BÖLÜM 5 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Şu ana kadar öğrendiklerinizden, genel olarak diferansiyel denklemleri çözmenin cebirsel denklemleri çözmeden daha zor olduğunu fark etmişsinizdir. O halde acaba diferansiyel denklemleri cebirsel hale dönüştürecek bir yol var mıdır? Evet, vardır. Aslında bunun için birden fazla yol bulunmaktadır. Bu tür dönüşümler, genelde diferansiyel denklemlerdeki her bir terimi uygun bir fonksiyonla çarpmak ve daha sonra çözüm bölgesinde bu terimleri bağımsız değişkene göre integre etmek esasına dayalıdır. Bunun sonucunda türevlerden arındırılmış bir cebirsel denklem elde edilmiş olur. Bilinmeyen fonksiyon daha sonra cebirsel olarak çözülür ve dönüşüm bu sefer tersten uygulanarak çözüm tamamlanır. Bu tür dönüşümler integral tabanlıdır ve bu yüzden bunlara *integral dönüşümler* de denir

5–1 FONKSİYONLARIN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Türev işlemini bir operatörle göstermek bazen kolaylık sağlar:

$$D\{f(t)\} = f'(t) \qquad (5\text{–}1)$$

Benzer biçimde integral için de bir operatör gösterimi düşünülebilir:

$$I\{f(t)\} = \int_0^a f(t)dt \qquad (5\text{–}2)$$

İntegral işlemi türevin tersi bir işlem olduğundan, türevin ters dönüşümü olarak ele alınabilir. Denklem 5−2 nin t ye bağlı $f(t)$ fonksiyonunu sadece a ya bağlı bir $f(a)$ fonksiyonuna dönüştürdüğü görülmektedir.

Laplace dönüşümü; çarpan olarak e^{-st} teriminin kullanıldığı 0 ile ∞ arasında bir integral dönüşümüdür ve şu şekilde ifade edilir:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (5\text{–}3)$$

Laplace dönüşümünün sınırsız bir aralıkta alınan bir integral olduğu görülmektedir. Dolayısıyla şu şekilde ifade edilebilir:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} f(t)dt \qquad (5\text{–}4)$$

Bir fonksiyonun Laplace dönüşümü, yalnızca yukarıdaki limitin bazı s değerlerine yakınsaması halinde vardır. t genelde kullanılan ve bizim de kullanacağımız bağımsız değişkendir. s gerçel veya kompleks olabilir, ancak bu kitapta yalnızca gerçel değerlerle işlem yapılacaktır.

Laplace dönüşümüne bakarak iki çıkarım yapılabilir. İlki, bu dönüşümün t'nin tüm tanım aralığı boyunca (0 ile ∞ arasında) integraller içermesidir. Bu integral ancak verilen fonksiyonun t'nin tüm pozitif değerleri tanımlı olması halinde alınabilir. Örneğin $f(t)$; $0 \le t \le 5$ aralığında tanımlı, ancak $5 < t < \infty$ aralığında tanımsız ise, bu durumda integral alınamaz ve verilen fonksiyonun Laplace dönüşümünden söz edemeyiz. Laplace dönüşümüne ilişkin ikinci gözlem ise dönüştürülen $f(t)$ fonksiyonunun artık t ye bağlı olmaması, sadece s nin fonksiyonu olmasıdır.

Gösterim olarak küçük harfleri, fonksiyonları temsil etmek, büyük harfleri ise dönüşmüş fonksiyonları temsil etmek için kullanacağız. Örneğin

$L\{f(t)\} = F(s)$ (5–5)

Laplace dönüşümüne ait birkaç örnek verelim..

ÖRNEK 5–1
Aşağıda verilen fonksiyonların $t \geq 0$ için Laplace dönüşümlerini yapınız.
(a) *f(t)*=1 , (b*) f(*t)=*t* , (c) *f(t)=*e^{at} , ve (d) *f(t)=cosat. .*

ÇÖZÜM Bu fonksiyonların tamamı pozitif t değerleri için tanımlı olarak verilmiş ve integrallerin yakınsaması halinde Laplace dönüşümleri elde edilebilir. İntegralleri alırken, yeri geldiğinde standart integral tablolarını kullanacağız (*integral alma bu dersin öğretim amaçlarından biri değildir*).

(a) $$L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}dt$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-sR}}{s}\right] + \frac{1}{s}$$

$$= 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}, \qquad s > 0 \qquad (5\text{–}6)$$

(b) $$L\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}tdt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}tdt$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s^2}(st+1)\right]_0^R = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-sR}}{s^2}(aR+1)\right] + \frac{1}{s^2}$$

$$0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}, \qquad s > 0 \qquad (5\text{–}7)$$

(c) $$L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-(s-a)t}dt$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{s^{-(s-a)R}}{s-a}\right] + \frac{1}{s-a}$$

$$= 0 + \frac{1}{s-a} = \frac{1}{s-a}, \qquad s > a \qquad (5\text{–}8)$$

(d) $$L\{cos\,at\} = \int_0^\infty e^{-st}\,cos\,atdt = \lim_{R\to 0}\int_0^R e^{-st}\,cos\,atdt$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(s\cos at + a\sin at)\right]_0^R$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-sR}}{s^2+a^2}(s\cos aR + a\sin aR)\right] + \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$= 0 + \frac{s}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0 \qquad (5\text{–}9)$$

Yukarıdaki örnekte tüm fonksiyonları $0 \leq t \leq \infty$ aralığında sürekli olduğu ve üst integral limitini yerine koyduğumuzda sıfıra yakınsadığını gördük. Bu tür fonksiyonlar için Laplace dönüşümü, integralin alt limitteki değerinin negatif işaretlisi olmaktadır. Genelde karşılaşılan bazı fonksiyonların Laplace dönüşümleri Tablo 7–1'de verilmiştir.

Tablo 7 -1 Bazı fonksiyonların Laplace dönüşümleri

f(t)	*F(s)*
$C_1 f(t) + C_2 g(t)$	$C_1 F(s) + C_2 G(s)$
$e^{kt} f(t)$	$F(s-k)$
$f(kt)$	$\frac{1}{k} F\left(\frac{s}{k}\right)$
$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(s) ds$
$\int_0^t f(f^t) dt$	$\frac{1}{s} F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$t^a, \ a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
$t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
$t^n, \ n = 1,2,3,\ldots.$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t^n e^{at}, \ n = 1,2,3,\ldots.$	$\frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$e^{kt} \sin at$	$\frac{a}{(s-k)^2 + a^2}$
$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$

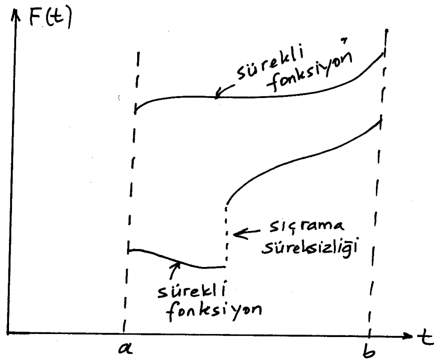
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
$e^{kt}\cos at$	$\dfrac{s-k}{(s-k)^2+a^2}$
$t\cos at$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$u(t-t_0)$	$\dfrac{e^{-t_0 s}}{s}$
$u(t-t_0)f(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}F(s)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}$
$f(t), p$ *periyotlu fonksiyon*	$\dfrac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)dt$
$f'(t)$	$sF(s)-sf(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

5–2 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ BULUNAN FONKSİYONLAR

Denklem 7–3 ile tanımlanan integral her $f(t)$ fonksiyonu için alınamaz, dolayısıyla her fonksiyonun Laplace dönüşümü yoktur. Peki, acaba hangi türden fonksiyonların Laplace dönüşümü vardır? Bu sorunun yanıtı basittir, Denklem 7–3'teki integral varsa, dönüşüm de vardır demektir. Bu integralin alınabilmesi 3 koşula bağlıdır: (1) Verilen fonksiyon $t \geq 0$ için tanımlı olmalıdır, (2) fonksiyon integrallenebilir olmalıdır ve (3) integral yakınsak olmalıdır. İlk koşul oldukça açıktır. İkincisi, sürekli fonksiyonlar tarafından kolayca karşılanır, çünkü sürekli olan tüm fonksiyonlar integrallenebilir. Aslında integrallenebilir olma sadece **parçalı sürekli** (veya **kısmi olarak sürekli**) fonksiyonlar için gereklidir. Bu tür fonksiyonlar şu şekilde tarif edilir:

Sonlu bir $a \leq t \leq b$ aralığı sonlu sayıda alt aralığa bölünebiliyor ve her bir alt aralıkta $f(t)$ fonksiyonu sürekli, ayrıca fonksiyon söz konusu aralığın sınırlarında sonlu limite sahipse, $f(t)$ fonksiyonuna parçalı sürekli fonksiyon denir.

Diğer bir anlatımla, t bağımsız değişkeni alt aralıkların uçlarına doğru yaklaştıkça ıraksamamalıdır. Dolayısıyla parçalı sürekli fonksiyonlar Şekil 5–5'te gösterildiği gibi, sonlu sayıda *sıçrama süreksizliği*ne sahip olabilirler, ancak bu fonksiyonlar yine de bu süreksizlik noktalarında *tanımlıdırlar*. Süreksizlik noktalarına sağdan ve soldan yaklaşan limitler yine sonludur, ancak bu iki limit genellikle farklıdır. Dahası, belirli bir aralık sınırında fonksiyonun değeri, bu aralığın her iki sınırındaki limitlerden farklı olabilir. Sadece sürekli fonksiyonların bir noktadaki sağdan ve soldan limitleri ile fonksiyonun o noktada aldığı değer birbirlerine eşittir.



Alınacak integralin üst limiti sonsuz olduğundan t sonsuza giderken fonksiyon ıraksayabilir. Dolayısıyla bir fonksiyonun Laplace dönüşümünün bulunabilmesi için $e^{-st}f(t)$ çarpımının $t \to \infty$ için yakınsak olması gerekir. Bu durum sadece $f(t)$ fonksiyonunu deği, aynı zamanda s nin de alacağı değerleri de sınırlar.

$0 \leq t \leq \alpha$ sonlu aralığında yakınsa olan bir integral çarpımının $t \to \alpha$ için ıraksayabilir. Bu durum, integral değerinin; t ile artması ve t nin sonsuza yaklaşması halinde sonsuza gitmesi halinde görülür. Bu nedenle $t \to \infty$ giderken integrali alınacak ifadenin artış hızı ile ilgili bir koşula ihtiyacımız bulunmaktadır. Bu türden üst limiti sonsuz integraller için integrali alınacak ifadenin yakınsak olması gerekir. Diğer bir deyişle $t \to \infty$ için integrali alınacak ifadenin sonlu bir sayıya yakınsaması gerekir. Bu koşul çok kısıtlayıcı gibi görünse de, aslında değildir. Çünkü burada söz konusu olan $f(t)$ fonksiyonu değil, $e^{-st}f(t)$ çarpımıdır. Pozitif s değerleri için $t \to \infty$ giderken e^{-st} sıfıra yakınsadığından bu terim bir tür sönümleyici işlevi görür.

5–3 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ

1 Lineerlik özelliği

Laplace dönüşümü sonuçta belirli integraldir ve belirli integrallerin özelliklerine sahiptir. İntegral işlemi ise lineer bir işlemdir. Dolayısıyla Laplece dönüşümü lineer bir dönüşümdür. Buna göre

$$L\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} = C_1 L\{f_1(t)\} + C_2 L\{f_2(t)\} \qquad (6-10)$$

Yazılabilir. Buradaki C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir.

ÖRNEK 5–2

k bir sabit olmak üzere $\sinh kt$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

ÇÖZÜM Örnek 5–1'de $L\{e^{at}\} = 1/(s-a)$ olduğunu bulmuştuk.

Ayrıca $\sinh at = (e^{at} - e^{-at})/2$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla verilen fonksiyonun Laplace dönüşümü şu şekilde bulunur:

$$L\{\sinh kt\} = L\left\{\frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}\right\} = \frac{1}{2}L\{e^{kt}\} - \frac{1}{2}L\{e^{-kt}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-(-k)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(s+k)-(s-k)}{(s-k)(s+k)}\right)$$

$$= \frac{k}{s^2 - k^2}, \; s > k \qquad (6-11)$$

---

2 Ötelenme (veya Kaydırma) Özelliği

Eğer bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ biliniyorsa, bu durumda $e^{kt}f(t)$ çarpımının Laplace dönüşümü şu şekilde bulunabilir:

$$L\{e^{kt} f(t)\} = F(s-k) \qquad (6-12)$$

ÖRNEK 5–3

$e^{3t}\sinh\omega t$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü nedir?

ÖRNEK Örnek 5–2'den $L\{\sinh\omega t\} = 1/(s^2 - \omega^2)$ olduğunu biliyoruz. $k = 3$ olduğu göz önüne alınırsa, verilen fonksiyonun Laplace dönüşümü şöyle olur:

$$L\{e^{3t}\sinh\omega t\} = \frac{\omega}{(s-3)^2 - \omega^2} \qquad (s-3) > \omega$$

(5–13)

3 $t^n f(t)$ Çarpımının Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümünün tanımından hareketle;

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = (-1)^1\int_0^\infty e^{-st}\, tf(t)dt = L\{tf(t)\}$$

$$\frac{d^2F}{ds^2} = (-1)^2\int_0^\infty e^{-st}t^2 f(t)dt$$

.

.

$$\frac{d^nF(s)}{ds^n} = (-1)^n\int_0^\infty e^{-st}t^n f(t)dt \qquad (5-14)$$

elde edilir. Denklem 5−14'ün sağ tarafındaki integral, tanım gereği $t^n f(t)$ çarpımının Laplace dönüşümüdür. Bu terim yalnız bırakılırsa;

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

(5−15)

Bu özellik, bağımsız değişkenin kuvvetlerinin bulunduğu fonksiyonların Laplace dönüşümü için son derece faydalıdır.

ÖRNEK 5−4
t^2 fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

ÇÖZÜM Denklem 5−15'e göre $L\{t^2 \cdot 1\}$ dönüşümünü arıyoruz. O halde $f(t) = 1$'dir. Ayrıca $L\{1\} = \frac{1}{s} = F(s)$ olduğundan, Denklem 5−15'ten;

$$L\{t\} = (-1)^2 \frac{d^2F(s)}{ds^2} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{2}{s^3}, \qquad s > 3 \qquad (5-16)$$

---

4 $\frac{1}{t}f(t)$ Çarpımının Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümünün tanımı şöyleydi: $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$

Her iki tarafın s ile ∞ arasında belirli integralini alalım:

$$\int_s^\infty F(s)ds = \int_s^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(t)dtds$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-st} ds\right] f(t)dt$$

Ancak $\int_s^\infty e^{-st} ds = \left.\frac{e^{-st}}{-t}\right|_{s=s}^{\infty} = 0 - \frac{e^{-st}}{-t} = \frac{e^{-st}}{t}$

olduğundan, yukarıdaki denklem;

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{1}{t} f(t)dt$$

haline gelir. Bu ise, tanım gereği $L\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\}$ dir. O halde sonuç olarak

$$L\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} = \int_s^\infty F(s)ds \qquad (5-17)$$

elde edilir.

ÖRNEK 5–5
$1/t$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklem 5–17 dikkate alındığında, verilen ifadeden $f(t) = 1$ olduğu anlaşılmaktadır. Öte yandan $L\{1\} = \frac{1}{s} = F(s)$ olduğundan, Denklem 5–17'den;

$$L\left\{\frac{1}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty} F(s)ds = \lim_{R\to\infty}\int_{s}^{R}\frac{1}{s}ds = \lim_{R\to\infty}\left[\ln s\right]_{s}^{R} = \lim_{R\to\infty} \ln R - \ln s = \infty$$

Dolayısıyla bu fonksiyonun Laplace dönüşümü yoktur.

5 $\int_0^t f(t)dt$ İntegralinin Laplace Dönüşümü

Yine Laplace dönüşümünün tanımından hareketle;

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \int_0^\infty\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt$$

Yazabiliriz. Köşeli parantez içerisindeki integrali, kısmi integral tekniği ile almak mümkündür. Bunun için
$u = \int_0^t f(\tau)d\tau$ ve $dv = e^{-st}dt$ değişken atamaları yapar ve kısmi integral eşitliğinde $\int udv = uv - \int vdu$
Yerine yazarsak;

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \cancel{\left[\frac{e^{-st}}{-s}\int_0^t f(\tau)d\tau\right]_0^\infty} - \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{-s}dt$$
$$= 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{s}F(s)$$

sonuç olarak;

$$L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s) \qquad (5–18)$$

elde edilir. Bu ifade, özellikle integral terimlerine sahip diferansiyel denklemlerin çözümünde çok yararlıdır.

6 Ölçek Değişmesi Özelliği
Eğer $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ biliniyorsa, bu durumda k bir sabit olmak üzere $f(kt)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü şöyle olur:

$$L\{f(kt)\}\frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right) \qquad (5–19)$$

5–4 BASAMAK, PERİYODİK VE DARBE FONKSİYONLARININ LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Bir fonksiyonun Laplace dönüşümünün bulunması için bu fonksiyonun sürekli olması gerekmez. Ancak yaygın kullanımlarından ötürü şu ana kadar genellikle sürekli fonksiyonlar üzerinde durduk. Ancak uygulamada sık karşılaşılan çok sayıda fonksiyon *sıçrama süreksizliğine* sahip olup parçalı olarak ifade edilir. Bu tür fonksiyonlar daha çok elektrik devrelerinin analizinde, mekanik sistemlerde, hatta termal sistemlerde karşımıza çıkmaktadır. İyi ki bu tür fonksiyonların da Laplace dönüşümü vardır ve bu dönüşüm, böyle fonksiyonların yer aldığı diferansiyel denklemlerin çözümünden büyük kolaylık sağlar. Ama önce bu fonksiyonları tanıyalım. Öncelikle *birim basamak fonksiyonu* $\boldsymbol{u(t-t_0)}$ ile *birim darbe (impuls) fonksiyonu* $\boldsymbol{\delta(t-t_0)}$ hakkında bilgi verelim. Laplace dönüşümünün $\boldsymbol{0 \leq t < \infty}$ aralığında tanımlandığını düşünerek işlemlerimizde daima $\boldsymbol{t \geq 0}$ kabul edeceğiz.

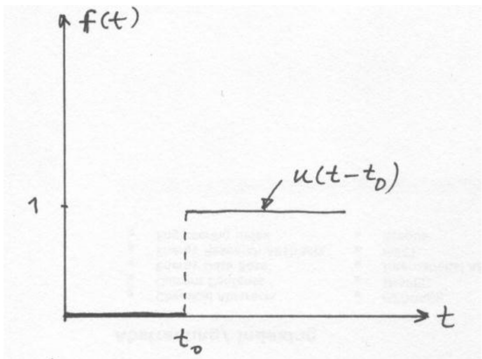
1 BİRİM BASAMAK FONKSİYONU

Muhtemelen sıçrama süreksizliğine sahip en basit fonksiyon **birim basamak fonksiyonu** $\boldsymbol{u(t-t_0)}$ dır. Buna aynı zamanda ***Heaviside fonksiyonu*** da denir ve aşağıdaki şekilde tarif edilir:

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases}$$

(5–20)

Bu ifadede t_0 sıçramanın görüldüğü yerdir (Şekil 5–10).



$t_0 = 0$ özel durumu için $u(t-0) = u(t) = 1$ olur ve bunun da Laplace dönüşümü, daha önceden,

$$L\{u(t)\} = L(1) = \frac{1}{s} \tag{5–21}$$

olarak elde edilmişti. Birim basamak fonksiyonu, bir anlamda $u(t)$ fonksiyonunun t_0 kadar kaydırılması olarak düşünülebilir. Bu fonksiyonun Laplace dönüşümünü yapmak için $x = t - t_0$ dönüşümü uygularsak;

$$L\{u(t-t_0)\} = \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} u(t-t_0) dt = \int_0^{\infty} e^{-s(x+t_0)} u(x) dx$$

$$= e^{-t_0 s}\int_0^{\infty} e^{-sx}u(x)dx = e^{-t_0 s}L\{1\} = \frac{e^{-t_0 s}}{s}$$

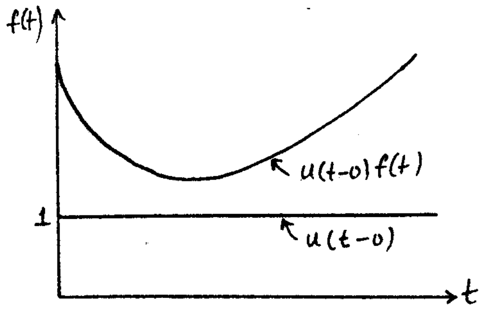
ve sonuçta birim basamak fonksiyonunun Laplace dönüşümü;

$$L\{u(t-t_0)\} = \frac{e^{-t_0 s}}{s}$$

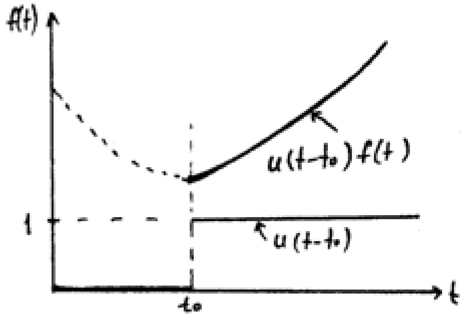
(5–22)

olarak bulunur.

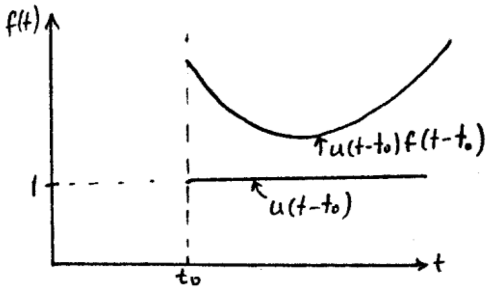
Şimdi de bir $f(t)$ fonksiyonunu birim basamak fonksiyonu ile çarptığımızda ne olacağına bakalım (Şekil 5–11).



(a) : Etki yok



(b) $t < t_0$ kısmının kesilmesi



(c) Fonksiyonun t_0'a kaydırılması

Şekil 5-11. Birim basamak fonksiyonunun $f(t)$ fonksiyonu üzerindeki etkisi

$t_0 = 0$ olması durumunda

$$u(t-t_0)f(t) \equiv f(t) \qquad (5–23)$$

olur, çünkü $t \geq 0$ için $\boldsymbol{u(t-0)} = \boldsymbol{u(t)} = 1$'dir ve birim basamak fonksiyonunun $f(t)$ üzerinde bir etkisi yoktur. Ancak $t_0 \neq 0$ olması halinde şu durum elde edilir:

$$u(t-t_0)f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ f(t), & t \geq t_0 \end{cases}$$

(5–24)

Dolayısıyla bir $f(t)$ fonksiyonunu birim basamak fonksiyonu ile çarpmak, bu $f(t)$ fonksiyonunun $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{t} < t_0$ aralığında kalan kısmını yok etmekte, geri kalan kısmı üzerinde ise herhangi bir etki yapmamaktadır. Peki varsayalım ki $f(t)$ fonksiyonunun $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{t} < t_0$ aralığında kalan kısmını kaybetmek istemiyor, bunun yerine $f(t)$ fonksiyonunun başlangıç noktasını $\boldsymbol{t} = t_0$ noktasına ötelemek istiyoruz. Bunu yapmak için $f(t)$ fonksiyonunu t_0 birim sağa kaydırmak (yani $f(t-t_0)$'ı oluşturmak) ve birim basamak fonksiyonu $u(t-t_0)$ ile çarpmak yeterlidir (Bkz. Şekil 5−11). Bunun sonucunda aşağıdaki parçalı fonksiyon elde edilir:

$$u(t-t_0)f(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ f(t-t_0), & t \geq t_0 \end{cases}$$

Birim basamak fonksiyonunu; $f(t)$ fonksiyonunu $t = t_0$ noktasına kadar “kapalı” tutan daha sonra da “açan” bir tür anahtar gibi düşünmek mümkündür.

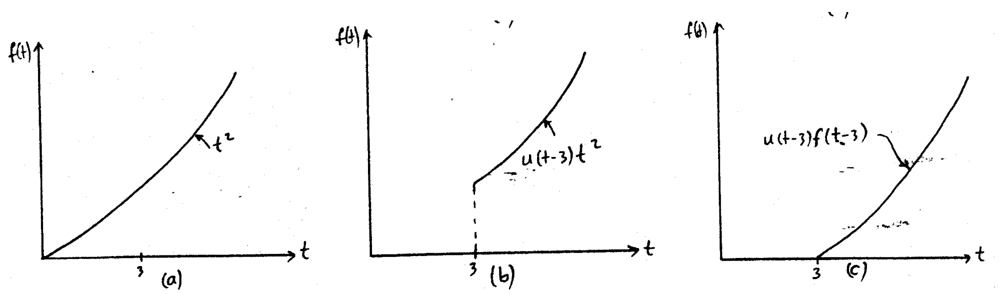
ÖRNEK 5−6
Aşağıdaki fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulunuz.

$$f(t) = t^2$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ t^2, & t \geq 3 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ (t-3)^2, & t \geq 3 \end{cases}$$

ÇÖZÜM Her üç fonksiyon Şekil 5−12’de çizilmiştir. Bu sorunun amacı, davranışları genel olarak aynı olan farklı fonksiyonların Laplace dönüşümlerini göstermektir.



Şekil 5-12 Örnek 5-6’da verilen fonksiyonların grafikleri

(a)Tablo 5−1'den $L\{f(t)\}=L\{t^2\}=\dfrac{2}{s^2}$
elde edilir.

(b) Birim basamak fonksiyonu yardımıyla bu fonksiyon $f(t)=u(t-3)t^2$ olarak yazılabilir. Buna göre Laplace dönüşümü;

$$F(s)=L\{u(t-3)t^2\}=\int_0^\infty e^{-st}u(t-3)t^2dt=\int_3^\infty e^{-st}t^2dt$$

çünkü $t\leq 0$ için fonksiyonun değeri sıfırdır. Ancak alt limit değişerek 3 olmuştur. Bunu tekrar sıfır yapmak için $x=t-3$ değişkenini tanımlayıp yerine yazalım:

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-s(x+3)}(x+3)^2dx=e^{-3s}\int_3^\infty e^{-3x}(x+3)^2dx$$
$$=e^{-3s}L\{x^2+6x+9\}=e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s}\right)$$

(c Birim basamak fonksiyonu yardımıyla bu fonksiyon $f(t)=u(t-3)(t-3)^2$ olarak ifade edilebilir. Buna göre Laplace dönüşümü;

$$F(s)=L\{u(t-3)(t-3)^2\}=\int_3^\infty e^{-st}u(t-3)(t-3)^2dt=\int_3^\infty e^{-st}(t-3)^2dt$$

çünkü $t\leq 0$ için fonksiyonun değeri sıfırdır. Ancak alt limit değişerek 3 olmuştur. Bunu tekrar sıfır yapmak için $x=t-3$ değişkenini tanımlayıp yerine yazalım:

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-s(x+3)}x^2dx=e^{-3sx}x^2dx=e^{-3s}L\{x^2\}=\frac{2e^{-3s}}{s^3}$$

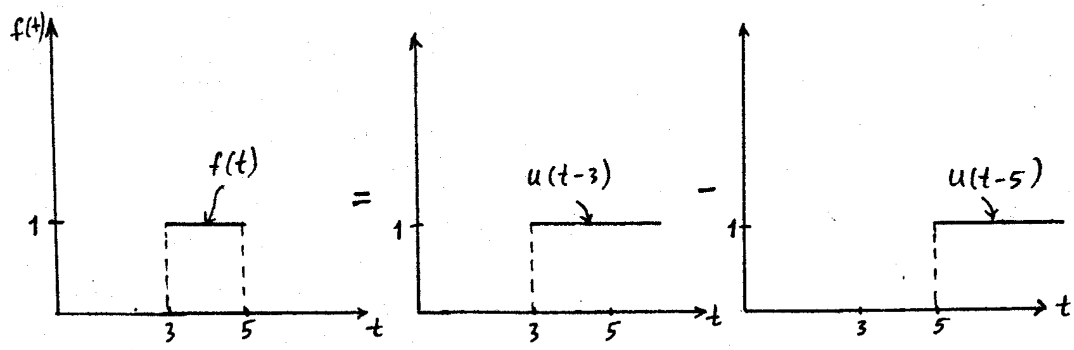
ÖRNEK 5−7

Aşağıdaki fonksiyon için bir matematiksel denklem elde ederek bunun Laplace dönüşümünü yapınız.

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<3\\ 1, & 3\leq t\leq 5\\ 0, & t>5\end{cases}$$

ÇÖZÜM Bu fonksiyon, iki ayrı birim basamak fonksiyonunun farkı biçiminde düşünülebilir (Şekil 5−13) ve şöyle ifade edilebilir:

$$f(t)=u(t-3)-u(t-5)$$



Şekil 5-13 Örnek 5-7'deki fonksiyonların grafikleri

Buna göre Denklem 5–22'den;

$$F(s) = L\{u(t-3) - u(t-5)\} = L\{u(t-3)\} - L\{(t-5)\} = \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s}$$

elde edilir.

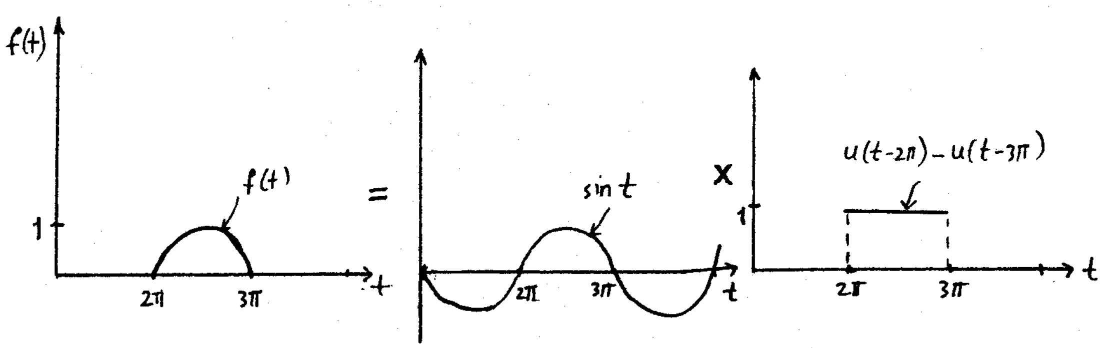
ÖRNEK 5–8

Aşağıdaki fonksiyon için bir matematiksel denklem elde ederek bunun Laplace dönüşümünü yapınız.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2\pi \\ \sin(t), & 2\pi \le t \le 3\pi \\ 0, & t > 3\pi \end{cases}$$

ÇÖZÜM Bu fonksiyon, Şekil 5–14 te görüldüğü gibi $\sin(t)$ ile iki farklı birim basamak fonksiyonu arasındaki farkın çarpımı olarak düşünülebilir ve şu şekilde ifade edilebilir:

$$f(t) = \sin t[u(t-2\pi) - u(t-3\pi)]$$



Şekil 5-14 Örnek 5-8'de verilen fonksiyonun birim basamak fonksiyonları ile oluşturulması

Denklem 2-26 dan bu fonksiyonun Laplace dönüşümü;

$$F(s) = L\{\sin t[u(t-2\pi) - u(t-3\pi)]\} = L\{u(t-2\pi)\sin t\} - L\{u(t-3\pi)\sin t\}$$
$$= e^{-2\pi s} L\{\sin(t+2\pi)\} - e^{-3\pi s} L\{\sin(t+3\pi)$$

bulunur. Ancak $\sin(t+2\pi) = \sin(t)$ ve $\sin(t+3\pi) = \sin(-t) = -\sin(t)$ olduğundan;

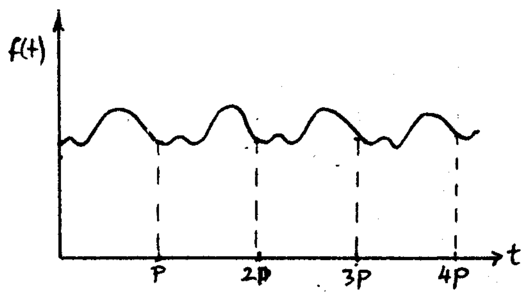
$$F(s) = e^{-2\pi s} L\{\sin t\} - e^{-3\pi s} L\{-\sin t\} = (e^{-2\pi s} + e^{-3\pi s}) L\{\sin t\}$$
$$= \frac{e^{-2\pi s} + e^{-3\pi s}}{s^2 + 1}$$

elde edilir.

---

2 PERİYODİK FONKSİYONLAR

Uygulamada periyodik fonksiyonlarla çok sık karşılaşılır ve bu yüzden özel bir ilgiyi hak etmektedirler. Her pozitif t değeri için $f(t+p) = f(t)$ eşitliğini sağlayan pozitif bir p sayısı varsa, $f(t)$ fonksiyonuna p periyotlu **periyodik fonksiyon** denir. Burada eşitliği sağlayan en küçük pozitif p sayısından söz ettiğimizi belirtelim (Şekil 5−15). Bu durumda p sayısının tam katları olan $2p$, $3p$, $4p$ vb. sayıları da bu eşitliği sağlar. Yakından bilinen trigonometrik fonksiyonlar $\sin t$ ve $\cos t$, 2π periyotlu fonksiyonlardır. Periyodik fonksiyonların Laplace dönüşümleri için şu teori kullanılır:



Şekil 5-15 Periyodik fonksiyon

Teorem 5−2 *$t > 0$ için $f(t)$; p periyotlu sürekli bir parçalı fonksiyon olmak üzere, bu fonksiyonun Laplace dönüşümü;*

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt \tag{5−28}$$

ifadesinden bulunur ($s > 0$).

ÖRNEK 5−9 $f(t) = \sin(\omega t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

ÇÖZÜM $f(t) = \sin(\omega t)$ fonksiyonu, $p = 2\pi/\omega$ periyotlu bir periyodik fonksiyondur. Buna göre Denklem 5−28'den (gerektiği yerde integral tablolarına müracaat ederek)

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-(2\pi/\omega)s}} \int_0^p e^{-st} \sin(\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-(2\pi/\omega)s}} \left[\frac{e^{-st}(-s\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t))}{s^2+\omega^2} \right]_{t=0}^{t=2\pi/\omega}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-(2\pi/\omega)s}} \frac{\omega\left(1-e^{-(2\pi/\omega)s}\right)}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

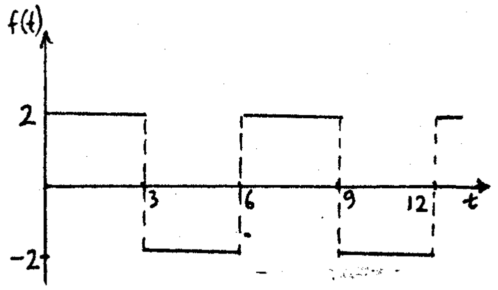
olarak elde edilir.

ÖRNEK 5–10

Aşağıdaki $p = 6$ periyotlu fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 3 \\ -2, & 3 \le t < 6 \end{cases}$$

ÇÖZÜM Verilen fonksiyon, genliği 2 olan $p = 6$ periyotlu dalga fonksiyonudur (Şekil 5–16).



Şekil 5-16 Örnek 5-10'da verilen periyodik fonksiyon

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-6s}} \left[\int_0^3 e^{-st}(2)\,dt + \int_3^6 e^{-st}(-2)\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-6s}} \left[2\left| -\frac{e^{-st}}{s} \right|_0^3 - 2\left| -\frac{e^{-st}}{s} \right|_3^6 \right] \qquad (5\text{–}29)$$

$$= \frac{2(1-2e^{-3s}+e^{-6s})}{s(1-e^{-6s})} = \frac{2(1-e^{-3s})^2}{s(1-e^{-3s})(1+e^{-3s})}$$

$$= \frac{2(1-e^{-3s})}{s(1+e^{-3s})} = \frac{2}{s}\tanh 3s$$

ALTERNATİF ÇÖZÜM

Genel olarak genliği a olan p periyotlu bir kare dalga fonksiyonunun Laplace dönüşümü şu şekilde verilir:

$$f(t)=\{\begin{matrix} a & 0\le t<p/2 \\ -a & p/2\le t<p \end{matrix}$$

ve

$$F(s)=\frac{a(1-e^{-ps/2})}{s(1+e^{-ps/2})}=\frac{a}{s}\tanh\frac{ps}{2}=\frac{a}{s}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-pns/2}\right]$$

Verilen kare dalga $a=2$ ve $p=6$ dır. Dolayısıyla yukarıdaki denklemden

$$f(t)=2\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t-3n)\right]$$

ve bunun Laplace dönüşümü;

$$\begin{aligned} F(s)&=2\left[L\{1\}+L\left\{2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t-3n)\right\}\right] \\ &=2\left[L\{1\}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n L\{u(t-3n)\}\right] \\ &=2\left[\frac{1}{s}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{-3ns}}{s}\right] \qquad (5\text{–}30) \\ &=\frac{2}{s}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-3ns}\right] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Denklem 5–29 ile bulunan sonuç ile Denklem 5–30 ile bulunan sonucun aynı olduğunu gösteriniz…

3 DARBE FONKSİYONLARI

Bazı fiziksel problemlerde, ani voltaj değişimi veya bir cisme çarpma kuvveti gibi, çok kısa bir süreliğine etkiyen büyük şiddetli fonksiyonlar söz konusudur. Bu tür değişimler genelde belirli bir yerde zirve (pik) yapan, diğer yerlerde ise sıfır olan değişimlerdir. Bu sıradışı davranışlarından ötürü bu tür fonksiyonlar diğer bilinen fonksiyonlardan ayrı biçimde ele alınmalıdır.

Örneğin bir futbol oyuncusunu dikkate alalım. Şut çekerken futbolcunun ayağı topa t_0 anında, çok kısa bir sure içerisinde büyük bir ani kuvvet uygular ve ardından toptan teması kesilir. Kuvvetin uygulanma süresi ϵ olsun. Uygulanan kuvvetin ϵ süresi boyunca integraline kuvvetin *darbe*si (impulsu) I denir. Bu darbeli kuvveti $i(t)$ ile gösterirsek, şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ h(t) & t_0 \le t \le t_0 + \epsilon \\ 0, & t > t_0 + \epsilon \end{cases}$$

(5–33)

Pratik olmamasını bir tarafa bırakırsak, bu tarif oldukça kesin ve makuldür. Her şeyden önce ϵ süresini ölçmek ya da $h(t)$ nin matematiksel biçimini kestirmek kolay değildir. Ayrıca çoğu zaman bunların sonuç üzerinde ya çok az etkisi vardır, ya da etkisi hiç yoktur. Asıl önemli olan kuvvetin darbesidir. Dolayısıyla tüm bu kuvvetin t_0 anında I'ya eşit bir yoğunlukta etkidiği düşünülebilir. Bu idealleştirme sayesinde $i(t)$ fonksiyonu şu şekilde verilebilir:

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$$

(5–34)

Bu tarif zarif görünse de önemli bir olumsuz özelliği bulunmaktadır. Deneyimlerimizden, bu tür fonksiyonlar yerine tek bir doğru ile tarif edilen fonksiyonlarla çalışmanın daha uygun olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu fonksiyonu bir tek-doğru tarifine dönüştürmek isteriz. Basamak fonksiyonları için bunu daha önce *birim basamak fonksiyonu* $u(t - t_0)$ kullanarak yapmıştık. Şimdi aynı şeyi **birim darbe fonksiyonu** $\delta(t - t_0)$ tanımlayarak darbeli fonksiyonlar için yapacağız. Birim darbe fonksiyonu, alışılagelmişin oldukça dışında aşağıdaki biçimde tarif edilir:

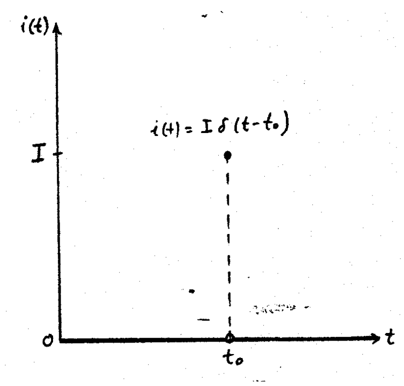
$$\delta(t - t_0) = 0 \qquad t \neq t_0 \qquad (5\text{–}35\,a)$$

$$\int_0^\infty \delta(t - t_0)\, dt = 1 \qquad (5\text{–}35\,b)$$

Delta (δ) fonksiyonu kullanılarak darbeli fonksiyon $i(t)$ şu şekilde ifade edilir (Şekil 5–19):

$$i(t) = I\,\delta(t - t_0)$$

(5–36)



Şekil 5-19 Darbeli davranışın delta fonksiyonu yardımıyla yapılan idealleştirilmiş tarifi

Delta fonksiyonunun asıl kıymeti, bir integral içerisinde yer aldığında ortaya çıkar. Örneğin

$$\int_0^{\infty} i(t)\,\delta(t-t_0)dt = i(t_0) = I$$

Veya genel bir $f(t)$ fonksiyonu için

$$\int_0^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \tag{5−37}$$

olduğu görülür. Delta fonksiyonunu bu anlamda kullanacağız ve bu denklem delta fonksiyonunun *tanımı* olarak düşünülebilir. Delta fonksiyonunun geleneksel anlamda bir fonksiyon olmadığı vurgulanmalıdır. Bu fonksiyon, daha çok Denklem 5−37 deki integral işlemine göre t_0 noktasında fonksiyonun değerini seçen bir tür *operatör* gibi algılanabilir.

Denklem 5−37 ile Laplace dönüşümünün tanımı arasındaki benzerlik dikkate alındığında, delta fonksiyonunun Laplace dönüşümü, denklemdeki $f(t)$ yerine e^{-st} alınarak kolaylıkla elde edilir:

$$L\{\delta(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t-t_0)\,dt = e^{-st_0} \tag{5−38}$$

$t_0 = 0$ olması gibi özel bir durumda;

$$L\{\delta(t-0)\} = e^0 = 1 \tag{5−39}$$

Elde edilir. Burada t değişkeninin mutlaka zaman olması gerekmez, bir konum değişkeni de olabilir. Örnek olarak kalın bir silindirin ortasındaki ince bir direnç telinden sürekli olarak yayılan ısı $P\delta(r-0)$ ile verilebilir. Burada r radyal yöndeki konum değişkeni, P ise yayılan ısıdır.

ÖRNEK 5−11

Bir elektrik devresi $t = 5$ s'de 20 V luk ani bir gerilime, $t = 30$ s'de ise 50 V luk ani bir gerilime maruz kalmaktadır. Uygulanan gerilim $i(t)$ için matematiksel bir denklem oluşturunuz ve bu denklemin Laplace dönüşümünü yapınız.

ÇÖZÜM Uygulanan gerilim verildiği şekliyle şöyle ifade edilebilir (Şekil 5−21):

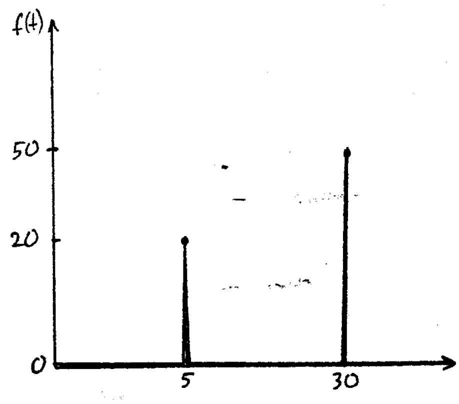
$$i(t) = \begin{cases} 0, & t<5 \\ 20, & t=5 \\ 0, & 5<t<30 \\ 50, & t=30 \\ 0, & t>30 \end{cases}$$

Diğer taraftan delta fonksiyonu kullanırsak;

$$i(t) = 20\delta(t-5) + 50\delta(t-30) \tag{5–21}$$

Elde ederiz. Bunun Laplace dönüşümü ise, Denklem 5–38'den;

$$I(s) = L\{[20\delta(t-5) + 50\delta(t-30)]\} = 20e^{-5s} + 50e^{-30s}$$



Şekil 5-21 Örnek 5-11'de verilen fonksiyon

5–5 TÜREVLERİN VE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümdeki asıl amacımız, diferansiyel denklemleri Laplace dönüşümü ile çözmektir. Bu yüzden türevlerin Laplace dönüşümlerini bilmemiz gerekir. Bir $f(t)$ fonksiyonunun n'inci türevinin Laplace dönüşümü, integralin yakınsaması halinde ;

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f^{(n)}(t)\,dt \tag{5–40}$$

olarak bulunur.

Teorem 5–3: Birinci Türevin Laplace Dönüşümü

$t \geq 0$ olmak üzere $f'(t)$ türevi en azından parçalı sürekli bir fonksiyon ise, bu tüevin Laplace dönüşümü;

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \tag{5–41}$$

olarak ifade edilir. Burada $F(s)$, $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü, $f(0)$ ise $t = 0$ noktasında bu fonksiyonun değeridir. Eğer bu noktada fonksiyon sürekli değilse, bu durumda $f(0) = f(0+)$, yani sağdan limit değeri alınır.

İkinci ve n'inci Türevin Laplace Dönüşümü

$t \geq 0$ olmak üzere $f(t)$ ve $f'(t)$ sürekli bir fonksiyon ve $f''(t)$ türevi en azından parçalı sürekli bir fonksiyon ise, bu durumdan ikinci türevin Laplace dönüşümü;

$$L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

(5−42)

olarak ifade edilir. Benzer şekilde n'inci türevin Laplace dönüşümü ise;

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

(5−43)

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

ÖRNEK 5−12

Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümlerini yapınız ve bulduğunuz cebirsel ifadeden $\boldsymbol{Y(s)}$ fonksiyonunu çekiniz.

(a) $y'' - 2y' + 3y = 0$

(b) $y' = te^{3t} + 2$

ÇÖZÜM

(a) $L\{y'' - 2y' + 3y\} = L\{y''\} - 2L\{y'\} + 3L\{y\} = L\{0\} = 0$

$$= [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 2[sY(s) - y(0)] + 3Y(s)$$

$$= (s^2 - 2s + 3)Y(s) - y'(0) - (s-2)y(0) = 0$$

$$Y(s) = \frac{y'(0) + (s-2)y(0)}{s^2 - 2s + 3}$$

(b) $L\left\{y' - te^{3t} - 2\right\} = L\{y'\} - L\left\{te^{3t}\right\} - 2L\{l\}$

$$= [sY(s) - y(0)] - \frac{l}{(s-3)^2} - \frac{2}{s} = 0$$

$$Y(s) = \frac{l}{s(s-3)^2} + \frac{2}{s^2} + \frac{y(0)}{s}$$

Böylelikle verilen iki diferansiyel denklemi *cebirsel denklem*lere dönüştürmüş olduk. Ancak bizim aradığımız $Y(s)$ değil, bunun Laplece dönüşümü yapılmamış hali, yani $y(t)$ dir. $Y(s)$ den hareketle $y(t)$ ye geçebilmek için bu sefere ters Laplace dönüşümü uygulamamız gerekir.

5–6 TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşü ile çözümünde ilk adım, dönüşüm fonksiyonun olan $Y(s)$ i bulmaktır. Bu işlem genellikle oldukça kolaydır. İkinci adım ise Laplace dönüşümü $Y(s)$ olan ve asıl aranan $y(t)$ fonksiyonudur. Bu adım ise daha zordur. Ters Laplace dönüşümü $L^{-1}\{\quad\}$ ile gösterilir ve;

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) \tag{5–44}$$

olarak ifade edilir. Ters Laplace dönüşümünü yapabilmenin en kolay ve hızlı yolu, Laplace dönüşüm tablolarından yararlanmaktır. Çeşitli kaynaklarda ve internette çok geniş dönüşüm tabloları mevcuttur. Ancak çok basit yapıda ve sık rastlanan bir ters dönüşüm değilse elinizde bulunan, muhtemelen bu tablolar da işinize yaramayacaktır. Ters Laplace dönüşümlerini doğrudan integral yoluyla da bulmak mümkündür, ancak bu da oldukça iyi bir integral bilgisi gerektirir. Bunların hepsinden daha kolay bir yol ise çeşitli matematiksel yazılımları kullanmaktır. Matlab, Maple, Mathematica, Mathcad vb. programlar; son derece gelişmiş altyapılarıyla bu ve benzeri konularda son derece yardımcıdır.

Ters Laplace Dönüşümünün Bazı Temel Özellikleri

Özellik 1:

$$L^{-1}\{C_1F_1(s) + C_2F_2(s)\} = C_1L^{-1}\{F_1(s)\} + C_2L^{-1}\{F_2(s)\} \tag{5–45}$$

Örnek

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{3}{s+5}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{l}{s}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{l}{s+5}\right\} = 2 - 3e^{-5t}$$

Özellik 2:

$$L^{-1}\{F(s-k)\} = e^{kt}L^{-1}\{F(s)\} \tag{5–46}$$

Örnek

$$L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2 - \omega^2}\right\} = e^{-3t}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - \omega^2}\right\} = e^{-3t}\cosh(\omega t)$$

Özellik 3:

$$L^{-1}\{sF(s)\}=\frac{d}{dt}L^{-1}\{F(s)\} \tag{5–47}$$

Örnek

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}=L^{-1}\left\{s\underbrace{\left(\frac{1}{s^2+9}\right)}_{F(s)}\right\}\frac{d}{dt}L^{-1}\left\{\frac{I}{s^2+9}\right\}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin 3t}{3}\right)=\cos 3t$$

Özellik 4:

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}=\int_0^t L^{-1}\{F(s)\}dt \tag{5–48}$$

Örnek

$$L^{-1}\left\{\frac{6}{s(s-2)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(\frac{6}{(s-2)}\right)\right\}=\int_0^t L^{-1}\left\{\frac{6}{s-2}\right\}dt=6\int_0^t e^{2t}dt=6\left.\frac{e^{2t}}{2}\right|_0^t=3e^{2t}-3$$

Özellik 5:

$$L^{-1}\left\{\frac{d^nF(s)}{ds^n}\right\}=(-t)^n L^{-1}\{F(s)\} \tag{5–49}$$

Örnek

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s}\right)\right\}=(-t)^2L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=t^2\times 1=t^2$$

Özellik 6:

$$L^{-1}\left\{e^{-t_0s}F(s)\right\}=u(t-t_0)f(t-t_0) \tag{5–50}$$

Sözlü anlatımla, e^{-t_0s} teriminin çarpan olarak yer aldığı bir fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapmak şu yol izlenmelidir:

a) Bu terim yokmuş gibi hareket ederek $F(s)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü yaparak $f(t)$ fonksiyonunu bulun
b) $f(t)$ fonksiyonunda t gördüğünüz yere $t-t_0$ yazın
c) Elde ettiğiniz sonucu birim basamak fonksiyonu $u(t-t_0)$ ile çarpın

Örnek

$$L^{-1}\left\{\frac{2e^{-3s}}{s^3}\right\} = u(t-3)L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = u(t-3)(t^2)_{t\to(t-t_0)} = u(t-3)(t-3)^2$$

<u>Özellik 7:</u>

$$L^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right) \qquad (5–51)$$

Örnek

$$L^{-1}\left\{\frac{5s}{25s^2+9}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{(5s)}{(5s)^2+3^2}\right\} = \frac{1}{5}\cos 3\frac{t}{5}$$

<u>Özellik 8:</u>

Eğer iki fonksiyonun Laplace dönüşümleri aynı ise, bu iki fonksiyon da birbirinin eşdeğeridir.

Tam Kareye Tamamlama

Diferansiyel denklemleri Laplace dönüşümü ile çözerken payda kısmında genellikle $\boldsymbol{s^2+bs+c}$ terimiyle karşılaşırız. Bu terimi, ters Laplace dönüşümü olan tam kare haline getirmek kolaylık sağlar. Bunun için ifadeye $\boldsymbol{(b/2)^2}$ terimini ekleyip çıkarmak yeterlidir. Bunun sonucunda;

$$\boldsymbol{s^2+bs+c = \left(s+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

(5–53)

Örnek

$$F(s) = \frac{5}{s^2+8s+10}$$

$$F(s) = \frac{5}{s^2+8s+10} = \frac{5}{\left(s+\frac{8}{2}\right)^2 + 10 - \left(\frac{8}{2}\right)^2} = \frac{5}{(s+4)^2-6}$$

Buna göre ters Laplace dönüşümü;

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{5}{(s+4)^2-6}\right\} = 5e^{-4t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-6}\right\} = \frac{5e^{-4t}\sinh\sqrt{6}\,t}{\sqrt{6}}$$

5–7 KISMİ KESİRLERE AYIRMA

Diferansiyel denklemleri Laplace dönüşümü ile çözerken genellikle kesirli ifadelerle karşılaşırız. Bu ifadelerin ters dönüşüm tablolarında doğrudan karşılıklarını bulmak mümkün olmadığından, bu tür ifadeleri kısmi kesirli yapılara dönüştürmek gerekir. Aynı işlem integral için de yapılır. Örneğin $\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}$ ifadesini integre etmek $\frac{2}{x(x+1)}$ ifadesinin integralini almaktan çok daha zordur. O halde kısmi kesirlere ayırmak ters Laplace dönüşümü yaparken önemli kolaylık sağlar. Bunun için bazı kurallar verelim:

Kural 1 *Verilen kesrin basit kesir (payın derecesi paydanınkinden küçük) olduğundan emin ol. Örneğin* $\frac{3x^2-3x+1}{x(x+2)(x+3)}$ *kesri basit kesirdir, çünkü payının derecesi 2 paydasının derecesi ise 3 tür.*

Kural 2 *Verilen kesrin payı ile ilgilenme, çünkü bunun kısmi kesir seçiminde etkisi yoktur*

Kural 3 *Paydadai çarpanları mümkün olduğu kadar sade biçimde ifade et. Bu sayede daha basit kısmi (ters Laplace dönüşümü kolay) kesirler elde etmiş olursun. Örneğin şu iki ifadeden ikincisi daha basit sonuç verecektir.*

$$\frac{x^2-3x+1}{x(x^2+x-6)} = \frac{x^2-3x+1}{x(x-2)(x+3)}$$

Kural 4 *Basit bir kesrin kısmi kesirleri de daima basit birer kesirdir, bunu unutma. O halde şu denkliği yazabiliriz:*

$$\frac{3x^2+13x-6}{x(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3} \qquad (5–53)$$

Burada A, B ve C bilinmeyen sabitlerdir. Kısmi kesir denkliği yazılırken payın derecesi paydanın derecesinden bir düşük alınır. Örneğin paydada ax^2+bx+c gibi bir ifade varsa, pay kısmına bunun bir alt derecesi olan $Ax+B$ yazılmalıdır.

Kural 5 *Paydada yer alan tekrarlı çarpanları sıradan çarpanlar olarak düşün, ancak her ardışık her bir kuvvet için bir terim ilave et. Buna örnek verelim:*

$$\frac{x^3+5x^2-7}{x^3(x-5)^2(x^2+1)^2} \equiv \left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}\right)+\left(\frac{D}{x-5}+\frac{E}{(x-5)^2}\right)+\left(\frac{Fx+G}{x^2+1}+\frac{Hx+I}{(x^2+1)^2}\right)$$

Kontol kuralı 1 *Paydada yer alan bir terim kaçıncı dereceden ise, bu terimle ilgili terimde o sayıda bilinmeyen sabit olmalıdır. Örneğin* $(x-5)^2$ *terimi 2. dereceden olduğundan, bilinmeyen sabit de 2 tanedir (*D *ve* E*).*

Kontrol kuralı 2 *Toplam bilinmeyen sabit sayısı, tüm paydanın derecesine eşit olmalıdır. Örneğin yukarıda paydanın derecesi* $3+2+4=9$ *olduğundan bilinmeyen sabit sayısı da* 9 *dur.*

BİLİNMEYEN SABİTLERİ TESPİT EDİLMESİ

Bilinmeyen sabitlerin belirlenmesinde 2 farklı yöntem izlenebilir.

Yöntem 1 Denklemin her iki yanı, orijinal denklemin paydasıyla çarpılır, eşit dereceli terimlerin katsayıları birbirlerine eşitlenerek bilinmeyen sabitler bulunur. Buna bir örnek verelim:

$$\frac{3x^2+13x-6}{x(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}$$

Denklemin her iki yanı $x(x+2)(x-3)$ ile çarpılıp düzenlenirse;

$$\begin{aligned}3x^2+13x-6 &= A(x+2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x+2)\\ &= A(x^2-x-6)+B(x^2-3x)+C(x^2-3x)+C(x^2+2x)\\ &= (A+B+C)x^2+(-A-3B+2C)x-6A\end{aligned}$$

elde edilir. Eşit dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse, aşağıdaki denklem sistemine ulaşılır.

$$\begin{aligned}3 &= A+B+C\\ 13 &= -A-3B+2C\\ -6 &= -6A\end{aligned}$$

Çözüm yapılırsa, $A=1$, $B=-2$ ve $C=4$ bulunur. Dolayısıyla verilen denklem, kısmi kesirler cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{3x^2+13x-6}{x(x+2)(x-3)}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x+2}+\frac{4}{x-3} \qquad (5\text{–}55)$$

Yöntem 2 Denklemin her iki yanı, bilinmeyen sabitlerden birinin paydası ile çarpılarak bu sabit yalnız bırakılır. Daha sonra paydayı sıfır yapan bağımsız değişken değeri yerine yazılarak bilinmeyen sabitlerden ilki bulunur. Aynı işlem daha sonra diğer sabitler için de tekrarlanır. Yukarıdaki örneği bu yöntemle çözelim.

$$\frac{3x^2+13x-6}{x(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}$$

Denklemin her iki yanını A'nın paydası olan x ile çarpalım:

$$\frac{3x^2+13x-6}{(x+2)(x-3)} = A + \frac{Bx}{x+2} + \frac{Cx}{x-3}$$

Elde ettiğimiz denklemde $x=0$ alırsak,

$$A = \left.\frac{3x^2+13x-6}{(x+2)(x-3)}\right)_{x=0} = \frac{-6}{2\cdot(-3)} = 1$$

buluruz. Aynı işlemi bu sefer $(x+2)$ ve $(x-3)$ terimleri için yapalım:

$$B = \left.\frac{3x^2+13x-6}{x(x-3)}\right)_{x=-2} = \frac{-20}{10} = -2$$

$$C = \left.\frac{3x^2+13x-6}{x(x+2)}\right)_{x=3} = \frac{60}{15} = 4$$

Böylece verilen denklem;

$$\frac{3x^2+13x-6}{x(x+2)(x-3)} \equiv \frac{1}{x} - \frac{2}{x+2} + \frac{4}{x-3}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu yöntem lineer (birinci dereceden) paydalar için son derece pratiktir. Ancak ikinci veya daha yüksek dereceli paydalar için kullanılmaz. Ancak yine de lineer paydaya sahip sabitler bu yöntemle hızlı bir şekilde bulunabilir ve böylece bilinmeyen sayısı azaltılabilir.

ÖRNEK 5–13
Kısmi kesirlere ayırma yöntemini kullanarak aşağıdaki fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü yapınız.

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+1)}$$

ÇÖZÜM

$$\frac{s}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

Yöntem 1 kullanılırsa,

$$s = A(s^2+1) + (Bs+c)(s+1) = As^2 + A + Bs^2 + Bs + Cs + C$$
$$= (A+B)s^2 + (B+C)s + (A+C)$$

$$0 = A + B \qquad \rightarrow \qquad A = -B$$
$$1 = B + C$$
$$0 = A + C \qquad \rightarrow \qquad A = -C$$

Denklem sistemi bulunur. Buradan $A = -B = -C = -\frac{1}{2}$ bulunur. Bu sabitler denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{s}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{-1/2}{s+1} + \frac{1/2\,(s+1)}{s^2+1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s+1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right)$$

Bu ifadenin ters Laplace dönüşümü yapılırsa, sonuç şöyle olur:

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(-e^{-t} + \cos(t) + \sin(t)\right)$$

5–8 KONVOLÜSYON TEOREMİ

Diferensiyel denklemleri Laplece yöntemiyle çözerken çoğu zaman doğrudan ters Laplace'ı olmayan, ancak s'ye bağlı ve ters Laplace'ı bilinen iki fonksiyonun çarpımı şeklinde ifade edilebilen $Y(s)$ fonksiyonlarıyla karşılaşırız. Diğer bir ifadeyle $Y(s) = F(s)G(s)$ şeklinde ifade edilebilmekte ve buradaki $F(s)$ ve $G(s)$ fonksiyonlarının ters Laplace dönüşümleri olan $f(t)$ ve $g(t)$ bilinmektedir. Bu tür durumlarda $Y(s)$ fonksiyonunun ters Laplace'ı **konvolüsyon teoremi** ile belirlenebilir. Bu teorem;

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(t)g(t-\tau)d\tau \tag{5–57}$$

olarak ifade edilir (τ geçici değişkendir). Bu integrale $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının *konvolüsyonu* adı verilir ve bazen $f(t) * g(t)$ şeklinde gösterilir. Alınan integralin üst limiti t olduğundan, sonuçta t'ye bağlı bir ifade çıkacaktır.

ÖRNEK 5–14
Konvolüsyon teoremini kullanarak aşağıdaki ifadenin ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+1)}$$

ÇÖZÜM Verilen fonksiyon $F(s)$ ve $G(s)$ gibi iki fonksiyonun çarpımı şeklinde düşünülebilir:

$$F(s) = \frac{1}{s+1} \qquad \text{ve} \qquad G(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

Tablo 5−1'den bu iki fonksiyonun ters Laplace dönüşümleri,

$$f(t) = e^{-t} \qquad \text{ve} \qquad g(t) = \cos t$$

olarak alınır. Konvolüsyon teoremine göre yazarsak;

$$y(t) = f(t) * g(t) = L^{-1}\left\{Y(s)\right\} = L^{-1}\left\{F(s)G(s)\right\} = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cos\tau d\tau = e^{-t}\int_o^t e^{\tau} \cos\tau d\tau$$

Kısmi integral tekniğini kullanarak ya da integral tablolarından yararlanarak (ya da daha pratiği Maple'ı kullanarak ---- tabi sınavda değilseniz---☺);

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(-e^{-t} + \cos(t) + \sin(t)\right)$$

bulunur.

5−9 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜLMESİ

Laplece dönüşümü ile diferansiyel denklemlerin çözümü 3 adımda özetlenebilir:

1. Verilen diferansiyel denklemdeki her bir terimin Laplace dönüşümünü yapınız. Bunun sonucunda $Y(s)$'e bağlı cebirsel bir denklem elde edeceksiniz. Aranan $y(t)$ fonksiyonu, $Y(s)$'in ters Laplace'ıdır.
2. $Y(s)$'i yalnız bırakın. Bunun sonucunda genellikle bir kesir elde edilir.
3. $Y(s)$'in ters Laplace dönüşümünü yaparak aranan fonksiyon $y(t)$'yi bulun. Bu aşamadan kesri kısmi kesilere ayırmanız ve ters dönüşüm/integral tablolarına başvurmanız gerekebilir.

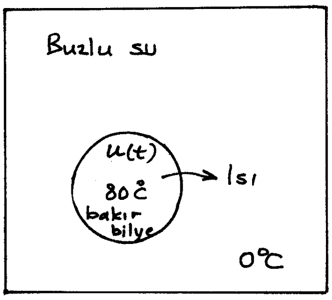
Laplace dönüşümü yapılırken $t = 0$'daki başlangıç değerleri doğrudan girildiği için daha sonradan bu sınır şartlarının uygulanmasına gerek yoktur. Diğer bir ifadeyle, Laplace dönüşümü ile bir diferansiyel denklemi çözebilmek için bu başlangıç değerlerine gereksinim vardır. Bu şartların sadece $t = 0$ için verilebiliyor olması, bu güçlü dönüşümün en zayıf halkasıdır. Dolayısıyla Laplace dönüşümü ile sınır-değer problemlerinin çözümü yapılamaz (neden?).

ÖRNEK 5–15

80 °C sıcaklıktaki küçük bir bakır bilye, içerisinde 0 °C'de buzlu-su bulunan çok geniş bir kaba bırakılıyor. Bakır bilyenin ısı kaybetmesinden ötürü sıcaklığı zamanla düşmeye başlıyor. Bakır bilyenin sıcaklığının zamanla düşmesi;

$$u' + 0.01u = 0$$
$$u(0) = 80\ °\mathrm{C}$$

Diferansiyel denklemi uyarınca gerçekleştiğine göre, bu başlangıç-değer problemini çözerek bilyenin sıcaklığını zamanın fonksiyonu olarak $u = u(t)$ elde ediniz.



ÇÖZÜM Verilen diferansiyel denklemin Laplace dönüşümünü yapalım:

$$L\{u'\} + 0.01L\{u\} = L\{0\}$$
$$sU(s) - u(0) + 0.01U(s) = 0$$
$$U(s) = \frac{80}{s + 0.01}$$

Bu ifadenin ters Laplace dönüşümünden;

$$u(t) = 80e^{-0.01t}$$

Kürenin sıcaklığı zamanın fonksiyonu olarak elde edilmiş olur. ($t \to \infty$ olduğunda ne olur?)

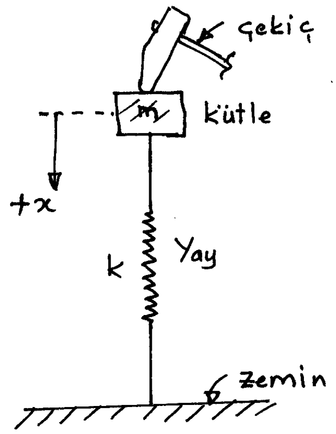
ÖRNEK 5–16

Yay sabiti k olan düşey olarak yere sabitlenmiş bir yayın tepesinde durgun halde bir m kütlesi bulunmaktadır. Bu haldeyken kütlenin üst yüzeyin tam ortasına (bir çekiç ile) I şiddetinde bir darbe ile vurulmaktadır. Bu darbenin etkisiyle kütle yay üzerinde yukarı aşağı titreşim hareketi yapmaya başlamaktadır. Koordinat başlangıcı kütlenin başlangıçtaki merkezi ve pozitif x yönü aşağı doğru alınırsa, kütlenin hareketi şu diferansiyel denklemle tarif edilebilir:

$$mx'' + kx = I\delta(t-0)$$

$$x(0) = x'(0) = 0$$

Buna göre kütlenin konumunu zamanın fonksiyonu olarak elde ediniz.



ÇÖZÜM

Verilen denklemin her iki yanını m kütlesine bölüp Laplace dönüşümü uygulayalım:

$$L\{x''\} + L\left\{\frac{k}{m}x\right\} = L\left\{\frac{I}{m}\delta(t-0)\right\}$$

$$\left[s^2 X(s) - sx(0) - x'(0)\right] + \left[\frac{k}{m}X(s)\right] = \frac{I}{m}\times 1$$

$$s^2 X(s) - 0 - 0 + \frac{k}{m}X(s) = \frac{I}{m}$$

Buradan $X(s)$ çekilir,

$$X(s) = \frac{I}{m}\frac{1}{s^2 + k/m} = \frac{I}{m}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\sqrt{k/m}}{s^2 + k/m} = \frac{I}{\sqrt{mk}}\frac{\sqrt{k/m}}{s^2 + k/m}$$

ve bu ifadenin de ters Laplace dönüşümü yapılırsa;

$$x(t) = \frac{I}{\sqrt{mk}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

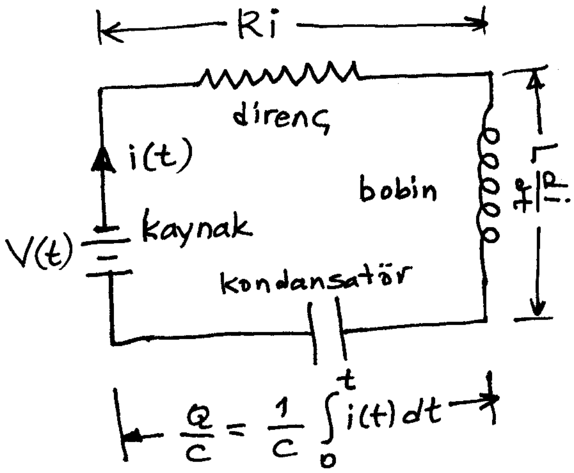
elde edilir. Bu da istenen sonuçtur.

ÖRNEK 5–17
Uygun birimlerde olmak üzere, direnç ($R = 60$), bobin ($L = 1$) ve kondansatör ($C = 0.002$) den kurulu bir RLC devresini ele alalım. Başlangıç anında ($t = 0$) devreden hiçbir akım geçmemektedir. Daha sonra devre anahtarı kapatılarak pilin devreye 2 s süreyle 50 Volt gerilim uygulanması sağlanmakta, ardından anahtar tekrar açılmaktadır.

Devreden geçen akımın $i(t)$ olarak alınması halinde R, L ve C'de oluşan gerilim düşüşleri, sırasıyla; $i(t)R$, $i'(t)L$ ve q/C olacaktır. Burada $q = \int_0^t i(t)dt$ olarak verilir. Kirchhoff gerilimler yasası gereği, tüm gerilim düşüşlerinin toplamı, pil tarafından sağlanan gerilime eşit olmalıdır. Buna göre şu diferansiyel denklem yazılabilir:

$$Li' + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = V(t)$$
$$i(0) = 0$$

Verilenlere göre devreden geçen akımı zamanın fonksiyonu olarak elde ediniz. Pil tarafından sağlanan gerilim, $t_0 = 2$ olduğu dikkate alınırsa; $V(t) = 50[1 - u(t-2)]$ olarak ifade edilebilir.



ÇÖZÜM
Verilen değerleri yerine yazıp Laplace dönüşümü uygulayalım:

$$i' + 60i + 500\int_0^t i(t)dt = 50[1 - u(t-2)]$$

$$L\{i'\} + L\{60i\} + L\left\{500\int_0^t i(t)dt\right\} = L\{50[1-u(t-2)]\}$$

$$[sI(s) - si(0)] + [60I(s)] + \left[500\frac{I(s)}{s}\right] = 50\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}\right]$$

$$I(s)\left[s + 60 + \frac{500}{s}\right] = \frac{50(1-e^{-2s})}{s}$$

Buradan $I(s)$ çekilirse;

$$I(s)=\frac{50\left(1-e^{-2s}\right)}{s^2+60s+500}$$

elde edilir. Paydadaki ifade $s^2+60s+500=(s+50)(s+10)$ şeklinde çarpanlarına ayrılabilir. Yöntem 1 kullanılarak kısmi kesirlerin sabitleri bulunur:

$$\frac{1}{s^2+60s+500}=\frac{1}{(s+50)(s+10)}=\frac{A}{s+50}+\frac{B}{s+10}=-\frac{1}{40}\frac{1}{s+50}+\frac{1}{40}\frac{1}{s+10}$$

Bunlar yerine yazılır;

$$I(s)=\frac{50}{40}\left(\frac{1}{s+10}-\frac{1}{s+50}\right)-\frac{50}{40}e^{-2s}\left(\frac{1}{s+10}-\frac{1}{s+50}\right)$$

ve ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}i(t)&=\frac{50}{40}\left(e^{-10t}-50^{-50t}\right)-\frac{50}{40}u(t-2)\left[e^{-10t}-e^{-50t}\right]_{t\to t-2}\\&=\frac{50}{40}\left(e^{-10t}-e^{-50t}\right)-\frac{50}{40}u(t-2)\left(e^{-10(t-2)}-e^{-50(t-2)}\right)\end{aligned}$$

veya parçalı fonksiyon olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$i(t)=\begin{cases}\dfrac{50}{40}\left(e^{-10t}-50^{-50t}\right), & t<2\\[2ex] \dfrac{50}{40}\left[\left(1-e^{20}\right)e^{-10t}-\left(1-e^{100}\right)e^{-50t}\right], & t\geq 2\end{cases}$$

PROBLEMLER

5−1 Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

$t \geq 0$ olmak üzere aşağıdaki fonksiyonların Laplace dönüşümlerini yapınız.

5−1 (a) $f(t) = 5$, (b) $f(t)= e^{3t}$, (c) $f(t)=$ sinh αt

5−2 (a) $f(t) = t^3$, (b) $f(t)=$ cosh $2t$, (c) $f(t)=\begin{Bmatrix} t, & t \leq 3 \\ 0, & t > 3 \end{Bmatrix}$

5−3 (a) $f(t) = \sin \alpha t$, (b) $f(t)= 5t-3$, (c) $f(t)= t\, e^{-2t}$

5−4 (a) $f(t) = e^{3t}$, (b) $f(t)= t^2$, (c) $f(t)=\begin{Bmatrix} 1, & t \leq 5 \\ 0, & t > 5 \end{Bmatrix}$

5−5 (a) $f(t) = e^{2t-1}$, (b) $f(t)= \cos^2 t$, (c) $f(t)=\begin{Bmatrix} t, & t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 1.5 \\ 0.5, & t > 1.5 \end{Bmatrix}$

5−6 *Aşağıdaki fonksiyonların Laplace dönüşümlerinin bulunup bulunmadığını belirleyiniz.*
(a) $f(t) = \dfrac{1}{t}$, (b) $f(t)= e^{-2t^3}$, (c) sinh $5t$, (d) $f(t)=\begin{Bmatrix} 1, & t \leq 3 \\ t^2, & t > 3 \end{Bmatrix}$

(e) $f(t) = 8t^8$, (f) $f(t)= e^{0.3t^2}$, (g) $\sin t^2$, (h) $f(t)=\begin{Bmatrix} e^{2t^2}, & t \leq 8 \\ t^2, & t > 8 \end{Bmatrix}$

5−2 Laplace Dönüşümünün Temel Özellikleri

5−7 $L\left\{5t^2 \sin 3t\right\} = 5L\left\{t^2 \sin 3t\right\}$ ifadesi doğru mudur? Peki $L\left\{5t^2 \sin 3t\right\} = 5L\left\{t^2 \sin 3t\right\}$ ifadesi için ne dersiniz?

5−8 $L\left\{t^2 + e^{5t}\right\} = L\left\{t^2\right\} + L\left\{e^{5t}\right\}$ ifadesi doğru mudur? Peki $L\left\{t^2 + e^{5t}\right\} = L\left\{t^2\right\} \times L\left\{e^{5t}\right\}$ ifadesi için ne dersiniz?

5−9 Laplace dönüşümünün kaydırma özelliği nedir? Bunun ölçek değişimi özelliğinden farkı nedir?

5−10 *f(t)* ve *g(t)* fonksiyonları ile bunların Laplace dönüşümleri *F(s)* ve *G(s)* verilmiş olsun. $G(s) = sF(s)$ olduğuna göre *f(t)* ve *g(t)* arasında bir bağıntı bulunuz.

5−11 *f(t)* ve *g(t)* fonksiyonları ile bunların Laplace dönüşümleri *F(s)* ve *G(s)* verilmiş olsun. $G(s) = \int_s^\infty F(s)ds$ olduğuna göre *f(t)* ile *g(t)* arasında bir bağıntı bulunuz.

5−12 *f(t)* ve *g(t)* fonksiyonları ile bunların Laplace dönüşümleri *F(s)* ve *G(s)* verilmiş olsun. $G(s) = -\frac{d^3F(s)}{ds^3}$ olduğuna göre *f(t)* ile *g(t)* arasında bir bağıntı bulunuz.

5−13 $L\{f(2t)\} = 2L\{f(t)\}$ eşitliği doğru mudur? Evet diyorsanız, hangi türen fonksiyonlar için?

Tablo 5−1'de verilen dönüşümleri kullanarak aşağıdaki fonksiyonların Laplace dönüşümlerini yapınız.

5−14 (a) $f(t)=t^2 \sin 2t$, (b) $f(t)=\dfrac{\cosh 3t}{t}$, (c) $f(t)=3t^2-\sin 3t$

5−15 (a) $f(t)=t^3 \cos t$, (b) $f(t)=2t^5-3e^{2t+1}$, (c) $f(t)=\int_0^1 e^{3t}dt$

5−16 (a) $f(t)=3te^{-2t}\cos\omega t$, (b) $f(t)=2t^2e^{-3t}$, (c) $f(t)=\dfrac{\cos^2 kt}{t}$

5−17 (a) $f(t)=6te^{3t}\sin 2t$, (b) $f(t)=3t\cosh kt$, (c) $f(t)=\sqrt{t}+t^{3/2}$

5−18 (a) $f(t)=t^2e^{3t+1}\sin\omega t$, (b) $f(t)=te^t$, (c) $f(t)=\int_0^t e^{3t}\sin 2t\,dt$

5−19 (a) $f(t)=5t^2\sinh 2t$, (b) $f(t)=2e^{-3t}t^3$, (c) $f(t)=t^2e^{5t-2}\cos kt$

5−20 (a) $f(t)=t^{5/2}e^{5t}$, (b) $f(t)=t^3\sin 3t\cos 3t$, (c) $f(t)=\int_0^t t\cosh 3t$

5−3 Basamak, Periyodik ve Darbe Fonksiyonlarının Laplace Dönüşümü

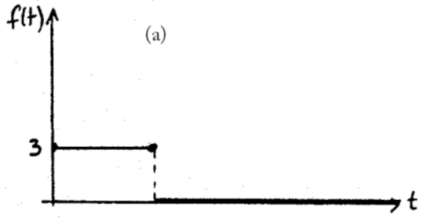
5−21 $u(t-t_0)f(t)$ ve $u(t-t_0)f(t-t_0)$ fonksiyonlarının $f(t)$'den farkı nedir?

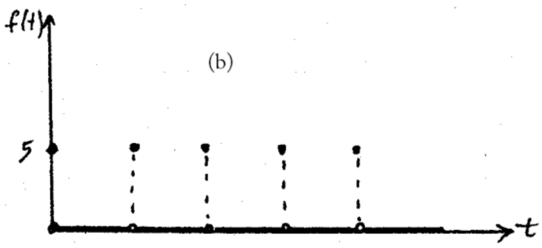
5−22 Periyodik fonksiyonun belirleyici özellikleri nelerdir? Böyle bir fonksiyon mutlaka sürekli olmalı mıdır?

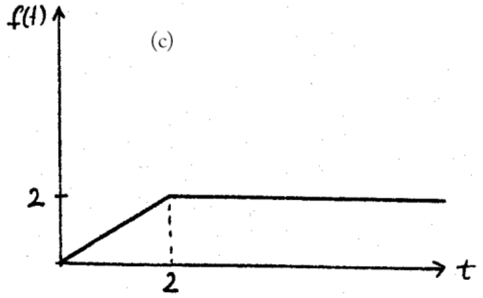
5−23 Darbe fonksiyonlarının pratikte ne önemi vardır. Darbe fonksiyonları ile tarif edilebilecek fiziksel örnekler veriniz.

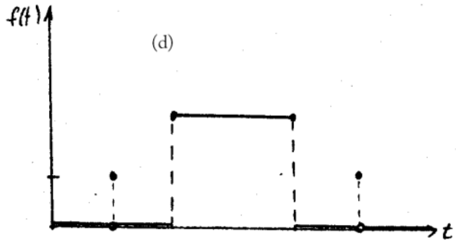
5−24 *f(t)* ve *g(t)* fonksiyonları ile bunların Laplace dönüşümleri, sırasıyla 1 and 1/*s* olarak veriliyor. Bu iki fonksiyon arasında nasıl bir fark vardır.

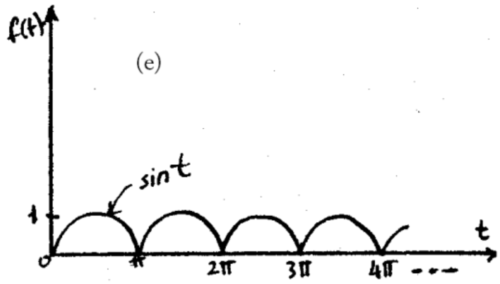
5−25
Aşağıdaki grafikleri verilen fonksiyonları basamak ve/veya delta fonksiyonları cinsinden ifade ederek Laplace dönüşümlerini yapınız.

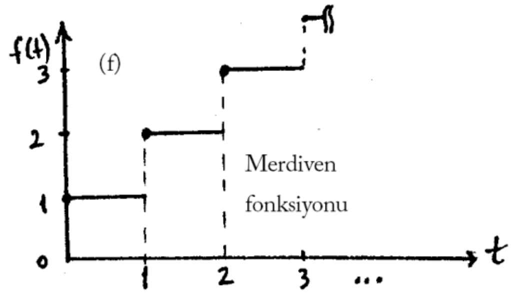


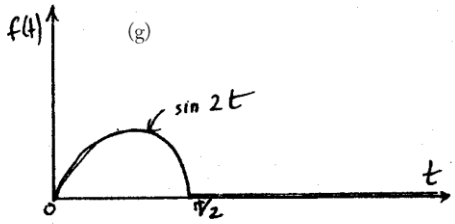


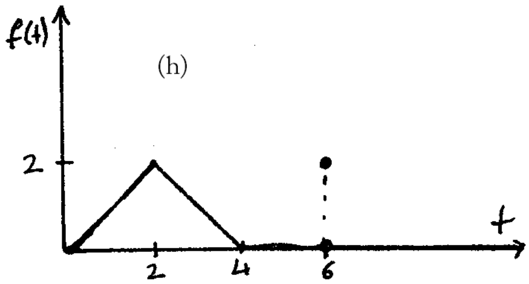












Aşağıda listelenen fonksiyonların grafiklerini çiziniz ve Laplace dönüşümlerini yapınız.

5–26 (*a*) *f(t)*= $\begin{cases} 0, & t < 3\pi \\ \sin t, & t \geq 3\pi \end{cases}$ (*b*) *f(t)*= $\begin{cases} t, & t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$

5–27 (*a*) *f(t)*= $\begin{cases} \cos 2t, & t \leq \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases}$ (*b*) *f(t)*= $\begin{cases} -1, & t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \leq 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$

5–28 (*a*) *f(t)*= $\begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)^2, & t \geq 2 \end{cases}$ (*b*) *f(t)*= $\begin{cases} 0, & t < 3\pi/2 \\ 3\cos t, & 3\pi/2 \leq t \leq 5\pi/2 \\ 0, & t > 5\pi/2 \end{cases}$

5–29 *(a)* *f(t)=* $\begin{cases} 0, & t<3 \\ t^2, & t\geq 3 \end{cases}$ *(b)* *f(t)=* $\begin{cases} 0, & t<1 \\ 5, & t=1 \\ 0, & 1<t<2 \\ 5, & t=2 \\ 2, & t>2 \end{cases}$

Aşağıdaki periyodik fonksiyonların grafiklerini çiziniz ve Laplace dönüşümlerini yapınız (p = periyot).

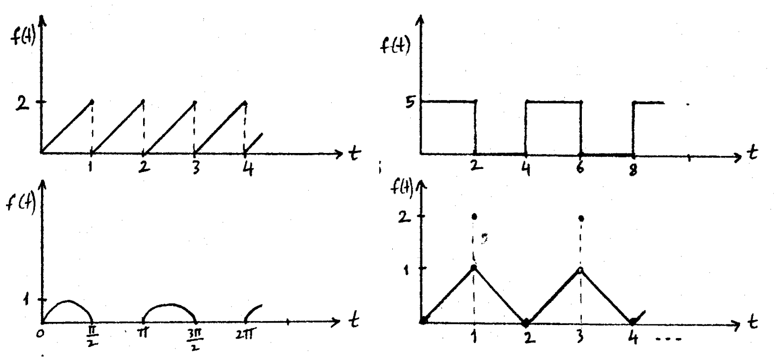
5–30 *f(t)=* $\begin{cases} t, & o\leq t<1 \\ 2-t, & 1\leq t<2 \end{cases}$ *(p=2)*

5–31 *f(t)=* $\begin{cases} \sin t, & o\leq t<\pi \\ -\sin t, & \pi\leq t<2\pi \end{cases}$ *(p=2* π*)*

5–32 *f(t)=* $\begin{cases} 5, & o\leq t<1 \\ -5, & 1\leq t<2 \end{cases}$ *(p=2)*

5–33 *f(t)=* $\begin{cases} 2, & o\leq t<5 \\ 0, & 5\leq t<1o \end{cases}$ *(p=10)*

5–34 *Aşağıda grafikleri verilen periyodik fonksiyonların Laplace dönüşümlerini yapınız.*



5–4 Türevlerin ve Diferansiyel Denklemlerin Laplace Dönüşümleri

Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümlerini yapınız ve $Y(s)$*'i elde ediniz.*

5–35 *(a)* $y'''-2y'+5y=o$ *(b)* $y''=3te^{2t}$

5–36 *(a)* $y''-2y=\sinh 3t$ *(b)* $y'''+3y'+5y=3\delta(t-5)+e^{2t+1}$

5–37 (a) $y'' + 5y=te^{3t}\sin 2t$ $y'+3y=e^{2t+1}+3u(t-0)$

5–5 Ters Laplace Dönüşümü

Tablo 5–1'i kullanarak aşağıdaki fonksiyonların ters Laplace dönüşümünü yapınız (kısmi kesirlere ayırma veya Konvolüsyon teoremini kullanmayın).

5–38 $(a)\ F(s) = 5 + \dfrac{1}{s-2}$, $(b)\ F(s) = \dfrac{s}{s^2-4}$, $(c)\ F(s) = \dfrac{3}{s(s^2+1)}$

5–39 $(a)\ F(s) = \dfrac{e^{3s}}{s^2+1}$, $(b)\ F(s) = \dfrac{1}{s+3} - \dfrac{s}{(s-3)^4}$, $(c)\ F(s) = \dfrac{3}{9s^2+s}$

5–40 $(a)\ F(s) = \dfrac{s-3}{s+3}$, $(b)\ F(s) = \dfrac{e^{-4s}}{s^2+2s+2}$, $(c)\ F(s) = \dfrac{s}{(s-3)^3}$

5–41 $(a)\ F(s) = \dfrac{s+3}{s^2-1}$, $(b)\ F(s) = \dfrac{8s}{4s^2+3}$, $(c)\ F(s) = \dfrac{e^{-2}}{s^6}$

5–42 $(a)\ F(s) = \dfrac{3s}{4s^2+4s+4}$, $(b)\ F(s) = \dfrac{2s+1}{(s-1)^3}$, $(c)\ F(s) = \dfrac{s+1}{s-1}$

5–43 $(a)\ F(s) = \dfrac{2e^{-2s}}{s^2-9}$, $(b)\ F(s) = \dfrac{2s+3}{s^2+2s+2}$, $(c)\ F(s) = \dfrac{s-2}{s^2+1}$

5–44 $(a)\ F(s) = \dfrac{s}{(s-k)^2+a^2}$, $(b)\ F(s) = 3e^{-2s}$, $(c)\ F(S) = \dfrac{3s+1}{s-2}$

5–6 Kısmi Kesirler Ayırma

Aşağıdaki fonksiyonların, gerekli olduğunda kısmi kesirlere ayırarak, ters Laplace dönüşümlerini yapınız.

5–45 $(a)\quad F(s) = \dfrac{3s-1}{s(s+1)(s-3)}$, $(b)\quad F(s) = \dfrac{s+1}{(s^3-1)^2}$

5–46 $(a)\quad F(s) = \dfrac{2s^2+1}{s^2(s-2)}$, $(b)\quad F(s) = \dfrac{s^2+1}{s^2(s^2+4s+8)}$

5–47 $(a)\quad F(s) = \dfrac{1}{(s+4)(s^2+1)}$, $(b)\quad F(s) = \dfrac{s^3+5s-1}{(s+1)^2(s^2+4s+2)}$

5–48 $(a) F(s) = \dfrac{5s+1}{s^3(s^2-1)}$, $(b) F(s) = \dfrac{s+1}{s^2(2s^2+s+1)}$

5–49 $(a) F(s) = \dfrac{s^2+2s-1}{s(s-1)^3(s+3)}$, $(b) F(s) = \dfrac{2s^2+1}{s^3(s+5)}$

5–50 $(a) F(s) = \dfrac{s^2+s+2}{s(s^2+6s+5)}$, $(b) F(s) = \dfrac{s^2+4}{s^2(s-1)(s+4)}$

5–51 $(a) F(s) = \dfrac{4s^2+1}{s(s+4)(s-5)}$, $(b) F(s) = \dfrac{s^2-1}{s(s^2+1)}$

5–7 Konvolüsyon Teoremi

Konvolüsyon teoremini kullanarak aşağıda verilen fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerini yapınız.

5–52 $(a) F(s)=\dfrac{2}{(s+1)(s+2)}$ $(b) Y(s)=\dfrac{5}{s^2(s-1)^2}$

5–53 $(a) Y(s)=\dfrac{e^{-3t}}{s(s^2+4s+1)}$ $(b) Y(s)=\dfrac{s}{(s+1)(s^2+4)}$

5–54 $(a) Y(s)=\dfrac{8}{s^3(s^2-1)}$ $(b) Y(s)=\dfrac{1}{s(s+4)}$

5–55 $(a) Y(s)=\dfrac{s+1}{s^2(s^2-1)}$ $(b) Y(s)=\dfrac{s+1}{(s+1)^3(s^2-4)}$

5–56 $(a) Y(s)=\dfrac{3e^{-2t}}{(s+3)(s-1)^2}$ $(b) Y(s)=\dfrac{4}{s(s^2+2s-3)(s-3)}$

Aşağıdaki fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerini hem kısmi kesirler yöntemini hem de Konvolüsyon teoremini kullanarak bulunuz ve karşılaştırınız.

5–57 $(a) Y(s)=\dfrac{5}{s^2(s+1)}$ $(b) Y(s)=\dfrac{s+1}{[(s+1)^2+4](s-2)}$

5–58 $(a) Y(s)=\dfrac{4}{s(s^4-16)}$ $(b) Y(s)=\dfrac{2}{s(s^2+2s+5)}$

5–59 $(a) Y(s)=\dfrac{2e^{-3t}}{s^2(s^2+1)}$ $(b) Y(s)=\dfrac{s}{(s-2)^2(s+3)}$

5–60 $(a) Y(s)=\dfrac{2}{s^3(s-1)(s+2)}$ $(b) Y(s)=\dfrac{3}{s(2s^2+8)}$

5–61 $(a) Y(s)=\dfrac{6s}{(s+3)(s^2-5)}$ $(b) Y(s)=\dfrac{4s^2}{s^4-1}$

5–8 Diferansiyel Denklemlerin Laplace Dönüşümü ile Çözülmesi

Aşağıdaki başlangıç-değer problemlerini Laplace dönüşümü ile çözünüz.

5–62 $y'-4y=e^{3t}$, $y(0)=0$

5–63 $y'+y=te^{-t}$, $y(1)=2$

5–64 $y'+3y=\cos t$, $y(0)=-1$

5–65 $i'+10i=2\cos t$, $i(0)=0$

5–66 $q'+0.0011q=e^{-0.02t}$, $q(0)=0$

5–67 $u' + 0.02u = 30, \qquad u(0) = 80$

5–68 $x'' + 3x' + x = 0, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 5$

5–69 $x'' + 4x = [1 - u(t - \pi)\ ]\sin 2t, \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2$

5–70 $x'' + x' = e^{-t}\sin t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$

5–71 $i'' + 80i = 4[u(t-1) - u(t-2)], \qquad i(0) = 0, \quad i'(0) = 2$

5–72 $i'' + 10i' + 140i = 6\delta(t-0) + u(t-1), \qquad i(0) = i'(0) = 0$

5–73 $y^{iv} = 8, \qquad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2$

5–74 $y'' + 2y' + 3y = 3\delta(t-0) + u(t-2), \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

5–75 $y'' + 3y' - 2y = 0, \qquad y(2) = 1, \quad y'(0) = 0$

5–76 $y'' - 4y = 2\sinh 3t, \qquad y(0) = y'(0) = 0$

5–77 $y'' + y = t\sin 2t, \qquad y(3) = 2, \quad y'(3) = 1$

5–78 $y'' - y = 5\delta(t-0), \qquad y(0) = y'(0) = 0$

5–79 $y'' + 8y' = e'\sin t, \qquad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 2$

5–80 $y''' - 2y = e^{-2t}, \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

5–81 $y''' + 3y' + y = 2t^2 + 5 \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0$