Kontrol Sistemleri Tasarımı

Kök Yer Eğrileri ile Tasarım

Prof.Dr. Galip Cansever

Kök Yer Eğrisinden Kazanç'ın Belirlenmesi

Kök yer eğrisi K'nın pozitif değerleri için $$1 + KG(s) = 0$$

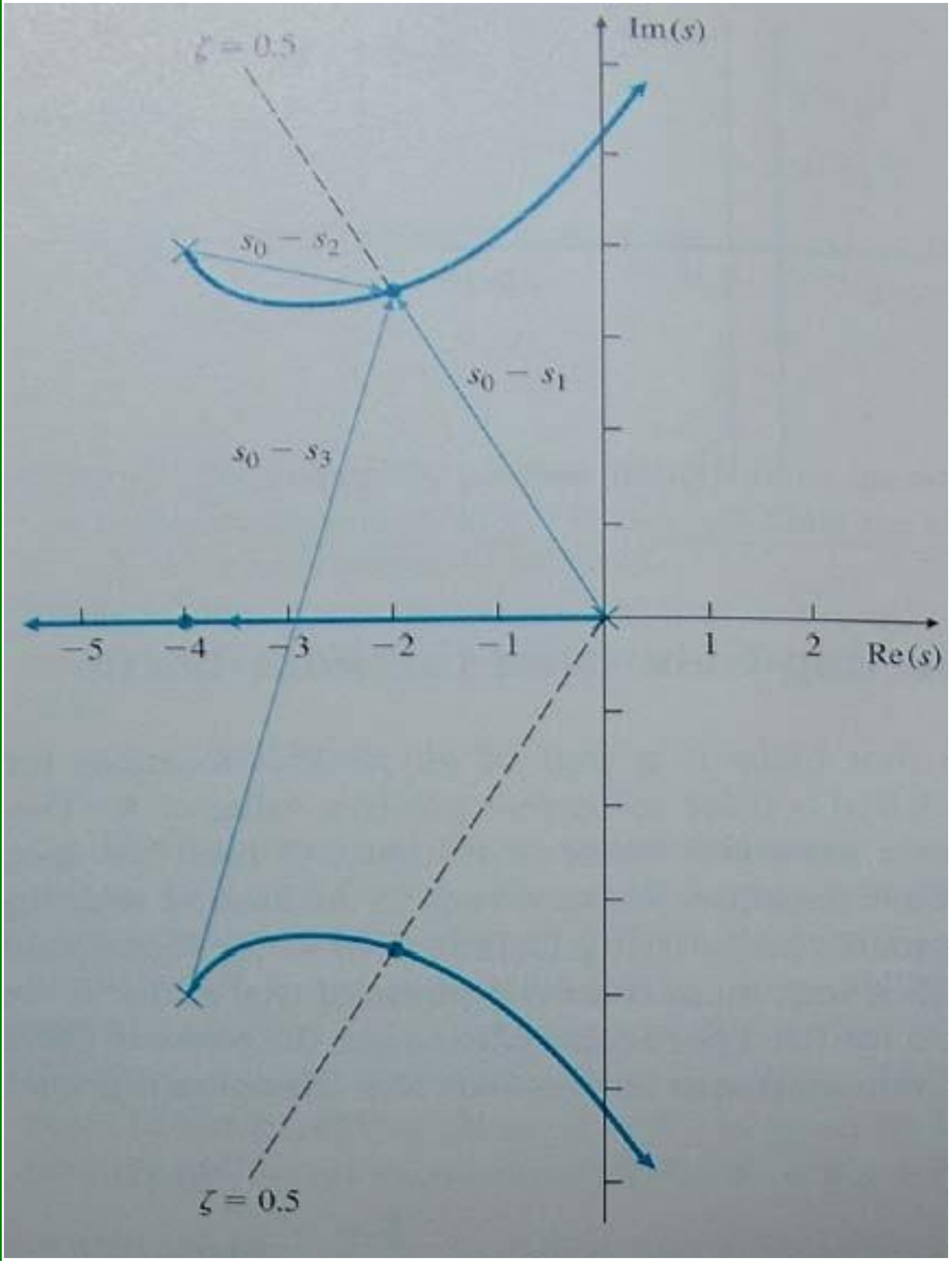
- denkleminin muhtemel köklerini gösteren eğridir.

- Tasarımın amacı istediğimiz statik ve dinamik cevabı elde edebileceğimiz **K**'yı belirleyebilmek.

- Kök yer eğrisindeki s değerleri için G'nin açısı 180 derecedir, ve

büyüklüğüde $K = \frac{1}{G(s)}$ dan $K = \frac{1}{|G|}$ olur.

$$1 + \frac{K}{s[(s+4)^2 + 16]} = 0$$ Örneğini ele alalım.



$$1+\frac{K}{s[(s+4)^2+16]}=0$$

$$\zeta = 0.5$$

Seçecek olursak K'nın değeri nedir?

$$K=-\frac{1}{|G(s_0)|}$$

(s_0 kesim noktasının koordinatı)

$s_0 - s_1$, $s_0 - s_2$, $s_0 - s_3$ vektörleri

G(s)'nin kutuplarından s_0 noktasına olan uzaklıklardır.

Cebrik olarak;

$$G(s_0) = \frac{1}{s_0(s_0 - s_2)(s_0 - s_3)}$$ (s_1=0)

$$K = \frac{1}{|G|} = |s_0||s_0 - s_2||s_0 - s_3|$$

Basitçe ölçekli çizdiğimizde bu uzunlukları ölçüp çarparak K'yı bulabiliriz.

$|s_0| \cong 4$

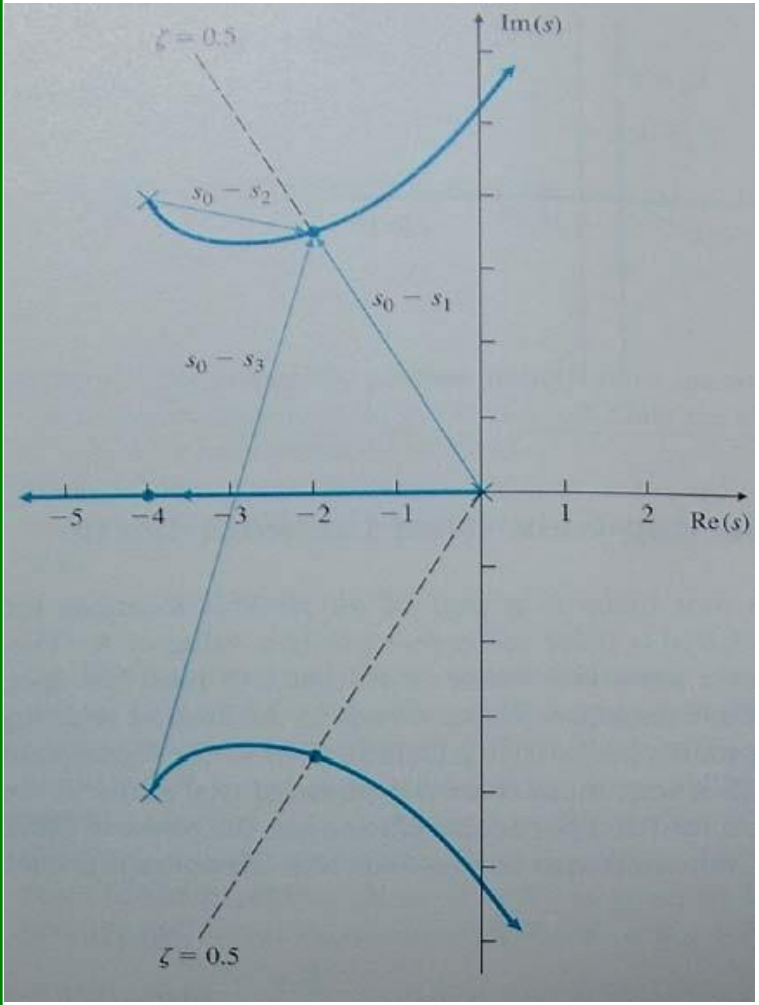
$|s_0 - s_2| \cong 2.1$

$|s_0 - s_3| \cong 7.7$

$$K = (4)(2,1)(7,7) = 65$$

Eğer K'yı 65'e set edersek $\zeta = 0.5$

sönümlü cevabı elde edebiliriz



Kök yer eğrisinin üçüncü kolu reel eksenin negatif olduğu bölge üzerindedir.

m < n-1 ise köklerin toplamı K dan bağımsızdır (toplam K ile değişmez)

Dolayısıyla bilinmeyen 3. kutup köklerin toplamını değiştirmeyecek şekilde sola kaymalı. Kök yer eğrisinden $\mathbf{s_0=-2+3.4j}$ olarak tahmin ediyoruz.

Başlangıç noktası **s=-4+4j** olduğu için, kök **2** birim sağa doğru kayar. Eşlenik kök aynı miktarda kayar dolayısıyla bilinmeyen kök başlangıç noktası **s=0** dan **2+2=4** birim sola kayar. Doalyısıyla **3.** kutbun yeri **s=-4** noktasıdır.

Kontrolör iki sebeple kullanılır;

- Geçici hal cevabını düzenlemek

  Faz İlerietici Kompanzasyon

  PD Kontrol

- Kararlı hal hatasını elimine etmek

  Faz Gecikmeli Kontrol

  PI Kontrol

Eğer Geçici hal cevabı ve Kararlı hal hatası birlikte düzenlenmek istenirse;

Faz İlerletici-Gecikmeli Kontrolör

PID Kontrolör

Dinamik Kompanzasyon

Kazanç ayarı ile sistem dinamikleri doğası nedeniyle istenilen tasarım yapılamıyorsa proses dinamiklerine kompanzasyon yapılması gerekir.

En basit ve etkili iki kompanzasyon yöntemi:

- **Lead Compensation (Faz İlerletici Kompanzasyon)**
- **Lag Compensation (Faz Gecikmeli Kompanzasyon)**

Lead Compensation (Faz İlerletici Kompanzasyon):

Yükselme zamanını ve aşım miktarını düşürür. Kabaca türev kontrolöre benzer.

Lag Compensation (Faz Gecikmeli Kompanzasyon):

Kararlı hal cevabını hassalığını düzenler. Kabaca integral kontrolöre benzer.

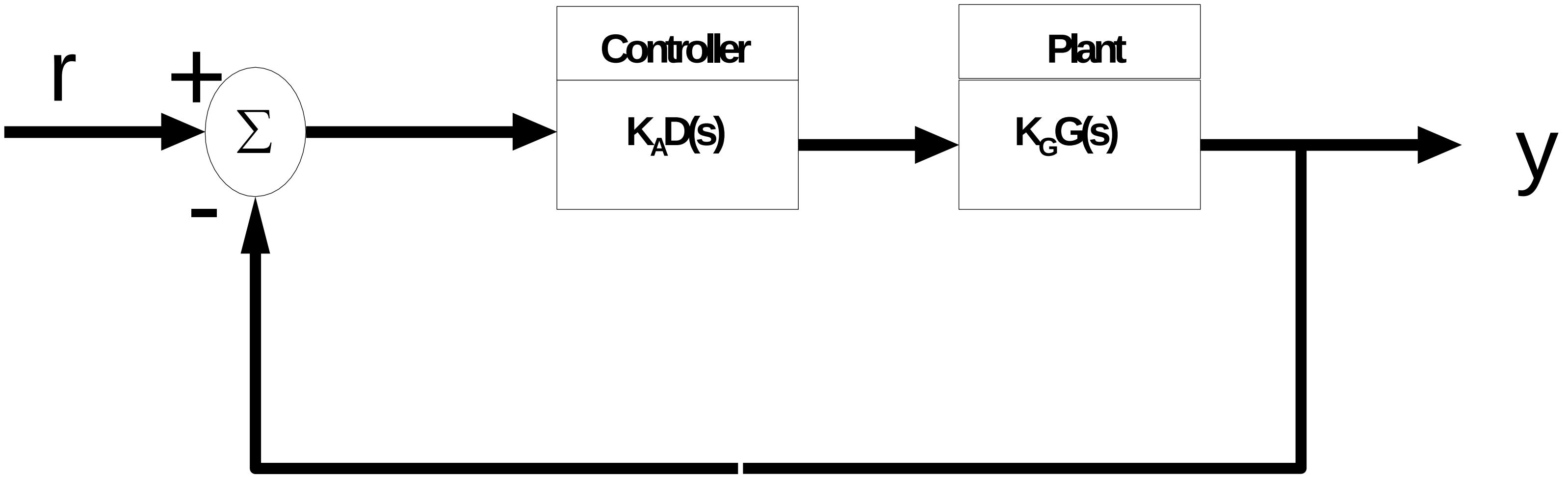
Kompanzasyon transfer fonksiyonu:

$$D(s) = \frac{s + z}{s + p}$$

$z < p$ $\longrightarrow$ Faz İlerletici Kompanzasyon

$z > p$ $\longrightarrow$ Faz Gecikmeli Kompanzasyon

Kompanzasyon genelde plant ile seri konfigürasyonda uygulanır.



Transfer Fonsiyonu:

$$1 + KD(s)G(s) = 0 \qquad (K = K_A K_G)$$

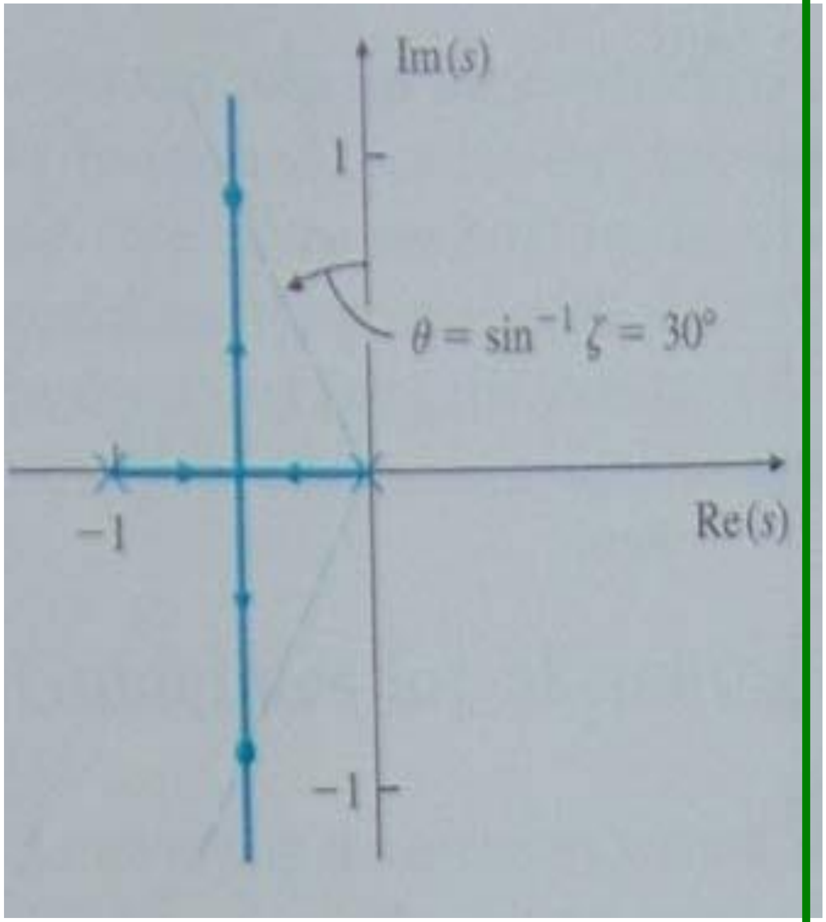
Lead Compensation (Faz İlerletici Kompanzasyon)

Faz ilerletici kompanzasyonun kakrarlı hale getirme etkisi incelemek için basitleştirilmiş **D(s)= s+z** ‘yi göz önüne alalım.

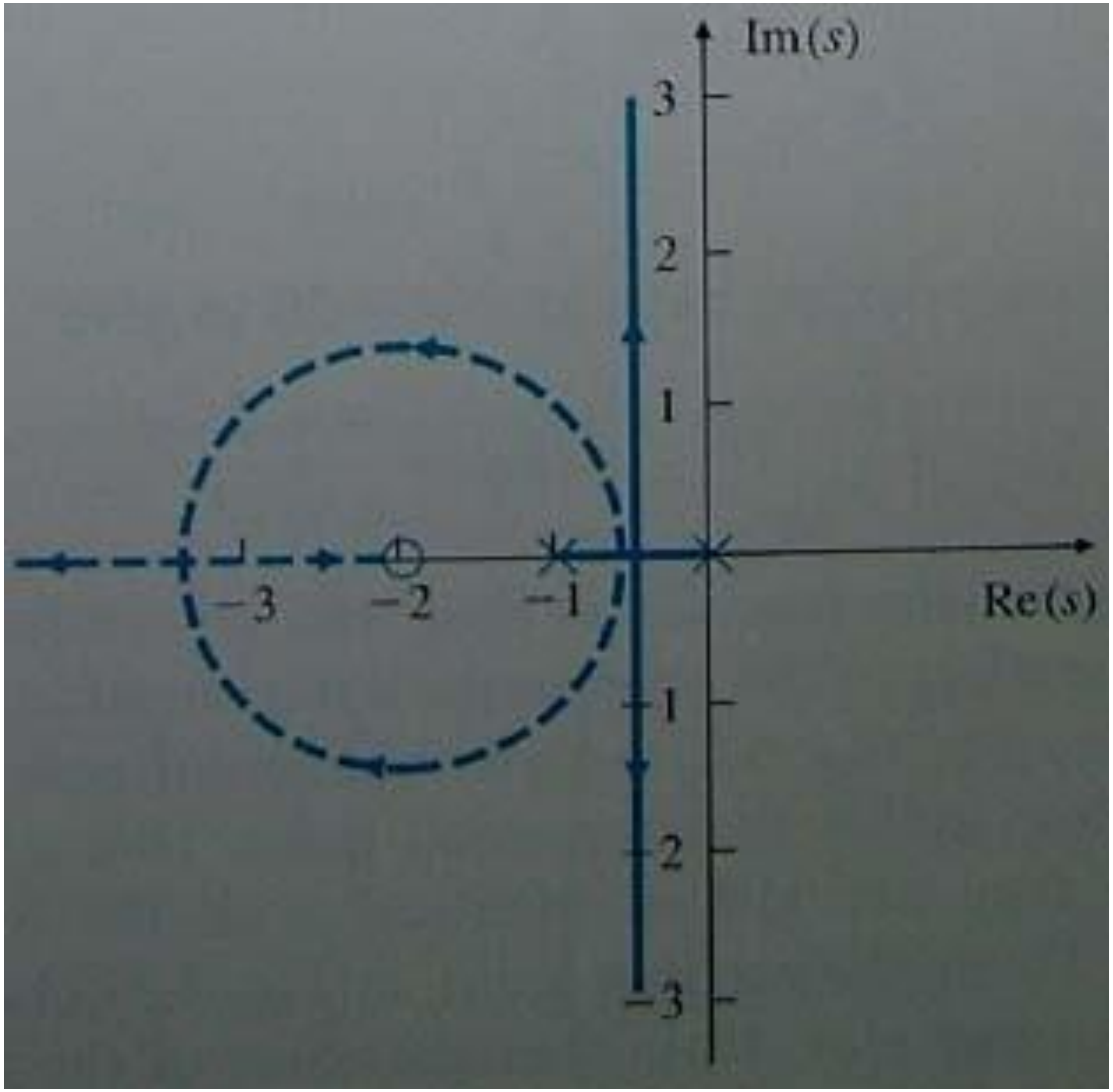
Sistemimizin transfer fonksiyonu:

$$KG(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

Kök yer eğrisi:



D(s)= s+2 için yeni kök yer eğrisi (D(s)G(s))



Yeniden düzenlenmiş kök yer eğrisi kesikli çizgi lerden oluşan çemberdir.

Dikkat edilecek olursa sisteme eklenen sıfır(-2) eğriyi sola bir başka deyişle daha kararlı bölgeye kaydırmıştır.

Kompanzasyon öncesinde eğer bizim cevabımız **w_n=2** olması gerekseydi. Sistemin sönüm katsayısı çok düşük olacaktı dolayısıyla yüksek aşım oluşacaktı. Sisteme sıfır ekleyerek **w_n=2**'yi sönümün **0.5** den büyük değerlerinde elde etmemiz mümkün.

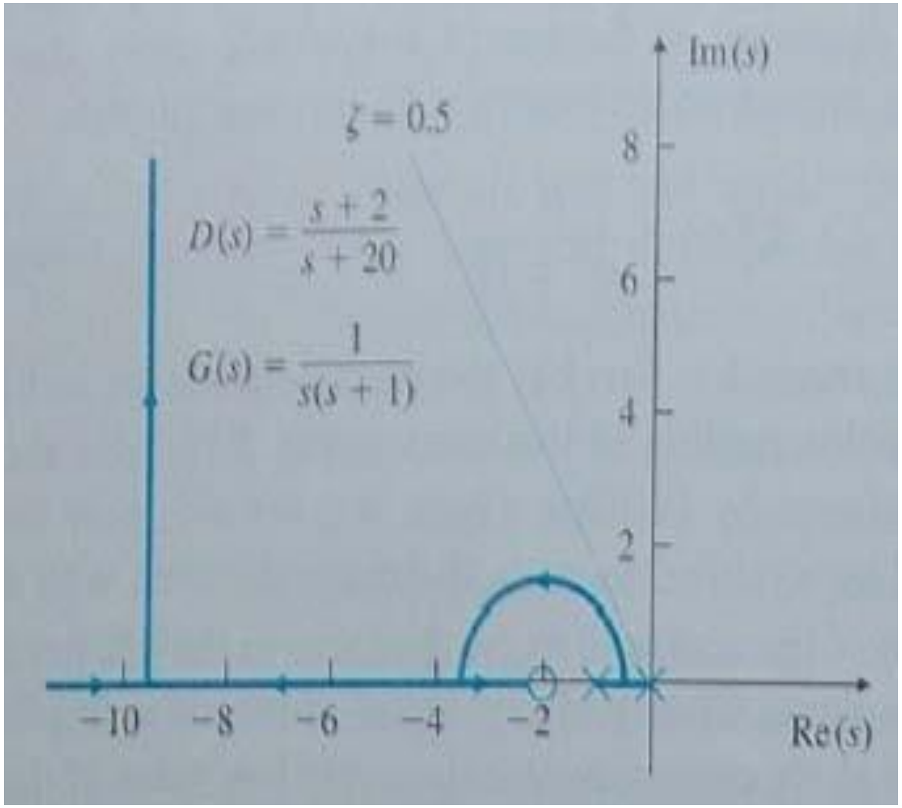
Dolayısıyla **D(s)=s+2** ile sistemi kompanze etmiş olduk.

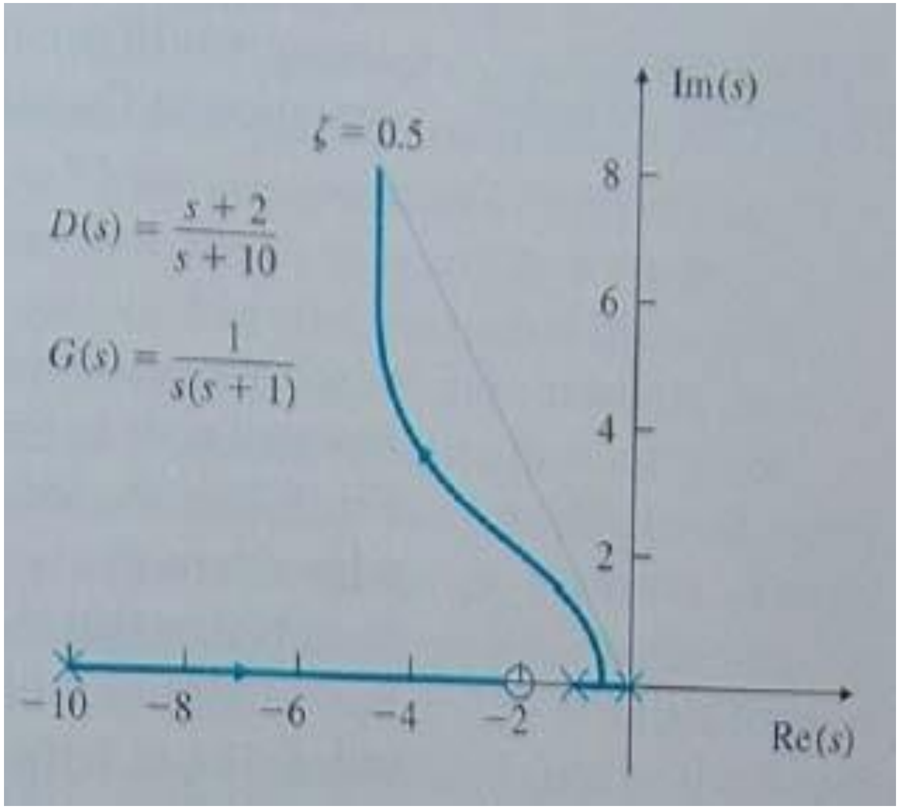
D(s)'in seçimindeki problem: **D(s)** sadece sıfır dan oluştuğundan fiziksel gerçekleme fark alıcı içerir. Fark alıcıda algılayıcı sinyalindeki yüksek frekanslı gürültüleri katlar.

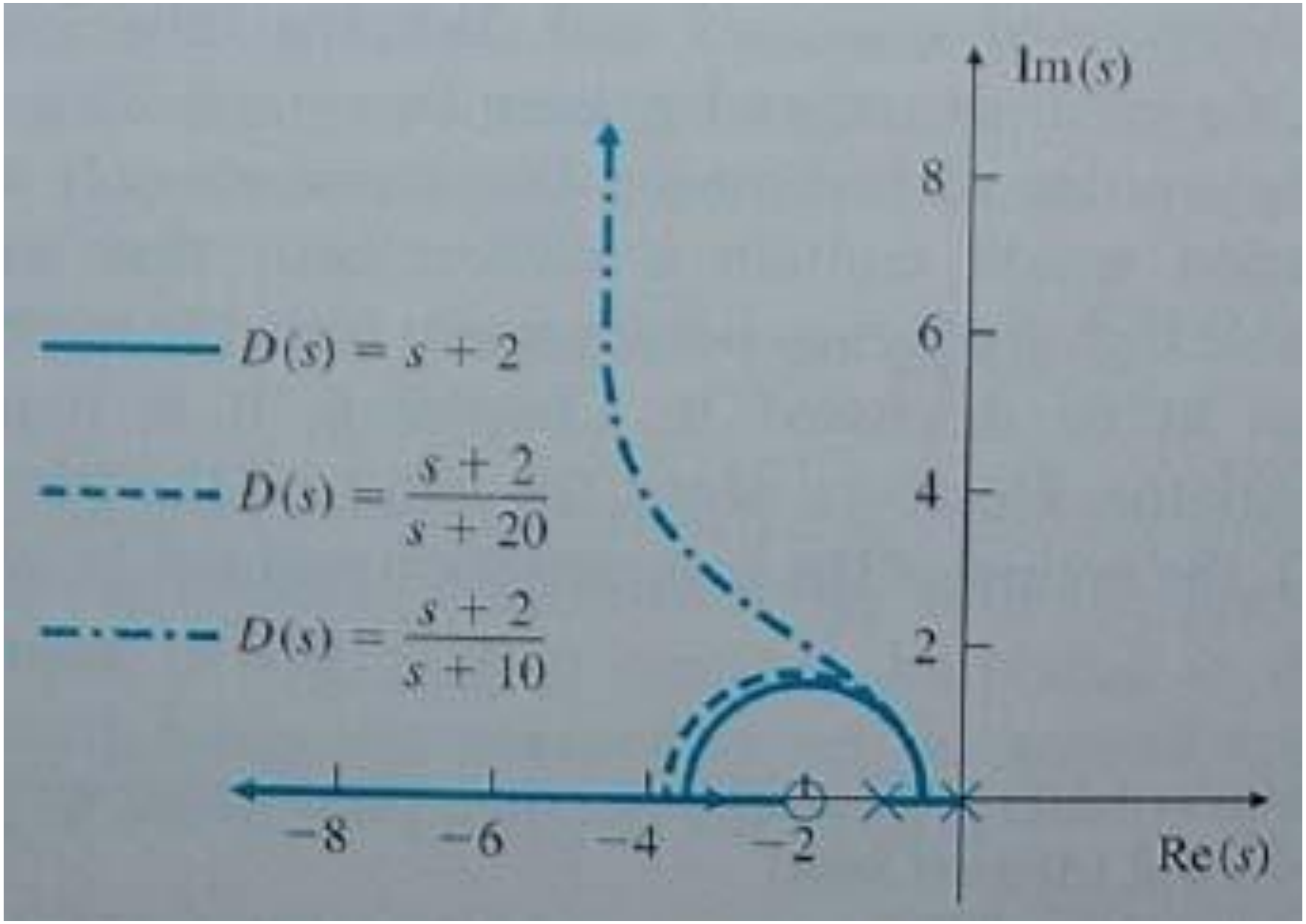
D(s)’e kutup ekleyerek kompanzasyonu inceleyelim:

$$D(s)=\frac{s+2}{s+20}$$

$$D(s)=\frac{s+2}{s+10}$$







s=-2 deki köke ulaşmadan (küçük kazanç değerlerinde) önce üç eğri birbirinin aynısıdır.

$$D(s) = \frac{s+z}{s+p}$$

•**z** sistemin yükselme zamanı ve yerleş zaman gereksinimlerini belirleyen kapalı göngü doğal frekansı (w_n)'nin yakınlarına yerleştirilir.

•**p z'**nin **3** ile **20** katı arasında seçilir.

• Kutbun seçimi gürültünün ortadan kaldırılması ve kompanzasyonun etkililiği arasında bir uzlaşmadır.

•Eğer kutup sıfıra yakın seçilirse eğri kompaze edilmemiş haline benzer ve sıfır işlevini görmemiş olur.

•Ayrıca eğer kutup çok solda seçilirse D(s)'in çıkışındaki gürültü çok büyük olacaktır. Sistemdeki motor veya hareketlendirici bu gürültü kaybı ile aşırı ısınacaktır.

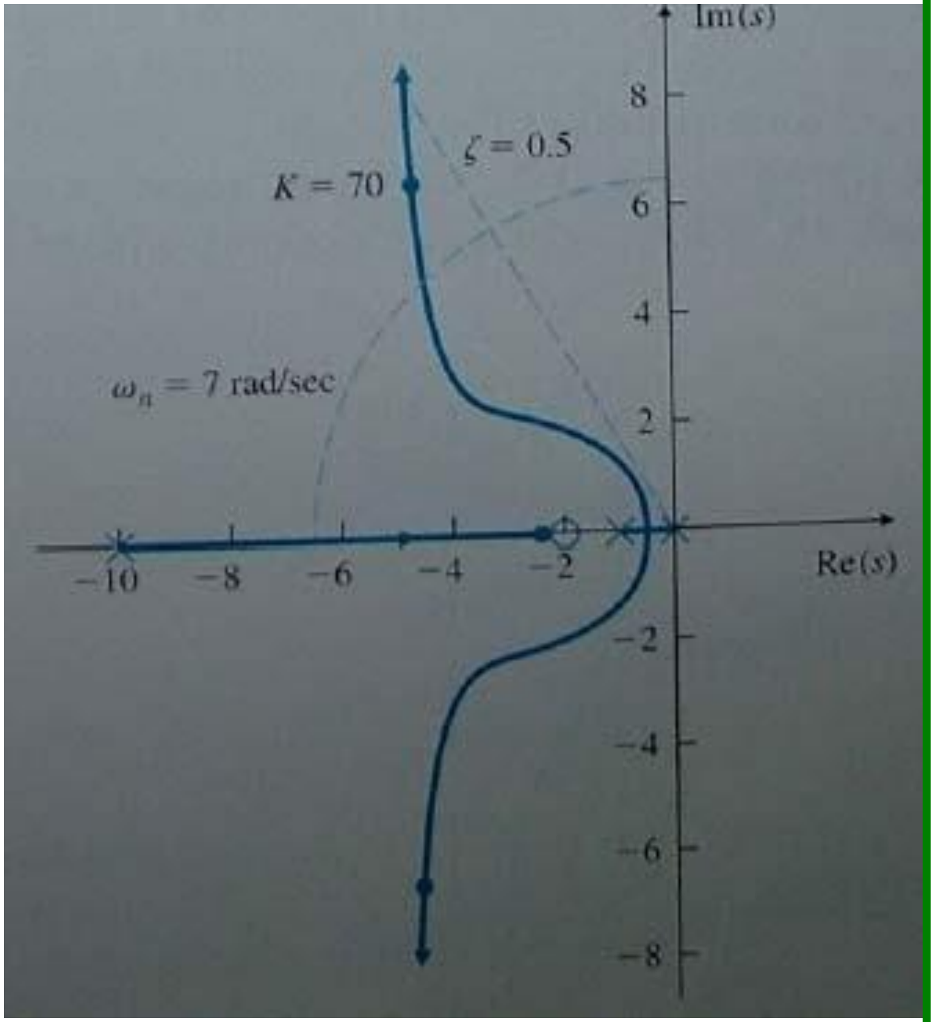
Örnek: $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$ İçin kapalı döngü sönümü $\zeta > 0.5$

Ve doğal frekansı $\omega_n > 7$ Olacak kompansatörü tasarlayınız

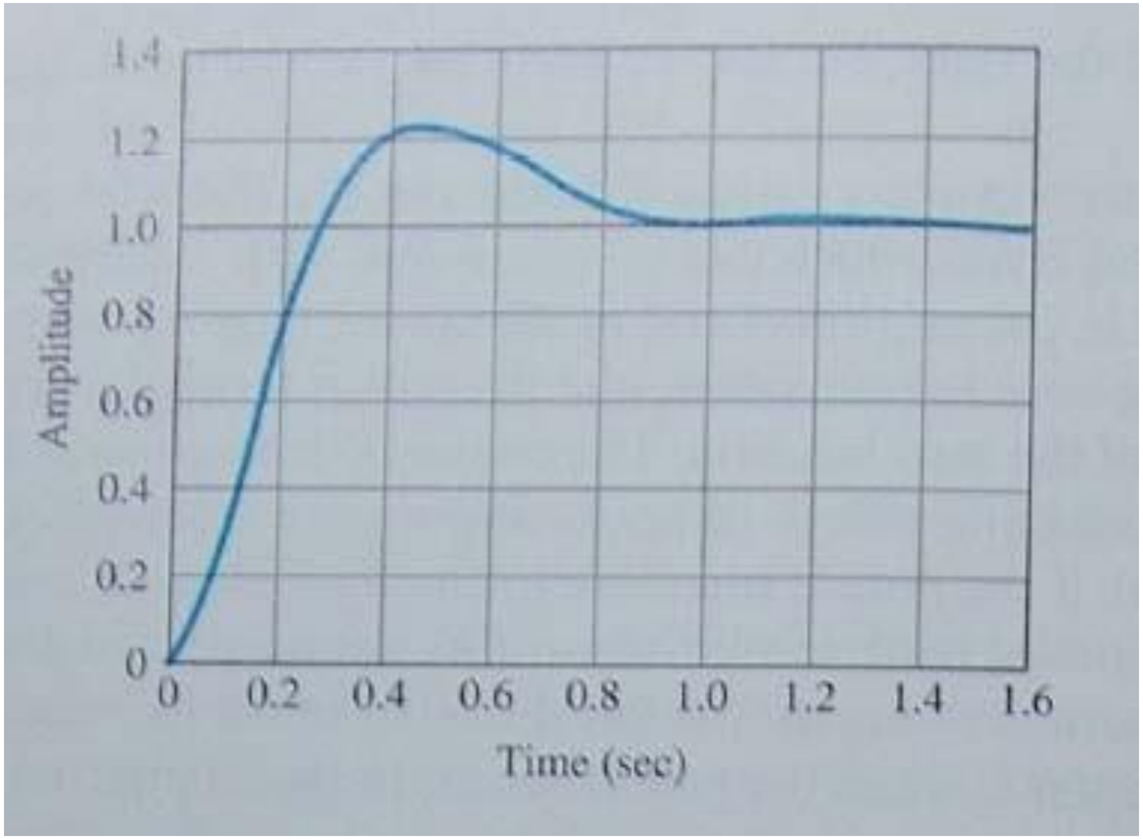
$D(s)=\dfrac{s+2}{s+10}$ deneyelim.

K'nın yüksek değerleri için (**K=70**)

$$\zeta = 0.56 \quad \omega_n = 7.7\, rad/s$$



Birim basamak cevabı:



Aşım miktarı %12

Arzu edilen kapalı döngü kök yerini önceden seçersek, faz ilerletici kompansatör sıfır ve kutuplarını belirleyebiliriz.

İleri faz kompansatörünün parametrelerinden birini seçip diğerini de bu seçime göre hesaplarız.

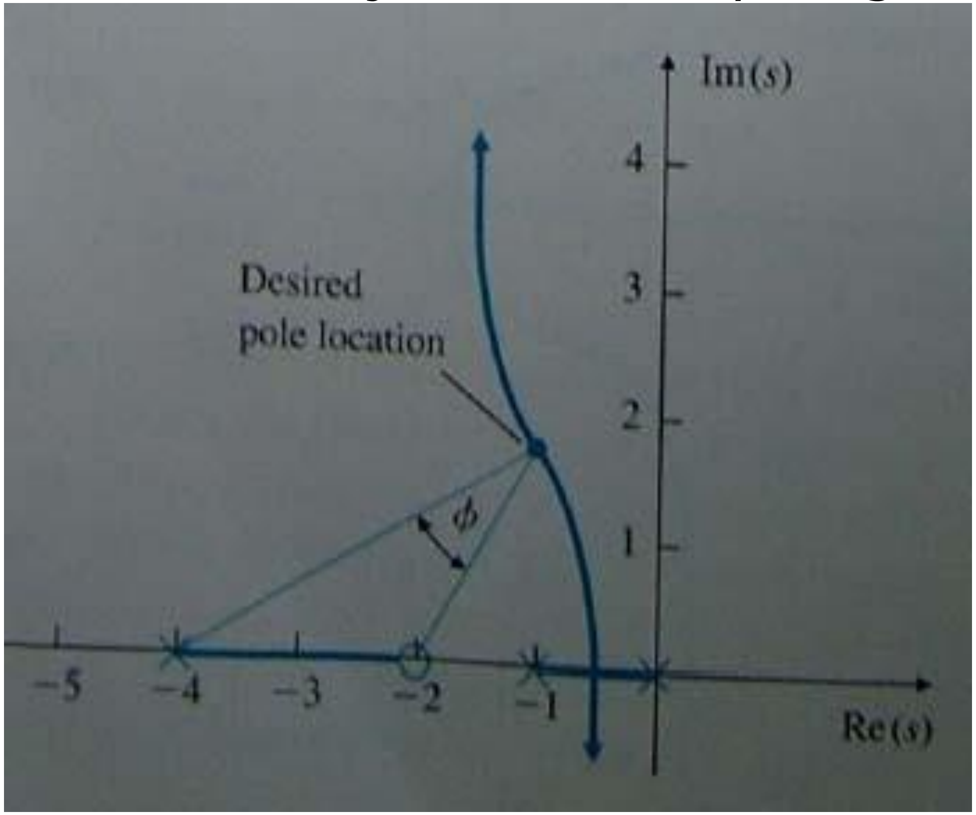
Örneğin, kök yer eğrimizin $\omega_n = 2$ $\zeta = 0.5$

Değerlerine karşılık gelen **s=-1+√3j** noktasından geçmesini

istersek.

Arzu edilen noktada kapalı döngü siteminin açısı **-210** derece olduğundan **D(s)** kompansatöründen gelecek olan net açı **+30⁰** olmalıdır.

Eğer rastgele sıfırı s=-2 noktasına koyacak olursak, net açının $+30^0$ olabilmesi için kompasatör kutbunun s=-4 noktasına yerleştirilmesi gerekir, ve böylece $s=-1+\sqrt{3}j$ noktası kök yer eğrisi üzerinde olur.



D(s) kompansatöründen gelecek olan net açı **$+30^0$** olması için başka kombinasyonlar da olabilir. **Açı koşulu kompansatörün sıfırı ve kutbu arasındaki ilişkiyi belirler.**

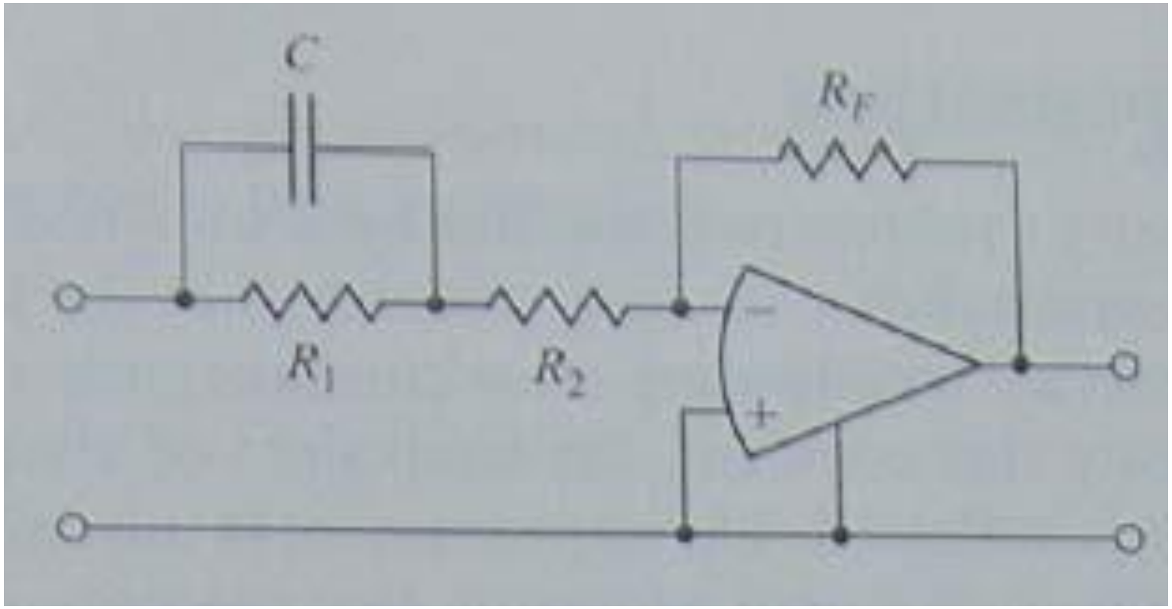
İsminden anlaşılacağı üzere faz ilerletici kompansatör, transfer fonksiyonunun sinüsoidal faz açısını ilerletir.

s=jw için;

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p}\right)$$

Eğer **z<p** ise **Φ** açısı pozitiftir ki adında anlaşılacağı üzere açıyı ilerletir.

Faz ilerletici kompansatör çok farklı şekillerde gerçeklenebilir. Anolog elektronik te OP-AMP'lar kullanılır.



Transfer Fonsiyonu: $$D(s) = -K_D \frac{T_1 s + 1}{\alpha T_1 s + 1}$$

$$K_D = \frac{R_F}{R_1 + R_2} = 1 \ \ eger \qquad R_F = R_1 + R_2$$

$$T_1 = R_1 C \qquad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

sıfır $\mathbf{z=-1/T_1}$ ve kutup p=-1/ T_1 dir

sıfır ile kutbu **3** ile **20** kat arasında ayırır.

Lag Compensation (Faz Gecikmeli Kompanzasyon)

•İstenilen dinamik cevap ileri faz kaydırıcı ile elde edildiğinde alçak frekans kazancının(kararlı hal katası katsayısı örneğin $\mathbf{K_v}$) küçük olduğunu keşfedebiliriz.

•Bu kazancı yükseltmek için sıfır frekansa yakın bi diğer integrasyon yapılabilir.

•Bu iyileştirme **s=0** kutbu yakınlarında gerçekleşti, genelde ileri faz kompansatörü tarafından belirlenen tüm sistem dinamik cevabı ile karışmaması açısından bir de sıfır eklenir, buna **sıfır-kutup** çifti denir.

•Bizim istediğimiz **s=0** yakınlarında $\mathbf{K_v}$**'yı** yeterince büyük yapacak bir **D(s)** ifadesi elde etmek ki bu dinamik cevabın belirlendiği yüksek frekanslarda etkisiz elaman olacak. (Bir başka deyişle geçici rejim cevabını değiştirmeyecek)

$$D(s)=\frac{s+z}{s+p} \qquad \textbf{z>p}$$

z ve **p'** nin değerleri küçük (**z=0.1** ve **p=0.01**) ama istenilen kararlı hal kazancına göre **D(0)=z/p= 3-10** olur.

z>p olduğu için **Φ** açısı negatiftir ve karşılığı faz gecikmesidir ve bu kompanzasyona Faz Gecikmeli Kompansazyon adı verilir.

Örnek:

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

için Faz İleri Kompansatörümüz $D(s)=\dfrac{s+2}{s+20}$ olsun

$\zeta=0.707$ olabilmesi için daha önce bahsettiğimiz yöntem ile **K** yı **31** olarak hesaplarız.

Bu durumda hız katsayısı:

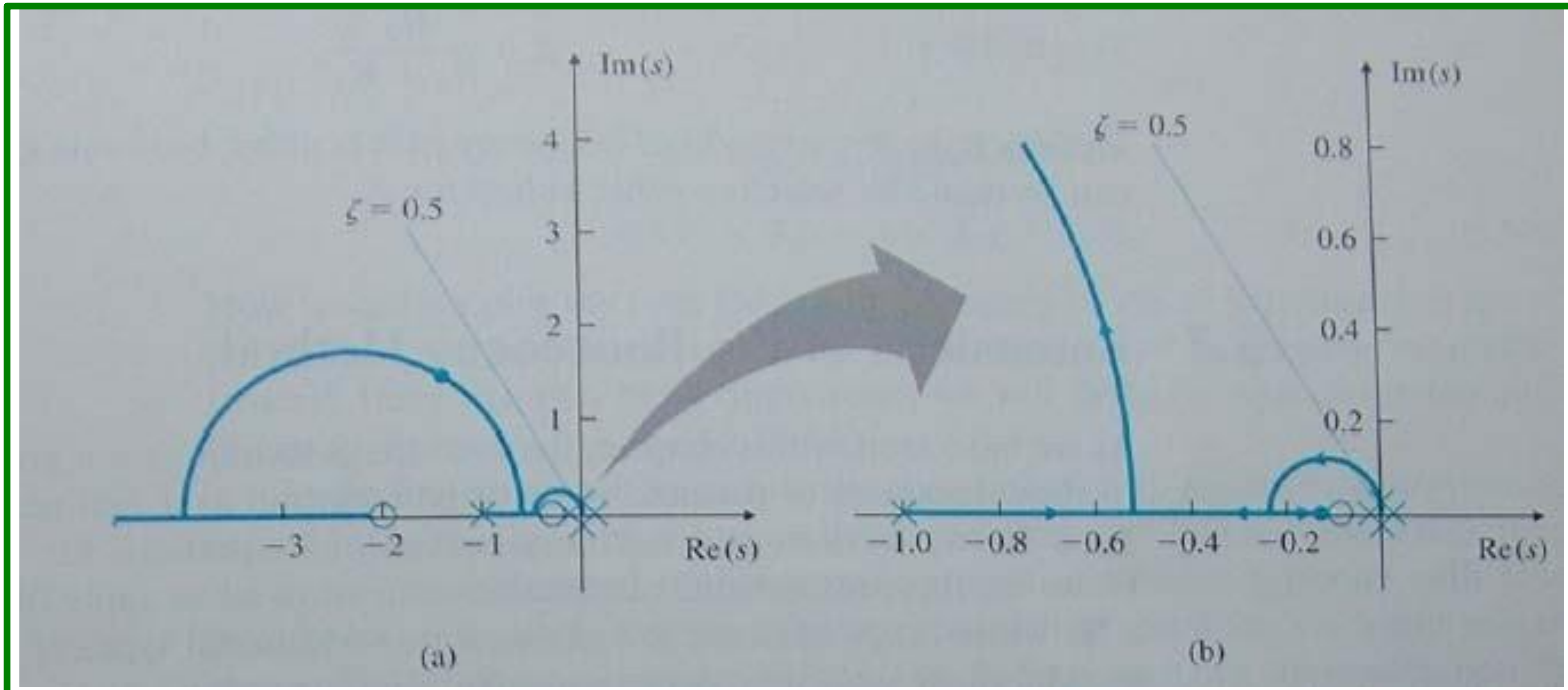
$$K_v = \lim_{s \to 0} sKDG$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s(31)\frac{s+2}{s+20}\frac{1}{s+1} = \frac{31}{10} = 3.1$$

Bu değer karalı hal hatsını iyileştirmek için yeterli değil.

Hız katsayısı $\mathbf{K_v}$'yi **10** kat artıracak, faz geciktirmeli kompansatörü ekleyelim (**z/p=10**)

$$D_2(s) = \frac{s+0.1}{s+0.01}$$



Şekil a’dan göreceğimiz üzere baskın kökler s=-1.35±1.35j.

Şekil b’de büyütülmüş hali görünen küçük çember faz gecikmeli kompansatörden dolayıdır.

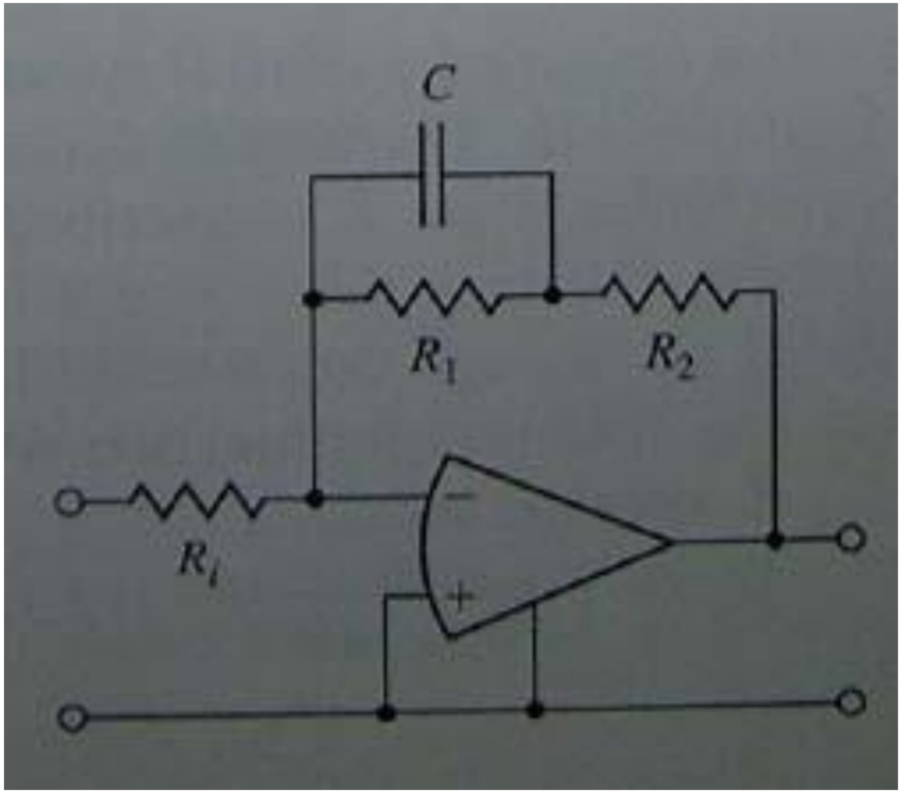
Dikkat edilecek olursa kapalı döngü sistem kökü faz gecikmeli kompansatörün sıfırı s=-0.1 ±0jye çok yakındır.

Bu kök çok yavaş düşen geçici hal durumuna karşılık gelir. Düşme çok yavaş olacağından yerleşme zamanını ciddi derecede etkiler.

Bu etki yüzünden sıfır-kutup çiftini baskın köklerin yerini çok kaydırmamak kaydıyla mümkün olduğunca yüksek frekansa yerleştirmek önemlidir.

Bir diğer önemli nokta, fiziksel sistem bozucu etkiden hataya olan transfer fonksiyonu sıfıra sahip olmayacak ve böylece bozucu geçici rejimler faz gecikmeli kompansatör yüzünden uzun sürebilir.

Faz gecikmeli kompansatör çok farklı şekillerde gerçeklenebilir. Anolog elektronik te OP-AMP’lar kullanılır.



Transfer Fonsiyonu:

$$D(s) = -\frac{R_2}{R_i}\frac{1}{\beta}\frac{\beta Ts+1}{Ts+1}$$

$$T = R_1 C$$

$$\beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Genelde $\mathbf{R_i = R_2}$ dolayısıyla yüksek frekans kazancı **1** dir, fakat $\mathbf{R_i}$ ayarlanak kazanç istenile değere oturtulur.

Gecikme

Kontrol sistemlerinde **gecikme** çok sıklıkla görünür.

- Prosesin kendi doğasından
- Algılayıcadan gelen sinyalden

Kimyasal proseslerde malzemenin borulardan geçmesi ve uzay araçlarının yüksekliklerinin belirlenmesinde ışık hızının sınırlı olmasından dolayı ölçüm bilgisinin dünyaya geç ulaşması gibi.

Ayrıca dijital kontrol sistemlerinde bilgisayarın cycle zamanı ve bilginin ayrık olarak işlenmesinden dolayı olan gecikme.

Kontrol sistemlerinde gecikme her zaman sistemin kararlılığını negatif yönde etkiler. Dolayısıyla gecikmenin etkisinin incelenmesi önemlidir.

Bu analizde kök yer eğrisinin nasıl kullanılabileceğini inceleyeceğiz.

Örnek: Bir eşanjörün sıcaklık kontrol sistemini ele alalım.

Transfer fonksiyonu :

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{(10s+1)(60s+1)}$$

e^{-5s} Terimi gecikmeyi ifade eder.

Kök yer eğrisi denklemi :

$$1 + KG(s) = 0$$

$$1 + K\frac{e^{-5s}}{(10s+1)(60s+1)}$$

$$600s^2 + 70s + Ke^{-5s} = 0$$

$$600s^2 + 70s + Ke^{-5s} = 0$$

Polinom olmadığı için kök yer eğrisini nasıl çizeceğiz?

İki yöntem:

I. Yaklaştırma

II. Açı koşulunun direk uygulanması

Birinci metod da kesirli olmayan üstel ifadeyi kesirli yaklaşımını bulmaya çalışırız. Genelde düşük frekanslar ile ilgilendiğimiz için **s=0** ve yakınlarındaki yaklaşım yeterli olacaktır.

İlk olarak üstel ifadenin kesirli yaklaşımı belirlenir ve sonuçta gecikmeyi karşılık gelecek **s** için herhangi bir istenen gecikme için $\mathbf{T_d s}$ dönüşümü uygulanır.

Bu tür üstel ifadelerin kesirli hale dönüşümlerinde **Pade** yaklaşımı kullanılır ve p payın q da paydanın derecesidir

$$e^{-s} = \frac{b_0 s + b_1}{a_0 s + 1}$$ Olarak yaklaştıralım ve $$e^{-s} - \frac{b_0 s + b_1}{a_0 s + 1} = \varepsilon$$

hatası küçük olsun.

Hem kesirli hemde üstel ifadeyi McLauren serisine açalım ve mümkün olduğu kadar başlangıç koşullarını denkleştirelim.

$$e^{-s} = 1 - s + \frac{s^2}{2!} - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!} - .....,$$

$$\frac{b_0 s + b_1}{a_0 s + 1} = b_1 + (b_0 - a_0 b_1)s - a_0(b_0 - a_0 b_1)s^2 + a_0^2(b_0 - a_0 b_1)s^3 + ...$$

İlk dört terimin katsayılarını eşitleyecek olursak:

$$b_1 = 1 \qquad b_0 - a_0 b_1 = -1$$

$$a_0(b_0 - a_0 b_1) = \frac{1}{2} \qquad a_0^2(b_0 - a_0 b_1) = -\frac{1}{6}$$

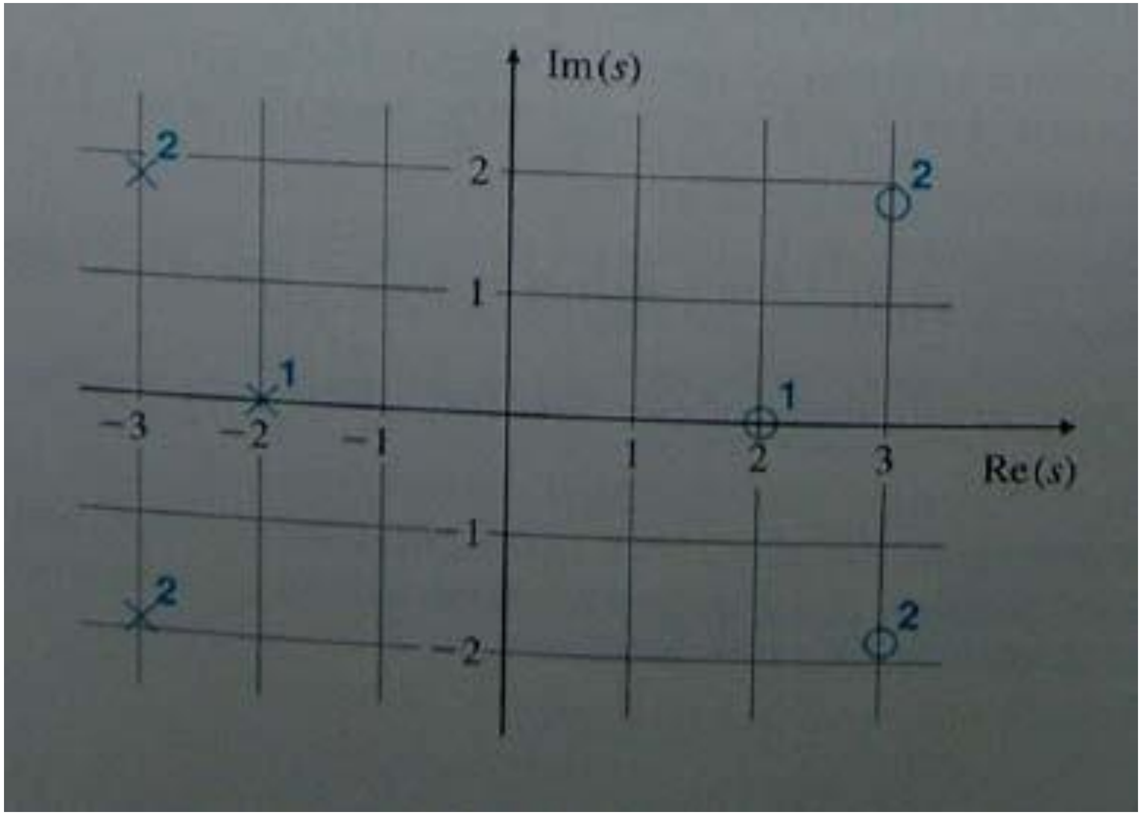
s yerine **T$_d$s** yazıp ilk üç katsayıyı denklediğimizde **Pade** yaklaşımına göre (p=q=1)

$$e^{-T_d s} \cong \frac{1-\frac{T_d s}{2}}{1+\frac{T_d s}{2}}$$

Yazılır.

Eğer p=q=2 varsayılırsa 5 parametremiz olacak ve daha iyi bir yaklaşım yapabileceğiz,

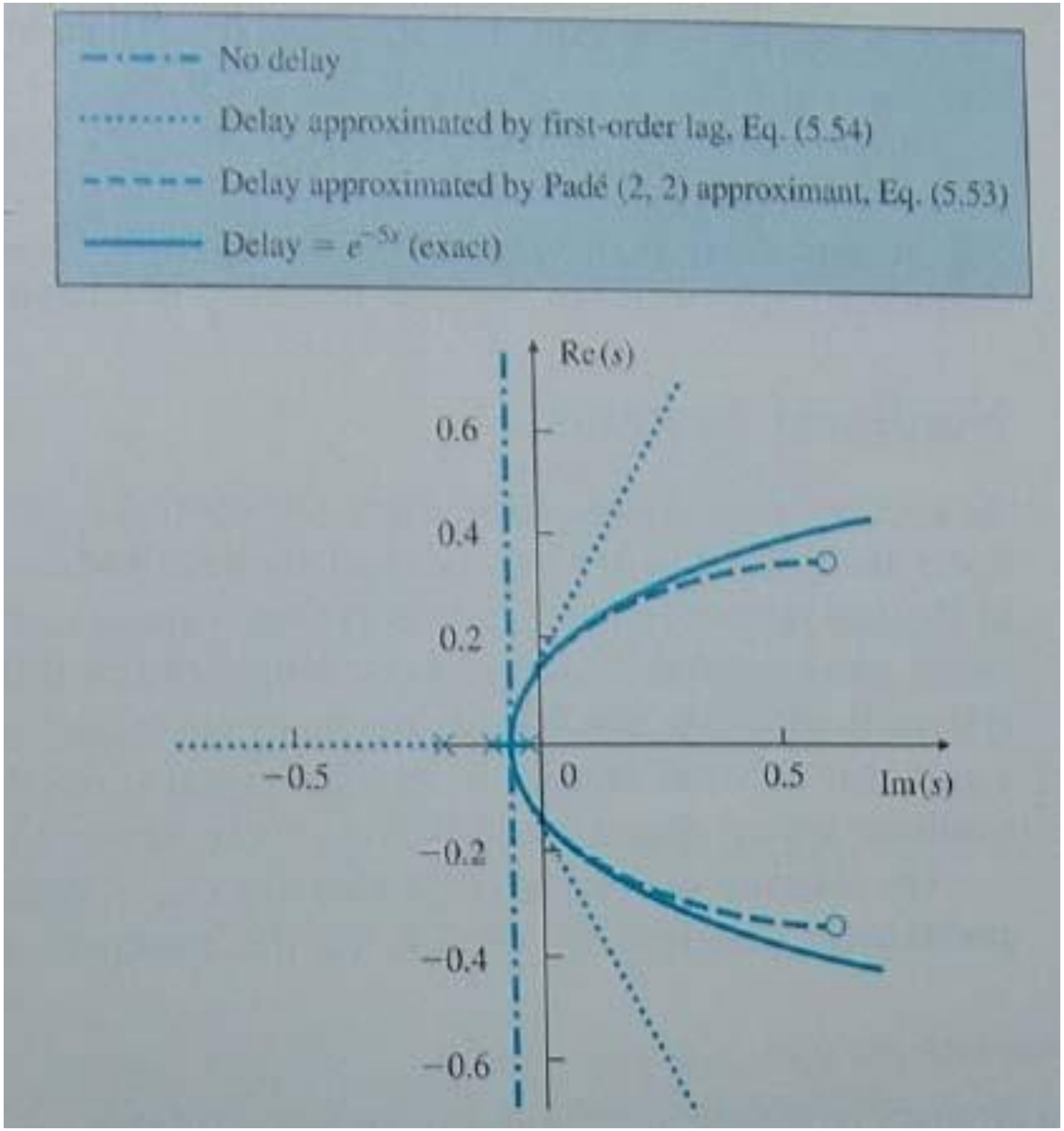
$$e^{-T_d s} \cong \frac{1-\frac{T_d s}{2}+\frac{(T_d s)^2}{12}}{1+\frac{T_d s}{2}+\frac{(T_d s)^2}{12}}$$



Çoğu uygulamalarda en basit yaklaşım p=0, q=1 kabul edilebilir hassasiyettedir.

$$e^{-T_d s} \cong \frac{1}{1+T_d s}$$

Gecikmenin etkisi ve dört değişik yaklaşım



Dikkat edilecek olursa düşük kazançlarda ve eğrinin imajiner ekseni kestiği noktaya kadar yaklaşım eğrileri gerçek eğriye çok yakın.

Pade eğrisi daha ileri noktlara kadar yeterli hassasiyette gerçeği takip etmekte.

Ayrıca görüldüğü üzere gecikmenin karasızlık etkisi vardır ve istenilen cevap hızını yavaşlatır

2. Metod olan açı koşulun direk uygulanması ile gecikmeli sistemin kök yer eğrisi çizilebilir.

$$\angle G(s) = 180^0 + 360^0 l$$

Transfer fonksiyonu :

$$G(s) = e^{-\lambda s}\bar{G}(s)$$

olsun.

$s = \lambda + j\omega$ için

$$\angle G(s) = \angle \bar{G}(s) - \angle \lambda\omega$$

Dolayısıyla,

$$\angle \bar{G}(s) = 180^0 + \lambda\omega + 360^0 l$$

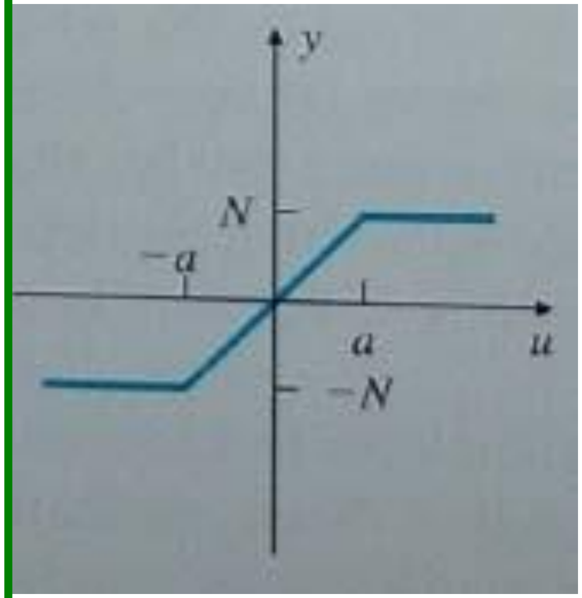
Kök yer eğrisini çizebilmek için frekansı sabitleriz. Ve s düzleminde yatay çizgide noktayı bulana kadar devam edilir. Sonra frekans değeri artırılır ve tekrarlanır. Benzer şekilde kopma açıları **$\lambda\omega$** ile düzenlenir. **ω** kopmanın hesaplandığı kökün imajiner kısmıdır.

Lineer Olmayan Sistemler

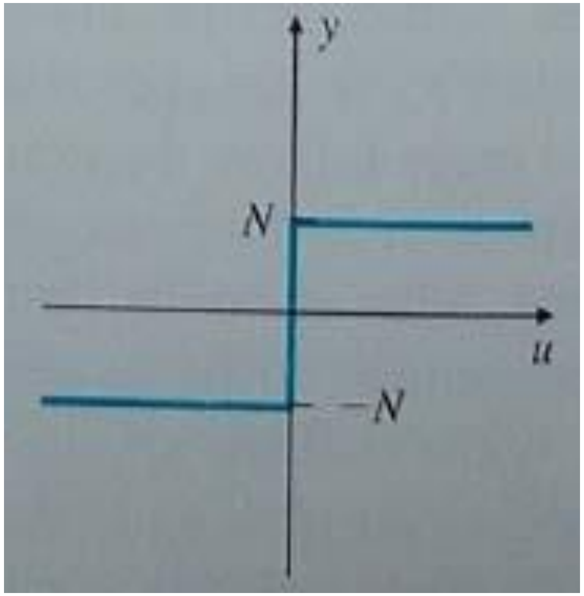
Gerçek kontrol sistemleri lineer değildir ama biz gerçek modellere lineer yaklaşımları kullanırız.

Bazı sistemlerde lineersizlik dinamik değildir, böyle sistemlere büyüklüğü giriş sinyaline bağlı bir **kazanç** yaklaşımında bulunulabilir.

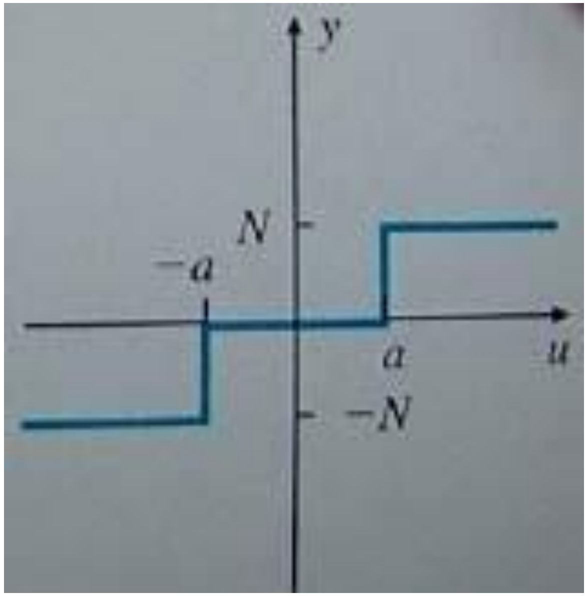
Örnek: Dinamik Olmayan Lineersizlikler



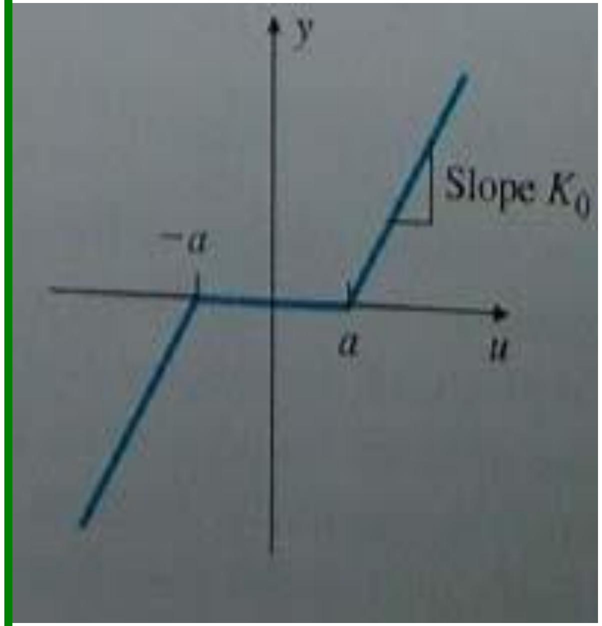
Doyum(Saturation)



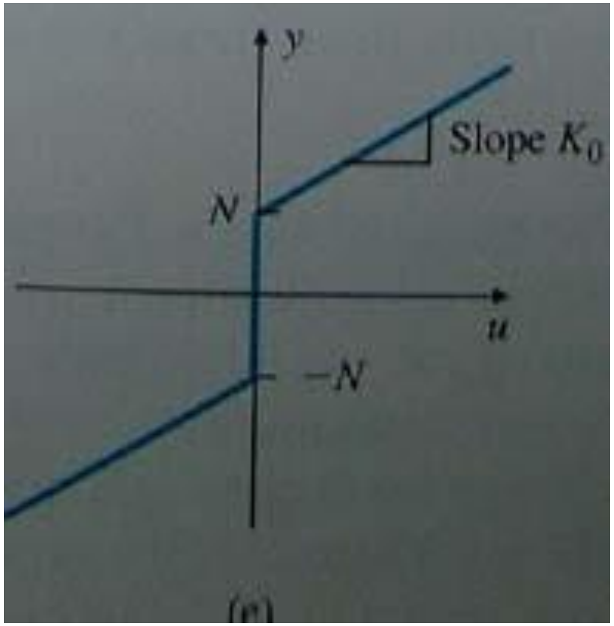
Röle



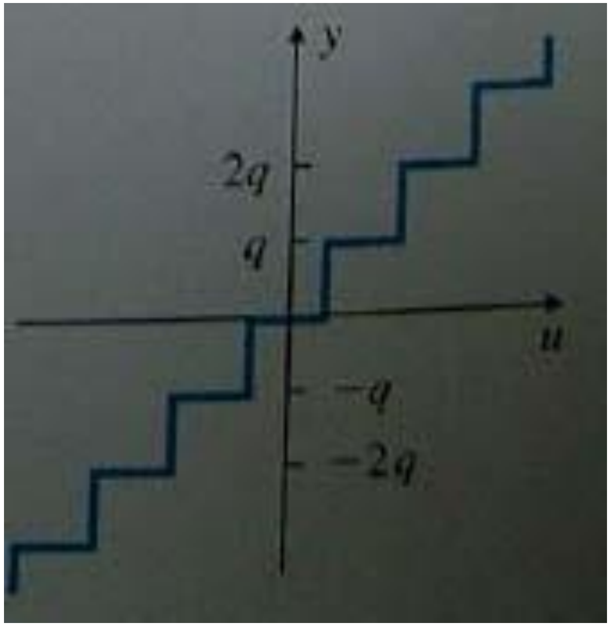
Gecikmeli Röle



Ölü bölgeli Kazanç



Önceden yüklenmiş yay veya Cloumb+Vizkoz Sürtünme

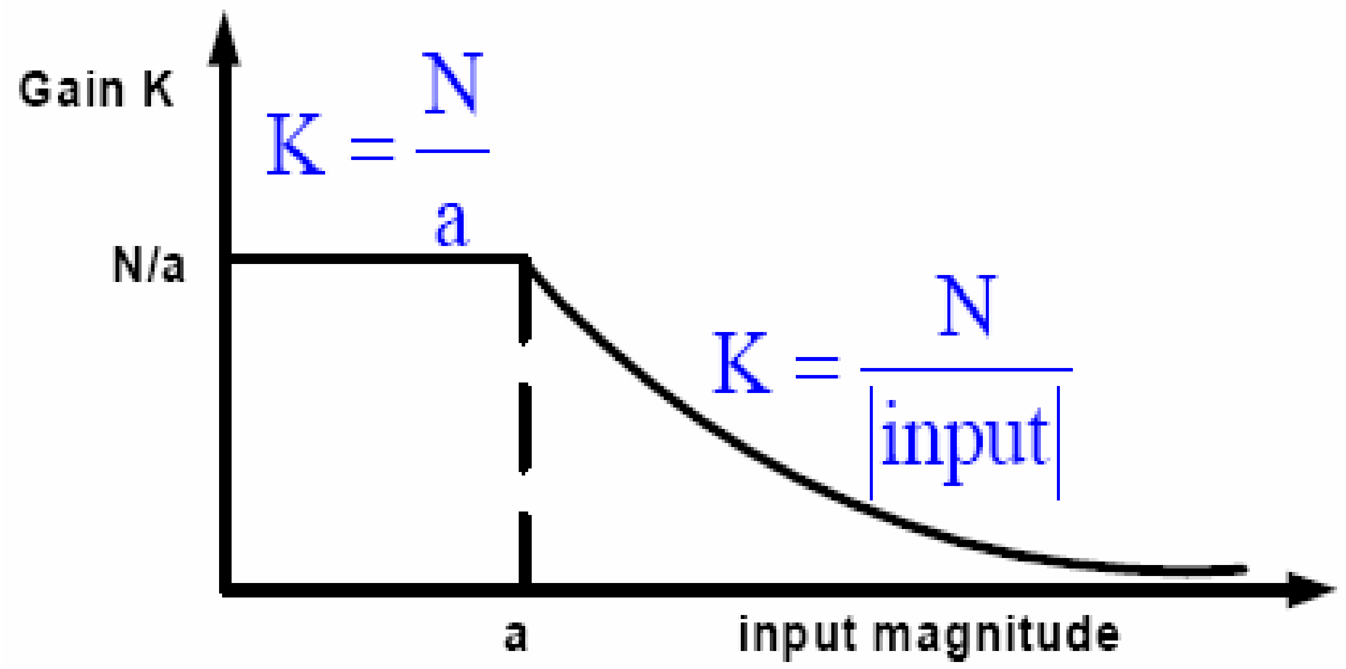


Basamaklama

Örnenek olarak doyu eğrisini düşünecek olursak. Tüm hareketlendiriciler mutlaka bir noktada doyuma ulaşırlar; eğer ulaşmazsa çıkışları sonsuza kadar artar ki bu fiziksel olarak mümkün değildir.

Doyum elemanı için: input sinyalinin **a** ‘dan küçük olduğu

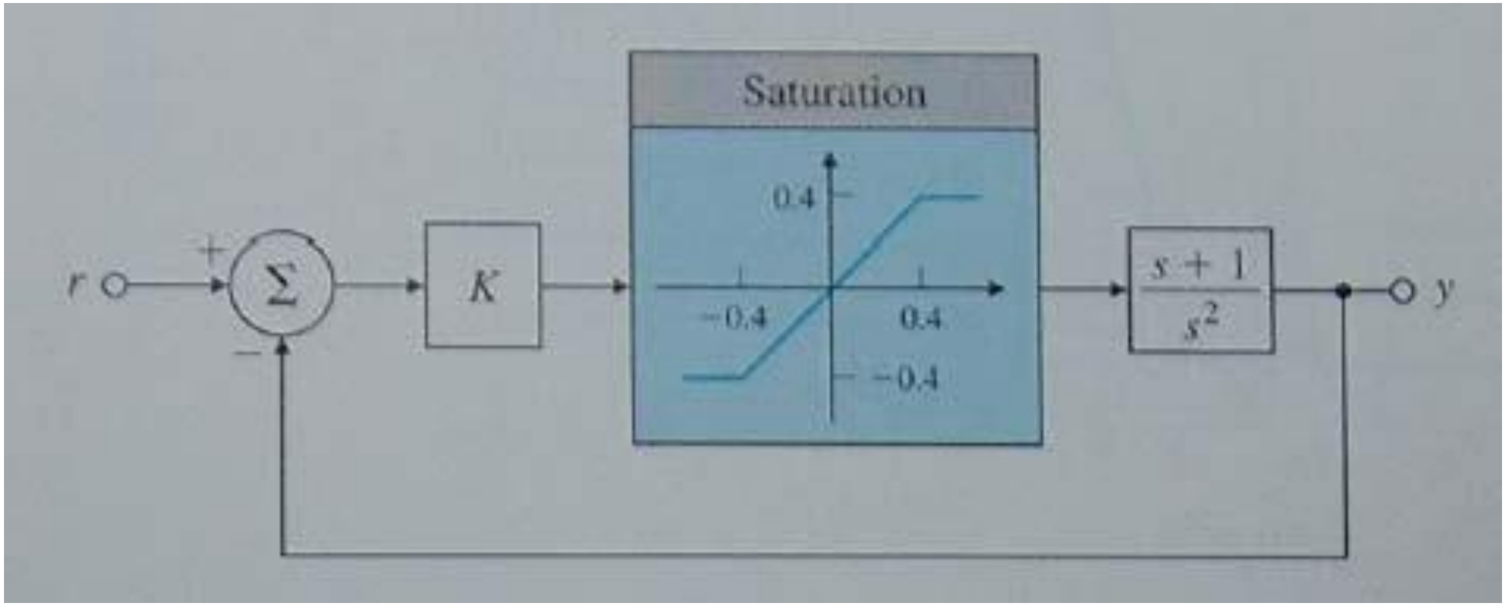
durumlarda lineersizlik **N/a** kazancı ile lineerdir. Ancak giriş sinyalinin **a**’dan büyük olduğu durumlarda çıkışın büyüklüğü **N** ile sınırlıdır. Çıkış ve giriş arasında oran input güyüdükçe azalır.



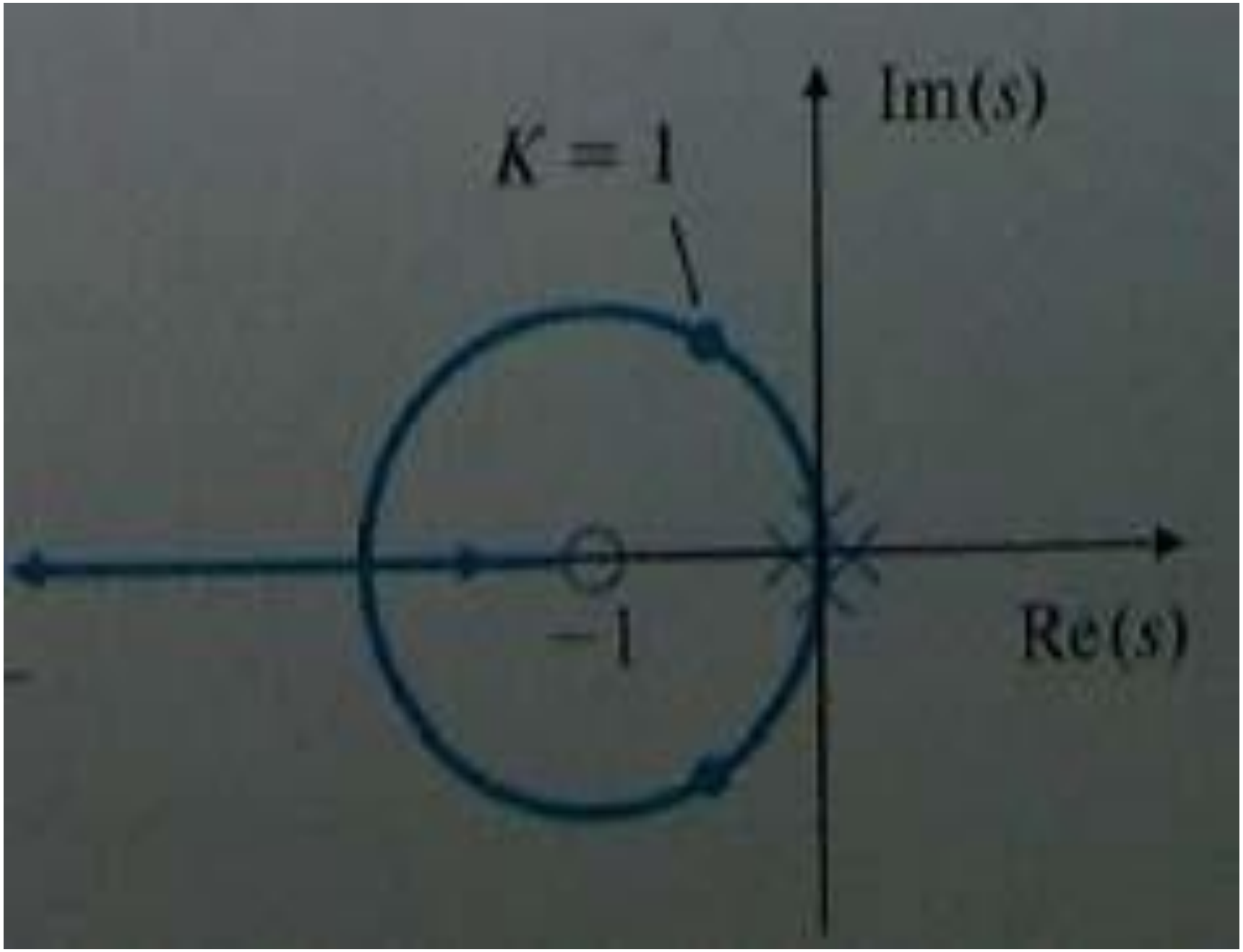
Kontrol sistem tasarımının önemli beklentilerinden birisi hareketlendiriciyi boyutlandırmaktır; büyüklüğünü, ağırlığını, güç ihtiyacını fiyatını ve doyum seviyesini belirlemektir.

Genelde yüksek doyum seviyeli hareketlendiriciler daha ağır, daha büyük ve daha pahalıdırlar.

Örnek:

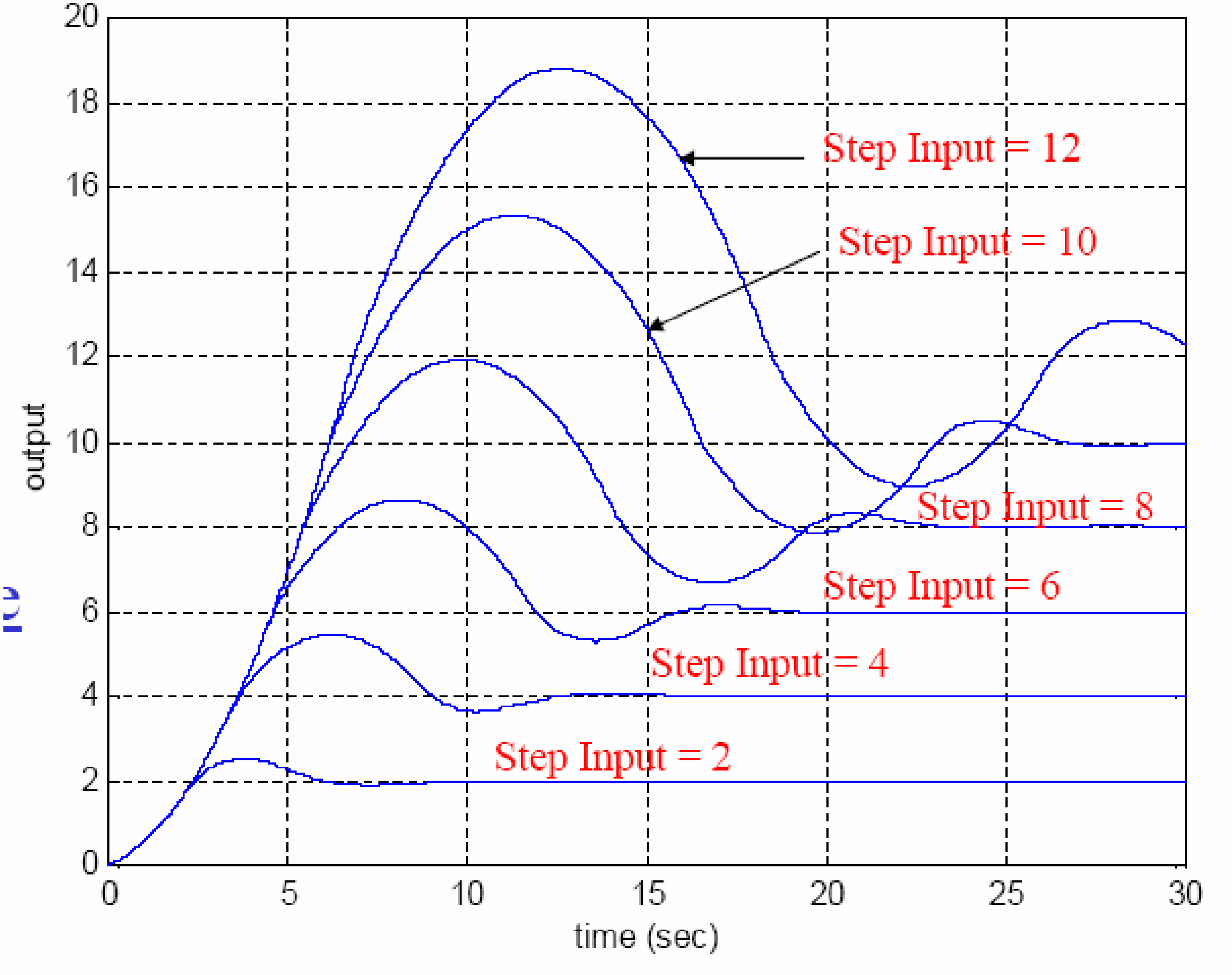


Doyum fonksiyonu olmadan sistemin kök yer eğrisi:



K=1 olan noktada **ζ=0.5** .

Basamak Cevabı :



$\zeta = 0.5, K = 1$

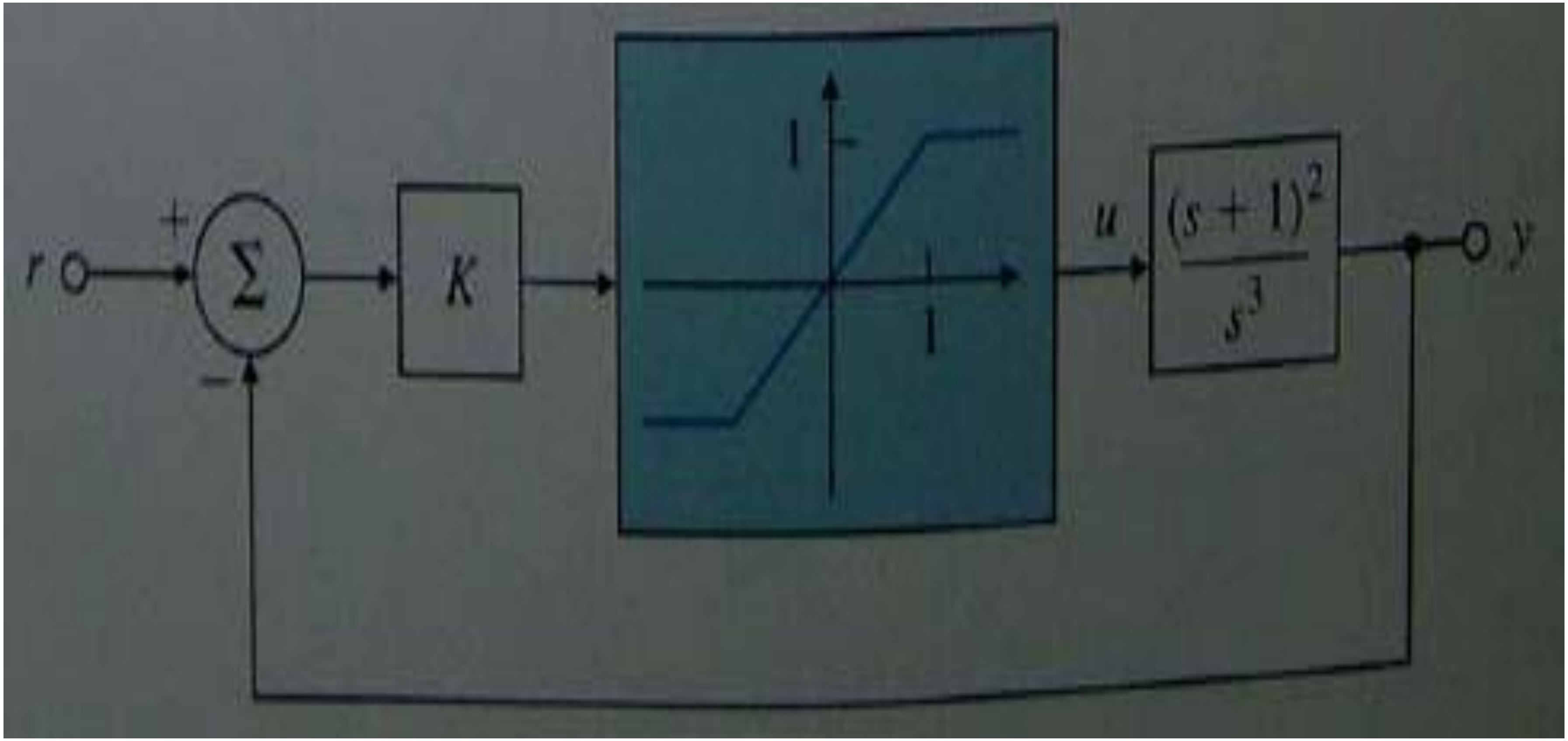
Doyuma giren sinyaller 0.4’den küçük olduğu sürece sistem lineerdir ve **ζ=0.5** e göre sonuç verir.

Giriş seviyesi arttıkça sistem cevabının aşım miktarı artmakta ve bunu yenmesi daha uzun sürmektedir.

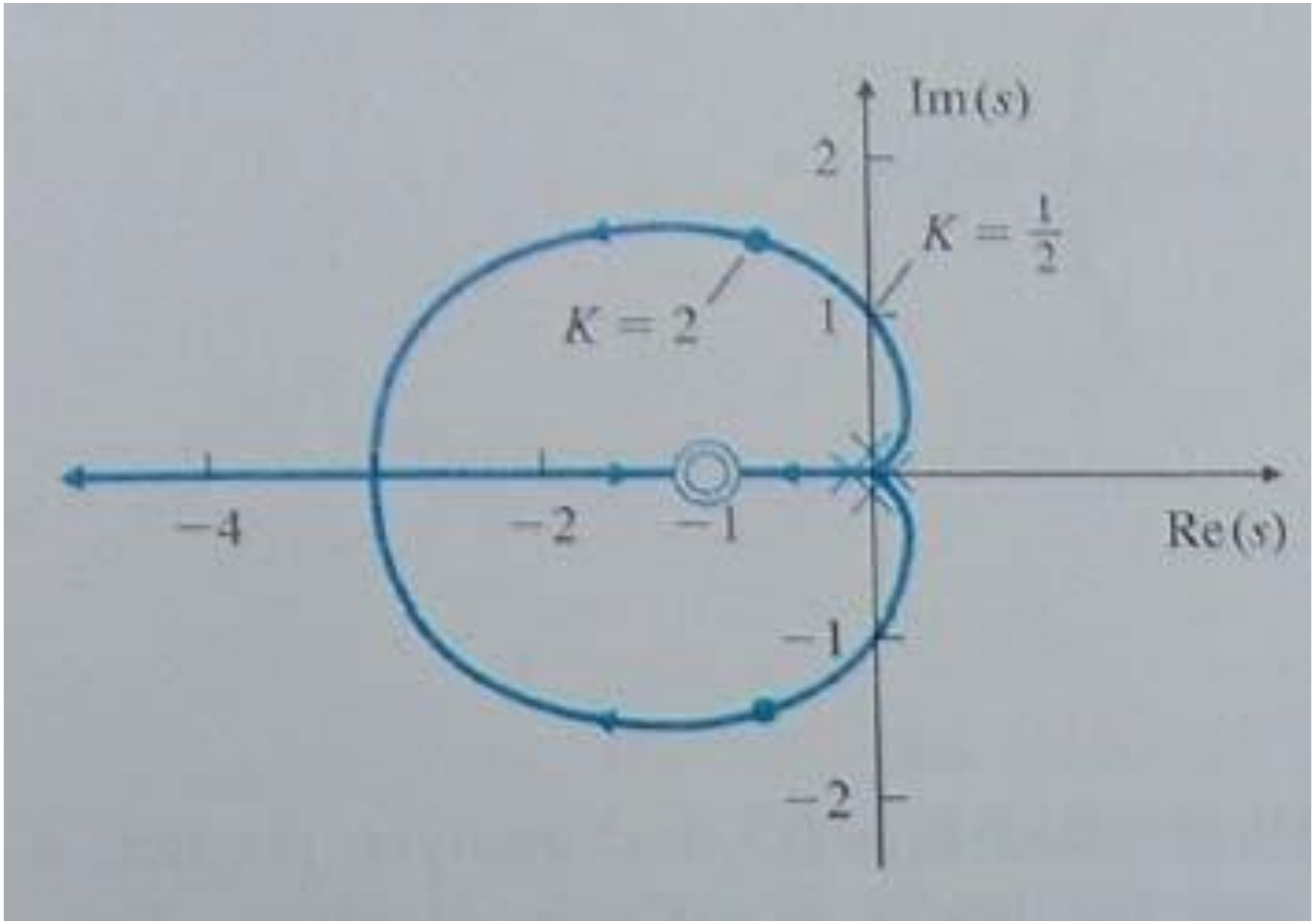
Kök yer eğrisiinden görüleceği üzere **K** düşürüldükçe kökler s düzleminde orjine doğru kayıyor ve sönüm katsayısı gittikçe düşüyor.

Bunun neticesinde yükselme zamanı, yerleşme zamanı ve aşım artar ve cevap daha osilasyonludur.

Örnek:

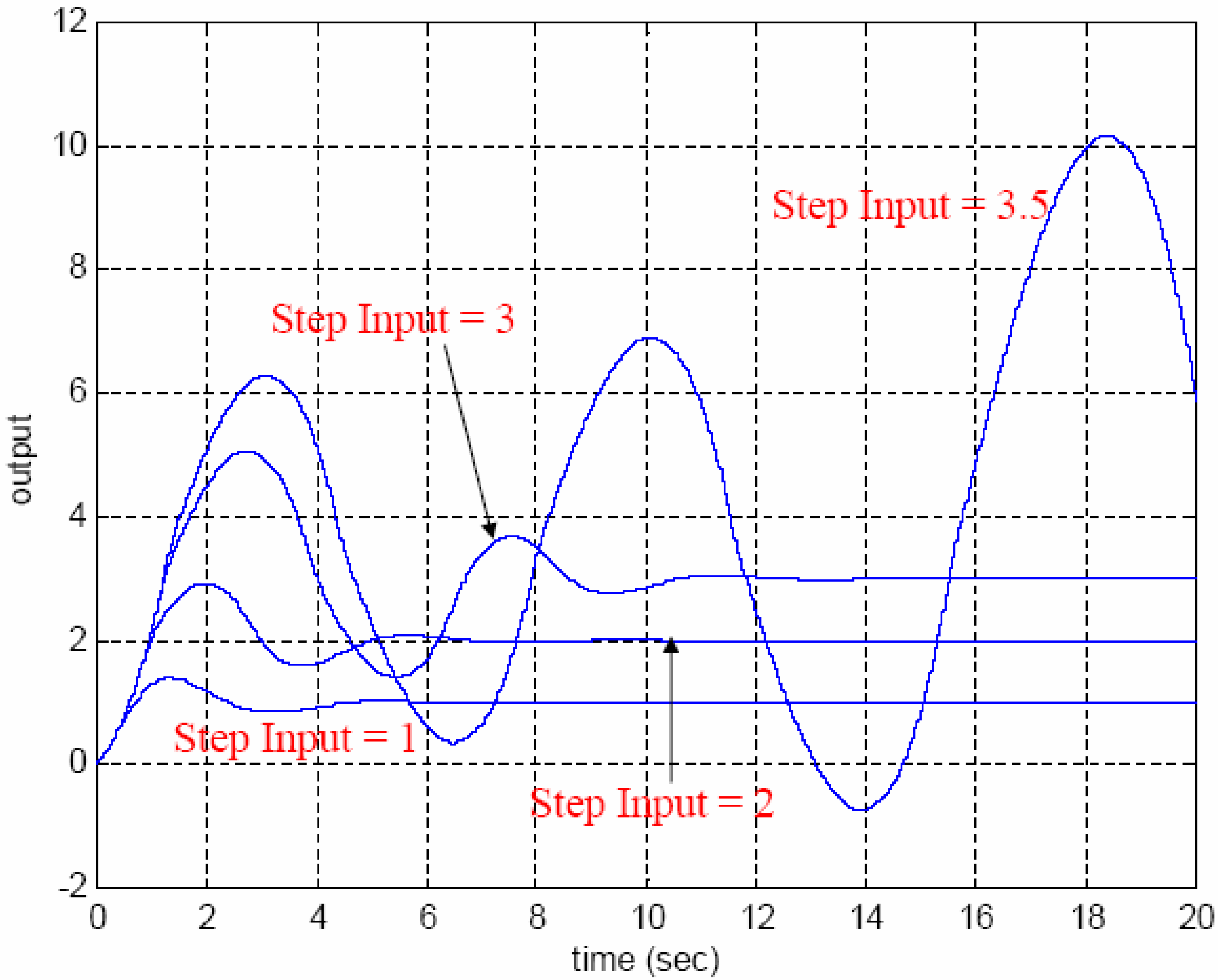


Doyum fonksiyonu olmadan sistemin kök yer eğrisi:



Büyük **K** değerleri için sistem kararlıdır, küçük değerlerinde kararsızdır.

Basamak Cevabı :



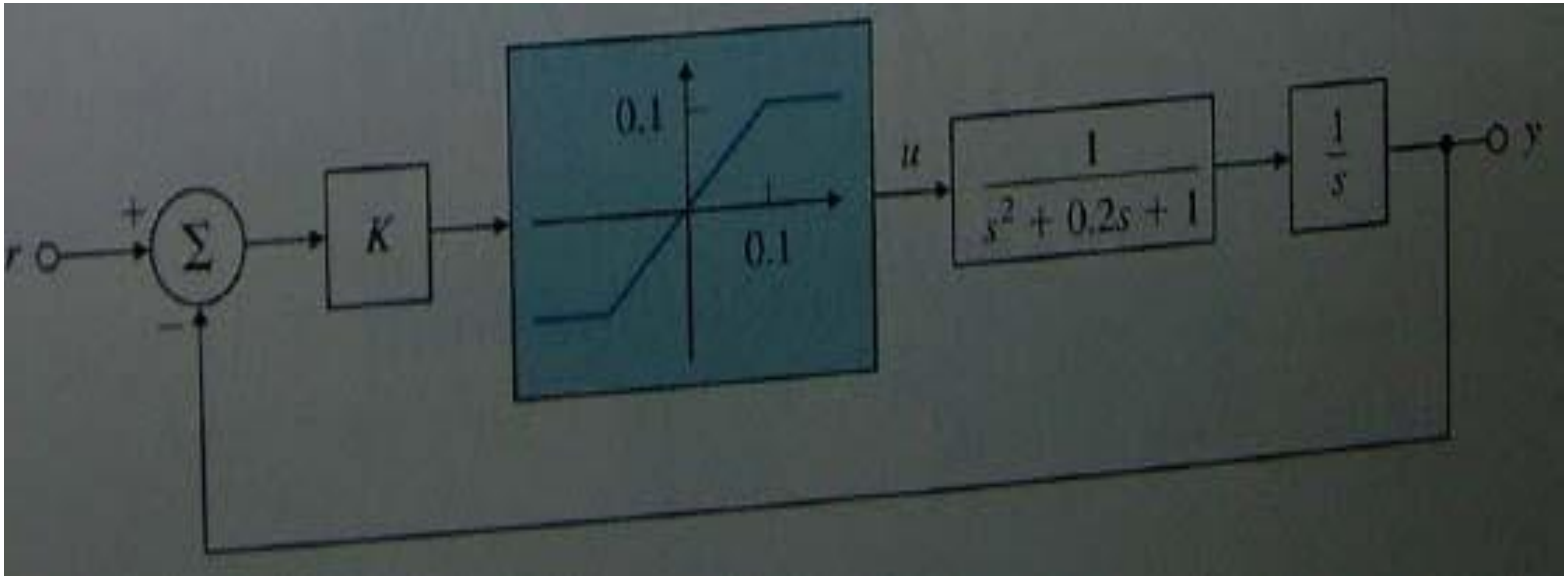
$\zeta = 0.5, K = 2$

Eğer K=2 ($\zeta=0.5$) ise küçük giriş sinyalleri için $\zeta=0.5$ e göre sonuç verir.

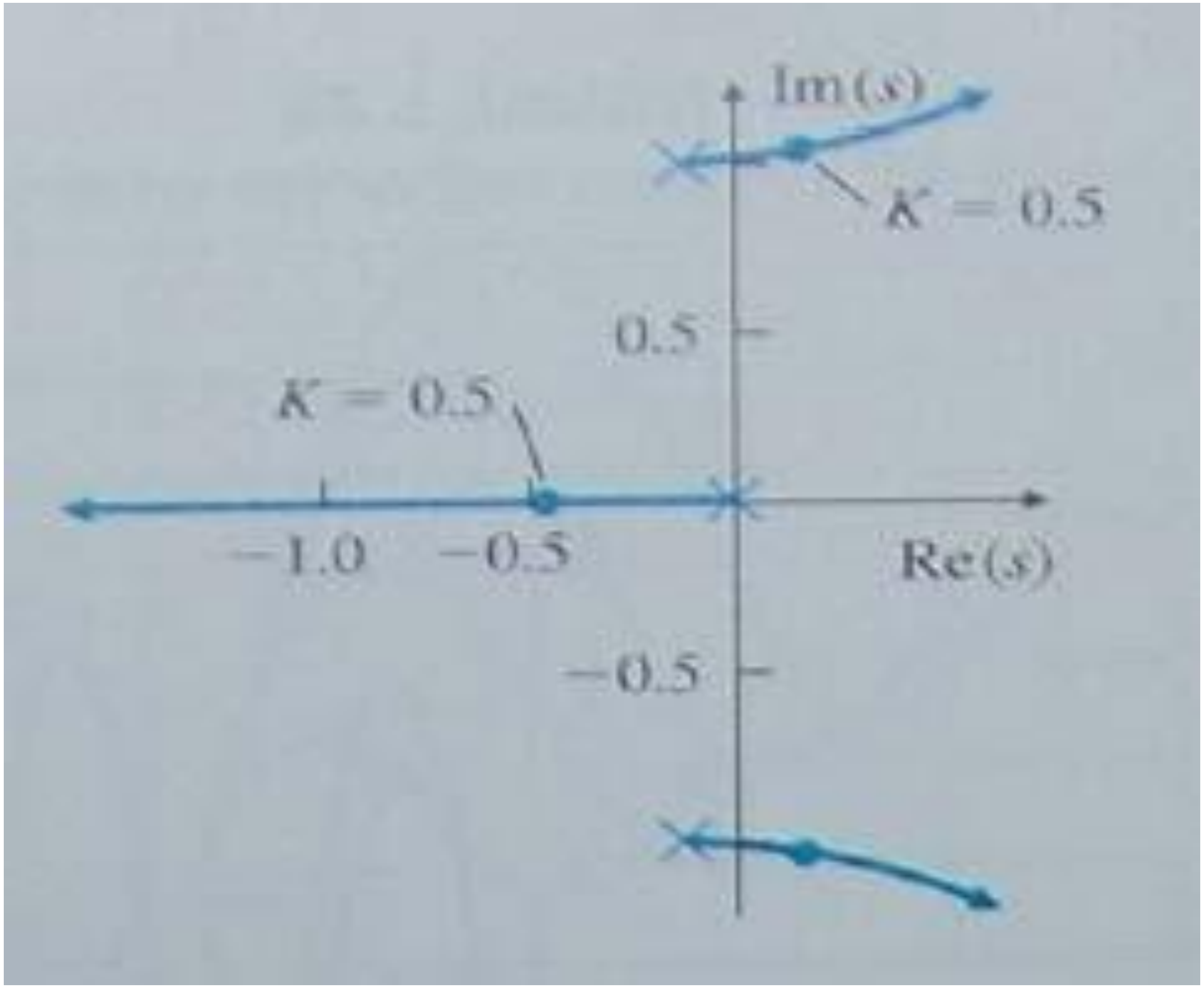
Giriş sinyal seviyesi arttıkça daha az iyi sönümlü olur.

Giriş sinyal seviyesi daha da arttırılırsa cevap karasız olmaya başlar.

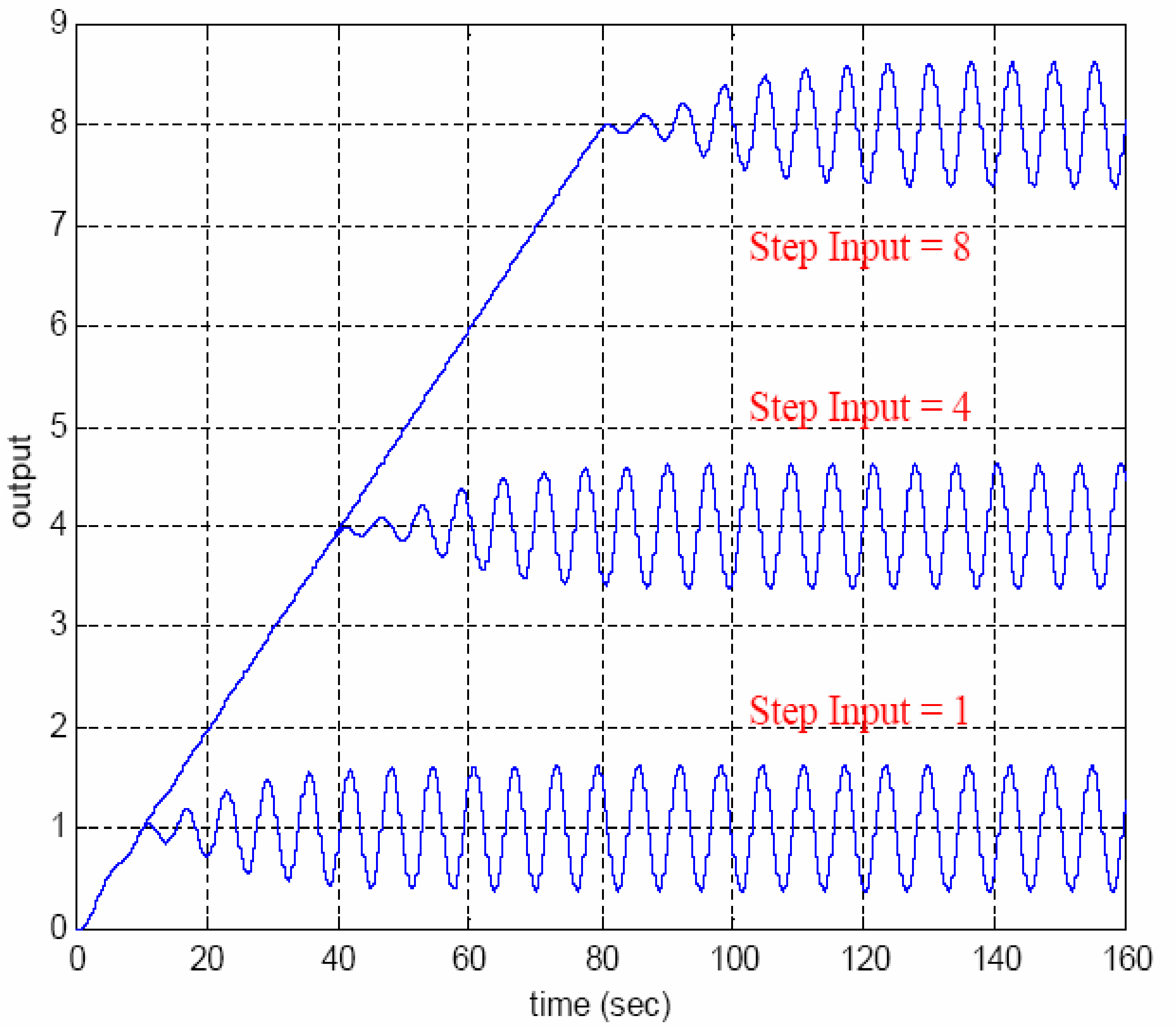
Örnek:



Doyum fonksiyonu olmadan sistemin kök yer eğrisi:



Basamak Cevabı :



$K = 0.5$

Bu sistem tipik bir elektromekanik kontrol problemidir. Dikkat edilecek olursa sistem rezonans mod'da $\mathbf{s^2+0.2s+1}$ ($\boldsymbol{\omega=1, \zeta=0.1}$) dir.

K=0.5 kazancı rezonant mod'daki sistemin köklerini sağ yarı düzleme sürüklemeye yeterlidir. Bu kazanç değeri azaltılırsa sistem kararlı olmaya başlar.

Kararsızlıktan dolayı doyum ile sistemin cevabı yeterince büyük

olana kadar gittikçe büyür ve kazanç **K=0.2** değerine düşürülerek büyüme durdurulur.

Hata sabit bir değere ulaşır ve osilasyon yapmaya başlar. Osilasyonların frekansı **ω=1 rad/san** dir ve DC denge değerinde sabit olarak kalır.

Çözüm her zaman sabit büyüklükte periyodik olur, bu nedenle bu tür durumlara **limit cycle** denir.

Limit cycle'ı önlemek için kutup yakınlarına kompanzasyon sıfırları eklenir, fakat bu sıfırlar daha düşük frekansta olmalıdırlar.