DİNAMİK

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

Behcet DAĞHAN

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

İÇİNDEKİLER

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

2

KİNEMATİK

MADDESEL NOKTALARIN KİNEMATİĞİ

2.2

Düzlemde Eğrisel Hareket

Hareketin yörüngesi düzlemsel bir eğri ise o harekete düzlemde eğrisel hareket denir.

Mühendislik problemlerinin çoğunu düzlemde eğrisel hareket olarak incelemek yeterli olmaktadır.

Hız

Yer değiştirme vektörü daima yörüngeye teğettir.
Dolayısıyla:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

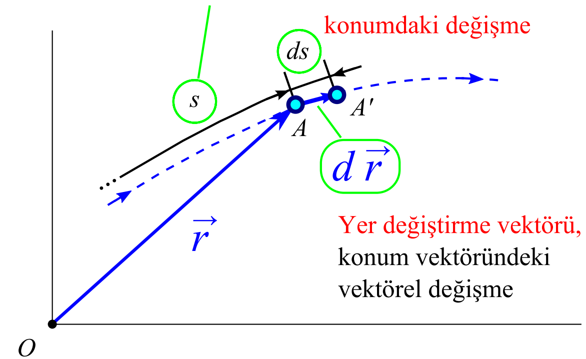
Yön : $\vec{v} \,//\, d\vec{r}$
Yönleri aynıdır.

Hız vektörü daima yörüngeye teğettir.

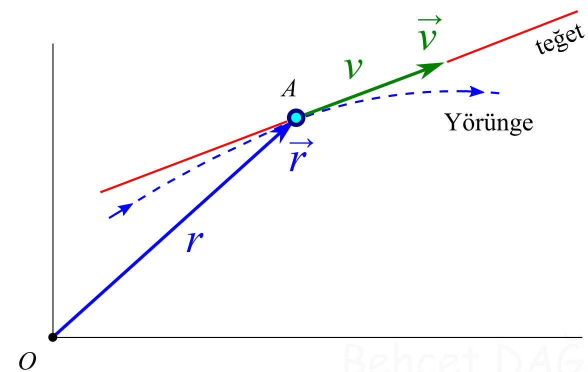
Şiddet : $\boxed{v = \dfrac{ds}{dt}} = \dot{s} = \dfrac{|d\vec{r}|}{dt} \leftarrow |d\vec{r}| = ds$

Aradan geçen zaman dt kadar küçük olduğu için
A noktası ile A' noktası hemen hemen çakışıktır.
Aradaki fark son derece küçüktür.
Dolayısıyla $|d\vec{r}| = ds$ alınabilir.

Yörünge üzerinde
keyfi olarak seçilen bir orijinden (s = 0) itibaren
yörünge üzerinden ölçülen konum



A	A'
t	$t + dt$
s	$s + ds$
$\vec{r}$	$\vec{r} + d\vec{r}$
$\vec{v}$	



İvme

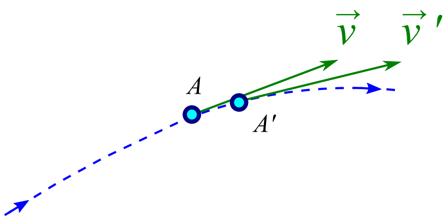
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

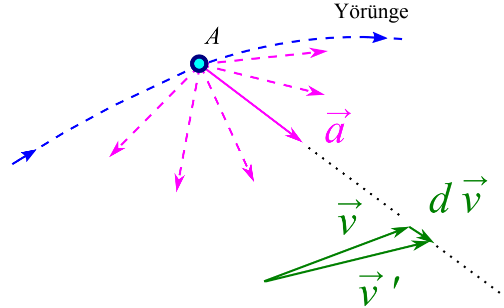
→ Yön : $\vec{a} \parallel d\vec{v}$

Yönleri aynıdır.

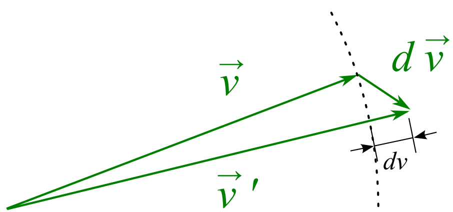
→ Şiddet : $a = \dfrac{|\,d\vec{v}\,|}{dt}$

İvme vektörü daima yörüngenin içbükey tarafına yönelmiştir.





A	A'
t	$t + dt$
s	$s + ds$
$\vec{r}$	$\vec{r} + d\vec{r}$
$\vec{v}$	$\vec{v}\,' = \vec{v} + d\vec{v}$
$\vec{a}$	

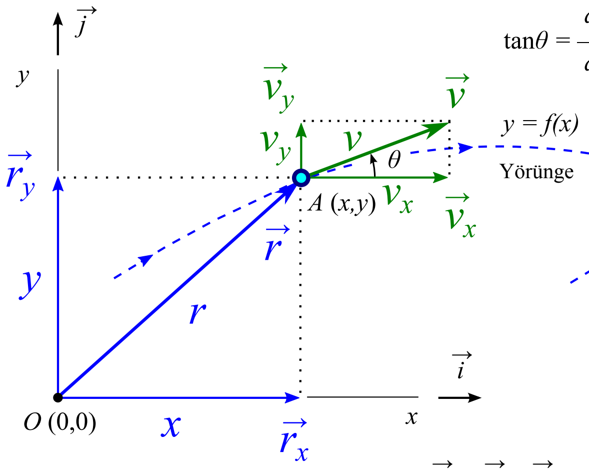


$|\,d\vec{v}\,| \neq dv = d\,|\,\vec{v}\,|$ → $\boxed{a \neq \dfrac{dv}{dt}}$

$\cancel{a = \dfrac{dv}{dt}}$ Bu eşitlik sadece doğrusal harekette geçerlidir.

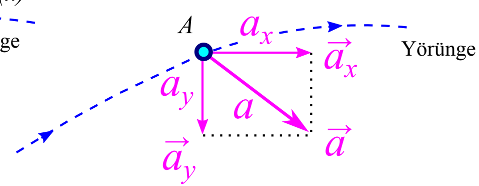
Kartezyen koordinatlar (x,y)

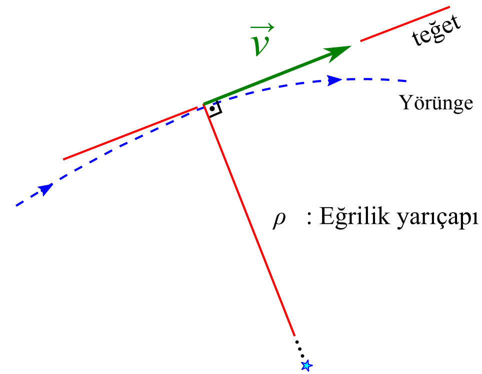
Kartezyen koordinatlarda orijin ve eksenler keyfi olarak seçilebilir.



$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}$$

$\vec{i}$ ve $\vec{j}$: Birim vektörler





ρ : Eğrilik yarıçapı

C : Eğrilik merkezi

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \rightarrow$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j}$$

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y}$$

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt}} \qquad \boxed{v_y = \frac{dy}{dt}}$$

$$\boxed{v^2 = v_x^2 + v_y^2}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}_x\,\vec{i} + \dot{v}_y\,\vec{j}$$

$$a_x = \dot{v}_x \qquad a_y = \dot{v}_y$$

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt}} \qquad \boxed{a_y = \frac{dv_y}{dt}}$$

$$\boxed{a^2 = a_x^2 + a_y^2}$$

Birim vektörlerin yönü ve şiddeti zamanla değişmediğinden dolayı:

$$\dot{\vec{i}} = \vec{0} \qquad \dot{\vec{j}} = \vec{0}$$

Geometriden:

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin eğrilik yarıçapı:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

Düzlemde eğrisel hareketin, iki tane doğrusal harekete indirgendiği görülmektedir.

Eğik atışın kartezyen koordinatlarda incelenmesi

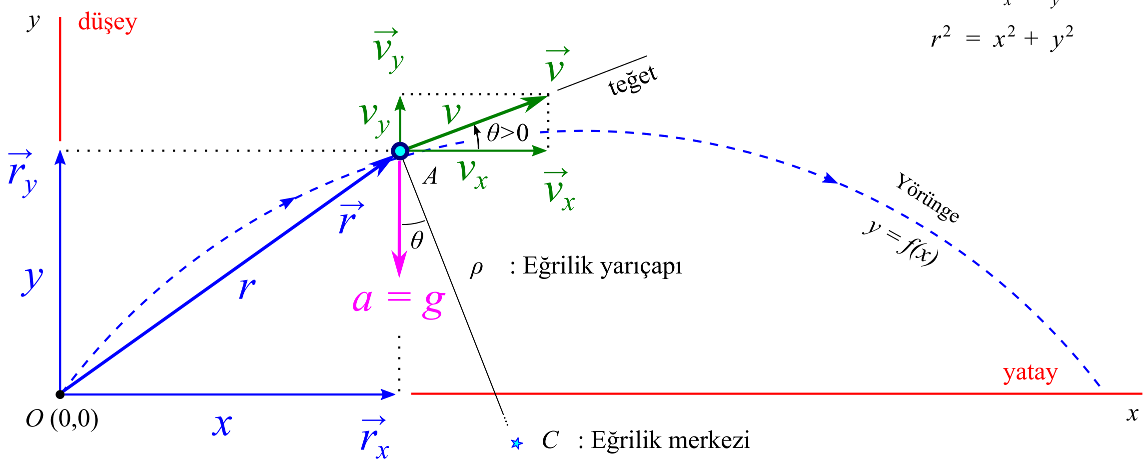
$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y \qquad \vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \qquad \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad v^2 = v_x^2 + v_y^2 \qquad a^2 = a_x^2 + a_y^2$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

$$v_x = v\ \cos\theta \qquad v_{x0} = v_0\ \cos\theta_0$$

$$v_y = v\ \sin\theta \qquad v_{y0} = v_0\ \sin\theta_0$$



$$\vec{a} = \cancel{\vec{a}_x}^{\,\vec{0}} + \vec{a}_y \qquad a = |a_y|$$

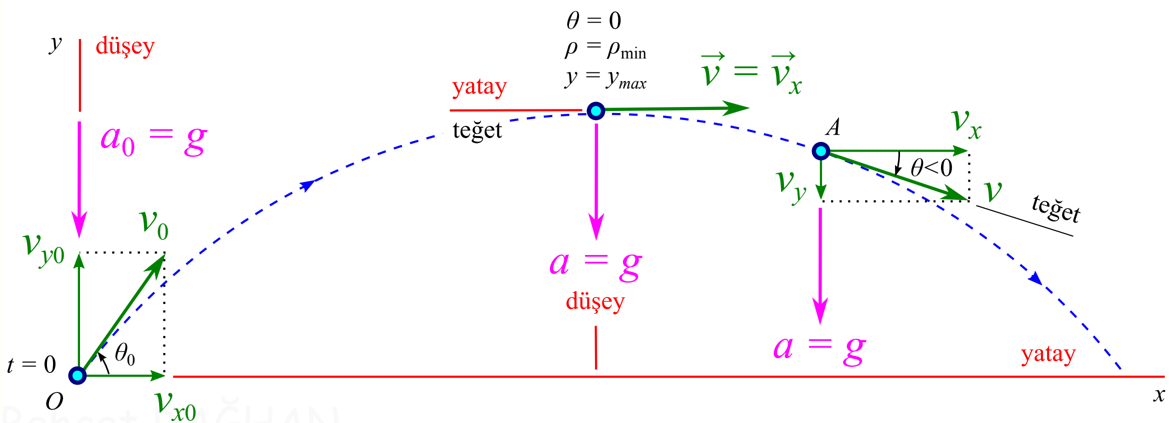
$$a_x = 0 \qquad a = g = \text{sb.}$$

$$a_y = -g = \text{sb.}$$

$$x = v_{x0}\ t \qquad y = v_{y0}\ t - \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

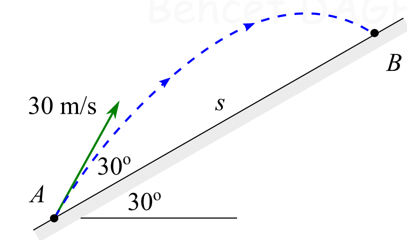
$$v_x = v_{x0} = \text{sb.} \qquad v_y = v_{y0} - g\ t$$

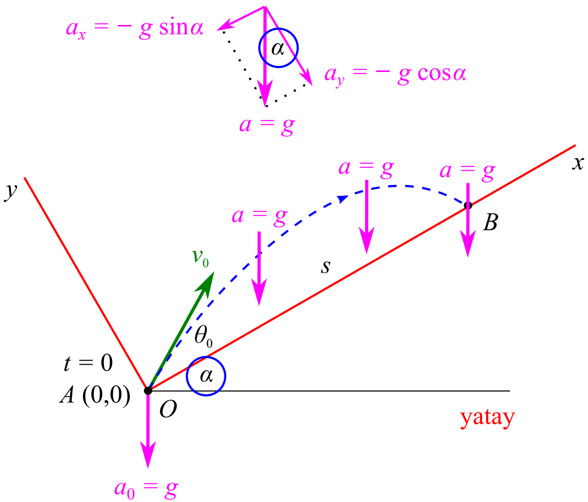
Bu kutunun içindeki bağıntılar *x*-*y* eksenleri yandaki gibi yatay ve düşey seçilirse geçerlidir.



Örnek Problem 2/5

30 m/s lik bir hızla şekildeki gibi fırlatılan bir cismin eğik düzlem üzerinden ölçülen menzili *s* yi hesaplayınız.





x-y eksenlerinin bu şekilde seçilmesi tavsiye edilmez.

Bazı öğrenciler *x-y* eksenlerini seçerken yandaki gibi eğik düzleme paralel ve dik olarak seçme eğiliminde olurlar. Fakat bunu yaparken ivme bileşenlerinin değiştiğine dikkat etmeden *x-y* eksenlerinin yatay ve düşey seçildiği durumda kullanılan bağıntıları kullanırlar. Halbuki *x-y* eksenleri yandaki gibi seçilirse ivme bileşenleri aşağıdaki gibi olur.

$$a_x = a_{x0} = -\,g \sin\alpha$$

$$a_y = a_{y0} = -\,g \cos\alpha$$

$$x = v_{x0}\, t - \frac{1}{2}\, g \sin\alpha\, t^2$$

$$y = v_{y0}\, t - \frac{1}{2}\, g \cos\alpha\, t^2$$

Bu bağıntılar, *x-y* eksenleri yukarıdaki gibi seçilirse geçerli değildir.

$$\cancel{a_x = 0}$$

$$\cancel{a_y = a_{y0} = -\,g}$$

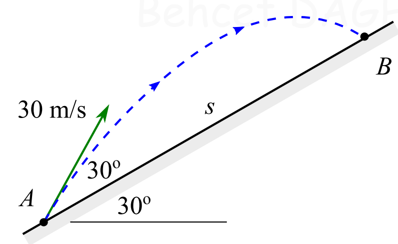
$$\cancel{x = v_{x0}\, t}$$

$$\cancel{y = v_{y0}\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2}$$

Yerçekiminden kaynaklanan ivme, daima düşeydir ve aşağıya yönelmiştir.

Örnek Problem 2/5

30 m/s lik bir hızla şekildeki gibi fırlatılan bir cismin eğik düzlem üzerinden ölçülen menzili *s* yi hesaplayınız.



Verilenler:

$a = a_0$ (sabit)

$a = g$

Yerçekiminden kaynaklanan ivme daima düşeydir ve aşağıya yönelmiştir.

$g = 9.81 \text{ m/s}^2$

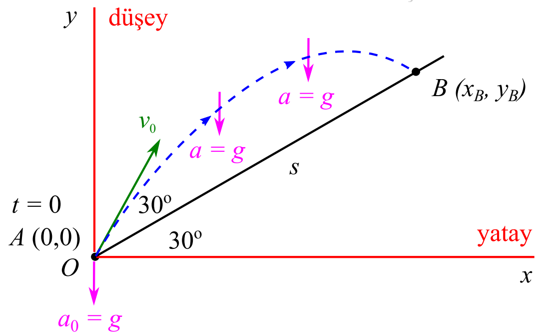
$v_0 = 30 \text{ m/s}$

$\theta_0 = 60^\circ$

İstenenler:

$s = ?$

Çözüm



$a_x = a_{x0} = 0$

$a_y = a_{y0} = -g = -9.81 \text{ m/s}^2$

$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0$

$v_{x0} = 30 \cos 60^\circ = 15 \text{ m/s}$

$v_{y0} = v_0 \sin\theta_0$

$v_{y0} = 30 \sin 60^\circ = 26 \text{ m/s}$

$x = v_{x0}\, t$ $\qquad$ $y = v_{y0}\, t + \frac{1}{2} a_{y0}\, t^2$

B noktasında: $\left.\begin{array}{r} x = x_B \\ y = y_B \\ t = t_B \end{array}\right\}$

$x_B = v_{x0}\, t_B$ $\qquad$ $y_B = v_{y0}\, t_B - \frac{1}{2} g\, t_B^2$

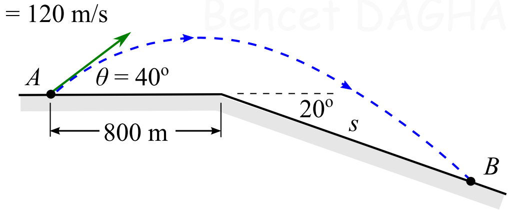
$t_B = \dfrac{x_B}{v_{x0}}$ $\qquad$ $\dfrac{y_B}{t_B} = v_{y0} - \dfrac{1}{2} g\, t_B$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{v_{x0}\ y_B}{x_B} = v_{y0} - \dfrac{g}{2}\dfrac{x_B}{v_{x0}} \\ x_B = s \cos 30^\circ \\ y_B = s \sin 30^\circ \end{array}\right\}$$

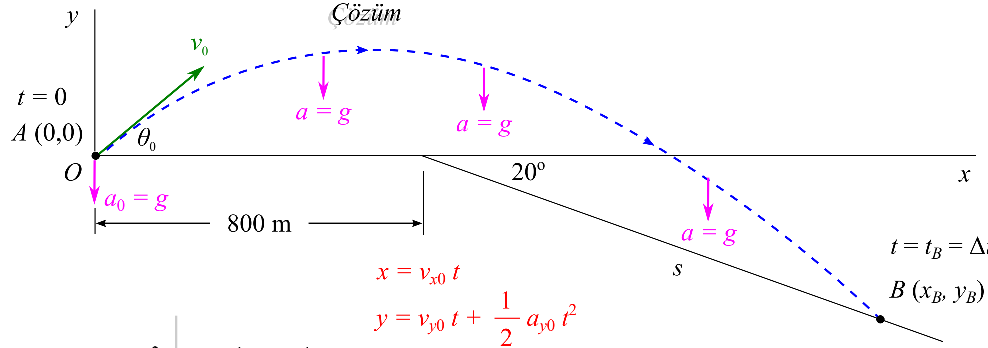
$s = 61.2 \text{ m}$

Örnek Problem 2/6

Bir mermi şekilde görüldüğü gibi A noktasından fırlatılmıştır. Çarptığı B noktasının eğik düzlem üzerindeki uzaklığı s yi bulunuz. Uçuş süresi t yi de hesaplayınız.



Çözüm



Verilenler:

$a = a_0$ (sabit)

$a = g$

Yerçekiminden kaynaklanan ivme daima düşeydir ve aşağıya yönelmiştir.

$g = 9.81\ \text{m/s}^2$

$v_0 = 120$ m/s

$\theta_0 = 40^o$

İstenenler:

$s = ?$

$\left.\begin{array}{l} t_1 = t_A = 0 \\ t_2 = t_B = t \end{array}\right\} \Delta t = t = ?$

içinde bulunulan an

aradan geçen zaman

$a_x = a_{x0} = 0$

$a_y = a_{y0} = -g = -9.81\ \text{m/s}^2$

$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0$

$v_{x0} = 120\cos 40^o = 91.9$ m/s

$v_{y0} = v_0 \sin\theta_0$

$v_{y0} = 120\sin 40^o = 77.1$ m/s

$x = v_{x0}\, t$

$y = v_{y0}\, t + \frac{1}{2} a_{y0}\, t^2$

B noktasında:

$\begin{array}{r} x = x_B \\ y = y_B \\ t = t_B \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_B = v_{x0}\, t_B \\ y_B = v_{y0}\, t_B - \frac{1}{2} g\, t_B^2 \end{array} \right.$

$\rightarrow \quad t_B = t = \dfrac{x_B}{v_{x0}} \quad \rightarrow \quad \boxed{t = 19.5 \text{ s}}$

$\dfrac{y_B}{t_B} = v_{y0} - \dfrac{1}{2} g\, t_B$

$\dfrac{v_{x0}\, y_B}{x_B} = v_{y0} - \dfrac{g}{2}\dfrac{x_B}{v_{x0}} \quad \rightarrow \quad g\, x_B^2 - 2\, v_{x0} v_{y0}\, x_B + 2\, v_{x0}^2\, y_B = 0$

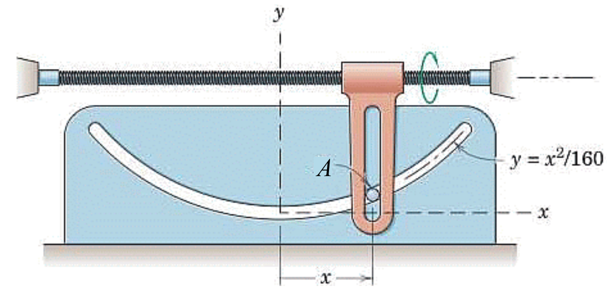
$\left.\begin{array}{r} x_B = 800 + s\cos 20^o \\ g\, x_B^2 - 2\, v_{x0} v_{y0}\, x_B + 2\, v_{x0}^2\, y_B = 0 \\ y_B = -\, s\sin 20^o \end{array}\right\} \quad \boxed{s = 1057 \text{ m}}$

t harfi çoğunlukla içinde bulunulan anı göstermek için kullanılır.
Ama bu problemde aradan geçen zaman Δt nin yerine de kullanılmıştır.
Eğer göz önüne alınan zaman aralığının başlangıcı sıfır seçilebilirse o zaman içinde bulunulan an ile aradan geçen zaman birbirine eşit olur. $t = \Delta t$ olur.

Buradaki t ler içinde bulunulan anı gösterir.	$x = v_{x0}\, t$ $y = v_{y0}\, t + \frac{1}{2} a_{y0}\, t^2$

Örnek Problem 2/7

A pimi, hareketinin belirli bir aralığında, x-yönündeki hızı sabit ve 20 mm/s olan kılavuz tarafından, sabitlenmiş parabolik yarık içerisinde hareket etmeye zorlanmıştır.
Bütün boyutlar milimetre ve saniye cinsindendir.
x = 60 mm iken A piminin hızının ve ivmesinin şiddetini bulunuz.



Verilenler:

$v_x = v_{x0}$

$v_x = 20$ mm/s (sabit)

Yörüngenin denklemi:

$$y = \frac{x^2}{160}$$

İstenenler:

x = 60 mm iken:

$v = ?$

$a = ?$

Çözüm

$v_x = \text{sb.} \rightarrow a_x = 0$ (sabit)

$$y = \frac{x^2}{160}$$

$$160\, y = x^2$$

$$160\, \dot{y} = 2\, x\, \dot{x}$$

$\left.\begin{array}{l} \dot{y} = v_y \\ \dot{x} = v_x \end{array}\right\}$ $80\, v_y = x\, v_x \rightarrow 80\, v_y = 60\,(20)$

$$v_y \Big|_{x = 60 \text{ mm}} = 15 \text{ mm/s}$$

$$80\, \dot{v}_y = \dot{x}\, v_x + x\, \dot{v}_x$$

$\left.\begin{array}{l} \dot{v}_y = a_y \\ \dot{x} = v_x \\ \dot{v}_x = a_x \end{array}\right\}$ $80\, a_y = v_x^2 + x\, \overset{0}{\cancel{a_x}}$

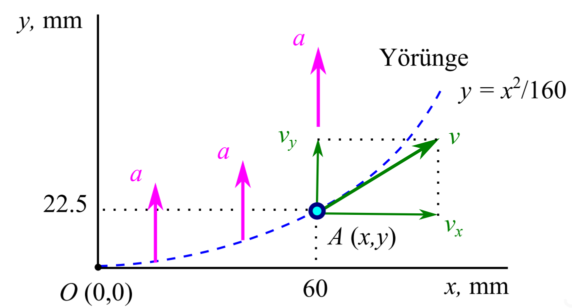
$80\, a_y = v_x^2 \rightarrow 80\, a_y = 20^2$

$a_y = 5$ mm/s^2 (sabit)

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \qquad a^2 = a_x^2 + a_y^2$$

$$v^2 = 20^2 + 15^2 \qquad a^2 = \overset{0}{\cancel{a_x}}{}^2 + 5^2$$

$$\boxed{v \Big|_{x = 60 \text{ mm}} = 25 \text{ mm/s}} \qquad \boxed{a = 5 \text{ mm/s}^2} \text{ (sabit)}$$



Örnek Problem 2/8

$x = (y^2/12) - 3$ eğrisinin pozitif y-kolu üzerinde hareket eden bir maddesel nokta $t = 0$ iken $y = 0$ konumundan ilk hızsız olarak harekete başlamıştır. Hızının y-bileşeni de $v_y = 2t$ bağıntısı ile değişmektedir. Yukarıdaki bağıntılarda x ve y metre, t saniye ve v_y m/s cinsindendir. $y = 9$ m iken bu maddesel noktanın hızının ve ivmesinin şiddetini bulunuz.

Çözüm

Verilenler:

$t = 0$ iken:

$y = y_0 = 0$

$v = v_0 = 0$

$v_y = 2t$

Yörüngenin denklemi:

$x = (y^2/12) - 3$

İstenenler:

$y = 9$ m iken:

$v = ?$

$a = ?$

$$\left.\begin{array}{l} a_y = \dot{v}_y \\ v_y = 2t \end{array}\right\} \quad a_y = 2 \text{ m/s}^2 \quad \text{(sabit)}$$

$$dy = v_y\, dt$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t 2t\, dt$$

$$\left.\begin{array}{l} y = t^2 \\ x = (y^2/12) - 3 \end{array}\right\} \quad x = (t^4/12) - 3$$

$$v_x = \dot{x}$$

$$v_x = t^3/3$$

$$a_x = \dot{v}_x$$

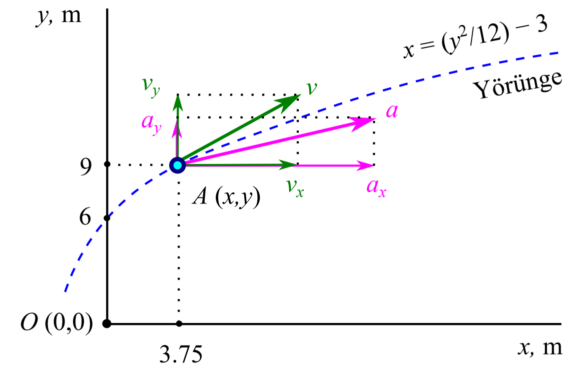
$$a_x = t^2$$

$$y = t^2$$

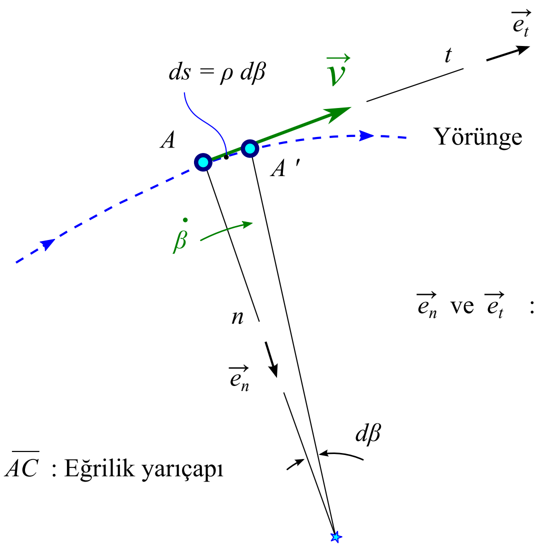
$y = 9$ m iken $\quad t = 3$ s

$$\left.\begin{array}{l} v_x = 9 \text{ m/s} \\ v_y = 6 \text{ m/s} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} v^2 = v_x^2 + v_y^2 \\ v^2 = 9^2 + 6^2 \end{array} \rightarrow \boxed{v\Big|_{y=9\text{ m}} = 10.8 \text{ m/s}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_x = 9 \text{ m/s}^2 \\ a_y = 2 \text{ m/s}^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a^2 = a_x^2 + a_y^2 \\ a^2 = 9^2 + 2^2 \end{array} \rightarrow \boxed{a\Big|_{y=9\text{ m}} = 9.22 \text{ m/s}^2}$$



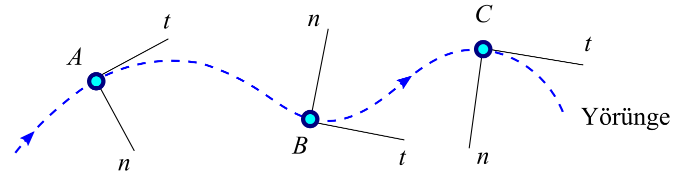
Normal ve teğetsel eksenler



$\vec{e}_n$ ve $\vec{e}_t$: Birim vektörler

$\rho = \overline{AC}$: Eğrilik yarıçapı

C : Eğrilik merkezi



Normal ve teğetsel eksenler maddesel nokta ile birlikte hareket ederler.

t-ekseni, daima yörüngeye teğettir ve hareket yönünde pozitiftir.

n-ekseni, ona dik ve yörüngenin içbükey tarafına doğru pozitiftir.

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{ds}{dt} \\ ds = \rho \, d\beta \end{array}\right\} \quad v = \frac{\rho \, d\beta}{dt}$$

$$\boxed{v = \rho \, \dot{\beta}}$$

Hız vektörü, daima *t*-ekseni ile çakışıktır.

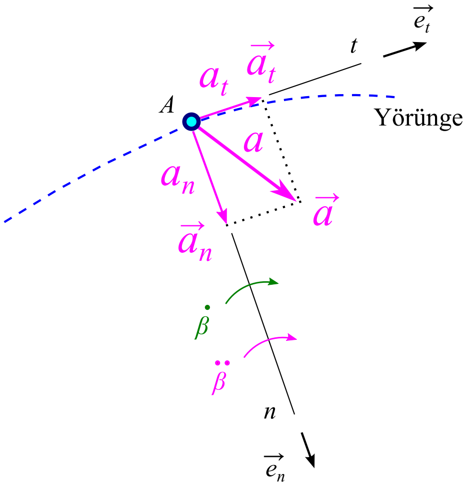
$$\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_t = \overset{0}{\cancel{v_n}} \, \vec{e}_n + v_t \, \vec{e}_t$$

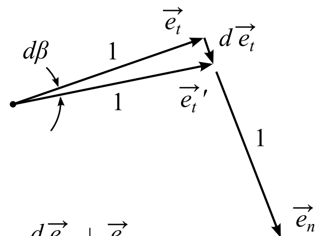
$$\vec{v} = \vec{v}_t = v_t \, \vec{e}_t = v \, \vec{e}_t$$

$$\vec{v} = v \, \vec{e}_t$$

$\dot{\beta}$: Eğrilik yarıçapının birim zamanda taradığı açı, eğrilik yarıçapının açısal hızı

v ve ρ daima pozitif olduğu için dönme yönünden bağımsız olarak $\rightarrow$ $\boxed{\dot{\beta} \text{ daima pozitiftir.}}$





$$d\vec{e}_t \perp \vec{e}_t$$

$$d\vec{e}_t \,//\, \vec{e}_n$$

$$d\vec{e}_t = |d\vec{e}_t|\ \vec{e}_n$$

$$\dot{\vec{e}}_t = \dot{\beta}\ \vec{e}_n \qquad \left\{ \begin{array}{l} d\vec{e}_t = (1)\, d\beta\ \vec{e}_n \\ \dot{\vec{e}}_t = \dfrac{d\vec{e}_t}{dt} \end{array} \right.$$

$$\vec{v} = v\ \vec{e}_t$$

$\downarrow$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}\ \vec{e}_t + v\ \dot{\vec{e}}_t \quad \rightarrow \quad \vec{a} = v\,\dot{\beta}\ \vec{e}_n + \dot{v}\ \vec{e}_t$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = a_n\ \vec{e}_n + a_t\ \vec{e}_t$$

$$v = \rho\,\dot{\beta}$$

$$\boxed{a_n = v\,\dot{\beta} = \rho\,\dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{\rho}}$$

$\boxed{a_n \text{ daima pozitiftir.}}$

a_n daima yörüngenin içbükey tarafına yönelmiştir.

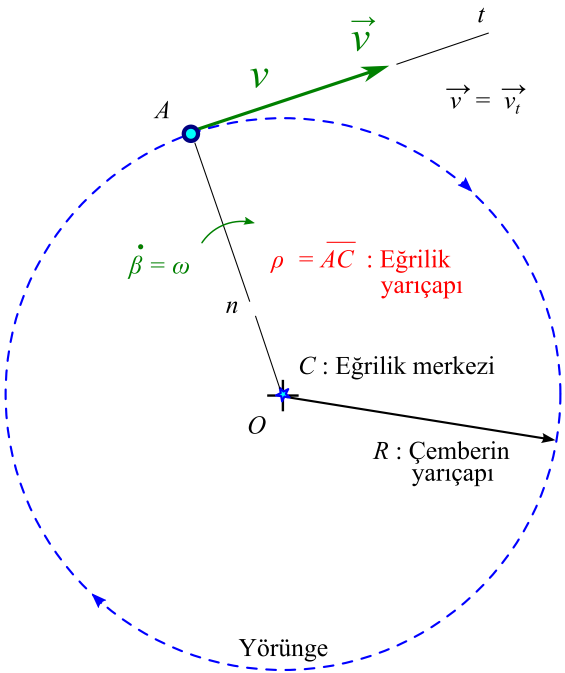
$$\boxed{a_t = \dot{v} = \frac{dv}{dt}} = \dot{\rho}\,\dot{\beta} + \rho\,\ddot{\beta}$$

Eğrisel harekette $a \neq \dfrac{dv}{dt}$ olduğunu görmüş oluyoruz.

$\ddot{\beta}$: Eğrilik yarıçapının açısal ivmesi

$$\boxed{a^2 = a_n^{\,2} + a_t^{\,2}}$$

Çembersel hareketin normal ve teğetsel eksenler ile incelenmesi :



$$\boxed{\rho = R = sb.}$$

$$v = \rho\,\dot{\beta}$$

$$\boxed{v = R\,\omega}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

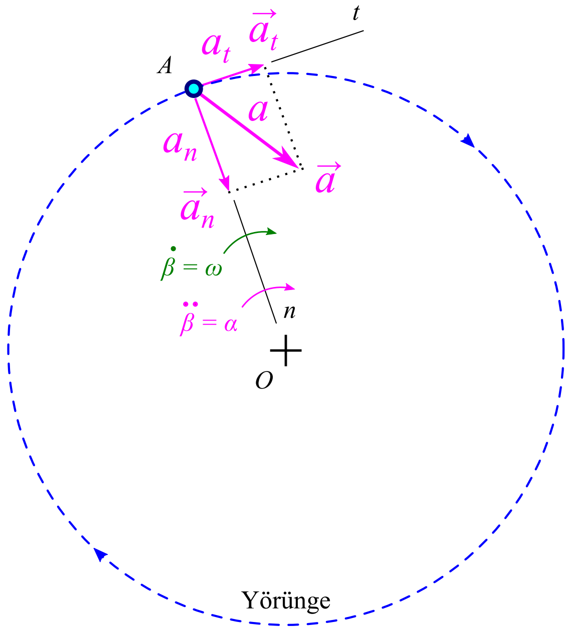
$$\boxed{a^2 = a_n^{\,2} + a_t^{\,2}}$$

$$a_n = v\,\dot{\beta} = \rho\,\dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\boxed{a_n = v\,\omega = R\,\omega^2 = \frac{v^2}{R}}$$

$$a_t = \dot{v} = \dot{\rho}\,\dot{\beta} + \rho\,\ddot{\beta}$$

$$\boxed{a_t = R\,\alpha}$$



Çembersel harekette açısal hız sabit ise :

$$\left.\begin{aligned} \rho &= R = \text{sb.} \\ \dot{\beta} &= \omega = \text{sb.} \end{aligned}\right\} \quad v = \text{sb.} \qquad a_t = 0 \qquad \vec{a} = \vec{a}_n \qquad \begin{aligned} a &= a_n \\ a &= v\,\omega = R\,\omega^2 = \frac{v^2}{R} \end{aligned} \qquad \vec{v} \perp \vec{a}$$

Örnek Problem 2/9

Bir mermi yatayla 30º lik açı yapan 360 m/s lik bir hızla ateşlenmiştir. Yörüngesinin, ateşlendikten 10 s sonraki eğrilik yarıçapı ρ yu bulunuz.

Verilenler:

$v_0 = 360$ m/s

$\theta_0 = 30^o$

$g = 9.81$ m/s^2

İstenenler:

$t = 10$ s anında:

$\rho = ?$

Çözüm

$v_{y0} = v_0 \sin\theta_0$

$v_{y0} = 360 \sin 30^o$

$v_{y0} = 180$ m/s

$v_y = v_{y0} - g\,t$

$t = 10$ s anında: $v_y = 81.9$ m/s

$v_y > 0$ olması merminin çıkış yaptığını gösterir.

$v_x =$ sb. $= v_{x0} = v_0 \cos\theta_0$

$v_x = 360 \cos 30^o = 311.8$ m/s (sabit)

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$

$v = 322.4$ m/s

$\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x}$

$\theta = 14.72^o$

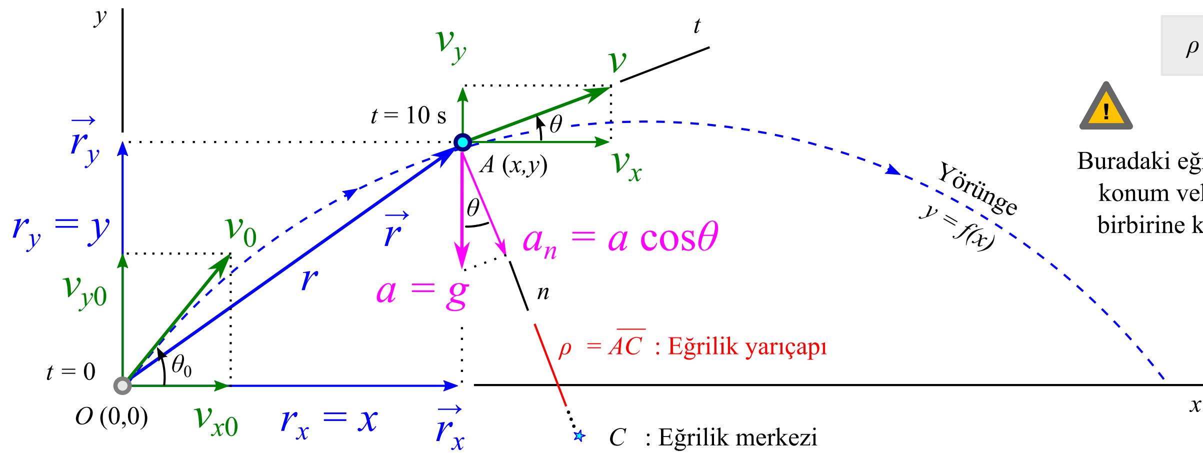
$a_n = a \cos\theta$

$a_n = 9.49$ m/s^2

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$

$\rho = \dfrac{v^2}{a_n}$

$\rho = 10\,953$ m



Buradaki eğrilik yarıçapı ρ ile konum vektörünün şiddeti r birbirine karıştırılmamalıdır.

$\rho \neq r$

$\rho = \overline{AC}$

$r = \overline{OA}$

Örnek Problem 2/10

Düzlemde eğrisel hareket yapan bir maddesel noktanın konumunun koordinatları zamana bağlı olarak $x = 2t^2 + 3t - 1$ ve $y = 5t - 2$ bağıntıları ile verilmiştir. Burada x ve y metre ve t saniye cinsindendir. $t = 1$ s anında eğrilik merkezi C nin koordinatlarını bulunuz.

Verilenler:

$x = 2t^2 + 3t - 1$

$y = 5t - 2$

İstenenler:

$t = 1$ s anında:

$x_C = ?$

$y_C = ?$

Çözüm

$v_x = \dot{x}$

$v_x = 4t + 3$

$v_y = \dot{y}$

$v_y = 5$ m/s (sabit)

$a_x = \ddot{x}$

$a_x = 4$ m/s^2 (sabit)

$a_y = \ddot{y}$

$a_y = 0$ (sabit)

$a^2 = a_x^2 + a_y^2$

$a^2 = a_x^2 + \cancel{a_y^2}^{\,0}$

$a = 4$ m/s^2 (sabit)

$t = 1$ s anında:

$x = 4$ m
$y = 3$ m
$v_x = 7$ m/s
$v_y = 5$ m/s

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$

$v^2 = 74$ (m/s)^2

$\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x}$

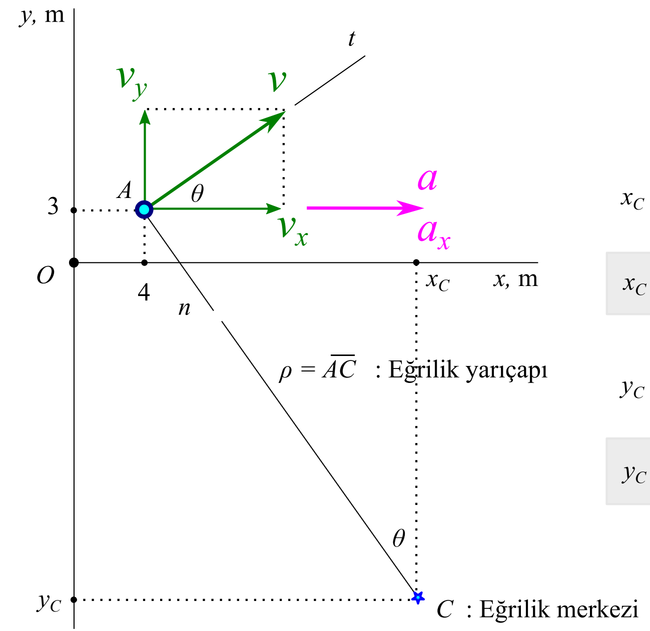
$\theta = 35.54^\circ$

$a_n = a \sin\theta$

$a_n = 2.32$ m/s^2

$\rho = \dfrac{v^2}{a_n}$

$\rho = 31.83$ m



$x_C = \rho \sin\theta + 4$

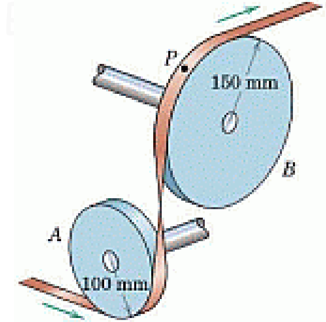
$x_C = 22.5$ m

$y_C = -(\rho \cos\theta - 3)$

$y_C = -22.9$ m

Örnek Problem 2/11

Bir nümerik kontrol cihazına ait bandın hareketinin yönü, şekildeki gibi *A* ve *B* makaraları ile değiştirilmektedir. Bandın hızı, makaralardan 8 m lik kısmının geçmesi esnasında, düzgün bir şekilde 2 m/s den 18 m/s ye çıkmaktadır. Bandın hızı 3 m/s olduğunda *B* makarası ile temas eden bant üzerindeki *P* noktasının ivmesinin şiddetini hesaplayınız.



Verilenler:

Bandın hızı düzgün bir şekilde artıyor.
O halde bandın üzerinde bulunan bir nokta için:

$a_t = \text{sb.}$

$\Delta s = 8 \text{ m}$

$v_1 = 2 \text{ m/s}$

$v_2 = 18 \text{ m/s}$

$r_A = 100 \text{ mm}$

$r_B = 150 \text{ mm}$

İstenenler:

$v = 3$ m/s olduğunda:

$a = ?$

Çözüm

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Bandın, *B* makarasına sarılı kısmında bulunan bir nokta için:

$$a_n = \frac{v^2}{r_B} \leftarrow \rho = r_B$$

$$v = 3 \text{ m/s} \rightarrow a_n = 60 \text{ m/s}^2$$

$$v\,dv = a_t\,ds$$

$$\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = a_t \underbrace{\int_{s_1}^{s_2} ds}_{\Delta s = 8 \text{ m}}$$

$$a_t = 20 \text{ m/s}^2 \quad \text{(sabit)}$$

$$a^2 = a_n^2 + a_t^2$$

$v = 3$ m/s olduğunda: $\boxed{a = 63.2 \text{ m/s}^2}$

Örnek Problem 2/12

x-y düzleminde hareket eden bir maddesel noktanın konum vektörü $\vec{r} = 20\,t^2\,\vec{i} + (20/3)\,t^3\,\vec{j}$ şeklinde verilmiştir. Buradaki $\vec{r}$ milimetre ve t saniye cinsindendir. $t = 2$ s anında maddesel noktanın bulunduğu konumdaki yörüngenin eğrilik yarıçapı ρ yu hesaplayınız.

Çözüm

Verilenler:

$\vec{r} = 20\,t^2\,\vec{i} + (20/3)\,t^3\,\vec{j}$

İstenenler:

$t = 2$ s anında:

$\rho = ?$

$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

$$\vec{r} = \underbrace{20\,t^2}_{x}\,\vec{i} + \underbrace{(20/3)\,t^3}_{y}\,\vec{j}$$

$x = 20\,t^2$

$y = (20/3)\,t^3$

$v_x = \dot{x}$ $\qquad a_x = \ddot{x}$

$v_x = 40\,t$ $\qquad a_x = 40$ mm/s^2 (sabit)

$v_y = \dot{y}$ $\qquad a_y = \ddot{y}$

$v_y = 20\,t^2$ $\qquad a_y = 40\,t$

$t = 2$ s anında:

$v_x = 80$ mm/s

$v_y = 80$ mm/s

$a_x = 40$ mm/s^2 (sabit)

$a_y = 80$ mm/s^2

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$

$v^2 = 12\,800$ (mm/s)^2

$a^2 = a_x^2 + a_y^2$

$a = 40\sqrt{5}$ mm/s^2

$a_n = a\cos(45^\circ + 26.6^\circ)$

veya

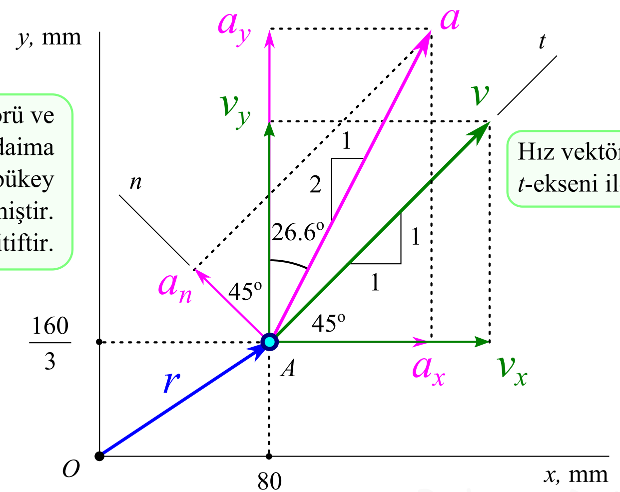
$a_n = -a_x \sin 45^\circ + a_y \cos 45^\circ$

$a_n = 28.23$ mm/s^2

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}$$

$\rho = 453$ mm

İvme vektörü ve n-ekseni daima yörüngenin içbükey tarafına yönelmiştir. a_n daima pozitiftir.



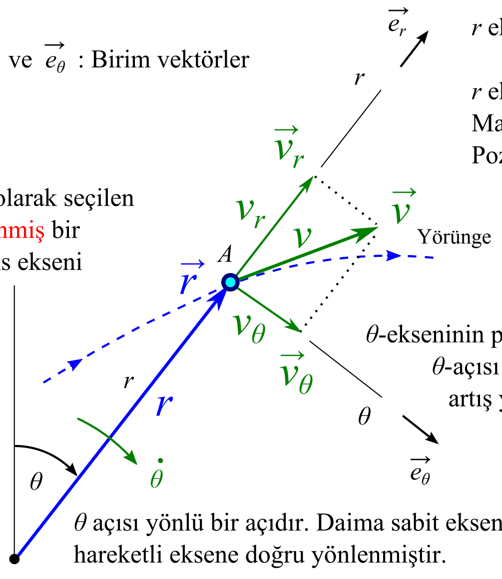
Hız vektörü daima t-ekseni ile çakışıktır.

Behcet DAĞHAN

Polar koordinatlar (r,θ)

$\vec{e}_r$ ve $\vec{e}_\theta$: Birim vektörler

Keyfi olarak seçilen sabitlenmiş bir referans ekseni



θ açısı yönlü bir açıdır. Daima sabit eksenden hareketli eksene doğru yönlenmiştir.

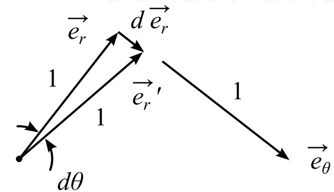
Orijin (pole=kutup) keyfi olarak seçilen bir noktadır.

r ekseninin pozitif tarafı, θ açısının ölçüldüğü taraftır.

r ekseni, daima konum vektörü ile çakışıktır.
Maddesel nokta daima r ekseni üzerindedir.
Pozitif tarafta da olabilir negatif tarafta da olabilir.

Konum vektörünün şiddeti olan r daima pozitiftir, ama koordinat olan r pozitif veya negatif olabilir.

θ-ekseninin pozitif yönü, θ-açısı için seçilen artış yönündedir.



$d\,\vec{e}_r \perp \vec{e}_r$

$d\,\vec{e}_r \;//\; \vec{e}_\theta$

Yönleri aynıdır.

$d\,\vec{e}_r = |d\,\vec{e}_r|\;\vec{e}_\theta$

$d\,\vec{e}_r = (1)\,d\theta\;\vec{e}_\theta$

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{d\,\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta\;\vec{e}_\theta}{dt} \leftarrow$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\;\vec{e}_\theta$$

$r = \overline{OA}$

↑

Konum vektörü Koordinat

↓ ↓

$$\vec{r} = r\;\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\;\vec{e}_r + r\;\dot{\vec{e}}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\;\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\;\vec{e}_\theta$$

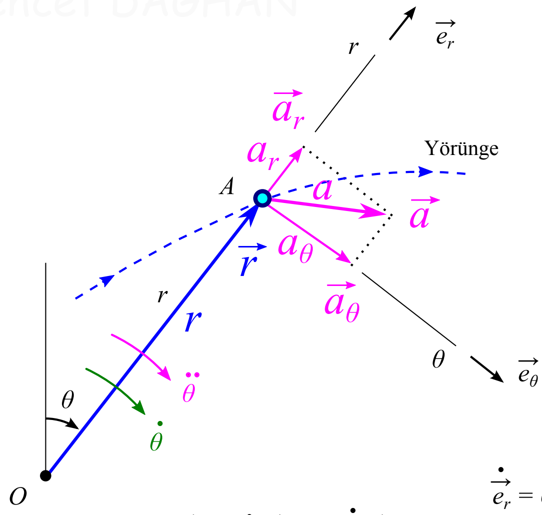
$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta = v_r\,\vec{e}_r + v_\theta\,\vec{e}_\theta$$

$\dot{r}$: r koordinatında, birim zamanda meydana gelen değişme, r koordinatının değişme hızı

$\dot{\theta}$: r ekseninin birim zamanda taradığı açı, r ekseninin açısal hızı

$$\boxed{v^2 = v_r^2 + v_\theta^2} \qquad \boxed{v_r = \dot{r}} \qquad \boxed{v_\theta = r\,\dot{\theta}}$$

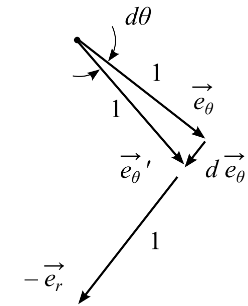
Zaman geçtikçe : θ açısı artıyorsa : $\dot{\theta} > 0$
θ açısı değişmiyorsa : $\dot{\theta} = 0$
θ açısı azalıyorsa : $\dot{\theta} < 0$



$$d\vec{e}_\theta \perp \vec{e}_\theta$$

$$d\vec{e}_\theta \;//\; (-\vec{e}_r)$$

Yönleri aynıdır.



$$d\vec{e}_\theta = |\,d\vec{e}_\theta\,|\;(-\vec{e}_r)$$

$$d\vec{e}_\theta = (1)\,d\theta\;(-\vec{e}_r)$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \quad \leftarrow$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = \dot{\theta}\;(-\vec{e}_r)$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\;\vec{e}_r$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\;\vec{e}_\theta$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\vec{e}}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta = a_r\,\vec{e}_r + a_\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\boxed{a^2 = a_r^2 + a_\theta^2} \qquad \boxed{a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2} \qquad \boxed{a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a_r \neq \dot{v}_r \\ a_\theta \neq \dot{v}_\theta \end{array}}$$

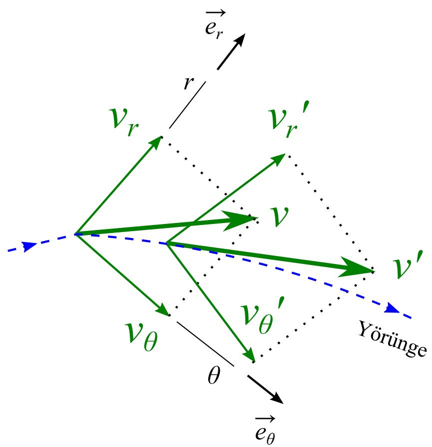
$$\left.\begin{array}{l} v_r = \dfrac{dr}{dt} \\ \dot{v}_r = \dfrac{dv_r}{dt} \end{array}\right\} \qquad \boxed{v_r\,dv_r = \dot{v}_r\,dr}$$

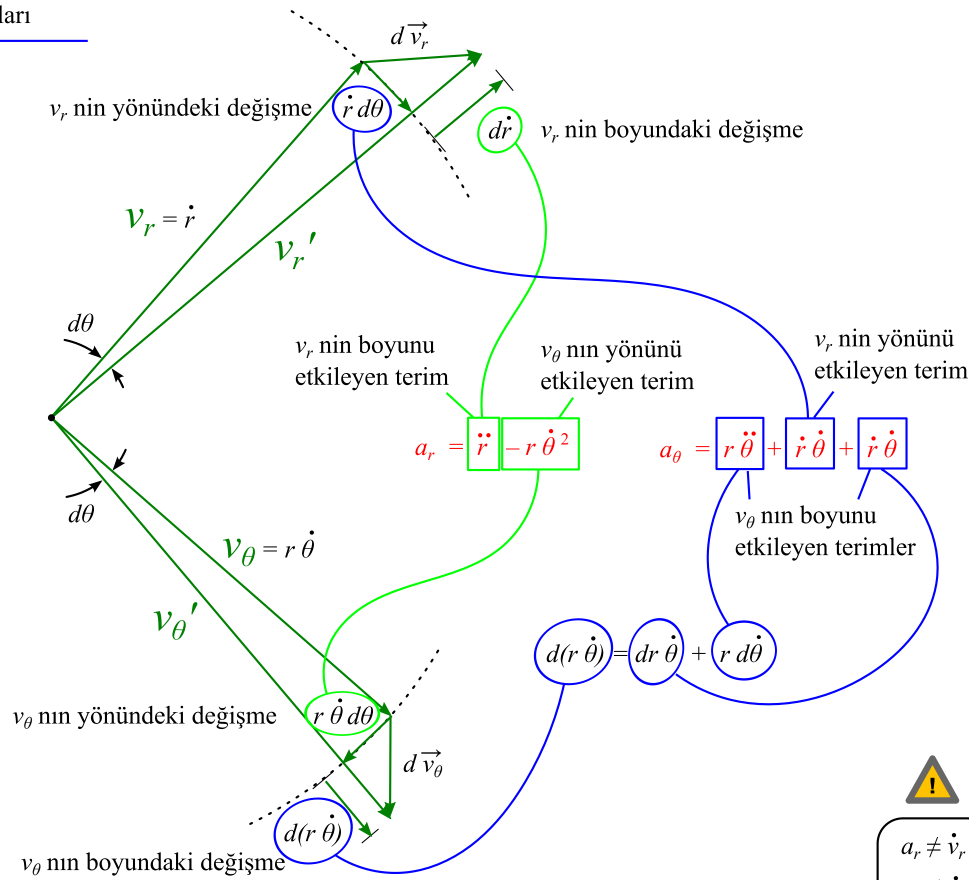
$$\left.\begin{array}{l} v_r = \dot{r} \\ \dot{v}_r = \ddot{r} \end{array}\right\} \qquad \dot{r}\,d\dot{r} = \ddot{r}\,dr$$

$\ddot{r}$: r koordinatında birim zamanda meydana gelen değişmedeki birim zamanda meydana gelen değişme; r koordinatının değişme ivmesi

$\ddot{\theta}$: r ekseninin birim zamanda taradığı açıdaki birim zamanda meydana gelen değişme; r ekseninin açısal ivmesi

dt kadar zaman aralığında hız vektörünün yönünde ve şiddetinde meydana gelen değişimlerin ivme terimlerindeki karşılıkları



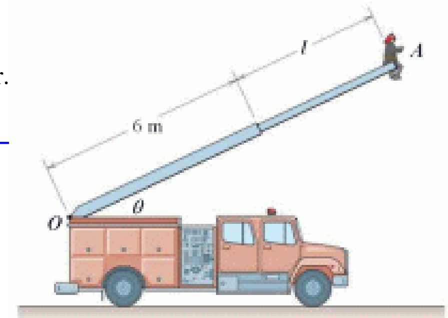


$a_r \neq \dot{v}_r$

$a_\theta \neq \dot{v}_\theta$

Örnek Problem 2/13

Bir itfaiye aracının merdiveni, sabit $\dot{l} = 150$ mm/s hızı ile uzamakta ve sabit $\dot{\theta} = 2$ deg/s oranında yükselmektedir. $\theta = 50^\circ$ ve $l = 4$ m konumuna erişildiğinde A daki itfaiyecinin hızının ve ivmesinin şiddetini bulunuz.



Verilenler:

$\dot{l} = 150$ mm/s (sabit)

$\dot{\theta} = 2$ deg/s (sabit)

İstenenler:

$\left.\begin{array}{l}\theta = 50^\circ \\ l = 4 \text{ m}\end{array}\right\}$ $v = ?$ $a = ?$

Çözüm

$r = \overline{OA} = 6 \text{ m} + l$

$\dot{r} = \dot{l}$ (sabit) $\rightarrow$ $\ddot{r} = \ddot{l} = 0$

$\dot{\theta} = 2$ deg/s $= 2\,(\pi/180)$ rad/s

$\dot{\theta} = \pi/90$ rad/s (sabit) $\rightarrow$ $\ddot{\theta} = 0$

$l = 4$ m iken

$r = 6 + 4 = 10$ m

$r = 10^4$ mm

$v_r = \dot{r}$

$v_r = 150$ mm/s

$v_\theta = r\,\dot{\theta}$

$v_\theta = 10^4\,(\pi/90) = 349$ mm/s

$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2$

$\boxed{v = 380 \text{ mm/s}}$

$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$

$a_r = 0 - 10^4\,(\pi/90)^2$

$a_r = -\,10^4\,(\pi/90)^2$

$a_r = -\,12.2$ mm/s^2

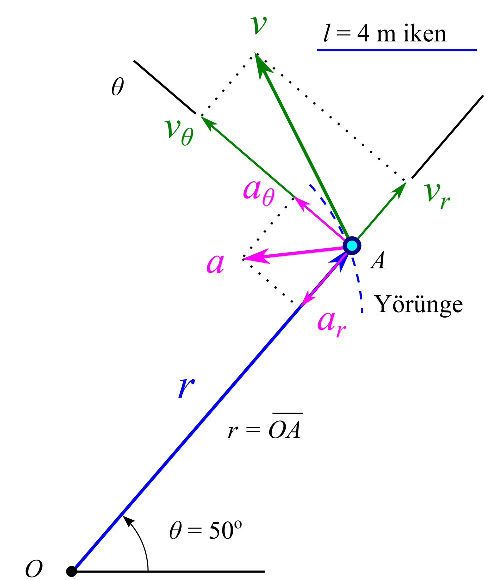
$a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}$

$a_\theta = 0 + 2\,(150)\,(\pi/90)$

$a_\theta = 10.5$ mm/s^2

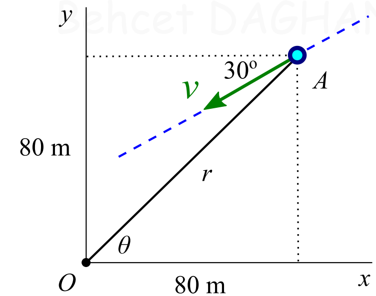
$a^2 = a_r^2 + a_\theta^2$

$\boxed{a = 16 \text{ mm/s}^2}$



Örnek Problem 2/14

Doğrusal bir yörünge üzerinde hareket eden *A* maddesel noktası, şekilde görülen konumdan v = 100 m/s lik sabit şiddette bir hızla geçmektedir. Bu andaki $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{r}$ ve $\ddot{\theta}$ değerlerini bulunuz.



Verilenler:

$x = 80$ m

$y = 80$ m

$\theta = 45^o$

$\alpha = 30^o$

$v = 100$ m/s (sabit)

$a = 0$

İstenenler:

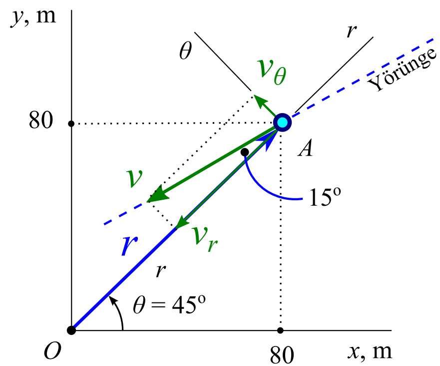
$\dot{r} = ?$

$\dot{\theta} = ?$

$\ddot{r} = ?$

$\ddot{\theta} = ?$

Çözüm



$$v_r = -\, v \cos 15^o \qquad v_r = \dot{r}$$

$$\boxed{\dot{r} = -\,96.6 \text{ m/s}}$$

$$v_\theta = v \sin 15^o \qquad v_\theta = r\,\dot{\theta}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = 0.229 \text{ rad/s}}$$

$$r^2 = 80^2 + 80^2$$

$$r = 80\sqrt{2} \text{ m}$$

$$v = \text{sb.} \quad \rightarrow \quad a = 0$$

Doğrusal harekette hızın şiddeti sabit ise ivme sıfırdır.
İvme sıfır ise, herhangi bir doğrultuya dik izdüşümü de sıfırdır.

$$a_r = 0 \qquad a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$$

$$0 = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\ddot{r} = 5.92 \text{ m/s}^2}$$

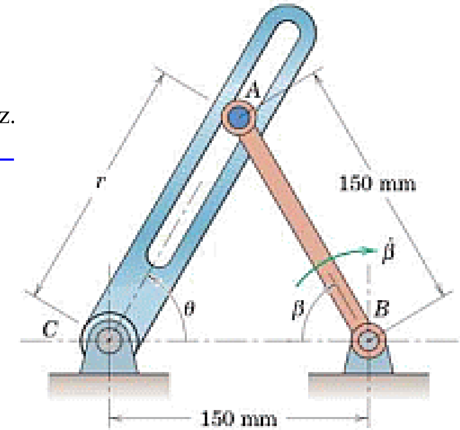
$$a_\theta = 0 \qquad a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}$$

$$0 = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = 0.391 \text{ rad/s}^2}$$

Örnek Problem 2/15

Şekildeki AB kolu, β açısının sınırlı bir aralığında dönmekte ve A ucu, yarıklı AC kolunun da dönmesine sebep olmaktadır. β nın 60^o ve sabit olan $\dot{\beta}$ nın da 0.6 rad/s olduğu şekilde görülen anda $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ ve $\ddot{\theta}$ değerlerini bulunuz.



Verilenler:

$\overline{AB} = R = 150$ mm

$\rho = R$

$\overline{BC} = 150$ mm

$\dot{\beta} = 0.6$ rad/s (sabit)

$\dot{\beta} = \omega$

İstenenler:

$\beta = 60^o$ iken :

$\dot{r} = ?$

$\dot{\theta} = ?$

$\ddot{r} = ?$

$\ddot{\theta} = ?$

Çözüm

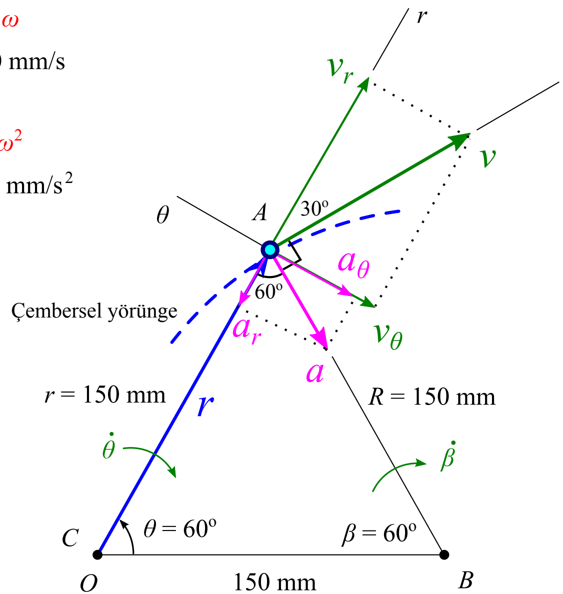
A noktası AB yarıçaplı çembersel bir yörünge üzerinde sabit bir açısal hız ile hareket etmektedir. Dolayısıyla A nın hızı da sabit şiddettedir, AB koluna diktir ve dönme yönündedir. İvmesi de hızına dik ve çemberin merkezi B ye yönelmiştir.

$v = R\,\omega$

$v = 90$ mm/s

$a = R\,\omega^2$

$a = 54$ mm/s^2



$v_r = v\cos 30^o$

$v_r = \dot{r}$

$\boxed{\dot{r} = 77.9 \text{ mm/s}}$

$v_\theta = -\,v\sin 30^o$

$v_\theta = r\,\dot{\theta}$

$\boxed{\dot{\theta} = -\,0.3 \text{ rad/s}}$

$a_r = -\,a\cos 60^o$

$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$

$\boxed{\ddot{r} = -\,13.5 \text{ mm/s}^2}$

$a_\theta = -\,a\sin 60^o$

$a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}$

$\boxed{\ddot{\theta} = 0}$

Örnek Problem 2/16

Bir roket düşey düzlemde yer alan bir yörüngede ilerlerken A noktasındaki bir radar tarafından izlenmektedir.
Belirli bir anda, radar ölçümleri şunlardır: $r = 10.5$ km, $\dot{r} = 480$ m/s, $\dot{\theta} = 0$ ve $\ddot{\theta} = -\,0.0072$ rad/s^2.
Roketin yörüngesinin bu andaki eğrilik yarıçapı ρ yu bulunuz.

Çözüm

Verilenler:

$r = 10.5$ km

$\dot{r} = 480$ m/s

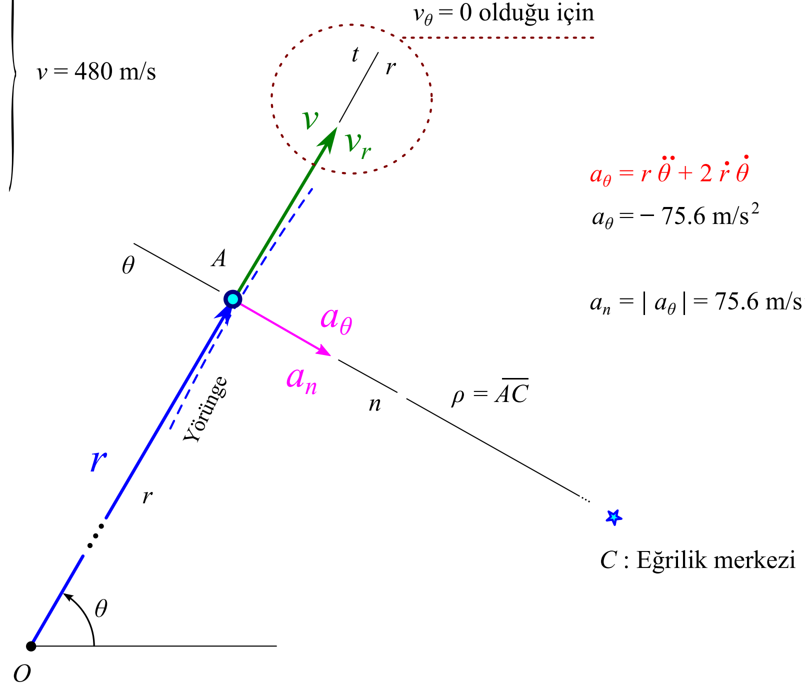
$\dot{\theta} = 0$

$\ddot{\theta} = -\,0.0072$ rad/s^2

İstenenler:

$\rho = ?$

$$\left.\begin{array}{l} v_r = \dot{r} \\ v_r = 480 \text{ m/s} \\ v_\theta = r\,\dot{\theta} \\ v_\theta = r\,\cancel{\dot{\theta}}^{\,0} = 0 \\ v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 \end{array}\right\} \quad v = 480 \text{ m/s}$$



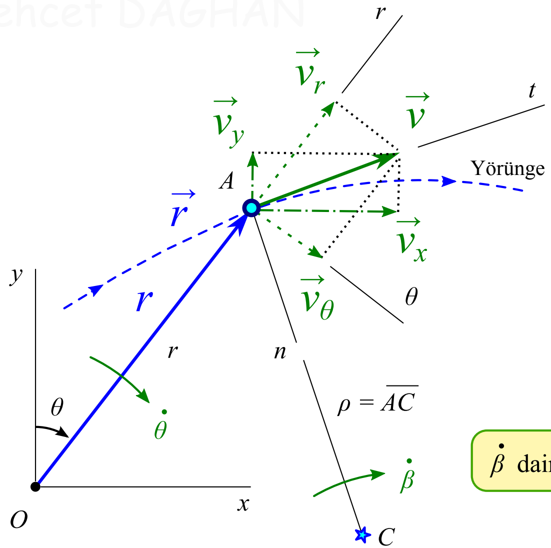
$a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}$

$a_\theta = -\,75.6$ m/s^2

$a_n = |\,a_\theta\,| = 75.6$ m/s^2 (a_n daima pozitiftir.)

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$\rho = 3048$ m



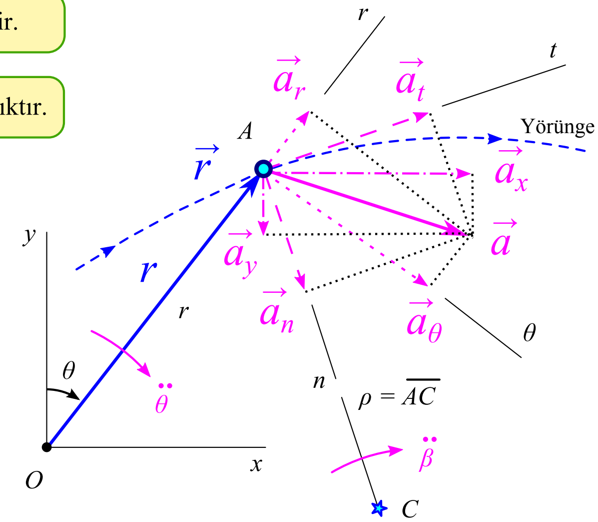
Hız vektörü daima yörüngeye teğettir.

Hız vektörü daima t-ekseni ile çakışıktır.

İvme vektörü daima yörüngenin içbükey tarafına yönelmiştir.

$\dot{\beta}$ daima pozitiftir.

a_n daima pozitiftir.



$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = \vec{v}_t = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_r^2 + v_\theta^2$$

$$v_x = \dot{x} \qquad v = v_t \qquad v_r = \dot{r}$$

$$v_y = \dot{y} \qquad v = \rho\,\dot{\beta} \qquad v_\theta = r\,\dot{\theta}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = \vec{a}_n + \vec{a}_t = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta$$

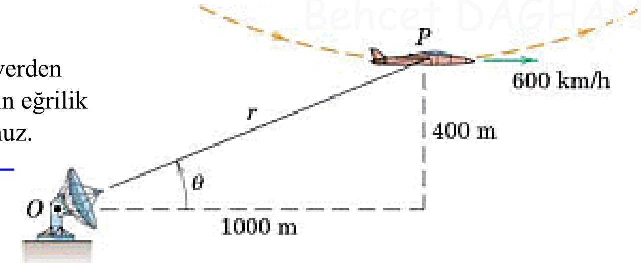
$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_n^2 + a_t^2 = a_r^2 + a_\theta^2$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \qquad a_n = v\,\dot{\beta} = \rho\,\dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{\rho} \qquad a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \qquad a_t = \dot{v} \qquad a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}$$

Örnek Problem 2/17

Düşey olan (r-θ) düzleminde yer alan eğrisel yörüngesinin en alt konumunda iken P uçağının yerden yüksekliği 400 m ve yatay olan hızı 600 km/h tir. İvmesinin yatay bileşeni yoktur. Yörüngesinin eğrilik yarıçapı 1200 m dir. O noktasındaki radar tarafından kaydedilen $\ddot{r}$ nın bu andaki değerini bulunuz.



Çözüm

Verilenler:

$v = 600$ km/h

$\rho = 1200$ m

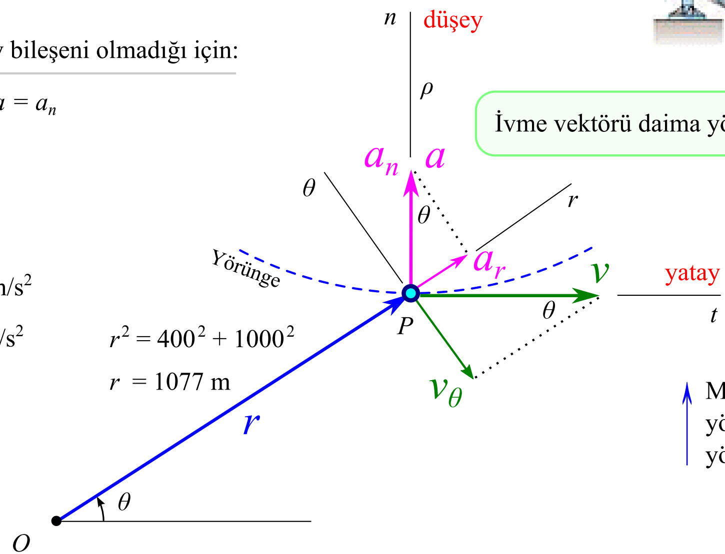
İvmenin yatay bileşeni olmadığı için:

$a = a_n$

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$

$a_n = 23.15\ \text{m/s}^2$

$a = 23.15\ \text{m/s}^2$



$r^2 = 400^2 + 1000^2$

$r = 1077$ m

İvme vektörü daima yörüngenin içbükey tarafına yönelmiştir

Hız vektörü daima yörüngeye teğettir ve t-ekseni ile çakışıktır.

Maddesel nokta, yörüngesinin en alt konumunda bulunduğu için yörüngesinin teğeti yataydır.

İstenenler:

$\ddot{r} = ?$

$\tan\theta = 400/1000$

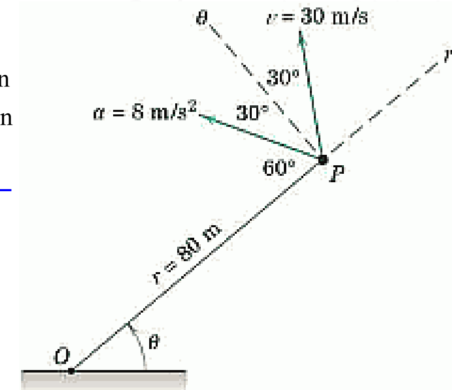
$\theta = 21.8^\circ$

$\left.\begin{aligned} v_\theta &= -\,v\sin\theta \\ v_\theta &= r\,\dot{\theta} \end{aligned}\right\}$ $\dot{\theta} = -\,0.0575$ rad/s

$\left.\begin{aligned} a_r &= a\sin\theta \\ a_r &= \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 \end{aligned}\right\}$ $\boxed{\ddot{r} = 12.16\ \text{m/s}^2}$

Örnek Problem 2/18

Göz önüne alınan anda, düzlemde eğrisel hareket yapan P maddesel noktası şekilde görüldüğü gibi O kutbundan 80 m uzaklıktadır. Maddesel noktanın hızı ve ivmesi şekilde verilmiştir. Bu anda $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ ve $\ddot{\theta}$ değerlerini, ivmenin n ve t bileşenlerini ve yörüngenin eğrilik yarıçapı ρ yu bulunuz.



Çözüm

Verilenler:

$r = 80$ m

$v = 30$ m/s

$a = 8$ m/s^2

İstenenler:

$\dot{r} = ?$

$\ddot{r} = ?$

$\dot{\theta} = ?$

$\ddot{\theta} = ?$

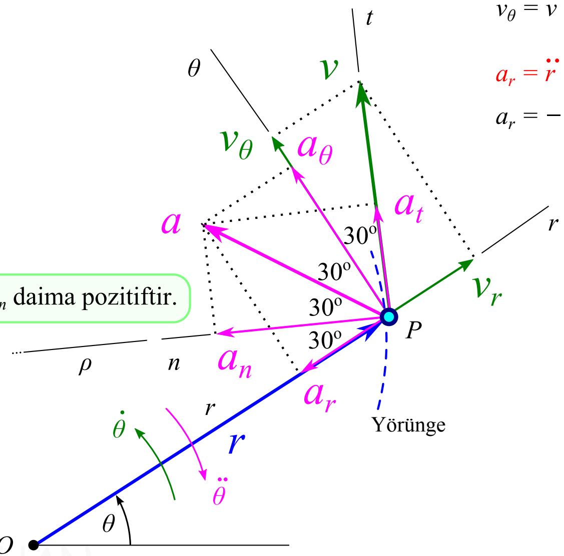
$a_n = ?$

$a_t = ?$

$\rho = ?$

Hız vektörü daima yörüngeye teğettir ve t-ekseni ile çakışıktır.

a_n daima pozitiftir.



$v_r = \dot{r}$, $v_r = v \sin 30^\circ$ $\quad$ $\boxed{\dot{r} = 15 \text{ m/s}}$

$v_\theta = r\,\dot{\theta}$, $v_\theta = v \cos 30^\circ$ $\quad$ $\boxed{\dot{\theta} = 0.325 \text{ rad/s}}$

$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$, $a_r = -\,a \cos 60^\circ$ $\quad$ $\boxed{\ddot{r} = 4.438 \text{ m/s}^2}$

$a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}$, $a_\theta = a \sin 60^\circ$ $\quad$ $\boxed{\ddot{\theta} = -\,0.0352 \text{ rad/s}^2}$

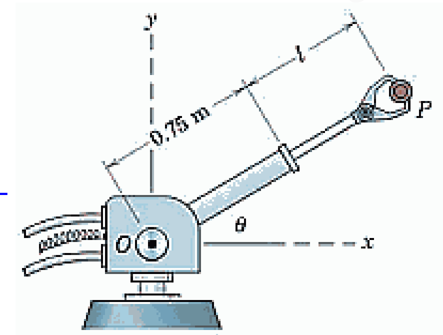
$a_n = a \cos 30^\circ$ $\quad$ $\boxed{a_n = 6.93 \text{ m/s}^2}$

$a_t = a \sin 30^\circ$ $\quad$ $\boxed{a_t = 4 \text{ m/s}^2}$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$ $\quad$ $\boxed{\rho = 129.9 \text{ m}}$

Örnek Problem 2/19

Şekildeki robot kolu, aynı anda hem yükselip hem de uzamaktadır. Verilen bir anda, $\theta = 30^{\circ}$, $\dot{\theta} = 10$ deg/s = sb. $l = 0.5$ m, $\dot{l} = 0.2$ m/s ve $\ddot{l} = -\,0.3$ m/s^2 dir. Robot kolun tuttuğu P parçasının hızının ve ivmesinin şiddetini hesaplayınız. Ayrıca hız ve ivmeyi $\vec{i}$ ve $\vec{j}$ birim vektörleri cinsinden yazınız.



Verilenler:

$\theta = 30^{\circ}$

$\dot{\theta} = 10$ deg/s (sabit)

$\dot{\theta} = (\pi/18)$ rad/s

$l = 0.5$ m

$\dot{l} = 0.2$ m/s

$\ddot{l} = -\,0.3$ m/s^2

İstenenler:

$v = ?$

$a = ?$

$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}$

$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$

$r = 0.75\text{ m} + l$

$\dot{r} = \dot{l} = 200$ mm/s

$\ddot{r} = \ddot{l} = -\,300$ mm/s^2

$v_r = \dot{r} = 200$ mm/s

$v_\theta = r\,\dot{\theta} = 218$ mm/s

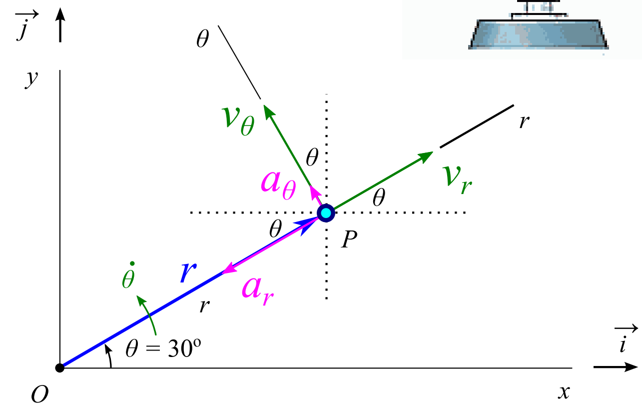
$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2$

$\boxed{v = 296\text{ mm/s}}$

$l = 0.5$ m iken:

$r = 0.75 + 0.5$
$\quad = 1.25$ m
$\quad = 1250$ mm

Çözüm



$\dot{\theta} = \text{sb.} \;\rightarrow\; \ddot{\theta} = 0$

$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 = -\,338$ mm/s^2

$a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} = 70$ mm/s^2

$a^2 = a_r^2 + a_\theta^2$

$\boxed{a = 345\text{ mm/s}^2}$

$v_x = v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta = 64$ mm/s

$v_y = v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta = 289$ mm/s

$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}$

$\boxed{\vec{v} = 64\,\vec{i} + 289\,\vec{j}\text{ mm/s}}$

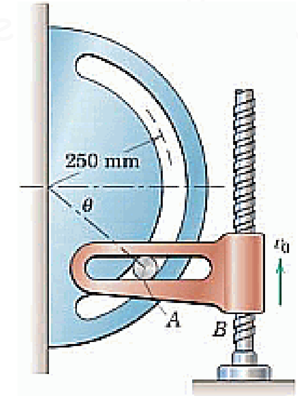
$a_x = -\,|\,a_r\,|\cos\theta - a_\theta\sin\theta = -\,328$ mm/s^2

$a_y = -\,|\,a_r\,|\sin\theta + a_\theta\cos\theta = -\,108$ mm/s^2

$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$

$\boxed{\vec{a} = -\,328\,\vec{i} - 108\,\vec{j}\text{ mm/s}^2}$

Örnek Problem 2/20



Şekildeki mekanizmada, A piminin çembersel yarık içerisindeki hareketi B kılavuzu tarafından kontrol edilmektedir. B kılavuzu, hareketinin belirli bir aralığında bağlı olduğu vida vasıtası ile $v_0 = 2$ m/s lik sabit bir hızla yukarı doğru kaldırılmaktadır. $\theta = 30^\circ$ iken A piminin ivmesinin normal ve teğetsel bileşenlerini hesaplayınız.

Verilenler:

$\rho = R = 250$ mm

ρ (sabit)

$v_0 = 2$ m/s (sabit)

İstenenler:

$\theta = 30^\circ$ iken:

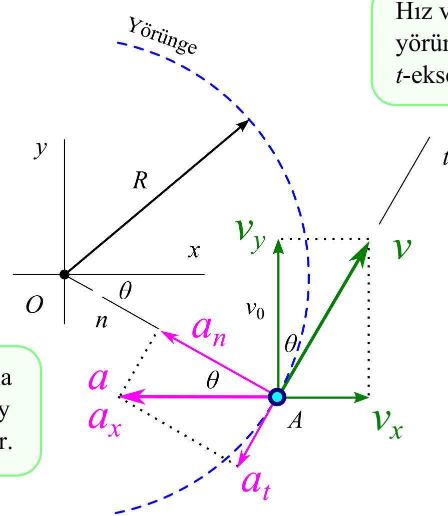
$a_n = ?$

$a_t = ?$

1. *Çözüm*

$$\left.\begin{aligned} v_y &= v_0 \quad \text{(sabit)} \\ a_y &= \dot{v}_y \end{aligned}\right\} \quad a_y = 0$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \cancel{\vec{a}_y}^{\,\vec{0}}$$



Hız vektörü daima yörüngeye teğettir ve t-ekseni ile çakışıktır.

İvme vektörü daima yörüngenin içbükey tarafına yönelmiştir.

$\theta = 30^\circ$ iken:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} \\ v_0 &= v\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \boxed{a_n = 21.33 \text{ m/s}^2}$$

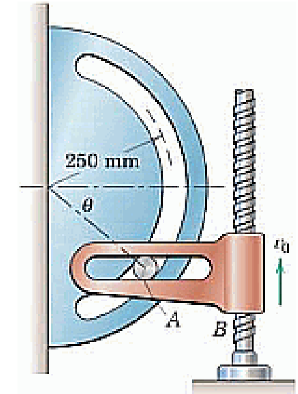
$$\tan\theta = \frac{|a_t|}{a_n}$$

$$\boxed{a_t = -\,12.32 \text{ m/s}^2}$$

a_t nin negatif yönde olduğu şekilden görülmektedir.

Örnek Problem 2/20

Şekildeki mekanizmada, A piminin çembersel yarık içerisindeki hareketi B kılavuzu tarafından kontrol edilmektedir. B kılavuzu, hareketinin belirli bir aralığında bağlı olduğu vida vasıtası ile $v_0 = 2$ m/s lik sabit bir hızla yukarı doğru kaldırılmaktadır. $\theta = 30^\circ$ iken A piminin ivmesinin normal ve teğetsel bileşenlerini hesaplayınız.



Verilenler:

$\rho = R = 250$ mm

ρ (sabit)

$v_0 = 2$ m/s (sabit)

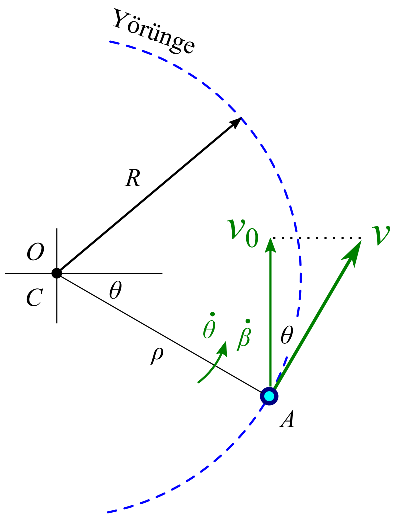
İstenenler:

$\theta = 30^\circ$ iken:

$a_n = ?$

$a_t = ?$

2. Çözüm



$\theta = 30^\circ$ iken:

$v_0 = v\cos\theta$ $\qquad v = 2.31$ m/s

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{v^2}{R}$ $\qquad \boxed{a_n = 21.33 \text{ m/s}^2}$

$\left.\begin{array}{l} v = \rho\,\dot\beta = R\,\dot\beta \\ \dot\beta = |\,\dot\theta\,| \end{array}\right\}$ $\qquad \dot\theta = -\,9.24$ rad/s

Zaman geçtikçe θ azaldığı için $\dot\theta$ negatiftir. Ama $\dot\beta$ daima pozitiftir, negatif olmaz.

$v_0 = v\cos\theta$

$\overset{0}{\cancel{\dot v_0}} = \dot v\cos\theta + v\,\underbrace{(-\sin\theta\,\dot\theta)}$ $\quad\rightarrow$

$\boxed{\dfrac{d(\cos\theta)}{dt} = \dfrac{d(\cos\theta)}{d\theta}\,\dfrac{d\theta}{dt}}$ (Zincir kuralı)

$\theta = 30^\circ$ iken:

$\dot v = -\,12.32$ m/s^2

$a_t = \dot v$ $\qquad \boxed{a_t = -\,12.32 \text{ m/s}^2}$