T.C.
KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ

Prof. Dr. Zafer BİNGÜL Prof. Dr. Serdar KÜÇÜK

ROBOT KİNEMATİĞİ

PROF. DR. ZAFER BİNGÜL
PROF. DR. SERDAR KÜÇÜK

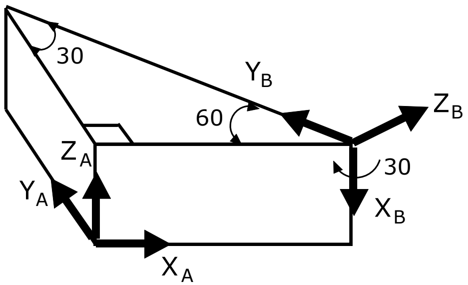
2.5. Dönüşüm Matrislerinin ileri yönlü Çarpılması

Bir dönüşüm matrisini başka bir dönüşüm matrisi ile ileri yönlü bir çarpma işlemine tabi tutarsak, öteleme/dönme işleminin yeni yani hareket eden koordinat sistemine göre gerçekleştiririz.

İki koordinat sistemi arasındaki yönelim, hedef koordinat sisteminin X, Y veya Z eksenlerinde döndürülmesiyle aynı yapılabilir. Bu şekilde meydana gelen yönelim matrisini matematiksel olarak ifade etmek için elde edilen matrisler sondan başa doğru yazılır.

ÖRNEK 2.8

Örnek 2.3'de gerçekleştirilen ${}_{B}^{A}R$ işlemini dönüşüm matrislerinin ileri yönlü çarpılması yöntemini kullanarak elde ediniz.

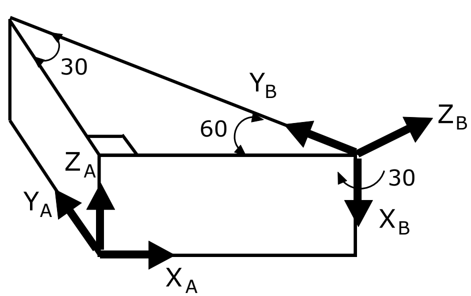


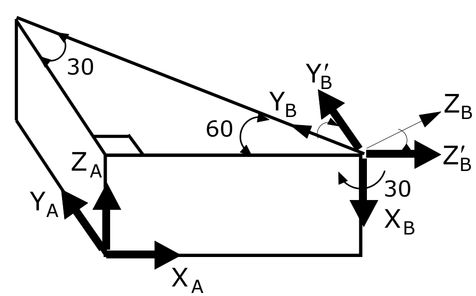
ÇÖZÜM 2.8

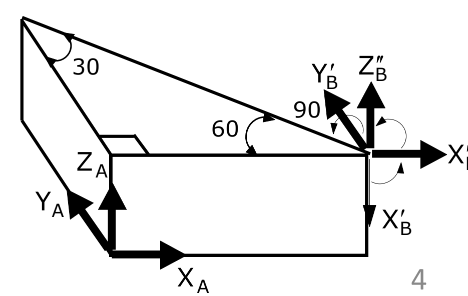
${}^{A}_{B}R$ matrisini elde etmek {B} koordinat sisteminde bulunan X eksenini -30 derece döndürüp, ${Y_B}'$ eksenini +90 derece döndürerek {A} koordinat sisteminin yönelimi ile {B} koordinat sisteminin yönelimlerini aynı yapalım. Gerçekleştirilen dönme işlemlerinden ilki (R_X(-30)) çarpma işleminde sona, ikincisini de (R_Y(90)) başa yazılır. Burada yapılan işlem, {B} koordinat sistemini döndürülerek {A} koordinat sistemini elde etmekten ibarettir.

$$ {}^{A}_{B}R = R_Y(90)R_X(-30) = \begin{bmatrix} c90 & 0 & s90 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s90 & 0 & c90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(-30) & -s(-30) \\ 0 & s(-30) & c(-30) \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} c90 & 0 & s90 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s90 & 0 & c90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(-30) & -s(-30) \\ 0 & s(-30) & c(-30) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$







2.6. Dönüşüm Matrislerinin Önden Çarpılması

Bir dönüşüm matrisini başka dönüşüm matrisi ile önden çarpmak öteleme/dönme işleminin sabit referans koordinat sistemine göre gerçekleştirmektir

ÖRNEK 2.9

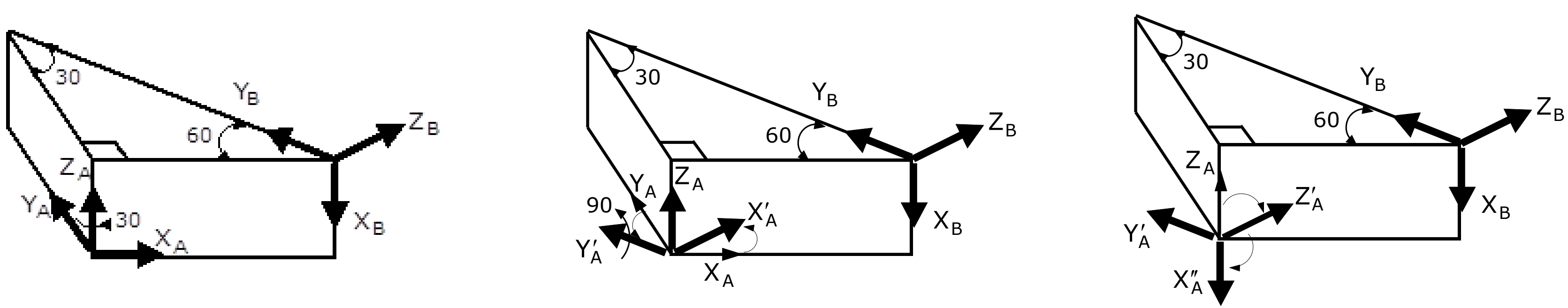
Örnek 2.8'deki ${}^{A}_{B}R$ matrisini önden çarpma yöntemini kullanarak bulunuz.

ÇÖZÜM 2.9

Z_A 30 derece döndürüp $X_A{}'$ ve $Y_A{}'$ eksenlerini elde edilir. Yeni oluşan $Y_A{}'$ eksenini +90 derece döndürerek {A} ve {B} koordinat sisteminin yönelimlerin aynı yapılır. Gerçekleştirilen dönme işlemleri aynı sıra ile yazılır. Burada yapılan işlem, {A} koordinat sistemini döndürülerek {B} koordinat sistemi elde etmekten ibarettir.

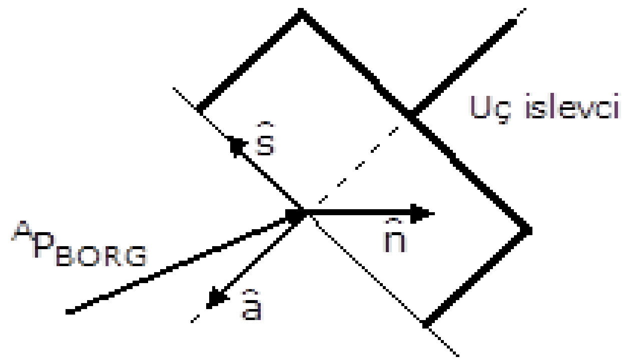
$$ {}^{A}_{B}R = R_Z(30)\,R_Y(90) $$

$$ = \begin{bmatrix} c30 & -s30 & 0 \\ s30 & c30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c90 & 0 & s90 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s90 & 0 & c90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$



2.7. Dönüşüm Matrisinin Özellikleri

Uç işlevci herhangi bir hedefe yöneldiği zaman bu yönelim uç işlevcisinin normal vektörü n =$[n_x \quad n_y \quad n_z]^T$, kayma vektörü s =$[s_x \quad s_y \quad s_z]^T$ ve yaklaşım vektörü a =$[a_x \quad a_y \quad a_z]^T$ olmak üzere üç vektörle ifade edilir.



$$ {}^A_B T = \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A P_{BORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

${}^{A}_{B}T$ matrisinin tersini ${}^{A}_{B}T^{-1}$ şeklinde gösterelim.

$$ {}^{A}_{B}T^{-1} = {}^{B}_{A}T = \begin{bmatrix} {}^{B}_{A}R & {}^{B}P_{AORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} $$

Denklemdeki dönüşüm matrisinin 3x3 boyutlu dönme matrisinin tersinin devriğine eşit olduğu ${}^{A}_{B}R^{-1}$ = ${}^{B}_{A}R$ = ${}^{A}_{B}R^{T}$ bilinmektedir. Fakat konum vektörü için durum farklıdır.

Dönüşüm matrisinin tamamının tersini almak için denklemde ${}^{B}P_{AORG}$ olarak ifade edilen konum vektörünün, ${}^{A}_{B}T$ dönüşüm matrisinin bir fonksiyonu olarak yazılmalıdır.

$$ {}^{A}_{B}T^{-1} = {}^{B}_{A}T = \begin{bmatrix} {}^{B}_{A}R & {}^{B}P_{AORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R^{T} & -{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{B}P_{AORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} $$

ÖRNEK 2.10

$${}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.978 & 0 & 0.207 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -0.207 & 0 & 0.978 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisinin tersini bulunuz.

ÇÖZÜM 2.10

$${}^{A}_{B}T^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R^{T} & -{}^{A}_{B}R^{T}\ {}^{A}P_{BORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix}$$

İfadesinde sırasıyla ${}^{A}_{B}R^{T}$ dönme matrisini ve $-{}^{A}_{B}R^{T}\ {}^{A}P_{BORG}$ konum vektörü ifadelerini bulalım.

$${}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0.978 & 0 & 0.207 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.207 & 0 & 0.978 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad {}^{A}_{B}R^{T} = \begin{bmatrix} 0.978 & 0 & -0.207 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.207 & 0 & 0.978 \end{bmatrix}$$

Konum vektörü ise ;

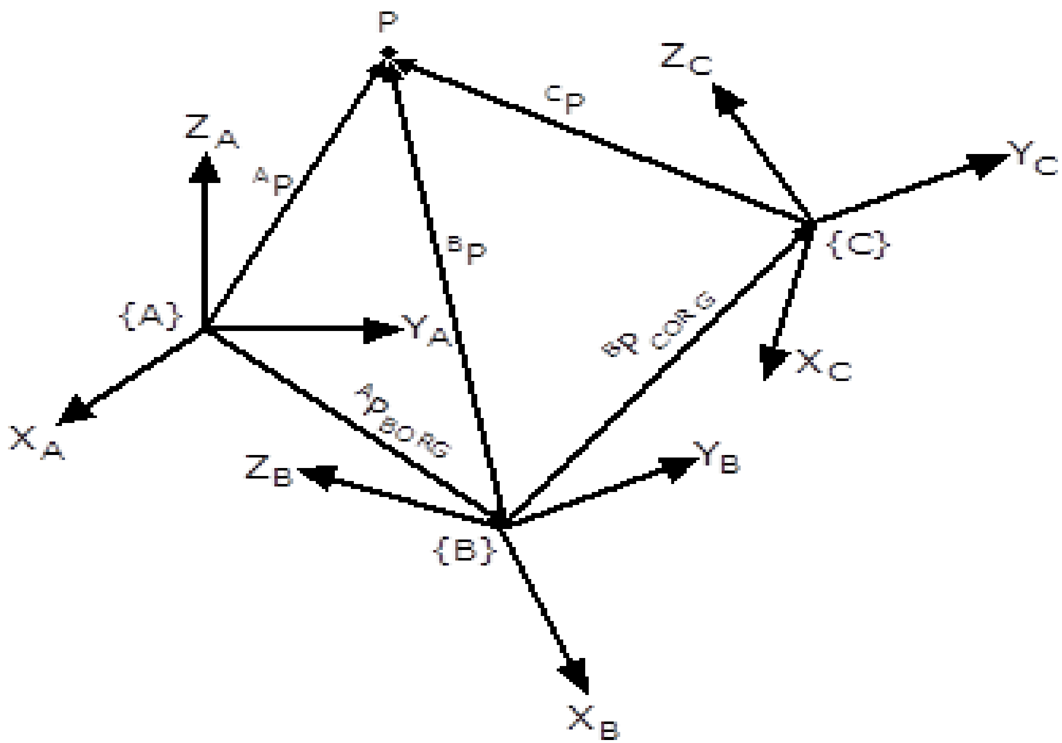
$$-{}_{B}^{A}R^{T}\ {}^{A}P_{BORG} = \begin{bmatrix} 0.978 & 0 & -0.207 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.207 & 0 & 0.978 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.727 \\ 2 \\ -1.599 \end{bmatrix}$$

olur. Elde edilen dönme matrisi ve konum vektörünü ana denklemde yerine yazmakla ter alma işlemi tamamlanmış olur.

$${}_{B}^{A}T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.978 & 0 & -0.207 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0.207 & 0 & 0.978 & -1.599 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.8. Ardışık Dönüşümler

İkiden fazla koordinat sistemini içeren sistemlerde, koordinat sistemlerinin bir birlerine göre konum ve yönelimleri ardışık koordinat sistemleri kullanılarak gerçekleştirilir. {C} koordinat sistemine göre tanımlanan P noktasının konumunu ve yönelimini {A} koordinat sistemine göre ardışık dönüşüm matrislerini kullanarak tanımlayalım.



P noktasının sırayla {C} , {B} ve {A} koordinat sistemlerine göre konumları bilinmekte ve bu konumlar birbirleri cinsinden dönüşüm matrisleri yardımıyla ifade edilebilmektedir.

$$ {}^{B}P = {}^{B}_{C}T\,{}^{C}P, \; {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P \qquad\qquad {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T \; {}^{B}_{C}T $$

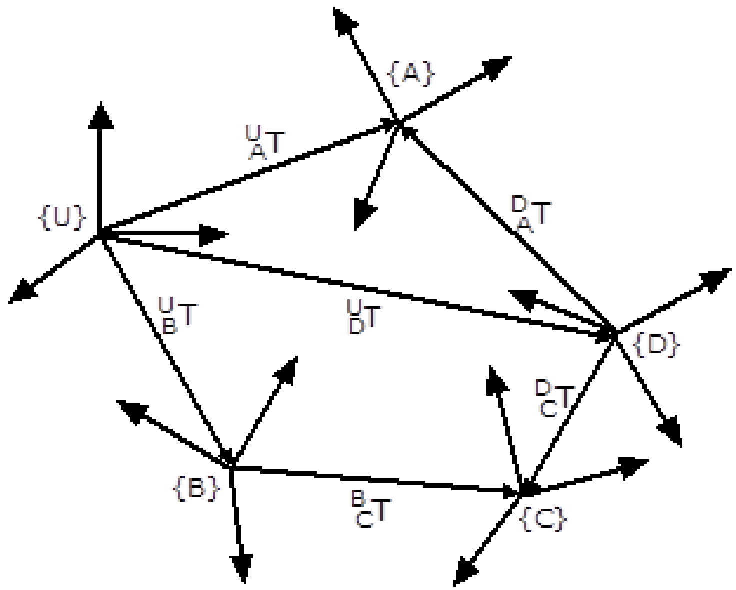
$$ {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T \; {}^{B}_{C}T = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}_{C}R & {}^{B}P_{CORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{CORG} + {}^{A}P_{BORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} $$

Birden fazla koordinat sisteminin merkezleri arasına birer vektör çizilerek konum ve yönelimleri birbirine göre tanımlanabilmektedir.

ÖRNEK 2.11

Şekildeki ${}^{B}_{C}T$ dönüşüm matrisini diğer koordinat sistemleri cinsinden tanımlayınız.



ÇÖZÜM 2.11

${}^{U}_{D}T$ dönüşüm matrisini diğer koordinat sistemleri cinsinden iki farklı şekilde tanımlayarak ${}^{B}_{C}T$ matrisini bulalım.

{U} , {A} ve {D} koordinat sistemleri arasında aşağıdaki ilişkiyi kurabiliriz.

$$ {}_{D}^{U}T = {}_{A}^{U}T\,{}_{A}^{D}T^{-1} = {}_{A}^{U}T\ {}_{D}^{A}T $$

{U} , {B} , {C} ve {D} koordinat sistemleri arasında aşağıdaki ilişkiyi kurabiliriz.

$$ {}_{D}^{U}T = {}_{B}^{U}T\,{}_{C}^{B}T\,{}_{C}^{D}T^{-1} = {}_{B}^{U}T\ {}_{C}^{B}T\,{}_{D}^{C}T $$

${}_{C}^{B}T$ dönüşüm matrisini, yukarıdaki denklemleri birbirine eşitleyerek diğer koordinat sistemleri cinsinden aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$ {}_{B}^{U}T\,{}_{C}^{B}T\,{}_{C}^{D}T^{-1} = {}_{A}^{U}T\,{}_{A}^{D}T^{-1} $$

Öncelikle, denklemin her iki tarafını ${}_{B}^{U}T$ matrisinin tersiyle çarpalım.

$$ {}_{B}^{U}T^{-1}\,{}_{B}^{U}T\,{}_{C}^{B}T\,{}_{C}^{D}T^{-1} = {}_{B}^{U}T^{-1}\,{}_{A}^{U}T\,{}_{A}^{D}T^{-1} $$

$$ {}_{C}^{B}T\,{}_{C}^{D}T^{-1} = {}_{B}^{U}T^{-1}\,{}_{A}^{U}T\,{}_{A}^{D}T^{-1} $$

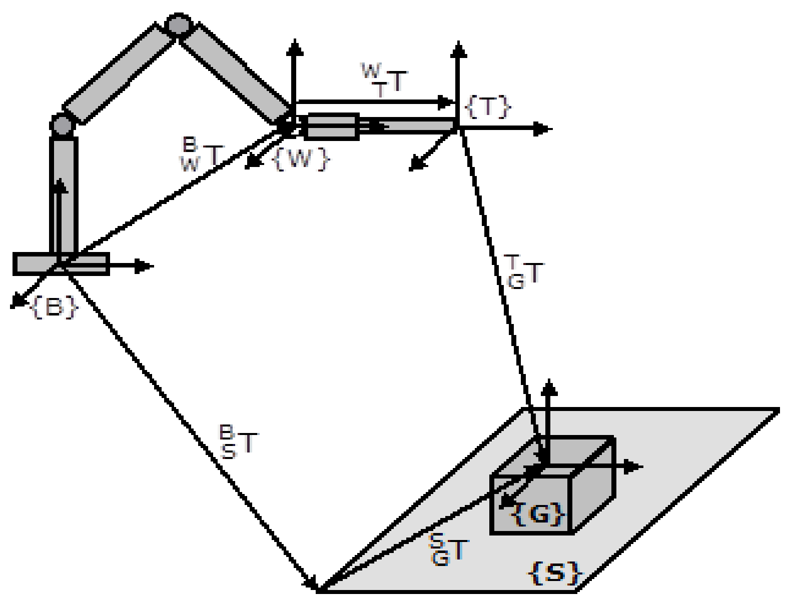
Denklemin her iki tarafını ${}^{D}_{C}T$ ile çarpalım.

$$ {}^{B}_{C}T\,{}^{D}_{C}T^{-1}\,{}^{D}_{C}T = {}^{U}_{B}T^{-1}\,{}^{U}_{A}T\,{}^{D}_{A}T^{-1}\,{}^{D}_{C}T $$

$$ {}^{B}_{C}T = {}^{U}_{B}T^{-1}\,{}^{U}_{A}T\,{}^{D}_{A}T^{-1}\,{}^{D}_{C}T $$

ÖRNEK 2.12

Şekildeki ${}^{T}_{G}T$ dönüşüm matrisini diğer koordinatlar cinsinden tanımlayınız.



ÇÖZÜM 2.12

{B} , {W} ve {T} arasındaki ilişki {B} ve {S} arasındaki ilişkiye eşittir.

$$ {}^{B}_{W}T\,{}^{W}_{T}T\,{}^{T}_{G}T = {}^{B}_{S}T\ {}^{S}_{G}T $$

Denklemde ${}^{B}_{W}T\,{}^{W}_{T}T$ ifadesi yerine ${}^{B}_{T}T$ ifadesini yazalım.

$$ {}^{B}_{T}T\,{}^{T}_{G}T = {}^{B}_{S}T\ {}^{S}_{G}T $$

Denklemin her iki tarafı ${}^{B}_{T}T^{-1}$ ile çarpıldığında ${}^{T}_{G}T$ matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ {}^{T}_{G}T = {}^{B}_{T}T^{-1}\ {}^{B}_{S}T\ {}^{S}_{G}T $$

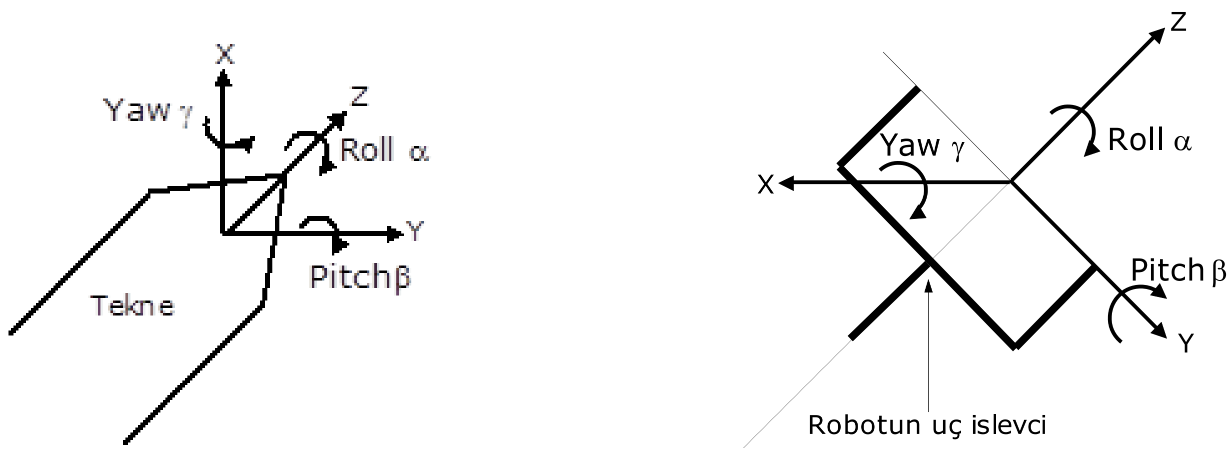
2.9. Özel Yönelim Tanımlamaları

Koordinat sistemlerinin bir birlerine göre yönelimini 3x3 boyutlu dönme matrisleriyle tanımlamak kinematik çözümler için uygun olmasına rağmen, dokuz elemanı bulunan bu dönme matrislerini kullanarak başka bir cisme göre yönelim tanımlamak hiçte kolay değildir. Bunun için genellikle dönme matrisinin üç elemanı kullanılarak yönelim tanımlanır. Koordinat sistemleri arasında yönelim tanımlamak için roll-pitch-yaw, Euler ve eşdeğer açı-eksen seti olmak üzere üç farklı yöntem kullanılır. Şimdi sırayla koordinat sistemleri arasında yönelim tanımlamak için kullanılan bu üç yöntemi geniş bir şekilde inceleyelim.

2.9.1. Roll-Pitch-Yaw (XYZ Sabit) Açı Seti

Roll-Pitch-Yaw açı setinde dönme işlemi, hareket etmeyen sabit koordinat çerçevesine göre gerçekleştirildiğinden, bu yönteme sabit açı sistemi de denir. Roll-pitch-yaw, bir teknenin yüzerken aşağı-yukarı, sola-sağa ve kendi ekseni etrafında hareketini tanımlayan doğal bir açı gösterim biçimidir.

Eğer insanın eli avuç içi aşağı bakmak üzere ileri yönde yere paralel tutulursa, ‘roll’ elin kendi ekseni etrafında döndürülmesini, ‘pitch’ elin aşağı-yukarı hareket ettirilmesi, yaw ise elin sağa sola hareket ettirilmesidir.



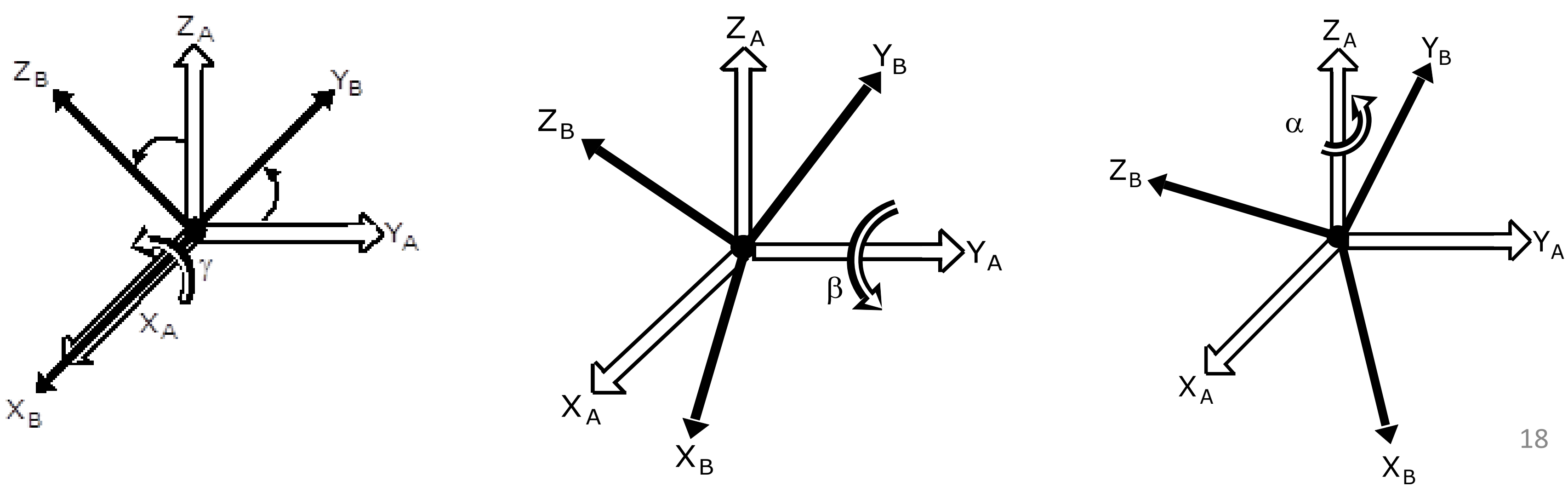
Roll-pitch-yaw açı seti.

Sabit açı sistemine göre, iki koordinat sistemi arasında dönme işlemi gerçekleştirmek için 12 farklı sabit açı kümesi kullanılır. {B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre dönme işlemi X-Y-Z sabit açı sistemine göre aşağıdaki gibi bulunur.

İlk önce merkezleri çakışık olan {B} koordinat sistemi Şekilde görüldüğü gibi x_A ekseni boyunca γ, y_A ekseni boyunca β ve z_A ekseni boyunca α açısıyla döndürülür. x_A , y_A ve z_A eksenleri boyunca gerçekleştirilen dönme işlemleri, sabit {A} koordinat sistemine göre ifade edilir.

$$R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma - c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$



2.9.1.1. Roll-Pitch-Yaw (XYZ Sabit) Açı Setinin Ters Çözümü

$$ {}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma - c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} $$

Yukarıdaki eşitlikte matrislerin (1,1) , (2,1) ve (3,1) elemanlarını birbirine eşitlendikten sonra r_{11} ve r_{21} matris elemanlarının kareleri alınıp toplanırsa ;

$$ {r_{11}}^2 + {r_{21}}^2 = c^2\alpha c^2\beta + s^2\alpha c^2\beta = (c^2\alpha + s^2\alpha)c^2\beta = c^2\beta $$

$$ c\beta = \pm\sqrt{{r_{11}}^2 + {r_{21}}^2} $$

β açısının pozitif çözümü (-90°< β<90°) şu şekildedir:

$$ \frac{s\beta}{c\beta} = \frac{-r_{31}}{\sqrt{{r_{11}}^2+{r_{21}}^2}} \qquad \beta = \mathrm{Atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{{r_{11}}^2 + {r_{21}}^2}\right) $$

r_{11} ve r_{21} matris elemanlarından yararlanılarak α açısı $\beta \neq \pm 90°$ olmak koşuluyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$S\alpha = r_{21}/c\beta \quad \text{ve } c\alpha = r_{11}/c\beta \qquad \alpha = \mathrm{Atan2}(r_{21}/c\beta,\ r_{11}/c\beta)$$

(3,2) ve (3,3) matris elemanlarını birbirine eşitleyerek γ açısı $\beta \neq \pm 90°$ olmak koşuluyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$r_{32} = c\beta s\gamma \quad \text{veya} \quad s\gamma = r_{32}/c\beta$$

$$r_{33} = c\beta c\gamma \quad \text{veya} \quad c\gamma = r_{33}/c\beta$$

$$\gamma = \mathrm{Atan2}(r_{32}/c\beta,\ r_{33}/c\beta)$$

Şimdiye kadar yapılan çözümler $\beta \neq \pm 90°$ koşulu için geçerliydi, bundan sonra ise birde $\beta = \pm 90°$ koşuluna bakalım.

$\beta = +90°$ koşuluna bakalım ;

$$ {}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma, 90°, \alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(+90) & 0 & s(+90) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s(+90) & 0 & c(+90) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} $$

$$= \begin{bmatrix} 0 & c\alpha s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha c\gamma + s\alpha s\gamma \\ 0 & s\alpha s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\gamma - \alpha) & \cos(\gamma - \alpha) \\ 0 & cos(\gamma - \alpha) & -\sin(\gamma - \alpha) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin(\gamma - \alpha) & \cos(\gamma - \alpha) \\ 0 & cos(\gamma - \alpha) & -\sin(\gamma - \alpha) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sin(\gamma - \alpha) = r_{12}$, $cos(\gamma - \alpha) = r_{22}$ $\quad$ $\gamma - \alpha =$Atan2(r_{12} , r_{22})

Bu denklemde γ $veya$ α açısından birini 0 kabul ederek diğer açı bulunur.

$\beta = -90°$ koşuluna bakalım ;

$$ {}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma, -90°, \alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(-90) & 0 & s(-90) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s(-90) & 0 & c(-90) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -c\alpha s\gamma - s\alpha c\gamma & -c\alpha c\gamma + s\alpha s\gamma \\ 0 & -s\alpha s\gamma + c\alpha c\gamma & -s\alpha c\gamma - c\alpha s\gamma \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\gamma + \alpha) & -\cos(\gamma + \alpha) \\ 0 & cos(\gamma + \alpha) & -\sin(\gamma + \alpha) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

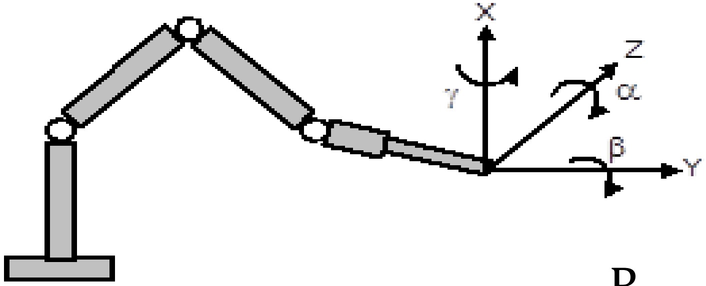
$$\begin{bmatrix} 0 & -\sin(\gamma + \alpha) & -\cos(\gamma + \alpha) \\ 0 & cos(\gamma + \alpha) & -\sin(\gamma + \alpha) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-\sin(\gamma + \alpha) = r_{12}$, $cos(\gamma + \alpha) = r_{22}$ $\gamma + \alpha$ =Atan2(-r_{12} , r_{22})

Bu denklemde de aynı şekilde $\gamma\ veya\ \alpha$ açısından birini 0 kabul ederek diğer açı bulunur.

ÖRNEK 2.13

Bir robotun uç işlevcisine şekilde görüldüğü gibi sabit bir koordinat sistemi yerleştiriliyor Uç işlevcisi sabit koordinat sisteminin eksenleri olan X boyunca γ, Y boyunca β, Z boyunca α açısıyla döndürülerek aşağıdaki matris elde ediliyor. Elde edilen matristen faydalanarak γ , β ve α açılarını bulunuz



$$R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} 0.85165 & -0.30998 & 0.42262 \\ 0.47212 & 0.10359 & -0.87543 \\ 0.22758 & 0.94508 & 0.23457 \end{bmatrix}$$

ÇÖZÜM 2.13

Örnekteki dönme matrisi ile sembolik dönme matrisini birbirine eşitleyelim.

$$\begin{bmatrix} 0.85165 & -0.30998 & 0.42262 \\ 0.47212 & 0.10359 & -0.87543 \\ 0.22758 & 0.94508 & 0.23457 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki eşitlikten faydalanarak γ , β ve α açıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\beta = \text{Atan2}(-r_{31}, \sqrt{{r_{11}}^2 + {r_{21}}^2})$$

$$= \text{Atan2}(-0.22758\ ,\ \sqrt{0.85165^2 + 0.47212^2}) = -13.154°$$

$$\alpha = \text{Atan2}(r_{21}\ /\ c\beta\ ,\ r_{11}\ /\ c\beta)$$

$$= \text{Atan2}(\frac{0.47212}{c(-13.154)}\ , \frac{0.85165}{c(-13.154)}) = 29°$$

$$\gamma = \text{Atan2}(r_{32}\ /c\beta\ ,\ r_{33}\ /c\beta)$$

$$= \text{Atan2}(\frac{0.94508}{c(-13.154)}\ , \frac{0.23457}{c(-13.154)}) = 76.06°$$

ÖRNEK 2.14

Bir robotun uç işlevcisi sabit koordinat sisteminin X ekseninde γ=42 derece, Y ekseninde β=-17 derece ve Z ekseninde α=25 derece döndürülüyor. Sonuçta oluşan dönme matrisini bulunuz

ÇÖZÜM 2.14

$$R_{XYZ}\left(\gamma,\beta,\alpha\right)=R_{XYZ}\left(42,-17,25\right)=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c(25)c(-17) & c(25)s(-17)s(42)-s(25)c(42) & c(25)s(-17)c(42)+s(25)s(42) \\ s(25)c(-17) & s(25)s(-17)s(42)+c(25)c(42) & s(25)s(-17)c\gamma-c(25)s(42) \\ -s(-17) & c(-17)s(42) & c(-17)c(42) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.8667 & -0.4914 & 0.0858 \\ 0.4041 & 0.5909 & -0.6982 \\ -0.29237 & 0.6399 & 0.7107 \end{bmatrix}$$

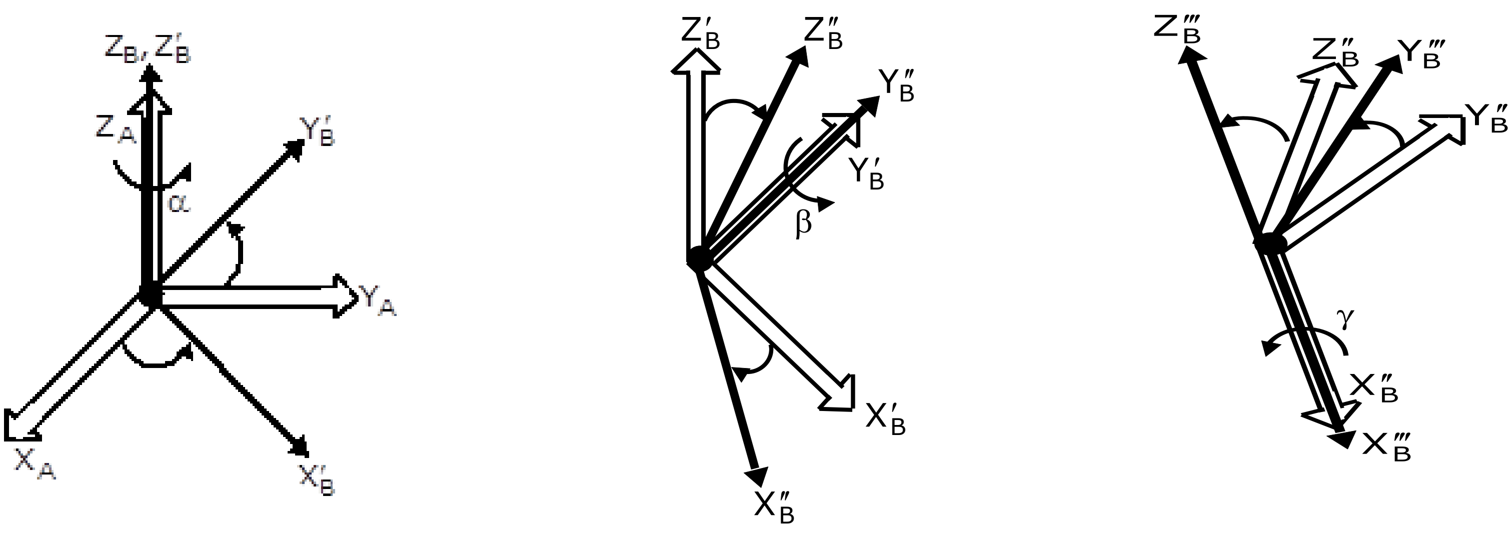
2.10. ZYX Euler Açı Seti

Euler açı sisteminde dönme işlemi, hareket eden koordinat sistemine göre gerçekleştirilir. İki koordinat sistemi arasında dönme işlemi Roll-pitch-yaw açı setinde olduğu gibi on iki farklı şekilde gerçekleştirilebilir.

- {B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre yönelimi Euler açı sistemine göre şöyle yapılmaktadır

- İlk önce eksenleri {A} koordinat sistemiyle çakışık olan {B} koordinat sistemi z_B ekseninde α açısıyla döndürülür. Dönme sonucu oluşan yeni $\{B'\}$ koordinat sistemi Y_B' ekseninde β açısıyla döndürülür. Son olarak dönme sonucu oluşan $\{B''\}$ koordinat sistemi X_B'' ekseninde γ açısıyla döndürülür.

$$ {}_B^A R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma) $$



$${}_{B}^{A}R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma - c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

ÖRNEK 2.15

Bir robotun uç işlevcisine hareketli bir koordinat sistemi yerleştiriliyor. Öncelikle bu hareketli koordinat sistemi Z ekseni boyunca α açısıyla döndürülüyor. Dönme sonucu oluşan yeni koordinat sistemi Y ekseni boyunca β açısıyla döndürülüyor. Son olarak, dönme sonucu oluşan yeni koordinat sistemi tekrar Z ekseni boyunca γ açısıyla döndürülerek aşağıdaki dönme matrisi elde ediliyor. Bu matristen faydalanarak α , β ve γ açılarını bulunuz.

$$R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} -0.30619 & -0.88388 & 0.3535 \\ 0.91856 & -0.17678 & 0.3535 \\ -0.25 & 0.43301 & 0.8660 \end{bmatrix}$$

ÇÖZÜM 2.15

Daha öncede belirtildiği gibi Euler açı setinde de iki koordinat sisetmi arasında dönme işlemi on iki farklı şekilde gerçekleştirilebilir. Örnekte Z’Y’Z’ Euler açı setinden faydalanarak dönme işlemi gerçekleştirilmiştir. Öncelikle Z’Y’Z' koordinat sistemine göre ifade edilen dönme matrisini elde edelim.

$$ {}^{A}_{B}R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma) $$

$$ = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix} $$

Verilen matrisi sembolik dönme matrisiyle eşitlenir ve β sıfırdan farklı olmak koşulu ile ($\beta \neq 0$) bilinen yöntemler kullanarak γ, β ve α açıları bulunur.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}$$

$$\beta = A\tan 2\left(\sqrt{r_{31}{}^2 + r_{32}{}^2}, r_{33}\right)$$

$$= A\tan 2\left(\sqrt{(-0.25)^2 + (0.43301)^2},\ 0.86603\right) = 29.999^\circ \cong 30^\circ$$

$$\alpha = A\tan 2\left(\frac{r_{23}}{s\beta}, \frac{r_{13}}{s\beta}\right) = A\tan 2\left(\frac{0.35355}{s(30)}, \frac{0.35355}{s(30)}\right) = 45^\circ$$

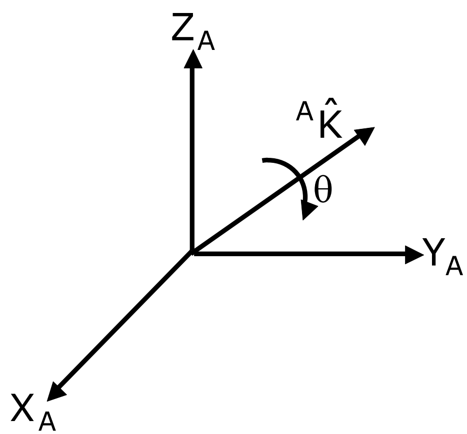
$$\gamma = A\tan 2\left(\frac{r_{32}}{s\beta}, -\frac{r_{31}}{s\beta}\right) = A\tan 2\left(\frac{0.43301}{s(30)}, -\frac{-0.25}{s(30)}\right) = 59.9998^\circ \cong 60^\circ$$

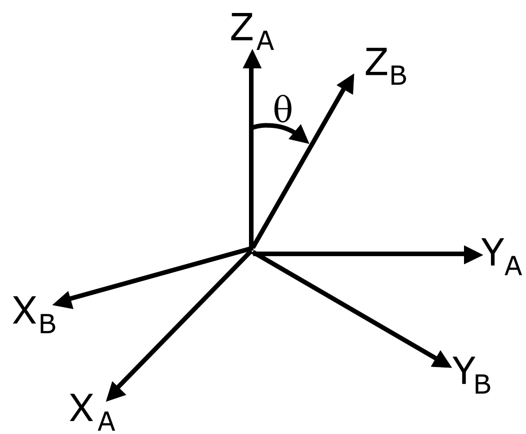
2.11. Eşdeğer Açı-Eksen Seti

Buraya kadar X, Y ve Z eksenlerinde dönme kavramları anlatıldı. Şimdi ise bir koordinat sisteminin orijinine yerleştirilen bir vektör yardımıyla beli bir açıyla döndürülmesini inceleyelim. {A} ve {B} gibi üs üste çakışık iki koordinat sistemi olsun. {A} koordinat sisteminin orijinine bir ${}^{A}\widehat{K}$ vektörü yerleştirilsin. Daha sonra {A} koordinat sistemi sağ el kuralına göre bu ${}^{A}\widehat{K}$ vektörü ile θ açısı kadar döndürülüp yeni bir koordinat sistemi {B} elde edilsin. Bu durumda {B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre yönelimi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$ {}^{A}_{B}R\left(\hat{K},\theta\right) = R_K(\theta) $$

$$ \mathrm{R}\left(\widehat{K},\theta\right) = \begin{bmatrix} k_x k_x(1-c\theta)+c\theta & k_y k_x(1-c\theta)-k_z s\theta & k_z k_x(1-c\theta)+k_y s\theta & 0 \\ k_x k_y(1-c\theta)+k_z s\theta & k_y k_y(1-c\theta)+c\theta & k_z k_y(1-c\theta)-k_x s\theta & 0 \\ k_x k_z(1-c\theta)-k_y s\theta & k_y k_z(1-c\theta)+k_x s\theta & k_z k_z(1-c\theta)+c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$





Yukarıdaki denklemde versθ = (1 − cθ) yani vθ = (1 − cθ) düzenlemesini yapalım :

$$\mathrm{R}(\widehat{K},\theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x \mathrm{v}\theta + c\theta & k_y k_x \mathrm{v}\theta - k_z s\theta & k_z k_x \mathrm{v}\theta + k_y s\theta & 0 \\ k_x k_y \mathrm{v}\theta + k_z s\theta & k_y k_y \mathrm{v}\theta + c\theta & k_z k_y \mathrm{v}\theta - k_x s\theta & 0 \\ k_x k_z \mathrm{v}\theta - k_y s\theta & k_y k_z \mathrm{v}\theta + k_x s\theta & k_z k_z \mathrm{v}\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denklemde $k_x, k_y\ ve\ k_z$ $\widehat{K}$ vektörünün x, y ve z'deki birim vektörleridir.

2.11.1. Ters Açı-Eksen Çözümü

Rastgele bir R dönme matrisi $\mathrm{R}(\widehat{K},\theta)$ matrisine eşitlenerek $\widehat{K}$ ve θ ifadelerini R matrisinin birer fonksiyonu olarak yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x k_x \mathrm{v}\theta + c\theta & k_y k_x \mathrm{v}\theta - k_z s\theta & k_z k_x \mathrm{v}\theta + k_y s\theta & 0 \\ k_x k_y \mathrm{v}\theta + k_z s\theta & k_y k_y \mathrm{v}\theta + c\theta & k_z k_y \mathrm{v}\theta - k_x s\theta & 0 \\ k_x k_z \mathrm{v}\theta - k_y s\theta & k_y k_z \mathrm{v}\theta + k_x s\theta & k_z k_z \mathrm{v}\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bir takım işlemler sonucu $\widehat{K}$ vektörü ve θ şöyle elde edilir :

$$\widehat{K} = \frac{1}{2s\theta}\begin{bmatrix} r_{32} & r_{23} \\ r_{13} & r_{31} \\ r_{21} & r_{12} \end{bmatrix}$$

$$\theta = \text{Atan2}(\sqrt{(r_{32}-r_{23})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{21} - r_{12})^2}, r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1)$$

ÖRNEK 2.16

{A} koordinat sistemine bir ${}^{A}\widehat{K} = [0.18121 \quad -0.43749 \quad 0.88078]$ vektörü yerleştirilip, bu vektör $\theta = 92.2934°$ döndürülerek {B} koordinat sistemi elde ediliyor. Bu iki koordinat sistemi arasındaki dönmeyi temsil eden $R_K(\theta)$ matrisini bulunuz.

ÇÖZÜM 2.16

$R_K(\theta)$ matrisini bulmak için aşağıdaki sembolik matrisi yazıp örnekte verilenleri yerine koyalım.

$$\mathrm{R}(\widehat{K},\theta)=\begin{bmatrix} k_x k_x(1-c\theta)+c\theta & k_y k_x(1-c\theta)-k_z s\theta & k_z k_x(1-c\theta)+k_y s\theta & 0 \\ k_x k_y(1-c\theta)+k_z s\theta & k_y k_y(1-c\theta)+c\theta & k_z k_y(1-c\theta)-k_x s\theta & 0 \\ k_x k_z(1-c\theta)-k_y s\theta & k_y k_z(1-c\theta)+k_x s\theta & k_z k_z(1-c\theta)+c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$k_x = 0.18121 \qquad k_y = -0.43749 \qquad k_z = -0.88078$

Değerleri bu şekilde yerine konarak sonuç matrisi elde edilir.

$$=\begin{bmatrix} -0.0060 & -0.9625 & -0.2711 & 0 \\ 0.7976 & 0.1589 & -0.5819 & 0 \\ 0.6031 & -0.2197 & 0.7668 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK 2.17

{A} koordinat sistemine bir ${}^{A}\widehat{K}$ vektörü yerleştirip θ açısıyla döndürülerek {B} koordinat sistemi elde ediliyor. Bu iki koordinat sistemi arasındaki dönmeyi temsil eden $R_K(\theta)$ matrisi aşağıda verildiğine göre ${}^{A}\widehat{K}$ vektörünün elemanlarını ve θ açısını bulunuz.

$$R\left(\hat{K},\theta\right)=\begin{bmatrix} -0.43561 & -0.68255 & -0.58682 & 0 \\ 0.86116 & -0.12625 & -0.4924 & 0 \\ 0.262 & -0.71985 & 0.64279 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ÇÖZÜM 2.17

Öncelikle Atan2 fonksiyonunu kullanarak θ açısı bulalım.

$$\theta = A\tan 2(\sqrt{(r_{32}-r_{23})^2+(r_{13}-r_{31})^2+(r_{21}-r_{12})^2}, r_{11}+r_{22}+r_{33}-1)$$

$$r_{32}-r_{23}=-0.71985+0.4924=-0.22745$$
$$r_{13}-r_{31}=-0.58682-0.262=-0.84882$$
$$r_{21}-r_{12}=0.86116+0.68255=1.54371$$
$$r_{11}+r_{22}+r_{33}-1=-0.91907$$
$$\theta = A\tan 2(\sqrt{(-0.22745)^2+(-0.84882)^2+(1.54371)^2},-0.91908)$$
$$\theta = 117.3576$$

${}^{A}\widehat{K}$ vektörü ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$\hat{K}=\frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12}\end{bmatrix}=\frac{1}{2\sin(117.3576)}\begin{bmatrix}-0.22745 \\ -0.84882 \\ 1.54371\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\cdot(0.8881)}\begin{bmatrix}-0.22745 \\ -0.84882 \\ 1.54371\end{bmatrix}=\frac{1}{1.7762}\begin{bmatrix}-0.22745 \\ -0.84882 \\ 1.54371\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.128 \\ -0.4779 \\ 0.8609\end{bmatrix}$$

ÖRNEK 2.18

{A} koordinat sistemine bir ${}^{A}\widehat{K}$ vektörü yerleştirilip θ açısıyla döndürülerek {B} koordinat sistemi elde ediliyor. Bu iki koordinat sistemi arasındaki dönmeyi temsil eden $R_K(\theta)$ matrisi aşağıda verildiğine göre $R_K(\theta)$ matrisinin bilinmeyen elemanlarını bulunuz.

$$R\left(\hat{K},\theta\right)=\begin{bmatrix} -0.68402 & -0.31665 & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & -0.6346 & 0 \\ 0.031882 & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ÇÖZÜM 2.18

$R_K(\theta)$ matrisinin özelliklerinden faydalanarak bilinmeyen elemanları bulalım.

$$r_{11}r_{11}+r_{12}r_{12}+r_{13}r_{13}=1 \qquad (-0.68402)^2+(-0.31665)^2+r_{13}^2=1 \qquad r_{13}=\pm 0.65715$$

$$r_{11}r_{11}+r_{21}r_{21}+r_{31}r_{31}=1 \qquad (-0.68402)^2+r_{21}^2+(0.031882)^2=1 \qquad r_{21}=\pm 0.72874$$

Bulduğumuz r_{13} ve r_{21} ifadelerini $R_K(\theta)$ matrisinde yerine koyalım.

$$R\left(\hat{K},\theta\right)=\begin{bmatrix} -0.68402 & -0.31665 & 0.65715 & 0 \\ 0.72874 & \mathrm{r}_{22} & -0.6346 & 0 \\ 0.031882 & \mathrm{r}_{32} & \mathrm{r}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_K(\theta)$ matrisinin $r_{21}r_{21} + r_{22}r_{22} + r_{23}r_{23} = 1$ özelliğinden kullanıp r_{22} bulalım.

$$r_{21}r_{21} + r_{22}r_{22} + r_{23}r_{23} = 1 \qquad (0.72874)^2 + r_{22}^2 + (\text{-}0.6346)^2 = 1 \qquad r_{22} = \pm 0.25286$$

Bulduğumuz r_{22} ifadesini $R_K(\theta)$ matrisinde yerine koyalım.

$$R\left(\hat{K},\theta\right)=\begin{bmatrix} -0.68402 & -0.31665 & 0.65715 & 0 \\ 0.72874 & 0.25286 & -0.6346 & 0 \\ 0.031882 & \mathrm{r}_{32} & \mathrm{r}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_K(\theta)$ matrisinin $r_{12}r_{12} + r_{22}r_{22} + r_{32}r_{32} = 1$ özelliğini kullanarak r_{32} bulalım.

$$r_{12}r_{12} + r_{22}r_{22} + r_{32}r_{32} = 1 \qquad (\text{-}0.31665)^2 + (0.25286)^2 + r_{32}^2 = 1 \qquad r_{32} = \pm 0.91422$$

Son olarak $R_K(\theta)$ matrisindeki $r_{13}r_{13}+r_{23}r_{23}+r_{33}r_{33}=1$ özelliğinden faydalanarak r_{33} elemanını bulalım.

$$r_{13}r_{13}+r_{23}r_{23}+r_{33}r_{33}=1$$

$$(0.65715)(0.65715)+(-0.6346)(-0.6346)+r_{33}r_{33}=1$$

$$r_{33}r_{33}=1-(0.65715)(0.65715)+(-0.6346)(-0.6346)$$

$$r_{33}^2=1-(0.43185)+(0.40272)$$

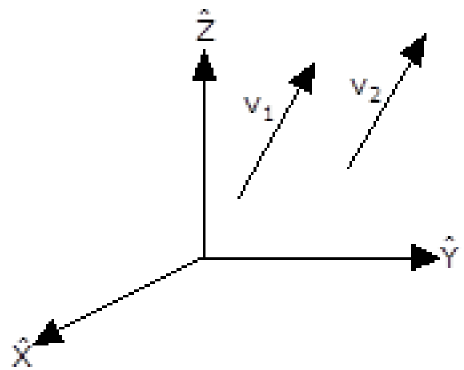
$$r_{33}=\sqrt{1-0.83457}=\sqrt{0.16543}=\pm 0.40673$$

Elde edilen dönüşüm matrisi elemanlarının sadece pozitif değerleri göz önünde bulundurulursa $R_K(\theta)$ matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R\left(\hat{K},\theta\right)=\begin{bmatrix} -0.68402 & -0.31665 & -0.65715 & 0 \\ 0.72876 & -0.25727 & -0.6346 & 0 \\ 0.031882 & -0.91299 & 0.40674 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

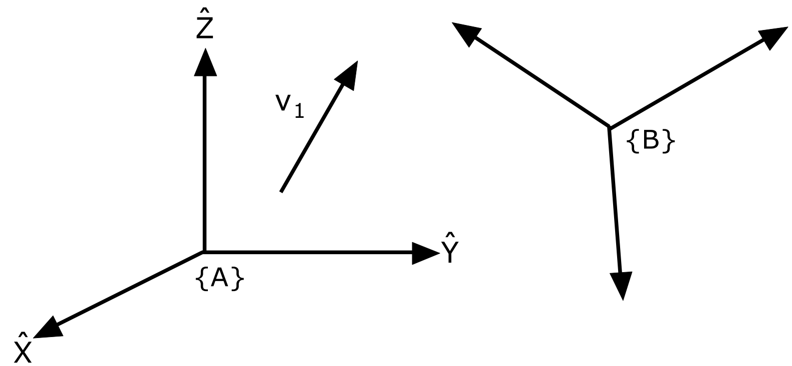
2.12. Vektörsel Büyüklükler

Vektörsel büyüklükler hız, moment, kuvvet ve konum gibi fiziksel büyüklükler olarak ifade edilebilirler. Şu ana kadar konum vektörleri üzerinde durduk. Şimdi ise hız/moment gibi diğer vektörler üzerinde duracağız. Hız ve moment vektörlerine serbest vektörler denir. Serbest vektörler üç boyutlu uzayda başlangıç noktalarından bağımsız olarak taşınabilirler. Şekilde görüldüğü gibi iki hız vektörünün büyüklüğü ve doğrultusu aynı olmasına rağmen sadece başlangıç noktaları farklıdır.



Serbest vektörlerin dönüşümleri gerçekleştirilirken dönüşüm matrisinin içerisinde konum vektörü yer almaz. Dönüşümde sadece dönme matrisi kullanılır. {A} ve {B} koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm matrisi şu şekilde tanımlansın.

$$ {}_{B}^{A}T = \begin{bmatrix} {}_{B}^{A}R & {}^{A}P_{BORG} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} $$



{B} koordinat sistemine göre tanımlanan v_1 hız vektörünü {A} koordinat sistemine göre tanımlamak için aşağıdaki denklemden faydalanılır.

$$ {}^{A}V = {}_{B}^{A}R\, {}^{B}V $$

İki koordinat sistemi arasında hız tanımlanırken konum ifadesi yer aldığından aşağıdaki denklem kesinlikle kullanılamaz.

$$ {}^{A}V \neq {}_{B}^{A}T\, {}^{B}V $$

Konum ve kuvvet gibi fiziksel büyüklükler çizgi vektörlerdir. Bunların üç boyutlu uzayda taşınmasında başlangıç noktasını içeren dönüşüm matrisi kullanılır.

ÖRNEK 2.19

{A} ve {B} koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm matrisi, ^{B}V ve ^{B}P vektörleri sırasıyla aşağıdaki gibi veriliyor. Buna göre ^{A}V vektörünü bulunuz.

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 11 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{B}V = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} $$

ÇÖZÜM 2.19

$$ {}^{A}V = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 4.428 \\ 10 \end{bmatrix} $$