Bölüm 4

Türev Uygulamaları

4.1

Fonksiyonların Ekstrem Değerleri

TANIMLAR **Mutlak Maksimum, Mutlak Minimum**

f, tanım kümesi D olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

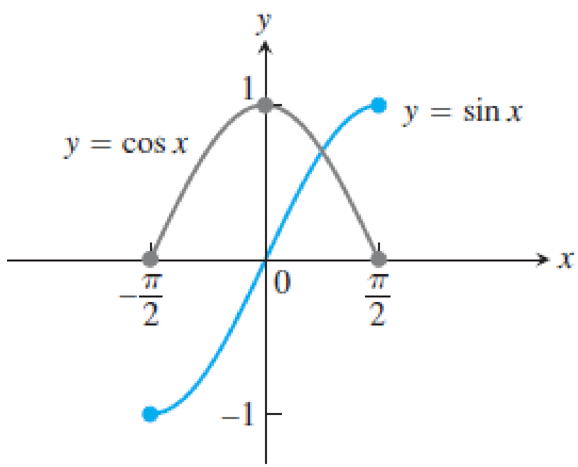
$$D\text{'deki her } x \text{ için} \qquad f(x) \leq f(c)$$

ise, f'nin D üzerinde, c noktasında **bir mutlak maksimum** değeri,

$$D\text{'deki her } x \text{ için} \qquad f(x) \geq f(c)$$

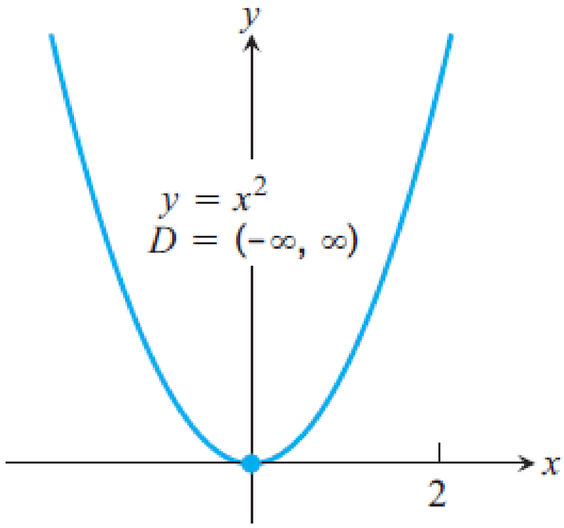
ise, f'nin D üzerinde, c noktasında **bir mutlak minimum** değeri vardır.

Örneğin, $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığında, $f(x) = \cos x$ fonksiyonu maksimum değer olarak 1 değerini (bir kere) ve minimum değer olarak 0 değerini (2 kere) alır. Aynı aralıkta $g(x) = \sin x$ fonksiyonu ise maksimum değer olarak 1, minimum değer olarak –1 değerini alır (Şekil 4.1).

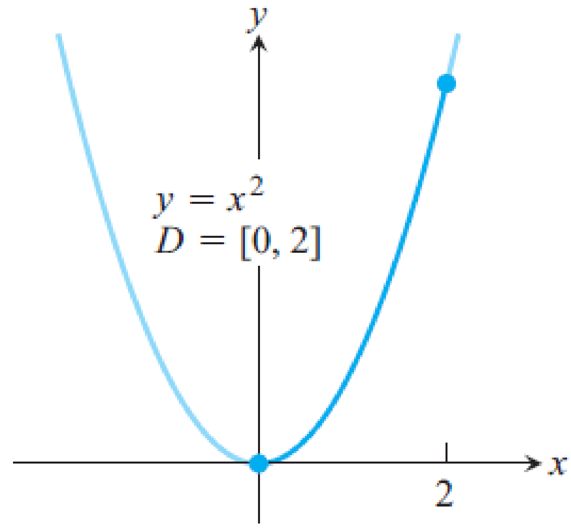


ŞEKİL 4.1 sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığı üzerindeki mutlak ekstremumları. Bu değerler fonksiyonun tanım kümesine bağlı olabilir.

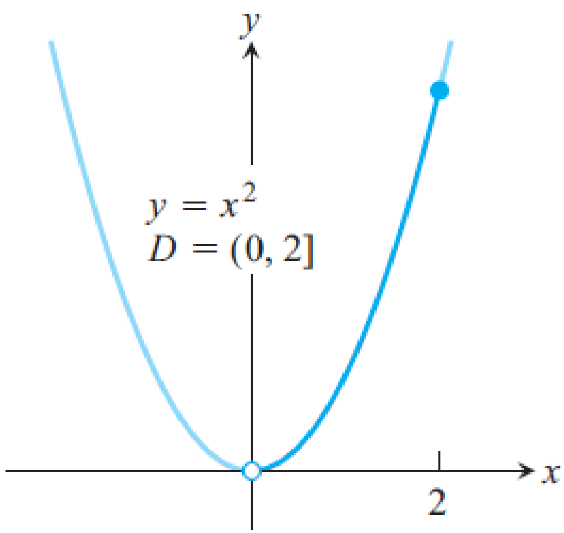
Fonksiyon kuralı	***D* Tanım kümesi**	***D*'deki mutlak ekstremler**
(a) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	Mutlak maksimum yok. $x = 0$'da mutlak minimum 0.
(b) $y = x^2$	$[0, 2]$	$x = 2$'de mutlak maksimum 4 $x = 0$'da mutlak minimum 0
(c) $y = x^2$	$(0, 2]$	$x = 2$'de mutlak maksimum 4 Mutlak minimum yok.
(d) $y = x^2$	$(0, 2)$	Mutlak ekstrem yok.



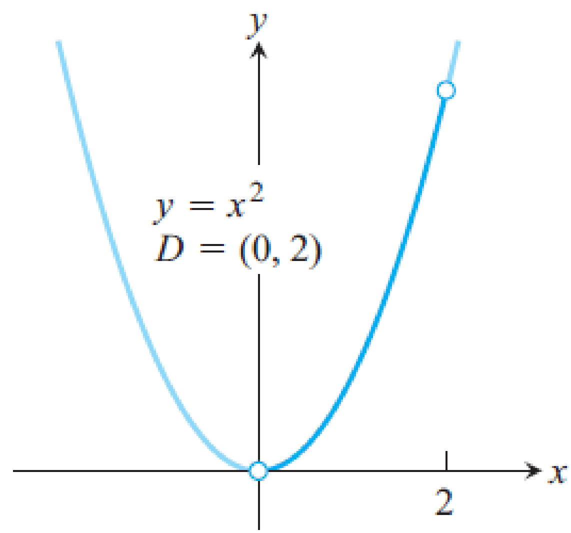
(a) yalnız mutlak min.



(b) mutlak maks. ve min.



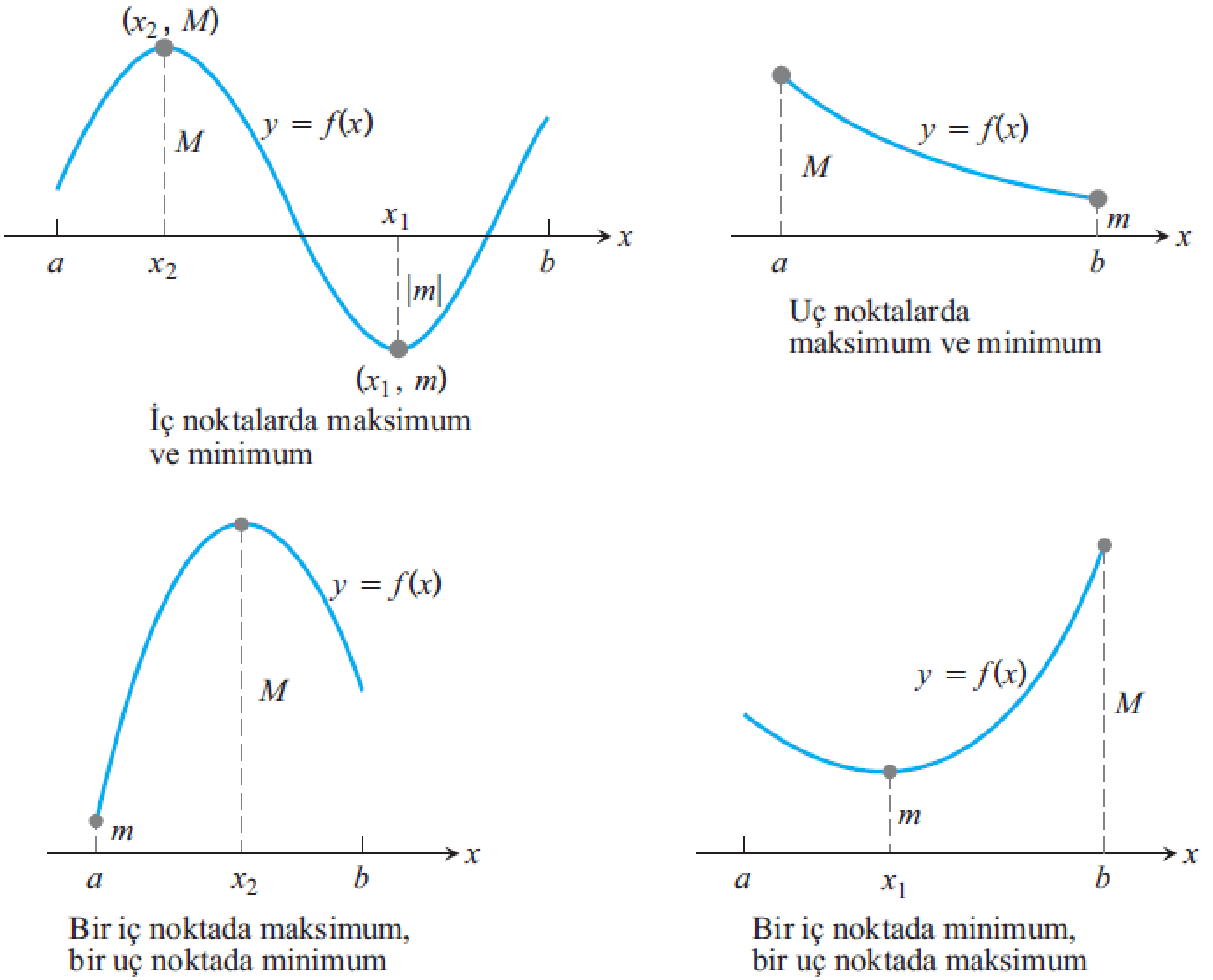
(c) yalnız mutlak maks.



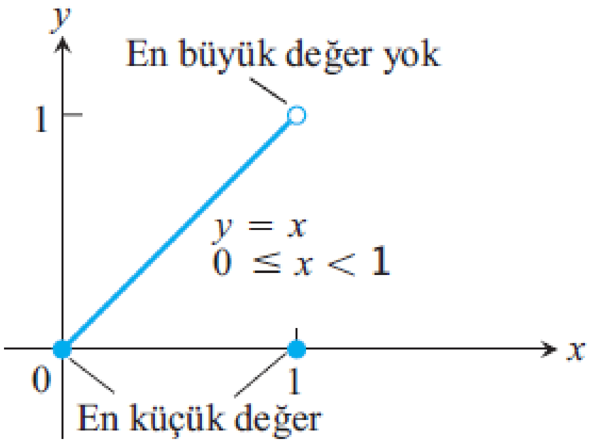
(d) maks. veya min. yok.

TEOREM 1 Ekstrem Değer Teoremi

f, kapalı bir $[a, b]$aralığının her noktasında sürekli ise, bir mutlak maksimum değer M'ye ve bir mutlak minimum değeri m'ye $[a, b]$ içinde erişir. Yani, $[a, b]$'da, $f(x_1) = m$ ve $f(x_2) = M$ olacak şekilde x_1 ve x_2 sayıları vardır ve $[a, b]$'daki diğer her bir x için $m \leq f(x) \leq M$ dir (Şekil 4.3).



ŞEKİL 4.3 Kapalı bir $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyonun olası mutlak maksimum ve minimumları



ŞEKİL 4.4 Süreksizliğin tek bir noktada olması bile, bir fonksiyonun bir minimumunun veya maksimumunun olmasını engelleyebilir.

$$y = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

fonksiyonu [0, 1] aralığının $x = 1$ dışındaki her noktasında süreklidir, ama [0, 1] aralığındaki grafiğinin en yüksek bir noktası yoktur.

TANIMLAR **Yerel Maksimum Yerel Minimum**

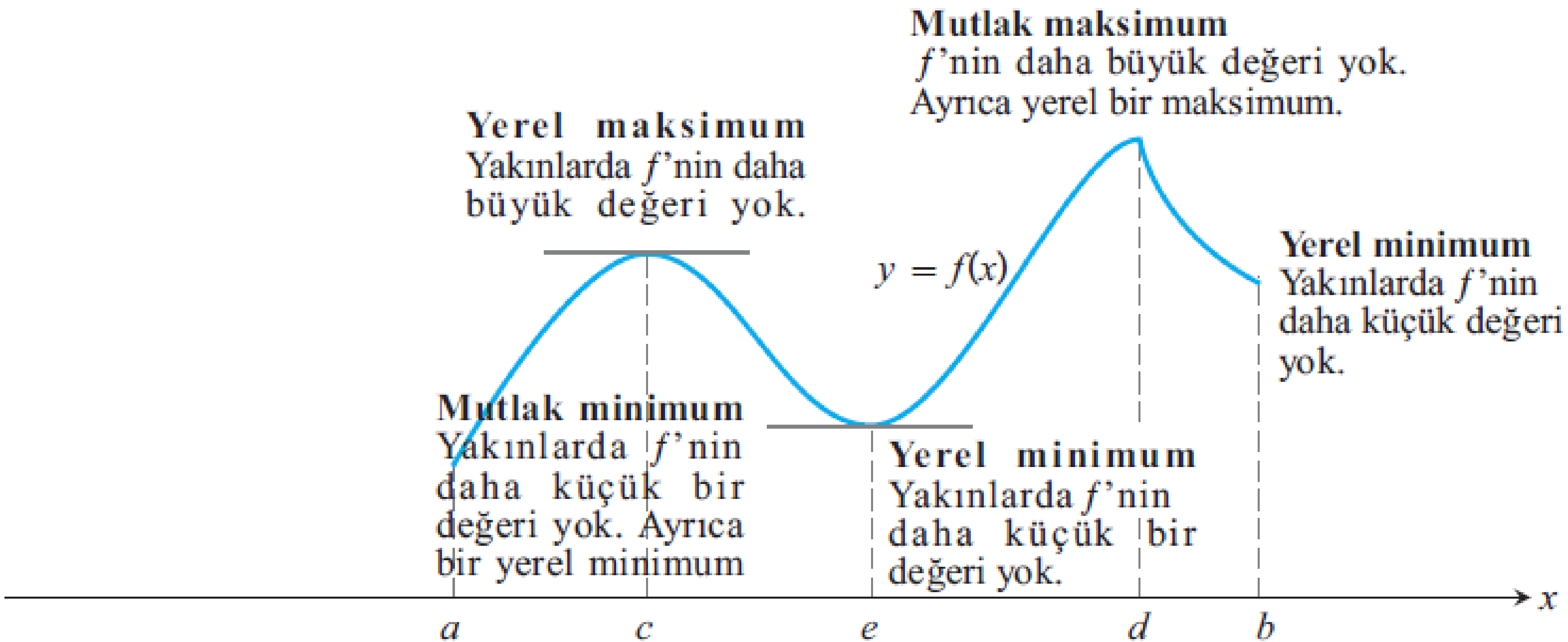
Bir f fonksiyonunun, tanım aralığının bir c iç noktasında,

$$c\text{'yi içeren bir açık aralıktaki her } x \text{ için} \quad f(x) \geq f(c)$$

ise, bir yerel maksimum değeri vardır. Bir f fonksiyonunun, tanım aralığının bir c iç noktasında,

$$c\text{'yi içeren bir açık aralıktaki her } x \text{ için} \qquad f(x) \geq f(c)$$

ise, bir yerel minimumu vardır



ŞEKİL 4.5 Maksimum ve minimumların sınıflandırılması

TEOREM 2 Yerel Ekstrem Değerler İçin Birinci Türev Teoremi

Tanım aralığının bir c iç noktasında, f'nin bir yerel maksimum veya minimumu varsa ve c'de f' tanımlıysa,

$$f'(c) = 0$$

dır.

Teorem 2, bir fonksiyonun, bir yerel ekstremum değerinin bulunduğu ve türevinin tanımlı olduğu bir iç noktada, birinci türevinin sıfır olduğunu söyler. Dolayısıyla, bir f fonksiyonunun bir ekstremum değerinin (yerel veya mutlak) bulunabileceği yerler

1. $f' = 0$ olduğu iç noktalar,

2. f''nün tanımlı olmadığı iç noktalar,

3. f'nin tanım kümesinin uç noktaları

dır. Aşağıdaki tanım bütün bunları özetlemeye yardımcı olacaktır.

TANIM **Kritik Nokta**

Bir f fonksiyonunun tanım kümesinin, f''nün sıfır veya tanımsız olduğu bir iç noktası f'nin bir **kritik noktasıdır.**

Kapalı Sonlu Bir Aralıkta Sürekli Bir f Fonksiyonunun Mutlak Ekstremleri Nasıl Bulunur?

1. Bütün kritik ve uç noktalarda f'yi hesaplayın.
2. Bu değerlerin en büyüğünü ve en küçüğünü alın.

ÖRNEK 2 Mutlak Ekstremleri Bulmak

$f(x) = x^2$'nin $[-2, 1]$ aralığında mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulun.

Çözüm Fonksiyon tanım kümesinin tamamında türevlenebilirdir, dolayısıyla tek kritik nokta $f'(x) = 2x = 0$,olduğu $x = 0$ noktasıdır. $x = 0$ ve $x = -2$ ile $x = 1$ uç noktalarında fonksiyonun değerlerini kontrol etmemiz gerekir.

Kritik nokta değeri: $f(0) = 0$

Uç nokta değerleri: $f(-2) = 4$

$f(1) = 1$

Fonksiyonun $x = -2$'de değeri 4 olan bir mutlak maksimumu ve $x = 0$'da değeri 0 olan bir mutlak minimumu vardır. ■

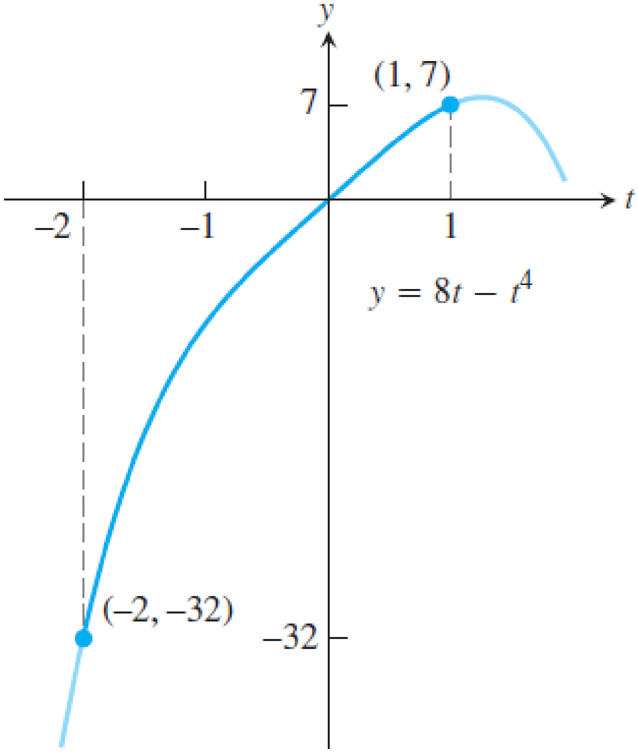
ÖRNEK 3 Uç Noktalarda Mutlak Ekstremumlar

$g(t) = 8t - t^4$'ün $[-2, 1]$ aralığında mutlak ekstremlerini bulun.

Çözüm Fonksiyon tanım kümesinin tamamında türevlidir, dolayısıyla kritik noktalar sadece $g'(t) = 0$ olduğu yerlerde bulunur. Bu denklemi çözersek,

$$8 - 4t^3 = 0 \quad \text{veya} \quad t = \sqrt[3]{2} > 1,$$

verilen tanım kümesinde bulunmayan bir nokta buluruz. Dolayısıyla, fonksiyonun mutlak ekstremleri uç noktalardadır: $g(-2) = -32$ (mutlak minimum) ve $g(1) = 7$ (mutlak maksimum) Şekil 4. 7'ye bakın. ■



ÖRNEK 4 Bir Kapalı Aralık Üzerinde Mutlak Ekstremumları Bulmak

$f(x) = x^{2/3}$'ün $[-2, 3]$ aralığında mutlak ekstremlerini bulun.

Çözüm Fonksiyonu kritik noktalarda ve uç noktalarda hesaplarız ve değerlerin en büyüğü ile en küçüğünü alırız.

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

birinci türevinin sıfırları yoktur, fakat $x = 0$'da tanımsızdır. f'nin bu kritik noktadaki ve uç noktalarındaki değerleri

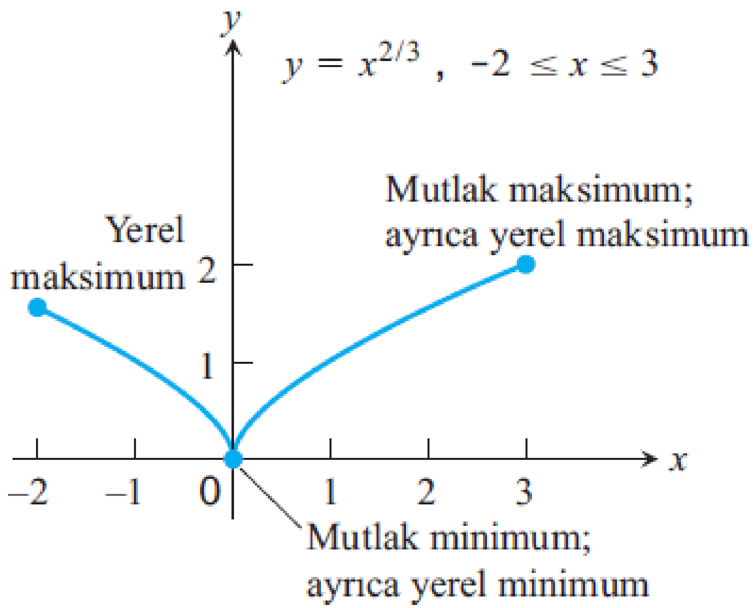
Kritik nokta değeri: $f(0) = 0$

Uç nokta değerleri: $f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4}$

$f(3) = (3)^{2/3} = \sqrt[3]{9}.$

dur.

Bu listeden, mutlak maksimum değerin, sağ uç nokta $x = 3$'te bulunan $\sqrt[3]{9} \approx 2.08$, değerinin olduğunu görebiliriz. Mutlak minimum değeri ise $x = 0$ iç noktasında bulunan 0 değeridir. (Şekil 4.8).



ŞEKİL 4.8 $f(x) = x^{2/3}$'ün $[-2, 3]$ aralığındaki mutlak ekstrem değerleri $x = 0$ ve $x = 3$'tedir (Örnek 4).

4.2

Ortalama Değer Teoremi

TEOREM 3 ROLLE TEOREMİ

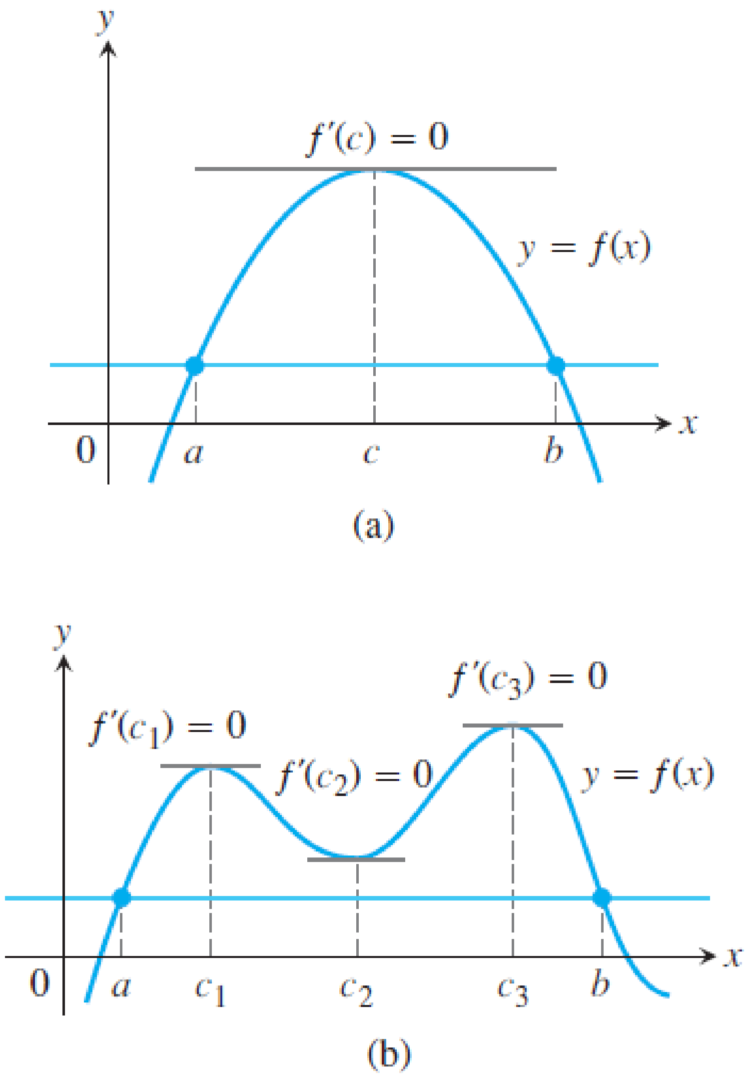
$y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığının her noktasında sürekli ve (a, b) açık aralığının her noktasında türevlenebilir olduğunu varsayın.

$$f(a) = f(b)$$

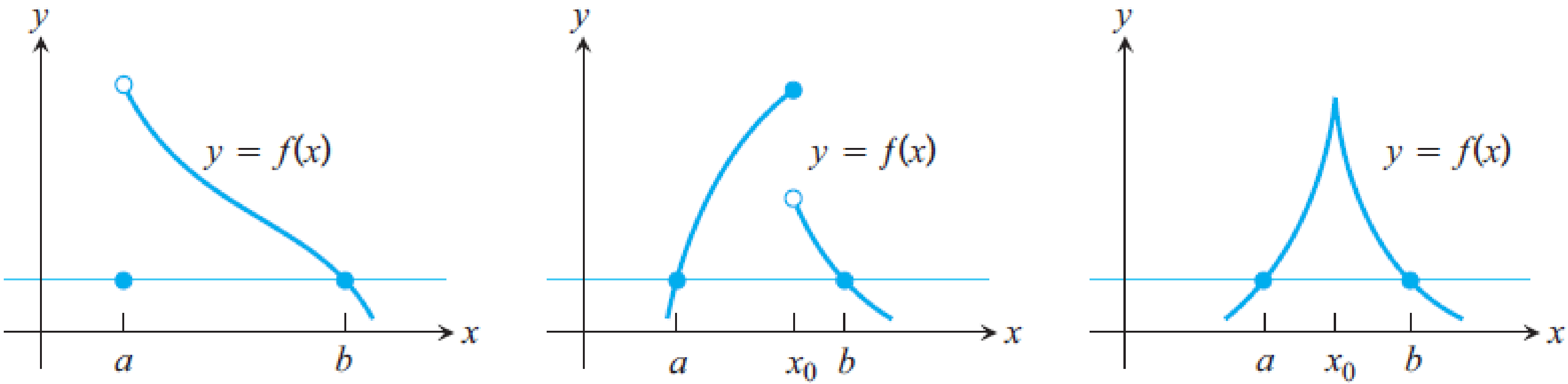
ise, (a, b)'da

$$f'(c) = 0$$

olacak şekilde en az bir c sayısı vardır.



ŞEKİL 4.10 Rolle Teoremi, türevlenebilir bir eğrinin, yatay bir doğruyu kestiği iki nokta arasında en az bir yatay teğeti olduğunu söyler. Yatay teğet sayısı bir (a) veya daha fazla (b) olabilir.



(a) $[a, b]$ aralığının bir uç noktada süreksiz

(b) $[a, b]$ aralığının bir iç noktada süreksiz

(c) $[a, b]$ aralığında sürekli, fakat bir iç noktada türev yok.

ŞEKİL 4.11 Rolle Teoreminin hipotezleri sağlamazsa yatay teğet bulunmayabilir.

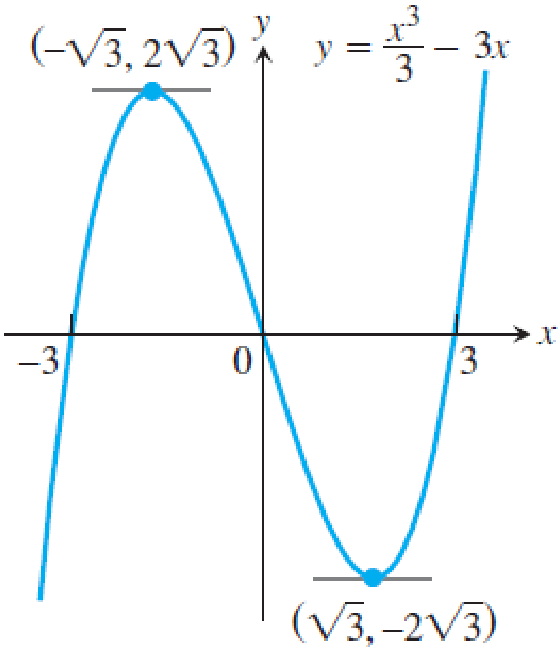
ÖRNEK 1 Bir Kübik Polinomun Yatay Teğetleri

Şekil 4.12'de çizili olan

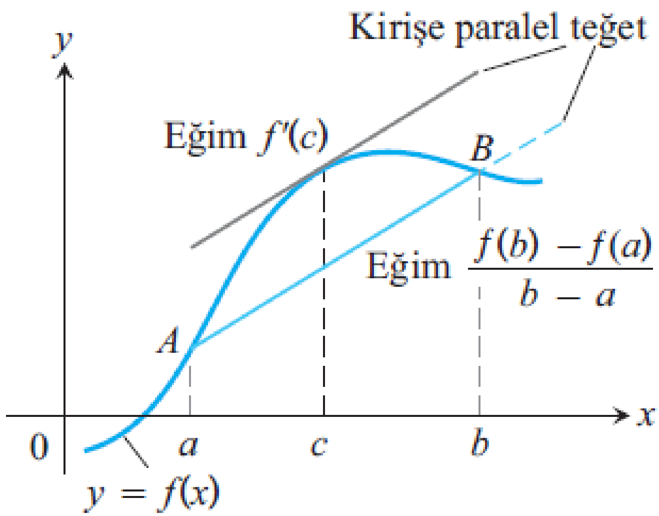
$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

polinom fonksiyonu $[-3, 3]$ aralığının her noktasında sürekli ve $(-3, 3)$ aralığının her noktasında türevlidir. $f(-3) = f(3) = 0$ olduğundan, Rolle Teoremi, $a = -3$ ile $b = 3$ arasındaki açık aralıkta f''nün en az bir defa sıfır olması gerektiğini söyler. Gerçekten de, $f'(x) = x^2 - 3$, bu aralıkta $x = -\sqrt{3}$ 'te ve $x = \sqrt{3}$'te olmak üzere iki defa sıfır olur.

■



ŞEKİL 4.12 Rolle Teoreminin söylediği gibi, bu eğrinin x-eksenini kestiği noktaların arasında yatay teğetler vardır (Örnek 1).



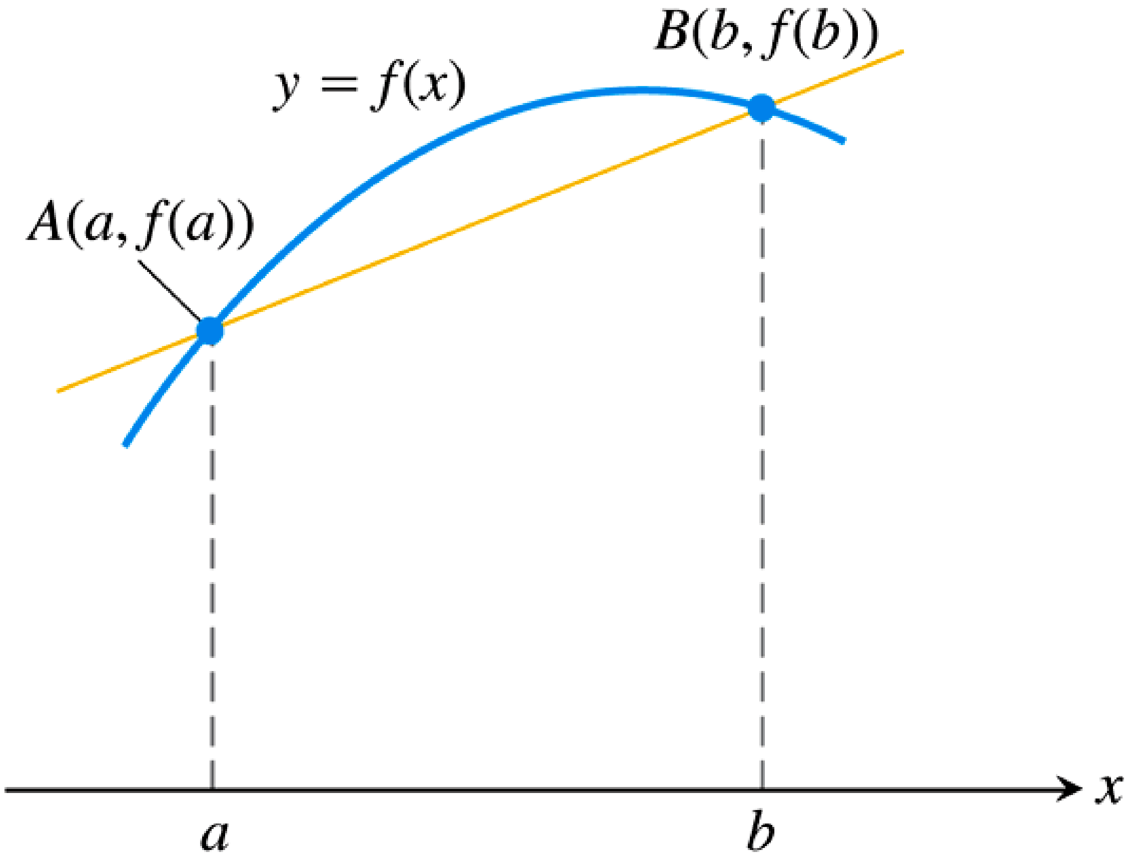
ŞEKİL 4.14 Geometrik olarak, Ortalama Değer Teoremi A ve B arasında, eğrinin AB kirişine paralel en az bir teğetinin bulunduğunu söyler.

TEOREM 4 Ortalama Değer Teoremi

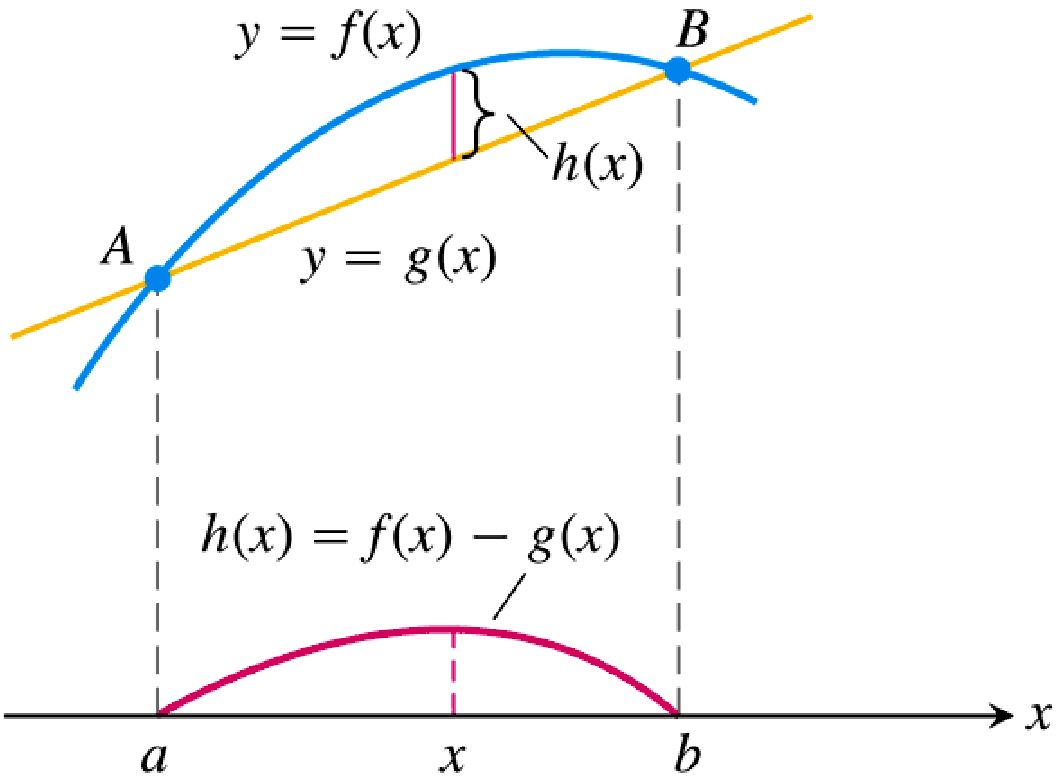
$y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a, b) açık aralığında türevlenebilir olduğunu varsayın. Bu durumda (a, b) aralığında

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{1}$$

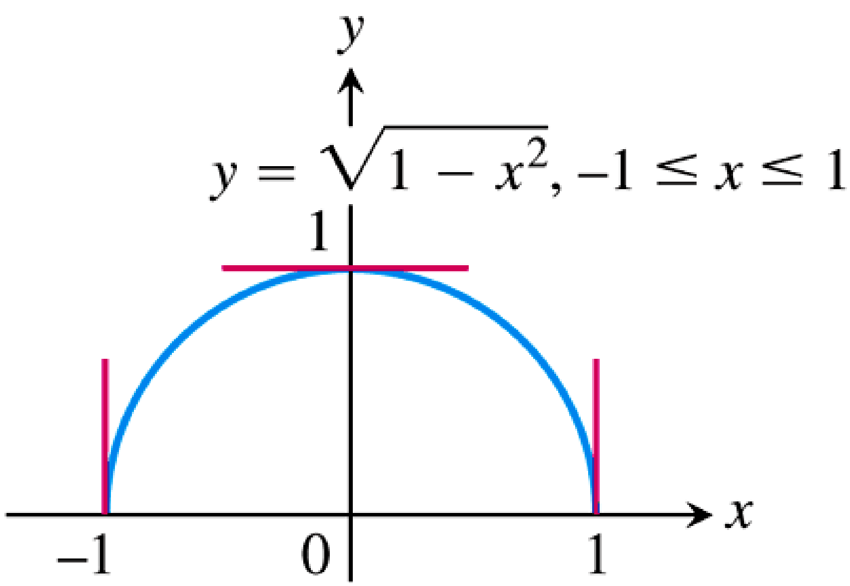
olacak şekilde en az bir c noktası vardır.



ŞEKİL 4.15 $[a, b]$ aralığında f'nin grafiği ve AB kirişi.

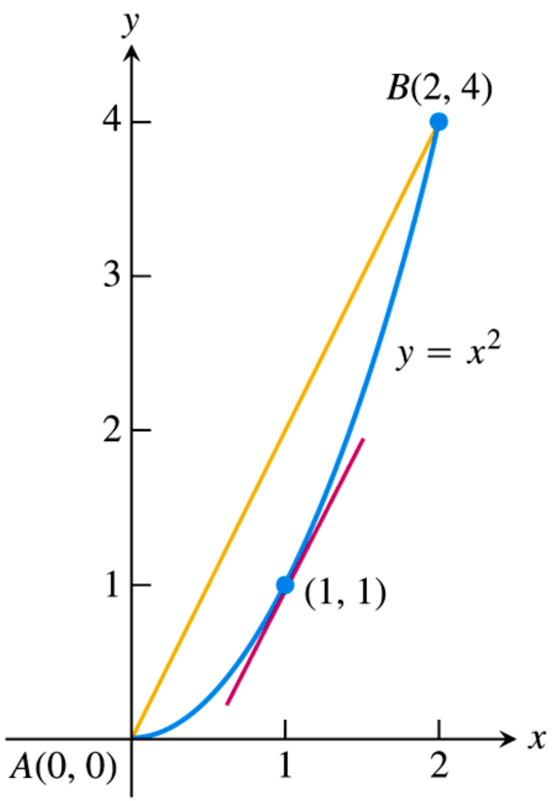


ŞEKİL 4.16 AB kirişi $g(x)$ fonksiyonunun grafiğidir. $h(x) = f(x) - g(x)$ fonksiyonu x noktasında f ve g grafikleri arasındaki dikey uzaklıktır.



ŞEKİL 4.17 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonu, f'nin -1 ve 1'de türevlenememesine rağmen $[-1, 1]$ aralığında ortalama değer teoreminin hipotezini (ve sonuçlarını) sağlar..

ÖRNEK 3 $f(x) = x^2$ fonksiyonu (Şekil 4.18), $0 \leq x \leq 2$ için süreklidir ve $0 < x < 2$ için türevlidir. $f(0) = 0$ ve $f(2) = 4$ olduğundan, Ortalama Değer Teoremi, aralıktaki bir c noktasında, $f'(x) = 2x$ türevinin değeri $(4-0)/(2-0) = 2$ olmalıdır. Bu (istisna) durumda c'yi $2c = 2$ denkleminden $c = 1$ olarak buluruz. ■



ŞEKİL 4.18 Örnek 3'te bulduğumuz gibi, $c = 1$ teğetin kirişe paralel olduğu noktadır.

Matematiksel Sonuçlar

SONUÇ 1 **Türevi Sıfır Olan Fonksiyonlar Sabittir**

Bir (a, b) açık aralığının her x noktasında $f'(x) = 0$ ise, C bir sabit olmak üzere, her $x \in (a, b)$ için $f(x) = C$ dir.

SONUÇ 2 **Türevleri Aynı Olan Fonksiyonların Arasındaki Fark Sabittir.**

Bir (a, b) aralığının her x noktasında $f'(x) = g'(x)$ ise öyle bir C sabiti vardır ki her $x \in (a, b)$ için $f(x) = g(x) + C$ dir. Yani, $f - g$ farkı (a, b) üzerinde sabittir.

ÖRNEK 5 Türevi $\sin x$ olan ve grafiği $(0, 2)$ noktasından geçen $f(x)$ fonksiyonunu bulun.

Çözüm $f(x)$ ile $g(x) = -\cos x$ fonksiyonlarının türevleri aynı olduğu için, C bir sabit olmak üzere, $f(x) = -\cos x + C$ olduğunu biliyoruz. C'nin değerini $f(0) = 2$ olması (f'nin grafiğinin $(0, 2)$ noktasından geçmesi) koşulundan bulabiliriz:

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2, \quad \text{dolayısıyla } C = 3$$

f'nin formülü $f(x) = -\cos x + 3$'tür. ■

İvmeden Hız ve Konum Bulmak

Serbest düşen ve ivmesi 9.8 m/sn^2 olan bir cismin hız ve konum fonksiyonlarının nasıl bulunduğu aşağıda veriliştir.

$$v(t) = 9.8t + C$$

olur. Cisim serbest düştüğü için, $v(0) = 0$ olur. Buradan

$$9.8(0) + C = 0 \quad \text{ve} \quad C = 0$$

$$s(t) = 4.9t^2 + C$$

olur. Başlangıç yüksakliği, bulunduğu noktadan aşağıya doğru pozitif olarak ölçülen, $s(0) = h$ ise,

$$4.9(0)2 + C = h \quad \text{ve} \quad C = h$$

bulunur. Konum fonksiyonu $s(t) = 4.9t^2 + h$ olmalıdır.

4.3

Monoton Fonksiyonlar ve Birinci Türev Testi

TANIMLAR Artan, Azalan Fonksiyonlar

f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1 ile x_2 de I 'da herhangi iki nokta olsun.

1. $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise, f I 'da **artandır** denir.

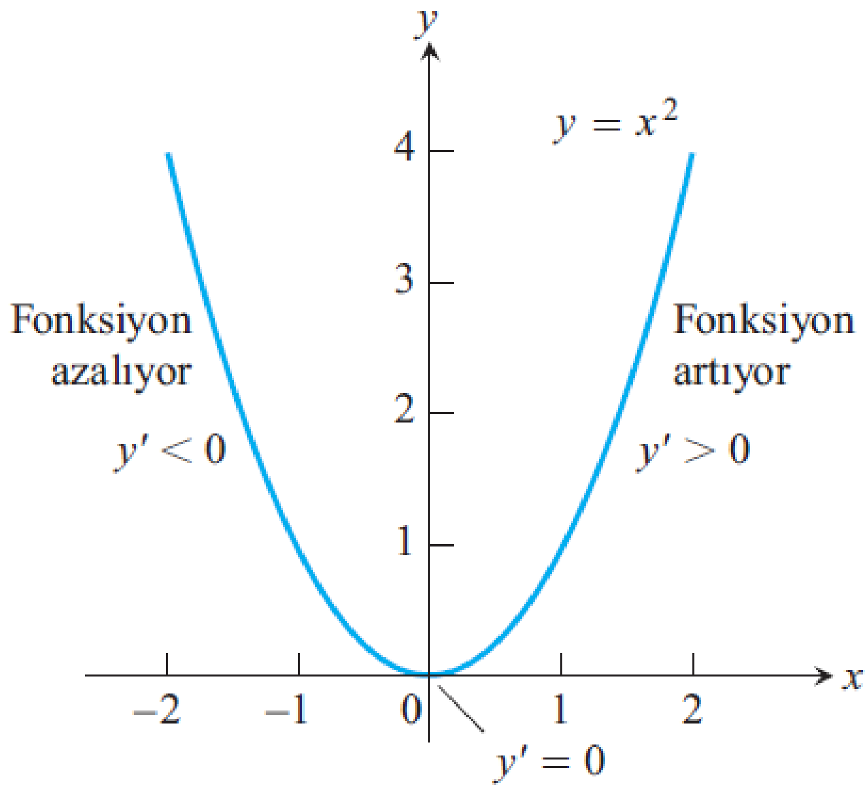
2. $x_1 < x_2$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise, f I 'da **azalandır** denir.

I 'da artan veya azalan bir fonksiyona I 'da **monotondur** denir.

SONUÇ 3 Monoton Fonksiyonlar İçin Birinci Türev Testi

f'nin $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir olduğunu varsayın.

Her $x \in (a, b)$ noktasında $f'(x) > 0$ ise f, $[a, b]$ aralığında artandır.
Her $x \in (a, b)$ noktasında $f'(x) < 0$ ise f, $[a, b]$ aralığında azalandır.



ŞEKİL 4.21 $f(x) = x^2$ fonksiyonu $(-\infty, 0]$ ve $[0, \infty)$, aralıklarında monotundur, fakat $(-\infty, \infty)$ aralığında monoton değildir.

ÖRNEK 1 Monoton Fonksiyonlar İçin Birinci Türev Testini Kullanmak

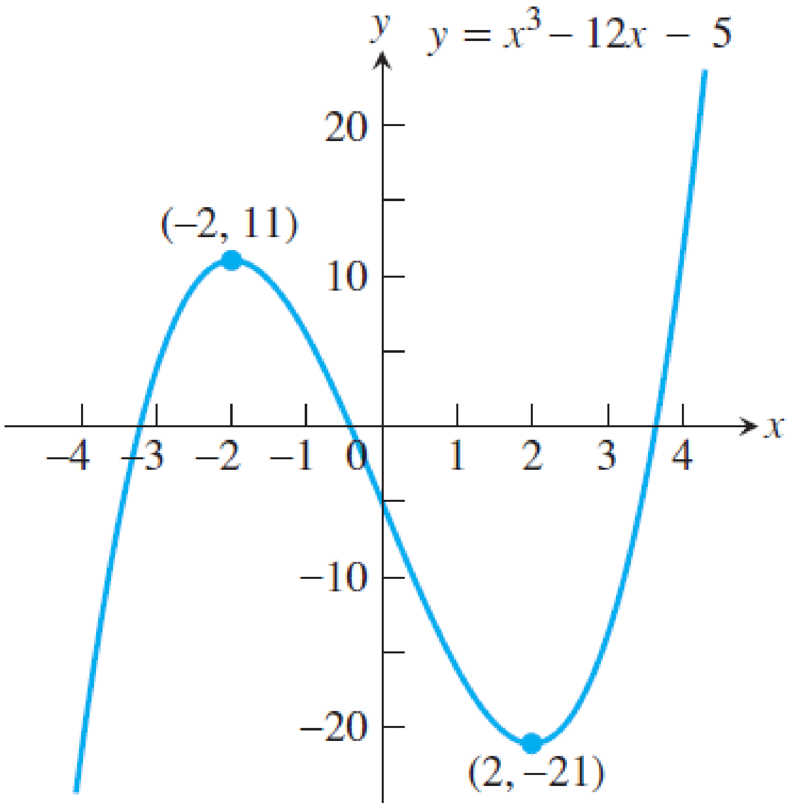
$f(x) = x^3 - 12x - 5$'in kritik noktalarını bulun ve f'nin arttığı ve azaldığı aralıkları belirleyin.

Çözüm f fonksiyonu her yerde sürekli ve türevlenebilirdir. Birinci türev

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) \\ &= 3(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

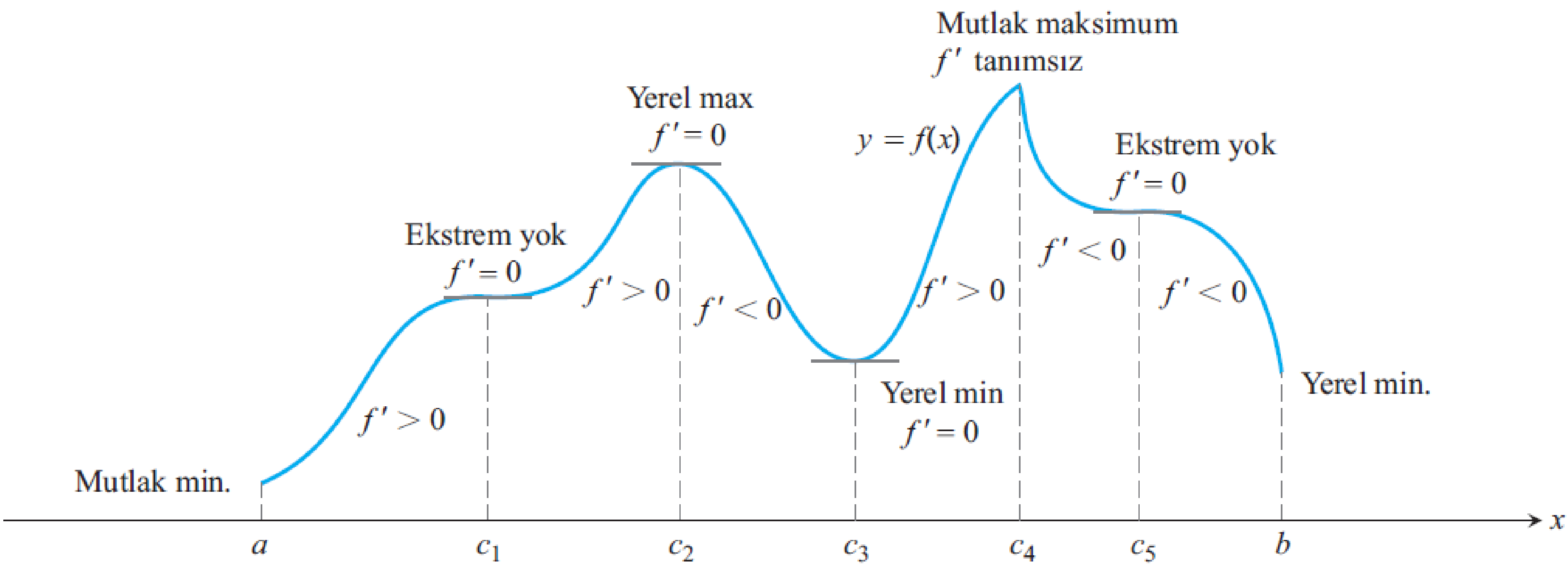
Aralıklar	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Hesaplanmış f'	$f'(-3) = 15$	$f'(0) = -12$	$f'(3) = 15$
f''nün işareti	$+$	$-$	$+$
f'nin davranışı	artan	azalan	artan

■



ŞEKİL 4.22 $f(x) = x^3 - 12x - 5$ fonksiyonu üç ayrı aralık üzerinde monotondur (Örnek 1).

Yerel Ekstremum Değerler İçin Birinci Türev Testi



ŞEKİL 4.23 Bir fonksiyonunun birinci türevi, grafiğin nasıl yükseldiğini ve alçaldığını söyler.

Yerel Ekstremum Değerler İçin Birinci Türev Testi

c'nin, sürekli bir f fonksiyonunun bir kritik noktası olduğunu ve f'nin, c'yi içeren bir aralığın her noktasında (c'nin kendisi hariç olabilir) türevlenebilir olduğunu varsayın. Soldan sağa, c'den geçerken.

1. f' c'de negatiften pozitife değişiyorsa, f'nin c'de bir yerel minium değeri vardır.

2. f' c'de pozitiften negatife değişiyorsa, f'nin c'de bir yerel maksimum değeri vardır.

3. f' c'de işaret değiştirmiyorsa (yani, f' c'nin iki tarafında da pozitif veya her iki tarafında da negatif ise), f'nin c'de bir yerel ekstremum değeri yoktur.

ÖRNEK 2 Yerel Ekstremum Değerler İçin Birinci Türev Testini Kullanmak

$$f(x) = x^{1/3}(x-4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

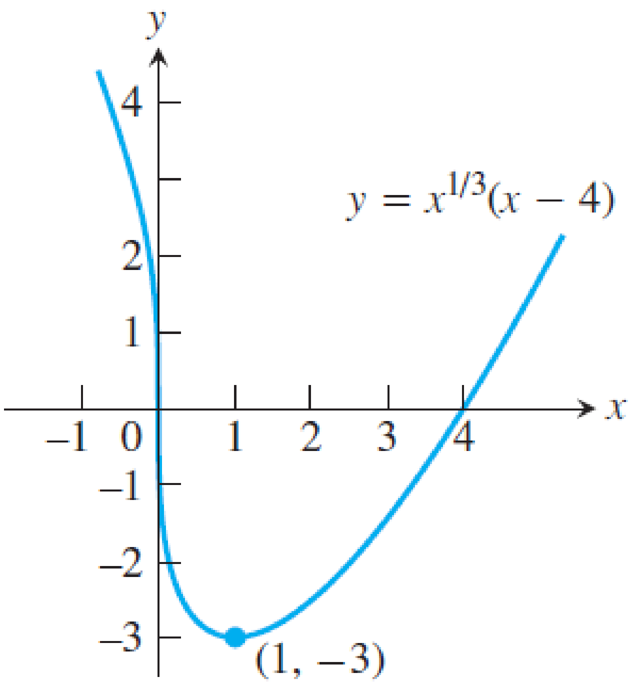
fonksiyonunun kritik noktalarını bulun. f'nin arttığı ve azaldığı aralıkları belirleyin. Fonksiyonun yerel ve mutlak ekstremum değerlerini bulun.

Çözüm f fonksiyonu iki sürekli fonksiyonun, $x^{1/3}$ ve $(x-4)$ çarpımı olduğundan her x te süreklidir. Birinci türev

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{4/3} - 4x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3}$$

$$= \frac{4}{3}x^{-2/3}\left(x - 1\right) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$$

Aralıklar	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
f''nün işareti	$-$	$-$	$+$
f'nin davranışı	azalan	azalan	artan



ŞEKİL 4.24 $f(x) = x^{1/3}(x - 4)$ $x < 1$ iken azalır $x > 1$ iken artar (Örnek 2).

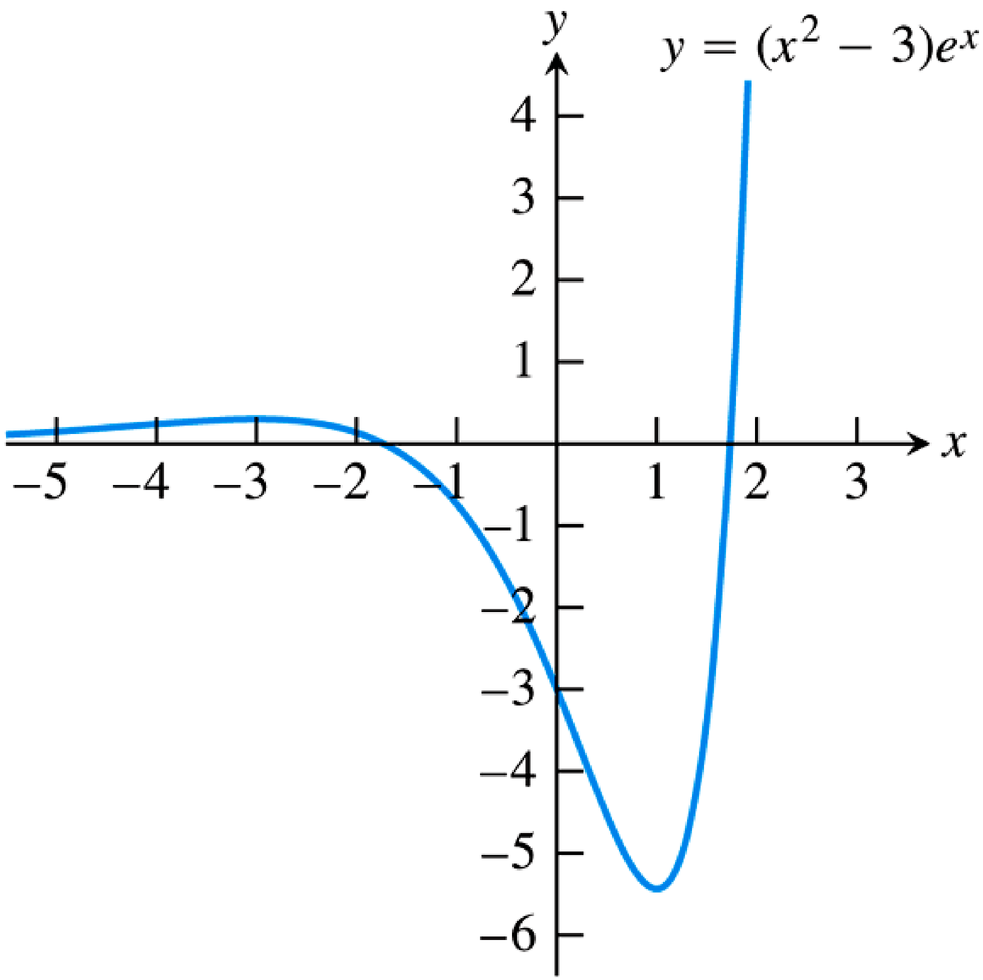
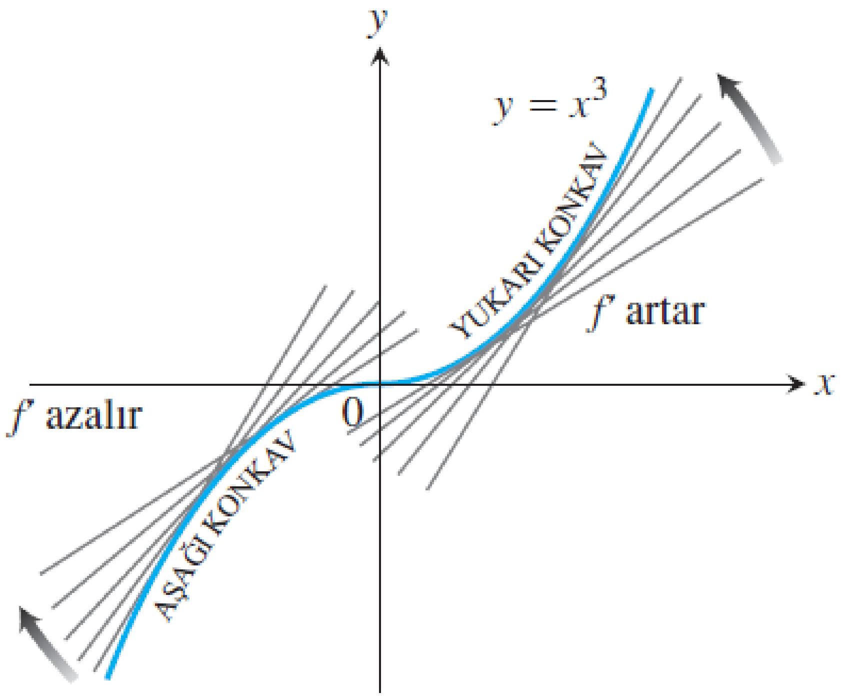


FIGURE 4.23 The graph of $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ (Example 3).

Interval	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$1 < x$
Sign of f'	$+$	$-$	$+$
Behavior of f	increasing	decreasing	increasing

4.4

Konkavlık ve Eğri Çizimi



ŞEKİL 4.25 $f(x) = x^3$'ün grafiği $(-\infty, 0)$ aralığında aşağı konkav, $(0, \infty)$ aralığında ise yukarı konkavdır (Örnek 1a).

TANIM **Yukarıya Konkav, Aşağıya Konkav**

Türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği,

(a) bir I açık aralığı üzerinde, f' I üzerinde artan ise, **yukarıya konkav**,

(b) bir I açık aralığı üzerinde, f' I üzerinde azalan ise, **aşağıya konkav**,

dır.

Konkavlık İçin İkinci Türev Testi

$y = f(x)$ bir I aralığında iki kere türevlenebilir olsun.

1. I üzerinde $f'' > 0$ ise, f'nin I'daki grafiği yukarı konkavdır.

2. I üzerinde $f'' < 0$ ise, f'nin I'daki grafiği aşağı konkavdır.

ÖRNEK 1 Konkavlık Testini Uygulamak

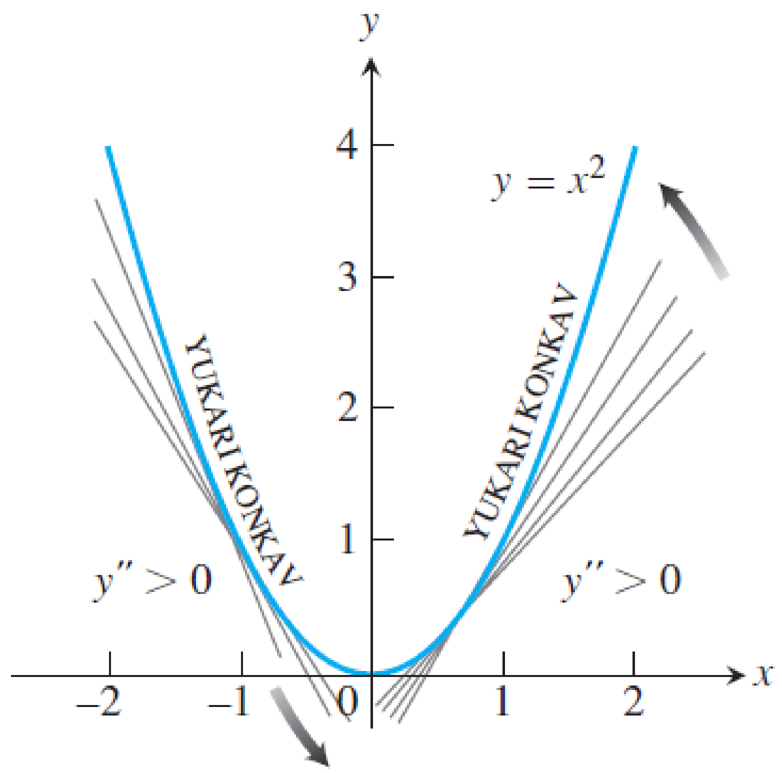
(a) $y = x^3$ eğrisi (Şekil 4.25), $y'' = 6x < 0$ olduğu $(-\infty, 0)$ aralığında aşağı konkav, $y'' = 6x > 0$ olduğu $(0, \infty)$ aralığında ise yukarı konkavdır.

(b) $y = x^2$ eğrisi (Şekil 4.26), $y'' = 0$ daima pozitif olduğundan, $(-\infty, \infty)$ üzerinde yukarı konkavdır. ■

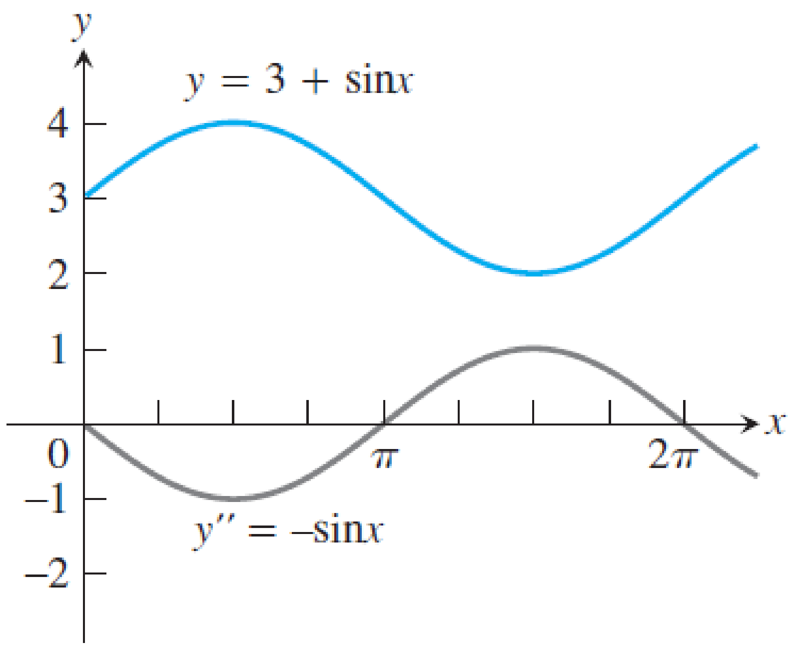
ÖRNEK 2 Konkavlığı Belirlemek

$y = 3 + \sin x$'in $[0, 2\pi)$ üzerindeki konkavlığını belirleyin.

Çözüm $y = 3 + \sin x$'in grafiği, $y'' = -\sin x$'in negatif olduğu $(0, \pi)$ aralığında aşağıya konkav, $y'' = -\sin x$'in pozitif olduğu $(\pi, 2\pi)$ aralığında yukarıya konkavdır (Şekil 4.27). ■



ŞEKİL 4.26 $f(x) = x^2$ fonksiyonun grafiği her aralıkta yukarı konkavdır (Örnek 1b).



ŞEKİL 4.27 y'nin konkavlığının belirlenmesinde y'' grafiğinin kullanılışı (Örnek 2).

Büküm Noktaları

Örnek 2'deki $y = 3 + \sin x$ eğrisinin konkavlığı $(\pi, 3)$ noktasında değişir $(\pi, 3)$ noktasına eğrinin bir *büküm (dönüm) noktası* denir.

TANIM Büküm Noktası

Bir fonksiyonun teğetinin bulunduğu ve konkavlığın değiştiği noktaya **büküm noktası** denir.

At a point of inflection $(c, f(c))$, either $f''(c) = 0$ or $f''(c)$ fails to exist.

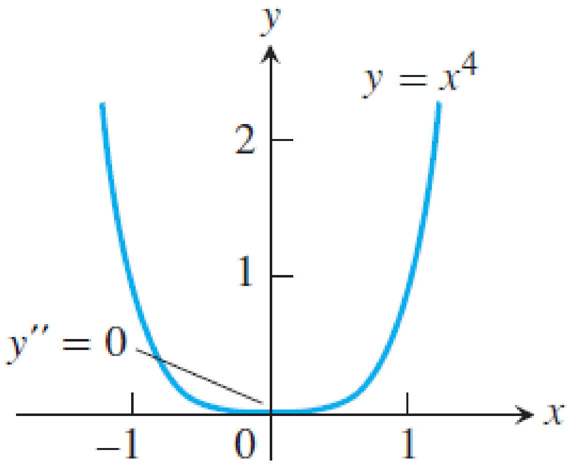
ÖRNEK 3 $y'' = 0$ Olduğu Bir Noktada Büküm Noktası Bulunmayabilir

$y = x^4$ eğrisinin $x = 0$'da büküm noktası yoktur (Şekil 4.28). O noktada $y'' = 12x^2$ sıfır olduğu halde, işaret değiştirmez. ■

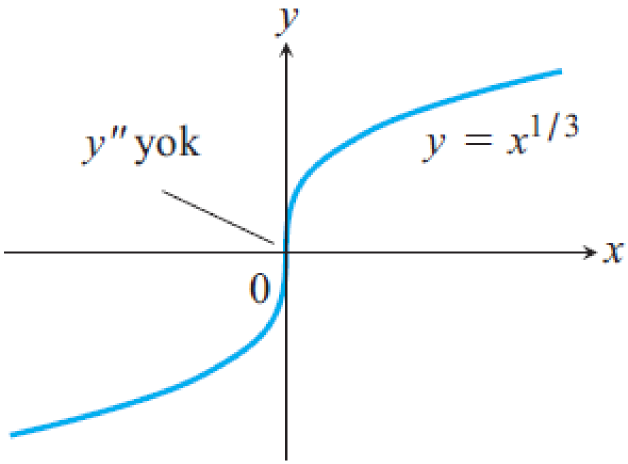
ÖRNEK 4 y'' 'nün Bulunmadığı Bir Noktada Büküm Noktası Bulunabilir

$y = x^{1/3}$ eğrisinin $x = 0$'da bir büküm noktası vardır (Şekil 4.29), fakat o noktada y'' yoktur.

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{1/3}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}.$$ ■



ŞEKİL 4.28 $y = x^4$'ün grafiğinin, $y'' = 0$ olmasına rağmen, orijine büküm noktası yoktur (Örnek 3).



ŞEKİL 4.29 y'''nün bulunmadığı bir noktada büküm noktası olabilir (Örnek 4).

ÖRNEK 5 Bir Doğru Boyunca Hareketi İncelemek

Bir parçacık, yatay bir doğru üzerinde

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5, \qquad t \geq 0$$

konum fonksiyonu ile hareket etmektedir. Hızı ve ivmeyi bulun ve parçacığın hareketini tanımlayın.

Çözüm Hız,

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22 = 2(t-1)(3t-11)$$

ve ivme

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7)$$

dir. $s(t)$ fonksiyonu artarken, parçacık sağa doğru gider; $s(t)$ azalırken, parçacık sola doğru gider.

Aralıklar	$0 < t < 1$	$1 < t < 11/3$	$11/3 < t$
$v = s'$'ün işareti	$+$	$-$	$+$
s'nin davranışı	artan	azalan	artan
Parçacağın hareketi	sağa	sola	sağa

Parçacık, $[0, 1)$ ve $(11/3, \infty)$ zaman aralıklarında sağa, $(1, 11/3)$ aralığında sola gider. $t = 1$ ve $t = 11/3$ te, bir an için durağandır.

$t = 7/3$ iken, $a(t) = s''(t) = 4(3t - 7)$ ivmesi sıfırdır.

Aralıklar	$0 < t < 7/3$	$7/3 < t$
$a = s''$'nün işareti	$-$	$+$
s'nin grafiği	aşağı konkav	yukarıya konkav

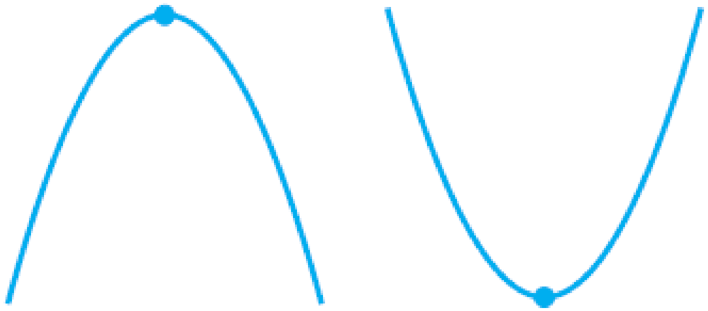
Yerel Ekstremum Değerler İçin İkinci Türev Testi

Bir kritik noktada f''nün işaret değişikliklerine bakmak yerine, bazen bir yerel ekstremum değerin varlığını ve karakterini belirlemede aşağıdaki testi kullanabiliriz.

TEOREM 5 **Yerel Ekstremum Değerler İçin İkinci Türev Testi**

f'''nün $x = c$'yi içeren bir açık aralıkta sürekli olduğunu varsayın.

1. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) < 0$ ise, f'nin $x = c$'de bir yerel maksimumu vardır.
2. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) > 0$ ise, f'nin $x = c$'de bir yerel minimumu vardır.
3. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) = 0$ ise, test sonuç vermez. Fonksiyonun bir yerel maksimumu, bir yerel minimumu bulunabilir veya hiçbiri bulunmayabilir.



$f' = 0,\ f'' < 0$
$\Rightarrow$ yerel max

$f' = 0,\ f'' > 0$
$\Rightarrow$ yerel min

ÖRNEK 6 f'nin Grafiğini Çizmek İçin f' ve f'''nü Kullanmak

Aşağıdaki adımları kullanarak

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

fonksiyonunun bir grafiğini çizin.

(a) f'nin ekstremumlarının nerelerde olduklarını belirleyin.

(b) f'nin artan olduğu aralıkları ve azalan olduğu aralıkları bulun.

(c) f'nin grafiğinin nerede yukarıya konkav ve nerede aşağıya konkav olduğunu bulun.

(d) f'nin grafiğinin genel bir şeklini çizin

(e) Yerel maksimum ve minimum noktalar, büküm noktaları ve eğrinin eksenleri kestiği noktalar gibi özel bazı noktaları işaretleyin.

Çözüm $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ var olduğundan f süreklidir. f'nin tanım kümesi $(-\infty, \infty)$'dur, ayrıca f''nün tanım kümesi de $(-\infty, \infty)$ dur. Böylece, f'nin kritik noktaları sadece f''nün sıfırlarında görülür.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

olduğundan, birinci türev $x = 0$ ve $x = 3$'te sıfırdır.

Aralıklar	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
***f'*'nün işareti**	$-$	$-$	$+$
***f*'nin davranışı**	azalan	azalan	artan

(a) Yerel ekstremumlar için Birinci Türev Testini ve yukarıdaki tabloyu kullanarak, $x = 0$'da bir yerel ekstremum bulunmadığını ve $x = 3$'te bir yerel minimum bulunduğunu görürüz.

(b) Yukarıdaki tabloyu kullanarak, f'nin, $(-\infty, 0]$ ve $[0, 3]$ üzerinde azalan ve $[3, \infty)$ üzerinde artan olduğunu görürüz.

(c) $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$, $x = 0$ ve $x = 2$'de sıfırdır.

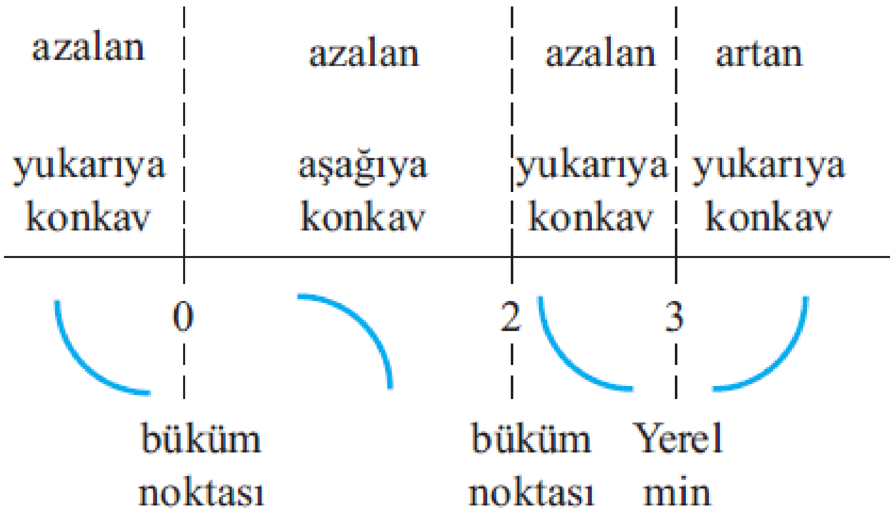
Aralıklar	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
f'''nün işareti	$+$	$-$	$+$
f'nin davranışı	yukarıya konkav	aşağıya konkav	yukarıya konkav

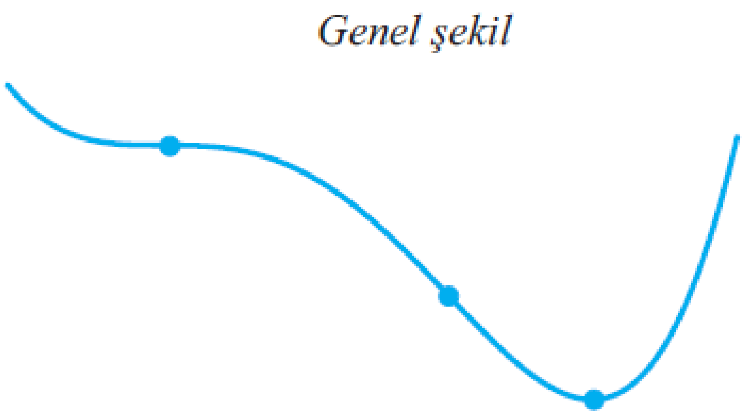
f'nin, $(-\infty, 0)$ ve $(2, \infty)$ aralıklarında yukarıya konkav, $(0, 2)$ aralığında aşağıya konkav olduğunu görürüz.

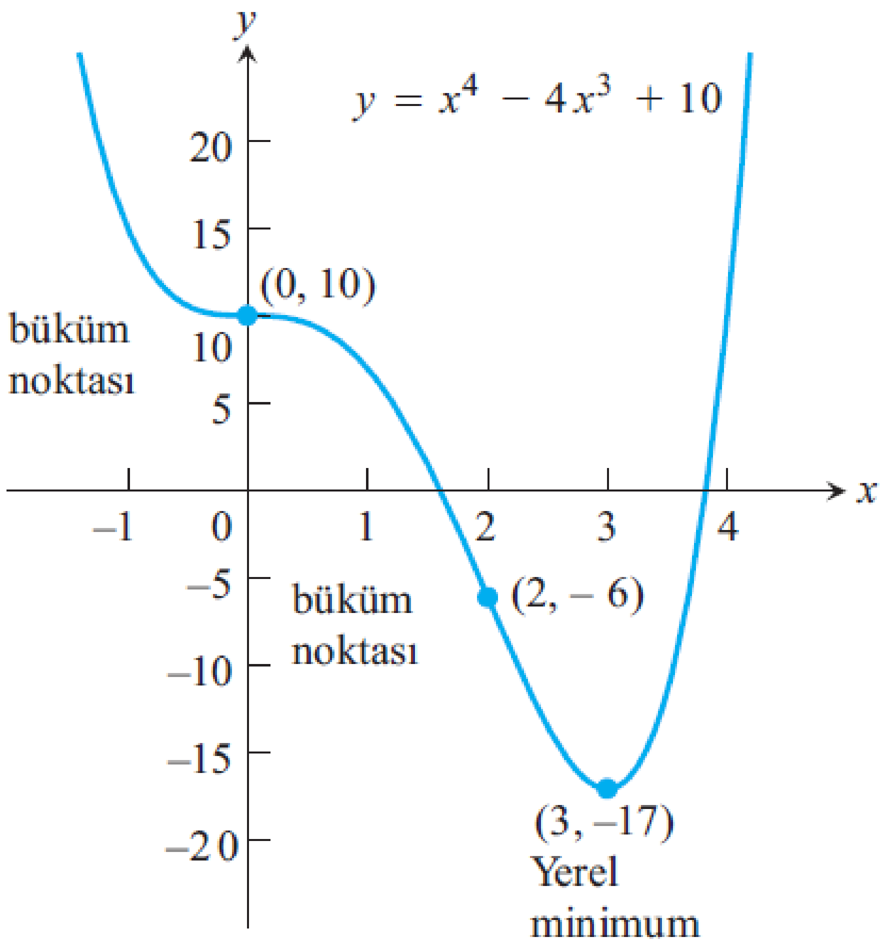
(d) Yukarıda iki tablodaki bilgileri özetleyerek şunları elde ederiz;

$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
azalan	azalan	azalan	artan
yukarıya konkav	aşağıya konkav	yukarıya konkav	yukarıya konkav

Eğrinin genel şekli şöyledir;







ŞEKİL 4.30 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$'un grafiği (Örnek 6).

$y = f(x)$ Grafiğini Çizme Stratejisi

1. f'nin tanım kümesini ve olabilecek simetrileri belirleyin
2. y' ve y'''nü bulun.
3. f'nin kritik noktalarını bulun ve her birinde fonksiyonun davranışını belirleyin
4. Eğrinin nerede arttığını ve nerede azaldığını bulun.
5. Büküm noktalarını (varsa) bulun ve eğrinin konkavlığını belirleyin.
6. Asimptotları tanımlayın.
7. Eksenleri kesim noktalarını ve 3–5 adımlarında bulunanlar gibi, özel noktaları işaretleyin ve eğriyi çizin.

ÖRNEK 7 Grafik çizme Stratejisini Kullanmak

$f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$ 'in grafiğini çizin.

Çözüm

1. f'nin tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ dur ve eksenlere veya orijine göre simetri yoktur (Bölüm 1.4).
2. f've f'''nü bulun.

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$$

x-kesim $x = -1$'de,
y-kesim ($y = 1$) $x = 0$ da

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)\cdot 2(x+1) - (x+1)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

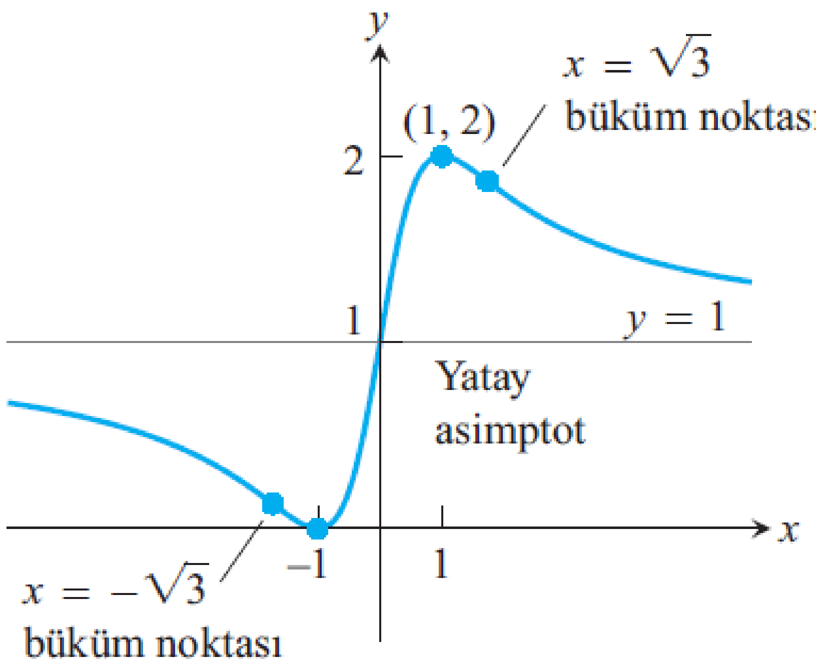
$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Kritik noktalar:
$x = -1, x = 1$

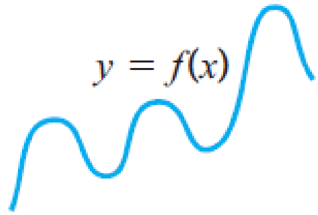
$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2 \cdot 2(-2x) - 2(1-x^2)[2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

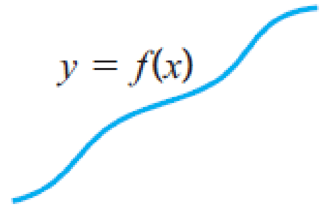
Biraz hesaptan sonra



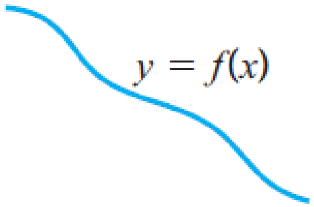
ŞEKİL 4.31 $y = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$'in grafiği (Örnek 7).



Türevlenebilir $\Rightarrow$
düzgün, bağlantılı;
yükselip alçalabilir

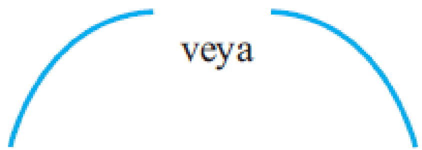


$y' > 0 \Rightarrow$ soldan
sağa doğru yükselir;
dalgalı olabilir.

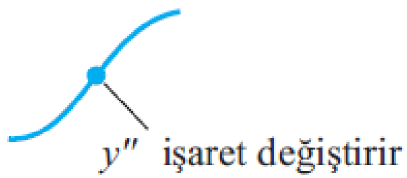


$y' < 0 \Rightarrow$ soldan
sağa doğru alçalır;
dalgalı olabilir.

$y'' > 0 \Rightarrow$ yukarı
konkav; dalga yok; grafik
yükselip alçalabilir

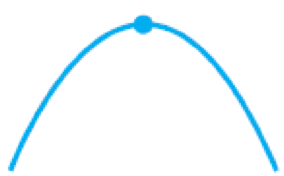


$y'' < 0 \Rightarrow$ aşağı
konkav; dalga yok; grafik
yükselip alçabilir



büküm noktası

y' işaret değiştirir $\Rightarrow$ yerel
maksimum veya
yerel minimum



bir noktada
$y' = 0$ ve $y'' < 0$;
Yerel maksimum

bir noktada
$y' = 0$ ve $y'' > 0$;
Yerel minimum

4.5

Belirsiz Şekiller ve L′ Hôpital Kuralı

0 /0 Belirsiz Şekli

TEOREM 6 L'Hôpital Kuralı (Birinci Şekil)

$f(a) = g(a) = 0$ olduğunu, $f'(a)$ ve $g'(a)$'nın var olduğunu ve $g'(a) \neq 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

olur.

ÖRNEK 1 L'Hôpital Kuralını Kullanmak

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{3x - \sin x}{x} = \left. \frac{3 - \cos x}{1} \right|_{x=0} = 2$$

(b) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \left. \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1} \right|_{x=0} = \frac{1}{2}$$ ■

TEOREM 7 L'Hôpital Kuralı (Daha Kuvvetli Şekil)

$f(a) = g(a) = 0$ olduğunu, f ile g'nin a noktasını içeren bir I açık aralığında türevlenebilir olduklarını varsayın. Ayrıca $x \neq a$ ise, I 'da $g'(x) \neq 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda, sağdaki limitin var olması koşuluyla

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur.

L'Hôpital Kuralını Kullanmak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limitini l'Hôpital kuralı ile bulmak için, $x = a$ da $0/0$ fomunu elde ettiğiniz sürece f ve g'nin türevlerini almaya devam edin. Fakat, bu türevlerden biri veya öteki $x = a$ da sıfırdan farklı olduğunda türev almayı durdururuz. Payın veya paydanın sıfırdan farklı sonlu bir limitinin olması durumunda l'Hôpital Kuralı uygulanamaz.

ÖRNEK 2 L'Hôpital Kuralının Kuvvetli Şeklini Uygulamak

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2}$ $\qquad \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1/2)(1+x)^{-1/2} - 1/2}{2x} \qquad \text{Hala } \frac{0}{0}\text{; tekrar türev alın.}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-(1/4)(1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8} \qquad \frac{0}{0} \text{ değil; limit bulundu.}$$

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ $\qquad \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \qquad \text{Hala } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} \qquad \text{Hala } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} \qquad \frac{0}{0} \text{ değil; limit bulundu.}$$ ■

If $\lim_{x \to a} \ln f(x) = L$, then

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} e^{\ln f(x)} = e^L.$$

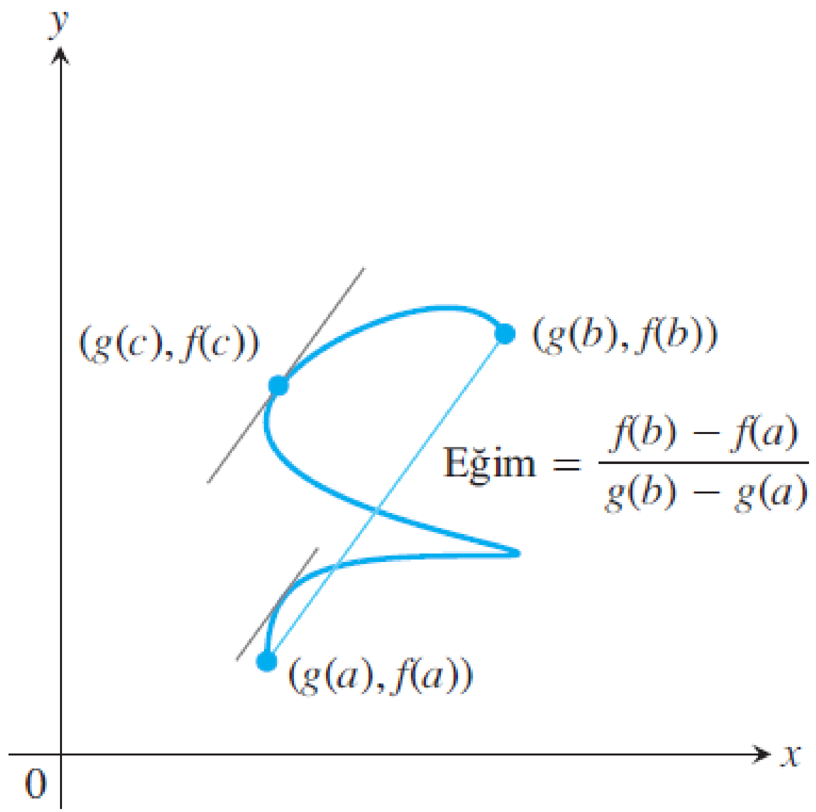
Here a may be either finite or infinite.

TEOREM 8　　Cauchy Ortalama Değer Teoremi

f ve g fonksiyonlarının $[a, b]$ aralığında sürekli, (a, b)'de türevlenebilir olduklarını ve ayrıca (a, b)'de $g'(x) \neq 0$ olduğunu varsayın. Bu durumda, (a, b)'de

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

olacak şekilde bir c sayısı bulunur.



ŞEKİL 4.42 $(g(c), f(c))$'deki teğetin eğiminin, $(g(a), f(a))$ ve $(g(b), f(b))$ noktalarını birleştiren kirişin eğimi ile aynı olduğu en az bir $t = c$, $a < c < b$ parametre değeri vardır.

ÖRNEK 4 L'Hôpital Kuralının Tek-Taraflı Limitlerle Kullanmak

(a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x^2}$ $\qquad \dfrac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{2x} = \infty$ $\qquad x > 0$ için pozitif

(b) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x^2}$ $\qquad \dfrac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\cos x}{2x} = -\infty$ $\qquad x < 0$ için negatif

∞/∞, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$ Belirsiz Şekilleri

Bazen, $x = a$ yazarak $x \to a$ iken limit hesaplamaya çalıştığımızda, $0/0$ yerine ∞/∞, $\infty \cdot 0$ veya $\infty - \infty$ gibi ne olduğu belirsiz ifadeler elde ederiz. Önce ∞/∞ formunu ele alıyoruz.

Daha ileri seviyede kitaplarda l'Hôpital Kuralının $0/0$'a olduğu gibi ∞/∞'a uygulandığı da ispatlanmaktadır. $x \to a$ iken $f(x) \to \pm\infty$ ve $g(x) \to \pm\infty$ ise, sağdaki limitin var olması koşuluyla

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dir. $x \to a$ notasyonunda a sonlu veya sonsuz olabilir. Ayrıca, $x \to a$ ifadesi $x \to a^+$ veya $x \to a^-$ tek taraflı limitleri ile değiştirilebilir.

ÖRNEK 5 $\quad \infty/\infty$ Belirsiz Şekli ile Çalışmak

(a) $\displaystyle \lim_{x \to \pi/2} \frac{\sec x}{1 + \tan x}$

(b) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{x - 2x^2}{3x^2 + 5x}$

limitlerini bulun.

ÖRNEK 6 $\infty \cdot 0$ Belirsiz Şekli ile Çalışmak

$$\lim_{x \to \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right)$$

limitini bulun.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) & & \infty \cdot 0 \\
&= \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{1}{h} \sin h \right) & h = 1/x. \\
&= 1
\end{aligned}$$

ÖRNEK 7 $\infty - \infty$ Belirsiz Şekli ile Çalışmak

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$$

limitini bulun.

Çözüm $x \to 0^+$ ise $\sin x \to 0^+$ dir ve

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x} \to \infty - \infty$$

olur. Benzer şekilde $x \to 0^-$ ise $\sin x \to 0^-$ dir ve

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x} \to -\infty-(-\infty) = -\infty+\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \qquad \text{Hala } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

■

4.6

Uygulamalı Optimizasyon

Uygulamalı Optimizasyon Problemlerini Çözmek

1. *Problemi okuyun.* Anlayana kadar problemi okuyun. Neler verilmiştir? Optimize edilecek bilinmeyenin niceliği nedir?
2. *Bir resim çizin*. Problem için önemli olabilecek noktaları isimlendirin.
3. *Değişkenleri belirleyin.* Resimdeki ve problemdeki her bağıntıyı bir denklem veya cebirsel bir ifade olarak yazın ve bilinmeyen değişkeni tanımlayın.
4. *Bilinmeyen nicelik için bir denklem yazın.* Yapabiliyorsanız, bilinmeyenleri problemdeki bir değişken cinsinden veya iki bilinmeyenli iki denklem şeklinde ifade edin. Bu oldukça işlem gerektirebilir.
5. *Tanım kümesindeki kritik noktaları ve uç noktalarını test edin.* Fonksiyonun grafiğinin şekli hakkında bildiklerinizi kullanın. Kritik noktaları belirlemek ve sınıflandırmak için birinci ve ikinci türevleri kullanın.

ÖRNEK 1 Bir Kutu Üretmek

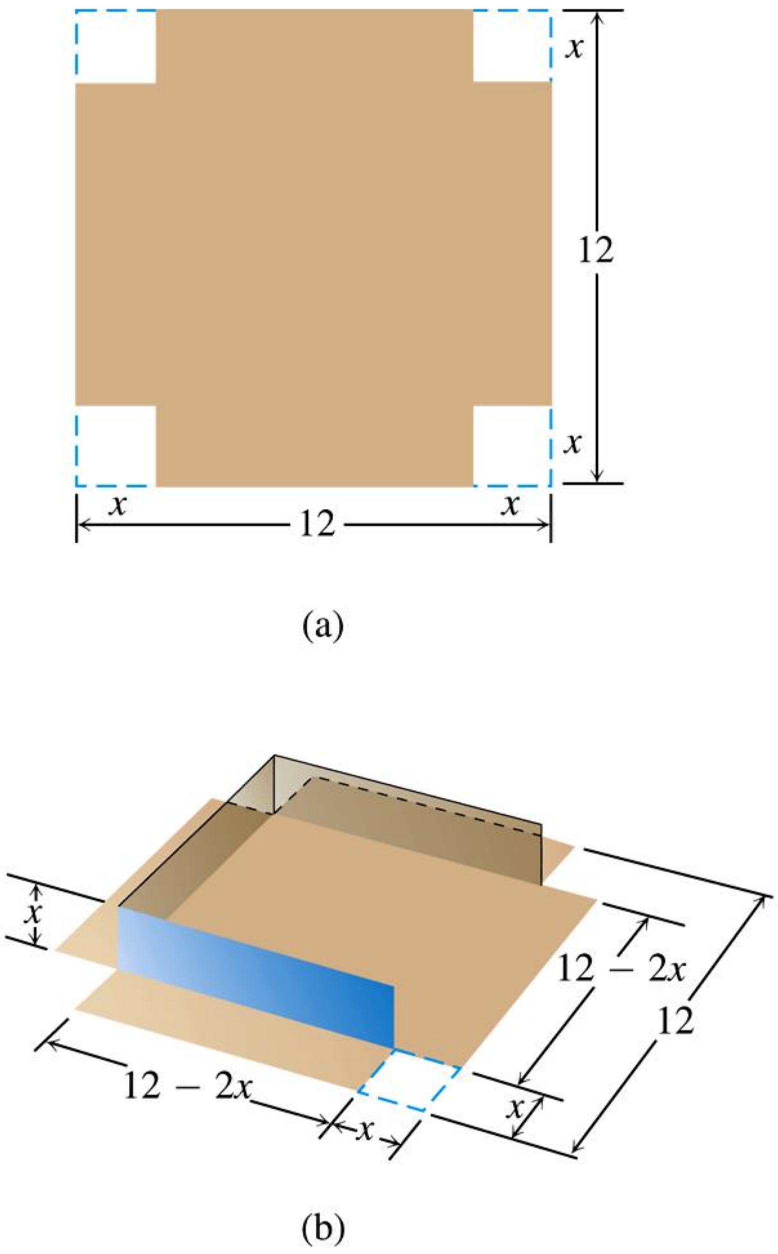
Üstü açık bir kutu 12×12 inç^2'lik bir teneke levhanın köşelerinden eş büyüklükte küçük kareler kesilip, kenarları kıvrılarak yapılacaktır. Kutunun mümkün olduğunca fazla şey alabilmesi için köşelerden kesilen kareler ne büyüklükte olmalıdır?

ÖRNEK 2 Randımanlı Bir Silindirik Kutu Tasarlamak

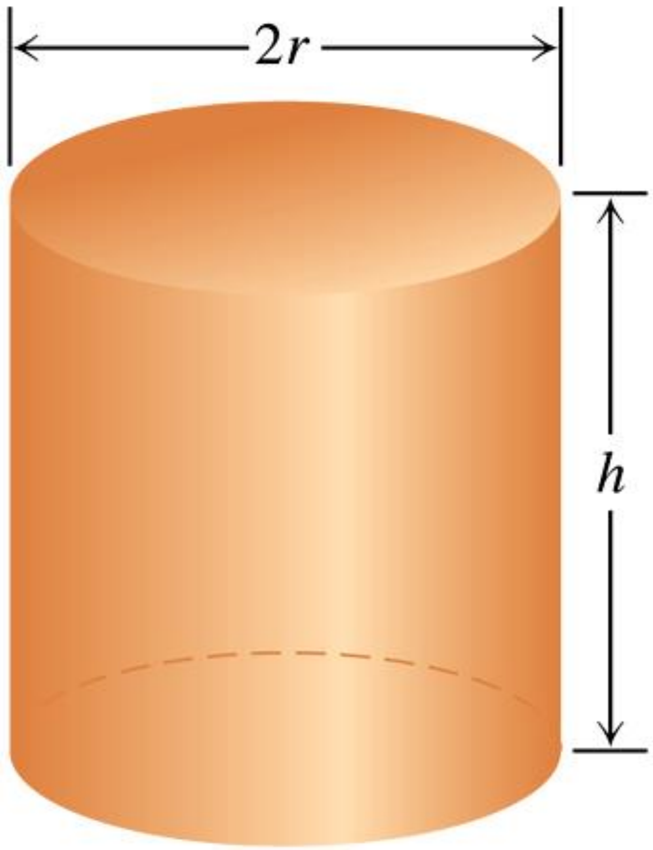
Bir dik silindir şeklinde bir 1 litrelik kutu yapmanız isteniyor (Şekil 4.34). Hangi boyutlarda en az malzeme kullanılır?

ÖRNEK 3 Dikdörtgen yerleştirmek

2 yarıçaplı bir yarı çemberin içine bir dikdörtgen yerleştirilecektir. Bu dikdörtgenin alanı en fazla ne olabilir ve boyutları nedir?

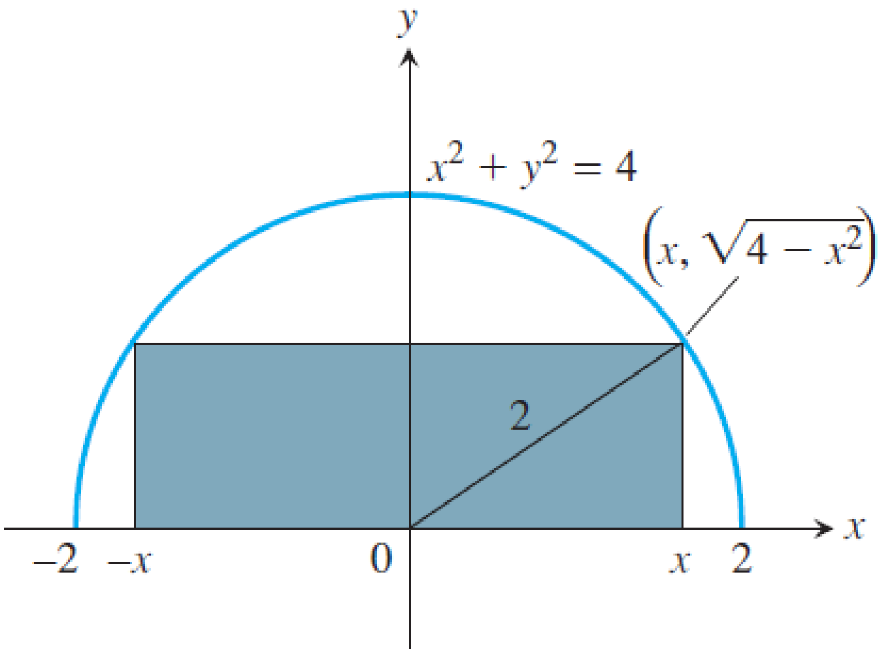


ŞEKİL 4.32 Kare şeklindeki ince bir teneke levhanın köşeleri kesilerek yapılan açık kutu. Hacmi maksimize eden köşe ölçüleri nedir (Örnek 1)?



$1\ \text{L} = 1000\ \text{cm}^3$

ŞEKİL 4.34 Bu 1 litrelik kutu $h = 2r$ olduğunda en az malzeme gerektirir (Örnek 2).

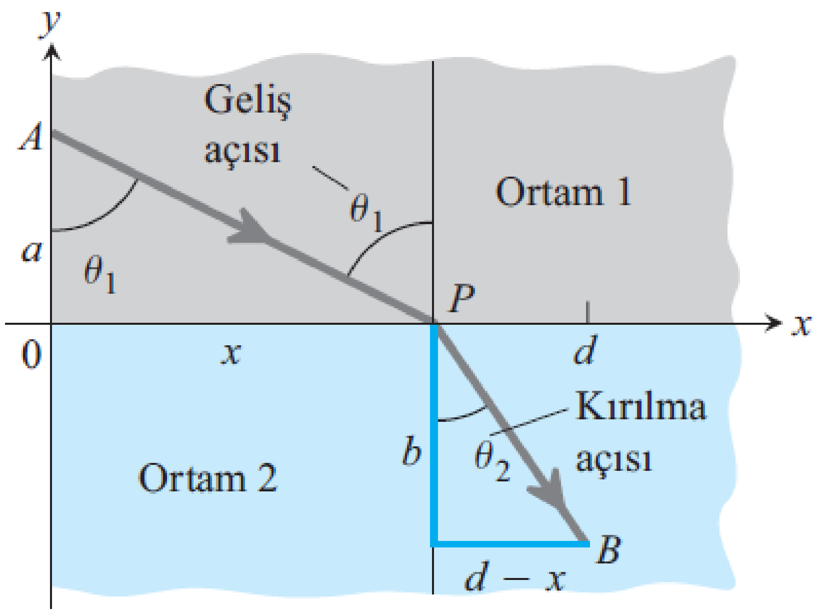


ŞEKİL 4.36 Örnek 3'teki yarım çember içine çizilen dikdörtgen.

ÖRNEK 4 Fermat Prensibi ve Snell Yasası

Işığın hızı içinde dolaştığı ortama bağlıdır ve daha yoğun ortamlarda daha yavaş olma eğilimi vardır.

Optikteki Fermat prensibi ışığın her zaman bir noktadan diğerine en çabuk gidebileceği yoldan gittiğini söyler. Bir ışık demetinin, ışık hızının c_1 olduğu bir ortamdaki A noktasından hızının c_2 olduğu bir ortamdaki B noktasına giderken izleyeceği yolu bulun.



ŞEKİL 4.37 Bir ortamdan daha yoğun bir ortama geçerken kırılan (yolu değişen) bir ışın demeti (Örnek 4).

$$\text{Zaman} = \frac{\text{mesafe}}{\text{sürat}}$$

olarak bulunur. Işığın *A*'dan *P*'ye gitmesi için gereken zaman buradan

$$t_1 = \frac{AP}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1}$$

şeklinde bulunur. *P*'den *B*'ye gitmesi için gereken zaman ise

$$t_2 = \frac{PB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}$$

olur.

A'dan *B*'ye gitmesi için gereken zaman bunların toplamıdır:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}.$$

Bu denklem t'yi x'in, tanım aralığı $[0, d]$ olan bir fonksiyonu olarak tanımlar ve biz de t'nin bu kapalı aralıktaki minimumunu bulmak istiyoruz. Buradan

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

türevini elde ederiz. Şekil 4.37'teki θ_1 ve θ_2 açıları cinsinden

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

olur. Bu denklem **Snell yasası** veya **Kırılma Yasası**dır ve optik teoride önemli bir prensiptir. Işık demetinin izlediği yolu tanımlar ■

4.8

Antitürev

Ters Türevleri Bulmak

TANIM Ters Türev

Bir I aralığındaki her x için $F'(x) = f(x)$ ise F'ye I aralığı üzerinde f'nin bir **ters türevi** denir.

ÖRNEK 1 Ters Türevleri Bulmak

Aşağıdaki fonksiyonların her biri için bir ters türev bulunuz

(a) $f(x) = 2x$

(b) $g(x) = \cos x$

(c) $h(x) = 2x + \cos x$

F fonksiyonu bir I aralığı üzerinde f'nin bir **ters türevi** ise f'nin I aralığı üzerindeki en genel Ters Türevi, C keyfi bir sabit olmak üzere

$$F(x) + C$$

dir.

ÖRNEK 2 Özel Bir Ters Türev Bulmak

$f(x) = \sin x$'in $F(0) = 3$ eşitliğini sağlayan bir ters türevini bulun

Çözüm $-\cos x$'in türevi $\sin x$ olduğundan,

$$F(x) = -\cos x + C$$

genel ters türevi $f(x)$'in bütün ters türevlerini verir. $F(0) = 3$ koşulu C için belirli bir değer tanımlar. $F(x) = -\cos x + C$ de $x = 0$ yazmak

$$F(0) = -\cos 0 + C = -1 + C$$

verir. $F(0) = 3$ olduğundan, C'yi çözersek $C = 4$ buluruz. Böylece,

$$F(x) = -\cos x + 4$$

$F(0) = 3$ eşitliğini sağlayan ters türevdir. ■

TABLE 4.2 Antiderivative formulas, k a nonzero constant

	Function	General antiderivative		Function	General antiderivative
1.	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$	**8.**	e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx} + C$
2.	$\sin kx$	$-\frac{1}{k}\cos kx + C$	**9.**	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C, \quad x \neq 0$
3.	$\cos kx$	$\frac{1}{k}\sin kx + C$	**10.**	$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	$\frac{1}{k}\sin^{-1} kx + C$
4.	$\sec^2 kx$	$\frac{1}{k}\tan kx + C$	**11.**	$\frac{1}{1+k^2x^2}$	$\frac{1}{k}\tan^{-1} kx + C$
5.	$\csc^2 kx$	$-\frac{1}{k}\cot kx + C$	**12.**	$\frac{1}{x\sqrt{k^2x^2-1}}$	$\sec^{-1} kx + C, \quad kx > 1$
6.	$\sec kx \tan kx$	$\frac{1}{k}\sec kx + C$	**13.**	a^{kx}	$\left(\frac{1}{k\ln a}\right)a^{kx} + C, \quad a > 0, \ a \neq 1$
7.	$\csc kx \cot kx$	$-\frac{1}{k}\csc kx + C$			

TABLO 4.3 Ters Türevlerin Lineerlik Kuralları

		Fonksiyon	Genel ters türev
1.	*Sabit Çarpan Kuralı:*	$kf(x)$	$kF(x) + C$, k bir sabit
2.	*Negatif Kuralı:*	$-f(x)$	$-F(x) + C,$
3.	*Toplam veya Fark Kuralı:*	$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + C$

Belirsiz İntegraller

Bir f fonksiyonun bütün ters türevlerini göstermek için özel bir sembol kullanılır.

TANIM **Belirsiz İntegraller, İntegrant**

f'nin bütün ters türevlerinin kümesine, f'nin x'e göre **belirsiz integrali** denir ve

$$\int f(x)\,dx$$

ile gösterilir. $\int$ sembolü bir **integral işareti**dir. f fonksiyonu integralin **integrandı**, x ise **integrasyon değişkeni**dir.