Ders #4

Otomatik Kontrol

Fiziksel Sistemlerin Modellenmesi

- Elektriksel Sistemeler
- Mekaniksel Sistemler

Prof.Dr.Galip Cansever

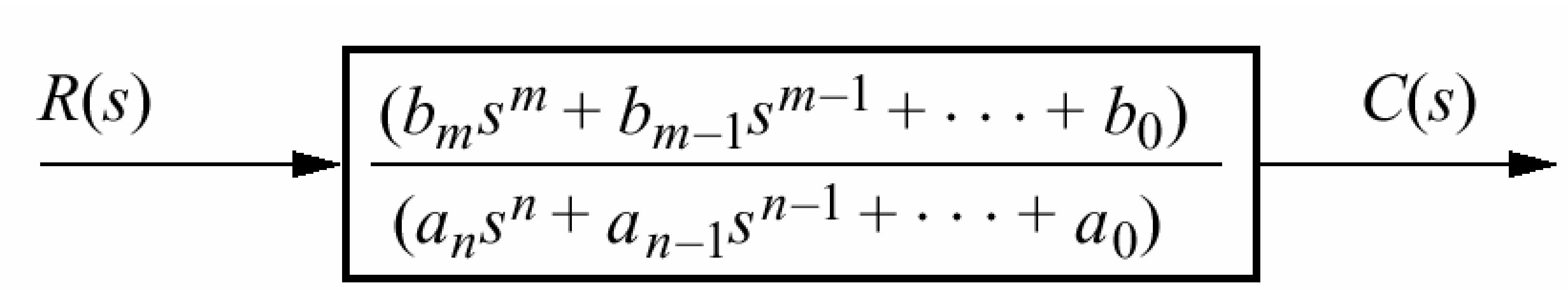
Kontrol sistemlerinin analizinde ve tasarımında en önemli noktalardan bir tanesi sistemlerin matematiksel ifade edilmesidir.

Transfer fonksiyonu metodu ve durum değişkenleri metodu en çok kullanılan modelleme yöntemleridir.(Transfer fonksiyonu metodu sadece lineer sistemlere uygulanabilir.)

Transfer Fonksiyonu:

Başlangıç koşulları sıfır kabul edilerek bir sistemin cevap fonksiyunu (çıkışı) ile sürücü fonksiyonu (giriş) arasındaki Laplas transformasyonları oranına transfer fonksiyonu denir.

Transfer fonksiyonu sistemin dinamik karakteristiklerini tanımlar. Sistem özelliğidir. Sistemin fiziksel yapısı hakkında bilgi vermez, farklı fiziksel sistemlerin transfer fonksiyonları aynı olabilir.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots\ldots.. b_0)}{(a_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots.. a_0)}$$

Örnek: $\dfrac{dx}{dt}+2x=r(t)$ için transfer fonksiyonunu oluşturunuz.

Başlangıç koşullarını 0 kabul ederek iki tarafın Laplas dönüşümünü alalım:

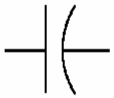
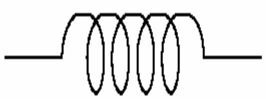
$$sX(s)+2X(s)=R(s)$$

$$G(s)=\frac{X(s)}{R(s)} \quad =\frac{1}{s+2}$$

Elektriksel Sistemlerin Transfer Fonksiyonları

Elektriksel sistemlerin modellenmesinde linneer ve pasif üç devre elemanı yaygın olarak kullanılır.

Direnç, Endüktans ve Kapasitans

 Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
 Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
 Inductor	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $v(t)$ = V (volts), $i(t)$ = A (amps), $q(t)$ = Q (coulombs), C = F (farads), R = Ω (ohms), G = ℧ (mhos), L = H (henries).

Kapasitör için:

$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

Direnç için:

$$V(s) = RI(s)$$

Endüktör için:

$$V(s) = LsI(s)$$

Transfer fonksiyonu tanımlayacak olursak:

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z(s)$$

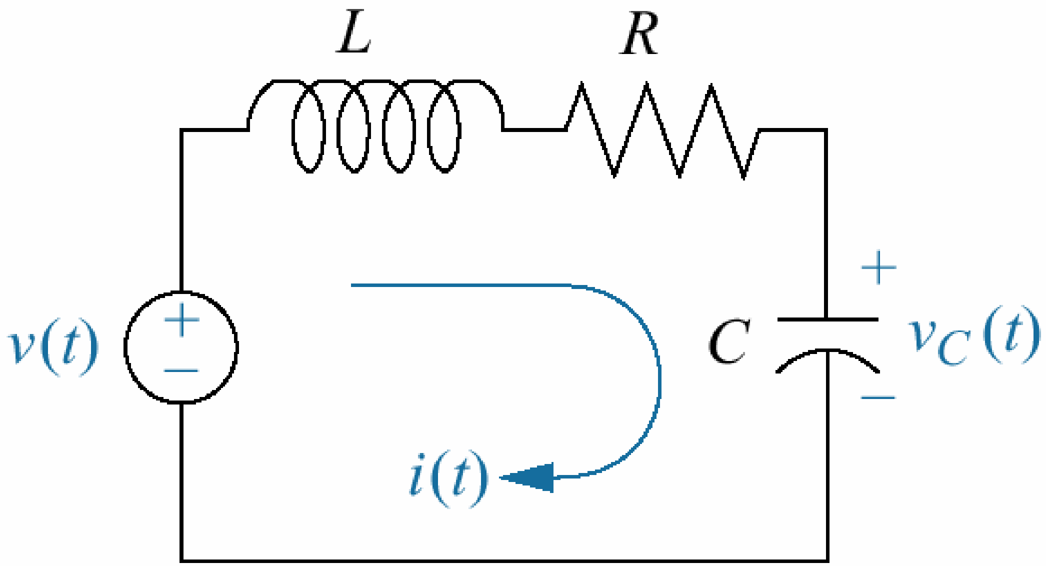
Elektriksel devrelerin matematiksel modellenmesinde Kirşof yasalarından faydalanılır:

Bir kapalı çevrimde gerilimlerin toplamı sıfırdır.

Bir noktaya gelen ve noktadan çıkan akımların toplamı sıfırdır.

Bu ilişkiler kurulduktan sonra devre için diferansiyel denklemler yazılır. Daha sonra Laplas dönüşümü yapılır ve transfer fonksiyonu elde edilir.

Örnek: Aşağıdaki devrede kapasitör gerilimi $V_c(s)$ ve giriş gerilimi V(s) yi ilişklendiren transfer fonksiyonunu yazınız.



Kontrol tasarımcısı ilk önce giriş ve çıkışı belirlemelidir. Ancak bu örnekte giriş ve çıkış bize verilmiştir. Giriş ugulanan V(t) gerilimi çıkış ise kapasitör gerilimi, $V_c(t)$.

1. Yöntem Kirşof Gerilimler Yasası:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = v(\tau)$$

Başlangıç koşullarını sıfır kabul ederek Laplas dönüşümünü yapalım:

$$RI(s) + LsI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) = V(s)$$

Denklemi düzenleyecek olursak:

$$V(s) = (R + Ls + \frac{1}{Cs})I(s)$$

Dikkat edilecek olursa uygulanan gerilim; çevrimdeki devre elemanlarının empedansları toplamı çarpı devre akımıdır.

$$I(s)=\frac{V(s)}{(R+Ls+\frac{1}{Cs})}$$

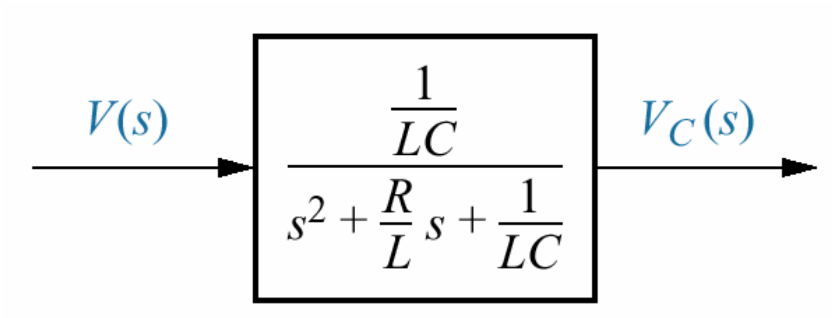
$\dfrac{V_c(s)}{V(s)}$ ‘i elde etmeye çalışıyoruz.

$$V_c(s)=\frac{1}{Cs}I(s)$$

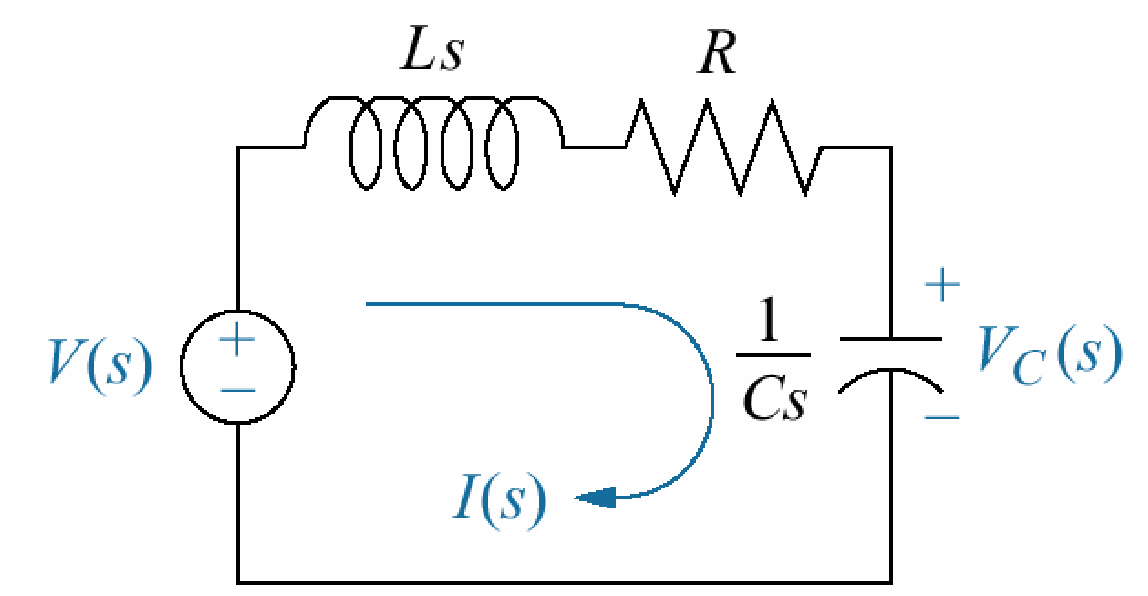
$$V_c(s)=\frac{1}{Cs}\frac{V(s)}{(R+Ls+\frac{1}{Cs})}$$

$$\frac{V_c(s)}{V(s)}=\frac{1}{Cs}\frac{1}{(\frac{RCs+LCs^2+1}{Cs})}$$

$$\frac{V_c(s)}{V(s)}=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$



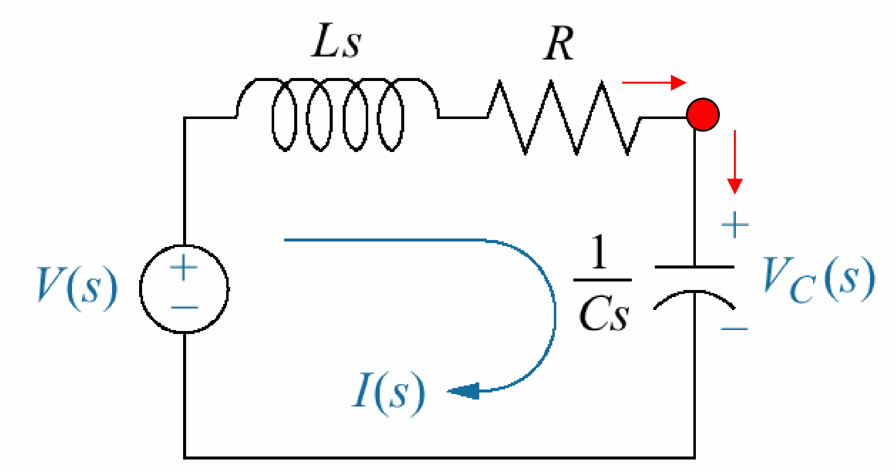
Aslında devreyi çözmeye başlamadan devre elemanlarının devre üzerinde empedans değerlerini yazabiliriz.



2. Yöntem Kirşof Akımlar Yasası:

Bir noktadan çıkan akımları pozitif, noktaya gelen akımları negatif kabul edeceğiz.

Bizim devremizde akımlar; kapasitör içinden geçen akım ve seri bağlı direnç ve endüktörden geçen akımdır.



$$\frac{V_c(s)}{\frac{1}{Cs}}+\frac{V_c(s)-V(s)}{R+Ls}=0$$

Çözecek olursak:

$$\frac{V_c(s)}{V(s)}=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

3. Yöntem Gerilim Bölücü:

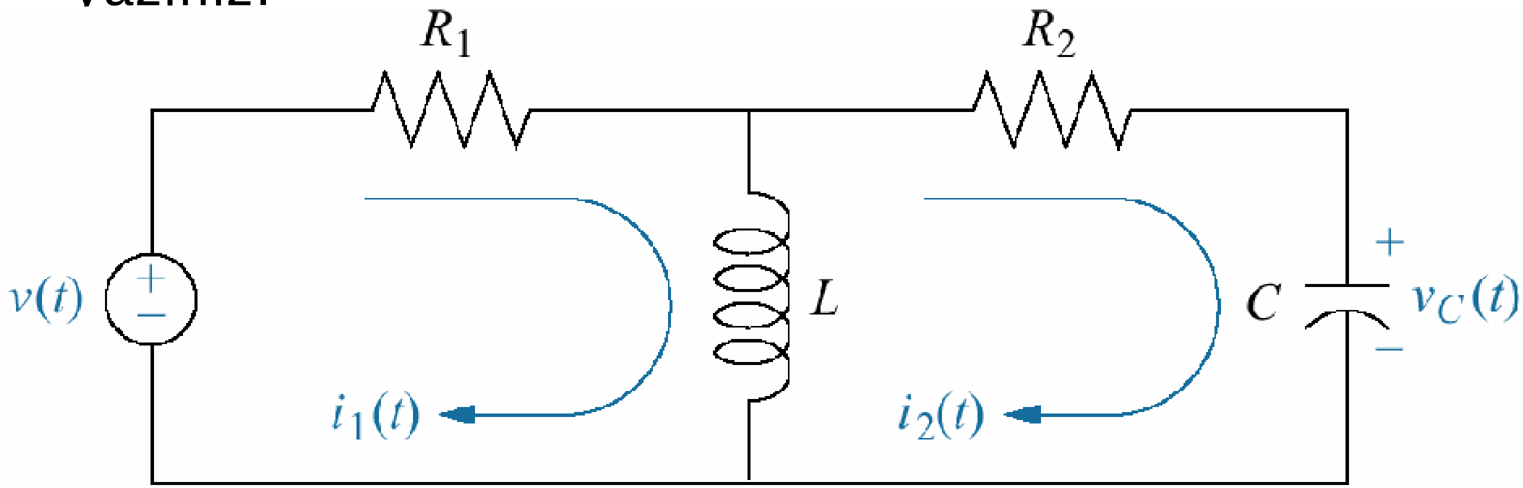
Kapasitör uçlarındaki gerilim uygulanan gerilimin bir kısmıdır. Dolayısıyla kapasitör empedansını toplam empedansa bölerek de kapasitör gerilimini bulabiliriz.

$$V_c(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} V(s)$$

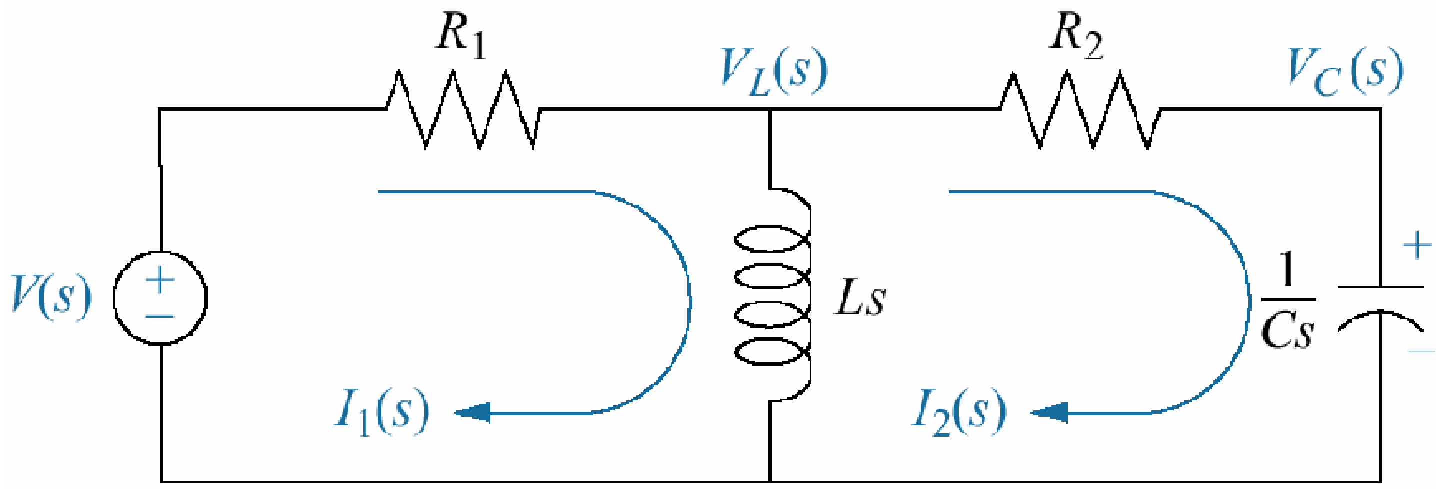
Bu örnekte tek çevreli bir elektriksel devremiz vardı, fakat çoğu elektriksel devreler birden çok döngü içerirler. Çok çevreli devrelerin transfer fonksiyonlarını elde edebilmek için:

1. Devre elemanlarının empedans değerleri yazılır
2. Çevrede akımın yönü seçilir
3. Çevrede Kirşof gerilimler yasası uygulanır
4. Çıkışı elde etmek için denklemler sırasıyla çözülür
5. Transfer fonksiyonu oluşturulur

Örnek: Aşağıdaki devrede $I_2(s)/V_2(s)$ transfer fonksiyonunu yazınız.



Basşlangıç koşullarını sıfır varsayarak devre elemanlarının empedanslarını yazalım



1. Çevrimde $$R_1 I_1(s) + LsI_1(s) - LsI_2(s) = V(s)$$

2. Çevrimde $$LsI_2(s) + R_2 I_2(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s) - LsI_1(s) = 0$$

$I_1(s)$ ve $I_2(s)$ li terimleri birlikte yazacak olursak;

$$(R_1 + Ls)I_1(s) - LsI_2(s) = V(s)$$

$$-LsI_1(s) + (Ls + R_2 + \frac{1}{Cs})I_2(s) = 0$$

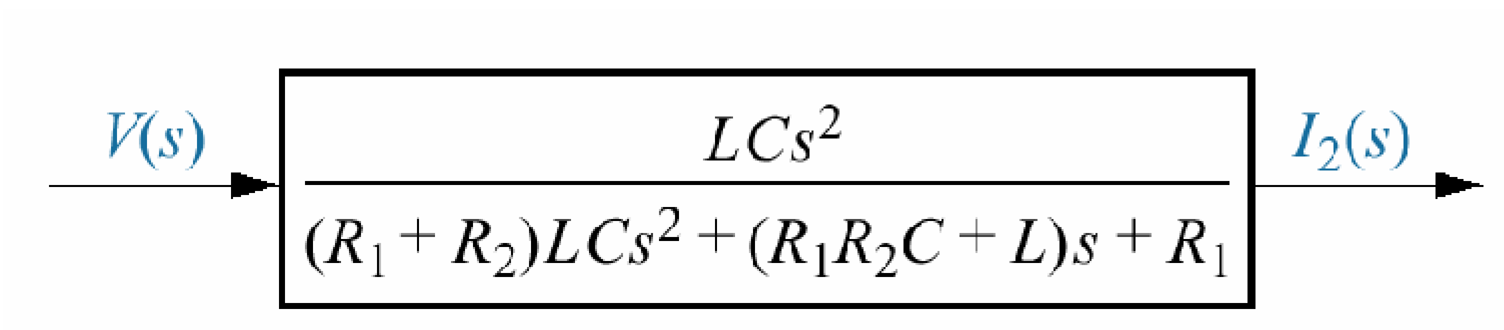
$I_2(s)$ i Çözmek için kramer yasasını kullanacak olursak;

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & -Ls \\ -Ls & (Ls + R_2 + \frac{1}{Cs}) \end{vmatrix}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & V(s) \\ -Ls & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{LsV(s)}{\Delta}$$

Transfer Fonksiyonu: $$G(s) = \frac{I_2(s)}{V(s)}$$

$$G(s) = \frac{\dfrac{LsV(s)}{\Delta}}{V(s)} = \frac{Ls}{\Delta} = \frac{LCs^2}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1}$$



$$\mathbf{Ax} = \mathbf{B} \tag{F.50}$$

Solution via Matrix Inverse

If $\mathbf{A}$ is nonsingular, we can premultiply Eq. (F.50) by $\mathbf{A}^{-1}$, yielding the solution $\mathbf{x}$. Thus,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \tag{F.53}$$

For example, premultiplying both sides of Eq. (F.52) by $\mathbf{A}^{-1}$, where

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0526 & -0.0921 \\ 0.1053 & 0.0658 \end{bmatrix} \tag{F.54}$$

we solve for $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ as follows:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0526 & -0.0921 \\ 0.1053 & 0.0658 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.987 \\ -0.276 \end{bmatrix} \tag{F.55}$$

Solution via Cramer's Rule

Equation (F.53) allows us to solve for all unknowns, x_i, where $i = 1$ to n. If we are interested in a single unknown, x_k, then Cramer's rule can be used. Given Eq. (F.50) , Cramer's rule states that

$$x_k = \frac{\det \mathbf{A}_k}{\det \mathbf{A}} \tag{F.56}$$

where $\mathbf{A}_k$ is a matrix formed by replacing the kth column of $\mathbf{A}$ by $\mathbf{B}$. For example, solve Eq. (F.52) . Using Eq. (F.56) with

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$$

we find

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -9 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{75}{76} = 0.987 \tag{F.57}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-21}{76} = -0.276$$

(1. Çevrimdeki empedansların toplamı) I_1 - (Ortak empedansların toplamı) I_2 = (1. Çevrimde uygulanan Gerilimlerin toplamı)

\- (Ortak empedansların toplamı) I_1 + (2. Çevrimdeki empedansların toplamı) I_2 = (2. Çevrimde uygulanan Gerilimlerin toplamı)

Çoğu zaman transfer fonksiyonunun bulunması için en kolay yöntem çevre gerilimleri değil, nod akımları yöntemidir. Diferansiyel denklemlerin sayısı gerilimleri bilinmeyen nod'ların sayısı kadardır. Nod denklemlerini yazarken devre elemanlarını admitans olarak göstermek kolaylık sağlar.

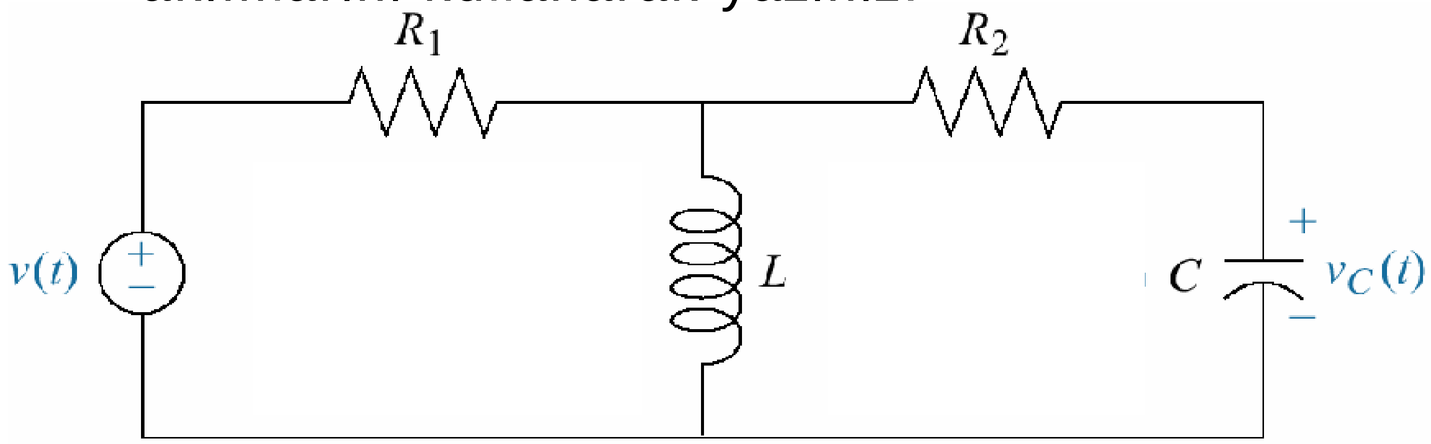
Admitans : Empedansın çarpmaya göre tersidir ve Y(s) ile gösterilir;

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{I(s)}{V(s)}$$

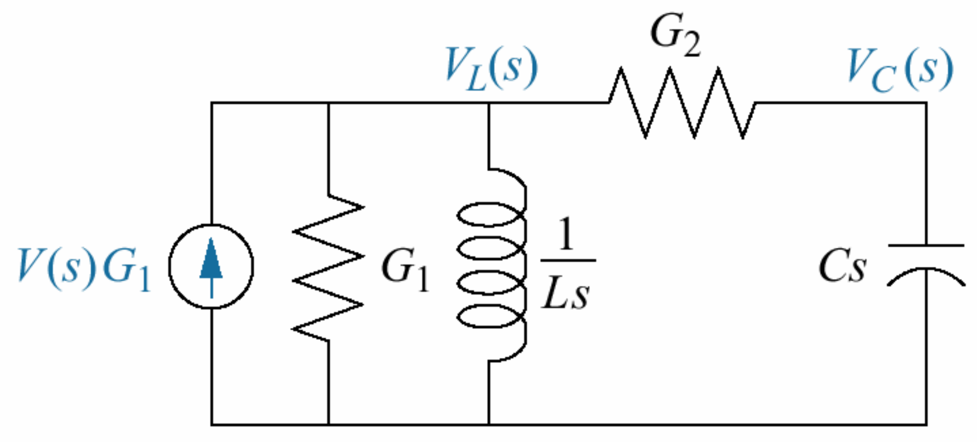
Nod akımları ile transfer fonksiyonunu elde edeceksek:

1. Devre elemanlarının admitans değerleri yazılır
2. Gerilim kaynakları akım kaynakları cinsinden yazılır (Eğer kolaylık sağlayacaksa)
3. Nod'da Kirşof akımlar yasası uygulanır
4. Çıkışı elde etmek için denklemler sırasıyla çözülür
5. Transfer fonksiyonu oluşturulur

Örnek: Aşağıdaki devrede $V_c(s)/V(s)$ transfer fonksiyonunu nod akımlarını kullanarak yazınız.



Gerilim kaynağını, akım kaynağına empedansları admitanslara dönüştürelim.



$$I(s) = Y(s)V(s)$$

$$G_1 V_L(s) + \frac{1}{Ls} V_L(s) + G_2[V_L(s) - V_C(s)] = V(s)G_1$$

Vc(s) nod'undaki akımların toplamı:

$$CsV_C(s) + G_2[V_C(s) - V_L(s)] = 0$$

V_L(S) ve V_C(s)'leri düzenleyelim:

$$\left(G_1 + G_2 + \frac{1}{Ls}\right)V_L(s) - G_2 V_C(s) = V(s)G_1$$

$$-G_2 V_L(s) + \left(G_2 + Cs\right)V_C(s) = 0$$

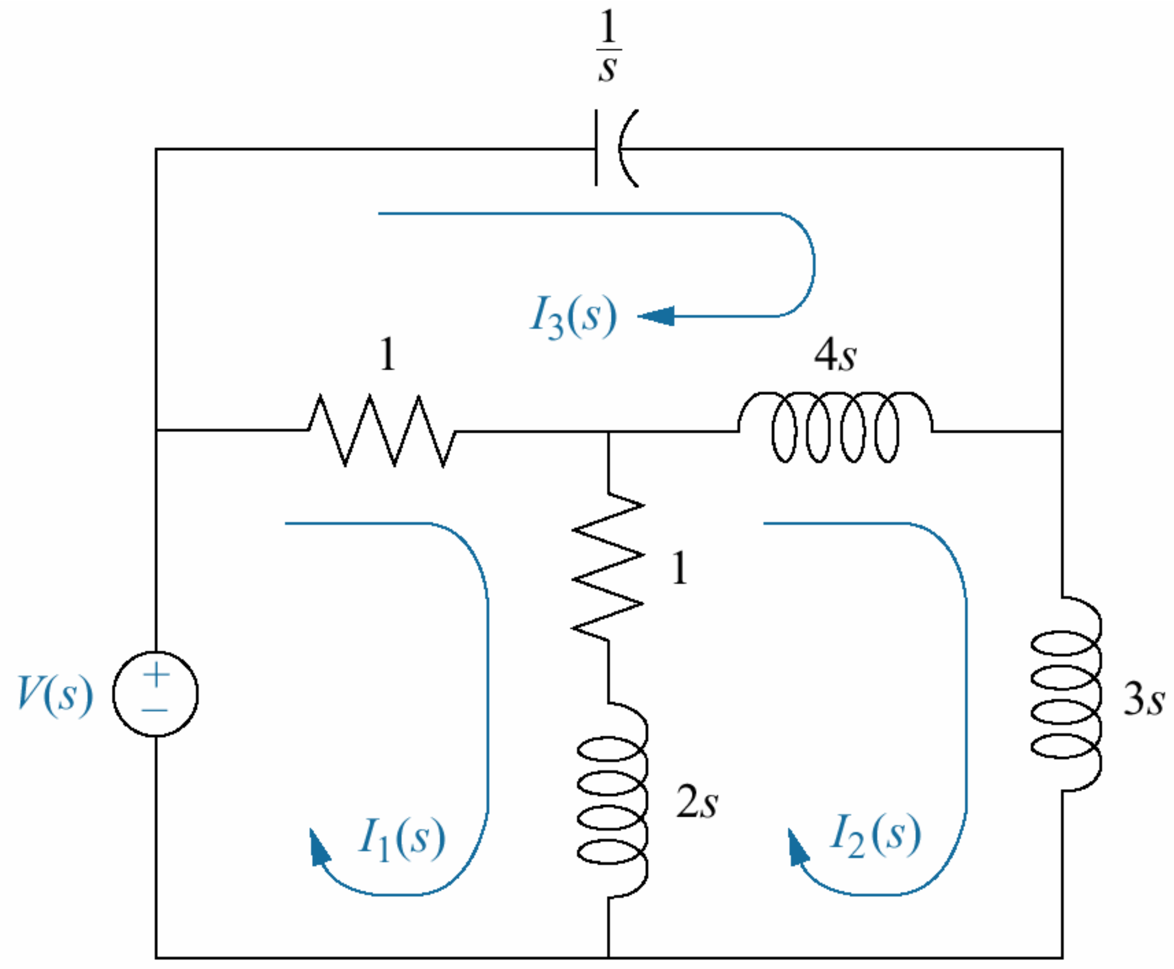
Sırayla çözdüğümüzde transfer fonksiyonu:

$$\frac{V_c(s)}{V(s)}=\frac{\dfrac{G_1G_2}{C}s}{\left(G_1+G_2\right)s^2+\dfrac{G_1G_2L+C}{LC}s+\dfrac{G_2}{LC}}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{1. Nod'a bağlı}\\\text{admitansların}\\\text{toplamı}\end{array}\right)V_L-\left(\begin{array}{l}\text{Ortak}\\\text{admitansların}\\\text{toplamı}\end{array}\right)V_C=\left(\begin{array}{l}\text{1. Nod'da}\\\text{uygulanan}\\\text{akımların}\\\text{toplamı}\end{array}\right)$$

$$-\left(\begin{array}{l}\text{Ortak}\\\text{admitansların}\\\text{toplamı}\end{array}\right)V_L+\left(\begin{array}{l}\text{2. Nod'a bağlı}\\\text{admitansların}\\\text{toplamı}\end{array}\right)V_C=\left(\begin{array}{l}\text{2. Nod'da}\\\text{uygulanan}\\\text{akımların}\\\text{toplamı}\end{array}\right)$$

Örnek: Aşağıdaki devrede çevre denklemlerini yazınız.



(1. Çevredeki empedansların toplamı) I_1 - (1. ve 2. Çevredeki ortak empedansların toplamı) I_2 - (1. ve 3. Çevredeki ortak empedansların toplamı) I_3 = (1. Çevrede uygulanan Gerilimlerin toplamı)

\- (1. ve 2. Çevredeki ortak empedansların toplamı) I_1 + (2. Çevredeki empedansların toplamı) I_2 - (2. ve 3. Çevredeki ortak empedansların toplamı) I_3 = (2. Çevrede uygulanan Gerilimlerin toplamı)

\- (1. ve 3. Çevredeki ortak empedansların toplamı) I_1 - (2. ve 3. Çevredeki ortak empedansların toplamı) I_2 + (3. Çevredeki empedansların toplamı) I_3 = (3. Çevrede uygulanan Gerilimlerin toplamı)

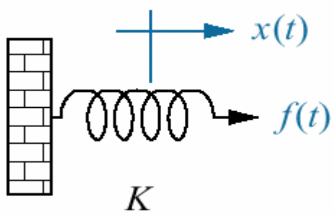
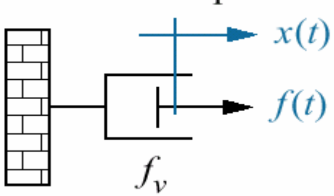
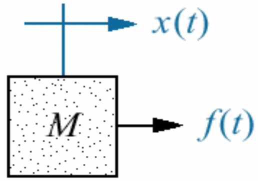
$$(2s+2)I_1(s) - (2s+1)I_2(s) - I_3(s) = V(s)$$

$$-(2s+1)I_1(s) + (9s+1)I_2(s) - 4sI_3(s) = 0$$

$$-I_1(s) - 4sI_2(s) + \left(4s+1+\frac{1}{s}\right)I_3(s) = 0$$

Mekaniksel Sistemlerin Transfer Fonksiyonları

(Düzlemsel Hareket)

Component	Force-velocity	Force-displacement	Impedance $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
Spring 	$f(t) = K\int_0^t v(\tau)\,d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
Viscous damper 	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \dfrac{dx(t)}{dt}$	$f_v s$
Mass 	$f(t) = M\dfrac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$	Ms^2

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $f(t)$ = N (newtons), $x(t)$ = m (meters), $v(t)$ = m/s (meters/second), K = N/m (newtons/meter), f_v = N-s/m (newton-seconds/meter), M = kg (kilograms = newton-seconds^2/meter).

Mekaniksel sistemler ile elekriksel sistemler arasında analoji oluşturmamız mümkündür.

Örneğin, uygulanan kuvvet, uygulanan gerilimin; hız, akımın; yer değiştirme de yük’ün karşılığıdır.

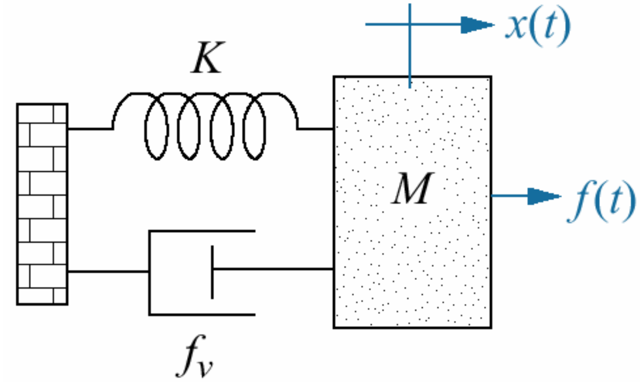
Mekaniksel Empedans: $$Z_M(s)=\frac{F(s)}{X(s)}$$

Yay elemanı: $$F(s)=KX(s)$$

Sönüm elemanı: $$F(s)=f_v sX(s)$$

Kütle: $$F(s)=Ms^2X(s)$$

Örnek:



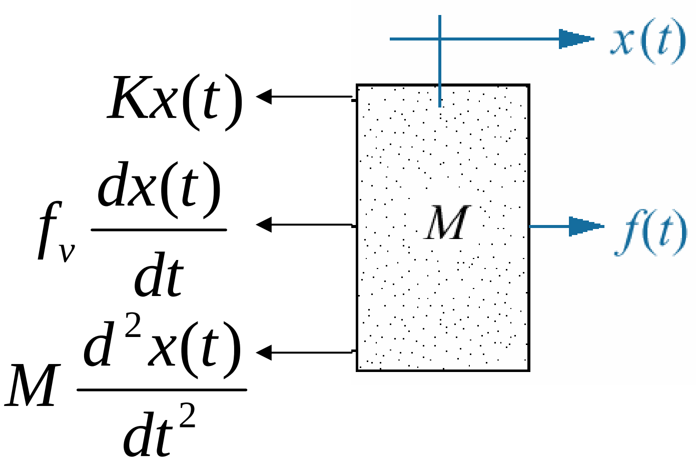
X(s)/F(s) transfer fonksiyonunu bulunuz.

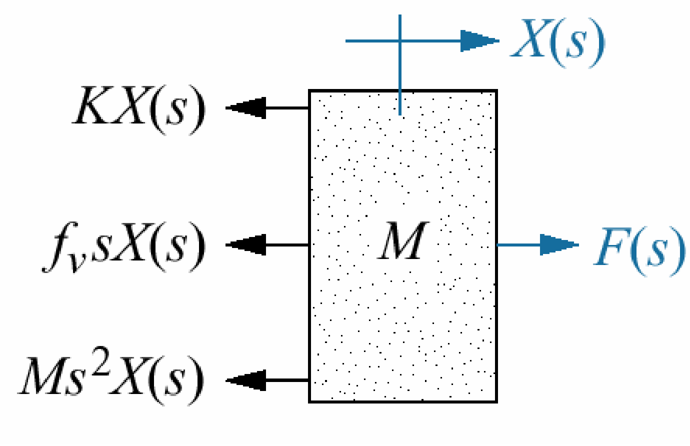
RLC devresine benziyor, mekaniksel sistemelerde diferansiyel denklem hareket denklemi ile yazılır ve bu mekaniksel sistemi tanımlar.

Elektriksel devrelerde akımın yönünü biz seçtiğimiz gibi mekaniksel sistemlerde de hareketin pozitif yönünü belirleriz ve serbest cisim diyagramını çizeriz.

Serbest cisim diyagramında cisme etkiyen tüm kuvvetler ve pozitif hareket yönü gösterilir. Kuvvetler zaman tanım aralığında veya Laplas dönüşümü ile(sıfır başlangıç koşulu varsayılarak) gösterilebilir.

Newton yasası uygulanarak, kuvvetler toplanır ve sıfıra eşitlenir.



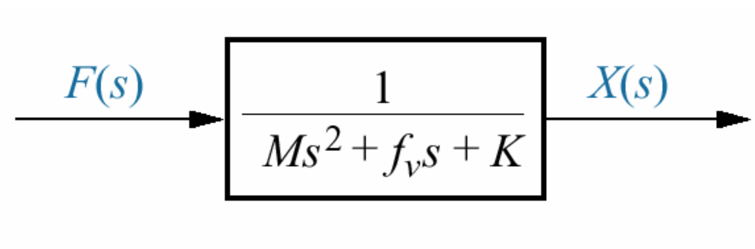


Kuvvetleri toplayıp sıfıra eşitleyecek olursak;

$$Ms^2X(s) + f_v sX(s) + KX(s) = F(s)$$

$$\left(Ms^2 + f_v s + K\right)X(s) = F(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + f_v s + K}$$



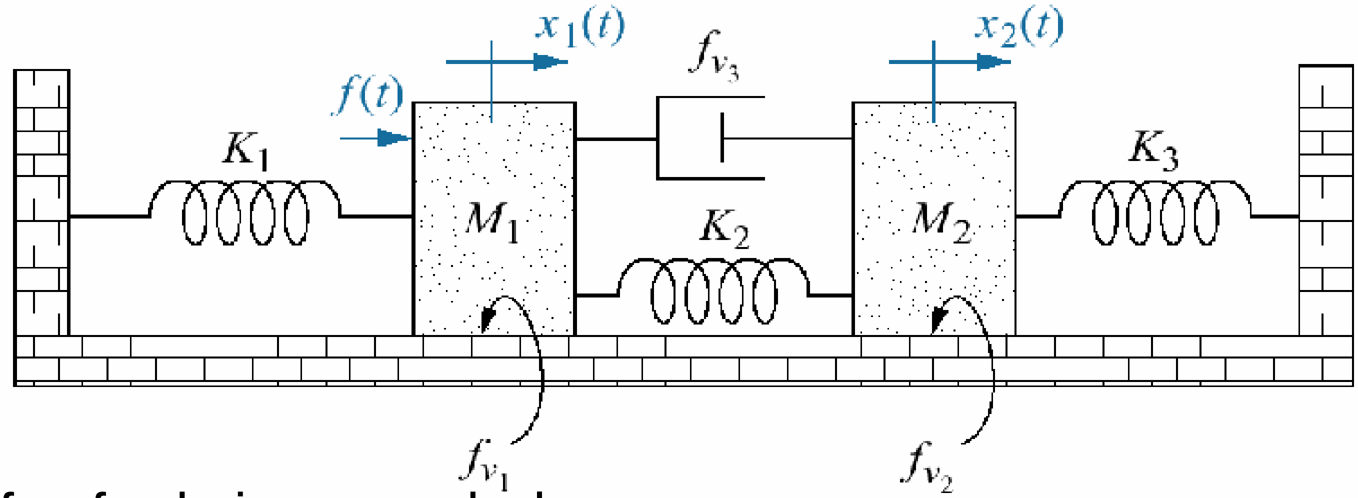
Çoğu mekaniksel sistemler, çok çevrimli çok nod'lu elektriksel devrelere benzemektedir ve sistemi tanımlamak için birden fazla diferansiyel denklem gerekir.

Mekaniksel sistemlerde gerekli olan hareket denklemlerinin sayısı, lineer olarak bağımsız hareketlerin sayısına eşittir.

Lineer bağımsızlığın manası hareket noktasının diğer hareket noktaları sabitlendiği halde hareket edebilmesidir. Lineer bağımsızlığın bir diğer manası serbestlik derecesidir.

Eletriksel sistemlerden örnek verecek olursdak; iki çevreli bir devrede her bir akım diğer çevrenin akımının etkisi altındadır. Eğer çevrelerden birini açık devre yaparsak, diğer çevrede gerilim kaynağı varsa o çevrede akım akmaya devam eder.

Örnek:

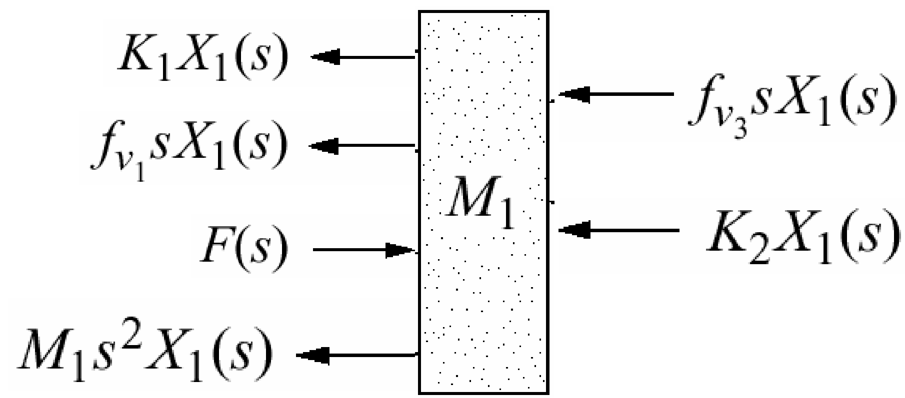


X(s)/F(s) transfer fonksiyonunu bulunuz.

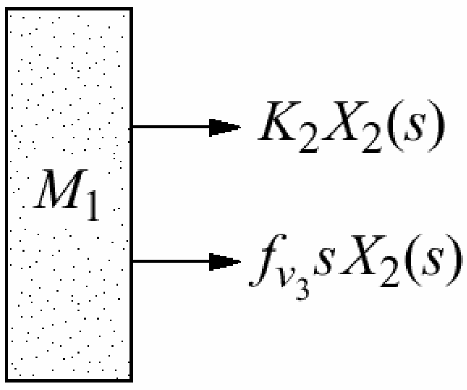
Her iki kütle yatay doğrultuda biri sabit iken hareket ettirilebileceği için sistemin serbestlik derecesi ikidir.

İki denklem iki kütlenin serbest cisim diyagramından elde edilecektir.

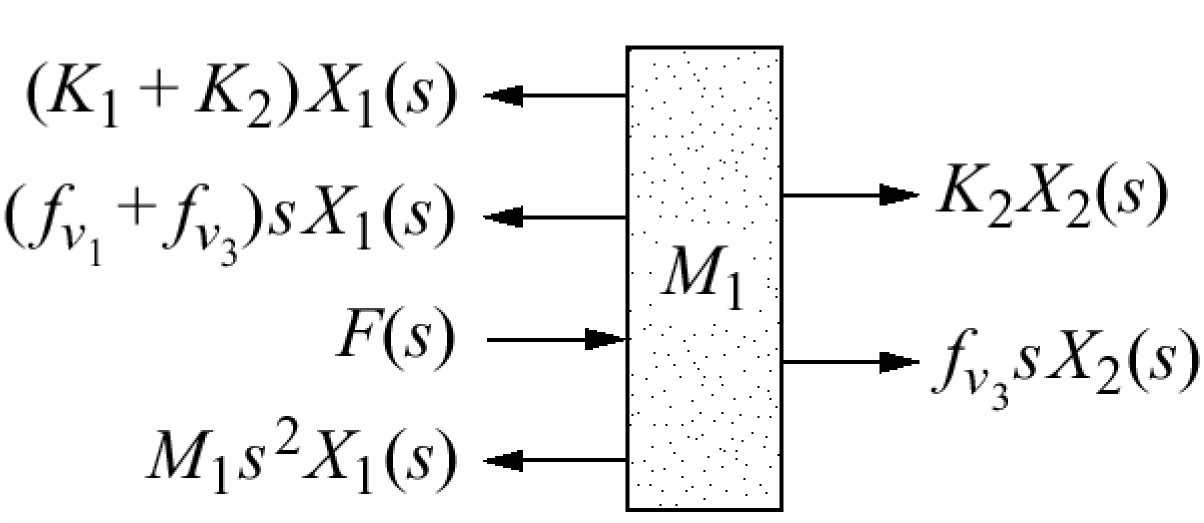
Eğer M_2'yi sabit tutup M_1'i sağa doğru hareket ettirecek olursak



Eğer M_1'yi sabit tutup M_2'i sağa doğru hareket ettirecek olursak

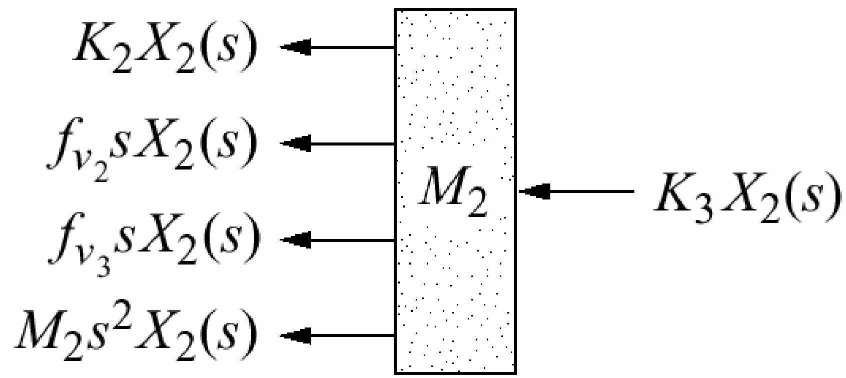


M_1 üzerine süperpozisyon uygulanacak olursa:

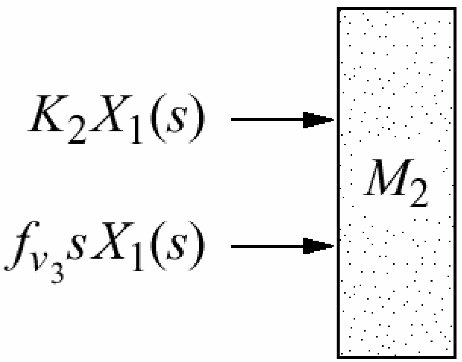


Aynı işlemleri M_2 için yapalım:

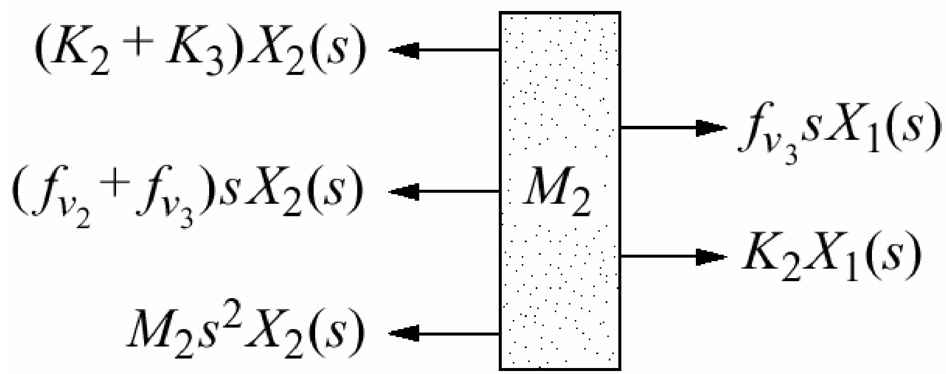
Eğer M_1'yi sabit tutup M_2'i sağa doğru hareket ettirecek olursak



Eğer M_2'yi sabit tutup M_1'i sağa doğru hareket ettirecek olursak



M_2 üzerine süperpozisyon uygulanacak olursa:



$$\left[M_1s^2+\left(f_{v1}+f_{v3}\right)s+\left(K_1+K_2\right)\right]X_1(s)-\left(f_{v3}s+K_2\right)X_2(s)=F(s)$$

$$-\left(f_{v3}s+K_2\right)X_1(s)+\left[M_2s^2+\left(f_{v2}+f_{v3}\right)s+\left(K_2+K_3\right)\right]X_2(s)=0$$

$$\frac{X_2(s)}{F(s)}=G(s)=\frac{(f_{v3}s+K_2)}{\Delta}$$

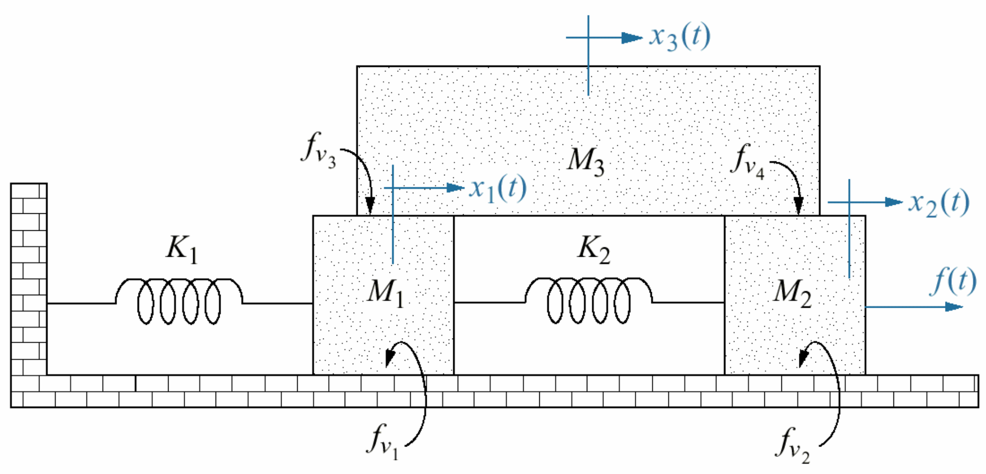
$$\Delta=\begin{bmatrix} M_1s^2+\left(f_{v1}+f_{v3}\right)s+\left(K_1+K_2\right) & -\left(f_{v3}s+K_2\right) \\ -\left(f_{v3}s+K_2\right) & M_2s^2+\left(f_{v2}+f_{v3}\right)s+\left(K_2+K_3\right) \end{bmatrix}$$

$$F(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{(f_{v_3}s + K_2)}{\Delta}} \longrightarrow X_2(s)$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{X1 deki}\\ \text{harekete bağlı}\\ \text{empedansların}\\ \text{toplamı}\end{array}\right) X_1 - \left(\begin{array}{l}\text{X1 ve X2 deki}\\ \text{ortak}\\ \text{empedansların}\\ \text{toplamı}\end{array}\right) X_2 = \left(\begin{array}{l}\text{X1'e uygulanan}\\ \text{Kuvveterin}\\ \text{toplamı}\end{array}\right)$$

$$- \left(\begin{array}{l}\text{X1 ve X2 deki}\\ \text{ortak}\\ \text{empedansların}\\ \text{toplamı}\end{array}\right) X_1 + \left(\begin{array}{l}\text{X2 deki}\\ \text{harekete bağlı}\\ \text{empedansların}\\ \text{toplamı}\end{array}\right) X_2 = \left(\begin{array}{l}\text{X2'e uygulanan}\\ \text{Kuvveterin}\\ \text{toplamı}\end{array}\right)$$

Örnek:



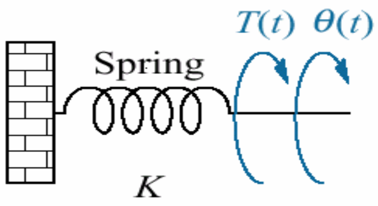
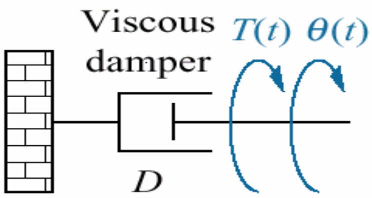
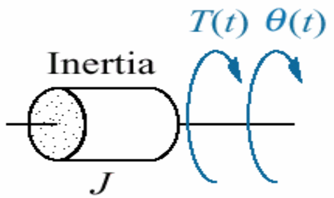
Yukarıdaki mekaniksel sistemin hareket denklemlerini direk yazınız.

$$\left[M_1 s^2 + \left(f_{v1} + f_{v3}\right)s + \left(K_1 + K_2\right)\right]X_1(s) - K_2 X_2(s) - f_{v3} s X_3(s) = 0$$

$$-K_2 X_1(s) + \left[M_2 s^2 + \left(f_{v2} + f_{v4}\right)s + K_2\right]X_2(s) - f_{v4} s X_3(s) = F(s)$$

$$-f_{v3} s X_1(s) - f_{v4} s X_2(s) + \left[M_3 s^2 + \left(f_{v3} + f_{v4}\right)s\right]X_3(s) - f_{v4} s X_3(s) = 0$$

Mekaniksel Sistemlerin Transfer Fonksiyonları (Dairesel Hareket)

Component	Torque-angular velocity	Torque-angular displacement	Impedance $Z_M(s) = T(s)/\theta(s)$
	$T(t) = K\int_0^t \omega(\tau)\,d\tau$	$T(t) = K\theta(t)$	K
	$T(t) = D\omega(t)$	$T(t) = D\frac{d\theta(t)}{dt}$	Ds
	$T(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt}$	$T(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	Js^2

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $T(t)$ = N-m (newton-meters), $\theta(t)$ = rad (radians), $\omega(t)$ = rad/s (radians/second), K = N-m/rad (newton-meters/radian), D = N-m-s/rad (newton-meters-seconds/radian), J = kg-m^2 (kilogram-meters^2 = newton-meters-seconds^2/radian).

Dairesel hareket eden mekaniksel sistemler düzlemsel hareket eden mekaniksel sistemler gibi ele alınır. Kuvvet'in yerini tork, düzlemsel yer değiştirmenin yerini açısal yer değiştirme alır. Ayrıca kütle yerine atalet ifadesi kullanılır.

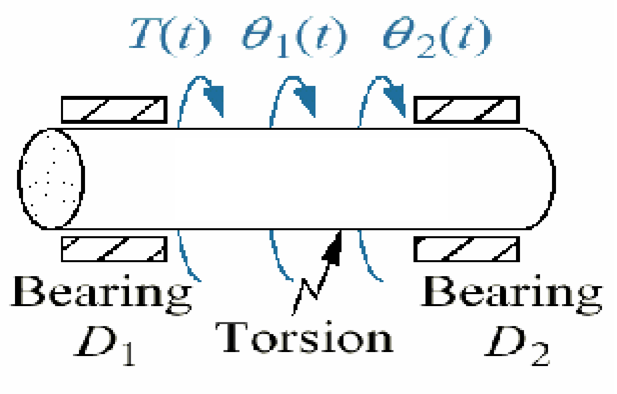
Serbestlik derecesi ise düzlemsel harekette yer değiştirme ile belirlenirken dairesel harekette dönebilme ile belirlenir.

Önce, hareket noktalarını sabit tutularak cismi döndürürüz ve oluşacak torkları serbest cisim diyagramı üzerinde gösteririz.

Sonra cismi sabitleyip sırasıyla bitişik hareket noktaları döndürülerek oluşacak torklar serbest cisim diyagramında gösterilir. Her bir hareket noktası için bu işlemi tekrarlanır.

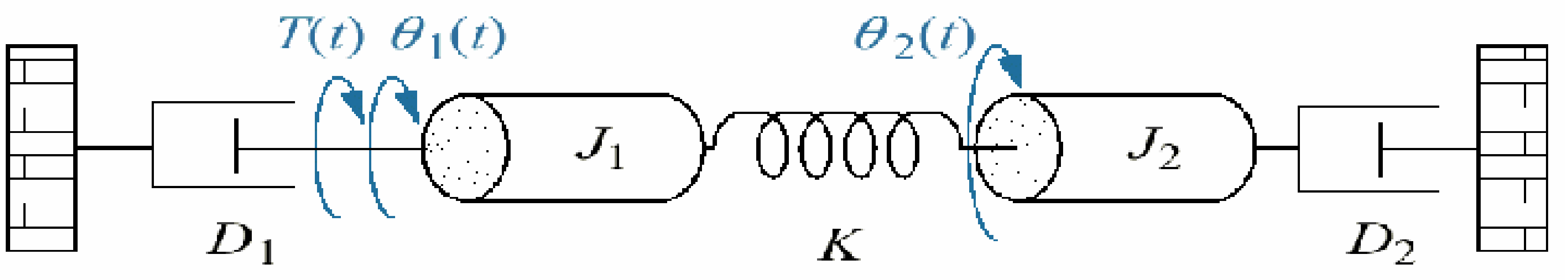
Tüm serbest cisim diyagramlarında tork'lar toplanır ve sıfıra eşitlenir.

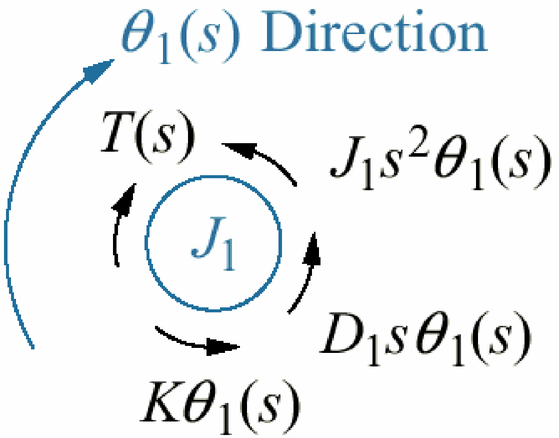
Örnek:



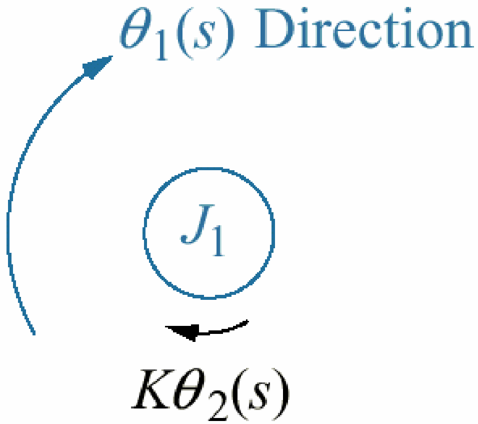
Sistemin, $\theta_2(s)/T(s)$ transfer fonksiyonunu yazınız. Çubuk her iki taraftan yataklanmışıtır ve burulmaya maruz kalmaktadır. Sağ tarafa tork uygulanırken yer değişrtirme sol taraftan ölçülmektedir.

Burada çubuğun burulmasını iki atalet arasında bulunan yay gibi düşünebiliriz.

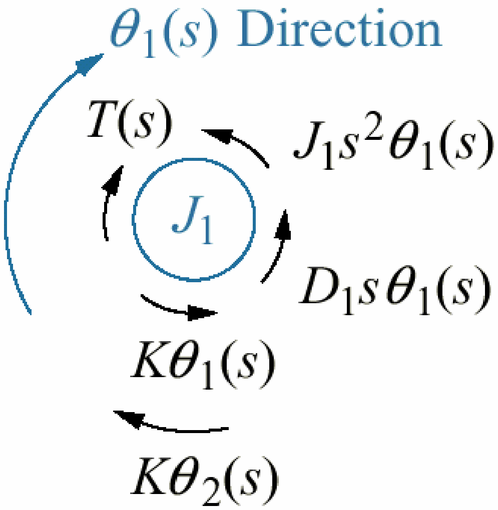




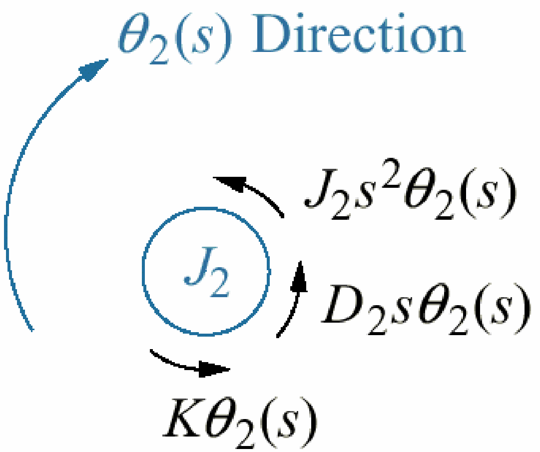
J_1 üzerindeki J_1'nın hareketiyle oluşan Torklar



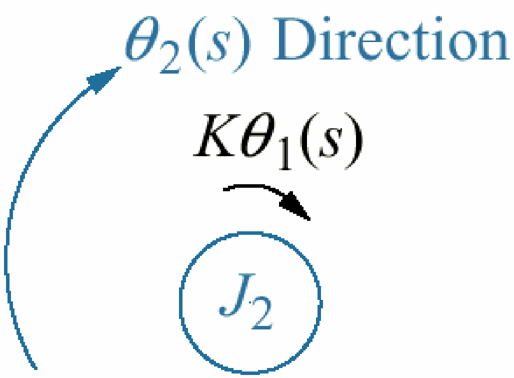
J_1 üzerindeki J_2'nın hareketiyle oluşan Torklar



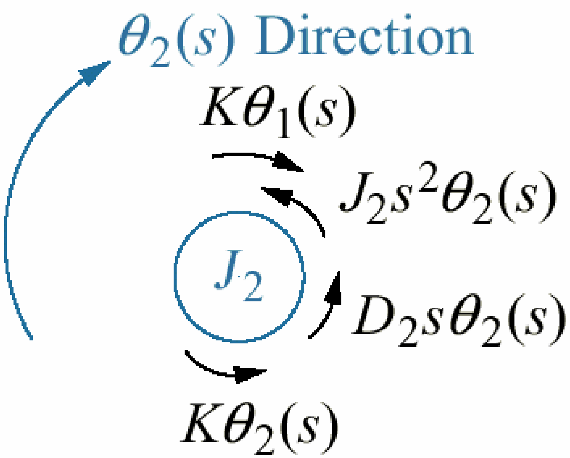
J_1 üzerindeki oluşan toplam Torklar



J_2 üzerindeki J_2'nın hareketiyle oluşan Torklar



J_2 üzerindeki J_1'nın hareketiyle oluşan Torklar



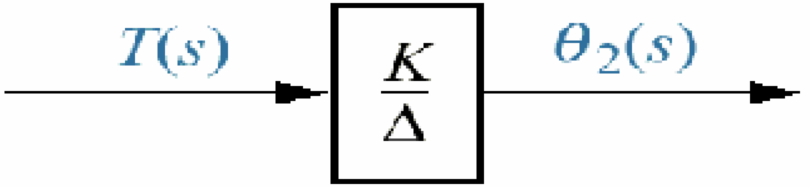
J_2 üzerindeki oluşan toplam Torklar

Her iki ataletteki torkları topladığımızda, hareket denklemini elde ederiz:

$$\left(J_1 s^2 + D_1 s + K\right)\theta_1(s) - K\theta_2(s) = T(s)$$

$$-K\theta_1(s) + \left(J_2 s^2 + D_2 s + K\right)\theta_2(s) = 0$$

$$\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{K}{\Delta}$$

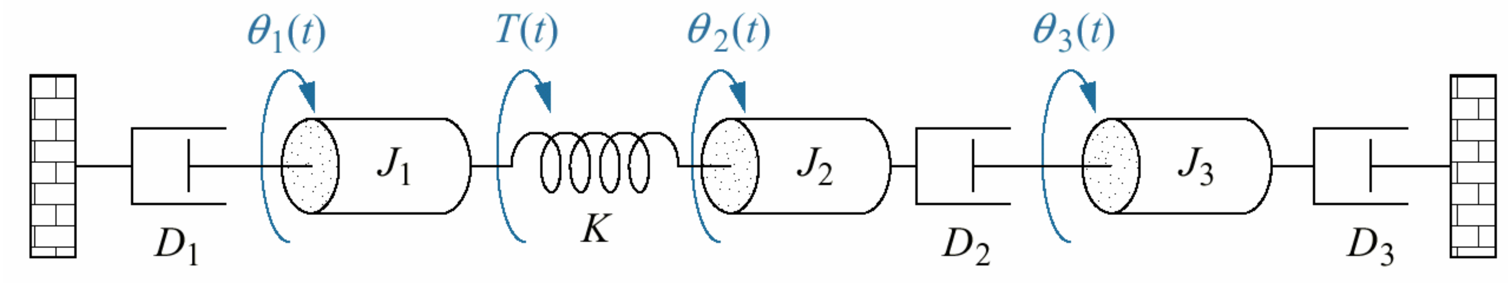


$$\Delta = \begin{bmatrix} \left(J_1 s^2 + D_1 s + K\right) & -K \\ -K & \left(J_2 s^2 + D_2 s + K\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \text{ deki} \\ \text{harekete bağlı} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_1 - \begin{pmatrix} \theta_1 \text{ ve } \theta_2 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_2 = \begin{pmatrix} \theta_1\text{'e uygulanan} \\ \text{Torkların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} \theta_1 \text{ ve } \theta_2 \text{ deki} \\ \text{ortak} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_1 + \begin{pmatrix} \theta_2 \text{ deki} \\ \text{harekete bağlı} \\ \text{empedansların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix} \theta_2 = \begin{pmatrix} \theta_2\text{'e uygulanan} \\ \text{Torkların} \\ \text{toplamı} \end{pmatrix}$$

Örnek:



Hareket denklemlerini direk yazınız.

$$\begin{pmatrix}\theta_1 \text{ deki}\\ \text{harekete bağlı}\\ \text{empedansların}\\ \text{toplamı}\end{pmatrix}\theta_1 - \begin{pmatrix}\theta_1 \text{ ve } \theta_2 \text{ deki}\\ \text{ortak}\\ \text{empedansların}\\ \text{toplamı}\end{pmatrix}\theta_2 - \begin{pmatrix}\theta_1 \text{ ve } \theta_3 \text{ deki}\\ \text{ortak}\\ \text{empedansların}\\ \text{toplamı}\end{pmatrix}\theta_3 = \begin{pmatrix}\theta_1\text{'e uygulanan}\\ \text{Torkların}\\ \text{toplamı}\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}\theta_1 \text{ ve } \theta_2 \text{ deki}\\ \text{ortak}\\ \text{empedansların}\\ \text{toplamı}\end{pmatrix}\theta_1 + \begin{pmatrix}\theta_2 \text{ deki}\\ \text{harekete bağlı}\\ \text{empedansların}\\ \text{toplamı}\end{pmatrix}\theta_2 - \begin{pmatrix}\theta_2 \text{ ve } \theta_3 \text{ deki}\\ \text{ortak}\\ \text{empedansların}\\ \text{toplamı}\end{pmatrix}\theta_3 = \begin{pmatrix}\theta_2\text{'e uygulanan}\\ \text{Torkların}\\ \text{toplamı}\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}\theta_1 \text{ ve } \theta_3 \text{ deki}\\ \text{ortak}\\ \text{empedansların}\\ \text{toplamı}\end{pmatrix}\theta_1 - \begin{pmatrix}\theta_2 \text{ ve } \theta_3 \text{ deki}\\ \text{ortak}\\ \text{empedansların}\\ \text{toplamı}\end{pmatrix}\theta_2 + \begin{pmatrix}\theta_3 \text{ deki}\\ \text{harekete bağlı}\\ \text{empedansların}\\ \text{toplamı}\end{pmatrix}\theta_3 = \begin{pmatrix}\theta_3\text{'e uygulanan}\\ \text{Torkların}\\ \text{toplamı}\end{pmatrix}$$

$$\left(J_1 s^2 + D_1 s + K\right)\theta_1(s) - K\theta_2(s) - 0\theta_3(s) = T(s)$$

$$-K\theta_1(s) + \left(J_2 s^2 + D_2 s + K\right)\theta_2(s) - D_2 s\theta_3(s) = 0$$

$$-0\theta_1(s) - D_2 s\theta_2(s) + \left(J_3 s^2 + D_3 s + D_2 s\right)\theta_3(s) = 0$$