

# 全国第六届研究生数学建模竞赛



## 题 目 110 警车配置及巡逻方案

### 摘 要：

本题主要讨论的是社会安全系统中警车的优化配置及巡逻方案的合理安排问题。该问题可以采取静态优化和动态优化相结合的方法，利用模拟退火算法和动态仿真，给出满足不同条件下的相对最优巡逻路线。

模型建立的主要过程是：首先对道路和重点区域进行合理离散化，使得二维的道路转化为一维的点来考虑；再根据离散化后得到的新地图计算出各个离散道路点的邻域；然后对静态过程使用模拟退火算法得到静态优化值；最后根据不同的目标和需求，通过对动态过程进行仿真，从而得到最后满足要求的动态优化值，并按照问题要求给出所需的评价值和合理的警车巡逻方案。

问题一只考虑覆盖率和重点区域保护的条件下，我们利用上面的模型可以算出动态情况下最少只需 18 辆车即可。在问题二中，我们定义了多种巡逻效果指标，包括覆盖率、巡逻到达率、平均巡逻强度及其均方差，并详细地分析了它们对巡逻效果的影响。在问题三中，我们同时要求考虑覆盖率和巡逻效果指标要求，得到警车数量为 30 辆。问题四是在问题三的基础上，加入了隐蔽性的要求，我们引入了随机因素，并从单步规律性和整体规律性两个方面分别进行了解释，利用单步概率转移矩阵和分形维数两种衡量标准，并对其进行了分析。第五问是给定警车数量，寻找尽量满足覆盖率和巡逻指标的巡逻方案。第六问在警车速度提高的前提下，利用仿真模型得到 26 辆警车的巡逻方案是较为优化的解。最后一问属于开放性题目，我们讨论了多处同时报警、0-1 规划等问题。

该模型原理清晰易懂，采用启发式算法，计算比较简单，通用性强，优化性能显著，稳定性也较好。

关键词：模拟退火算法 动态仿真 分形维数 平均巡逻强度 多目标规划

参赛队号 9000208

队员姓名 熊晓雯 张斌 李厚森

参赛密码 \_\_\_\_\_

(由组委会填写)

## 一. 问题的重述与分析

### 1. 1 问题的重述

110 警车在街道上巡弋,既能够对违法犯罪分子起到震慑作用,降低犯罪率,又能够增加市民的安全感,同时也加快了接处警时间,提高了反应时效,为社会和谐提供了有力的保障。

考虑某城市内一区域,为简化问题,假定所有事发现场均在下图的道路上。该区域内三个重点部位的坐标分别为: (5112, 4806), (9126, 4266), (7434, 1332) (见下图红点部位,蓝色部分为水域,道路数据见附件,相邻两个交叉路口之间的道路近似认为是直线)。

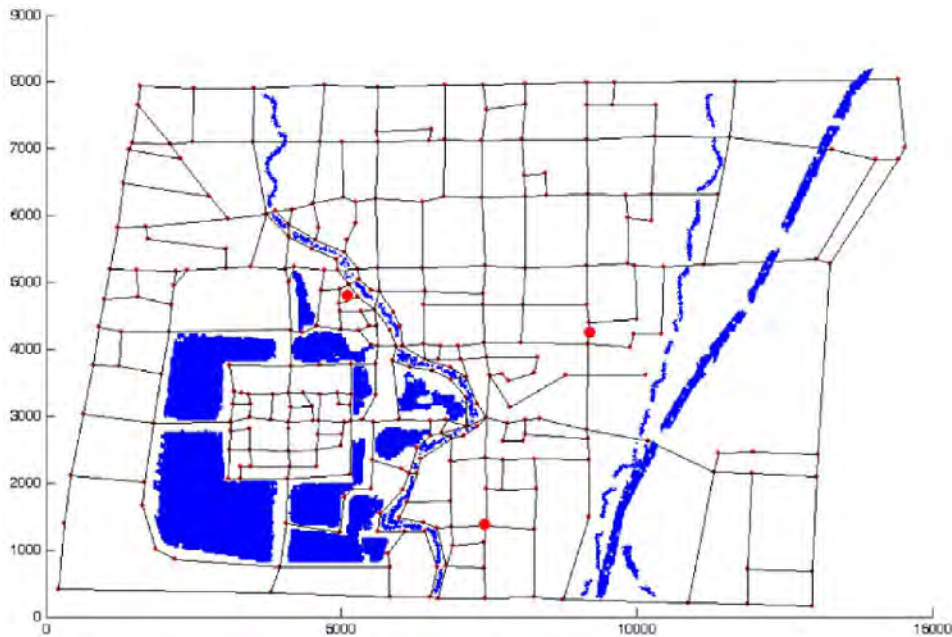


图 1: 区域道路和路口信息地图

某城市拟增加一批配备有 GPS 卫星定位系统及先进通讯设备的 110 警车。设 110 警车的平均巡逻速度为 20km/h, 接警后的平均行驶速度为 40km/h。警车配置及巡逻方案要尽量满足以下要求:

- D1. 警车在接警后三分钟内赶到现场的比例不低于 90%; 而赶到重点部位的时间必须在两分钟之内。
- D2. 使巡逻效果更显著;
- D3. 警车巡逻规律应有一定的隐蔽性。

请回答以下问题:

- 一. 若要求满足 D1, 该区最少需要配置多少辆警车巡逻?
- 二. 请给出评价巡逻效果显著程度的有关指标。
- 三. 请给出满足 D1 且尽量满足 D2 条件的警车巡逻方案及其评价指标值。
- 四. 在第三问的基础上, 再考虑 D3 条件, 给出警车巡逻方案及其评价指标值
- 五. 如果该区域仅配置 10 辆警车, 如何制定巡逻方案, 使 D1、D2 尽量得到满足?
- 六. 若警车接警后的平均行驶速度提高到 50km/h, 回答问题三。
- 七. 你们认为还有哪些因素、哪些情况需要考虑? 给出你们相应的解决方案。

## 1. 2 问题的分析

本题主要讨论的是社会安全系统中警车的优化配置及巡逻方案的合理安排问题。在确定需配置警车的数目和巡逻方案时，首先要考虑的问题应是怎样在满足接警时限要求的前提下，用尽可能少的警车最大限度地覆盖城市道路。同时，需要在使巡逻效果尽可能显著的目标下对巡逻道路进行具体规划及对警车进行合理调度。另外，该问题中的模糊概念有很多，需要通过自己的理解和对资料的查询对其进行合理的假设和定义。

第一，道路的合理离散化问题和重点部位的处理问题。题目中已经明确指出假定所有事发现场均在道路上，但是由于道路是连续的，且题目所给的数据均是交叉路口的坐标，使得我们处理问题时存在困难，所以为了方便处理，我们可以将道路合理离散化，把每条道路离散成若干个点，然后把这些新增加的点作为新的路口，由此得到一张新的道路地图。另外，题目中给出了三个重点部位的坐标，很明显的，这三个重点部分并不是都在交叉路口或者道路上，所以我们在处理时需要对其进行近似处理，把不在道路上的点近似到离该点最近的道路上，然后再对该条道路进行离散化处理。这样处理后的道路地图如下所示：

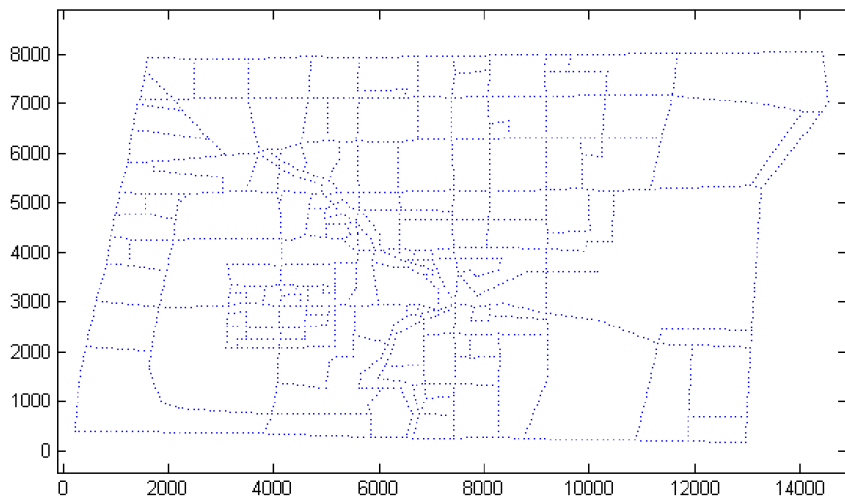


图 2：道路离散图

第二，警车的巡逻模式问题。题目中并未明确说明在巡逻过程中警车是否必须始终处于运动状态，需要我们自己理解。如果假设警车在巡逻过程中不是始终处于运动状态，那么从耗费的角度来说也许会更好，而且针对第一问计算出来的警车数目也许会比较少，但是从实际出发，我们认为这样的假设却是不可行的。题目中指出警车在道路上巡逻，既能够对犯罪分子起到震慑作用，又能够增加市民的安全感，同时也加快了接处警时间，提高了反应时效。并且我们通过查询实际生活中警察的巡逻路线发现，要求警车在巡逻过程中始终处于运动状态是更加合理更加贴近实际的，这样可以使巡逻效果更显著。

第三，邻域和覆盖率概念的提出。为了处理方便，针对此题目，我们提出了邻域和覆盖率的概念。其中，每个路口的邻域是指，以该路口为中心点，在接警后三分钟内能够到达的路口点的集合，也就是说该邻域内任一点到中心点的最短路小于警车以接警速度行驶 3 分钟的路程。对于道路离散化后得到的路口点也有相同的定义。另外，我们还提出了覆盖率的概念。覆盖率是指所有警车在接警后

3 分钟内可以到达的道路（线段）长度之和与图中所有道路总长度之比。那么把道路合理离散化后以点来考虑，则覆盖率又可定义为所有警车邻域的并集所包含的点数与总的点数之比。虽然覆盖率分别以线和点来定义有所不同，但是当离散逐步细化后，以点定义的覆盖率也将逐渐逼近于以线定义的覆盖率。当离散细化到一定程度后，这种误差可以忽略不计。这种处理方法可以在满足精度的条件下，将问题的规模降维（由线降为点），进而难度大大降低。

第四，巡逻效果指标的理解问题。题目中要求所设计的方案使巡逻效果更加显著，我们认为巡逻效果指标包括覆盖率、巡逻到达率、平均巡逻强度及其均方差等等，而平均巡逻强度及其均方差又与巡逻次数和相对人口密度值有关。其中，覆盖率上文已给出相关定义。如果在正常巡逻的路线中，至少有一辆警车到达过某个离散道路点，则称该点为到达点。对于整个系统，所有的到达点数占总离散点数的比例称为该方案的巡逻到达率。巡逻次数是指在不影响接警后到达时间的基础上，警车正常巡逻时各个离散道路点点的被巡逻次数。另外，由于在实际情况下不同街道的人口密度（数量）不同，我们认为在讨论巡逻效果指标时还需要考虑人口密度，人口密度大的地方需要的巡逻强度高于人口密度低的地方。在本题中，我们假设某点的人口密度正比于该点附近一定距离内的街道密度，那么可以定义某点的相对人口密度值为：以该点为中心，以半径  $r$  的圆所覆盖的道路的总长度。当把道路合理离散化后，其相对人口密度值即为相应圆所覆盖的离散点的个数。例如下图所示的两点 A 和 B：

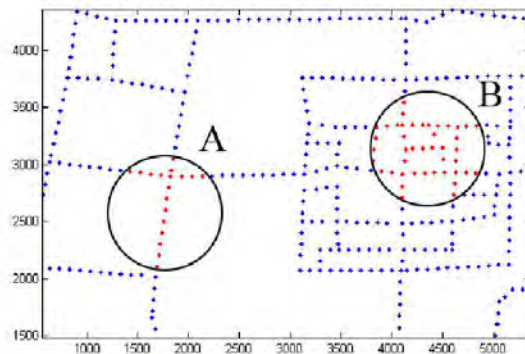


图 3：人口密度示意图

按照上面的定义方法，它们的人口相对密度分别为 18 和 43。平均巡逻强度及其均方差的定义与巡逻次数和相对人口密度值有关，定义起来比较繁琐，具体方法见第四部分。综上所述，我们认为要想使巡逻效果越显著，就要相应地使覆盖率、巡逻到达率、平均巡逻强度及其均方差的加权函数越大，具体分析见第五部分。

第五，巡逻规律隐蔽性的理解。题目要求警车巡逻的规律要有一定的隐蔽性，对于线路的隐蔽性，我们可以理解为线路的复杂性和无规律性。也就是说如果希望线路的隐蔽性好，我们就需要选择分岔路口相对较多的巡逻线路，并且同一警车每次的巡逻路线可以有些不同，主要体现在所走的交叉路口的先后顺序方面。比如图 4 中的两条路线，假设它们都是属于同一点的邻域内，那么按照我们对隐蔽性的理解，警车会选择第二条路线，并且每次巡逻时可以选择不同的走法，也就是说第一次巡逻可以选择  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$  的走法，第二次可以选择  $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow B$  的走法。我们对单步规律性和整体规律性分别进行了讨论，具体分析见第六部分。



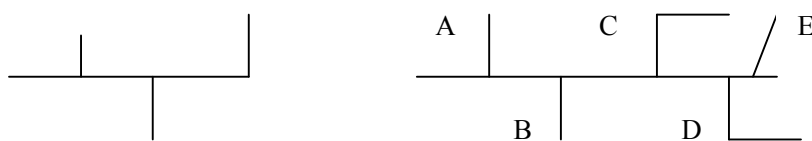


图 4：隐蔽性解释

第六，关于几个问题的理解。对于第一问，只需考虑满足条件一中关于出警时间的要求，从而确定最少需要配置的警车数量。对于第二问中评价巡逻效果显著的指标，上文中已进行了较详细地说明。对于第三问，需要考虑完全满足条件一和尽量满足条件二的警车巡逻方案，并且针对该方案，我们还需要给出在第二问中所提出的巡逻效果的具体指标值。对于第四问，是在第三问的基础上再加上条件三中隐蔽性的限制，从而给出警车巡逻方案及其具体指标值。第五问中是确定警车数量为 10 辆的前提下，寻找尽量满足条件一和条件二的警车巡逻方案。第六问中是在警车接警后的平均行驶速度提高到 50km/h 的条件下，寻找完全满足条件一和尽量满足条件二的警车巡逻方案。第七问是一类开放性问题，考察我们考虑问题的全面性，具体分析见第九部分。

通过上面的分析，我们认为该问题可以采取静态优化和动态优化相结合的方法，利用模拟退火算法和动态仿真，给出满足不同条件下的相对最优巡逻路线。主要的处理过程是：首先对道路和重点区域进行合理离散化，使得二维的道路转化为一维的点来考虑；再根据离散化后得到的新地图计算出各个离散道路点的邻域；然后对静态过程使用模拟退火算法得到静态优化值；最后根据不同的目标 and 需求，通过对动态过程进行仿真，从而得到最后满足要求的动态优化值，并按照问题要求给出所需的评价值和合理的警车巡逻方案。

## 二．问题假设

1. 假设每辆警车在巡逻过程中始终处于运动状态，且以平均巡逻速度匀速行驶。
2. 假设每辆警车只会图中所示道路上行驶，且只会路口处转弯，
3. 假设事故只会出现在城市道路上，不会出现在区域里。
4. 假设在同一时刻该城市道路上只会出现一次事故，且出现事故时一定会报警。
4. 假设警车在巡逻过程中不会由于天气或路况等外部原因而影响其正常巡逻。
5. 假设巡逻警车接警后到达报警地点所走的路线均为最短路线，且到达报警地点后一定可以解决问题。
6. 假设每辆警车均有相同的处理事件能力，且每次事故只需一台警车即可解决。
7. 假设各辆警车之间可以通过卫星定位系统及通讯设备保证正常通讯。
8. 假设道路越密集的区域，人口数量越大，反之越小。

## 三．符号说明

$A_i$  ——表示离散道路点 $i$ 的邻域；

$N$  ——表示经过离散化后的离散道路点的总数；

$p_c$  ——代表瞬时覆盖率，表示对于每一个时刻所定义的覆盖率；

$\bar{p}_c$ ——代表平均覆盖率，表示一段时间范围内的瞬时覆盖率对时间取平均值；

$p_v$ ——表示某个巡逻方案的离散道路点的到达率；

$visited[i]$ ——表示某个巡逻方案中点  $i$  是否为到达点，若点  $i$  为到达点，则对其赋值为 1，反之为 0；

$patrole[i]$ ——表示第  $i$  个离散点处的到达次数；

$polulation[i]$ ——表示第  $i$  个离散点处的人口密度；

$strength[i]$ ——表示第  $i$  个点的巡逻强度，它定义为人口密度和到达次数的比值；

$\bar{s}$ ——表示平均巡逻强度；

$\Delta_s$ ——表示平均巡逻强度的均方差；

$d$ ——表示分形维度，反映了图形的复杂性，其值越大，该图形的复杂性就越大。

## 四. 问题一的分析及结果

### 4.1 模型建立的总体思想

第一问只要求满足条件一中关于出警时间的要求，即只需要覆盖率达到一定要求，可与巡逻效果无关，从而确定最少需要配置的警车数量。因此可以先针对警车为静态的情况进行优化，得到静态时为达到覆盖率要求所需要的最少车数  $n$ 。此时得到的  $n$  是在一个接近最优的分布下满足覆盖率的最小要求。但处于实际情况和前文中的假设，警车必须始终以一定的速度进行巡逻，那么随着时间的演化，警车的分布是动态变化的，就有可能偏离这个优化分布，进而在某些时段内不能满足覆盖率的要求。因此，考虑动态情况时所需的最小车辆数一定大于或等于静态情况时优化得到的车辆数。对本问的处理可以采取静态和动态相结合的方法：首先利用静态优化得到一个结果状态，包含了所需的最少车辆数以及这个优化状态的车辆位置分布。其次，以这个状态作为动态仿真的初始状态，对时间进行演化。演化的目标函数为：

- (1) 覆盖率的增加；
- (2) 三个重点部位必须被覆盖。

如果演化时段内各个时刻的覆盖率都能够达到 90% 的要求，且重点区域都能在两分钟内到达，那么这个车辆数就是可行的。反之，则应增加车辆数。再利用动态仿真，优化和检验增加车辆数后是否能满足相应条件。这个迭代过程一直到第一次满足要求为止。总的过程如下图所示：

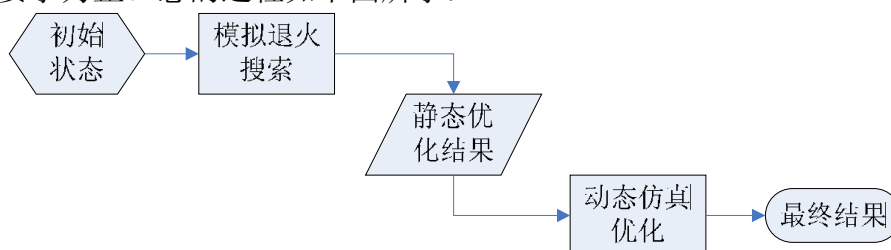


图 5：问题一的优化流程

#### 4.2 静态优化中的模拟退火算法<sup>[1]</sup>

静态优化的情况，实际上是个优化组合的问题。优化组合的问题已经有多种不同的处理方案。但由于问题本身的 NP 复杂性，当问题规模大到一定规模时，不一定能得到最优化的结果。尽管如此，优化组合方法中的模拟退火算法，具有渐近收敛性，在理论上已被证明是一种以概率 1 收敛于全局最优解的全局优化算法。因而我们可以采用模拟退火方法，在可以承受的时间花费，得到静态优化解。

模拟退火算法来源于固体退火原理，它由初始解  $i$  和控制参数初值  $t$  开始，对当前解重复“产生新解→计算目标函数差→接受或舍弃”的迭代，并逐步衰减  $t$  值，算法终止时的当前解即为所得近似最优解，这是基于 Metropolis 迭代求解法的一种启发式随机搜索过程。模拟退火算法依据 Metropolis 准则接受新解，除了接受优解外，还在一个限定范围内接受差解，这正是模拟退火算法与局部搜索算法的本质区别。模拟退火算法与初始值无关，算法求得的解与初始解状态  $S$  (算法迭代的起点) 无关。模拟退火算法具有渐近收敛性，已在理论上被证明是一种以概率 1 收敛于全局最优解的全局优化算法，且它具有并行性。

##### 4.2.1 模拟退火算法描述

首先按照问题分析中所提到的，在道路离散化后所得到的新地图上考虑问题。设有  $m$  辆警车和  $N$  个交叉路口，对于每个路口有一个邻域，并记第  $i$  个路口的邻域为  $A_i$ 。我们的目标是要寻找  $m$  个路口，使得当每个路口有一辆警车时， $m$  个邻域的并集所含的点数最多。

- (1) 解空间：解空间  $\mathfrak{R}$  可表示为从  $\{1, \dots, N\}$  中选出  $m$  个元素的所有可能组合的集合，即

$$\mathfrak{R} = \{C = \{c_1, \dots, c_m\} \mid 1 \leq c_i \leq N, c_i \neq c_j, \text{ for } i, j = 1, \dots, m\}$$

初始解可以选为  $C_0 = \{1, [\frac{N}{m}], \dots, N\}$ 。所有状态的转移都是在解空间里进行的。

- (2) 目标函数：任一集合  $A$  中的元素个数计为  $LEN[A]$ 。此时目标函数为  $m$  个邻域的并集的元素个数的极大值，即求

$$\max n(\{c_1, \dots, c_m\}) = LEN(\bigcup_{i=1}^m A_{c_i})$$

- (3) 新解的产生。当前解  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ 。对于任一车辆，不妨设为第  $i$  辆车，其现在处在路口  $c_i$ 。这时新解的产生有两种方法：(a) 邻点法：在  $c_i$  的相邻点中任选一点  $c'_i$ ，新解为  $C' = \{c_1, \dots, c'_i, \dots, c_m\}$ ；(b) 邻域法：在  $c_i$  的邻域内任选一点  $c'_i$ ，新解为  $C' = \{c_1, \dots, c'_i, \dots, c_m\}$ 。在算法中将上述两种方法交替使用。

- (4) 目标函数差：

$$\Delta n = n(C') - n(C)$$

(5) 接受准则。由于为最大优化问题，所以接受准则为：

$$P = \begin{cases} 1, & \Delta n > 0 \\ \exp(\Delta n / bT), & \Delta n \leq 0 \end{cases}$$

即当  $\Delta n > 0$  时以概率 1 接受新解为当前解。当  $\Delta n \leq 0$  时，则以概率  $\exp(\Delta n / bT)$  接受新解为当前解。其中  $b$  为控制参数， $T$  为冷却参数。

4.2.2 模拟退火算法搜索结果及分析  
下表列出了在不同警车数目下通过模拟退火算法搜索得到的优化覆盖率结果：

表 1：模拟退火算法搜索结果

警车数目	优化覆盖率 (%)
12	81.03
13	84.52
14	86.64
15	89.37
16	90.89

从表中的结果可以看出，当警车数目达到 16 辆时，在优化分布下已经可以满足覆盖率大于 90% 的要求。根据前面的分析，我们将以这个结果为初始状态进行动态仿真优化。

#### 4.3 动态优化中的仿真模型

计算机仿真模型<sup>[2]</sup>的建立一般可以分为两种方法：时间步长法和事件步长法。时间步长法就是按照时间流逝的顺序，一步一步地对系统的活动进行仿真。在整个仿真过程中，时间步长固定不变。事件步长法是以事件发生的时间为增量，按照事件发生的顺序，一步一步地对系统的行为进行仿真，直到预订的时间结束为止。本题要求的警车随时间演化的巡逻方案，因此应采用时间步长法建立仿真模型。

当采用时间步长法做计算机仿真时，其基本步骤为：首先选取系统的一个初始起点为仿真时钟的零点，然后根据实际问题的需要，选定一个时间步长。于是从仿真时钟的零点开始，每推进一个时间步长，就对系统的活动和状态按照预订的规则和目的的进行考察、分析、计算和记录，直到预定仿真结束时刻为止。

##### 4.3.1 仿真模型的建立

###### (1) 选定时间步长。

时间步长可通过下述方式确定。首先，对于输出结果的要求，仿真结果要求每个时间间隔 1 分钟输出一次各警车的位置坐标，因此仿真时间间隔至少要小于 1 分钟，并且最好为 1 分钟的因子，使得每个输出时刻同时也是仿真经历的离散时刻。其次，由于警车巡逻时可能会在路口处转弯，那么在时间步长内警车巡逻的路程长度必须短于所有路段的最小长度。综合考虑上面两个因素，当警车巡逻速度为 20km/h 时，时间步长可以取为 10s。

###### (2) 推进原则

为了解决实际问题，我们将道路离散化成点，这相当于增加了交叉路口的数量。根据我们的假设，警车只有到实际的路口（即原有的交叉路口）才存在选择路径的问题。为了避免短距离的贪心算法导致的局部最优的情形，我们在为警车选择路线时，考虑的不是下一个点，而是下一个实际的路口。当警车位于某个实



际的交叉路口时，计算如果警车位于与该路口直接相邻的各个路口整体的覆盖率，选择覆盖率最高的方向，而且我们允许车在路口进行掉头。

#### 4.3.2 仿真运行结果及分析

下面的两个表格给出了仿真结果（4 小时）的统计信息。表 1 为警车数量不同时不同覆盖率所占的百分比信息。可以看出，当有 16 辆警车巡逻时，覆盖率达到 90%以上的时段只有 6.1%。也就是说随着时间的演化，系统状态很大程度上偏离了静态优化的状态结果。由于假设警车始终是处在运动状态的，故静态优化的结果并不能满足题目要求，由此可以看出静态优化算法在处理此类问题时的局限性。当车数再增加一台为 17 辆时，情况得到很大的改善：90%以下的比例只占到 5.55%。当车数达到 18 时，则在所有仿真时段内，90%的覆盖率目标都可以得到满足。

对于题目的不同理解会得到不同的最小车数。如果是要求在所有仿真时段内平均覆盖率达到 90%，那么 17 辆警车既可满足要求（表 2）。当理解为任一时刻覆盖率达到 90%，那么 18 辆警车为最少配置。

表 2：仿真结果在不同覆盖率区间的分布

覆盖率 (%)	16 车	17 车	18 车
86~87	0.416378	0	0
87~88	1.249133	0	0
88~89	30.67314	0	0
89~90	61.276	5.5517	0
90~91	6.10	56.83553	1.457321
91~92	0	36.91881	30.11797
92~93	0	0.485774	65.30187
93~94	0	0	3.053435

表 3：统计信息表

百分比 (%)	16 车	17 车	18 车
平均覆盖率	89.2	90.8	92.2
90%以上时刻的比例	6.1	94.3	100

图 6 中给出了当警车数量为 18 辆时，4 小时内各个警车的巡逻轨迹图。虽然这时满足了覆盖率和保护重点部位的要求，但警车巡逻的范围较小。如果将威慑作用理解为与巡逻到达范围的大小相关的话，那么此时的巡逻方案一定不是比较好的结果。这时就需要考虑除覆盖率以外的指标对巡逻方案进行优化。具体内容见下文。

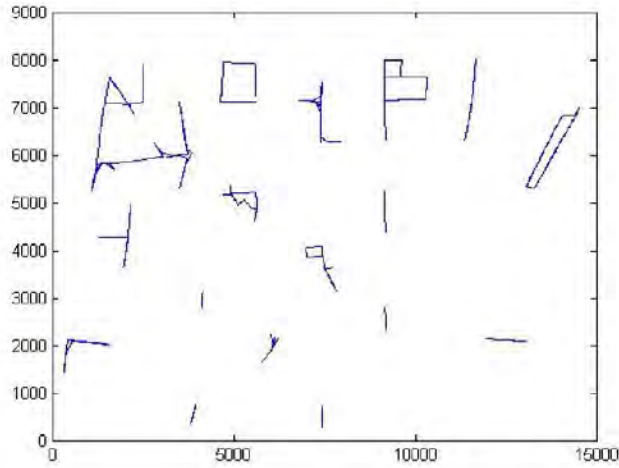


图 6：警车数量为 18 时，各个警车的巡逻轨迹

## 五. 问题二和问题三的分析及结果

### 5. 1 问题二的指标分析

由问题一的结果可以看出，如果仅仅以条件一作为优化目标，得到的巡逻轨迹并不理想，有些警车的巡逻路线太短，仅局限在比较狭小的区域内。这时就必须考虑其它评价巡逻效果的指标。在问题分析中，我们已经说明了巡逻效果指标包括覆盖率、巡逻到达率、平均巡逻强度及其均方差等等，并且给出了相应的定义。为了表述的连贯性，我们再次叙述其定义并分别对其进行分析：

#### 5. 1. 1 覆盖率

覆盖率是一个重要的指标。在问题一中仅仅考虑了这一个指标作为优化目标。覆盖率是指所有警车在接警后 3 分钟内可以到达的道路（线段）长度之和与图中所有道路总长度之比。那么把道路合理离散化后以点来考虑，则覆盖率又可定义为所有警车邻域的并集所包含的点数与总的点数之比。虽然覆盖率分别以线和点来定义有所不同，但是当离散逐步细化后，以点定义的覆盖率也将逐渐逼近于以线定义的覆盖率。当离散细化到一定程度后，这种误差可以忽略不计。这种处理方法可以在满足精度的条件下，将问题的规模降维（由线降为点），进而难度大大降低。

简单来说，覆盖率就是警车在接受报警后规定时间内赶往现场处理事故的能力。覆盖率越大，警察能掌控的有效面积就越大，巡逻效果越好。覆盖率有瞬时和平均之分。对于每一个时刻，定义的覆盖率称为瞬时覆盖率，表示为  $p_c$ 。若把一段时间范围内的瞬时覆盖率对时间取平均值，则称其为平均覆盖率，表示为  $\bar{p}_c$ 。

#### 5. 1. 2 巡逻到达率

如果在正常巡逻的路线中，至少有一辆警车到达过某个离散道路点，则称该点为到达点。对于整个系统，所有的到达点数占总离散点数的比例称为该巡逻方案的到达率。若以  $visited[i]$  记录某个方案中点  $i$  是否为到达点，那么有：

$$visited[i] = \begin{cases} 1, & i \text{ 为到达点} \\ 0, & i \text{ 不为到达点} \end{cases};$$

则该巡逻方案的到达率  $p_v$  定义为：

$$p_v = \frac{\sum_{i=1}^N visited[i]}{N};$$

到达率越高的话，巡逻的效果也越好。

### 5.1.3 平均巡逻强度及其均方差。

若以  $population[i]$ ， $patrole[i]$  分别表示第  $i$  个离散点处的人口密度值和到达次数，则定义第  $i$  个点的巡逻强度为

$$strength[i] = \frac{patrol[i]}{population[i]},$$

巡逻强度综合考虑了人口密度和到达次数的影响因素。若某点的巡逻强度越高，则对于该点的巡逻效果越好。我们之所以定义巡逻强度，是因为考虑整个巡逻方案的效果时，到达次数只是片面地反映了巡逻的效果，我们必须同时要同时考虑人口密度的影响，人口密度大的地方到达次数也会相应地越多。例如  $i$  和  $j$  两点的人口密度分别为 5 和 2，而到达次数分别为 4 和 3。单独考虑到达次数的话，这两点的到达频度不同，应该增加到达  $j$  点的次数，从而使得巡逻方案更好。然而如果考虑到人口密度因素，通过巡逻强度这个指标来衡量的话，那么应该增加  $i$  点的到达次数，因为由其定义显然有： $(strength[i] = 0.8) < (strength[j] = 1.5)$ 。

理想方案的巡逻效果应使得各点的巡逻强度尽可能地均衡。为此定义平均巡逻强度及其均方差为：

$$\begin{cases} \bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^N strength[i]}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N patrol[i] / population[i]}{N}; \\ \Delta_s = \sqrt{\sum_{i=1}^N (strength[i] - \bar{s})^2} \end{cases};$$

那么对于某个巡逻方案，平均巡逻强度越大且其均方差越小，那么该方案的巡逻效果越显著。

## 5.2 问题三中模型的建立求解与结果的分析

### 5.2.1 主要思想

在问题二中我们给出了衡量巡逻效果显著程度的评价指标，包括覆盖率，巡逻到达率，平均巡逻强度及其均方差等。在第一问中，我们仅仅是以覆盖率做为评价指标来设计优化目标函数。在本问中，我们只需在第一问的基础上，考虑到到达率和巡逻强度的相关指标的影响，将它们添加到目标函数中，然后通过计算机仿真优化结果。

### 5.2.2 仿真模型

如上所述，在这里只需建立新的目标函数既可。考虑到巡逻到达率和巡逻强度及其均方差之间有一定的关联性，并不是完全独立的，这两者可以被认为是类似于低阶与高阶的关系。所以在仿真的规则设计中，我们可以这样考虑：

$$O_i = \alpha \frac{p_{ci}}{p_{c0}} - \beta \frac{s_i}{s_0},$$

其中  $O_i$  为标志变量， $\alpha, \beta$  为控制参数， $p_{ci}$ ， $s_i$  分别为第  $i$  个候选点的覆盖率和巡逻强度。 $p_{c0}$ ， $s_0$  为相应的归一化参数。程序演化时，将以控制变量  $O_i$  的值为依据， $O_i$  值越大的也就越优。

### 5.2.3 仿真结果

由于第一问中已经求得在动态的情况下，要达到条件一的最少车辆数为 18。本题在条件一的基础上新增加了条件二。由于约束条件的增多，优化结果的车辆数必然大于等于 18。在本题的仿真中，我们将从车辆数 18 开始优化，研究在不同车辆数条件下巡逻效果指标的优劣。下表给出了仿真的结果：

表 4：问题 3 的仿真结果信息

车辆数	平均覆盖率 (%)	到达率 (%)	平均巡逻强度	巡逻强度均方差
18	91.7015	27.1735	0.0968147	16.0045
20	93.0188	58.9248	0.109201	12.7654
22	94.1683	73.4985	0.12028	11.3428
24	94.5133	82.5283	0.131542	10.9961
26	94.5992	88.7022	0.136091	10.152
28	95.2282	87.3583	0.146416	9.76952
30	95.1062	90.2982	0.160417	9.3902

为了更直观地观察这些指标随车辆数的变化关系，故将其分别进行拟合<sup>[3]</sup>，并在下图中表示出来：

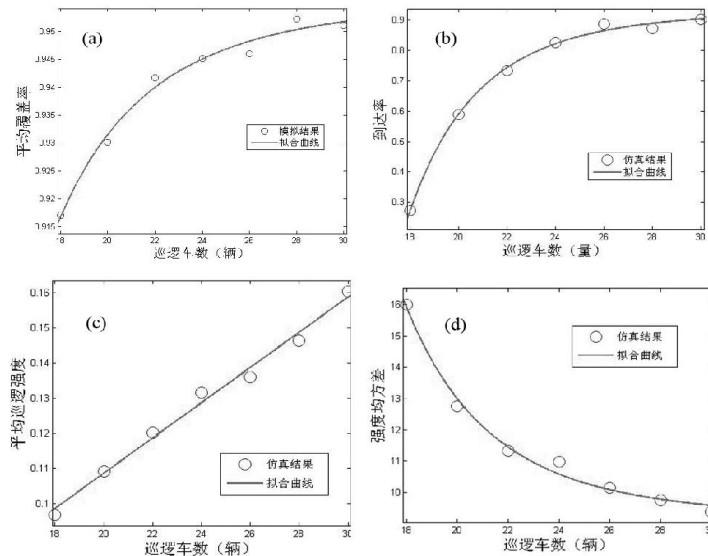


图 7：指标拟合

上述四幅图中，平均覆盖率，到达率，平均巡逻强度以及巡逻强度均方差随车辆数的拟合曲线分别为

$$\begin{cases} f_1(x) = -1.925 \times 10^3 x^{-4.538} + 0.9555 \\ f_2(x) = -4.656 \times 10^7 x^{-6.252} + 0.9314 \\ f_3(x) = 0.005019x + 0.008231 \\ f_4(x) = 4.176 \times 10^7 x^{-5.41} + 9.167 \end{cases}。$$

通过这几幅图，我们容易看出，平均覆盖率、到达率和巡逻强度均方差都随车辆数而呈负指数变化。当车辆数增大时，前两者增大的速率变慢，而巡逻强度均方差的降低速率减慢。不同的是，平均巡逻强度随车辆数的增加而线性增加。在这种情况下，平均巡逻强度将随车辆数持续增长，不会出现优化（即收敛）的趋势，因此可以不用考虑它的影响。对于会出现收敛的其它三个指标，当车辆数达到 30 辆左右时，其增长率已经很小，基本趋于零（尤其是对于到达率）。要想达到更优的结果，需要的车辆数必将迅速增加。在实际中，增加巡逻车辆肯定要有一定成本，而在本题中并未考虑这个因素。因此，车辆数不能大量的增加。基于以上分析，可以认为当警车数量达到 30 辆时已经达到优化目标。在图 8 中我们给出了这 30 辆车在仿真时段内的轨迹图。可以看出，除了左下角外的一小段外，基本上所有的道路都被巡逻过，达到了很好的效果。

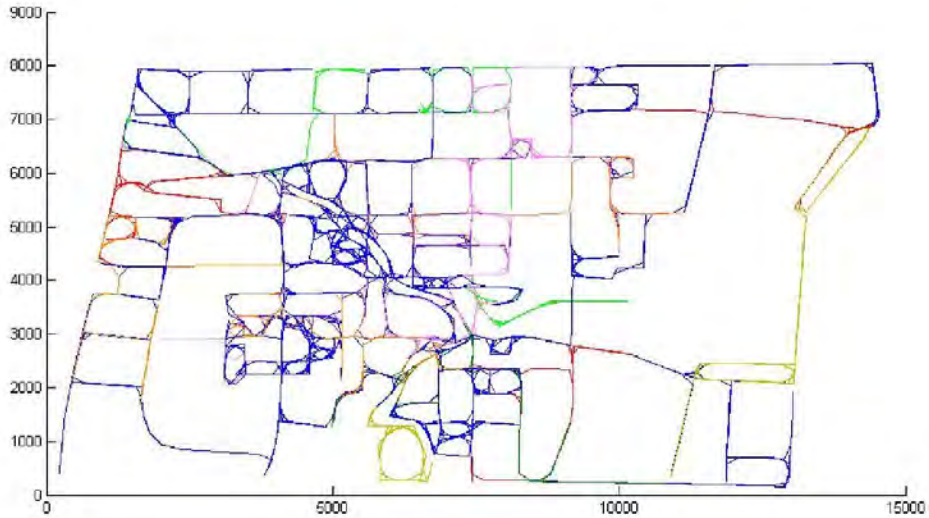


图 8：问题三中 30 辆车 4 小时的轨迹图

## 六．问题四的分析及结果

对于第四问，是基于第三问的基础，加上条件三中隐蔽性的限制，从而给出警车巡逻方案及其具体指标值。我们首先给出对隐蔽性的理解，从单步规律性和整体规律性两个方面分别进行了解释，然后根据所制定的算法得到最优巡逻方案并进行评价

### 6.1 关于巡逻规律的理解

#### 6.1.1 单步的规律性

从最简单的情形出发，探求单步的规律性。规律性可以通过单步转移概率矩



阵来衡量，如果每辆车都有自己的稳定的单步转移概率矩阵，则说明每辆车的运动是具有单步规律性的。在实际中，单步转移概率矩阵是无法得到的，我们通过单步转移频率矩阵去逼近单步转移概率矩阵。具体过程如下：在一段时间间隔  $T$  内，对每一辆车，统计其从第  $i$  号离散道路点到第  $j$  号离散道路点的次数  $a(i, j)$ ，然后除以经过的离散道路点总数  $N$ ，得到从第  $i$  号离散道路点到第  $j$  号离散道路点的频率  $r(i, j)$ 。将得到的单步转移频率矩阵  $(r(i, j))_{i,j}$  作为单步转移概率矩阵的近似。

为了评价各个时间段的单步转移概率矩阵的规律性，我们将方差的概念推广到矩阵形式，它的定义如下：

$$\sigma^2 \triangleq \sum_{i=1}^N \|A_i - \bar{A}\|_F^2, \forall \{A_i\}_{i=1}^N \subseteq \Re^{n \times n},$$

其中， $\bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i$ ， $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2}$  为 Frobenius 范数。

### 6.1.2 整体的规律性

对于路线的隐蔽性的描述，仅仅从单步转移概率矩阵的角度来分析是不科学的。因为在我们的仿真算法中，每一步评价指标值（其中的巡逻强度）的计算利用到了历史信息，故这个过程不是马尔科夫的，进而单步转移概率矩阵所提供的信息是不完全的。我们通过路线的复杂性去刻画巡逻方案的隐蔽性，这里利用分形维数的概念，它的定义如下：

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\log N(\varepsilon) / \log(\frac{1}{\varepsilon})],$$

式中， $N(\varepsilon)$  是用此小立方体覆盖被测形体所得的数目。

维数公式意味着通过边长为  $\varepsilon$  的小立方体覆盖被测形体的维数。分形维数反映了复杂形体占有空间的有效性，它是复杂形体不规则性的量度。

### 6.2 制定方案的算法

上面分析的评价指标均是从整个方案的角度给出评价。为了得到较为隐蔽的，即无规律的方案，我们在算法上引入随机的成分。在每一个满足 D1 和 D2 条件的候选点上，做随机试验，按照一定的概率去选择目标点，而并非像前几部分中按使评价指标最大化的方向选取目标点，如下图：



图 9：随机试验

做随机试验的关键，在于制定随机试验的结果与选择决策的对应性。我们这里将候选点按其评价指标的相对值分划  $[0, 1]$  区间，然后随机生成一个  $0, 1$  之间的随机数，根据该随机数落入的位置决定选择哪个候选点作为目标点。

### 6.3 方案及其规律性评价

在这部分的计算中，我们取 30 辆巡逻车，初始位置（道路口编号）依次为：96，148，286，208，65，13，287，280，172，117，220，25，33，168，255，79，296，1，82，21，19，12，178，58，230，257，128，4，7，70。

#### 6.3.1 单步转移频率矩阵的方差

我们利用单步频率矩阵的方差来衡量巡逻路线的复杂性，方差愈大，不确定性愈大，那么巡逻线路愈隐蔽。对每辆警车重复进行 100 次 1 小时的巡逻，对产生的单步频率矩阵求方差，结果见表 5：

表 5：30 辆警车的单步转移频率矩阵的方差

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
方差	2.5	2.4	2.5	2.4	2.6	4.6	6.1	3.9	2.3	3.3
编号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
方差	2.5	3.8	2.7	5.8	5.1	6.6	4.7	5.2	3.3	5.5
编号	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
方差	3.4	4.2	3.0	3.2	4.5	4.2	3.7	4.0	4.0	2.4

#### 6.3.2 巡逻方案的分形维数

根据维定义公式，对于通常的规则物体，覆盖一根单位长度的线段所需的数目要  $N(\varepsilon)=1/\varepsilon$ ，覆盖一个单位长的正方形， $N(\varepsilon)=(1/\varepsilon)^2$ ，覆盖单位边长的立方体， $N(\varepsilon)=(1/\varepsilon)^3$ 。从这三个式子可见分形维数反映了通常维数的含义。利用维数公式可算得科赫曲线的维数  $d=1.2618$ ，谢尔宾斯基海绵的维数  $d=2.7268$ 。这从某种程度上说明了分形维数反映了图形的复杂性。为了衡量巡逻路线的复杂性，我们计算每辆警车在 4 小时内巡逻路线的分形维数，具体结果见表 6：

表 6：30 辆警车在 4 小时内巡逻路线的分形维数的对比

车辆编号	分形维数	车辆编号	分形维数
1	<b>1.2614(1.306)</b>	16	1.5694(1.3475)
2	0.97493(0.97493)	17	1.5355(1.089)
3	1.2577(1.2086)	18	1.6618(1.4328)
4	1.6719(1.5114)	19	1.6816(1.5576)
5	1.5237(1.3502)	20	1.772(1.1495)
6	1.577(1.5481)	21	1.6893(1.3362)
7	1.6543(1.2863)	22	1.671(1.5454)
8	1.7583(1.2863)	23	1.6637(1.572)
9	1.5707(1.5495)	24	1.5963(1.4137)
10	1.6728(1.4002)	25	1.4507(1.3813)
11	1.6009(1.4093)	26	1.6155(1.2382)
12	1.5222(1.3909)	27	1.6877(1.3245)
13	1.5868(1.5642)	28	1.6406(1.1208)
14	1.7199(0.95424)	29	1.5536(1.3909)
15	1.5495(1.2794)	30	<b>1.5694(1.5807)</b>

在上表中，括号里的数字是利用问题 3 的算法，由相同的初值得到的巡逻方案的分形维数，其中用粗斜体强调的是分形维数下降的地方。通过表中的分形维数结果可知，相对于问题 3 的算法，我们的方法大大提高了路线的复杂性，从而增强了巡逻路线的隐蔽性。

## 七. 问题五的分析及结果

### 7.1 问题分析

问题五是确定警车数量为 10 辆的前提下，寻找尽量满足条件一和条件二的警车巡逻方案。由于在问题一中我们已经求得仅满足条件一，该区最少配置 18 辆警车巡逻。现在限制 10 辆车，条件一显然是无法满足的，更不用说条件二了。这说明只能从现有状况出发，尽量权衡条件一和条件二，给出相对优的巡逻方案。首先，鉴于重点部位的关键性，警车必须在指定的一个限制时间内赶到，我们可以稍微放宽限制，但不得超过 3 分钟。其次，在指定限制时间的前提下，根据问题三中的目标

$$O_i = \alpha \frac{p_{ci}}{p_{c0}} - \beta \frac{s_i}{s_0}$$

来极大化覆盖率和巡逻效果。

由于上式中的第一项  $\frac{p_{ci}}{p_{c0}}$  的取值只取决当前位置，与历史无关，故其在时间的演化过程中是保持稳定的，而上式中的第二项要利用历史的巡逻信息，是随时间变化的，尤其在模拟刚开始时，可能有较大的偏差。为此，我们在模拟过程中选择随时间变化的系数  $\beta$ ，使得该项在整个指标值中，随时间的增加，比重逐步增大。

### 7.2 仿真结果

我们对赶到重点部位的时间限制分别为 120 秒，130 秒，140 秒，150 秒，160 秒，170 秒，分别作优化得到以下结果：

表 7：问题五的仿真结果效果指标

限制时间(s)	平均覆盖率(%)	到达率(%)	平均巡逻强度	强度均方差
120	0.70735	0.244855	0.043170	7.79302
130	0.720946	0.315414	0.045485	8.44315
140	0.748853	0.233935	0.043980	8.08968
150	0.768733	0.359093	0.045086	6.73604
160	0.755536	0.266275	0.043610	8.58273
170	0.773103	0.333053	0.045289	7.68569
180	0.796232	0.275514	0.048082	7.58286

从上表中可以看出，平均覆盖率随限制时间的增加而增加，但到达率和强度均方差都在限制时间为 2.5 分钟时达到最优。所以经多方面考虑，我们选择限制为 2.5 分钟的方案为最终方案。我们将在附件中给出相应的巡逻数据。

## 八. 问题六的分析及结果

### 8.1 问题分析

问题六是在警车接警后的平均行驶速度提高到 50km/h 的条件下，寻找完全满足条件一和尽量满足条件二的警车巡逻方案。由于接警速度的提高，使得警车在接警后能够在三分钟内赶到更远的事发现场，这相当于放宽了约束条件。用离散模型方法来看，速度的提高导致邻域的扩大，用更少的车既可实现更高的覆盖率。另外，对于相同的仿真时间，警车能够行驶更远的距离，于是有机会到达更多的离散点，因此到达率将相应提高。巡逻强度指标的变化也是类似的。这样，我们定义的衡量巡逻效果的指标都将随着接警速度的提高而改善，进而巡逻效果也肯定更加显著。

## 8.2 仿真结果

采取与问题三相同的步骤进行仿真，下表给出了相应的仿真结果：

表 8：问题六的仿真结果指标

车辆数	平均覆盖率 (%)	到达率 (%)	平均巡逻强度	强度均方差
18	94.2123	76.7325	0.108371	10.6696
20	94.6632	84.3763	0.105062	8.76708
22	94.8199	89.4343	0.113519	7.42604
24	95.2372	92.6921	0.122195	7.24438
26	95.1471	93.2801	0.127569	6.91267

与问题三的结果比较，可以得出以下结论：

- (1) 这些指标随车辆数的变化规律与问题三三所得到的结论相同。这主要是因为这两道问题都源于相同的问题结构；
- (2) 在相同车辆数的条件下，本题的优化结果明显优于问题三三中的相应结果。
- (3) 在这两组结果中，车辆数相同时平均巡逻强度近似相等。这反映出平均巡逻强度基本上正比于车辆数，与问题三三中的分析一致。

由于在警车数量为 26 时，各项指标的结果已基本接近收敛，且此时优化的效果已经超过了问题三三 30 辆车的效果，所以我们取 26 辆车为本题的优化结果。我们将在附件中给出相应的巡逻数据。

## 九. 模型的进一步讨论（问题七）

1. 在上文中我们假设了道路上不可能同时有多处报警，所以我们给出的模型只能针对单处报警的情况。若允许道路上同时有几处报警，那势必会增加警车的数量。但是在实际中，多处报警的情况一定是会发生的，所以我们可以继续用上述模型的思想 and 求解方法，继续增加适量的警车进行仿真，从而得到相对优化的警车巡逻方案。

2. 上文建模的过程中，我们始终没有考虑警车成本的问题，题目中也没有具体给出相关的数值。但是在实际生活中，成本必然是确定巡逻方案所需要考虑的一个重要指标。很显然，总成本应该与警车的数量成反比，所以为了尽量节省成本，就需要在保证覆盖率等各项巡逻效果显著指标的同时，尽可能地使用数量少的车。但是值得注意的是，并不能为了盲目追求成本的最小化，而使得警车数量比较少，甚至不足以满足各项巡逻效果指标的最基本的要求。

3. 题目中已假设事故只会出现在地图中的道路上，而不会出现在区域内。在实际生活中，区域内也是可能会出现事故的。对于这个问题，我们可以有两种处理方法。一种还是离散化的思想：首先可以先把区域网格化，然后再对各条网格边进行离散化，从而把区域也离散成若干个点来处理。而另一种就是近似的思想：

可以把区域内的点就近似地归到离它最近的边（即道路）上去，如果这个点报警，只要警车到达离它最近的边上，即可认为这个点上的事故可以解决。无论采用哪种处理方法，都可以继续使用上述模型寻求最优的巡逻方案。

4. 对于静态优化过程，我们还可以建立 0—1 线性规划模型：

$$\begin{aligned} \min \quad & n = \sum_{i=1}^N x_i \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j \in j(i)} x_j \geq y_i, \quad \text{for } i=1, \dots, N. \\ \sum_{i=1}^N y_i \geq 0.9N \\ \sum_{k \in k(t)} x_k \geq 1, \quad \text{for } t=1, 2, 3. \\ x_i = 0 \text{ or } 1, \quad \text{for } i=1, \dots, N. \end{cases} \end{aligned}$$

其中  $x_i$  表示在离散点  $i$  处是否有警车， $y_i$  表示第  $i$  点是否被覆盖， $n$  为总的车数， $N$  为总的离散点数。第二个约束条件表示至少有 90% 的点被覆盖。这样又由第一个约束条件，使得至少 90% 的点的邻域内有车出现，式中  $j(i)$  表示第  $i$  个点的邻域。第三式表示每个重点部位的邻域内都至少有一辆警车， $k(t)$  表示第  $t$  个重点部位的邻域。再利用数学软件进行求解即可求出静态过程中的最优解。

## 十. 模型的优缺点

### 10. 1 模型的优点

该模型分析较深入，结构较清晰，所进行的假设和引入的概念清晰易懂，比较符合实际情况，有利于模型的理解。

该模型采取静态优化和动态优化相结合的方法，利用模拟退火算法和动态仿真，给出了满足不同条件下的相对最优巡逻路线。该模型原理清晰易懂，采用启发式算法，计算比较简单，通用性强，故其具有较高的应用价值和创新性，并且在实际应用中稳定性也较好。

### 10. 2 模型的缺点

该模型对于道路的处理是把它们合理离散化成若干点，然后把道路当作点来处理。虽然当离散细化到一定程度后，这样处理的误差可以忽略，但是如果在实际应用中细化到这种程度，无疑会大大地增加了计算量。另外，该模型针对不同目标给出的路线可能只是相对较优的结果，而不是绝对意义下的最优路线。

## 十一. 参考文献

- [1] 兰家隆，刘军，应用图论及算法，成都：电子科技大学出版社，1995。
- [2] 吴翊，吴孟达，成礼智，数学建模的理论与实践，长沙：国防科技大学出版社，1999。
- [3] 飞思科技产品研发中心，MATLAB 7 基础与提高，北京：电子工业出版社，2005。