MÜHENDİSLİK MEKANİĞİ

DİNAMİK

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

Behcet DAĞHAN

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

İÇİNDEKİLER

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

2

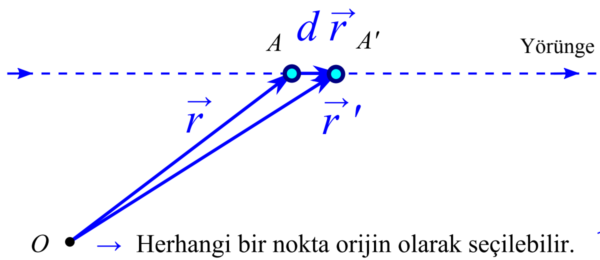
KİNEMATİK

MADDESEL NOKTALARIN KİNEMATİĞİ

2.1

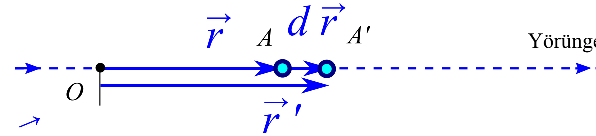
Doğrusal Hareket

Yörüngesi bir doğru olan harekete doğrusal hareket denir.



→ Herhangi bir nokta orijin olarak seçilebilir.

Fakat yörünge üzerinde bir noktanın orijin olarak seçilmesi daha uygundur.



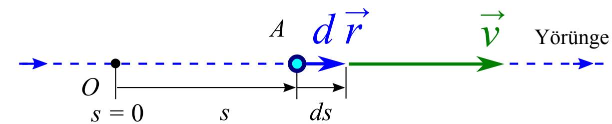
$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Yön : $\vec{v} \parallel d\vec{r}$ Yönleri aynıdır.

Doğrusal harekette hız vektörü daima yörüngeye paraleldir.

Dolayısıyla bütün hız vektörleri de birbirine paraleldir.

Şiddet : $\boxed{v = \frac{ds}{dt}} = \dot{s} = \frac{|d\vec{r}|}{dt}$ ← $|d\vec{r}| = ds$



$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Yön : $\vec{a} \parallel d\vec{v}$ Yönleri aynıdır.

Doğrusal harekette ivme vektörü daima yörüngeye paraleldir.

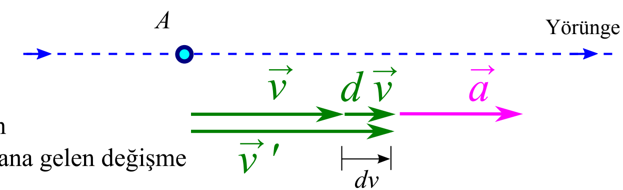
Dolayısıyla bütün ivme vektörleri de birbirine paraleldir.

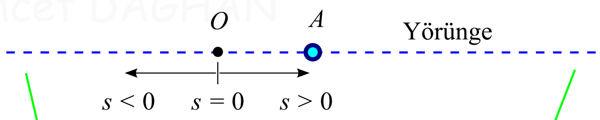
Şiddet : $\boxed{a = \frac{dv}{dt}} = \dot{v} = \frac{|d\vec{v}|}{dt}$ ← $|d\vec{v}| = dv$

Hız vektöründeki vektörel değişimin boyu

Hız vektörünün boyunda meydana gelen değişme

Bu eşitlik sadece doğrusal harekette geçerlidir.

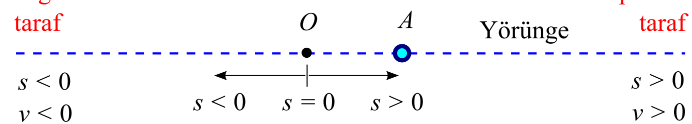




Yörüngenin bir tarafı
keyfi olarak pozitif taraf seçilir ve
diğer taraf negatif taraf olur.
Pozitif taraf verilen problemde önceden seçilmiş olabilir.

Keyfi olarak seçilmiş olan negatif taraf

Keyfi olarak seçilmiş olan pozitif taraf



$s < 0$, $v < 0$, $a < 0$

$s > 0$, $v > 0$, $a > 0$

$v < 0$ ← → $v > 0$

$a < 0$ ← → $a > 0$

Orijinden itibaren bir taraf pozitif konumların bulunduğu taraftır ve
diğer taraf da negatif konumların bulunduğu taraftır.

Doğrusal harekette hız ve ivme vektörleri
daima yörüngeye paralel oldukları için
bu vektörlerin sadece şiddetleri ile ilgilenmek
yeterli olur. Hız ve ivme vektörlerinin hangi
yönde olduklarını belirtmek için de
şiddetleri pozitif veya negatif alınır.

Sadece doğrusal harekette
yön belirtmek
için kullanılır.

$v = -12$ m/s $\quad a = -10$ m/s^2

Hızlanma	Hızlanma	Yavaşlama	Yavaşlama
$v < 0$ ←	$v > 0$ →	$v < 0$ ←	→ $v > 0$
$a < 0$ ←	$a > 0$ →	$a > 0$ →	← $a < 0$

İvme negatif olsa da maddesel nokta
hızlanabilir.

İvme pozitif olsa da maddesel nokta
yavaşlayabilir.

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

Aşağıdaki bağıntıların tamamı yukarıdaki iki bağıntıdan yola çıkarak elde edilmiş bağıntılardır.
Problem çözerken yapılabilecek matematik işlemlere örnek olarak verilmiştir.
Doğrusal hareket problemlerinde zaman, konum, hız ve ivme büyüklükleri arasında $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$, $v(s)$, $a(v,s)$ vb. bağıntılar verilmiş olabilir.
Verilen bağıntıda hangi büyüklüğün hangisine bağlı olduğuna ve problemin diğer verilerine bakıp
ona göre aşağıdaki sık rastlanılan formlardan faydalanarak problem çözülür.

$v = \frac{ds}{dt}$	$v = \frac{ds(t)}{dt}$	veya	$ds = v\,dt$	$ds = v(t)\,dt$	veya	$dt = \frac{ds}{v}$	$dt = \frac{ds}{v(s)}$
$a = \frac{dv}{dt}$	$a = \frac{dv(t)}{dt}$	veya	$dv = a\,dt$	$dv = a(t)\,dt$	veya	$dt = \frac{dv}{a}$	$dt = \frac{dv}{a(v)}$
$\frac{a}{v} = \frac{dv}{ds}$	$\frac{a}{v} = \frac{dv(s)}{ds}$	veya	$v\,dv = a\,ds$	$v\,dv = a(s)\,ds$	veya	$ds = \frac{v\,dv}{a}$	$ds = \frac{v\,dv}{a(v)}$

$a = a_0 = \text{sb.}$ iken:

İvme, sabit olduğu için integral dışında bırakılabilir.

$dv = a\,dt \rightarrow \int_{v_1}^{v_2} dv = a_0 \int_{t_1}^{t_2} dt \qquad v_2 - v_1 = a_0\,(t_2 - t_1) \qquad \boxed{\Delta v = a_0\ \Delta t}$

veya $\int_{v_0}^{v} dv = a_0 \int_{0}^{t} dt \rightarrow \boxed{v = v_0 + a_0\, t}$

$v = f(t)$

$ds = v\,dt \rightarrow \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (v_0 + a_0\,t)\,dt$

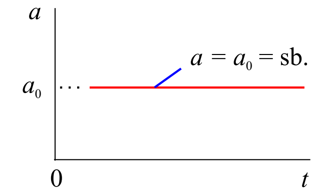
veya $\int_{s_0}^{s} ds = \int_{0}^{t} (v_0 + a_0\,t)\,dt \rightarrow \boxed{s = s_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a_0\,t^2}$

$s = f(t)$

$v\,dv = a\,ds \rightarrow \int_{v_1}^{v_2} v\,dv = a_0 \int_{s_1}^{s_2} ds$

veya $\int_{v_0}^{v} v\,dv = a_0 \int_{0}^{s} ds \rightarrow \boxed{v^2 = v_0^2 + 2\,a_0\,s}$

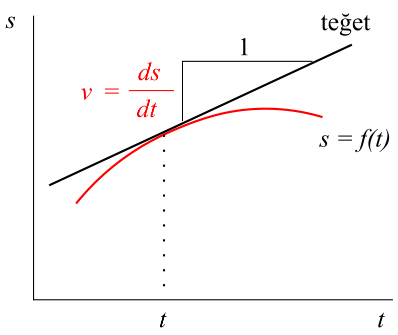
$v = f(s)$

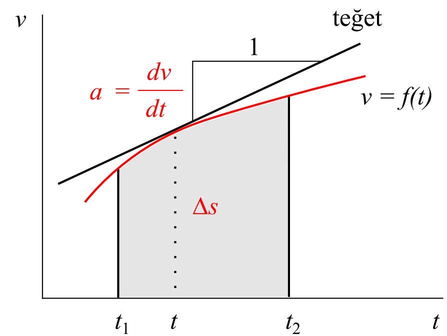


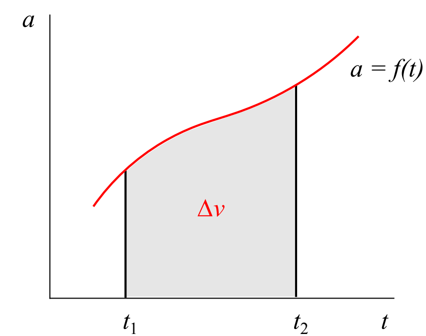
$+$ lar daima $+$ dır.
s_0, v_0 veya a_0 negatif olabilir.

s-t grafiğinin teğetinin eğimi *t*-anındaki hızı verir.

v-t grafiğinin teğetinin eğimi *t*-anındaki ivmeyi verir.







v-t grafiğinin altında kalan alan, göz önüne alınan zaman aralığında konumların farkını (Δs) verir.

a-t grafiğinin altında kalan alan, göz önüne alınan zaman aralığında hızların farkını (Δv) verir.

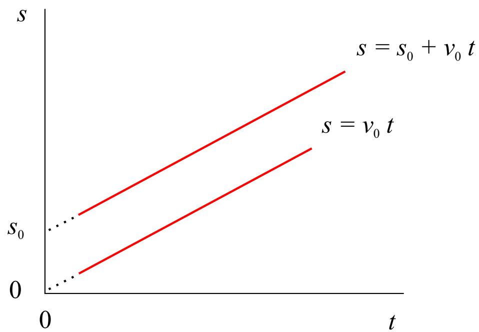
$$ds = v\,dt \quad \rightarrow \quad \underbrace{\int_{s_1}^{s_2} ds}_{\Delta s} = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt}_{\left(\begin{array}{l} v\text{-}t \text{ grafiğinin} \\ \text{altında kalan alan} \end{array}\right)}$$

$$dv = a\,dt \quad \rightarrow \quad \underbrace{\int_{v_1}^{v_2} dv}_{\Delta v} = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt}_{\left(\begin{array}{l} a\text{-}t \text{ grafiğinin} \\ \text{altında kalan alan} \end{array}\right)}$$

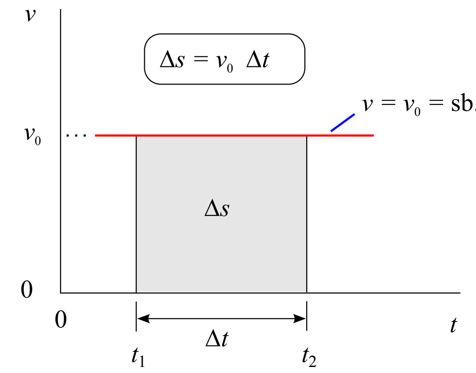
Not : Bu grafikler aynı hareket için çizilirken birbiri ile uyumlu çizilir. Buradaki grafikler ise aynı hareket için çizilmiş grafikler değildir.

$v = v_0 = \text{sb.}$
$a = 0$

$\rightarrow$



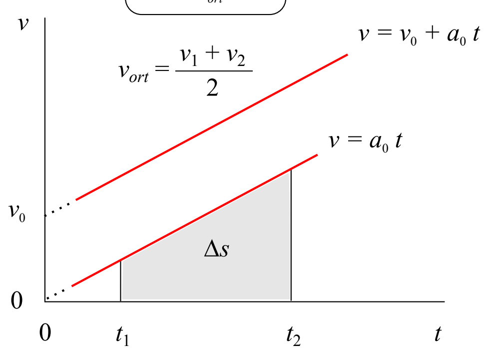
$\rightarrow$



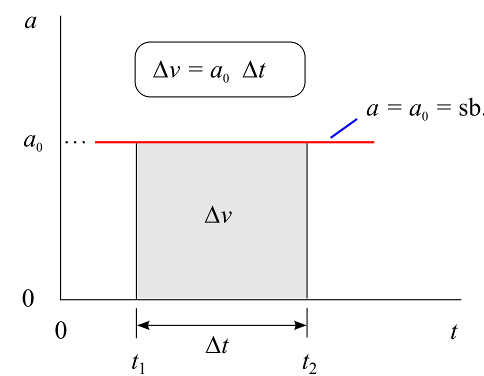
$a = a_0 = \text{sb.}$

$\rightarrow$

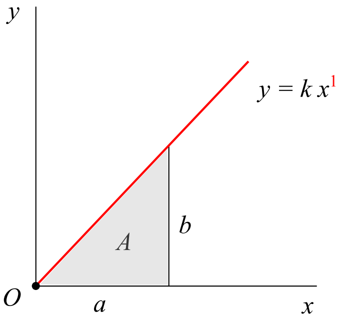
$\Delta s = v_{ort} \;\Delta t$



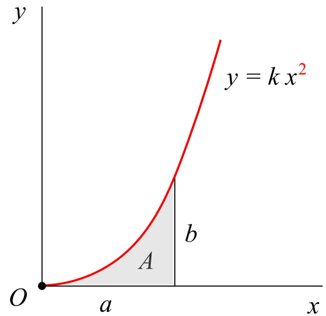
$\rightarrow$



Parabolik bir eğrinin altında kalan alanı bulmanın pratik yolu

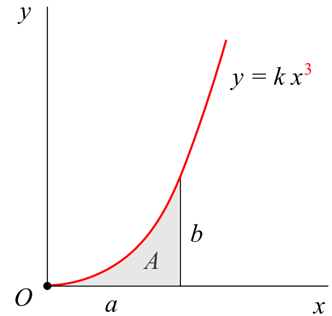


$$A = \frac{1}{2}\,a\,b$$



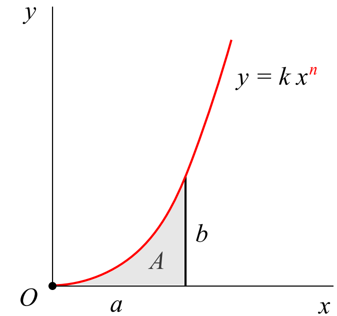
$O\,(0,0)$

$$A = \frac{1}{3}\,a\,b$$



$$A = \frac{1}{4}\,a\,b$$

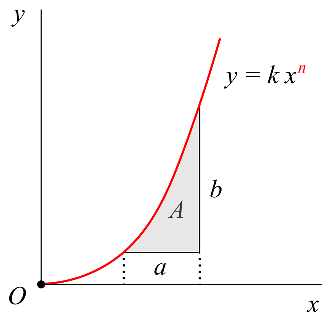
. . .



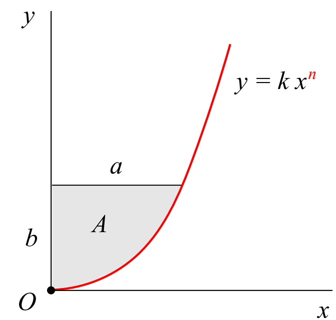
$$A = \frac{1}{n+1}\,a\,b$$

$$A \neq \frac{1}{n+1}\,a\,b$$

$$n \geq 2$$



$$A = \frac{n}{n+1}\,a\,b$$



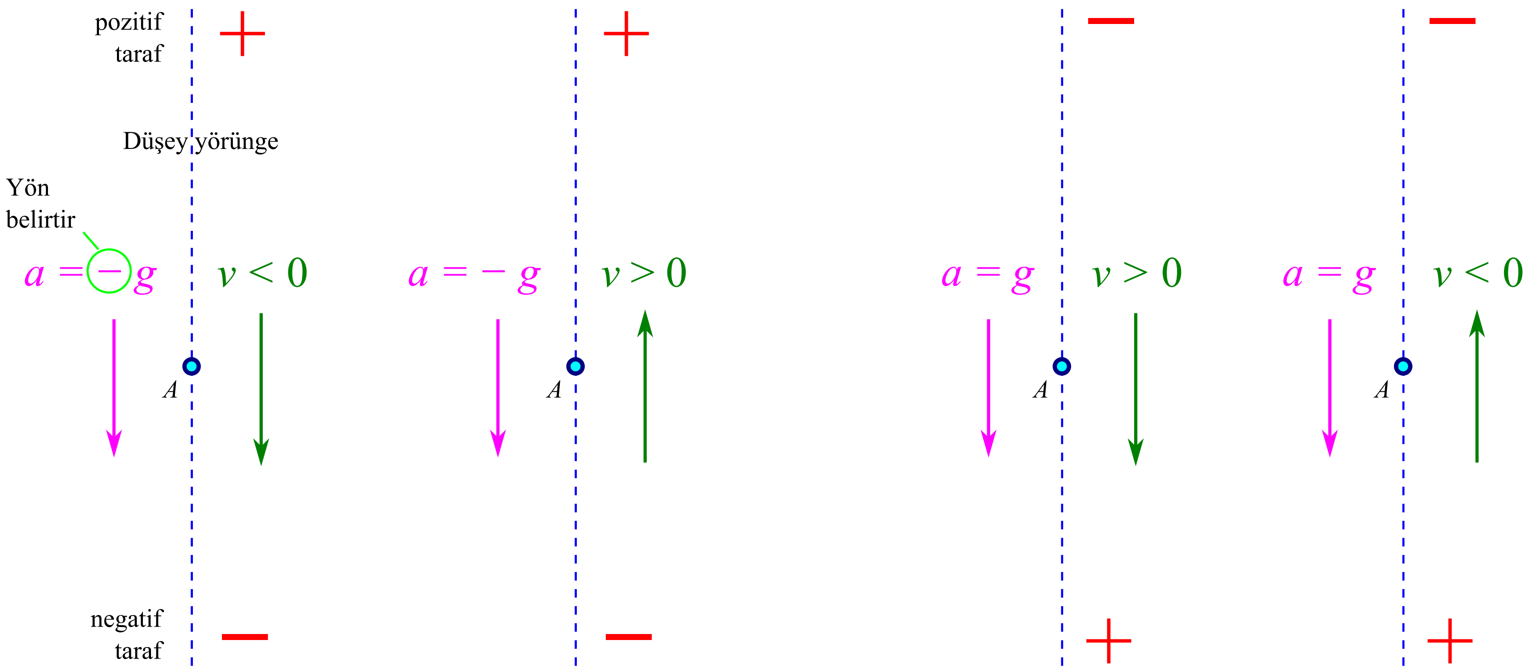
Serbest düşme veya düşey atışta hız ve ivmenin durumu

Sadece yerçekimi etkisinde düşey olarak doğrusal hareket yapan bir maddesel noktanın ivmesi daima düşey ve aşağı doğrudur.

Yukarı taraf pozitif seçilirse

$$a = a_0 = \text{sb.}$$

Aşağı taraf pozitif seçilirse



Örnek Problem 2/1

Bir cisim x-ekseni boyunca sabit bir ivme ile hareket etmektedir. $t = 0$ anında $x_0 = -\,6$ m ve $v_{x0} = 4$ m/s dir. Ayrıca $t = 10$ s anında x in değeri maksimum değere ulaşmıştır. x_{max} değerini ve $t = 15$ s anındaki x değerini bulunuz. $t = 0$ ile $t = 15$ s zaman aralığında maddesel noktanın konumundaki değişmeyi ve katettiği yolu bulunuz.

1. *Çözüm*

Verilenler:

$a = a_{x0}$ (sabit)

$t = 0$ iken $x = x_0 = -\,6$ m

$v = v_{x0} = 4$ m/s

$t = 10$ s anında $x = x_{max}$

$\dot{x} = 0$ iken $x = x_{max}$ olur.

$\dot{x} = v_x$

İstenenler:

$x_{max} = ?$

$t = 15$ s anında $x = ?$

$\left.\begin{matrix} t_1 = 0 \\ t_2 = 15 \text{ s} \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} \Delta x = ? \\ D = ? \end{matrix}$

$a = a_{x0}$ (sabit)

$$v_x = v_{x0} + a_{x0}\, t$$

$t = 10$ s $\rightarrow$ $v_x = 0$

$$0 = 4 + a_{x0}\,(10)$$

$$a_{x0} = -\,\frac{2}{5} \ \text{m/s}^2$$

$$x = x_0 + v_{x0}\, t + \frac{1}{2}\, a_{x0}\, t^2$$

$$x = -\,6 + 4t + \frac{1}{2}\left(-\,\frac{2}{5}\right) t^2$$

$$\boxed{x = -\,6 + 4t - \frac{t^2}{5}} \quad x = f(t)$$

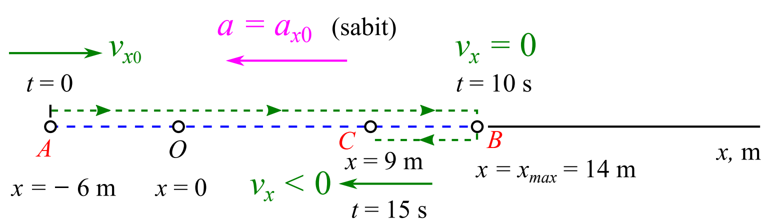
$t = 10$ s anında $x = \boxed{x_{max} = 14 \text{ m}}$

$t = 15$ s anında $\boxed{x = 9 \text{ m}}$

$t_1 = 0$, $t_2 = 15$ s
zaman aralığında
maddesel nokta yön değiştirdiği
için konumdaki değişme Δx ile
katettiği yol D
birbirine eşit değildir.

$$\Delta x = \overline{AC}$$
$$\Delta x = x_C - x_A$$
$$\Delta x = 9 - (-\,6)$$
$$\boxed{\Delta x = 15 \text{ m}}$$

$$D = \overline{AB} + \overline{BC}$$
$$D = (x_B - x_A) + (x_B - x_C)$$
$$D = [14 - (-\,6)] + (14 - 9)$$
$$\boxed{D = 25 \text{ m}}$$



Örnek Problem 2/1

Bir cisim x-ekseni boyunca sabit bir ivme ile hareket etmektedir. $t = 0$ anında $x_0 = -6$ m ve $v_{x0} = 4$ m/s dir. Ayrıca $t = 10$ s anında x in değeri maksimum değere ulaşmıştır. x_{max} değerini ve $t = 15$ s anındaki x değerini bulunuz. $t = 0$ ile $t = 15$ s zaman aralığında maddesel noktanın konumundaki değişmeyi ve katettiği yolu bulunuz.

---

2. Çözüm

Verilenler:

$a = a_{x0}$ (sabit)

$t = 0$ iken $x = x_0 = -6$ m
$v = v_{x0} = 4$ m/s

$t = 10$ s anında $x = x_{max}$

$\dot{x} = 0$ iken $x = x_{max}$ olur.

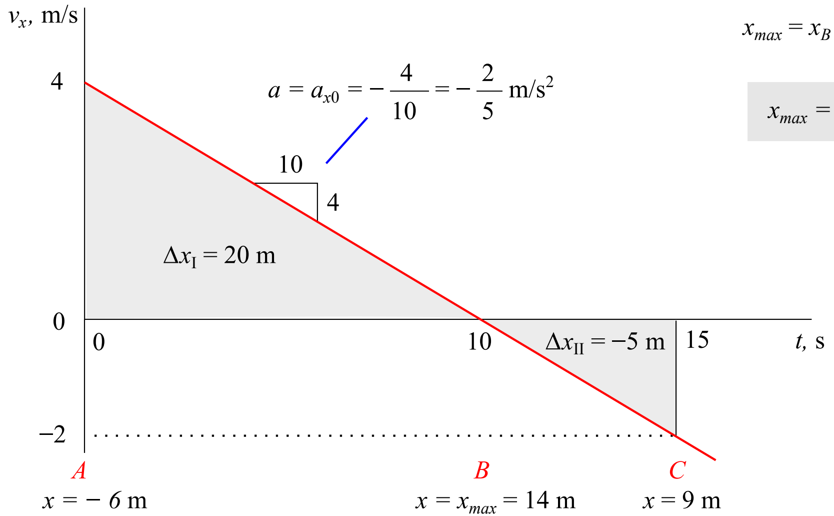
$\dot{x} = v_x$

İstenenler:

$x_{max} = ?$

$t = 15$ s anında $x = ?$

$\left.\begin{array}{l} t_1 = 0 \\ t_2 = 15 \text{ s} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \Delta x = ? \\ D = ? \end{array}$



$x_{max} = x_B = (-6) + 20$

$\boxed{x_{max} = 14 \text{ m}}$

$x_C = (-6) + 20 + (-5)$

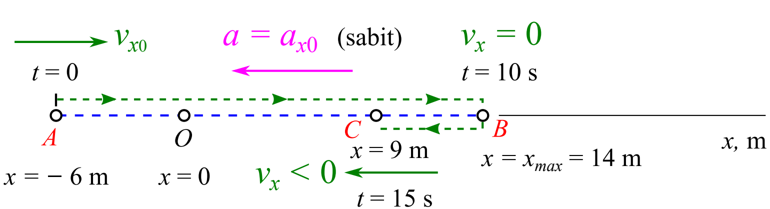
$\boxed{x_C = 9 \text{ m}}$

$\Delta x = 20 + (-5)$

$\boxed{\Delta x = 15 \text{ m}}$

$D = 20 + |-5|$

$\boxed{D = 25 \text{ m}}$



Örnek Problem 2/2

Doğrusal hareket yapan bir araba, hareketsiz iken 10 s içinde düzgün bir şekilde sıfıra inen 6 m/s^2 lik bir ivme ile harekete başlıyor ve 10 s sonunda da sabit bir hızla harekete devam ediyor. Başlangıçtan itibaren katettiği yol ne kadar sürede 400 m olur?

Verilenler:

Göz önüne alınan aralıkta hareketin yönü değişmediği için katedilen yol konumlar arası farka eşittir.

$D = \Delta s = 400$ m

Hareketin iki farklı zaman aralığında iki farklı ivmesi var. Dolayısıyla hareketi iki kısımda incelemek uygun olacaktır.

I. kısım:

$a = f(t)$

$t = 0$ iken $v = v_0 = 0$

II. kısım:

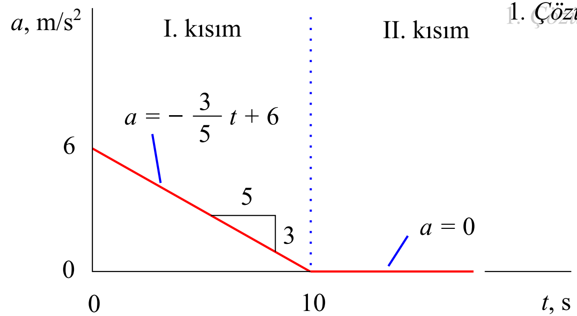
$v =$ sb.

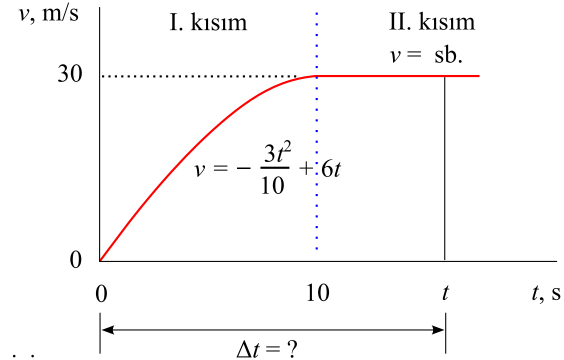
$a = 0$

İstenenler:

$\Delta t = ?$

1. Çözüm





I. kısım için:

$dv = a\,dt$

$$dv = \left(-\frac{3}{5}t + 6\right) dt$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t \left(-\frac{3}{5}t + 6\right) dt$$

$$v = -\frac{3}{5}\frac{t^2}{2} + 6t$$

$t = 10$ s anında:

$v = 30$ m/s

I. kısmın sonunda ulaştığı hız

I. kısım için:

$ds = v\,dt$

$$ds = \left(-\frac{3t^2}{10} + 6t\right) dt$$

$$\int_0^s ds = \int_0^{10} \left(-\frac{3t^2}{10} + 6t\right) dt$$

$$s = \left(-\frac{3}{10}\frac{t^3}{3} + 6\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{10}$$

$s = 200$ m $= \Delta s_{\mathrm{I}}$

I. kısmın sonunda ulaştığı konum

II. kısım için:

$ds = v\,dt$

$ds = 30\,dt$

$$\int_{200}^{400} ds = 30 \int_{10}^{t} dt$$

$$400 - 200 = 30\,(t - 10)$$

$t = 16.67$ s

$\Delta t = 16.67$ s

Örnek Problem 2/2

Doğrusal hareket yapan bir araba, hareketsiz iken 10 s içinde düzgün bir şekilde sıfıra inen 6 m/s^2 lik bir ivme ile harekete başlıyor ve 10 s sonunda da sabit bir hızla harekete devam ediyor. Başlangıçtan itibaren katettiği yol ne kadar sürede 400 m olur?

2. Çözüm

Verilenler:

Göz önüne alınan aralıkta hareketin yönü değişmediği için katedilen yol konumlar arası farka eşittir.

$D = \Delta s = 400$ m

Hareketin iki farklı zaman aralığında iki farklı ivmesi var. Dolayısıyla hareketi iki kısımda incelemek uygun olacaktır.

I. kısım:

$a = f(t)$

$t = 0$ iken $v = v_0 = 0$

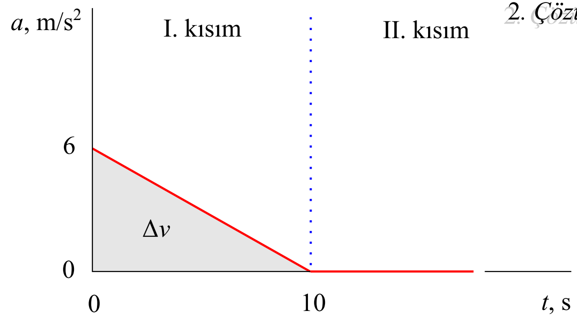
II. kısım:

$v =$ sb.

$a = 0$

İstenenler:

$\Delta t = ?$



a-t grafiğinin altında kalan alan hızdaki değişmeyi verir:

I. kısım için:

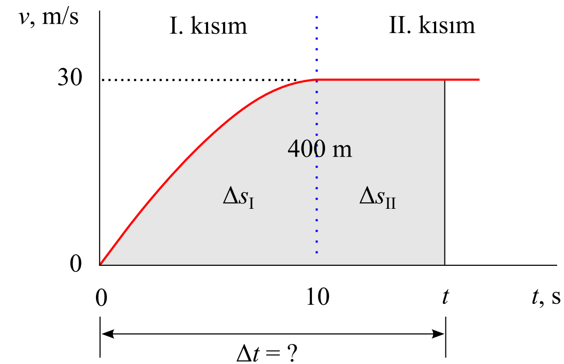
$$\Delta v = \frac{6\,(10)}{2}$$

$$\Delta v = 30 \text{ m/s} = v - v_0$$

$v_0 = 0$ olduğu için:

$$v = 30 \text{ m/s}$$

I. kısmın sonunda ulaştığı hız



v-t grafiğinin altında kalan alan konumdaki değişmeyi verir:

I. kısım için:

$$\Delta s_{\mathrm{I}} = \frac{2}{3}\,30\,(10)$$

$$\Delta s_{\mathrm{I}} = 200 \text{ m}$$

II. kısım için:

$$\Delta s_{\mathrm{II}} = 30\,(t - 10)$$

$$\Delta s = \Delta s_{\mathrm{I}} + \Delta s_{\mathrm{II}} = 400 \text{ m}$$

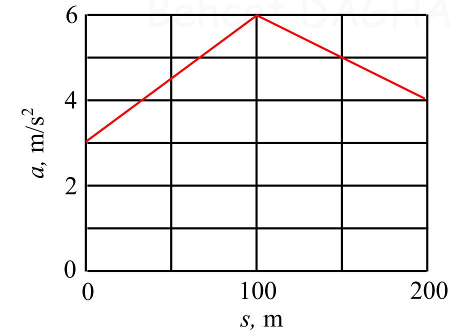
$$200 + 30\,(t - 10) = 400$$

$$t = 16.67 \text{ s}$$

$$\boxed{\Delta t = 16.67 \text{ s}}$$

Örnek Problem 2/3

$s = 0$ konumundan ilk hızsız olarak harekete başlayan ve doğrusal hareket yapan bir motosikletin ivmesi konuma bağlı olarak şekildeki gibi değişmektedir. $s = 200$ m iken motosikletin hızını bulunuz.



Verilenler:

$s = 0$ iken $v = 0$

İstenenler:

$s = 200$ m iken $v = ?$

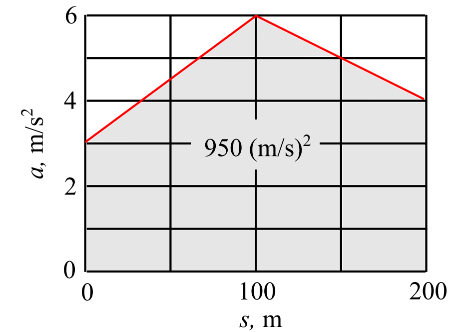
Çözüm

$$v\,dv = a\,ds$$

$$\int_0^v v\,dv = \underbrace{\int_0^{200} a\,ds}_{a\text{-}s \text{ grafiğinin altında kalan alan}}$$

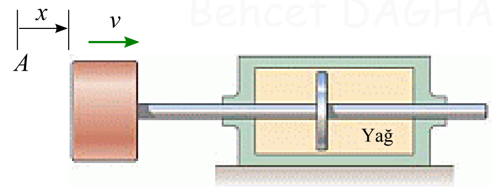
$$\frac{1}{2}v^2 = \overbrace{950}\ (\text{m/s})^2$$

$$\boxed{v = 43.6 \ \text{m/s}}$$



Örnek Problem 2/4

Şekildeki plancırın ve şaftın yatay hareketi, şafta bağlı diskin yağ içerisinde hareket etmesinden dolayı dirençle karşılaşmaktadır. Plancırın A konumunda $x = 0$ ve $t = 0$ iken hızı v_0 dır. Yavaşlatıcı olan ivme ise hız ile doğru orantılı, yani $a = -k\,v$ dir. Burada k bir sabittir. Plancırın hızı v yi ve konumunun koordinatı x i t cinsinden veren bağıntıları elde ediniz. Ayrıca v yi x e bağlı olarak yazınız.



Çözüm

Verilenler:

$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ t = 0 \end{matrix}\right\}$ iken $v = v_0$

$a = -k\,v$ $\quad a = f(v)$

$k =$ sb.

İstenenler:

$v = f(t)$

$x = f(t)$

$v = f(x)$

$dv = a\,dt$

$$dv = (-k\,v)\,dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k \int_0^t dt$$

$$(\ln v \Big|_{v_0}^{v} = -k\,t$$

$$\boxed{v = v_0\,e^{-k\,t}}$$

$v = f(t)$

$v\,dv = a\,ds$

$$v\,dv = (-k\,v)\,dx$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = -k \int_0^x dx$$

$$\boxed{v = v_0 - k\,x}$$

$v = f(x)$

$$v_0\,e^{-k\,t} = v_0 - k\,x$$

$$\boxed{x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-k\,t})}$$

$x = f(t)$

x-t bağıntısı için alternatif çözümler

$ds = v\,dt$

$$dx = v\,dt$$

$$dx = (v_0\,e^{-k\,t})\,dt$$

$$\int_0^x dx = v_0 \int_0^t e^{-k\,t}\,dt$$

$$x = \frac{v_0}{-k}\,(\,e^{-k\,t}\Big|_0^t$$

$$\boxed{x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-k\,t})}$$

$x = f(t)$

$ds = v\,dt$

$$dx = v\,dt$$

$$dx = (v_0 - k\,x)\,dt$$

$$\int_0^x \frac{dx}{v_0 - k\,x} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{-k}\,[\,\ln(v_0 - k\,x)\Big|_0^x = t$$

$$\boxed{x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-k\,t})}$$

$x = f(t)$