MÜHENDİSLİK MEKANİĞİ

STATİK

Behcet DAĞHAN

MÜHENDİSLİK MEKANİĞİ

STATİK

İÇİNDEKİLER

STATİK

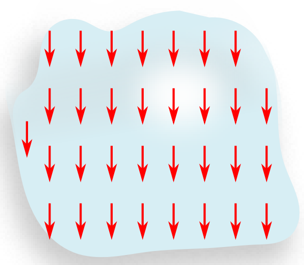
6

KÜTLE MERKEZLERİ ve GEOMETRİK MERKEZLER

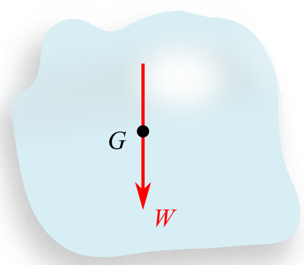
Kütle Merkezi

Bir cismin ağırlığı aslında bir tek kuvvet değildir. Ağırlık kuvveti cismin hacmi üzerinde yayılmış olan yayılı bir kuvvettir.

Ama problem çözerken kolaylık olsun diye bu yayılı kuvvetin yerine geçen bir bileşke kuvvet göz önüne alınır.



$\equiv$



Statik dersinde kuvvet vektörünün bir tesir çizgisi vardır. Bileşke ağırlık kuvvetinin de bir tesir çizigisi vardır ve nereden geçtiği bilinmelidir.

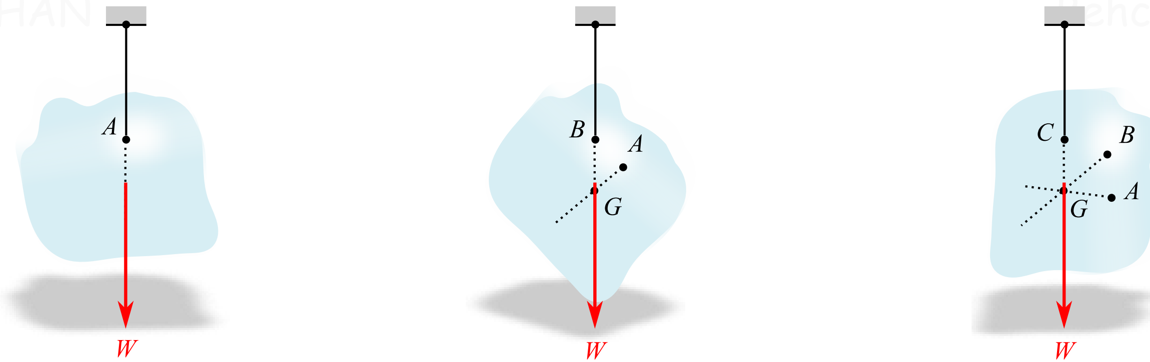
Bir cisim herhangi bir noktasından tavana bir iple asılarak ağırlık kuvvetinin tesir çizgisi bulunabilir.

Çünkü ağırlık kuvvetinin tesir çizgisi daima ip ile çakışıktır.

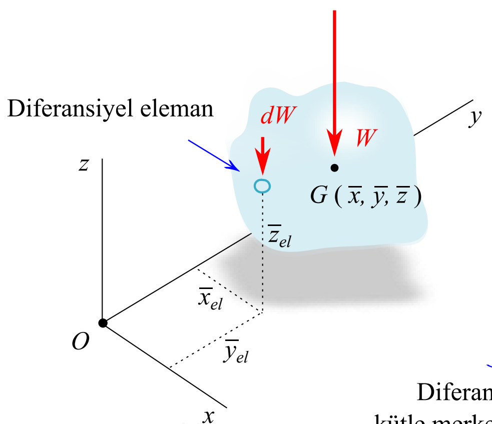
Farklı noktalardan asarak elde edilen farklı tesir çizgilerinin hepsinin aynı bir noktada kesiştiği görülür.

İşte bu noktaya kütle merkezi veya ağırlık merkezi denir.

Kütle merkezini G ile göstereceğiz. $G\,(\,\overline{x}\,,\overline{y}\,,\overline{z}\,)$



Kütle merkezinin yerini hesap yaparak bulmak için Varignon teoreminden faydalanılır.



$\underbrace{\overline{x}_{el} \quad \overline{y}_{el} \quad \overline{z}_{el}}$

Diferansiyel elemanın
kütle merkezinin koordinatları

$$W = \int dW$$

y-eksenine göre moment alarak:

$$\overline{x}\,W = \int \overline{x}_{el}\,dW \quad \rightarrow \quad \overline{x} = \frac{\int \overline{x}_{el}\,dW}{W}$$

Benzer şekilde:

$$\overline{y} = \frac{\int \overline{y}_{el}\,dW}{W}$$

$$\overline{z} = \frac{\int \overline{z}_{el}\,dW}{W}$$

$$W = g\,m$$

$$dW = g\,dm$$

$$\rightarrow$$

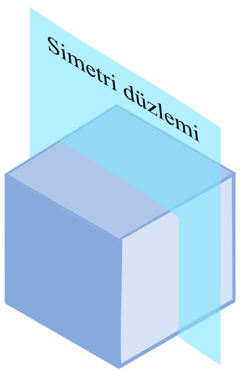
$$\boxed{\overline{x} = \frac{\int \overline{x}_{el}\,dm}{m} \qquad \overline{y} = \frac{\int \overline{y}_{el}\,dm}{m} \qquad \overline{z} = \frac{\int \overline{z}_{el}\,dm}{m}}$$

$$dm = \rho\, dV \quad \rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\int \bar{x}_{el}\, \rho\, dV}{\int \rho\, dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int \bar{y}_{el}\, \rho\, dV}{\int \rho\, dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int \bar{z}_{el}\, \rho\, dV}{\int \rho\, dV}$$

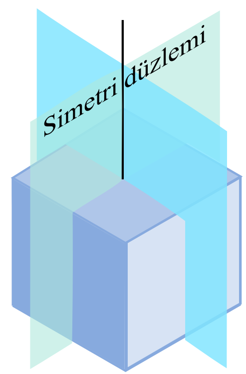
ρ : Yoğunluk, birim hacmin kütlesi

ρ = sb. ise (Homojen cisim)

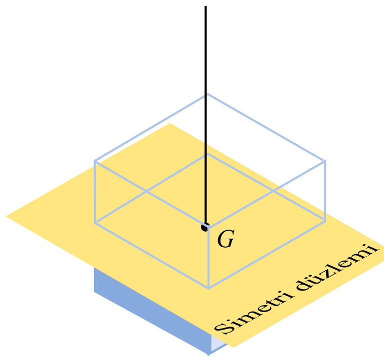
$$\bar{x} = \frac{\int \bar{x}_{el}\, dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int \bar{y}_{el}\, dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int \bar{z}_{el}\, dV}{V}$$



Homojen bir cismin kütle merkezi, varsa, simetri düzlemi üzerindedir.



Eğer birbirini kesen iki tane simetri düzlemi varsa kütle merkezi simetri düzlemlerinin kesişme doğrusu üzerindedir.



Bu doğruyu da kesen bir simetri düzlemi daha varsa o zaman doğrunun düzlemi kestiği nokta cismin kütle merkezidir.

Geometrik Merkez

Homojen bir cismin kütle merkezi bulunurken cismin sadece geometrisi ile ilgilenmek yeterli olur.

Cismin sedece geometrisi ile ilgilenilerek bulunan merkeze geometrik merkez denir.

Homojen bir cismin kütle merkezi geometrik merkez ile çakışıktır.

Dolayısı ile herhangi bir cismin, cisim homojen kabul edilerek, kütle merkezi bulunursa geometrik merkezi bulunmuş olur.

Geometrik merkezi C harfi ile göstereceğiz. $C\,(\,\bar{x}\,,\bar{y}\,,\bar{z}\,)$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int \bar{x}_{el}\, dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int \bar{y}_{el}\, dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int \bar{z}_{el}\, dV}{V}}$$

$$\underbrace{\bar{x}_{el} \quad \bar{y}_{el} \quad \bar{z}_{el}}$$

Diferansiyel elemanın
geometrik merkezinin koordinatları

t = sb. ise (Kalınlık sabit)

$dV = t\, dA$

$$\bar{x} = \frac{\int \bar{x}_{el}\, dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int \bar{y}_{el}\, dA}{A} \qquad \bar{z} = \frac{\int \bar{z}_{el}\, dA}{A}$$

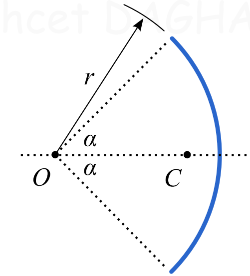
A = sb. ise (Kesit alanı sabit)

$dV = A\, dL$

$$\bar{x} = \frac{\int \bar{x}_{el}\, dL}{L} \qquad \bar{y} = \frac{\int \bar{y}_{el}\, dL}{L} \qquad \bar{z} = \frac{\int \bar{z}_{el}\, dL}{L}$$

Örnek Problem 6/1

Herhangi bir çember parçasının geometrik merkezinin yerini bulunuz.



Verilenler:

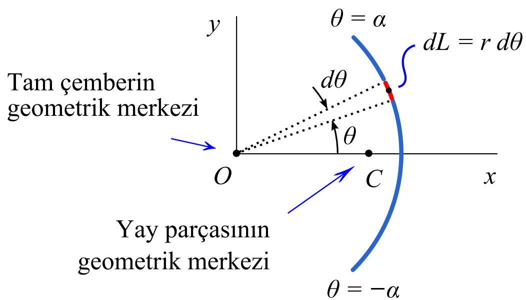
ρ = sb.

A = sb.

Çözüm

Bir cismi homojen kabul ederek kütle merkezi bulunursa o cismin geometrik merkezi bulunmuş olur.
Homojen bir cismin kütle merkezi, varsa, simetri ekseni üzerindedir.
Bir çember parçası, kesit alanı sabit olan bir cisim olarak göz önüne alınabilir.
Kesit alanı sabit olan bir cismin geometrik merkezini bulurken sadece boyu ile ilgilenmek yeterli olur.

Yay parçasının simetri ekseni, x-ekseni ile çakıştırılırsa: $\overline{OC} = \bar{x}$



$$\bar{x}\, L = \int \bar{x}_{el}\, dL$$

$$L = 2\alpha r$$

$$\bar{x}_{el} = r\cos\theta$$

$$dL = r\, d\theta$$

$$\bar{x}\,(2\alpha r) = \int_{-\alpha}^{\alpha} (r\cos\theta)\,(r\, d\theta)$$

$$\bar{x}\,(2\alpha r) = r^2\,(\sin\theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$\bar{x} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

↑ Bu α nın birimi daima radyandır.

İstenenler:

$\overline{OC}$ = ?

Geometrik merkez,
cismin dışında da olabilir.

$$\boxed{\overline{OC} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}}$$

Bu değer, seçilen eksen takımından bağımsızdır.

Örnek Problem 6/1

Herhangi bir çember parçasının geometrik merkezinin yerini bulunuz.

Verilenler:

$\rho = \text{sb.}$

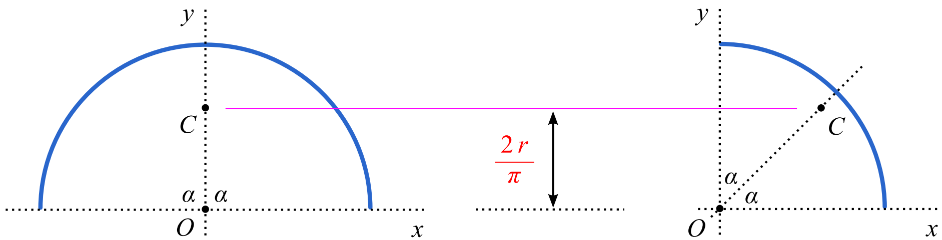
$A = \text{sb.}$

$$\overline{OC} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$$

Bu değer, seçilen eksen takımından bağımsızdır.

Yarım çember

Çeyrek çember



$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \pi/2 \\ \overline{OC} &= \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \overline{OC} = \frac{2\,r}{\pi}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \pi/4 \\ \overline{OC} &= \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \overline{OC} = \frac{2\sqrt{2}\,r}{\pi}$$

İstenenler:

$\overline{OC} = ?$

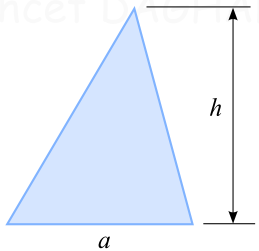
$$\bar{x} = 0 \;,\quad \bar{y} = \frac{2\,r}{\pi}$$

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2\,r}{\pi}$$

Bu koordinatlar, eksenler yukarıdaki gibi seçilirse geçerlidir.

Örnek Problem 6/2

Herhangi bir üçgenin geometrik merkezinin herhangi bir tabanına uzaklığını bulunuz.



Verilenler:

$\rho =$ sb.

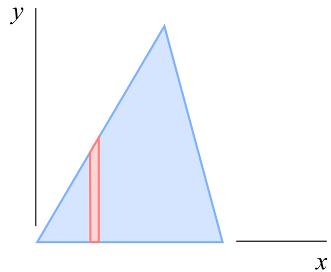
$t =$ sb.

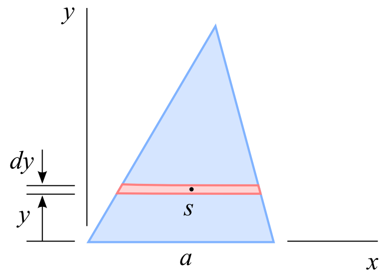
İstenenler:

$\overline{y} = ?$

Çözüm

Bir üçgen, kalınlığı sabit olan bir cisim olarak göz önüne alınabilir.
Kalınlığı sabit olan bir cismin geometrik merkezini bulurken sadece yüzey alanı ile ilgilenmek yeterli olur.
Üçgenin tabanı, x-ekseni ile çakıştırılırsa:





$$\overline{y}\, A = \int \overline{y}_{el}\, dA$$

$$A = \frac{a\,h}{2}$$

$$\overline{y}_{el} = y$$

$$dA = s\, dy$$

$$\frac{s}{a} = \frac{h-y}{h}$$

$$\overline{y}\,\frac{a\,h}{2} = \int_0^h y\,\frac{a}{h}\,(h-y)\,dy$$

$$\overline{y}\,\frac{a\,h}{2} = \frac{a}{h}\left(h\,\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right|_0^h$$

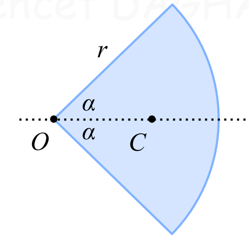
$$\boxed{\overline{y} = \frac{h}{3}}$$

Diferansiyel elemanı seçerken
olabildiğince
tek aşamada sonuca gidebilecek şekilde
seçmeye dikkat edilmelidir.
Yukarıdaki gibi bir seçim yapılırsa
sınırlar değişik olduğu için
problemi iki bölümde çözmek gerekecektir.

Herhangi bir üçgenin geometrik merkezinin herhangi bir tabanına uzaklığı o tabandan ölçülen yüksekliğinin üçte biri kadardır.

Örnek Problem 6/3

Herhangi bir daire parçasının geometrik merkezinin yerini bulunuz.



Verilenler:

$\rho = \text{sb.}$

$t = \text{sb.}$

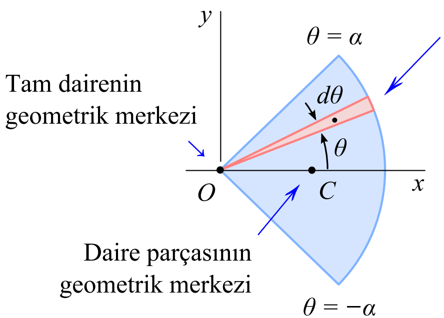
İstenenler:

$\overline{OC} = ?$

Çözüm

Bir daire parçası, kalınlığı sabit olan bir cisim olarak göz önüne alınabilir.
Kalınlığı sabit olan bir cismin geometrik merkezini bulurken sadece yüzey alanı ile ilgilenmek yeterli olur.
Daire parçasının simetri ekseni, x-ekseni ile çakıştırılırsa:

Simetri ekseni x-ekseni ile çakıştırıldığı için: $\overline{OC} = \overline{x}$



Bu diferansiyel elemanın şekli, her ne kadar bir daire parçası ise de bir üçgen gibi kabul edilebilir.

$$\overline{x}\,A = \int \overline{x}_{el}\, dA$$

$$A = \alpha\, r^2$$

$$\overline{x}_{el} = \frac{2}{3}\, r\cos\theta$$

$$dA = \frac{d\theta}{2}\, r^2$$

$$\overline{x}\,(\alpha\, r^2) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{2}{3}\, r\cos\theta\right)\left(\frac{d\theta}{2}\, r^2\right)$$

$$\overline{x}\,(\alpha\, r^2) = \frac{r^3}{3}\left(\sin\theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha}\right.$$

$$\overline{x} = \frac{2}{3}\,\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

Herhangi bir üçgenin geometrik merkezinin herhangi bir tabanına uzaklığı o tabandan ölçülen yüksekliğinin üçte biri kadardır.

↑ Bu α nın birimi daima radyandır.

$$\boxed{\overline{OC} = \frac{2}{3}\,\frac{r\sin\alpha}{\alpha}}$$

Bir daire parçasının geometrik merkezinin O ya uzaklığı, yay parçasınınkinin $\frac{2}{3}$ katıdır.

Bu değer, eksen takımından bağımsız olarak daima geçerli olan bir değerdir.

Örnek Problem 6/3

Herhangi bir daire parçasının geometrik merkezinin yerini bulunuz.

Bir daire parçasının geometrik merkezinin O ya uzaklığı, yay parçasınınkinin $\frac{2}{3}$ katıdır.

Verilenler:

ρ = sb.

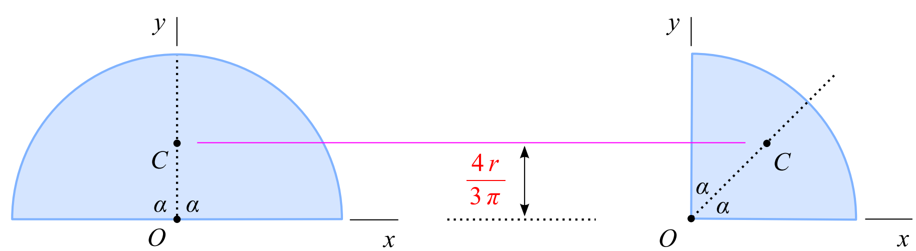
t = sb.

$$\overline{OC} = \frac{2}{3}\,\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

Bu değer, eksen takımından bağımsız olarak daima geçerli olan bir değerdir.

Yarım daire

Çeyrek daire



$\alpha = \pi/2$

$$\overline{OC} = \frac{2}{3}\,\frac{r\sin\alpha}{\alpha} \quad \Bigg\} \quad \overline{OC} = \frac{2}{3}\,\frac{2\,r}{\pi} = \frac{4\,r}{3\,\pi}$$

$\alpha = \pi/4$

$$\overline{OC} = \frac{2}{3}\,\frac{r\sin\alpha}{\alpha} \quad \Bigg\} \quad \overline{OC} = \frac{4\sqrt{2}\,r}{3\,\pi}$$

İstenenler:

$\overline{OC}$ = ?

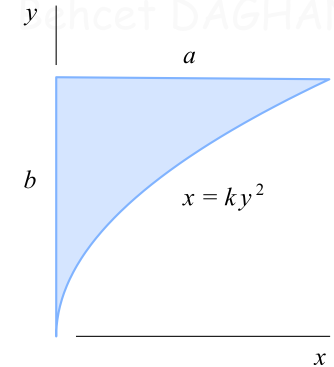
$$\bar{x} = 0 \;, \quad \bar{y} = \frac{4\,r}{3\,\pi}$$

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4\,r}{3\,\pi}$$

Bu koordinatlar, eksenler yukarıdaki gibi seçilirse geçerlidir.

Örnek Problem 6/4

Şekildeki alanın geometrik merkezinin koordinatlarını bulunuz.



Verilenler:

$\rho =$ sb.

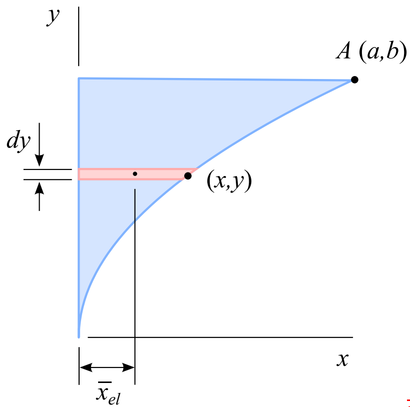
$t =$ sb.

İstenenler:

$\bar{x} = ?$

$\bar{y} = ?$

Çözüm



$$x = k\,y^2$$

A noktasında:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \\ y &= b \end{aligned}\right\} \qquad a = k\,b^2 \qquad k = \frac{a}{b^2}$$

$$dA = x\,dy$$

$$A = \int_0^b \frac{a}{b^2}\,y^2\,dy$$

$$A = \frac{a\,b}{3}$$

$$\bar{x}\,A = \int \bar{x}_{el}\,dA$$

$$\left.\begin{aligned} dA &= x\,dy \\ \bar{x}_{el} &= \frac{x}{2} \\ A &= \frac{a\,b}{3} \end{aligned}\right\}$$

$$\bar{x}\,\frac{a\,b}{3} = \int_0^b \frac{x}{2}\,(x\,dy)$$

$$\bar{x}\,\frac{a\,b}{3} = \frac{k^2}{2}\int_0^b y^4\,dy$$

$$\bar{x}\,\frac{a\,b}{3} = \frac{a^2}{2\,b^4}\,\left(\frac{y^5}{5}\right|_0^b$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{3}{10}\,a}$$

$$\bar{y}\,A = \int \bar{y}_{el}\,dA$$

$$\left.\begin{aligned} dA &= x\,dy \\ \bar{y}_{el} &= y \\ A &= \frac{a\,b}{3} \end{aligned}\right\}$$

$$\bar{y}\,\frac{a\,b}{3} = \int_0^b y\,(x\,dy)$$

$$\bar{y}\,\frac{a\,b}{3} = k\int_0^b y^3\,dy$$

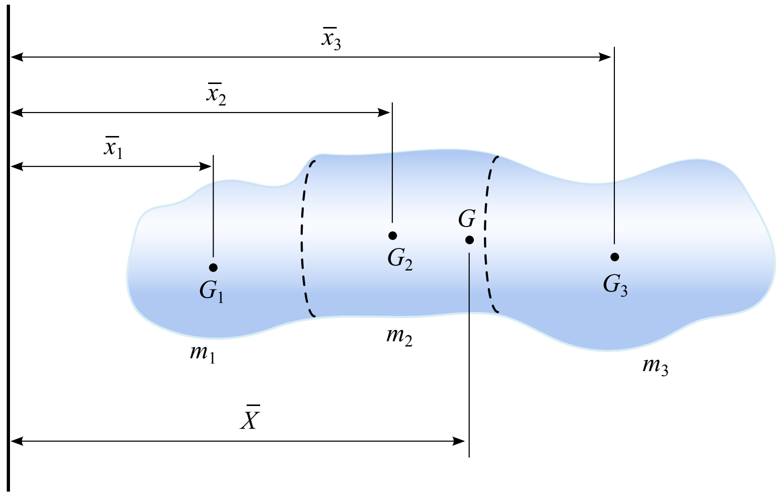
$$\bar{y}\,\frac{a\,b}{3} = \frac{a}{b^2}\,\left(\frac{y^4}{4}\right|_0^b$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{3}{4}\,b}$$

Bileşik Cisimler ve Şekiller

Kütle merkezi bulunacak olan cismin tamamı basit bir geometriye sahip olmayabilir.
Eğer basit geometrik şekle sahip cisimlerin eklenip çıkarılması ile elde edilebilen bir cisim ise o zaman yine Varignon teoreminden faydalanılabilir.

Eklenen cismin kütlesi pozitif olarak, çıkarılan cismin kütlesi negatif olarak alınır.



Üstten görünüş

$$(m_1 + m_2 + m_3)\,\bar{X} = m_1\,\bar{x}_1 + m_2\,\bar{x}_2 + m_3\,\bar{x}_3$$

$$\sum_{i=1}^{3} m_i\,\bar{X} = \sum_{i=1}^{3} m_i\,\bar{x}_i$$

Genelleştirme yaparak:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma m\,\bar{x}}{\Sigma m} \qquad \bar{Y} = \frac{\Sigma m\,\bar{y}}{\Sigma m} \qquad \bar{Z} = \frac{\Sigma m\,\bar{z}}{\Sigma m}$$

Homojen bir cismin,

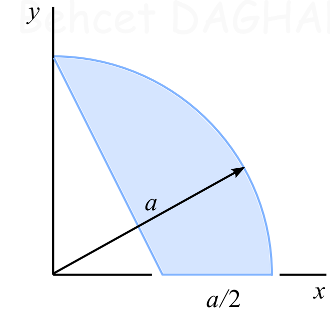
- kütlesinin yerine hacmi ile,

- kalınlığı da sabit ise yüzey alanı ile,

- veya kesit alanı da sabit ise boyu ile ilgilenmek yeterli olur.

Örnek Problem 6/5

Şekildeki alanın geometrik merkezinin koordinatlarını bulunuz.

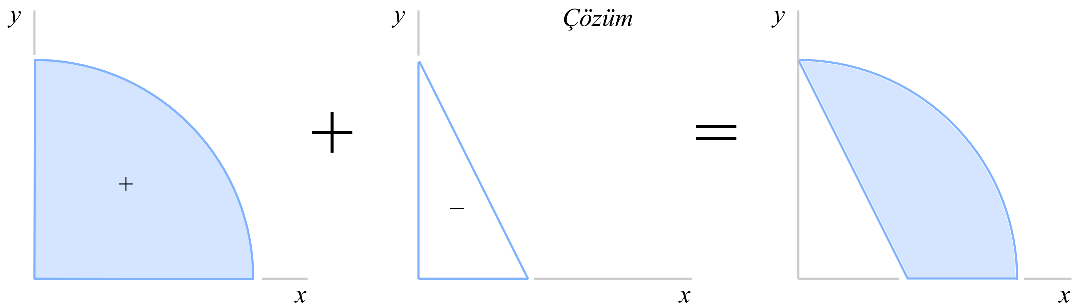


Verilenler:

$\rho =$ sb.

$t =$ sb.

Çözüm



$$\bar{x}_1 = \bar{y}_1 = \frac{4\,a}{3\,\pi}$$

$$A_1 = \frac{\pi\,a^2}{4}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{a/2}{3}$$

$$\bar{y}_2 = \frac{a}{3}$$

$$A_2 = -\,\frac{(a/2)\,a}{2}$$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma A\,\bar{x}}{\Sigma A} \qquad \bar{X} = \frac{A_1\,\bar{x}_1 + A_2\,\bar{x}_2}{A_1 + A_2} = \frac{\dfrac{\pi\,a^2}{4}\,\dfrac{4\,a}{3\,\pi} + \left(-\,\dfrac{(a/2)\,a}{2}\right)\dfrac{a/2}{3}}{\dfrac{\pi\,a^2}{4} + \left(-\,\dfrac{(a/2)\,a}{2}\right)}$$

$$\boxed{\bar{X} = \frac{7\,a}{6\,(\pi - 1)}}$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma A\,\bar{y}}{\Sigma A} \qquad \bar{Y} = \frac{A_1\,\bar{y}_1 + A_2\,\bar{y}_2}{A_1 + A_2} = \frac{\dfrac{\pi\,a^2}{4}\,\dfrac{4\,a}{3\,\pi} + \left(-\,\dfrac{(a/2)\,a}{2}\right)\dfrac{a}{3}}{\dfrac{\pi\,a^2}{4} + \left(-\,\dfrac{(a/2)\,a}{2}\right)}$$

$$\boxed{\bar{Y} = \frac{a}{\pi - 1}}$$

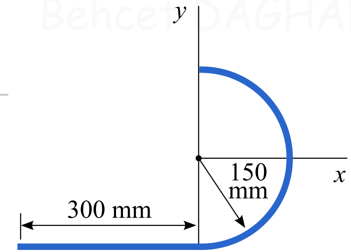
İstenenler:

$\bar{X} = ?$

$\bar{Y} = ?$

Örnek Problem 6/6

Şekildeki gibi bükülmüş olan çubuğun geometrik merkezinin koordinatlarını bulunuz.



Verilenler:

$\rho =$ sb.

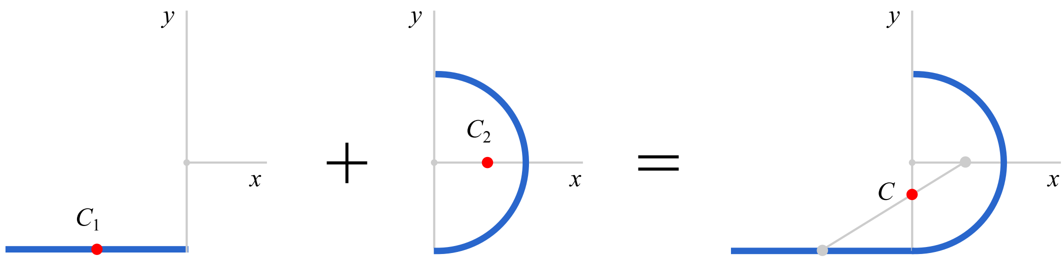
$A =$ sb.

İstenenler:

$\overline{X} = ?$

$\overline{Y} = ?$

Çözüm



$\overline{x}_1 = -150$ mm

$\overline{y}_1 = -150$ mm

$L_1 = 300$ mm

$\overline{x}_2 = \dfrac{2\,r}{\pi} = \dfrac{300}{\pi}$ mm

$\overline{y}_2 = 0$

$L_2 = 150\,\pi$ mm

$$\overline{X} = \frac{\Sigma L\,\overline{x}}{\Sigma L} \qquad \overline{X} = \frac{L_1\,\overline{x}_1 + L_2\,\overline{x}_2}{L_1 + L_2} = \frac{300\,(-150) + 150\,\pi\,\dfrac{300}{\pi}}{300 + 150\,\pi}$$

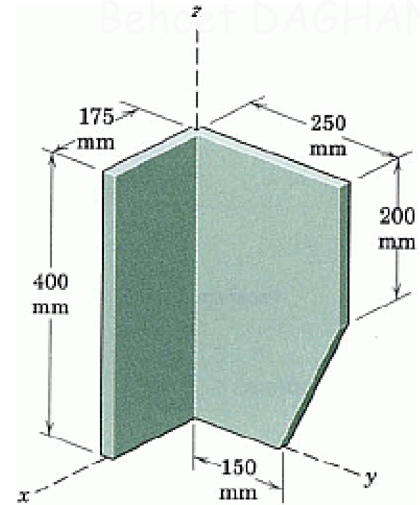
$$\boxed{\overline{X} = 0}$$

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma L\,\overline{y}}{\Sigma L} \qquad \overline{Y} = \frac{L_1\,\overline{y}_1 + L_2\,\overline{y}_2}{L_1 + L_2} = \frac{300\,(-150) + 150\,\pi\,(0)}{300 + 150\,\pi}$$

$$\boxed{\overline{Y} = -58.3 \text{ mm}}$$

Örnek Problem 6/7

Şekildeki gibi kesilmiş ve bükülmüş olan levhanın geometrik merkezinin koordinatlarını bulunuz.



Verilenler:

ρ = sb.

t = sb.

Çözüm

	$\bar{x}$ (mm)	$\bar{y}$ (mm)	$\bar{z}$ (mm)	A (mm^2)
1. *y-z* düzlemindeki dikdörtgen (250x400):	0	125	200	100 000
2. *x-z* düzlemindeki dikdörtgen (175x400):	87.5	0	200	70 000
3. *y-z* düzlemindeki üçgen (100x200):	0	216.7	66.7	−10 000

$$\bar{X} = \frac{\Sigma A\,\bar{x}}{\Sigma A}$$

$$\bar{X} = \frac{100\,000\,(0) + 70\,000\,(87.5) + (-10\,000)\,(0)}{100\,000 + 70\,000 + (-10\,000)}$$

$$\bar{X} = 38.3 \text{ mm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma A\,\bar{y}}{\Sigma A}$$

$$\bar{Y} = \frac{100\,000\,(125) + 70\,000\,(0) + (-10\,000)\,(216.7)}{100\,000 + 70\,000 + (-10\,000)}$$

$$\bar{Y} = 64.6 \text{ mm}$$

$$\bar{Z} = \frac{\Sigma A\,\bar{z}}{\Sigma A}$$

$$\bar{Z} = \frac{100\,000\,(200) + 70\,000\,(200) + (-10\,000)\,(66.7)}{100\,000 + 70\,000 + (-10\,000)}$$

$$\bar{Z} = 208.3 \text{ mm}$$

İstenenler:

$\bar{X}$ = ?

$\bar{Y}$ = ?

$\bar{Z}$ = ?