DİNAMİK

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

Behcet DAĞHAN

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

İÇİNDEKİLER

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

3

KİNETİK

MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ

3.1

Kuvvet, Kütle ve İvme

Kinetik problemlerini çözerken Newton prensiplerinden faydalanılır. Bunu yaparken 3 temel yaklaşım vardır:

1. Newton'un ikinci kanununun direk uygulanması (kuvvet, kütle ve ivme yöntemi),

2. İş ve enerji prensibi,

3. İmpuls ve momentum yöntemi.

Kuvvet, Kütle ve İvme

Newton'un ikinci kanunu

Bir maddesel noktanın ivmesi, ona etki eden bileşke kuvvet ile doğru orantılıdır ve aynı yöndedir.

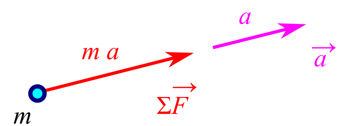
$$\boxed{\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a}}$$

Yön : $\Sigma\vec{F} \,//\, \vec{a}$

Şiddet : $|\,\Sigma\vec{F}\,| = m\,a$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \Sigma\vec{F}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n = \Sigma\vec{F} = m\,\vec{a}$$

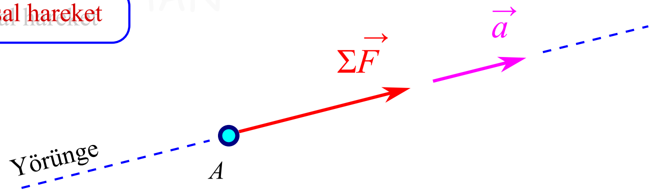


$$\Sigma F \neq m\,a$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = \Sigma F \neq |\,\Sigma\vec{F}\,| = m\,a$$

Bütün kuvvetler birbirine paralel ise ancak o zaman $\Sigma F = m\,a$ olur.

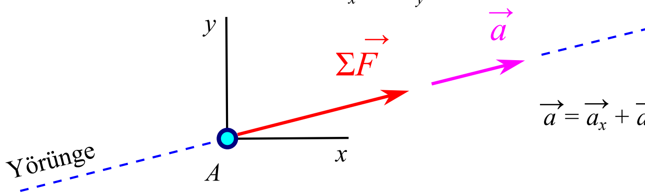
Doğrusal hareket



$$\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a}$$

Doğrusal hareket incelenirken çoğunlukla kartezyen koordinatlar kullanılır.

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_x + \Sigma\vec{F}_y$$



$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$$\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$\Sigma\vec{F}_x = m\,\vec{a}_x$$

$$\Sigma\vec{F}_y = m\,\vec{a}_y$$

Bütün kuvvetlerin x-bileşenleri birbirine paralel olduğu için bu eşitlik skaler olarak da geçerlidir.

$$\Sigma F_x = m\,a_x$$

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \cdots + F_{nx} = m\,a_x$$

$$\Sigma F_y = m\,a_y$$

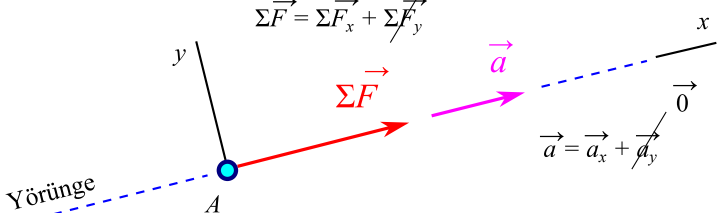
$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \cdots + F_{ny} = m\,a_y$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

Bu işaretler daima + dır.

Eksenlerden birisi genellikle yörünge ile çakıştırılır.

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_x + \cancel{\Sigma\vec{F}_y}^{\,\vec{0}}$$



$$\vec{a} = \vec{a}_x + \cancel{\vec{a}_y}^{\,\vec{0}}$$

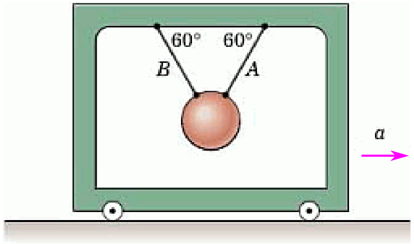
$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_x = m\,\vec{a}_x$$

$$\Sigma F_x = m\,a_x$$

$$\Sigma F_y = m\,a_y = 0$$

Örnek Problem 3/1

Çelik bir bilya ivmelenmekte olan bir çerçeveye şekildeki gibi A ve B kabloları ile asılmıştır. A kablosundaki çekme kuvvetinin B dekinin 2 katı olması için çerçevenin ivmesi a ne olmalıdır?



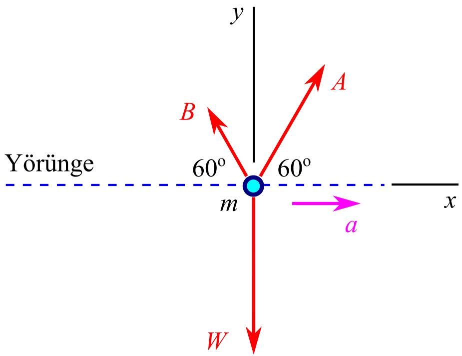
Verilenler:

$A = 2\,B$

İstenenler:

$a = ?$

Çözüm



$W = m\,g$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a} \\ \Sigma\vec{F} = \vec{R}\end{array}\right\} \quad R = m\,a$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F = A + B + W \\ \Sigma F \neq R\end{array}\right\} \quad \Sigma F \neq m\,a$$

$\Sigma F_x = m\,a_x$

Bu işaretler daima + dır.

$A_x + B_x + W_x = m\,a_x$

$A\cos60^\circ - B\cos60^\circ + 0 = m\,a \quad \rightarrow \quad (A - B)\cos60^\circ = m\,a$

$\Sigma F_y = m\,a_y = 0$

$A = 2\,B$

$A_y + B_y + W_y = 0$

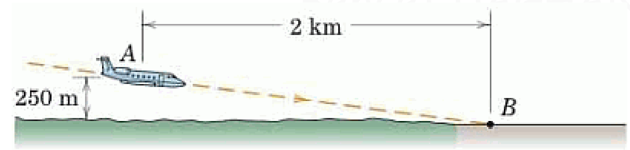
$A\sin60^\circ + B\sin60^\circ - W = 0 \quad \rightarrow \quad (A + B)\sin60^\circ = m\,g$

$$a = \frac{g}{6\sin60^\circ}$$

$$\boxed{a = 1.89\ \text{m/s}^2}$$

Örnek Problem 3/2

İnişe geçmiş olan şekildeki uçağın doğrusal olan yörüngesi üzerindeki A noktasında 300 km/h olan hızı, uçak B noktasına ulaştığında 200 km/h e düşmektedir. Göz önüne alınan bu aralıkta, havanın 200 Mg lık uçağa uyguladığı kuvvetin ortalama şiddeti R yi bulunuz.



Çözüm

Verilenler:

$v_A = 300$ km/h

$v_B = 200$ km/h

$m = 200$ Mg

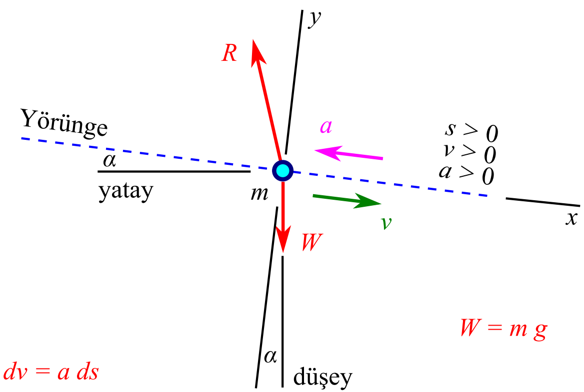
R nin ortalama değeri istendiğine göre R sabit alınacak demektir.

Kuvvetler sabit olduğu için ivme de sabittir.

a (sabit)

İstenenler:

$R = ?$



$v\,dv = a\,ds$

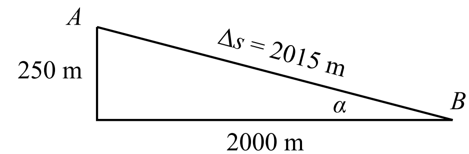
$$\int_{v_A}^{v_B} v\,dv = a \underbrace{\int_{s_A}^{s_B} ds}_{\Delta s}$$

$a = -\,0.957$ m/s^2 (sabit)

yön belirtir

$W = m\,g$

$a_x = a$



$\tan\alpha = \dfrac{250}{2000}$

$\alpha = 7.13^\circ$

$\Sigma F_x = m\,a_x$

$R_x + W_x = m\,a_x$

$R_x + W\sin\alpha = m\,a_x$

$R_x = m\,(-\,g\sin\alpha + a_x)$

$R_x = -\,434.76$ kN

yön belirtir

$\Sigma F_y = m\,a_y = 0$

$R_y + W_y = 0$

$R_y - W\cos\alpha = 0$

$R_y = m\,g\cos\alpha$

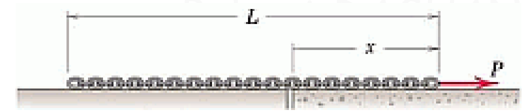
$R_y = 1946.85$ kN

$R^2 = R_x^{\,2} + R_y^{\,2}$

$\boxed{R = 1994.8 \text{ kN}}$

Örnek Problem 3/3

Birim boyunun kütlesi ρ olan ağır bir zincir, bir kısmı sürtünmeli ve bir kısmı da sürtünmesiz olan yatay bir yüzey üzerinde sabit bir P kuvveti ile şekildeki gibi çekilmektedir. Sürtünmeli kısım ile zincir arasındaki sürtünme katsayısı μ_k dır. $x = 0$ iken zincirin tamamı sürtünmesiz kısım üzerinde sükunette durmaktadır. $x = L$ olunca zincirin hızı v ne olur? Zincirin daima gergin kaldığını kabul ediniz.



Sürtünmesiz Sürtünmeli

Verilenler:

L

$\rho = m/L$

P (sabit)

$\mu = \mu_k$

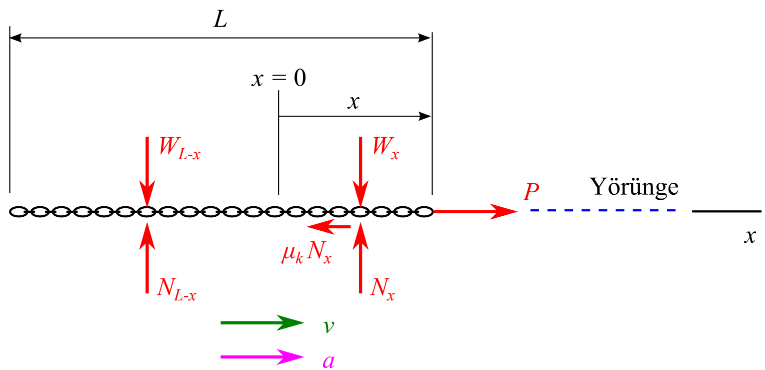
$x = 0$ iken $v = 0$

İstenenler:

$x = L$ iken $v = ?$

$P = P_{min} = ?$

Çözüm



W_{L-x} : Boyu L-x olan kısmın ağırlığı

W_x : Boyu x olan kısmın ağırlığı

(*W* nin *x*-bileşeni değil)
(zaten *W* nin *x*-bileşeni yoktur)

$\Sigma F_y = m\, a_y = 0$

$N_{L-x} = W_{L-x} = \rho\,(L - x)\,g$

$N_x = W_x = \rho\, x\, g$

$\Sigma F_x = m\, a_x$

$P - \mu_k N_x = m\, a$

$P - \mu_k W_x = m\, a$

$P - \mu_k\, \rho\, x\, g = \rho\, L\, \dfrac{v\,dv}{dx}$

$v\,dv = a\,ds$

$a = \dfrac{v\,dv}{dx}$

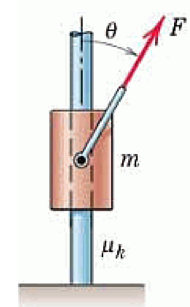
$$\int_0^L (P - \mu_k\, \rho\, x\, g)\, dx = \rho\, L \int_0^v v\, dv$$

$$\left(P\,x - \mu_k \rho\, \frac{x^2}{2}\, g\right\Big|_0^L = \rho\, L \left(\frac{v^2}{2}\right\Big|_0^v$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2\,P}{\rho} - \mu_k\, g\, L}}$$

Örnek Problem 3/4

Kütlesi m olan şekildeki halka, şiddeti sabit fakat yönü değişken olan bir F kuvvetinin etkisi altında düşey olan şaft üzerinde kaymaktadır. $\theta = kt$ dir ve buradaki k bir sabittir. $\theta = 0$ iken durgun halden harekete başlayan halkayı $\theta = \pi/2$ iken tekrar durduracak olan kuvvetin şiddeti F yi bulunuz. Halka ile şaft arasındaki kinetik sürtünme katsayısı μ_k dır.



Verilenler:

m

$\theta = kt$

$k =$ sb.

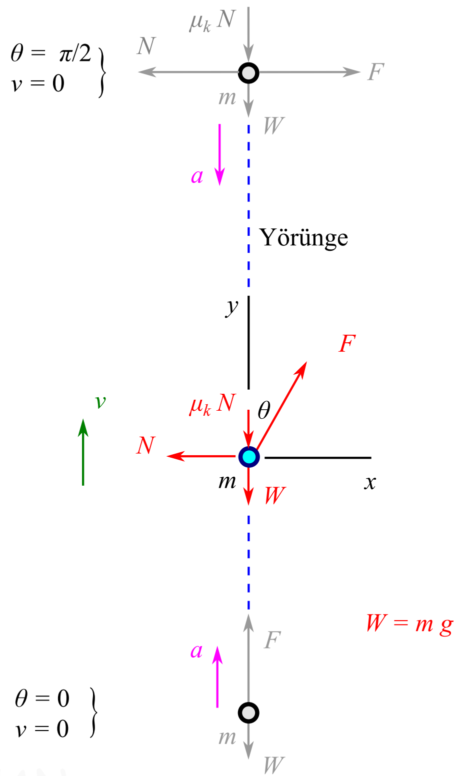
$\theta = \theta_1 = 0$ iken: $v_1 = 0$

$\theta = \theta_2 = \pi/2$ iken: $v_2 = 0$

μ_k

İstenenler:

$F = ?$



Çözüm

$$\Sigma F_x = m\, a_x = 0$$

$$F \sin\theta - N = 0$$

$$N = F \sin\theta$$

$$\Sigma F_y = m\, a_y$$

$$F \cos\theta - \mu_k N - W = m\, a$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$F \cos\theta - \mu_k (F \sin\theta) - W = m \frac{dv}{dt}$$

$$\theta = kt$$

$$d\theta = k\, dt$$

$$d\theta/k = dt$$

$$F (\cos\theta - \mu_k \sin\theta) - W = m \frac{dv}{d\theta/k}$$

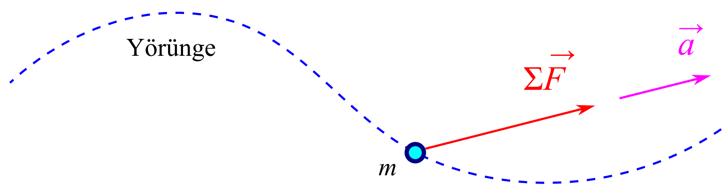
$$F \int_0^{\pi/2} (\cos\theta - \mu_k \sin\theta)\, d\theta - W \int_0^{\pi/2} d\theta = k\, m \int_0^0 dv$$

$$F (\sin\theta + \mu_k \cos\theta \Big|_0^{\pi/2} - W (\pi/2) = 0$$

$$\boxed{F = \frac{\pi\, m\, g}{2\,(1 - \mu_k)}}$$

Düzlemde eğrisel hareket

$$\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a}$$



Kartezyen koordinatlar

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_x + \Sigma\vec{F}_y$$

$$\Sigma F_x = m\,a_x$$

$$\Sigma F_y = m\,a_y$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$$a^2 = a_x^{\,2} + a_y^{\,2}$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$$

Normal ve teğetsel eksenler

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_n + \Sigma\vec{F}_t$$

$$\Sigma F_n = m\,a_n$$

$$\Sigma F_t = m\,a_t$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

$$a^2 = a_n^{\,2} + a_t^{\,2}$$

$$a_n = v\,\dot{\beta} = \rho\,\dot{\beta}^{\,2} = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a_t = \dot{v}$$

Polar koordinatlar

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_r + \Sigma\vec{F}_\theta$$

$$\Sigma F_r = m\,a_r$$

$$\Sigma F_\theta = m\,a_\theta$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta$$

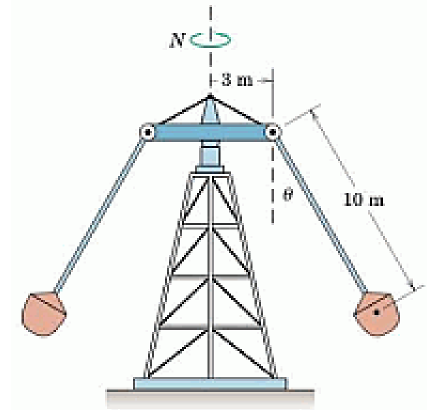
$$a^2 = a_r^{\,2} + a_\theta^{\,2}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^{\,2}$$

$$a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}$$

Örnek Problem 3/5

Şekilde görülen uçan sandalyelerin kollarının düşey doğrultu ile yaptığı açının $\theta = 60^\circ$ olması için sistemin devir sayısı N nin ne olması gerektiğini hesaplayınız. Sandalyelerin bağlı olduğu kolların kütlelerini ihmal edip her bir sandalyeyi bir maddesel nokta olarak göz önüne alınız.



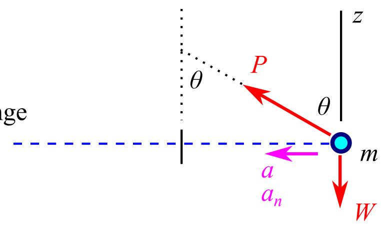
Verilenler:

$\theta = 60^\circ$

İstenenler:

$N = ?$ (sabit)

Çözüm



$W = m\,g$

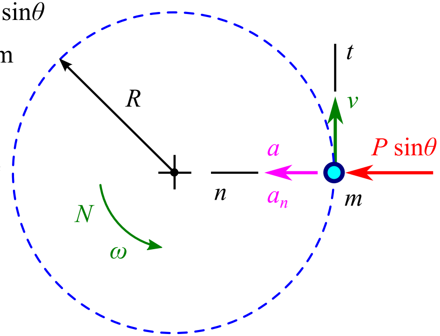
$\Sigma F_z = m\,a_z$

$P\cos\theta - W = 0$

$P = 2\,m\,g$

$R = 3 + 10\sin\theta$

$R = 11.66$ m



Üstten görünüş

$\Sigma F_n = m\,a_n$

$P\sin\theta = m\,a_n$

$a_n = R\,\omega^2$

$P\sin\theta = m\,R\,\omega^2$

$(2\,m\,g)\sin\theta = m\,R\,\omega^2$

$\omega = 1.207$ rad/s

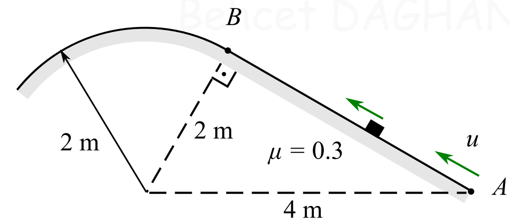
$\omega = N\,(2\pi/60)$

$N = \omega\,(60/2\pi)$

$N = 11.53$ rev/min

Örnek Problem 3/6

m kütleli bir cisim, A noktasından, eğik düzlemden yukarıya doğru u hızı ile harekete başlamıştır. Cisme, B noktasını geçtikten hemen sonra etki eden normal kuvvet, B den öncekinin yarısına düşüyorsa u yu hesaplayınız. Eğik düzlem ile cisim arasındaki sürtünme katsayısı 0.30 dur.



Verilenler:

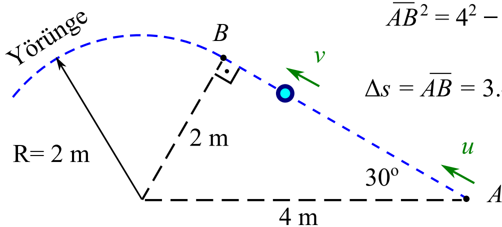
$N_1/N_2 = 2$

$\mu = 0.3$

İstenenler:

$u = ?$

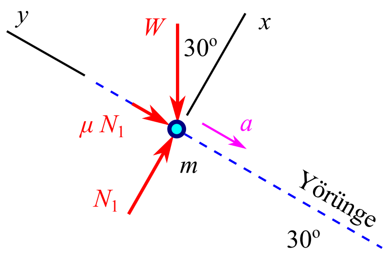
Maddesel nokta, B noktasına kadar doğrusal hareket yapmakta, B den itibaren de çembersel hareket yapmaya başlamaktadır.



$\overline{AB}^2 = 4^2 - 2^2$

$\Delta s = \overline{AB} = 3.46$ m

A ile B arasında N sabittir.



$W = m\,g$

$\Sigma F_x = m\,a_x$

$N_1 - W\cos 30^\circ = 0$

$N_1 = m\,g\cos 30^\circ$

$\Sigma F_y = m\,a_y$

$-\,W\sin 30^\circ - \mu\,N_1 = m\,a$

$a = -\,7.45\ \text{m/s}^2$ (sabit)

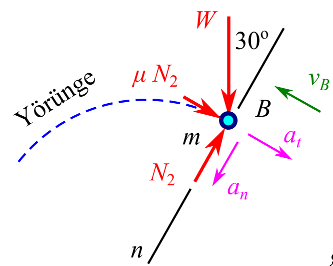
Çözüm

B noktasındaki hızı:

$v\,dv = a\,ds$

$$\int_u^{v_B} v\,dv = a \underbrace{\int_{s_A}^{s_B} ds}_{\Delta s} \quad \rightarrow \quad v_B^2 = u^2 + 2\,a\,\Delta s$$

B den hemen sonraki durum:



$\Sigma F_n = m\,a_n$

$W\cos 30^\circ - N_2 = m\,\dfrac{v_B^2}{R}$

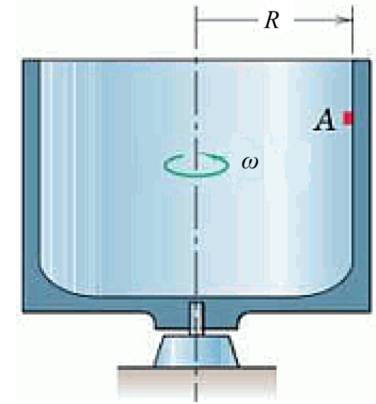
$2\,N_2 = N_1 = m\,g\cos 30^\circ$

$$g\cos 30^\circ\,(1 - 1/2) = \frac{u^2 + 2\,a\,\Delta s}{R}$$

$u = 7.75$ m/s

Örnek Problem 3/7

Küçük bir A nesnesi, iç yarıçapı R olan dönen bir silindirik kabın düşey olan cidarına merkezkaç etkisi ile dayanmaktadır. Eğer cisim ile kap arasındaki statik sürtünme katsayısı μ_s ise cismi aşağıya kaydırmadan kabın açısal hızı ω nın alabileceği minimum değeri bulunuz. ω daki değişimin azar azar olduğunu farzediniz.



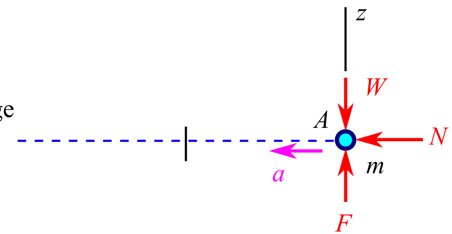
Çözüm

Verilenler:

R

μ_s

$a_t \approx 0$



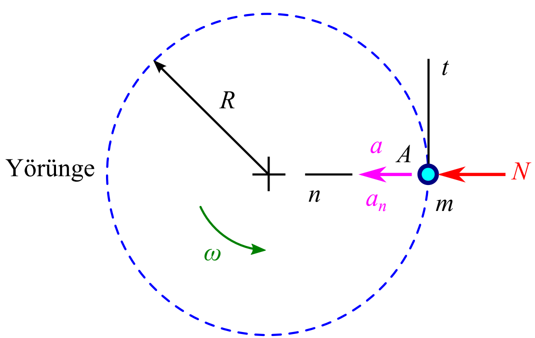
$W = m\,g$

$\Sigma F_z = m\,a_z$

$F - W = 0$

$F = m\,g$ (sabit)

Cisim tam kaymaya başlamak üzere iken sürtünme kuvveti maksimum değerdedir ve $F_{max} = \mu_s N$ dir.



Üstten görünüş

$\Sigma F_n = m\,a_n$

$N = m\,a_n$

$a_n = R\,\omega^2$

$N = m\,R\,\omega^2$ (değişken)

$\omega = \omega_{min}$ iken cisim tam kaymaya başlamak üzeredir. Dolayısı ile: $F = F_{max}$

$N = N_{min} = m\,R\,\omega_{min}^2$

$F = \mu_s N_{min}$

$m\,g = \mu_s\,m\,R\,\omega_{min}^2$

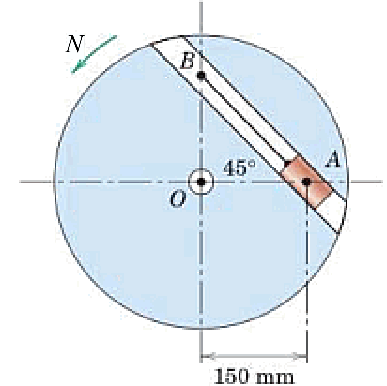
$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}}$$

İstenenler:

$\omega_{min} = ?$

Örnek Problem 3/8

3 kg lık A kızağı, kendi merkezi O etrafında ve yatay bir düzlemde dönmekte olan diskin 45° lik sürtünmesiz yarığı içerisinde serbestçe kayabilmektedir. Eğer kızak B noktasına bağlanmış bir ip ile A konumunda tutuluyorsa N = 300 rev/min lik sabit bir devir sayısı için ipteki çekme kuvveti T yi bulunuz.
Diskin dönme yönünün T ye bir etkisi var mıdır?



Verilenler:

$m = 3\ kg$

$\mu = 0$

N = 300 rev/min (sabit)

$a_t = 0$

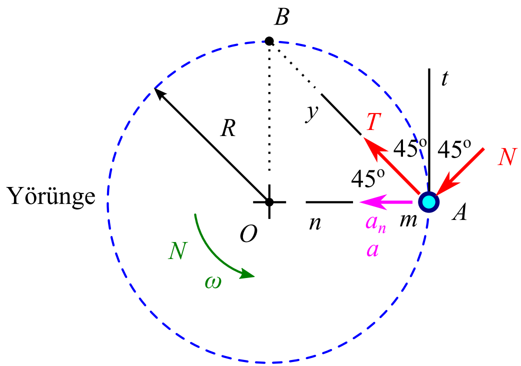
$a = a_n$

R = 150 mm

İstenenler:

$T = ?$

Çözüm



Üstten görünüş

$\Sigma F_t = m\, a_t$

$a_t = 0 \quad \rightarrow \quad \Sigma F_t = 0$

$\Sigma F_t = 0$ olabilmesi için N bu yönde olmalıdır.

$\Sigma F_y = m\, a_y$

$T = m\, a \cos 45°$

$a = a_n$

$a_n = R\, \omega^2$

$T = m\, R\, \omega^2 \cos 45°$

$\omega = N\,(2\pi/60)$

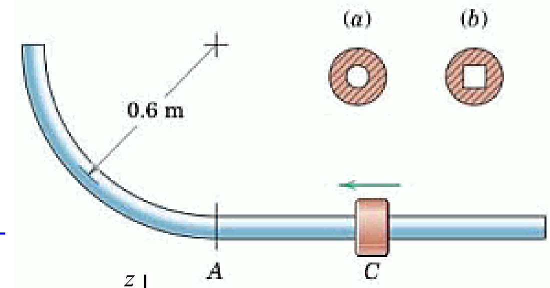
$\omega = 31.416$ rad/s

$T = 314$ N

Dönme yönünün ivmeye etkisi olmadığı için T ye de bir etkisi yoktur.

Örnek Problem 3/9

Bir C kızağı, yatay düzlemde yer alan şekildeki kılavuzun A noktasını geçerken 3 m/s şiddette bir hıza sahiptir. Kızak ile kılavuz arasındaki kinetik sürtünme katsayısı $\mu_k = 0.6$ dır. Kızağın, A noktasını geçtikten hemen sonraki teğetsel ivmesi a_t yi, kızağın ve kılavuzun kesit alanlarının (a) dairesel ve (b) kare olduğu durum için hesaplayınız. (b) şıkkında karenin kenarları yatay ve düşeydir. Kızak ile kılavuz arasında kaymayı kolaylaştıracak kadar bir boşluk olduğunu farzediniz.



Çözüm

Verilenler:

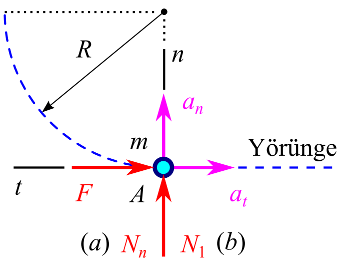
$v = 3$ m/s

$\mu_k = 0.6$

$R = 0.6$ m

İstenenler:

$a_t = ?$



Üstten görünüş

$$\Sigma F_t = m\, a_t$$

$$-F = m\, a_t$$

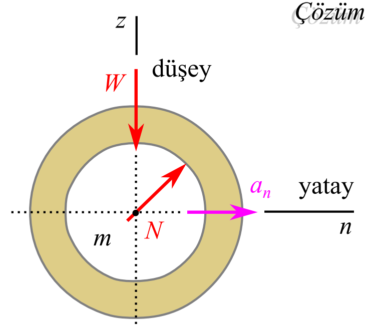
$$a_t = -F/m$$

$$W = m\, g$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$a_n = 15 \text{ m/s}^2$$

(a)



$$\Sigma F_n = m\, a_n \qquad \Sigma F_z = m\, a_z$$

$$N_n = m\, a_n \qquad N_z - W = 0$$

$$N^2 = N_n^2 + N_z^2$$

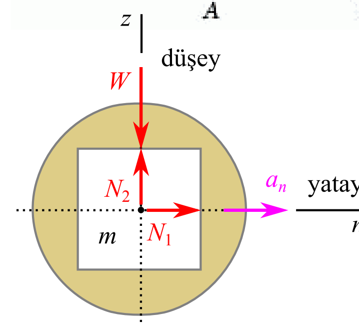
$$N = m\,(17.92)$$

$$F = \mu_k\, N$$

$$a_t = -\mu_k\, N/m$$

$$a_t = -\mu_k\,(17.92) \quad \rightarrow \quad \boxed{a_t = -\,10.75 \text{ m/s}^2}$$

(b)



$$\Sigma F_n = m\, a_n \qquad \Sigma F_z = m\, a_z$$

$$N_1 = m\, a_n \qquad N_2 - W = 0$$

$$F_1 = \mu_k\, N_1$$

$$F_2 = \mu_k\, N_2$$

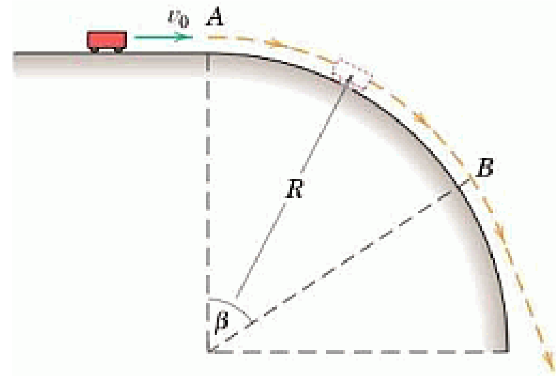
$$F = F_1 + F_2 = \mu_k\,(N_1 + N_2)$$

$$a_t = -\mu_k\,(N_1 + N_2)/m$$

$$a_t = -\mu_k\,(24.81) \quad \rightarrow \quad \boxed{a_t = -\,14.89 \text{ m/s}^2}$$

Örnek Problem 3/10

Küçük bir araç çembersel bir yörüngenin tepe noktası A dan yatay bir v_0 hızı ile geçtikten sonra aşağıya doğru indikçe hız kazanmaktadır. Aracın yer ile temasının kesilip havada serbest hareket etmeye başladığı β açısı için bir bağıntı elde ediniz. $v_0 = 0$ için β nın değerini hesaplayınız. Sürtünmeyi ihmal edip aracı bir maddesel nokta olarak göz önüne alınız.



Verilenler:

$v_A = v_0$

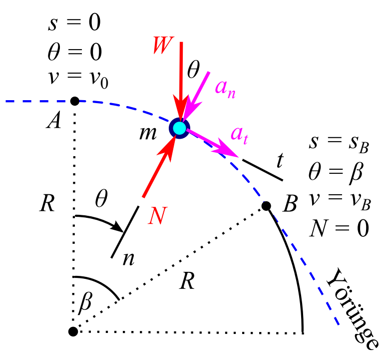
R

$\mu = 0$

İstenenler:

$\beta = ?$

Çözüm



$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_n = m\,a_n \\ a_n = v^2/R\end{array}\right\} \quad W\cos\theta - N = m\,\frac{v^2}{R}$$

$$W = m\,g$$

$\theta = \beta$ iken $v = v_B$ ve $N = 0$

$$\cancel{m}\,g\cos\beta - 0 = \cancel{m}\,\frac{v_B^2}{R} \rightarrow v_B^2 = g\,R\cos\beta$$

$$v_B^2 = v_0^2 + 2\,g\,R\,(1-\cos\beta) \quad = g\,R\cos\beta$$

$$\Sigma F_t = m\,a_t \qquad v\,dv = a_t\,ds$$

$$W\sin\theta = m\,a_t$$

$$a_t = g\sin\theta$$

$$\left.\begin{array}{l}\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_0^{s} a_t\,ds \\ ds = R\,d\theta\end{array}\right\} \quad v^2 = v_0^2 + 2\,g\,R\int_0^{\theta}\sin\theta\,d\theta$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\,g\,R\,(1-\cos\theta)$$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3\,g\,R}}$$

$$v_0 = 0 \rightarrow \boxed{\beta = 48.2^{\circ}}$$