

MÜHENDİSLİK MEKANİĞİ

DİNAMİK

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

Behcet DAĞHAN

MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

İÇİNDEKİLER

1· GİRİŞ

- Konum, Hız ve İvme
- Newton Kanunları

2· MADDESEL NOKTALARIN KİNEMATİĞİ

- Doğrusal Hareket
- Düzlemde Eğrisel Hareket
- Bağlı Hareket (Ötelenen Eksenlerde)
- Birbirine Bağlı Maddesel Noktaların Hareketi

3· MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ

- Kuvvet, Kütle ve İvme
- İş ve Enerji
- İmpuls ve Momentum

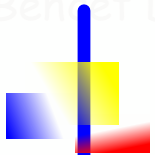


MADDESEL NOKTALARIN DİNAMİĞİ

2

KİNEMATİK

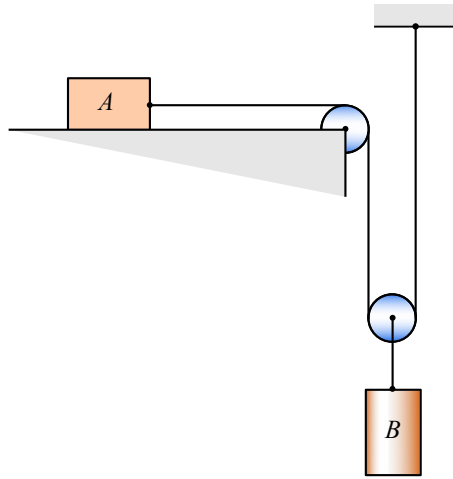
MADDESEL NOKTALARIN KİNEMATİĞİ



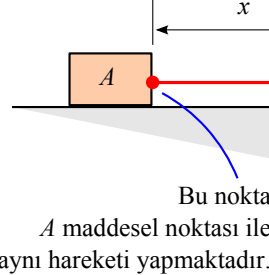
2.4

Birbirine Bağlı Maddesel
Noktaların Hareketi

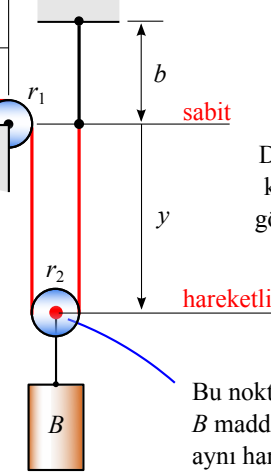
Birbirine bağlı maddesel noktaların hareketini nasıl inceleyeceğimizi bir örnek üzerinde açıklayalım.



keyfi olarak seçilen
hareketli bir noktayı
referans alan doğrultu



keyfi olarak seçilen
sabit bir noktayı
referans alan doğrultu



Değişken uzunluğa sahip olan kısımların boyu **yönlü** olarak gösterilir. Daima sabit olandan hareketliye doğru pozitifdir.

Maddesel noktaları birbirine bağlayan iplerin toplam uzunlukları genellikle sabit kalır.

Fakat iplerin bazı kısımları boy değiştirebilir.

Boy değiştiren kısımlar, yukarıda verilen örnek problemde kırmızıya boyanmıştır.

$$L = x + \frac{\pi r_1}{2} + y + \pi r_2 + y + b$$

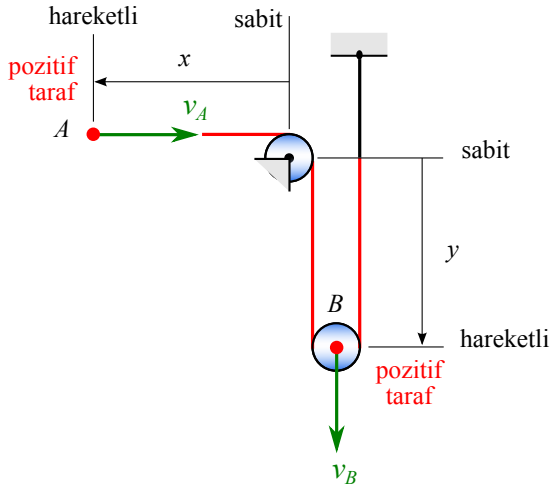
İpin toplam boyu genellikle sabittir.

$$L = x + 2y + \text{sabit uzunluklar}$$

değişken uzunluklar



Maddesel noktaların mutlak hareketini incelerken referans doğrultularından birisinin mutlaka sabit olması gerekir.



Eksenler yukarıdaki gibi seçilirse:

$$L = x + 2y + \text{sabit uzunluklar}$$

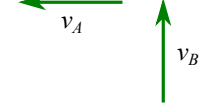
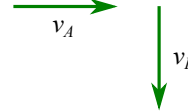
$$\begin{aligned} \dot{L} &= \dot{x} + 2\dot{y} \quad \rightarrow \quad v_A + 2v_B = 0 \quad \leftarrow \text{hızlar arasındaki bağıntı} \\ 0 &= \ddot{x} + 2\ddot{y} \quad \rightarrow \quad a_A + 2a_B = 0 \quad \leftarrow \text{ivmeler arasındaki bağıntı} \end{aligned}$$

Hareketler, doğrusal hareket olduğu için: $a = \ddot{v}$

Eksenlerin seçiminden bağımsız olarak daima:

v_A sağa doğru ise v_B aşağı doğrudur.

v_A sola doğru ise v_B yukarı doğrudur.



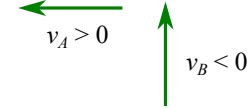
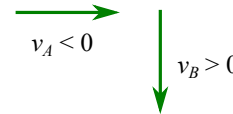
$$v_A + 2v_B = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Bu eşitliğin sağlanabilmesi için} \\ \text{hızlardan birisinin pozitif diğerinin} \\ \text{negatif olması gerekir.} \end{array} \right.$$

Yön belirtir.

$$v_A + 2v_B = 0 \quad \rightarrow \quad v_A = -2v_B$$

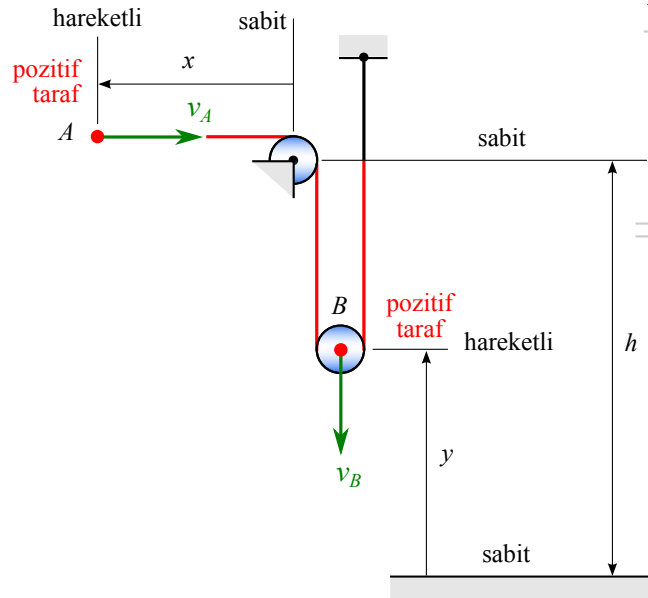
v_A negatif ise v_B pozitifdir.

v_A pozitif ise v_B negatiftir.



$$a_A + 2a_B = 0 \quad | \quad \text{Aynı şey bu eşitlik için de geçerlidir.}$$

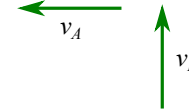
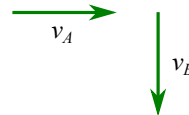
A'nın hızı sadece bir değişkene, yani B'nin hızına, B'nin hızı da sadece bir değişkene, yani A'nın hızına bağlı olduğu için bu sisteme ve böyle sistemlere "tek serbestlik dereceli sistem" denir.



Eksenlerin seçiminden bağımsız olarak daima:

v_A sağa doğru ise v_B aşağı doğrudur.

v_A sola doğru ise v_B yukarı doğrudur.



{ Sabit referans eksenini keyfi olarak seçilebilir.
Eğer seçim yandaki gibi yapılırsa o zaman hız ve ivmeler arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibi elde edilir.

$$L = x + 2(h - y) + \text{sabit uzunluklar}$$

$$\dot{L} = \dot{x} - 2\dot{y}$$

→

$$v_A - 2v_B = 0$$

→

$$v_A = 2v_B$$

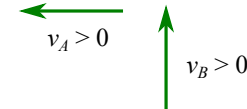
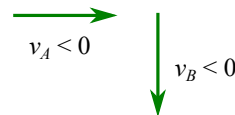
$$0 = \ddot{x} - 2\ddot{y}$$

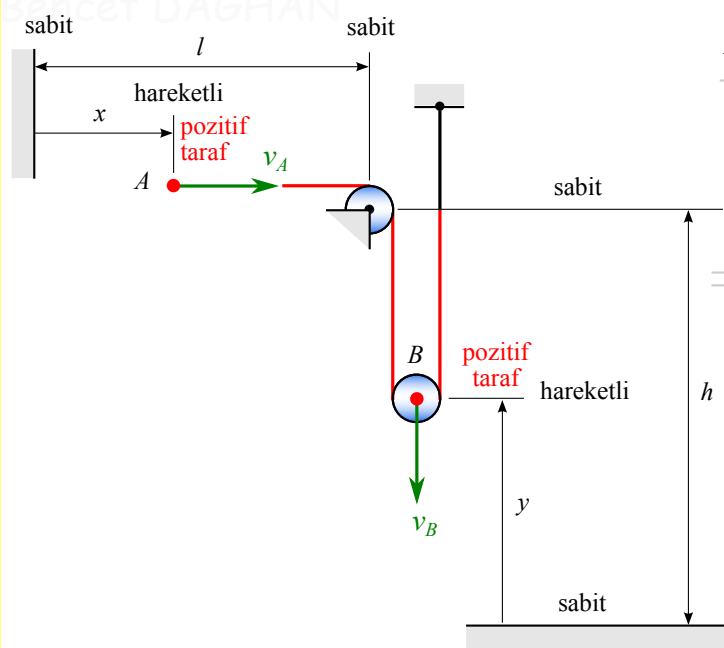
→

$$a_A - 2a_B = 0$$

v_A negatif ise v_B de negatiftir.

v_A pozitif ise v_B de pozitiftir.

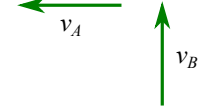
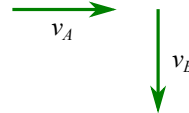




Eksenlerin seçiminden bağımsız olarak daima:

v_A sağa doğru ise v_B aşağı doğrudur.

v_A sola doğru ise v_B yukarı doğrudur.



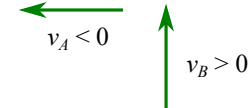
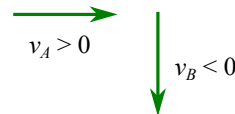
{ Sabit referans eksenini keyfi olarak seçilebilir.
Eğer seçim yandaki gibi yapılırsa o zaman hız ve ivmeler arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibi elde edilir.

$$L = (l - x) + 2(h - y) + \text{sabit uzunluklar}$$

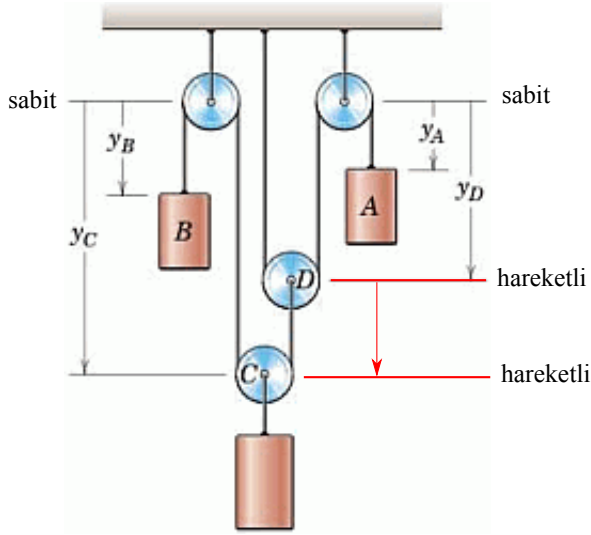
$$\begin{aligned} \dot{L} &= -\dot{x} - 2\dot{y} \quad \rightarrow \quad -v_A - 2v_B = 0 \quad \rightarrow \quad -v_A = 2v_B \\ 0 &= -\ddot{x} - 2\ddot{y} \quad \rightarrow \quad -a_A - 2a_B = 0 \end{aligned}$$

v_A pozitif ise v_B negatiftir.

v_A negatif ise v_B pozitiftir.



İki serbestlik dereceli bir sistem



$$L_A = y_A + 2 y_D + \text{sabit uzunluklar}$$

$$L_B = y_B + y_C + (y_C - y_D) + \text{sabit uzunluklar}$$

$$\begin{aligned} \dot{L}_A^0 &= \dot{y}_A + 2 \dot{y}_D \\ + \quad 2/ \quad \dot{L}_B^0 &= \dot{y}_B + 2 \dot{y}_C - \dot{y}_D \end{aligned}$$

$$v_A + 2 v_B + 4 v_C = 0$$

hızlar arasındaki bağıntı

Hareketler,
doğrusal hareket olduğu için: $a = \dot{v}$

$$a_A + 2 a_B + 4 a_C = 0$$

ivmeler arasındaki bağıntı

Maddesel noktalardan birisinin hızı diğer ikisinin hızına bağlı olduğu için
yani iki değişkene bağlı olduğu için bu sisteme ve böyle sistemlere
iki serbestlik dereceli sistem denir.



Maddesel noktaların **mutlak hareketini incelemek için**
her iki ucu da hareketli olan
böyle bir referans seçimi yapmak
doğru değildir.

Ama bağlı hareketini incelemek için böyle bir seçim yapılabilir.

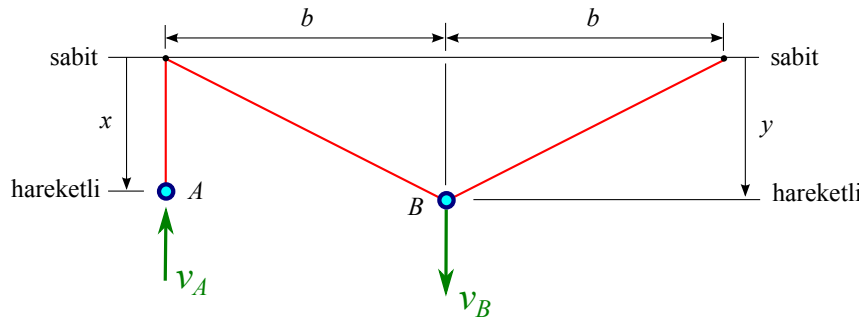
Örnek Problem 2/25

A nın yukarı doğru olan hızını B nin aşağı doğru olan hızına ve y ye bağlı olarak bulunuz. Makaraların boyutlarını ihmal ediniz.

Verilenler:

$$\left. \begin{array}{l} v_B \text{ aşağı} \\ y \text{ aşağı} \end{array} \right\} v_B > 0$$

Çözüm



$$\left. \begin{array}{l} v_A \text{ yukarı} \\ x \text{ aşağı} \end{array} \right\} v_A < 0$$

İstenenler:

$$v_A = ? \text{ yukarı}$$

$$L = x + 2(b^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\dot{L} = \dot{x} + 2y \dot{y} (b^2 + y^2)^{-1/2}$$

$$0 = v_A + 2y v_B (b^2 + y^2)^{-1/2}$$

$$v_A = - \frac{2y}{\sqrt{b^2 + y^2}} v_B$$

yön gösterir

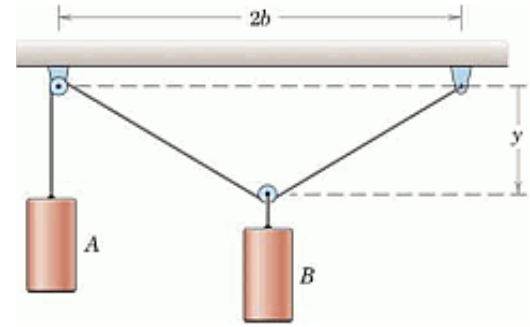
A nın hızının şiddeti B nin hızının şiddeti

$$v_A = \frac{2y}{\sqrt{b^2 + y^2}} v_B$$

yukarı
yönde

Yönlerden kaynaklanan işaretleri çıkarıp sadece hızların şiddetleri arasındaki bağıntıyı yazarız.

Hızın yönünü yanına yazarız



Örnek Problem 2/26

Cam yıkama vinci motorları şekilde görülen yönde dönerken vinci yukarı doğru kaldırmaktadırlar. Vincin motorlarına bağlı olan tamburların her birinin çapı 200 mm ve devir sayısı 40 rev/min olduğuna göre vinci yukarı doğru olan hızını bulunuz.

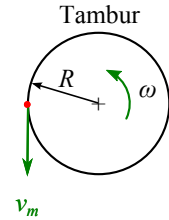
Verilenler:

$$d = 200 \text{ mm}$$

$$n = 40 \text{ rev/min}$$

İstenenler:

$$v = ?$$



$$\omega = n (2\pi/60)$$

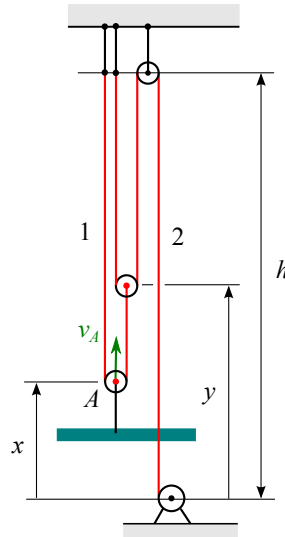
$$\omega = 4.19 \text{ rad/s}$$

$$v_m = R \omega$$

$$v_m = 418.9 \text{ mm/s}$$

Tamburun dış yüzeyinde bulunan bir noktanın tamburun dönmesinden kaynaklanan hızı, 2 nolu ipin tambura sarılma hızı

Çözüm



$$v_A = \dot{x}$$

$$v_A > 0$$

$$v_A = v$$

$$L_1 = (h - x) + (y - x) + \text{sabit uzunluklar} \quad (\text{sabit})$$

$$L_2 = 2(h - y) + h + \text{sabit uzunluklar} \quad (\text{değişken})$$

$$2/ \quad \dot{L}_1 = -2\dot{x} + \dot{y}$$

$$+ \quad \dot{L}_2 = -2\dot{y}$$

$$\dot{L}_2 = -4\dot{x}$$

2 nolu ipin boyunda birim zamanda meydana gelen değişme:

$$\dot{L}_2 = -R \omega$$

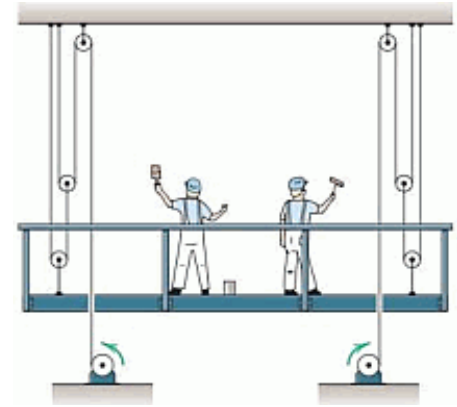
ipin boyu kısalıyor

$$4 v_A = R \omega$$

$$v_A = 104.7 \text{ mm/s}$$

$$v = 104.7 \text{ mm/s}$$

yukarı



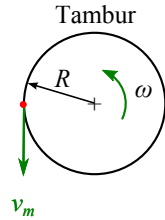
Örnek Problem 2/27

Cam yıkama vinci motorları şekilde görülen yönde dönerken vinci yukarı doğru kaldırmaktadırlar. Vincin motorlarına bağlı olan tamburların her birinin çapı 200 mm ve devir sayısı 40 rev/min olduğuna göre vinci yukarı doğru olan hızını bulunuz.

Verilenler:

$$d = 200 \text{ mm}$$

$$n = 40 \text{ rev/min}$$



$$\omega = n (2\pi/60)$$

$$\omega = 4.19 \text{ rad/s}$$

$$v_m = R \omega$$

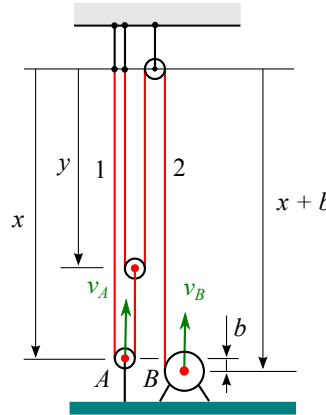
$$v_m = 418.9 \text{ mm/s}$$

İstenenler:

$$v = ?$$

Tamburun dış yüzeyinde bulunan bir noktanın tamburun dönmesinden kaynaklanan hızı, 2 nolu ipin tambura sarılma hızı

Çözüm



$$v_A = v_B = \dot{x}$$

$$v_A < 0$$

$$v_B < 0$$

$$|v_A| = |v_B| = v$$

$$L_1 = x + (x - y) + \text{sabit uzunluklar} \quad (\text{sabit})$$

$$L_2 = 2y + (x + b) + \text{sabit uzunluklar} \quad (\text{değişken})$$

$$\begin{aligned} 2/ \quad \dot{L}_1 &= 2\dot{x} - \dot{y} \\ + \quad \dot{L}_2 &= 2\dot{y} + \dot{x} \\ \hline \dot{L}_2 &= 5\dot{x} \end{aligned}$$

2 nolu ipin boyunda
birim zamanda
meydana gelen değişme:

$$\dot{L}_2 = -R\omega$$

ipin boyu kısalıyor

$$5v_A = -R\omega$$

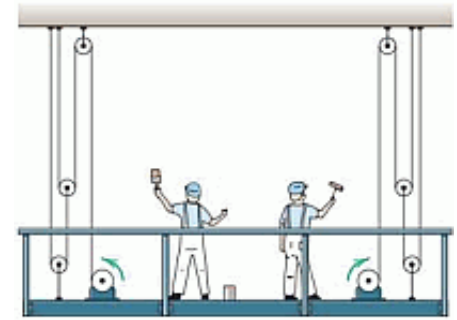
$$v_A = -83.8 \text{ mm/s}$$

yön belirtir

$$v_A = 83.8 \text{ mm/s, yukarı} \rightarrow$$

$$v = 83.8 \text{ mm/s}$$

yukarı



Örnek Problem 2/28

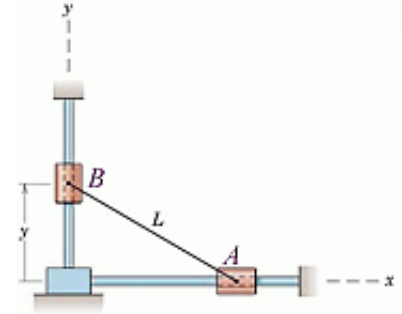
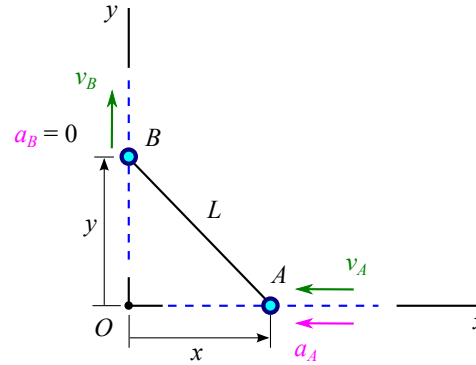
Birbirine L uzunluğunda bir ip ile bağlanmış olan A ve B kızakları, birbiri ile dik açı yapan kollar üzerinde kaymaktadır. Eğer B kızağının yukarı doğru olan hızı v_B sabit ise A kızağının ivmesini y ye bağlı olarak bulunuz.

Verilenler:

$$v_B \quad (\text{sabit}) \quad \rightarrow \quad \dot{v}_B = 0$$

$$a_B = 0$$

Çözüm



$$L^2 = x^2 + y^2$$

$$2L \frac{d}{dt} = 2x \dot{x} + 2y \dot{y}$$

$$x v_A + y v_B = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{x} v_A + x \dot{v}_A + \dot{y} v_B + y \dot{v}_B = 0$$

$$v_A = -\frac{y}{x} v_B \quad \rightarrow \quad v_A^2 + x a_A + v_B^2 + y a_B = 0$$

$$a_A = -\frac{v_A^2 + v_B^2}{x}$$

$$a_A = -\left(\frac{y^2}{x^3} + \frac{1}{x}\right) v_B^2$$

$$a_A = -\frac{L^2}{(L^2 - y^2)^{3/2}} v_B^2$$

yön belirtir

$$a_A = \frac{L^2}{(L^2 - y^2)^{3/2}} v_B^2$$

sola

İstenenler:

$$a_A = ?$$