Bölüm 1

Fonksiyonlar

1.1

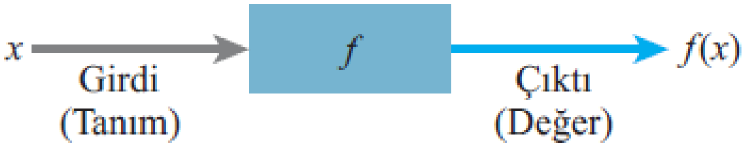
Fonksiyonlar ve Grafikleri

TANIM **Fonksiyon**

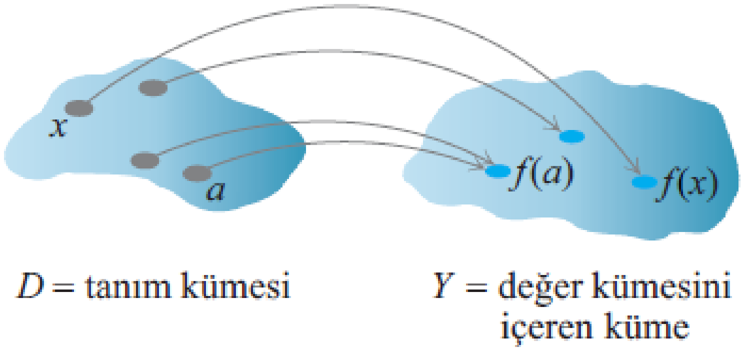
Bir D kümesinden bir Y kümesine bir **fonksiyon**, D'deki her x elemanına Y'de *tek bir* $f(x)$ elemanı karşılık getiren bir kuraldır.

Bütün olası girdi değerlerinin kümesi D'ye fonksiyonunun tanım kümesi denir. x, D üzerinde değişirken bütün $f(x)$ değerlerinin kümesine fonksiyonun değer kümesi denir. Değer kümesi Y'deki her elemanı içermeyebilir.

Bir fonksiyonun tanım kümesi konu gereği kısıtlanabilir. Örneğin, $A = p\pi^2$ ile verilen alan fonksiyonunun tanım kümesi, r yarıçapının sadece pozitif olmasına izin verir. Bir $y = f(x)$ fonksiyonunu bir formülle tanımlıyorsak ve tanım kümesi açıkça belirtilmemişse veya konu gereği kısıtlanmamışsa, tanım kümesi, formülün reel y-değerleri vereceği en büyük x-değerleri kümesi olarak kabul edilir ve **doğal tanım kümesi** adını alır. Tanım kümesinin bir şekilde kısıtlanmasını istiyorsak bunu belirtmemiz gerekir. $y = x^2$ fonksiyonunun tanım aralığı bütün reel sayı kümesidir. Tanım kümesini, örneğin, pozitif x değerlerine kısıtlamak istiyorsak, "$y = x^2, x > 0$" yazmamız gerekir.



ŞEKİL 1.22 Bir fonksiyonun "makine" diyagramı



ŞEKİL 1.23 Bir D kümesinden bir Y kümesine bir fonksiyon D'deki her elemana Y'deki tek bir elemanı eşler.

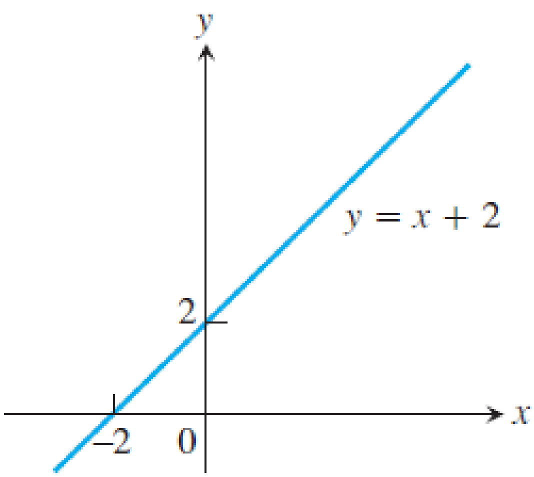
Fonksiyon	Tanım aralığı (x)	Değer aralığı (y)
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

Fonksiyonların Grafikleri

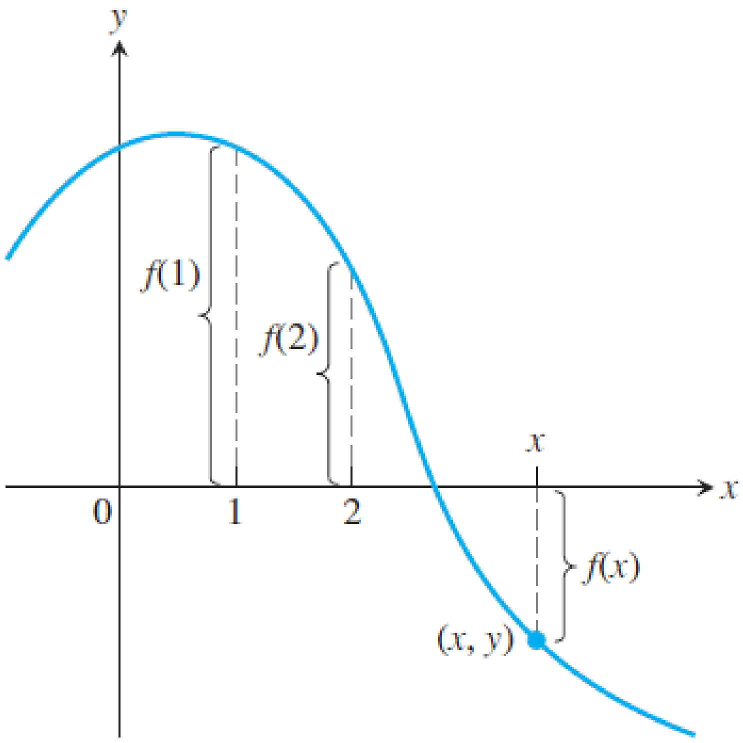
Bir fonksiyonu göz önünde canlandırmanın bir başka yolu fonksiyonun **grafiği**dir. Tanım kümesi D olan bir fonksiyon f ise grafiği, Kartezyen düzlemde koordinatları f için girdi-çıktı çiftleri olan noktalardan oluşur. Küme notasyonu ile grafik

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

kümesidir.



ŞEKİL 1.24 $f(x) = x + 2$'in grafiği $y = x + 2$ denklemini sağlayan (x, y) noktalarının kümesidir.



ŞEKİL 1.25 (x, y) noktası f'in grafiği üzerinde ise $y = f(x)$ değeri x noktasında grafiğin yüksekliğidir (veya $f(x)$ negatif ise x noktasının altındaki yükseklik).

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

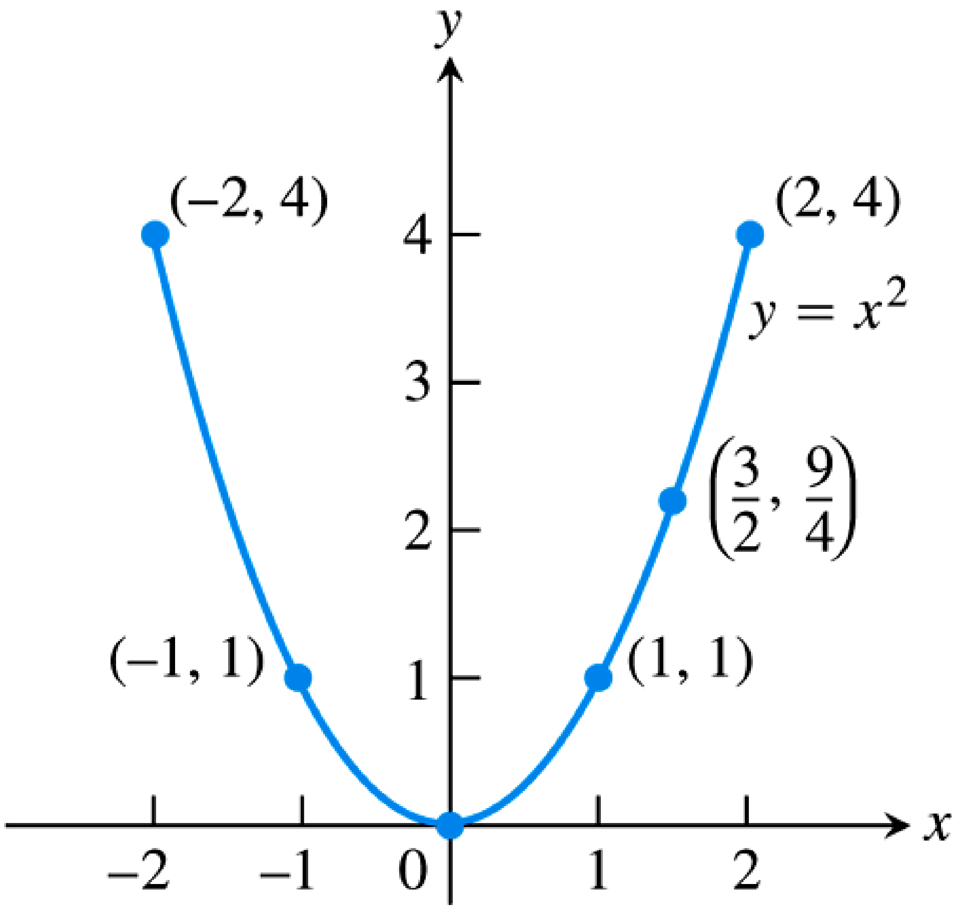
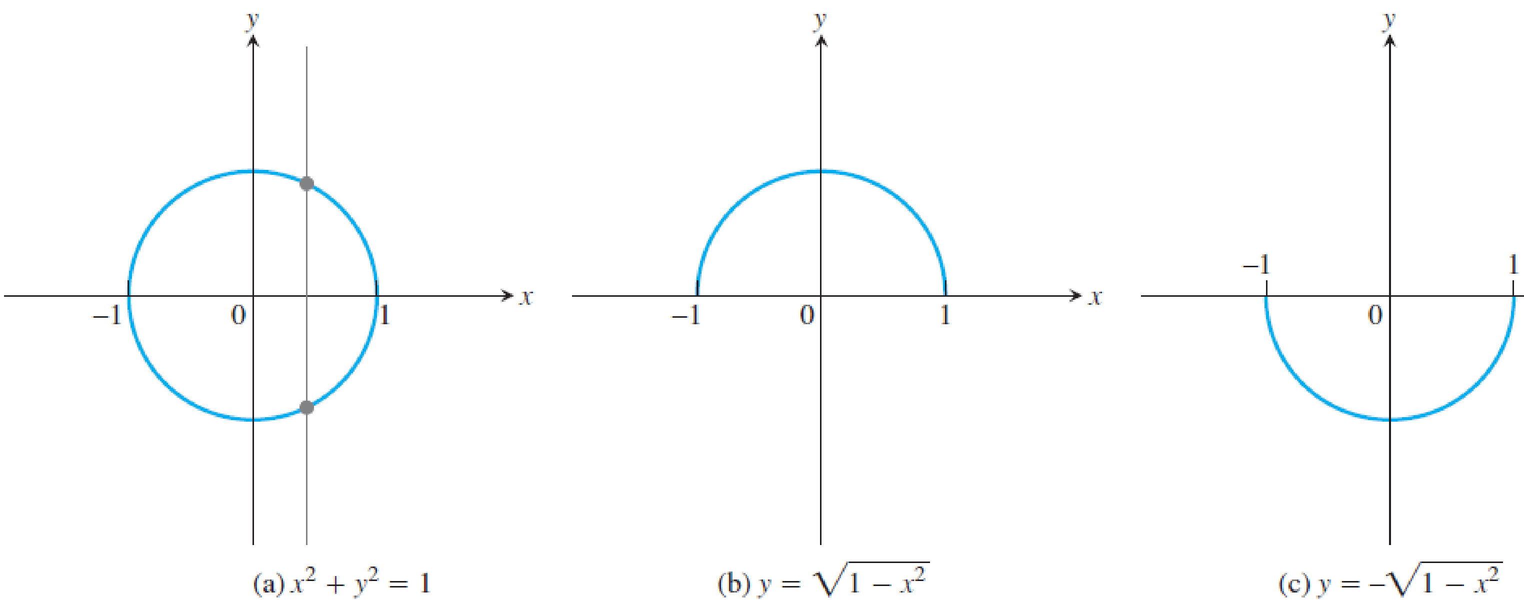


FIGURE 1.5 Graph of the function in Example 2.

Dikey Doğru Testi

Çizdiğiniz her eğri bir fonksiyonun grafiği değildir. Bir f fonksiyonu tanım aralığındaki her x için tek bir $f(x)$ değerinden başkasını alamaz, dolayısıyla hiçbir dik doğru bir fonksiyonun grafiğini bir kereden fazla kesemez. Yani bir çember bir fonksiyonun grafiği olamaz, çünkü bazı dik doğrular çemberi iki kere keser (Şekil 1.28a). a bir f fonksiyonunun tanım kümesinde ise, $x = a$ dikey doğrusu f'nin grafiğini tek bir $(a, f(a))$ noktasında kesecektir.

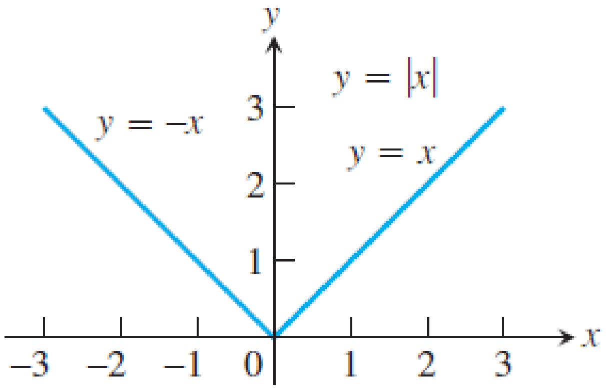


ŞEKİL 1.28 (a) Çember bir fonksiyonunun grafiği değildir; dik doğru testini sağlamaz. (b) üst yarıçember bir $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonun grafiğidir. (c) alt yarıçember bir $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonun grafiğidir.

Parçalı Olarak Tanımlanan Fonksiyonlar

Bazen bir fonksiyon tanım aralığının farklı bölgeleri için değişik formüllerle verilebilir. Bunlardan biri grafiği Şekil 1.29'da verilen **mutlak değer fonksiyonu** dur:

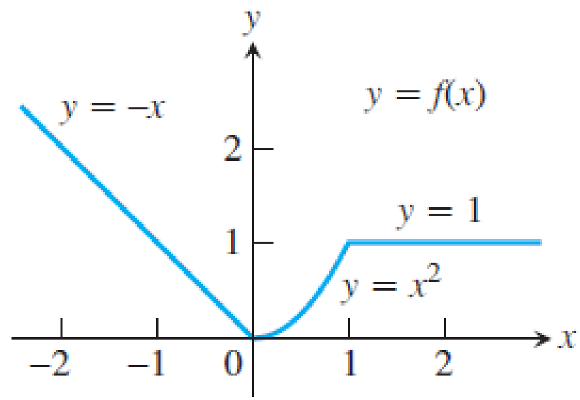
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



ŞEKİL 1.29 Mutlak değer fonksiyonunun tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ ve değer kümesi $[0, \infty)$.

ÖRNEK 5 Parçalı Olarak Tanımlı Fonksiyonların Grafiklerini Çizmek

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



ŞEKİL 1.30 Burada gösterilen $y = f(x)$ fonksiyonunu çizmek için, tanım aralığındaki farklı kısımlara değişik formüller uygularız (Örnek 5).

DEFINITIONS Let f be a function defined on an interval I and let x_1 and x_2 be any two points in I.

1. If $f(x_2) > f(x_1)$ whenever $x_1 < x_2$, then f is said to be **increasing** on I.
2. If $f(x_2) < f(x_1)$ whenever $x_1 < x_2$, then f is said to be **decreasing** on I.

Fonksiyon	Arttığı yer	Azaldığı yer
$y = x^2$	$0 \leq x < \infty$	$-\infty < x \leq 0$
$y = x^3$	$-\infty < x < \infty$	Hiçbiryer
$y = 1/x$	Hiçbiryer	$-\infty < x < 0$ ve $0 < x < \infty$
$y = 1/x^2$	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$y = \sqrt{x}$	$0 \leq x < \infty$	Hiçbiryer
$y = x^{2/3}$	$0 \leq x < \infty$	$-\infty < x \leq 0$

TANIMLAR **Çift Fonksiyonlar, Tek Fonksiyonlar**

Bir $y = f(x)$ fonksiyonu tanım kümesindeki her x için

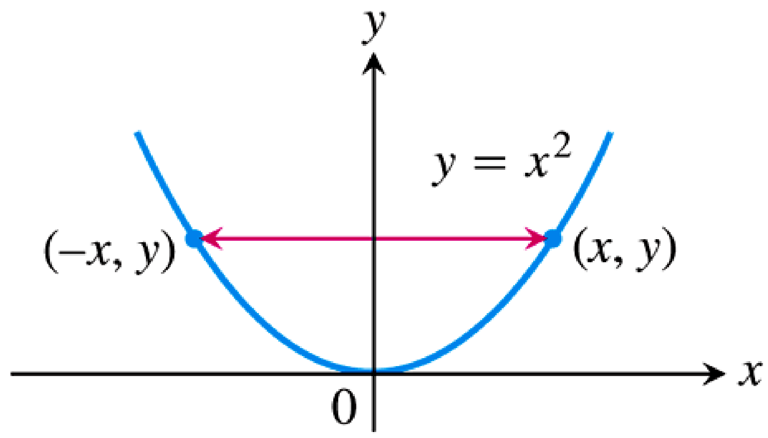
$f(-x) = f(x)$ ise **çift fonksiyon**

$f(-x) = -f(x)$ ise **tek fonksiyon**

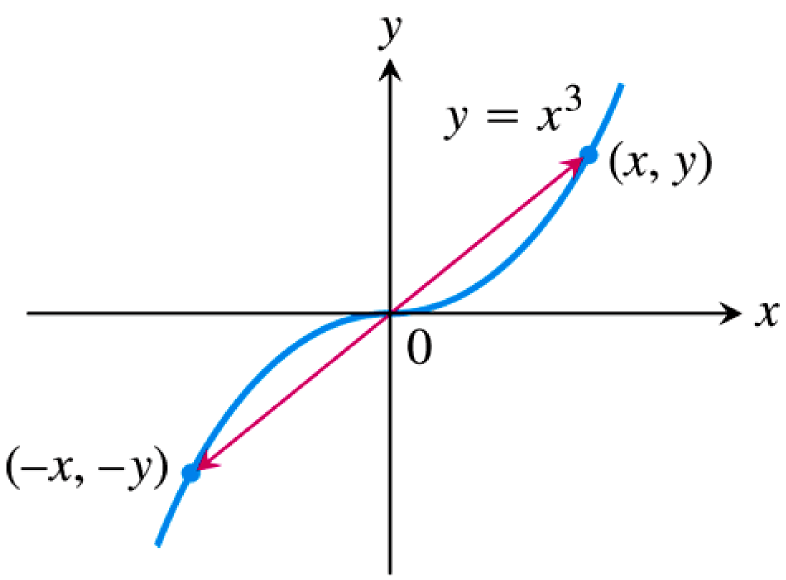
dur.

Bir çift fonksiyonun grafiği ***y*-eksenine göre simetrik**tir.

Bir tek fonksiyonun grafiği **orijine göre simetrik**tir.

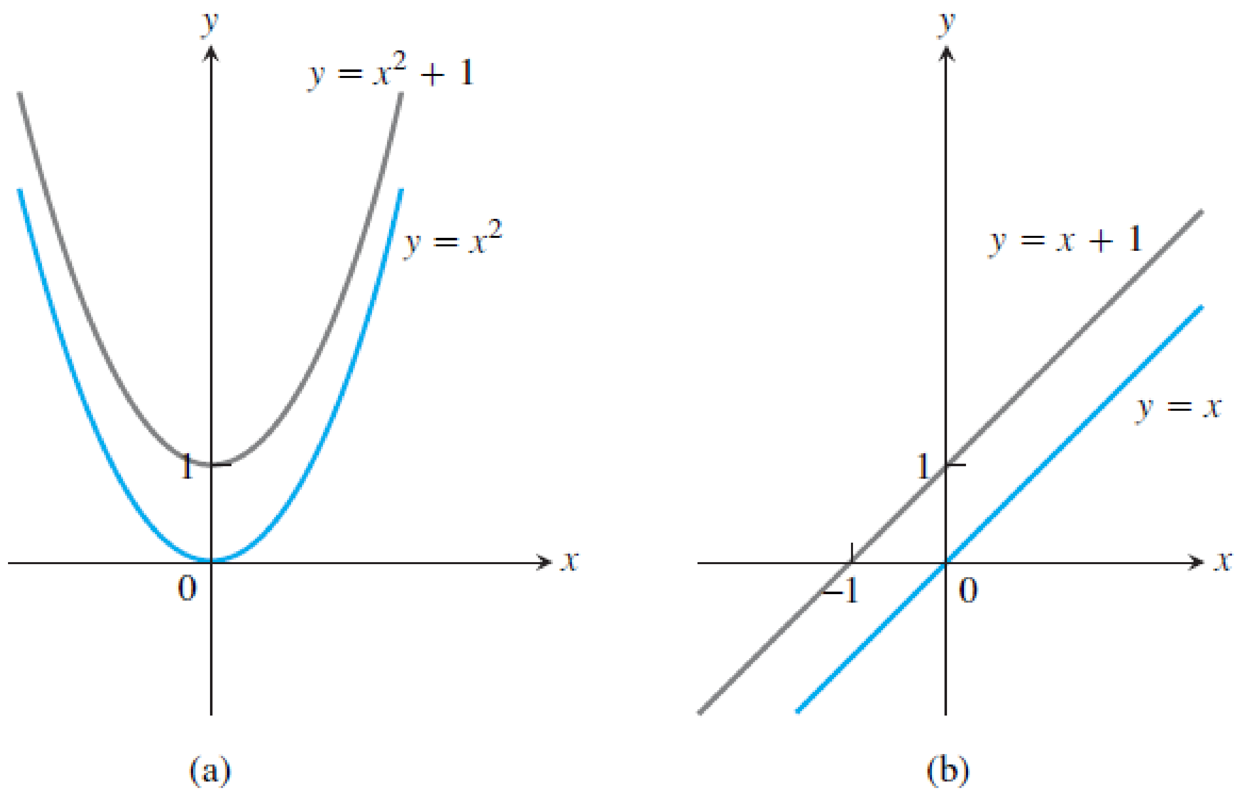


(a)



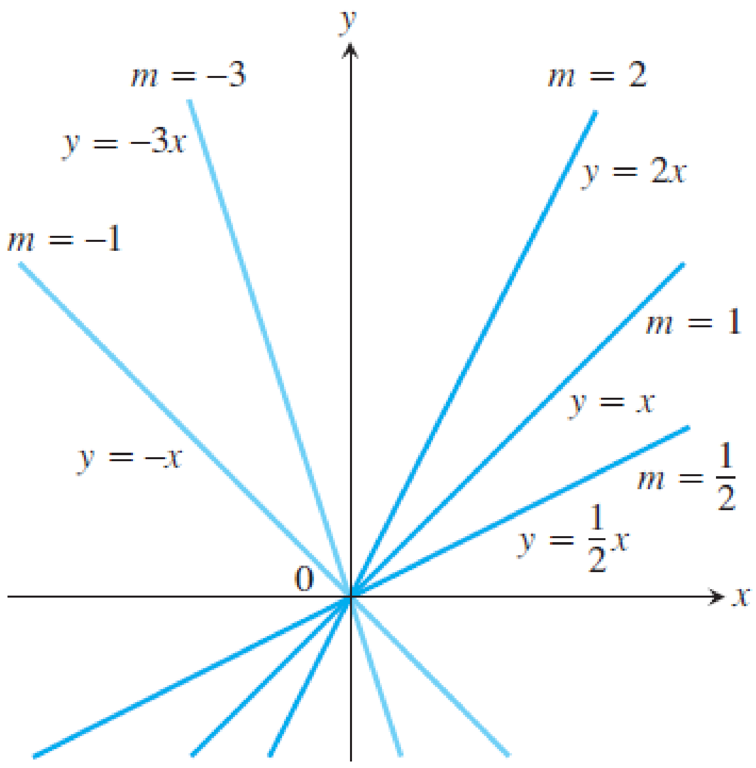
(b)

ŞEKİL 1.46 (a) da $y = x^2$'nin (bir çift fonksiyon) grafiği y-eksenine göre simetriktir. (b) de $y = x^3$'ün (bir tek fonksiyon) grafiği orijine göre simetriktir

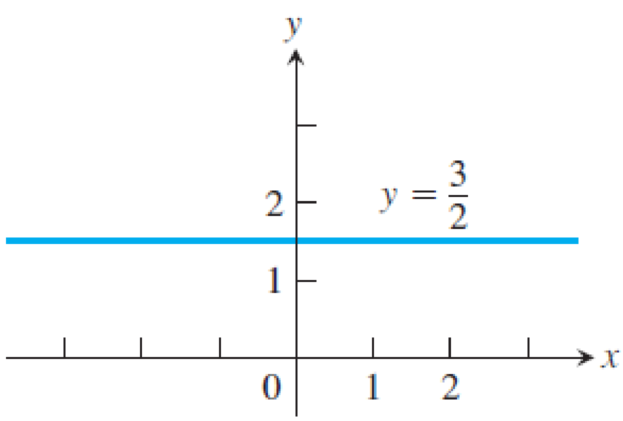


ŞEKİL 1.47 (a) $y = x^2$ fonksiyonuna 1 sabit terimini eklediğimizde elde edilen $y = x^2 + 1$ fonksiyonu hala bir çift fonksiyondur ve grafiği hala y-eksenine göre simetriktir. (b) $y = x$ fonksiyonuna 1 sabit terimini eklediğimizde elde edilen $y = x + 1$ artık bir tek fonksiyon değildir. Orijin'e göre simetri kaybolmuştur (Şekil 2).

Lineer Fonksiyonlar m ve b sabitler olmak üzere $f(x) = mx + b$ şeklindeki bir fonksiyona lineer fonksiyon denir. Şekil 1.34 te $b = 0$ için $f(x) = mx$ doğrularından bazıları görülmektedir, yani bu doğrular orijinden geçerler. $m = 0$ eğimi için sonuç sabit foksiyondur (Şekil 1.35).



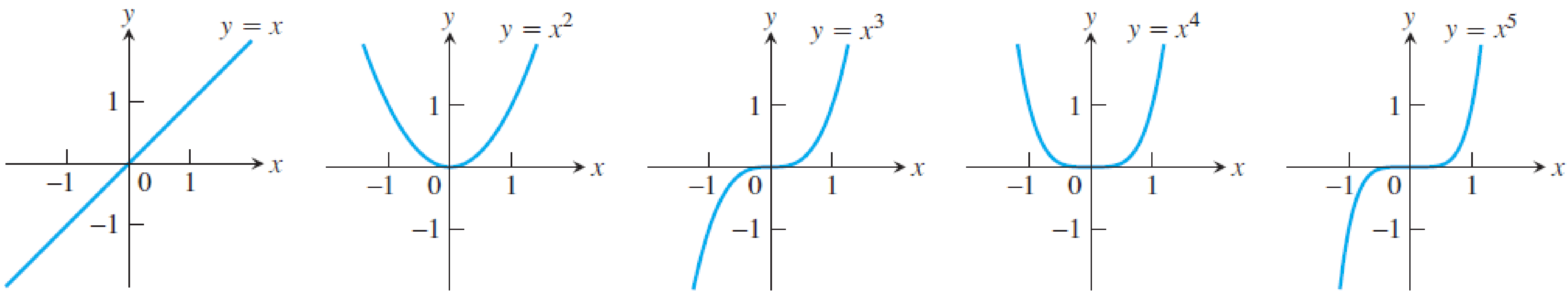
ŞEKİL 1.34 $y = mx$ doğrularının eğimleri m dir ve hepsi orijinden geçerler.



ŞEKİL 1.35 Bir sabit fonksiyonun eğimi $m = 0$ dır.

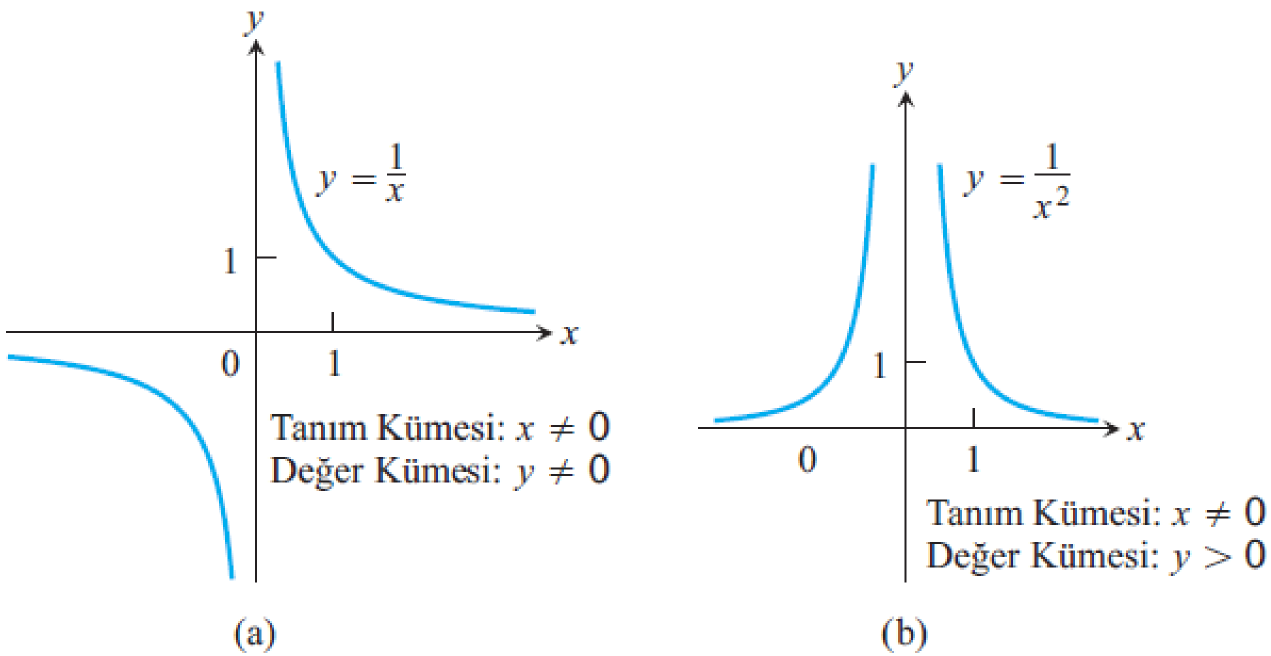
Kuvvet Fonksiyonları Bir a sabiti için $f(x) = x^a$ şeklindeki bir fonksiyona **kuvvet fonksiyonu** denir. Dikkate alınması gereken birkaç önemli durum vardır.

(a) $a = n$, bir pozitif tam sayı.



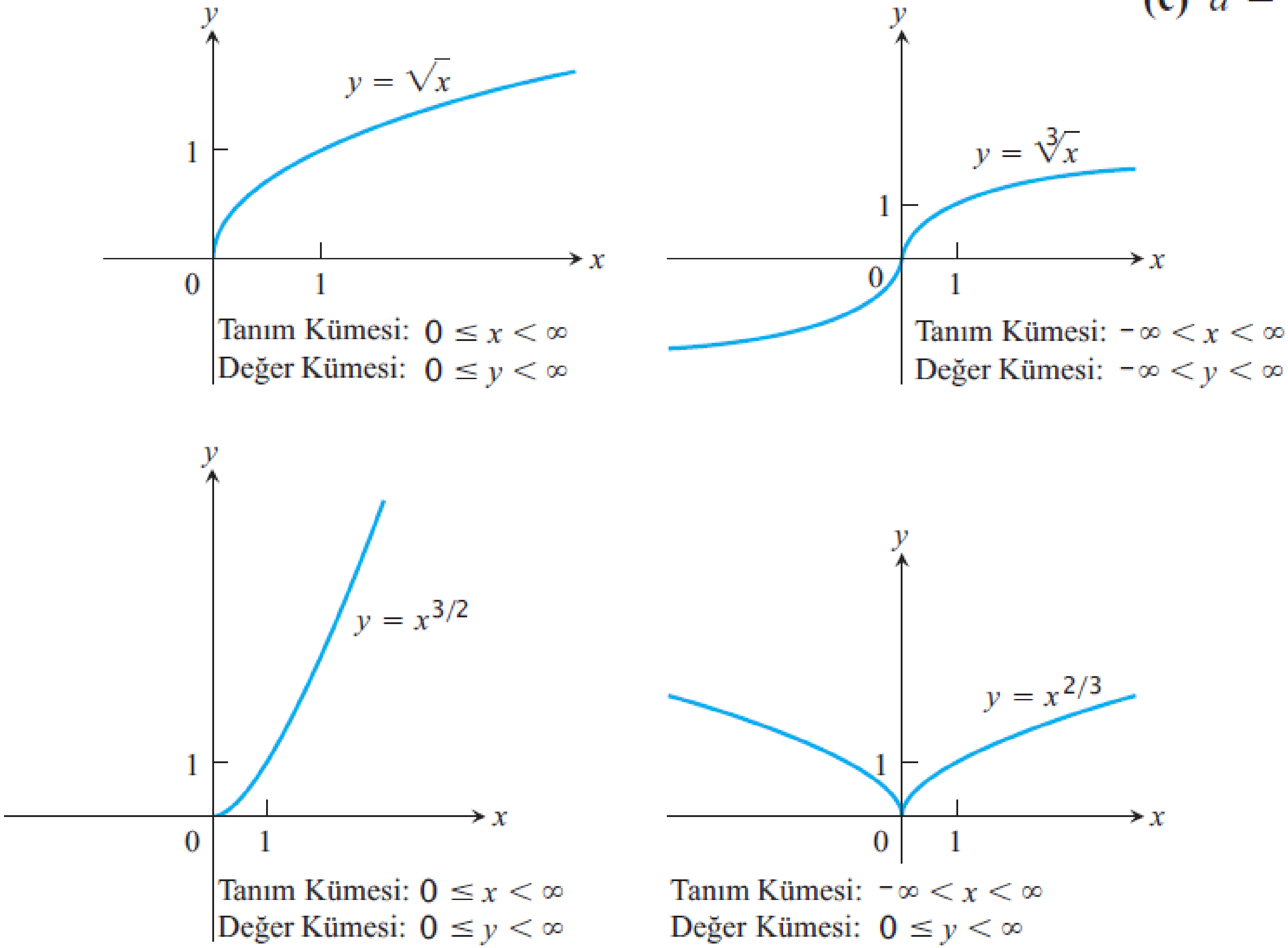
ŞEKİL 1.36 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için $f(x) = x^n$'in grafikleri $-\infty < x < \infty$ için tanımlıdır.

(b) $a = -1$ veya $a = -2$.



ŞEKİL 1.37 (a) $a = -1$ ve (b) $a = -2$ için $f(x) = x^a$ fonsiyonlarının grafikleri.

(c) $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ ve $\frac{2}{3}$



ŞEKİL 1.38 $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ ve $\frac{2}{3}$. için $f(x) = x^a$ fonksiyonlarının grafikleri.

Polinomlar n, negatif olmayan bir tam sayı ve a_0, a_1, a_2, ... , a_n sayıları (polinomun **katsayıları** denir) reel sabitler olmak üzere

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ile tanımlı p fonksiyonuna **polinom** denir. Bütün polinomların tanım kümeleri $(-\infty, \infty)$ dur. İlk katsayı $a_n \neq 0$ ve $n > 0$ ise n'ye polinomun **derecesi** denir. $m \neq 0$ ile lineer fonksiyonlar 1. dereceden polinomlardır. Genellikle $p(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde yazılan 2. derece polinomlara **quadratik fonksiyonlar** denir. Benzer şekilde 3. dereceden $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomları **kübik fonksiyonlar** dır. Şekil 1.39 da üç polinomun grafikleri görülmektedir. Polinomların grafiklerinin nasıl çizildiğini Bölüm 4'te öğreneceksiniz.

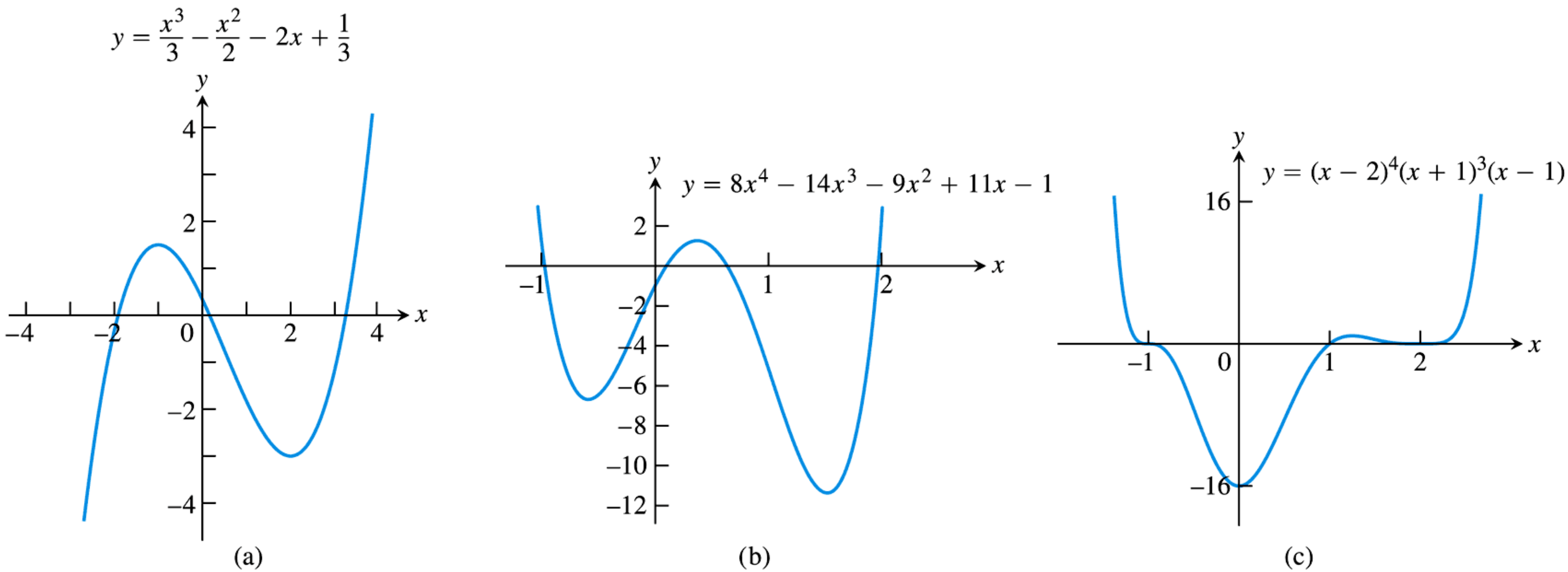


FIGURE 1.18 Graphs of three polynomial functions.

Rasyonel Fonksiyonlar Bir **rasyonel fonksiyon** iki polinomun bölümü veya oranıdır:

p ve q polinomlar olmak üzere $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

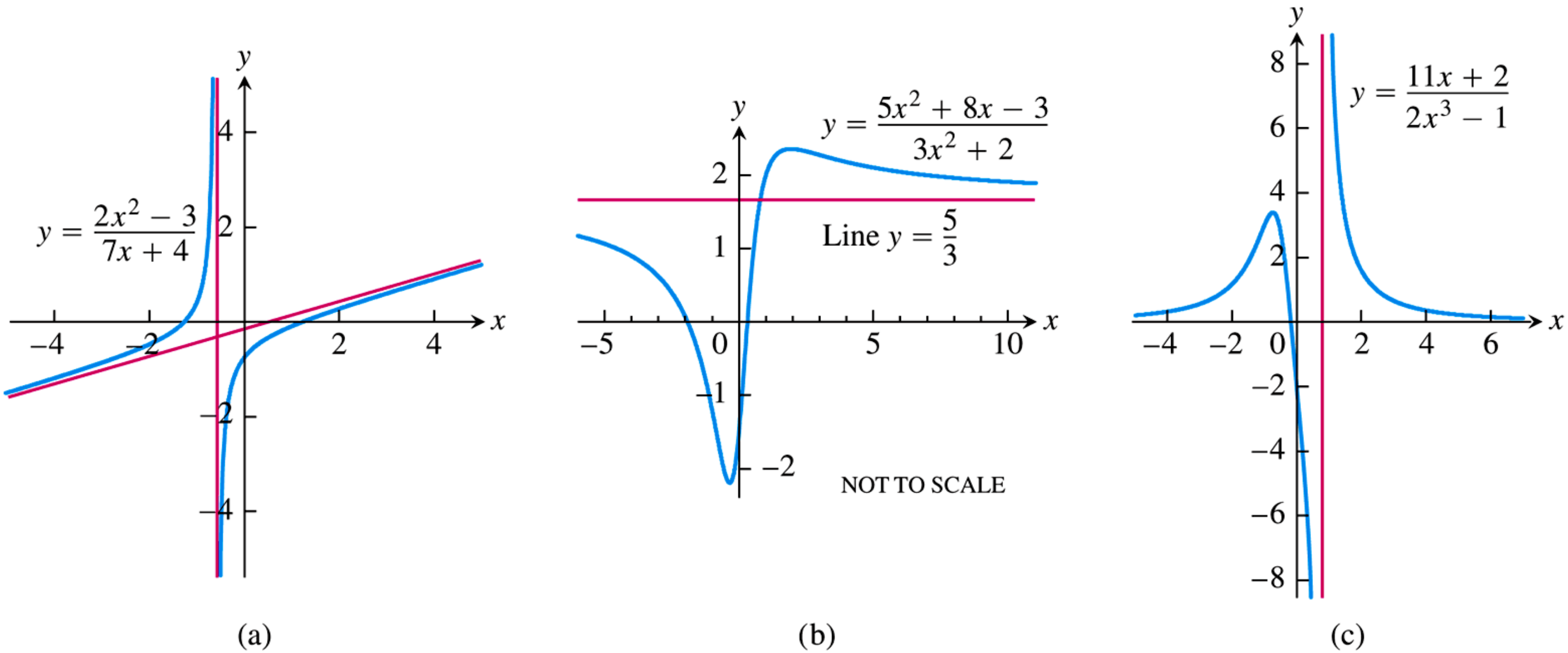
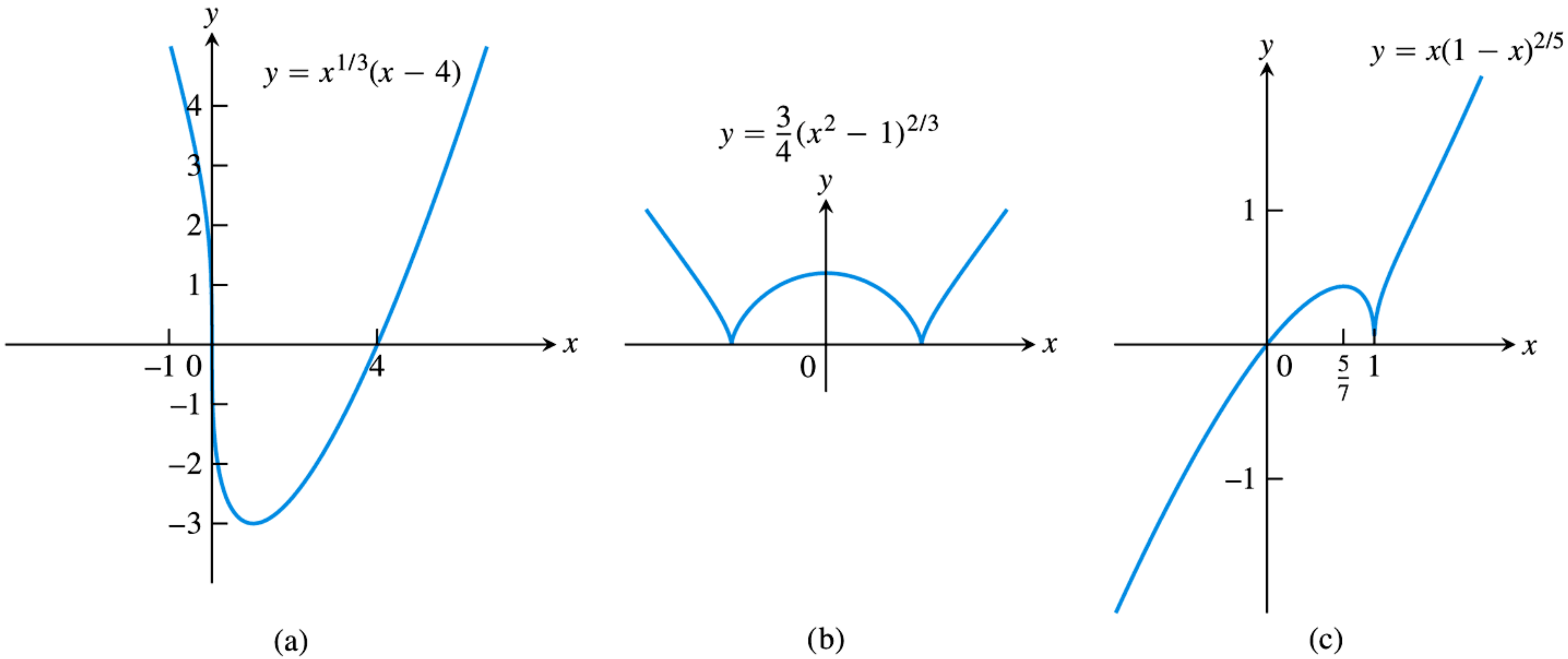


FIGURE 1.19 Graphs of three rational functions. The straight red lines are called *asymptotes* and are not part of the graph.

Cebirsel Fonksiyonlar

Cebirsel işlemler kullanarak polinomlardan oluşturulmuş herhangi bir fonksiyon (toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve kök alma) cebirsel fonksiyonlar sınıfı içinde yer alır.

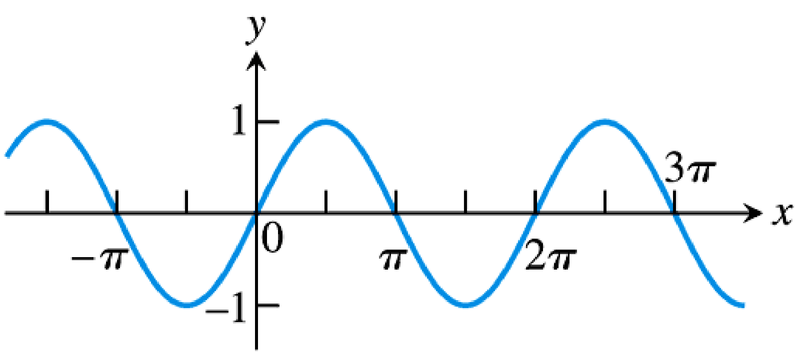


Cebirsel fonksiyon grafikleri

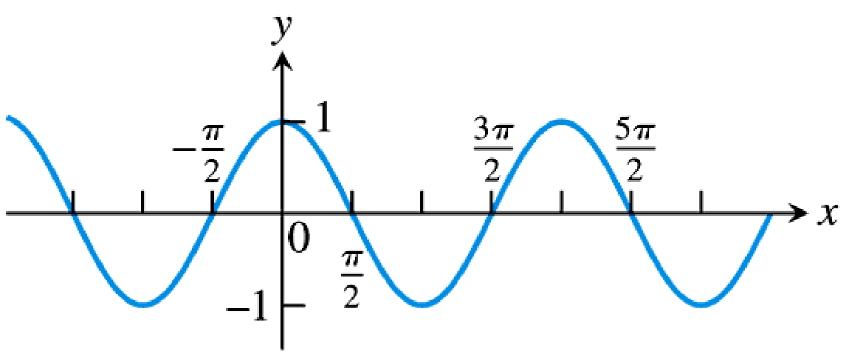
Cebirsel Olmayan (Transendental) Fonksiyonlar

Cebirsel olmayan fonksiyonlar arasında trigonometrik, ters trigonometrik, üstel ve logaritmik fonksiyonlar ve diğer birçok fonksiyon vardır.

Trigonometrik Fonksiyonlar : 6 temel trigonometrik fonksiyon Bölüm 1.3 ‘te incelenecektir. Bunlardan sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının grafikleri aşağıda gösterilmiştir.



(a) $f(x) = \sin x$



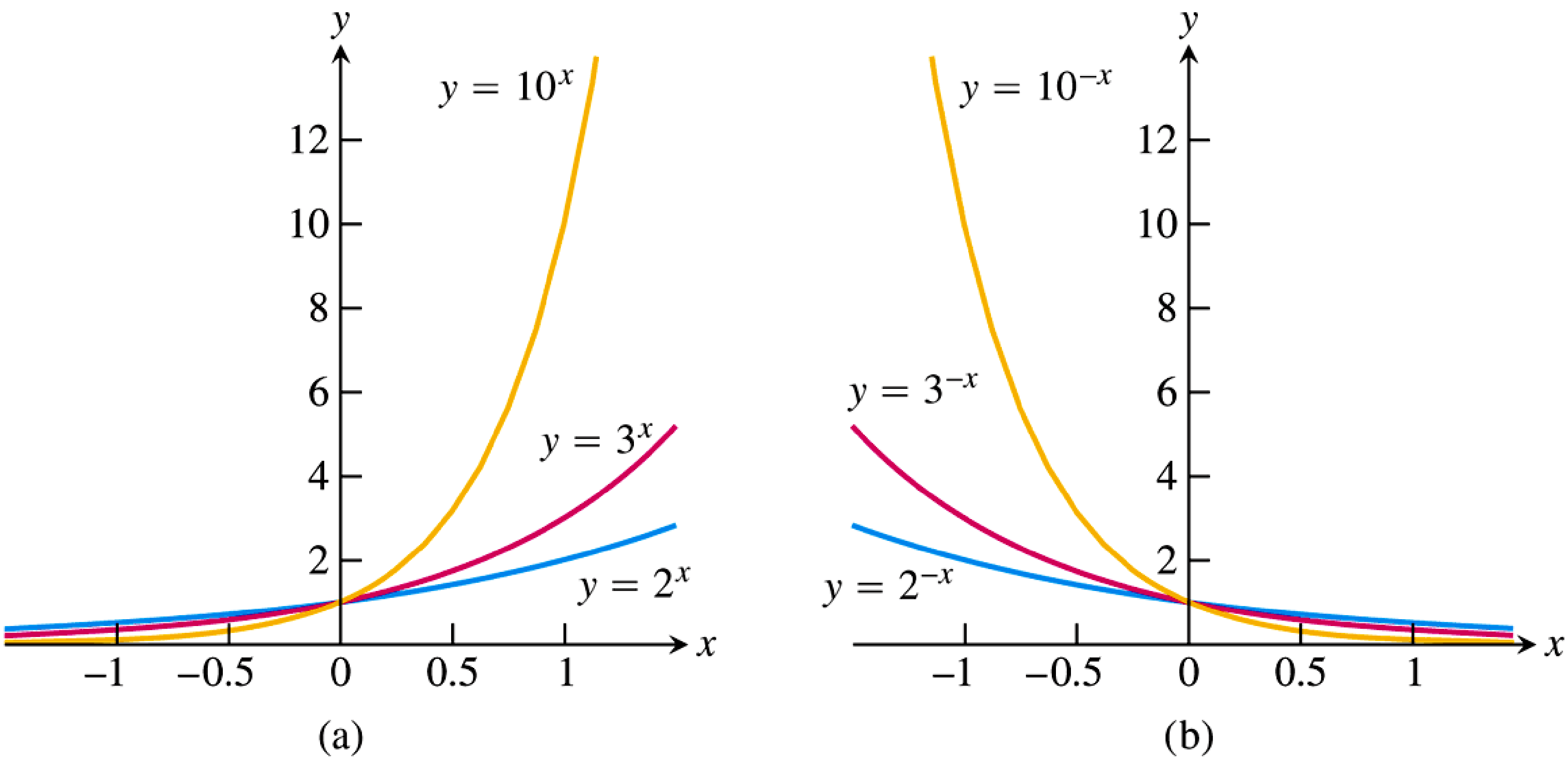
(b) $f(x) = \cos x$

Üstel fonksiyonlar

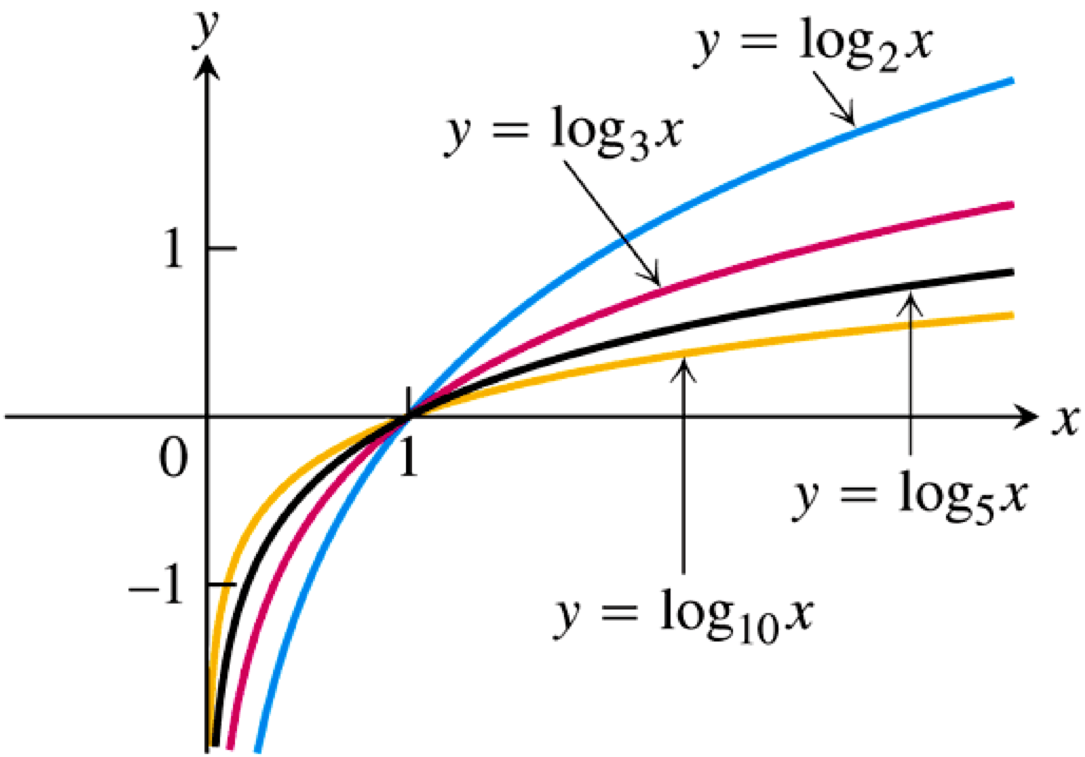
$a > 0, a \neq 1$ pozitif sayısı taban olmak üzere $f(x) = a^x$ biçimindeki fonksiyonlara üstel fonksiyonlar denir. Tüm üstel fonksiyonlar $(-\infty, \infty)$ tanım aralığı ve $(0, \infty)$ görüntüsüne sahiptir. Dolayısıyla üstel bir fonksiyon asla 0 değerini almaz.

Logaritmik Fonksiyonlar

$a > 0, a \neq 1$ pozitif sayısı taban olmak üzere $f(x) = \log_a x$ biçimindeki fonksiyonlara Logaritmik fonksiyonlar denir. Bu tip fonksiyonlar üstel fonksiyonların ters fonksiyonlarıdır, dolayısıyla $(0, \infty)$ tanım aralığı ve $(-\infty, \infty)$ görüntüsüne sahiptirler.



Üstel fonksiyon grafikleri



Logaritmik fonksiyon grafikleri

1.2

Fonksiyonların Birleştirilmesi

Fonksiyonların Birleştirilmesi

Rakamlar gibi fonksiyonlar da yeni fonksiyonlar üretmek için toplanabilir, çıkarılabilir, çarpılır ve bölünebilir (paydanın sıfır olması durumu hariç). Eğer f ve g iki fonksiyon ise, o zaman hem f hem de g'nin tanım kümesine ait her x için ($x \in D(f) \cap D(g)$), $f+g, f-g$ ve fg fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$x \in D(f) \cap D(g)$ ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere f/g işlemi de tanımlanır:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad g(x) \neq 0$$

Örnek: $f(x) = \sqrt{x}$ *ve* $g(x) = \sqrt{1-x}$ fonksiyonlarının tanım kümeleri

$D(f) = [0, \infty)$, $D(g) = (-\infty, 1]$ dir. Buna göre:

Fonksiyon	Formül	Tanım Kümesi
$f+g$	$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$	$[0, 1] = D(f) \cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$	$[0, 1]$
$g-f$	$(g-f)(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$	$[0, 1]$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1-x)}$	$[0, 1]$
f/g	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0, 1)$ ($x = 1$ excluded)
g/f	$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0, 1]$ ($x = 0$ excluded)

Tanım (Bileşke Fonksiyon): f ve g iki fonksiyon olmak üzere, $f \circ g$ bileşke fonksiyonu,

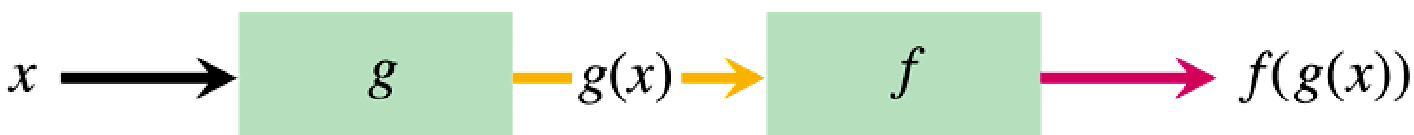
$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

şeklinde tanımlanır.

$f \circ g$ ‘nin tanım kümesi öyle x ‘lerden oluşur ki;

$$x \in D(g) \ \ ve \ \ g(x) \in D(f)$$

dır.



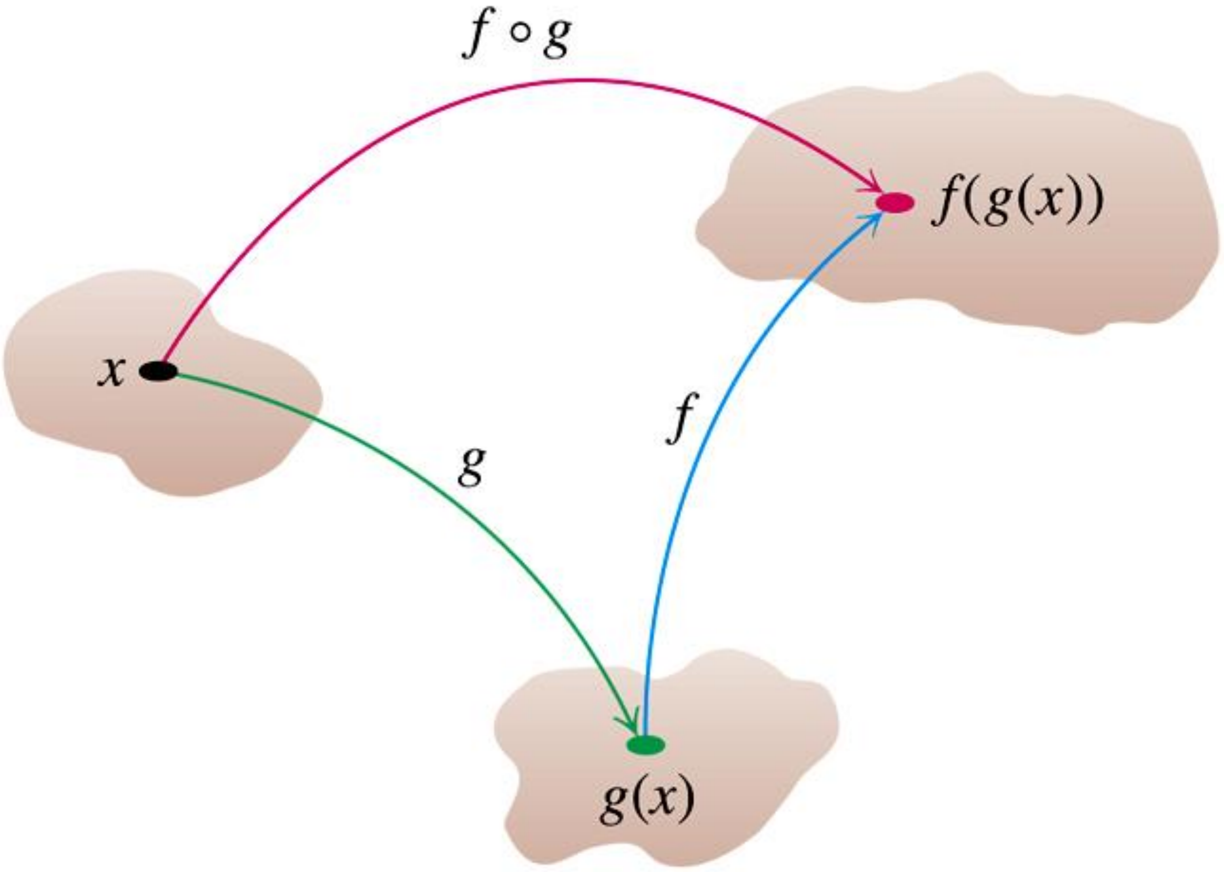


FIGURE 1.28 Arrow diagram for $f \circ g$.

Örnek: $f(x) = \sqrt{x}$ $ve\ g(x) = x + 1$ olsun. Aşağıdakileri bulun.

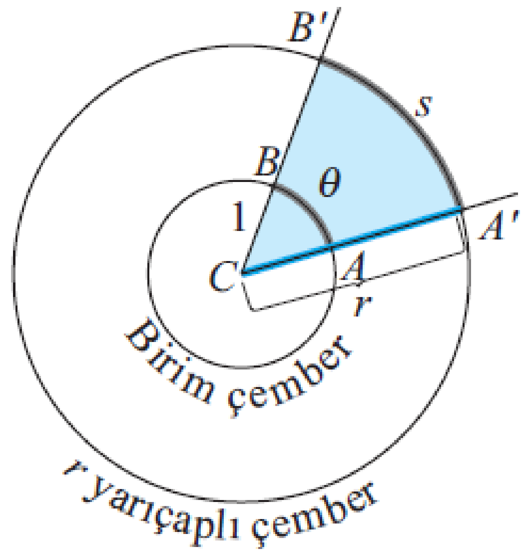
a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$ c) $(f \circ f)(x)$ d) $(g \circ g)(x)$

Bileşke	Tanım
(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$	$[0, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x) + 1 = (x+1) + 1 = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

1.3

Trigonometrik Fonksiyonlar

Bu bölümde, radyan ölçüsü ve temel trigonometrik fonksiyonları inceleyeceğiz. Trigonometrik fonksiyonlar periyodik, veya tekrarlı, olmaları ve bundan dolayı, doğal olarak ortaya çıkan birçok periyodik süreci modellemeleri sebebiyle önemlidirler



Açılar derece veya radyan cinsinden ölçülür. Daha ilerideki hesaplamaları kolaylaştıracağı için **radyan** olarak adlandırılan birimleri kullanmak daha iyidir.

Yukarıdaki şekilde birim çemberin merkezindeki *ACB* açısının **radyan ölçüsü** *ACB* açısının birim çemberden kestiği yayın uzunluğuna eşittir. Şekilde, θ açısı radyan olarak ölçüldüğünde, r yarıçaplı bir çemberden kesilen **yay uzunluğu** 'nun $s = r\theta$ olduğu gösterilmektedir.

TABLE 1.2 Angles measured in degrees and radians

Degrees	−180	−135	−90	−45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radians)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

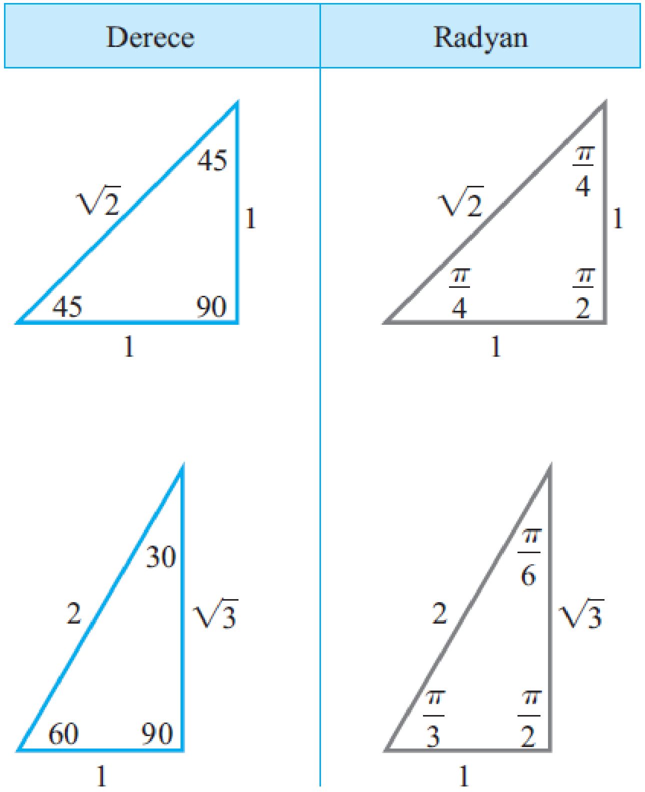
Dönüşüm Formülleri

$$1 \text{ derece} = \frac{\pi}{180} \;(\approx 0.02) \text{ radyan}$$

$$\text{Dereceden radyana: } \frac{\pi}{180} \text{ ile çarpın}$$

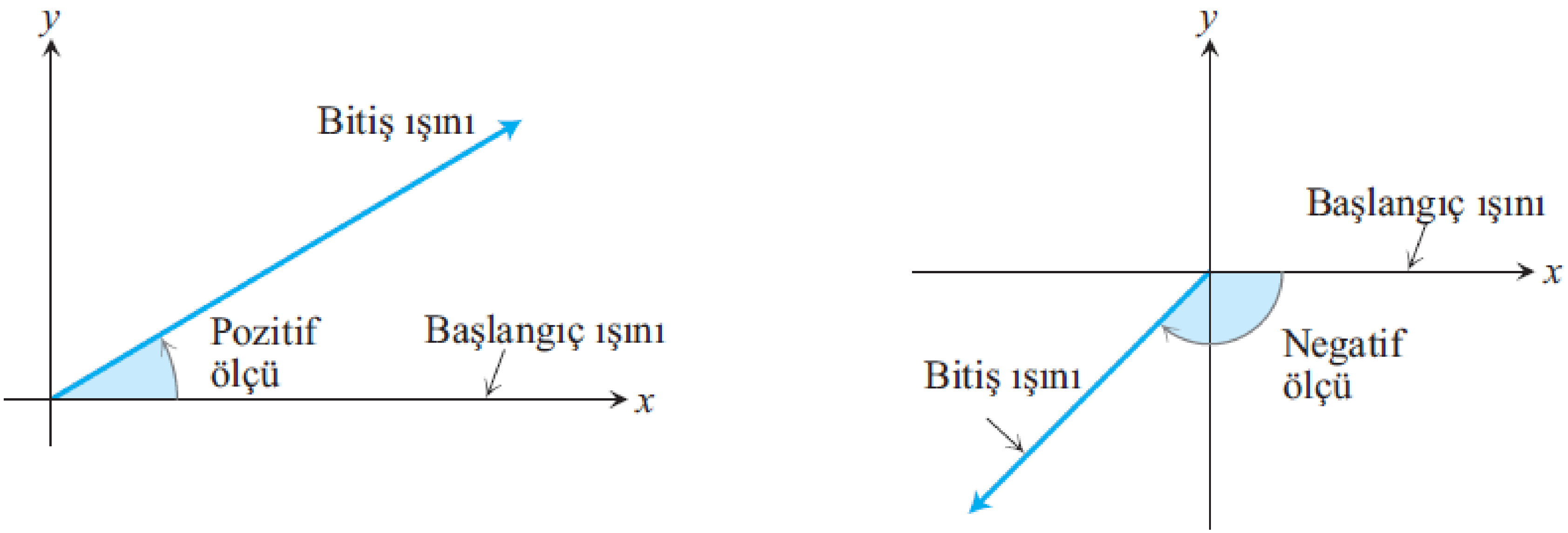
$$1 \text{ radyan} = \frac{180}{\pi} \;(\approx 57) \text{ derece}$$

$$\text{Radyandan dereceye : } \frac{180}{\pi} \text{ ile çarpın}$$

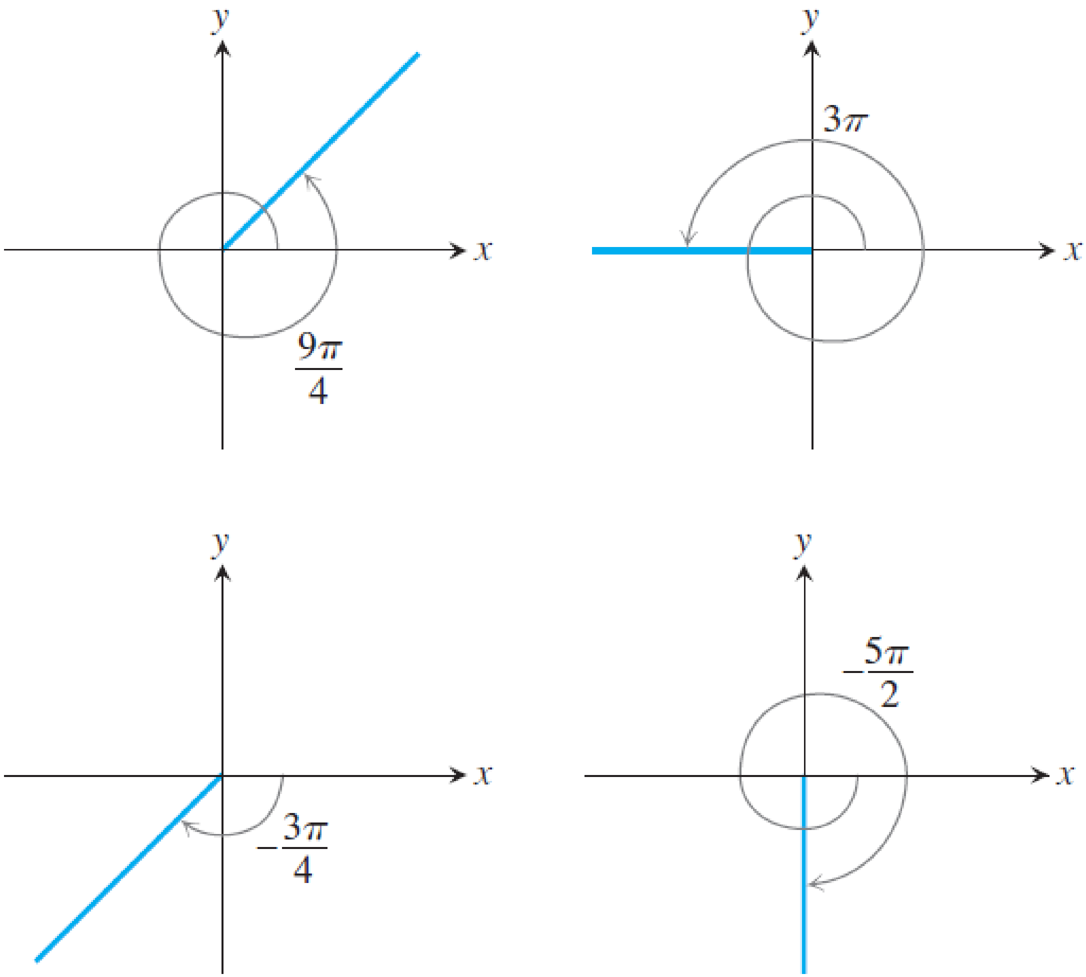


ŞEKİL 1.64 Bir üçgenin açıları, derece ve radyan cinsinden.

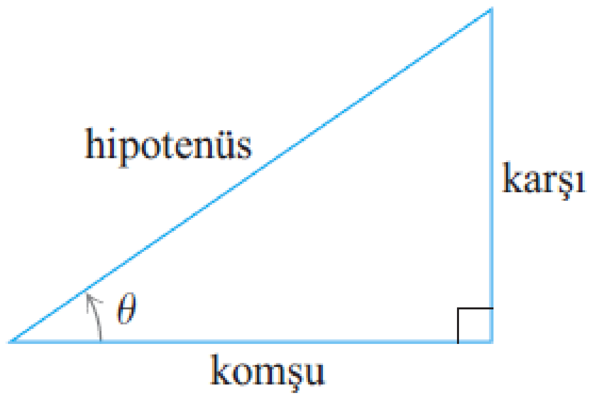
Açı Uyumu: Radyan Kullanın
Şu andan itibaren bu kitapta ölçülen bütün açılar, derece veya başka bir birim açık olarak belirtilmedikçe, radyan olarak alınacaktır. $\pi/3$ açısından bahsederken, $\pi/3$ derece değil, $\pi/3$ radyan (60°) anlaşılacaktır. Analiz yaparken, hesap makinenizin modunu radyana ayarlayın.



ŞEKİL 1.65 *xy*-düzleminde standart konumda açılar.



ŞEKİL 1.66 Sıfırdan farklı radyan ölçüleri pozitif veya negatif olabilir ve 2π'nin çok dışına çıkabilirler.



$$\sin\theta = \frac{\text{karşı}}{\text{hipotenüs}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hipotenüs}}{\text{karşı}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{komşu}}{\text{hipotenüs}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenüs}}{\text{komşu}}$$

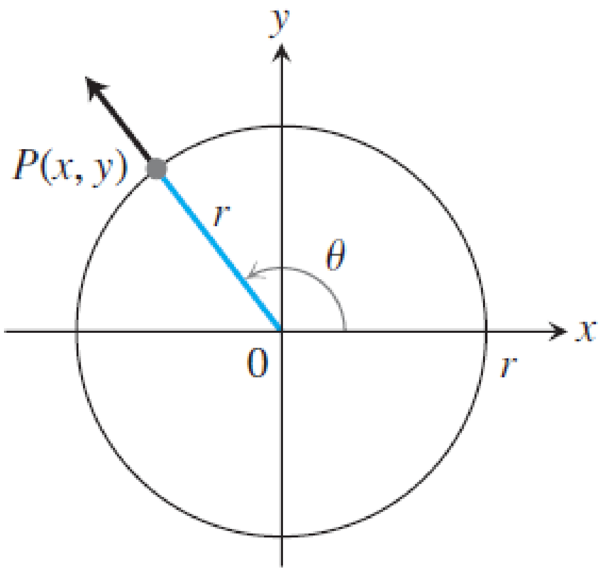
$$\tan\theta = \frac{\text{karşı}}{\text{komşu}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{komşu}}{\text{karşı}}$$

ŞEKİL 1.67 Bir dar açının trigonometrik oranları.

sinüs: $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ **kosekant:** $\csc\theta = \dfrac{r}{y}$

cosinüs: $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ **sekant:** $\sec\theta = \dfrac{r}{x}$

tanjant: $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ **kotanjant:** $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

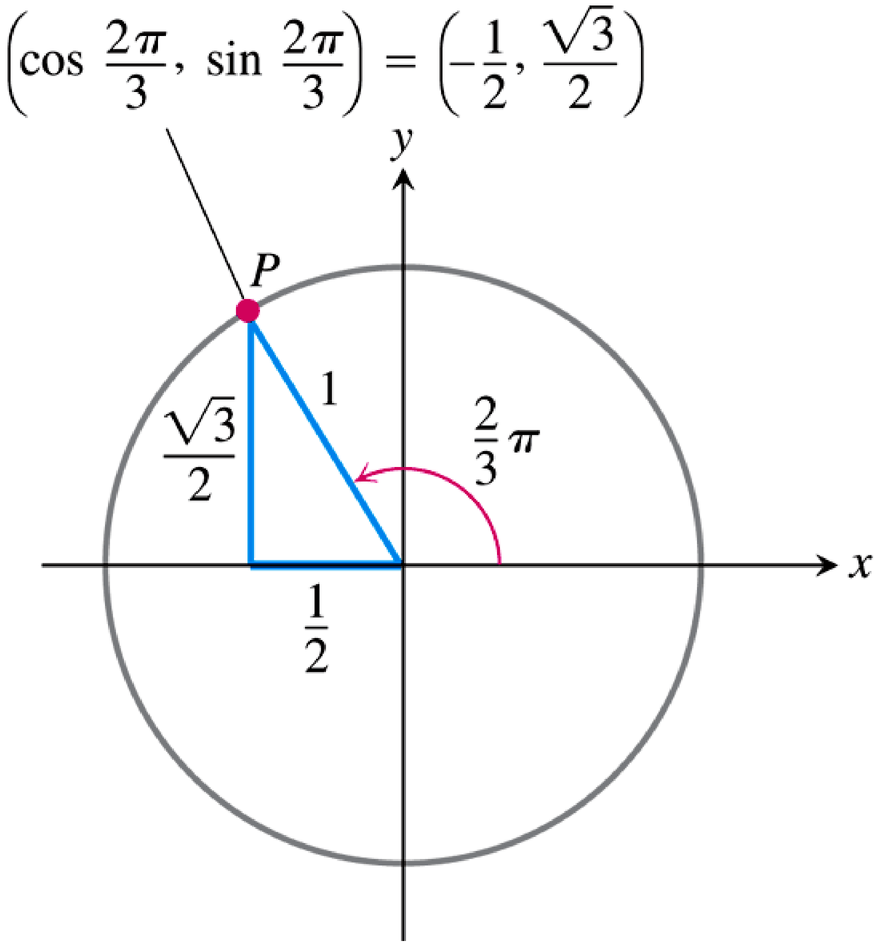


ŞEKİL 1.68 Genel bir θ açısının trigonometrik fonksiyonları x, y ve r cinsinden tanımlanır.

Ayrıca bölüm tanımlı ise,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$



ŞEKİL 1.71 $2\pi/3$ radyanın sinüs ve kosinüs'ünün hesaplandığı üçgen. Kenar uzunlukları, dik üçgenlerin geometrisinden gelmektedir.

TABLO 1.4 Seçilmiş bazı θ değerleri için sin θ, cos θ ve tan θ değerleri

Derece	**–180**	**–135**	**–90**	**–45**	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**	**135**	**150**	**180**	**270**	**360**
θ (radyan)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin θ	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan θ	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0

Trigonometrik Fonksiyonların Periyodikliği ve Grafikleri

θ ölçüsünde bir açı ile $\theta + 2\pi$ ölçüsünde bir açı standart konumdaysalar, bitiş ışınları çakışır. Dolayısıyla iki açının da trigonometrik değerleri aynıdır:

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \qquad \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \qquad \tan(\theta + 2\pi) = \tan\theta$$
$$\sec(\theta + 2\pi) = \sec\theta \qquad \csc(\theta + 2\pi) = \csc\theta \qquad \cot(\theta + 2\pi) = \cot\theta$$

Benzer olarak, $\cos(\theta - 2\pi) = \cos\theta$, $\sin(\theta - 2\pi) = \sin\theta$ vs. Bu tekrar etme davranışını, altı temel trigonometrik fonksiyon *periyodiktir* şeklinde tanımlarız.

TANIM Periyodik Fonksiyon

Her x değeri için, $f(x+p) = f(x)$ olacak şekilde bir p değeri bulunabiliyorsa, $f(x)$ fonksiyonu periyodiktir. Böyle en küçük p değerine f'nin **periyodu** denir.

Trigonometrik Fonksiyonların Periyodu

Periyot π: $\tan(x + \pi) = \tan x$

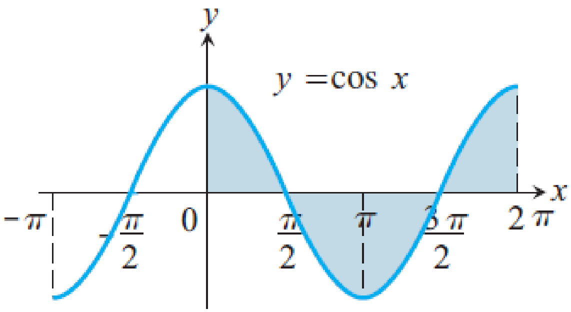
$\cot(x + \pi) = \cot x$

Periyot 2π: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$

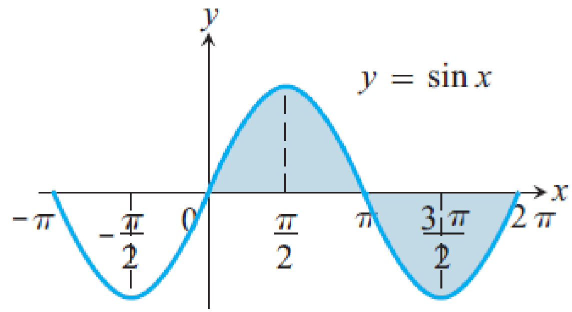
$\sec(x + 2\pi) = \sec x$

$\csc(x + 2\pi) = \csc x$



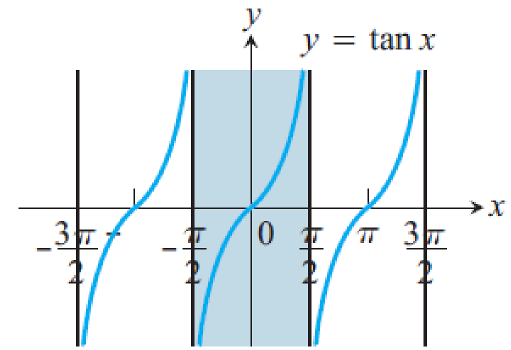
Tanım kümesi: $-\infty < x < \infty$
Değer kümesi: $-1 \le y \le 1$
Periyot: 2π

(a)



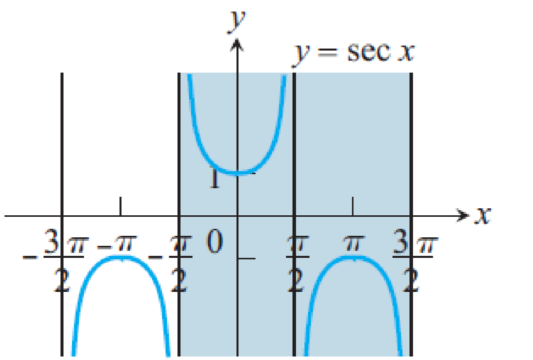
Tanım kümesi: $-\infty < x < \infty$
Değer kümesi: $-1 \le y \le 1$
Periyot: 2π

(b)



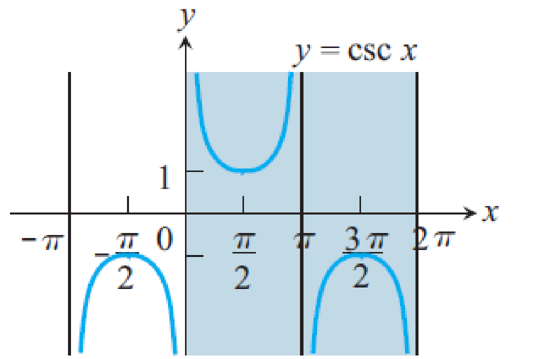
Tanım kümesi: $x \neq \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Değer kümesi: $-\infty < y < \infty$
Periyot: π

(c)



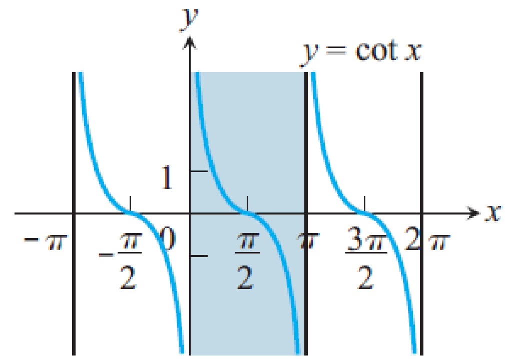
Tanım kümesi: $x \neq \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
Değer kümesi: $y \le -1$ ve $y \ge 1$
Periyot: 2π

(d)



Tanım kümesi: $x \neq 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi, \ldots$
Değer kümesi: $y \le -1$ ve $y \ge 1$
Periyot: 2π

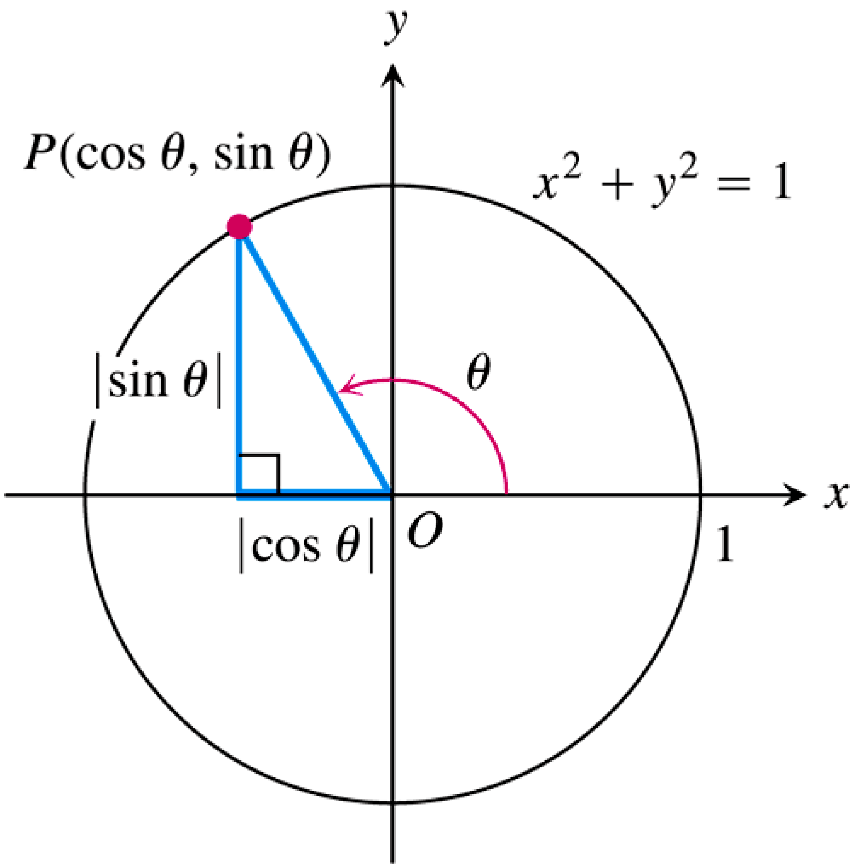
(e)



Tanım kümesi: $x \neq 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi, .$
Değer kümesi: $-\infty < y < \infty$
Periyot: π

(f)

ŞEKİL 1.73 Radyan ölçü kullanarak (a) kosinüs, (b) sinüs, (c) tanjant, (d) sekant, (e) cosekant ve (f) kotanjant grafikleri. Gölgeli bölümler her bir fonksiyonun periyodunu belirtmektedir.



Çift	Tek
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\tan(-x) = -\tan x$
	$\csc(-x) = -\csc x$
	$\cot(-x) = -\cot x$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \tag{3}$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Addition Formulas

$$\begin{aligned} \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \end{aligned} \tag{4}$$

Double-Angle Formulas

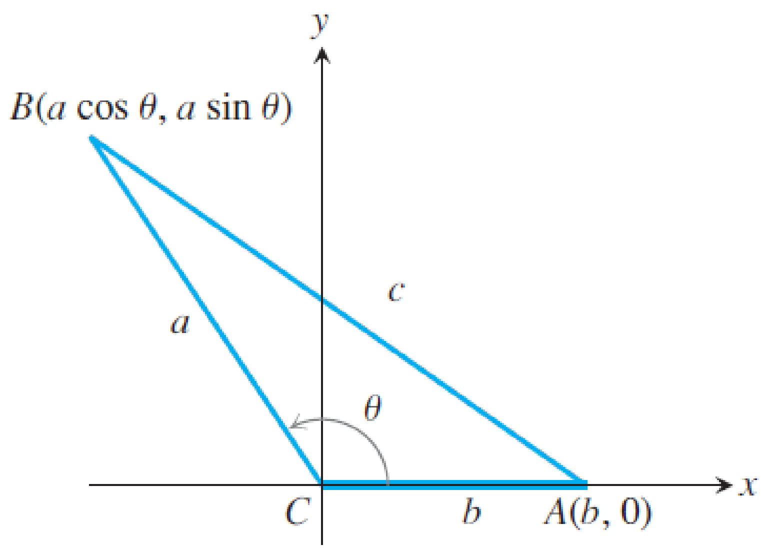
$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{5}$$

Half-Angle Formulas

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \tag{6}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \tag{7}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta. \tag{8}$$



şekil 1.75 A ile B arasındaki uzaklığın karesi kosinüs kuralını verir.

Kosinüs Kuralı

a, b ve c bir ABC üçgeninin kenarları ve θ'da c'nin karşısındaki açıysa

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos \theta \tag{6}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme **kosinüs kuralı** denir.

$$\boxed{-|\theta| \le \sin\theta \le |\theta| \qquad \text{and} \qquad -|\theta| \le 1 - \cos\theta \le |\theta|.}$$

1.5

Üstel Fonksiyonlar

TANIM **Genel Eksponansiyel Fonksiyon**

Herhangi $a > 0$ ve x sayıları için, a tabanlı eksponansiyel fonksiyon

$$a^x = e^{x \ln a}$$

dır.

TEOREM 3 **e^x İçin Üs Kuralları**

Her x, x_1 ve x_2 sayıları için e^x doğal eksponansiyel fonksiyonu aşağıdaki kuralla-ra uyar.

1. $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$
2. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
3. $\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1 - x_2}$
4. $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$

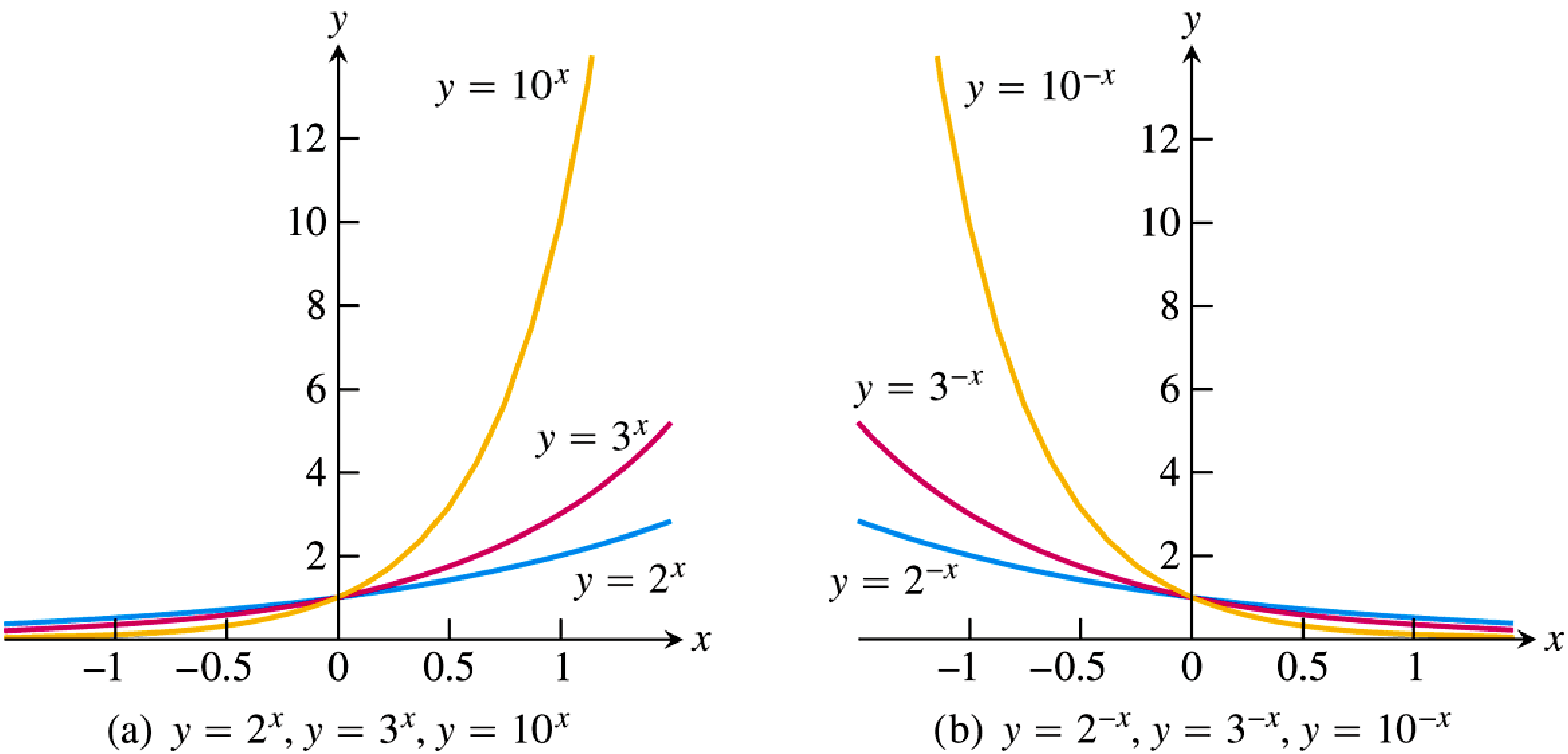


FIGURE 1.56 Graphs of exponential functions.

Rules for Exponents

If $a > 0$ and $b > 0$, the following rules hold true for all real numbers x and y.

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3. $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$

4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

5. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Doğal Üstel Fonksiyon

Tabanı $e = 2{,}718281828\ldots$ irrasyonel sayısı olan üstel fonksiyonlardır.

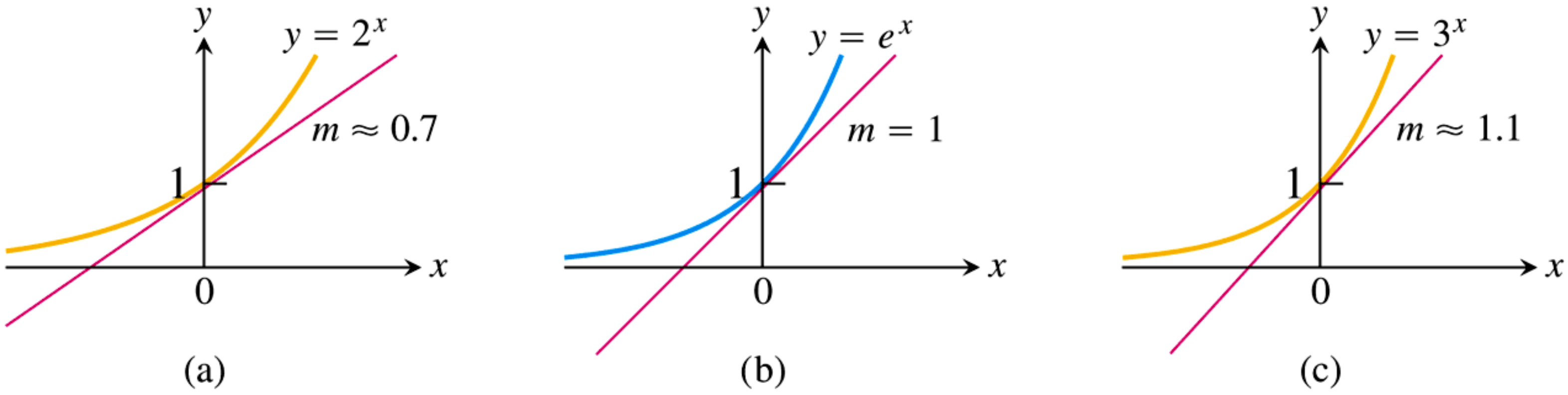
TANIM **Doğal Eksponansiyel Fonksiyon**

Her x reel sayısı için, $e^x = \ln^{-1} x = \exp x$, olarak tanımlanır.

e^x ve $\ln x$ İçin Ters Denklemler

$$e^{\ln x} = x \qquad (\text{her } x > 0 \text{ için}) \qquad (2)$$

$$\ln(e^x) = x \qquad (\text{her } x \text{ için}) \qquad (3)$$



x	$(1 + 1/x)^x$
1000	2.7169
2000	2.7176
3000	2.7178
4000	2.7179
5000	2.7180
6000	2.7181
7000	2.7181

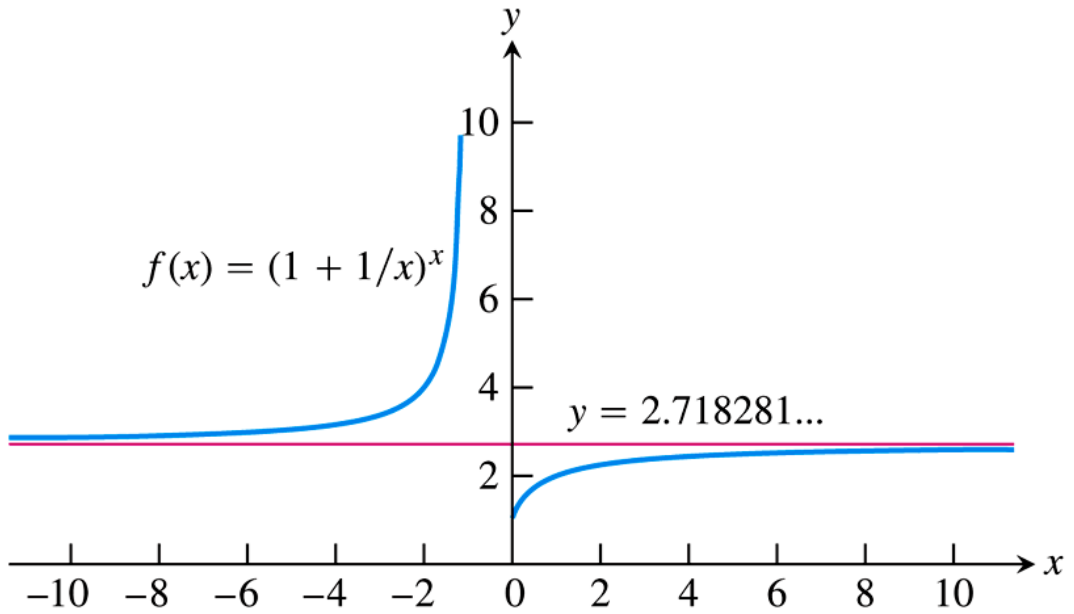


FIGURE 1.58 A graph and table of values for $f(x) = (1 + 1/x)^x$ both suggest that as x gets larger and larger, $f(x)$ gets closer and closer to $e \approx 2.7182818\ldots$.

1.6

Ters Fonksiyonlar ve Logaritmalar

Bir f fonksiyonun etkisini tersine çeviren veya yaptığının tersini yapan fonksiyona f fonksiyonunun tersi denir. Bir çok fonksiyonun, hepsinin olmasa da, bir tersi vardır.

TANIM **Bire-Bir Fonksiyon**

D tanım kümesinde $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise, $f(x)$ fonksiyonu D üzerinde **bire-bir** dir.

ÖRNEK 1 Bire-Bir Fonksiyonların Tanım Kümeleri

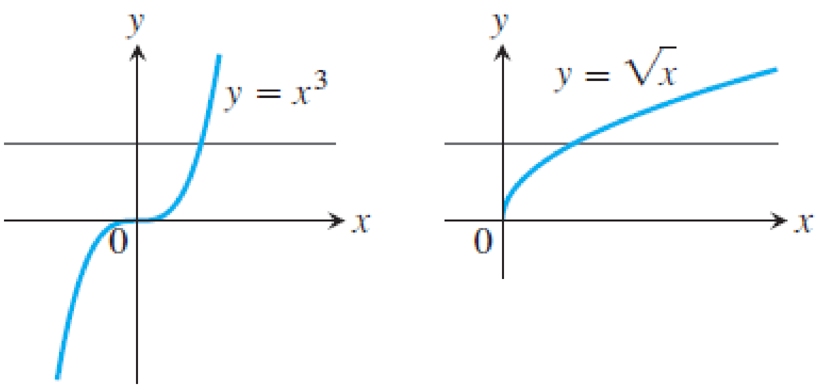
(a) $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu negatif olmayan sayılardan oluşan herhangi bir tanım kümesi üzerinde bire-bir dir. Çünkü $x_1 \neq x_2$ iken $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$ olur.

(b) $g(x) = \sin x$, $[0, \pi]$ aralığında bire-bir değildir, çünkü $\sin(\pi/6) = \sin(5\pi/6)$'dır. Ancak sinüs fonksiyonu $[0, \pi/2]$ aralığında bire-bir dir, çünkü $[0, \pi/2]$ üzerinde kesin olarak artan bir fonksiyondur. ■

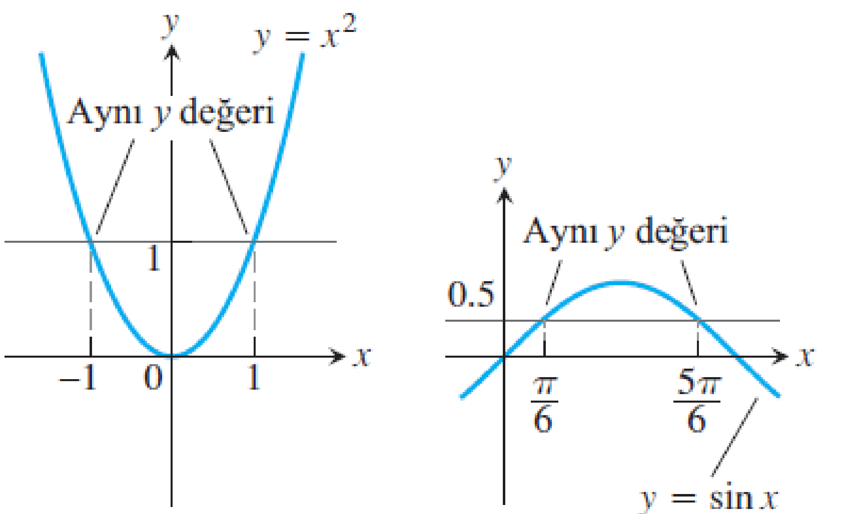
Bire-bir olan $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilen bir yatay eğriyi en fazla bir kere kesebilir. Doğruyu bir kereden fazla keserse aynı y değerini birden fazla alır ve dolayısıyla bire-bir olmaz (Şekil 7.1).

Bire-Bir Fonksiyonlar İçin Yatay Doğru Testi

$y = f(x)$ fonksiyonu ancak ve ancak, grafiği her yatay doğruyu en fazla bir kere keserse bire-bir dir.



Bire-bir: Grafik her yatay doğruyu en fazla bir kere keser.



Bire-bir değil: Grafik bir ya da daha fazla yatay doğruyu birden fazla defa keser.

TANIM **Ters Fonksiyon**

f'nin tanım kümesi D ve değer kümesi R olan bire-bir bir fonksiyon olduğunu varsayın. f^{-1} **ters fonksiyonu**

$$f(b) = a \text{ ise, } f^{-1}(a) = b$$

ile tanımlanır. f^{-1}'in tanım kümesi R ve değer kümesi D dir.

f ve f^{-1}'in tanım ve değer kümeleri yer değiştirir. f'nin tersi için kullanılan f^{-1} sembolü "f'nin tersi" olarak okunur. f^{-1}'deki -1 bir kuvvet *değildir*: $f^{-1}(x)$, $1/f(x)$ anlamına gelmez.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad f\text{'nin tanım kümesindeki her } x \text{ için}$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = y, \quad f^{-1}\text{'in tanım kümesindeki } (f\text{'nin değer kümesi}) \text{ her } y \text{ için}$$

Yalnız, bire-bir bir fonksiyonun tersi var olabilir. Nedeni şudur:

x_1 ve x_2 farklı girdileri için $f(x_1) = y$ ve $f(x_2) = y$ ise $f^{-1}(y)$'ye hem

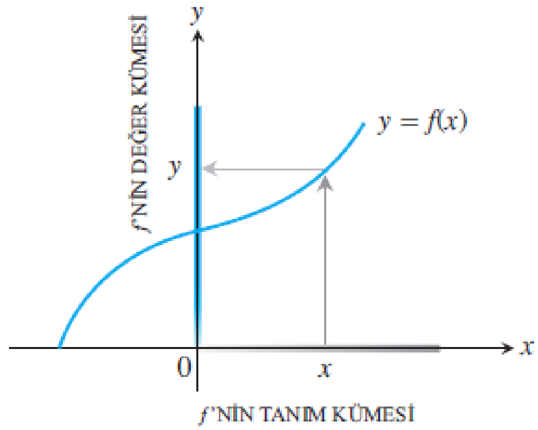
$f^{-1}(f(x_1)) = x_1$ ve hem de $f^{-1}(f(x_2)) = x_2$
sağlanacak şekilde bir değer atamanın yolu yoktur.

Ters Fonksiyonları Bulmak

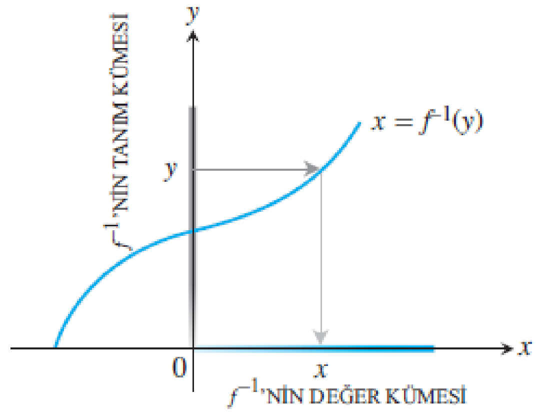
f'den f^{-1}'e geçme işlemi iki adımlı bir işlem olarak özetlenebilir.

1. $y = f(x)$ denleminden x'i çözün. Bu, x'i y'nin bir fonksiyonu olarak ifade eden bir $x = f^{-1}(y)$ formülü verir.

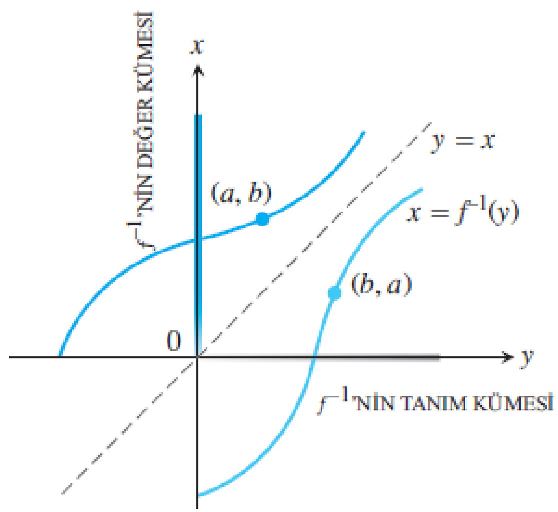
2. x ve y'yi aralarında değiştirerek, f^{-1}'i geleneksel formatta, x'i bağımsız değişken y'yi de bağlı değişken olarak, ifade eden $y = f^{-1}(x)$ formülünü elde edilir.



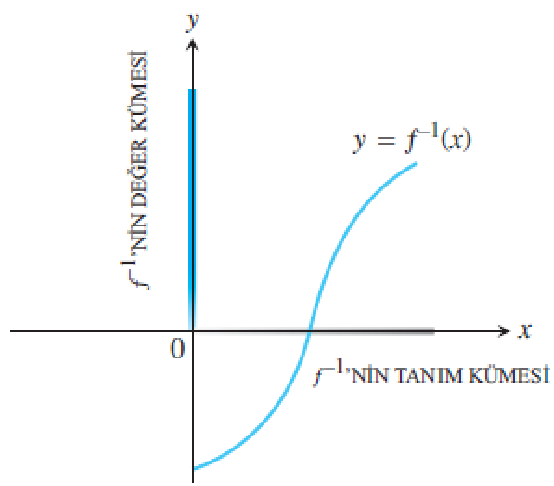
(a) f'nin x'teki değerini bulmak için, x'ten başlar, eğriye gider ve y-eksenine geçeriz.



(b) f'nin grafiği aynı zamanda f^{-1}'in grafiğidir, fakat x ve y yer değiştirmiş olarak, y'yi vermiş olan x'i bulmak için, y'den başlar, eğriye gider ve x-eksenine ineriz. f^{-1}'in tanım kümesi f'nin değer kümesidir. f^{-1}'in değer kümesi f'nin tanım kümesidir.



(c) f^{-1}'in grafiğini her zamanki gibi çizmek için, sistemi $y = x$ doğrusundan yansıtırız.



(d) Sonra x ve y harflerini değiştiririz. Artık f^{-1}'in x'in bir fonksiyonu olarak normal görünüşte bir grafiği vardır.

ŞEKİL 7.2 $y = f(x)$'in grafiğinden $y = f^{-1}(x)$'in grafiğini belirlemek.

ÖRNEK 2 Bir Ters Fonksiyon Bulmak

$y = \frac{1}{2}x + 1$ 'in tersini x'in bir fonksiyonu olarak bulun.

Çözüm

1. *x'i y cinsinden çözün:*

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + 1 \\ 2y &= x + 2 \\ x &= 2y - 2. \end{aligned}$$

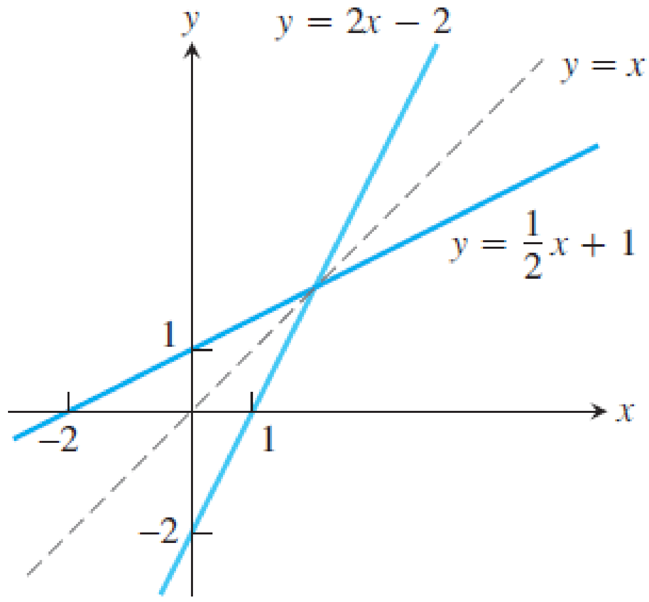
2. *x ve y'yi değiştirin:* $y = 2x - 2.$

$f(x) = (1/2)x + 1$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = 2x - 2$ fonksiyonudur. Kontrol etmek için, iki bileşkenin de birim fonksiyonu verdiğini doğrularız:

$$f^{-1}(f(x)) = 2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - 1 + 1 = x.$$

Şekil 7.3'e bakın. ■



ŞEKİL 7.3 $f(x) = (1/2)x + 1$ ve $f^{-1}(x) = 2x - 2$'nin grafiklerini birlikte çizmek grafiklerin $y = x$'e göre simetrisini gösterir. Eğimler, birbirinin çarpmaya göre tersidir (Örnek 2).

ÖRNEK 3 Bir Ters Fonksiyon Bulmak

$y = x^2, x \geq 0$ fonksiyonunun tersini x'in bir fonksiyonu olarak bulun.

Çözüm Önce x'i y cinsinden çözeriz:

$$y = x^2$$

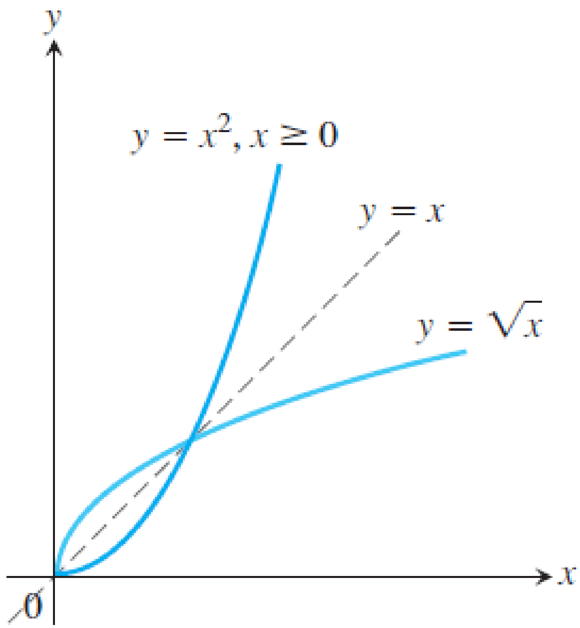
$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x \qquad x \geq 0 \text{ olduğu için } |x| = x$$

Sonra x ve y'nin yerini değiştiriz:

$$y = \sqrt{x}$$

$y = x^2, x \geq 0$ fonksiyonunun tersi $y = \sqrt{x}$ fonksiyonudur (Şekil 7.4).

Kısıtlanmış $y = x^2, x \geq 0$ fonksiyonunun tersine, kısıtlanmamış $y = x^2$ fonksiyonunun bire bir olmadığına, dolayısıyla tersinin bulunmadığına dikkat edin. ■



ŞEKİL 7.4 $y = \sqrt{x}$ ve $y = x^2, x \geq 0$, fonksiyonları birbirinin tersidir (Örnek 3).

Logaritmalar

TANIM $\log_a x$

Herhangi bir $a \neq 1$ pozitif sayısı için,

$\log_a x$, a^x'in ters fonksiyonudur.

a^x ve $\log_a x$ İçin Ters Denklemler

$$a^{\log_a x} = x \qquad (x > 0) \tag{3}$$

$$\log_a (a^x) = x \qquad (\text{her } x \text{ için}) \tag{4}$$

TEOREM 2 Logaritmaların Özellikleri

Herhangi $a > 0$ ve $x > 0$ sayıları için, doğal logaritma şu kuralları sağlar:

1. *Çarpım Kuralı:* $\ln ax = \ln a + \ln x$
2. *Bölüm Kuralı:* $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
3. *Çarpmaya Göre Ters Kuralı:* $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ — $a = 1$ ile Kural 2
4. *Kuvvet Kuralı:* $\ln x^r = r \ln x$ — r rasyonel

TABLO 7.2 *a* tabanlı logaritmaların özellikleri

Herhangi $x > 0$ ve $y > 0$ sayıları için

1. *Çarpım Kuralı:*

   $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

2. *Bölüm Kuralı:*

   $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3. *Çarpmaya Göre Ters Kuralı:*

   $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$

4. *Kuvvet Kuralı:*

   $\log_a x^y = y \log_a x$

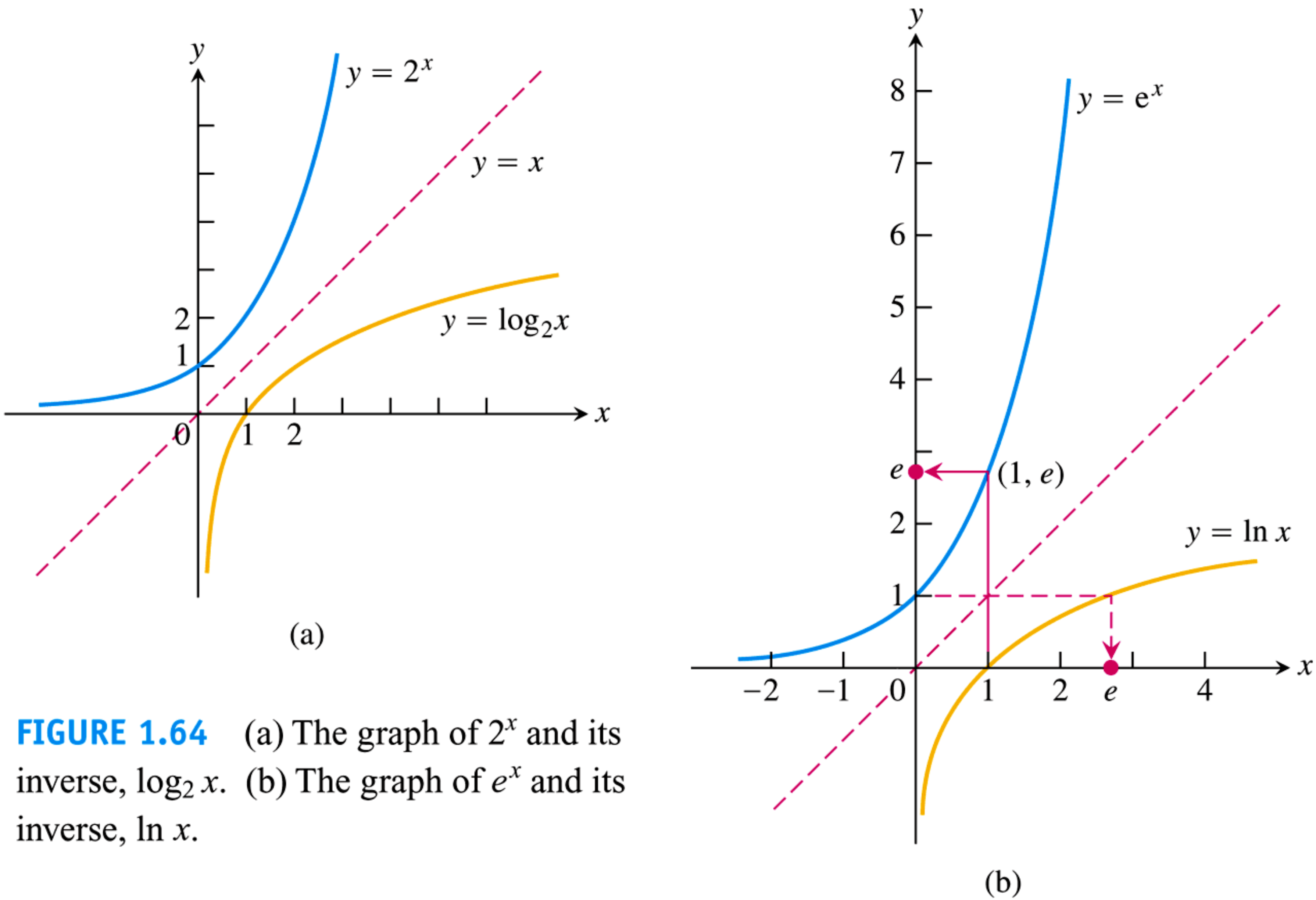


FIGURE 1.64 (a) The graph of 2^x and its inverse, $\log_2 x$. (b) The graph of e^x and its inverse, $\ln x$.

$$\boxed{\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x.}$$

In particular, if we set $x = e$, we obtain

$$\boxed{\ln e = 1}$$

because $e^1 = e$.

Inverse Properties for a^x and $\log_a x$

1. Base a: $a^{\log_a x} = x,\qquad \log_a a^x = x,\qquad a > 0, a \neq 1, x > 0$

2. Base e: $e^{\ln x} = x,\qquad \ln e^x = x,\qquad x > 0$

Every exponential function is a power of the natural exponential function.

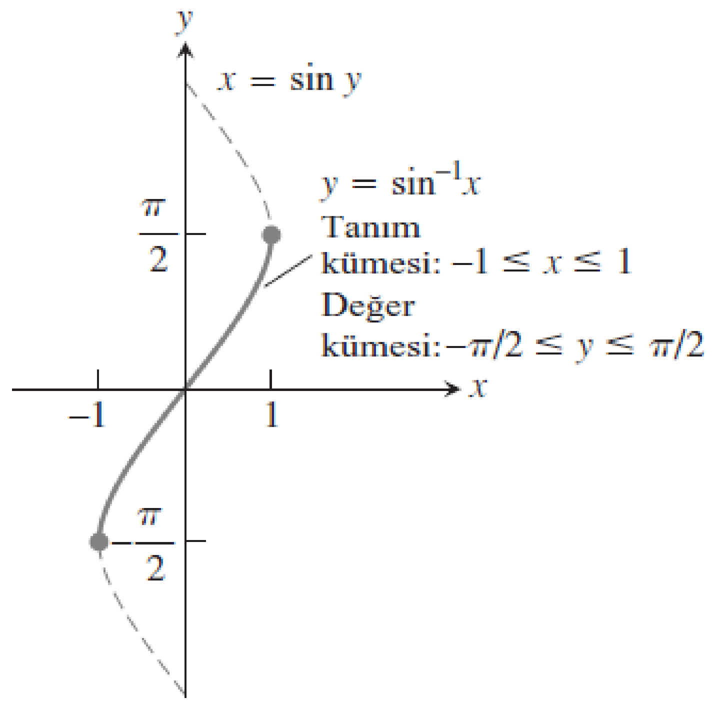
$$a^x = e^{x \ln a}$$

That is, a^x is the same as e^x raised to the power $\ln a$: $a^x = e^{kx}$ for $k = \ln a$.

Change of Base Formula

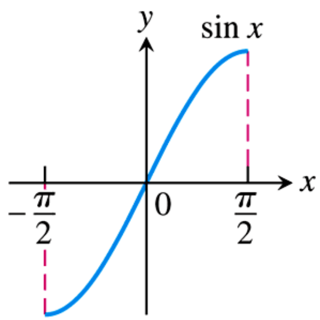
Every logarithmic function is a constant multiple of the natural logarithm.

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

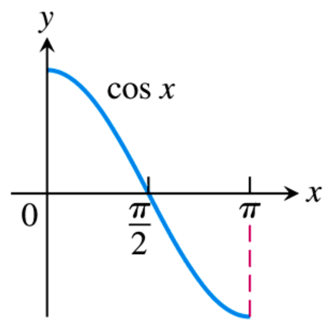


ŞEKİL 7.16 $y = \sin^{-1} x$'in grafiği.

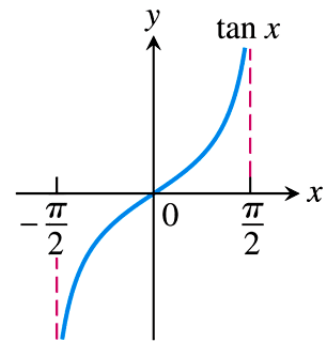
Trigonometrik fonksiyonları bire-bir yapan tanım kümesi kısıtlamaları



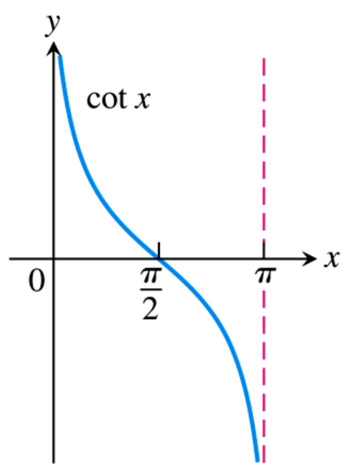
$y = \sin x$
Domain: $[-\pi/2, \pi/2]$
Range: $[-1, 1]$



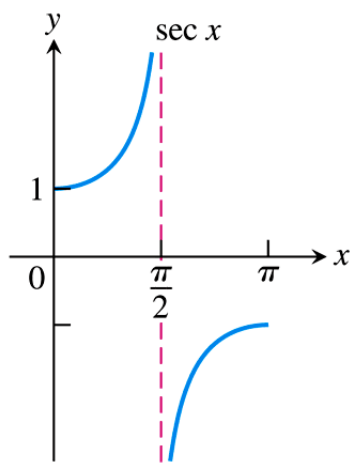
$y = \cos x$
Domain: $[0, \pi]$
Range: $[-1, 1]$



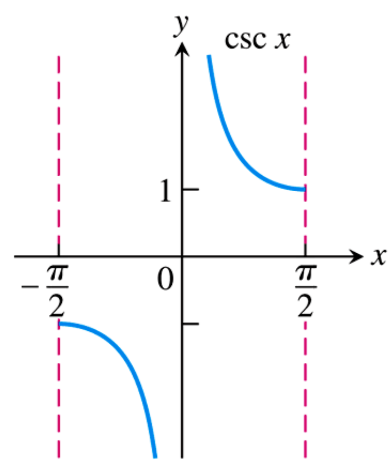
$y = \tan x$
Domain: $(-\pi/2, \pi/2)$
Range: $(-\infty, \infty)$



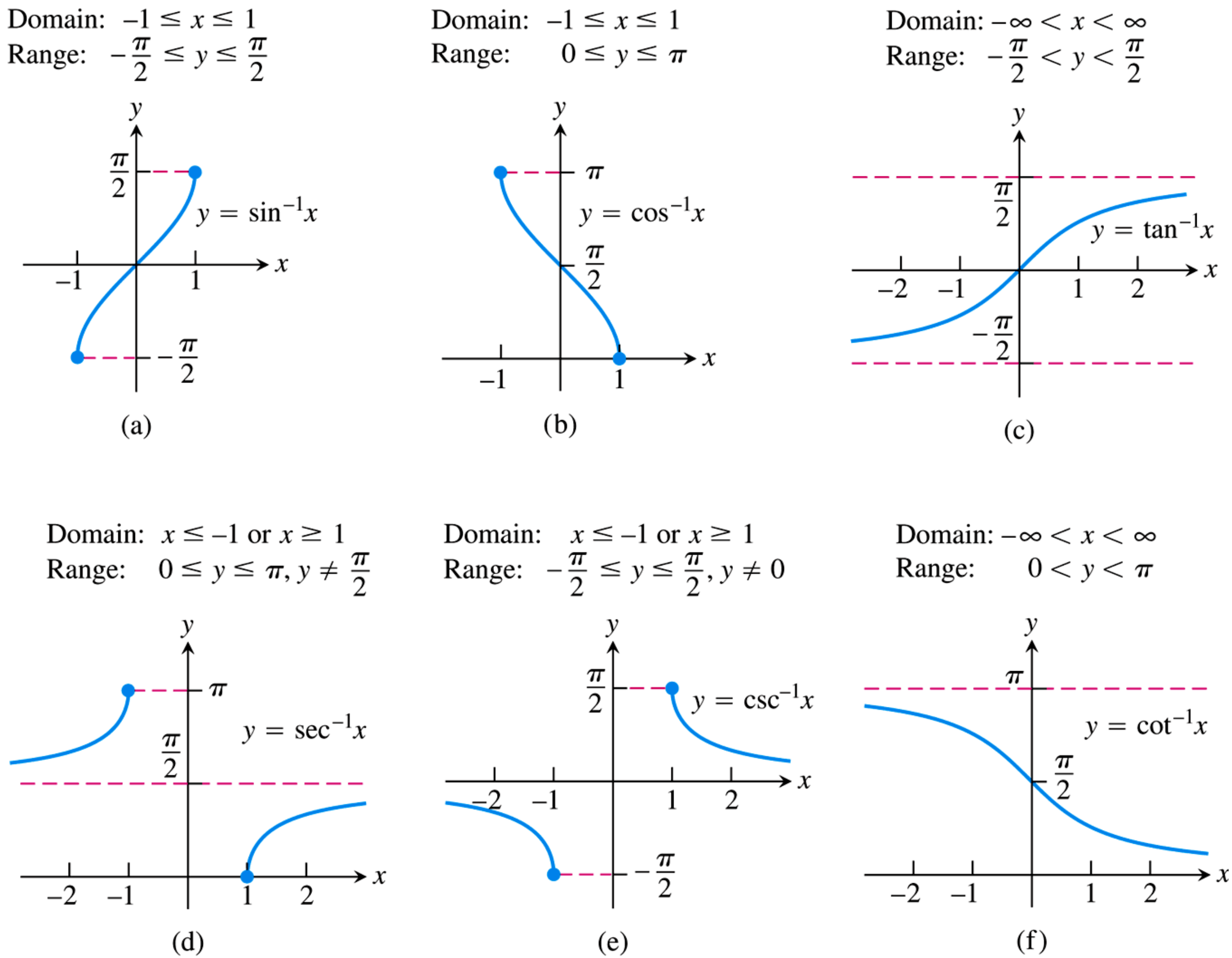
$y = \cot x$
Domain: $(0, \pi)$
Range: $(-\infty, \infty)$



$y = \sec x$
Domain: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$
Range: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



$y = \csc x$
Domain: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$
Range: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

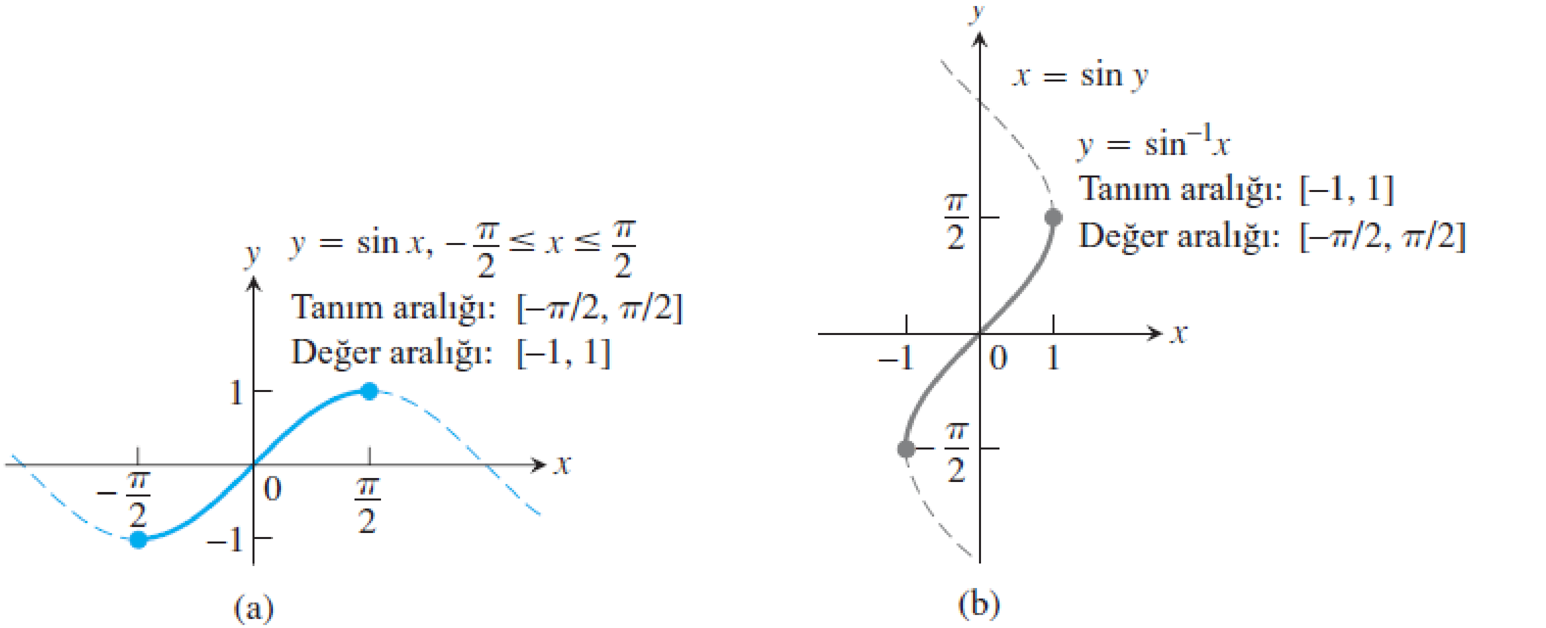


ŞEKİL 7.17 Altı ters trigonometrik fonksiyonun grafikleri

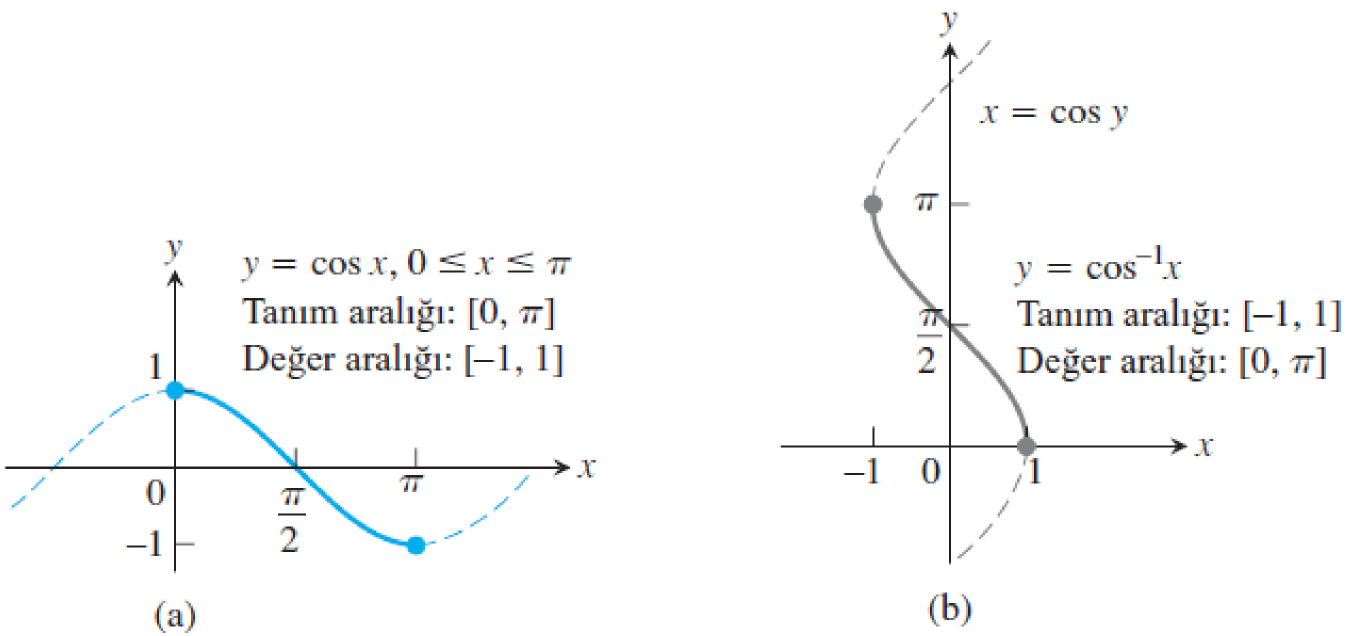
TANIM **Arksinüs ve Arkkosinüs Fonksiyonları**

$y = \sin^{-1} x$, $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığında $\sin y = x$ olan sayıdır.

$y = \cos^{-1} x$, $[0, \pi]$ aralığında $\cos y = x$ olan sayıdır.

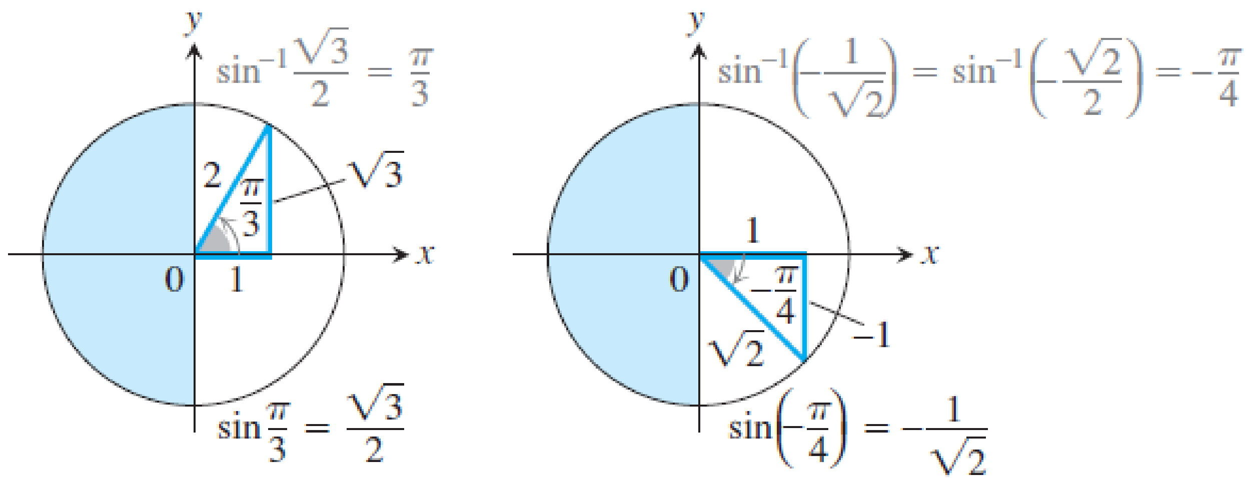


ŞEKİL 7.18 $y = \sin x, -\pi/2 \le x \le \pi/2]$, ve (b) tersi $y = \sin^{-1} x$'in grafikleri. $\sin x$'in grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğinin alınmasıyla elde edilen $\sin^{-1} x$'in grafiği, $x = \sin y$ eğrisinin bir parçasıdır.



ŞEKİL 7.19 $y = \cos x, 0 \le x \le \pi$, ve (b) tersi $y = \cos^{-1} x$'in grafikleri. $\cos x$'in grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğinin alınmasıyla elde edilen $\cos^{-1} x$'in grafiği, $x = \cos y$ eğrisinin bir parçasıdır.

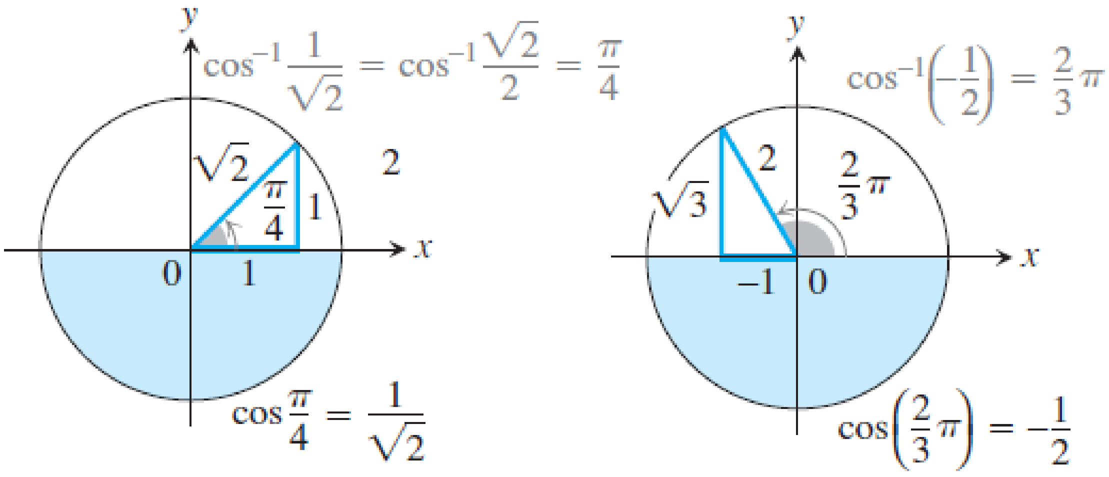
ÖRNEK 1 $\sin^{-1} x$'in Bilinen Değerleri.



Açılar birinci ve dördüncü dörtte bir bölgelerden gelirler, çünkü $\sin^{-1} x$'in değer aralığı $[-\pi/2, \pi/2]$'dir.

x	$\sin^{-1} x$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/6$
$-1/2$	$-\pi/6$
$-\sqrt{2}/2$	$-\pi/4$
$-\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$

ÖRNEK 2 $\cos^{-1} x$'in Bilinen Değerleri.



Açılar birinci ve ikinci dörtte bir bölgelerden gelir, çünkü $\cos^{-1} x$'in değer aralığı $[0, \pi]$'dir. ■

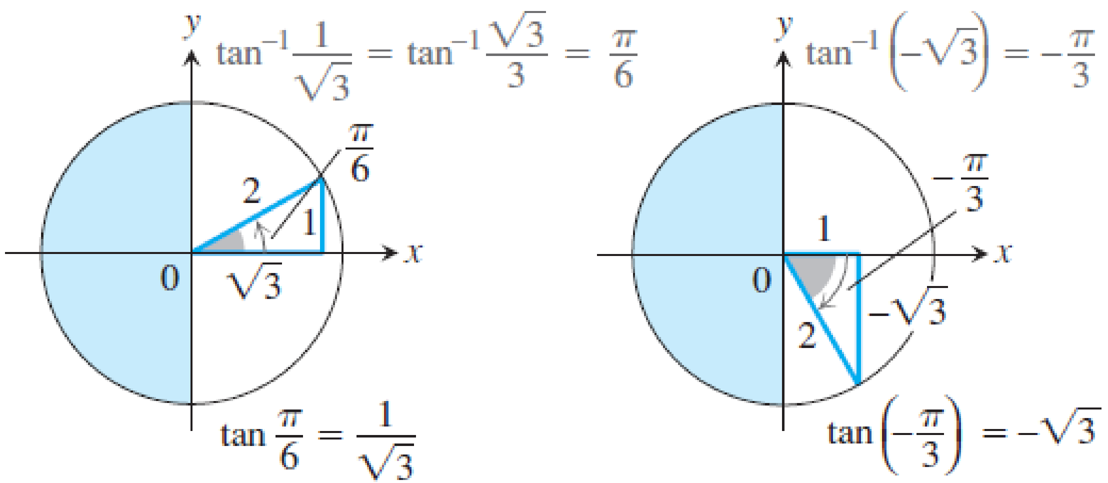
x	$\cos^{-1} x$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/6$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/3$
$-1/2$	$2\pi/3$
$-\sqrt{2}/2$	$3\pi/4$
$-\sqrt{3}/2$	$5\pi/6$

TANIM **Arktanjant ve Arkkotanjant Fonksiyonları**

$\mathbf{y = tann^{-1}\, x}$, $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında $\tan y = x$ olan sayıdır.

$\mathbf{y = cot^{-1}\, x}$, $(0, \pi)$ aralığında $\cot y = x$ olan sayıdır.

ÖRNEK 3 Common Values of $\tan^{-1} x$



Açılar birinci ve dördüncü dörtte bir bölgeden gelirler çünkü $\tan^{-1} x$'in değer aralığı $(-\pi/2, -\pi/2)$'dir. ■

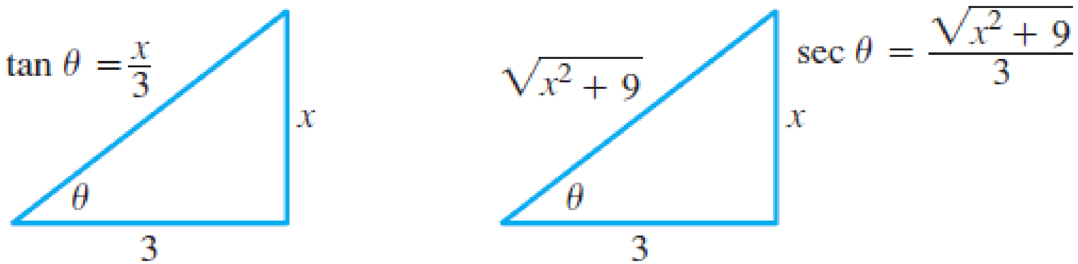
ÖRNEK 5 $\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right)$ 'ü bulun.

Çözüm $\theta = \tan^{-1}(x/3)$ alırız (sadece açıya bir isim vermek için) ve θ'yı

$$\tan\theta = \text{karşı/komşu} = x/3$$

olan dik üçgende resimlendiririz. Üçgenin hipotenüsünün uzunluğu

$$\sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 9}.$$



olarak bulunur. Böylece

$$\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right) = \sec\theta$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} \qquad \sec\theta = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{komşu}}$$

elde ederiz. ■