

Otomatik Kontrol

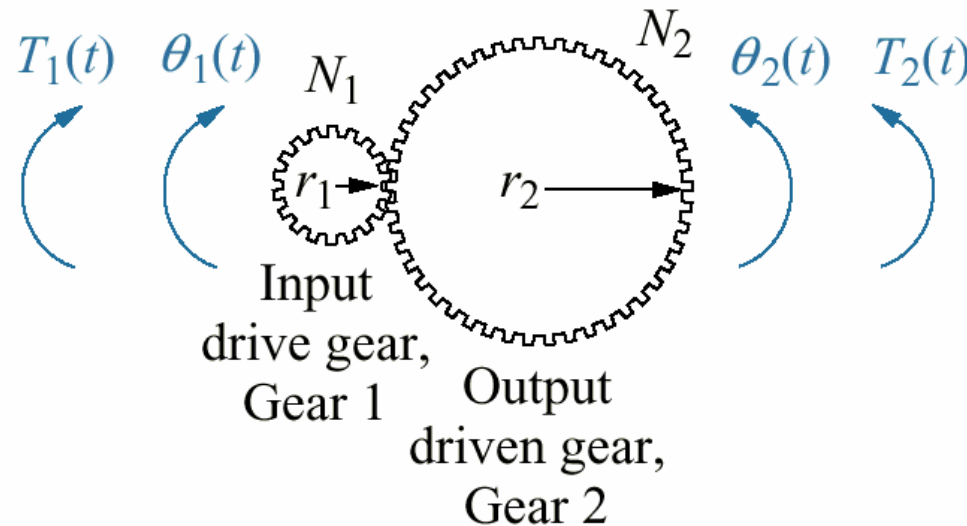
Fiziksel Sistemlerin Modellenmesi

- Dişli Takımları
- Elektromekaniksel Sistemler

Prof.Dr.Galip Cansever

Mekaniksel Sistemlerin Transfer Fonksiyonları (Dişli Takımları)

Vitesli bisikletleri düşünelim. Yokuş çıkarken daha fazla tork veren ve daha yavaş gideceğimiz vitesse geçirilir. Düz yolda ise daha az tork ve daha fazla hız yapılabilen vitesse geçirilir. Kısaca, dişli takımları bisiklet ve yolu hız ve torktan birini tercih edilerek eşleştirir.



Her bir dişli çevresinde alınan yol eşit olduğundan:

$$r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

İki dişlinin açısal yer değiştirmeleri diş sayıları ile ters orantılıdır.

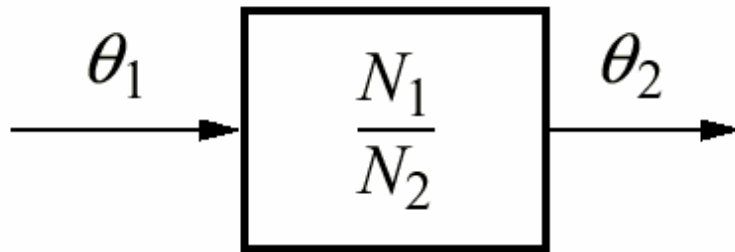
Torklar arasındaki ilişki nasıl?

Eğer dişlilerin enerjiyi absorbe etmediğini ve depolamadığını varsayacak olursak: 1. dişliye verilen enerji, 2. dişliden alınan enerjiye eşittir.

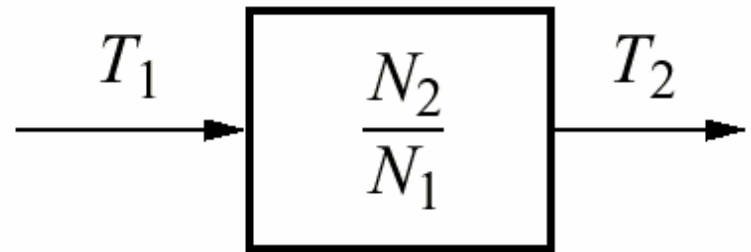
Eğer dişlilerin enerjiyi absorbe etmediğini ve depolamadığını varsayacak olursak: 1. dişliye verilen enerji, 2. dişliden alınan enerjiye eşittir.

$$T_1\theta_1 = T_2\theta_2$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

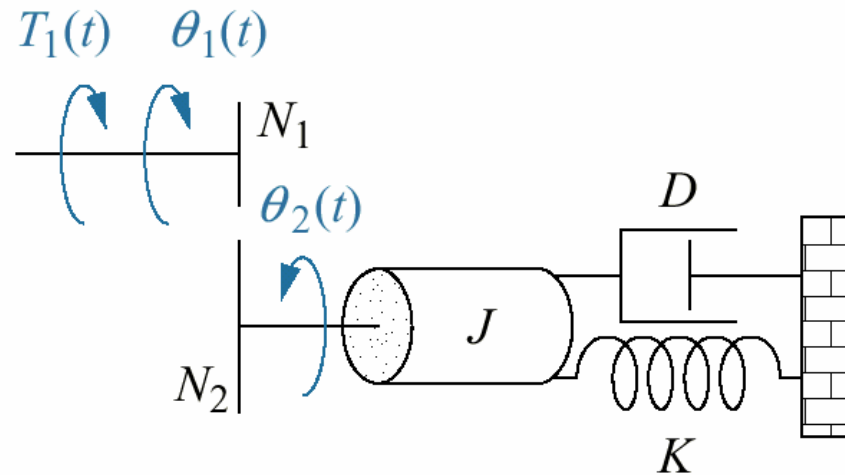


(a)

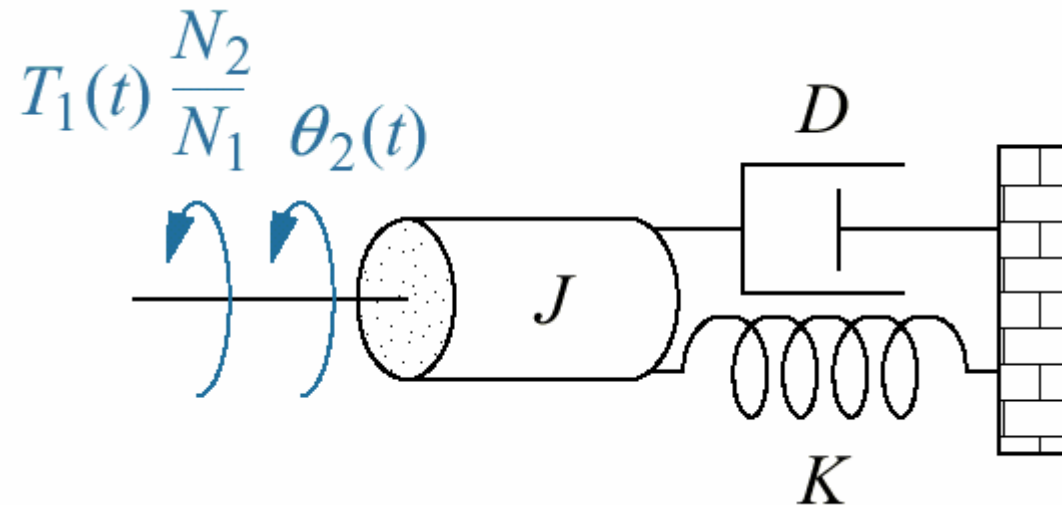


(b)

Dişlilerin mekaniksel empedansları sürmesi durumunda:



θ_1' deki dişli takımsız eşdeğer devre:



Hareket denklemi:

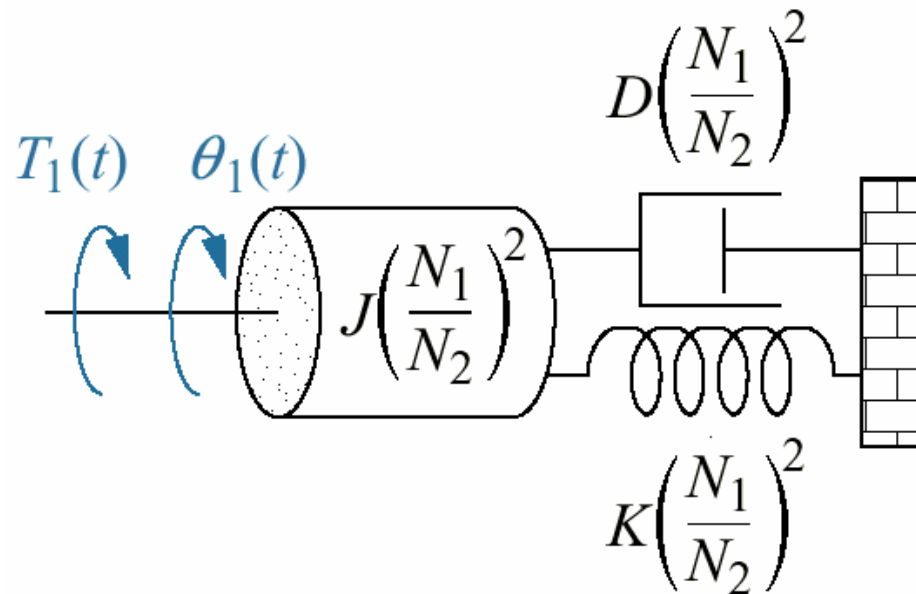
$$(Js^2 + Ds + K)\theta_2(s) = T_1(s) \frac{N_2}{N_1}$$

$\theta_2(s)$ ' yi eşdeğer $\theta_1(s)$ cinsinden yazacak olursak:

$$(Js^2 + Ds + K) \frac{N_1}{N_2} \theta_1(s) = T_1(s) \frac{N_2}{N_1}$$

Düzenlediğimizde:

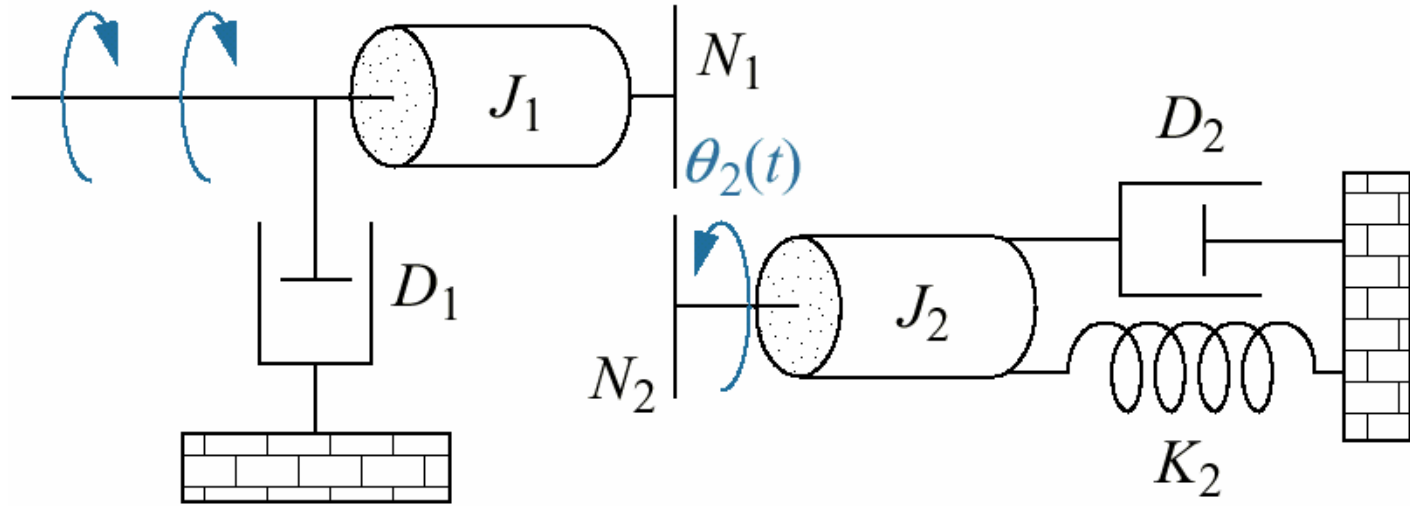
$$\left(J \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 s^2 + D \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 s + K \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \right) \theta_1(s) = T_1(s)$$



Dairesel mekaniksel empedanslar yukarıdaki şekildeki gibi dişli oranlarının karesiye orantılı olarak diğer tarafa indirgenebilir.

Aynı transformatörlerdeki empedansların indirgenmesi gibi.

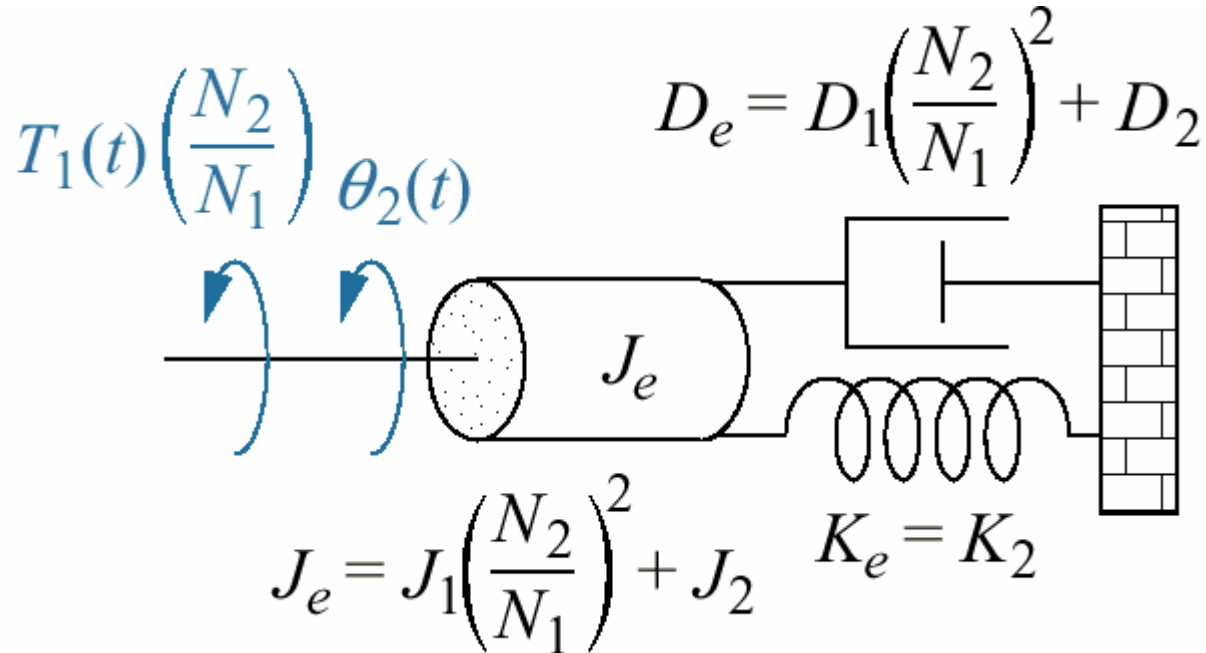
Örnek: $T_1(t)$ $\theta_1(t)$



Sistemin, $\theta_2(s)/T_1(s)$ transfer fonksiyonunu yazınız.

Her bir atalet için sırasıyla çözülmesi gereken iki diferansiyel denklem olmalı gibi görünse de, atalet elemanları dişli takımından dolayı lineer birbirinden bağımsız hareket edemezler. Bu sebeple sistemin serbestlik derecesi birdir ve bir tane hareket denklemin vardır.

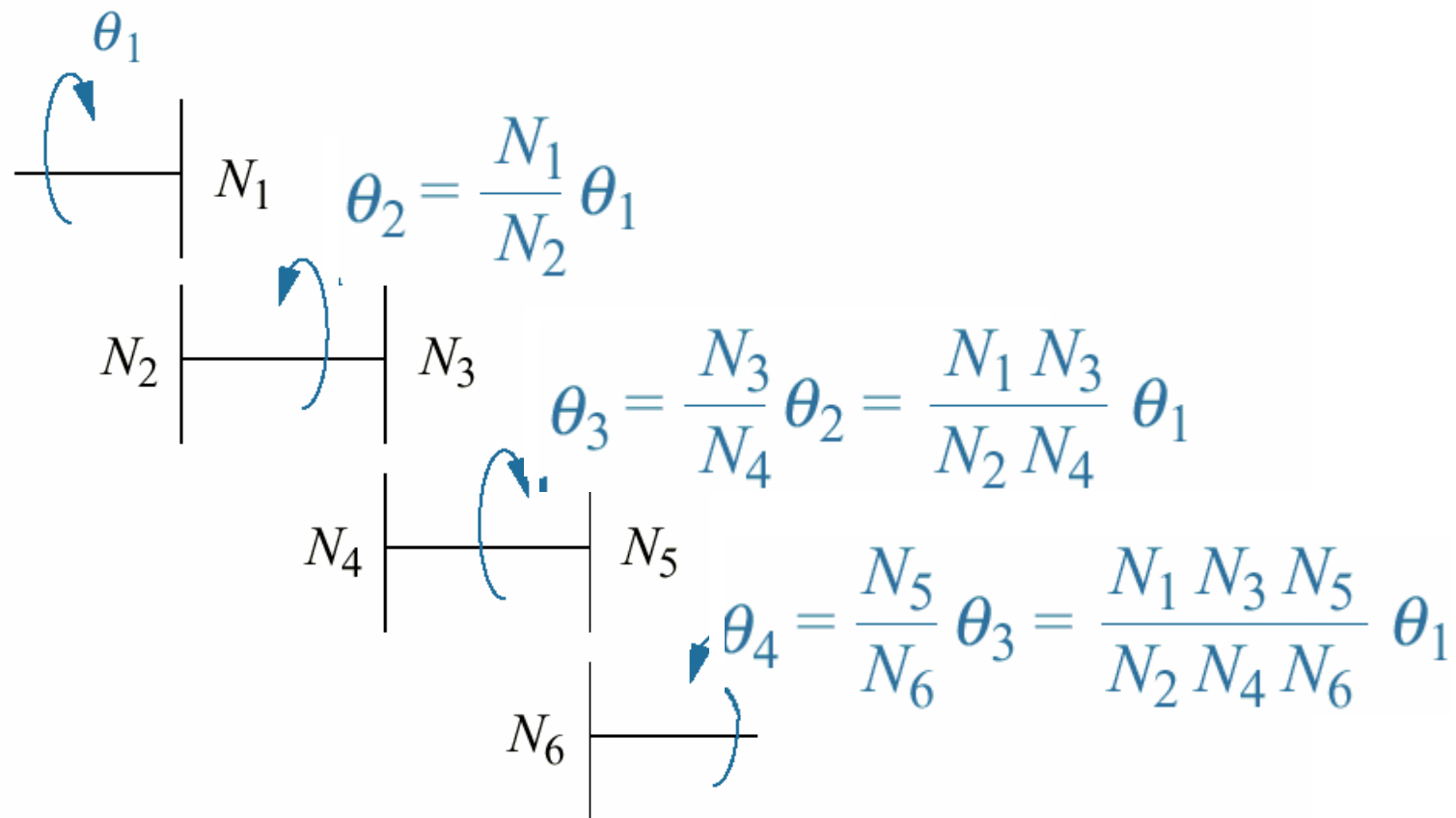
J_1 , D_1 ve T_1 i dişlinin diğer tarafına indirgeyecek olursak



$$\left(J_e s^2 + D_e s + K_e \right) \theta_2(s) = T_1(s) \frac{N_2}{N_1}$$

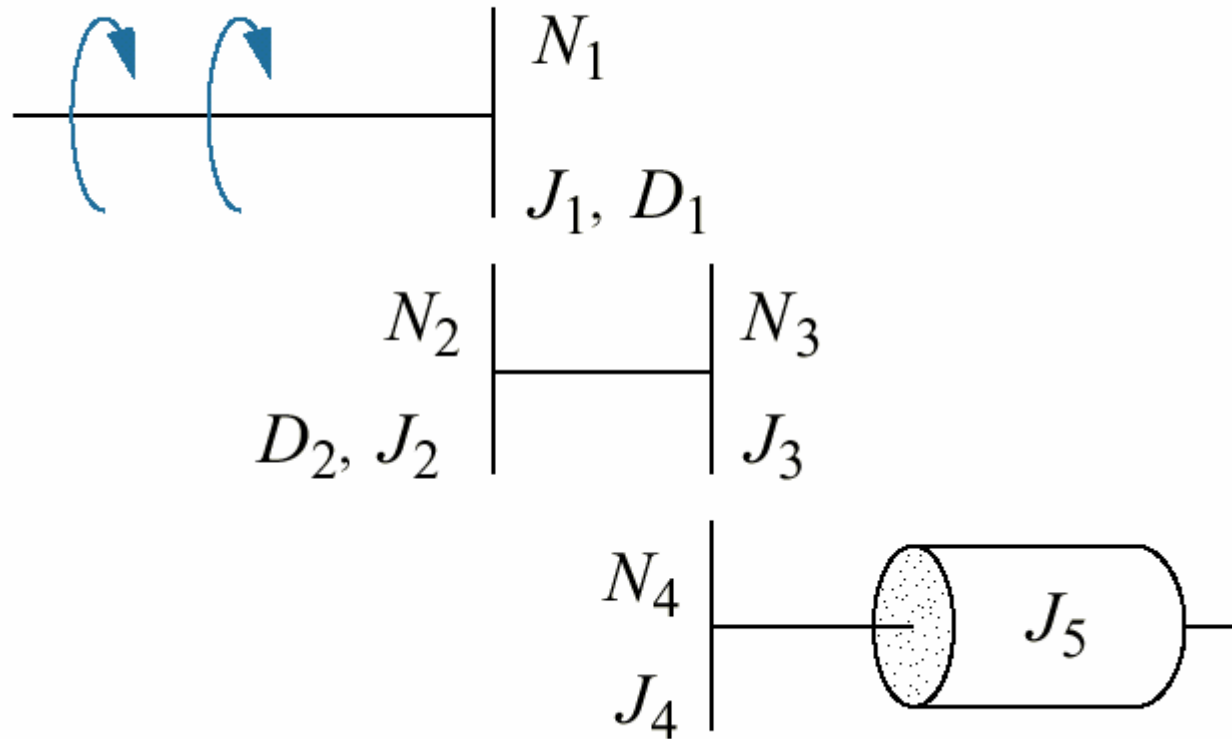
$$G(s) = \frac{\theta_2(s)}{T_1(s)} = \frac{\left(\frac{N_2}{N_1} \right)}{\left(J_e s^2 + D_e s + K_e \right)}$$

Dişli treni olması durumunda:



Örnek:

$T_1(t)$ $\theta_1(t)$



Sistemin, $\theta_1(s)/T_1(s)$ transfer fonksiyonunu yazınız.

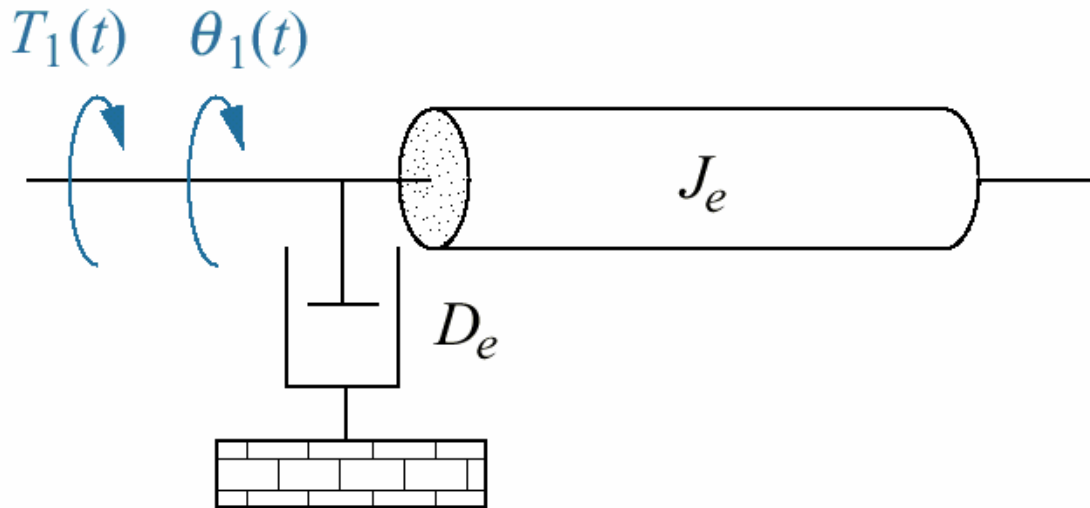
Sistemdeki dişli treninin dişlileri kayıpsız dişliler değil. Her birinin atalet ve vizkoz sürtünmesi var.

Transfer fonksiyonunu elde etmek için bütün empedansları giriş şaft'ına indirgeyelim.

Dikakt edilecek olurssa bütün empedanslar için dişli oranı aynı değildir. Örneğin; D_2 , $(N_1/N_2)^2$ ile indirgenirken $(J_4 + J_5)$

$\left(\frac{N_3 N_1}{N_4 N_2} \right)^2$ ile indirgenecektir.

Tüm eşdeğer sistem:



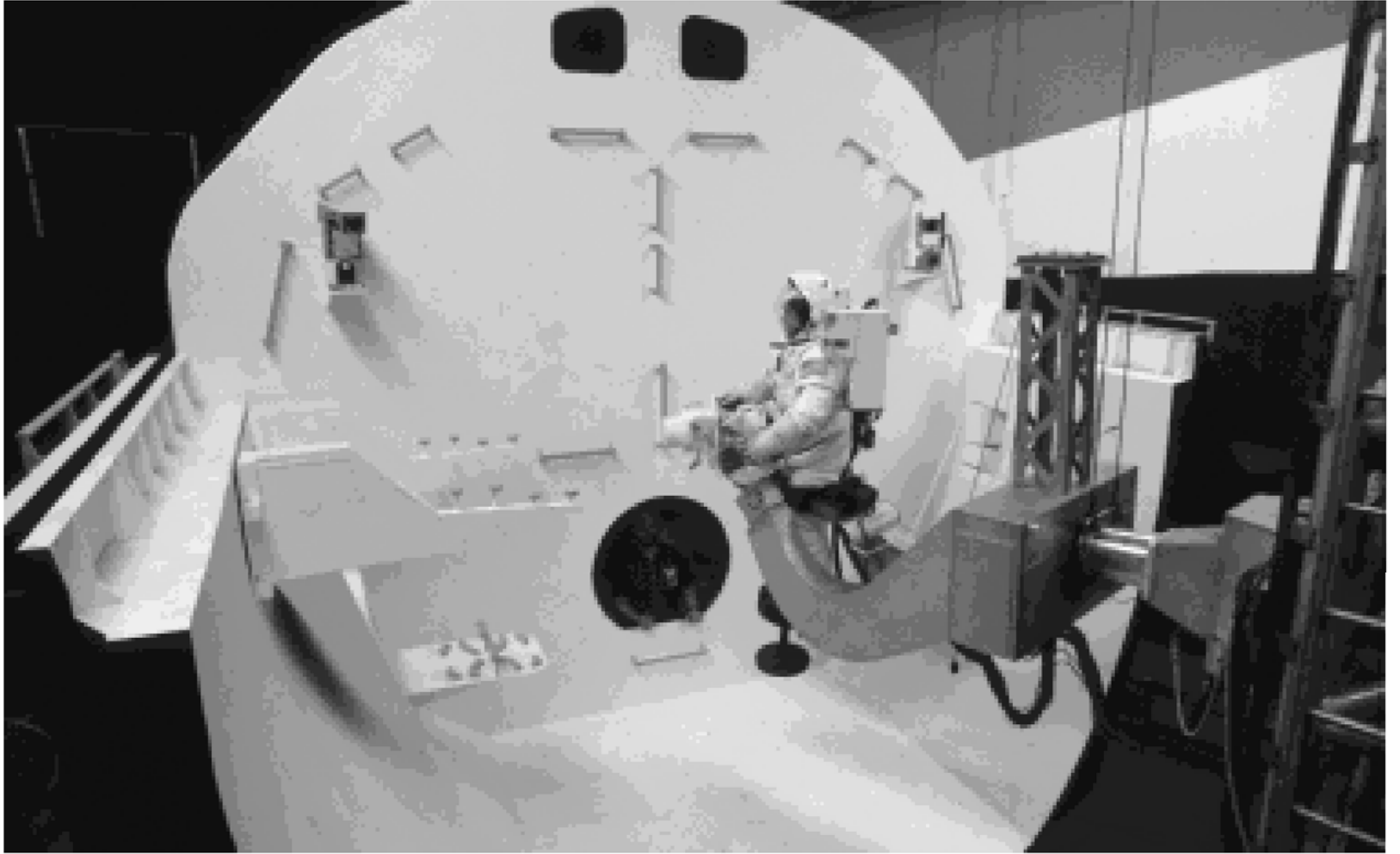
$$J_e = J_1 + (J_2 + J_3) \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 + (J_4 + J_5) \left(\frac{N_1 N_3}{N_2 N_4} \right)^2$$

$$D_e = D_1 + D_2 \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2$$

$$(J_e s^2 + D_e s) \theta_1(s) = T_1(s)$$

$$G(s) = \frac{\theta_1(s)}{T_1(s)} = \frac{1}{(J_e s^2 + D_e s)}$$

Elektromekaniksel Sistemlerin Transfer Fonksiyonları



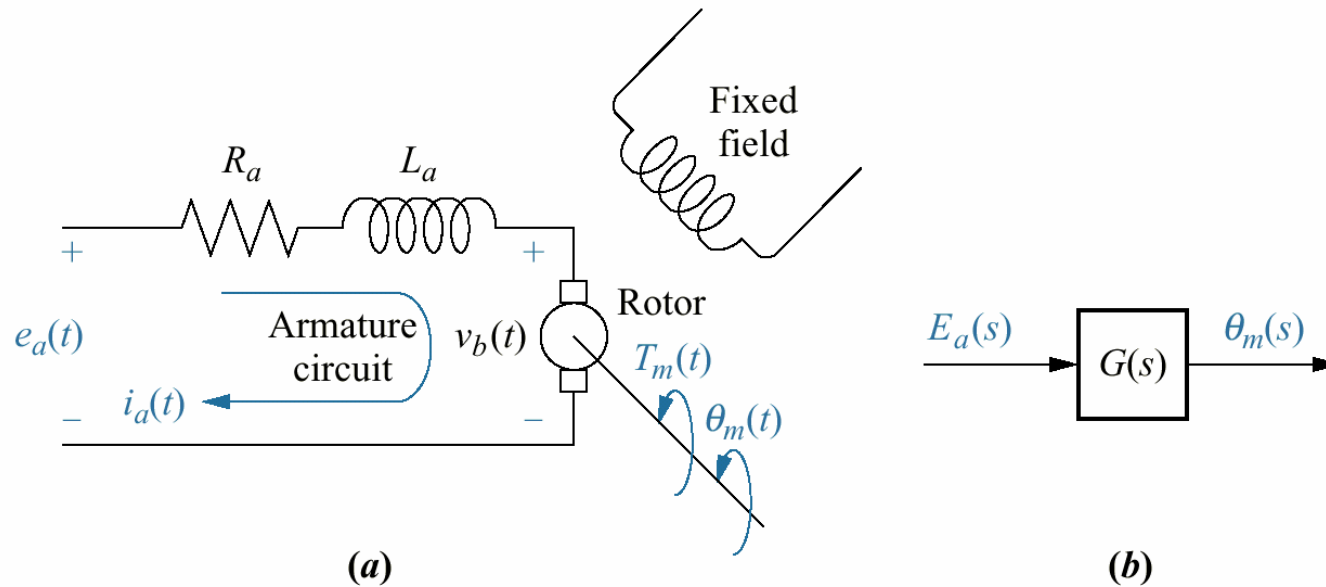
NASA uçuş simülatörü, robot kolun kullanıldığı bir elektro mekanik sistem

26 February 2007

Otomatik Kontrol
Prof.Dr.Galip Cansever

14

Motorlar elektromekanik sistemlere en güzel örnektir. Gerilim girişi çıkışta dönmeye (bir yer değiştirmeye) sebebiyet verir.



Sabit mıknatıslı bir DC motor ve transfer fonksiyonu

DC makinanın manyetik alanı sabit mıknatıslar tarafından üretilmektedir. Dönen, hareketli paça endüvi ile adlandırılır ve içinden $\mathbf{i}_a(\mathbf{t})$ akımı akar. Manyetik alan içinde bulunan ve içinden akım akan endüvi $\mathbf{F}=\mathbf{B}\mathbf{l} \mathbf{i}_a(\mathbf{t})$ kuvvetine maruz kalır ve döner.

Manyetik alan içinde bulunan ve dönen endüvi uçlarında $\mathbf{e}=\mathbf{B}\mathbf{l}\mathbf{v}$ Gerilimi endüklenir, bu gerilime ters elektromotor kuvveti adı verilir.

$$v_a(t) = K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

Laplas dönüşümü yaptığımızda: $V_a(s) = K_b s \theta_m(s)$

Endüvi devre denklemi ise: $R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + V_a(s) = E_a(s)$

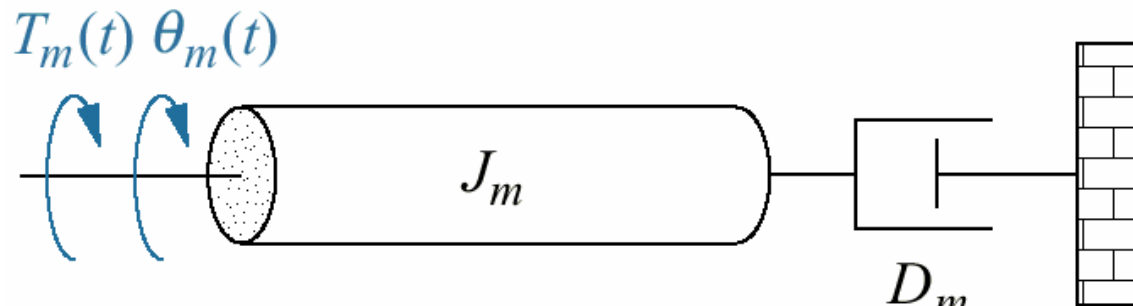
Motorun ürettiği tork : $T_m(s) = K_t I_a(s)$

$$I_a(s) = \frac{1}{K_t} T_m(s)$$

Transfer fonksiyonunu elde etmek üzere akım ve gerilimi yerine yazalım;

$$\frac{(R_a + L_a s) T_m(s)}{K_t} + K_b s \theta_m(s) = E_a(s) \quad \times$$

Giriş ve çıkış arasındaki transfer fonksiyonu, $\theta_m(s)/E_a(s)$, bulabilmek için $T_m(s)$ 'yi $\theta_m(s)$ cinsinden yazmalıyız.



Biri yükü döndüren motorun tipik eşdeğeri

J_m endüvideki eşdeğer atalet, daha sonra bu eş değer ataletin yük ataletinde içerdiğini göreceğiz. D_m endüvideki eşdeğer sönüm elemanı, daha sonra bu eş değer sönüm elemanının yük sönüm elemanını da içerdiğini göreceğiz.

$$T_m(s) = (J_m s^2 + D_m s) \theta_m(s)$$

İfadesini (\times) da yerine yazacak olursak;

$$\frac{(R_a + L_a s)(J_m s^2 + D_m s) \theta_m(s)}{K_t} + K_b s \theta_m(s) = E_a(s)$$

Endüvi endüktansı, L_a 'yı, endüvi direnci, R_a , ya göre küçük olduğunu varsayarsak;

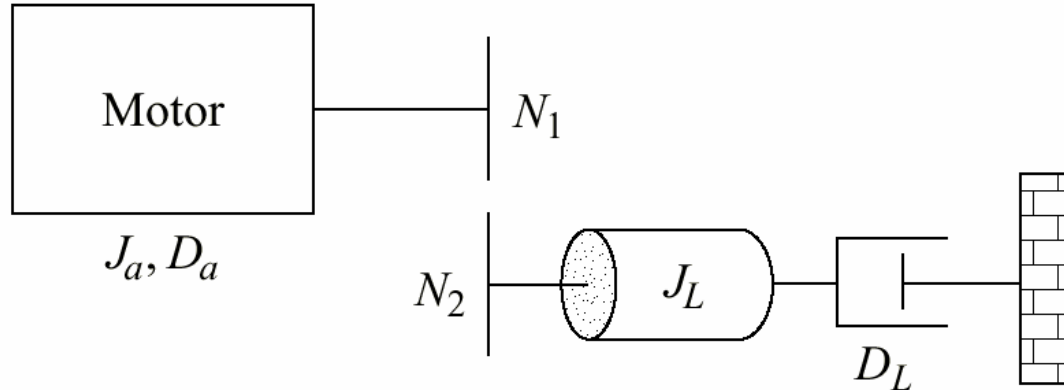
$$\left[\frac{R_a}{K_t} (J_m s + D_m) + K_b \right] s \theta_m(s) = E_a(s)$$

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{K_t}{R_a J_m}}{s \left[s + \frac{1}{J_m} \left(D_m + \frac{K_t K_b}{R_a} \right) \right]}$$

Daha basitçe;

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s(s + \alpha)}$$

Eşdeğer elemanlar, J_m ve D_m 'yi inceleyelim;



Sırasıyla J_a, D_a motorun J_L, D_L yükün atalet ve sönüm elemanları ve bu değerleri bildiğimizi varsayalım.

Dişli takımını göz önünde bulundurarak endüviye indirgenen eşdeğer atalet ve sönüm elemanı;

$$J_m = J_a + J_L \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2$$

$$D_m = D_a + D_L \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2$$

Mekaniksel sabitleri inceledik şimdi transfer fonksiyonundaki elektriksel sabitleri nasıl elde edeceğimizi inceleyelim:

Elektriksel sabitler, çoğu zaman dinamometre testi ile elde edilirler. Dinomometre testinde saat gerilim altında motorun tork ve hızı ölçülür. Bu testi anlaya çalışalım:

$$\frac{(R_a + L_a s)T_m(s)}{K_t} + K_b s \theta_m(s) = E_a(s)$$

olarak elde edilmişti, endüvi endüktansı, L_a 'yı, endüvi direnci, R_a , ya göre küçük olduğunu varsayarsak;

$$\frac{R_a}{K_t} T_m(t) + K_b \omega(t) = e_a(t)$$

$$\frac{\theta_m(t)}{dt} = \omega(t)$$

Kararlı halde sabit dc gerilimde;

$$\frac{R_a}{K_t} T_m + K_b \omega_m = e_a$$

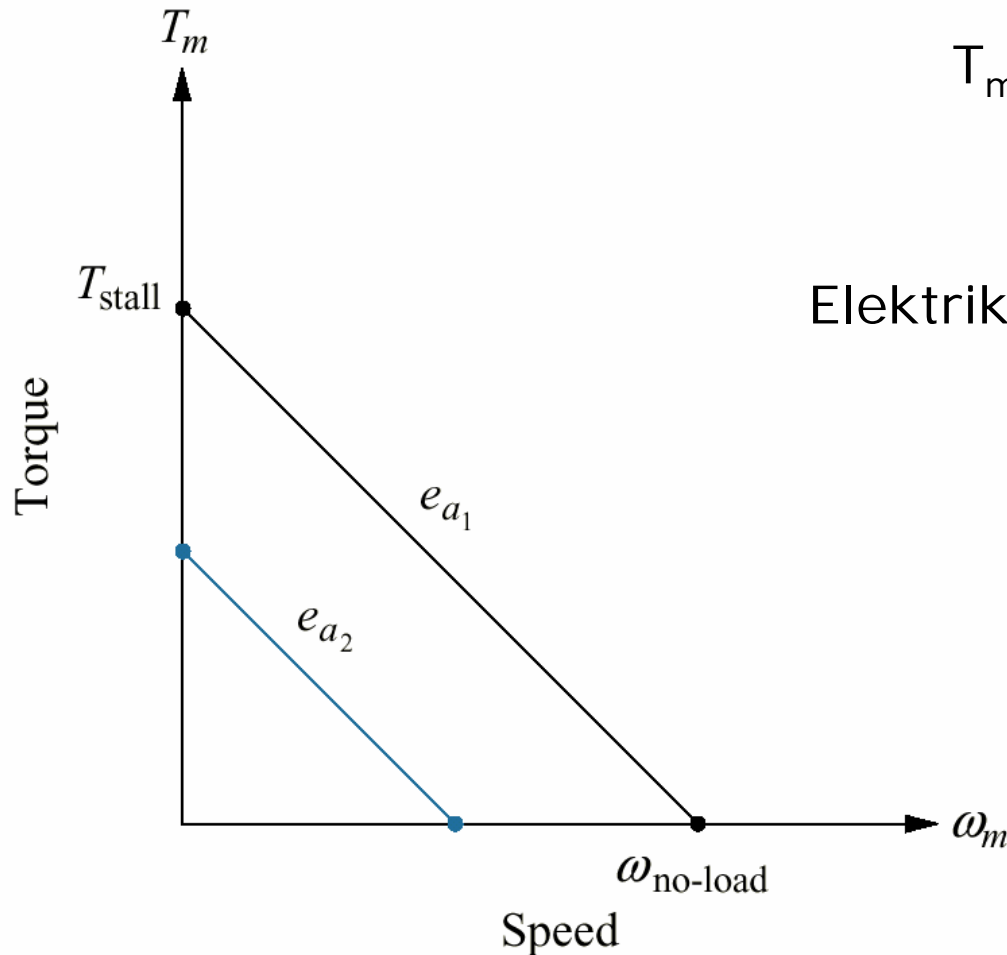
$$T_m = -\frac{K_b K_t}{R_a} \omega_m + \frac{K_t}{R_a} e_a$$

$$\omega_m = 0 \text{ ise;}$$

$$T_{stall} = \frac{K_t}{R_a} e_a$$

$$T_m = 0 \text{ ise;}$$

$$\omega_{bosta} = \frac{e_a}{K_b}$$

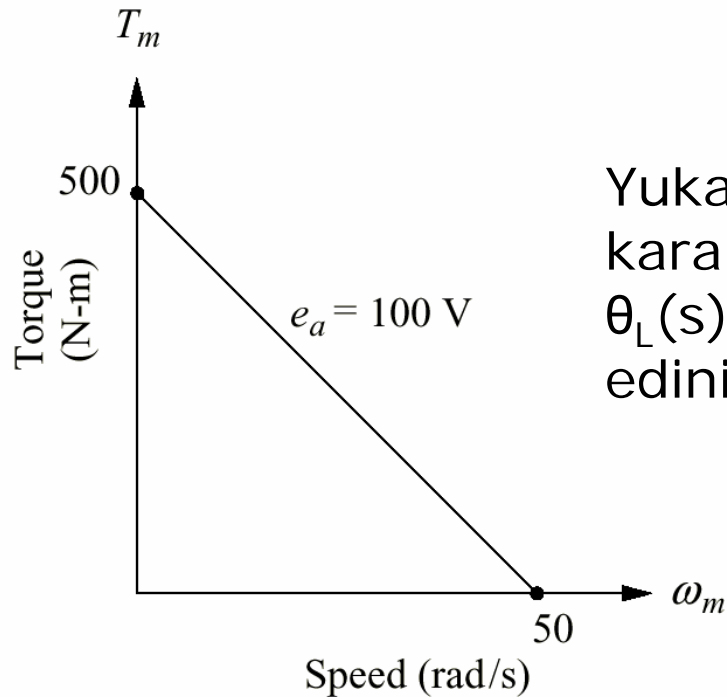
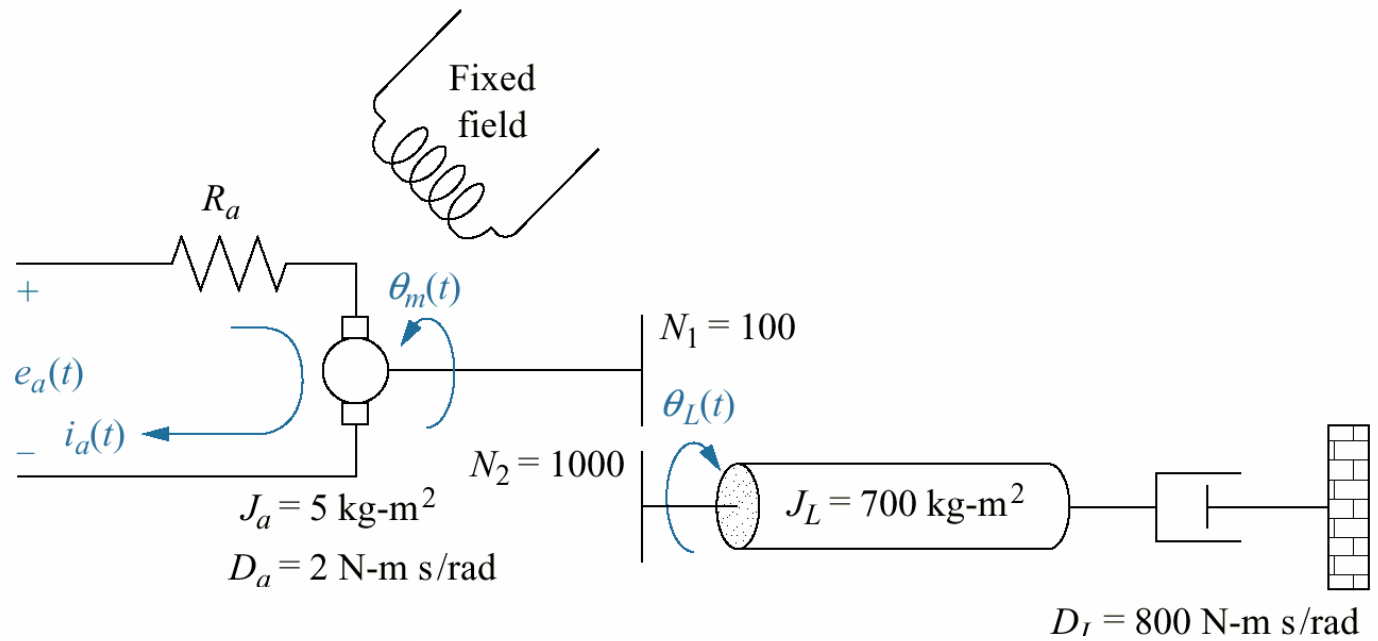


Elektriksel katsayılar:

$$\frac{K_t}{R_a} = \frac{T_{stall}}{e_a}$$

$$K_b = \frac{e_a}{\omega_{bosta}}$$

Örnek:



Yukarda verilen dc motorun tork-hız karakteristiği yandaki gibidir. Bu motorun $\theta_L(s)/E_a(s)$ transfer fonksiyonunu elde ediniz.

$$J_m = J_a + J_L \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 = 5 + 700 \left(\frac{1}{10} \right)^2 = 12$$

$$\frac{K_t}{R_a} = \frac{T_{stall}}{e_a} = \frac{500}{100} = 5$$

$$D_m = D_a + D_L \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 = 2 + 800 \left(\frac{1}{10} \right)^2 = 10$$

$$K_b = \frac{e_a}{\omega_{bosta}} = \frac{100}{50} = 2$$

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{5}{12}}{s \left[s + \frac{1}{12} (10 + (5)(2)) \right]} = \frac{0.417}{s(s + 1.667)}$$

N₁/N₂=1/10 olduğundan,

$$\frac{\theta_L(s)}{E_a(s)} = \frac{0.0417}{s(s + 1.667)}$$