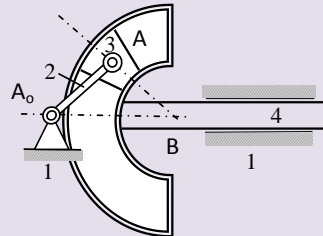
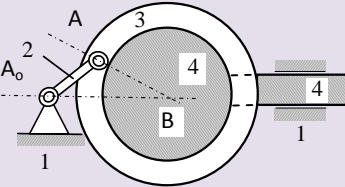
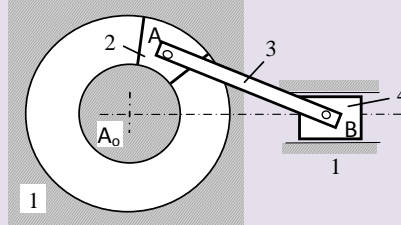
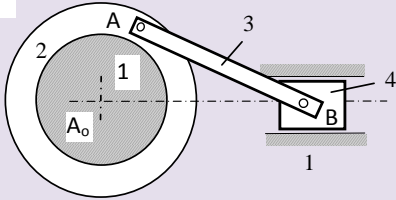
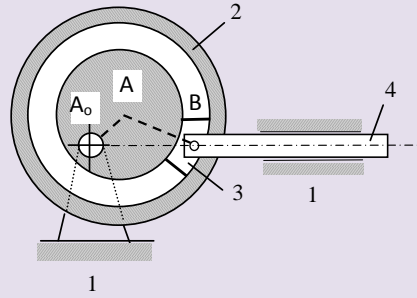
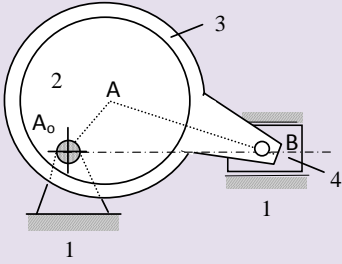
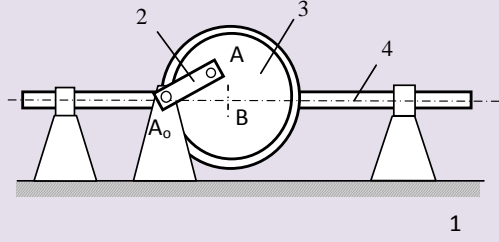
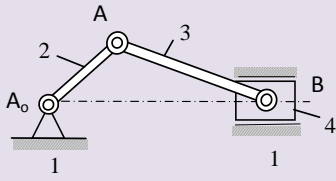


MAKİNA TEORİSİ I

MEKANİZMALAR

DERS NOTLARI



Prof. Dr. Özgür TURHAN

İTÜ Makina Fakültesi

Şubat 2011

MAKİNA TEORİSİ
I
MEKANİZMALAR

Ders Notları

Prof. Dr. Özgür TURHAN

Şubat 2011

MEKANİZMALAR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ	4
2. MEKANİZMA SİSTEMATİĞİ	7
2.1 Temel Kavramlar	7
2.1.1 Eleman Çiftleri	7
2.1.1.1 Eleman Çiftlerinin Sınıflandırılması	7
2.1.1.2 Eleman Çiftinin Serbestlik Derecesi	9
2.1.1.3 Eleman Çiftlerinin Tasarımında Bazı Şekillendirme Seçenekleri	9
2.1.2 Uzuvarlar • Gösterilim Uylaşmaları	13
2.1.3 Mekanizmanın Kinematik Diyagramı	14
2.1.4 Mekanizmanın Kinematik Zinciri	15
2.1.5 Mekanizmanın (Kinematik Zincirin) Serbestlik Derecesi	17
2.2 Zorunlu Hareketli Kinematik Zincirler	19
2.2.1 Zorunlu Hareketli Kinematik Zincirlerin Temel Özellikleri	20
2.2.2 Zorunlu Hareketli Kinematik Zincirlerin Dökümü ve Onlardan Türeyen Mekanizmalar	22
2.2.2.1 4 Uzuvarlı Kinematik Zincir	22
2.2.2.2 6 Uzuvarlı Kinematik Zincirler	26
2.2.2.3 8 Uzuvarlı Kinematik Zincirler	28
2.2.3 Yüksek Eleman Çifti İçeren Zincirler Hali	29
2.2.4 Kinematik Zincirden Mekanizma Elde Edilmesi	33
3. MEKANİZMALARIN KİNEMATİĞİ	36
3.1 Genel Belirlemeler	36
3.2 Kısıt Denklemlerinin Yazılması • Çevrim Kapama Denklemleri	36
3.3 Kinematik Çözümleme	41
3.3.1 Analitik Yol	41
3.3.1.1 Genel	41
3.3.1.2 Üç Çubuk Mekanizması • Freudenstein Denklemleri	44
3.3.1.3 Krank-Biyel Mekanizması	50
3.3.2 Sayısal Yol	55
3.3.3 Analitik ve Sayısal Yolların Karşılaştırılması	61

4. MEKANİZMA TASARIMI	79
4.1 Genel Bilgiler	79
4.2 Bazı Mekanizma Boyutlandırma Problemleri	84
4.2.1 Üç Çubuk Mekanizmasıyla Fonksiyon Üretilmesi •	
Freudenstein Yöntemi	84
4.2.1.1 Konum Eşleştirmesi	84
4.2.1.2 Fonksiyon Üretme	87
4.2.2 Kaçık Merkezli Krank-Biyel Mekanizmalarının Boyutlandırılması	91
4.2.3 Yürek Mekanizmalarının Boyutlandırılması	94
4.2.3.1 Genel Bilgiler	94
4.2.3.2 Beklemeli Harekette Geçiş Eğrileri	96
4.2.3.3 Bir Yürek Mekanizmasının Boyutlandırılması:	
Döner Doğrusal Hareketli Tablalı Yürek Mekanizması	103
4.2.4 Malta Haçı Mekanizmalarının Boyutlandırılması	109
KAYNAKLAR	112

1 GİRİŞ

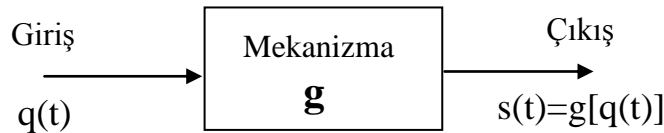
Mekanizmalar, öngörölmüş bir düzen uyarınca hareket iletecek biçimde şekillendirilip bir araya getirilmiş direngen cisim toplulukları olarak tanımlanırlar.

Mekanizmayı oluşturan cisimlerden birine bir hareket verildiğinde bu hareket her bir cisim farklı bir hareket yapacak şekilde cisimden cisime iletilir ve bu cisimlerden birinden, istenilen hareket olarak alınır. Bu anlamda her mekanizma, kendisine verilen bir $q(t)$ giriş hareketini bir $s(t)$ çıkış hareketine dönüştüren bir düzen olarak algılanabilir. Bu dönüşümün öngörölmüş bir düzen uyarınca gerçekleşmesi ve istenilen hareketin elde edilebilmesi için, çıkış girişe $s(t)=g[q(t)]$ biçiminde belli ve öngörölmüş bir g fonksiyonu uyarınca eşleşmelidir. Buna göre mekanizmalar, işlevleri bakımından, Şekil 1.1 deki gibi bir blok diyagramıyla temsil edilebilirler.

Bu temsil, üstü örtölü olarak, mekanizmanın sağladığı dönüşümün hep aynı kalacağı varsayımını içerir. Bu ise, mekanizmayı oluşturan cisimlerin hareket iletimi bakımından önem taşıyan boyutlarının hiç bir şekilde değişmeyeceğinin varsayılması anlamına gelir. Yukarıdaki mekanizma tanımında geçen *direngen cisim* kavramı, bu varsayıma uyan cisimleri gösteren bir soyutlamadır. Hiç bir boyutu hiç bir şekilde değişmeyen rijid cisimler, direngen cisimlerin bir alt grubunu oluşturur.

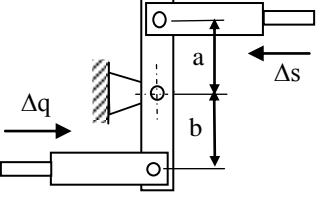
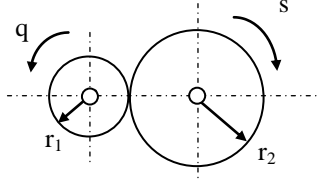
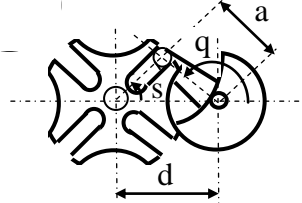
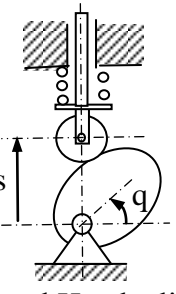
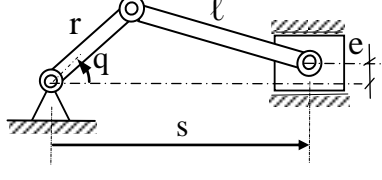
Giriş-çıkış ilişkisi doğrusal, yani g dönüşüm fonksiyonu lineer olan basit yapılı bazı mekanizmalar yanında lineer olmayan dönüşüm fonksiyonuna sahip son derece karmaşık yapıda mekanizmalar da vardır. Tablo 1.1 deki birkaç örnek bu konuda bir fikir verecektir.

Mekanizmalar konusundaki incelemeler, esas olarak, nedenlerinden soyutlanmış hareketin bilimi olan kinematiğin alanına girer. Bu nedenle bu konudaki incelemelerin *uygulamalı kinematik* ya da *teknik kinematik* adı altında toplandığı da görülür.



Şekil 1.1 Mekanizmanın Blok Diyagramı

Tablo 1.1 Bazı Mekanizmalar

Mekanizma	Giriş: q	Çıkış: s	$g(q)$	Açıklama
 <p>Basit Levye Mekanizması</p>	Δq öteleme	Δs öteleme	$g(q) = -\frac{a}{b} \Delta q$	Küçük Δq ötelemelerini, kendileriyle orantılı küçük Δs ötelemelerine dönüştürür. $-g(q)$ lineer-
 <p>Dışlı Çark, Sürtünme Çarkı</p>	dönme	dönme	$g(q) = -\frac{r_1}{r_2} q$	q dönmelerini, orantılı ve zıt yönlü s dönmelerine dönüştürür. $-g(q)$ lineer-
 <p>Malta Haçı Mekanizması</p>	dönme	dönme	Kavrama sırasında: $g(q) = \sin^{-1}\left(\frac{a}{r(q)} \sin q\right)$ $r(q) = \sqrt{a^2 + d^2 + 2ad \cos q}$ Kavrama yok iken: $g(q) = \text{sabit}$	q dönmelerini, beklemeli ve zıt yönlü s dönmelerine dönüştürür.
 <p>Doğrusal Hareketli Yürek Mekanizması</p>	dönme	öteleme	Yürek profilinin şekline bağlı olarak çok çeşitli $g(q)$ fonksiyonları elde edilebilir.	q dönmelerini s ötelemelerine dönüştürür.
 <p>Krank-Biyel Mekanizması</p>	dönme	öteleme	$g(q) = A \pm \sqrt{A^2 - B}$ $A = r \cos q$ $B = r^2 + e^2 - \ell^2 - 2ers \sin q$	q dönmelerini, gidip gelmeli s ötelemelerine dönüştürür. (Giriş s çıkış q yapılarak da kullanılabilir.)

Mekanizmalar makinaların yapı taşlarını oluşturduğundan, mekanizmalar konusundaki bilgiler makina mühendisliğinde temel öneme sahiptir. Bu bilgiler üç ana başlık altında toplanabilir:

- i) *Mekanizma sistematigi*: Mekanizmaların sonsuz çeşitliliğinden bağımsız, tüm mekanizmalarda geçerli kavramlar, ilkeler, genellemeler ve soyutlamalar.
- ii) *Mekanizmaların kinematigi*: Verilmiş bir mekanizmada giriş-çıkış ilişkisinin belirlenmesi.
- iii) *Mekanizma tasarımı*: Verilmiş bir giriş-çıkış ilişkisini sağlayacak mekanizmanın seçilip boyutlandırılması.

Mekanizmalar hakkındaki incelemelerimizi biz de bu üç ana başlık altında yürüteceğiz.

2 MEKANİZMA SİSTEMATİĞİ

Bu bölümde, mekanizmaların sonsuz çeşitliliğinden bağımsız, tüm mekanizmalarda geçerli temel kavram ve ilkeler tanıtılacak, mekanizmaları topluca inceleme olanağı veren genelleme ve soyutlamalara yer verilecektir.

2.1 TEMEL KAVRAMLAR

Yukarıda mekanizmaları *öngörölmüş bir düzen uyarınca hareket iletecek biçimde şekillendirilip bir araya getirilmiş direngen cisim toplulukları* olarak tanımlamıştık.

Mekanizmayı oluşturan, birbirine göre hareketli direngen cisimlere mekanizmanın *uzuvları* adı verilir. Uzuvlar birbirlerine, bağıl hareketlerine olanak verecek biçimde tasarlanmış özel yapılar üzerinden bağlanmıştır. Her bir uzvun bağlantıyı sağlayan kısmına bağlantı elemanı, bağlantının gerçekleştiği yapıya ise *eleman çifti* adı verilir (Şekil 2.1.1).

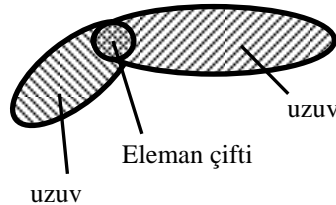
Aşağıda eleman çiftleri ve uzuvlar hakkında bazı bilgiler verilecek ve mekanizmaları göstermekte kullanılan soyut ve sembolik bir gösterilim dilinin öğeleri tanıtılacaktır.

2.1.1 ELEMAN ÇİFTLERİ

Eleman çiftlerinin görevi, mekanizma uzuvlarını, bağıl hareketlerine olanak verecek biçimde birbirine bağlamaktır.

2.1.1.1 Eleman Çiftlerinin Sınıflandırılması

Eleman çiftleri bağlantının sağlanma şekline göre *Kuvvet Kapalı Eleman Çiftleri (KKEÇ)* ve *Şekil Kapalı Eleman Çiftleri (ŞKEÇ)* diye; karşılıklı elemanların temas şekline göre de *Adi Eleman Çiftleri (AEÇ)* ve *Yüksek Eleman Çiftleri (YEÇ)* diye ikiye ayrılırlar (Tablo 2.1.1).



Şekil 2.1.1 Uzuv ve Eleman Çifti

Kuvvet kapalı eleman çiftleri, eleman çiftindeki bağlantının ağırlık kuvveti, yay kuvveti gibi bir kuvvet yardımıyla sağlandığı eleman çiftleridir. Bu kuvveti yenecek bir etki ortaya çıktığı anda bağlantı kesilir, ayrılma gerçekleşir. Bu istenmeyen durumun ortaya çıkmaması için KKEÇ lerde kapalılığı sağlayan kuvvetin yeterliliğinin kontrol edilmiş, eğer bu kuvveti bir yay sağlayacaksa kullanılacak yayın katsayısının titizlikle hesaplanmış olması gerekir. Buna karşılık KKEÇ lerin konstrüktif yapısı sade, dolayısıyla imalatları kolaydır.

Şekil kapalı eleman çiftleri, eleman çiftindeki bağlantının sürekliliğinin eleman çiftinin geometrik yapısınca güvence altına alındığı eleman çiftleridir. Eleman çifti parçalanmadıkça bir ayrılma riski söz konusu değildir. Buna karşılık ŞKEÇ lerin konstrüktif yapısı daha karmaşık, dolayısıyla imalatları daha zordur.

Adi eleman çiftleri, karşılıklı elemanların temasının yüzeyler boyunca gerçekleştiği eleman çiftleridir. Bu nedenle AEÇ ler büyük yükler taşıyabilir, oluşacak Hertz gerilmeleri düşük olduğundan az aşınır fakat büyük sürtünme kayıplarına yol açarlar.

Yüksek eleman çiftleri, karşılıklı elemanların temasının nokta ya da çizgiler boyunca gerçekleştiği eleman çiftleridir. Taşıyabilecekleri yükler düşük, aşınmaları fazla fakat yol açacakları sürtünme kayıpları azdır.

Tablo 2.1.1 Eleman Çiftlerinin Sınıflandırılması

		Temas Şekline Göre	
		AEÇ	YEÇ
Bağlantı Şekline Göre	KKEÇ		
	ŞKEÇ		

2.1.1.2 Eleman Çiftinin Serbestlik Derecesi

Bir eleman çiftinin, işlevi gereği iki önemli görevi vardır. Bunlardan birincisi bir araya getirdiği iki uzvu birbirine bağlamak yani serbestliklerini kısıtlamak; ikincisi ise bir araya getirdiği iki uzvun birbirine göre hareket etmelerine olanak sağlamak yani onlara hareket serbestliği tanımadır.

Bir eleman çifti için, birbiriyle zıt bu iki görevden hangisini ne ölçüde yerine getirdiği önemli bir tanıttıcı özelliktir. Bu özelliğin bir ölçüsü olmak üzere eleman çiftinin serbestlik derecesi kavramından yararlanılır.

Bir eleman çiftinin serbestlik derecesi denildiğinde, bu çiftin bir araya getirdiği iki uzvudan birinin öbürüne göre konumunu tam olarak tanımlayabilmek için verilmesi gereken en az parametre sayısı anlaşılır.

Bir rijid cismin uzaydaki serbestlik derecesinin 6, düzlemdeki serbestlik derecesinin ise 3 olduğu anımsanır ve eleman çiftinin serbestlik derecesi s ile gösterilirse uzaysal mekanizmalarda $0 < s < 6$ ($s \neq 0$ çünkü eleman çifti bağlı harekete izin vermeli, $s \neq 6$ çünkü eleman çifti bağlı hareketi kısıtlamalı), düzlemsel mekanizmalarda ise $0 < s < 3$ ($s \neq 0$ çünkü eleman çifti bağlı harekete izin vermeli, $s \neq 3$ çünkü eleman çifti bağlı hareketi kısıtlamalı) olması gerektiği kendiliğinden anlaşılır.

Buradan, bizim bu derste ilgileneceğimiz düzlemsel mekanizmalarda yalnızca $s=1$ ve $s=2$ seçeneklerinin söz konusu olacağı anlaşılmaktadır. Çok karşılaşılan bazı eleman çiftlerini serbestlik dereceleri ile birlikte gösteren Tablo 2.1.2 den de görüldüğü gibi, düzlemsel mekanizmalarda söz konusu olabilecek eleman çiftleri, her üçü de birer adi eleman çifti olan $s=1$ serbestlik dereceli döner eleman çifti, kayar eleman çifti ve kayar eleman çiftinin dairesel yörüngeli özel hali olan yay çifti ile bir yüksek eleman çifti olan, $s=2$ serbestlik dereceli kayarak yuvarlanma çiftinden ibarettir¹.

Bunlardan döner ve kayar eleman çiftleri, iki hareketli uzvu birbirine bağlıyorlarsa *mafsal*, bir hareketli uzvu bir hareketsiz uzva bağlıyorlarsa *yatak* diye adlandırılırlar. Yerine göre kayar mafsal ve yataklar ile döner mafsal ve yataklardan söz edilir.

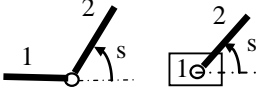
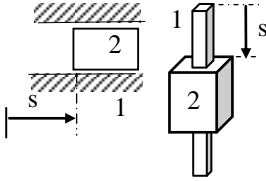
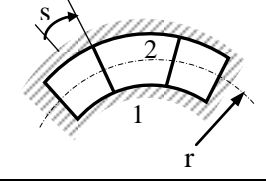
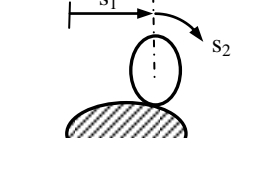
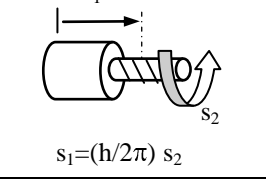
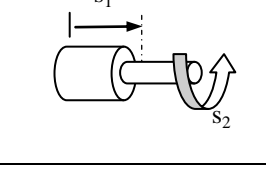
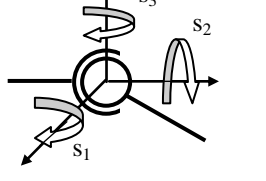
2.1.1.3 Eleman Çiftlerinin Tasarımında Bazı Şekillendirme Seçenekleri

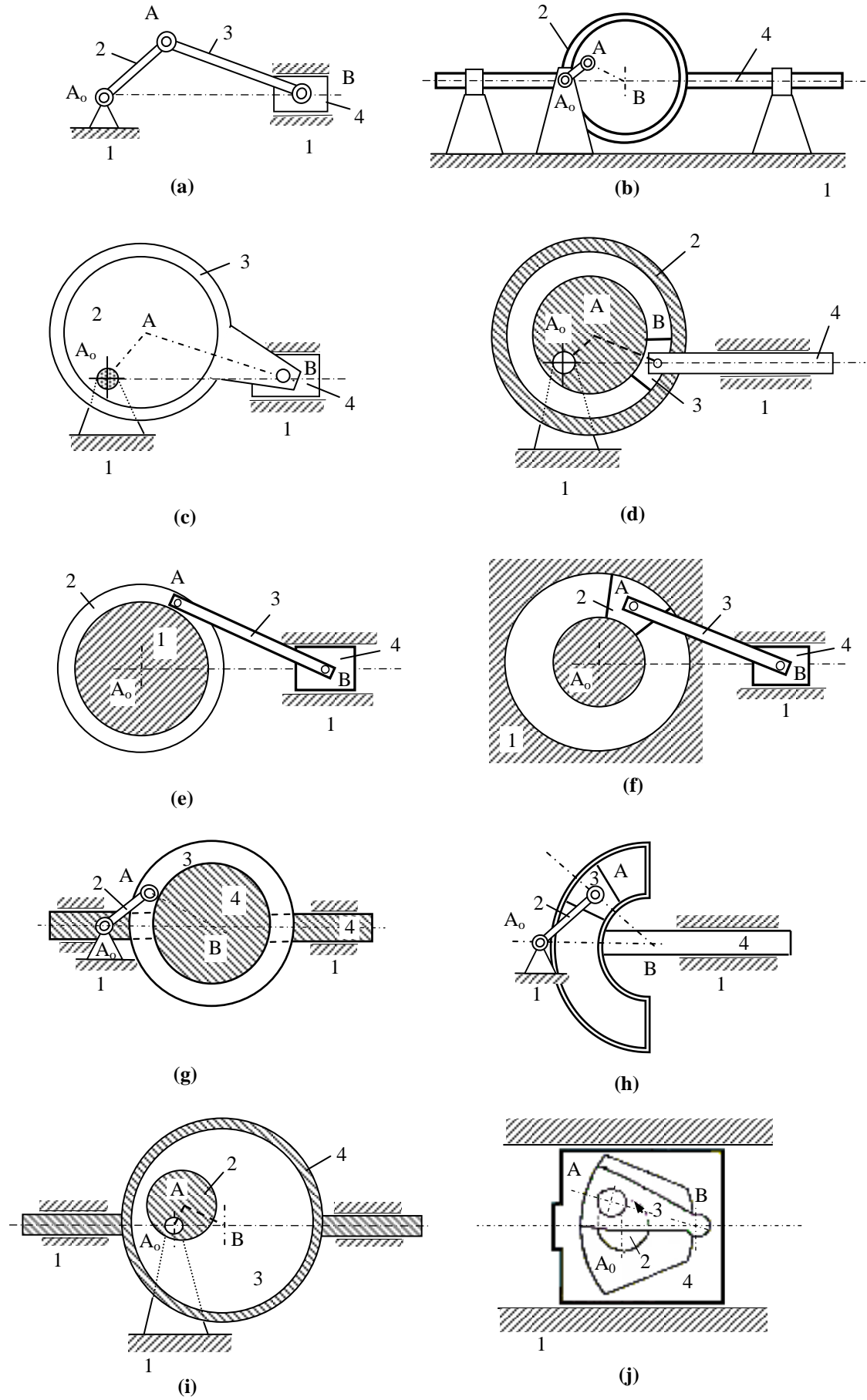
Belli bir eleman çifti, işlevi tamamen aynı kalmakla birlikte görünümü ve kimi özellikleri bakımından birbirinden çok farklı biçimlerde şekillendirilebilir. Bu bölümde, örnekler yardımıyla, bu şekillendirme seçeneklerinden söz edilecektir.

Mafsal Genişletmesi: Şekil 2.1.2-a daki krank-biyel mekanizmasını göz önüne alalım. Bu mekanizmada 3 numaralı biyelin B mafsalı A mafsalını da içine alacak biçimde genişletilip bu uzuv bir disk şekline getirilirse kinematik bakımdan ilk krank-biyel mekanizması ile aynı olan Şekil 2.1.2-b deki mekanizma elde edilir.

¹ Bu nedenle, düzlemsel mekanizmalar özelinde, yüksek eleman çifti denildiğinde iki serbestlik dereceli, adi eleman çifti denildiğinde bir serbestlik dereceli çift anlaşılır.

Tablo 2.1.2 Bazı Eleman Çiftleri ve Serbestlik Dereceleri

Eleman Çifti	Ad	Sembol	Hareket	Düzlemsel/ Uzaysal	Serb. Derecesi
	Döner Çift (Revolüt)	R	Dönme	D	1
	Kayar Çift (Prizmatik)	P	Öteleme	D	1
	Yay Çifti	-	Dairesel	D	1
	Kayarak Yuvarlanma Çifti (Yürek, Dişli)	-	Dönme ve Öteleme	D	2
	Vida Çifti (Helisel)	H	Dönme ve Öteleme	U	1
	Silindirik Çift	C	Dönme ve Öteleme	U	2
	Küresel Çift	S	Dönme	U	3



Şekil 2.1.2 Mafsals Genişletmesi

Bir başka seçenek olarak, bu kez de 2 uzvunun A mafsalı A_o yatağını da içine alacak kadar genişletilirse yine kinematik bakımdan ilk krank-biyel mekanizması ile aynı olan Şekil 2.1.2-c deki mekanizma elde edilir. 2 numaralı krank kaçık merkezli (eksantrik) bir diske dönüşmüş olduğu için *eksantrik mekanizması* adını alan bu mekanizma, büyük kuvvetlerin iletilmesine elverişli olduğundan, eksantrik pres gibi ağır yük altında çalışacak makinalarda yeğlenir.

İstenirse, Şekil 2.1.2-c deki mekanizmada 2 uzvunu kuşatan bir bilezik görünümünü almış olan 3 uzvunun B mafsalı civarındaki küçük bir yay dışındaki kısmı çıkartılıp 2-3 eleman çiftinin şekil kapallılığını korumak üzere 2 uzvu üzerine, 3 uzvunu dıştan da yönlendiren bir kılavuz açılarak Şekil 2.1.2-d deki mekanizma da elde edilebilir. Bu mekanizmada 2-3 eleman çifti, kayar eleman çiftinin dairesel yörüngeli özel hali olup *yay çifti* adını alır.

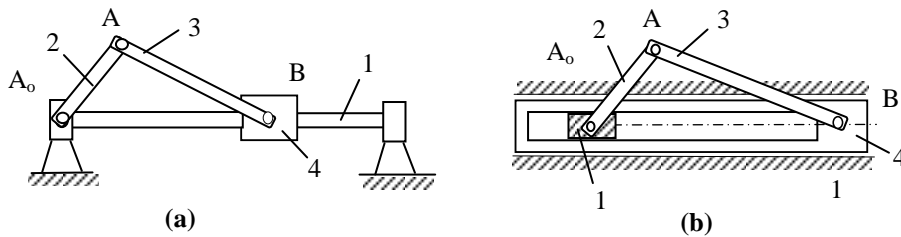
Öte yandan, 2 uzvunun bu kez de A_o yatağı genişletilerek bu uzvun A mafsalını da taşıyan bir bilezik görünümünü alması sağlanırsa kinematik bakımdan yine ilk krank-biyel mekanizmasının tamamen aynı olan Şekil 2.1.2-e deki mekanizma, buradan yay çiftli tasarıma geçilerek de Şekil 2.1.2-f deki mekanizma elde edilebilir.

Benzer şekilde, 4 uzvunun B mafsalı genişletilip bu uzvun A mafsalını da taşıyan bir bilezik görünümünü alması sağlanırsa Şekil 2.1.2-g deki mekanizma, buradan yay çiftli tasarıma geçilerek de Şekil 2.1.2-h deki mekanizma elde edilebilir.

Şekil 2.1.2-i deki mekanizma ise, 3 uzvunun B mafsalının A mafsalını içine alacak kadar, 2 uzvunun A mafsalının da A_o yatağını içine alacak kadar genişletilmesiyle elde edilmiş ilginç bir tasarım seçeneği oluşturmaktadır.

Şekil 2.1.2-j deki mekanizmaya gelince; 3 uzvunun B mafsalının genişletilmesiyle elde edilmiş olan Şek. 2.1.2-b deki mekanizmanın gereksiz kısımlarının çıkartılmasıyla oluşturulan ve -bu bölümde sergilenen fikir ve tasarımların birçoğu gibi- F. Reuleaux² tarafından verilmiş olan bu tasarım, olağanüstü derli toplu yapısıyla dikkat çekicidir.

Boş-Dolu Değişimi: Yine Şekil 2.1.2-a daki krank-biyel mekanizması göz önüne alınsın. Bu mekanizmada 1-4 kayar yatağı, 4 numaralı uzuv 1 numaralı uzuv içine açılmış boşlukta hareket edecek biçimde tasarlanmıştır. Yani bu mekanizmada 1 boş, 4 doludur. Aynı eleman çifti 4 boş, 1 dolu olacak biçimde şekillendirilerek Şekil 2.1.3-a daki görünüm; 1 ve 4 hem boş hem dolu olacak biçimde şekillendirilerek de Şekil 2.1.3-b deki görünüm elde edilebilir. Yüksek kılavuzlama oranına (piston boyu / piston çapı) sahip olan bu son görünüm, tutukluk olasılığını azaltan bir seçenek oluşturur.

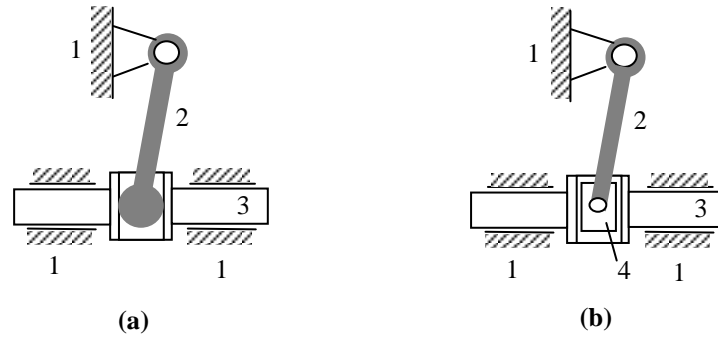


Şekil 2.1.3 Boş-Dolu Değişimi

² Franz Reuleaux (1829-1905). Alman makina mühendisi. Kinematik zincir kavramının ve çok sayıda mekanizmanın mucidi. *Theoretische Kinematik*, 1875 (*Kinematics of Machinery*, 1876) adlı yapıtının mekanizma kinematığının temelini oluşturduğu kabul edilir.

Yüksek Eleman Çiftlerinin Adi Eleman Çiftleriyle Değiştirilmesi: Şekil 2.1.4-a daki mekanizmada 2 uzvunun dönme hareketi 3 uzvunun öteleme hareketine dönüştürülmektedir. Bu mekanizmada 2-3 eleman çifti bir yüksek eleman çiftidir. Yüksek eleman çifti kullanmaktan kaçınmak istenirse, bu mekanizma yerine, onunla hareket iletimi bakımından tamamen özdeş olan Şekil 2.1.4-b deki mekanizma kullanılabilir. Bu mekanizma fazladan 4 uzvuna sahip olup hem dönme hem ötelemeye izin veren 2-3 yüksek eleman çifti yerine dönmeye izin veren 2-4 ve ötelemeye izin veren 3-4 adi eleman çiftlerini içermektedir.

Bu örnekten, 2 serbestlik dereceli bir eleman çifti ile 1 serbestlik dereceli, uygun iki eleman çifti taşıyan bir 2-li uzvun birbiri yerine kullanılabileceği anlaşılmaktadır.



Şekil 2.1.4 Yüksek Eleman Çiftlerinin Adi Eleman Çiftleriyle Değiştirilmesi

2.1.2 UZUVLAR • GÖSTERİLİM UYLAŞMALARI





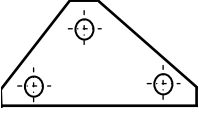
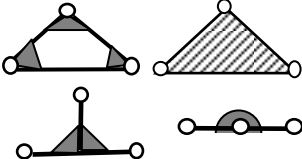
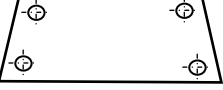
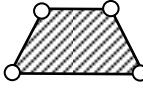

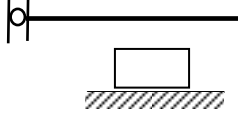
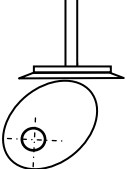
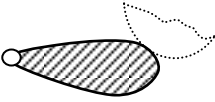
Mekanizmalarda uzuvlar, üzerlerinde bulunan eleman çifti sayısına, yani doğrudan bağlantılı oldukları uzuv sayısına göre adlandırılırlar. Buna göre üzerinde (AEÇ, YEÇ, KKEÇ ya da ŞKEÇ olduğuna bakılmaksızın) k adet eleman çifti bulunan bir uzuv k -li *uzuv* diye adlandırılır.

İnceleme amacıyla yapılan mekanizma çizimlerinde uzuvlar gerçek görünüşleri ile değil, onların yalnızca kinematik bakımdan önem taşıyan boyutlarını (ölçekli ya da ölçeksiz olarak) yansıtan uylaşmaya dayalı sembolik şekiller yardımıyla gösterilirler.

Mekanizma uzuvlarının direngen cisim kabul edildiği ve direngen cismin kinematik bakımdan önem taşıyan boyutları değişmeyen cisim olarak tanımlandığı anımsanırsa, uzuvları temsil edecek sembolik şekillerin hiçbir boyutlarının değişmeyeceği yani onların birer rijid cisim olacağı anlaşılır.

Tablo 2.1.3 de yalnızca döner eleman çiftleri taşıyan uzuvlar özelinde bu gösterilim uylaşmaları verilmiş, ayrıca, kayar ve yüksek eleman çiftleri bulunduran uzuvlar halinde uygulanacak gösterilimler de belirtilmiştir.

Tablo 2.1.3 Uzuvlar İçin Gösterilim Uylaşmaları

Yalnız Döner Eleman Çiftleri Taşıyan Uzuvlar	Uzuv	Genel Görünüş	Gösterilim
	1-li		
	2-li		
	3-lü		
	4-lü		
	⋮	⋮	⋮
Kayar Eleman Çifti Hali	1-li		
	2-li		

2.1.3 MEKANİZMANIN KİNEMATİK DİYAGRAMI

Bir mekanizmanın uzuvlar için sembolik gösterilimler kullanılarak çizilmiş şekline *mekanizmanın kinematik diyagramı* (ya da *iskelet* veya *çubuk diyagramı*) adı verilir. Mekanizma bir direngen cisimler topluluğu iken kinematik diyagram bir rijid cisimler topluluğudur.

Amaca bağlı olarak bir kinematik diyagram, bir ölçek çerçevesinde, temsil ettiği mekanizmanın ana ölçülerini yansıtabileceği gibi mekanizma uzuvlarının karşılıklı yerleşim düzenini ölçeksiz olarak yansıtmakla da yetinebilir.

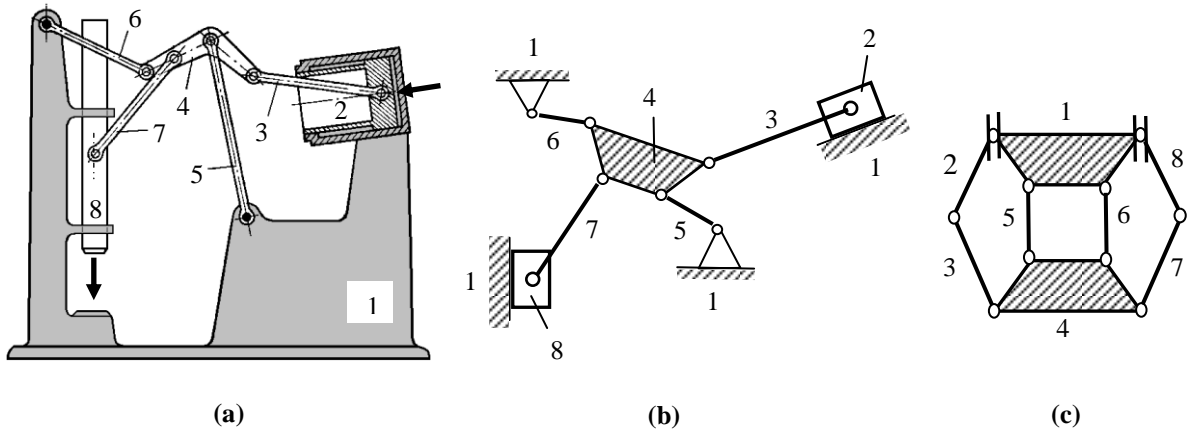
Şekil 2.1.5-a da örnek olarak seçilen bir pres mekanizması [Artobolevsky, 1977] ve Şekil 2.1.5-b de ona ait (ölçeksiz) kinematik diyagram gösterilmiştir. Bu şekilden de anlaşılacağı gibi kinematik diyagram bir mekanizmanın uzuvlarını geometrik şekillerinden soyutlar ancak onların karşılıklı yerleşim düzenini yansıtır.

2.1.4 MEKANİZMANIN KİNEMATİK ZİNCİRİ

Mekanizmaların şekillerle temsil edilmesinde soyutlama bir adım daha ileri götürülebilir ve şeklin uzuv ve eleman çiftlerini göstermekle birlikte karşılıklı yerleşimlerden de soyutlanması düşünülebilir. Bu yapıldığında *mekanizmanın kinematik zinciri* adı verilen şekiller elde edilir.

Kinematik zincir, ilgili mekanizmayla ilişkisi onunla aynı hareket iletim sistematiğine sahip olmaktan ibaret olan bir hareketli rijid cisimler topluluğudur.

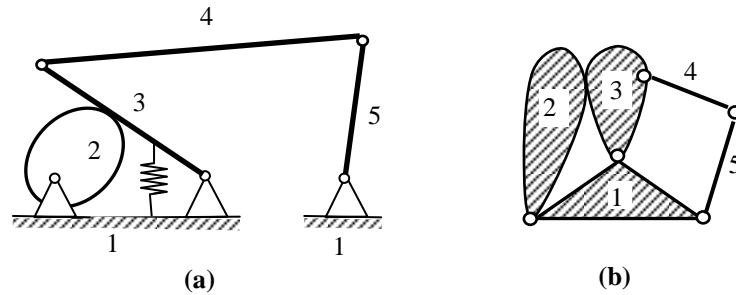
Şekil 2.1.5-c de, yukarıda anılan pres mekanizmasının kinematik zinciri gösterilmiştir.



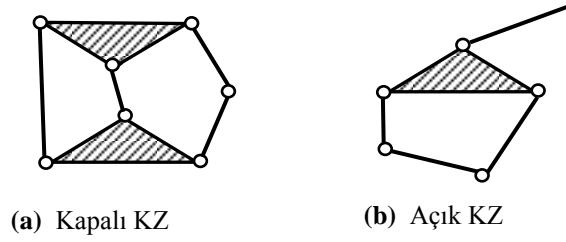
Şekil 2.1.5 Pres Mekanizması

(a) Mekanizma, (b) Kinematik Diyagram, (c) Kinematik Zincir

Yalnız adi eleman çiftlerine sahip mekanizmalar yanında yüksek eleman çiftleri içeren mekanizmaların da kinematik zincirleri çizilebilir (Şekil 2.1.6).



Şekil 2.1.6 Yüksek Eleman Çiftine Sahip Mekanizmanın Kinematik Zinciri

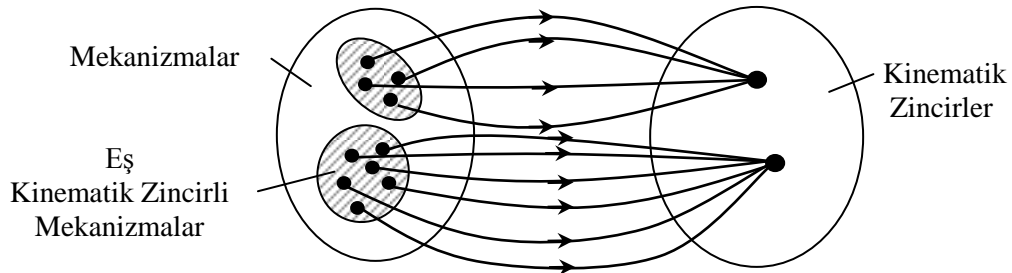


Şekil 2.1.7 Kapalı ve Açık Kinematik Zincirler

Kinematik zincirler, 1-li uzuv içerip içermemelerine bağlı olarak *açık kinematik zincirler* ve *kapalı kinematik zincirler* olarak ikiye ayrılırlar (Şekil 2.1.7). Sanayi robotları gibi bazı makinalarda açık kinematik zincirli mekanizmalar da kullanılmakla birlikte makinaların büyük çoğunluğu kapalı kinematik zincirli mekanizmalardan oluşur. Biz burada yalnızca kapalı kinematik zincirli mekanizmalarla ilgileneceğiz.

Buraya kadar söylenilenlerden kolayca anlaşılacağı gibi mekanizmalarla kinematik zincirlerin eşleşmeleri bire bir değildir. Her mekanizmaya bir kinematik zincir karşılık gelmekle birlikte her kinematik zincire birden fazla mekanizma karşılık gelir (Bkz. Şekil 2.1.8).

Soyutlamanın bir üst basamağında bulunmalarından kaynaklanan bu kapsayıcı özellikleri, kinematik zincirleri, mekanizmaların sistematik incelemelerinde çok yararlı bir araç haline getirir.



Şekil 2.1.8 Mekanizma-Kinematik Zincir İlişkisi

2.1.5 MEKANİZMANIN (KİNEMATİK ZİNCİRİN) SERBESTLİK DERECESESİ

Bir mekanizmanın serbestlik derecesi denildiğinde, mekanizmanın bir uzvu referans alındığında geri kalan bütün uzuvların konumlarını eksiksiz olarak tanımlayabilmek için verilmesi gereken en az parametre sayısı anlaşılır.

Kinematik zincirler, karşılık geldikleri mekanizmalar ile aynı hareket iletim sistematiğine sahip olduklarından serbestlik dereceleri de onlarınkiyle aynıdır. Bu nedenle mekanizmanın serbestlik derecesi kavramıyla kinematik zincirin serbestlik derecesi kavramı birbiri yerine kullanılabilir ve serbestlik derecesi hesapları mekanizma yerine kinematik zincir üzerinde yürütülebilir.

Şimdi bir kinematik zincirin serbestlik derecesinin nasıl belirleneceği konusuna eğilelim. İncelemenin uzaysal kinematik zincirleri de kapsayacak biçimde yürütülmesinde hiç bir güçlük bulunmamakla birlikte biz incelememizi, bu ders çerçevesinde yalnızca onlarla ilgileneceğimiz için, düzlemsel kinematik zincirler özeliliyle sınırlandıralım.

Kinematik zincirin uzuv sayısı n , sahip olduğu 1 serbestlik dereceli eleman çifti sayısı e_1 , 2 serbestlik dereceli eleman çifti sayısı ise e_2 olsun. Kinematik zincir rijid uzuvlardan oluştuğuna ve bir rijid cismin düzlemdeki serbestlik derecesi 3 olduğuna göre eğer eleman çiftleriyle birbirine bağlanmış olmasalardı referans alınan uzuv dışında kalan $(n-1)$ adet uzvun serbestlik derecesi $3(n-1)$ olan bir sistem oluşturacağı açıktır. Her bir eleman çiftinin ise birbirine bağladığı iki uzuvdan birinin serbestlik derecesini 3 ten kendi serbestlik derecesi olan 1 ya da 2 ye indireceği yani 1 serbestlik dereceli eleman çifti halinde 2, 2 serbestlik dereceli eleman çifti halinde ise 1 azaltacağı bilinmektedir. Buna göre kinematik zincirin (ya da mekanizmanın) serbestlik derecesinin, basitçe

$$f = 3(n - 1) - 2e_1 - e_2 \quad (2.1.1)$$

şeklinde hesaplanabileceği anlaşılır. İlk kez Çebişev³ tarafından ortaya konulduğu [Chebychev, 1869] bilinmekle birlikte bu formül genellikle *Grübler*⁴-*Kutzbach Formülü* adıyla anılır⁵. Mekanizma, tanım gereği, hareket etmek zorunda olduğundan bir mekanizmanın serbestlik derecesi $f \geq 1$ koşulunu sağlamalıdır. Esasen, eleman çiftleriyle birbirine bağlanmış rijid cisim toplulukları serbestlik derecelerine göre şöyle sınıflandırılır:

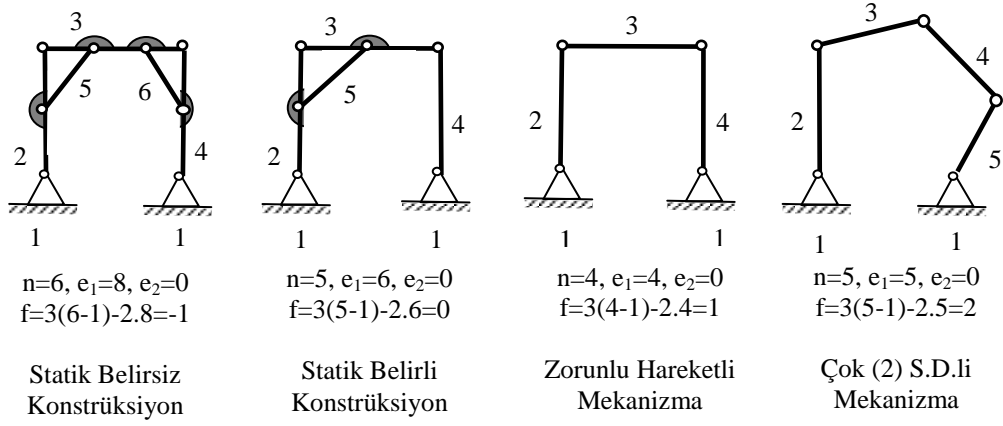
$f < 0$: Statik belirsiz konstrüksiyon	}	Konstrüksiyonlar
$f = 0$: Statik belirli konstrüksiyon		
$f = 1$: Zorunlu hareketli mekanizma	}	Mekanizmalar
$f > 1$: Çok serbestlik dereceli mekanizma		

Şekil 2.1.9 daki örnekler bu sınıflara giren yapılar hakkında bir fikir vermektedir.

³ Pafnuti L'voviç Çebişev (1821-1894). Rus matematikçisi. Yaklaşıklıklar kuramı, sayı kuramı ve mekanizma kinematiği konusundaki çalışmaları ile tanınır.

⁴ Martin Fürchtegott Grübler (1851-1935). Alman kinematikçisi. Mekanizma sistematiğinin burada da sergilenen birçok temel fikri [*Getriebelehre*, 1917] adlı kitabında onun tarafından ortaya konulmuştur.

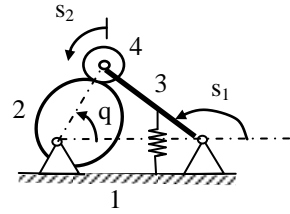
⁵ Bu tip basit serbestlik derecesi formüllerinin bir tarihçesi, eleştirel bir incelemesi ve uygulaması güç fakat daha doğru sonuç veren serbestlik derecesi hesap yöntemlerinin bir dökümü için Bkz. [Gogu, 2005].



Şekil 2.1.9 Serbestlik Derecesine Göre Yapılar

Kimi aykırı durumlarda (2.1.1) bağıntısı ile yapılan serbestlik derecesi hesabı, bu bağıntının mekanizmanın özel boyutlarını, geometrisini ve amacını dikkate almayışı yüzünden yanıltıcı sonuç verebilir. Burada kısaca bu durumlardan söz etmek yerinde olur:

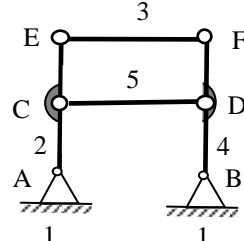
a) *Etkisiz serbestlik derecesi:* Şekil 2.1.10-a daki sarkaç kollu, toparlaklı yürek mekanizmasında serbestlik derecesi $f=2$ çıkmaktadır ve bu kuramsal olarak doğrudur. Ancak mekanizmanın amacı giriş hareketini oluşturan q yürek konumlarına, çıkış hareketi olarak, istenen s_1 sarkaç kol konumlarını eşleştirmektir. Bu amaç bakımından, dairesel bir tekerlekten ibaret olan toparlağın s_2 açısal konumunun bir önemi yoktur. Hesapta çıkan 2 serbestlik derecesinden biri s_2 ye ilişkindir ve etkisizdir. İşlevi bakımından mekanizmanın serbestlik derecesi $f=1$ dir.



$$n=4, e_1=3, e_2=1$$

$$f=3(4-1)-2.3-1=2 \text{ !!!}$$

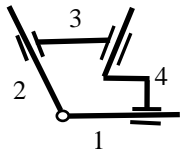
(a) Etkisiz Serbestlik Derecesi



$$n=5, e_1=6, e_2=0$$

$$f=3(5-1)-2.6=0 \text{ !!!}$$

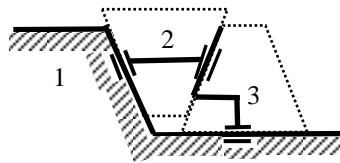
(b) Fazladan Kapalılık



$$n=4, e_1=4, e_2=0$$

$$f=3(4-1)-2.4=1 \text{ !!!}$$

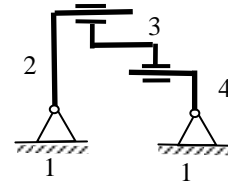
(c1) Kayar Çift Enflasyonu



$$n=3, e_1=3, e_2=0$$

$$f=3(3-1)-2.3=0 \text{ !!!}$$

(c2) Kama Çifti



$$n=4, e_1=4, e_2=0$$

$$f=3(4-1)-2.4=1 \text{ !!!}$$

(d) Paralel Kayar EÇ

Şekil 2.1.10 Serbestlik Derecesi Hesabında Aykırı Durumlar

b) *Fazladan kapalılık*: Şekil 2.1.10-b deki mekanizmada ise serbestlik derecesi $f=0$ çıkmakla birlikte, $AB=CD=EF$, $AC=BD$, $CE=DF$ şeklindeki özel boyutlarından ötürü bu mekanizmada 3 ve 5 numaralı uzuvlardan her biri, diğerinin zaten yerine getirmiş olduğu, kinematik zinciri kapatma işlevini aynen yinelemekten başka birşey yapmamaktadır. Bunlardan biri, kinematik bakımdan, üzerindeki eleman çiftleriyle birlikte fazlalıktır. Bu durumda kinematik zincirin *fazladan* (ya da *aşırı*) *kapalı* olduğu söylenir. Buna dikkat edilerek $n=4$, $e_1=4$ ile hesap yapılırsa, olması gerektiği gibi $f=1$ bulunur.

c) *Her iki eleman çifti de kayar olan 2-li uzuvların birbirine bağlanmış olması ya da kapalı bir uzuv grubunda 2 den az döner çift bulunması hali*: Şekil 2.1.10-c1 deki mekanizmada $f=1$ çıkmaktadır. Ancak, hareketli olan yalnızca 3 ve 4 numaralı uzuvlar olup 1-2 döner eleman çifti kilitlidir. 1 ve 2 numaralı uzuvların birleştirilmesi sonucu değiştirmez. Gerçekten de bu yapıldığında, bir başka aykırı durum olan, Şekil 2.1.10-c2 deki *kama çifti* elde edilir. Bu mekanizmada ise $f=0$ çıkmakla birlikte aslında zorunlu hareketli bir mekanizma söz konusudur.

d) *Bütün eleman çiftleri kayar ve birbirine paralel olan uzuvlar hali*: Şekil 2.1.10-d deki mekanizmada $f=1$ çıkmakla birlikte bu serbestlik 3 numaralı uzvun sağa-sola ötelenmesine ilişkindir. Öbür uzuvlar hareket etme olanağına sahip olmayıp bir hareket iletimi, dolayısıyla da zorunlu hareketli bir mekanizma söz konusu değildir.

Bu aykırı örnekler, (2.1.1) formülü ile yapılan hesaba teslim olup dikkatin elden bırakılmaması gerektiğini göstermektedir.

2.2 ZORUNLU HAREKETLİ KİNEMATİK ZİNCİRLER

Makinaların çoğunlukla zorunlu hareketli yani serbestlik derecesi 1 olan mekanizmalardan oluştuğu, bu yüzden incelemelerimizin bu tip mekanizmalar üzerinde yoğunlaştırılacağı belirtilmişti.

Bu bölümde zorunlu hareketli mekanizmaları temsilen zorunlu hareketli kinematik zincirler ele alınacak ve bu tip kinematik zincirlerin kimi temel özellikleri ortaya konularak, buradan, zorunlu hareketli mekanizmalar hakkında genel ve sistematik bilgiler elde etmenin yolları araştırılacaktır.

Bu yapılırken her tür zorunlu hareketli kinematik zinciri kapsamaya çalışmak yerine, incelemelerin düzlemsel, kapalı ve yalnızca 1 serbestlik dereceli eleman çiftleri içeren kinematik zincirler üzerinde sürdürülmesi daha net sonuçlar elde edilmesine olanak vermektedir. Aşağıda da böyle yapılacaktır.

2.2.1 YALNIZ ADİ ELEMAN ÇİFTLERİ (AEÇ) İÇEREN ZORUNLU HAREKETLİ KİNEMATİK ZİNCİRLERİN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Yalnız adi (1 serbestlik dereceli) eleman çiftleri içeren, düzlemsel, kapalı ve zorunlu hareketli kinematik zincirleri göz önüne alalım. Bu durumda $f=1$, $e_2=0$ olacağına göre (2.1.1) serbestlik derecesi bağıntısı $1=3(n-1)-2e_1$ şeklini alır. İstenirse bu bağıntı

$$3n-2e_1-4=0 \quad (2.2.1)$$

şeklinde de yazılabilir. Zorunlu hareketli kinematik zincirlerin sağlamak zorunda olduğu bu bağıntı *Grübler zorunlu hareketlilik ölçütü* adıyla anılır.

(2.1.1) bağıntısının gereksiz bir yinelenmesi izlenimi yaratan bu bağıntı, ilk bakışta görülenlerden fazlasını içermektedir. Buradan çıkan bilgiler şöyle sıralanabilir:

Yalnız adi eleman çiftleri içeren, düzlemsel, kapalı ve zorunlu hareketli kinematik zincirler;

- i) Çift sayıda uzuvdan oluşurlar
- ii) İçerdikleri k-lı ($k \neq 3$) uzuv sayısı 3-lü uzuv sayısından bağımsızdır
- iii) En az 4 adet 2-li uzuv içerirler

ve

- iv) n uzuvlu bir kinematik zincirde en çok $n/2$ -li uzuv yer alabilir ($k \leq n/2$)

Şimdi, kısaca, bu söylediklerimizi kanıtlayalım:

- i) (2.2.1) eşitliğinden

$$e_1 = 3\frac{n}{2} - 2 \quad (2.2.2)$$

yazılabilir. Buradan, $e_1 \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak zorunda olduğuna göre n nin bir çift sayı olması gerektiği anlaşılır.

- ii) Kinematik zincirdeki k-lı uzuv sayısına n_k diyelim. Buna göre

$$n = \sum_k n_k, \quad e_1 = \frac{1}{2} \sum_k k n_k \quad (2.2.3)$$

yazılabilir. (2.2.3) eşitlikleri (2.2.1) de yerlerine konulursa, kinematik zincir kapalı olduğundan $k \geq 2$ olması gerektiğine dikkat edilerek ve k nın alacağı en büyük değere K denilerek

$$3 \cdot \sum_{k=2}^K n_k - \sum_{k=2}^K k n_k - 4 = 0 \quad (2.2.4)$$

ya da düzenlenerek

$$\sum_{k=2}^K (3-k)n_k = 4 \quad (2.2.5)$$

elde edilir. Buradan i-li uzuv sayısı çekilirse

$$n_i = \frac{1}{(3-i)} \cdot \left(4 - \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq i}}^K (3-k)n_k \right) \quad (2.2.6)$$

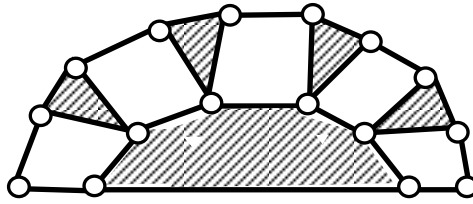
bulunur. Toplam altında, $k=3$ e karşılık gelen n_3 ün çarpanı sıfır olduğundan n_i nin n_3 ten bağımsız olduğu anlaşılır.

iii) (2.2.6) eşitliğinden $i=2$ için

$$n_2 = 4 + \sum_{k=4}^K (k-3)n_k \quad (2.2.7)$$

bulunur. Toplam altındaki terimin hiçbir zaman negatif değer alamayacağına dikkat edilirse $n_2 \geq 4$ sonucuna varılır.

- iv) K-lı uzuv içeren kapalı bir kinematik zincirin en az kaç uzva sahip olması gerektiği araştırılsın. En az sayı olarak K-lı uzuv sayısı 1 alınır, buna bağlanacak K adet komşu uzuv ve kapalı kinematik zincir oluşturmak üzere bunları birbirine bağlayacak en az K-1 adet bağlantı uzvu gereklidir (Bkz. Şekil 2.2.1). Buna göre $n_{\min} = 1 + K + (K-1) = 2K$ ya da tersine $K_{\max} = n/2$ elde edilir.



Şekil 2.2.1 $K_{\max} = n/2$

2.2.2 YALNIZ AEÇ'LER İÇEREN ZORUNLU HAREKETLİ KİNEMATİK ZİNCİRLERİN DÖKÜMÜ VE ONLARDAN TÜREYEN MEKANİZMALAR

Bölüm 2.2.1 de ortaya konulan kurallar, yalnız 1 serbestlik dereceli eleman çiftleri içeren olası bütün zorunlu hareketli, düzlemsel ve kapalı kinematik zincirlerin sistematik biçimde elde edilmesine olanak verir. Buradan da olası mekanizma biçimlerine geçilebilir. Bu bölümde bu konu üzerinde durulacaktır.

Temel bir belirleme olarak, Bölüm 2.2.1 deki (i) ve (iii) kurallarından, anılan tipte kinematik zincirlerde uzuv sayısının yalnızca $n=4,6,8,10,\dots$ değerlerini alabileceği belirlensin ve bu seçeneklerden ilk üçü göz önüne alınsın:

2.2.2.1 4 Uzuvlu Kinematik Zincir ($n=4$)

Bölüm 2.2.1 / kural (iii) ye göre $n_2 \geq 4$ olmak zorunda olduğuna göre 4 uzuvlu kinematik zincirde $n_2=n=4$ olacağı, yani 4 uzuvlu kinematik zincirin 4 adet 2-li uzuvdan oluşacağı açıktır. Denklem (2.2.1) den $n=2$ ile hesaplanarak da görüleceği gibi bu zincirde $e_1=4$ tür. Yani zincir 4 adet 1 serbestlik dereceli eleman çifti içerir.

Bu eleman çiftlerinin döner ya da kayar oluşuna ve sabitlenecek uzvun seçimine göre zincirden çeşitli mekanizmalar türer. Tablo 2.2.1 de bu mekanizmalar gösterilmiştir.

- 4 eleman çiftinin de döner olması hali. 3-Çubuk Mekanizması:

4 eleman çiftinin de döner olması halinde bütün uzuvlar 2 döner eleman çiftine sahip olup (RR diyelim) kinematik zincir içerisinde birbiriyle özdeş roller üstlenirler. Bunlardan herhangi birinin sabitlenmesiyle 3-çubuk mekanizması adı verilen ve birçok makinada kullanılan bir mekanizma elde edilir (Bkz. Tablo 2.2.1).

Bir 3-çubuk mekanizmasında 2 ve 4 numaralı uzuvlar A_o ve B_o yatakları çevresinde tam dönme yapabilecekleri gibi, iki sınır konum arasında açısal salınım hareketleri de yapabilirler. Ortaya çıkabilecek seçenekler ve bu seçeneklere karşılık gelen özel adlandırmalar şöyledir:

- 2 ve 4 tam dönme : Çift Kol Mekanizması
- 2 tam dönme, 4 salınım : Kol-Sarkaç Mekanizması
- 2 ve 4 salınım : Çift Sarkaç Mekanizması

Bu seçeneklerden hangisinin söz konusu olacağı, aşağıda kanıtlamaksızın aktaracağımız *Grashof Teoremi*⁶ uyarınca, mekanizmanın r_1, r_2, r_3, r_4 boyutlarına bağlıdır.

⁶ Franz Grashof (1826-1893). Alman makina mühendisi. Kesin kanıtı kendinden sonra (B. Paul tarafından) verilen yukarıdaki teoremin yanı sıra ısı geçişindeki Grashof sayısı ile bilinir.

Tablo 2.2.1 4 Uzuvlu Kinematik Zincir ve Ondan Türeyen Mekanizmalar

	Kinematik Zincir		Sabit Uzuv	Mekanizma	
				Adı	Kinematik Diyagramı
4 Döner EÇ		RR	Üç Çubuk		$A_0 B_0 = r_1$ $A_0 A = r_2$ $A B = r_3$ $B_0 B = r_4$
3 Döner EÇ 1 Kayar EÇ		RP	Krank-Biyel		
		RR	Kol-Kızak		
2 Döner EÇ 2 Kayar EÇ	2 Kayar EÇ Karşı	RP	Sürgü-Kızak		
	2 Kayar EÇ Komşu	PP	Çift Sürgü		
		RP	İskoç Boyunduruğu		
		RR	-		
1 D. EÇ 3 K. EÇ		Bölüm 2.1.5 teki (c) aykırı durumu. Zorunlu hareketli mekanizma oluşmaz.			
4 Kayar EÇ		Bölüm 2.1.5 teki (c) aykırı durumu. Zorunlu hareketli mekanizma oluşmaz.			

Grashof Teoremi: Uzunlukları r_1, r_2, r_3, r_4 olan bir üç çubuk mekanizmasında;

$$r_{\max} = \max(r_1, r_2, r_3, r_4),$$

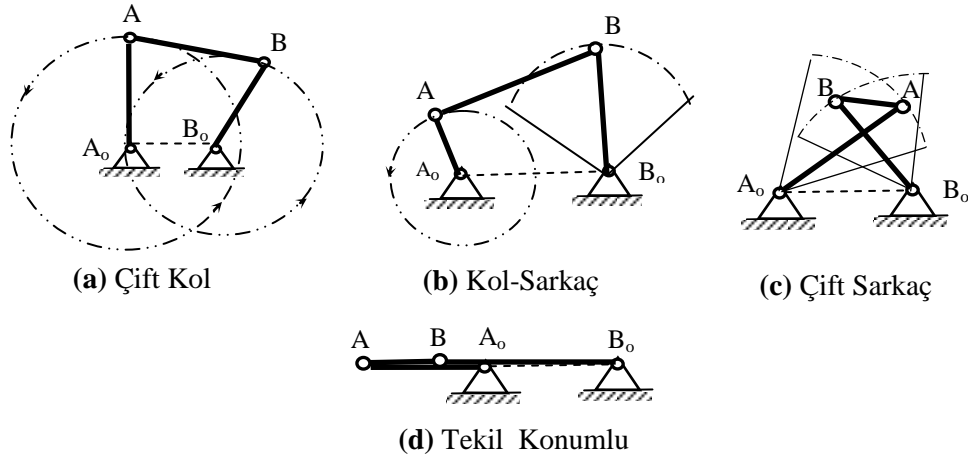
$$r_{\min} = \min(r_1, r_2, r_3, r_4),$$

$$S = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

tanımları altında;

- | | | |
|------|---------------------------------|---|
| i) | $r_{\max} + r_{\min} < S/2$ ise | $\left\{ \begin{array}{l} r_{\min} \text{ sabitlenirse Çift Kol} \\ r_{\min} \text{ e komşu uzuvlardan biri sabitlenirse Kol-Sarkaç} \\ r_{\min} \text{ e karşı uzuv sabitlenirse Çift Sarkaç} \end{array} \right.$ |
| ii) | $r_{\max} + r_{\min} > S/2$ ise | hangi uzuv sabitlenirse sabitlensin Çift Sarkaç |
| iii) | $r_{\max} + r_{\min} = S/2$ ise | tekil konuma sahip mekanizmalar |

ortaya çıkar (Şekil 2.2.2).



Şekil 2.2.2 Çeşitli Üç Çubuk Mekanizmaları

Grashof Teoreminin (i) seçeneğindeki mekanizmaların ortak özelliği, r_{\min} uzvunun her iki komşusuna göre bağlı hareketinin tam dönme olmasıdır. Bu özelliğe sahip üç çubuk mekanizmalarına Grashof mekanizması adı verilir. Verilmiş bir mekanizmadan, sabit uzvu değiştirilerek elde edilen yeni mekanizmaya, ilk mekanizmanın tersiniği (inversiyonu) denir. Bu anlamda, (i) seçeneğindeki üç farklı Grashof mekanizması birbirinin tersiniğidir.

- 3 döner, 1 kayar eleman çifti bulunması hali:

Bu halde zincirde iki adet döner-döner (RR) ve iki adet döner-kayar (RP) olmak üzere iki tip uzuv bulunur. Bunlardan (RR)'ler kendi aralarında, (RP)'ler de kendi aralarında özdeş rollere sahiptir.

(RP)'lerden birinin sabitlenmesi halinde, makinacılıkta en yaygın kullanılan mekanizma olan *krank-biyel mekanizması* ortaya çıkar (Bkz. Şekil 2.2.3 a). Bir krank-biyel mekanizmasında B piston mafsalinın yörüngesi ile A_o krank yatağı arasında bir e kaçıklığı bulunabilir. Bu durumda kaçık merkezli (eksantrik) krank-biyel mekanizmasından, $e=0$ olması halinde ise merkezci (santrik) krank-biyel mekanizmasından söz edilir. Krankın tam dönme yapabilmesi için mekanizma boyutlarının $r < \ell - e$ koşulunu sağlaması gerekir. Krank tam dönme yaparken piston alt ve üst ölü konum adı verilen iki sınır konum arasında salınır. Pistonun bu konumlar arasında katettiği yola strok (s) adı verilir. Merkezci krank-biyel mekanizmalarında strok, krank yarıçapının iki katından ibarettir: $s=2r$.

Krank-biyel mekanizmaları, hareket pistondan verilip kranktan alınarak içten yanmalı motorlarda, kranktan verilip pistondan alınarak pistonlu pompalarda kullanılır. Şekil 2.2.3 b de ise, bu mekanizmanın, hareketin biyelden verilip pistondan alındığı bir başka uygulaması olan su tulumbası gösterilmiştir.

(RR)'lerden birinin sabitlenmesi halinde, krank-biyel mekanizmasının bir tersiniği olan ve yine çok kullanılan *kol-kızak mekanizması* ortaya çıkar.

- 2 döner, 2 kayar eleman çifti bulunması hali:

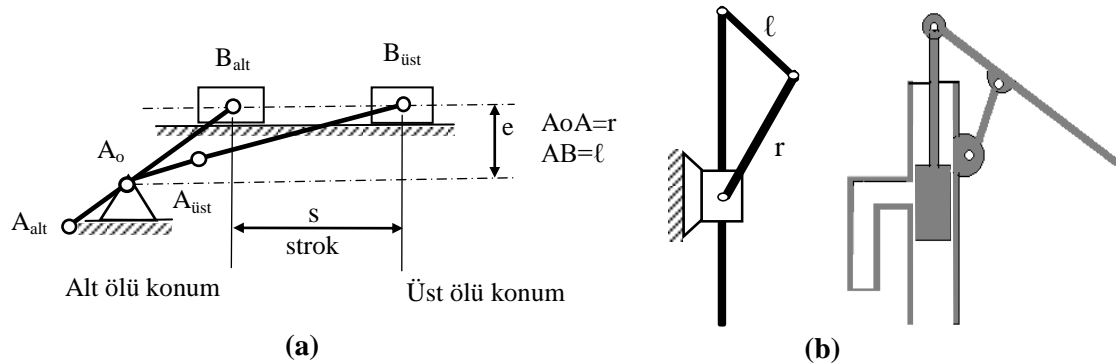
Bu halde iki kayar çiftin karşılıklı mı yanyana mı olduğuna bağlı olarak iki farklı durum ortaya çıkar.

İki kayar çiftin karşılıklı olması halinde zincir birbiriyle özdeş rollere sahip dört adet döner-kayar (RP) uzuvdan oluşur. Bunlardan herhangi birinin sabitlenmesiyle *sürgü-kızak mekanizması* adı verilen mekanizma ortaya çıkar.

İki kayar çiftin yanyana olması halinde ise zincirde bir (RR) bir (PP) ve birbiriyle özdeş iki (RP) uzuv bulunur. (PP)'nin sabitlenmesi halinde *çift sürgü mekanizması*, (RP)'lerden birinin sabitlenmesi halinde *İskoç boyunduruğu mekanizması*, (RR)'nin sabitlenmesi halinde ise özel bir adı olmayan ve pek kullanılmayan bir mekanizma ortaya çıkar. Bu üç mekanizma birbirinin tersiniğidir.

- 2 den az döner eleman çifti bulunması halleri:

Bölüm 2.1.5 teki (c) aykırı durumuna karşılık gelen bu hallerde zorunlu hareketli mekanizma oluşmaz.



Şekil 2.2.3 Krank-Biyel Mekanizması

2.2.2.2 6 Uzuvlu Kinematik Zincirler (n=6)

6 uzuvlu kinematik zincirde $k_{maks}=n/2=6/2=3$, birli uzuv bulunamayacağına göre de $k_{min}=2$ dir. Buna göre zincir 2-li ve 3-lü uzuvlardan oluşacaktır. Şimdi 2-li ve 3-lü uzuvların n_2 ve n_3 sayılarını belirleyelim. Denklem (2.2.2) den

$$e_1 = 3\frac{n}{2} - 2 = 3\frac{6}{2} - 2 = 7 \quad (2.2.8)$$

bellidir. Buna göre (2.2.3) bağıntılarından

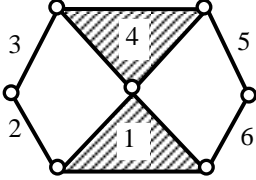
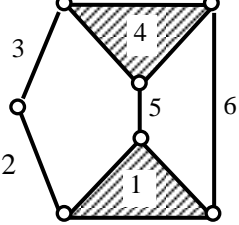
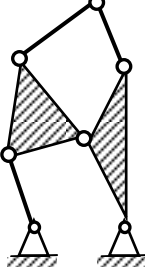
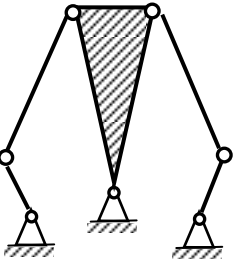
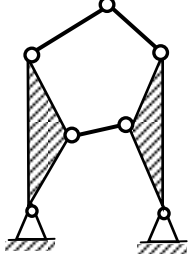
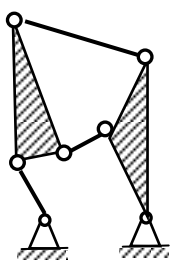
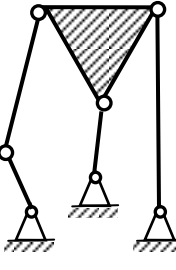
$$n_2 + n_3 = 6 \quad (2.2.9)$$

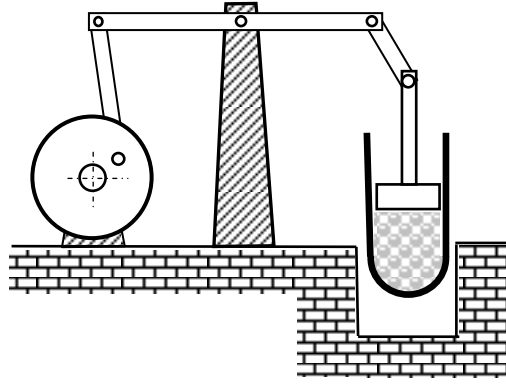
$$2n_2 + 3n_3 = 2e_1 = 14$$

denklemleri, bunların çözülmesiyle de $n_2=4$, $n_3=2$ bulunur. Zincir 4 adet 2-li ve 2 adet 3-lü uzuvdan oluşacaktır. Bunlar iki farklı biçimde bir araya getirilebilir: 3-lü uzuvların birbirine bağlı olduğu Watt zinciri ve bağlı olmadığı Stephenson zinciri (Bkz. Tablo 2.2.2).

Watt zinciri nde 2-li ve 3-lü uzuvlar kendi aralarında birbiriyle özdeş rollere sahip olduğundan, bu zincirden, ya 2-li uzuvlardan biri, ya da 3-lü uzuvlardan biri sabitlenerek iki değişik tipte mekanizma elde edilebilir.

Tablo 2.2.2 6 Uzuvlu Kinematik Zincirler ve Mekanizmalar

WATT ZİNCİRİ		STEPHENSON ZİNCİRİ		
				
2-li uzuv sabit	3-lü uzuv sabit	5 ya da 6 sabit	2 ya da 3 sabit	3-lü uzuv sabit
Watt 1 Mekanizması	Watt 2 Mekanizması	Stephenson 1 Mekanizması	Stephenson 2 Mekanizması	Stephenson 3 Mekanizması
				



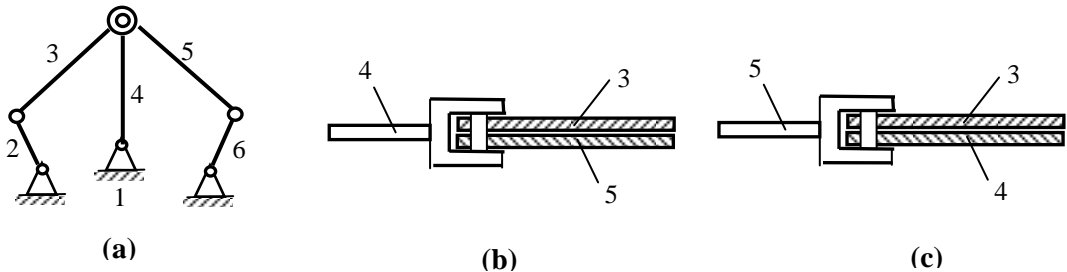
Şekil 2.2.4 James Watt'ın Buhar Makinası

Bu mekanizmalar, 2-li uzuvlardan biri sabitlenmişse Watt 1 mekanizması, 3-lü uzuvlardan biri sabitlenmişse Watt 2 mekanizması adını alırlar. Döner eleman çiftlerinin yerine kayar eleman çiftleri konularak Watt 1 ve Watt 2 tipinde birbirinden farklı birçok mekanizma elde edilebilir ise de burada çok sayıdaki bu seçeneklerin teker teker ele alınması yoluna gidilmeyecektir.

Stephenson zinciri ne gelince, bu zincirde 5 ve 6 numaralı uzuvlar, 2 ve 3 numaralı uzuvlar ve 3-lü uzuvlar olmak üzere üç farklı rolde uzuv vardır. İlk gruptaki uzuvlardan biri sabitlendiğinde Stephenson 1, ikinci gruptaki uzuvlardan biri sabitlendiğinde Stephenson 2, üçüncü gruptaki uzuvlardan biri sabitlendiğinde ise Stephenson 3 mekanizması adı verilen mekanizmalar elde edilir.

Burada son olarak, Watt ve Stephenson zincirlerinin, adlarını, Watt 2 tipinde bir mekanizmadan ibaret olan ilk gelişmiş buhar makinasını (Şekil 2.2.4) yapan James Watt⁷ ile ilk buharlı lokomotifi yapan George Stephenson⁸'dan aldıklarını belirtelim.

Katlı Mafsal: Bu noktada kısaca katlı mafsal kavramından da söz edilmesi yerinde olur. Bu amaçla Şekil 2.2.5-a daki mekanizma göz önüne alınsın. Bu mekanizmada 3, 4 ve 5 numaralı uzuvlar tek bir mafsalda bir araya gelmiştir. Böyle mafsalara katlı mafsal adı verilir. Pekiyi bu mekanizma bir Watt 2 mekanizması mıdır, yoksa bir Stephenson 3 mekanizması mıdır? Bu sorunun yanıtlanabilmesi için 4 numaralı uzvun mu, yoksa 5 numaralı uzvun mu bir 3-lü uzuv olduğunun bilinmesi; bunun için de katlı mafsalın konstrüktif yapısının ayrıtısına inilmesi gerekir. Bu ayrıntı Şekil 2.2.5-b deki gibiyse 4 numara 3-lü uzuv olup mekanizma bir Watt 2 mekanizması; yok eğer Şekil 2.2.5-c deki gibiyse 5 numara 3-lü uzuv olup mekanizma bir Stephenson 3 mekanizmasıdır.



Şekil 2.2.5 Katlı Mafsal

⁷ James Watt (1736-1819). İskoç mühendis ve mucidi.

⁸ George Stephenson (1781-1868) İngiliz mühendisi. 1814 yılında ilk buharlı lokomotifi yaptı.

2.2.2.3 8 Uzuylu Kinematik Zincirler (n=8)

Bu zincirde $k_{maks}=n/2=8/2=4$, $k_{min}=2$ dir. Buna göre zincir 2-li, 3-lü ve 4-lü uzuvlardan oluşacaktır. Şimdi bunların n_2 , n_3 ve n_4 sayılarını belirleyelim. Denklem (2.2.2) den

$$e_1 = 3\frac{n}{2} - 2 = 3\frac{8}{2} - 2 = 10 \quad (2.2.10)$$

bellidir. Buna göre (2.2.3) bağıntılarından

$$n_2 + n_3 + n_4 = 8 \quad (2.2.11)$$

$$2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = 2e_1 = 20$$

elde edilir. Bu denklemlerde $n_2 \geq 4$ olmak zorundadır. Değişik n_2 değerleri veri alınarak şu çözümler elde edilir:

- $n_2 = 4 \rightarrow n_3 = 4, n_4 = 0$: A Grubu KZ ler (9 adet)
- $n_2 = 5 \rightarrow n_3 = 2, n_4 = 1$: B Grubu KZ ler (5 adet)
- $n_2 = 6 \rightarrow n_3 = 0, n_4 = 2$: C Grubu KZ ler (2 adet)
- $n_2 = 7 \rightarrow n_3 = -2, n_4 = 3$: Olanaksız

Olası 16 kinematik zincir Tablo 2.2.3 te verilmiştir.

Tablo 2.2.3 8 Uzuylu Kinematik Zincirler

GRUP		OLASI KİNEMATİK ZİNCİRLER				
A	$n_2=4$ $n_3=4$ $n_4=0$					
B	$n_2=5$ $n_3=2$ $n_4=1$					
C	$n_2=6$ $n_3=0$ $n_4=2$					

2.2.3 YÜKSEK ELEMAN ÇİFTİ İÇEREN ZİNCİRLER HALİ

Yukarıda hep yalnızca adi, yani bir serbestlik dereceli eleman çiftleri içeren zorunlu hareketli zincirlerle ilgilendik. Bu bölümde ise, zincirde yüksek, yani 2 serbestlik dereceli eleman çiftleri de bulunması haline bir göz atmak istiyoruz. Bu amaçla denklem (2.1.1) deki serbestlik derecesi bağıntısı anımsanır ve burada $f=1$ konursa

$$3n-2e_1-e_2=4 \quad (2.2.12)$$

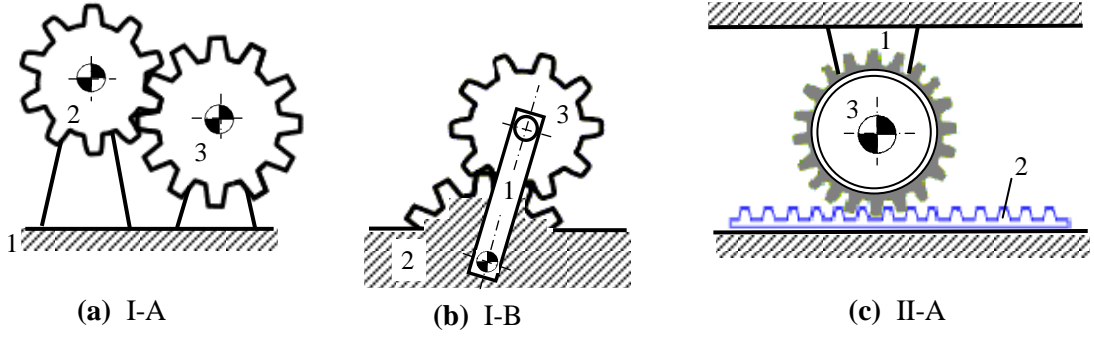
elde edilir. Ayrıntıdan kaçınmak amacıyla, kendimizi, zincirde yalnızca bir tek yüksek eleman çifti bulunması halini incelemekle sınırlandırırsak, $e_2=1$ ile (2.2.12) den

$$n = \frac{5+2e_1}{3} \quad (2.2.13)$$

yazılabilir. Uzuvar sayısı n bir tam sayı olmak zorunda olduğuna göre mümkün seçeneklerin ($e_1=2, n=3$), ($e_1=5, n=5$), ... olduğu anlaşılır. Buna göre yüksek eleman çifti içeren zorunlu hareketli zincirlerin en basit olanı üç uzuvdan oluşur ($n=3$), iki adet bir serbestlik dereceli ($e_1=2$), bir adet de iki serbestlik dereceli ($e_2=1$) eleman çifti içerir.

Tablo 2.2.4 Yüksek Eleman Çifti İçeren Zorunlu Hareketli Basit Zincir ve Ondan Türeyen Yürek Mekanizması Örnekleri

Kinematik Zincir ($n=3, e_1=2, e_2=1$)		Mekanizma		
		A (1 No. sabit)	B (2 No. sabit)	C (3 No. sabit)
I				B ile aynı.
II				
III				B ile aynı.



Şekil 2.2.6 Dişli Çark Mekanizması Örnekleri

Tablo 2.2.4, bu basit zincir ile bir serbestlik dereceli eleman çiftlerinin döner ya da kayar oluşuna ve sabit uzvun seçimine bağlı olarak ondan türetilebilecek mekanizma örnekleri hakkında bir fikir vermektedir. Şüphesiz bu zincir, yalnız adi eleman çiftleri içeren 4 uzuvlu basit zincirin, bir 2-li uzuv çıkartılıp onun birbirine bağladığı iki uzuv bir yüksek eleman çiftiyle bir araya getirilerek elde edilmiş karşılığında başka birşey değildir. Bu açıdan bakıldığında, YEÇ'ler içeren zincirlere ilişkin bilgilerin, yalnız AEÇ'ler içeren zincirlere ilişkin bilgilerden kolayca çıkartılabileceği anlaşılır. Burada, bir genel bilgi olarak, tek sayıda YEÇ içeren zorunlu hareketli kinematik zincirlerin tek sayıda uzuvdan, çift sayıda YEÇ içeren kinematik zincirlerin çift sayıda uzuvdan oluştuklarını belirtelim (Bunu kanıtlayınız).

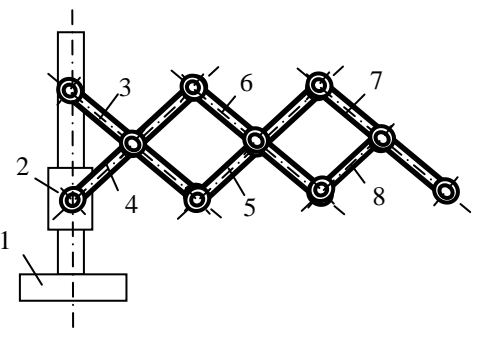
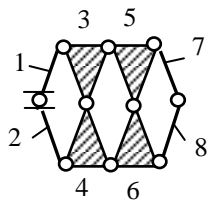
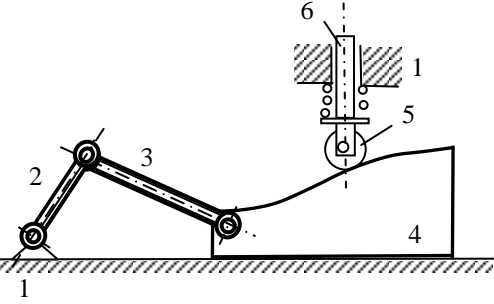
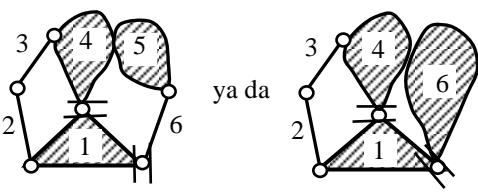
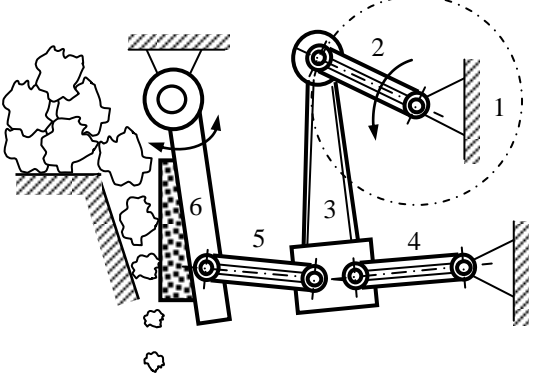
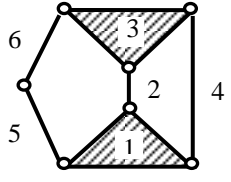
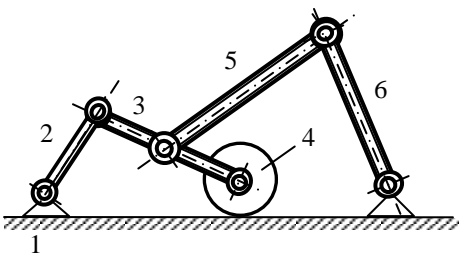
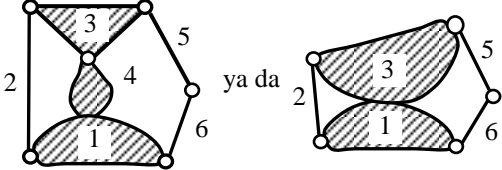
Tablo 2.2.4 teki örnekler birer *yürek mekanizması*dır. Bunlardan, özellikle A sütunundakiler çok kullanılan yürek mekanizmaları oluştururlar. Yürek mekanizmaları, hareketi veren uzvun hareketinin niteliğini, hareketi alan uzvun –ki *izleyici* diye anılır– hareketinin niteliğini ve hareketi alan uzvda kullanılan bağlantı elemanının tipini belirtecek biçimde adlandırılarak sınıflandırılırlar. Buna göre I-A daki örnek, döner (2 no.), sarkaç kollu (3 no.), tablalı yürek mekanizması; II-A daki örnek, döner (3 no.), doğrusal hareketli (2 no.), tablalı yürek mekanizması; III-A daki ise kayar (2 no.), doğrusal hareketli (3 no.), toparlaklı yürek mekanizması diye adlandırılır.

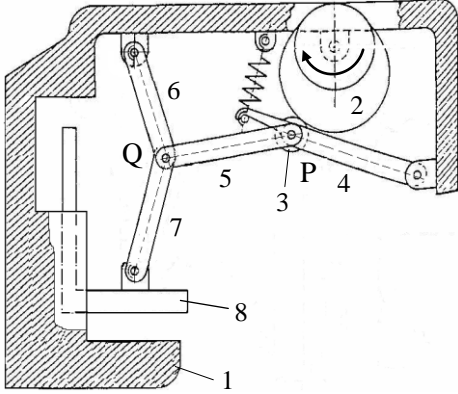
Yürek mekanizmalarında toparlağın görevi (tıpkı bir döner eleman çiftindeki rulmanlı yatak gibi) sürtünme direncini azaltarak hareket iletimini kolaylaştırmaktan ibaret olduğundan, kinematik zincirde ayrı bir uzuv olarak gösterilme zorunluluğu yoktur. Tablo 2.2.4 teki kinematik zincirlerde böyle bir uzuv bulunmadığı halde mekanizmalarda yer verilmiş olması bu nedenledir.

Tablo 2.2.4 te yalnız yürek mekanizması örneklerine yer verilmiş olmakla birlikte, iki serbestlik dereceli eleman çifti içeren tek mekanizma tipi yürek mekanizmaları değildir. Yürek mekanizmalarının yanı sıra, dişli çark, sürtünme çarkı, Malta haçı, yıldız dişli gibi mekanizmalar da bu gruba girerler. Bu konuda bir fikir vermek üzere, Şekil 2.2.6 da, Tablo 2.2.4 teki kinematik zincirlere karşılık gelen kimi dişli çark mekanizması örnekleri, tablonun hangi gözüne karşılık geldikleri belirtilerek gösterilmiştir.

ÖRNEKLER:

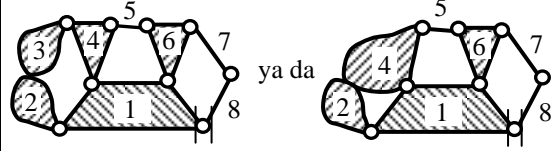
Verilmiş bir mekanizmanın kinematik zincirinin elde edilip serbestlik derecesinin belirlenmesine örnek olmak üzere aşağıda bazı mekanizmalar ile onlara ilişkin kinematik zincirler ve serbestlik derecesi hesapları verilmiştir.

Mekanizma	Kinematik Zincir ve Serbestlik Derecesi
	 $n=8, e_1=10, e_2=0$ $f=3(8-1)-2 \cdot 10=1$
	 $n=6, e_1=6, e_2=1, f_{\text{etkisiz}}=1$ (5 no.) $f=3(6-1)-2 \cdot 6-1=1$
 <p>Taş kırma makinası mekanizması</p>	 <p>Stephenson Zinciri (Stephenson 3 mekanizması)</p> $n=6, e_1=7, e_2=0$ $f=3(6-1)-2 \cdot 7=1$
	 $n=6, e_1=6, e_2=1, f_{\text{etkisiz}}=1$ (4 no.) $f=3(6-1)-2 \cdot 6-1=1$



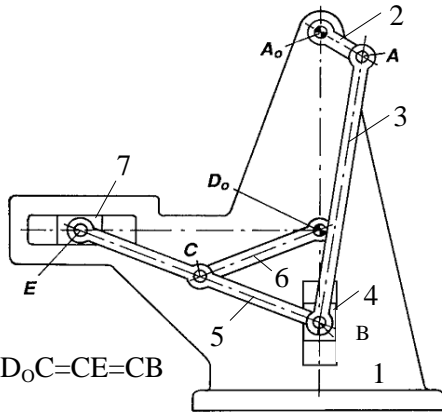
Damgalama makinası mekanizması

P ve Q katlı mafsallarında, sırasıyla, 4 ve 6 numaralı uzuvların taşıyıcı olduğu kabulüyle.



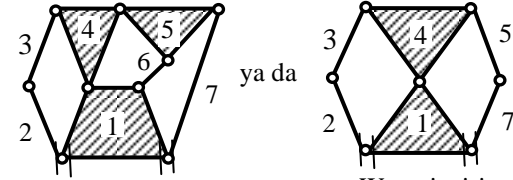
$$n=8, e_1=9, e_2=1 \quad f_{\text{etkisiz}}=1 \quad (3 \text{ no.})$$

$$f=3(8-1)-2 \cdot 9-1-1=1$$



$$D_0C=CE=CB$$

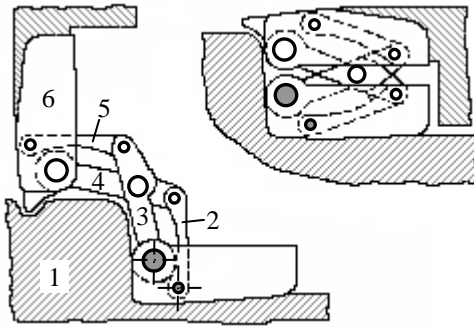
B katlı mafsalda 4 numaralı uzvun taşıyıcı olduğu kabulüyle.



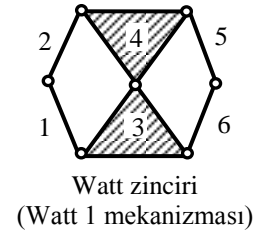
Watt zinciri
(Watt 2 mekanizması)

$n=7, e_1=9, e_2=0$, Mekanizmanın özel boyutlarından ötürü, 6 no.lu uzvun aşırı kapalılık oluşturuyor. Kaldırılması hareket özelliklerini değiştirmez (Bunu kanıtlayınız). $\Delta f=+1$.

$$f=3(7-1)-2 \cdot 9+1=1$$



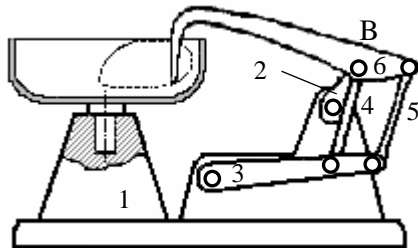
Taşıt kapısı menteşe mekanizması



Watt zinciri
(Watt 1 mekanizması)

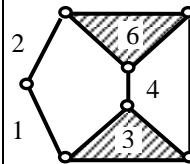
$$n=6, e_1=7, e_2=0$$

$$f=3(6-1)-2 \cdot 7=1$$



Hamur karma makinası mekanizması

B katlı mafsalda 6 numaralı uzvun taşıyıcı olduğu kabulüyle.



Stephenson zinciri
(Stephenson 2 mekanizması)

$$n=6, e_1=7, e_2=0$$

$$f=3(6-1)-2 \cdot 7=1$$

2.2.4 KİNEMATİK ZİNCİRDEN MEKANİZMA ELDE EDİLMESİ

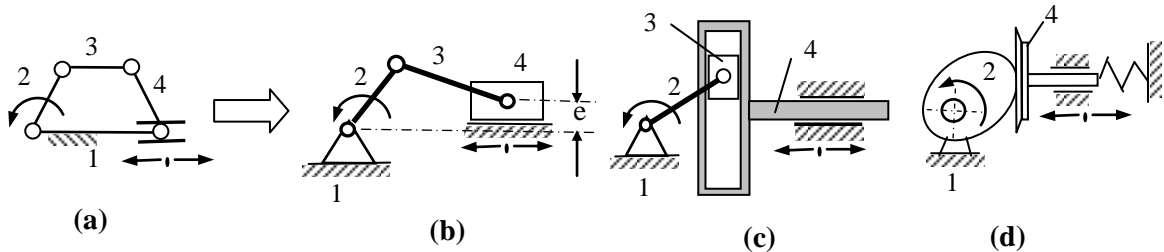
Belirli bir görevi yerine getirecek bir mekanizma tasarlamak göreviyle karşı karşıya kalındığında, işe sıfırdan başlayarak olası sonsuz mekanizma çeşidi arasında yitip gitmektense, elde bir dökümü bulunan zorunlu hareketli kinematik zincirler arasından bu işe uygun olabilecekleri seçmekle işe başlayıp sonra da bu zincirlerden, onlara uyan mekanizmalar elde etmeye çalışmak daha uygun bir yol oluşturur. Mekanizma tasarımının, henüz boyutlandırma çabalarını kapsamayan bu ön aşamasında yalnızca mekanizmanın uzuv sayısı belirlenip genel çalışma ilkesi ortaya konulacak; kısacası türü seçilecektir. Şimdi bir örnek yardımıyla, belirli bir görevi yerine getirecek mekanizma için, kinematik zincirler yardımıyla tür seçiminin nasıl gerçekleştirileceğini görmeye çalışalım.

Bir vargel tezgâhı kızak hareket mekanizması için tür seçimi: Tasarlanacak mekanizmanın şu özellikleri taşıması gerekmektedir: • Giriş hareketi bir elektrik motorundan alınacağından daimi dönme hareketi olmalıdır. • Çıkış hareketi kızığın hareketi olacaktır ve bir salınımlı öteleme hareketi olmalıdır. • Giriş ve çıkış uzuvlarının anılan hareketleri sabit uzva göre olmalı; yani her iki uzuv da sabit uzva yataklanmış olmalıdır. • Kızığın salınımlı öteleme hareketinde talaş kaldırma işleminin gerçekleştirildiği gidiş, sabit ve düşük bir hızda; boşa dönüş ise, zaman kazanabilmek için elden geldiğince hızlı olmalıdır (Bu özelliğe sahip mekanizmalar *çabuk dönüş mekanizması* genel adını alırlar.).

Şimdi çeşitli uzuv sayısına sahip kinematik zincirlerle bu özellikleri sağlama olanakları araştırılsın.

Dört uzuvlu kinematik zincir: Şekil 2.2.7-a da görüldüğü gibi, 1 uzvu sabitlenip 1-2 yatağı döner, 1-4 yatağı kayar yapılarak istenen görev gerçekleştirilebilir. Buna karşılık gelen mekanizma Şekil 2.2.7-b deki krank-biyel mekanizmasından başka birşey değildir. Krank elektrik motoruna bağlanacak, piston ise kızak görevini görecek. Krankın sabit hızla döndürülmesi halinde pistonun gidiş ve dönüş süreleri merkezci krank-biyel mekanizmasında eşit olmakla birlikte, bir e kaçıklığına yer verilerek bu süreler bir miktar farklılaştırılabilir. Ancak, büyük kaçıklıkların dinamik sorunlara yol açması, büyük stroklar elde edilmesindeki güçlük ve sabit piston hızı elde etmenin olanaksızlığı gibi nedenlerle bu çözüm vargel tezgâhlarında yeğlenmez.

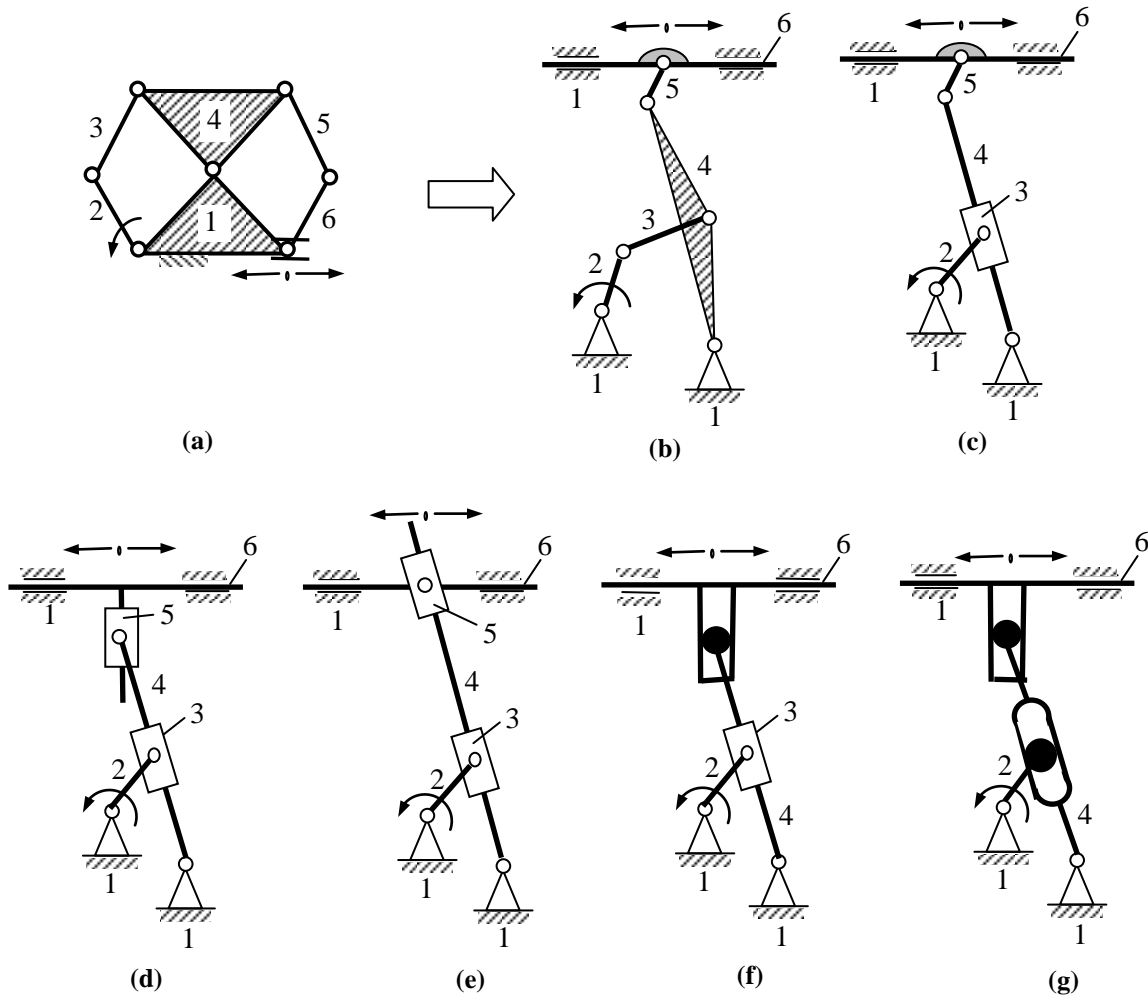
İstenirse 3-4 mafsallı kayar yapılarak Şekil 2.2.7-c deki İskoç boyunduruğu, ya da 3 uzvu, e_1 eleman çiftleriyle birlikte kaldırılıp 2 ile 4 birbirine bir e_2 eleman çiftiyle bağlanarak Şekil 2.2.7-d deki doğrusal hareketli, tablalı yürek mekanizması da elde edilebilir. Ancak bu çözümler de uygun değildir (Niçin?).



Şekil 2.2.7 4 Uzuvlu KZ ve Elde Edilen Mekanizmalar

Altı uzuvlu kinematik zincirler; Watt zinciri: Watt zincirinde 2-li uzuvlardan birinin sabitlenmesiyle elde edilecek Watt 1 mekanizmalarının, amaç bakımından, bizi yeniden krank-biyel mekanizması seçeneğine götüreceği görülebilir (Bunu gösteriniz). Geriye, 1 uzvu sabitlenip 1-2 yatağı döner, 1-6 yatağı kayar yapılarak elde edilen Watt 2 mekanizmaları kalır (Şekil 2.2.8-a). 1-6 dışındaki tüm eleman çiftlerinin döner alınması halinde Şekil 2.2.8-b deki mekanizma, bu eleman çiftlerinden bazılarının kayar yapılması halinde ise Şekil 2.2.8-c,d,e deki mekanizmalar elde edilir. İstenirse, bir 2-li uzuv ve üzerindeki iki e_1 eleman çifti kaldırılıp yerine bir e_2 eleman çifti konularak başka seçenekler de elde edilebilir. Örneğin, 5 uzvu ile 4-5 ve 5-6 e_1 eleman çiftleri kaldırılıp 4-6 e_2 eleman çifti konularak Şekil 2.2.8-f deki, ya da buna ek olarak 3 uzvu ile 2-3 ve 3-4 e_1 eleman çiftleri de kaldırılıp yerine 2-4 e_2 eleman çifti konularak Şekil 2.2.8-g deki mekanizmalar elde edilebilir. (Daha başka Watt 2 mekanizmaları da olanaklı mıdır? Araştırınız.)

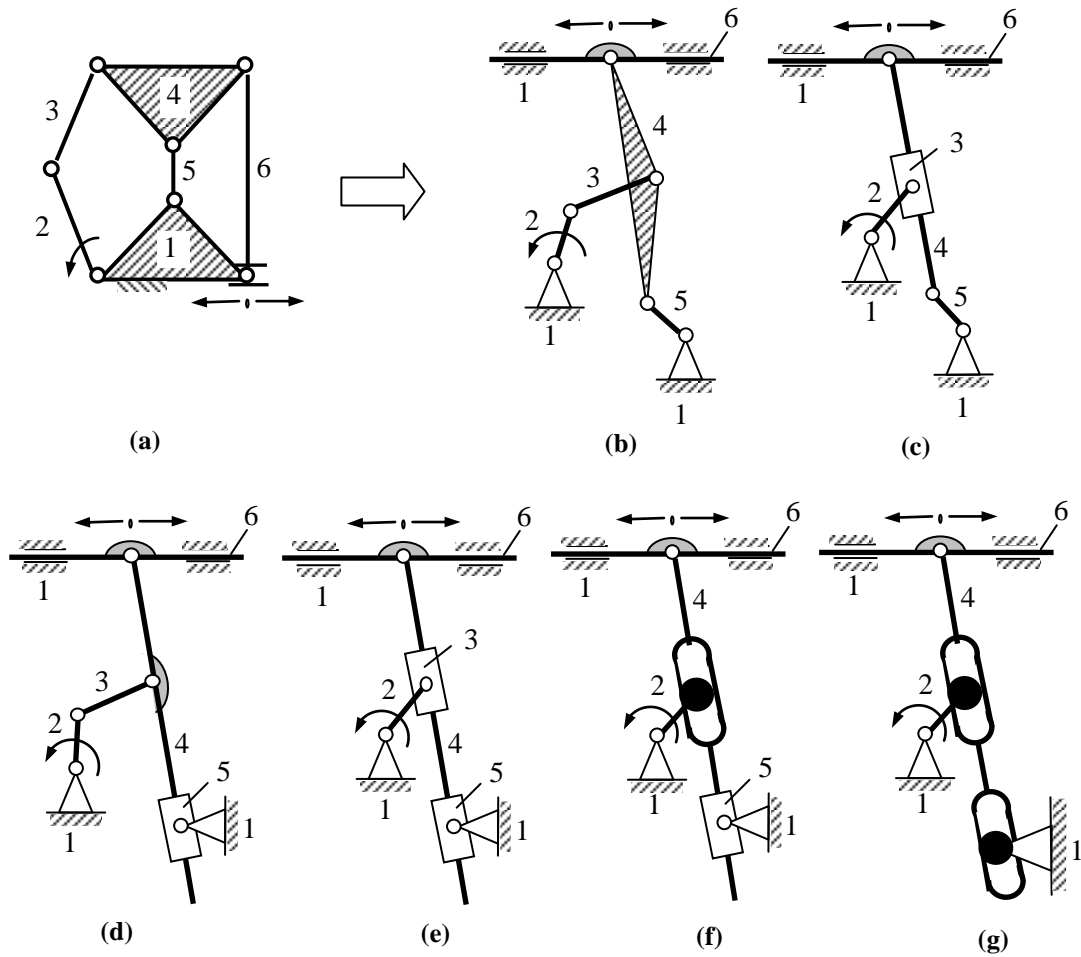
Bütün bu mekanizmalar, 2 uzvunun sabit hızla döndürülmesi halinde 6 numaralı kızığın gidiş ve dönüş sürelerinin ciddi ölçüde farklılaştığı *çabuk dönüş mekanizmalarıdır*. Bu mekanizmalarda, uygun boyutlandırmayla, gidişte yaklaşık sabit kızak hızı elde edilmesi de olanaklıdır. Dolayısıyla birçoğu vargel tezgâhlarında gerçekten kullanılan seçeneklerdir.



Şekil 2.2.8 Watt Zinciri ve Watt 2 Tipinde Çeşitli Çabuk Dönüş Mekanizmaları

Stephenson zinciri: Stephenson 1 mekanizmalarının krank-biyel mekanizması ile özdeşleştiği, Stephenson 2 mekanizmalarının ise amaca uygun olmadığı görülebilir (Bunu araştırınız). Stephenson 3 mekanizmalarında ise 5 ve 6 uzuvlarından birinin giriş, birinin çıkış uzvu alınması halinde yine krank-biyel mekanizmasına dönüldüğü; bunlardan birinin giriş, 2 uzvunun çıkış alınması halinde ise uygun mekanizmalar üremediği görülebilir (Bunları araştırınız). Geriye, 1 uzvu sabitlenip 1-2 yatağı döner, 1-6 yatağı kayar yapılarak elde edilen Stephenson 3 mekanizmaları kalır (Şekil 2.2.9-a). 1-6 dışındaki tüm eleman çiftlerinin döner olması halinde Şekil 2.2.9-b deki mekanizma, bu eleman çiftlerinden bazılarının kayar olması halinde ise Şekil 2.2.9-c,d,e deki mekanizmalar elde edilir. İstenirse, bir 2-li uzuv ve üzerindeki iki e_1 eleman çifti kaldırılıp yerine bir e_2 eleman çifti konularak başka seçenekler de elde edilebilir. Örneğin, 3 uzvu ile 2-3 ve 3-4 e_1 eleman çiftleri kaldırılıp 2-4 e_2 eleman çifti konularak Şekil 2.2.9-f deki, ya da buna ek olarak 5 uzvu ile 1-5 ve 4-5 e_1 eleman çiftleri de kaldırılıp yerine 1-4 e_2 eleman çifti konularak Şekil 2.2.9-g deki mekanizmalar elde edilebilir. (Daha başka Stephenson 3 mekanizmaları da olanaklı mıdır? Araştırınız.)

Bu mekanizmalar da *çabuk dönüş mekanizmaları* olup birçoğu vargel tezgâhlarında gerçekten kullanılan seçenekler oluşturur.



Şekil 2.2.9 Stephenson Zinciri ve Stephenson 3 Tipinde Çeşitli Çabuk Dönüş Mekanizmaları

3. MEKANİZMALARIN KİNEMATİĞİ

3.1 GENEL BELİRLEMELER

Makinalar çoğunlukla tek serbestlik dereceli, kapalı kinematik zincirli, düzlemsel mekanizmalardan oluştuğu için burada yalnızca bu tür mekanizmaların kinematığı ile ilgilenilecektir.

Tek serbestlik dereceli bir mekanizmanın konumu bir tek *esas genelleştirilmiş koordinat*la tanımlanabilir. Bu iş için genellikle mekanizmanın giriş uzvunun konumunu gösteren koordinat seçilir. Bu koordinat q olsun. n uzuvlu bir mekanizmada giriş uzvu dışında $k=n-2$ adet hareketli uzuv daha vardır ve bu uzuvlara da konum koordinatları eşleştirmek uygundur. Bu *ikincil genelleştirilmiş koordinatlar* da s_1, s_2, \dots, s_k olsun. Mekanizma tek serbestlik dereceli olduğuna göre s_j ; $j=1,2,\dots,k$ ikincil genelleştirilmiş koordinatları q esas genelleştirilmiş koordinatına

$$s_j = g_j(q) ; j=1,2,\dots,k \quad (3.1.1)$$

olacak biçimde bağlıdır. Ancak, basit yapıdaki bazı mekanizmalar dışında bu k adet bağıntının doğrudan doğruya yazılması olanaksızdır. Çünkü mekanizma s_j koordinatlarını teker teker q koordinatına değil; bütün s_j koordinatlarıyla q koordinatını birbirine bağlayan bir yapı oluşturur. Bu bağıntılar

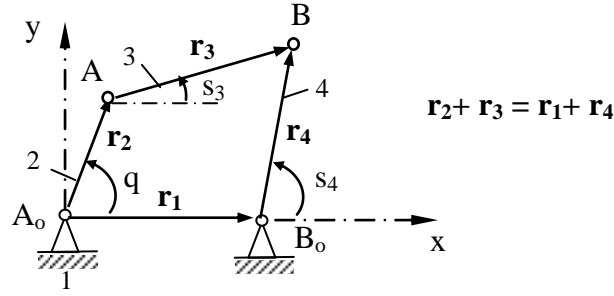
$$\begin{aligned} f_1(q, s_1, s_2, \dots, s_k) &= 0 \\ f_2(q, s_1, s_2, \dots, s_k) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ f_k(q, s_1, s_2, \dots, s_k) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

şeklinde, birbirinden bağımsız k adet bağıntı olup *kısıt denklemleri* adını alırlar.

Bir mekanizmanın kinematik incelemelerinin çıkış noktasını kısıt denklemlerinin yazılması oluşturur.

3.2 KISIT DENKLEMLERİNİN YAZILMASI • ÇEVİRİM KAPAMA DENKLEMLERİ

Kapalı kinematik zincirli mekanizmalarda zincirin kapanma koşullarının ifade edilmesi kısıt denklemlerinin elde edilmesi için sistematik bir yol oluşturur. Bu koşullar, birbirinden bağımsız $k/2=n/2-1$ adet *vektörel çevrim kapama denklemi* şeklinde yazılabilir. Düzlemsel mekanizmalarda düzlemsel vektörler söz konusu olacağına göre, bu vektörel denklemler ikiye skaler bileşene sahiptir. Vektörel çevrim kapama denklemlerinin skaler bileşenlerine ayrılmasıyla elde edilen k adet *skaler çevrim kapama denklemi*, aranan k adet kısıt denkleminden başka birşey değildir.



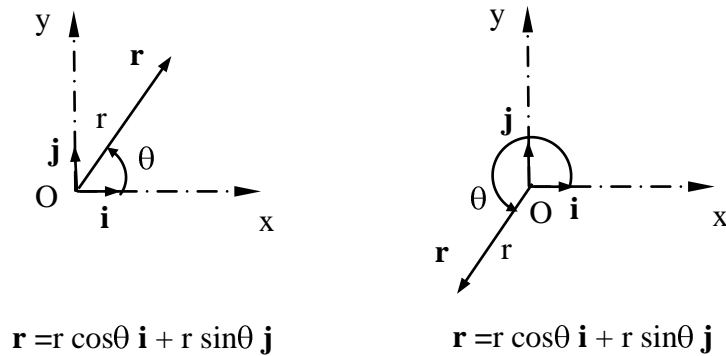
Şekil 3.2.1 Vektörel Çevrim Kapama Denkleminin Yazılması

Bir mekanizmada vektörel çevrim kapama denklemlerini yazmanın en uygun yolu, seçilen iki eleman çiftini birleştiren iki farklı vektör yolunun eşitliğinin ifade edilmesidir (Bkz. Şekil 3.2.1).

Buradan skaler çevrim kapama denklemlerine geçilebilmesi için vektörlerin dik bileşenlerine ayrılması; bunun için de (tercihan sabit uzva bağlı) bir xy kartezyen eksen takımı tanımlanması gereklidir. Bu yapıldığında her \mathbf{r} vektörü⁹, r şiddeti ve eksen takımının x eksenine yaptığı θ açısı verilerek tanımlanabilir. θ açısı, vektörün başlangıç noktası xy eksen takımının başlangıç noktasına taşındıktan sonra x ekseninden vektöre giden pozitif (saate ters yönde) açı olarak tanımlanırsa \mathbf{r} vektörü basitçe $\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}$ şeklinde bileşenlerine ayrılır. θ açısının bu tanımı, skaler çevrim kapama denklemlerinin yazılmasını rutin bir işleme indirgeyen, bizim de benimseyeceğimiz bir uyuşma oluşturur (Bkz. Şekil 3.2.2).

Skaler çevrim kapama denklemlerinde geçen her \mathbf{r} vektörünün ya r şiddeti, ya θ açısı ya da bazen bunların her ikisi mekanizmanın (esas ya da ikincil) genelleştirilmiş koordinatlarına karşılık gelir. Böylece bu denklemler Denk.(3.1.2) biçiminde yazıldıklarında kısıt denklemlerini oluştururlar.

Tablo 3.2.1 de, değişik mekanizmalar için çevrim kapama ve kısıt denklemlerinin yazılmasına ilişkin örnekler verilmiştir.

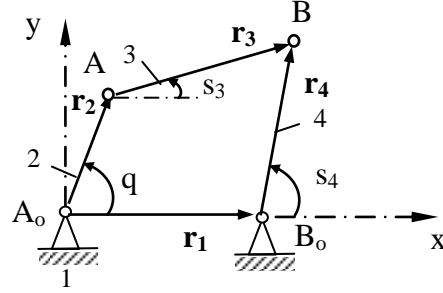


Şekil 3.2.2 Vektörlerin Bileşenlerine Ayrılması

⁹ Bundan böyle vektörler, koyu basılmış küçük harflerle gösterilecek, koyu basılmış büyük harfler ise matrisleri göstermekte kullanılacaktır.

Tablo 3.2.1

Bazı Örnek Mekanizmalarda
Çevrim Kapama ve Kısıt Denklemlerinin Yazılması

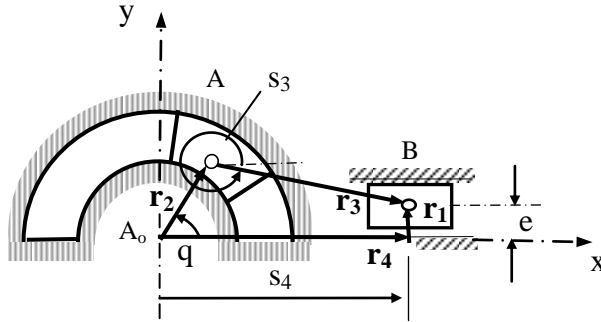


Üç çubuk mekanizması

Vektörel çevrim kapama denklemi: $\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4$

Skaler çevrim kapama denklemleri: x) $r_2 \cos q + r_3 \cos s_3 = r_1 + r_4 \cos s_4$
y) $r_2 \sin q + r_3 \sin s_3 = r_4 \sin s_4$

Kısıt denklemleri : $f_1(q, s_3, s_4) = r_2 \cos q + r_3 \cos s_3 - r_1 - r_4 \cos s_4 = 0$
 $f_2(q, s_3, s_4) = r_2 \sin q + r_3 \sin s_3 - r_4 \sin s_4 = 0$

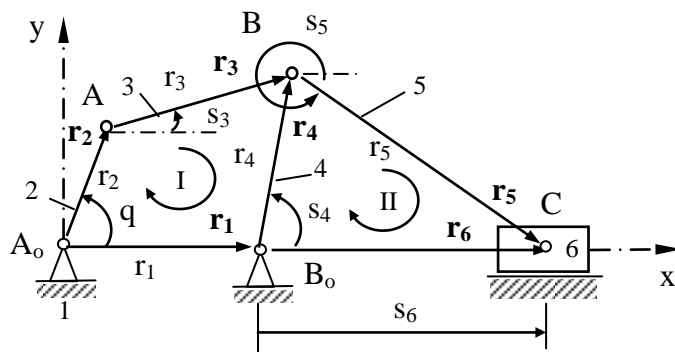


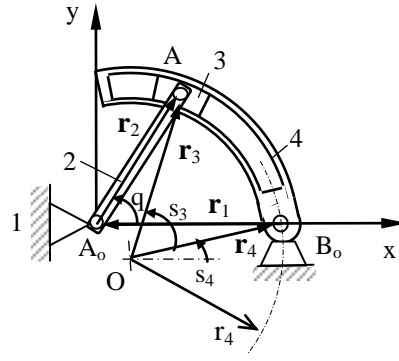
Yay çifti tasarımlı krank-biyel mekanizması

Vektörel çevrim kapama denklemi: $\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1$

Skaler çevrim kapama denklemleri: x) $r_2 \cos q + r_3 \cos s_3 = s_4$
y) $r_2 \sin q + r_3 \sin s_3 = e$

Kısıt denklemleri : $f_1(q, s_3, s_4) = r_2 \cos q + r_3 \cos s_3 - s_4 = 0$
 $f_2(q, s_3, s_4) = r_2 \sin q + r_3 \sin s_3 - e = 0$

$$\begin{aligned} \text{Kısıt denklemleri} \quad & : \quad f_1(q, s_{31}, s_{32}) = r_2 \cos q - s_{31} \cos s_{32} - r_1 = 0 \\ & f_2(q, s_{31}, s_{32}) = r_2 \sin q - s_{31} \sin s_{32} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kısıt denklemleri:} \quad & f_1(q, s_3, s_4, s_5, s_6) = r_2 \cos q + r_3 \cos s_3 - r_4 \cos s_4 - r_1 = 0 \\ & f_2(q, s_3, s_4, s_5, s_6) = r_4 \cos s_4 + r_5 \cos s_5 - s_6 = 0 \\ & f_3(q, s_3, s_4, s_5, s_6) = r_2 \sin q + r_3 \sin s_3 - r_4 \sin s_4 = 0 \\ & f_4(q, s_3, s_4, s_5, s_6) = r_4 \sin s_4 + r_5 \sin s_5 = 0 \end{aligned}$$

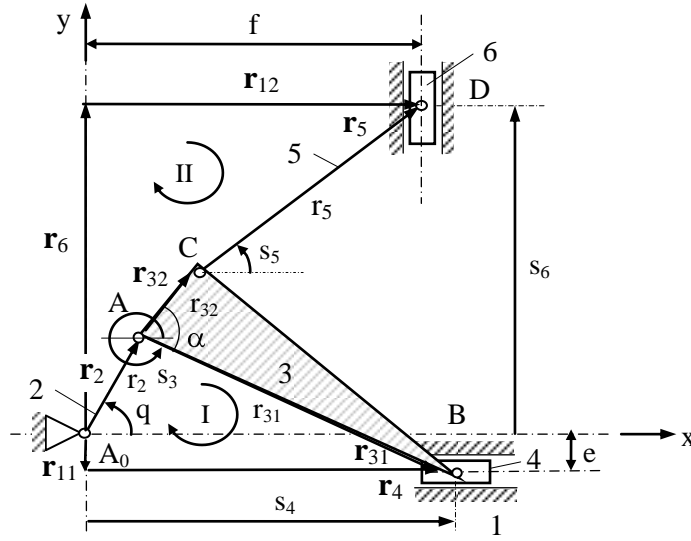


Not: s_3 yerine $s_3' = s_3 + s_4$ şeklinde bir ikincil koordinat da kullanılabilir. O noktası 3-4 yay çiftinin eğrilik merkezidir ve bilinmeyen, onun q ile değişen konumudur.

Vektörel çevrim kapama denklemi: $\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3$

Skaler çevrim kapama denklemleri: x) $r_4 \cos s_4 - r_1 + r_2 \cos q = r_4 \cos (s_3 + s_4)$
y) $r_4 \sin s_4 + r_2 \sin q = r_4 \sin (s_3 + s_4)$

Kısıt denklemleri : $f_1(q, s_3, s_4) = -r_1 + r_2 \cos q - r_4 \cos (s_3 + s_4) + r_4 \cos s_4 = 0$
 $f_2(q, s_3, s_4) = r_2 \sin q - r_4 \sin (s_3 + s_4) + r_4 \sin s_4 = 0$



Vektörel çevrim kapama denklemleri: $\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_{31} = \mathbf{r}_{11} + \mathbf{r}_4$
 $\mathbf{r}_6 + \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_{32} + \mathbf{r}_5$

Skaler çevrim kapama denklemleri: x) $r_2 \cos q + r_{31} \cos s_3 = s_4$
 $f = r_2 \cos q + r_{32} \cos (\alpha + s_3) + r_5 \cos s_5$
y) $r_2 \sin q + r_{31} \sin s_3 = -e$
 $s_6 = r_2 \sin q + r_{23} \sin (\alpha + s_3) + r_5 \sin s_5$

Kısıt denklemleri : $f_1(q, s_3, s_4, s_5, s_6) = r_2 \cos q + r_{31} \cos s_3 - s_4 = 0$
 $f_2(q, s_3, s_4, s_5, s_6) = r_2 \cos q + r_{32} \cos (\alpha + s_3) + r_5 \cos s_5 - f = 0$
 $f_3(q, s_3, s_4, s_5, s_6) = r_2 \sin q + r_{31} \sin s_3 + e = 0$
 $f_4(q, s_3, s_4, s_5, s_6) = r_2 \sin q + r_{32} \sin (\alpha + s_3) + r_5 \sin s_5 - s_6 = 0$

3.3 KİNEMATİK ÇÖZÜMLEME

Bir mekanizmada s_j ikincil genelleştirilmiş koordinatlarının q esas genelleştirilmiş koordinatı cinsinden hesaplanması işlemine *mekanizmanın konum çözümlemesi*, \dot{s}_j hızlarının \dot{q} ve q cinsinden hesaplanması işlemine *hız çözümlemesi*, \ddot{s}_j ivmelerinin \ddot{q} , \dot{q} ve q cinsinden hesaplanması işlemine ise *ivme çözümlemesi* denir. Konum, hız ve ivme çözümlemeleri, topluca, *kinematik çözümleme* diye adlandırılır.

Konum çözümlemesi, (3.1.2) deki k adet kısıt denkleminin k adet s_j ikincil genelleştirilmiş koordinatı için çözülerek (3.1.1) deki $s_j = g_j(q)$ fonksiyonlarının elde edilmesi işlemidir. Kuramsal olarak her zaman mümkün gibi görünen bu işlem, kısıt denklemlerindeki f_i fonksiyonları kimi basit mekanizmalar dışında argümanlarının lineer olmayan hatta çoğunlukla transandantal fonksiyonları oldukları için, uygulamada öyle kolayca gerçekleştirilemez. Bu nedenle konum çözümlemesi kinematik çözümlemenin en zor adımını oluşturur. Bu adımda s_j lerin (3.1.2) denklemlerinden q nün fonksiyonu olarak kapalı formda hesaplanabilip hesaplanamamasına bağlı olarak iki yol ayırılır: Sırasıyla, analitik ve sayısal yollar. Aşağıda kinematik çözümlemenin bu iki yolu ayrı ayrı ele alınacaktır.

3.3.1 ANALİTİK YOL

3.3.1.1 Genel

(3.1.2) kısıt denklemlerinden s_j lerin q nün fonksiyonu olarak kapalı formda hesaplanabilmesi halinde mekanizmanın konum çözümlemesi analitik yoldan gerçekleştirilmiş olur. Analitik yolun kilit noktasını, aralarında değişken yok etme işlemleri gerçekleştirerek, kısıt denklemlerinin, her bir denklem s_j lerden yalnızca birini içerecek biçimde

$$\begin{aligned} f_1(q, s_1) &= 0 \\ f_2(q, s_2) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ f_k(q, s_k) &= 0 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

şeklinde yeniden düzenlenmesi oluşturur. İkincil koordinatlara ilişkin kinematik problemlerinin birbirinden ayrılması anlamına gelen bu düzenleme başarılabilirse buradan s_j ler

$$s_j = g_j(q) \quad ; \quad j=1,2, \dots, k \tag{3.3.2}$$

şeklinde çekilmeye çalışılır. Bunun da gerçekleştirilmesi halinde, artık, kinematik çözümlemenin diğer adımları da analitik yoldan atılabilir. Bu, formel olarak, (3.3.2) den zamana göre türev alınarak gerçekleştirilebilir. q üzerinden zincir kuralı uygulanarak bu yapılırsa, noktalar zamana, üsler ise q ye göre türevleri göstermek üzere

$$\dot{s}_j = g'_j(q)\dot{q} \quad ; j=1,2, \dots ,k \quad (3.3.3)$$

ve

$$\ddot{s}_j = g''_j(q)\dot{q}^2 + g'_j(q)\ddot{q} \quad ; j=1,2, \dots ,k \quad (3.3.4)$$

elde edilir. (3.3.3) denklemleri mekanizmanın hız çözümlemesini, (3.3.4) denklemleri ise ivme çözümlemesini temsil etmektedir. Bu denklemlerdeki $g'_j(q)$ ve $g''_j(q)$ fonksiyonları, sırasıyla, j inci ikincil koordinata ilişkin *hız ve ivme katsayıları* adını alırlar. Bu katsayıların belirlenmesi mekanizmanın hız ve ivme çözümlemesinin tamamlanması anlamına gelir¹⁰.

Kinematik çözümlemenin analitik yoldan gerçekleştirilmesi halinde, ele alınan mekanizmanın tüm ikincil koordinatlarına ilişkin konum, hız ve ivmeleri esas koordinatınkiler cinsinden veren formüller elde edilmiş ve söz konusu mekanizmanın kinematik çözümleme problemi bir daha ele alınmamak üzere sonuçlandırılmış olur.

İstenirse hız ve ivme çözümlemeleri, (3.3.2) çözümleri yerine (3.3.1) denklemleri esas alınarak da gerçekleştirilebilir. Hız çözümlemesi için (3.3.1) den zamana göre türev alınarak

$$\frac{\partial f_j(q,s_j)}{\partial s_j} \dot{s}_j + \frac{\partial f_j(q,s_j)}{\partial q} \dot{q} = 0 \quad (3.3.5)$$

yazılıp, buradan \dot{s}_j nın

$$\dot{s}_j = -\frac{\partial f_j / \partial q}{\partial f_j / \partial s_j} \dot{q} \quad (3.3.6)$$

şeklinde çekilmesi yeterlidir. (3.3.3) ile (3.3.6) nın karşılaştırılmasından, j . hız katsayısının

$$g'_j(q,s_j) = -\frac{\partial f_j / \partial q}{\partial f_j / \partial s_j} \quad (3.3.7)$$

şeklinde ifade edilebileceği anlaşılır. İvme çözümlemesi için ise (3.3.5) ten zamana göre türev alınıp

¹⁰ Burada, (3.3.4) ifadesinin ortaya koyduğu bir özellik olarak, $g''_j(q) = 0$ olmadıkça -ki mafsallı mekanizmalarda bu söz konusu değildir- $\ddot{q} = 0$ olsa, yani giriş uzvu ivmesiz hareket etse bile diğer uzuvların \dot{q}^2 ile orantılı bir ivmeye sahip olacağına dikkat çekelim.

$$\frac{\partial f_j}{\partial s_j} \ddot{s}_j + \frac{\partial^2 f_j}{\partial s_j^2} \dot{s}_j^2 + 2 \frac{\partial^2 f_j}{\partial q \partial s_j} \dot{s}_j \dot{q} + \frac{\partial^2 f_j}{\partial q^2} \dot{q}^2 + \frac{\partial f_j}{\partial q} \ddot{q} = 0 \quad (3.3.8)$$

ya da burada (3.3.3) eşitliği yerine konularak

$$\frac{\partial f_j}{\partial s_j} \ddot{s}_j + \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial s_j^2} \cdot g_j'^2 + 2 \frac{\partial^2 f_j}{\partial q \partial s_j} \cdot g_j' + \frac{\partial^2 f_j}{\partial q^2} \right) \dot{q}^2 + \frac{\partial f_j}{\partial q} \ddot{q} = 0 \quad (3.3.9)$$

yazılması ve buradan \ddot{s}_j nın, (3.3.7) denklemini de dikkate alınarak

$$\ddot{s}_j = -\frac{1}{\partial f_j / \partial s_j} \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial s_j^2} \cdot g_j'^2 + 2 \frac{\partial^2 f_j}{\partial q \partial s_j} \cdot g_j' + \frac{\partial^2 f_j}{\partial q^2} \right) \dot{q}^2 + g_j' \ddot{q} = 0 \quad (3.3.10)$$

şeklinde çekilmesi yeterlidir. (3.3.4) ile (3.3.10) eşitliklerinin karşılaştırılmasından, j. ivme katsayısının

$$g_j''(q, s_j) = -\frac{1}{\partial f_j / \partial s_j} \left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial s_j^2} \cdot g_j'^2 + 2 \frac{\partial^2 f_j}{\partial q \partial s_j} \cdot g_j' + \frac{\partial^2 f_j}{\partial q^2} \right) \quad (3.3.11)$$

şeklinde ifade edilebileceği görülür.

Mekanizmanın kinematik çözümü tamamlandıktan sonra mekanizmaya ait herhangi bir P noktasının konum, hız ve ivmesi de, bu noktanın yer vektörünün esas ve ikincil genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden

$$\mathbf{r}_P = \begin{Bmatrix} x_P(q, s_1, s_2, \dots, s_k) \\ y_P(q, s_1, s_2, \dots, s_k) \end{Bmatrix} \quad (3.3.12)$$

şeklinde kolayca yazılacak ifadesinden hareketle belirlenebilir¹¹. Mekanizmanın konum çözümü gerçekleştirilip (3.3.2) eşitlikleri elde edilmişse (3.3.12) yerine

$$\mathbf{r}_P = \begin{Bmatrix} x_P(q) \\ y_P(q) \end{Bmatrix} = \mathbf{g}_P(q) \quad (3.3.13)$$

yazılabilir. P noktasının hız ve ivme vektörleri için de, buradan zamana göre türev alınarak bulunan

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \mathbf{g}_P'(q) \dot{q} \quad (3.3.14)$$

ve

$$\ddot{\mathbf{r}}_P = \mathbf{g}_P''(q) \dot{q}^2 + \mathbf{g}_P'(q) \ddot{q} \quad (3.3.15)$$

¹¹ Bir vektör, bileşenleri ile; bileşenler ise bir sütun matris ile gösterilebilir. Buna *cebirsel vektör* gösterilimi denir. Cebirsel vektörler $\{.\}$ şeklinde yazılır.

eşitlikleri geçerli olur. Buradaki $\mathbf{g}'_P(q)$ ve $\mathbf{g}''_P(q)$ vektörleri, P noktasına ait hız ve ivme katsayı vektörleri dir. Bu vektörler, mekanizmanın ikincil koordinatlarına ilişkin hız ve ivme katsayıları ve (3.3.13) yardımıyla

$$\mathbf{g}'_P(q) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial s_j} \left\{ \begin{matrix} x_P \\ y_P \end{matrix} \right\} \mathbf{g}'_j + \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \begin{matrix} x_P \\ y_P \end{matrix} \right\} \quad (3.3.16)$$

ve

$$\mathbf{g}''_P(q) = \sum_{j=1}^k \sum_{\ell=1}^k \frac{\partial^2}{\partial s_j \partial s_\ell} \left\{ \begin{matrix} x_P \\ y_P \end{matrix} \right\} \cdot \mathbf{g}'_j \mathbf{g}'_\ell + 2 \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2}{\partial q \partial s_j} \left\{ \begin{matrix} x_P \\ y_P \end{matrix} \right\} \mathbf{g}'_j + \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \left\{ \begin{matrix} x_P \\ y_P \end{matrix} \right\} \mathbf{g}''_j + \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left\{ \begin{matrix} x_P \\ y_P \end{matrix} \right\} \quad (3.3.17)$$

şeklinde hesaplanırlar.

Burada, (3.3.3) ve (3.3.14) eşitliklerinden çıkan

$$ds_j = \mathbf{g}'_j(q) dq \quad ; \quad j=1,2, \dots, k \quad (3.3.18)$$

ve

$$d\mathbf{r}_P = \mathbf{g}'_P(q) dq \quad (3.3.19)$$

diferansiyel ilişkilerini de, ileride yararlı olacak bir bilgi olarak not edelim.

Aşağıda, kinematik çözümlemelerde analitik yola örnek olarak, üç çubuk ve krank-biyel mekanizmalarının kinematik çözümlemeleri ele alınacak, burada ele alınmayan 4 uzuvlu bazı diğer mekanizmalara ilişkin sonuçlar da Tablo 3.2.2 de topluca verilecektir.

3.3.1.2 Üç Çubuk Mekanizması • Freudenstein Denklemleri

Tablo 3.2.1 de, üç çubuk mekanizması için kısıt denklemleri

$$f_1(q, s_3, s_4) = r_2 \cos q + r_3 \cos s_3 - r_1 - r_4 \cos s_4 = 0 \quad (3.3.20)$$

$$f_2(q, s_3, s_4) = r_2 \sin q + r_3 \sin s_3 - r_4 \sin s_4 = 0$$

şeklinde verilmişti. $q \rightarrow \varphi$, $s_3 \rightarrow \theta_3$, $s_4 \rightarrow \theta_4$ gösterilimlerine geçilip (Bkz. Şekil 3.3.1) yeniden düzenlenerek bu denklemler

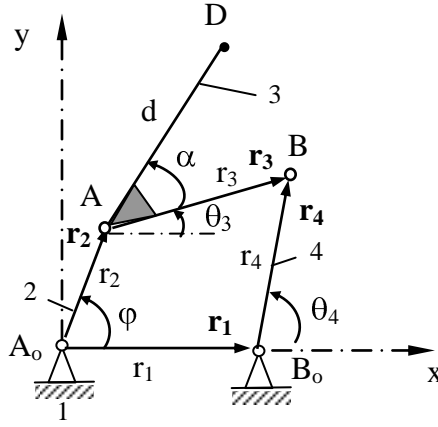
$$r_4 \cos \theta_4 = -r_1 + r_2 \cos \varphi - r_3 \cos \theta_3 \quad (3.3.21)$$

$$r_4 \sin \theta_4 = r_2 \sin \varphi + r_3 \sin \theta_3$$

ya da

$$r_3 \cos \theta_3 = r_1 - r_2 \cos \varphi + r_4 \cos \theta_4 \quad (3.3.22)$$

$$r_3 \sin \theta_3 = -r_2 \sin \varphi + r_4 \sin \theta_4$$



Şekil 3.3.1 Üç Çubuk Mekanizması

biçiminde yazılabilir. (3.3.21) denklemleri kareye kaldırılıp taraf tarafa toplanarak θ_4 , aynı iş (3.3.22) denklemleri ile yapılarak da θ_3 yok edilebilir ve

$$f_1(\varphi, \theta_3) = \sin \varphi \sin \theta_3 + \left(\cos \varphi - \frac{r_1}{r_2}\right) \cos \theta_3 + \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - r_4^2}{2r_2r_3} - \frac{r_1}{r_3} \cos \varphi = 0 \quad (3.3.23)$$

$$f_2(\varphi, \theta_4) = \sin \varphi \sin \theta_4 + \left(\cos \varphi - \frac{r_1}{r_2}\right) \cos \theta_4 - \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2}{2r_2r_4} + \frac{r_1}{r_4} \cos \varphi = 0 \quad (3.3.24)$$

elde edilir. Buradan ilkin $\theta_4, \dot{\theta}_4$ ve $\ddot{\theta}_4$ yı hesaplamaya çalışalım.

θ_4 ün hesaplanması: (3.3.24) denklemlerinde

$$K_1 = \frac{r_1}{r_4}, \quad K_2 = \frac{r_1}{r_2}, \quad K_3 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2}{2r_2r_4} \quad (3.3.25)$$

sabitlerinin tanımlanmasıyla

$$\sin \varphi \sin \theta_4 + (\cos \varphi - K_2) \cos \theta_4 + K_1 \cos \varphi - K_3 = 0, \quad (3.3.26)$$

burada da

$$A(\varphi) = \sin \varphi, \quad B(\varphi) = \cos \varphi - K_2, \quad D(\varphi) = K_1 \cos \varphi - K_3 \quad (3.3.27)$$

değişkenlerinin tanımlanmasıyla

$$A \sin \theta_4 + B \cos \theta_4 + D = 0 \quad (3.3.28)$$

yazılabilir. Bu denklemden θ_4 ü çözebilmek için

$$t = \tan \frac{\theta_4}{2} \rightarrow \sin \theta_4 = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \theta_4 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (3.3.29)$$

değişken dönüşümüne başvurulursa denklem

$$(D - B)t^2 + 2At + (B + D) = 0 \quad (3.3.30)$$

şeklını alır ve t için

$$t = \frac{A \mp \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}}{B - D} \quad (3.3.31)$$

çözümlerini verir. (3.3.29) değişken dönüşümünün kaldırılmasıyla da θ_4 için,

$$\theta_4 = g_4(\varphi) = 2 \tan^{-1} \left(\frac{A \mp \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}}{B - D} \right) \quad (3.3.32)$$

çözümüne ulaşılır. Burada "-" işaretli çözüm üç çubuk mekanizmasının "açık montajlı" olması haline, "+" işaretli çözüm ise "çapraz montajlı" olması haline karşılık gelmektedir (Bkz. Şekil 3.3.2). (3.3.28, 30, 32) denklemleri, topluca, kendilerini ortaya koyan bilim adamının adıyla *Freudenstein*¹² Denklemleri adıyla anılırlar.

$\dot{\theta}_4$ 'nın hesaplanması: (3.3.28) denkleminde dönülür ve buradan, A, B ve D nin de değişken olduğuna dikkat edilerek zamana göre türev alınırsa

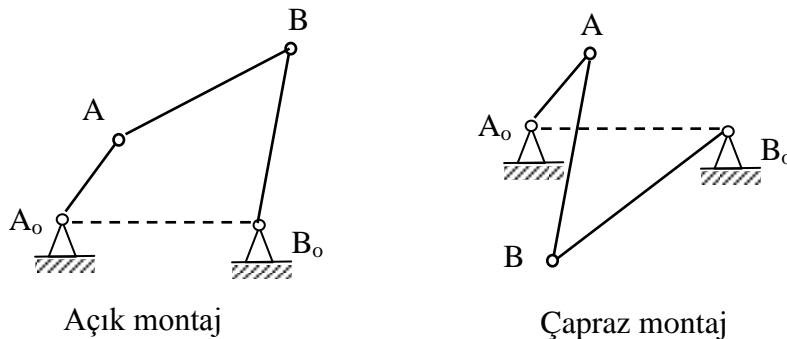
$$(A \cos \theta_4 - B \sin \theta_4) \dot{\theta}_4 + \dot{A} \sin \theta_4 + \dot{B} \cos \theta_4 + \dot{D} = 0 \quad (3.3.33)$$

elde edilir. Burada (3.3.27) eşitliklerinden türev alınarak bulunan

$$\dot{A}(\varphi) = \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{B}(\varphi) = -\sin \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{D}(\varphi) = -K_1 \sin \varphi \dot{\varphi} \quad (3.3.34)$$

eşitlikleri yerlerine konulur ve $\dot{\theta}_4$ çekilirse

$$\dot{\theta}_4 = \frac{\sin \varphi \cos \theta_4 - \cos \varphi \sin \theta_4 + K_1 \sin \varphi}{\sin \varphi \cos \theta_4 - \cos \varphi \sin \theta_4 + K_2 \sin \varphi} \cdot \dot{\varphi} \quad (3.3.35)$$



Şekil 3.3.2 Açık ve Çapraz Montaj

¹² Ferdinand Freudenstein (1926-2006). Alman asıllı Amerikalı kinematikçi. Modern mekanizma kinematiğinin kuruluşunun ve -Doktora öğrencileriyle Doktora torunlarının 500'ü geçen toplam sayısıyladünyaya yayılışının öncülerinden.

ya da (3.3.25) tanımları kaldırılıp düzenlenerek

$$\dot{\theta}_4 = g'_4(\varphi) \cdot \dot{\varphi} = \frac{\sin(\varphi - \theta_4) + \frac{r_1}{r_4} \sin \varphi}{\sin(\varphi - \theta_4) + \frac{r_1}{r_2} \sin \theta_4} \cdot \dot{\varphi} \quad (3.3.36)$$

elde edilir. Burada θ_4 , (3.3.32) den hesaplanarak yerine konulacaktır. Bu sonuca göre, 4 numaralı ikincil genelleştirilmiş koordinata ilişkin hız katsayısının

$$g'_4(\varphi) = \frac{\sin(\varphi - \theta_4) + \frac{r_1}{r_4} \sin \varphi}{\sin(\varphi - \theta_4) + \frac{r_1}{r_2} \sin \theta_4} \quad (3.3.37)$$

şeklinde elde edilmiş olduğunu not edelim.

$\ddot{\theta}_4$ *nın hesaplanması*: (3.3.4) bağıntısı uyarınca $\ddot{\theta}_4$ ivmesinin

$$\ddot{\theta}_4 = g''_4(\varphi) \dot{\varphi}^2 + g'_4(\varphi) \ddot{\varphi} \quad (3.3.38)$$

şeklinde hesaplanacağı bilinmektedir. Burada g'_4 hız katsayısı zaten bilindiğine göre yalnızca g''_4 ivme katsayısının hesaplanması yeterli olacaktır. Bu amaçla (3.3.37) deki g'_4 ifadesine dönülür ve bu ifade

$$z_1(\varphi) = \sin(\varphi - \theta_4) + \frac{r_1}{r_4} \sin \varphi, \quad z_2(\varphi) = \sin(\varphi - \theta_4) + \frac{r_1}{r_2} \sin \theta_4 \quad (3.3.39)$$

tanımları altında

$$g'_4(\varphi) = \frac{z_1(\varphi)}{z_2(\varphi)} \quad (3.3.40)$$

şeklinde yeniden yazılırsa, buradan φ ye göre türev alınarak, kolayca

$$\begin{aligned} z'_1(\varphi) &= [1 - g'_4(\varphi)] \cos(\varphi - \theta_4) + \frac{r_1}{r_4} \cos \varphi \\ z'_2(\varphi) &= [1 - g'_4(\varphi)] \cos(\varphi - \theta_4) + \frac{r_1}{r_2} g'_4(\varphi) \cos \theta_4 \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

olmak üzere

$$g''_4(\varphi) = \frac{z'_1(\varphi)z_2(\varphi) - z_1(\varphi)z'_2(\varphi)}{z_2^2(\varphi)} \quad (3.3.42)$$

elde edilir.

$\theta_3, \dot{\theta}_3, \ddot{\theta}_3$ nın hesaplanması: (3.3.23) denklemi, (3.3.27) tanımlarının yanısıra

$$C(\varphi) = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - r_4^2}{2r_2r_3} - \frac{r_1}{r_3} \cos \varphi \quad (3.3.43)$$

tanımı da devreye sokularak

$$A \sin \theta_3 + B \cos \theta_3 + C = 0 \quad (3.3.44)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan da, yukarıdakine benzer hesaplar sonunda, yine "-" işareti açık, "+" işareti çapraz montaj hallerine karşılık gelmek üzere

$$\theta_3 = g_3(\varphi) = 2 \tan^{-1} \left(\frac{A \mp \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C} \right) \quad (3.3.45)$$

elde edilir. (3.3.44, 45) denklemleri de *Freudenstein Denklemleri* adıyla anılırlar.

Hız çözümlemesi için (3.3.44) ten zamana göre türev alınıp $\dot{\theta}_3$ çekilerek

$$\dot{\theta}_3 = g'_3(\varphi) \cdot \dot{\varphi} = \frac{\sin(\varphi - \theta_3) - \frac{r_1}{r_3} \sin \varphi}{\sin(\varphi - \theta_3) + \frac{r_1}{r_2} \sin \theta_3} \cdot \dot{\varphi} \quad (3.3.46)$$

bulunur. Buna göre 3 numaralı ikincil genelleştirilmiş koordinata ilişkin hız katsayısının

$$g'_3(\varphi) = \frac{y_1}{y_2} = \frac{\sin(\varphi - \theta_3) - \frac{r_1}{r_3} \sin \varphi}{\sin(\varphi - \theta_3) + \frac{r_1}{r_2} \sin \theta_3} \quad (3.3.47)$$

şeklinde olduğu anlaşılır. İvme katsayısı da buradan φ ye göre türev alınarak

$$\begin{aligned} y_1(\varphi) &= \sin(\varphi - \theta_3) - \frac{r_1}{r_3} \sin \varphi, \\ y_2(\varphi) &= \sin(\varphi - \theta_3) + \frac{r_1}{r_2} \sin \theta_3, \\ y'_1(\varphi) &= [1 - g'_3(\varphi)] \cos(\varphi - \theta_3) - \frac{r_1}{r_3} \cos \varphi, \\ y'_2(\varphi) &= [1 - g'_3(\varphi)] \cos(\varphi - \theta_3) + \frac{r_1}{r_2} g'_3(\varphi) \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (3.3.48)$$

tanımları altında

$$g_3''(\varphi) = \frac{y_1'(\varphi)y_2(\varphi) - y_1(\varphi)y_2'(\varphi)}{y_2^2(\varphi)} \quad (3.3.49)$$

şeklinde hesaplanır. $\ddot{\theta}_3$ ivmesinin, hız ve ivme katsayıları yardımıyla

$$\ddot{\theta}_3 = g_3''(\varphi)\dot{\varphi}^2 + g_3'(\varphi)\ddot{\varphi} \quad (3.3.50)$$

şeklinde hesaplanacağı bilinmektedir.

D noktasının konum hız ve ivmesi: Şimdi de mekanizmaya ait herhangi bir noktanın konum, hız ve ivmesinin belirlenmesine bir örnek olmak üzere Şekil 3.3.1 deki üç çubuk mekanizmasının 3 numaralı uzvuna ait D noktasının konum, hız ve ivmesini belirleyelim. Konum için şekil yardımıyla kolayca

$$\mathbf{r}_D = \begin{Bmatrix} x_D(\varphi) \\ y_D(\varphi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2 \cos \varphi + d \cos(\theta_3 + \alpha) \\ r_2 \sin \varphi + d \sin(\theta_3 + \alpha) \end{Bmatrix} = \mathbf{g}_D(\varphi) \quad (3.3.51)$$

yazılabilir. $\mathbf{g}_D(\varphi)$ ifadesinden φ ye göre türev alınarak D noktasının hız ve ivme katsayıları vektörleri için

$$\mathbf{g}_D'(\varphi) = \begin{Bmatrix} -r_2 \sin \varphi - d \sin(\theta_3 + \alpha)g_3'(\varphi) \\ r_2 \cos \varphi + d \cos(\theta_3 + \alpha)g_3'(\varphi) \end{Bmatrix} \quad (3.3.52)$$

ve

$$\mathbf{g}_D''(\varphi) = \begin{Bmatrix} -r_2 \cos \varphi - d \cos(\theta_3 + \alpha)g_3''(\varphi) - d \sin(\theta_3 + \alpha)g_3'(\varphi) \\ -r_2 \sin \varphi - d \sin(\theta_3 + \alpha)g_3''(\varphi) + d \cos(\theta_3 + \alpha)g_3'(\varphi) \end{Bmatrix} \quad (3.3.53)$$

elde edilir. D nin hız ve ivme vektörlerinin bu katsayılar yardımıyla ve (3.3.14), (3.3.15) bağıntıları uyarınca

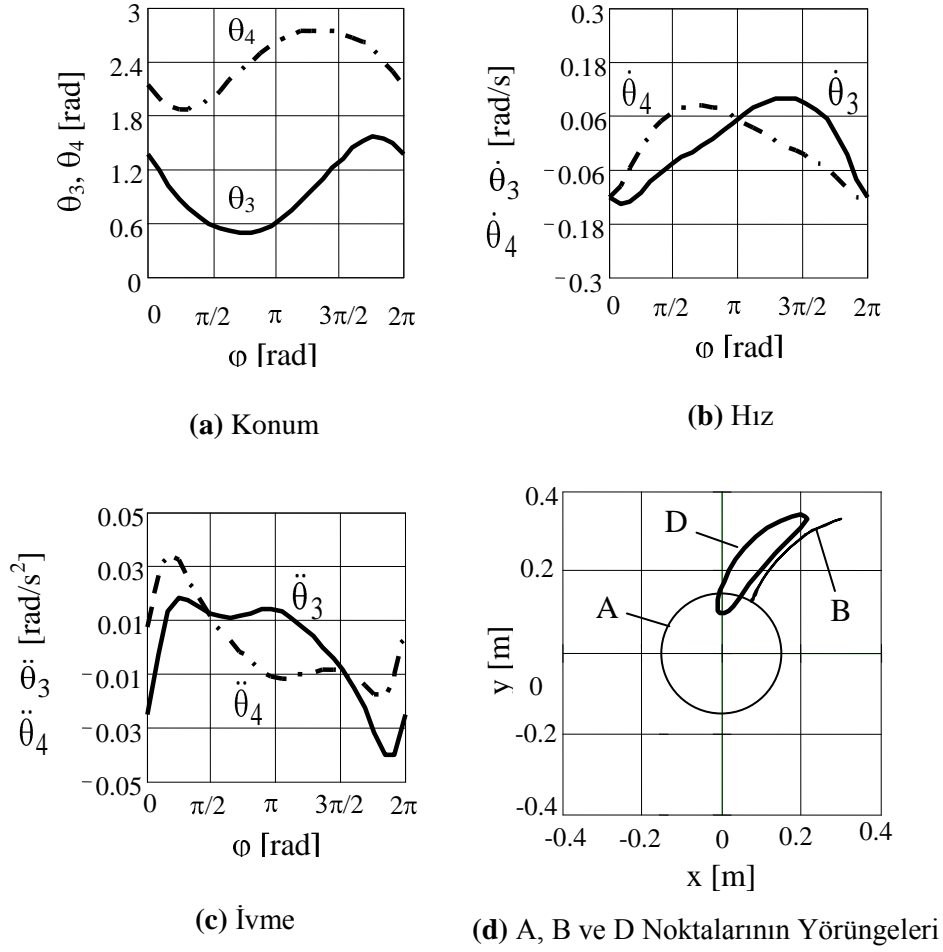
$$\dot{\mathbf{r}}_D = \mathbf{g}_D'(\varphi)\dot{\varphi} \quad (3.3.54)$$

ve

$$\ddot{\mathbf{r}}_D = \mathbf{g}_D''(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \mathbf{g}_D'(\varphi)\ddot{\varphi} \quad (3.3.55)$$

şeklinde hesaplanacağı açıktır.

Şekil 3.3.3 te, $r_1=40$ cm, $r_2=15$ cm, $r_3=30$ cm, $r_4=35$ cm, $d=25$ cm, $\alpha=\pi/12$ rad sayısal değerlerine sahip kol-sarkaç tipinde, açık montajlı bir üç çubuk mekanizmasında, krankın bir tam tur boyunca, sabit $\dot{\varphi} = \omega = 0.2$ rad/s açısal hızıyla ($\ddot{\varphi} = 0$) dönmesi hali için, yukarıda elde edilen formüllerin bilgisayarda değerlendirilmesiyle elde edilen sonuçlar verilmiştir.



Şekil 3.3.3 Üç Çubuk Mekanizması Kinematik Çözümlemesi

3.3.1.3 Krank-Biyel Mekanizması

Tablo 3.2.1 de krank-biyel mekanizmasının (A_o mafsalı genişletilerek sabit uzuv-krank eleman çifti yay çifti olarak tasarlanmış hali için) kısıt denklemleri

$$f_1(q, s_3, s_4) = r_2 \cos q + r_3 \cos s_3 - s_4 = 0 \quad (3.3.56)$$

$$f_2(q, s_3, s_4) = r_2 \sin q + r_3 \sin s_3 - e = 0$$

biçiminde verilmişti. Krank-biyel mekanizmalarında yaygın olarak kullanılan $r_2 \rightarrow r$, $r_3 \rightarrow \ell$, $q \rightarrow \phi$, $s_3 \rightarrow \theta$, $s_4 \rightarrow x$ gösterilimlerine geçerek (Bkz. Şekil 3.3.4-a) bu denklemleri

$$\ell \cos \theta = x - r \cos \phi \quad (3.3.57)$$

$$\ell \sin \theta = e - r \sin \phi$$

biçiminde yeniden yazalım. Denklemleri değişkenlere göre ayırmak üzere (3.3.57) denklemleri kareye kaldırılıp taraf tarafa toplanarak θ yok edilir, ayrıca ikinci denklemin kendiliğinden x 'i içermediğine dikkat edilirse

$$f_1(\varphi, x) = x^2 - 2r \cos \varphi \cdot x + (r^2 + e^2 - \ell^2 - 2e r \sin \varphi) = 0 \quad (3.3.58)$$

$$f_2(\varphi, \theta) = \ell \sin \theta + r \sin \varphi - e = 0 \quad (3.3.59)$$

elde edilir. Şimdi buradan, -kısıklık bakımından ivme çözümlemesini bir yana bırakarak konum ve hız çözümlemesini gerçekleştirelim.

x ve \dot{x} 'nın hesaplanması: x için 2. derece bir denklem olan (3.3.58) denkleminin

$$A(\varphi) = r \cos \varphi, \quad B(\varphi) = r^2 + e^2 - \ell^2 - 2e r \sin \varphi \quad (3.3.60)$$

tanımları altında çözülmesiyle

$$x = g_4(\varphi) = A \pm \sqrt{A^2 - B} \quad (3.3.61)$$

kökleri bulunur. Bunlardan "+" işaretli kök *sağ krank-biyel*, "-" işaretli kök ise *sol krank-biyel* hallerine karşılık gelmektedir (Bkz. Şekil 3.3.4-a,b).

İçten yanmalı motorlar, pistonlu pompalar gibi birçok makinada merkezci krank-biyel mekanizmaları kullanılmaktadır. Bu nedenle burada, merkezci, sağ krank-biyel mekanizması özel halinde $e=0$ ile (3.3.61) denkleminin

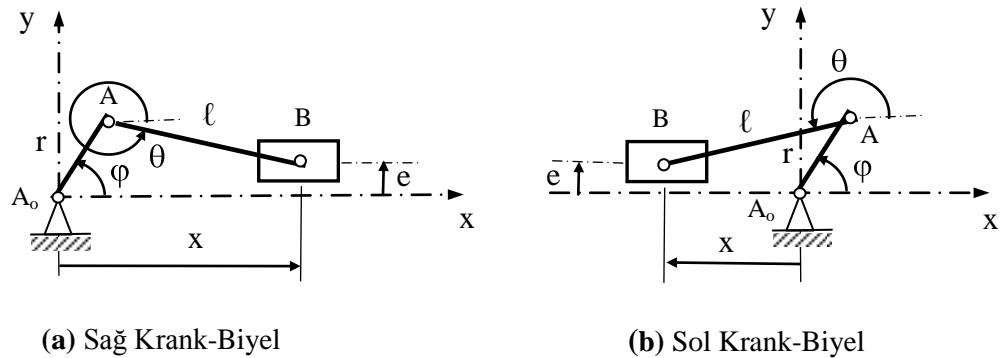
$$x = \ell \cdot \left[\lambda \cos \varphi + \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \right]; \quad \lambda = \frac{r}{\ell} \quad (3.3.62)$$

şeklini aldığını da not etmeden geçmeyelim¹³.

\dot{x} 'nın hesabı için ise, (3.3.58) den zamana göre türev alınıp \dot{x} çekilerek

$$\dot{x} = g'_4(\varphi) \dot{\varphi} = \frac{r(e \cos \varphi - x \sin \varphi)}{x - r \cos \varphi} \cdot \dot{\varphi} \quad (3.3.63)$$

bulunur.



Şekil 3.3.4 Krank-Biyel Mekanizması

¹³ Merkezci krank-biyelin kinematik çözümlemesi için bir yaklaşık hesap olanağına Makina Dinamiği Notları, Bölüm 5.3 te değinilmiştir.

θ ve $\dot{\theta}$ nın hesaplanması:

Denk. (3.3.59)'dan kolayca,

$$\theta = g_3(\varphi) = \sin^{-1}\left(\frac{e-r \sin \varphi}{\ell}\right) \quad (3.3.64)$$

çekilir. \sin^{-1} fonksiyonu çift değerli olduğu için, burada iki farklı çözüm söz konusudur. Sağ krank-biyel mekanizması halinde bu çözümlerden 1. ya da 4. trigonometrik çeyrekte yer alanı, sol krank-biyel mekanizması halinde ise 2. ya da 3. trigonometrik çeyrekte yer alanı geçerlidir.

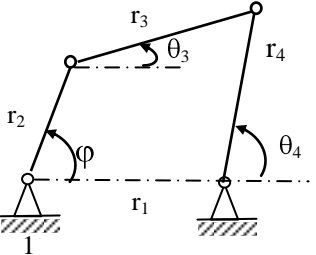
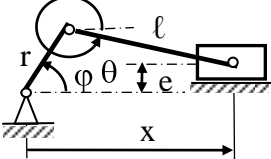
$\dot{\theta}$ nın hesabı için (3.3.59) denkleminde zamana göre türev alınıp buradan $\dot{\theta}$ nın çekilmesi yeterlidir. Bu yapılırsa

$$\dot{\theta} = g'_3(\varphi)\dot{\varphi} = -\frac{r \cos \varphi}{\ell \cos \theta} \cdot \dot{\varphi} \quad (3.3.65)$$

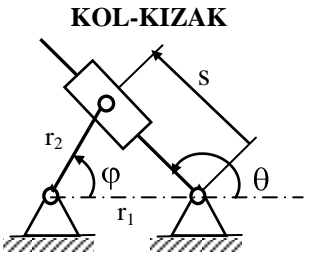
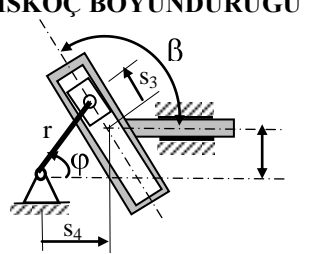
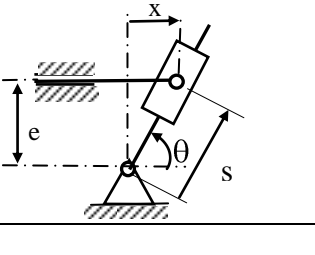
elde edilir.

Hem krank-biyel hem üç çubuk mekanizmasının kinematik çözümlemesine ilişkin toplu sonuçlar Tablo 3.3.1 de ayrıca verilmiştir.

Tablo 3.3.1 BAZI 4 UZUVLU MEKANİZMALARIN KİNEMATİK ÇÖZÜMLEMESİNDE ANALİTİK BAĞINTILAR

MEKANİZMA	GİRİŞ	ÇIKIŞ	KONUM	HIZ	İVME
	q	s	$s = g(q)$	$\dot{s} = g'(q) \cdot \dot{q}$ $g'(q) = \frac{z_1}{z_2}$	$\ddot{s} = g''(q) \cdot \dot{q}^2 + g'(q) \cdot \ddot{q}$ $g''(q) = \frac{z_1' \cdot z_2 - z_1 \cdot z_2'}{z_2^2}$
ÜÇ ÇUBUK  (+): Çapraz, (-): Açık montaj	phi	theta3	$\theta_3 = g_3(\varphi) = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C} \right)$ $A = \sin \varphi, \quad B = \cos \varphi - \frac{r_1}{r_2}$ $C = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - r_4^2}{2 \cdot r_2 r_3} - \frac{r_1}{r_3} \cos \varphi$	$z_1 = \sin(\varphi - \theta_3) - \frac{r_1}{r_3} \sin \varphi$ $z_2 = \sin(\varphi - \theta_3) + \frac{r_1}{r_2} \sin \theta_3$	$z_1' = \cos(\varphi - \theta_3) \cdot (1 - g_3') - \frac{r_1}{r_3} \cos \varphi$ $z_2' = \cos(\varphi - \theta_3) \cdot (1 - g_3') + \frac{r_1}{r_2} g_3' \cos \theta_3$
		theta4	$\theta_4 = g_4(\varphi) = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}}{B - D} \right)$ $D = \frac{r_1}{r_4} \cos \varphi - \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2}{2 \cdot r_2 r_4}$	$z_1 = \sin(\varphi - \theta_4) + \frac{r_1}{r_4} \sin \varphi$ $z_2 = \sin(\varphi - \theta_4) + \frac{r_1}{r_2} \sin \theta_4$	$z_1' = \cos(\varphi - \theta_4) \cdot (1 - g_4') + \frac{r_1}{r_4} \cos \varphi$ $z_2' = \cos(\varphi - \theta_4) \cdot (1 - g_4') + \frac{r_1}{r_2} g_4' \cos \theta_4$
KRANK-BİYEL  (+): Sağ, (-): Sol montaj	phi	theta	$\theta = g_\theta(\varphi) = \sin^{-1} \left(\frac{e - r \sin \varphi}{\ell} \right)$	$z_1 = -r \cos \varphi$ $z_2 = \ell \cos \theta$	$z_1' = r \sin \varphi$ $z_2' = -\ell g_\theta' \sin \theta$
		x	$x = g_x(\varphi) = A \pm \sqrt{A^2 - B}$ $A = r \cos \varphi$ $B = r^2 + e^2 - \ell^2 - 2 \cdot e \cdot r \sin \varphi$	$z_1 = r(e \cos \varphi - x \sin \varphi)$ $z_2 = x - r \cos \varphi$	$z_1' = -r \cdot [(e + g_x') \sin \varphi + x \cos \varphi]$ $z_2' = g_x' + r \sin \varphi$

Tablo 3.3.1 BAZI 4 UZUVLU MEKANİZMALARIN KİNEMATİK ÇÖZÜMLEMESİNDE ANALİTİK BAĞINTILAR (DEVAM)

MEKANİZMA	GİRİŞ	ÇIKIŞ	KONUM	HIZ	İVME
KOL-KIZAK 	phi	s	$s = g_s(\varphi) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \varphi}$	$z_1 = r_1 r_2 \sin \varphi$ $z_2 = s$	$z'_1 = r_1 r_2 \cos \varphi$ $z'_2 = g'_s$
		theta	$\theta = g_\theta(\varphi) = \tan^{-1} \left(\frac{r_2 \sin \varphi}{r_2 \cos \varphi - r_1} \right)$	$z_1 = (r_2^2 - r_1 r_2 \cos \varphi) \cos^2 \theta$ $z_2 = (r_2 \cos \varphi - r_1)^2$	$z'_1 = r_1 r_2 \sin \varphi \cos^2 \theta$ $- 2 \cdot g'_\theta \cdot (r_2^2 - r_1 r_2 \cos \varphi) \sin \theta \cos \theta$ $z'_2 = 2r_2 \cdot (r_1 - r_2 \cos \varphi) \sin \varphi$
İSKOÇ BOYUNDURUĞU 	phi	s3	$s_3 = g_3(\varphi) = \frac{r \sin \varphi - e}{\sin \beta}$	$z_1 = r \cos \varphi$ $z_2 = \sin \beta$	$z'_1 = -r \sin \varphi$ $z'_2 = 0$
		s4	$s_4 = g_4(\varphi) = \frac{r \sin(\beta - \varphi) + e \cos \beta}{\sin \beta}$	$z_1 = -r \cos(\beta - \varphi)$ $z_2 = \sin \beta$	$z'_1 = -r \sin(\beta - \varphi)$ $z'_2 = 0$
SÜRGÜ-KIZAK 	x	s	$s = g_s(x) = \sqrt{x^2 + e^2}$	$z_1 = x$ $z_2 = s$	$z'_1 = 1$ $z'_2 = g'_s$
		theta	$\theta = g_\theta(x) = \tan^{-1} \left(\frac{e}{x} \right)$	$z_1 = -e \cos^2 \theta$ $z_2 = x^2$	$z'_1 = 2 \cdot e \cdot g'_\theta \sin \theta \cos \theta$ $z'_2 = 2x$

3.3.2 SAYISAL YOL

Mekanizmaların kinematik çözümlemesinin çıkış noktasını esas ve ikincil genelleştirilmiş koordinatları birbirine bağlayan kısıt denklemlerinin oluşturduğunu belirtmiştik. (3.1.2) de verilmiş olan bu denklemleri, genel görünüşleriyle burada bir kez daha anımsatalım:

$$\begin{aligned} f_1(q, s_1, s_2, \dots, s_k) &= 0 \\ f_2(q, s_1, s_2, \dots, s_k) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ f_k(q, s_1, s_2, \dots, s_k) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.66)$$

s_j ikincil genelleştirilmiş koordinatlarının bu denklemlerden q nün fonksiyonu olarak kapalı formda hesaplanamaması halinde, bu denklemleri sayısal bir yöntemle çözerek, verilmiş bir q^* sayısal değerine karşılık gelen s_j^* sayısal değerlerini hesaplamaktan başka çıkar yol kalmaz. Bu iş için genellikle Newton-Raphson yöntemi kullanılır ve

$$s_j^* = s_j(q^*) \quad ; \quad j=1, 2, \dots, k \quad (3.3.67)$$

elde edilir. Bu durumda, konum çözümlemesinin sonucuna bağlı olduğu bilinen hız ve ivme çözümlemesinin de mekanizmanın verilen q^* konumu özelinde sürdürülmesi gerekir. Ancak, elde konum çözümlemesinin analitik sonucu bulunmadığına göre, hız ve ivme hesabı için de eldeki tek analitik bilgi olan (3.3.66) denklemlerine dönmek gerektiği ortadadır. Bu amaçla bu denklemlerin tam diferansiyeli alınır ve

$$\begin{aligned} df_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial f_1}{\partial s_2} ds_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial s_k} ds_k + \frac{\partial f_1}{\partial q} dq = 0 \\ df_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial f_2}{\partial s_2} ds_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial s_k} ds_k + \frac{\partial f_2}{\partial q} dq = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ df_k &= \frac{\partial f_k}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial f_k}{\partial s_2} ds_2 + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial s_k} ds_k + \frac{\partial f_k}{\partial q} dq = 0 \end{aligned} \quad (3.3.68)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \{f_1, f_2, \dots, f_k\}^T \rightarrow d\mathbf{f} = \{df_1, df_2, \dots, df_k\}^T \\ \mathbf{s} &= \{s_1, s_2, \dots, s_k\}^T \rightarrow d\mathbf{s} = \{ds_1, ds_2, \dots, ds_k\}^T \\ \mathbf{f}'(q, \mathbf{s}) &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q} = \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial q}, \frac{\partial f_2}{\partial q}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial q} \right\}^T \end{aligned} \quad (3.3.69)$$

$k \times 1$ sütun matrisleri ve \mathbf{f} vektör fonksiyonunun \mathbf{s} vektör argümanına göre kısmi türevini oluşturan ve (\mathbf{f} nin \mathbf{s} ye göre) *Jacobi*¹⁴ *Matrisi*, ya da *Jacobiye*ni adını alan

¹⁴ Karl Jacobi (1804-1851). Alman matematikçisi.

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial s_1} & \frac{\partial f_k}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial s_k} \end{bmatrix} \quad (3.3.70)$$

kxk kare matrisi tanımlanırsa, (3.3.68) eşitlikleri, matris-vektör gösterilimiyle

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J}d\mathbf{s} + \mathbf{f}'d\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.3.71)$$

şeklinde de yazılabilir. Buradan, terim terim dt ye oranlayıp zamana göre türevlere geçilirse ikincil hızlar vektörü $\dot{\mathbf{s}}$ nın elemanları için

$$\boxed{\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \cdot \dot{\mathbf{q}}} \quad (3.3.72)$$

lineer cebirsel denklem takımı elde edilir. $\det \mathbf{J} \neq 0$ olmak kaydıyla (3.3.72) soldan \mathbf{J}^{-1} ile çarpılarak¹⁵ hızlar için

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})^{-1} \mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (3.3.73)$$

bulunur. Buna göre, konum çözümlemesinin (3.3.67) deki sonucundan yararlanılarak mekanizmanın verilen konumundaki hızlar

$$\dot{\mathbf{s}}^* = -\mathbf{J}(\mathbf{q}^*, \mathbf{s}^*)^{-1} \mathbf{f}'(\mathbf{q}^*, \mathbf{s}^*) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (3.3.74)$$

şeklinde hesaplanabilir. İvmelerin hesabı için ise (3.3.72) den zamana göre tam türev almak yeterlidir. Bu yapılırsa

$$\boxed{\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})\ddot{\mathbf{s}} = -\frac{d\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{dt} \cdot \dot{\mathbf{s}} - \frac{d\mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{dt} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \cdot \ddot{\mathbf{q}}} \quad (3.3.75)$$

veya

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})\ddot{\mathbf{s}} = -\frac{d\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{dq} \cdot \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{s}} - \frac{d\mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{dq} \cdot \dot{\mathbf{q}}^2 - \mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.3.76)$$

ya da $\dot{\mathbf{s}}$ için (3.3.73) ifadesi yerine konularak

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})\ddot{\mathbf{s}} = \left(\frac{d\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{dq} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})^{-1} \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) - \frac{d\mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{dq} \right) \cdot \dot{\mathbf{q}}^2 - \mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.3.77)$$

lineer cebirsel denklem takımına gelinir. İstenirse, (3.3.76) daki tam türevler açılarak

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})\ddot{\mathbf{s}} = - \left[\sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{\partial s_j} g_j'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) + 2 \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{\partial q} \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) + \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{\partial q^2} \right] \cdot \dot{\mathbf{q}}^2 - \mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.3.78)$$

¹⁵ $\mathbf{J}=\mathbf{J}(\mathbf{q})$ olduğundan $\det \mathbf{J}$ konumdan konuma değişir. $\det \mathbf{J}=0$ olmasına yol açan mekanizma konumlarına tekil konum denir.

de yazılabilir. İvmeler için ise örneğin (3.3.77) den

$$\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})^{-1} \cdot \left(\frac{d\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{dq} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})^{-1} \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) - \frac{d\mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{dq} \right) \cdot \dot{\mathbf{q}}^2 - \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})^{-1} \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.3.79)$$

elde edilir. Buradan, mekanizmanın verilen \mathbf{q}^* konumundaki ivmeler, (3.3.67) deki sayısal sonuçlardan da yararlanılarak

$$\ddot{\mathbf{s}}^* = \mathbf{J}^{*-1} \cdot \left(\frac{d\mathbf{J}^*}{dq} \cdot \mathbf{J}^{*-1} \cdot \mathbf{f}'^* - \frac{d\mathbf{f}'^*}{dq} \right) \cdot \dot{\mathbf{q}}^2 - \mathbf{J}^{*-1} \cdot \mathbf{f}'^* \cdot \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.3.80)$$

şeklinde hesaplanabilir. (3.3.3) ile (3.3.73) ifadelerinin karşılaştırılmasından, bütün $\mathbf{g}'_j(\mathbf{q})$ hız katsayılarını bünyesinde barındıran $k \times 1$ boyutlu bir sütun matrisin

$$\mathbf{g}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) = -\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})^{-1} \mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \quad (3.3.81)$$

şeklinde, (3.3.4) ile (3.3.79) un, (3.3.73) de dikkate alınarak karşılaştırılmasından ise bütün $\mathbf{g}''_j(\mathbf{q})$ ivme katsayılarını barındıran benzer bir matrisin

$$\mathbf{g}''(\mathbf{q}, \mathbf{s}) = -\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})^{-1} \left(\frac{d\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{dq} \mathbf{g}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) + \frac{d\mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{dq} \right) \quad (3.3.82)$$

ya da açık yazıldığında

$$\mathbf{g}''(\mathbf{q}, \mathbf{s}) = -\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})^{-1} \left[\left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{\partial s_j} \mathbf{g}'_j(\mathbf{q}, \mathbf{s}) + 2 \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{\partial q} \right) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) + \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{\partial q^2} \right] \quad (3.3.83)$$

şeklinde hesaplanabileceği anlaşılır. Bunlara, sırasıyla, *hız katsayıları vektörü* ve *ivme katsayıları vektörü* adı verilir. İstenirse, hız ve ivme çözümlemesi problemleri bu vektörler kullanılarak

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{g}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.3.84)$$

ve

$$\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{g}''(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \dot{\mathbf{q}}^2 + \mathbf{g}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.3.85)$$

şeklinde de formüle edilebilir.

Dikkat edilirse, analitik yolda s_j lerin q cinsinden hesaplanarak problem den düşürülebilmesine karşılık sayısal yolda bu yapılamadığı için problemin s_j lere bağımlı kalması dışında, hız ve ivme çözümlemesi problemleri, ilke olarak, her iki yolda aynıdır. Bu nedenle, hız ve ivme katsayılarının hesabıyla ilgili olarak burada verilen denklemler analitik yolda da kullanılabilir. Öte yandan, mekanizmanın bir noktasının kinematik çözümlemesine ve gerekli bazı diferansiyellerin hesabına ilişkin olarak analitik yolda verilmiş olan ifadelerin de sayısal yolda da geçerli olacağı ve burada yinelenmelerine gerek bulunmadığı ortadadır.

Örnek: Üç Çubuk Mekanizmasının Kinematik Çözümlemesi

Üç çubuk mekanizmasına ait kısıt denklemleri (3.3.20) uyarınca

$$f_1(\varphi, \theta_3, \theta_4) = r_2 \cos \varphi + r_3 \cos \theta_3 - r_4 \cos \theta_4 - r_1 = 0 \quad (3.3.86)$$

$$f_2(\varphi, \theta_3, \theta_4) = r_2 \sin \varphi + r_3 \sin \theta_3 - r_4 \sin \theta_4 = 0$$

şeklinde bilinmektedir. Buna göre, kısıt fonksiyonları vektörü

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} r_2 \cos \varphi + r_3 \cos \theta_3 - r_4 \cos \theta_4 - r_1 \\ r_2 \sin \varphi + r_3 \sin \theta_3 - r_4 \sin \theta_4 \end{Bmatrix} \quad (3.3.87)$$

şeklindedir. Bu vektörün esas genelleştirilmiş koordinat φ ye göre kısmi türevi

$$\mathbf{f}' = \begin{Bmatrix} -r_2 \sin \varphi \\ r_2 \cos \varphi \end{Bmatrix} \quad (3.3.88)$$

şeklinde, Jacobiye ise (3.3.70) bağıntısı uyarınca

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -r_3 \sin \theta_3 & r_4 \sin \theta_4 \\ r_3 \cos \theta_3 & -r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \quad (3.3.89)$$

şeklinde hesaplanır. (3.3.88) ve (3.3.89) ifadeleri (3.3.81) de yerine konularak hesap yapılırsa mekanizmanın hız katsayıları vektörü

$$\mathbf{g}' = \begin{Bmatrix} g'_3 \\ g'_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{r_2 \sin(\varphi - \theta_4)}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \\ \frac{r_2 \sin(\varphi - \theta_3)}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \end{Bmatrix} \quad (3.3.90)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki g'_3 ve g'_4 ifadeleri analitik yoldan elde edilen (3.3.37) ve (3.3.47) hız katsayısı ifadeleri kullanılarak yazılan

$$\mathbf{g}' = \begin{Bmatrix} g'_3 \\ g'_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sin(\varphi - \theta_3) - r_1 / r_3 \sin \varphi}{\sin(\varphi - \theta_3) + r_1 / r_2 \sin \theta_3} \\ \frac{\sin(\varphi - \theta_4) + r_1 / r_4 \sin \varphi}{\sin(\varphi - \theta_4) + r_1 / r_2 \sin \theta_4} \end{Bmatrix} \quad (3.3.91)$$

ifadesi ile karşılaştırılırsa, analitik yolda g'_3 nün θ_4 ten, g'_4 nün de θ_3 ten bağımsız olmasına karşılık sayısal yolda her ikisinin de hem θ_3 hem θ_4 e bağlı olduğu görülür. Buradan anlaşılacağı gibi analitik yolda farklı koordinatlara ilişkin kinematik çözümlemeler birbirinden bağımsız olarak sürdürülebilirken sayısal yolda bunların hep birlikte yürütülmesi zorunluluğu vardır. Denk. (3.3.90)'daki hız katsayıları vektörü kullanılarak 3 ve 4 numaralı uzuvların açısal hızları (3.3.83) uyarınca

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{r_2}{r_3} \frac{\sin(\varphi-\theta_4)}{\sin(\theta_3-\theta_4)} \\ \frac{r_2}{r_4} \frac{\sin(\varphi-\theta_3)}{\sin(\theta_3-\theta_4)} \end{Bmatrix} \cdot \dot{\varphi} \quad (3.3.92)$$

şeklinde hesaplanabilir. Ancak bu hızların hesaplanabilmesi için Jacobiyenin tersinin alınmasını gerektiren (3.3.84) bağıntısının kullanılması zorunlu değildir. İstenirse (3.3.72) den, (3.3.88) ve (3.3.89) kullanılarak yazılacak

$$\begin{bmatrix} -r_3 \sin \theta_3 & r_4 \sin \theta_4 \\ r_3 \cos \theta_3 & -r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -r_2 \sin \varphi \\ r_2 \cos \varphi \end{Bmatrix} \cdot \dot{\varphi} \quad (3.3.93)$$

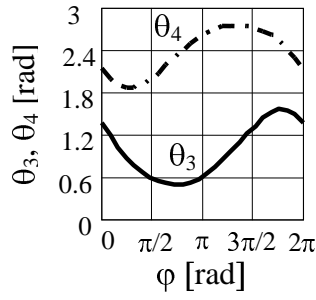
lineer cebirsel denklem takımının (Gauss, Crout vb. yöntemlerinden herhangi biriyle) sayısal olarak çözülmesiyle de sonuca gidilebilir.

İvme hesabı için ise, örneğin (3.3.75) denklemini esas alınırsa

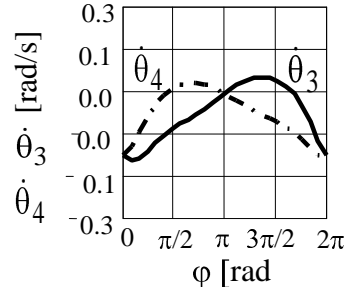
$$\begin{bmatrix} -r_3 \sin \theta_3 & r_4 \sin \theta_4 \\ r_3 \cos \theta_3 & -r_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -r_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 & r_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 \\ -r_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 & r_4 \sin \theta_4 \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -r_2 \cos \varphi \\ -r_2 \sin \varphi \end{Bmatrix} \cdot \ddot{\varphi} - \begin{Bmatrix} -r_2 \sin \varphi \\ r_2 \cos \varphi \end{Bmatrix} \cdot \dot{\varphi} \quad (3.3.94)$$

yazılabilir ve $\ddot{\theta}_3$ ile $\ddot{\theta}_4$ buradan kolayca hesaplanabilir.

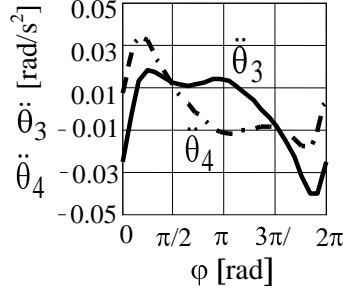
Şimdi bir sayısal örnek olarak Şekil 3.3.1 deki üç çubuk mekanizması ele alınsın. Mekanizmanın boyutları, analitik yol için ele alınan örnekte olduğu gibi $r_1=40$ cm, $r_2=15$ cm, $r_3=30$ cm, $r_4=35$ cm, $d=25$ cm, $\alpha=\pi/12$ rad $=15^\circ$ olsun ve yine krankın sabit $\dot{\varphi} = \omega = 0.2$ rad/s açısal hızıyla ($\ddot{\varphi} = 0$) dönmesi hali için, bir tam devir boyunca, nokta nokta hesap yapılsın. Konum çözümlemesinde, (3.3.86) denklemlerinin θ_3 ve θ_4 bilinmeyenleri için sayısal olarak çözülmesi sırasında iki farklı çözüm takımı bulunduğu görülür. Bunlar, açık ve çapraz montaj hallerine karşılık gelen çözümlerden başka birşey değildirler. Denklemlerin çözümünde kullanılan Newton-Raphson yöntemi iteratif bir yöntem olduğundan, sürecin bu çözümlerden hangisine yakınsayacağı iterasyon başlangıç değerlerinin seçimine bağlıdır. Mekanizmanın $\varphi=0$ konumundan başlayıp $\varphi=2\pi$ konumuna kadar $\Delta\varphi$ adımlarıyla ilerleyerek adım adım hesap yapılırken hep aynı ve arzu edilen montaj durumuna ait çözümleri elde edebilmek için belli bir sistematik içerisinde hareket etmek gerekir. Bu amaçla, mekanizmanın $\varphi=0$ konumu için iterasyon başlangıç değerleri, örneğin açık montajlı üç çubuk mekanizmasına ait çözüme (ki mekanizmanın bu konumdaki ölçekli kinematik diyagramı çizilerek yaklaşık olarak elde edilebilir) yakın değerler olarak verilip sonra da, $\varphi=2\pi$ değerine kadar küçük $\Delta\varphi$ adımlarıyla ilerlerken, her adımda bir önceki adımın çözümü iterasyon başlangıç değeri olarak kullanılırsa, ele alınan üç çubuk mekanizmasının açık montajlı olması hali için kinematik çözümleme gerçekleştirilmiş olur. Bilgisayar yardımıyla, bu şekilde elde edilen sonuçlar analitik yoldan bulunanlarla aynı olup Şekil 3.3.5 te verildiği gibidir.



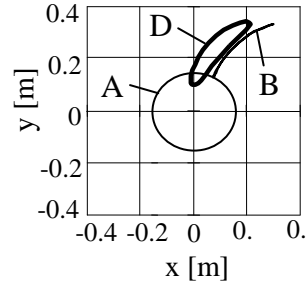
(a) Konum Çözümlemesi



(b) Hız Çözümlemesi



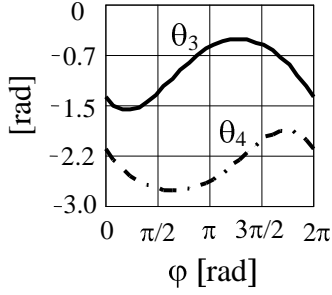
(c) İvme Çözümlemesi



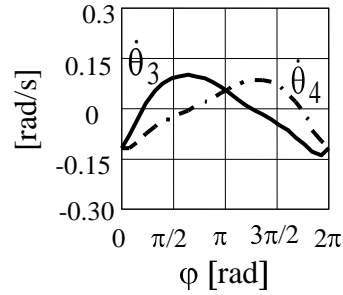
(d) A, B ve D Noktalarının Yörüngeleri

Şekil 3.3.5 Üç Çubuk Mekanizması Kinematik Çözümlemesi (Açık Montaj Hali)

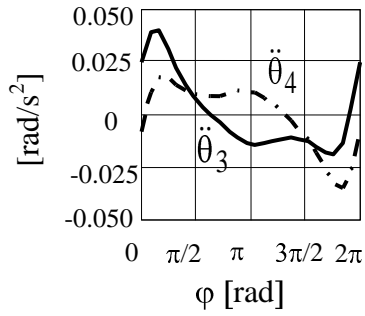
Yukarıdaki işlemlerin $\varphi=0$ konumu için çapraz montajlı üç çubuk mekanizmasına ait çözüme yakın değerler olarak verilerek yinelenmesi halinde ise bu hale ilişkin kinematik çözümleme gerçekleştirilmiş olur. Sonuçlar Şekil 3.3.6 da verildiği gibidir.



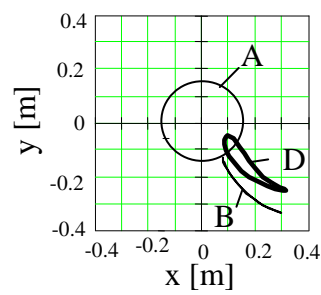
(a) Konum



(b) Hız



(c) İvme



(d) A, B ve D

Şekil 3.3.6 Üç Çubuk Mekanizması Kinematik Çözümlemesi (Çapraz Montaj Hali)

3.3.3 ANALİTİK VE SAYISAL YOLLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

Mekanizmaların kinematik çözümlemesinde analitik ve sayısal yolların yukarıdaki incelemelerde ortaya çıkan temel özelliklerine işaret edilip başlıca üstünlük ve zaafalarının belirtilerek bir karşılaştırmalarının yapılması yerinde olur.

Analitik Yolda;

- Her ikincil koordinata ilişkin kinematik çözümleme problemi öbürlerininkinden bağımsız olup tek başına ele alınabilir,
- Sonuçlar belli bir yaklaşıklıkla değil kesin olarak elde edilir,
- Elde edilen formüller mekanizmanın boyutlarından ve konumundan bağımsızdır,
- Elde edilen formüller elde hesap yapılmasına da olanak verir,
- Bu formüller bilgisayarda büyük bir hızla değerlendirilir,
- Makina dinamiğinde analitik problem formülasyonlarıyla uyum sağlar,
- Kısıt denklemlerinin çok çözümlülüğüne ilişkin sorunlar önceden aşılmış ve seçenekler ayırılmıştır.

Buna karşılık;

- Analitik formüllerin elde edilmesinde belirli bir sistematik bulunmayıp her mekanizmanın ayrı ayrı ele alınması gerekir,
- Çok uzuvlu mekanizmalara doğru gidildikçe bu formüllerin elde edilmesi güçleşir, hatta olanaksızlaşır.

Sayısal yolda ise;

- Kısıt denklemleri dışında işlemler her mekanizma için aynıdır. Kısıt denklemleri verilmek kaydıyla bütün mekanizmalarda geçerli programlama yapılabilir.

Buna karşılık;

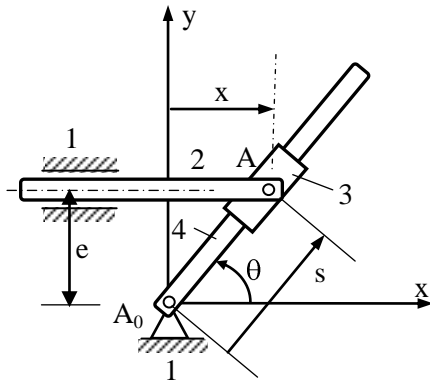
- Farklı ikincil koordinatlara ilişkin problemler birbirinden ayrılamaz, topluca çözülür,
- Sonuçlar belli bir sayısal yaklaşıklık çerçevesinde elde edilir,
- Yalnız verilmiş mekanizma boyutlarına ve konumuna karşılık gelen çözüm bulunabilir,
- Lineer olmayan cebirsel denklemlerin iteratif sayısal çözümünü içerdiğinden elde hesap yapmaya elverişli değildir; bilgisayar kullanımı gerektirir,
- Gerektirdiği bilgisayar zamanı görece olarak fazladır,
- İteratif çözümde yakınsama sorunları yaşanabilir,
- Çok çözümlülükle ilgili olarak, istenmeyen çözüme yakınsama sorunları yaşanabilir.

Yukarıda sıralanan özelliklerinden anlaşılacağı gibi bir mekanizmanın kinematik çözümlemesi yapılırken, eğer varsa, analitik yoldan elde edilmiş formüllerin kullanılması daha uygundur. Ne var ki dört uzuvlu mekanizmalar ile kimi altı uzuvlu mekanizmalar dışında böyle formüller verilmiş değildir. Elde formülleri bulunmayan bir mekanizmada bunları elde etme gayretine girmek acil çözüm bekleyen bir problemde uygun bir yol

oluşturmaz. Böyle durumlarda uygun olan, sayısal yola yönelmektir. Bu bakımdan her tasarımcı mühendisin elde genel amaçlı bir sayısal kinematik çözümleme programı bulundurmasında yarar vardır. Bu, ileride görüleceği gibi, makinaların dinamik hesaplarının gerçekleştirilebilmesi için de zorunludur. Aşağıda, Örnek Problem 3.3.4'te, çevrim kapama denklemleri verilmek kaydıyla kinematik çözümlemeyi gerçekleştiren böyle bir Mathcad® programının 6 uzuvlu mekanizmalar için düzenlenmiş hali verilmiştir. Böyle programlar ticari olarak da temin edilebilmektedir.

PROBLEMLER

Örnek Problem 3.3.1



Şekil Pr. 3.3.1

Şekildeki, $e=40$ cm boyutuna sahip sürgü-kızak mekanizmasında 2 no.lu uzuv $\dot{x} = 3$ cm/s sabit hızıyla hareket etmektedir. Mekanizmanın $x=30$ cm ile tanımlanan konumunda;

- Analitik yoldan konum, hız ve ivme çözümlemesi gerçekleştiriniz,
- (a) şıkkındaki konum için sayısal yola özgü formülasyon yardımı ile hız ve ivme çözümlemesi gerçekleştirerek \dot{s} , \ddot{s} , $\dot{\theta}$ ve $\ddot{\theta}$ değerlerini elde ediniz.

Çözüm:

- Tablo 3.3.1 yardımıyla s ikincil koordinatı için

$$s = \sqrt{x^2 + e^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ cm}, \quad (i)$$

$$\dot{s} = \frac{x}{s} \cdot \dot{x} = \frac{30}{50} \cdot 3 = 1.8 \text{ cm/s}, \quad (ii)$$

$$\ddot{s} = \frac{s - x \frac{x}{s}}{s^2} \cdot \dot{x}^2 + \frac{x}{s} \cdot 0 = \frac{50 - 30 \frac{30}{50}}{50^2} \cdot 3^2 = 0.1152 \text{ cm/s}^2, \quad (iii)$$

- θ ikincil koordinatı için ise

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{e}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{40}{30}\right) = 53.13^\circ = 0.9273 \text{ rad}, \quad (iv)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{e \cos^2 \theta}{x^2} \cdot \dot{x} = -\frac{40 \cos^2 53.13}{30^2} \cdot 3 = -0.048 \text{ rad/s}, \quad (v)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2e \cos^2 \theta}{x^4} \cdot (x - e \cos \theta \sin \theta) \cdot \dot{x}^2 - \frac{e \cos^2 \theta}{x^2} \cdot 0$$

$$= \frac{2 \cdot 40 \cos^2 53.13}{30^4} \cdot (30 - 40 \cos 53.13 \sin 53.13) \cdot 3^2 = 0.0035 \text{ rad/s}^2 \quad (\text{vi})$$

hesaplanır.

b) Bu mekanizmada kısıt denklemlerinin

$$f_1(x,s,\theta) = x - s \cdot \cos \theta = 0 \quad (\text{vii})$$

$$f_2(x,s,\theta) = e - s \cdot \sin \theta = 0$$

şeklinde yazılabileceği kolayca görülebilir. Hız çözümlemesinde, Denk. (3.3.72) deki

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{viii})$$

ifadesine göre hesap yapmak uygun olur. Bu amaçla, $\mathbf{q} = \mathbf{x}$, $\mathbf{f} = \{f_1 \ f_2\}^T$, $\mathbf{s} = \{s \ \theta\}^T$ alınıp,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & s \cdot \sin \theta \\ -\sin \theta & -s \cdot \cos \theta \end{bmatrix}, \mathbf{f}' = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{ix})$$

belirlendikten sonra Denk. (viii) e dönülürse

$$\begin{bmatrix} -\cos \theta & s \cdot \sin \theta \\ -\sin \theta & -s \cdot \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \dot{x}, \quad (\text{x})$$

burada (a) şıkkında bulunan $s=50 \text{ cm}$, $\theta=53.13^\circ$ değerleri yerlerine konulup hesap yapılarak da

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 40 \\ -0.8 & -30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 3 \rightarrow \dot{s} = 1.8 \text{ cm/s}, \quad \dot{\theta} = -0.048 \text{ rad/s} \quad (\text{xi})$$

elde edilir. İvme çözümlemesinde ise, Denk. (3.3.75) deki

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \ddot{\mathbf{s}} = -\frac{d\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{dt} \cdot \dot{\mathbf{s}} - \frac{d\mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{dt} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} \quad (\text{xii})$$

ifadesine göre hesap yapmak düşünülebilir. Burada kullanılmak üzere, Denk. (ix) dan

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cdot \dot{\theta} & \dot{s} \cdot \sin \theta + s \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta} \\ -\cos \theta \cdot \dot{\theta} & -\dot{s} \cdot \cos \theta + s \cdot \sin \theta \cdot \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{f}'}{dt} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{xiii})$$

hesaplandıktan sonra, $\ddot{x} = 0$ olduğuna da dikkat edilerek Denk. (ix) ve (xiii) ile Denk. (xii) ye gidilirse

$$\begin{bmatrix} -\cos \theta & s \cdot \sin \theta \\ -\sin \theta & -s \cdot \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sin \theta \cdot \dot{\theta} & \dot{s} \cdot \sin \theta + s \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta} \\ -\cos \theta \cdot \dot{\theta} & -\dot{s} \cdot \cos \theta + s \cdot \sin \theta \cdot \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (\text{xiv})$$

elde edilir. Verilenler, (a) şıkında hesaplananlar ve Denk. (xi) deki hızlar yerlerine yazılıp denklem takımı çözülürse

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 40 \\ -0.8 & -30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -0.0384 & 0 \\ 0.0288 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.8 \\ -0.048 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \ddot{s} = 0.1152 \text{ cm/s}^2 \\ \ddot{\theta} = 0.0035 \text{ rad/s}^2 \end{matrix} \quad (\text{xv})$$

bulunur. Sonuçlar (a)'da bulunanlarla aynıdır.

Örnek Problem 3.3.2

Şekil Pr.3.3.2'de görülen çabuk dönüş mekanizmasının sayısal yoldan kinematik çözümlemesini yapmak üzere

- Kısıt denklemlerini elde ediniz.
- Gerekli matris ve vektörleri belirleyerek hız ve ivme çözümlemesi problemlerini formüle ediniz.

Çözüm:

- Şekil yardımıyla, vektörel çevrim kapama denklemleri, s_3 , s_5 ve s_6 değişken boylarındaki vektörler, sırasıyla \mathbf{r}_3 , \mathbf{r}_5 ve \mathbf{r}_6 ile gösterilerek

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_{11} + \mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_5 &= \mathbf{r}_{13} + \mathbf{r}_6 \end{aligned} \quad (\text{i})$$

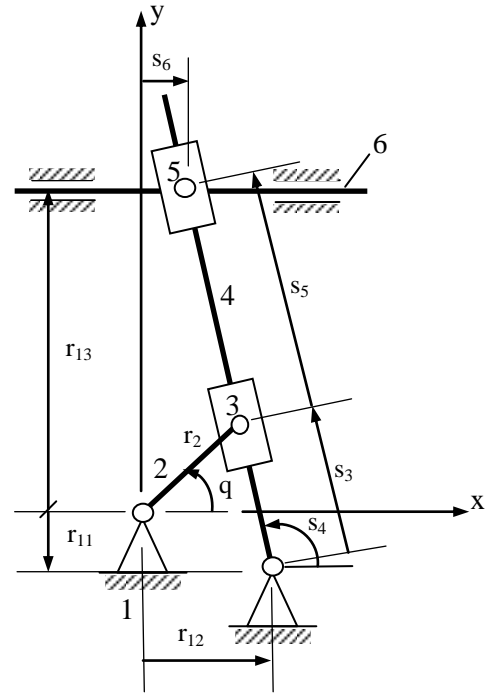
şeklinde, buradan skaler denklemler de

$$\begin{aligned} r_2 \cos q &= r_{12} + s_3 \cos s_4 \\ r_2 \cos q + s_5 \cos s_4 &= s_6 \\ r_2 \sin q &= -r_{11} + s_3 \sin s_4 \\ r_2 \sin q + s_5 \sin s_4 &= r_{13} \end{aligned} \quad (\text{ii})$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre kısıt denklemleri

$$\begin{aligned} f_1(q, s_3, s_4, s_5, s_6) &= r_2 \cos q - s_3 \cos s_4 - r_{12} = 0 \\ f_2(q, s_3, s_4, s_5, s_6) &= r_2 \cos q + s_5 \cos s_4 - s_6 = 0 \\ f_3(q, s_3, s_4, s_5, s_6) &= r_2 \sin q - s_3 \sin s_4 + r_{11} = 0 \\ f_4(q, s_3, s_4, s_5, s_6) &= r_2 \sin q + s_5 \sin s_4 - r_{13} = 0 \end{aligned} \quad (\text{iii})$$

şeklindedir.



Şekil Pr. 3.3.2

b) Denk. (3.3.72)'ye göre hız çözümlemesi problemi

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{iv})$$

şeklinde formüle edilebilir. Burada $\mathbf{f} = \{f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4\}^T$, $\mathbf{s} = \{s_3 \ s_4 \ s_5 \ s_6\}^T$ alınarak hesaplanan

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\cos s_4 & s_3 \sin s_4 & 0 & 0 \\ 0 & -s_5 \sin s_4 & \cos s_4 & -1 \\ -\sin s_4 & -s_3 \cos s_4 & 0 & 0 \\ 0 & s_5 \cos s_4 & \sin s_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}' = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -r_2 \sin q \\ -r_2 \sin q \\ r_2 \cos q \\ r_2 \cos q \end{bmatrix} \quad (\text{v})$$

ifadeleri yerlerine konulursa

$$\begin{bmatrix} -\cos s_4 & s_3 \sin s_4 & 0 & 0 \\ 0 & -s_5 \sin s_4 & \cos s_4 & -1 \\ -\sin s_4 & -s_3 \cos s_4 & 0 & 0 \\ 0 & s_5 \cos s_4 & \sin s_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_3 \\ \dot{s}_4 \\ \dot{s}_5 \\ \dot{s}_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -r_2 \sin q \\ -r_2 \sin q \\ r_2 \cos q \\ r_2 \cos q \end{bmatrix} \dot{q} \quad (\text{vi})$$

formülasyonuna ulaşılır. İvme çözümlemesi için ise Denk. (3.3.75) deki

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})\ddot{\mathbf{s}} = -\frac{d\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{dt} \cdot \dot{\mathbf{s}} - \frac{d\mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s})}{dt} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} \quad (\text{vii})$$

formülasyonu esas alınır ve burada kullanmak üzere

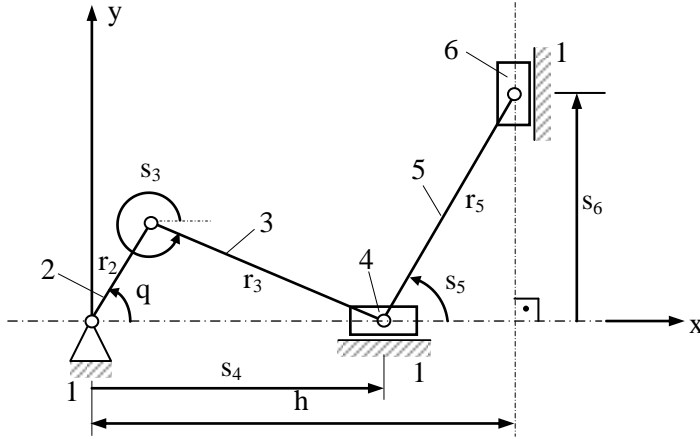
$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \begin{bmatrix} \sin s_4 \dot{s}_4 & \dot{s}_3 \sin s_4 + s_3 \cos s_4 \dot{s}_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{s}_5 \sin s_4 - s_5 \cos s_4 \dot{s}_4 & -\sin s_4 \dot{s}_4 & 0 \\ -\cos s_4 \dot{s}_4 & -\dot{s}_3 \cos s_4 + s_3 \sin s_4 \dot{s}_4 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{s}_5 \cos s_4 - s_5 \sin s_4 \dot{s}_4 & \cos s_4 \dot{s}_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{f}'}{dt} = \begin{bmatrix} -r_2 \cos q \\ -r_2 \cos q \\ -r_2 \sin q \\ -r_2 \sin q \end{bmatrix} \dot{q} \quad (\text{viii})$$

hesaplanırsa

$$\begin{bmatrix} -\cos s_4 & s_3 \sin s_4 & 0 & 0 \\ 0 & -s_5 \sin s_4 & \cos s_4 & -1 \\ -\sin s_4 & -s_3 \cos s_4 & 0 & 0 \\ 0 & s_5 \cos s_4 & \sin s_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s}_3 \\ \ddot{s}_4 \\ \ddot{s}_5 \\ \ddot{s}_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sin s_4 \dot{s}_4 & \dot{s}_3 \sin s_4 + s_3 \cos s_4 \dot{s}_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{s}_5 \sin s_4 - s_5 \cos s_4 \dot{s}_4 & -\sin s_4 \dot{s}_4 & 0 \\ -\cos s_4 \dot{s}_4 & -\dot{s}_3 \cos s_4 + s_3 \sin s_4 \dot{s}_4 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{s}_5 \cos s_4 - s_5 \sin s_4 \dot{s}_4 & \cos s_4 \dot{s}_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_3 \\ \dot{s}_4 \\ \dot{s}_5 \\ \dot{s}_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -r_2 \cos q \\ -r_2 \cos q \\ -r_2 \sin q \\ -r_2 \sin q \end{bmatrix} \dot{q}^2 - \begin{bmatrix} -r_2 \sin q \\ -r_2 \sin q \\ r_2 \cos q \\ r_2 \cos q \end{bmatrix} \ddot{q} \quad (\text{ix})$$

elde edilir.

Örnek Problem 3.3.3



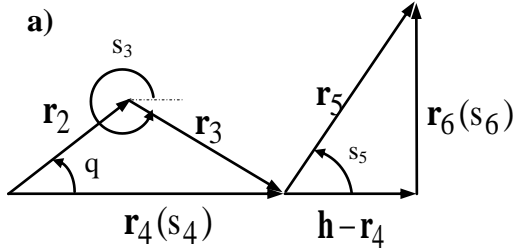
Şek. Pr. 3.3.3-a

Şekil Pr.3.3.3-a'da görülen mekanizmanın sayısal yoldan kinematik çözümlemesini yapmak üzere;

a) Kısıt denklemlerini elde ediniz,

b) Gerekli matris ve vektörleri belirleyerek hız çözümlemesi problemini formüle ediniz.

Çözüm:



Şek. Pr. 3.3.3-b Vektör çevrimleri

Önce mekanizmanın vektörel çevrim kapama denklemlerini yazmak üzere Şek. Pr. 3.3.3-b göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_4 \\ \mathbf{r}_5 &= \mathbf{h} - \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_6 \end{aligned} \quad (i)$$

yazılabilir. Buradan skaler çevrim kapama denklemleri

$$\begin{aligned} r_2 \cos q + r_3 \cos s_3 &= s_4 \\ r_5 \cos s_5 &= h - s_4 \\ r_2 \sin q + r_3 \sin s_3 &= 0 \\ r_5 \sin s_5 &= s_6 \end{aligned} \quad (ii)$$

şeklinde, kısıt denklemleri de

$$\begin{aligned} f_1(q, s_3, s_4, s_5, s_6) &= r_2 \cos q + r_3 \cos s_3 - s_4 = 0 \\ f_2(q, s_3, s_4, s_5, s_6) &= r_5 \cos s_5 - h + s_4 = 0 \\ f_3(q, s_3, s_4, s_5, s_6) &= r_2 \sin q + r_3 \sin s_3 = 0 \\ f_4(q, s_3, s_4, s_5, s_6) &= r_5 \sin s_5 - s_6 = 0 \end{aligned} \quad (iii)$$

şeklinde elde edilir.

b) Denk. (3.3.73) e göre hız çözümlemesi problemi

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{s})^{-1} \mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{s}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (iv)$$

şeklinde formüle edilebilir. $\mathbf{f} = \{f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4\}^T$, $\mathbf{s} = \{s_3 \ s_4 \ s_5 \ s_6\}^T$ ile eldeki mekanizma için

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_3} & \frac{\partial f_1}{\partial s_4} & \frac{\partial f_1}{\partial s_5} & \frac{\partial f_1}{\partial s_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_3} & \frac{\partial f_2}{\partial s_4} & \frac{\partial f_2}{\partial s_5} & \frac{\partial f_2}{\partial s_6} \\ \frac{\partial f_3}{\partial s_3} & \frac{\partial f_3}{\partial s_4} & \frac{\partial f_3}{\partial s_5} & \frac{\partial f_3}{\partial s_6} \\ \frac{\partial f_4}{\partial s_3} & \frac{\partial f_4}{\partial s_4} & \frac{\partial f_4}{\partial s_5} & \frac{\partial f_4}{\partial s_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_3 \sin s_3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r_5 \sin s_5 & 0 \\ r_3 \cos s_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_5 \cos s_5 & -1 \end{bmatrix} \quad (v)$$

ve

$$\mathbf{f}' = \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial q} \quad \frac{\partial f_2}{\partial q} \quad \frac{\partial f_3}{\partial q} \quad \frac{\partial f_4}{\partial q} \right\}^T = \{-r_2 \sin q \quad 0 \quad r_2 \cos q \quad 0\}^T \quad (vi)$$

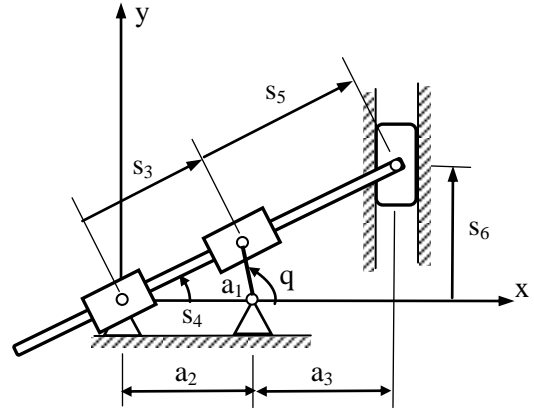
belirlendikten sonra Denk. (iv) e dönülürse,

$$\begin{Bmatrix} \dot{s}_3 \\ \dot{s}_4 \\ \dot{s}_5 \\ \dot{s}_6 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -r_3 \sin s_3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r_5 \sin s_5 & 0 \\ r_3 \cos s_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_5 \cos s_5 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -r_2 \sin q \\ 0 \\ r_2 \cos q \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \dot{q} \quad (vii)$$

elde edilir.

Örnek Problem 3.3.4

Şekil Pr.3.3.4'te görülen çabuk dönüş mekanizmasında $a_1=0.15$ m, $a_2=0.20$ m, $a_3=0.30$ m verildiğine ve mekanizmanın giriş uzvu sabit $\dot{q} = 0.2$ rad/s açısal hızıyla döndürüldüğüne göre, giriş uzvu konumu $0 \leq q \leq 2\pi$ rad aralığında $\Delta q = 0.05\pi$ adımıyla değişirken diğer uzuvların konum, hız ve ivmelerinin değişimini bilgisayar yardımıyla hesaplayarak sonucu grafik ve tablolar halinde veriniz.



Şekil Pr. 3.3.4

Çözüm:

Bu mekanizmada kısıt denklemlerinin

$$\begin{aligned} f_1(q, s_3, s_4, s_5, s_6) &= a_2 + a_1 \cos q - s_3 \cos s_4 = 0 \\ f_2(q, s_3, s_4, s_5, s_6) &= a_1 \sin q - s_3 \sin s_4 = 0 \\ f_3(q, s_3, s_4, s_5, s_6) &= a_1 \cos q + s_5 \cos s_4 - a_3 = 0 \\ f_4(q, s_3, s_4, s_5, s_6) &= a_1 \sin q + s_5 \sin s_4 - s_6 = 0 \end{aligned} \quad (i)$$

şeklinde yazılabileceği görülür. Problemin, kısıt denklemleri verildiğinde gerekli analitik ve sayısal hesapları yaparak kinematik çözümlemeyi gerçekleştiren bir Mathcad® programının 6 uzuvlu mekanizmalar için düzenlenmiş hali yardımıyla çözümü aşağıdadır.

ANALİTİK HESAPLAR

f' vektörünün hesaplanması - Bkz. Denk. (3.3.69) -

$$f_{pr}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dq} f_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) \\ \frac{d}{dq} f_2(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) \\ \frac{d}{dq} f_3(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) \\ \frac{d}{dq} f_4(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) \end{pmatrix}$$

$$f_{pr}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) \rightarrow \begin{pmatrix} -a_1 \cdot \sin(q) \\ a_1 \cdot \cos(q) \\ -a_1 \cdot \sin(q) \\ a_1 \cdot \cos(q) \end{pmatrix}$$

Jacobiyenin hesaplanması - Bkz. Denk. (3.3.70) -

$$J(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) := \begin{pmatrix} \frac{d}{ds_3} f_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) & \frac{d}{ds_4} f_1(\bullet) & \frac{d}{ds_5} f_1(\bullet) & \frac{d}{ds_6} f_1(\bullet) \\ \frac{d}{ds_3} f_2(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) & \frac{d}{ds_4} f_2(\bullet) & \frac{d}{ds_5} f_2(\bullet) & \frac{d}{ds_6} f_2(\bullet) \\ \frac{d}{ds_3} f_3(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) & \frac{d}{ds_4} f_3(\bullet) & \frac{d}{ds_5} f_3(\bullet) & \frac{d}{ds_6} f_3(\bullet) \\ \frac{d}{ds_3} f_4(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) & \frac{d}{ds_4} f_4(\bullet) & \frac{d}{ds_5} f_4(\bullet) & \frac{d}{ds_6} f_4(\bullet) \end{pmatrix}$$

$$J(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) \rightarrow \begin{pmatrix} -\cos(s_4) & s_3 \cdot \sin(s_4) & 0 & 0 \\ -\sin(s_4) & -s_3 \cdot \cos(s_4) & 0 & 0 \\ 0 & -s_5 \cdot \sin(s_4) & \cos(s_4) & 0 \\ 0 & s_5 \cdot \cos(s_4) & \sin(s_4) & -1 \end{pmatrix}$$

g' vektörünün hesaplanması - Denk. (3.3.81) den hesap yapmak yerine, basitçe $\mathbf{J} \cdot \mathbf{g}' = -\mathbf{f}'$ lineer cebirsel denklem takimi çözdürülerek-

$$\text{gp}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) := -\text{lsolve}(J(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6), \text{fpr}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6))$$

$$\text{gp}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) \rightarrow \begin{bmatrix} -a_1 \cdot \frac{(\sin(s_4) \cdot \cos(q) - \sin(q) \cdot \cos(s_4))}{\sin(s_4)^2 + \cos(s_4)^2} \\ \frac{-1}{s_3 \cdot \sin(s_4)^2 + \cos(s_4)^2} \cdot a_1 \cdot (\sin(s_4) \cdot \sin(q) + \cos(q) \cdot \cos(s_4)) \\ -a_1 \cdot \frac{s_5 \cdot \sin(s_4)^2 \cdot \sin(q) + s_5 \cdot \sin(s_4) \cdot \cos(q) \cdot \cos(s_4) + \sin(q) \cdot s_3 \cdot \sin(s_4)^2 + \sin(q) \cdot s_3 \cdot \cos(s_4)^2}{\cos(s_4) \cdot s_3 \cdot \sin(s_4)^2 + \cos(s_4)^2} \\ -a_1 \cdot (\sin(s_4) \cdot \sin(q) + \cos(q) \cdot \cos(s_4)) \cdot \frac{(s_5 + s_3)}{s_3 \cdot \cos(s_4)} \end{bmatrix}$$

DIKKAT: Üstteki sonucun kopyalanip (oldugu gibi ya da sadelestirilerek) gp'ye asagidaki gibi yeniden atanmasi, yukaridaki analitik hesaplarin her adimda yinelenmesine engel olarak hesabi hizlandirir. Atama yapilmazsa alttaki ifade silinmelidir.

$$\text{gp}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) := \begin{bmatrix} a_1 \cdot (\sin(s_4) \cdot \cos(q) - \sin(q) \cdot \cos(s_4)) \\ \frac{a_1}{s_3} \cdot (\sin(s_4) \cdot \sin(q) + \cos(q) \cdot \cos(s_4)) \\ a_1 \cdot \frac{s_5 \cdot \sin(s_4)^2 \cdot \sin(q) + s_5 \cdot \sin(s_4) \cdot \cos(q) \cdot \cos(s_4) + \sin(q) \cdot s_3}{(\cos(s_4) \cdot s_3)} \\ a_1 \cdot (\sin(s_4) \cdot \sin(q) + \cos(q) \cdot \cos(s_4)) \cdot \frac{(s_5 + s_3)}{(s_3 \cdot \cos(s_4))} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{g''}$ vektörünün hesaplanması ($\mathbf{g''} = d\mathbf{g'}/dq$ tanımı uyarınca, basitçe $d\mathbf{g'}/dq$ tam türevinin hesaplanmasıyla)

$$\text{sd}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) := \begin{pmatrix} \frac{d}{ds_3} \text{gp}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6)_1 & \frac{d}{ds_4} \text{gp}(\blacksquare)_1 & \frac{d}{ds_5} \text{gp}(\blacksquare)_1 & \frac{d}{ds_6} \text{gp}(\blacksquare)_1 \\ \frac{d}{ds_3} \text{gp}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6)_2 & \frac{d}{ds_4} \text{gp}(\blacksquare)_2 & \frac{d}{ds_5} \text{gp}(\blacksquare)_2 & \frac{d}{ds_6} \text{gp}(\blacksquare)_2 \\ \frac{d}{ds_3} \text{gp}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6)_3 & \frac{d}{ds_4} \text{gp}(\blacksquare)_3 & \frac{d}{ds_5} \text{gp}(\blacksquare)_3 & \frac{d}{ds_6} \text{gp}(\blacksquare)_3 \\ \frac{d}{ds_3} \text{gp}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6)_4 & \frac{d}{ds_4} \text{gp}(\blacksquare)_4 & \frac{d}{ds_5} \text{gp}(\blacksquare)_4 & \frac{d}{ds_6} \text{gp}(\blacksquare)_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{qd}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) := \left(\begin{array}{l} \frac{d}{dq} \text{gp}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6)_1 \\ \frac{d}{dq} \text{gp}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6)_2 \\ \frac{d}{dq} \text{gp}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6)_3 \\ \frac{d}{dq} \text{gp}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6)_4 \end{array} \right)$$

$$\text{gpp}(\text{a1}, \text{a2}, \text{a3}, \text{a4}, \text{a5}, \text{a6}, \text{q}, \text{s3}, \text{s4}, \text{s5}, \text{s6}) := \text{sd}(\text{a1}, \text{a2}, \text{a3}, \text{a4}, \text{a5}, \text{a6}, \text{q}, \text{s3}, \text{s4}, \text{s5}, \text{s6}) \cdot \text{gp}(\text{a1}, \text{a2}, \text{a3}, \text{a4}, \text{a5}, \text{a6}, \text{q}, \text{s3}, \text{s4}, \text{s5}, \text{s6}) + \text{qd}(\blacksquare)$$

$$\text{gpp}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, q, s_3, s_4, s_5, s_6) \rightarrow$$

DIKKAT: İfadesi çok uzun olduğunda üstteki analitik sonuç görünmeyebilir. Bu, sayısal hesapları aksatmaz.

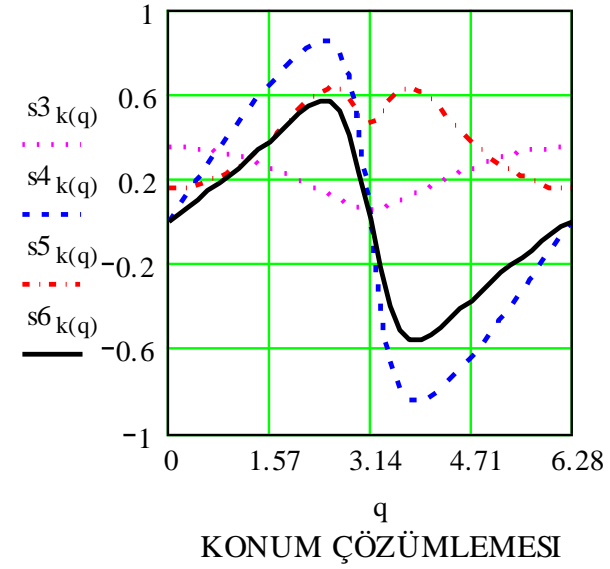
[illegible]

73

SONUÇLAR

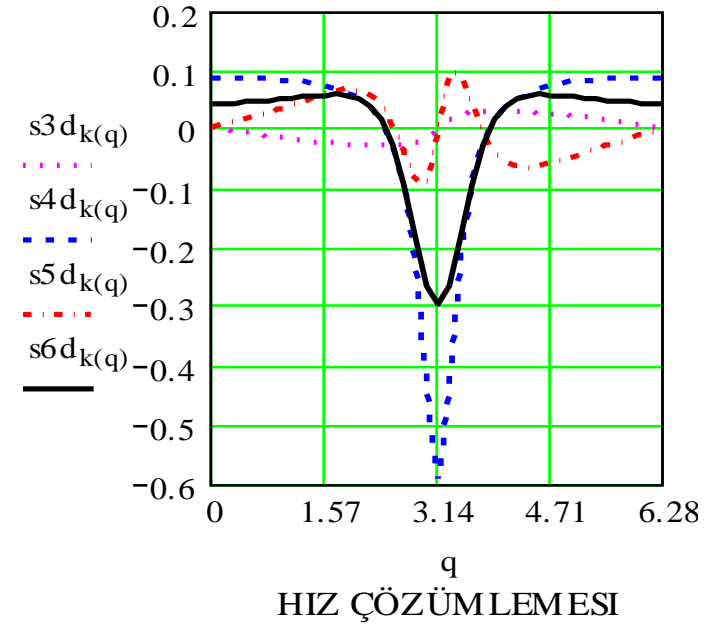
Konum Çözümlemesi Sonuçları

$\frac{q}{\pi} =$	$s3_{k(q)} =$	$s4_{k(q)} =$	$s5_{k(q)} =$	$s6_{k(q)} =$
0	0.35	0	0.15	0
0.05	0.348943	0.067297	0.152191	0.033699
0.1	0.345779	0.134457	0.158775	0.067637
0.15	0.34053	0.201336	0.169778	0.102051
0.2	0.333228	0.267775	0.185249	0.137182
0.25	0.323923	0.333595	0.205249	0.173273
0.3	0.312677	0.398578	0.229849	0.210559
0.35	0.299565	0.462458	0.25912	0.249257
0.4	0.284677	0.524897	0.293107	0.289541
0.45	0.268116	0.585447	0.331789	0.331491
0.5	0.25	0.643501	0.375	0.375
0.55	0.230465	0.698208	0.422281	0.419615
0.6	0.209664	0.748329	0.472625	0.46424
0.65	0.187778	0.791986	0.524034	0.506632
0.7	0.165024	0.826203	0.572795	0.542565
0.75	0.141681	0.845984	0.612472	0.564577



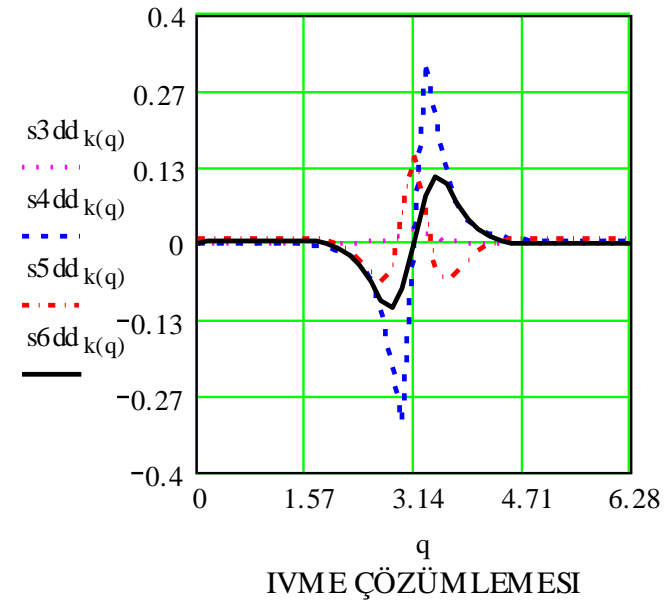
Hız Çözümlemesi Sonuçları

$\frac{q}{\pi}$	$s3d_{k(q)}$	$s4d_{k(q)}$	$s5d_{k(q)}$	$s6d_{k(q)}$
0	0	0.085714	0	0.042857
0.05	-0.00269	0.085628	0.005582	0.043008
0.1	-0.005362	0.085363	0.011188	0.043463
0.15	-0.007999	0.084909	0.016843	0.044223
0.2	-0.010583	0.08424	0.022567	0.045291
0.25	-0.013098	0.083322	0.028377	0.046664
0.3	-0.015524	0.0821	0.034282	0.04833
0.35	-0.017846	0.080499	0.040266	0.050252
0.4	-0.020045	0.078406	0.046278	0.052349
0.45	-0.022103	0.075656	0.052193	0.054455
0.5	-0.024	0.072	0.05775	0.05625
0.55	-0.025714	0.067052	0.062445	0.057139
0.6	-0.027217	0.06019	0.065347	0.056039
0.65	-0.02847	0.050369	0.064799	0.051042
0.7	-0.029415	0.035739	0.058029	0.038911
0.75	-0.029945	0.012821	0.040863	0.014584

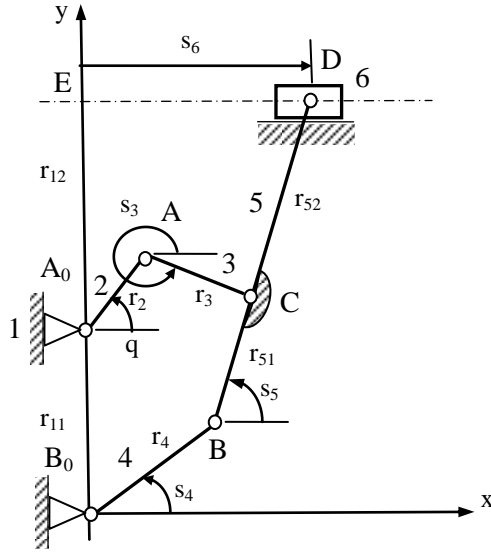


İvme Çözümlemesi Sonuçları

$\frac{q}{\pi} =$	$s3dd_{k(q)} =$	$s4dd_{k(q)} =$	$s5dd_{k(q)} =$	$s6dd_{k(q)} =$
0	-0.003429	0	0.007102	0
0.05	-0.003417	-0.000222	0.007118	0.000385
0.1	-0.003384	-0.000454	0.007164	0.000773
0.15	-0.003328	-0.000709	0.007239	0.001163
0.2	-0.00325	-0.001001	0.00734	0.001555
0.25	-0.003149	-0.001349	0.007458	0.001939
0.3	-0.003027	-0.001777	0.007574	0.002296
0.35	-0.002882	-0.002323	0.007654	0.002583
0.4	-0.002714	-0.003041	0.007631	0.002723
0.45	-0.002522	-0.004014	0.007378	0.002574
0.5	-0.002304	-0.005376	0.006669	0.001875
0.55	-0.002054	-0.007352	0.005095	0.000165
0.6	-0.001764	-0.010335	0.001951	-0.003359
0.65	-0.001415	-0.015049	-0.003925	-0.01004
0.7	-0.000969	-0.022908	-0.01421	-0.021923
0.75	-0.00034	-0.036851	-0.030601	-0.041496



Problem 3.3.5 Bu ve izleyen problemleri Örnek Problem 3.3.4'teki gibi çözünüz.



Veriler:

$$r_{11}=0.40 \text{ m}$$

$$r_{12}=0.60 \text{ m}$$

$$r_2=0.10 \text{ m}$$

$$r_3=0.30 \text{ m}$$

$$r_4=0.35 \text{ m}$$

$$r_{51}=0.30 \text{ m}$$

$$r_{52}=0.60 \text{ m}$$

$$\dot{q} = 0.25 \text{ rad/s}$$

Problem 3.3.6

Veriler:

$$r_1=0.2 \text{ m}$$

$$r_2=0.1 \text{ m}$$

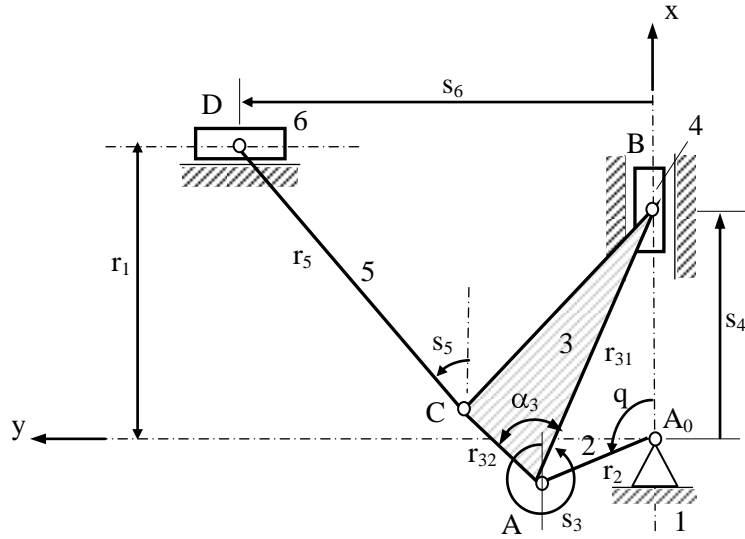
$$r_{31}=0.5 \text{ m}$$

$$r_{32}=0.1 \text{ m}$$

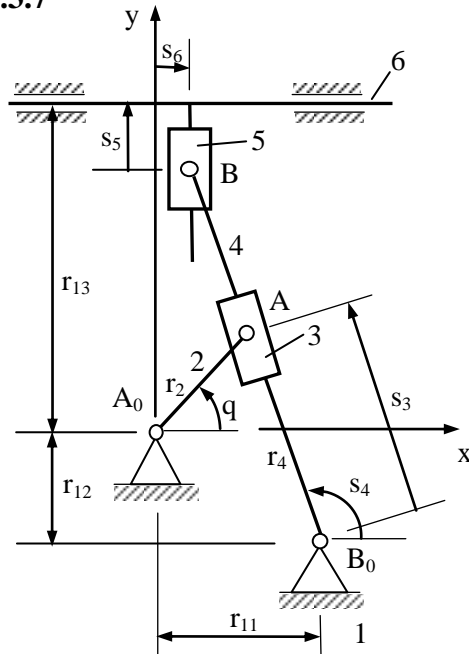
$$r_5=0.5 \text{ m}$$

$$\alpha_3=\pi/6 \text{ rad}$$

$$\dot{q} = 50 \text{ rad/s}$$



Problem 3.3.7



Veriler:

$$r_{11}=0.05 \text{ m}$$

$$r_{12}=0.1 \text{ m}$$

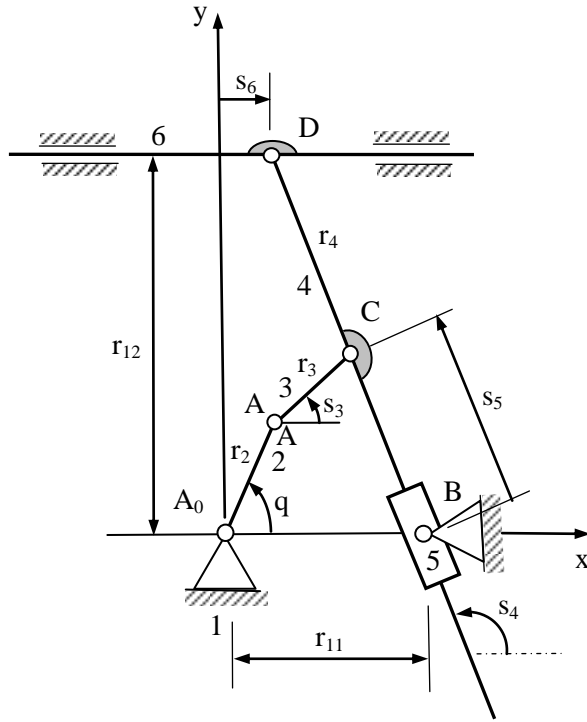
$$r_{13}=0.4 \text{ m}$$

$$r_2=0.05 \text{ m}$$

$$r_4=0.4 \text{ m}$$

$$\dot{q} = 1.25 \text{ rad/s}$$

Problem 3.3.8



Veriler:

$$r_{11}=0.2 \text{ m}$$

$$r_{12}=0.4 \text{ m}$$

$$r_2=0.1 \text{ m}$$

$$r_3=0.4 \text{ m}$$

$$r_4=0.2 \text{ m}$$

$$\dot{q} = 0.75 \text{ rad/s}$$

Problem 3.3.9

Veriler:

$$r_{11}=0.30 \text{ m}$$

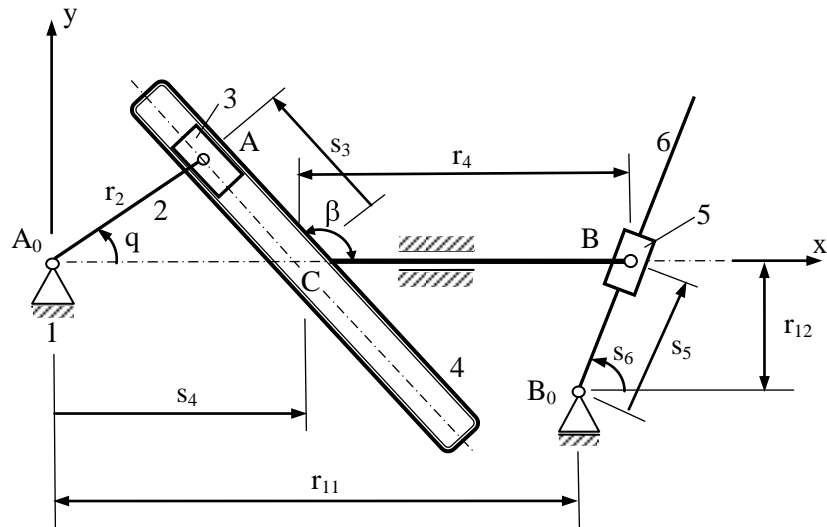
$$r_{12}=0.16 \text{ m}$$

$$r_2=0.1 \text{ m}$$

$$r_4=0.20 \text{ m}$$

$$\beta=150^\circ$$

$$\dot{q} = 4 \text{ rad/s}$$



4 MEKANİZMA TASARIMI

4.1 GENEL BİLGİLER

Makinacılıkta, belli bir görevi yerine getirecek bir makina yapmak gerektiğinde, çoğu kez işe verilmiş bir giriş-çıkış ilişkisini sağlayan bir mekanizma tasarlamakla başlamak gerekir. Bu nedenle mekanizma tasarımı makina mühendisi için temel öneme sahiptir. Ne var ki mekanizma tasarımı, aynı zamanda, çeşitli adımlardan oluşan ve konuya ilişkin kuramsal bilgilere hâkimiyet yanında birikim, deneyim ve yaratıcılık da gerektiren zorlu bir iştir.

Mekanizma tasarımı, şu adımlardan oluşur:

i) Tür seçimi:

Aynı giriş-çıkış ilişkisi, farklı türde mekanizmalarla gerçekleştirilebilir. Örneğin dönme hareketi gidip gelmeli öteleme hareketine dönüştürülmek istendiğinde, bunun, 4 uzuvlu krank-biyel, iskoç boyunduruğu, 6 uzuvlu çabuk dönüş mekanizmalarından herhangi biri, ya da doğrusal hareketli yürek mekanizması ile yapılabileceği; istenirse daha fazla uzuv sayısına sahip mekanizmalar kullanılarak bambaşka seçenekler de üretilebileceği bilinmektedir. Tür seçimi, mekanizma tasarımının yaratıcılık gerektiren; dolayısıyla bilimselden çok sanatsal olan bir adımını oluşturur. Bununla birlikte, bu adımdaki yaratıcı eylemi destekleyen bazı sistematik yaklaşımlar da yok değildir. Örneğin, zorunlu hareketli, düzlemsel, kapalı kinematik zincirli mekanizmalar çerçevesindeki arayışların, doğruca mekanizmalara yönelmek yerine kinematik zincirlerden yola çıkılmakla belli bir disiplin altına alınabileceği bilinmektedir. Anımsanacağı gibi bu husustan Bölüm 2.2.4 te "Kinematik zincirden mekanizma elde edilmesi" başlığı altında söz edilmiş idi.

Sistematik yaklaşım ve kişisel yetenekler dışında makina mühendisinin tür seçiminde en büyük yardımcısı, kendinden önce benzer sorunlara bulunmuş çözümler hakkındaki bilgisidir. Bu konuda bilgi edinmenin bir yolu mevcut makinaların gözlenmesi (İyi bir makina mühendisi önce iyi bir makina gözlemcisi olmak zorundadır.); bir başka yolu da bilinen mekanizmaların sınıflandırılıp derlendiği kaynakların¹⁶ ve patent kayıtlarının incelenmesidir. Derleme kaynaklarından (çoğu [Artobolevsky, 1977]'den) küçük bir kesit sunan Tablo 4.1.1, bu tür kaynaklar hakkında bir fikir vermektedir.

Bütün bu söylenilenlere bir alternatif olmak üzere, bilinen temel mekanizmaların kataloglanmasına dayanarak tür seçimini bilgisayar destekli olarak gerçekleştirmeye yönelik yaklaşımlar üzerinde de çalışılmaktadır (Bkz. [Chiou ve Kota, 1997]).

Tür seçimi sonuçlandırıldığında, henüz boyutları belli olmamakla birlikte, mekanizmanın kinematik diyagramı ortaya çıkmış olur.

¹⁶ İlginç bir tarihi kaynak olan [H. T. Brown, 1868] ve [I. I. Artobolevsky, 1977] ile [P. W. Jensen, 1991] bu konuda yararlı kaynaklardır.

Tablo 4.1.1 AMAÇLARINA GÖRE BAZI MEKANİZMALAR

Kesintili / Beklemeli Hareket Mekanizmaları		Malta Haçı		Yıldız Dişli		Yürek	Kopyalama Mekanizmaları		Pantograf	
Konumlandırma ve Tek Yönlü Hareket Mekanizmaları		Merkezleme		Bilya-Yuva		Eşik Atlatma		Circır		Circır+Tırnak Dişli
Tutma / Sıkıştırma Mekanizmaları		Sıkıştırıcı		Sıkıştırıcı		Ağırlık Tutucu		Ağırlık Tutucu		Robot Eli

ii) Boyutlandırma:

Tür seçimi yapıp kinematik diyagramı ortaya çıkmış olsa da bir mekanizmanın istenilen hareket özelliklerine sahip olması ancak kinematik bakımdan önem taşıyan boyutlarının bu amaca uygun olarak seçilmesiyle mümkündür¹⁷. Bu anlamdaki boyutlandırma bir ters kinematik problemi olup mekanizma tasarımının bilimsel esaslara dayalı olan adımını oluşturur.

Dışlı çark mekanizmaları, yürek mekanizmaları, Malta haçı mekanizmaları, üç çubuk mekanizmaları, krank-biyel mekanizmaları vb. gibi özel mekanizma türlerinin her biri için ayrı ayrı, bu türlerin kendi kinematikleri zemininde çeşitli boyutlandırma problemleri tanımlanıp çözümleri verilebilir.

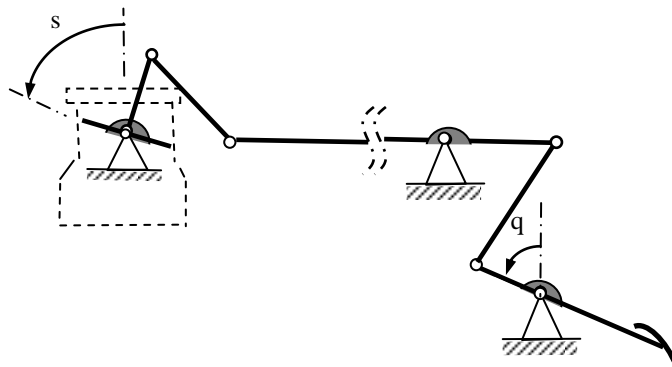
Mekanizma türlerini tek tek ele alan bu tekil boyutlandırma problemlerinin yanı sıra, zorunlu hareketli kinematik zincirlerden türeyen ve yalnızca e_1 eleman çiftleri (mafsallar) içeren *mafsallı mekanizmalar*¹⁸ grubunu bir bütün olarak ele alan ve bu grup için belli boyutlandırma problemi sınıfları tanımlayıp, bunların formülasyon ve çözümü için bir sistematik öneren görece kapsayıcı bir yaklaşım da mevcuttur¹⁹.

Mafsallı mekanizmalar için tanımlı boyutlandırma problemleri, kinematik hedefleri bakımından, üç ana sınıf altında düşünülebilmektedir. Bunlar *fonksiyon üretme*, *yörünge çizdirme* ve *hareket güdümü* problemleridir.

Fonksiyon üretme: Mekanizmanın sabit uzvuyla doğrudan bağlantı halinde bulunan hareketli bir uzvun sabit uzva göre konumunu tanımlayan s koordinatını giriş uzvunun q koordinatıyla

$$s=g(q) \quad (4.1.1)$$

olacak şekilde ilişkilendiren g fonksiyonunun arzu edilen bir fonksiyon olmasını sağlama problemi.



Şekil 4.1.1 Fonksiyon Üretme:
Karbüratör Gaz Kelebeği Açma-Kapama Mekanizması

¹⁷ Mekanizmanın kinematik bakımdan önem taşımayan ve mukavemet özellikleri, dinamik performans, işlevsellik vb. gibi ölçütler ışığında belirlenecek boyutları burada kapsam dışıdır.

¹⁸ İngilizce *Linkage Mechanism* karşılığı olarak kullanılmıştır.

¹⁹ Bunun için Bkz. [G. N. Sandor, A. G. Erdman, 1984].

Şekil 4.1.1 de bu problemin bir uygulama örneği olarak, bazı ağır taşıtlarda kullanılan ve gaz keleşinin s açısını gaz pedalının q açısıyla $s=g(q)$ olacak biçimde ilişkilendiren karbüratör gaz keleşi açma-kapama mekanizması gösterilmiştir.

Yörünge çizdirme: Mekanizmanın genel düzlemsel hareket yapan bir uzvuna ait bir P noktasına düzlemde arzu edilen bir yörüngeyi çizdirmek üzere

$$\mathbf{g}_P(q) = \begin{Bmatrix} x_P(q) \\ y_P(q) \end{Bmatrix} \quad (4.1.2)$$

fonksiyonunun, ya da giriş uzvunun q konumundan bağımsız olarak yalnızca

$$h_P(x_P, y_P) = 0 \quad (4.1.3)$$

fonksiyonunun sağlatılması problemi.

Bu problemlerden ikincisinde P ye yalnızca istenen yörüngeyi çizdirilmesiyle yetinilmekte, ilkinde ise yörünge noktaları ile giriş uzvunun q koordinatı (dolayısıyla da t zamanı) arasında belli bir eşleşmenin de bulunması istenmektedir. Bu nedenle ilk problem özel olarak *zamanlamalı yörünge çizdirme* problemi olarak adlandırılır.

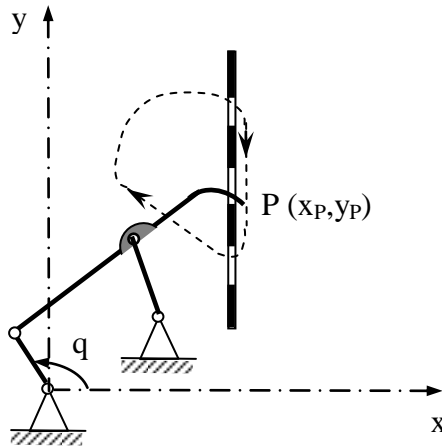
Şekil 4.1.2 de, yörünge çizdirme probleminin bir uygulama örneği olarak, kol-sarkaç tipinde bir üç çubuk mekanizmasından başka birşey olmayan bir film sarma mekanizması gösterilmiştir.

Hareket güdümü: Mekanizmanın genel düzlemsel hareket yapan bir uzvunun bir P noktasına istenen bir yörünge çizdirilirken, bir yandan da bu uzvun sabit uzva göre s açısı konumunun istenen biçimde değişmesini sağlamak üzere hem

$$\mathbf{g}_P(q) = \begin{Bmatrix} x_P(q) \\ y_P(q) \end{Bmatrix} \quad (4.1.4)$$

hem de

$$s=g(q) \quad (4.1.5)$$



Şekil 4.1.2 Yörünge Çizdirme: Film Sarma Mekanizması

istenen fonksiyonlarının sağlatılmaya; dolayısıyla bu uzvun hareketinin bir bütün olarak güdülmeye çalışılması problemi.

Hareket güdümüne bir örnek olarak Şekil 4.1.3 te, iki taşıyıcı bant arasında çalışan bir yük aktarma mekanizması gösterilmiştir. Mekanizma, yine, kol-sarkaç tipinde bir üç çubuk mekanizmasından ibarettir.

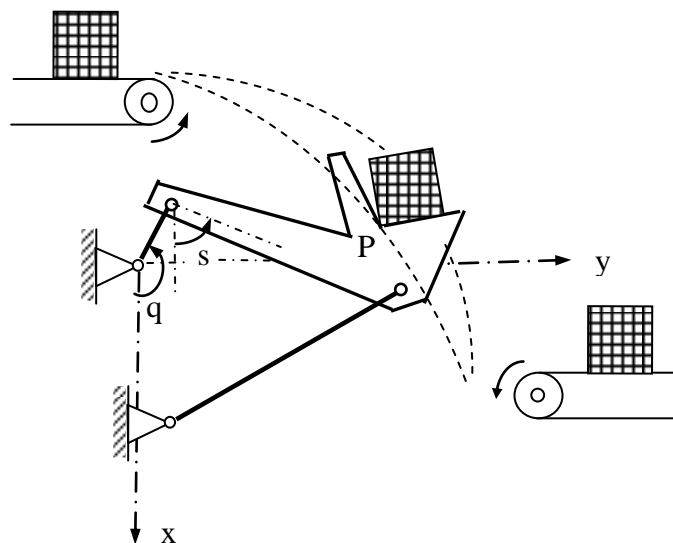
Sonlu sayıda uzuvdan oluşan, dolayısıyla da amaca yönelik olarak seçilebilecek sonlu sayıda boyut içeren mafsallı mekanizmalarla bu üç problem sınıfının hiç birinde, konulan kinematik hedeflerin tam olarak sağlanması olanaklı olmamakla birlikte, belli tekniklerle, bu hedeflerin kabul edilebilir bir yaklaşıklıkla elde edilmesi mümkün olmaktadır.

Bu dersin çerçevesini aşacağı için, burada, ne çeşitli mekanizma türlerine ait tekil boyutlandırma problemlerinin geniş bir panoramasını verme ne de mafsallı mekanizmaların genel boyutlandırma problemlerini tanıtmaya olanağı vardır. Ancak, mekanizma tasarımının boyutlandırma problemleri hakkında hiç değilse bir fikir vermiş olmak amacıyla, Bölüm 4.2 de, çok kullanılan bazı mekanizmalara ilişkin bazı tekil boyutlandırma problemlerine yer verilecektir.

iii) Optimizasyon ve iterasyon:

Bazen bir mekanizma boyutlandırma probleminin birden çok çözümü bulunur. Bunlar arasından belli bir ölçüte göre en iyi olanının bulunması, bir optimizasyon problemi çözülmesini gerektirir. Bazen de boyutlandırma probleminin mümkün çözümlerinden hiç birinin uygulanabilir olmadığı görülür. Bu durumda da tasarımın tür seçimi adımına geri dönülüp yeni bir tür ile hesapların tekrarlanması gerekir.

Kısacası, mekanizma tasarımı, tür seçimi ile boyutlandırma arasında gidip gelmelerle sürdürülen ve optimizasyon fikrince kontrol edilen iteratif bir süreçtir.



Şekil 4.1.3 Hareket Güdümü: Yük Aktarma Mekanizması

4.2 BAZI MEKANİZMA BOYUTLANDIRMA PROBLEMLERİ

4.2.1 ÜÇ ÇUBUK MEKANİZMASIYLA FONKSİYON ÜRETİLMESİ •

FREUDENSTEIN YÖNTEMİ

Bu bölümde üç çubuk mekanizmasıyla fonksiyon üretilmesi problemi ve bu problemin Freudenstein yöntemi ile çözümü tanıtılacaktır. Ancak bunun için önce üç çubuk mekanizmasında konum eşleştirmesi probleminin tanıtılmasında yarar vardır.

4.2.1.1 Konum Eşleştirmesi

Şekil 4.2.1 deki üç çubuk mekanizması göz önüne alınsın ve bu mekanizmada ψ çıkış açısının φ giriş açısıyla

$$\begin{aligned}\varphi = \varphi_1 \quad \text{iken} \quad \psi &= \psi_1 \\ \varphi = \varphi_2 \quad \text{iken} \quad \psi &= \psi_2 \\ \varphi = \varphi_3 \quad \text{iken} \quad \psi &= \psi_3\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

olacak biçimde 3 değişik konumda eşleştirilmesi ve mekanizmanın r_1 , r_2 , r_3 ve r_4 boyutlarının bunu sağlayacak biçimde seçilmesi istensin.

Bu amaçla, (3.3.25) bağıntılarında verilmiş olan

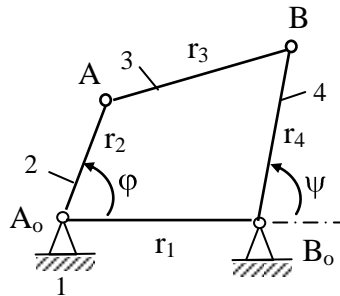
$$K_1 = \frac{r_1}{r_4}, \quad K_2 = \frac{r_1}{r_2}, \quad K_3 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2}{2r_2r_4}\tag{4.2.2}$$

tanımları altında (3.3.26) da

$$\sin \varphi \sin \theta_4 + (\cos \varphi - K_2) \cos \theta_4 + K_1 \cos \varphi - K_3 = 0\tag{4.2.3}$$

şeklinde verilmiş olan *Freudenstein denklemi* anımsansın ve denklem burada $\theta_4 \rightarrow \psi$ gösterilimiyle

$$\cos \varphi \cdot K_1 - \cos \psi \cdot K_2 - K_3 = -(\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) = -\cos(\varphi - \psi)\tag{4.2.4}$$



Şekil 4.2.1 Konum Eşleştirmesi

şeklinde yeniden yazılsın. Buna göre (4.2.1) eşleşmelerinin sağlanabilmesi için

$$\cos \varphi_1 \cdot K_1 - \cos \psi_1 \cdot K_2 - K_3 = -\cos(\varphi_1 - \psi_1)$$

$$\cos \varphi_2 \cdot K_1 - \cos \psi_2 \cdot K_2 - K_3 = -\cos(\varphi_2 - \psi_2) \quad (4.2.5)$$

$$\cos \varphi_3 \cdot K_1 - \cos \psi_3 \cdot K_2 - K_3 = -\cos(\varphi_3 - \psi_3)$$

denklemlerinin sağlanması gerektiği anlaşılır.

Tanımlanan 3 konumda konum eşleştirilmesi problemde, r_1, r_2, r_3 ve r_4 şeklindeki 4 bilinmeyene karşılık elde 3 denklem vardır. Denklem sayısının eşleştirme yapılmak istenen konum sayısı kadar olduğuna dikkat edilirse şu sonuçlar çıkartılabilir:

- i) 1 konumda eşleştirme \rightarrow 1 denklem $\rightarrow r_i$ lerden 3 ü keyfi seçilip 1 i hesaplanır.
- ii) 2 konumda eşleştirme \rightarrow 2 denklem $\rightarrow r_i$ lerden 2 si keyfi seçilip 2 si hesaplanır.
- iii) 3 konumda eşleştirme \rightarrow 3 denklem $\rightarrow r_i$ lerden 1 i keyfi seçilip 3 ü hesaplanır.
- iv) 4 konumda eşleştirme \rightarrow 4 denklem $\rightarrow r_i$ lerin hepsi hesaplanır.
- v) >4 konumda eşleştirme $\rightarrow >4$ denklem \rightarrow çözümsüz.

Bu seçeneklerden, denklem sayısı ile bilinmeyen sayısının eşit olduğu (iv) seçeneği ilk bakışta en uygunu gibi görünmekle birlikte (4.2.5) denklemleri r_i bilinmeyenleri için lineer olmayan bir denklem takımı olduğundan, bu, çözümü güç bir problem oluşturur. Bu bakımdan, 3 konumda eşleşme öngörülen (iii) seçeneği daha uygundur. Bu durumda (4.2.5) denklemleri K_1, K_2, K_3 bilinmeyenleri için bir lineer denklem takımı olarak kolayca çözülebilir, sonra da r_1, r_2 ya da r_4 boyutlarından birine keyfi bir değer verilip, geri kalan r_i ler, bilinen K_1, K_2, K_3 ler yardımıyla (4.2.2) tanımlarından kolayca hesaplanarak problem tamamlanır.

(v) seçeneğindeki 4 ten fazla konumda eşleştirme problemine gelince, yukarıda da belirtildiği gibi bu durumda kesin çözüm olanaksızdır. Ancak en küçük kareler yöntemi gibi bir yöntem yardımıyla problemin bir yaklaşık çözümü bulunarak $n > 4$ konumda tam olarak değilse de yaklaşık olarak konum eşleştirmesi yapmanın mümkün olduğunu belirtelim.

Aşağıda 3 konumda eşleştirme problemine bir örnek verilecektir.

Örnek Problem 4.2.1

Sabit uzvunun boyu $r_1=100$ mm olarak verilen ve üç konumda,

$$\varphi=\varphi_1=30^\circ \text{ iken } \psi=\psi_1=15^\circ$$

$$\varphi=\varphi_2=45^\circ \text{ iken } \psi=\psi_2=40^\circ$$

$$\varphi=\varphi_3=60^\circ \text{ iken } \psi=\psi_3=65^\circ$$

şeklinde konum eşleştirmesi sağlayacak üç çubuk mekanizmasını boyutlandırınız.

Çözüm:

(4.2.5) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \cos 30^\circ \cdot K_1 - \cos 15^\circ \cdot K_2 - K_3 &= -\cos(30^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \cos 45^\circ \cdot K_2 - \cos 40^\circ \cdot K_2 - K_3 &= -\cos(45^\circ - 40^\circ) = -\cos 5^\circ \\ \cos 60^\circ \cdot K_1 - \cos 65^\circ \cdot K_2 - K_3 &= -\cos(60^\circ - 65^\circ) = -\cos(-5^\circ) = -\cos 5^\circ \end{aligned} \quad (i)$$

ya da sayısal olarak

$$\begin{aligned} 0.8660 \cdot K_1 - 0.9659 \cdot K_2 - K_3 &= -0.9659 \\ 0.7071 \cdot K_1 - 0.7660 \cdot K_2 - K_3 &= -0.9962 \\ 0.5000 \cdot K_1 - 0.4226 \cdot K_2 - K_3 &= -0.9962 \end{aligned} \quad (ii)$$

denklem takımı, bunların çözülmesiyle de

$$K_1=0.7887 \quad K_2=0.4755 \quad K_3=1.1896 \quad (iii)$$

elde edilir. Bu değerlerle (4.2.2) denklemlerine dönülürse

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{r_1}{K_2} = \frac{100}{0.4755} = 210.31 \text{ mm}, \\ r_4 &= \frac{r_1}{K_1} = \frac{100}{0.7887} = 126.79 \text{ mm}, \\ r_3 &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - 2r_2r_4K_3} \\ &= \sqrt{100^2 + 210.01^2 + 126.79^2 - 2 \cdot 210.01 \cdot 126.79 \cdot 1.1896} = 82.85 \text{ mm} \end{aligned} \quad (iv)$$

boyutları bulunur. Grashof teoremine göre bir çift sarkaç mekanizması söz konusudur. Sonucun kontrolü için kinematik çözümlemeye başvurulursa, gerçekten de boyutlandırılan mekanizmanın $\varphi=\varphi_1=30^\circ$ iken $\psi=14.9883^\circ$, $\varphi=\varphi_2=45^\circ$ iken $\psi=39.9930^\circ$, $\varphi=\varphi_3=60^\circ$ iken $\psi=65.0005^\circ$ eşleşmelerini sağladığı görülür.

4.2.1.2 Fonksiyon Üretme

Yine Şekil 4.2.1 deki üç çubuk mekanizması göz önüne alınsın ve bu mekanizmada ψ çıkış açısının φ giriş açısına, bu açının verilmiş bir φ_b başlangıç ve φ_s son değeri aralığında, g verilmiş bir fonksiyon olmak üzere

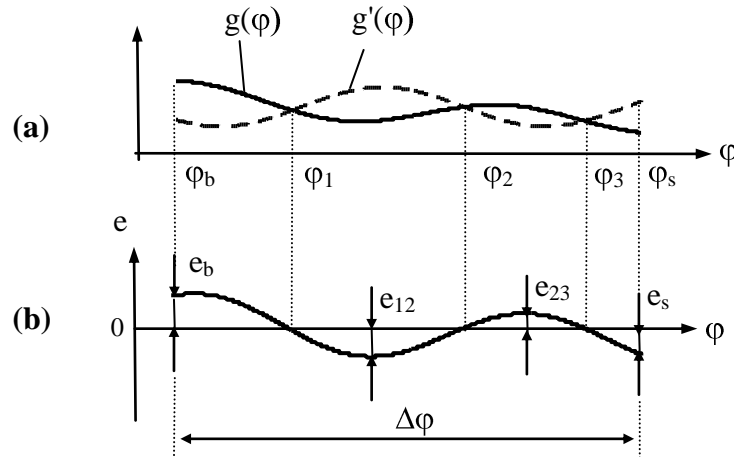
$$\psi = g(\varphi); \quad \varphi_b \leq \varphi \leq \varphi_s \quad (4.2.6)$$

olacak biçimde bağlı olması istensin.

Böyle bir fonksiyon bağının sonsuz noktada konum eşleştirmesi anlamına geldiği düşünülürse, Bölüm 4.2.1.1 de yapılan değerlendirmeler ışığında, bu hedefin tam olarak gerçekleşmesinin olanaksız olduğu ortadadır. Yapılabilecek tek şey, verilen fonksiyonu verilen aralıkta sonlu sayıda (n diyelim) noktada sağlayan bir yaklaşık çözüme yönelmesidir ve bu yapılır. Bu şekilde tasarlanacak mekanizma, istenen $g(\varphi)$ fonksiyonunu değil, ona yalnızca *presizyon noktaları* adı verilen n adet noktada eşit olan bir $g'(\varphi)$ fonksiyonunu üretecek ve bu noktaların dışında

$$e(\varphi) = g(\varphi) - g'(\varphi) \quad (4.2.7)$$

şeklinde bir hata ortaya çıkacaktır. Buna, imalat ve montajdan kaynaklanan *mekanik hata* dan ayırdetmek üzere, *yapısal hata* adı verilir ($n=3$ özel hali için Bkz. Şekil 4.2.2-a ve b). Yapısal hata $\varphi_b - \varphi_s$ aralığının sınırlarında ve presizyon noktalarının aralarında ekstrem değerler alır (Şekil 4.2.2 de e_b, e_s, e_{12}, e_{23} değerleri). Bu değerlerin büyüklüğünün presizyon noktalarının seçimine bağlı olarak değişeceği düşünülürse, bu noktaların uygun seçilmesiyle hatanın en aza indirilebileceği anlaşılır. Çebişev, kendi adını taşıyan Çebişev polinomları üzerindeki çalışmalarında, genelde $|e_b| \neq |e_{12}| \neq |e_{23}| \neq |e_s|$ olacak şekilde birbirinden farklı olan ekstrem değerleri birbirine eşit kılan presizyon noktası seçiminin hatayı en aza indirecek seçim olduğunu ortaya koymuş ve bunu sağlayacak noktaların nasıl hesaplanacağını göstermiştir. Buna göre, n adet presizyon noktası söz konusu olduğunda bu noktalar



Şekil 4.2.2 Üç Presizyon Noktalı Fonksiyon Üretmede Yapısal Hata

$$\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_b \quad (4.2.8)$$

ve

$$\alpha = \frac{180^\circ}{n} \quad (4.2.9)$$

olmak üzere

$$\varphi_k = \varphi_b + \frac{\Delta\varphi}{2} [1 - \cos(k - \frac{1}{2})\alpha] ; \quad k=1,2,...,n \quad (4.2.10)$$

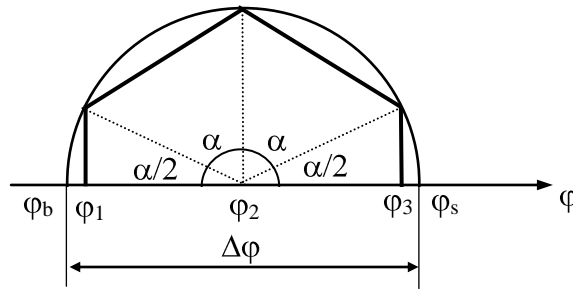
şeklinde hesaplanmalıdır²⁰. Bu şekilde hesaplanan presizyon noktalarına *Çebişev presizyon noktaları* adı verilir.

Bölüm 4.2.1.1 de belirtilen nedenlerle en tercih edilen hesap olan üç presizyon noktalı hesapta, (4.2.9) dan $n=3$ ile $\alpha=60^\circ$ olacağından, Çebişev presizyon noktalarını veren formüller

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_b + \frac{\Delta\varphi}{2} [1 - \cos(1 - \frac{1}{2})60^\circ] = \varphi_b + 0.06699 \Delta\varphi \\ \varphi_2 &= \varphi_b + \frac{\Delta\varphi}{2} [1 - \cos(2 - \frac{1}{2})60^\circ] = \varphi_b + 0.50000 \Delta\varphi \\ \varphi_3 &= \varphi_b + \frac{\Delta\varphi}{2} [1 - \cos(3 - \frac{1}{2})60^\circ] = \varphi_b + 0.93301 \Delta\varphi \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

şeklini alır.

Burada, n presizyon noktalı hesaba ilişkin (4.2.10) denklemlerinin $\Delta\varphi$ çaplı bir çember içine çizilecek bir eşkenar $2n$ -gen ile ilgili ilgi çekici bir geometrik yoruma sahip bulunduğunu da belirtmeden geçmeyelim. $n=3$ özel durumuna karşılık gelen ($2 \times 3 = 6$) 6-gen ile ilgili hali Şekil 4.2.3 te gösterilmiş olan bu yoruma göre Çebişev presizyon noktaları $\Delta\varphi$ çaplı çember içine çizilecek eşkenar $2n$ -gen in köşelerinin çap üzerine izdüşümlerinden başka birşey değildir.



Şekil 4.2.3 Çebişev Presizyon Noktaları ($n=3$)

²⁰ Aslında presizyon noktalarının bu seçiminin sadece $g(\varphi)$ fonksiyonunun bazı özel koşulları sağlaması halinde optimal çözümü temsil ettiği bilinmekle birlikte bunun dışındaki hallerde de optimal çözüme iyi bir yaklaşıklık oluşturduğu için kullanılmaya devam edilmektedir.

Örnek Problem 4.2.2

$r_2=100$ mm verildiğine göre, $\varphi_b = \pi$ rad başlangıç ve $\varphi_s = \frac{2\pi}{3}$ rad son değerleri aralığında,

$$\psi = g(\varphi) = \frac{4\pi}{3} \left(1 - \frac{2\pi}{5\varphi} \right); \quad \varphi_b \leq \varphi \leq \varphi_s \quad (i)$$

fonksiyonunu üç Çebişev presizyon noktası ile sağlayacak üç çubuk mekanizmasını boyutlandırınız

Çözüm:

Önce presizyon noktaları belirlensin. Bu problemde $n=3$ ve

$$\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_b = \frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3} \text{ rad} \quad (ii)$$

olduğuna göre (4.2.11) den

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_b + 0.06699 \cdot \Delta\varphi = \pi + 0.06699 \left(-\frac{\pi}{3} \right) = 3.07144 \text{ rad} \\ \varphi_2 &= \varphi_b + 0.50000 \cdot \Delta\varphi = \pi + 0.50000 \left(-\frac{\pi}{3} \right) = 2.61799 \text{ rad} \\ \varphi_3 &= \varphi_b + 0.93301 \cdot \Delta\varphi = \pi + 0.93301 \left(-\frac{\pi}{3} \right) = 2.16454 \text{ rad} \end{aligned} \quad (iii)$$

hesaplanır. Bu değerlerin (i) de yerlerine konulmasıyla da

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{4\pi}{3} \left(1 - \frac{2\pi}{5\varphi_1} \right) = 2.47501 \text{ rad} \\ \psi_2 &= \frac{4\pi}{3} \left(1 - \frac{2\pi}{5\varphi_2} \right) = 2.17817 \text{ rad} \\ \psi_3 &= \frac{4\pi}{3} \left(1 - \frac{2\pi}{5\varphi_3} \right) = 1.75697 \text{ rad} \end{aligned} \quad (iv)$$

bulunur. Şimdi (iii) deki φ değerleriyle (iv) teki ψ değerleri arasında 3 konumda konum eşleştirmesi problemi çözülmek üzere bu değerler (4.2.5) denklemlerinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} -0.99754 K_1 + 0.78594 K_2 - K_3 &= -0.82734 \\ -0.86602 K_2 - 0.57071 K_3 &= -0.90483 \\ -0.55947 K_1 - 0.18510 K_2 - K_3 &= -0.91808 \end{aligned} \quad (v)$$

denklem takımı, bunların çözülmesiyle de

$$K_1=1.77067 \quad K_2=1.44201 \quad K_3=0.19436 \quad (vi)$$

elde edilir. Bu değerlerle (4.2.2) denklemlerine dönülürse

$$r_1 = r_2 K_2 = 100 \cdot 1.44201 = 144.20 \text{ mm},$$

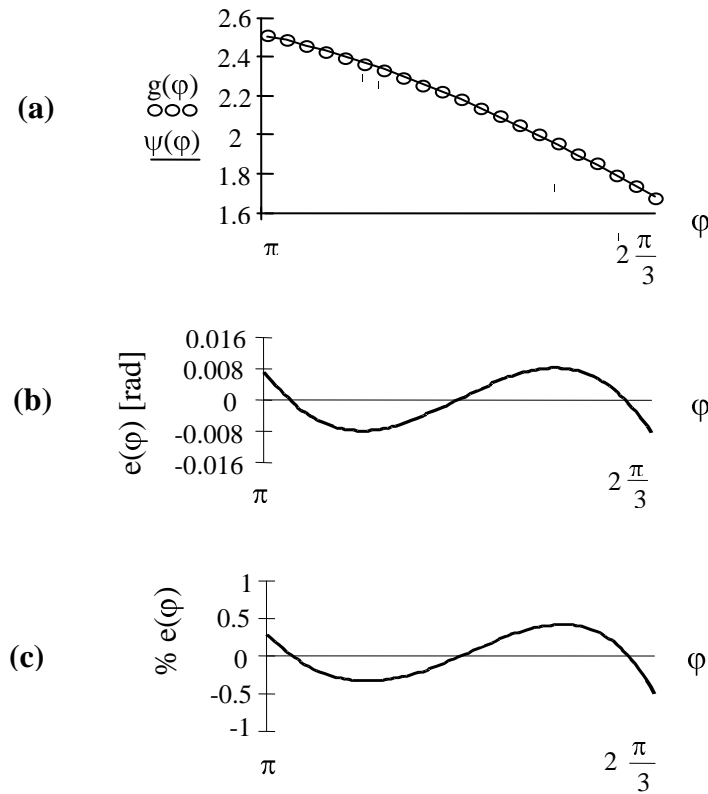
$$r_4 = \frac{r_1}{K_1} = \frac{144.20}{1.77067} = 81.44 \text{ mm}, \quad (\text{vii})$$

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - 2r_2r_4K_3}$$

$$= \sqrt{144.20^2 + 100^2 + 81.44^2 - 2 \cdot 100 \cdot 81.44 \cdot 0.19436} = 185.10 \text{ mm}$$

boyutları bulunur. Grashof teoremine göre bir çift sarkaç mekanizması söz konusudur. Amacın ne ölçüde gerçekleştiğini görmek üzere elde edilen mekanizmanın kinematik çözümlemesi yapılırsa Şekil Pr. 4.2.2-a,b,c de verilen sonuçlar elde edilir. Şekil a dan istenen ve gerçekleşen fonksiyonlar arasındaki farkın gözle seçilemeyecek kadar küçük olduğu, Şekil b den bu farkın en büyük değerinin 0.008 rad mertebesinde, Şekil c den ise $\%e(\varphi) = \frac{e(\varphi)}{g(\varphi)} \cdot 100$ şeklinde hesaplanan hata yüzdesinin % 0.5 mertebesinde bulunduğu görülmektedir.

Bu sonuçlar uygulama bakımından tatmin edici olup tasarım başarılıdır.



Şekil Pr. 4.2.2 Bulunan Çözümün Kontrolü

4.2.2 KAÇIK MERKEZLİ KRANK-BİYEL MEKANİZMALARININ BOYUTLANDIRILMASI

Bu bölümde, kaçık merkezli krank-biyel mekanizmalarının genel boyutlandırma problemi ele alınacak ve bu mekanizmalarda r krank yarıçapı, ℓ biyel boyu, e kaçıklığı, s stroğu ve pistonun alt ile üst ölü konumlar arasında gidip dönme sürelerini birbirine bağlayan genel tasarım bağıntıları elde edilecektir.

Bu amaçla Şekil 4.2.4 dikkate alınsın ve krankın sabit ω hızıyla döndüğü varsayılınsın. Bu durumda pistonun alt ölü konumdan üst ölü konuma gitme ve dönme süreleri

$$t_{\text{dön}} = \frac{\varphi_{\text{dön}}}{\omega}, \quad t_{\text{git}} = \frac{\varphi_{\text{git}}}{\omega} = \frac{360^\circ - \varphi_{\text{dön}}}{\omega} \quad (4.2.12)$$

şeklinde, bunların oranı ise

$$k = \frac{t_{\text{git}}}{t_{\text{dön}}} = \frac{360^\circ - \varphi_{\text{dön}}}{\varphi_{\text{dön}}} = \frac{360^\circ}{\varphi_{\text{dön}}} - 1 \quad (4.2.13)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu noktada

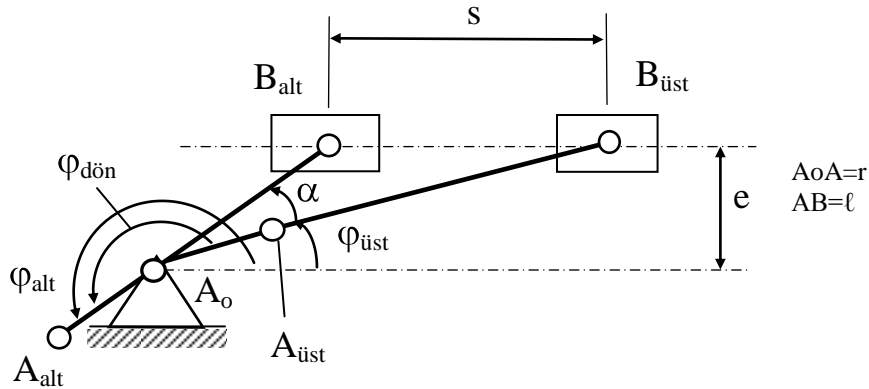
$$\alpha = \varphi_{\text{dön}} - 180^\circ \quad (4.2.14)$$

şeklinde tanımlı α yardımcı açısının (Bkz. Şekil 4.2.4) hesaba katılmasıyla da

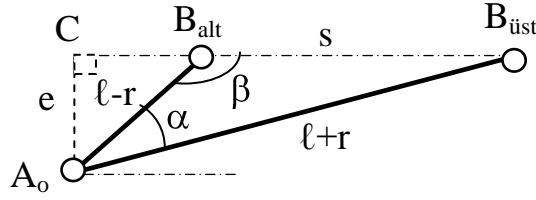
$$k = \frac{360^\circ}{180^\circ + \alpha} - 1 = \frac{180^\circ - \alpha}{180^\circ + \alpha} \quad (4.2.15)$$

yazılabilir. Buradan α çekilirse

$$\alpha = \frac{1-k}{1+k} \cdot 180^\circ \quad (4.2.16)$$



Şekil 4.2.4 Kaçık Merkezli Krank-Biyel Mekanizması



Şekil 4.2.5 Geometrik Ayrıntı

elde edilir. Öte yandan, Şekil 4.2.5 teki $A_oB_{alt}B_{üst}$ üçgeninde kosinüs teoreminden

$$s^2 = (\ell + r)^2 + (\ell - r)^2 - 2(\ell + r)(\ell - r)\cos \alpha \quad (4.2.17)$$

ya da açıp düzenleyerek

$$\boxed{s^2 = 2r^2(1 + \cos \alpha) + 2\ell^2(1 - \cos \alpha)} \quad , \quad (4.2.18)$$

sinüs teoreminden ise

$$\frac{s}{\sin \alpha} = \frac{\ell + r}{\sin \beta} \rightarrow \sin \beta = \frac{\ell + r}{s} \sin \alpha \quad (4.2.19)$$

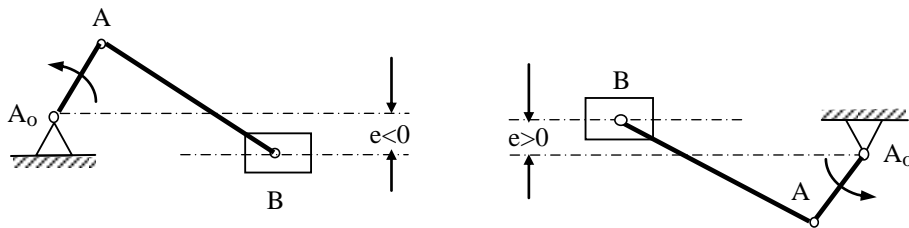
yazılabilir. Yine Şekil 4.2.5 ten

$$e = (\ell - r) \sin \beta \quad (4.2.20)$$

yazılabileceğine dikkat edilir ve burada $\sin \beta$ için (4.2.19) daki ifade yerine konulursa

$$\boxed{e = \frac{\ell^2 - r^2}{s} \sin \alpha} \quad (4.2.21)$$

elde edilir. (4.2.18) ve (4.2.21) bağıntıları kaçık merkezli krank-biyel mekanizmaları için genel tasarım bağıntıları oluşturur. r , ℓ , e , s , α (ya da k) 5 büyüklüğünden 3 ü verildiğinde, kalan ikisi bu bağıntılardan hesaplanır. Burada, bu bağıntılardan çıkan bazı sonuçlara işaret etmeden geçmeyelim: $t_{git}=t_{dön} \rightarrow k=1$ halinde $s=2r$ ve $e=0$ (Merkezcil krank-biyel), $t_{git}>t_{dön} \rightarrow k>1$ halinde $e<0$ (Ya da $e>0$ fakat sol krank-biyel; Bkz. Şekil 4.2.6), $t_{git}<t_{dön} \rightarrow k<1$ halinde $e>0$ (Ya da $e<0$ fakat sol krank-biyel) söz konusu olur (Bu sonuçları çıkartınız).



Şekil 4.2.6 Sağ ve $e<0$ Krank-Biyel ile Sol ve $e>0$ Krank-Biyelin Eşdeğerliği

Problem 4.2.3

Gitme-dönme süreleri oranı $k=0.8$, krank yarıçapı $r=10$ cm, merkez kaçıklığı $e=5$ cm olan krank-biyel mekanizmasının ℓ biyel boyu ve s stroğu ne olur? Hesaplayınız.

Çözüm:

(4.2.16) bağıntısından

$$\alpha = \frac{1-0.8}{1+0.8} \cdot 180^\circ = 20^\circ \quad (i)$$

hesaplanır. Öte yandan (4.2.21) bağıntısından

$$\ell^2 = r^2 + \frac{es}{\sin \alpha} \quad (ii)$$

yazılıp, ℓ^2 nin bu ifadesi (4.2.18) de yerine konulursa

$$s^2 = 2r^2(1 + \cos \alpha) + 2(r^2 + \frac{es}{\sin \alpha})(1 - \cos \alpha) \quad (iii)$$

ya da

$$s^2 - 2e \cdot \frac{(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} \cdot s - 4r^2 = 0 \quad (iv)$$

elde edilir. (i) eşitliği ve $r=10$ cm, $e=5$ cm verileri (iii) de yerine konulup sonuç düzenlenirse

$$s^2 - 1.763 \cdot s - 400 = 0 \quad (v)$$

denklemini, bunun çözülmesiyle de

$$s_1 = -19.138 \text{ cm}, \quad s_2 = 20.901 \text{ cm} \quad (vi)$$

kökleri bulunur. Mümkün olan tek kök olan ikinci kök ile (ii) denklemine gidilerek

$$\ell = \sqrt{10^2 + \frac{5 \cdot 20.901}{\sin 20^\circ}} = 20.138 \text{ cm} \quad (vii)$$

hesaplanır. Sonuç olarak

$$\ell = 20.138 \text{ cm}, \quad s = 20.901 \text{ cm} \quad (viii)$$

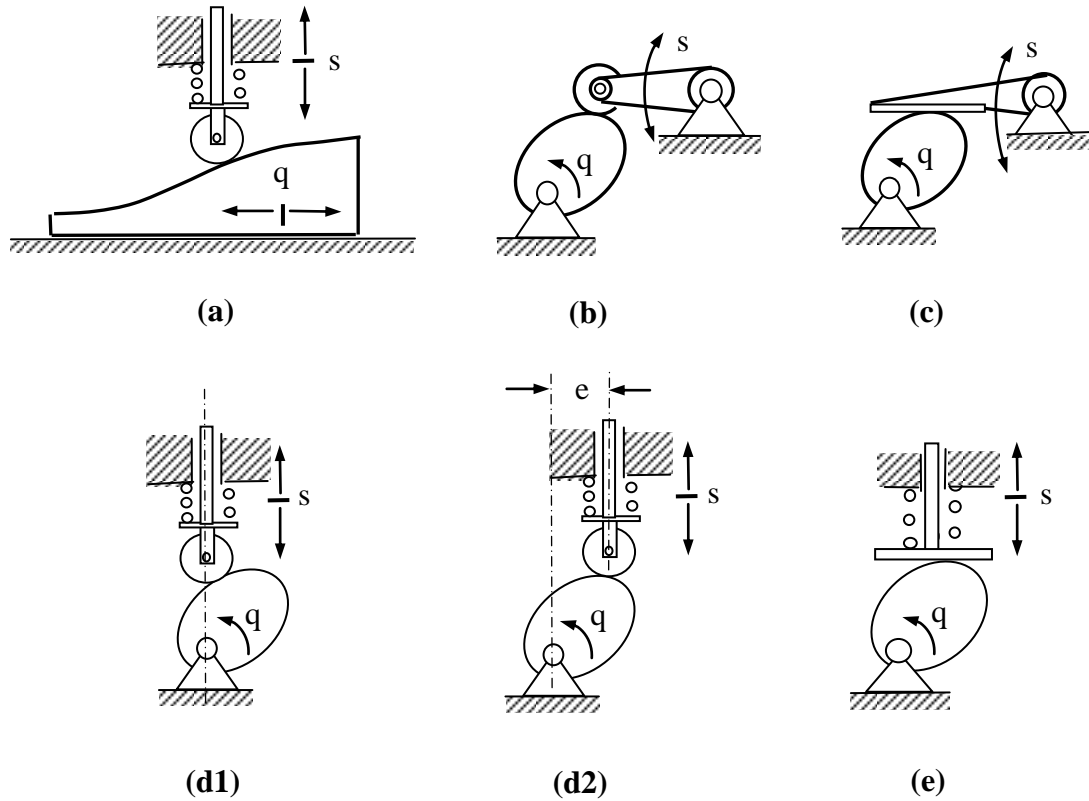
bulunmuş olur.

4.2.3 YÜREK MEKANİZMALARININ BOYUTLANDIRILMASI

4.2.3.1 Genel Bilgiler

Yürek mekanizmaları, mafsallı mekanizmalarla ancak yaklaşık olarak çözülebilen fonksiyon üretme ve beklemeli hareket elde etme problemlerine kesin çözüm getiren ve bu özellikleriyle içten yanmalı motorlar, tekstil, basım ve paketleme makinaları gibi birçok makina türünde yaygın olarak kullanılan mekanizmalardır.

Uzaysal yürek mekanizması örnekleri de bulunmakla birlikte uygulamada daha çok düzlemsel yürek mekanizmaları kullanılır. Bu mekanizmalar, giriş uzvunu oluşturan yüreğin hareket şekline göre *kayar* ve *döner*, çıkış uzvunun -ki *izleyici* diye adlandırılır- hareketine göre *doğrusal hareketli* ve *sarkaç kollu*, giriş ve çıkış uzunlarının temas şekline göre *toparlıklı* ve *tablalı* gibi sınıflara ayrılırlar. Döner, toparlıklı, doğrusal hareketli yürekler, *merkezcil* ya da *kaçık merkezli* olabilirler. Şekil 4.2.7 de bu sınıflara giren bazı yürek mekanizmaları gösterilmiştir.



Şekil 4.2.7 Yürek Mekanizmaları

- (a) Kayar, Toparlıklı, Doğrusal Hareketli (b) Döner, Toparlıklı, Sarkaç Kollu
(c) Döner, Tablalı, Sarkaç Kollu (d1) Döner, Toparlıklı, Doğrusal Hareketli, Merkezcil
(d2) Döner, Toparlıklı, Doğrusal Hareketli, Kaçık Merkezli (e) Döner, Tablalı, Doğrusal Hareketli

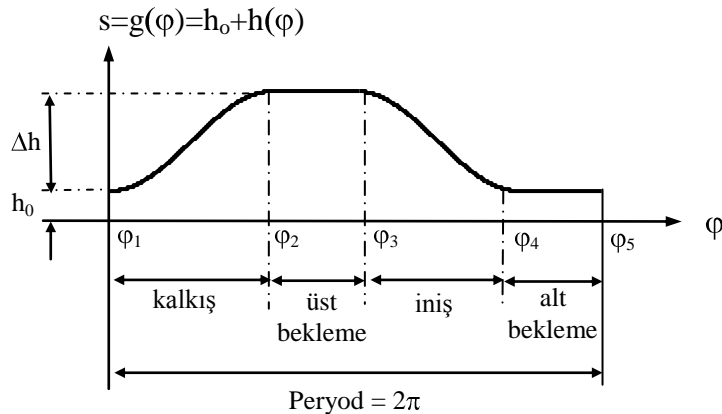
Yürek mekanizmaları birbirinden az çok farklı olan şu fonksiyon üretme problemlerine çözüm bulmakta kullanılabilirler:

- i) Giriş uzvu konumunun belli bir $q_b \leq q \leq q_s$ aralığında her türlü $s=g(q)$ fonksiyonunun üretilmesi. Bu amaç her tipten yürek mekanizmasıyla gerçekleştirilebilir.
- ii) Döner yürek mekanizmalarıyla, yüreğin her turunda kendini tekrarlayan $s = g(\varphi) = g(\varphi + 2k\pi)$ şeklindeki peryodik fonksiyonların üretilmesi.
- iii) (ii) seçeneğinin bir özel hali olarak, beklemeli hareket elde etmek amacıyla,

$$g(\varphi) = \begin{cases} h_0 + h_k(\varphi) \dots \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \dots \text{(kalkış)} \\ h_0 + \Delta h \dots \varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3 \dots \text{(üst.bekleme)} \\ h_0 + h_i(\varphi) \dots \varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4 \dots \text{(iniş)} \\ h_0 \dots \varphi_4 \leq \varphi \leq \varphi_5 = \varphi_1 + 2\pi \dots \text{(alt.bekleme)} \end{cases} \quad (4.2.22)$$

şeklindeki peryodik fonksiyonların üretilmesi. Böyle bir fonksiyonun bir peryodluk kısmı Şekil 4.2.8 de gösterilmiştir. Bu şekilden de görüldüğü gibi, beklemeli hareket elde etmek amacıyla kullanılan yüreklerde hareket *kalkış*, *üst bekleme*, *iniş* ve *alt bekleme* olmak üzere dört evreden oluşur. Bunlardan kalkış ve iniş evreleri topluca *geçiş* evresi diye adlandırılır. Bu tür yüreklerde asıl amaç beklemelerin elde edilmesi olduğundan geçiş evrelerindeki hareket keyfidir ve kimi dinamik gerekler bakımından en iyi olacak biçimde seçilir.

Bir yürek mekanizmasının boyutlandırılması demek, seçilmiş bir yürek mekanizması tipi ve verilmiş bir $s=g(q)$ fonksiyonundan yola çıkarak yürek imalat profilinin ve izleyiciye ait -toparlık yarıçapı, tabla boyu, merkez kaçıklığı gibi- boyutların belirlenmesi demektir. Ancak, beklemeli hareket elde edilmesi amaçlandığında, yukarıda da belirtildiği gibi, üretilcek fonksiyonun geçiş evrelerine karşılık gelen kısımları henüz belirsiz olduğundan, işe, uygun geçiş eğrileri belirleyerek başlamak gerekir. Aşağıda, beklemeli hareket elde etmekte kullanılan yüreklerde kullanılabilecek geçiş eğrileri ve bunların özellikleri üzerinde durulacaktır.



Şekil 4.2.8 Beklemeli Hareket Veren Fonksiyon

4.2.3.2 Beklemeli Harekette Geçiş Eğrileri

Yürek açısal konumu bir $\varphi=\varphi_b$ başlangıç değerinden bir $\varphi=\varphi_s$ son değerine kadar değişirken izleyicinin $s=h_0$ dan $s=h_0+\Delta h$ ye kadar yer değiştireceği bir geçiş hareketi göz önüne alınsın ve s ile φ yerine her ikisi de 0 ile 1 arasında değişen (Bunu denetleyiniz.)

$$\sigma = \frac{s-h_0}{\Delta h}, \quad (4.2.25)$$

ve

$$\beta = \frac{\varphi-\varphi_b}{\Delta\varphi}; \quad \Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_b \quad (4.2.26)$$

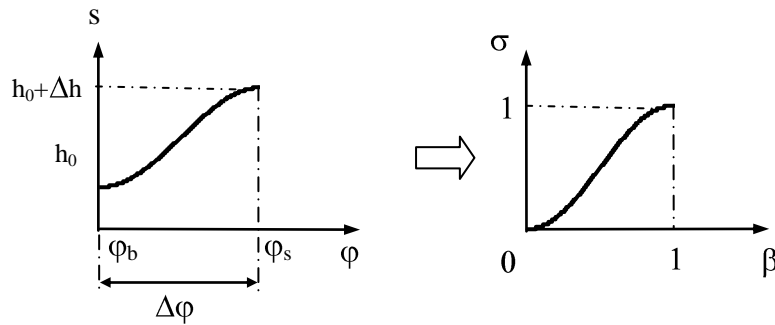
boyutsuz değişkenleri tanımlanıp, geçiş eğrilerinin $s-\varphi$ uzayı yerine $\sigma-\beta$ uzayında tanımlanması yoluna gidilsin:

$$\sigma = f(\beta) \quad ; \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad 0 \leq \sigma \leq 1. \quad (4.2.27)$$

Normalize edilmiş geçiş eğrisi (Bkz. Şekil 4.2.9) adı verilen bu eğrilerle çalışmak incelemede kolaylık ve genellik sağlayacaktır. Şimdi, gerektiğinde başvurmak üzere, bu eğrilerin Denk. (4.2.27)'deki ifadesiyle izleyicinin kinematiği arasındaki ilişkiler kurulsun. Yüreğin sabit $\dot{\varphi} = \omega$ açısal hızıyla döndüğü kabulüyle bu yapılırsa, izleyicinin konum, hız, ivme ve *silkmesinin* (zamana göre üçüncü türev), noktalar zamana, üsler ise β 'ya göre türevleri göstermek üzere

$$\begin{aligned} s &= g(\varphi) = h_0 + h(\varphi) = h_0 + \Delta h \cdot f(\beta) \\ \dot{s} &= g'(\varphi) \cdot \omega = h'(\varphi) \cdot \omega = \frac{\Delta h \cdot \omega}{\Delta\varphi} \cdot f'(\beta) \\ \ddot{s} &= g''(\varphi) \cdot \omega^2 = h''(\varphi) \cdot \omega^2 = \frac{\Delta h \cdot \omega^2}{\Delta\varphi^2} \cdot f''(\beta) \\ \dddot{s} &= g'''(\varphi) \cdot \omega^3 = h'''(\varphi) \cdot \omega^3 = \frac{\Delta h \cdot \omega^3}{\Delta\varphi^3} \cdot f'''(\beta) \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

şeklinde hesaplanabileceği görülür. Bu eşitliklerden ilki (4.2.25) ve (4.2.27) bağıntılarından, ikincisi $\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\beta} \frac{d\beta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$ zincirleme türevinde (4.2.25-27) eşitlikleri dikkate alınarak yazılmıştır. (Diğer eşitlikleri de elde ediniz.)



Şekil 4.2.9 Normalizasyon

İvme, yürek ile izleyici arasındaki etkileşim kuvvetlerinin büyüklüğünün, ivmenin değişme hızını gösteren silkme ise bu kuvvetlerin darbe niteliğinin bir ölçüsüdür. Büyük ve darbeli kuvvetler aşınma, gürültü, titreşim ve tahribata yol açacağından bir geçiş eğrisi yüksek ivme ve silkmeli hareketlere neden olmamalıdır. (4.2.28) bağıntılarına göre, bu, ivme ve silkmenin boyutsuz karşılıklarından başka birşey olmayan $f'(\beta)$ ve $f''(\beta)$ türevlerinin maksimum değerleri elden geldiğince düşük olan $f(\beta)$ geçiş eğrilerinin kullanılmasını gerektirir. Öte yandan, bir fonksiyonun bir noktasındaki kırıklığın, türevinin o noktasında bir sıçramaya; bir sıçramanın ise türevinin o noktada sonsuz değer almasına yol açacağı anımsanırsa, uygun bir $f(\beta)$ eğrisinin sağlaması gereken ve *yürek tasarımının temel kuralı* olarak bilinen şu kurala gelinir:

Bir yürekte, $f(\beta)$ fonksiyonu, birinci türevi $f'(\beta)$ ve ikinci türevi $f''(\beta)$ tüm hareket boyunca sürekli olmalıdır (kırıklık ve sıçrama içermemelidir).

Uygulamada kullanılan çeşitli geçiş eğrilerini, bu özellikler bakımından karşılaştırarak tanıtmak üzere Tablo 4.2.1 verilmiştir. Bu tabloda, her bir geçiş eğrisi tipi için $f(\beta)$ fonksiyonunun kalkış ve inişteki ifadeleri; $f(\beta)$, $f'(\beta)$, $f''(\beta)$, $f'''(\beta)$ fonksiyonlarının kalkış ve hemen onu izleyen eşit süreli bir iniş haline (beklemesiz hareket) karşılık gelen grafikleri ve $f'(\beta)$, $f''(\beta)$, $f'''(\beta)$ fonksiyonlarının (boyutsuz hız, ivme ve silkmenin) maksimum değerleri verilmiştir. Bu maksimum değerlerin geçişin hangi noktasında ortaya çıktığı ilgili grafikten görülebilmektedir.

Şimdi tabloda yer alan çeşitli geçiş eğrilerini, yalnızca kalkış haliyle ilgilenerek, kısa kısa ele alalım:

Doğrusal kalkış eğrisinde boyutsuz hız sabit olup $f(\beta)=1$ değerine sahiptir. Kalkışın başlangıç ve sonunda hız bu değere sıçramalı geçiş yaptığından $\beta=0$ ve $\beta=1$ noktalarında boyutsuz ivme ve silkme sonsuzdur. Yürek tasarımının temel kuralına uymayan bu geçiş eğrisi çok düşük hızla dönecek yürekler dışında kullanılamaz.

Parabolik kalkış eğrisinde boyutsuz hız, $\beta=1/2$ deki kırılma noktasında $f'(1/2)=2$ maksimum değerine; boyutsuz ivme ise bu noktanın iki yanında sabit $f''(\beta)=\pm 4$ değerlerine sahiptir. $\beta=0$, $\beta=1$ ve $\beta=1/2$ noktalarında ivme sıçrama yaptığından bu noktalarda silkme sonsuzdur. Bu geçiş eğrisi de yürek tasarımının temel kuralına uymamaktadır. Yüksek hızlı yüreklerde kullanılamaz.

8. *dereceden polinom* kalkış eğrisinin $\beta=0.532641$ noktasında $f(0.532641)=1.7767$ lik bir hız maksimumu, $\beta=0.241681$ noktasında $f'(0.241681)=5.2683$ lük bir ivme maksimumu (ve $\beta=1$ noktasında $f'(1)=-5.2683$ lük bir ivme minimumu), $\beta=0$ noktasında da $f'''(0)=36.5853$ lük bir silkme maksimumu bulunmaktadır. Eğri, beklemesiz bir kalkış-iniş eğrisi olarak yürek tasarımının temel kuralına uygundur. Kalkış sıfır ivmeyle başladığından bir alt beklemenin varlığı da bu uygunluğu bozmadı. Ancak, kalkış sonlu bir ivmeyle bittiğinden, bir üst beklemenin bulunması halinde ivmenin $\beta=1$ noktasında sıfıra sıçraması gerekecek, bu da bu noktada (Şekilde ▲ ile işaretlenen nokta.) sonsuz silkmeyle yol açacaktır. Eğri, üst beklemeli halde, yürek tasarımının temel kuralına uymamaktadır; bu halde yüksek hızlı yüreklerde kullanılamaz.

Harmonik (ya da *adi sinoid*) kalkış eğrisinde $\beta=1/2$ noktasında $f(1/2)=\pi/2$ lik bir hız maksimumu, $\beta=0$ noktasında $f'(0)=\pi^2/2$ lik bir ivme maksimumu (ve $\beta=1$ noktasında $f''(1)=-\pi^2/2$ lik bir ivme minimumu), $\beta=1/2$ noktasında da $f'''(1/2)=-\pi^3/2$ lik bir silkme minimumu mevcuttur. Eğri, beklemesiz bir kalkış-iniş eğrisi olarak yürek tasarımının temel kuralına uygundur ve belirlenen maksimum değerler bakımından şu ana kadar verilen eğrilerin en üstünüdür. Ancak, eğer kalkışın önünde ve/veya sonunda bir bekleme evresi bulunacaksa, bu, $\beta=0$ ve/veya $\beta=1$ noktasında bir ivme sıçraması anlamına gelecek, dolayısıyla da bu noktalarda (Şekilde ▲ ile işaretlenen noktalar.) sonsuz silkme yol açacaktır. Öyleyse bu eğri de yüksek hızlı yüreklerde bekleme evrelerini birleştiren bir geçiş eğrisi olarak kullanılmaya elverişli değildir.

Buradan, beklemleri birleştirecek bir geçiş eğrisinin, yürek tasarımının temel kuralına uygun kalmak (sınırlarda sonsuz ivme ve silkme yol açmamak) için $\beta=0$ ve $\beta=1$ noktalarında hız ve ivmeyi sıfırlaması, yani $f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$ koşullarını sağlaması gerektiği anlaşılmaktadır ki Tabloda yer alan diğer iki eğri işte bu koşulları sağlamak üzere özel olarak düşünülmüş eğrilerdir.

Sikloidal (ya da *yüksek sinoid*) kalkış eğrisinin $\beta=1/2$ noktasında $f(1/2)=2$ lik bir hız maksimumu, $\beta=1/4$ noktasında $f'(1/4)=2\pi$ lik bir ivme maksimumu (ve $\beta=3/4$ noktasında $f''(3/4)=-2\pi$ lik bir ivme minimumu), $\beta=0$ ve $\beta=1$ noktalarında $f'''(0)=f'''(1)=4\pi^2$ lik birer silkme maksimumu (ve $\beta=1/2$ noktasında $f''(1/2)=-4\pi^2$ lik bir silkme minimumu) bulunmaktadır. Eğri, beklemeli ya da beklemesiz, yüksek hızlı yüreklerde kullanılabilir.

5. dereceden polinom kalkış eğrisinin (3-4-5 eğrisi olarak da bilinir) $\beta=1/2$ noktasında $f(1/2)=1.8750$ 'lik bir hız maksimumu, $\beta = 0.5 \cdot (1 - 1/\sqrt{3})$ noktasında $f'(0.211325)=5.773504$ 'lük bir ivme maksimumu (ve $\beta = 0.5 \cdot (1 + 1/\sqrt{3})$ noktasında $f''(0.788675)=-5.773504$ 'lük bir ivme minimumu), $\beta=0$ ve $\beta=1$ noktalarında $f'''(0)=f'''(1)=60$ lık birer silkme maksimumu bulunmaktadır.

Yukarıda, çeşitli tipten eğrilerin kalkış eğrisi olarak kullanılması haline ilişkin değerlendirmelere yer verilmiş olmakla birlikte, bu sonuçların, tabloda verilen grafiklerin simetri özelliklerinden yararlanılarak kolaylıkla iniş eğrilerine de yansıtılabileceği ortadadır.

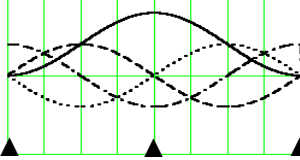
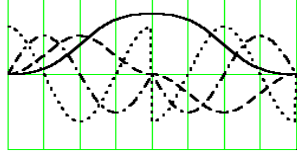
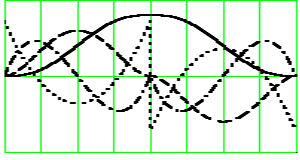
Maksimum ivme ve silkme değerlerinin bir karşılaştırmasının ortaya koyacağı gibi, bu tabloda verilen geçiş eğrilerinden yüksek hızlı yüreklerde kullanılmaya en elverişli olanları, beklemesiz kalkış-iniş halinde harmonik geçiş eğrisi, alt ve üst beklemeli halde ise başarımları birbirine yakın olan sikloidal ve 5. dereceden polinom geçiş eğrisidir.

Tablo 4.2.1 de yer verilen geçiş eğrileri yaygın olarak kullanılan, klasik geçiş eğrileridir. Ancak, mümkün geçiş eğrilerinin bunlardan ibaret olmadığı da açıktır. Burada verilen eğrilerin kısımlarının uygun biçimde birbirine eklenmesiyle oluşturulan karma eğriler ve tek başına uygun olmayan kimi fonksiyonların istenen özelliklere sahip bir eğri verecek biçimde birbirine ulanmasıyla oluşturulan yamalı eğriler de yüreklerde geçiş eğrisi olarak kullanılabilir.

Tablo 4.2.1 BEKLEMELİ YÜREKLERDE BAZI GEÇİŞ EĞRİLERİ

GEÇİŞ EĞRİSİ		FONKSİYON	GRAFİKLER	MAKSİMUM BOYUTSUZ HIZ (f'_{maks})	MAKSİMUM BOYUTSUZ İVME (f''_{maks})	MAKSİMUM BOYUTSUZ SİLKME (f'''_{maks})	YORUM
		$s = h \cdot f(\beta) + h_0$ $\beta = \frac{\varphi - \varphi_b}{\Delta\varphi}$, $\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_b$	____ : $f(\beta)$, _ _ _ : $f(\beta)$ - . - : $f'(\beta)$, : $f''(\beta)$	$\dot{s} = \frac{h\omega}{\Delta\varphi} \cdot f'(\beta)$	$\ddot{s} = \frac{h\omega^2}{\Delta\varphi^2} \cdot f''(\beta)$	$\ddot{\ddot{s}} = \frac{h\omega^3}{\Delta\varphi^3} \cdot f'''(\beta)$	
DOĞRUSAL	KLK	$f(\beta) = \beta$		1	∞	∞	Temel kuralı sağlamaz. Yüksek hızda kullanılamaz.
	İNİŞ	$f(\beta) = 1 - \beta$					
PARABOLİK (İKİ PARÇALI)	KLK	$f(\beta) = 2\beta^2$; $0 \leq \beta \leq 1/2$ $f(\beta) = 1 - 2(1 - \beta)^2$; $1/2 \leq \beta \leq 1$		2	4	∞	Temel kuralı sağlamaz. Yüksek hızda kullanılamaz.
	İNİŞ	$f(\beta) = 1 - 2\beta^2$; $0 \leq \beta \leq 1/2$ $f(\beta) = 2(1 - \beta)^2$; $1/2 \leq \beta \leq 1$					
8. DERECEDEEN POLİNOM	KALKIŞ	$f(\beta) = 6.09755 \cdot \beta^3$ $- 20.78040 \cdot \beta^5 + 26.73155 \cdot \beta^6$ $- 13.609650 \cdot \beta^7 + 2.56095 \cdot \beta^8$		1.7767	5.2683	Beklemesiz ve alt beklemeli halde: 36.5853 Üst beklemeli halde: ∞	Üst beklemeli hal dışında iyi. Üst beklemeli halde temel kuralı sağlamaz.
	İNİŞ	$f(\beta) = 1 - 2.63415 \cdot \beta^2$ $+ 2.78055 \cdot \beta^5 + 3.17060 \cdot \beta^6$ $- 6.87795 \cdot \beta^7 + 2.56095 \cdot \beta^8$					

Tablo 4.2.1 BEKLEMELİ YÜREKLERDE BAZI GEÇİŞ EĞRİLERİ (DEVAM)

GEÇİŞ EĞRİSİ		FONKSİYON	GRAFİKLER	MAKSİMUM BOYUTSUZ HIZ	MAKSİMUM BOYUTSUZ İVME	MAKSİMUM BOYUTSUZ SİLKME	YORUM
HARMONİK (ADİ SİNOİD))	KLK	$f(\beta) = \frac{1}{2}[1 - \cos(\beta\pi)]$		$\frac{\pi}{2}$ = 1.5708	$\frac{\pi^2}{2}$ = 4.9348	Beklemesiz halde: $\frac{\pi^3}{2} = 15.5031$ Alt ve/veya üst beklemeli halde: ∞	Beklemesiz halde çok iyi. Beklemeli hallerde temel kuralı sağlamaz.
	İNİŞ	$f(\beta) = \frac{1}{2}[1 + \cos(\beta\pi)]$					
SİKLOİDAL (YÜKSEK SİNOİD))	KLK	$f(\beta) = \beta - \frac{1}{2\pi} \sin(2\beta\pi)$		2	2π = 6.2832	$4\pi^2$ = 39.4784	Beklemeli veya beklemesiz temel kuralı sağlar.
	İNİŞ	$f(\beta) = 1 - \beta + \frac{1}{2\pi} \sin(2\beta\pi)$					
5. DERECEDEN POLİNOM (3-4-5 EĞRİSİ)	KLK	$f(\beta) = 10 \cdot \beta^3 - 15 \cdot \beta^4 + 6 \cdot \beta^5$		1.8750	5.7735	60	Beklemeli veya beklemesiz temel kuralı sağlar.
	İNİŞ	$f(\beta) = 1 - 10 \cdot \beta^3 + 15 \cdot \beta^4 - 6 \cdot \beta^5$					

Pekiye, normalize edilmiş eğrileri $\sigma=f(\beta)$ şeklinde bilinen bir yüreğin imalat profili nasıl elde edilecektir? Eğer izleyici Şekil 4.2.10 daki gibi *bıçak uçlu* ve yürek merkezci olseydi izleyici-yürek temas noktası hep aynı düşey üzerinde kalacağından bu hiç de zor bir iş olmaz ve profilin $\rho-\varphi$ kutupsal koordinatlarındaki ifadesi, (4.2.25) ve (4.2.26) eşitlikleri dikkate alınarak buradan yazılan

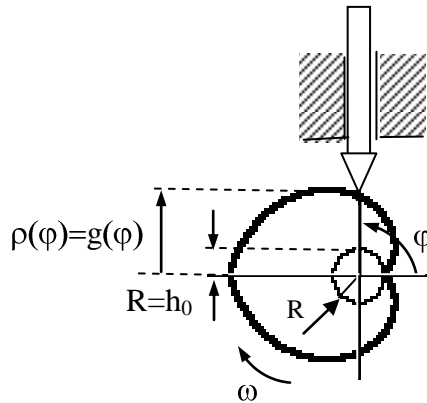
$$s = g(\varphi) = h_0 + \Delta h \cdot f\left(\frac{\varphi - \varphi_b}{\Delta\varphi}\right) \quad (4.2.29)$$

eşitliğinde $h(\varphi) = \Delta h \cdot f\left(\frac{\varphi - \varphi_b}{\Delta\varphi}\right)$, $\rho(\varphi)=g(\varphi)$, $R=h_0$ konularak

$$\rho(\varphi) = g(\varphi) = R + h(\varphi) \quad (4.2.30)$$

şeklinde kolayca elde edilirdi. Burada, $h(\varphi)$ fonksiyonunun üzerine bindirildiği $R=h_0$ yarıçaplı daireye *taban dairesi* adının verildiğini ve onun R yarıçapının belli ölçütlere göre belirlenmesi gereken bir tasarım parametresi oluşturduğunu belirtelim. Şekil 4.2.10'da gösterilmiş olan yürek profili, π rad'lık doğrusal bir kalkış ve onu izleyen π rad'lık yine doğrusal bir inişe sahip, beklemez bir yürek için bu şekilde hesapla elde edilmiş bir profildir. (Bu profilin şeklinin, bu mekanizmalara neden *yürek mekanizması* adının verildiğini anlatmakta olduğuna dikkat ediniz.)

Yürek merkezci, izleyici de bıçak uçlu olmadığında izleyiciyle yüreğin temas noktasının açısal konumu ile yürek dönme açısı arasında bir faz farkı oluşacağından yürek imalat profilinin belirlenmesi problemi her yürek tipi için ayrı ayrı ele alınması gereken biraz daha karmaşık bir problem haline dönüşür. Ayrıca, taban dairesi yarıçapının yanı sıra, tabla boyu, toparlak yarıçapı, merkez kaçıklığı vb. gibi belirlenmesi gereken başka tasarım parametreleri de ortaya çıkar. Bölüm 4.2.3.3'te, böyle yürek tasarım problemlerine bir örnek verilecektir.



Şekil 4.2.10 Bıçak Uçlu İzleyici

Örnek Problem 4.2.4 -5. Dereceden Polinom Geçiş Eğrisinin Belirlenmesi-

Başlangıç ve bitiş noktalarında ivme ve silkmenin sonsuz değer almasına yol açmamak için bu noktalarda birinci ve ikinci türevleri sıfır değerini alan, mümkün olan en düşük dereceden polinom şeklinde bir $\sigma(\beta)$ normalize geçiş eğrisi belirleyiniz.

Çözüm:

İstenen geçiş eğrisinin bir kalkış eğrisi olduğu düşünölsün. Eğri, başlangıç ve bitişte türevlerinin sağlaması istenen koşulların yanı sıra, normalize bir kalkış eğrisinin sağlaması gereken $\sigma(0)=0$, $\sigma(1)=1$ sınır koşullarını da sağlamalıdır. Buna göre sağlanacak koşullar,

$$\sigma(0)=0, \sigma'(0)=0, \sigma''(0)=0 \quad (i)$$

$$\sigma(1)=1, \sigma'(1)=0, \sigma''(1)=0 \quad (ii)$$

şeklinde altı adet olup, hepsini sağlayacak bir polinomun serbestçe belirlenebilecek en az 6 katsayı içermesi, yani en az 5. dereceden olması gerekir;

$$\sigma(\beta) = a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3 + a_4\beta^4 + a_5\beta^5. \quad (iii)$$

Bu $\sigma(\beta)$ ifadesiyle (i) koşullarına gidilirse,

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0, \quad (iv)$$

$\sigma(\beta)$ 'nın geri kalanıyla (ii) koşullarına gidilirse de

$$\begin{aligned} a_3 + a_4 + a_5 &= 1 \\ 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 &= 0 \\ 6a_3 + 12a_4 + 20a_5 &= 0 \end{aligned} \quad (v)$$

elde edilir. (v) denklem takımının çözümü

$$a_3 = 10, a_4 = -15, a_5 = 6 \quad (vi)$$

verir. İstenen kalkış eğrisi, (iv) ve (vi) eşitliklerinin (iii) de yerlerine konulmasıyla

$$\sigma(\beta) = 10\beta^3 - 15\beta^4 + 6\beta^5 \quad (vii)$$

şeklinde bulunmuş olur. Bulunan ifadeden, bu geçiş eğrisinin neden *3-4-5 eğrisi* diye anıldığı hemen anlaşılmaktadır. Burada yalnız kalkış eğrisi haliyle ilgilenilmiş olmakla birlikte, istenirse, (i) ve (ii) denklemlerinde $\sigma(0)=1$, $\sigma(1)=0$ alınıp hesap yinelenerek, ya da bununla aynı anlama gelmek üzere, (vii) nin sağ tarafında β yerine $1-\beta$ konularak 5. dereceden polinom iniş eğrisi de kolayca belirlenebilir. (Belirleyiniz.)

4.2.3.3 Bir Yürek Mekanizmasının Boyutlandırılması: Döner Doğrusal Hareketli Tablalı Yürek Mekanizması

Şekil 4.2.11'deki döner, doğrusal hareketli, tablalı yürek mekanizmasının boyutlandırılması problemi ele alınsın. Problem, verilmiş bir $h(\varphi)$ fonksiyonu ile

$$s(\varphi) = g(\varphi) = R + h(\varphi) \quad (4.2.31)$$

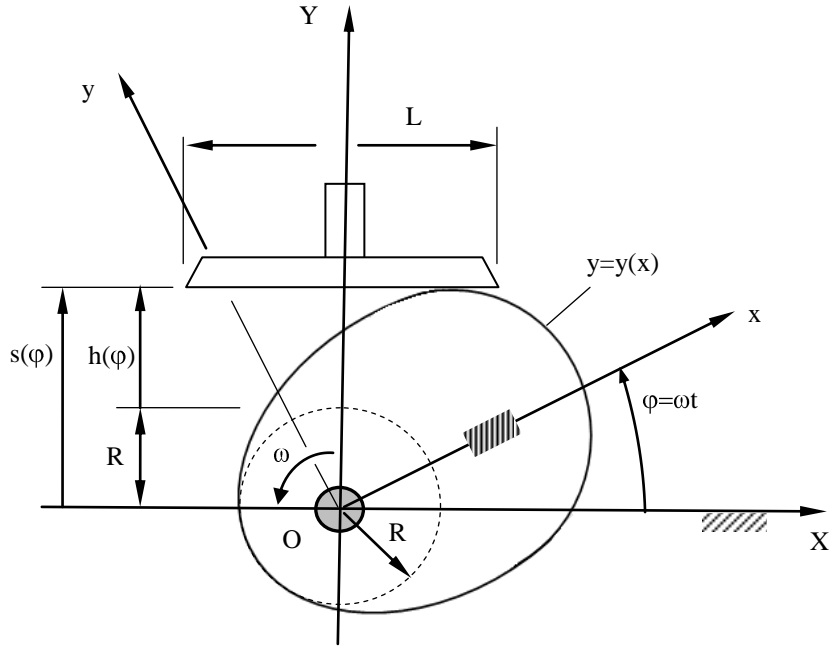
hareket çıkartısını sağlayacak biçimde $y=y(x)$ *yürek imalat profilinin*, R *taban dairesi yarıçapının* ve L *tabla boyunun* belirlenmesi problemidir. İncelemede, yüreğin tablaya göre dönmesi yerine tablanın yüreğe göre ters yönlü dönmesinin düşünülmesi kolaylık sağlamaktadır. Biz de böyle yapalım ve Şek. 4.2.12'yi göz önüne alalım. Bu şekle göre, tablanın yüreğe teğet olduğu T noktasının yüreğe bağlı Oxy eksen takımındaki koordinatları $x=x(\varphi)$ ve $y=y(\varphi)$ olmak üzere,

$$s(\varphi) = x(\varphi) \sin \varphi + y(\varphi) \cos \varphi \quad (4.2.32)$$

$$e(\varphi) = x(\varphi) \cos \varphi - y(\varphi) \sin \varphi \quad (4.2.33)$$

yazılabilir. Öte yandan, Denk. (4.2.32) den φ 'ye göre türev alınırsa,

$$\frac{ds(\varphi)}{d\varphi} = x(\varphi) \cos \varphi - y(\varphi) \sin \varphi + \left[\frac{dx(\varphi)}{d\varphi} \sin \varphi + \frac{dy(\varphi)}{d\varphi} \cos \varphi \right] \quad (4.2.34)$$



Şekil 4.2.11 Döner-Doğrusal Hareketli-Tablalı Yürek

Tabla boyu L'nin belirlenmesi: Tabla boyu L, Şek. 4.2.12'deki T noktasının tabla dışına düşmemesi esas alınarak belirlenir. Buna göre tabla, en azından, $e(\varphi)_{\min}$ 'dan $e(\varphi)_{\max}$ 'a kadar uzanmalı, öyleyse boyu da, Denk. (4.2.35) ve (4.2.31) ışığında,

$$L > e(\varphi)_{\max} - e(\varphi)_{\min} = h'(\varphi)_{\max} - h'(\varphi)_{\min} \quad (4.2.38)$$

koşulunu sağlamalıdır.

Taban dairesi yarıçapı R'nin belirlenmesi: Denk. (4.2.31)'den görüleceği gibi taban dairesi yarıçapı R, yüreğin hareket iletimini etkilemez. Bu yüzden, konstrüktif gereklerin izin verdiği ölçüde küçük seçilerek malzeme ve ağırlıktan kazanmaya çalışılır. Ancak R'nin belli bir eşik değerden küçük seçilmesi halinde, arzu edilen $h(\varphi)$ 'nin gerektirdiği ve Denk. (4.2.37)'de tanımlanmış olan yürek profili, *alttan kesme* adı verilen bir durumun (Bkz. Şek. 4.2.13) oluşması yüzünden gerçekleştirilebilir olmaktan çıkar. Bu durumun tanıtıcı özelliği, $y(x)$ 'in kendini kestiği, yani iki farklı eğime sahip olduğu bir P noktasının varlığıdır. Böyle bir P noktasında eğim belirsiz, yani $dy/dx=0/0$ olduğundan, alttan kesme, $dx/d\varphi=0$ ve $dy/d\varphi=0$ denklemlerinin birlikte sağlanması halinde ortaya çıkar. Türevler Denk. (4.2.37) den hesaplanarak bu koşullar yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{dx(\varphi)}{d\varphi} &= [R + h(\varphi) + h''(\varphi)] \cos \varphi = 0 \\ \frac{dy(\varphi)}{d\varphi} &= -[R + h(\varphi) + h''(\varphi)] \sin \varphi = 0 \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

elde edilir. Buna göre alttan kesme, bu iki denklemin birlikte sağlanması için gereken

$$R + h(\varphi) + h''(\varphi) = 0 \quad (4.2.40)$$

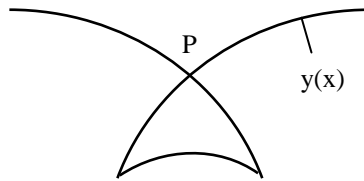
koşulu gerçekleştiğinde oluşur. Denk. (4.2.40)'daki ilk iki terim hiçbir zaman negatif olmadığından, bu gerçekleşme, sıfıra üstten yaklaşılarak olacaktır. Böylece, alttan kesme oluşmama koşulu olarak

$$R + h(\varphi) + h''(\varphi) > 0 \quad (4.2.41)$$

ya da

$$R > -[h(\varphi) + h''(\varphi)] \quad (4.2.42)$$

elde edilir. Taban dairesi yarıçapı R, bu eşitsizlik her φ değerinde sağlanacak biçimde seçilir.



Şekil 4.2.13 Altan Kesme Olayı

Örnek Problem 4.2.5

Her biri 90°'lik dönmeye karşılık gelen 20 mm kalkış, üst bekleme, 20 mm iniş ve alt bekleme evrelerine ve sikloidal (yüksek sinoid) geçiş eğrilerine sahip, döner, doğrusal hareketli, tablalı yürek mekanizmasını boyutlandırınız.

Çözüm:

Sikloidal kalkış ve iniş eğrileri Tablo 4.2.1'den,

$$f_k(\beta) = \beta - \frac{1}{2\pi} \sin(2\beta\pi), \quad f_i(\beta) = 1 - \beta + \frac{1}{2\pi} \sin(2\beta\pi) \quad (i)$$

şeklinde alınır. Burada β 'nın Denk. (4.2.26)'daki tanımını yerine konur, $h(\varphi)$ 'nin Denk. (4.2.28)'deki tanımını anımsanır ve hem kalkış hem inişte $\Delta\varphi = \pi/2$ rad, $\Delta h = 20$ mm olduğu dikkate alınır, hareketin her biri $\pi/2$ radyanlık dört evresi için,

$$h(\varphi) = \begin{cases} 20 \cdot \left(\frac{2\varphi}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \sin 4\varphi \right) \text{ mm} & 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \text{ (kalkış)} \\ 20 \text{ mm} & \pi/2 \leq \varphi \leq \pi \text{ (üst.bekleme)} \\ 20 \cdot \left[3 - \frac{2\varphi}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin 4(\varphi - \pi) \right] \text{ mm} & \pi \leq \varphi \leq 3\pi/2 \text{ (iniş)} \\ 0 & 3\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ (alt.bekleme)} \end{cases} \quad (ii)$$

elde edilir. Bu hareket ve buradan Denk. (4.2.28) uyarınca (sabit $\omega = 10$ rad/s'lik hız için)

$$\dot{s} = h'(\varphi) \cdot \omega, \quad \ddot{s} = h''(\varphi) \cdot \omega^2, \quad \dddot{s} = h'''(\varphi) \cdot \omega^3 \quad (iii)$$

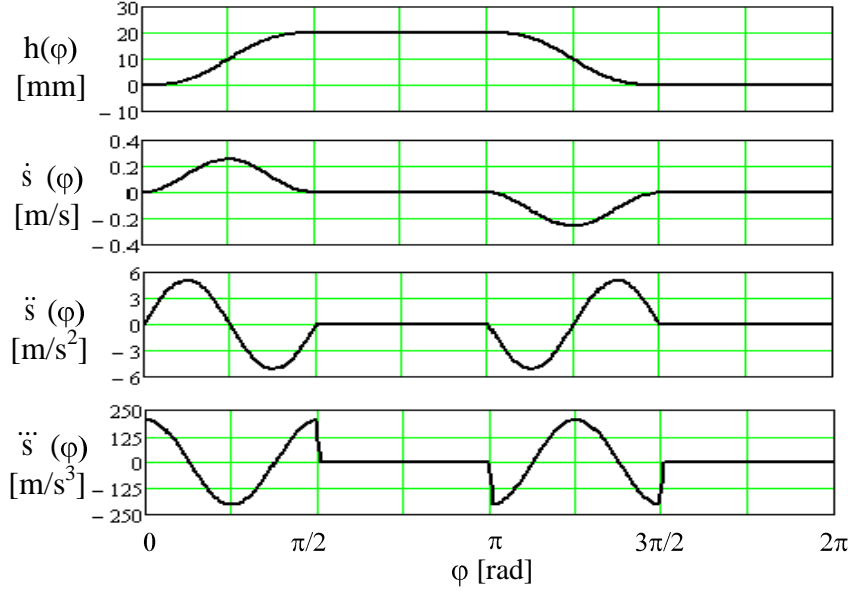
şeklinde hesaplanan hız, ivme ve silkleme grafikleri Şekil Pr. 4.2.5.1'de gösterilmiştir. Grafiklerden hız, ivme ve silklemenin maksimum değerlerine bakılırsa, bu değerlerin, Bölüm 4.2.3.2'nin içeriğinden, sikloidal harekette, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \dot{s}_{\text{maks}} &= \frac{\Delta h \cdot \omega}{\Delta \varphi} \cdot f'(\beta)_{\text{maks}} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{\pi/2} \cdot 2 = 0.2546 \text{ m/s} \\ \ddot{s}_{\text{maks}} &= \frac{\Delta h \cdot \omega^2}{\Delta \varphi^2} \cdot f''(\beta)_{\text{maks}} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2}{(\pi/2)^2} \cdot 2\pi = 5.0930 \text{ m/s}^2 \\ \dddot{s}_{\text{maks}} &= \frac{\Delta h \cdot \omega^3}{\Delta \varphi^3} \cdot f'''(\beta)_{\text{maks}} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3}{(\pi/2)^3} \cdot 4\pi^2 = 203.7183 \text{ m/s}^3 \end{aligned} \quad (iv)$$

şeklinde olacağı bilinen değerlerle uyumlu olduğu görülecektir.

Şimdi yüreğin tabla boyu belirlensin. Bunun için Denk. (4.2.35) ve (ii)'den

$$e(\varphi) = h'(\varphi) = \begin{cases} \frac{40}{\pi} \cdot (1 - \cos 4\varphi) \text{ mm} & 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq \varphi \leq \pi \\ -\frac{40}{\pi} \cdot [1 - \cos 4(\varphi - \pi)] \text{ mm} & \pi \leq \varphi \leq 3\pi/2 \\ 0 & 3\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (v)$$



Şekil Pr. 4.2.5.1 Elde Edilen Hareket ($\omega=10$ rad/s)

belirlenip $e(\varphi)$ 'nin değişimine bakılırsa (Şek. Pr.4.2.5.2-a), kabaca, $-25.5 \leq e(\varphi) \leq 25.5$ [mm] olduğu görülür. (Kesin hesap için $e(\varphi)$ 'nin ekstremumları Denk. (v)'ten analitik olarak bulunabilirse de buna gerek yoktur.) Böylece Denk. (4.2.38)'den

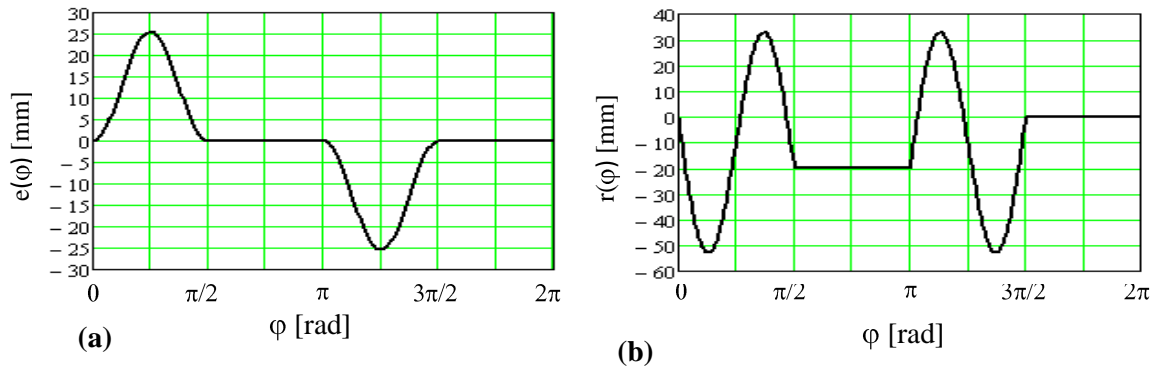
$$L > 25.5 - (-25.5) = 51 \text{ mm} \quad (\text{vi})$$

bulunur. Biz $L=70$ mm alalım.

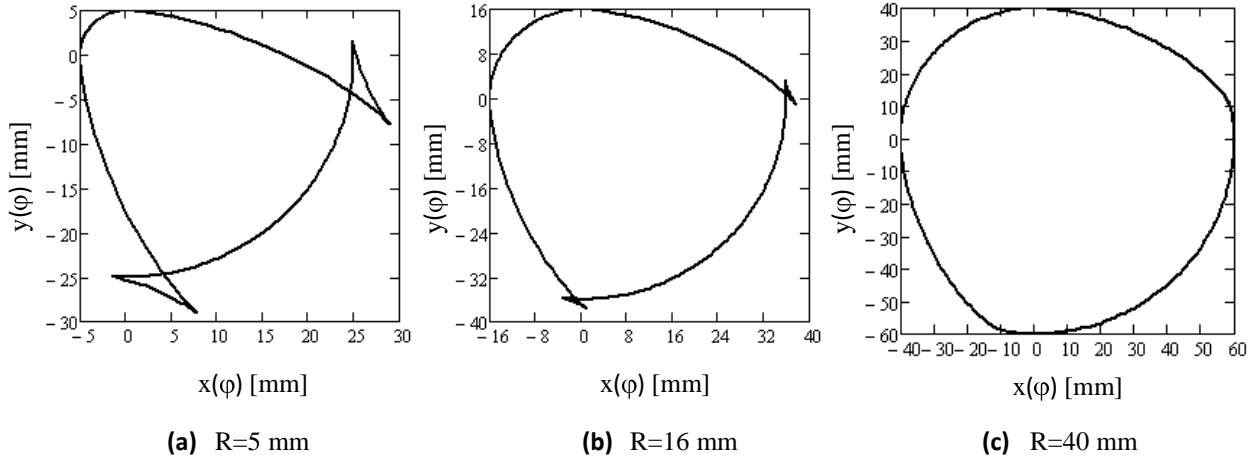
Şimdi de taban dairesi yarıçapı belirlensin. Bunun için Denk. (4.2.42) ve (ii)'den

$$r(\varphi) = -[h(\varphi) + h''(\varphi)] = \begin{cases} -\left(\frac{40\varphi}{\pi} + \frac{150}{\pi} \cdot \sin 4\varphi\right) \cdot \text{mm} & 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ -20 & \pi/2 \leq \varphi \leq \pi \\ -\left[60 - \frac{40\varphi}{\pi} - \frac{150}{\pi} \cdot \sin 4(\varphi - \pi)\right] \cdot \text{mm} & \pi \leq \varphi \leq 3\pi/2 \\ 0 & 3\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (\text{vii})$$

belirlenip çizdirilirse Şek. Pr. 4.2.5.2-b elde edilir. Şekle göre, $r(\varphi)_{\text{maks}} \approx 32.9$ mm'dir. Alttan kesme olmaması için $R > 32.9$ mm alınmalıdır. Biz $R=40$ mm alalım.



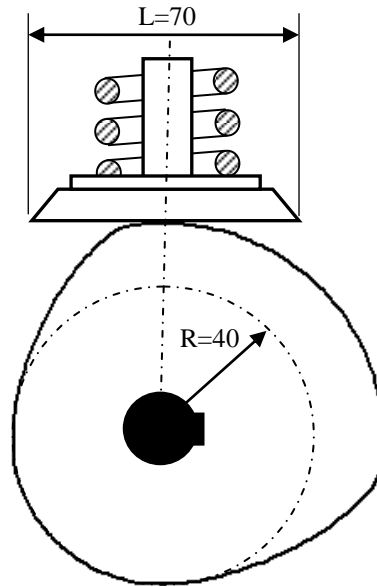
Şekil Pr. 4.2.5.2 Tabla Boyu ve Taban Dairesi Yarıçapının Belirlenmesi



Şekil Pr. 4.2.5.3 Yürek İmalat Profili ve Alttan Kesme

Artık yürek imalat profili de elde edilebilir. Bunun için yukarıda belirlenen $R=40$ mm değerinin, Denk. (ii)'deki $h(\varphi)$ ve Denk (v)'teki $h'(\varphi)$ ifadelerinin Denk. (4.2.37)'de yerlerine konulması yeterlidir. Bu yoldan elde edilen profil, Şekil Pr. 4.2.5.3-c'de görülmektedir. Şekil 4.2.5.3-a,b'de ise, R için alttan kesme eşiğinin altında değerler olan $R=5$ mm ve $R=16$ mm alınması hallerinde elde edilecek profiller gösterilmiştir. Bu şekillerin incelenmesi, alttan kesme olayı ve R 'nin bu olaya etkisi konularına açıklık getirecektir.

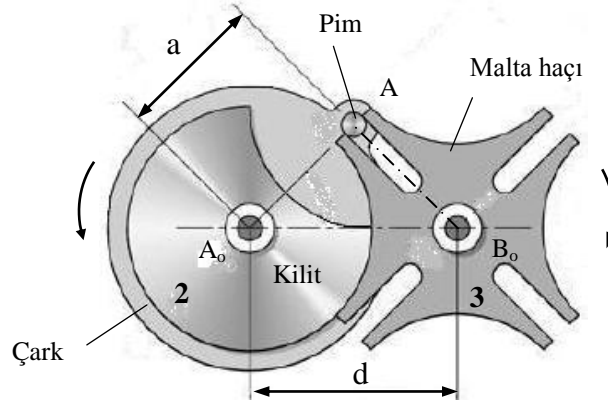
Elde edilen mekanizma Şek. Pr.4.2.5.4'te görülmektedir.



Şekil Pr. 4.2.5.4 Elde Edilen Yürek Mekanizması

4.2.4 MALTA HAÇI MEKANİZMALARININ BOYUTLANDIRILMASI

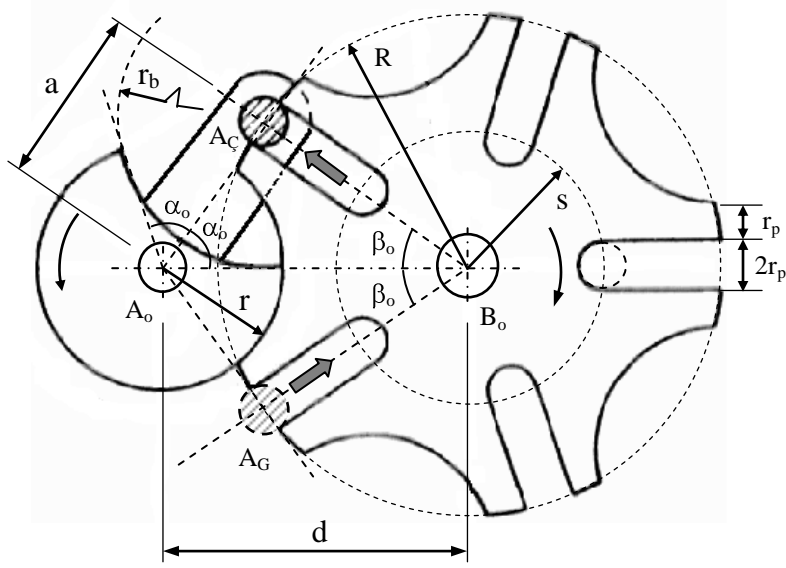
Malta haçı²² mekanizmaları, kesintili/beklemeli hareket elde etme problemlerine basit ve kesin çözüm getiren mekanizmalardır. Şekil 4.2.14'te bir Malta haçı mekanizması örneği gösterilmiştir. Tek pimli bir döndürme çarkına ve dört yuvalı bir Malta haçına sahip bu mekanizmada, çarkın her turunda pim haçtaki yuvalardan birine girerek çeyrek devir boyunca kavrama halinde kalmakta ve haçı 90° döndürdükten sonra yuvadan çıkmaktadır. Kavramanın bittiği anda ise çarka bağlı dairesel şekilli kilit, haç üzerindeki benzer şekilli oyuk içerisine yerleşerek geri kalan dörtte üç devir boyunca haçın dönmesine engel olmaktadır. Daha sonra aynı şey, bir sonraki yuva ile tekrarlanmakta ve sonuç olarak döndürme çarkının dört devrine karşılık Malta haçı, aralarında bekleme evreleri bulunan dört adım halinde, bir devir gerçekleştirmektedir. Pim ve yuva sayısı bu örnektekinden farklı seçilerek çark-haç devir sayısı oranı ve bekleme-dönme süresi oranı buradakinden farklı Malta haçı mekanizmaları da elde edilebileceği açıktır.



Şekil 4.2.14 Bir Malta Haçı Mekanizması

Şimdi, bir Malta haçı mekanizmasında temel tasarım bağıntılarını elde etmek üzere Şek. 4.2.15'teki tek pimli beş radyal yuvalı Malta haçı mekanizması ele alınsın. A piminin, tam yuvadan çıktığı A_C konumunda gösterildiği bu şekilde, bir sonraki yuva da pimin giriş yapacağı A_G konumunda bulunmaktadır. Pim yuvaya teğet girip teğet çıkmak zorunda olduğu için $A_oA_GB_o$ ve $A_oA_CB_o$ üçgenleri birer dik üçgendir. Bunu da dikkate alarak, bir pim ve eşit aralıkla yerleştirilmiş n adet radyal yuva içeren bir Malta haçı mekanizması için şu bağıntılar şekilden kolayca yazılabilir:

²² Geneva Wheel veya Maltese Cross.



Şekil 4.2.15 Bir Malta Haçı Mekanizmasının Boyutlandırılması (n=5)

$$\beta_0 = \frac{180^\circ}{n} \quad (4.2.43)$$

$$\alpha_0 = 90^\circ - \beta_0 \quad (4.2.44)$$

$$a = d \cdot \sin \beta_0 \quad (4.2.45)$$

$$R = d \cdot \cos \beta_0 \quad (4.2.46)$$

$$r = a - 2r_p \quad (4.2.47)$$

$$r_b = r \cdot \tan \alpha_0 \quad (4.2.48)$$

$$s \leq d - a \quad (4.2.49)$$

Bu yedi bağıntı, Şek. 4.2.15'teki tipten Malta haçı mekanizmalarının n , α_o , β_o , d , a , R , r , r_p , r_b ve s şeklindeki on parametresi için tasarım bağıntılarını oluşturur. Bunlardan üçü (n ve r_p ile d , a , R 'den biri) verildiğinde kalanlar buradan kolayca hesaplanır.

Burada ele alınandan farklı yapıda; çok pimli, haç yuvaları dışa değil içe bakan, doğrusal hareketli vb. Malta haçı mekanizmaları da bulunmakla birlikte (Bkz. [Jensen, 1991]), nispeten az kullanılan bu mekanizmaların boyutlandırma problemlerine burada ayrıca yer verilmeyecektir.

Örnek Problem 4.2.6

Pim yarıçapı $r_p=1$ cm, haç yarıçapı $R=10$ cm olan tek pimli, $n=5$ radyal yuvalı Malta haçı mekanizmasını boyutlandırınız.

Çözüm: Önce Denk. (4.2.43)'ten

$$\beta_0 = \frac{180^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ \quad (i)$$

hesaplanır. Buna göre haçın ardışık yuvaları arasındaki açı (Bir adımdaki dönme miktarı.) $2\beta_0=72^\circ$ dir. Ardından, Denk. (4.2.44)'ten

$$\alpha_0 = 90^\circ - \beta_0 = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ \quad (ii)$$

hesaplanır. Buna göre çarkın kavrama açısı $2\alpha_0=108^\circ$ dir. Çark, her turunun $108/360=3/10$ 'unda kavrama halinde kalarak haçı 72° döndürecek, $7/10$ 'unda ise olduğu yerde sabitleyecektir. (Mekanizmada bekleme-dönme süreleri oranı $7/3$ tür. Bu oran n arttıkça azalır.) Bu belirlemelerden sonra, Denk.(4.2.46)'dan,

$$d = \frac{R}{\cos \beta_0} = \frac{10}{\cos 36^\circ} = 12.36 \text{ cm} \quad (iii)$$

ve diğer denklemlerden, sırasıyla,

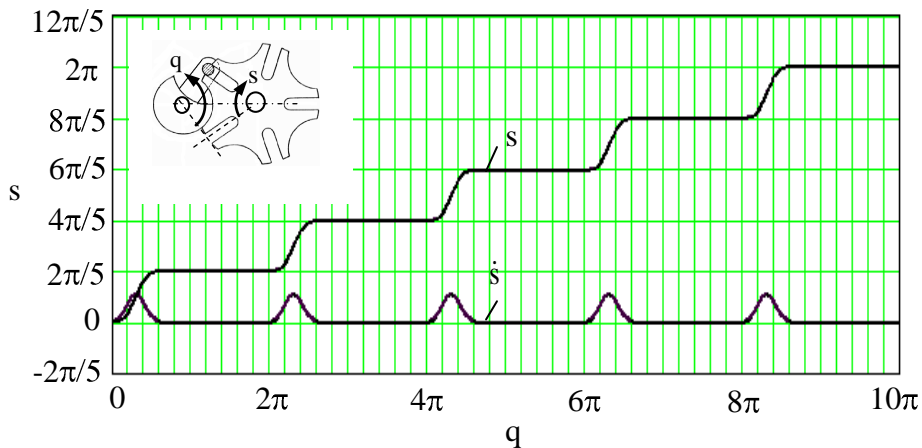
$$a = d \cdot \sin \beta_0 = 12.36 \cdot \sin 36^\circ = 7.26 \text{ cm} \quad (iv)$$

$$r = a - 2r_p = 7.26 - 2 \cdot 1 = 5.26 \text{ cm} \quad (v)$$

$$r_b = r \cdot \tan \alpha_0 = 5.26 \cdot \tan 54^\circ = 7.24 \text{ cm} \quad (vi)$$

$$s \leq d - a = 12.36 - 7.26 = 5.10 \text{ cm} \quad (vii)$$

hesaplanır. Şekil Pr. 4.2.6'da, elde edilen mekanizmanın konum ve (çarkın sabit bir hızla dönmesi hali için) hız çözümlemesi sonuçları gösterilmiştir.



Şekil Pr. 4.2.6 Mekanizmanın Konum ve Hız Çözümlemesi

KAYNAKLAR

ARTOBOLEVSKY, I. I., Mechanisms in Modern Engineering Design: I, II, III, IV, Mir Publishers, 1977.

BROWN, H. T., 507 Mechanical Movements: Mechanisms and Devices, Dover, 2005 (Orijinal Brown & Seward, 1868 yayınının 19. baskısından tıpkıbasım).

CHAKRABORTY, J., DHANDE, S. G., Kinematics and Geometry of Planar and Spatial Cam Mechanisms, Wiley Eastern Ltd., 1977.

CHIOU, S. J., KOTA, S., Automated conceptual design of mechanisms, Mechanism and Machine Theory, 34, 467-495, 1999.

DAUGHTY, S., Mechanics of Machines, John Wiley & Sons, 1988.

DİZİOĞLU, B., Getriebelehre, Band I: Grundlagen, Friedr. Vieweg & Sohn, 1965. (Mekanizma Tekniği, Cilt I: Esaslar, Çev. F. Pasin, İTÜ, 1976.)

ERDMAN, A. G., SANDOR, G. N., KOTA, S., Mechanism Design: Analysis and Synthesis Vol. I (4th Ed.), Prentice-Hall, 2001.

ERDMAN, A. G., SANDOR, G. N., Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis Vol. II, Prentice-Hall, 1984.

GOGU, G., Mobility of mechanisms: A critical review, Mechanism and Machine Theory, 40(9), 1068-1097, 2005.

GOGU, G., Chebychev–Grübler–Kutzbach's criterion for mobility calculation of multi-loop mechanisms revisited via theory of linear transformations, European J. Of Mechanics – A/Solids, 24(3), 427-441, 2005.

GROSJEAN, J., Kinematics and Dynamics of Mechanisms, McGraw-Hill, 1991.

GRÜBLER, M., Getriebelehre, Springer, 1917.

JENSEN, P. W., Classical and Modern Mechanisms for Engineers and Inventors, Marcel Dekker, 1991.

LICHTENHELDT, W., Mekanizmaların Konstrüksiyonu (Çev. F. Pasin), İTÜ, 1975.

MABIE, H. H., REINHOLTZ, C. F., Mechanisms and Dynamics of Machinery (4th Ed.), John Wiley & Sons, 1987.

NORTON, R. L., Design of Machinery (3rd Ed.), McGraw-Hill, 2004.

PAUL, B., Kinematics and Dynamics of Planar Machinery, Prentice-Hall, 1979.

REULEAUX, F., Theoretische Kinematik, 1875. (Kinematics of Machinery, Çev. A.B.W. Kennedy, Macmillan, 1876.)

SÖYLEMEZ, E., Mekanizma Tekniği, Birsen Yayınevi, 2000.

WILSON, C. E., SADLER, J. P., MICHELS, W. J., Kinematics and Dynamics of Machinery, Harper Collins, 1983.