SAYISAL ANALİZ

Sayısal Analiz Nedir?

— Analitik çözümü olmayan denklemlerin sayısal denemeler ile yaklaşık çözümlerin bulunması işlemlerin bütününe sayısal analiz denir.

• Analitik çözümü olan;

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-2).(x+1)=0$

• Analitik çözümü olmayan;

$x^2-5x.\cos x+e^x=0$

$x=1$ için; $1-5.\underbrace{\cos 1}_{0,99}+e^1 \neq 0$

$x=0$ için, $0-0+e^0 \neq 0$

Hata Kavramı ve Hata Çeşitleri

— Hata = Gerçek değer − Hesaplanan değer

Hata Çeşitleri

- Kesme Hatası
- Bağıl Hata
- Mutlak Hata
- Yuvarlama Hatası

Kesme Hatası

— Taylor ve Maclorin Seri Açılımları; sonsuz defa türevlenebilen fonksiyonların bir noktada ($x=x_0$) seri haline getirme formüllerine taylor açılımları denir.

— $f(x)$'in $x=x_0$'da taylor açılımı;

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0).(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\dots+\frac{f'''(x_0).(x-x_0)^3}{3!}+\dots$$

örnek

$f(x)=e^x$'in $x=1$'de taylor seri açılımını yapınız.

1. terim: $f(1)=e$
2. terim: $f'(1).(x-1)=e.(x-1)$
3. terim: $\frac{f''(1).(x-1)^2}{2!}=\frac{e.(x-1)^2}{2}$
4. terim: $\frac{f'''(1).(x-1)^3}{3!}=\frac{e.(x-1)^3}{6}$

$$e^x=e+e(x-1)+\frac{e(x-1)^2}{2}+\frac{e(x-1)^3}{6}+\dots$$

örnek

$f(x)=e^x$'in maclorin seri açılımını yapınız
→ $x=0$'daki taylor seri

1. terim $=f(0)=1$
2. terim $=f'(0).(x-0)=x$
3. terim $=\frac{f''(0).(x-0)^2}{2!}=\frac{x^2}{2}$
4. terim $=\frac{f'''(0).(x-0)^3}{3!}=\frac{x^3}{6}$

$\dots+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\dots$

örnek

$f(x)=\cos x$ fonksiyonun maclorin açılımını sıfırdan farklı ilk 3 terimini bulunuz.

1. terim: $f(0)=1$
2. terim: $f'(0).(x-0)=0.x=0$
3. terim: $\frac{f''(0).(x-0)^2}{2!}=\frac{-1.x^2}{2}=-\frac{x^2}{2}$
4. terim: $\frac{f'''(0).(x-0)^3}{3!}=\frac{0.x^3}{6}=0$
5. terim: $\frac{f^4(0).(x-0)^4}{4!}=\frac{1.x^4}{24}=\frac{x^4}{24}$

$f'(x)=-\sin x$
$f''(x)=-\cos x$
$f'''(x)=\sin x$
$f^4(x)=\cos x$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\dots$$

örnek

$e^{1,5}$ değerini 3. dereceden maclorin seri açılımını kullanarak hesaplayınız. Ortaya çıkan kesme hatasını bulunuz. $e^x, x=0$

$$e^{1,5}=1+1,5+\frac{(1,5)^2}{2}+\frac{(1,5)^3}{6}=4,1875$$

Kesme hatası = ($e^{1,5}$'in gerçek değeri) − (3. dereceden maclorin açılımı ile hesaplanan değer)

$=4.48168907-4.1875$

$=0.29418907$

örnek

cos 1°'nin değerini 4. dereceden maclorin seri açılımı yaparak hesaplayınız. Ortaya çıkan kesme hatasını bulunuz. → $\cos x, x=0$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^4}{24}=0,909288$$

Kesme hatası $=0,808016994-0,809288$
$=-0,000271$

Bağıl Hata

— Bağıl Hata $=\frac{\text{Gerçek değer} - \text{hesaplanan değer}}{\text{Gerçek değer}}$

örnek

$f(x)=x^3$ fonksiyonu veriliyor. Bir öğrenci $x=2$ için hesaplama yapmış ve sonucu $f(2)=6$ bulmuştur. Yapılan bağıl hata nedir?

Bağıl hata $=\frac{8-6}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0,25=\%25$

Mutlak Hata

— Mutlak Hata = |Bağıl Hata|

örnek

$f(x)=x^2-3x$ denklemi veriliyor. $x=2$ değerini hesaplayan biri 10 buluyor. Bu işlemdeki mutlak hata nedir?

Mutlak hata $=\left|\frac{-2-10}{-2}\right|=\left|\frac{-12}{-2}\right|=6=\%600$

Yuvarlama Hatası

— $27,35254316 \cong 27,35$

virgülden sonra iki basamak olacak şekilde istenirse;

27.35 için 5 basamağından sonra gelen sayı 5'ten küçükse 5 değişmez aynen kalır, büyük ya da eşitse bir arttırılıp 27,36 yapılır.

— Yuvarlama hatası = (Gerçek değer) − (yuvarlama sonucu hesaplanan sayı)

örnek

Aşağıdaki sayıları virgülden sonra üç basamak olacak şekilde hatayı hesaplayın.

• $1,352471 \cong 1,352$
Y.h $=1,352471-1,352=0,000471$

• $2,0235846 \cong 2,024$
Y.h $=2,0235846-2,024=-0,0004154$

Lineer Olmayan Bir Bilinmeyenli Denklem Nedir?

• $2x-3=0$ → lineer bir bilinmeyenli denklem
• $x^2-4=0$ → lineer olmayan bir bilinmeyenli denklem
Analitik çözümü var.
• $x^4-5x^3+7x^2+1$ → lineer olmayan bir bilinmeyenli denklem
Analitik çözümü yok.

Lineer Olmayan Bir Bilinmeyenli Denklemlerde Çözüm Durumları

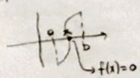
Çözüm Durumları

Kapalı Aralık Metotlar
→ İkiye Bölme Metodu
→ Doğrusal İnterPolasyon Metodu
— [a,b] aralığında kökü olduğu tespit edilir.

Açık Aralık Metotlar
→ Tekrarlama Metodu
→ Newton-Raphson Metodu
→ Kiriş Yöntemi
— x=a veya birden fazla sayı değeri olur. Aralık yoktur.

İkiye Bölme Metodu

— $f(x)$'in $[a,b]$ kapalı aralığında kökünün olma şartı: $f(x)$ bu aralıkta sürekli ve $f(a).f(b)<0$ olmalıdır.



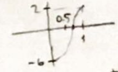
örnek

$f(x)=x^3-7x^2+14x-6=0$ denkleminin $[0,1]$ kapalı aralığındaki kökünü bulunuz.

1. adım: $f(x)$ fonksiyonu bütün reel sayılarda süreklidir. Bu nedenle $[0,1]$ kapalı aralığında süreklidir.
$f(0)=-6$
$f(1)=2$
$f(0).f(1)<0$ olduğundan bu aralıkta kök vardır.

2. adım: İkiye Bölme Metodu yapılır.

1. iterasyon: 0, 0.5, 1 $\quad \frac{0+1}{2}=0.5 \quad f(0.5)=-0,625$



Kök 0.5 ile 1 aralığında kök olduğundan 0 ile 0.5 aralığını kaldırıyoruz.

2. iterasyon: 0.5, 0.75, 1 $\quad \frac{0.5+1}{2}=0.75 \quad f(0.75)=0,984375$

3. iterasyon: 0.5, 0.625, 0.75 $\quad \frac{0.5+0.75}{2}=0.625 \quad f(0.625)=$

İkiye Bölme Metodunda Durma Koşulları

Durma Koşulları

Gerçek kök verildiğinde
— $|X-X_n|<$ Hata
X = gerçek kök
X_n = n. iterasyondaki elde edilen kök
— Bağıl hata verilirse;
$\left|\frac{X-X_n}{n}\right|<$ Bağıl Hata

Gerçek kök verilmediğinde
— $\frac{b-a}{2^n}<$ Hata
n = iterasyon sayısı
b = n. iterasyondaki üst sınır
a = n. iterasyondaki alt sınır

örnek

$f(x)=x^3-7x^2+14x-6=0$ denkleminin $[0,1]$ kapalı aralığında 10^{-2} hatadan az olacak şekilde yaklaşık kökünü bulunuz.

a) Gerçek kök verildiğinde → $2-\sqrt{2}$
b) Gerçek kök verilmediğinde

a) $|X-X_n|<0{,}01$

1. adım: $f(x)=x^3-7x^2+14x-6$ bu fonksiyon $[0,1]$ kapalı aralığında süreklidir.
$f(0)=-6$
$f(1)=2$
$f(0).f(1)<0$ aralığında kök vardır.

2. adım:

1. iterasyon: 0, 0.5, 1 $\quad \frac{0+1}{2}=0.5 \quad f(0.5)=-0,625$

$x_1=0.5$
Durma koşulu → $|(2-\sqrt{2})-0.5|<0{,}01$
$0{,}0858<0{,}01$ ✗ Devam edilir

2. iterasyon: 0.5, 0.75, 1 $\quad \frac{0.5+1}{2}=0.75 \quad f(0.75)=0,984375$

$x_2=0.75$
Durma koşulu → $|(2-\sqrt{2})-0.75|<0{,}01$
$0{,}1642<0{,}01$ ✗ Devam

b) a şıkkında yapılan adımlar yapılır sadece durma koşulunda kullandığımız formül değişir.

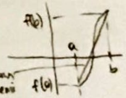
1. iterasyon için dk → $\frac{1-0}{2}<0{,}01$ ✗ Devam
2. iterasyon için dk → $\frac{1-0.5}{2^1}<0{,}01$ ✗ Devam

Doğrusal İnterpolasyon Metodu

— İkiye bölme metodundan tek farkı, kökün orta noktasını farklı formül ile kullanarak bulunur.

a x b

$$x = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$



örnek

$f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$ denkleminin $[0,1]$ aralığındaki kökünü bulunuz.

1. adım: f(x) fonksiyonu bütün reel sayılarda süreklidir. Bu nedenle [0,1] kapalı aralığında süreklidir.

$f(0) = -6$

$f(1) = 2$

$f(0).f(1) < 0$ olduğundan bu aralıkta kök vardır.

2. adım: Doğrusal interpolasyon metodu yapılır

1. iterasyon: (− + +; 0 0,75 1) $\frac{0.2 - 1.(-6)}{2-(-6)} = \frac{6}{8} = 0,75$

$f(0,75) = 0,984375$

2. iterasyon: (− + +; 0 0,6644 0,75) $\frac{0.f(0,75) - 0,75.f(0)}{f(0,75) - f(0)} = 0,644295$

$f(0,644295) = 0,1381767$

Doğrusal İnterpolasyon Metodunda Durma Koşulları

Durma Koşulları

Gerçek kök verilirse
- $|x - x_n| < Hata$

x = gerçek kök
x_n = n. iterasyondaki elde edilen kök

Gerçek kök verilmezse
- $\max\{x_n - a_n, b_n - x_n\} < Hata$

x_n = n. iterasyondaki elde edilen kök
b_n = n. iterasyondaki üst sınır
a_n = n. iterasyondaki alt sınır

- $|f(x_n)| < Hata$
- $|x_n - x_{n-1}| < Hata$
- $\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < Hata$

Doğrusal İnterpolasyon Metodu Örnek Soru-1

örnek

Doğrusal interpolasyon metodu kullanarak $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ denkleminin $[2,3]$ aralığında 10^{-2} hatadan az olacak biçimde yaklaşık bir kökünü bulunuz. (Gerçek kök $p = 2,69064744802$)

1. adım: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$ fonksiyonu $[2,3]$ aralığında süreklidir.

$f(2) = -5$

$f(3) = 4$

$f(2).f(3) < 0$ aralığında kök vardır.

2. adım:

1. iterasyon: (− − +; 2 2,56 3) $\frac{2.4 - 3.(-5)}{4-(-5)} = \frac{23}{9} = 2,56$

$f(2,56) = -1,367576384$

$x_1 = 2,56$

DK → $|p - 2,56| < 0,01$ × Devam

2. iterasyon: (− − +; 2,56 2,67 3) $\frac{2,56.f(3) - 3 f(2,56)}{f(3) - f(2,56)} = 2,668124411$

$f(2,67) = -0,234337681$

$x_2 = 2,67$

DK → $|p - 2,67| < 0,01$ × Devam

3. iterasyon: (− +; 2,67 2,68 3) $\frac{2,67.f(3) - 3.f(2,67)}{f(3) - f(2,67)} = 2,687318\ldots$

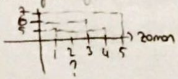
$x_3 = 2,68$

DK → $|p - 2,68| < 0,01$ ✓

10^{-2} hatadan az ilk kök → 2,687318278

İnterpolasyona Giriş

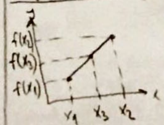
— Bir veri grubunda eksik verileri, veri grubundaki diğer veriler yardımıyla elde etmeye interpolasyon denir.



— Üç gruba ayrılır.

Doğrusal Yaklaşım Metodu — Eğrisel Yaklaşım Metodu — Lagrange İnterpolasyon Polinomu

Doğrusal İnterpolasyon Metodu



$(x_1, f(x_1))$ ve $(x_2, f(x_2))$ noktaları biliniyor.

$x_1 < x_3 < x_2$

$f(x_3) = ?$

1. yol: Verilen iki noktadan doğru denklemi yazılır.

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

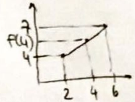
$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

2. yol: Eğim üzerinden

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

örnek

Doğrusal interpolasyon metodunu kullanarak $x=4$ için y değeri verilen (2,4) ve (6,7) noktalarını kullanarak bulunuz. → $f(4) = ?$



2. yol

$\frac{7-4}{6-2} = \frac{f(4)-4}{4-2}$

$\frac{3}{4} = \frac{f(4)-4}{2}$

$4f(4) = 22$

$f(4) = \frac{11}{2}$

1. yol

$m = \frac{7-4}{6-2} = \frac{3}{4}$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 4 = \frac{3}{4}(x-2)$

$y = \frac{3}{4}(x-2) + 4$

$f(x) = \frac{3}{4}(x-2) + 4$

$f(4) = \frac{3}{4}.2 + 4$

$f(4) = \frac{11}{2}$

Doğrusal İnterpolasyon Metodu Örnek Soru-1

x	f(x) = log(x)
4	0,60206
4,5	0,6532125
5,5	0,7403627
6	0,7781513

Yanda $f(x) = \log(x)$ fonksiyonunun aldığı bazı değerler verilmiştir. Buna göre;

a) log5'in değerini x=4 ve x=6 için doğrusal interpolasyon kullanarak bulunuz.

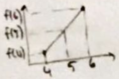
b) log5'in değerini x=4,5 ve x=5,5 için doğrusal interpolasyon kullanarak bulunuz.

c) a ve b şıklarında bulunan sonuçlar için bağıl hatayı hesaplayınız. (log5 = 0,69897)

a) $f(5) = ?$

$f(4) = 0,60206$

$f(6) = 0,7781513$



$\frac{f(6) - f(4)}{6-4} = \frac{f(5) - f(4)}{5-4}$

$f(6) - f(4) = 2f(5) - 2f(4)$

$f(5) = \frac{f(6) + f(4)}{2}$

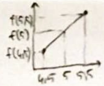
$f(5) = 0,6900865$

$\log 5 = 0,6900865$

b) $f(5) = ?$

$f(4,5) = 0,6532125$

$f(5,5) = 0,7403627$



$\frac{f(5,5) - f(4,5)}{(5,5) - (4,5)} = \frac{f(5) - f(4,5)}{5 - 4,5}$

$0,5 f(5,5) + 0,5 f(4,5) = f(5)$

$f(5) = 0,6967876$

$\log 5 = 0,6967876$

c) a şıkkı için bağıl hata $= \frac{0,69897 - 0,6900865}{0,69897}$

$= 0,012709415$

$= \%1,270941528$

b şıkkı için bağıl hata $= \frac{0,69897 - 0,6967876}{0,69897}$

$= 0,00312230854$

$= \%0,312230854$

Doğrusal İnterpolasyon Metodu Örnek Soru-2

x	f(x)
−2	−0,90927
−1	−0,841471
0	0
1	0,841471
3	0,141120
4	−0,756802
6	−0,279415

Yanda f(x) fonksiyonu için bazı değerler verilmiştir.

a) f(2) değerini x=1 ve x=3 kullanarak doğrusal interpolasyon metodu ile bulunuz.

b) f(2) değerini x=−2 ve x=6 kullanarak doğrusal interpolasyon metodu ile bulunuz.

a) $f(2) = ?$

$f(1) = 0,841471$

$f(3) = 0,141120$

$\frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{f(2) - f(1)}{2-1}$

$f(3) - f(1) = 2f(2) - 2f(1)$

$f(2) = \frac{f(3) + f(1)}{2}$

$f(2) = 0,4912955$

b) $f(2) = ?$

$f(-2) = -0,90927$

$f(6) = -0,279415$

$\frac{f(6) - f(-2)}{6-(-2)} = \frac{f(2) - f(-2)}{2-(-2)}$

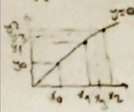
$4f(6) - 4f(-2) = 8f(2) - 8f(-2)$

$4f(6) + 4f(-2) = 8f(2)$

$f(2) = -0,5943425$

Eğrisel İnterpolasyon Metodu

- Uygulanabilmesi için 3 nokta gereklidir.



(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) noktaları biliniyor.

1. yol

$a x_0^2 + b x_0 + c = y_0$
$a x_1^2 + b x_1 + c = y_1$
$a x_2^2 + b x_2 + c = y_2$

Üç bilinmeyenli üç denklem sistemini çözüp a, b ve c bulunur. Böylece $f(x)$ fonksiyonuna ulaşmış oluruz. x_3 değerini denkleme koyup y_3 bulunur.

2. yol

$$\left[f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)\cdot(x-x_1) \right]$$

$b_0 = f(x_0)$

$$b_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

Böylece $f(x)$ fonksiyonuna ulaşmış oluruz. x_3 değerini denkleme koyup b_3 bulunur.

Örnek

$(1,-2)$, $(2,-1)$ ve $(3,4)$ noktaları veriliyor. Bu noktaları kullanarak eğrisel interpolasyon metodu ile $x=2{,}5$ değerine karşılık gelen y değerini bulunuz.

$b_0 = f(1) = -2$

$$b_1 = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{-1-(-2)}{1} = 1$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2} - \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}}{3-1} = \frac{\dfrac{4-(-1)}{3-2}-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1)$
$f(x) = -2 + 1(x-1) + 2(x-1)\cdot(x-2)$
$= -2 + (x-1) + 2(x^2-2x-x+2)$
$= -2 + (x-1) + 2x^2-4x-2x+4$
$= 2x^2-5x+1$

Eğrisel İnterpolasyon Metodu Örnek Soru-1

Örnek

x	f(x) = log(x)
4	0,6020600
4,5	0,6532125
5,5	0,7403627
6	0,7781513

Yanda $f(x) = \log(x)$ fonksiyonuna ait bazı değerler verilmiştir. Buna göre; $f(5)$ değerini $x=4{,}5$, $x=5{,}5$, ve $x=6$ için eğrisel interpolasyon metodunu kullanarak bulunuz. Bağıl hatayı hesaplayınız. ($\log 5 = 0{,}69897$)

$f(5) = ?$
$f(4{,}5) = 0{,}6532125$
$f(5{,}5) = 0{,}7403627$
$f(6) = 0{,}7781513$

$b_0 = f(4{,}5) = 0{,}6532125$

$$b_1 = \frac{f(5{,}5)-f(4{,}5)}{(5{,}5)-(4{,}5)} = \frac{0{,}7403627 - 0{,}6532125}{1} = 0{,}0871502$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(6)-f(5{,}5)}{6-(5{,}5)} - \dfrac{f(5{,}5)-f(4{,}5)}{5{,}5-4{,}5}}{6-4{,}5}$$

$$= \frac{\dfrac{0{,}7781513 - 0{,}7403627}{0{,}5} - 0{,}0871502}{1{,}5}$$

$= -0{,}0077153$

$f(x) = b_0 + b_1(x-4{,}5) + b_2(x-4{,}5)\cdot(x-5{,}5)$
$f(5) = 0{,}6532125 + 0{,}0871502(0{,}5) - 0{,}0077153(0{,}5)\cdot(-0{,}5)$
$f(5) = 0{,}69871 6425$
$\log 5 = 0{,}6987164 25$

$$\text{Bağıl Hata} = \frac{0{,}69897 - 0{,}69871 6425}{0{,}69897} = 0{,}00362$$

$= 0{,}00036278 38105$
$= \%0{,}0362 78381$

Eğrisel İnterpolasyon Metodu Örnek Soru-2

Örnek

x	f(x)
1	0,63
3	2,91
4	1,83

Yanda $f(x)$ fonksiyonu için bazı değerler verilmiştir. Buna göre, $f(2)$ değerini $x=1$, $x=3$ ve $x=4$ noktalarında verilmiş değerleri kullanarak eğrisel interpolasyon metodu ile bulunuz.

$f(2) = ?$
$f(1) = 0{,}63$
$f(3) = 2{,}91$
$f(4) = 1{,}83$

$b_0 = f(1) = 0{,}63$

$$b_1 = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{2{,}91 - 0{,}63}{2} = 1{,}14$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(4)-f(3)}{4-3} - \dfrac{f(3)-f(1)}{3-2}}{4-1}$$

$$= \frac{\dfrac{1{,}83 - 2{,}91}{1} - 1{,}14}{3}$$

$= -0{,}74$

$f(x) = 0{,}63 + 1{,}14(x-1) - 0{,}74(x-1)\cdot(x-3)$
$f(2) = 0{,}63 + 1{,}14 + 0{,}74$
$f(2) = 2{,}51$

Lagrange İnterpolasyon Polinomları

$$-\left[f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\cdot f(x_i) \right]$$

1. derece $(n=1)$ = doğrusal interpolasyon
2. derece $(n=2)$ = eğrisel interpolasyon

$(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$
n = verilen nokta sayısının 1 eksiği kadardır

$$-\left[L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ (j\neq i)}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right] \quad \prod_{k=1}^{3}(k+2) = (1+2)\cdot(2+2)\cdot(3+2) = 3\cdot4\cdot5$$

- $n=1$ için Lagrange interpolasyon metodu;

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{1} L_i(x)\cdot f(x_i) = L_0(x)\cdot f(x_0) + L_1(x)\cdot f(x_1)$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ (j\neq 0)}}^{1} \frac{x-x_j}{x_0-x_j} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ (j\neq 1)}}^{1} \frac{x-x_j}{x_1-x_j} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$f_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot f(x_1)$$

- $n=2$ için Lagrange interpolasyon metodu

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x)\cdot f(x_i) = L_0(x)\cdot f(x_0) + L_1(x)\, f(x_1) + \ldots + L_2(x)\, f(x_2)$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ (j\neq 0)}}^{2} \frac{x-x_1}{x_i-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_i-x_2}$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ (j\neq 1)}}^{2} \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2}$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ (j\neq 2)}}^{2} \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$f_2(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(x_1) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

$$f_3(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)\,(x_0-x_3)} f(x_0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)} f(x_1) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)\,(x_2-x_3)} f(x_2) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)\,(x_3-x_1)\,(x_3-x_2)} f(x_3)$$

- $f(x_0)$ için pay kısmına x'den x_0 hariç diğerlerini çıkartıyoruz, payda kısmında x_0'dan hepsi çıkartılıyor.

Örnek

x	f(x)
1	4,75
2	4
3	5,25
5	19,75
6	36

$f(4)$ değerini Lagrange interpolasyon polinomlarını kullanarak

a) 1. derece için $(x_0=3,\ x_1=5)$
b) 2. derece için $(x_0=2,\ x_1=3,\ x_2=5)$
c) 3. derece için $(x_0=2,\ x_1=3,\ x_2=5,\ x_3=6)$

a) $f_1(x) = \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1)$

$f_1(4) = \dfrac{4-5}{3-5} f(3) + \dfrac{4-3}{5-3} f(5)$

$f_1(4) = \dfrac{-1}{-2}(5{,}25) + \dfrac{1}{2}(19{,}75)$

$= 12{,}5$

b) $f_2(x) = \dfrac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)} f(x_0) + \dfrac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)} f(x_1) + \ldots$
$\ldots + \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$

$f_2(4) = \dfrac{1\cdot(-1)}{(-1)\cdot(-3)} f(2) + \dfrac{2\cdot(-1)}{1\cdot(-2)} f(3) + \dfrac{2\cdot1}{3\cdot2} f(5)$

$= \dfrac{-1}{3}\cdot 4 + \dfrac{-2}{-2}(5{,}25) + \dfrac{2}{6}\, 19{,}75$

$= -\dfrac{4}{3} + 5{,}25 + 6{,}583$

$= 10{,}4996667$

c) $f_3(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f(x_0) + \ldots$
$\ldots + \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1)$
$\ldots + \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2)$
$\ldots + \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3)$

$$f_3(4) = \frac{1.(-1).(-2)}{(-1)\ (-3)(-4)} f(2) + \frac{2.(-1)(-2)}{1.(-2)(-3)} f(3) + ..$$

$$... \frac{2.1.(-2)}{3.2(-1)} f(5) + \frac{2.1(-1)}{2\ \ 3.1} f(6)$$

$$= \frac{2}{-12}\cdot 4 + \frac{4}{6}\cdot(5{,}25) + \frac{-4}{-6} 19{,}75 + \frac{-2}{6}\cdot 36$$

$$= -0{,}66 + 3{,}5 + 13{,}167 - 12$$

$$= 4{,}007$$

Lagrange İnterpolasyon Polinomları Örnek Soru-1

örnek

$(1,2)$ ve $(3,4)$ noktalarından geçen doğrusal lagrange interpolasyon polinomunu bulunuz. $n=1$

($x_0\ y_0$, $x_1\ y_1$)

$$f_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1)$$

$$= \frac{x-3}{1-3}\cdot 2 + \frac{x-1}{3-1}\cdot 4$$

$$= \frac{2x-6}{-2} + \frac{4x-4}{2}$$

$$= \frac{2x+2}{2}$$

$$= x+1$$

Lagrange İnterpolasyon Polinomları Örnek Soru-2

	x	f(x)
x_0	1	0,63
x_1	3	2,91
x_2	4	1,83

Yanda f(x) fonksiyonu için bazı değerler verilmiştir. Buna göre, f(2) değerini verilen değerleri kullanarak lagrange interpolasyon polinomu ile bulunuz.

$$f_2(x) = f(x_0).\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + ...$$

$$... + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= 0{,}63 . \frac{(-1).(-2)}{(-2).(-3)} + 2{,}91 . \frac{1.(-2)}{2.(-1)} + 1{,}83 . \frac{1.(-1)}{3.1}$$

$$= 0{,}63 . \frac{2}{6} + 2{,}91 . \frac{-2}{-2} + 1{,}83\ \frac{-1}{3}$$

$$= 0{,}21 + 2{,}91 - 0{,}61$$

$$= 2{,}51$$

Lagrange İnterpolasyon Polinomları Örnek Soru-3

	x	f(x)
x_0	2	10
x_1	3	15
x_2	5	25
x_3	8	40
x_4	12	60

Yanda f(x) fonksiyonu için bazı değerler verilmiştir. Verilen bu verileri kullanarak f(4) değerini lagrange interpolasyon polinom yardımıyla bulunuz.

$$f_4(x) = f(x_0).\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} + ...$$

$$... + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2).(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + ...$$

$$... + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + ...$$

$$... + f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + ...$$

$$... + f(x_4)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

$$f_4(4) = 10.\ \frac{1.(-1).(-4)(-8)}{(-1).(-3).(-6).(-10)} + 15.\ \frac{2.(-1).(-4).(-8)}{1.(-2).(-5).(-9)} + ...$$

$$... + 25.\ \frac{2.1.(-4).(-8)}{3.2.(-3).(-7)} + 8.\ \frac{2.1.(-1).(-8)}{6.5.3.(-4)} + ...$$

$$... + 60.\ \frac{2.1(-1).(-4)}{10.9.7.4}$$

$$= 10.\frac{(-32)}{180} + 15.\frac{(-64)}{(-90)} + 25\ \frac{64}{126} + 8.\frac{16}{(-360)} + 60\ \frac{8}{2520}$$

$$= \frac{32}{18} + \frac{96}{90} + \frac{1600}{126} - \frac{128}{360} + \frac{48}{252}$$

$$= 15{,}378$$

Lagrange İnterpolasyon Polinomları Örnek Soru-4

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	0	1	3	4
f(x)	1	3	49	129

Yanda verilen f(x) değerlerini kullanarak f(0,3) değerini lagrange interpolasyon formülünü kullanarak bulunuz.

$$f_3(x) = f(x_0).\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + ...$$

$$... + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2).(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + ...$$

$$... + f(x_2).\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + ...$$

$$... + f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$f_3(0{,}3) = 1.\frac{(-0{,}7).(-2{,}7).(-3{,}7)}{(-1).(-3).(-4)} + 3.\frac{(0{,}3).(-2{,}7).(-3{,}7)}{1.(-2).(-3)} + ...$$

$$... + 49.\frac{(0{,}3)(-0{,}7).(-3{,}7)}{3.2.(-1)} + 129\ \frac{0{,}3(-0{,}7).(-2{,}7)}{4.3.1}$$

$$= \frac{-6{,}993}{-12} + \frac{8{,}991}{6} + \frac{38{,}073}{-6} + \frac{73{,}143}{12}$$

$$= 1{,}831$$

örnek

	x	f(x) = log(x)
x_0	4	0,6020600
x_1	4,5	0,6532125
x_2	5,5	0,7403627
x_3	6	0,7781513

Yanda f(x) = log(x) fonksiyonuna ait bazı değerler verilmiştir. Buna göre, f(5) değerini verilen tüm değerleri kullanarak lagrange interpolasyon formülünü kullanarak bulunuz.

(log5 = 0,69877)

$$f(5) = 0{,}6020600.\ \frac{0{,}5.(-0{,}5)(-1)}{(-0{,}5).(-1{,}5).(-2)} + ...$$

$$... + 0{,}6532125\ \frac{1.(-0{,}5).(-1)}{(0{,}5).(-1).(-1{,}5)} + ...$$

$$... + 0{,}7403627\ \frac{1.0{,}5.(-1)}{(1{,}5).1.(-0{,}5)} + ...$$

$$... + 0{,}7781513\ \frac{1.0{,}5(-0{,}5)}{2.(1{,}5)(0{,}5)}$$

$$= -0{,}100343333 + 0{,}435475 + ...$$

$$... + 0{,}493575133 - 0{,}129691883$$

$$= 0{,}699014916$$

log 5 = 0,699014916

$$\text{Bağıl Hata} = \frac{0{,}69877 - 0{,}699014916}{0{,}69877}$$

$$= -0{,}00035049 58713$$

$$= \%\ 0{,}035049 58713$$

Newton Raphson Metodu

$$- \ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

örnek

$x^3-7x^2+14x-6=0$ denkleminin newton raphson metodunu kullanarak [0,1] aralığında 10^{-6} olan ot hata ile bulunuz.

$$f(x) = x^3-7x^2+14x-6$$

$$f'(x) = 3x^2-14x+14$$

$x_0 = 0$ → Başlangıç noktamız

n=0 için

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)}$$

$$x_1 = 0 - \frac{(-6)}{14}$$

$$x_1 = \frac{3}{7} = 0{,}42857142...$$

Not: Durma Koşulları

Gerçek kök verildiğinde

- $|p - x_{n+1}| <$ Tolerans

p : gerçek kök

Gerçek kök verilmediğinde

- $|x_{n+1} - x_n| <$ Tolerans
- Bağıl hata verilirse;

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \text{Tolerans}$$

Durma koşulu kontrolü;

$$|x_1 - x_0| < 10^{-6}$$

0,42857142... − 0 < 0,000001

0,42857142 < 0,000001 X devam

n=1

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = 0{,}42857142... - \frac{f(0{,}42857142...)}{f'(0{,}42857142...)}$$

$$x_2 = 0{,}56972383...$$

Durma koşulu kontrolü;

$$|x_2 - x_1| < 10^{-6}$$

0,56972383... − 0,42857142 < 0,000001 X devam

Newton Raphson Metodu Örnek Soru-1

$x^3-2x^2-5=0$ denkleminin $[2,3]$ aralığında 10^{-4} hatadan az olacak şekilde yaklaşık bir kökünü bulunuz. Başlangıç noktası olarak $x_0=2$'yi kullanınız.
$(P = 2,690647448028 78)$

$f(x)=x^3-2x^2-5=0$
$f'(x)=3x^2-4x$

$x_0=2$

$n=0$ için
$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1=2-\frac{(-5)}{4}$$
$x_1=3,25$

Durma koşulu kontrolü:
$|P-x_1|<10^{-4}$
$|P-3,25|<0,0001$ × devam

$n=1$ için
$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$x_2=3,25-\frac{f(3,25)}{f'(3,25)}$$
$x_2=2,811036789$

Durma koşulu kontrolü:
$|P-x_2|<10^{-4}$
$|P-2,811036789<0,0001$ × devam

$n=2$ için
$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$
$x_3=2,697985209$

Durma koşulu kontrolü:
$|P-x_3|<10^{-4}$ × devam

$n=3$ için
$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$
$x_4=2,690677238$

Durma koşulu kontrolü;
$|P-x_4|<10^{-4}$
$0,00002971...<10^{-4}$ ✓

$x=2,690677238$

Kiriş Metodu

- Newton Raphson metodunda $f'(x_n)$ yerine aşağıdaki formül yazılır;
$$f'(x_n)=\frac{f(x_{n-1})-f(x_n)}{x_{n-1}-x_n}$$
- $$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n).[x_{n-1}-x_n]}{f(x_{n-1})-f(x_n)}$$

örnek

Kiriş metodu kullanarak $f(x)=e^{-x}-x$ fonksiyonun kökünü hesaplayınız. Başlangıç değeri olarak $x_{-1}=0$ ve $x_0=1$ kullanınız.

$n=0$ için
$$x_1=x_0-\frac{f(x_0).[x_{-1}-x_0]}{f(x_{-1})-f(x_0)}$$
$f(1)=e^{-1}-1=-0,63208...$
$f(0)=e^{-0}-0=1$
$$x_1=1-\frac{(-0,63208...).(-1)}{1-(-0,63208...)}$$
$x_1=0,61269984$

$n=1$ için
$$x_2=x_1-\frac{f(x_1).[x_0-x_1]}{f(x_0)-f(x_1)}$$
$$x_2=0,61269984-\frac{f(0,61269984).[1-(0,61269984)]}{-0,63208...-f(0,61269984)}$$
$x_2=0,563833839$

$n=2$ için
$$x_3=x_2-\frac{f(x_2).[x_1-x_2]}{f(x_1)-f(x_2)}$$
$x_3=0,56717036$

$x_4=0,56714331$
$x_5=0,56714329$ → iki kök aynı çıktı
$x_6=0,56714329$

$x=0,56714329$

Kiriş Metodu Örnek Soru-1

$f(x)=\frac{e^x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}+2x-10$ fonksiyonun kökünü hesaplayınız. Başlangıç değeri olarak $x_{-1}=10$ ve $x_0=5$ kullanınız.

$n=0$ için
$$x_1=x_0-\frac{f(x_0).[x_{-1}-x_0]}{f(x_{-1})-f(x_0)}$$
$f(5)=\frac{e^5}{5}-\frac{\sin 5}{5^2}+2.5-10=29,77...$
$f(10)=\frac{e^{10}}{10}-\frac{\sin 10}{10^2}+2.10-10=1629,7$

π — 180
5 — x
$x=\frac{900}{\pi}$

π — 180
10 — x
$x=\frac{1800}{\pi}$

$x_1=4,931824$
$x_2=3,81986$
$x_8=2,543009$
$x_9=2,543009$

$x=2,543009$

Tekrarlama Metodu

$\sin x+x-1=0$ $[0,1]$
$x^2-9x-10=0$ $[-8,1]$

$f(x)=0$ → sıfır yapan x'i arıyoruz.
→ $x=g(x)$ $f(x)=x-g(x)=0$
→ $x=-\sin x+1$
→ $x=\frac{x^2-10}{9}$ $g(x)$
→ $x=\sqrt{9x+10}$

- $f(x)=0$ verilen fonksiyonu çözerken;
  1. adım: $x=g(x)$
  2. adım: $g(x)$, $[a,b]$ aralığında belli şartları sağlarsa
  3. adım: $x_{i+1}=g(x_i)$, $x_i\in[a,b]$
- $x=g(x)$'in tekrarlama metodu için uygun olup olmadığını belirlemek için önce $f(a).f(b)<0$ ve $f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilir olmalıdır.
  $|g'(a)|<1$ ve $|g'(b)|<1$ bu iki şart sağlanırsa, $[a,b]$ aralığından her nokta seçilerek $x=g(x)$ tekrarlama metodu için kullanılabilir.
  Eğer bu şart sağlanmazsa geriye dönüp $x=g(x)$ değiştirilir ya da $0<\left|\frac{g(x_i)-g(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}\right|<1$, $x_i\in[a,b]$ yapılır.

örnek

$\sin x+x+1=0$ denklemin $[0,1]$ aralığında yaklaşık kökünü bulunuz.

1. adım:
$x=-\sin x+1$
$g(x)=-\sin x+1$

2. adım:
$f(0)=\sin 0+0-1=-1$
$f(1)=\sin 1+1-1=\sin\frac{180}{\pi}=0,84...$
$f(0).f(1)<0$ ✓
$f(x)$ ve $g(x)$ $[0,1]$ aralığında türevlenebilir

3. adım:
$(g(x))'=(-\sin x+1)'$
$g'(x)=-\cos x$
$g'(0)=-\cos 0=-1$
$|g'(0)|<1$ ×
$g'(1)=-\cos 1=0,54$
$|g'(1)|<1$ ✓
$[0,1]$ aralığında her nokta başlangıç olarak seçilemez.

4. adım:
$x_i=1$
$x_{i+1}=g(x_i)=g(1)=0,15852915$
$g(0,15)=0,842162813$

$$0<\left|\frac{0,15852915-(0,842162813)}{1-0,15852915}\right|<1$$ ✓

5. adım:
$x_i=1$
$x_1=0,15852915$ → Bulunan değer sürekli $g(x)$'e konularak bir sonraki iterasyon elde edil
$x_2=0,842134161$
$x_3=-\sin 0,84+1=0,253934103$

Tekrarlama Metodunda Durma Koşulları

örnek

$x^5+x-3=0$, $[1,3]$ kapalı aralığında kökünü bulalım.

1. adım:
$x=3-x^5=\sqrt[5]{3-x}$
$g(x)=3-x^5$

2. adım:
$f(1)=-1$
$f(3)=243$
$f(1).f(3)<0$ ✓
$f(x)$ ve $g(x)$ $[1,3]$ aralığında türevlenebilir.

3. adım:
$(g(x))'=(3-x^5)'$
$g'(x)=-5x^4$
$g'(1)=-5$
$|g'(1)|<1$ ✓
$g'(3)=-405$
$|g'(3)|<1$ ✓
$[0,1)$ aralığında her nokta başlangıç olarak seçilebilir.

4. adım:
$x_i=1$ → $[1,3]$ aralığından seçtik
$x_{i+1}=g(x_i)$
$x_1=g(1)=3-1^5=2$
$x_2=g(2)=-29$

Durum Koşulları

- N iterasyon yapılır
  x_n: kök kabul ederiz
- Gerçek kök verildiğinde
  $|P-x_{i+1}|<$ Tolerans
  P: gerçek kök
  x_{i+1} = kökümüz
- Gerçek kök verilmediğinde
  $|x_{i+1}-x_i|<$ Tolerans
  x_{i+1} = kökümüz

Lineer Denklem Sistemlerinin Sayısal Yöntemlerle Çözüm Teknikleri

$A.x = b$ Biçimindeki → $[\;]_A \cdot [\;]_x = [\;]_b$

Lineer Denklem Sisteminin Çözümünde

Doğrudan Çözümü Elde Edilen
- → Gauss Yok Etme Metodu
- → Gauss Jordan Yöntemi

Tekrarlama (İterasyon) ile Çözüm Elde Edilen Yöntemler
- → Jacobi Yöntemi
- → Gauss-Seidel Yöntemi

Jacobi İterasyon Yöntemi

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix}$$

1. adım: Her sütunda mutlak değerce en büyük sayıyı köşegene getiricez.

$$R_2 \longleftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}$$

2. adım: Tüm denklemleri yazıp ondan 1. denklemde x_1, 2. denklemde x_2, 3. denklemde x_3 yalnız bırakılır.

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \longrightarrow x_1 = \frac{12 - 2x_2 - x_3}{5}$$
$$-4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 15 \longrightarrow x_2 = \frac{15 + 4x_1 - 3x_3}{5}$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 20 \longrightarrow x_3 = \frac{20 - 2x_1 - 3x_2}{4}$$

3. adım: Soruda bir başlangıç noktası verilir.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. iterasyon: $x_1 = 2{,}4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2. iterasyon:

$$x_1 = \frac{12 - 2(3) - 5}{5} = 0.2$$
$$x_2 = \frac{15 + 4(2{,}4) - 3.5}{5} = 1{,}92$$
$$x_3 = \frac{20 - 2.(2.4) - 3.3}{4} = 1.55$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.92 \\ 1.55 \end{bmatrix}$$

Gauss Seidel İterasyon Yöntemi Örnek Soru-1

Örnek

$$20x + y - 2z = 17$$
$$3x + 20y - z = -18$$
$$2x - 3y + 20z = 25$$

Verilen lineer denklem sistemini Gauss seidel iterasyon metodunu kullanarak $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ başlangıç koşulu ile 2 iterasyon yaparak çözünüz.

Jacobi iterasyon yöntemindeki ilk iki adım aynı şekilde yapılır.

$$x = \frac{17 - y + 2z}{20}$$
$$y = \frac{-18 - 3x + z}{20}$$
$$z = \frac{25 - 2x + 3y}{20}$$

1. iterasyon:

$$x = \frac{17 - 0 + 2.(0)}{20} = \frac{17}{20}$$

Her bulduğumuz değişken sonucunu diğer değişkende yazarız.

$$y = \frac{-18 - 3\left(\frac{17}{20}\right) + 0}{20} = \frac{-411}{400}$$
$$z = \frac{25 - 2\left(\frac{17}{20}\right) + 3.\left(\frac{-411}{400}\right)}{20} = \frac{8733}{8000}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/20 \\ -411/400 \\ 8733/8000 \end{pmatrix}$$

2. iterasyon:

$$x = \frac{17 - (-411/400) - 2.(8733/8000)}{20} = \frac{80843}{8000}$$
$$y = \frac{-18 - 3\left(\frac{80843}{8000}\right) + \left(\frac{8733}{8000}\right)}{20} =$$
$$z = \frac{25 - 2\left(\frac{80843}{8000}\right) + 3(\quad)}{20} =$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80843/8000 \\ \\ \end{pmatrix}$$

23.07.2020 Vize Sınavı

①

$f(x) = \ln(x+1)$ fonksiyonun $x=1$ noktasında Taylor serisi nedir?

$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$

$f''(x) = -1(x+1)^{-2}$

$f'''(x) = -1 \cdot -2 (x+1)^{-3}$

$f^{4}(x) = -1 \cdot -2 \cdot -3 (x+1)^{-4}$

$f^{n}(x) = (n-1)! \cdot (-1)^{n-1} \cdot (x+1)^{-n}$

②

$f(x) = \cos x$ fonksiyonun maclorin açılımın 4. terimi nedir?

$f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x$

$f'''(x) = \sin x$

$4.\text{terim} = \frac{f'''(0) \cdot (x-0)^3}{3!} = \frac{0 \cdot x^3}{6} = \underline{\underline{0}}$

③, ④

$P = 3{,}1415927$ ve $\hat{P} = 3.1416$ değerleri için mutlak hata ve bağıl hata nedir?

$\text{Mutlak hata} = |3{,}1415927 - 3.1416|$

$= 7.3 \times 10^{-6}$

$= 0{,}0000073$

$\text{Bağıl hata} = \left| \frac{3.1415927 - 3.1416}{3.1415927} \right|$

$= 2{,}3\ldots \times 10^{-6}$

$= 0{,}0000023$

⑤

$p = \sqrt{2}$ ve $\hat{p} = 3.414$ için bağıl hata nedir?

$\text{Bağıl hata} = \left| \frac{\sqrt{2} - 3{,}414}{\sqrt{2}} \right|$

$= 1{,}414062551$

⑥

$p = 8!$ ve $\hat{p} = 39900$ değerler için bağıl hata nedir?

$\text{Bağıl hata} = \frac{8! - 39900}{8!}$

$= 0{,}0104166666$

⑦, ⑧, ⑨

Bir roketin doğru hızı $v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$ bağıntısı ile hesaplanmaktadır.
Burada $v = 1000 m/s$, $u = 2200 m/s$, $m_0 = 160000 kg$, $q = 2680 kg/s$, $g = 9{,}81 m/s^2$ old. göre t değerinin 15 ile 40 arasında orta nokta metodu ile 2, 3. ve 5. iterasyondaki kökü nedir?

$f(t) = (2200) \cdot \ln\left(\frac{160000}{160000 - 2680 \cdot t}\right) - (9{,}81) \cdot t - 1000$

1. adım

$f(15) = -510{,}578715$

$f(40) = 1046.657774$

2. adım

1. iterasyon: $-$ 15, $+$ 27,5, $+$ 40 — $\frac{40+15}{2} = 27{,}5$

$f(27{,}5) = 88{,}3827772$

2. iterasyon: $-$ 15, $-$ 21,25, $+$ 27,5 — $f(21{,}25) = -240{,}55\ldots$

3. iterasyon: $-$ 21,25, $-$ 24,375, $+$ 27,5 — $f(24{,}375) = -84{,}72\ldots$

4. iterasyon: $-$ 24,375, $-$ 25,9375, $+$ 27,5 — $f(25{,}9375) = -$

5. iterasyon: $-$ 25,9375, 26.71875, $+$ 27,5

26.71875

⑩, ⑪, ⑫

$x = \frac{5}{7}$ ve $y = \frac{1}{3}$ sayılarını 5 basamaklı bir sistemde temsil edildiğinde $x-y$, $x*y$, $\frac{x}{y}$ değerlerini kesme işlemi uygulayarak hesapladığınızda sonuç ne olur?

$x - y = 5/7 - 1/3 = 0.38095\ldots = 0{,}38095 \times 10^{0}$

$x * y = 5/7 * 1/3 = 0{,}23809\ldots = 0{,}23809 \times 10^{0}$

$x / y = 5/7 \,/\, 1/3 = 2{,}142857143 = 0{,}21428 \times 10^{1}$

⑬

$x = 5/7$ ve $y = \frac{1}{3}$ sayılarını 5 basamaklı bir sistemde temsil edildiğinde x/y değerini kesme işlemi uygulayarak hesapladığınızda mutlak hata ne olur?

$\text{Mutlak hata} = |2{,}142857143 - 2{,}1428|$

$= 5{,}714285714 \times 10^{-5}$

$= 0{,}571\ldots \times 10^{-4}$

⑭, ⑮, ⑯

Bir köprü ve bir perçinin uzunluklarını ölçmemiz isteniyor. Ölçüm sonucunda boylarını sırasıyla 9999 ve 9cm bulduğumuzu varsayalım. Eğer gerçek değerler sırasıyla 10000 ve 10 cm ise köprü ölçümü gerçek % hata, perçin ölçümü için gerçek % hata ve perçin ölçümü için gerçek hata nedir?

$\text{Köprü gerçek \% hata} = \frac{10000 - 9999}{10000} \times 100 = 0{,}01$

$\text{Perçin gerçek \% hata} = \frac{10 - 9}{10} \times 100 = 10$

$\text{Perçin gerçek hata} = \frac{10 - 9}{10} = 0{,}1$

⑰, ⑱

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denkleminin $[1,2]$ aralığında bir kökünü ikiye bölme metodu kullanarak 4 ve 5 iterasyon ile hesaplandığında sonuç ne olur?

$f(1) = 1 + 4 - 10 = -5$

$f(2) = 8 + 16 - 10 = 14$

1. iterasyon: $-$ 1, $+$ 1,5, $+$ 2 — $f(1{,}5) = 2{,}375$

2. iterasyon: $-$ 1, $-$ 1,25, $+$ 1,5 — $f(1{,}25) = -1.796\ldots$

3. iterasyon: $-$ 1,25, $+$ 1,375, $+$ 1,5 — $f(1{,}375) = 0{,}162\ldots$

4. iterasyon: $-$ 1,25, $+$ 1,375 — $f(1{,}3125) = -0{,}848\ldots$

1,3125

5. iterasyon: $-$ 1,3125, 1,34375, $+$ 1,375

⑲, ⑳

$f(x) = x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 120x - 130$ eşitliğinin $[1,2]$ aralığında bilinmektedir. Bu kökü ikiye bölme metodunu kullanarak 2 ve 4 iterasyon ile bulun.

$f(1) = 1 - 9 - 2 + 120 - 130 = -20$

$f(2) = 16 - 72 - 8 + 240 - 130 = 40$

1. iterasyon = $-$ 1, $+$ 1,5, $+$ 2 — $f(1{,}5) = 20{,}1875$

2. iterasyon = $-$ 1, $+$ 1,25, $+$ 1,5 — $f(1{,}25) = 1.738$

3. iterasyon = $-$ 1, $-$ 1.125, $+$ 1,25 — $f(1{,}125) = -8{,}7438$

4. iterasyon = $-$ 1,125, $+$ 1,25

1.1875

㉑, ㉒

$\ln(1) = 0$

$\ln(4) = 1.3862944$

$\ln(6) = 1.7917595$ old. göre ; $x_0 = 1$, $x_1 = 6$ olursa $\ln(2)$ ve % hata kaçtır? $(\ln(2) = 0{,}69314718)$

$\frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$

$f(6) - f(1) = 5f(2) - 5f(1)$

$\frac{f(6) + 4f(1)}{5} = f(2)$

$f(2) = 0.3583519$

$\ln(2) = 0.3583519$

$\% \text{hata} = \frac{0{,}69314718 - 0.3583519}{0{,}69314718} \times 100 = \% 48{,}3$

㉓

$\ln(1) = 0$

$\ln(4) = 1.3862944$

$\ln(6) = 1.7917585$ old. göre, $x_0 = 1$, $x_1 = 4$ olursa $\ln(2)$ kaçtır?

$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$

$f(4) - f(1) = 3f(2) - 3f(1)$

$\frac{f(4) + 2f(1)}{3} = f(2)$

$f(2) = 0{,}462098133$

$\ln 2 = 0{,}46208133$

㉔, ㉕

$\ln(1) = 0$

$\ln(4) = 1.3862944$

$\ln(6) = 1.79175585$ old. göre, lagrange enterpolasyon kullanarak $\ln 2$ ve bağıl hata kaçtır? $(\ln 2 = 0{,}69314718)$

$x_0 = 1$, $x_1 = 4$, $x_2 = 6$

$$f_2(2) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \cdot f(x_0) + \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} f(x_2)$$

$$= \cancel{\frac{(-2) \cdot (-4)}{(-3) \cdot (-5)}} \cdot 0 + \frac{(1) \cdot (-4)}{(3) \cdot (-2)} \cdot \ln 4 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(1) \cdot (-2)}{(5) \cdot (2)} \ln(6)$$

$= 0{,}565844366$

$\text{Bağıl hata} = \frac{\ln 2 - 0{,}565844366}{\ln 2} = 0{,}183659139$