

1.11. Dinamik Denklem Çıkarırken Dikkat Edilmesi Gereken Kurallar

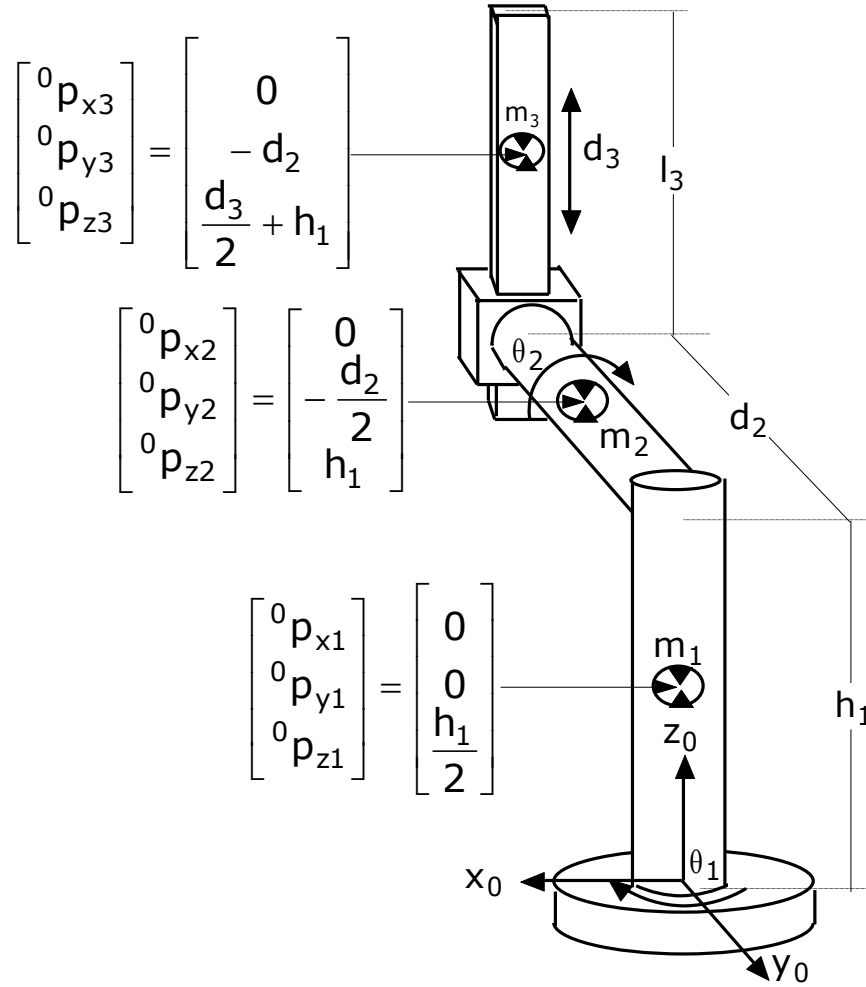
1. Dinamik denklem çıkarırken her bir adımda kütle merkezinin koordinatlarının ana koordinat sistemine göre doğru bulunup bulunmadığını test etmek için aşağıdaki işlemler yapılır.

a) Öncelikle robot bağlarının kütle merkezlerinin ana koordinat sistemine göre koordinatları robotun sıfır konumdaki katı gövde yapısından bakılarak tespit edilir.

b) Bu koordinatların h_i vektörlerine doğru bir şekilde aktarıldığını anlamak için her adımda elde edilen h_i vektöründe her açı için sıfır derece verilir. Bu durumda elde edilen vektör robotun sıfır konum değerlerini sağlamalıdır.

Şekil 1.5.3’de verilen robot üzerinde bir örnek test işlemi gerçekleştirelim. Şekil 1.12’de robotun kütle merkezlerinin ana koordinat sistemine göre koordinatları görülmektedir. Şekil 1.12’den bir iki ve üçüncü bağın kütle merkezlerinin ana koordinat sistemine göre konumları aşağıdaki gibi bulunur. Birinci bağ

$$\begin{bmatrix} {}^0p_{x1} \\ {}^0p_{y1} \\ {}^0p_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{h_1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.11.1)$$



Şekil 1.12. Kütle merkezlerinin ana koordinat sistemine göre konumları.

İkinci bağ

$$\begin{bmatrix} {}^0p_{x2} \\ {}^0p_{y2} \\ {}^0p_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}d_2 \\ h_1 \end{bmatrix} \quad (1.11.2)$$

Üçüncü bağ

$$\begin{bmatrix} {}^0p_{x3} \\ {}^0p_{y3} \\ {}^0p_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -d_2 \\ \frac{1}{2}d_3 + h_1 \end{bmatrix} \quad (1.11.3)$$

Şimdide elde ettiğimiz h vektörlerini yazalım.

$$h_1 = \begin{bmatrix} {}^0p_{x1} \\ {}^0p_{y1} \\ {}^0p_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \end{bmatrix}^T \quad (1.11.4)$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} {}^0p_{x2} \\ {}^0p_{y2} \\ {}^0p_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} d_2 s\theta_1 \\ -\frac{1}{2} d_2 c\theta_1 \\ h_1 \end{bmatrix} \quad (1.11.5)$$

$$h_3 = \begin{bmatrix} {}^0p_{x3} \\ {}^0p_{y3} \\ {}^0p_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1 s\theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3) + d_2 s\theta_1 \\ s\theta_1 s\theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3) - d_2 c\theta_1 \\ c\theta_2 (-\frac{1}{2} l_3 + d_3) + h_1 \end{bmatrix} \quad (1.11.6)$$

Bu vektörlerde açılara sıfır derece verip katı gövde yapısından elde ettiğimiz koordinatları elde edelim. Eğer aynı sonuçları elde edersek işlemler doğru bir şekilde gerçekleştirilmiş demektir.

$$h_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \end{bmatrix}^T \quad (1.11.7)$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} d_2 s(0) \\ -\frac{1}{2} d_2 c(0) \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} d_2 \\ h_1 \end{bmatrix} \quad (1.11.8)$$

$$h_3 = \begin{bmatrix} c(0)s(0)(\frac{1}{2}l_3 - d_3) + d_2s(0) \\ s(0)s(0)(\frac{1}{2}l_3 - d_3) - d_2c(0) \\ c(0)(-\frac{1}{2}l_3 + d_3) + h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -d_2 \\ -\frac{1}{2}l_3 + d_3 + h_1 \end{bmatrix} \quad (1.11.9)$$

Bilindiği gibi olduğundan

$$h_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -d_2 \\ -\frac{1}{2}d_3 + d_3 + h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -d_2 \\ \frac{1}{2}d_3 + h_1 \end{bmatrix} \quad (1.11.10)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi sıfır konumdan elde edilen koordinatlarla h_i vektöründen elde edilen koordinatlar aynı çıktığından işlemler doğru bir şekilde gerçekleştirilmiştir. Eğer bu koordinatlar aynı çıkmazsa Δh_i yanlış seçilmiş demektir. Δh_i ifadesinin doğru bir şekilde belirlenmesi için

$$\begin{bmatrix} {}^0p_{xi} \\ {}^0p_{yi} \\ {}^0p_{zi} \end{bmatrix} = {}^0iT \Delta h_i \quad (1.11.11)$$

denklemden faydalanılır. Δh_i ifadesini bulmak için denklemin her iki yanını da ${}^0iT^{-1}$ ile önden çarpalım.

$${}^0iT^{-1} \begin{bmatrix} {}^0p_{xi} \\ {}^0p_{yi} \\ {}^0p_{zi} \end{bmatrix} = {}^0iT^{-1} {}^0iT \Delta h_i$$

${}^0_iT^{-1}{}^0_iT$ birim matrise eşit olduğundan

$$\Delta h_i = {}^0_iT^{-1} \begin{bmatrix} {}^0p_{xi} \\ {}^0p_{yi} \\ {}^0p_{zi} \end{bmatrix} \quad (1.11.12)$$

olur. Şimdi de $i=1$ alarak birinci bağ için Δh_1 ifadesini belirleyelim

$$\Delta h_1 = {}^0_1T^{-1} \begin{bmatrix} {}^0p_{x1} \\ {}^0p_{y1} \\ {}^0p_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{h_1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{h_1}{2} & 1 \end{bmatrix}^T \quad (1.11.13)$$

elde edilir. Δh_2 ve Δh_3 aynı şekilde bulunabilir. Bu anlatılanlardan dinamik denklemlerin eklemlere yerleştirilen koordinat sistemlerinden bağımsız olduğu söylenebilir. Koordinat sistemleri Δh_i ifadeleri belirlendikten sonra eklemlere yerleştirilebilir.

2. Kütle matrisi simetrik bir matris olmalıdır. Örnek 1.5.3’de ki robotun kütle matrisini inceleyelim. Aşağıda görülen bu matriste $D_{12} = D_{21}$, ve $D_{23} = D_{32}$ olduğundan matris simetriktir.

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & d_2 m_3 c\theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3) & -d_2 m_3 s\theta_2 \\ d_2 m_3 c\theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3) & D_{22} & 0 \\ -m_3 d_2 s\theta_2 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (1.11.14)$$

3. NE ve LE yönteminden elde edilen her bir bağıın kütle merkezinin konumunu gösteren vektörler (${}^iP_{C_i} = \Delta h_i$) eşit olmalıdır. Aşağıda görüldüğü gibi örnek 1.5.3’de ki robot bağlarının kütle merkezinin konumunu gösteren vektörler her iki yöntemde de eşit çıkmıştır.

$${}^1P_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}h_1 \end{bmatrix} \quad {}^2P_{C_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}d_2 \end{bmatrix} \quad {}^3P_{C_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}l_3 \end{bmatrix} \quad (1.11.15)$$

$$\Delta h_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Delta h_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}d_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Delta h_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}l_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.11.16)$$

4. Her hangi bir robot için elde edilen dinamik modelin doğru olduğunu test etmek için aşağıdaki matris elde edilir. Bu matris görüldüğü üzere doğrudan kütle ve coriolis matrisine bağlıdır.

$$N(q, \dot{q}) = \dot{D}(q, \dot{q}) - 2C(q, \dot{q}) \quad (1.11.17)$$

bu matris eksi bakışlıklı bir matris olmalıdır. Eksi bakışlıklı bir matriste simetrik elemanlar zıt işaretli köşegendeki elemanlar ise sıfırdır. Bu özellik $\dot{q}^T N(q, \dot{q}) \dot{q}$ ifadesini sıfır yapar. Denklemden D kütle matrisini gösterirken,

$$[C(q, \dot{q})]_{k,j} = \sum_{i=1}^n C_{ijk} \dot{q}_i \quad (1.11.18)$$

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right] \quad (1.11.19)$$

dır. Üç eklemlili bir robot için C_{ijk} ve $[C(q, \dot{q})]_{k,j}$ elemanları aşığıdaki gibi bulunur ($i,j,k=1,2,3$). C_{ijk} elemanları

$$C_{111} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{11}}{\partial q_1} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial q_1}$$

$$C_{112} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{11}}{\partial q_2} \right] = \left[\frac{\partial D_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial q_2} \right]$$

$$C_{113} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{31}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{31}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{11}}{\partial q_3} \right] = \left[\frac{\partial D_{31}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{11}}{\partial q_3} \right]$$

$$C_{121} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{11}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{12}}{\partial q_1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{11}}{\partial q_2} \right]$$

$$C_{122} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{22}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{21}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{12}}{\partial q_2} \right]$$

$$C_{123} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{32}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{31}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{12}}{\partial q_3} \right]$$

$$C_{131} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{13}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{11}}{\partial q_3} - \frac{\partial D_{13}}{\partial q_1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{11}}{\partial q_3} \right]$$

$$C_{132} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{23}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{21}}{\partial q_3} - \frac{\partial D_{13}}{\partial q_2} \right]$$

$$C_{133} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{33}}{\partial q_1} + \frac{\partial D_{31}}{\partial q_3} - \frac{\partial D_{13}}{\partial q_3} \right]$$

$$C_{211} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{21}}{\partial q_1} \right]$$

$$C_{212} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{21}}{\partial q_2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{22}}{\partial q_1} \right]$$

$$C_{213} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{31}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{32}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{21}}{\partial q_3} \right]$$

$$C_{221} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{22}}{\partial q_1} \right] = \left[\frac{\partial D_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial q_1} \right]$$

$$C_{222} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{22}}{\partial q_2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{22}}{\partial q_2} \right]$$

$$C_{223} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{32}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{32}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{22}}{\partial q_3} \right] = \left[\frac{\partial D_{32}}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{22}}{\partial q_3} \right]$$

$$C_{231} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{13}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial q_3} - \frac{\partial D_{23}}{\partial q_1} \right]$$

$$C_{232} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{23}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{22}}{\partial q_3} - \frac{\partial D_{23}}{\partial q_2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{22}}{\partial q_3} \right]$$

$$C_{233} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{33}}{\partial q_2} + \frac{\partial D_{32}}{\partial q_3} - \frac{\partial D_{23}}{\partial q_3} \right]$$

$$C_{311} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{11}}{\partial q_3} + \frac{\partial D_{13}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{31}}{\partial q_1} \right]$$

$$C_{312} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{21}}{\partial q_3} + \frac{\partial D_{23}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{31}}{\partial q_2} \right]$$

$$C_{313} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{31}}{\partial q_3} + \frac{\partial D_{33}}{\partial q_1} - \frac{\partial D_{31}}{\partial q_3} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{33}}{\partial q_1} \right]$$

$$C_{321} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{12}}{\partial q_3} + \frac{\partial D_{13}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{32}}{\partial q_1} \right]$$

$$C_{322} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{22}}{\partial q_3} + \frac{\partial D_{23}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{32}}{\partial q_2} \right]$$

$$C_{323} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{32}}{\partial q_3} + \frac{\partial D_{33}}{\partial q_2} - \frac{\partial D_{32}}{\partial q_3} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{33}}{\partial q_2} \right]$$

$$C_{331} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{13}}{\partial q_3} + \frac{\partial D_{13}}{\partial q_3} - \frac{\partial D_{33}}{\partial q_1} \right] = \left[\frac{\partial D_{13}}{\partial q_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{33}}{\partial q_1} \right]$$

$$C_{332} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{23}}{\partial q_3} + \frac{\partial D_{23}}{\partial q_3} - \frac{\partial D_{33}}{\partial q_2} \right] = \left[\frac{\partial D_{23}}{\partial q_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{33}}{\partial q_2} \right]$$

$$C_{333} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{33}}{\partial q_3} + \frac{\partial D_{33}}{\partial q_3} - \frac{\partial D_{33}}{\partial q_3} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial D_{33}}{\partial q_3} \right]$$

$[C(q, \dot{q})]_{k,j}$ elemanları

$$\begin{aligned} [C(q, \dot{q})]_{1,1} &= \sum_{i=1}^n C_{ijk} \dot{q}_i \\ &= C_{111} \dot{q}_1 + C_{211} \dot{q}_2 + C_{311} \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [C(q, \dot{q})]_{1,2} &= \sum_{i=1}^n C_{ijk} \dot{q}_i \\ &= C_{112} \dot{q}_1 + C_{212} \dot{q}_2 + C_{312} \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [C(q, \dot{q})]_{1,3} &= \sum_{i=1}^n C_{ijk} \dot{q}_i \\ &= C_{113} \dot{q}_1 + C_{213} \dot{q}_2 + C_{313} \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[C(q, \dot{q})]_{2,1} &= \sum_{i=1}^n C_{ijk} \dot{q}_i \\
&= C_{121} \dot{q}_1 + C_{221} \dot{q}_2 + C_{321} \dot{q}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[C(q, \dot{q})]_{2,2} &= \sum_{i=1}^n C_{ijk} \dot{q}_i \\
&= C_{122} \dot{q}_1 + C_{222} \dot{q}_2 + C_{322} \dot{q}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[C(q, \dot{q})]_{2,3} &= \sum_{i=1}^n C_{ijk} \dot{q}_i \\
&= C_{123} \dot{q}_1 + C_{223} \dot{q}_2 + C_{323} \dot{q}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[C(q, \dot{q})]_{3,1} &= \sum_{i=1}^n C_{ijk} \dot{q}_i \\
&= C_{131} \dot{q}_1 + C_{231} \dot{q}_2 + C_{331} \dot{q}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[C(q, \dot{q})]_{3,2} &= \sum_{i=1}^n C_{ijk} \dot{q}_i \\
&= C_{132} \dot{q}_1 + C_{232} \dot{q}_2 + C_{332} \dot{q}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[C(q, \dot{q})]_{3,3} &= \sum_{i=1}^n C_{ijk} \dot{q}_i \\
&= C_{133} \dot{q}_1 + C_{233} \dot{q}_2 + C_{333} \dot{q}_3
\end{aligned}$$

Bir robotun her bir bağıının **kinetik** enerjisini bulmak için

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \quad (1.12.1)$$

denkleminde faydalanılır. Denklemden, $D(q)$ kütle matrisini, \dot{q} ise eklem değişkenlerinin hızlarını göstermektedir. Şimdi bu denklemi kullanarak öncelikle örnek 1.5.3'de ki robotun her bir bağıının kinetik enerjisini daha sonrada robotun toplam kinetik enerjisini bulalım. Birinci bağın kütle matrisini hatırlayalım.

$$D(q_1) = \begin{bmatrix} I_{zz_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak birinci bağın kinetik enerjisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q_1) \dot{q} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{d}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{zz_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} I_{zz_1} \dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \quad (1.12.2)$$

İkinci bağıın kinetik enerjisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q_2) \dot{q} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{d}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m_2 d_2^2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{zz_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} m_2 d_2^2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} \right) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{zz_2} \dot{\theta}_2^2 \quad (1.12.3)
 \end{aligned}$$

Üçüncü bağıın kinetik enerjisi

$$\begin{aligned} K_3 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}(\mathbf{q}_3) \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{d}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}(\mathbf{q}_3) & D_{12}(\mathbf{q}_3) & -d_2 m_3 s \theta_2 \\ d_2 m_3 c \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3) & D_{22}(\mathbf{q}_3) & 0 \\ -m_3 d_2 s \theta_2 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [s^2 \theta_2 (I_{xx_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)) + I_{zz_3} c^2 \theta_2 + m_3 d_2^2] \dot{\theta}_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} [m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2) + I_{yy_3}] \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{d}_3^2 \\ &\quad + [d_2 m_3 c \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - [d_2 m_3 s \theta_2] \dot{\theta}_1 \dot{d}_3 \end{aligned} \tag{1.12.4}$$

şeklinde elde edilir. Denklemden kullanılan kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$D_{11}(q_3) = m_3 s^2 \theta_2 \left(\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2 \right) + m_3 d_2^2 + s^2 \theta_2 I_{xx_3} + c^2 \theta_2 I_{zz_3} \quad (1.12.5)$$

$$D_{12}(q_3) = d_2 m_3 c \theta_2 \left(\frac{1}{2} l_3 - d_3 \right) \quad (1.12.6)$$

$$D_{22}(q_3) = m_3 \left(\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2 \right) + I_{yy_3} \quad (1.12.7)$$

Bağların kinetik enerjilerinin toplamı robotun toplam kinetik enerjisini verir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$K_T = K_1 + K_2 + \dots + K_i \quad (1.12.8)$$

denklemden i robotun serbestlik derecesini göstermektedir. Bu durumda toplam kinetik enerji her bağın kinetik enerjisinin toplanmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
K_T &= K_1 + K_2 + K_3 \\
&= \frac{1}{2} I_{zz_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} m_2 d_2^2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} \right) \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} I_{zz_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} [s^2 \theta_2 (I_{xx_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)) + I_{zz_3} c^2 \theta_2 + m_3 d_2^2] \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} [m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2) + I_{yy_3}] \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{d}_3^2 \\
&\quad + [d_2 m_3 c \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
&\quad - [d_2 m_3 s \theta_2] \dot{\theta}_1 \dot{d}_3
\end{aligned} \tag{1.12.9}$$

Toplam kinetik enerjiyi bulmanın başka bir yolu ise denklem 1.12.1'de $D(q)$ yerine robotun toplam kütle matrisini yazmaktır. Robotun topla kütle martısı denklem 1.5.66'da verilmiştir. Bu durumda toplam kinetik enerji matrisi

$$K_T = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \quad (1.12.10)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{d}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & d_2 m_3 c\theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3) & -d_2 m_3 s\theta_2 \\ d_2 m_3 c\theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3) & D_{22} & 0 \\ -m_3 d_2 s\theta_2 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

bulunur. Yukarıdaki işlemin sonucu 1.12.9'daki sonuçla aynıdır. Ayrıca denklemde,

$$D_{11} = I_{zz_1} + \frac{1}{4} m_2 d_2^2 + s^2 \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)) \\ + c^2 \theta_2 (I_{yy_2} + I_{zz_3}) + m_3 d_2^2$$

$$D_{22} = m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2) + I_{zz_2} + I_{yy_3}$$

Bir bağıın **potansiyel** enerjisi, bağıın kütlesi, yerçekimi ivmesi ve kütle merkezine göre bağıın yüksekliğinin çarpılmasıyla bulunabilir. Her bir bağıın kütle merkezine göre yüksekliği h_i vektörünün z eksenini göz önünde bulundurularak kolayca hesaplanabilir. Bu durumda, potansiyel enerji denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$P_i = m_i g h_i(z) \quad (1.12.11)$$

Bağların potansiyel enerjilerinin toplamı robotun toplam potansiyel enerjisini verir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$P_T = P_1 + P_2 + \dots + P_i \quad (1.12.12)$$

Yukarıdaki denklemi kullanarak her eklemin potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$P_1 = m_1gh_1(z) = \frac{1}{2} m_1gh_1 \quad (1.12.13)$$

$$P_2 = m_2gh_2(z) = m_2gh_1 \quad (1.12.14)$$

$$P_3 = m_3gh_3(z) = m_3g[\cos\theta_2(-\frac{1}{2}l_3 + d_3) + h_1] \quad (1.12.15)$$

Robotun toplam potansiyel enerjisi ise

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3$$

$$= \frac{1}{2} m_1 g h_1 + m_2 g h_1 + m_3 g \left[\cos \theta_2 \left(-\frac{1}{2} l_3 + d_3 \right) + h_1 \right]$$

(1.12.15)

şeklinde bulunur. Toplam potansiyel enerjinin her bir eklem değişkenine göre türevi alınarak tork ifadesindeki yer çekimi vektörü elde edilebilir. Bu durum aşağıdaki denklemle gösterilebilir.

$$G_i = \frac{\partial P_T}{\partial q_i}$$

(1.12.16)

Bu durumda her bir eklemin yer çekimi vektörü aşağıdaki gibi bulunur.

$$G_1 = \frac{\partial P_T}{\partial q_1} = 0 \quad (1.12.17)$$

$$G_2 = \frac{\partial P_T}{\partial q_2} = m_3 g \sin \theta_2 \left(\frac{1}{2} l_3 - d_3 \right) \quad (1.12.18)$$

$$G_3 = \frac{\partial P_T}{\partial q_3} = m_3 g \cos \theta_2 \quad (1.12.19)$$

Yukarıda elde edilen G_1 , G_2 ve G_3 denklem 1.5.68, 1.5.70 ve 1.5.72'deki ile aynıdır.

1.13. Tork ifadesinin Ayırık parametreler Cinsinden Yazılması

Bir robot manipölatörünün eklemlerine etkiyen tork ifadesi sabit ve değişken parametreler cinsinden ayrı ayrı tanımlanabilir. Sabit parametreler (α) gibi bir vektörle, değişken parametreler, $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ gibi bir matrisle ifade edilir. Bu iki ifade aşağıdaki gibi çarpılarak tork ifadesi elde edilir.

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\alpha = \tau \quad (1.13.1)$$

denklemde α vektörü tork vektörünün sabit terimlerinden oluşurken $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ matrisi ise tork vektörünün konum hız ve ivme ifadelerinden oluşur. Şimdi örnek 1.5.3'de ki robotun tork vektörünü (α) ve $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ cinsinden yazalım.

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} & y_{17} & 0 & y_{19} \\ 0 & 0 & y_{23} & y_{24} & y_{25} & y_{26} & y_{27} & y_{28} & 0 \\ 0 & 0 & y_{33} & y_{34} & 0 & y_{36} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (1.13.2)$$

denklemden $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6 \ \alpha_7 \ \alpha_8 \ \alpha_9]^T$ 'dir. Bu vektör aşağıda görüldüğü gibi robotun sabit yapısal terimlerini içerir.

$$\alpha_1 = I_{zz_1} + \frac{1}{4} m_2 d_2^2 + m_3 d_2^2$$

$$\alpha_2 = I_{xx_2} + I_{xx_3} + \frac{1}{4} l_3^2 m_3$$

$$\alpha_3 = m_3 l_3$$

$$\alpha_4 = m_3$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2} d_2 l_3 m_3$$

$$\alpha_6 = d_2 m_3$$

$$\alpha_7 = I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3} + \frac{1}{4} l_3^2 m_3$$

$$\alpha_8 = I_{zz_2} + I_{yy_3} + \frac{1}{4} l_3^2 m_3$$

$$\alpha_9 = I_{yy_2} + I_{zz_3}$$

Ayrıca $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ matrisinin elemanları ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$y_{11} = \ddot{\theta}_1$$

$$y_{12} = s^2\theta_2 \ddot{\theta}_1$$

$$y_{13} = -d_3 s^2\theta_2 \ddot{\theta}_1 - 2d_3 s\theta_2 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - s^2\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3$$

$$y_{14} = d_3^2 s^2\theta_2 \ddot{\theta}_1 + 2d_3^2 s\theta_2 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2d_3 s^2\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3$$

$$y_{15} = c\theta_2 \ddot{\theta}_2 - s\theta_2 \dot{\theta}_2^2$$

$$y_{16} = -d_3 c\theta_2 \ddot{\theta}_2 - s\theta_2 \ddot{\theta}_3 + d_3 s\theta_2 \dot{\theta}_2^2 - 2c\theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3$$

$$y_{17} = 2s\theta_2 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$y_{19} = c^2\theta_2 \ddot{\theta}_1$$

$$y_{23} = -d_3\ddot{\theta}_2 + d_3s\theta_2c\theta_2\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \frac{1}{2}gs\theta_2$$

$$y_{24} = d_3^2\ddot{\theta}_2 - d_3^2s\theta_2c\theta_2\dot{\theta}_1^2 + 2d_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 - d_3gs\theta_2$$

$$y_{25} = c\theta_2\ddot{\theta}_1$$

$$y_{26} = -d_3c\theta_2\ddot{\theta}_1$$

$$y_{27} = -s\theta_2c\theta_2\dot{\theta}_1^2$$

$$y_{28} = \ddot{\theta}_2$$

$$y_{33} = \frac{1}{2}s^2\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2$$

$$y_{34} = \ddot{d}_3 - d_3s^2\theta_2\dot{\theta}_1^2 - d_3\dot{\theta}_2^2 + gc\theta_2$$

$$y_{36} = -s\theta_2\ddot{\theta}_1$$

1.14. Robot Dinamiğinin Kartezyen Uzayda Tanımlanması

Şimdiye kadar dinamik denklemleri aşağıdaki genel denklemde görüldüğü gibi eklem uzayında ifade ettik.

$$\tau_i = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q)$$

Robot dinamiğini kartezyen değişkenler cinsinden ifade etmek için ise

$$F = D_x(q)\ddot{x} + C_x(q, \dot{x}) + G_x(q) \quad (1.14.1)$$

denklemini kullanılır. Denklemden, F robotun uç işlevcisine etki eden kuvvet-tork vektörünü, x uç işlevcinin konum ve yönelimini, \dot{x} ve \ddot{x} ise sırasıyla doğrusal ve açısal hız ve ivmeleri temsil eden kartezyen vektörü göstermektedir.

$$F = [f_x \quad f_y \quad f_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z]^T$$

$$\chi = [p_x \quad p_y \quad p_z \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma]^T$$

$$\dot{\chi} = [v_x \quad v_y \quad v_z \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$$

$$\ddot{\chi} = [\dot{v}_x \quad \dot{v}_y \quad \dot{v}_z \quad \dot{\omega}_x \quad \dot{\omega}_y \quad \dot{\omega}_z]^T$$

Diğer terimler eklem uzayında olduğu gibi, $D_x(q)$ Kartezyen kütle matrisi, $C_x(q, \dot{q})$ Kartezyen Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü ve $G_x(q)$ yerçekimi vektörünü göstermektedir. Kartezyen uzaydan eklem uzayına geçmek için aşağıdaki denklem kullanılır.

$$\tau = J^T(q)F \tag{1.14.3}$$

Denklemde J^T Jakobiyen matrisin devriğini göstermektedir. Denklem 1.14.3'ün her iki tarafını J^{-T} ile çarpalım.

$$J^{-T}\tau = J^{-T}J^TF$$

Denklemde $J^{-T}J^T = I$ matris olduğundan

$$F = J^{-T}\tau \quad (1.14.4)$$

şeklinde elde edilir. Denklemde τ ifadesi yerine eşdeğerini yazalım.

$$\begin{aligned} F &= J^{-T}[D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q)] \\ &= J^{-T}D(q)\ddot{q} + J^{-T}C(q, \dot{q}) + J^{-T}G(q) \end{aligned} \quad (1.14.5)$$

Bilindiği gibi uç işlevciddeki kartezyen hızlar Jakobiyen matrisi ve eklem hızları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\dot{\chi} = J\dot{q} \quad (1.14.6)$$

Bu denklemin her iki tarafının da türevini alalım.

$$\ddot{\chi} = \dot{J}\dot{q} + J\ddot{q}$$

Denklemden \ddot{q} çekilirse ivme ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\ddot{q} = J^{-1}\ddot{\chi} - J^{-1}\dot{J}J^{-1}\dot{\chi} \quad (1.14.7)$$

İvme ifadesi denklem 1.14.5'de yerine yazılınca robotun uç işlevcisine etki eden kuvvet-tork vektörü aşağıdaki gibi olur.

$$F = J^{-T}D(q)J^{-1}\ddot{\chi} - J^{-T}D(q)J^{-1}\dot{J}J^{-1}\dot{\chi} + J^{-T}C(q, \dot{q}) + J^{-T}G(q) \quad (1.14.8)$$

Yukarıda elde ettiğimiz ifadeyi denklem 1.14.1 ile eşitleyelim.

$$\begin{aligned}
& J^{-T}D(q)J^{-1}\ddot{\chi} - J^{-T}D(q)J^{-1}\dot{J}J^{-1}\dot{\chi} + J^{-T}C(q, \dot{q}) + J^{-T}G(q) \\
& = D_x(q)\ddot{\chi} + C_x(q, \dot{q}) + G_x(q)
\end{aligned} \tag{1.14.9}$$

Karşılıklı ifadeler bir birine eşit olacağından Kartezyen kütle matrisi, Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü ve yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$D_x(q) = J^{-T}(q)D(q)J^{-1}(q) \tag{1.14.10}$$

$$C_x(q, \dot{q}) = J^{-T}(q)[C(q, \dot{q}) - D(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)J^{-1}\dot{\chi}] \tag{1.14.11}$$

$$G_x(q) = J^{-T}G(q) \tag{1.14.12}$$

1.15. Hamiltonion Denklemiyle Robot Dinamiğinin Bulunması

Bir robot manipülatörünün dinamik modelini çıkarmanın başka bir yolu da Hamiltonion denklemi kullanmaktır. Hamiltonion denklemi kinetik enerji ile potansiyel enerjinin toplamından oluşmaktadır.

$$H=K+V \quad (1.15.1)$$

Denklemde K bir robot manipülatörünün kinetik ve P ise Potansiyel enerjisini göstermektedir. Daha önce bir robot manipülatörünün kinetik ve potansiyel enerjisinin nasıl bulunacağını anlatılmıştı. Hamiltonion denklemi 'H' ile bir robotun eklemlerine etkiyen torklar arasında aşağıdaki ilişki vardır.

$$\frac{\partial H(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = \dot{q}^T \tau \quad (1.15.2)$$

Denklemden $\frac{\partial H(q, \dot{q})}{\partial t}$ ifadesi n serbestlik dereceli bir robot için zincir kuralından faydalanarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{\partial H(q, \dot{q})}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_1} \ddot{q}_1 + \frac{\partial H}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_2} \ddot{q}_2 + \frac{\partial H}{\partial q_2} \dot{q}_2 \dots \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_n} \ddot{q}_n + \frac{\partial H}{\partial q_n} \dot{q}_n$$

Bu durumda denklem 1.15.2 aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_1} \ddot{q}_1 + \frac{\partial H}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_2} \ddot{q}_2 + \frac{\partial H}{\partial q_2} \dot{q}_2 \dots \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_n} \ddot{q}_n + \frac{\partial H}{\partial q_n} \dot{q}_n \\ = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dots & \dot{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \dots \\ \tau_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.15.4)$$

ÖRNEK 1.13.1.

Örnek 1.5.3'deki robotunun Hamiltonion denklemini yazıp bu denklemden faydalanarak her bir ekleme etkiyen torkları bulunuz.

ÇÖZÜM 1.13.1

Daha önce örnek 1.5.3'deki robotunun kinetik enerjisi denklem 1.12.9 ve potansiyel enerjisi denklem 1.12.15'de elde edilmişti. Bu ifadelerden faydalanarak Hamiltonion denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$H=P+K$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} I_{zz_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} m_2 d_2^2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2} \right) \dot{\theta}_1^2 \\ &+ \frac{1}{2} I_{zz_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} [s^2 \theta_2 (I_{xx_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)) + I_{zz_3} c^2 \theta_2 + m_3 d_2^2] \dot{\theta}_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} [m_3(\frac{1}{4}l_3^2 - l_3d_3 + d_3^2) + I_{yy_3}] \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{d}_3^2 \\
& + [d_2 m_3 c\theta_2 (\frac{1}{2}l_3 - d_3)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& + \frac{1}{2} m_1 g h_1 + m_2 g h_1 + m_3 g [\cos\theta_2 (-\frac{1}{2}l_3 + d_3) + h_1]
\end{aligned}$$

Bu ifadeyi denklem 1.13.4'teki denkleme uyarlayalım.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_1} \ddot{\theta}_1 + \frac{\partial H}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_2} \ddot{\theta}_2 + \frac{\partial H}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 + \frac{\partial H}{\partial \dot{d}_3} \ddot{d}_3 + \frac{\partial H}{\partial d_3} \dot{d}_3 &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{d}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_1} \ddot{\theta}_1 + \frac{\partial H}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_2} \ddot{\theta}_2 + \frac{\partial H}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 + \frac{\partial H}{\partial \dot{d}_3} \ddot{d}_3 + \frac{\partial H}{\partial d_3} \dot{d}_3 &= [\dot{\theta}_1 \tau_1 + \dot{\theta}_2 \tau_2 + \dot{d}_3 \tau_3]
\end{aligned}$$

Denklemden,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_1} \ddot{\theta}_1 = & [(I_{zz_1} + \frac{1}{4} m_2 d_2^2 + s^2 \theta_2 I_{xx_2} + c^2 \theta_2 I_{yy_2}) \dot{\theta}_1 \\ & + (s^2 \theta_2 (I_{xx_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)) + I_{zz_3} c^2 \theta_2 + m_3 d_2^2) \dot{\theta}_1 \\ & + d_2 m_3 c \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3) \dot{\theta}_2 - (d_2 m_3 s \theta_2) \dot{\theta}_3] \ddot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (1.15.5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_1} \dot{\theta}_1 = 0 \quad (1.15.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_2} \ddot{\theta}_2 = & [(m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2) + I_{zz_2} + I_{yy_3}) \dot{\theta}_2 \\ & + d_2 m_3 c \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3) \dot{\theta}_1] \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (1.13.7)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 &= [s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3} + m_3(\frac{1}{4}l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2))\dot{\theta}_1^2 \\
&\quad - d_2 m_3 s\theta_2 (\frac{1}{2}l_3 - d_3)\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - d_2 m_3 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_3 \\
&\quad + m_3 g s\theta_2 (\frac{1}{2}l_3 - d_3)]\dot{\theta}_2
\end{aligned} \tag{1.15.8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{d}_3} \ddot{d}_3 = [m_3 \dot{d}_3 - d_2 m_3 s\theta_2 \dot{\theta}_1]\ddot{d}_3 \tag{1.15.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial d_3} \dot{d}_3 &= [s^2 \theta_2 m_3 (d_3 - \frac{1}{2}l_3)\dot{\theta}_1^2 + m_3 (d_3 - \frac{1}{2}l_3)\dot{\theta}_2^2 \\
&\quad - d_2 m_3 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_3 g c\theta_2]\dot{d}_3
\end{aligned} \tag{1.15.10}$$

Yukarıda elde ettiğimiz denklemlerdeki parantezleri açalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_1} \ddot{\theta}_1 = & [I_{zz_1} + \frac{1}{4} m_2 d_2^2 + s^2 \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)) \\ & + c^2 \theta_2 (I_{yy_2} + I_{zz_3}) + m_3 d_2^2] \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1 + d_2 m_3 c \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3) \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_1 \\ & - (d_2 m_3 s \theta_2) \dot{d}_3 \ddot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (1.15.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_2} \ddot{\theta}_2 = & (m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2) + I_{zz_2} + I_{yy_3}) \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_2 \\ & + d_2 m_3 c \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3) \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (1.15.12)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_2} \dot{\theta}_2 &= s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3} + m_3(\frac{1}{4}l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)) \dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2 \\
&\quad - d_2 m_3 s\theta_2 (\frac{1}{2}l_3 - d_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 - d_2 m_3 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_3 \dot{\theta}_2 \\
&\quad + m_3 g s\theta_2 (\frac{1}{2}l_3 - d_3) \dot{\theta}_2
\end{aligned} \tag{1.15.13}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{d}_3} \ddot{d}_3 = m_3 \dot{d}_3 \ddot{d}_3 - d_2 m_3 s\theta_2 \dot{\theta}_1 \ddot{d}_3 \tag{1.15.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \dot{d}_3} \dot{d}_3 &= s^2 \theta_2 m_3 (d_3 - \frac{1}{2}l_3) \dot{\theta}_1^2 \dot{d}_3 + m_3 (d_3 - \frac{1}{2}l_3) \dot{\theta}_2^2 \dot{d}_3 \\
&\quad - d_2 m_3 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{d}_3 + m_3 g c\theta_2 \dot{d}_3
\end{aligned} \tag{1.15.15}$$

Denklem 1.5.77, 1.5.78 ve 1.5.79'daki torkları elde etmek için denklem 1.13.13'teki denklemde $s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3} + m_3(\frac{1}{4}l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2))\ddot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2$ ifadesini ekleyip çıkaralım. Denklemde $(I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3} + m_3(\frac{1}{4}l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2))$ ifadesini A kabul edip işlemleri ona göre yapalım

$$s\theta_2 c\theta_2 A \ddot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2 - s\theta_2 c\theta_2 A \ddot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2 + s\theta_2 c\theta_2 A \ddot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2$$

Denklemini aşağıdaki gibi düzenleyelim.

$$2s\theta_2 c\theta_2 A \ddot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2 - s\theta_2 c\theta_2 A \ddot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2$$

Yeni durumda denklem 1.15.13 aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 &= 2s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3} + m_3(\frac{1}{4}l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)) \dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2 \\
&\quad - s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3} + m_3(\frac{1}{4}l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)) \dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2 \\
&\quad - d_2 m_3 s\theta_2 (\frac{1}{2}l_3 - d_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 \quad - d_2 m_3 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_3 \dot{\theta}_2 \\
&\quad + m_3 g s\theta_2 (\frac{1}{2}l_3 - d_3) \dot{\theta}_2
\end{aligned} \tag{1.15.16}$$

Aynı şekilde denklem 1.13.15'te $s^2\theta_2m_3(d_3 - \frac{1}{2}l_3)\ddot{\theta}_1\dot{d}_3$ ifadesini aynı denkleme ekleyip çıkaralım.

$$s^2\theta_2m_3(d_3 - \frac{1}{2}l_3)\ddot{\theta}_1\dot{d}_3 - s^2\theta_2m_3(d_3 - \frac{1}{2}l_3)\ddot{\theta}_1\dot{d}_3 + s^2\theta_2m_3(d_3 - \frac{1}{2}l_3)\ddot{\theta}_1\dot{d}_3$$

Denklemi aşağıdaki gibi düzenleyelim

$$s^2\theta_2m_3(-l_3 + 2d_3)\ddot{\theta}_1\dot{d}_3 + s^2\theta_2m_3(\frac{1}{2}l_3 - d_3)\ddot{\theta}_1\dot{d}_3$$

Bu seferde $+m_3(d_3 - \frac{1}{2}l_3)\ddot{\theta}_2\dot{d}_3$ ifadesini aynı denkleme ekleyip çıkaralım.

$$m_3(d_3 - \frac{1}{2}l_3)\ddot{\theta}_2\dot{d}_3 - m_3(d_3 - \frac{1}{2}l_3)\ddot{\theta}_2\dot{d}_3 + m_3(d_3 - \frac{1}{2}l_3)\ddot{\theta}_2\dot{d}_3$$

Denklemi aşağıdaki gibi düzenleyelim.

$$m_3(-l_3 + 2d_3)\ddot{\theta}_2\dot{d}_3 + m_3\left(\frac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_2\dot{d}_3$$

Bu düzenlemelerden sonra denklem 1.15.15 aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial H}{\partial d_3} \dot{d}_3 = s^2\theta_2 m_3(-l_3 + 2d_3)\ddot{\theta}_1\dot{d}_3 + s^2\theta_2 m_3\left(\frac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_1\dot{d}_3$$

$$\begin{aligned} & m_3(-l_3 + 2d_3)\ddot{\theta}_2\dot{d}_3 + m_3\left(\frac{1}{2}l_3 - d_3\right)\ddot{\theta}_2\dot{d}_3 \\ & - d_2 m_3 c\theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{d}_3 + m_3 g c\theta_2 \dot{d}_3 \end{aligned} \quad (1.15.17)$$

Şimdi de yukarıda elde ettiğimiz denklem 1.15.11, 1.15.12, 1.15.13, 1.15.14, 1.15.16 ve 1.15.17'yi eklem torklarını bulmak için toplayalım. Toplam içerisindeki terimleri dik dörtgenler içerisine alalım. Bu dik dörtgenlere de içerisinde ki terimler hangi tork ifadesine aitse onu gösterecek şekilde birer çember iliştirelim. Bu anlatılanlar aşağıda açık bir şekilde gösterilmiştir.

$$[I_{zz_1} + \frac{1}{4} m_2 d_2^2 + s^2 \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2))] \tau_{1,1}$$

$$+ c^2 \theta_2 (I_{yy_2} + I_{zz_3}) + m_3 d_2^2 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1 + d_2 m_3 c \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3) \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_1 \tau_{2,1}$$

$$- (d_2 m_3 s \theta_2) \dot{d}_3 \ddot{\theta}_1 \tau_{3,1}$$

$$\tau_{1,1}$$

$$\tau_{2,2}$$

$$+ (m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2) + I_{zz_2} + I_{yy_3}) \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_2 + d_2 m_3 c \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3) \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 \tau_{1,3}$$

$$+ 2 s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)) \dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2 \tau_{1,2}$$

$$- s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)) \dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2 \tau_{2,3}$$

$$\begin{array}{l}
\tau_{1,4} \left[-d_2 m_3 s \theta_2 \left(\frac{1}{2} l_3 - d_3 \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 \right] \left[-d_2 m_3 c \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_3 \dot{\theta}_2 \right] \left[+m_3 g s \theta_2 \left(\frac{1}{2} l_3 - d_3 \right) \dot{\theta}_2 \right] \tau_{2,5} \\
\tau_{3,2} \left[+m_3 \dot{d}_3 \ddot{d}_3 \right] \left[-d_2 m_3 s \theta_2 \dot{\theta}_1 \ddot{d}_3 \right] \tau_{1,5} \quad \tau_{1,8} \\
\tau_{1,6} \left[+s^2 \theta_2 m_3 (-l_3 + 2d_3) \dot{\theta}_1^2 \dot{d}_3 \right] \left[+s^2 \theta_2 m_3 \left(\frac{1}{2} l_3 - d_3 \right) \dot{\theta}_1^2 \dot{d}_3 \right] \tau_{3,3} \\
\left[+m_3 (-l_3 + 2d_3) \dot{\theta}_2^2 \dot{d}_3 \right] \left[+m_3 \left(\frac{1}{2} l_3 - d_3 \right) \dot{\theta}_2^2 \dot{d}_3 \right] \left[-d_2 m_3 c \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{d}_3 \right] \left[+m_3 g c \theta_2 \dot{d}_3 \right] \\
\tau_{2,4} \quad \tau_{3,4} \quad \tau_{1,7} \quad \tau_{3,5}
\end{array}$$

Bu aşamada her bir tork ifadesine ait terimleri bir araya toplayalım.

$$\begin{aligned}
\tau_{1,1} + \dots + \tau_{1,8} = & [I_{zz_1} + \frac{1}{4} m_2 d_2^2 + s^2 \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)) \\
& + c^2 \theta_2 (I_{yy_2} + I_{zz_3}) + m_3 d_2^2] \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3} + m_3(\frac{1}{4}l_3^2 - l_3d_3 + d_3^2))\dot{\theta}_1^2\dot{\theta}_2 \\
& + d_2m_3c\theta_2(\frac{1}{2}l_3 - d_3)\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_2 - d_2m_3s\theta_2(\frac{1}{2}l_3 - d_3)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\dot{\theta}_2 \\
& - d_2m_3s\theta_2\dot{\theta}_1\ddot{d}_3 + s^2\theta_2m_3(-l_3 + 2d_3)\dot{\theta}_1^2\dot{d}_3 \\
& - d_2m_3c\theta_2\dot{\theta}_1\dot{d}_3\dot{\theta}_2 - d_2m_3c\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\dot{d}_3
\end{aligned} \tag{1.15.18}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{2,1} + \dots + \tau_{2,5} = & d_2m_3c\theta_2(\frac{1}{2}l_3 - d_3)\dot{\theta}_2\ddot{\theta}_1 + (m_3(\frac{1}{4}l_3^2 - l_3d_3 + d_3^2) + I_{zz_2} + I_{yy_3})\dot{\theta}_2\ddot{\theta}_2 \\
& - s\theta_2c\theta_2(I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3} + m_3(\frac{1}{4}l_3^2 - l_3d_3 + d_3^2))\dot{\theta}_1^2\dot{\theta}_2 \\
& + m_3(-l_3 + 2d_3)\dot{\theta}_2^2\dot{d}_3
\end{aligned} \tag{1.15.19}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{3,1} + \dots + \tau_{3,5} = & -(d_2 m_3 s \theta_2) \dot{d}_3 \ddot{\theta}_1 + m_3 \dot{d}_3 \ddot{d}_3 \\
& + s^2 \theta_2 m_3 \left(\frac{1}{2} l_3 - d_3 \right) \dot{\theta}_1^2 \dot{d}_3 \\
& + m_3 \left(\frac{1}{2} l_3 - d_3 \right) \dot{\theta}_2^2 \dot{d}_3 + m_3 g c \theta_2 \dot{d}_3
\end{aligned} \tag{1.15.20}$$

Son olarak denklem 1.15.18'deki ifadeyi , $\dot{\theta}_1$ denklem 1.13.19'daki ifadeyi . $\dot{\theta}_2$ ve denklem 1.15.20'deki ifadeyi \dot{d}_3 parantezine alalım. Parantez içerisindeki ifadeler sırasıyla τ_1 , τ_2 ve τ_3 'ü verir. Elde edilen bu torklar denklem 1.5.77, 1.5.77 ve 1.5.79 ile aynı çıkmıştır.

$$\begin{aligned}
\tau_{1,1} + \dots + \tau_{1,8} = & \left\{ [I_{zz_1} + \frac{1}{4} m_2 d_2^2 + s^2 \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)) \right. \\
& + c^2 \theta_2 (I_{yy_2} + I_{zz_3}) + m_3 d_2^2] \ddot{\theta}_1 + d_2 m_3 c \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3) \ddot{\theta}_2 - d_2 m_3 s \theta_2 \ddot{d}_3 \\
& + 2 s \theta_2 c \theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3} + m_3 (\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& - d_2 m_3 s \theta_2 (\frac{1}{2} l_3 - d_3) \dot{\theta}_2^2 + s^2 \theta_2 m_3 (-l_3 + 2 d_3) \dot{\theta}_1 \dot{d}_3 \\
& \left. - 2 d_2 m_3 c \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{d}_3 \right\} \dot{\theta}_1
\end{aligned}$$

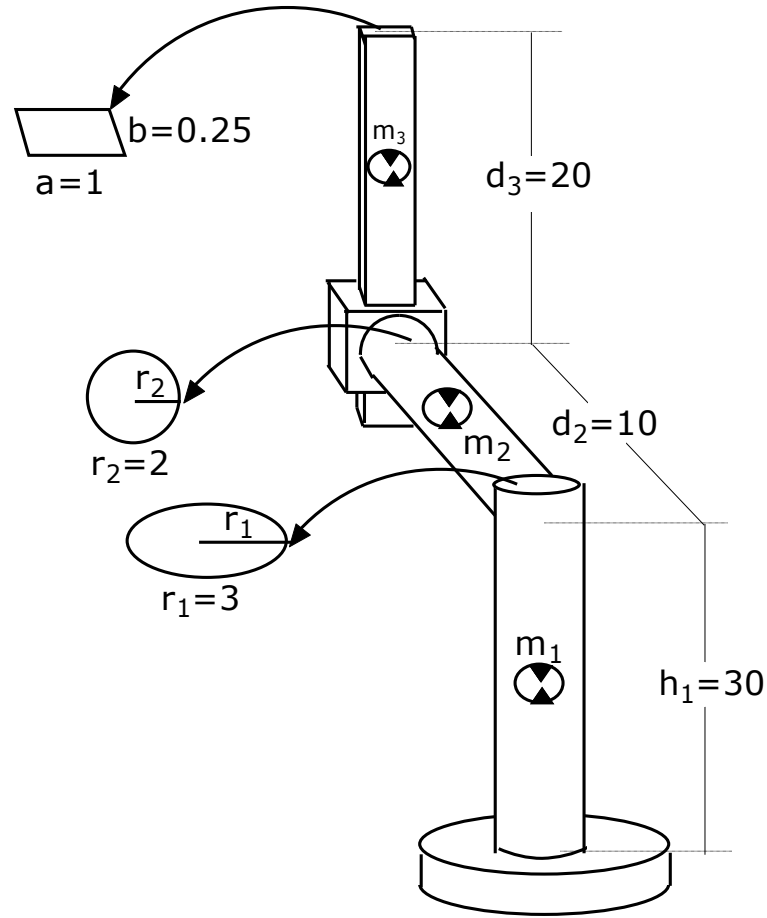
$$\begin{aligned}
\tau_{2,1} + \dots + \tau_{2,5} = & \left\{ d_2 m_3 c\theta_2 \left(\frac{1}{2} l_3 - d_3 \right) \ddot{\theta}_1 + \left(m_3 \left(\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2 \right) + I_{zz_2} + I_{yy_3} \right) \ddot{\theta}_2 \right. \\
& - s\theta_2 c\theta_2 (I_{xx_2} + I_{xx_3} - I_{yy_2} - I_{zz_3} + m_3 \left(\frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2 \right)) \dot{\theta}_1^2 \\
& \left. + m_3 (-l_3 + 2d_3) \dot{\theta}_2 \dot{d}_3 + m_3 g s\theta_2 \left(\frac{1}{2} l_3 - d_3 \right) \right\} \dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{3,1} + \dots + \tau_{3,5} = & \left\{ - (d_2 m_3 s\theta_2) \ddot{\theta}_1 + m_3 \ddot{d}_3 + s^2 \theta_2 m_3 \left(\frac{1}{2} l_3 - d_3 \right) \dot{\theta}_1^2 \right. \\
& \left. + m_3 \left(\frac{1}{2} l_3 - d_3 \right) \dot{\theta}_2^2 + m_3 g c\theta_2 \right\} \dot{d}_3
\end{aligned}$$

1.16. RRP Eklem Yapısına Sahip bir Robotun Benzetim Modelinin Çıkarılması

Şekil 1.6'daki RRP eklem yapısına sahip robotun üç boyutlu uzayda meydana getirdiği hareketlerin detaylı analizi yapmak için bu robotun Şekil 1.13'te ki dinamik düzenleşimini göz önünde bulunduralım. Eklemler sıfır konumundan başlamak suretiyle 10 saniye içerisinde sırasıyla, birinci eklem 360 derece, ikinci eklem 180 derece ve üçüncü eklem 20 birim hareket etsin. Bu hareket gerçekleşirken sırasıyla

- a) Kütle matrisinin her bir elemanının
- b) Coriolis/merkezkaç kuvvet, yer çekimi vektörü ve eklem torklarının,
- c) Her bir eklemin, kinetik/potansiyel enerjisini, Lagrange ve Hamilton grafiklerini
- d) Y matrisi ve vektörünü kullanarak her bir eklemdaki torkun zamana göre grafiğini çiziniz. Burada bulduğumuz sonuçlarla b şıkkından elde ettiğimiz sonuçları karşılaştıralım.
- e) Her bir eklemda meydana gelen çizgisel ve dönel kuvvetlerin zamana göre grafiklerini çizelim.



Şekil 1.13. RRP eklem yapısına sahip robotun dinamik düzenleşimi.

Şekil 1.13'teki robotun bağ uzunlukları ve kütle ağırlıkları aşağıda verilmiştir.

$$h_1=30, \quad d_2=10, \quad d_3=20, \quad m_1=15, \quad m_2=6, \quad m_3=3$$

Şekil 1.13'te görüldüğü gibi ilk iki bağ silindirik yapıya sahiptir. Yoğunluğu homojen olarak dağılmış bu silindirik nesnelerin atalet momenti aşağıdaki gibi hesaplanır (kitabın ekler bölümünde yoğunlukları homojen olarak dağılmış bazı geometrik şekillerin atalet momentleri verilmiştir).

$$I_{xx_1} = \frac{m_1(3r_1^2 + 4h_1^2)}{12} = \frac{15(3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 30^2)}{12} = 4533.8$$

$$I_{yy_1} = \frac{m_1(3r_1^2 + 4h_1^2)}{12} = 4533.8$$

$$I_{zz_1} = \frac{m_1 r_1^2}{2} = 67.5$$

$$I_{xx_2} = I_{yy_2} = \frac{m_2(3r_2^2 + 4d_2^2)}{12} = 206$$

$$I_{zz_2} = \frac{m_2 r_2^2}{2} = 12$$

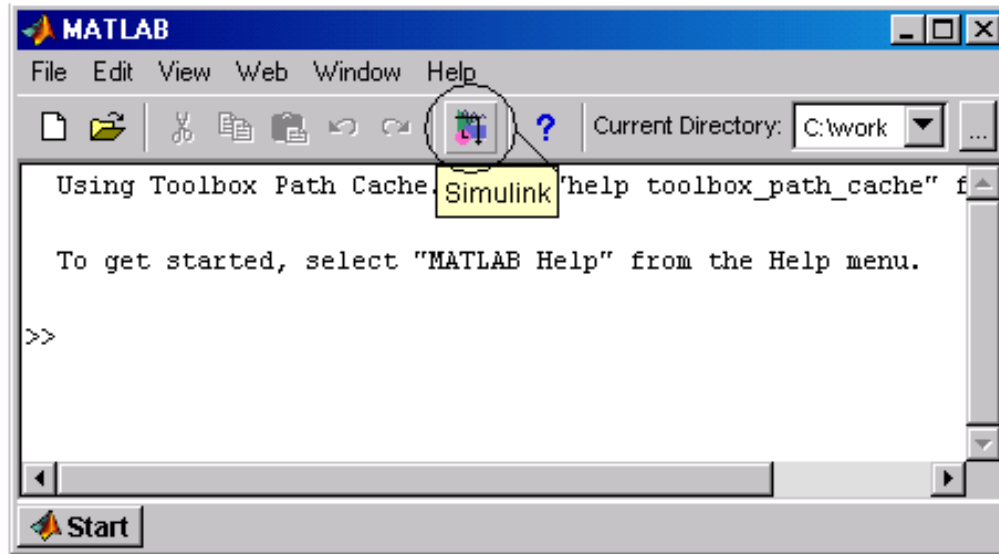
Üçüncü eklem prizmatik bir yapıya sahip olduğundan atalet momenti aşağıda görüldüğü gibi hesaplanır.

$$I_{xx_3} = \frac{m_3(b^2 + 4d_3^2)}{12} = 400.02$$

$$I_{yy_3} = \frac{m_3(a^2 + 4d_3^2)}{12} = 400.25$$

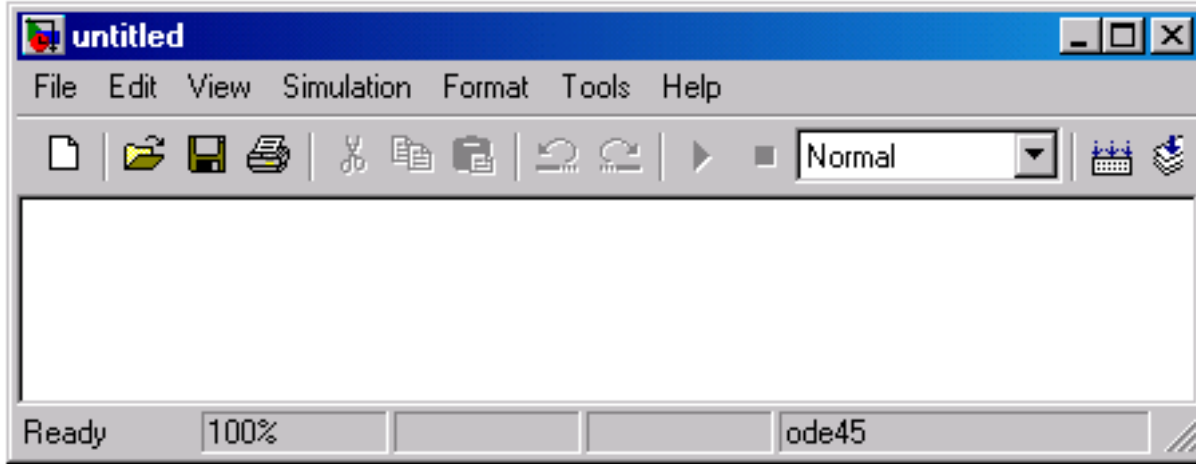
$$I_{zz_3} = \frac{m_3(a^2 + b^2)}{12} = 0.265$$

Elde ettiğimiz bu değerleri Matlab'te uygulayalım. Öncelikle Matlab programında komutunu yazmak veya Şekil 1.14'te görüldüğü gibi Matlab araç çubuğunda bulunan simulink model butonunu tıklamak suretiyle simulink başlatılır.



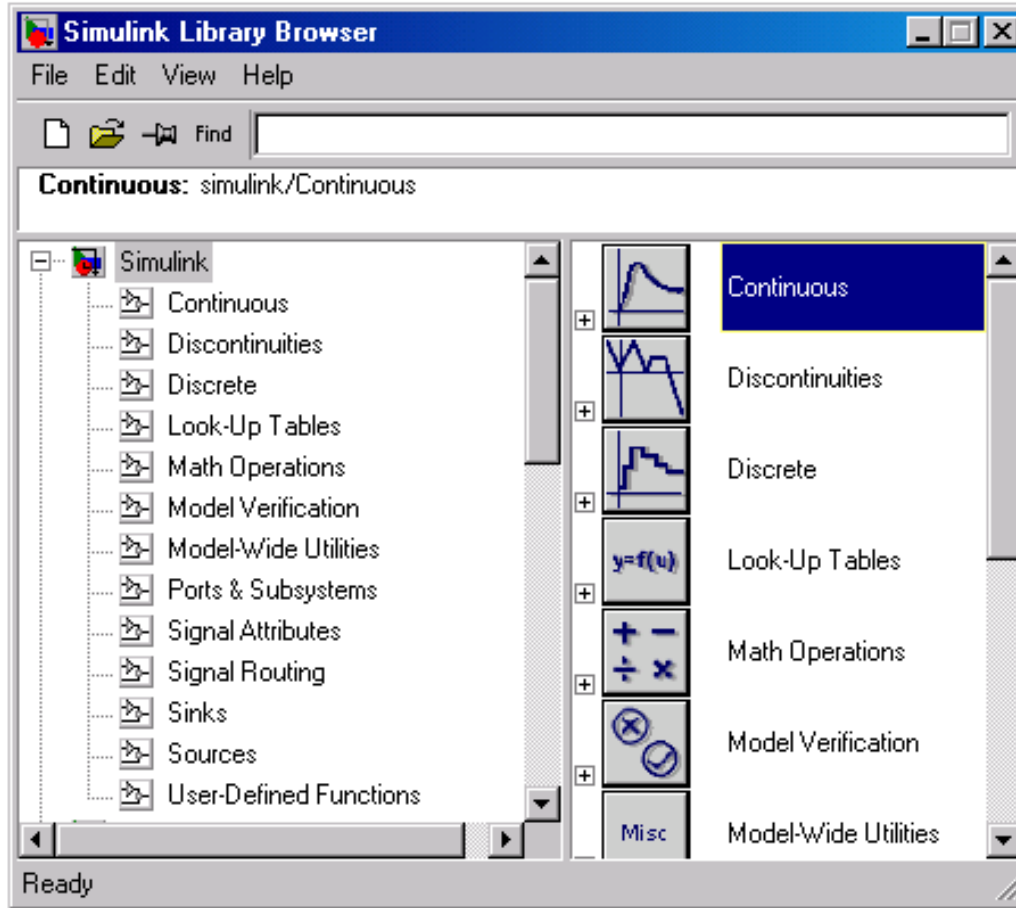
Şekil 1.14. Matlab komut penceresi

Simulink komutunun yazılmasıyla Simulink iki tane pencere açar. Birinci pencere başlıksız, içerisine yeni modellerin çizilebileceği Şekil 1.15'te görülen bir model penceresidir.



Şekil 1.15. Yeni bir model penceresi.

İkinci pencere ise Şekil 1.16’da görülen blok kütüphanelerini içeren ana penceredir.



Şekil 1.16. Blok kütüphanelerini içeren ana pencere

Simulink hakkında detaylı bilgiyi (Bingül 2005) kaynağından alabilirsiniz.
Örneği gerçekleştirmek için,

1. Başlangıç değerlerinin tanımlandığı 'iniNS.m' adlı bir m dosyası açıp aşağıdaki ifadeleri içerisine yazalım.

iniNS.m dosyası

```
global h1 d2 l3 m1 m2 m3 lxx2 lxx3 lyy2 lyy3 lzz1 lzz2  
lzz3 g q1i q1f q2i q2f q3i q3f tf  
h1=30; d2=10; l3=20; m1=15; m2=6; m3=3;  
lxx1=4533.8; lyy1=4533.8 lzz1=67.5;  
lxx2=206; lyy2=206; lzz2=12;  
lxx3=400.02; lyy3=400.25; lzz3=0.265;  
g=9.81
```

q1i=0; %birinci eklemin başlangıç açı değeri
q1f=360; %birinci eklemin bitiş açı değeri
q2i=0; %ikinci eklemin başlangıç açı değeri
q2f=180; %ikinci eklemin bitiş açı değeri
q3i=0; %Üçüncü eklemin başlangıç açı değeri
q3f=20; %Üçüncü eklemin bitiş açı değeri
tf=10; %bitim zamanı

Birkaç farklı dosyada kullanılacak olan değişkenlerin 'global' değişken olarak atandığına dikkat edin. 'iniNS.m' adlı dosya içerisinde örnekte yer alan eklemlerin başlangıç ve bitiş açı değerleri, bunların sembolik ifadeleri (q1i, q1f, q2i, q2f ... gibi) ve eklemlerin çalışma süresi (tf) yer almaktadır.

2. Örnekte verilen robot eklemlerinin yumuşak bir şekilde hareket edebilmesi için üçüncü dereceden polinomla gerçekleştirilen bir yörüngeden faydalanılmıştır. Bu yörünge 'yorunge.m' adlı bir dosyaya yazılır.

yorunge.m dosyası

```
function yor=yorunge(t);  
global q1i q1f q2i q2f q3i q3f tf;  
        %%%% Birinci eklem %%%%  
a10=q1i;  
a11=0;  
a12=(3/tf^2)*(q1f-q1i);  
a13=(-2/tf^3)*(q1f-q1i);  
konum1=a10+a11*t+a12*t^2+a13*t^3;  
hiz1=a11+2*a12*t+3*a13*t^2;
```

$$ivme1=2*a12+6*a13*t;$$

%%%% İkinci eklem %%%%%

$$a20=q2i;$$

$$a21=0;$$

$$a22=(3/tf^2)*(q2f-q2i);$$

$$a23=(-2/tf^3)*(q2f-q2i);$$

$$konum2=a20+a21*t+a22*t^2+a23*t^3;$$

$$hiz2=a21+2*a22*t+3*a23*t^2;$$

$$ivme2=2*a22+6*a23*t;$$

%%%% Üçüncü eklem %%%%%

$$a30=q3i;$$

$$a31=0;$$

$$a32=(3/tf^2)*(q3f-q3i);$$

$$a33=(-2/tf^3)*(q3f-q3i);$$

$$konum3=a30+a31*t+a32*t^2+a33*t^3;$$

$$hiz3=a31+2*a32*t+3*a33*t^2;$$

$$ivme3=2*a32+6*a33*t$$

```
yor=[konum1; hiz1; ivme1; konum2; hiz2; ivme2; konum3; hiz3;  
ivme3];
```

Her bir ekleme ait konum, hız ve ivme bilgisi 'yor' adlı bir vektöre yukarıda olduğu gibi yazılır. Bu vektördeki sıralama daha sonra kullanılacaktır.

3. Örnekte istenenler çok uzun olduğundan öncelikle a şıkkını gerçekleştirelim. Bunun için dynNS.m dosyasını yazalım. 'yorunge.m' dosyasında bulunan 'yor' vektöründeki her bir elemanın dynNS.m dosyasındaki (q1, dq1, ddq2...) değişkenlerine atanmasına dikkat ediniz.

dynNS.m dosyası

```
function robot_param=dynNS(u);  
global h1 d2 l3 m1 m2 m3 lxx2 lxx3 lyy2 lyy3 lzz1 lzz2 lzz3 g;
```

q1=u(1); %Birinci eklemin konumu
q2=u(4); %İkinci eklemin konumu
q3=u(7); %Üçüncü eklemin konumu
dq1=u(2); %Birinci eklemin hızı
dq2=u(5); %İkinci eklemin hızı
dq3=u(8); %Üçüncü eklemin hızı
ddq1=u(3); %Birinci eklemin ivmesi
ddq2=u(6); %İkinci eklemin ivmesi
ddq3=u(9); %Üçüncü eklemin ivmesi

s1=sin(q1*pi/180); s2=sin(q2*pi/180); s3=sin(q3*pi/180);
c1=cos(q1*pi/180); c2=cos(q2*pi/180); c3=cos(q3*pi/180);

%%% Kütle matrisi %%%

$M_{11} = l_{zz1} + (1/4) * m_2 * d_2^2 + s_2^2 * (l_{xx2} + l_{xx3} + m_3 * (0.25 * l_3^2 - l_3 * q_3 + q_3^2)) + c_2^2 * (l_{yy2} + l_{zz3}) + m_3 * d_2^2;$

$M_{12} = d_2 * m_3 * c_2 * (0.5 * l_3 - q_3);$

$M_{13} = -d_2 * m_3 * s_2;$

$M_{21} = d_2 * m_3 * c_2 * (0.5 * l_3 - q_3);$

$M_{22} = l_{zz2} + l_{yy3} + m_3 * (0.25 * l_3^2 - l_3 * q_3 + q_3^2);$

$M_{23} = 0;$

$M_{31} = -d_2 * m_3 * s_2;$

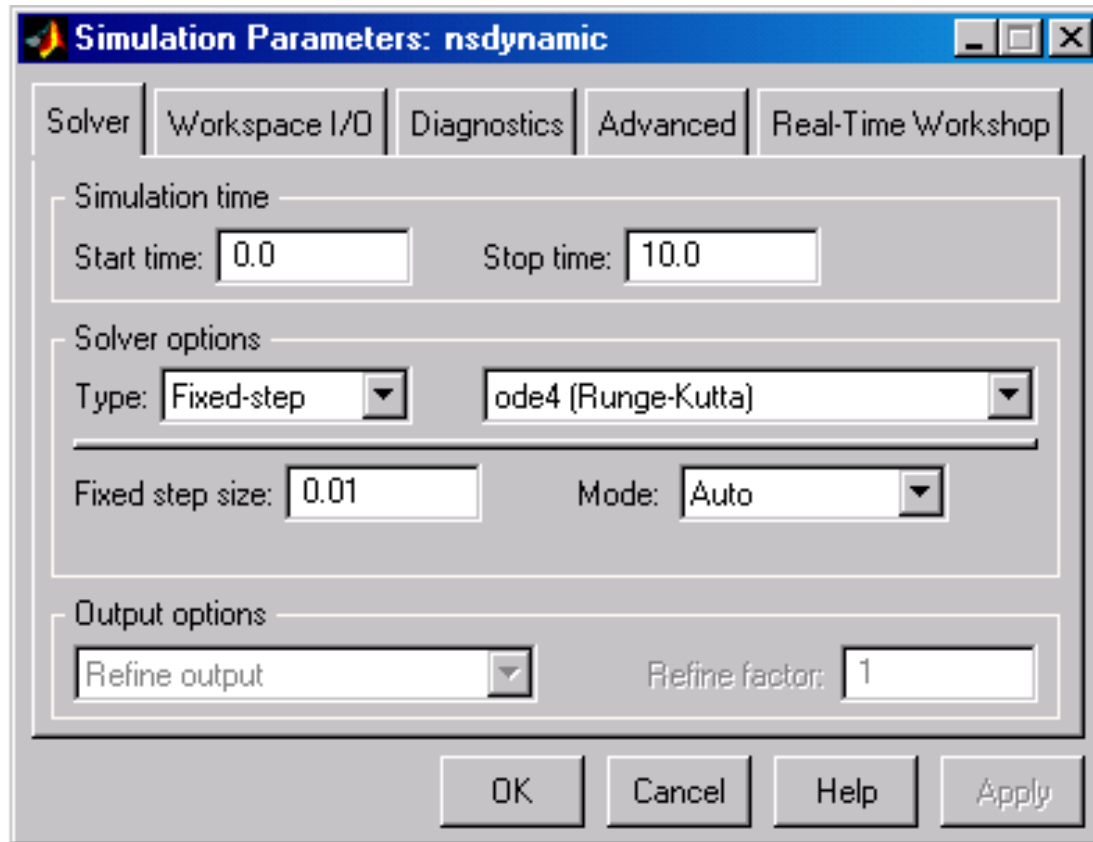
$M_{32} = 0;$

$M_{33} = m_3;$

$M = [M_{11} \ M_{12} \ M_{13}; \ M_{21} \ M_{22} \ M_{23}; \ M_{31} \ M_{32} \ M_{33}];$

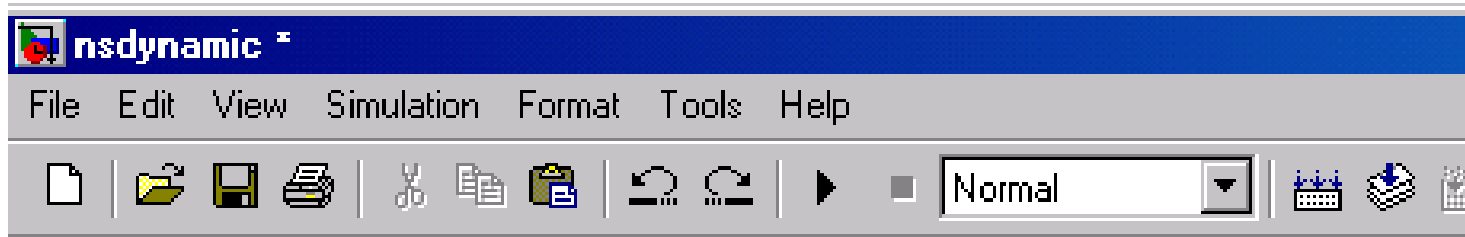
$\text{robot_param} = [M];$

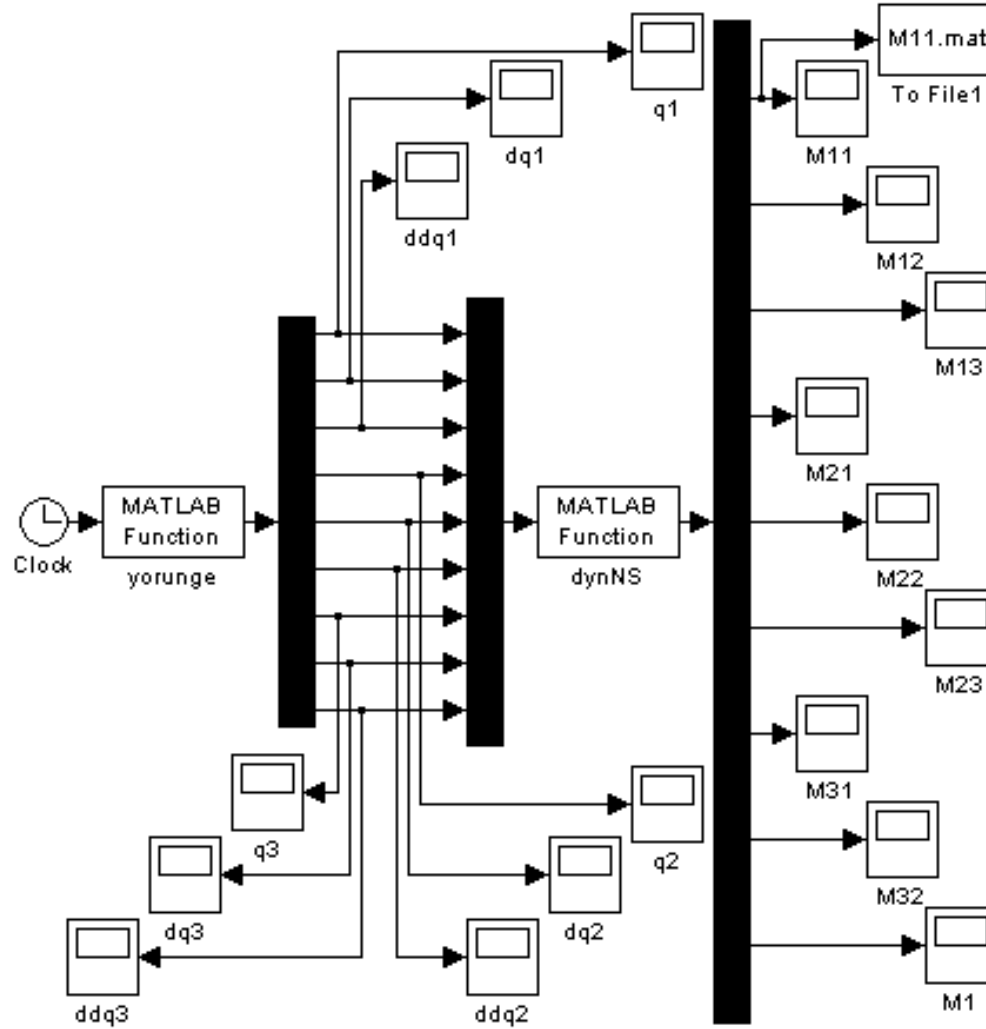
Kütle matrisinin her bir elemanının zamana göre değişimini görmek için 'nsdynamic.mdl' dosyasını gerçekleştirelim. Öncelikle 'yorunge.m' dosyasına eklemlerin konum, hız ve ivme ifadelerinde kullanılan 't' zamanını üreten **clock** bloğu eklenir. 'yorunge.m' dosyasında görüldüğü gibi zaman 't' değişkeniyle açıklandığından ($\text{konum1} = a_{10} + a_{11} * t + a_{12} * t^2 + a_{13} * t^3$) 'function yor=yorunge(**t**)' ifadesinde parantez içerisine (**t**) yazılır. 'nsdynamic.mdl' dosyasındaki **simulation** menüsünde **Simulation parameters** seçeneği tıklanarak simulasyonun başlangıç/bitiş zamanı ve simulasyon adım sayısı belirlenebilir. Şekil 1.17'de görüldüğü gibi başlangıç zamanı (start time) 0.0, bitiş zamanı (stop time) 10.0 ve simulasyon adım sayısı 0.01 olarak belirlenmiştir. Bitiş zamanı (stop time) iniNS.m dosyasındaki $t_f=10$ ile aynı olmalıdır.



Şekil 1.17. Simülasyon başlangıç/bitiş zamanı ve simülasyon adım sayısının belirlenmesi.

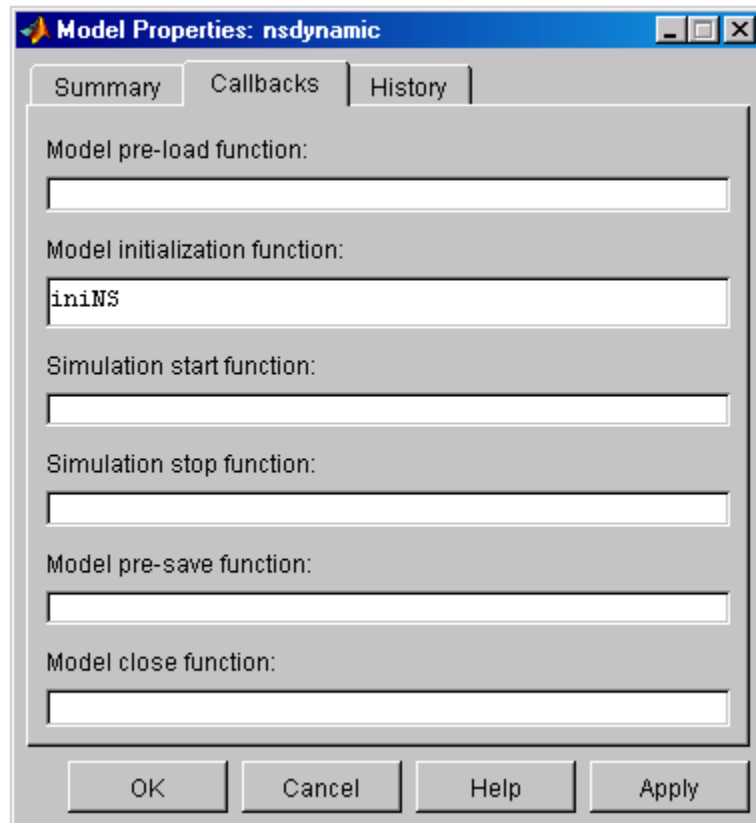
clock bloğu **yorunge** bloğuna eklenir. **Yorunge** bloğu 9 adet çıkışı sahip olduğundan, bu bloğa 9 adet çıkışı bulunan bir **demux** bloğu eklenir. Bu blok ise 9 adet girişi olan bir **mux** bloğuna eklenir. Aslında 'demux' ve 'mux' bloklarına gerek yoktur. **Yorunge** bloğu doğrudan **dynNS** bloğuna eklenebilir. Her bir eklemin konum, hız ve ivme grafikleri görüntüleneceğinden bu bloklar kullanılmıştır. Sonuç olarak **dynNS** bloğu 9 adet çıkışı bulunan bir **demux** bloğuna eklenir. Bu bloğa kütle matrisinin elemanlarının grafiklerini görüntülemek için 9 adet **scope** eklenir. Bu durumda 'nsdynamic.mdl' dosyası Şekil 1.18'deki gibi oluşturulur.





Şekil 1.18. 'nsdynamic.mdl' dosyası.

Simulink model penceresinde hazırlanan bir simülasyonu çalıştırmak için menü çubuğundaki **Simulation** menüsünden **Start** seçeneğini, **Ctrl+T** kısa yolunu veya **help** menüsünün altındaki üçgeni kullanabiliriz. Bu simülasyonun çalışabilmesi için **File** menüsünden **Model properties** seçeneğinde **Callbacks** tıklanır. Şekil 1.19’da görüldüğü gibi bu seçenekte **Model initialization function** içerisine başlangıç değerlerinin atandığı ‘iniNS’ dosyası yazılır.



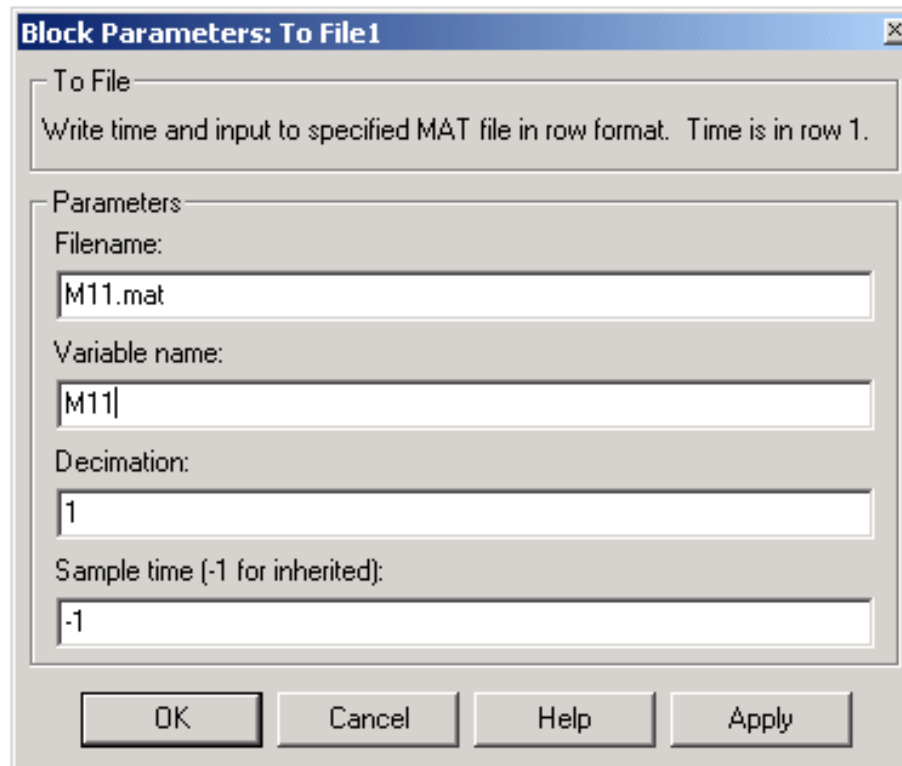
Şekil 1.19. Başlangıç değerlerinin atanması

Şimdi şekil 1.18'deki 'nsdynamic.mdl' dosyasını çalıştırarak sırasıyla eklemlerin konum, hız, zaman ve kütle matrisinin elamanlarını zamana bağlı olarak çizelim.

1.16.1. Matlab'te Grafik Çizimi

Şekil 1.18'de M11 kütle çıkışına M11.mat dosyasının eklendiğine dikkat edin. Bu dosyanın içerisinde ilk satırda M11'in kütle değerleri ve ikinci satırda bu kütle değerlerinin gerçekleştiği zaman bilgileri yer almaktadır. Şekil 1.18'de görüntünün sade olması düşünülerek gösterilmemesine karşın kütle matrisinin her bir elemanı, eklem konum, hız ve ivmeleri için çıkışta bir adet *****.mat** bloğu bulunmaktadır. Bu *****.mat** matrislerindeki bilgiler 'plot' ve **'subplot'** komutlarına aşağıdaki gibi yazılarak her bir elemana ait grafik çizilir. **'subplot'** komutu birden fazla grafiği bir arada çizmek için kullanılır. Örnek olarak aşağıdaki satırları Matlab programında yazıp M11, M12, M13 ve M14 grafiklerini çizelim.

Öncelikle 'nsdynamic.mdl' dosyasında **'to File1'** bloğu tıklanır. Bu işlem **'Blok Parameters: To File1'** adında bir pencere açar (bu işlem bütün elemanlar için gerçekleştirilir). Bu pencerenin içerisi Şekil 1.20'deki gibi doldurulur. Daha sonra 'nsdynamic.mdl' dosyası çalıştırılır. Bu dosya çalıştıktan sonra aynı dizinde M11.mat, M12.mat, M13.mat ve M21.mat dosyaları oluşur.



Şekil 1.20. Blok parametrelerinin dosyaya yazılması.

Daha sonra Matlab programına aşağıdaki satırlar yazılır ve **'enter'** tuşuna basılarak Şekil 1.21'deki M11, M12, M13 ve M21 elemanlarının grafiği çizilir.

```
load M11; load M12; load M13; load M21;
```

```
subplot(2,2,1)
```

```
plot(M11(1,:), M11(2,:))
```

```
subplot(2,2,2)
```

```
plot(M12(1,:), M12(2,:))
```

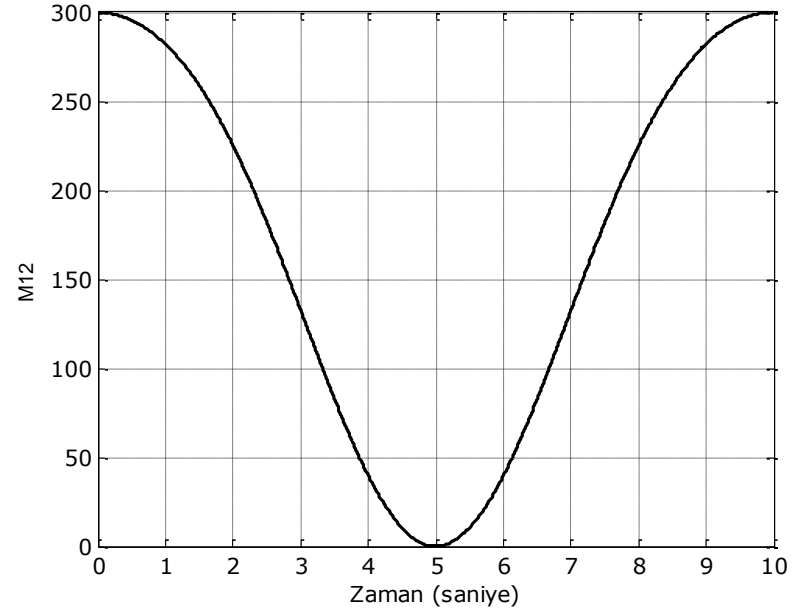
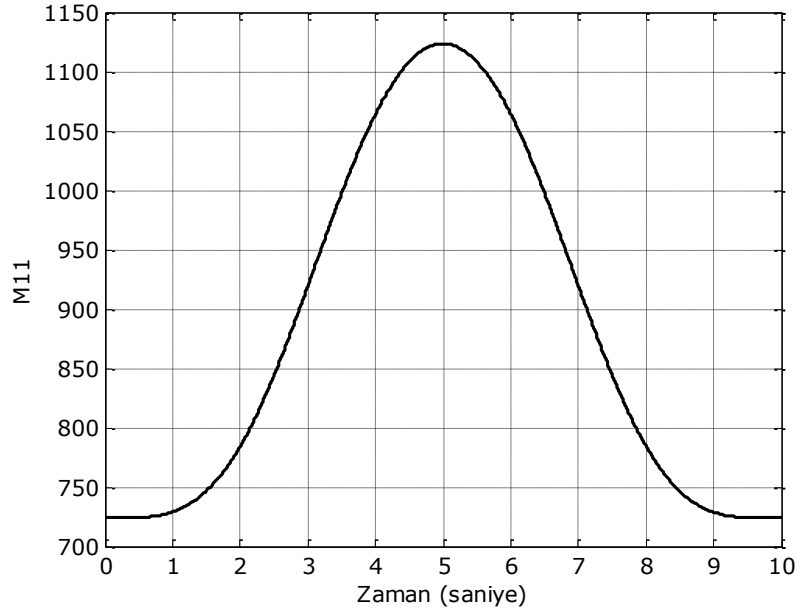
```
subplot(2,2,3)
```

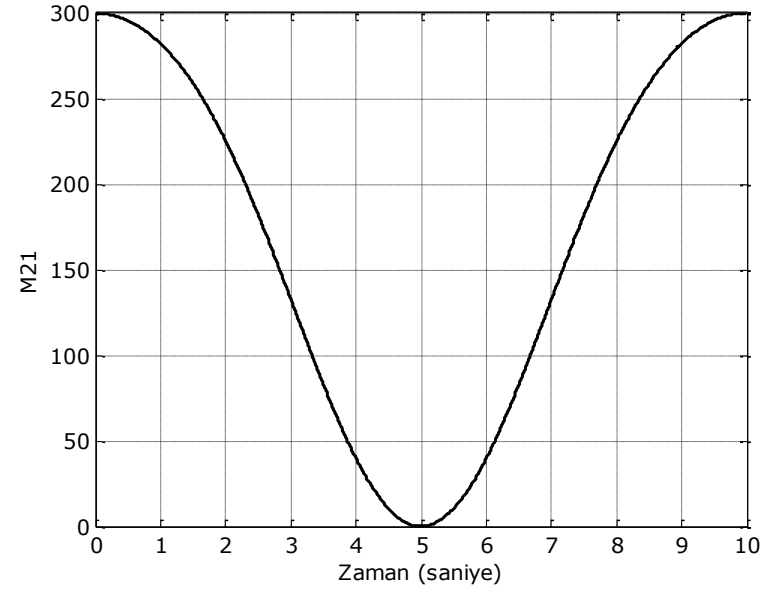
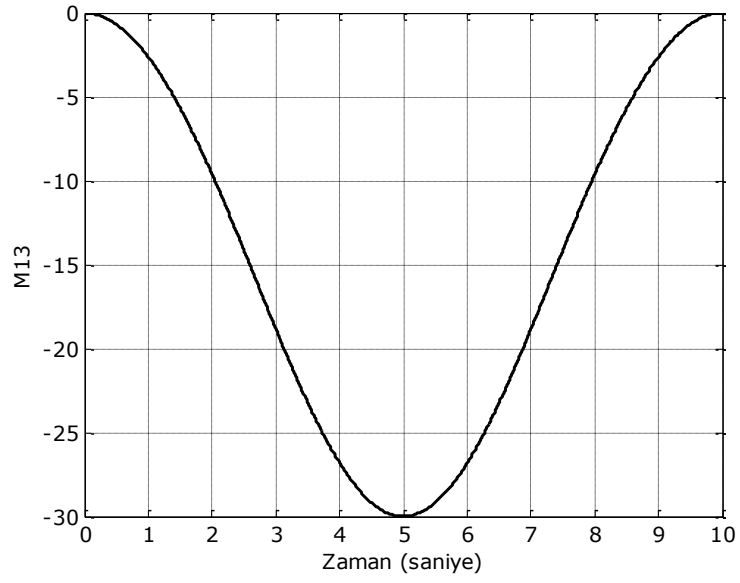
```
plot(M13(1,:), M13(2,:))
```

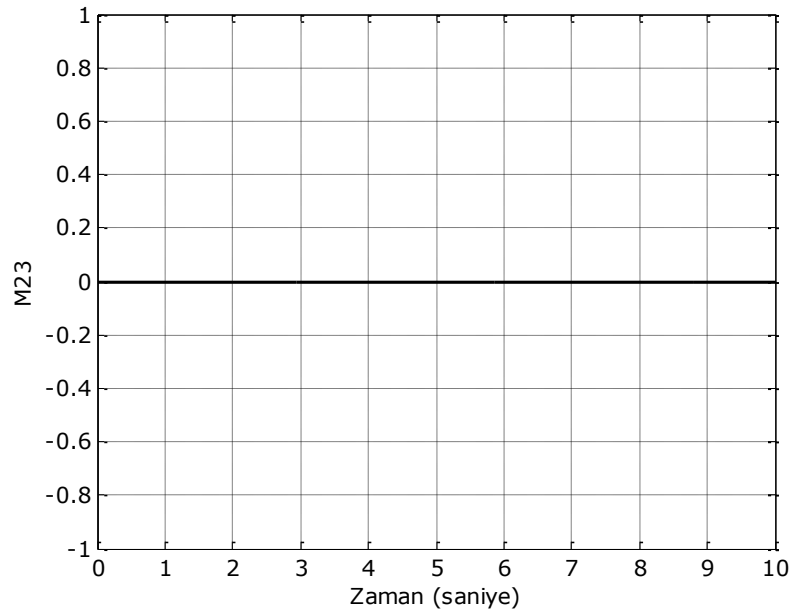
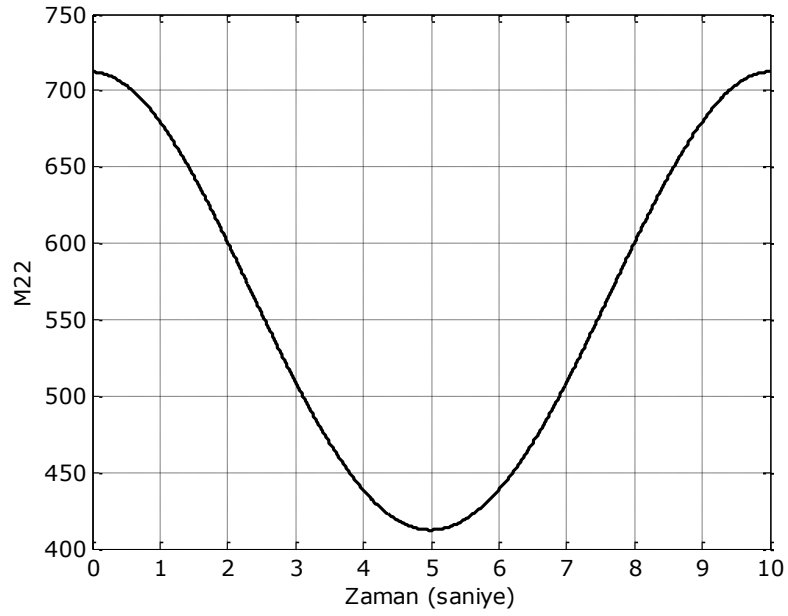
```
subplot(2,2,4)
```

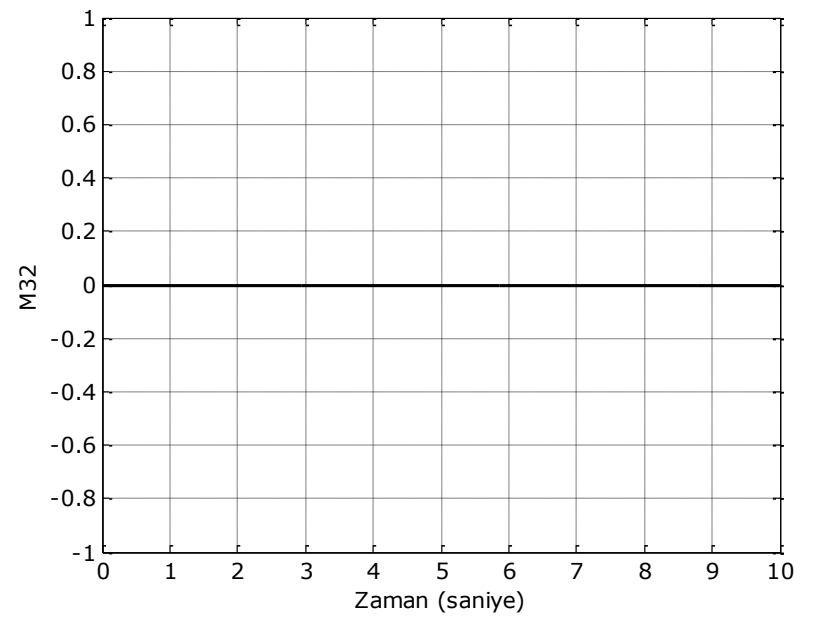
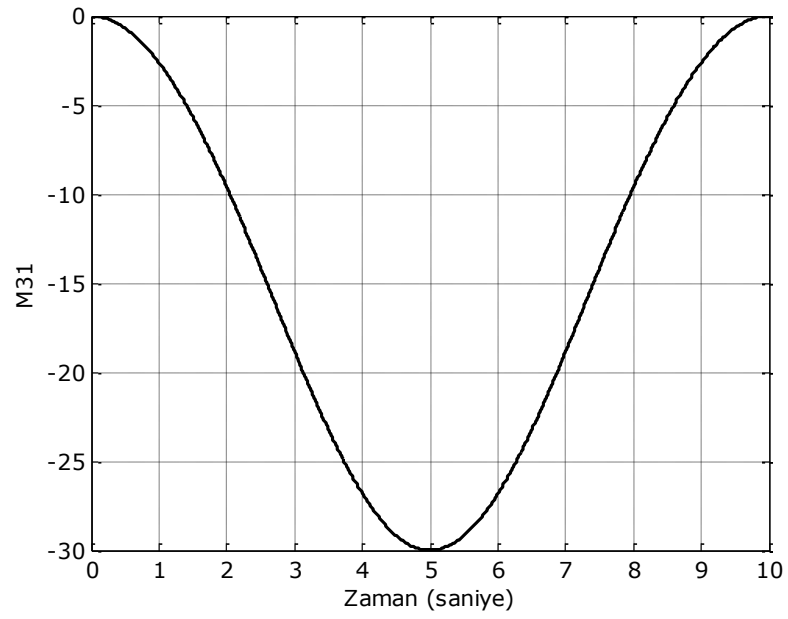
```
plot(M21(1,:), M21(2,:))
```

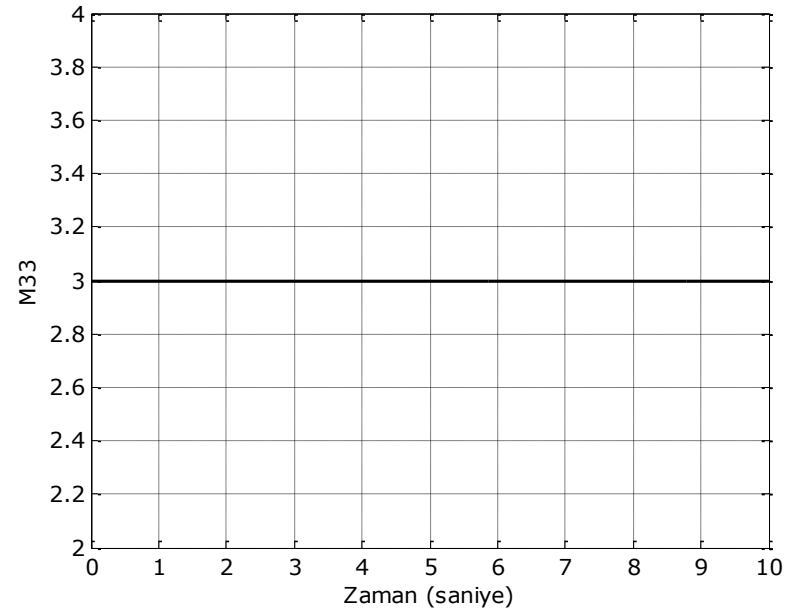

Yukarıda yapılan işlemler diğer elemanlar içinde aynı şekilde gerçekleştirilir.





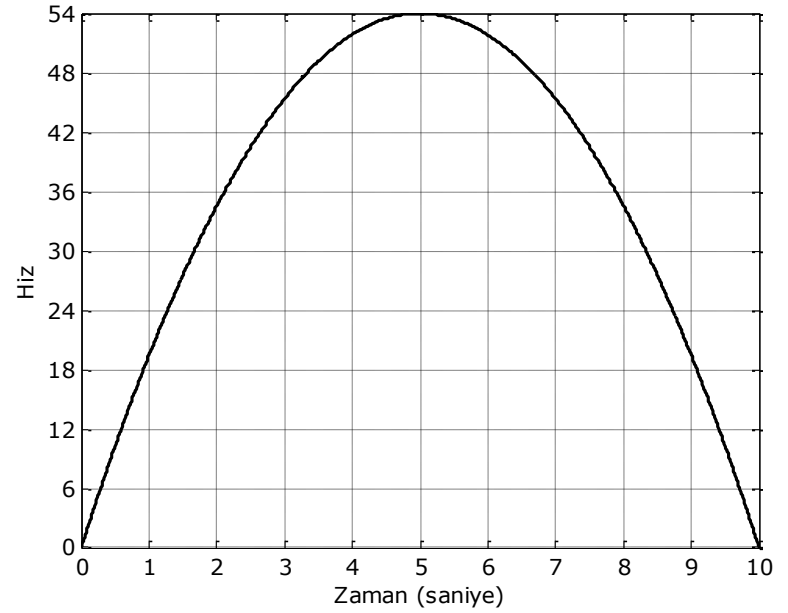
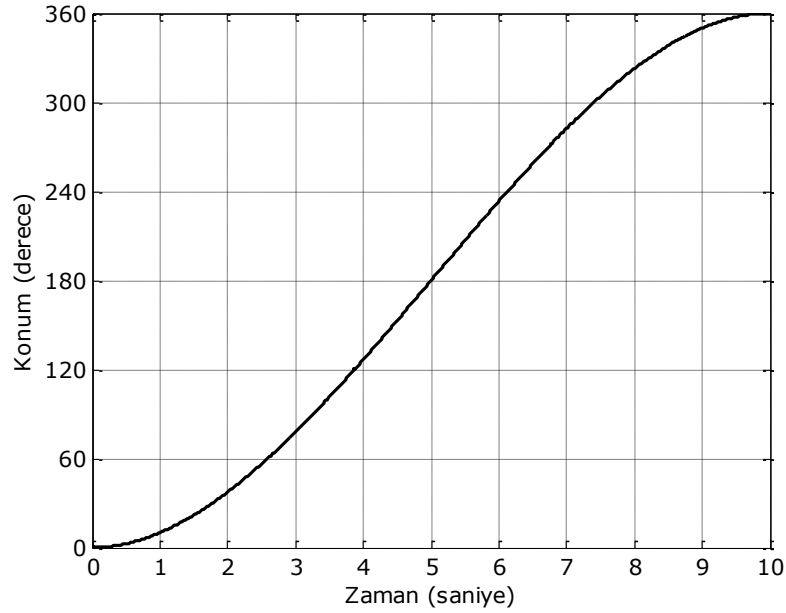


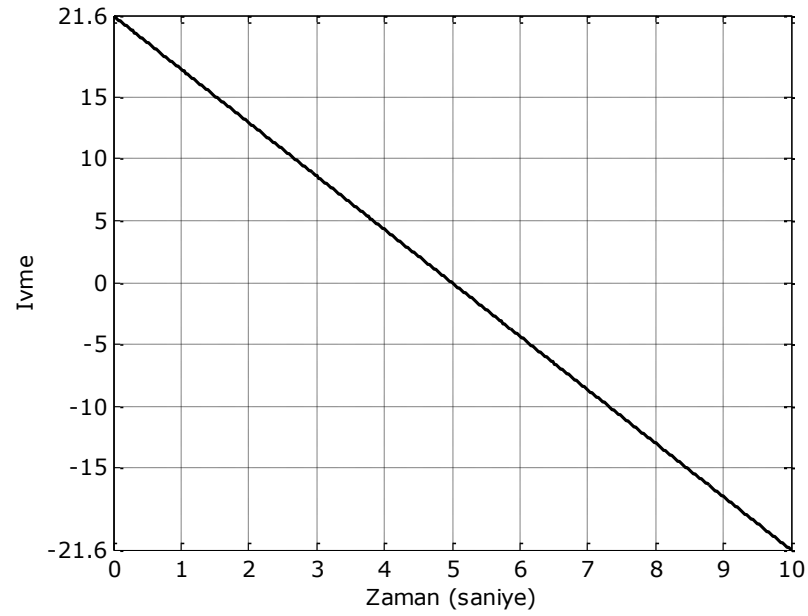




Şekil 1.21. Kütle matrisinin elemanlarının grafiği.

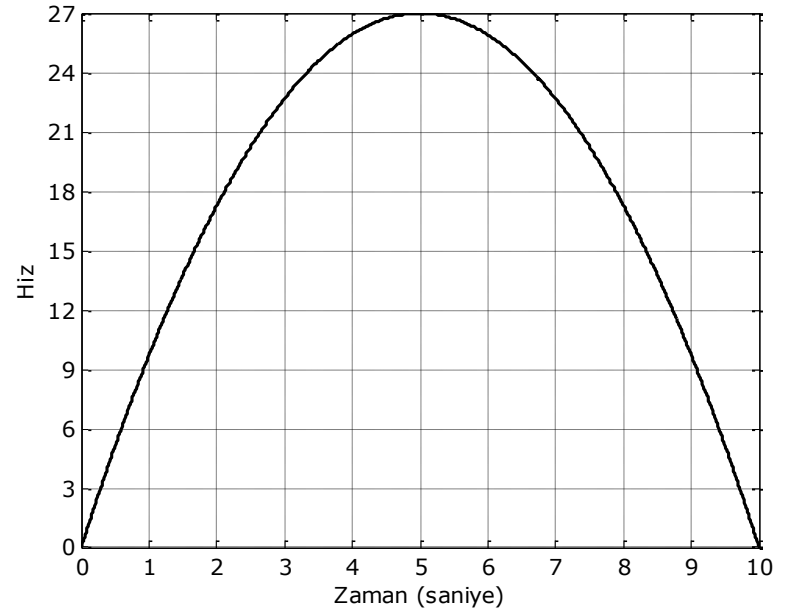
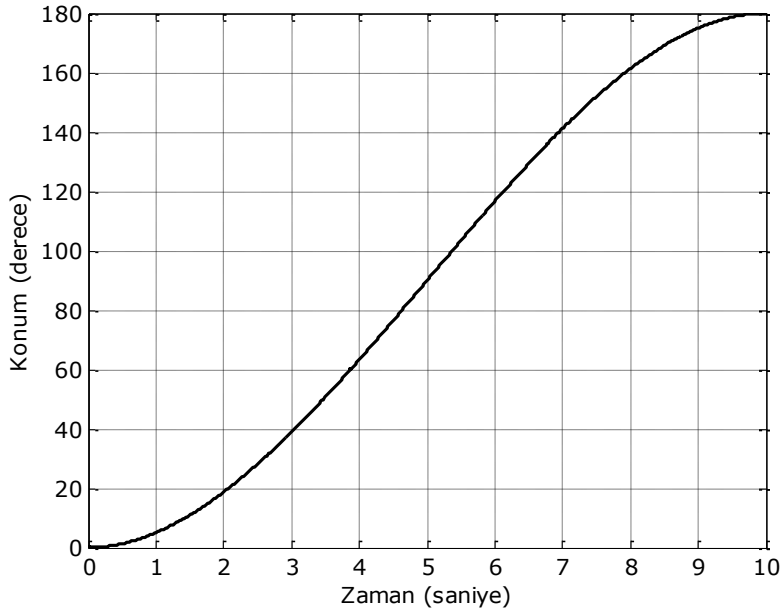
Birinci ekleme ait konum, hız ve ivme grafiği şekil 1.22’de görölmektedir.

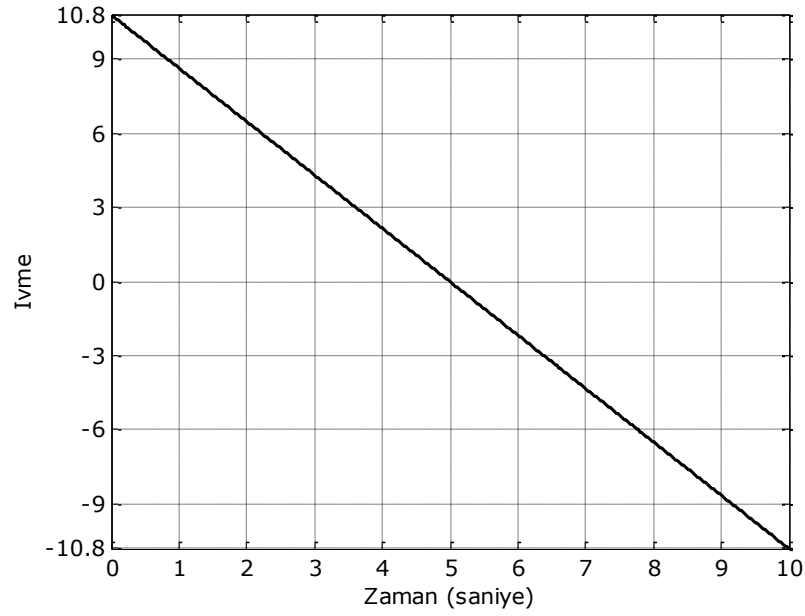




Şekil 1.22. Birinci eklemin konum, hız ve ivme grafiği.

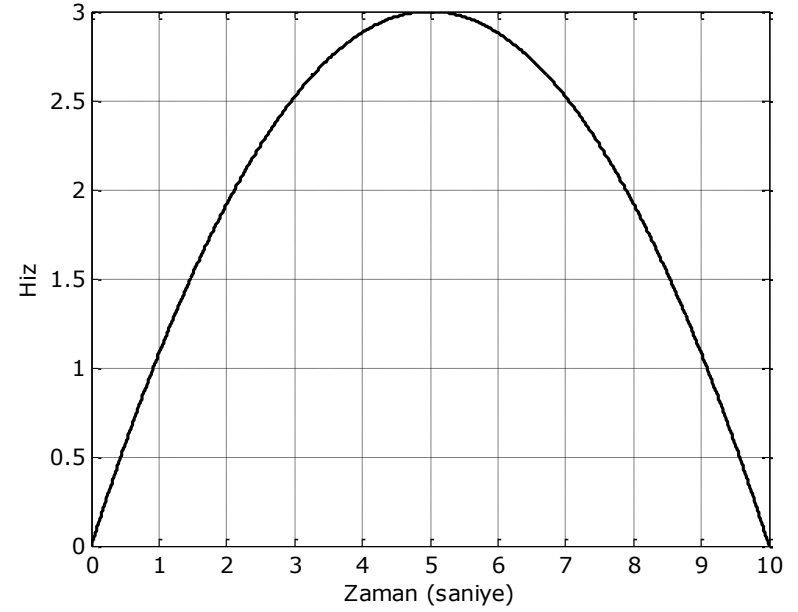
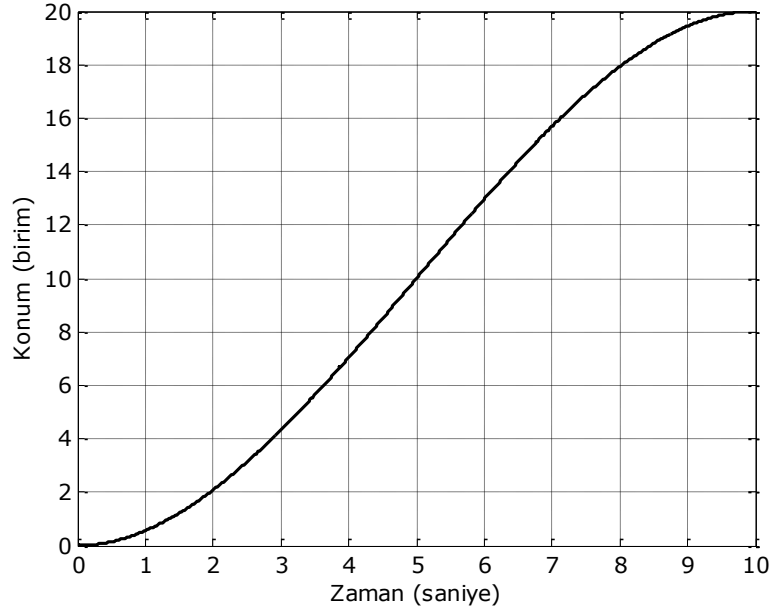
İkinci ekleme ait konum, hız ve ivme grafiği şekil 1.23’de görülmektedir.

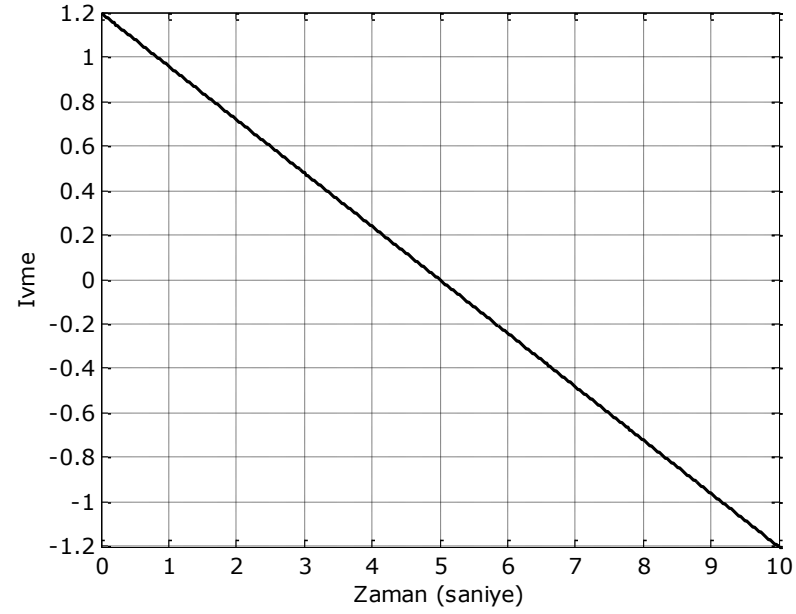




Şekil 1.23. İkinci eklemin konum, hız ve ivme grafiği.

Üçüncü ekleme ait konum, hız ve ivme grafiği şekil 1.24'te görülmektedir.





Şekil 1.24. Üçüncü eklemin konum, hız ve ivme grafiği.

- b) Coriolis/merkezkaç kuvvet, yer çekimi vektörü ve tork ifadelerinin grafiğini çizmek için dynNS.m dosyasında kütle matrisinin altına aşağıdaki satırlar eklenir. Ayrıca, 'nsdynamic.mdl' dosyası da Şekil 1.25'deki gibi yeniden düzenlenir.

dynNS.m dosyası

```
function robot_param=dynNS(u);  
global h1 d2 l3 m1 m2 m3 lxx2 lxx3 lyy2 lyy3 lzz1 lzz2 lzz3 g;  
  
%%%% Coriolis ve centrifugal kuvvetler %%%%  
  
C1=2*[s2*c2*(lxx2+lxx3-lyy2-lzz3+m3*(0.25*l3^2-  
l3*q3+q3^2))]*dq1*dq2-[d2*m3*s2*(0.5*l3-q3)]*dq2^2-  
2*[d2*m3*c2]*dq2*dq3+[m3*s2^2*(-l3+2*q3)]*dq1*dq3;
```

```

C2=-s2*c2*(lxx2+lxx3-lyy2-lzz3+m3*(0.25*l3^2-
    l3*q3+q3^2))*dq1^2+m3*(-l3+2*q3)*dq2*dq3;
C3=m3*s2^2*(0.5*l3-q3)*dq1^2+m3*(0.5*l3-q3)*dq2^2;
C=[C1;C2;C3];

```

%%%% Yerçekimi vektörü %%%%

```

G1=0;      G2=m3*g*s2*(0.5*l3-q3);      G3=m3*g*c2;
G=[G1;G2;G3];

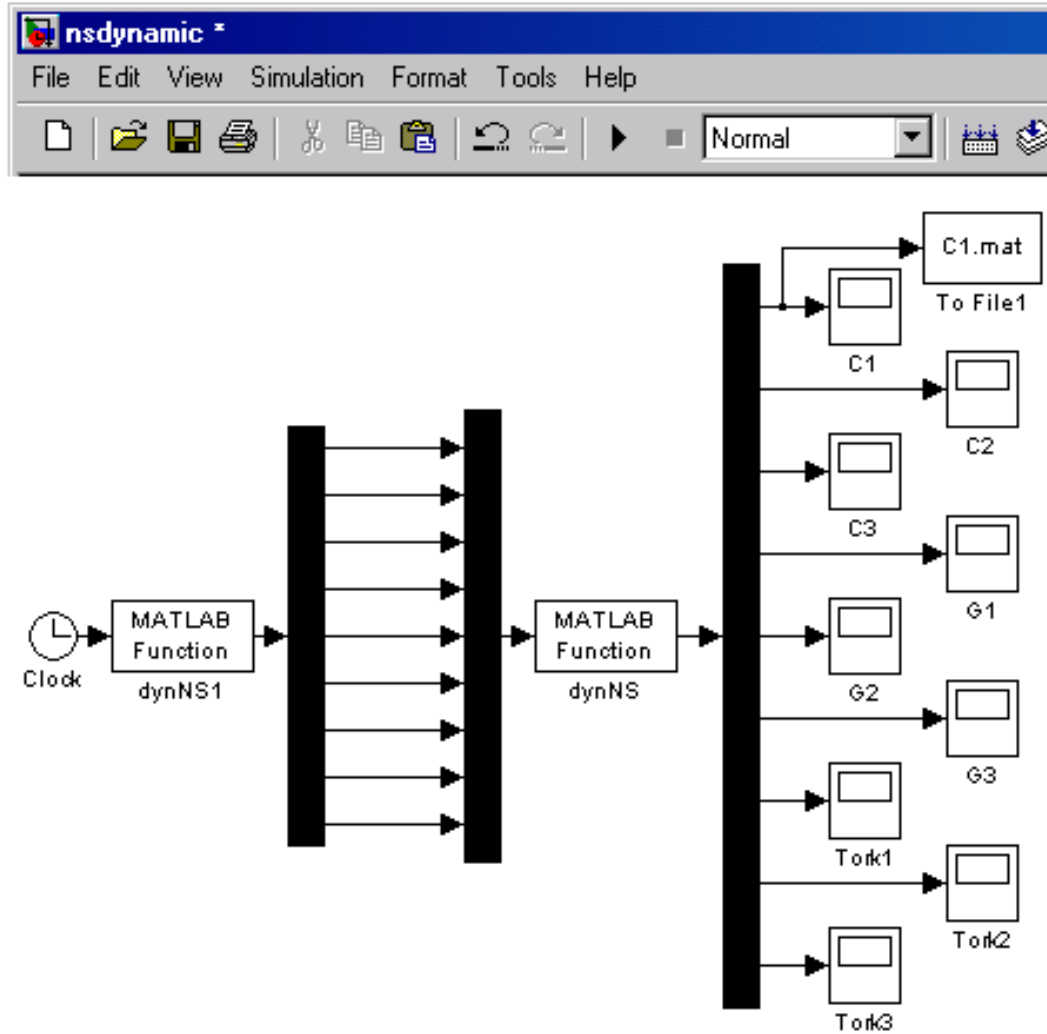
```

%%%% Eklem torkları %%%%

```

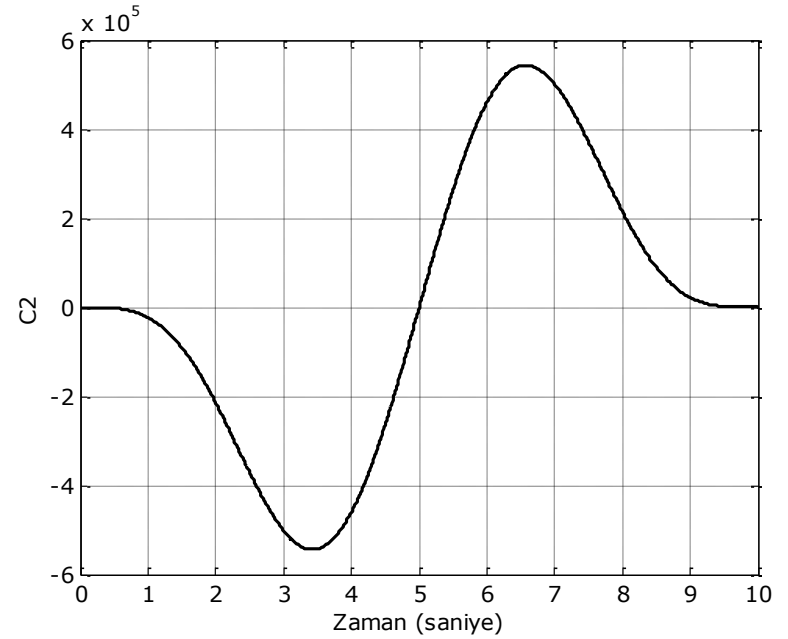
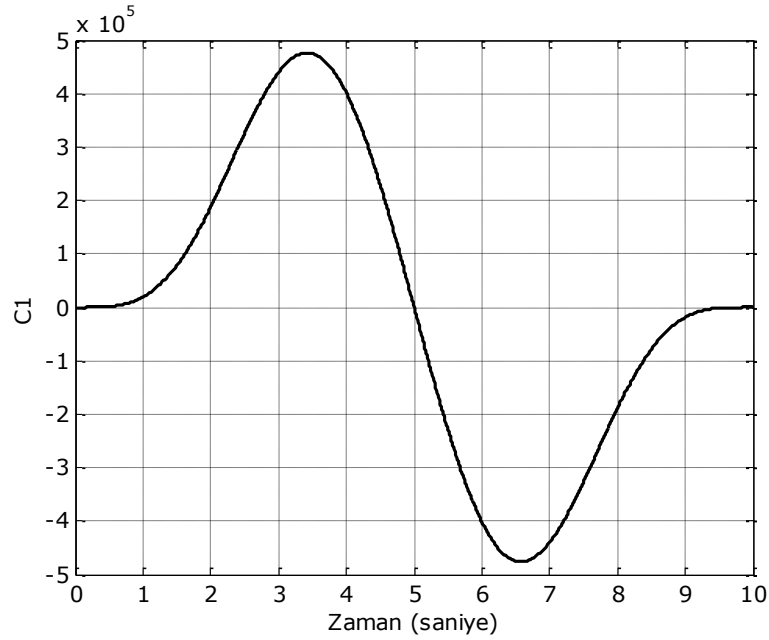
ddq=[ddq1; ddq2; ddq3];    tork=M*ddq+C+G;
robot_param=[C G tork];

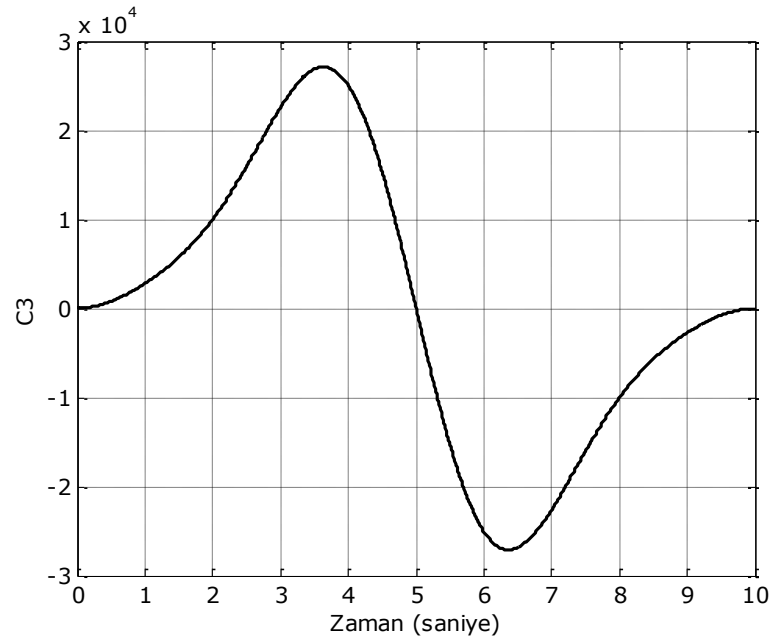
```



Şekil 1.25. Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü çizdiren dosya.

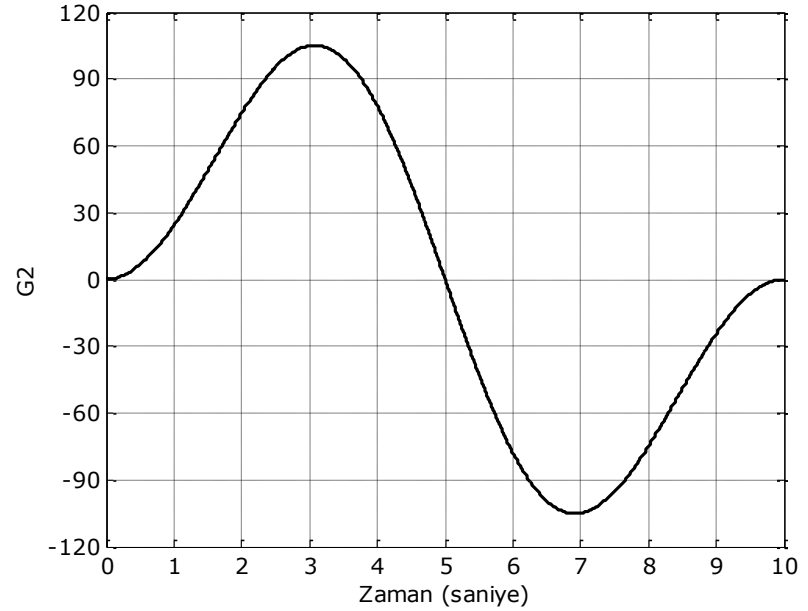
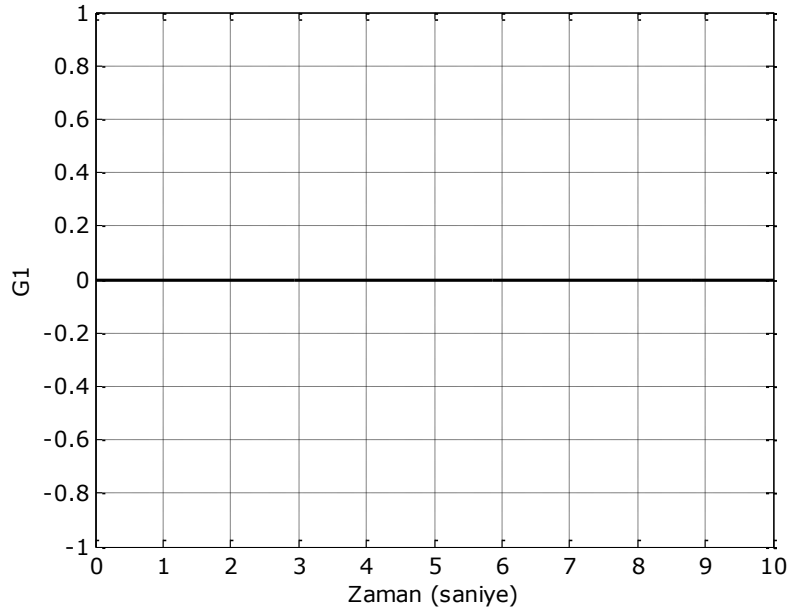
Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünün elemanlarına ait grafikler Şekil 1.26'da görülmektedir.

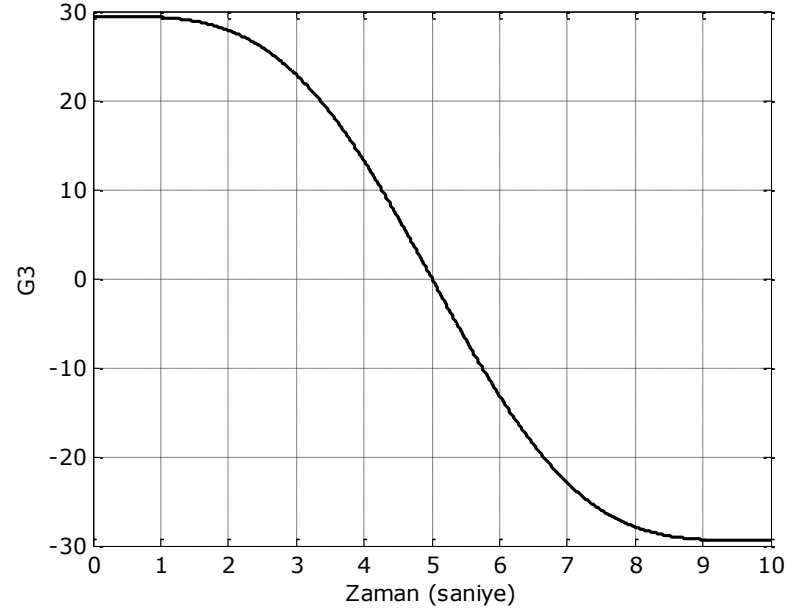




Şekil 1.26. Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünün elemanları.

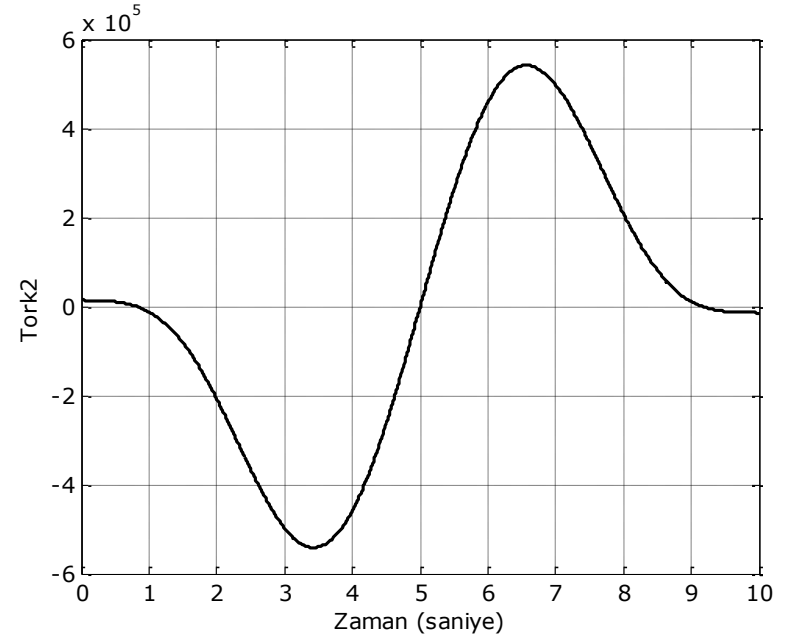
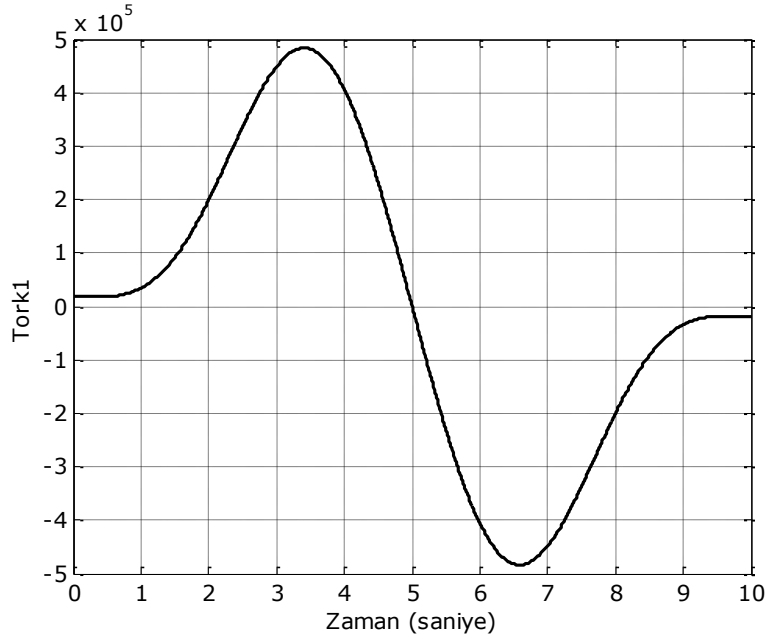
Yer çekimi vektörünün elemanlarına ait grafikler Şekil 1.27’de görülmektedir.

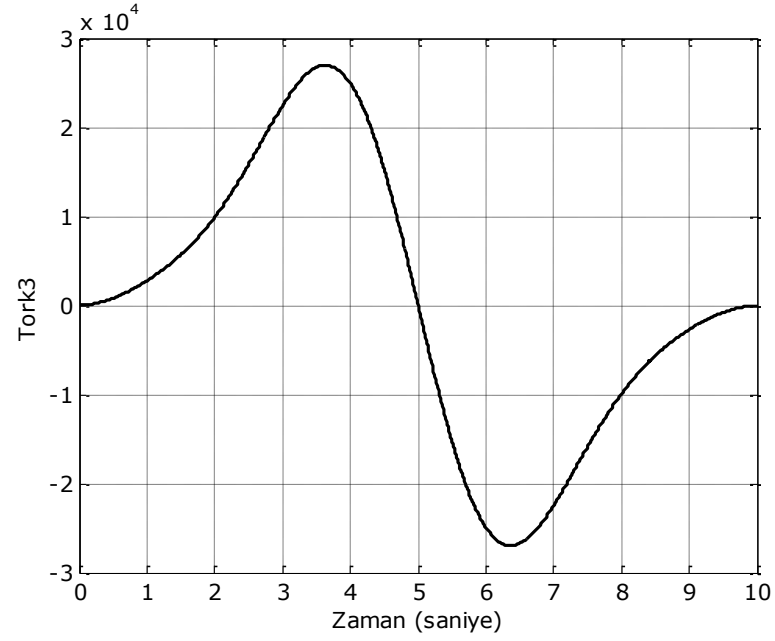




Şekil 1.27. Yer çekimi vektörünün elemanlarının grafikleri.

Eklem torklarına ait grafikler Şekil 1.28'de görülmektedir.



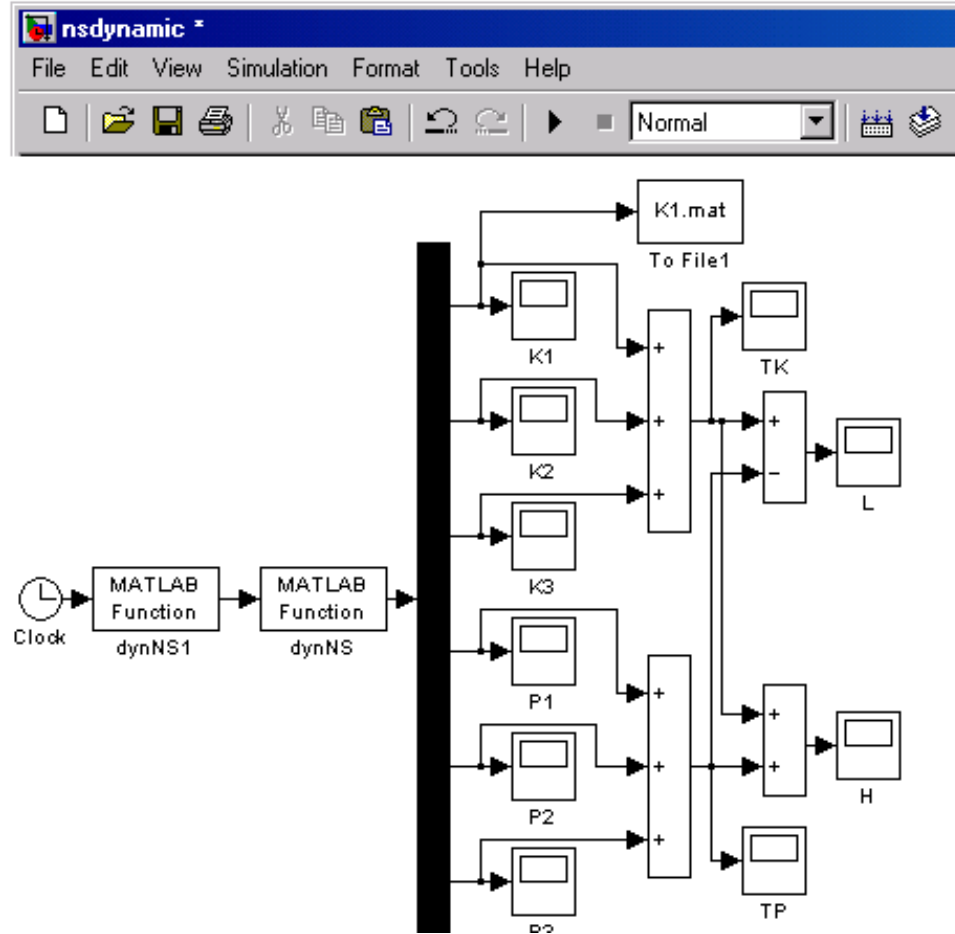


Şekil 1.28. Eklem torklarının grafikleri.

- c) Her eklemin kinetik/potansiyel enerjisini, robotun toplam potansiyel/kinetik enerjisini, Lagrange ve Hamilton grafiklerini çizmek için dynNS.m dosyasında yer çekimi vektörünün altına aşağıdaki satırlar eklenir. 'nsdynamic.mdl' dosyası da Şekil 1.29'daki gibi yeniden düzenlenir.

dynNS.m dosyası

```
function robot_param=dynNS(u);  
global h1 d2 l3 m1 m2 m3 lxx2 lxx3 lyy2 lyy3 lzz1 lzz2 lzz3 g;  
  
%%%% Kinetik enerji %%%%  
  
K1=0.5*lzz1*dq1^2;  
K2=0.5*(0.25*m2*d2^2+s2^2*lxx2+c2^2*lyy2)*dq1^2+0.5*lzz2*dq2  
^2
```



Şekil 1.29. Kinetik/potansiyel enerji, toplam kinetik/potansiyel enerji Lagrange ve Hamilton model penceresi

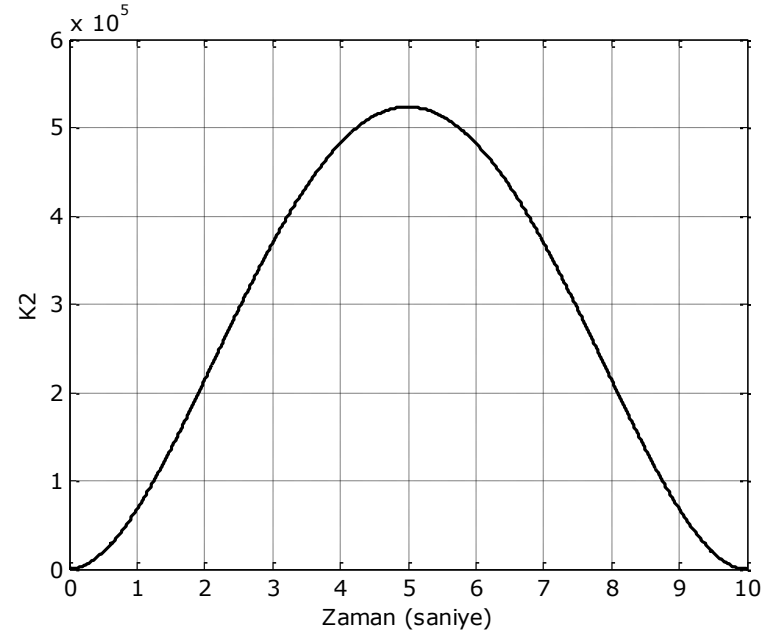
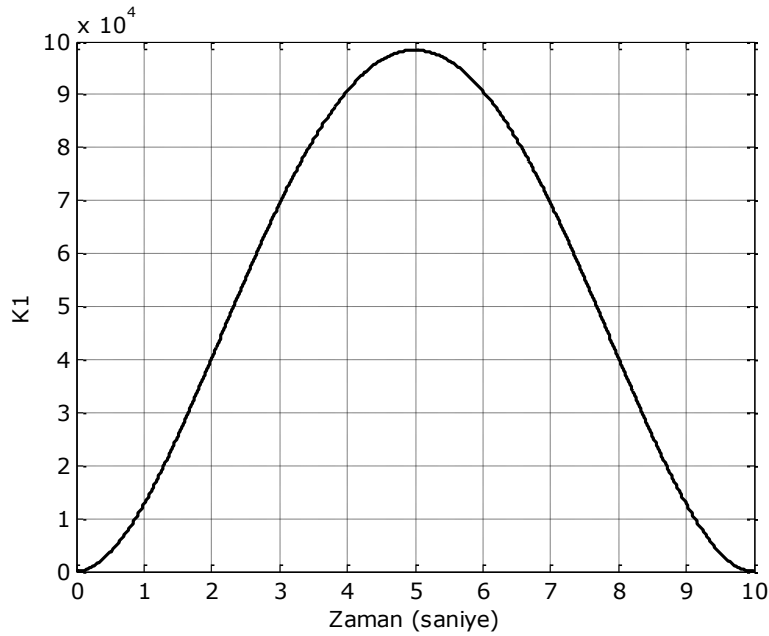
$$\begin{aligned}
 K3 = & 0.5 * [s2^2 * (lxx3 + m3 * (0.25 * l3^2 - l3 * q3 + q3^2)) + c2^2 * lzz3 + \dots \\
 & m3 * d2^2] * dq1^2 + 0.5 * [m3 * (0.25 * l3^2 - l3 * q3 + q3^2) + \dots \\
 & lyy3] * dq2^2 + l3 * q3 + q3^2 + lyy3] * dq2^2 + 0.5 * m3 * dq3^2 + \dots \\
 & [d2 * m3 * c2 * (0.5 * l3 - q3)] * dq1 * dq2 - [d2 * m3 * s2] * dq1 * dq3;
 \end{aligned}$$

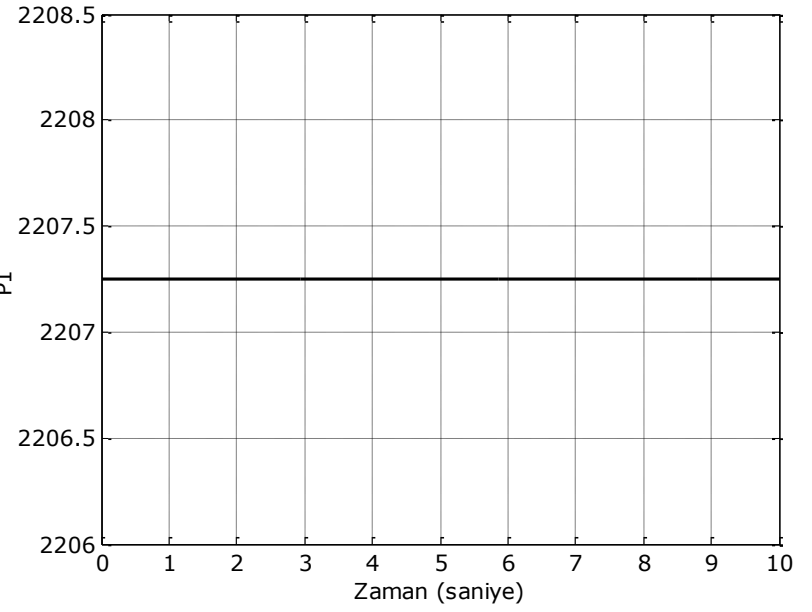
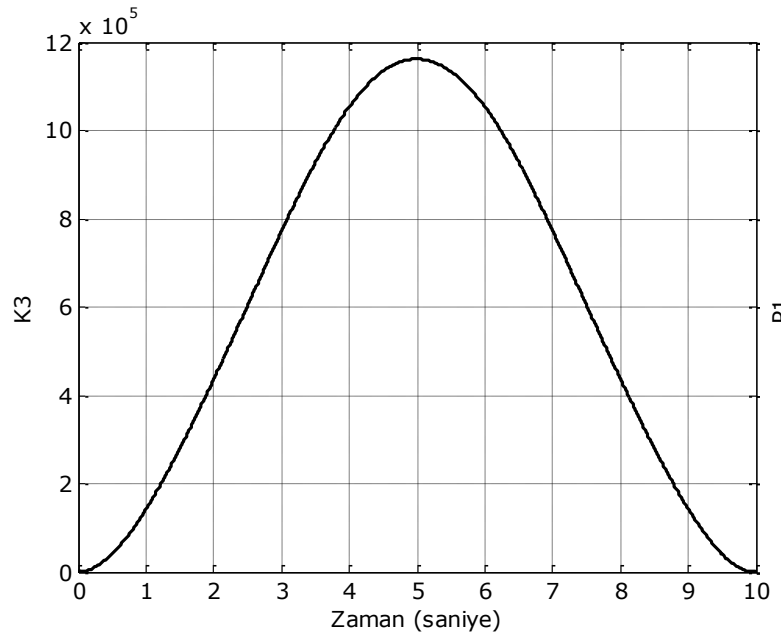
$$KinEn = [K1; K2; K3];$$

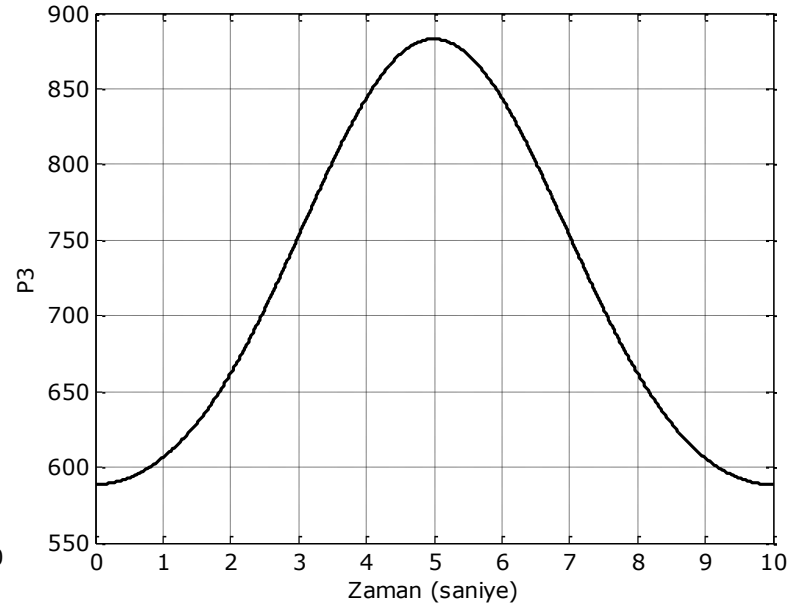
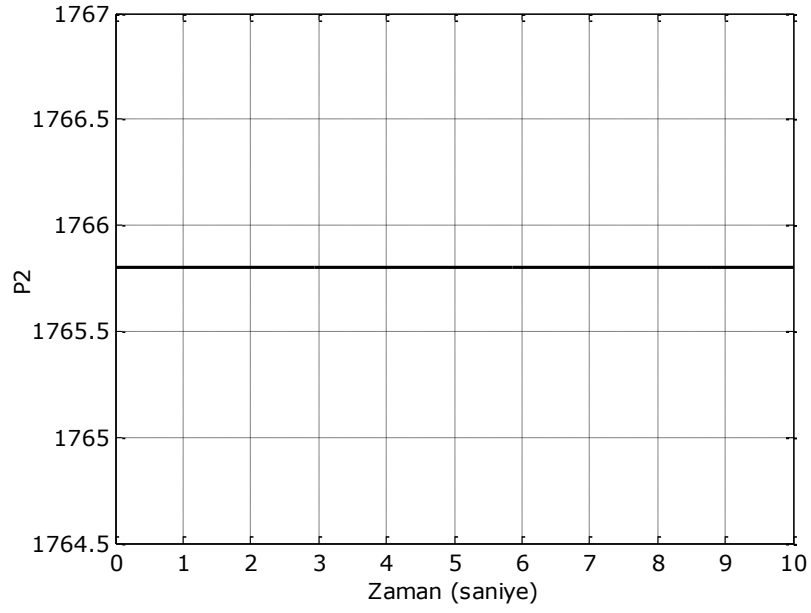
%%%% Potansiyel enerji %%%%

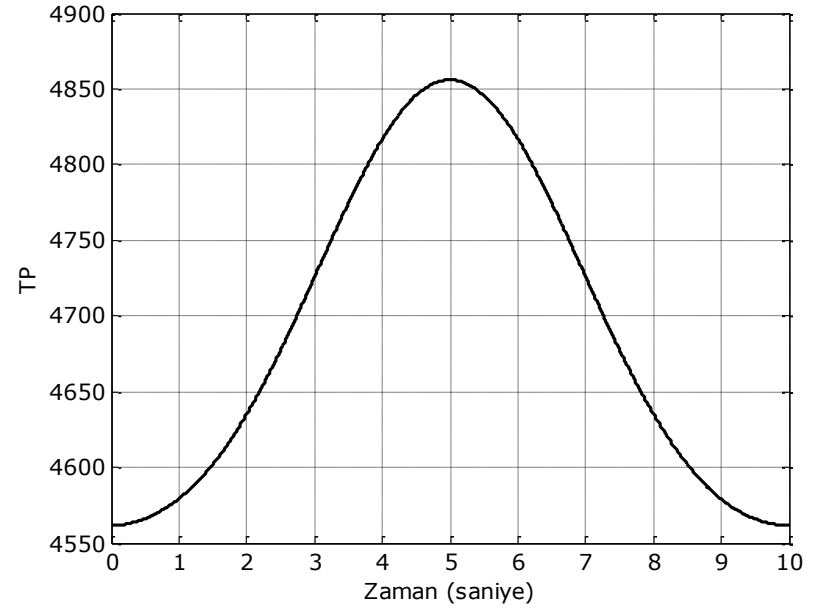
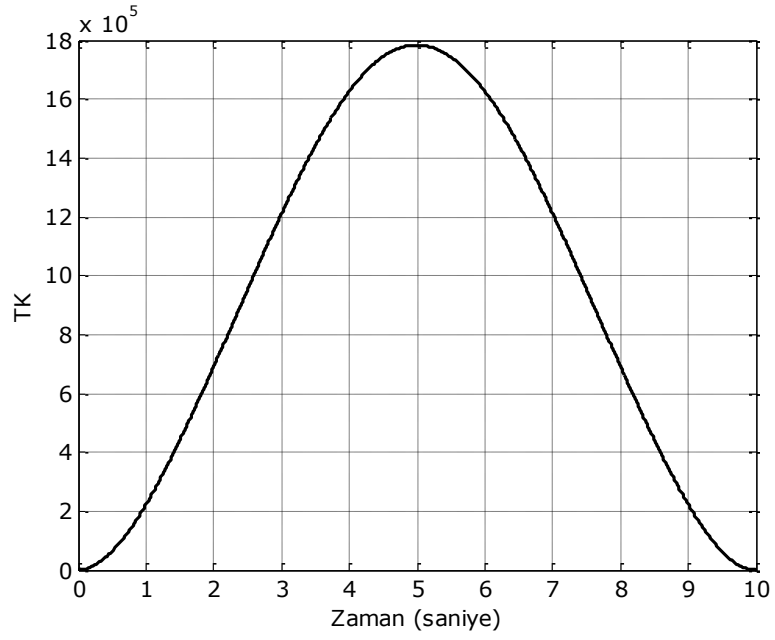
$$\begin{aligned}
 P1 &= m1 * g * (h1/2); & P2 &= m2 * g * h1; & P3 &= m3 * g * [c2 * (-0.5 * l3 + q3) + h1]; \\
 PotEn &= [P1; P2; P3]; & robot_param &= [KinEn; PotEn];
 \end{aligned}$$

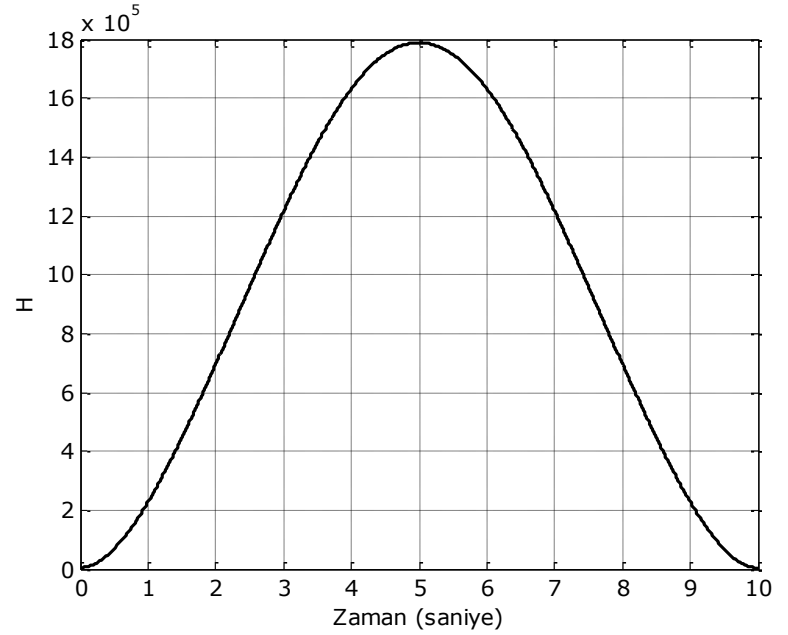
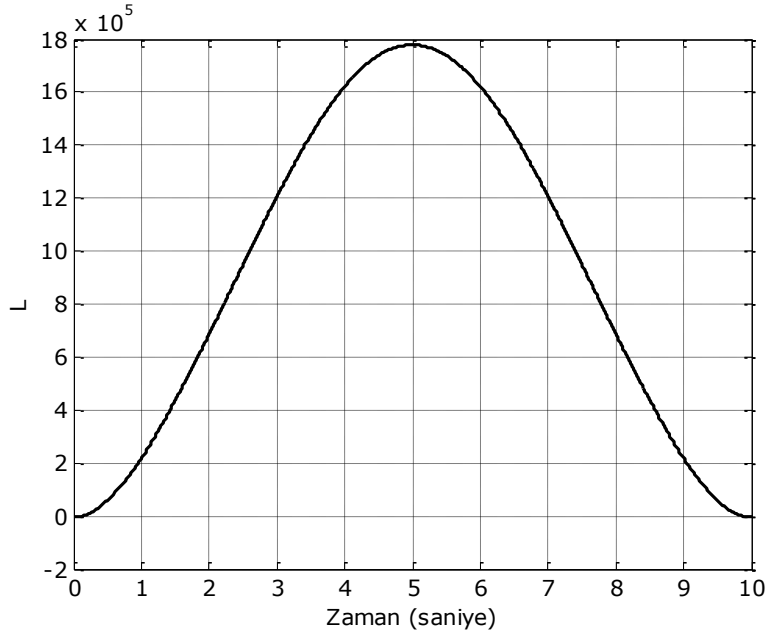
Şekil 1.29 ve şekil 1.30’da görülen K1, K2 ve K3 bir, iki ve üçüncü eklemlerin kinetik, P1, P2 ve P3 ise potansiyel enerjisini temsil etmektedir. Ayrıca TK toplam kinetik enerji, TP toplam potansiyel enerji, L Lagrange ve son olarak H ise Hamilton ifadelerini göstermektedir.











Şekil 1.30. Kinetik/potansiyel enerji, toplam kinetik/potansiyel enerji
Lagrange ve Hamilton grafikleri

- d) Y matrisi ve vektörünü kullanarak her bir eklemdaki torkun grafiklerini çizmek için Yalfa.m adında yeni bir dosya açalım ve bu dosyaya aşağıdaki satırları ekleyelim. Ayrıca, 'nsdynamic.mdl' dosyasını da Şekil 1.31'deki gibi yeniden düzenleyelim.

Yalfa.m dosyası

```
function robot_param=dynNS(u);  
global h1 d2 l3 m1 m2 m3 lxx2 lxx3 lyy2 lyy3 lzz1 lzz2 lzz3 g;
```

```
%%%% Y matrisi ve alfa vektörü %%%%
```

```
alfa1=lzz1+0.25*m2*d2^2+m3*d2^2;  
alfa2=lxx2+lxx3+0.25*m3*l3^2;  
alfa3=m3*l3;  
alfa4=m3;
```

$$\text{alfa5}=0.5*d2*l3*m3;$$

$$\text{alfa6}=d2*m3;$$

$$\text{alfa7}=lxx2+lxx3-lyy2-lzz3+0.25*l3^2*m3;$$

$$\text{alfa8}=lzz2+lyy3+0.25*l3^2*m3;$$

$$\text{alfa9}=lyy2+lzz3$$

$$y11=ddq1;$$

$$y12=s2^2*ddq1;$$

$$y13=-q3*s2^2*ddq1-2*q3*s2*c2*dq1*dq2-s2^2*dq1*dq3;$$

$$y14=q3^2*s2^2*ddq1+2*q3^2*s2*c2*dq1*dq2+2*q3*s2^2*dq1*dq3;$$

$$y15=c2*ddq2-s2*dq2^2;$$

$$y16=-q3*c2*ddq2-s2*ddq3+q3*s2*dq2^2-2*c2*dq2*dq3;$$

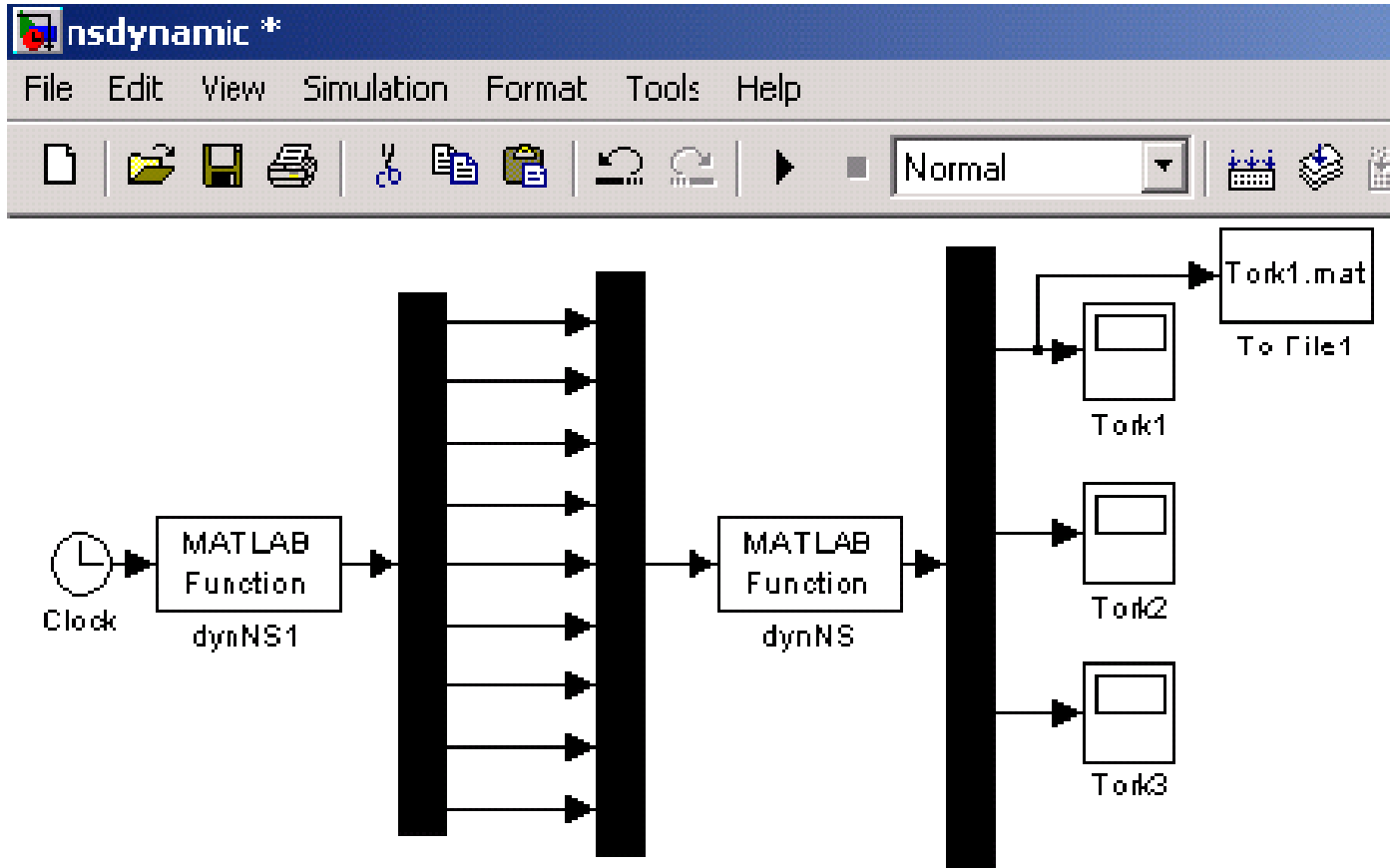
$$y17=2*s2*c2*dq1*dq2;$$

$$y19=c2^2*ddq1$$

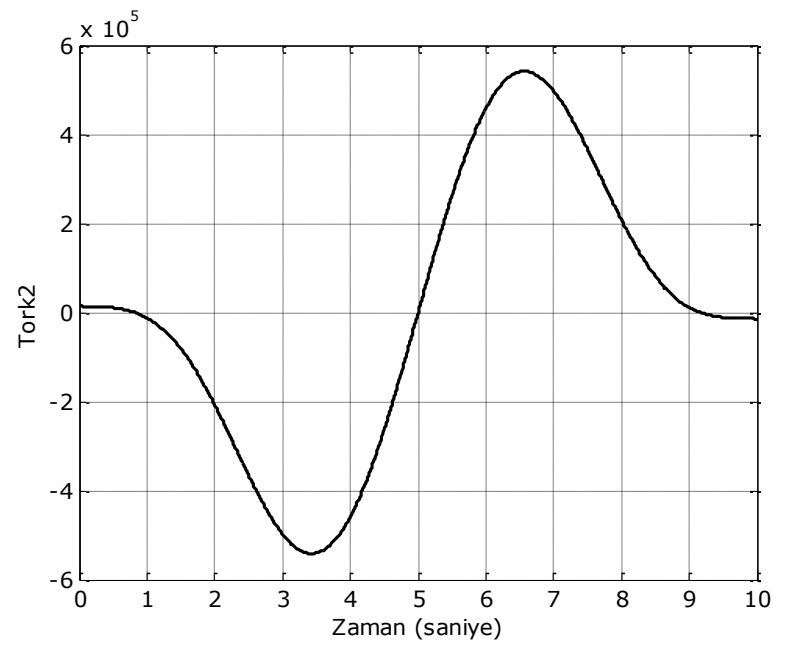
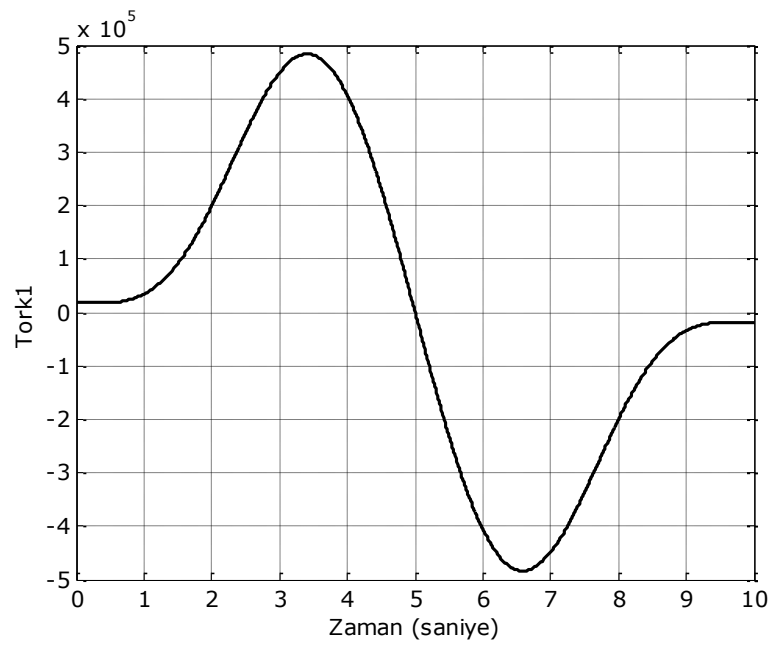
$$\begin{aligned}
y_{23} &= -q_3 \ddot{q}_2 + q_3 s^2 c^2 \dot{q}_1^2 - \dot{q}_2 \dot{q}_3 + 0.5 g s^2; \\
y_{24} &= q_3^2 \ddot{q}_2 - q_3^2 s^2 c^2 \dot{q}_1^2 + 2 q_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 - q_3 g s^2; \\
y_{25} &= c^2 \ddot{q}_1; \\
y_{26} &= -q_3 c^2 \ddot{q}_1; \\
y_{27} &= -s^2 c^2 \dot{q}_1^2; \\
y_{28} &= \ddot{q}_2;
\end{aligned}$$

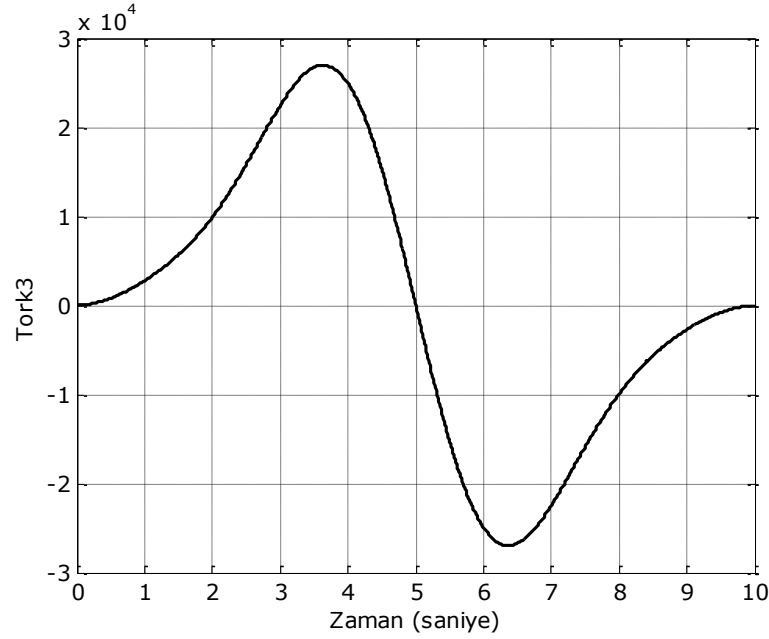
$$\begin{aligned}
y_{33} &= 0.5 s^2 \dot{q}_1^2 + 0.5 \dot{q}_2^2; \\
y_{34} &= \ddot{q}_3 - q_3 s^2 \dot{q}_1^2 - q_3 \dot{q}_2^2 + g c^2; \\
y_{36} &= -s^2 \ddot{q}_1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ALFA &= [alfa1 \ alfa2 \ alfa3 \ alfa4 \ alfa5 \ alfa6 \ alfa7 \ alfa8 \ alfa9]; \\
Y &= [y_{11} \ y_{12} \ y_{13} \ y_{14} \ y_{15} \ y_{16} \ y_{17} \ 0 \ y_{19}; \ 0 \ 0 \ y_{23} \ y_{24} \ y_{25} \ y_{26} \ y_{27} \\
&\quad y_{28} \ 0; \ 0 \ 0 \ y_{33} \ y_{34} \ 0 \ y_{36} \ 0 \ 0 \ 0]; \\
tork_{123} &= Y * ALFA';
\end{aligned}$$



Şekil 1.31. Y ve ile eklem torklarını hesaplayan model penceresi.





Şekil 1.32. Y matrisi ve vektörü kullanılarak elde edilen torklar.

Görüldüğü gibi Şekil 1.28’de elde edilen eklem torklarıyla Y matrisi ve vektörü kullanılarak elde edilen torklar aynı çıkmıştır.

- e) Her bir eklemden meydana gelen çizgisel ve dönel kuvvetlerin zamana göre grafiklerini çizmek için dynNS.m dosyasında kaldığımız yerden itibaren aşağıdaki satırları ekleyelim.

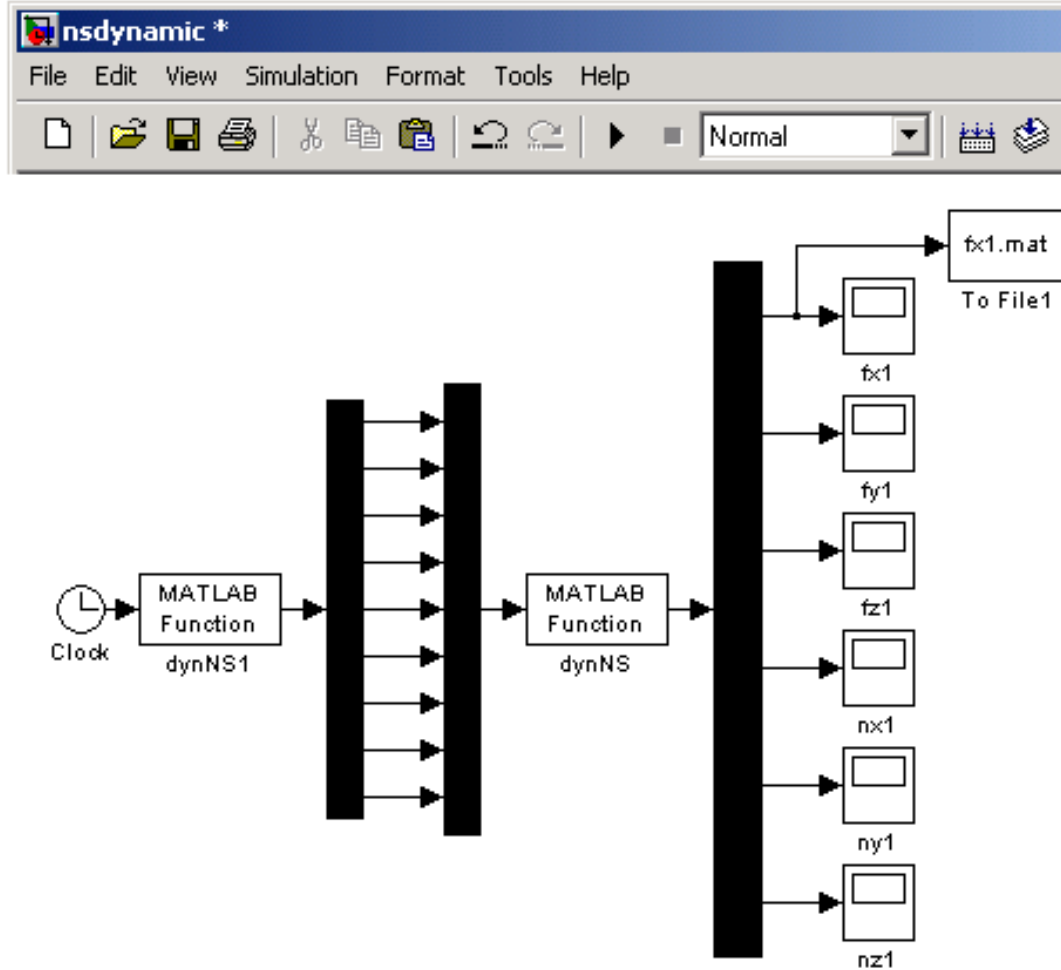
Birinci eklemden çizgisel ve açısal kuvvetler için 'dynNs.m' dosyasına eklenmesi gereken satırlar aşağıda görülmektedir. Birinci eklemden çizgisel ve açısal kuvvetleri görüntülemek için 'nsdynamic.mdl' dosyası da Şekil 1.33'de görüldüğü gibi yeniden düzenlenir.

dynNS.m dosyası

```
function robot_param=dynNS(u);  
global h1 d2 l3 m1 m2 m3 lxx2 lxx3 lyy2 lyy3 lzz1 lzz2 lzz3 g;
```

%%%%% Birinci eklemdaki çizgisel ve açısal kuvvetler %%%%%

$$\begin{aligned} f_{x1} = & c_2 * [0.5 * d_2 * m_2 * c_2 * \ddot{q}_1 + g * m_2 * s_2 - 0.5 * l_3 * m_3 * s_2 * c_2 * \dot{q}_1^2 + \dots \\ & 0.5 * l_3 * m_3 * \ddot{q}_2 + m_3 * (-q_3 * \ddot{q}_2 + q_3 * s_2 * c_2 * \dot{q}_1^2 + d_2 * c_2 * \ddot{q}_1 + \dots \\ & g * s_2 - 2 * \dot{q}_2 * \dot{q}_3)] - s_2 * [-0.5 * d_2 * m_2 * s_2 * \ddot{q}_1 + g * m_2 * c_2 + \\ & 0.5 * l_3 * m_3 * (s_2^2 * \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + m_3 * (-q_3 * (s_2^2 * \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \\ & - d_2 * s_2 * \ddot{q}_1 + g * c_2 + \ddot{q}_3)]; \end{aligned}$$



Şekil 1.33. Birinci eklemdaki çizgisel ve açısal kuvvetleri hesaplayan model penceresi

$$f_{y1} = -(-0.5 * d^2 * m^2 * dq1^2) + 0.5 * l^3 * m^3 * (s^2 * ddq1 + 2 * c^2 * dq1 * dq2) + \dots$$

$$m^3 * (-q^3 * s^2 * ddq1 - 2 * q^3 * c^2 * dq1 * dq2 + d^2 * dq1^2 - 2 * s^2 * dq1 * dq2);$$

$$f_{z1} = s^2 * [0.5 * d^2 * m^2 * c^2 * ddq1 + g * m^2 * s^2 - 0.5 * l^3 * m^3 * s^2 * c^2 * dq1^2 + \dots$$

$$0.5 * l^3 * m^3 * ddq2 + m^3 * (-q^3 * ddq2 + q^3 * s^2 * c^2 * dq1^2 + d^2 * c^2 * ddq1 + \dots$$

$$g * s^2 - 2 * dq2 * dq3)] + c^2 * [-0.5 * d^2 * m^2 * s^2 * ddq1 + g * m^2 * c^2 + \dots$$

$$0.5 * l^3 * m^3 * (s^2^2 * dq1^2 + dq2^2) + m^3 * (-q^3 * (s^2^2 * dq1^2 + \dots$$

$$dq2^2) - d^2 * s^2 * ddq1 + g * c^2 + ddq3)] + m^1 * g;$$

$$n_{x1} = c^2 * [l_{xx2} * s^2 * ddq1 + (l_{xx2} - l_{yy2} + l_{zz2}) * c^2 * dq1 * dq2] - \dots$$

$$s^2 * [l_{yy2} * c^2 * ddq1 + (l_{xx2} - l_{yy2} - l_{zz2}) * s^2 * dq1 * dq2] -$$

$$d^2 * s^2 * [0.5 * d^2 * m^2 * c^2 * ddq1 + g * m^2 * s^2 -$$

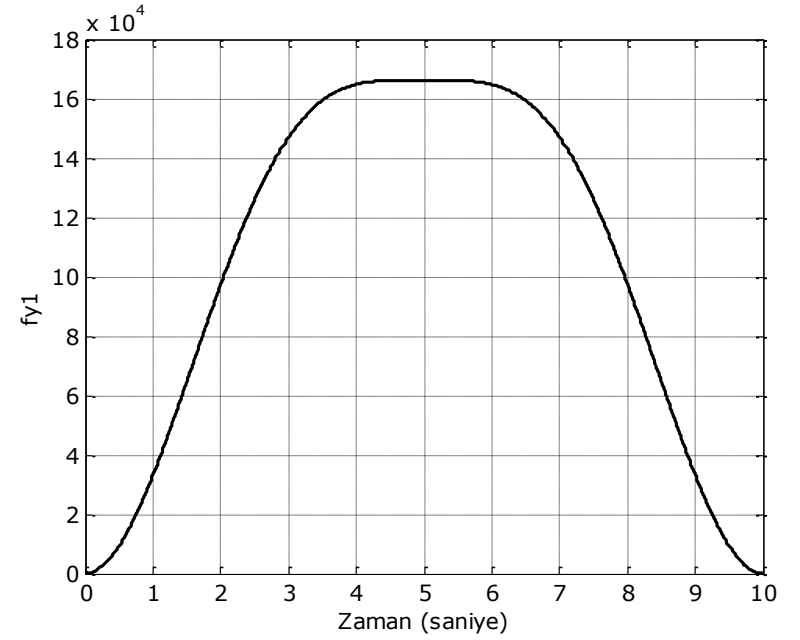
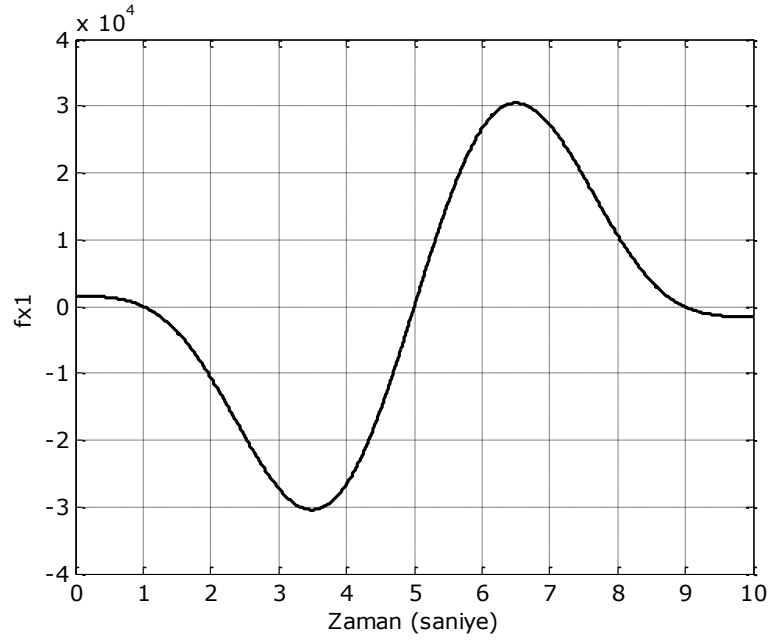
$$0.5 * l^3 * m^3 * s^2 * c^2 * dq1^2 + \dots$$

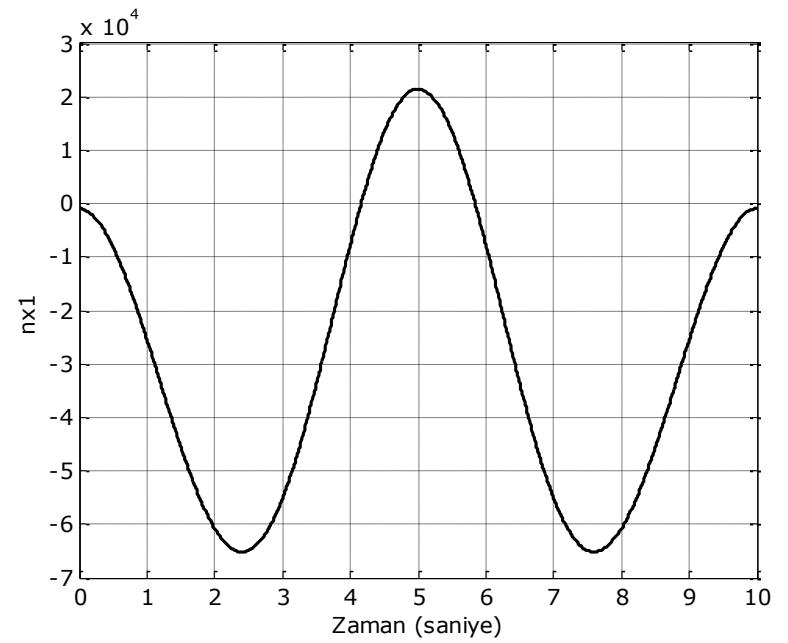
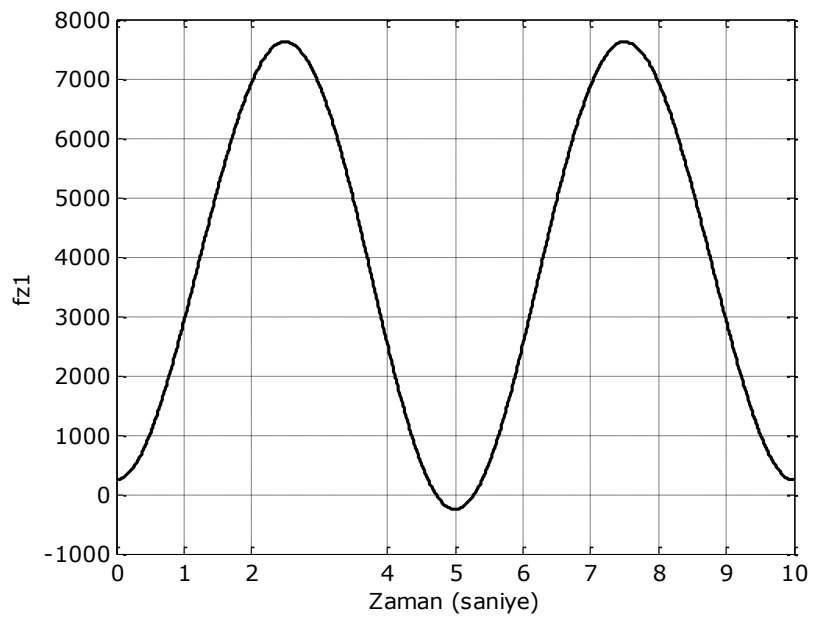
$$\begin{aligned}
& 0.5 * l_3 * m_3 * \ddot{q}_2 + m_3 * (-q_3 * \ddot{q}_2 + q_3 * s^2 * c^2 * \dot{q}_1^2 + d^2 * c^2 * \ddot{q}_1 + \dots \\
& \quad g * s^2 - 2 * \dot{q}_2 * \dot{q}_3)] - d^2 * c^2 * [-0.5 * d^2 * m_2 * s^2 * \ddot{q}_1 + g * m_2 * c^2 + \dots \\
& 0.5 * l_3 * m_3 * (s^2 * \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + m_3 * (-q_3 * (s^2 * \dot{q}_1^2 + \dots \\
& \quad \dot{q}_2^2) - d^2 * s^2 * \ddot{q}_1 + g * c^2 + \ddot{q}_3)];
\end{aligned}$$

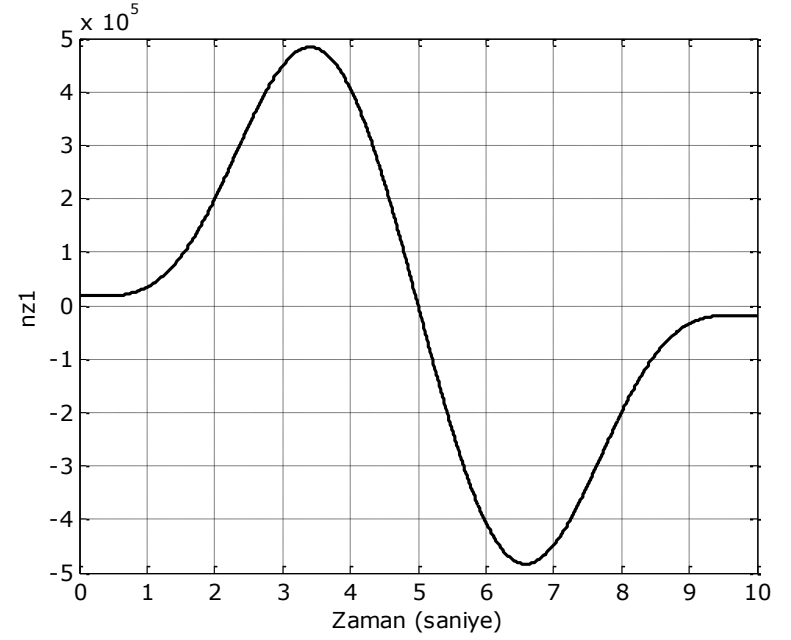
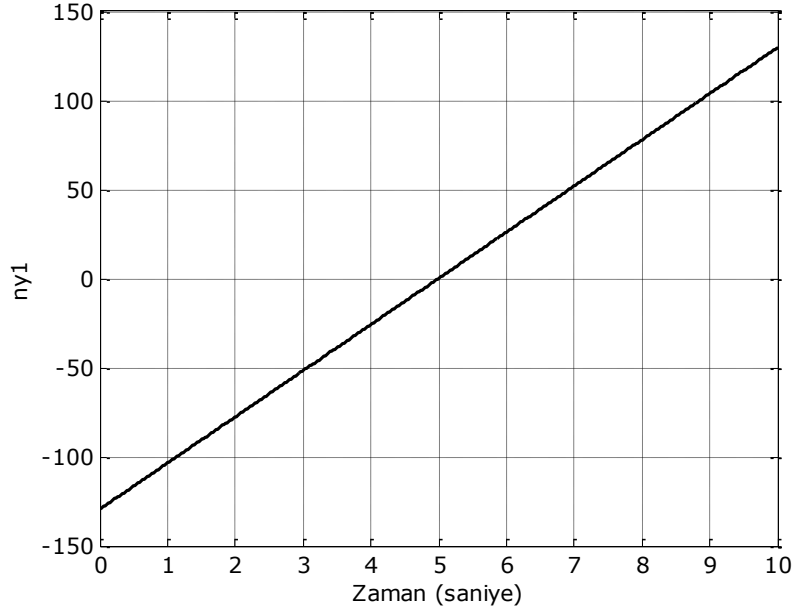
$$n_{y1} = -l_{zz2} * \ddot{q}_2 - (l_{yy2} - l_{xx2}) * s^2 * c^2 * \dot{q}_1^1;$$

$$\begin{aligned}
n_{z1} = & [l_{zz1} + (1/4) * m_2 * d^2 + s^2 * (l_{xx2} + l_{xx3} + m_3 * (0.25 * l_3^2 - \dots \\
& l_3 * q_3 + q_3^2)) + c^2 * (l_{yy2} + l_{zz3}) + m_3 * d^2] * \ddot{q}_1 + \dots \\
& [d^2 * m_3 * c^2 * (0.5 * l_3 - q_3)] * \ddot{q}_2 - [d^2 * m_3 * s^2] * \ddot{q}_3 + \dots \\
& 2 * [s^2 * c^2 * (l_{xx2} + l_{xx3} - l_{yy2} - l_{zz3} + m_3 * (0.25 * l_3^2 - \dots \\
& l_3 * q_3 + q_3^2))] * \dot{q}_1 * \dot{q}_2 - [d^2 * m_3 * s^2 * (0.5 * l_3 - q_3)] * \dot{q}_2^2 - \dots \\
& 2 * [d^2 * m_3 * c^2] * \dot{q}_2 * \dot{q}_3 + [m_3 * s^2 * (-l_3 + 2 * q_3)] * \dot{q}_1 * \dot{q}_3;
\end{aligned}$$

Şekil 1.33'deki simulink dosyasının çalıştırılmasıyla birinci eklemdaki çizgisel ve açısal kuvvetler şekil 1.34'deki gibi elde edilir.







Şekil 1.34. Birinci eklemdaki açısal ve çizgisel kuvvetler.

İkinci eklemdaki çizgisel ve açısal kuvvetler için 'dynNs.m' dosyasına eklenmesi gereken satırlar aşağıda görülmektedir.

dynNS.m dosyası

```
function robot_param=dynNS(u);  
global h1 d2 l3 m1 m2 m3 lxx2 lxx3 lyy2 lyy3 lzz1 lzz2 lzz3 g;  
  
%%%% İkinci eklemdaki çizgisel ve açısal kuvvetler %%%%  
  
fx2=0.5*d2*m2*c2*ddq1+g*m2*s2-0.5*l3*m3*s2*c2*dq1^2+...  
    0.5*l3*m3*ddq2+m3*(-q3*ddq2+q3*s2*c2*dq1^2+...  
    d2*c2*ddq1+g*s2-2*dq2*dq3);
```

$$f_{y2} = -0.5 * d^2 * m^2 * s^2 * \ddot{q}_1 + g * m^2 * c^2 + 0.5 * l_3 * m^3 * (s^2 * \dot{q}_1^2 + \dots \dot{q}_2^2) + m^3 * (-q_3 * (s^2 * \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - d^2 * s^2 * \ddot{q}_1 + g * c^2 + \ddot{q}_3);$$

$$f_{z2} = -0.5 * d^2 * m^2 * \dot{q}_1^2 - [0.5 * l_3 * m^3 * (s^2 * \ddot{q}_1 + 2 * c^2 * \dot{q}_1 * \dot{q}_2) + \dots m^3 * (-q_3 * s^2 * \ddot{q}_1 - 2 * q_3 * c^2 * \dot{q}_1 * \dot{q}_2 + d^2 * \dot{q}_1^2 - 2 * s^2 * \dot{q}_1 * \dot{q}_3)];$$

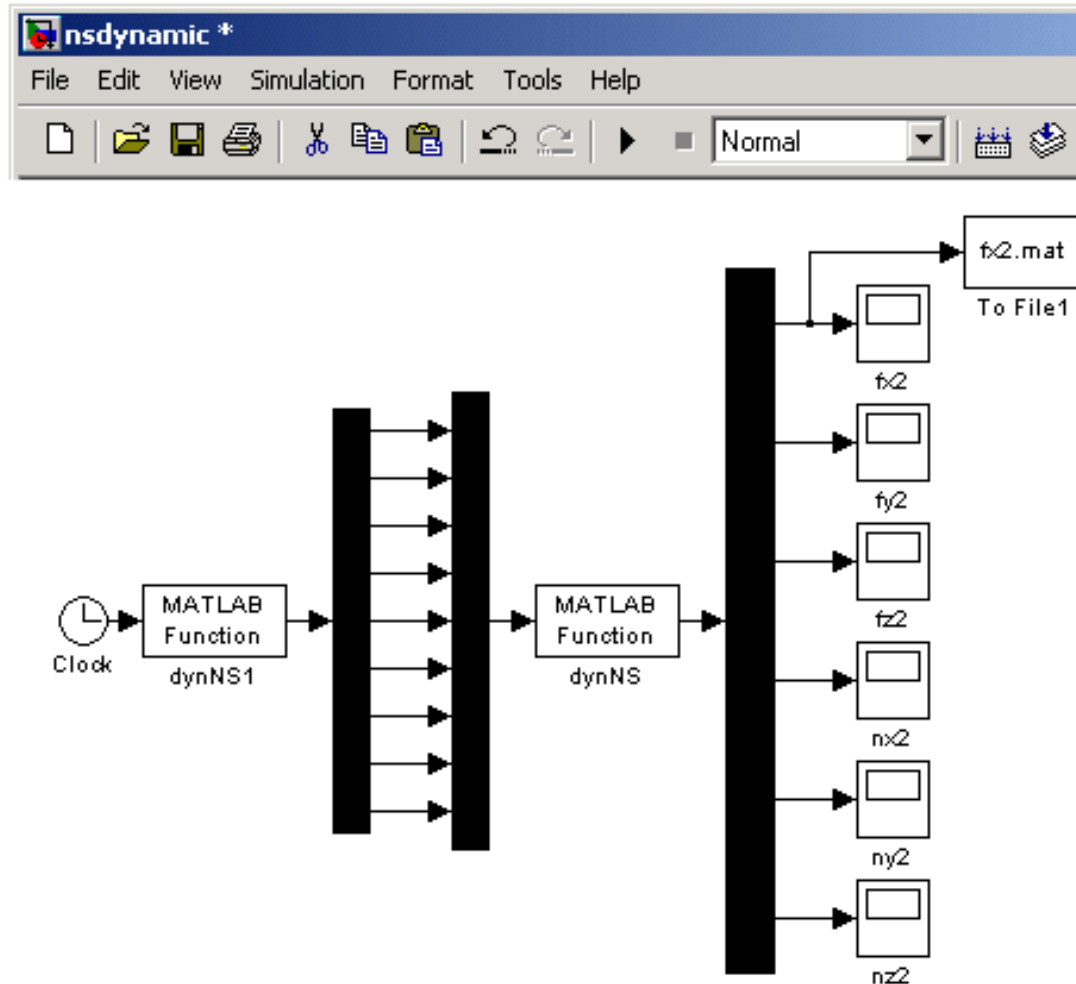
$$n_{x2} = l_{xx2} * s^2 * \ddot{q}_1 + (l_{xx2} - l_{yy2} + l_{zz2}) * c^2 * \dot{q}_1 * \dot{q}_2 + [l_{xx3} * s^2 * \ddot{q}_1 + \dots (l_{xx3} + l_{yy3} - l_{zz3}) * c^2 * \dot{q}_1 * \dot{q}_2] + 0.5 * d^2 * (-0.5 * d^2 * m^2 * s^2 * \ddot{q}_1 + \dots g * m^2 * c^2) + (0.5 * l_3 - q_3) * [0.5 * l_3 * m^3 * (s^2 * \ddot{q}_1 + 2 * c^2 * \dot{q}_1 * \dot{q}_2) + \dots$$

$$m^3 * (-q_3 * s^2 * \ddot{q}_1 - 2 * q_3 * c^2 * \dot{q}_1 * \dot{q}_2 + d^2 * \dot{q}_1^2 - 2 * s^2 * \dot{q}_1 * \dot{q}_3)];$$

$$n_{y2} = l_{yy2} * c^2 * \ddot{q}_1 + (l_{xx2} - l_{yy2} - l_{zz2}) * s^2 * \dot{q}_1 * \dot{q}_2 + l_{zz3} * c^2 * \ddot{q}_1 + \dots (l_{xx3} - l_{yy3} - l_{zz3}) * s^2 * \dot{q}_1 * \dot{q}_2 - 0.5 * d^2 * (0.5 * d^2 * m^2 * c^2 * \ddot{q}_1 + \dots g * m^2 * s^2);$$

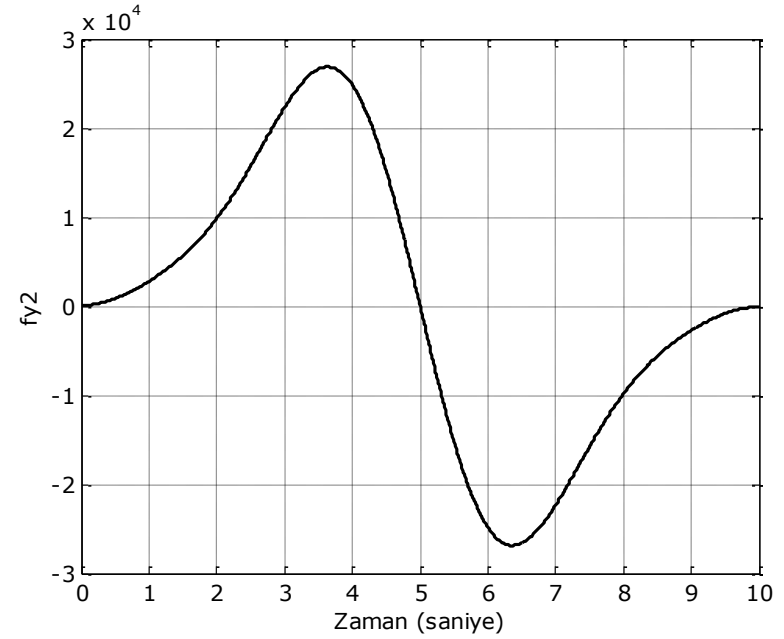
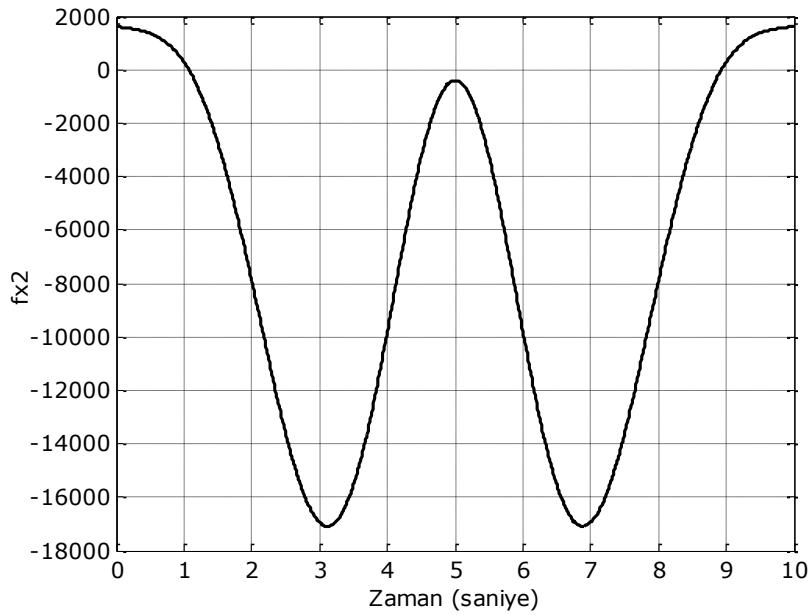
$$\begin{aligned}
 N_{z2} = & [-d_2 * m_3 * c_2 * (0.5 * l_3 + q_3)] * \ddot{d}q_1 + [l_{zz2} + l_{yy3} + m_3 * (0.25 * l_3^2 + \dots \\
 & l_3 * q_3 + q_3^2)] * \ddot{d}q_2 - s_2 * c_2 * (l_{xx2} + l_{xx3} - l_{yy2} - l_{zz3} + m_3 * (0.25 * l_3^2 - \dots \\
 & l_3 * q_3 + q_3^2)) * \dot{d}q_1^2 + m_3 * (-l_3 + 2 * q_3) * \dot{d}q_2 * \dot{d}q_3 \\
 & m_3 * (l_3 + 2 * q_3) * \dot{d}q_2 * \dot{d}q_3 + m_3 * g * s_2 * (0.5 * l_3 - q_3);
 \end{aligned}$$

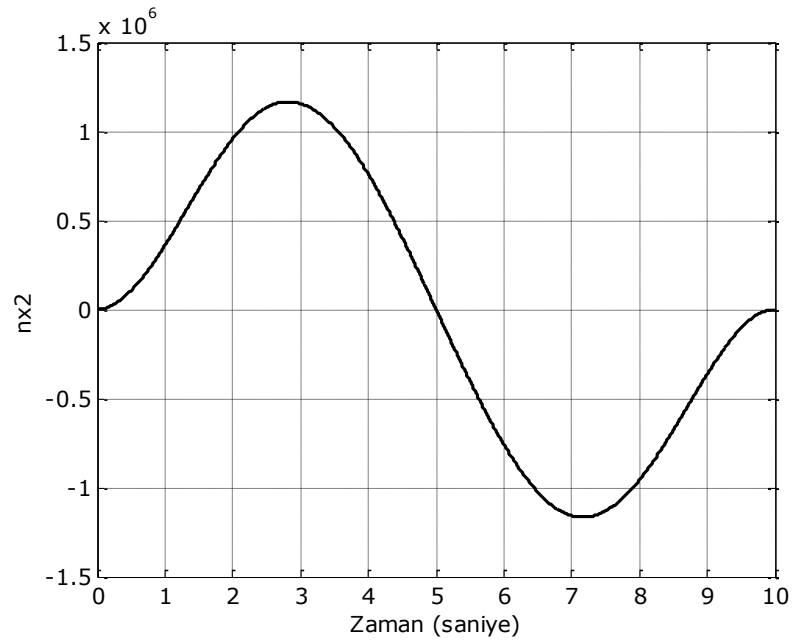
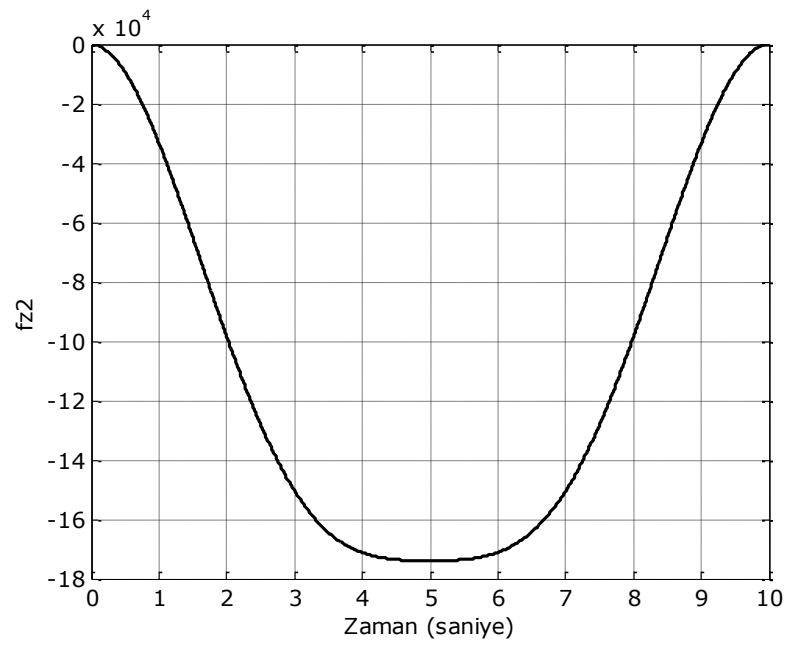
İkinci eklemdaki çizgisel ve açısal kuvvetleri görüntülemek için 'nsdynamic.mdl' dosyası da Şekil 1.35'de görüldüğü gibi yeniden düzenlenir.

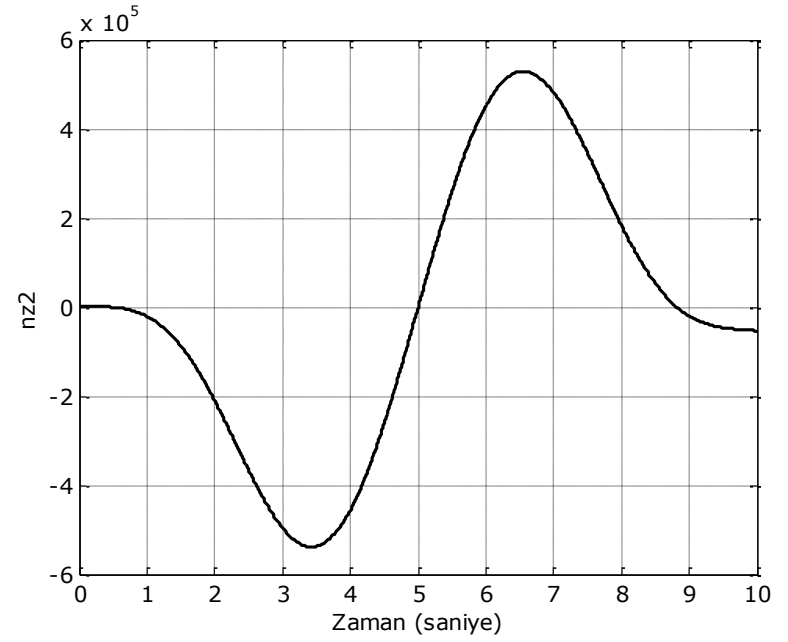
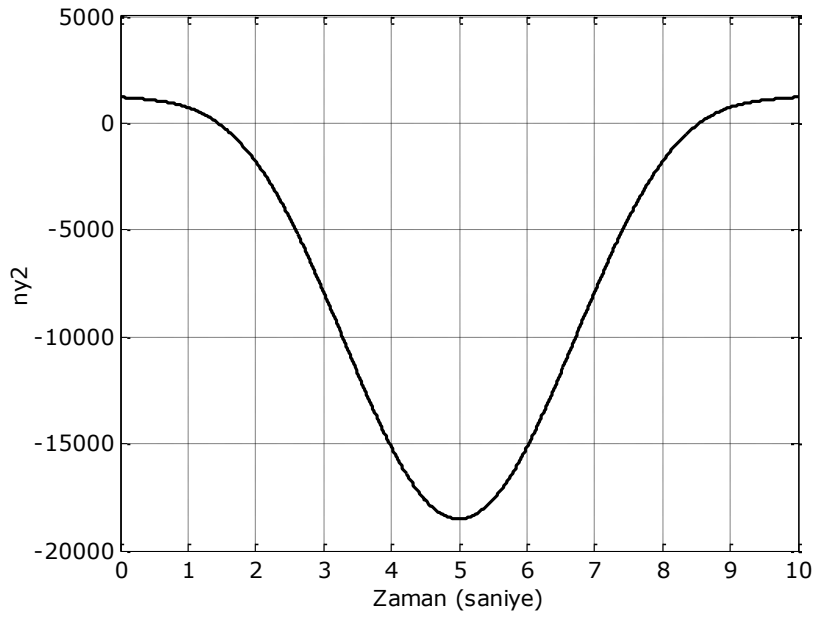


Şekil 1.35. İkinci eklemdaki çizgisel ve açısal kuvvetleri hesaplayan model penceresi

Şekil 1.35'deki simulink dosyasının çalıştırılmasıyla ikinci eklemdaki çizgisel ve açısal kuvvetler şekil 1.36'deki gibi elde edilir.







Şekil 1.36. İkinci eklemdeki açısal ve çizgisel kuvvetler.

Son olarak üçüncü eklemdaki çizgisel ve açısal kuvvetler için 'dynNs.m' dosyasına eklenmesi gereken satırlar aşağıda görülmektedir.

dynNS.m dosyası

```
function robot_param=dynNS(u);  
global h1 d2 l3 m1 m2 m3 lxx2 lxx3 lyy2 lyy3 lzz1 lzz2 lzz3 g;  
  
%%%% İkinci eklemdaki çizgisel ve açısal kuvvetler %%%%  
  
fx3=-0.5*l3*m3*s2*c2*dq1^2+0.5*l3*m3*ddq2+...  
m3*(-q3*ddq2+q3*s2*c2*dq1^2+d2*c2*ddq1+g*s2-2*dq2*dq3);  
  
fy3=0.5*l3*m3*(s2*ddq1+2*c2*dq1*dq2)+...  
m3*(-q3*s2*ddq1-2*q3*c2*dq1*dq2+d2*dq1^2-2*s2*dq1*dq3);
```

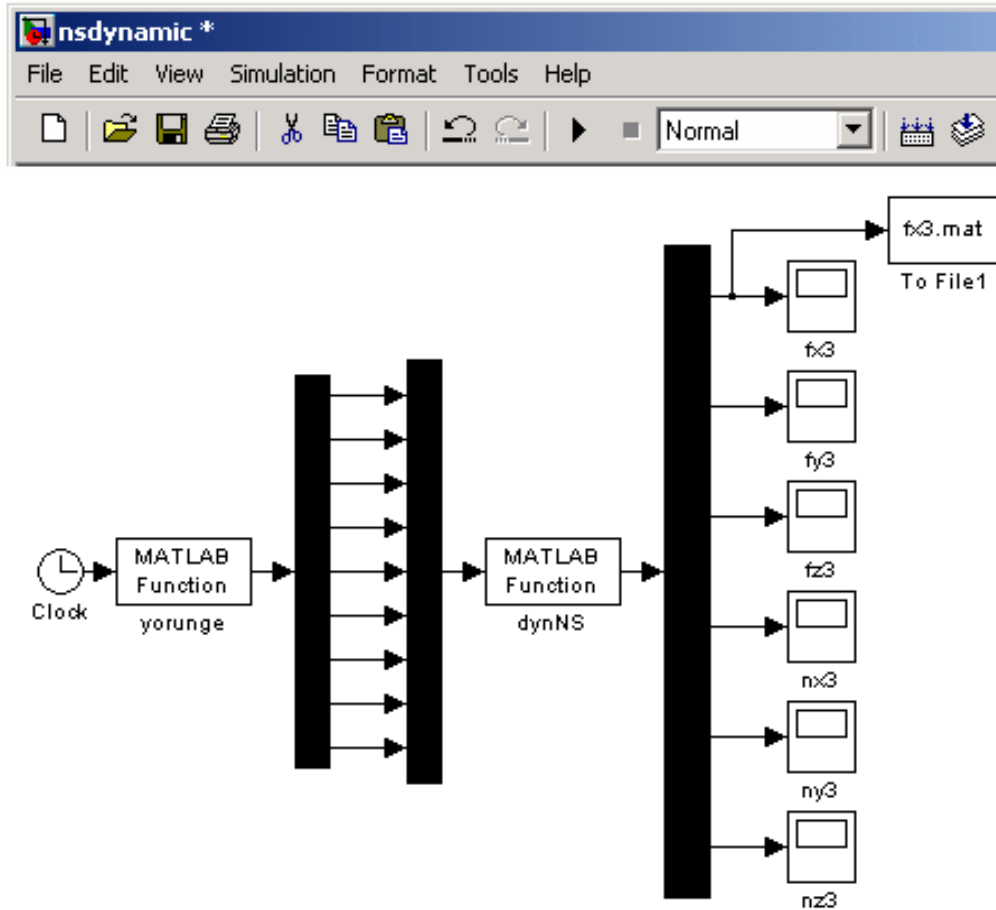
$$fz3 = [-d2 * m3 * s2] * ddq1 + m3 * ddq3 + m3 * s2^2 * (0.5 * l3 - q3) * dq1^2 + \dots \\ m3 * (0.5 * l3 - q3) * dq2^2 + m3 * g * c2;$$

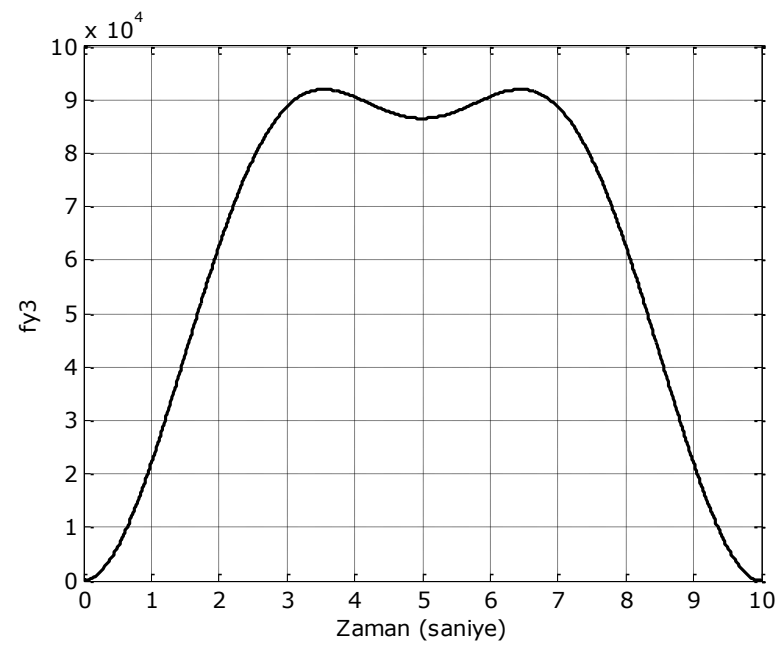
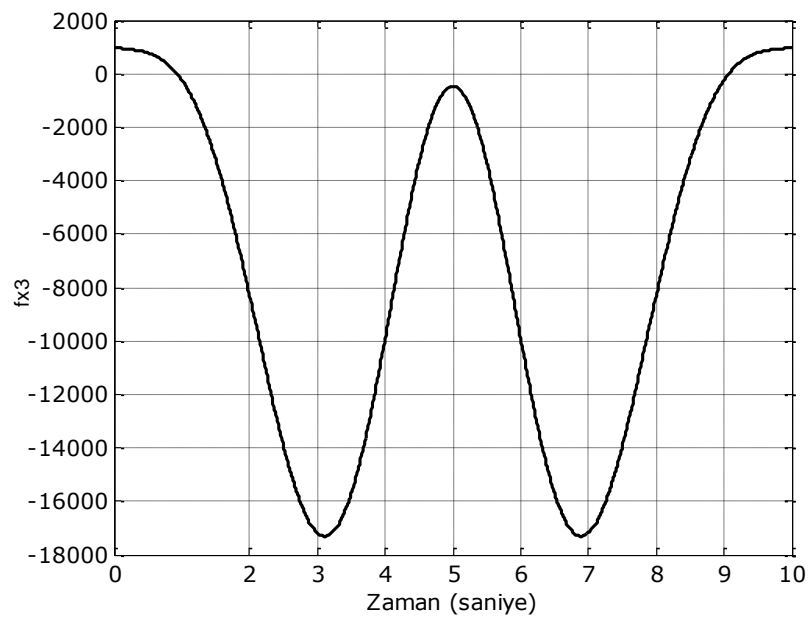
$$nx3 = lxx3 * s2 * ddq1 + (lxx3 + lyy3 - lzz3) * c2 * dq1 * dq2 + \dots \\ 0.5 * l3 * [0.5 * l3 * m3 * (s2 * ddq1 + 2 * c2 * dq1 * dq2) + m3 * (-q3 * s2 * ddq1 - \dots \\ 2 * q3 * c2 * dq1 * dq2 + d2 * dq1^2 - 2 * s2 * dq1 * dq3)];$$

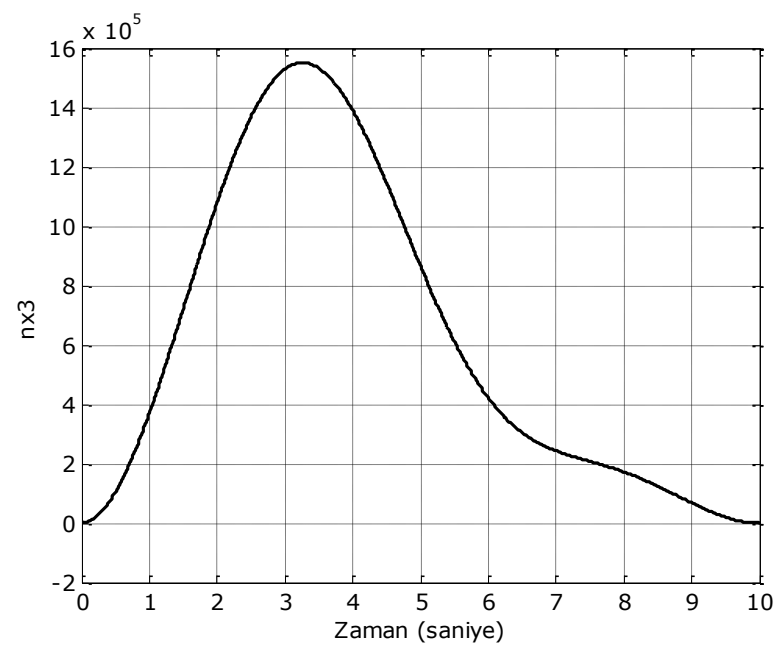
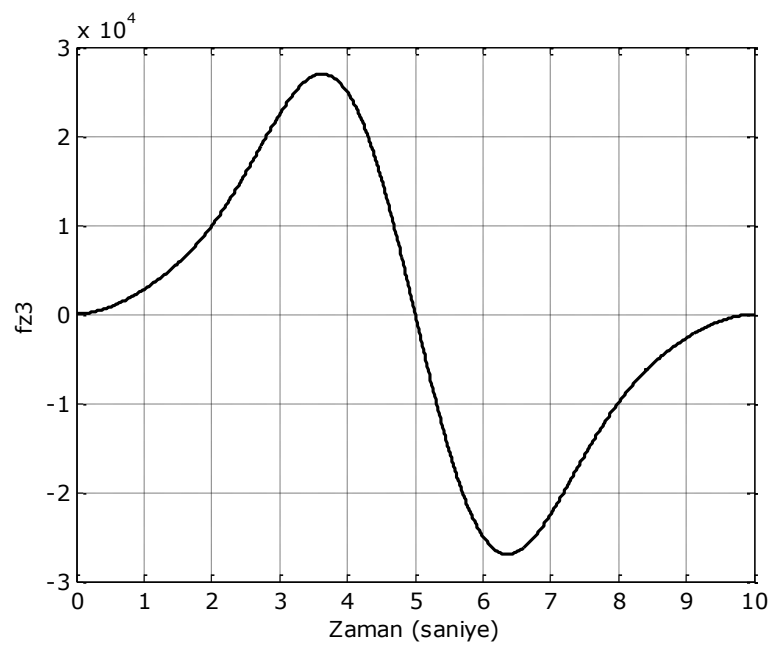
$$ny3 = -lyy3 * ddq2 + (lxx3 - lzz3) * s2 * c2 * dq1^2 - 0.5 * l3 * [- \dots \\ 0.5 * l3 * m3 * s2 * c2 * dq1^2 + 0.5 * l3 * m3 * ddq2 + m3 * (-q3 * ddq2 + \dots \\ q3 * s2 * c2 * dq1^2 + d2 * c2 * ddq1 + g * s2 - 2 * dq2 * dq3)];$$

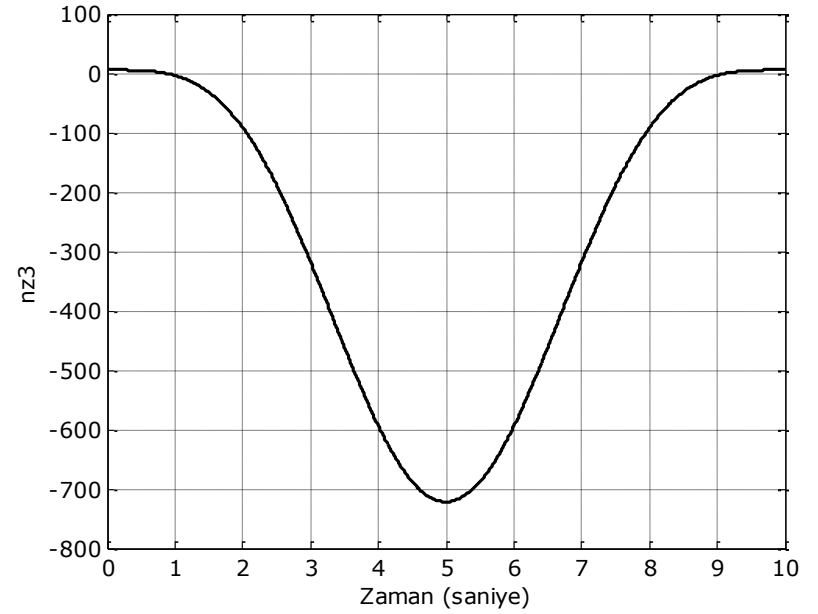
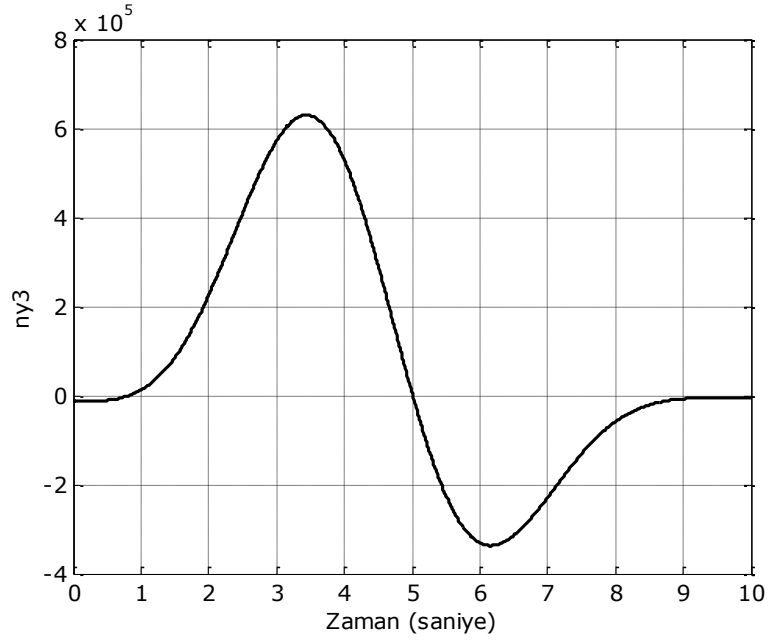
$$nz3 = lzz3 * c2 * ddq1 + (lxx3 - lyy3 - lzz3) * s2 * dq1 * dq2;$$

Üçüncü eklemdaki çizgisel ve açısal kuvvetleri görüntülemek için 'nsdynamic.mdl' dosyası da Şekil 1.37'de görüldüğü gibi yeniden düzenlenir. Şekil 1.37'deki simulink dosyasının çalıştırılmasıyla da üçüncü eklemdaki çizgisel ve açısal kuvvetler şekil 1.38'de görüldüğü gibi elde edilir.





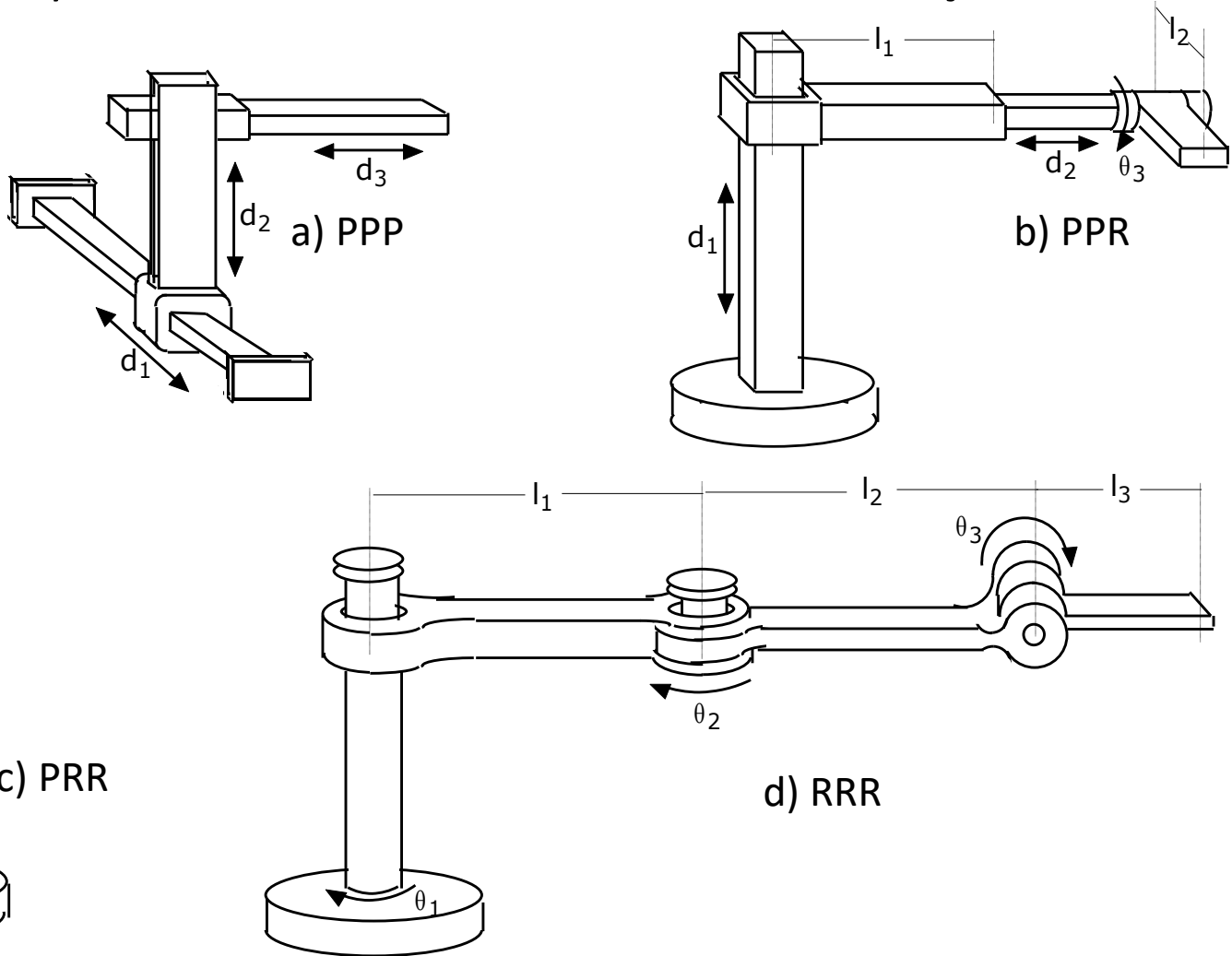


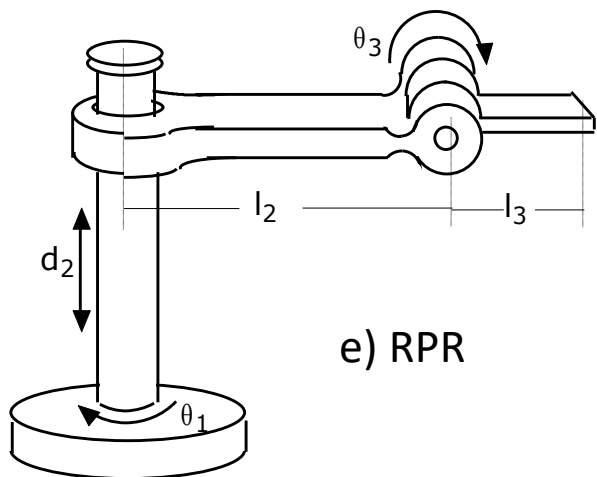


Şekil 1.38. Üçüncü eklemdaki açısal ve çizgisel kuvvetler.

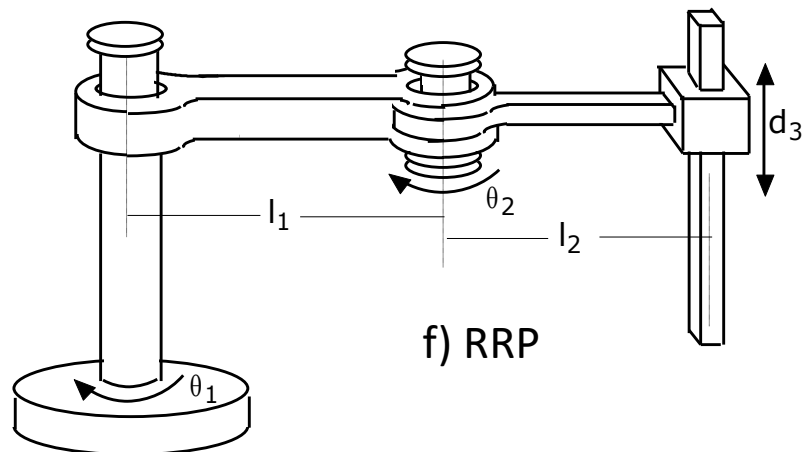
ALİŞTIRMALAR

Şekil 1.39'da verilen 3 eklemlı robotların Lagrange-Euler, Newton-Euler ve Hamiltonion yöntemlerini kullanarak dinamik modellerini çıkarınız.

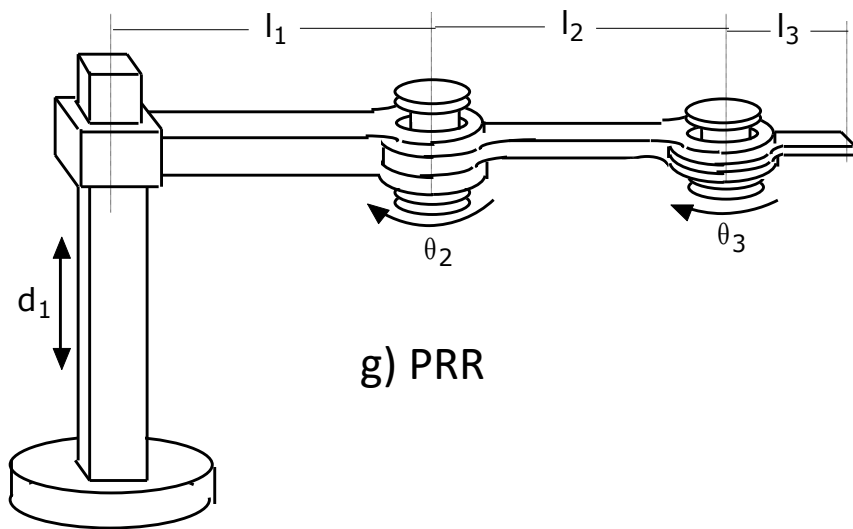




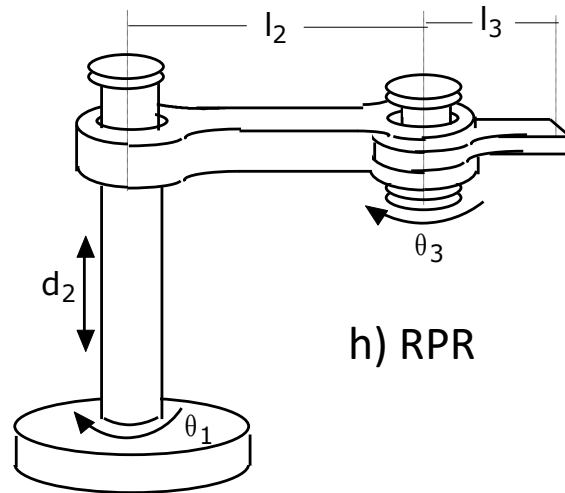
e) RPR



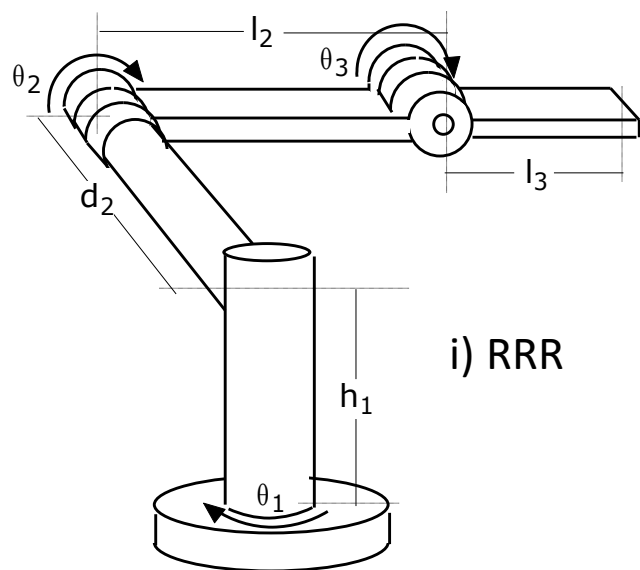
f) RRP



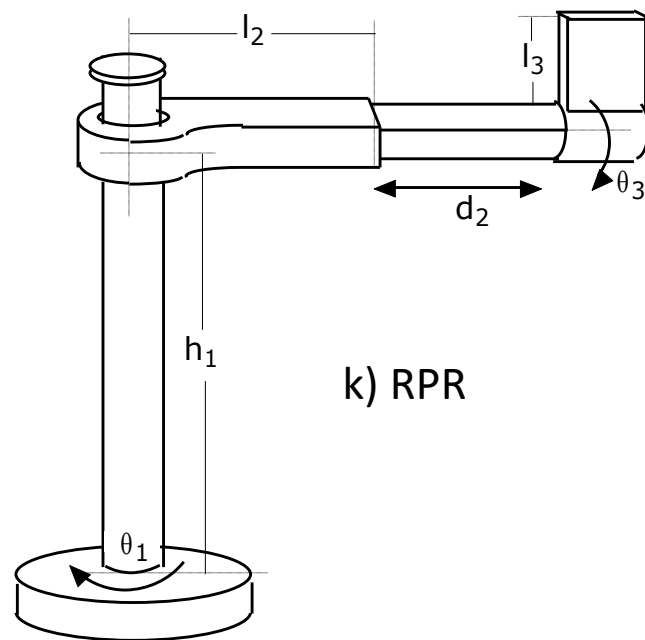
g) PRR



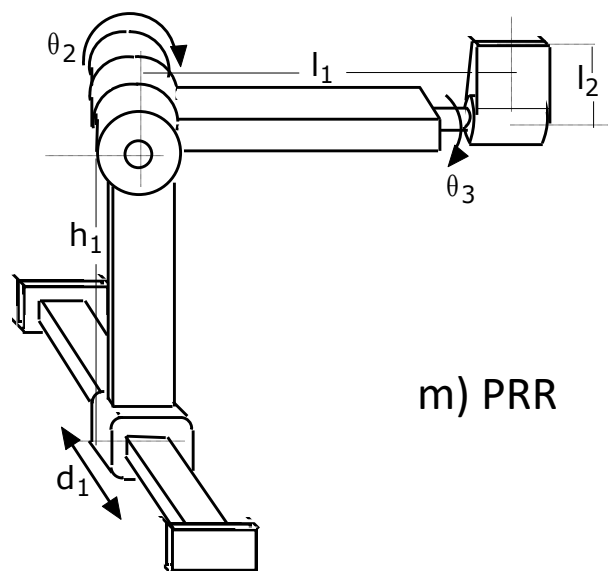
h) RPR



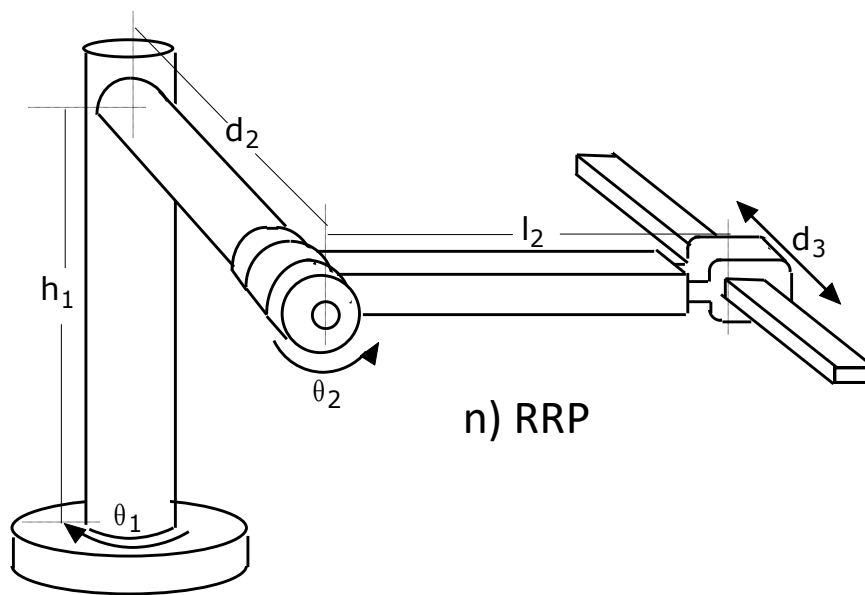
i) RRR



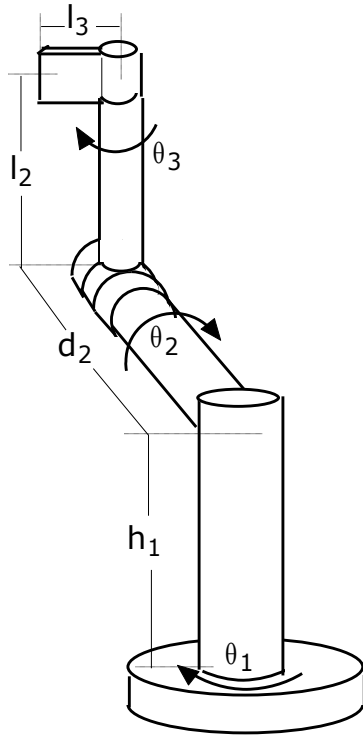
k) RPR



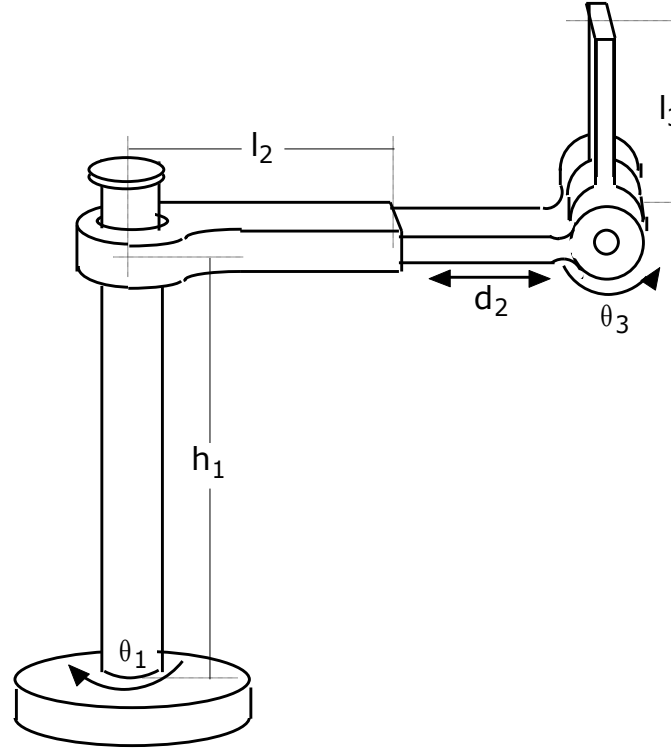
m) PRR



n) RRP



p) RRR



r) RPR

Şekil 1.39. Üç eklemlı endüstriyel robotlar.