3. HAFTA

BLM327

BİLGİSAYAR BİLİMİNE GİRİŞ

Öğr. Gör. Dursun EKMEKCİ

dekmekci@karabuk.edu.tr

KBUZEM
Karabük Üniversitesi
Uzaktan Eğitim Uygulama ve Araştırma Merkezi

Bulanık Mantığın Temel Kavramları

Bulanık mantık sistemleri dört temel kavrama dayanmaktadır ;

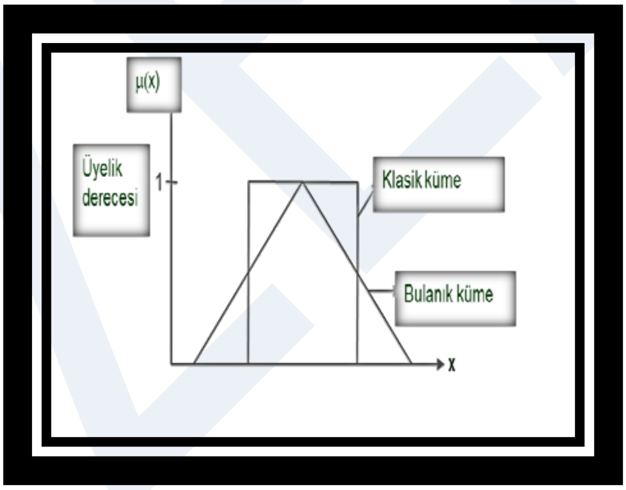
- Bulanık kümeler
- Dilsel değişkenler / Bulanık değerler
- Üyelik fonksiyonları
- Bulanık kurallar

Bulanık Kümeler;

- Bulanık küme kavramı klasik kümenin bir uzantısıdır. Klasik kümede bir eleman kümenin ya içindedir(1) ya da dışındadır(0). Bulanık kümelerde ise bir eleman 0 ile 1 arasındaki herhangi bir üyelik değerine sahiptir.
- Klasik küme
  - 1 : üye olmayı
  - 0 : üye olmamayı
- Bulanık küme
  - 1 : tam olarak üye olma

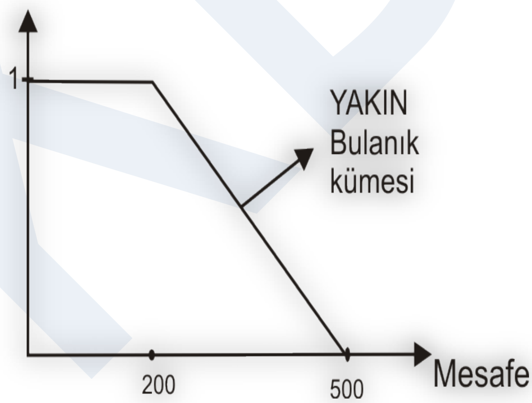
  (tam üyelik derecesi)
  - 0-1: üye olma dereceleri
  - 0 : tam olarak üye olmama

  (hiç üye olmam derecesi)



Dilsel Değişkenler

- S, hareketli nesneler kümesi olsun. Bu kümede, "hareketli bir x nesnesi ne derece yakındır" sorusuna cevep verecek bir "YAKIN" bulanık kümesi tanımlayalım :
  - Bu küme için "mesafe" dilsel bir değişkendir. "YAKIN" yakınlık kavramını ifade eden bir dilsel terim (değer) olarak tanımlanır.
  - "YAKIN" bulanık kümesini tanımlamanın en iyi yolu nesnenin uzaklığına bağlı bir üyelik fonksiyonu tanımlamaktadır.



$$YAKIN = \begin{cases} 1, & mesafe < 200 \\ \dfrac{500 - mesafe}{300}, & 200 \le mesafe \le 500 \\ 0, & 500 < mesafe \quad ise \end{cases}$$

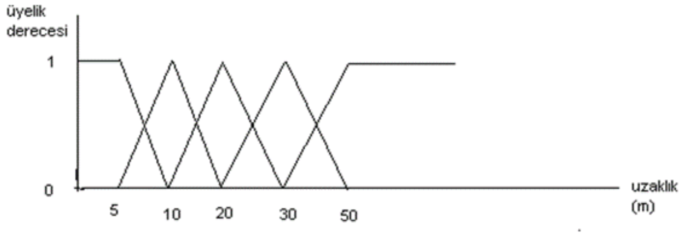
Tabloda örnek nesneler ve yakınlık dereceleri verilmektedir :

Nesne	**Mesafe**	**Yakınlık derecesi, μ(mesafe)**
1	800	0
2	150	1
3	350	0,5
4	260	0,8

- Dilsel değişkenler ve dilsel terimler gerçek değerleri dilsel değerlere dönüştürürler.
  - Dilsel değişkenlerin değerleri dilsel terimlerdir.
  - Terimler durum veya sonuçların dilsel yorumlarıdır.
  - Örneğin ölçülebilen mesafe için dilsel yorumlar çok açık, uzak, normal, yakın, çok yakın vb. olacaktır.

Üyelik Dereceleri ve Üyelik Fonksiyonları ;

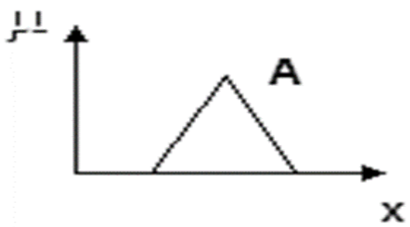
- Bir girdi değerinin, dilsel değişkenin bir terimine ne derecede ait olduğunu belirleyen değere üyelik derecesi (degree of membership) adı verilir.
- Dilsel değerin (terimin) tümü için bu değerler bir fonksiyon olarak üyelik fonksiyonu (membership function) veya bulanık sayı (fuzzy number) olarak adlandırılır.
- Örneğin uzaklıkla ilgili olarak;



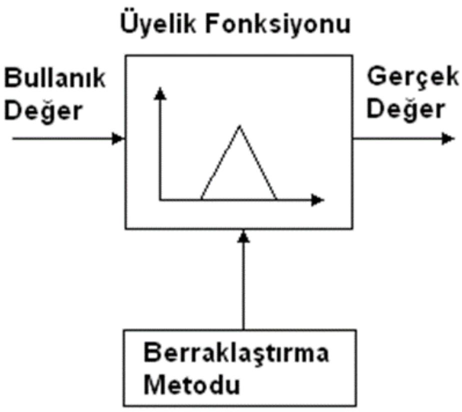
  - Uzaklık dilsel değerlerinin terimleri birbiriyle kesişmiştir.
  - Bu, bulanık kümelerde *örtüşüm* olarak adlandırılır.
  - Örneğin uzaklık 7metre ise bu uzaklığın bulanık ifadesi bir derece çok yakınve bir derece yakındır.
  - En çok ve en genel kullanılan bulanık sayılar (üyelik fonksyonları) üçgen ve yamuk üyelik fonksiyonlarıdır.

- Üyelik Fonksiyonu ve bulanık değer ;

  - Bulanık değer (terim) matematiksel olarak üyelik fonksiyonu ile temsil edilir.
  - x A dır (x is A).
  - x : bulanık değişken
  - A : bulanık değer (terim)

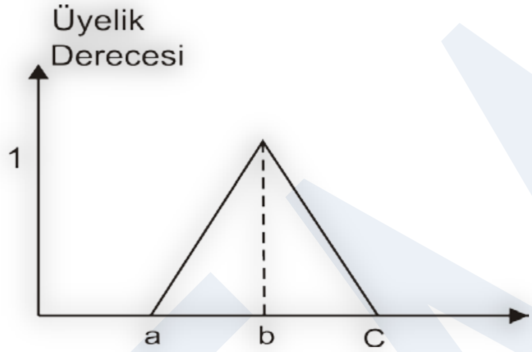


  - Üyelik fonksiyonları kullanılarak gerçek değerler bulanık değerlere (veya tersi) dönüştürülür.

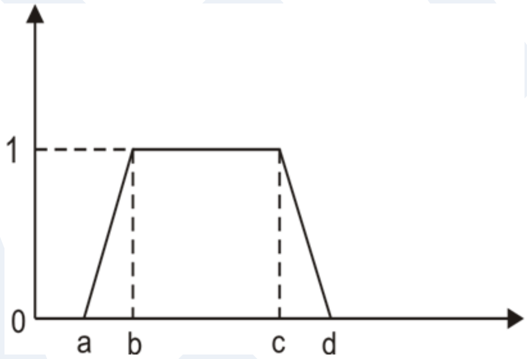


- En çok ve en genel kullanılan bulanık sayılar(üyelik fonksyonları) üçgen ve yamuk üyelik fonksyonlarıdır.

- Üçgen üyelik fonksiyonları :



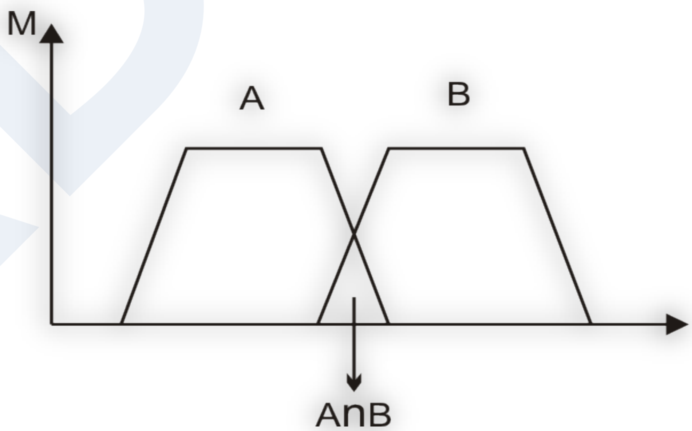
- Yamuk üyelik fonksiyonu :



Bulanık mantık temel işlemleri ;

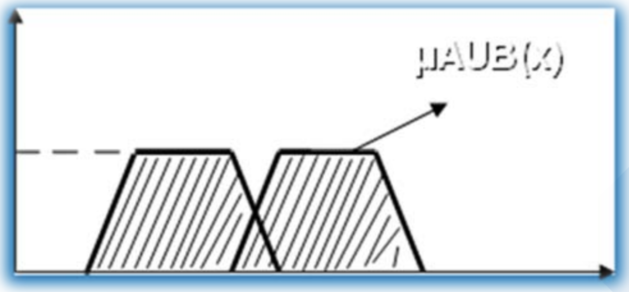
- Bulanık küme teorisi, sadece dilsel değerlerin temsilini sağlamakla kalmayıp, aynı zamanda bu değerlerin mantıksal bir yol ile irdelenip sonuç çıkarılmasını sağlar.
- Bulanık mantıkta en sık kullanılan üç temel işlem aşağıda verilmiştir;
  - Kesişim işlemi (Bulanık "AND"), Bulanık "VE"

mA∩B(x) = min (mA(x), mB(x))



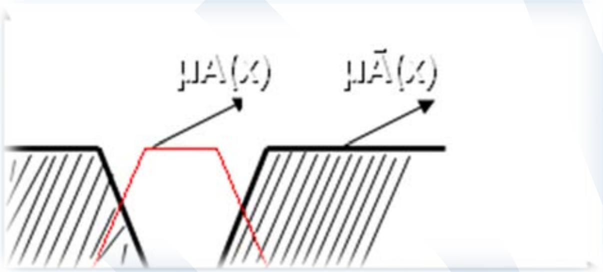
- Birleşim işlemi (bulanık or), bulanık “veya”

$\mu AUB(x) = \max(\mu A(x), \mu B(x))$



- Değil işlemi

$\mu \bar{A}(x) = 1 - \mu A(x)$



Bulanık kurallar ;

- Bulanık terimler, dilsel “eğer” “ise” (“if”, “then”) kurallarından sonuç çıkarmak için kullanılır.
- Örneğin;
  - Eğer hava “az sıcak” ise pencereyi “az aç”
  - Eğer hava “sıcak” ve oda “nemli” ise pencereyi “çok aç”
- Bulanık mantık sisteminin kural listesi ve üyelik fonksiyonları için genellikle uzman kişilerden sağlanan bilgiler kullanılır.
- YSA ve benzeri metotlar da eğitim bulanık kuralları ve üyelik derecelerini belirlemek için kullanılabilir.

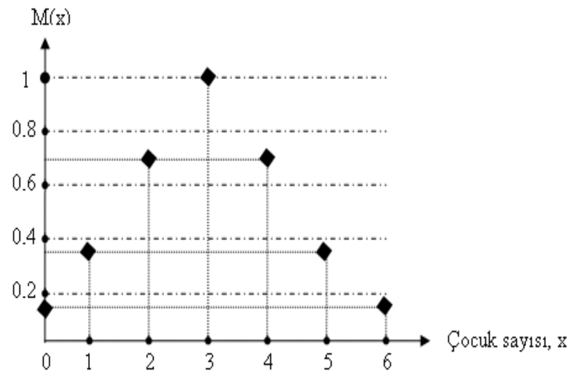
Bulanık Kümeler

X, x ile gösterilen nesnelerin toplamı olsun (uzayı). X' de A ile gösterilen bir bulanık küme aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$A = \{(x_i, \mu_A(x_i)) | x_i \in X\}$$

Burada mA (xi), A kümesinin üyelik fonksiyonudur. Üyelik fonksiyonu X in Her bir elemanına 0 ile 1 arasında bir üyelik değeri atar.

- Ayrık Bulanık Küme
  - X = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 } bir ailenin sahip olacağı çocuk sayısı
  - A = { (0, 0.1), (1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.7), (5, 0.3), (6, 0.1) }
  - A, bir ailedeki normal çocuk sayısı olsun.



- Bulanık küme gösterimini basitleştirmek için alternatif olarak aşağıdaki gösterimlere kullanılır;
  - Ayrık bulanık küme;

$$A = \sum_{Xi} \mu_A(x_i) / x_i$$

  - Sürekli bulanık küme;

$$A = \int_{x} \mu_A(x) / x$$

  - Yukarıda verilen toplam ve integral işaretleri (x, mA(x)) çiftlerinin birleşimini göstermek içindir ve toplama veya integral işlemini ifade etmezler. Aynı şekilde " / " sadece bir semboldür ve bölmeyi ifade etmez.

Bulanık Küme İşlemleri

- Bulanık küme teorisi, klasik küme teorisinin genelleştirilmiş bir şekli olarak görülebilir.
- Bu nedenle bulanık küme işlemleri tanımlanırken, X uzayının klasik alt kümeleri arasında var olan ilişkilerin genişletilmesi yeterli olacaktır.
    - A, X uzayında tanımlı bir bulanık küme olsun.

  $m_A(x)$, A kümesinin üyelik fonksiyonu;

  $m_A(x): x \rightarrow [0, 1]$ (x'i [0,1] aralığına götüren bir fonksiyon)
    - Aynı şekilde, B'de X uzayında tanımlı bir bulanık bir küme ve

  $m_B(x)$, B kümesinin üyelik fonksiyonu ;

  $m_B(x) : x \rightarrow [0.1]$.

- A ve B bulanık kümeleri için aşağıdaki işlemler tanımlanabilir ;
    - Eğer her x Є X için $m_A(x) = m_B(x)$ ise
      A=B olur.
    - Eğer her x Є X için $m_A(x) \leq m_B(x)$ ise
      A $\subseteq$ B { B, A'yı kapsar }
    - Eğer her x Є X için $m_A(x) = 0$ ise
      A kümesi boş kümedir { Ø }
    - Eğer her x Є X için $m_A(x) =1$ ise
      A, X uzayına eşittir {evrensel küme}
    - C = A∩B ise
      her x Є X için $m_C(x) = \min (m_A(x) , m_B(x))$
    - C = AUB ise
      her x Є X için $m_C(x) = \max (m_A(x) , m_B(x))$

- A ve B bulanık kümeleri için aşağıdaki işlemler tanımlanabilir ;
  - AUØ = A ise

her x Є X için $m_{AUØ}(x)$ = max ($m_A(x)$, 0) = $m_A(x)$ → AU Ø = A

  - AU X = X ise

her x Є X için $m_{AUX}(x)$ = max ($m_A(x)$, 1) = 1 → AU X = X

  - A∩Ø = Ø ise

her x Є X için $m_{A∩Ø}$ (x) = min ($m_A(x)$, 0) = 0 → A∩Ø = Ø

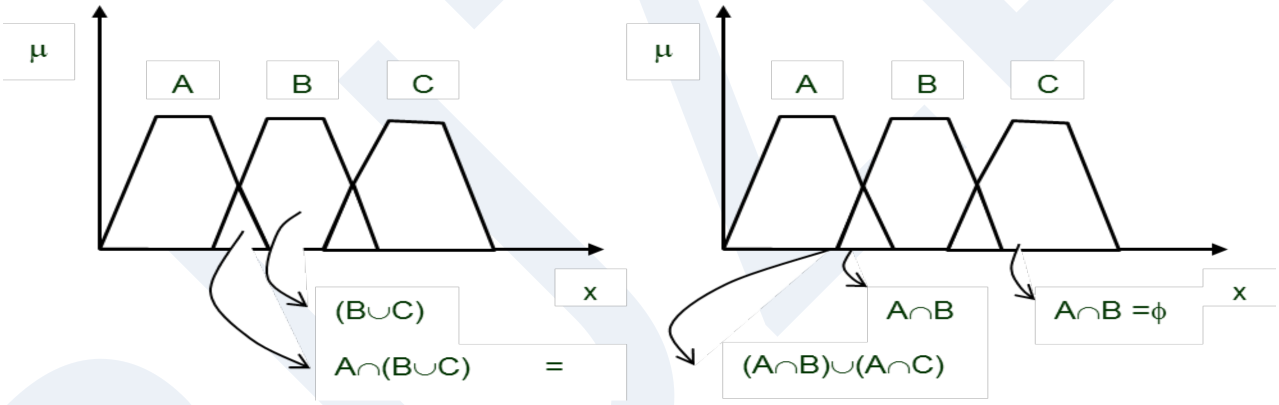
  - A∩X = A ise

her x Є X için $m_{A∩X}$ (x) = min ($m_A(x)$, 1) = $m_A(x)$ → A∩X = X

  - A∩B ⊆ A ⊆ AUB

her x Є X için $m_{A∩B}(x)$ = min ($m_A(x)$, $m_B(x)$) ≤ $m_A(x)$ → A∩B ⊆ A
$m_{AUB}(x)$ = max ($m_A(x)$, $m_B(x)$) ≥ $m_A(x)$ → A ⊆ AUB
ve böylece A∩B ⊆ A ⊆ AUB olur.

- A ve B bulanık kümeleri için aşağıdaki işlemler tanımlanabilir ;
  - A∩(B∪C) = (A∩B) ∪(A∩C)



- A ve B bulanık kümeleri için aşağıdaki işlemler tanımlanabilr ;

A', A'nın tümleyeni ise

$\forall x \in X$ için $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$

- De Morgan kuralı; $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$\mu_{(A \cup B)'} = 1 - \max(\mu_A - \mu_B)$

$\mu_A \geq \mu_B \Rightarrow \mu_{(A \cup B)'} = 1 - \mu_A$

$\mu_A < \mu_B \Rightarrow \mu_{(A \cup B)'} = 1 - \mu_B$

$\mu_{(A' \cap B)'} = \min(1 - \mu_A, 1 - \mu_B)$

$\mu_A \geq \mu_B \Rightarrow \mu_{(A' \cap B)'} = 1 - \mu_A$

$\mu_A < \mu_B \Rightarrow \mu_{(A' \cap B)'} = 1 - \mu_B$

Benzer şekilde; $(A \cap B)' = A' \cup B'$

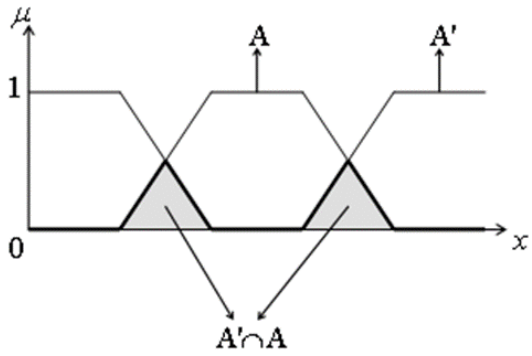
- A ve B bulanık kümeleri için aşağıdaki işlemler tanımlanabilr ;

$(A')' = A$

$$\forall x \in X \quad \text{için} \quad \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$$
$$\mu_{(A')'}(x) = 1 - \mu_{A'}(x) = 1 - (1 - \mu_A(x))$$
$$\mu_{(A')'}(x) = \mu_A(x) \Rightarrow (A')' = A$$

$A' \cap A \neq \phi \quad \{A \neq \phi \text{ için}\}$

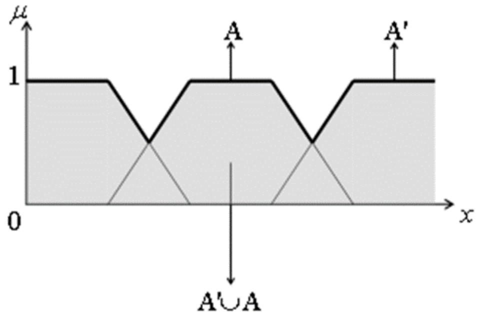
$$\forall x \in X \quad \text{için} \quad \mu_{A' \cap A}(x) = \min\{1 - \mu_A(x), \mu_A(x)\} \geq 0$$
$$\forall x \in X \quad \text{için} \quad \mu_{\phi}(x) = 0 \Rightarrow A' \cap A \neq \phi$$



- A ve B bulanık kümeleri için aşağıdaki işlemler tanımlanabilr ;

$A' \cup A \neq X \qquad \{A \neq \phi \text{ için}\}$

$$\forall x \in X \quad \text{için} \quad \mu_{A' \cup A}(x) = \max\{1 - \mu_A(x), \mu_A(x)\} \leq 1$$
$$\forall x \in X \quad \text{için} \quad \mu_X(x) = 1 \Rightarrow A' \cup A \neq X$$



- A ve B bulanık kümeleri için aşağıdaki işlemler tanımlanabilr ;
  - AUB = BUA

her x Є X için

$m_{AUB}(x) = \max(m_A(x), m_B(x))$

$m_{BUA}(x) = \max(m_B(x), m_A(x))$

→ AUB = BUA

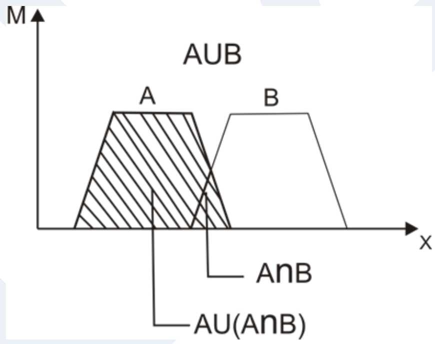
- Aynı şekilde, A∩B = B∩A
- AUA = A

her x Є X için $m_{AUA}(x) = \max(m_A(x), m_A(x)) = m_A(x)$ → AUA = A

- A ve B bulanık kümeleri için aşağıdaki işlemler tanımlanabilr ;
  - A∩A = A

her x Є X için $M_{A\cap A}(x) = \min(m_A(x), m_A(x)) = m_A(x)$ → A∩A = A

- AU(A∩B) = A



- Benzer şekilde, A∩(AUB) = A

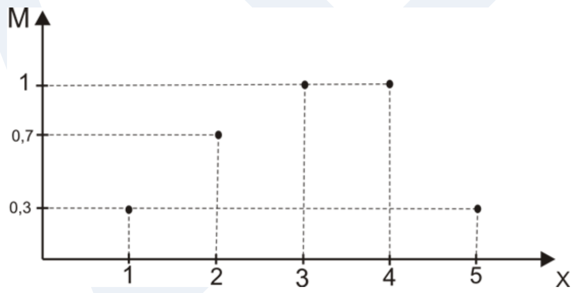
Bulanık Küme Özellikleri

- Bulanık kümelerin kardinalitesi (cadinality) ;
  - Klasik kümelerde cadinality, kümedeki elemanların sayısıdır.
  - Bulanık kümelerde ise, kısmi eleman olma durumu mevcut olduğu için bu kısmi üyelik dereceleri değerlendirmeye alınır.
  - Bulanık kümeler için cadinality aşağıdaki şekilde hesaplanır :

$$Card(A) = |A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

- Bulanık kümelerin kardinalitesi (cardinality) ;
  - Örnek;

$$A = \frac{0,3}{1} + \frac{0,7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,3}{5}$$



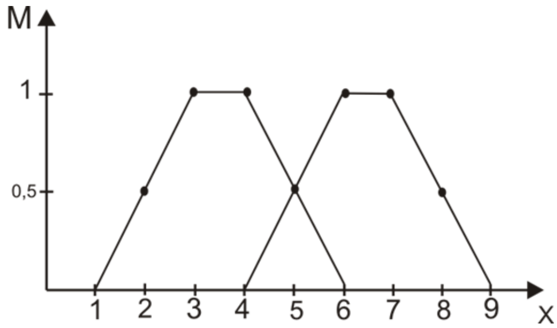
Bulanık kümesi için kardinalite :

|A| = card (A) = (0.3+0.7+1+1+0.3) = 3.3

- Kardinalite ile ilgili özellikler ;
  - |A| + |B| = |A∩B| + |AUB|
  - Örnek;

$$A = \frac{0,5}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,5}{5}$$

$$B = \frac{0,5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0,5}{8}$$



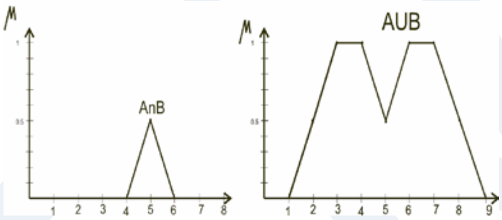
- Kardinalite ile ilgili özellikler ;
  - Örnek (devamı);

  |A| = 0,5 + 1 + 1 + 0,5 =3

  |B| = 0,5 + 1 + 1 + 0,5 =3 → |A| + |B| = 6

$$A \cap B = \frac{0,5}{5}$$

$$A \cup B = \frac{0,5}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,5}{5} + \frac{0,5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0,5}{8}$$



|A∩B| = 0,5 |AUB| = 0,5 + 1 + 1 + 0,5 + 1 + 1 + 0,5 = 5,5

|A∩B| + |AUB| = 0,5 + 5,5 = 6

→ |A| + |B| = |A∩B| + |AUB|

- Kardinalite ile ilgili özellikler ;
  - $|A| + |A'| = |X|$
  - İsbat;
  -

$$|X| = \sum_{x \in X} \mu_X(x) = \sum_{x \in X} 1 \qquad |A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

$$|A'| = \sum_{x \in X} \mu_{A'}(x) = \sum_{x \in X} (1 - \mu_A(x)) = \sum_{x \in X} 1 - \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

$$|A| + |A'| = \sum_{x \in X} \mu_A(x) + \left(\sum_{x \in X} 1 - \sum_{x \in X} \mu_A(x) \right) = \sum_{x \in X} 1$$

$$\Rightarrow \quad |A| + |A'| = |A|$$

- Bulanık kümelerin yüksekliği (height);
  - Bir bulanık kümenin yüksekliği onun en yüksek derecesine eşittir;

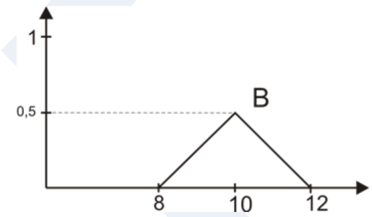
Height (A) = max (m_A(x)) (x∈X)

- Eğer bir bulanık kümenin yüksekliği 1 ise küme normal bir bulanık kümedir. Eğer bir bulanık kümenin yüksekliği 1 in altında ise subnormal bir kümedir.
- Subnormal kümeler genellikle, bulanık sonuç çıkarım işlemler sırasında ortaya çıkar.

- Örnek;

Bulanık kümesi için yükseklik:

Height (A) = 0.5



- Destek (Support) ve Alfa (α) Seviye Kesimler;
  - Bir A bulanık kümesinin desteği üyelik derecesi 0'dan büyük olan elemanlarının kümesidir.

Supp(A) ={ xi∈X | μ_A(xi) >0 }

- **Alfa – Seviye kesim gösterimi, destekten daha geneldir. A bulanık kümesinin α_0 seviyesindeki alfa kesimi A_{α_0} şeklinde gösterilir $\alpha_0 \in [0,1]$ ve üyelik derecesi α_0 'dan küçük** olmayan **elemanların kümesidir;**

$$A_{\alpha_0} = \{x_i \in X \mid \mu_A(x_i) \geq \alpha_0\}$$ şeklinde gösterilir.

- Destek (Support) ve Alfa (α) Seviye Kesimler;
  - Örnek;

$$Genç = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{0,8}{25} + \frac{0,5}{30} + \frac{0,3}{35} + \frac{0,2}{40} + \frac{0,1}{50}$$ bulanık kümesi için:

$$Supp(Genç) = \{10,20,25,30,35,40,50\}$$

$$Genç_{0,5} = \{10,20,25,30\} \qquad Genç_{0,8} = \{10,20,25\}$$

$$Genç_{0,3} = \{10,20,25,30,35\} \qquad Genç_{1} = \{10,20\}$$

- Bulanık Tekillik (Singleton) ;
  - Bir A bulanık kümesi X uzayında tekbir noktaya sahip ve bu noktaya sahip ve bu noktanın üyelik derecesi $\mu_A(x) = 1$ ise, bu bulanık küme bulanık singleton olarak adlandırılır.

- Geçiş (Crossover) noktaları ;
  - Bir A bulanık kümesinin geçiş noktaları üyelik derecesinin 0.5 olduğu noktalardır :

$$Crossover(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 0.5\}$$

- Ayrışma Özelliği (resulation identity) ;
  - α seviye kesim gösteriminden yola çıkılarak, bir bulanık küme farklı değerleri kullanan birçok keskin kümeye ayrışabilir.
  - Orijinal üyelik fonksiyonu bu parçaların birleştirilmesiyle oluşturulabilir.

  - A bulanık kümesindeki elemanların üyelik dereceleri

(α_0, α_1, α_2, ..., α_N) olsun. Ayrışma özelliğine göre A bulanık kümesi aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$A = \alpha_0 * A_{\alpha_0} + \alpha_1 * A_{\alpha_1} + \ldots + \alpha_N * A_{\alpha_N}$$

burada, + işareti bulanık birleşimi (or) ifade eder. Ve $\alpha_i * A_{\alpha_i}$ aşağıda verilen kümeyi ifade eder:

$$\mu_{\alpha_i * A_{\alpha_i}}(x) = \begin{cases} \alpha_i & eger \quad \mu_{A_{\alpha_i}} \geq \alpha_i \\ 0 & diger\ halde \end{cases}$$

- Ayrışma Özelliği (resulation identity) ;
  - Örnek;
  - A= 0.1/1 + 0.2/2 + 0.5/3 + 0.8/4 + 1/5 + 0.8/6 + 0.5/7 + 0.2/8

ise :

$0.1xA_{0.1}$ = 0.1/1 + 0.1/2 + 0.1/3 + 0.1/4 + 0.1/5 + 0.1/6 + 0.1/7 + 0.1/8
$0.2*A_{0.2}$ = 0.2/2 + 0.2/3 + 0.2/4+ 0.2/5 + 0.2/6 + 0.2/7 + 0.2/8
$0.5*A_{0.5}$ = 0.5/3 + 0.5/4 + 0.5/5 + 0.5/6 + 0.5/7
$0.8*A_{0.8}$ = 0.8/4 + 0.8/5 + 0.8/6
$1* A_1$ = 1/5

olur.

- Ayrışma Özelliği (resulation identity) ;
  - Buna göre :

$0.1xA_{0.1} + 0.2*A_{0.2} + 0.5*A_{0.5} + 0.8*A_{0.8} + 1* A_1$ =

0.1/1 + 0.1/2 + 0.1/3 + 0.1/4 + 0.1/5 + 0.1/6 + 0.1/7 + 0.1/8 + 0.2/2 + 0.2/3 + 0.2/4 + 0.2/5 + 0.2/6 + 0.2/7 + 0.2/8 + 0.5/3 + 0.5/4 + 0.5/5 + 0.5/6 + 0.5/7 + 0.8/4 +0.8/5 + 0.8/6 + 1/5

+ işareti bulanık "veya" yı ifade ederse;

0.1/1 + max{0.1,0.2}/2 + max{0.1,0.2,0.5}/3 + max{0.1, 0.2,0.5,0.8}/4 + max{0.1,0.2,0.5,0.8,1}/5 + max{0.1,0.2,0.5,0.8}/6 + max{0.1,0.2,0.5}/7 + max{0.1,0.2}/8

= 0.1/1 + 0.2/2 + 0.5/3 + 0.8/4 + 1/5 + 0.8/6 + 0.5/7 + 0.2/8 = A

Kaynakça

- Dr. F. Temurtaş Ders Notları