T.C.
KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ

ROBOT DİNAMİĞİ VE KONTROLÜ

PROF. DR. ZAFER BİNGÜL
PROF. DR. SERDAR KÜÇÜK

BÖLÜM 1: ROBOT DİNAMİĞİ

Bir robot kolunun dinamiği, robot kolunun kendi hareketinden dolayı oluşan eşitliklerin matematiksel olarak ifade edilmesidir. Başka bir deyişle, bir robot kolunun hareketinden üretilen dinamik eşitlikler, robot kolunun dinamik davranışını tanımlayan bir dizi matematiksel ifadeden oluşmaktadır.

Robot kolunun dinamik analizi ise, eklemlere tahrik elemanları tarafından uygulanan moment veya kuvvet büyüklükleri ile robot kolunun zamana göre konumu, hızı ve ivmesi arasındaki ilişkilerin incelenmesi olarak tanımlanabilir.

- Elde edilen matematiksel denklemler, robot kolunun bilgisayar ortamında simülasyonu, eklem uzayında en uygun tasarım parametreleriyle hareket edebilmesi, kararlı ve kontrollü bir davranış sergilemesi açısından son derece önemlidir.

- Genel olarak bir robot kolunun dinamik performansı, etkili kontrol algoritmasının ve uygun dinamik modelinin elde edilmesine bağlıdır.

- Kontrol işleminde, elde edilen robot dinamik modelinin arzu edilen sistem cevap ve performansını sağlaması için uygun algoritma üretmesidir.

- Kontrol probleminin önemi, çıkarılan dinamik modelin, robotun arzu edilen sistem cevap ve performansını üretmesinden kaynaklanmaktadır.

Bir robot kolunun dinamik modelinin çıkarılması konusunda Lagrange-Euler ve Newton-Euler denklemleri temel alınarak şimdiye kadar bir çok çalışma yapılmış ve bu denklemler kullanılarak birçok yöntem geliştirilmiştir.

Bu yöntemlerden en önemlileri, önce Uicker'in (1965) geliştirip daha sonra Bejczy'nin (1974) uyguladığı Lagrange-Euler, Hollerbach (1980) tarafından geliştirilen döngüse (rekürsif) Lagrange, Luh, Walker ve Paul'nun (1980) geliştirdiği Newton-Euler ve Lee, Lee ve Nigam (1983) tarafından geliştirilen genelleştirilmiş d'Alembert yöntemleridir

Lagrange-Euler Denklemi

Karmaşık dinamik sistemler, kinetik ve potansiyel enerji farkından yararlanan Langrange denklemini kullanmak suretiyle basit bir şekilde modellenebilir (Schilling 1990).

$$L(q,\dot{q}) = K(q,\dot{q}) - P(q)$$

Burada q dönel eklemler için eklem açısını, prizmatik eklemler için bağ uzunluğunu temsil ederken eklem hızlarını gösteren bir vektördür. Görüldüğü gibi, Kinetik enerji (K) robot kolunun konum ve hızına, potansiyel enerji (P) ise sadece robot kolunun konumuna bağlıdır.

Bir Robot Kolunun Toplam Kinetik ve Potansiyel Enerjisi

Lagrange fonksiyonunun en karmaşık terimi robot kolunun toplam kinetik enerjisini veren $K(q,\dot{q})$ ifadesidir. Toplam kinetik enerji her bir eklemin kinetik enerjilerinin toplamına eşittir ve denklem 1.3.1’deki gibi ifade edilir.

$$K(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(v_i)^T m_i v_i + (\omega_i)^T I_i \omega_i$$

Denklemde , m_i i. bağın kütlesini, I_i ise i. bağın kütle merkezinin ana koordinat sistemine göre 3x3 boyutlu bir matris olan atalet tensörünü göstermektedir.

Bir bağın atalet tensörü, katı bir nesnenin kütle dağılımını gösteren 3x3 boyutlu bir matristir. Katı bir nesnenin atalet tensörünü ana koordinat sistemine göre tanımlayabilmek için ilk önce aynı nesnenin kütle merkezine göre atalet tensörünün tanımlanması gerekir. Bir kati nesnenin kütle yoğunluğu ρ ve hacmi V hacim olsun. Bu durumda katı nesnenin kendi kütle merkezine göre atalet tensörü,

$$I_m = \begin{bmatrix} \int_v (y^2+z^2)\rho\, dv & -\int_v xy\rho\, dv & -\int_v xz\rho\, dv \\ -\int_v xy\rho\, dv & \int_v (x^2+z^2)\rho\, dv & -\int_v yz\rho\, dv \\ -\int_v xz\rho\, dv & -\int_v yz\rho\, dv & \int_v (x^2+y^2)\rho\, dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Köşegende yer alan elemanlar atalet momenti, geri kalan simetrik elemanlar ise atalet çarpanları olarak ifade edilir. Atalet momenti pozitif büyüklük olmasına karşın atalet çarpanları hem pozitif hem de negatif büyüklük olabilir.

Eğer koordinat sistemi kütle merkezine yerleştirilirse, prensip eksenler kuralına göre atalet çarpanları sıfır olur. Bu durumda atalet tensörü köşegen matris olur. Köşegende yer alan üç elemanda prensip atalet tensörü olarak isimlendirilir.

$$I_m = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Bir robot bağının ana koordinat sistemine göre atalet tensörü Ii aşağıdaki gibi gösterilir.

$$I_i = {}^0_iR \, I_m \, {}^0_iR^T$$

Bir robot kolunun toplam kinetik enerjisini bulmak için ikinci olarak bağ Jakobiyen matrisi Ji'nin bulunması gerekir. Bunun için i. bağın kütle merkezi sanki uç işlevcisiymiş gibi kabul edilir. Daha sonra i. bağın kütle merkezinin ana koordinat sistemine göre konumu hi vektörü kullanılarak tanımlanır.

$$h_i = {}_i^0T\,\Delta h_i$$

Δh_i i. ekleme yerleştirilen koordinat sistemine göre i. bağın kütle merkezinin koordinatlarıdır. Buna göre i. bağın kütle merkezinden elde edilen Jakobiyen matrisi aşağıdaki gibi olur. Denklemde Ai doğrusal, Bi açısal hızlardan kaynaklanan Jakobiyen matrisleridir.

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial h_i}{\partial q_i} & 0 \\ \\ \xi_1 z^1 \cdots \xi_i z^i & 0 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i \\ \\ B_i \end{bmatrix}$$

Kısi eklem tip değişkenidir, dönel eklemler için 1, prizmatik eklemler için 0 alınır. Aynı denklemde zi, i. koordinat sisteminin üçüncü kolon birim vektörünü temsil etmektedir ve

$$z^i = {}^0_i R i^3 \qquad i^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

bir robot kolunun toplam kinetik enerjisini q ve $\dot{q}$ cinsinden ifade etmek için aşağıdaki eşitlikleri tanımlayalım.

$$v_i = A_i \dot{q}$$

$$\omega_i = B_i \dot{q}$$

Vi ve wi i. bağın kütle merkezinin doğrusal ve açısal hızlarıdır. Denklemde v_i yerine $A_i \dot{q}$ ve w_i yerine $B_i \dot{q}$ yazılıp gerekli sadeleştirme yapılığında toplam kinetik enerji

$$K(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{i=1}^{n} \left[(A_i)^T m_i A_i + (B_i)^T I_i B_i \right] \dot{q}$$

Denklemde 3xn Jakobiyen alt matrisler A_i, B_i ve 3x3 bağ atalet tensörü I_i q'ya bağlıdır. Toplam kinetik enerji ifadesi eklem hızları ve **manipülatör atalet tensörü** D(q) cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$K(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q}$$

Denklemde D(q) simetrik pozitif tanımlı bir matrisidir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$D(q) = \sum_{i=1}^{n}\left[(A_i)^T m_i A_i + (B_i)^T I_i B_i\right]$$

Bir robot kolunun Lagrange fonksiyonunu tamamen ifade etmek için, bu kolun **toplam potansiyel enerjisi** P(q)'nun tanımlanması gerekir. Bir robot kolunun depoladığı toplam potansiyel enerji, yerçekimi ivmesinin var olduğu ortamda bağ kütle merkezlerinin yer değiştirmesini sağlayan iş miktarı kadardır ve

$$P(q) = \sum_{i=1}^{n} m_i g^T h_i$$

şeklinde gösterilir. Denklemde $g \in R^3$ yerçekimi ivmesini, h_i ise i. bağın kütle merkezinin ana koordinat sistemine göre konumunu göstermektedir.

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \cancel{+} m g^T h$$

Toplam kinetik ve potansiyel enerji ifadeleri elde edildiğine göre bir robot kolunun **Lagrange fonksiyonu** aşağıdaki gibi yazılabilir.

Lagrange-Euler Denklemleriyle Robotları Dinamik Modelinin Çıkarılması

Kinetik ve potansiyel enerji ifadeleri Lagrange eşitliğinde yerine konarak bir robot kolunun genel dinamik modeli çıkarılabilir. Bir robot kolu için Lagrange-Euler eşitliği

$$L(q,\dot{q}) = K(q,\dot{q}) - P(q)$$

Bir robot kolunun hareketinden dolayı oluşan denklem

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

τ eyleyicilerde oluşan nx1 boyutlu tork vektörüdür. Daha açık

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q} = \tau$$

Kinetik ve potansiyel enerjileri gösteren denklemler yerine konduğunda ve sürtünme kayıpları göz önüne alındığında genel ifade

$$\sum_{j=1}^{n} D_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c^{i}_{kj}(q)\dot{q}_k\dot{q}_j + y_i(q) + b_i(\dot{q}) = \tau_i$$

Denklemde ilk terim, robot bağlarının hareketlerinden üretilen içsel kuvvet ve tork ifadelerini temsil eden ivme terimidir. İkinci terim, robot hızlarıyla ilişkilendirilen Coriolis ve Merkezkaç kuvvet vektörüdür ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$c^{i}_{kj}(q) = \frac{\partial}{\partial q_k} D_{ij}(q) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i} D_{kj}(q) \quad 1 \le i, j, k \le n$$

Üçüncü terim, yerçekimi ivmesini temsil eder

$$y_i(q) = -\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{n} g_k m_j A_{ki}^{j}(q)$$

Son terim ise robot kolunun hareketine zıt olarak gerçekleşen sürtünmeyi temsil etmektedir. Sürtünme terimi ihmal edilirse bir robot kolunun eklem uzayındaki dinamik denklemi

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau_i$$

Denklemde, birinci terim manipülatörün genel atalet tensörü veya kütle matrisini, ikinci terim Coriolis ve merkezkaç (centrifugal) kuvvet vektörünü ve üçüncü terim yerçekimi ivmesini temsil etmektedir. Robotun dinamiğini **kartezyen değişkenler** cinsinden ifade etmek için

$$D(q)\ddot{\chi} + C(q,\dot{q}) + G(q) = F$$

$F = [\tau_x,\ \tau_y,\ \tau_z,\ f_x,\ f_y,\ \tau_z]$ uç işlevcisine etkiyen kuvvet-tork vektörü

$\chi = [\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ p_x,\ p_y,\ p_z]$ uç işlevcinin konum ve yönelimini

D(q) kartezyen kütle matrisi, G(q) yerçekimi vektörünü

$C(q,\dot{q})$ Kartezyen Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü

Kartezyen uzaydaki kuvvetten eklem uzayındaki tork (moment) geçiş

$$\tau = J^T(q)F$$

Denklemde J(q), Jakobiyen matrisini göstermektedir.

Üç eklemli bir robotta birinci ekleme ait hız bağlaşım matrisinin elemanları

$$c_{11}^{1} = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{11} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} D_{11} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} D_{11}$$

$$c_{12}^{1} = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{12} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} D_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} D_{12}$$

$$c_{13}^{1} = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{13} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} D_{13} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} D_{31}$$

$$c_{22}^{1} = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{12} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} D_{22}$$

$$c_{23}^{1} = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{13} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} D_{23}$$

$$c_{31}^{1} = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{11} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} D_{31}$$

$$c_{32}^{1} = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{12} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} D_{32}$$

$$c_{33}^{1} = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{13} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} D_{33}$$

2. İkinci ekleme ait hız bağlaşım matrisinin elemanları

$$c_{11}^{2} = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{21} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{11}$$

$$c_{12}^{2} = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{22} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{12}$$

$$c_{13}^{2} = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{23} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{13}$$

$$c_{21}^{2} = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{21} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{21} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{21}$$

$$c_{22}^{2} = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{22} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{22} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{22}$$

$$c_{23}^{2} = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{23} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{23} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{23}$$

$$c_{31}^{2} = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{21} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{31}$$

$$c_{32}^{2} = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{22} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{32}$$

$$c_{33}^{2} = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{23} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{33}$$

3. Üçüncü ekleme ait hız bağlaşım matrisinin elemanları

$$c_{11}^{3} = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{31} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{11} \qquad c_{12}^{3} = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{32} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{12}$$

$$c_{13}^{3} = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{33} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{13}$$

$$c_{21}^{3} = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{31} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{21} \qquad c_{22}^{3} = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{32} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{22}$$

$$c_{23}^{3} = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{33} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{23}$$

$$c_{31}^{3} = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{31} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{31} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{31}$$

$$c_{32}^{3} = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{32} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{32} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{32}$$

$$c_{33}^{3} = \frac{\partial}{\partial q_3} D_{33} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{33} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_3} D_{33}$$

Üç eklemli bir robot kolu için yerçekimi vektörü ise denklem 1.4.5'in uygulanmasıyla bulunur. Bu durumda birinci eklem için yerçekimi vektörü, x ekseni yönünde ise X_1, y ekseni yönünde ise Y_1, z ekseni yönünde ise Z_1'deki denklemlerin uygulanmasıyla elde edilir. 1. Birinci eklem için yerçekimi vektörü,

$$X_1 = -g(m_1 A^1_{11} + m_2 A^2_{11} + m_3 A^3_{11})$$

$$Y_1 = -g(m_1 A^1_{21} + m_2 A^2_{21} + m_3 A^3_{21})$$

2. İkinci eklem için yerçekimi vektörü,

$$X_2 = -g(m_2 A^2_{12} + m_3 A^3_{12})$$

$$Y_2 = -g(m_2 A^2_{22} + m_3 A^3_{22})$$

$$Z_2 = -g(m_2 A^2_{32} + m_3 A^3_{32})$$

3. Üçüncü eklem için yerçekimi vektörü,

$$X_3 = -g(m_3 A_{13}^3)$$

$$Y_3 = -g(m_3 A_{23}^3)$$

$$Z_3 = -g(m_3 A_{33}^3)$$

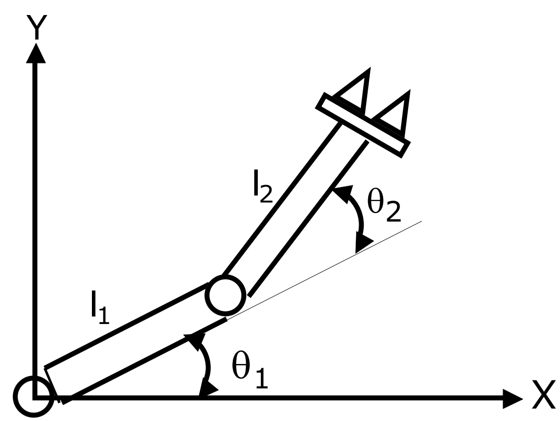
Yer çekimi vektörü ilk eklemdeki eksen referans alınarak elde edilir. Örneğin, yerçekimi vektörü, ilk eklemde z ekseninde ise, bundan sonraki eklemlerde oluşacak yerçekimi ivmesi Z_1, Z_2 ve Z_3, veya yerçekimi vektörü, ilk eklemde y ekseninde ise yerçekimi ivmesi Y_1, Y_2 ve Y_3 ifadelerinin uygulanmasıyla bulunur.

Lagrange-Euler Denklemleriyle İlgili Açıklamalı Örnekler

Bu bölümde RR, RPP ve RRP eklem yapsına sahip robotların dinamik modelleri detaylı bir şekilde Lagrange-Euler denklemleri kullanılarak çıkarılmıştır.

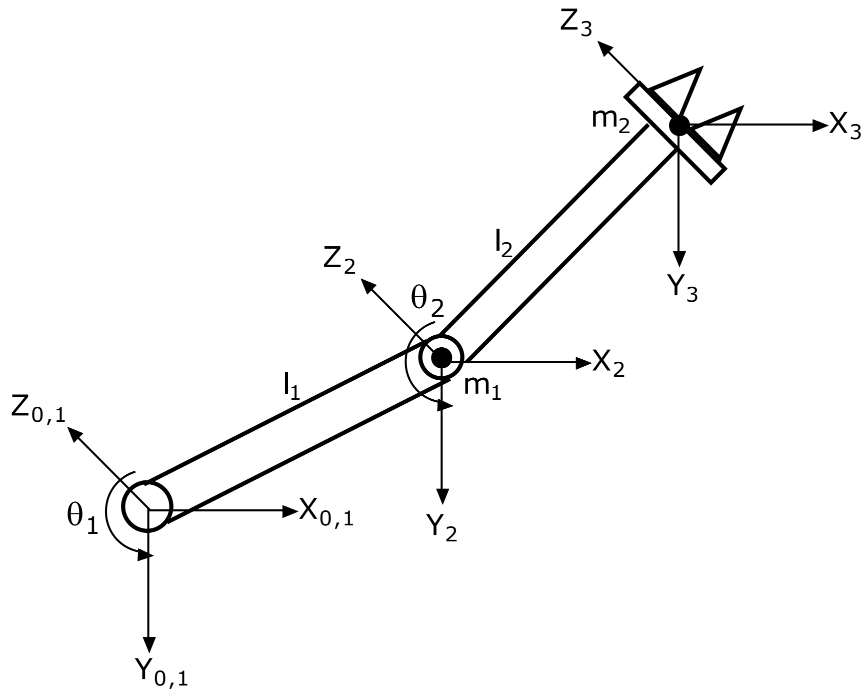
ÖRNEK 1.5.1.

Robot bağların kütle merkezleri bağların ucunda seçilmiştir. Buna göre bu robotun dinamik modelini Lagrange-Euler yöntemini kullanarak çıkarınız.



İki eklemli düzlemsel robot.

Robotun her bir eklemine koordinat sistemi ekleyelim.



İleri yön kinematik matrisleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_1 c\theta_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & l_1 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Şekilde l_1 uzunluğunun birinci ekleme yerleştirilen koordinat sisteminin x ekseni boyunca uzandığına dikkat edin. Bu durumda, birinci ekleme yerleştirilen koordinat sistemine göre birinci bağın kütle merkezinin konumu aşağıdaki vektörle fade edilir.

$$\Delta h_1 = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Birinci bağın kütle merkezinin atalet tensörü ise

$$I_{m1} = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix}$$

Kütlelerin ağırlıklarını ihmal edildiğinden , $I_{xx_1} = 0$, $I_{yy_1} = 0$, $I_{zz_1} = 0$
Elde ettiğimiz bu ifadeleri denklemde yerine koyalım.

$$I_{m1} = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Birinci bağın ana koordinat sistemine göre atalet tensorü

$$I_1 = {}^0_1R \, I_{m1} \, {}^0_1R^T$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ana koordinat sistemine göre 1. bağın kütle merkezinin koordinatları

$$h_1 = {}^0_1T \, \Delta h_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 c\theta_1 \\ l_1 s\theta_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Birinci bağa ait Jakobiyen matrisi, h1 vektörünün θ_1 ve θ_2 'ye göre türevinin alınıp z^1 ve $\xi_1 = 1$ değişkenlerinin kullanılmasıyla bulunur.

$$z^1 = {}^0_1R\, i^3 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

birinci ekleme ait Jakobiyen aşağıdaki gibi elde edilir.

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta_1} l_1 c\theta_1 & \frac{\partial}{\partial\theta_2} l_1 c\theta_1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial\theta_1} l_1 s\theta_1 & \frac{\partial}{\partial\theta_2} l_1 s\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 & 0 & 0 \\ l_1 c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

J_1 Jakobiyen matrisi A_1 ve B_1 gibi iki adet alt matris şeklinde yazılarak, birinci bağın manipülatörün genel atalet tensorüne katkısı bulunur.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 & 0 & 0 \\ l_1 c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Birinci ekleme ait kütle matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D(\theta_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1^T I_1 B_1$$

$$= m_1 \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 & l_1 c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 & 0 & 0 \\ l_1 c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

l_2 uzunluğunun ikinci ekleme yerleştirilen koordinat sisteminin x ekseni boyunca uzandığına dikkat edin. Bu durumda, ikinci ekleme yerleştirilen koordinat sistemine göre ikinci bağın kütle merkezinin konumu aşağıdaki vektörle ifade edilir.

$$\Delta h_2 = \begin{bmatrix} l_2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{1.5.6}$$

Daha öncede belirtildiği, gibi bağ kütleleri ihmal edildiğinden ikinci bağın kütle merkezinin atalet tensörü $I_{m2} = [0]$ sıfır matrise eşittir. İlk iki eksene ait ${}^0_2T$ homojen dönüşüm matrisi

$${}^0_2T = \begin{bmatrix} c\theta_{12} & -s\theta_{12} & 0 & l_1 c\theta_1 \\ s\theta_{12} & c\theta_{12} & 0 & l_1 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.5.7}$$

Denklemde $c\theta_{12} = c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2$ ve $s\theta_{12} = c\theta_1 s\theta_2 + s\theta_1 c\theta_2$ 'dir. Sonuçta, ikinci bağın ana koordinat sistemine göre atalet tensorü, $I_{m2} = 0$ olduğundan

$$I_2 = {}^0_2R \, I_{m2} \, {}^0_2R^T = 0 \tag{1.5.8}$$

elde edilir. Ana koordinat sistemine göre ikinci bağın kütle merkezinin koordinatları ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_2 = {}^0_2T \, \Delta h_2$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_{12} & -s\theta_{12} & 0 & l_1 c\theta_1 \\ s\theta_{12} & c\theta_{12} & 0 & l_1 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_2 c\theta_{12} + l_1 c\theta_1 \\ l_2 s\theta_{12} + l_1 s\theta_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.5.9}$$

İkinci bağa ait Jakobiyen matrisi, h_2 vektörünün θ_1 ve θ_2 ’ye göre türevinin alınıp z^2 ve ξ_2 değişkenlerinin kullanılmasıyla bulunur.

$$z^2 = {}^0_2R\, i^3$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_{12} & -s\theta_{12} & 0 \\ s\theta_{12} & c\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

İkinci eklem dönel olduğundan $\xi_2 = 1$ ’ dir ve $b_2 = \xi_2 z^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ olur. Bu durumda ikinci ekleme ait Jakobiyen aşağıdaki gibi elde edilir.

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta_1}(l_2 c\theta_{12} + l_1 c\theta_1) & \frac{\partial}{\partial\theta_2}(l_2 c\theta_{12} + l_1 c\theta_1) & 0 \\ \frac{\partial}{\partial\theta_1}(l_2 s\theta_{12} + l_1 s\theta_1) & \frac{\partial}{\partial\theta_2}(l_2 s\theta_{12} + l_1 s\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -l_2 s\theta_{12} - l_1 s\theta_1 & -l_2 s\theta_{12} & 0 \\ l_2 c\theta_{12} + l_1 c\theta_1 & l_2 c\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.5.10)$$

J_2 Jakobiyen matrisi A_2 ve B_2 gibi iki adet alt matris şeklinde yazılarak, manipulatörün genel atalet tensorüne ikinci bağın katkısı elde edilir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} -l_2 s\theta_{12} - l_1 s\theta_1 & -l_2 s\theta_{12} & 0 \\ l_2 c\theta_{12} + l_1 c\theta_1 & l_2 c\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu durumda ikinci ekleme ait kütle matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D(\theta_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T I_2 B_2 = m_2 A_2^T A_2 \qquad I_2 = 0$$

$$= m_2 \begin{bmatrix} -l_2 s\theta_{12} - l_1 s\theta_1 & l_2 c\theta_{12} + l_1 c\theta_1 & 0 \\ -l_2 s\theta_{12} & l_2 c\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_2 s\theta_{12} - l_1 s\theta_1 & -l_2 s\theta_{12} & 0 \\ l_2 c\theta_{12} + l_1 c\theta_1 & l_2 c\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_2(l_2^2 + l_1^2 + 2 l_1 l_2 c\theta_2) & m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2) & 0 \\ m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2) & m_2 l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.5.11)$$

Sonuç olarak iki eklemli bir düzlemsel robotunun kütle matrisi, iki eklemin kütle matrislerinin toplanmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$D(\theta) = D(\theta_1) + D(\theta_2)$$

$$= \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2(l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 c\theta_2) & m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2) & 0 \\ m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2) & m_2 l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2(l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 c\theta_2) & m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2) & 0 \\ m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2) & m_2 l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.5.12)$$

Birinci ekleme ait hız bağlaşım matrisinin elemanları denklem 4.58’den faydalanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$c^{1}_{11} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} D_{11}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_1}\left(m_1 l_1^2 + m_2(l_2^2 + l_1^2 + 2 l_1 l_2 c\theta_2)\right) = 0$$

$$c^{1}_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} D_{12}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_1} m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2) = 0$$

$$c^{1}_{21} = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{11} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} D_{21}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta_2}\left(m_1 l_1^2 + m_2(l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 c\theta_2)\right)$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_1} m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2)$$

$$= -2m_2 l_1 l_2 s\theta_2$$

$$c^1_{22} = \frac{\partial}{\partial q_2} D_{12} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} D_{22}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_2} m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1} m_2 l_2^2$$

$$= -m_2 l_1 l_2 s\theta_2$$

Elde edilen her bir c^{i}_{jk} elemanı matriste yerlerine yazılarak birinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2m_2 l_1 l_2 s\theta_2 & -m_2 l_1 l_2 s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.5.13}$$

Birinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde, y ekseni yerçekimine zıt yönde olduğundan yerçekimi vektörü $\begin{bmatrix} 0 & -g & 0 \end{bmatrix}^T$ şeklinde ifade edilir.

$$Y_1 = -[-g(m_1 A^1_{21} + m_2 A^2_{21})]$$

$$= g(m_1 l_1 c\theta_1 + m_2 l_1 c\theta_1 + m_2 l_2 c\theta_{12}) \tag{1.5.14}$$

$$c_{11}^{2} = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{21}(q) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{11}(q)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta_1} m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_2}\left(m_1 l_1^2 + m_2(l_2^2 + l_1^2 + 2 l_1 l_2 c\theta_2)\right)$$

$$= m_2 l_1 l_2 s\theta_2$$

$$c_{12}^{2} = \frac{\partial}{\partial q_1} D_{22}(q) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{12}(q)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta_1} m_2 l_2^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_2} m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2)$$

$$= \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s\theta_2$$

$$c^2_{21} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{21}(q)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_2} m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2)$$

$$= -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s\theta_2$$

$$c^2_{22} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2} D_{22}(q)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_2} m_2 l_2^2 = 0$$

İkinci eklemin bağlaşım matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} m_2 l_1 l_2 s\theta_2 & \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s\theta_2 & 0 \\ -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

İlk eksendeki yerçekimi vektörü esas alındığından, ikinci ekleme ait yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Y_2 &= -[-g(m_2 A^2_{22} + m_3 A^3_{22})] \\ &= g(m_2 l_2 c\theta_{12} + m_3 0) \\ &= g m_2 l_2 c\theta_{12} \end{aligned} \qquad (1.5.16)$$

Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, her bir ekleme ait hız bağlaşım matrisinin elemanlarının aşağıdaki gibi düzenlenmesiyle bulunur. Birinci eklemin hız bağlaşım matrisini hatırlayalım.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2m_2 l_1 l_2 s\theta_2 & -m_2 l_1 l_2 s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin her bir elemanı aşağıdaki matris elemanlarına eşittir.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_2\dot{\theta}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrisi aşağıdaki gibi düzenleyip birinci eklemin hız bağlaşım matrisine eşitleyelim.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2m_2l_1l_2s\theta_2 & -m_2l_1l_2s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 & \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu eşitlikte karşılıklı elemanları çarpıp yan yana toplayalım.

$$0\dot{\theta}_1^2 + 0\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + (-2m_2l_1l_2s\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + (-m_2l_1l_2s\theta_2)\dot{\theta}_2^2$$

Denklem sadeleştirilirse Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünün birinci elemanı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-(2m_2l_1l_2s\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - (m_2l_1l_2s\theta_2)\dot{\theta}_2^2$$

Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünün ikinci elemanını bulmak için aynı işlemler ikinci eklemin hız bağlaşım matrisinde uygulanır.

$$\begin{bmatrix} m_2 l_1 l_2 s\theta_2 & \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s\theta_2 & 0 \\ -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 & \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(m_2 l_1 l_2 s\theta_2)\dot{\theta}_1^2 + (\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s\theta_2)\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (-\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s\theta_2)\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 0\dot{\theta}_2^2$$

Denklem sadeleştirilirse Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünün ikinci elemanı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(m_2 l_1 l_2 s\theta_2)\dot{\theta}_1^2$$

Elde ettiğimiz her iki elemanı da yerlerine yazarak Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$C(\theta,\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -\left[2m_2 l_1 l_2 s\theta_2\right]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \left[m_2 l_1 l_2 s\theta_2\right]\dot{\theta}_2^2 \\ \left[m_2 l_1 l_2 s\theta_2\right]\dot{\theta}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak iki eklemli düzlemsel robotun her bir eyleyicisine etki eden tork ifadesi kütle matrisi, Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü ve yerçekimi vektörünün toplanmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2(l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 c\theta_2) & m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2) & 0 \\ m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2) & m_2 l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -\left[2m_2 l_1 l_2 s\theta_2\right]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \left[m_2 l_1 l_2 s\theta_2\right]\dot{\theta}_2^2 \\ \left[m_2 l_1 l_2 s\theta_2\right]\dot{\theta}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} g m_1 l_1 c\theta_1 + g m_2 l_1 c\theta_1 + g m_2 l_2 c\theta_{12} \\ g m_2 l_2 c\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Denklemden her bir tork ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

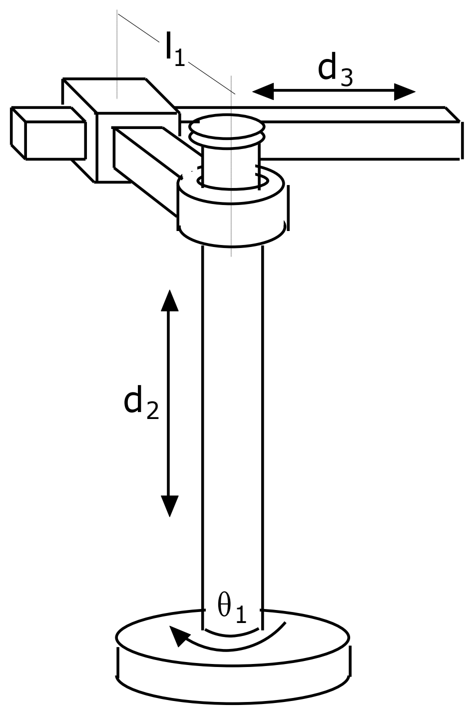
$$\tau_1 = [m_1 l_1^2 + m_2(l_2^2 + l_1^2 + 2 l_1 l_2 c\theta_2)]\ddot{\theta}_1 + [m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2)]\ddot{\theta}_2$$

$$-[2 m_2 l_1 l_2 s\theta_2]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - [m_2 l_1 l_2 s\theta_2]\dot{\theta}_2^2 + g(m_1 l_1 c\theta_1 + m_2 l_1 c\theta_1 + m_2 l_2 c\theta_{12}) \qquad (1.5.18)$$

$$\tau_2 = [m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c\theta_2)]\ddot{\theta}_1 + [m_2 l_2^2]\ddot{\theta}_2 + [m_2 l_1 l_2 s\theta_2]\dot{\theta}_1^2 + g m_2 l_2 c\theta_{12} \qquad (1.5.19)$$

ÖRNEK 1.5.2.

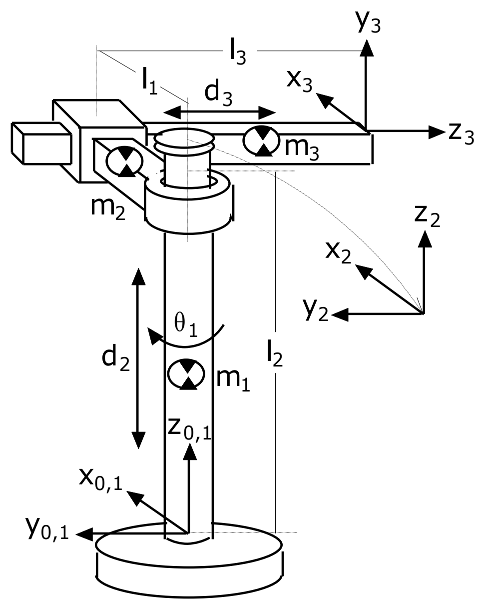
Şekil 1.4'de RPP eklem yapısına sahip üç serbestlik dereceli silindirik bir robotun kütle merkezlerini bağların ortasında seçip Langrange-Euler yöntemini kullanarak dinamik modelini çıkarınız.



Şekil 1.4. Üç serbestlik derecesine sahip RPP robotunun katı gövde yapısı.

ÇÖZÜM 1.5.2.

RPP eklem yapısına sahip robotun katı gövde yapısı, koordinat çerçevelerinin yerleşimi ve sembolik kütle gösterimi Şekil 1.5'te görülmektedir. Bir önceki örnekte her bağın kütle merkezini bu bağların uç noktasında kabul etmiştik. Bu örnekte ise her bağın kütle merkezi, bağların ortasında kabul edilerek ona göre işlem yapılacaktır. Şekil 1.5'te görülen robotun ileri yön kinematik matrisleri denklem 1.5.20'deki gibi elde edilir.



Şekil 1.5. Üç serbestlik dereceli bir robotun dinamik düzenleşimi.

$$
{}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.5.20)
$$

Bir, iki ve üçüncü bağın kütle merkezlerinin atalet tensörü , ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$
I_{m1} = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix} \quad I_{m2} = \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix} \quad I_{m3} = \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix}
$$

Şekil 1.5’te uzunluğunun birinci ekleme yerleştirilen koordinat sisteminin z ekseni boyunca uzandığına dikkat edin. Bu durumda, birinci ekleme yerleştirilen koordinat sistemine göre birinci bağın kütle merkezinin konumu z_1 ekseninde oluşur ve aşağıdaki vektörle ifade edilir.

$$
\Delta h_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{l_2}{2} & 1 \end{bmatrix}^T \qquad (1.5.22)
$$

Birinci bağın ana koordinat sistemine göre atalet tensorü,

$$I_1 = {}^0_1R\, I_{m1}\, {}^0_1R^T$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{xx_1}c^2\theta_1 + I_{yy_1}s^2\theta_1 & s\theta_1 c\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & 0 \\ s\theta_1 c\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & I_{xx_1}s^2\theta_1 + I_{yy_1}c^2\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix} \qquad (1.5.23)$$

olarak elde edilir. Ana koordinat sistemine göre birinci bağın kütle merkezinin koordinatları ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_1 = {}^0_1T\, \Delta h_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_2}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_2}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1.5.24)$$

Birinci bağa ait Jakobiyen matrisi, h_1 vektörünün θ_1 , d_2 ve d_3 'e göre türevinin alınıp z^1 ve ξ_1 değişkenlerinin kullanılmasıyla bulunur. $z^1 = {}^0_1R\, i^3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ ve birinci eklem dönel olduğundan, $\xi = 1$ ' dır. Dolayısıyla, $b_1 = \xi_1 z^1 = 1 \cdot [0 \quad 0 \quad 1]^T$ 'dir. Bu durumda birinci eklemin doğrusal ve açısal hızlardan kaynaklanan Jakabiyen matrisi

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_1} 0 & \frac{\partial}{\partial d_2} 0 & \frac{\partial}{\partial d_3} 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} 0 & \frac{\partial}{\partial d_2} 0 & \frac{\partial}{\partial d_3} 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{l_2}{2} & \frac{\partial}{\partial d_2} \frac{l_2}{2} & \frac{\partial}{\partial d_3} \frac{l_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.5.25)$$

bulunur. J_1 Jakobiyen matrisi A_1 ve B_1 gibi iki adet alt matris şeklinde yazılarak, birinci bağın manipülatörün genel atalet tensorüne katkısı elde edilir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu durumda birinci ekleme ait kütle matrisi,

$$D(\theta_1) = m_1 A_1^T A_1 + B_1^T I_1 B_1$$

$$= m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx_1} c^2\theta_1 + I_{yy_1} s^2\theta_1 & s\theta_1 c\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & 0 \\ s\theta_1 c\theta_1 (I_{xx_1} - I_{yy_1}) & I_{xx_1} s^2\theta_1 + I_{yy_1} c^2\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{zz_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.5.26}$$

şeklinde bulunur. l_1 bağının ikinci ekleme yerleştirilen koordinat sisteminin x ekseni boyunca uzandığına dikkat edin.

Bu durumda, ikinci ekleme yerleştirilen koordinat sistemine göre ikinci bağın kütle merkezinin konumu x_2 ekseninde oluşur ve aşağıdaki vektörle ifade edilir.

$$\Delta h_2 = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{1.5.27}$$

İlk iki eksene ait homojen dönüşüm matrisi aşağıda verilmiştir.

$${}^0_2T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denklemde d_2 ikinci prizmatik eklem değişkenini göstermektedir. Sonuç olarak ikinci bağın ana koordinat sistemine göre atalet tensorü aşağıdaki gibi bulunur.

$$I_2 = {}^0_2R\, I_{m2}\, {}^0_2R^T$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta_1 I_{xx_2} + \sin^2\theta_1 I_{yy_2} & \sin\theta_1\cos\theta_1 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & 0 \\ \sin\theta_1\cos\theta_1 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & \cos^2\theta_1 I_{yy_2} + \sin^2\theta_1 I_{xx_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}$$

Ana koordinat sistemine göre ikinci bağın kütle merkezinin koordinatları aşağıdaki gibi bulunur.

$$h_2 = {}^0_2T\, \Delta h_2 \quad = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_1 \cos\theta_1 \\ \frac{1}{2} l_1 \sin\theta_1 \\ d_2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1.5.29)$$

İkinci eklem prizmatik olduğundan, $\xi_2 = 0$ ’ dir. Dolayısıyla ,$b_2 = \xi_2 z^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ ’dir.

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_1}\frac{1}{2} l_1 c\theta_1 & \frac{\partial}{\partial d_2}\frac{1}{2} l_1 \cos\theta_1 & \frac{\partial}{\partial d_3}\frac{1}{2} l_1 c\theta_1 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1}\frac{1}{2} l_1 s\theta_1 & \frac{\partial}{\partial d_2}\frac{1}{2} l_1 s\theta_1 & \frac{\partial}{\partial d_3}\frac{1}{2} l_1 s\theta_1 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} d_2 & \frac{\partial}{\partial d_2} d_2 & \frac{\partial}{\partial d_3} d_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l_1 s\theta_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} l_1 c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.5.30)$$

J_2 Jakobiyen matrisinden türetilen A_2 ve B_2 alt matrisler aşağıda verilmiştir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l_1 \sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} l_1 \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu durumda ikinci ekleme ait kütle matrisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$D(d_2) = m_2 A_2^T A_2 + B_2^T I_2 B_2$$

$$= m_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l_1 s\theta_1 & \frac{1}{2} l_1 c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l_1 s\theta_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} l_1 c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{xx_2} + s^2\theta_1 I_{yy_2} & s\theta_1 c\theta_1 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & 0 \\ s\theta_1 c\theta_1 (I_{xx_2} - I_{yy_2}) & c^2\theta_1 I_{yy_2} + s^2\theta_1 I_{xx_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_2} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} l_1^2 m_2 + I_{zz_2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.5.31}
$$

l_3 bağı üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat sisteminin z ekseni doğrultusundadır. Bu durumda, üçüncü ekleme yerleştirilen koordinat sistemine göre üçüncü bağın kütle merkezinin konumu aşağıdaki vektörle ifade edilir.

$$\Delta h_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{l_3}{2} & 1 \end{bmatrix}^T \tag{1.5.32}$$

İlk üç ekleme ait homojen dönüşüm matrisi ${}_3^0T$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$ {}_3^0T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & l_1 c\theta_1 + d_3 s\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & l_1 s\theta_1 - d_3 c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Sonuç olarak üçüncü bağın ana koordinat sistemine göre atalet tensorü

$$I_3 = {}_3^0R I_{m3} \; {}_3^0R^T$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s\theta_1 & -c\theta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{xx_3} + s^2\theta_1 I_{zz_3} & c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_3} - I_{zz_3}) & 0 \\ c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_3} - I_{zz_3}) & s^2\theta_1 I_{xx_3} + c^2\theta_1 I_{zz_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy_3} \end{bmatrix} \tag{1.5.33}
$$

bulunur. Ana koordinat sistemine göre üçüncü bağın kütle merkezinin koordinatları,

$$
h_3 = {}^0_3T \, \Delta h_3
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & l_1 c\theta_1 + d_3 s\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & l_1 s\theta_1 - d_3 c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{l_3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} l_3 s\theta_1 + l_1 c\theta_1 + d_3 s\theta_1 \\ \dfrac{1}{2} l_3 c\theta_1 + l_1 s\theta_1 - d_3 c\theta_1 \\ d_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.5.34}
$$

Üçüncü bağa ait Jakobiyen matrisi, h_3 vektörünün θ_1 , d_2 ve d_3 'e göre türevinin alınıp z^3 ve ξ_3 değişkenleri kullanılarak bulunur. Üçüncü eklem prizmatik olduğundan $\xi_3 = 0$ ' dır. Dolayısıyla, $b_3 = \xi z^3 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ 'dir.

$$J_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta_1}(-\frac{1}{2} l_3 s\theta_1 + l_1 c\theta_1 + d_3 s\theta_1) & \frac{\partial}{\partial d_2}(-\frac{1}{2} l_3 s\theta_1 + l_1 c\theta_1 + d_3 s\theta_1) & \frac{\partial}{\partial d_3}(-\frac{1}{2} l_3 s\theta_1 + l_1 c\theta_1 + d_3 s\theta_1) \\ \frac{\partial}{\partial\theta_1}(\frac{1}{2} l_3 c\theta_1 + l_1 s\theta_1 - d_3 c\theta_1) & \frac{\partial}{\partial d_2}(\frac{1}{2} l_3 c\theta_1 + l_1 s\theta_1 - d_3 c\theta_1) & \frac{\partial}{\partial d_3}(\frac{1}{2} l_3 c\theta_1 + l_1 s\theta_1 - d_3 c\theta_1) \\ \frac{\partial}{\partial\theta_1} d_2 & \frac{\partial}{\partial d_2} d_2 & \frac{\partial}{\partial d_3} d_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2}l_3 + d_3)c\theta_1 - l_1 s\theta_1 & 0 & s\theta_1 \\ (-\frac{1}{2}l_3 + d_3)s\theta_1 + l_1 c\theta_1 & 0 & -c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.5.35)$$

J_3 Jakobiyen matrisinden elde edilen A_3 ve B_3 alt matrisleri,

$$A_3 = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2}l_3 + d_3)c\theta_1 - l_1 s\theta_1 & 0 & s\theta_1 \\ (-\frac{1}{2}l_3 + d_3)s\theta_1 + l_1 c\theta_1 & 0 & -c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

Bu durumda üçüncü ekleme ait kütle matrisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$D(d_3) = m_3 A_3^T A_3 + B_3^T I_3 B_3$$

$$= m_3 \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s\theta_1 & -c\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & s\theta_1 \\ b & 0 & -c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2\theta_1 I_{xx_3} + s^2\theta_1 I_{zz_3} & c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_3} - I_{zz_3}) & 0 \\ c\theta_1 s\theta_1 (I_{xx_3} - I_{zz_3}) & s^2\theta_1 I_{xx_3} + c^2\theta_1 I_{zz_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_3(l_1^2 + \frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2) + I_{yy_3} & 0 & -m_3 l_1 \\ 0 & m_3 & 0 \\ -m_3 l_1 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \qquad (1.5.36)$$

Denklemde $a = (-\frac{1}{2}l_3 + d_3)c\theta_1 - l_1 s\theta_1$ ve $b = (-\frac{1}{2}l_3 + d_3)s\theta_1 + l_1 c\theta_1$ .Sonuç olarak üç eklemli bir robotun kütle matrisi, üç eklemin kütle matrislerinin toplanmasıyla

$$D(q) = D(\theta_1) + D(d_2) + D(d_3)$$

$$= \begin{bmatrix} I_{zz_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4}l_1^2 m_2 + I_{zz_2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} m_3(l_1^2 + \frac{1}{4}l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2) + I_{yy_3} & 0 & -m_3 l_1 \\ 0 & m_3 & 0 \\ -m_3 l_1 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c & 0 & -l_1 m_3 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ -m_3 l_1 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \qquad (1.5.37)$$

şeklinde bulunur. Denklemde $c = \frac{1}{4} l_1^2 m_2 + I_{zz_1} + I_{zz_2} + m_3(l_1^2 + \frac{1}{4} l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2) + I_{yy_3}$.
Birinci ekleme ait hız bağlaşım matrisinin elemanları,

$$c_{11}^1 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} D_{11} \qquad = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} c = 0$$

$$c_{12}^1 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} D_{12} \qquad = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} 0 = 0$$

$$c_{13}^1 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} D_{13} \qquad = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} (-l_1 m_3) = 0$$

$$c_{21}^1 = \frac{\partial}{\partial d_2} D_{11} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} D_{21} \qquad = \frac{\partial}{\partial d_2} c - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} 0 \quad = 0$$

$$c^1_{22} = \frac{\partial}{\partial d_2} D_{12} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_1} D_{22} \qquad = \frac{\partial}{\partial d_2} 0 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_1}(m_2 + m_3) = 0$$

$$c^1_{23} = \frac{\partial}{\partial d_2} D_{13} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_1} D_{23} \qquad = \frac{\partial}{\partial d_2}(-l_1 m_3) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_1} 0 = 0$$

$$c^1_{31} = \frac{\partial}{\partial d_3} D_{11} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_1} D_{31} \qquad = \frac{\partial}{\partial d_3} c - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_1}(-m_3 l_1)$$

$$= m_3(-l_3 + 2d_3)$$

$$c^1_{32} = \frac{\partial}{\partial d_3} D_{12} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_1} D_{32} \qquad = \frac{\partial}{\partial d_3} 0 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_1} 0 = 0$$

$$c^1_{33} = \frac{\partial}{\partial d_3} D_{13} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_1} D_{33} \qquad = \frac{\partial}{\partial d_3}(-l_1 m_3) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_1} m_3 = 0$$

Sonuç olarak birinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m_3(-l_3 + 2d_3) & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.5.38}$$

Birinci ekleme yerleştirilen koordinat çerçevesinde z ekseni yerçekimine zıt yönde olduğundan, yerçekimi vektörü $g_1 = [0 \quad 0 \quad -g_0]^T$ şeklinde ifade edilir. Bu durumda birinci eklemin yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$Z_1 = g(m_1 A^1{}_{31} + m_2 A^2{}_{31} + m_3 A^3{}_{31})$$

$$= g(m_1 0 + m_2 0 + m_3 0) = 0 \tag{1.5.39}$$

İkinci ekleme ait hız bağlaşım matrisinin elemanları,

$$c^2_{11} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} D_{21} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} D_{11} \qquad = \frac{\partial}{\partial \theta_1} 0 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} c = 0$$

$$c^2_{12} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} D_{22} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} D_{12} \qquad = \frac{\partial}{\partial \theta_1} (m_2 + m_3) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} 0 = 0$$

$$c^2_{13} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} D_{23} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} D_{13} \qquad = \frac{\partial}{\partial \theta_1} 0 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} (-l_1 m_3) = 0$$

$$c^2_{21} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} D_{21} \qquad = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} 0 = 0$$

$$c^2_{22} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} D_{22} \qquad = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} (m_2 + m_3) = 0$$

$$c_{23}^{2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} D_{23} \qquad = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} 0 = 0$$

$$c_{31}^{2} = \frac{\partial}{\partial d_3} D_{21} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} D_{31} \qquad = \frac{\partial}{\partial d_3} 0 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2}(-m_3 l_1) = 0$$

$$c_{32}^{2} = \frac{\partial}{\partial d_3} D_{22} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} D_{32} \qquad = \frac{\partial}{\partial d_3}(m_2 + m_2) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} 0 = 0$$

$$c_{33}^{2} = \frac{\partial}{\partial d_3} D_{23} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} D_{33} \qquad = \frac{\partial}{\partial d_3} 0 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_2} m_3 = 0$$

bulunur. Bu durumda, ikinci eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.5.40)$$

Referans koordinat sistemine göre ikinci eklemdeki yerçekimi ivmesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} Z_2 &= g(m_2 A^2{}_{32} + m_3 A^3{}_{32}) \\ &= g(m_2 \cdot 1 + m_3 \cdot 1) \\ &= g(m_2 + m_3) \end{aligned} \qquad (1.5.41)$$

Üçüncü ekleme ait hız bağlaşım matrisinin elemanları,

$$c^3_{11} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} D_{31} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial d_3} D_{11} \qquad = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(-m_3 l_1) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial d_3} c$$

$$= m_3(\frac{1}{2} l_3 - d_3)$$

$$c^3_{12} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} D_{32} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial d_3} D_{12} \qquad = \frac{\partial}{\partial \theta_1} 0 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial d_3} 0 = 0$$

$$c^3_{13} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} D_{33} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial d_3} D_{13} \qquad = \frac{\partial}{\partial \theta_1} m_3(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial d_3}(-l_1 m_3) = 0$$

$$c^3_{21} = \frac{\partial}{\partial d_2} D_{31} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial d_3} D_{21} \qquad = \frac{\partial}{\partial d_2}(-m_3 l_1) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial d_3} 0 = 0$$

$$c^3_{22} = \frac{\partial}{\partial d_2} D_{32} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial d_3} D_{22} \qquad = \frac{\partial}{\partial d_2} 0 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial d_3}(m_2 + m_2) = 0$$

$$c_{23}^{3} = \frac{\partial}{\partial d_2} D_{33} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3} D_{23} \quad = \frac{\partial}{\partial d_2} m_3 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3} 0 = 0$$

$$c_{31}^{3} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3} D_{31} \quad = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3}(-m_3 l_1) = 0$$

$$c_{32}^{3} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3} D_{32} \quad = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3} 0 = 0$$

$$c_{33}^{3} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3} D_{33} \quad = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial d_3} m_3 = 0$$

bulunur. Üçüncü eklemin hız bağlaşım matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$c_3 = \begin{bmatrix} m_3(\frac{1}{2}l_3 - d_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.5.42}$$

Referans koordinat sistemine göre üçüncü eklemdeki yerçekimi ivmesi

$$Z_3 = gm_3A^3{}_{33} \quad = g_0 m_3 0 = 0 \tag{1.5.43}$$

şeklinde bulunur. Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü, her üç ekleme ait hız bağlaşım matrisinin elemanlarının aşağıdaki gibi düzenlenmesiyle bulunur. Birinci eklemin hız bağlaşım matrisini hatırlayalım

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m_3(-l_3 + 2d_3) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c_1 matrisinin her bir elemanı aşağıdaki matris elemanlarına eşittir.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_1\dot{d}_2 & \dot{\theta}_1\dot{d}_3 \\ \dot{d}_2\dot{\theta}_1 & \dot{d}_2\dot{d}_2 & \dot{d}_2\dot{d}_3 \\ \dot{d}_3\dot{\theta}_1 & \dot{d}_3\dot{d}_2 & \dot{d}_3\dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

Bu matrisi aşağıdaki gibi düzenleyip birinci eklemin hız bağlaşım matrisine eşitleyelim.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m_3(-l_3 + 2d_3) & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 & \dot{\theta}_1\dot{d}_2 & \dot{\theta}_1\dot{d}_3 \\ \dot{d}_2\dot{\theta}_1 & \dot{d}_2^2 & \dot{d}_2\dot{d}_3 \\ \dot{d}_3\dot{\theta}_1 & \dot{d}_3\dot{d}_2 & \dot{d}_3^2 \end{bmatrix}$$

Bu eşitlikte karşılıklı elemanları çarpıp yan yana toplayalım.

$$0\dot{\theta}_1^2 + 0\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + 0\dot{\theta}_1\dot{d}_3 + 0\dot{d}_2\dot{\theta}_1 + 0\dot{d}_2^2 + 0\dot{d}_2\dot{d}_3 + m_3(2d_3 - l_3)\dot{d}_3\dot{\theta}_1 + 0\dot{d}_3\dot{d}_2 + 0\dot{d}_3^2$$

Denklem sadeleştirilirse Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünün birinci elemanı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$m_3(-l_3 + 2d_3)\dot{d}_3\dot{\theta}_1 \tag{1.5.44}$$

Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünün ikinci elemanını elde etmek için aynı işlemleri ikinci eklemin hız bağlaşım matrisine uygulayalım. İkinci ekleme ait hız bağlaşım matrisinin elemanları sıfır olduğundan Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünün ikinci elemanı sıfıra eşit olur. Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünün üçüncü elemanını elde etmek için aynı işlemleri üçüncü eklemin hız bağlaşım matrisine uygulayalım.

$$\begin{bmatrix} m_3(\frac{1}{2}l_3 - d_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 & \dot{\theta}_1\dot{d}_2 & \dot{\theta}_1\dot{d}_3 \\ \dot{d}_2\dot{\theta}_1 & \dot{d}_2^2 & \dot{d}_2\dot{d}_3 \\ \dot{d}_3\dot{\theta}_1 & \dot{d}_3\dot{d}_2 & \dot{d}_3^2 \end{bmatrix}$$

Bu eşitlikte karşılıklı elemanları çarpıp yan yana toplandığında Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünün üçüncü elemanı aşağıdaki gibi bulunur.

$$m_3(\frac{1}{2}l_3 - d_3)\dot{\theta}_1^2 \tag{1.5.45}$$

Elde ettiğimiz her üç elemanı da yerlerine yazarak Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörünü aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} m_3(-l_3 + 2d_3)\dot{d}_3\dot{\theta}_1 \\ 0 \\ m_3(\frac{1}{2}l_3 - d_3)\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \tag{1.5.46}$$

Sonuç olarak robotun her bir eyleyicisine etki eden tork vektörü kütle matrisi, Coriolis ve merkezkaç kuvvet vektörü son olarak yerçekimi vektörünün toplanmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\tau_i = D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q)$$

$$\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & -m_3 l_1\\ 0 & m_2+m_3 & 0\\ -m_3 l_1 & 0 & m_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{d}_2\\ \ddot{d}_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_3(-l_3+2d_3)\dot{d}_3\dot{\theta}_1\\ 0\\ m_3(\frac{1}{2}l_3-d_3)\dot{\theta}_1^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ g(m_2+m_3)\\ 0\end{bmatrix}$$

Denklemden her bir tork ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\tau_1 = [\frac{1}{4}l_1^2 m_2 + I_{zz_1} + I_{zz_2} + I_{yy_3} + m_3(l_1^2 + \frac{1}{4}l_3^2 - l_3 d_3 + d_3^2)]\ddot{\theta}_1$$

$$-[l_1 m_3]\ddot{d}_3 + m_3(-l_3 + 2d_3)\dot{\theta}_1\dot{d}_3 \qquad (1.5.47)$$

$$\tau_2 = [m_2 + m_3]\ddot{d}_2 + g(m_2 + m_3) \qquad (1.5.48)$$

$$\tau_3 = -[m_3 l_1]\ddot{\theta}_1 + m_3\ddot{d}_3 + m_3(\frac{1}{2}l_3 - d_3)\dot{\theta}_1^2 \qquad (1.5.49)$$