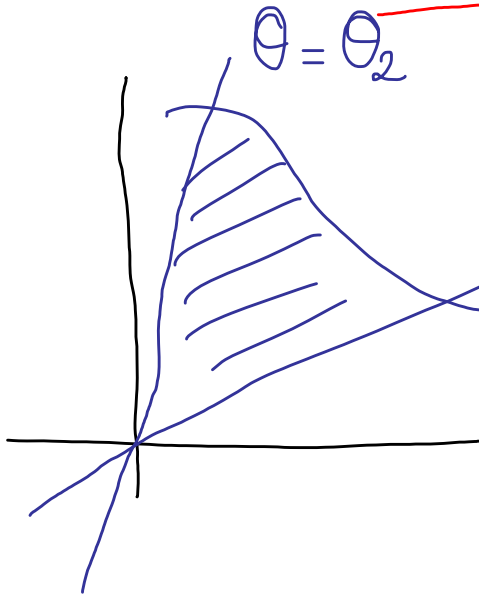


Kutupsal Koordinat ta Alan



$r=r(\theta)$ eğrisi $\theta=\theta_1$

ve $\theta=\theta_2$ doğruları

ile sınırlı bölgenin

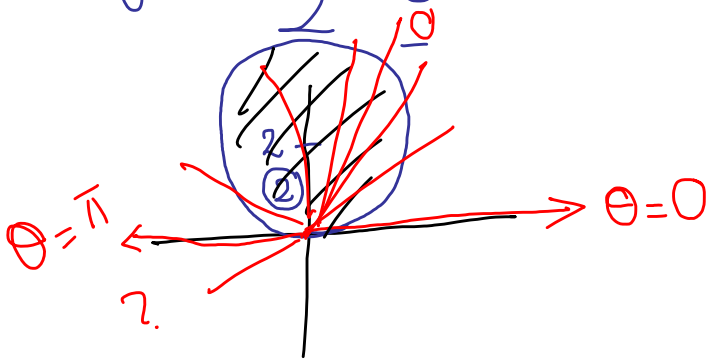
alanı

$$\frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (r(\theta))^2 d\theta$$

dir.

Ör: $r=4\sin\theta$ eğrisi ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

1.yol: $\frac{1}{2} \int_0^{\pi} (4\sin\theta)^2 d\theta = 8 \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta$



$$= 4\pi \checkmark$$

2.yol: Aranılan bölgenin yarı çapı 2 olan daire olduğu görülür dairenin alanı $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$

Ör: $r = 10\sin\theta - 24\cos\theta$ eğrisi ile sınırlı bölgenin alanı?

$M(-12, 5)$

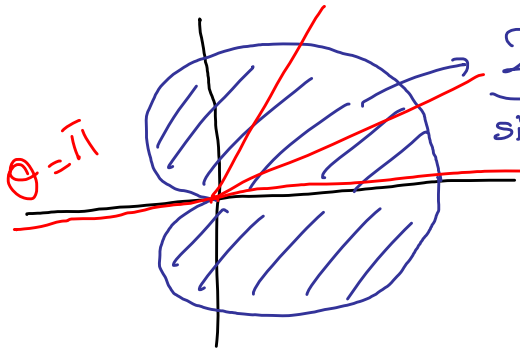
yarı çapı 13 olan çember

$$\pi 13^2 = 169\pi$$

$$+ \sin \theta$$

$$- \cos \theta$$

★ $r = a(1 + \cos \theta)$ eğrisi ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz. $\frac{3a^2\pi}{2}$



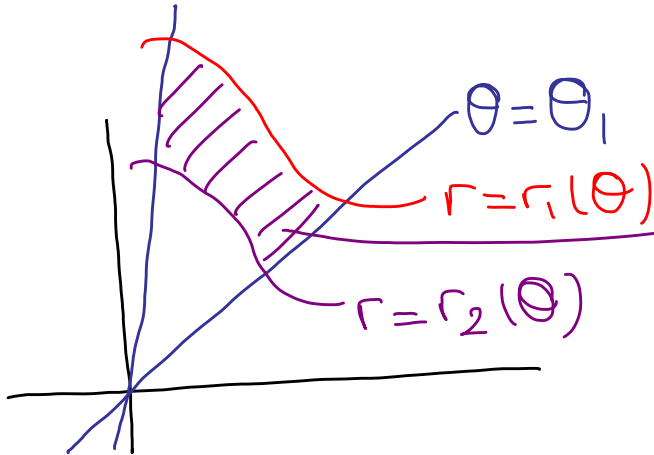
$$\frac{2}{\text{simetrik}} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi (a(1 + \cos \theta))^2 d\theta$$

$$\int_0^\pi a^2 (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= a^2 \left(\theta + 2\sin \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^\pi$$

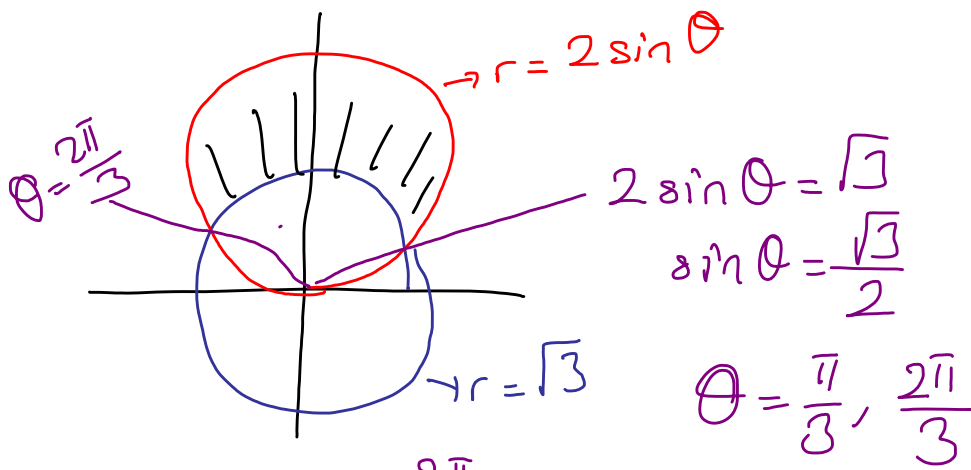
$$= \frac{a^2 3\pi}{2} \checkmark$$

$\bar{Q}r$: $r = 4(1 - \sin \theta)$ kardioidi ile sınırlı bölgenin alanı? $\frac{3 \cdot 4^2 \pi}{2} = 24\pi$



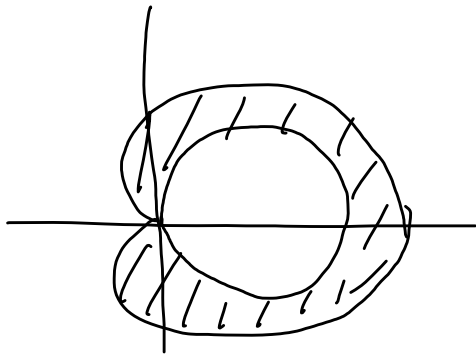
$$\frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\underbrace{r_1(\theta)}_{\text{uzak eğri}})^2 - (\underbrace{r_2(\theta)}_{\text{yakın eğri}})^2 d\theta$$

$\bar{Q}r$: $r = \sqrt{3}$ çemberi dışında $r = 2\sin \theta$ eğrisi içinde kalan bölgenin alanı?



$$\text{Alan} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (2 \sin \theta)^2 - (\sqrt{3})^2 d\theta$$

Ör: $r = 2 \cos \theta$ eğrisi dışında
 $r = 2(1 + \cos \theta)$ // içinde kalan bölgenin
 alanını bulunuz.



Kardioid - Daire

$$\frac{3 \cdot 2^2 \pi}{2} - \pi \cdot 1^2$$

$$= 5\pi$$

Eğri Uzunluğu

1) $y=f(x)$ eğrisinin $a \leq x \leq b$ parçasının uzunluğu

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx \text{ tir.}$$

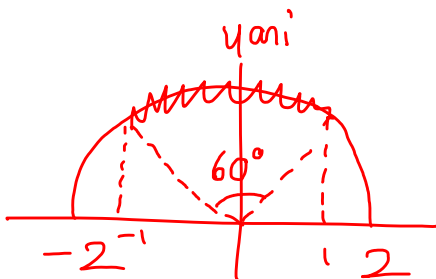
Ör: $y=4x-3$ eğrisinin $1 \leq x \leq 5$ parçasının uzunluğu?

$$\int_1^5 \sqrt{1+(4)^2} dx = 4\sqrt{17}$$

Ör: $y=\sqrt{4-x^2}$ eğrisinin $-1 \leq x \leq 1$ parçasının uzunluğu?

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right)^2} dx &= \int_{-1}^1 \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_{-1}^1 \\ &= 2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \checkmark \end{aligned}$$

2.yol



$$2\pi \cdot 2 \cdot \frac{60}{360} = \frac{2\pi}{3}$$

Ör: $y = \sqrt{x^3}$ eğrisinin $0 \leq x \leq 1$ parçasının uzunluğu?

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{1/2}\right)^2} dx.$$
$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{4 + 9x}{4}} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{4 + 9x}}{2} dx = \frac{(4 + 9x)^{3/2}}{3/2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{27} (13^{3/2} - 8)$$

Ödev: $y = x^2$ eğrisinin $0 \leq x \leq 1$ parçasının uzunluğu?

2) Eğri denklemi $x = x(t)$

$y = y(t)$ biçiminde

verilirse $t_1 \leq t \leq t_2$ parçasının uzunluğu

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

dir.

Ör: $x = t + 1$

$y = 3t - 1$ eğrisinin $2 \leq t \leq 5$ parçasının uzunluğu?

Denklem $\int_2^5 \sqrt{1^2 + 3^2} dt = 3\sqrt{10}$ Parametrik verilmiş

Ör: $x = 3\cos t + 5$
 $y = 3\sin t - 3$ eğrisinin $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ parçasının
 uzunluğunu bulunuz.

$$\begin{aligned} x' &= -3\sin t \\ y' &= 3\cos t \end{aligned} \quad \int_0^{\pi/4} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t} dt$$

$$= 3 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

3) Eğer eğri denklemini $r=r(\theta)$ şeklinde
 kutupsal koordinatta verilmiş ise

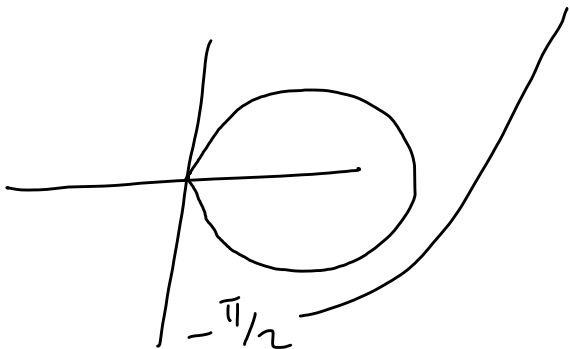
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta$$

dir.

Ör: $r = 4\cos\theta$ eğrisinin uzunluğu?

$$\begin{aligned} r'(\theta) &= -4\sin\theta \\ r(\theta) &= 4\cos\theta \end{aligned} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{16\sin^2\theta + 16\cos^2\theta} d\theta$$

$$= 4\pi \checkmark$$



★ $r = a(1 + \cos \theta)$ kardioidinin çevre

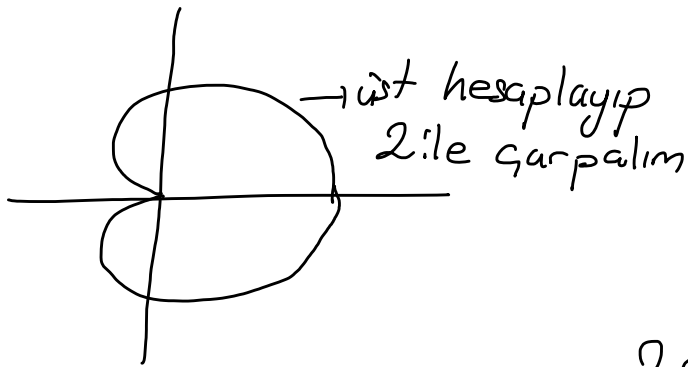
uzunluğunu bulunuz. $\boxed{8a}$

$$r = a + a \cos \theta \rightarrow r^2 = a^2 + 2a^2 \cos \theta + \underline{a^2 \cos^2 \theta}$$

$$r' = -a \sin \theta \rightarrow (r')^2 = \underline{a^2 \sin^2 \theta} \quad a^2$$

$$r^2 + (r')^2 = 2a^2 (1 + \cos \theta)$$

$$= 2a^2 \cdot 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



$$\int_0^{\pi} \sqrt{4a^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta$$

$$= 2a \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= 2a \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \Big|_0^{\pi} = 4a \text{ yapar}$$

Çevresi $8a$ olur.

$$r = \underline{\frac{6}{a}} (1 - \sin \theta) \text{ eğrisinin çevresi?}$$

$$8a = 8 \cdot 6 = 48$$

kardioid

$$\underline{r = 6 \sin \theta - 8 \cos \theta} \text{ eğrisinin uzunluğu?}$$

eğri yarı çapı 5 olan çember

$$2 \cdot \pi \cdot 5 = 10\pi$$