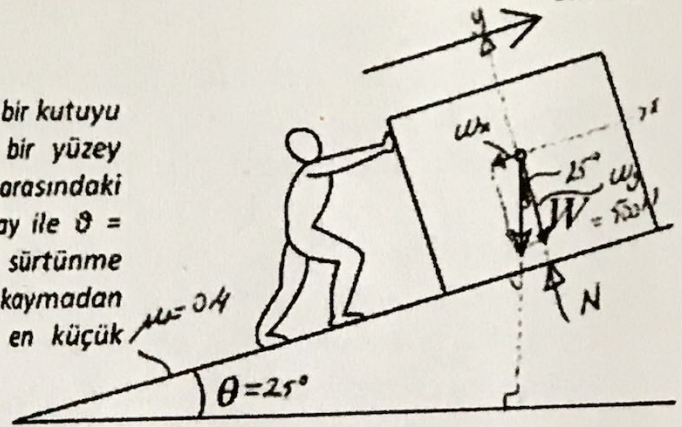


Biyomekanik

Örnek

Şekil gösterildiği gibi, bir kişi 500 N ağırlığındaki bir kutuyu eğime paralel bir kuvvet uygulayarak eğimli bir yüzey üzerine itmeye çalışmaktadır. Kutu ile yüzey arasındaki sürtünme katsayısı $\mu_s = 0,4$ ve eğik yüzey yatay ile $\theta = 25^\circ$ 'lik bir açı yaptığında kutuya etki eden sürtünme kuvvetinin büyüklüğünü belirleyiniz. Kutunun kaymadan durabilmesi için adamın uygulaması gereken en küçük kuvveti bulunuz.



$$F_s = ?$$

$$W_x = W \cdot \sin 25 = 211,30 \text{ N}$$

$$W_y = W \cdot \cos 25$$

$$W = 500 \text{ N} \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow -W \cdot \cos 25 + N = 0 \Rightarrow N = W \cdot \cos 25$$

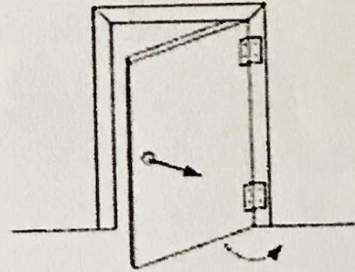
$$F_s = \mu_s \cdot N = (0,4)(453,15 \text{ N}) = 181,26 \text{ N}$$

*Kutu hareket etmiyor

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -W \sin 25 + F_s + F_{\text{adam}} = 0 \Rightarrow F_{\text{adam}} = 30,04 \text{ N}$$

MOMENT ve TORK VEKTÖRLERİNİN TANIMI

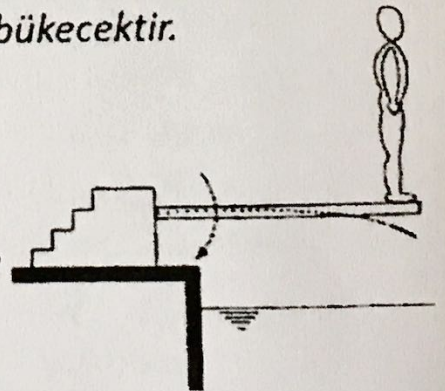
- Bir cisim üzerine uygulanan kuvvet bu cismi öteleyebilir, döndürebilir ve/veya cisimde deformasyon meydana getirebilir.
- Cisme uygulanan kuvvetin etkisi cisme nasıl uygulandığına ve cismin ne kadar desteklendiğine bağlı olarak değişir.
- Örnek olarak; açık bir kapı çekildiği zaman kapı, kasasına monte edildiği menteşeler boyunca salınır.
- Kapının salınımına sebep olan ise kapıya uygulanan kuvvetin menteşeler içerisinde geçen eksen üzerinde tork oluşturmaktır.



- Bir atlama tahtasının ucunda duran kişi tahtayı bükecektir.

- Bu durumda tahtayı eğen vücut ağırlığının tahtanın sabitlenmiş ucuna uyguladığı momentidir.

- Genel olarak tork, uygulanan kuvvetlerin dönme ve burma hareketleri ile ilişkili iken, moment ise eğme etkisi ile ilişkilidir.



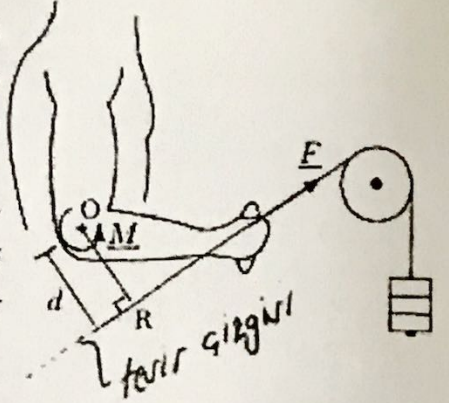
- Fakat tork ve momentin matematiksel olarak tanımı aynıdır.

Momentin Büyüklüğü:

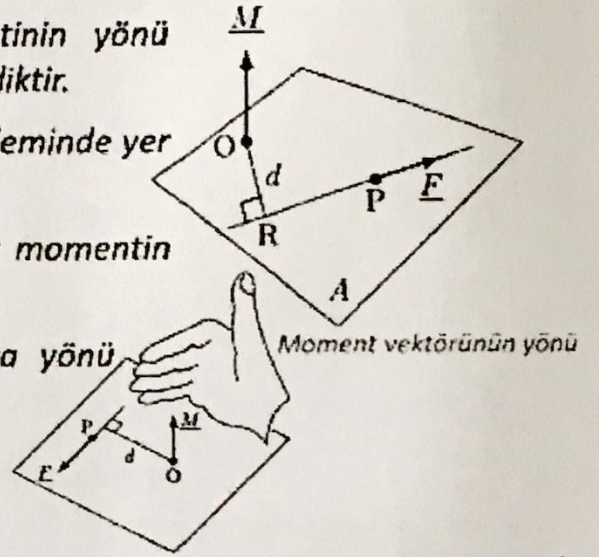
- Bir kuvvetin bir noktadaki momentinin büyüklüğü kuvvetin büyüklüğünün, moment noktası ile kuvvetin uygulandığı nokta arasındaki dik uzaklığın çarpımına eşittir.

$$M = F d$$

- Makara etrafına sarılmış ağırlık ile egzersiz yapan bir kişinin dirseğinde, ağırlık nedeniyle oluşan momenti bulmak için kuvvetin doğrultusu uzatılır ve moment noktasına olan dik uzaklığı bulunur.

**Momentin Yönü:**

- Bir kuvvetin bir noktaya göre momentinin yönü kuvvetin bulunduğu düzleme veya eksene diktir.
- O noktası ile F kuvvetinin etki çizgisi A düzleminde yer almaktadır.
- F kuvvetinin O noktasına göre uyguladığı momentin etki çizgisi A düzlemine diktir.
- Moment vektörünün etki çizgisi boyunca yönü ve doğrultusu sağ el kuralı ile bulunur.
- Momentin SI sistemindeki birimi N.m'dir.

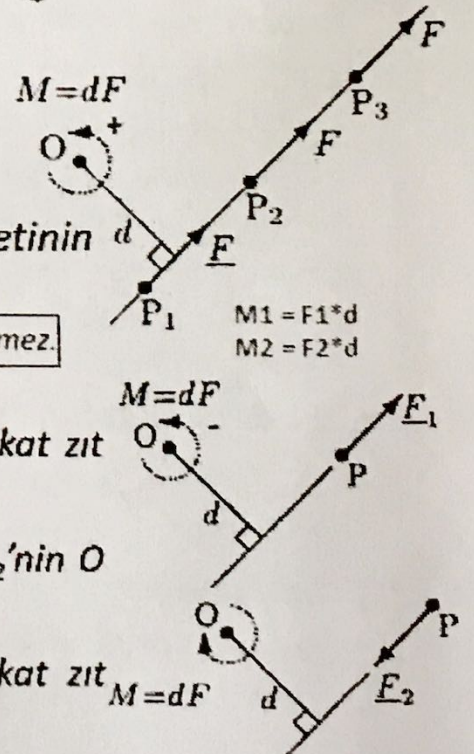
**Moment vektörü ile ilgili bazı önemli noktalar:**

- Bir kuvvetin momenti kuvvetin etki çizgisi üzerindeki noktadan bağımsızdır.
- d uzunluğu her zaman O noktası ile F kuvvetinin etki çizgisi arasındaki en kısa mesafedir.

Moment, kuvvetin etki çizgisi boyunca kaydırılması ile değişmez.

Moment vektörü ile ilgili bazı önemli noktalar:

- F_1 ve F_2 eşit büyüklükte, aynı etki çizgisinde fakat zıt yönlerde olduğunu varsayalım.
- F_1 kuvvetinin O noktasındaki momenti M_1 ve F_2 'nin O noktasındaki momenti ise M_2 olacaktır.
- M_1 ve M_2 momentlerinin büyüklükleri eşit fakat zıt yönlü olacaktır.

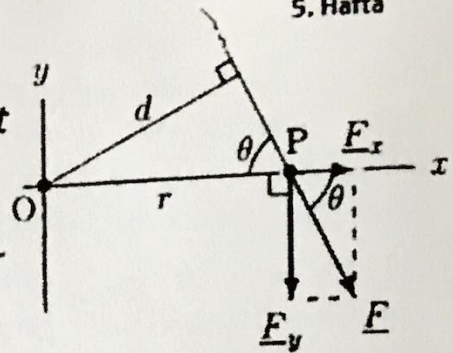


- Kuvvetleri bileşenlerine ayırmak moment hesaplamasını kolaylaştırabilir.

$$F_x = F \cos \alpha$$

$$F_y = F \sin \alpha$$

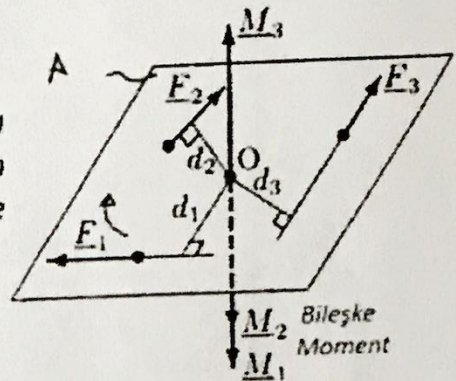
$$M_0 = F_y \cdot r$$



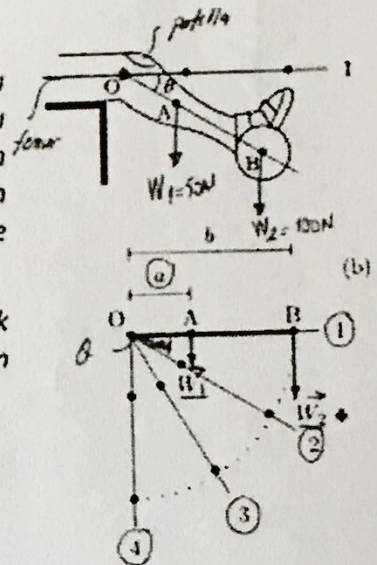
- Bir cisme birden fazla kuvvet uygulandığında net veya bileşke moment bütün kuvvetler tarafından uygulanan moment vektörlerinin toplamı ile hesaplanabilir. $\int M_1 = d_1 \vec{r}_1 (\curvearrowright)$

planabilir.

$$\vec{M}_{net} = \ominus \vec{M}_1 \ominus \vec{M}_2 + \vec{M}_3 \leftarrow \begin{cases} M_1 = d_1 \vec{r}_1 (\downarrow) \\ M_2 = d_2 \vec{r}_2 (\downarrow) \\ M_3 = d_3 \vec{r}_3 (\uparrow) \end{cases}$$



Ağırlık botu giymiş bir sporcunun oturur pozisyonunda kuadriseps kaslarını güçlendirmek için alt bacak fleksiyon/ekstansiyon egzersizi yaptığını varsayalım. Sporcunun alt bacağının ağırlığı $W_1=50\text{ N}$ ve ağırlık botunun ağırlığı ise $W_2=100\text{ N}$ 'dur. Diz ekleme noktası olan O noktasından ölçüldüğü üzere alt bacağın ağırlık noktası (A noktası), $a=20\text{ cm}$ 'de ve botun ağırlık merkezi (B noktası) $b=50\text{ cm}$ 'de yer almaktadır.



Alt bacak 1. pilyondayken:

$$M_0 = 0W_1 + 6W_2 = (0,2m)(70N) + (0,5m)(100N) \quad M_0 = 60 \text{ Nm}$$

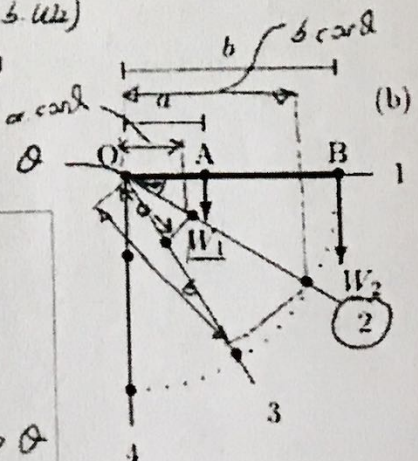
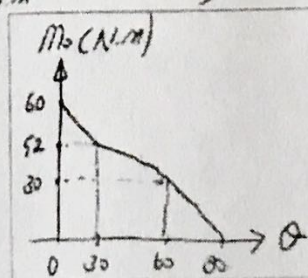
$$m_0 = (0 \cos 8)(w_1) + (3 \cos 8)(w_2) \quad m_0 = \cos 8 (a.w_1 + b.w_2)$$

1. $\theta = 0^\circ \Rightarrow M_0 = 60 \text{ N.m}$ (foot joint)

$\theta = 30^\circ \Rightarrow M_b = 52 \text{ N.m}$

$\alpha = 60^\circ \Rightarrow M_b = 30 \text{ Nm}$

$\frac{1}{2} \Rightarrow Q = 30' \Rightarrow M_b = 0$

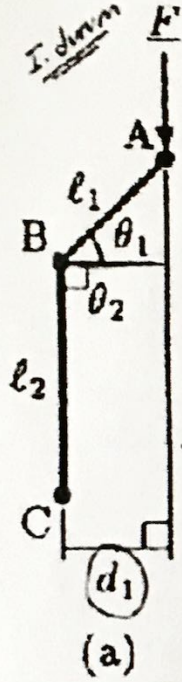
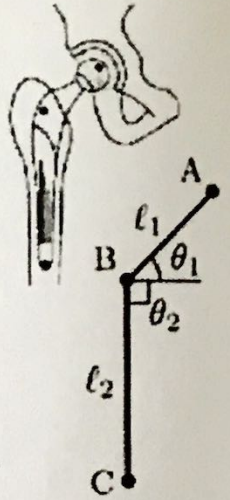


Örnek

100

Geometrik özellikleri $l_1=50$ mm, $l_2=50$ mm, $\theta_1=45^\circ$ ve $\theta_2=90^\circ$ olan bir kalça eklem protezini ele alalım. Her iki ayak simetrik olarak durduğunda hastanın vücut ağırlığı nedeniyle femur kafasına $F = 400$ N eklem reaksiyon kuvvetinin etki ettiğini varsayalım.

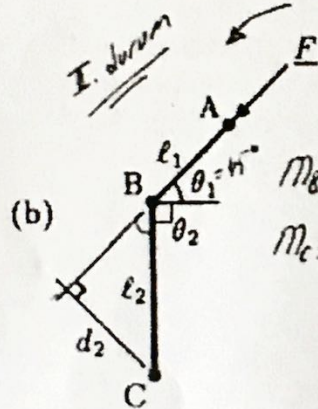
Uygulanan kuvvet için şekilde gösterilen üç farklı hareket çizgisi olduğu durumu göz önüne alındığında, her bir durumda protez üzerindeki B ve C noktalarında meydana gelen momentleri belirleyiniz.



$$d_1 = l_1 \cos \theta_1 \Rightarrow d_1 = 50 \cos 45 = 35,355 \text{ mm}$$

$$M_B = M_C = d_1 \cdot F = (35,355 \text{ mm}) (400 \text{ N})$$

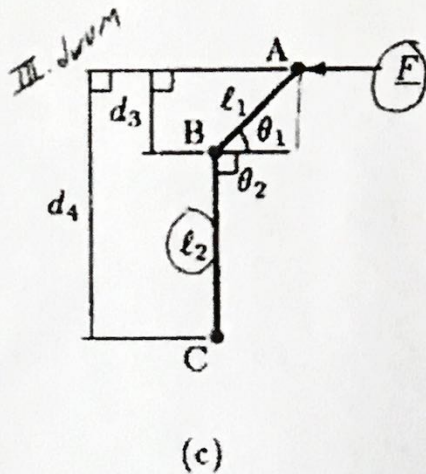
$$= 14142 \text{ Nmm} = 14,142 \text{ Nm (saatın yönünde)}$$



$$M_B = 0 \quad d_2 = l_1 \sin \theta_1 = 50 \sin 45 = 35,355 \text{ mm}$$

$$M_C = d_2 \cdot F \Rightarrow M_C = (35,355 \text{ mm}) (400) = 14142 \text{ Nmm}$$

$$= 14,142 \text{ Nm (saatın tersi yönde)}$$



$$M_B = d_3 \cdot F = (35,355) (400) = 14142 \text{ Nmm}$$

$$= 14,142 \text{ Nm (saatın tersi yönde)}$$

$$d_3 = l_1 \sin \theta_1 = 50 \sin 45 = 35,355 \text{ mm}$$

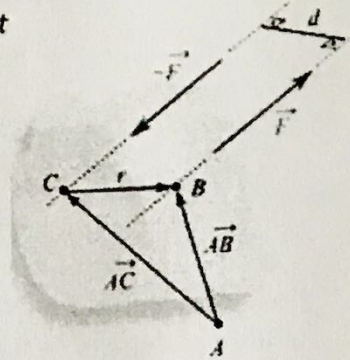
$$d_4 = l_2 + d_3 = 135,355 \text{ mm}$$

$$M_C = d_4 \cdot F = (135,355) (400) = 54142 \text{ Nmm}$$

$$= 54,142 \text{ Nm (saatın tersi yönde)}$$

Kuvvet Çifti ve Momenti

- Eşit büyüklükte ve birbirine zıt olarak yönlenmiş iki paralel kuvvet tarafından oluşturulan özel kuvvet düzenlemesine kuvvet çifti denir.
- Katı bir cisimde kuvvet çifti saf döndürme etkisine sahiptir.



Kuvvet çiftinin herhangi bir A noktasına göre momentini aldığımızda ;

$$\vec{M}_A = \vec{AB} \times \vec{F} + \vec{AC} \times (-\vec{F}) = (\vec{AB} - \vec{AC}) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Kuvvet çiftinin momenti, moment alınan noktadan bağımsızdır.

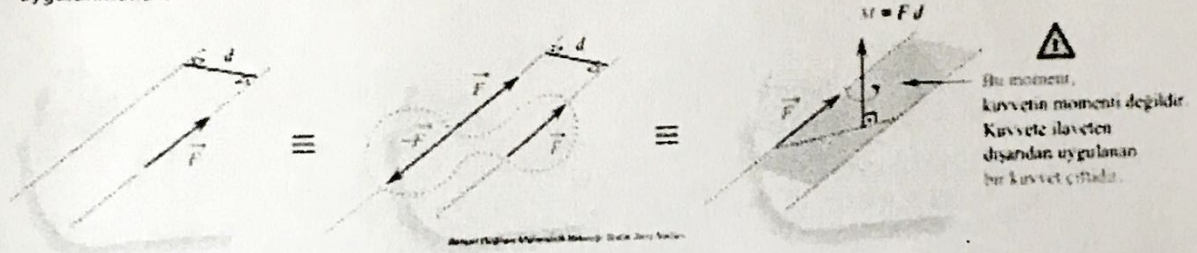
$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{r}$$

$$\vec{r} = \vec{AB} - \vec{AC}$$

Kuvvetlerin Ötelenmesi

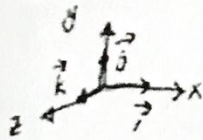
- Bir kuvvet, tesir çizgisi boyunca kaydırıldığında etkisi değişmez. Ama tesir çizgisinin dışına çıkarsa etkisi değişir.
- Kuvvetin tesir çizgisini değiştirmek istediğimiz zaman, etkisinin değişmemesi için kuvvete ilaveten bir de kuvvet çifti uygulanmalıdır.



- Bir kuvveti, başka bir tesir çizgisine taşıırken kuvvetin yönünü ve şiddetini bozmadan aynen taşırız. Ayrıca yanına bir de kuvvet çifti ilave ederiz.
- Bu kuvvet çiftinin momenti, kuvvetin, yeni tesir çizgisi üzerindeki herhangi bir noktaya göre momentine eşittir.

Momentin vektörel çarpım ile elde edilmesi

- Kuvvet ve konum vektörleri Kartezyen vektörler olarak bileşenlerine ayrılabilir.



$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{0} & \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} & \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} &= \vec{0} & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0} \end{aligned}$$

- Kuvvetin O noktasına göre momentini

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M} = (r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}) \times (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{M} &= (r_y F_z - r_z F_y) \vec{i} + (r_z F_x - r_x F_z) \vec{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \vec{k} \\ &= \underbrace{(r_y F_z - r_z F_y)}_{M_x} \vec{i} + \underbrace{(r_z F_x - r_x F_z)}_{M_y} \vec{j} + \underbrace{(r_x F_y - r_y F_x)}_{M_z} \vec{k} \end{aligned}$$

$$M = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Momentin vektörel çarpım ile elde edilmesi

- Moment vektörü x , y ve z yönlerindeki bileşenleri ile ifade edilebilir.

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

- Buna göre moment bileşenleri;

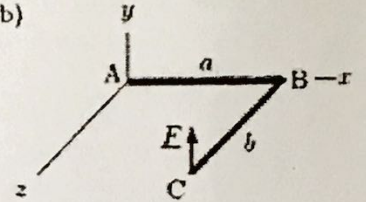
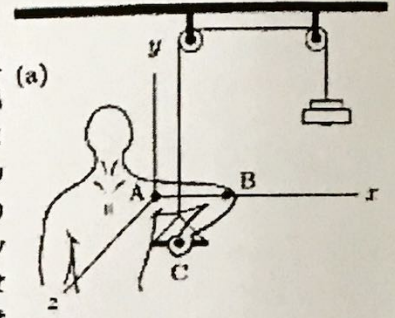
$$M_x = r_y F_z - r_z F_y$$

$$M_y = r_z F_x - r_x F_z$$

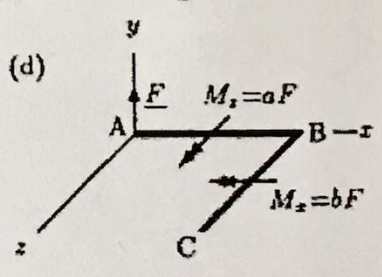
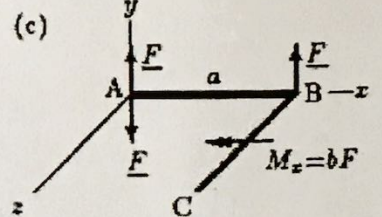
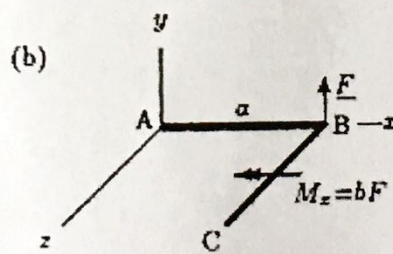
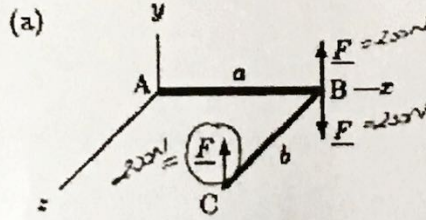
$$M_z = r_x F_y - r_y F_x$$

Örnek;

Şekil a'da egzersiz aleti kullanan bir kişi gösterilmiştir. Şekil b'de L şeklinde gösterilmiş olan doğrular kişinin sol kolunu temsil etmektedir. A ve B noktaları sırasıyla omuz ve dirsek eklemlerine karşılık gelmektedir. Kişiye göre üst kol (AB), sola doğru (x yönünde), alt kol (BC) ileriye doğru (z yönünde) uzatılmıştır. B noktasında kişi bir ağırlığa kablo ile bağlı olan tutacağı tutmaktadır. Ağırlık kişinin C noktasından yukarıya doğru (y yönünde) büyüklüğü F olan bir kuvvet uygulamaktadır. Üst kol ve alt kolun uzunlukları sırasıyla $a=25$ cm ve $b=30$ cm'dir. Uygulanan kuvvet $F=200$ N olduğuna göre kuvvetin omuz eklemlerine nasıl (b) ötelenebileceğini açıklayınız.

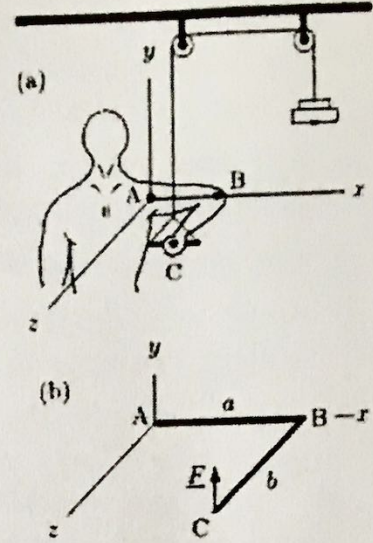


C noktasına uygulanan kuvvetin etkisi sonucunda kişi, dirsek ekleminde alt kolu yz düzleminde döndürmek isteyen M_z büyüklüğünde bir moment ve yukarı yönlü F büyüklüğünde bir kuvvet hisseder. Kişi omuz ekleminde ise yukarı yönlü bir F kuvveti, üst kolu yz düzleminde bükme isteyen bir M_x moment ve xy düzleminde eğmeye veya döndürmeye çalışan bir M_y moment hisseder.



Örnek;

Şekil a'da egzersiz aleti kullanan bir kişi gösterilmiştir. Şekil b'de L şeklinde gösterilmiş olan doğrular kişinin sol kolunu temsil etmektedir. A ve B noktaları sırasıyla omuz ve dirsek eklemlerine karşılık gelmektedir. Kişiye göre üst kol (AB), sola doğru (x yönünde), alt kol (BC) ileriye doğru (z yönünde) uzatılmıştır. B noktasında kişi bir ağırlığa kablo ile bağlı olan tutacağı tutmaktadır. Ağırlık kişinin C noktasından yukarıya doğru (y yönünde) büyüklüğü F olan bir kuvvet uygulamaktadır. Üst kol ve alt kolun uzunlukları sırasıyla $a=25\text{ cm}$ ve $b=30\text{ cm}$ 'dir. Uygulanan kuvvet $F=200\text{ N}$ olduğuna göre kuvvetin omuz eklemlerine nasıl ötelenebileceğini açıklayınız.



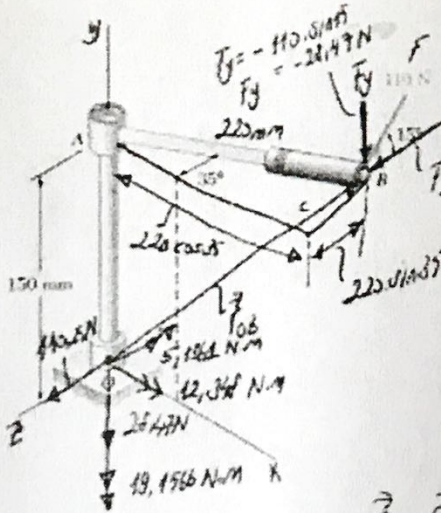
2)

Yer (Referans) Vektörü

$$\begin{aligned} A(x_A, y_A, z_A) &\rightarrow \vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k} \\ B(x_B, y_B, z_B) &\rightarrow \vec{r}_B = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k} \\ \vec{r}_{AB} &= \vec{r}_B - \vec{r}_A \\ \vec{r}_{AB} &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} \\ \vec{r}_{AB} &= (0, 25 - 0)\vec{j} + (0 - 0)\vec{j} + (0, 3 - 0)\vec{k} \\ \vec{r}_{AB} &= 0,25\vec{j} + 0,3\vec{k} \\ \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,25 & 0 & 0,3 \\ 0 & 200 & 0 \end{vmatrix} = -60\vec{i} + 50\vec{k} \text{ Nm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad M_x &= bF = (0,3\text{ m})(200\text{ N}) = 60\text{ Nm} \\ M_z &= aF = (0,25\text{ m})(200\text{ N}) = 50\text{ Nm} \end{aligned}$$

Örnek;



Şekildeki sistemde 220 mm uzunluğundaki AB koluna 110 N şiddetinde bir kuvvet etki etmektedir. Buna göre kuvveti O noktasına taşıyınız.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \\ \vec{F} &= -28,47\vec{j} + 110,25\vec{k} \\ \vec{M}_O &= \vec{r}_{OB} \times \vec{F} \\ B(220\cos 35, 150, -220\sin 35) \text{ mm} \\ B(0, 180, 150, -0,1261) \text{ m} \\ \vec{r}_{OB} &= (0, 180\vec{j} + 0,15\vec{j} - 0,1261\vec{k}) \text{ m} \\ \vec{M}_O &= \vec{r}_{OB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,1802 & 0,15 & -0,1261 \\ 0 & -28,47 & 110,251 \end{vmatrix} = 12,34\vec{i} - 19,1566\vec{j} - 5,1361\vec{k} \end{aligned}$$