T.C.

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ

MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ

ROBOT DİNAMİĞİ VE KONTROLÜ

PROF. DR. ZAFER BİNGÜL
PROF. DR. SERDAR KÜÇÜK

1.7. Newton-Euler Denklemi

Bu bolümde sonuç itibariyle bir robot kolu için Langrange-Euler denkleminde olduğu gibi ayni dinamik denklemleri veren Newton-Euler denklemi anlatılacaktır (Craig 1989). Langrange-Euler denkleminde kinetik ve potansiyel enerji arasındaki fark olan Langrange fonksiyonundan faydalanılarak dinamik denklemler üretilir. Newton-Euler denkleminde ise bir robot kolunun doğrusal ve açısal hareketinden faydalanarak ardışık işlemler sonucunda dinamik denklemleri üretir.

Bir robot kolunun dinamik denklemini çıkarırken her iki yöntemi de uygulamak sonucu doğrulamak açısından son derece faydalıdır. Newton-Euler yöntemi her bir eklemdeki tork ve kuvvetleri vermesinden dolayı robot tasarımcıları açısından son derece avantajlı bir yöntemdir. Çünkü eklemlere yerleştirilecek eyleyiciler veya motorlar bu tork-kuvvet değerlerine göre belirlenebilir.

Newton prensibine göre, kati bir cisme herhangi bir kuvvet veya tork uygulanırsa bu iki büyüklüğe eşit ve zıt yönlü bir kuvvet ve tork meydana gelir. Katı cisme etkiyen toplam kuvvet doğrusal momentum değişim oranına eşittir ve

$$F = m\dot{v}_C \tag{1.7.1}$$

şeklinde gösterilir. Denklemde v_C cismin kütle merkezinin, cismin kendi koordinat sistemine göre hızını, m kütlesini, F ise cisme etkiyen harici kuvvetleri göstermek-tedir. Katı cisme etkiyen toplam tork açısal momentum değişim oranına eşittir ve

$$\frac{d}{dt}\left({}^{0}I^{0}\omega\right)={}^{0}N \tag{1.7.2}$$

şeklinde ifade edilir. Denklemde, ${}^{0}I$, ana koordinat sistemine göre cismin atalet momentini, ${}^{0}\omega$ açısal hızını, ${}^{0}N$ ise cisme etkiyen toplam torku göstermektedir. Denklem 1.7.2’de

$${}^{0}I={}^{0}_{C}R\,{}^{C}I\,{}^{0}_{C}R^{T} \tag{1.7.3}$$

$${}^{0}\omega={}^{0}_{C}R\omega \tag{1.7.4}$$

Denklemde, ${}^{C}I$ orijini kütle merkezinde bulunan koordinat sistemine göre cismin atalet momentini, cisme yerleştirilen koordinat sisteminin ana koordinat sistemine göre dönme matrisini, ω ise kendi koordinat sistemine göre cismin açısal hızını göstermektedir. Ana koordinat sistemi cinsinden açısal momentum

$$^{0}h = {^{0}I}\,{^{0}\omega} \qquad (1.7.5)$$

şeklinde gösterilebilir. Denklem 1.7.5'de ^{0}I ve $^{0}\omega$ ifadelerinin eşdeğerlerini yazalım.

$$^{0}h = {^{0}_{C}R}\,{^{C}I}\,{^{0}_{C}R^{T}}\,{^{0}_{C}R}\,\omega$$

Denklemde ${^{0}_{C}R^{T}}\,{^{0}_{C}R}$ birim matrise eşit olduğundan,

$$^{0}h = {^{0}_{C}R}\,{^{C}I}\,\omega \qquad (1.7.6)$$

seklinde elde edilir. Denklem 1.7.6'da ^{C}I terimini sabit kabul edip eşitliğin her iki tarafının da türevini alalım.

$$^{0}\dot{h} = {^{0}_{C}\dot{R}}\,{^{C}I}\,\omega + {^{0}_{C}R}\,{^{C}I}\,\dot{\omega} \qquad (1.7.7)$$

Açısal hız matrisi $S({}^{0}\omega) = {}^{0}_{C}\dot{R}\,{}^{0}_{C}R^{T}$ 'nin her iki tarafını ${}^{0}_{C}R$ ile çarpalım.

$$S({}^{0}\omega)\,{}^{0}_{C}R = {}^{0}_{C}\dot{R}\,{}^{0}_{C}R^{T}\,{}^{0}_{C}R$$

denklemde ${}^{0}_{C}R^{T}\,{}^{0}_{C}R$ birim matrise eşit olduğundan

$$ {}^{0}_{C}\dot{R} = S({}^{0}\omega)\,{}^{0}_{C}R \qquad (1.7.8)$$

Denklemde 1.7.7'de ${}^{0}_{C}\dot{R}$ yerine $S({}^{0}\omega)\,{}^{0}_{C}R$ yazalım.

$$ {}^{0}\dot{h} = S({}^{0}\omega)\,{}^{0}_{C}R\,{}^{C}I\omega + {}^{0}_{C}R\,{}^{C}I\dot{\omega} \qquad (1.7.9)$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını da ${}^{C}_{0}R$ ile çarpalım

$$ {}^{C}_{0}R\,{}^{0}\dot{h} = {}^{C}_{0}R\,S({}^{0}\omega)\,{}^{0}_{C}R\,{}^{C}I\omega + {}^{C}_{0}R\,{}^{0}_{C}R\,{}^{C}I\dot{\omega}$$

denklemde ${}^{C}_{0}R\,{}^{0}\dot{h} = \dot{h}$ açısal momentum değişim oranıdır. Ayrıca, ${}^{C}_{0}R\,{}^{0}_{C}R$ birim matrise eşit olduğundan

$$\dot{h} = {}^{0}_{C}R^{T} S\left({}^{0}\omega\right) {}^{0}_{C}R\,{}^{C}I\omega + {}^{C}I\dot{\omega} \qquad (1.7.10)$$

elde edilir. Ayrıca,

$${}^{0}_{C}R^{T} S\left({}^{0}\omega\right) {}^{0}_{C}R = {}^{0}_{C}R^{T} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} {}^{0}_{C}R \quad = S\left({}^{0}_{C}R^{T}\,{}^{0}\omega\right)$$

eşitliği sağlanabilir. Denklem 1.7.11’den elde ettiğimiz ifadeyi denklem 1.7.10’da yerine koyalım.

$$\dot{h} = S\left({}^{0}_{C}R^{T}\,{}^{0}\omega\right){}^{C}I\omega + {}^{C}I\dot{\omega} \; = S\left({}^{C}_{0}R\,{}^{0}\omega\right){}^{C}I\omega + {}^{C}I\dot{\omega} \; = S(\omega)\,{}^{C}I\omega + {}^{C}I\dot{\omega}$$

$S(\omega)P = \omega \times P$ eşitliğini kullanarak yukarıdaki denklemi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\dot{h} = \omega \times \left({}^{C}I\omega\right) + {}^{C}I\dot{\omega} \qquad (1.7.13)$$

Denklem 1.7.13’de görülen açısal momentumun değişim oranı cisme etki eden torkların toplamına eşittir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$N = {}^{C}I\dot{\omega} + \omega \times {}^{C}I\omega \qquad (1.7.14)$$

Denklemdeki ikinci ifade **gyroscopic** terim olarak adlandırılır. Sonuç olarak, aşağıdaki Newton ve Euler denklemlerini kullanarak her bir eklemin kütle merkezine etkiyen kuvvet ve torkları hesaplayabiliriz.

$$F_i = m\dot{v}_{C_i} \qquad \text{(Newton denklemi)} \qquad (1.7.15)$$

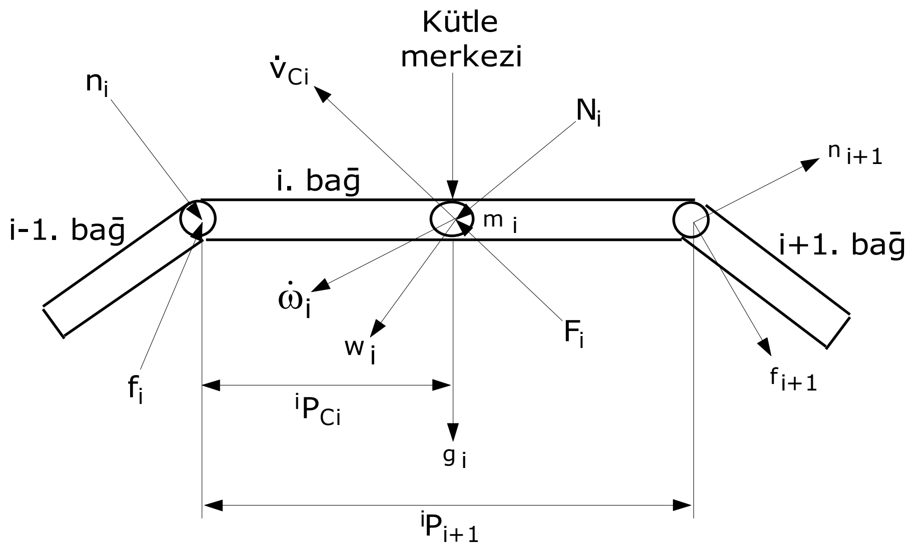
$$N_i = {}^{C_i}I\dot{\omega}_i + \omega_i \times {}^{C_i}I\omega_i \qquad \text{(Euler denklemi)} \qquad (1.7.16)$$

Yukarıdaki denklemlerde, $\{C_i\}$ koordinat sisteminin orijini eklemin kütle merkezindedir ve ayrıca yönelimi i. koordinat sistemiyle aynıdır. Denklem 1.7.15 ve 1.7.16'yı uygulamak için manipülatörün her bir ekleminin kütle merkezinin açısal hız ω_i , doğrusal ivme $\dot{v}_{C_i}$ ve açısal ivme $\dot{\omega}_i$ ifadelerinin belirlenmesi gereklidir. Bu işlemler birinci eklemden n. ekleme doğru ardışık olarak gerçekleştirilir.

Her bir eklemin kütle merkezine etkiyen kuvvet ve tork ifadelerini hesaplamak için, ana koordinat sisteminden, uç işlevcideki koordinat sistemine doğru dışa dönük (outward) denklemlerin ardışık olarak kullanılmasıyla hız ve ivmelerin bulunması gerekir.

Eklem torklarını hesaplamak için her bir eklemin serbest vücut diyagramını temel alan kuvvet denge ve moment denge denklemlerinin yazılması gerekir. Bu kuvvet ve tork denklemleri, n. eklemden robotun ana yani birinci eklemine doğru içe dönük (inward) denklemlerin ardışık olarak gerçekleştirilmesiyle elde edilir.

Özetle, eklemlerin kütle merkezlerine etkiyen kuvvet ve tork ifadelerinin hesaplanması için dışa dönük ardışık denklemler bulunur. Aynı zamanda, bu net kuvvet ve torkları üretmek için gerekli olan eklem torklarının bulunması için ise içe dönük ardışık denklemler elde edilir. Bu denklemleri açıklamadan önce şekil 1.8 üzerinden bazı terimleri açıklayalım



Şekil 1.8. i. bağa etkiyen kuvvet ve momentler

- $\dot{v}_i$:i. bağın doğrusal ivmesi.
- $\dot{v}_{Ci}$:i. bağın kütle merkezinin doğrusal ivmesi.
- ω_i :i. bağın açısal hızı.
- $\dot{\omega}_i$:i. bağın açısal ivmesi.
- m_i :i. bağın kütlesi.
- g_i :i. bağın yerçekimi ivmesi
- ${}^{i+1}_{\ \ i}R$:i ile i+1. bağlar arasındaki dönme matrisi.

- ${}^{C_i}I$:i. bağın kendi kütle merkezine göre atalet tensörü.
- ${}^{i}P_{C_i}$:i. bağın kütle merkezine konumu.
- ${}^{i}P_{i+1}$:i. bağın i+1. bağa göre konumu.
- F_i :i. bağın kütle merkezine etkiyen kuvvet.
- N_i :i. bağın kütle merkezine etkiyen tork.
- f_i :i. ekleme i-1. eklem tarafından uygulanan kuvvet.
- n_i :i. ekleme i-1. eklem tarafından uygulanan tork.

1.7.1. Dışa Dönük Ardışık Denklemler

Bir eklemden diğerine doğru iletilen açısal hız,

$$ {}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\, {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \qquad (1.7.17) $$

Denklemde ${}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$. Bir **dönel** eklem için açısal ivme

$$ {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_{i} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_{i} \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \qquad (1.7.18) $$

şeklinde tanımlanır. Eğer, i+1. eklem prizmatik ise i+1. eklemin açısal hız ve açısal ivmesi sıfır olur. Bu durumda i+1. **prizmatik** eklem için açısal ivme ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$ {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_{i} \qquad (1.7.19) $$

Bir dönel eklemin doğrusal ivmesi bulmak için denklemini yazalım.

$$ {}^{i}\dot{v}_{i+1} = {}^{i}\dot{v}_{i} + {}^{i}\omega_{i} \times \left({}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1}\right) + {}^{i}\dot{\omega}_{i} \times {}^{i}P_{i+1} $$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını ile çarpalım

$$ {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}\dot{\omega}_{i} \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_{i} \times \left({}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1}\right) + {}^{i}\dot{v}_{i}\right) $$

Denklemde ${}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}\dot{v}_{i+1}$ olduğundan dönel bir eklem için doğrusal ivme aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}\dot{\omega}_{i} \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_{i} \times \left({}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1}\right) + {}^{i}\dot{v}_{i}\right) \qquad (1.7.20) $$

Prizmatik eklemler için ise doğrusal ivme

$$ {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R[{}^{i}\dot{\omega}_{i} \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_{i} \times ({}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1}) + {}^{i}\dot{v}_{i}] + 2\,{}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} $$

seklinde ifade edilir. Doğrusal ivmeyi gösteren yukarıdaki ifade Newton denkleminde ki her bir eklemin kütle merkezinin doğrusal ivmesini hesaplamada kullanılır. Kütle merkezinin doğrusal ivmesi aşağıda verilmiştir.

$$ {}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} = {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \left({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}}\right) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} \qquad (1.7.22) $$

Sonuç olarak her bir bağın kütle merkezine etkiyen kuvvet ve tork aşağıdaki gibi bulunur.

$$ {}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1}\,{}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} \qquad (1.7.23) $$

$$ {}^{i+1}N_{i+1} = {}^{C_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{C_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\omega_{i+1} \qquad (1.7.24) $$

1.7.2. İçe Dönük Ardışık Denklemler ile Kuvvet ve Torkun Hesaplanması

Buraya kadar her bir bağa etkiyen kuvvet ve tork ifadelerini bulduk. Bu kuvvet ve torklardan yararlanarak eklem torklarını bulmak için kuvvet denge ve moment denge ifadeleri yazılmalıdır. Şekil 1.8’de f_i, i-1. eklem tarafından i. ekleme uygulanan kuvveti, n_i ise i-1. eklem tarafından i. ekleme uygulanan torku göstermektedir. i. ekleme etkiyen kuvvetleri toplayarak kuvvet denge ilişkisini elde ederiz.

$$ {}^{i}F_i = {}^{i}f_i - {}_{i+1}^{\;\;i}R\,{}^{i+1}f_{i+1} \tag{1.7.25} $$

Kütle merkezine göre torkları toplayarak ise tork denge ifadesi elde edilir.

$$ {}^{i}N_i = {}^{i}n_i - {}^{i}n_{i+1} + \left(-{}^{i}P_{C_i}\right) \times {}^{i}f_i - \left({}^{i}P_{i+1} - {}^{i}P_{C_i}\right) \times {}^{i}f_{i+1} \tag{1.7.26} $$

Denklem 1.7.25'de ${}^{i}f_i$ ifadesini çekip denklem 1.7.26'da yerine yazmak suretiyle aşağıdaki ifade elde edilir.

$$ \begin{aligned} {}^{i}N_i &= {}^{i}n_i - {}^{i}n_{i+1} + \left(-{}^{i}P_{C_i}\right) \times \left({}^{i}F_i + {}_{i+1}^{\;\;i}R\,{}^{i+1}f_{i+1}\right) - \left({}^{i}P_{i+1} - {}^{i}P_{C_i}\right) \times {}^{i}f_{i+1} \\ &= {}^{i}n_i - {}^{i}n_{i+1} - {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i - {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}f_{i+1} - {}^{i}P_{i+1} \times {}_{i+1}^{\;\;i}R\,{}^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}f_{i+1} \\ &= {}^{i}n_i - {}_{i+1}^{\;\;i}R\,{}^{i+1}n_{i+1} - {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i - {}^{i}P_{i+1} \times {}_{i+1}^{\;\;i}R\,{}^{i+1}f_{i+1} \end{aligned} \tag{1.7.27} $$

Son olarak, yukarıdaki ifadelerden faydalanarak n. eklemden temel koordinat sistemine doğru içe dönük ve denklemleri

$$ {}^{i}f_i = {}^{i}_{i+1}R\, {}^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_i \tag{1.7.28} $$

$$ {}^{i}n_i = {}^{i}N_i + {}^{i}_{i+1}R\, {}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R\, {}^{i+1}f_{i+1} \tag{1.7.29} $$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemler n. eklemden ana koordinat sistemine doğru adım adım uygulanır. Eklem torkları dönel ve prizmatik eklemeler eklemler için sırasıyla

$$ \tau_i = {}^{i}n_i^{T}\, {}^{i}\hat{Z}_i \tag{1.7.30} $$

$$ \tau_i = {}^{i}f_i^{T}\, {}^{i}\hat{Z}_i \tag{1.7.31} $$

şeklinde bulunur. Denklemde ${}^{i}\hat{Z}_{i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{T}$. Denklem 1.7.30'da görülen sembolü doğrusal eyleyici kuvvetini göstermektedir. İçe ve dışa dönük ardışık dinamik denklemler eklemlerin konum, hız ve ivmelerinin verilmesiyle gerekli eklem torklarının hesaplanmasını sağlar. Bu denklemler, hem sembolik denklemlerin elde edilmesinde hem de bu denklemlerin sayısal olarak hesaplanmasında iki farklı şekilde kullanılabilir.

1.8.Yerçekimi Kuvveti

Eklemlere etkiyen yerçekimi kuvveti ${}^{0}\dot{v}_{0}$ ile G ifadelerinin eşitlenmesiyle (${}^{0}\dot{v}_{0} = G$) bulunabilir. Bu eşitlikte G yer çekimi vektörünü göstermektedir. Bu ifadeden robotun temel çerçevesinin yukarı yönde G ivmesiyle ivmelendiği anlamı çıkarılabilir. Bu yukarı yönlü ivme, bir ekleme yerçekimi ivmesinin uyguladığı etkinin aynısını uygular.

1.9. Newton-Euler Denklemleriyle İlgili Açıklamalı Örnekler

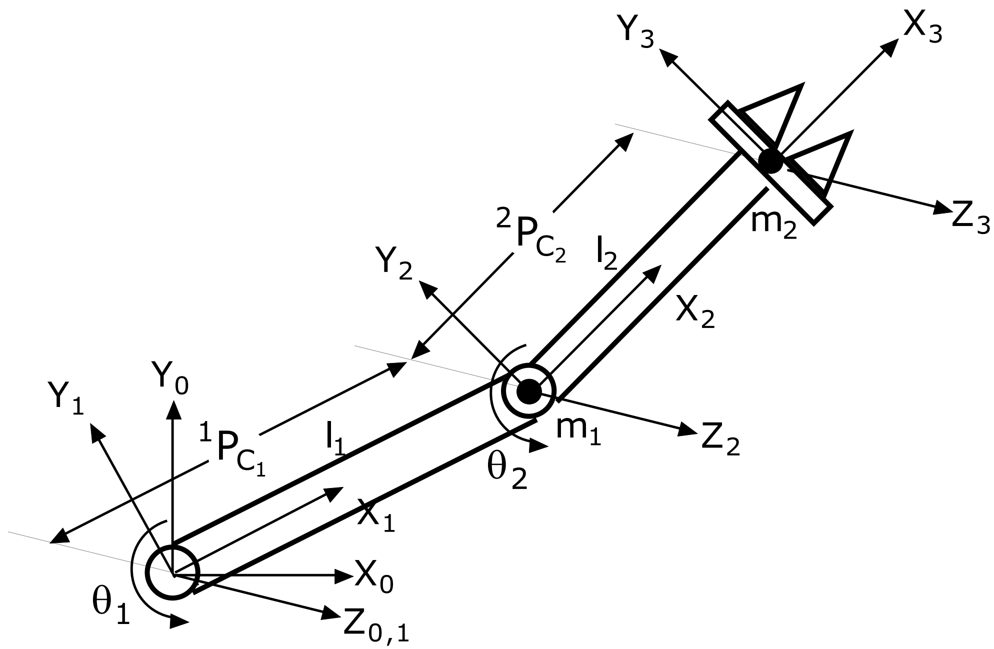
Bu bölümde RR, RPP ve RRP eklem yapsına sahip robotların dinamik modelleri detaylı bir şekilde Newton-Euler denklemleri kullanılarak çıkarılmıştır.

ÖRNEK 1.9.1.

Şekil 1.2’deki iki eklemli düzlemsel robotun dinamik modelini Newton-Euler yöntemini kullanarak çıkarınız. (Langrange-Euler yönteminde olduğu gibi kütle merkezlerini en uçta seçelim.)

ÇÖZÜM 1.9.1.

Bu robotun koordinat sistemlerinin yerleşimi ve kütle gösterimi, şekil 1.9’da gösterilmiştir.



Şekil 1.9. Koordinat sistemlerinin yerleşimi ve kütle gösterimi.

Her bir eklemin kütle merkezine yerleştirilen vektörler X ekseni boyunca uzanmaktadır ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$ {}^{1}P_{C_1} = l_1\hat{X}_1 = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{1.9.1} $$

$$ {}^{2}P_{C_2} = l_2\hat{X}_2 = \begin{bmatrix} l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{1.9.2} $$

Eklem kütleleri en uçta seçildiğinden atalet momentleri sıfır olacağından her iki eklem içinde atalet matrisi sıfıra eşit olur.

$$ {}^{C_1}I_1 = {}^{C_1}I_2 $$

$$ = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix} = [0] \tag{1.9.3} $$

Robot manipülatörü düzlemde serbestçe hareket ettiğinden, uç işlevcisine etkiyen herhangi bir kuvvet veya tork yoktur. Bu durumda $f_3=0$ ve $n_3=0$ olur. Robotun temel çerçevesi hareket etmediğinden açısal hız ve ivme sıfıra eşit olur.

$$\omega_0 = 0 \tag{1.9.4}$$

$$\dot{\omega}_0 = 0 \tag{1.9.5}$$

Yerçekimi vektörü temel koordinat sisteminin Y ekseninde olduğundan aşağıdaki gibi gösterilir.

$$^{0}\dot{v}_0 = g\hat{Y}_0 \tag{1.9.6}$$

Şimdi de birinci eklem için dışa dönük ardışık denklemleri yazalım. İlk olarak birinci ekleme ait açısal hız, denklem 1.7.17'de *i=0* alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$ {}^{0+1}\omega_{0+1} = {}^{0+1}_{0}R\,{}^{0}\omega_{0} + \dot{\theta}_{0+1}\,{}^{0+1}\hat{Z}_{0+1} \tag{1.9.7} $$

$$ {}^{1}\omega_{1} = {}^{1}_{0}R\,{}^{0}\omega_{0} + \dot{\theta}_{1}\,{}^{1}\hat{Z}_{1} \tag{1.9.8} $$

Denklemde olduğundan birinci ekleme ait açısal hız,

$$ \begin{aligned} {}^{1}\omega_{1} &= {}^{1}_{0}R \cdot 0 + \dot{\theta}_{1}\,{}^{1}\hat{Z}_{1} \\ &= \dot{\theta}_{1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{T} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_{1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.9.9} $$

şeklinde elde edilir. Birinci ekleme ait açısal ivme, denklem 1.7.18'de *i=0* alınarak aşağıdaki gibi bulunur. Denklemde ($\times$) vektörsel çarpımı göstermektedir.

$$ {}^{1}\dot{\omega}_{1} = {}^{1}_{0}R\,{}^{0}\dot{\omega}_{0} + \ddot{\theta}_{1}\,{}^{1}\hat{Z}_{1} + {}^{1}_{0}R\,{}^{0}\omega_{0} \times \dot{\theta}_{1}\,{}^{1}\hat{Z}_{1} \qquad (1.9.10) $$

Denklemde ${}^{0}\omega_{0} = 0$ ve ${}^{0}\dot{\omega}_{0} = 0$ olduğundan

$$ {}^{1}\dot{\omega}_{1} = {}^{1}_{0}R \cdot 0 + \ddot{\theta}_{1}\,{}^{1}\hat{Z}_{1} + {}^{1}_{0}R \cdot 0 \times \dot{\theta}_{1}\,{}^{1}\hat{Z}_{1} $$

$$ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_{1} \end{bmatrix} \qquad (1.9.11) $$

seklinde bulunur. Birinci ekleme ait doğrusal ivme, denklem 1.7.20'de *i=0* alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$ {}^{1}\dot{v}_{1} = {}^{1}_{0}R\left({}^{0}\dot{\omega}_{0} \times {}^{0}P_{1} + {}^{0}\omega_{0} \times \left({}^{0}\omega_{0} \times {}^{0}P_{1}\right) + {}^{0}\dot{v}_{0}\right) \qquad (1.9.12) $$

Denklemde $\,^{0}\omega_0 = 0$ ve $\,^{0}\dot{\omega}_0 = 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\dot{v}_1 &= {}^{1}_{0}R\left(0 \times {}^{0}P_1 + 0 \times \left({}^{0}\omega_0 \times {}^{0}P_1\right) + {}^{0}\dot{v}_0\right) \\
&= {}^{1}_{0}R\,{}^{0}\dot{v}_0 \\
&= \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} gs\theta_1 \\ gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad (1.9.13)
$$

elde edilir. ${}^{1}_{0}R$ Matrisinin ${}^{0}_{1}R$ matrisinin devriğine eşit olduğu unutulmamalıdır (${}^{1}_{0}R = {}^{0}_{1}R^{T}$). Birinci eklemin kütle merkezinin doğrusal ivmesi denklem 1.7.22'de *i=0* alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$ {}^1\dot{v}_{C_1} = {}^1\dot{\omega}_1 \times {}^1P_{C_1} + {}^1\omega_1 \times \left({}^1\omega_1 \times {}^1P_{C_1} \right) + {}^1\dot{v}_1 \qquad (1.9.14) $$

Denklemde ${}^1\omega_1$, ${}^1\dot{\omega}_1$, ${}^1\dot{v}_1$ ve ${}^1P_{C_1}$ ifadelerini hatırlayalım.

$$ {}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \ {}^1\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \ {}^1\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} gs\theta_1 \\ gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } {}^1P_{C_1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1.9.15) $$

Bu ifadeleri yukarıdaki denklemde yerlerine yazarak

$$ \begin{aligned} {}^1\dot{v}_{C_1} &= {}^1\dot{\omega}_1 \times {}^1P_{C_1} + {}^1\omega_1 \times \left({}^1\omega_1 \times {}^1P_{C_1} \right) + {}^1\dot{v}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} gs\theta_1 \\ gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gs\theta_1 \\ gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} $$

$$= \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs\theta_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.9.16}$$

Birinci ekleme ait kuvvet vektörü, denklem 1.7.23'de *i=0* alındığında

$${}^1F_1 = m_1 {}^1\dot{v}_{C_1}$$

$$= m_1 \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs\theta_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -m_1 l_1\dot{\theta}_1^2 + m_1 gs\theta_1 \\ m_1 l_1\ddot{\theta}_1 + m_1 gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.9.17}$$

bulunur. Birinci ekleme ait moment vektörü, denklem 1.7.24'de *i=0* alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$ {}^{1}N_{1} = {}^{C_1}I_{1}\,{}^{1}\dot{\omega}_{1} + {}^{1}\omega_{1} \times {}^{C_1}I_{1}\,{}^{1}\omega_{1} \qquad (1.9.18) $$

Denklemde, ${}^{C_1}I_{1} = 0$ olduğundan

$$ \begin{aligned} {}^{1}N_{1} &= 0 \cdot {}^{1}\dot{\omega}_{1} + {}^{1}\omega_{1} \times 0\,{}^{1}\omega_{1} \\ &= [0 \quad 0 \quad 0]^{T} \end{aligned} \qquad (1.9.19) $$

şeklinde elde edilir. İkinci ekleme ait açısal hız, denklem 1.7.17'de *i=1* alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$^{2}\omega_2 = {}^{2}_{1}R\, {}^{1}\omega_1 + \dot{\theta}_2\, {}^{2}\hat{Z}_2$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{1.9.20}$$

İkinci ekleme ait açısal ivme, denklem 1.7.18’de *i=1* alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$^{2}\dot{\omega}_2 = {}^{2}_{1}R\, {}^{1}\dot{\omega}_1 + \ddot{\theta}_2\, {}^{2}\hat{Z}_2 + {}^{2}_{1}R\, {}^{1}\omega_1 \times \dot{\theta}_2\, {}^{2}\hat{Z}_2$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \ddot{\theta}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{1.9.21}$$

İkinci eklemin doğrusal ivmesi, denklem 1.7.20'de *i=1* alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$
{}^{2}\dot{v}_{2} = {}^{2}_{1}R\left({}^{1}\dot{\omega}_{1} \times {}^{1}P_{2} + {}^{1}\omega_{1} \times \left({}^{1}\omega_{1} \times {}^{1}P_{2}\right) + {}^{1}\dot{v}_{1}\right)
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} gs\theta_1 \\ gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ l_1\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gs\theta_1 \\ gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs\theta_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 c\theta_2 + gs\theta_1 c\theta_2 + l_1\ddot{\theta}_1 s\theta_2 + gc\theta_1 s\theta_2 \\ l_1\dot{\theta}_1^2 s\theta_2 - gs\theta_1 s\theta_2 + l_1\ddot{\theta}_1 c\theta_2 + gc\theta_1 c\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.9.22}
$$

Denklemde , $gs\theta_1 c\theta_2 + gc\theta_1 s\theta_2 = gs\theta_{12}$ ve $gc\theta_1 c\theta_2 - gs\theta_1 s\theta_2 = gc\theta_{12}$ olarak kısaltılırsa

$$
{}^2\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1 s\theta_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 c\theta_2 + gs\theta_{12} \\ l_1\ddot{\theta}_1 c\theta_2 + l_1\dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + gc\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1.9.23)
$$

şeklinde daha sade bir ifade elde edilir. İkinci eklemin kütle merkezinin doğrusal ivmesi, denklem 1.7.22'de *i=1* alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$
{}^2\dot{v}_{C_2} = {}^2\dot{\omega}_2 \times {}^2P_{C_2} + {}^2\omega_2 \times \left({}^2\omega_2 \times {}^2P_{C_2}\right) + {}^2\dot{v}_2 \qquad (1.9.24)
$$

$$
{}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad {}^2\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad {}^2\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1 s\theta_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 c\theta_2 + gs\theta_{12} \\ l_1\ddot{\theta}_1 c\theta_2 + l_1\dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + gc\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2P_{C_2} = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Bu ifadeleri yukarıdaki denklemde yerine yazalım.

$$
{}^2\dot{v}_{C_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + {}^2\dot{v}_2
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 \\ l_2\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1 s\theta_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 c\theta_2 + g s\theta_{12} \\ l_1\ddot{\theta}_1 c\theta_2 + l_1\dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + g c\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1 s\theta_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 c\theta_2 + g s\theta_{12} - l_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \\ l_1\ddot{\theta}_1 c\theta_2 + l_1\dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + g c\theta_{12} + l_2\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.9.26}
$$

İkinci eklemin kütle merkezine ait kuvvet vektörü, denklem 1.7.23’de *i=1* alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$^{2}F_2 = m_2\,^{2}\dot{v}_{C_2}$$

$$= \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s\theta_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c\theta_2 + m_2 g s\theta_{12} - m_2 l_2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + m_2 g c\theta_{12} + m_2 l_2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.9.27}$$

İkinci eklemin kütle merkezine ait moment vektörü, denklem 1.7.24'de *i=1* alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$^{2}N_2 = {}^{C_2}I_2\,^{2}\dot{\omega}_2 + {}^{2}\omega_2 \times {}^{C_2}I_2\,^{2}\omega_2 \tag{1.9.28}$$

Denklemde $^{C_2}I_2 = 0$ olduğundan

$$^{2}N_2 = 0 \cdot {}^{2}\dot{\omega}_2 + {}^{2}\omega_2 \times 0\,^{2}\omega_2 \qquad = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{1.9.29}$$

elde edilir. Şimdi ise içe dönük ardışık denklemleri kullanarak bağlara etkiyen kuvvet ve torkları bulalım. Öncelikle, İkinci ekleme etkiyen kuvvet ifadesini bulalım. İkinci ekleme etkiyen kuvvet ifadesi, denklem 1.7.28'de *i=2* alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$^{2}f_{2} = {}^{2}_{3}R\,{}^{3}f_{3} + {}^{2}F_{2} \tag{1.9.30}$$

Daha öncede belirtildiği gibi, robot manipülatörünün uç işlevcisine etkiyen herhangi bir kuvvet veya tork bulunmadığından $^{3}f_{3} = 0$ ve $^{3}n_{3} = 0$ olur.

$$^{2}f_{2} = {}^{2}_{3}R \cdot 0 + {}^{2}F_{2} = {}^{2}F_{2}$$

$$= \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s\theta_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c\theta_2 + m_2 g s\theta_{12} - m_2 l_2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + m_2 g c\theta_{12} + m_2 l_2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.9.31}$$

İkinci ekleme etkiyen tork ifadesi, denklem 1.7.29'da *i=2* alınarak aşağıdaki gibi

$$ {}^{2}n_2 = {}^{2}N_2 + {}^{2}_{3}R\,{}^{3}n_3 + {}^{2}P_{C_2} \times {}^{2}F_2 + {}^{2}P_3 \times {}^{2}_{3}R\,{}^{3}f_3 \qquad (1.9.32) $$

elde edilir. Denklemde ${}^{2}N_2 = [0\ 0\ 0]^T$, ${}^{3}n_3 = 0$, ve ${}^{3}f_3 = 0$ olduğundan

$$ {}^{2}n_2 = 0 + {}^{2}_{3}R \cdot 0 + {}^{2}P_{C_2} \times {}^{2}F_2 + {}^{2}P_3 \times {}^{2}_{3}R \cdot 0 $$

$$ = {}^{2}P_{C_2} \times {}^{2}F_2 $$

elde edilir. Yeni durumda,

$$ {}^{2}n_2 = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s\theta_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c\theta_2 + m_2 g s\theta_{12} - m_2 l_2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + m_2 g c\theta_{12} + m_2 l_2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$
=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + m_2 l_2 g c\theta_{12} + m_2 l_2^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \end{bmatrix}
$$

bulunur. Denklem 1.7.28'de *i=1* yazıp birinci eklemin kuvvet ifadesini bulalım.

$$
{}^1f_1 = {}^1_2R\,{}^2f_2 + {}^1F_1
$$

$$
=\begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s\theta_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c\theta_2 + m_2 g s\theta_{12} - m_2 l_2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + m_2 g c\theta_{12} + m_2 l_2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g s\theta_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g c\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1.9.34)
$$

Aslında $^1n_1$ ifadesinde $^1f_1$ kullanılmadığından, bu ifadenin hesaplanmasına gerek yoktur. Şimdi de denklem 1.7.29’da *i=1* yazıp birinci eklemin tork ifadesini bulalım.

$$^1n_1 = {}^1N_1 + {}^1_2R\,{}^2n_2 + {}^1P_{C_1} \times {}^1F_1 + {}^1P_2 \times {}^1_2R\,{}^2f_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g s_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s\theta_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c\theta_2 + m_2 g s\theta_{12} - m_2 l_2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + m_2 g c\theta_{12} + m_2 l_2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Denklemde $a = m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + m_2 l_2 g c\theta_{12} + m_2 l_2^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right)$ ’dir. Yukarıdaki işlemler sırayla yapılırsa

$$
{}^1n_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + m_2 l_2 g c\theta_{12} + m_2 l_2^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g c\theta_1 \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cdots \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 g s\theta_2 s\theta_{12} + m_2 g c\theta_2 c\theta_{12} \\ - m_2 l_2 s\theta_2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 + m_2 l_2 c\theta_2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Denklemde $m_2 g s\theta_2 s\theta_{12} + m_2 g c\theta_2 c\theta_{12} = m_2 g c\theta_1$ olur. Denklemi düzenleyelim.

$$
{}^1n_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + m_2 l_2 g c\theta_{1\,2} + m_2 l_2^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g c\theta_1 \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 g c\theta_1 - m_2 l_1 l_2 s\theta_2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 + m_2 l_1 l_2 c\theta_2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T
$$

Denklemde kullanılan b kısaltması aşağıda verilmiştir

$$b = m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 c\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 + m_2 l_2 g c\theta_{12} + m_2 l_2^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1$$

$$+ m_1 l_1 g c\theta_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 g c\theta_1 - m_2 l_1 l_2 s\theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

$$+ m_2 l_1 l_2 c\theta_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

Şimdi sırayla τ_1 ve τ_2 eklem torklarını bulalım. Bunun için $\tau_i = {}^i n_i^{T\,i} \hat{Z}_i$ ifadesinden yaralanacağız. Öncelikle τ_1 ifadesini bulmak için *i=1* alalım.

$$\tau_1 = {}^1 n_1^{T\,1} \hat{Z}_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b \qquad (1.9.36)$$

Şimdi de τ_2 ifadesini bulmak için *i=2* alalım.

$$\tau_2 = {}^2n_2^{T\,2}\hat{Z}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_2 l_1 l_2 c\theta_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s\theta_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c\theta_{12} + m_2 l_2^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= m_2 l_1 l_2 c\theta_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s\theta_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c\theta_{12} + m_2 l_2^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right)$$

Denklem 1.9.36 ve 1.9.37'de $\ddot{\theta}_1$ ve $\ddot{\theta}_2$ terimlerinin katsayıları birinci ve ikinci eklemlerin etkili atalet çarpanlarıdır. τ_1 denklemindeki $\ddot{\theta}_2$ teriminin katsayıları ile τ_2 denklemindeki $\ddot{\theta}_1$ teriminin katsayıları eklemler arasındaki birleştirme (coupling) atalet çarpanlarıdır. Bu etkili ve birleştirme atalet çarpanları aşağıda gösterilen kütle matrisini oluştururlar.

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \qquad (1.9.38)$$

Bu kütle matrisi τ_1 ve τ_2 tork ifadelerinde $\ddot{\theta}_1$ ve $\ddot{\theta}_2$ çarpanlarının katsayılarından aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 \\ D_{21}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

denklemde D_{11} ile D_{22} etkili atalet çarpanları D_{12} ile D_{21} ise birleştirme atalet çarpanlarını oluşturmaktadır. Bu durumda kütle matrisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2(l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 c\theta_2) & m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2) & 0 \\ m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2) & m_2 l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.9.40)$$

Gerçek bir robot manipülatöründe kütle matrisinin simetrik olduğu unutulmamalıdır. τ_1 ve τ_2 tork denklemlerindeki $\dot{\theta}_i^2$ ifadesinin katsayıları merkezkaç terimlerini oluşturur ve eklem hızlarının karesine bağlıdır. Aynı şekilde, $\dot{\theta}_i \dot{\theta}_j$ ifadesinin katsayıları ise Coriolis terimlerini oluşturur ve iki farklı eklem hızının bir biriyle çarpımına bağlıdır. Örnekte verilen düzlemsel robotun Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü τ_1 ve τ_2 tork ifadelerinden faydalanarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 - 2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{1.9.41}$$

Yerçekimi vektörü ise τ_1 ve τ_2 tork ifadelerinde *g* yerçekimi sabitinin çarpan olarak yer aldığı ifadelerin toplamından aşağıdaki gibi elde edilir.

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix} \tag{1.9.42}$$

Sonuç olarak bir robot kolunun eklem uzayındaki dinamik denklemi

$$D(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) = \tau_i$$

şeklinde elde edilir. Denklemde, $D(\theta)$ manipülatörün 2x2 boyutlu genel atalet tensörü veya kütle matrisini, $C(\theta, \dot{\theta})$ 1x2 boyutlu Coriolis ve merkezkaç (centrifugal) kuvvet vektörünü ve $G(\theta)$ ise 1x2 boyutlu yerçekimi vektörünü temsil etmektedir.

Denklem 1.9.36 ve 1.9.37' de elde edilen τ_1 ve τ_2 tork ifadeleri Langrange-Euler yönteminde elde edilen tork ifadeleri ile ayni çıkmıştır.

1.10. Her Bir Ekleme Etkiyen Dönel ve Çizgisel Kuvvetler

Robot tasarlarken eyleyicileri doğru bir şekilde seçmek için her ekleme etkiyen dönel ${}^{i}n_i = (n_{xi}, n_{yi}, n_{zi})$ ve çizgisel ${}^{i}f_i = (f_{xi}, f_{yi}, f_{zi})$ kuvvetlerin göz önünde bulundurulması gereklidir. Newton-Euler yönteminden faydalanarak sırayla Şekil 1.11'deki robotun her bir eklemine etkiyen bu kuvvetleri bulalım. Birinci ekleme etkiyen çizgisel ve dönel kuvvetler

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{z1} \\ n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_2(F_{X2} + F_{X3}) - s\theta_2(F_{Y2} + F_{Z3}) \\ -F_{Z2} + F_{Y3} \\ s\theta_2(F_{X2} + F_{X3}) + c\theta_2(F_{Y2} + F_{Z3}) + m_1 g \\ n_{X2}c\theta_2 - n_{y2}s\theta_2 - d_2 s\theta_2(F_{X2} + F_{X3}) - d_2 c\theta_2(F_{Y2} + F_{Z3}) \\ -n_{Z2} \\ I_{zz_1}\ddot{\theta}_1 + n_{X2}s\theta_2 + n_{y2}c\theta_2 + d_2 c\theta_2(F_{X2} + F_{X3}) - d_2 s\theta_2(F_{Y2} + F_{Z3}) \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir.

Denklemde

$$f_{x1} = c\theta_2[\frac{1}{2}d_2m_2c\theta_2\ddot{\theta}_1 + gm_2s\theta_2 - \frac{1}{2}l_3m_3s\theta_2c\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}l_3m_3\ddot{\theta}_2$$

$$+ m_3(-d_3\ddot{\theta}_2 + d_3s\theta_2c\theta_2\dot{\theta}_1^2 + d_2c\theta_2\ddot{\theta}_1 + gs\theta_2 - 2\dot{\theta}_2\dot{d}_3)]$$

$$- s\theta_2[-\frac{1}{2}d_2m_2s\theta_2\ddot{\theta}_1 + gm_2c\theta_2 + \frac{1}{2}l_3m_3(s^2\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$+ m_3(-d_3(s^2\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - d_2s\theta_2\ddot{\theta}_1 + gc\theta_2 + \ddot{d}_3)] \qquad (1.10.1)$$

$$f_{y1} = -(-\frac{1}{2}d_2m_2\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}l_3m_3(s\theta_2\ddot{\theta}_1 + 2c\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)$$

$$+ m_3(-d_3s\theta_2\ddot{\theta}_1 - 2d_3c\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + d_2\dot{\theta}_1^2 - 2s\theta_2\dot{\theta}_1\dot{d}_3) \qquad (1.102)$$

$$f_{z1} = s\theta_2[\frac{1}{2}d_2m_2c\theta_2\ddot{\theta}_1 + gm_2s\theta_2 - \frac{1}{2}l_3m_3s\theta_2c\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}l_3m_3\ddot{\theta}_2$$

$$+ m_3(-d_3\ddot{\theta}_2 + d_3s\theta_2c\theta_2\dot{\theta}_1^2 + d_2c\theta_2\ddot{\theta}_1 + gs\theta_2 - 2\dot{\theta}_2\dot{d}_3)]$$

$$+ c\theta_2[-\frac{1}{2}d_2m_2s\theta_2\ddot{\theta}_1 + gm_2c\theta_2 + \frac{1}{2}l_3m_3(s^2\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$+ m_3(-d_3(s^2\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - d_2s\theta_2\ddot{\theta}_1 + gc\theta_2 + \ddot{d}_3)] + m_1g \qquad (1.10.3)$$

$$n_{x1} = c\theta_2[I_{xx_2}s\theta_2\ddot{\theta}_1 + (I_{xx_2} - I_{yy_2} + I_{zz_2})c\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2]$$

$$- s\theta_2[I_{yy_2}c\theta_2\ddot{\theta}_1 + (I_{xx_2} - I_{yy_2} - I_{zz_2})s\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2] - d_2s\theta_2[\frac{1}{2}d_2m_2c\theta_2\ddot{\theta}_1 + gm_2s\theta_2$$

$$- \frac{1}{2}l_3m_3s\theta_2c\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}l_3m_3\ddot{\theta}_2 + m_3(-d_3\ddot{\theta}_2 + d_3s\theta_2c\theta_2\dot{\theta}_1^2 + d_2c\theta_2\ddot{\theta}_1 + gs\theta_2$$

$$- 2\dot{\theta}_2\dot{d}_3)] - d_2c\theta_2[-\frac{1}{2}d_2m_2s\theta_2\ddot{\theta}_1 + gm_2c\theta_2$$

$$+m_3(-d_3(s^2\theta_2\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2)-d_2 s\theta_2\ddot{\theta}_1+gc\theta_2+\ddot{d}_3)] \quad (1.10.4)$$

$$n_{y1}=-I_{zz_2}\ddot{\theta}_2-(I_{yy_2}-I_{xx_2})s\theta_2 c\theta_2\dot{\theta}_1^2 \quad (1.10.5)$$

$$n_{z1}=\tau_1 \quad (1.10.6)$$

İkinci ekleme etkiyen çizgisel ${}^2f_2=(f_{x2},f_{y2},f_{z2})$ ve dönel ${}^2n_2=(n_{x2},n_{y2},n_{z2})$ kuvvetler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{z2} \\ n_{x2} \\ n_{y2} \\ n_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X2}+F_{X3} \\ F_{Y2}+F_{Z3} \\ F_{Z2}-F_{Y3} \\ N_{X2}+N_{X3}+\frac{1}{2}d_2F_{Y2}+(\frac{1}{2}l_3-d_3)F_{Y3} \\ N_{Y2}+N_{Z3}-\frac{1}{2}d_2F_{X2} \\ N_{Z2}-N_{Y3}+(\frac{1}{2}l_3-d_3)F_{X3} \end{bmatrix}$$

Denklemde,

$$f_{x2} = \frac{1}{2} d_2 m_2 c\theta_2 \ddot{\theta}_1 + g m_2 s\theta_2 - \frac{1}{2} l_3 m_3 s\theta_2 c\theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} l_3 m_3 \ddot{\theta}_2$$

$$+ m_3(-d_3 \ddot{\theta}_2 + d_3 s\theta_2 c\theta_2 \dot{\theta}_1^2 + d_2 c\theta_2 \ddot{\theta}_1 + g s\theta_2 - 2\dot{\theta}_2 \dot{d}_3) \qquad (1.10.7)$$

$$f_{y2} = -\frac{1}{2} d_2 m_2 s\theta_2 \ddot{\theta}_1 + g m_2 c\theta_2 + \frac{1}{2} l_3 m_3 (s^2\theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$+ m_3(-d_3(s^2\theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - d_2 s\theta_2 \ddot{\theta}_1 + g c\theta_2 + \ddot{d}_3) \qquad (1.10.8)$$

$$f_{z2} = -\frac{1}{2} d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 - [\frac{1}{2} l_3 m_3 (s\theta_2 \ddot{\theta}_1 + 2c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

$$+ m_3(-d_3 s\theta_2 \ddot{\theta}_1 - 2 d_3 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + d_2 \dot{\theta}_1^2 - 2 s\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_3)] \qquad (1.10.9)$$

$$n_{x2} = I_{xx_2} s\theta_2 \ddot{\theta}_1 + (I_{xx_2} - I_{yy_2} + I_{zz_2}) c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + [I_{xx_3} s\theta_2 \ddot{\theta}_1$$

$$+ (I_{xx_3} + I_{yy_3} - I_{zz_3}) c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2] + \frac{1}{2} d_2 (-\frac{1}{2} d_2 m_2 s\theta_2 \ddot{\theta}_1 + g m_2 c\theta_2)$$

$$+ (\frac{1}{2} l_3 - d_3)[\frac{1}{2} l_3 m_3 (s\theta_2 \ddot{\theta}_1 + 2c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + m_3(-d_3 s\theta_2 \ddot{\theta}_1$$

$$- 2 d_3 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + d_2 \dot{\theta}_1^2 - 2 s\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_3)] \tag{1.10.10}$$

$$n_{y2} = I_{yy_2} c\theta_2 \ddot{\theta}_1 + (I_{xx_2} - I_{yy_2} - I_{zz_2}) s\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + I_{zz_3} c\theta_2 \ddot{\theta}_1$$

$$+ (I_{xx_3} - I_{yy_3} - I_{zz_3}) s\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} d_2 (\frac{1}{2} d_2 m_2 c\theta_2 \ddot{\theta}_1 + g m_2 s\theta_2) \tag{1.10.11}$$

$$n_{z2} = \tau_2 \tag{1.10.12}$$

Üçüncü ekleme etkiyen çizgisel ${}^3f_3 = (f_{x3}, f_{y3}, f_{z3})$ ve dönel ${}^3n_3 = (n_{x3}, n_{y3}, n_{z3})$ kuvvetler aşağıda verilmişir.

$$\begin{bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{z3} \\ n_{x3} \\ n_{y3} \\ n_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l_3 m_3 s\theta_2 c\theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} l_3 m_3 \ddot{\theta}_2 + m_3 \dot{v}_{X3} \\ \frac{1}{2} l_3 m_3 (s\theta_2 \ddot{\theta}_1 + 2c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + m_3 \dot{v}_{Y3} \\ \frac{1}{2} l_3 m_3 (s^2\theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + m_3 \dot{v}_{Z3} \\ N_{X3} + \frac{1}{2} l_3 F_{Y3} \\ N_{Y3} - \frac{1}{2} l_3 F_{X3} \\ N_{Z3} \end{bmatrix}$$

Denklemde,

$$f_{x3} = -\frac{1}{2} l_3 m_3 s\theta_2 c\theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} l_3 m_3 \ddot{\theta}_2$$

$$+ m_3(-d_3\ddot{\theta}_2 + d_3 s\theta_2 c\theta_2 \dot{\theta}_1^2 + d_2 c\theta_2 \ddot{\theta}_1 + g s\theta_2 - 2\dot{\theta}_2 \dot{d}_3) \qquad (1.10.13)$$

$$f_{y3} = \frac{1}{2} l_3 m_3 (s\theta_2 \ddot{\theta}_1 + 2c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

$$+ m_3(-d_3 s\theta_2 \ddot{\theta}_1 - 2d_3 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + d_2 \dot{\theta}_1^2 - 2s\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_3) \qquad (1.10.14)$$

$$f_{z3} = \tau_3 \qquad (1.10.15)$$

$$n_{x3} = I_{xx_3} s\theta_2 \ddot{\theta}_1 + (I_{xx_3} + I_{yy_3} - I_{zz_3}) c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} l_3 [\frac{1}{2} l_3 m_3 (s\theta_2 \ddot{\theta}_1$$

$$+ 2c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

$$+ m_3(-d_3 s\theta_2 \ddot{\theta}_1 - 2d_3 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + d_2 \dot{\theta}_1^2 - 2s\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_3)] \qquad (1.10.16)$$

$$
\begin{aligned}
n_{y3} = {} & -I_{yy_3}\ddot{\theta}_2 + (I_{xx_3} - I_{zz_3})s\theta_2 c\theta_2\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}l_3[-\frac{1}{2}l_3 m_3 s\theta_2 c\theta_2\dot{\theta}_1^2 \\
& + \frac{1}{2}l_3 m_3\ddot{\theta}_2 \\
& + m_3(-d_3\ddot{\theta}_2 + d_3 s\theta_2 c\theta_2\dot{\theta}_1^2 + d_2 c\theta_2\ddot{\theta}_1 + gs\theta_2 - 2\dot{\theta}_2\dot{d}_3)]
\end{aligned}
\qquad (1.10.17)
$$

(1.10.18)