T.C.
KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ

Prof. Dr. Zafer BİNGÜL Prof. Dr. Serdar KÜÇÜK

ROBOT KİNEMATİĞİ

PROF. DR. ZAFER BİNGÜL
PROF. DR. SERDAR KÜÇÜK

4. TERS KİNEMATİK

4.1. Giriş

Robot manipülatörlerinin ters kinematiği, robot kontrolünün en önemli aşamalarından birini oluşturmaktadır.

Altı serbestlik derecesine sahip bir robotla üç boyutlu uzayda bütün noktalara ulaşılabildiğinden genellikle endüstride 6 serbestlik derecesine sahip robotlar tercih edilmektedir.

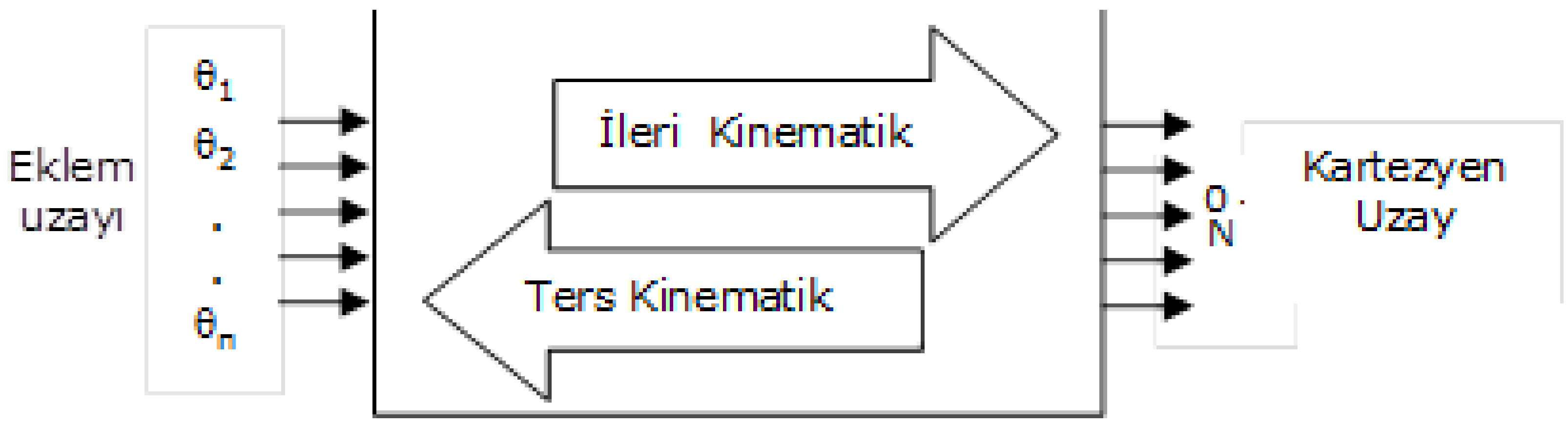
Altı serbestlik derecesine sahip bir endüstriyel robot manipülatörlerinin son üç eklemi bir noktada kesiştiğinde, kolaylıkla ters kinematik çözüm gerçekleştirilirken, kesişmediğinde ise ters kinematik problem oldukça zor bir hal almaktadır.

Seri robotlarda kolay olan ileri kinematik için her zaman bir çözüm elde edilirken, ters kinematik hem zor hem de her zaman çözüm elde etmek mümkün olmayabilir.

Ters kinematik problem Kartezyen uzayda, ana çerçeveye göre verilen uç işlevcinin konum ve yönelim verileri yardımıyla eklem değişkenlerinin bulunması şeklinde tanımlanabilir.

Başka bir ifadeyle, bir robot manipülatörünün uç işlevcisinin yönelimini ve konumunu Kartezyen koordinat sisteminden eklem koordinat sistemine dönüştürme işlemine ters kinematik problem denir.

Ters kinematik problem çözümü, gerçek zamanlı kontrol, eyleyicilerin eklem torklarının hesaplanması, kaynak, boyama ve yörünge planlaması gibi bir çok uygulama için son derece önemlidir.



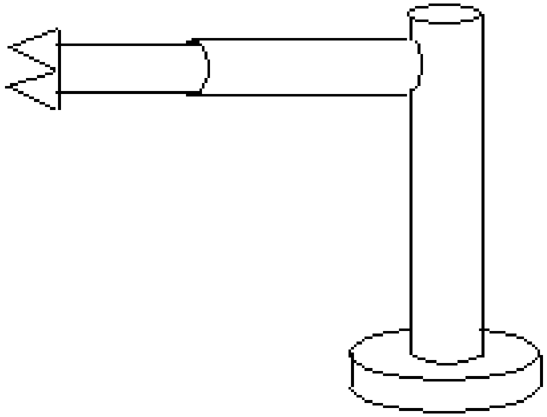
Ters Kinematik Problemin Yapısı

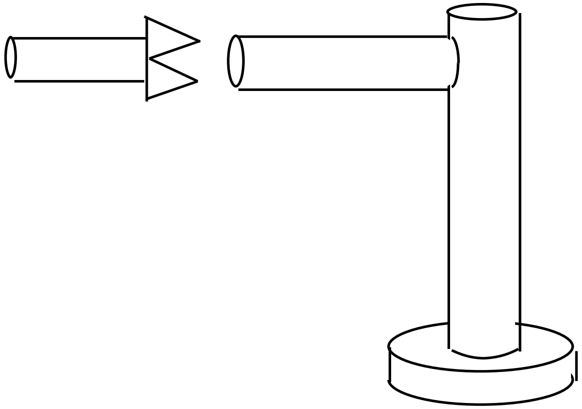
Ters kinematik problem, aşağıdaki özelliklerden dolayı çözülmesi oldukça güçtür.

1. Analitik olarak karmaşık, doğrusal olmayan denklemler içerir.

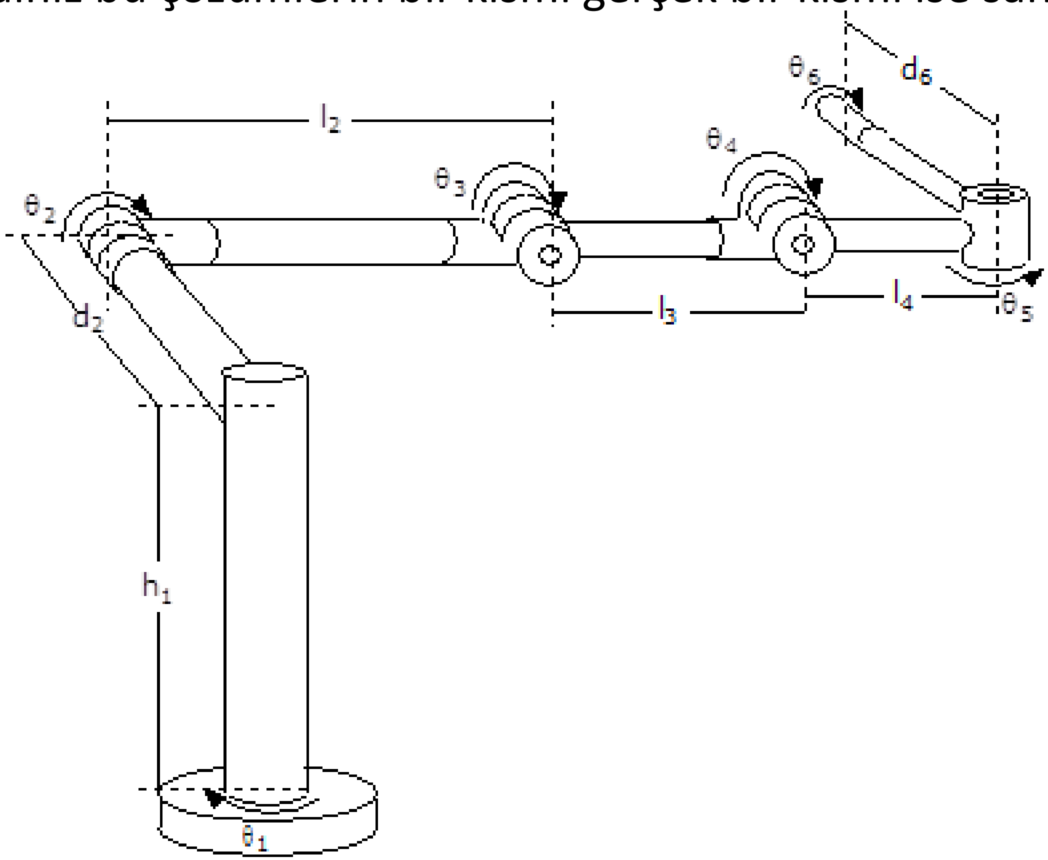
2. Eklemlerin yapısına bağlıdır. Ters kinematik problem bir robotta prizmatik eklem sayısı artıkça kolaylaşmakta, dönel eklem sayısı artıkça zorlaşmaktadır.

3. Her zaman matematiksel çözüm fiziksel çözümü temsil etmez. Şekillerde görüldüğü gibi θ=Atan2(-k, p_z) ise matematiksel çözümle fiziksel çözüm örtüşürken tam tersine θ=Atan2(k,$-p_z$) ise fiziksel olarak gerçekleşemeyecek bir çözüm üretmektedir.

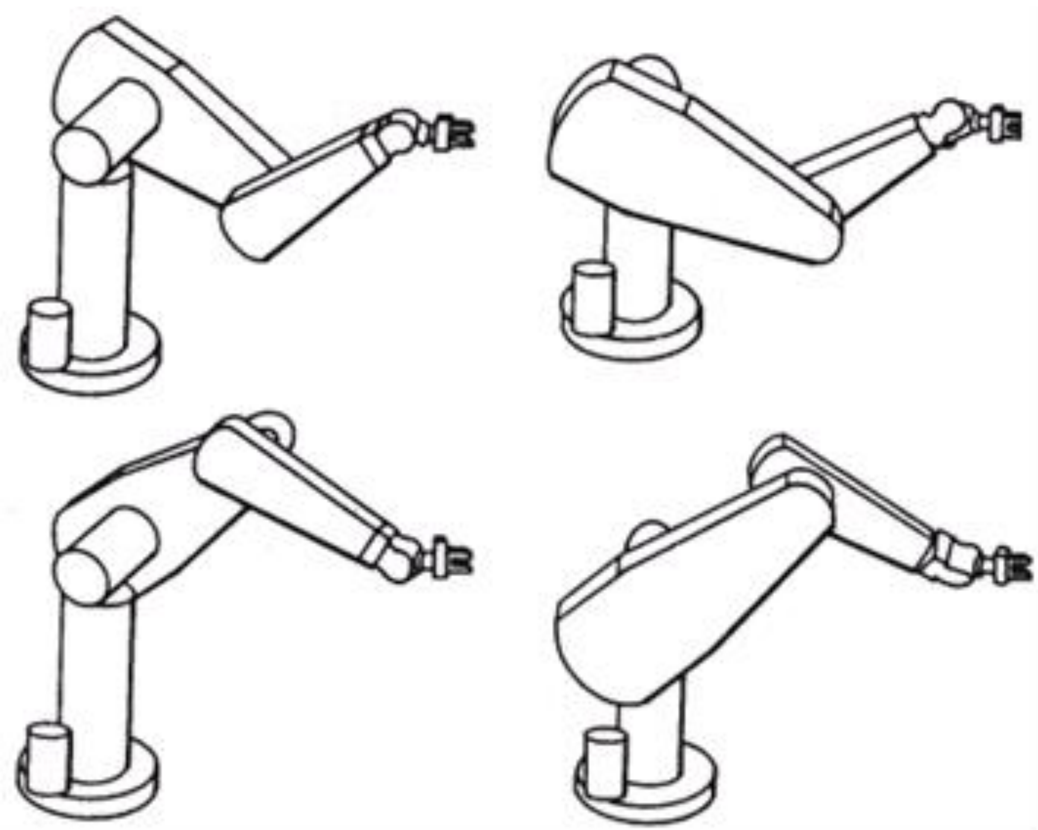




4. Aynı uç işlevci düzenleşimi için birden fazla çözüm olabilir. Ters kinematik çözüm sayısı robotun serbestlik derecesinin yanında aynı zamanda eklem değişkenlerine de bağlıdır. Her bir eklemde a ve d parametrelerinin her ikisinin de bulunması çözüm sayısının artmasına neden olur. Örneğin şekildeki 6R robotta her bir eklem için en azından bir a veya d değişkeni olduğundan ters kinematik çözüm sayısı $2^6 = 64$'tür. Yalnız bu çözümlerin bir kısmı gerçek bir kısmı ise sanal çözümler olabilir.



Dönel eklemlerden oluşan robotlarda fiziksel çözüm sayısının fazla olması, üç boyutlu uzayda bir noktaya pek çok farklı şekilde ulaşma imkanı sağlar. Şekilde PUMA-560 robotunun aynı noktaya dört farklı şekilde ulaşabildiği görülmektedir.



5. Ters kinematik problem, verilen bir robot düzenleşimi için tamamen analitik (closed form) olarak çözülebileceği gibi, analitik çözümün mümkün olmadığı durumlarda sayısal yöntemler kullanılarak da çözülebilir.

Fakat tamamen kesin sonuç üreten analitik çözüme ait denklemler bilgisayar ortamında çok hızlı çalışırken, eklem açılarının iteratif olarak çözüldüğü sayısal çözüm ise bilgisayar ortamında analitik çözüme göre daha yavaş çalışır. Ayrıca, sayısal olarak eklem açılarını bulmak için yazılan algoritmanın yapısı da (çözüm zamanı ve başlangıç koşulları) son derece önemlidir.

Sayısal çözümün bilgisayar ortamında analitik çözüme göre daha yavaş çalışmasından dolayı robot tasarımcıları genellikle analitik çözümün mümkün olduğu tasarımlar üzerinde durmaktadır. Günümüzde endüstriyel robotlar (PUMA ve SCARA) çoğunlukla analitik olarak çözülebilen basit yapılara sahip olacak şekilde üretilmektedirler.

Endüstriyel robotlarda Euler ve eklem kaçıklılıklı bilekli olmak üzere iki tip bilek kullanılmaktadır. Bu iki bileği ters kinematik çözümlerini incelendiğinde aşağıdaki sonuçlara varılabilir.

1. Euler bileğinin üç eklemi de bir noktada kesiştiğinden, bu bileğin eklendiği endüstriyel robot manipülatörlerinin ters kinematiği tamamen analitik olarak çözülebilmektedir. Eklem kaçıklılıklı bilekli endüstriyel robotların son üç ekleminde a ve d değişkenleri bulunduğundan, bu robot manipülatörlerinin bir kısmı tamamen analitik olarak çözülebilmektedir.

2. Euler bilekli robotların ters kinematik denklemlerinde konum ile yönelim birbirinden ayrı gerçekleştiğinden, bu robotlar için her zaman analitik çözüm vardır. Buna rağmen, eklem kaçıklılıklı bilekli robotların ters kinematik denklemlerinde konum ile yönelim iç içe olduğundan her zaman analitik çözüm gerçekleşmeyebilir.

3. Euler bilekli robotların ters kinematiğinde en fazla üç bilinmeyenli üç denklem olduğundan analitik olarak çözülürken, eklem kaçıklılıklı bilekli robotların ters kinematiğinde ise üç denkleme karşılık üçten fazla bilinmeyen olduğundan analitik çözümleri oldukça güç veya yoktur. Bu açıdan bu robotların bir kısmının ters kinematiği sayısal olarak çözülür.

4. Euler bilekli robotlarda ilk üç eklem uç işlevcinin konumunu, son üç eklem ise yönelimini belirlerken, eklem kaçıklılıklı bilekli robotlarda konumla yönelim iç içe gerçekleşmektedir. Bu açıdan Euler bilekli robotlarda, çalışma uzayında hemen hemen bütün noktalara ulaşılırken, eklem kaçıklılıklı bilekli robotlarda çalışma uzayı genişlemesine karşın bütün noktalara ulaşılamaz.

Ulaşılabilir çalışma uzayı (reachable workspace) ve dexterious çalışma uzayı, robot manipülatörlerinin çalışma uzaylarını belirleyen çok önemli iki özelliktir. Ulaşılabilir çalışma uzayı, bir robot manipülatörünün uç işlevcisini rastgele hareket ettirip yönlendirdiği, robotların serbestlik derecelerinin azalmasına neden olan tekil noktaların bulunmadığı bölgeye denir.

Nitelikli (dexterious) çalışma uzayı ise uç işlevcisinin yönelme ve öteleme hareketlerini en büyük kapasitede gerçekleştirdiği bölgedir. Dolayısıyla nitelikli çalışma uzayı ulaşılabilir çalışma uzayının bir alt kümesidir.

Ters kinematik çözüm, bütün eklem değişkenlerinin bilgisayar ortamında öz yineli işlemler gerçekleştirilerek Newton-Raphson ve Runga-Kutta yöntemlerinde olduğu gibi sayısal olarak çözülebilir. Sayısal çözüm için kinematik eşitliklerin farklarının toplamını alan tahmin edici ve düzeltici tip algoritmalar kullanılır.

Ters kinematik problemin sayısal yöntemlerle çözümlenmesinde karşılaşılan en büyük sorun, Jakobiyen matrisin tekil olduğu noktalarda yazılan algoritmanın çözüm üretememesidir.

Ayrıca, başlangıç çözüm vektörü (eklem değişkenlerini içeren vektör) çözüme yönelik vektör elemanlarından oluşmadığı zaman, sayısal çözüm kararlı bir çözüm üretmekten uzaklaşır.

Hem tamamen sayısal hem de tamamen analitik çözümün gerçekleştirilemediği durumlarda ise, eklem değişkenlerinden birkaçı sayısal olarak bulunup, geri kalanlar için analitik olarak çözülebilen yarı analitik çözüm uygulanır.

Ters Kinematik Çözüm (Analitik çözüm yaklaşımı)

Altı serbestlik derecesine sahip bir robotun ileri yön kinematiği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$ {}^{0}_{6}T = {}^{0}_{1}T \; {}^{1}_{2}T \; {}^{2}_{3}T \; {}^{3}_{4}T \; {}^{4}_{5}T \; {}^{5}_{6}T \qquad (1) $$

${}^{0}_{6}\mathrm{T}$ ileri yön kinematik matrisi, konum ve yönelim verilerini içeren matris elemanları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir. Bu matrisin 1. kolonu uç işlevcisinin normal vektörünü ($\mathrm{n} = [\mathrm{n_x} \;\; \mathrm{n_y} \;\; \mathrm{n_z}]^{\mathrm{T}}$), 2. kolonu kayma (sliding) vektörünü ($\mathrm{s} = [\mathrm{s_x} \;\; \mathrm{s_y} \;\; \mathrm{s_z}]^{\mathrm{T}}$) ve 3. kolonu ise yaklaşım (approaching) vektörünü ($\mathrm{a} = [\mathrm{a_x} \;\; \mathrm{a_y} \;\; \mathrm{a_z}]^{\mathrm{T}}$) göstermektedir.

$$ {}^{0}_{6}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Denklem 1 aşağıdaki gibi yazılarak ters kinematik çözüm için gerekli olan eşitlikler türetilir.

$$\left[{}^{0}_{1}T\right]^{-1}\ {}^{0}_{6}T = \left[{}^{0}_{1}T\right]^{-1}\ {}^{0}_{1}T\ {}^{1}_{2}T\ {}^{2}_{3}T\ {}^{3}_{4}T\ {}^{4}_{5}T\ {}^{5}_{6}T$$

Denklemde $[{}^{0}_{1}T]^{-1}\,{}^{0}_{1}T$ = I olduğundan , ifade aşağıdaki gibi basitleşir.

$$\left[{}^{0}_{1}T\right]^{-1}\ {}^{0}_{6}T = {}^{1}_{2}T\ {}^{2}_{3}T\ {}^{3}_{4}T\ {}^{4}_{5}T\ {}^{5}_{6}T$$

Bu şekilde türetilebilecek diğer denklemler:

$$\left[{}^{0}_{1}T\ {}^{1}_{2}T\right]^{-1}\ {}^{0}_{6}T = {}^{2}_{3}T\ {}^{3}_{4}T\ {}^{4}_{5}T\ {}^{5}_{6}T$$

$$\left[{}^{0}_{1}T\ {}^{1}_{2}T\ {}^{2}_{3}T\right]^{-1}\ {}^{0}_{6}T = {}^{3}_{4}T\ {}^{4}_{5}T\ {}^{5}_{6}T$$

$$\left[{}^{0}_{1}T\ {}^{1}_{2}T\ {}^{2}_{3}T\ {}^{3}_{4}T\right]^{-1}\ {}^{0}_{6}T = {}^{4}_{5}T\ {}^{5}_{6}T$$

$$\left[{}^{0}_{1}T\ {}^{1}_{2}T\ {}^{2}_{3}T\ {}^{3}_{4}T\ {}^{4}_{5}T\right]^{-1}\ {}^{0}_{6}T = {}^{5}_{6}T$$

Diğer bir denklemde Raghavan ve Roth adlı bilim adamları tarafından üretilmiştir.

$${}^{2}_{3}T\ {}^{3}_{4}T\ {}^{4}_{5}T = {}^{1}_{2}T^{-1}\ {}^{0}_{1}T^{-1}\,{}^{0}_{6}T\ {}^{5}_{6}T^{-1}$$

Daha önce belirtilen bu 6 adet denklem sistemini kullanarak ters kinematik çözüm için gerekli olan eşitlikler türetilir. Bu eşitliklerde yer alan bazı bazı trigonometrik ifadelerden faydalanarak ters kinematik çözüm kolayca çözülebilir. Bu eşitlikler aşağıda verilmiştir.

$$\cos\theta = a \ \text{ ise } \theta = \mathrm{Atan2}(\pm\sqrt{1-a^2}, a)$$

$$\sin\theta = a \text{ ise } \theta = \mathrm{Atan2}\ (a\,, \pm\sqrt{1-a^2})$$

$$\cos\theta = a \quad \text{ve} \quad \sin\theta = b \ \text{ ise } \theta = \mathrm{Atan2}\ (b, a)$$

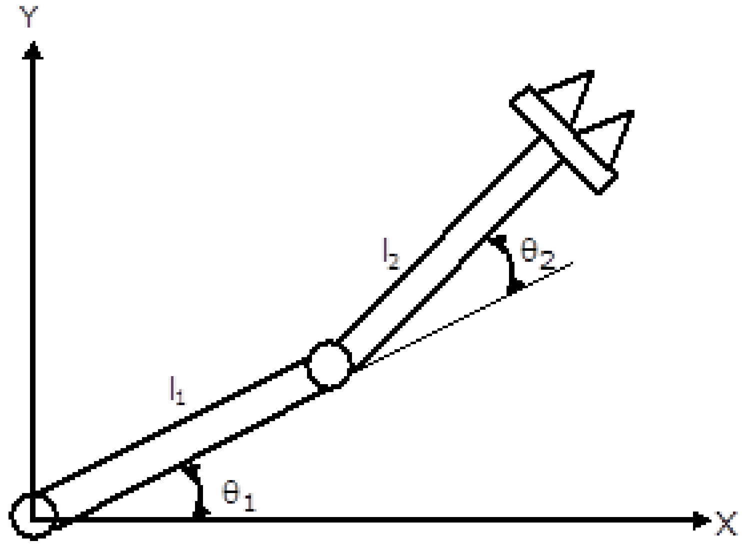
$$a\sin\theta + b\cos\theta = 0 \quad \text{ise} \quad \theta = \mathrm{Atan2}(-b, a) \quad \text{veya} \quad \theta = \mathrm{Atan2}(b, -a)$$

$$a\sin\theta + b\cos\theta = c \quad \text{ise} \quad \theta = \mathrm{Atan2}(a, b) + \mathrm{Atan2}\left(\pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c\right)$$

Bu eşitliklerin dışında nadir kullanılabilecek diğer trigonometrik denklemler ders kitabında mevcuttur.

ÖRNEK 4.1

Şekildeki RR eklem yapısına sahip düzlemsel robotun ters kinematiğini çözünüz.



ÇÖZÜM 4.1

Çözüm için öncelikle robotun ileri kinematik matrisleri (${}^0_3\mathrm{T} = {}^0_1\mathrm{T}{}^1_2\mathrm{T}{}^2_3\mathrm{T}$) bulunur.

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

${}^{0}_{3}\mathrm{T} = {}^{0}_{1}\mathrm{T}\,{}^{1}_{2}\mathrm{T}\,{}^{2}_{3}\mathrm{T}$ ifadesinin her iki tarafını da $[{}^{0}_{1}\mathrm{T}]^{-1}$ ile çarpalım. Yeni durumda aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\left[{}^{0}_{1}T\right]^{-1}\,{}^{0}_{3}T = \left[{}^{0}_{1}T\right]^{-1}\,{}^{0}_{1}T\;{}^{1}_{2}T\;{}^{2}_{3}T$$

Bilindiği gibi $[{}^{0}_{1}\mathrm{T}]^{-1}\,{}^{0}_{1}\mathrm{T}$ = I olduğundan sonuçta denklem aşağıdaki gibi olur.

$$\left[{}^{0}_{1}T\right]^{-1}\,{}^{0}_{3}T = {}^{1}_{2}T\;{}^{2}_{3}T$$

Yukarıda denklemin sol tarafında yer alan robotun ${}^{0}_{1}\mathrm{T}$ dönüşüm matrisinin tersi:

$${}^{0}_{1}T^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{0}_{1}R^{T} & -{}^{0}_{1}R^{T}\,{}^{0}P_{1} \\ 0\;0\;0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yönelim matrisinin transpozu: ${}^{0}_{1}R = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise ${}^{0}_{1}R^{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Konum vektörü: $-{}^{0}_{1}R^{T}\,{}^{0}P_{1} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Bu durumda ${}^{0}_{1}\mathrm{T}$ dönüşüm matrisinin tersi: $${}^{0}_{1}T^{-1} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu aşamada $[{}^{0}_{1}T^{-1}]\,{}^{0}_{3}\mathrm{T} = {}^{1}_{2}\mathrm{T}\,{}^{2}_{3}\mathrm{T}$ ifadesini yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21} & c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22} & c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23} & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ -s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} & -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_2 c\theta_2 + l_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki sağ ve sol tarafta matris içerisinde bulunan 12 denklemi bir birine eşitleyerek bağımsız denklemler elde edebiliriz.

1. $c\theta_1 r_{11} + s\theta_1 r_{21} = c\theta_2$
2. $-s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} = s\theta_2$
3. $r_{31} = 0$
4. $c\theta_1 r_{12} + s\theta_1 r_{22} = -s\theta_2$
5. $-s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} = c\theta_2$
6. $r_{32} = 0$
7. $c\theta_1 r_{13} + s\theta_1 r_{23} = 0$
8. $-s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} = 0$
9. $r_{33} = 1$
10. $c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y = l_2 c\theta_2 + l_1$
11. $-s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y = l_2 s\theta_2$
12. $p_z = 0$

7 ve 8. denklemler çözüm üretmesine rağmen genellikle ters kinematik çözümün tamamı mümkünse kol uzunlukları, p_x, p_y, p_z cinsinden elde edilmek istenir. Çözüm için 10 ve 11. denklemlerden faydalanalım.

10 ve 11. denklemlerde eşitliğin her iki tarafının karelerini alıp alt alta toplayalım. Elde edeceğimiz eşitliği daha önceden bulduğumuz denklemlerden birine benzeterek eklem değişkenini kol uzunlukları yönelim ve konum cinsinden yazalım.

$$c^2\theta_1 p_x^2 + s^2\theta_1 p_y^2 + \cancel{2 p_x p_y c\theta_1 s\theta_1} = l_2^2 c^2\theta_2 + 2 l_1 l_2 c\theta_2 + l_1^2$$

$$+ s^2\theta_1 p_x^2 + c^2\theta_1 p_y^2 - \cancel{2 p_x p_y c\theta_1 s\theta_1} = l_2^2 s^2\theta_2$$

$$p_x^2 (c^2\theta_1 + s^2\theta_1) + p_y^2 (s^2\theta_1 + c^2\theta_1) = l_2^2 (c^2\theta_2 + s^2\theta_2) + 2 l_1 l_2 c\theta_2 + l_1^2$$

$c\theta^2 + s\theta^2 = 1$ olduğundan denklem şöyle yazılabilir: $p_x^2 + p_y^2 = l_2^2 + 2l_1l_2c\theta_2 + l_1^2$

Denklemde $c\theta_2$ ifadesini çekelim: $c\theta_2 = \dfrac{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$

Bulunan ifade $cos\theta = a'$ ya benzemektedir: $cos\theta = a$ ise $\theta = A\tan 2\left(\mp\sqrt{1-a^2}\,,\, a\right)$
Bu durumda ikinci dönel eklem değişkeni θ_2 aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_2 = A\tan 2\left(\mp\sqrt{1-\left[\frac{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right]^2}\,,\, \frac{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} \right)$$

θ_2 artık bilinen bir değişken olduğuna göre 10. denklemden θ_1 aşağıdaki gibi bulunur.

$$c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y = l_2c\theta_2 + l_1$$

Bu ifadede aşağıdaki ifadeye benzemektedir: $a\sin\theta + b\cos\theta = c$ ise

$p_x = b$, $p_y = a$ ve $l_2c\theta_2 + l_1 = c$

$$\theta = A\tan 2(a,b) \mp A\tan 2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}\,, c)$$

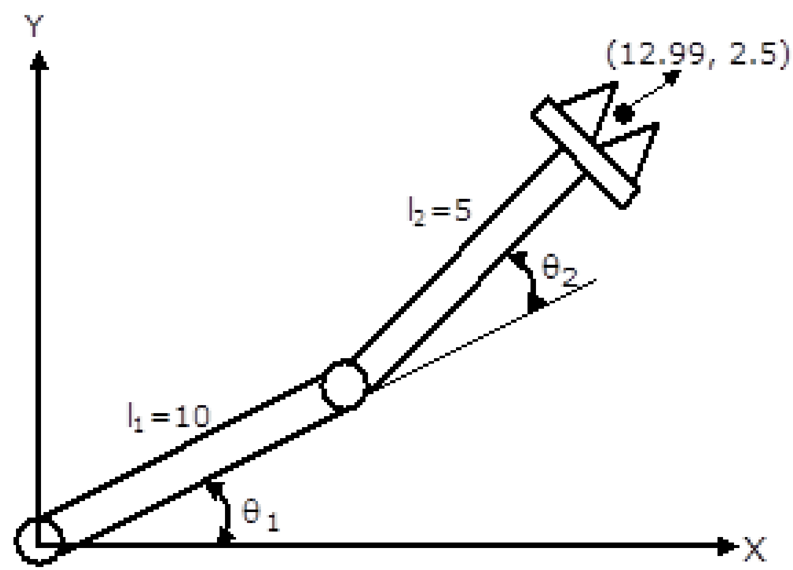
$$\theta_1 = A\tan 2(p_y, p_x) \mp A\tan 2(\sqrt{p_y^2 + p_x^2 - (l_2c\theta_2 + l_1)^2}\,, l_2c\theta_2 + l_1)$$

ÖRNEK 4.2

Örnek 4.1'deki robotun kol uzunlukları l_1 =10 ve $l_2 = 5$ olarak veriliyor. Buna göre,

a) Robotun uç işlevcisinin Kartezyen uzaydaki konumu $\mathrm{p_x} = 12.99$, $\mathrm{p_y} = 2.5$ olması için birinci eklem değişkeni θ_1 ve ikinci eklem değişkeni θ_2 kaç derece olmalıdır.

b) Bütün çözüm kümelerini bularak robotun gerçek konumunu eklem açılarını göstererek çiziniz.



ÇÖZÜM 4.2

a) P_x, p_y ve bacak uzunluklarını ters kinematik denklemde yerlerine yazalım. Eklem değişkenleri, teorik olarak bulunan sıraya göre elde edilir. Dolayısıyla öncelikle ikinci eklem değişkeni θ_2 bulunur.

$$\theta_2 = A\tan 2\left(\mp\sqrt{1-\left[\frac{p_x^2+p_y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2}\right]^2}\ ,\ \frac{p_x^2+p_y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2} \right) = A\tan 2\left(\mp\sqrt{1-(0.49)^2}\ ,\ 0.49 \right)$$

$$= A\tan 2\left(\mp 0.866,\ 0.49 \right) = \mp 60^\circ$$

denklemde $\left[\dfrac{p_x^2+p_y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2}\right] = \left[\dfrac{12.99^2+2.5^2-10^2-5^2}{2\cdot 10\cdot 5}\right] = 0.49$

b) $\theta_2 = \mp 60°$ açısının pozitif veya negatif değerinin cosinüsü aynı olduğundan birinci eklem değişkeni θ_1 ifadesini bulmak için $\theta_2 = 60°$ alalım.

$$\theta_1 = A\tan 2(p_y, p_x) \mp A\tan 2(\sqrt{{p_y}^2 + p_x^2 - (l_2 c\theta_2 + l_1)^2}, l_2 c\theta_2 + l_1)$$

$$\theta_1 = A\tan 2(2.5,\ 12.99) \mp A\tan 2(\sqrt{2.5^2 + 12.99^2 - (5\cos(60)+10)^2},\ 5\cos(60)+10)$$

$$\theta_1 = 10.9 \mp 19.1$$

Görüldüğü gibi şekildeki robot için toplam dört farklı çözüm kümesi elde ettik.

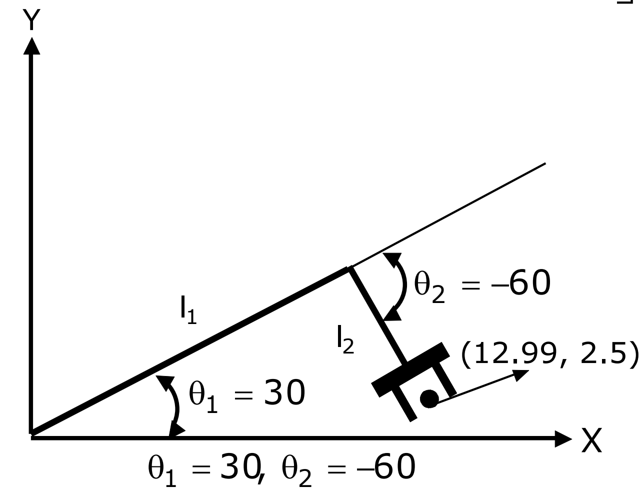
$$Ç_1 = \{\theta_1 = 10.9 + 19.1 = 30^\circ, \quad \theta_2 = +60^\circ\} \qquad Ç_2 = \{\theta_1 = 10.9 + 19.1 = 30^\circ, \quad \theta_2 = -60^\circ\}$$

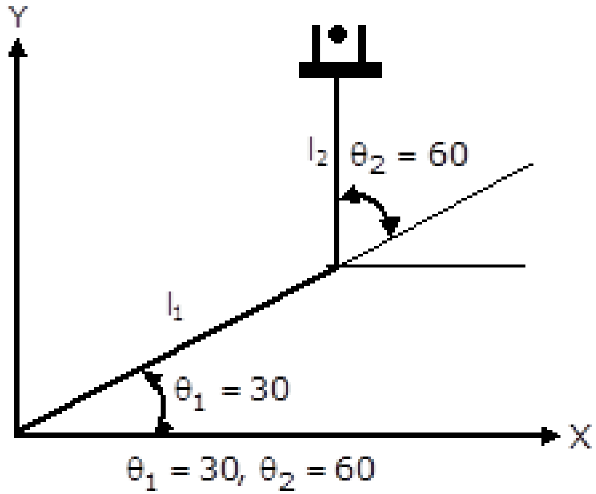
$$Ç_3 = \{\theta_1 = 10.9 - 19.1 = -8.20^\circ, \quad \theta_2 = +60^\circ\} \quad Ç_4 = \{\theta_1 = 10.9 - 19.1 = -8.20^\circ, \quad \theta_2 = -60^\circ\}$$

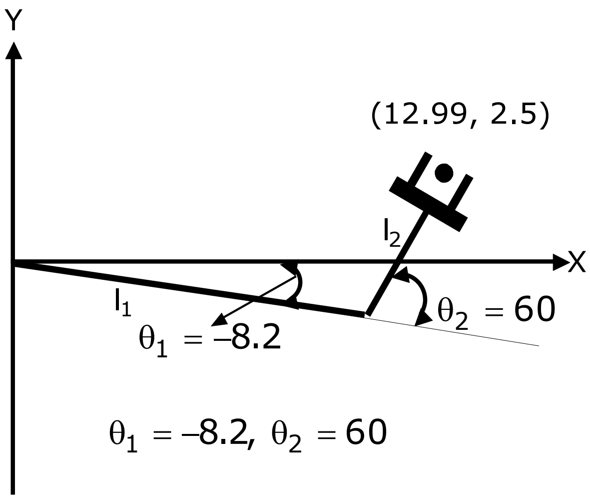
Bu çözüm kümelerinin doğruluğunu araştırmak için bulduğumuz açıları ileri kinematikteki konum vektöründe yerlerine yazılır. İkinci çözüm kümesinde bulunan açıları konum vektöründe yerine yazalım. Aşağıda görüldüğü gibi robot doğru noktaya gitmiştir.

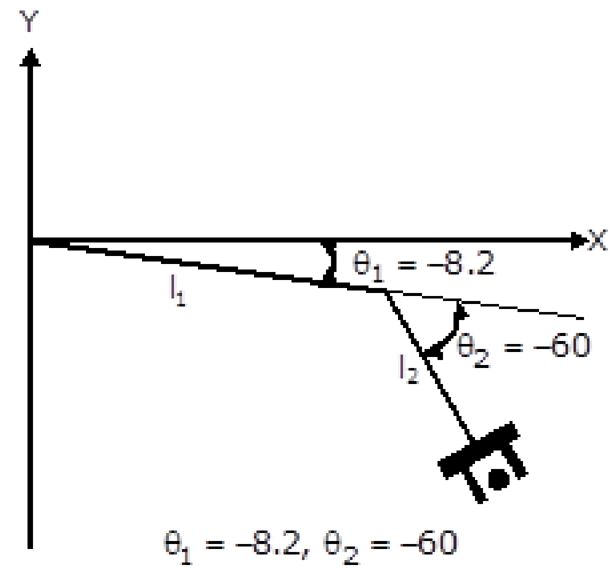
$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2(c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2) + l_1 c\theta_1 \\ l_2(c\theta_1 s\theta_2 + s\theta_1 c\theta_2) + l_1 s\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5[c(30)c(-60) - s(30)s(-60)] + 10c(30) \\ 5[c(30)s(-60) + s(30)c(-60)] + 10s(30) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.99 \\ 2.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diğer çözüm kümeleri
de bu şekilde test edilebilir.





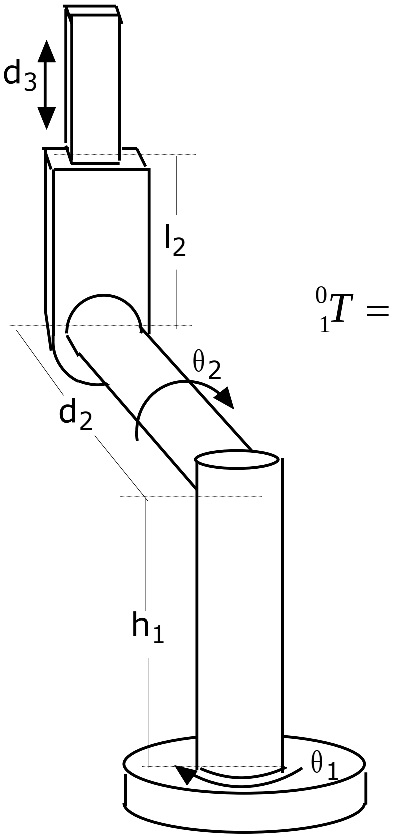




Dikkat edileceği gibi, çözüm kümelerinden sadece $Ç_2$ ve $Ç_3$ robotun doğru konuma ulaşmasına yardımcı olurken $Ç_1$ ve $Ç_4$ ise robotu doğru konuma ulaştırmaz.

ÖRNEK 4.3

Şekildeki RRP eklem yapısına sahip robotun ters kinematiğini çözünüz.



ÇÖZÜM 4.3

İleri kinematik dönüşüm matrislerini hatırlayalım.

$$
{}_1^0T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
{}_2^1T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
{}_3^2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2+d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Eklem değişkenlerini bulmak için aşağıdaki denklemde kullanalım.

$$
\left[{}_1^0T \; {}_2^1T\right]^{-1} {}_3^0T = {}_3^2T
$$

$$
\begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 & s\theta_2 & -s\theta_2 h_1 \\ -c\theta_1 s\theta_2 & -s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_2 & -c\theta_2 h_1 \\ s\theta_1 & -c\theta_1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (l_2+d_3) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Bu robotun ters kinematiği sadece konum vektöründen elde edilebileceğinden sadece konumları yazalım.

$$\begin{bmatrix} . & . & . & c\theta_2(c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y) + s\theta_2(p_z - h_1) \\ . & . & . & -s\theta_2(c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y) + c\theta_2(p_z - h_1) \\ . & . & . & s\theta_1 p_x - c\theta_1 p_y - d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & . & 0 \\ . & . & . & l_2 + d_3 \\ . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denklemde $s\theta_1 p_x - c\theta_1 p_y - d_2 = 0$ ise $s\theta_1 p_x - c\theta_1 p_y = d_2$ olur. Bu durumda θ_1

$$a\sin\theta + b\cos\theta = c$$

$$\theta_1 = A\tan 2(p_x, -p_y) \pm A\tan 2(\sqrt{p_x{}^2 + p_y{}^2 - d_2{}^2}, d_2)$$

θ_2,(1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$c\theta_2(c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y) + s\theta_2(p_z - h_1) = 0 \quad \text{ise} \quad a\sin\theta + b\cos\theta = 0$$

$$\theta_2 = A\tan 2(-c\theta_1 p_x - s\theta_1 p_y,\ p_z - h_1) \quad \text{ve} \quad \theta_2 = A\tan 2(c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y, -p_z + h_1)$$

d_3, (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_3 = -s\theta_2(c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y) + c\theta_2(p_z - h_1) - l_2$$

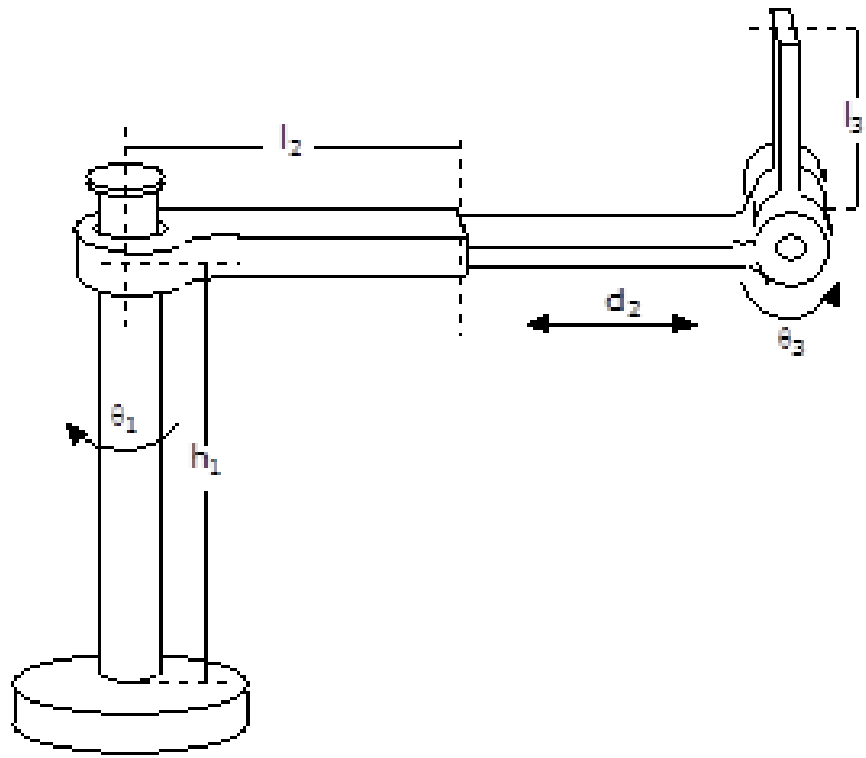
Bu robotunda iki dönel ekleminden kaynaklanan dört farklı çözüm kümesi vardır. 3. eklem prizmatik olduğundan bu eklem sisteme ek bir çözüm kümesi katmaz.

$$Ç_1 = \{\theta_1 = + \text{ } için \quad \theta_2 = + \quad ve \ d_3\} \qquad Ç_2 = \{\theta_1 = + \text{ } için \quad \theta_2 = - \quad ve \ d_3\}$$

$$Ç_3 = \{\theta_1 = - \text{ } için \quad \theta_2 = + \quad ve \ d_3\} \qquad Ç_4 = \{\theta_1 = - \text{ } için \quad \theta_2 = - \quad ve \ d_3\}$$

ÖRNEK 4.4

Şekildeki üç eklemli RPR robotunun ters kinematiğini çözünüz ve çözüm kümelerini bulunuz.



ÇÖZÜM 4.4

Şekildeki robotun ileri kinematik dönüşüm matrislerini hatırlayalım.

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_2-d_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_3 & -\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3_4T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$[{}^0_1\mathrm{T}]^{-1}\,{}^0_4\mathrm{T} = {}^1_2\mathrm{T}\,{}^2_3\mathrm{T}\,{}^3_4\mathrm{T}$ ifadesinde sol ve sağ taraftaki ifadeleri bir birine eşitleyelim.

$$ \begin{bmatrix} . & . & . & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ . & . & . & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ . & . & . & p_z - h_1 \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & . & 0 \\ . & . & . & l_3 s\theta_3 - (l_2 + d_2) \\ . & . & . & l_3 c\theta_3 \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix} $$

θ_3, (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$p_z - h_1 = l_3 c\theta_3$ ise $c\theta_3 = \dfrac{p_z - h_1}{l_3}$ ve $\theta_3 = A\tan 2\left(\dfrac{p_z - h_1}{l_3},\ \pm\sqrt{1 - \left(\dfrac{p_z - h_1}{l_3}\right)^2}\ \right)$

θ_1, (1,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur: $c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y = 0$
Bulunan ifade $\mathrm{asin}\theta + \mathrm{bcos}\theta = 0'$ a benzemektedir ve çözüm aşağıdaki gibidir.

$$\theta_1 = A\tan 2(-p_x\,,\ p_y) \quad \text{veya} \quad \theta_1 = A\tan 2(p_x\,, -p_y)$$

d_2, (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$d_2 = s\theta_1 p_x - c\theta_1 p_y + l_3 s\theta_3 - l_2$$

Bu robotunda bir önceki örnekte olduğu gibi d_2 prizmatik eklem değişkeninin çözüm kümesine etkisi olmadığından iki dönel ekleminden kaynaklanan dört farklı çözüm kümesi bulunmaktadır.

$$Ç_1 = \{\theta_3 = + \ için \quad \theta_1 = +\}$$

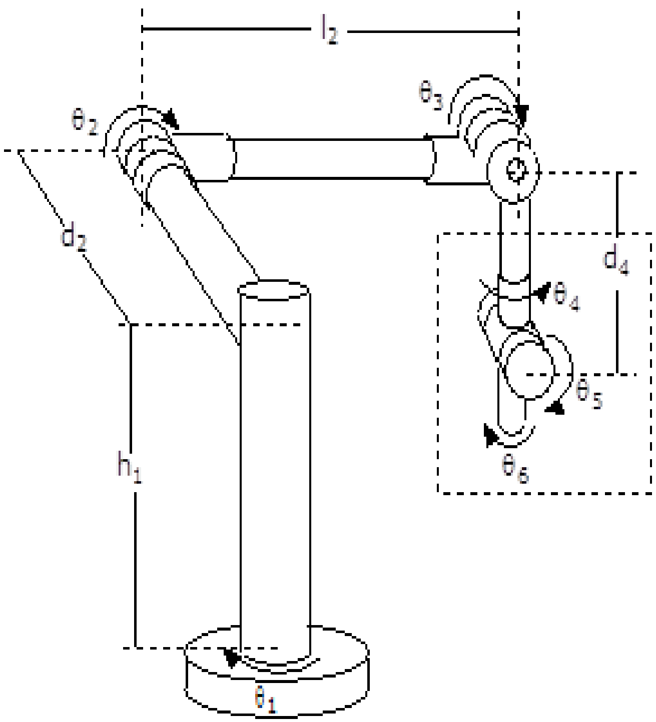
$$Ç_2 = \{\theta_3 = + \ için \quad \theta_1 = -\}$$

$$Ç_2 = \{\theta_3 = - \ için \quad \theta_1 = +\}$$

$$Ç_2 = \{\theta_3 = - \ için \quad \theta_1 = -\}$$

ÖRNEK 4.5

Şekildeki RRRRRR eklem yapısına sahip robotun ters kinematiğini çözünüz ve çözüm kümelerini bulunuz.



ÇÖZÜM 4.5

Robotun ileri kinematik dönüşüm matrisleri:

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -\sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -\sin\theta_4 & -\cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^4_5T = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_6 & -\cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Uç işlevcisinin kartezyen uzayda konumunu belirleyen ilk üç eklem değişkeni θ_1, θ_2 ve θ_3'ü bulalım. Bunun için aşağıdaki denklemden faydalanılabilir.

$$\left[{}^0_1T\right]^{-1}\,{}^0_6T = {}^1_2T\;{}^2_3T\,{}^3_4T\,{}^4_5T\,{}^5_6T$$

$$\begin{bmatrix} . & . & . & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ . & . & . & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ . & . & . & p_z - h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & . & -d_4 s\theta_{23} + l_2 c\theta_2 \\ . & . & . & d_2 \\ . & . & . & -d_4 c\theta_{23} - l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

θ_1, (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_1 = A\tan 2(-p_x\ ,\ p_y) \pm A\tan 2(\sqrt{p_x{}^2 + p_y{}^2 - d_2{}^2}\ ,\ d_2)$$

θ_3 , (1,4), (2,4) ve (3,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerinin alt alta toplanmasıyla bulunur. Bu işlem gerçekleştirildiğinde $\mathbf{\sin\theta_3 = a}$ bulunur. Bu ifadenin çözümü:

$$\theta_3 = A\tan 2\left(a, \pm\sqrt{1-a^2}\right)$$

Denklemde a ifadesi: $a = -\dfrac{p_x{}^2 + p_y{}^2 + (p_z - h_1)^2 - d_4{}^2 - l_2{}^2 - d_2{}^2}{2 d_4 l_2}$

Uç işlevcisinin kartezyen uzayda yönelimini belirleyen son üç eklem değişkeni θ_4, θ_5 ve θ_6'yı bulalım. Bunun için aşağıdaki denklemden faydalanılabilir.

$$\left[{}^0_1T\ {}^1_2T\ {}^2_3T\right]^{-1}\ {}^0_6T = {}^3_4T\ {}^4_5T\ {}^5_6T$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_{23} r_{11} + s\theta_1 c\theta_{23} r_{21} - s\theta_{23} r_{31} & c\theta_1 c\theta_{23} r_{12} + s\theta_1 c\theta_{23} r_{22} - s\theta_{23} r_{32} & c\theta_1 c\theta_{23} r_{13} + s\theta_1 c\theta_{23} r_{23} - s\theta_{23} r_{33} & . \\ -c\theta_1 s\theta_{23} r_{11} - s\theta_1 s\theta_{23} r_{21} - c\theta_{23} r_{31} & -c\theta_1 s\theta_{23} r_{12} - s\theta_1 s\theta_{23} r_{22} - c\theta_{23} r_{32} & -c\theta_1 s\theta_{23} r_{13} - s\theta_1 s\theta_{23} r_{23} - c\theta_{23} r_{33} & . \\ s\theta_1 r_{11} + c\theta_1 r_{21} & -s\theta_1 r_{12} + c\theta_1 r_{22} & -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} & . \\ 0 & 0 & . & . \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} . & . & -c\theta_4 s\theta_5 & . \\ s\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & . \\ . & . & s\theta_4 s\theta_5 & . \\ . & . & 0 & . \end{bmatrix}$$

θ_5, (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_5 = \pm A\tan 2\left(\sqrt{1-(-c\theta_1 s\theta_{23} r_{13} - s\theta_1 s\theta_{23} r_{23} - c\theta_{23} r_{33})^2},\ -c\theta_1 s\theta_{23} r_{13} - s\theta_1 s\theta_{23} r_{23} - c\theta_{23} r_{33}\right)$$

θ_4, (1,3) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

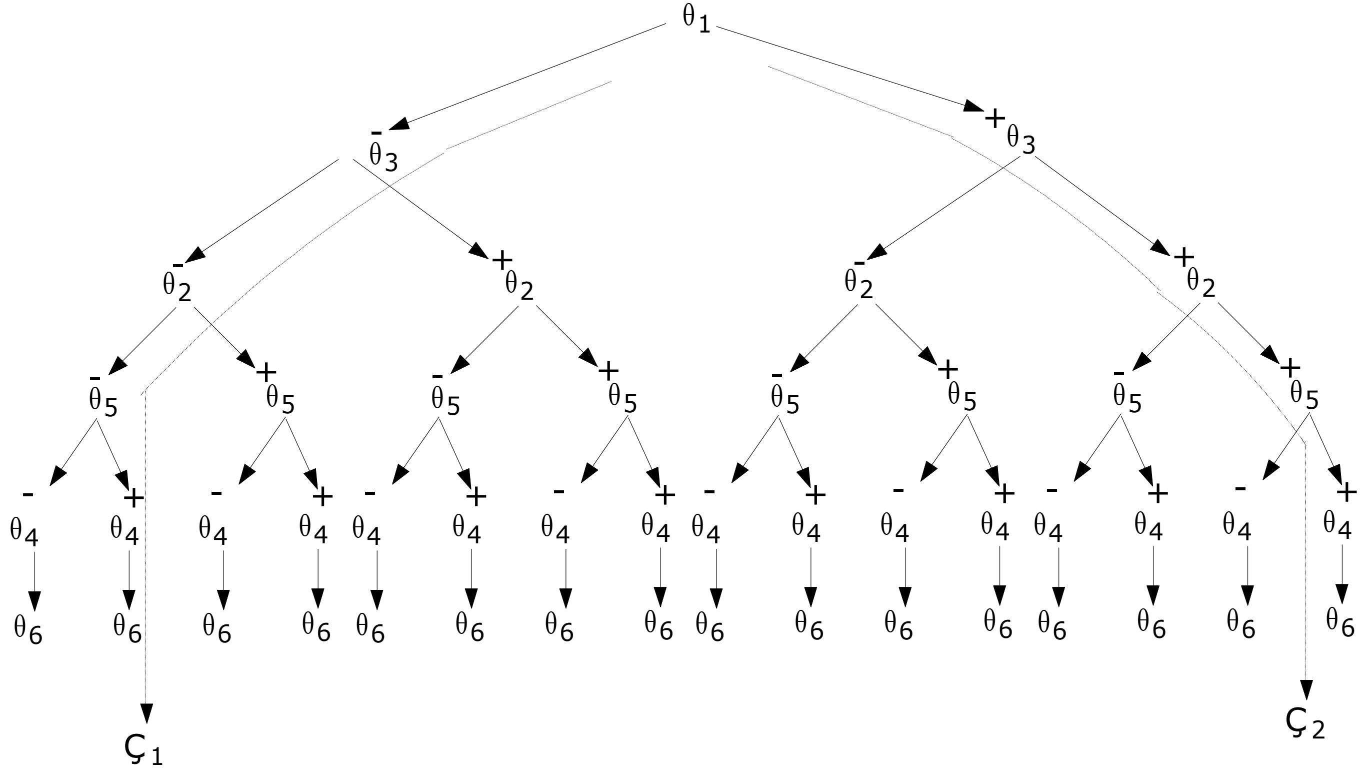
$$\theta_4 = A\tan 2\left(\frac{-s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23}}{s\theta_5}, \frac{-c\theta_1 c\theta_{23} r_{13} - s\theta_1 c\theta_{23} r_{23} + s\theta_{23} r_{33}}{s\theta_5}\right)$$

θ_6,(2,1) ve (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A\tan 2\left(\frac{c\theta_1 s\theta_{23} r_{12} + s\theta_1 s\theta_{23} r_{22} + c\theta_{23} r_{32}}{\sin\theta_5}, \frac{-c\theta_1 s\theta_{23} r_{11} - s\theta_1 s\theta_{23} r_{21} - c\theta_{23} r_{31}}{\sin\theta_5} \right)$$

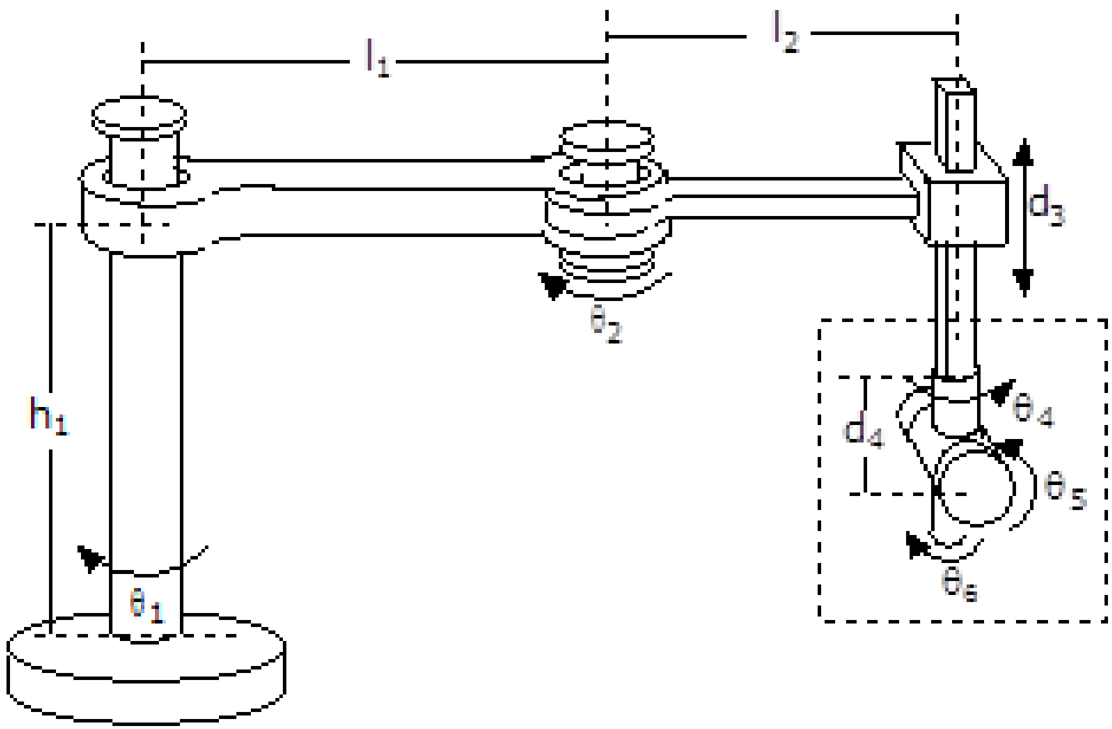
Bu robotta 6 tane dönel eklem olmasına rağmen son üç eklem bir noktada kesiştiğinden çözüm kümesi sayısı 64 yerine 16'dır. Şekilde verilen her çözüm kümesinde θ_1'den başlayıp θ_6'ya kadar takip edilebilecek her bir yol bir çözüm kümesini temsil etmektedir. 16 çözüm kümesinden ikisi aşağıda verilmiştir.

$Ç_1 = \{-\theta_1,\ -\theta_3,\ -\theta_2\ +\theta_5,\ \theta_4\ \ ve\ \ \theta_6\}$ $\qquad$ $Ç_2 = \{+\theta_1,\ +\theta_3,\ +\theta_2\ +\theta_5,\ \theta_4\ \ ve\ \ \theta_6\}$



ÖRNEK 4.6

Şekilde Euler bilekli SCARA robotu veriliyor. Bu robotun uç işlevcisinin konumunun $p_x = 28, p_y = 31$, $p_z = 6$ ve yöneliminin X-Y-Z sabit açı sistemine göre $\gamma = 42°$, $\beta = -17°$ ve $\alpha = 25°$ olması için dönel eklem değişkenlerinin ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ ve θ_6) açıları ve prizmatik eklem değişkeni d_3'ün uzunluğu ne olmalıdır ($l_1 = 26$, $l_2 = 18$, $h_1 = 22$ ve $d_4 = 4$).



ÇÖZÜM 4.6

Öncelikle şekildeki robotun ters kinematiğini teorik olarak çözmek için ileri kinematik dönüşüm matrislerini hatırlayalım.

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & l_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^4_5T = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^5_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Aşağıdaki denklemden faydalanarak uç işlevcisinin kartezyen uzayda konumunu belirleyen ilk üç eklem değişkeni θ_1, θ_2 ve d_3'ü bulalım.

$$\left[{}^0_1T\right]^{-1}\ {}^0_6T = {}^1_2T\ {}^2_3T\,{}^3_4T\,{}^4_5T\,{}^5_6T \qquad \begin{bmatrix} . & . & . & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ . & . & . & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ . & . & . & p_z - h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & . & l_2 c\theta_2 + l_1 \\ . & . & . & l_2 s\theta_2 \\ . & . & . & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

θ_1, (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karesini alıp alt alta toplayalıp sadeleştirme işlemi yapıldıktan sonra aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_1 = A\tan 2(p_y, p_x) \pm A\tan 2\left(\sqrt{4l_1^{\,2}(p_x^2 + p_y^2) - k^2}, k\right) \qquad k = p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - l_2^2$$

θ_2(1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_2 = A\tan 2\left(\frac{-s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y}{l_2}, \frac{c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - l_1}{l_2} \right)$$

d_3 (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$d_3 = h_1 - p_z - d_4$$

Aşağıdaki denklemden faydalanarak uç işlevcisinin kartezyen uzayda yönelimini belirleyen son üç eklem değişkeni θ_4, θ_5 ve θ_6 bulalım.

$$\left[{}^0_1T \;\; {}^1_2T\right]^{-1} \; {}^0_6T = {}^2_3T \;\; {}^3_4T \;\; {}^4_5T \;\; {}^5_6T$$

$$\begin{bmatrix} c\theta_{12}r_{11} + s\theta_{12}r_{21} & c\theta_{12}r_{12} + s\theta_{12}r_{22} & c\theta_{12}r_{13} + s\theta_{12}r_{23} & . \\ -s\theta_{12}r_{11} + c\theta_{12}r_{21} & -s\theta_{12}r_{12} + c\theta_{12}r_{22} & -s\theta_{12}r_{13} + c\theta_{12}r_{23} & . \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & -c\theta_4 s\theta_5 & . \\ -s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - c\theta_4 c\theta_6 & s\theta_4 s\theta_5 & . \\ s\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 s\theta_6 & -c\theta_5 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{bmatrix}$$

θ_5 (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = A\tan 2(\pm\sqrt{1 - {r_{33}}^2} \;, \; -r_{33})$$

θ_4 (1,3) ve (2,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_4 = A\tan 2\left(\frac{-s\theta_{12}r_{13} + c\theta_{12}r_{23}}{\sin\theta_5} \;, \; \frac{-c\theta_{12}r_{13} - s\theta_{12}r_{23}}{\sin\theta_5} \right)$$

θ_6 (3,1) ve (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur.

$$\theta_6 = A\tan 2\left(\frac{-r_{32}}{\sin\theta_5}, \frac{r_{31}}{\sin\theta_5} \right)$$

Robotun uç işlevcisinin Kartezyen uzaydaki konumunun $\mathrm{p_x} = 28$, $\mathrm{p_y} = 31$, $\mathrm{p_z} = 6$ olması için gerekli olan ilk üç eklem değişkenini (θ_1, θ_2, θ_3) daha önce elde ettiğimiz teorik denklemlerden faydalanarak bulalım.

$$\theta_1 = A\tan 2(p_y, p_x) \pm A\tan 2(\sqrt{4l_1^2(p_x^2 + p_y^2) - k^2}, k)$$

$$k = p_x^2 + p_y^2 + l_1^2 - l_2^2 = 28^2 + 31^2 + 26^2 - 18^2 = 2097$$

$$\theta_1 = A\tan 2(31,\ 28) \pm A\tan 2(\sqrt{4 \cdot 26^2(28^2 + 31^2) - 2097^2}, 2097) = 47.91 \pm 15.12$$

Görüldüğü gibi $\theta_1 = 63.03°$ ve $\theta_1 = 32.79°$ olmak üzere iki farklı açı elde ettik. İkinci eklem değişkenini bulmak için birinci eklem değişkenini $\theta_1 = 63.03°$ alalım.

$$\theta_2 = A\tan 2(\frac{-s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y}{l_2}\ ,\ \frac{c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y - l_1}{l_2})$$

$$\theta_2 = A\tan 2\left(\frac{-\mathrm{s}(63.03) \cdot 28 + \mathrm{c}(63.03) \cdot 31}{18}, \frac{\mathrm{c}(63.03) \cdot 28 + \mathrm{s}(63.03) \cdot 31 - 26}{18}\right) = A\tan 2(-0.6,\ 0.79) = -37.25$$

Prizmatik eklem değişkeni $\mathrm{d_3}$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$d_3 = h_1 - p_z - d_4 \qquad d_3 = 22 - 6 - 4 = 12$$

Uç işlevcinin sabit koordinat sisteminin X ekseninde $\gamma = 42°$, Y ekseninde $\beta = -17°$ ve Z ekseninde $\alpha = 25°$ döndürülmesiyle aşağıdaki matris elde edilir.

$$R_{XYZ}(42,-17,25)=\begin{bmatrix} 0.8667 & -0.4914 & 0.0858 \\ 0.4041 & 0.5909 & -0.6982 \\ 0.29237 & 0.6399 & 0.7107 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin elemanlarından faydalanarak uç işlevcisinin yönelimini sağlayan açı kümesi θ_4, θ_5 ve θ_6 aşağıdaki gibi bulunur. Önce θ_5 açısını bulalım.

$$\theta_5 = A\tan 2(\pm\sqrt{1-r_{33}{}^2}\,,\,-r_{33}) = A\tan 2(\pm\sqrt{1-0.7107^2}\,,\,-0.7107) = \pm 135.29^\circ$$

θ_4 açısını bulmak için beşinci eklem değişkenini $\theta_5 = +135.29°$ alalım.

$$\theta_4 = A\tan 2\left(\frac{-s\theta_{12}r_{13} + c\theta_{12}r_{23}}{\sin\theta_5}\,,\,\frac{-c\theta_{12}r_{13} - s\theta_{12}r_{23}}{\sin\theta_5}\right)$$

$$s\theta_{12} = s\theta_1 c\theta_2 + c\theta_1 s\theta_2 = s(25.77)$$

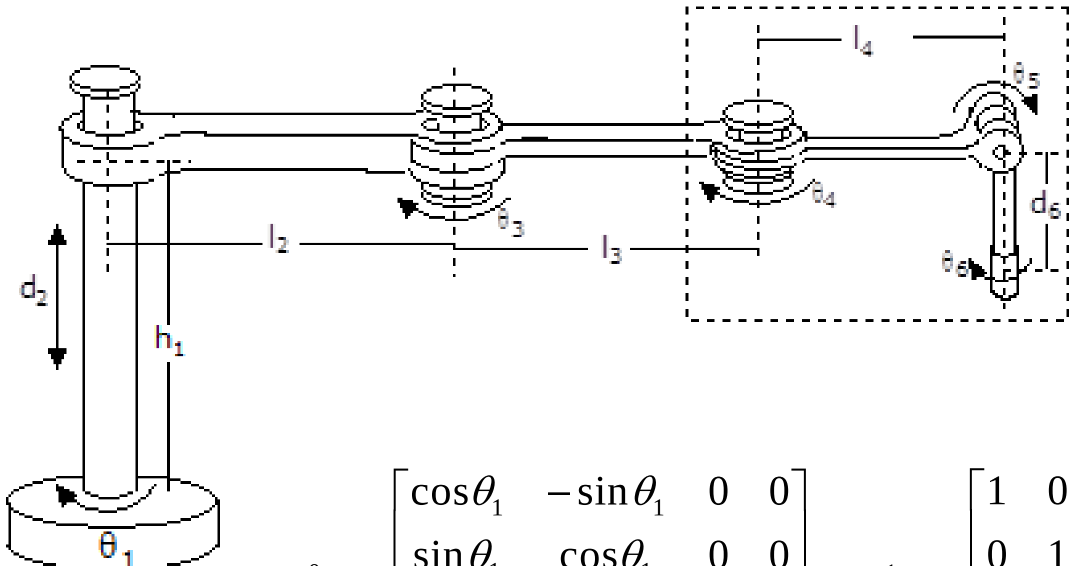
$$c\theta_{12} = c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2 = c(25.77)$$

$$\theta_4 = A\tan 2\left(\frac{-s(25.77)\cdot 0.0859 + c(25.77)\cdot(-0.6983)}{\sin(135.29)}, \frac{-c(25.77)\cdot 0.0859 - s(25.77)\cdot(-0.6983)}{\sin(135.29)}\right) = \text{-}72.2^\circ$$

θ_6 ise $\theta_6 = A\tan 2\left(\frac{-r_{32}}{\sin\theta_5}, \frac{r_{31}}{\sin\theta_5}\right) = A\tan 2\left(-\frac{0.6399}{\sin(135.29)}, \frac{0.29237}{\sin(135.29)}\right) = -65.44^\circ$

ÖRNEK 4.6

Son olarak eklem kaçıklılıklı bilekli bir robotun ters kinematiğini bulalım. Bu bilekte hem *d* hem de *a* parametresi olduğu için ters kinematiği Euler bilekli robotlara göre daha karmaşık işlemler içerir. Aşağıdaki eklem kaçıklılıklı bilekli 6 serbestlik dereceli robotun ters kinematiğini çözünüz.



ÇÖZÜM 4.6

Öncelikle şekildeki robotun ileri kinematik dönüşüm matrislerini hatırlayalım

$$
{}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
{}^1_2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
{}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & l_2 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & l_3 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
{}^4_5T = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
{}^5_6T = \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_6 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

İki, beş ve altıncı eklem değişkenlerini (θ_6, θ_5 ve d_2) bulalım.

$$ {}^{2}_{3}T \; {}^{3}_{4}T \; {}^{4}_{5}T = {}^{1}_{2}T^{-1} \; {}^{0}_{1}T^{-1} \, {}^{0}_{6}T \; {}^{5}_{6}T^{-1} $$

$$\begin{bmatrix} . & -c\theta_{34}s\theta_5 & . & l_4c\theta_{34}+l_3c\theta_3+l_2 \\ . & -s\theta_{34}s\theta_5 & . & l_4s\theta_{34}+l_3s\theta_3 \\ . & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & -c\theta_1 r_{13}-s\theta_1 r_{23} & . & c\theta_1(p_x-r_{13}d_6)+s\theta_1(p_y-r_{23}d_6) \\ . & s\theta_1 r_{13}-c\theta_1 r_{23} & . & -s\theta_1(p_x-r_{13}d_6)+c\theta_1(p_y-r_{23}d_6) \\ . & -r_{33} & s\theta_6 r_{31}+c\theta_6 r_{32} & -r_{33}d_6+p_z-d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

θ_6 (3,3) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_6 = A\tan 2(-r_{32}, r_{31}) \quad \text{veya} \quad \theta_6 = A\tan 2(r_{32}, -r_{31})$$

θ_5 , (3,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_5 = \mathrm{Atan2}(\pm\sqrt{1-r_{33}{}^2}, -r_{33})$$

d_2 (3,4) karşılıklı matris elemanlarının eşitlenmesiyle bulunur: $d_2 = p_z - r_{33}d_6$

Bir, üç ve dördüncü eklem değişkenlerini (θ_1 , θ_3 ve θ_4) bulalım.

$$\left[{}^{0}_{1}T\right]^{-1} \, {}^{0}_{6}T = {}^{1}_{2}T \; {}^{2}_{3}T \, {}^{3}_{4}T \, {}^{4}_{5}T \, {}^{5}_{6}T \qquad \begin{bmatrix} . & . & . & c\theta_1 p_x + s\theta_1 p_y \\ . & . & . & -s\theta_1 p_x + c\theta_1 p_y \\ . & . & . & p_z \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & . & d_6c\theta_{34}s\theta_5 + l_4c\theta_{34} + l_3c\theta_3 + l_2 \\ . & . & . & d_6s\theta_{34}s\theta_5 + l_4s\theta_{34} + l_3s\theta_3 \\ . & . & . & -d_6c\theta_5 + d_2 \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

Dönel eklem değişkeni θ_1, (1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanlarının karelerini alıp alt alta toplayalım (denklemde $\mathrm{k} = \mathrm{d}_6 \mathrm{s}\theta_5 + \mathrm{I}_4$)

$$p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - 2l_2 p_x c\theta_1 - 2l_2 p_y s\theta_1 = k^2 + l_3^2 + 2l_3 k(c\theta_3 c\theta_{34} + s\theta_3 s\theta_{34})$$

Yukarıdaki ifadede $(\mathrm{c}\theta_3\mathrm{c}\theta_{34} + \mathrm{s}\theta_3\mathrm{s}\theta_{34}) = \mathrm{c}\theta_4$ eşittir. Bu ifadeyi yukarıdaki denklemde yerine yazıp $\mathrm{c}\theta_4$ ifadesini çekelim.

$$c\theta_4 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - 2l_2 p_x c\theta_1 - 2l_2 p_y s\theta_1 - k^2 - l_3^2}{2l_3 k}$$

(1,4) ve (2,4) karşılıklı matris elemanların karelerini alıp alt alta toplayalım. Denklemde $(\mathrm{p_x} - \mathrm{r}_{13}\mathrm{d}_6) = \mathrm{m}$ ve $(\mathrm{p_y} - \mathrm{r}_{23}\mathrm{d}_6) = \mathrm{n}$ kullanılmıştır.

$$m^2 + n^2 + l_2^2 - 2l_2 m c\theta_1 - 2l_2 n s\theta_1 = l_4^2 + l_3^2 + 2l_3 l_4(c\theta_3 c\theta_{34} + s\theta_3 s\theta_{34})$$

Yukarıdaki ifadede $(\mathrm{c}\theta_3\mathrm{c}\theta_{34} + \mathrm{s}\theta_3\mathrm{s}\theta_{34}) = \mathrm{c}\theta_4$ eşittir. Bu ifadeyi yukarıdaki denklemde yerine yazıp $\mathrm{c}\theta_4$ ifadesini çekelim.

$$c\theta_4 = \frac{m^2 + n^2 + l_2^2 - 2l_2 m c\theta_1 - 2l_2 n s\theta_1 - l_4^2 - l_3^2}{2l_3 l_4}$$

İki $c\theta_4$ ifadesini bir birine eşitlenip sadeleştirme yapalım.

$$\frac{p_x^2+p_y^2+l_2^2-2l_2p_xc\theta_1-2l_2p_ys\theta_1-k^2-l_3^2}{\cancel{2l_3}k}=\frac{m^2+n^2+l_2^2-2l_2mc\theta_1-2l_2ns\theta_1-l_4^2-l_3^2}{\cancel{2l_3}l_4}$$

$$c\theta_1(2l_2km-2l_2l_4p_x)+s\theta_1(2l_2kn-2l_2l_4p_y)+l_4(p_x^2+p_y^2+l_2^2-k^2-l_3^2)-k(m^2+n^2+l_2^2-l_4^2-l_3^2)=0$$

Yukarıdaki denklemde bazı ifadelerin yerine p, q ve y yazalım.

$$(2l_2kn-2l_2l_4p_y)=p \qquad (2l_2km-2l_2l_4p_x)=q$$

$$l_4({p_x}^2+{p_y}^2+{l_2}^2-k^2-{l_3}^2)-k(m^2+n^2+{l_2}^2-{l_4}^2-{l_3}^2)=y$$

Gerekli düzenlemeleri yaparak birinci eklem değişkenini aşağıdaki gibi buluruz.

$$qc\theta_1+ps\theta_1=-y \qquad \theta_1=A\tan 2(p,q)\mp A\tan 2\sqrt{p^2+q^2-y^2},-y)$$

θ_4 daha önce bulduğumuz ifadelerden faydalanarak bulunabilir.

$$c\theta_4 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + l_2^2 - 2l_2 p_x c\theta_1 - 2l_2 p_y s\theta_1 - k^2 - l_3^2}{2l_3 k}$$

Denklemde $\frac{p_x{}^2 + p_y{}^2 + l_2{}^2 - 2l_2 p_x c\theta_1 - 2l_2 p_y s\theta_1 - k^2 - l_3{}^2}{2l_3 k} = s$ olsun.

$$\theta_4 = \mathrm{Atan2}(\pm\sqrt{1-s^2},\ s)$$

Dönel eklem değişkeni θ_3, (2,2) karşılıklı matris elemanlarının eşitleyip gerekli düzenleme yapılırsa aşağıdaki gibi bulunur.

$$s\theta_3(c\theta_4 s\theta_5) + c\theta_3(s\theta_4 s\theta_5) = -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23} \Longrightarrow a\sin\theta + b\cos\theta = c$$

$$\theta_3 = A\tan 2(c\theta_4 s\theta_5\ ,\ s\theta_4 s\theta_5) \mp A\tan 2\sqrt{s^2\theta_5 - (-s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23})^2},\ -s\theta_1 r_{13} + c\theta_1 r_{23})$$