Belirli İntegral Değişken Değiştirme

Ör: $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)}$, $u=\ln x$ değişken değiştirmesi yapılırsa hangi integral elde edilir?

a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{du}{1+u}$ b) $\displaystyle\int_{e^2}^{e} \frac{du}{1+u}$ c) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{du}{1+u}$ d) $\displaystyle\int_2^{1} \frac{du}{1+u}$

e) Hiçbiri

$u=\ln x$ $du=\dfrac{dx}{x}$ $\displaystyle\int_1^{2} \frac{du}{1+u}$

sınırlar nasıl değişir

$x=e \rightarrow u=\ln e=1$

$x=e^2 \rightarrow u=\ln e^2=2$

Ör: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x}$, $u=\cos x$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$u=\cos x$

$du=-\sin x\,dx$

$\displaystyle\int_1^{0} \frac{-du}{1+u}$ sınırları yer değiştir

$u=\cos 0=1$

$u=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$

a) $\cancel{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+u}}$ c) $\displaystyle\int_{?\;1}^{0} \frac{du}{1+u}$

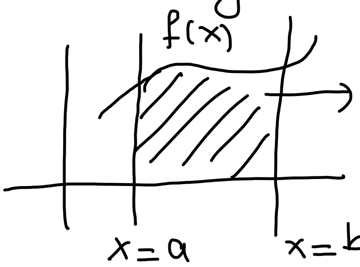
b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{du}{1+u}$ d) $\cancel{\displaystyle\int_{\pi/2}^{0} \frac{du}{1+u}}$

e) Hiçbiri

ALAN HESABI

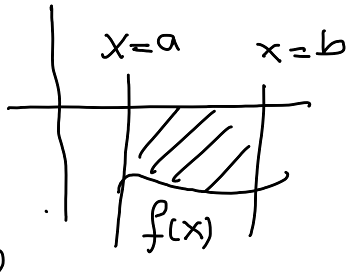
$y=f(x)$ eğrisi $x=a$, $x=b$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanı

1) $f(x)>0$



$\text{Alan}=\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$

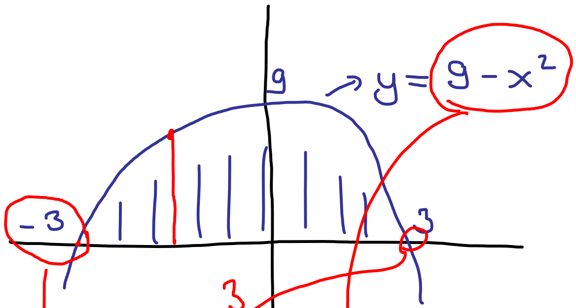
2) $f(x)<0$



Alan $= \int_a^b (-f(x))\,dx$

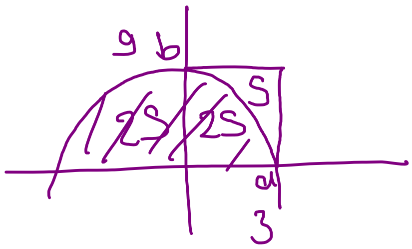
Kısaca: $\int_a^b |f(x)|\,dx$

Ör: $y = 9 - x^2$ parabolü ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.



$$\int_{-3}^{3} 9 - x^2\,dx = 9x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{3} = 18 - (-18) = 36$$

Not:



$3S = 27$

$S = 9$

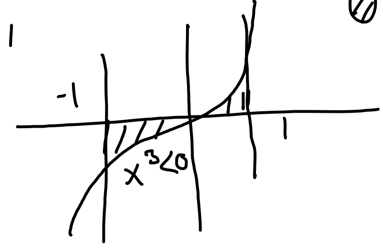
$4S = 4.9 = 36$

Ör: $y = e^x$ eğrisi $x=0$, $x=3$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı?

$$\int_0^3 e^x\,dx = e^x\Big|_0^3 = e^3 - 1$$

Ör: $y = x^3$ eğrisi, $x=-1$, $x=1$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı?

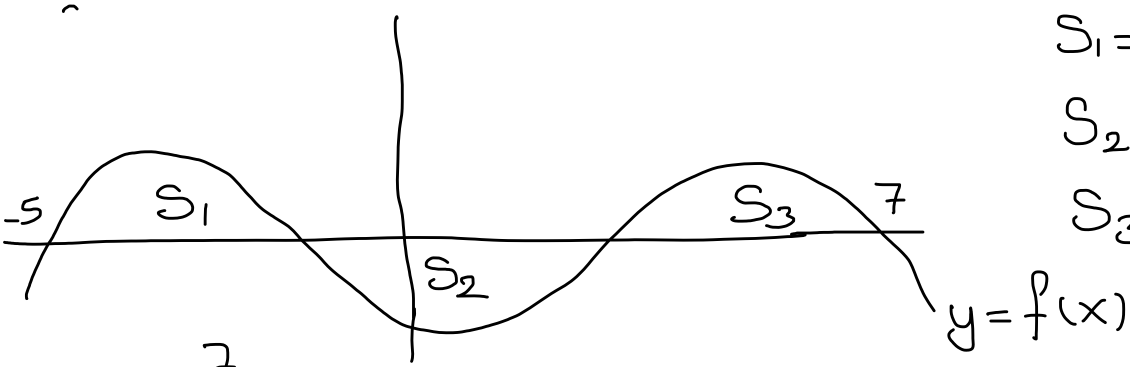
$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$



$$\int_{-1}^{1} |x^3|\,dx = \int_{-1}^{0} -x^3\,dx + \int_{0}^{1} x^3\,dx$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Ör:



$S_1 = 15\,br^2$

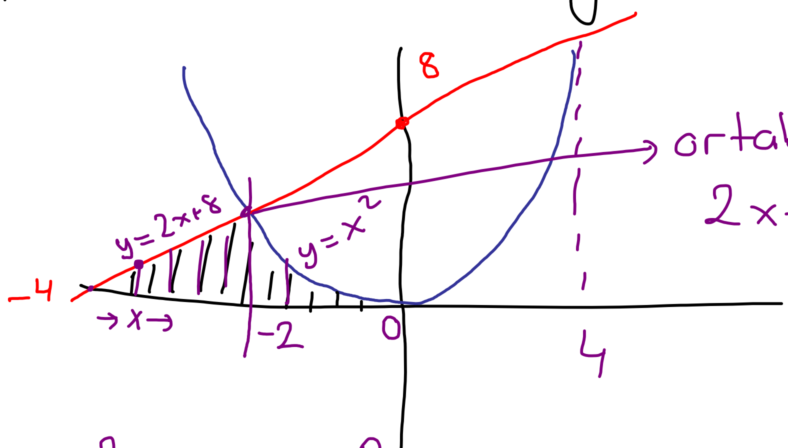
$S_2 = 20\,br^2$

$S_3 = 8\,br^2$

1) $\int_{-5}^{7} f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3 = 3$

2) $\int_{-5}^{7} |f(x)|\,dx = S_1 + S_2 + S_3 = 43$

Ör: $y=x^2$ parabolü, $y=2x+8$ doğrusu ve x ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



ortak çözümden bulunur.

$2x+8 = x^2$

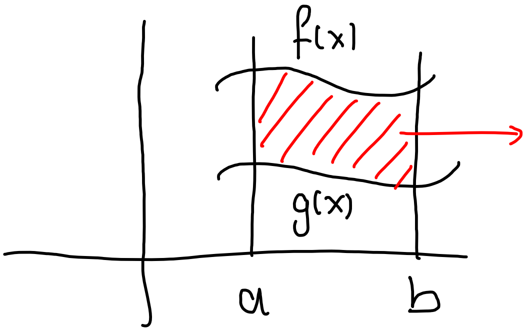
$x^2 - 2x - 8 = 0$

$-4 \quad x=4$

$+2 \quad x=-2$

$$\int_{-4}^{-2} 2x+8 + \int_{-2}^{0} x^2\,dx =$$

İki Eğri Arasında Kalan Bölgenin Alanı

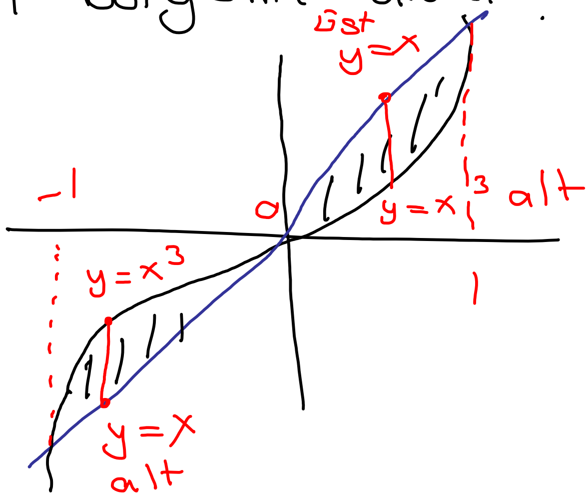


$$\int_a^b [\underbrace{f(x)}_{\text{üst eğri}} - \underbrace{g(x)}_{\text{alt eğri}}]\,dx$$

Ör: $y = x^3$ eğrisi ile $y = x$ arasında kalan bölgenin alanı?

$x^3 = x$

$x = 0 \quad x = 1 \quad x = -1$

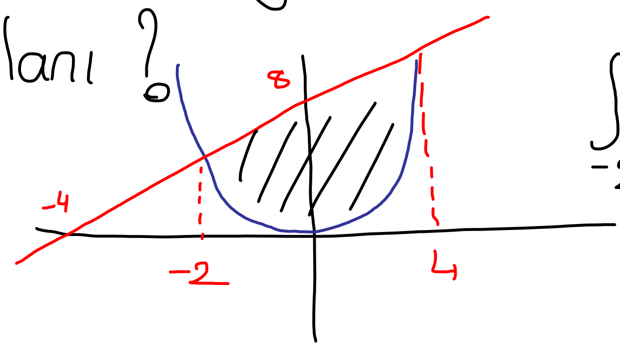


$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_0^1 (x - x^3)\,dx = 2 \cdot \int_0^1 (x^3 - x)\,dx$$

$$= -2 \cdot \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right]$$

$$= -2 \cdot \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\underset{(2)}{2}} \right] = \frac{1}{2} \checkmark$$

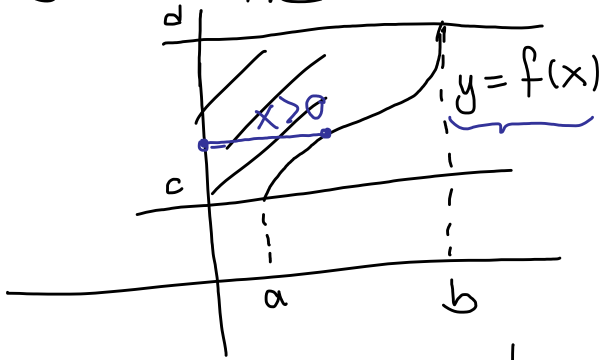
Ör: $y = x^2$ parabolü, $y = 2x + 8$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanı?



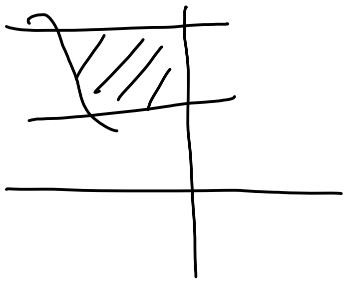
$$\int_{-2}^{4} (2x + 8 - x^2)\,dx = \frac{20}{3} ?$$

y ekseni arasında kalan bölge

$y=f(x)$ eğrisi $y=c$, $y=d$ doğruları ve y ekseni ile sınırlı bölgenin alanı?

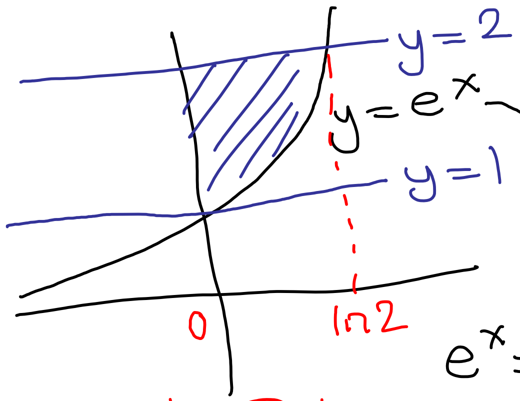


$$\int_c^d \underbrace{f^{-1}(y)}_{x}\,dy$$



$$\int_c^d -f^{-1}(y)\,dy$$

Ör: $y=e^x$ eğrisi $y=1$, $y=2$ doğruları ve y ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.



$\rightarrow x=\ln y$

1. yol: Yatay Tarama

$$\int_{y=1}^{2} \ln y\,dy = y\cdot\ln y - y\Big|_1^2$$

$$= 2\ln 2-2-[0-1]$$

$$= 2\ln 2-1 \checkmark$$

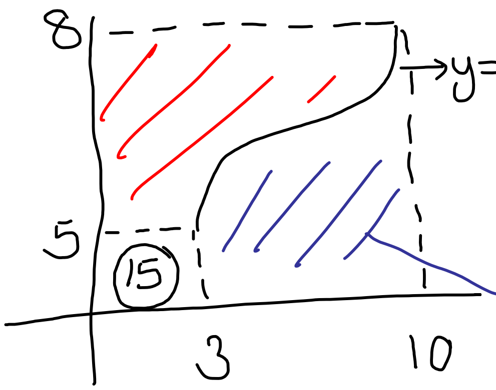
$e^x=2$

$x=\ln 2$

2. yol: Dikey

$$\int_0^{\ln 2}\Big(\underbrace{2}_{\text{üst eğri}} - \underbrace{e^x}_{\text{alt eğri}}\Big)dx = 2x-e^x\Big|_0^{\ln 2} = 2\ln 2-2-[0-1]$$

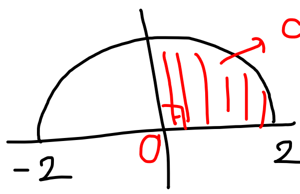
$$= 2\ln 2-1 \checkmark$$



$$\underbrace{\int_3^{10} f(x)\,dx}=40 \quad \text{ise} \quad \underbrace{\int_5^{8} f^{-1}(x)\,dx}_{\text{Kırmızı Taralı Alan}}=?$$

$$80-15-40=25\text{br}$$

Ör: $\displaystyle\int_0^2 \underbrace{\sqrt{4-x^2}}_{y}\,dx=?$ $\quad x^2+y^2=4$

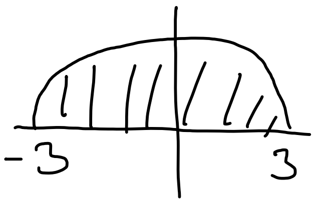


çeyrek daire dilimi

a) 4 b) π c) $\frac{\pi}{2}$ d) 4π e) Hiçbiri

$$\frac{4\pi}{4}=\pi$$

$$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{9\pi}{2}$$



$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx=?$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4-x^2}-x\right)dx=?$$