NÜMERİK ANALİZ

Bölüm 8
Sayısal Türev
Doç. Dr. Hatice ÇITAKOĞLU
2020

Sayısal Türev

- Analitik olarak türevin hesaplanmasının uzun ve zor olduğu durumlarda sayısal türev kullanılır.
- Sayısal türev ayrık verilerle fonksiyonun değişimlerinin hesaplanması işlemidir.

Sayısal Türev

- Bir ölçüm sonucunu gösteren tablo halinde verilmiş sayısal verilerle, türev hesaplanırken türevin var olduğu kabul edilmektedir.
- Türev çözümünde kullanılan sayısal yöntemler, diferansiyel eşitliklerin çözümünde de önemli rol oynamaktadır.

Sayısal Türev

Taylor Seri Açılımı Kullanılarak Sayısal Türev:

Taylor serisi kullanılarak sonlu bölünmüş fark formülleri farklı dereceler için türev değerleri elde edilir.

- İleriye doğru,
- Geriye doğru,
- Merkezi fark
- olmak üzere üç fark grupta incelenecektir.

Sayısal Türev

- Eğer f(x) ve ilk (n+1) türevi, a ve x_0 içeren bir aralıkta sürekliyse; fonksiyonun x noktasındaki değeri, bir değişkenli fonksiyonlar için taylor seri açılımı:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} \ldots R(x)$$

Sayısal Türev

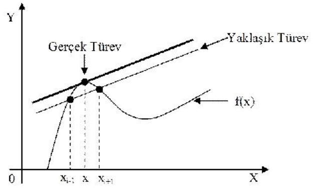
- Sayısal türev için taylor serinin genel yazılımı:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=x_0} + R(x)$$

- R(x), serinin kalan diğer terimlerini temsil eder.

Sayısal Türev

- Sonlu farklar yaklaştırması ile sayısal türev:



Sayısal Türev

- Birinci dereceden türev:

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Adım büyüklüğü

$$h = x - x_i$$

- x değişkenleri arasındaki farka bağlı olarak tanımlanırsa yazılan eşitlik aşağıdaki gibi genelleştirilir:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(\varsigma)}{2!}h$$

Sayısal Türev

- Kesme hatası:

$$O(h)=\frac{f''(\varsigma)}{2!}h$$

- **Böylece birinci dereceden türev için ileriye doğru sonlu bölünmüş fark formülü:**

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}+O(h)$$

9

Sayısal Türev

- **İkinci dereceden türev için ileriye doğru sonlu bölünmüş fark formülü:**

$$f''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^2}+O(h^2)$$

- **Elde edilen ikinci dereceden türev bilgisi yukarıda yazılan birinci dereceden türev ifadesinde kullanılırsa, birinci derecen türev:**

$$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})-4f(x_{i+1})-3f(x_i)}{2h}+O(h^2)$$

10

Sayısal Türev

- **İleri doğru fark:**

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$$

- **Geriye doğru fark:**

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$$

- **Merkez fark:**

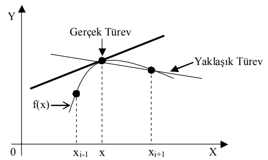
$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{x_{i+1}-x_{i-1}}$$

11

Sayısal Türev

- **İleri doğru sonlu bölünmüş fark formülleri ile türev:**

Türev Eşitlikleri
$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}+O(h)$
$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+4f(x_{i+1})-3f(x_i)}{2h}+O(h^2)$

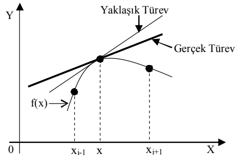


12

Sayısal Türev

- **Geriye doğru sonlu bölünmüş fark formülleri ile türev:**

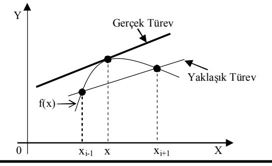
Türev Eşitlikleri
$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$
$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h} + O(h^2)$



Sayısal Türev

- **Merkez sonlu bölünmüş fark formülleri ile türev:**

Türev Eşitlikleri
$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$
$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h} + O(h^4)$



Sayısal Türev

- **Örnek:** **f(x)=3x²-5 fonksiyonunun x=1 noktasındaki türevini, ileri doğru sonlu bölünmüş fark formülleri ile adım büyüklüğünü, h=0.25 alarak hesaplayınız.**

Sayısal Türev

- **Çözüm:** **Adım büyüklüğünün h=0.25 olması durumunda türevin hesaplanması:**

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 5 = -2$$

$$f(1.25) = 3 \cdot 1.25^2 - 5 = -0.3125$$

$$f(1.5) = 3 \cdot 1.5^2 - 5 = 1.75$$

Sayısal Türev

- **Çözüm:** Tablo oluşturursak

i	x_i	$f(x_i)$
1	1	-2
2	1.25	-0.3125
3	1.5	1.75

17

Sayısal Türev

- **Çözüm:** İki terim kullanılarak hesaplanırsa:

$$f'(1) = \frac{f(2) - f(1)}{h} = \frac{-0.3125 - (-2)}{0.25} = 6.75$$

- Üç terim kullanılarak hesaplanırsa:

$$f'(x_1) = \frac{-f(x_3) + 4f(x_2) - 3f(x_1)}{2h}$$

$$f'(1) = \frac{-1.75 - 4 \cdot 0.3125 + 3 \cdot 2}{2 \cdot 0.25} = 6$$

18