Türev 8
Türevin Uygulamaları
Hız, İvme, Eğim hesapları
Teğet ve Normal Denklemleri

Prof. Dr. Ziyaddin RECEBLİ

Türevin Uygulamaları

Hız ve İvme hesabı

Hareketli cisimin t zamanında aldığı yol $s=s(t)$, anlık hızı $v=v(t)$, anlık ivmesi $a=a(t)$ olsun.

Hız cisimin birim zamanda aldığı yola denilmekte, birimi m/s'dir.

Hız yolun zamana göre 1. mertebeden türevine eşittir.

$$v=v(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\frac{ds}{dt}$$

$$v=s'_t=s'$$

$$v(t)=s(t)'_t$$

İvme hızın zamana göre 1. mertebeden veya yolun zamana göre 2. mertebeden türevine eşittir.

$$a=a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)=\frac{d^2s(t)}{dt^2}$$

$$a(t) = v(t)'_t = \left[s(t)'_t\right]'_t = s(t)''_t$$

$$a = v'_t = s''_t$$

Örnekler:

1. t saniyede aldığı yolun denklemi $s = s(t) = t^3 + 3t + 12$ olan cismin 2. saniyedeki hızını bulunuz. $v(2) = ?$

$$v = v(t) = s(t)'_t = (t^3 + 3t + 12)'_t = 3t^2 + 3t$$

$$v(2) = v(t)\Big|_{t=2} = (3t^2 + 3t)\Big|_{t=2} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 =$$

$$= 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 18 \text{ m/sn}$$

2. t saniyede aldığı yolun formülü $s(t) = t^3 - 2t^2 + 8$ olan cismin $a(5)$'ini hesaplayınız.

$$v = s(t)'_t = (t^3 - 2t^2 + 8)'_t = 3t^2 - 4t$$

$$a = v'_t = (3t^2 - 4t)'_t = 6t - 4$$

$$a(5) = a(t)\Big|_{t=5} = (6t - 4)\Big|_{t=5} = 6 \cdot 5 - 4 = 26 \text{ m/s}^2$$

3) Hareketli cisimin t zamanında aldığı yolun denklemi $s=t^3+4t^2+12$, m ise, $v(2)$ ve $a(2)$ hesaplayınız.

$$v = s'_t = (t^3+4t^2+12)'_t = 3t^2+8t$$

$$v(2) = v\big|_{t=2} = (3t^2+8t)\big|_{t=2} = 3\cdot 2^2+8\cdot 2 = 28 \text{ m/sn}$$

$$a = v'_t = (3t^2+8t)'_t = 6t+8$$

$$a(2) = (6t+8)\big|_{t=2} = 6\cdot 2+8 = 20 \text{ m/s}^2$$

4. Hareketlinin t saniyede aldığı yolun metre cinsinden eşiti $s(t)=s=bt^2-2t+15$, 3. saniyedeki hızı 40 m/s olduklarına göre $b=?$

$$v(t) = v = s(t)'_t = (b\cdot t^2-2t+15)'_t = 2bt-2$$

$$v(3) = v(t)\big|_{t=3} = (2b\cdot t-2)\big|_{t=3} = \underline{2\cdot b\cdot 3-2 = 40}$$

$$6b = 42 \Rightarrow b=7 \text{ olacaktır.}$$

(5) $s(t) = 2t^3 + 3t^2$ m, olduğuna göre

$t = 3$ sn'ki $a(3) = ?$

$$a = s''_t = [2t^3 + 3t^2]''_t = [(2t^3 + 3t^2)'_t]'_t =$$

$$= [6t^2 + 6t]'_t = 12t + 6$$

$$a(3) = a|_{t=3} = (12t + 6)|_{t=3} = 12 \cdot 6 + 6 = 78 \text{ m/sn}^2$$

(6) Hareketlinin t saniyede aldığı yolun metre cinsinden ifadesi.

$s = bt^3 - ct^2 + 16$ m, $v(4) = 24$ m/sn, $a(4) = 18$ m/sn^2 olduklarına göre $b + c = ?$

$$v = s'_t = (bt^3 - ct^2 + 16)'_t = 3bt^2 - 2ct$$

$$a = v'_t = (3bt^2 - 2ct)' = 6bt - 2c$$

$$v(4) = v|_{t=4} = (3bt^2 - 2ct)|_{t=4} = 3 \cdot b \cdot 4^2 - 2c \cdot 4 =$$

$$= 48b - 8c = 24$$

$$a(4) = a|_{t=4} = (6bt - 2c)|_{t=4} = 6b4 - 2c =$$

$$= 24b - 2c = 18$$

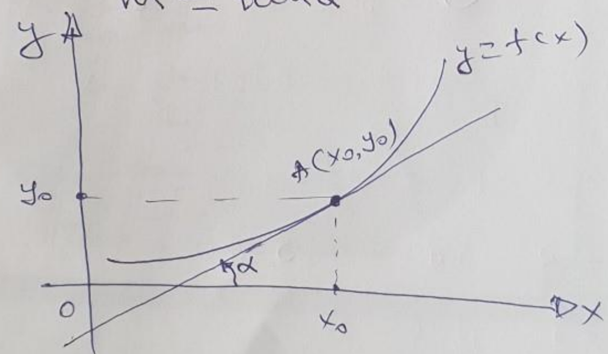
$$\left.\begin{aligned} 48b - 8c &= 24 \\ 24b - 2c &= 18 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} b &= 1 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

$b + c = 1 + 3 = 4$ olacaktır.

Eğim Hesabı.

$y = f(x)$ fonksiyonu grafiğinin $A(x_0, y_0)$ noktasındaki eğimi, bu noktada fonksiyon eğrisine çizilen teğetin yatay ile oluşturduğu α açısının tanjantına denilir ve m ile işaretlenir.

$$m = \tan\alpha$$



⑥

$y=f(x)$ funksiyonunun $A(x_0,y_0)$ noktasındaki eğimi (m), onun 1. mertebeden türevinin $A(x_0,y_0)$ noktasındaki değerine eşittir. Yani,

$$m=\tan\alpha = y'(x_0) = y'(x)\Big|_{x=x_0}$$

① $y=x^3-2x^2+1$ funksiyonu grafiğinin $x_0=1$ noktasındaki eğimini bulunuz.

$$y'=(x^3-2\cdot x^2+1)'_{\cancel{x}} = 3x^2-4x$$

$$m=y'_{x=x_0}=(3x^2-4x)\Big|_{x=x_0=1}=3\cdot 1^2-4\cdot 1=-1$$

② $y=x^2-2x+3$ funksiyonunun $A(1,2)$ noktasındaki eğimini bulunuz.

$$y'=(x^2-2x+3)'=2x-2$$

$\underline{x_0=1}$, $\underline{y_0=2}$

$$m=y'_{x=x_0}=(2x-2)\Big|_{x=x_0=1}=2\cdot 1-2=0$$

③ $y=\frac{1}{x}$ fonksiyonu eğrisinin $x_0=\frac{1}{3}$ apsisli noktasındaki eğimini bulunuz. ⑦

$$y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

$$m=y'_{x=x_0}=\left(-\frac{1}{x^2}\right)'_{x=x_0=\frac{1}{3}}=-\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-9$$

④ $y=\sin(\ln x)$ eğrisinin $x_0=1$ noktasındaki eğimini hesaplayınız.

$$y'=[\sin(\ln x)]'=\cos\ln x\cdot(\ln x)'=$$
$$=\frac{1}{x}\cdot\cos\ln x$$

$$m=y'_{x=x_0}=\left[\frac{1}{x}\cdot\cos\ln x\right]_{x=x_0=1}=$$

$$=\frac{1}{1}\cdot\cos\ln 1=1\cdot\cos 0=1$$

⑤ $y=e^{x^2-1}$ fonksiyonunun $x_0=1$ noktasındaki eğimini bulunuz.

$$y'=\left(e^{x^2-1}\right)'=e^{x^2-1}\cdot(x^2-1)'=2x\cdot e^{x^2-1}$$

$$m=y'_{x=x_0}=\left(2x\cdot e^{x^2-1}\right)\Big|_{x=x_0=1}=2\cdot1\cdot e^{1^2-1}=2$$

(6) $y = \ln\cos x$ fonksiyonunun $x_0 = \frac{\pi}{4}$ noktasındaki eğimini bulunuz. (8)

$$y' = (\ln\cos x)' = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$m = y'_{x=x_0} = \tan x \Big|_{x=x_0=\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

(7) $y = \cos^2 e^{4x}$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasındaki eğimini bulunuz.

$$y' = (\cos^2 e^{4x})' = -2\cdot\cos e^{4x} \cdot \sin e^{4x} \cdot e^{4x} \cdot 4$$

$$= -4 \cdot \sin 2 \cdot e^{4x}$$

$$m = y'_{x=x_0} = \left(-4\cdot \sin 2 \cdot e^{4x}\right)\Big|_{x=x_0=0} =$$

$$= -4 \cdot \sin 2 \cdot e^{4\cdot 0} = -4\cdot \sin 2$$

(8) $y = \ln 5^{\sin x}$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasındaki eğimini bulunuz.

$$y' = (\ln 5^{\sin x})' = (\sin x \cdot \ln 5)' = \cos x \cdot \ln 5$$

$$m = y'_{x=x_0} = (\cos x \cdot \ln 5)\Big|_{x=x_0=0} = \cos 0 \cdot \ln 5 = \ln 5$$

(9) $y=2^x+\ln 2\cdot\log_2 x+2$ fonksiyonunun (9)

$x_0=1$ noktasındaki eğimini bulunuz.

$$y'=(2^x+\ln 2\cdot\log_2 x+2)'=2^x\cdot\ln 2+\ln 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\log_2 e$$

$$=\ln 2\left(2^x+\frac{1}{x}\cdot\log_2 e\right) \cancel{= 2^x \ln 2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

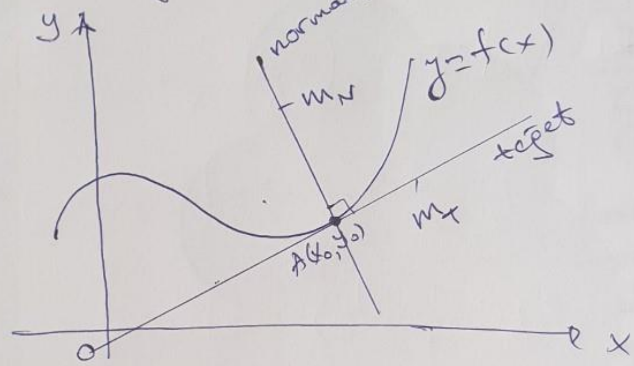
$$m=y'_{x=x_0}=\ln 2\cdot\left(2^x+\frac{1}{x}\cdot\log_2 e\right)\Big|_{x=x_0=1}=$$

$$=\ln 2\cdot\left(2^1+\frac{1}{1}\cdot\log_2 e\right)=$$

$$=\ln 2\cdot(2+\log_2 e)=\ln 2\cdot\log_2 4e$$

Teğet ve Normal Denklemleri

$y=f(x)$ fonksiyonunun $A(x_0,y_0)$ noktasındaki eğimi m_T olsun.



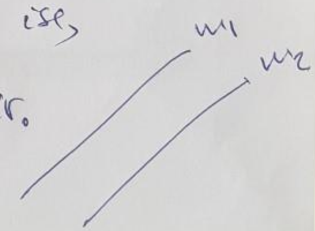
Fonksiyon grafiğine çizilen teğete dik olan doğruya grafiğin O noktadaki normali denilir. $A(x_0,y_0)$ noktasındaki normalin eğimi m_N ise, <u>diklik şartına</u> göre,

$$\boxed{m_N \cdot m_T = -1}$$

$$m_N = -\frac{1}{m_T} \text{ bulunacaktır.}$$

Paralellik şartına göre ise,

$\boxed{m_1 = m_2}$ yazılabilmektedir.



(11)

$A(x_0, y_0)$ noktasından geçen teğet denklemi,

$$\boxed{y - y_0 = m_T \cdot (x_0 - x_0)}$$ şeklinde,

$A(x_0, y_0)$ noktasından geçen normal denklemi ise,

$$\boxed{y - y_0 = m_N \cdot (x - x_0)}$$ şeklinde

yazılmaktadır.

Örnekler:

(1) $y = x^2 - 3x + 4$ fonksiyonu grafiği üzerinde yer alan $A(1,2)$ noktasından çizilen teğetin denklemini yazınız.

$y' = (x^2 - 3x + 4)' = 2x - 3$

$x_0 = 1 \; ; \; y_0 = 2$

$m_T = y'(x_0) = y'\Big|_{x = x_0 = 1} = (2x - 3)\Big|_{x=1} = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

$y - y_0 = m_T \cdot (x - x_0)$

$y - 2 = -1 \cdot (x - 1)$

$y - 2 = -x + 1 \qquad y = -x + 3$

(12)

(2) $y = \ln(e^x + e - 1)$ grafiğine $x_0 = 0$ apsisli noktadan çizilen teğetin denklemini yazınız.

$$y' = \ln(e^x + e - 1)' = \frac{e^x}{e^x + e - 1}$$

$$m_T = y'\Big|_{x=x_0} = \frac{e^x}{e^x + e - 1}\Bigg|_{x=x_0=0} = \frac{e^0}{e^0 + e - 1} = \frac{1}{e}$$

$x_0 = 0$,

$$y_0 = y\Big|_{x=x_0} = \ln(e^x + e - 1)\Big|_{x=x_0=0} =$$

$$= \ln(e^0 + e - 1) = \ln e = 1$$

$$y - y_0 = m_T(x - x_0)$$

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - 0)$$

$$y = \frac{1}{e} \cdot x + 1$$

(3) $y = 3x^2 - \ln x$ grafiğine $x_0 = 1$ apsisli noktadan çizilen teğet denklemini yazınız.

$$y' = (3x^2 - \ln x)' = 6x - \frac{1}{x}$$

$$m_T = y'|_{x=x_0} = \left(6x - \frac{1}{x}\right)_{x=x_0=1} =$$

$$= 6 \cdot 1 - \frac{1}{1} = 6 - 1 = 5$$

$$y_0 = y|_{x=x_0} = (3x^2 - \ln x)|_{x=x_0=1} = 3 \cdot 1^2 - \ln 1 = 3$$

$$y - y_0 = m_T \cdot (x - x_0)$$

$$y - 3 = 5 \cdot (x - 1) \qquad y = 5x - 2$$

(4) $y = -x^2 + 2x + 1$ eğrisinin $y = 2x - 1$ doğrusuna paralel olan teğetinin denklemini yazınız.

Paralelik şartına göre denklemi yazılacak olan teğetin eğimi, $m_T = 2$ olacaktır.

$$y' = (-x^2 + 2x + 1)' = -2x + 2$$

(14)

$m_T = y'_{x=x_0} = (-2x+2)\big|_{x=x_0} = -2x_0+2 = 2$

$x_0 = 0$ bulunur.

$y_0 = y\big|_{x=x_0} = (-x^2+2x+1)\big|_{x=x_0=0} =$

$= -0^2+2\cdot 0+1 = 1$

$y - y_0 = m_T\cdot(x - x_0)$

$y - 1 = 2\cdot(x-0) \Rightarrow y = 2x+1$

(5) $y = 2x^2 - 3x - 1$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti $5x - y + 2 = 0$ doğrusuna paraleldir.

$5x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 5x+2$

Paralellik şartından $m_T = 5$ olacak.

$y' = (2x^2 - 3x - 1)' = 4x - 3$

$m_T = y'_{x=x_0} = (4x-3)\big|_{x=x_0} = 4\cdot x_0 - 3 = 5$

$4x_0 = 8 \Rightarrow x_0 = 2$

$y_0 = y\big|_{x=x_0} = (2x^2 - 3x - 1)\big|_{x=x_0=2} =$

$= 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 - 1 = 8 - 6 - 1 = 1$

$A(x_0, y_0) = A(2, 1)$

(15)

⑥ $y = bx^2 - 6x$ eğrisinin $x_0 = 1$ apsisli noktasındaki teğeti x eksenine // olduğuna göre, $b = ?$

Paralellik şartından teğetin eğimi;

$m_T = 0$ olacaktır.

$y' = (bx^2 - 6x)' = 2bx - 6$

$m_T = y'|_{x=x_0} = (2bx-6)|_{x=x_0=1} =$

$= 2b \cdot 1 - 6 = 0 \Rightarrow b = 3$ olacaktır.

⑦ $y = \frac{1}{2}x^2 - bx + 1$ eğrisinin $x_0 = 2$ apsisli noktasındaki teğeti $y = x - 3$ doğrusuna // olduğuna göre, $b = ?$

Paralellik şartından, $m_T = 1$ olacaktır.

$y' = (\frac{1}{2}x^2 - bx + 1)' = x - b$

$m_T = y'|_{x=x_0} = (x-b)|_{x=x_0=2} = 2 - b = 1$

$b = 1$ bulunur.

(8) $y=\frac{\ln 2x}{x}$ fonksiyonunun x eksenine (16)

// olan teğetinin değme noktasını bulunuz.

Paralellik şartından, $m_T=0$ olacak

$$y'=\left(\frac{\ln 2x}{x}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-x'\cdot\ln 2x}{x^2}=\frac{1-\ln 2x}{x^2}$$

$$m_T=y'\Big|_{x=x_0}=\frac{1-\ln 2x}{x^2}\Big|_{x=x_0}=\frac{1-\ln 2x_0}{x_0^2}=0$$

$$1-\ln 2x_0=0 \quad \ln 2x_0=1 \quad 2x_0=e^1=e$$

$$x_0=\frac{1}{2}\cdot e$$

$$y_0=y\Big|_{x=x_0}=\frac{\ln 2x}{x}\Big|_{x=x_0=\frac{1}{2}e}=$$

$$=\frac{\ln 2\cdot\frac{1}{2}e}{\frac{1}{2}e}=\frac{1}{\frac{e}{2}}=\frac{2}{e}$$

$$A(x_0,y_0)=A\left(\frac{1}{2}e,\frac{2}{e}\right)$$

9) $y=x^2+2$ fonksiyonu grafiğinin $y=2x-3$ doğrusuna dik olan teğetinin denklemini yazınız.

Diklik şartından, $m_T \cdot 2 = -1$ olacak.

$$m_T = -\frac{1}{2}$$

$$y' = (x^2+2)' = 2x$$

$$m_T = y'_{x=x_0} = 2x\Big|_{x=x_0} = 2x_0 = -\frac{1}{2}$$

$$x_0 = -\frac{1}{4}$$

$$y_0 = y\Big|_{x=x_0} = (x^2+2)\Big|_{x=x_0=-\frac{1}{4}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 2 = \frac{1}{16} + 2 = \frac{33}{16}$$

$$y - y_0 = m_T \cdot (x - x_0)$$

$$y - \frac{33}{16} = -\frac{1}{2}\left[x - \left(-\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$y - \frac{33}{16} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{31}{16}$$

(10) $y = x^2 - 3x$ eğrisi üzerindeki $A(1,-2)$ noktasından çizilen normal denklemini yazınız.

$x_0 = 1, \quad y_0 = -2$

$y' = (x^2 - 3x)' = 2x - 3$

$m_T = y'\big|_{x=x_0} = (2x-3)\big|_{x=x_0=1} = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

$m_T \cdot m_N = -1 \qquad m_N = -\dfrac{1}{m_T} = -\dfrac{1}{-1} = 1$

$y - y_0 = m_N \cdot (x - x_0)$

$y - (-2) = 1 \cdot (x - 1)$

$y = x - 3$

(11) $y = (x-2)^2$ fonksiyonu grafiği üzerindeki $A(1,1)$ noktasından çizilen normalin eğimini bulunuz.

$x_0 = 1, \quad y_0 = 1$

$y' = [(x-2)^2]' = 2(x-2)$

$m_T = y'|_{x=x_0} = 2(x-2)|_{x=x_0=1} = 2(1-2) = -2$

$m_N \cdot m_T = -1$

$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

12) $y = e^{x^2-1}$ eğrisinin $x_0 = 1$ noktasındaki normalinin eğimini bulunuz.

$y' = (e^{x^2-1})' = e^{x^2-1} \cdot (x^2-1)' = 2x \cdot e^{x^2-1}$

$m_T = y'_{x=x_0} = 2x \cdot e^{x^2-1}|_{x=x_0=1} =$

$= 2 \cdot 1 \cdot e^{1^2-1} = 2$

$m_N \cdot m_T = -1 \Rightarrow m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{2}$

13) $y = \frac{2x-1}{x+1}$ eğrisinin $x_0 = -2$ apsisli noktasındaki normal denklemini yazınız.

$y' = \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)' = \frac{2(x+1)-(2x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$

$$m_T = y'_{x=x_0} = \frac{3}{(x+1)^2}\Big|_{x=x_0=-2} = \frac{3}{1} = 3$$

$$m_T \cdot m_N = -1 \Rightarrow m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{3}$$

$$y_0 = y\big|_{x=x_0} = \frac{2x-1}{x+1}\Big|_{x=x_0=-2} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$y - y_0 = m_N \cdot (x - x_0)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{3} \cdot [x - (-2)]$$

$$y - 5 = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$$

(14) $y = x^2 + \ln x$ grafiğinin $x_0 = 1$ apsisli noktasındaki normal denklemini yazınız.

$$y_0 = y\big|_{x=x_0} = (x^2 + \ln x)_{x=x_0=1} = 1^2 + \ln 1 = 1$$

$$y' = (x^2 + \ln x)' = 2x + \frac{1}{x}$$

$$m_T = y'_{x=x_0} = \left(2x + \frac{1}{x}\right)_{x=x_0=1} = 2 \cdot 1 + \frac{1}{1} = 3$$

$m_N \cdot m_T = -1$'den, $m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{3}$

$y - y_0 = m_N \cdot (x - x_0)$

$y - 1 = -\frac{1}{3} \cdot (x - 1)$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ bulunur.

(15) $y = -x^3 + 2x$ grafiğine $x_0 = -1$ apsisli noktadan çizilen teğet ve normal denklemlerini yazınız.

$y_0 = y\big|_{x=x_0} = (-x^3 + 2x)\big|_{x=x_0=-1} = -(-1)^3 + 2\cdot(-1) = -1$

$y' = (-x^3 + 2x)' = -3x^2 + 2$

$m_T = y'_{x=x_0} = (-3x^2 + 2)\big|_{x=x_0=-1} = -3\cdot(-1)^2 + 2 = -1$

$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{-1} = 1$

Teğet denklemi:

$y - y_0 = m_T(x - x_0)$

$y - (-1) = -1[x - (-1)]$

$y + 1 = -x - 1 \implies y = -x - 2$

Normal denklemi:

$$y-y_0=m_N\cdot(x-x_0)$$

$$y-(-1)=1\cdot[x-(-1)]$$

$$y+1=x+1 \Rightarrow y=x$$

16) $y=\ln 2x$ grafiğine $x_0=1$ apsisli noktadan çizilen teğet ve normal denklemlerini yazınız.

$$y_0=y\big|_{x=x_0}=\ln 2x\big|_{x=x_0=1}=\ln 2$$

$$y'=(\ln 2x)'=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$$

$$m_T=y'\big|_{x=x_0}=\frac{1}{x}\Big|_{x=x_0=1}=\frac{1}{1}=1$$

$$m_N=-\frac{1}{m_T}=-\frac{1}{1}=-1$$

Teğet denk:

$$y-y_0=m_T\cdot(x-x_0)$$

$$y-\ln 2=1(x-1) \Rightarrow \underline{y=x-1+\ln 2}$$

Normal denk:

$$y-y_0=m_N\cdot(x-x_0)$$

$$y-\ln 2=-1\cdot(x-1) \Rightarrow \underline{y=-x+1+\ln 2}$$

Türev 9
Türevin Uygulamaları

Prof. Dr. Ziyaddin RECEBLİ

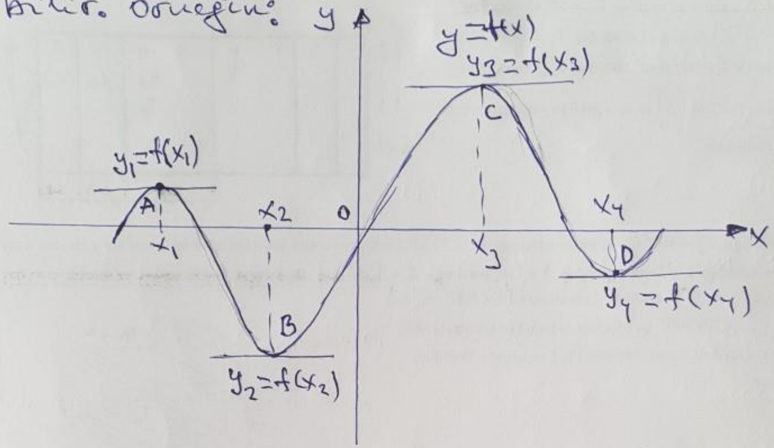
Fonksiyonların Yerel maxsimum ve Yerel minimum değerlerinin hesabı

$y=f(x)$ fonksiyonunun artanlıktan azalanlığa geçtiği noktaya yerel maksimum noktası, azalanlıktan artanlığa geçtiği noktaya ise yerel minimum noktası denilir. Yerel maxsimum ve yerel minimum noktaların tamamı fonksiyonun yerel ekstremum noktaları adlandırılır. Yerel ekstremum noktalarda fonksiyonların 1. mertebeden türevleri işaret değiştirmektedirler. Fonksiyonların yerel ekstremum noktalarına denk gelen x değerlerine onun kritik noktaları denilir. Kritik noktalarda,

$y'=0$ veya $f'(x)=0$ eşitliği sağlanmaktadır.

Fonksiyonların grafikleri verildiğinde

oradan fonksiyonun yerel ekstremum değerleri, kritik noktaları bulunabilir. Örneğin:



x_1, x_2, x_3, x_4 – kritik noktalardır.

$A[x_1, f(x_1)]$, $C[x_3, f(x_3)]$ noktaları yerel max.

$B[x_2, f(x_2)]$, $D[x_4, f(x_4)]$ noktaları yerel min.

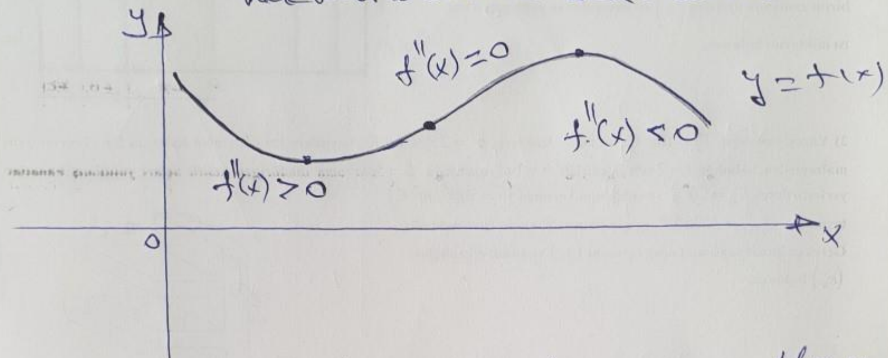
Grafiği verilmeyen $y = f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstremumları ve kritik noktaları aşağıda verilen işlemlerin yapılması sonucunda bulunabilmektedir:

1. $f'(x) = 0$ denklemi çözülerek $x_1, x_2, x_3 \ldots$ kritik noktalar bulunur.

2. $f''(x_1) > 0$ ise $[x_1, f(x_1)]$ noktası yerel minimum nokta olarak belirlenir.

3. $f''(x_2) < 0$ ise $[x_2, f(x_2)]$ noktası yerel maksimum nokta olarak belirlenir.

4. $f''(x_3) = 0$ ise $[x_3, f(x_3)]$ noktası dönüm (büküm) noktası olarak belirlenir.



Yerel maksimumların en büyüğü mutlak maksimum,
Yerel minimumların en küçüğü ise mutlak minimum değer olarak tanımlanır.

Örnekler:

1. $y = x^2 - 2x + 5$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktasını bulunuz.

$y' = (x^2 - 2x + 5)' = 2x - 2 \qquad 2x - 2 = 0 \quad x = 1$

$y'' = (2x-2)' = 2 \qquad y''(1) = 2 > 0$ olduğu için

fonksiyonun yerel minimum noktası vardır.

$y_{min} = y(1) = (x^2 - 2x + 5)\Big|_{x=1} = 1^2 - 2\cdot 1 + 5 = 4$

$A(1, 4)$

(2) $y = x^2 + 4x + 2$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktasını bulunuz.

$y' = (x^2 + 4x + 2)' = 2x + 4 \qquad 2x + 4 = 0 \quad x = -2$

$y'' = (2x + 4)' = 2 \qquad y''(-2) = 2 > 0$ olduğu için

fonksiyonun $y_{min} = (x^2 + 4x + 2)\Big|_{x=-2} =$

$= (-2)^2 + 4\cdot(-2) + 2 = -2$

yerel minimum noktası olacaktır.

$B(-2, -2)$

(3) $y = -x^2 + 2x + 5$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktasını bulunuz.

$y' = (-x^2 + 2x + 5)' = -2x + 2 \qquad -2x + 2 = 0 \quad x = -1$

$y'' = (-2x + 2)' = -2 \qquad y''(-1) = -2 < 0$ olduğu için

fonksiyonun yerel maksimum noktası olacak.

$y_{max} = (-x^2 + 2x + 5)\Big|_{x=-1} = -(-1)^2 + 2\cdot(-1) + 5 =$

$= -1 - 2 + 5 = 2$

$C(-1, 2)$

4) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ fonksiyonun yerel ekstremum noktasını bulunuz.

$y' = (x^3 - 3x^2 + 4)' = 3x^2 - 6x$

$3x^2 - 6x = 0$

$x \cdot (x-2) = 0$

$x_1 = 0 \,;\; x_2 = 2$

$y'' = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$

$y''(x_1) = y''(0) = (6x-6)\Big|_{x=0} = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$ olduğu

için, $y_{max} = y(0) = (x^3 - 3x^2 + 4)\Big|_{x=0} = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4$

$A(0;4)$ yerel max.

$y''(x_2) = y''(2) = (6x-6)\Big|_{x=2} = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$ olduğu

için, $y_{min} = y(2) = (x^3 - 3x^2 + 4)\Big|_{x=2} =$

$= 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$

$B(2,0)$ yerel min.

5) $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ fonksiyonunun yerel ekstremum değerlerini bul.

$y' = (x^3 + 3x^2 - 9x + 1)' = 3x^2 + 6x - 9$

$3x^2 + 6x - 9 = 0 \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \quad x_1 = 1 \,;\; x_2 = -3$

$y'' = (3x^2 + 6x - 9)' = 6x + 6$

⑥

$y''(x_1) = (6x+6)\big|_{x=1} = 6\cdot 1+6 = 12 > 0$ olduğu

için, $y_{min} = y(x_1) = (x^3+3x^2-9x+1)\big|_{x=1} =$

$= 1^3+3\cdot 1^2-9\cdot 1+1 = 1+3+1-9 = -4$

$A(1,-4)$ yerel min

$y''(x_2) = (6x+6)\big|_{x=x_2=-3} = 6\cdot(-3)+6 = -12 < 0$

olduğu için,

$y_{max} = y(x_2) = (x^3+3x^2-9x+1)\big|_{x=-3} =$

$= (-3)^3+3\cdot(-3)^2-9\cdot(-3)+1 =$

$= \cancel{-27}+\cancel{27}+27+1 = 28$

$B(-3;28)$ yerel max.

⑥ $y = x^3+x^2-x+5$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarının apsisleri kaçtır.

$y' = (x^3+x^2-x+5)' = 3x^2+2x-1$

$3x^2+2x-1 = 0 \qquad x_1 = -1, \; x_2 = \frac{1}{3}$

$x_1+x_2 = -1+\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

17

7) $y = x^2 + ax + b$ fonksiyonunun yerel minimum noktası $A(1,4)$ noktası olduğuna göre $a-b=$?

A noktası eğri üzerinde olduğundan,

$4 = 1^2 + a \cdot 1 + b \Rightarrow a + b = 3$ bulunur.

A yerel minimum noktası olduğundan

$y'(1) = 0$

$y'_{x=1} = (x^2 + ax + b)'_{x=1} = 0 \Rightarrow (2x + a)\Big|_{x=1} = 0$

$2 \cdot 1 + a = 0$

$a = -2$

$a + b = 3$'den

$b = 3 - a = 3 - (-2) = 5$

$a - b = -2 - 5 = -7$ bulunur.

8) $y = -x^2 + ax + b$ fonksiyonunun yerel max noktası $A(2,7)$ olduğuna göre, $a+b=$?

A noktası eğri üzerinde olduğu için,

$7 = -2^2 + 2 \cdot a + b \qquad 2a + b = 11$

A noktası yerel max olduğundan dolayı,

$y'(2) = (-x^2 + ax + b)\Big|_{x=2} = (-2x + a)_{x=2} = -2 \cdot 2 + a = 0$

$a = 4$

$2a+b=11$'den $b=11-2a=11-2\cdot\cancel{4}=3$

$a+b=4+3=7$ bulunur.

9) $y=x^3+mx^2+4mx+12$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarının olmaması için m'nin değer alabileceği en geniş aralığı bulunuz.

$y'=(x^3+mx^2+4mx+12)'=3x^2+2mx+4m$

Yerel ekstremum olmaması için,

$y'=0$ denkleminin gerçek kökleri olmayacaktır. Bunun için,

$3x^2+2mx+4m=0$ denkleminde

$\Delta=m^2-3\cdot4m=m^2-12m<0$ olacaktır.

$m\cdot(m-12)<0$

$m_1=0,\ m_2=12$

$\underline{0<m<12}$ bulunur.

10) $y=\frac{1}{3}x^3-4x^2+12x-\frac{1}{3}n$ fonksiyonunda

$y_{max}=6$ ise, $n=?$

$y'=(\frac{1}{3}x^3-4x^2+12x-\frac{1}{3}\cdot n)'=x^2-8x+12$

$x^2-8x+12=0 \quad x_1=2;\ x_2=6$

$y'' = (x^2 - 8x + 12)' = 2x - 8$

$y''(2) = (2x-8)\Big|_{x=2} = 2\cdot 2 - 8 = 4 - 8 = -4 < 0$ olduğu için

$y_{max} = y(x_1) = y(2) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x - \frac{1}{3}n\right)\Big|_{x=2} =$

$= \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 4\cdot 2^2 + 12\cdot 2 - \frac{1}{3}\cdot n = 6$ olacaktır

$\frac{8}{3} - 16 + 24 - \frac{1}{3}\cdot n = 6$

$\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\cdot n + 8 = 6 \Rightarrow n = 14$ bulunur.

$y''(6) = (2x-8)_{x=6} = 2\cdot 6 - 8 = 4 > 0$ olduğu için $\underline{y_{min}}$ ver

(11) $y = ax^3 + bx + 2$ fonksiyonunda $A(1,0)$ noktası yerel minimum noktası ise $a = ?$ $b = ?$

A noktası eğri üzerinde olduğu için

$0 = a\cdot 1^3 + 1\cdot b + 2 \qquad a + b = -2$

A noktasında $1 = x$ kritik nokta olduğundan

$y'(1) = (ax^3 + bx + 12)'_{x=1} = (3ax^2 + b)\Big|_{x=1} = 3a\cdot 1^2 + b =$

$= 3a + b = 0$ olacaktır

$\left.\begin{array}{l} a + b = -2 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -3 \end{array}$ olarak bulunacaklardır.

(12) $y = x^3 + 2x^2 - mx + n$ fonksiyonunda yerel max nokta $A(1, 8)$ olduğuna göre $m \cdot n = ?$

A noktası grafik üzerinde olduğu için,

$$8 = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - m \cdot 1 + n \Rightarrow -m + n = 5$$

A noktası yerel max nokta olduğu için,

$$y'(1) = (x^3 + 2x^2 - mx + n)'_{x=1} = (3x^2 + 4x - m)_{x=1} =$$

$$= 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - m = 7 - m = 0 \text{ olacaktır}$$

$$m = 7$$

$-m + n = 5$'den $n = 12$,

$m \cdot n = 7 \cdot 12 = 84$ bulunur.

(13) $y = \dfrac{x^2 + x}{x - m}$ fonksiyonunda $A(1, n)$ bir ekstremum nokta olduğuna göre, $m \cdot n = ?$

$$y' = \left(\frac{x^2 + x}{x - m}\right)' = \frac{(x^2 + x)'(x - m) - (x^2 + x) \cdot (x - m)'}{(x - m)^2} =$$

$$= \frac{(2x + 1) \cdot (x - m) - (x^2 + x)}{(x - m)^2}$$

Ekstremum noktalarda, $y' = 0$ olduğu için

$$y'(1) = y'\Big|_{x=1} = \frac{(2x+1)(x-m)-(x^2+x)}{(x-m)^2}\Bigg|_{x=1} =$$

$$= \frac{(2+1)(1-m)-(1+1)}{(1-m)^2} = 0$$

$$\frac{1-3m}{(1-m)^2} = 0 \Rightarrow 1-3m=0;\ m=\frac{1}{3}$$

A noktası eğri üzerinde olduğu için,

$$n = \frac{1^2+1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

$m \cdot n = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$ bulunur.

(14) $y = \sin x + \cos x$ fonksiyonunun $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında alabildiği yerel max'i bulunuz.

$$y' = (\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$$

$$\cos x - \sin x = 0 \quad \cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$y'' = (\cos x - \sin x)' = -\sin x - \cos x$$

$$y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-\sin x - \cos x)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} =$$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0$ olduğuna göre,

$y_{max} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sin x + \cos x)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} =$

$= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$y_{max} = \sqrt{2}$. $\quad A\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ yerel max

15) $y = \frac{\ln x}{x}$ fonksiyonunun yerel max değerini bulunuz.

$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$y' = 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0$

$\ln x = 1$

$x = e^1 = e$

$y'' = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1 - \ln x)' \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot (x^2)'}{x^4} =$

$= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \cdot \ln x}{x^4} =$

$= \frac{-3x + 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{2 \cdot \ln x - 3}{x^3}$

$$y''(e) = y''_{x=e} = \left.\frac{2\cdot\ln x - 3}{x^3}\right|_{x=e} = \frac{2\cdot\ln e - 3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0$$

olduğu için, (13)

$$y_{max} = y(e) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)\Big|_{x=e} = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

$A\left(e, \frac{1}{e}\right)$ yerel max.

(16) $y = x\cdot e^{3x}$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını bulunuz.

$$y' = (x\cdot e^{3x})' = x'\cdot e^{3x} + x\cdot(e^{3x})' = e^{3x} + 3\cdot x\cdot e^{3x} =$$
$$= e^{3x}\cdot(1+3x)$$

$$e^{3x}\cdot(1+3x) = 0 \Rightarrow 1+3x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$y'' = [e^{3x}\cdot(1+3x)]' = 3\cdot e^{3x}\cdot(1+3x) + e^{3x}\cdot 3 =$$
$$= 3e^{3x}\cdot(1+3x+1) = 3\cdot e^{3x}\cdot(3x+2)$$

$$y''\left(-\frac{1}{3}\right) = \left[3\cdot e^{3x}\cdot(3x+2)\right]_{x=-\frac{1}{3}} = 3\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot 3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot 3+2\right) =$$

$$= 3\cdot e^{-1}(-1+2) = \frac{3}{e} > 0 \text{ olduğu için,}$$

$$y_{min} = y\left(-\frac{1}{3}\right) = x \cdot e^{3x}\Big|_{x=-\frac{1}{3}} =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot 3} = -\frac{1}{3} \cdot e^{-1} = -\frac{1}{3e}$$

$A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3e}\right)$ yerel min. olacak.