T.C.
KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ

Prof. Dr. Zafer BİNGÜL Prof. Dr. Serdar KÜÇÜK

ROBOT KİNEMATİĞİ

PROF. DR. ZAFER BİNGÜL
PROF. DR. SERDAR KÜÇÜK

JAKOBİYEN

Bu bölümde bir robot manipülatörünün uç işlevcisinin üç boyutlu uzayda hareketlerinden kaynaklanan açısal ve doğrusal hızları incelenecektir. Ayrıca, robot manipülatörlerinin hareketlerini incelerken Jakobiyen matrisi üç farklı yöntemle elde edilecektir.

Konum Vektörlerinde Yer Değiştirme

Bir konum vektörünün hızı veya uzayda bir noktanın doğrusal hızı

$$^{B}V_{Q} = \frac{d}{dt}\,^{B}Q = \lim \frac{^{B}Q(t+\Delta t) - {}^{B}Q(t)}{\Delta t}$$

denklemiyle bulunabilir. Bu denklemde Q vektörünün {B} koordinat sistemine göre belli bir zaman diliminde meydana getirdiği yer değiştirme miktarını (hızını) bulmak için Q vektörünün {B} koordinat sistemine göre türevi alınmıştır.

{B} koordinat sistemine göre tanımlanan bir hız vektörünü {A} koordinat sistemine göre hızı, aşağıdaki gibi tanımlanır.

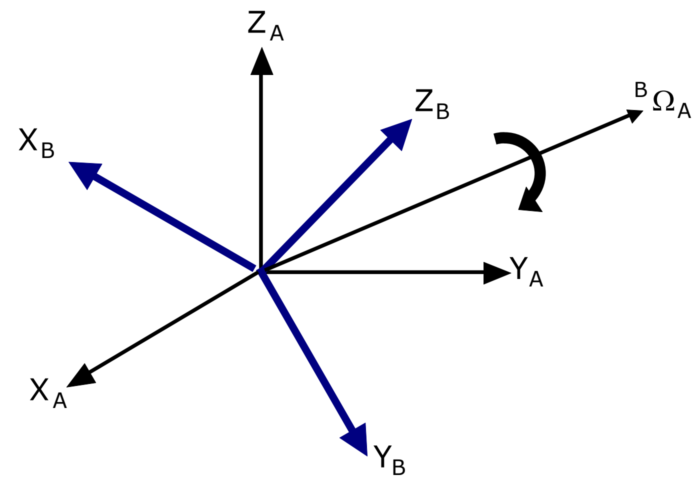
$$^{A}\left(^{B}V_{Q}\right) = {}^{A}\frac{d}{dt}\,^{B}Q = {}^{A}_{B}R\,^{B}V_{Q}$$

Açısal Hız Vektörü

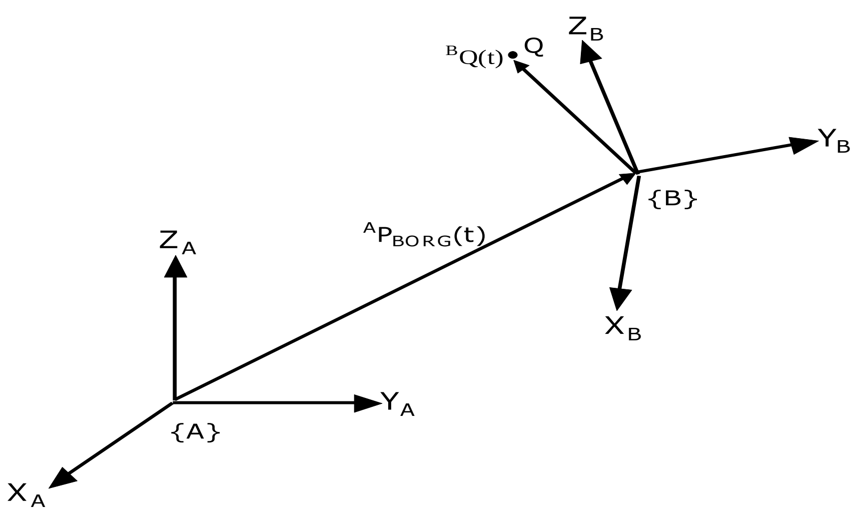
Doğrusal hız uzayda bir noktanın niteliği hakkında bilgi verirken; açısal hız ise katı bir cismin veya bu katı cisme yerleştirilen bir koordinat sisteminin niteliğini açıklar.

Şekilde gösterilen açısal hız vektörü {B} koordinat sistemine göre dönmektedir. ${}^{A}\Omega_{B}$ açısal hız ifadesinin büyüklüğü dönme miktarı ile orantılıdır. Açısal hız ifadesi başka bir koordinat sistemi olan {C} koordinat sistemine göre aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$ {}^{C}\left({}^{A}\Omega_{B}\right) $$



Q noktasının hızını {A} koordinat sistemine göre aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz



$$ {}^{A}V_{Q} = {}^{A}V_{BORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} $$

Anlık Doğrusal ve Açısal Hız

Eğer Q noktası {B} koordinat sistemine göre sabit değilse, yani ${}^{B}V_{Q} \neq 0$ ise, Q noktasının {A} koordinat sistemine göre dönel açısal hızı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$ {}^{A}V_{Q} = {}^{A}\left({}^{B}V_{Q}\right) + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}Q \quad = {}^{A}_{B}R\, {}^{B}V_{Q} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\, {}^{B}Q $$

Denklemde elde edilen ifade {A} ve {B} koordinat sistemlerinin merkezleri çakışık olduğunda geçerlidir. Eğer bu iki koordinat sisteminin merkezleri çakışık değilse ayrıca {B} koordinat sistemi {A} koordinat sistemine göre hareket ediyorsa, bu durumda genel denklemi tanımlayabilmek için bu iki koordinat sistemlerinin merkezleri arasındaki uzaklığı da (${}^{A}V_{BORG}$) göz önünde bulundurmamız gerekir. Bu durumda {B} koordinat sistemine göre sabit bir vektörün {A} koordinat sistemine göre hızı genel formda aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

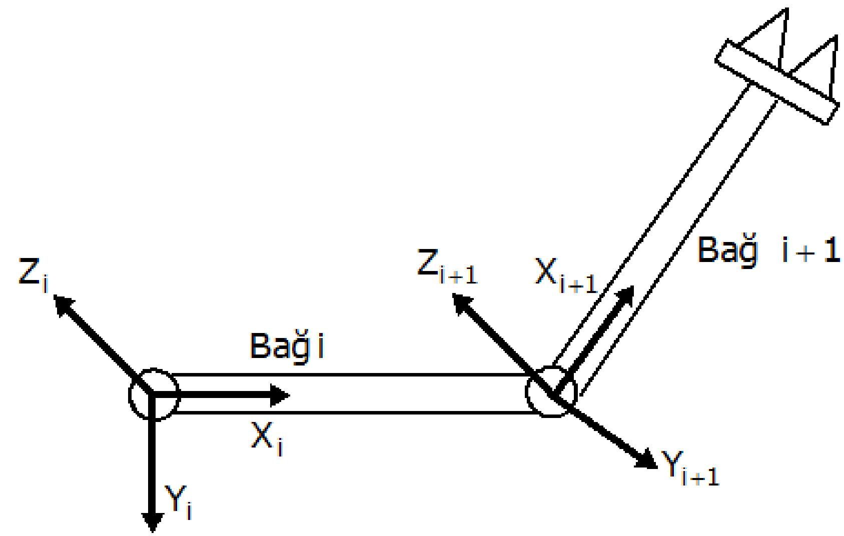
$$ {}^{A}V_{Q} = {}^{A}V_{BORG} + {}^{A}_{B}R\, {}^{B}V_{Q} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\, {}^{B}Q $$

Yukarıda elde edilen genel denklemde, Q vektörü {B} koordinat sistemine göre hareket etmektedir. Ayrıca {B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre hem doğrusal hem de açısal hızı vardır.

Robot Manipülatörlerinin Komşu Bağları Arasındaki Hız İlişkisi

Aşağıdaki iki serbestlik dereceli robot komşu iki bağdan oluştuğundan ard arda gelen her bağ birbirine göre açısal ve doğrusal hızlara sahiptir. Her bir bağın hızlarını bulmak için ana koordinat sisteminden başlanarak bir dizi işlem gerçekleştirilir. Bilindiği gibi bir eklemin açısal dönmesi her zaman Z ekseninde gerçekleştiğinden, i+1. eklem etrafında gerçekleşen i+1. bağın açısal hızı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = {}^{i+1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{bmatrix}$$



Denklemdeki ifadeyi, {i.} koordinat sistemi cinsinden bulmak için ${}_{i+1}^{i}R$ ile çarpalım. Bu ifadeye bir de bağ i'nin açısal hızı olan ${}^{i}w_{i}$ ifadesini eklersek, bağ i+1'in açısal hızını elde ederiz.

$${}^{i}\omega_{i+1} = {}^{i}\omega_{i} + {}_{i+1}^{i}R\,\dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

Denklemdeki ifadeyi {i+1.} koordinat sistemi cinsinden ifade etmek için her iki tarafı ${}^{i+1}_{i}R$ ile çarpalım.

$$ {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}\omega_{i+1} = {}^{i+1}\omega_{i+1} \qquad {}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}\omega_{i} + \dot{\theta}_{i+1}\, {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} $$

{i+1.} koordinat sisteminin doğrusal hızı ise, {i.} koordinat sisteminin doğrusal hızına {i.} koordinat sisteminin dönmesinden kaynaklanan yeni bir elemanın eklenmesiyle bulunur. Bu yeni eleman ${}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1}$ ifadesidir.

$$ {}^{i}v_{i+1} = {}^{i}v_{i} + {}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1} \qquad {}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}v_{i} + {}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1}\right) $$

Robotların genel açısal ve doğrusal hız denklemleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Eklem tipi	Genel doğrusal hız denklemleri	Genel açısal hız denklemleri
Dönel	${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}v_{i} + {}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1}\right)$	${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}\omega_{i} + \dot{\theta}_{i+1}\, {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$
Dönel	${}^{i}v_{i+1} = {}^{i}v_{i} + {}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1}$	${}^{i}\omega_{i+1} = {}^{i}\omega_{i} + {}_{i+1}^{i}R\dot{\theta}_{i+1}\, {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$
Prizmatik	${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}v_{i} + {}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1}) + \dot{d}_{i+1}\, {}^{i+1}Z_{i+1}$	0

Jakobiyen Elde Etme Yöntemleri

Jakobiyen her bir eklemin uç işlevcisinin hızına katkısını belirler. Başka bir ifadeyle Jakobiyen matrisi eklem hızlarıyla uç işlevcisinin hızı arasında bir ilişki kurar. Matematiksel olarak Jakobiyen, doğrusal olmayan ifadelerle türevin çok boyutlu olarak gerçekleştirildiği bir işlem biçimidir. Altı eklemli bir robotun eklem hızlarıyla uç işlevcisinin hızı arasında oluşan hız ilişki aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Jakobiyen matrisi

Uç işlevcinin doğru-
sal ve açısal hızı

$$\begin{bmatrix} \delta p_x \\ \delta p_y \\ \delta p_z \\ \delta\psi \\ \delta\theta \\ \delta\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial q_1 & \partial f_1/\partial q_2 & \cdots & \partial f_1/\partial q_6 \\ \partial f_2/\partial q_1 & \partial f_2/\partial q_2 & \cdots & \partial f_2/\partial q_6 \\ \partial f_3/\partial q_1 & \partial f_3/\partial q_2 & \cdots & \partial f_3/\partial q_6 \\ \partial f_4/\partial q_1 & \partial f_4/\partial q_2 & \cdots & \partial f_4/\partial q_6 \\ \partial f_5/\partial q_1 & \partial f_5/\partial q_2 & \cdots & \partial f_5/\partial q_6 \\ \partial f_6/\partial q_1 & \partial f_6/\partial q_2 & \cdots & \partial f_6/\partial q_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ \delta q_4 \\ \delta q_5 \\ \delta q_6 \end{bmatrix}$$

Eklem hızları

Yukarıdaki ilişki ${}^0 v = {}^0\dot{\chi} = \begin{bmatrix} {}^0 v \\ {}^0\omega \end{bmatrix} = {}^0 J(q)\dot{q}$ şeklinde de gösterilebilir.

Jakobiyen matrisinin tersi alınabiliyorsa, bu durumda eklem değişim oranları Kartezayen uzaydaki hızlar cinsinden ifade edilebilir.

$$\dot{q} = J^{-1}(q)v$$

J^{-1} ifadesi tekil noktalarda elde edilemez, eğer J^{-1} her zaman elde edilebiliyorsa, bu ifade robot kontrolünde kullanılabilir.

Bir robotun Jakobiyen matrisi, **iteratif, vektörsel çarpım (cross product)** ve **doğrudan türev** almak gibi üç farklı yöntem kullanılarak çıkarılabilir.

İteratif ve çapraz-çarpım yöntemleri robotun her bir eklemine ait hem açısal hem de doğrusal hızları vermesi açısından her koşulda uygulanabilen çok kullanışlı yöntemlerdir.

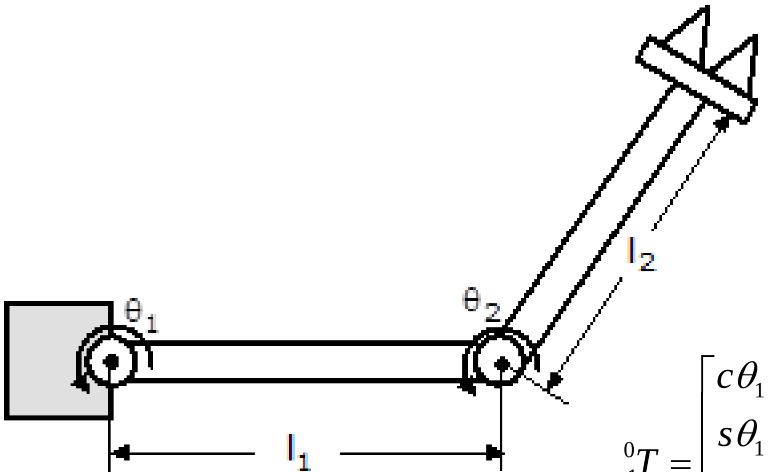
Üçüncü yöntemse doğrudan türev alma yöntemidir ve sadece robot eklemlerinin doğrusal hızlarını verir. Şimdi bu yöntemleri sırayla inceleyelim.

İteratif yöntem

Bu yöntemle hem açısal hem de doğrusal hızlardan oluşan Jacobian matrisi bulunabilir.

ÖRNEK 5.1

Şekilde görülen RR eklem yapısına sahip düzlemsel robotun uç işlevcisinin doğrusal ve açısal hızlarını eklem değişkenleri cinsinden bulunuz.



ÇÖZÜM 5.1

Robota ait dönüşüm matrislerini hatırlayalım

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Ana koordinat sisteminden başlamak üzere uç işlevcisinin hızını bulalım. Öncelikle birinci eklemin kendine göre açısal hızını elde edelim. Bunun için i=0 alınır.

$$ {}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad ise \quad {}^{0+1}\omega_{0+1} = {}^{0+1}_{0}R\,{}^{0}\omega_0 + \dot{\theta}_{0+1}\,{}^{0+1}\hat{Z}_{0+1} \quad ise \quad {}^{1}\omega_1 = {}^{1}_{0}R\,{}^{0}\omega_0 + \dot{\theta}_1\,{}^{1}\hat{Z}_1 $$

Denklemde ${}^0w_0$ sabit eksenin açısal hızını gösterdiğinden ${}^0w_0 = [0 \quad 0 \quad 0]$ olur.

$\dot{\theta}_1$birinci eklemin hızını ve ${}^1\hat{z}_1$ ise birinci eklem değişkeninin dönme eksenini göstermektedir. Dönme ekseni hem prizmatik hem de dönel eklemler için Z ekseni olduğundan genel olarak ${}^{\mathrm{i}}\hat{z}_{\mathrm{i}} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$şeklinde gösterilir. Sonuçta 1. eklemin kendi ekseni etrafında meydana getirdiği açısal hız:

$$ {}^1\omega_1 = {}^1_0R\,{}^0\omega_0 + \dot{\theta}_1\,{}^1\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \qquad \boxed{{}^1_0R = {}^0R_1^T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} $$

Birinci eklemin doğrusal hızı ise i=0 alınarak hesaplanır.

$$ {}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left({}^iv_i + {}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}\right) \quad ise \quad {}^1v_1 = {}^1_0R\left({}^0v_0 + {}^0\omega_0 \times {}^0P_1\right) $$

Denklemde ${}^0\mathrm{v}_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ hareketsiz eklemin kendi ekseni etrafındaki doğrusal hızını göstermektedir. Aynı denklemde ${}^0\mathrm{P}_1$ ise sıfır numaralı eklem ile birinci eklemin bir birlerine göre konumunu veren vektörü göstermektedir. Sıfır ve birinci eklemler bu robotta üs üste olduğundan ${}^0\mathrm{P}_1 = [0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$olarak alınır. Yukarıda yapılan açıklamalar ışığında birinci eklemin kendi ekseni etrafında meydana getirdiği doğrusal hız aşağıdaki gibi bulunur.

$$ {}^{1}v_1 = {}^{1}_{0}R\left({}^{0}v_0 + {}^{0}\omega_0 \times {}^{0}P_1\right) = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

İkinci eklemin kendi ekseni etrafında meydana getirdiği açısal hız:

$$ {}^{2}\omega_2 = {}^{2}_{1}R\,{}^{1}\omega_1 + \dot{\theta}_2\,{}^{2}\hat{Z}_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \dot{\theta}_1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} $$

İkinci eklemin kendi ekseni etrafında meydana getirdiği doğrusal hız:

$$ {}^{2}v_2 = {}^{2}_{1}R\left({}^{1}v_1 + {}^{1}\omega_1 \times {}^{1}P_2\right) = \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} l_1 s\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Çapraz çarpım yöntemi:

$$ a \times b = \begin{bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_j b_k - a_k b_j \\ a_k b_i - a_i b_k \\ a_i b_j - a_j b_i \end{bmatrix} $$

$$ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 - \dot{\theta}_1 \cdot 0 \\ \dot{\theta}_1 \cdot l_1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 0 \cdot l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 l_1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Uç işlevcisi ikinci bağla birlikte hareket ettiğinden doğrudan ${}^{3}w_3 = {}^{2}w_2$ yazılabilir. Bu ifade aşağıda gösterildiği gibi ispat edilebilir.

$$ {}^{3}\omega_3 = {}^{3}_{2}R\,{}^{2}\omega_2 + \dot{\theta}_3\,{}^{3}\hat{Z}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{2}\omega_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = {}^{2}\omega_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = {}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} $$

Uç işlevcisinin kendi ekseni etrafındaki doğrusal hızı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^{3}v_3 = {}^{3}_{2}R\left({}^{2}v_2 + {}^{2}\omega_2 \times {}^{2}P_3\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} l_1 s\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} l_1 s\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c\theta_2 \dot{\theta}_1 + l_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix} $$

Şimdiye kadar her eklemin kendi ekseni etrafındaki açısal ve doğrusal hızlarını bulduk. Önemli olan uç işlevcisinin ana koordinat sistemine göre hızını tanımlamaktır. Bunun için aşağıdaki genel ifade kullanılır

$$ \boxed{{}^{0}v_N = {}^{0}_{N}R\,{}^{N}v_N} $$

N son koordinat sisteminin numarasını göstermektedir. Örnekte N=3'tür. Sonuçta işlevcisinin ana koordinat sistemine göre hızı ${}^{0}v_3 = {}^{0}_{3}R\,{}^{3}v_3$ denklemiyle bulunur.

Sonuçta uç işlevcisinin ana koordinat sistemine göre hızı:

$$
{}^{0}v_3 = {}^{0}_{3}R\,{}^{3}v_3 = {}^{0}_{1}R\,{}^{1}_{2}R\,{}^{2}_{3}R\,{}^{3}v_3 = \begin{bmatrix} c\theta_{12} & -s\theta_{12} & 0 \\ s\theta_{12} & c\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 s\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c\theta_2 \dot{\theta}_1 + l_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_{12} l_1 s\theta_2 \dot{\theta}_1 - s\theta_{12} l_1 c\theta_2 \dot{\theta}_1 - s\theta_{12} l_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) \\ s\theta_{12} l_1 s\theta_2 \dot{\theta}_1 + c\theta_{12} l_1 c\theta_2 \dot{\theta}_1 + c\theta_{12} l_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Yukarıdaki denklem aşağıdaki gibi sadeleştirilebilir.

$$
{}^{0}v_3 = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 s\theta_{12}\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) \\ l_1 c\theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 c\theta_{12}\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Uç işlevcisinin açısal hızı ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$
{}^{0}\omega_3 = {}^{0}_{3}R\,{}^{3}\omega_3 = \begin{bmatrix} c\theta_{12} & -s\theta_{12} & 0 \\ s\theta_{12} & c\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}
$$

Jacobian matrisini bulmak için ${}^{N}[v_N w_N]^T = {}^{N}J(q)\dot{q}$ denklemini uygulayalım. Öncelikle doğrusal hızlardan kaynaklanan Jacobian matrisini bulalım.

$$^{0}[v_3] = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s\theta_{12} & -l_2 s\theta_{12} \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c\theta_{12} & l_2 c\theta_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \qquad \boxed{{}^{0}J_v(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s\theta_{12} & -l_2 s\theta_{12} \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c\theta_{12} & l_2 c\theta_{12} \end{bmatrix}}$$

Eklemler sadece Z ekseninde döndüğü için açısal hızlardan kaynaklanan jacobian matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\boxed{{}^{0}J_w(\theta) = [1 \quad 1]}$$

Sonuçta hem açısal hem de doğrusal hızlardan kaynaklanan Jacobian matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\boxed{{}^{0}J(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s\theta_{12} & -l_2 s\theta_{12} \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c\theta_{12} & l_2 c\theta_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Doğrudan Türev Yöntemi

Örnek 5.1'deki düzlemsel robotun Jakobiyen matrisini doğrudan türev alma yöntemini kullanarak bulalım. Öncelikle ${}^0_3\mathrm{T}$ matrisinin bulunması gerekmektedir.

$$
{}^0_3T = {}^0_1T\,{}^1_2T\,{}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_{12} & -s\theta_{12} & 0 & l_1c\theta_1 + l_2c\theta_{12} \\ s\theta_{12} & c\theta_{12} & 0 & l_1s\theta_1 + l_2s\theta_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

X ve Y eksenlerindeki konum vektörleri: ${}^0p_{x3} = l_1c\theta_1 + l_2c\theta_{12}$ ${}^0p_{y3} = l_1s\theta_1 + l_2s\theta_{12}$

$$
\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial p_x}{\partial q_1} & \dfrac{\partial p_x}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial p_y}{\partial q_1} & \dfrac{\partial p_y}{\partial q_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^0\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{l_1c\theta_1 + l_2c\theta_{12}}{\partial\theta_1} & \dfrac{l_1c\theta_1 + l_2c\theta_{12}}{\partial\theta_2} \\ \dfrac{l_1s\theta_1 + l_2s\theta_{12}}{\partial\theta_1} & \dfrac{l_1s\theta_1 + l_2s\theta_{12}}{\partial\theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1s\theta_1 - l_2s\theta_{12} & -l_2s\theta_{12} \\ l_1c\theta_1 + l_2c\theta_{12} & l_2c\theta_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}
$$

5.4.3. Vektörsel Çarpım Yöntemi

Genel olarak vektörsel çarpım yöntemine göre i. eksene ait Jakobiyen bulunurken, diğer bütün eksenler dondurularak sadece i. eksene ait işlem yapılır. Bütün eksenler için aynı işlem tekrarlanarak toplam Jakobiyen matris bulunur. Örneğin, Jakobiyen matrisin birinci kolonu bulunurken diğer eklemler sabit tutulup 1. ekleme göre kısmi türev işlemi gerçekleştirilir. Aşağıda vektörsel çarpım yöntemi sembolik olarak gösterilmiştir.

$$\begin{bmatrix} {}^{0}v_{araç\_ucu-x} \\ {}^{0}v_{araç\_ucu-y} \\ {}^{0}v_{araç\_ucu-z} \\ {}^{0}\omega_{araç\_ucu-x} \\ {}^{0}\omega_{araç\_ucu-y} \\ {}^{0}\omega_{araç\_ucu-z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \left[{}^{0}\hat{Z}_i \times \left({}^{0}P_{araç\_ucu} - {}^{0}P_{iorg}\right)\right]_x & \\ & \left[{}^{0}\hat{Z}_i \times \left({}^{0}P_{araç\_ucu} - {}^{0}P_{iorg}\right)\right]_y & \\ \cdots & \left[{}^{0}\hat{Z}_i \times \left({}^{0}P_{araç\_ucu} - {}^{0}P_{iorg}\right)\right]_z & \cdots \\ & {}^{0}Z_{ix} & \\ & {}^{0}Z_{iy} & \\ & {}^{0}Z_{iz} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

${}^{0}Z_i$,ana koordinat sistemine göre i. koordinat sistemindeki birim Z vektörü, ${}^{0}P_{iorg}$, ana koordinat sistemine göre i. koordinat sisteminin konumu, ${}^{0}P_{araç\_ucu}$, ana koordinat sistemine göre uç işlevcinin konumunu göstermektedir.

Prizmatik eklemler için açısal ve doğrusal hızlar aşağıdaki gibidir.

$$ {}^{0}v_i = {}^{0}d_i \, {}^{0}\hat{Z}_i \qquad {}^{0}\omega_i = 0 $$

Örnek 5.1'de kullanılan şekildeki robotun Jakobiyen matrisini vektörsel çarpım yöntemini kullanarak bulalım. Doğrusal hızlar için ana koordinat sistemine göre tanımlanan Jakobiyen matris ifadesini hatırlayalım.

$$ \begin{bmatrix} {}^{0}v_{3x} \\ {}^{0}v_{3y} \\ 0 \end{bmatrix} = \left[{}^{0}\hat{Z}_1 \times \left({}^{0}P_3 - {}^{0}P_{1org} \right) \quad {}^{0}\hat{Z}_2 \times \left({}^{0}P_3 - {}^{0}P_{2org} \right) \right] $$

Bu robot düzlemsel olduğundan Z eksenindeki doğrusal hız sıfırdır. Bunun için yukarıdaki denklemdeki ifadeleri sırayla bulalım.

${}^{0}\mathrm{P}_3$ ifadesi robotun ana koordinat sistemine göre uç işlevcisinin konumunu gösterir ve ${}^{0}_{3}\mathrm{T}$ denkleminin dördüncü kolundan elde edilir.

$$ {}^{0}P_3 = \begin{bmatrix} l_1 c\theta_1 + l_2 c\theta_{12} \\ l_1 s\theta_1 + l_2 s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} $$

${}^{0}\mathrm{P}_{\mathrm{iorg}}$ ifadesi sıfır numaralı koordinat sistemi ile 1 numaralı koordinat sistemi arasındaki uzaklığı göstermektedir. Bu iki koordinat sistemi üst üste olduğundan ${}^{0}\mathrm{P}_{1\mathrm{org}} = [0 \quad 0 \quad 0]^{T}$ olur. Bu ifade aynı zamanda ${}_{1}^{0}\mathrm{T}$ matrisindeki 4. kolundur.

${}^{0}\hat{Z}_{1}$ifadesi ${}^{i}Z_{i} = {}_{1}^{0}\mathrm{R}\,{}^{i}Z_{i}$eşitliğinden bulunur.

$$
{}^{0}Z_{1} = {}_{1}^{0}R\,{}^{1}Z_{1} = \begin{bmatrix} c\theta_{1} & -s\theta_{1} & 0 \\ s\theta_{1} & c\theta_{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Jakobiyen matrisin birinci kolonunu bulmak için bulduğumuz bu değerleri denklemde yerine koyalım.

$$
{}^{0}\hat{Z}_{1} \times \left({}^{0}P_{3} - {}^{0}P_{1org} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} l_{1}c\theta_{1} + l_{2}c\theta_{12} \\ l_{1}s\theta_{1} + l_{2}s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{1}c\theta_{1} + l_{2}c\theta_{12} \\ l_{1}s\theta_{1} + l_{2}s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{1}s\theta_{1} - l_{2}s\theta_{12} \\ l_{1}c\theta_{1} + l_{2}c\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Jakobiyen matrisin ikinci kolonunu elde etmek için aşağıdaki denklemi yazalım.

$$
{}^{0}\hat{Z}_{2} \times \left({}^{0}P_{3} - {}^{0}P_{2org} \right)
$$

${}^{0}Z_{2org}$ ve ${}^{0}P_{1org}$ ifadesini elde etmek için ${}^{0}_{2}T$ dönüşüm matrisini yazalım.

$$ {}^{0}_{2}T = {}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_{12} & -s\theta_{12} & 0 & l_1\theta c_1 \\ s\theta_{12} & c\theta_{12} & 0 & l_1\theta s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Denklemden $ {}^{0}P_{2org} = \begin{bmatrix} l_1 c\theta_1 \\ l_1 s\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} $ $ {}^{0}Z_2 = {}^{0}_{2}R\,{}^{2}Z_2 = \begin{bmatrix} c\theta_{12} & -s\theta_{12} & 0 \\ -s\theta_{12} & c\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $

Bulduğumuz bu ifadeleri denklemde yerlerine yazalım.

$$ {}^{0}\hat{Z}_2 \times \left({}^{0}P_3 - {}^{0}P_{2org} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} l_1 c\theta_1 + l_2 c\theta_{12} \\ l_1 s\theta_1 + l_2 s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 c\theta_1 \\ l_1 s\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 c\theta_{12} \\ l_2 s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 s\theta_{12} \\ l_2 c\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} $$

Elde edilen ifadeler denklemde yerine yazılarak doğrusal hızlardan kaynaklanan Jacobian matrisi elde edilir.

$$ {}^{0}J_v(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s\theta_{12} & -l_2 s\theta_{12} \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c\theta_{12} & l_2 c\theta_{12} \end{bmatrix} $$

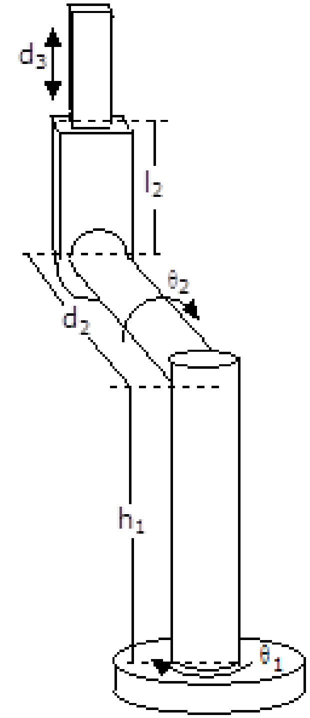
Açısal hızdan kaynaklanan Jacobian matrisi ${}^{0}Z_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad {}^{0}Z_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ İfadelerinden elde edilir. Bu durumda açısal ve doğrusal hızlardan kaynaklanan Jakobiyen matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$
{}^{0}J(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s\theta_{12} & -l_2 s\theta_{12} \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c\theta_{12} & l_2 c\theta_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

ÖRNEK 5.2

Şekilde RRP yapısına sahip robotun Jacobian matrisini aşağıdaki yöntemleri kullanarak bulunuz.

a) İteratif yöntem.
b) Doğrudan türev alma yöntemi
c) Vektörsel çarpım yöntemi

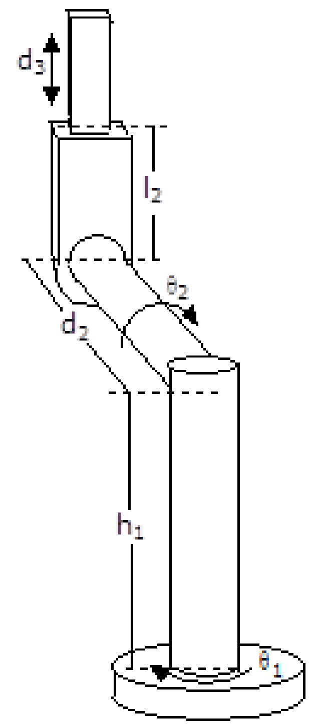


Bu durumda açısal ve doğrusal hızlardan kaynaklanan Jakobiyen matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^{0}J(\theta)=\begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s\theta_{12} & -l_2 s\theta_{12} \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c\theta_{12} & l_2 c\theta_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} $$

ÖRNEK 5.2

Şekilde katı gövde yapısı verilen RRP robotun aşağıdaki yöntemleri kullanarak ana koordinat {0} sistemine göre Jakobiyen matrisini bulunuz.



a) İteratif yöntem.

b) Doğrudan türev alma yöntemi

c) Vektörsel çarpım yöntemi

ÇÖZÜM 5.2

a) İteratif yöntem kullanarak Jakobiyen matrisini bulalım. Bunu için öncelikle şekildeki robotun dönüşüm matrislerini hatırlayalım.

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^0_1R = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^0_1P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^1_2R = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad {}^1_2P = \begin{bmatrix} 0 \\ -d_2 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (l_2 + d_3) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^2_3R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad {}^2_3P = \begin{bmatrix} 0 \\ (l_2 + d_3) \\ 0 \end{bmatrix} $$

i=0 için açısal hız,

$$ {}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \qquad {}^{1}\omega_1 = {}^{1}_{0}R\,{}^{0}\omega_0 + \dot{\theta}_1\,{}^{1}\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} $$

doğrusal hız,

$$ {}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}v_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1} \right) \quad {}^{1}v_1 = {}^{1}_{0}R({}^{0}v_0 + {}^{0}\omega_0 \times {}^{0}P_1) = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

i=1 için açısal hız,

$$ {}^{2}\omega_2 = {}^{2}_{1}R\,{}^{1}\omega_1 + \dot{\theta}_2\,{}^{2}\hat{Z}_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\theta_2\dot{\theta}_1 \\ c\theta_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} $$

doğrusal hız,

$$ {}^{2}v_2 = {}^{2}_{1}R({}^{1}v_1 + {}^{1}\omega_1 \times {}^{1}P_2) = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_2\dot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2\dot{\theta}_1 c\theta_2 \\ -d_2\dot{\theta}_1 s\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} $$

i=2 için açısal hız aşağıdaki gibi bulunur (üçüncü eklem prizmatik olduğundan açısal hıza sahip değildir) .

$$ {}^{3}\omega_3 = {}^{3}_{2}R\,{}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\theta_2\dot{\theta}_1 \\ c\theta_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\theta_2\dot{\theta}_1 \\ -\dot{\theta}_2 \\ c\theta_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} $$

doğrusal hız için prizmatik eklemlerde uygulanan hız denklemini kullanalım.

$$ {}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}v_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}Z_{i+1} $$

$$ {}^{3}v_3 = {}^{3}_{2}R({}^{2}v_2 + {}^{2}\omega_2 \times {}^{2}P_3) + \dot{d}_3\,{}^{3}Z_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} d_2\dot{\theta}_1 c\theta_2 \\ -d_2\dot{\theta}_1 s\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s\theta_2\dot{\theta}_1 \\ c\theta_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ (l_2 + d_3) \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \dot{d}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} d_2\dot{\theta}_1 c\theta_2 - \dot{\theta}_2(l_2 + d_3) \\ -\dot{\theta}_1 s\theta_2 (l_2 + d_3) \\ -d_2\dot{\theta}_1 s\theta_2 + \dot{d}_3 \end{bmatrix} $$

Sonuçta uç işlevcisinin ana koordinat sistemine göre hızı N=3 alınarak bulunur.

$$ {}^{0}v_N = {}^{0}_{N}R\,{}^{N}v_N \quad ise \quad {}^{0}v_3 = {}^{0}_{3}R\,{}^{3}v_3 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 & -c\theta_1 s\theta_2 \\ s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 & -s\theta_1 s\theta_2 \\ s\theta_2 & 0 & c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2\dot{\theta}_1 c\theta_2 - \dot{\theta}_2(l_2 + d_3) \\ -\dot{\theta}_1 s\theta_2 (l_2 + d_3) \\ -d_2\dot{\theta}_1 s\theta_2 + \dot{d}_3 \end{bmatrix} $$

Yukarıdaki iki ifade çarpılıp sadeleştirme yapılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$
{}^{0}v_3 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(s\theta_1 s\theta_2(l_2+d_3)+c\theta_1 d_2)-\dot{\theta}_2 c\theta_1 c\theta_2(l_2+d_3)-c\theta_1 s\theta_2 \dot{d}_3 \\ -\dot{\theta}_1(c\theta_1 s\theta_2(l_2+d_3)+s\theta_1 d_2)-\dot{\theta}_2 s\theta_1 c\theta_2(l_2+d_3)-s\theta_1 s\theta_2 \dot{d}_3 \\ -\dot{\theta}_2 s\theta_2(l_2+d_3)+c\theta_2 \dot{d}_3 \end{bmatrix}
$$

Robotun doğrusal hızlardan kaynaklanan Jakobiyen matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$
{}^{0}v_3 = \begin{bmatrix} s\theta_1 s\theta_2(l_2+d_3)+c\theta_1 d_2 & -c\theta_1 c\theta_2(l_2+d_3) & -c\theta_1 s\theta_2 \\ -c\theta_1 s\theta_2(l_2+d_3)+s\theta_1 d_2 & -s\theta_1 c\theta_2(l_2+d_3) & -s\theta_1 s\theta_2 \\ 0 & -s\theta_2(l_2+d_3) & c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}J_3 = \begin{bmatrix} s\theta_1 s\theta_2(l_2+d_3)+c\theta_1 d_2 & -c\theta_1 c\theta_2(l_2+d_3) & -c\theta_1 s\theta_2 \\ -c\theta_1 s\theta_2(l_2+d_3)+s\theta_1 d_2 & -s\theta_1 c\theta_2(l_2+d_3) & -s\theta_1 s\theta_2 \\ 0 & -s\theta_2(l_2+d_3) & c\theta_2 \end{bmatrix}
$$

Açısal hızlardan kaynaklanan Jakobiyen matrisini bulalım

$$
{}^{0}\omega_N = {}^{0}_{N}R\,{}^{N}\omega_N \quad {}^{0}\omega_3 = {}^{0}_{3}R\,{}^{3}\omega_3 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 & -c\theta_1 s\theta_2 \\ s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 & -s\theta_1 s\theta_2 \\ s\theta_2 & 0 & c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ -\dot{\theta}_2 \\ c\theta_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}
$$

Yukarıdaki iki ifade çarpılıp sadeleştirme yapılırsa açısal hızlardan kaynaklanan Jakobiyen matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$
{}^{0}\omega_3 = \begin{bmatrix} s\theta_1\dot{\theta}_2 \\ -c\theta_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s\theta_1 & 0 \\ 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} \qquad {}^{0}J_{\omega}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & s\theta_1 & 0 \\ 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Hem açısal hem de doğrusal hızlardan kaynaklanan Jakobiyen matrisi:

$$
{}^{3}J = \begin{bmatrix} s\theta_1 s\theta_2(l_2+d_3)+c\theta_1 d_2 & -c\theta_1 c\theta_2(l_2+d_3) & -c\theta_1 s\theta_2 \\ -c\theta_1 s\theta_2(l_2+d_3)+s\theta_1 d_2 & -s\theta_1 c\theta_2(l_2+d_3) & -s\theta_1 s\theta_2 \\ 0 & -s\theta_2(l_2+d_3) & c\theta_2 \\ 0 & s\theta_1 & 0 \\ 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

b) Doğrudan türev alma yöntemini kullanarak Jakobiyen matrisini bulmak için öncelikle ${}_{3}^{0}T$matrisini matrislerini bulalım.

$$
{}_{3}^{0}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 & -c\theta_1 s\theta_2 & -(d_3+l_2)(c\theta_1 s\theta_2)+d_2 s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 & -s\theta_1 s\theta_2 & -(d_3+l_2)(s\theta_1 s\theta_2)-d_2 c\theta_1 \\ s\theta_2 & 0 & c\theta_2 & (d_3+l_2)c\theta_2+h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Doğrusal hızlardan kaynaklanan Jakobiyen matrisi elde edelim.

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial p_x}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial p_x}{\partial \theta_2} & \dfrac{\partial p_x}{\partial d_3} \\ \dfrac{\partial p_y}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial p_y}{\partial \theta_2} & \dfrac{\partial p_y}{\partial d_3} \\ \dfrac{\partial p_z}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial p_z}{\partial \theta_2} & \dfrac{\partial p_z}{\partial d_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\theta_1 s\theta_2 (l_2 + d_3) + c\theta_1 d_2 & -c\theta_1 c\theta_2 (l_2 + d_3) & -c\theta_1 s\theta_2 \\ -c\theta_1 s\theta_2 (l_2 + d_3) + s\theta_1 d_2 & -s\theta_1 c\theta_2 (l_2 + d_3) & -s\theta_1 s\theta_2 \\ 0 & -s\theta_2 (l_2 + d_3) & c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

$$ {}^3J_v = \begin{bmatrix} s\theta_1 s\theta_2 (l_2 + d_3) + c\theta_1 d_2 & -c\theta_1 c\theta_2 (l_2 + d_3) & -c\theta_1 s\theta_2 \\ -c\theta_1 s\theta_2 (l_2 + d_3) + s\theta_1 d_2 & -s\theta_1 c\theta_2 (l_2 + d_3) & -s\theta_1 s\theta_2 \\ 0 & -s\theta_2 (l_2 + d_3) & c\theta_2 \end{bmatrix}$$

c) Vektöryel çarpım yöntemini kullanarak Jakobiyen matrisini bulmak için genel denklemi yazalım.

$$ {}^0J(\theta) = \begin{bmatrix} {}^0Z_1 \times ({}^0P_3 - {}^0P_1) & {}^0Z_2 \times ({}^0P_3 - {}^0P_2) & {}^0d_3\, {}^0Z_3 \end{bmatrix}$$

Jakobiyen matrisinin birinci kolonunu bulalım.

$$^{0}Z_1 \times (^{0}P_3 - {}^{0}P_1) = \begin{bmatrix} (d_3+l_2)(s\theta_1 s\theta_2) + d_2 c\theta_1 \\ -(d_3+l_2)(c\theta_1 s\theta_2) + d_2 s\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^{0}Z_1 = {}^{0}_{1}R\,{}^{1}Z_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$^{0}P_3 - {}^{0}P_1 = \begin{bmatrix} -(d_3+l_2)(c\theta_1 s\theta_2) + d_2 s\theta_1 \\ -(d_3+l_2)(s\theta_1 s\theta_2) - d_2 c\theta_1 \\ (d_3+l_2)c\theta_2 + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(d_3+l_2)(c\theta_1 s\theta_2) + d_2 s\theta_1 \\ -(d_3+l_2)(s\theta_1 s\theta_2) - d_2 c\theta_1 \\ (d_3+l_2)c\theta_2 \end{bmatrix}$$

Jakobiyen matrisinin ikinci kolonunu bulalım.

$$^{0}Z_2 \times (^{0}P_3 - {}^{0}P_2) = \begin{bmatrix} -(d_3+l_2)(c\theta_1 c\theta_2) \\ -(d_3+l_2)(s\theta_1 c\theta_2) \\ -(d_3+l_2)s\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$^{0}Z_2 = {}^{0}_{2}R\,{}^{2}Z_2 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 \\ s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 s\theta_2 & -c\theta_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\theta_1 \\ -c\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^{0}P_3 - {}^{0}P_2 = \begin{bmatrix} -(d_3+l_2)(c\theta_1 s\theta_2) + d_2 s\theta_1 \\ -(d_3+l_2)(s\theta_1 s\theta_2) - d_2 c\theta_1 \\ (d_3+l_2)c\theta_2 + h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_2 s\theta_1 \\ -d_2 c\theta_1 \\ +h_1 \end{bmatrix}$$

Jakobiyen matrisinin üçüncü kolonunu bulalım.

$$
{}^0d_3\,{}^0Z_3 = {}^0Z_3 = {}^0_3R\,{}^3Z_3 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 & -c\theta_1 s\theta_2 \\ s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 & -s\theta_1 s\theta_2 \\ s\theta_2 & 0 & c\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c\theta_1 s\theta_2 \\ -s\theta_1 s\theta_2 \\ c\theta_2 \end{bmatrix}
$$

Bulduğumuz üç kolonu da denklemde yerine yazarak doğrusal hızlardan kaynaklanan Jakobiyen matrisini yazalım.

$$
\boxed{{}^3J_v = \begin{bmatrix} s\theta_1 s\theta_2 (l_2 + d_3) + c\theta_1 d_2 & -c\theta_1 c\theta_2 (l_2 + d_3) & -c\theta_1 s\theta_2 \\ -c\theta_1 s\theta_2 (l_2 + d_3) + s\theta_1 d_2 & -s\theta_1 c\theta_2 (l_2 + d_3) & -s\theta_1 s\theta_2 \\ 0 & -s\theta_2 (l_2 + d_3) & c\theta_2 \end{bmatrix}}
$$

Şimdi de robotun açısal hızlardan kaynaklanan jakobiyen matrisini bulalım

$$
{}^0J(\theta) = \begin{bmatrix} {}^0\hat{Z}_1 & {}^0\hat{Z}_2 & {}^0\hat{Z}_3 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^0Z_1 = {}^0_1R\,{}^1Z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad {}^0Z_2 = {}^0_2R\,{}^2Z_2 = \begin{bmatrix} s\theta_1 \\ -c\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^0Z_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\boxed{{}^0J_\omega = \begin{bmatrix} 0 & s\theta_1 & 0 \\ 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}
$$

Sonuçta hem açısal hem de doğrusal hızlardan kaynaklanan jakobiyen matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$
{}^{3}J = \begin{bmatrix} s\theta_1 s\theta_2 (l_2 + d_3) + c\theta_1 d_2 & -c\theta_1 c\theta_2 (l_2 + d_3) & -c\theta_1 s\theta_2 \\ -c\theta_1 s\theta_2 (l_2 + d_3) + s\theta_1 d_2 & -s\theta_1 c\theta_2 (l_2 + d_3) & -s\theta_1 s\theta_2 \\ 0 & -s\theta_2 (l_2 + d_3) & c\theta_2 \\ 0 & s\theta_1 & 0 \\ 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

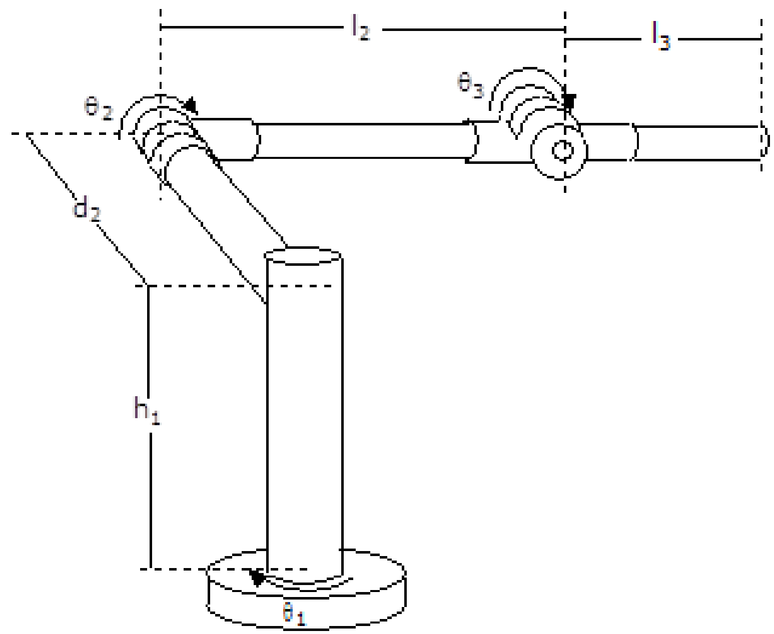
ÖRNEK 5.3

Şekilde RRR robotun un aşağıdaki yöntemleri kullanarak Jakobiyen matrisini bulunuz.

a) İteratif yöntem.

b) Doğrudan türev alma yöntemi.

c) Vektörsel çarpım yöntemi.



ÇÖZÜM 5.3

a) İteratif yöntem kullanarak Jakobiyen matrisini bulmak için öncelikle şekildeki robotun dönüşüm matrislerini hatırlayalım.

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^0_1R = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2R = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^2_3R = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3_4R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^0_1P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2P = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2_3P = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^3_4P = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

i=0 için açısal hız ${}^1\omega_1 = {}^1_0R\,{}^0\omega_0 + \dot{\theta}_1\,{}^1\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$, doğrusal hız ${}^1v_1 = {}^1_0R({}^0v_0 + {}^0\omega_0 \times {}^0P_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

i=1 için açısal hız,

$$ {}^{2}\omega_2 = {}^{2}_{1}R\,{}^{1}\omega_1 + \dot{\theta}_2\,{}^{2}\hat{Z}_2 = \begin{bmatrix} -s\theta_2\dot{\theta}_1 \\ -c\theta_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} $$

doğrusal hız

$$ {}^{2}v_2 = {}^{2}_{1}R({}^{1}v_1 + {}^{1}\omega_1 \times {}^{1}P_2) = \begin{bmatrix} -d_2\dot{\theta}_1 c\theta_2 \\ d_2\dot{\theta}_1 s\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} $$

i=2 için açısal hız,

$$ {}^{3}\omega_3 = {}^{3}_{2}R\,{}^{2}\omega_2 + \dot{\theta}_3\,{}^{3}\hat{Z}_3 = \begin{bmatrix} -s\theta_2 c\theta_3\dot{\theta}_1 - c\theta_2 s\theta_3\dot{\theta}_1 \\ s\theta_2 s\theta_3\dot{\theta}_1 - c\theta_2 c\theta_3\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} $$

doğrusal hız

$$ {}^{3}v_3 = {}^{3}_{2}R({}^{2}v_2 + {}^{2}\omega_2 \times {}^{2}P_3) = \begin{bmatrix} -d_2\dot{\theta}_1 c\theta_2 c\theta_3 + d_2\dot{\theta}_1 s\theta_2 s\theta_3 + l_2\dot{\theta}_2 s\theta_3 \\ d_2\dot{\theta}_1 c\theta_2 s\theta_3 + d_2\dot{\theta}_1 s\theta_2 c\theta_3 + l_2\dot{\theta}_2 c\theta_3 \\ l_2\dot{\theta}_1 c\theta_2 \end{bmatrix} $$

i=3 için açısal hız

$$ {}^{4}\omega_4 = {}^{4}_{3}R\,{}^{3}\omega_3 = {}^{3}\omega_3 = \begin{bmatrix} -s\theta_{23}\dot{\theta}_1 \\ c\theta_{23}\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{4}_{3}R = I $$

doğrusal hız

$$ {}^{4}v_4 = {}^{4}_{3}R({}^{3}v_3 + {}^{3}\omega_3 \times {}^{3}P_4) = \begin{bmatrix} -d_2\dot{\theta}_1 c\theta_{23} + l_2\dot{\theta}_2 s\theta_3 \\ d_2\dot{\theta}_1 s\theta_{23} + l_2\dot{\theta}_2 c\theta_3 + l_3(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ l_2\dot{\theta}_1 c\theta_2 + l_3\dot{\theta}_1 c\theta_{23} \end{bmatrix} $$

Sonuçta uç işlevcisinin ana koordinat sistemine göre doğrusal hızı N=4 için aşağıdaki gibi bulunur.

$$ {}^{0}v_4 = {}^{0}_{4}R\,{}^{4}v_4 = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1(d_2c\theta_1 + l_2s\theta_1c\theta_2 + l_3s\theta_1c\theta_{23}) - \dot{\theta}_2(l_2c\theta_1s\theta_2 + l_3c\theta_1s\theta_{23}) - \dot{\theta}_3(l_3c\theta_1s\theta_{23}) \\ -\dot{\theta}_1(d_2s\theta_1 + l_2c\theta_1c\theta_2 + l_3c\theta_1c\theta_{23}) - \dot{\theta}_2(l_2s\theta_1s\theta_2 + l_3s\theta_1s\theta_{23}) - \dot{\theta}_3(l_3s\theta_1s\theta_{23}) \\ -\dot{\theta}_2(l_2c\theta_2 + l_3c\theta_{23}) - \dot{\theta}_3(l_3c\theta_{23}) \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}v_4 = \begin{bmatrix} -l_3s\theta_1c\theta_{23} - l_2s\theta_1c\theta_2 - d_2c\theta_1 & -l_3c\theta_1s\theta_{23} - l_2c\theta_1s\theta_2 & -l_3c\theta_1s\theta_{23} \\ l_3c\theta_1c\theta_{23} + l_2c\theta_1c\theta_2 - d_2s\theta_1 & -l_3s\theta_1s\theta_{23} - l_2s\theta_1s\theta_2 & -l_3s\theta_1s\theta_{23} \\ 0 & -l_3c\theta_{23}) - l_2c\theta_2) & -l_3c\theta_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} $$

Doğrusal hızlardan kaynaklanan Jacobian matrisi:

$$ \boxed{ {}^{3}J_v = \begin{bmatrix} -l_3s\theta_1c\theta_{23} - l_2s\theta_1c\theta_2 - d_2c\theta_1 & -l_3c\theta_1s\theta_{23} - l_2c\theta_1s\theta_2 & -l_3c\theta_1s\theta_{23} \\ l_3c\theta_1c\theta_{23} + l_2c\theta_1c\theta_2 - d_2s\theta_1 & -l_3s\theta_1s\theta_{23} - l_2s\theta_1s\theta_2 & -l_3s\theta_1s\theta_{23} \\ 0 & -l_3c\theta_{23} - l_2c\theta_2 & -l_3c\theta_{23} \end{bmatrix} } $$

Açısal hızlardan kaynaklanan Jakobiyen matrisi:

$$ {}^{0}\omega_4 = {}^{0}_{4}R\,{}^{4}\omega_4 = \begin{bmatrix} -s\theta_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ c\theta_1(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -s\theta_1 & -s\theta_1 \\ 0 & c\theta_1 & c\theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} $$

$$ \boxed{ {}^{0}J_\omega = \begin{bmatrix} 0 & -s\theta_1 & -s\theta_1 \\ 0 & c\theta_1 & c\theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} } $$

Sonuçta açısal ve doğrusal hızlardan kaynaklanan Jakobiyen matrisi:

$$
{}^{3}J(\theta) = \begin{bmatrix}
-l_3 s\theta_1 c\theta_{23} - l_2 s\theta_1 c\theta_2 - d_2 c\theta_1 & -l_3 c\theta_1 s\theta_{23} - l_2 c\theta_1 s\theta_2 & -l_3 c\theta_1 s\theta_{23} \\
l_3 c\theta_1 c\theta_{23} + l_2 c\theta_1 c\theta_2 - d_2 s\theta_1 & -l_3 s\theta_1 s\theta_{23} - l_2 s\theta_1 s\theta_2 & -l_3 s\theta_1 s\theta_{23} \\
0 & -l_3 c\theta_{23} - l_2 c\theta_2 & -l_3 c\theta_{23} \\
0 & s\theta_1 & s\theta_1 \\
0 & -c\theta_1 & -c\theta_1 \\
1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

b) Doğrudan türev alma yöntemini kullanarak Jakobiyen matrisini bulmak için öncelikle ${}_{4}^{0}\mathrm{T}$ matrisini elde edelim.

$$
{}_{4}^{0}T = \begin{bmatrix}
c\theta_1 c\theta_{23} & -c\theta_1 s\theta_{23} & -s\theta_1 & l_3(c\theta_1 c\theta_{23}) + l_2 c\theta_1 c\theta_2 - d_2 s\theta_1 \\
s\theta_1 c\theta_{23} & -s\theta_1 s\theta_{23} & c\theta_1 & l_3(s\theta_1 c\theta_{23}) + l_2 s\theta_1 c\theta_2 + d_2 c\theta_1 \\
-s\theta_{23} & -c\theta_{23} & 0 & -l_3(s\theta_{23}) - l_2 s\theta_2 + h_1 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial p_x}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial p_x}{\partial \theta_2} & \dfrac{\partial p_x}{\partial \theta_3} \\ \dfrac{\partial p_y}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial p_y}{\partial \theta_2} & \dfrac{\partial p_y}{\partial \theta_3} \\ \dfrac{\partial p_z}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial p_z}{\partial \theta_2} & \dfrac{\partial p_z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 s\theta_1 c\theta_{23} - l_2 s\theta_1 c\theta_2 - d_2 c\theta_1 & -l_3 c\theta_1 s\theta_{23} - l_2 c\theta_1 s\theta_2 & -l_3 c\theta_1 s\theta_{23} \\ l_3 c\theta_1 c\theta_{23} + l_2 c\theta_1 c\theta_2 - d_2 s\theta_1 & -l_3 s\theta_1 s\theta_{23} - l_2 s\theta_1 s\theta_2 & -l_3 s\theta_1 s\theta_{23} \\ 0 & -l_3 c\theta_{23} - l_2 c\theta_2 & -l_3 c\theta_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Doğrusal hızlardan kaynaklanan Jacobian matrisi:

$$\boxed{{}^3J_v(\theta) = \begin{bmatrix} -l_3 s\theta_1 c\theta_{23} - l_2 s\theta_1 c\theta_2 - d_2 c\theta_1 & -l_3 c\theta_1 s\theta_{23} - l_2 c\theta_1 s\theta_2 & -l_3 c\theta_1 s\theta_{23} \\ l_3 c\theta_1 c\theta_{23} + l_2 c\theta_1 c\theta_2 - d_2 s\theta_1 & -l_3 s\theta_1 s\theta_{23} - l_2 s\theta_1 s\theta_2 & -l_3 s\theta_1 s\theta_{23} \\ 0 & -l_3 c\theta_{23} - l_2 c\theta_2 & -l_3 c\theta_{23} \end{bmatrix}}$$

c) Son olarak Vektörsel çarpım yöntemiyle doğrusal ve açısal hızlardan kaynaklanan Jacobian matrisini bulalım. Doğrusal hızlardan kaynaklanan Jacobian matrisi:

$${}^0J(\theta) = \left[{}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) \quad {}^0Z_2 \times ({}^0P_4 - {}^0P_2) \quad {}^0Z_3 \times ({}^0P_4 - {}^0P_3) \right]$$

Jakobiyen matrisinin birinci kolonu

$${}^0Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) = {}^0_1R\,{}^1Z_1 \times ({}^0P_4 - {}^0P_1) = \begin{bmatrix} -l_3 s\theta_1 c\theta_{23} - l_2 s\theta_1 c\theta_2 - d_2 c\theta_1 \\ l_3 c\theta_1 c\theta_{23} + l_2 c\theta_1 c\theta_2 - d_2 s\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jakobiyen matrisinin ikinci kolonu

$$ {}^{0}Z_2 \times ({}^{0}P_4 - {}^{0}P_2) = {}^{0}_{2}R\,{}^{2}Z_2 \times ({}^{0}P_4 - {}^{0}P_2) = \begin{bmatrix} -l_3 c\theta_1 s\theta_{23} - l_2 c\theta_1 s\theta_2 \\ -l_3 s\theta_1 s\theta_{23} - l_2 s\theta_1 s\theta_2 \\ -l_3 c\theta_{23} - l_2 c\theta_2 \end{bmatrix} $$

Jakobiyen matrisinin ikinci kolonu

$$ {}^{0}Z_3 \times ({}^{0}P_4 - {}^{0}P_3) = {}^{0}_{3}R\,{}^{3}Z_3 \times ({}^{0}P_4 - {}^{0}P_3) = \begin{bmatrix} -l_3 c\theta_1 s\theta_{23} \\ -l_3 s\theta_1 s\theta_{23} \\ -l_3 c\theta_{23} \end{bmatrix} $$

Sonuç olarak robotun doğrusal hızlardan kaynaklanan Jakobiyen matrisi:

$$ {}^{3}J_v(\theta) = \begin{bmatrix} -l_3 s\theta_1 c\theta_{23} - l_2 s\theta_1 c\theta_2 - d_2 c\theta_1 & -l_3 c\theta_1 s\theta_{23} - l_2 c\theta_1 s\theta_2 & -l_3 c\theta_1 s\theta_{23} \\ l_3 c\theta_1 c\theta_{23} + l_2 c\theta_1 c\theta_2 - d_2 s\theta_1 & -l_3 s\theta_1 s\theta_{23} - l_2 s\theta_1 s\theta_2 & -l_3 s\theta_1 s\theta_{23} \\ 0 & -l_3 c\theta_{23} - l_2 c\theta_2 & -l_3 c\theta_{23} \end{bmatrix} $$

Bu robotun açısal hızlardan kaynaklanan Jakobiyen matrisini bulalım.Bunun için aşağıdaki denklemi uygulayalım.

$$ {}^{0}J(\theta) = \begin{bmatrix} {}^{0}\hat{Z}_1 & {}^{0}\hat{Z}_2 & {}^{0}\hat{Z}_3 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}Z_1 = {}^{0}_{1}R\,{}^{1}Z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{0}Z_2 = {}^{0}_{2}R\,{}^{2}Z_2 = \begin{bmatrix} s\theta_1 \\ -c\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{0}Z_3 = {}^{0}_{3}R\,{}^{3}Z_3 = \begin{bmatrix} s\theta_1 \\ -c\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Robotun açısal hızlardan kaynaklanan Jakobiyen matrisi: $\boxed{{}^{0}J_{\omega}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & s\theta_1 & s\theta_1 \\ 0 & -c\theta_1 & -c\theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$

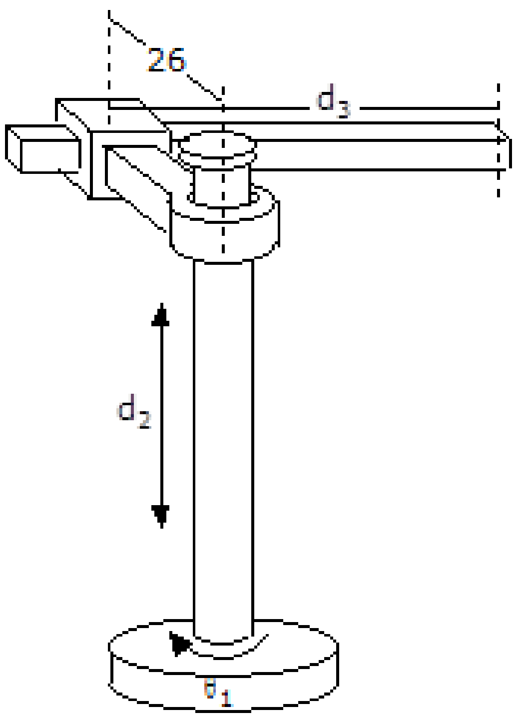
Sonuçta açısal ve doğrusal hızlardan kaynaklanan Jakobiyen matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

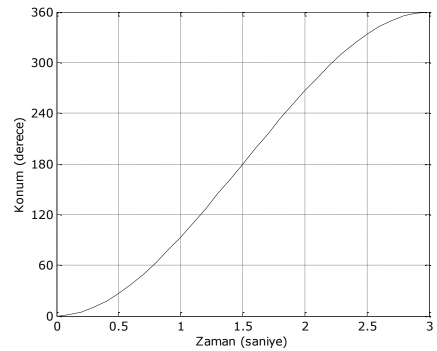
$$ \boxed{{}^{3}J(\theta) = \begin{bmatrix} -l_3 s\theta_1 c\theta_{23} - l_2 s\theta_1 c\theta_2 - d_2 c\theta_1 & -l_3 c\theta_1 s\theta_{23} - l_2 c\theta_1 s\theta_2 & -l_3 c\theta_1 s\theta_{23} \\ l_3 c\theta_1 c\theta_{23} + l_2 c\theta_1 c\theta_2 - d_2 s\theta_1 & -l_3 s\theta_1 s\theta_{23} - l_2 s\theta_1 s\theta_2 & -l_3 s\theta_1 s\theta_{23} \\ 0 & -l_3 c\theta_{23} - l_2 c\theta_2 & -l_3 c\theta_{23} \\ 0 & s\theta_1 & s\theta_1 \\ 0 & -c\theta_1 & -c\theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} $$

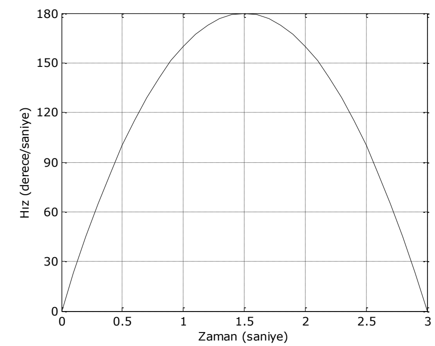
Görüldüğü gibi her üç yöntemle de aynı sonuçlar elde edilmiştir.

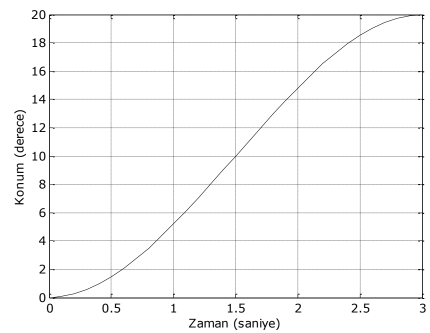
ÖRNEK 5.4

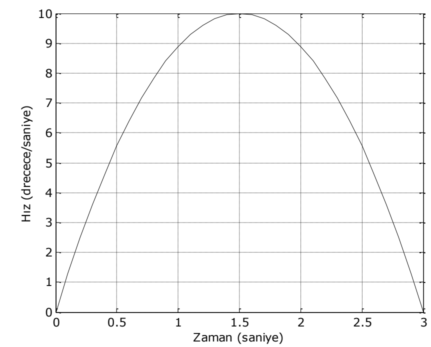
Şekildeki RPP üç eklemli robotunun uç işlevcisi (x_b y_b z_b) başlangıç konumundan, (x_h y_h z_h) hedef konumuna 3 saniyede varmaktadır. Bu sırada eklemlerin zamana bağlı olarak gerçekleştirdiği konum ve hızlar grafikte verilmiştir. Buna göre 0.92 sn sonra uç işlevcisinin X, Y ve Z eksenlerindeki v_x, v_y ve v_z kartezyen hızlarını bulunuz.

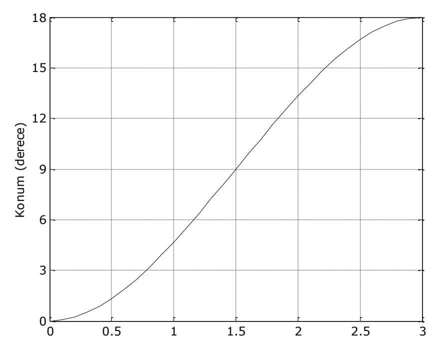


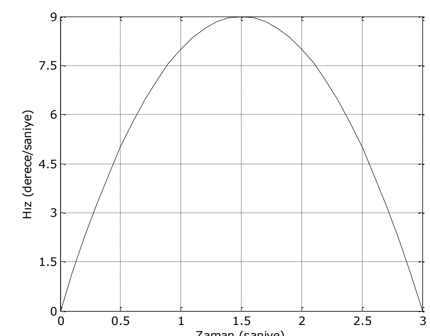






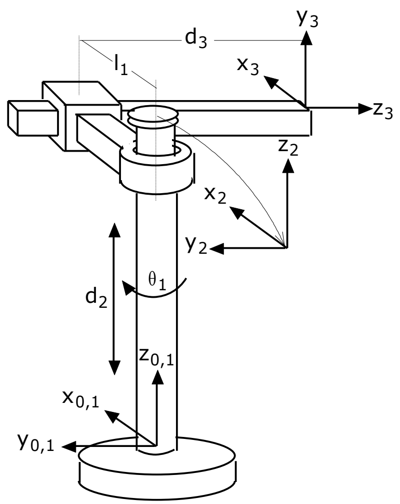






ÇÖZÜM 5.4

Şekildeki robotun X, Y ve Z eksenlerindeki v_x, v_y ve v_z kartezyen hızlarını bulmak için öncelikle ileri kinematik matrislerini yazıp denklemde gösterilen $\dot{\chi} = J\dot{Q}$ eşitliği oluşturalım. Bunun için öncelikle DH değişkenlerini bulalım



DH değişkenleri

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	0	d_2	0
3	90	l_1	d_3	0

${}^0_3T$ ileri kinematik matrisleri

$$
{}^0_3T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & l_1c\theta_1 + d_3s\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & l_1s\theta_1 - d_3c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Robotun Jacobian matrisini doğrudan türev alma yöntemini kullanarak bulalım.

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_x}{\partial d_2} & \frac{\partial p_x}{\partial d_3} \\ \frac{\partial p_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_y}{\partial d_2} & \frac{\partial p_y}{\partial d_3} \\ \frac{\partial p_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_z}{\partial d_2} & \frac{\partial p_z}{\partial d_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} \quad ise \quad \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 + d_3 c\theta_1 & 0 & s\theta_1 \\ l_1 c\theta_1 + d_3 s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

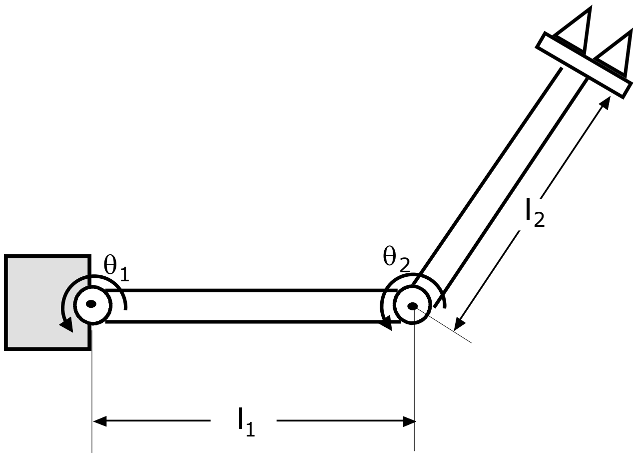
0.92'nci saniyedeki eklemlerin konum ve hızları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Eklem 1		**Eklem 2**		**Eklem 3**	
Konum-1	Hız-1	Konum-2	Hız-2	Konum-3	Hız-3
80.80	153.08	4.48	8.50	4.04	7.65

Tabloda elde ettiğimiz konum ve hızları yukarıdaki denklemde yerine yazarak kartezyen hızları bulalım.

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26\sin(80.8) + (4.04)\cos(80.8) & 0 & \sin(80.8) \\ 26\cos(80.8) + (4.04)\sin(80.8) & 0 & -\cos(80.8) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 153.08 \\ 8.5 \\ 7.65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3822.5 \\ 1245.6 \\ 8.5 \end{bmatrix}$$

Jakobiyen matrisinin determinantı sıfıra eşitse tersi alınamaz tersi alınamaz ve bu durumda Jakobiyen matris tekildir. Eğer Jakobiyen matris tekilse robot bir serbestlik derecesini kaybeder. Konuyu pekiştirmek için şekildeki düzlemsel robotun Jakobiyen matrisini hatırlayalım.

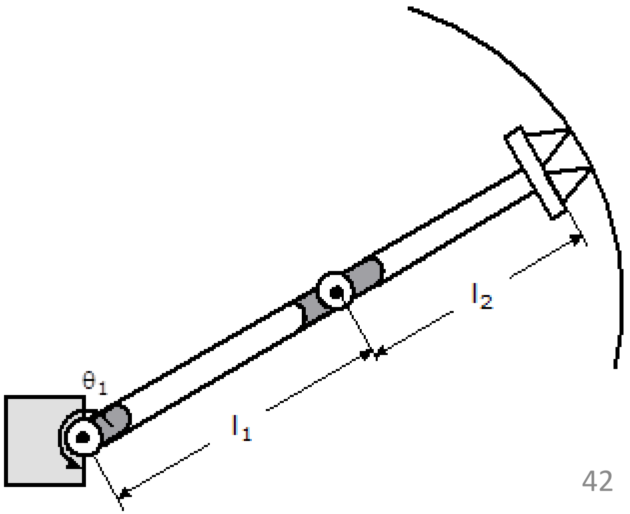


$$^{3}J(\theta)=\begin{bmatrix} l_1 s\theta_2 & 0 \\ l_1 c\theta_2 + l_2 & l_2 \end{bmatrix}$$

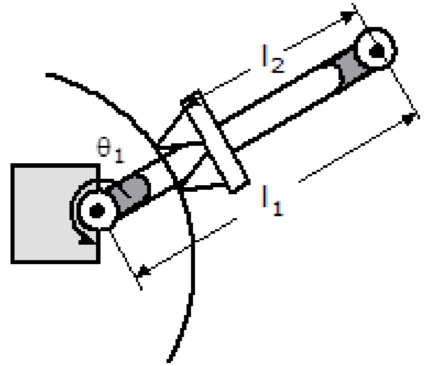
Jakobiyen matrisin determinantını bulalım.

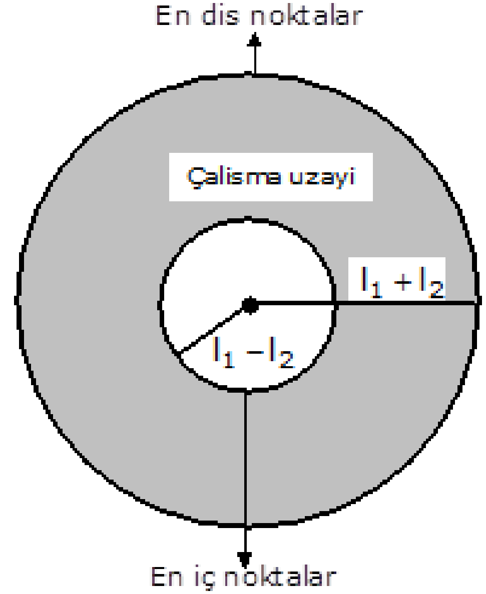
$$DET\left|J(\theta)\right|=\begin{vmatrix} l_1 s\theta_2 & 0 \\ l_1 c\theta_2 + l_2 & l_2 \end{vmatrix}=l_1 l_2 s\theta_2$$

$l_1 l_2 s\theta_2$ ifadesini sıfıra eşitleyerek bu robotun serbestlik derecesini kaybettiği eklem açıları bulunabilir. Bu ifadeyi sıfır yapan açılar $\theta_2 = 0$ ve $\theta_2 = 180$'dir. $\theta_2 = 0$ ise robot bağ uzunluğu $l_1 + l_2$ olan tek eklemli bir robota dönüşür ve bu robotun ulaşabileceği uzay yarı çapı $r = l_1 + l_2$ olan bir çember olur.



$\theta_2 = 180$ ise robotun bağları şekilde görüldüğü gibi üst üste gelir. Bu durumda robotun fiziki yapısı bozulduğundan çalışamaz.





Tekil noktaları iki kısımda inceleyebiliriz.

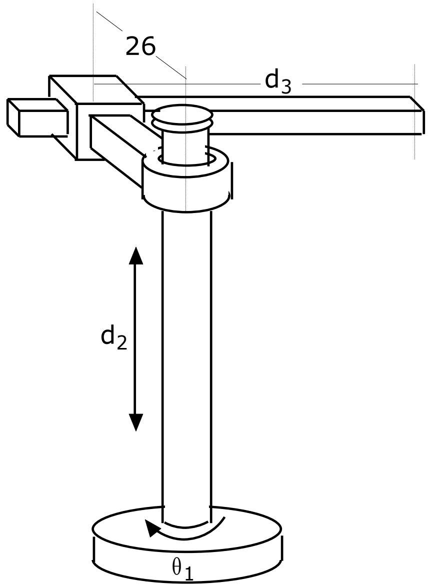
1. Çalışma uzayının dış sınır tekil noktaları robotun uzanabileceği en uzak noktaları belirler.
2- Çalışma uzayının içi sınır tekil noktaları ise robotun merkezine en yakın noktaları belirler.

Bilinen Kartezyen hızlar ve eklem açıları cinsinden herhangi bir t anındaki eklem hızlarını bulmak için $\dot{\chi} = J\dot{Q}$ eşitliğinin her iki tarafını da J^{-1} ile çarpalım.

$J^{-1}\dot{\chi} = J^{-1}J\dot{Q}$ ise $J^{-1}J = I$ $\boxed{\dot{Q} = J^{-1}\dot{\chi}}$

ÖRNEK 5.5

Şekildeki robotun (örnek 5.4) t=0.78'nci saniyedeki Kartezyen hızları ve eklemlerin konumları aşağıda verildiğine göre her bir eklemin hızını bulunuz.



$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3276.7 \\ 2537.5 \\ 8.82 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \theta_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58.7 \\ 3.26 \\ 2.93 \end{bmatrix}$$

ÇÖZÜM 5.5

$$\dot{Q} = J^{-1}\dot{\chi} \qquad \text{ise} \qquad \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Jakobiyen matrisinin tersini alalım.

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 + d_3 c\theta_1 & 0 & s\theta_1 \\ l_1 c\theta_1 + d_3 s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; ise \; J^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{c\theta_1}{d_3} & \dfrac{s\theta_1}{d_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{l_1 c\theta_1 + d_3 s\theta_1}{d_3} & \dfrac{l_1 s\theta_1 - d_3 c\theta_1}{d_3} & 0 \end{bmatrix}$$

Jakobiyen matrisin tersini denklemde yerine koyalım.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{c\theta_1}{d_3} & \dfrac{s\theta_1}{d_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{l_1 c\theta_1 + d_3 s\theta_1}{d_3} & \dfrac{l_1 s\theta_1 - d_3 c\theta_1}{d_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

soruda verilen sayısal değerleri denklemde yerlerine yazalım.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos(58.7)}{2.93} & \dfrac{\sin(58.7)}{2.93} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{26 \cdot \cos(58.7) + 2.93 \cdot \sin(58.7)}{2.93} & \dfrac{26 \cdot \sin(58.7) - 2.93 \cos(58.7)}{2.93} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3252 \\ 2534.7 \\ 8.82 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 158.6 \\ 8.82 \\ 7.9 \end{bmatrix}$$

Başka Koordinat Sistemine Göre Jakobiyen Tanımlanması

{B} Koordinat sistemine göre elde edilmiş Jakobiyeni {A} koordinat sistemine göre tanımlayalım. {B} Koordinat sistemine göre tanımlanan kartezyen hızları Jakobiyen ve eklem hızları cinsinden yazalım.

$$\begin{bmatrix} {}^B v \\ {}^B \omega \end{bmatrix} = {}^B \nu = {}^B J \dot{Q}$$

Bu denklemden yararlanarak ${}^{A}J(Q)$ ifadesini bulalım. Bilindiği gibi

$$\begin{bmatrix} {}^{A}v \\ {}^{A}\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R\,{}^{B}v \\ {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & 0 \\ 0 & {}^{A}_{B}R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}v \\ {}^{B}\omega \end{bmatrix}$$

yukarıdaki ifadede $\begin{bmatrix} {}^{B}v \\ {}^{B}\omega \end{bmatrix} = {}^{B}J\dot{Q}$ yazarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

Ayrıca $\begin{bmatrix} {}^{A}v \\ {}^{A}\omega \end{bmatrix} = {}^{A}J\dot{Q}$ olduğundan yukarıdaki ifadeyi aşağıdaki gibi düzenleyelim

$${}^{A}J\dot{Q} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & 0 \\ 0 & {}^{A}_{B}R \end{bmatrix} {}^{B}J\dot{Q}$$

Denklemin sağ ve sol tarafındaki ifadeleri sadeleştirilirse {B} koordinat sistemine göre ifade edilmiş Jakobiyen {A} koordinat sistemine göre aşağıdaki gibi tanımlanır.

$${}^{A}J = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & 0 \\ 0 & {}^{A}_{B}R \end{bmatrix} {}^{B}J$$

Aynı zamanda $\begin{bmatrix} {}^{A}v \\ {}^{A}\omega \end{bmatrix} = {}^{A}J(Q)\dot{Q}$ olduğundan yukarıdaki ifadeyi aşağıdaki gibi düzenleyelim.

$$ {}^{A}J(Q)\dot{Q} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & 0 \\ 0 & {}^{A}_{B}R \end{bmatrix} {}^{B}J(Q)\dot{Q} $$

Denklemin sağ ve sol tarafındaki ifadeleri sadeleştirilirse {B} koordinat sistemine göre ifade edilmiş Jakobiyen {A} koordinat sistemine göre aşağıdaki gibi tanımlanış olur.

$$ {}^{A}J(Q) = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & 0 \\ 0 & {}^{A}_{B}R \end{bmatrix} {}^{B}J(Q) $$