T.C.
KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ

Prof. Dr. Zafer BİNGÜL Prof. Dr. Serdar KÜÇÜK

ROBOT KİNEMATİĞİ

PROF. DR. ZAFER BİNGÜL
PROF. DR. SERDAR KÜÇÜK

YÖRÜNGE PLANLAMASI

Bir robotun çalışma uzayındaki herhangi bir cisme çarpmadan, eyleyicilerin sınırlarını zorlamadan kontrollü ve yumuşak bir şekilde hareket edebilmesi için yörünge planlaması yapılır.

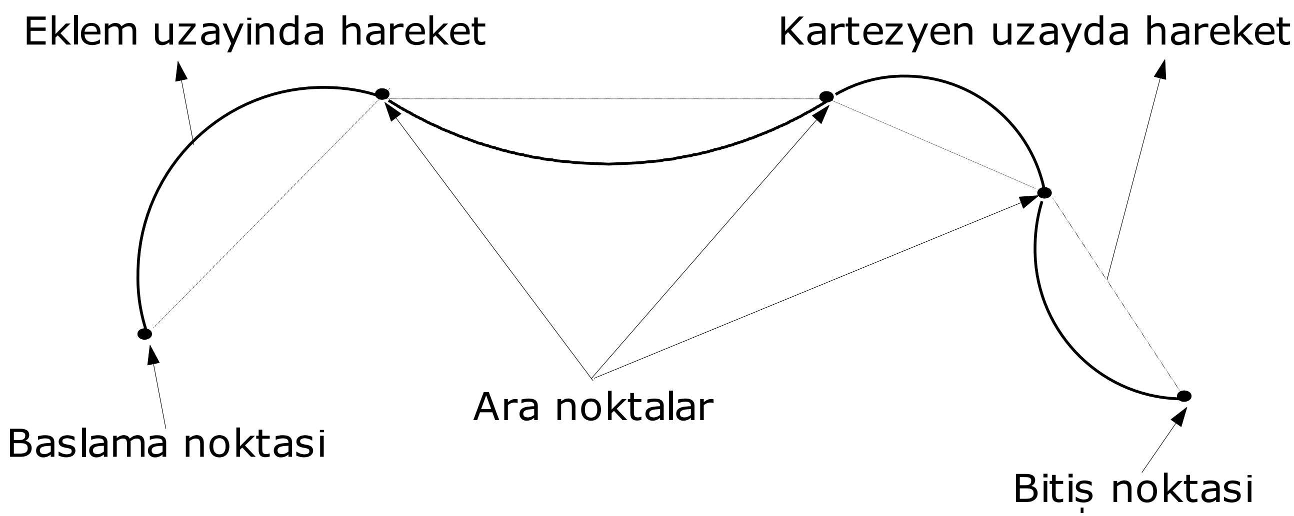
Robotlar iki nokta arasını doğrusal, dairesel, sinüzoidal veya değişik şekillerde takip eder. Bu yörünge şekilleri zamana bağlı olarak eklem açılarının veya kartezyen koordinat sisteminin birer fonksiyonudur.

Her ara nokta, ilk önce ana çerçeveye göre uç işlevcisinin konumu ve yönelimi cinsinden tanımlanır.

Daha sonra, her bir ara nokta, ters kinematik işleminin uygulanmasıyla eklem açılarına dönüştürülür. Bu iki nokta arası da seçilen bir yörünge planlama yöntemiyle n tane noktaya bölünür.

Ara noktalar bütün eklemler tarafından aynı zamanda geçilmesine karşın her bir eklemin kat edeceği mesafe aynı olmayacağından, hız ve ivmeleri farklılık gösterir.

Robot manipülatörleri için Kartezyen ve eklem uzayı olmak üzere iki farklı yörünge planlaması yapılır.



Eklem Uzayında Yörünge Planlaması

Eklem uzayında yörünge planlaması yapılırken üç veya daha yüksek dereceli polinomlar kullanılır. Robotun hareketi belli bir zaman aralığında gerçekleşir.

İlk olarak uç işlevcinin başlangıç ve hedef noktalarının konumu ve yönelimi eklem açıları cinsinden ters kinematik uygulanarak hesaplanır.

Uç işlevcisinin t_0 anındaki başlangıç konumu $\theta(0) = \theta_0$ ve t_f anındaki hedef konumu $\theta(t_f) = \theta_f$ olsun. Bu durumda, t_0 ile t_f arası üçüncü dereceden bir polinom vasıtasıyla n tane noktaya bölünür.

Bu iki koşula ek olarak başlangıç ve bitiş hızları $\dot{\theta}(0) = 0$ ve $\dot{\theta}(t_f) = 0$ eklenir.

Üçüncü dereceden bir polinomun kullanarak başlangıç ve bitiş hızları sıfır olan bir yörünge planlayalım. Aşağıdaki dört koşul bunun için yeterlidir.

$$\theta(0) = \theta_0 \qquad \theta(t_f) = \theta_f \qquad \dot{\theta}(0) = 0 \qquad \dot{\theta}(t_f) = 0$$

Bu koşullar zamana bağlı 3. dereceden bir kübik yörünge oluşturur. Yörüngenin zamana bağlı olarak gerçekleşen konumu:

$$\theta(t) = s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + s_3 t^3$$

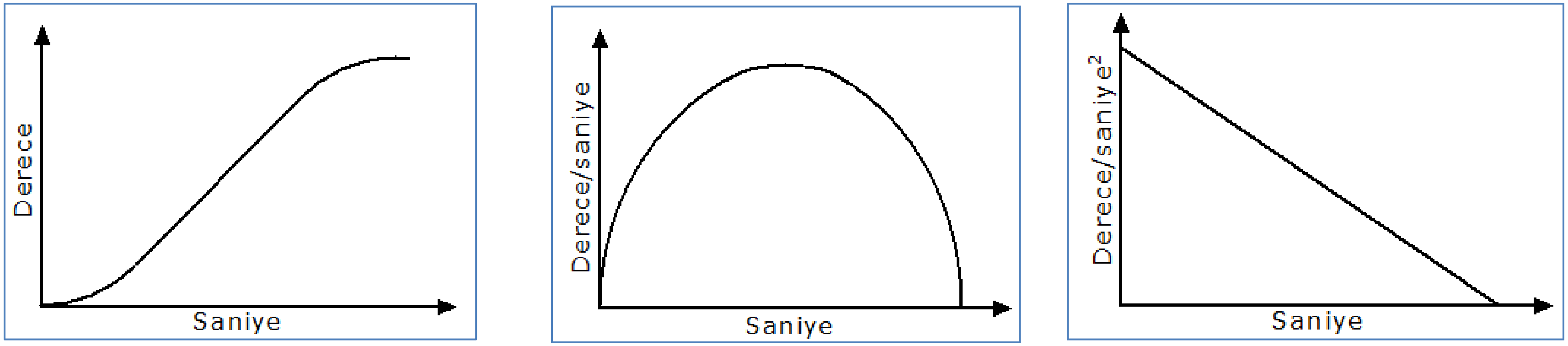
Bu yörüngedeki eklem hızları ve ivmeleri yukarıdaki denklemin sırasıyla birinci ve ikinci dereceden türevleri alınarak bulunur.

Hız: $\dot{\theta}(t) = s_1 + 2s_2 t + 3s_3 t^2$ İvme: $\ddot{\theta}(t) = 2s_2 + 6s_3 t$

Başlangıçta verilen dört koşul konum, hız ve ivme denklemlerinde yerlerine konursa üçüncü dereceden polinomun katsayıları aşağıdaki gibi bulunur.

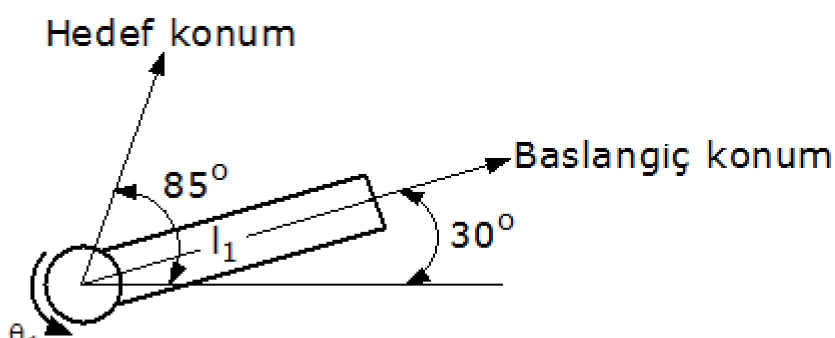
$$s_0 = \theta_0 \qquad s_1 = 0 \qquad s_2 = \frac{3}{{t_f}^2}(\theta_f - \theta_0) \qquad s_3 = -\frac{2}{{t_f}^3}(\theta_f - \theta_0)$$

Bu katsayılardan faydalanarak, başlangıç ve bitiş hızları sıfır olan 3. dereceden kübik bir yörüngeye ait konum hız ve ivme grafikleri aşağıdaki gibi olur.



ÖRNEK 6.1

Şekilde tek serbestlik derecesine sahip bir robotun başlangıç açısı 30°'dir. Bu robotu 85°'ye iki saniyede götürecek ve hedef noktada başlangıçtaki gibi hareketsiz bırakacak üçüncü dereceden bir polinom yazınız. Bu polinomdan faydalanarak konum hız ve ivme denklemlerini yazıp grafiklerini çiziniz



ÇÖZÜM 6.1

Soruda verilen $\theta_0 = 30°$ ve $\theta_f = 85°$ denklemde yerlerine yazılarak bu polinomun katsayıları sayısal olarak aşağıdaki gibi bulunur.

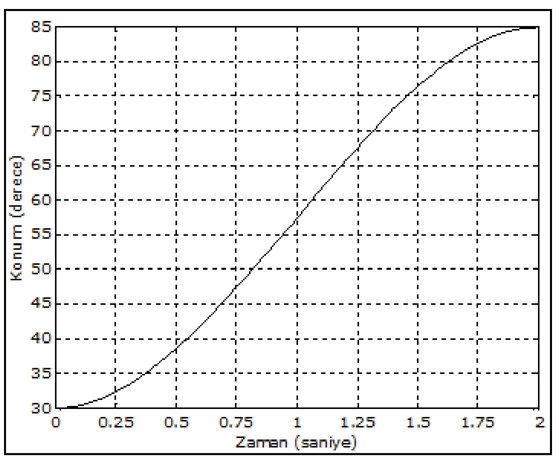
$$s_0 = \theta_0 = 30^{\circ} \quad s_1 = 0 \quad s_2 = \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) = \frac{3}{2^2}(85-30) = 41.25 \quad s_3 = -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) = -\frac{2}{2^3}(85-30) = -13.75$$

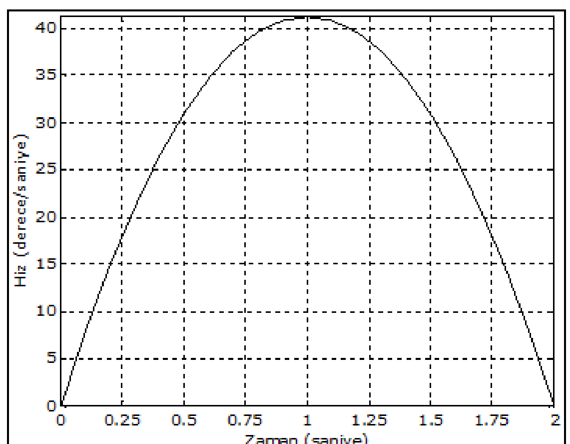
Bulduğumuz katsayıları denklemde yerine yazarak robotu 30 derece başlangıç konumdan 85 derece hedef konuma taşıyan 3. derecen polinomu elde ederiz.

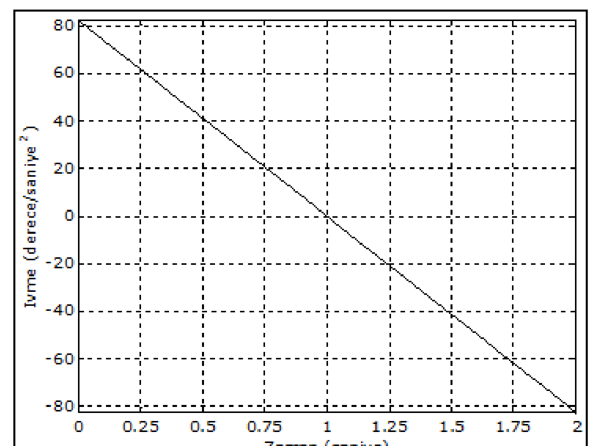
Konum: $\theta(t) = s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + s_3 t^3 \quad ise \quad \theta(t) = 30 + 41.25t^2 - 13.75t^3$

Hız: $\dot{\theta}(t) = 82.5t - 41.25t^2$

İvme: $\ddot{\theta}(t) = 82.5 - 82.5t$







Bazan robot bir takım ara noktalardan durmadan geçerek yörüngesini tamamlar. Bu durumda robotun başlangıç ve bitiş hızları sıfırdan farklı olur.

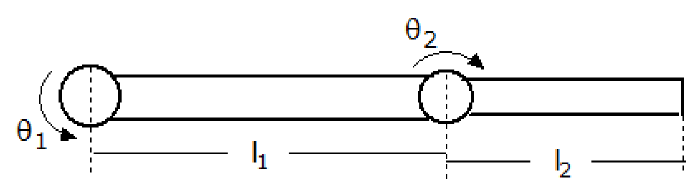
$$\boxed{\theta(0)=\theta_0} \qquad \boxed{\theta(t_f)=\theta_f} \qquad \boxed{\dot{\theta}(0)=\dot{\theta}_0} \qquad \boxed{\dot{\theta}(t_f)=\dot{\theta}_f}$$

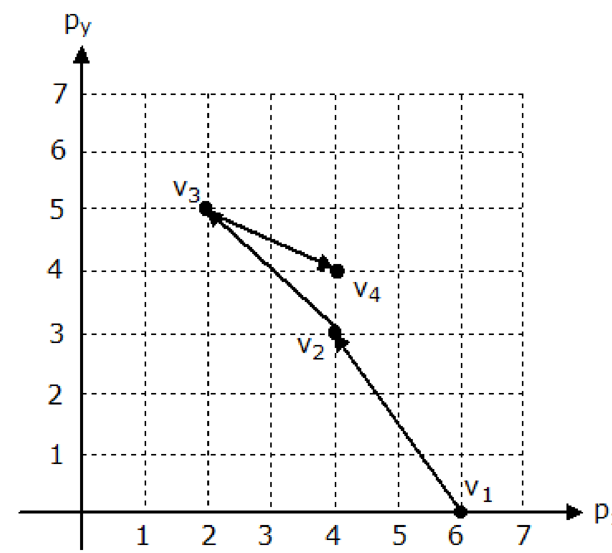
Bu koşullar konum, hız ve ivme denklemlerinde yerlerine yazılırsa polinomun katsayıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\boxed{s_0=\theta_0 \quad s_1=\dot{\theta}_0 \quad s_2=\frac{3}{t_f^2}\left(\theta_f-\theta_0\right)-\frac{2}{t_f}\dot{\theta}_0-\frac{1}{t_f}\dot{\theta}_f \quad s_3=-\frac{2}{t_f^3}\left(\theta_f-\theta_0\right)+\frac{1}{t_f^2}\left(\dot{\theta}_f-\dot{\theta}_0\right)}$$

ÖRNEK 6.2

Şekildeki robotun kol uzunlukları $l_1=4$ ve $l_2=2$ olarak veriliyor. Bu robotun v_1 başlangıç ve v_4 hedef konumundaki hızı sıfırdır. Robot v_1'den başlayıp v_2 ve v_3 ara noktalarından geçerek v_4 noktasında duruyor. Eklemlerin ara noktalardaki hızı sırayla v_2 noktasında 30 birinci eklem, 80 ikinci eklem için ve v_3 noktasında ise her eklemin hızı 0'dır. Buna göre robotun şekildeki her ara noktadan 2 saniye içerisinde geçebilmesi için konum, hız ve ivme denklemlerini bulunuz





ÇÖZÜM 6.2

İkinci şekilden robotun ara noktalardaki kartezyen koordinatlarını yazalım.

$V_1=(6,0)$ $V_2=(4,3)$ $V_3=(2,5)$ $V_4=(4,4)$

Bu ara noktalardan geçerken robotun eklemlerinin alacağı açılar ters kinematikten bulunur. Bu robotun ters kinematiği kitabın 4. bölüm'de çözülmüştü.

$$\theta_2 = A\tan 2\left(\mp\sqrt{1-\left[\frac{p_x^2+p_y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2}\right]^2}, \frac{p_x^2+p_y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2} \right)$$

$$\theta_1 = A\tan 2(p_y, p_x) \mp A\tan 2(\sqrt{p_y{}^2+p_x^2-(l_2c\theta_2+l_1)^2}, l_2c\theta_2+l_1)$$

Şimdi sırayla her bir ara nokta için eklem açılarını bulalım.

$v_1=(6,0)$, $(p_x=6, p_y=0)$ robotun sıfır konumu olduğundan: $\theta_1 = 0^\circ \; ve \; \theta_2 = 0^\circ$

$v_2=(4,3)$, $(p_x=4, p_y=3)$ için eklem açıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_2 = A\tan 2\left(\mp\sqrt{1-\left[\frac{4^2+3^2-4^2-2^2}{2\cdot 4\cdot 2}\right]^2}, \frac{4^2+3^2-4^2-2^2}{2\cdot 4\cdot 2} \right) = \mp 71.8^\circ$$

$$\theta_1 = A\tan 2(3,4) \mp A\tan 2(\sqrt{4^2+3^2-(2\cos(71.8)+4)^2}, 2\cos(71.8)+4) = 36^\circ \mp 22^\circ = 14^\circ$$

v_3=(2,5), (p_x=2, p_y=5) için eklem açıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_2 = A\tan 2\left(\mp\sqrt{1-\left[\frac{2^2+5^2-4^2-2^2}{2\cdot 4\cdot 2}\right]^2}, \frac{2^2+5^2-4^2-2^2}{2\cdot 4\cdot 2} \right) = \mp 55.8^\circ$$

$$\theta_1 = A\tan 2(5,2) \mp A\tan 2(\sqrt{5^2+2^2-(2\cos(55.8)+4)^2}, 2\cos(55.8)+4) = 68.2^\circ \mp 17.8^\circ = 50.4^\circ$$

v_4=(4,4), (p_x=4, p_y=4) için eklem açıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_2 = A\tan 2\left(\mp\sqrt{1-\left[\frac{4^2+4^2-4^2-2^2}{2\cdot 4\cdot 2}\right]^2}, \frac{4^2+4^2-4^2-2^2}{2\cdot 4\cdot 2} \right) = \mp 41^\circ$$

$$\theta_1 = A\tan 2(4,4) \mp A\tan 2(\sqrt{4^2+4^2-(2\cos(41)+4)^2}, 2\cos(41)+4) = 45^\circ \mp 13^\circ = 32^\circ$$

Robotun şekilde gösterilen yörüngeyi takip edebilmesi için geçeceği ara noktalardaki eklem açılarını sırayla yazalım.

$$\begin{array}{l} \theta_1 = 0^\circ, \quad 14^\circ, \quad 50.4^\circ, \quad 32^\circ \\ \theta_2 = 0^\circ, \quad 71.8^\circ, \quad 55.8^\circ, \quad 41^\circ \end{array}$$

Bu aşamada robotu yukarıda verilen açı değerlerinden geçirecek 3. dereceden polinomu yazalım.

v_1 ile v_2 arasındaki 1. ve 2. eklemlerin konum hız ve ivme denklemleri:

Eklem 1: $\theta_0 = 0,\ \theta_f = 14,\ \dot{\theta}_0 = 0,\ \dot{\theta}_f = 30,\ t_f = 2$ için katsayıları bulalım.

$$s_0 = \theta_0 = 0 \qquad s_1 = \dot{\theta}_0 = 0$$

$$s_2 = \frac{3}{t_f^2}\left(\theta_f - \theta_0\right) - \frac{2}{t_f}\dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f}\dot{\theta}_f = \frac{3}{2^2}\left(14-0\right) - \frac{2}{2}0 - \frac{1}{2}30 = -4.5$$

$$s_3 = -\frac{2}{t_f^3}\left(\theta_f - \theta_0\right) + \frac{1}{t_f^2}\left(\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_0\right) = -\frac{2}{2^3}\left(14-0\right) + \frac{1}{2^2}\left(30-0\right) = 4$$

Konum: $\theta_{1v12}(t) = s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + s_3 t^3 = 0 + 0t - 4.5t^2 + 4t^3 = -4.5t^2 + 4t^3$

Hız: $\dot{\theta}_{1v12}(t) = -9t + 12t^2$

İvme: $\ddot{\theta}_{1v12}(t) = -9 + 24t$

Eklem 2: $\theta_0 = 0,\ \theta_f = 71.8,\ \dot{\theta}_0 = 0,\ \dot{\theta}_f = 80,\ t_f = 2$ için katsayıları bulalım

$$s_0 = \theta_0 = 0 \qquad s_1 = \dot{\theta}_0 = 0 \qquad s_2 = \frac{3}{t_f^2}\left(\theta_f - \theta_0\right) - \frac{2}{t_f}\dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f}\dot{\theta}_f = 13.8$$

$$s_3 = -\frac{2}{t_f^3}\left(\theta_f - \theta_0\right) + \frac{1}{t_f^2}\left(\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_0\right) = 2$$

Konum: $\theta_{2v12}(t) = 13.8t^2 + 2t^3$ Hız: $\dot{\theta}_{2v12}(t) = 27.6t + 6t^2$ İvme: $\ddot{\theta}_{2v12}(t) = 27.6 + 12t$

v_2 ile v_3 arasındaki 1. ve 2. eklemlerin konum hız ve ivme denklemleri:

Eklem 1: $\theta_0 = 14,\ \theta_f = 50.4,\ \dot{\theta}_0 = 30,\ \dot{\theta}_f = 0,\ t_f = 2$

$$s_0 = \theta_0 = 14 \quad s_1 = \dot{\theta}_0 = 30 \quad s_2 = -2.7 \quad s_3 = -16.6$$

Konum: $\theta_{1v23}(t) = 14 + 30t - 2.7t^2 - 16.6t^3$ Hız: $\dot{\theta}_{1v23}(t) = 30 - 5.4t - 49.8t^2$

İvme: $\ddot{\theta}_{1v23}(t) = -5.4 + 99.6t$

Eklem 2: $\theta_0 = 71.8,\ \theta_f = 55.8,\ \dot{\theta}_0 = 80,\ \dot{\theta}_f = 0,\ t_f = 2$

$$s_0 = \theta_0 = 71.8 \quad s_1 = \dot{\theta}_0 = 80 \quad s_2 = -92 \quad s_3 - 16$$

Konum: $\theta_{2v23}(t) = 71.8 + 80t - 92t^2 - 16t^3$ Hız: $\dot{\theta}_{2v23}(t) = 80 - 184t - 48t^2$

İvme: $\ddot{\theta}_{2v23}(t) = -184 - 96t$

v_3 ile v_4 arasındaki 1. ve 2. eklemlerin konum hız ve ivme denklemleri:

Eklem 1: $\theta_0 = 50.4,\ \theta_f = 32,\ \dot{\theta}_0 = 0,\ \ \dot{\theta}_f = 0,\ t_f = 2$

$$s_0 = \theta_0 = 50.4 \qquad s_1 = \dot{\theta}_0 = 0 \qquad s_2 = -13.8 \qquad s_3 = 4.6$$

Konum: $\theta_{1v34}(t) = 50.4 - 13.8t^2 + 4.6t^3$ Hız: $\dot{\theta}_{1v34}(t) = -27.6t + 13.8t^2$

İvme: $\ddot{\theta}_{1v34}(t) = -27.6 + 27.6t$

Eklem 2: $\theta_0 = 55.8,\ \theta_f = 41,\ \dot{\theta}_0 = 0,\ \ \dot{\theta}_f = 0,\ \ t_f = 2$

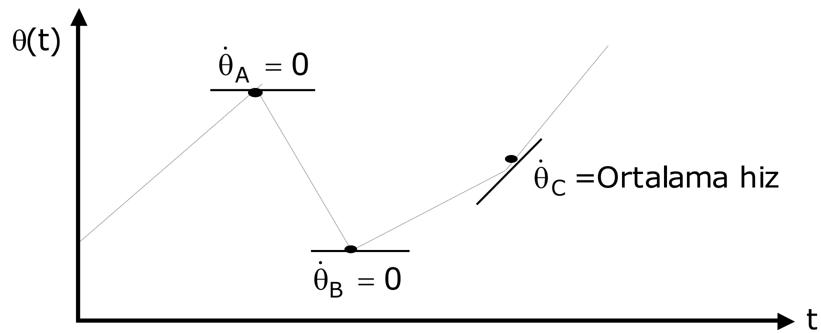
$$s_0 = \theta_0 = 55.8 \qquad s_1 = \dot{\theta}_0 = 0 \qquad s_2 = -11.1 \qquad s_3 = 3.7$$

Konum: $\theta_{2v34}(t) = 55.8 - 11.1t^2 + 3.7t^3$ Hız: $\dot{\theta}_{2v34}(t) = -22.2t + 11.1t^2$

İvme: $\ddot{\theta}_{2v34}(t) = -22.2 + 22.2t$

Eğer bütün ara noktalardaki hızlar biliniyorsa örnekte olduğu gibi gerekli kübik denklem yazılabilir. Fakat genellikle ara noktalardaki hızlar her zaman belli olmayabilir. Bu durumlarda eklem hızlarını bulmak için bir çok yönteme baş vurulur. Bu yöntemlerden bazıları aşağıda verilmiştir.

1. Kartezyen doğrusal ve açısal hızlar belli ve Jakobiyen o noktalarda tanımlı ise eklem hızları, ters Jakobiyenden faydalanılarak bulunabilir.
2. Aşağıdaki şekil de olduğu gibi uygun bir yaklaşımla belirlenir. Örneğin, şekilde görüldüğü gibi eğer ara noktalarda eğimin işareti değişiyorsa (A noktasında olduğu gibi) o ara noktada hız sıfır kabul edilir. Eğer eğimin işareti değiştirmiyorsa (C noktasında olduğu gibi) eklem hızı o nokta civarındaki hızların ortalaması alınarak bulunur.



Eğer takip edilecek yörüngenin hem başlangıç hem de bitişinde eklem konum, hız ve ivmelerinin baştan belirlenmesi istenirse 5. dereceden bir polinoma ihtiyaç duyulur.

$$\theta(t) = s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + s_3 t^3 + s_4 t^4 + s_5 t^5$$

Yandaki sınırlamalar altında katsayıları belirleyelim

$$\theta_0 = s_0 \qquad \theta_f = s_0 + s_1 t_f + s_2 t_f^2 + s_3 t_f^3 + s_4 t_f^4 + s_5 t_f^5$$

$$\dot{\theta}_0 = s_1 \qquad \dot{\theta}_f = s_1 + 2s_2 t_f + 3s_3 t_f^2 + 4s_4 t_f^3 + 5s_5 t_f^4$$

$$\ddot{\theta}_0 = 2s_2 \qquad \ddot{\theta}_f = 2s_2 + 6s_3 t_f + 12s_4 t_f^2 + 20s_5 t_f^3$$

Sonuçta beşinci dereceden bir polinomun katsayıları aşağıdaki gibi belirlenir.

$$s_0 = \theta_0 \qquad s_1 = \dot{\theta}_0 \qquad s_2 = \frac{\ddot{\theta}_0}{2} \qquad s_3 = \frac{20(\theta_f - \theta_0) - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0)t_f + (\ddot{\theta}_f - 3\ddot{\theta}_0)t_f^2}{2t_f^3}$$

$$s_4 = \frac{30(\theta_0 - \theta_f) + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^4} \qquad s_5 = \frac{12(\theta_f - \theta_0) - 6(\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_0)t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^5}$$

ÖRNEK 6.3

Şekilde dönel eklemli tek serbestlik derecesine sahip bir robotun başlangıç açısı 0^o'dir. Bu robotu 150^o'ye 2 saniyede düzgün bir şekilde götürecek ve başlangıç hızı 20, bitiş hızı 30, başlangıç ivmesi 25, bitiş ivmesi 15 olan beşinci dereceden bir polinom yazınız. Bu polinomdan faydalanarak konum, hız ve ivme denklemlerini bulup grafiklerini çiziniz.

ÇÖZÜM 6.3

Soruda verilen koşullar yukarıdaki denklemlerde yerine yazılarak aktsayılar aşağıdak gibi bulunur.

$$s_0 = 0 \qquad s_1 = 20 \qquad s_2 = 12.5 \qquad s_3 = 112.5 \qquad s_4 = -88.75 \qquad s_5 = 18.125$$

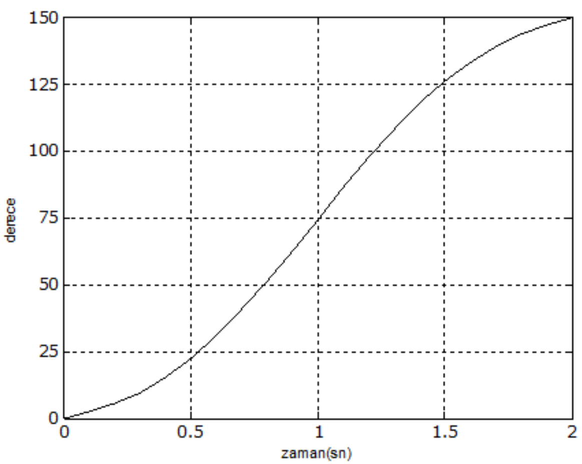
Bulunan katsayılar kullanılarak konum hız ve ivme denklemleri aşağıdaki gibi bulunur.

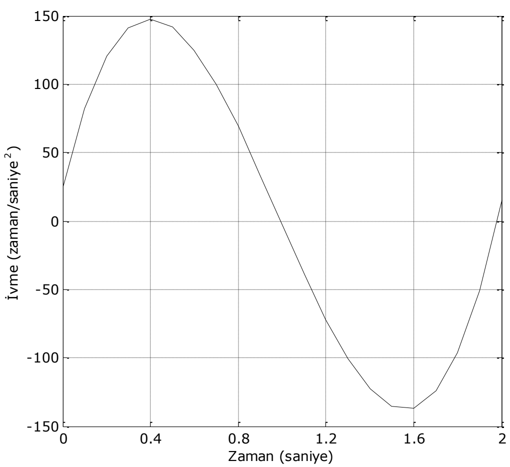
Konum: $\theta(t) = 20t + 12.5t^2 + 112.5t^3 - 88.75t^4 + 18.125t^5$

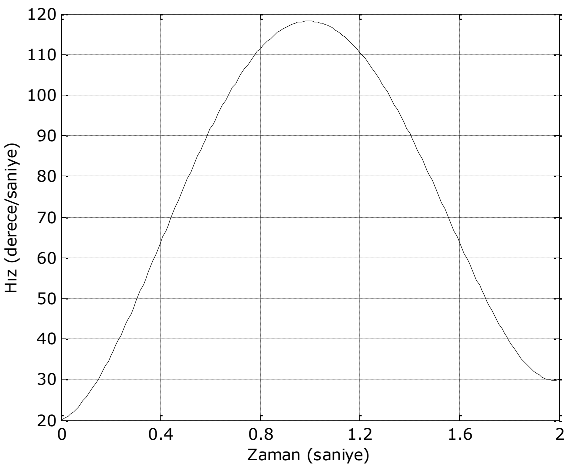
Hız: $\dot{\theta}(t) = 20 + 25t + 337.5t^2 - 355t^3 + 90.625t^4$

İvme: $\ddot{\theta}(t) = 25 + 675t - 1065t^2 + 362.5t^3$

Konum, hız ve ivme grafikleri.



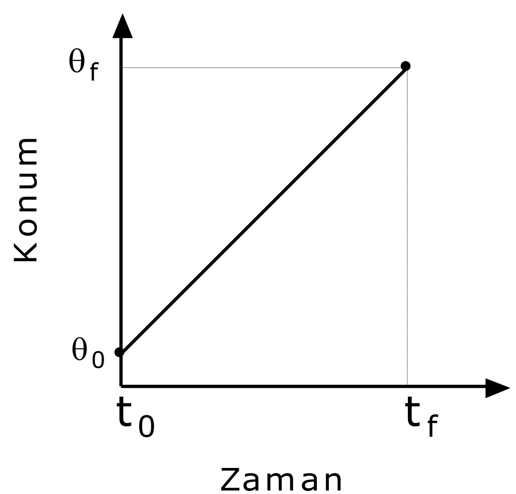


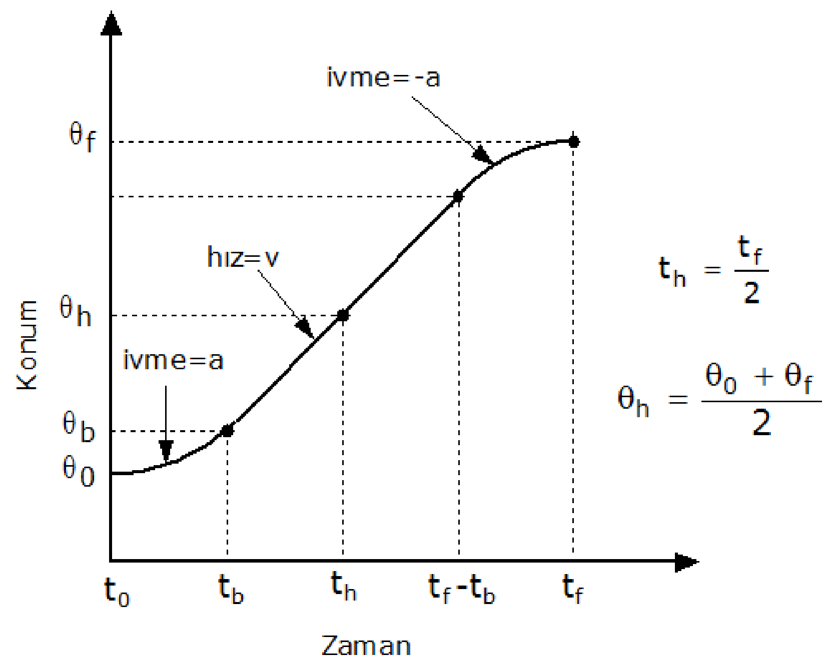


Kartezyen Uzayda Yörünge Planlaması

Robot manipülatörünün izlediği başka bir yörünge yöntemi de parabolik kısımların yerleştirildiği doğrusal yörüngedir.

Bu yörünge yönteminde, n serbestlik derecesine sahip robot eklemlerinin tamamı doğrusal bir yörünge takip etse dahi, uç işlevci iki nokta arasını doğrusal geçemez. Doğrusal yörüngede hareketin başlangıcında ve bitişinde sürekli olmayan hız problemleriyle karşılaşılır. Bunu engellemek için aşağıdaki şekildeki gibi yörüngenin başlangıcına ve bitişine parabolik kısımlar eklenerek konum ve hızın sürekliliği sağlanır. Ayrıca parabolik bir yörüngede sabit ivmeli bir hareket kullanılarak, hızın pürüzsüz bir şekilde sürekli olması sağlanır.





Grafikte t_h ile gösterilen noktanın sağ ve sol tarafında kalan bölümler simetrik olacak şekilde tasarlanır. Bunun için parabolik kısımlarda gerçekleşen zamanların birbirine eşit olmasının yanında ivmelerde sabit ve aynı olmalıdır. Aynı zamanda, sürekli bir hız elde edebilmek için parabolik kısımların sonundaki hızla doğrusal bölümdeki hızın birbirine eşit olması gerekir. Bu durumdaki her bir parabolik kısımdaki ivme aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\ddot{\theta} t_b = \frac{\theta_h - \theta_b}{t_h - t_b}$$

Denklemde θ_b, parabolik kısmın sonundaki konumu, t_b zamanı, θ_h gerçekleşen yörüngenin ortasını, t_h yarı zamanı ve son olarak $\ddot{\theta}$ ise parabolik bölgedeki ivmeyi göstermektedir. θ_b parabolik kısmın sonundaki konum aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\theta_b = \theta_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} {t_b}^2$$

Denklemde $t_h = \frac{t}{2}$ ve $\theta_h = \frac{\theta_f + \theta_0}{2}$ yerlerine yazılıp düzenleyelim

$$\ddot{\theta} {t_b}^2 - \ddot{\theta} t t_b + \theta_f - \theta_0 = 0$$

θ_f , θ_0 ve t değişkenlerinin verilmesi ve $\ddot{\theta}$ ile t_b değişkenlerinden birinin seçilmesiyle birçok yörünge tasarlanabilir. genellikle $\ddot{\theta}$ seçilerek t_b hesaplanır.

Bu durumda t_b aşağıdaki gibi olur.

$$t_b = \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{t^2 - 4\left(\frac{\theta_f - \theta_0}{\ddot{\theta}}\right)}}{2} = \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 t^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0)}}{2\ddot{\theta}}$$

Parabolik kısımlarda tanımlanan ivmenin aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir;

$$\ddot{\theta}^2 t^2 \geq 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0) \quad \text{veya} \quad \ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t^2}$$

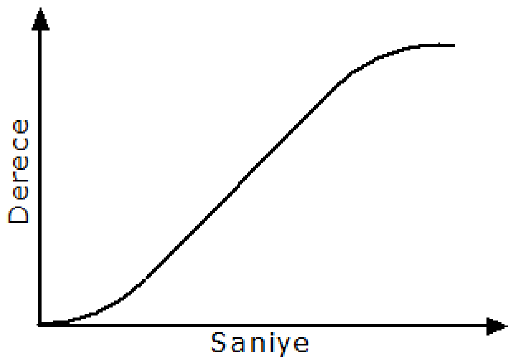
Doğrusal yörüngeye ait konum, hız ve ivme denklemleri

Zaman(t)	$\boldsymbol{\theta(t)}$	$\boldsymbol{\dot{\theta}(t)}$	$\boldsymbol{\ddot{\theta}(t)}$
$0 \leq t \leq t_b$	$\theta_0 + \frac{a}{2}t^2$	at	a
$t_b \leq t \leq t_f - t_b$	$vt + \frac{\theta_f + \theta_0 - vt_f}{2}$	v	0
$t_f - t_b \leq t \leq t_f$	$\theta_f - \frac{a{t_f}^2}{2} + at_f t - \frac{a}{2}t^2$	$at_f - at$	$-a$

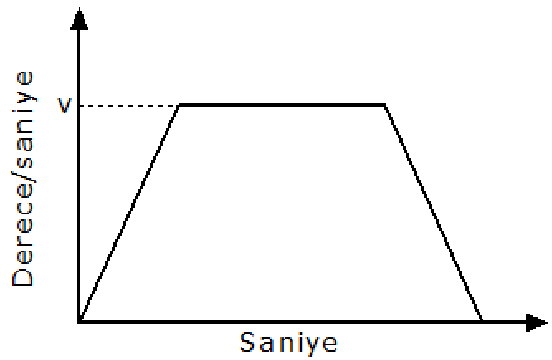
Bu tabloya ek olarak aşağıdaki kabul ve sınırlamaların sağlanması gerekir.

Kabul: $t_0 = 0$, $t_f > 0$ ve $t_b > 0$ Sınırlama: $\frac{\theta_f - \theta_0}{v} < t_f < \frac{2(\theta_f - \theta_0)}{v}$ ve $v^2 \leq a(\theta_f - \theta_0)$

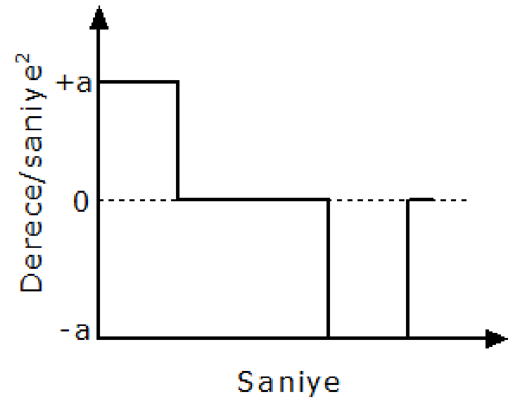
Parabolik kısımlar eklenmiş doğrusal yörüngeye ait konum, hız, ivme grafikleri.



Konum



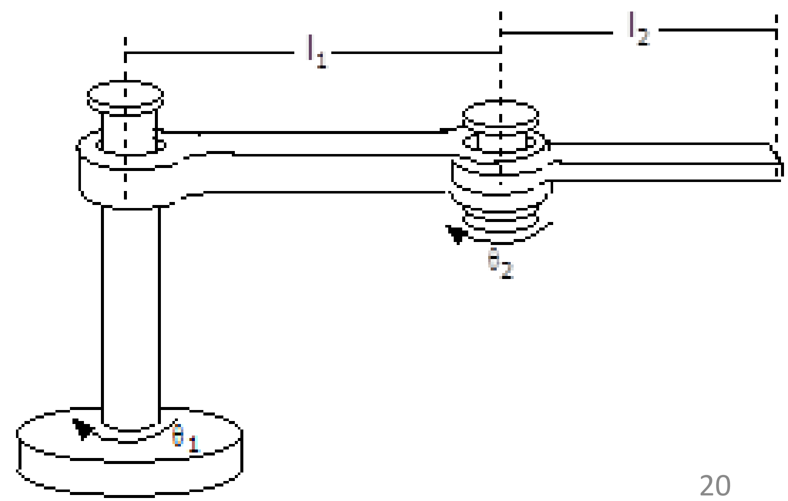
Hız



Ivme

ÖRNEK 6.4

Şekilde iki serbestlik derecesine sahip RR robotunun katı gövde yapısı veriliyor. Bu robotun uç işlevcisini sıfır konumundan $p_x = 28$ ve $p_y = 31$ konumuna 4 saniyede getirecek parabolik kısımlar eklenmiş doğrusal yörüngeye ait konum, hız ve ivme denklemlerini bulup grafiklerini çiziniz. ($l_1 = 26, l_2 = 18$).



ÇÖZÜM 6.4

Bu robotun ters kinematik denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\theta_1 = A\tan 2(p_y, p_x) \pm A\tan 2(\sqrt{4l_1^2(p_x^2 + p_y^2) - k^2}, k)$$

Denklemde $k = p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - l_2^2$'dir.

$$\theta_2 = A\tan 2\left(\frac{-s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y}{l_2}, \frac{c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - l_1}{l_2}\right)$$

$\mathrm{p_x} = 28$ ve $\mathrm{p_y} = 31$ için ters kinematikten elde edilecek eklem açıları

$$\theta_1 = \theta_{f1} = 63.03 \quad \theta_{01} = 0 \qquad\qquad \theta_2 = \theta_{f2} = -37.25 \quad \theta_{02} = 0$$

Şimdi sırayla birinci eklemin denklemini yazalım.

1. Öncelikle birinci eklemin ivmesini $\ddot{\theta}_1 = 60$ seçip t_b zamanını bulalım.

$$t_b = \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 t^2 - 4\ddot{\theta}\left(\theta_f - \theta_0\right)}}{2\ddot{\theta}} = \frac{4}{2} - \frac{\sqrt{60^2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 60\left(63.03 - 0\right)}}{2 \cdot 60} = 0.28sn$$

t_b zamanı bilindiğine göre diğer zamanları da bulabiliriz.

$$t_h = \frac{t_f}{2} = \frac{4}{2} = 2\,sn \qquad t_f - t_b = 4 - 0.28 = 3.72 sn$$

Bu durumda birinci parabolik kısmın konum denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\theta_{kıı1}(t) = \theta_0 + \frac{a}{2}t^2 = 0 + \frac{60}{2}t^2 = 30t^2 \qquad (0 \le t \le 0.28\,sn)$$

Şimdi de doğrusal bölgenin denklemini yazalım.

$$\theta_{dog}(t) = vt + \frac{\theta_f + \theta_0 - vt_f}{2}$$

Yukarıdaki denklemde doğrusal bölgedeki hız ve bu bölgenin geçilme zamanı bilinmemektedir. Doğrusal bölgenin hızını birinci parabolik kısmın sonundaki hıza eşit kabul edebiliriz (Bunun için $v=at_b$ kullanılır). a=60, birinci parabolik kısmın sonundaki zaman t_b=0.28sn olduğuna göre,

Doğrusal bölgedeki hız: $v = at_b = 60 \cdot 0.28 = 16.8$

Doğrusal bölgedeki zaman: $t_{dog} = t_f - 2 \cdot t_b = 4 - 2 \cdot 0.28 = 3.44 sn$

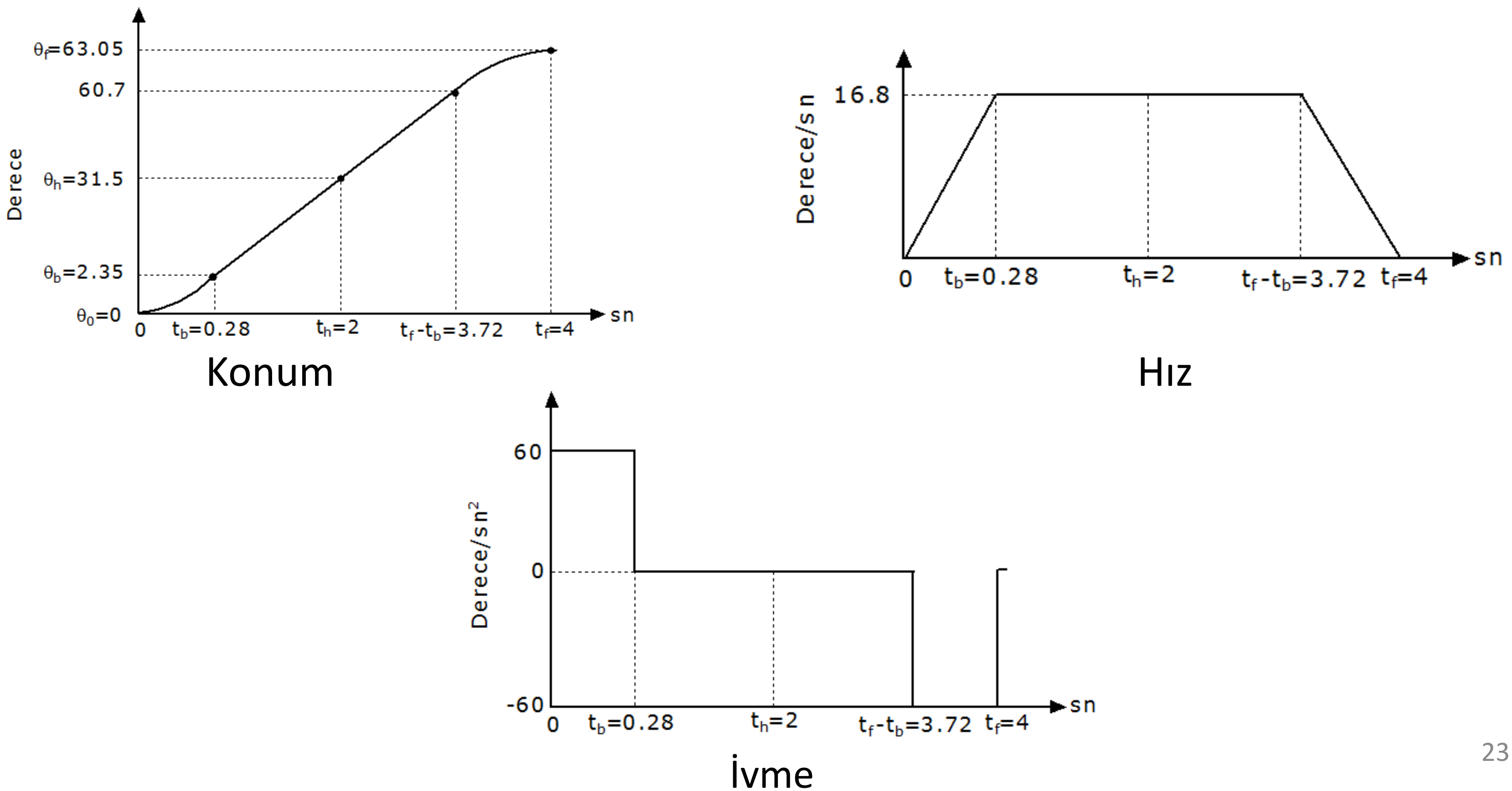
Bu durumda doğrusal bölgenin denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\theta_{dog}(t) = vt + \frac{\theta_f + \theta_0 - vt_f}{2} = 16.8t + \frac{63.03 + 0 - 16.8 \cdot 4}{2} = 16.8t - 2.085 \qquad (t_b \le t \le t_f - t_b)$$

2. parabolik kısmın denklemini bulalım.

$$\theta_f - \frac{at_f^2}{2} + at_f t - \frac{a}{2}t^2 = 63.03 - \frac{60\cdot 4^2}{2} + 60\cdot 4t - \frac{60}{2}t^2 = -416.9 + 240t - 30t^2 \quad (t_f - t_b \le t \le t_f)$$

Sonuç olarak birinci eklemin konum hız ve ivme grafiği şekildeki gibi elde edilir.



2. Şimdi ise ikinci eklemde t_b zamanını seçip ivmeyi hesaplayalım.

Bilindiği gibi ivme arttıkça parabolik kısımlar azalmaktadır. Parabolik bölgenin büyük olması için $t_b = 0.9$ olsun. İvmeyi bulalım.

$$\ddot{\theta} t_b^2 - \ddot{\theta} t t_b + \theta_f - \theta_0 = 0, \;\; \ddot{\theta}(0.9)^2 - 4 \cdot 0.9 \cdot \ddot{\theta} - 37.25 - 0 = 0 \quad \text{sonuç:}\; \ddot{\theta} = -13.35$$

Dikkat edileceği gibi ivme (–) çıkmıştır. Bunun nedeni ikinci eklemin 0 konumdan -37.25 konumu gitmesinden kaynaklanmaktadır. Aynı zamanda parabolik kısım büyüdüğü için ivmede küçülmüştür.

t_b zamanı bilindiğine göre $t_f - t_b = 4 - 0.9 = 3.1 sn$ bulunur.

Bu durumda 1. parabolik kısmın konum denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\theta_{kısım1}(t) = 0 - \frac{13.35}{2} t^2 = -6.67t^2 \qquad (0 \le t \le 0.9\, sn) \qquad \theta_b = -6.67t^2 = -6.675 \cdot 0.9^2 = -5.4$$

Şimdi de doğrusal bölgenin denklemini yazalım. Bunun için öncelikle doğrusal bölgenin başlangıcındaki hızına eşit olan parabolik kısmın sonundaki hızı bulalım.

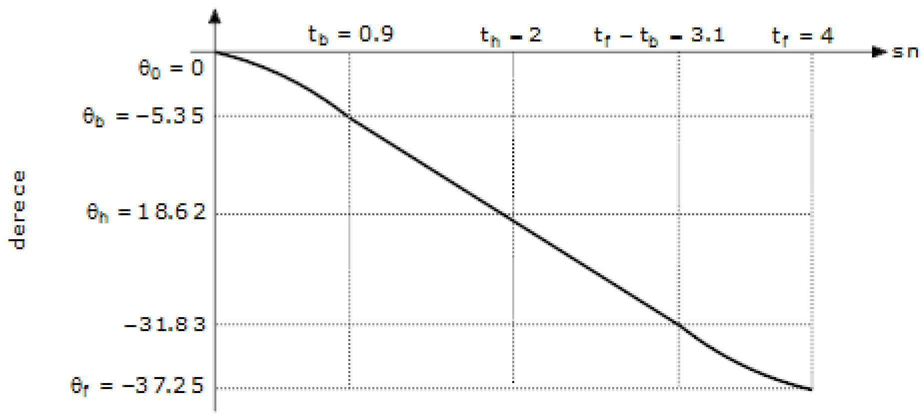
$$v = at_b = -13.35 \cdot 0.9 = -12.01 \qquad (0.9 \le t \le 3.1\, sn)$$

$$\theta_{dog}(3.1) = vt + \frac{\theta_f + \theta_0 - vt_f}{2} = -12.01(3.1) + \frac{-37.25 + 0 + 12.01 \cdot 4}{2} = -31.83$$

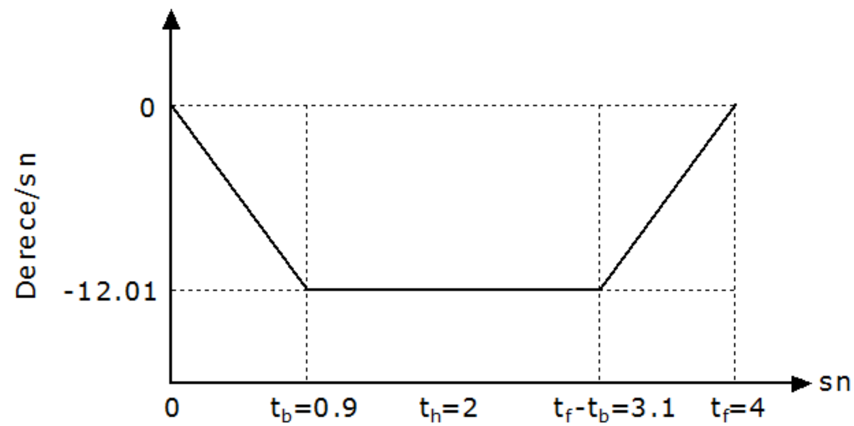
2. parabolik kısmın denklemini bulalım $(3.1 \leq t \leq 4)$.

$$\theta_f - \frac{at_f^2}{2} + at_f t - \frac{a}{2}t^2 = -37.25 - \frac{-13.35 \cdot 4^2}{2} - 13.35 \cdot 4t - \frac{-13.35}{2}t^2 = 69.55 - 53.4t + 6.67t^2$$

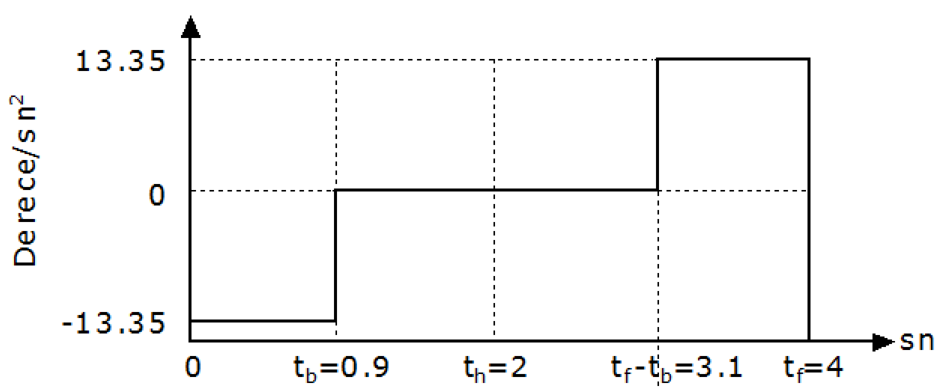
Bu durumda 2. eklemin konum hız ve ivme grafiği şekildeki gibi elde edilir.



Konum



hız

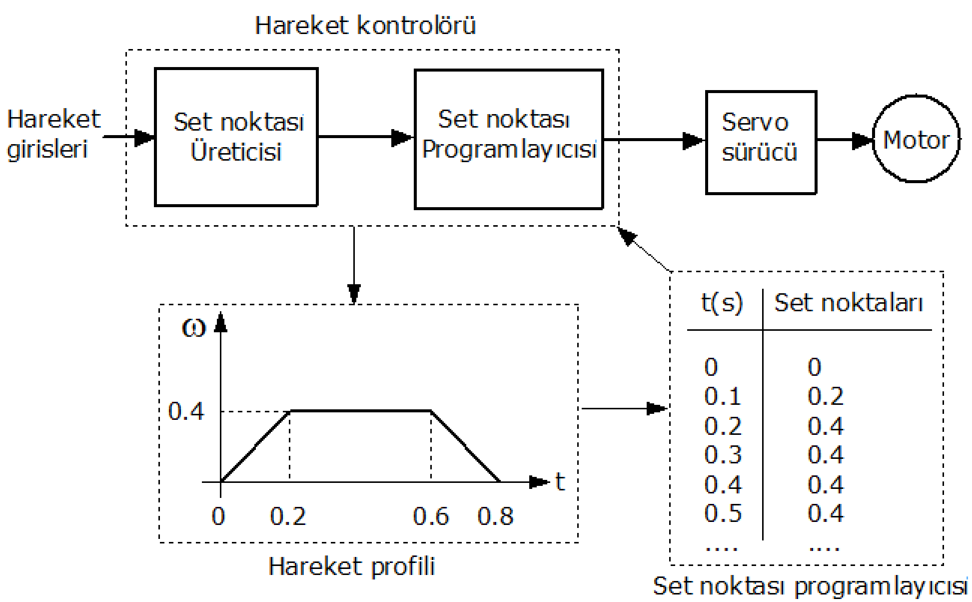


İvme

Hareket Kontrolü

Hareket kontrolünde genellikle motorların hızlarının kontrolü yapılarak istenen zamana bağlı konum elde edilir. Bunu yaparken hız veya konum bilgisi geribeslenir. Genellikle birim basamak ve rampa gibi basit girişler kullanılarak sistem cevabı incelenir. Pratik uygulamalarda bu set noktaları otomatik olarak üretilir.

Aşağıda görülen basit bir hareket kontrol sistemi zamana bağlı olarak bu set noktalarını üretir. Hareket kontrolörü bir takım girişleri kabul edip yer değiştirilecek mesafe, maksimum ivme ve maksimum hız gibi parametreleri kullanarak bir hareket profili üretir. Üretilen bu hareket profili çıkışa aktarılacak olan zaman ve set noktalarını üretmekte kullanılır. Set noktası programlayıcısı gerçek zamanlı saat kullanılarak bu set noktalarını motor sürücüsüne aktarır.



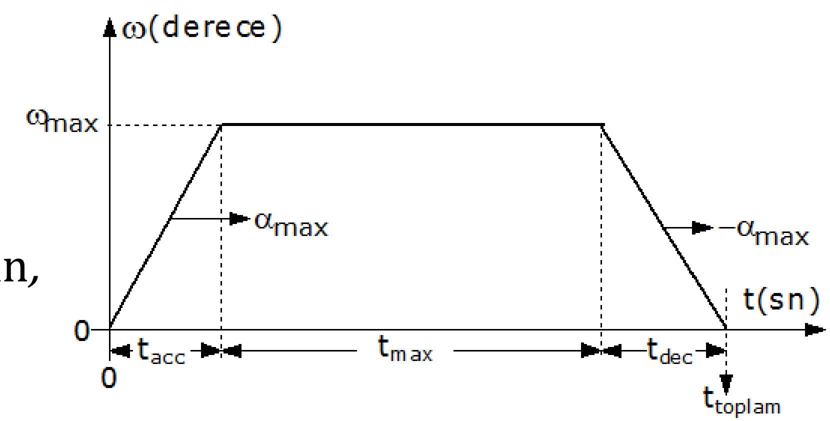
Bir hareket kontrolöründe, bir sürücü ve bir eyleyiciden (actuator) oluşan takıma bir eksen denir. Birden fazla sürücü ve eyleyicili sistemler çok eksenli sistemler olarak adlandırılır. Üç veya altı eklemli robotlar çok eksenli sitemlere güzel birer örnektir ve bu eksenlerin koordineli çalıştırılması gerekmektedir.

Hareket Profilleri

Hareket kontrollerinde konum ve hız için derece yerine enkoder darbeleri kullanılmaktadır. Pozisyon kontrolünde başlangıç ve bitiş noktalarında hız sıfırdır ve hareket yumuşak bir şekilde ivmelendirilir. Aşağıda bir trepezoidal hız profili görülmektedir. Şekilde görülen bazı semboller

Şekilde görülen bazı semboller

ω_{max} = maximum hız,
α_{max} = maximum ivme,
t_{acc} = pozitif ivmelenme zamanı,
t_{dec} = negatif ivmelenme zamanı,
t_{max} = maksimum hızın gerçekleştiği zaman,
t_{toplam} = toplam hareket süresi.



Bu değişkenler arası temel ilişkiler aşağıda verilmiştir.

$$t_{acc} = t_{dec} = \frac{w_{max}}{\alpha_{max}} \qquad t_{toplam} = t_{acc} + t_{max} + t_{dec}$$

$$\theta = w_{max}\left(\frac{t_{acc}}{2} + t_{max} + \frac{t_{dec}}{2}\right) \qquad t_{max} = \frac{|\theta|}{w_{max}} - \frac{|t_{acc}|}{2} - \frac{|t_{dec}|}{2}$$

ÖRNEK 6.5

Tek eklemli bir robotun hareketi $\theta_{baş} = 100$ derecede başlayıp $\theta_{son} = 20$ derecede sonlanıyor. Maksimum hız $w_{max} = 10\,\frac{dec}{sn}$ ve maksimum ivme $\alpha_{max} = 20\,\frac{dec}{sn^2}$ olduğuna göre, t_{acc}, t_{dec}, t_{max} ve t_{toplam} zamanlarını bulunuz.

ÇÖZÜM 6.5

$$t_{acc} = t_{dec} = \frac{\omega_{max}}{\alpha_{max}} = \frac{10}{20} = 0.5\,sn \qquad \theta = \theta_{son} - \theta_{baş} = 20 - 100 = -80$$

$$t_{max} = \frac{|\theta|}{\omega_{max}} - \frac{|t_{acc}|}{2} - \frac{|t_{dec}|}{2} = \frac{|-80|}{10} - \frac{|0.5|}{2} - \frac{|0.5|}{2} = 7.5\,sn$$

$$t_{toplam} = t_{acc} + t_{max} + t_{dec} = 0.5 + 7.5 + 0.5 = 8.5\,sn$$

Görüldüğü gibi robot 0.5 sn pozitif ivme, 0.5 sn negatif ivme ve 7.5 sn ise maksimum hız zamanı olmak üzere toplam 8.5 saniyelik bir hareket gerçekleştirmiştir.

ÖRNEK 6.6

Tek eklemli bir robotun hareketi $\theta_{baş} = 20$ derecede başlayıp $\theta_{son} = 22$ derecede sonlanıyor. Maksimum hız $w_{max} = 10\,\frac{dec}{sn}$ ve maksimum ivme $\alpha_{max} = 20\,\frac{dec}{sn^2}$ olduğuna göre, t_{acc}, t_{dec}, t_{max} ve t_{toplam} zamanlarını bulunuz.

ÇÖZÜM 6.6

$$t_{acc} = t_{dec} = \frac{\omega_{max}}{\alpha_{max}} = \frac{10}{20} = 0.5\,sn \qquad \theta = \theta_{son} - \theta_{baş} = 22 - 20 = 2^{\circ} \qquad t_{max} = \frac{|\theta|}{\omega_{max}} - \frac{|t_{acc}|}{2} - \frac{|t_{dec}|}{2} = -0.3\,sn$$

Maksimum hız zaman aralığı negatif çıktığından negatif ve pozitif ivme zamanlarını temel ivme konum ilişkisini kullanarak yeniden hesaplayalım.

$$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\alpha_{max} t_{acc}^2 \quad ise \quad t_{acc} = \sqrt{\frac{\theta}{\alpha_{max}}} = \sqrt{\frac{2}{20}} = 0.316\,sn \qquad t_{max} = 0\,sn$$

Robot kolunun gerçekleştirdiği hareketin set noktaları aşağıdaki gibi hesaplanır. Hareket 0 saniyede başlasın.

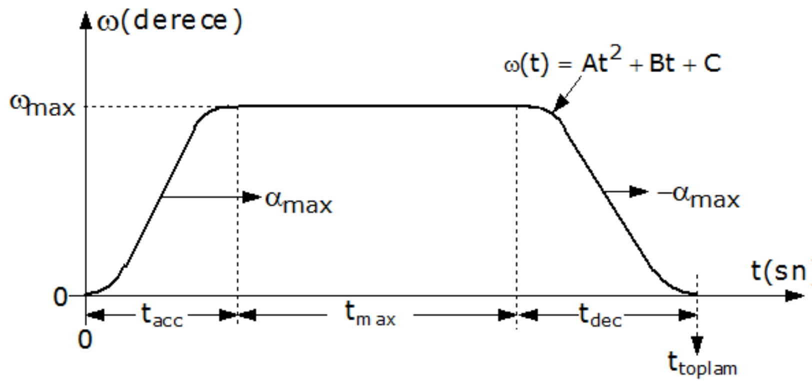
$$0 \le t < t_{acc} \quad ise \quad \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha_{max} t^2 + \theta_{baş}$$

$$t_{acc} \le t < t_{acc} + t_{\max} \qquad ise \qquad \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha_{\max} t_{acc}^2 + \omega_{\max}(t - t_{acc}) + \theta_{baş}$$

$$t_{acc} + t_{\max} \le t < t_{acc} + t_{\max} + t_{dec} \qquad ise \qquad \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha_{\max} t_{acc}^2 + \omega_{\max} t_{\max} + \frac{1}{2}\alpha_{\max}(t - t_{\max} - t_{acc})^2 + \theta_{baş}$$

$$t_{acc} + t_{\max} + t_{dec} \le t \qquad ise \qquad \theta(t) = \theta_{son}$$

Şekilde yumuşak geçiş yapan bir hareketin hız profili görülmektedir.



Şekildeki hız profilini meydana getiren polinomun katsayıları $\theta_{baş}$ ve θ_{son}, $\alpha_{\max}$ ve $w_{\max}$verildiğinde, ayrıca

$$\omega(0) = 0 \qquad \omega\left(\frac{t_{acc}}{2}\right) = \frac{\omega_{\max}}{2} \qquad \frac{d}{dt}\omega(0) = 0 \qquad \frac{d}{dt}\omega\left(\frac{t_{acc}}{2}\right) = \alpha_{\max}$$

koşulları sağlandığında şekil üzerindeki ifadeler aşağıdaki gibi bulunur

$$A \cdot 0^2 + B \cdot 0 + C = 0 \quad ise \quad C = 0 \qquad 2A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0 \quad ise \quad B = 0 \qquad ve \qquad A = \frac{\alpha_{\max}^2}{4\omega_{\max}}$$

Bu durumda $0 \le t < \frac{t_{acc}}{2}$ aralığındaki hız ifadesi, $\omega(t) = \frac{\alpha_{\max}^2}{4\omega_{\max}} t^2$

$\frac{t_{acc}}{2} \le t < t_{acc}$ aralığındaki hız ifadesi, $\omega(t) = \omega_{\max} - \frac{\alpha_{\max}^2}{4\omega_{\max}}(t^2 - 2t_{acc}t + t_{acc}^2)$

ivmelenme sırasında kat edilen mesafe,

$$\theta_{acc} = \int_0^{t_{acc}/2} \frac{\alpha_{\max}^2}{4\omega_{\max}} t^2 dt + \int_{t_{acc}/2}^{t_{acc}} (\omega_{\max} - \frac{\alpha_{\max}^2}{4\omega_{\max}}(t^2 - 2t_{acc}t + t_{acc}^2)dt = -\frac{14\alpha_{\max}^2}{96\omega_{\max}} t_{acc}^3 + \frac{\omega_{\max} t_{acc}}{2}$$

maksimum hızda geçen süre: $t_{\max} = \frac{(\theta - 2\theta_{acc})}{\omega_{\max}}$

Çok Eksenli Hareket

İkiden fazla ekleme sahip bir robotta eklemlerden biri yavaş hareket etse dahi bütün eklemler aynı anda harekete başlayıp aynı anda hareketlerini tamamlar.

Ayrık Hareket

Bir robotun eksenleri birbiriyle koordineli bir şekilde çalışmıyorsa bu tip harekete ayrık hareket denir ve eksenlerin hareketi aynı zamanda başlamasına rağmen farklı zamanlarda sonlanır. Bu tip bir hareket robotlarda tercih edilmez.

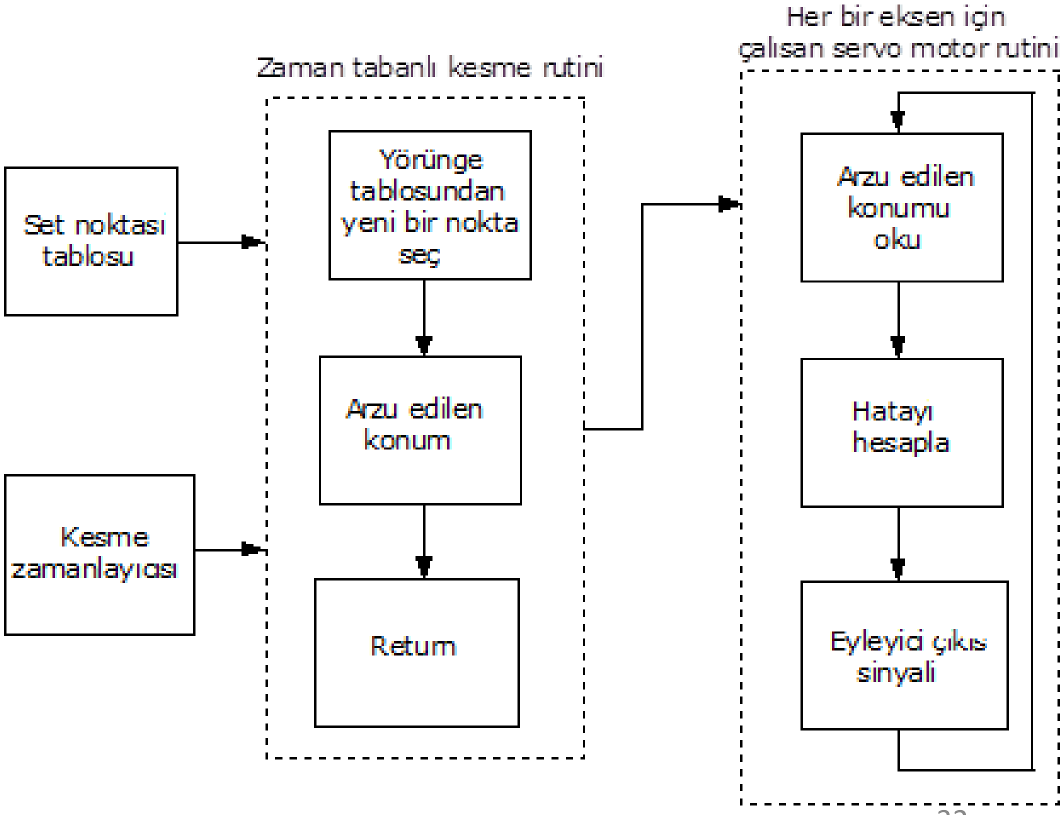
İnterpolasyonlu Hareket

Bu harekette, hızlı eksenler yavaşlatılarak en yavaş hareket eden eklemlerle eş zamanlı hareket gerçekleştirir. Üç eksenin hareketini eş zamanlı olarak tamamlayabilmesi için eklemlerin hız ve ivmeleri indirgeme faktörüyle yeniden düzenlenir.

$$F = \frac{t_{toplam_1} + t_{toplam_2} + t_{toplam_3}}{t_{toplam_{en\ yavaş}}}$$

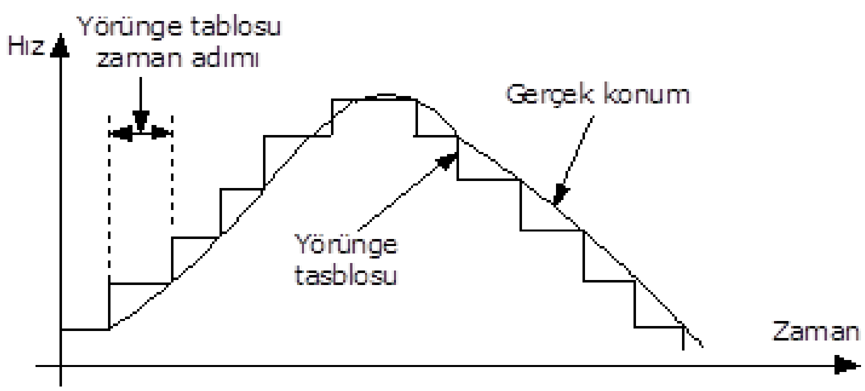
Hareket Planlaması

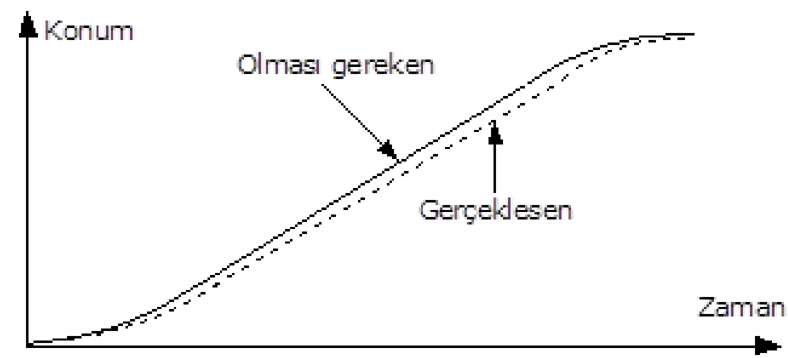
Set noktalarının planlanmasından sonra, bu noktalar set noktası planlayıcısı tarafından kullanılır. Bir set noktası planlayıcısı bir zamanlayıcı kullanarak bir çıkış set noktasının ne zaman güncelleneceğini belirler. Bunun için blok şeması aşağıdadır.



Bu set noktaları programlayıcısı, sistem zamanı ile toplam hareket zamanını karşılaştıran bir kesme sürücü ait rutinidir. Yeterli zaman geçtiğinde, rutin set noktası tablosundaki diğer değere geçer. Kesme zamanlayıcısının frekansı, set noktalarının hesaplanmasında kullanılan zaman adımlarından küçük veya eşit olmalıdır.

Programlayıcı çıkışı her zaman dilimini günceller. Bu eksenlerin her zaman bir hedef değeri bulmasını takip eder. Bu durumda ise aşağıdaki grafiklerde görüldüğü gibi küçük hataların oluşmasına neden olur.





ÖRNEK 6.7

Tek eklemli bir robot $\theta_{baş} = 20$ derecede başladığı hareketini $\theta_{son} = 22$ derecede sonlanıyor. Bu esnada maksimum hız $w_{max} = 20\frac{dec}{sn}$ ve maksimum ivme $\alpha_{max} = 100\frac{dec}{sn^2}$ olduğuna göre, 0.5'er saniyelik dilimler halinde bu hareketin zaman konum tablosunu çıkarınız.

ÇÖZÜM 6.7

Öncelikle t_{acc}, t_{dec}, t_{max} ve t_{toplam} sürelerini bulalım.

$$t_{acc} = t_{dec} = \frac{\omega_{max}}{\alpha_{max}} = \frac{20}{100} = 0.2\,sn$$

$$t_{\max} = \frac{|\theta|}{\omega_{\max}} - \frac{|t_{acc}|}{2} - \frac{|t_{dec}|}{2} = \frac{|100-(-100)|}{20} - \frac{|0.2|}{2} - \frac{|0.2|}{2} = 9.8\,sn$$

$$t_{toplam} = t_{acc} + t_{\max} + t_{dec} = 0.2 + 9.8 + 0.2 = 10.2\,sn$$

Şimdide 0.5'inci saniyedeki konumu bulalım.

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha_{max}t_{acc}^2 + \omega_{max}(t - t_{acc}) + \theta_{baş}$$

$$\theta(0.5) = \frac{1}{2}100 \cdot (0.2)^2 + 20(0.5 - 0.2) - 100 = -92^\circ$$

0-0.2sn ile 10-10.2'nci saniyelerin dışında sabit hızlı hareket gerçekleştirildiğinden 10. saniyeye kadar her 0.5 saniyelik dilimde eşit yol alınır. Bu durumda 1. saniyedeki konumu bulalım.

$$\theta(1) = \theta(0.5) + 20\frac{derece}{sn} \cdot (0.5\,sn)$$

$$\theta(1) = -92 + 10 = -82$$

Görüldüğü gibi sabit hızın gerçekleştiği her 0.5 saniyelik dilimde 10 derecelik yol alınmaktadır. Bu durumda zaman konum tablosu şu şekilde olur.

Zaman t(sn)	Konum (derece)
0.0	-100
0.5	-92
1.0	-82
1.5	-72
2.0	-62
2.5	-52
3.0	-42
3.5	-32
4.0	-22
4.5	-12
5.0	-2
5.5	8
6.0	18
6.5	28
7.0	38
7.5	48
8.0	58
8.5	68
9.0	78
9.5	88
10.0	98
10.2	100