Ders #11-13

Otomatik Kontrol

Kök Yer Eğrileri

Prof.Dr.Galip Cansever

Bir kontrol tasarımcısı sistemin kararlı olup olmadığını ve kararlılık derecesini bilmek, diferansiyel denklem çözmeden bir analiz ile sistem performasını tahmin etmek ister.

Geribeslemeli kontrol sistemleri tasarımında açık döngü sistemin analiz edilmesi, kapalı döngü sistemin nasıl davranacağı hakkında bilgi edinilebilmesi açısından çok önemlidir.

Yöntemlerden bir tanesi sistem için kök yer eğrisinin oluşturulması ve yorumlanmasıdır.

Tanım: Kök yer eğrisi sistem parametrelerinin değişimi ile Sistem kapalı döngü köklerinin s düzlemindeki yerini gösteren grafiktir.

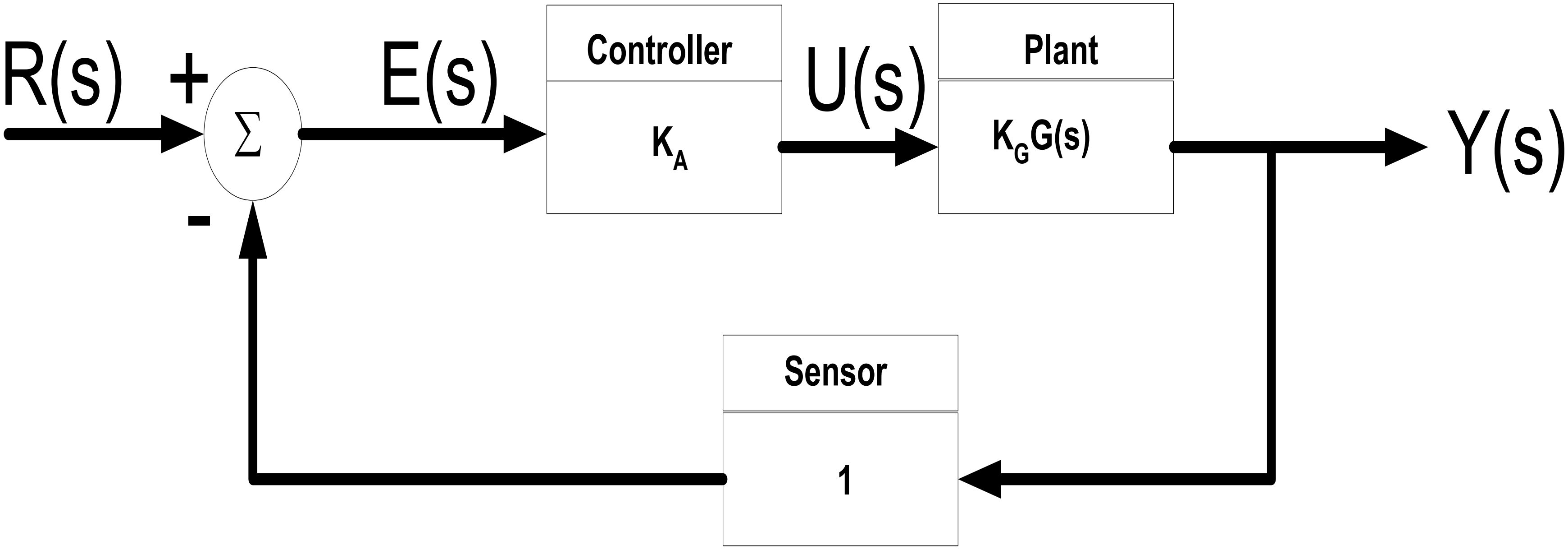
Kapalı döngü sistemlerin geçici rejim cevap karakteristikleri kapalı döngü kutuplarının yerlerine bağlıdır. Eğer sistem değişken kazanca sahipse, kapalı döngü sistemin kutupları seçilen kazanca göre değişir. Dolayısıyla kontrol tasarımcısının döngü kazancı değiştikçe kapalı döngü sistemin kutuplarının nasıl hareket ettiğini bilmesi önemlidir.

Amaç: İstenilen sistem cevabını elde edebilmek için uygun kutuplar seçmek ve dolayısıyla bu kutuplar için sistem kazancını belirlemektir

İçerik

- **Basit geribesleme sistemleri kök yer eğrileri**
- **Adım adım kök yer eğrisi çizimi**
- **Kök yer eğrisi problemleri**
- **Kazanç tabanlı kök yer eğrisi tasarımı**
- **Nonlineer sistemler ve kök yer eğrileri**
- **Mat-Lab ile kök yer eğrisi çizimi**

Basit Geribesleme Sistemleri Kök Yer Eğrileri Çizimi



Transfer Fonksiyonu:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_A K_G G(s)}{1 + K_A K_G G(s)}$$

Karakteristik Denklemi:

$$1 + K_A K_G G(s) = 0$$

Kapalı döngü kutupları amplifikatör kazancı $\mathbf{K_A}$ ‘ya bağlıdır.$\mathbf{K_A}$’yı 0 dan sonsuza değiştirerek olası bütün kökleri çizerek bizim için en uygun $\mathbf{K_A}$ değerini çizimden kolayca seçebiliriz.

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$$b(s) = s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_m$$

$$= (s - z_1)(s - z_2)\ldots\ldots\ldots(s - z_m)$$

$$= \prod_{i=1}^{m} (s - z_i)$$

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (s - p_i)$$

$$K = K_A K_G$$

$$1 + KG(s) = 0$$

$$1 + K\frac{b(s)}{a(s)} = 0$$

Hepsinin kökleri aynıdır!

$$a(s) + Kb(s) = 0$$

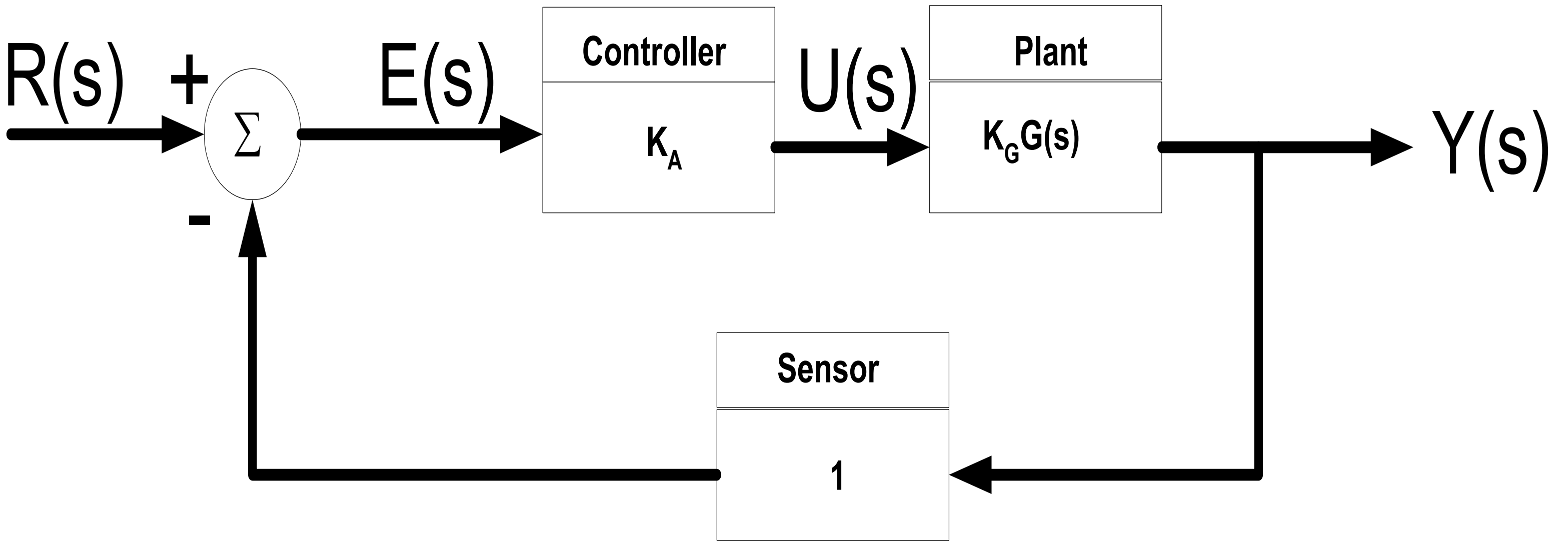
$$G(s) = -\frac{1}{K}$$

Örnek: Bir Doğru akım motorunun kök yer eğrisi

Doğru akım motorunun transfer fonksiyonu:

$$\frac{\theta_m(s)}{v_a(s)} = K_G G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Geri besleme Kapalı Döngü Sistemi:



$$m = 0, \qquad K_G = 1, \qquad b(s) = 1, \qquad K_A = K$$

$$n = 2, \qquad a(s) = s^2 + s, \qquad p_i = 0,\ -1.$$

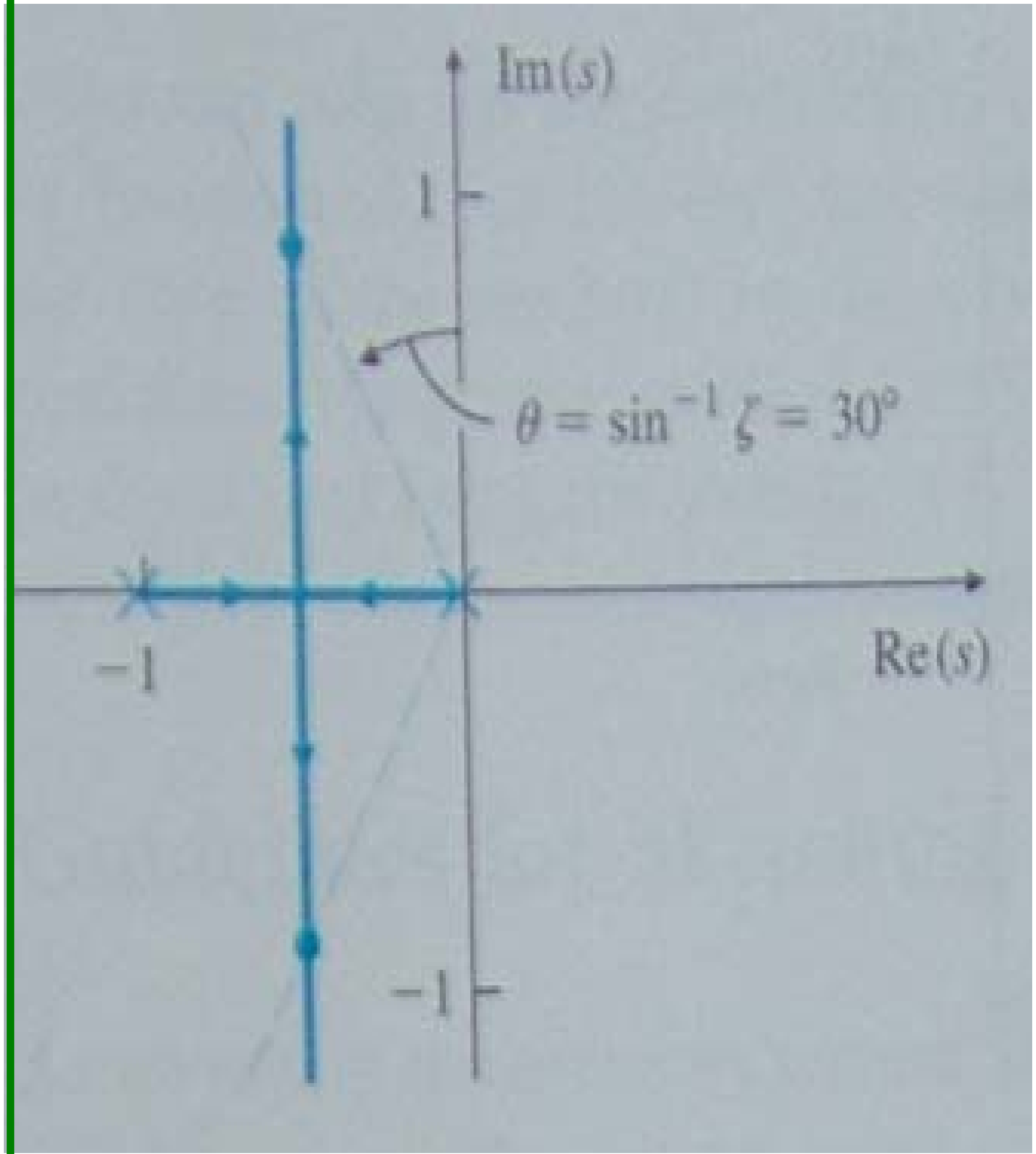
$$s^2 + s + K = 0$$

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$$

Eğer **0 ≤ K ≤ 1 / 4** ise kökler gerçektir ve **-1** ile **0** arasındadır.

Eğer **K = 1 / 4** ise iki katlı kök **-1 / 2** dir.

Eğer **K > ¼** ise kompleks eşlenik **iki kök** vardır.



$$\frac{\sqrt{4K-1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Böylece **K=1** olarak hesaplanır

K=0 olduğunda sistem açık döngü olduğundan kök yer eğrisi **G(s)’** nin kutuplarından başladı.

K arttıkça kökler birbirine doğru hareket etti ve **s=-1/2** de birleştiler.

Bu noktada reel eksenden koptular.

Kopma noktasından sonra kökler reel eksenleri değişmeyerek sonsuza doğru yöneldiler.

Tasarım açısından düşünecek olursak, **K**’yı değiştirerek kapalı döngü kutuplarımızı istediğimiz gibi seçebiliriz.

Sadece sistem kazancı K değil, karakteristik denklemdeki herhangi bir parametreye göre de yer eğrisi

Oluşturulabilir.

Örnek: $G(s) = \dfrac{1}{s(s+c)}$ $K = 1\ olsun$

Karakteristik Denklem: $1 + G(s) = 0$

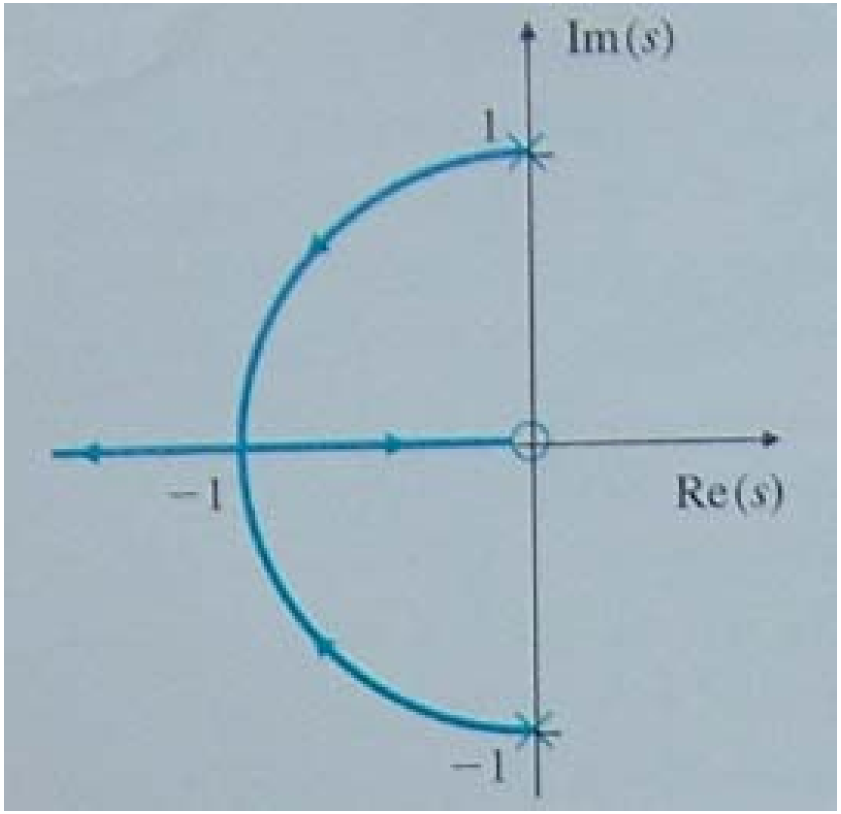
$s^2 + cs + 1 = 0$

$a(s) = s^2 + 1,$

$b(s) = s,$

$K = c.$

$$1 + c\frac{s}{s^2+1} = 0 \qquad r_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \frac{\sqrt{c^2-4}}{2}$$



Kök-Yer Eğrisi Çizimi

Kök yer eğrisinin elle çiziminin iki yararı vardır

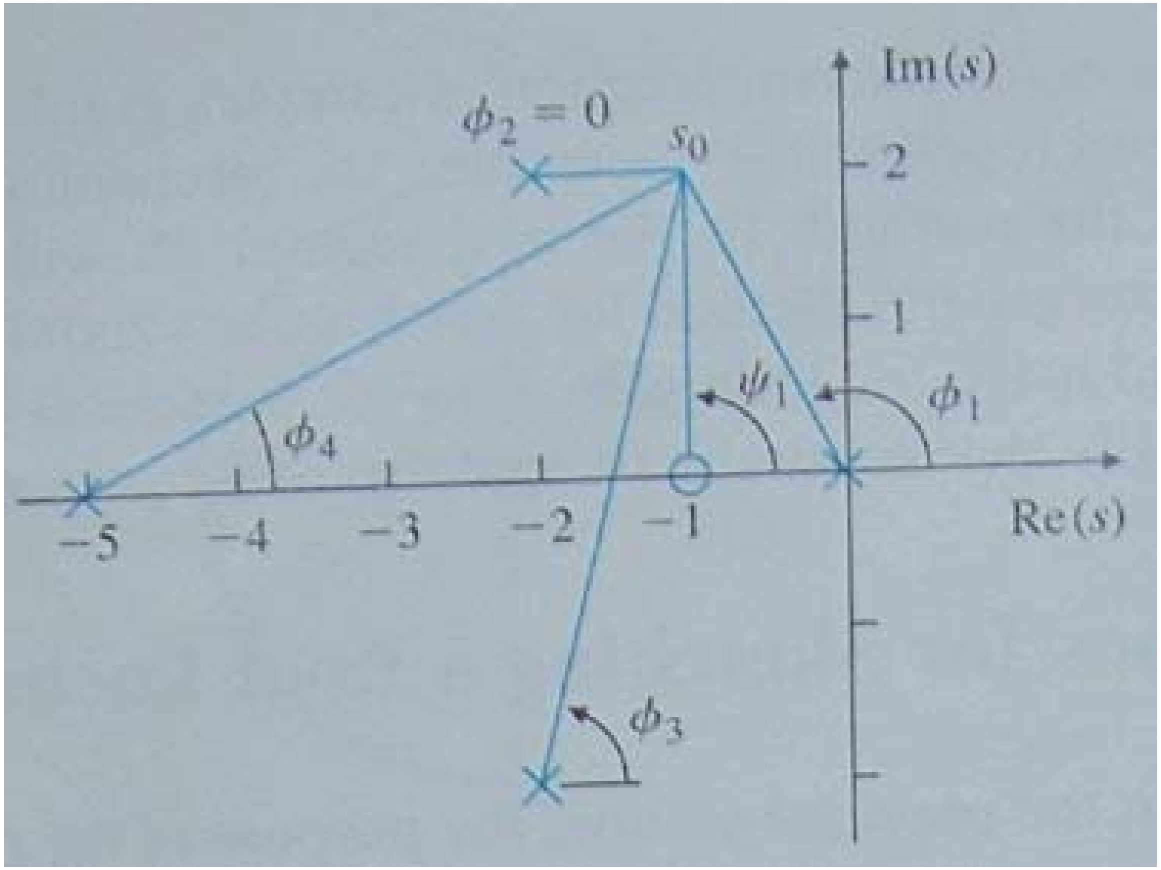
- Basit sistemleri kolayca çizebilmek
- Bilgisayara yaptırılan çizimleri irdeleyebilmek, daha iyi anlamak

Tanım I: Kök yer eğrisi, **K** sıfır ile sonsuz arasında değişirken **1+KG(s)=0** yapan s değerleri set'idir. **G(s)** sistem açık döngü transfer fonksiyonudur, kök yer eğrisindeki kökler kapalı döngü sistemin kökleridir.

Tanım II: **G(s)**'in kök yer eğrisi, **G(s)**'in fazörleri **180^0** olduğu s düzlemindeki set noktalarıdır.

$$\angle G(s_0) = 180^0 + 360^0 l$$ l: bir tam sayı

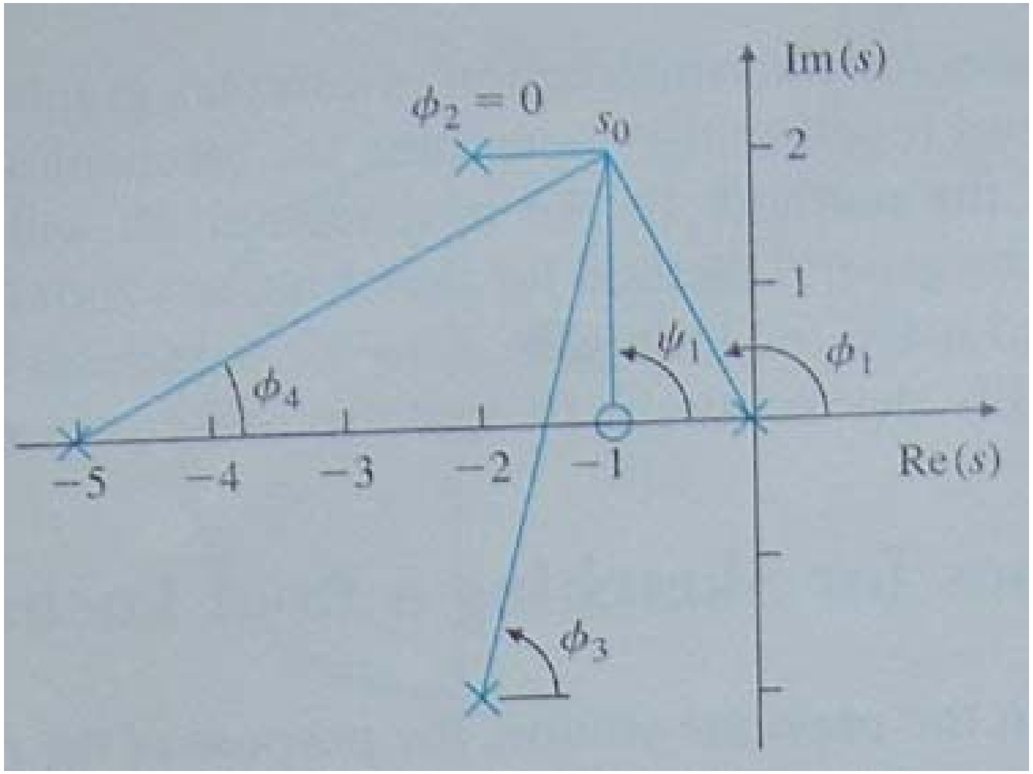
Örnek: $G(s) = \dfrac{s+1}{s[(s+2)^2+4](s+5)}$



s_0=-1+2j noktasını seçelim. Amacımız s_0 noktasının kökyer eğrisi üzerinde olup olmadığını anlamak.

$$\angle G(s_0) = 180^0 + 360^0 l$$

$$\angle(s_0+1)-\angle s_0-\angle\left[(s_0+2)^2+4\right]-\angle(s_0+5)=180^0$$



$$\angle G(s)=\psi_1-\phi_1-\phi_2-\phi_3-\phi_4$$

$$=90^0-116{,}6^0-0^0-76^0-26{,}6^0$$

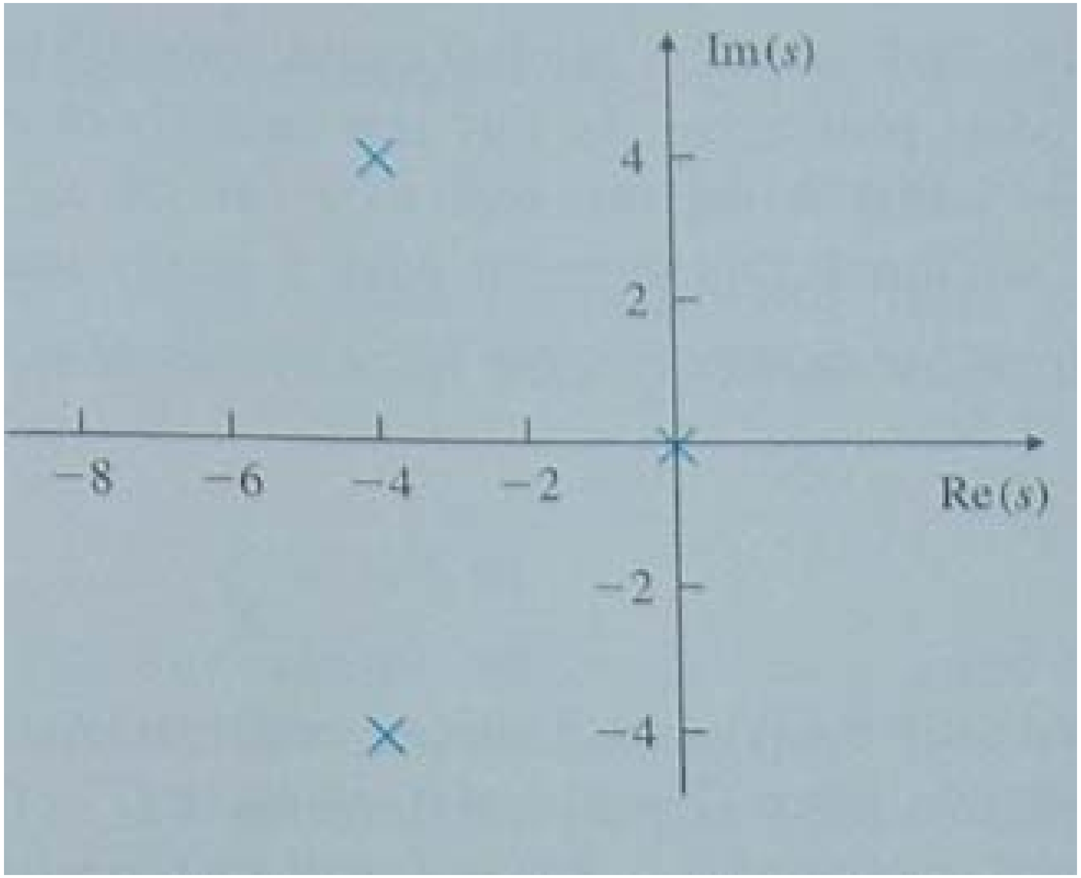
$$=-129{,}2^0$$

G’nin açısı **180^0** olmadığı için **s_0** noktasının kök yer eğrisi üzerinde olmadığını söyleyebiliriz.

Örnek:

$$1+\frac{K}{s[(s+4)^2+16]}=0$$

Adım I: s düzleminde eksenleri çizilir, kökler **“x”** ie sıfırlar **“0”** ile işaretlenir.

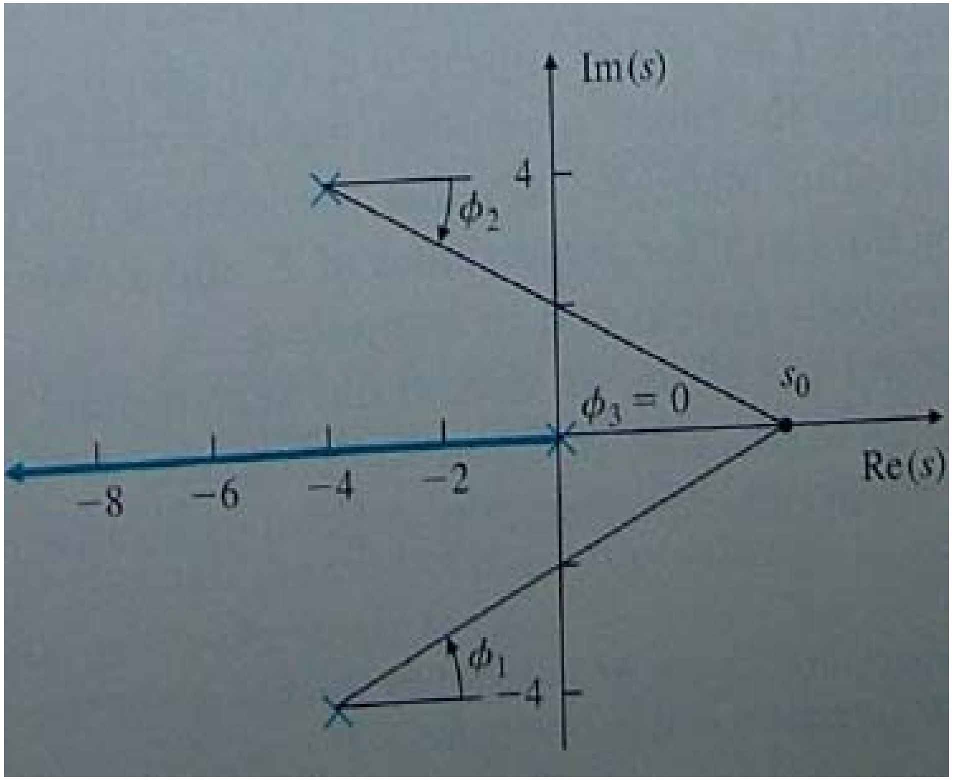


Adım II: Eğrinin reel eksen kısmı tespit edilir. Test noktası s_0 seçilir,

Ve $\mathbf{\Phi_1}$, $\mathbf{\Phi_2}$ açıları bulunur. **Φ1=- Φ2** (eşlenik kökler olduğundan).

Sonuç;Reel eksen üzerindei bir **s0** için **G(s0)** açısı reel eksen üzerindeki kutup ve sıfırlardan tespit edilir.
Eğer test noktası kutup veya sıfırın sağında ise bu açı $\mathbf{0^0}$ solunda

ise $\mathbf{180^0}$ dir.



$$\angle G(s_0) = 180^0 + 360^0 l$$

Kuralı gereği, test noktasının sağında kutup ve sıfır sayısı toplamı tek sayı olmalıdır.

Adım III: K'nın büyük değerleri için asimtotlar çizilir. K sonsuza giderken;

$$1+KG(s)=0 \qquad G(s)=-\frac{1}{K}$$

G(s)'in 0 olması gerekir. Bu iki şekilde olabilir:

$$G(s)=\frac{b(s)}{a(s)}$$ olduğundan G=0 ancak b(s)=0 ise olabilir.

$$1+K\frac{b(s)}{a(s)}=0$$ Olduğundan,

$$1+K\frac{s^m+b_1s^{m-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_n}=0$$ Yazılabilir.

Biz **K**'nın büyük değerleri ile ilgileniyoruz. G(s) fiziksel bir sistemi temsil ettiğinde **n>m** olduğundan **s** sonsuza giderken **G(s)** sıfıra gider ve yukardaki denklem

$$1+K\frac{1}{(s-\alpha)^{n-m}}=0$$

Şeklinde yazılabilir.

Köklerin **s=α** da toplandığı **n-m** dereceli sistemdir.

K ve **s** nin yüksek değerlerinde **m** sıfır **n** kutubu elimine eder ve **n-m** tane kutup aynı noktada görünür. Bu durumda asimtotik sistemin yerini bulmamız ve **α'**yı hesaplamamız gerekir.

s_0 test noktamızı $s_0 = Re^{j\Phi}$ olarak seçelim. Köklerin hepsi aynı noktada olduğu için eğer her biri Φ_l olan **n-m** açı toplamı 180^0 ise transfer fonksiyonunun açısı 180^0 dir. Böylece:

$$(n-m)\Phi_l = 180 + 360xl \text{ dir.}$$

Asimptotik kök yer eğrisi **n-m** ayrık açıda açısal çizgiler içerir,

$$\phi_l = \frac{180^0 + 360^0(l-1)}{n-m} \qquad l=1,2,\dots n-m$$

Örnek: **n-m=3** ise

$$\Phi_{1,2,3} = 60,\ 180,\ \text{ve } 300^0 \text{dir}$$

Bu asimptotik yerin çizgisi reel eksen üzerindeki **s=α** dan gelir.

α yı belirlemek için polinom özelliğini kullanacak olursak,

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n = (s - p_1)(s - p_2)\ldots\ldots\ldots(s - p_n)$$

Eşitsizliğin sağ tarafını açıcak olursak, $\mathbf{a_1 = -\Sigma p_i}$ olduğunu görürüz.

Transfer fonksiyonunun payı içinde aynısını yazabiliriz, $\mathbf{b_1 = -\Sigma z_i}$ olur.

Kapalı döngü transfer fonksiyonu;

$$1 + K \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n} = 0$$

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots\ldots + a_n + K(s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots\ldots + b_m) = 0$$

Dikkat edilecek olursa kutupların toplamının s^{n-1} katsayısının negatifidir ve eğer **m < n-1** ise K dan bağımsızdır. Kapalı döngü sisteminde ise bu katsayı Σr_i'nin negatifidir. (r_i: Kapalı Döngü sistemin kutupları)

Ayrıca **m < n-1** olduğundan $-a_1$;

$$-\Sigma r_i = -\Sigma p_i$$

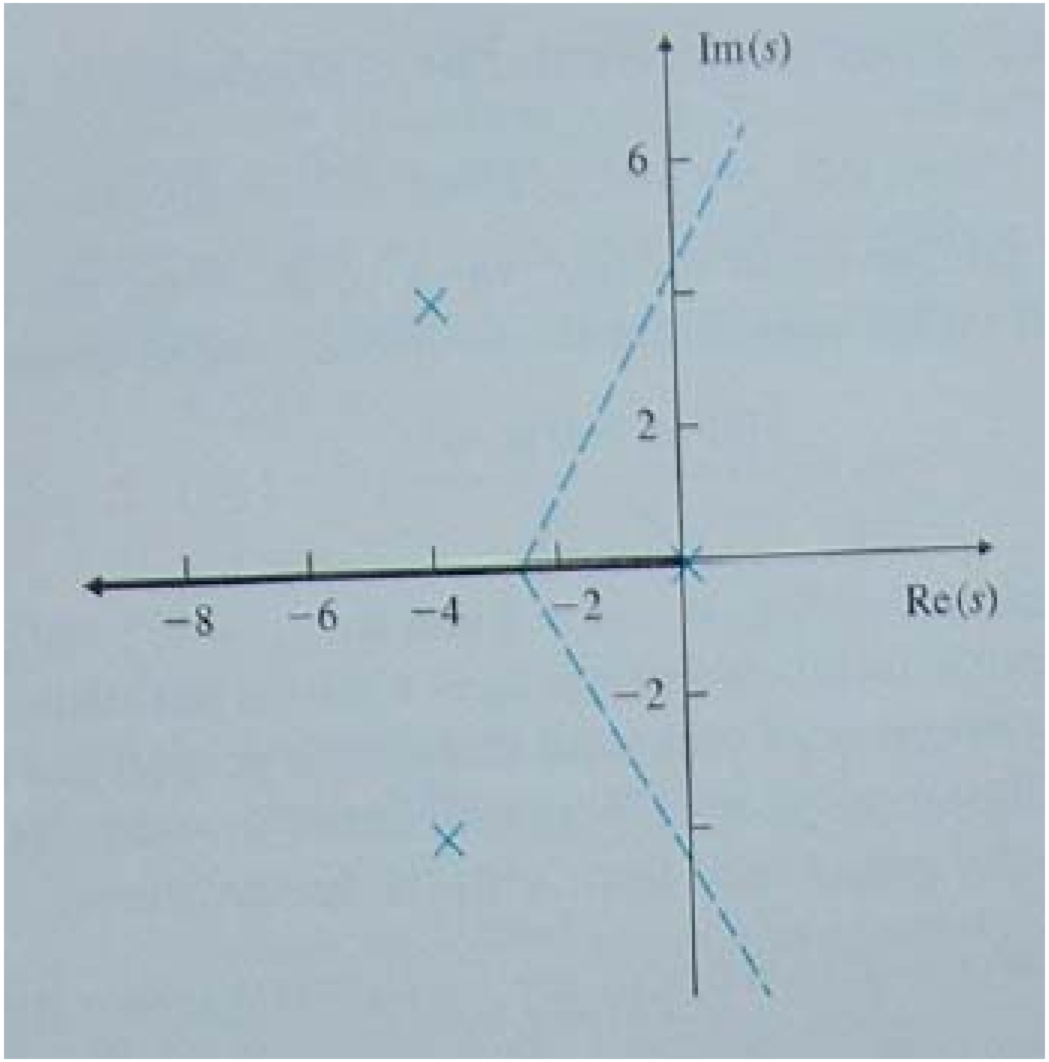
K'nın büyük değerlerinde r_i nin m tane kökü z_i sıfırlarına eşittir ve **n-m** tane kök $1/(s-\alpha)^{n-m}$ asimptotundan gelir ve toplamı $(n-m)\,\alpha$ dir.

Bu sonuçları birleştirecek olursak: Bütün köklerin toplamı eşittir, **G(s)** nin sonsuza giden köklerin toplamı **+** sıfıra giden köklerin toplamıdır

$$\Sigma r_i = +(n-m)\,\alpha + \Sigma z_i = \Sigma p_i$$

α'yı çözecek olursak

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$$



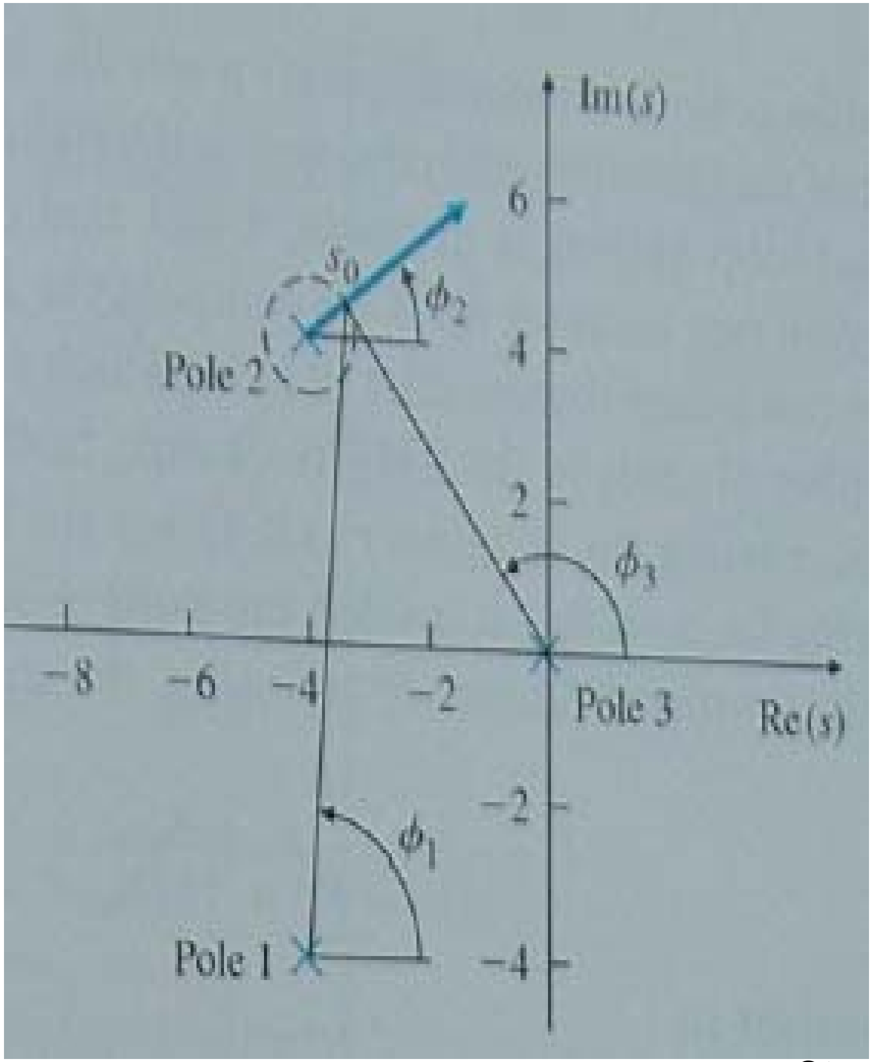
$$\alpha = \frac{-4-4+0}{3-0}$$

$$\alpha = \frac{-8}{3}$$

Asimptotları **±60⁰** olarak şekilde görüyoruz. Ayrıca **180⁰** asimptot ikinci adımda gösterilmişti.

Adım IV: Ayrılma ve geliş açılarını hesaplanır

Kök yer eğrisi kutuplarda başlar ve ya sıfırlarda yada sonsuzda sona erer. Bu adımda bir kutuptan ayrılan yer eğri parçasının açısı bulunur



Test noktası olarak **s_0'ı** ikinci kutup **-4-4j** noktasına yakın olarak ele alalım ve **$G(s_0)$** açısını hesaplayalım

Test noktası **2.** kutba yeterince yakın olduğundan **Φ_1** ve **Φ_3** açıları **2.** kutubun açıları olarak alınabilir ve **Φ_2** açısı açı koşulundan hesaplanabilir.

$$-90^0 - \Phi_2 - 135^0 = 180^0 + 360^0 l$$

Φ_2 açısı **-180^0** ile **$+180^0$** arasında olacak şekilde **l=-1** olarak seçilirse

$$\Phi_2 = -45^0$$

Simetriden dolayı **1.** kökün ayrılma açısı $\mathbf{+45^0}$ dir. **2.** Adımda anlatıldığı gibi **3.** kutbun ayrılış açısı $\mathbf{180^0}$ dir.

Eğer **G(s)'in** sıfırları olsaydı ikinci kutbun açısına sıfırların açıları deklemin sol tarafına eklenecekti. Genel olarak bir kutup için ayrılma açısı

$$\phi_{dep} = \sum \psi_i - \sum \phi_i - 180^0 - 360^0 l$$

$\sum \phi_i$: Diğer kutuplara olan açıların toplamı

$\sum \psi_i$: Sıfırlara olan açıların toplamıdır.

Eğer q tane tekrar eden kutup varsa;

$$q\phi_{dep} = \sum \psi_i - \sum \phi_i - 180^0 - 360^0 l$$

Genel olarak sıfırlara geliş açısıda;

$$q\phi_{ar} = \sum \phi_i - \sum \psi_i + 180^0 + 360^0 l$$

$\sum \phi_i$: kutuplara olan açıların toplamı

$\sum \psi_i$: diğer sıfırlara olan açıların toplamıdır.

Adım V: İmajiner ekseni kesme noktaları hesaplanır.

Sağ yarı düzlemdeki kutup veya kutuplar kararsızlığı gösterir. Routh's kararlılık testi ile kararlılık tespit edilebilir. **K** parametresini kullanarak Routh's dizi oluşturularak sağ yarı düzleme geçecek kökler belirlenebilir. Hesaplanan **K** değerleri imajineri ekseni kesen değerleri gösterir. Böylece **K** değeri bilinir ve bu kesme noktası $\mathbf{s_0 = jw_0}$ kök değerine karşılık gelir.

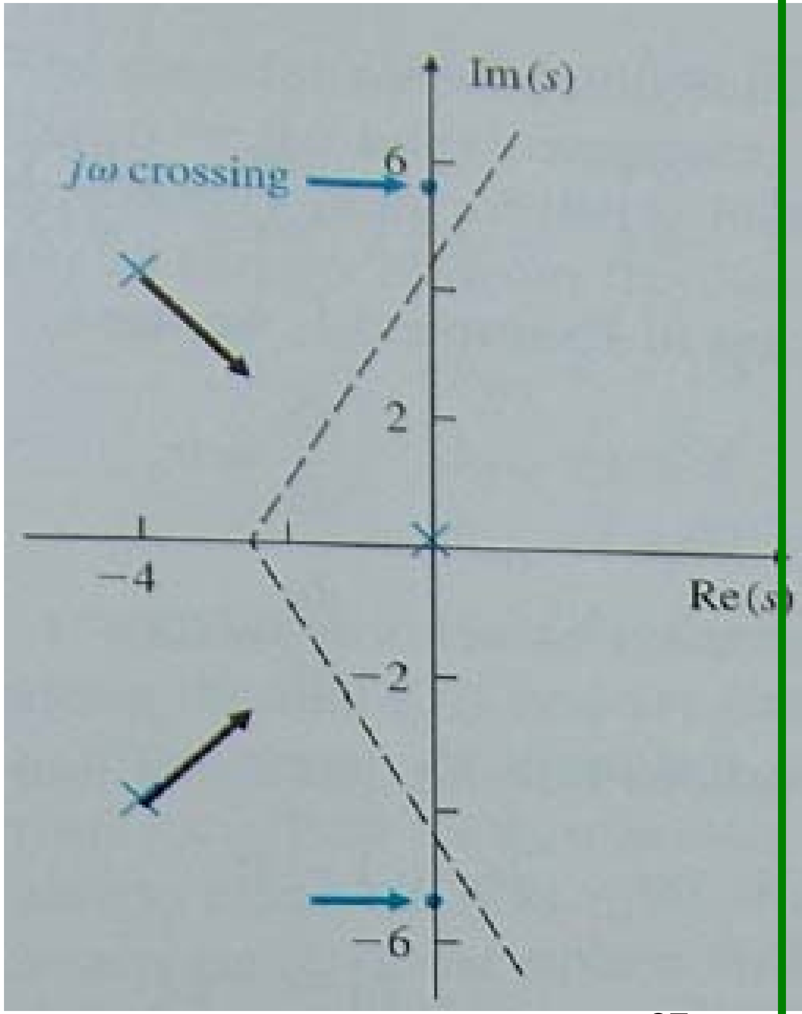
Örnek:

$$1 + \frac{K}{s[(s+4)^2 + 16]} = 0$$

$\mathbf{s^3+8s^2+32s+K=0}$ ve Routh Kararlılık Dizisi:

$$\begin{array}{lll} s^3 & : 1 & 32 \\ s^2 & : 8 & K \\ s^1 & : \dfrac{8.32 - K}{8} & 0 \\ s^0 & : K & \end{array}$$

0<K<256 için denklem sağ yarı düzlemde kök içermez. Biz **K**'nın pozitif değeleri ile ilgilendiğimizden, **K**'nın üst sınırı ile ilgileniyoruz. **K<256** için sağ yarı düzlemde kök yoktur. **K=256** sağ yarı düzlemi kesme noktasını işaret eder. İlgili frekansı **K** yı ve $s=jw_0$ 'ı yerine koyarak bulabiliriz.



$$(jw_0)^3+8(jw_0)^2+32(jw_0)+256=0$$

Reel ve imajiner kısımlar ayrı ayrı

0'a eşit olmalı böylece

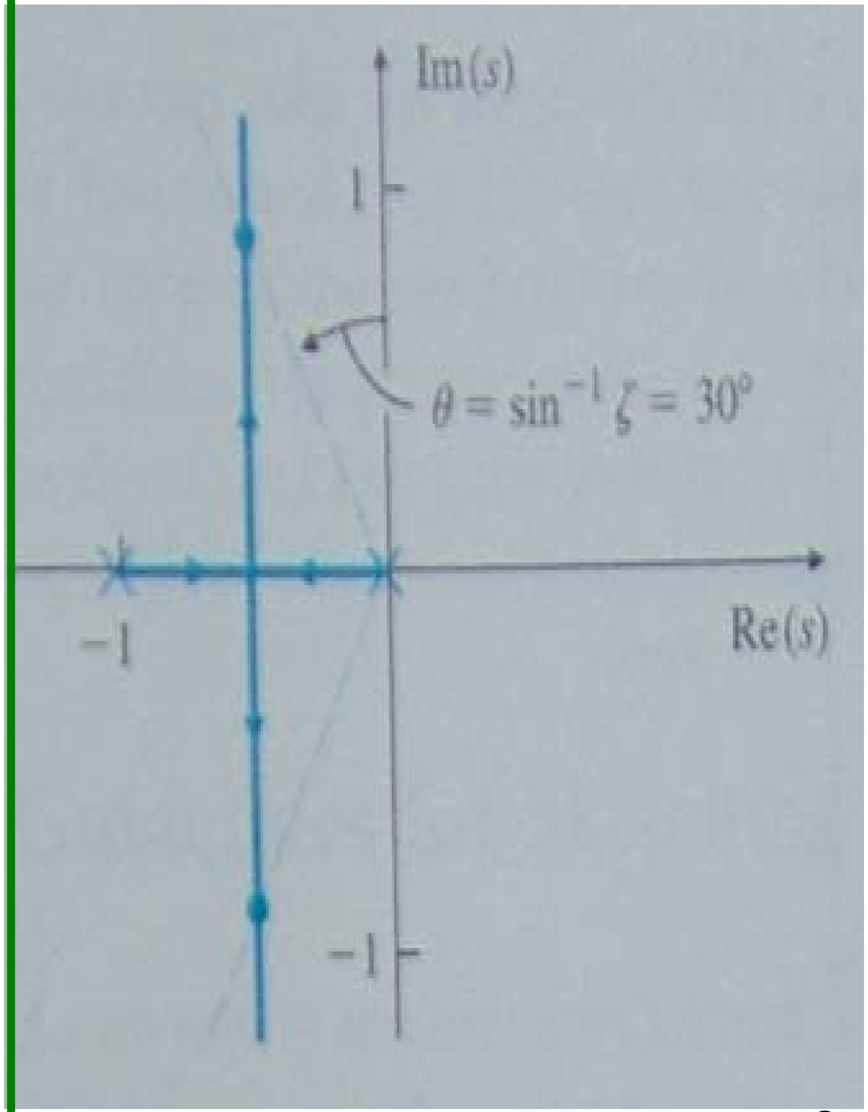
$8(w_0)^2+256=0$ ve

$(w_0)^3+32w_0=0$

Çözüm: $w_0=\pm\sqrt{32}=\pm 5.66$

Dikkat edilecek olursa asimptot **s=4.62j** de imajineri ekseni kesiyor, **5.66** olması gerektiği gibi bu değerin üzerinde

Adım VI: Katlı köklerin yerleri belirlenir, özellikle reel ekseni ve geliş ayrılış açıları belirlenir.



$$s^2 + s + K = 0$$

K=1/4 için **s=-1/2** de iki katlı kök var.

Eğrinin yatay bölümleri birbirine doğru hareket ederken diken bölümleri reel eksenden ayrılıyorlar ve **K>1/4** için kompleks oluyor. Eğri **0** ve **180** derecede bir araya gelirken **+90** ve **-90** derecede ayrılıyor.

s=-1 noktasında **K=0** dır ve **s=-1/2** noktasına kadar reel eksen üzerinde **K=1/4**'e kadar yükseliyor ve **s=0** noktasında tekrar **0**'a düşüyor. **K** kazancı **s=-1/2** katlı kök noktasında maksimum oluyor.

Eğer K bu noktada maksimum oluyorsa, bu noktada dK/ds=0 olmalı, katlı kök noktasında veya eğri ayrılma noktasında. K=-1/G kullanılırsa,

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{G}\right)_{s=s_0} = 0$$

G=b/a olduğundan;

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{a}{b}\right) = -\frac{1}{b^2}\left(b\frac{da}{ds} - a\frac{db}{ds}\right) = 0$$ yazılabilir.

Örnek:

$$\frac{\theta_m(s)}{v_a(s)} = K_G G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$b(s) = 1$$

$$\frac{db}{ds} = 0$$

$$a(s) = s^2 + s$$

$$\frac{da}{ds} = 2s + 1$$

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{a}{b}\right) = -\frac{1}{b^2}\left(b\frac{da}{ds} - a\frac{db}{ds}\right) = 0$$

$$2s_0 + 1 = 0$$

$$s_0 = -\frac{1}{2}$$

Örnek:

$$1+\frac{K}{s[(s+4)^2+16]}=0$$

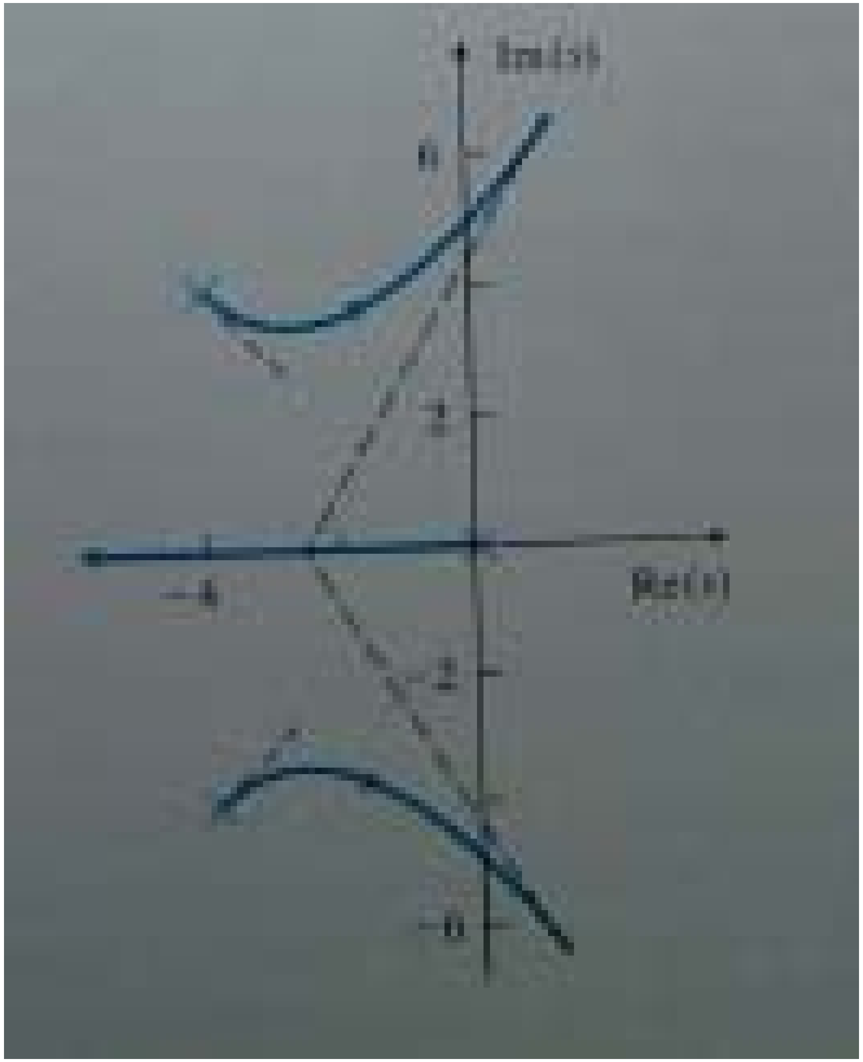
$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{a}{b}\right)=-\frac{1}{b^2}\left(b\frac{da}{ds}-a\frac{db}{ds}\right)=0$$

$$b(s)=1 \qquad \frac{db}{ds}=0$$

$$a(s)=s^3+8s^2+32s \qquad \frac{da}{ds}=3s^2+16s+32$$

$$s_0=-2.67\pm 1.89j$$

Bu noktalar kök yer eğrisi üzerinde değil, buda bize türev şartının **s_0**’ın katlı kök olması için gerekli fakat yeterli şart olmadığını gösterir.



Katlı köklerin geliş ve ayrılış açılarını belirlemek için iki yeni özellik daha eklememiz gerekir.

Eğrinin sürekliliği: $\mathbf{0 \le K \le K_0}$ aralığında başlangıç olarak eğriyi düşünebiliriz. Eğer $\mathbf{K = K_0 + K_1}$ olarak düşünülürse $\mathbf{K_1}$ parametresine göre yeni kök yer eğrisi çizilebilir ve bu eğrinin başlangıç kutupları $\mathbf{K_0}$ sisteminin kökleri olacaktır.

Örnek: Daha önceki $s^2 + s + K = 0$ sistemini düşünelim.

Bu sistemde $\mathbf{K_0 = 1/4}$ değerine denk gelir.

$\mathbf{K = 1/4 + K_1}$ ise denklemimiz:

$$s^2 + s + \frac{1}{4} + K_1 = 0 \quad veya \; (s + \frac{1}{2})^2 + K_1 = 0 \; olur.$$

Burada $\mathbf{K_1}$'in ilk ayrılışı orjinal sistemde **K**'nın kopma noktasına denk gelir. s=-1/2 deki katlı köke ayrılma açısı kuralını uygulayacak olursak;

$$2\phi_{dep} = -180^0 - 360^0 l$$

$$\phi_{dep} = -90^0 - 180^0 l$$

$$\phi_{dep} = \pm 90^0$$ (Kopma noktasındaki ayrılma açıları)

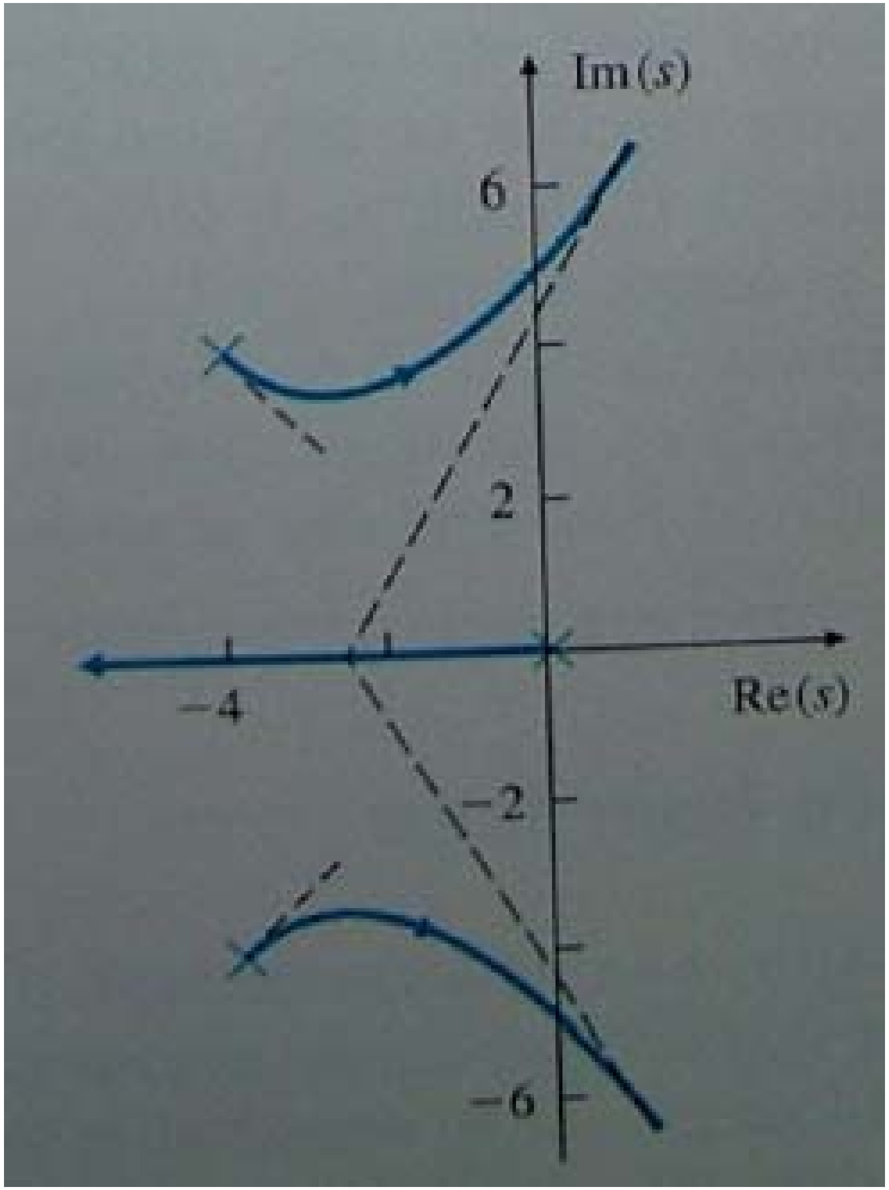
Bu durumda s=-1/2 deki geliş açıları (orjinal sistemden) reel eksen boyunca açıkca 0^0 ve 180^0 dir.

Reel eksen üzerinde birbirine doğru gelen eğri parçaları daima **±90** derece ile koparlar.

Hatta genelleştirecek olursak **s** düzleminin herhangi bir noktasında birbirine doğru gelen 2 eğri parçası birbirlerine **180** derece ile yaklaşırlar ve **±90** derece ile koparak yön değiştirirler.

Benzer şekilde **s** düzleminin herhangi bir noktasında birbirine doğru gelen 3 eğri parçası birbirlerine **120** derece ile yaklaşırlar ve ve geliş açılarına göre **60** derece dönerek **120** derece ile koparlar.

Adım VII: Eğrinin tamamlanır



Kök-Yer Eğrisi Çizimi

Özet

Adım I: s düzleminde eksenleri çizilir, kökler **“x”** ie sıfırlar **“0”** ile işaretlenir.

Adım II: Reel eksen üzerinde sıfır ve kutup sayısı toplamının solunda tek olduğu doğruyu çiziniz

Adım III: α’da merkezlenen ve Φ_l açıları ile ayrılan asimtotlar çizilir

n-m: asimptot sayısı

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} \qquad = \frac{(-a_1 + b_1)}{n-m}$$

$$\phi_l = \frac{180^0 + 360^0 (l-1)}{n-m} \qquad l=1,2,...n-m$$

Adım IV: Ayrılma açıları **kutuplardan** ve geliş açıları **sıfırlardan** hesaplanır

$$q\phi_{dep} = \sum \psi_i - \sum \phi_i - 180^0 - 360^0 l$$

$$q\phi_{ar} = \sum \phi_i - \sum \psi_i + 180^0 + 360^0 l$$

Adım V: İmajiner ekseni kesme noktaları hesaplanır. (Bu adım bazı çizimler için gerekli olmaya bilir.)

Adım VI: Katlı köklerin yerleri belirlenir, özellikle reel ekseni ve geliş, ayrılış açıları belirlenir. İki parçalı kök yer eğrisi 180 derecede bir araya gelir ±90 derecede ayrılır. Üç parçalı yer eğrileri 120 derecede bir araya gelir 60 derece dönerek ayrılır

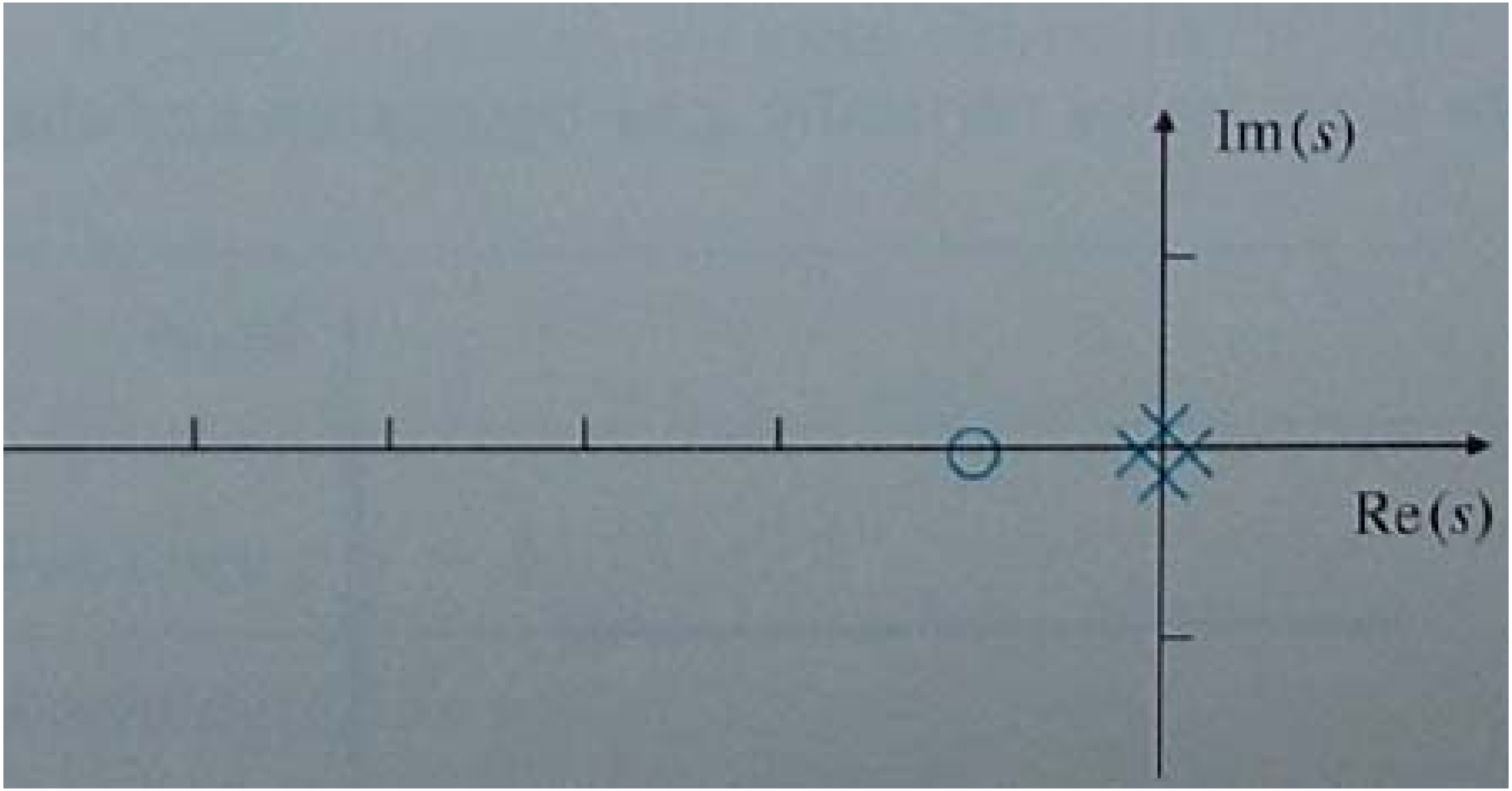
Adım VII: Eğri tamamlanır.

Kök yer eğrileri kutuplarda başlar, sıfırlarda yada sonsuzda son alır.

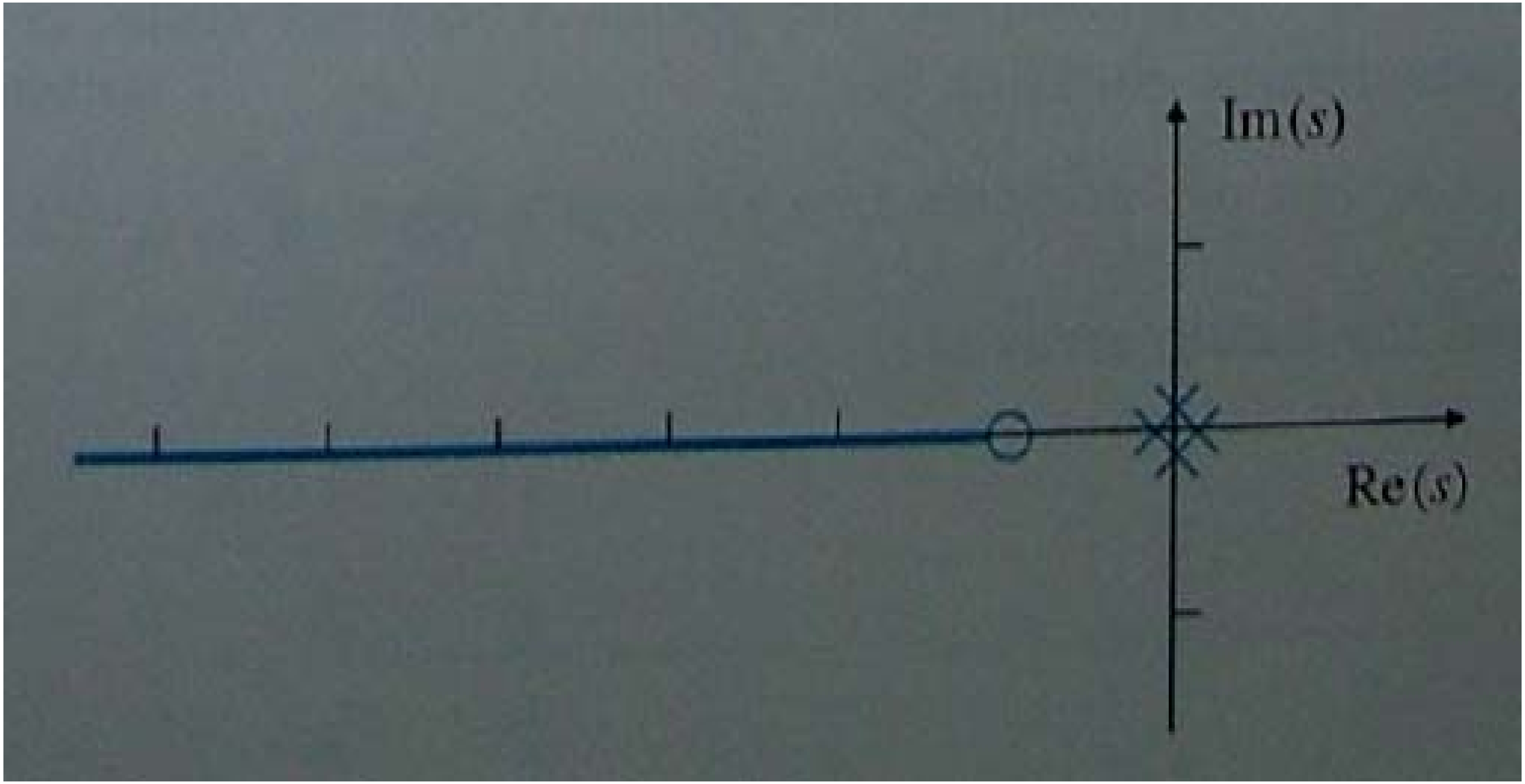
Kök yer eğrisinin kutup sayısı kadar kolu vardır.

Örnek: $G(s) = \dfrac{s+1}{s^2}$ İçin kök yer eğrisini çiziniz?

Adım I: s düzleminde eksenleri çizilir, kökler **“x”** ie sıfırlar **“0”** ile işaretlenir.



Adım II: Reel eksen üzerinde sağında sıfır ve kutup sayısı toplamı tek olan doğruyu çiziniz



Adım III: α'da merkezlenen ve Φ_l açıları ile ayrılan asimtotlar çizilir

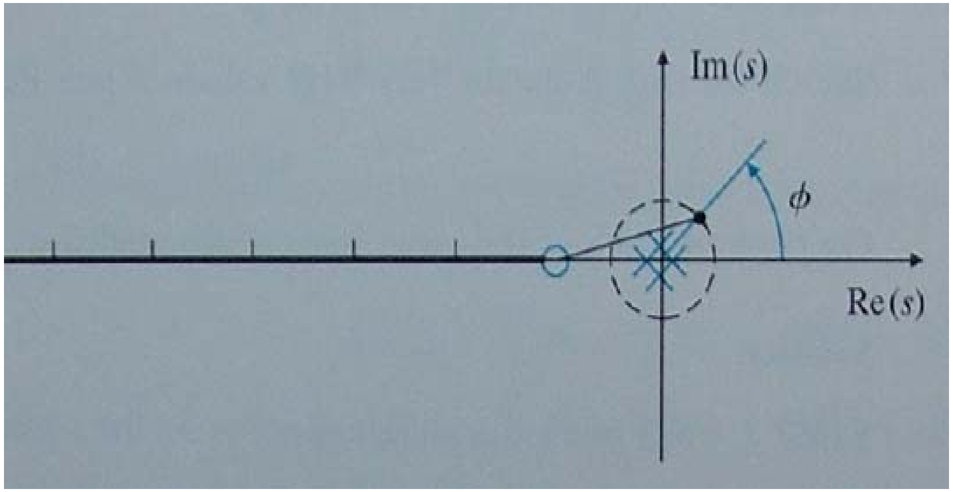
n-m=2-1= 1 asimptot var.

$$\phi_l = \frac{180^0}{2-1}$$

$$\phi_l = 180^0$$

Adım IV: Ayrılma açıları kutuplardan ve geliş açıları sıfırlardan hesaplanır.

s=0 daki kutuplar için bu kutuplar etrafında bir çember çizelim.

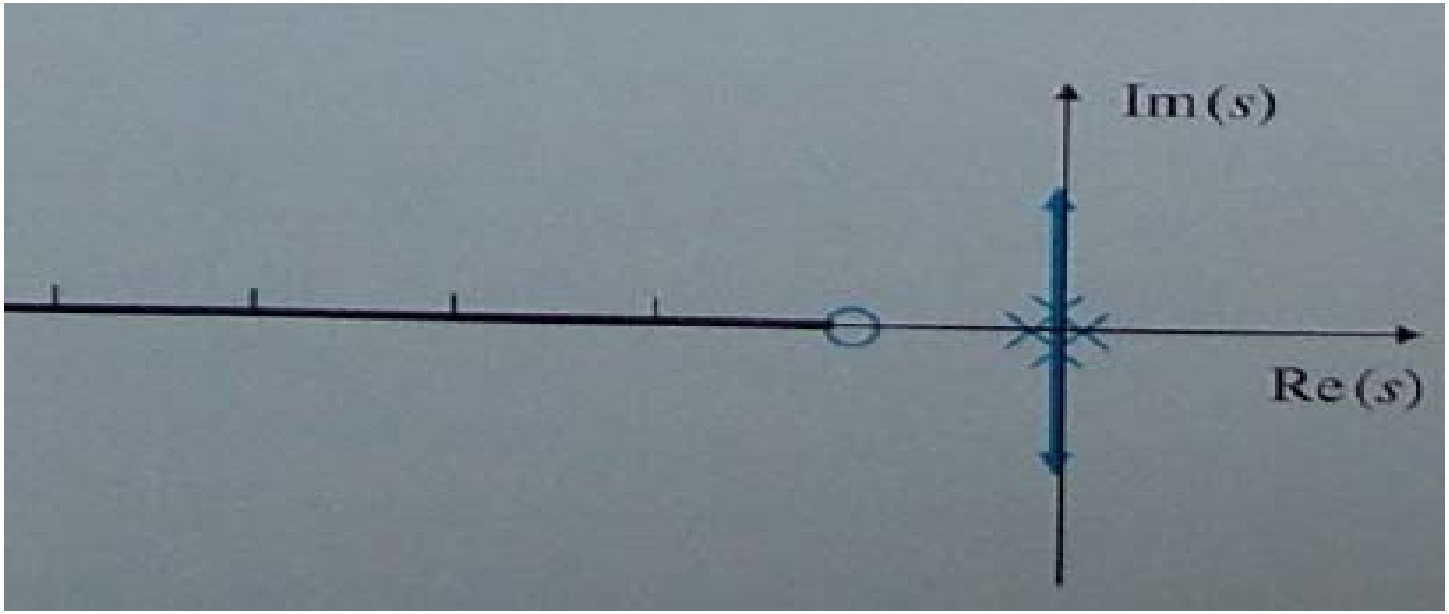


İki kutuptan olan açılar eşittir ve sıfırdan olan açıda neticede sıfırdır,(kökler sıfırın sağında kaldığı için) böylece açı şartı:

$$-2\phi_l + 0^0 = 180^0 + 360^0 l$$

$$\phi_l = \pm 90^0$$

Eğri bir kolu yukarı bir kolu aşağı olacak şekilde ayrılır.



Adım V: İmajiner ekseni kesme noktaları hesaplanır. (Bu adım bazı çizimler için gerekli olmaya bilir.)

Karakteristik denklem: $S^2+Ks+K=0$

S^2 :	1	K
S^1 :	K	
S^0 :	K	

K>0 için birinci kolon elemanlarının hepsi pozitif olduğu için bütün kökler sol yarı düzlemdedir ve kök yer eğrisi imajiner ekseni kesmez

Adım VI: Katlı köklerin yerleri belirlenir, özellikle reel ekseni ve geliş, ayrılış açıları belirlenir. İki parçalı kök yer eğrisi **180** derecede bir araya gelir **±90** derecede ayrılır. Üç parçalı yer eğrileri **120** derecede bir araya gelir **60** derece dönerek ayrılır.

Kök yer eğrisi koşulu: $$\frac{d}{ds}(-\frac{a}{b}) = -\frac{1}{b^2}(b\frac{da}{ds} - a\frac{db}{ds}) = 0$$

$$b(s) = s+1 \qquad a(s) = s^2$$

$$\frac{db}{ds} = 1 \qquad \frac{da}{ds} = 2s$$

$$-s^2(1) + (s+1)2s = 0$$

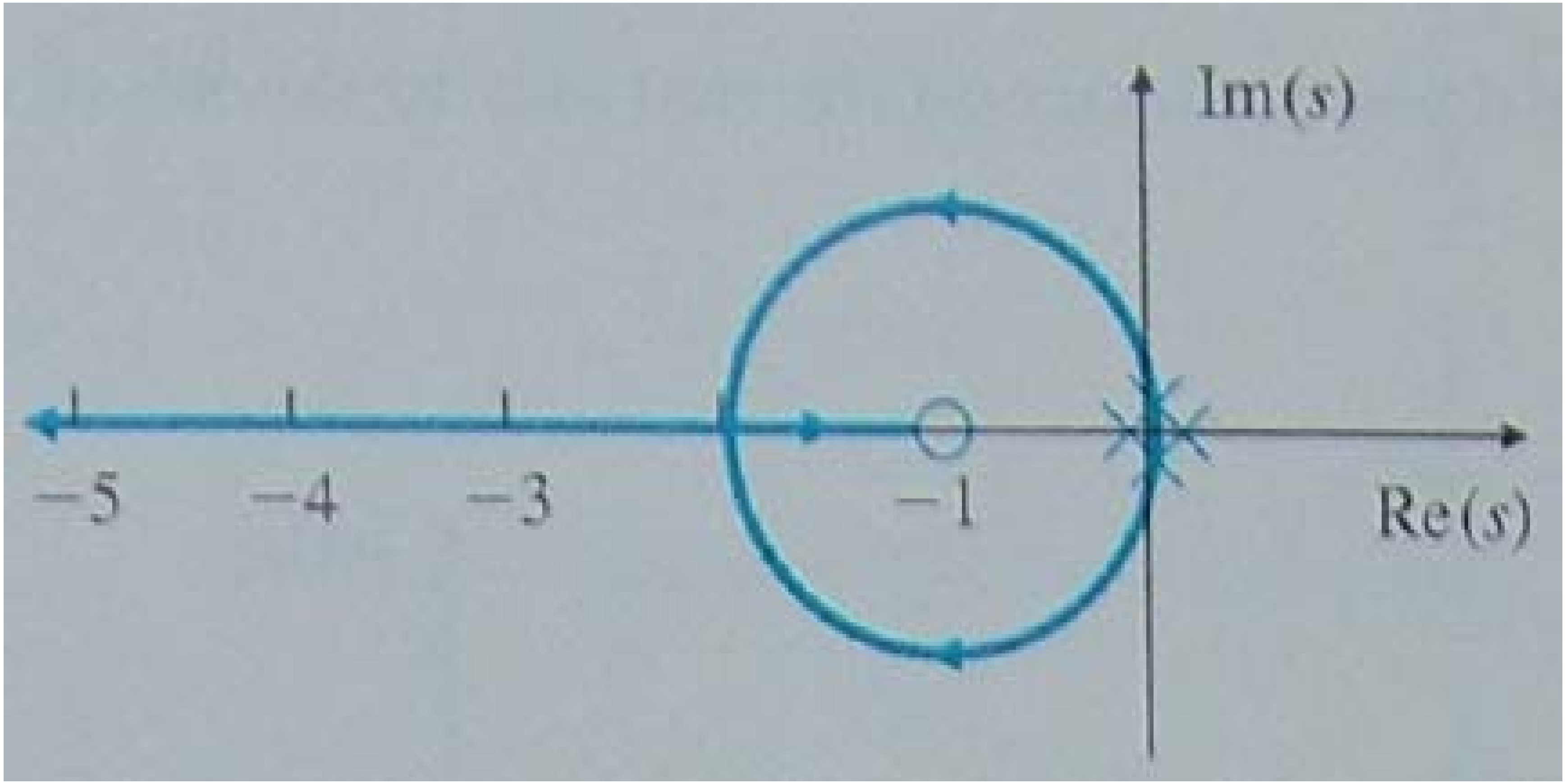
$$s^2 + 2s = 0$$

$$s = 0, -2$$

s=0 kök yer eğrisinin G(s)'in iki kökünün **K=0** da olduğunu gösterir.

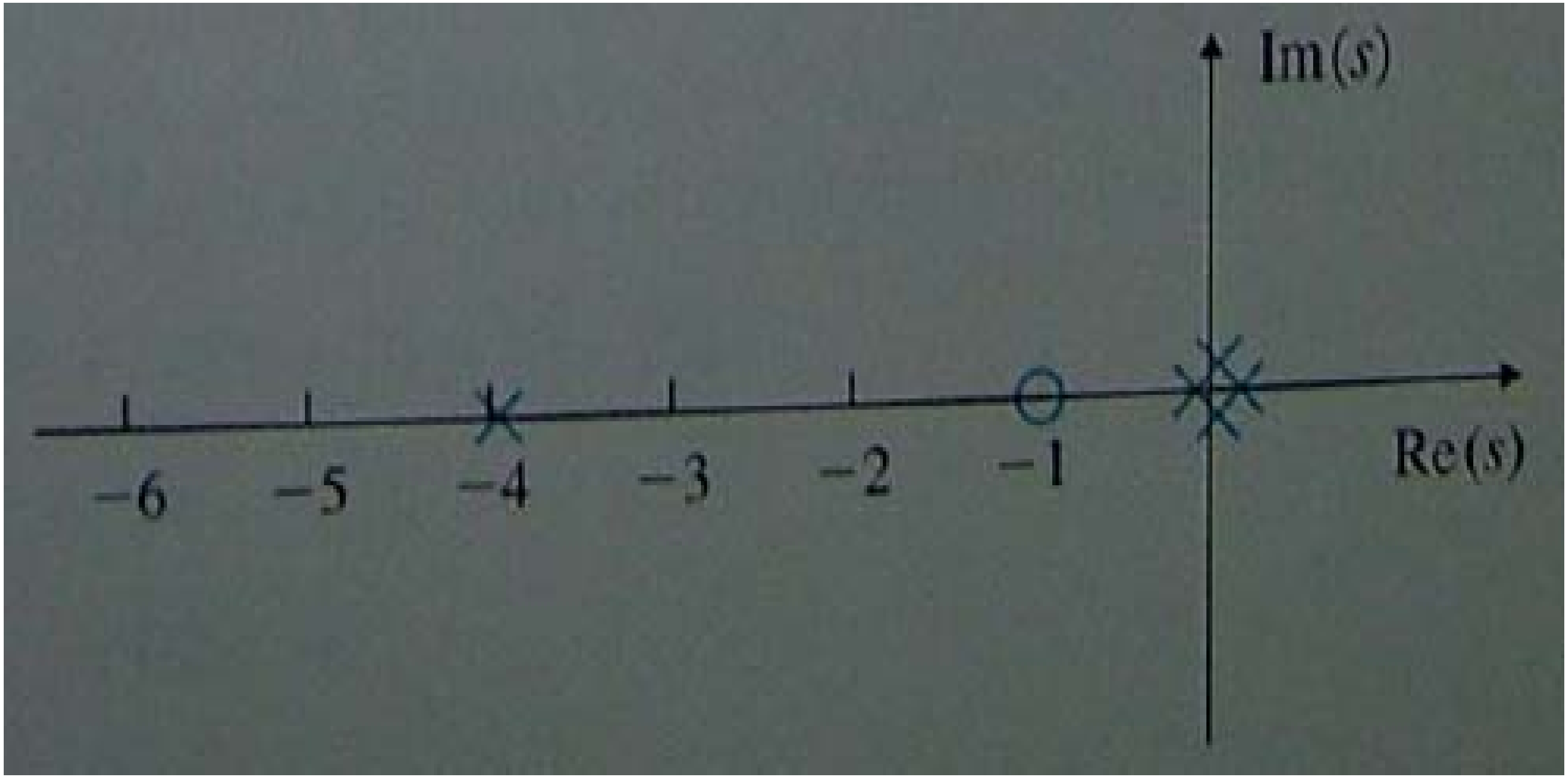
II. Adımda **s=-2** noktasının kök yer eğrisi üzerinde olduğunu gördüğümüzden **s=-2** kök yer eğrisinin katlı köküne işaret eder.

Adım VII: Eğrini tamamlanır.

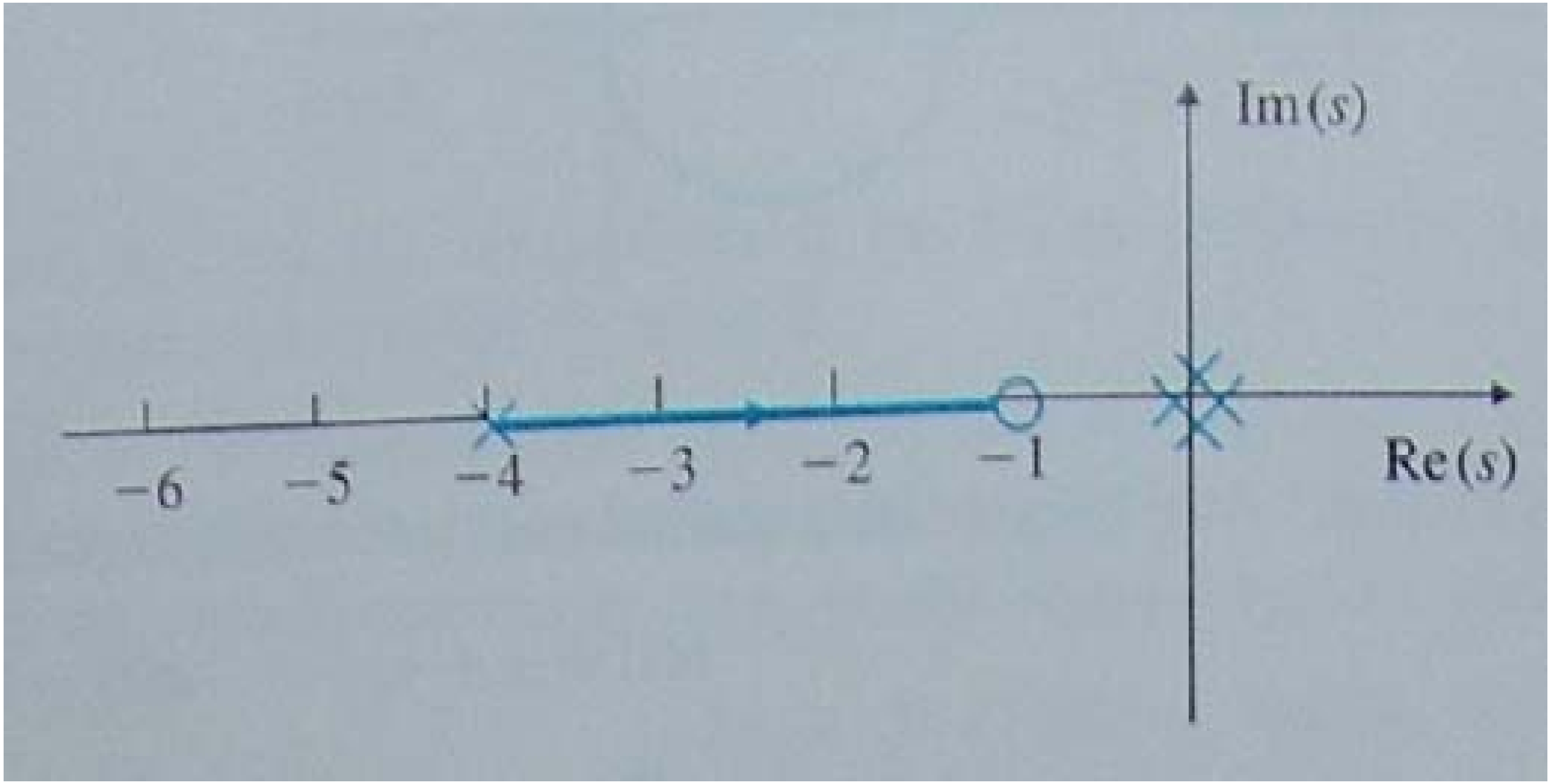


Örnek: $G(s)=\dfrac{s+1}{s^2(s+4)}$ İçin kök yer eğrisini çiziniz?

Adım I: s düzleminde eksenleri çizilir, kökler **“x”** ie sıfırlar **“0”** ile işaretlenir.



Adım II: Reel eksen üzerinde sağında sıfır ve kutup sayısı toplamı tek olan doğruyu çiziniz



Adım III: **α**’da merkezlenen ve **Φ_l** açıları ile ayrılan asimtotlar çizilir

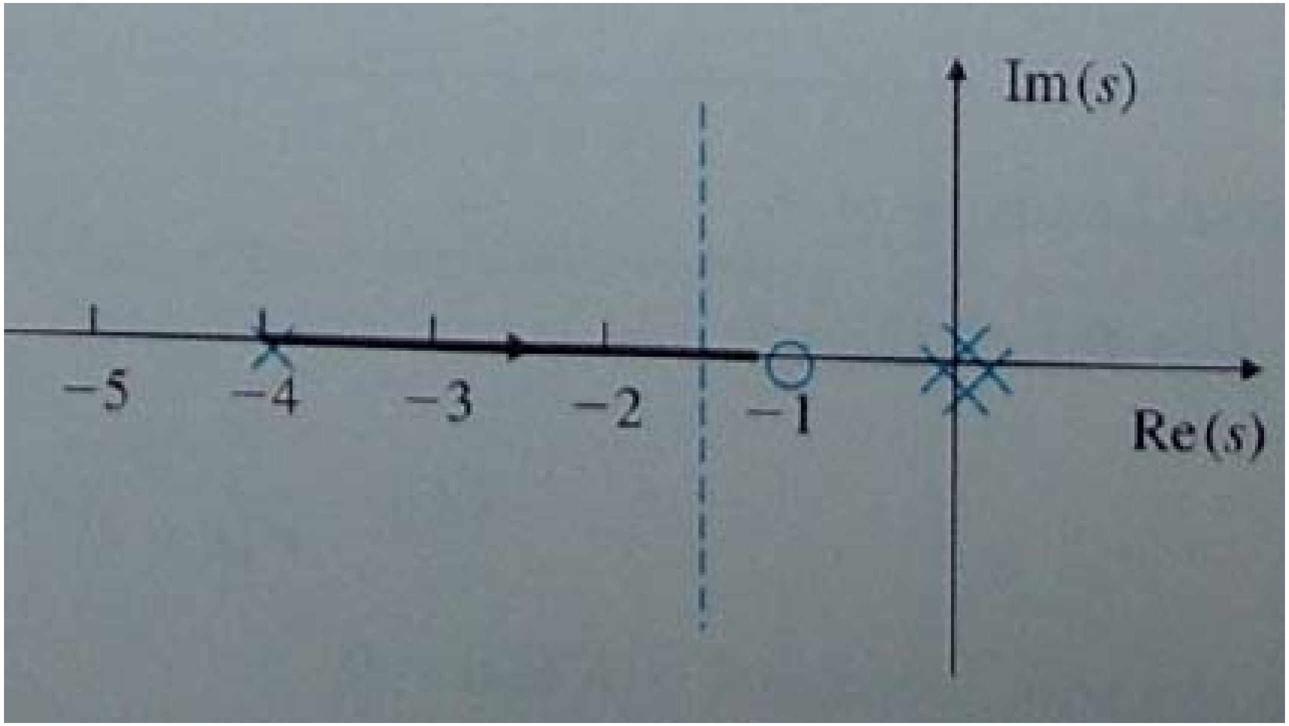
n-m=3-1= 2 asimptot var.

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$$

$$\phi_l = \frac{180^0 + 360^0 (l-1)}{3-1}$$

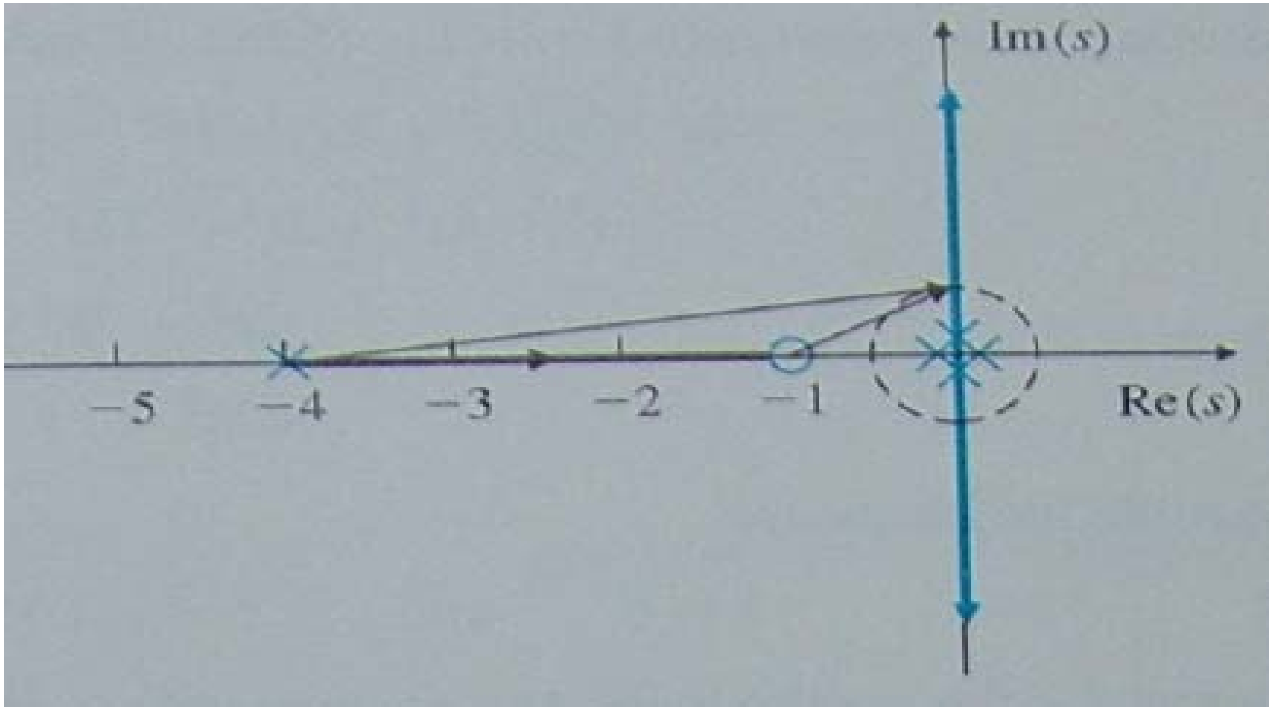
$$\alpha = \frac{-4-(-1)}{3-1} \qquad \alpha = \frac{-3}{2}$$

$$\phi_l == \pm 90^0$$



Adım IV: Ayrılma açıları kutuplardan ve geliş açıları sıfırlardan hesaplanır.

s=0 daki kutuplar için bu kutuplar etrafında bir çember çizelim.



-1 noktasındaki sıfırdan ve **-4** noktasındaki kutuptan olan açılar **0** dır ve orjindeki iki kutuptan olan açılar aynıdır, böylece açı koşulu:

$$-2\phi_l - 0^0 + 0^0 = 180^0 + 360^0 l$$

$$\phi_l = -90^0 - 180^0 l$$

$$\phi_l = \pm 90^0$$

Adım V: İmajiner ekseni kesme noktaları hesaplanır. (Bu adım bazı çizimler için gerekli olmaya bilir.)

Karakteristik denklem:

$$1+K\frac{s+1}{s^2(s+4)}=0$$

$$s^3+4s^2+Ks+K=0$$

S^3 :	**1**	**K**
S^2 :	**4**	**K**
S^1 :	**(4K-K)/4**	
S^0 :	**K**	

K>0 için birinci kolon elemanlarının hepsi pozitif olduğu için bütün kökler sol yarı düzlemdedir ve kök yer eğrisi imajiner ekseni kesmez

Adım VI: Katlı köklerin yerleri belirlenir, özellikle reel ekseni ve geliş, ayrılış açıları belirlenir. İki parçalı kök yer eğrisi **180** derecede bir araya gelir **±90** derecede ayrılır. Üç parçalı yer eğrileri **120** derecede bir araya gelir **60** derece dönerek ayrılır.

Kök yer eğrisi koşulu:

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{a}{b}\right) = -\frac{1}{b^2}\left(b\frac{da}{ds} - a\frac{db}{ds}\right) = 0$$

$$b(s) = s+1 \qquad a(s) = s^3 + 4s^2$$

$$\frac{db}{ds} = 1 \qquad \frac{da}{ds} = 3s^2 + 8s$$

$$(s+1)(3s^2+8s) - (s^3+4s^2)(1) = 0$$

$$-s^3 - 4s^2 + 3s^3 + 11s^2 + 8s = 0$$

$$2s^3 + 7s^2 + 8s = 0$$

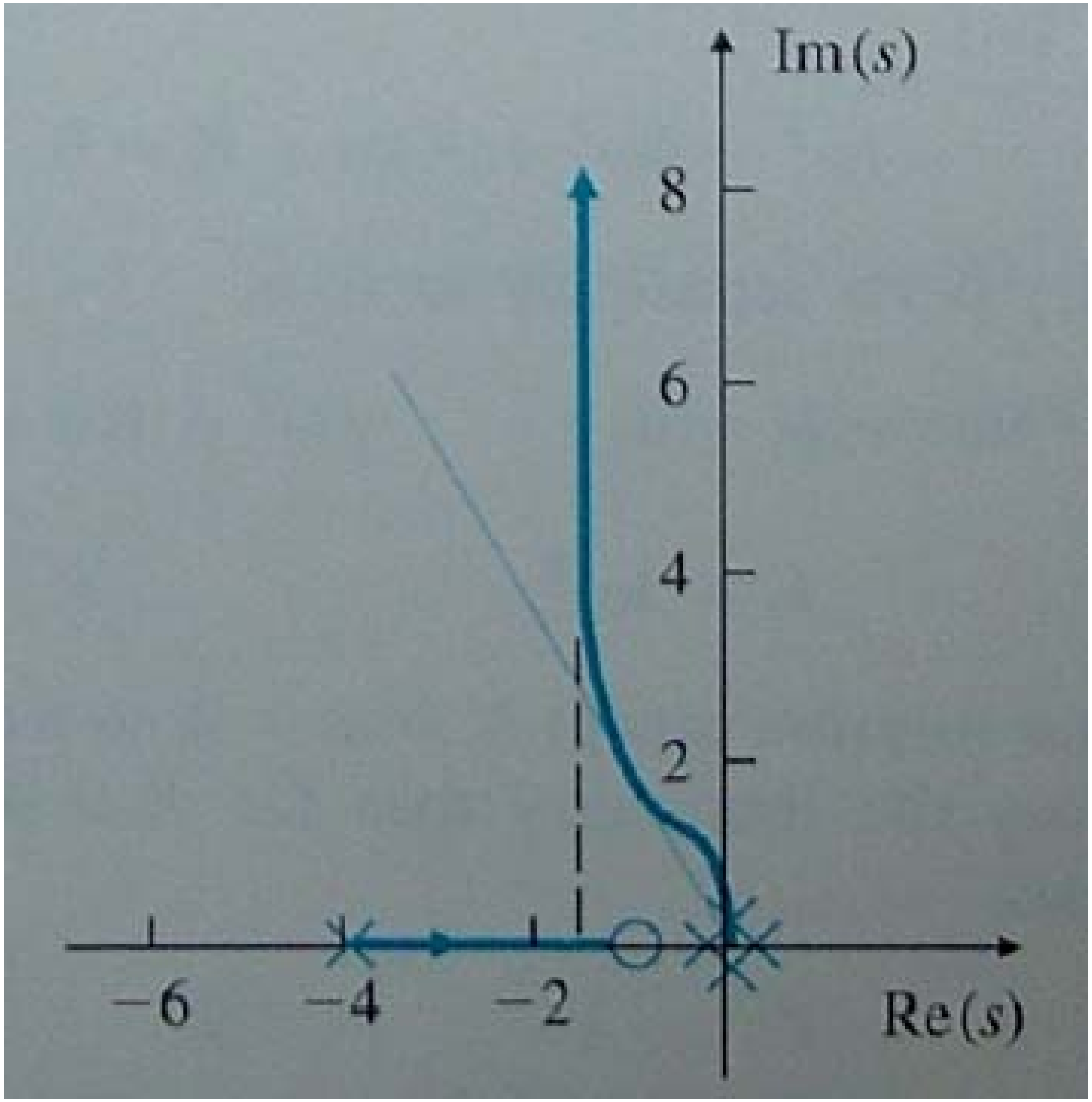
$$s(2s^2 + 7s + 8) = 0$$

s=0 kök yer eğrisinin G(s)'in

iki kökünün **K=0** da olduğunu gösterir.

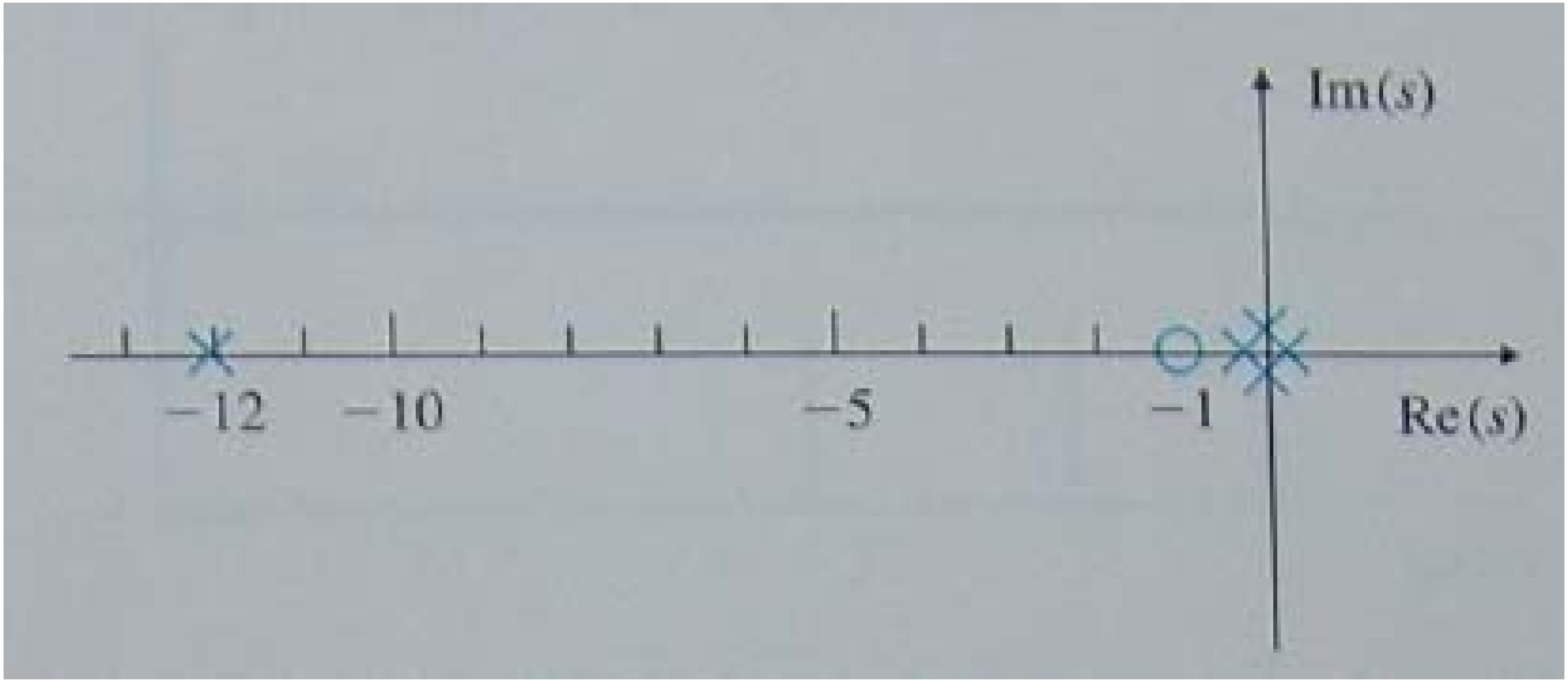
s=0 ve s=-1.75±0.97j

Adım VII: Eğrini tamamlanır.

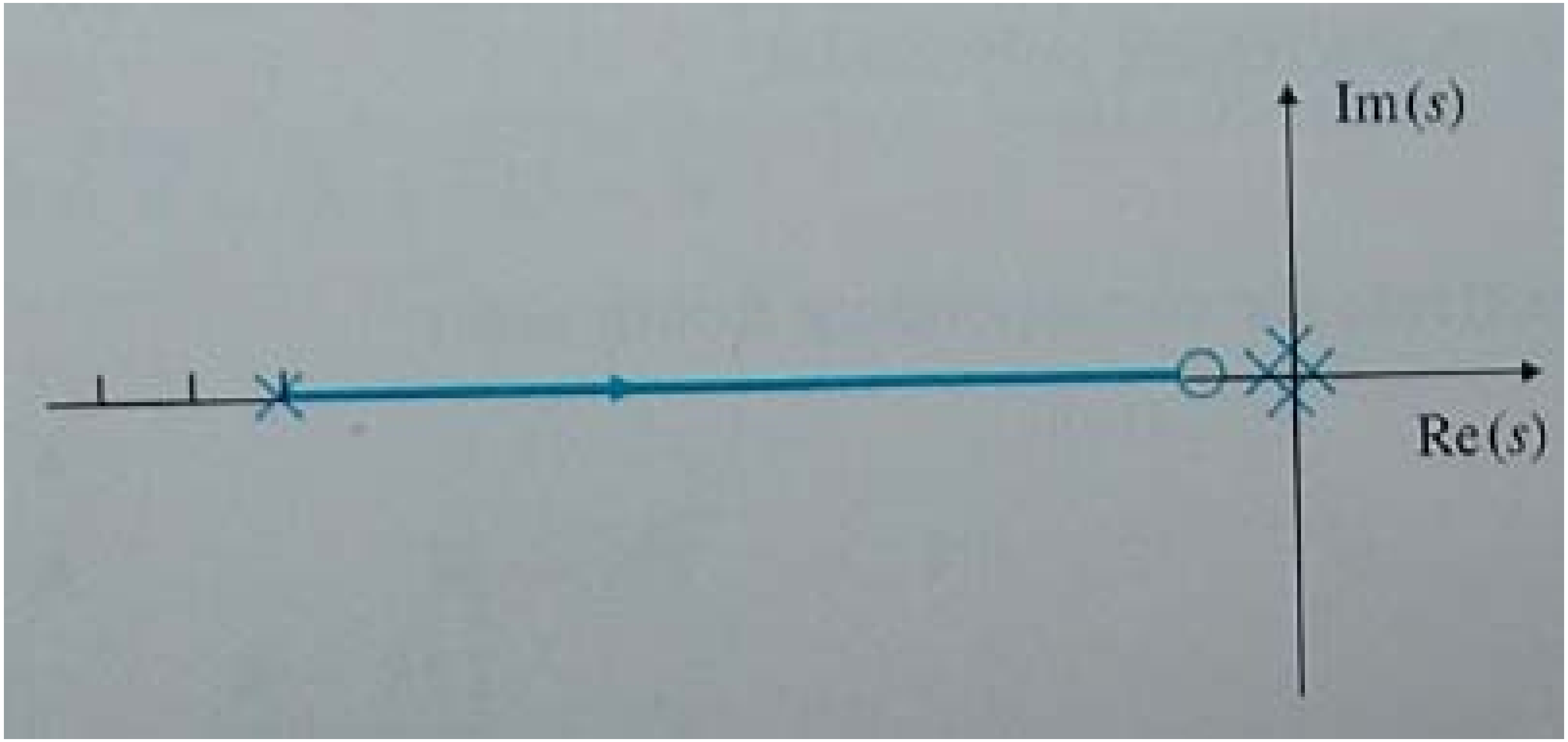


Örnek: $G(s)=\dfrac{s+1}{s^2(s+12)}$ İçin kök yer eğrisini çiziniz?

Adım I: s düzleminde eksenleri çizilir, kökler **“x”** ie sıfırlar **“0”** ile işaretlenir.



Adım II: Reel eksen üzerinde sağında sıfır ve kutup sayısı toplamı tek olan doğruyu çiziniz



Adım III: **α**'da merkezlenen ve $\mathbf{\Phi_l}$ açıları ile ayrılan asimtotlar çizilir

n-m=3-1= 2 asimptot var.

$$\phi_l = \frac{180^0 + 360^0(l-1)}{n-m}$$

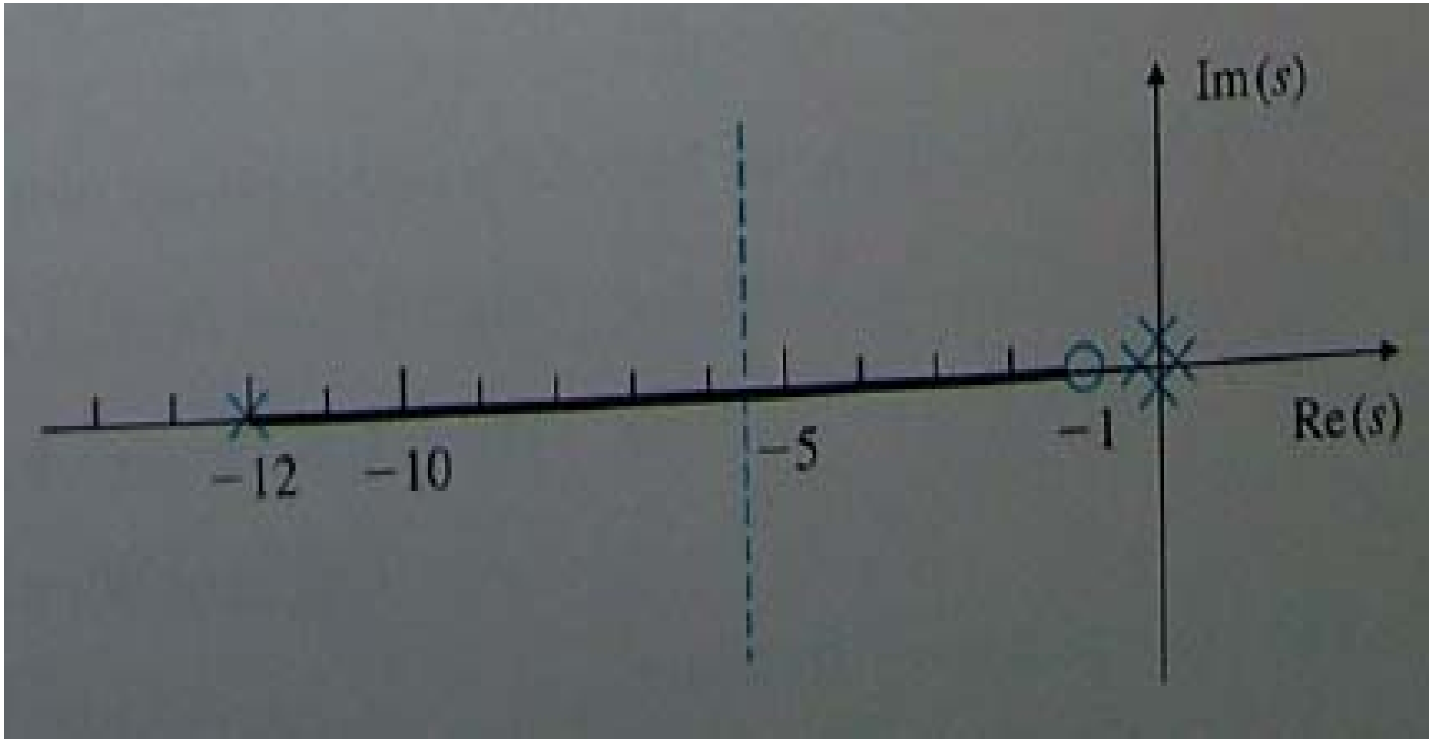
$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$$

$$\phi_l = \frac{180^0 + 360^0(l-1)}{3-1}$$

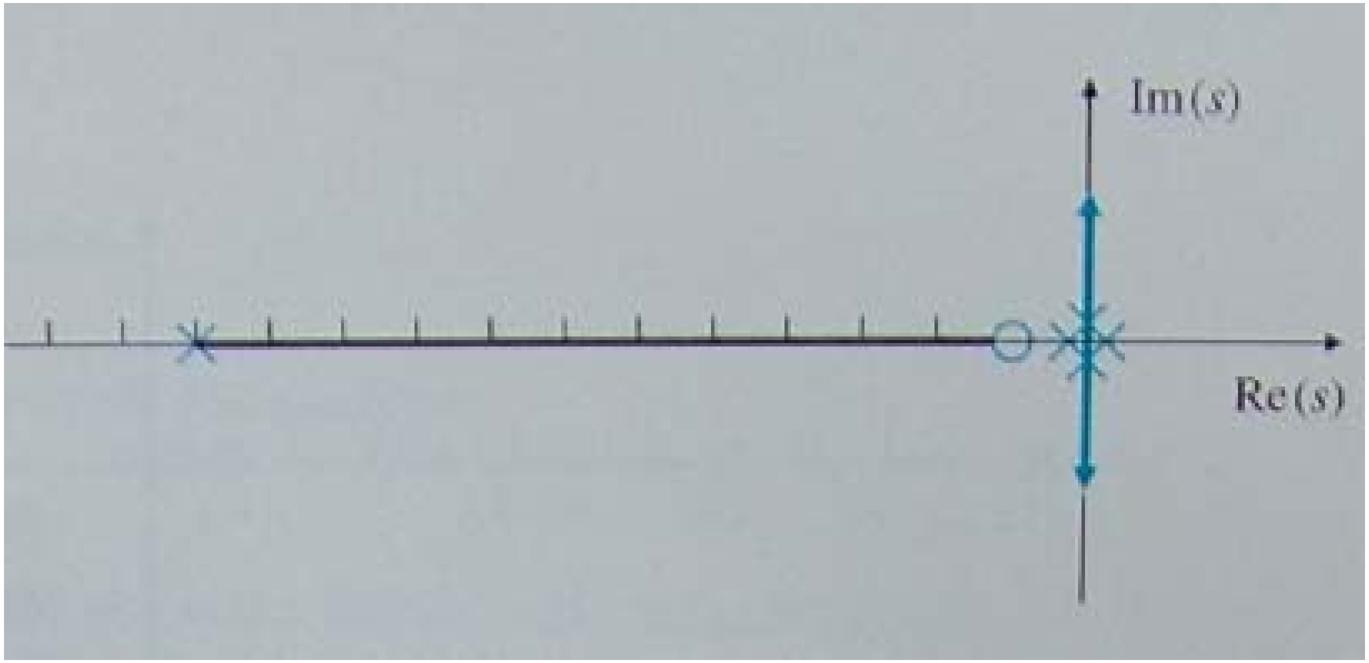
$$\alpha = \frac{-12-0-(-1)}{3-1}$$

$$\alpha = \frac{-11}{2}$$

$$\phi_l = \pm 90^0$$



Adım IV: Ayrılma açıları kutuplardan ve geliş açıları sıfırlardan hesaplanır.



$$-2\phi_l - 0^0 + 0^0 = 180^0 + 360^0 l$$

$$\phi_l = -90^0 - 180^0 l \qquad\qquad \phi_l = \pm 90^0$$

Adım V: İmajiner ekseni kesme noktaları hesaplanır. (Bu adım bazı çizimler için gerekli olmaya bilir.)

Karakteristik denklem: $$1 + K\frac{s+1}{s^2(s+12)} = 0$$

$$s^3 + 12s^2 + Ks + K = 0$$

S^3 :	**1**	**K**
S^2 :	**4**	**K**
S^1 :	**(12K-K)/4**	
S^0 :	**K**	

K>0 için birinci kolon elemanlarının hepsi pozitif olduğu için bütün kökler sol yarı düzlemdedir ve kök yer eğrisi imajiner ekseni kesmez

Adım VI: Katlı köklerin yerleri belirlenir, özellikle reel ekseni ve geliş, ayrılış açıları belirlenir. İki parçalı kök yer eğrisi **180** derecede bir araya gelir **±90** derecede ayrılır. Üç parçalı yer eğrileri **120** derecede bir araya gelir **60** derece dönerek ayrılır.

Kök yer eğrisi koşulu: $$\frac{d}{ds}\left(-\frac{a}{b}\right) = -\frac{1}{b^2}\left(b\frac{da}{ds} - a\frac{db}{ds}\right) = 0$$

$$b(s) = s+1 \qquad a(s) = s^3 + 12s^2$$

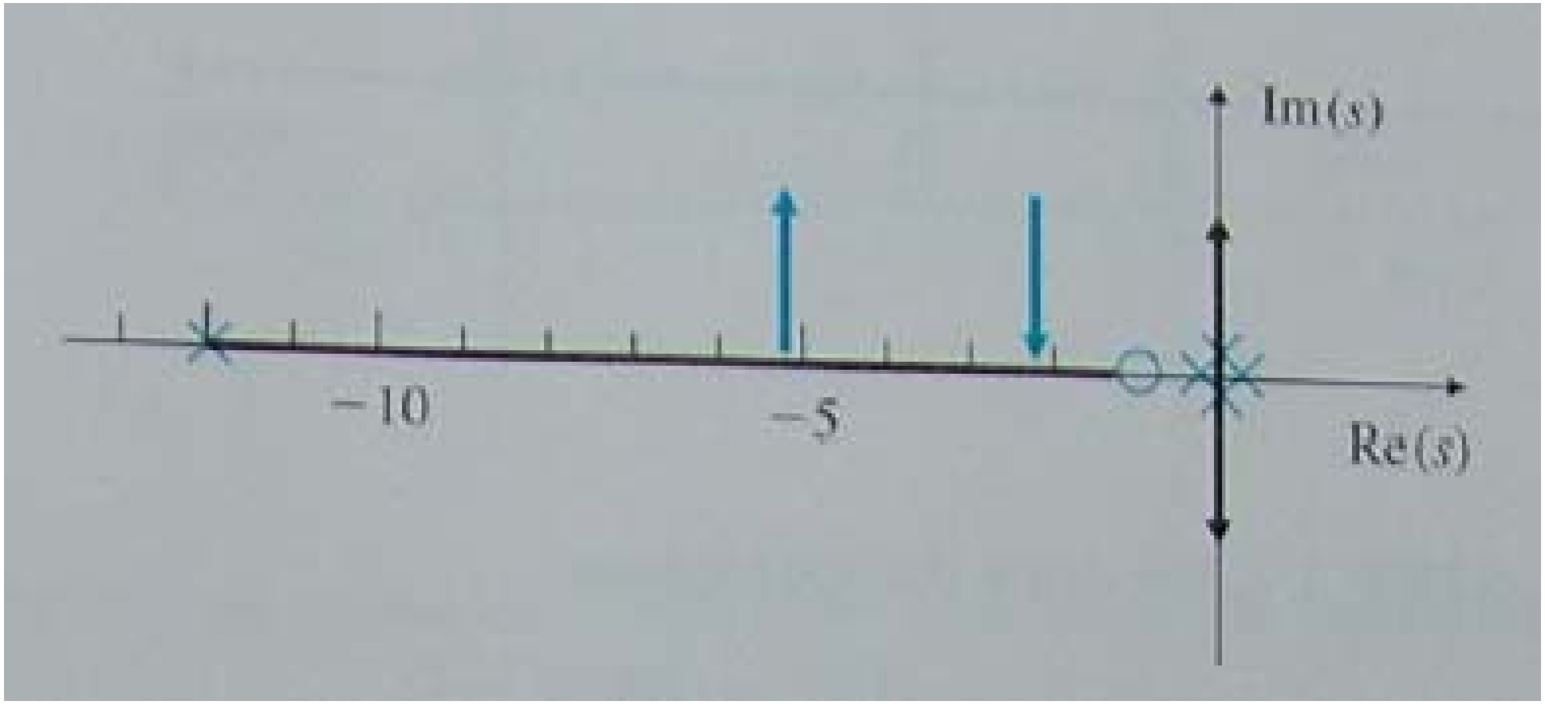
$$\frac{db}{ds} = 1 \qquad \frac{da}{ds} = 3s^2 + 24s$$

$$-(s^3 + 12s^2)(1) + (s+1)(3s^2 + 24s) = 0$$

$$-s^3 - 12s^2 + 3s^3 + 27s^2 + 24s = 0$$

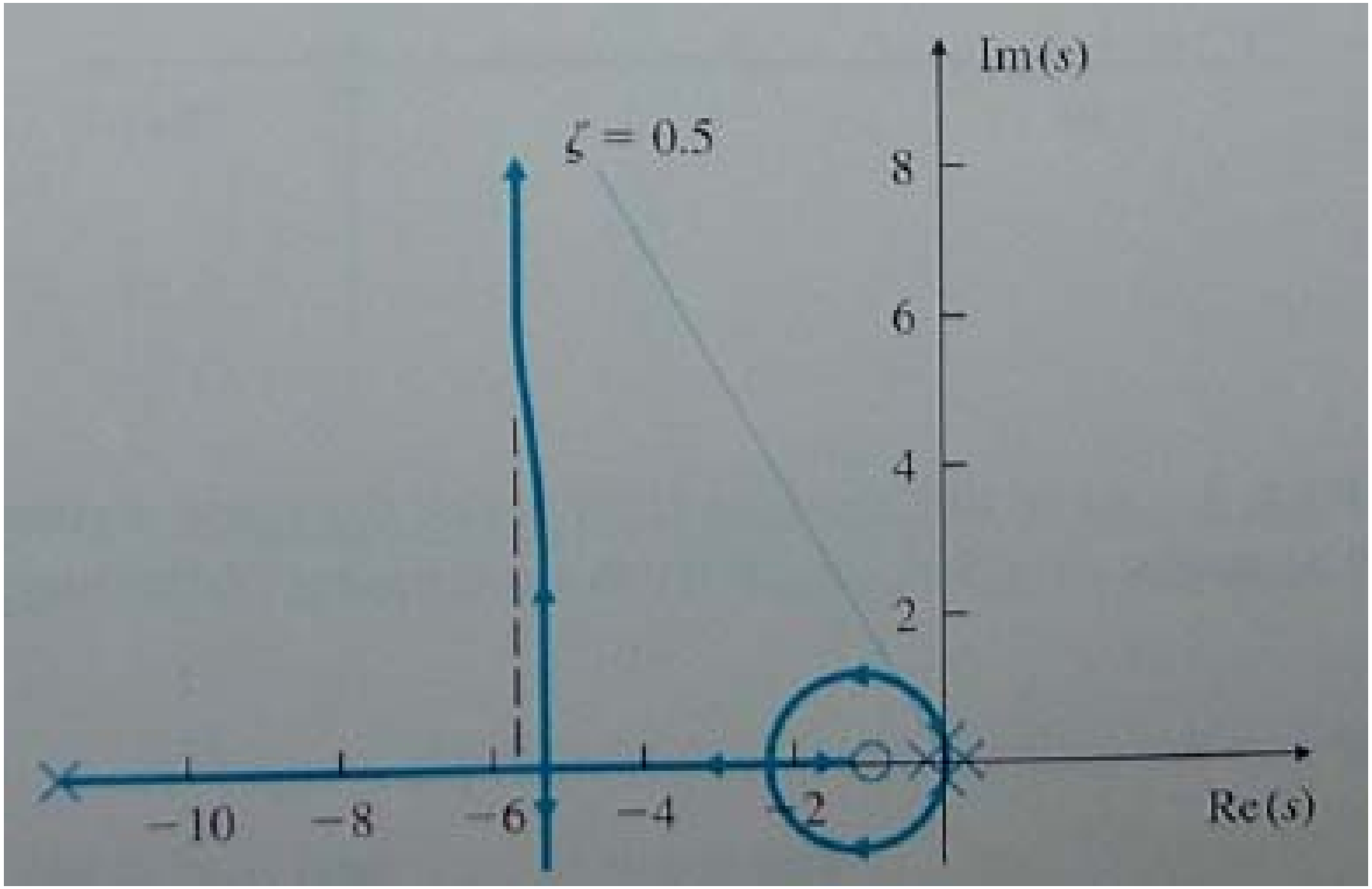
$$2s^3 + 15s^2 + 24s = 0 \qquad s = 0, -5.18, -2.31$$

$$s = 0, -5.18, -2.31$$



Bu kökler kök yer eğrisi üzerinde dolayısıyla katlı kök noktalarıdır. Bunun anlamı kök yer eğrisi üzerinde bu noktalar temas yada kopma noktalarını gösterir. Kök yer eğrisi kolu reel eksenden ayrılamayacağı için tek çözüm **s=0** noktası kopma, **s=-2.31** noktası temas ve **s=-5.18** noktası kopma noktasıdır.

Adım VII: Eğrini tamamlanır.

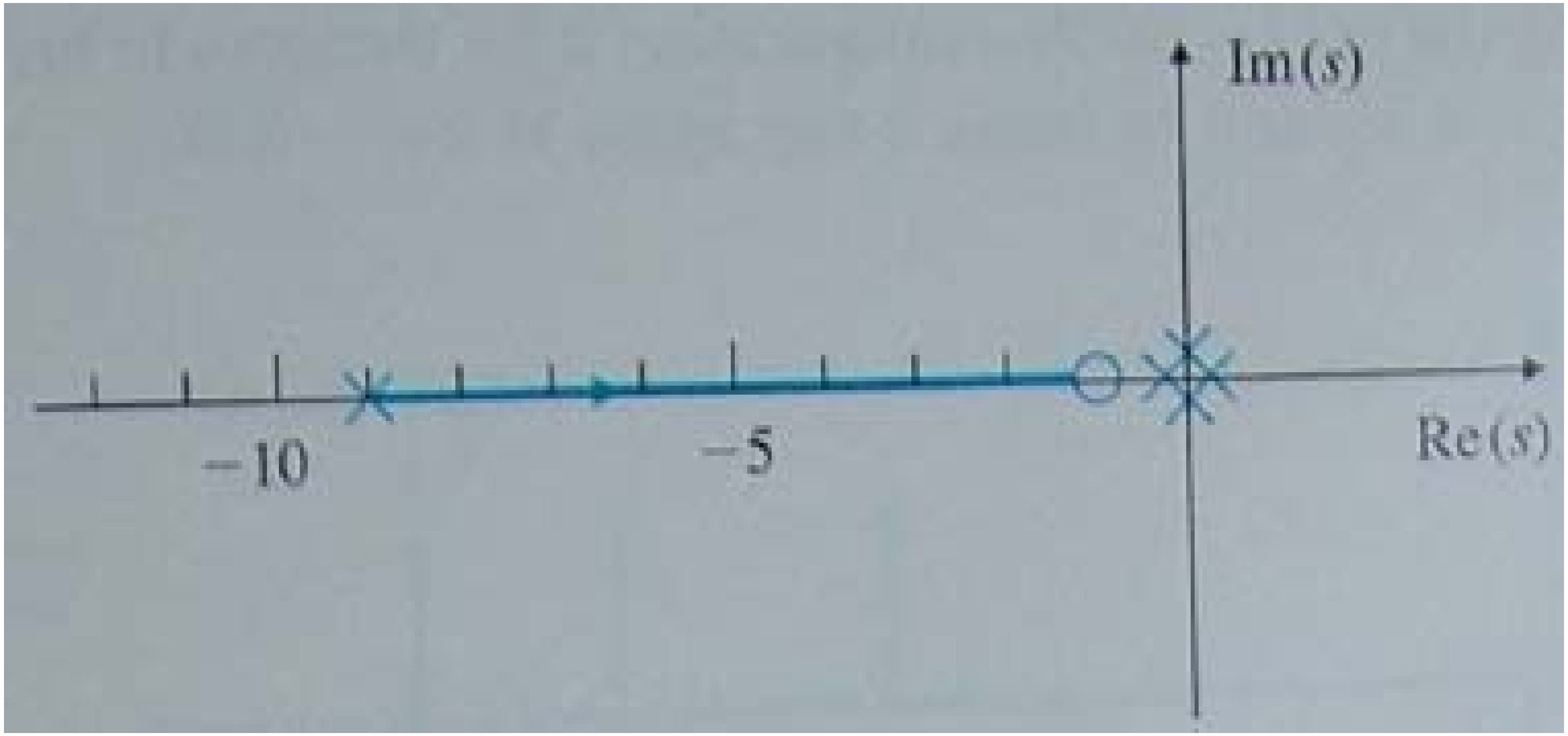


Dikkat edilecek olursa **-5,18** kopma noktasından sonra eğri **K** nın büyük değerleri olan asimptotuna yaklaşır. Ayrıca kopma ve temas noktaları dik açı ile gerçekleşir.

Örnek: $$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+9)}$$ İçin kök yer eğrisini çiziniz?

Adım I: s düzleminde eksenleri çizilir, kökler **“x”** ie sıfırlar **“0”** ile işaretlenir.

Adım II: Reel eksen üzerinde sağında sıfır ve kutup sayısı toplamı tek olan doğruyu çiziniz



Adım III: **α**'da merkezlenen ve **Φ_l** açıları ile ayrılan asimtotlar çizilir

$$\phi_l = \frac{180^0 + 360^0(l-1)}{n-m}$$

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$$

$$\phi_l = \frac{180^0 + 360^0(l-1)}{3-1}$$

$$\alpha = \frac{-9-0-(-1)}{3-1} \qquad \alpha = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\phi_l = \pm 90^0$$

Adım IV: Ayrılma açıları kutuplardan ve geliş açıları sıfırlardan hesaplanır.

s=0 noktasında kopma açısı(ayrılıma açısı) $\phi_l = \pm 90^0$

Adım V: İmajiner ekseni kesme noktaları hesaplanır. (Bu adım bazı çizimler için gerekli olmaya bilir.)

Karakteristik denklem:

$$1+K\frac{s+1}{s^2(s+9)}=0$$

$$s^3+9s^2+Ks+K=0$$

S^3 :	1	K
S^2 :	4	K
S^1 :	(9K-K)/4	
S^0 :	K	

K>0 için birinci kolon elemanlarının hepsi pozitif olduğu için bütün kökler sol yarı düzlemdedir ve kök yer eğrisi imajiner ekseni kesmez

Adım VI: Katlı köklerin yerleri belirlenir, özellikle reel ekseni ve geliş, ayrılış açıları belirlenir. İki parçalı kök yer eğrisi **180** derecede bir araya gelir **±90** derecede ayrılır. Üç parçalı yer eğrileri **120** derecede bir araya gelir **60** derece dönerek ayrılır.

Kök yer eğrisi koşulu: $\frac{d}{ds} = (-\frac{a}{b}) = -\frac{1}{b^2}(b\frac{da}{ds} - a\frac{db}{ds}) = 0$

$$b(s) = s + 1 \qquad a(s) = s^3 + 9s^2$$

$$\frac{db}{ds} = 1 \qquad \frac{da}{ds} = 3s^2 + 18s$$

$$-(s^3 + 9s^2)(1) + (3s^2 + 18s)(s + 1) = 0$$

$$-s^3 - 9s^2 + 3s^3 + 21s^2 + 18s = 0$$

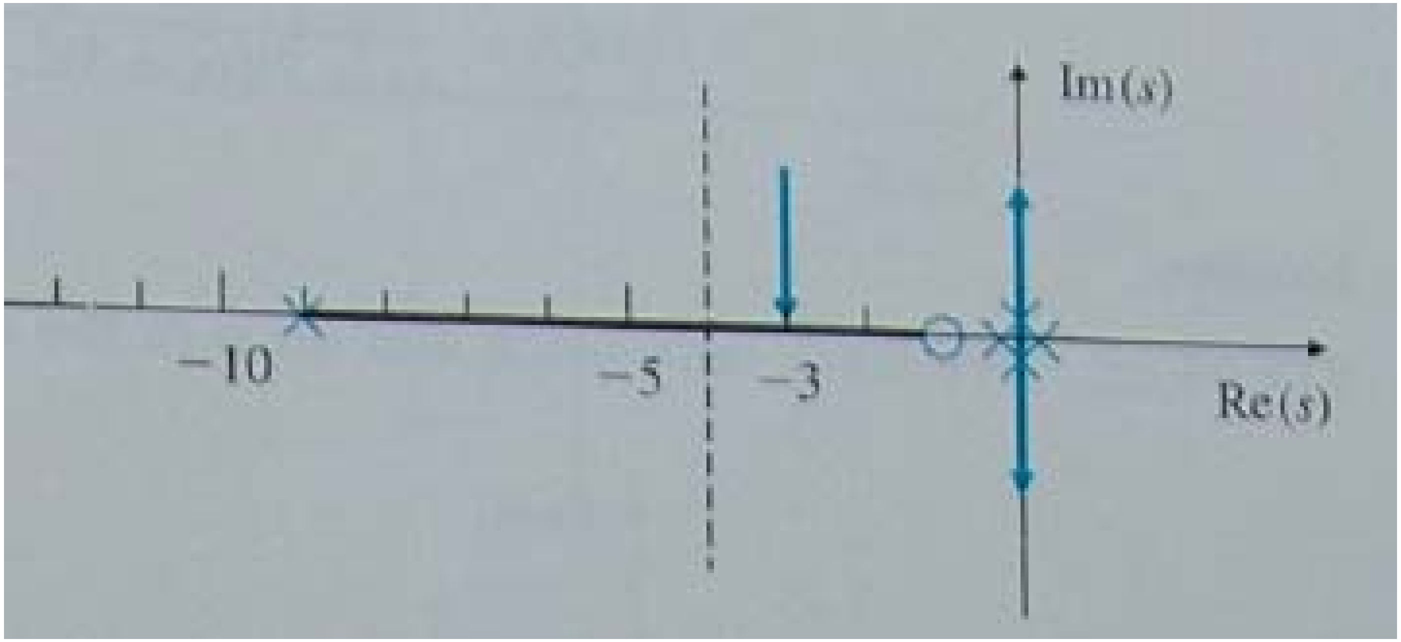
$$2s^3 + 12s^2 + 18s = 0$$

s=0, -3, -3

Katlı kökler kök yer eğrisinin üzerinde fakat bu kez türevde katlı kökümüz var. Buda bize üç kökünde aynı noktada olduğunu gösterir.

s=-3 noktasında K>0 için kopma (ayrılma) açısı kuralını uygalayacak olursak;

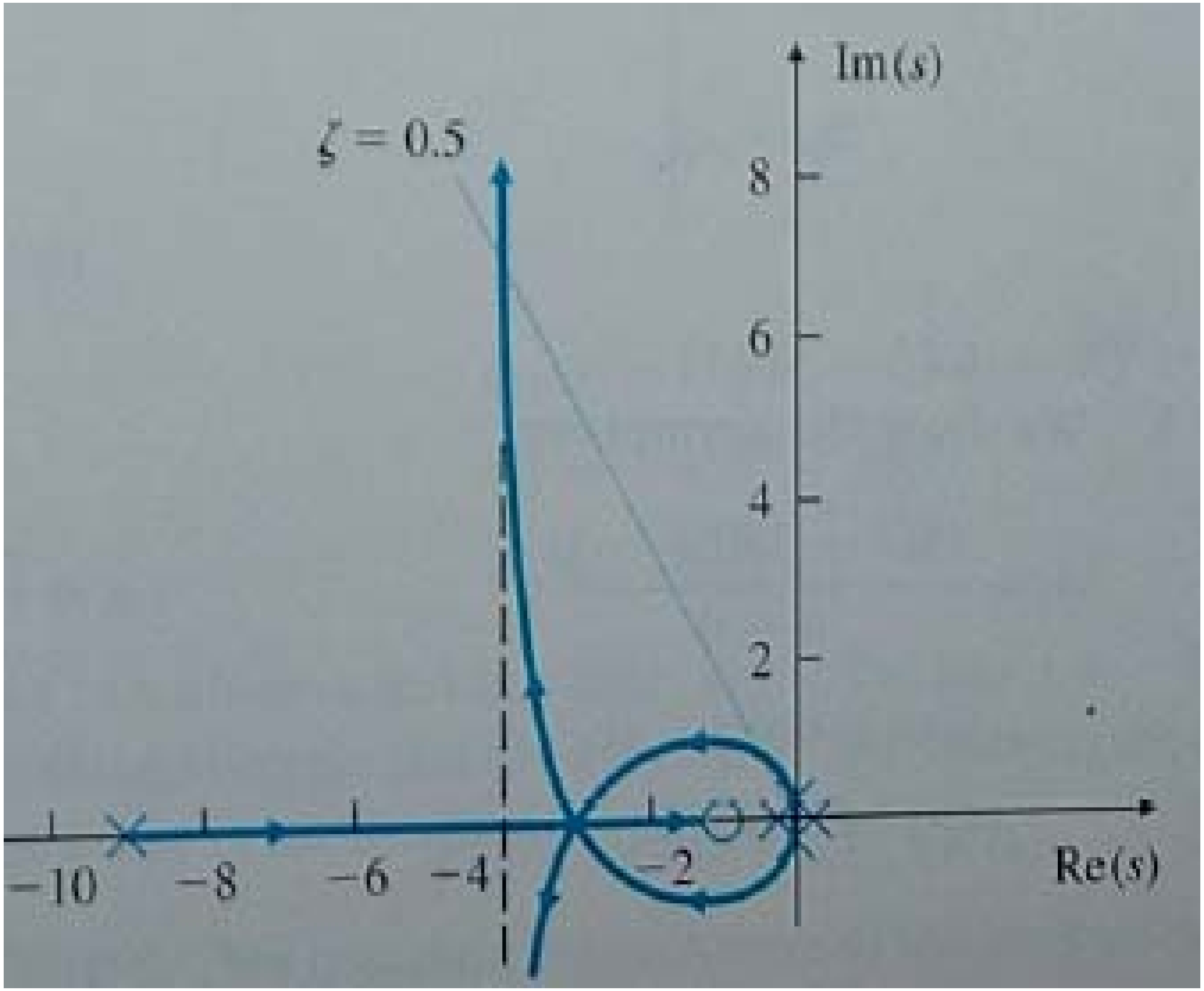
$$-3\phi_l + 180^0 = 180^0 + 360^0 l \qquad \phi_{dep} = 0^0, \pm 120^0$$



Geliş açısı ayrılış açılarından 60 derece döndürülür.

$$\phi_{ar} = \pm 60^0, 180^0$$

Adım VII: Eğrini tamamlanır.

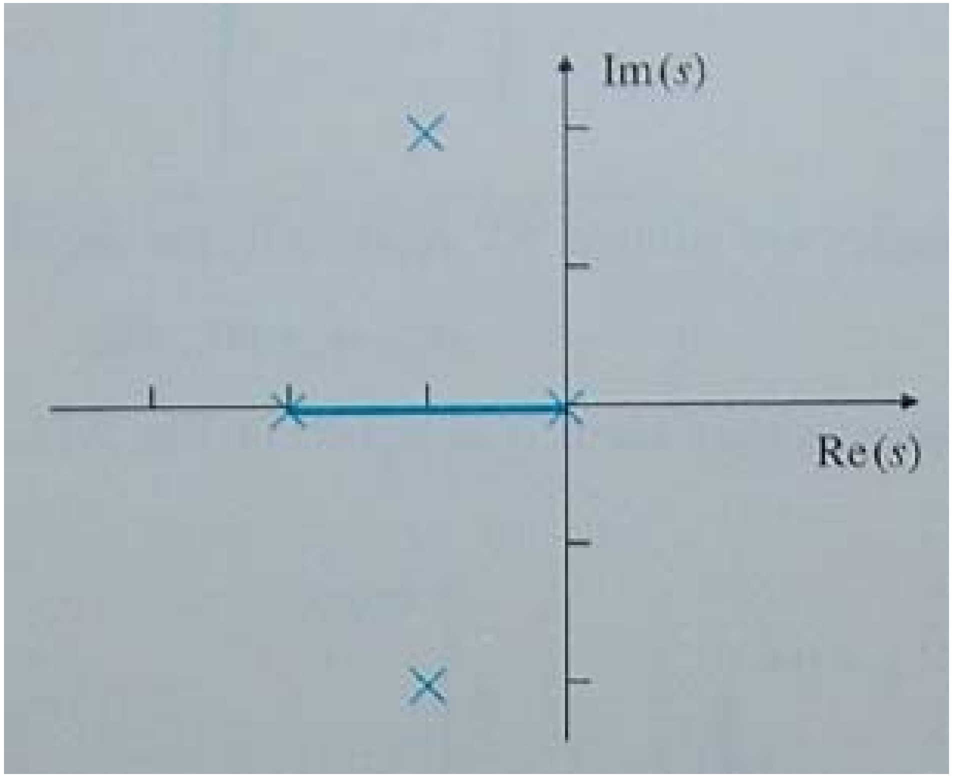


Üçüncü kutup 0’a yakın olduğunda, **$s=0$** noktasında **± 90** ile iki kola ayrılan **$G(s)=1/s^2$** nin kök yer eğrisine çok benzemektedir(biraz bozularak). **$p=9$** a kadar bu bozgunluk devam eder ve **$p=9$** için **-3** noktasında üç katlı temas olur. Kutup **-9** dan ileri götürüldüğünde kök yer eğrisi ayrık temas ve kopma noktaları gösterir. İki uç noktası olan **$p=1$** (sıfırın elendiği) ve **$p=\infty$** (ekstra kutbun etkisiz olduğu) arasında ikinci derece sistemin **$p=9$** noktası geçiş noktasıdır.

Örnek: $$G(s)=\frac{1}{s(s+2)[(s+1)^2+4]}$$ İçin kök yer eğrisini çiziniz?

Adım I: s düzleminde eksenleri çizilir, kökler “x” ie sıfırlar “0” ile işaretlenir.

Adım II: Reel eksen üzerinde sağında sıfır ve kutup sayısı toplamı tek olan doğruyu çiziniz s=0, -2, -1±2j



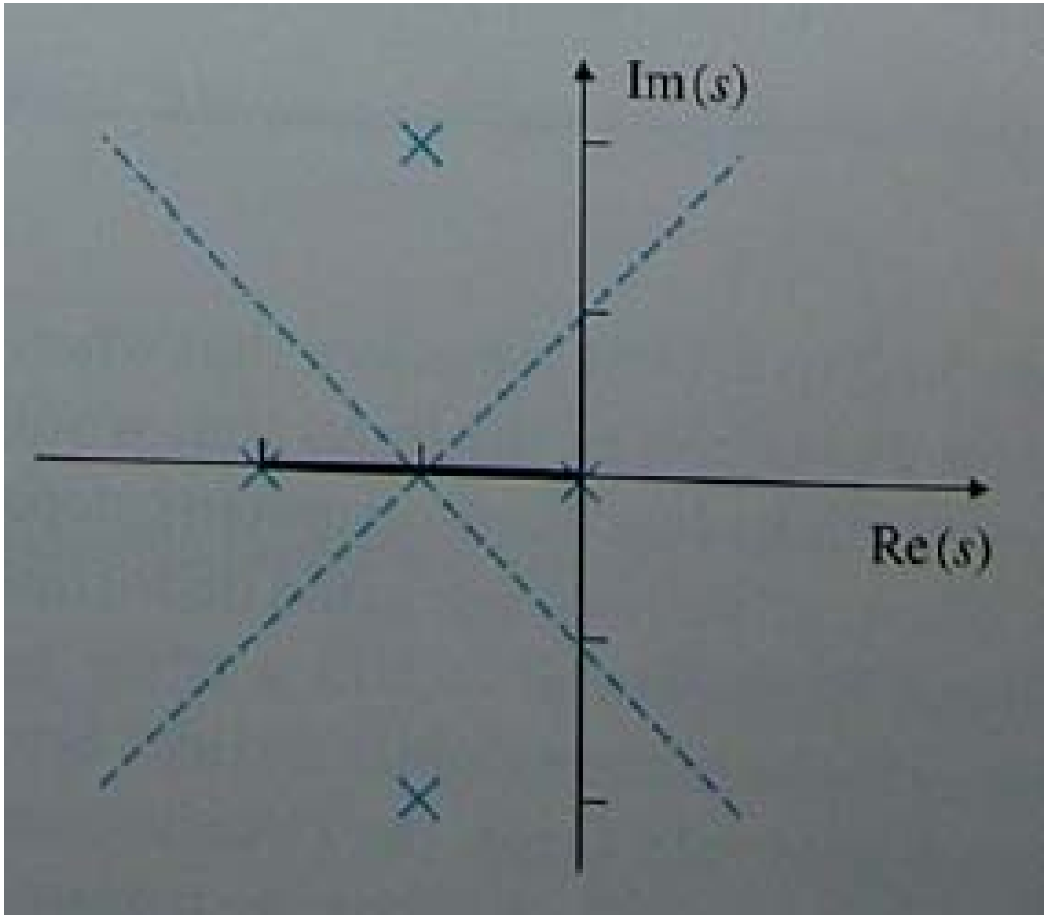
Adım III: **α**'da merkezlenen ve **Φ_l** açıları ile ayrılan asimtotlar çizilir

$$\phi_l = \frac{180^0 + 360^0 (l-1)}{4-0} \qquad \alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} \qquad \alpha = \frac{-2-1-1-0+0}{4-0}$$

$$\alpha = -1$$

$$\phi_l = 45^0 + 90^0 (l-1)$$

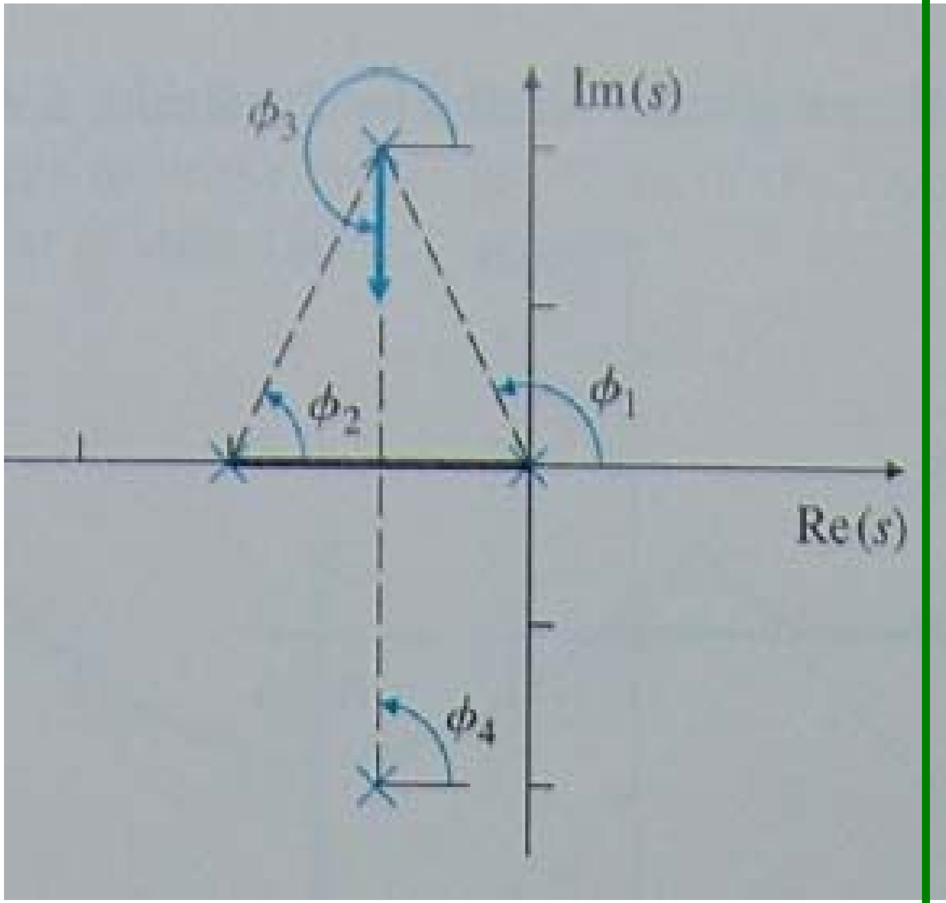
$$\phi_l = 45^0, 135^0, -45^0, -135^0$$



Adım IV: Ayrılma açıları kutuplardan ve geliş açıları sıfırlardan hesaplanır.

s= -1+2j deki ayrılış açıları

$$\phi_{dep} = -\phi_1 - \phi_2 - \phi_4 - 180^0 - 360^0 l$$



$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{-1}\right) = 116.6^0$$

$$\phi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 63,4^0$$

$$\phi_4 = 90^0$$

$$\phi_3 = -116.6^0 - 63.4^0 - 90^0 - 180^0 - 360^0 l$$

$$\phi_3 = -90^0$$

Adım V: İmajiner ekseni kesme noktaları hesaplanır. (Bu adım bazı çizimler için gerekli olmaya bilir.)

Karakteristik denklem: $$s^4+4s^3+9s^2+10s+K=0$$

$s=jw_0$ için çözümü deneyecek olursak, w_0 ı buluruz ve K denklemi sağlar

$$\omega_0{}^4+4\omega_0{}^3-9\omega_0{}^2+10\omega_0+K=0$$

Reel ve imajiner kısımları eşitleyecek olursak;

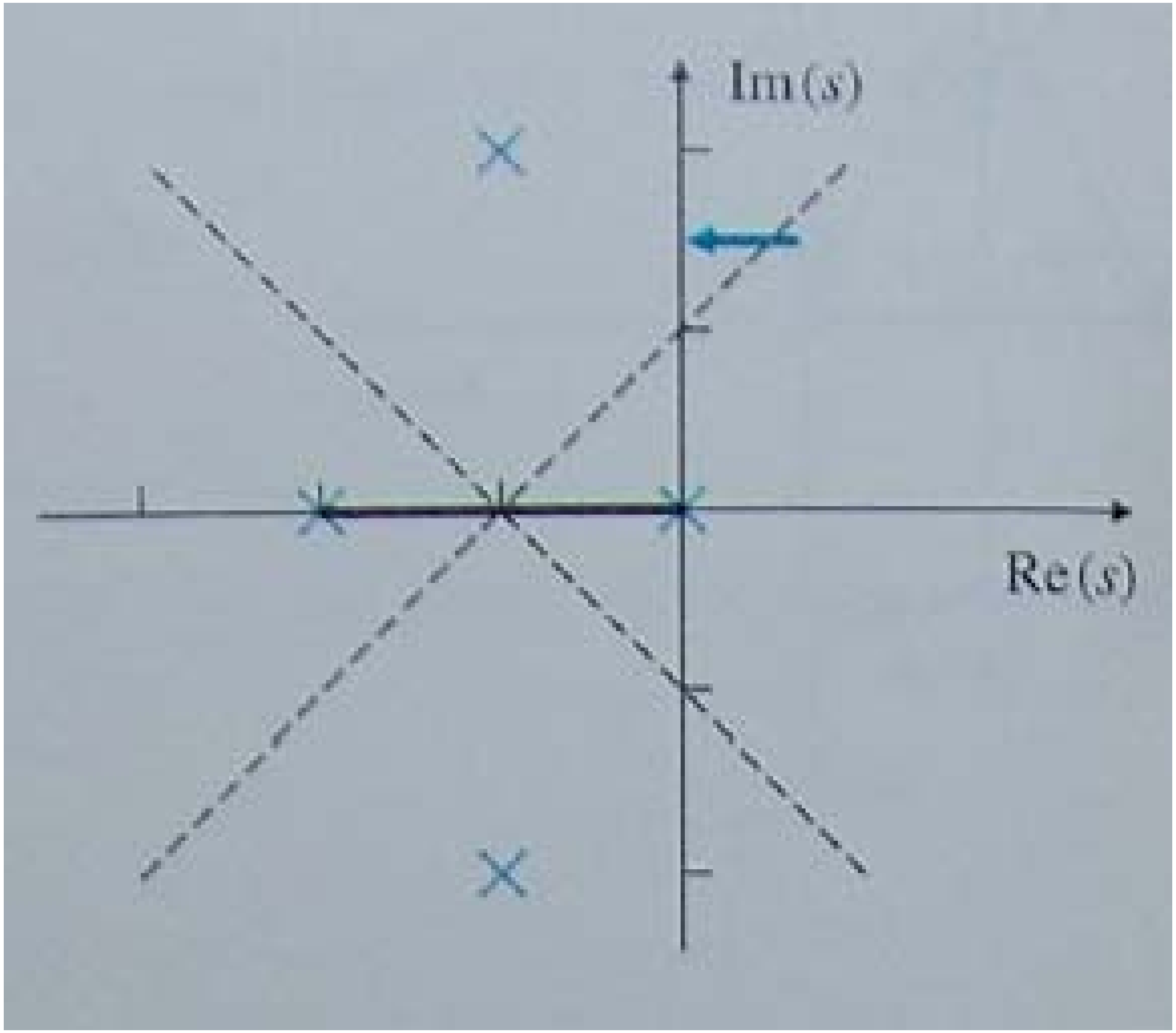
$$\omega_0{}^4-9\omega_0{}^2+K=0$$

$$4\omega_0{}^3+10\omega_0=0$$

$$\omega_0{}^2=2{,}5 \quad ve \;\; \omega_0=1{,}58\, bulunur.$$

$$K=9.2{,}5-\frac{25}{4}=16{,}25$$

$$\omega_0 = 1,58$$



Adım VI: Katlı köklerin yerleri belirlenir, özellikle reel ekseni ve geliş, ayrılış açıları belirlenir. İki parçalı kök yer eğrisi **180** derecede bir araya gelir **±90** derecede ayrılır. Üç parçalı yer eğrileri **120** derecede bir araya gelir **60** derece dönerek ayrılır.

Kök yer eğrisi koşulu:

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{a}{b}\right) = -\frac{1}{b^2}\left(b\frac{da}{ds} - a\frac{db}{ds}\right) = 0$$

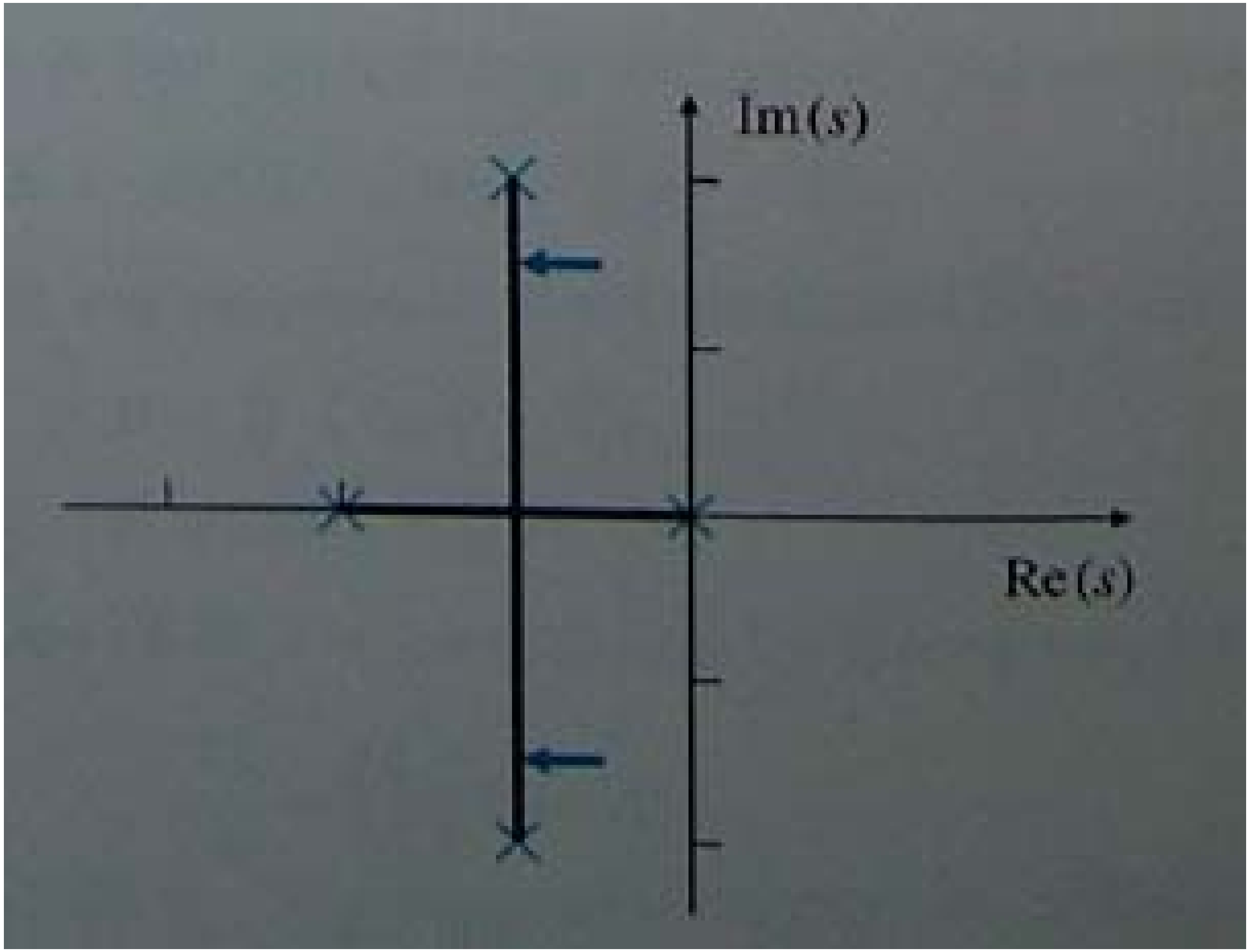
$$b(s) = 1 \qquad a(s) = s^4 + 4s^3 + 9s^2 + 10s$$

$$\frac{db}{ds} = 0 \qquad \frac{da}{ds} = 4s^3 + 12s^2 + 18s + 10$$

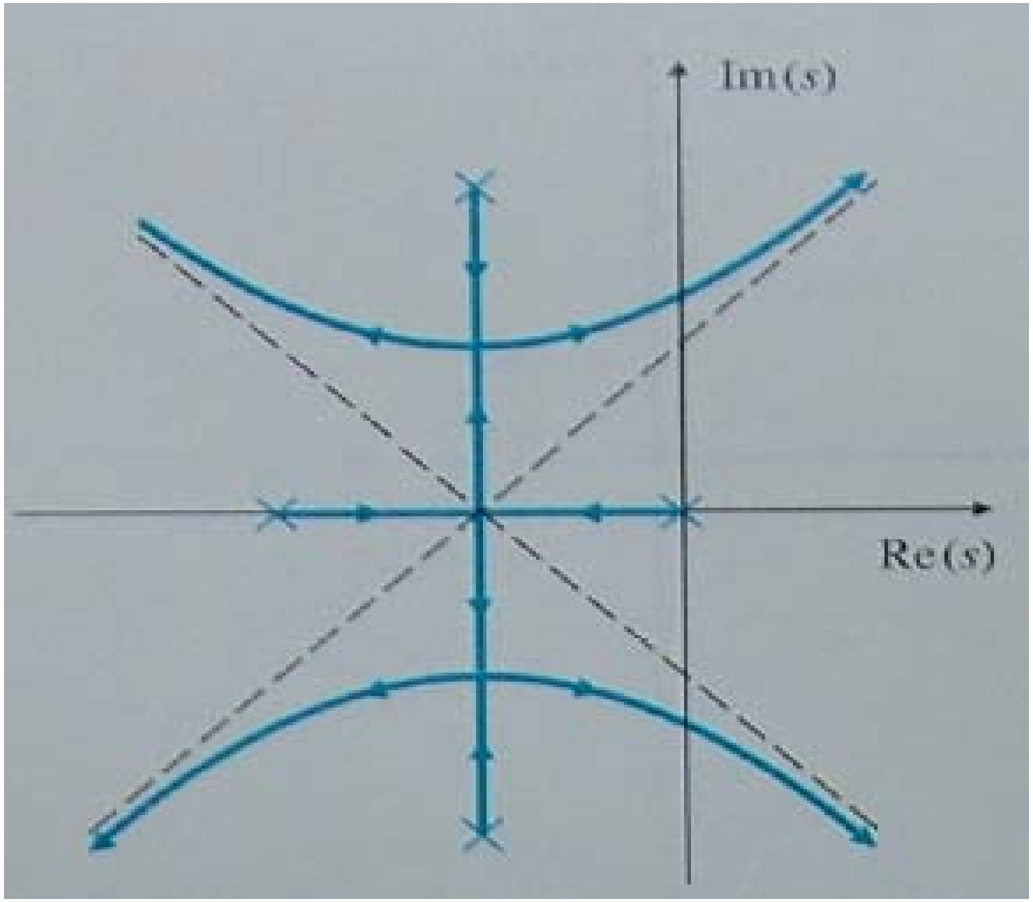
$$4s^3 + 12s^2 + 18s + 10 = (s+1)(4s^2 + 8s + 10) = 0$$

Kökler s=-1, ±1,22j

Kökler s=-1, ±1,22j



Adım VII: Eğrini tamamlanır.



Karmaşık katlı kökerimiz var ve kök yer eğrisinin kolları s=-1, ±1,22j bir araya ve 0 ve 180 derecelerde koparlar.

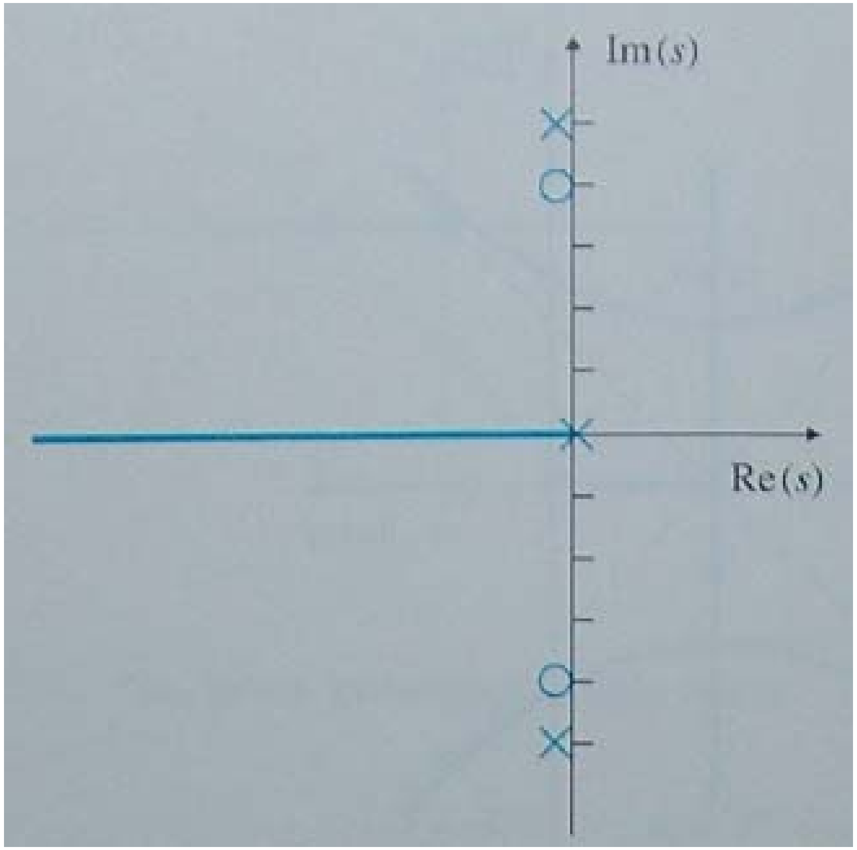
Örnek: $$G(s)=\frac{(s+0.1)^2+16}{s[(s+0.1)^2+25]}$$ İçin kök yer eğrisini çiziniz?

Adım I: s düzleminde eksenleri çizilir, kökler **"x"** ie sıfırlar **"0"** ile işaretlenir.

Adım II: Reel eksen üzerinde sağında sıfır ve kutup sayısı toplamı tek olan doğruyu çiziniz

Sıfırlar **s=-0.1±3.99j**

Kutuplar **s=0, -0.1±4.99j**



Adım III: **α**’da merkezlenen ve **Φ_l** açıları ile ayrılan asimtotlar çizilir

$$\phi_l = \frac{180^0 + 360^0 (l-1)}{n-m} \qquad \alpha = i\lg isiz$$

$$\phi_l = \frac{180^0 + 360^0 (l-1)}{3-2} = 180^0$$

Adım IV: Ayrılma açıları kutuplardan ve geliş açıları sıfırlardan hesaplanır.

0 daki geliş açısı için açı koşulu $-\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 + \psi_1 + \psi_2 = +180^0 + 360^0 l$

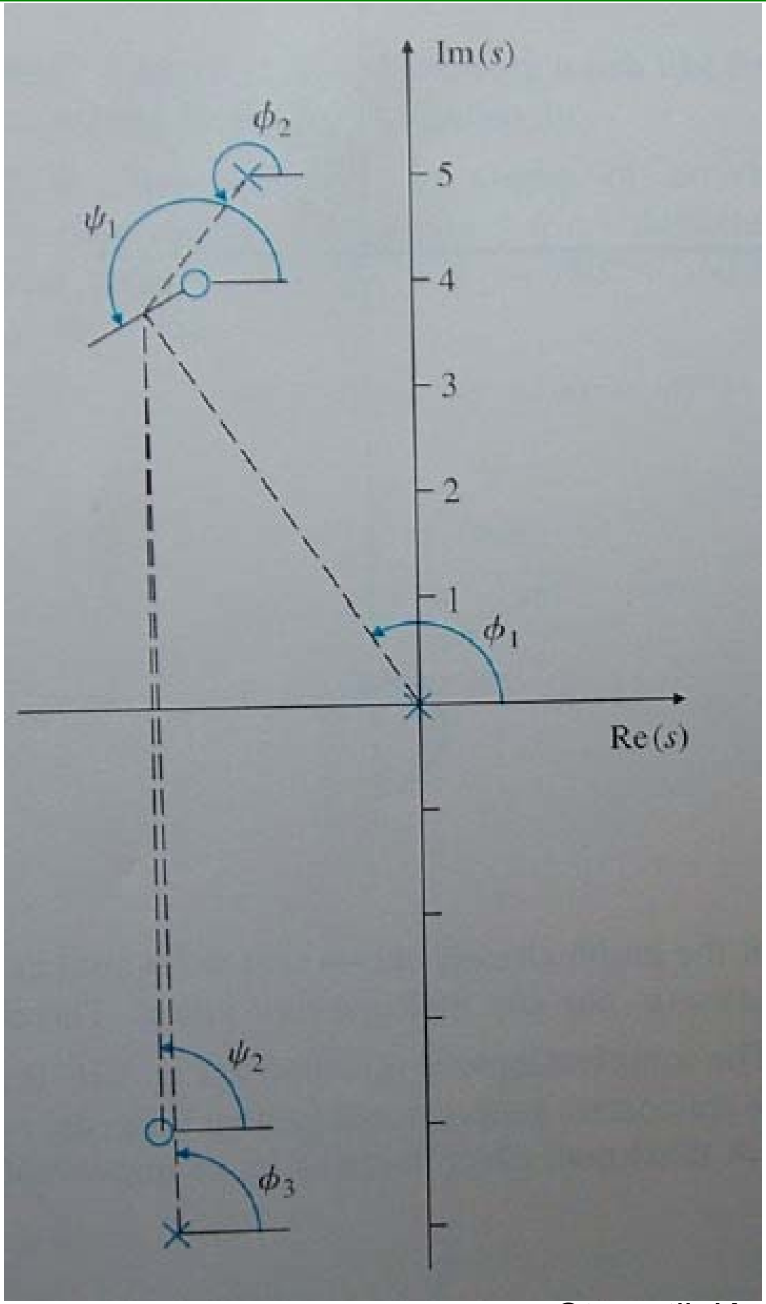
$$\phi_1 \cong 90^0$$

$$\phi_2 \cong -90^0$$

$$\phi_3 \cong 90^0$$

$$\psi_2 \cong 90^0$$

Böylece $\psi_1 = 180$ derecedir
ve kutup soldan gelir.



Ayrılış açısıda benze formülle bulunur. Bu kez;

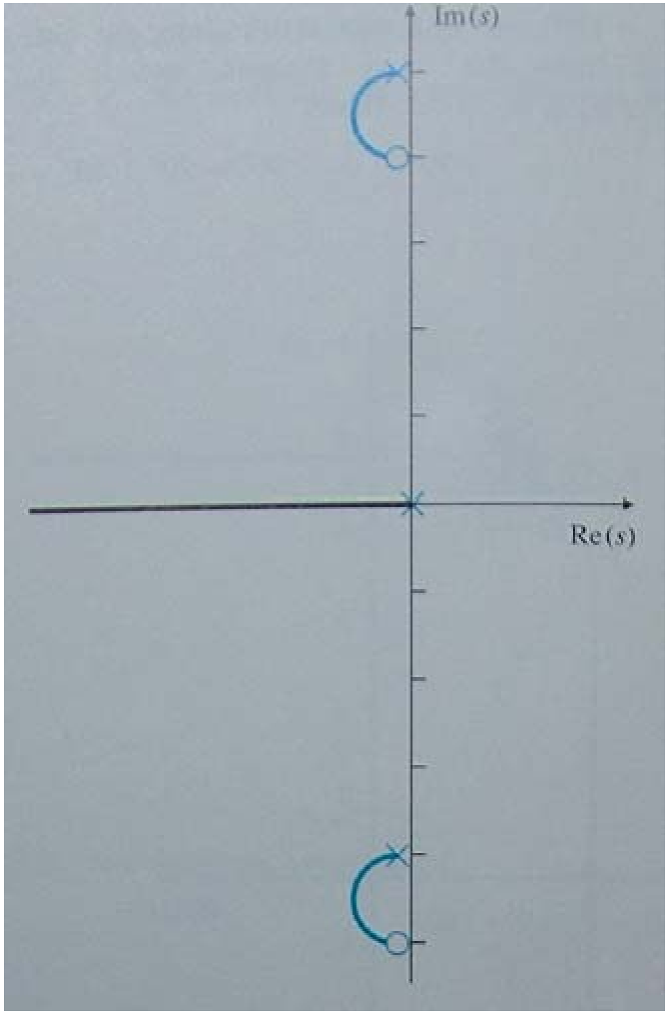
$$\phi_1 \cong 90^0$$
$$\phi_3 \cong 90^0$$
$$\psi_1 \cong 90^0$$
$$\psi_2 \cong 90^0$$

olduğundan

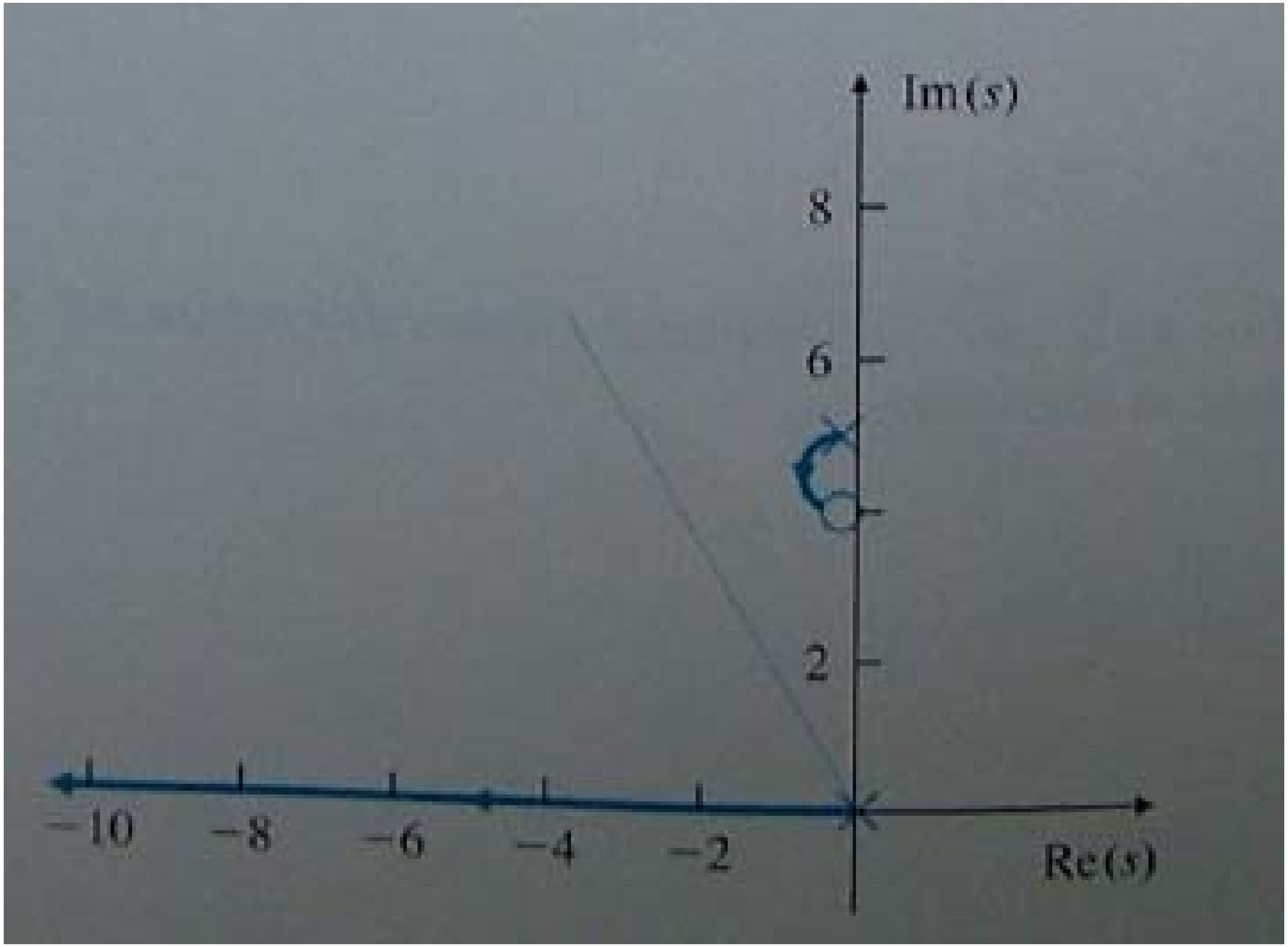
$$\phi_2 \cong 180^0$$

Bulunur.

Eğriden anlaşılacağı gibi katlı kök ve imajiner ekseni kesen noktaları beklemediğimizden beşinci ve altıncı adımları geçerek eğriyi tamalyabiliriz.



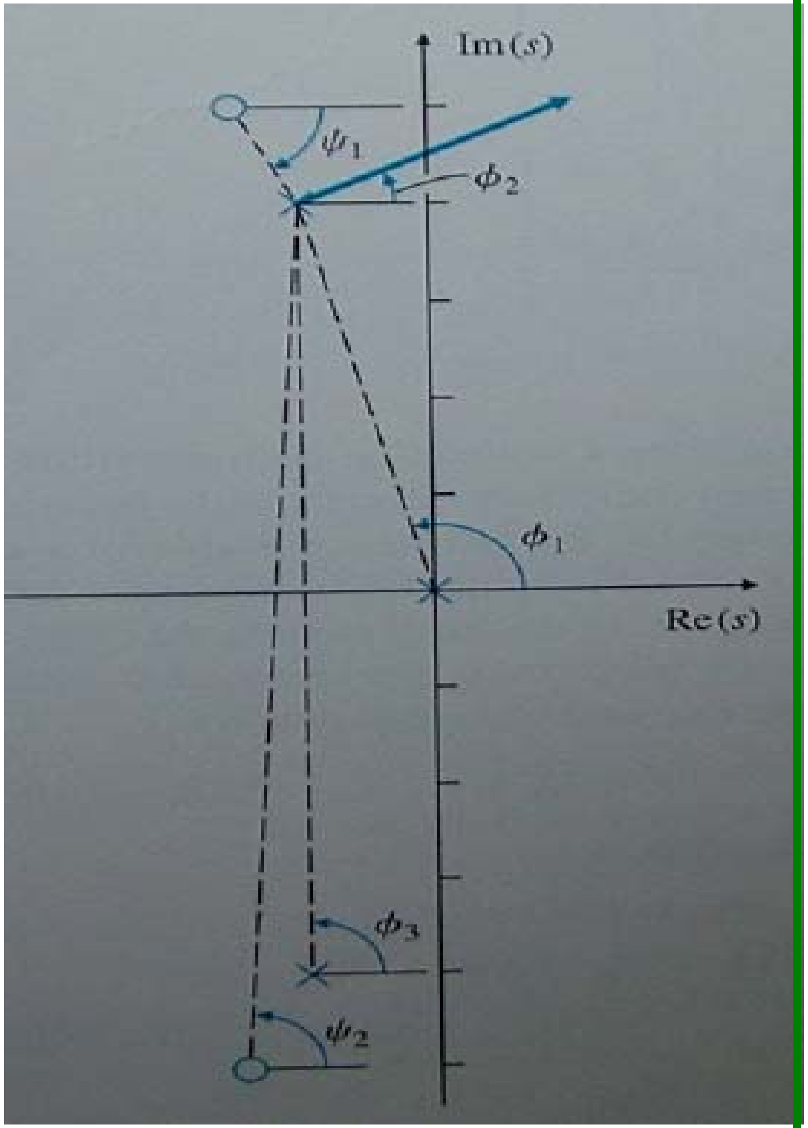
Adım VII: Eğrini tamamlanır.



Örnek: $$G(s)=\frac{(s+0.1)^2+25}{s[(s+0.1)^2+16]}$$ İçin kök yer eğrisini çiziniz?

Sıfırlar s=-0.1±4.99j

Kutuplar s=0, -0.1±3.99j



Adım IV: Ayrılma açıları kutuplardan ve geliş açıları sıfırlardan hesaplanır.

-0.1+4j kutbunda ayrılma açımız var

$$-\phi_1-\phi_2-\phi_3+\psi_1+\psi_2=+180^0+360^0 l$$

$\phi_1 \cong 90^0$

$\phi_3 \cong 90^0$ İse $\phi_2 \cong 0^0$

$\psi_1 \cong 90^0$

$\psi_3 \cong 90^0$

-0.1+4.99j için geliş açımız

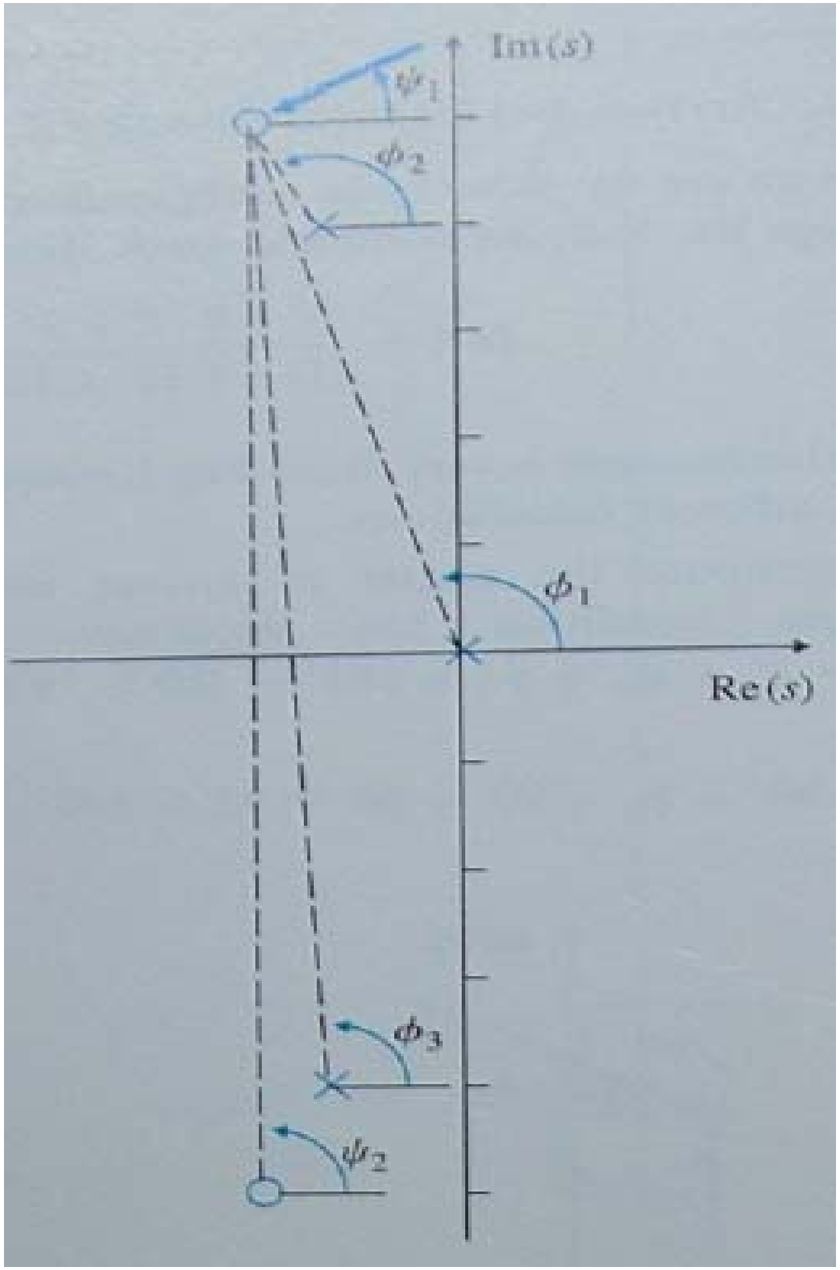
$$-\phi_1-\phi_2-\phi_3+\psi_1+\psi_2=+180^0+360^0 l$$

$$\phi_1 \cong 90^0$$

$$\phi_3 \cong 90^0$$ İse $$\psi_1 \cong 0^0$$

$$\phi_3 \cong 90^0$$

$$\psi_2 \cong 90^0$$



Adım V: İmajiner ekseni kesme noktaları hesaplanır. (Bu adım bazı çizimler için gerekli olmaya bilir.)

Bir önceki adımda gördük ki geliş ve ayrılış açıları sağ yarı düzleme doğru. Bu noktada K nın yüksek değerleri için sistemin çoğu zaman kararsız olduğunu görmek mümkün.

Karakteristik denklem:

$$s^3 + (K + 0.2)s^2 + (0.2K + 16.01)s + 25.01K = 0$$

$$\begin{array}{ll}
s^3 : 1 & 0.2K + 16.01 \\
s^2 : K + 0.2 & 25.01K \\
s^1 : \dfrac{(0.2K + 16.01)(K + 0.2) - 25.01K}{K + 0.2} & \\
s^0 : 25.01K &
\end{array}$$

Kararlılık çoğunlukla s^1 li terimlerin olduğu sıra ile belirlenecek

$$0.2K^2 - 8.96K + 3.2 = 0$$

K=44 ve K=0.362

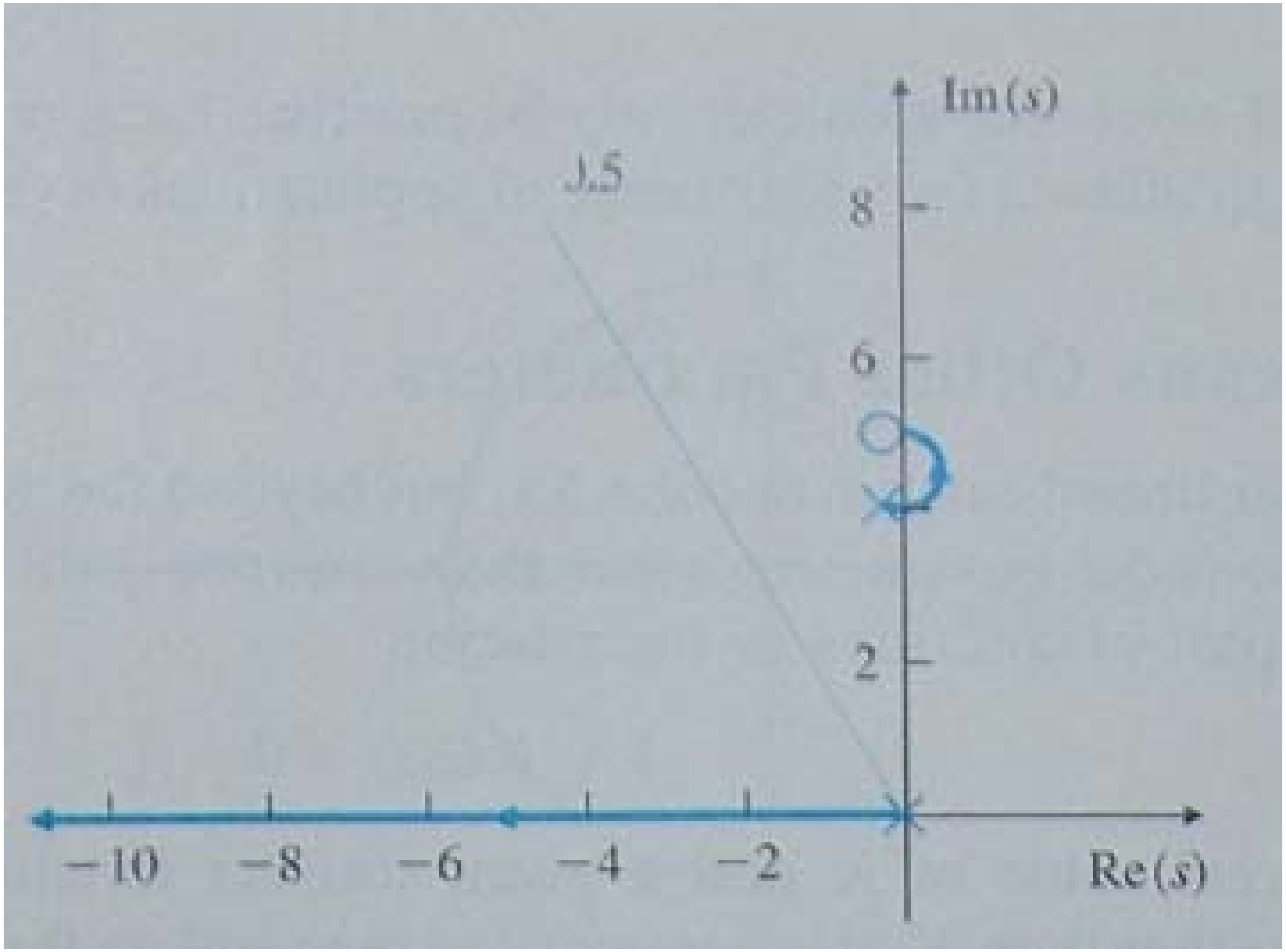
Bu değerler için karakteristik denklemin reel kısmından frekansları bulabiliriz.

$$(K + 0.2)\omega_0{}^2 = 25.01K$$

$$\omega = \sqrt{\frac{25.01K}{K + 0.2}} = 4.99,\ 4.01$$

Dikkat edilecek olursa imajiner ekseni kesme açık döngü sistemin sıfır ve kutuplarına çok yakın ve **0.362 < K < 44.4** için sistem kararsız.

Adım VII: Eğrini tamamlanır.



Son iki örnek bize eğer kararsız bölgeye yakın kutup ve sıfırlar varsa ayrılma açıları kapalı döngü sistemin kararararlılık problemi olup olmadığını gösterdi. Ayrıca eğer kutup ve sıfırları yerlerini değiştirdiğimizde bunun kararlılık üzerinde son derece tesiri olduğunu gördük. Bir önceki örnekte sistemin sıfır kutbuna göre daha düşük frekansta ve kök yer eğrisinin sol yarı düzlemde kaldığını gördük. Son örneğimizde ise kutup ve sıfırların yerini değiştirdik ve gördük ki nerdeyse K'nın tüm değerleri için sistem kararsız.

KÖK YER EĞRİLERİ

TANIMLAR ve NOTLAR

<u>Tanım:</u> Kök yer eğrisi sistem parametrelerinin değişimi ile Sistem kapalı döngü köklerinin s düzlemindeki yerini gösteren grafiktir.

Kök yer eğrisi açık döngü sistemin kutuplarında başlar (K=0 dır), sıfırlarında sonlanır (K=∞ dur).

Kök yer eğrisi kol sayısı açık döngü sistemin transfer fonksiyonunun kutup sayısı kadardır.

Kök yer eğrisi sağında kutup ve sıfır sayısı toplamı tek sayı olmalıdır.

Kök yer eğrisi reel eksene göre simetriktir.

Asimptot: Kopmleks kutuplar olduğunda K sonsuza giderken kök yer eğrisi sonsuzdaki sıfırlara doğru bir asimptot boyunca hareket eder.

Ayrılma Noktası: Reel eksen üzerinde kapalı döngü sistem kutuplarının reel den kompleks'e geçtiği noktadır.(dK/ds=0)

Tekrar Giriş Noktası: Reel eksen üzerinde kapalı döngü sistem kutuplarının kompleksden reel'e geçtiği noktadır. (dK/ds=0)

Ayrılma Açısı: Kompleks eşlenik kutuptan ayrılma açısıdır ve açı kuralı ile hesaplanır.

$$q\phi_{dep} = \sum \psi_i - \sum \phi_i - 180^0 - 360^0 l$$

Geliş Açısı: Kompleks eşlenik sıfıra geliş açısıdır ve açı kuralı ile hesaplanır.

$$q\phi_{ar} = \sum \phi_i - \sum \psi_i + 180^0 + 360^0 l$$