

MÜHENDİSLİK MEKANİĞİ

DİNAMİK

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

Behcet DAĞHAN

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

İÇİNDEKİLER

1· GİRİŞ

- Konum, Hız ve İvme
- Newton Kanunları

2· MADDESEL NOKTALARIN KİNEMATİĞİ

- Doğrusal Hareket
- Düzlemde Eğrisel Hareket
- Bağlı Hareket (Ötelenen Eksenlerde)
- Birbirine Bağlı Maddesel Noktaların Hareketi

3· MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ

- Kuvvet, Kütle ve İvme
- İş ve Enerji
- İmpuls ve Momentum



MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

3

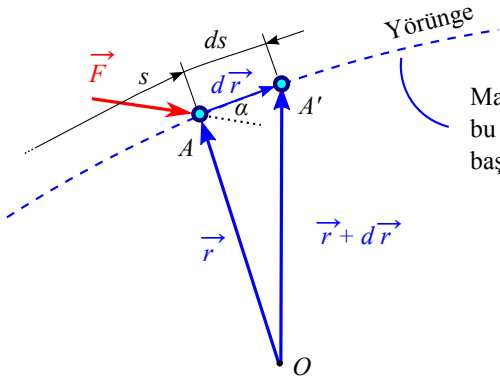
KİNETİK

MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ

3.2

İş ve Enerji

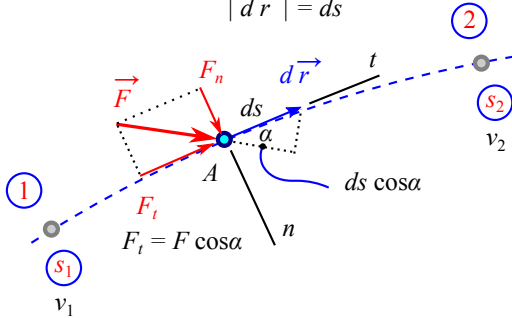
İş



Maddesel noktanın
bu yörüngeyi izlemesini sağlayan
başka kuvvetler de var.

| A | A' |
|-----|----------------------|
| s | $s + ds$ |
| r | $\vec{r} + d\vec{r}$ |

$$|d\vec{r}| = ds$$



$$U_{1-2} > 0$$



$$U_{1-2} < 0$$

Elemanter iş

skaler çarpım

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$dU = F ds \cos \alpha = F (ds \cos \alpha)$$

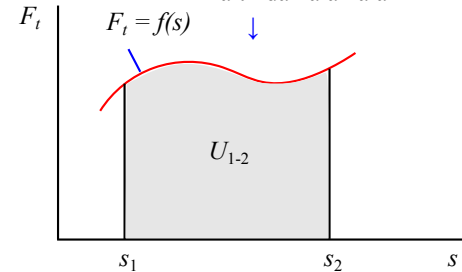
$$dU = (F \cos \alpha) ds = F_t ds$$

$$\int dU = \int F_t ds$$

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds$$

F kuvvetinin
 s_1 konumundan
 s_2 konumuna
kadar yaptığı iş

$F_t - s$ grafiğinin
altında kalan alan

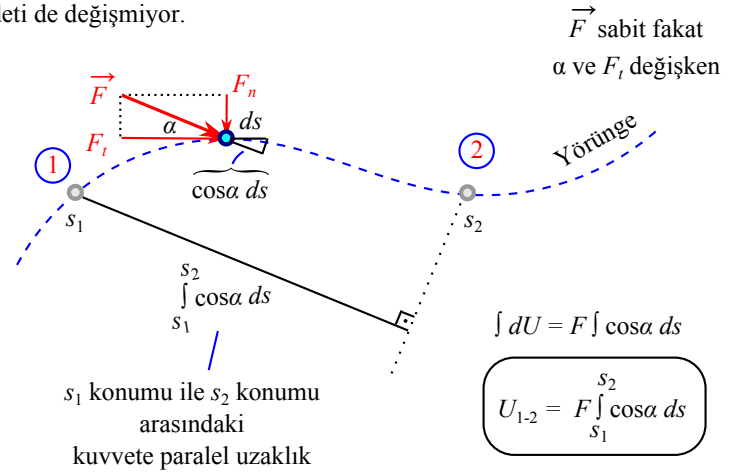
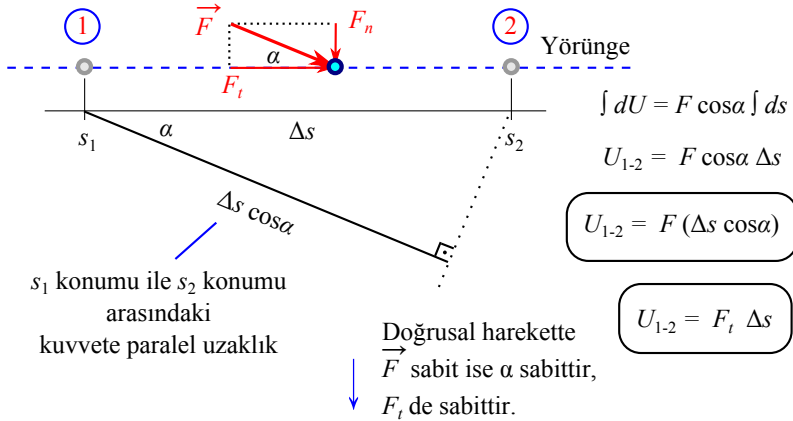


İş, skaler bir büyüklüktür ve birimi Joule'dür. $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$

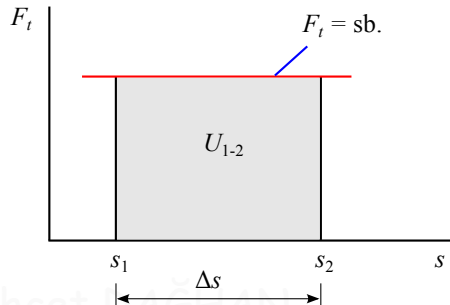
Kuvvet **sabit** ise:

Sabit bir kuvvetin yaptığı iş yörüngeyi nasıl bir eğri olduğuna bağlı değildir.
İki konum arasındaki kuvvete paralel olarak ölçülen uzaklığa bağlıdır.

Kuvvetin yönü de şiddeti de değişmiyor.



Kuvvetin **teğetsel bileşeninin şiddeti sabit** ise:



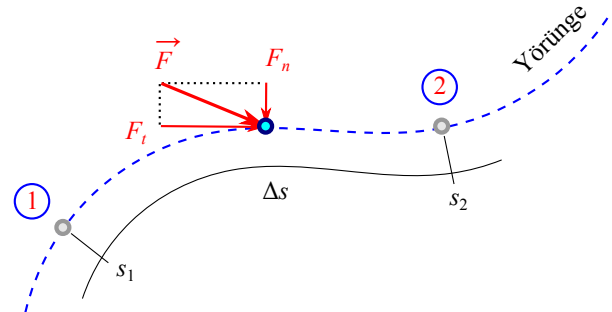
$$dU = F \cos \alpha ds$$

$$\int dU = \int F_t ds$$

$$\int dU = F_t \int ds$$

$$U_{1-2} = F_t \Delta s$$

$F_t = sb.$ iken geçerlidir.



Elastik potansiyel enerji

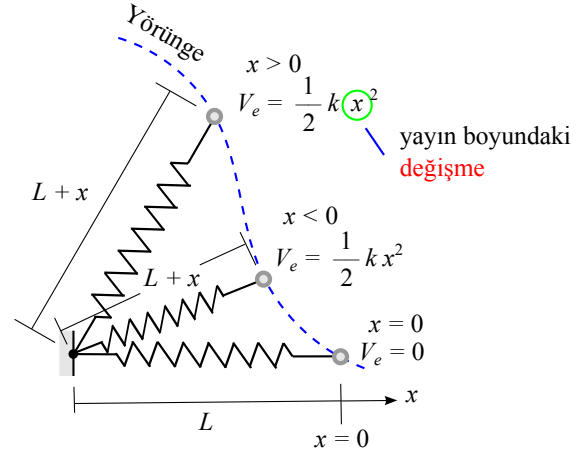
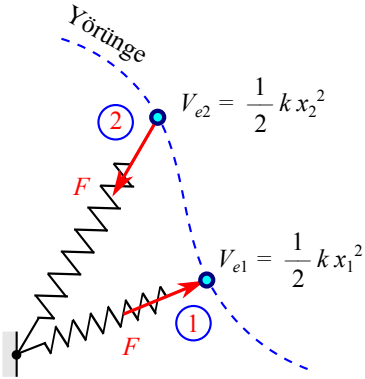
Yay kuvvetine ($F = kx$) karşı yapılan işe "elastik potansiyel enerji" denir.

$$V_e = \int_0^x kx \, dx$$

→

$$V_e = \frac{1}{2} kx^2$$

$$V_e \geq 0$$



Yay kuvveti de korunumlu bir kuvvettir. Yaptığı iş yörüngeye bağlı değildir.

Yay kuvvetinin yaptığı iş elastik potansiyel enerjideki değişimin **negatifine** eşittir.

$$-(V_{e2} - V_{e1})$$

İş - Enerji Denklemi

Maddesel noktaya
etki eden
bütün kuvvetlerin
yaptığı iş

→

$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} \Sigma F_t ds$$

$$\Sigma F_t = m a_t$$

$$v dv = a_t ds$$

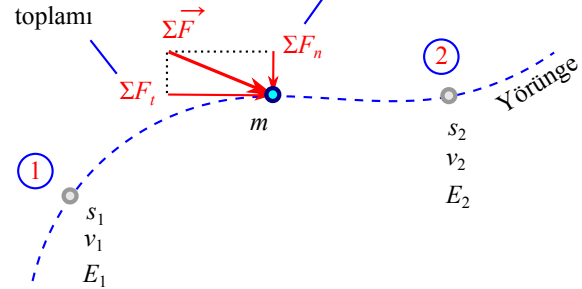
$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} m a_t ds = m \int_{v_1}^{v_2} v dv$$

$$U_{1-2} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

İş yapan bileşenlerin
toplamı

İş yapmayan bileşenlerin
toplamı



Ağırlık kuvvetlerinin
yaptığı iş

Yay kuvvetlerinin
yaptığı iş

$$T_1 + U_{1-2} = T_2$$

$$U_{1-2} = U_{1-2}' - (V_{g2} - V_{g1}) - (V_{e2} - V_{e1})$$

$$U_{1-2} = U_{1-2}' - (V_{g2} - V_{g1}) - (V_{e2} - V_{e1})$$

$$T_1 + V_{g1} + V_{e1} + U_{1-2}' = T_2 + V_{g2} + V_{e2}$$

Toplam
mekanik
enerji

$$E = T + V_g + V_e$$

$$E_1 + U_{1-2}' = E_2$$

Ağırlık kuvvetlerinden ve
yay kuvvetlerinden başka iş yapan
kuvvetlerin yaptığı toplam iş

Enerjinin Korunumu

Eğer bir maddesel noktaya etki eden kuvvetlerin içinde ağırlık kuvvetlerinden ve yay kuvvetlerinden başka iş yapan kuvvet yoksa toplam mekanik enerji korunur.

$$U_{1-2}' = 0$$

$$E_1 = E_2$$

$$E = \text{sb.}$$

→

$$T_1 + V_{g1} + V_{e1} = T_2 + V_{g2} + V_{e2}$$

Örnek Problem 3/11

0.60 kg lık şekildeki kızak, düşey düzlemde yer alan eğrisel bir çubuk üzerinde, D deki küçük makaralardan geçen ipteki sabit F çekme kuvvetinin tesiri altında ihmal edilebilir bir sürtünme ile kaymaktadır. Eğer kızak A dan ilk hızsız olarak serbest bırakılırsa, kızığın B noktasındaki durdurucuya 4 m/s lik bir hızla çarpması için F kuvvetinin ne olması gerekir?

Verilenler:

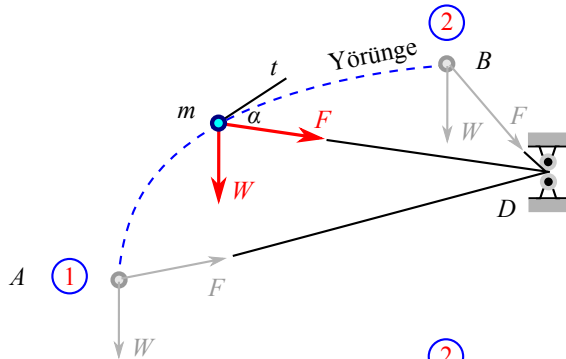
$$m = 0.6 \text{ kg}$$

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = 4 \text{ m/s}$$

Aktif kuvvet diyagramı

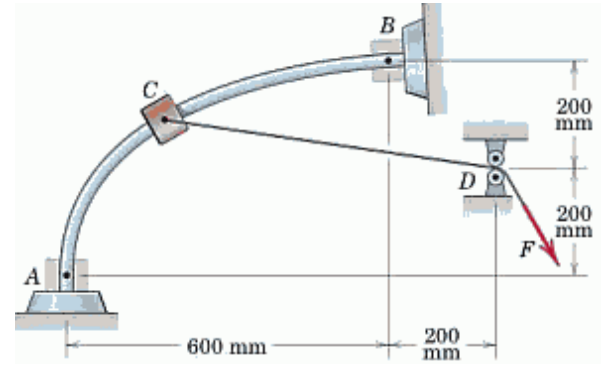
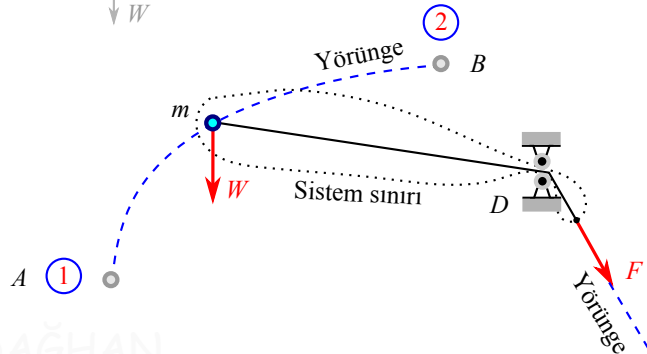
Sadece iş yapan kuvvetler gösterilir.



İstenenler:

$$F = ?$$

(sabit)



Eğer hareketi bu şekilde incelemek istersek,

F kuvvetinin yaptığı işi bulmak için verilenler yeterli olmayacaktır.

F kuvvetinin şiddeti sabittir ama yönü değişmektedir.

Dolayısı ile F nin teğetsel bileşeni değişmektedir.

Ayrıca F nin teğetsel bileşenini bulmak için yörüngenin bilinmesi gerekir.

Yörüngenin nasıl bir eğri olduğu da bilinmemektedir.

F kuvvetinin yaptığı işi kolayca bulabilmek için sistem sınırı yandaki gibi seçilebilir.

Örnek Problem 3/11

0.60 kg lık şekildeki kızak, düşey düzlemde yer alan eğrisel bir çubuk üzerinde, D deki küçük makaralardan geçen ipteki sabit F çekme kuvvetinin tesiri altında ihmal edilebilir bir sürtünme ile kaymaktadır. Eğer kızak A dan ilk hızsız olarak serbest bırakılırsa, kızığın B noktasındaki durdurucuya 4 m/s lik bir hızla çarpması için F kuvvetinin ne olması gerekir?

Verilenler:

$$m = 0.6 \text{ kg}$$

$$v_1 = 0$$

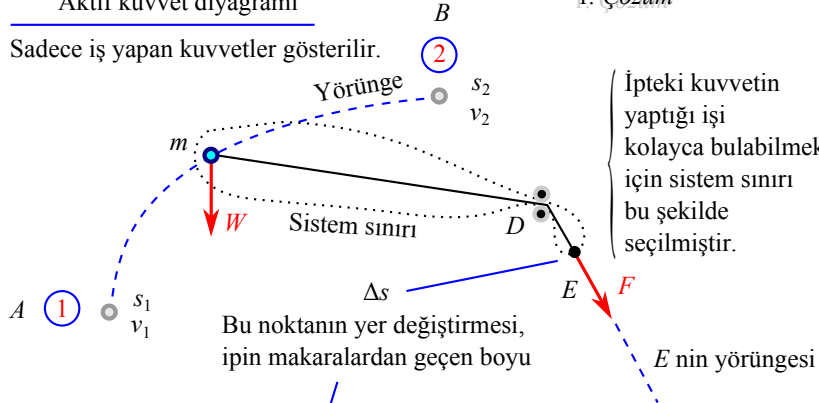
$$v_2 = 4 \text{ m/s}$$

İstenenler:

$F = ?$
(sabit)

Aktif kuvvet diyagramı

Sadece iş yapan kuvvetler gösterilir.



$$U_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} \Sigma F_t ds$$

$$\Delta s = \overline{AD} - \overline{BD}$$

$$\Delta s = 542 \text{ mm}$$

Her iki kuvvet de sabittir.

$$U_{1-2} = F \Delta s - W \int_{s_1}^{s_2} \cos \alpha \, ds$$

$$W = m g$$

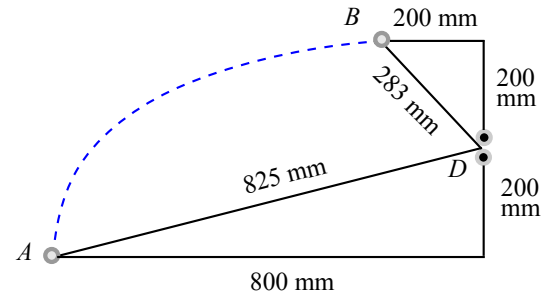
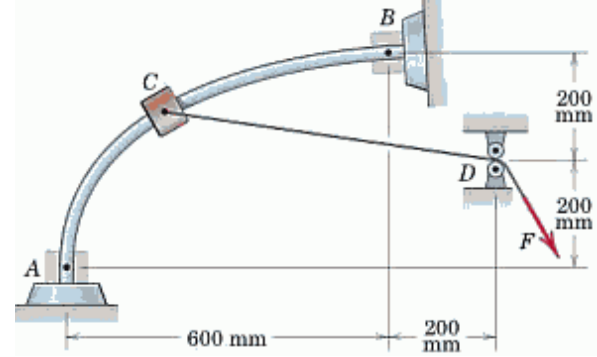
Ağırlık kuvveti,
aşağıdan yukarıya çıkan bir cisme
negatif iş yapar.

1. Çözüm

İpteki kuvvetin yaptığı işi kolayca bulabilmek için sistem sınırı bu şekilde seçilmiştir.

s_1 konumu ile s_2 konumu
arasındaki
kuvvete paralel uzaklık = 400 mm

Ağırlık kuvveti sabittir ve daima düşeydir. O halde ağırlık kuvvetinin yaptığı işi bulmak için konumlar arasındaki düşey uzaklık alınacaktır.



$$T_1 + U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + U_{1-2} = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$F = 13 \text{ N}$$

Örnek Problem 3/11

0.60 kg lık şekildeki kızak, düşey düzlemde yer alan eğrisel bir çubuk üzerinde, D deki küçük makaralardan geçen ipteki sabit F çekme kuvvetinin tesiri altında ihmal edilebilir bir sürtünme ile kaymaktadır. Eğer kızak A dan ilk hızsız olarak serbest bırakılırsa, kızakın B noktasındaki durdurucuya 4 m/s lik bir hızla çarpması için F kuvvetinin ne olması gerekir?

Verilenler:

$$m = 0.6 \text{ kg}$$

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = 4 \text{ m/s}$$

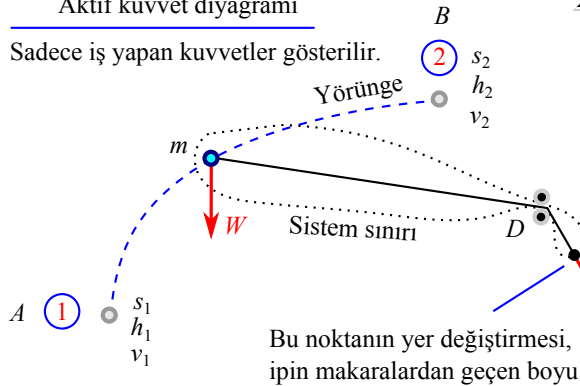
İstenenler:

$$F = ?$$

(sabit)

Aktif kuvvet diyagramı

Sadece iş yapan kuvvetler gösterilir.



Bu noktanın yer değiştirmesi, ipin makaralardan geçen boyu

$$\Delta s = \overline{AD} - \overline{BD}$$

$$\Delta s = 542 \text{ mm}$$

Ağırlık kuvvetlerinden ve yay kuvvetlerinden başka iş yapan kuvvetlerin yaptığı toplam iş

$$U_{1-2}' = \int_{s_1}^{s_2} \Sigma F_t' ds$$

$$\rightarrow U_{1-2}' = F \Delta s$$

2. Çözüm

İpteki kuvvetin yaptığı işi kolayca bulabilmek için sistem sınırı bu şekilde seçilmiştir.

$$h = h_2 = 400 \text{ mm}$$

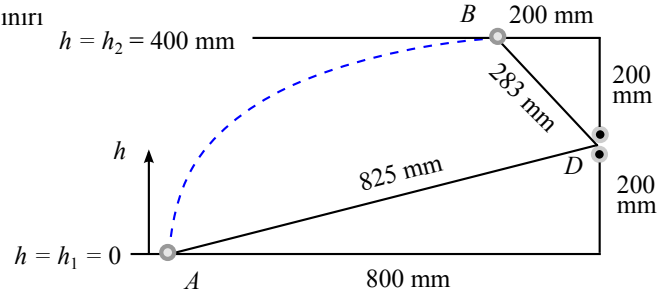
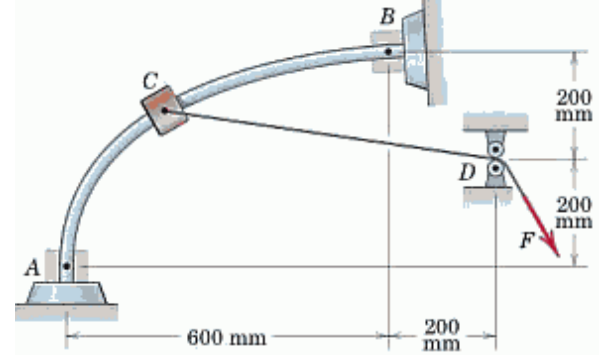
$$h = h_1 = 0$$

$$E_1 + U_{1-2}' = E_2$$

$$\frac{0}{T_1} + \frac{0}{V_{g1}} + \frac{0}{V_{e1}} + U_{1-2}' = \frac{0}{T_2} + \frac{0}{V_{g2}} + \frac{0}{V_{e2}}$$

$$F \Delta s = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2$$

$$F = 13 \text{ N}$$



Örnek Problem 3/12

Düsey olan sürtünmesiz çubuk üzerinde kaymakta olan 10 kg lık kızak, yayların boyunun 0.1 m uzamış olduğu A konumundan $v_1 = 2$ m/s lik bir hızla geçmektedir. Kızağın, B noktasını geçerkenki hızı v_2 yi hesaplayınız.

Verilenler:

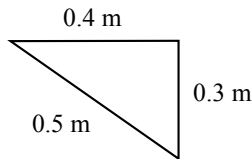
$m = 10$ kg
 $v_1 = 2$ m/s
 $h_1 = 0.3$ m
 $k = 800$ N/m
 $x_1 = 0.1$ m
 $h_2 = 0$

İstenenler:

$v_2 = ?$

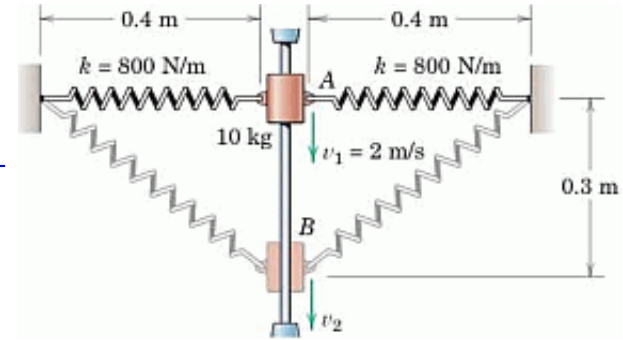
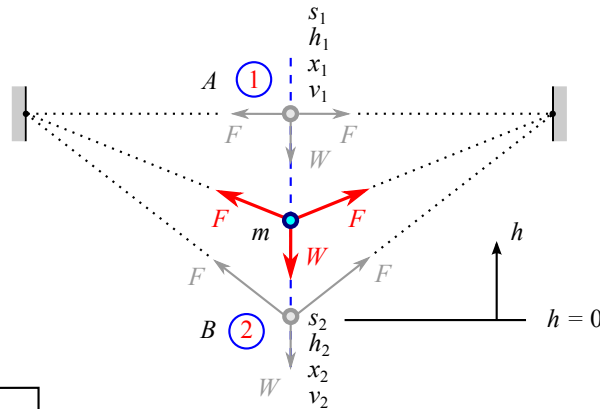
Yayların boyu, L :

$L + x_1 = 0.4$
 $L + 0.1 = 0.4$
 $L = 0.3$ m



$L + x_2 = 0.5$
 $x_2 = 0.2$ m

Çözüm



$$E_1 + U_{1-2}' = E_2$$

Ağırlık kuvvetinden ve yay kuvvetlerinden başka iş yapan kuvvet olmadığı için enerji korunur.

$$E_1 + \psi_{1-2}' = E_2$$

$$T_1 + V_{g1} + V_{e1} = T_2 + \psi_{g2}' + V_{e2}$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 + 2 \left(\frac{1}{2} k x_1^2 \right) = \frac{1}{2} m v_2^2 + 2 \left(\frac{1}{2} k x_2^2 \right)$$

$$v_2 = 2.26 \text{ m/s}$$

Örnek Problem 3/13

Her birinin kütlesi m olan küçük A ve B cisimleri, kütlesi ihmal edilebilen çubuklarla birbirlerine şekildeki gibi bağlanmış ve ilk hızsız olarak serbest bırakılmışlardır. O ile aynı düşey hizaya geldiği anda A cisminin hızı ne olur? Sürtünmeleri ihmal ediniz.

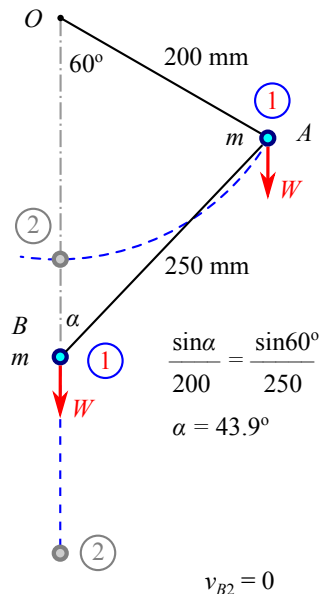
Verilenler:

$$\begin{aligned} m \\ v_{A1} &= 0 \\ v_{B1} &= 0 \\ \mu &= 0 \end{aligned}$$

İstenenler:

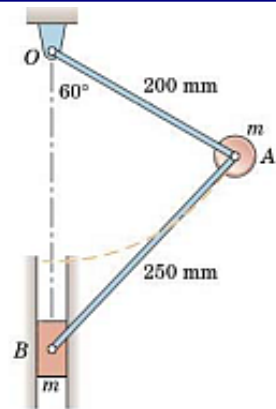
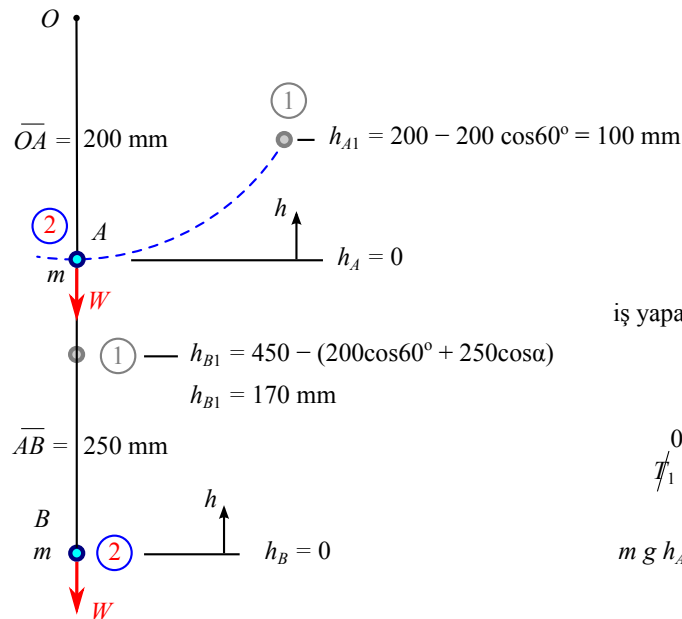
$$v_{A2} = ?$$

Çözüm



B cismi bu konumda durup geri döner.

Ulaşılabileceği en alt konumdadır.



$$E_1 + U_{1-2}' = E_2$$

Ağırlık kuvvetlerinden başka iş yapan kuvvet olmadığı için enerji korunur.

$$E_1 + U_{1-2}' = E_2$$

$$T_1 + V_{g1} + V_{e1}' = T_2 + V_{g2}' + V_{e2}'$$

$$m g h_{A1} + m g h_{B1} = \frac{1}{2} m v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m v_{B2}^2$$

$$2 (9.81) (0.1 + 0.17) = v_{A2}^2$$

$$v_{A2} = 2.3 \text{ m/s}$$

Örnek Problem 3/14

Rijitliği k olan şekildeki yay, sıkıştırılmış ve aniden serbest bırakılmıştır. Böylece m kütleli maddesel nokta, şekildeki yolu izlemiştir. Yolu düşey düzlemde yer alan yuvarlak kısımda maddesel nokta ile yolun temasının kesilmemesi için yayın sıkıştırılması gereken minimum mesafe δ yı hesaplayınız. Kinetik sürtünme katsayısı μ_k olan $s = R$ uzunluğundaki sürtülmeli kısım dışında yolun yüzeyi sürtünmesizdir.

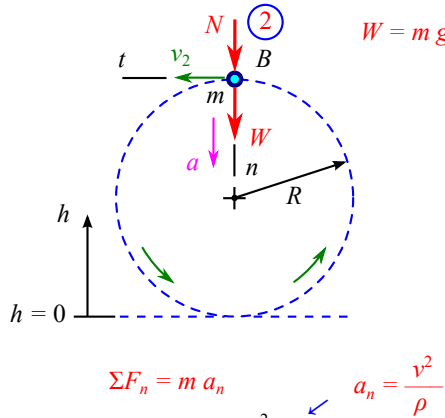
Verilenler:

- R
- k
- m
- $v_1 = 0$
- $v_2 = v_{2\min}$
- μ_k
- $\Delta s = s = R$
- $x_1 = \delta$
- $x_2 = 0$
- $h_1 = 0$
- $h_2 = 2R$

İstenenler:

$$x_{1\min} = \delta = ?$$

Maddesel noktanın yol ile temasının kesilmesi açısından en kritik nokta B noktasıdır.



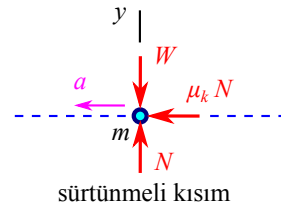
$$\Sigma F_n = m a_n \quad \leftarrow \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$N + W = m \frac{v_2^2}{R}$$

$$v_2 = v_{2\min} \text{ iken } N = 0 \text{ ve } a = g \text{ olur.}$$

$$0 + W = m \frac{v_{2\min}^2}{R} \rightarrow v_{2\min}^2 = g R = v_2^2$$

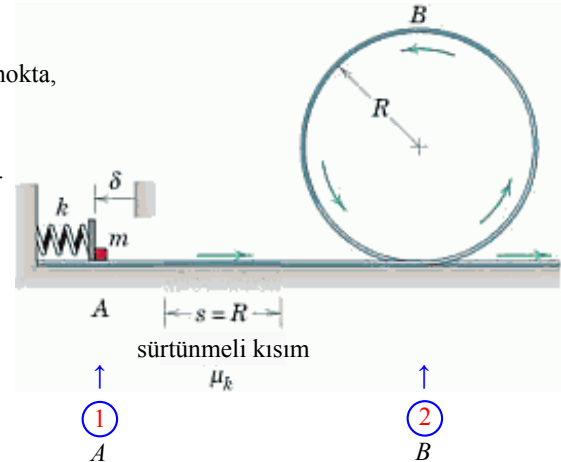
Çözüm



$$\Sigma F_y = m a_y \rightarrow N - W = 0$$

$$N = m g$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu_k N \text{ (sabit)} \\ U_{1-2}' = F \Delta s \\ \Delta s = R \end{array} \right\} \begin{array}{l} U_{1-2}' = -\mu_k N R \\ = -\mu_k m g R \end{array}$$



$$E_1 + U_{1-2}' = E_2$$

$$\frac{0}{2} + \frac{0}{2} + V_{e1} + U_{1-2}' = T_2 + V_{g2} + \frac{0}{2}$$

$$\frac{1}{2} k x_1^2 - \mu_k m g R = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2$$

$$\frac{1}{2} k \delta^2 - \mu_k m g R = \frac{1}{2} m (g R) + m g (2 R)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{5 + 2 \mu_k}{k} m g R}$$