

参赛密码 _____
(由组委会填写)

全国第八届研究生数学建模竞赛

学校	上海交通大学
参赛队号	10248059
队员姓名	1.张立波
	2.马洲俊
	3.陈强

参赛密码 _____

(由组委会填写)

全国第八届研究生数学建模竞赛



题 目小麦发育后期茎秆抗倒性的数学模型

摘要：

本文针对小麦发育后期茎秆抗倒性问题，运用拟合、多元线性回归等数理统计方法分别建立了 2007 年，2008 年，2011 年各品种小麦的茎秆倒伏特性指数模型，在此基础上运用灰色理论和 AHP 层次分析法研究了倒伏指数和茎秆外部形态特性之间的关系。通过建立小麦倒伏指数的最优化模型，探讨了探讨单穗重分别是 1.19g, 2.06g, 2.46g, 2.56g, 2.75g, 2.92g 时小麦的理想株型结构。应用力学原理，研究小麦茎秆在麦穗自重和风载作用下应力的基本规律，推导并建立小麦茎秆抗倒伏的数学模型，根据模型和提供的数据计算了 EI。最后对所建的模型进行了评估，为 2012 年制定了完整的试验方案及数据分析方法。

对于问题一，首先分析了题目给出的原始数据，发现根据本题的要求并结合已有的数据对于 2007 年，可以直接套用茎秆倒伏指数公式。对于 2011 年，原始数据已经给出了茎秆鲜重，茎秆重心高度，并没有给出机械强度，于是通过关联度分析，数据拟合和误差分析找到了机械强度与基部第二节粗和厚度乘积之间的强相关性并得到了拟合多项式，这样套用茎秆倒伏指数公式就可得出倒伏指数。对于 2008 年，原始数据中没有给出倒伏指数公式中所需的任何数据，所以通过对于已给数据的处理，得到倒伏指数公式中所需的数据。

对于问题二，茎秆作物抗倒伏特性与外部相态特征之间的关系具有“灰色”特征，采用灰色理论对抗倒性进行评价分析。采用逐步回归方法在 matlab 中编写程序，并结合 AHP 层次分析法分析了抗倒伏特性和茎秆外部特性之间的关系，并确定最容易引起倒伏的指标和各个性状之间的相关性，最后对于 2008 年小麦倒伏原因进行了分析。

对于问题三，运用了由前两问得到的倒伏指数与各个参数之间的关系建立了优化模型的目标函数，根据 08 年数据获得了约束条件，并用 Matlab 对该模型进行求解，得到了各种穗重下的理想株型。

对于问题四，用了与附件所给参考文献不同的方法进行了建模。将小麦的临界穗重模型简化为压杆模型，而将小麦的临界风速模型简化为悬臂梁模型，并且分别考虑了茎秆自重以及风对茎秆的作用力，使得模型更加精确。最后，通过简单易用性原则，定义了倒伏性指数公式，并给出了特定情况下更加易用的简化公式。

对于问题五，首先根据提供的数据，计算了 EI，并且分析了 2007 年数据的可靠性。之后参照所建模型，研究了小麦倒伏的临界自重和临界风速，并进行了分析。

对于问题六，对所建的模型进行了评估，探讨了尾流效应对风速的影响，以及可能的大挠度模型，多段模型以及动态受力模型，并且提出了未来的改进方向。为 2012 年制定完整的试验方案及数据分析方法，并给小麦育种家在育种实践中提出合理的建议。

关键词：

倒伏指数，机械强度，拟合，抗弯刚度，压杆模型，悬臂梁模型，尾流效应

目录

1 问题 1 分析, 建模与求解.....	4
1.1 符号说明.....	4
1.2 数据分析.....	4
1.3 数据处理.....	5
1.4 计算结果.....	10
2 问题 2 分析, 建模与求解.....	13
2.1 分析抗倒伏指数与茎秆外部形态特征之间的关系.....	13
2.2 确定最容易引起倒伏的指标和各个性状之间的相关性.....	16
2.3 2008 年小麦的倒伏原因分析.....	17
3 问题 3 分析、建模与求解.....	18
3.1 分析与建模.....	18
3.2 约束条件来源.....	19
3.3 模型求解.....	20
4 问题 4 分析和建模.....	22
4.1 符号说明.....	22
4.2 只考虑穗重自重作用下的力模型.....	22
4.3 考虑穗重及茎秆自重作用下的力模型.....	24
4.4 单独考虑风作用下的力模型.....	25
4.5 倒伏指数的定义.....	26
5 问题 5 分析和求解.....	28
5.1 EI 的计算.....	28
5.2 2007 年数据中各种小麦的临界穗重.....	29
5.3 2007 年数据中各种小麦的临界风速.....	30
6 问题 6 分析.....	32
6.1 模型评估.....	32
6.2 改进方法.....	33
6.3 进一步的研究与思索.....	33
6.4 2012 年试验方案及数据分析方法.....	34
6.5 建议.....	36
参考文献:	37

1 问题 1 分析，建模与求解

1.1 符号说明

茎秆长： l ，
茎秆壁厚： h
茎秆粗： c
第 i 节茎秆长度： L_i

由于植株重心高度、单茎鲜重和茎秆机械强度是影响倒伏的主要因素。因此提出以倒伏指数作为反映植株抗倒伏的形态指标。

茎秆倒伏指数(CLI)= 茎秆鲜重(FW)×茎秆重心高度(HCG)/茎秆机械强度(Ms)
(1)

为了便于数据的处理和比较，我们对上述公式进行处理：

茎秆倒伏指数(CLI)=[茎秆鲜重(FW)×茎秆重心高度(HCG)/(茎秆机械强度(Ms))*1000)
(2)

这样各种小麦的倒伏指数就在 1 左右。

1.2 数据分析

本题给出了 2007 年，2008 年，2011 年总计三年的小麦各项测量数据，对照抗倒伏指数公式（2）并结合各年数据，可以看出需要的数据有茎秆的鲜重，茎秆的重心高度，以及茎秆的机械强度 3 个指标。然而，对于各年给出的数据分析，数据列表见表 1-1。

表 1-1 2007, 2008, 2011 年数据分析

数据 年份	小麦品种	茎秆各 节的 长,粗, 厚	茎秆各 节鲜重	茎秆 鲜重	穗 重	重 心	机 械 强 度
2007 年	矮抗 58, 新麦 208, 周麦 18	√	×	√	×	√	√
2008 年	矮抗 58, 周 18, 国信, 智 9998 早, 联丰 85, TM	√	×	×	√	×	×
2011 年	矮抗 58, 平安 6, 温麦 6 号, 郑麦 9023, 周麦 18, 周麦 22, 豫麦 18	√	√		√	√	×

其中“√”—表示数据已给；“×”—表示数据未给

根据本题的要求，结合已有的数据可得出数据需求如下：

(1) 对于 2007 年，由给出的原始数据结合倒伏指数可见需要的茎秆鲜重，茎秆重心高度，以及茎秆的机械强度数据都已经给出，所以直接套用公式 (2) 就可以了。

(2) 对于 2011 年，原始数据已经给出了茎秆鲜重，茎秆重心高度，但是并没有给出机械强度，所以必须要寻找机械强度和其他参数的关系以求出机械强度。

(3) 对于 2008 年，原始数据中没有给出倒伏指数公式中所需的任何数据，所以需要进一步处理已给数据，得到倒伏指数公式中所需的数据。

1.3 数据处理

1、2007 年原始数据已经给出了倒伏指数计算中的全部参数，故不需要处理。

2、2011 年数据，缺少机械强度参数，所以需要寻找机械强度和株形参数之间的关系，经过查阅文献以及对于数据的分析处理，以 2007 年数据为研究对象进行数据筛选后我们发现：机械强度与基部第二节粗和厚度之乘积呈现极强的显著的相关性。

我们对于 2007 年的矮抗 58 的机械强度与基部第二节的粗和厚之积进行相关性分析发现相关性指标为 $r=0.6813$ ， $p=0.0000$ ，说明具有很好的相关性。为了使得数据更加有说服力，我们扩大研究的范围，对 2007 年的全部品种矮抗 58，新麦 208，周麦 18 的机械强度与基部第二节的粗和厚之积进行相关性分析可得： $r=0.7280$ ， $p=0.0000$ ，结果很好的说明了我们的猜想。

接着可以对于两者的关系进行拟合，通过数据和图像分析，如图 1-1 所示：

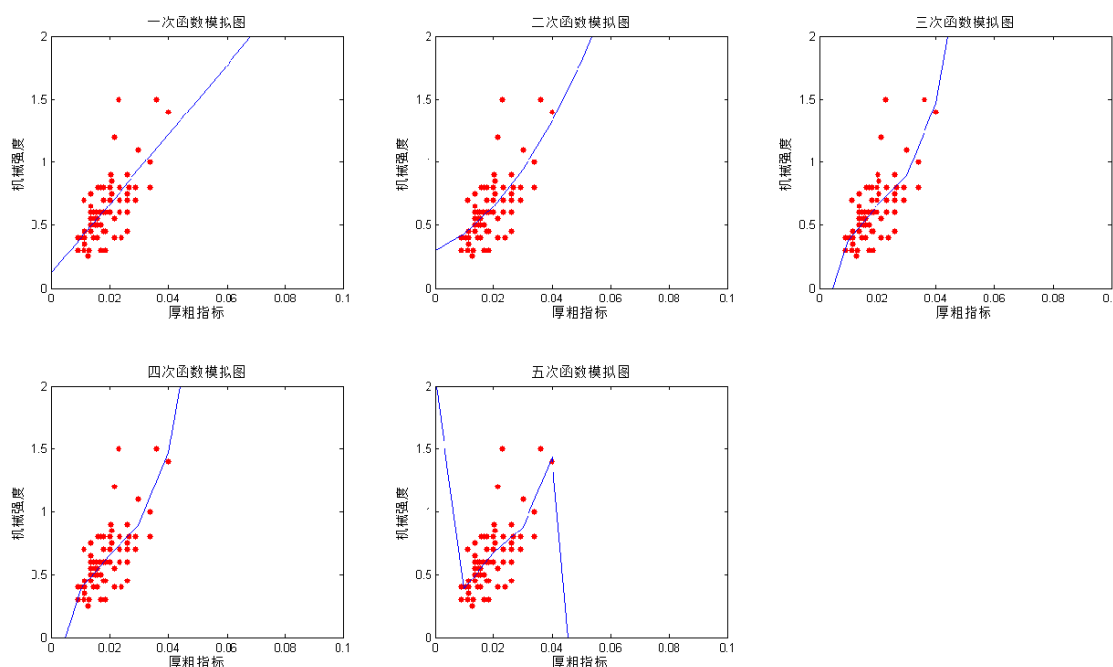


图 1-1 机械强度和粗厚指标的各阶拟合图

在一定的精度范围内我们认为选取一次函数已经更能够较好的反应统计规律。于是对于 2007 年矮抗 58 进行数据拟合，令粗厚之积为 X，机械强度为 Y，

可得两者之间的关系为： $Y=27.5230 \cdot X+0.1170$ ；对于 2007 年全部品种矮抗 58，新麦 208，周麦 18 进行拟合结果为： $Y=27.6092 \cdot X+0.122$ ，两者具有很好的吻合度。于是我们选取 $Y=27.6092 \cdot x+0.122$ ，假设各年小麦的性状之间在机械强度和粗厚之积的指标方面没有明显差异性和突变型，推广到 2011 年就可以矮抗 58，平安 6，温麦 6 号，郑麦 9023，周麦 18，周麦 22，豫麦 18 的机械强度。

结合原始数据，茎秆鲜重等于各部分鲜重之和，这样倒伏指数公式（2）中所需的全部数据都已经有了，就可以计算 2011 年各种小麦倒伏指数。

3、对于 2008 年，原始数据中没有给出倒伏指数公式中所需的任何数据。下面对于倒伏指数计算公式（2）中所需的 3 个参数进行讨论。

1) 机械强度：我们仍然可以按照 2011 年的处理方法，采用机械强度和粗厚之积的拟合关系 $Y=27.6092 \cdot X+0.122$ 进行计算。

2) 茎秆的鲜重：茎秆鲜重有两种方案可以得到，

方案 1 因为已经给出了各节的干重，所以需要将干重折合成鲜重；

方案 2 假设研究年份 2007、2008、2011 年的各小麦茎秆的水分和密度没有明显差异性，这样茎秆的圆筒表皮体积为

$$V_{\text{茎秆表皮体积}} = [\pi(\frac{c}{2})^2 - \pi(\frac{c}{2} - h)^2] \cdot l = \pi \cdot (ch - h^2) \cdot l \xrightarrow{h \ll c} \pi \cdot chl$$

其中 l 表示茎秆长， h 表示茎秆壁厚， c 表示茎秆粗。可见体积正比于 chl ，所以我们只需要研究鲜重和 chl 的关系。

用 2011 年矮抗 58 的数据进行分析，首先进行各节鲜重和 chl 的相关度分析结果见表 1-2：

表 1-2 各节鲜重和 chl 的相关度分析结果

矮抗 58	穗下第 1 节	穗下第 2 节	穗下第 3 节	穗下第 4 节
r	0.7694	0.8807	0.9001	0.9326
p	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

根据相关度的分析可见各节的鲜重和 chl 具有很好的相关度。

接着我们对于各节的鲜重和对应的 chl 进行拟合分析。

对 2011 年矮抗 58 的穗下第一节到穗下第四节以 chl 作为横坐标，鲜重作为纵坐标画图可得图 1-2：

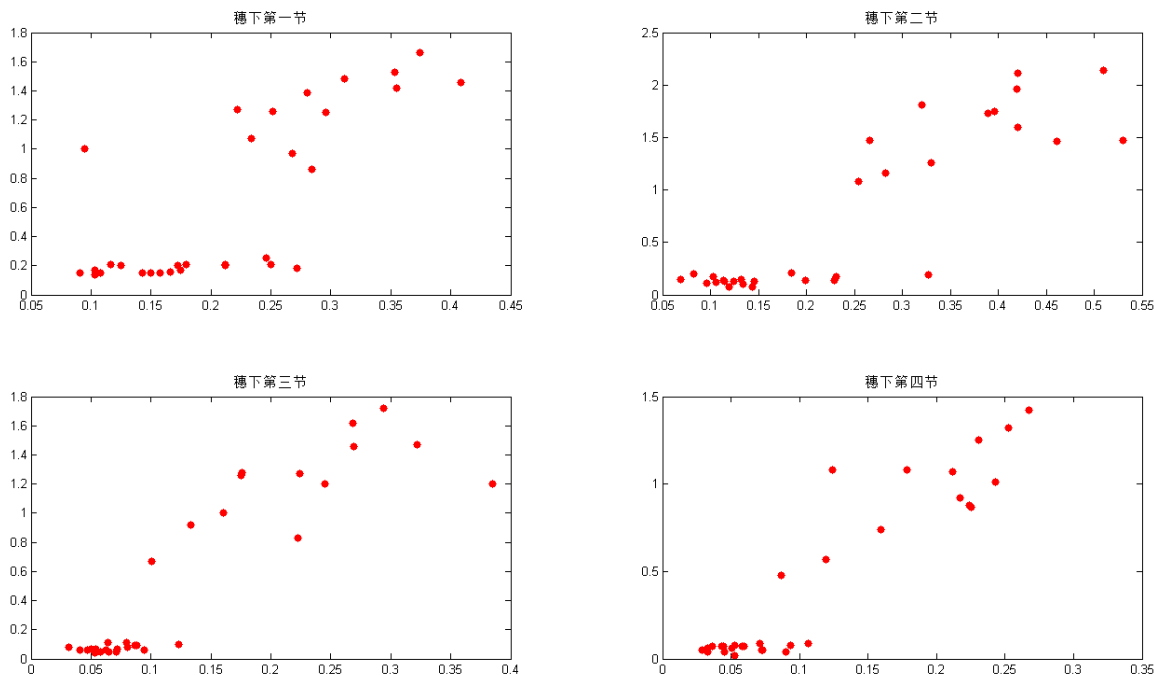


图 1-2 chl 与鲜重图

根据拟合原理，拟合的多项式次数为 n ， a 为拟合的系数， S 为拟合使用的框架结构数组，它有 3 个域： $S.R$ 给出的是 QR 分解后满足 $QR=V$ 的矩阵 R ； $S.df$ 给出相应的 χ^2 量的自由度 $\nu = N - (n+1)$ ； $S.normr$ 给出拟合残数的 2-范数，当数据 y_i 是同一方差的独立正态随机数，这样 χ^2 量最小的估计也就是“极大似然估计”，并保证至少有 50% 的原始数据点满足 $\hat{y}_i - \delta_i \leq y_i \leq \hat{y}_i + \delta_i$ ，这里的 \hat{y}_i ， δ_i 分别是原始数据 y_i 的估计和离差。一般我们拟合多项式的次数不超过 5 次，否则矩阵的条件数会随着阶数越来越大，而且本题假设麦子一般不会随着年份发生突变，数据的变动范围不是很大，这样可以保证我们预测和模拟的精度满足要求。

根据上述理论，编写拟合程序对于各节的鲜重和 chl 指标进行拟合分析可得结果为图 1-3~1-6 所示：

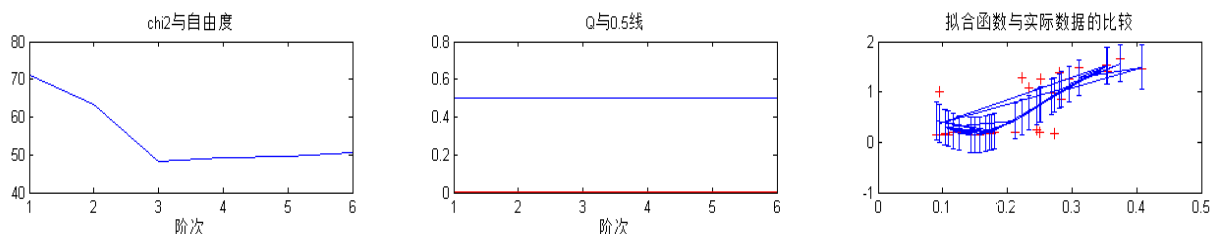


图 1-3 穗下第一节鲜重和 chl 拟合分析

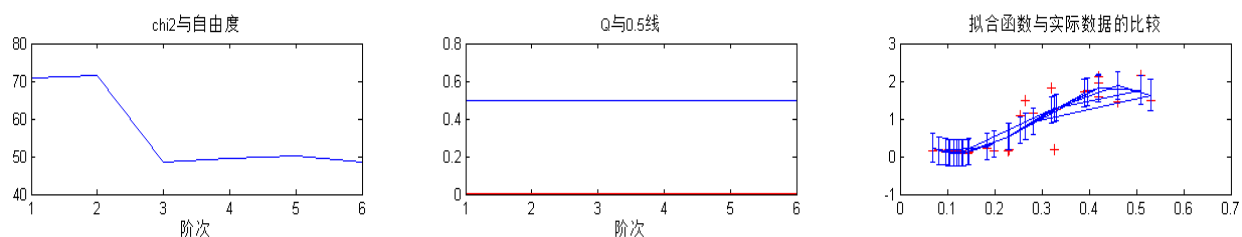


图 1-4 穗下第一节鲜重和 *chl* 拟合分析

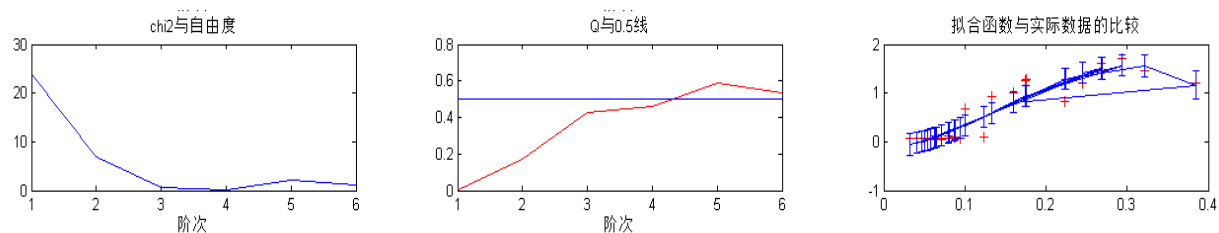


图 1-5 穗下第一节鲜重和 *chl* 拟合分析

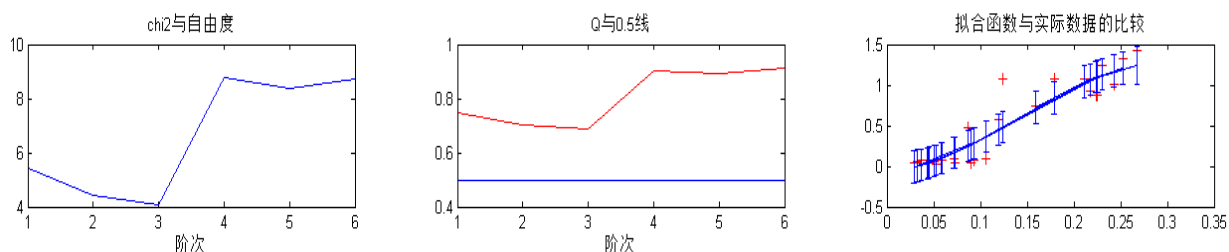


图 1-6 穗下第一节鲜重和 *chl* 拟合分析

综合上述图可见选择 3 次函数的拟合效果为最佳，相应的系数见表 1-3：

表 1-3 各节鲜重和 *chl* 指标拟合系数

	3 次系数	2 次系数	1 次系数	常系数
穗下第一节	-223.5283	176.0499	-37.0765	2.4995
穗下第二节	-90.5509	78.8931	-15.0311	0.9178
穗下第三节	-114.6137	51.3543	0.5505	-0.1222
穗下第四节	-106.7232	45.6891	0.2529	-0.0495

拟合效果分析见表 1-4：

表 1-4 拟合多项式系数分析

	3 次分析	2 次分析	1 次误分析	常系数分析
穗下第一节	55.8458	40.9034	9.1970	0.6210
穗下第二节	18.5227	16.6436	4.4565	0.3343
穗下第三节	42.6469	26.2458	4.6691	0.2155
穗下第四节	132.0305	56.1491	6.9931	0.2387

对于 2011 年矮抗 58 读入 31 组数据的各节鲜重和 *chl* 拟合 3 阶多项式拟合离差分析结果为下，可见具有可以接受的拟合度。

0.3525 0.3557 0.2159 0.1969

0.3680	0.3855	0.2183	0.2040
0.3503	0.3502	0.2136	0.1958
0.3675	0.3572	0.2793	0.1947
0.3591	0.4205	0.2235	0.1956
0.3476	0.3490	0.2139	0.1946
0.3451	0.3502	0.2110	0.1930
0.3457	0.3548	0.2131	0.1998
0.3456	0.3496	0.2138	0.1978
0.3589	0.3496	0.2140	0.1969
0.3549	0.3557	0.2205	0.2327
0.4360	0.3551	0.2131	0.1979
0.3497	0.3557	0.2184	0.1951
0.3455	0.3516	0.2115	0.1933
0.3497	0.3452	0.2174	0.1895
0.3567	0.3465	0.2083	0.1895
0.3471	0.3492	0.2085	0.1897
0.3478	0.3453	0.2103	0.1907
0.3566	0.3480	0.2079	0.1982
0.3466	0.3460	0.2094	0.1909
0.3492	0.3463	0.2081	0.1981
0.3497	0.3519	0.2133	0.1935
0.3487	0.3511	0.2081	0.1911
0.3496	0.3632	0.2079	0.1896
0.3754	0.3526	0.2266	0.1912
0.3497	0.3458	0.2134	0.2026
0.3528	0.3453	0.2091	0.1949
0.3485	0.3825	0.2101	0.1912
0.3466	0.3450	0.2092	0.1896
0.3453	0.3499	0.2084	0.1942
0.3482	0.3515	0.2103	0.1913

根据表 1-3 的结果，应用拟合的各节鲜重和各自 chl 的 3 次多项式，通过 2008 年原始数据中给出的株型参数可以带入 3 次多项式，得到各节的鲜重。

3) 茎秆重心高度：根据 2) 中结果我们已经能够求出 2008 年的各节的鲜重，根据力学中求重心的原理，假设麦子每节的质量均匀分布于各节的茎秆，设穗下第一节~第四节的重量和长度分别为： $L1 \sim L4$ 、 $m1 \sim m4$ 并且以第四节作为支点，见图 1-7。

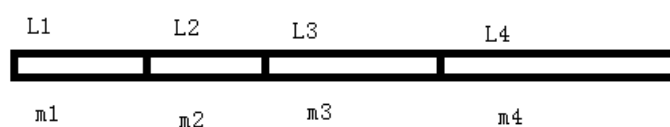


图 1-7 株型重心模型

设重心距离支点为 $L_{\text{重心}}$ ，则

$$L_{\text{重心}} = [m_1 g \cdot (0.5 \cdot L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + m_2 g \cdot (0.5 \cdot L_2 + L_3 + L_4) + m_3 g \cdot (0.5 \cdot L_3 + L_4) + m_4 g \cdot (0.5 L_4)] / (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) g \quad (3)$$

根据 2) 中得到的鲜重结合原始数据中的株型，以及重心的公式可以得到茎秆重心高度。

综上所述，由 1)、2)、3) 可得 2008 年的小麦的茎秆鲜重，茎秆重心高度，以及茎秆的机械强度，这样根据倒伏指数的公式 (2) 可得到该年的各个品种的小麦的倒伏指数。

1.4 计算结果

1、2007 年不同品种的小麦在生育后期倒伏指数变化情况如表 1-5 和图 1-8：
(为了便于分析，已经将数据除以 1000)。

表 1-5 2007 年各小麦品种不同时期倒伏指数

品种 \ 时期	开花期	灌浆期	乳熟期	蜡熟期
矮抗 58 (2006 年 10 月 10 日播种)	0.413	0.424	0.599	0.803
矮抗 58 (2006 年 10 月 25 日播种)	0.314	0.427	0.746	0.733
新麦 208	0.488	0.761	0.892	1.202
周麦 18	0.492	0.675	0.788	0.966

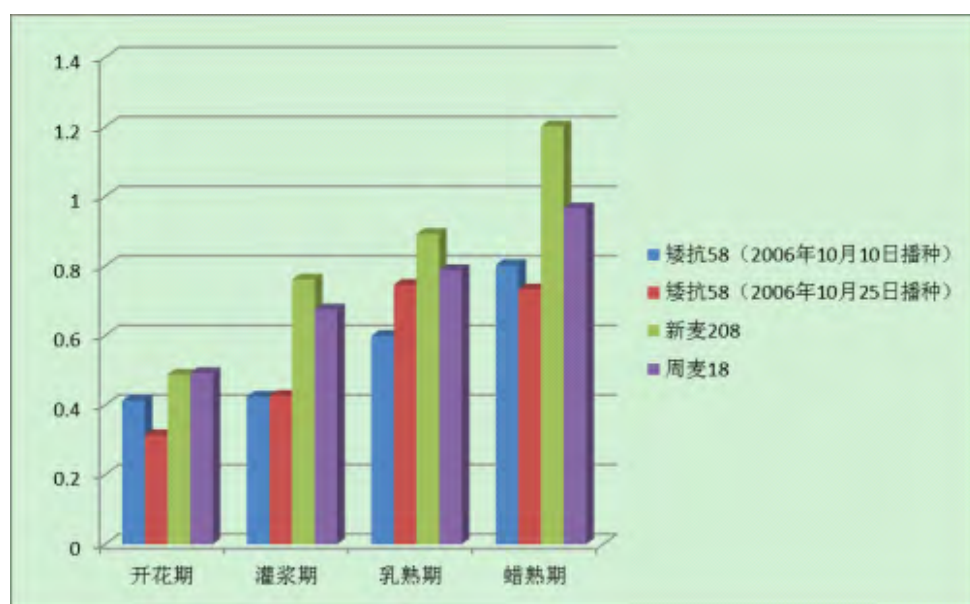


图 1-8 2007 年各小麦品种不同时期倒伏指数横纵向对比

可以看出：

1) 同一品种的小麦在生育后期随着时间推移其倒伏指标越来越大，说明倒伏的风险越来越大，这个与正常农业生产情况是相吻合的。

2) 不同品种的小麦在相同时期基本上具有相同的规律：倒伏指标为新麦 208>周麦 18>矮抗 58。说明抗倒伏的能力从强到弱依次为：矮抗 58，周麦 18，新麦 208。

2、2008 年不同品种小麦的倒伏指数(为了便于分析，已经将数据除以 1000)如下表 1-6 和图 1-9 所示：

表 1-6 2008 年不同品种小麦的倒伏指数

品种	矮抗 58	周 18	国信	智 9998 早	联丰 85
倒伏指数	0.281334493	0.30684746	0.325792053	0.42149867	0.318716161

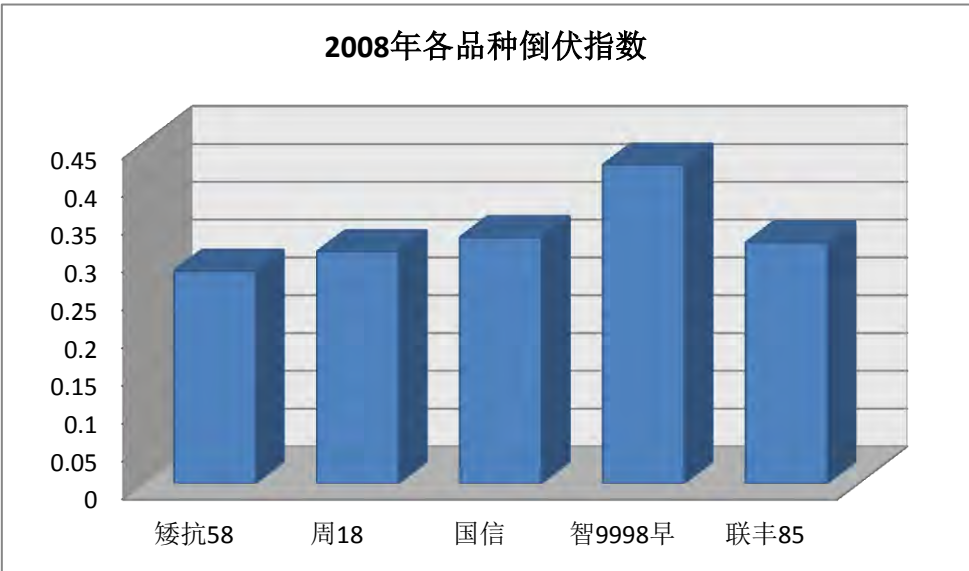


图 1-9 2008 年不同品种小麦的倒伏指数柱状图

可以看出：不同品种的小麦在相同时期基本上具有相同的规律：倒伏指标为智 9998 早>国信>联丰 85>周麦 18>矮抗 58。说明抗倒伏的能力从强到弱依次为：矮抗 58，联丰 85，国信，智 9998 早。

3、2011 年不同品种小麦的倒伏指数(为了便于分析，已经将数据除以 1000)如下表 1-7 和图 1-10 所示：

表 1-7 2011 年各品种小麦后期倒伏指数

品种	矮抗 58	豫麦 18	周麦 18	温麦 6 号	平安 6	周麦 22	郑 麦 9023
倒伏指数	0.21843	0.228748	0.24525	0.264346	0.315711	0.367744	0.51438

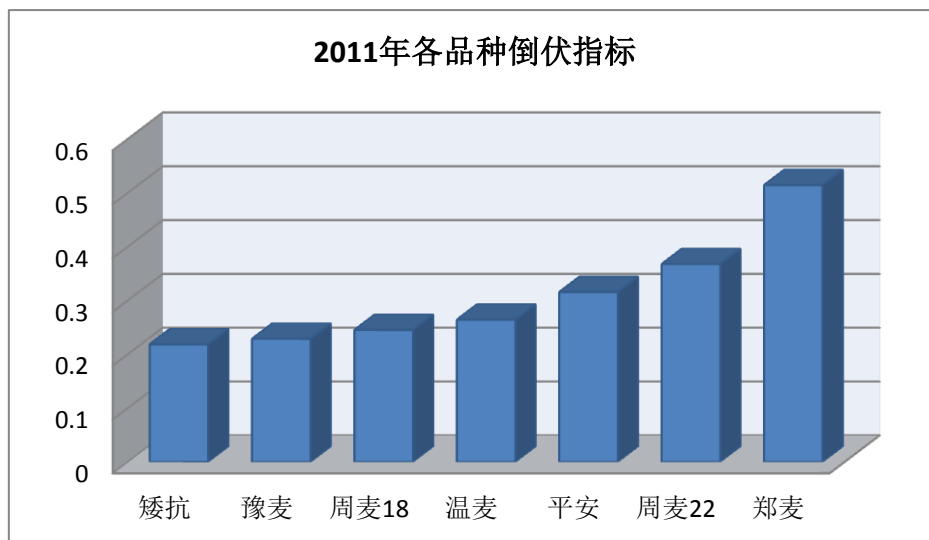


图 1-10 2011 年各品种小麦后期倒伏指数柱状图

可以看出：不同品种的小麦在相同时期基本上具有相同的规律：倒伏指标为郑麦 9023>周麦 22>平安 6 号>温麦 6 号>周麦 18>豫麦 18>矮抗 58。说明抗倒伏的能力从强到弱依次为：矮抗 58，豫麦 18，周麦 18，温麦 6 号，平安 6 号，周麦 22，郑麦 9023。

2 问题 2 分析，建模与求解

2.1 分析抗倒伏指数与茎秆外部形态特征之间的关系

茎秆作物抗倒伏特性与外部相态特征之间的关系具有“灰色”特征，可采用灰色理论对抗倒性进行评价分析。将茎秆的倒伏指数和株高，穗长，各节间长度比，各节壁厚，穗重，鲜重等之间的体系视为一个灰色系统，每个指标作为该系统的一个因素，研究各主要指标对其倒伏的影响。关联度大的表明对倒伏影响大，反之表明对倒伏影响小。主要分为以下几个步骤：^{[1][2]}

1. 始数据的指标区间值化处理。由于给出的数据包括了株高，穗长，各节间长度比，各节壁厚，穗重，鲜重等，这些指标的单位都不统一，这样就难以直接比较，根据可接近性、可比性原则，可以对需要的数据进行无量纲化处理。由于篇幅和时间有限，我们仅仅对于倒伏指数与某些性状相关性做详细分析，其他的仅仅给出结果。假设倒伏指数为 $x_0(k)$ ，其他的株型参数为 $x_1(k)$ ， $x_2(k) \cdots x_n(k)$ ，求出其中对应某个株型参数 x_i 的最大最小值 $\max x_i(k)$ 和 $\min x_i$ ，根据公式 $X_i(k) = \frac{x_i(k) - \min x_i(k)}{\max x_i(k) - \min x_i(k)}$ 进行参数的规格化，这样便得到了

$X_i(k)$ 即为第 i 个参数的第 k 次取样值 $x_i(k)$ 的规格化值。

2、指标区间值化数列与参考数列的差值。根据公式 $\Delta x_i(k) = |X_0(k) - X_i(k)|$ 得到指标区间值化数列与参考数列的差值 $\Delta x_i(k)$ 。

3、关联系数计算。根据第 2 步中得到的二级最小差 $\min_i \min_k \Delta x_i(k)$ ，以及二级最大差 $\max_i \max_k \Delta x_i(k)$ ，可以根据下式求的倒伏指标和各项参数之间的关联系数：

$$\xi_i(k) = \frac{\min_i \min_k \Delta x_i(k) + \rho \max_i \max_k \Delta x_i(k)}{\Delta x_i(k) + \rho \max_i \max_k \Delta x_i(k)}, (k, i = 1, 2, \dots, n)$$

其中的参数 $\rho \in (0, +\infty)$ ，称作分辨系数，通常 ρ 的取值区间为 $[0, 1]$ ，一般取 $\rho = 0.5$ 。

4、求关联度 γ 。利用公式： $\gamma_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_i(k)$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ 就可以求出相应的各项指标与倒伏指数的关联度。

以 2007 年为例：综合 1~4 步骤我们可以得到小麦的机械强度和倒伏指标对于株型各参数关联度分析结果为表 2-1~2-6：

表 2-1 2007 年矮抗 58 机械强度的相关度分析

2007 年	茎重心	基部第五节长	基部第五节粗	基部第四节长	基部第四节粗	基部第三节长	基部第三节粗	基部第二节长	基部第二节粗	壁厚	单穗鲜重
r	0.058903510063	0.27440592404	0.73032408805	-0.16236462009	0.78997543118	-0.047200754549	0.63084063311	-0.18904545599	0.49068716809	-0.047036050086	0.80015761209
p	0.74879417494	0.12854595566	2.09E-06	0.3746254476	7.60E-08	0.79754355357	0.00010853815913	0.30009186536	0.0043532400605	0.79823550218	3.88E-08

表 2-2 2007 年新麦 208 倒伏指标的相关度分析

2007 年	茎重心	基部第五节长	基部第五节粗	基部第四节长	基部第四节粗	基部第三节长	基部第三节粗	基部第二节长	基部第二节粗	壁厚	单穗鲜重
r	-0.061467776316	0.24150238759	0.45858314635	0.13017954922	0.56028714565	0.071412483391	0.48217288352	-0.033837733536	0.28440623599	0.25298406897	0.51688430805
p	0.72575827209	0.16221919747	0.0055945018452	0.45605215599	0.00046471910687	0.68352351501	0.0033550249378	0.84698123582	0.09775038793	0.14256871816	0.001476642408

表 2-3 2007 年周麦 18 倒伏指标的相关度分析

2007 年	茎重心	基部第五节长	基部第五节粗	基部第四节长	基部第四节粗	基部第三节长	基部第三节粗	基部第二节长	基部第二节粗	壁厚	单穗鲜重
r	-0.14655967798	-0.30298002417	0.50122915418	0.14775238339	0.757294813	0.14462585004	0.71206472499	-0.2078876177	0.56650896598	0.48384409515	0.87884069309
p	0.42346890637	0.091871725597	0.0034746878963	0.41966434872	5.25E-07	0.42967805045	4.87E-06	0.25356633979	0.00072447380347	0.0050204887189	3.72E-11

表 2-4 2007 年矮抗 58 倒伏指标的相关度分析

2007 年	茎重心	基部第五节长	基部第五节粗	基部第四节长	基部第四节粗	基部第三节长	基部第三节粗	基部第二节长	基部第二节粗	壁厚	单穗鲜重
r	0.44527851614	-0.36980141062	-0.48371980013	0.22487356191	-0.24274614302	0.18253128671	-0.075769726353	0.53786124715	0.099291683641	-0.20913915174	-0.13529465631
p	0.010654293302	0.037234991262	0.0050333766095	0.21594279451	0.18067788239	0.3173567045	0.6802230986	0.001498491305	0.5887345038	0.25065524993	0.46033387953

表 2-5 2007 年新麦 208 倒伏指标的相关度分析

2007 年	茎重心	基部第五节长	基部第五节粗	基部第四节长	基部第四节粗	基部第三节长	基部第三节粗	基部第二节长	基部第二节粗	壁厚	单穗鲜重
r	0.78465386343	0.23880030292	0.10034946186	0.13898694353	0.15191699793	-0.034221461156	0.048237146425	-0.051733563205	0.29331928762	-0.72388705469	0.32783956985
p	2.42E-08	0.16711402568	0.56626172057	0.42587418337	0.38365312583	0.84526676284	0.78318494653	0.76788520323	0.087242992515	8.90E-07	0.054530404024

表 2-6 2007 年周麦 18 倒伏指标的相关度分析

2007 年	茎重心	基部第五节长	基部第五节粗	基部第四节长	基部第四节粗	基部第三节长	基部第三节粗	基部第二节长	基部第二节粗	壁厚	单穗鲜重
r	0.67486493626	0.30829286303	-0.20729874784	0.0037143074867	-0.230984967	0.14180379242	-0.22400215752	0.26736933014	-0.059305267697	-0.55461554507	-0.3310418544
p	2.27E-05	0.086037759195	0.25494375723	0.9839034749	0.20339238311	0.43882851866	0.21777447211	0.1390388686	0.74713623327	0.00098739575336	0.064209614122

2008 年和 2011 年的相关度分析原理一样，计算过程也完全一样，所以就不再赘述。

2.2 确定最容易引起倒伏的指标和各个性状之间的相关性

上面已经给出了影响倒伏的各个因素以及相应的关联度分析，但是我们还需要确定各个指标对于倒伏指数的权重问题，由于权重往往难以量化，所以我们采用权数确定方法中的层次分析法(AHP)来确定各指标的权重大小。该方法是把所有因素进行两两对比，采用相对标度，尽可能地减少性质不同的诸因素相互比较的困难，引入1—9标度法，较好地使思维判断数量化。主要步骤为构造判断矩阵，计算权数分配，权重值检验。可以按照下面的步骤进行分析：^{[2][3]}

1、构造判断矩阵

如果要比较的是 x_1, x_2, \dots, x_n 这几个因素对于茎秆作物倒伏性能的影响，每次去两个因素 x_i 与 x_j ，用 x_{ij} 表示 x_i 与 x_j 对于评价目标 x_0 (本题中即为倒伏指标) 的影响之比，将全部的比较结果用矩阵 $P = (x_{ij}) (x_{ij} > 0, x_{ii} = 1, u_{ji} = \frac{1}{u_{ij}})$ 表示，形成判断矩阵 P 为：

$$P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & & & x_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

2、计算重要性排序。

根据判断矩阵 P ，用方根法求出最大特征根所对应的特征向量，所求特征向量即为评价因素重要性排序，也即权数分配。计算如下：

先求出判断矩阵每一行元素的乘积， $W_i = \prod_{j=1}^n x_{ij}$ ，然后再计算 $\bar{W}_i = \sqrt[n]{W_i}$ ，接着对于向量 $\bar{W}_i = [\bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_n]^T$ 做归一化处理即 $W_i = \frac{\bar{W}_i}{\sum_{i=1}^n \bar{W}_i}$ ，则

$W_i = [W_1, W_2, \dots, W_n]^T$ 即为所求的调整向量。

3、权重值检验。

所求的权数分配是否合理，还需对判断矩阵进行一致性检验，检验使用判断矩阵的随机一致性比率公式： $C_R = \frac{C_I}{R_I}, C_I = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$ 为判断矩阵的一般性指标，

式中 $\lambda_{\max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(PW)_i}{W_i}$ 为判断矩阵 P 的最大特征根，这样就可以判断权重系数分

配的合理性和判断矩阵满意的一致性。

综合上述的分析，我们可以发现机械强度，重心高度，株高，壁厚，茎秆的粗度，单茎鲜重是组成小麦倒伏系数的主要因素。茎秆机械强度每增加一个标准单位，就可以使得品种倒伏系数平均减少 0.6 个左右的标准单位。我们通过分析发现机械强度越大，茎秆越粗，特别是中下部茎秆越粗，重心越低，壁厚越厚

茎秆机械强度越好，抗风性能越强，越不容易造成茎秆倒伏。

另外，通过茎秆性状的各个因素之间的相关度分析我们能够看出来各节的鲜重及干重即生物学产量与穗重呈极显著正相关，穗重与茎秆第 3，4，5 节粗呈极显著正相关，相关系数分别为 0.542, 0.685, 0.723。这个可以通过生物的中上部分组织细胞的叶绿体进行光合作用制造有机物，特别是在小麦的发育后期，这样的光合作用对于小麦穗粒中很强的相关性。各节的长和粗在同一个测量过程中也表现了极强的正相关性。这一结果告诉我们在小麦的育种过程中需要考虑各节之间的协调性，以使得小麦获得更高的产量和抗倒伏性。

2.3 2008 年小麦的倒伏原因分析

结合第一问中的分析结果，见前图 1-9，可以看出：不同品种的小麦在相同时期基本上具有相同的规律：倒伏指标为智 9888 早>国信>联丰 85>周麦 18>矮抗 58。说明抗倒伏的能力从强到弱依次为：矮抗 58，联丰 85，国信，智 9888 早。

结合上述分析，以及前面倒伏指标的相关性分析可见，2008 年小麦中倒伏指标为智 9998 早>国信>联丰 85>周麦 18>矮抗 58，这样国信 1 号和智 9998 的抗倒伏能力最差，而且无论从机械强度，重心高度，株高，壁厚，茎秆的粗度，单茎鲜重角度对比其他的小麦，这两种小麦的抗倒伏也是最差的。所以这两种小麦发生了倒伏，而其他品种的小麦没有发生倒伏。

3 问题 3 分析、建模与求解

3.1 分析与建模

根据 2007 年的小麦参数，采用多元线性回归计算了机械强度和其他的量的关系。式中的变量名如下：

表 3-1 各变量的意义

X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀	X ₁₁
含穗 重心	基部第五节		基部第四节		基部第三节		基部第二节		壁厚	茎秆鲜重
	长	粗	长	粗	长	粗	长	粗		

1、2007 年矮抗 58：

(1) 回归方程为：

$$Y=0.45078-0.029701X_1+0.002632X_2-0.87797X_3-0.047836X_4+2.4022X_5+0.086625X_6+1.4318X_7+0.015449X_8-0.40468X_9-0.30344X_{10}+0.023928X_{11}$$

(2) 误差分析：

残差平方和 Q = 1.1958

剩余标准差，即模型误差的均方根 S = 0.14359

复相关系数 R = 0.87156

回归方程显著性检验，即回归模型的统计量 F = 16.6612

各回归系数的 t 检验值：-3.5974 0.42392 -1.3119 -3.0935
3.2434 2.8651 1.7103 0.52046 -0.5579 -0.12567
1.5257

各自变量的偏相关系数：-0.42711 0.055577 -0.16976 -0.37633
0.39182 0.35212 0.21912 0.068181 -0.07306 -0.016499
0.19643

2、2007 年周 18：

(1) 回归方程：

$$Y=0.31314-0.0034458X_1-0.013994X_2+0.46673X_3+0.039447X_4+0.93548X_5-0.076203X_6+0.46806X_7+0.0088356X_8-0.39818X_9+0.50587X_{10}+0.048612X_{11}$$

(2) 误差分析：

残差平方和 Q = 0.15703

剩余标准差，即模型误差的均方根 S = 0.088608

复相关系数 R = 0.92817

回归方程显著性检验，即回归模型的统计量 F = 11.3093

各回归系数的 t 检验值：-0.4965 -1.0624 0.94749 1.4972
1.1654 -1.4917 0.52095 0.26424 -0.45211 0.10651
2.0992

各自变量的偏相关系数:-0.11034 -0.23112 0.20727 0.31746
 0.25217 -0.31641 0.11571 0.058983 -0.10058 0.02381
 0.42491

3、2007 年新麦 208:

(1) 回归方程为:

$Y=0.35345+0.0046251X_1-0.014262X_2+0.32611X_3-0.017127X_4+0.84071X_5-0.021209X_6+1.7648X_7-0.034155X_8-1.6678X_9+10.7367X_{10}+0.037574X_{11}$

(2) 误差分析:

残差平方和 $Q = 0.17048$

剩余标准差, 即模型误差的均方根 $S = 0.086095$

复相关系数 $R = 0.83553$

回归方程显著性检验, 即回归模型的统计量 $F = 4.835$

各回归系数的 t 检验值:0.9146 -1.8227 0.7392 -1.3567
 1.329 -1.2754 2.7045 -1.6207 -2.5084 2.503
 1.6758

各自变量的偏相关系数:0.18733 -0.35526 0.15233 -0.27221
 0.26705 -0.25701 0.49121 -0.32016 -0.46347 0.46268
 0.32987

本题为求极值问题, 因此本题中的模型为非线性有约束最优化模型。根据前面章节及上述的讨论, 可知模型中使用的目标函数为倒伏指数: 茎秆鲜重 \times 茎秆重心高度/茎秆机械强度, 茎秆鲜重和茎秆重心高度作为独立变量, 而茎秆机械强度拟合为多个变量的线性函数, 这些变量包括含穗重心, 基部第五节长、粗, 基部第四节长、粗, 基部第三节长、粗, 基部第二节长、粗以及茎秆鲜重。

目标函数的形式为

$$\min f(x) = x_1 \times x_2 / (a_1 \times x_1 + a_2 \times x_2 + \cdots + a_{10} \times x_{10})$$

约束条件有以下几种: 茎秆鲜重上下限、含穗重心高度上下限、各节茎部的长度上下限、各节茎部的粗度上下限、基部第五节分别于余下各节长度的比值的上下限。

3.2 约束条件来源

在 08 年数据基础上得到了约束条件, 具体做法如下:

(1) 首先要对数据进行筛选, 剔除那些不是很合理的数据。

(2) 求出各品种长度、粗度的最大最小值, 作为约束条件。

(3) 根据 07 年的数据拟合得到了鲜重和体积的关系, 计算 08 年小麦的各节茎秆的体积, 进而算得小麦各节茎秆的鲜重和小麦茎秆总鲜重, 并找出小麦鲜重的最大、最小值作为约束条件。

(4) 根据小麦各节的鲜重、各节的高度、穗重和穗长，计算得到小麦含穗的重心，找到最大最小值作为约束条件。

3.3 模型求解

(1) 2008 年数据中单穗重为 2.46g 的品种为矮抗 58，所以计算 2.46g 单穗重的最佳株型选用的是矮抗 58。以下为计算最佳株型的详细模型：

$$\min f(x) = \frac{x_1 \cdot x_{10}}{g(x)}$$

其中 $g(x) = 0.276302 - 0.029701x_1 + 0.002632x_2 - 0.87797x_3 - 0.047836x_4 + 2.4022x_5$
 $+ 0.086625x_6 + 1.4318x_7 + 0.015449x_8 - 0.40468x_9 + 0.023928x_{10}$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & 28.7938 < x_1 < 37.9760 \\ & 17.6 < x_2 < 27.3 \\ & 0.25 < x_3 < 0.48 \\ & 17.6 < x_4 < 27.3 \\ & 0.35 < x_5 < 0.56 \\ & 6.8 < x_6 < 10.2 \\ & 0.40 < x_7 < 0.58 \\ & 4 < x_8 < 9.3 \\ & 0.4 < x_9 < 0.55 \\ & 6.6986 < x_{10} < 9.3028 \\ & 1.15 < x_2 / x_4 < 2.46 \\ & 2.13 < x_2 / x_6 < 3.79 \\ & 2.40 < x_2 / x_8 < 4.32 \end{aligned}$$

利用Matlab语句[x,fval,exitflag,output,lambda]=fmincon(@fun1,x0,A,B,[],[],LB,UB)计算得到最终结果（保留两位小数）如下表所示：

表3-2 2.46g单穗重的最佳株型

x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀
28.79	25.09	0.25	10.20	0.56	10.20	0.58	9.30	0.40	6.70

注：x₁₀的单位为g，其余变量单位为cm

(2) 2008 年数据中单穗重为 2.75g 的品种为周 18，所以计算 2.75 单穗重的最佳株型选用的是周 18。以下为计算最佳株型的详细模型：

$$\min f(x) = \frac{x_1 \cdot x_{10}}{g(x)}$$

其中 $g(x) = 0.601486 - 0.0034458x_1 - 0.013994x_2 + 0.46673x_3 + 0.039447x_4 + 0.93548x_5 - 0.076203x_6 + 0.46806x_7 + 0.0088356x_8 - 0.39818x_9 + 0.048612x_{10}$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & 34.5391 < x_1 < 42.8962 \\ & 21.1 < x_2 < 31.2 \\ & 0.24 < x_3 < 0.43 \\ & 13.9 < x_4 < 18.5 \\ & 0.37 < x_5 < 0.55 \\ & 5 < x_6 < 12 \\ & 0.38 < x_7 < 0.55 \\ & 5.3 < x_8 < 8 \\ & 0.38 < x_9 < 0.53 \\ & 7.1507 < x_{10} < 9.4295 \\ & 1.27 < x_2 / x_4 < 2.01 \\ & 2.05 < x_2 / x_6 < 3.96 \\ & 2.81 < x_2 / x_8 < 5.11 \end{aligned}$$

各个未知数的含义与表 3-1 中一致。经过 Matlab 计算，最终计算结果（保留两位小数）如下表所示：

表 3-3 2.75g 单穗重的最佳株型

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
34.54	23.50	0.43	18.50	0.55	7.50	0.55	8.00	0.38	7.15

注： x_{10} 的单位为g，其余变量单位为cm

(3) 1.19g, 2.06g, 2.56g, 2.92g 理想株型

这四个重量的单穗的理想株型的计算方法同上，此处就不再赘述了，只给出最终的优化结果（单位同上所述）：

表 3-4 四种重量的单穗的最佳株型

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1.19g	39.68	21.34	0.40	21.6	0.51	8.20	0.58	9.50	0.36	4.42
2.06g	40.13	22.56	0.40	18.50	0.45	8.90	0.53	9	0.32	4.78
2.56g	32.38	21.87	0.4	17.4	0.57	6.7	0.57	9	0.41	7.33
2.92g	31.57	22.34	0.21	19.5	1.08	8.1	0.91	5	0.57	6.62

4 问题 4 分析和建模

4.1 符号说明

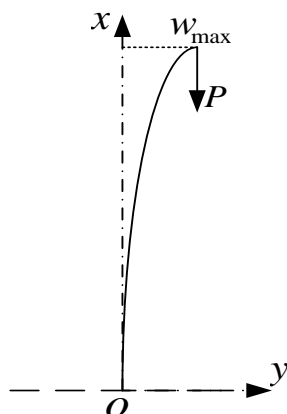
E 弹性模量
 I 茎杆截面惯性矩
 M 力矩
 w_{\max} 挠度
 P 临界力
 W 弹性热能
 l 茎杆高度
 U 外力势能
 q 茎杆单位长度重量
 u 单穗鲜重
 s_1 麦穗迎风面积
 s_2 茎杆迎风面积
 D 茎杆直径
 t 茎杆厚度
 p 风压
 v 风速
 F 风作用在麦穗上的力
 f 风作用在茎杆上的力
 γ 倒伏指数
 Q 机械强度

4.2 只考虑穗重自重作用下的力模型

在建模之前，先作以下几条假设：

- 1) 假设小麦各节是等粗的，且各节的弹性模量是一致的，即搞弯风度 EI 相同
- 2) 考虑到麦穗自重较小，因此麦穗不会引起太大形变，故作小挠度分析
- 3) 由于麦穗自身相对于顶端的位置不同，难以考虑，因此假设其为集中力，作用在杆顶
- 4) 忽略小麦叶子的影响

根据以上假设，分析麦穗自身重力的模型，可知其等效情况为力学中的压杆模型，如下图所示。



由于在小挠度下考虑，因此其挠度方程可表示为：

$$EIy'' = M(x)$$

其中 E 为弹性模量， I 为茎杆截面惯性矩， M 为力矩。

设挠度方程为 $y = g(x)$ ，麦穗重力为 P ，则可得

$$M(x) = (w_{\max} - g(x)) * P$$

考虑其边界条件 $y'(x) = 0$ ， $y(x) = 0$ ，解此方程可得

$$y = w_{\max}(1 - \cos kx)$$

此时， $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ ，而根据杆平衡状态时，有^[1]

$$k = \frac{n\pi}{2l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

从而，可得最小临界力为：

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

另外一方面，小麦茎杆势能为：

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx = w_{\max}^2 \frac{\pi^4 EI}{64l^3}$$

外力势能为

$$U = Pw_{\max}$$

则由最小势能原理可得：

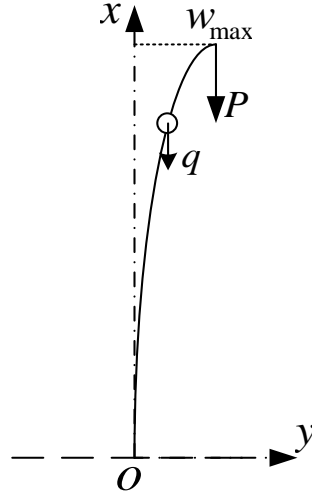
$$P = \frac{\pi^4 EI}{32l^3} w_{\max}$$

此亦即最小临界力，则可知

$$w_{\max} = \frac{8l}{\pi^2}$$

即挠度方程为：

$$y = \frac{8l}{\pi^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2l} x\right)$$



4.3 考虑穗重及茎秆自重作用下的力模型

上面已得不考虑茎秆自重时的受力模型，然而，由于与穗重相比，茎秆重不小，甚至与穗重相当。^[4]因此，下面考虑茎秆自重，修正上述临界力，此时

$$M(x) = \int_x^1 (g(z) - g(x)) * q \, dz + (w_{\max} - g(x)) * P$$

上式中被积变量为 z ， q 为茎秆单位长度重力。可见其为一个极复杂的方程，根据文献^[2]可知，上式的解需要用 Bessel 函数表示，想要显示地表达是不可能的。因此，假设茎秆自重并不影响其挠度方程，只在其修改临界力。

此小麦茎秆势能为：

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^1 (y'')^2 \, dx = w_{\max}^2 \frac{\pi^4 EI}{64l^3}$$

外力势能为：

$$U = Pw_{\max} + \int_0^1 q(w_{\max} - g(x)) \, dx = w_{\max}(P + ql - 2ql/\pi)$$

由最小势能原理可知：

$$P + ql - \frac{2ql}{\pi} = w_{\max} \frac{\pi^4 EI}{32l^3}$$

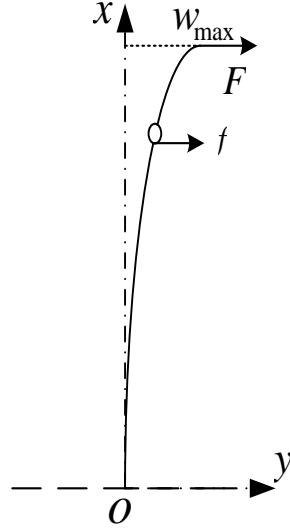
从而可得：

$$P = w_{\max} \frac{\pi^4 EI}{32l^3} - ql + \frac{2ql}{\pi}$$

代入 $w_{\max} = 8l/\pi^2$ 可得临界力为

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} - ql + \frac{2ql}{\pi}$$

4.4 单独考虑风作用下的力模型



如上图，其模型等效为自由端的弹性梁^[5]，于是有：

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EI}$$

其中 E 为茎杆的弹性模量， I 为茎杆的横截面惯性力矩。

因工程结构中，梁的挠度很小，弹性曲线的曲率也很小，在方程中的 y' 往往可省略不计，材料力学中梁的挠度的微分方程可简化为

$$EIy'' = M$$

此时，假设小麦穗头迎风面积如下：

$$s_1 = a + b * u$$

其中 a ， b 为转换系数， $a=0.4841$ ， $b=0.2238$ 。面积单位为平方厘米， u 为单穗鲜重，单位为 g 。

而风压

$$p = \frac{v^2}{1.63} (N/m^2)$$

即近似认为风全部吹在麦穗面积上，此时

$$F = p * s_1$$

另外，考虑风速对小麦茎杆的力，此时小麦茎杆的等效面积为

$$s_2 = l * D$$

其中， D 为茎杆的外径，则单位长度所受的风力为

$$f = p * D$$

如上图，此时可等效为悬臂梁模型，参考文献^[3]，可知

$$M(x) = F(l - x) + \frac{f}{2}(l - x)^2$$

可得挠度方程为：

$$y = \frac{F}{6EI}(3lx^2 - x^3) + \frac{f}{24EI}(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2)$$

此时最大挠度为

$$w_{\max} = \frac{l^3 F}{3EI} + \frac{fl^4}{8EI} = \frac{pl^3}{EI} \left(\frac{s_1}{3} + \frac{Dl}{8} \right)$$

则此时临界风压为

$$p = \frac{w_{\max} EI}{l^3} / \left(\frac{s_1}{3} + \frac{Dl}{8} \right)$$

而若忽略茎秆作用力时，上面式子将简化，此时挠度方程为：

$$y = \frac{F}{6EI}(3lx^2 - x^3)$$

临界风压为

$$p = \frac{3w_{\max} EI}{s_1 l^3}$$

4.5 倒伏指数的定义

在题目中给出了一个常用的倒伏指数的定义，即茎秆倒伏指数=茎秆鲜重×茎秆重心高度/茎秆机械强度。然而通过上面对模型的建立，可以再给出一个更加贴切事实际的倒伏指数的定义^[6]，如下：

$$\gamma \propto \frac{u}{P}$$

其中， u 为单穗鲜重， P 为临界穗重。由于

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

则

$$\gamma \propto \frac{ul^2}{EI}$$

由此可见，伏指数与四个独立的参数有关，即小麦的穗重，小麦的高度，小麦的弹性模量，以及小麦的茎秆截面惯性矩有关。

由于

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - (D - 2t)^4)$$

其中 D 为小麦的粗度， t 为小麦的厚度。

由于：

$$\frac{\partial I}{\partial D} = \frac{\pi t}{8}[3(D - t)^2 + t^2]$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\pi t}{8}(D - 2t)^3$$

可见，茎秆截面惯性矩与 D 和 t 均是正相关的，即粗度和壁厚变大时， I 随

之变大。从而可知倒伏指数也与粗度 D 和壁厚 t 息息相关，且均为反相关。

另外，像建模时那样，考虑到小麦茎秆自身重时，倒伏指数也需要进行修改，但可将其自重归入小麦穗重的影响中，使得倒伏指数的公式简化。

1) 综上，定义倒伏指数 γ 如下：

$$\gamma = \frac{ul^2}{EI}$$

其中， E 为弹性模量， I 为茎秆截面惯性矩， EI 单位为 $N \cdot mm^2$ ； u 为单穗鲜重，单位 g ； l 为小麦的高度单位为 cm 。此时 γ 的范围约为 $(0.1-20)$ 之间，方便比较。

因此，倒伏指数与临界自重的关系为：

$$\gamma = \frac{\pi^2 u}{400P}$$

2) 特殊情况下的倒伏指数 γ

上述定义是要求知道 EI 等数据，但是在有些粗略的情况下，用机械强度的值来代替 EI ，从而可以更加简洁的关系，因此定义倒伏指数如下：

$$\gamma = \frac{ul^2}{Q}$$

此时， u 为单穗鲜重，单位 g ； l 为小麦的高度单位为 m 。 Q 为机械强度，单位为 kg 。这样，此时 γ 的范围约为 $(0.1-20)$ 之间，方便比较。

5 问题 5 分析和求解

5.1 EI 的计算

弹性测定值 e

品种	基部第一节	基部第二节	基部第三节	基部第四节	基部第五节	基部第六节
58-1	0.908	0.877	0.961	0.906	0.961	
58-2	0.911	0.981	0.966	0.949	0.964	
周 18	0.966	0.928	0.933	0.961	0.958	0.946
新 19	0.761	0.912	0.924	0.988	0.913	

假定弹性模量 E 与弹性测定值 e 成正比,不妨令 355Mpa 对应 0.761, 1443Mpa 对应 0.988, 则可拟合出 E 与 e 的关系:

$$E = 4792e - 3291 (\text{kN/m}^2)$$

而对于茎秆截面惯性矩有

$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - (D - 2t)^4)$$

则对所给定的数据进行平均值处理后如下 (以基部开始):

						单位/cm
品种	茎重心	第五节粗	第四节粗	第三节粗	第二节粗	壁厚
58-1	43.61	0.14	0.27	0.27	0.27	0.048
58-2	43.21	0.16	0.28	0.29	0.29	0.052
周 18	46.38	0.17	0.24	0.24	0.23	0.040
新 19	52.13	0.14	0.25	0.27	0.23	0.030
品种	总高度	第五节长	第四节长	第三节长	第二节长	单穗鲜重
58-1	56.71	20.47	16.59	10.26	9.39	7.66
58-2	66.89	25.73	14.10	9.47	9.05	8.54
周 18	66.92	29.77	17.35	10.85	8.95	6.74
新 19	62.95	25.00	17.44	11.35	9.16	7.63

观察上面表格数据可知,除基部第五节外,其他三节粗度近似,因此选用其他三节的平均粗度。对于茎秆长度,分别取茎重心和总高度进行计算,并且进行比较。

取基部第二到第五节的弹模测量值的平均值,则所需数据如下:

数据	D/cm	t/cm	e	I/m ²
58-1	0.27	0.048	0.92625	2.159e-8
58-2	0.29	0.052	0.965	2.884e-8
周 18	0.24	0.040	0.945	1.307e-8
新 19	0.25	0.030	0.93425	1.278e-8

则通过计算可得 EI 值如下:

单位/N*mm ²			
58-1	58-2	周 18	新 19
2477	3845	1617	1515

比较上述值与参考文献（小麦茎秆生物力学性能试验与倒伏力学评价分析）中所计算出来的 EI 值相比普遍较小，甚至有十倍左右的差别。其主要原因在于上两者所测得的小麦的茎秆粗度的差别。

参见 2008 年及 2011 年（明确标明为 5 月 27 日，即与 07 年腊熟期时间相当）数据中，茎秆粗度差别很大。而茎秆弹性模量为茎秆的生物特性，不可能在一两年之内发生太大的变化，因此，对于 2007 年数据中粗度持怀疑态度。

下面用 2011 年矮抗的粗度和厚度数据进行计算，并比较和 2007 年的差别。由附件可知，2011 年 5 月 28 日测的粗度平均值为 0.402cm，而厚度为 0.068cm，则此时 EI=11889 N*mm²。此时的 EI 与文献中相差已不大，由此应当认为 2007 年数据测量可能有问题，至少在粗度和厚度方面。

5.2 2007 年数据中各种小麦的临界穗重

虽然对于小麦的建模是基于整株长的，而 2007 年数据中没有基部第一节长度，但是由 2008 年数据中麦穗下面第五节的长可以看出：此节的长度不一，从没有到 0.5 厘米，到 3 厘米，最长的达 7 厘米。可见，基部第一节的长度变化较大，且其平均值约为 3 厘米左右，因此此处忽略其长度。

另外，对于小麦自重的建模有两种，一种是考虑茎秆自重，一种没有考虑其自重。但是，当未考虑茎秆自重时，此时应该用茎秆重心当作整株长度；若考虑了茎秆自重，此时应该用整株长。

（1）不考虑茎秆自重，则用公式

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

计算可得：

单位/N			
58-1	58-2	周 18	新 19
0.0321	0.0508	0.0185	0.0138

此时，倒伏指数为：

58-1	58-2	周 18	新 19
5.96	4.20	9.11	13.8

可见，倒伏指数 58-2<58-1<周 18<新 19，因此矮抗 58 的倒伏性远远大于另外两种小麦。

（2）考虑茎秆自重，则用公式

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} - ql + \frac{2ql}{\pi}$$

其中，l 此时取茎秆总高度，ql 即为茎秆总重。另外，由 2011 年数据中可知，矮抗的茎秆鲜重平均为 4.162g，而周麦的茎秆鲜重平均为 4.379g，但新麦无数据。

因此，取统一茎秆鲜重为 4g。

计算可得：

单位/N			
58-1	58-2	周 18	新 19
0.0048	0.0070	-0.0053	-0.0048

可见上式中的计算中出现负数，则其原因有以下两个：1)模型不完整 2)2007 年数据有误，导致 EI 偏小很多。

另外，通过以上表格对比，可见矮抗的抗倒性远大于周 18 和新 19。

5.3 2007 年数据中各种小麦的临界风速

小麦穗头迎风面积如下：

$$s_1 = a + b * u$$

其中 a, b 为转换系数，a=0.4841, b=0.2238。面积单位为平方厘米，u 为单穗鲜重，单位为 g。

而风压

$$p = \frac{v^2}{1.63} (N/m^2)$$

即近似认为风全部吹在麦穗面积上，此时

$$F = p * s$$

另外，考虑风速对小麦茎秆的力，此时小麦茎秆的等效面积为

$$s_2 = l * D$$

其中，D 为茎秆的外径，则单位长度所受的风力为

$$f = p * D$$

1) 不考虑风对茎秆的作用力

此时，

$$p = \frac{3w_{\max}EI}{s_1l^3}$$

若为根倒，则 $w_{\max} = l$ ，此时计算得临界风速为：

单位/m/s			
58-1	58-2	周 18	新 19
17.02	20.50	13.58	11.15

由对照风速风级表可知，58-1 可抗 7 级风速，58-2 可抗 8 级风速，而周 18 和新 19 均可抗 6 级风速。

若为茎倒，则假设此时 $w_{\max} = 0.8l$ ，此时计算得临界风速为：

单位/m/s			
58-1	58-2	周 18	新 19
15.15	18.25	12.09	9.93

由对照风速风级表可知，58-1 可抗 7 级风速，58-2 可抗 8 级风速，而周 18 可抗 6 级风速，而新 19 可抗 5 级风速。

2) 考虑风对茎秆的作用力

虽然题中未要求考虑风对茎秆的作用力，但是由于茎秆的作用体现在小麦密度比较稀的时候，因此，下面对此进行考虑。

此时

$$p = \frac{w_{\max} EI}{l^3} / \left(\frac{s_1}{3} + \frac{Dl}{8} \right)$$

若为根倒，则 $w_{\max} = 1$ ，此时计算得临界风速为：

单位/m/s			
58-1	58-2	周 18	新 19
6.75	8.21	5.29	4.23

由对照风速风级表可知，58-1 可抗 4 级风速，58-2 可抗 5 级风速，而周 18 和新 19 均可抗 3 级风速。

若为茎倒，则假设此时 $w_{\max} = 0.8l$ ，此时计算得临界风速为：

单位/m/s			
58-1	58-2	周 18	新 19
6.01	7.31	4.71	3.77

由对照风速风级表可知，58-1 可抗 4 级风速，58-2 可抗 4 级风速，而周 18 和新 19 均可抗 3 级风速。

通过与 1) 对比可以发现，考虑风对茎秆作用时，抗风能力下降很多，从一方面直观地反应出了小麦种植密度与倒伏指数的关系。当然，在计算过程中，穗的有效面积和茎秆的有效面积还有待进一步的确认。尤其是风作用在茎秆上的等效面积如何模拟，还是如何从实验中有效测得，都是亟待解决的问题。

6 问题 6 分析

6.1 模型评估

本文所建的模型均没有直接采用题目附件所给的数学公式，通过对材料力学、弹性力学等参考书目的理解，建立了考虑麦穗自重、风速情况下的一些受力模型。虽然，在某些方面颇有一些困难，但是所得的结果与题目附件中的数学公式近似。如考虑茎秆自重时的临界力公式为

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} - ql + \frac{2ql}{\pi} = 2.467 \frac{EI}{l^2} - 0.3633ql$$

而题目附件中的数学公式（已按 $h=L$ 进行换算）为

$$P = \frac{5EI}{2l^2} - \frac{5}{16}ql = 2.5 \frac{EI}{l^2} - 0.3125ql$$

比较上面两式的系数可见，基本上一致，可见采用压杆模型的正确性。另外几个模型的建立也有类似的情况，一定程度上证明了模型建立的正确性。

另外，对于考虑风速对茎秆作用力的模型中，从一定程度上证明了小麦密度对小麦倒伏指数的影响，可以作为以后工作的借鉴。

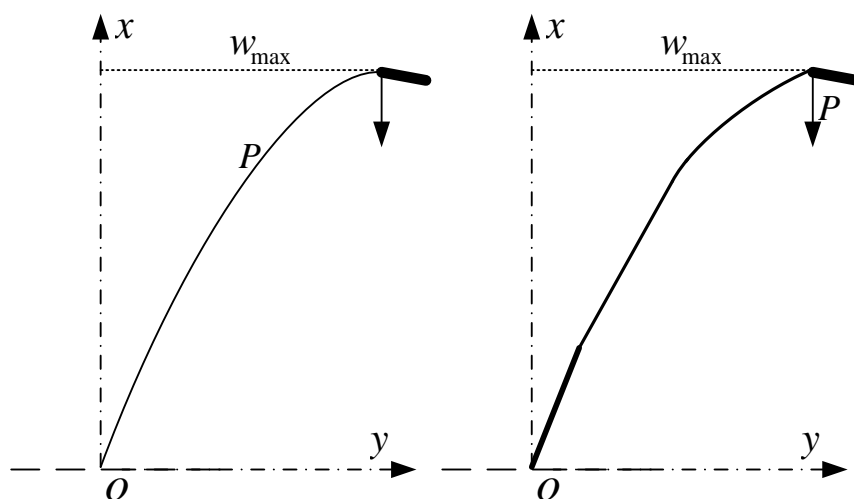
但是，模型有以下几个缺点：

- 1) 在建立麦穗自重临界力影响时，茎秆自重未考虑（由于微分方程的解难以处理）
- 2) 对麦穗作集中力处理，未研究麦穗本身形状或位置对作用力的影响
- 3) 风速对茎秆作用力的模型中，有效面积缺乏更加科学的处理
- 4) 当风速很大时，小麦弯曲程度很大，此时受力方程

$$\frac{y'''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EI}$$

中的 y' 并不能忽略，如下图，因此挠度曲线方程需要尚一步确定。

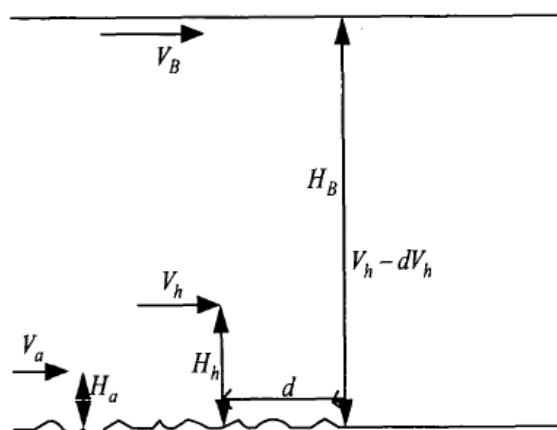
- 5) 由于小麦茎秆每节的弹性模量和粗度均不一，应该建立多段压杆和多段悬臂梁的受力模型



- 1) 建立有效的方法, 使茎秆自重等效为一点, 从而加入茎秆自重的影响
- 2) 研究风速对茎秆作用力中的有效面积, 可以采用试验或者其他方法进行测量或计算
- 3) 对于受力方程中的 y' 采用一定的值进行等效, 如令 $y'=c$, 则可算出挠度曲线, 从而使精度增加。如果能够解出方程则更好。
- 4) 建立多段压杆和多段悬臂梁的受力模型, 并且以此确定倒伏指数和各节节长、节粗之间的最优关系, 以植株能够吸收的最大营养为边界条件。从而来确定最优株型

1、尾流效应对风速的影响

前面已经探讨过风对不同密度的小麦产生的作用的不同,主要体现在风对小麦茎秆的作用力上。但是,从另外一方面考虑,风经过小麦特别是大片的小麦田之后,部分动能已经在之前与小麦的摩擦中消耗,从而使风速降低,对后面的小麦的承受风力将起到影响,即“小麦尾流影响”。可以根据研究的小麦田在成片的小麦田中所处的位置、排列和地表粗糙程度等因素计算出小麦间的尾流影响。根据资料表明,尾流造成的能量损失的典型值是 5%~10%;根据地面、小麦的集中程度和风的紊流强度等条件的不同,尾流损失最小 2%,最大可达 30%。确定尾流效应的物理因素主要小麦田的距离、小麦的种植密度和推力特性以及风的湍流强度。



典型小麦的风速尾流模型国内外还没有较为成熟的模型。以后的一些较为粗糙的模型简单模拟了平坦地形的尾流情况, 缺点是比较简单, 实际应用会带来很大的误差; 有些模型比较准确, 考虑到地形因素, 较好的模拟了非均匀的风速尾流, 但缺点是需要边界条件太多, 难以在实际中应用。

图中 H_a 、 V_a 为测风高度及风速； H_h 、 V_h 为小麦麦穗高度及风速； H_b 、 V_b 为边界层高度及风速，通常 $H_b > 5H$ ， $V_b \approx 1.6V_h$ ； d 为距上一排小麦的迎风面的距离；

dV_h 为小麦麦穗高度处产生的尾流损失。

尾流损失计算是一个迭代过程，其计算步骤如下：

1) 计算小麦麦穗处 H_h 的扰动风速 V_t

$$V_t = \frac{V_h - V_B}{2.5 \ln(H_h - H_B)}$$

2) 给定 m 初值，计算 dV_t

$$dV_t = \frac{-(1+mn) + \sqrt{1+n+2mn}}{1-m^2n} V_t$$

式中 $n = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{V_h}{V_t} \right)^2$ ， λ 为单位小麦的扫风面积， L 为相邻小麦之间的距离。

3) 将 dV_t 带入下式，计算新的 m 值。

$$m = 2.5 \cdot \left(\frac{V_t}{V_h} \right) \cdot \ln \left(1 + \frac{Cd}{H_h} \cdot \frac{(V_t + dV_t)}{V_h(1+m)} \right)$$

式中 C 为一经验系数，取 0.5~0.8 左右。

4) 将 m 值带入式 2) 中的公式，重复步骤 2) 和 3)，直至 $|m_{i+1} - m| \leq \varepsilon$ ，转步骤 5)。

5) 将 m 的值带入下式，求上一排小麦群产生的尾流损失 dV_h 。

$$dV_h = -m \frac{dV_t}{V_t} V_h$$

由此类推，可以求出各排小麦麦穗处的风速 V_h 。这个风速往往是实际中小麦承受的风速，在大片的小麦种植区域，如果认为所有的小麦都承受的是同一个风速这样的处理往往显得粗糙和不真实。因此，有必要对小麦的尾注效应进行研究，从而使得小麦的倒伏性能更加清晰地展示出来。

2、小麦的动态受力模型

在生活中，常常可以看到有麦浪的情况，那是间歇风对小麦的一种作用表现。在本文中及参考文献中所建的模型，均是考虑静态的问题，但对于风级比较大时，风的突变性比较大，就容易使小麦随着风速变化而振动。因此，需要对小麦的动态受力模型研究，寻找小麦倒伏的其他原因。

6.4 2012 年试验方案及数据分析方法

1、试验机械强度与茎秆弹性模量和茎秆粗度、壁厚的相关性

1) 试验材料

试验样本采自三个不同的机械强度类型（根据经验选取），并在相同适宜的条件下种植，并保证其最优的生长环境，如水分、阳光、化肥等。

2) 试验方案

于 2012 年小麦的蜡熟期在小麦试验田内采样，选取株高节数相同的植株。在进行随机抽样，同一生长期每个品种取 100 株，在取 STRON5544 材料性能试验机上进行相关生物力学性能试验，测定其机械强度。另外，使用三点弯曲方法测定植株的弹性模量，同时测量植株的粗度及壁厚。

3) 数据分析方法

首先，分别计算机械强度与茎秆弹性模量、和粗度、壁厚的相关性；其次计算机械强度与粗度、壁厚的三次方或四次方的相关性；之后计算机械强度与茎秆截面惯性矩的相关性；最后，计算机械强度与 EI 的相关性

分析或拟合机械强度与以上几种变量的曲线或公式

2、试验倒伏性与各节粗长以及壁厚的相关性

1) 试验材料

试验样本采茎秆高度、粗度及壁厚差异较大的 3 种植株，并在相同适宜的条件下种植，并保证其最优的生长环境，如水分、阳光、化肥等。

2) 试验方案

于 2012 年小麦的蜡熟期在小麦试验田内采样，选取株高节数相同的植株。在进行随机抽样，同一生长期每个品种取 100 株。同时测量植株的机械强度，并用下列公式计算倒伏指数。

$$\gamma = \frac{ul^2}{Q}$$

同时测量茎秆重心高度、各节粗长、单穗鲜重以及壁厚。

3) 数据分析方法

分析或拟合倒伏性与以上几种变量的曲线或公式。

3、试验倒伏性与小麦种植密度的相关性，并验证茎秆受力对倒伏的影响

1) 试验材料

试验样本种植时，采用同一种倒伏性一般的小麦如周麦 18，种植密度分别为稠密、稍密、正常、稍稀、极稀，并在相同适宜的条件下种植，所选地要常年风速较大。但是此时要适当改变所在环境，使几种植株的粗度和高度保持在一定的范围内，避免差异过大。

2) 试验方案

于 2012 年小麦的不同时期在小麦试验田内采样，选取株高节数相同的植株。在进行随机抽样，同一生长期每个品种取 100 株。测量茎秆重心高度、各节粗长、单穗鲜重以及壁厚，同时测量植株的机械强度，并用下列公式计算倒伏指数。

$$\gamma = \frac{ul^2}{Q}$$

最后，测量小麦的弯曲程度。

3) 数据分析方法

分析小麦的弯曲程度、倒伏指数与种植密度的相关性。由于常年处于有风状态，小麦的弯曲程度能够反应出其对风的受力情况，从而验证茎秆受力情况。

4、试验小麦不同时期的抗风速能力，并验证本文倒伏临界风速

1) 试验材料

试验样本种植时，采用三种倒伏性差异较大的小麦，并在相同适宜的条件下

种植，并保证其最优的生长环境，如水分、阳光、化肥等。

2) 试验方案

于 2012 年小麦的不同时期在小麦试验田内采样，进行随机抽样，同一生长期每个品种取 100 株。测量茎秆重心高度、各节粗长、单穗鲜重以及壁厚，同时测量植株的弹性模量，并用本文提供的临界风速公式计算临界风速。

最后，在不同时期取一平方米左右的小麦（带土），在室内用风扇模拟自然风，测量临界风速。

3) 数据分析方法

分别计算不同时期不同各类小麦的临界风速，并与实验对比，验证本文公式的正确性。

6.5 建议

1) 虽然农业数据测量分析比较复杂，数据每年只能测一次。但是，在设计实验时，应该考虑目标变量，除目标变量外的其他参数应尽量保持一致。此时可以通过对环境变量的控制（如化肥水分等）来调节，从而能够有更好的数据来进行分析。

2) 是否可以通过对不同作物的基因研究，来确定倒伏性相关的内在本质，从而能够更好地选择优良品种。

3) 选择样本时，要注意尽量选择与研究目标无关的参数一致。如选择小麦样本时，尽量全部选取五节小麦，或者六节小麦，这样更加方便试验数据的处理及分析。

4) 可以所建立的数学模型为导向，来有选择的培养优良品种，如以倒伏性为目标时，可有意选择矮秆作物。

参考文献：

- [1]王勇, 李斯深, 李安飞, 李宪彬, 王洪刚, 李晴祺, 小麦种质抗倒性的评价和抗倒性状的相关与通径分析, 西北植物学报, 20(1):79-85, 2000
- [2]郭玉明, 袁红梅, 阴妍, 梁莉, 李红波, 茎秆作物抗倒伏生物力学评价研究及关联分析, 农业工程学报, 23(7): 14-18, 2007
- [3]余泽高, 李志新, 严波, 小麦茎秆机械强度与若干性状的相关性研究, 湖北农业科学, 4:11-14, 2003
- [4]刘鸿文, 材料力学(下), 高等教育出版社, 151-160 页
- [5]刘延强, 工程中两个杆柱稳定性问题分析, 力学与实践, 1995 年 17 卷, 32 页
- [6]刘鸿文, 材料力学(下), 高等教育出版社, 218 页