

SORU

$y = \sin x$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{4}$ noktasındaki birinci türevini $h = \frac{\pi}{12}$ için $O(h)$ ve $O(h^2)$ doğruluğunda ileriye ve geriye sonlu fark ve $O(h^2)$ ve $O(h^4)$ doğruluğu ile de merkezi sonlu fark formülleri ile hesaplayınız. Hesaplamış olduğunuz yaklaşık türev değerleri için gerçek oransal bağıl hatayı da elde ediniz.

ÇÖZÜM

1. AŞAMA:

$O(h)$ doğruluğunda ileriye sonlu fark formülü ile f fonksiyonunun 1. türevi

$$D_i(f, t, h) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

ile hesaplanır. $t = \frac{\pi}{4}$ ve $h = \frac{\pi}{12}$ değerleri için bu türev

$$\begin{aligned} D_i\left(f, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right) &= \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{12}} \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{12}} \\ &\cong 0,6070 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu değer için oransal bağıl hata

$$\left| \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right) - D_i\left(f, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right| = \left| \frac{0,7071 - 0,6070}{0,7071} \right| \cong 0,1416$$

şeklinde hesaplanır.

2. AŞAMA:

$O(h)$ doğruluğunda geriye sonlu fark formülü ile f fonksiyonunun 1. türevi

$$D_g(f, t, h) = \frac{f(t) - f(t-h)}{h}$$

ile hesaplanır. $t = \frac{\pi}{4}$ ve $h = \frac{\pi}{12}$ değerleri için bu türev

$$\begin{aligned} D_g\left(f, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right) &= \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right)}{\frac{\pi}{12}} \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{12}} \\ &\cong 0,7911 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu değer için oransal bağıl hata

$$\left| \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right) - D_g\left(f, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right| = \left| \frac{0,7071 - 0,7911}{0,7071} \right| \cong 0,1188$$

şeklinde hesaplanır.

3. AŞAMA:

$O(h^2)$ doğruluğunda ileriye sonlu fark formülü ile f fonksiyonunun 1. türevi

$$D_i(f, t, h^2) = \frac{-f(t+2h) + 4f(t+h) - 3f(t)}{2h}$$

ile hesaplanır. $t = \frac{\pi}{4}$ ve $h = \frac{\pi}{12}$ değerleri için bu türev

$$\begin{aligned} D_i\left(f, \frac{\pi}{4}, \left(\frac{\pi}{12}\right)^2\right) &= \frac{-f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + 4f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) - 3f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{-\sin \frac{5\pi}{12} + 4\sin \frac{\pi}{3} - 3\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{6}} \\ &\cong 2,0702 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu değer için oransal bağıl hata

$$\left| \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right) - D_i\left(f, \frac{\pi}{4}, \left(\frac{\pi}{12}\right)^2\right)}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right| = \left| \frac{0,7071 - 2,0702}{0,7071} \right| \cong 1,9277$$

şeklinde hesaplanır.

4. AŞAMA:

$O(h^2)$ doğruluğunda geriye sonlu fark formülü ile f fonksiyonunun 1. türevi

$$D_g(f, t, h^2) = \frac{3f(t) - 4f(t-h) + f(t-2h)}{2h}$$

ile hesaplanır. $t = \frac{\pi}{4}$ ve $h = \frac{\pi}{12}$ değerleri için bu türev

$$\begin{aligned} D_g\left(f, \frac{\pi}{4}, \left(\frac{\pi}{12}\right)^2\right) &= \frac{3f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) + f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{3\sin \frac{\pi}{4} - 4\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{12}}{\frac{\pi}{6}} \\ &\cong 0,7260 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu değer için oransal bağıl hata

$$\left| \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right) - D_g\left(f, \frac{\pi}{4}, \left(\frac{\pi}{12}\right)^2\right)}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right| = \left| \frac{0,7071 - 0,7260}{0,7071} \right| \cong 0,0267$$

şeklinde hesaplanır.

5. AŞAMA:

$O(h^2)$ doğruluğunda merkezi sonlu fark formülü ile f fonksiyonunun 1. türevi

$$D_m(f, t, h^2) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h}$$

ile hesaplanır. $t = \frac{\pi}{4}$ ve $h = \frac{\pi}{12}$ değerleri için bu türev

$$\begin{aligned} D_m\left(f, \frac{\pi}{4}, \left(\frac{\pi}{12}\right)^2\right) &= \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) - f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right)}{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} \\ &\cong 0,6991 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu değer için oransal bağıl hata

$$\left| \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right) - D_m\left(f, \frac{\pi}{4}, \left(\frac{\pi}{12}\right)^2\right)}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right| = \left| \frac{0,7071 - 0,6991}{0,7071} \right| \cong 0,0113$$

şeklinde hesaplanır.

6. AŞAMA:

$O(h^4)$ doğruluğunda merkezi sonlu fark formülü ile f fonksiyonunun 1. türevi

$$D_m(f, t, h^4) = \frac{-f(t+2h) + 8f(t+h) - 8f(t-h) + f(t-2h)}{12h}$$

ile hesaplanır. $t = \frac{\pi}{4}$ ve $h = \frac{\pi}{12}$ değerleri için bu türev

$$\begin{aligned} D_m\left(f, \frac{\pi}{4}, \left(\frac{\pi}{12}\right)^4\right) &= \frac{-f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + 8f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) - 8f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) + f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)}{12h} \\ &= \frac{-\sin \frac{5\pi}{12} + 8\sin \frac{\pi}{3} - 8\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{12}}{\pi} \\ &\cong 0,9321 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu değer için oransal bağıl hata

$$\left| \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right) - D_m\left(f, \frac{\pi}{4}, \left(\frac{\pi}{12}\right)^4\right)}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right| = \left| \frac{0,7071 - 0,9321}{0,7071} \right| \cong 0,3182$$

şeklinde hesaplanır.