy společný termín „**je (není) incidentní**": bod je (není) incidentní s přímkou, bod je (není) incidentní s rovinou, přímka je (není) incidentní s rovinou.

Pro symbolický zápis incidence používáme symboly $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, např. $A \in p$, $B \notin p$ (obr. 14a), $A \in \rho$, $B \notin \rho$ (obr. 14b), $p \subset \rho$, $q \not\subset \rho$ (obr. 14c).



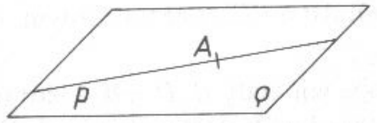
Obr. 14a Obr. 14b Obr. 14c

Pro body, přímky a roviny platí v prostoru jednoduché věty, jejich platnost je zřejmá z názoru.

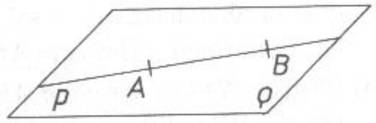
Jestliže bod A leží na přímce p a přímka p leží v rovině ρ, pak i bod A leží v rovině ρ (obr. 15).

Jestliže v rovině ρ leží dva různé body A, B, pak také přímka p, která těmito body prochází, leží v rovině ρ (obr. 16).

? Jak můžete v náčrtu krychle zvolit libovolný bod M, který leží např. v rovině stěny $BCGF$ a přitom neleží na hranách krychle?



Obr. 15



Obr. 16

Stejně jako v planimetrii platí:

Dvěma různými body prochází právě jedna přímka.

Říkáme také, že přímka je určena dvěma různými body. Přímku p určenou body A, B zapisujeme $p = \leftrightarrow AB$ a nazýváme přímka AB.

? Uveďte příklady „ze života", které potvrzují správnost věty o určenosti přímky.

Třemi různými body, které neleží v přímce, prochází právě jedna rovina.

Přímkou a bodem, který na přímce neleží, prochází právě jedna rovina.

Dvěma různoběžnými přímkami prochází právě jedna rovina.

Dvěma různými rovnoběžnými přímkami prochází právě jedna rovina.

Obdobně jako v případě přímky říkáme, že rovina je určena danými body či přímkami. Rovinu ρ určenou body A, B, C, resp. přímkou p a bodem A, resp. přímkami p, q zapisujeme $\rho = \leftrightarrow ABC$, resp. $\rho = \leftrightarrow Ap$, resp. $\rho = \leftrightarrow pq$ a nazýváme rovina ABC, resp. rovina Ap, resp. rovina pq.

? Proč se čtyřnohý stůl může kývat, ale trojnohý ne?

Příklad 1

Je dána krychle $ABCDEFGH$ (obr. 17)

a) Určete různým způsobem rovinu dolní stěny krychle.

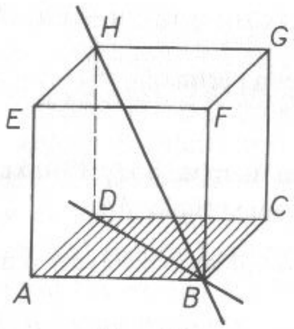
b) Rozhodněte, zda v této rovině leží přímky BD, BH.

Řešení

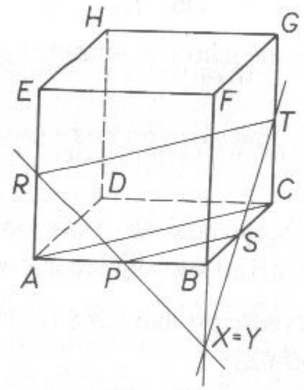
a) Rovina dolní stěny může být určena třemi různými body (např. A, B, C), přímkou a bodem, který na ní neleží (např. přímkou AC a bodem B),

dvěma různoběžkami (např. přímkami AB a BC), dvěma různými rovnoběžkami (např. přímkami AB a CD).

b) Přímka BD leží v rovině ABC, protože její body B, D leží v této rovině; přímka BH neleží v rovině ABC, protože bod H v této rovině neleží.



Obr. 17



Obr. 18

Příklad 2

Body P, R, S, T jsou po řadě středy hran AB, AE, BC, CG krychle $ABCDEFGH$ (obr. 18). Zjistěte, zda leží v téže rovině body a) P, R, S, T, b) A, C, E, F.

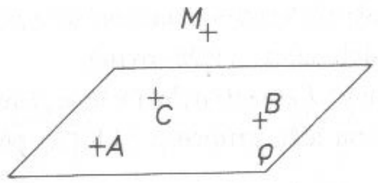
Řešení

a) Přímka PR leží v rovině přední stěny a protíná přímku BF v bodě X. Trojúhelníky PRA a PXB jsou shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky; proto $|BX| = \frac{1}{2}a$, kde a je délka hrany krychle. V rovině pravé boční stěny leží přímka ST a protíná přímku BF v bodě Y. Také trojúhelníky SYB a STC jsou shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky; proto také $|BY| = \frac{1}{2}a$. Tedy $X = Y$, přímky PR a ST jsou různoběžné a body P, R, S, T leží v téže rovině.

b) Body A, E, F určují rovinu přední stěny a bod C v této rovině neleží; proto body A, C, E, F neleží v téže rovině.

> Libovolná rovina rozděluje prostor na dva navzájem **opačné poloprostory** a je jejich společnou **hraniční rovinou**.

Hraniční rovina patří do obou poloprostorů. Každý bod prostoru, který neleží v hraniční rovině, je **vnitřním bodem** jednoho z obou poloprostorů. Poloprostor s hraniční rovinou ρ a vnitřním bodem M značíme $\mapsto\rho M$, je-li $\rho = \leftrightarrow ABC$, pak $\mapsto\rho M = \mapsto ABCM$ (obr. 19).



Obr. 19

Z planimetrie znáte pojem konvexní útvar. Tento pojem přeneseme i do stereometrie.

> Geometrický **útvar** se nazývá **konvexní**, jestliže úsečka spojující kterékoli dva body útvaru je částí tohoto útvaru.

Všechny útvary, které byly konvexní v planimetrii, např. přímka, polopřímka, úsečka, polorovina, kruh, jsou konvexní i ve stereometrii. Konvexním útvarem je každá rovina. Příkladem konvexního útvaru, který není rovinný, je poloprostor nebo vnitřek poloprostoru. Poznáme však ještě jiné důležité prostorové konvexní útvary.

? Dokažte, že poloprostor je konvexní útvar.

Úlohy

2.1 Je dána krychle $ABCDEFGH$.
a) Kolik různých přímek je určeno vrcholy A, C, E, F, H?
b) Kolik různých přímek je určeno všemi vrcholy krychle?
c) Kolik z nich prochází bodem B?

2.2 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zjistěte, zda v rovině BCE leží
a) body H, F, b) přímky CH, AC. Výsledek zapište symbolicky.

2.3 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Body P, R, S, T, U, V jsou po řadě středy hran AB, AE, BC, CG, EH, GH. Zjistěte, zda leží v jedné rovině body
a) A, C, U, V, b) C, R, U, V, c) C, E, P, V,
d) R, S, T, U, e) P, R, S, T, U, V.

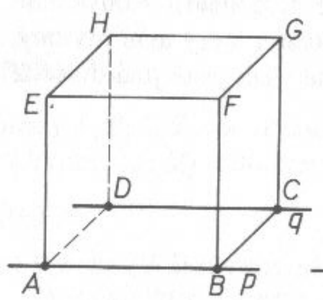
2.4 a) Kolika přímkami lze spojit šest různých bodů v prostoru, z nichž žádné tři neleží v téže přímce? Kolik těchto přímek prochází každým z těchto bodů?
* b) Kolika přímkami lze spojit těchto šest bodů, leží-li čtyři z nich v jedné přímce a žádné tři jiné na přímce neleží?

2.5 Kolik navzájem různých rovin je určeno šesti body, jestliže
a) žádné čtyři z nich neleží v téže rovině,
* b) čtyři body, z nichž žádné tři neleží v téže přímce, leží v jedné rovině,
* c) tři z nich leží na téže přímce a žádných pět z nich neleží v téže rovině?

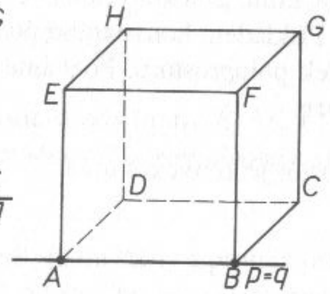
2.6 Jaké útvary může mít s poloprostorem společné
a) přímka, b) polopřímka, c) rovina, d) polorovina?

2.2 Vzájemná poloha dvou přímek

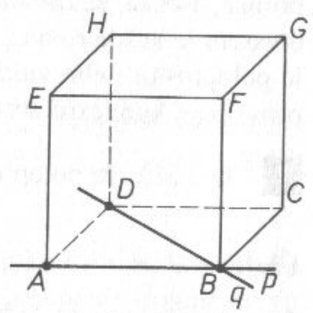
Prohlédněte si obr. 20a-e. V nich jsou vyznačeny na krychli *ABCDEFGH* přímky *p*, *q*. Určeme v jednotlivých případech počet společných bodů těchto přímek.



Obr. 20a



Obr. 20b



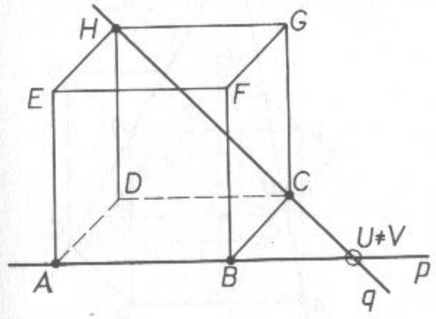
Obr. 20c

Na obr. 20a nemají přímky *p*, *q* žádný společný bod a leží v jedné rovině; jsou **rovnoběžné** (různé). Úsečky, které leží na rovnoběžných přímkách, nazýváme také rovnoběžné. Na obr. 20b mají přímky *p*, *q* všechny body společné; jsou **splývající (totožné)**. Na obr. 20c mají přímky *p*, *q* jeden společný bod *B* a leží v jedné rovině. Jsou **různoběžné**, jejich společný bod je jejich **průsečík**.

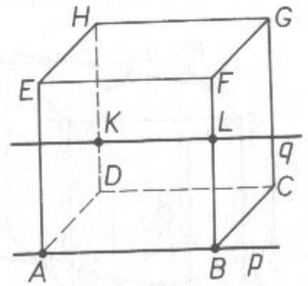
Jako v planimetrii zapisujeme rovnoběžnost přímek *p*, *q* $p \parallel q$, jejich totožnost $p = q$. Je-li *P* průsečík přímek *p*, *q*, píšeme $\{P\} = p \cap q$, popř. $P \in p \cap q$.

Uvedené tři případy vzájemné polohy přímek znáte již z planimetrie. V prostoru však mohou nastat také situace jako na obr. 20d, e: přímky *p*, *q* nemají žádný společný bod a neleží v jedné rovině. Takové přímky nazýváme **mimoběžné**. Přitom na obr. 20d se mimoběžky jeví jako různoběžky

(Pozor! $U \in p$, $V \in q$, bod *V* je „pod" bodem *U*), na obr. 20e jako rovnoběžky.



Obr. 20d



Obr. 20e

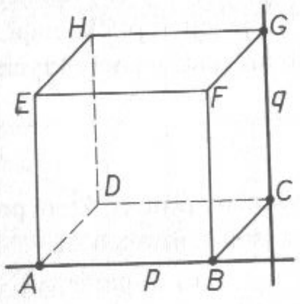
? Dvěma špejlemi si vymodelujte dvojice mimoběžných přímek a podívejte se na ně proti stěně. Vidíte je jako různoběžky? Porovnejte s obr. 20d. Můžete je natočit tak, aby se vám mimoběžky jevily jako rovnoběžky? Porovnejte s obr. 20e.

Příklad 1

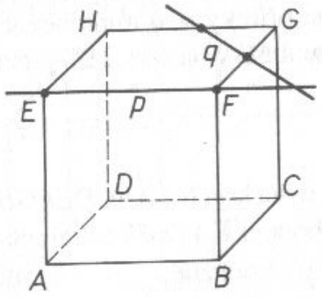
Určete vzájemnou polohu přímek vyznačených na obr. 21a-g. Jsou-li přímky rovnoběžné nebo různoběžné, určete rovinu, v níž přímky leží, pomocí vrcholů krychle. Jsou-li přímky mimoběžné, určete pomocí vrcholů krychle přímku, která obě přímky protíná (tzv. **příčku mimoběžek**).

Řešení

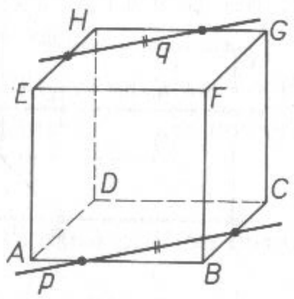
Na obr. 21c jsou přímky *p*, *q* rovnoběžné, neleží v žádné rovině, kterou bychom mohli určit pomocí vrcholů krychle.



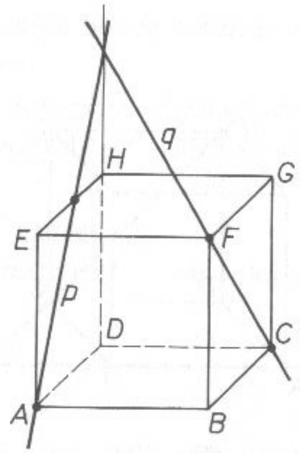
Obr. 21a



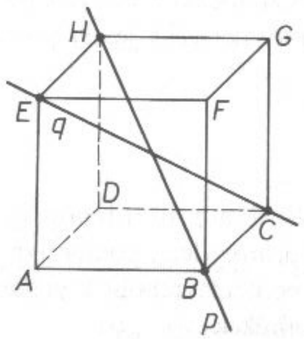
Obr. 21b



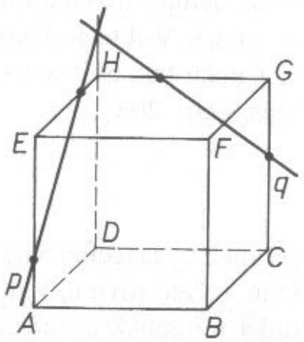
Obr. 21c



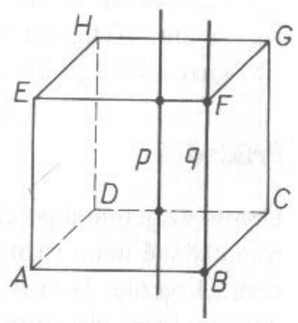
Obr. 21d



Obr. 21e



Obr. 21f



Obr. 21g

Na obr. 21b, e, f jsou přímky p, q různoběžné; přitom na obr. 21b leží v rovině EFG, na obr. 21e v rovině BCE, na obr. 21f neleží v žádné rovině, kterou bychom mohli určit pomocí vrcholů krychle. Na zbývajících obrázcích jsou přímky p, q mimoběžné; na obr. 21a je jejich příčka např. přímka BC, mimoběžky na obr. 21d, g nemají příčku určenou vrcholy krychle.

Úlohy

2.7 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Uveďte všechny přímky, které procházejí bodem E a dalším vrcholem krychle a jsou s přímkou BC

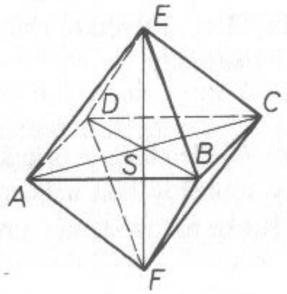
a) rovnoběžné, b) různoběžné, c) mimoběžné.

d) Najděte tři přímky určené vrcholy krychle, z nichž každé dvě jsou mimoběžné.

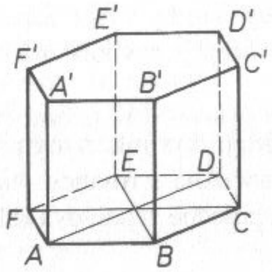
2.8 Uveďte aspoň dvě dvojice

a) rovnoběžných, b) různoběžných, c) mimoběžných přímek,

které obsahují hrany osmistěnu $ABCDEF$ (obr. 22).



Obr. 22



Obr. 23

2.9 Je dána krychle $ABCDEFGH$; body X, Y, Z jsou po řadě středy hran FB, FE, FG. Určete vzájemnou polohu přímek

a) XY, EZ, b) YZ, EH, c) XZ, AH.

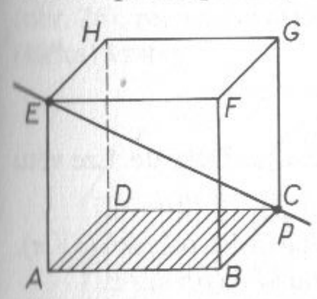
* **2.10** Je dána krychle $ABCDEFGH$, body L, M, N, P jsou po řadě středy hran AB, BF, EF, CD. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek

a) DM, NP, b) DL, GM, c) BN, CF.

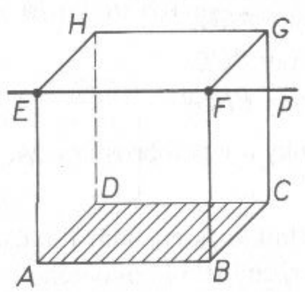
2.11 Je dán pravidelný šestiboký hranol s podstavami $ABCDEF$ a $A'B'C'D'E'F'$ (obr. 23). Určete aspoň tři dvojice mimoběžných přímek procházejících jeho vrcholy a pomocí vrcholů hranolu jejich příčku.

2.3 Vzájemná poloha přímky a roviny

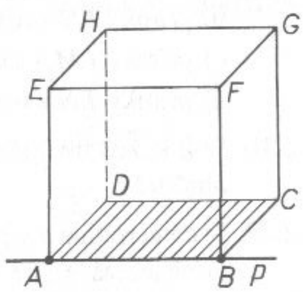
Začneme opět pozorováním. Na obr. 24 je dána krychle $ABCDEFGH$. Určeme počet společných bodů roviny ABC a přímky p.



Obr. 24a



Obr. 24b



Obr. 24c

Na obr. 24a má přímka p s rovinou ABC právě jeden společný bod (C): přímka p je různoběžná s rovinou ABC, společný bod je jejich **průsečík**. Na obr. 24b nemá přímka p s rovinou ABC žádný společný bod: přímka p je rovnoběžná s rovinou ABC. Na obr. 24c **přímka p leží v rovině** ABC, všechny body přímky p jsou zároveň body roviny ABC. I v tomto případě říkáme, že přímka p je rovnoběžná s rovinou ABC. Platí tedy:

Mají-li přímka s rovinou společný právě jeden bod, je přímka různoběžná s rovinou. Nemají-li žádný společný bod nebo mají-li společné aspoň dva různé body, je přímka rovnoběžná s rovinou.

Rovnoběžnost přímky p s rovinou ρ zapisujeme $p \parallel \rho$ nebo $\rho \parallel p$. Je-li P průsečík přímky p a roviny ρ, píšeme $p \cap \rho = \{P\}$, popř. $P \in p \cap \rho$.

Úlohy

2.12 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny přímky, které procházejí bodem H a některým dalším vrcholem krychle a s rovinou ABC jsou
a) rovnoběžné, b) různoběžné.

2.13 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny roviny, které procházejí bodem H a dalšími dvěma vrcholy krychle a jsou s přímkou BC
a) rovnoběžné, b) různoběžné.

2.14 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Najděte přímku, která prochází bodem B a dalším vrcholem krychle, je rovnoběžná s rovinou EFG a různoběžná s přímkou AD.

2.15 Je dána krychle $ABCDEFGH$; body K, L, M, N jsou po řadě středy stěn $ABCD$, $BCFG$, $EFGH$, $ADHE$. Jaká je vzájemná poloha
a) přímky KL a roviny CDH,
b) přímky LN a roviny ABG,
c) přímky LM a roviny BCE,
d) přímky KN a roviny EFG?

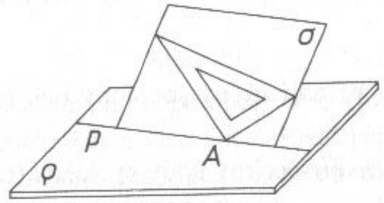
2.16 Je-li každý bod přímky a v poloprostoru ρA, je $a \parallel \rho$. Dokažte. Lze větu obrátit?

2.17 Je dána rovina π a přímka s, která udává směr slunečních paprsků ($s \nparallel \pi$). Popište, jak určíte vržený stín libovolného bodu M na rovinu π.

2.18 Je dána rovina π a bod S ($S \notin \pi$), který představuje světelný zdroj. Popište, jak určíte vržený stín libovolného bodu M na rovinu π.

2.4 Vzájemná poloha dvou rovin

Na obr. 25 představuje deska část roviny ρ, trojúhelníkové pravítko část roviny σ. Opřeme trojúhelníkové pravítko jedním vrcholem o desku. Máme tak znázorněny dvě různé roviny ρ a σ se společným bodem A. Položme na trojúhelník obdélníkový list papíru tak, aby se opíral jednou stranou o desku lavice. I obdélník představuje část roviny σ. Vidíme, že roviny ρ a σ mají společný nejen bod A, ale i celou přímku p, která bodem A prochází. Můžeme tedy vyslovit větu:



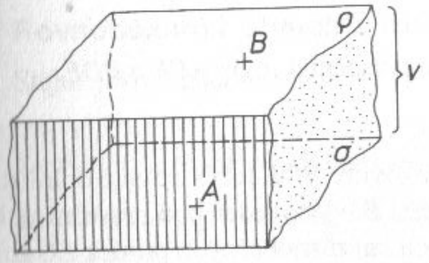
Obr. 25

Mají-li dvě různé roviny společný bod, pak mají společnou přímku, která tímto bodem prochází; kromě této přímky nemají žádný další společný bod.

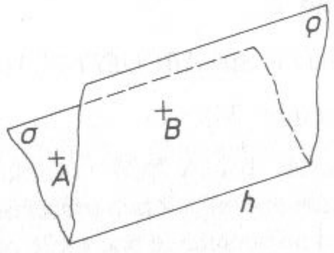
O dvou různých rovinách ρ a σ, které mají společnou přímku p, říkáme, že jsou **různoběžné**; přímka p je jejich **průsečnice**. Zapisujeme $p = \rho \cap \sigma$.

Nemají-li dvě roviny ρ a σ žádný společný bod, nazýváme je **rovnoběžné**; zapisujeme $\rho \parallel \sigma$. Dvě roviny ρ a σ, které mají všechny body společné, nazýváme **splývající (totožné)**; zapisujeme $\rho = \sigma$. Splývající roviny považujeme také za rovnoběžné.

Jsou-li roviny ρ a σ dvě rovnoběžné roviny, bod A je bod roviny σ, bod B je bod roviny ρ, pak průnik poloprostorů ρA a σB se nazývá **vrstva** (obr. 26); roviny ρ a σ jsou **hraniční roviny**, jejich vzdálenost v je **tloušťka (šířka) vrstvy**.



Obr. 26



Obr. 27

Jsou-li roviny ρ a σ různoběžné, jejich průsečnice je přímka h, bod A je bod roviny σ a bod B bod roviny ρ ($A \notin h$, $B \notin h$), pak průnik poloprostorů ρA a σB se nazývá **klín** (obr. 27). Přímka h je **hrana klínu**, poloroviny hA, hB jsou **stěny klínu**.

Příklad 1

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Rozhodněte o vzájemné poloze rovin

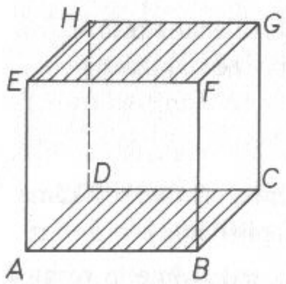
a) *ABC*, *EFH*, b) *ABC*, *BCD*, c) *ADH*, *BCE*.

Řešení

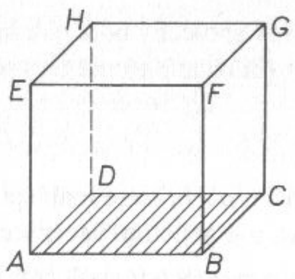
a) Roviny *ABC* a *EFH* nemají žádný společný bod (obr. 28a), jsou rovnoběžné různé.

b) Roviny *ABC* a *BCD* mají všechny body společné (obr. 28b), jsou totožné.

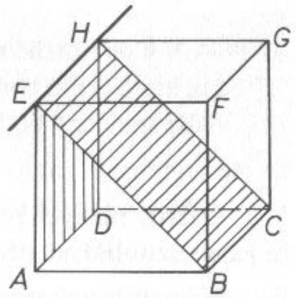
c) Roviny *ADH* a *BCE* jsou různoběžné, jejich průsečnice je přímka *EH* (obr. 28c).



Obr. 28a



Obr. 28b



Obr. 28c

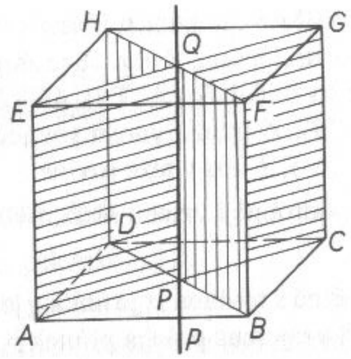
V případě různoběžných rovin ρ a σ je třeba umět sestrojit jejich průsečnici p. Znamená to najít její dva různé body. A jak? V rovině ρ najdeme přímku r a v rovině σ přímku s tak, aby přímky r, s byly různoběžné. Společný bod přímek r, s je jeden bod průsečnice. Stejným způsobem najdeme její další bod.

Příklad 2

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete průsečnici rovin *ACE* a *BDF*.

Řešení (obr. 29)

Přímka *AC* roviny *ACE* a přímka *BD* roviny *BDF* leží v rovině dolní stěny; jsou různoběžné a jejich průsečík je bod *P* – je to jeden bod průsečnice. Druhý bod průsečnice je bod *Q*. Je průsečíkem různoběžných přímek *EG* roviny *ACE* a *FH* roviny *BDF*.



Obr. 29

Přímku můžeme určit nejen pomocí dvou různých bodů, ale i jako průsečnici dvou různoběžných rovin. Toto určení přímky je běžné zejména v analytické geometrii, se kterou se budete v matematice seznamovat později.

Úlohy

2.19 Jaká je vzájemná poloha dvou rovin, jestliže mají společné

a) dva různé body, b) tři různé body neležící v přímce,

c) přímku a bod, d) dvě rovnoběžky?

2.20 Jsou dány dvě a) rovnoběžné, b) různoběžné roviny ρ a σ. V rovině ρ leží přímka p, v rovině σ přímka q. Jakou vzájemnou polohu mohou mít přímky p, q? Ověřte na krychli.

2.21 Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete všechny roviny, které procházejí bodem *H* a dalšími dvěma vrcholy krychle a jsou s rovinou *ABC*

a) rovnoběžné, b) různoběžné.

2.22 Je dána rovina π a přímka s, která určuje směr slunečních paprsků ($s \nparallel \pi$). Popište, jak určíte vržený stín libovolné přímky.

2.23 Je dána rovina π a bod S ($S \notin \pi$), který představuje světelný zdroj. Popište, jak určíte vržený stín libovolné přímky.

2.5 Rovnoběžnost přímek a rovin

Stejně jako v planimetrii platí:

Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou rovnoběžku.

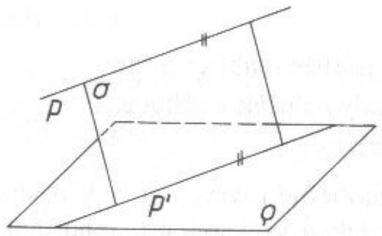
Rovnoběžnost přímek je vztah tranzitivní: je-li $p \parallel q$, $q \parallel r$, je také $p \parallel r$.

Vraťme se k příkladu 2a z článku 2.1. Tranzitivnost rovnoběžnosti přímek umožňuje jiné, jednodušší řešení. Z obr. 18 je zřejmé, že $RT \parallel AC$ (úsečky RT a AC jsou protější strany obdélníku $ACTR$), $AC \parallel PS$ (úsečka PS je střední příčka v trojúhelníku ACB). Z tranzitivnosti rovnoběžnosti plyne, že také $RT \parallel PS$, a proto body P, R, S, T leží v téže rovině.

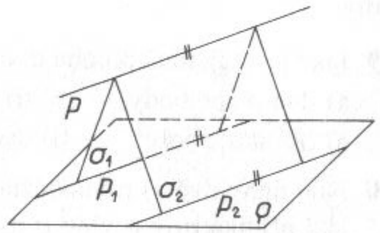
Všimněme si nyní podrobněji vztahů mezi rovinou a přímkou s ní rovnoběžnou.

? Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ, přímka q je libovolná přímka roviny ρ. Jaká může být vzájemná poloha přímek p a q?

Uvažujme nyní přímku p, která nemá s rovinou ρ žádný společný bod. Zvolme rovinu σ, která prochází přímkou p a je s rovinou ρ různoběžná (obr. 30a). Průsečnice roviny ρ a roviny σ je přímka $p' \parallel p$. Kdyby totiž byly přímky p a p' různoběžné, byl by jejich společný bod také společným bodem přímky p a roviny ρ. Přímka p a rovina ρ však žádný společný bod nemají.



Obr. 30a



Obr. 30b

Vedeme-li přímkou p různé roviny $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ různoběžné s rovinou r, jsou všechny průsečnice $p_1, p_2, \ldots$ navzájem rovnoběžné (obr. 30b). Je to důsledek tranzitivnosti rovnoběžnosti přímek.

Chceme-li zjistit, zda je přímka rovnoběžná s rovinou, použijeme **kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny:**

> Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ, jestliže v rovině ρ leží aspoň jedna přímka p', která je s přímkou p rovnoběžná.

Dokažme. Nechť je přímka p rovnoběžná s přímkou p', která leží v rovině ρ. Potom buď $p' = p$ a pak je $p \subset \rho$, nebo $p' \neq p$ a pak přímky p, p' určují rovinu σ, která protíná rovinu ρ v přímce p'. Všechny společné body rovin ρ a σ leží na přímce p'. Protože přímka p ($p \subset \sigma$) nemá s přímkou p' žádný společný bod, nemůže mít žádný společný bod ani s rovinou ρ; tedy $p \parallel \rho$.

Vrátíme-li se na začátek článku 2.3 k obr. 24b, můžeme snadno pomocí kritéria zdůvodnit rovnoběžnost přímky EF s rovinou ABC: $\leftrightarrow EF \parallel \leftrightarrow AB$, $\leftrightarrow AB \subset \leftrightarrow ABC$, proto $\leftrightarrow EF \parallel \leftrightarrow ABC$.

Je zřejmé, že pro libovolné přímky p, q a libovolnou rovinu ρ platí:

> Je-li $p \parallel q$, $q \parallel \rho$, pak také $p \parallel \rho$.

? Rozhodněte, zda také platí:

a) Je-li $p \parallel q$, $p \parallel \rho$, pak také $q \parallel \rho$.

b) Je-li $p \parallel q$, $q \nparallel \rho$, pak také $p \nparallel \rho$.

Chceme-li najít přímku, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s dvěma navzájem různoběžnými rovinami, použijeme větu:

> Je-li přímka rovnoběžná s dvěma různoběžnými rovinami, je rovnoběžná i s jejich průsečnicí.

Dokažme. Zvolme přímku p a dvě různoběžné roviny ρ a σ. Leží-li přímka p v jedné z obou rovin, je důkaz zřejmý z obr. 30a: přímka p leží v rovině σ, průsečnice rovin ρ, σ je přímka p', přitom $p' \parallel p$.

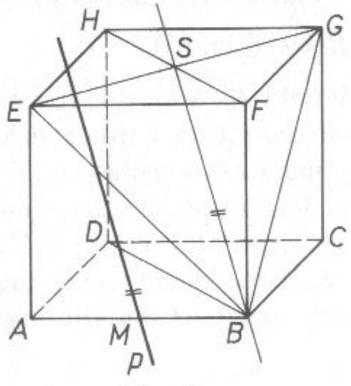
Pokud přímka p neleží v žádné z rovin ρ a σ, zvolme na jejich průsečnici q bod A. Bod A a přímka p určují rovinu τ. Průsečnice roviny τ s rovinami ρ a σ jsou přímky r a s. Protože $p \parallel \rho$ a $p \parallel \sigma$, je $r \parallel p$ a také $s \parallel p$. Bod A je společným bodem všech tří rovin ρ, σ, τ, a proto musí být $r = s = q$, a tedy také $q \parallel p$.

Příklad 1

Bod M je středem hrany AB krychle $ABCDEFGH$. Veďte bodem M přímku p rovnoběžnou s rovinami BEG a BDH.

Řešení (obr. 31)

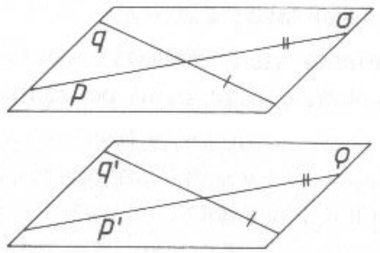
Průsečnicí rovin BEG a BDH je přímka BS ($S \in EG \cap HF$). Přímka p prochází bodem M a je rovnoběžná s přímkou BS.



Obr. 31

O tom, zda jsou rovnoběžné dvě roviny, se přesvědčujeme obvykle pomocí **kritéria rovnoběžnosti dvou rovin**.

Dvě roviny ρ a σ jsou rovnoběžné, jestliže v jedné z nich, např. σ, leží dvě různoběžné přímky p, q, které jsou rovnoběžné s rovinou ρ (obr. 32).



Obr. 32

Dokažme. Jestliže přímky p, q roviny σ leží zároveň v rovině ρ, je $\rho = \sigma$. Pokud přímky p, q neleží v rovině ρ, jsou roviny ρ a σ různé. Kdyby se protínaly v přímce r, musela by aspoň jedna z přímek p, q být s přímkou r různoběžná a pak by nemohla být rovnoběžná s rovinou ρ. Proto roviny ρ a σ nemají žádný společný bod, tedy $\rho \parallel \sigma$.

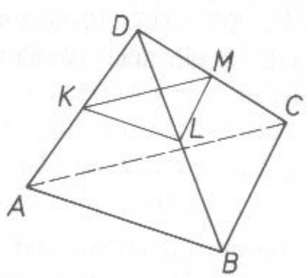
? Rovina σ obsahuje dvě různé rovnoběžné přímky p, q, které jsou rovnoběžné s rovinou ρ. Lze tvrdit, že $\rho \parallel \sigma$?

Příklad 2

Je dán čtyřstěn $ABCD$, body K, L, M jsou po řadě středy hran AD, BD, CD. Dokažte, že rovina KLM je rovnoběžná s rovinou ABC.

Řešení (obr. 33)

Přímky KL a AB jsou rovnoběžné (úsečka KL je střední příčka v trojúhelníku ABD), a proto je přímka KL rovnoběžná s rovinou ABC. Analogicky zdůvodníme, že i přímka ML je rovnoběžná s rovinou ABC. Přímky KL a ML jsou různoběžné. Podle kritéria rovnoběžnosti dvou rovin jsou tedy roviny KLM a ABC rovnoběžné.



Obr. 33

? Jak se zjišťuje pomocí libely, že je nějaká deska umístěna vodorovně? Zdůvodněte.

Pro rovnoběžné roviny platí obdobná věta jako pro rovnoběžné přímky:

Daným bodem lze vést k dané rovině jedinou rovinu s ní rovnoběžnou.

? Kolik různých rovnoběžných přímek s danou rovinou prochází bodem A? Co vytvoří všechny takové přímky?

Rovnoběžnost rovin je vztah tranzitivní: je-li $\rho \parallel \sigma$, $\sigma \parallel \tau$, pak také $\rho \parallel \tau$.

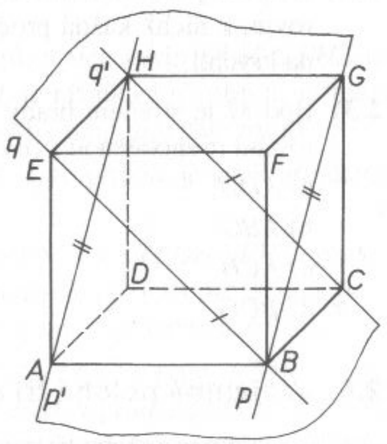
Kritéria rovnoběžnosti dvou rovin můžeme použít i při určování roviny, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s danou rovinou: V dané rovině zvolíme dvě různoběžky p, q a daným bodem vedeme přímky $p' \parallel p$ a $q' \parallel q$. Přímky p' a q' určují hledanou rovinu.

Příklad 3

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Bodem H veďte rovinu rovnoběžnou s rovinou BEG.

Řešení (obr. 34)

Snadno zdůvodníme, že hledanou rovinou je rovina ACH. Přímka AH je rovnoběžná s přímkou BG (čtyřúhelník $ABGH$ je obdélník a úsečky AH a BG jsou jeho protější strany), je tedy rovnoběžná s rovinou BEG. Obdobně je i přímka CH rovnoběžná s rovinou BEG, a proto rovina ACH je rovnoběžná s rovinou BEG.



Obr. 34

Úlohy

2.24 Zdůvodněte rovnoběžnost

a) přímky a roviny v úlohách 2.12a, 2.13a,

b) dvou rovin v úloze 2.21a,

c) rovin podstav pravidelného šestibokého hranolu.

2.25 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*, bod *M* je střed hrany *BV*. Dokažte, že přímka *VD* je rovnoběžná s rovinou *ACM*.

2.26 Je dána krychle *ABCDEFGH*, body *K*, *L*, *M*, *N* jsou po řadě středy hran *EF*, *BF*, *FG*, *DH*. Dokažte rovnoběžnost rovin

a) *KLM*, *BEG*,

b) *KLM*, *ACH*,

c) *ACN*, *ELG*.

2.27 Vrcholy *A*, *B* trojúhelníku *ABC* leží v rovině ρ, vrchol *C* v rovině ρ neleží.

a) Zjistěte, zda spojnice středů stran *AC* a *BC* je rovnoběžná s rovinou ρ.

b) Body *P*, *Q* leží po řadě na polopřímkách *CA*, *CB*, přitom $|CP| : |CA| = |CQ| : |CB|$. Je přímka *PQ* rovnoběžná s rovinou ρ?

2.28 Jsou dány dvě mimoběžky *p*, *q* a bod *A*. Dokažte, že existuje jediná rovina obsahující bod *A* rovnoběžná s přímkami *p* a *q*. Ověřte na krychli.

2.29 Jsou dány dvě mimoběžky *p*, *q*. Rozhodněte, zda existuje rovina obsahující přímku *p* rovnoběžná s přímkou *q*. Ověřte na krychli.

2.30 Jsou dány dvě mimoběžky *p*, *q*. Existuje jediná dvojice rovnoběžných rovin, z nichž každá prochází jednou z přímek *p*, *q*. Dokažte. Ověřte na krychli.

2.31 Bod *M* je středem hrany *BF* krychle *ABCDEFGH*. Veďte bodem *M* rovinu rovnoběžnou s rovinou

a) *ADH*,

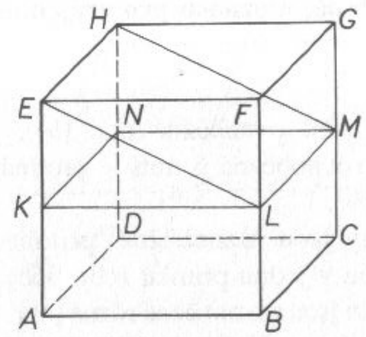
b) *ABC*,

c) *ACH*,

* d) *BDG*.

2.6 Vzájemná poloha tří rovin

Vzájemnou polohu tří rovin můžeme dobře sledovat na krychli, kvádru, hranolu či jehlanu.



Obr. 35

Příklad 1

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Body *K*, *L*, *M*, *N* jsou po řadě středy hran *AE*, *BF*, *CG*, *DH* (obr. 35). Určete průnik každých dvou z dané trojice rovin a potom průnik všech tří rovin:

a) $\leftrightarrow ABC$, $\leftrightarrow KLM$, $\leftrightarrow EFG$

b) $\leftrightarrow KLM$, $\leftrightarrow EFG$, $\leftrightarrow EHL$

c) $\leftrightarrow BCG$, $\leftrightarrow KLM$, $\leftrightarrow EHL$

d) $\leftrightarrow ADH$, $\leftrightarrow KLM$, $\leftrightarrow EHL$

e) $\leftrightarrow ADH$, $\leftrightarrow DCG$, $\leftrightarrow EHL$

Řešení

a) Každé dvě roviny mají prázdný průnik, všechny tři mají prázdný průnik – jsou navzájem rovnoběžné.

b) Roviny *KLM* a *EFG* jsou rovnoběžné. Průsečnice rovin *KLM* a *EHL* je přímka *LM*, průsečnice rovin *EFG* a *EHL* je přímka *EH*; přitom přímky *LM* a *EH* jsou rovnoběžné. Všechny tři roviny mají prázdný průnik.

c) Průnik každých dvou rovin je přímka *LM*. Tato přímka je také průnikem všech tří rovin.

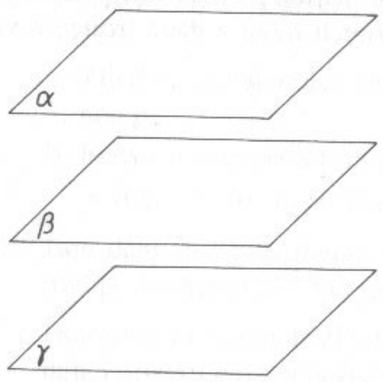
d) Roviny *ADH* a *KLM* mají společnou přímku *KN*, roviny *ADH* a *EHL* přímku *EH* a roviny *KLM* a *EHL* přímku *LM*; přitom všechny tři průsečnice jsou navzájem rovnoběžné. Průnikem všech tří rovin je prázdná množina.

e) Každé dvě roviny se protínají: roviny *ADH* a *DCG* v přímce *DH*, roviny *ADH* a *EHL* v přímce *EH* a roviny *DCG* a *EHL* v přímce *HM*. Společným bodem všech tří rovin je bod *H* a je také společným bodem všech tří průsečnic.

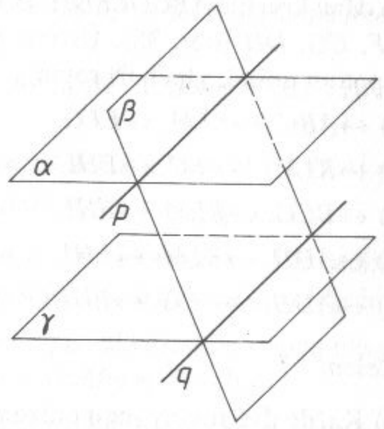
Příklad 1 ukazuje všech **pět možností pro vzájemnou polohu tří různých rovin**:

Každé dvě roviny jsou rovnoběžné (obr. 36a).
Dvě roviny jsou rovnoběžné a třetí je protíná v rovnoběžných přímkách (obr. 36b).
Každé dvě roviny jsou různoběžné; přitom buď všechny tři průsečnice splynou v jednu přímku (obr. 36c), nebo průsečnice každých dvou rovin jsou rovnoběžné různé (obr. 36d), nebo všechny tři průsečnice jsou různé a procházejí jediným společným bodem všech tří rovin (obr. 36e).

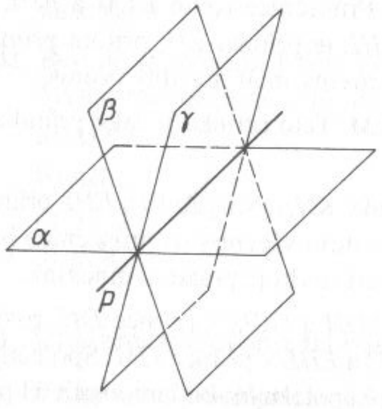
? Na stěnách, stropu, podlaze místnosti modelujte jednotlivé případy.



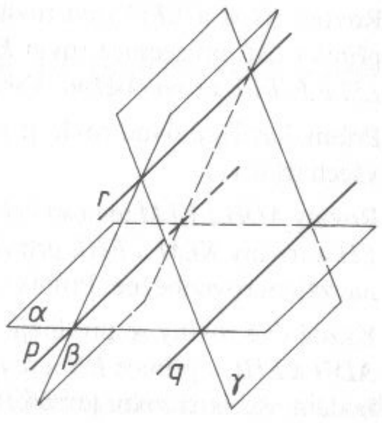
Obr. 36a



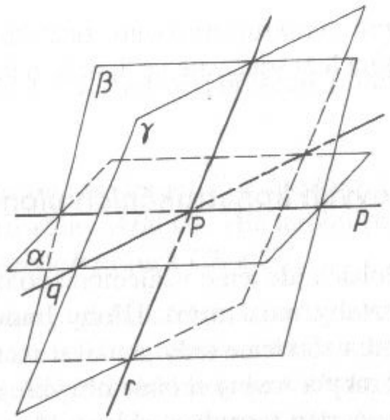
Obr. 36b



Obr. 36c



Obr. 36d

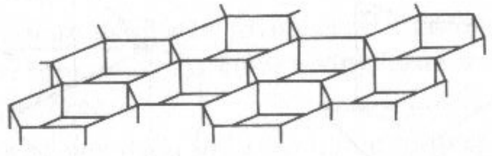


Obr. 36e

Jiná možnost pro vzájemnou polohu tří různých rovin není. Pro tři různé roviny α, β, γ nastane vždy právě jedna z možností: buď jsou všechny tři rovnoběžné, nebo jsou aspoň dvě různoběžné. Jsou-li dvě roviny, např. α, β, různoběžné, pak jejich průsečnice p může mít s třetí rovinou γ právě jednu ze tří možných poloh: p je rovnoběžná s rovinou γ a neleží v ní, p leží v rovině γ, p protíná rovinu γ. Je-li přímka p s rovinou γ rovnoběžná a neleží v ní, pak jsou buď roviny α a γ (popř. β a γ) rovnoběžné, nebo rovina γ protíná roviny α a β v přímkách q, r rovnoběžných s přímkou p. Leží-li přímka p v rovině γ, pak $\alpha \cap \beta \cap \gamma = p$. Protíná-li přímka p rovinu γ v bodě P, pak průsečnice dvojic rovin α, γ a β, γ procházejí bodem P.

Úlohy

2.32 Pozorujete-li několik sousedních včelích buněk v jejich charakteristickém seskupení (obr. 37), můžete pomocí rovin stěn těchto buněk ilustrovat všech pět možných vzájemných poloh tří rovin. Očíslujte jednotlivé stěny a proveďte.



Obr. 37

2.33 Body A, B, C, D jsou vrcholy čtyřstěnu. Body K, L, M jsou po řadě středy hran AD, BD, CD. Zjistěte vzájemnou polohu tří rovin:

a) $\leftrightarrow ABD$, $\leftrightarrow KLM$, $\leftrightarrow BCD$ b) $\leftrightarrow ABC$, $\leftrightarrow BKM$, $\leftrightarrow ACD$

c) $\leftrightarrow ABC$, $\leftrightarrow ABD$, $\leftrightarrow ABM$ d) $\leftrightarrow ABC$, $\leftrightarrow KLM$, $\leftrightarrow BCD$

* **2.34** Kolik poloprostorů vymezují tři roviny znázorněné na obrázku 36a-e? Najděte body, které leží současně ve 3, 4, 5, 6 těchto poloprostorech.

2.7 Řešení polohových konstrukčních úloh

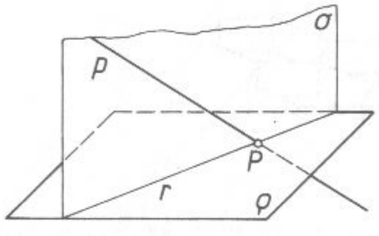
V polohových úlohách jde jen o vzájemnou polohu bodů, přímek a rovin, ne o metrické vztahy mezi nimi. Úlohy budeme řešit ve volném rovnoběžném promítání, nebudeme tedy používat metody deskriptivní geometrie. Dané body, přímky a roviny určíme obvykle pomocí jednoduchých geometrických těles, nejčastěji hranolů a jehlanů. Při řešení polohových úloh stačí znát jen tvar tělesa, nikoli jeho rozměry.

S některými jednoduchými konstrukčními úlohami jste se již setkali v předcházejících článcích – sestrojení **průsečnice dvou rovin** (str. 28), sestrojení **roviny**, která prochází **daným bodem a je rovnoběžná s danou rovinou** (str. 33), sestrojení **přímky**, která prochází **daným bodem a je rovnoběžná s dvěma danými** (různoběžnými) **rovinami** (str. 31).

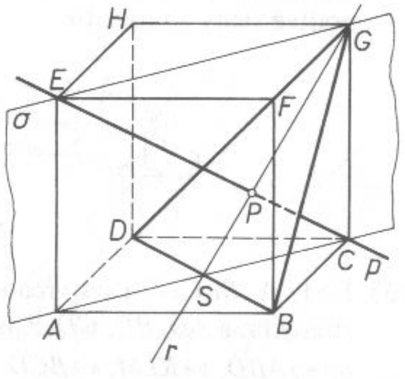
V dalších konstrukčních úlohách se zaměříme na sestrojení průsečíku přímky a roviny, řezu tělesa rovinou, průniku přímky s tělesem a příčky mimoběžek.

Průsečík přímky a roviny. Je-li přímka p různoběžná s rovinou ρ, pak jejich průsečík získáme takto (obr. 38):

1. Přímkou p proložíme vhodnou rovinu σ, která je s rovinou ρ různoběžná.
2. Určíme průsečnici r rovin σ a ρ.
3. Průsečík P přímek p a r je hledaný průsečík přímky p a roviny ρ.



Obr. 38



Obr. 39

Příklad 1

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečík přímky CE a roviny BDG.

Řešení (obr. 39)

Jako rovinu σ můžeme volit rovinu ACE. Průsečnice rovin BDG a σ je přímka GS (bod S je střed stěny $ABCD$). Hledaným průsečíkem přímky CE s rovinou BDG je průsečík P přímek CE a GS.

Řez tělesa rovinou je průnik tělesa a roviny. Je to rovinný útvar, jehož hranice je průnik hranice tělesa a roviny řezu. Hranice **řezu hranolu**, popř. **jehlanu** se skládá z průniků roviny řezu se stěnami hranolu, popř. jehlanu. Sestrojit řez rovinou tedy znamená sestrojit průsečnice dané roviny s rovinami jednotlivých stěn.

Pro konstrukci řezů jsou důležité zejména následující věty, přitom první z nich vlastně již znáte (str. 18):

V1: Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží také v této rovině (obr. 16).

V2: Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách (obr. 36b).

V3: Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto společným bodem všechny tři průsečnice (obr. 36e).

A jaké jsou důsledky těchto vět, které využíváme při konstrukci řezů?

D1: Leží-li dva různé body roviny řezu v rovině některé stěny, leží v rovině této stěny i jejich spojnice. Průnik spojnice a stěny je jednou stranou řezu.

D2: Jsou-li roviny dvou stěn rovnoběžné a přitom různoběžné s rovinou řezu, jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn rovnoběžné.

D3: Průsečnice rovin dvou sousedních stěn (tj. stěn se společnou hranou) s rovinou řezu a přímka, v níž leží společná hrana, se protínají v jednom bodě.

V jednoduchých případech, jako jsou v příkladu 1 řezy rovinami ACE a BDG, vystačíme s D1. Většinou však musíme použít i D2, popř. D3. Začněme krychlí.

Příklad 2

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou ρ určenou body

a) A, B, U; U je středem hrany CG,

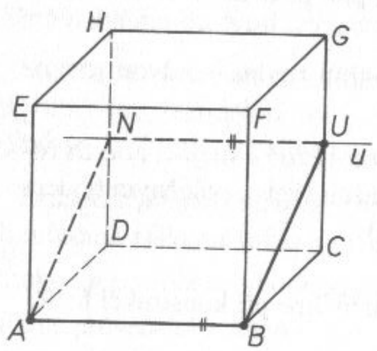
b) B, G, V; V je středem hrany AE,

c) X, Y, Z; X je bodem hrany AE, $|AX| : |XE| = 4 : 1$,
Y je bodem hrany BF, $|BY| : |YF| = 1 : 2$,
Z je bodem hrany CG, $|CZ| : |ZG| = 2 : 1$,

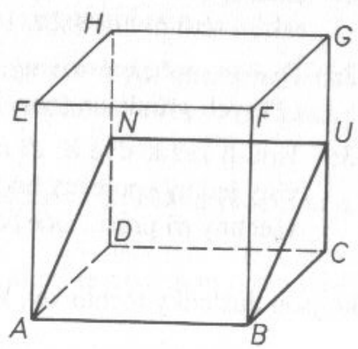
d) V, W, Z; W je středem hrany AB.

Řešení

a) (obr. 40) Průnikem roviny ρ a stěny *BCGF* je úsečka *BU* (D1). Roviny *ABF* a *DCG* jsou rovnoběžné, proto jejich průsečnice s rovinou ρ (přímky *AB* a u, $U \in u$) jsou rovnoběžné (D2). Přímka u protne hranu *DH* v bodě *N*. Úsečka *AN* je zbývající stranou řezu (D1). Řezem je čtyřúhelník *ABUN*.



Obr. 40a

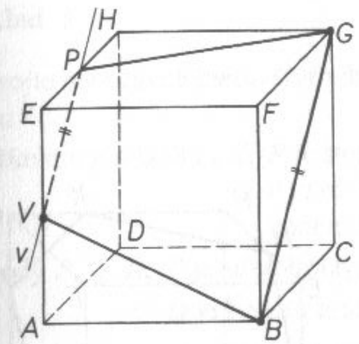


Obr. 40b

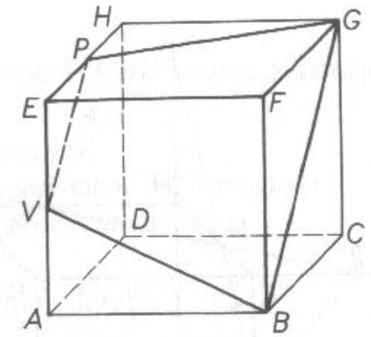
? Je čtyřúhelník *ABUN* rovnoběžník? Zdůvodněte.

Na obr. 40a jsou strany řezu ve viditelných stěnách krychle vyznačeny tlustě a v neviditelných stěnách čárkovaně. Někdy si představujeme, že jde o řez, kterým odřízneme část krychle. Viditelnost „dolní" části krychle je vyznačena na obr. 40b. (Podobně i na obr. 42b, 43b.)

b) (obr. 41) Průnikem roviny ρ a stěny *BCGF* je úsečka *BG*, průnikem roviny ρ a stěny *ABFE* je úsečka *BV* (D1). Roviny *ADH* a *BCG* jsou rovnoběžné, proto jejich průsečnice s rovinou ρ (přímky *BG* a v, $V \in v$) jsou rovnoběžné (D2). Přímka v protne hranu *EH* v bodě *P*; bod *P* je středem hrany *EH*. Úsečka *GP* je zbývající stranou řezu (D1). Řezem je čtyřúhelník *BGPV*. Viditelnost „horní" části krychle je na obr. 41b.



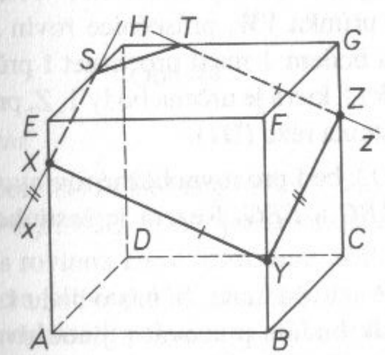
Obr. 41a



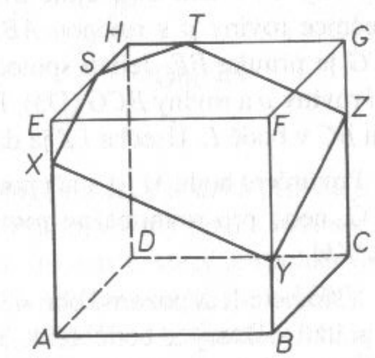
Obr. 41b

? O jaký čtyřúhelník jde?

c) (obr. 42) Průnikem roviny ρ a stěny *ABFE* je úsečka *XY*, průnikem roviny ρ a stěny *BCGF* je úsečka *YZ* (D1). Roviny *ABF* a *DCG* jsou rovnoběžné, proto jejich průsečnice s rovinou ρ (přímky *XY* a z, $Z \in z$) jsou rovnoběžné (D2). Přímka z protne hranu *GH* v bodě *T*. Také roviny *BCG* a *ADH* jsou rovnoběžné, a proto jejich průsečnice s rovinou ρ (přímky *YZ* a x, $X \in x$) jsou rovnoběžné (D2). Přímka x protne hranu *EH* v bodě *S*. Úsečka *ST* je zbývající stranou řezu (D1). Řezem je pětiúhelník *XYZTS*.

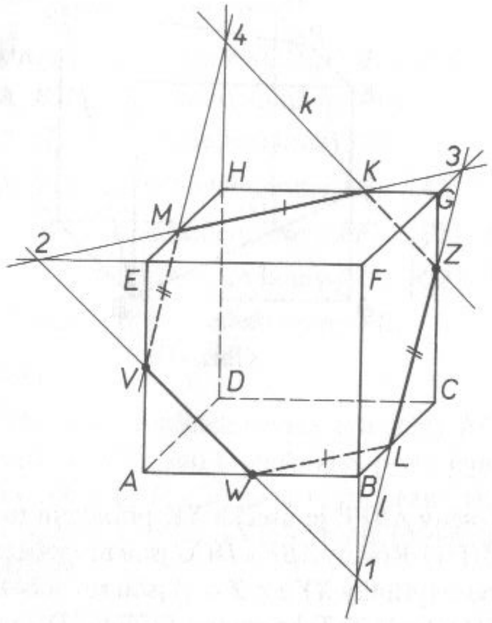


Obr. 42a

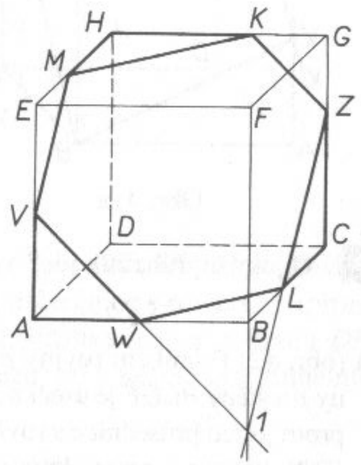


Obr. 42b

d) (obr. 43) Průnikem roviny ρ a stěny *ABFE* je úsečka *VW* (D1). Roviny *ABF* a *DCG* jsou rovnoběžné, proto jejich průsečnice s rovinou ρ (přímky *VW* a k, $Z \in k$) jsou rovnoběžné (D2). Přímka k protne hranu *HG* v bodě *K* a úsečka *ZK* je další stranou řezu (D1).



Obr. 43a



Obr. 43b

Chceme-li najít průnik roviny ρ např. se stěnou $BCGF$, nevystačíme již s důsledky D1 a D2. Uvažujme tři roviny: ρ a roviny stěn $BCGF$ a $ABFE$. Průsečnice roviny ρ s rovinou ABF je přímka VW, průsečnice rovin ABF a BCG je přímka BF. Jejich společným bodem 1 musí procházet i průsečnice l roviny ρ a roviny BCG (D3). Přímka l, která je určena body 1, Z, protne hranu BC v bodě L. Úsečka LZ je další strana řezu (D1).

Pro určení bodu M již stačí použít D2: buď pro rovnoběžné roviny ADH a BCG, nebo pro rovnoběžné roviny ABC a EFG. Řezem je šestiúhelník $VWLZKM$.

Všimnete-li si pozorně obr. 43, jistě si uvědomíte, že místo bodu 1 můžete použít některý z bodů 2, 4. To pak budete pracovat s jinou dvojicí sousedních stěn a vrcholy řezu získáte v jiném pořadí.

? Jaký geometrický útvar může být průnikem roviny a krychle?

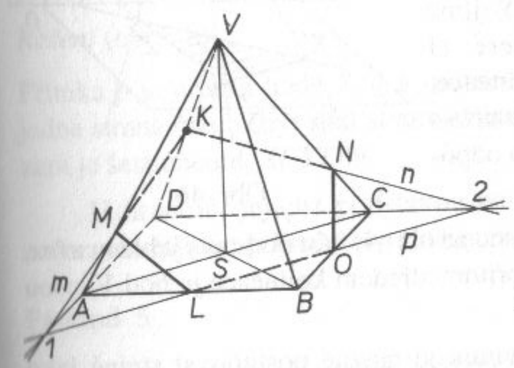
I u řezu roviny a jehlanu budeme hledat průsečnice roviny řezu s rovinami jednotlivých stěn. Je vhodné nejdříve určit průsečnici p roviny řezu a roviny podstavy (pokud není dána).

Příklad 3

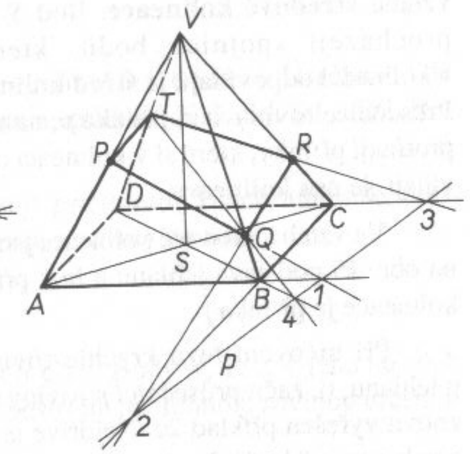
Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou ρ, která je určena:

a) přímkou p a bodem K; K je středem hrany DV,
p je rovnoběžná s přímkou AC a prochází bodem L, L je středem hrany AB,

b) body P, Q, R; P je střed hrany AV,
Q je bodem hrany BV, $|BQ| : |QV| = 1 : 5$,
R je bodem hrany CV, $|CR| : |RV| = 1 : 3$.



Obr. 44



Obr. 45

Řešení

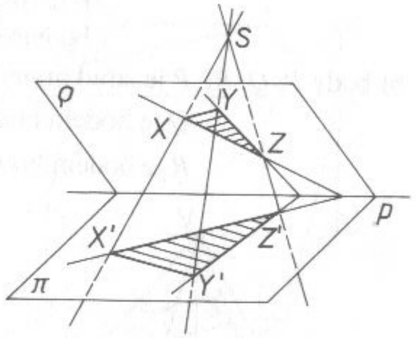
a) (obr. 44) Průsečnice roviny řezu a roviny podstavy je daná přímka p; je-li $O \in p \cap BC$, je LO jedna strana řezu. Průnik roviny řezu s rovinou ADV i s rovinou DCV sestrojíme užitím D3. Bodem 1, který je společným bodem přímek AD a p ($p = \rho \cap \leftrightarrow ABC$, $\leftrightarrow AD = \leftrightarrow ABC \cap \leftrightarrow ADV$), musí procházet i průsečnice m rovin ADV a ρ. Podobně bodem 2, který je společným bodem přímek DC a p ($p = \rho \cap \leftrightarrow ABC$, $\leftrightarrow DC = \leftrightarrow ABC \cap \cap \leftrightarrow DCV$), musí procházet průsečnice n rovin DCV a ρ.
Přímka m protne hranu AV v bodě M a přímka n hranu CV v bodě N. Úsečky ML, MK, KN, ON jsou zbývající strany řezu. Řezem je pětiúhelník $LONKM$.

? Jaká je poloha přímky MN vzhledem k rovině ABC? Zdůvodněte.

b) (obr. 45) Pomocí D3 sestrojíme nejdříve průsečnici p roviny řezu a roviny podstavy: bod 1 ($1 \in \leftrightarrow AB \cap \leftrightarrow PQ$) je společným bodem trojice rovin ρ,

ABC a *ABV*, bod 2 ($2 \in \leftrightarrow BC \cap \leftrightarrow QR$) je společným bodem trojice rovin ρ, *ABC* a *BCV*. Body 1, 2 určují přímku *p*. Zbývající vrchol řezu, bod *T* sestrojíme opět pomocí D3: bod 3, popř. 4 je společným bodem rovin ρ, *ABC* a *CDV*, popř. ρ, *ABC* a *BDV*. Řezem je čtyřúhelník *PQRT* (D1). Vyznačená viditelnost odpovídá odříznutí „horní" části jehlanu.

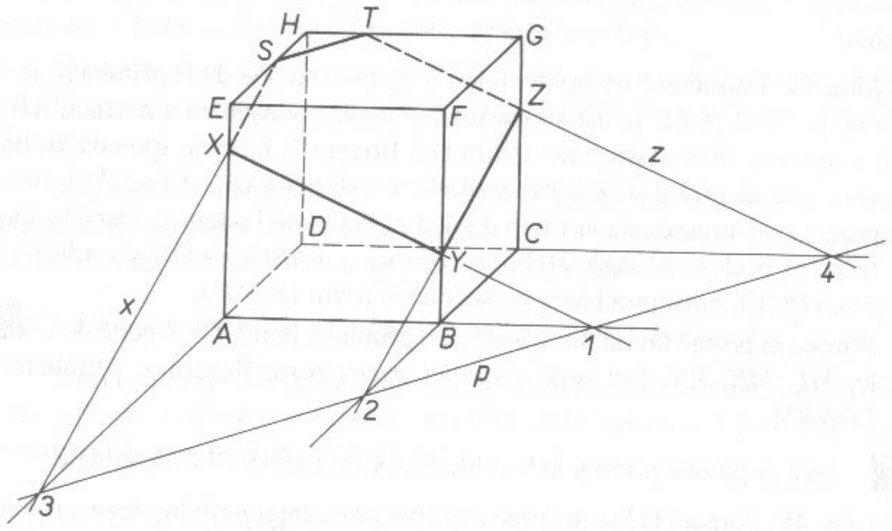
Na obr. 46 je dán bod *S* a různoběžné roviny ρ a π ($S \notin \rho$, $S \notin \pi$). Promítneme-li útvar $U \subset \rho$ (např. trojúhelník *XYZ*) ze středu *S* do roviny π, dostaneme útvar U' (trojúhelník *X'Y'Z'*). Útvary U a U' jsou ve vztahu **středové kolineace**. Bod *S*, jímž procházejí spojnice bodů, které si v kolineaci odpovídají, je **střed kolineace**. Průsečnice rovin ρ a π, přímka *p*, na níž se protínají přímky, které si v kolineaci odpovídají, je **osa kolineace**.



Obr. 46

Ve vztahu středové kolineace jsou na obr. 44 část podstavy jehlanu a řez, na obr. 45 podstava jehlanu a řez; přitom středem kolineace je bod *V*, osou kolineace je přímka *p*.

Při určování řezu krychle rovinou je možné postupovat stejně jako u jehlanu, tj. začít průsečnicí *p* roviny řezu a roviny dolní stěny. Na obr. 47 je znovu vyřešen příklad 2c. Nejdříve je sestrojena pomocí bodů 1, 2 přímka *p* a pak pomocí bodů 3 a 4 přímky *x* a *z*.



Obr. 47

? Srovnejte obě řešení příkladu 2c. Které je rychlejší?

Máme-li určit řez krychle rovinou určenou třemi body, z nichž žádné dva neleží v rovině stejné stěny, je vhodné začít přímkou *p*, tj. průsečnicí roviny řezu a roviny dolní stěny.

Příklad 4

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou *XYZ*, je-li bod *X* středem hrany *AD*, bod *Y* středem hrany *BF* a bod *Z* je bodem hrany *HG*, přitom $|HZ| : |ZG| = 1 : 3$.

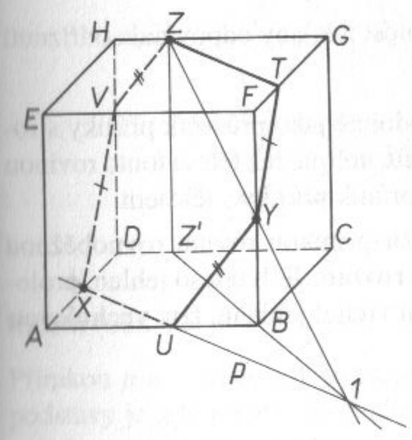
Řešení (obr. 48)

Přímka *p* je určena body *X*, 1 a protne hranu *AB* v bodě *U*. Úsečka *UY* je jedna strana řezu. Zbývající strany získáme aplikací důsledků D1 a D2. Řezem je šestiúhelník *XUYTZV*.

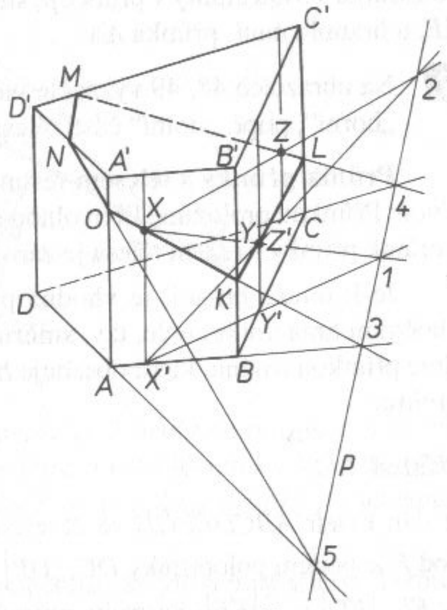
U hranolů, jejichž podstavou není pravidelný mnohoúhelník, také začneme většinou průsečnicí *p* roviny řezu a roviny podstavy.

Příklad 5

Je dán kolmý čtyřboký hranol *ABCDA'B'C'D'*. Body *X*, *Y*, *Z* v jeho stěnách jsou umístěny tak, jak ukazuje obr. 49. Sestrojte řez hranolu rovinou určenou body *X*, *Y*, *Z*.



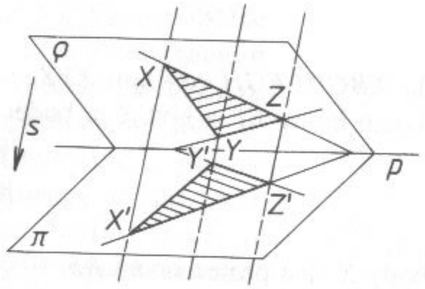
Obr. 48



Obr. 49

Řešení

Body X, Y, Z jsou vnitřní body stěn, proto jsou dány jako body úseček ležících v těchto stěnách. Průsečnici p roviny XYZ a roviny podstavy určíme pomocí bodů 1 a 2, při konstrukci řezu pak postupně pracujeme s body 3, 4, 5. Řezem je pětiúhelník $KLMNO$.



Obr. 50

Na obr. 50 jsou dány různoběžné roviny ρ a π a přímka s; ($s \nparallel \rho$, $s \nparallel \pi$). Jestliže promítneme útvar U (např. trojúhelník XYZ) ve směru s do roviny π, dostaneme útvar U′ (trojúhelník $X'Y'Z'$). Útvary U a U′ jsou ve vztahu **osové afinity**. Přímka s určuje **směr afinity**, průsečnice rovin ρ a π, přímka p, je **osa afinity**. Spojnice odpovídajících si bodů mají směr afinity, odpovídající si přímky se protínají na ose afinity.

Např. na obrázcích 47 a 49 je možné při konstrukcích řezu použít osovou afinitu s osou afinity v přímce p, směr afinity určuje u krychle např. přímka AE, u hranolu např. přímka AA'.

? Na obrázcích 48, 49 vyznačte viditelnost tak, aby odpovídala odříznutí „horní", popř. „dolní" části tělesa.

Průnik přímky s tělesem řešíme podobně jako průsečík přímky s rovinou: Přímkou proložíme libovolnou rovinu, určíme řez tělesa touto rovinou a průnik přímky s řezem tělesa je zároveň průnik přímky s tělesem.

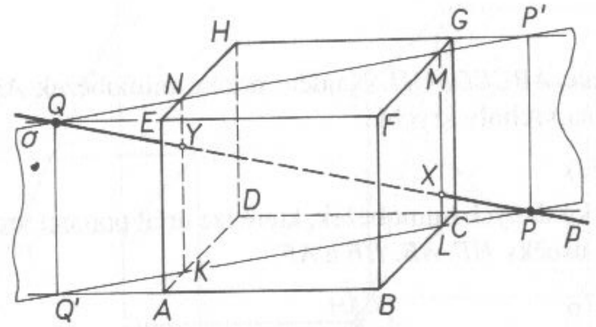
Je-li těleso hranol, je vhodné proložit přímkou rovinu rovnoběžnou s bočními hranami hranolu, tzv. **směrovou rovinu**. Je-li těleso jehlan, proložíme přímkou rovinu, která obsahuje hlavní vrchol jehlanu, tzv. **vrcholovou rovinu**.

Příklad 6

Je dán kvádr $ABCDEFGH$ se čtvercovou podstavou a přímka $p = \leftrightarrow PQ$. Bod P je bodem polopřímky DC, $|DP| = \frac{4}{3}|CD|$, bod Q je bodem polopřímky FE, $|FQ| = \frac{3}{2}|EF|$. Sestrojte průsečíky přímky p s povrchem kvádru.

Řešení (obr. 51)

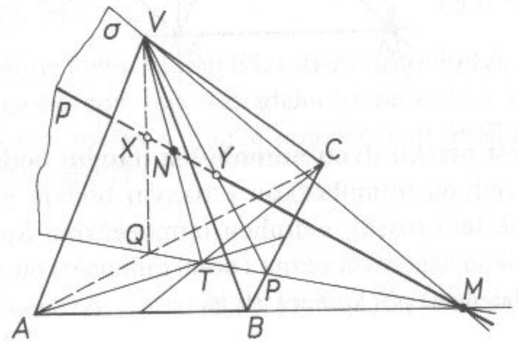
Přímkou p vedeme rovinu σ rovnoběžnou s přímkou AE. Přímka PQ' je průsečnicí roviny σ a roviny podstavy. Řez kvádru rovinou σ je obdélník $KLMN$. Hledané průsečíky jsou body X, Y. Průnikem přímky s kvádrem je úsečka XY.



Obr. 51

Příklad 7

Sestrojte průnik trojbokého jehlanu $ABCV$ a přímky $p = \leftrightarrow MN$. Bod M je bodem polopřímky AB tak, že $|AM| = 2|AB|$, bod N je středem úsečky TV, kde bod T je těžiště trojúhelníku ABC.



Obr. 52

Řešení (obr. 52)

Přímkou p a vrcholem V je určena rovina σ. Průsečnice roviny σ a roviny podstavy je přímka MT, řez jehlanu rovinou σ je trojúhelník PVQ. Průsečíky přímky p s povrchem jehlanu jsou body X, Y, průnikem přímky p s jehlanem je úsečka XY.

Při řešení příkladů 6 a 7 předpokládáme, že jde o plné těleso. Tomuto předpokladu odpovídá i vyznačená viditelnost.

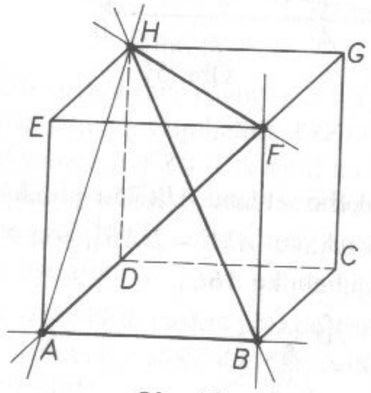
Příčka mimoběžek je přímka, která mimoběžky protíná. Někdy příčkou dvou mimoběžek rozumíme úsečku s krajními body na mimoběžkách. Dvě mimoběžné přímky mají nekonečně mnoho příček. Aby úloha sestrojit příčku mimoběžek měla konečný počet řešení, je třeba připojit další podmínku. Začněme jednoduchou úlohou.

Příklad 8

Je dána krychle *ABCEDFGH*. Najděte příčku mimoběžek *AH* a *BF*, která prochází dvěma vrcholy krychle.

Řešení (obr. 53)

Existují 4 příčky daných mimoběžek, které lze určit pomocí vrcholů krychle: přímky, popř. úsečky *HF*, *AB*, *HB* a *AF*.



Obr. 53

Máme-li vést **příčku dvou mimoběžek daným bodem**, můžeme postupovat takto: Jednou mimoběžkou a daným bodem proložíme rovinu a určíme průsečík této roviny s druhou mimoběžkou. Spojnice průsečíku a daného bodu, pokud není rovnoběžná s první mimoběžkou, je hledaná příčka. V případě rovnoběžnosti příčka neexistuje.

Příklad 9

Určete příčku mimoběžek z příkladu 8, která prochází

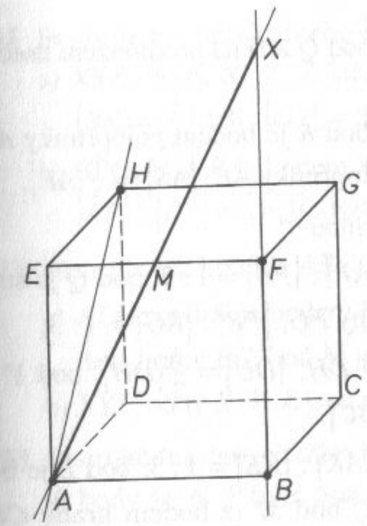
a) bodem *M*, bod *M* je středem hrany *EF*,

b) bodem *D*.

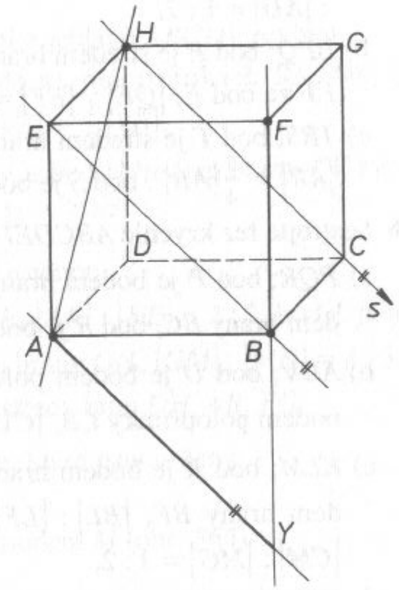
Řešení (obr. 54)

a) Rovina určená přímkou *BF* a bodem *M* je rovina stěny *ABFE*. Její průsečík s přímkou *AH* je bod *A*. Hledaná příčka je přímka *AM*, přímku *BF* protne v bodě *X*.

b) Rovina proložená přímkou *AH* a bodem *D* a přímka *BF* jsou rovnoběžné. Kdybychom proložili rovinu přímkou *BF* a bodem *D*, je průsečíkem proložené roviny a přímky *AH* bod *H*. Přímka *DH* je však s přímkou *BF* rovnoběžná. Bodem *D* tedy neprochází žádná příčka přímek *AH* a *BF*.



Obr. 54



Obr. 55

Obdobně řešíme úlohu vést **příčku dvou mimoběžek, která má daný směr**: jednou mimoběžkou vedeme rovinu rovnoběžnou s daným směrem a určíme průsečík této roviny s druhou mimoběžkou. Příčka je určena tímto průsečíkem a daným směrem.

Příklad 10

Určete příčku mimoběžek z příkladu 8, která je rovnoběžná s přímkou

a) *CH*, b) *BC*.

Řešení (obr. 55)

a) Rovina vedená přímkou *BF* tak, aby byla rovnoběžná s přímkou *CH*, je rovina stěny *ABFE*. S přímkou *AH* má společný bod *A*. Hledaná příčka prochází bodem *A* a je rovnoběžná s přímkou *CH*; přímku *BF* protne v bodě *Y*.

b) Příčka rovnoběžná s přímkou *BC* neexistuje, neboť rovina proložená např. přímkou *AH* tak, aby byla rovnoběžná s přímkou *BC*, je rovnoběžná s přímkou *BF*. (Je to rovina stěny *ADHE*.)

Úlohy

2.35 Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou

a) *MCH*; bod *M* leží na prodloužení úsečky *AD* za bod *A*, $|MA| : |AD| = 1 : 2$,

b) *BPQ*; bod *P* je středem hrany *FG*, bod *Q* leží na prodloužení úsečky *EF* za bod *E*, $|QE| : |EF| = 1 : 3$,

c) *TRS*; bod *T* je středem hrany *FG*, bod *R* je bodem polopřímky *AB*, $|AR| = \frac{5}{4}|AB|$, bod *S* je bodem polopřímky *AE*, $|AS| = \frac{3}{2}|AE|$.

2.36 Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou

a) *PQR*; bod *P* je bodem hrany *AB*, $|AP| : |PB| = 1 : 2$, bod *Q* je středem hrany *BC*, bod *R* je bodem hrany *FG*, $|FR| : |RG| = 1 : 3$,

b) *AUV*; bod *U* je bodem polopřímky *DH*, $|DU| = \frac{3}{2}|DH|$, bod *V* je bodem polopřímky *CB*, $|CV| = \frac{5}{4}|BC|$,

c) *KLM*; bod *K* je bodem hrany *AE*, $|AK| : |KE| = 1 : 3$, bod *L* je bodem hrany *BF*, $|BL| : |LF| = 4 : 1$, bod *M* je bodem hrany *CG*, $|CM| : |MG| = 1 : 2$,

d) *XYZ*; bod *X* je středem hrany *AB*, bod *Y* je bodem hrany *GH*, $|GY| : |YH| = 2 : 1$, bod *Z* je bodem přímky *CD* tak, že bod *D* je středem úsečky *CZ*.

2.37 Je dána krychle *ABCDEFGH* ($a = 4$ cm). Body *P* a *Q* jsou po řadě středy hran *BC* a *EH*. Sestrojte mnohoúhelník shodný s řezem krychle rovinou

a) *ACG*, b) *ACF*, c) *CGQ*, d) *ACQ*, * e) *APQ*.

2.38 Sestrojte řez kvádru *ABCDEFGH* rovinou, která prochází přímkou *BG* a je rovnoběžná s přímkou

a) *CH*, b) *CP*, c) *CQ*.

Přitom body *P*, *Q* jsou po řadě vnitřní body hran *AD* a *EH*.

2.39 Sestrojte řez trojbokého hranolu *ABCA'B'C'* rovinou, která je

a) rovnoběžná s rovinou *ABC* a prochází daným vnitřním bodem *X* hrany *BB'*,

b) rovnoběžná s rovinou *ACC'* a prochází daným vnitřním bodem *Y* podstavy *ABC*,

c) rovnoběžná s rovinou *ABC'* a prochází daným vnitřním bodem *Z* trojúhelníku *AA'C'*.

2.40 Body *K*, *L*, *M*, *N* jsou po řadě středy hran *AB*, *AD*, *AE*, *GH* krychle *ABCDEFGH*. Bod *P* je bodem hrany *BC*, $|BP| : |PC| = 1 : 2$. Sestrojte řez krychle rovinami

a) *HKP*, b) *LMN*, c) *KLN*.

* **2.41** Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* rovinou

a) *XYZ*; body *X*, *Y*, *Z* leží po řadě na polopřímkách *BA*, *DA*, *VB*, $|BX| = \frac{3}{2}|AB|$, $|DY| = 2|AD|$, $|VZ| = \frac{1}{2}|VB|$,

b) *BPQ*; bod *P* je bodem hrany *AV* a bod *Q* bodem hrany *CV* tak, že $|AP| : |PV| = |VQ| : |QC| = 2 : 1$.

* **2.42** Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou

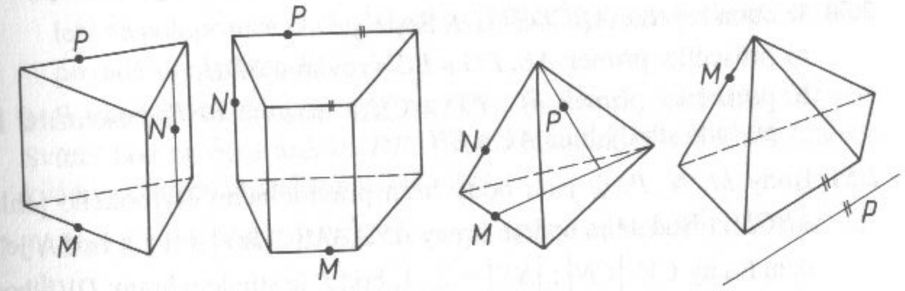
a) *KLM*; bod *K* je bodem hrany *AE*, $|AK| : |KE| = 1 : 2$, bod *L* je středem hrany *BC*, bod *M* je bodem hrany *GH*, $|GM| : |MH| = 1 : 3$,

b) *XYZ*; body *X*, *Y*, *Z* jsou po řadě středy hran *DH*, *AB*, *FG*.

* **2.43** Sestrojte řez daných těles rovinami, které jsou určeny

a) body *M*, *N*, *P* (obr. 56a, b, c),

b) přímkou *p* v rovině podstavy a bodem *M* (obr. 56d).



Obr. 56a Obr. 56b Obr. 56c Obr. 56d

2.44 Je dána krychle *ABCDEFGH*. Sestrojte průsečnici rovin

a) *ACG*, *AFH*,

b) *ACF*, *BEG*,

c) *BCG*, *AEO*; bod *O* je středem stěny *BCGF*,

d) *ABM*, *CDM*; bod *M* je středem hrany *FG*,

e) *ACE*, *BHP*; bod *P* je středem hrany *FG*,

* f) *RST*, *XYZ*; body *S*, *Z*, *T* jsou po řadě středy úseček *AB*, *CG*, *CZ* a body *X*, *Y*, *R* leží po řadě na hranách *AB*, *AE*, *EF*, $|AX| : |XB| = |AY| : |YE| = |FR| : |RE| = 2 : 1$.

2.45 Je dán čtyřstěn $ABCD$. Sestrojte průsečnici rovin
a) AXD, CYD; bod X je středem hrany BC a bod Y je středem hrany AB,
b) ABC, EFG; body E, F, G leží po řadě na hranách AB, AD a CD, $|AE| : |EB| = |DF| : |FA| = |CG| : |GD| = 1 : 2$.

2.46 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Body M, N jsou po řadě středy hran BV a CV. Sestrojte průsečnici rovin
a) ACV, BDN, b) ABN, CDM.

2.47 Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Body M, N, P leží po řadě na hranách AA', BB', CC', $|AM| = \frac{3}{4}|AA'|$, $|BN| = \frac{1}{3}|BB'|$, $|CP| = \frac{2}{3}|CC'|$. Sestrojte průsečnici rovin
a) ABB', EFF', b) $A'B'C'$, MNP.

* **2.48** V rovině ρ leží různoběžník $ABCD$. Bodem A prochází přímka $p \not\subset \rho$, bodem C přímka $q \parallel p$. Určete průsečnici r rovin $\alpha = \leftrightarrow Dp$ a $\beta = \leftrightarrow Bq$. Dokažte, že $r \parallel p \parallel q$.

* **2.49** Body K, L jsou po řadě středy hran AB a CG kvádru $ABCDEFGH$, body U, V leží na jeho hranách BF a CG, $|BU| : |UF| = |GV| : |VC| = 3 : 1$. Najděte společný bod tří rovin: roviny stěny $ADHE$ a rovin EKL a DUV.

2.50 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte
a) průsečíky přímek AE, EG a EC s rovinou BDH,
b) průsečíky přímek FC, FD a CQ s rovinou BHP; body P, Q jsou po řadě středy hran AE a EH.

2.51 Body M, N, P, Q jsou body hran pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$. Bod M je bodem hrany AV, $|AM| : |MV| = 1 : 3$, bod N je bodem hrany CV, $|CN| : |NV| = 2 : 1$, bod P je středem hrany DV a bod Q je bodem polopřímky AB, $|AQ| = \frac{5}{4}|AB|$. Sestrojte průsečík
a) přímky MN s rovinou ABC,
b) přímky BP s rovinou ACV,
* c) přímky PQ s rovinou BCV,
* d) přímky AN s rovinou ρ, která prochází vrcholem V a je rovnoběžná s rovinou ABC.

2.52 Je dán čtyřstěn $ABCD$. Bod M je středem hrany CD, bod P je středem hrany BD a bod N je vnitřním bodem stěny ABC. Sestrojte průsečík přímky DN s rovinou
a) ABM,
* b) ρ, která je rovnoběžná s rovinou ABC a prochází bodem P.

2.53 Sestrojte průnik přímky p s kvádrem $ABCDEFGH$ ($|AB| = 5$ cm, $|BC| = 3$ cm, $|AE| = 4$ cm) a konstrukčně určete jeho skutečnou velikost, je-li
a) $p = \leftrightarrow MN$; bod M je bodem polopřímky GH, $|MG| = \frac{4}{3}|GH|$ a bod N bodem polopřímky FB, $|NF| = \frac{3}{2}|BF|$,
b) $p = \leftrightarrow PS$; bod P leží na polopřímce BC tak, že bod C je středem úsečky BP a bod S je středem kvádru.

2.54 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, bod S je středem jeho podstavy. Bod M je bodem polopřímky BA, $|BM| = \frac{3}{2}|AB|$, bod N je středem úsečky SV a bod P leží na úsečce OV, kde bod O je středem úsečky DS. Sestrojte průnik přímky
a) MN, b) MP s jehlanem.

* **2.55** Stěna $ABCD$ krychle $ABCDEFGH$ je podstavou čtyřbokého jehlanu, jeho hlavním vrcholem je vrchol H krychle. Sestrojte průnik přímky p s jehlanem, je-li
a) $p = \leftrightarrow MN$; bod M je středem hrany AE a bod N je středem hrany CG,
b) $p = \leftrightarrow PQ$; bod P leží na polopřímce HG, $|HP| = 2|HG|$ a bod Q leží na polopřímce O_1O_2, $|O_1Q| = 2|O_1O_2|$; přitom body O_1, O_2 jsou po řadě středy hran BC a AD.

* **2.56** Místnost má tvar kvádru $ABCDEFGH$, bod O je střed stěny $BCGF$. Svítící bod probíhá úsečku DF. Určete množinu všech bodů hranice kvádru, kterými prošel stín úsečky AO.

2.57 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte příčku mimoběžek EF a AC tak, aby
a) procházela dvěma vrcholy krychle,
b) ležela v rovině BDF.

* **2.58** Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, bod S je střed jeho podstavy. Sestrojte příčku mimoběžek AB a CV tak, aby obsahovala
a) střed M hrany BV,
b) střed N úsečky SV,
c) bod P; bod P je bodem přímky SV tak, že bod S je středem úsečky PV.

* **2.59** Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Sestrojte příčku mimoběžek BC a $A'F'$ tak, aby byla rovnoběžná s přímkou
a) AA', b) DE, c) BE', d) $B'C$.

2.8 Úlohy k opakování

2.60 Je dán trojboký hranol $ABCA'B'C'$. Body K, L, M, N, O jsou po řadě středy hran AB, BC, AA', BB', CC'. Určete a symbolicky zapište vzájemnou polohu, popř. průnik následujících útvarů:

a) bodu O a přímky KM,

b) bodu M a poloroviny opačné k polorovině $A'BB'$,

c) bodu L a poloprostoru $MKCC'$,

d) přímek KM a LO,

e) přímky LN a roviny ABC,

f) přímky KL a roviny ACC',

g) rovin ABC a $A'NO$,

h) rovin MNO a $A'B'C'$.

2.61 a) Kolik různých přímek určují vrcholy B, D, E, G krychle $ABCDEFGH$?

b) Kolik je mezi nimi dvojic rovnoběžných, různoběžných, mimoběžných přímek?

c) Které dvojice obsahují přímku BD?

d) Kolik různých rovin určují dané vrcholy?

e) Jsou mezi nimi některé dvě roviny rovnoběžné?

2.62 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete pomocí vrcholů krychle

a) dvě různoběžné roviny ρ a σ a přímku p, která je s oběma rovinami rovnoběžná,

b) rovinu ρ a přímky p, q, r tak, aby byly všechny tři přímky rovnoběžné s rovinou ρ a přitom přímka p byla různoběžná s přímkou q a mimoběžná s přímkou r.

2.63 Jsou dány mimoběžné přímky p, q a body $P \in p$, $Q \in q$. Bodem P je vedena přímka q' rovnoběžná s přímkou q a bodem Q přímka p' rovnoběžná s přímkou p. Dokažte, že

a) přímka p je různoběžná s přímkou q' a přímka q je různoběžná s přímkou p',

b) přímka p je rovnoběžná s rovinou qp',

c) roviny qp' a pq' jsou rovnoběžné,

d) jestliže rovina ρ prochází přímkou p a je rovnoběžná s přímkou q, potom $\rho = \leftrightarrow pq'$ a také, jestliže rovina σ prochází přímkou q a je rovnoběžná s přímkou p, pak $\sigma = \leftrightarrow qp'$.

2.64 Rozhodněte o správnosti následujících úsudků, v nichž p, q jsou libovolné přímky, ρ, σ libovolné roviny:

a) $p \parallel \rho \wedge \rho \parallel \sigma \Rightarrow p \parallel \sigma$ b) $p \parallel \rho \wedge p \parallel \sigma \Rightarrow \rho \parallel \sigma$

2.65 Dokažte, že mohou existovat dva poloprostory αA a βB takové, že každý bod poloprostoru βB leží v poloprostoru αA, ale ne naopak.

2.66 Je dána krychle $ABCDEFGH$ a bod M, který leží uvnitř hrany BF tak, že platí $|BM| : |MF| = 1 : 2$. Sestrojte průsečnici rovin BCH a ADM a dokažte, že je rovnoběžná s přímkami AD a BC.

2.67 Je dán kvádr $ABCDEFGH$. Bod M leží na hraně EF, $|EM| : |MF| = 3 : 5$, bod N je bodem polopřímky FG a přitom je bod G středem úsečky FN, bod P leží na polopřímce DC, $|DP| = \frac{5}{4}|DC|$. Sestrojte

a) řez kvádru rovinou MNP,

b) průsečnici p roviny MNP s rovinou stěny $ADHE$.

2.68 Zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$.

a) Sestrojte jeho řez $ABMN$ rovinou ABM, kde M je střed hrany CV.

b) Určete průsečnici p rovin BCV a ADV.

c) Dokažte, že se přímky p, BM a AN protínají v jednom bodě P.

* **2.69** Je dán čtyřstěn $ABCD$. Bod N je vnitřním bodem stěny ABC a bod M je vnitřním bodem úsečky DN.

a) Sestrojte řez čtyřstěnu rovinami ρ a σ; $\rho = \leftrightarrow BCM$, σ prochází bodem M a je rovnoběžná s rovinou BCD.

b) Určete průsečnici p rovin ρ a σ a rozhodněte o její poloze vzhledem k přímce BC.

2.70 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranami o délce a. Bod M leží na polopřímce FG tak, že bod G je středem úsečky FM. Sestrojte řez krychle rovinou EBM a vypočítejte jeho obvod.

2.71 Pravidelný čtyřboký hranol $ABCDA'B'C'D'$ má podstavné hrany délky $a = 4$ cm, boční hrany mají délku $c = 8$ cm. Uvnitř hrany BB' leží bod M, $|BM| = 3$ cm, uvnitř hrany CC' bod N, $|CN| = 7$ cm. Sestrojte řez hranolu rovinou AMN i jeho skutečnou velikost a vypočtěte jeho obsah.

2.72 Body M, N, P jsou po řadě středy hran AB, BC, CG krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky $a = 5$ cm. Sestrojte řez krychle rovinou MNP a vypočtěte jeho obvod a obsah.

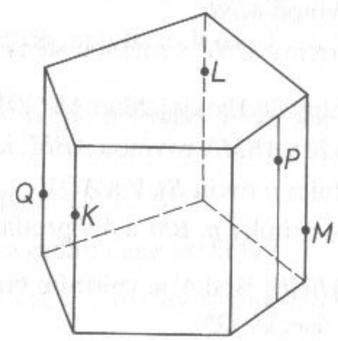
* **2.73** Body M, N jsou po řadě středy hran AB a BC pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, $|AB| = a$, $|AV| = b$. Sestrojte řez jehlanu rovinou, která prochází přímkou MN a je rovnoběžná s přímkou VB, a vypočtěte jeho obvod a obsah.

* **2.74** Pravidelný trojboký jehlan $ABCV$ má rozměry $|AB| = a$, $|AV| = b$, bod T je těžiště trojúhelníku ABC, bod O je středem úsečky TV. Sestrojte řez jehlanu rovinou ρ, která je rovnoběžná s dvěma mimoběžnými hranami jehlanu a prochází bodem

a) T, b) O

a určete obsah těchto řezů.

* **2.75** Na hranici kolmého pětibokého hranolu jsou dány body K, L, M, P, Q tak, jak ukazuje obr. 57. Sestrojte průsečík přímky PQ s rovinou KLM.



Obr. 57

2.76 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Body P, Q jsou po řadě středy hran AE a CG, bod S je středem stěny $EFGH$. Určete velikost úsečky, která je průnikem přímky PQ a jehlanu $ABCDS$.

2.77 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte příčku mimoběžných přímek AH a CF, která

a) leží v rovině BDH,

b) prochází dvěma vrcholy krychle,

* c) prochází středem hrany AB,

d) je rovnoběžná s některou hranou krychle,

e) je rovnoběžná s přímkou EG.

Druhý výlet do historie geometrie

Matematika, a tedy i geometrie byla zpočátku především praktickou naukou vytvářenou k měřením a výpočtům. Její výklad zahrnoval většinou konkrétní úlohy, ne obecná pravidla. S prvními stereometrickými stejně jako planimetrickými poznatky se setkáváme u vyspělých starověkých národů žijících v údolích velkých řek, jako je Nil, Eufrat a Tigrid. Nejstarší písemné památky jsou dochovány zejména z **oblasti starého Egypta** (egyptské papyry) a **Mezopotámie** (klínopisné tabulky).

Jednou z nejpozoruhodnějších egyptských matematických úloh je úloha uvedená v tzv. **moskevském papyru** (18. stol. př. n. l.), ve které se počítá objem kolmého komolého jehlanu se čtvercovou základnou (pyramidy). Text i s řešením v překladu zní:

„Způsob výpočtu pyramidy nemající vrchol. Máš-li dánu pyramidu bez vrcholu vysokou 6 (loktů), s dolní hranou 4 (lokte) a horní 2 (lokte); umocni 4 na druhou, dostaneš 16; zdvojnásob 4, dostaneš 8; umocni 2 na druhou, dostaneš 4;

(1) přičti těchto 16

(2) k těmto 8 a 4,

(3) dostaneš 28; vypočti

(4) $\frac{1}{3}$ ze 6, obdržíš 2; počítej

(5) s 28 dvakrát, dostáváš 56;

(6) viz: je to skutečně 56. Nalezl jsi správně."

V papyru je spolu s textem uveden i náčrt a schéma výpočtu. Komolý jehlan je zobrazen jako nevelký lichoběžník, v textu nejsou rozdělovací znaménka a operace umocnit „na druhou" je značena hieroglyfem „jít mimo". Je kupodivu, že postup je založen na správném vzorci.

3 METRICKÉ VLASTNOSTI

Metrické vztahy představují další, podrobnější popis prostorových vztahů. Při zjišťování metrických vlastností přímek a rovin využíváme shodnosti úseček a úhlů. **Vzdálenost** bodu od přímky a od roviny definujeme pomocí planimetrického pojmu **délka úsečky**, **odchylku** přímek a rovin pomocí pojmu **odchylka dvou přímek v rovině**.

3.1 Odchylka přímek

Odchylku přímek ležících v rovině umíme určit již z planimetrie:

> **Odchylka dvou různoběžných přímek** je velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, které přímky spolu svírají. **Odchylka dvou rovnoběžných přímek** je 0° (0 rad).

? Určete odchylku přímek

a) AB, AC,
b) AC, AH,
c) EF, FG,
d) BC, EH.

Přímky jsou dány vrcholy krychle $ABCDEFGH$.

V prostoru je však třeba umět určit odchylku nejen v případě různoběžek nebo rovnoběžek, ale i v případě mimoběžek.

> **Odchylka dvou mimoběžných přímek** je odchylka různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami.

Je-li φ odchylka dvou přímek p, q, píšeme $\varphi = |\sphericalangle pq|$.

Příklad 1

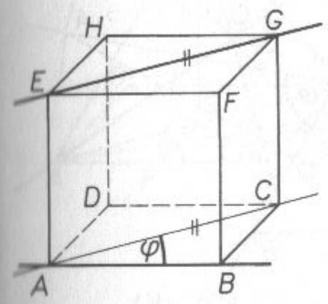
Určete odchylku přímek

a) AB, EG, b) AH, CF, c) AH, BE.

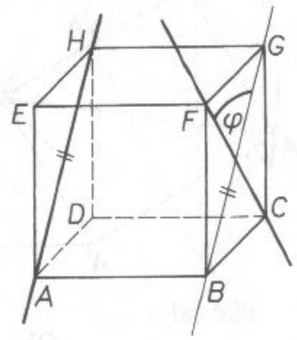
Přímky jsou dány vrcholy krychle $ABCDEFGH$.

Řešení

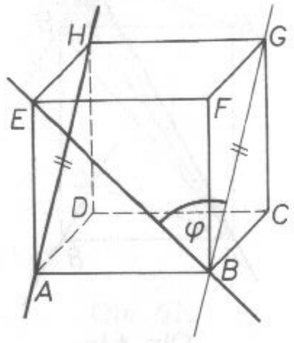
a) (obr. 58) Např. bodem A vedeme rovnoběžku s přímkou EG. Odchylka přímek AB a EG je stejná jako odchylka přímek AB a AC, je tedy 45°. Místo bodu A můžeme volit kterýkoli jiný bod. Pak budeme pracovat s jinou dvojicí různoběžek, odchylka však bude vždy 45°.



Obr. 58



Obr. 59



Obr. 60

b) (obr. 59) Přímka CF leží v rovině stěny $BCGF$. V téže rovině leží i přímka BG, která je rovnoběžná s přímkou AH. Přímky CF a BG jsou k sobě kolmé, odchylka daných mimoběžek je tedy 90°.

c) (obr. 60) Např. bodem B vedeme rovnoběžku s přímkou AH. Odchylka daných mimoběžek je stejná jako odchylka různoběžek BE a BG. Trojúhelník BGE je rovnostranný, odchylka je tedy 60°.

? Záleží při určování odchylky přímek v příkladu 1 na délce hrany krychle?

Odchylka dvou mimoběžných přímek nezávisí na volbě bodu, kterým vedeme rovnoběžky s danými přímkami. Ne vždy je určení odchylky dvou přímek tak jednoduché jako v příkladu 1. V obtížnějších případech při konstrukčním i početním řešení pracujeme s trojúhelníkem, v němž je úhel, jehož velikost hledáme, jedním vnitřním úhlem.

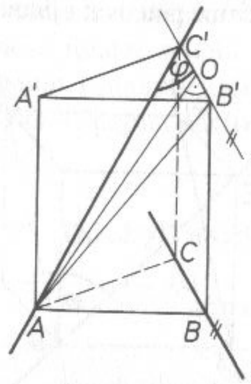
Příklad 2

Je dán pravidelný trojboký hranol $ABCA'B'C'$; $|AB| = a = 4$ cm, $|AA'| = v = 5$ cm. Určete konstrukčně i početně odchylku přímek BC a AC'.

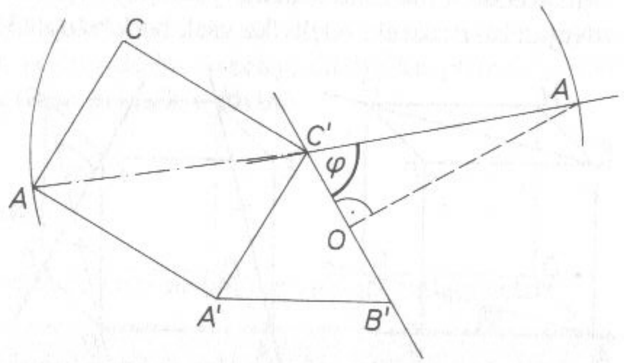
Řešení

Bodem C' vedeme rovnoběžku s přímkou BC. Odchylka přímek BC a AC' je $\varphi = |\sphericalangle AC'B'|$ (obr. 61a).

Úhel $AC'B'$ je vnitřní úhel rovnoramenného trojúhelníku $B'C'A$; jeho základna má délku a, ramena jsou úhlopříčky obdélníků, jejichž strany mají délky a, v. Konstrukční řešení je na obr. 61b.



Obr. 61a



Obr. 61b

Je-li bod O střed úsečky $B'C'$, je trojúhelník $AC'O$ pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu O. Platí:

$$\cos\varphi = \frac{|C'O|}{|AC'|} = \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{a^2+v^2}} = \frac{a}{2\sqrt{a^2+v^2}}$$

Pro dané hodnoty a, v je $\varphi \doteq 71°48'$.

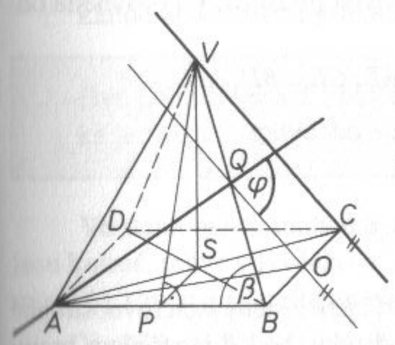
Příklad 3

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$; $|AB| = a = 5$ cm, $|AV| = b = 6$ cm, bod Q je střed hrany BV. Určete konstrukčně i početně odchylku přímek CV a AQ.

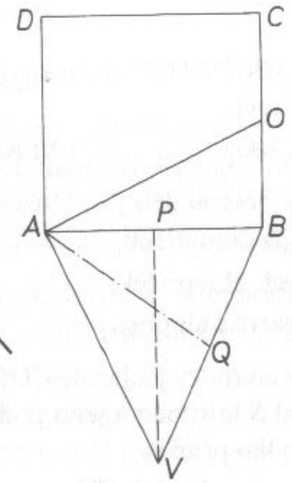
Řešení

Bodem Q vedeme rovnoběžku s přímkou CV. Tato přímka protne hranu BC v bodě O. Odchylka mimoběžek CV a AQ je odchylka různoběžek OQ a AQ (obr. 62a).

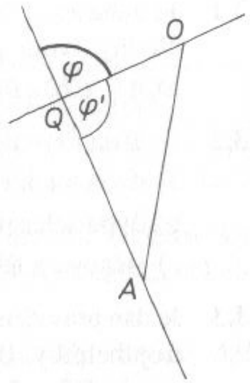
Při konstrukčním řešení sestrojíme trojúhelník AOQ. Úsečka QO je střední příčka v trojúhelníku CVB, proto jednak $|QO| = \frac{1}{2}|CV| = \frac{1}{2}b$, jednak je bod O středem úsečky BC. Úsečku AO můžeme sestrojit pomocí čtverce $ABCD$ a úsečka AQ je těžnicí v trojúhelníku ABV (obr. 62b). Trojúhelník AOQ je tak určen délkami svých stran (obr. 62c). Hledaná odchylka je v daném případě $\varphi = 180° - |\sphericalangle AQO|$, neboť $|\sphericalangle AQO| > 90°$.



Obr. 62a



Obr. 62b



Obr. 62c

Pro početní řešení potřebujeme znát délky všech stran trojúhelníku AOQ. Víme, že $|OQ| = \frac{1}{2}b$. Z pravoúhlého trojúhelníku ABO ($|\sphericalangle B| = 90°$) je $|AO| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$. Pro výpočet délky úsečky AQ si nejdříve vyjádříme z pravoúhlého trojúhelníku BVP ($|\sphericalangle P| = 90°$) $\cos\beta$:

$$\cos\beta = \frac{\frac{1}{2}a}{b} = \frac{a}{2b}$$

Pak můžeme určit $|AQ|$ z trojúhelníku ABQ pomocí kosinové věty:

$$|AQ|^2 = |AB|^2 + |BQ|^2 - 2\,.\,|AB|\,.\,|BQ|\,.\cos\beta,$$

neboli po dosazení a úpravách

$$|AQ| = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+b^2}\,.$$

A konečně z trojúhelníku AOQ opět užitím kosinové věty dostaneme

$$|AO|^2 = |AQ|^2 + |QO|^2 - 2\,.\,|AQ|\,.\,|QO|\,.\cos\varphi'$$

a odtud

$$\cos\varphi' = \frac{|AQ|^2 + |QO|^2 - |AO|^2}{2\cdot|AQ|\cdot|QO|} = \frac{2b^2-3a^2}{2b\sqrt{2a^2+b^2}}.$$

Pro dané hodnoty a, b je $\cos\varphi' = -\frac{\sqrt{86}}{344}$, $\varphi' \doteq 91°33'$. Odchylka přímek CV a AQ je $\varphi = 180° - \varphi'$, tj. $\varphi \doteq 88°27'$.

Úlohy

3.1 Je dána krychle *ABCDEFGH* se čtvercovou podstavou. Porovnejte odchylky dvojic přímek

a) *AF*, *CH* a *BE*, *DG*, b) *AB*, *CE* a *BH*, *AD*.

3.2 Je dána krychle s hranou délky *a*. Určete odchylku

a) dvou stěnových úhlopříček,

b) dvou tělesových úhlopříček,

c) stěnové a tělesové úhlopříčky.

3.3 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*, jehož stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Bod *S* je středem jeho podstavy, bod *P* je středem hrany *AV*. Určete odchylku přímek

a) *BC*, *SV*, b) *AB*, *CV*, c) *AD*, *CV*,

d) *BV*, *CP*, e) *SV*, *BP*.

3.4 Je dán pravidelný pětiboký hranol *ABCDEA'B'C'D'E'*, jehož boční stěny jsou čtverce. Určete odchylku přímek

a) *AB*, *DD'*, b) *AB*, *C'E'*,

c) *AB*, *CD'*, * d) *BC'*, *DE'*.

3.5 V kvádru *ABCDEFGH* s rozměry $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 3$ cm, $|AE| = 8$ cm je bod *S* středem horní stěny, body *M* a *N* jsou po řadě středy hran *AE* a *BF*. Vypočtěte odchylku přímek

a) *BE*, *CG*, b) *EG*, *BD*, c) *AE*, *BS*,

d) *BM*, *NG*, e) *AC*, *BH*, f) *AC*, *BS*.

3.6 Podstavou kolmého trojbokého hranolu *ABCA'B'C'* je rovnoramenný trojúhelník *ABC*; $|AB| = 3$ cm, $|AC| = |BC| = 4$ cm, $|AA'| = 4$ cm. Určete konstrukčně i početně odchylku přímek

a) *BA'*, *BC'*, b) *A'B'*, *BC*,

c) *AB'*, *BC*, d) *A'C*, *BC'*.

3.7 Je dán pravidelný šestiboký hranol *ABCDEFA'B'C'D'E'F'*; $|AB| = a = 2{,}5$ cm, $|AA'| = b = 4$ cm. Určete početně i konstrukčně odchylku přímek

a) *DE'*, *BD'*, b) *BC'*, *CF'*.

3.8 Těleso tvaru kvádru s rozměry 30 cm, 40 cm, 60 cm z homogenního materiálu je zavěšeno ve vrcholu. Určete odchylky jeho hran od vertikály.

3.2 Kolmost přímek a rovin

Začněme kolmými přímkami:

> **Dvě přímky jsou k sobě kolmé** právě tehdy, když jejich odchylka je 90°.

Ve stereometrii mohou být kolmými i mimoběžné přímky. Dvě **úsečky** jsou **kolmé**, právě když leží na kolmých přímkách. Symbol pro označení kolmosti ($\perp$) známe již z planimetrie.

V příkladu 1b v článku 3.1 jsou přímky *AH* a *CF*, a tedy i úsečky *AH* a *CF* k sobě kolmé. Zapisujeme: $\leftrightarrow AH \perp \leftrightarrow CF$, popř. $AH \perp CF$.

? Jsou-li *p*, *q*, *r* přímky v prostoru, rozhodněte, zda platí:

a) Je-li $p \perp q$ a $q \perp r$, pak $p \parallel r$.

b) Je-li $p \perp q$ a $q \perp r$, pak $p \perp r$.

c) Je-li $p \perp q$ a $q \parallel r$, pak $p \perp r$.

Pomocí kolmosti přímek definujeme kolmost přímky a roviny:

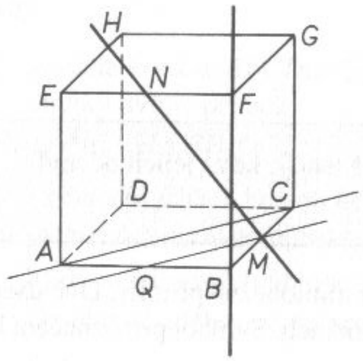
> **Přímka a rovina jsou k sobě kolmé** právě tehdy, když je přímka kolmá ke všem přímkám roviny.

Kolmost přímky *p* a roviny ρ zapisujeme $p \perp \rho$, popř. $\rho \perp p$. Přímka kolmá k rovině se nazývá **kolmice k rovině.** Bod *P*, $\{P\} = p \cap \rho$, je **pata kolmice.**

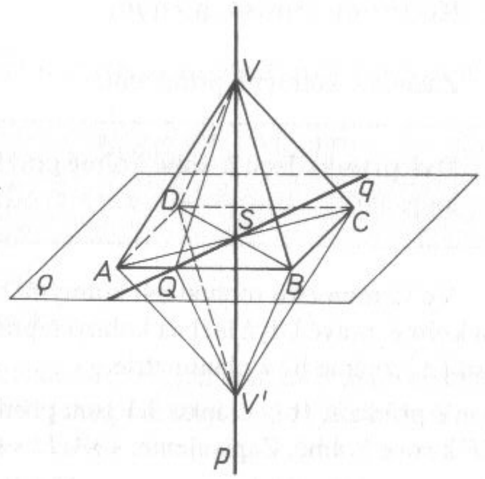
O tom, zda je přímka kolmá k rovině, bychom podle definice kolmosti přímky a roviny mohli rozhodovat jedině tak, že bychom „vyzkoušeli", je-li přímka kolmá ke každé přímce roviny. To však není prakticky možné. Ke zjišťování kolmosti přímky a roviny využíváme **kritérium kolmosti přímky a roviny:**

> Je-li přímka kolmá ke dvěma různoběžkám roviny, pak je k rovině kolmá.

Na obr. 63 je znázorněna krychle *ABCDEFGH*. Přímka *BF* je kolmá k přímce *AB* i k přímce *BC*, je proto kolmá k rovině *ABC*. Přímka *BF* je kolmá i k přímce *AC*, neboť přímka *AC* leží v rovině *ABC*.



Obr. 63



Obr. 64

Lze poměrně jednoduše ukázat, že je-li přímka kolmá ke dvěma různoběžkám roviny, je kolmá k libovolné přímce této roviny. Při důkazu využijeme shodnosti trojúhelníků.

Na obr. 64 je znázorněn pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Předpokládejme, že přímka $p = \leftrightarrow VS$ je kolmá k přímkám AC a BD roviny $\rho = \leftrightarrow ABC$. Na přímce p najdeme bod V' tak, že $|V'S| = |VS|$. Trojúhelníky ASV a ASV' a také trojúhelníky BSV a BSV' jsou shodné (sss). Je-li q libovolná přímka roviny ρ procházející bodem S a protínající úsečku AB v bodě Q, je $|VQ| = |V'Q|$. Trojúhelníky SQV a SQV' jsou tedy také shodné (sss). Ve shodných trojúhelnících jsou shodné odpovídající úhly, proto $\sphericalangle VSQ \cong \sphericalangle V'SQ$. Protože však součet těchto úhlů je úhel přímý, jsou oba úhly pravé, a tedy $p \perp q$.

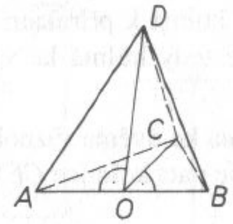
Je-li přímka p kolmá k přímce q, je kolmá ke všem rovnoběžkám s přímkou q. Pro jiný směr přímek roviny ρ bychom důkaz provedli analogicky.

? Musí být přímka, která je kolmá ke dvěma různým rovnoběžkám ležícím v rovině ρ, kolmá k rovině ρ?

Chceme-li dokázat, že přímka není kolmá k rovině, stačí najít jednu přímku roviny, k níž není daná přímka kolmá. Např. přímka MN (bod M je střed hrany BC, bod N je střed hrany EF) na obr. 63 není kolmá k rovině ABC, protože není kolmá k přímce MQ roviny ABC.

Příklad 1

Dokažte, že v pravidelném čtyřstěnu $ABCD$ je $AB \perp CD$.



Obr. 65

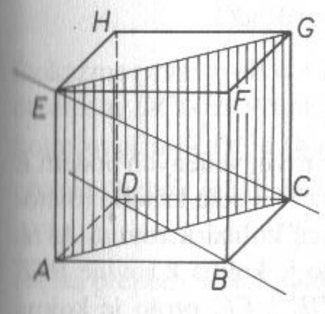
Řešení (obr. 65)

Stěny pravidelného čtyřstěnu jsou rovnostranné trojúhelníky. Je-li bod O střed hrany AB, jsou úsečky CO a DO výšky v rovnostranných trojúhelnících ABC a ABD. Je proto $CO \perp AB$ a také $DO \perp AB$. Podle kritéria kolmosti přímky a roviny je přímka AB kolmá k rovině CDO. Podle definice je přímka AB kolmá ke všem přímkám roviny CDO, tedy i k přímce CD. A to jsme měli dokázat.

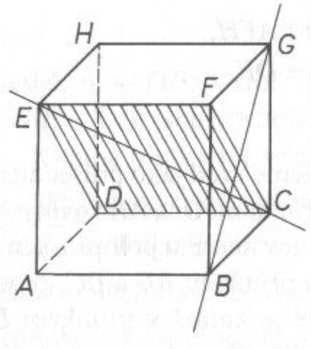
Opakovaným užitím definice a kritéria kolmosti přímky a roviny lze řešit i složitější úlohy.

Příklad 2

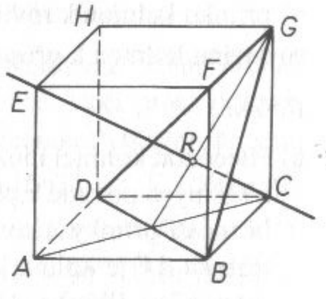
Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zjistěte, zda přímka CE je kolmá k rovině BDG.



Obr. 66a



Obr. 66b



Obr. 66c

Řešení

Přímka BD je kolmá k přímce AC i k přímce AE, je proto kolmá k rovině ACE (obr. 66a). Je tedy kolmá ke všem přímkám roviny ACE, tj. i k přímce CE. Obdobně je přímka BG kolmá k přímkám CF a EF, a je proto kolmá k rovině CEF (obr. 66b). Je tedy kolmá ke všem přímkám roviny CEF, tj. i k přímce CE.

Přímka CE je tedy kolmá ke dvěma různoběžkám BD a BG, a je proto kolmá k rovině BDG. Bod R je pata kolmice CE k rovině BDG; $R \in \leftrightarrow CE \cap \cap \leftrightarrow BDG$ (obr. 66c).

? Najděte další rovinu, která obsahuje tři vrcholy krychle $ABCDEFGH$ a je kolmá k přímce CE.

Některé **věty o kolmosti přímek a rovin** jsou podobné větám o kolmosti přímek v rovině.

Daným bodem lze vést k dané rovině jedinou kolmici.

Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou kolmou rovinu.

? Kolik existuje v prostoru přímek, které jsou kolmé k dané přímce a procházejí daným bodem? Co vyplní všechny body všech takových přímek?

Příklad 3

Vrcholem E krychle $ABCDEFGH$ veďte

a) přímku kolmou k rovině AFH,

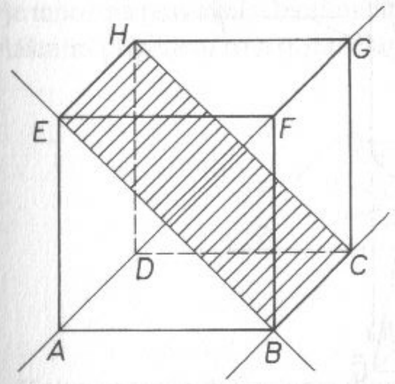
b) rovinu kolmou k přímce DF.

Řešení

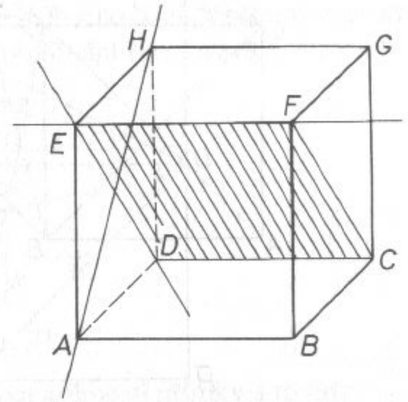
a) Hledanou kolmici můžeme určit jako průsečnici rovin vedených bodem E a kolmých po řadě k přímkám AF a AH roviny AFH. Podle kritéria rovnoběžnosti přímky a roviny bude jejich průsečnice kolmá k rovině AFH. Přímka AF je kolmá k přímkám BE a BC, proto je kolmá k rovině BCE (obr. 67a). Přímka AH je kolmá k přímkám DE a EF, proto je kolmá k rovině DEF (obr. 67b). Průsečnice rovin BCE a DEF je přímka CE (obr. 67c). Přímka CE je hledaná kolmice vedená bodem E k rovině AFH (obr. 67d). Její patu P můžeme určit pomocí roviny ACE.

b) Podle modelu či obrázku (obr. 68) odhadneme, že hledaná rovina je rovina BEG. Dokažme. Má-li být rovina BEG kolmá k přímce DF, tj. i naopak,

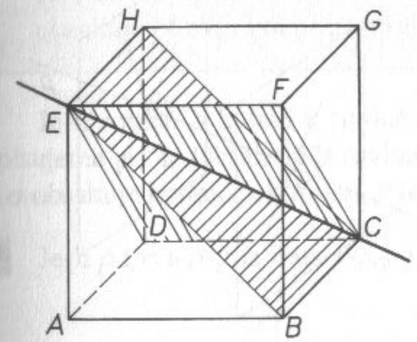
přímka DF kolmá k rovině BEG, musí být přímka DF kolmá ke dvěma různoběžkám roviny BEG, např. $\leftrightarrow DF \perp \leftrightarrow BE$ a $\leftrightarrow DF \perp \leftrightarrow EG$.



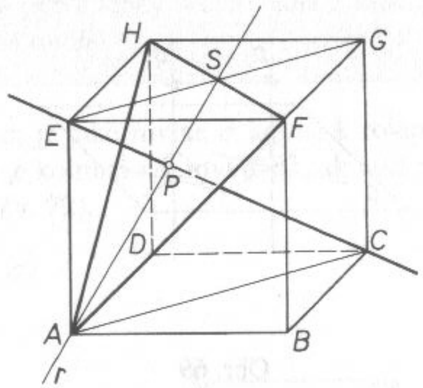
Obr. 67a



Obr. 67b



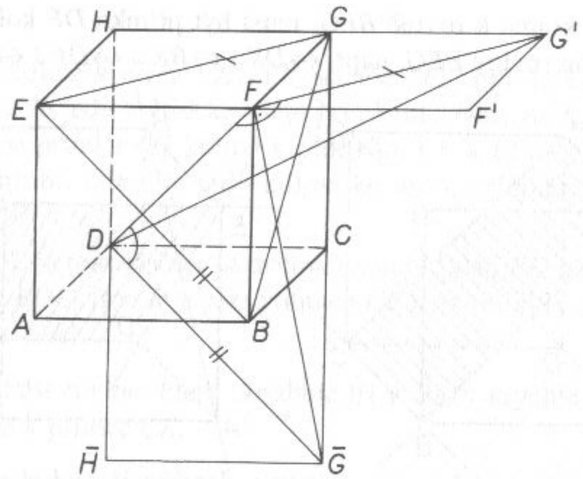
Obr. 67c



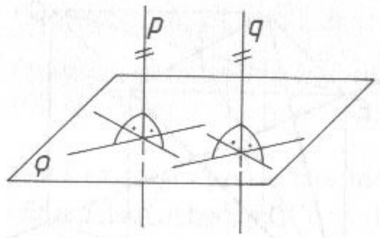
Obr. 67d

Dokažme první z obou vztahů, tj. $\leftrightarrow DF \perp \leftrightarrow BE$. „Nastavme" stěnu $DCGH$ čtvercem $DC\overline{G}\overline{H}$. Přímky BE a $D\overline{G}$ jsou rovnoběžné, stačí proto dokázat kolmost přímek DF a $D\overline{G}$. K tomu použijeme obrácenou Pythagorovu větu pro trojúhelník $DF\overline{G}$: Je-li a délka hrany krychle, je $|D\overline{G}| = a\sqrt{2}$ (délka stěnové úhlopříčky), $|DF| = a\sqrt{3}$ (délka tělesové úhlopříčky) a $|F\overline{G}| = a\sqrt{5}$ (délka přepony v pravoúhlém trojúhelníku $FG\overline{G}$, $|\sphericalangle G| = 90°$). Platí $|D\overline{G}|^2 + |DF|^2 = |F\overline{G}|^2$, neboli trojúhelník $DF\overline{G}$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu D.

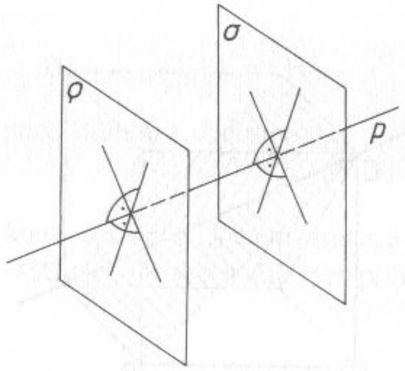
Přímky DF a $D\overline{G}$ jsou tedy kolmé. Kolmost přímek DF a EG dokážeme analogicky.



Obr. 68



Obr. 69



Obr. 70

Z obr. 69 a obr. 70 je zřejmé, že pro libovolné přímky p, q a libovolné roviny ρ a σ platí:

Je-li $p \perp \rho$ a $q \perp \rho$, je $p \parallel q$.

Je-li $p \perp \rho$ a $q \parallel p$, je $q \perp \rho$.

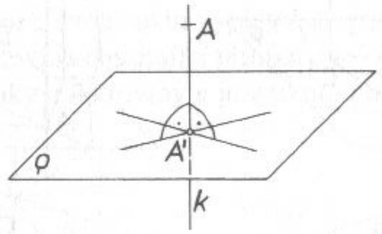
Je-li $\rho \perp p$ a $\sigma \perp p$, je $\rho \parallel \sigma$.

Je-li $p \perp \rho$ a $\rho \parallel \sigma$, je $p \perp \sigma$.

? Ověřte platnost těchto vět na kvádru.

Pomocí přímky kolmé k rovině sestrojíme pravoúhlý průmět útvaru do roviny. Je-li ρ libovolná rovina a A libovolný bod ($A \notin \rho$), pak **pravoúhlý**

průmět bodu A do roviny ρ je pata A' kolmice vedené bodem A k rovině ρ (obr. 71). **Pravoúhlý průmět** libovolného **geometrického útvaru** do roviny ρ je množina pravoúhlých průmětů všech jeho bodů. **Pravoúhlé promítání** je zvláštním případem rovnoběžného promítání (viz článek 1.3).



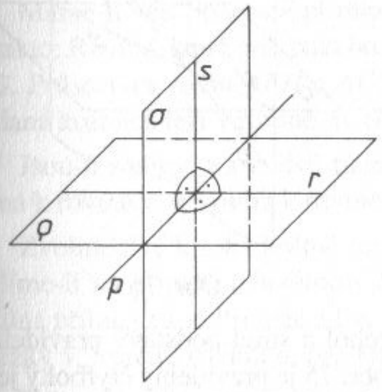
Obr. 71

Kolmost rovin definujeme pomocí kolmosti přímky a roviny:

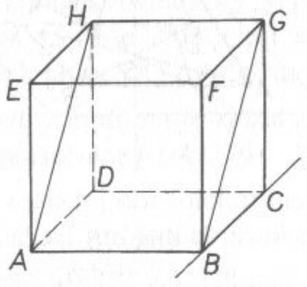
Dvě roviny jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé rovině.

Je-li rovina ρ kolmá k rovině σ, je také rovina σ kolmá k rovině ρ; zapisujeme $\rho \perp \sigma$. Obsahuje-li rovina ρ kolmici r k rovině σ, pak také rovina σ obsahuje kolmici s k rovině ρ (obr. 72).

? Je-li $\rho \perp \sigma$ a $p \subset \rho$, musí být $p \perp \sigma$?

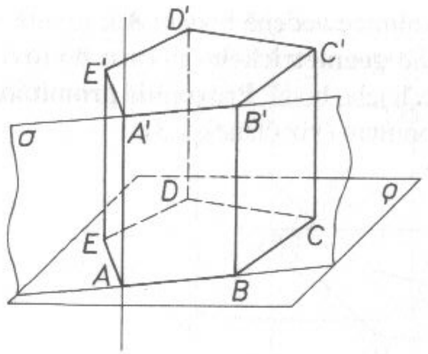


Obr. 72

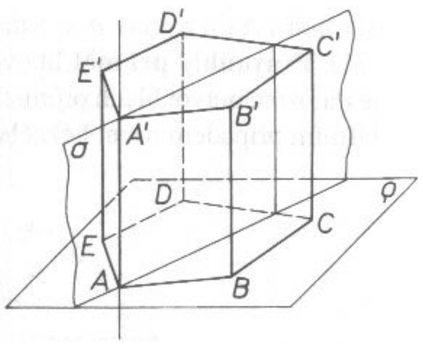


Obr. 73

Roviny ABC a CDH určené vrcholy krychle $ABCDEFGH$ jsou k sobě kolmé (obr. 73): v rovině ABC leží např. přímka BC, která je kolmá k rovině CDH. Roviny ABC a ABH nejsou navzájem kolmé, neboť žádná z nich neobsahuje přímku kolmou k druhé rovině.



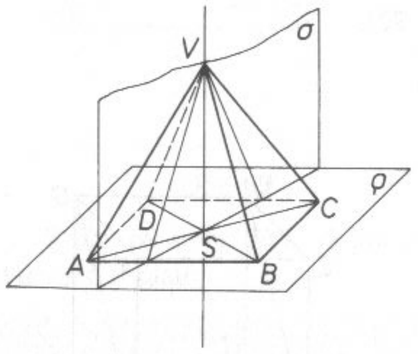
Obr. 74a



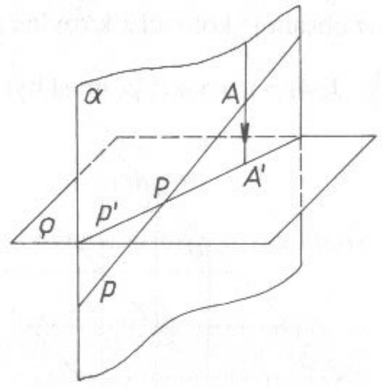
Obr. 74b

Na obr. 74a, b je znázorněn kolmý hranol. Jeho podstavy jsou shodné mnohoúhelníky, boční stěny jsou obdélníky. Přímka AA' je kolmá k přímkám AB a AE, je proto kolmá k rovině ABC. Přímka AA' leží v rovině stěny $ABB'A'$ a podle definice je rovina této stěny také kolmá k rovině ABC. Ale i každá další rovina obsahující přímku AA' je kolmá k rovině ABC. Podobně můžeme uvažovat i ostatní přímky, v nichž leží boční hrany.

Je tedy rovina každé boční stěny i každá rovina obsahující boční hranu kolmého hranolu kolmá k rovinám obou jeho podstav.



Obr. 75



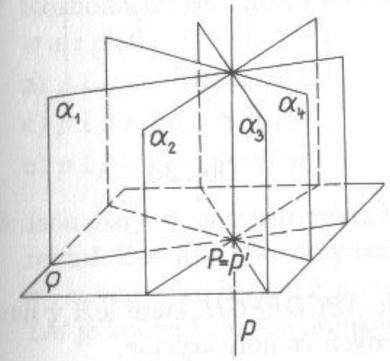
Obr. 76

Každá rovina obsahující hlavní vrchol a střed podstavy pravidelného jehlanu je kolmá k rovině podstavy. Na obr. 75 je pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Přímka SV je kolmá k přímkám AC i BD, proto je kolmá k rovině ABC. Každá rovina obsahující přímku SV je tedy kolmá k rovině ABC. Také roviny úhlopříčných řezů ACV a BDV jsou k sobě kolmé.

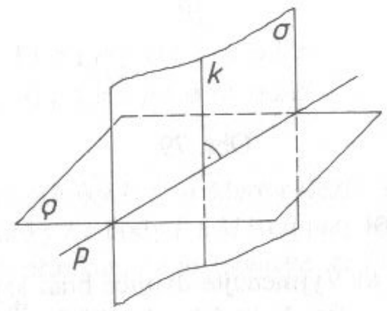
? Je kolmost rovin tranzitivní (tj. je-li $\rho \perp \sigma$ a $\sigma \perp \tau$, je také $\rho \perp \tau$)?

Přímkou p, která není k rovině ρ kolmá, prochází právě jedná rovina α kolmá k dané rovině ρ (obr. 76). Průsečnice rovin α a ρ je přímka p' – je to **pravoúhlý průmět přímky** p do roviny ρ. Rovina α se nazývá **promítací rovina přímky** p.

Z definice kolmosti dvou rovin vyplývá, že pokud je přímka p kolmá k rovině ρ, pak každá rovina obsahující přímku p je kolmá k rovině ρ. Pravoúhlým průmětem přímky p do roviny ρ je v tomto případě bod (obr. 77).



Obr. 77



Obr. 78

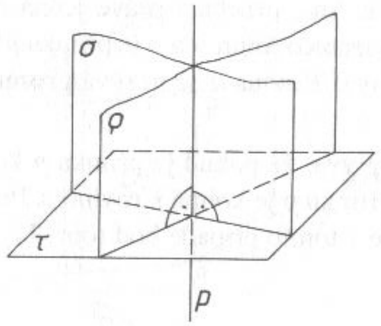
Úlohu vést bodem přímku kolmou k rovině jsme již řešili v příkladu 3a. Zkusme vyřešit tuto úlohu znovu jinak. Pomůže nám obr. 78. V něm vidíte: přímka k, která leží v rovině σ a je kolmá k rovině ρ, je kolmá k průsečnici p rovin ρ a σ.

Máme-li vést bodem E přímku kolmou k rovině AFH, můžeme uvažovat takto: Rovina, která prochází bodem E a je kolmá k rovině AFH, je rovina ACG. Průsečnice rovin AFH a ACG je přímka AS (S je střed horní stěny). Hledaná kolmice leží v rovině ACG a je kolmá k přímce AS (obr. 67d).

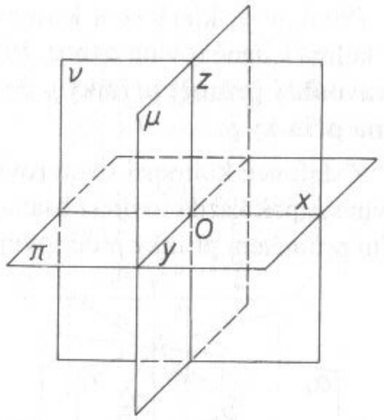
Jsou-li roviny ρ a σ dvě různoběžné roviny a přitom je každá z nich kolmá k rovině τ, je kolmá k rovině τ i jejich průsečnice p (obr. 79).

Zvolme dvě k sobě kolmé roviny π a ν a jejich průsečnici označme x. Zvolíme-li na přímce x libovolný bod O, prochází jím jediná přímka $y \perp \nu$ a jediná přímka $z \perp \pi$. Protože $z \perp \pi$, je $z \perp x$, a také protože $y \perp \nu$, je $y \perp x$. Různoběžky y, z určují rovinu μ, pro kterou platí $\mu \perp \pi$, $\mu \perp \nu$ (obr. 80).

Taková trojice rovin je užitečná pro matematiku, deskriptivní geometrii, a zejména pro technickou praxi. Roviny π, ν, μ jsou průmětny: π (půdorysna) se volí vodorovně, ν (nárysna) a μ (bokorysna) jsou svislé. Technické objekty se zpravidla zobrazují svými pravoúhlými průměty do těchto průměten.



Obr. 79



Obr. 80

Úlohy

3.9 a) Vyjmenujte dvojice hran krychle *ABCDEFGH*, které leží v navzájem kolmých mimoběžkách určených vrcholy krychle.

b) Které stěnové úhlopříčky krychle jsou kolmé k tělesové úhlopříčce *BH*? Zdůvodněte.

3.10 Body *K*, *L*, *M*, *N* jsou po řadě středy hran *EH*, *CD*, *AE*, *CG* krychle *ABCDEFGH*. Ověřte kolmost přímek a rovin:

a) $\leftrightarrow HM, \leftrightarrow EF$ b) $\leftrightarrow MN, \leftrightarrow BH$ c) $\leftrightarrow AL, \leftrightarrow BK$
d) $\leftrightarrow FH, \leftrightarrow ACG$ e) $\leftrightarrow LM, \leftrightarrow ACH$ f) $\leftrightarrow AL, \leftrightarrow BFK$
g) $\leftrightarrow BCE, \leftrightarrow DGH$ h) $\leftrightarrow ACK, \leftrightarrow BDH$ i) $\leftrightarrow ALK, \leftrightarrow BDH$

3.11 Bod *M* je středem hrany *CV* pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV*. Ověřte kolmost přímek a rovin:

a) $\leftrightarrow AC, \leftrightarrow BV$ b) $\leftrightarrow BM, \leftrightarrow CD$
c) $\leftrightarrow AD, \leftrightarrow CDV$ d) $\leftrightarrow AM, \leftrightarrow BDV$

3.12 Podstavou jehlanu *ABCDV* je rovnoběžník *ABCD* se středem *S*, boční hrany jehlanu mají stejnou délku. Dokažte, že přímka *VS* je kolmá k rovině podstavy.

3.13 Je dána krychle *ABCDEFGH*. Zobrazte ve volném rovnoběžném promítání patu kolmice vedené bodem *F* k rovině *BEG*.

3.14 Je dána krychle *ABCDEFGH*, bod *M* je středem hrany *AB*. Určete patu kolmice vedené

a) bodem *E* k přímce *HF*,

b) bodem *H* k přímce *CM*.

* **3.15** Je dána rovina ρ a v ní bod *R*. Dále je dána přímka *p*, která je s rovinou ρ různoběžná. Veďte v rovině ρ bodem *R* kolmici k přímce *p*. Úlohu zobrazte na krychli *ABCDEFGH*: $\rho = \leftrightarrow BEH$, $R = H$, $p = \leftrightarrow CF$.

3.16 Jsou dány dvě mimoběžky *p*, *q* a mimo ně bod *M*. Veďte bodem *M* přímku kolmou k přímce *p* tak, aby protínala přímku *q*. Úlohu zobrazte na krychli *ABCDEFGH*: $p = \leftrightarrow FC$, $q = \leftrightarrow BD$, $M = H$.

3.17 Rozhodněte, zda pro libovolné přímky *p*, *q* a pro libovolné roviny ρ, σ a τ platí:

a) $\rho \perp \sigma \wedge \sigma \perp \tau \Rightarrow \rho \parallel \tau$ b) $\rho \perp \sigma \wedge \sigma \perp \tau \Rightarrow \rho \perp \tau$
c) $p \perp \rho \wedge \rho \perp \sigma \Rightarrow p \parallel \sigma$ d) $p \perp \rho \wedge p \perp \sigma \Rightarrow \rho \perp \sigma$
e) $p \perp \rho \wedge p \perp q \Rightarrow q \parallel \rho$

3.18 Jsou dány tři navzájem rovnoběžné přímky *k*, *l*, *m*, které neleží v jedné rovině. Bod *K* je libovolný bod přímky *k* a body *L* a *M* jsou paty kolmic k_1, k_2 vedených bodem *K* po řadě k přímkám *l* a *m*. Dokažte, že přímka *LM* je kolmá k oběma přímkám *l*, *m*.

* **3.19** Jsou dány dvě k sobě kolmé přímky *a*, *b*. Každou z přímek prochází právě jedna rovina kolmá k druhé přímce. Dokažte.

3.20 Popište konstrukci roviny, která prochází daným bodem a je kolmá ke dvěma daným různým rovinám

a) rovnoběžným, b) různoběžným.

3.21 Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete pravoúhlý průmět bodu *B* do roviny

a) *ADH*, b) *ACG*, c) *CDE*, d) *EDG*.

3.22 Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete pravoúhlý průmět přímky *DF* do roviny

a) *ABC*, b) *ADH*, c) *ACG*, d) *DEG*.

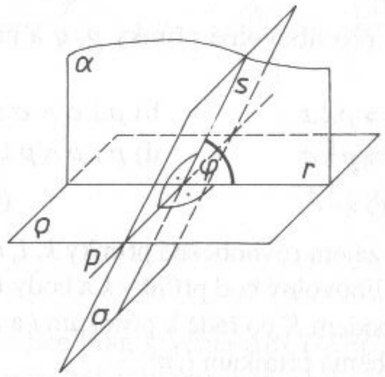
* **3.23** Dokažte, že pravoúhlým průmětem pravého úhlu je pravý úhel, leží-li jedno jeho rameno v průmětně a druhé rameno není k průmětně kolmé. Tuto větu zobecněte.

3.24 Co je pravoúhlým průmětem rovnoběžníku do roviny?

* **3.25** Jakou polohu musí mít průmětna, aby byl pravoúhlým průmětem pravidelného čtyřstěnu čtverec?

3.3 Odchylky přímek a rovin

Odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá.



Obr. 81

Na obr. 81 je rovina α kolmá k rovinám ρ i σ. Odchylka φ rovin ρ a σ je odchylka přímek r a s. Je zřejmé, že je-li p průsečnice rovin ρ a σ, je $r \perp p$ i $s \perp p$.

Odchylku rovin ρ a σ zapisujeme $|\sphericalangle \rho\sigma|$. Je-li $\rho \parallel \sigma$, je $|\sphericalangle \rho\sigma| = 0°$ (0 rad), je-li $\rho \perp \sigma$, je $|\sphericalangle \rho\sigma| = 90°$ ($\frac{1}{2}\pi$ rad), jinak je $0° < |\sphericalangle \rho\sigma| < 90°$ (0 rad $< |\sphericalangle \rho\sigma| < \frac{1}{2}\pi$ rad).

Příklad 1

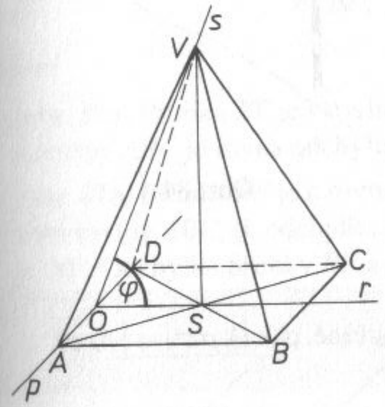
Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$; $|AB| = a = 5$ cm, $|AV| = b = 7$ cm. Určete odchylku φ roviny boční stěny a roviny podstavy. Řešte početně i konstrukčně.

Řešení

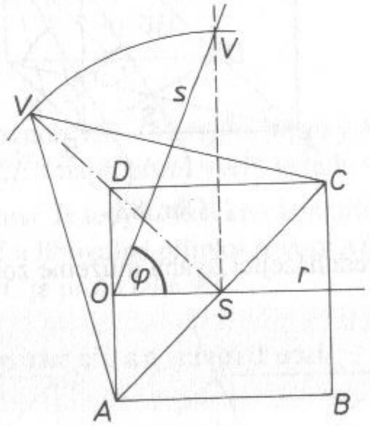
Určeme např. odchylku rovin ADV a ABC, odchylky rovin ostatních bočních stěn a roviny podstavy jsou stejné. Bod S je střed podstavy, bod O střed hrany AD. Přímka SO leží v rovině ABC a je kolmá k přímce AD, přímka VO leží v rovině ADV a je také kolmá k přímce AD; přímka AD je průsečnice rovin ABC a ADV. Je tedy $\varphi = |\sphericalangle SOV|$ (obr. 82a).

Konstrukční i početní řešení vychází z pravoúhlých trojúhelníků OSV a ASV

($|\sphericalangle S| = 90°$). Při konstrukci (obr. 82b) sestrojíme nejdříve čtverec $ABCD$ o straně $a = 5$ cm, jeho střed S a střed O strany AD. Úsečka AS je odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku ASV, jeho přepona má délku $|AV| = b = 7$ cm; délka druhé odvěsny je rovna výšce v jehlanu. V pravoúhlém trojúhelníku OSV je $|SV| = v$ a $\varphi = |\sphericalangle SOV|$.



Obr. 82a



Obr. 82b

V trojúhelníku OSV platí:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|SV|}{|OS|} = \frac{v}{\frac{1}{2}a} = \frac{2v}{a}$$

V trojúhelníku ASV platí $|AS| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, $|AV| = b$; v určíme pomocí Pythagorovy věty:

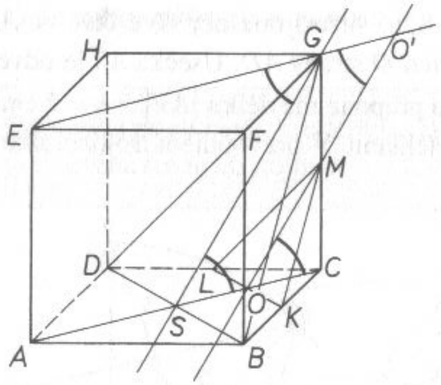
$$v = |SV| = \sqrt{|AV|^2 - |AS|^2} = \sqrt{\frac{2b^2 - a^2}{2}}$$

Je tedy:

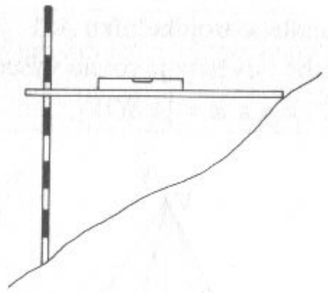
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{\frac{2b^2 - a^2}{2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$$

Pro dané hodnoty a, b dostaneme $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{146}}{5}$, $\varphi \doteq 67°31'$.

Na obr. 83 je znázorněna krychle $ABCDEFGH$; body K, L, M jsou po řadě středy hran BC, CD a CG, bod O je střed úsečky KL. Roviny BDG a KLM jsou rovnoběžné a také přímky SG a OM jsou rovnoběžné. Konvexní úhly CSG, COM, SGE, $GO'M$, které určují po řadě odchylky rovin BDG a ABC, KLM a ABC, BDG a EFG, KLM a EFG, jsou navzájem shodné (souhlasné a střídavé úhly při rovnoběžkách).



Obr. 83

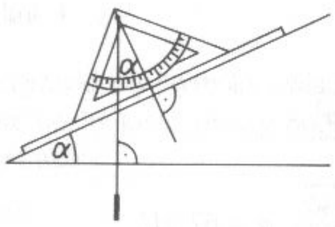


Obr. 84

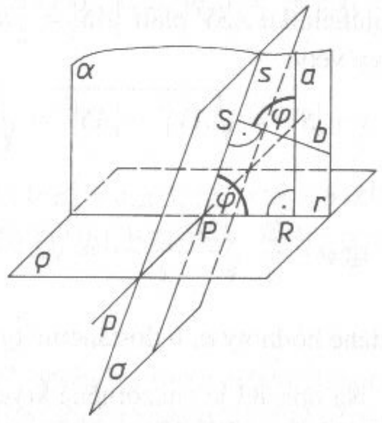
Předcházející úvahu můžeme zobecnit:

Jsou-li roviny ρ a ρ' a také σ a σ' rovnoběžné, pak $|\sphericalangle \rho'\sigma'| = |\sphericalangle \rho\sigma|$.

V praxi, zejména v geodézii a v geologii, se často měří sklon nějaké roviny, tj. odchylka této roviny a vodorovné roviny. Jde např. o měření sklonu silnice, železniční tratě, násypů u tratě, pole na svahu. Měření se může provádět pomocí latě, libely a úhloměru (obr. 84) nebo jednoduchým přístrojem, tzv. svahoměrem (obr. 85). Svahoměrem se měří odchylka svislé přímky a přímky kolmé k uvažované rovině.



Obr. 85



Obr. 86

I v analytické geometrii se počítá odchylka dvou rovin s využitím přímek k rovinám kolmých. Na obr. 86 je odchylka rovin ρ, σ rovna odchylce přímek a, b. Přitom $a \perp \rho$, $b \perp \sigma$.

Odchylka přímky a roviny je nejmenší z odchylek této přímky a přímek roviny. A jak tuto nejmenší odchylku najdeme? Řešme následující příklad.

Příklad 2

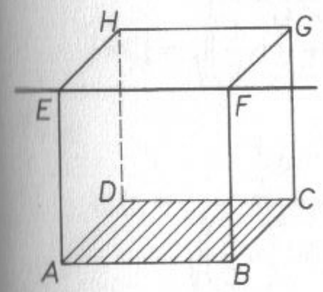
Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete odchylku roviny *ABC* a přímky

a) *EF*, b) *BF*, c) *BH*.

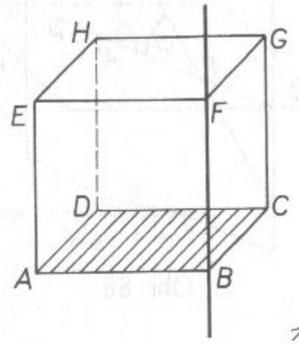
Řešení

a) (obr. 87a) Přímka *EF* je s rovinou *ABC* rovnoběžná. Odchylka přímky *EF* a roviny *ABC* je rovna odchylce přímky *EF* a např. přímky *AB*, je tedy 0°.

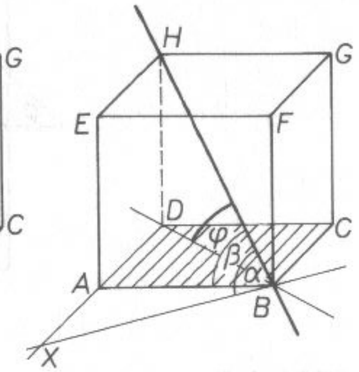
b) (obr. 87b) Přímka *BF* je k rovině *ABC* kolmá. Je tedy kolmá ke všem přímkám roviny *ABC*, tj. odchylka přímky *BF* a libovolné přímky roviny *ABC* je 90°. Odchylka přímky *BF* a roviny *ABC* je proto také 90°.



Obr. 87a



Obr. 87b



Obr. 87c

c) (obr. 87c) Při hledání odchylky přímky *BH* a roviny *ABC* si stačí všímat jen těch přímek roviny *ABC*, které procházejí bodem *B*. Nejmenší je odchylka přímky *BH* a přímky *BD*. Proto je odchylka těchto dvou přímek rovna odchylce přímky *BH* a roviny *ABC*.

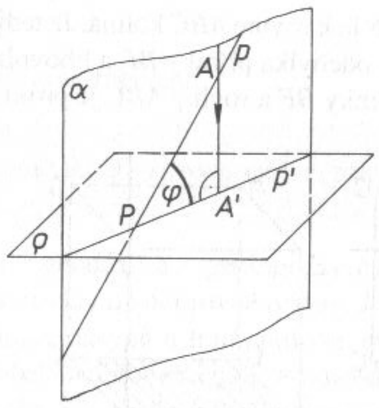
? Porovnejte odchylky φ, β, α přímky *BH* a přímek *BD*, *AB*, *BX* (*X* je libovolný bod přímky *AD*, $X \neq A$, $X \neq D$). Pracujte s trojúhelníky *DBH*, *ABH* a *XBH*.

Přímka *BD* z příkladu 2c je pravoúhlým průmětem přímky *BH* do roviny *ABC* a také přímka *AB* v příkladu 2a je pravoúhlým průmětem přímky *EF* do roviny *ABC*.

Výsledky příkladu 2 můžeme zobecnit:

> Není-li přímka kolmá k rovině, je **odchylka přímky a roviny** rovna odchylce přímky a jejího pravoúhlého průmětu do této roviny. Odchylka přímky a roviny, k níž je kolmá, je 90° ($\frac{1}{2}\pi$ rad).

Na obr. 88 je odchylka přímky p a roviny ρ rovna odchylce přímek p a p'. Odchylku přímky p a roviny ρ značíme $|\sphericalangle p\rho|$. Přitom je $0° \leqq |\sphericalangle p\rho| \leqq$ $\leqq 90°$ ($0 \text{ rad} \leqq |\sphericalangle p\rho| \leqq \frac{1}{2}\pi$ rad).



Obr. 88

Příklad 3

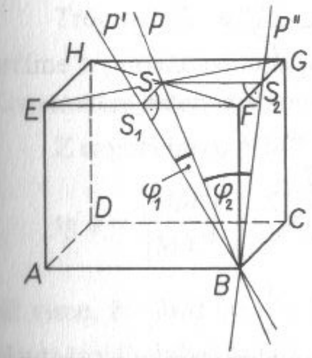
Je dán kvádr $ABCDEFGH$; $|AB| = a = 4{,}5$ cm, $|BC| = b = 3$ cm, $|AE| =$ $= c = 3{,}8$ cm, bod S je střed horní podstavy. Určete konstrukčně i početně odchylku přímky BS a rovin ABF, BCG.

Řešení

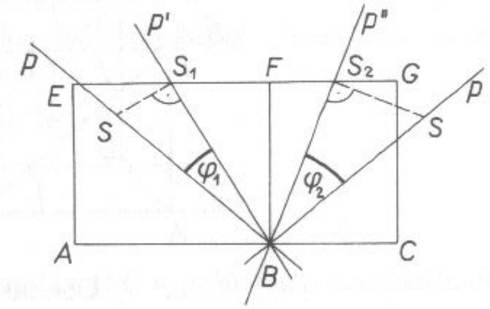
Odchylka přímky BS a roviny ABF je odchylka přímek BS a BS_1 odchylka přímky BS a roviny BCG je odchylka přímek BS a BS_2; body S_1 a S_2 jsou po řadě středy hran EF a FG (obr. 89a).

Konstrukce je zřejmá z obr. 89b. Při výpočtu vystačíme s Pythagorovou větou a funkcí tangens. Z pravoúhlého trojúhelníku BSS_1 ($|\sphericalangle S_1| = 90°$) plyne:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{|S_1S|}{|BS_1|}$$



Obr. 89a



Obr. 89b

Délka úsečky S_1S je $\frac{1}{2}b$, délku úsečky BS_1 určíme z pravoúhlého trojúhelníku BFS_1 ($|\sphericalangle F| = 90°$):

$$|BS_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + c^2}$$

Proto

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\frac{1}{2}b}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + c^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + 4c^2}}.$$

Podobně

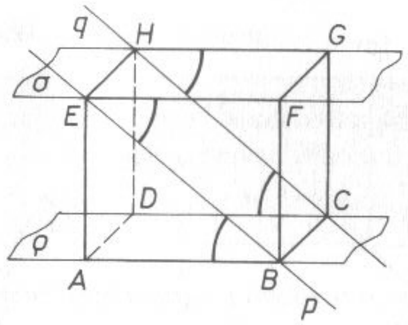
$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{a}{\sqrt{b^2 + 4c^2}}.$$

Pro dané hodnoty a, b, c dostáváme

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{3}{\sqrt{78{,}01}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{4{,}5}{66{,}76}.$$

odkud $\varphi_1 \doteq 18°46'$ a $\varphi_2 \doteq 28°51'$.

Načrtněme si znovu kvádr $ABCDEFGH$ (obr. 90) a vyznačme na něm roviny $\rho = \leftrightarrow ABC$ a $\sigma = \leftrightarrow EFG$ a přímky $p = \leftrightarrow BE$ a $q = \leftrightarrow CH$. Roviny ρ a σ jsou rovnoběžné a také přímky p a q jsou rovnoběžné. Z obrázku je zřejmá shodnost odchylek přímky p a roviny σ, přímky p a roviny ρ, přímky q a roviny ρ, přímky q a roviny σ.



Obr. 90

Nejen v daném případě, ale i obecně pro libovolné přímky p, q a libovolné roviny ρ a σ platí:

Jestliže $\rho \parallel \sigma$, pak $|\sphericalangle p\rho| = |\sphericalangle p\sigma|$.

Jestliže $p \parallel q$, pak $|\sphericalangle p\rho| = |\sphericalangle q\rho|$.

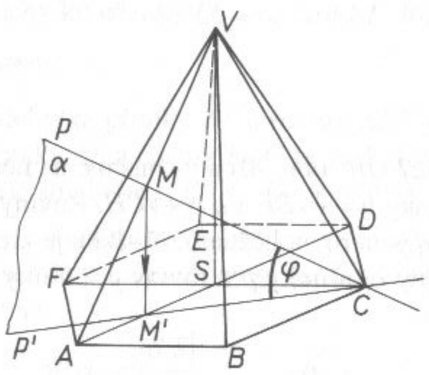
Jestliže $\rho \parallel \sigma$ a $p \parallel q$, pak $|\sphericalangle p\rho| = |\sphericalangle p\sigma| = |\sphericalangle q\rho| = |\sphericalangle q\sigma|$.

Příklad 4

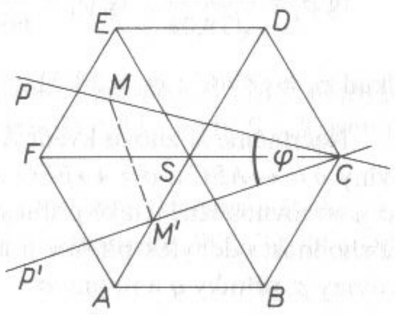
Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$ se středem podstavy S, $|AB| = a = 3{,}5$ cm, $|VS| = v = 6$ cm. Určete odchylku přímky CM (bod M je střed hrany AV) a roviny podstavy. Řešte konstrukčně i početně.

Řešení

Pravoúhlý průmět přímky CM do roviny podstavy je přímka CM'; bod M' je středem úsečky SA. Odchylka přímky CM a roviny podstavy je odchylka φ přímek CM a CM' (obr. 91a).



Obr. 91a



Obr. 91b

Trojúhelník $M'MC$ je pravoúhlý ($|\sphericalangle M'| = 90°$). Délku odvěsny CM' určíme z pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$. Délka odvěsny MM' je $\frac{1}{2}v$. Konstrukční řešení znázorňuje obr. 91b.

Z trojúhelníku $MM'C$ vyplývá, že

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|MM'|}{|M'C|}.$$

Již víme, že $|MM'| = \frac{1}{2}v$. Délku úsečky $M'C$ vypočítáme pomocí kosinové věty z trojúhelníku $M'SC$:

$$|M'C|^2 = |M'S|^2 + |SC|^2 - 2 \,.\, |M'S| \,.\, |SC| \,.\, \cos 120°$$

neboli

$$|M'C|^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

tedy

$$|M'C| = \frac{1}{2}a\sqrt{7}$$

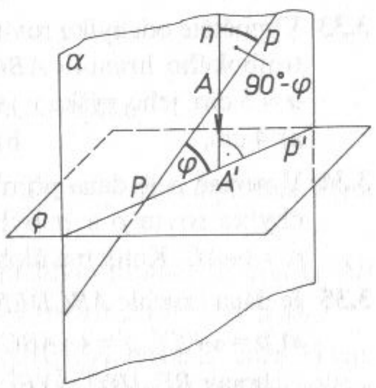
Proto

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{a \cdot \sqrt{7}}.$$

a pro dané hodnoty a, v dostáváme

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{6}{3{,}5\sqrt{7}} \quad \text{a} \quad \varphi \doteq 32°56'.$$

Odchylku přímky p a roviny ρ můžeme také určit pomocí přímky kolmé k rovině ρ. Na obr. 92 je bodem A přímky p vedena kolmice n k rovině ρ. Z pravoúhlého trojúhelníku APA' ($|\sphericalangle A'| = 90°$) je zřejmé, že $|\sphericalangle PAA'| = 90° - \varphi$. Všechny přímky kolmé k dané rovině jsou rovnoběžné, a tedy libovolná přímka kolmá k rovině a přímka p mají odchylku $90° - \varphi$. Tímto způsobem zjišťujeme odchylku přímky a roviny v analytické geometrii.



Obr. 92

Úlohy

3.26 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete odchylku rovin

a) ABC, BDH, b) ABE, ABH,

c) ABC, BEG, * d) ACG, BCH.

3.27 Body M, N, L jsou po řadě středy hran BC, CD, CG krychle $ABCDEFGH$, bod P je bodem hrany BC, $|BP| : |PC| = 1 : 4$. Určete odchylku roviny ABC a rovin

a) MNG, b) BNL, * c) NPG.

Úlohu řešte početně i konstrukčně.

3.28 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Body P, Q jsou po řadě středy hran BF, DH a body R, T dělí hranu DH na třetiny; bod T je blíž bodu D. Porovnejte odchylky rovin

a) ACF, ACH, b) ACP, ACQ,

c) ACF, ACT, d) ACP, ACR.

3.29 Výška pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je rovna délce jeho podstavných hran. Vypočtěte odchylku rovin dvou

a) protějších stěn, b) sousedních stěn.

3.30 Podstavou kolmého čtyřbokého jehlanu je kosočtverec. Porovnejte odchylky rovin stěn jehlanu od roviny jeho podstavy.

3.31 V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ je $|AB| = 6{,}2$ cm, $|AV| = 5{,}3$ cm. Bodem B prochází rovina ρ kolmá k přímce BV, bodem D prochází rovina σ kolmá k přímce DV. Vypočtěte odchylku rovin ρ a σ.

3.32 Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$. Délka jeho podstavných hran je a, výška $v = \frac{3}{2}a$. Určete odchylku rovin

a) ABC, ACV, b) AFV, EFV, c) ABV, EFV.

* **3.33** Vypočtěte odchylku rovin ABC' a BCA' určených vrcholy pravidelného trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$. Délka podstavné hrany hranolu je $a = 5$ cm, jeho výška v je

a) 4 cm, b) 7 cm.

3.34 V rovině ρ je dána přímka p. Přímkou p veďte rovinu σ tak, aby odchylka rovin ρ a σ byla 45°. Znázorněte na krychli: $\rho = \leftrightarrow ABC$, $p = \leftrightarrow AC$. Kolik má úloha řešení?

3.35 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete odchylku přímky p a roviny ρ:

a) $p = \leftrightarrow XY$, $\rho = \leftrightarrow ABC$; bod X je středem hrany EH a bod Y je bodem hrany BF, $|BY| : |YF| = 1 : 3$,

b) $p = \leftrightarrow QR$, $\rho = \leftrightarrow ABE$; bod Q je středem hrany BF, bod R je bodem hrany GH tak, že $|HR| = \frac{1}{3}|GH|$.

c) $p = \leftrightarrow CE$, $\rho = \leftrightarrow BDM$; bod M je středem hrany CG.

Úlohu řešte početně i konstrukčně.

3.36 Odchylka tělesové úhlopříčky kvádru od roviny jeho podstavy je 45°. Určete vztah mezi jeho délkou, šířkou a výškou.

3.37 Je dán kvádr $ABCDEFGH$, $|AB| = 5$ cm, $|BC| = 3$ cm, $|AE| = 6$ cm. Vypočtěte odchylku přímky BG a roviny BCE.

3.38 Podstavou kolmého čtyřbokého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ je kosočtverec $ABCD$ ($|AB| = a$, $|\sphericalangle BAD| = \alpha = 60°$), výška hranolu je v. Určete odchylku přímky p a roviny ρ:

a) $p = \leftrightarrow AC'$, $\rho = \leftrightarrow A'B'C'$,

b) $p = \leftrightarrow BM$, $\rho = \leftrightarrow ABC$; bod M je středem hrany $A'D'$,

* c) $p = \leftrightarrow CA'$, $\rho = \leftrightarrow BCC'$.

3.39 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Vypočtěte odchylku přímky BV a roviny ABC, je-li

a) odchylka přímky BV a přímky AB 75°,

b) délka podstavné hrany 15 cm a obsah trojúhelníku ACV 127,5 cm^2,

c) délka všech jeho hran stejná.

* **3.40** Podstavou kolmého čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je obdélník $ABCD$ ($|AB| = a$, $|BC| = b$), jeho výška je v. Určete odchylku přímky BD a roviny BCV.

3.41 Bod S je středem podstavy pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$, $|AB| = a = 2{,}5$ cm, $|VS| = v = 3$ cm. Bod M je středem hrany AV. Konstrukčně určete odchylku přímky p a roviny ρ:

a) $p = \leftrightarrow AV$, $\rho = \leftrightarrow ABC$

b) $p = \leftrightarrow VS$, $\rho = \leftrightarrow AFV$

c) $p = \leftrightarrow BM$, $\rho = \leftrightarrow ABC$

3.42 Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Určete odchylku

a) rovin dvou stěn čtyřstěnu,

b) přímky, která obsahuje hranu čtyřstěnu, a roviny stěny čtyřstěnu, která tuto hranu neobsahuje.

3.43 Určete délku úsečky $A'B'$, která je pravoúhlým průmětem úsečky AB do roviny ρ, je-li α odchylka přímky AB a roviny ρ ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$).

3.44 Stříška krmítka pro ptáky má tvar obdélníku o rozměrech 25 cm a 35 cm. Určete obsah vodorovné plochy chráněné před sněhem, je-li sklon stříšky vzhledem k vodorovné rovině 20°.

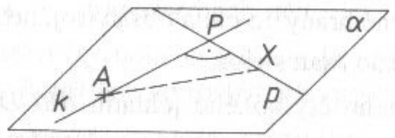
3.45 Na vodorovném terénu byly v místech A, B, C provedeny pokusné vrty hluboké: v místě A 255 m, v místě B 165 m a v místě C 35 m. Vrt B je vzdálen 270 m východně od vrtu A a vrt C je od vrtu A vzdálen 220 m na jih. V uvedených hloubkách se narazilo při vrtání na geologickou vrstvu. Určete odchylku roviny vrstvy a vodorovné roviny.

3.4 Vzdálenost bodu od přímky a od roviny

Vzdálenost bodů A, B je délka úsečky AB; značíme ji $|AB|$.

Vzdálenost bodu od přímky můžeme určit jako vzdálenost bodu od přímky v rovině, neboť bod a přímka v prostoru určují rovinu (pokud bod na přímce neleží). A to již umíme z planimetrie.

Vzdálenost bodu A od přímky p je nejmenší ze všech vzdáleností bodu A od jednotlivých bodů X přímky p. Je to délka úsečky AP, kde P je pata kolmice k vedené v rovině Ap bodem A k přímce p (obr. 93). Vzdálenost bodu A od přímky p značíme $|Ap|$. Je-li $A \in p$, je $|Ap| = 0$.



Obr. 93

Příklad 1

Je dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCDA'B'C'D'$; $|AB| = a = 4$ cm, $|AA'| = v = 5{,}5$ cm. Bod M je střed hrany $A'D'$. Vypočtěte vzdálenost bodu B od přímky

a) AD, b) AC, c) $C'D'$, d) $A'C'$, e) AC', f) CM.

Řešení

a) Bod B a přímka AD leží v rovině dolní podstavy (obr. 94a);

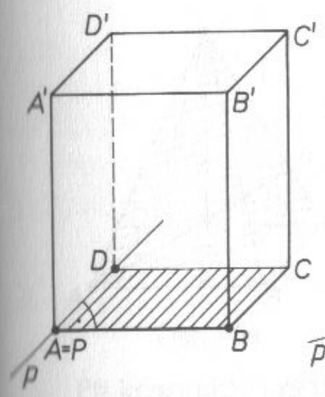
$|B \leftrightarrow AD| = a$; $|B \leftrightarrow AD| = 4$ cm.

b) I v tomto případě leží bod B a přímka AC v rovině ABC (obr. 94b);

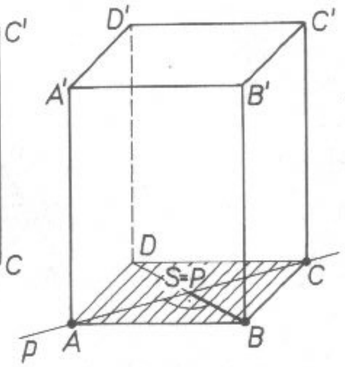
$|B \leftrightarrow AC| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; $|B \leftrightarrow AC| \doteq 2{,}82$ cm.

c) Vzdálenost bodu B od přímky $C'D'$ je rovna délce přepony v pravoúhlém trojúhelníku BCC' ($|\sphericalangle C| = 90°$, obr. 94c);

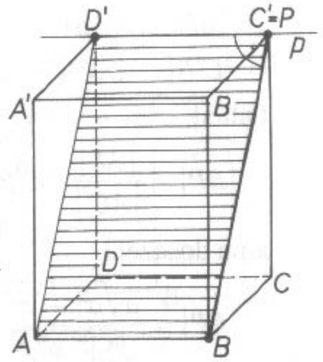
$|B \leftrightarrow C'D'| = |BC'| = \sqrt{a^2 + v^2}$; $|B \leftrightarrow C'D'| \doteq 6{,}80$ cm.



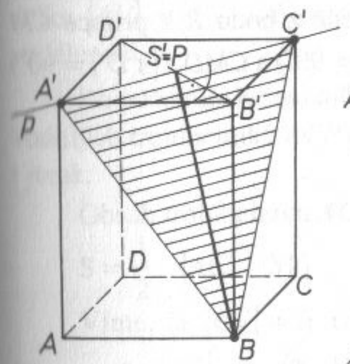
Obr. 94a



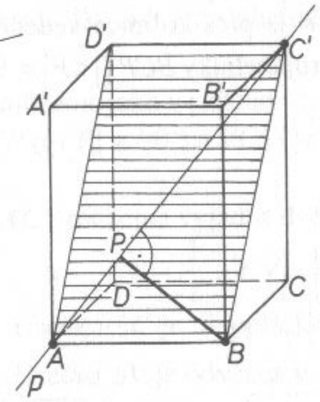
Obr. 94b



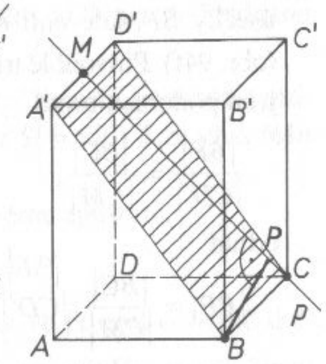
Obr. 94c



Obr. 94d



Obr. 94e



Obr. 94f

d) Vzdálenost bodu B od přímky $A'C'$ je rovna délce úsečky BS', kde bod S' je střed horní podstavy (obr. 94d). Úsečka BS' je výškou v rovnoramenném trojúhelníku $C'A'B$ neboli odvěsnou v pravoúhlém trojúhelníku $BA'S'$ ($|\sphericalangle S'| = 90°$): $|A'S'| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, $|A'B| = \sqrt{a^2 + v^2}$. Podle Pythagorovy věty

$$|BS'| = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + v^2}.$$

V daném hranolu je $|BS'| \doteq 6{,}18$ cm.

e) Bod B a přímka AC' určují rovinu ABC'; průnikem této roviny a hranolu je obdélník $ABC'D'$ (obr. 94e). Vzdálenost bodu B od přímky AC' je rovna délce úsečky BP, kde bod P je pata výšky v pravoúhlém trojúhelníku ABC' ($|\sphericalangle B| = 90°$). V tomto trojúhelníku $|AB| = a$, $|BC'| = \sqrt{a^2 + v^2}$, $|AC'| = \sqrt{2a^2 + v^2}$. Trojúhelníky ABP a $AC'B$ jsou podobné, proto

$$\frac{|BP|}{|C'B|} = \frac{|AB|}{|AC'|}.$$

Odtud

$$|BP| = \frac{|AB|}{|AC'|} \cdot |C'B|$$

a po dosazení

$$|BP| = \frac{a\sqrt{a^2 + v^2}}{\sqrt{2a^2 + v^2}}.$$

Pro dané hodnoty a a v dostáváme $|BP| \doteq 3{,}45$ cm.

f) Vzdálenost bodu B od přímky CM hledáme v rovině BCD' jako délku úsečky BP, kde bod P je pata kolmice vedené z bodu B k přímce CM (obr. 94f). Pravoúhlé trojúhelníky BCP ($|\sphericalangle P| = 90°$) a CMD' ($|\sphericalangle D'| = 90°$) jsou podobné, proto

$$\frac{|BP|}{|CD'|} = \frac{|BC|}{|CM|},$$

odtud

$$|BP| = \frac{|BC|}{|CM|} \cdot |CD'|.$$

Protože

$$|BC| = a, |CD'| = \sqrt{a^2 + v^2}, |CM| = \sqrt{a^2 + v^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2 + 4v^2}{2}},$$

dostaneme po úpravě

$$|BP| = \frac{2a\sqrt{a^2 + v^2}}{\sqrt{5a^2 + 4v^2}}$$

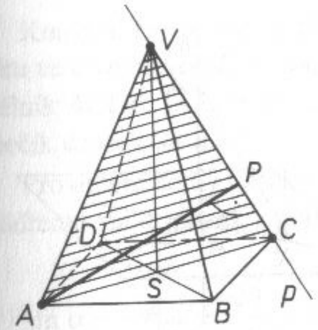
a pro dané hodnoty a a v $|BP| \doteq 3{,}84$ cm.

Příklad 2

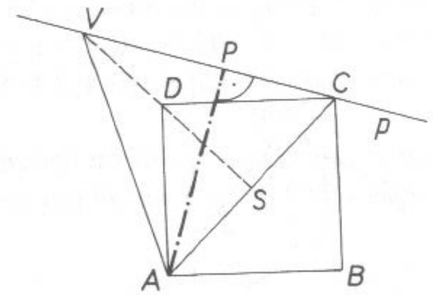
Určete vzdálenost vrcholu A pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ od přímky CV, je-li $|AB| = a = 4$ cm, $|AV| = b = 6$ cm. Řešte konstrukčně i početně.

Řešení

Bod A a přímka CV určují rovinu ACV. Vzdálenost bodu A od přímky CV je rovna výšce $v_a = |AP|$ v rovnoramenném trojúhelníku ACV (obr. 95a).



Obr. 95a



Obr. 95b

Při konstrukčním řešení (obr. 95b) sestrojíme nejdříve čtverec $ABCD$, $|AB| = a = 4$ cm, pak rovnoramenný trojúhelník ACV, jehož ramena mají délku $|AV| = |CV| = 6$ cm. Výška AP v trojúhelníku ACV určuje hledanou vzdálenost.

Při početním řešení můžeme jako v příkladu 1e, f využít podobnost pravoúhlých trojúhelníků ACP ($|\sphericalangle P| = 90°$) a VCS ($|\sphericalangle S| = 90°$). Lze však řešit i jinak.

Obsah trojúhelníku ACV můžeme vyjádřit dvěma způsoby:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |SV| \quad \text{a} \quad S = \frac{1}{2} \cdot |CV| \cdot |AP|$$

Víme, že $|CV| = b$. Úsečka AC je úhlopříčka ve čtverci o straně délky a, proto $|AC| = a\sqrt{2}$. Úsečka SV je odvěsna v pravoúhlém trojúhelníku VCS a podle Pythagorovy věty platí $|SV| = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2b^2 - a^2}}{\sqrt{2}}$.

Je tedy jednak

$$S = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2b^2 - a^2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}a\sqrt{2b^2 - a^2},$$

jednak

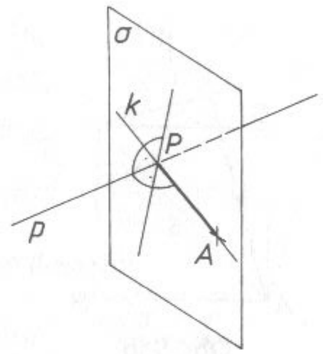
$$S = \frac{1}{2}b \cdot |AP|.$$

Porovnáním obou vztahů dostaneme:

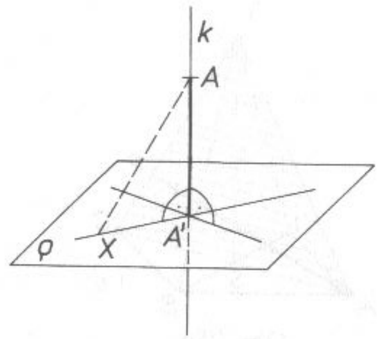
$$|AP| = \frac{a\sqrt{2b^2 - a^2}}{b}$$

V daném jehlanu je $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, a tedy $|AP| = \frac{4\sqrt{14}}{3}$ cm $\doteq 4{,}99$ cm.

Patu P kolmice k vedené bodem A k přímce p v rovině Ap můžeme určit jako průsečík přímky p a roviny σ vedené bodem A a kolmé k dané přímce p (obr. 96). V příkladu 1a je rovina $\sigma = \leftrightarrow ABB'$, v 1b, d je $\sigma = \leftrightarrow BDD'$, v 1c je $\sigma = \leftrightarrow BCC'$. V příkladu 1e, f i v příkladu 2 je určení roviny σ obtížnější.



Obr. 96



Obr. 97

Vzdálenost bodu od přímky určujeme pomocí roviny kolmé k dané přímce a procházející daným bodem zejména v analytické geometrii.

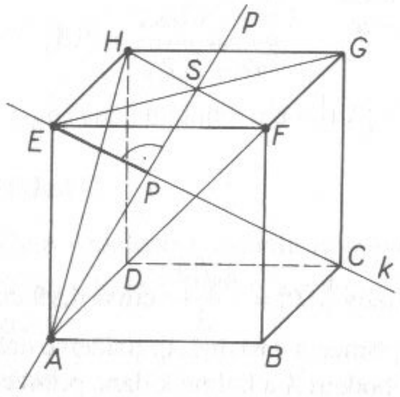
Vzdálenost bodu A od roviny ρ je vzdálenost bodu A a jeho pravoúhlého průmětu A' do roviny ρ (obr. 97); označujeme $|A\rho|$. Je-li $A \in \rho$, je $|A\rho| = 0$. Vzdálenost bodu A od roviny ρ je nejmenší ze všech vzdáleností bodu A od jednotlivých bodů X roviny ρ.

Příklad 3

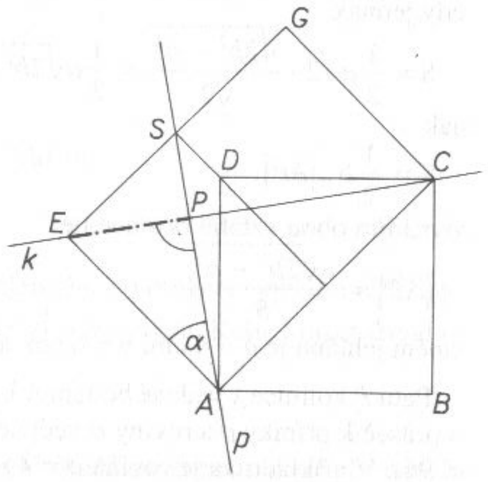
Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky $a = 5$ cm. Určete vzdálenost bodu E od roviny AFH. Řešte početně i konstrukčně.

Řešení

Z příkladu 3a v článku 3.2 víme, že přímka EC je kolmá k rovině AFH, pata kolmice je bod P. Hledaná vzdálenost je délka úsečky EP (obr. 98a).



Obr. 98a



Obr. 98b

Konstrukční řešení je na obr. 98b. Úsečku AC sestrojíme jako úhlopříčku ve čtverci $ABCD$ o straně délky $a = 5$ cm. Nad úsečkou AC sestrojíme obdélník $ACGE$, $|AE| = a = 5$ cm. Bod S je středem úsečky EG a bod P je průsečík úseček SA a CE.

Pro určení délky úsečky EP označme α velikost konvexního úhlu EAS. Vyjádřeme $\sin\alpha$ jednak z pravoúhlého trojúhelníku ASE ($|\sphericalangle E| = 90°$):

$$\sin\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

jednak z pravoúhlého trojúhelníku AEP ($|\sphericalangle P| = 90°$):

$$\sin\alpha = \frac{|EP|}{|AE|} = \frac{|EP|}{a}$$

Porovnáním obou vyjádření $\sin\alpha$ dostaneme:

$$|EP| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Pro $a = 5$ cm je $|EP| = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm $\doteq 2{,}89$ cm.

Pomocí vzdálenosti bodu od roviny lze vyslovit další **kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny a rovnoběžnosti dvou rovin**:

Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ, jestliže lze na přímce p najít dva různé body ležící v témže poloprostoru ohraničeném rovinou ρ, které mají od roviny ρ stejnou vzdálenost.

Dvě roviny ρ a σ jsou rovnoběžné, jestliže lze v rovině σ najít tři různé body, které neleží v téže přímce, ale leží v témže poloprostoru s hraniční rovinou ρ a které mají od roviny ρ stejnou vzdálenost.

Úlohy

3.46 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky

a) DH, b) FG, c) FH, d) BH.

3.47 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky $a = 4$ cm; bod M je středem hrany AB a bod N je další bod hrany AB, pro který platí $|AN| : |NB| = 3 : 1$. Určete vzdálenost bodu G od přímky

a) HM, * b) DN.

Úlohu řešte početně i konstrukčně.

3.48 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Bod P je středem hrany BC, bod Q bodem polopřímky FG tak, že bod G je středem úsečky FQ, bod R leží na polopřímce BF tak, že bod F je středem úsečky BR. Určete vzdálenost bodu

a) Q, b) R

od přímky DP.

3.49 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Bod X je bodem polopřímky DC a bod C je středem úsečky DX. Dokažte, že vzdálenost bodu X od přímky BH je rovna délce úsečky BX.

3.50 Všechny hrany pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ mají délku a. Bod S je středem podstavy, body M, N jsou po řadě středy úseček AV a CV a bod P leží na úsečce VS, $|VP| : |PS| = 2 : 1$. Určete vzdálenost bodu

a) S, b) V, c) P, d) N, e) M

od přímky BC.

3.51 Podstavou kolmého čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je obdélník $ABCD$ s rozměry $|AB| = a = 4$ cm, $|BC| = b = 3$ cm, výška jehlanu je $v = 5$ cm. Určete vzdálenosti jeho vrcholů B, C, D od přímky AV. Řešte početně i konstrukčně.

* **3.52** Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má podstavnou hranu délky a, výška jehlanu $v = a$. Bod K je středem hrany CV, bod L je středem hrany BC. Který z bodů B, L, C má od přímky AK nejkratší vzdálenost?

3.53 Bod M je středem hrany AV pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$, $|AB| = a$, $v = 2a$. Určete vzdálenost bodu M od přímky

a) AB, b) CV.

3.54 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Porovnejte vzdálenosti

a) bodu B od roviny ACF, b) bodu D od roviny ACH,

c) bodu F od roviny BEG, d) bodu A od roviny BDG.

3.55 Pravidelný čtyřstěn $ABCD$ má hranu délky $a = 5$ cm. Vypočtěte vzdálenost bodu D od roviny ABC.

3.56 Body M, N, P jsou po řadě středy hran EF, FG, GH krychle $ABCDEFGH$. Délka hrany krychle $a = 4$ cm. Určete vzdálenost

a) bodu M od roviny ABG, b) bodu C od roviny ANP.

* **3.57** Je dána krychle $ABCDEFGH$. Konstrukčně určete vzdálenost bodu E od roviny HKL; body K, L jsou libovolné body hran AE a EF.

* **3.58** Délka podstavné hrany pravidelného čtyřbokého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ je a, délka bočních hran je c. Určete vzdálenost bodu B od roviny

a) ACB',

b) ACK; bod K je středem hrany $A'B'$,

c) ALM; body L, M jsou po řadě středy hran CC', $A'D'$.

3.59 V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ je délka podstavné hrany a, výška jehlanu je v. Určete vzdálenost bodu B od roviny

a) ACV, b) CDV,

c) ρ, která prochází středem O hrany CV a je rovnoběžná s rovinou ADV.

3.60 V rovině ρ je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami délek a, b. Vzdálenost bodu M, který v rovině ρ neleží, od bodů A, B, C jsou $|MA| = |MB| = |MC| = m$. Vypočtěte vzdálenost bodu M od roviny ρ.

3.61 Přepona AB o délce $|AB| = 21$ cm pravoúhlého trojúhelníku ABC leží v rovině ρ, vrchol C v rovině ρ neleží. Pata kolmice vedené bodem C k rovině ρ má od bodu A vzdálenost 12 cm a od bodu B vzdálenost 13 cm. Vypočtěte vzdálenost bodu C od roviny ρ.

3.62 Podstavou kolmého čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je kosočtverec $ABCD$, $|AB| = a = 12$ cm, $|\sphericalangle BAD| = 60°$. Délka boční hrany BV jehlanu je $|BV| = b = 10$ cm. Vypočtěte vzdálenost jeho vrcholu V od roviny podstavy (jeho výšku).

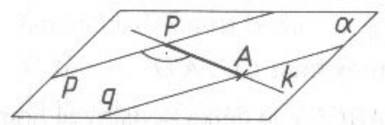
3.63 Určete množinu všech bodů prostoru, které mají od roviny ρ vzdálenost v.

3.64 Vzdálenost bodu A od roviny ρ je a, vzdálenost bodu B od roviny ρ je b. Určete vzdálenost středu úsečky AB od roviny ρ.

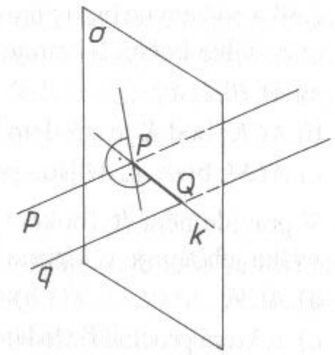
3.5 Vzdálenosti přímek a rovin

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek je vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky. Vzdálenost rovnoběžných přímek můžeme určit jako vzdálenost přímek v rovině jimi určené (obr. 99a) nebo pomocí roviny kolmé k oběma přímkám (obr. 99b). Vzdálenost přímek p, q značíme $|pq|$.

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny (obr. 100); vzdálenost rovnoběžných rovin ρ a σ značíme $|\rho\sigma|$.

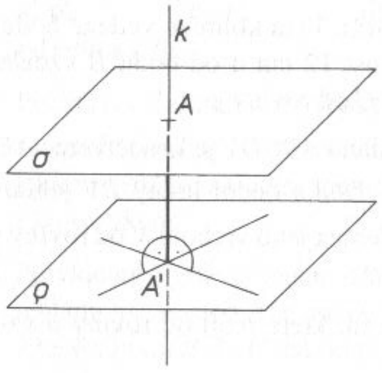


Obr. 99a

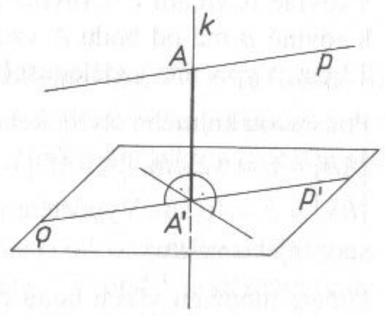


Obr. 99b

Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné je vzdálenost libovolného bodu přímky od této roviny (obr. 101); vzdálenost přímky p od roviny ρ značíme $|p\rho|$.



Obr. 100



Obr. 101

Je-li dána krychle $ABCDEFGH$ o délce hrany a, pak

- vzdálenost přímek $p = \leftrightarrow AB$, $q = \leftrightarrow GH$ je rovna vzdálenosti např. bodu B od přímky GH, tj. $|pq| = a\sqrt{2}$,
- vzdálenost rovin $\rho = \leftrightarrow ABC$ a $\sigma = \leftrightarrow EFG$ je rovna vzdálenosti např. bodu E od roviny ABC, tj. $|\rho\sigma| = a$,
- vzdálenost přímky $p = \leftrightarrow EG$ od roviny $\rho = \leftrightarrow ABC$ je rovna vzdálenosti např. bodu E od roviny ABC, tj. $|p\rho| = a$.

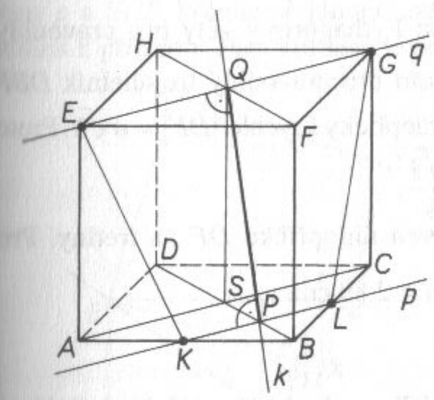
Příklad 1

Krychle $ABCDEFGH$ má hranu délky $a = 5$ cm, body K a L jsou po řadě středy hran AB a BC. Určete konstrukčně i početně

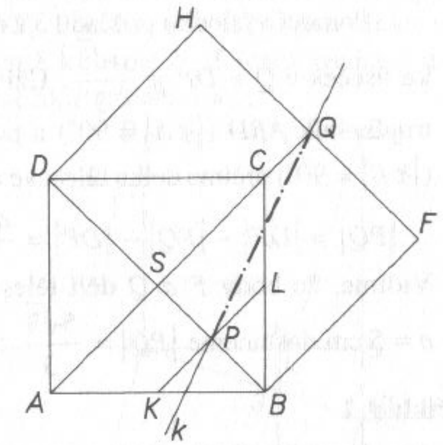
a) vzdálenost přímek EG a KL, b) vzdálenost rovin ACH a BEG.

Řešení

a) Přímky EG a KL jsou rovnoběžné, úsečky EK a GL jsou shodné, a proto je čtyřúhelník $GEKL$ rovnoramenný lichoběžník. Hledaná vzdálenost je rovna jeho výšce $|PQ|$ (obr. 102a). Konstrukční řešení je zřejmé z obr. 102b.



Obr. 102a

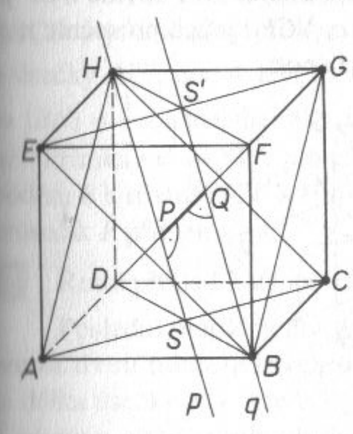


Obr. 102b

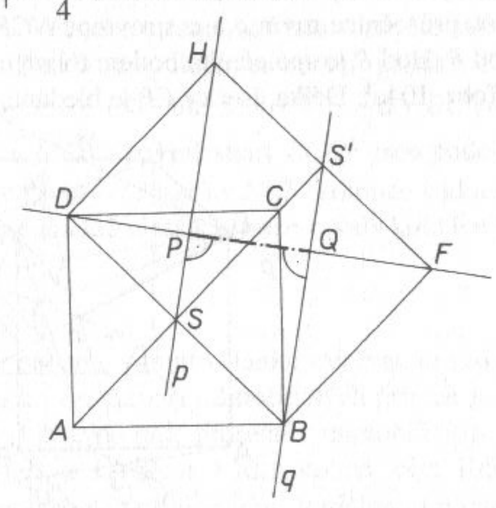
Pro výpočet použijeme Pythagorovu větu pro pravoúhlý trojúhelník PQS, ($|\sphericalangle S| = 90°$, bod S je střed dolní stěny krychle):

$$|PQ| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}a\sqrt{2}$$

a pro $a = 5$ cm dostaneme $|PQ| = \frac{15}{4}\sqrt{2}$ cm $\doteq 5{,}3$ cm.



Obr. 103a



Obr. 103b

b) Z příkladu 3b v článku 3.2 víme, že přímka DF je kolmá k rovině BEG, a protože jsou roviny BEG a ACH rovnoběžné, je přímka DF kolmá i k rovině ACH. Hledaná vzdálenost je rovna délce úsečky PQ, kde body P a Q jsou po řadě průsečíky přímky DF s rovinami ACH a BEG (obr. 103a). Konstrukční řešení je na obr. 103b.

Pomocí výsledku příkladu 3 z minulého článku lze zdůvodnit, že délka úseček FQ a DP je $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Užitím Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník ABD ($|\sphericalangle A| = 90°$) a potom pro pravoúhlý trojúhelník DBF ($|\sphericalangle B| = 90°$) určíme délku tělesové úhlopříčky krychle $|DF| = a\sqrt{3}$. Proto

$$|PQ| = |DF| - |FQ| - |DP| = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

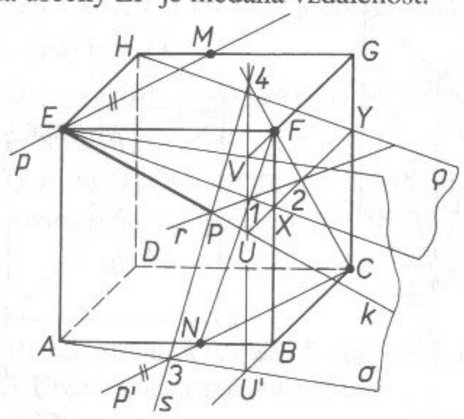
Vidíme, že body P a Q dělí tělesovou úhlopříčku DF na třetiny. Pro $a = 5$ cm dostaneme $|PQ| = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm $\doteq 2{,}89$ cm.

Příklad 2

Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a, body M a N leží po řadě na jejích hranách GH a AB; $|HM| : |MG| = 1 : 2$, $|AN| : |NB| = 2 : 1$. Určete konstrukčně vzdálenost přímky EM od roviny NCF (volte $a = 5$ cm).

Řešení

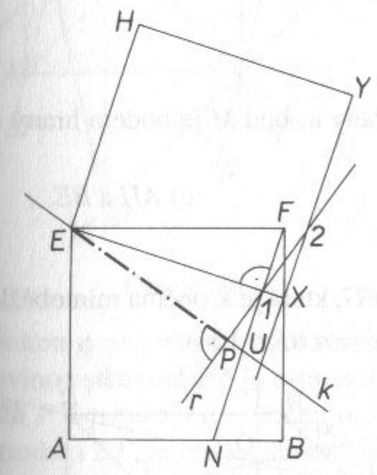
Přímka EM je rovnoběžná s rovinou NCF ($\leftrightarrow EM \parallel \leftrightarrow CN$, $\leftrightarrow CN \subset \leftrightarrow NCF$). Vzdálenost přímky EM od roviny NCF je rovna vzdálenosti bodu E od roviny NCF. Kolmici k vedenou bodem E k rovině NCF určíme jako průsečnici rovin ρ ($E \in \rho$, $\rho \perp \leftrightarrow NF$) a σ ($E \in \sigma$, $\sigma \perp \leftrightarrow NC$). Přímky $r = \leftrightarrow 12$ a $s = \leftrightarrow 34$ jsou průsečnice rovin ρ a σ s rovinou NCF. Pata kolmice k k rovině NCF je bod P. Bod P je společným bodem tří rovin ρ, σ, NCF i jejich průsečnic r, s, k (obr. 104a). Délka úsečky EP je hledaná vzdálenost.



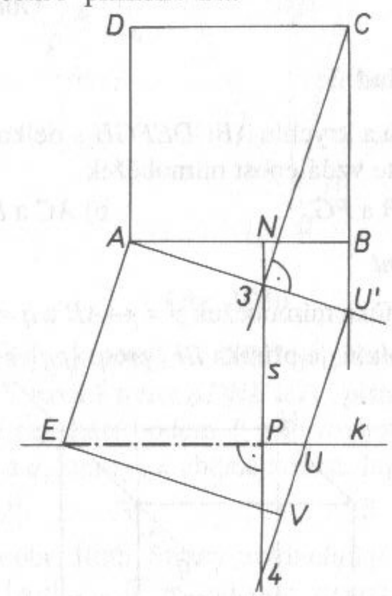
Obr. 104a

V konstrukčním řešení můžeme využít buď rovinu ρ (obr. 104b), nebo σ (obr. 104c).

V rovině ρ leží čtyřúhelník $EXYH$. Je to obdélník, jeho strana EX leží ve stěně $ABFE$ a je kolmá k přímce NF. Bod 1 je společným bodem úseček EX a NF, bod 2 je bodem úsečky XY, $|X2| : |2Y| = 1 : 2$ (plyne z podobných trojúhelníků BCF a $X2F$ ve stěně $BCGF$). Přímka $r = \leftrightarrow 12$ je průsečnice roviny ρ a NCF, kolmice k jdoucí bodem E k rovině NCF leží v rovině ρ a je kolmá k přímce r. Pata kolmice je průsečík P přímek r a k.



Obr. 104b

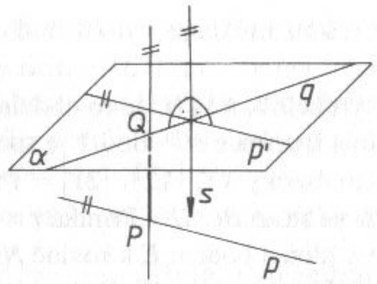


Obr. 104c

V rovině σ leží obdélník $AU'VE$, jeho strana AU' leží v rovině stěny $ABCD$ a je kolmá k přímce CN. Bod 3 je společným bodem přímky CN a úsečky AU', bod 4 leží na polopřímce $U'V$ tak, že $|U'4| = \frac{4}{3}a$ ($|BU'| = |BN| = \frac{1}{3}a$ a trojúhelníky BCF a $U'C4$ v rovině stěny $BCGF$ jsou podobné). Přímka $s = \leftrightarrow 34$ je průsečnice roviny σ a roviny NCF, kolmice k jdoucí bodem E k rovině NCF leží v rovině σ a je kolmá k přímce s. Pata kolmice je průsečík P přímek s a k.

? Řešte příklad 2 výpočtem.

Poslední problém, kterým se budeme v tomto článku zabývat, je **vzdálenost dvou mimoběžných přímek**. Vzdálenost mimoběžných přímek p, q je délka úsečky PQ, kde body P, Q jsou po řadě průsečíky mimoběžek p, q s takovou příčkou mimoběžek, která je k oběma z nich kolmá (obr. 105); značíme stejně jako v případě rovnoběžných přímek $|pq|$. Vzdálenost mimoběžek je nejmenší ze vzdáleností bodů jedné a druhé mimoběžky.



Obr. 105

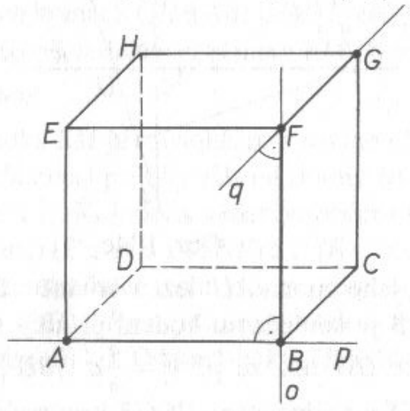
Příklad 3

Je dána krychle *ABCDEFGH* s délkou hrany *a*, bod *M* je bodem hrany *EH*. Určete vzdálenost mimoběžek

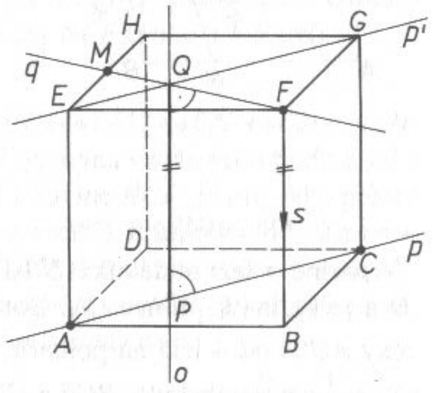
a) *AB* a *FG*, b) *AC* a *FM*, c) *AH* a *BE*.

Řešení

a) Příčka mimoběžek $p = \leftrightarrow AB$ a $q = \leftrightarrow FG$, která je k oběma mimoběžkám kolmá, je přímka *BF*, proto $|pq| = |BF| = a$ (obr. 106).



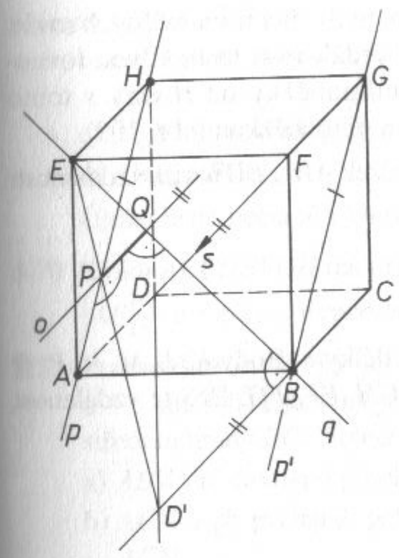
Obr. 106



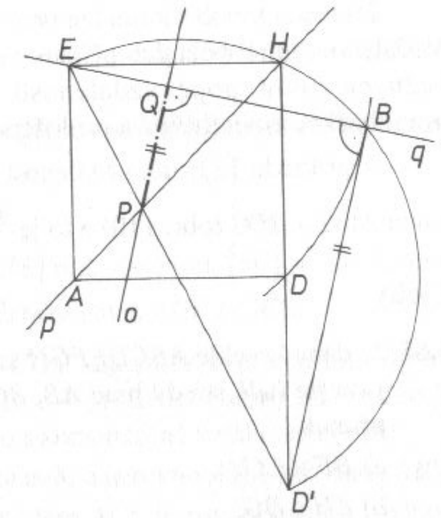
Obr. 107

b) Směr kolmý k oběma mimoběžkám je určen např. přímkou *BF*. Rovina obsahující přímku *AC* a rovnoběžná s přímkou *BF* je rovina *ACG*, její průsečík s přímkou *FM* je bod *Q*. Bodem *Q* prochází příčka *o* daných mimoběžek, která je k oběma mimoběžkám kolmá; $|pq| = |PQ| = a$ (obr. 107).

c) Víme, že přímka *DF* je kolmá k rovině *BEG*. V této rovině leží jedna z daných mimoběžek, přímka $q = \leftrightarrow BE$, a přímka *p'* rovnoběžná s druhou mimoběžkou $p = \leftrightarrow AH$, přímka *BG*. Podle definice kolmosti přímky a roviny je přímka *DF* kolmá ke všem přímkám roviny *BEG*, určuje tedy směr kolmý k oběma mimoběžkám (obr. 108a).



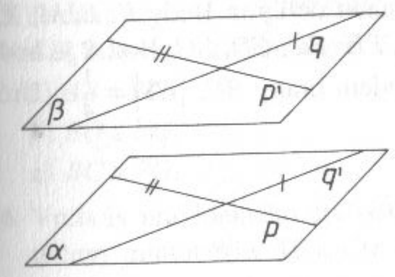
Obr. 108a



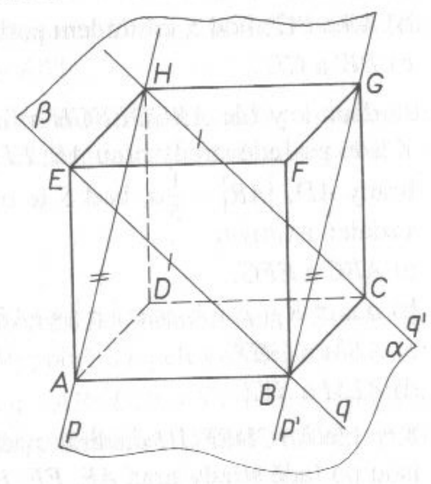
Obr. 108b

Přímkou *q* proložíme rovinu rovnoběžnou s přímkou *DF*. Její průsečnice s rovinou stěny *ADHE* je přímka *D'E*. V rovině stěny *ADHE* leží i přímka *p*, proto $P \in p \cap \leftrightarrow D'E$. Přímka *o*, která prochází bodem *P* a je rovnoběžná s přímkou *DF*, je příčka mimoběžek *p* a *q*, která je k oběma kolmá. Její průsečík s přímkou *q* je bod *Q*; $|pq| = |PQ|$.

Konstrukční řešení pro $a = 5$ cm je na obr. 108b. Strany trojúhelníku *ED'B* mají délky $|ED'| = a\sqrt{5}$, $|BD'| = a\sqrt{3}$, $|BE| = a\sqrt{2}$. Trojúhelník *ED'B* je tedy pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu *B*.



Obr. 109



Obr. 110

Dvěma mimoběžkami lze proložit jedinou dvojici rovnoběžných rovin. Vzdálenost mimoběžných přímek se rovná vzdálenosti těchto dvou rovnoběžných rovin, popř. vzdálenosti jedné mimoběžky od roviny s touto mimoběžkou rovnoběžné a proložené druhou mimoběžkou (obr. 109).

V příkladu 3c je tak vzdálenost mimoběžek AH a BE rovna vzdálenosti rovin ACH a BEG (obr. 110) a to je $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Úlohy

3.65 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Body K, L, M, N, P, Q jsou po řadě středy hran AB, BC, EH, GH, EF, FG. Určete vzdálenost přímek

a) BF a CG,

b) AH a BG,

c) KL a PQ,

d) PQ a MN,

e) MN a KL.

3.66 Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$ s délkou hrany $a = 5$ cm. Body X, Y jsou středy hran AD a CD, bod U je bodem hrany AB a bod V bodem hrany BC, $|BU| = |BV| = \frac{1}{3}a$. Početně i konstrukčně určete vzdálenost přímek XY a UV.

3.67 Pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ má podstavnou hranu délky a, jeho boční stěny jsou čtverce. Určete vzdálenost přímek

a) AD a $E'F'$,

b) AS a BC'; bod S je středem podstavy $A'B'C'D'E'F'$,

c) BE' a CD'.

3.68 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Body K, L, M, X, Y, Z jsou po řadě středy hran AB, EF, EH, BC, CD, FG. Bod R je bodem hrany AD, $|AR| = \frac{1}{5}a$, bod S je bodem hrany BC, $|CS| = \frac{1}{4}a$. Určete vzdálenost rovin

a) ABC a EFG,

b) ρ a σ; $R \in \rho$, $S \in \sigma$, $\rho \parallel \sigma \parallel \leftrightarrow ABE$,

c) ABM a GHX,

d) KLM a XYZ.

3.69 Krychle $ABCDEFGH$ má hranu délky $a = 5$ cm, body P, Q, R, U, V, W jsou po řadě středy hran AE, EF, EH, BC, CG, CD. Určete vzdálenost rovin

a) PQR a UVW,

b) CFH a α; rovina α je s rovinou CFH rovnoběžná a prochází bodem V,

* c) AQR a β; rovina β je s rovinou AQR rovnoběžná a prochází bodem B,

* d) AHW a BGQ.

Úlohu řešte početně i konstrukčně.

* **3.70** Kvádr $ABCDEFGH$ má rozměry $|AB| = a = 4{,}5$ cm, $|BC| = b = 3{,}5$ cm, $|AE| = c = 6$ cm. Vypočtěte vzdálenost rovin ACF a DEG.

* **3.71** Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má podstavnou hranu délky $a = 5$ cm, výška jehlanu je $v = a$. Bod N je středem hrany BV, bod M je středem hrany BC. Určete početně i konstrukčně vzdálenost rovin

a) ABV a α; rovina α prochází bodem M a je rovnoběžná s rovinou ABV,

b) ACN a β; rovina β prochází bodem M a je rovnoběžná s rovinou ACN.

3.72 Jsou dány dvě rovnoběžné roviny α a β. Najděte množinu všech bodů, pro které poměr vzdáleností od roviny α a β je $\frac{3}{2}$. Zobrazte ve volném rovnoběžném promítání pomocí kvádru $ABCDEFGH$, volte $\alpha = \leftrightarrow ADE$, $\beta = \leftrightarrow BCF$.

3.73 V krychli $ABCDEFGH$ s hranou délky a je bod M středem hrany AE a bod N středem hrany CG. Určete vzdálenost přímky MN od roviny DEG. Řešte úlohu početně a konstrukčně pro $a = 5$ cm.

3.74 Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má podstavnou hranu délky a, boční stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Bod K je bodem hrany AV, $|AK| : |KV| = 1 : 2$. Určete vzdálenost přímky p jdoucí bodem K a rovnoběžné s hranou AD od roviny BCV.

3.75 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a, bod O je středem hrany AD, bod P je středem hrany CD. Určete vzdálenost mimoběžek

a) AB a FH,

b) BO a EG,

c) BC a PG.

3.76 Vrcholy pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ s hranou délky $a = 4$ cm jsou určeny mimoběžky AB a CD. Vypočtěte jejich vzdálenost.

3.77 Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ s podstavnou hranou délky a, boční hrany mají délku $2a$. Určete vzdálenost mimoběžek

a) BB' a $A'F'$, b) $A'C$ a $D'F$.

3.78 Body M, N jsou středy bočních hran AV a BV pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$. Rozměry jehlanu jsou $|AB| = a$, $|AV| = b$. Určete vzdálenost mimoběžek BC a MN.

* **3.79** Pravidelný trojboký hranol $ABCA'B'C'$ má podstavné hrany délky $a = 4$ cm, boční hrany mají délku $c = 5$ cm. Konstrukčně určete vzdálenost přímky AB od přímky $A'C$.

3.6 Úlohy k opakování

3.80 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rovina ρ je rovina kolmá k úsečce EF procházející jejím středem. Sestrojte

a) řez krychle rovinou ρ,

b) průsečnici p roviny ρ a roviny ACE,

c) průsečnici q roviny ρ a roviny BEG.

Určete odchylku přímek p, q.

3.81 Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$, $|AB| = a$, $v = 2a$. Bod M je středem hrany AV. Konstrukčně i početně určete odchylku přímky

a) BM, b) CM, c) DM

a roviny podstavy.

3.82 Podstavou jehlanu $ABCDV$ je rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s rozměry $a_1 = 6$ cm, $a_2 = 3$ cm, $v' = 3$ cm. Bod S je průsečík úhlopříček podstavy, přímka SV je kolmá k rovině podstavy, $|SV| = v = 4$ cm. Sestrojte průsečnici p rovin

a) ABV, CDV, b) ADV, BCV.

V případě b) vypočtěte odchylku φ průsečnice a roviny podstavy.

* **3.83** Rozměry kvádru $ABCDEFGH$ jsou $|AB| = a = 5$ cm, $|BC| = b = 6$ cm, $|AE| = c = 7$ cm. Sestrojte řez kvádru rovinami ACF a ACH a vypočtěte odchylku φ těchto rovin.

3.84 Délka podstavné hrany pravidelného trojbokého jehlanu $ABCV$ je a, jeho boční stěny jsou pravoúhlé trojúhelníky. Určete odchylku

a) boční hrany a roviny podstavy,

b) boční stěny a roviny podstavy,

c) bočních stěn.

d) Jaký je vztah mezi odchylkami boční hrany a roviny podstavy a boční stěny a roviny podstavy? Platí tento vztah i v případě, když nejsou boční stěny pravoúhlé trojúhelníky?

3.85 V pravidelném čtyřstěnu $ABCD$ je bod T těžištěm stěny ABC. Určete odchylky přímky DT a rovin stěn čtyřstěnu.

3.86 Popište pomocí poznatků ze stereometrie známé zákony odrazu a lomu světla na rovinném rozhraní dvou prostředí. Udejte, kdy a jak je určena rovina dopadu.

3.87 Bod M je středem hrany DH krychle $ABCDEFGH$. Dokažte, že

a) přímky AC a DF,

b) roviny BDF a ACM

jsou kolmé.

3.88 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, jehož podstavná hrana má délku $a = 6$ cm a jehož výška je a) $v = 5$ cm, b) $v = 3$ cm. Bod O je středem hrany BC. Veďte bodem O kolmici k rovině ADV a určete odchylku této kolmice a roviny podstavy.

3.89 Body M, N, P, Q jsou po řadě středy hran AD, FG, AE, CG krychle $ABCDEFGH$, bod S je střed úsečky BH.

a) Dokažte, že přímky MN a PQ procházejí bodem S a jsou kolmé k přímce BH.

b) Sestrojte řez krychle rovinou, která prochází bodem S a je kolmá k přímce BH.

3.90 Body M, N, P jsou po řadě středy hran AV, BV, FV pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$. Délka podstavné hrany jehlanu je $a = 4$ cm, jeho výška $v = 7$ cm. Sestrojte řez jehlanu rovinou, která je kolmá k rovině podstavy a prochází body

a) M, N, b) N, P.

Vypočtěte obsah řezu.

* **3.91** Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, jehož boční stěny jsou čtverce. Bod S' je středem podstavy $A'B'C'D'E'F'$. Zobrazte průnik tělesa se dvěma rovinami ρ_1, ρ_2, které jsou k sobě kolmé a zároveň jsou obě kolmé k rovině $\sigma = \leftrightarrow BB'E$; jedna z rovin obsahuje přímku BS', druhá bod S'.

3.92 Krychle $ABCDEFGH$ má hranu délky $a = 5$ cm. Bod M je středem hrany EF, bod N je středem hrany FG.

a) Sestrojte řez krychle rovinami ρ (ρ prochází body B, M a je kolmá k rovině ABE) a σ (σ prochází body B, N a je kolmá k rovině BCF).

b) Sestrojte průsečnici rovin ρ a σ.

c) Sestrojte těleso, které vznikne z krychle po vyjmutí té části odříznuté rovinou ρ, která obsahuje hranu FG, a té části odříznuté rovinou σ, která obsahuje hranu EF.

d) Určete pravoúhlý průmět tělesa do roviny ABC.

3.93 Pravoúhlým průmětem krychle může být čtverec. Může být pravoúhlým průmětem krychle i pravidelný šestiúhelník? Dokažte.

3.94 Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$, $|AB| = a$, $|AV| = b$. Určete vzdálenost středu podstavy S od

a) přímek, v nichž leží boční hrany,

b) rovin bočních stěn.

3.95 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = a$, $|\sphericalangle AVB| = \alpha$, bod N je středem hrany CV. Určete vzdálenost bodu N od

a) roviny ABC,

b) přímky AV,

c) přímky AB.

* **3.96** Je dán čtyřstěn $ABCD$, $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 7$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|AD| = 6{,}8$ cm, $|BD| = 8{,}2$ cm, $|CD| = 7{,}6$ cm. Určete konstrukčně vzdálenost bodu D od roviny ABC.

3.97 Určete vzdálenost rovin protějších stěn kvádru $ABCDEFGH$, jestliže

a) délky úseček AC, AH, AG jsou po řadě 10 cm, 17 cm a $5\sqrt{13}$ cm,

b) délka úsečky BH je u a odchylky přímky BH a rovin ABC a BCG jsou po řadě α a β.

* **3.98** Určete množinu všech bodů v prostoru, které mají od daných rovin ρ a σ po řadě vzdálenost d_1 a d_2 ($d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$). Proveďte diskusi.

3.99 Body M, N jsou po řadě středy hran AB, CD krychle $ABCDEFGH$.

a) Určete vzdálenost přímky EH od roviny MNF.

b) Je-li bod Q libovolný bod přímky EH a bod P pata kolmice vedené bodem Q k rovině MNF, je poměr vzdáleností bodu P od rovin EFG a ABC 2 : 3. Dokažte.

3.100 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, jehož podstavná hrana má délku a a boční hrany délku b. Přímka MN, kde bod M je střed hrany AB a bod N střed hrany CV, je příčkou mimoběžných přímek AB a CV. Jaký vztah musí platit mezi čísly a, b, má-li tato příčka být k přímce CV kolmá?

Třetí výlet do historie geometrie

Matematika jako teoretické odvětví vědění se začíná rozvíjet teprve ve **starém Řecku**. O počátek rozvoje matematiky jako vědy se zasloužili zejména **Thalés z Milétu** (7. – 6. stol. př. n. l.) a **Pýthagorás ze Samu** (6. stol. př. n. l.). Thalés má velký podíl na přetvoření geometrie jako deduktivního systému. Ze sbírky návodů k řešení různých úloh, např. na výpočet výměry polí, objemu sýpek a hrází, rozměrů cihel, vytvořil abstraktní vědu, která začala zkoumat geometrické tvary. Pýthagorás se svou školou se zabýval pravidelnými mnohostěny. Pythagorejci znali čtyři z pěti pravidelných mnohostěnů (čtyřstěn, šestistěn, osmistěn a dvanáctistěn); dvacetistěn studoval teprve později **Theaitetos z Athén** (5. – 4. stol. př. n. l.). Pythagorejci se však ve stereometrii nedostali na úroveň svých planimetrických znalostí.

Stereometrii jako zvláštní disciplínu, kterou by měl kromě čtyř pythagorejských oborů (aritmetiky, geometrie, astronomie a hudby) studovat budoucí státník, jmenuje poprvé **Platón** (5. – 4. stol. př. n. l.). V Platónově škole byl proveden důkaz o počtu pravidelných mnohostěnů. Platón učinil nauku o pravidelných mnohostěnech součástí svého idealistického názoru. Podle něho se oheň skládal ze čtyřstěnů, vzduch z osmistěnů, voda z dvacetistěnů a země z krychlí; obrys světa pak tvořil dvanáctistěn. Pravidelným mnohostěnům se ještě dnes říká „**platónská tělesa**". Platónovi je také připisováno jedno z nejjednodušších mechanických řešení jedné ze tří proslulých úloh starověku – **zdvojení krychle** (tj. sestrojení hrany krychle, která má dvakrát větší objem než daná krychle) [6].

Démokritos (5. – 4. stol. př. n. l.) věnoval ve svých geometrických spisech velkou pozornost určování obsahu obrazců, povrchů a objemů těles. Zřejmě jako první zjistil, že objem jehlanu se rovná jedné třetině objemu hranolu o stejné podstavě a výšce. Důkaz této věty však provedl až za padesát let **Eudoxos z Knidu**. Démokritos zobecnil větu pro jehlany s mnohoúhelníkovou podstavou. A protože pro něj byl kruh mnohoúhelníkem o velmi velkém počtu stran, vyplývalo z věty pro jehlany zobecnění i pro kužele.

4 ZOBRAZENÍ

Problematikou zobrazení jste se již podrobně zabývali v planimetrii – poznali jste shodná a podobná zobrazení v rovině. Nyní na tyto poznatky navážeme a budeme studovat shodná a podobná zobrazení v prostoru. Připomeňme si nejdříve základní pojmy.

Zobrazení Z **v prostoru** je předpis, který každému bodu X prostoru přiřazuje právě jeden bod X' prostoru. Bod X se nazývá **vzor**, bod X' jeho **obraz**; zapisujeme Z: $X \rightarrow X'$. Množinu obrazů všech bodů útvaru U značíme U' a nazýváme **obraz útvaru** U.

Body X, pro jejichž obrazy platí $X' = X$, se nazývají **samodružné body** zobrazení. Útvar U, pro který platí U' = U, je **samodružný útvar** zobrazení. Zobrazení, ve kterém je každý bod samodružný, se nazývá **identita**.

4.1 Shodné zobrazení v prostoru

Často se setkáváme s dvojicemi předmětů, které jsou „stejné" – mají stejné rozměry, stejný tvar. Tato představa „shody" dvou předmětů vede v matematice k přesnému vymezení pojmu **shodnost** geometrických útvarů. Nejlepším prostředkem pro studium shodnosti geometrických útvarů jsou shodná zobrazení.

Shodné zobrazení v prostoru je definováno tak jako shodné zobrazení v rovině, pouze místo o bodech v rovině mluvíme o bodech v prostoru. Je to zobrazení, ve kterém je obrazem každé úsečky AB úsečka $A'B'$ shodná s úsečkou AB.

Podobně jako v planimetrii platí i ve stereometrii věty, které mluví o obrazu polopřímky, opačných polopřímek, přímky, poloroviny, opačných polorovin a úhlu. Přibývají věty o dalších stereometrických pojmech:

- obrazem roviny ρ je rovina ρ', obrazem rovnoběžných rovin jsou rovnoběžné roviny,
- obrazem poloprostoru ρA je poloprostor $\rho' A'$, obrazem opačných poloprostorů jsou opačné poloprostory.

? Přemýšlejte o obrazu dvou mimoběžných přímek, přímky a roviny s přímkou rovnoběžné, kolmých přímek, kolmých rovin, přímky a roviny k přímce kolmé.

Ve shodném zobrazení v prostoru se obdobně jako ve shodném zobrazení v rovině zachovává vzájemná poloha geometrických útvarů.

Každou shodnost v rovině si můžeme představit jako přemístění. V prostoru tomu tak není. Vhodným přemístěním můžeme ztotožnit jen **přímo shodné** útvary, např. dvě shodné krychle, dvě shodné koule, dvě korunové mince. **Nepřímo shodné** útvary, např. pravá a levá bota téhož páru, pravý a levý rukáv kabátu, se nedají pohybem ztotožnit.

? Jak krejčí nebo švadlena kontrolují, zda jsou oba rukávy kabátu stejné?

Nejjednodušším shodným zobrazením v prostoru je **identita**. **Rovinová souměrnost** je zobrazení, které má obdobný význam jako osová souměrnost v rovině – všechna shodná zobrazení v prostoru se dají složit z konečného počtu rovinových souměrností. V dalším výkladu se omezíme na rovinovou souměrnost a několik dalších jednoduchých shodností v prostoru.

Úlohy

4.1 Je dán kvádr $ABCDEFGH$. Existuje takové shodné zobrazení v prostoru, ve kterém je

a) obrazem bodu A bod C, obrazem bodu B bod D, obrazem bodu E bod C a obrazem bodu F bod D,

b) obrazem bodu A bod E, obrazem bodu B bod F, obrazem bodu D bod G a bod C je samodružný,

c) rovina ABC samodružná a obrazem roviny ABE je rovina CDG?

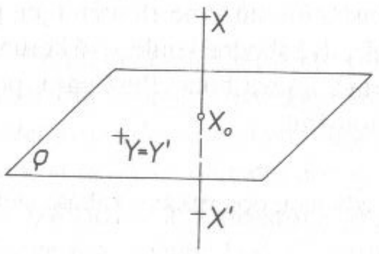
4.2 Je dán kvádr $ABCDEFGH$. Co můžeme o tomto kvádru říci, jestliže existuje shodné zobrazení v prostoru, které zobrazuje jeho hrany AB, AE, AD po řadě na hrany BF, EF, FG?

4.2 Rovinová souměrnost

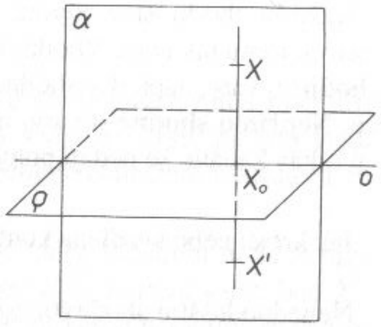
Každý z vás se jistě aspoň někdy podívá do zrcadla. Váš obraz v zrcadle je vlastně vaším obrazem v rovinové souměrnosti, rovinou souměrnosti je v tomto případě rovina zrcadla. A teď přesná definice:

Je dána rovina ρ. **Souměrnost podle roviny** ρ **(rovinová souměrnost**, obr. 111a) je shodné zobrazení $S(\rho)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \notin \rho$ bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k rovině ρ a střed úsečky XX' leží v rovině ρ,
2. každému bodu $Y \in \rho$ bod $Y' = Y$.



Obr. 111a



Obr. 111b

Rovina ρ se nazývá **rovina souměrnosti**. Rovinovou souměrností $S(\rho)$ je v každé rovině α, která je kolmá k rovině souměrnosti ρ, určena osová souměrnost $O(o)$ s osou o v průsečnici rovin ρ a α (obr. 111b).

Rovinová souměrnost je **nepřímá shodnost**. V zrcadle vidíte svou pravou ruku jako levou, pravou nohu jako levou atd.

? Všimnete-li si vozů záchranné služby, je na jejich přední straně nápis AMBULANCE napsán takto: ƎƆИA⅃UƎMA. Proč?

Příklad 1

V rovinové souměrnosti $S(\rho)$ zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$; $\rho = \leftrightarrow ABC$.

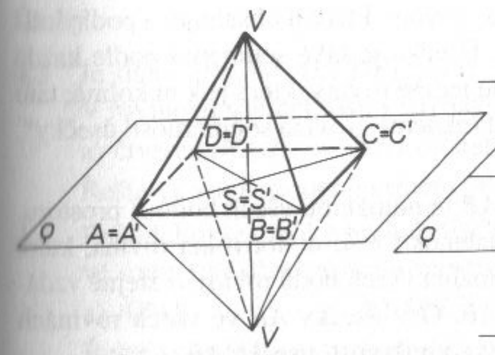
Řešení (obr. 112)

Body A, B, C, D leží v rovině ρ, jsou tedy samodružné. Obrazem bodu V je bod V': středem úsečky VV' je střed podstavy S. Bod S je také samodružný bod. Obrazem jehlanu $ABCDV$ je jehlan $A'B'C'D'V'$ shodný s jehlanem $ABCDV$. Těleso s vrcholy A, B, C, D, V, V' je osmistěn.

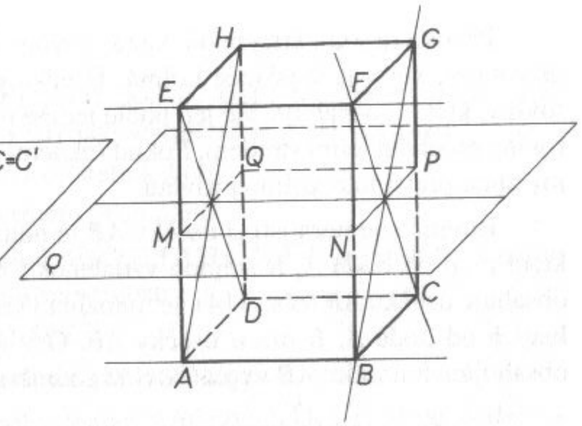
? Určete inverzní zobrazení k $S(\rho)$.

Body M, N, P, Q jsou středy bočních hran kvádru $ABCDEFGH$ (obr. 113). V rovinové souměrnosti s rovinou souměrnosti $\rho = \leftrightarrow MNP$ jsou obrazy vrcholů A, B, C, D po řadě body E, F, G, H, body M, N, P, Q jsou samodružné body.

Samodružné přímky jsou jednak přímky, v nichž leží boční hrany, jednak přímky určené středy bočních hran. Samodružné jsou jednak roviny bočních stěn, jednak rovina ρ.



Obr. 112



Obr. 113

Průsečík přímky CF a jejího obrazu, přímky GB, leží v rovině ρ. Průsečnice roviny CDE a jejího obrazu, roviny GHA, leží v rovině ρ. Přímka EF je rovnoběžná se svým obrazem, přímkou AB, rovina ABC je rovnoběžná se svým obrazem, rovinou EFG.

Vlastnosti rovinové souměrnosti, které jsme pozorovali na kvádru, můžeme shrnout:

Množina všech samodružných bodů je rovina souměrnosti.

Samodružné přímky jsou všechny přímky roviny souměrnosti a všechny přímky kolmé k rovině souměrnosti.

Samodružné roviny jsou rovina souměrnosti a všechny roviny kolmé k rovině souměrnosti.

Obrazem přímky p (roviny α), která je rovnoběžná s rovinou souměrnosti, je přímka p' (rovina α') rovnoběžná s rovinou souměrnosti.

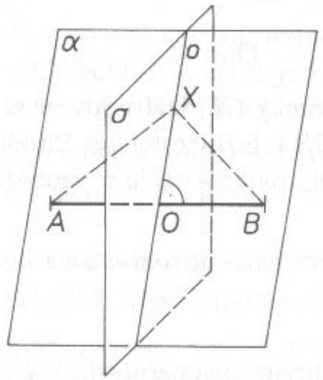
Obrazem přímky q, která není s rovinou souměrnosti rovnoběžná a není k rovině souměrnosti kolmá, je přímka q', která se s přímkou q protíná v rovině souměrnosti.

Obrazem roviny β, která není s rovinou souměrnosti rovnoběžná a není k rovině souměrnosti kolmá, je rovina β', její průsečnice s rovinou β leží v rovině souměrnosti.

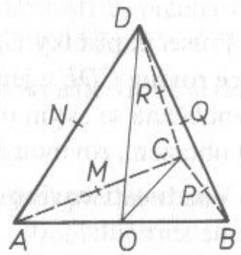
Geometrické útvary U, U', z nichž jeden je obrazem druhého v rovinové souměrnosti podle roviny ρ, nazýváme útvary souměrně sdružené podle roviny ρ. Je-li U = U', pak říkáme, že **útvar** U je **rovinově souměrný** podle roviny ρ; rovina ρ se nazývá **rovina souměrnosti útvaru** U.

Přímka je souměrná podle každé roviny, která ji obsahuje, a podle každé roviny, která je k přímce kolmá. Úsečka je také souměrná podle každé roviny, která ji obsahuje, ale jen podle jediné roviny, která je k ní kolmá; tato rovina prochází jejím středem. Pokud řekneme „rovina souměrnosti úsečky", myslíme právě tuto kolmou rovinu.

Rovina souměrnosti σ úsečky AB je množinou všech bodů X prostoru, které mají od bodů A, B stejnou vzdálenost: Je-li α libovolná rovina, která obsahuje úsečku AB (obr. 114), je množina všech bodů roviny α stejně vzdálených od bodů A, B osa o úsečky AB. Osy úsečky AB ve všech rovinách obsahujících úsečku AB vyplní rovinu souměrnosti úsečky AB.



Obr. 114



Obr. 115

Rovinová souměrnost je jednoznačně určena rovinou souměrnosti. Může však být také dána dvojicí různých bodů X, X', jestliže každý z nich je obrazem druhého v této rovinové souměrnosti. Rovina souměrnosti je pak rovina souměrnosti úsečky XX'.

? Najděte všechny roviny souměrnosti dvojice rovnoběžných přímek.

Příklad 2

Určete všechny roviny souměrnosti pravidelného čtyřstěnu $ABCD$.

Řešení

Na obr. 115 je pravidelný čtyřstěn $ABCD$, ve kterém je vyznačen střed O hrany AB. Při řešení příkladu 1 v článku 3.2 jsme dokázali, že přímka AB je kolmá k rovině CDO. Protože je bod O středem úsečky AB, je obrazem bodu A (bodu B) v rovinové souměrnosti podle roviny CDO bod B (bod A). Body C a D v rovině CDO leží, jsou proto samodružné. Rovina CDO je tak jednou rovinou souměrnosti pravidelného čyřstěnu $ABCD$. Jsou-li body M, N, P, Q, R po řadě středy hran AC, AD, BC, BD, CD, jsou další roviny souměrnosti roviny BMD, BNC, APD, ACQ, ABR.

Úlohy

4.3 Je dána krychle $ABCDEFGH$ a bod P, který je středem hrany AB. V rovinové souměrnosti s rovinou souměrnosti CGP zobrazte

a) čtverec $BCGF$, b) trojúhelník BGE.

Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

4.4 Pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ zobrazte v rovinové souměrnosti s rovinou souměrnosti

a) ABA', b) ACC'.

Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

4.5 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$; bod S je střed podstavy a bod M je bod hrany AB, $|AM| : |MB| = 1 : 3$. Daný jehlan zobrazte v rovinové souměrnosti s rovinou souměrnosti VSM. Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

4.6 Bod S je středem podstavy a bod O je středem hrany AB pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$. Dokažte, že rovina SOV je rovinou souměrnosti daného jehlanu.

4.7 Určete všechny roviny souměrnosti

a) pravidelného čtyřbokého jehlanu,

b) krychle,

c) pravidelného šestibokého hranolu.

4.8 Najděte všechny roviny souměrnosti dvou mimoběžných přímek.

4.9 Jsou dány dva různé body A, B a přímka p (rovina ρ). Najděte všechny body přímky p (roviny ρ), které mají stejnou vzdálenost od bodů A, B. Proveďte diskusi.

4.10 Určete množinu všech bodů v prostoru, které mají stejnou vzdálenost od

a) tří daných různých bodů K, L, M, které neleží v téže přímce,

b) čtyř různých bodů K, L, M, N, které neleží v téže rovině.

4.11 Je dán trojúhelník ABC a bod $A' \neq A$. Určete rovinovou souměrnost, která zobrazí daný trojúhelník na shodný trojúhelník s jedním vrcholem v bodě A'. Modelujte na krychli.

4.12 Je dán trojúhelník ABC a takový bod $B' \neq B$, že platí $|AB| = |AB'|$. Určete rovinovou souměrnost, která zobrazí daný trojúhelník na shodný trojúhelník s jednou stranou v úsečce AB'. Modelujte na krychli.

4.13 Je dán trojúhelník ABC a takový bod $C' \neq C$, že platí $|AC| = |AC'|$, $|BC| = |BC'|$. Určete rovinovou souměrnost, která zobrazí daný trojúhelník na trojúhelník ABC'. Modelujte na krychli.

4.14 Bod M je střed hrany CG krychle $ABCDEFGH$. Určete nejkratší lomenou čáru EXM, jestliže bod X leží v rovině ABC. Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

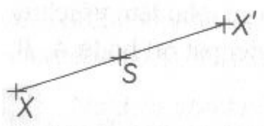
4.3 Středová a osová souměrnost

Dáme-li své ruce k sobě tak, aby se palci dotýkaly, jedna ruka byla od nás dlaní odvrácená, druhá přitočená a přitom prsty jedné ruky směřovaly nahoru a u druhé dolů, máme (přibližně) útvary souměrné podle středu (bodu dotyku palců).

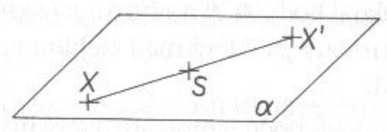
Středovou souměrnost v prostoru definujeme obdobně jako středovou souměrnost v rovině.

Je dán bod S. **Souměrnost podle středu** S (**středová souměrnost** se středem S) v prostoru (obr. 116a) je shodné zobrazení $S(S)$, které přiřazuje:

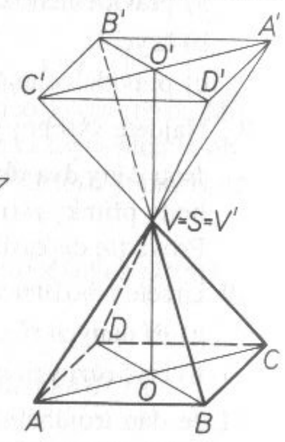
1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX',
2. bodu S bod $S' = S$.



Obr. 116a



Obr. 116b



Obr. 117

Bod S se nazývá **střed souměrnosti**. Středová souměrnost je jednoznačně určena středem souměrnosti. Je však také jednoznačně určena dvojicí různých bodů X, X', jestliže každý z nich je obrazem druhého v této středové souměrnosti. Střed souměrnosti je v takovém případě střed úsečky XX'. Středovou souměrností v prostoru je v každé rovině α, která prochází bodem S, určena středová souměrnost $S(S)$ v rovině (obr. 116b).

? Určete inverzní zobrazení k $S(S)$.

Příklad 1

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Určete jeho obraz ve středové souměrnosti $S(S)$, kde $S = V$.

Řešení (obr. 117)

Bod V je v daném zobrazení samodružný, obrazem vrcholů podstavy jsou body A', B', C', D': bod V je středem úseček AA', BB', CC', DD'. Obrazem jehlanu $ABCDV$ je jehlan $A'B'C'D'V$ shodný s jehlanem $ABCDV$. Těleso s vrcholy $ABCDVA'B'C'D'$ bychom mohli nazvat „dvojjehlan".

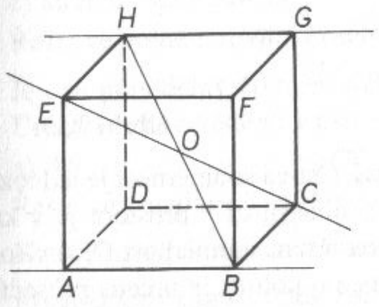
Na obr. 118 je znázorněna krychle $ABCDEFGH$, bod O je střed úsečky BH. Čtyřúhelníky $ABGH$, $BCHE$, $DAFG$ jsou obdélníky, a proto je bod O také středem úseček AG, CE, DF. Jsou tedy body E, F, G, H po řadě obrazy bodů C, D, A, B (a naopak) ve středové souměrnosti $S(O)$. Dále vidíme, že např. přímka CE je v $S(O)$ samodružná, samodružná je také rovina ABG. Obrazem přímky AB je přímka HG rovnoběžná s přímkou AB, obrazem roviny ABC je rovina GHE rovnoběžná s rovinou ABC.

Vlastnosti středové souměrnosti, které jsme pozorovali na krychli, můžeme shrnout:

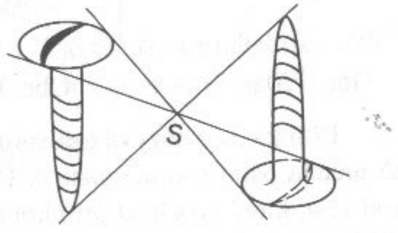
Jediným samodružným bodem středové souměrnosti je její střed.

Všechny přímky i všechny roviny, které procházejí středem souměrnosti, jsou samodružné.

Obrazem přímky (roviny), která neprochází středem souměrnosti, je přímka (rovina) rovnoběžná.



Obr. 118



Obr. 119

Geometrické útvary U a U', z nichž jeden je obrazem druhého ve středové souměrnosti se středem S, se nazývají útvary souměrně sdružené podle středu S. Je-li U = U', pak říkáme, že **útvar** U je **středově souměrný** podle středu S; bod S je **střed souměrnosti útvaru** U.

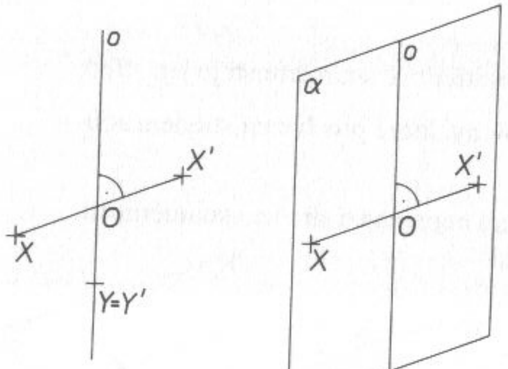
? Uveďte příklady útvarů souměrných podle středu. Jsou tyto útvary také rovinově souměrné? Je pravidelný čtyřstěn středově souměrný?

Středová souměrnost je **nepřímá shodnost**, mění orientaci. Např. obrazem pravotočivého šroubu je šroub levotočivý a naopak (obr. 119).

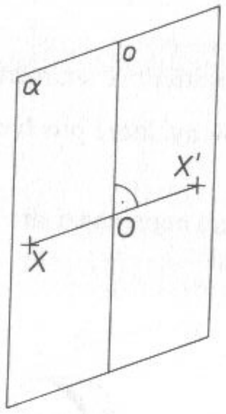
Třetí souměrností v prostoru je souměrnost podle přímky neboli osová souměrnost. S osovou souměrností jste se seznámili již v planimetrii. Definice osové souměrnosti v prostoru je analogická.

Je dána přímka o. **Souměrnost podle osy** o **(osová souměrnost** s osou o) v prostoru (obr. 120a) je shodné zobrazení $S(o)$, které přiřazuje:

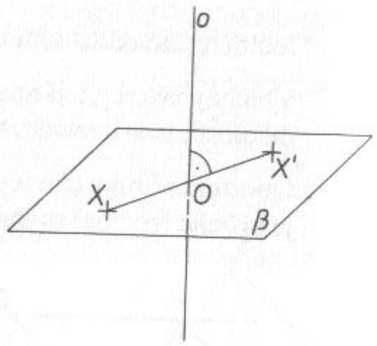
1. každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na přímce o,
2. každému bodu $Y \in o$ bod $Y' = Y$.



Obr. 120a



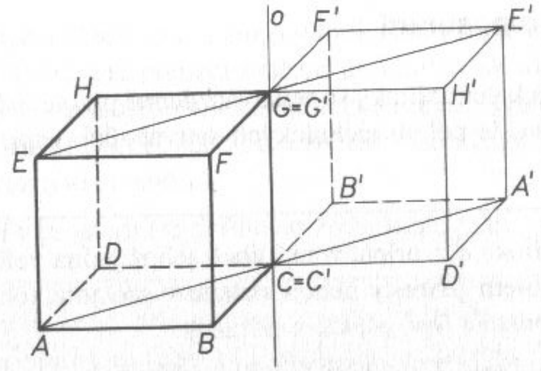
Obr. 120b



Obr. 120c

Přímka o se nazývá **osa souměrnosti**. Osová souměrnost je jednoznačně určena osou souměrnosti o. Osovou souměrností v prostoru je v každé rovině α, která prochází přímkou o, určena osová souměrnost $O(o)$ v rovině (120b). V každé rovině β, která je k přímce o kolmá, je určena průsečíkem S přímky o a roviny β středová souměrnost $S(S)$ v rovině (obr. 120c). Osová souměrnost v prostoru je **přímá shodnost**.

? Určete samodružné body, přímky a roviny osové souměrnosti $S(o)$. Pomůže vám k tomu obr. 121, kde je zobrazena krychle $ABCDEFGH$ v osové souměrnosti podle přímky $o = \leftrightarrow CG$.



Obr. 121

Geometrické útvary U a U', z nichž jeden je obrazem druhého v osové souměrnosti s osou o, nazýváme souměrně sdružené podle osy o. Je-li U = U', je **útvar** U **osově souměrný podle osy** o, přímka o je **osa souměrnosti útvaru** U.

Souměrně sdružené podle osy v prostoru (přibližně) jsou např. dvě pravé ruce (i osoby) při podávání rukou (pokládáme-li osoby za shodné). Pravidelný čtyřboký, šestiboký (obecně n-boký pro n sudé) jehlan i hranol jsou geometrické útvary souměrné podle osy.

Úlohy

4.15 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete obraz krychle ve středové souměrnosti, je-li středem souměrnosti

a) bod H,

b) střed M úsečky BC,

c) střed O stěny $ABCD$.

Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

4.16 Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$, bod T je těžiště trojúhelníku ABC. Určete obraz čtyřstěnu v osové souměrnosti s osou v přímce

a) AB, b) CT.

Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

4.17 Najděte střed a osy souměrnosti krychle.

4.18 Rozhodněte, která z těles: rotační válec, rotační kužel, koule jsou středově (osově) souměrná. Pro tato tělesa určete střed (osu) souměrnosti.

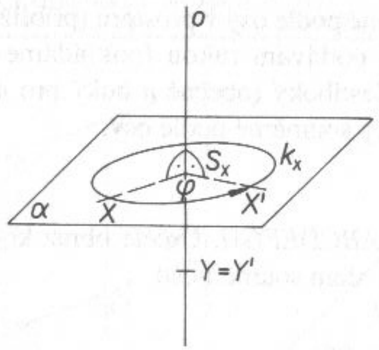
4.19 Jsou dány dvě různoběžné roviny ρ a σ a bod S, který neleží v žádné z nich. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod S byl jeho středem a jeho strany AB a CD ležely po řadě v rovinách ρ a σ. Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

4.4 Otočení a posunutí

S otočením kolem přímky se setkáváte denně při otevírání dveří a oken. Příkladem otočení je pohyb technických setrvačníků, např. elektromotorů, turbín, vrtule.

Je dána přímka o a orientovaný úhel, jehož jedna velikost je φ. **Otočení kolem přímky** neboli **rotace** v prostoru (obr. 122) je shodné zobrazení $R(o, \varphi)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že paty kolmic z bodů X, X' k přímce o splývají v tomtéž bodě S_x, rovina XS_xX' je kolmá k ose o, a orientovaný úhel XS_xX' má velikost φ.
2. každému bodu $Y \in o$ bod $Y' = Y$.



Obr. 122

Přímka o se nazývá **osa otočení**, všechny její body jsou samodružné. Každý bod $X \notin o$ se v otočení kolem přímky o pohybuje po kružnici k_x, jejímž středem je bod S_x a jejíž rovina je kolmá k přímce o. V každé rovině α kolmé k přímce o je tedy pomocí otočení kolem přímky určeno otočení v rovině. Středem otočení je průsečík osy otočení s rovinou α, úhel otočení má velikost φ. Úhel otočení v rovině α je považován za **úhel otočení** kolem přímky o.

Otočení je **přímá shodnost**. Je-li $\varphi = k \,.\, 360°$ (popř. $2k\pi$), je otočení identitou; v tom případě jsou všechny body samodružné. Otočení kolem přímky o úhel velikosti $180° + k \,.\, 360°$ (popř. $\pi + k \,.\, 2\pi$) je zároveň souměrnost podle přímky.

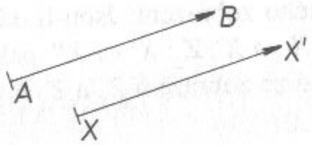
? Má otočení kolem přímky samodružné přímky a samodružné roviny?

Pomocí otočení lze vytvořit základní představy rotačních těles. Rotační válec a rotační kužel jste pomocí otáčení definovali již na základní škole. Je-li přímka o osou rotačního tělesa, zobrazí se těleso samo na sebe v každém otočení kolem přímky o, neboli rotační těleso je v každém otočení kolem své osy samodružným útvarem.

I posunutí v prostoru lze definovat zcela analogicky jako v rovině.

Je dána nenulová orientovaná úsečka ***AB***. **Posunutí** neboli **translace** v prostoru (obr. 123) je shodné zobrazení $T(\boldsymbol{AB})$, které každému bodu X přiřazuje právě jeden bod X' tak, že orientované úsečky ***XX'*** a ***AB*** mají stejnou délku a stejný směr.

Přitom **orientovanou úsečkou** v prostoru rozumíme stejně jako v rovině úsečku, u níž je určeno, který její krajní bod je počáteční bod a který je koncový bod. Orientované úsečce, jejíž počáteční a koncový bod splývají, říkáme nulová orientovaná úsečka.



Obr. 123

Délka orientované úsečky ***AB*** udává **délku posunutí**, její směr určuje **směr posunutí**. V každé rovině, která je rovnoběžná s orientovanou úsečkou ***AB***, je určeno posunutí $T(\boldsymbol{AB})$ v rovině. Nulovou orientovanou úsečkou je určena identita.

Posunutí je **přímá shodnost**. Pokud je posunutí určeno nenulovou orientovanou úsečkou, nemá samodružné body, samodružné jsou všechny přímky a roviny, které jsou rovnoběžné s orientovanou úsečkou určující posunutí.

Příkladem posunutí v běžném životě je pohyb pístu v parním nebo spalovacím motoru, pohyb železničního vagonu po přímých kolejích.

V matematice můžeme pomocí posunutí definovat n-boký hranol: Jestliže bod X probíhá mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_n$, vyplní jeho obraz X' v posunutí $T(\boldsymbol{A_1A_1'})$ mnohoúhelník $A_1'A_2' \dots A_n'$ shodný s mnohoúhelníkem $A_1A_2 \dots A_n$. Neleží-li bod A_1' v rovině $A_1A_2A_3$, vytvoří body všech úseček XX' n-boký hranol $A_1A_2 \dots A_n'$.

Úlohy

Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

4.20 Najděte obraz kvádru *ABCDEFGH* v otočení podle osy *AE*, které otočí bod *B* do bodu polopřímky *AD*.

4.21 Je dána krychle *ABCDEFGH*; body *M*, *N*, *P* jsou po řadě středy hran *AB*, *CG*, *DH*. V posunutí $T(\boldsymbol{BP})$ určete obraz

a) stěny krychle *ABCD*, b) přímky *MN*.

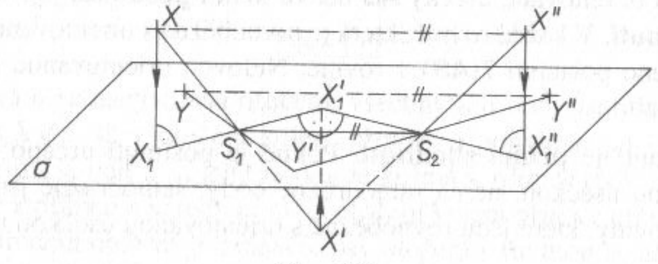
4.22 Bod *M* je vnitřním bodem hrany *AB* a bod *N* je vnitřním bodem hrany *CD* čtyřstěnu *ABCD*. Sestrojte průnik čtyřstěnu s rovinou, která je obrazem roviny *ABC* v posunutí $T(\boldsymbol{MN})$.

4.23 Je dán trojboký hranol *ABCA'B'C'*. Sestrojte úsečku *XY*, která je rovnoběžná a shodná s úsečkou *AC'*; přitom bod *X* je bodem přímky *BB'* a bod *Y* je bodem roviny *ABC*.

4.5 Skládání shodných zobrazení

Jistě si z planimetrie pamatujete operaci skládání zobrazení. Připomeňme si definici složeného zobrazení: Jsou-li dána dvě zobrazení Z_1 a Z_2 a *X* je libovolný bod, Z_1: $X \to X'$, Z_2: $X' \to X''$, pak zobrazení Z: $X \to X''$ se nazývá **zobrazení složené** ze zobrazení Z_1 a Z_2 v tomto pořadí; zapisujeme $Z = Z_2 \circ Z_1$.

Zkusme složit dvě středové souměrnosti $S(S_1)$ a $S(S_2)$ s různými středy S_1 a S_2: $S(S_1)$: $X \to X'$, $S(S_2)$: $X' \to X''$ a $S(S_2) \circ S(S_1)$: $X \to X''$.



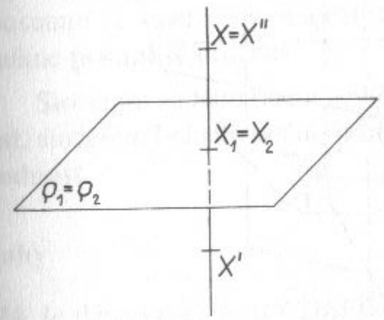
Obr. 124

Na obr. 124 je rovina σ libovolná rovina obsahující přímku S_1S_2. Pro body *Y* roviny σ a obrazy *Y'*, *Y''* ležící také v rovině σ je $|YY''| = 2 \,.\, |S_1S_2|$ a $YY'' \parallel S_1S_2$.

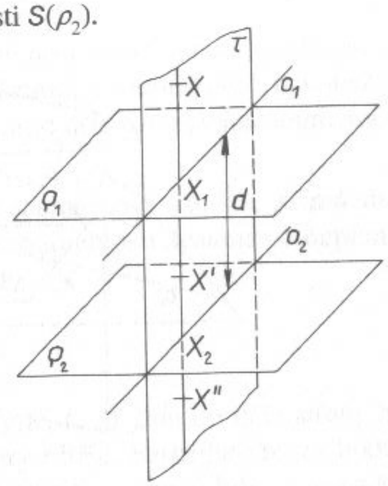
Nechť bod *X* je libovolný bod, který neleží v rovině σ, a body X_1, X_1', X_1'' jsou pravoúhlé průměty bodů *X*, *X'*, *X''* do roviny σ. Ze shodnosti trojúhelníků XX_1S_1 a $X'X_1'S_1$ a trojúhelníků $X'X_1'S_2$ a $X''X_1''S_2$ je zřejmé, že $|XX''| = 2 \,.\, |S_1S_2|$ a $XX'' \parallel S_1S_2$.

Složením dvou středových souměrností s různými středy tedy vznikne posunutí.

Podrobněji probereme **skládání dvou rovinových souměrností** $S(\rho_1)$ a $S(\rho_2)$. Roviny ρ_1 a ρ_2 mohou být splývající, rovnoběžné různé nebo různoběžné. Označme *X* libovolný bod, *X'* jeho obraz v rovinové souměrnosti $S(\rho_1)$ a *X''* obraz bodu *X'* v rovinové souměrnosti $S(\rho_2)$.



Obr. 125



Obr. 126

$\rho_1 = \rho_2$ (obr. 125): $S(\rho_2) \circ S(\rho_1) = I$

Každý bod *X* je samodružný, je proto v tomto případě složením dvou rovinových souměrností **identita** *I*.

$\rho_1 \parallel \rho_2$, $\rho_1 \neq \rho_2$ (obr. 126): $S(\rho_2) \circ S(\rho_1) = T$

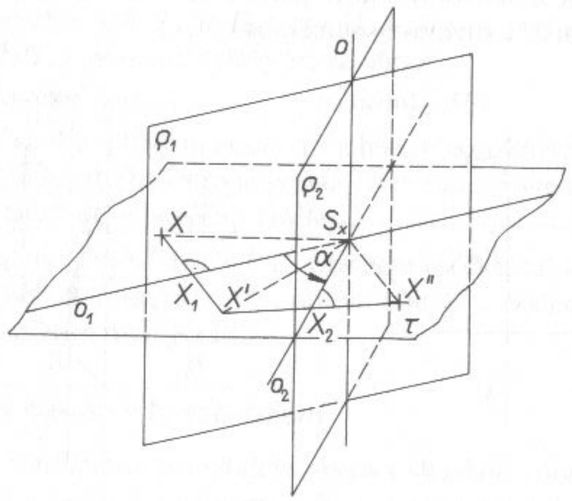
V každé rovině τ kolmé k oběma rovinám v souměrnosti je složeným zobrazením *T* určeno zobrazení složené ze dvou osových souměrností. Osami těchto osových souměrností jsou průsečnice o_1, o_2 rovin ρ_1, ρ_2 s rovinou τ. Protože $\rho_1 \parallel \rho_2$, je také $o_1 \parallel o_2$. Zobrazení $O(o_2) \circ O(o_1)$ v rovině τ je posunutí s délkou posunutí $2 \,.\, |o_1o_2|$ a směrem kolmým k oběma osám souměrnosti.

Znamená to, že zobrazení složené ze dvou rovinových souměrností s rovinami souměrnosti rovnoběžnými různými je **posunutí** v prostoru. Jeho délka je rovna dvojnásobku vzdálenosti rovin souměrnosti daných rovinových souměrností, jeho směr je kolmý k oběma rovinám souměrnosti a je dán jejich pořadím.

Naopak lze dané posunutí $T(\boldsymbol{AB})$ v prostoru rozložit ve dvě rovinové souměrnosti. Roviny souměrnosti obou souměrností musí být kolmé k orientované úsečce $\boldsymbol{AB}$, jejich vzdálenost je rovna polovině délky posunutí a jejich

pořadí je dáno směrem posunutí. Rozklad není jednoznačný, jednu rovinu souměrnosti vždy volíme.

$\rho_1 \nparallel \rho_2$ (obr. 127): $S(\rho_2) \circ S(\rho_1) = R$



Obr. 127

V každé rovině kolmé k průsečnici o rovin souměrnosti ρ_1 a ρ_2 je zobrazením R určeno zobrazení složené ze dvou osových souměrností s různoběžnými osami. Osy souměrností jsou průsečnice o_1, o_2 roviny τ s rovinami ρ_1, ρ_2. Přímky o_1, o_2 se protínají na přímce o, jejich průsečík je společným bodem rovin ρ_1, ρ_2 a τ.

Zobrazení $O(o_2) \circ O(o_1)$ v rovině τ je otočení. Jeho střed je průsečík os o_1, o_2, velikost úhlu otočení je rovna dvojnásobku velikosti úhlu os o_1, o_2, smysl otáčení je určen pořadím os.

V prostoru je tedy zobrazení, složené ze dvou rovinových souměrností s různoběžnými rovinami souměrnosti **otočení kolem přímky**. Osa otočení je průsečnice rovin souměrnosti daných rovinových souměrností, velikost úhlu otočení je rovna dvojnásobku odchylky rovin souměrnosti, smysl otáčení je určen pořadím rovin souměrnosti.

Každé otočení v prostoru lze naopak rozložit ve dvě rovinové souměrnosti, analogicky jako každé otočení v rovině lze rozložit ve dvě osové souměrnosti.

Je-li $\rho_1 \perp \rho_2$, je výsledné zobrazení **osovou souměrností v prostoru.** V tomto případě nezáleží na pořadí, v jakém zobrazení skládáme. Nejsou-li roviny k sobě kolmé, mění se se změnou pořadí rovin smysl otáčení.

Lze dokázat, že každé shodné zobrazení v prostoru je buď rovinová souměrnost, nebo se dá složit z jedné, dvou, tří, popř. čtyř rovinových souměrností. Kdybychom tedy chtěli úplný přehled všech shodností v prostoru, museli bychom ještě vyšetřit shodnosti, které vzniknou složením tří a čtyř rovinových souměrností. Při tom bychom museli probrat všechny možné vzájemné polohy rovin souměrností.

Např. složením tří rovinových souměrností s rovinami souměrnosti navzájem kolmými vznikne **středová souměrnost**, složením otočení kolem osy a posunutí ve směru osy otočení (tj. složením čtyř rovinových souměrností) vznikne **posunuté otočení**.

Složením sudého počtu rovinových souměrností vznikne **přímá shodnost**, složením lichého počtu rovinových souměrností dostaneme **nepřímou shodnost**.

Úlohy

4.24 Je dána krychle $ABCDEFGH$; body K, L, M jsou po řadě středy hran AB, EF, GH, bod O je středem stěny $ABFE$. Sestrojte obrazy bodů A, K, E, O ve složeném zobrazení $S(\rho_2) \circ S(\rho_1)$, kde $\rho_1 = \leftrightarrow BEH$ a $\rho_2 = \leftrightarrow KLM$. Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

4.25 Je dán kvádr $ABCDEFGH$. Body M, N jsou vnitřními body hrany AB, $|AM| = |BN| = \frac{1}{4}|AB|$. Roviny ρ_1 a ρ_2 procházejí po řadě body M a N a jsou rovnoběžné s rovinou ADH. Zobrazte body A, H, C, M, N v zobrazení $S(\rho_2) \circ S(\rho_1)$. Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

4.26 Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$. Najděte takové roviny ρ_1 a ρ_2, aby v zobrazení $S(\rho_2) \circ S(\rho_1)$ byl obrazem bodu A bod C a přitom byl jehlan samodružný.

4.27 Přesvědčte se pomocí krychle, že složením tří rovinových souměrností, z nichž každé dvě mají navzájem kolmé roviny souměrnosti, je středová souměrnost v prostoru.

4.28 Je dána krychle $ABCDEFGH$ a bod P tak, že bod H je středem úsečky DP. Rozložte na rovinové souměrnosti zobrazení Z, ve kterém je

a) $A \to E$, $B \to F$, $C \to G$, $H \to D$,
b) $A \to E$, $B \to F$, $C \to G$, $H \to P$,
c) $A \to C$, $B \to D$, $D \to B$, $E \to G$,
* d) $A \to G$, $B \to H$, $C \to E$, $D \to F$,
e) $A \to F$, $B \to G$, $C \to H$, $G \to P$.

4.6 Podobná zobrazení

Podobnost nebo také **podobné zobrazení** můžeme v prostoru definovat stejným způsobem jako v rovině. Je to zobrazení, pro které existuje kladné číslo k tak, že pro každé dvě dvojice bodů X, X' a Y, Y' vzoru a obrazu platí $|X'Y'| = k \,.\, |XY|$. Číslo k se nazývá **koeficient podobnosti**. Každá shodnost je zřejmě podobnost s koeficientem podobnosti 1.

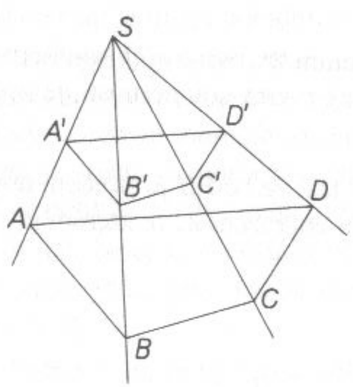
Dva geometrické **útvary** U a U' jsou **podobné**, jestliže existuje podobné zobrazení, které zobrazí útvar U na útvar U'. Např. každé dvě krychle, každé dva pravidelné čtyřstěny jsou navzájem podobné.

Základním podobným zobrazením je **stejnolehlost**. Stejně jako posunutí nebo středovou souměrnost definujeme i stejnolehlost obdobně jako v planimetrii.

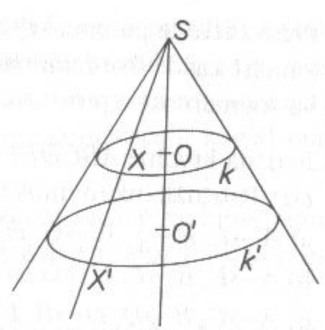
Je dán bod S a reálné číslo $\varkappa$ ($\varkappa \neq 0$). **Stejnolehlost (homotetie)** se **středem** S a **koeficientem** $\varkappa$ je zobrazení $H(S, \varkappa)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že platí: $|SX'| = |\varkappa| \,.\, |SX|$; přitom pro $\varkappa > 0$ leží bod X' na polopřímce SX, pro $\varkappa < 0$ je bod X' bodem polopřímky opačné,
2. bodu S bod $S' = S$.

Na obr. 128 je čtyřúhelník $A'B'C'D'$ obrazem čtyřúhelníku $ABCD$ ve stejnolehlosti $H(S, \frac{1}{2})$, obrazem jehlanu $ABCDS$ je jehlan $A'B'C'D'S$. Protože $0 < \varkappa < 1$, obsahuje původní jehlan svůj obraz.



Obr. 128



Obr. 129

Na obr. 129 je kružnice k' obrazem kružnice k ve stejnolehlosti $H(S, \frac{5}{3})$, obrazem rotačního kužele s podstavou ohraničenou kružnicí k a vrcholem S je rotační kužel s podstavou ohraničenou kružnicí k' a vrcholem S. Protože $\varkappa > 1$, je původní kužel částí svého obrazu.

? Která shodná zobrazení můžeme považovat za zvláštní případy stejnolehlosti ?

Stejnolehlost s koeficientem $\varkappa$ je podobné zobrazení s poměrem podobnosti $|\varkappa|$. Každé podobné zobrazení vznikne složením stejnolehlosti a nějakého shodného zobrazení.

Úlohy

4.29 V podobnosti s poměrem podobnosti k jsou body A', B', C', D' obrazy bodů A, B, C, D neležících v jedné rovině. Určete poměr

a) obsahů trojúhelníků $A'B'C'$ a ABC,

* b) objemů čtyřstěnů $A'B'C'D'$ a $ABCD$.

4.30 Je dán kvádr $ABCDEFGH$; $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AE| = c$. Kdy existuje podobnost, ve které jsou body B, C, G po řadě obrazy bodů A, B, C?

4.31 Těžiště všech čtyř stěn pravidelného čtyřstěnu T jsou opět vrcholy pravidelného čtyřstěnu T'. Najděte stejnolehlost, která zobrazuje čtyřstěn T na čtyřstěn T'.

4.7 Úlohy k opakování

4.32 Na povrchu krychle $ABCDEFGH$ najděte body, které mají stejnou vzdálenost od vrcholů A, B, G.

4.33 Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$; bod S je středem jeho podstavy, bod O je středem úsečky SV.

a) Určete obraz jehlanu ve středové souměrnosti $S(O)$.

b) Určete průnik jehlanu a jeho obrazu.

4.34 Najděte všechny roviny, osy a středy souměrnosti pravidelného n-bokého hranolu. Rozlište n liché a n sudé.

* **4.35** Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$; bod S je středem jeho podstavy.

a) Sestrojte obraz jehlanu v otočení $R(o, \varphi)$, je-li $o = \leftrightarrow SV$, $\varphi = \frac{1}{4}\pi$.

b) Určete průnik jehlanu a jeho obrazu.

* **4.36** Body K, L, M jsou body hran krychle $ABCDEFGH$: bod K je bodem hrany AB, $|AK| = \frac{1}{3}|AB|$, bod L je středem hrany EH, bod M je středem hrany GH. Sestrojte úsečku XY, která je rovnoběžná a shodná s úsečkou LM, bod X je bodem přímky EK a bod Y je bodem roviny BCG. Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

4.37 Útvar souměrný podle dvou rovin k sobě kolmých a podle bodu S, který leží na jejich průsečnici, je souměrný také podle třetí roviny kolmé k oběma daným rovinám a procházející bodem S. Ověřte na krychli.

* **4.38** Je-li V objem tělesa a S jeho povrch, je poměr $S^3 : V^2$ stejný pro těleso i pro jeho obraz v libovolné podobnosti. Vypočtěte tento poměr pro krychli.

Čtvrtý výlet do historie geometrie

V zemích římského impéria byla střediskem vědy, a tedy i matematiky, Alexandrie. **Eukleidés** (4. – 3. stol. př. n. l.) se jako první soustavně zabýval stereometrií. Shrnul do té doby známé stereometrické poznatky v posledních třech kapitolách (jedenácté, dvanácté a třinácté) svých **Základů**. Jedenáctá kapitola obsahuje poznatky o kolmých a rovnoběžných přímkách a rovinách i o úhlech vytvářených přímkami a rovinami, poznatky o rovnoběžnostěnu a nakonec o hranolu. Ve dvanácté kapitole jsou uvedeny věty dokazující objemové vztahy těles, zejména jehlanů, kuželů, válců a koulí. Kniha neobsahuje žádné výpočty objemů či obsahů (povrchů), neboť ty spadaly do praktické geodézie, nikoli do teoretické geometrie. Ve třinácté kapitole pojednává Eukleidés o pravidelných mnohostěnech. Eukleidovy Základy vynikají přesností, jsou vybudovány podle jednotného logického schématu.

Velkým matematikem 3. stol. př. n. l. byl **Archimédés**. Na rozdíl od Eukleida přinesl do matematiky mnoho svých vlastních objevů. Jeho objevy při stanovení povrchů a objemů těles ohraničených křivými plochami jsou začátkem myšlenek, na kterých byl po dvou tisících letech budován integrální počet. Archimédés nalezl také řadu tzv. polopravidelných mnohostěnů (viz např. obr. 183, více v [9]).

Na počátku n. l. byli známějšími alexandrijskými matematiky v oblasti geometrie **Hérón** a **Pappos**. Díla Hérónova obsahují daleko víc aplikací než teorií. Jeho Stereometrie obsahuje kromě měření objemů geometrických těles i měření objemů staveb, divadel, amfiteátrů, plaveckých bazénů, studní, lodí, vinného sudu apod. Pappova Matematická sbírka je stručně a jasně napsaná příručka geometrie s historickými poznámkami, zlepšeními a obměnami existujících vět a důkazů. Mnohé výsledky starověkých autorů jsou známy jen díky této sbírce.

5 TĚLESA

V předcházejících kapitolách jste se seznámili se základními prostorovými útvary, bodem, přímkou a rovinou a s jednoduchými polohovými a metrickými vztahy mezi nimi. V poslední části učebnice se pustíme do studia složitějších prostorových útvarů – těles.

Některá tělesa dobře znáte. Přehled těch, která jste poznali na základní škole, je uveden již na začátku učebnice. Zejména krychli, kvádr, pravidelný čtyřstěn a pravidelný čtyřboký jehlan jsme pak používali k modelování různých prostorových situací.

Každý z vás má jistě správnou představu o pojmu těleso. **Geometrické těleso** je prostorový omezený souvislý geometrický útvar. Jeho **hranicí** nazývanou také **povrchem** je uzavřená plocha. Přesnou definici tělesa ani plochy jako jeho hranice uvádět nebudeme – je to velmi obtížné a přesahuje to rámec učiva střední školy.

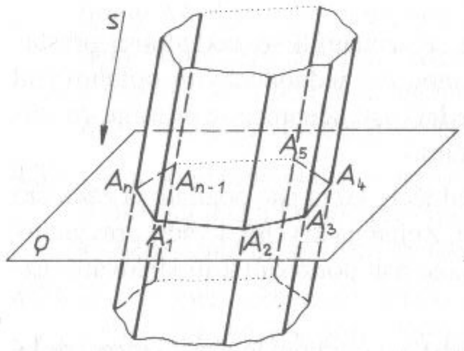
Budeme definovat jen některá tělesa, která jsou důležitá zejména v technické praxi. Zaměříme se především na názvosloví těles. Vlastnosti některých těles uvedeme bez důkazů.

5.1 Mnohostěny

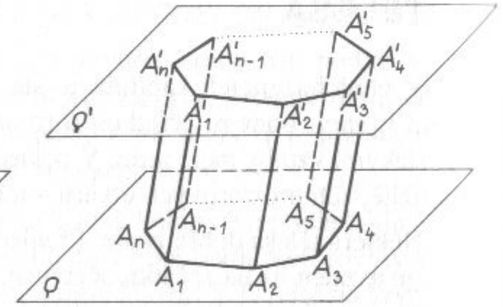
Začněme tělesy hranolového typu. Je dán n-úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ (tzv. **řídicí mnohoúhelník**) ležící v rovině ρ a přímka $s \nparallel \rho$ (obr. 130). Sjednocení všech přímek rovnoběžných s přímkou s a protínajících hranici mnohoúhelníku $A_1A_2 \dots A_n$ se nazývá **n-boká hranolová plocha**.

Sjednocení všech přímek rovnoběžných s přímkou s a protínajících mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_n$ se nazývá **n-boký hranolový prostor**. Hranolová plocha je hranice hranolového prostoru. Každá přímka (rovina) rovnoběžná s přímkou s se nazývá **směrová přímka (rovina)** hranolového prostoru.

n-boký hranol je průnik n-bokého hranolového prostoru a vrstvy, jejíž hraniční roviny nejsou směrové (obr. 131), tloušťka vrstvy se nazývá **výška hranolu**. Mnohoúhelníky, které jsou průniky hraničních rovin vrstvy s hranolovým prostorem, jsou **podstavy** hranolu. Ostatní stěny hranolu, které nejsou jeho podstavami, jsou **boční stěny** hranolu, sjednocení všech bočních stěn je **plášť** hranolu. Vrcholy stěn hranolu jsou **vrcholy** hranolu. Strany podstav hranolu jsou **podstavné hrany**, ostatní hrany jsou **boční hrany** hranolu. Vzdálenost podstavných hran v téže boční stěně je **stěnová výška**. Úsečky, jejichž krajní body jsou vrcholy hranolu, které neleží v téže stěně, se nazývají **tělesové úhlopříčky**.



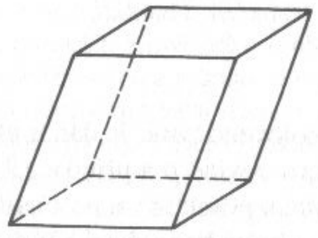
Obr. 130



Obr. 131

? Určete počet všech vrcholů, hran, stěn n-bokého hranolu.

Hranol, jehož boční hrany jsou kolmé k rovinám podstav, se nazývá **kolmý hranol**. Hranol, který není kolmý, je **kosý hranol**. Kolmý hranol, jehož podstavami jsou pravidelné n-úhelníky, se nazývá **pravidelný n-boký hranol**.



Obr. 132

Zajímavým čtyřbokým hranolem je **rovnoběžnostěn** (obr. 132). U tohoto hranolu jsou rovnoběžné nejen roviny podstav, ale také roviny dvou a dvou bočních stěn. Je tedy ohraničen třemi dvojicemi navzájem rovnoběžných a shodných rovnoběžníků. Kterákoli dvojice rovnoběžných stěn může být podstavami. Má 12 hran, z nichž čtyři a čtyři jsou rovnoběžné a shodné; má 8 vrcholů, z nichž dva a dva jsou protější; má 4 tělesové úhlopříčky a 6 úhlopříčných řezů. Tělesové úhlopříčky rovnoběžnostěnu se protínají v jediném bodě a navzájem se půlí.

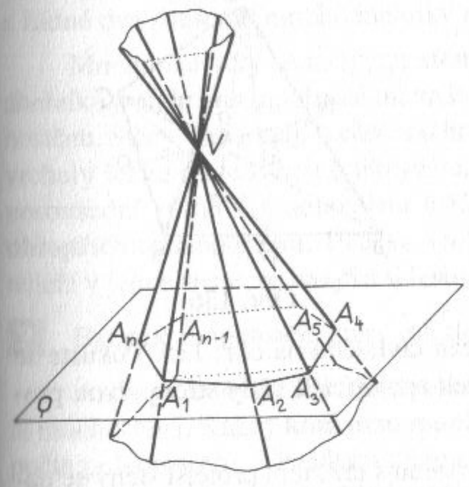
? Popište vrcholy rovnoběžnostěnu z obr. 132 a vyjmenujte jeho podstavy, hrany, protější vrcholy a tělesové úhlopříčky.

Zvláštní případy rovnoběžnostěnu jsou kvádr, krychle a klenec. **Kvádr** je kolmý hranol, jehož podstavou je obdélník. Délky podstavných hran

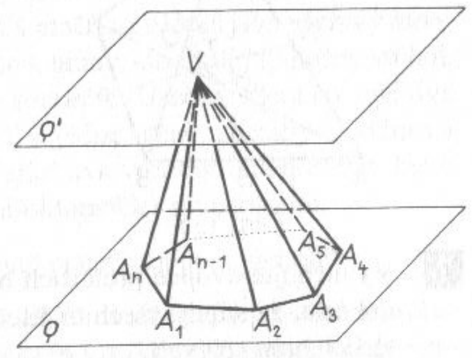
kvádru se nazývají **délka** a **šířka kvádru**, délka třetí hrany se nazývá **výška kvádru**. **Krychle** je kvádr, jehož délka, šířka a výška jsou stejné. **Klenec** je rovnoběžnostěn omezený 6 shodnými kosočtverci.

Podobně jako hranolovou plochu, hranolový prostor a hranol definujeme jehlanovou plochu, jehlanový prostor a jehlan. Je dán n-úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ ležící v rovině ρ a bod V, který v této rovině neleží (obr. 133). Sjednocení všech přímek procházejích bodem V a protínajících hranici mnohoúhelníku $A_1A_2 \dots A_n$ se nazývá **n-boká jehlanová plocha**.

Sjednocení všech přímek procházejících **bodem** V a protínajících mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_n$ se nazývá **n-boký jehlanový prostor**. Jehlanová plocha je hranice jehlanového prostoru. Bod V je **vrchol** jehlanové plochy či jehlanového prostoru. Každá přímka (rovina), která prochází bodem V, se nazývá **vrcholová přímka (rovina)**.



Obr. 133



Obr. 134

n-boký jehlan je průnik n-bokého jehlanového prostoru a vrstvy, jejíž jedna hraniční rovina má s tímto prostorem jediný společný bod – vrchol jehlanového prostoru (obr. 134). Ten se v tomto případě nazývá **hlavní vrchol jehlanu**. Tloušťka vrstvy je **výška jehlanu**.

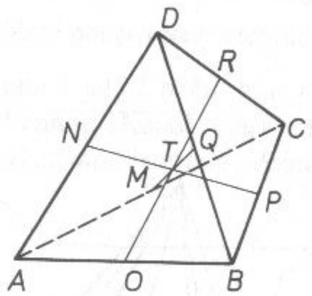
Mnohoúhelník, který je průnikem hraniční roviny vrstvy neprocházející vrcholem s jehlanovým prostorem, je **podstava** jehlanu. Jeho vrcholy jsou **vrcholy podstavy** jehlanu. Stěny jehlanu, které obsahují hlavní vrchol, jsou **boční stěny** jehlanu, sjednocení všech bočních stěn je **plášť** jehlanu. Každá boční stěna jehlanu je trojúhelník. Strany podstavy jehlanu jsou **podstavné hrany**, ostatní hrany jsou **boční hrany** jehlanu. **Stěnová výška** je vzdálenost hlavního vrcholu od podstavné hrany v boční stěně.

? Určete počet všech vrcholů, hran, stěn n-bokého jehlanu.

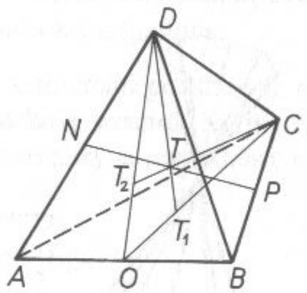
Má-li podstava jehlanu střed souměrnosti a je-li přímka určená tímto středem a vrcholem V jehlanu kolmá k rovině podstavy, říká se mu **kolmý jehlan**. Jehlan, který není kolmý, je **kosý**. Kolmý jehlan, jehož podstavou je pravidelný n-úhelník, se nazývá **pravidelný n-boký jehlan**.

? Nejvýše dvě stěny čtyřbokého jehlanu jsou kolmé k rovině jeho podstavy. Proč?

Čtyřstěn je těleso ohraničené čtyřmi trojúhelníkovými stěnami (obr. 135). Jsou-li jeho stěny shodné rovnostranné trojúhelníky, pak se nazývá **pravidelný čtyřstěn**. Je to mnohostěn s nejmenším počtem stěn. Ve čtyřstěnu existují tři dvojice protějších hran. Zvolíme-li u čtyřstěnu jednu ze stěn za podstavu, dostáváme trojboký jehlan.



Obr. 135



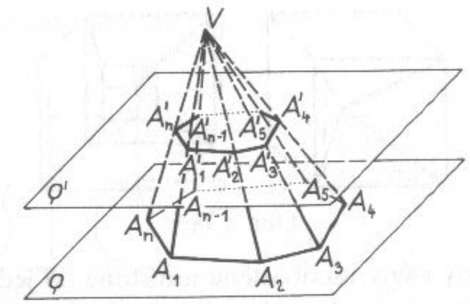
Obr. 136

? Vyjmenujte dvojice protějších hran čtyřstěnu na obr. 135. Pokuste se dokázat, že středy všech tří úseček spojujících vždy středy dvou protějších hran splývají.

Spojnice libovolného vrcholu čtyřstěnu s těžištěm protější stěny se nazývá **těžnice** čtyřstěnu. Všechny čtyři těžnice čtyřstěnu procházejí jedním bodem, tzv. **těžištěm** čtyřstěnu (obr. 136). Těžiště čtyřstěnu je bod, v němž se protínají spojnice středů protějších hran. Vzdálenost těžiště od vrcholu je rovna třem čtvrtinám délky příslušné těžnice. Těžiště čtyřstěnu splývá s jeho fyzikálním těžištěm za předpokladu, že jde o homogenní těleso.

? Je možné, aby v některém čtyřstěnu ležely čtyři středy kružnic opsaných trojúhelníkům jeho stěn v jedné rovině?

Protneme-li jehlan rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy, rozdělí se na dvě tělesa. Jedno z nich je opět jehlan, druhé se nazývá **komolý jehlan** (obr. 137). Komolý jehlan má dvě podstavy, které jsou podobnými mnohoúhelníky, boční stěny jsou lichoběžníky. Vrcholy, hrany, stěnové výšky i výšku komolého jehlanu definujeme podobně jako u hranolu.



Obr. 137

Hranol, jehlan i komolý jehlan jsou tělesa ohraničená jen mnohoúhelníky. Patří mezi tzv. mnohostěny neboli polyedry. **Mnohostěn** (**n-stěn**) je každé těleso, jehož hranice je sjednocením n mnohoúhelníků (**stěn**) takových, že strana každého z nich je zároveň stranou sousedního mnohoúhelníku a žádné dva sousední mnohoúhelníky neleží v téže rovině.

Mnohoúhelníky se nazývají **stěny** mnohostěnu. Strany těchto mnohoúhelníků jsou **hrany** mnohostěnu, vrcholy mnohoúhelníků jsou **vrcholy** mnohostěnu. Stěny, které mají společnou hranu, hrany, které mají společný vrchol, vrcholy ležící na téže hraně nazýváme sousední. Úsečka, která spojuje dva nesousední vrcholy mnohostěnu ležící v jedné stěně, se nazývá **stěnová úhlopříčka** mnohostěnu. Úsečka spojující dva vrcholy mnohostěnu, které neleží v jedné stěně, se nazývá **tělesová úhlopříčka** mnohostěnu.

? Existuje mnohostěn, který má stejný počet stěn jako vrcholů?

Analogií konvexních mnohoúhelníků v rovině jsou v prostoru konvexní mnohostěny. Každý **konvexní mnohostěn** vznikne jako průnik konečného počtu poloprostorů. S každými dvěma body X, Y obsahuje konvexní mnohostěn i celou úsečku XY. Každý hranol a jehlan, jehož podstavou je konvexní mnohoúhelník, je konvexní mnohostěn.

Pro konvexní mnohostěny platí **Eulerova věta**:

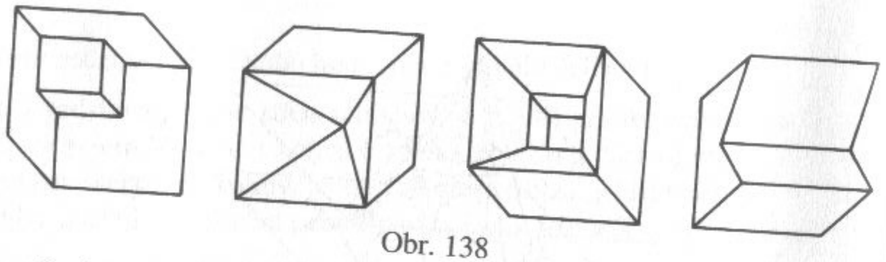
Označíme-li s počet stěn, h počet hran, v počet vrcholů konvexního mnohostěnu, pak

$$s + v = h + 2$$

? Ověřte platnost Eulerovy věty pro pravidelný n-boký hranol i jehlan.

Na obr. 138 jsou příklady nekonvexních mnohostěnů.

? Platí Eulerova věta pro mnohostěny na obr. 138?

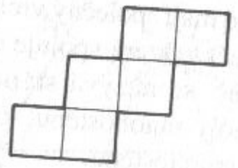


Obr. 138

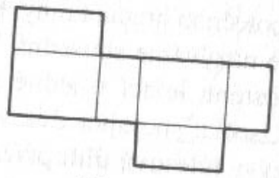
Jestliže všechny stěny mnohostěnu umístíme do jedné roviny v takovém vhodném seskupení, abychom dostali jeden rovinný obrazec, říkáme, že jsme sestrojili **síť mnohostěnu**. Pokud narýsujeme síť na papír, můžeme po vystřižení vytvořit model hranice mnohostěnu.

Na obr. 139 je několik sítí mnohostěnů: krychle (obr. 139a), kvádru (obr. 139b), pravidelného čtyřstěnu (obr. 139c), pravidelného čtyřbokého jehlanu (obr. 139d), pravidelného šestibokého hranolu (obr. 139e) a jehlanu (obr. 139f), pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu (obr. 139g).

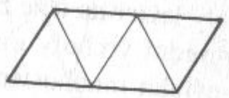
? Je možné, aby různá tělesa měla stejnou síť?



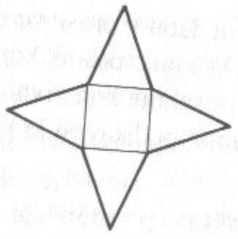
Obr. 139a



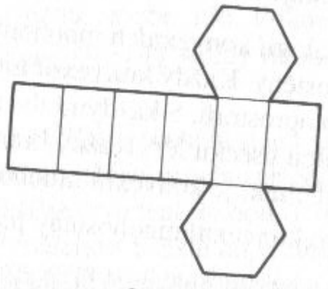
Obr. 139b



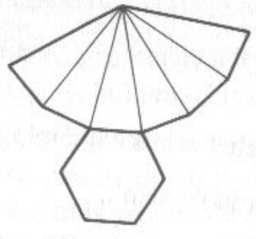
Obr. 139c



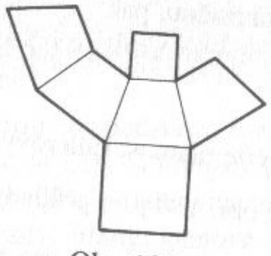
Obr. 139d



Obr. 139e

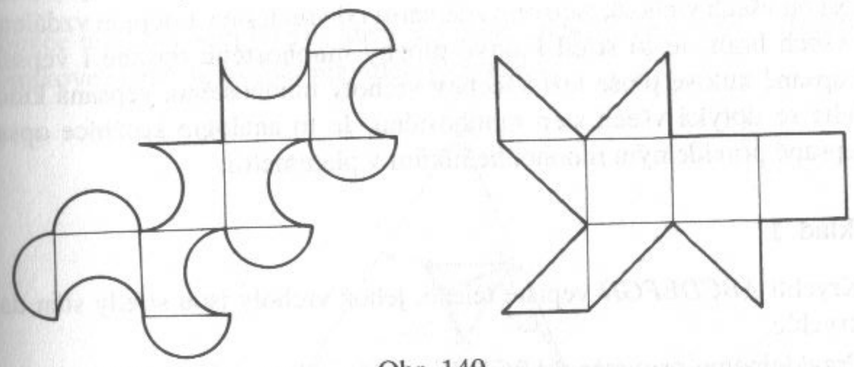


Obr. 139f



Obr. 139g

Na obr. 140 jsou „taky sítě“ krychle.



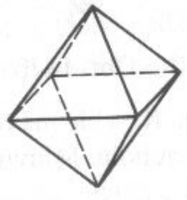
Obr. 140

? Načrtněte další sítě krychle, kvádru, pravidelného čtyřstěnu, pravidelného čtyřbokého jehlanu.

Pravidelný mnohostěn (*s*-stěn) má shodné stěny, kterými jsou pravidelné *n*-úhelníky a z každého jeho vrcholu vychází stejný počet hran. Součet vnitřních úhlů pravidelných *n*-úhelníků u jednoho vrcholu musí být menší než 360°. Tedy: Jsou-li stěnami pravidelného mnohostěnu rovnostranné trojúhelníky (vnitřní úhel v rovnostranném trojúhelníku má velikost 60°), mohou být u jednoho vrcholu buď tři – **pravidelný čtyřstěn** (**tetraedr**, obr. 141a), nebo čtyři – **osmistěn** (**oktaedr**, obr. 141b), nebo pět – **pravidelný dvacetistěn** (**ikosaedr**, obr. 141c).

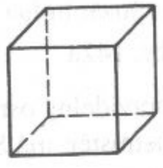
Jsou-li stěnami pravidelného mnohostěnu čtverce (vnitřní úhel ve čtverci je pravý), mohou být u jednoho vrcholu pouze tři – **pravidelný šestistěn** neboli **krychle** (**hexaedr**, obr. 141d). Jsou-li stěnami pravidelného mnohostěnu pravidelné pětiúhelníky (velikost vnitřního úhlu v pravidelném pětiúhelníku je 108°), mohou se v jednom vrcholu stýkat pouze tři – **pravidelný dvanáctistěn** (**dodekaedr**, obr. 141e).

Obr. 141a

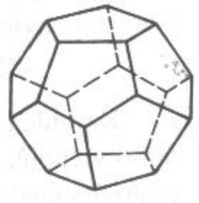


Obr. 141b

Obr. 141c



Obr. 141d



Obr. 141e

Vnitřní úhly pravidelného šestiúhelníku mají velikost 120°, takže žádný pravidelný mnohostěn nemůže mít pravidelné šestiúhelníky jako své stěny. Proto je pravidelných mnohostěnů jen pět. Říkáme jim **Platónova** nebo také **platónská** tělesa.

V každém pravidelném mnohostěnu existuje bod, který má stejnou vzdálenost od všech vrcholů, stejnou vzdálenost od všech stěn a stejnou vzdálenost od všech hran. Je to střed kulové plochy mnohostěnu opsané i vepsané. Na opsané kulové ploše leží všechny vrcholy mnohostěnu, vepsaná kulová plocha se dotýká všech stěn mnohostěnu. Je to analogie kružnice opsané a vepsané pravidelným mnohoúhelníkům v planimetrii.

Příklad 1

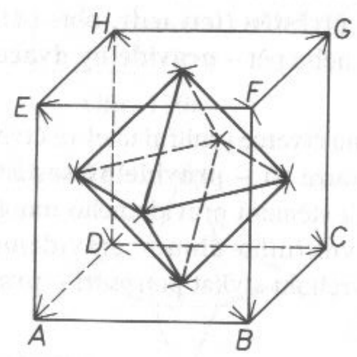
a) Krychli *ABCDEFGH* vepište těleso, jehož vrcholy jsou středy stěn dané krychle.

b) Pravidelnému osmistěnu *ABCDEF* vepište těleso, jehož vrcholy jsou těžiště stěn daného osmistěnu.

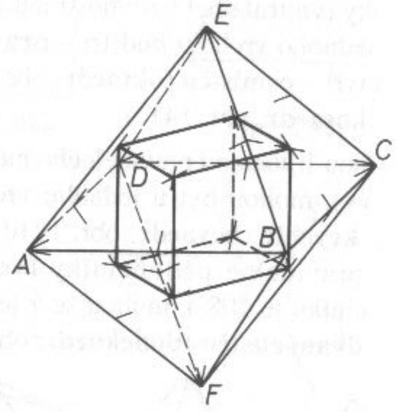
Řešení

a) (obr. 142a) Vepsané těleso má osm stěn, kterými jsou rovnostranné trojúhelníky. Je to tedy pravidelný osmistěn.

b) (obr. 142b) Vepsáním vznikne těleso, které má šest čtvercových stěn, tedy krychle.



Obr. 142a



Obr. 142b

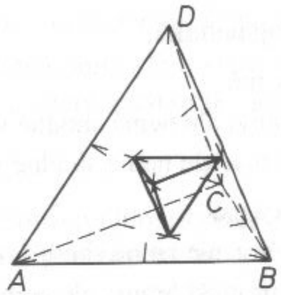
Krychle i pravidelný osmistěn mají 12 hran. Krychle má 6 stěn a osmistěn 6 vrcholů, osmistěn má 8 stěn a krychle 8 vrcholů. Mluvíme o **dualitě** těchto dvou těles.

Příklad 2

Pravidelnému čtyřstěnu *ABCD* vepište těleso tak, že jeho vrcholy jsou v těžištích stěn daného čtyřstěnu.

Řešení (obr. 143)

Spojnice těžišť vytvoří těleso, které má čtyři vrcholy, šest hran a čtyři trojúhelníkové stěny. Je to opět pravidelný čtyřstěn.



Obr. 143

Obdobný vztah, jako mají krychle a pravidelný osmistěn, mají i zbývající dva pravidelné mnohostěny – dvanáctistěn a dvacetistěn. Těleso vepsané pravidelnému dvanáctistěnu tak, že jeho vrcholy leží v středech jeho stěn, je pravidelný dvacetistěn. Těleso vepsané pravidelnému dvacetistěnu tak, že jeho vrcholy leží v těžištích jeho stěn, je pravidelný dvanáctistěn. Dvanáctistěn má 12 stěn a 20 vrcholů, dvacetistěn má 20 stěn a 12 vrcholů. Obě tělesa mají 30 hran.

? Které pravidelné mnohostěny jsou rovinově, středově, osově souměrné?

Nejen každé dva pravidelné čtyřstěny a každé dvě krychle jsou navzájem podobné. Také každé dva pravidelné osmistěny, dvanáctistěny i dvacetistěny jsou navzájem podobné.

S konvexními mnohostěny se setkáte v chemii, např. při studiu struktury molekul, krystalových mřížek. Bez základních znalostí o konvexních mnohostěnech se neobejdete v mineralogii při studiu geometrie krystalů. V matematice, v teorii grafů, zjistíte, že spolu velmi těsně souvisí konvexní mnohostěny a souvislé grafy.

Úlohy

5.1 Určete počet, délku a vlastnosti tělesových úhlopříček

a) v krychli s hranou délky a;

b) v kvádru s rozměry a, b, c;

c) v pravidelném osmistěnu s hranou délky a.

5.2 Určete počet tělesových úhlopříček n-bokého hranolu.

5.3 Odvoďte vzorec pro výpočet výšky pravidelného n-bokého jehlanu, je-li délka podstavné hrany a a délka boční hrany b.

5.4 Uveďte příklady těles, jejichž hranici tvoří sjednocení konečného počtu shodných

a) rovnostranných trojúhelníků, b) čtverců.

5.5 Existuje hranol, který má

a) shodné všechny stěny, ale nemá shodné všechny hrany,

b) shodné všechny hrany, ale nemá shodné všechny stěny?

* **5.6** Existuje čtyřstěn, který má

a) shodné všechny stěny, ale nemá shodné všechny hrany,

b) shodné každé dvě protější hrany, ale nemá shodné všechny stěny?

5.7 Proveďte diskusi vzájemné polohy

a) hranolu a směrové roviny,

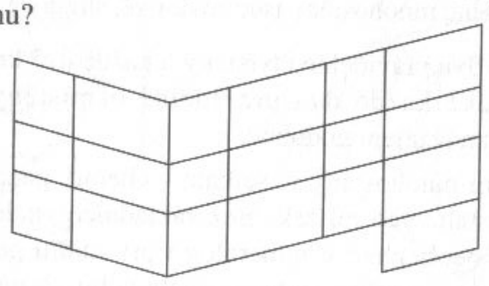
b) jehlanu a vrcholové roviny.

5.8 Sestrojte síť kolmého čtyřbokého hranolu s výškou $v = 6$ cm, jehož podstavou je

a) čtverec se stranou délky 2,5 cm,

b) kosočtverec s úhlopříčkami délek 5 cm a 3 cm.

5.9 Kterých šest z 19 nakreslených rovnoběžníků na obr. 144 tvoří síť rovnoběžnostěnu?



Obr. 144

5.10 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky 5 cm; bod X je středem hrany AB, bod Y středem stěny $BCGF$. Určete délku nejkratší spojnice bodů

a) X, H, b) Y, H,

jdoucí po povrchu krychle.

5.11 Součet obsahů tří stěn kvádru, které mají společný vrchol, je 279 cm^2, rozměry kvádru jsou v poměru 2 : 3 : 5. Vypočtěte délky

a) hran kvádru, b) stěnových úhlopříček kvádru.

5.12 Tělesová úhlopříčka kvádru má délku 91 cm. Tato délka se nezmění, jestliže délku kvádru a zmenšíme o 27 cm, šířku kvádru b zmenšíme o 9 cm a výšku kvádru c zvětšíme o 18 cm. Nezmění se ani v případě, jestliže délku kvádru a zmenšíme o 16 cm, šířku kvádru b zmenšíme o 4 cm a výšku kvádru c zvětšíme o 12 cm. Vypočtěte rozměry kvádru.

5.13 Označte α, β, γ velikosti úhlů, které svírá tělesová úhlopříčka kvádru s hranami délek a, b, c, které vycházejí z jednoho vrcholu. Dokažte, že platí:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

5.14 Vypočtěte délky tělesových úhlopříček pravidelného šestibokého hranolu výšky $v = 14$ cm s podstavnou hranou délky $a = 10$ cm.

5.15 Největší kořen rovnice $9x^3 - 73x^2 - 73x + 9 = 0$ je číselně roven délce hrany pravidelného čtyřstěnu. Vypočtěte výšku v čtyřstěnu a poloměr ρ kulové plochy tomuto čtyřstěnu vepsané.

5.16 Pravidelný čtyřboký jehlan má podstavnou hranu délky $a = 20$ cm a boční hranu délky $b = 26$ cm. Vypočtěte jeho výšku v, odchylku φ bočních hran a roviny podstavy a odchylku ψ bočních stěn a roviny podstavy.

5.17 Délka podstavných hran pravidelného devítibokého jehlanu je $a = 2$ cm, délka jeho bočních hran je $b = 10$ cm. Vypočtěte jeho výšku.

5.18 Jímka má tvar pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu. Horní podstava má stranu délky $a_1 = 5$ m, dolní podstava má stranu délky $a_2 = 3{,}6$ m, odchylka bočních stěn a roviny podstavy je $\alpha = 75°$. Jakou má jímka hloubku?

5.19 Pravidelnému čtyřbokému jehlanu s výškou v a délkou podstavné hrany a je vepsána krychle tak, že vrcholy jedné její stěny leží

a) na bočních hranách jehlanu,

b) na osách bočních stěn jehlanu.

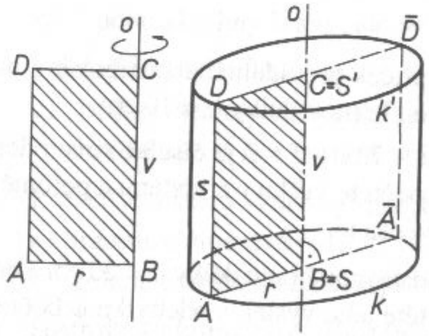
Určete délku hrany krychle.

5.20 V krychli $ABCDEFGH$ jsou body K, L, M, N po řadě středy hran AB, BC, CD, DA. Body P a P' jsou body hran AB a EF tak, že $|BP| = |EP'| = \frac{1}{4}|AB|$. Hranol H_1 je pravidelný čtyřboký hranol, jehož jedna podstava je čtverec $KLMN$ a druhá podstava leží v rovině horní stěny krychle. Jednou podstavou kolmého trojbokého hranolu H_2 je trojúhelník APP', druhá podstava leží v rovině zadní stěny krychle. Určete průnik hranolů H_1 a H_2.

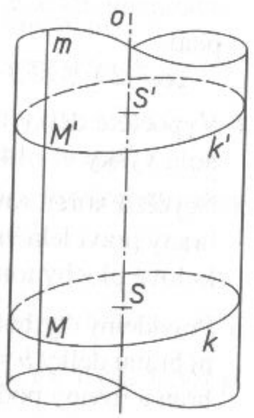
* **5.21** Je možné v krychli sestrojit otvor, kterým projde krychle o hraně stejné délky?

5.2 Rotační tělesa

Doposud jsme pracovali s mnohostěny, vesměs konvexními. Tato „hranatá tělesa" lze vytvořit jako průniky poloprostorů. „Oblá" tělesa je třeba vytvořit jinak. Jak, to jste poznali již na základní škole u rotačního válce a rotačního kužele. V přehledu v článku 1.2 jsou uvedeny stručné charakteristiky těchto dvou těles.



Obr. 145a



Obr. 145b

Rotační válec vznikne rotací obdélníku, popř. čtverce kolem přímky, která obsahuje jeho jednu stranu. Na obr. 145a je dán obdélník *ABCD*, osou rotace je přímka *BC*. Body *A* a *D* vytvoří rotací **podstavné hrany** (kružnice). Strany *AB*, *CD* a *AD* rotujícího obdélníku vyplní hranici válce. Rotací úseček *AB* a *CD* vzniknou **podstavy** (kruhy) válce, rotací úsečky *AD* vznikne **plášť** válce. Jednotlivé polohy úsečky *AD* při rotaci se nazývají **strany** válce. Přímka *BC* se nazývá **osa** válce, délka úsečky *BC* je **výška** válce, délka úsečky *AB* je **poloměr podstavy** válce, dvojnásobek poloměru je **průměr podstavy** válce.

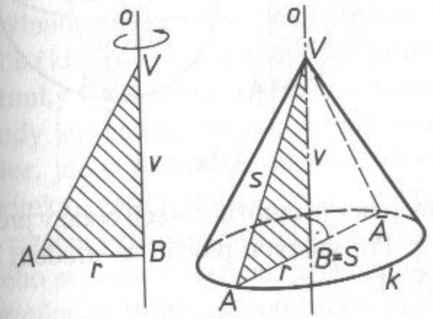
Prodloužíme-li každou stranu rotačního válce v přímku, vytvoří všechny tyto přímky útvar, který se nazývá **rotační válcová plocha** (obr. 145b); prostor touto plochou omezený se nazývá **rotační válcový prostor**.

Rotační válcová plocha je množina všech bodů v prostoru, které mají od dané přímky *o* stejnou vzdálenost různou od nuly.

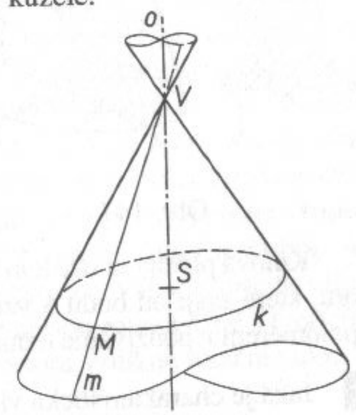
? Vyslovte obdobnou definici pro rotační válcový prostor.

Rotační kužel vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem přímky, která obsahuje jeho jednu odvěsnu. Na obr. 146a je dán pravoúhlý trojúhelník *ABV* ($|\sphericalangle B| = 90°$), osou rotace je přímka *BV*. Rotací bodu *A* vznikne **podstavná hrana** (kružnice), rotací odvěsny *AB* **podstava** (kruh) kužele. Útvar vzniklý rotací přepony *AV* je **plášť** kužele, jednotlivé polohy přepony *AV*

při rotaci se nazývají **strany** kužele. Plášť a podstava kužele tvoří hranici kužele. Bod *V* se nazývá **vrchol** kužele, přímka *BV* se nazývá **osa** kužele. Délka úsečky *BV* je **výška** kužele, délka úsečky *AB* je **poloměr podstavy** kužele, její dvojnásobek je **průměr podstavy** kužele.



Obr. 146a



Obr. 146b

Prodloužíme-li každou stranu rotačního kužele v přímku, vytvoří všechny tyto přímky útvar, který se nazývá **rotační kuželová plocha** (obr. 146b); prostor omezený touto plochou se nazývá **rotační kuželový prostor**.

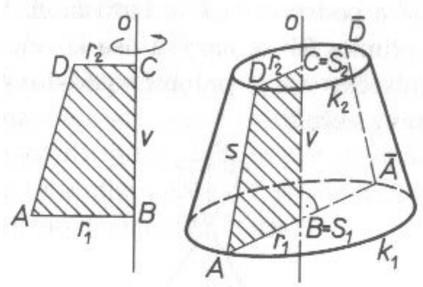
Rotační kuželová plocha je množina všech přímek v prostoru, které procházejí daným bodem *V* dané přímky *o*, přičemž odchylka φ těchto přímek a přímky *o* je stejná ($0° < \varphi < 90°$).

? Vyslovte obdobnou definici pro rotační kuželový prostor.

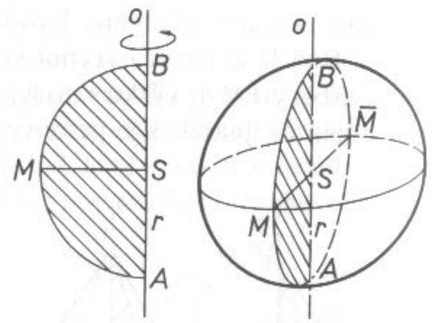
Jestliže obdélník, čtverec nebo pravoúhlý trojúhelník nahradíme jinými útvary ležícími v jedné rovině s osou rotace, vzniknou další známá rotační tělesa.

Komolý rotační kužel vznikne rotací pravoúhlého lichoběžníku kolem přímky, v níž leží jeho kratší rameno (obr. 147). Délka tohoto ramena je výška komolého kužele. Jednotlivé polohy delšího ramena při rotaci jsou **strany** komolého kužele. Rotací základen lichoběžníku vzniknou **podstavy** komolého kužele, kružnice ohraničující podstavy jsou jeho **podstavné hrany**.

Dalším rotačním tělesem je koule. **Koule** vznikne rotací půlkruhu kolem přímky, která obsahuje jeho průměr (obr. 148). Střed půlkruhu *S* je **střed** koule, jeho poloměr *r* je **poloměr** koule. Hranicí koule je **kulová plocha**. Vznikne rotací půlkružnice, která ohraničuje daný půlkruh. Střed koule je současně středem kulové plochy, poloměr koule poloměrem kulové plochy. Každá úsečka, jejíž krajní body jsou body hranice koule a která obsahuje střed koule, popř. její délka, je **průměr** koule.



Obr. 147

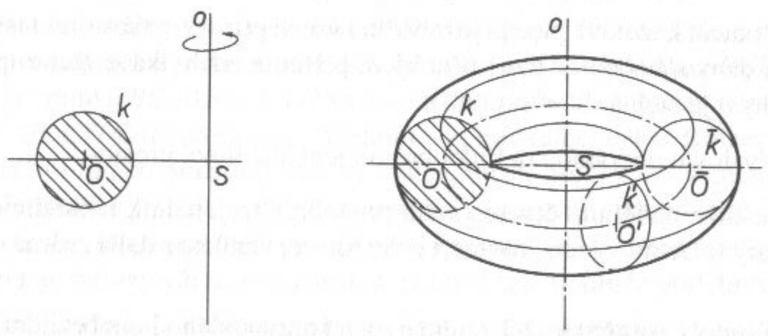


Obr. 148

Kulová plocha se středem S a poloměrem r je množina všech bodů v prostoru, které mají od bodu S vzdálenost r. Pro kulovou plochu se středem S a poloměrem r používáme označení $\varkappa$ (S; r).

? Jaká je charakteristická vlastnost všech bodů koule?

Necháme-li rotovat kruh kolem přímky, která leží v rovině tohoto kruhu a tento kruh neprotíná, vznikne **anuloid** neboli torus, popř. toroid (obr. 149). Modelem anuloidu je např. gumový prstenec na posilování dlaně, hranici anuloidu představuje např. duše pneumatiky automobilu.



Obr. 149

Obecně můžeme říci:

Rotační těleso je těleso, které vznikne rotací rovinného obrazce kolem dané přímky, tzv. **osy rotačního tělesa**.

Přitom osa rotace není kolmá k rovině obrazce a zpravidla leží v rovině obrazce. Rotační tělesa mají velké uplatnění v praxi. Množství strojních součástek má jako svůj základ rotační tělesa, např. čepy, hřídele, ložiska, šrouby, kolíky. Soustružení je v podstatě výroba rotačních těles.

? Uveďte příklady rotačních těles v běžném životě.

Rotační válcovou plochu, rotační válcový prostor a rotační válec můžeme vytvořit i bez použití rotace, podobně jako hranolovou plochu, hranolový prostor a hranol. Řídicí mnohoúhelník nahradíme jednoduchou uzavřenou rovinnou křivkou, tzv. řídicí křivkou. Všechny přímky, které procházejí body řídicí křivky a jsou rovnoběžné s přímkou s, vytvoří válcovou plochu. Všechny přímky rovnoběžné s přímkou s, které procházejí body řídicí křivky nebo body její vnitřní oblasti, vytvoří válcový prostor. Je-li řídicí křivkou kružnice, jde o kruhovou válcovou plochu a kruhový válcový prostor. Jsou-li přímky tvořící plochu, popř. prostor kolmé k rovině řídicí kružnice, jde o rotační válcovou plochu a o rotační válcový prostor. Válec je průnik válcového prostoru s vrstvou, jejíž hraniční roviny nejsou rovnoběžné s tvořicími přímkami. V případě rotačního válcového prostoru vznikne rotační válec.

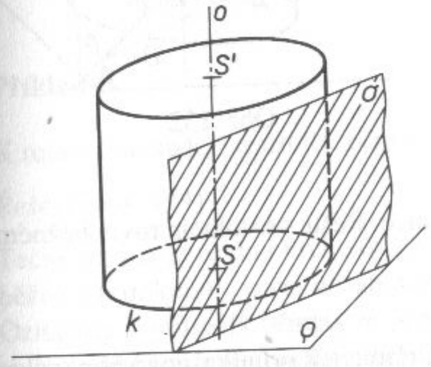
? Lze bez použití rotace vytvořit rotační kužel? Jak? A co komolý kužel?

Rotační válec, rotační kužel a koule jsou konvexní útvary.

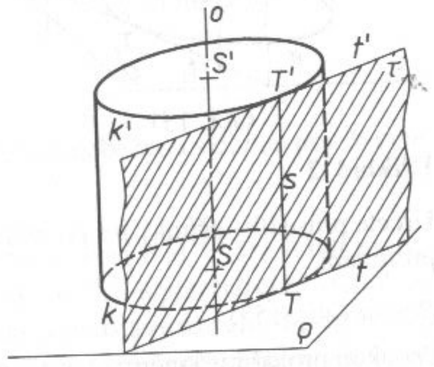
? Je kulová plocha konvexní útvar?

Všimněme si nyní **vzájemné polohy roviny a jednoduchých rotačních těles**, rotačního válce, rotačního kužele a kulové plochy.

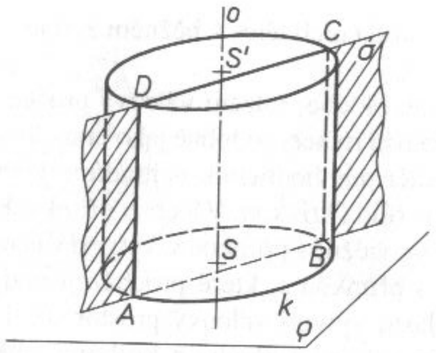
Rovina, která je rovnoběžná s osou rotačního válce (tzv. **směrová rovina**), buď nemá s válcem žádný společný bod (obr. 150a), nebo má s válcem společnou jeho jednu stranu (obr. 150b), nebo je průnikem válce a roviny obdélník, popř. čtverec (obr. 150c). V případě jedné společné strany se rovina nazývá **tečná rovina**.



Obr. 150a



Obr. 150b



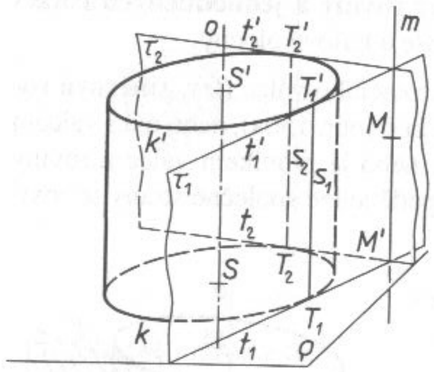
Obr. 150c

Příklad 1

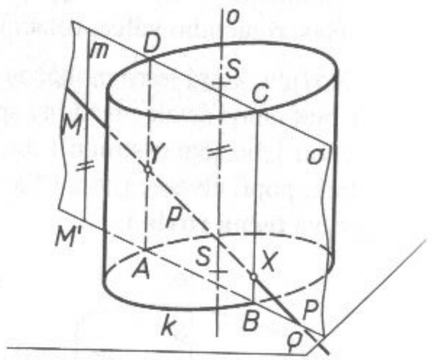
Daným bodem M, který leží vně válce, veďte tečnou rovinu válce. Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

Řešení (obr. 151)

Tečná rovina je rovina směrová, a je proto rovnoběžná s osou válce. Bude tedy obsahovat přímku m, která prochází bodem M a je rovnoběžná s osou o. Podstava válce leží v rovině ρ; průsečík přímky m s rovinou ρ označme M'. Tečné roviny τ_1 a τ_2 jsou určeny přímkou m a tečnami t_1, t_2 z bodu M' k podstavné hraně válce k.



Obr. 151



Obr. 152

Příklad 2

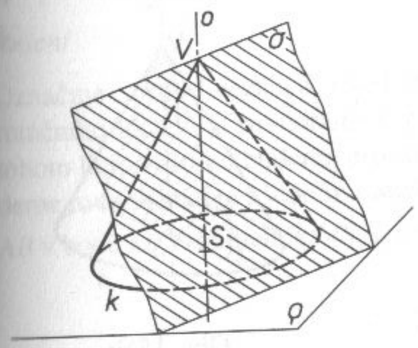
Určete průsečíky přímky p s povrchem válce. Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

Řešení (obr. 152)

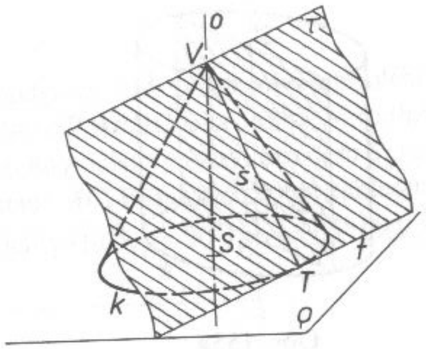
Přímkou proložíme směrovou rovinu σ. Určíme její průnik s povrchem válce a společné body přímky a tohoto průniku jsou hledané průsečíky.

? Diskutujte vzájemnou polohu přímky a rotačního válce.

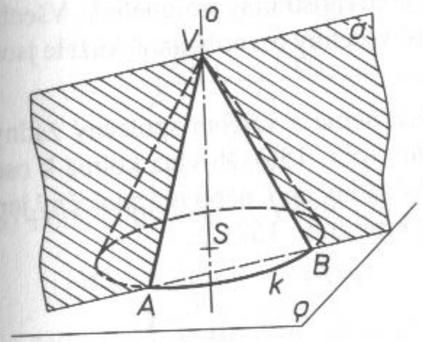
Rovina, která prochází vrcholem rotačního kužele, tzv. **vrcholová rovina**, má s kuželem buď jeden společný bod (vrchol, obr. 153a), nebo společnou jednu jeho stranu (obr. 153b), nebo protíná kužel v rovnoramenném trojúhelníku (obr. 153c). V případě jedné společné strany se rovina nazývá **tečná rovina**.



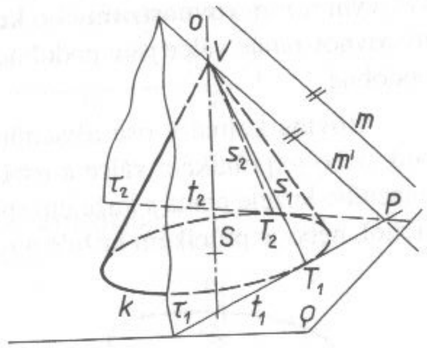
Obr. 153a



Obr. 153b



Obr. 153c



Obr. 154

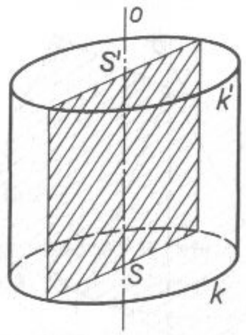
Příklad 3

K rotačnímu kuželi sestrojte tečnou rovinu rovnoběžnou s danou přímkou m.

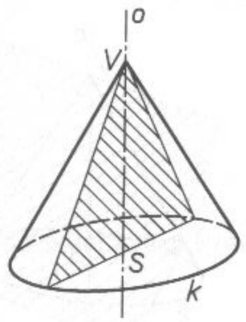
Řešení (obr. 154)

Tečná rovina je rovina vrcholová a obsahuje proto bod V. Má-li být rovnoběžná s přímkou m, musí obsahovat přímku $m' \parallel m$ a procházející vrcholem. Označme P průsečík přímky m' s rovinou ρ podstavy kužele. Tečné roviny rovnoběžné s přímkou m jsou dvě: τ_1 a τ_2. Jsou určeny přímkou m' a tečnami t_1, t_2 vedenými bodem P k podstavné hraně k.

Rotační válec (rotační kužel) je útvar souměrný podle své osy. Všechny roviny vedené osou souměrnosti rotačního válce (rotačního kužele) jsou jeho roviny souměrnosti. Roviny souměrnosti protínají rotační válec ve shodných obdélnících, popř. čtvercích (obr. 155a), rotační kužel ve shodných rovnoramenných trojúhelnících (obr. 155b). Řez rovinou souměrnosti nazýváme obvykle **osový řez.**



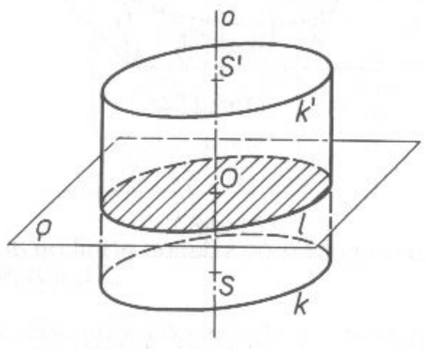
Obr. 155a



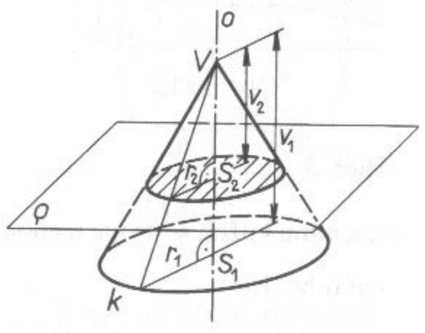
Obr. 155b

Rovnostranný válec je rotační válec, jehož osovým řezem je čtverec. Osovým řezem **rovnostranného kužele** je rovnostranný trojúhelník. Všechny rovnostranné válce jsou podobné. Také všechny rovnostranné kužele jsou podobné.

Rovina kolmá k ose rotačního válce nemá s válcem společný žádný bod, nebo je průnikem válce a roviny kruh (obr. 156). Rovina kolmá k ose rotačního kužele nemá s kuželem společný žádný bod, nebo má společný jen vrchol, nebo je průnikem kužele a roviny kruh (obr. 157).



Obr. 156



Obr. 157

V posledním případě rozdělí rovina kužel na nový kužel a na komolý kužel. Pomocí podobnosti trojúhelníků lze dokázat, že poloměry podstav původního a nového kužele jsou ve stejném poměru jako výšky těchto kuželů.

Příklad 4

Je dána výška komolého rotačního kužele $v = 15$ cm, poloměr větší podstavy $r_1 = 32$ cm, délka strany komolého kužele $s = 25$ cm. Vypočtěte

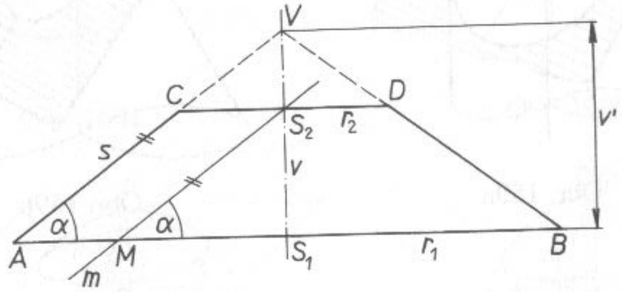
a) poloměr r_2 druhé podstavy komolého kužele,

b) odchylku α strany komolého kužele a roviny jeho podstavy,

c) výšku v' kužele, z něhož komolý kužel vznikl.

Řešení

Označme S_1 střed větší a S_2 střed menší podstavy. Osovým řezem komolého rotačního kužele je rovnoramenný lichoběžník $ABDC$ (obr. 158). V rovině tohoto lichoběžníku budeme provádět všechny další výpočty. Středem S_2 vedeme rovnoběžku m s jedním ramenem, např. AC. Přímka m protne základnu AB v bodě M. Trojúhelník MS_1S_2 je pravoúhlý ($|\sphericalangle S_1| = 90°$); $r_2 = r_1 - |MS_1|$.



Obr. 158

a) Pomocí Pythagorovy věty pro $\triangle MS_1S_2$ dostaneme:

$$|MS_1| = \sqrt{|S_2M|^2 - |S_1S_2|^2} = \sqrt{s^2 - v^2}$$

tedy $r_2 = r_1 - \sqrt{s^2 - v^2}$; $r_2 = 12$ cm

b) Odchylku α strany a roviny podstavy vypočítáme opět z pravoúhlého trojúhelníku MS_1S_2 pomocí funkce sinus:

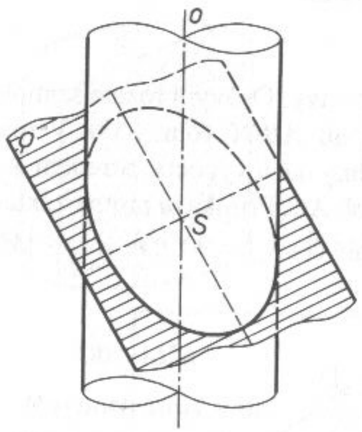
$$\sin\alpha = \frac{|S_1S_2|}{|S_2M|} = \frac{v}{s};\ \alpha \doteq 36°52'$$

c) Označme V vrchol kužele, z něhož komolý kužel vznikl. Trojúhelníky AS_1V a MS_1S_2 jsou podobné, proto

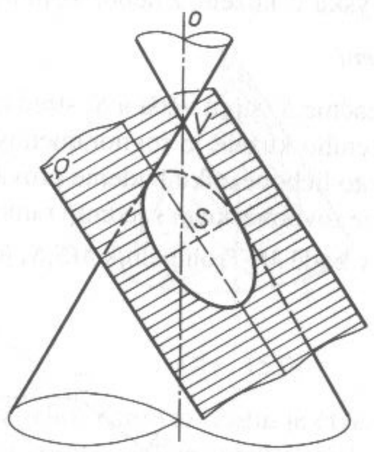
$$\frac{|S_1V|}{|AS_1|} = \frac{|S_1S_2|}{|MS_1|},$$

neboli $\quad v' = \dfrac{v \cdot r_1}{\sqrt{s^2 - v^2}}$; $v' = 24$ cm.

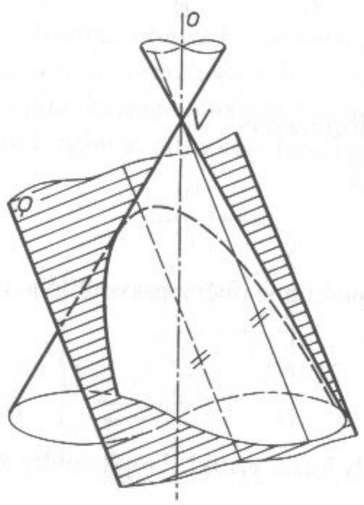
Řezy rotační válcové plochy rovinami, které nejsou směrové, a řezy rotační kuželové plochy rovinami, které nejsou vrcholové, jsou křivky, kterým souhrnně říkáme **kuželosečky**: **elipsa** (obr. 159a,b), **parabola** (obr. 159c) a **hyperbola** (obr. 159d). Mezi kuželosečky řadíme i kružnici. Problematikou kuželoseček a řezů na válcové a kuželové ploše se podrobně zabývá deskriptivní geometrie. O kuželosečkách uslyšíte i v analytické geometrii.



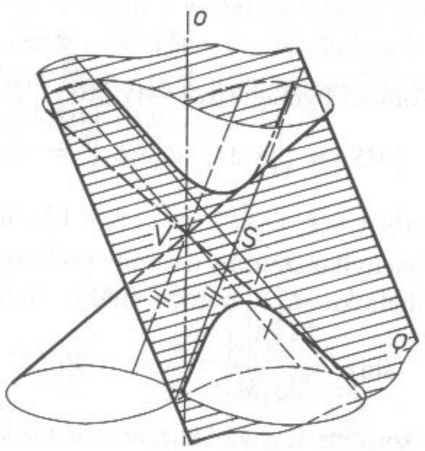
Obr. 159a



Obr. 159b



Obr. 159c

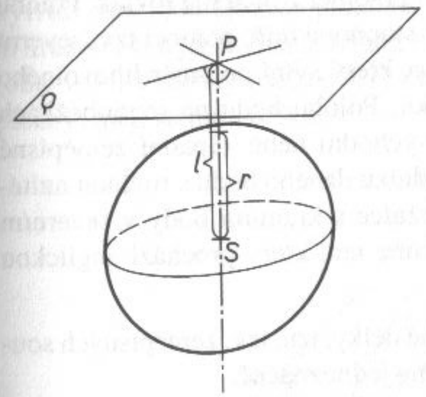


Obr. 159d

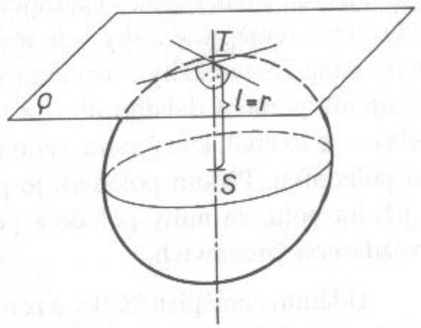
Tak jako jsme v planimetrii posuzovali vzájemnou polohu kružnice a přímky, můžeme postupovat ve stereometrii u kulové plochy a roviny. Označme l vzdálenost středu S kulové plochy s poloměrem r od roviny ρ.

Pro $l > r$ nemá rovina ρ s kulovou plochou žádný společný bod (obr. 160a).

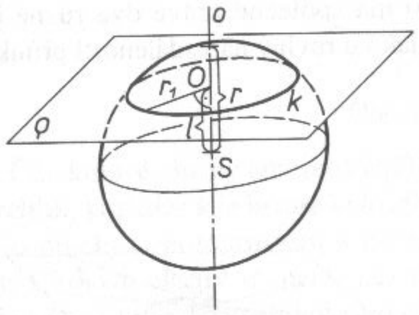
Pro $l = r$ mají rovina ρ a kulová plocha jediný společný bod – je to pata kolmice vedené bodem S k rovině; rovina ρ se nazývá **tečná rovina**, pata T kolmice je **bod dotyku** (obr. 160b).



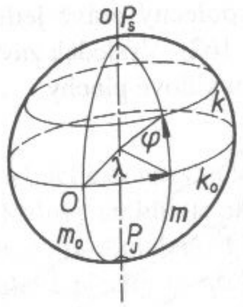
Obr. 160a



Obr. 160b



Obr. 160c



Obr. 161

Pro $l < r$ vyplní společné body roviny ρ a kulové plochy kružnici k o poloměru $r_1 \leqq r$. Střed této kružnice je pata kolmice vedené bodem S k rovině ρ (obr. 160c). Žádná kružnice na kulové ploše nemá větší poloměr, než má kulová plocha.

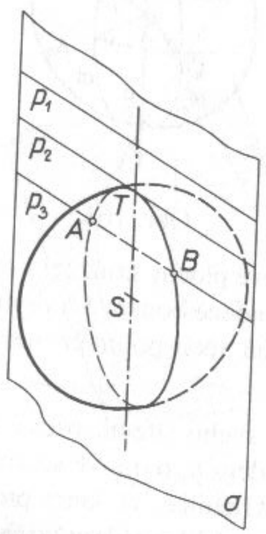
Kulová plocha je středově souměrná podle svého středu, osově souměrná podle každé přímky procházející jejím středem a rovinově souměrná podle každé roviny procházející jejím středem. Kružnice, ve které protíná každá rovina souměrnosti kulovou plochu, se nazývá **hlavní kružnice**, její poloměr je r. Kružnice na kulové ploše, jejichž roviny neprocházejí středem kulové plochy, jsou **vedlejší kružnice**.

Zemský povrch lze přibližně považovat za kulovou plochu s poloměrem $R = 6\,378$ km (obr. 161). Prodloužením jednoho průměru je zemská osa, přímka, kolem níž se Země pravidelně otáčí. Průsečíky osy s povrchem Země jsou severní pól a jižní pól (body P_S a P_J).

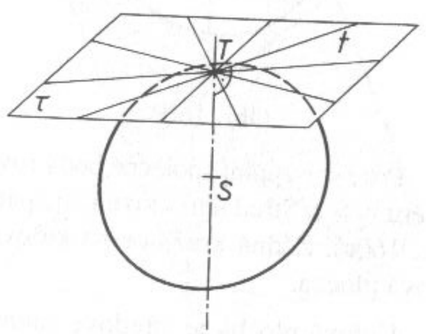
Kružnice, které leží na povrchu zeměkoule v rovinách kolmých k ose otáčení, se nazývají rovnoběžky. Největší poloměr z nich má rovník. Polohu jednotlivých rovnoběžek vyjadřujeme ve stupňové míře pomocí tzv. severní nebo jižní zeměpisné šířky – je to úhel φ, který svírá poloměr libovolného bodu dané rovnoběžky s rovinou rovníku. Polohu bodu na rovnoběžkách určujeme pomocí dalšího úhlu λ, tzv. východní nebo západní zeměpisné délky – je to úhel, který svírá rovina poledníku daného bodu s rovinou nultého poledníku. Přitom poledník je půlkružnice s krajními body v severním a jižním pólu, za nultý poledník pokládáme ten, který prochází anglickou hvězdárnou Greenwich.

Udáním zeměpisné šířky a zeměpisné délky, tzn. tzv. zeměpisných souřadnic, je poloha bodu na zeměkouli určena jednoznačně.

Vyšetřujeme-li vzájemnou polohu přímky a kulové plochy, snadno dojdeme k závěru: Přímka nemá s kulovou plochou žádný společný bod, nebo má společný právě jeden bod, nebo má společné právě dva různé body (obr. 162). Výsledek závisí podobně jako u roviny na vzdálenosti přímky od středu kulové plochy.



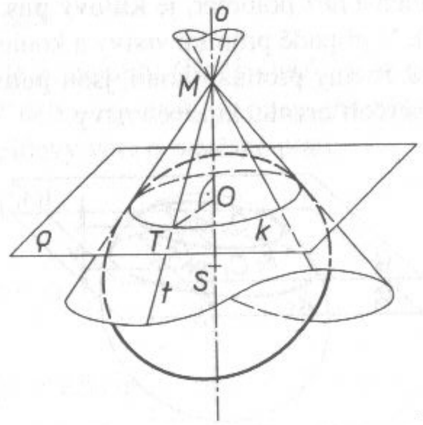
Obr. 162



Obr. 163

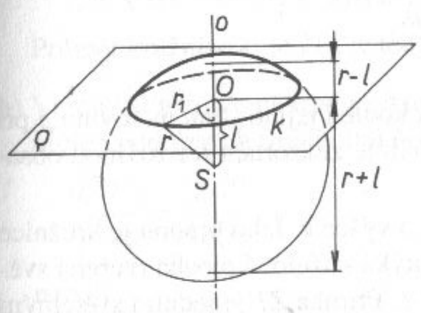
Přímka, která má s kulovou plochou společný právě jeden bod, se nazývá **tečna** kulové plochy, společný bod je bod dotyku. Každým bodem T kulové plochy prochází nekonečně mnoho tečen, všechny tyto tečny vyplní tečnou rovinu v bodě T (obr. 163).

Všechny tečny vedené ke kulové ploše vnějším bodem M ($|MS| > r$) vytvoří rotační kuželovou plochu s vrcholem M. Jejich dotykové body vyplní kružnici k, jejíž rovina je kolmá ke spojnici středu kulové plochy a bodu M (obr. 164). Všechny úsečky MT, kde bod T je dotykový bod tečny a kulové plochy, mají stejnou délku.

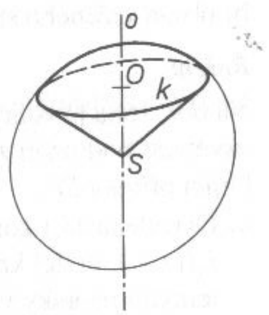


Obr. 164

Část kulové plochy omezená její libovolnou kružnicí k se nazývá **kulový vrchlík**, kružnice k je **hrana** kulového vrchlíku. Kulový vrchlík je průnik kulové plochy a poloprostoru s hraniční rovinou, jejíž vzdálenost l od středu S kulové plochy je menší než poloměr r kulové plochy (obr. 165). Každá taková rovina rozdělí kulovou plochu na dva kulové vrchlíky. Výška jednoho je $r - l$, druhého $r + l$.



Obr. 165

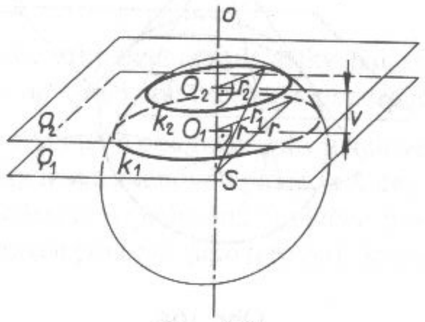


Obr. 166

Protneme-li kouli rovinou, vzniknou dvě **kulové úseče**. Prochází-li rovina středem kulové plochy, nazýváme obě úseče **polokoule**. Kulová úseč je průnik koule a poloprostoru, jehož hraniční rovina protíná kouli v kruhu. Tento kruh je **podstavou** kulové úseče. Další částí hranice kulové úseče je kulový vrchlík. Výška kulového vrchlíku je i výškou příslušné úseče.

Kulová výseč je sjednocení kulové úseče a rotačního kužele, který má s kulovou úsečí společnou podstavu a jeho vrchol je středem příslušné koule (obr. 166). Hranicí kulové výseče je plášť kužele a kulový vrchlík.

Průnik kulové plochy a vrstvy s hraničními rovinami, jejichž vzdálenosti od středu jsou menší než poloměr, je **kulový pás**. Vzdálenost rovin je výška pásu (obr. 167). V případě průniku vrstvy a koule je průnikem **kulová vrstva**, kruhy, v nichž roviny protínají kouli, jsou **podstavy** kulové vrstvy. Podstavy a kulový pás tvoří hranici kulové vrstvy.



Obr. 167

Příklad 5

Koule se středem S a poloměrem $r = 15$ cm je položená na vodorovné rovině ρ a osvětlená bodovým zdrojem Z; $SZ \perp \rho$, $|Z\rho| = h = 45$ cm. Určete

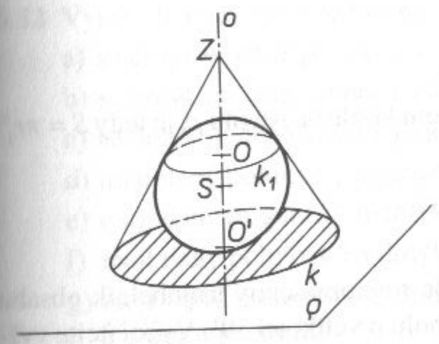
a) průměr kružnice ohraničující osvětlenou část koule a výšku osvětlené části koule,

b) obsah vrženého stínu koule na rovinu ρ.

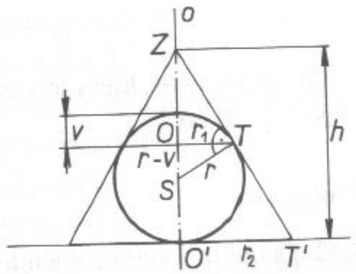
Řešení

Na obr. 168a je volný rovnoběžný průmět koule i jejího stínu na rovinu ρ při osvětlení bodovým zdrojem Z, na obr. 168b je znázorněn řez rovinou obsahující přímku SZ.

a) Osvětlená část koule je kulový vrchlík o výšce v. Jeho hranou je kružnice $k_1(O, r_1)$. Podél kružnice k_1 se koule dotýká kuželová plocha tvořená světelnými paprsky vycházejícími z bodu Z. Přímka ZT je jedním světelným paprskem – je tečnou kulové plochy, která je hranicí dané koule; bod T je bod dotyku.



Obr. 168a



Obr. 168b

Trojúhelník STZ je pravoúhlý ($|\sphericalangle T| = 90°$), jeho přepona SZ má délku $h - r$, odvěsna ST délku r a úsek přepony přilehlý k této odvěsně délku $r - v$. Podle Eukleidovy věty o odvěsně platí:

$$|ST|^2 = |SZ| \cdot |SO|,$$

neboli

$$r^2 = (h - r) \cdot (r - v)$$

a odtud

$$v = \frac{hr - 2r^2}{h - r}; \; v = 7{,}5 \text{ cm}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku STO ($|\sphericalangle O| = 90°$) pomocí Pythagorovy věty vypočítáme r_1:

$$|ST|^2 = |SO|^2 + |OT|^2,$$

neboli

$$r^2 = (r - v)^2 + r_1^2$$

a odtud

$$r_1 = \sqrt{2rv - v^2}; \; r_1 = \sqrt{168{,}75} \text{ cm} \doteq 13 \text{ cm}.$$

Průměr kružnice k_1 je $2r_1$, je tedy přibližně 26 cm.

b) Vržený stín koule na rovinu ρ je kruh $K(O'; r_2)$. Jeho poloměr r_2 můžeme určit z podobných trojúhelníků ZOT a $ZO'T'$:

$$\frac{|O'T'|}{|OT|} = \frac{|ZO'|}{|ZO|},$$

neboli

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{h}{h - 2r + v}.$$

Odtud

$$r_2 = \frac{hr_1}{h - 2r + v}; \quad r_2 \doteq 26 \text{ cm}.$$

Obsah kruhu K, který je vrženým stínem koule na rovinu ρ, je tedy $S = \pi r_2^2$; $S \doteq 2\,120 \text{ cm}^2$.

Úlohy

5.22 Osovým řezem rotačního kužele je rovnoramenný trojúhelník obsahu $1\,600 \text{ cm}^2$ s úhlem při hlavním vrcholu o velikosti 30°. Vypočítejte výšku, délku strany a poloměr podstavy kužele.

5.23 Komolý rotační kužel má podstavy s průměry 250 cm a 86 cm a výšku 110 cm. Vypočtěte délku jeho strany a odchylku strany a roviny podstavy.

5.24 Kulová úseč má poloměr podstavy $r_1 = 8$ cm a výšku $v = 5$ cm. Vypočtěte poloměr koule, jejíž částí je kulová úseč.

5.25 V elektrostatice se používá kovové těleso, tzv. konduktor, které vznikne rotací kosodélníku kolem jeho delší strany. Popište toto těleso jako geometrický útvar vytvořený vhodným složením rotačních kuželů a válců. Určete průniky tělesa s rovinami kolmými k ose válce.

5.26 Sestrojte průnik rotačního válce vepsaného do kvádru *ABCDEFGH* se čtvercovou podstavou a

a) roviny *BFH*,

b) roviny *MNP*; body *M*, *N*, *P* jsou po řadě středy hran *AE*, *BF*, *CG*,

c) přímky *HN*,

d) přímky *MP*.

Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

* **5.27** K rotačnímu válci sestrojte tečnou rovinu rovnoběžnou s danou přímkou *m*. Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

* **5.28** K rotačnímu kuželi sestrojte tečnou rovinu daným bodem *M*. Řešte ve volném rovnoběžném promítání. Vypočtěte odchylku tečné roviny a roviny podstavy kužele, v němž je $v = 3r$.

5.29 Proveďte diskusi vzájemné polohy přímky a rotační kuželové plochy.

* **5.30** Určete průsečíky přímky *p* s povrchem kužele. Řešte ve volném rovnoběžném promítání.

5.31 Proveďte diskusi vzájemné polohy dvou kulových ploch $\varkappa_1(S_1, r_1)$, $\varkappa_2(S_2, r_2)$, $r_1 > r_2$.

5.32 Vyšetřete množinu středů všech kulových ploch, které

a) se dotýkají dané přímky *t* v jejím daném bodě *T*,

b) se dotýkají dané roviny τ v jejím daném bodě *T*,

c) se dotýkají dané kulové plochy se středem *S* v jejím daném bodě *T*,

d) mají daný poloměr *r* a procházejí daným bodem *M*,

e) mají daný poloměr *r* a dotýkají se dané přímky *p*,

f) mají daný poloměr *r* a dotýkají se dané roviny ρ,

g) mají daný poloměr *r* a dotýkají se dané kulové plochy se středem *S* a poloměrem *R*.

5.33 Vyšetřete množinu všech bodů v prostoru, z nichž vidíme danou úsečku *AB* pod pravým úhlem.

5.34 Ve vzdálenosti 10 cm od středu koule s poloměrem 20 cm veďte rovinu řezu. Vypočítejte poloměr řezu.

5.35 Jakou délku zemského poledníku představuje 1° zeměpisné šířky?

5.3 Objem a povrch tělesa

Výpočet objemu tělesa je jedním z nejstarších a i v současné době stále potřebných použití geometrie v praktickém životě. Objem tělesa se definuje obdobně jako v planimetrii obsah obrazce.

Objem tělesa je kladné reálné číslo přiřazené tělesu tak, že platí:

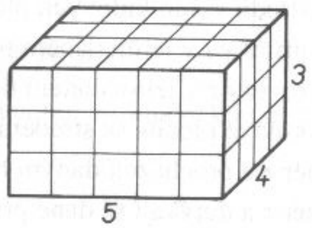
1. Shodná tělesa mají objemy sobě rovné.
2. Jestliže je těleso složeno z několika nepronikajících se těles, je jeho objem roven součtu objemů těchto těles.
3. Objem krychle, jejíž hrana má délku 1 (m, cm, ...), je roven 1 (m^3, cm^3, ...).

Navzájem se nepronikajícími tělesy rozumíme taková tělesa, z nichž žádné neobsahuje vnitřní bod druhého. Krychli s hranou délky 1 říkáme **jednotková krychle**.

Objem některých těles se dá určit názorně tak, že je rozložíme na konečný počet navzájem se nepronikajících jednotkových krychlí. Objem tělesa se pak rovná počtu těchto krychlí. Např. objem kvádru s rozměry 5 cm, 4 cm a 3 cm je 60 cm^3, neboť se dá rozložit na 60 jednotkových krychlí (obr. 169). Objem tohoto kvádru je tedy roven součinu jeho tří rozměrů.

Takto se vypočítá **objem kvádru**, ať jsou jeho rozměry jakákoli reálná čísla *a*, *b*, *c* (ve stejných jednotkách):

$$V = abc$$



Obr. 169

Vzorec pro objem kvádru je základem při odvození vzorců pro objem dalších těles. Vzorce se odvozují na základě vlastnosti objemu těles zvané **Cavalieriho princip**: Jestliže pro dvě tělesa existuje taková rovina, že každá rovina s ní rovnoběžná protíná obě tělesa v rovinných útvarech se stejnými obsahy, mají tělesa stejný objem.

Cavalieriho princip se dá znázornit pomocí mincí. Zkuste si postavit dva sloupce mincí – v obou je stejný počet stejných mincí, v jednom mince tvoří „válec", v druhém nejsou urovnány. I když má každý sloupec jiný tvar, mají oba sloupce stejný objem.

Pro označení objemu používáme písmeno V – začáteční písmeno slova „volumen" (latinsky objem).

Povrchem S tělesa rozumíme obsah jeho hranice.

Skládá-li se hranice tělesa z jednoduchých rovinných obrazců (u mnohostěnů) nebo můžeme-li ji „rozvinout" do roviny, a tak rovněž složit ze známých rovinných obrazců (např. u rotačního válce a rotačního kužele), je výpočet povrchu velmi jednoduchý. Povrch je v takovém případě roven součtu obsahů rovinných obrazců, z nichž se skládá hranice tělesa.

Pokud bychom chtěli určit povrch tělesa, jehož hranici neumíme složit z rovinných obrazců, můžeme postupovat takto: Hranici tělesa pokryjeme tenkou vrstvou nějakého materiálu, např. alobalu, a zvážíme materiál, který k tomuto pokrytí potřebujeme. Hmotnost m použitého materiálu je $m = V \cdot \rho$, kde V je objem materiálu a ρ je hustota materiálu. Objem materiálu je $V = \frac{m}{\rho}$. Dělíme-li objem V materiálu tloušťkou jeho vrstvy, dostaneme přibližně povrch tělesa. Čím je vrstva použitého materiálu tenčí, tím je povrch určen přesněji.

Přesné geometrické úvahy, pomocí nichž lze definovat povrch i takových těles, jejichž hranice se neskládá jen z rovinných obrazců, vyžadují znalost pojmů posloupnost, limita posloupnosti [5]. S těmito pojmy se seznámíte v matematice až později.

Úlohy

5.36 a) Kolikrát se zvětší objem kvádru s rozměry a, b, c, zvětšíte-li tyto rozměry po řadě k-krát, l-krát, m-krát?

b) Co když je $k = l = m$? Jak se v tomto případě změní povrch kvádru?

c) Veďte středem kvádru tři roviny rovnoběžné s jeho stěnami. Na kolik shodných kvádrů se těmito rovinami kvádr rozdělí a proč?

5.37 Určete přírůstek a) objemu kvádru, b) povrchu kvádru, jestliže všechny tři jeho rozměry a, b, c, zvětšíme o hodnotu ε. Řešte pro hodnoty $a = 100$ cm, $b = 50$ cm, $c = 20$ cm, $\varepsilon = 10^{-3}$ cm.

5.38 Určete objem a povrch kvádru, jehož tělesová úhlopříčka má délku u a jehož stěny, které procházejí týmž vrcholem, mají obsahy v poměru $1 : 2 : 3$.

5.39 Obsahy tří stěn kvádru, které mají společný vrchol, jsou 72 cm^2, 96 cm^2 a 108 cm^2. Vypočtěte objem kvádru.

5.40 Úhlopříčný řez kvádru kolmý k rovině podstavy je čtverec s obsahem 4 225 cm^2. Jedna podstavná hrana je o 23 cm delší než druhá. Vypočtěte objem a povrch tělesa.

5.41 Podstavou kvádru je obdélník vepsaný do kruhu s poloměrem $r = 8$ cm; kratší straně obdélníku přísluší středový úhel o velikosti 68°40′. Vypočítejte objem kvádru, je-li obsah jeho pláště 120 cm^2.

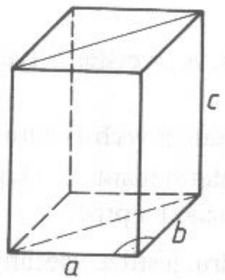
5.42 Kvádr má objem 810 cm^3, jeho rozměry jsou v poměru $2 : 3 : 5$. Vypočtěte jeho povrch.

5.43 Ve vodojemu tvaru kvádru je 1 500 hl vody, hloubka vody je 2,5 m. Vypočítejte rozměry dna, je-li jeden rozměr vodojemu o 4 m větší než druhý.

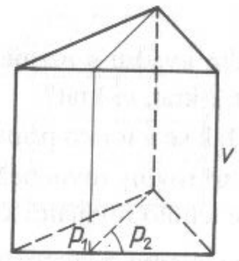
5.4 Objem a povrch mnohostěnů

Začněme hranolem. Jednoduchým případem hranolu je kvádr. Víme již, že objem kvádru vypočteme podle vzorce $V = abc$; a, b, c jsou rozměry kvádru. Protože krychle je kvádr, jehož rozměry jsou stejné ($b = c = a$), je vzorec pro **objem krychle** $V = a^3$.

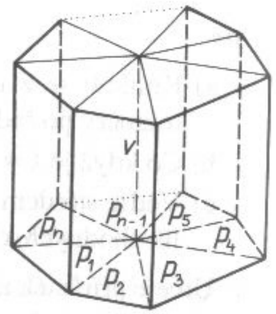
Kvádr můžeme rozložit na dva shodné trojboké hranoly, jejichž podstavy jsou pravoúhlé trojúhelníky (obr. 170a). Podle 1. vlastnosti objemu mají oba trojboké hranoly stejné objemy a podle 2. vlastnosti objemu je objem kvádru roven součtu objemů obou hranolů. Objem V trojbokého hranolu je proto polovina objemu kvádru.



Obr. 170a



Obr. 170b



Obr. 170c

Z toho plyne, že jsou-li a, b, c rozměry kvádru, je objem jednoho trojbokého hranolu

$$V = \frac{1}{2}abc = (\frac{1}{2}ab)c.$$

Přitom $\frac{1}{2}ab = S_p$ je obsah jeho podstavy, c je jeho výška v. Objem kolmého trojbokého hranolu, jehož podstavou je pravoúhlý trojúhelník můžeme tedy vyjádřit vzorcem

$$V = S_p v.$$

Je-li podstavou kolmého hranolu obecný trojúhelník, jsou aspoň dva jeho vnitřní úhly ostré. Proto je možné aspoň jedním způsobem podstavu hranolu rozdělit na dva pravoúhlé trojúhelníky. A tak i trojboký hranol můžeme rozdělit na dva hranoly stejné výšky, jejichž podstavy jsou pravoúhlé trojúhelníky (obr. 170b). Označme V_1 a V_2 jejich objemy, S_{p1} a S_{p2} obsahy jejich podstav, S_p obsah podstavy daného hranolu ($S_p = S_{p1} + S_{p2}$), v jeho výšku. Podle 2. vlastnosti objemu je objem daného hranolu

$$V = V_1 + V_2 = S_{p1}v + S_{p2}v = (S_{p1} + S_{p2})v = S_p v.$$

Libovolný kolmý hranol můžeme rozložit na n kolmých trojbokých hranolů se stejnou výškou v (obr. 170c). Součet obsahů S_{p1}, S_{p2}, ..., S_{pn} jejich podstav je roven obsahu S_p podstavy daného hranolu. Podle 2. vlastnosti objemu je objem daného hranolu

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = S_{p1}v + S_{p2}v + \dots + S_{pn}v =$$
$$= (S_{p1} + S_{p2} + \dots + S_{pn})v = S_p v\,.$$

Pomocí Cavalieriho principu lze dokázat platnost stejného vzorce i pro kosý hranol.

Platí tedy:

Objem hranolu určíme podle vzorce $V = S_p v$; S_p je obsah podstavy hranolu, v je jeho výška.

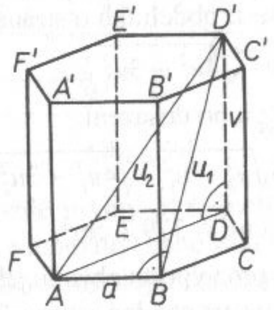
Hranol je mnohostěn, jehož dvě stěny jsou jeho podstavy, ostatní stěny tvoří jeho plášť. Označme S_{pl} obsah pláště.

Povrch hranolu určíme podle vzorce $S = 2S_p + S_{pl}$.

Kvádr a krychle jsou zvláštní případy hranolu. **Povrch kvádru** s rozměry a, b, c je $S = 2ab + 2(ac + bc) = 2(ab + ac + bc)$, **povrch krychle** s hranou délky a je $S = 6a^2$.

Příklad 1

Vypočtěte objem a povrch pravidelného šestibokého hranolu, jsou-li dány délky jeho dvou tělesových úhlopříček $u_1 = 12$ cm, $u_2 = 13$ cm, vycházejících z téhož vrcholu.



Obr. 171

Řešení

Pro výpočet objemu a povrchu hranolu potřebujeme znát délku a podstavné hrany a výšku v hranolu. V obr. 171 jsou vyznačeny úhlopříčky BD' (u_1) a AD' (u_2). Trojúhelník ABD' je pravoúhlý ($|\sphericalangle B| = 90°$). Podle Pythagorovy věty

$$|AB|^2 = |AD'|^2 - |BD'|^2,$$

neboli

$$a^2 = u_2^2 - u_1^2$$

a odtud

$$a = \sqrt{u_2^2 - u_1^2}\,;\ a = 5 \text{ cm}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku ADD' ($|\sphericalangle D| = 90°$) pak můžeme vypočítat výšku v hranolu:

$$|DD'|^2 = |AD'|^2 - |AD|^2,$$

neboli

$$v^2 = u_2^2 - (2a)^2.$$

Nahradíme-li a^2 rozdílem $u_2^2 - u_1^2$, dostaneme po úpravě

$$v = \sqrt{4u_1^2 - 3u_2^2}\,;\ v = \sqrt{69} \text{ cm}.$$

Podstavou hranolu je pravidelný šestiúhelník, jeho obsah je šestinásobek obsahu rovnostranného trojúhelníku se stranou délky a:

$$S_p = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}\left(u_2^2 - u_1^2\right)}{2}$$

Objem hranolu $V = S_p v$ a po dosazení

$$V = \frac{3\sqrt{3}\left(u_2^2 - u_1^2\right)}{2} \cdot \sqrt{4u_1^2 - 3u_2^2};$$

$$V = \frac{225\sqrt{23}}{2}\ \text{cm}^3 \doteq 539{,}5\ \text{cm}^3.$$

Plášť hranolu se skládá ze šesti obdélníků o stranách délek a, v, proto

$$S_{pl} = 6av = 6\sqrt{u_2^2 - u_1^2} \cdot \sqrt{4u_1^2 - 3u_2^2}.$$

Povrch hranolu $S = 2S_p + S_{pl}$ a po dosazení:

$$S = 3\sqrt{3}\left(u_2^2 - u_1^2\right) + 6\sqrt{u_2^2 - u_1^2} \cdot \sqrt{4u_1^2 - 3u_2^2}$$

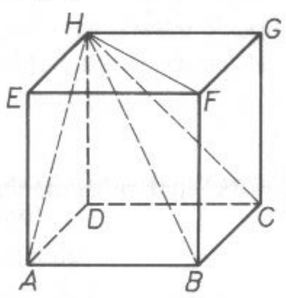
$$S = (75\sqrt{3} + 30\sqrt{69})\ \text{cm}^2 \doteq 379{,}1\ \text{cm}^2$$

Odvoďme nyní vzorec pro výpočet objemu jehlanu. Na obr. 172 je krychle $ABCDEFGH$ rozdělena na tři shodné nepronikající se jehlany $ABCDH$, $BCGFH$ a $ABFEH$ se čtvercovou podstavou. Podle 1. a 2. vlastnosti objemu je objem V kteréhokoli z uvedených tří jehlanů roven třetině objemu krychle. Je-li a délka hrany krychle, je

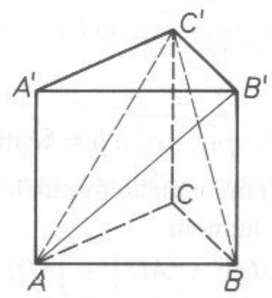
$$V = \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}a^2 \,.\, a.$$

Ale a^2 je obsah podstavy tohoto jehlanu, a je jeho výškou. Označíme-li obsah podstavy S_p a výšku v, můžeme psát

$$V = \frac{1}{3}S_p \,.\, v.$$



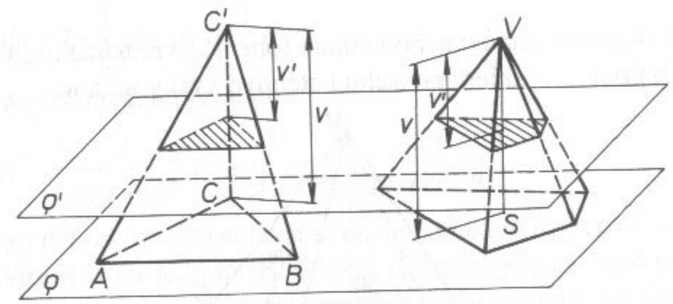
Obr. 172



Obr. 173

Uvažujeme-li místo krychle kolmý trojboký hranol $ABCA'B'C'$ (obr. 173), přijdeme podobnými úvahami k závěru, že i pro objem jehlanu $ABCC'$ platí stejný vzorec.

Platnost uvedeného vzorce můžeme pomocí Cavalieriho principu rozšířit pro libovolný jehlan. Uvažujme kromě jehlanu $ABCC'$ z obr. 173 další jehlan, který má stejný obsah podstavy a stejnou výšku jako jehlan $ABCC'$. Umístěme jehlany tak, aby podstavy ležely ve stejné rovině ρ a jejich hlavní vrcholy ve stejném poloprostoru s hraniční rovinou ρ (obr. 174).



Obr. 174

Průniky jehlanů a každé roviny ρ' rovnoběžné s rovinou ρ jsou buď prázdné, nebo jednoprvkové množiny, nebo jsou to dva mnohoúhelníky. Jestliže jsou řezy mnohoúhelníky, jsou stejnolehlé, a tedy podobné s podstavami daných jehlanů (středy stejnolehlosti jsou hlavní vrcholy jehlanů). Poměr podobnosti je pro oba průniky stejný: $k = v' : v$, kde v a v' jsou vzdálenosti hlavních vrcholů jehlanů od rovin ρ a ρ'. Pro obsah řezu S a obsah podstavy S_p v obou jehlanech platí $S = k^2 \,.\, S_p$. A protože se rovnají obsahy podstav, rovnají se i obsahy řezů. Z Cavalieriho principu plyne, že oba jehlany mají stejný objem.

Platí tedy:

Je-li S_p obsah podstavy a v výška jehlanu, pak **objem jehlanu** $V = \frac{1}{3}S_p v$.

Jehlan je mnohostěn s jednou podstavou, plášť je tvořen trojúhelníky. Označíme-li jako u hranolu S_{pl} obsah pláště, platí:

Povrch jehlanu určíme podle vzorce $S = S_p + S_{pl}$.

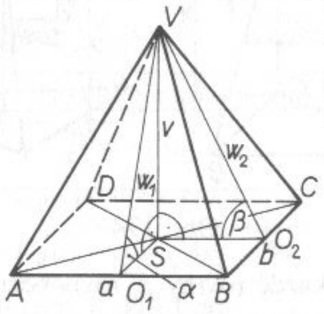
Má-li podstavná hrana pravidelného n-bokého jehlanu délku a a je-li t stěnová výška, pak obsah pláště $S_{pl} = n \,.\, \frac{1}{2}at = \frac{1}{2}nat$. Protože na je obvod podstavy, je obsah pláště pravidelného n-bokého jehlanu roven polovičnímu součinu obvodu jeho podstavy a stěnové výšky.

Příklad 2

Určete objem a povrch kolmého čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ s obdélníkovou podstavou, znáte-li výšku v jehlanu a odchylky α, β rovin stěn ABV, BCV a roviny podstavy.

Řešení

Pro výpočet objemu uvažovaného jehlanu (obr. 175) musíme určit délky a, b podstavných hran, pro určení povrchu i stěnové výšky w_1 a w_2.



Obr. 175

Označme S střed podstavy jehlanu, O_1, O_2 středy podstavných hran AB a BC. Protože jehlan $ABCDV$ je kolmý, je spojnice středu podstavy S a hlavního vrcholu V jehlanu kolmá k rovině podstavy; $|SV| = v$. Trojúhelníky O_1SV a O_2SV jsou tedy pravoúhlé. Je zřejmé, že $|\sphericalangle VO_1S| = \alpha$ a $|\sphericalangle VO_2S| = \beta$.

Z trojúhelníku O_1SV plyne $|O_1S| = \frac{1}{2}b$, $|O_1V| = w_1$ a platí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{\frac{1}{2}b} \quad \text{a} \quad \sin\alpha = \frac{v}{w_1},$$

odkud

$$b = \frac{2v}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \text{a} \quad w_1 = \frac{v}{\sin\alpha}.$$

Z trojúhelníku O_2SV plyne $|O_2S| = \frac{1}{2}a$, $|O_2V| = w_2$ a platí:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v}{\frac{1}{2}a} \quad \text{a} \quad \sin\beta = \frac{v}{w_2},$$

odkud

$$a = \frac{2v}{\operatorname{tg}\beta} \quad \text{a} \quad w_2 = \frac{v}{\sin\beta}.$$

Po dosazení do vzorce pro objem jehlanu dostaneme

$$V = \frac{1}{3}abv = \frac{1}{3}\cdot\frac{2v}{\operatorname{tg}\beta}\cdot\frac{2v}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot v$$

a po úpravách

$$V = \frac{4v^3}{3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

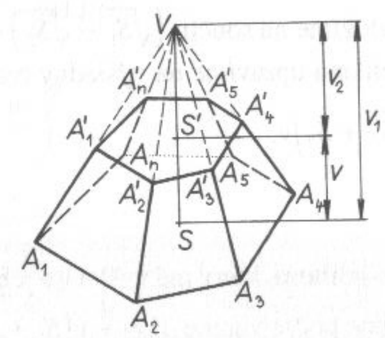
Hranice jehlanu je tvořena obdélníkem a dvěma dvojicemi navzájem shodných rovnoramenných trojúhelníků. Proto

$$S = ab + 2\cdot\frac{1}{2}aw_1 + 2\cdot\frac{1}{2}bw_2.$$

Po dosazení a úpravách dostaneme

$$S = 2v^2\cdot\left(\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta\sin\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\sin\beta}\right).$$

Objem některých složitějších těles můžeme určit pomocí jejich rozkladu nebo doplnění na jednodušší těleso. Komolý jehlan vznikne z jehlanu pomocí řezu rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy jehlanu. Doplňme tedy komolý jehlan $A_1A_2 \dots A_nA'_1A'_2 \dots A'_n$ s výškou v jehlanem $A'_1A'_2 \dots A'_nV$ s výškou v_2 na jehlan $A_1A_2 \dots A_nV$ s výškou v_1 (obr. 176).



Obr. 176

Pro objemy V komolého jehlanu a objemy V_1, V_2 jehlanů s výškami v_1, v_2 platí:

$$V = V_1 - V_2$$

Označíme-li S_1 a S_2 obsahy podstav komolého jehlanu, pak

$$V = \frac{1}{3}S_1v_1 - \frac{1}{3}S_2v_2.$$

Protože $v_1 = v + v_2$, dostaneme

$$V = \frac{1}{3}S_1(v + v_2) - \frac{1}{3}S_2v_2,$$

neboli

$$V = \frac{1}{3}S_1v + \frac{1}{3}(S_1 - S_2)v_2.$$

Víme již, že podstavy komolého jehlanu jsou podobné mnohoúhelníky; poměr podobnosti je $k = \frac{v_2}{v_1}$. Pro obsahy podstav platí $\frac{S_2}{S_1} = k^2$, a tedy $k = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}$. Proto

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}.$$

Nahradíme-li v_1 součtem $v + v_2$, dostaneme postupnými úpravami

$$v_2 = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \cdot v.$$

Pro objem V komolého jehlanu potom platí:

$$V = \frac{1}{3} S_1 v + \frac{1}{3}(S_1 - S_2) \cdot \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \cdot v.$$

Rozdíl $S_1 - S_2$ rozložíme na součin $\left(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}\right) \cdot \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)$ a vztah pro objem komolého jehlanu upravíme na výsledný tvar

$$V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)v.$$

Platí tedy:

Objem komolého jehlanu, který má výšku v a jehož podstavy mají obsahy S_1, S_2 určíme podle vzorce $V = \frac{1}{3} v\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$.

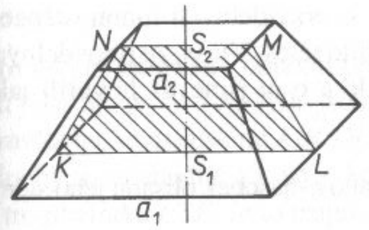
Označíme-li jako u hranolu a jehlanu obsah pláště S_{pl}, platí:

Povrch komolého jehlanu je roven součtu obsahů S_1, S_2 jeho podstav a obsahu S_{pl} jeho pláště: $S = S_1 + S_2 + S_{pl}$.

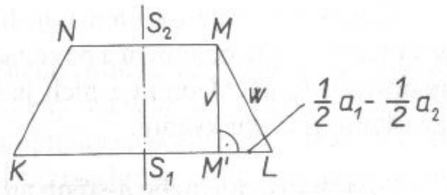
? Všimněte si, že vzorce pro objem, resp. povrch hranolu a jehlanu jsou zvláštní případy vzorce pro objem, resp. povrch komolého jehlanu.

Příklad 3

Pravidelný komolý čtyřboký jehlan (obr. 177a) má objem $V = 1\,510\ \text{cm}^3$, podstavné hrany mají délky $a_1 = 18$ cm, $a_2 = 10$ cm. Určete jeho povrch.



Obr. 177a



Obr. 177b

Řešení

Podstavy komolého jehlanu jsou dva čtverce se stranami délek a_1, a_2, tedy $S_1 = a_1^2$, $S_2 = a_2^2$.

Plášť je tvořen čtyřmi shodnými rovnoramennými lichoběžníky, jejichž základny mají délky a_1, a_2. Na obr. 177b je osový řez jednou z rovin souměrnosti jehlanu. Výšku w lichoběžníků určíme pomocí tohoto řezu z pravoúhlého trojúhelníku $MM'L$ ($|\sphericalangle M'| = 90°$). Podle Pythagorovy věty

$$|ML|^2 = |MM'|^2 + |M'L|^2,$$

neboli

$$w^2 = v^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2,$$

a proto

$$w = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2}.$$

Výšku v komolého jehlanu určíme ze vzorce pro objem

$$V = \frac{1}{3} v\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) = \frac{1}{3} v\left(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2\right).$$

Odtud je

$$v = \frac{3V}{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2}.$$

Po dosazení dostaneme $v = 7{,}5$ cm a $w = 8{,}5$ cm.

Povrch S určíme jako součet obsahů obou podstav a obsahu pláště. Postupně tedy dostáváme:

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$$

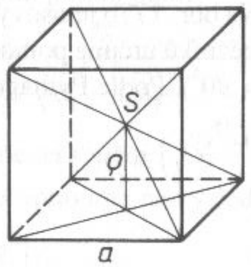
$$S = a_1^2 + a_2^2 + 4 \cdot \frac{(a_1 + a_2)w}{2}$$

$$S = 900\ \text{cm}^2$$

Článek 5.1 jsme uzavřeli pojednáním o pravidelných mnohostěnech. Zabývejme se nyní objemem a povrchem těchto těles. Víme, že pravidelných mnohostěnů je pět. Jedním z nich je krychle a o ní jsme již hovořili jako o zvláštním případu kvádru.

Povrch pravidelného n-stěnu určíme jako n-násobek obsahu jeho stěny.

Objem pravidelného n-stěnu je roven třetině součinu jeho povrchu a poloměru kulové plochy mnohostěnu vepsané. Pravidelný n-stěn lze totiž rozložit na n pravidelných jehlanů, jejichž podstavami jsou stěny mnohostěnu, hlavním vrcholem je střed kulové plochy mnohostěnu vepsané a výška je rovna poloměru této kulové plochy. Jistě vám určení objemu pravidelného n-stěnu připomíná určení obsahu pravidelného n-úhelníku v planimetrii.



Obr. 178

Všimnete-li si obr. 178, vidíte, že střed kulové plochy vepsané krychli je střed krychle. Je vrcholem šesti pravidelných čtyřbokých jehlanů s podstavami ve stěnách krychle. Je-li a délka hrany krychle, ρ poloměr kulové plochy vepsané krychli, pak $\rho = \frac{a}{2}$. Její objem je tedy

$$V = 6 \cdot \frac{1}{3} a^2 \frac{a}{2},$$

a tedy

$$V = a^3.$$

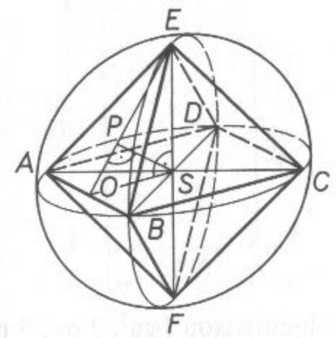
? Odvoďte vzorec pro výpočet objemu pravidelného čtyřstěnu s hranami délky a.

Příklad 4

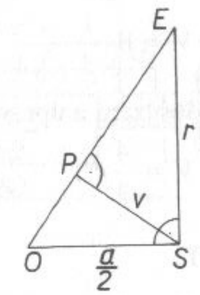
Určete objem a povrch pravidelného osmistěnu vepsaného do kulové plochy o poloměru r.

Řešení

Pro určení povrchu i objemu pravidelného osmistěnu potřebujeme znát délku jeho hrany. V obr. 179a jsou vyznačeny tělesové úhlopříčky AC, BD, EF pravidelného osmistěnu $ABCDEF$. Úhlopříčky se protínají ve středu S kulové plochy, jsou shodné a k sobě kolmé. Délku a hrany osmistěnu určíme např. z trojúhelníku CSE. Je to trojúhelník rovnoramenný pravoúhlý ($|\sphericalangle S| = 90°$), jehož ramena jsou dva poloměry dané kulové plochy a přepona má délku a. Je tedy $a = r\sqrt{2}$.



Obr. 179a



Obr. 179b

Stěnami pravidelného osmistěnu jsou rovnostranné trojúhelníky, proto pro povrch S platí:

$$S = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3},$$

neboli

$$S = 4r^2\sqrt{3}.$$

Pro výpočet objemu rozdělíme pravidelný osmistěn na osm shodných pravidelných trojbokých jehlanů. Jejich společným vrcholem je bod S, podstavami jsou stěny osmistěnu. Výšku v jehlanů určíme jako vzdálenost bodu S např. od roviny ABE.

Je-li bod O střed hrany AB, je v výškou pravoúhlého trojúhelníku OSE ($|\sphericalangle S| = 90°$). Je zřejmé, že $|OS| = \frac{1}{2}a$, $|SE| = r$. Přepona OE je výškou rovnostranného trojúhelníku ABE, proto $|OE| = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Označme P patu výšky v (obr. 179b). Trojúhelníky OSP a OES jsou podobné, proto

$$\frac{|SP|}{|OS|} = \frac{|ES|}{|OE|},$$

neboli

$$\frac{v}{\frac{1}{2}a} = \frac{r}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}};$$

odtud

$$v = \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

Objem V je tedy

$$V = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v$$

a po dosazení a úpravách

$$V = \frac{4}{3}r^3.$$

Úlohy

5.44 Vypočítejte délky hran krychlí, jejichž objemy jsou 1 m^3, 2 m^3, 3 m^3.

5.45 Je dána krychle s hranou délky a. Určete délku hrany krychle, která má vzhledem k původní krychli dvojnásobný
a) objem,
b) povrch.

5.46 Prodlouží-li se hrana dané krychle o 5 cm, zvětší se její objem o 485 cm^3. Určete povrch původní i zvětšené krychle.

5.47 Podstavou kolmého hranolu je rovnoramenný trojúhelník, jehož základna má délku $a = 10$ cm a úhel při základně má velikost $\alpha = 40°20'$. Vypočítejte objem tohoto hranolu, je-li obsah jeho pláště roven součtu obsahů jeho podstav.

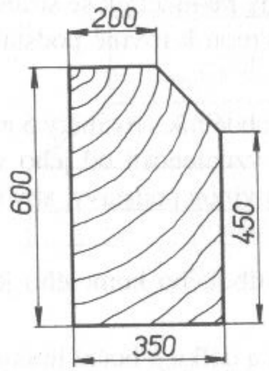
5.48 Vypočítejte výšku kolmého trojbokého hranolu s objemem 200 cm^3, jehož podstavné hrany mají délky $4\frac{1}{3}$ cm, 10 cm, $12\frac{1}{3}$ cm.

5.49 Podstavou rovnoběžnostěnu $ABCDA'B'C'D'$ je kosočtverec $ABCD$, $|AB| = a$, $|\sphericalangle BAD| = 60°$, boční hrany mají délku a a odchylka bočních hran a roviny podstavy je 60°. Určete objem rovnoběžnostěnu.

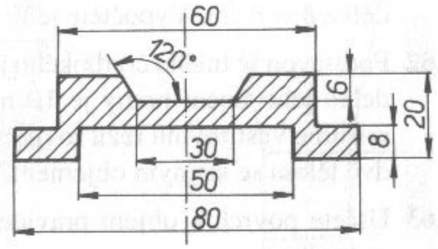
5.50 Je dán kosý trojboký hranol, jehož boční hrany mají délku 24 cm. **Normálovým řezem**, tj. řezem rovinou kolmou k bočním hranám hranolu, je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek 12 cm a 35 cm. Vypočtěte obsah pláště hranolu.

* **5.51** Podstavami kosého šestibokého hranolu $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ jsou pravidelné šestiúhelníky. Délka podstavné hrany je a, délka boční hrany je b. Boční stěna $BCC'B'$ je obdélník a odchylka rovin BEE' a FCC' je φ ($60° < \varphi \leqq 90°$). Určete objem hranolu.

5.52 Dřevěný trám jehož průřez je na obr. 180, má objem $V = 1{,}59$ m^3. Vypočítejte délku trámu v metrech, jsou-li údaje na obrázku v mm.



Obr. 180



Obr. 181

5.53 Vypočítejte tloušťku ledové kry tvaru hranolu, která vyčnívá 6 cm nad vodou, je-li hustota ledu $\rho = 0{,}92$ g . cm^{-3}. Předpokládejte, že kra má svislé stěny a rovnoběžné podstavy.

5.54 Kolik m^3 zeminy je třeba přemístit při výkopu přímého 170 m dlouhého a 80 cm hlubokého vodního příkopu, jehož průřez má tvar rovnoramenného lichoběžníku se základnami délek 150 cm a 90 cm?

5.55 Vypočítejte objem železné traverzy, jejíž průřez je na obr. 181 (rozměry jsou v mm) a jejíž délka je 178 mm.

5.56 Dřevěný sloup tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou délky a a výškou v se ohoblováním upraví na sloup, který má tvar pravidelného osmibokého hranolu. O kolik procent se zmenší
a) objem, b) plášť
původního sloupu?

5.57 Určete objem a povrch pravidelného trojbokého jehlanu, znáte-li:
a) délku a podstavné hrany a délku b boční hrany;
b) délku a podstavné hrany a odchylku φ boční hrany a roviny podstavy.

5.58 Síť pravidelného čtyřstěnu je rovnostranný trojúhelník s výškou h. Vypočtěte objem a povrch tohoto čtyřstěnu.

5.59 Délka všech hran pravidelného čtyřbokého jehlanu je 36 cm. Vypočtěte jeho objem a povrch. Jak se změní objem (povrch), jestliže hrany zmenšíme na polovinu?

5.60 Vypočítejte objem pravidelného pětibokého jehlanu, mají-li podstavné hrany délku $a = 5{,}2$ cm a odchylka rovin bočních stěn a roviny podstavy je $\varphi = 38°$.

* **5.61** Kosý jehlan, jehož podstavou je pravidelný pětiúhelník se stranou délky $a = 4{,}5$ cm, má jednu boční hranu kolmou k rovině podstavy; její délka $b = 8$ cm. Vypočtěte jeho povrch.

5.62 Podstavou kolmého čtyřbokého jehlanu je obdélník s rozměry 6 m a 4 m, délka jeho boční hrany je 10 m. V jaké vzdálenosti od jeho vrcholu musíme vést rovinu řezu rovnoběžnou s rovinou podstavy, aby vznikla dvě tělesa se stejným objemem?

* **5.63** Určete povrch a objem pravidelného šestibokého komolého jehlanu, znáte-li:

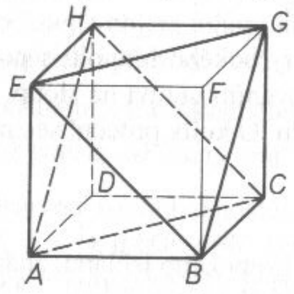
a) délky a_1, a_2 $(a_1 > a_2)$ podstavných hran a délku b boční hrany;

b) délky a_1, a_2 $(a_1 > a_2)$ podstavných hran a odchylku φ boční hrany a roviny podstavy.

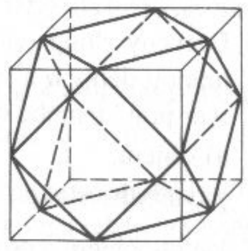
5.64 Rozměry kvádru $ABCDEFGH$ jsou $|AB| = a = 6$ cm, $|BC| = b = 7$ cm, $|AE| = c = 10$ cm. Rovnoběžné roviny BEG a ACH oddělí od daného kvádru dva čtyřstěny (obr. 182). Vypočtěte objem zbytku tělesa.

5.65 Je dána krychle s hranou délky a. Středy jejích stěn jsou vrcholy pravidelného osmistěnu. Určete jeho objem a povrch.

5.66 Povrch pravidelného osmistěnu se rovná povrchu pravidelného dvacetistěnu. V jakém poměru jsou délky hran těchto těles?



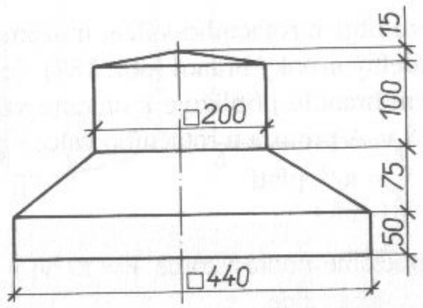
Obr. 182



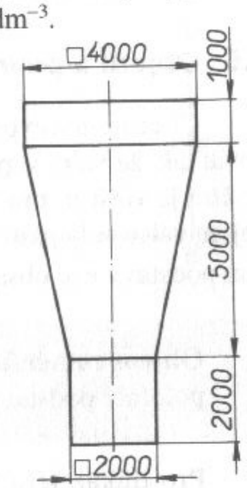
Obr. 183

5.67 Určete objem a povrch jednoho z polopravidelných mnohostěnů – tělesa, které vznikne z krychle s hranou délky a odříznutím všech jejích vrcholů rovinami procházejícími středy hran krychle (obr. 183).

5.68 Betonový základ pro elektrický stožár se skládá ze dvou pravidelných čtyřbokých hranolů, pravidelného čtyřbokého jehlanu a pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu (obr. 184 – rozměry jsou v cm). Vypočtěte jeho hmotnost, je-li hustota betonu $\rho = 2{,}2$ kg . dm^{-3}.



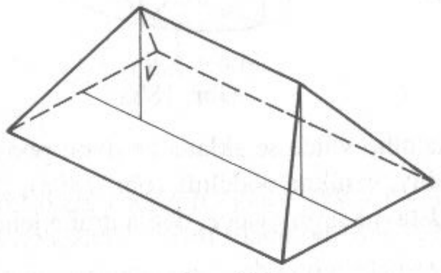
Obr. 184



Obr. 185

5.69 Násypný koš z ocelového plechu se skládá z plášťů dvou pravidelných čtyřbokých hranolů a pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu (obr. 185 – rozměry jsou v mm). Kolik m^2 plechu se spotřebuje k jeho zhotovení, jestliže se na záhyby a odpad ve výrobě počítá 10 % materiálu?

5.70 Nad obdélníkovým půdorysem 18 m × 10 m je postavena valbová střecha (obr. 186) s výškou hřebene $v = 6$ m. Všechny střešní plochy mají stejný sklon. Určete objem půdy.



Obr. 186

5.71 Cheopsova pyramida je 145 m vysoká, její podstavou je čtverec o straně délky 232,7 m.

a) Určete poměr obsahu podstavy pyramidy a kruhu, jehož poloměr se rovná výšce pyramidy (tento poměr je u každé egyptské pyramidy stejný).

b) Kolik tun kamene je v pyramidě? ($\rho = 2{,}7\ \mathrm{g\,.\,cm^{-3}}$)

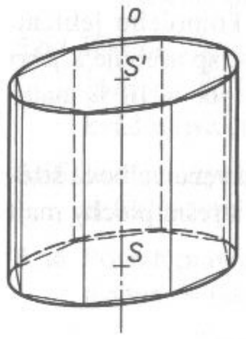
c) Jak vysoká by byla zeď tlustá 60 cm, vystavěná ze zdiva této pyramidy kolem České republiky, měří-li hranice České republiky 2 303 km?

5.5 Objem a povrch rotačních těles

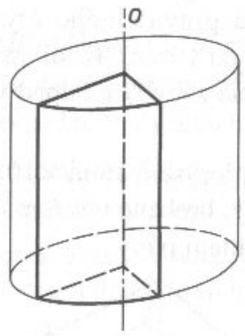
Chceme-li odvodit vzorec pro objem rotačního válce, můžeme postupovat tak, že válci vepíšeme pravidelný n-boký hranol (obr. 187). Je zřejmé, že čím je větší n, tím více se objem hranolu přibližuje k objemu válce. Pro objem válce tedy platí vzorec $V = S_p v$. A protože u rotačního válce s poloměrem podstavy r je obsah podstavy $S_p = \pi r^2$, platí:

Objem rotačního válce vypočteme podle vzorce $V = \pi r^2 v$; r je poloměr podstavy válce, v je výška válce.

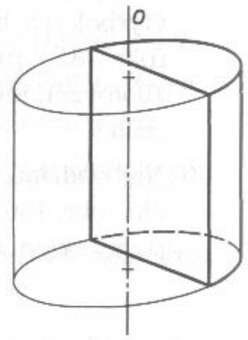
Pro důkaz této věty je však nutná znalost pojmu limity. Vzorec $V = S_p\,.\,v$ platí i pro **výseč** a **úseč rotačního válce**, tj. část rotačního válce, jejíž podstavou je kruhová výseč nebo kruhová úseč (obr. 188a, b).



Obr. 187



Obr. 188a



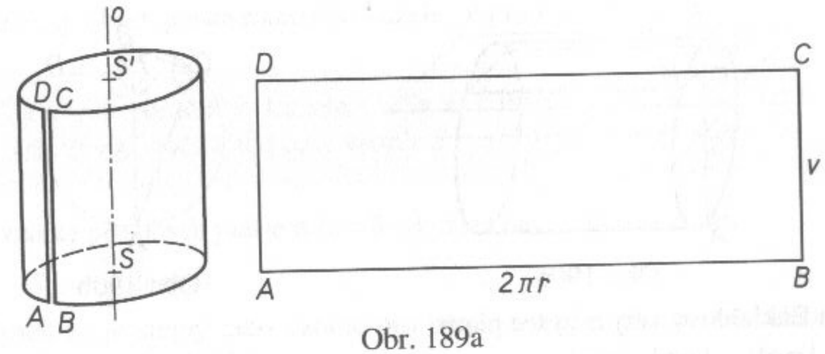
Obr. 188b

Hranice rotačního válce se skládá ze dvou podstav a pláště. Rozvineme-li plášť do roviny, vznikne obdélník (obr. 189a). Délka jeho jedné strany je rovna délce podstavné hrany válce, délka druhé jeho strany je rovna výšce válce.

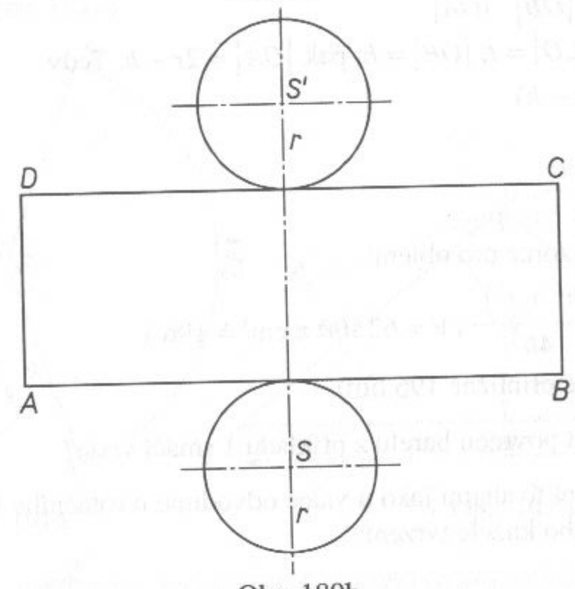
Povrch rotačního válce s výškou v a poloměrem podstavy r vypočteme podle vzorce $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r + v)$.

Sestrojíme-li obdélník, jehož rozměry jsou $2\pi r$ a v, a připojíme-li k němu ještě dva kruhy s poloměrem r, dostaneme **síť válce** (viz např. obrázek 189b).

Tak jako v případě mnohostěnu je možné po vystřižení sítě z papíru vytvořit model rotačního válce.



Obr. 189a



Obr. 189b

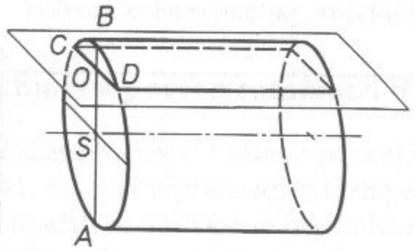
Příklad 1

Částečně naplněný barel tvaru rotačního válce výšky $v = 1$ m plove na vodě tak, že jeho osa je rovnoběžná s vodní hladinou (obr. 190a). Délka tětivy, kterou na podstavě barelu vyznačuje povrch vodní hladiny, je 40 cm. Výška kruhové úseče podstavy vyčnívající nad hladinu je 10 cm. Vypočítejte objem barelu.

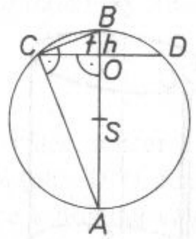
Řešení

Barel má tvar rotačního válce, proto jeho objem $V = \pi r^2 v$. Výška válce $v = 1$ m $= 100$ cm. Poloměr r podstavy válce určíme z trojúhelníku ABC

(obr. 190b). Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C (Thaletova věta), bod O je pata jeho výšky.



Obr. 190a



Obr. 190b

Podle Eukleidovy věty o výšce platí:

$$|CO|^2 = |OB| \,.\, |OA|$$

Označíme-li $|CO| = t$, $|OB| = h$, pak $|OA| = 2r - h$. Tedy

$$t^2 = h(2r - h)$$

a odtud

$$r = \frac{h^2 + t^2}{2h}.$$

Dosadíme do vzorce pro objem:

$$V = \pi v \frac{\left(h^2 + t^2\right)^2}{4h^2}; \; V = 62\,500\,\pi \text{ cm}^3 \doteq 196 \text{ l}$$

Objem barelu je přibližně 196 litrů.

? Jakou část povrchu barelu z příkladu 1 smáčí voda?

Podobnými úvahami jako u válce odvodíme u rotačního kužele a u rotačního komolého kužele tvrzení:

Objem rotačního kužele vypočítáme podle vzorce $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$; r je poloměr podstavy kužele a v je výška kužele.

Objem komolého rotačního kužele vypočítáme podle vzorce $V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$; r_1, r_2 jsou poloměry podstav komolého kužele a v je jeho výška.

Hranice rotačního kužele se skládá z podstavy a pláště. I plášť rotačního kužele můžeme rozvinout do roviny (obr. 191a). Vznikne kruhová výseč, jejímž poloměrem je délka strany kužele. Délka kruhového oblouku, který ji ohraničuje, je rovna délce podstavné hrany kužele. Je-li r poloměr podstavy kužele, v jeho výška, je délka strany kužele $s = \sqrt{r^2 + v^2}$. Středový úhel

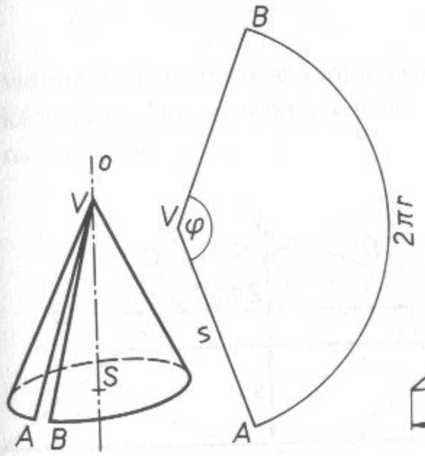
kruhové výseče má v obloukové míře velikost $\varphi = \frac{2\pi r}{s}$ a obsah kruhové výseče, tj. obsah pláště rotačního kužele, je proto $\frac{\pi s^2 \varphi}{2\pi}$ neboli $\pi r s$.

Povrch rotačního kužele s délkou strany s a poloměrem podstavy r vypočítáme podle vzorce $S = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r + s)$.

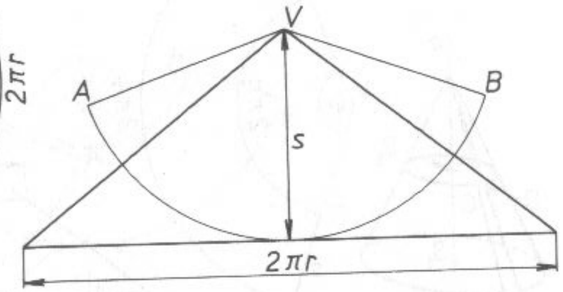
Ze vzorce pro obsah pláště rotačního kužele napsaného ve tvaru

$$S_{pl} = \frac{1}{2}(2\pi r) \,.\, s$$

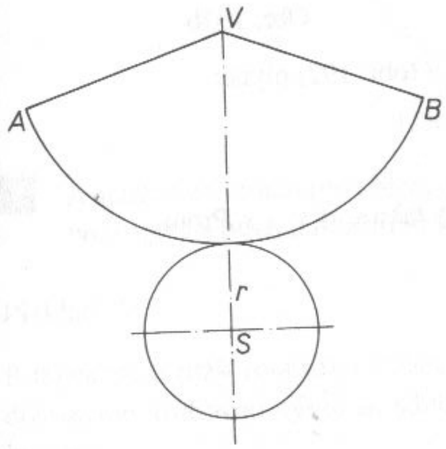
vidíme, že je stejný jako vzorec pro obsah trojúhelníku se základnou $2\pi r$ a s výškou s (obr. 191b).



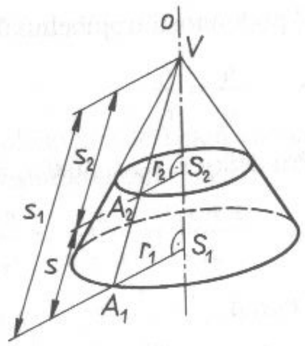
Obr. 191a



Obr. 191b



Obr. 191c



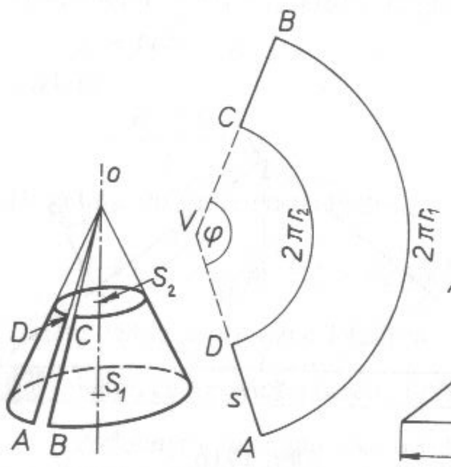
Obr. 192

Sestrojíme-li kruhovou výseč tak, aby byl její poloměr s, délka jejího kruhového oblouku $2\pi r$, a připojíme-li kruh shodný s podstavou kužele jako např. na obr. 191c, dostaneme **síť kužele**.

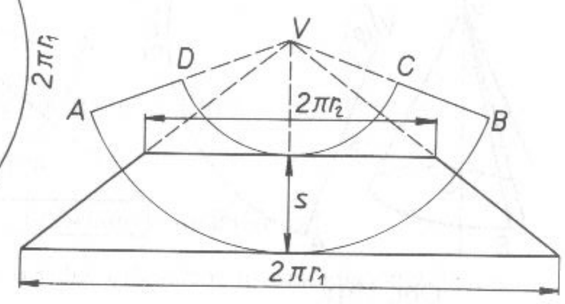
Povrch komolého rotačního kužele je roven součtu obsahů jeho podstav a pláště. Komolý rotační kužel vznikne z rotačního kužele řezem rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy. Doplňme tedy komolý rotační kužel s délkou strany s rotačním kuželem s délkou strany s_2 na rotační kužel s délkou strany s_1 (obr. 192).

Pláště obou rotačních kuželů se rozvinou do kruhových výsečí, takže plášť komolého rotačního kužele se rozvine do výseče mezikruží (obr. 193a). Pro plášť komolého rotačního kužele proto platí:

$$S_{pl} = \pi r_1 s_1 - \pi r_2 s_2 = \pi(r_1 s_1 - r_2 s_2)$$



Obr. 193a



Obr. 193b

Z podobnosti trojúhelníků A_1S_1V a A_2S_2V (obr. 192) plyne:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Pro délky s, s_1, s_2 platí $s_1 = s + s_2$, a tedy také $s_2 = s_1 - s$. Proto

$$\frac{s + s_2}{s_2} = \frac{s_1}{s_1 - s} = \frac{r_1}{r_2}$$

a odtud

$$s_2 = \frac{sr_2}{r_1 - r_2}, \qquad s_1 = \frac{sr_1}{r_1 - r_2}.$$

Dosadíme-li tato vyjádření s_1 a s_2 do vztahu pro obsah pláště, dostaneme:

$$S_{pl} = \pi\left(\frac{sr_1^2}{r_1 - r_2} - \frac{sr_2^2}{r_1 - r_2}\right) = \pi s\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 - r_2} = \pi s(r_1 + r_2).$$

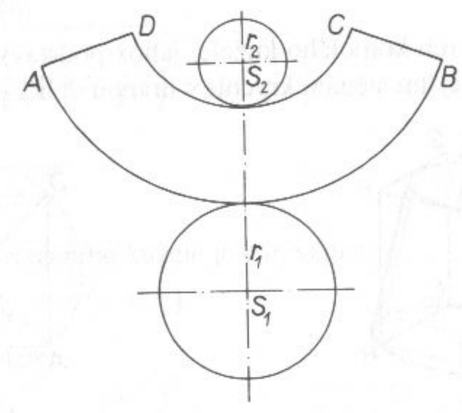
Platí tedy věta:

Povrch komolého rotačního kužele vypočítáme podle vzorce $S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi s(r_1 + r_2)$; r_1, r_2 jsou poloměry jeho podstav a s je délka jeho strany.

Napíšeme-li vzorec pro obsah pláště komolého rotačního kužele ve tvaru

$$S_{pl} = \frac{2\pi r_1 + 2\pi r_2}{2} \cdot s,$$

vidíme, že je to zároveň vzorec pro obsah lichoběžníku se základnami o délkách $2\pi r_1$, $2\pi r_2$ a výškou s (obr. 193b). Příklad **sítě komolého kužele** je na obr. 193c.



Obr. 193c

? Je možné ze vzorců pro objem a povrch komolého kužele získat vzorce pro objem a povrch rotačního válce, resp. rotačního kužele? Jak?

Příklad 2

Rozvineme-li plášť rotačního kužele, jehož obsah $S_{pl} = 18\pi$ cm², do roviny, dostaneme kruhovou výseč se středovým úhlem 120°. Vypočítejte objem kužele.

Řešení

Plášť kužele tvoří třetinu kruhu s poloměrem s, tedy $S_{pl} = \frac{1}{3}\pi s^2$, odtud

$$s = \sqrt{\frac{3S_{pl}}{\pi}}; \quad s = 3\sqrt{6}\ \text{cm}.$$

Ze vzorce pro plášť kužele $S_{pl} = \pi r s$, vyjádříme r:

$$r = \frac{S_{pl}}{\pi s} = \sqrt{\frac{S_{pl}}{3\pi}}; \quad r = \sqrt{6}\ \text{cm}$$

Výšku v vypočítáme pomocí Pythagorovy věty

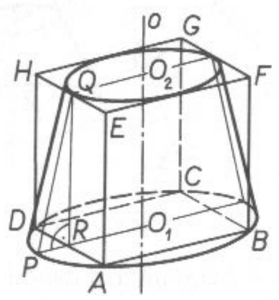
$$v = \sqrt{s^2 - r^2} = 2\sqrt{\frac{2S_{pl}}{3\pi}}; \quad v = 4\sqrt{3}\ \text{cm}.$$

Objem kužele

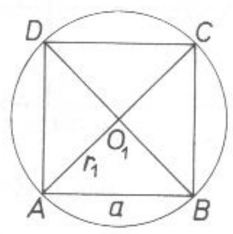
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{2}{9} S_{pl}\sqrt{\frac{2S_{pl}}{3\pi}}; \quad V = 8\pi\sqrt{3}\ \text{cm}^3.$$

Příklad 3

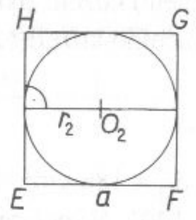
Určete objem a povrch komolého kužele, jehož podstavy jsou kruh opsaný a kruh vepsaný protějším stěnám krychle s hranou délky a.



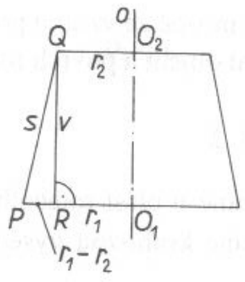
Obr. 194a



Obr. 194b



Obr. 194c



Obr. 194d

Řešení

Na obr. 194a je krychle $ABCDEFGH$, podstavy komolého kužele jsou kruh opsaný čtverci $ABCD$ (obr. 194b) a kruh vepsaný čtverci $EFGH$ (obr. 194c). Poloměry podstav kužele jsou $r_1 = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, $r_2 = \frac{1}{2}a$, a výška $v = a$.

Takto vytvořený komolý kužel je rotační, osou rotace je spojnice středů obou čtverců. Jeho objem určíme podle vzorce

$$V = \frac{1}{3}\pi v\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right),$$

a po dosazení dostaneme

$$V = \frac{1}{3}\pi a\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{2}}{4} + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{\pi a^3\left(3 + \sqrt{2}\right)}{12}.$$

Délku s strany komolého kužele určíme pomocí jeho osového řezu (obr. 194d). V pravoúhlém trojúhelníku PQR ($|\sphericalangle R| = 90°$) má přepona délku s, odvěsny jsou úsečky o délkách v a $r_1 - r_2$. Podle Pythagorovy věty platí

$$s^2 = v^2 + (r_1 - r_2)^2.$$

Odtud je po dosazení

$$s = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2} - \frac{1}{2}a\right)^2}$$

a úpravách

$$s = \frac{1}{2}a\sqrt{7 - 2\sqrt{2}}.$$

Povrch komolého rotačního kužele je dán vzorcem

$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi s\left(r_1 + r_2\right),$$

po dosazení dostaneme

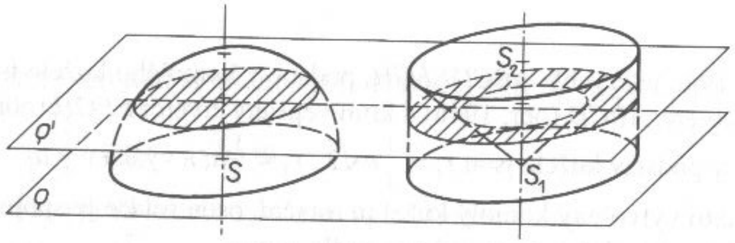
$$S = \pi\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \pi \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{7 - 2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2} + \frac{1}{2}a\right)$$

a po úpravě

$$S = \frac{1}{4}\pi a^2\left[3 + \left(\sqrt{2} + 1\right)\sqrt{7 - 2\sqrt{2}}\right].$$

Vzorec pro objem koule můžeme odvodit pomocí Cavalieriho principu. Uvažujme polokouli s poloměrem r. Druhé těleso T vznikne z rotačního válce s poloměrem r a výškou r vyjmutím rotačního kužele, který má s válcem společnou podstavu a jehož vrchol je středem druhé podstavy válce.

Postavme obě tělesa na rovinu ρ tak, jak ukazuje obr. 195a, a sledujme průniky těles s rovinami $\rho' \parallel \rho$. Označme $h = |\rho\rho'|$.

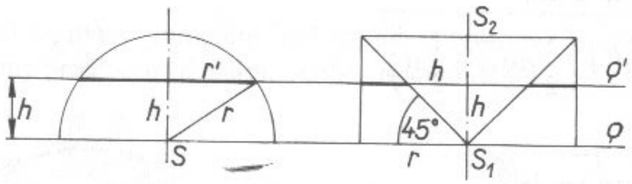


Obr. 195a

Leží-li rovina ρ' v opačném poloprostoru s hraniční rovinou ρ než tělesa, jsou oba průniky vždy prázdné množiny. Jestliže leží rovina ρ' ve stejném poloprostoru jako tělesa a $h > r$, jsou průniky také prázdné množiny. Pro $h = r$, je průnikem roviny ρ' s polokoulí bod, s tělesem T kružnice. Ve všech uvedených případech jsou obsahy průniků nulové.

V případě, kdy $h = 0$, jsou průniky roviny ρ' s oběma tělesy shodné kruhy, a jejich obsahy jsou tedy stejné.

Je-li $0 < h < r$, je průnikem roviny ρ' s polokoulí kruh, s tělesem T mezikruží. Na obr. 195b je nakreslen společný osový řez oběma tělesy, vyznačeny jsou i roviny ρ a ρ'.



Obr. 195b

Obsah kruhu, ve kterém rovina ρ' protíná polokouli je $S_k = \pi r'^2$. Je-li h vzdálenost roviny ρ' od roviny ρ, platí pro poloměr r':

$$r'^2 = r^2 - h^2,$$

a tedy

$$S_k = \pi(r^2 - h^2).$$

Hranice mezikruží, v němž rovina ρ' protíná těleso T, mají poloměry r a h, proto jeho obsah

$$S_m = \pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2).$$

Vidíme, že i v tomto případě mají průniky roviny ρ' s oběma tělesy stejné obsahy.

Podle Cavalieriho principu tak mají obě tělesa stejný objem. Objem tělesa T i objem polokoule je roven rozdílu objemu rotačního válce s poloměrem r a výškou r a objemu rotačního kužele s poloměrem podstavy r a výšce r, tj.

$$V_T = \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r = \pi r^3.$$

Objem koule je roven dvojnásobku objemu polokoule, tedy platí:

Objem koule s poloměrem r určíme podle vzorce $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Obdobnými úvahami jako při odvozování vzorce pro objem koule lze získat vzorce pro objem kulové úseče a kulové vrstvy. Odvození vzorců pro objem koule a jejích částí i vzorců pro obsah kulové plochy a jejích částí je však jednodušší pomocí integrálního počtu. Nebudeme se proto dalším odvozováním zabývat a uvedeme nyní jen vzorce.

Objem kulové úseče vypočítáme podle vzorce $V = \frac{\pi v}{6}\left(3r_1^2 + v^2\right)$; r_1 je poloměr podstavy úseče a v je výška úseče.

Objem kulové vrstvy vypočítáme podle vzorce $V = \frac{\pi v}{6}\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2\right)$; r_1, r_2 jsou poloměry podstav vrstvy a v je výška vrstvy.

Je zřejmé, že vzorec pro objem kulové úseče získáme ze vzorce pro objem kulové vrstvy, položíme-li $r_2 = 0$. Pro snadnější zapamatování obou vzorců je vhodné je upravit.

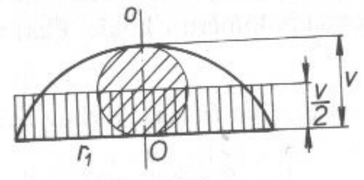
Vzorec pro objem kulové úseče můžeme napsat také takto:

$$V = \pi r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{v}{2}\right)^3$$

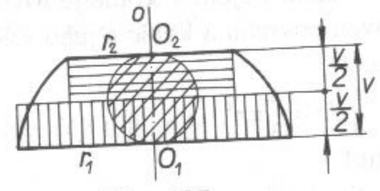
Z toho plyne, že objem kulové úseče je roven součtu objemů rotačního válce a koule. Rotační válec má podstavu společnou s podstavou úseče a výšku rovnou polovině výšky úseče. Poloměr koule se rovná polovině výšky dané úseče (obr. 196).

I vzorec pro objem kulové vrstvy můžeme upravit:

$$V = \pi r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \pi r_2^2 \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{v}{2}\right)^3$$



Obr. 196

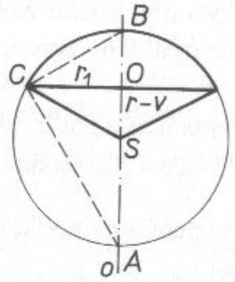


Obr. 197

Objem kulové vrstvy se tedy rovná součtu objemů dvou rotačních válců a objemu koule. Podstavami válců jsou podstavy kulové vrstvy, výška každého je rovna polovině výšky vrstvy. Poloměr koule se rovná polovině výšky vrstvy (obr. 197).

Objem kulové výseče určíme jako součet objemů kulové úseče, která má podstavu o poloměru r_1 a výšku v, a rotačního kužele, který má podstavu rovněž o poloměru r_1 a výšku $r - v$ (obr. 198), tj.

$$V = \frac{\pi v}{6} \cdot \left(3r_1^2 + v^2\right) + \frac{\pi r_1^2 (r - v)}{3}.$$



Obr. 198

Podle Eukleidovy věty o výšce pro pravoúhlý trojúhelník ABC ($|\sphericalangle C| = 90°$) je $r_1^2 = v(2r - v)$. Vzorec pro objem kulové výseče můžeme tak upravit na tvar

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 v.$$

Známe-li vzorec pro objem koule, můžeme k výpočtu povrchu koule (tj. obsahu kulové plochy) dospět následující úvahou. Představme si kouli polepenou např. milimetrovým papírem. Její povrch tak máme rozdělen na množství čtverečků (mm^2). Spojíme-li vrcholy každého čtverečku se středem koule, dostaneme jehlany se čtvercovou podstavou, hlavními vrcholy ve středu koule a výškou rovnou poloměru koule.

Čtverečky na povrchu koule, tj. podstavy jehlanů, můžeme bez omezení zmenšovat a podstavu každého jehlanu pak považovat za část roviny, nikoli za část kulové plochy. Objem koule se tak rovná součtu objemů všech takto vytvořených jehlanů. Podstavy těchto jehlanů tvoří dohromady povrch koule.

Neboli objem V koule je roven objemu jehlanu, jehož obsah podstavy je roven povrchu S koule a jeho výška je rovna poloměru r koule. Platí tedy rovnost

$$\frac{1}{3}Sr = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

a odtud

$$S = 4\pi r^2.$$

Povrch koule, tj. obsah kulové plochy s poloměrem r, vypočítáme podle vzorce $S = 4\pi r^2$.

Srovnáme-li tento vzorec se vzorcem pro výpočet obsahu kruhu, vidíme, že povrch koule je roven čtyřnásobku obsahu kruhu o stejném poloměru.

Obsah kulového vrchlíku i kulového pásu vypočteme jako plášť válce o poloměru podstavy r (poloměr koule) a výškou v (výška vrchlíku či pásu):

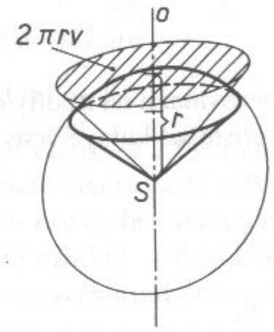
Obsah kulového vrchlíku nebo **kulového pásu** vypočítáme podle vzorce $S = 2\pi r v$; r je poloměr kulové plochy a v výška vrchlíku (pásu).

Vraťme se ke vzorci pro objem kulové výseče. Zapíšeme-li ho ve tvaru

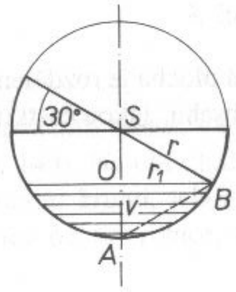
$$V = \frac{1}{3}(2\pi r v) r,$$

vidíme, že je to zároveň vzorec pro výpočet objemu rotačního kužele, jehož obsah podstavy je roven obsahu příslušného vrchlíku a výška je rovna poloměru koule (obr. 199). Tedy podobně jako můžeme počítat obsah kruhové výseče jako obsah trojúhelníku, můžeme objem kulové výseče počítat jako objem kužele.

? A co „síť" koule? Umíte udělat model koule z papíru?



Obr. 199



Obr. 200

Příklad 4

Nakloníme-li o 30° nádobu tvaru polokoule, která byla zcela naplněna vodou, vyteče z ní 3,3 l vody. Kolik litrů vody v ní zůstane?

Řešení

Zbytek vody v nádobě má tvar kulové úseče. Její objem je

$$V = \pi r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{v}{2}\right)^3.$$

Trojúhelník SAB je rovnostranný (obr. 200), proto je výška kulové úseče $v = \frac{r}{2}$. Poloměr r_1 podstavy kulové úseče je výškou v tomto trojúhelníku, proto $r_1 = r\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Objem kulové úseče

$$V = \pi\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{r}{4} + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r}{4}\right)^3 = \frac{5}{24}\pi r^3.$$

Protože objem nádoby tvaru polokoule je $\frac{2}{3}\pi r^3$ a při naklonění z ní vyteče 3,3 l vody, je

$$\frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{5}{24}\pi r^3 = \frac{11}{24}\pi r^3 = 3{,}3 \text{ litru},$$

tedy

$$\frac{1}{24}\pi r^3 = 0{,}3 \text{ litru}.$$

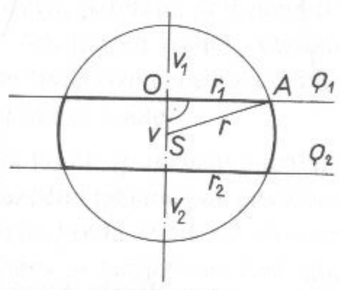
Odtud dostáváme

$$V = \frac{5}{24}\pi r^3 = 5 \cdot 0{,}3\,\text{l} = 1{,}5 \text{ litru}.$$

V nádobě zůstane 1,5 litru vody.

Příklad 5

Kulová plocha je rozdělena dvěma rovnoběžnými rovinami na tři díly o stejném obsahu. Jakou částí objemu koule je objem příslušné kulové vrstvy?



Obr. 201

Řešení

Objem vrstvy je dán vzorcem

$$V = \pi r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \pi r_2^2 \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{v}{2}\right)^3.$$

Kulová plocha je rozdělena dvěma rovnoběžnými řezy na dva kulové vrchlíky a kulový pás (obr. 201). Protože je obsah všech tří částí stejný, je obsah každé z nich roven třetině obsahu kulové plochy. Je tedy

$$2\pi r v = 2\pi r v_1 = 2\pi r v_2 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi r^2$$

a odtud pro výšku v vrstvy plyne

$$v = v_1 = v_2 = \frac{2}{3}r.$$

Poloměry obou podstav vrstvy jsou stejné. V pravoúhlém trojúhelníku SAO ($|\sphericalangle O| = 90°$) je $|OS| = r - v_1 = \frac{1}{3}r$. Podle Pythagorovy věty

$$r_1^2 = r_2^2 = r^2 - \left(\frac{1}{3}r\right)^2 = \frac{8}{9}r^2.$$

Pro objem vrstvy dostaneme

$$V = 2 \cdot \pi\frac{8}{9}r^2 \cdot \frac{1}{3}r + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{3}r\right)^3 = \frac{52}{81}\pi r^3.$$

Objem koule počítáme podle vzorce

$$V_k = \frac{4}{3}r^3,$$

a tedy poměr objemu kulové vrstvy a koule je

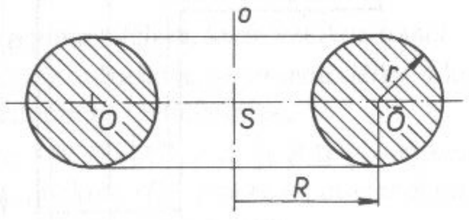
$$V : V_k = \frac{52}{81}\pi r^3 : \frac{4}{3}\pi r^3,$$

Odtud dostáváme

$$V = \frac{13}{27}V_k.$$

V článku 5.2 byla zmínka ještě o jednom rotačním tělese, s nímž se v běžném životě často setkáváte, o anuloidu (obr. 149). Na obr. 202 je nakreslen osový řez anuloidem. Označíme-li r poloměr kruhu, jehož rotací anuloid vznikne, a R vzdálenost středu tohoto kruhu od osy rotace, lze **objem a povrch anuloidu** určit podle vzorců

$$V = 2\pi^2 r^2 R, \qquad S = 4\pi^2 R r.$$



Obr. 202

Odvození vzorců se stejně jako u koule a kulové plochy provádí užitím integrálního počtu.

Pro snadné zapamatování vzorce pro objem anuloidu si můžeme představit anuloid „nakrájený" na tenké „zkosené válce". Ty na sebe střídavě klademe tak, že vznikne válec o poloměru r a výšce $2\pi R$. Objem anuloidu je stejný jako objem takto vzniklého válce, tedy $V = \pi r^2 \,.\, 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$.

Úlohy

5.72 Dva rotační válce mají výšky 64 cm a 27 cm. Plášť každého z nich má stejný obsah jako podstava druhého válce. V jakém poměru jsou objemy válců?

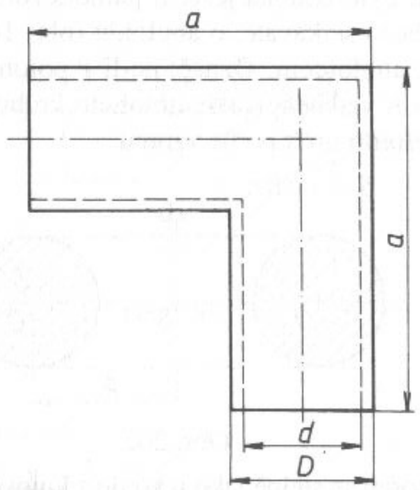
5.73 Osový řez nádoby, která má tvar rotačního válce, je obdélník s úhlopříčkou délky $u = 39$ cm. Poměr obsahu pláště a obsahu podstavy je 5 : 3. Kolik litrů vody se vejde do nádoby?

5.74 Jaké množství vody proteče za hodinu potrubím kruhového průřezu s průměrem 16 cm, teče-li voda rychlostí 2,5 m . s^{-1}?

5.75 V podstavě rovnostranného válce poloměru r je vedena tětiva délky r. Rovina proložená touto tětivou rovnoběžně s osou válce rozdělí válec na dvě úseče. Určete objem a povrch větší z nich.

5.76 Vypočítejte objem šikmo seříznutého rotačního válce s průměrem podstavy 30 cm, mají-li jeho nejdelší a nejkratší strana délky 1,25 m a 1,05 m.

5.77 Vypočtěte hmotnost a vnitřní objem svařovaného pravoúhlého kolena na obr. 203, jestliže $a = 240$ mm, $d = 85$ mm, $D = 100$ mm, hustota materiálu $\rho = 7{,}8$ g . cm^{-3}. Přídavek na svaření je 2 % hmotnosti.



Obr. 203

5.78 Hromada písku má tvar rotačního kužele s výškou 3,30 m a obvodem podstavy 18,85 m. Kolik m^3 písku je v hromadě?

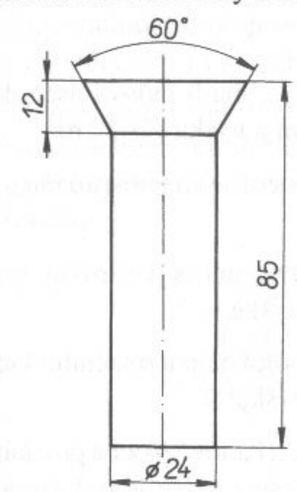
5.79 Jak velký je středový úhel v rozvinutém plášti rovnostranného kužele?

5.80 Vypočtěte obsah lampového stínítka tvaru rotačního komolého kužele s průměry podstav 32 cm a 12 cm a výškou 24 cm. Jaký je úhel výseče mezikruží, z něhož stínítko vzniklo?

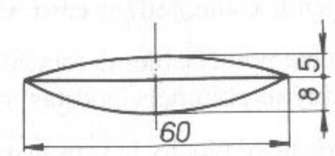
5.81 Komín tvaru dutého rotačního komolého kužele má výšku 32 m, dolní průměry 3,2 m a 2 m, horní průměry 1,7 m a 1,2 m. Jaká je jeho celková hmotnost, je-li hustota zdiva $\rho = 1\,600$ kg . m^{-3}?

5.82 Vědro na vodu je zhotoveno z plechu, má tvar komolého rotačního kužele a nemá víko; průměr dna je 24 cm, průměr okraje 32 cm, strana má délku 30 cm. Kolik váží vědro, jestliže 1 m^2 plechu váží 10,5 kg? Kolik litrů vody se do vědra vejde?

5.83 Ocelový nýt se zápustnou kuželovou hlavou má rozměry uvedené v mm na obr. 204. Kolik nýtů lze vyrobit z 1 dm^3 materiálu?



Obr. 204



Obr. 205

5.84 Určete objem a povrch tělesa, které vznikne rotací

a) pravidelného šestiúhelníku se stranou délky a kolem přímky, v níž leží delší úhlopříčka šestiúhelníku,

* b) kosočtverce $ABCD$ ($|AB| = a$, $|\sphericalangle BAD| = \alpha$) kolem přímky rovnoběžné s úhlopříčkou BD a procházející vrcholem A.

5.85 Kolikrát se zmenší

a) objem, b) povrch koule,

jestliže se její poloměr zmenší k-krát?

5.86 Poloměr koule r zvětšíme o hodnotu ε. O co se zvětší její
a) objem, b) povrch?
Určete přibližné hodnoty těchto přírůstků za předpokladu, že hodnota ε je vzhledem k poloměru r velmi malá, takže členy, v nichž se vyskytuje ε^2 nebo ε^3, lze zanedbat. Numericky řešte pro $r = 10$ cm, $\varepsilon = 2 \,.\, 10^{-3}$ cm.

5.87 Jakou hmotnost má planeta Země, je-li její průměrná hustota $\rho = 5{,}52 \text{ g} \,.\, \text{cm}^{-3}$?

5.88 Dutá železná koule se ponoří do vody svou polovinou. Jaká je tloušťka její stěny, je-li vnější průměr koule 1 m a hustota železa je $7{,}8 \text{ g} \,.\, \text{cm}^{-3}$?

5.89 Konvexní čočka se skládá ze dvou kulových úsečí (obr. 205), rozměry jsou udány v mm. Vypočítejte její hmotnost, je-li hustota skla, ze kterého je vyrobena, $\rho = 2{,}5 \text{ g} \,.\, \text{cm}^{-3}$.

5.90 Jak vysoko musí být letec, má-li vidět 0,001 zemského povrchu?

5.91 Dokažte, že objem kulové úseče, která má výšku v, se dá také vypočítat podle vzorce $V = \frac{1}{3}\pi v^2(3r - v)$.

5.92 Vypočtěte objem a povrch kulové výseče, má-li kulová úseč, která je částí výseče, poloměr podstavy $r_1 = 6$ cm a výšku $v = 2$ cm.

5.93 Kolik km^2 měří mírné pásmo na Zemi, které se rozprostírá mezi 23°27′ a 66°18′ severní zeměpisné šířky?

5.94 Kulová vrstva, která má shodné podstavy, má objem rovný polovině objemu koule, jejíž je částí. Určete její výšku v.

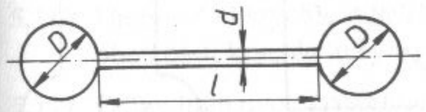
5.95 Určete poměr objemů rotačního válce, polokoule a rotačního kužele se stejnými poloměry podstav a stejnými výškami.

5.96 Do kulové plochy je vepsán rotační válec. (Kulová plocha prochází podstavnými hranami válce.) Poloměr podstavy válce je o 2 cm a výška o 1 cm menší než poloměr koule. Určete poloměr koule.

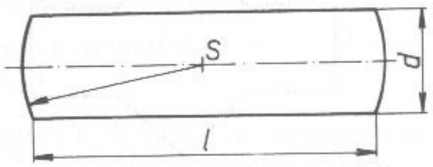
5.97 Půdorysem výklenku románského kostela je půlkruh s průměrem 6 m. Výklenek je překlenut klenbou, která je čtvrtinou kulové plochy. Výška obvodových zdí je 7,58 m.
a) Jak velký je obestavěný prostor výklenku?
b) Jak velký je obsah stěn a klenby?

5.98 Na obrázku 206 je činka o hmotnosti 50 kg. Jaký je průměr D koulí, je-li délka spojovací tyče $l = 60$ cm a její průměr $d = 32$ mm. Hustota materiálu je $\rho = 7{,}8 \text{ g} \,.\, \text{cm}^{-3}$.

5.99 Kolik metrů vlny je asi v klubku s průměrem 9 cm, jestliže průměr vlákna vlny je 1,5 mm?



Obr. 206



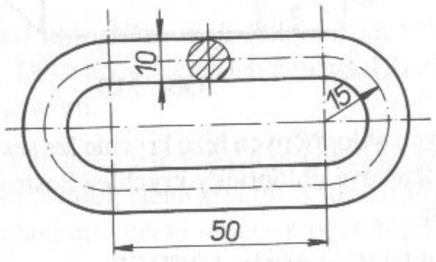
Obr. 207

5.100 Vagonovou cisternu tvoří válec délky $l = 8$ m s vnitřním průměrem $d = 2{,}4$ m a s čely tvaru kulových vrchlíků; přitom kulové vrchlíky jsou částí kulové plochy, jejíž střed je v těžišti cisterny (obr. 207). Vypočtěte ložný prostor cisterny.

* **5.101** Kovová koule s průměrem d má otvor tvaru válce, jehož osa prochází středem koule a jehož výška se rovná jeho průměru. Vypočítejte, o kolik procent je provrtaná koule lehčí než plná, předpokládáme-li, že těleso je homogenní.

5.102 Duše automobilové pneumatiky má v nahuštěném stavu tvar anuloidu s rozměry $d = 14$ cm, $D = 0{,}55$ m. Jaký má objem a povrch?

5.103 Článek řetězu má tvar uvedený na obr. 208, rozměry jsou dány v milimetrech. Kolik článků má řetěz vážící 12 kg, je-li hustota železa, z něhož je řetěz vyroben, $\rho = 7{,}8 \text{ g} \,.\, \text{cm}^{-3}$? Vypočítejte celkovou délku řetězu.

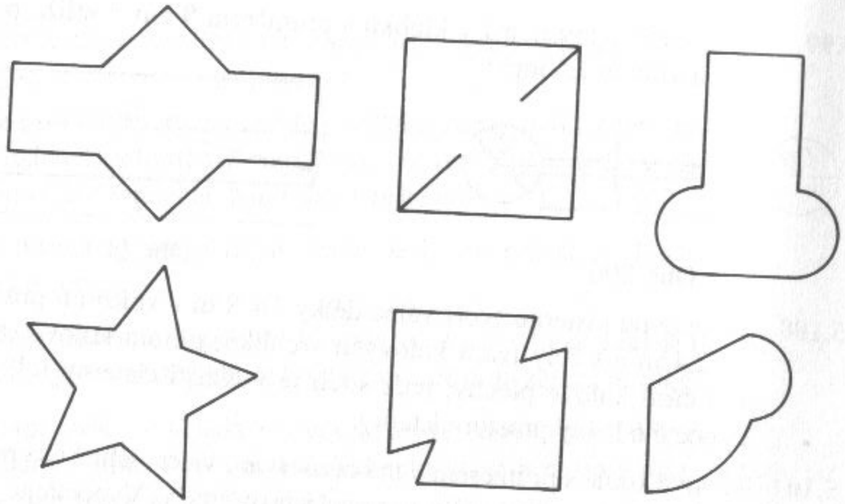


Obr. 208

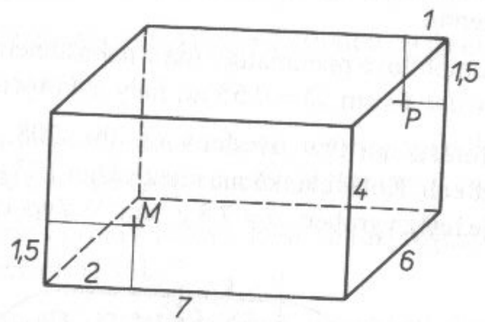
5.6 Úlohy k opakování

5.104 Na obr. 209 jsou sítě těles. Doplňte chybějící hrany, „zkopírujte" sítě na papír a utvořte modely těles.

5.105 Na protilehlých stěnách pokoje o délce 7 m, šířce 6 m, výšce 4 m sedí pavouk a moucha (obr. 210). Najděte nejkratší dráhu pavouka k mouše. (Předpokládáme, že pavouk se může pohybovat jen po stěnách, stropu a podlaze.)



Obr. 209



Obr. 210

5.106 Kolik různých úhlopříčných řezů krychle lze sestrojit, obsahuje-li každý z nich dvě tělesové úhlopříčky krychle? Sestrojte průsečnice každých dvou z nich.

5.107 Je dán pravidelný osmistěn *ABCDEF*.

a) Kolik různých směrů určují jeho hrany?

b) Určete všechny hrany mimoběžné s hranou *BE*.

c) Najděte všechny dvojice mimoběžných hran, jejichž příčkou je úhlopříčka *AC*.

d) Určete odchylku rovin dvou sousedních stěn.

5.108 Jsou-li odchylky tělesové úhlopříčky kvádru a rovin jeho stěn a, b, g, dokažte, že platí

a) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$,

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

5.109 Je dán povrch S krychle. Určete

a) obsah úhlopříčného řezu, b) délku tělesové úhlopříčky.

5.110 Hranou *CG* krychle *ABCDEFGH* veďte rovinný řez tak, aby objemy obou částí krychle byly v poměru 3 : 2.

5.111 Délky hran dvou krychlí jsou v poměru 3 : 2, povrch první krychle je o 120 cm^2 větší než povrch druhé. Určete délku hrany třetí krychle, jejíž objem se rovná součtu objemů obou daných krychlí.

* **5.112** Pravidelný trojboký hranol má objem $V = 125$ cm^3, odchylka dvou stěnových úhlopříček vycházejících se stejného vrcholu je $\varphi = 52°$. Vypočtěte délku jeho podstavné hrany.

5.113 Odchylka delší tělesové úhlopříčky pravidelného šestibokého hranolu a roviny jeho podstavy je 60°, kratší tělesová úhlopříčka má délku 15 cm. Vypočtěte objem a povrch tohoto hranolu.

5.114 Matice šroubu má přibližně tvar pravidelného šestibokého hranolu s otvorem tvaru rotačního válce. Podstavná hrana má délku 29 mm, výška hranolu je 25 mm, průměr otvoru je 33 mm. Vypočítejte hmotnost matice, je-li hustota oceli, z níž je matice vyrobena, $\rho = 7{,}86$ g . cm^{-3}.

5.115 Průřez železničního náspu má tvar rovnoramenného lichoběžníku, jehož základny mají délky 5,8 m a 3,4 m; odchylka jeho ramena od základny je 60°. Kolik m^3 materiálu je třeba na 1 km dlouhý násep?

5.116 Kosočtverec, jehož úhlopříčky mají délky 12 cm a 7 cm, je podstavou kolmého jehlanu. Delší boční hrana jehlanu má délku 16 cm. Vypočtěte objem a povrch jehlanu.

5.117 Do krychle s hranou délky a je vepsán pravidelný čtyřboký jehlan tak, že jeho podstavou je dolní stěna krychle a střed horní stěny krychle je jeho hlavním vrcholem. Určete objem a povrch jehlanu, odchylku ψ jeho bočních stěn a roviny podstavy a odchylku φ bočních hran a roviny podstavy.

5.118 Délka hrany pravidelného čtyřstěnu *ABCD* je $a = 5$ cm, body *X*, *Y*, *Z* jsou po řadě středy hran *AB*, *AD*, *CD*.

a) Sestrojte řez čtyřstěnu rovinou *XYZ*. Jaký geometrický útvar je řezem?

b) Rovina řezu rozdělila čtyřstěn na dvě části. Vypočítejte objem a povrch jedné z nich.

* **5.119** Je dán pravidelný čtyřstěn *ABCD* s hranou délky a. Určete součet vzdáleností jeho libovolného bodu od rovin všech jeho stěn.

5.120 Určete poměr objemů a povrchů dvou pravidelných čtyřstěnů, jsou-li vrcholy jednoho v těžištích stěn druhého.

5.121 Krychle $ABCDEFGH$ má hranu délky a. Určete

a) objem a povrch jehlanu $AFHE$,

b) objem a povrch čtyřstěnu $ACFH$.

5.122 Jednou podstavou komolého jehlanu $ABCA'B'C'$ je trojúhelník ABC se stranami délek $|BC| = a = 60$ cm, $|AC| = b = 52$ cm, $|AB| = c = 40$ cm. Délka strany $B'C'$ druhé podstavy je $|B'C'| = a' = 45$ cm. Výška jehlanu je $v = 8$ dm. Vypočtěte jeho objem.

5.123 Jáma má tvar pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jehož podstavné hrany mají délky 14 m a 10 m, roviny bočních stěn a rovina podstavy mají odchylku 45°. Kolik m^3 zeminy bylo vykopáno? Kolik m^3 betonu je třeba na vybetonování jámy, má-li být tloušťka betonu 1 dm?

5.124 Pravidelný osmistěn $ABCDEF$ má hranu délky $a = 5$ cm, bod P je středem hrany BF.

a) Sestrojte řez osmistěnu rovinou ACP. Jaký geometrický útvar je řezem?

b) Rovina řezu rozdělila osmistěn na dvě části. Vypočítejte objem a povrch jedné z nich.

* **5.125** V kterém pravidelném mnohostěnu je počet vrcholů o 8 větší než počet stěn a o 10 menší než počet hran? Vypočítejte jeho objem a povrch, je-li délka jeho hrany $a = 3$ cm.

5.126 Je dána krychle s hranami délky a. Určete objem a povrch tělesa, jehož jednou podstavou je jedna stěna krychle a druhou podstavou je čtverec, jehož vrcholy jsou středy hran v protější stěně krychle.

5.127 Nad každou stěnou krychle s hranou délky a je sestrojen pravidelný čtyřboký jehlan tak, že jeho hlavní vrchol leží vně krychle a jeho výška je $\frac{1}{2}a$. Určete objem a povrch takto vzniklého tělesa.

* **5.128** Jsou dány dva různé body A, B a přímka p ($A \notin p$, $B \notin p$). Určete množinu všech pravoúhlých průmětů bodu A do rovin, které procházejí

a) přímkou p,

b) bodem B.

* **5.129** Je dána rovina ρ, v ní bod B a mimo ni bod A. Určete množinu všech pat kolmic sestrojených z bodu A ke všem přímkám roviny ρ, které procházejí bodem B.

5.130 Strana rotačního kužele má délku s, odchylka strany a roviny podstavy je φ. Určete objem a povrch kužele, poloměr ρ kulové plochy kuželi vepsané a poloměr R kulové plochy kuželi opsané. (Vepsaná kulová plocha se dotýká pláště kužele a jeho podstavy, opsaná kulová plocha prochází vrcholem kužele a jeho podstavnou hranou.)

5.131 Dokažte, že povrch koule, která se dotýká všech hran krychle, se rovná rozdílu povrchu koule opsané a vepsané této krychli.

5.132 Kulová plocha je rozdělena rovinou ρ na dva kulové vrchlíky, jejichž obsahy jsou v poměru 2 : 3. Určete poměr objemů kulových úsečí s podstavou v rovině ρ.

5.133 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a, body P, Q jsou po řadě středy hran GH a EH. Určete střed S a poloměr r kulové plochy, která se dotýká roviny ABC v bodě B a

a) prochází bodem G,

* b) dotýká se přímky CE,

* c) dotýká se roviny DPQ.

* **5.134** Porovnejte povrch koule, krychle a pravidelného čtyřstěnu se stejným objemem.

* **5.135** Do pravidelného trojbokého hranolu s podstavnou hranou délky a je vepsána koule. (Koule se dotýká všech stěn hranolu.) Vypočtěte objem a povrch obou těles.

5.136 Pravidelnému komolému čtyřbokému jehlanu s podstavnými hranami délek 9 cm a 6 cm lze vepsat kouli. (Koule se dotýká všech bočních stěn i obou podstav jehlanu.) Vypočítejte odchylku rovin bočních stěn a roviny podstavy.

* **5.137** Kouli je vepsán rovnostranný válec a rovnostranný kužel. (Vrchol kužele i podstavné hrany kužele i válce leží na kulové ploše.) Určete poměr

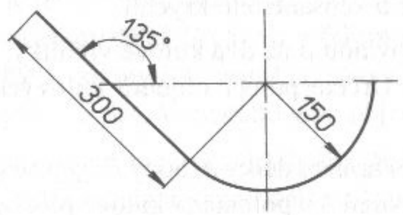
a) povrchů, b) objemů

všech tří těles.

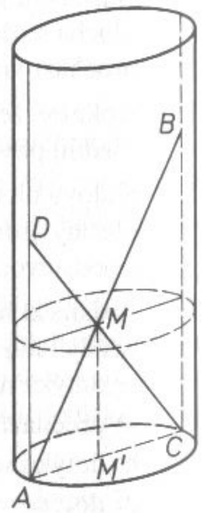
* **5.138** Těleso z příkladu 5.101 má název **kulový prstenec**. Objem kulového prstence je roven objemu koule, jejíž průměr je roven výšce prstence. To znamená, že objem kulového prstence nezávisí na poloměru koule. Dokažte.

5.139 Kmen tvaru komolého rotačního kužele je 3 m dlouhý, na tlustším konci má obvod 0,9 m, na tenčím konci 0,6 m. Má se z něho vytesat trám čtvercového průřezu, který je shodný se čtvercem vepsaným do menší podstavy. Vypočtěte objem odpadu.

5.140 Kolik m^2 pozinkovaného plechu je třeba na zhotovení 48 m dlouhého žlabu, jehož průřez je na obr. 211 (rozměry jsou v milimetrech)?



Obr. 211



Obr. 212

5.141 Linoleum tloušťky h a šířky l je těsně svinuto do role, která má vnější průměr D a vnitřní průměr d. Kolik běžných a kolik čtverečných metrů linolea je v roli svinuto?

5.142 Jedna úloha ze starověkého Egypta – hádanka kněží boha Ra: Stojíš před stěnou, za kterou je studna Lotosu jako kruh Slunce. Vedle studny je položen jeden kámen, jedno dláto a dva stvoly třtiny. Jeden stvol je dlouhý tři míry, druhý je dlouhý dvě míry. Stvoly (opřené v stabilní poloze v diametrálně protilehlých bodech na okraji dna) se kříží na povrchu vody ve studni Lotosu a ten povrch je jednu míru nade dnem. Kdo určí velikost nejdelší úsečky, kterou lze umístit do dna studny Lotosu, ten si vezme oba stvoly a bude knězem boha Ra. [Studna je rotačním válcem (obr. 212), oba dva stvoly jsou postaveny na podstavu válce tak, že kolmý průmět každého z nich do podstavy válce je týmž průměrem válce. Vypočítejte průměr podstavy.]

Pátý výlet do historie geometrie

V počátcích rozvoje matematického vědění v Evropě měly velký význam překlady původních děl z arabštiny a řečtiny, včetně Eukleidových Základů. Pro rozvoj geometrie byla významná kniha Geometrická praktika **Leonarda Pisánského**, nazývaného také **Fibonacci** (12. – 13. stol. n. l.). Kniha obsahuje kromě výsledků, které byly známé již ve starověku, i výsledky, kterých dosáhl sám autor.

V 15. a 16. století nastalo období renesance – znovuzrození umění a vědy, a tedy i matematiky. V této době tvořil například **Leonardo da Vinci** (1452 – 1519). V Traktátu o malířství vyložil geometrickou perspektivu, jeho zápisníky obsahují poznámky o rovnoplochých útvarech a tělesech stejného objemu.

Již Pappos poznal, že objem rotačního tělesa se vypočítá jako součin dráhy těžiště a obsahu rotujícího obrazce. Tato věta však byla zapomenuta a znovu ji objevil německý hvězdář a matematik působící i v Praze, **Johannes Kepler** (1571 – 1630). Užil ji k výpočtu objemů různých rotačních těles, mezi jiným též k výpočtu objemu sudů. Dnes nazýváme tuto větu Guldinovým pravidlem, třebaže ji **Paul Guldin** (1577 – – 1643) ani neobjevil, ani nedokázal.

Významnou metodu pro stanovení objemů různých těles vytvořil **Bonaventura Cavalieri** (1598 – 1647). Je to známý princip Cavalieriho. Anglický matematik a fyzik **Isaac Newton** (1643 – 1727) a německý matematik a filozof **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716) vytvořili tzv. infinitezimální počet, který umožňuje počítat objemy těles a obsahy ploch na základě pojmu limity.

Vztahy mezi počtem vrcholů, hran a stěn u mnohostěnů byly zkoumány již ve starověku. Švýcarský matematik působící také v Berlíně a v Petrohradě, **Leonard Euler** (1707 – 1783), studoval mnohostěny, vyhovující tzv. Eulerově větě. Dokázal, že mezi takové mnohostěny patří zejména všechny konvexní mnohostěny. Mnohostěny, pro něž platí Eulerova věta, se nazývají Eulerovy mnohostěny.

Prostorové vztahy mezi přímkami a mezi přímkami a rovinami úspěšně studovali francouzští matematikové **Adrien Marie Legendre** (1752 – 1833) a **Augustin Louis Cauchy** (1789 – 1857). Legendre se v podstatě první zabýval mimoběžkami. K rozšíření znalostí prostorových útvarů přispěla **deskriptivní geometrie**, jejíž základy položil **Gaspard Monge** (1746 – 1818).

VÝSLEDKY ÚLOH

1.2 Tělesa

1.2 Dva způsoby: 6 jehlanů, jejichž společným vrcholem je střed krychle, podstavami jsou stěny kychle, nebo 3 jehlany, jejichž vrcholem je jeden vrchol krychle a podstavy jsou stěny, které tento vrchol neobsahují.

2.1 Základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami

2.1 a) 10, b) 28, c) 7. **2.3** a, c, d, e) Ano, b) ne.

2.4 a) 15; 5, b) 10. **2.5** a) 20, b) 17, c) 13.

2.6 a) Přímka, polopřímka, prázdná množina, b) polopřímka, úsečka, bod, prázdná množina, c) rovina, polorovina, prázdná množina, d) polorovina, rovinný pás, konvexní úhel, přímka, prázdná množina.

2.2 Vzájemná poloha dvou přímek

2.7 a) $\leftrightarrow EH$, b) $\leftrightarrow BE$, $\leftrightarrow CE$, c) $\leftrightarrow AE$, $\leftrightarrow DE$, $\leftrightarrow EF$, $\leftrightarrow EG$, d) např. $\leftrightarrow AE$, $\leftrightarrow BC$, $\leftrightarrow GH$.

2.8 Např. a) $\leftrightarrow AB$ a $\leftrightarrow CD$, $\leftrightarrow AE$ a $\leftrightarrow CF$, b) $\leftrightarrow AB$ a $\leftrightarrow AE$, $\leftrightarrow BF$ a $\leftrightarrow BE$, c) $\leftrightarrow AB$ a $\leftrightarrow CE$, $\leftrightarrow AF$ a $\leftrightarrow BE$.

2.9 a) Mimoběžné, b) různoběžné, c) rovnoběžné.

2.10 a) Mimoběžné, b) různoběžné, c) mimoběžné.

2.11 Např. přímky AB a CC'; jejich příčka BC (příp. další příčky AC, AC', BC').

2.3 Vzájemná poloha přímky a roviny

2.12 a) $\leftrightarrow EH$, $\leftrightarrow FH$, $\leftrightarrow GH$, b) $\leftrightarrow AH$, $\leftrightarrow BH$, $\leftrightarrow CH$, $\leftrightarrow DH$.

2.13 a) $\leftrightarrow ADH$, $\leftrightarrow EFH$, $\leftrightarrow BCH$, b) $\leftrightarrow CDH$, $\leftrightarrow ACH$, $\leftrightarrow BDH$, $\leftrightarrow ABH$, $\leftrightarrow AFH$, $\leftrightarrow CFH$.

2.14 $\leftrightarrow AB$, $\leftrightarrow BD$.

2.15 a, c) Přímka je s rovinou rovnoběžná, b) přímka leží v rovině, d) přímka je s rovinou různoběžná.

2.16 Důkaz sporem; obrácená věta neplatí.

2.4 Vzájemná poloha dvou rovin

2.19 Roviny jsou a) různoběžné, nebo totožné, b) totožné, c, d) různoběžné, nebo totožné.

2.20 a) Rovnoběžné nebo mimoběžné, jsou-li ρ a σ různé; různoběžné, rovnoběžné různé nebo splývající, jsou-li ρ a σ totožné, b) rovnoběžné různé, popř. splývající, různoběžné, mimoběžné.

2.21 a) $\leftrightarrow EFH$, b) $\leftrightarrow ADH$, $\leftrightarrow BDH$, $\leftrightarrow CDH$, $\leftrightarrow ACH$, $\leftrightarrow BCH$, $\leftrightarrow ABH$, $\leftrightarrow HAF$, $\leftrightarrow HCF$.

2.5 Rovnoběžnost přímek a rovin

2.24 Užijte kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny a kritérium rovnoběžnosti dvou rovin.

2.25 $\leftrightarrow VD \parallel \leftrightarrow MS$, kde S je střed podstavy.

2.26 Užijte kritérium rovnoběžnosti dvou rovin.

2.27 a, b) Přímka a rovina jsou rovnoběžné.

2.28 Rovina je určena přímkami $p' \parallel p$, $q' \parallel q$, které procházejí bodem A.

2.29 Rovina je určena přímkami p a q', přitom q' je libovolná přímka rovnoběžná s přímkou q a různoběžná s přímkou p.

2.30 Rovina ρ je určena přímkami p, q', kde q' je rovnoběžná s q a různoběžná s p, rovina σ je určena přímkami q, p', kde p' je rovnoběžná s p a různoběžná s q.

2.31 a) $\leftrightarrow BCG$,
b) $\leftrightarrow MNP$, kde body N, P jsou po řadě středy hran CG, DH,
c) $\leftrightarrow KLM$, kde body K, L jsou po řadě středy hran EF, FG,
d) rovina obsahující středy hran AB, AD, DH, FG, GH.

2.6 Vzájemná poloha tří rovin

2.33 a) Tři různoběžné roviny s jediným společným bodem L, b) každé dvě roviny různoběžné, přitom všechny tři průsečnice jsou různé a rovnoběžné, c) každé dvě roviny různoběžné, přitom všechny tři průsečnice splynou v jedinou přímku, d) dvě roviny jsou rovnoběžné a třetí je protíná v rovnoběžných přímkách.

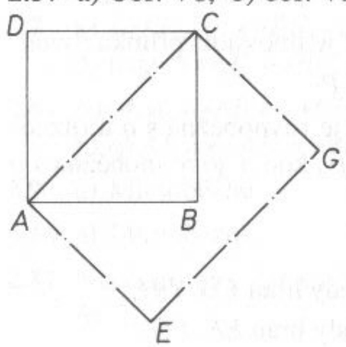
2.34 6.

2.7 Řešení polohových konstrukčních úloh

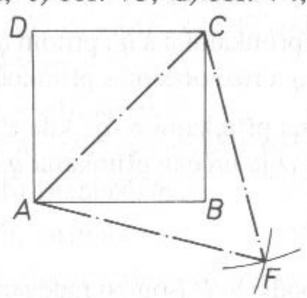
2.35 Řezem je a) lichoběžník *CHKL*: bod *K* je průsečík hrany *AE* s přímkou *HM*, bod *L* je průsečík hrany *AB* s přímkou *CM*, b) lichoběžník *BPRS*: bod *R* je průsečík hrany *EH* s přímkou *PQ*, bod *S* je průsečík hrany *AE* s přímkou *BQ*, c) trojúhelník *TUV*: body *U*, *V* jsou průsečíky přímky *RS* s hranami *EF* a *BF*.

2.36 Řezem je a) lichoběžník *PQRS*: bod *S* je průsečík hrany *EF* s přímkou, která prochází bodem *R* a je rovnoběžná s přímkou *PQ*, b) lichoběžník *AXYZ*: bod *Z* je průsečíkem hrany *EH* s přímkou *AU*, body *X*, *Y* jsou průsečíky hran *BF* a *FG* s přímkou, která prochází bodem *V* a je rovnoběžná s přímkou *AU*, c) pětiúhelník *PQMLK*: bod *P* je průsečík hrany *AD* s přímkou, která prochází bodem *K* a je rovnoběžná s přímkou *LM*, bod *Q* je průsečík hrany *CD* s přímkou, která prochází bodem *M* a je rovnoběžná s přímkou *KL*, d) šestiúhelník *UXVTYW*: bod *U* je průsečík hrany *AD* s přímkou *XZ*, bod *W* je průsečík hrany *DH* s přímkou *ZY*, bod *T* je průsečík hrany *FG* s přímkou, která prochází bodem *Y* a je rovnoběžná s přímkou *ZX*, bod *V* je průsečík hrany *BF* s přímkou, která prochází bodem *X* a je rovnoběžná s přímkou *ZY*.

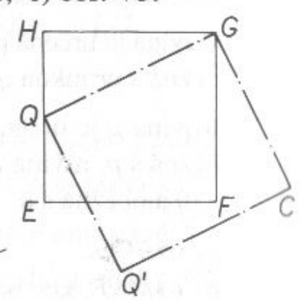
2.37 a) Obr. V1, b) obr. V2, c) obr. V3, d) obr. V4, e) obr. V5.



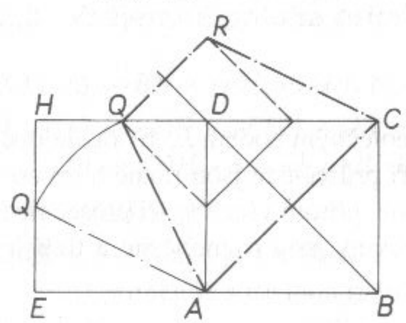
Obr. V1



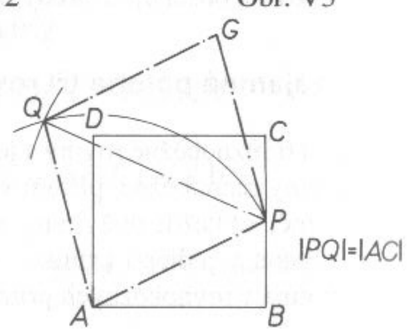
Obr. V2



Obr. V3

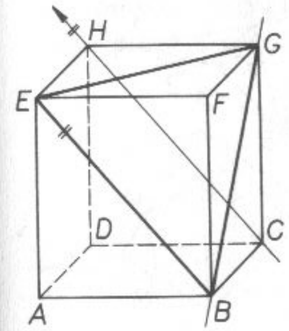


Obr. V4

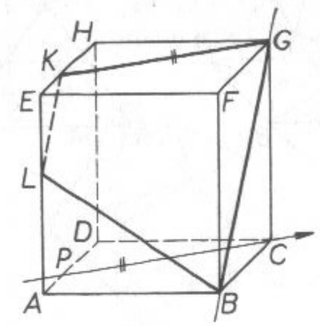


Obr. V5

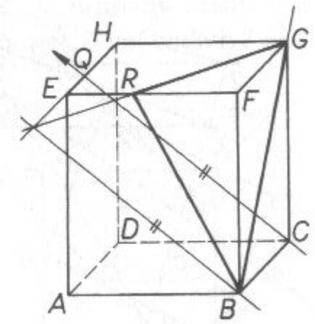
2.38 Řezem je a) trojúhelník *BGE*: obr. V6, b) lichoběžník *BGKL*: obr. V7, c) trojúhelník *BGR*: obr. V8.



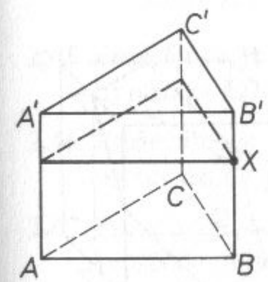
Obr. V6



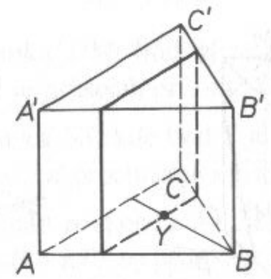
Obr. V7



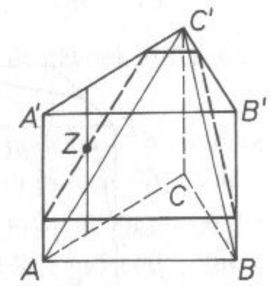
Obr. V8



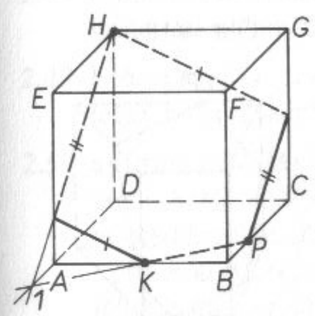
Obr. V9



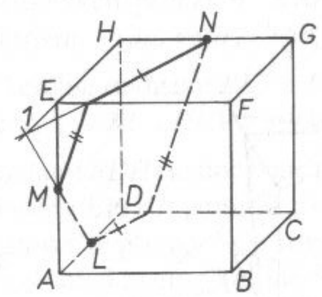
Obr. V10



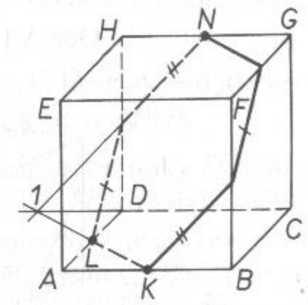
Obr. V11



Obr. V12



Obr. V13



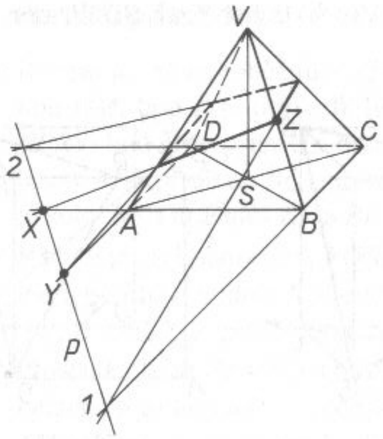
Obr. V14

2.39 a) Obr. V9, b) obr. V10, c) obr. V11.

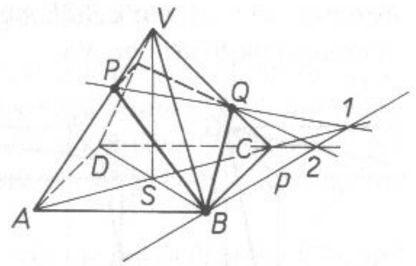
2.40 a) Obr. V12, b) obr. V13, c) obr. V14.

2.41 a) Obr. V15, b) obr. V16.

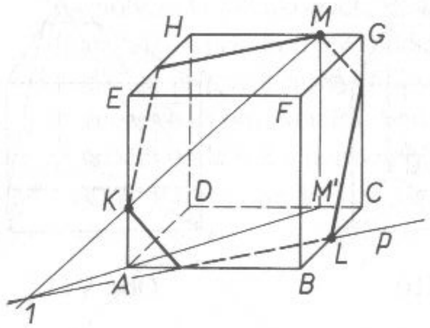
2.42 a) $1 \in \leftrightarrow KM \cap \leftrightarrow AM'$; $p = \leftrightarrow 1L$: obr. V17,
b) $1 \in \leftrightarrow XZ \cap \leftrightarrow DZ'$; $p = \leftrightarrow 1Y$: obr. V18.



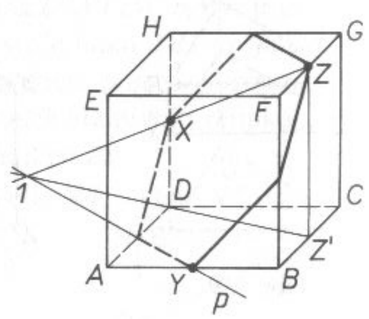
Obr. V15



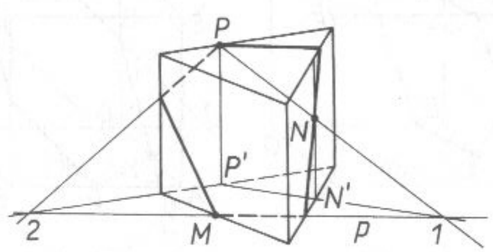
Obr. V16



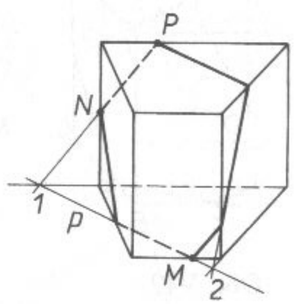
Obr. V17



Obr. V18



Obr. V19

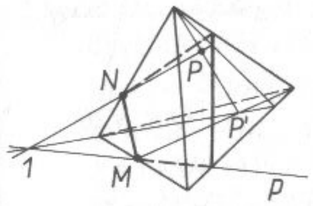


Obr. V20

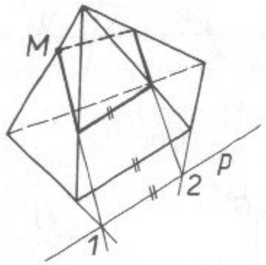
2.43 a) Obr. V19, obr. V20, obr. V21, b) obr. V22.

2.44 Průsečnice je a) přímka AS_1; bod S_1 je střed stěny *EFGH*, b) přímka S_2S_3; body S_2, S_3 jsou středy stěn *ABFE* a *BCGF*, c) přímka rovnoběžná s přímkou *AE* procházející bodem *O*, d) přímka rovnoběžná s přímkou *AB* procházející bodem *M*, e) přímka *XY*; bod *X* je průsečíkem přímek

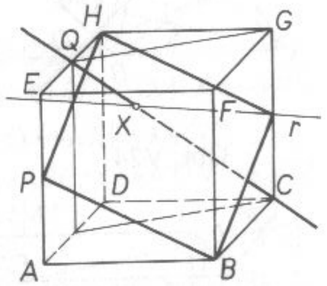
EG a *HP*, bod *Y* je průsečíkem přímek *AC* a *BQ*, kde bod *Q* je středem hrany *AD*, f) přímka *PQ*; bod *P* je průsečík přímek *RS* a *XY*, bod *Q* je průsečík přímek *TU* a *ZV*, přitom bod *U* (*V*) je průsečík hrany *GH* s přímkou rovnoběžnou s přímkou *RS* (*XY*) a procházející bodem *T* (*Z*).



Obr. V21



Obr. V22



Obr. V23

2.45 Průsečnice je a) přímka *DM*; bod *M* je průsečík přímek *AX* a *CY*, b) přímka *EH*; bod *H* je průsečík přímek *AC* a *FG*.

2.46 Průsečnice je a) přímka *NS*, kde bod *S* je střed podstavy, b) přímka rovnoběžná s přímkou *AB* procházející průsečíkem přímek *BN* a *CM*.

2.47 Průsečnice je a) přímka rovnoběžná s bočními hranami procházející průsečíkem přímek *AB* a *EF*, b) přímka *XY*; bod *X* je průsečík přímek *MN* a *A'B'*, bod *Y* je průsečík přímek *NP* a *B'C'*.

2.48 Přímka *r* prochází průsečíkem přímek *BC* a *AD*; rovnoběžnost plyne ze vzájemné polohy tří rovin: $\leftrightarrow pq$, $\leftrightarrow pr$, $\leftrightarrow qr$.

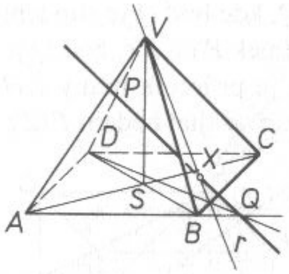
2.49 Určete nejdříve řez krychle rovinami *EKL* a *DUV*; hledaný bod je společný bod průsečnic rovin *EKL* a *DUV* s rovinou stěny *ADHE*.

2.50 a) Přímka *AE* je s rovinou *BDH* rovnoběžná; průsečík přímky *EG* s rovinou *BDH* je střed stěny *EFGH*; průsečík přímky *EC* s rovinou *BDH* je střed krychle. b) Průsečík přímky *FC* s rovinou *BHP* je její průsečík s přímkou *BR*, kde *R* je střed hrany *CG*; průsečík přímky *FD* s rovinou *BHP* je střed krychle; průsečík přímky *CQ* s rovinou *BHP* řešte pomocí roviny *CGQ*: obr. V23.

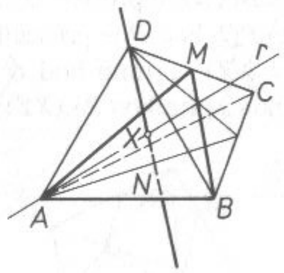
2.51 a) Průsečík přímek *MN* a *AC*, b) průsečík přímek *BP* a *VS*, kde *S* je střed podstavy, c) řešte pomocí roviny *DQV*: obr. V24, d) průsečík přímky *AN* s přímkou procházející bodem *V* a rovnoběžnou s přímkou *AC*.

2.52 Řešte pomocí roviny *ADN*: a) obr. V25, b) obr. V26.

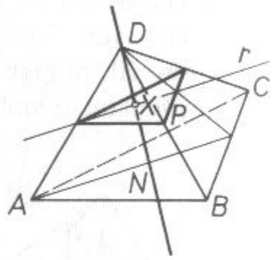
2.53 Přímkou proložte rovinu rovnoběžnou s hranou *AE*; např. a) obr. V27.



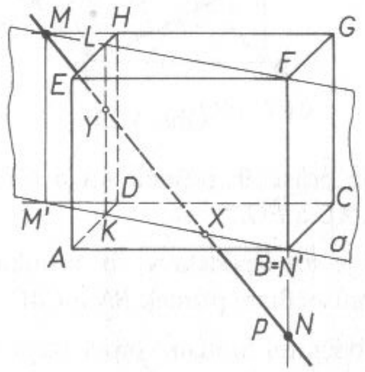
Obr. V24

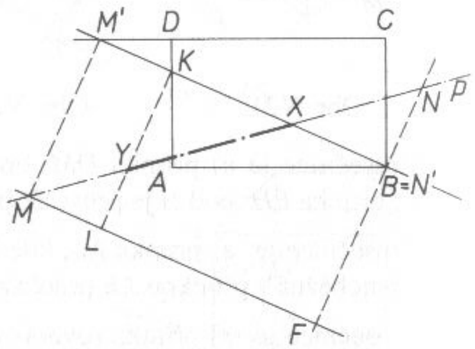


Obr. V25

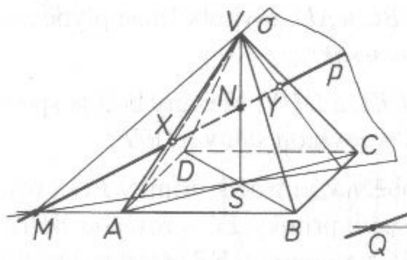


Obr. V26

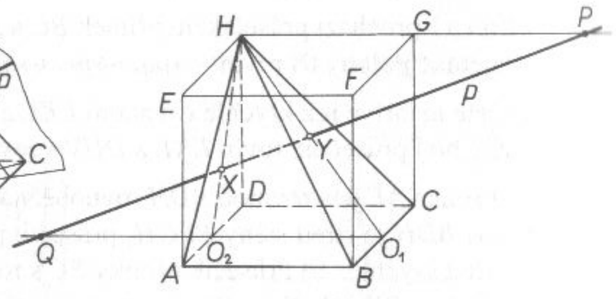




Obr. V27



Obr. V28



Obr. V29

2.54 Řešte pomocí roviny a) MNV, b) MPV; např. a) obr. V28.

2.55 a) Průsečík přímek MN a HB, b) Řešte pomocí roviny HPQ: obr. V29.

2.56 Sjednocení trojúhelníků ABC, ABP a lichoběžníku $BCOP$, kde bod P je středem úsečky BF.

2.57 a) Přímky AE, CF, AF, CE,
b) přímka OF, kde bod O je střed stěny $ABCD$.

2.58 a) Přímka BV, b) přímka AN, c) neexistuje.

2.59 Průsečík přímek BC a AF označme P a průsečík přímek $B'C'$ a $A'F'$ označme Q: a) přímka PQ, b) neexistuje, c) přímka PF', d) přímka QB.

2.8 Úlohy k opakování

2.60 a) $O \notin \leftrightarrow KM$, b) $M \in \mapsto A'BA$, c) $L \in \mapsto MKCC'$,
d) přímky KM a LO jsou různoběžné, $\leftrightarrow KM \cap \leftrightarrow LO = \{X\}$, $X \in \mapsto BB'$, $|B'X| = \frac{3}{2}|BB'|$, e) $\leftrightarrow LN \cap \leftrightarrow ABC = \{L\}$, f) $\leftrightarrow KL \parallel \leftrightarrow ACC'$,
g) roviny ABC, $A'ON$ jsou různoběžné, $\leftrightarrow ABC \cap \leftrightarrow A'ON = \leftrightarrow YZ$, $Y \in \mapsto AB$, $|AY| = 2|AB|$, $Z \in \mapsto AC$, $|AZ| = 2|AC|$,
h) $\leftrightarrow MNO \parallel \leftrightarrow A'B'C'$.

2.61 a) 6, b) 0, 12, 3, c) dvojice přímek BD a BG, BD a BE, BD a EG, BD a DE, BD a DG, d) 4, e) ne.

2.62 a) Např. $\rho = \leftrightarrow ABC$, $\sigma = \leftrightarrow BCF$, $p = \leftrightarrow EH$,
b) aspoň jedna z přímek p, q, r musí ležet v rovině ρ, pak např. $\rho = \leftrightarrow ABC$, $p = \leftrightarrow HE$, $q = \leftrightarrow HG$, $r = \leftrightarrow AC$.

2.63 a) $P \in p \cap q'$, $Q \in p' \cap q$, b) $p \parallel p' \Rightarrow p \parallel \leftrightarrow p'q$,
c) $p \parallel p'$, $q \parallel q' \Rightarrow \leftrightarrow pq' \parallel \leftrightarrow p'q$, d) viz c).

2.64 a) Ano, b) ne.

2.65 Např. na šestibokém hranolu $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$:
$\alpha = \leftrightarrow FEE'$, $\beta = \leftrightarrow ADD'$.

2.66 Průsečnice je přímka PQ, přitom bod P je průsečíkem přímek AM a BE a bod Q je průsečíkem přímek CH a DN ($N \in CG$; $|CN| : |NG| = 1 : 2$); rovnoběžnost plyne ze vzájemné polohy tří rovin jako na obr. 36d.

2.67 a) Řezem je lichoběžník $MQLK$, kde bod K je průsečíkem hrany HG a přímky MN, bod L je průsečíkem hrany CG a přímky KP a bod Q je průsečíkem hrany BF s přímkou LN, b) průsečnice p prochází průsečíkem přímek AE a MQ a je rovnoběžná s přímkou NL.

2.68 a) Řezem je lichoběžník $ABMN$, bod N je středem hrany DV. b) Průsečnice p prochází bodem V a je rovnoběžná s hranami BC a AD. c) Společný bod přímek p, BM a AN je společným bodem rovin BCV, ADV a ABM.

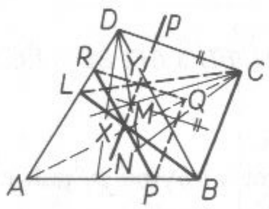
2.69 Obr. V30: a) Řez rovinou ρ je trojúhelník BCL a řez rovinou σ je trojúhelník PQR. b) $p = \leftrightarrow XY$, $X \in BL \cap PR$, $Y \in CL \cap QR$, $p \parallel BC \parallel PQ$ (vzájemná poloha tří rovin jako na obr. 36d).

2.70 Řezem je lichoběžník $EBPQ$, kde body P a Q jsou po řadě středy hran CG a GH; $o = \frac{1}{2}a(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$.

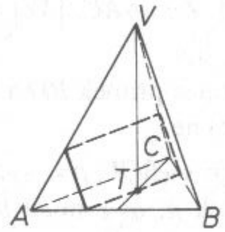
2.71 Řezem je rovnoběžník $AMNP$, kde bod P je bodem hrany DD' a $|DP| = 4$ cm. $S \doteq 25{,}6$ cm^2.

2.72 Řezem je pravidelný šestiúhelník $MNPQRS$, kde body Q, R a S jsou po řadě středy hran GH, EH a AE; $o = 15\sqrt{2}$ cm; $S = \frac{75\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

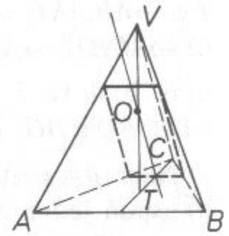
2.73 Řezem je pětiúhelník $MNPQR$, kde body P, R jsou po řadě středy hran CV a AV a bod Q je bodem hrany DV, $|DQ| = \frac{3}{4}|DV|$;
$o = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2} + 2b + \sqrt{2a^2 + b^2}\right)$, $S = \frac{5}{16}ab\sqrt{2}$.



Obr. V30



Obr. V31



Obr. V32

2.74 a) Např. ρ je rovnoběžná s hranami AC a BV: obr. V31; $S = \frac{2}{9}ab$.

b) Např. ρ je rovnoběžná s hranami AB a CV: obr. V32; $S = \frac{2}{9}ab$.

2.75 Určete řez hranolu rovinou KLM; přímkou PQ proložte rovinu σ rovnoběžnou s bočními hranami hranolu a určete řez hranolu rovinou σ; hledaný průsečík je společný bod přímky PQ a průsečnice rovin KLM a σ.

2.76 $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

2.77 a) Přímka FH, b) přímky AC, AF, CH, FH, c) přímka XY, kde bod X je středem stěny $BCGF$, bod Y je bodem polopřímky HA tak, že $|HY| = \frac{3}{2}|HA|$, d) rovnoběžné jen s hranami AB, CD, EF, GH: přímka XZ, kde body X, Z jsou středy stěn $BCGF$, $ADHE$, e) přímka AC.

3.1 Odchylka přímek

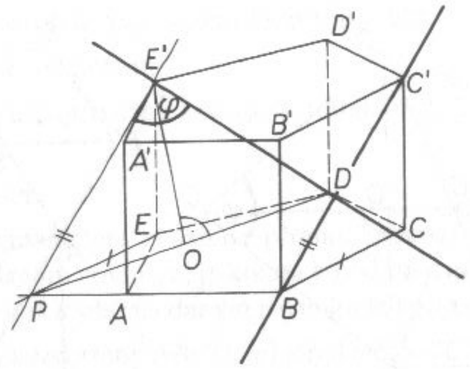
3.1 Jsou stejné: a) $\varphi = 90°$, b) $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}$.

3.2 a) 90° nebo 60°, b) asi 70°32′, c) asi 35°16′ nebo 90°.

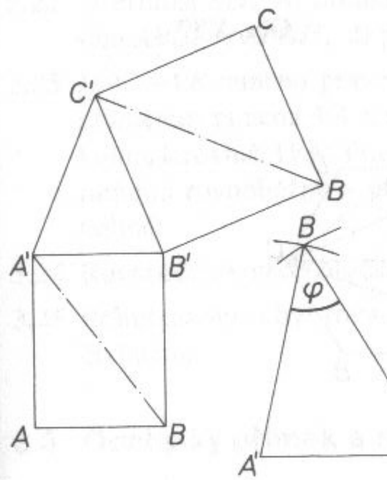
3.3 a) 90°, b) 60°, c) 60°, d) asi 77°5′, e) asi 65°54°.

3.4 a) 90°, b) 0°, c) asi 55°6′, d) obr. V33, asi 84°31′.

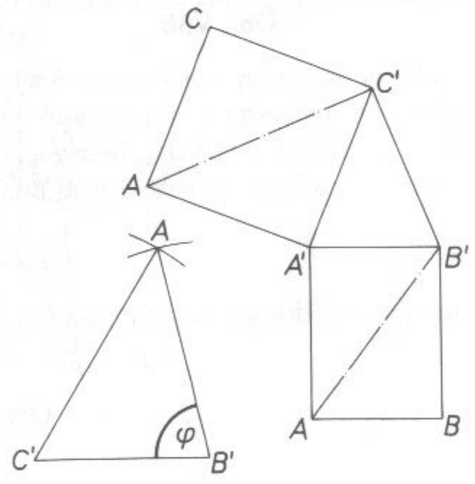
3.5 a) Asi 36°52′, b) asi 53°8′, c) asi 22°45′, d) asi 63°40′, e) asi 67°19′, f) asi 76°35′.



Obr. V33



Obr. V34



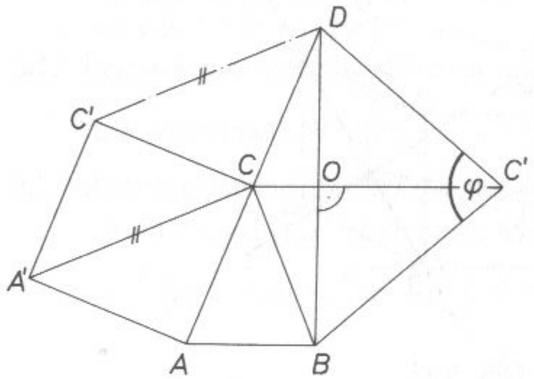
Obr. V35

3.6 a) Asi 43°33′; konstrukční řešení na obr. V34, b) asi 67°59′, c) asi 77°; konstrukční řešení na obr. V35, d) užijte rovnoramenný trojúhelník BDC', kde bod D je průsečík přímky AC a rovnoběžky s přímkou $A'C$ jdoucí bodem C'; asi 81°55′; konstrukční řešení na obr. V36.

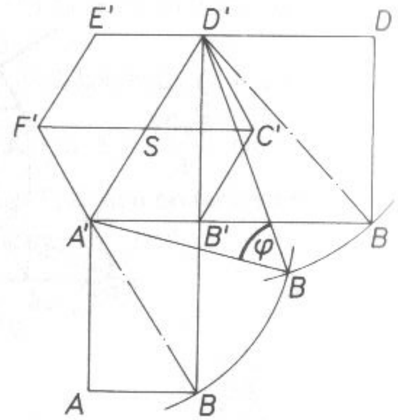
3.7 a) Užitím kosinové věty pro trojúhelník $BA'D'$;
$\cos\varphi = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}\cdot\sqrt{3a^2 + b^2}}$, $\varphi \doteq 54°52'$; konstrukční řešení na obr. V37,

b) užijte trojúhelník PCF', kde bod P je průsečík přímky EF a rovnoběžky s přímkou BC' jdoucí bodem F'; $\cos\varphi = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}\cdot\sqrt{4a^2 + b^2}}$, $\varphi \doteq 71°10'$; konstrukční řešení na obr. V38.

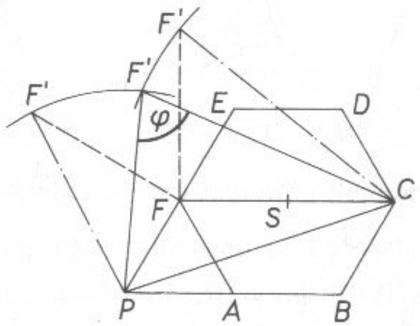
3.8 Asi 67°25′, 59°12′, 39°48′.



Obr. V36



Obr. V37



Obr. V38

3.2 Kolmost přímek a rovin

3.9 a) Např. AB a CG, b) AC a EG; $\leftrightarrow AC \perp \leftrightarrow BDF$ a také $\leftrightarrow EG \perp \leftrightarrow BDF$.

3.10 a, b, c, d, f, g, h) jsou kolmé, e, i) nejsou kolmé.

3.11 a) jsou kolmé, b, c, d) nejsou kolmé.

3.12 Trojúhelník ACV je rovnoramenný se základnou AC, VS je jeho výškou k základně, proto $\leftrightarrow VS \perp \leftrightarrow AC$; podobně $\leftrightarrow VS \perp \leftrightarrow BD$. Proto je $\leftrightarrow VS \perp \leftrightarrow ABC$.

3.13 Pata kolmice je průsečík přímek DF a BS, kde S je střed stěny $EFGH$.

3.14 Pata kolmice je a) průsečík přímky HF s přímkou EG,
b) průsečík přímky CM s rovinou DHN, kde bod N je střed hrany BC.

3.15 Kolmice je průsečnice roviny ρ a roviny kolmé k přímce p a procházející bodem R; přímka HB.

3.16 Kolmice je spojnice bodu M s průsečíkem přímky q a roviny kolmé

k přímce p a procházející bodem M; přímka MB.

3.17 c, e) Platí, a, b, d) neplatí.

3.18 Přímky k_1, k_2 určují rovinu kolmou k přímkám k, l, m, přímka LM leží v této rovině.

3.19 Dokažte sporem.

3.20 a) Každá rovina, která obsahuje přímku procházející daným bodem a kolmou k daným rovinám, je kolmá k oběma daným rovinám.
b) Rovina kolmá k oběma daným rovinám je kolmá k jejich průsečnici.

3.21 a) Bod A, b) střed stěny $ABCD$, c) střed stěny $BCGF$,
d) průsečík přímky BH s rovinou EDG.

3.22 a) Přímka BD, b) přímka DE, c) přímka S_1S_2, kde S_1, S_2 jsou středy stěn $ABCD$ a $EFGH$, d) přímka DS_2.

3.23 Je-li $\mapsto VB$ rameno pravého úhlu VAB, které leží v průmětně a $\mapsto VA'$ průmětem ramena VA tohoto úhlu, které neleží v průmětně, je $\mapsto VB$ kolmá k rovině AVA'. Pravý úhel se promítá jako pravý, je-li jedno jeho rameno rovnoběžné s průmětnou a druhé rameno není k průmětně kolmé.

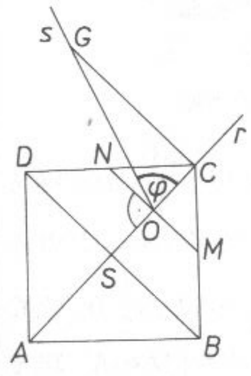
3.24 Rovnoběžník nebo úsečka.

3.25 Průmětna musí být rovnoběžná s některou dvojicí mimoběžných hran čtyřstěnu.

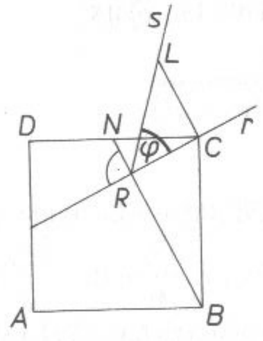
3.3 Odchylky přímek a rovin

3.26 a) 90°, b) 45°, c) asi 54°44′, d) 60°.

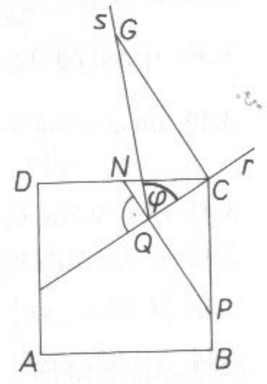
3.27 a) Asi 70°32′, b) asi 48°11′, c) asi 67°1′; konstrukční řešení na obr. V39a, b, c.



Obr. V39a



Obr. V39b



Obr. V39c

3.28 a, b) $\alpha = \beta \doteq 70°32'$, c) $\gamma \doteq 79°58'$ d) $\delta \doteq 78°35'$; $\gamma > \delta > \alpha = \beta$.

3.29 a) Asi 53°8′, b) asi 78°28′.

3.30 Odchylky rovin všech stěn od roviny podstavy jsou stejné.

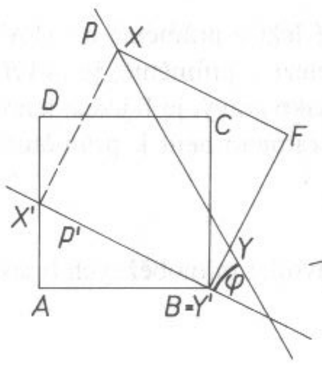
3.31 Odchylka rovin ρ a σ je odchylka přímek BV a DV; asi 68°23′.

3.32 a) Asi 71°34′, b) asi 51°19′, c) asi 82°49′.

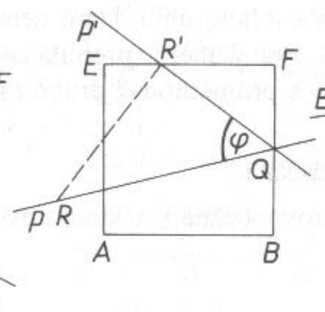
3.33 a) Asi 71°59′, b) asi 85°8′.

3.34 2 řešení: roviny pM a pN, kde M, N jsou po řadě body hran BF, DH, $|BM| = |DN| = |BS|$; přitom bod S je střed stěny $ABCD$.

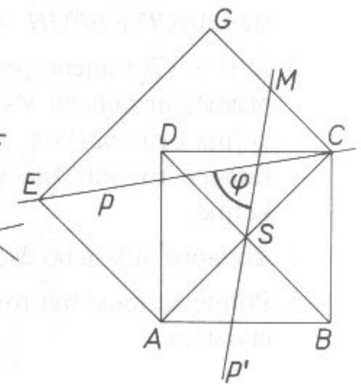
3.35 a) Asi 33°51′, b) asi 50°12′, c) asi 70°32′; konstrukční řešení na obr. V40a, b, c.



Obr. V40a



Obr. V40b



Obr. V40c

3.36 $c^2 = a^2 + b^2$; přitom a, b, c jsou délka, šířka, výška kvádru.

3.37 Asi 34°56′.

3.38 a) $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{v\sqrt{3}}{3a}$, b) $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{2v\sqrt{3}}{3a}$, c) $\sin \varphi = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{v^2 + 3a^2}}$.

3.39 a) Asi 68°32′, b) asi 48°35′, c) 45°.

3.40 $\sin \varphi = \dfrac{2av}{\sqrt{(a^2 + b^2)(4v^2 + a^2)}}$.

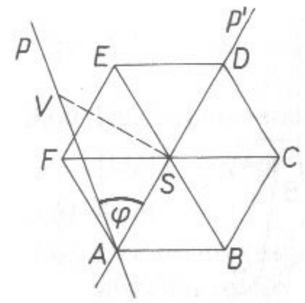
3.41 Obr. V41a, b, c.

3.42 a) Asi 70°32′, b) asi 54°44′.

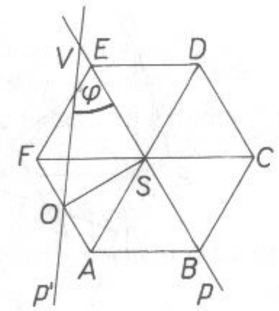
3.43 $|A'B'| = |AB| \cdot \cos \alpha$.

3.44 Asi 822 cm².

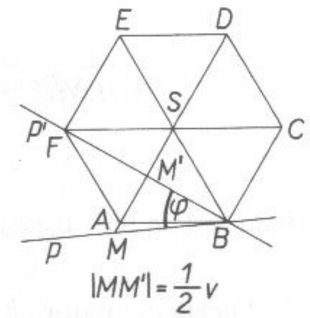
3.45 Asi 46°30′.



Obr. V41a



Obr. V41b

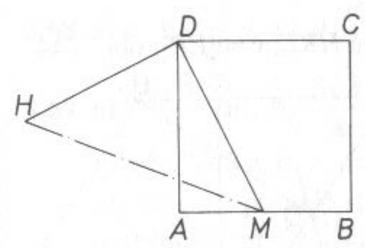


Obr. V41c

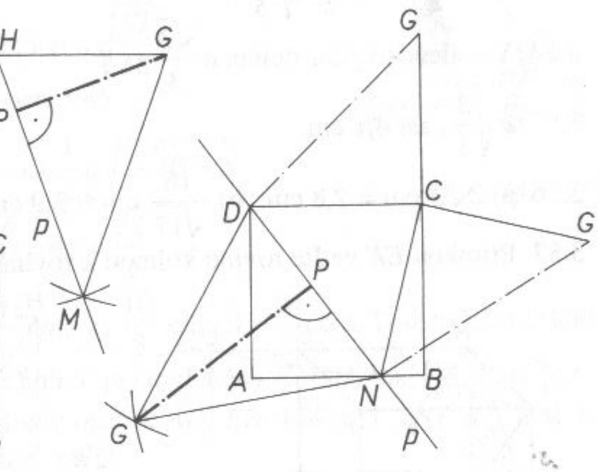
3.4 Vzdálenost bodu od přímky a od roviny

3.46 a) a, b) $a\sqrt{2}$, c) $a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, d) $a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

3.47 a) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$, b) $\dfrac{4\sqrt{41}}{5}$; konstrukční řešení na obr. V42a, b.



Obr. V42a



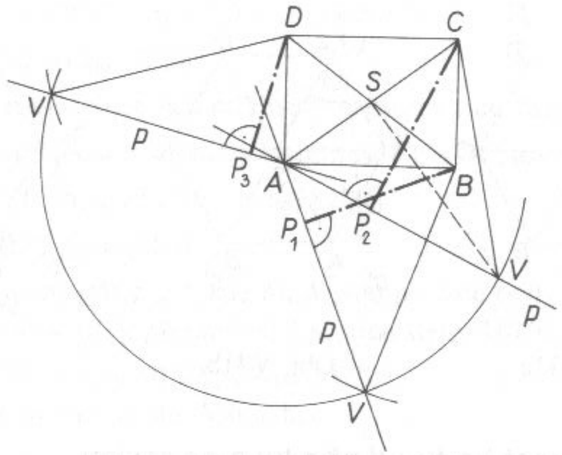
Obr. V42b

3.48 a) $a\sqrt{\dfrac{14}{5}}$, b) $a\sqrt{\dfrac{21}{5}}$.

3.49 Úsečka BX je odvěsna v pravoúhlém trojúhelníku HXB.

3.50 a) $\dfrac{1}{2}a$, b) $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, c) $a\dfrac{\sqrt{11}}{6}$, d) $a\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, e) $a\dfrac{\sqrt{11}}{4}$.

3.51 $|B{\leftrightarrow}AV| \doteq 3{,}7$ cm, $|C{\leftrightarrow}AV| \doteq 4{,}5$ cm, $|D{\leftrightarrow}AV| \doteq 2{,}9$ cm; konstrukční řešení na obr. V43.



Obr. V43

3.52 Bod C; $|C{\leftrightarrow}AK| = \dfrac{2a}{\sqrt{11}}$.

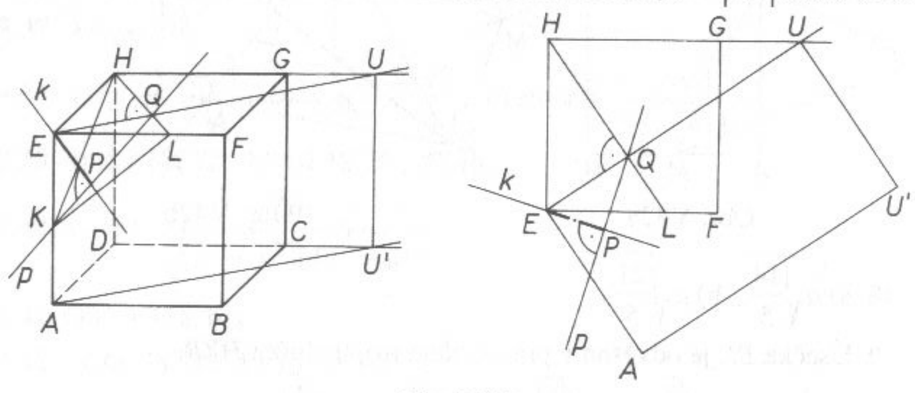
3.53 a) $a\dfrac{\sqrt{19}}{4}$, b) $\dfrac{1}{4}a\sqrt{\dfrac{51}{5}}$.

3.54 Vzdálenosti jsou stejné: $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3.55 $a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; asi 4,1 cm.

3.56 a) $2\sqrt{2}$ cm $\doteq$ 2,8 cm, b) $\dfrac{16}{\sqrt{17}}$ cm $\doteq$ 3,9 cm.

3.57 Přímkou EK veďte rovinu kolmou k rovině HKL; $v = |EP|$: obr. V44.



Obr. V44

3.58 a) $\dfrac{ac}{\sqrt{a^2 + 2c^2}}$, b) $\dfrac{2ac}{\sqrt{a^2 + 8c^2}}$, c) $\dfrac{3ac}{\sqrt{4a^2 + 25c^2}}$.

3.59 a) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, b) $\dfrac{2av}{\sqrt{a^2 + 4v^2}}$, c) $\dfrac{av}{\sqrt{a^2 + 4v^2}}$.

3.60 Pata kolmice vedená bodem M k rovině ρ je střed přepony; $|M\rho| = \dfrac{1}{2}\sqrt{4m^2 - a^2 - b^2}$.

3.61 8 cm. **3.62** 8 cm.

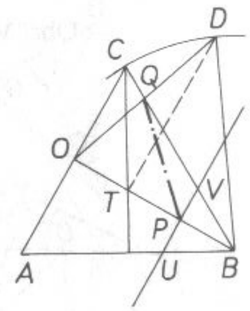
3.63 Dvě roviny rovnoběžné s rovinou ρ ve vzdálenosti v od ní, tzv. **ekvidistanta roviny**.

3.64 $v = \dfrac{1}{2}(a + b)$ pro body A, B ležící v témže poloprostoru s hraniční rovinou ρ, $v = \dfrac{1}{2}|a - b|$ pro body A, B ležící v opačných poloprostorech s hraniční rovinou ρ.

3.5 Vzdálenosti přímek a rovin

3.65 a) a, b) a, c) a, d) $a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, e) $a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

3.66 Řešte užitím roviny BOD, kde bod O je střed hrany AC, $v = |PQ|$, body P, Q jsou po řadě středy úseček UV a XY; $v = a\sqrt{\dfrac{17}{48}}$; konstrukční řešení na obr. V45.



Obr. V45

3.67 a) $\dfrac{1}{2}a\sqrt{7}$, b) $a\dfrac{\sqrt{14}}{4}$, c) $\dfrac{1}{2}a\sqrt{2\sqrt{10} - 5}$.

3.68 a) a, b) $\dfrac{11}{20}a$, c) $a\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, d) $a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.69 a) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ cm, b) $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$ cm, c) $\dfrac{10}{3}$ cm, d) $\dfrac{10}{\sqrt{6}}$ cm; konstrukční řešení na obr. V46 a, b, c, d: bod S' je střed stěny $EFGH$, body K, L, O_1, O_2, O_3, O_4 jsou po řadě středy úseček AD, EH, UW, ES', $S'G$, KL, bod M je průsečíkem úseček LF a GQ.

3.70 Asi 2,51 cm.

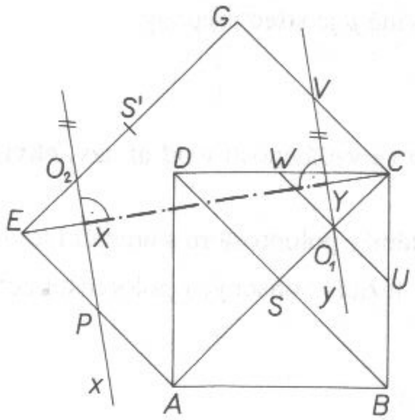
3.71 a) $\sqrt{5}$ cm, b) $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$ cm; konstrukční řešení na obr. V47a, b.

3.72 Dvě roviny $\rho \parallel \rho' \parallel {\leftrightarrow}ADE$; ρ prochází bodem R, $R \in AB$, $|AR| = \dfrac{3}{5}|AB|$, ρ' prochází bodem R', $R' \in {\mapsto}AB$, $|AR'| = 3|AB|$.

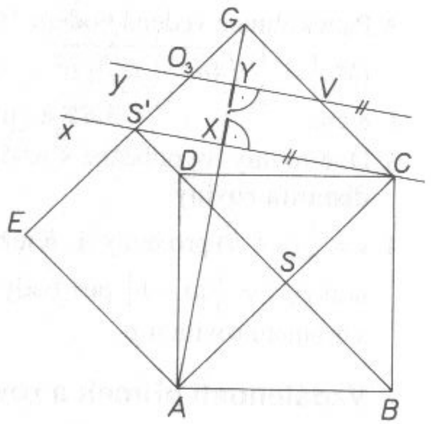
3.73 $a\dfrac{\sqrt{3}}{6}$; asi 1,44 cm; konstrukční řešení na obr. 49: přímka p je průsečnice rovin DEG a BDF, bod O je středem krychle ($O \in {\leftrightarrow}MN \cap {\leftrightarrow}BDF$), bod S' je střed stěny $EFGH$.

3.74 $2a\frac{\sqrt{6}}{9}$.

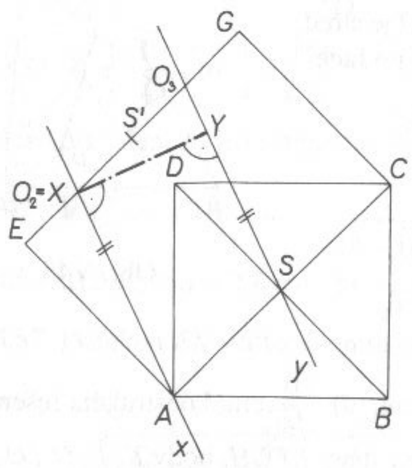
3.75 a) a, b) a, c) $a\frac{\sqrt{5}}{5}$.



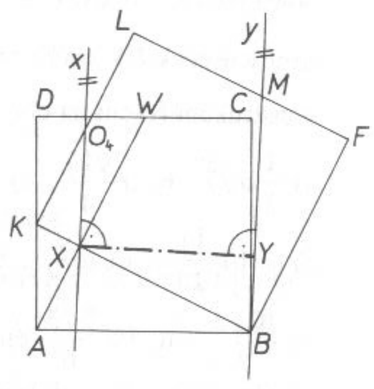
Obr. V46a



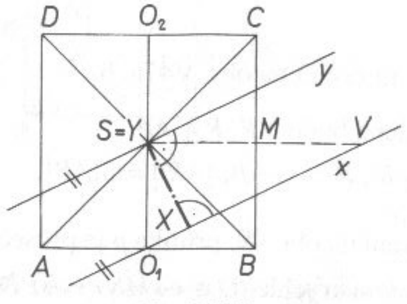
Obr. V46b



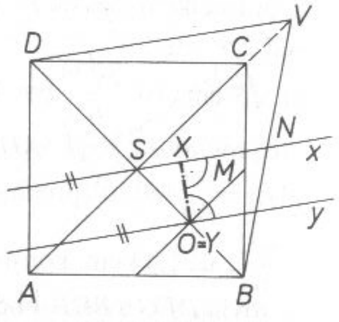
Obr. V46c



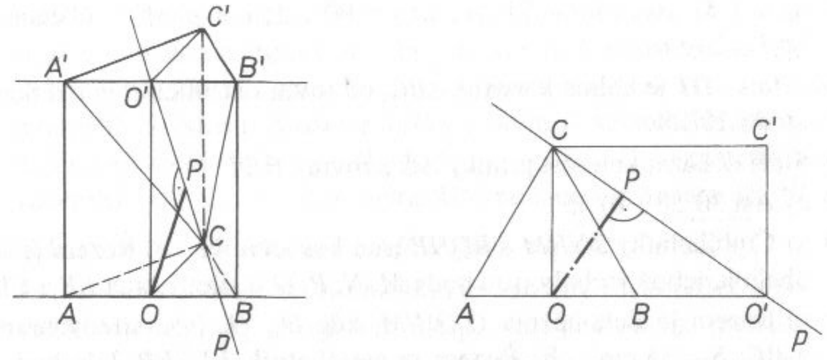
Obr. V46d



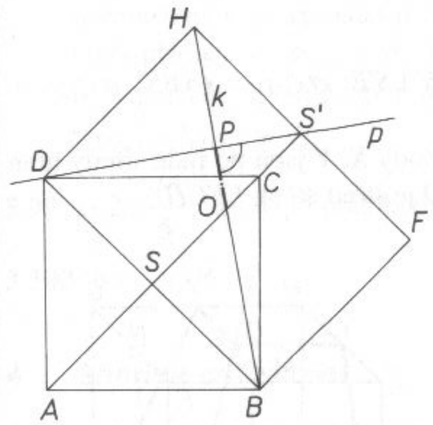
Obr. V47a



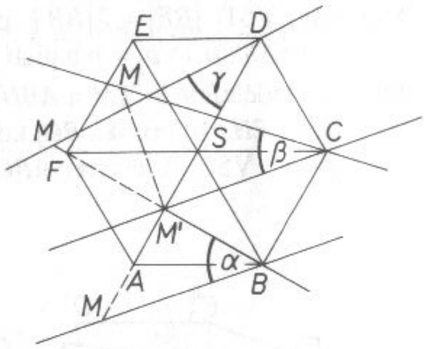
Obr. V47b



Obr. V48



Obr. V49



Obr. V50

3.76 $a\frac{\sqrt{2}}{2}$; asi 2,8 cm. **3.77** a) $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) a. **3.78** $\frac{1}{4}\sqrt{4b^2 - 2a^2}$.

3.79 Přímkou $A'C$ veďte rovinu ρ rovnoběžnou s přímkou AB; $v = |\rho \leftrightarrow AB|$: obr. V48.

3.6 Úlohy k opakování

3.80 a) Řezem je obdélník $KLMN$, kde body K, L, M, N jsou po řadě středy hran EF, AB, CD, GH, b) $p = \leftrightarrow S_1S_2$, S_1, S_2 jsou středy stěn $ABCD$ a $EFGH$, c) $q = \leftrightarrow S_2O$, O je střed stěny $ABFE$, d) 45°.

3.81 a) $\alpha \doteq 49°6'$, b) $\beta \doteq 37°5'$, c) $\gamma \doteq 33°41'$; konstrukční řešení na obr. V50.

3.82 a) $p \parallel AB$, $V \in p$, b) $p = \leftrightarrow VE$, kde bod E je průsečík přímek BC a AD; $\varphi = 45°$.

3.83 $\varphi \doteq 57°31'$.

3.84 a) $\alpha \doteq 35°16'$, b) $\beta \doteq 54°44'$, c) $\gamma = 90°$, d) $\alpha + \beta = 90°$, obecně platí $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$.

3.85 Přímka DT je kolmá k rovině ABC, od rovin ostatních stěn má odchylku asi $19°28'$.

3.87 Stačí dokázat kolmost přímky AC a roviny BDF.

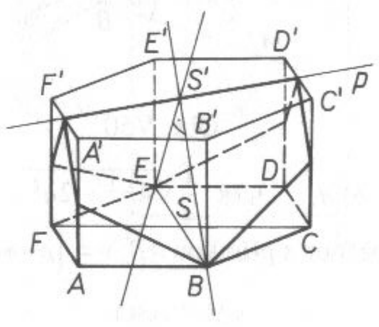
3.88 a) Asi $30°58'$, b) $45°$.

3.89 a) Čtyřúhelníky $BNHM$ a $BQHP$ jsou kosočtverce. b) Řezem je šestiúhelník, jehož vrcholy jsou body M, N, P, Q a středy hran EF a CD.

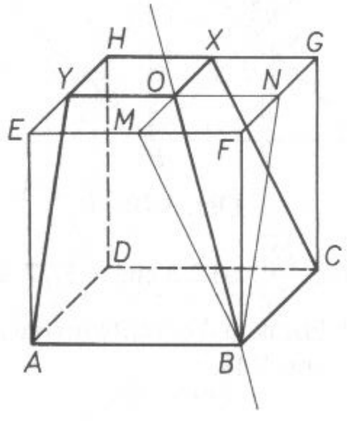
3.90 a) Řezem je lichoběžník O_1O_2NM, kde O_1, O_2 jsou středy hran AF a BC; $S = 14\ \text{cm}^2$. b) Řezem je pětiúhelník $KLNRP$, kde bod R je středem úsečky MV a body K, L jsou body hran BC, EF tak, že $|BL| = |FK| = \frac{1}{4}a$; $S = 49\frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2$.

3.91 Obr. V51: $|BE| = 2|BB'|$, proto $BS' \perp S'E$; $\sigma \cap \rho_1 = \leftrightarrow BS'$, $\sigma \cap \rho_2 = \leftrightarrow ES'$, $\rho_1 \cap \rho_2 = p$ a platí $p \perp B'E'$.

3.92 a) Obdélníky $BCXM$ a $ABNY$, kde body X, Y jsou po řadě středy hran GH a EH, b) přímka BO, kde bod O je střed stěny $EFGH$, c) obr. V52, d) čtverec $ABCD$.



Obr. V51



Obr. V52

3.93 Např. pravoúhlý průmět krychle do roviny BEG, směr promítání určuje přímka DF.

3.94 a) $\dfrac{a\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$, b) $\dfrac{a\sqrt{3(b^2 - a^2)}}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$.

3.95 a) $\dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{4\sin\frac{1}{2}\alpha}$, b) $\frac{1}{2}a\sqrt{2\cos\alpha}$, c) $\dfrac{a\sqrt{\cos\alpha + 9\sin^2\frac{1}{2}\alpha}}{4\sin\frac{1}{2}\alpha}$.

3.96 Patu D_1 kolmice z bodu D k rovině ABC určíme jako průsečnici rovin α, β, γ jdoucích bodem D a kolmých po řadě k přímkám AB, BC, AC. Průsečíky A_1, B_1, C_1 rovin α, β, γ s přímkami AB, BC, AC určíme pomocí sítě čtyřstěnu: Vedeme výšky z bodu D ve stěnách ABD, BCD, ACD. Paty těchto výšek jsou body C_1, A_1, B_1. Bod D_1 je průsečík kolmic vedených body C_1, A_1, B_1 v rovině ABC po řadě k přímkám AB, BC, AC.

3.97 a) 6 cm, 8 cm, 15 cm, b) $u\sin\beta$, $u\sin\alpha$, $u\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

3.98 Je-li $\rho = \sigma$ a $d_1 = d_2$, tvoří množinu dvě roviny rovnoběžné s $\rho = \sigma$ ve vzdálenosti $d_1 = d_2$. Pro $\rho = \sigma$, ale $d_1 \neq d_2$, je množina prázdná. Je-li $\rho \parallel \sigma\ (\rho \neq \sigma)$, je pro $|\rho\sigma| \neq d_1 + d_2$ a pro $|\rho\sigma| \neq |d_1 - d_2|$ množina prázdná, pokud $|\rho\sigma| = d_1 + d_2$, nebo $|\rho\sigma| = |d_1 - d_2|$ je množinou jedna rovina rovnoběžná s $\rho \parallel \sigma$. Jsou-li roviny ρ a σ různoběžné, tvoří množinu čtyři přímky p_1, p_2, p_3, p_4: $p_1 = \rho_1 \cap \sigma_1$, $p_2 = \rho_1 \cap \sigma_2$, $p_3 = \rho_2 \cap \sigma_1$, $p_4 = \rho_2 \cap \sigma_2$, přitom $\rho_1 \parallel \rho_2 \parallel \rho$, $\sigma_1 \parallel \sigma_2 \parallel \sigma$, $|\rho\rho_1| = |\rho\rho_2| = d_1$, $|\sigma\sigma_1| = |\sigma\sigma_2| = d_2$.

3.99 a) $2a\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, b) užijte podobnost trojúhelníků.

3.100 $b = \frac{1}{2}a\sqrt{6}$.

4.1 Shodné zobrazení

4.1 a) Ne: např. obrazem úsečky AE by byl bod C, b) ne: např. obrazem úsečky BD je úsečka FG, která není s úsečkou BD shodná, c) ano: např. obrazem bodů A, B, E, F v tomto pořadí jsou body D, C, H, G v tomto pořadí.

4.2 Stěny $ABFE$ a $DCGH$ jsou čtverce.

4.2 Rovinová souměrnost

4.6 Přímky AB, CF a DE jsou k rovině SOV kolmé a středy úseček AB, CF a DE leží v rovině SOV, body B, C, D jsou po řadě obrazy bodů A, F, E; bod V je samodružný bod.

4.8 Jsou-li mimoběžky k sobě kolmé, mají dvě roviny souměrnosti: jsou to ty roviny, z nichž každá obsahuje jednu mimoběžku a je kolmá k druhé mimoběžce; v jiném případě nemají žádnou rovinu souměrnosti.

4.9 Hledané body jsou společné body přímky p (roviny ρ) a roviny souměrnosti úsečky AB. Počet společných bodů závisí na vzájemné poloze přímky p (roviny ρ) a úsečky AB.

4.10 a) Průsečnice p rovin souměrnosti úseček KL, LM, KM,
b) společný bod průsečnice p s rovinou souměrnosti např. úsečky KN.

4.11 Rovina souměrnosti je rovina souměrnosti úsečky AA'.

4.12 Rovina souměrnosti je rovina souměrnosti úsečky BB' (obsahuje bod A).

4.13 Rovina souměrnosti je rovina souměrnosti úsečky CC' (obsahuje úsečku AB).

4.14 Určete obraz E' bodu E v rovinové souměrnosti s rovinou souměrnosti ABC; bod X je průsečík přímky $E'M$ s rovinou ABC.

4.3 Středová a osová souměrnost

4.19 Řešte užitím středové souměrnosti: ve středové souměrnosti určené středem S určete obrazy ρ' a σ', rovin ρ a σ. $AB \subset \rho \cap \sigma'$, $CD \subset \sigma \cap \rho'$.

4.4 Otočení a posunutí

4.22 Řezem je trojúhelník KLN, kde $K \in AD$, $L \in BD$, $KN \parallel AC$, $LN \parallel BC$.

4.23 $X = B'$, bod Y je obrazem bodu X v posunutí $T(\boldsymbol{C'A})$.

4.5 Skládání shodných zobrazení

4.24 $A \to E$, $K \to O_1$ (bod O_1 je středem hrany AE), $E \to F$, $O \to O$.

4.25 $A \to B$, $H \to G$, $C \to C'$ (přitom bod C je středem úsečky DC'), $M \to M'$ (přitom bod N je středem úsečky MM'), $N \to N'$ ($N' \in \mapsto NB$, $|NN'| = 2|MN|$).

4.26 $\rho_1 = \leftrightarrow VSO_1$, $\rho_2 = \leftrightarrow VSO_2$, kde bod S je střed podstavy a body O_1, O_2 jsou po řadě středy hran AB, BC.

4.28 a, b) $Z = S(\rho_2) \circ S(\rho_1)$ a např. roviny ρ_1, ρ_2 jsou rovnoběžné s rovinou ABC a procházejí po řadě body M, N, přitom body M, N jsou vnitřními body hrany AE tak, že $|AM| = |EN| = \frac{1}{4}|AE|$, c) $Z = S(\rho_2) \circ S(\rho_1) = S(\rho_1) \circ S(\rho_2)$, rovina ρ_1 je rovnoběžná s rovinou ADH a prochází středem hrany AB a rovina ρ_2 je rovnoběžná s rovinou ABE a prochází středem hrany BC, d) $Z = S(\rho_3) \circ S(\rho_2) \circ S(\rho_1)$, roviny ρ_1, ρ_2 jsou roviny z případu c) a rovina ρ_3 je rovnoběžná s rovinou ABC a prochází středem hrany AE; pořadí rovinových souměrností je možno změnit, e) $Z = S(\rho_4) \circ S(\rho_3) \circ S(\rho_2) \circ S(\rho_1)$, např. roviny ρ_1 a ρ_2 jsou rovnoběžné s hranou AE, procházejí středem krychle, odchylka rovin ρ_1 a ACE i odchylka rovin ρ_2 a BDH je $22°30'$, roviny ρ_3, ρ_4 jsou rovnoběžné s rovinou ABC a procházejí po řadě body M, N, přitom body M, N jsou vnitřními body hrany AE tak, že $|AM| = |EN| = \frac{1}{4}|AE|$.

4.6 Podobná zobrazení

4.29 a) k^2, b) k^3. **4.30** $b : a = c : b$.

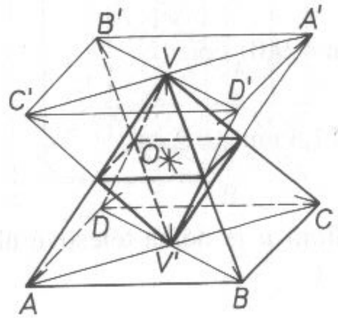
4.31 $H(S; -\frac{1}{3})$, bod S je průsečíkem přímek spojujících vrcholy čtyřstěnu s těžištěm protější stěny.

4.7 Úlohy k opakování

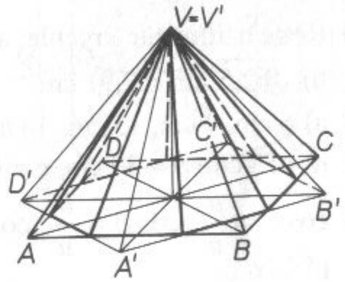
4.32 Středy hran EF a CD. **4.33** Obr. V53. **4.35** Obr. V54.

4.36 Bod Y je průsečíkem roviny BCG a obrazu přímky EK v posunutí $T(\boldsymbol{LM})$, bod $X \in \leftrightarrow EK$ a je obrazem bodu Y v posunutí $T^{-1}(\boldsymbol{LM})$.

4.38 216 : 1.



Obr. V53



Obr. V54

5.1 Mnohostěny

5.1 a) 4, $a\sqrt{3}$, protínají se v jednom bodě a navzájem se půlí,
b) 4, $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, protínají se v jednom bodě a navzájem se půlí,
c) 3, $a\sqrt{2}$, protínají se v jednom bodě, navzájem se půlí a jsou k sobě kolmé.

5.2 $n(n-3)$, $n \in \mathrm{N}$, $n \geqq 3$. **5.3** $v = \dfrac{\sqrt{4b^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} - a^2}}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$, $n \in \mathrm{N}$, $n \geqq 3$.

5.4 a) Např.: pravidelný čtyřstěn, pravidelný osmistěn, pravidelný dvacetistěn, všechna tělesa vzniklá „slepením" vyjmenovaných pravidelných mnohostěnů shodnými stěnami k sobě,
b) krychle a tělesa vzniklá „slepováním" krychlí shodnými stěnami k sobě.

5.5 a) Hranol, který má shodné všechny stěny, musí být rovnoběžnostěn, jehož stěny jsou čtverce (krychle), nebo kosočtverce (klenec). Má shodné i všechny hrany. b) Hranol, který má shodné všechny hrany, nemusí

mít shodné všechny stěny, např. pravidelný trojboký hranol, jehož výška je shodná s podstavnou hranou.

5.6 a) Čtyřstěn $ABCD$, který má shodné všechny stěny a nemá shodné všechny hrany sestrojíme např. takto: Zvolíme libovolný rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož základna AB je kratší než jeho ramena AC a BC. Otáčíme-li tímto trojúhelníkem v prostoru kolem osy AB, opisuje bod C kružnici, na níž existuje tětiva CD shodná se stranou AB.
b) Má-li čtyřstěn shodné každé dvě protější hrany, shodují se trojúhelníky všech jeho stěn podle věty *sss*.

5.7 Průnikem může být a) prázdná množina, boční hrana, rovnoběžník, b) bod, boční hrana, trojúhelník.

5.9 Například v obr. V55.

5.10 Řešte užitím sítě krychle; a) $\sqrt{81{,}25}$ cm $\doteq 9{,}01$ cm, b) $\sqrt{62{,}5}$ cm $\doteq 7{,}91$ cm.

5.11 a) 6 cm, 9 cm, 15 cm, b) asi 10,8 cm, 17,5 cm, 16,2 cm.

5.12 $a = 55$ cm, $b = 30$ cm, $c = 66$ cm.

5.13 $\cos\alpha = \dfrac{a}{u}$, $\cos\beta = \dfrac{b}{u}$, $\cos\gamma = \dfrac{c}{u}$; přitom u je délka tělesové úhlopříčky.

5.14 $2\sqrt{149}$ cm $\doteq 24{,}4$ cm, $4\sqrt{31}$ cm $\doteq 22{,}3$ cm.

5.15 $v = 3\sqrt{6}$ cm, $\rho = \dfrac{3\sqrt{6}}{4}$ cm.

5.16 $v = \sqrt{476}$ cm $\doteq 21{,}8$ cm, $\varphi \doteq 57°3'$, $\psi \doteq 65°23'$.

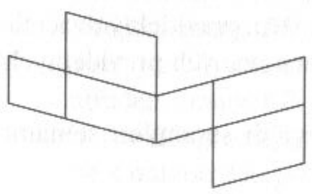
5.17 Asi 9,56 cm.

5.18 Asi 2,6 m.

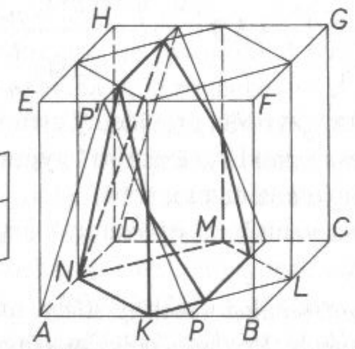
5.19 a) $\dfrac{av}{a+v}$, b) $\dfrac{av}{a+v\sqrt{2}}$.

5.20 Obr. V56.

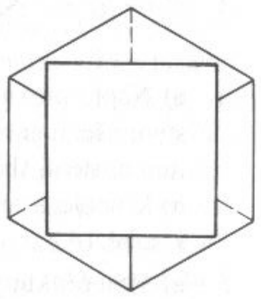
5.21 Ano, viz obr. V57.



Obr. V55



Obr. V56



Obr. V57

5.2 Rotační tělesa

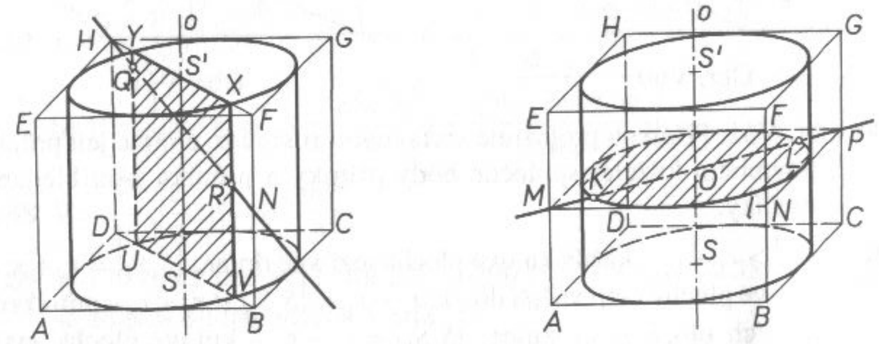
5.22 $v \doteq 77{,}3$ cm, $s = 80$ cm, $r \doteq 20{,}7$ cm.

5.23 Asi 137,2 cm, 53°18′.

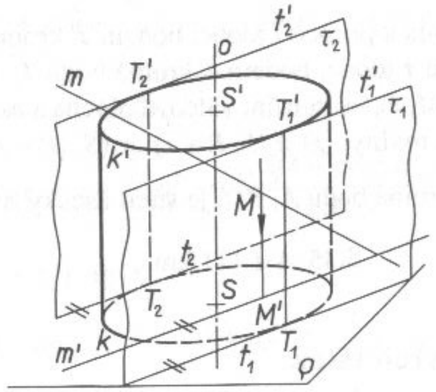
5.24 8,9 cm.

5.25 Průnikem může být prázdná množina, bod, kruh, mezikruží, kružnice.

5.26 Obr. V58: Průnikem je a) obdélník $UVXY$, b) kruh s hranicí l, c) úsečka RQ, d) úsečka KL.



Obr. V58

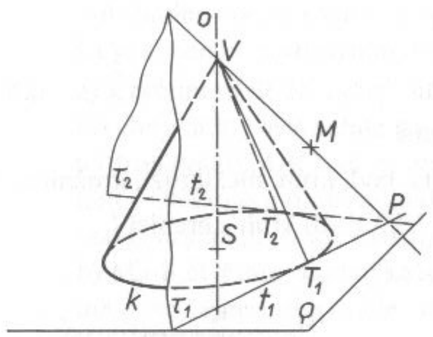


Obr. V59

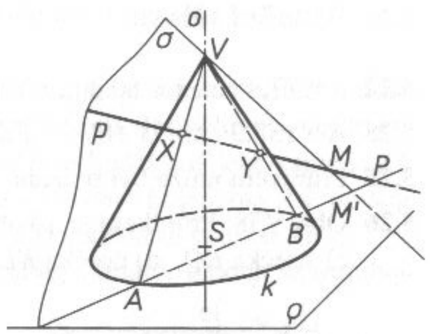
5.27 Obr. V59: přímka m' je průmět přímky m do roviny podstavy válce, $t_1 \parallel t_2 \parallel m'$ jsou tečny podstavné hrany. Tečné roviny τ_1 a τ_2 jsou směrové roviny obsahující přímky t_1 a t_2.

5.28 Obr. V60: bod P je průsečík přímky VM s rovinou podstavy kužele, t_1, t_2 jsou tečny podstavné hrany kužele vedené z bodu P. Tečné roviny τ_1 a τ_2 jsou vrcholové roviny obsahující přímky t_1 a t_2; asi 71°34′.

5.29 Průnikem může být prázdná množina, bod, dva body, přímka.



Obr. V60



Obr. V61

5.30 Obr. V61: Přímkou proložíme vrcholovou rovinu σ, určíme její průnik s povrchem kužele; společné body přímky a průniku jsou hledané průsečíky.

5.31 $|S_1S_2| > r_1 + r_2$ – každá kulová plocha leží vně druhé; $|S_1S_2| = r_1 + r_2$ – – kulové plochy mají vnější dotyk; $r_1 - r_2 < |S_1S_2| < r_1 + r_2$ – průnikem kulových ploch je kružnice; $|S_1S_2| = r_1 - r_2$ – kulové plochy mají vnitřní dotyk; $0 < |S_1S_2| < r_1 - r_2$ – kulová plocha $\varkappa_2$ leží uvnitř kulové plochy $\varkappa_1$.

5.32 a) Rovina kolmá k přímce t jdoucí bodem T kromě bodu T, b) přímka kolmá k rovině τ jdoucí bodem T kromě bodu T, c) přímka ST kromě bodu T, d) $\varkappa(M, r)$, e) rotační válcová plocha s osou p a poloměrem r, f) ekvidistanta roviny, g) $\varkappa_1(S, R + r)$, $\varkappa_2(S, |R - r|)$.

5.33 $\varkappa(S, \frac{1}{2}|AB|)$ kromě bodů A, B; S je střed úsečky AB.

5.34 $10\sqrt{3}$ cm. **5.35** Asi 111 km.

5.3 Objem a povrch těles

5.36 a) klm-krát, b) Objem se zvětší k^3-krát; povrch se zvětší k^2-krát, c) 8 ($= 2^3$).

5.37 a) $\varepsilon(ab + ac + bc) + \varepsilon^2(a + b + c) + \varepsilon^3$; asi 8 cm^3, b) $4(a + b + c)\varepsilon + 6\varepsilon^2$; asi 0,7 cm^2.

5.38 $V = \frac{36}{343}u^3$, $S = \frac{72}{49}u^2$. **5.39** 864 cm^3.

5.40 $V = 120\,120$ cm^3, $S = 15\,266$ cm^2. **5.41** Asi 322 cm^3.

5.42 558 cm^2. **5.43** 6 m, 10 m.

5.4 Objem a povrch mnohostěnů

5.44 1 m, $\sqrt[3]{2}$ m $\doteq$ 1,26 m, $\sqrt[3]{3}$ m $\doteq$ 1,44 m. **5.45** a) $a\sqrt[3]{2}$, b) $a\sqrt{2}$.

5.46 54 cm^2, 384 cm^2. **5.47** Asi 39 cm^3. **5.48** 10 cm.

5.49 $\frac{3}{4}a^3$. **5.50** 2016 cm^2. **5.51** $\dfrac{3a^2b}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}$. **5.52** 8 m.

5.53 75 cm. **5.54** Asi 163 m^3. **5.55** Asi 135 cm^3. **5.56** a, b) O 17 %.

5.57 a) $V = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2 - a^2}$, $S = a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}a\sqrt{4b^2 - a^2}$;

b) $V = \frac{1}{12}a^3 \operatorname{tg}\varphi$, $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \dfrac{\sqrt{4 - 3\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}\right)$.

5.58 $V = \dfrac{h^3}{36}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $S = h^2\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5.59 $V = 7\,776\sqrt{2}$ cm^3 $\doteq$ 11 dm^3; $S = 1\,296\,(1 + \sqrt{3})$ cm^2 $\doteq$ 35 dm^2; objem se zmenší 8-krát, povrch 4-krát.

5.60 $V \doteq 43{,}36$ cm^3. **5.61** Asi 135,48 cm^2. **5.62** $\dfrac{\sqrt{87}}{\sqrt[3]{2}}$ cm $\doteq$ 7,4 cm.

5.63 a) $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(a_1^2 + a_2^2\right) + \dfrac{3}{2}(a_1 + a_2)\sqrt{4b^2 - (a_1 - a_2)^2}$;

$V = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2\right)\sqrt{b^2 - (a_1 - a_2)^2}$;

b) $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(a_1^2 + a_2^2\right) + \dfrac{3}{2}\left(a_1^2 - a_2^2\right)\dfrac{\sqrt{4 - \cos^2\varphi}}{\cos\varphi}$;

$V = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(a_1^3 - a_2^3\right)\cdot \operatorname{tg}\varphi$.

5.64 $V = \frac{2}{3}abc$; 280 cm^3. **5.65** $V = \frac{1}{6}a^3$; $S = a^2\sqrt{3}$.

5.66 $a_8 : a_{20} = \sqrt{5} : \sqrt{2}$. **5.67** $V = \frac{5}{6}a^3$; $S = a^2(3 + \sqrt{3})$.

5.68 48,224 t. **5.69** Asi 102,5 m^2.

5.70 440 m^3. **5.71** a) Asi 0,82, b) 7 066 482,345 t, c) asi 1,9 m.

5.5 Objem a povrch rotačních těles

5.72 4 : 3. **5.73** Asi 15,3 litrů. **5.74** Asi 1 800 hl.

5.75 $V = \frac{1}{6}r^3\left(10\pi + 3\sqrt{3}\right)$; $S = r^2\left(5\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2\right)$.

5.76 $V = 25\,875\,\pi\ \text{cm}^3 \doteq 81{,}3\ \text{dm}^3$.

5.77 Asi 6,59 kg; asi 2 156 cm^3.

5.78 Asi 31,1 m^3. **5.79** 180°.

5.80 $S = 572\,\pi\ \text{cm}^2 \doteq 1\,797\ \text{cm}^2$, asi 138°28′. **5.81** Asi 143,8 t.

5.82 Asi 3,25 kg; 18,4 litrů. **5.83** 24.

5.84 a) $V = \pi a^3$; $S = 2\pi a^2\sqrt{3}$; b) $V = 4\pi a^3 \cos^2\frac{1}{2}\alpha\ \sin\frac{1}{2}\alpha$; $S = 8\pi a^2 \cos\frac{1}{2}\alpha$.

5.85 a) k^3- krát, b) k^2- krát.

5.86 a) $4\pi r^2\varepsilon$; asi 2,5 cm^3, b) $8\pi r\varepsilon$; asi 0,5 cm^2. **5.87** Asi 5,999 . 10^{24} kg.

5.88 Asi 1,09 cm. **5.89** Asi 46,8 g.

5.90 Asi 12,7 km. **5.91** Užijte vztah $\rho^2 = 2rv - v^2$.

5.92 $V = \dfrac{400\pi}{3}\ \text{cm}^3 \doteq 419\ \text{cm}^3$; $S = 100\pi\ \text{cm}^2 \doteq 314{,}16\ \text{cm}^2$.

5.93 Asi 132,3 . 10^6 km.

5.94 v je kořenem rovnice $v^3 - 12r^2v + 8r^3 = 0$; přitom r je poloměr koule, jejíž částí je daná vrstva.

5.95 3 : 2 : 1. **5.96** 17 cm. **5.97** Asi 135,4 m^3; 99,7 m^2.

5.98 Asi 17,8 cm **5.99** 216 m. **5.100** Asi 37 m^3.

5.101 Asi o 64,6 %. **5.102** $S \doteq 76\ \text{dm}^2$; $V \doteq 26{,}6\ \text{dm}^3$.

5.103 100 článků, asi 7 m.

5.6 Úlohy k opakování

5.105 Řešte užitím sítě kvádru; nejkratší dráha je $\sqrt{116}$ m $\doteq$ 10,8 m.

5.107 a) 6; b) AD, CD, AF, CF; c) AF, CD; AF, CB; AD, CF; AD, CE; AB, CE; AB, CF; AE, CD; AE, CB; d) asi 70°32′.

5.108 a) Při vhodném označení je např. $\sin\alpha = \dfrac{a}{u}$, $\sin\beta = \dfrac{b}{u}$, $\sin\gamma = \dfrac{c}{u}$; a, b, c jsou délky hran, u je délka tělesové úhlopříčky, b) užijte vztah $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

5.109 a) $S\dfrac{\sqrt{2}}{6}$; b) $\sqrt{\dfrac{S}{2}}$.

5.110 Rovinným řezem je obdélník $CGMN$, $M \in EF$, $N \in AB$, $|EM| = \dfrac{a}{5}$, a je délka hrany krychle.

5.111 $2\sqrt[3]{35}$ cm. **5.112** Asi 8,07 cm.

5.113 $V \doteq 135\sqrt{15}\ \text{cm}^3$; $S \doteq 225\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. **5.114** Asi 261,3 g.

5.115 9 561 m^3. **5.116** $V \doteq 207{,}7\ \text{cm}^3$; $S \doteq 252{,}3\ \text{cm}^2$.

5.117 $V = \frac{1}{3}a^3$; $S = a^2(1 + \sqrt{5})$; $\varphi \doteq 63°26'$, $\psi \doteq 54°44'$.

5.118 a) Řezem je čtverec $XUZY$, bod U je střed hrany BC,
b) $V = \dfrac{125\sqrt{2}}{24}\ \text{cm}^3 \doteq 7{,}4\ \text{cm}^3$, $S = \dfrac{25}{4}\left(1 + 2\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2 \doteq 27{,}9\ \text{cm}^2$.

5.119 $a\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **5.120** $a' = \dfrac{a}{3}$; $V' : V = 1 : 27$; $S' : S = 1 : 9$.

5.121 a) $V = \dfrac{1}{6}a^3$; $S = \dfrac{1}{2}a^2\left(3 + \sqrt{3}\right)$; b) $V = \dfrac{1}{3}a^3$; $S = 2a^2\sqrt{3}$.

5.122 $5\,920\sqrt{114}\ \text{cm}^3 \doteq 63{,}2\ \text{dm}^3$. **5.123** 291 m^3; 23,6 m^3.

5.124 a) Kosočtverec, b) $V = \dfrac{125\sqrt{2}}{6}\ \text{cm}^3$; $S = \dfrac{25}{2}\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$.

5.125 Pravidelný dvanáctistěn; $V \doteq 206{,}9\ \text{cm}^3$, $S \doteq 185{,}8\ \text{cm}^2$.

5.126 $V = \dfrac{5}{6}a^3$; $S = 5a^2$. **5.127** $V = 2a^3$; $S = 6a^2\sqrt{2}$.

5.128 Označme P průsečík přímky p s rovinou σ kolmou k přímce p a procházející bodem A: a) kružnice v rovině σ o průměru PA, b) kulová plocha s průměrem AB.

5.129 Kružnice, ve které protíná rovina ρ kulovou plochu s průměrem AB.

5.130 $V = \dfrac{1}{3}\pi s^3\cos^2\varphi\ .\ \sin\varphi$; $S = \pi s^2\cos\varphi\ .\ (\cos\varphi + 1)$; $\rho = s\ .\ \cos\varphi\ \text{tg}\,\dfrac{1}{2}\varphi$; $R = \dfrac{s}{2\sin\varphi}$.

5.132 44 : 81. **5.133** a), c) $S = F$, $r = a$, b) $S \in BF$, $|SB| = r = \frac{3}{4}a$.

5.134 $S_k < S_6 < S_4$, kde S_4 je povrch čtyřstěnu, S_k povrch koule a S_6 povrch krychle.

5.135 $V_k = \pi a^3\dfrac{\sqrt{3}}{54}$, $S_k = \dfrac{\pi a^2}{3}$; $V_h = \dfrac{a^3}{4}$, $S_h = \dfrac{3}{2}a^2\sqrt{3}$.

5.136 Asi 78°28′.

5.137 a) $S_1 : S_2 : S_3 = 16 : 12 : 9$, kde S_1, S_2, S_3 jsou po řadě povrchy koule, válce a kužele. b) $V_1 : V_2 : V_3 = 32 : 12\sqrt{2} : 9$, kde V_1, V_2, V_3 jsou po řadě objemy koule, válce, kužele.

5.138 Řešte užitím vzorců pro objem kulové vrstvy a válce.

5.139 0,081 m^3. **5.140** Asi 31,4 m^2.

5.141 $\dfrac{\pi}{4h}\left(D^2 - d^2\right)\text{m}$; $\dfrac{\pi l}{4h}\left(D^2 - d^2\right)\text{m}^2$. **5.142** Viz [6].

SEZNAM POUŽÍVANÝCH SYMBOLŮ

$A, B, \ldots$	bod $A, B, \ldots$
$a, b, \ldots$	přímka $a, b, \ldots$
$\leftrightarrow AB$	přímka AB (přímka určená body A, B)
$\mapsto AB$	polopřímka AB (polopřímka s počátkem A a vnitřním bodem B)
AB	úsečka AB (úsečka s krajními body A, B)
$\boldsymbol{AB}$	orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$ (orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$ s počátečním bodem A a koncovým bodem B)
α	rovina α
$\leftrightarrow ABC$	rovina ABC (rovina určená body A, B, C)
$\leftrightarrow Ap$	rovina Ap (rovina určená bodem A a přímkou p)
$\leftrightarrow pq$	rovina pq (rovina určená přímkami p, q)
$\mapsto pC$	polorovina pC (polorovina s hraniční přímkou p a vnitřním bodem C)
$\mapsto ABC$	polorovina ABC (polorovina s hraniční přímkou AB a vnitřním bodem C)
$\mapsto \rho M$	poloprostor ρM (poloprostor s hraniční rovinou ρ a vnitřním bodem M)
$\mapsto ABCM$	poloprostor $ABCM$ (poloprostor s hraniční rovinou ABC a vnitřním bodem M)
$\sphericalangle AVB$	konvexní úhel AVB (konvexní úhel s vrcholem V a rameny v polopřímkách VA, VB)
$\in (\notin)$	je (není) prvkem
$A \in p$ $(A \notin p)$	bod A leží (neleží) na přímce p
$A \in \alpha$ $(A \notin \alpha)$	bod A leží (neleží) v rovině α
$\subset (\not\subset)$	je (není) podmnožinou
$p \subset \alpha$ $(p \not\subset \alpha)$	přímka p leží (neleží) v rovině α
$= (\neq)$	je (není) rovno
$A = B$ $(A \neq B)$	bod A je totožný s bodem B (různý od bodu B)
$a = b$ $(a \neq b)$	přímka a je totožná s přímkou b (různá od přímky b)
$\alpha = \beta$ $(\alpha \neq \beta)$	rovina α je totožná s rovinou β (různá od roviny β)
$\parallel (\nparallel)$	je (není) rovnoběžno

$a \parallel b$ $(a \nparallel b)$	přímka a je (není) rovnoběžná s přímkou b
$\alpha \parallel \beta$ $(\alpha \nparallel \beta)$	rovina α je (není) rovnoběžná s rovinou β
$a \cap b = \{P\}$	průsečík P přímek a, b
$\alpha \cap \beta = p$	průsečnice p rovin α a β
$\perp$	je kolmo
$a \perp b$	přímka a je kolmá k přímce b
$a \perp \alpha$	přímka a je kolmá k rovině α
$\alpha \perp \beta$	rovina α je kolmá k rovině β
$\lvert AB \rvert$	vzdálenost bodů A, B; délka úsečky AB
$\lvert Ap \rvert$	vzdálenost bodu A od přímky p
$\lvert A\alpha \rvert$	vzdálenost bodu A od roviny α
$\lvert ab \rvert$	vzdálenost rovnoběžných popř. mimoběžných přímek a, b
$\lvert \alpha\beta \rvert$	vzdálenost rovnoběžných rovin α, β
$\lvert \sphericalangle AVB \rvert$	velikost konvexního úhlu AVB
$\lvert \sphericalangle ab \rvert$	odchylka přímek a, b
$\lvert \sphericalangle p\alpha \rvert$	odchylka přímky p a roviny α
$\lvert \sphericalangle \alpha\beta \rvert$	odchylka rovin α a β
Z	zobrazení Z
$Z\colon X \to X'$	bod X' je obrazem bodu X v zobrazení Z
$S(\rho)$	rovinová souměrnost podle roviny ρ
$S(S)$	středová souměrnost podle středu S
$S(o)$	osová souměrnost podle osy o
$T(\boldsymbol{AB})$	posunutí určené orientovanou úsečkou $\boldsymbol{AB}$
$R(S, \varphi)$	otočení se středem S a úhlem otočení φ
$H(S, \varkappa)$	stejnolehlost se středem S a koeficientem $\varkappa$
$\circ$	značka skládání zobrazení
$Z_2 \circ Z_1$	zobrazení složené ze zobrazení Z_1 a Z_2 v tomto pořadí
$k(S; r)$	kružnice k se středem S a poloměrem r
$\varkappa(S; r)$	kulová plocha $\varkappa$ se středem S a poloměrem r
V	objem tělesa
S	povrch tělesa

DOPORUČENÁ LITERATURA

[1] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky. Praha, Prometheus, 1995.

[2] Hruša, K. a kol.: Přehled elementární matematiky. Praha, SNTL, 1964.

[3] Križalkovič, K. – Cuninka, A. – Šedivý, O.: 500 riešených úloh z geometrie. Bratislava, Alfa, 1970.

[4] Maška, O.: Řešené úlohy z matematiky – stereometrie, trigonometrie, analytická geometrie. Praha, SNTL, 1967.

[5] Kolektiv autorů: Geometrie pro devátý až jedenáctý postupný ročník. Praha, SPN, 1954.

[6] Konforovič, A. G.: Významné matematické úlohy. Praha, SPN, 1989.

[7] Kuřina, F.: Umění vidět v matematice. Praha, SPN, 1990.

[8] Slovník školské matematiky. Praha, SPN, 1981.

[9] Kolman, A.: Dějiny matematiky ve starověku. Praha, Academia, 1968.

REJSTŘÍK POJMŮ

Anuloid 136
Archimédés 122

Bod 8

Cauchy Augustin Louis 189
Cavalieri Bonaventura 189
Cavalieriho princip 150

Čtyřstěn 126

Démokritos 103
deskriptivní geometrie 11
dodekaedr 129
dualita 130

Elipsa 142
Eudoxos 103
Eukleidés 122
Euler Leonard 189
Eulerova věta 127

Fibonacci 189

Geometrické těleso 123
Guldin Paul 189

Hérón 122
hexaedr 129
hlavní kružnice kulové plochy 143
hranol 123
hranolová plocha 123
hranolový prostor 123
hyperbola 142

Identita 104
ikosaedr 129

Jehlan 125
– komolý 126
jehlanová plocha 125
jehlanový prostor 125

Kepler Johannes 189
klenec 125
klín 28
kolmost 63
konvexní útvar 21
koule 135
krychle 125
kulová plocha 135
– úseč 146
– vrstva 146
– výseč 146
kulový pás 146
– prstenec 187
– vrchlík 145
kuželosečky 142
kvádr 125

Legendre Adrien Marie 189
Leibniz Gottfried Wilhelm 189
Leonardo da Vinci 189

Monge Gaspard 189
mnohostěn 127
– pravidelný 129
moskevský papyrus 56

Nadhled 12
Newton Isaac 189
normálový řez 162

Objem anuloidu 179
– hranolu 152

objem jehlanu 155
– komolého jehlanu 158
– koule 175
– krychle 151
– kulové úseče 175
– kulové vrstvy 175
– kulové výseče 176
– kvádru 149
– pravidelného *n*-stěnu 160
– rotačního komolého kužele 168
– rotačního kužele 168
– rotačního válce 166
– tělesa 149
obsah kulového vrchlíku 177
– kulového pásu 177
odchylka dvou přímek 58
– dvou rovin 74
– přímky a roviny 78
oktaedr 129
osová afinita 46
osový řez 140
otočení kolem přímky 114

Pappos 122
parabola 142
Platón 103
podhled 12
polokoule 146
poloprostor 20
posunuté otočení 119
posunutí v prostoru 115
povrch anuloidu 179
– hranolu 153
– jehlanu 155
– komolého jehlanu 158
– koule 177
– krychle 153
– kvádru 153
– pravidelného *n*-stěnu 160
povrch rotačního komolého kužele 171
– rotačního kužele 169
– rotačního válce 166
– tělesa 150
pravoúhlé promítání 69
pravoúhlý průmět bodu 68
– průmět přímky 71
prostor 8
průčelná poloha 13
průmětna 12
průnik přímky s tělesem 46
příčka mimoběžek 23, 48
– daným bodem 48
– rovnoběžná s daným směrem 49
přímka 8
přímky mimoběžné 22
– rovnoběžné 22
– různoběžné 22
– totožné 22
Pýthagorás 103

Rotační kužel 130
– kužel komolý 135
– kuželová plocha 135
– kuželový prostor 135
– těleso 136
– válcová plocha 134
– válcový prostor 134
– válec 134
rovina 8
rovnoběžné promítání 12
rovnoběžnost 29
rovnoběžnostěn 134
rovnoběžný průmět bodu 12
rovnostranný kužel 140
– válec 140

Řez tělesa rovinou 39

Shodnost 104
– nepřímá 105
– přímá 105
síť mnohostěnu 128
– rotačního komolého kužele 171
síť rotačního kužele 170
– rotačního válce 166
skládání rovinových souměrností 117
směr promítání 12
směrová rovina 46, 137
souměrnost osová v prostoru 112
– rovinová 105
– středová v prostoru 110
stejnolehlost v prostoru 120
stereometrie 8
středová kolineace 44

Tečna kulové plochy 145
tečná rovina 137, 139, 143
tetraedr 129
Thalés 103
Theaitetos 103

Útvar osově souměrný 113
– rovinově souměrný 107
– středově souměrný 111

Vedlejší kružnice kulové plochy 144
vlastnosti metrické 58
– polohové 18
volné rovnoběžné promítání 12
vrcholová rovina 46, 139
vrstva 27
vzdálenost bodu od přímky 84
– bodu od roviny 88
– dvou bodů 84
– dvou mimoběžných přímek 95
– dvou rovnoběžných přímek 91
– dvou rovnoběžných rovin 91
vzdálenost přímky od roviny 92

Zobrazení v prostoru 104
– podobné 120
– shodné 104
– složené 116

RNDr. Eva Pomykalová

Matematika pro gymnázia – Stereometrie

Obálku navrhl Miloš Jirsa

Vydalo nakladatelství Prometheus, spol. s r. o.,
Čestmírova 10, 140 00 Praha 4, roku 2005

tel./fax: 241 740 172
e-mail: info@prometheus-nakl.cz
http://www.prometheus-nakl.cz

Edice Učebnice pro střední školy

Odpovědná redaktorka RNDr. Ilona Fořtová

Sazba Hana a Petr Vláškovi

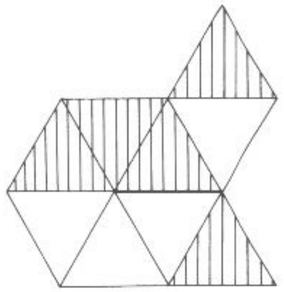
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a. s.,
Husova 1881, 580 01 Havlíčkův Brod

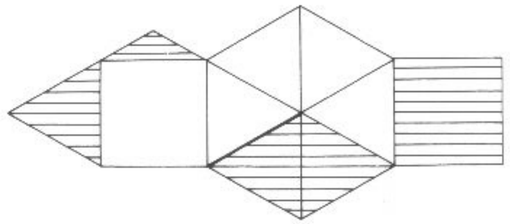
Dotisk 3. vydání

94 21 073

ISBN 80-7196-178-7

97 –





Rovinné obrazce na obrázcích můžete použít pro zhotovení skládacích modelů pravidelného čtyřstěnu a pravidelného čtyřbokého jehlanu. Překreslete si je ve vhodné velikosti na tvrdý papír, vystřihněte a tučně vytažené linky nastřihněte. Šrafované stěny nebudou po přeložení vidět.