T.C.

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

# MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
# MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ

Prof. Dr. Zafer BİNGÜL        Prof. Dr. Serdar KÜÇÜK

# ROBOT KİNEMATİĞİ

**PROF. DR. ZAFER BİNGÜL**
**PROF. DR. SERDAR KÜÇÜK**

# 2. GENEL TANIMLAMALAR VE DÖNÜŞÜMLER

## Giriş

Robotlar kendi çevrelerindeki nesnelerinde bulunduğu üç boyutlu uzayda hareket ederler. Bu durum robotun ve çevresindeki nesnelerin bir birlerine göre konum ve yönelim tanımlarının yapılmasını gerektirir. Konum ve yönelimlerin belirlenebilmesi için üç boyutlu uzayda robotun kendisi de dahil olmak üzere her nesneye bir koordinat sistemi yerleştirilir. Nesneler ve bu nesnelere yerleştirilen bütün koordinat sistemleri evrensel çerçeve içerisinde bulunur. Tanımlayacağımız bütün konum ve yönelimleri evrensel çerçeveye veya bu evrensel çerçeve içerisindeki diğer Kartezyen koordinat sistemlerine göre gerçekleştireceğiz.

# Konum, Yönelim ve Koordinat Sistemlerinin Tanımlanması

Konum, yönelim ve koordinat sistemlerinin tanımlanması nesnelerin evrensel çerçeve içerisindeki özelliğini açıklar.

## Konum tanımı

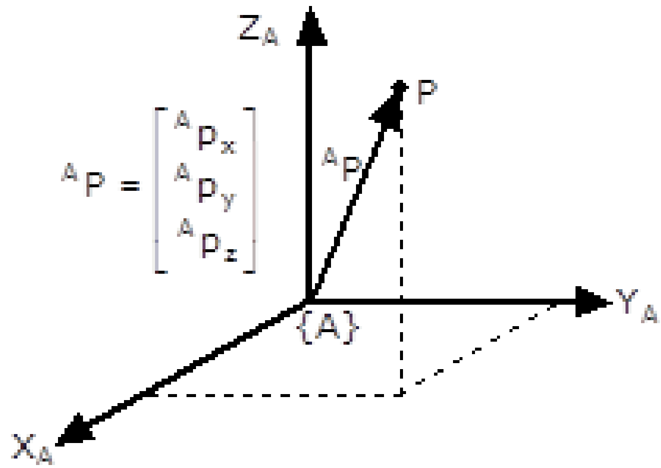
Üç boyutlu uzayda, bir nokta bu koordinat sistemlerinin merkezine göre tanımlanmış 3x1 boyutlu bir vektörle gösterilebilir. Bu vektörler hangi koordinat sistemine göre tanımlamışsa ona göre isimlendirilir.

Örneğin evrensel çerçeve içerisinde bulunan bir P noktasının {A} koordinat sistemine göre konumu $^{A}P$ şeklinde bir vektörle gösterilir.

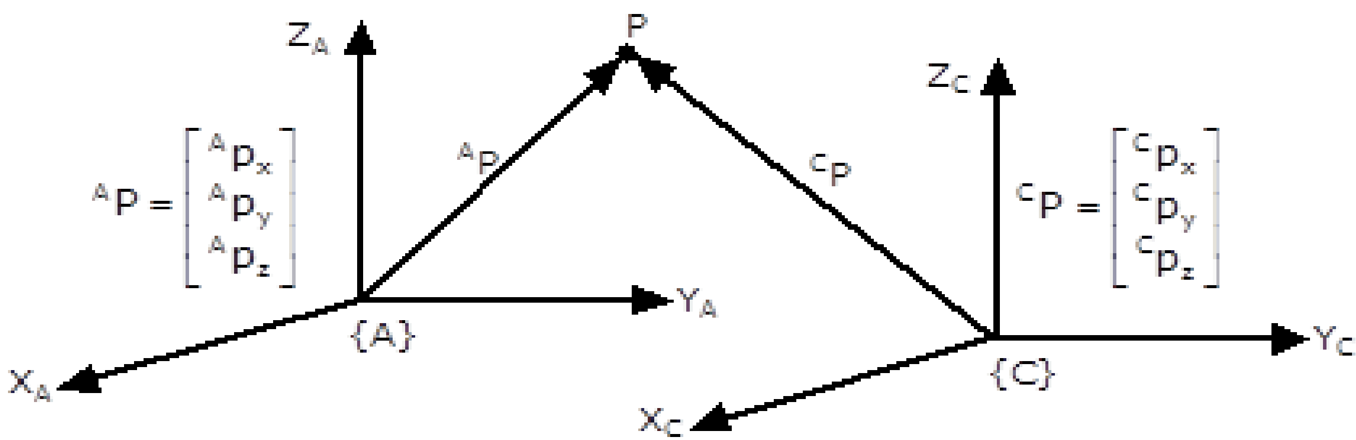
$^{A}P$, P noktasının {A} koordinat sisteminin merkezine uzaklığını, (x, y, z) eksenlerinde sayısal olarak tanımlar. $^{A}P$ vektörü matematiksel olarak aşağıdaki gibi gösterilir.

$$^{A}P = \begin{bmatrix} ^{A}P_x \\ ^{A}P_y \\ ^{A}P_z \end{bmatrix}$$

Şekilde bir birine dik üç birim vektöre sahip {A} koordinat sistemi ve P noktası

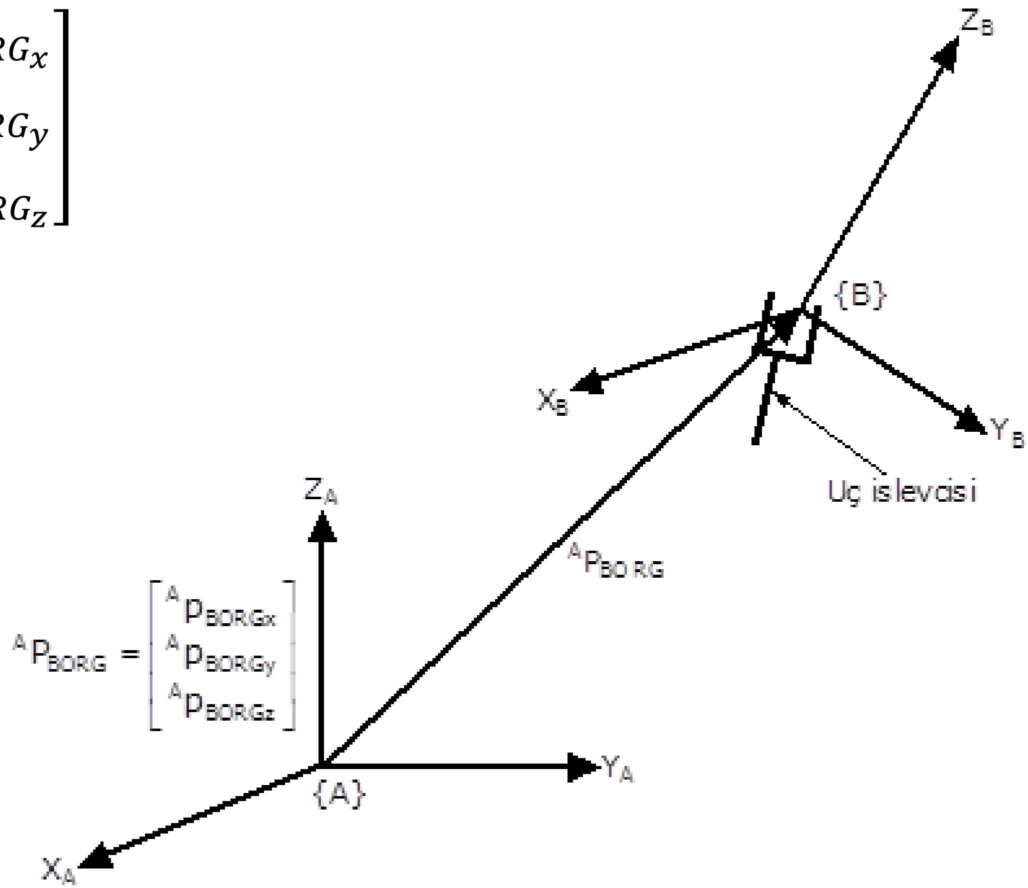



Aynı P noktası, şekilde görüldüğü gibi hem {A}, hem de {C} koordinat sistemine göre tanımlanabilir. Dikkat edileceği gibi, P noktasının {A} koordinat sisteminin merkezine olan uzaklığı ile {C} koordinat sisteminin merkezine olan uzaklığı eşit olmak zorunda değildir ($^AP \neq {}^CP$).



{A} ve {B} koordinat sistemlerinin merkezleri arasındaki uzaklık A noktasıyla uç işlevci arasındaki uzaklıktır ve ${}^{A}P_{BORG}$ şeklinde gösterilir. ${}^{A}P_{BORG}$ ; ${}^{A}P_{BORG_x}$ , ${}^{A}P_{BORG_y}$ ve ${}^{A}P_{BORG_z}$ bileşenlerinden oluşur ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$${}^{A}P_{BORG} = \begin{bmatrix} {}^{A}P_{BORG_x} \\ {}^{A}P_{BORG_y} \\ {}^{A}P_{BORG_z} \end{bmatrix}$$

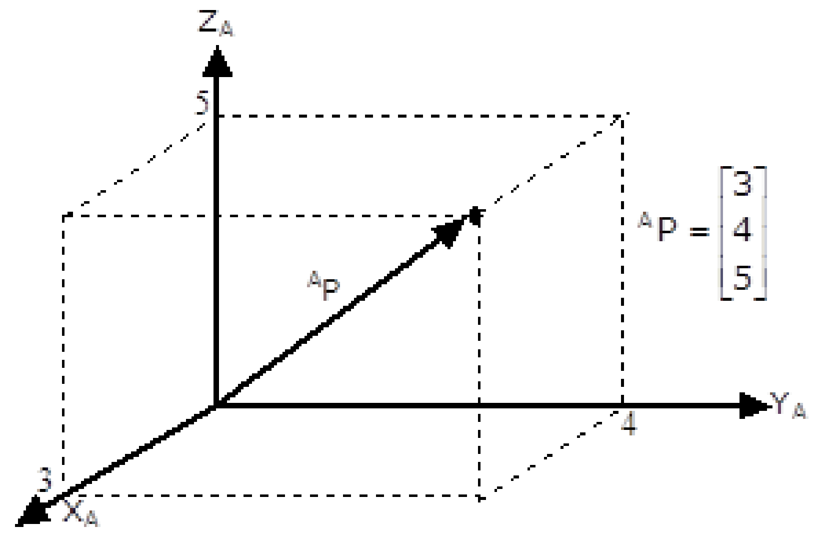


# ÖRNEK 2.1

Üç boyutlu uzayda {A} koordinat sistemine göre P=(3, 4, 5) noktası veriliyor. Bu P noktasının {A} koordinat sistemine göre konumunu şekil üzerinde gösteriniz.

# ÇÖZÜM 2.1

Üç boyutlu uzayda, P=(3, 4, 5) noktasının {A} koordinat sistemine göre konumu Şekildeki gibi gösterilir.

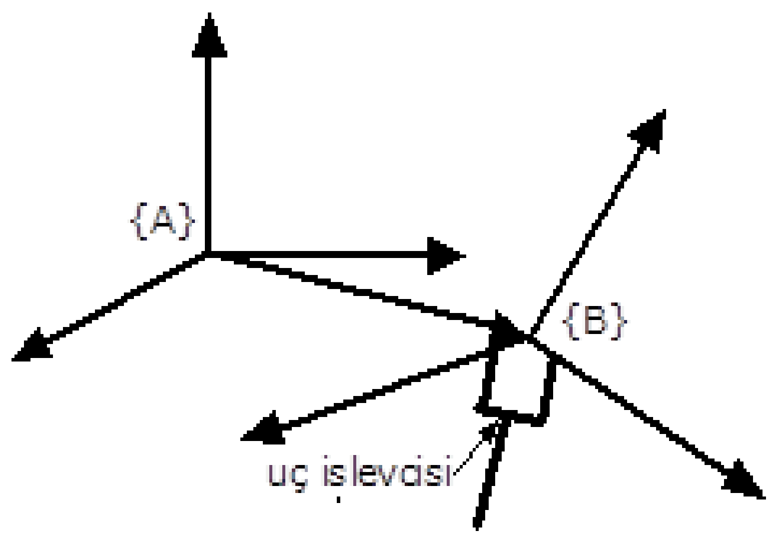


# Yönelim Tanımı

Yönelim, bir koordinat sisteminin başka bir koordinat sistemine göre dönme miktarıdır ve 3x3 boyutlu bir matrisle ifade edilir.

Bir katı cismin yönelimini başka bir referans koordinat sistemine göre tanımlamak için katı cisme bir koordinat sistemi yerleştirilir.

Şekilde görüldüğü gibi uç işlevcisine {B} koordinat sistemi yerleştirilerek {A} referans koordinat sistemine göre yönelimi tanımlanır.



Uç işlevcisine yerleştirilen {B} koordinat sistemini, {A} referans koordinat sistemi cinsinden ifade etmek için birim vektörler kullanılır. {B} Koordinat sisteminin birim vektörlerini aşağıdaki gibi gösterelim.

$$\{\mathrm{B}\} = \hat{X}_B\ ,\ \hat{Y}_B\ ,\ \hat{Z}_B$$

{B} koordinat sisteminin birim vektörlerini {A} koordinat sistemi cinsinden ise aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$\{\mathrm{A}\} = {}^{A}\hat{X}_B\ ,\ {}^{A}\hat{Y}_B\ ,\ {}^{A}\hat{Z}_B$$

Yukarıdaki ifadeyi 3x3 boyutlu bir dönme matrisiyle (rotation matrix) gösterebiliriz. Bu matris {B} koordinat sisteminin yönelimini {A} koordinat sistemine göre açıklar. {B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre X, Y ve Z eksenlerindeki dönme miktarını gösterir.

$${}^{A}_{B}R = [{}^{A}\hat{X}_B \quad {}^{A}\hat{Y}_B \quad {}^{A}\hat{Z}_B] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Denklemdeki matrisin her bir kolonu birer birim vektördür. Bu birim vektörler {B} koordinat sisteminin eksenlerinin doğrultusunu {A} koordinat sistemine göre tanımlar.

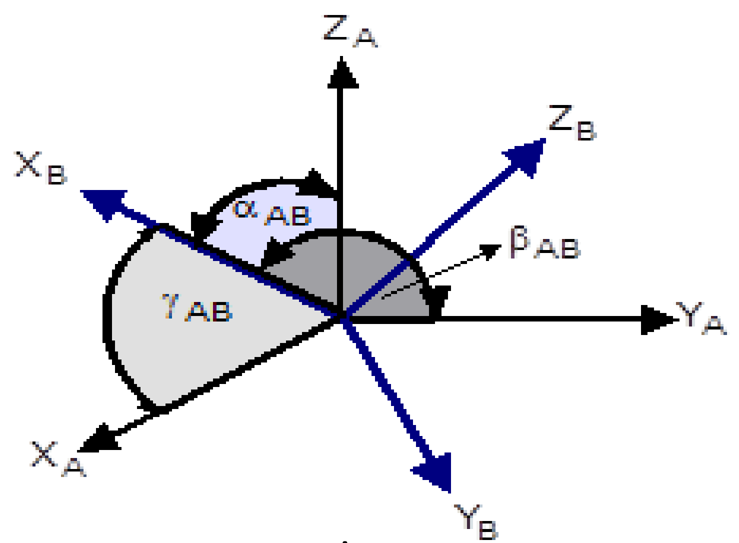
{B} koordinat sistemi ile {A} koordinat sisteminin merkezleri çakışık olsun. Bu durumda {B} koordinat sisteminde yer alan  birim vektörünün yönelimi {A} koordinat sistemine göre aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$^{A}\hat{X}_B = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |X_B||X_A| \cos \gamma_{AB} \\ |X_B||Y_A| \cos \beta_{AB} \\ |X_B||Z_A| \cos \alpha_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \,.\, \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \,.\, \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \,.\, \hat{Z}_A \end{bmatrix}$$

{B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre yönelimi matrisi:

$$^{A}_{B}R = [\,^{A}\hat{X}_B \quad ^{A}\hat{Y}_B \quad ^{A}\hat{Z}_B\,]$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{X}_B \,.\, \hat{X}_A & \hat{Y}_B \,.\, \hat{X}_A & \hat{Z}_B \,.\, \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \,.\, \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \,.\, \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \,.\, \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \,.\, \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \,.\, \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \,.\, \hat{Z}_A \end{bmatrix}$$




Merkezleri Çakışık İki Koordinat Sistemi

${}^{A}_{B}R$ matrisi düzenlenerek aşağıdaki matris elde edilir.

$${}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} |X_B||X_A|\cos\gamma_{AB} & |Y_B||X_A|\cos\theta_{AB} & |Z_B||X_A|\cos\varphi_{AB} \\ |X_B||Y_A|\cos\beta_{AB} & |Y_B||Y_A|\cos\emptyset_{AB} & |Z_B||Y_A|\cos\delta_{AB} \\ |X_B||Z_A|\cos\alpha_{AB} & |Y_B||Z_A|\cos\psi_{AB} & |Z_B||Z_A|\cos\sigma_{AB} \end{bmatrix}$$

Bir dikken (ortogonal) matris olan dönme matrisi aşağıdaki gibi tanımlansın :

$$\mathrm{R} = [\hat{X} \quad \hat{Y} \quad \hat{Z}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Matris elemanlarının dikgenlik ve birim özellikleri aşağıda verilmiştir :

$$\hat{X} \,.\, \hat{X} = 1 \qquad \hat{Y} \,.\, \hat{Y} = 1 \qquad \hat{Z} \,.\, \hat{Z} = 1$$

$$\left|\hat{X}\right| = 1, \qquad \left|\hat{Y}\right| = 1, \qquad \left|\hat{Z}\right| = 1$$

$$\hat{X} \,.\, \hat{Y} = 0 \qquad \hat{X} \,.\, \hat{Z} = 0 \qquad \hat{Y} \,.\, \hat{Z} = 0$$

{A} koordinat sisteminin {B} koordinat sistemine göre yönelimi ${}^{B}_{A}R$ ile gösterilir.

$$ {}^{B}_{A}R = \left[{}^{B}\hat{X}_A \quad {}^{B}\hat{Y}_A \quad {}^{B}\hat{Z}_A\right] = \begin{bmatrix} \hat{X}_A \,.\, \hat{X}_B & \hat{Y}_A \,.\, \hat{X}_B & \hat{Z}_A \,.\, \hat{X}_B \\ \hat{X}_A \,.\, \hat{Y}_B & \hat{Y}_A \,.\, \hat{Y}_B & \hat{Z}_A \,.\, \hat{Y}_B \\ \hat{X}_A \,.\, \hat{Z}_B & \hat{Y}_A \,.\, \hat{Z}_B & \hat{Z}_A \,.\, \hat{Z}_B \end{bmatrix} $$

${}^{B}_{A}R$ matrisi, ${}^{A}_{B}R$ matrisinin devriğine (transpoz) eşittir.

$$ {}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{T} $$

${}^{B}_{A}R$ dönme matrisi ile tersinin $\left({}^{B}_{A}R^{-1}\right)$ çarpımı birim matristir.

$$ {}^{B}_{A}R \; {}^{B}_{A}R^{-1} = \mathrm{I} $$

Denklemin her iki tarafını ${}^{B}_{A}R^{T}$ matrisiyle çarpalım.

$$ {}^{B}_{A}R^{T} \; {}^{B}_{A}R \; {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T} \; \mathrm{I} $$

Denklemde;

$$ {}^{B}_{A}R^{T}\ {}^{B}_{A}R = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_A \\ {}^{B}\hat{Y}_A \\ {}^{B}\hat{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_A & {}^{B}\hat{Y}_A & {}^{B}\hat{Z}_A \end{bmatrix} $$

$$ {}^{B}_{A}R^{T}\ {}^{B}_{A}R = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_A \,.\, {}^{B}\hat{X}_A & {}^{B}\hat{X}_A \,.\, {}^{B}\hat{Y}_A & {}^{B}\hat{X}_A \,.\, {}^{B}\hat{Z}_A \\ {}^{B}\hat{Y}_A \,.\, {}^{B}\hat{X}_A & {}^{B}\hat{Y}_A \,.\, {}^{B}\hat{Y}_A & {}^{B}\hat{Y}_A \,.\, {}^{B}\hat{Z}_A \\ {}^{B}\hat{Z}_A \,.\, {}^{B}\hat{X}_A & {}^{B}\hat{Z}_A \,.\, {}^{B}\hat{Y}_A & {}^{B}\hat{Z}_A \,.\, {}^{B}\hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I} $$

$$ {}^{B}_{A}R^{T}\ {}^{B}_{A}R = \mathrm{I} $$

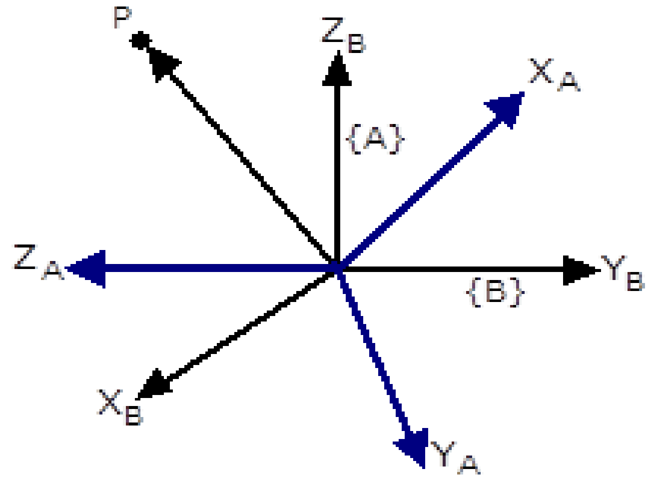
Bu ifade ${}^{B}_{A}R^{T}\ {}^{B}_{A}R\ {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T}\ \mathrm{I}$ ‘de yerine konursa ;

$$ {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T} $$

Bu ifadeden de anlaşılacağı üzere bir dönme matrisinin tersini almak için o matrisin sadece devriğini almanın yeterli olduğu sonucu çıkarılabilir.

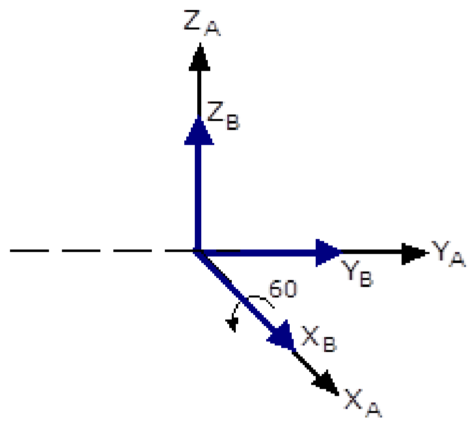
Eğer {A} ile {B} koordinat sistemlerinin merkezleri üst üste çakışık ise, {B} koordinat sistemine göre tanımlanmış bir noktayı {A} koordinat sistemine göre tanımlamak mümkündür. Bu durum matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R \ {}^{B}P$$



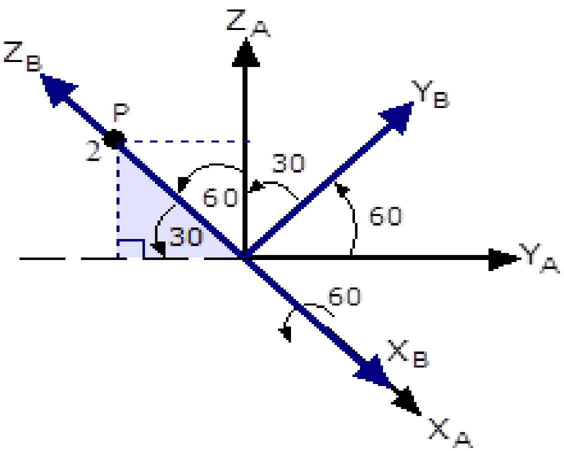

## ÖRNEK 2.2

Şekilde olduğu gibi merkezleri çakışık ve üst üste olan iki koordinat sisteminden {B} koordinat sistemi {A} koordinat sistemine göre X ekseninde 60 derece döndürülüyor. Yeni durumda {B} koordinat sistemine göre $^{B}P = [0 \quad 0 \quad 2]^T$ konumunda bulunan P noktasının {A} koordinat sistemine göre konumunu bulunuz.



# ÇÖZÜM 2.2

Dönme sonunda oluşan şekli çizelim. Aşağıdaki şekilde aynı düzlemde olan $Z_A$, $Z_B$, $Y_A$ ve $Y_B$ eksenleri yine aynı düzlemde bulunan $X_A$ ve $X_B$ eksenlerine diktir.




**Geometrik çözüm:** Farklı renkte çizilen üçgende hipotenüs 2 birim 30 dereceyi gören kenar da hipotenüsün yarısı kadar yani 1 birimdir. Diğer kenarda dik üçgen denkleminden 1.732 olur. Yalnız bu değer $Y_A$ ekseninin negatif bölgesinde bulunduğundan bu uzunluk -1.732 olur.

**Matematiksel çözüm:** Her zaman bu kadar basit bir soruyla karşılaşmayabiliriz. Dolayısıyla ${}^{A}_{B}R$ matrisini bulalım.

$$
{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} |X_B||X_A|\cos\gamma_{AB} & |Y_B||X_A|\cos\theta_{AB} & |Z_B||X_A|\cos\varphi_{AB} \\ |X_B||Y_A|\cos\beta_{AB} & |Y_B||Y_A|\cos\emptyset_{AB} & |Z_B||Y_A|\cos\delta_{AB} \\ |X_B||Z_A|\cos\alpha_{AB} & |Y_B||Z_A|\cos\psi_{AB} & |Z_B||Z_A|\cos\sigma_{AB} \end{bmatrix}
$$

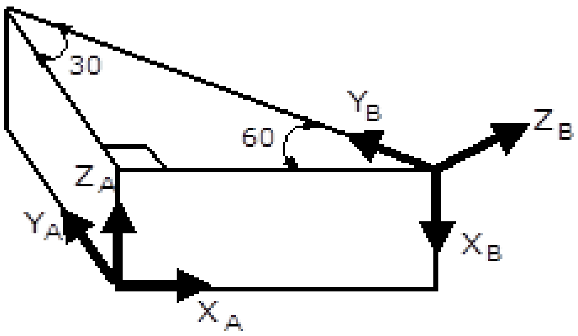
$$
{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 1\,.\,1\,.\,cos0 & 1\,.\,1\,.\,cos90 & 1\,.\,1\,.\,cos90 \\ 1\,.\,1\,.\,cos90 & 1\,.\,1\,.\,cos60 & 1\,.\,1\,.\,cos150 \\ 1\,.\,1\,.\,cos90 & 1\,.\,1\,.\,cos30 & 1\,.\,1\,.\,cos60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.866 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.866 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.732 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Görüldüğü gibi hem geometrik hem de matematiksel yöntem aynı sonucu üretmektedir.

# ÖRNEK 2.3

Şekilde verilen iki koordinat sisteminden {B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre yönelimini bulunuz.



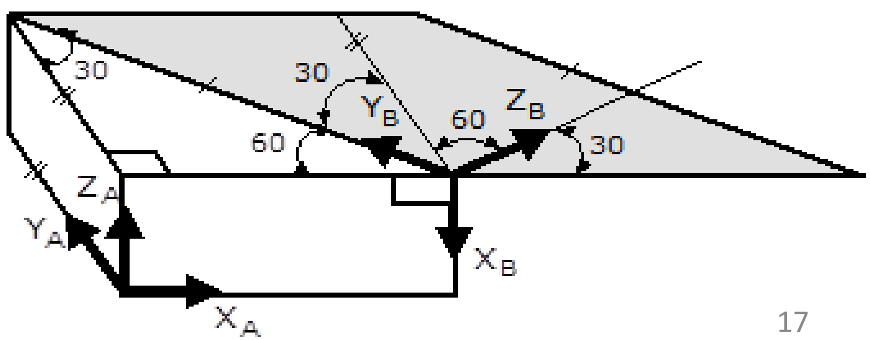

# ÇÖZÜM 2.3

İlk önce vektörler arasındaki açıları belirlemek için şekli aşağıdaki gibi çizelim.

Şekilde birbirine göre paralel olan doğru parçaları ‘/’ veya ‘//’ şeklinde gösterilmiştir. $Y_B$ ve $Z_B$ aynı düzlemde $X_B$ ise bu düzleme dik konumdadır. Sonuç olarak {A} ve {B} koordinatları arasındaki yönelim şu şekildedir :

$$
{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} cos90 & cos120 & cos30 \\ cos90 & cos30 & cos60 \\ cos180 & cos90 & cos90 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$



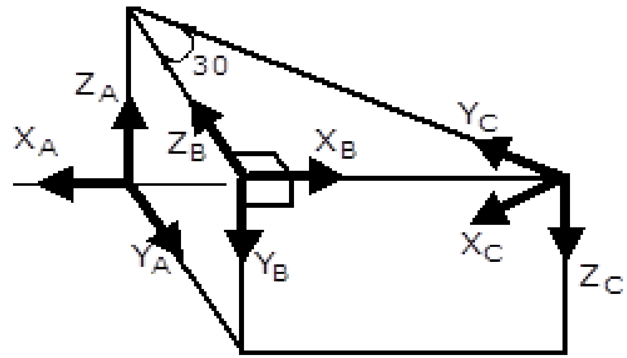
## ÖRNEK 2.4

{A}, {B} ve {C} koordinat sistemleri aşağıdaki gibi yerleştirildiğine göre sırayla ;

**a)** ${}^{A}_{C}R$ matrisini bulunuz.

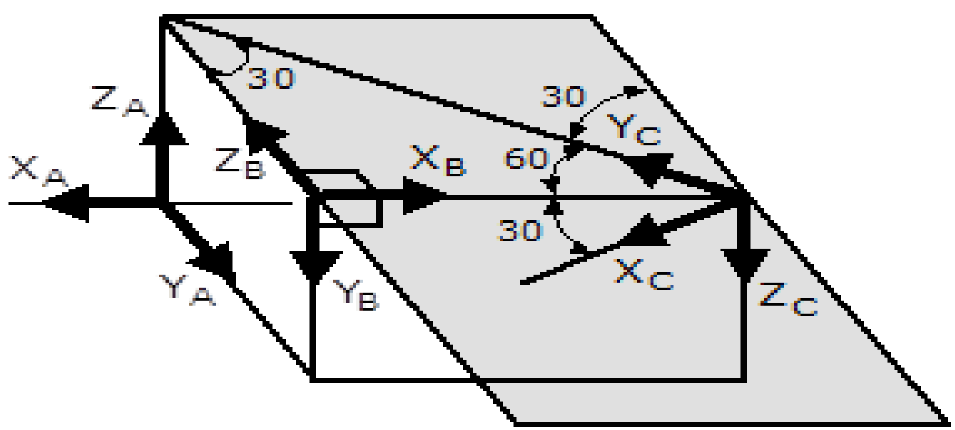
**b)** ${}^{B}_{C}R$ matrisini bulunuz.

**c)** ${}^{C}_{A}R$ matrisini bulunuz.

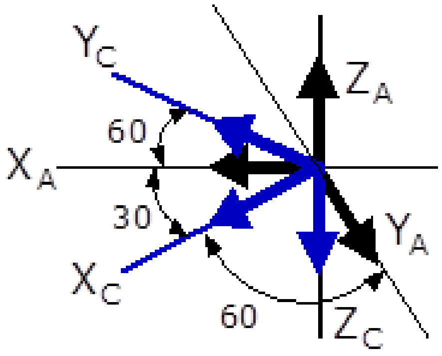



## ÇÖZÜM 2.4

**a)** İlk önce vektörler arasındaki açıları bulmak için sorudaki şekli yeniden çizelim. $Y_C$ ve $X_C$ aynı düzlemde $Z_C$ ise bu düzleme dik konumdadır.



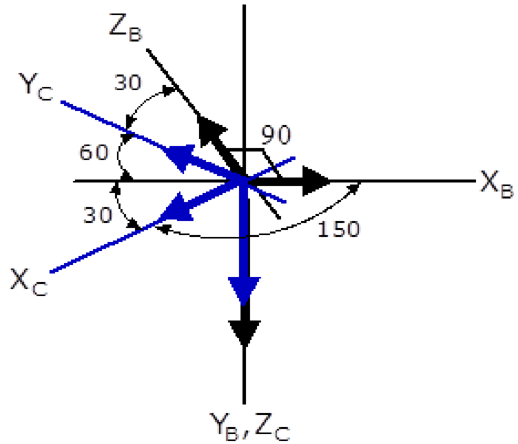
Birim vektörler arasındaki açıları bulmak için {A} ve {C} koordinat sistemlerini merkezleri üst üste gelecek şekilde çizelim.




$$
{}_C^A R = \begin{bmatrix} |X_C||X_A|\cos\gamma_{AC} & |Y_C||X_A|\cos\theta_{AC} & |Z_C||X_A|\cos\varphi_{AC} \\ |X_C||Y_A|\cos\beta_{AC} & |Y_C||Y_A|\cos\phi_{AC} & |Z_C||Y_A|\cos\delta_{AC} \\ |X_C||Z_A|\cos\alpha_{AC} & |Y_C||Z_A|\cos\psi_{AC} & |Z_C||Z_A|\cos\sigma_{AC} \end{bmatrix}
$$

$$
{}_C^A R = \begin{bmatrix} \cos 30 & \cos 60 & \cos 90 \\ \cos 60 & \cos 150 & \cos 90 \\ \cos 90 & \cos 90 & \cos 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

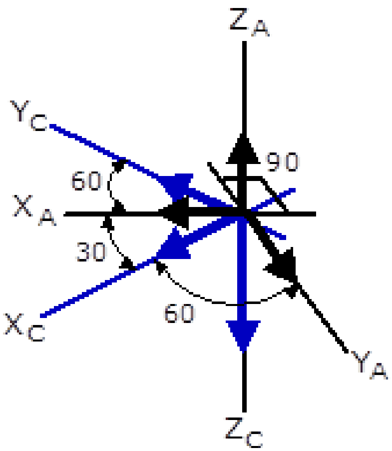
**b)** ${}^{B}_{C}R$ matrisini açık bir şekilde yazıp birim vektörler arasındaki açıyı belirleyelim. {B} ve{C} koordinat sistemlerini merkezleri üst üste gelecek şekilde çizelim.




$$
{}^{B}_{C}R = \begin{bmatrix} |X_C||X_B|\cos\gamma_{BC} & |Y_C||X_B|\cos\theta_{BC} & |Z_C||X_B|\cos\varphi_{BC} \\ |X_C||Y_B|\cos\beta_{BC} & |Y_C||Y_B|\cos\phi_{BC} & |Z_C||Y_B|\cos\delta_{BC} \\ |X_C||Z_B|\cos\alpha_{BC} & |Y_C||Z_B|\cos\psi_{BC} & |Z_C||Z_B|\cos\sigma_{BC} \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{B}_{C}R = \begin{bmatrix} \cos 150 & \cos 120 & \cos 90 \\ \cos 90 & \cos 90 & \cos 0 \\ \cos 120 & \cos 30 & \cos 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.866 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0.866 & 0 \end{bmatrix}
$$

**c)** ${}^{C}_{A}R$ matrisini açık bir şekilde yazıp birim vektörler arasındaki açıları belirleyelim. {A} ve {C} koordinat sistemlerini merkezleri üst üste gelecek şekilde çizelim.




$$
{}^{C}_{A}R = \begin{bmatrix} |X_A||X_C|\cos\gamma_{CA} & |Y_A||X_C|\cos\theta_{CA} & |Z_A||X_C|\cos\varphi_{CA} \\ |X_A||Y_C|\cos\beta_{CA} & |Y_A||Y_C|\cos\phi_{CA} & |Z_A||Y_C|\cos\delta_{CA} \\ |X_A||Z_C|\cos\alpha_{CA} & |Y_A||Z_C|\cos\psi_{CA} & |Z_A||Z_C|\cos\sigma_{CA} \end{bmatrix}
$$

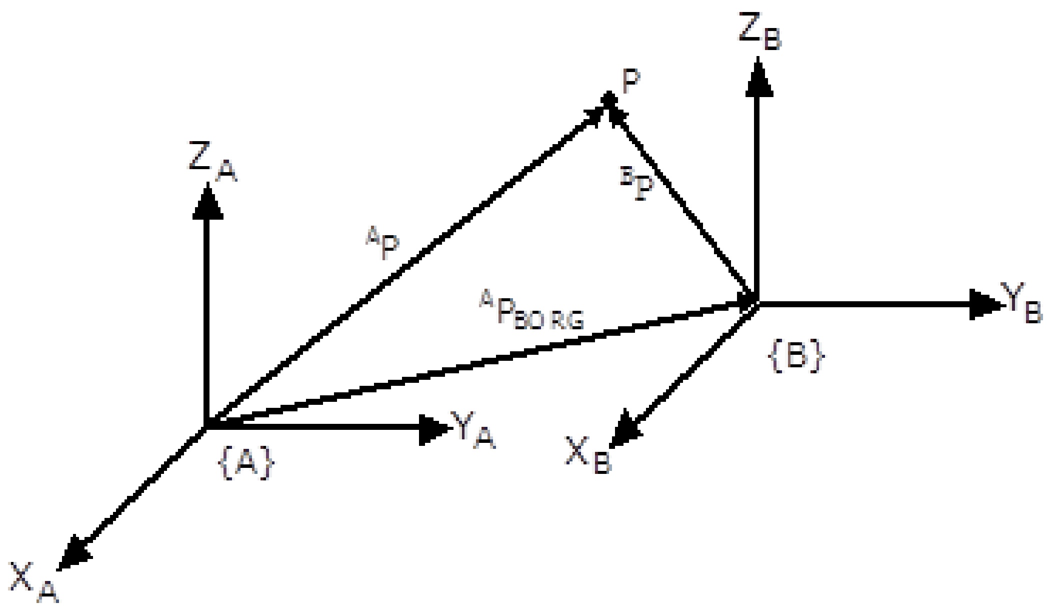
$$
{}^{C}_{A}R = \begin{bmatrix} \cos 30 & \cos 60 & \cos 90 \\ \cos 60 & \cos 150 & \cos 90 \\ \cos 90 & \cos 90 & \cos 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

# Genel Dönüşümler

Şimdiye kadar bir vektörün her hangi bir koordinat sistemine göre konumu ve yönelimi üzerinde duruldu. Şimdi ise iki koordinat sisteminin bir birlerine göre konum ve yönelimleri incelenecektir.

{A} ve {B} gibi iki koordinat sistemi olsun. {A} Koordinat sisteminin {B} koordinat sistemine uzaklığı ${}^{A}P_{BORG}$ vektörüyle gösterilir.

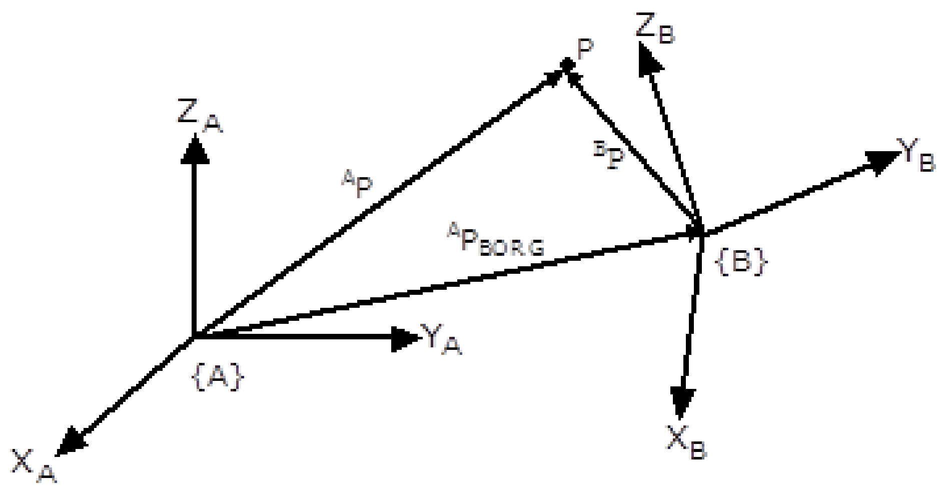
Şekilde <u>yönelimleri aynı merkezleri farklı </u>noktalarda bulunan iki koordinat sistemi görülmektedir. P noktasının {A} koordinat sistemine uzaklığını ${}^{A}P_{BORG}$ vektörünü kullanarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.




$$ {}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} $$

Şekilde ise hem yönelimleri hem de merkezleri farklı noktalarda bulunan iki koordinat sistemi görülmektedir. Bu durumda P noktasının A koordinat sistemine uzaklığı aşağıdaki denklemdeki gibi ifade edilir.

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}$$




Eğer {A} koordinat sistemi ile {B} koordinat sisteminin yönelimleri aynı merkezleri farklı noktalarda ise bu durumda ${}^{A}_{B}R$ = I olur ve denklem $^{A}P$ = $^{B}P$ + $^{A}P_{BORG}$ şeklinde ifade edilir.

Aynı şekilde, eğer {A} koordinat sistemi ile {B} koordinat sisteminin merkezleri çakışık yönelimleri farklı ise ${}^{A}P_{BORG}$ = 0 olur ve denklem ${}^{A}P$ = ${}^{A}_{B}R\ {}^{B}P$ şeklinde ifade edilir.

Genel olarak ${}^{B}P$ ile ${}^{A}P$ arasındaki ilişki matrisle ifade edilir. Bunun için de yeni bir dönüşüm matrisi **(transformasyon matrisi)** tanımlanır.

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}T\ {}^{B}P \qquad \begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix}$$

${}^{A}P$, ${}^{B}P$ ve ${}^{A}P_{BORG}$ vektörlerine 1 ve ${}^{A}_{B}R$ matrisine 0'lar eklenerek matris çarpımının doğru yapılması sağlanmaktadır.

Yukarıdaki matris çarpımı yapıldığında ${}^{A}P$ = ${}^{A}_{B}R\ {}^{B}P$ + ${}^{A}P_{BORG}$ oluşacaktır.

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R\ {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} \\ 1 \end{bmatrix}$$

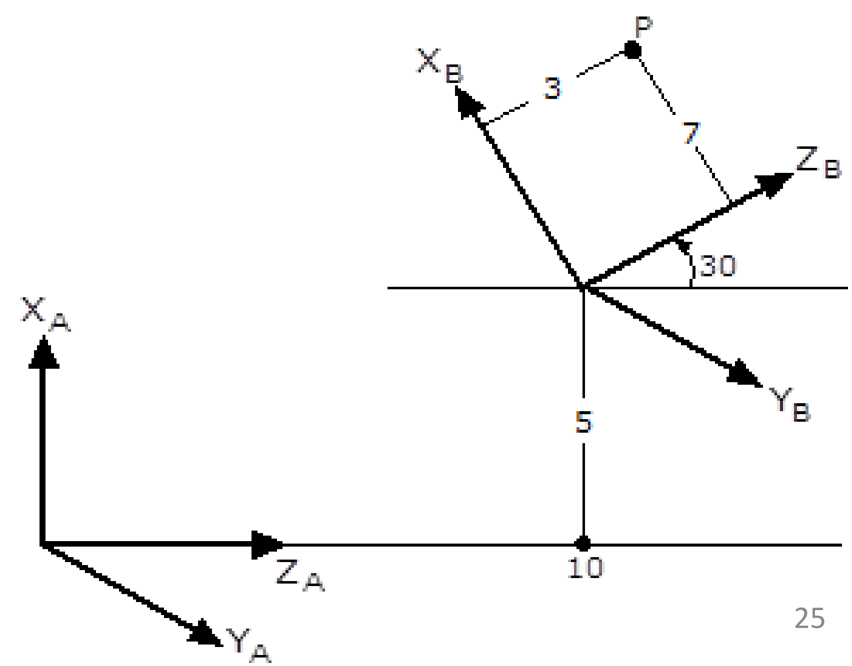
${}^{A}P$ ile ${}^{B}P$ arasındaki ilişki, içerisinde dönme matrisi ve konum vektörünün bulunduğu 4x4 boyutunda bir matrisle ifade edilebilir. Bu matrise **homojen dönüşüm matrisi** denir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$ {}_{B}^{A}T = \begin{bmatrix} {}_{B}^{A}R & {}^{A}P_{BORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}_{B}^{A}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Denklemde; $p_x, p_y, p_z$ ${}^{A}P_{BORG}$ vektörünün elemanlarını, $r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{31}, r_{32}, r_{33}$ ise ${}_{B}^{A}R$ matrisini temsil etmektedir.

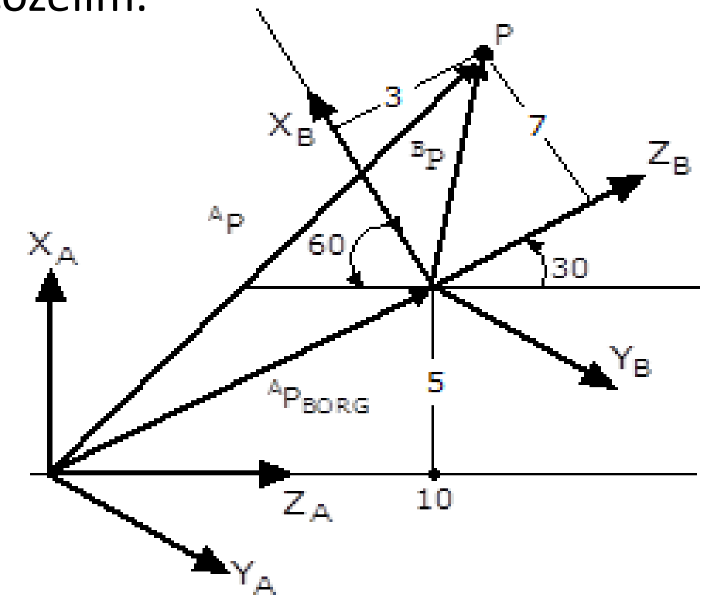
## ÖRNEK 2.5

{B} koordinat sistemi {A} koordinat sistemine göre Y ekseninde 30 derece döndürüldükten sonra $X_A$ ekseninde 5 birim $Z_A$ ekseninde ise 10 birim öteleniyor. Yeni durumda P noktasının {B} koordinat sistemine göre ${}^{B}P = [7.0\ 0\ 3.0]^T$ şeklinde tanımlanıyor. P noktasının {A} koordinat sistemine göre konumunu bulunuz.



# ÇÖZÜM 2.5

Örnekte verilen şekli yeniden çizip, soruyu öncelikle ${}^{A}P = {}^{A}_{B}R\ {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}$ denklemini kullanarak çözelim.




{B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre dönme matrisi ;

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} |X_B||X_A|\cos\gamma_{AB} & |Y_B||X_A|\cos\theta_{AB} & |Z_B||X_A|\cos\varphi_{AB} \\ |X_B||Y_A|\cos\beta_{AB} & |Y_B||Y_A|\cos\emptyset_{AB} & |Z_B||Y_A|\cos\delta_{AB} \\ |X_B||Z_A|\cos\alpha_{AB} & |Y_B||Z_A|\cos\psi_{AB} & |Z_B||Z_A|\cos\sigma_{AB} \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} cos30 & cos90 & cos60 \\ cos90 & cos0 & cos90 \\ cos120 & cos90 & cos30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 \end{bmatrix} $$

{B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre konumu belirlenirken {B}'nin orjini {A}'ya göre bir nokta gibi düşünülür. Bu durumda {B}'nin {A}'ya göre konumu şu şekilde olur.

$$^{A}P_{BORG} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Bulduğumuz ifadeleri $^{A}P$ = $^{A}_{B}R\ ^{B}P$ + $^{A}P_{BORG}$ eşitliğinde yerine koyalım.

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R\ ^{B}P + {}^{A}P_{BORG} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.562 \\ 0 \\ 9.098 \end{bmatrix}$$

Şimdi de aynı soruyu $^{A}P$ = $^{A}_{B}T\ ^{B}P$ denklemini kullanarak yapalım. Soruda $^{B}P$ verildiğine göre $^{A}_{B}T$ matrisini bulmamız gerekmektedir. $^{A}_{B}T$ aşağıdaki gibi olur.

$$^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak ${}^{A}P$ matrisi aşağıdaki gibi bulunur. Görüldüğü gibi her iki yöntemde aynı sonucu vermektedir.

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.0 \\ 0 \\ 3.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.562 \\ 0 \\ 9.098 \\ 1 \end{bmatrix} $$

# İşlemler

Yönelim ve öteleme işlemleri dönme operatörleri kullanılarak da elde edilebilir.

## Öteleme İşlemi

$P_2$ noktasını {A} koordinat sistemine göre tanımlamak için ${}^{A}P_1$ vektörü, ${}^{A}Q$ vektörü kadar ötelenir. Bunu şöyle ifade edebiliriz :

$$ {}^{A}P_2 = {}^{A}P_1 + {}^{A}Q $$

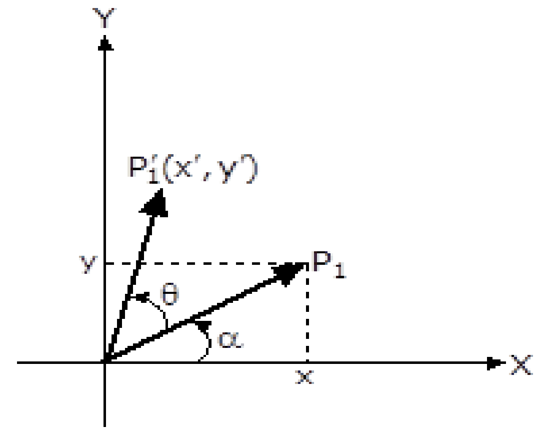
Bu denklemdeki ${}^{A}P_2$ vektörünü, homojen dönüşüm matrisi $D_Q$(q) cinsinden yazalım.

$$ {}^{A}P_2 = D_Q(\mathrm{q})\ {}^{A}P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{A}P_1 $$

# Dönme İşlemi

Bir koordinat sisteminin herhangi bir eksen etrafında döndürülmesi iki veya üç boyutlu uzayda ifade edilebilir. İki boyut x ve y eksenlerinden oluşan bir düzlemi ifade eder. Uzunluğu P olan $P_1$ vektörünün x ekseniyle yaptığı açı α olduğu düşünülürse, $P_1$ vektörünün x ve y eksenlerindeki izdüşümü;

x = P $\cos\alpha$ y = P $\sin\alpha$




$P_1$ vektörü θ kadar döndürülerek $P_1'$ vektörü elde edilsin. Bu dönme işlemi sonunda $P_1'$ vektörünün x ve y eksenlerindeki izdüşümleri sırasıyla ;

$x'$ = P $\cos(\alpha+\theta)$ $y'$ = P $\sin(\alpha+\theta)$

Bu iki ifade de yer alan trigonometrik ifadelerin toplamları aşağıda gibi gösterilir.

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

Bu ifadeler trigonometrik ifadelerin toplamları olduğundan $P_1'$ vektörünün x ve y eksenlerindeki izdüşümü sırasıyla şöyle olur :

$$x' = \mathrm{P}\cos\theta\cos\alpha - \mathrm{P}\sin\theta\sin\alpha$$
$$y' = \mathrm{P}\sin\theta\cos\alpha + \mathrm{P}\cos\theta\sin\alpha$$

x = P $\cos\alpha$ , y = P $\sin\alpha$ ifadeleri yukarıdaki denklemlerde yerine konulursa, $P_1$ vektörünün θ kadar döndürülmesiyle elde edilen $P_1'$ vektörünün konumu bulunur.

$$x' = \mathrm{x}\cos\theta - \mathrm{y}\sin\theta$$
$$y' = \mathrm{x}\sin\theta + \mathrm{y}\cos\theta$$

İki boyutlu uzaydaki dönme işlemi sonucunda $P_1$ vektörünün konumu $P_1'$ olur. Bu konum $P_1' = [x' \quad y']^T$ şeklinde aşağıdaki gibi gösterilir :

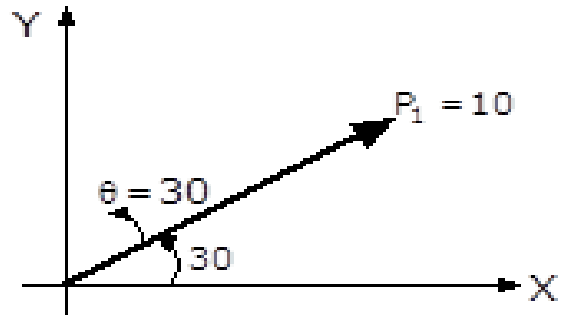
$$P_1' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathrm{R}(\theta)\, P_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak iki boyutlu uzayda gerçekleştirilen bu dönme işlemi 2x2 boyutlu bir matris kullanılarak şu şekilde ifade edilir :

$$\mathrm{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

## ÖRNEK 2.6

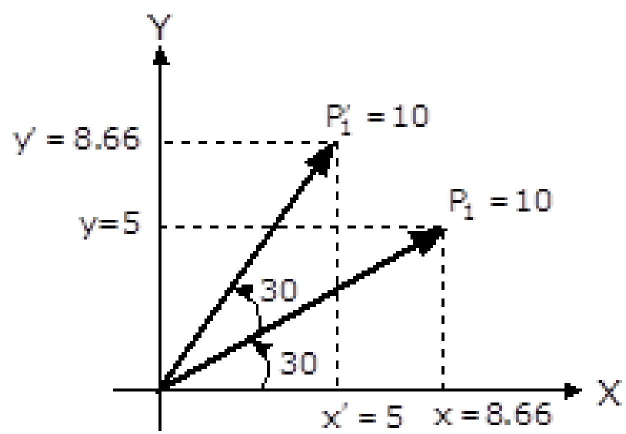
Şekilde X ekseni ile 30 derecelik açı yapan ve uzunluğu 10 birim olan $P_1$ vektörü Y eksenine doğru 30 derece döndürülüyor. Buna göre $P_1$ vektörünün yeni durumdaki konumunu bulunuz.




## ÇÖZÜM 2.6

Şekildeki üçgenlerden yararlanarak başlangıçta konumu $P_1 = [8.66 \quad 5]^T$ olan vektör 30 derece döndürüldükten sonra $P_1{}' = [5 \quad 8.66]^T$ olur.

Yeni konum şu şekilde elde edilir.




$$P_1{}' = R(\theta)P_1 = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$P_1{}' = R(\theta)P_1 = \begin{bmatrix} cos30 & -sin30 \\ sin30 & cos30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.66 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$P_1{}' = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.66 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8.66 \end{bmatrix}$$

İki boyutlu dönme kavramını açıkladıktan sonra şimdide üç boyutlu dönme kavramını inceleyelim. 3x3 boyutlu R dönme matrisini kullanarak ${}^{A}P_1$ vektörü, yeni bir vektör olan ${}^{A}P_2$ olarak değiştirilebilir. Bu işlem matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

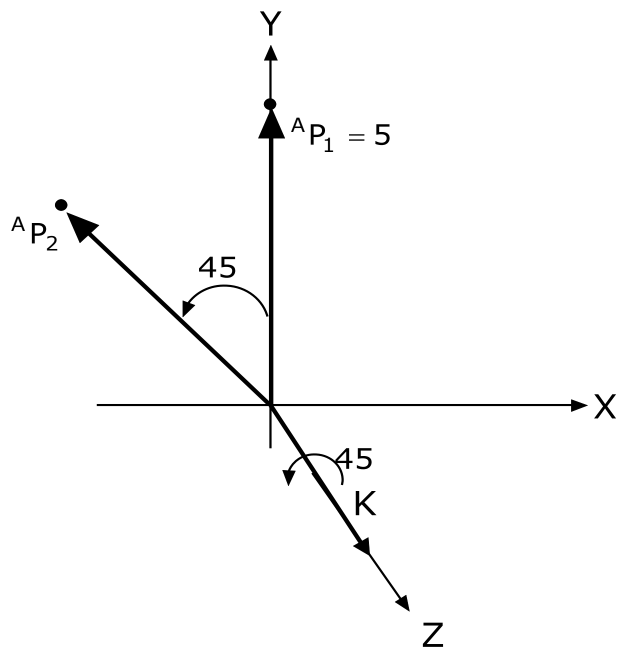
$${}^{A}P_2 = R_K(\theta)\,{}^{A}P_1$$

Dönme operatörü olan $R_K(\theta)$ , K ekseninde $\theta$ kadar dönme işlemi gerçekleştirir. $R_K(\theta)$ ifadesinin matrisle gösterimi ;

$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} & {}^{A}_{B}R & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# ÖRNEK 2.7

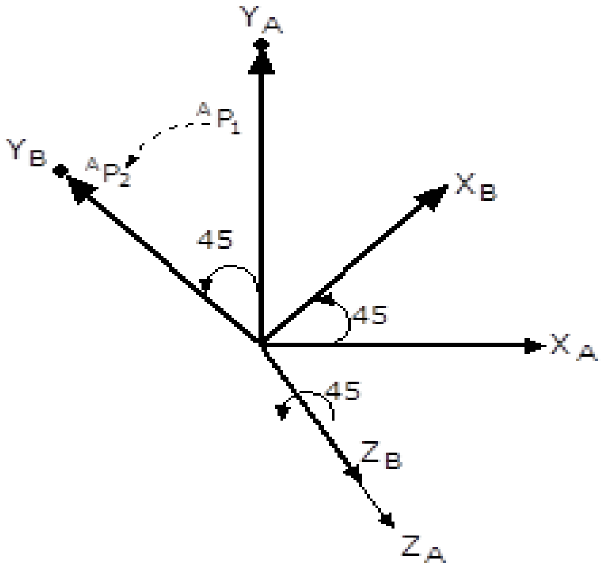
5 birim uzunluğunda olan $P_1$ vektörü Z eksenine yerleştirilen bir K vektörüyle 45 derece döndürülerek $P_2$ vektörü elde ediliyor. Buna göre $P_2$ vektörünün konumunu bulunuz.




# ÇÖZÜM 2.7

Öncelikle $R_K(\theta)$ dönme matrisini bulalım. $R_K(\theta)$ matrisi aslında merkezleri üst üste olan iki koordinat sisteminden birinin Z ekseninde 45 derece dönmesiyle elde edilen matrisin ta kendisidir. Bunun için sorudaki şekli tekrar çizelim.

$R_K(\theta)$ dönme matrisini bulup ${}^{A}P_2 = \ R_K(\theta)^{A}P_1$ denkleminde yerine yazalım.




$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} cos45 & cos135 & cos90 \\ cos45 & cos45 & cos90 \\ cos90 & cos90 & cos0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 \\ 0.707 & 0707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{A}P_2 = \ R_K(\theta)^{A}P_1 = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 \\ 0.707 & 0707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.53 \\ 3.53 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Örnek 2.7 K vektörünün Z ekseninde θ açısıyla döndürülmesine güzel bir örnektir.

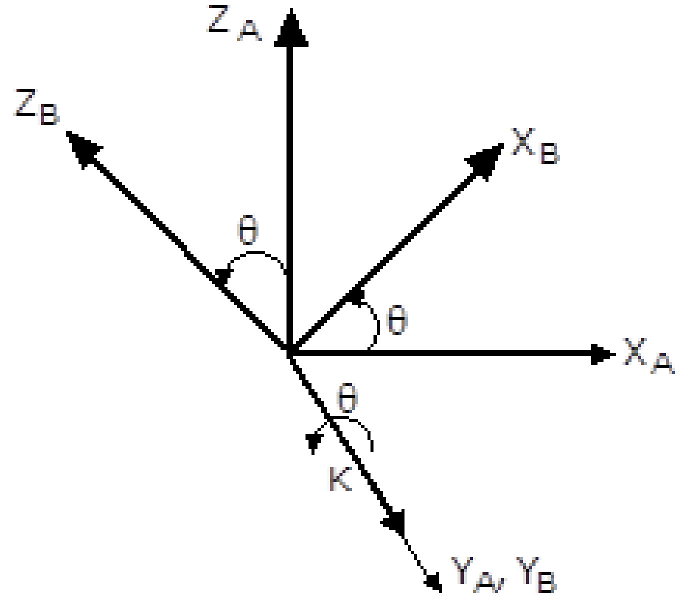
Üç boyutu uzayda K vektörünü sırasıyla X, Y ve Z eksenlerine yerleştirip θ açısıyla döndürebiliriz. Bu şekilde üç farklı dönme matrisi elde edilir.

**1) K vektörü Z eksenine yerleştirip θ açısıyla döndürülürse $R_Z(\theta)$ elde edilir.**

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

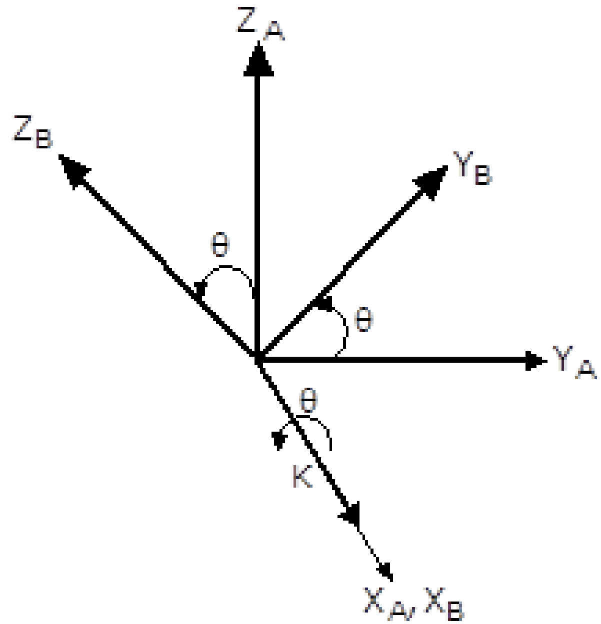
2) K vektörü Y eksenine yerleştirip θ açısıyla döndürülürse $R_Y(\theta)$ elde edilir.




$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} $$

$$ R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

3) K vektörü X eksenine yerleştirip θ açısıyla döndürülürse $R_X(\theta)$ elde edilir.




$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} $$

$$ R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$