DİNAMİK

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

Behcet DAĞHAN

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

- Konum, Hız ve İvme
- Newton Kanunları

2. MADDESEL NOKTALARIN KİNEMATİĞİ

- Doğrusal Hareket
- Düzlemde Eğrisel Hareket
- Bağıl Hareket (Ötelenen Eksenlerde)
- Birbirine Bağlı Maddesel Noktaların Hareketi

3. MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ

- Kuvvet, Kütle ve İvme
- İş ve Enerji
- İmpuls ve Momentum

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

3

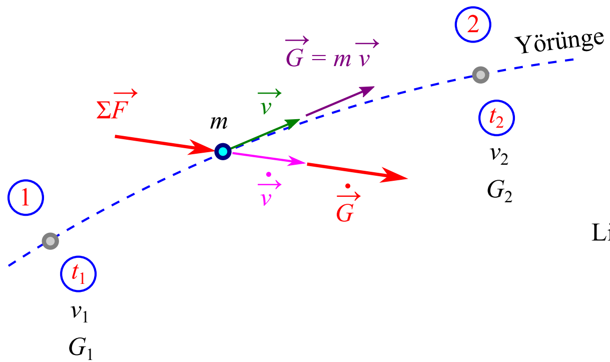
KİNETİK

MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ

3.3

İmpuls ve Momentum

Lineer impuls ve lineer momentum



$$\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$\Sigma\vec{F} = m\,\dot{\vec{v}}$$

m = sb. $\rightarrow$ $$\Sigma\vec{F} = \frac{d(m\,\vec{v})}{dt}$$

$\vec{G} = m\,\vec{v}$ $\rightarrow$ $$\Sigma\vec{F} = \frac{d\,\vec{G}}{dt}$$

Lineer momentum

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = \dot{\vec{G}}}$$

$$\Sigma\vec{F} = \dot{\vec{G}} = \frac{d\,\vec{G}}{dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\vec{F}\,dt = \underbrace{\int d\,\vec{G}}_{\Delta\vec{G} = \vec{G}_2 - \vec{G}_1}$$

Lineer impuls

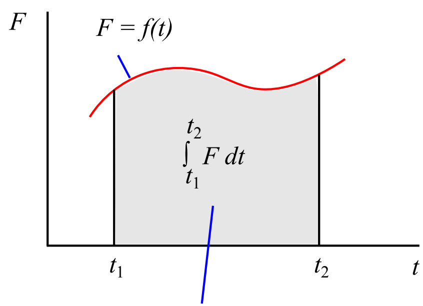
$$\boxed{\vec{G}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\vec{F}\,dt = \vec{G}_2}$$

Lineer impuls-momentum denklemi

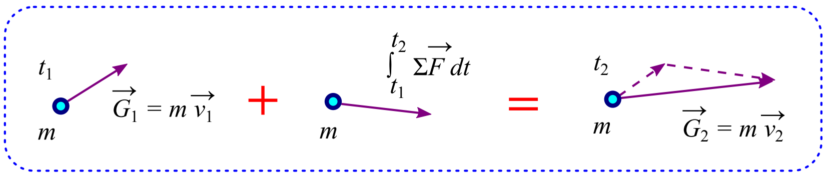
$$m\,v_{1x} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x\,dt = m\,v_{2x}$$

$$m\,v_{1y} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_y\,dt = m\,v_{2y}$$

$$\vdots$$



F-t grafiğinin altında kalan alan, herhangi bir kuvvetin lineer impulsu



Lineer momentumun korunumu

Momentum korunur.

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\vec{F}\,dt = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \Delta\vec{G} = \vec{G}_2 - \vec{G}_1 = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{G}_1 = \vec{G}_2 \quad \rightarrow \quad \vec{G} \quad \text{(sabit)}$$

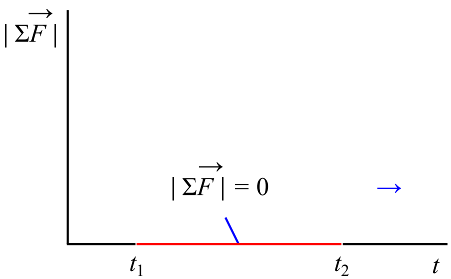
$$m\,\vec{v}_1 = m\,\vec{v}_2$$

$$\boxed{\vec{v}_1 = \vec{v}_2}$$

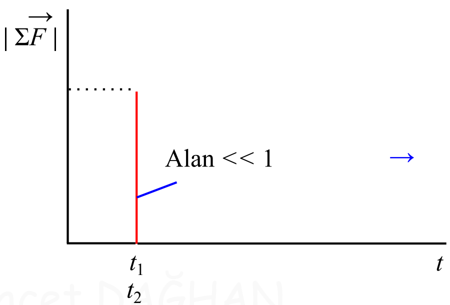
$$v_{1x} = v_{2x}$$

$$v_{1y} = v_{2y}$$

$$\vdots$$



$$\rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\vec{F}\,dt = \vec{0}$$



$$\rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\vec{F}\,dt = \vec{0}$$

İki maddesel noktadan oluşan bir sistem için

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\vec{F}\,dt = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{G}_1 = \vec{G}_2$$

Sistemin momentumu korunur.

$$\left.\begin{matrix} m_A \\ m_B \end{matrix}\right\} \qquad \vec{G}_{A1} + \vec{G}_{B1} = \vec{G}_{A2} + \vec{G}_{B2}$$

$$\boxed{m_A\,\vec{v}_{A1} + m_B\,\vec{v}_{B1} = m_A\,\vec{v}_{A2} + m_B\,\vec{v}_{B2}}$$

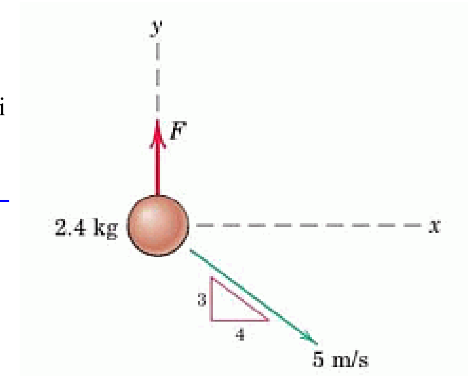
$$m_A\,v_{A1x} + m_B\,v_{B1x} = m_A\,v_{A2x} + m_B\,v_{B2x}$$

$$m_A\,v_{A1y} + m_B\,v_{B1y} = m_A\,v_{A2y} + m_B\,v_{B2y}$$

$$\vdots$$

Örnek Problem 3/15

Yatay olan x-y düzlemi içinde hareket eden 2.4 kg lık maddesel nokta $t = 0$ anında şekilde gösterilen hıza sahiptir. y-yönündeki $F = 2 + 3t^2/4$ kuvveti maddesel noktaya $t = 0$ iken uygulanmaya başlanmıştır. t nin birimi saniye iken F nin birimi newtondur. Maddesel noktanın, F uygulandıktan 4 saniye sonraki hızının şiddeti v yi ve hız vektörünün x-ekseninin pozitif tarafı ile saat yönüne ters yönde yaptığı açı θ yı bulunuz.



Verilenler:

$m = 2.4$ kg

$t_1 = 0$

$v_1 = 5$ m/s

$F = 2 + 3t^2/4$

t, s

F, N

$F = F_y = \Sigma F_y$

$\Sigma F_x = 0$

İstenenler:

$t_2 = 4$ s anında

$v_2 = v = ?$

$\theta_2 = \theta = ?$

Çözüm

$$m\, v_{1x} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x \, dt = m\, v_{2x}$$

$$m\, v_{1x} + \cancel{\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x \, dt}^{\,0} = m\, v_{2x}$$

$v_{1x} = v_{2x}$ { x-doğrultusunda momentum korunur

$v_{1x} = v_1\,(4/5) = 4$ m/s (sabit)

$v_{2x} = 4$ m/s

$$m\, v_{1y} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_y \, dt = m\, v_{2y}$$

$$m\, v_{1y} + \int_{t_1}^{t_2} (2 + 3t^2/4)\, dt = m\, v_{2y}$$

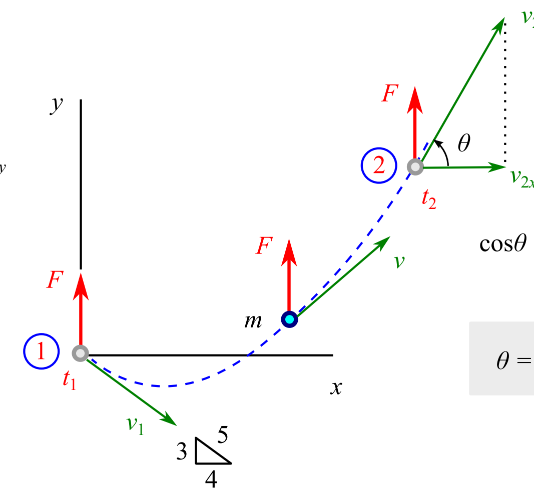
$v_{1y} = -\, v_1\,(3/5) = -\,3$ m/s

$$2.4\,(-\,3) + (2\,t + t^3/4\,\Big|_0^4 = (2.4)\, v_{2y}$$

$v_{2y} = 7$ m/s

$$v^2 = v_x^{\,2} + v_y^{\,2}$$

$$v_2 = \boxed{v = 8.06 \text{ m/s}}$$



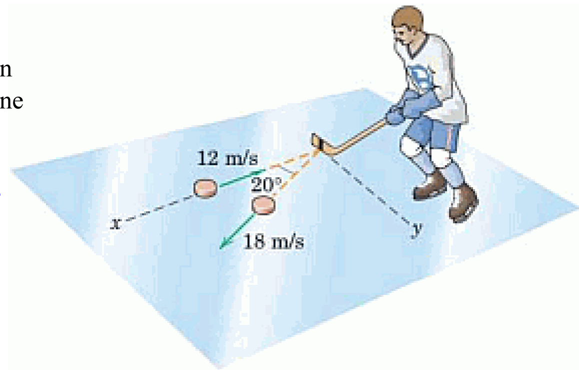
Üstten görünüş

$$\cos\theta = \frac{v_{2x}}{v_2}$$

$$\boxed{\theta = 60.3^\circ}$$

Örnek Problem 3/16

0.20 kg kütleli buz hokeyi topunun, hokey sopası ile vurulmadan önceki hızı 12 m/s dir. Çarpışmadan sonra top, şekilde gösterilen yönde 18 m/s lik bir hız ile hareket etmektedir. Eğer sopa ile top, birbirine 0.04 s süre ile temas etmiş ise temas esnasında sopanın topa uyguladığı F kuvvetinin ortalama şiddetini hesaplayınız. Ayrıca F nin x-ekseninin pozitif tarafı ile yaptığı β açısını bulunuz.



Verilenler:

$m = 0.2$ kg

$t_1 = 0$

$v_1 = 12$ m/s

$t_2 = 0.04$ s

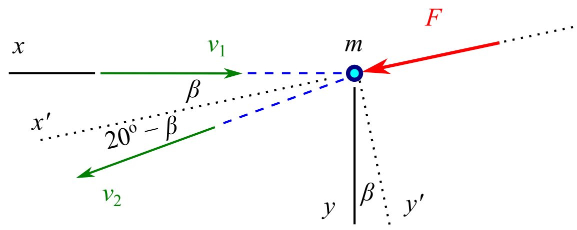
$v_2 = 18$ m/s

$\theta_2 = 20^{\circ}$

İstenenler:

$F = ?$ (sabit)

Çözüm



Üstten görünüş

$$m\, v_{1y'} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_{y'}\, dt = m\, v_{2y'}$$

$$m\, v_{1y'} + \int_{t_1}^{t_2} \cancelto{0}{\Sigma F_{y'}}\, dt = m\, v_{2y'}$$

$v_{1y'} = v_{2y'}$ { y'-doğrultusunda momentum korunur.

$$v_1 \sin\beta = v_2 \sin(20^{\circ} - \beta)$$

$$12 \sin\beta = 18\,(\sin 20^{\circ} \cos\beta - \sin\beta \cos 20^{\circ})$$

$$12 \tan\beta = 18\,(\sin 20^{\circ} - \tan\beta \cos 20^{\circ}) \rightarrow \boxed{\beta = 12^{\circ}}$$

$$m\, v_{1x'} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_{x'}\, dt = m\, v_{2x'}$$

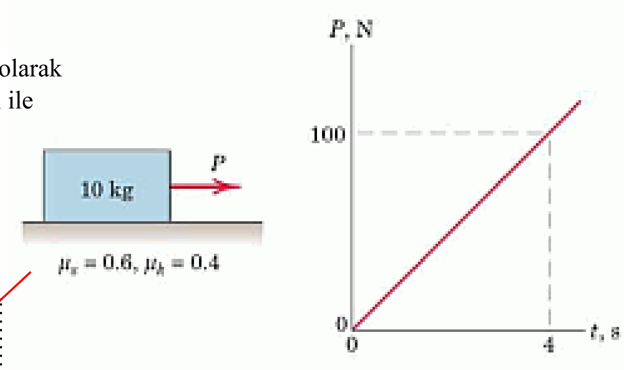
$$m\, v_{1x'} + F_{x'} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt}_{\Delta t = 0.04 \text{ s}} = m\, v_{2x'}$$

$$F_{x'} = F$$

$$m\,(-v_1 \cos\beta) + F\,\Delta t = m\,[v_2 \cos(20^{\circ} - \beta)] \rightarrow 0.2\,(-12 \cos 12^{\circ}) + F\,(0.04) = 0.2\,(18) \cos(20^{\circ} - 12^{\circ}) \rightarrow \boxed{F = 148 \text{ N}}$$

Örnek Problem 3/17

Durmakta olan 10 kg lık bloğa uygulanan P kuvveti şekilde gösterildiği gibi zamanla doğrusal olarak değişmektedir. Blok ile yatay olan yüzey arasındaki statik ve kinetik sürtünme katsayıları sırası ile 0.6 ve 0.4 ise bloğun t = 4 s anındaki hızını bulunuz.



Çözüm

Verilenler:

$m = 10$ kg

$\mu_s = 0.6$

$\mu_k = 0.4$

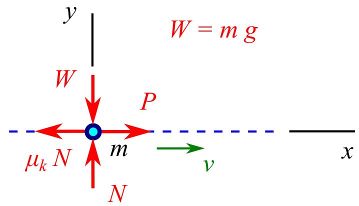
$v_1 = 0$

İstenenler:

$t_1 = ?$

$t_2 = 4$ s anında

$v_2 = ?$



$W = m\,g$

$$m\,v_{1y} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_y\,dt = m\,v_{2y}$$

$$0 + (N - W)\,\Delta t = 0$$

$$N = m\,g$$

$$\frac{t_1}{58.9} = \frac{4}{100}$$

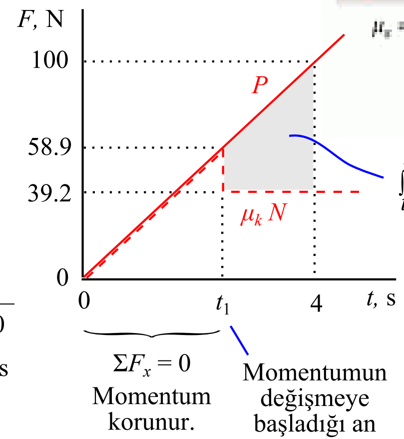
$$t_1 = 2.35 \text{ s}$$

$P > \mu_s N$ olunca hareket başlar.

$\mu_s N = 58.9$ N

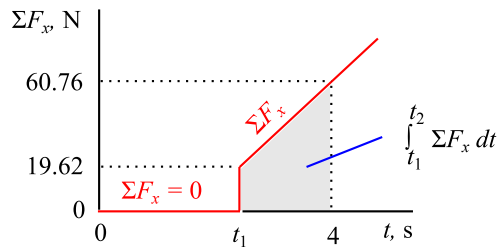
Hareket başladıktan sonraki sürtünme kuvveti:

$\mu_k N = 39.2$ N



$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x\,dt = \left(\frac{100 + 58.9}{2} - 39.2\right)(4 - 2.35)$$

$$= 66.1 \text{ N·s}$$



$$m\,v_{1x} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x\,dt = m\,v_{2x}$$

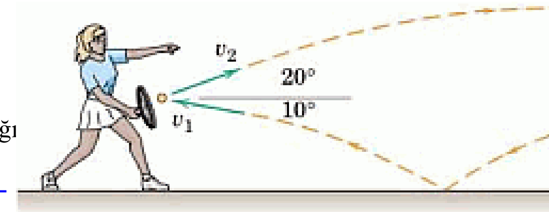
$$m\,\cancel{v_{1x}}^{\,0} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x\,dt = m\,v_{2x}$$

$$66.1 = 10\,v_2$$

$$\boxed{v_2 = 6.6 \text{ m/s}}$$

Örnek Problem 3/18

Bir tenis oyuncusu elindeki raket ile tenis topuna, top kendi yörüngesinde yükselmekte iken, vuruyor. Topun çarpışmadan hemen önceki hızının şiddeti v_1 = 15 m/s ve hemen sonraki ise v_2 = 22 m/s dir ve yönleri şekildeki gibidir. 60 g kütleli top, raket ile 0.05 s süre ile temas etmiş ise raketin topa uyguladığı kuvvetin ortalama şiddeti R yi bulunuz. Ayrıca R nin yatay doğrultu ile yaptığı açı β yı bulunuz.



Çözüm

Verilenler:

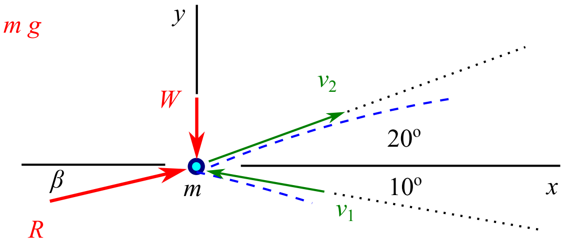
m = 60 g

Δt = 0.05 s

v_1 = 15 m/s

v_2 = 22 m/s

$W = m\,g$



$$m\,v_{1x} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x\,dt = m\,v_{2x}$$

$$m\,(-v_1 \cos 10^o) + R_x\,\Delta t = m\,(v_2 \cos 20^o)$$

$$0.06\,(-15)\cos 10^o + R_x\,(0.05) = 0.06\,(22)\cos 20^o$$

$$R_x = 42.5 \text{ N}$$

$$m\,v_{1y} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_y\,dt = m\,v_{2y}$$

$$m\,(v_1 \sin 10^o) + (R_y - W)\,\Delta t = m\,(v_2 \sin 20^o)$$

$$0.06\,(15)\sin 10^o + [R_y - 0.06\,(9.81)]\,(0.05) = 0.06\,(22)\sin 20^o$$

$$R_y = 6.5 \text{ N}$$

İstenenler:

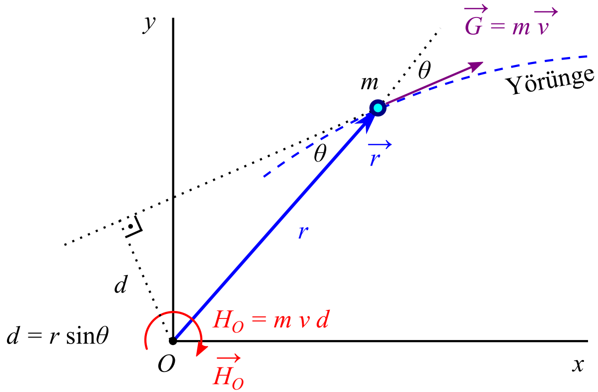
R = ?

β = ?

$$R^2 = R_x^{\,2} + R_y^{\,2} \qquad \tan\beta = \frac{R_y}{R_x}$$

$$\boxed{R = 43 \text{ N}} \qquad \boxed{\beta = 8.7^o}$$

Açısal impuls ve açısal momentum



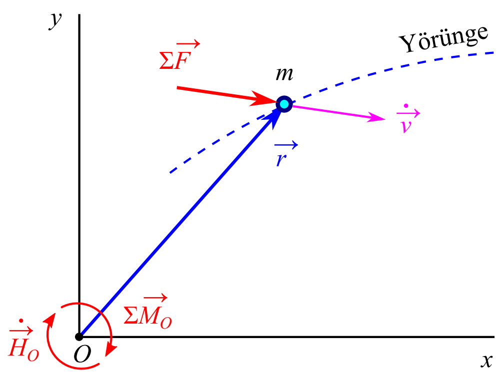
Lineer momentumun bir noktaya göre momentine açısal momentum denir.

vektörel çarpım

$$\boxed{\vec{H}_O = \vec{r} \times m\,\vec{v}}$$ Açısal momentum

$$H_O = r\,m\,v\sin\theta$$

$$H_O = m\,v\,d$$



$$\left.\begin{aligned}\Sigma\vec{M}_O &= \vec{r} \times \Sigma\vec{F}\\ \Sigma\vec{F} &= m\,\vec{a} = m\,\dot{\vec{v}}\end{aligned}\right\}\quad \Sigma\vec{M}_O = \vec{r} \times m\,\dot{\vec{v}}$$

$$\dot{\vec{H}}_O = \dot{\vec{r}} \times m\,\vec{v} + \vec{r} \times m\,\dot{\vec{v}} = \underbrace{\vec{v} \times m\,\vec{v}}_{=\vec{0}} + \vec{r} \times m\,\dot{\vec{v}}$$

$$\overbrace{\vec{v}\;/\!/\;m\,\vec{v}}$$

$$\boxed{\Sigma\vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O}$$

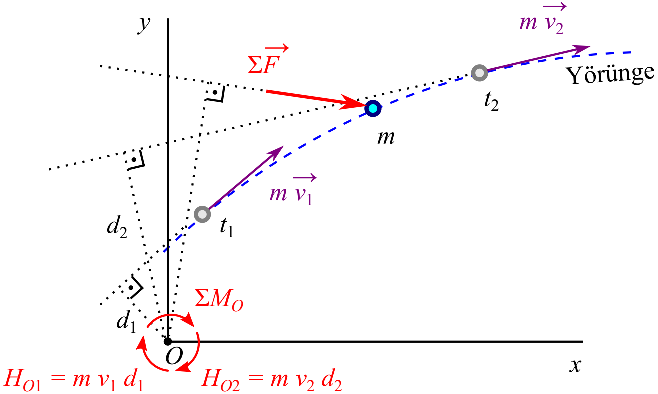
$$\Sigma\vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O = \frac{d\,\vec{H}_O}{dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\vec{M}_O\,dt = \underbrace{\int d\,\vec{H}_O}_{\Delta\vec{H}_O = \vec{H}_{O2} - \vec{H}_{O1}}$$

Açısal impuls

$$\boxed{\vec{H}_{O1} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\vec{M}_O\,dt = \vec{H}_{O2}}$$

Açısal impuls-momentum denklemi



Hareket düzlemde eğrisel hareket ise

$$\vec{H}_{O1} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\vec{M}_O\,dt = \vec{H}_{O2}$$

$$H_{O1z} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_{Oz}\,dt = H_{O2z}$$

$$H_{O1} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O\,dt = H_{O2}$$

$$\boxed{m\,v_1\,d_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O\,dt = m\,v_2\,d_2}$$

Açısal momentumun korunumu

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\vec{M}_O\,dt = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2}}$$

Hareket düzlemde eğrisel hareket ise

$$\vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2} \quad \rightarrow \quad m\,v_1\,d_1 = m\,v_2\,d_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{v_1\,d_1 = v_2\,d_2} \quad \rightarrow$$

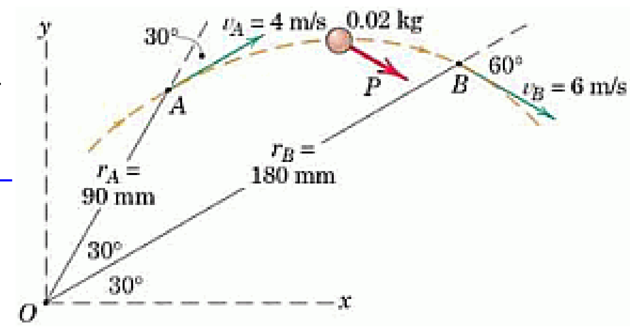
Düzlemde eğrisel hareket yapan
iki maddesel noktadan oluşan bir sistem için

$$\underbrace{m_A \quad m_B}$$

$$\boxed{m_A\,v_{A1}\,d_{A1} + m_B\,v_{B1}\,d_{B1} = m_A\,v_{A2}\,d_{A2} + m_B\,v_{B2}\,d_{B2}}$$

Örnek Problem 3/19

Kütlesi 0.02 kg olan bir maddesel nokta şekilde gösterilen yörünge üzerinde hareket etmektedir ve *A* ve *B* konumlarında şekilde gösterilen hızlara sahiptir. Maddesel noktanın *A* dan *B* ye kadar gitmesi için gerekli olan süre 0.5 saniye ise bu esnada maddesel noktaya etki eden bileşke kuvvet *P* nin *O* ya göre momentinin ortalama değerini hesaplayınız.



Çözüm

Verilenler:

$m = 0.02$ kg

$\Delta t = 0.5$ s

$v_1 = v_A = 4$ m/s

$v_2 = v_B = 6$ m/s

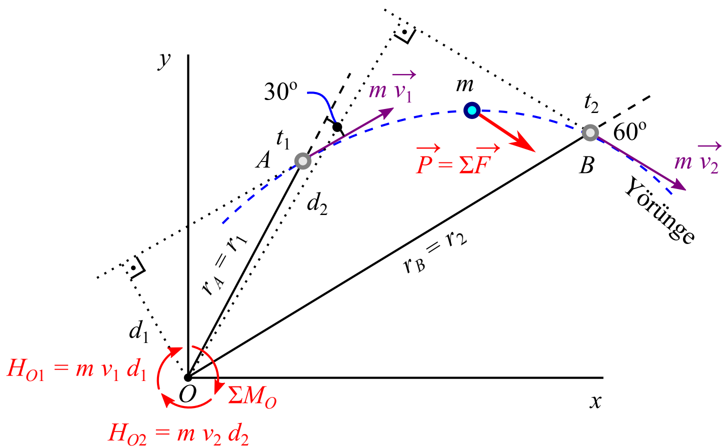
$r_1 = r_A = 90$ mm

$r_2 = r_B = 180$ mm

İstenenler:

$(\Sigma M_O)_{ort} = ?$

(sabit)



$$m\,v_1\,d_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O\,dt = m\,v_2\,d_2$$

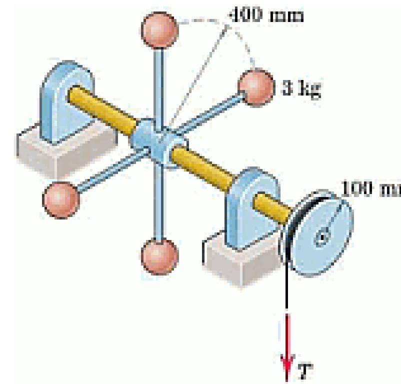
$$m\,v_1\,d_1 + (\Sigma M_O)_{ort}\,\Delta t = m\,v_2\,d_2$$

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= r_1 \sin 30^\circ \\ d_2 &= r_2 \sin 60^\circ \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{(\Sigma\,M_O)_{ort} = 30.2\ \text{N·mm}}$$

Örnek Problem 3/20

İlk hızsız olarak harekete başlayan şekildeki sistem, ipe uygulanan 20 N luk T kuvvetinin etkisi ile t saniyede 150 rev/min lik bir açısal hıza ulaşmıştır. t yi bulunuz. Sürtünmeyi ve 3 kg lık dört kürenin kütleleri dışındaki bütün kütleleri ihmal ediniz.



Verilenler:

$m = 3$ kg

$N_1 = 0$

$v_1 = 0$

$d_1 = d_2 = R = 400$ mm

$r = 100$ mm

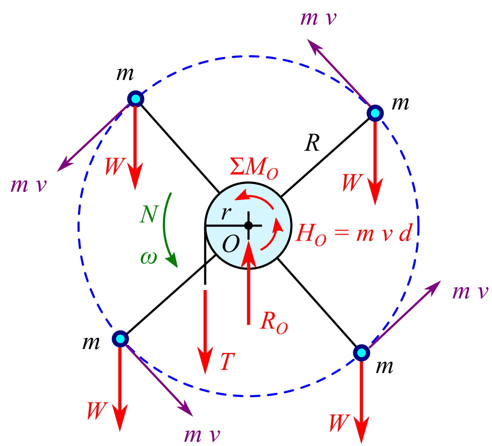
$T = 20$ N

$N_2 = 150$ rev/min

İstenenler:

$\Delta t = t = ?$

Çözüm



Karşılıklı ağırlıkların
O noktasına göre momentleri
daima birbirini götürür.

$$m\, v_1\, d_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O\, dt = m\, v_2\, d_2$$

$$m\, \cancelto{0}{v_1}\, d_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O\, dt = m\, v_2\, d_2$$

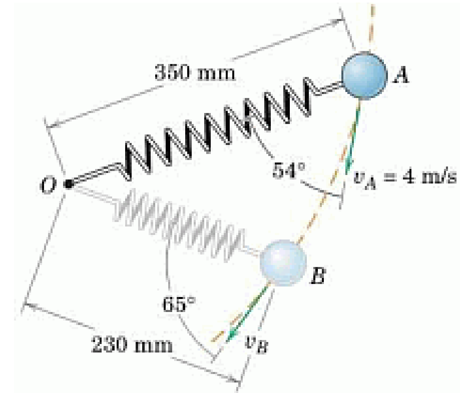
$$T\,(r)\, \Delta t = 4\,(m\, v_2\, R)$$

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= R\, \omega_2 \\ \omega_2 &= N_2\, (\pi/30) \end{aligned}\right\} \quad 20\,(0.1)\, t = 4\,(3)\,(0.4)\,(150)\,(\pi/30)\,(0.4)$$

$$\boxed{t = 15.08 \text{ s}}$$

Örnek Problem 3/21

Kütlesi m olan bir maddesel nokta ihmal edilebilir sürtünme ile yatay bir yüzey üzerinde hareket etmektedir. Maddesel nokta şekilde görüldüğü gibi bir ucu O ya takılmış olan hafif bir yaya bağlıdır. A konumundaki hızı v_A = 4 m/s olan maddesel noktanın B konumundan geçerkenki hızı v_B yi bulunuz.



Verilenler:

m

$\mu = 0$

$v_1 = v_A = 4$ m/s

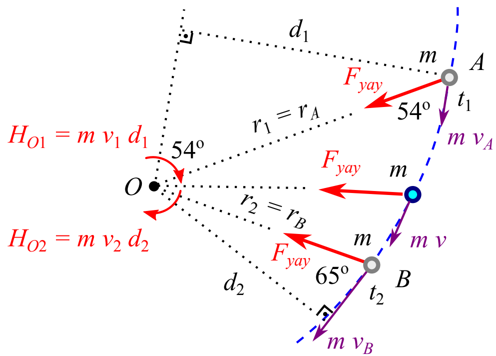
$r_1 = r_A = 350$ mm

$r_2 = r_B = 230$ mm

İstenenler:

$v_2 = v_B = ?$

Çözüm



Üstten görünüş

$$m\, v_1\, d_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O\, dt = m\, v_2\, d_2$$

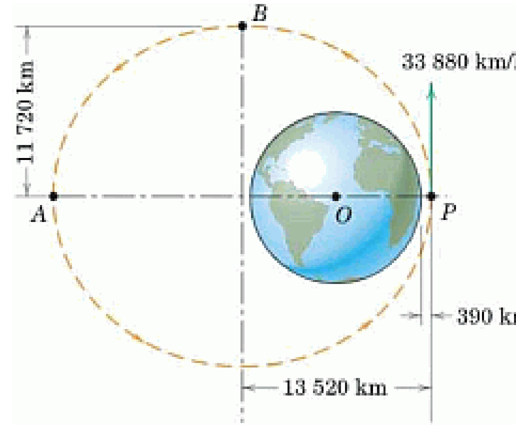
$$m\, v_1\, d_1 + \int_{t_1}^{t_2} \overset{0}{\cancel{\Sigma M_O}}\, dt = m\, v_2\, d_2$$

Açısal momentum korunur. $\Big\}$ $v_1\, d_1 = v_2\, d_2$

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= r_1 \sin 54^\circ \\ d_2 &= r_2 \sin 65^\circ \end{aligned}\right\} \quad v_2 = v_B = 5.4 \text{ m/s}$$

Örnek Problem 3/22

Dünyanın bir uydusuna etki eden çekim kuvvetinin, dünyanın merkezi *O* ya göre momenti yoktur. Asal eksenleri şekildeki gibi olan belirli bir eliptik yörünge için bir uydunun 390 km yükseklikteki *P* noktasındaki hızının şiddeti 33 880 km/h ise uydunun *A* ve *B* noktalarındaki hızlarının şiddetlerini bulunuz. Dünyanın yarıçapı 6371 km dir.



Verilenler:

$v_P = 33\ 880$ km/h

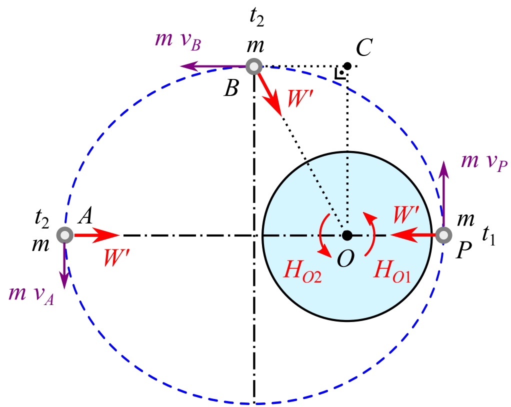
$v_1 = v_P$

İstenenler:

$v_2 = v_A = ?$

$v_2 = v_B = ?$

Çözüm



$$m\,v_1\,d_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O\,dt = m\,v_2\,d_2$$

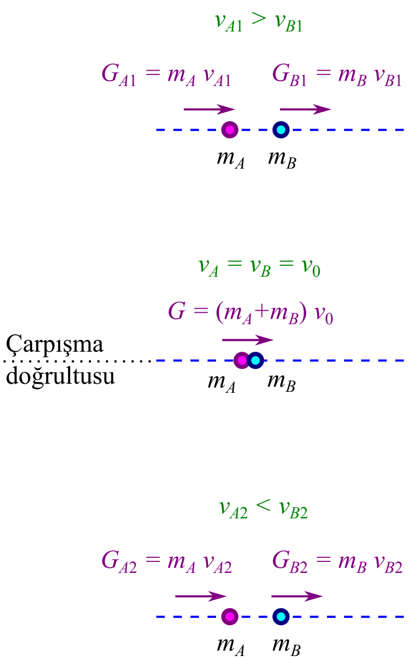
$$m\,v_1\,d_1 + \int_{t_1}^{t_2} \cancelto{0}{\Sigma M_O}\,dt = m\,v_2\,d_2$$

Açısal momentum korunur. $\Big\}$ $v_1\,d_1 = v_2\,d_2$

$$\left.\begin{aligned} & v_P\,d_P = v_A\,d_A \\ & d_P = \overline{OP} \\ & d_P = 6371 + 390 = 6761 \text{ km} \\ & d_A = \overline{OA} \\ & d_A = 2\,(13\ 520) - 6761 = 20\ 279 \text{ km} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{v_A = 11\ 296 \text{ km/h}}$$

$$\left.\begin{aligned} & v_P\,d_P = v_B\,d_B \\ & d_B = \overline{OC} = 11\ 720 \text{ km} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{v_B = 19\ 545 \text{ km/h}}$$

Direk merkezi çarpışma



Üstten görünüş

$\left\{ \right.$ Çarpışmadan hemen önce, t_1

$\left\{ \right.$ Çarpışma esnasında maksimum deformasyon

$\left\{ \right.$ Çarpışmadan hemen sonra, t_2

Çarpışma esnasında,
iki maddesel noktadan oluşan sisteme etki eden
dış kuvvetlerin verdiği impuls ihmal edilerek:

Sistemin momentumu korunur.

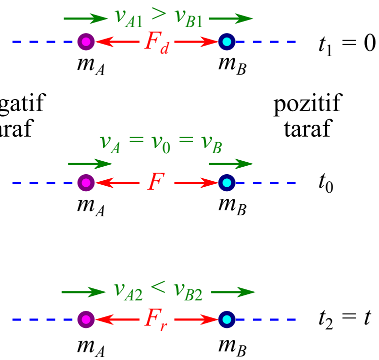
$$\vec{G}_1 = \vec{G}_2$$

$$\vec{G}_{A1} + \vec{G}_{B1} = \vec{G}_{A2} + \vec{G}_{B2}$$

$$G_{A1} + G_{B1} = G_{A2} + G_{B2}$$

$$\boxed{m_A\, v_{A1} + m_B\, v_{B1} = m_A\, v_{A2} + m_B\, v_{B2}}$$

Çarpışma katsayısı



Deformayon periyodu

$$m_A\, v_{A1} + \int_0^{t_0} -F_d\, dt = m_A\, v_0$$

$$m_B\, v_{B1} + \int_0^{t_0} F_d\, dt = m_B\, v_0$$

Restorasyon periyodu

$$m_A\, v_0 + \int_{t_0}^{t} -F_r\, dt = m_A\, v_{A2}$$

$$m_B\, v_0 + \int_{t_0}^{t} F_r\, dt = m_B\, v_{B2}$$

m_A için:

$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r\, dt}{\int_0^{t_0} F_d\, dt} = \frac{v_0 - v_{A2}}{v_{A1} - v_0}$$

m_B için:

$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r\, dt}{\int_0^{t_0} F_d\, dt} = \frac{v_{B2} - v_0}{v_0 - v_{B1}}$$

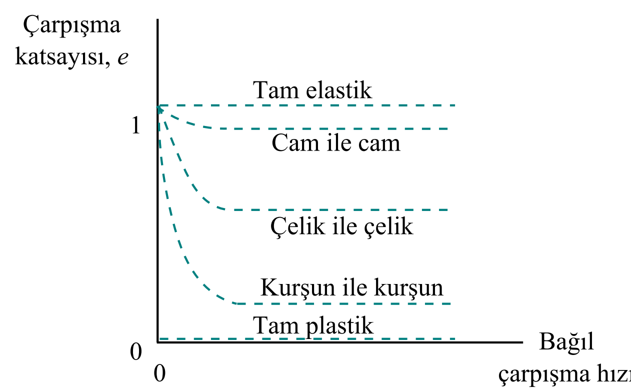
$$e = \frac{v_{B2} - v_{A2}}{v_{A1} - v_{B1}}$$

$$\boxed{e = \frac{|\text{ uzaklaşma bağıl hızı }|}{|\text{ yaklaşma bağıl hızı }|}}$$

çarpışma katsayısı

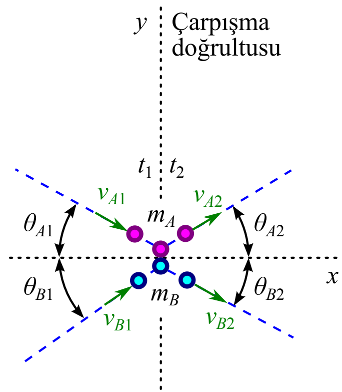
$e = 1 \rightarrow$ Kinetik enerji kaybı yok

$e = 0 \rightarrow$ Kinetik enerji kaybı maksimum



Eğik merkezi çarpışma

$$v_{A1x} = v_{A1} \cos\theta_{A1}$$
$$v_{A1y} = -v_{A1} \sin\theta_{A1}$$
$$v_{B1x} = v_{B1} \cos\theta_{B1}$$
$$v_{B1y} = v_{B1} \sin\theta_{B1}$$



Üstten görünüş

$$v_{A2x} = v_{A2} \cos\theta_{A2}$$
$$v_{A2y} = v_{A2} \sin\theta_{A2}$$
$$v_{B2x} = v_{B2} \cos\theta_{B2}$$
$$v_{B2y} = -v_{B2} \sin\theta_{B2}$$

$$e = \frac{|\text{ uzaklaşma bağıl hızı }|}{|\text{ yaklaşma bağıl hızı }|} = \frac{|v_{B2y} - v_{A2y}|}{|v_{A1y} - v_{B1y}|}$$

Çarpışmadan sonra birlikte hareket ederler ise:

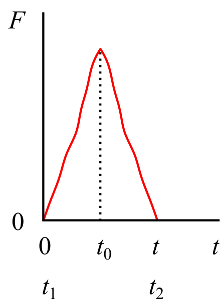
Sistemin momentumu korunur.

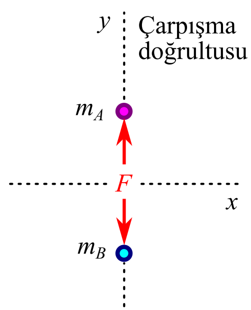
$$m_A\, v_{A1x} + m_B\, v_{B1x} = (m_A + m_B)\, v_{2x}$$
$$m_A\, v_{A1y} + m_B\, v_{B1y} = (m_A + m_B)\, v_{2y}$$

Çarpışmadan sonra ayrı ayrı hareket ederler ise:

Sistemin momentumu korunur.

$$m_A\, v_{A1x} + m_B\, v_{B1x} = m_A\, v_{A2x} + m_B\, v_{B2x}$$
$$m_A\, v_{A1y} + m_B\, v_{B1y} = m_A\, v_{A2y} + m_B\, v_{B2y}$$





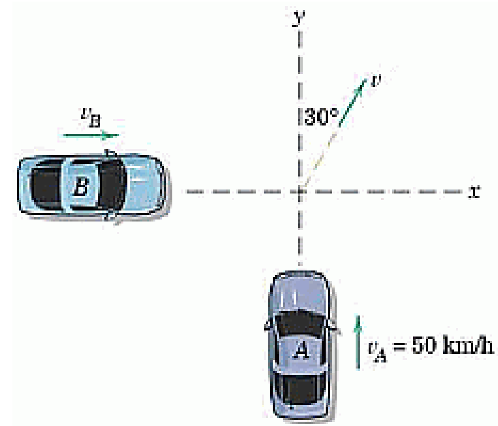
Üstten görünüş

Her bir maddesel noktanın momentumu çarpışma doğrultusuna dik doğrultuda korunur. $\rightarrow$

$$v_{A1x} = v_{A2x}$$
$$v_{B1x} = v_{B2x}$$

Örnek Problem 3/23

Şekildeki arabalar birbirine dik doğrultuda hareket ederken buzlu bir yolun kavşağında çarpışmışlardır. *A* arabasının kütlesi 1200 kg ve *B* arabasının kütlesi 1600 kg dır. Arabalar çarpıştıktan sonra şekilde gösterilen yönde birlikte *v* hızı ile hareket etmişlerdir. Eğer *A* arabasının çarpışma esnasındaki hızı 50 km/h ise *B* arabasının çarpışmadan hemen önceki hızını hesaplayınız.



Verilenler:

$m_A = 1200$ kg

$m_B = 1600$ kg

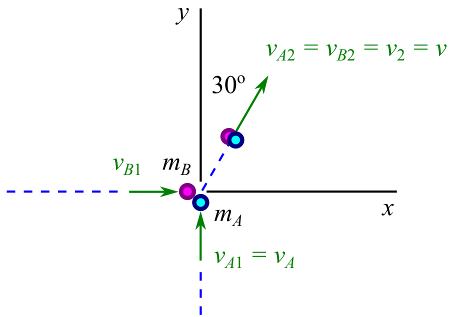
$v_{A1} = 50$ km/h

$v_{A2} = v_{B2} = v_2 = v$

İstenenler:

$v_{B1} = v_B = ?$

Çözüm



Üstten görünüş

Sistemin momentumu korunur.

$$m_A\, v_{A1x} + m_B\, v_{B1x} = (m_A + m_B)\, v_{2x}$$

$$m_A\, \cancel{v_{A1x}}^{\,0} + m_B\, v_{B1} = (m_A + m_B)\, v_x$$

$$1600\, v_B = (1200 + 1600)\, v \sin 30^o \quad \rightarrow$$

Sistemin momentumu korunur.

$$m_A\, v_{A1y} + m_B\, v_{B1y} = (m_A + m_B)\, v_{2y}$$

$$m_A\, v_{A1} + m_B\, \cancel{v_{B1y}}^{\,0} = (m_A + m_B)\, v_y$$

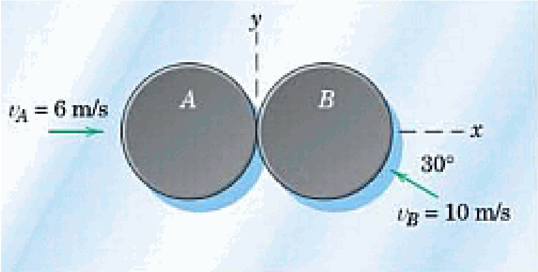
$$1200\,(50) = (1200 + 1600)\, v \cos 30^o$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1600\, v_B}{1200\,(50)} = \frac{(1200 + 1600)\, v \sin 30^o}{(1200 + 1600)\, v \cos 30^o} \quad \rightarrow \quad \boxed{v_B = 21.7 \text{ km/h}}$$

Örnek Problem 3/24

İki özdeş hokey topu v_A ve v_B hızı ile hareket ederlerken şekildeki gibi çarpışmışlardır. Çarpışma katsayısı $e = 0.75$ ise her bir topun çarpışmadan sonraki hızının yönünü ve şiddetini bulunuz. Ayrıca sistemin kinetik enerjisindeki kaybın orijinal enerjiye oranı n yi hesaplayınız.



Verilenler:

$m_A = m_B = m$

$v_{A1} = v_A = 6$ m/s

$v_{B1} = v_B = 10$ m/s

$e = 0.75$

$\theta_{A1} = 90^o$

İstenenler:

$v_{A2} = ?$

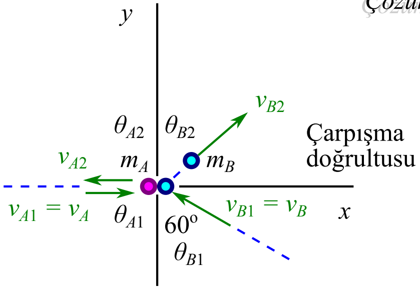
$v_{B2} = ?$

$\theta_{A2} = ?$

$\theta_{B2} = ?$

$n = ?$

Çözüm



Üstten görünüş

$$e = \frac{|\text{ uzaklaşma bağıl hızı }|}{|\text{ yaklaşma bağıl hızı }|}$$

$$0.75 = \frac{v_{A2} + v_{B2}\sin\theta_{B2}}{6 + 10\sin 60^o} \quad (2)$$

Sistemin momentumu korunur.

$$m_A\, v_{A1x} + m_B\, v_{B1x} = m_A\, v_{A2x} + m_B\, v_{B2x}$$

$$m_A = m_B = m \quad \rightarrow \quad v_{A1x} + v_{B1x} = v_{A2x} + v_{B2x}$$

$$6 - 10\sin 60^o = -\, v_{A2} + v_{B2}\sin\theta_{B2} \quad (3)$$

Her bir maddesel noktanın momentumu çarpışma doğrultusuna dik doğrultuda korunur.

$$v_{A1y} = v_{A2y} = 0 \qquad v_{B1y} = v_{B2y}$$

$$\boxed{\theta_{A2} = 90^o} \qquad 10\cos 60^o = v_{B2}\cos\theta_{B2} \quad (1)$$

1, 2 ve 3 çözülerek:

$$\boxed{v_{A2} = 6.83 \text{ m/s}} \qquad \boxed{v_{B2} = 6.51 \text{ m/s}} \qquad \boxed{\theta_{B2} = 39.8^o}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\, m\, v_A^{\,2} + \frac{1}{2}\, m\, v_B^{\,2}$$

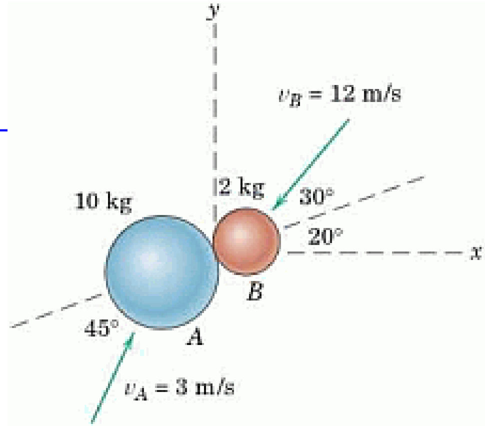
$$T_2 = \frac{1}{2}\, m\, v_{A2}^{\,2} + \frac{1}{2}\, m\, v_{B2}^{\,2}$$

$$n = \frac{T_2 - T_1}{T_1}$$

$$n = 0.345 \qquad \boxed{n = \%\ 34.5}$$

Örnek Problem 3/25

A küresi, B küresi ile şekildeki gibi çarpışmıştır. Çarpışma katsayısı $e = 0.5$ ise çarpışmadan hemen sonra her bir kürenin hızının x- ve y-bileşenlerini bulunuz. Hareket x-y düzleminde sınırlandırılmıştır.



Verilenler:

$m_A = 10$ kg

$m_B = 2$ kg

$v_{A1} = v_A = 3$ m/s

$v_{B1} = v_B = 12$ m/s

$e = 0.5$

$\theta_{A1} = 45^o$

$\theta_{B1} = 30^o$

İstenenler:

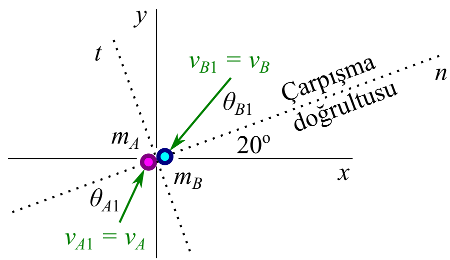
$v_{A2x} = ?$

$v_{A2y} = ?$

$v_{B2x} = ?$

$v_{B2y} = ?$

Çözüm



Üstten görünüş

$$e = \frac{|\text{ uzaklaşma bağıl hızı }|}{|\text{ yaklaşma bağıl hızı }|}$$

$$0.5 = \frac{v_{B2n} - v_{A2n}}{3\cos45^o + 12\cos30^o}$$

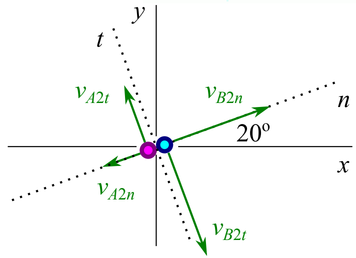
$v_{A2n} = -\,1.01$ m/s

$v_{B2n} = 5.25$ m/s

Sistemin momentumu korunur.

$$m_A\, v_{A1n} + m_B\, v_{B1n} = m_A\, v_{A2n} + m_B\, v_{B2n}$$

$$10\,(3\cos45^o) + 2\,(-12\cos30^o) = 10\, v_{A2n} + 2\, v_{B2n}$$



Her bir maddesel noktanın momentumu çarpışma doğrultusuna dik doğrultuda korunur.

$v_{A1t} = v_{A2t}$ $\qquad$ $v_{B1t} = v_{B2t}$

$3\sin45^o = v_{A2t}$ $\qquad$ $-\,12\sin30^o = v_{B2t}$

$v_{A2t} = 2.12$ m/s $\qquad$ $v_{B2t} = -\,6$ m/s

$v_{A2x} = -\,(1.01\cos20^o + 2.12\sin20^o)$ → $v_{A2x} = -\,1.67$ m/s

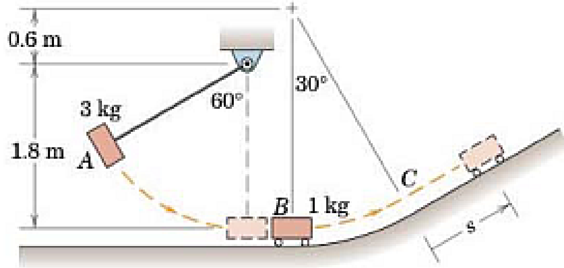
$v_{A2y} = -\,1.01\sin20^o + 2.12\cos20^o$ → $v_{A2y} = 1.65$ m/s

$v_{B2x} = 5.25\cos20^o + 6\sin20^o$ → $v_{B2x} = 6.99$ m/s

$v_{B2y} = 5.25\sin20^o - 6\cos20^o$ → $v_{B2y} = -\,3.84$ m/s

Örnek Problem 3/26

3 kg lık *A* bloğu, şekilde gösterilen 60° lik pozisyondan ilk hızsız olarak serbest bırakılmış ve ardından 1 kg lık *B* arabasına çarpmıştır. Eğer çarpışma katsayısı $e = 0.7$ ise *B* arabasının, *C* noktasından sonra ulaşabileceği maksimum uzaklık *s* yi bulunuz. Sürtünmeleri ihmal ediniz.



Çözüm

Verilenler:

$m_A = 3$ kg

$m_B = 1$ kg

$v_{B1} = 0$

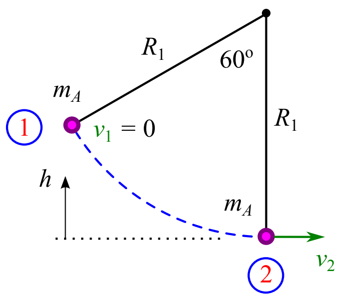
$e = 0.7$

$R_1 = 1.8$ m

$R_2 = 2.4$ m

İstenenler:

$s = ?$

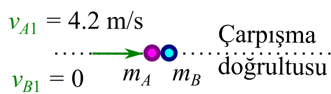


Enerji korunur:

$$mgh_1 = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$h_1 = R_1 - R_1 \cos 60^\circ$$

$$v_2 = 4.2 \text{ m/s}$$

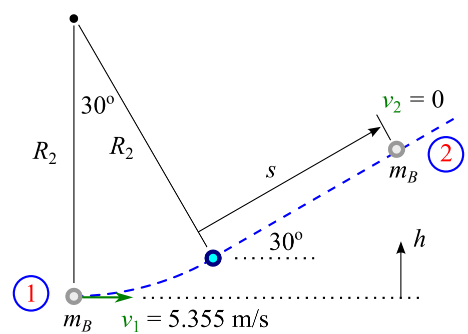


Sistemin momentumu korunur.

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2} \quad \rightarrow \quad 3\,(4.2) + 0 = 3\, v_{A2} + v_{B2}$$

$$e = \frac{|\text{ uzaklaşma bağıl hızı }|}{|\text{ yaklaşma bağıl hızı }|} \quad \rightarrow \quad 0.7 = \frac{v_{B2} - v_{A2}}{v_{A1} - v_{B1}} = \frac{v_{B2} - v_{A2}}{4.2 - 0}$$

$$v_{B2} = 5.355 \text{ m/s}$$



Enerji korunur:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = mgh_2$$

$$h_2 = R_2 - R_2 \cos 30^\circ + s \sin 30^\circ$$

$$s = 2.28 \text{ m}$$