

SAYISAL ÇÖZÜMLEME

SAYISAL ÇÖZÜMLEME

9. Hafta

SAYISAL TÜREV

İÇİNDEKİLER

☐ Sayısal Türev

- ☐ Geri Farklar İle Sayısal Türev
- ☐ İleri Farklar İle Sayısal Türev
- ☐ Merkez Farklar İle Sayısal Türev
- ☐ Taylor Serisi İle Sayısal Türev

Mühendislikte Türev

- Mühendislikte bir çok yasa ve genelleştirme, fiziksel dünyada karşılıkları olan değişimlerin tahmin edilmesi esasına dayanmaktadır.
- Newton'un ikinci yasası temel bir örnek olup, bir cismin hızı, konumunun zamana göre değişimiyle ilgilenmektedir

$$V = \frac{dX}{dt}$$

- Isı geçişleri, sıcaklık farkındaki değişime bağlı olarak ifade edilir.
- Bir bobinin uçlarındaki gerilim farkı, üzerinden geçen akımın değişimine göre; bir kondansatörün üzerinden geçen akım ise uçları arasındaki gerilim değişimine göre ifade edilir.

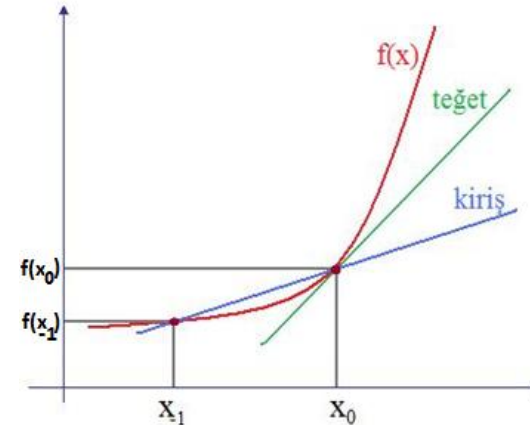
$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \quad i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

Sayısal Türev

- ❑ **Türev**, bağımlı bir değişkenin bağımsız bir değişkene göre değişme miktarıdır.
- ❑ Analitik olarak türev ya da integral almanın mümkün olmadığı yerlerde **sayısal türev** veya **sayısal integral** işlemleri kullanılmalıdır. Birçok olayda değişim oranları kullanılır.
- ❑ Geometrik olarak **Türev**, bir fonksiyona ait eğrinin her hangi bir x noktasındaki yatayla yaptığı açı yada diğer bir ifadeyle x noktasındaki teğetin eğimi olarak görülebilir.

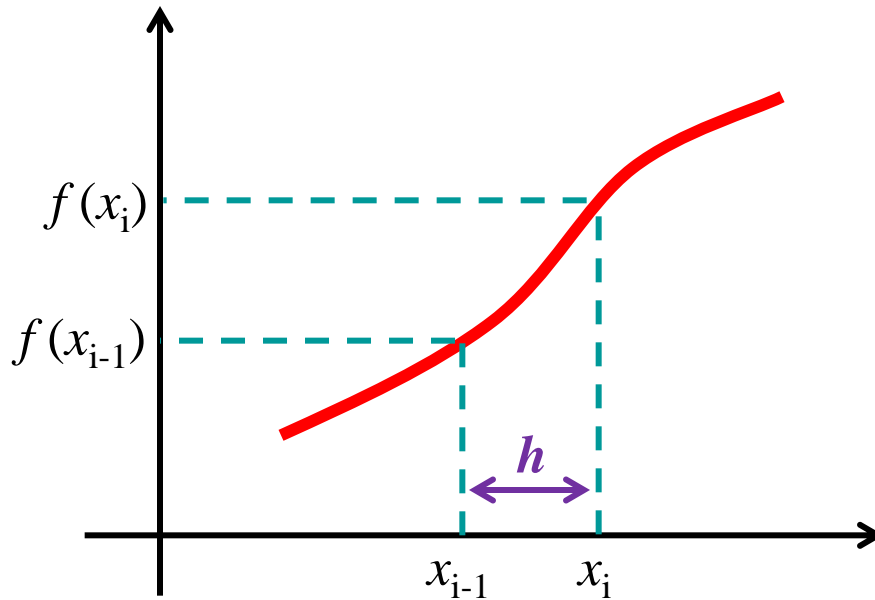
$$f'(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$



- ❑ **Sayısal türev**, bir fonksiyonun bağlı olduğu değişkenlere göre değişim hızının bir ölçüsüdür.

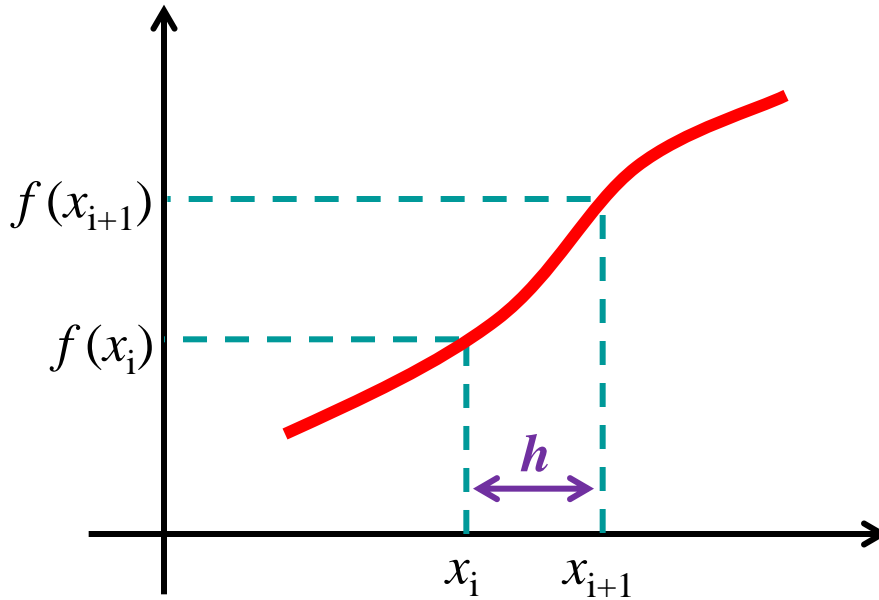
Geri Farklar İle Sayısal Türev



$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$

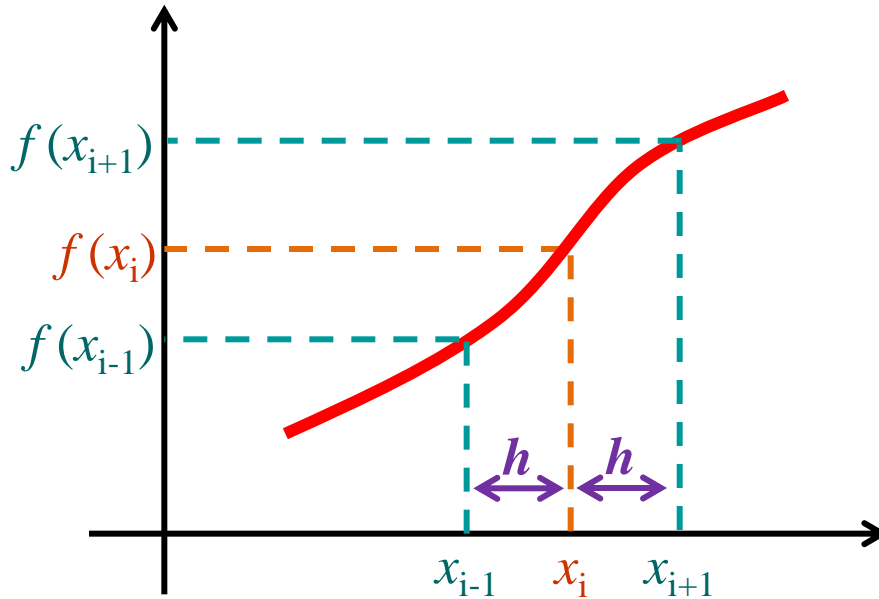
İleri Farklar İle Sayısal Türev



$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

Merkezi Farklar İle Sayısal Türev



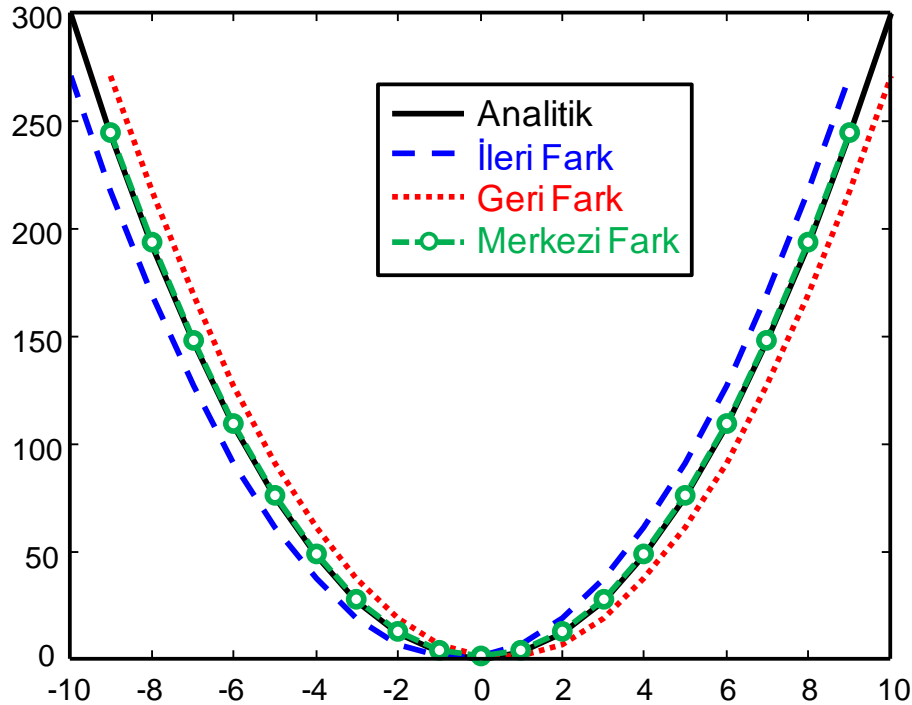
$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$

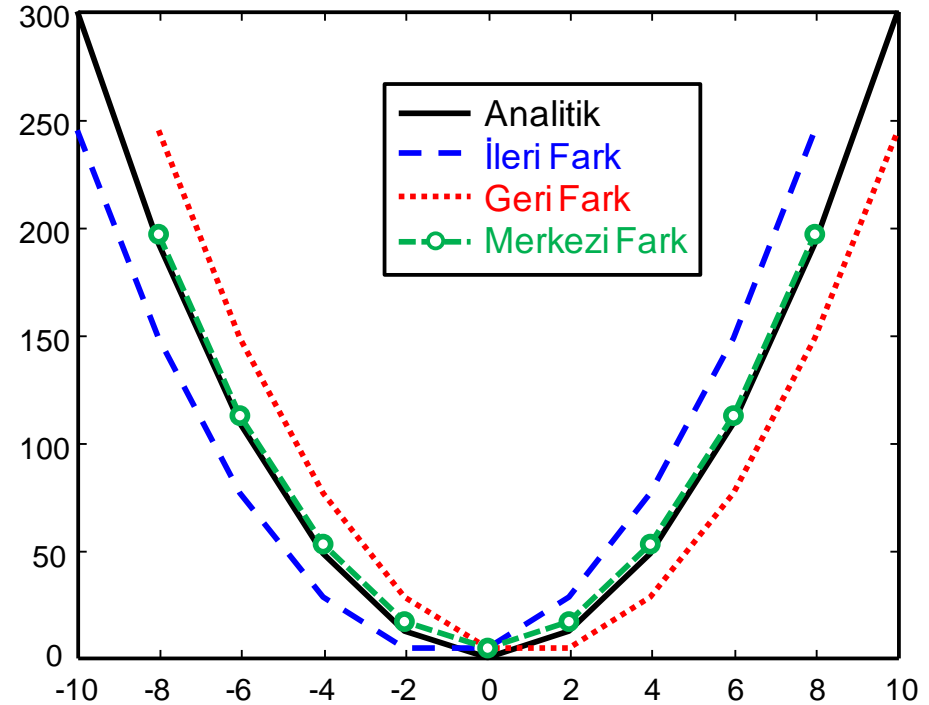
Sayısal Türev Çeşitlerinde Adım Aralığı

$$f(x) = x^3$$

$h = 0.1$



$h = 2$



Örnek

- ❑ $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini $h = 0.1$ kullanarak her üç yöntemle hesaplayınız?
- ❑ **Çözüm:**
 - ❑ Geri farklar
 - ❑ İleri farklar
 - ❑ Merkezi farklar
 - ❑ Analitik Çözüm

Örnek

❑ $f(x) = e^x$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki türevini $h = 0.2$ kullanarak her üç yöntemle hesaplayınız?

❑ **Çözüm:**

❑ Geri farklar

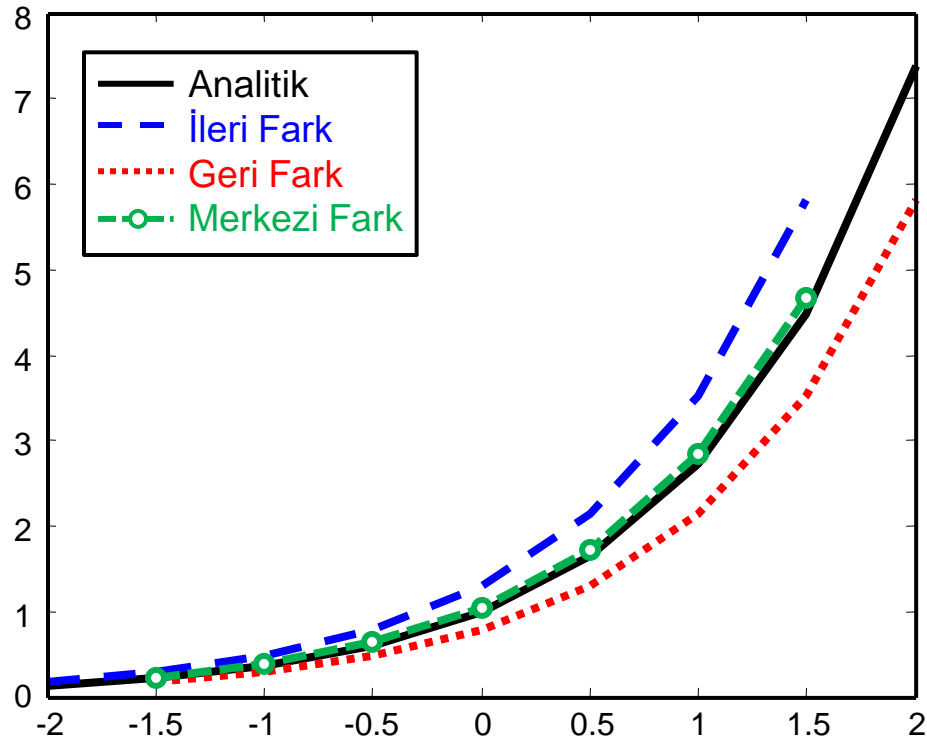
❑ İleri farklar

❑ Merkezi farklar

❑ Analitik Çözüm

2.7183

Örnek



$$f(x) = e^x$$

Taylor Serisi ile Sayısal Türev

- ❑ Bir $f(x)$ fonksiyonun x_i noktasındaki türevi $f'(x_i)$ Taylor Serisi yardımıyla elde edilebilir.
- ❑ Bir fonksiyonun $x_i + \Delta x$ civarındaki değeri x_i civarındaki değerinin kuvvetleri cinsinden, Taylor Serisine açılarak bulunabilir.

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^n(x_i)$$

- ❑ Taylor serisinde serinin kesilen noktadan sonraki hatanın mertebesi, kesilen noktadaki Δx 'in mertebesine eşit olur.
- ❑ Taylor Serisi ile çok noktalı türev yaklaşımı gerçekleştirilir.

Taylor Serisi Kullanarak Birinci Türev Tespiti

- $f(x)$ fonksiyonun x_i+h civarındaki ve x_i+2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f'(x_i)$ yi çekelim.

$$-4 \quad f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{h^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + \frac{(2h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(2h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$-4 f(x_i + h) = -4 f(x_i) - 4h.f'(x_i) - 2h^2 f''(x_i)$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2h.f'(x_i) + 2h^2 f''(x_i)$$

+

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h} [-3f(x_i) + 4f(x_i + h) - f(x_i + 2h)]$$

Taylor serisi; ileri fark formülü ile



$$f'_i = \frac{1}{2h} [-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}]$$

Taylor Serisi Kullanarak İkinci Türev Tespiti

- $f(x)$ fonksiyonun x_i+h civarındaki ve x_i+2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f''(x_i)$ yi çekelim.

$$-2 \quad f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{h^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + \frac{(2h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(2h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$-2f(x_i + h) = -2f(x_i) - 2h.f'(x_i) - h^2 f''(x_i)$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2h.f'(x_i) + 2h^2 f''(x_i)$$

+

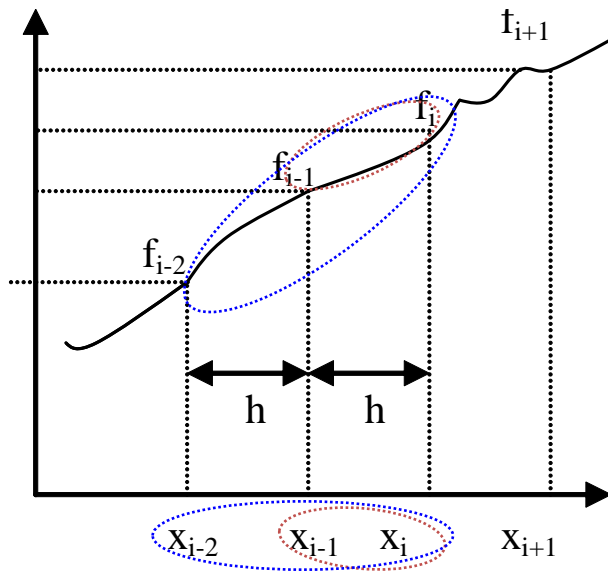
$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2} [f(x_i) - 2f(x_i + h) + f(x_i + 2h)]$$

Taylor serisi; ileri fark formülü ile ➡

$$f_i'' = \frac{1}{h^2} [f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}]$$

Taylor Serisi ile Geri Fark Yöntemi

- ❑ İleri fark yöntemindeki işlemler $f(x)$ fonksiyonun x_i-h civarındaki ve x_i-2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f'(x_i)$ yi çekilmesi şeklinde tekrar edilerek elde edilir.



$$f(x_i - h) = f(x_i) + \frac{(-h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(-h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) + \frac{(-2h)^1 f'(x)}{1!} + \frac{(-2h)^2 f''(x)}{2!}$$

Taylor serisi; geri fark formülü ile



$$f'_i = \frac{1}{2h} [3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}]$$

ÖDEV 1

- Taylor serisinin 3. dereceden kuvvetlerine göre açılarak ileri fark yönteminin 3 noktalı türev yaklaşımlarının aşağıdaki gibi olduğunu ispatlayınız.

$$f_i' = \frac{1}{6h} [-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}]$$

$$f_i'' = \frac{1}{h^2} [2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}]$$

$$f_i''' = \frac{1}{h^3} [-f_i + 3f_{i+1} - 3f_{i+2} + f_{i+3}]$$

Sayısal Türev

❑ **Örnek:** $f(x)=2x^2+1$ fonksiyonunun $x=2$ yaklaşık türevini gördüğünüz tüm yöntemlerle hesaplayınız. $h=0.1$ ve analitik çözüm $f'(2)=8$

❑ **Çözüm:**

❑ **Basit ileri farkla çözüm**

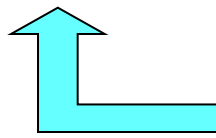
❑ **Taylor serisi ile iki noktalı ileri farkla çözüm**

$$f'_i = \frac{1}{2h} [-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}]$$

diff komutu ile sembolik türev alma

❑ Tanımlanan bir denklemin türevini alır.

❑ **diff** (denklem, değişken)



türev işleminde kullanılacak değişkenin adı
çözümü yapılacak sembolik ifadelerden oluşan denklem



```
% sembol tanımlama
>> syms x

% diff komutu ile sembolik türev alma
>> diff (x^2)

ans =

    2*x
```



```
% sembol tanımlama
>> syms x t

% diff komutu ile sin(2xt)nin t'ye göre türevi
>> diff (sin(2*x*t), t)

ans =

    2*x*cos(2*t*x)
```

diff komutu ile sembolik katlı türev alma

- ❑ Katlı türev alma durumu.
- ❑ `diff` (denklem, değişken, **türevderecesi**)



```
% sembol tanımlama
>> syms x

% diff komutu ile  $x^2$  nin 2. dereceden türevi
>> diff (x^2, x, 2)

ans =

    2
```

Örnek

- ❑ $f(x) = e^{2x-3}$ fonksiyonunun $x=2$ için, $h=0.2$ adımlar ile gördüğünüz tüm yöntemleri kullanarak $f'(x)$ değerini hesaplayınız.

Sonuçlar:

- ❑ Geri farklar: 4.4808
- ❑ İleri farklar: 6.6846
- ❑ Merkezi farklar: 5.5827
- ❑ Taylor Seri Açılımı: 5.0407
- ❑ Analitik Çözüm: 5.4366

KAYNAKLAR

- Cüneyt BAYILMIŞ, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi
- Mehmet YILDIRIM, Sayısal Analiz Ders Notları, Kocaeli Üniversitesi
- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, “*MATLAB ile Meslek Matematiği*”, Seçkin Yayıncılık
- Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi