

全国第三届研究生数学建模竞赛



题 目 维修线性流量阀时的内筒设计问题（C 题）

摘 要：

常见的阀体在开关时，阀体旋转的角度与流量并不是线性关系，而在某些领域中要求二者为线性关系。本文对线性阀体的设计进行了研究，对阀体模型进行了建立与简化，并用 Matlab、Maple 等工具对模型进行了求解，给出了适用性较强的阀体设计方案。

针对问题 1，首先考察了内孔为四种特殊形状的情况下，“过流面积”随曲线下落距离的变化情况，得到凸凹圆曲线与严格线性面积特性曲线偏差的平方和最小，线性关系保持得比较好。此后利用微元法证明了“过流面积”呈严格线性变化时曲线和外孔圆交点横坐标的差为定值这一性质，得出了在此种情况下曲线在两交点处的斜率应为无穷大。基于以上分析，利用最小二乘原理建立了无约束泛函极值模型，采用了变分法将其转化为微分方程，再转化为等效的变分原理，采用 Ritz 算法近似求解。最后通过对内筒孔曲线的合理假设，得到了满足线性关系较好的内孔曲线形状（见图 11），其样本点的偏差平方和为 0.064412。

针对问题 2，利用最小二乘原理建立了有约束泛函极值模型。根据文中第四节中的引理，给出理想状态下的内孔形状。之后对其进行了微调，通过牺牲严格的线性关系来使其逐渐满足两个约束 $Q_h \geq 75\%$ 和 $Q_s \geq 85\%$ ，并最终找到了合适的内孔设计方案（见图 13（b））。最后针对外孔磨损情况提出了基于自动控制理论和逆向工程技术等的解决办法。

本文提出的模型是从考察内孔的特殊形状中得到启发的，从而具有实际应用价值和准确性。

关键词：线性阀体 最小二乘法 泛函极值模型 变分原理 非线性规划

。参赛队号 10183011

| |
|-----------------------------|
| 参赛密码 _____ (由组委会填写) |
|-----------------------------|

一、问题的提出

阀体是我们日常工作和生活中一种十分常见的工具。它种类繁多，其中线性阀体可使阀体的旋转角度和流量成正比。因而它可使人们方便地对流量进行控制。而如何设计线性阀体成为当今控制领域中研究的热点问题之一。

现在我们需要设计出一种阀体，它由两个同心圆柱筒组成。外筒固定，其侧面上有一个孔，形状为两个直径不等的圆柱体的交线。内筒和外筒轴向之间没有相对运动，内筒可以自由转动。内筒的侧面上也有一个孔，但它原来的形状未知。

要求设计出内筒孔的形状，使得“过流面积”与内筒旋转角成近似线性关系；在线性区间至少达“最大范围”区间长度的 75%以上，而且主要工作区的最大“过流面积”至少要达到外筒孔面积的 85%以上，并且使“过流面积”和内筒的旋转角度之间的“线性关系”尽量好的约束限制下，重新设计内筒孔的形状。并且还要考虑当外筒孔发生磨损时要采取的应对措施。

二、模型假设

- 1、阀体的旋转角度与内圆筒相对移动距离成正比，圆筒移动距离与“过流面积”成正比。
- 2、线性阀体内外筒为薄壁筒，不考虑其壁厚给设计带来的影响。
- 3、外圆筒直径与外圆孔直径相差很大，展开后外圆孔面积变化足够小，可近似视为圆形。
- 4、内筒在转动过程中，只存在周向水平运动，不存在垂直方向的运动。
- 5、假设内圆孔设计曲线与外圆孔曲线最多只有两个交点，可以有一段相切，且曲线连续。
- 6、为简化计算，假设外圆孔半径为一个单位长度。

三、变量设定

R ：圆的半径，在本文中 R 为一个单位长度 1；

$F(x)$ ：待求内孔的曲线方程；

$f(x)$ ：内孔下边沿曲线方程；

$G(x)$ ：外圆孔上半圆方程， $y = \sqrt{1-x^2}$ 即圆的方程 $x^2 + y^2 = 1$ ；

Δh ：曲线下降的距离微元；

h ：曲线 $F(x)$ 下降到某一位置时其与初始位置的距离；

h_{\max} : 曲线 $F(x)$ 从初始位置下降至“过流面积”达到最大值时的距离;

$A、B、C、D$: 分别表示曲线 $F(x)$ 在移动过程中与曲线 $G(x)$ 的交点;

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$: 分别表示点 $A、B、C、D$ 的坐标值;

k : 曲线 $F(x)$ 下降的距离与“过流面积”之间的线性比例;

$\Delta S(\Delta h)$: 曲线下降 h 时“过流面积”的增加量;

$\varphi(h)$: “过流面积”的理想值, $\varphi(h) = kh$ 。

四、问题的分析

本文将内外两个圆柱筒展开为平面, 得到两个长方形, 于是将三维空间中物体的转动问题化简为二维平面上内孔与外孔相对移动的问题来求解, 此外根据问题假设可将外筒孔近似视为圆孔。

建立如图 1 所示直角坐标系, 用以坐标原点为圆心的单位圆来表示外圆孔, X 轴与内、外筒的轴心平行。用任意曲线 $f(x)$ 表示内圆孔曲线初始位置时的一部分, 另一部分与其组成封闭图形, 但是未画出的部分与圆不相交, 如图 1 (a) 所示。

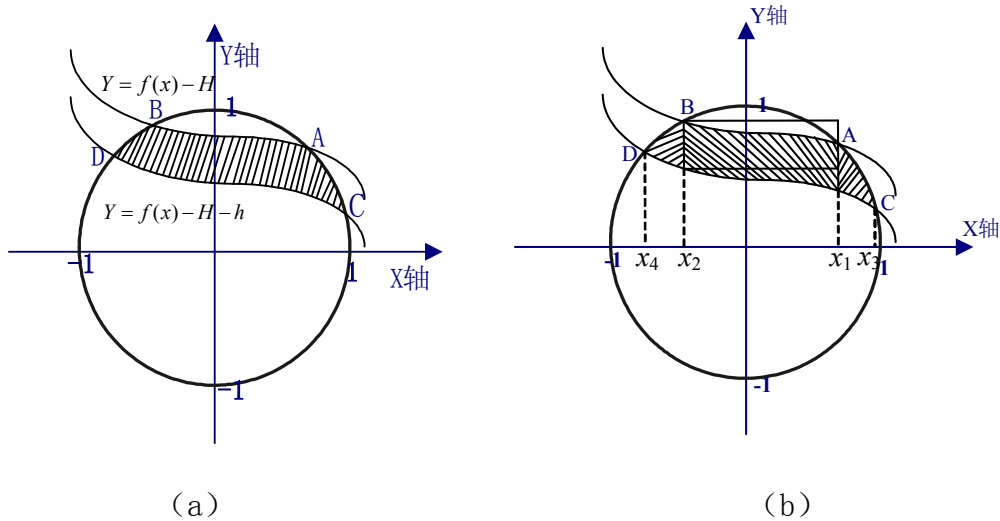


图 1 曲线与圆相交求微元面积示意图

引理: 若要使内孔旋转角度 (称为开度) 与“过流面积”满足线性关系 (这种关系称为面积特性曲线), 则内孔曲线必满足其与外孔圆的交点横坐标之差恒为常数 k , 即 $x_1 - x_2 = k$, 其中 x_1, x_2 分别为内孔曲线与外孔圆的交点横坐标。或者说 $x_1 - x_2 = k$ 即为面积特性曲线保持线性的必要条件。

证明：假设某一时刻内孔曲线向下移动 h 与圆相交，其方程为 $\hat{f}(x) = f(x) - h$ ，当曲线向下移动微元 Δh 时，“过流面积”的增加量 ΔS 由三部分组成，两边近似三角形面积和中间矩形面积（如图 1（b）所示），并可用以下积分表示：

$$\Delta S = \int_{x_4}^{x_2} (G(x) - (f(x) - h - \Delta h)) dx + \int_{x_1}^{x_3} (G(x) - (f(x) - h - \Delta h)) dx + \int_{x_2}^{x_1} \Delta h dx \quad (1)$$

若要使内孔旋转角度（称为开度）与“过流面积”满足线性关系（这种关系式称为面积特性曲线），则只须使曲线的向下移动距离与“过流面积”满足线性关系即可，即微元面积 ΔS 也与 Δh 有线性关系：

$$\Delta S = k \Delta h \quad (2)$$

曲线与圆的交点坐标 x 由方程 $G(x) = \hat{f}(x)$ （表示 $f(x)$ 下降时的曲线）求得：

$$G(x_i) = \sqrt{1 - x_i^2} = \hat{f}(x_i) = f(x_i) - h, \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

$$G(x_i) = \sqrt{1 - x_i^2} = \hat{f}(x_i) = f(x_i) - h - \Delta h, \quad i = 3, 4 \quad (4)$$

整理方程（1）至（4）得：

$$\begin{aligned} & \int_{g_4(h)}^{g_2(h)} (G(x) - f(x) + h + \Delta h) dx + \int_{g_1(h)}^{g_3(h)} (G(x) - f(x) + h + \Delta h) dx \\ & + \int_{g_2(h)}^{g_1(h)} \Delta h dx = k \Delta h \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $g_i(h)$ 表示利用（3）、（4）式算出的 x_i 关于自变量 h 的表达式， $i = 1, 2, 3, 4$ ，

将（5）式整理可得：

$$\begin{aligned} & \int_{g_4(h)}^{g_2(h)} (G(x) - f(x)) dx + \int_{g_1(h)}^{g_3(h)} (G(x) - f(x)) dx \\ & + h(g_2(h) - g_4(h) + g_3(h) - g_1(h)) + \Delta h(x_3 - x_4) = k \Delta h \end{aligned} \quad (6)$$

两边同时取微分，并用 x_i 代替 $g_i(h)$ ，整理可得：

$$\begin{aligned} & (G(x_2) - f(x_2) + h) \frac{dg_2(h)}{dh} - (G(x_1) - f(x_1) + h) \frac{dg_1(h)}{dh} \\ & - (G(x_4) - f(x_4) + h) \frac{dg_4(h)}{dh} + (G(x_3) - f(x_3) + h) \frac{dg_3(h)}{dh} + (x_3 - x_4) = k \end{aligned}$$

在满足 $\Delta h \rightarrow 0$ 条件下，根据方程（3）、（4）得：

$$x_3 - x_4 = k \quad (7)$$

即： $x_1 - x_2 = k$

（7）式的含义为：如果“过流面积”线性增加，则内孔曲线必满足其与外孔圆

的交点横坐标之差为常数 k 。即在 $f(x)$ 向下移动过程中，其与圆的交点横坐标之差为常数 k 。到此引理证明完毕。

以下在面积特性曲线呈严格线性关系时，对曲线 $f(x)$ 的形状进行讨论。 $f(x)$ 沿坐标系 y 轴的负方向移动，根据 $f(x)$ 在与外孔圆交点处的斜率分两种情况讨论：

1. 如果斜率的符号相反，则下一时刻新产生交点的横坐标必然一个增大一个减小，那么它们的差值改变，因而不满足严格线性关系；
2. 如果斜率的符号相同，在曲线下移过程中两交点横坐标在某一时间段内的增减情况是一致的，但是当 $f(x)$ 的某一交点先和外孔圆与 X 轴的交点重合后，该分支与外孔圆交点的横坐标的增减情况将改变，而另一交点横坐标的增减情况保持不变，此时差值改变，同样也不满足严格线性关系。

由以上分析我们得出结论：只有在曲线 $f(x)$ 在同外孔圆两交点处的斜率都是无穷大的情况下，两交点的横坐标的差才是恒定的，此时，曲线下移距离与“过流面积”呈严格线性关系，见图 2。

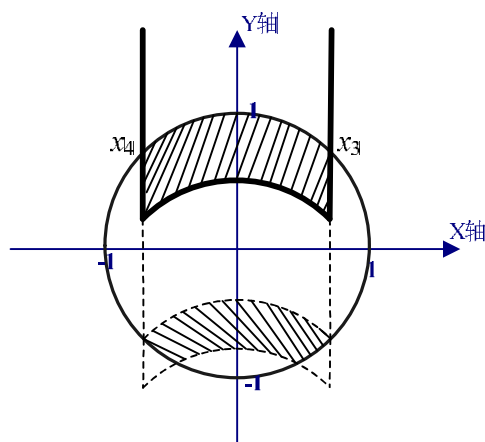


图 2 满足理想线性关系的内孔形状

由上图可见该曲线从开始下降到 A 点时，完全满足面积特性曲线呈线性关系，但是在 A 点以下就出现了非线性，且不满足题目中“最大范围”为外筒孔面积的要求，因此不可能存在严格线性关系的面积特性曲线，即不能通过选择内筒孔形状实现“过流面积”与内筒旋转角度呈严格的线性关系。

但此曲线证明了只要曲线与圆相交两点的横坐标之差为常数，那么面积特性曲线一定是线性的。

当曲线与圆相交面积最大时即为外圆的面积 $\pi \times R^2 = \pi$ ，又因为面积与下降

距离成线性比例，故 $k = \frac{\pi}{h_{\max}}$

五、基于问题 1 的模型建立

1. 模型探索

在二维坐标系内，假设内孔曲线沿 Y 轴负方向移动。为了探索最佳内孔曲线形状，本文首先考虑四种特殊的内孔：矩形孔，凸圆孔，凹圆孔和凸凹圆孔，分别见图 3，图 4，图 5 及图 6。

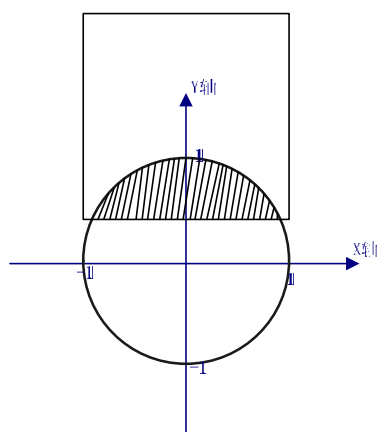


图 3 矩形孔

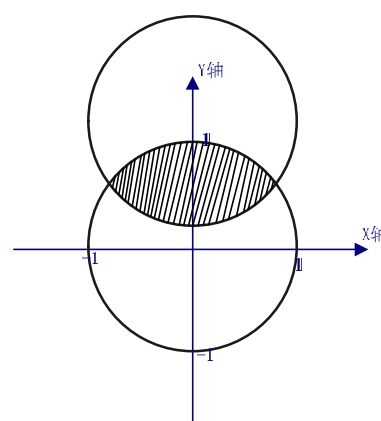


图 4 凸圆孔

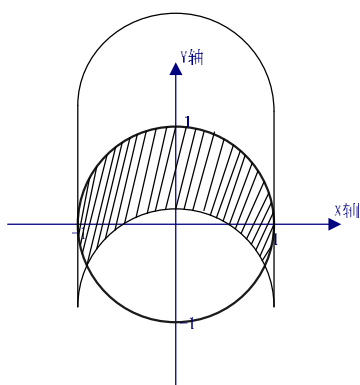


图 5 凹圆孔

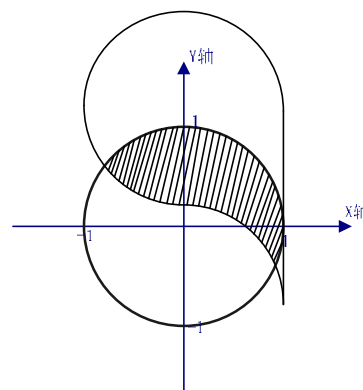


图 6 凸凹圆孔

以下利用方差分析评价四种不同形状内孔的控制效果。根据最小二乘原则可得：面积特性曲线与严格面积特性曲线偏差的平方和越小，则其控制效果越好。

(1) 矩形内孔：矩形是最为简单的情况，它在移动过程中与外圆孔所围面积可表示为：

$$S(h) = \arccos(1-h) + (h-1)\sqrt{2h-h^2}$$

在曲线 $S(h)$ 上均匀选取 200 个样本点，利用最小二乘法求得其与理想面积曲线

偏差的平方和为 3.4190。

(2) 凸圆孔：凸圆与外圆孔所围面积可表示为：

$$y = \int_{x_1}^{x_2} [\sqrt{1-x^2} - (2 - \sqrt{1-x^2} - h)] dx。$$

由两圆方程可得方程组 $\begin{cases} y = 2 - \sqrt{1-x^2} - h \\ y = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ ，求解得到上式的积分区间为

$$\left[\frac{\sqrt{4h-h^2}}{2}, -\frac{\sqrt{4h-h^2}}{2} \right]。选取样本点后利用最小二乘法求得其与理想面积曲线偏$$

差的平方和为 13.6761。

(3) 凹圆孔：我们设开始时凹圆和外圆孔是相切的，其方程为 $y = \sqrt{1-x^2}$ ，下降 h

后凹圆与外圆孔相交的边界曲线方程为 $y_1 = \sqrt{1-x^2} - h$ ，而外圆孔下半圆曲线方

程为 $y_2 = -\sqrt{1-x^2}$ 。因而，凹圆与外圆孔所围面积为

$$y = \pi - \int_{x_1}^{x_2} (y_1 - y_2) dx。$$

由 $\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} - h \\ y = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$ 可得到上式的积分区间为 $\left[\frac{\sqrt{4h-h^2}}{2}, -\frac{\sqrt{4h-h^2}}{2} \right]$ 。选取样本点后

利用最小二乘法求得其与理想面积特性曲线偏差的平方和为 13.6761。

(4) 凹凸圆孔：凹凸圆与外圆孔所围面积分为 Y 轴左边凸圆与外圆孔所围面积和 Y 轴右边凹圆与外圆孔所围面积之和。我们分别计算两部分面积，左边凸圆与外圆孔所围面积为：

$$y = \int_{x_1}^0 [\sqrt{1-x^2} - (2 - \sqrt{1-x^2} - h)] dx，$$

我们由 $\begin{cases} y = 2 - \sqrt{1-x^2} - h \\ y = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ 得出上式中的 $x_1 = -\frac{\sqrt{4h-h^2}}{2}$ 。

右边凹圆与外圆孔所围面积为：

$$y = \frac{\pi}{2} - \int_0^{x_2} [\sqrt{1-x^2} - h - (-\sqrt{1-x^2})] dx，$$

由 $\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} - h \\ y = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$ 得出上式中 $x_2 = \frac{\sqrt{4h-h^2}}{2}$ 。选取样本点后利用最小二乘法求得

$y = \int_{x_1}^0 [\sqrt{1-x^2} - (2 - \sqrt{1-x^2} - h)] dx + \frac{\pi}{2} - \int_0^{x_2} [\sqrt{1-x^2} - h - (-\sqrt{1-x^2})] dx$ 所对应的曲线与理想面积特性曲线偏差的平方和为 0.4750。

以上四种内孔形状控制的面积特性曲线于严格的线性面积特性曲线如图 7 所示。

通过对上述几种特殊形状内孔面积特性曲线的分析可知，凸凹圆作为内孔的形状对砂浆流量的控制效果比较理想，然而与实际精度要求还相差甚远。

2. 建立泛函极值模型

结合以上对问题的分析和模型的初探，发现选取极特殊的内孔形状无法得到较理想的面积特性曲线，为了更精确地逼近线性面积特性曲线，本文引入了最小二乘法的思想，通过残差的平方和是否达到最小，来判断面积特性曲线是否最优。

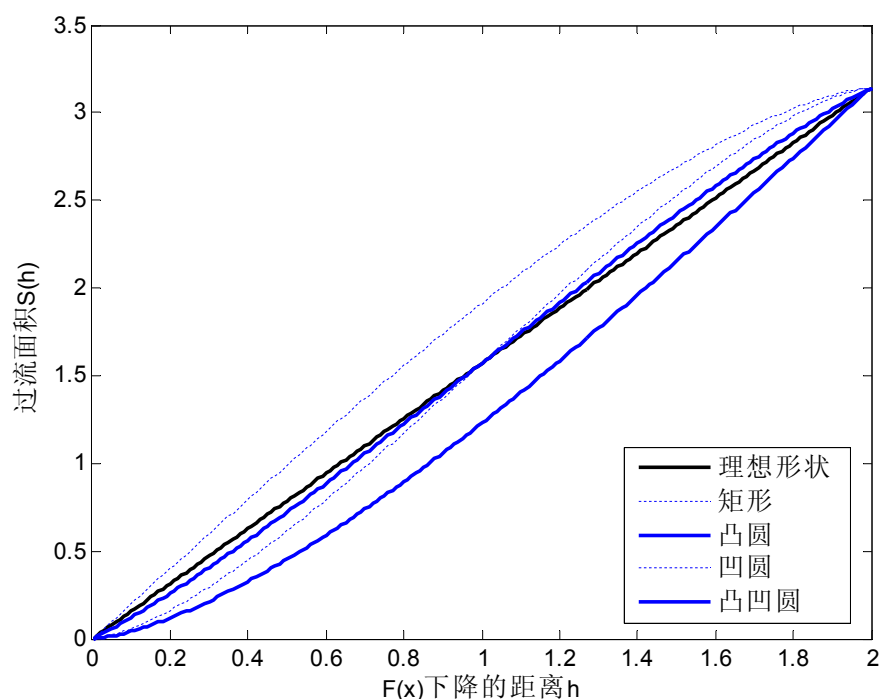


图 7 5 种面积特性曲线的比较

为了使“过流面积”最大，内孔曲线形状的上半部分须全部与外孔上半圆相交（见图中阴影部分重合），因而假设内孔曲线形状上半部分为半圆，而其余部分的形状未定，为了简化计算，可以假定内孔曲线形状的右半部分为直线，进一步可以假定是一条竖直线，根据以上分析内孔曲线形状大致可取如图 8 中的粗实线形状，这样只需确定图中的曲线 $f(x)$ 形状即可。

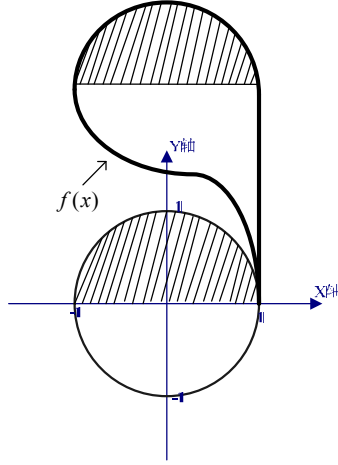


图 8 内外孔曲线示意图

定义：对某一类函数 $\{y(x)\}$ 中的每一个函数 $y(x)$ 有一个 v 的值与之对应，那么变量 v 称为依赖于函数 $y(x)$ 的泛函，记作： $v = v(y(x))$

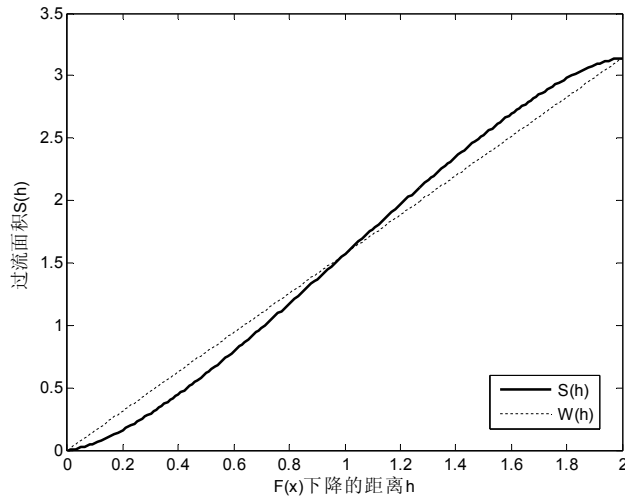


图 9 凸凹圆孔面积特性曲线

不同的内孔曲线形状 $f(x)$ 影响了面积特性曲线 $S(h)$ 的取值，因而 $S(h)$ 是依赖于 $f(x)$ 并与变量 h 有关的泛函，记作： $S = S(f(x), h)$

根据式（1）得

$$\begin{aligned} S(h) &= \int_0^{h_{\max}} \Delta S = \int_0^{h_{\max}} dS \\ &= \int_0^{h_{\max}} d \left(\int_{x_4}^{x_2} (G(x) - (f(x) - h - \Delta h)) dx + \int_{x_1}^{x_3} (G(x) - (f(x) - h - \Delta h)) dx + \int_{x_2}^{x_1} \Delta h dx \right) \end{aligned}$$

$$W(h) = kh$$

本文的泛函极值数学模型为：

$$J(\hat{f}(x, h), h) = \int_0^{h_{\max}} (S(h) - W(h))^2 dh$$

目的是求 $\hat{f}(x, h)$ ，使得此泛函极值模型取得极小值。

$$\text{由图所示可得边值条件为: } \begin{cases} \hat{f}(h=0, x=1) = 0 \\ \hat{f}(h=h_{\max}, x=-1) = 0 \end{cases}$$

3. 模型求解

采用变分法求解泛函极值条件下未知场函数的 $f(x)$ 形式，由泛函极值的必要条件—欧拉方程，可将泛函极值模型转化为未知场函数 $\hat{f}(x, h)$ 满足的微分方程问题。

考虑到求解的复杂性，在求得欧拉方程之后，本文不将其转化为欧拉方程形式，而变成微分方程仍将会建立与之相等效的变分原理，进而再求得基于它的近似解，这里采用 Ritz 算法。

选取满足以下边界条件的一项多项式近似解

$$\begin{cases} \hat{f}(h=0, x=1) = 0 \\ \hat{f}(h=h_{\max}, x=-1) = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{f}'(x, h) = a_1(x-1)^2 - h$$

$$\text{则有} \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} = 2a_1(x-1) \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial h} = -1$$

由于过流面积”一般形式的表达式复杂，故泛函求极值困难，本文将转而利用已知条件及引理，合理地假设内孔曲线 $\hat{f}(x, h)$ 的形式，通过求解假设曲线中的参数，把问题简化为求解一个有约束的非线性优化泛函极值问题。

4. 曲线假设及求解

本文以 $f(x)$ 关于点 $(0, f(0))$ 对称为原则选取 $f(x)$ 形式。这主要是考虑到如果 $f(x)$ 关于 $(0, f(0))$ 中心对称，那么曲线 $\hat{f}(x) = f(x) - h$ 下降后仍关于 $(0, \hat{f}(0))$ 中心对称。

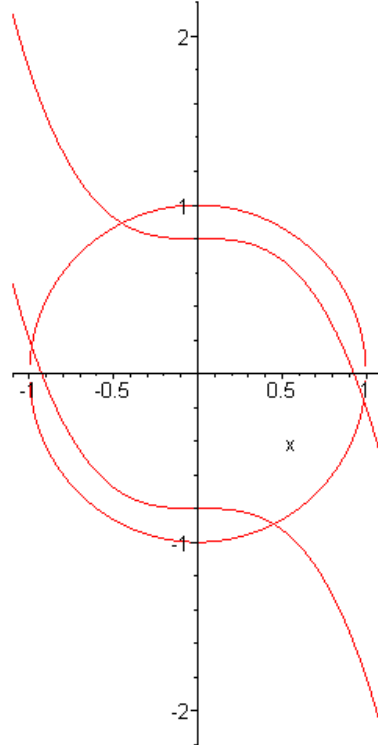


图 10 中心对称 $\hat{f}(x)$ 示意图

如图所示，下降曲线 $y = \hat{f}(x)$ 与上半圆相交部分面积为：

$$S(h) = \int_{x_1}^{x_2} (G(x) - \hat{f}(x)) dx$$

而对称的下降曲线 $y = -\hat{f}(x) = \hat{f}(x) - 2\hat{f}(0)$ 与下半圆相交部分的面积为：

$$S(h) = \int_{-x_2}^{-x_1} (\hat{f}(x) - G(x)) dx$$

且曲线 $F(x)$ 和 $F(x) - 2F(0)$ 距原点的距离均为 $F(0)$ ，故积分结果相等。假如移入时相交面积为线性，则移出时相交面积仍为线性。

根据以上假设，本文选择的曲线方程是中心对称的，且在开始时候与圆相切一段，曲线下移后与圆方程相交为两个交点。曲线方程为：

$$y = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} + a & x \in (-1, -(1-k)) \\ k_2x + y(0) & x \in (-(1-k), (1-k)) \\ \sqrt{1-x^2} & x \in ((1-k), 1) \end{cases}$$

接下来求解 $f^*(x)$ ，使其满足上述泛函极值模型。

曲线 $y = f(x)$ 与圆 $y = G(x)$ 只有两个交点，把曲线与圆围成的面积分成三段

进行积分。通过设定 k 的变化步长及范围，求得使得总体残差的平方和达到最小的 k ，由上公式 $k = \frac{\pi}{h \max}$ 可得到 $h \max$ ，则上四分之一圆的曲线方程为：

$$y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} + h \max & x \in [-1, x_2] \\ k_2 x + \frac{h \max}{2} & x \in [x_2, x_1] \\ -\sqrt{1-x^2} & x \in [x_1, 1] \end{cases}$$

相交面积由三部分组成，分段求和：

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{x_1}^{1-k} \left(\sqrt{1-x^2} - (k_2 x + y(0) - h) \right) dx + 2 \int_{x_2}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_{1-k}^{x_2} h dx \\ S_2 &= \int_{x_1}^{-(1-k)} \left(\sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2} + 2y(0) - h) \right) dx \\ &\quad + \int_{-(1-k)}^{1-k} \left(\sqrt{1-x^2} - (k_2 x + y(0) - h) \right) dx + \int_{1-k}^{x_1} h dx + 2 \int_{x_1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ S_3 &= \int_{x_1}^{-(1-k)} \left(\sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2} + 2y(0) - h) \right) dx \\ &\quad + \int_{-(1-k)}^{x_2} \left(\sqrt{1-x^2} - (k_2 + y(0) - h) \right) dx + 2 \int_{x_1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

将含参积分以上各式带入泛函极值模型 $\int_0^{h_{\max}} (S(h) - \varphi(h))^2 dh$ ，对各参数项再求偏导，令其等于 0，并用 Matlab 步进搜索最优解求得极值情况如下：

$$\begin{aligned} y_1 &= -\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{0.9} & x \in (-1, -0.1) \\ y_2 &= -7.503417x + 1.7453 & x \in (-0.1, 0.1) \\ y_3 &= \sqrt{1-x^2} & x \in (0.1, 1) \\ y_4 &= \sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{0.9} & x \in (-1, 1) \\ y_5 &\in (0, \frac{\pi}{0.9}) & x = 1 \end{aligned}$$

其中 y_4 ， y_5 是依据上述分析得到的，曲线如图 11 所示。

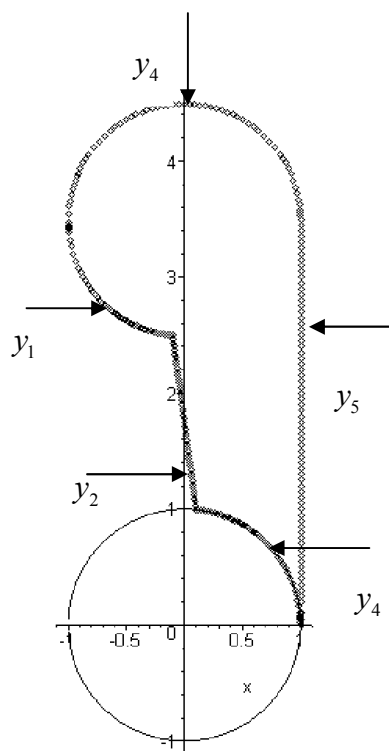


图 11 最优内孔曲线形

面积特性曲线如图 12 所示。

这一中心对称形状的面积特性曲线与严格面积特性曲线的最小二乘偏差平方和为 0.0644, 可见这一结果前面探索的模型相比精度很高了, 此曲线为最优解。

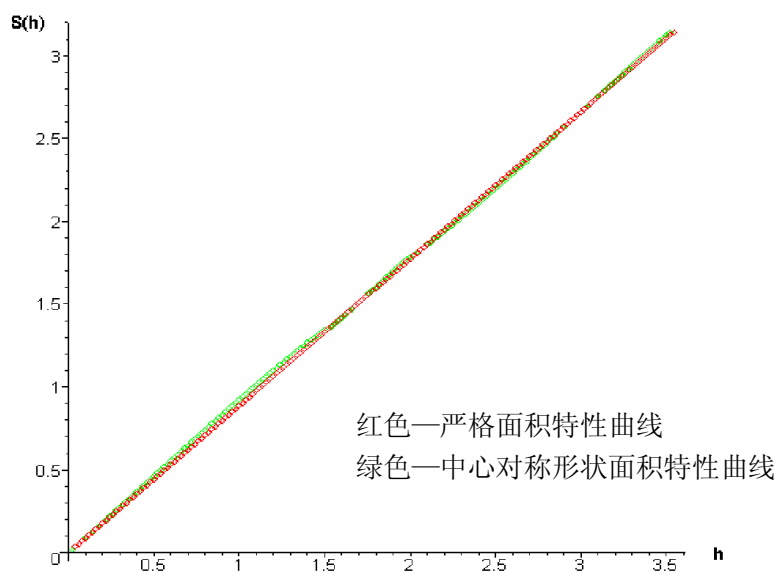


图 12 中心对称形状与严格面积特性曲线

六、基于问题 2 的模型建立

依题意可知内孔曲线形状应同时满足以下两个约束条件：

$$\begin{cases} Q_h = \frac{h_l}{h_{\max}} \geq 75\% \\ Q_s = \frac{S(h)}{\pi} \geq 85\% \end{cases} \quad (8)$$

其中 h_l 表示连续线性区域的总长度，于是基于问题 1 的无约束泛函极值问题转化为有约束的泛函极值问题，即：

$$\begin{aligned} \max \quad & -\int_0^{h_{\max}} (S(h) - W(h))^2 dh \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} Q_h \geq 75\% \\ Q_s \geq 85\% \end{cases} \end{aligned}$$

由引理假设 $F(x)$ 的形状如图 13(a)所示，其函数方程为：

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 1 & 1 \leq y \leq 2 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \\ x = \pm \frac{a}{2} & 2 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \leq y \leq 2 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} + b \\ x^2 + (y-2-b)^2 = 1 & 2 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} + b \leq y \leq b+3 \end{cases}$$

其中 a ， b 分别为中间矩形的宽和高，通过计算取最接近以上两约束的 a ， b 值有： $a = b = \sqrt{2}$ 。此时纯线性区间占“最大范围”的 70.71%，纯线性区间内的最大“过流面积”为 81.83%，可见不满足题意要求。依据题目中“使‘过流面积’和内筒的旋转角度之间的‘线性关系’尽量好”的要求，本文将通过牺牲严格的线性关系，来增加主要工作区的最大“过流面积”。

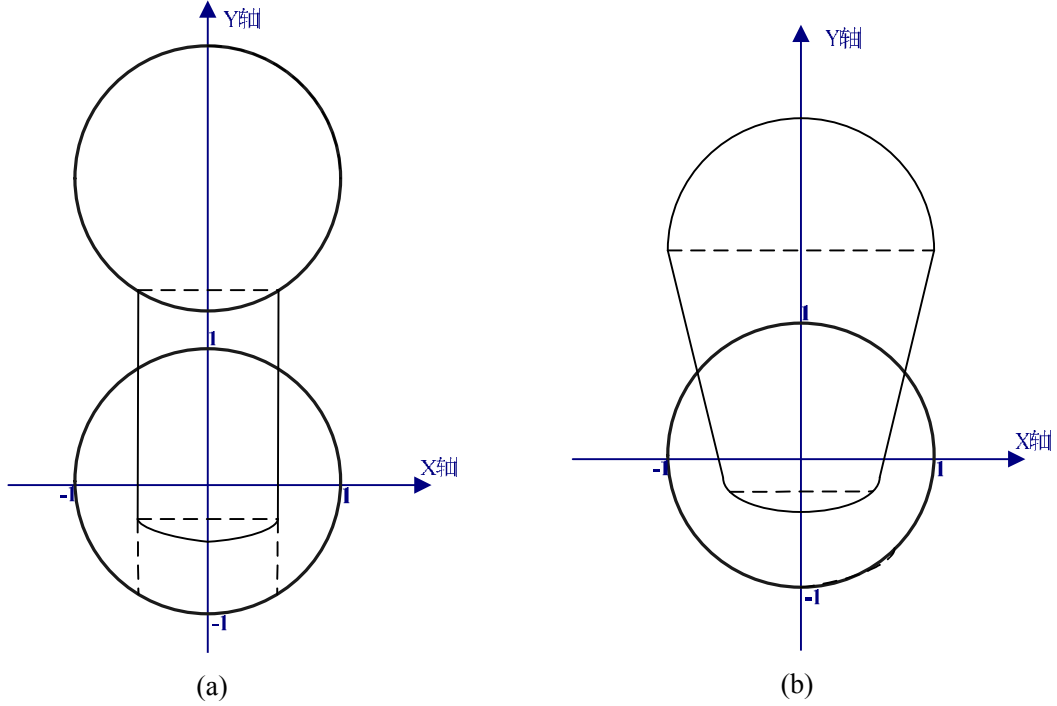


图 13 基于问题 2 的内孔形状设计示意图

基于上述思想，本文将图 13 (a) 中的 $x = \pm \frac{a}{2}$ 绕其与小圆弧的交点分别向外转动角度 α ，与其上端点相交为一半圆，如图 13 (b) 所示，此时的曲线方程为：

$$\begin{cases} y = 2 - \sqrt{1 - x^2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y - \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) & \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1 \\ y = \left(h + 2 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + \sqrt{1 - x^2} & -1 \leq x \leq 1 \\ y - \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) & -1 \leq x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (9)$$

经计算有近似线性区间占“最大范围”的 70.71%，近似线性区间内的最大“过流面积”为 95.18%，其面积特性曲线如图 14 所示。仍然不满足实际要求，但是我们可以通过面积特性曲线发现：当梯形部分穿过外筒孔面积时，面积特性曲线可以近似为线性，通过计算其最小二乘偏差为 0.0425689815，完全满足实际需要。

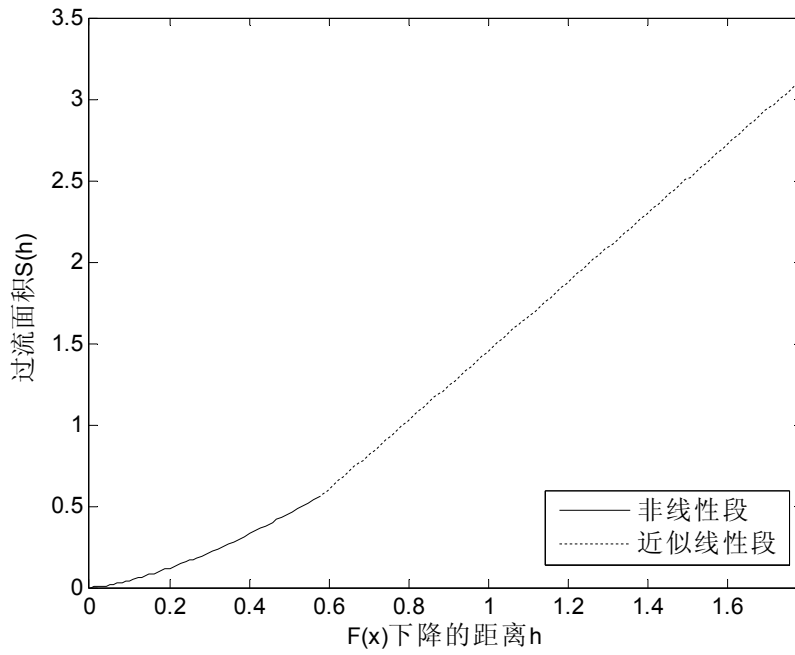


图 14 中间为梯形内筒孔的面积特性曲线图

下面我们用初等几何的方法来计算内孔覆盖面积与角度 α 的关系，见图 15 所示。

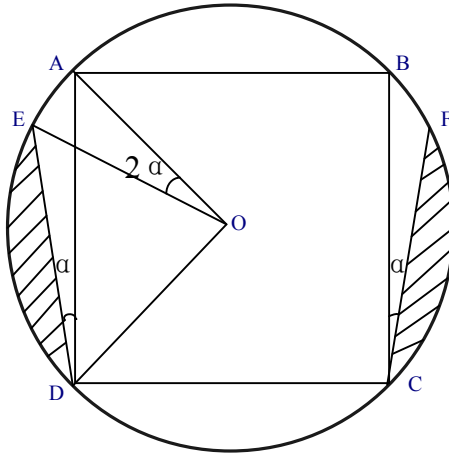


图 15

由图可见 ABCD 是单位圆的内接正方形，设 $\angle ADE = \alpha$ ，由 O 是圆心我们可得 $\angle AOE = 2\alpha$ ， $\angle EOD = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ 。则 $S_{\triangle EOD} = \frac{1}{2} \times \overline{EO} \times \overline{DO} \times \sin \angle EOD = \frac{\cos 2\alpha}{2}$ 。因

为扇形 EOD 的面积为 $S_{\text{扇}} = \frac{\frac{\pi}{2} - 2\alpha}{2\pi} \times \pi \times 1^2$ ，所以阴影部分的面积为：

$$S_{\text{阴影}} = 2 \times (S_{\text{扇}} - S_{\triangle EOD}) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha - \cos 2\alpha$$

那么最大“过流面积”为：

$$S = S_{\text{圆}} - S_{\text{阴影}} = \frac{\pi}{2} + 2\alpha + \cos 2\alpha$$

由问题 2 对过流面积的要求我们得到 $S \geq 85\% S_{\text{圆}}$ ，解此不等式发现，当 $\alpha \geq 3.0101^\circ$ 时过流面积不低于外孔圆面积的 85%。经计算，式 9 所示特殊情况下 $\alpha = 22.5^\circ$ ，本文利用 Matlab 编程，在 $3^\circ \leq \alpha \leq 22.5^\circ$ 范围内，改变梯形的腰长，选择最大的线性区间，此问题转化在约束条件下求极值问题。由于时间关系，本文没能完成此项工作，但是经过我们充分的推理分析，计算处的最大线性区域必能满足问题的要求，且求解简单，具有相当大的可行性。

七、对外筒孔磨损的讨论

考虑到内筒圆和外筒圆相对转动时，外筒圆上各个部分受到摩擦的时间是不同的。外筒圆上最先和内筒圆边沿曲线接触的部位磨损得更加严重一些，原因是该部位在整个“开、关”过程中都处于“工作状态”，见图 16。此外，外筒孔的磨损情况还与内筒孔的形状有关。

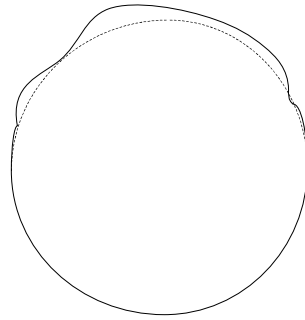


图 16

当外筒孔发生磨损时，本文考虑到了以下问题：

- 1) 阀体实际工作时外筒孔的磨损程度还与砂浆流量大小有关，流量越大，磨损程度越大，为了减小这样的磨损，本文提出利用自动控制原理，采用传感器接触检测外筒孔磨损情况，当检测到外筒孔磨损时，调整阀体旋转角度使流量减小。
- 2) 当外筒孔发生程度较轻的磨损时，外筒孔形状发生变化，而且展开之后不能近似成圆形了，面积要变大，从而还要根据现有的外孔形状重新设计内孔形状以保证“过流面积”与内筒旋转角近似成线性关系，这样由于外孔磨损后的形状不能确定，因而再次设计内孔形状将面临很大的困难，除非已知了外孔磨损后的形状。
- 3) 当仅仅需要固定的“过流面积”时，外筒孔磨损之后形状向外扩展了，因而不需要原来的旋转角度控制的流量来达到现有的“过流面积”，此时可以调

整旋转角度减小流量同样能够达到所需要的“过流面积”。

八、模型的评价

1. 通过分析，发现如果曲线下移距离与“过流面积”呈线性关系，那么该曲线与外圆孔的两交点横坐标的差必为常数这一性质，并证明了当两交点的横坐标之差为常数时，曲线的在两交点处的斜率为无穷大。以上对求解问题 2 提供了重要的理论依据。

2. 针对问题 1 我们首先利用最小二乘原则对矩形孔，凸圆孔，凹圆孔和凸凹圆孔几个规则外孔形状对“过流面积”的控制效果进行了考察，实验结果表明凸凹圆孔最优，并以此为基础建立了比较合理的泛函极值模型。

3. 最后设计出的内孔形状比较简单，只由圆弧和线段组成，从而降低了加工的难度和成本。

4. 线性关系保持的还不太理想，需要设计补偿孔来进行调整。

5. 问题 1 中的模型虽然与实际情况符合的比较好，但这也为正确求解制造了不少麻烦，由于解题时间有限，今后将尝试对模型进行简化。

九、问题的进一步探索

本节将阐述一下关于维修线性流量阀时内筒设计问题的有益探索。对于一些极其缺少的关键部件，国际上比较流行的制造方法是逆向工程（也称为反向工程），它是以点云几何造型为核心的逆向工程技术，以产品原型、食物、软件或影像等作为研究对象，应用系统工程学、产品设计方法学和计算机辅助技术的理论与方法，探索并掌握支持产品、生命周期设计、制造和管理的关键技术，进而开发出同类的或更先进的产品。作为一种逆向思维的工作方式，逆向工程技术与传统的正向设计方法不同，按照产品引进、消化、吸收与创新的思路，以“实物→原理→功能→三维重建→再设计”框架进行工作。

对于本文在维修线性阀时遇到的内筒孔设计问题完全可以在使用固井机之前先利用逆向工程技术对线性阀体进行数字化制造，重建线性阀体原型的数字化模型。这样可以解决由于内筒孔磨损甚至外筒孔磨损了而导致没有替代品的问题。

【参考文献】

- [1]张也影.流体力学.高等教育出版社.2002.2
- [2]邢继祥, 张春蕊, 徐洪泽. 最优控制应用基础. 科学出版社. 2003.
- [3]程其襄, 张奠宙, 魏国强, 胡善文, 王漱石. 实变函数与泛函分析基础. 高等教育出版社. 2004.
- [4]求是科技. MATLAB7.0 从入门到精通. 人民邮电出版社. 2006.
- [5]何青, 袁荣, 王丽芬等. MAPLE 经典. 高等教育出版社. 2002.
- [6]姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型. 高等教育出版社. 2005.

附录

1. 步进搜索算法程序

```
>i:=0;
>for h from 0.0 by 0.01 while h <= 1.14 do
  i:=i+1;
  upx[i]:=fsolve(-sqrt(1-x^2)=sqrt(1-x^2)-h,x=-1.1..1.1,complex);
  s[i]:=upx[i]*h+2*int(sqrt(1-x^2),x=upx[i]..1);
end do;
>a:=seq([j*3.14/316,s[j]],j=1..115);
>plot({[a]},style=point);
>i:=115;
>for h from 1.15 by 0.01 while h <= 2 do
  i:=i+1;
  upx[i]:=fsolve(sqrt(1-x^2)=-sqrt(1-x^2)+3.1415926-h,x=-1.1..1.1,complex);
  dnx[i]:=fsolve(sqrt(1-x^2)-h=-sqrt(1-x^2));

s[i]:=int(sqrt(1-x^2)-(-sqrt(1-x^2)+3.1415926-h),x=-upx[i]..0)+dnx[i]*h+2*int(sqrt(1-
x^2),x=dnx[i]..1)
end do;
>a:=seq([j*3.14/316,s[j]],j=115..201);
>plot({[a]},style=point);
>i:=201;
> for h from 2 by 0.01 while h <= 3.14 do
  upx[i]:=fsolve(sqrt(1-x^2)=-sqrt(1-x^2)+3.1415926-h,x=-1.1..1.1,complex);
  s[i]:=int(sqrt(1-x^2)-(-sqrt(1-x^2)+3.1415926-h),x=-upx[i]..0)+3.1415926/2;
end do;
>a:=seq([j*3.14/316,s[j]],j=201..316);
>plot({[a]},style=point);
```

2. 基于 K=0.9 开始搜索最优结果程序

```
>k := .9; y1 := sqrt(1-(1-k)^2); y0 := 3.1415926/2/k; k2 :=
-(y0-y1)/(1-k); i := 0; for h from 0 by .2e-1 while h <= 2*(y0-y1)
do i := i+1; upx[i] := fsolve(sqrt(1-x^2) = k2*x+y0-h, x = -1.1 ..
1.1, complex); dnx[i] := fsolve(-sqrt(1-x^2) =
sqrt(1-x^2)-h, x = -1.1 .. 1.1, complex); s[i] :=
int(sqrt(1-x^2)-(k2*x+y0-h), x = x2 ..
1-k)+2*int(sqrt(1-x^2), x = x1 .. 1)+h*(x1-(1-k)) end do; for
h from 2*(y0-y1) by .2e-1 while h <= 2*y1 do i := i+1; upx[i] :=
fsolve(sqrt(1-x^2) = -sqrt(1-x^2)+2*y0-h, x = -1.1 ..
1.1, complex); dnx[i] := fsolve(-sqrt(1-x^2) =
sqrt(1-x^2)-h, x = -1.1 .. 1.1, complex); s[i] :=
```

```

int(sqrt(1-x^2)-(-sqrt(1-x^2)+2*y0-h),x) = -upx[i] ..
-(1-k))+2*int(sqrt(1-x^2),x) = dnx[i] ..
1)+int(sqrt(1-x^2)-(k2*x+y0-h),x) = -(1-k) ..
1-y1k)+h*(dnx[i]-(1-k)) end do; for h from 2*y1 by .2e-1 while
h <= 2*y0 do i := i+1; upx[i] := fsolve(sqrt(1-x^2) =
-sqrt(1-x^2)+2*y0-h,x = -1.1 .. 1.1,complex); dnx[i] :=
fsolve(-sqrt(1-x^2) = k2*x+y0-h,x = -1.1 .. 1.1,complex);
s[i] := int(sqrt(1-x^2)-(-sqrt(1-x^2)+2*y0-h),x = -upx[i] ..
-(1-k))+2*int(sqrt(1-x^2),x) = dnx[i] ..
1)+int(sqrt(1-x^2)-(k2*x+y0-h),x = -(1-k) .. dnx[i]) end do;

```

3. 生成面积特性曲线 Maple 程序

```

>a:=[.9936708861e-2,0],
[.1987341772e-1,.9999958333e-2+.3443736326e-20*I],
[.2981012658e-1,.1999966666e-1+0.*I],
[.3974683544e-1,.2999887496e-1+0.*I],
[.4968354430e-1,.3999733317e-1+0.*I],
[.5962025317e-1,.4999479118e-1+.3452514174e-20*I],
[.6955696203e-1,.5999099878e-1+0.*I],
[.7949367089e-1,.6998570571e-1+0.*I],
[.8943037975e-1,.7997866155e-1+0.*I],
[.9936708861e-1,.8996961577e-1+0.*I],
[.1093037975,.9995831769e-1+0.*I],[.1192405063,.1099445165+0.*I],
[.1291772152,.1199279611+.1385964056e-20*I],
[.1391139241,.1299084002+0.*I],[.1490506329,.1398855825+0.*I],
[.1589873418,.1498592561+0.*I],[.1689240506,.1598291691+0.*I],
[.1788607595,.1697950692+0.*I],[.1887974684,.1797567039+0.*I],
[.1987341772,.1897138202+0.*I],[.2086708861,.1996661649+0.*I],
[.2186075949,.2096134844+0.*I],[.2285443038,.2195555246+0.*I],
[.2384810127,.2294920312+0.*I],[.2484177215,.2394227494+0.*I],
[.2583544304,.2493474239+0.*I],[.2682911392,.2592657989+0.*I],
[.2782278481,.2691776183+0.*I],[.2881645570,.2790826252+0.*I],
[.2981012658,.2889805625+0.*I],[.3080379747,.2988711723+0.*I],
[.3179746836,.3087541962+0.*I],[.3279113924,.3186293753+0.*I],
[.3378481013,.3284964498+.1508293631e-20*I],
[.3477848101,.3383551597+0.*I],[.3577215190,.3482052440+0.*I],
[.3676582279,.3580464411+0.*I],[.3775949367,.3678784887+0.*I],
[.3875316456,.3777011237+0.*I],[.3974683544,.3875140824+0.*I],
[.4074050633,.3973171002+0.*I],[.4173417722,.4071099118+0.*I],
[.4272784810,.4168922508+0.*I],[.4372151899,.4266638503+0.*I],
[.4471518987,.4364244423+0.*I],[.4570886076,.4461737580+0.*I],
[.4670253165,.4559115274+0.*I],[.4769620253,.4656374801+0.*I],
[.4868987342,.4753513441+0.*I],[.4968354430,.4850528468+0.*I],
[.5067721519,.4947417143+0.*I],[.5167088608,.5044176717+0.*I],

```

```

[. 5266455696, . 5140804431+0.*I], [. 5365822785, . 5237297515+0.*I],
[. 5465189874, . 5333653185+0.*I], [. 5564556962, . 5429868646+0.*I],
[. 5663924051, . 5525941092+0.*I],
[. 5763291139, . 5621867704+. 2810204030e-20*I],
[. 5862658228, . 5717645649+0.*I], [. 5962025317, . 5813272082+0.*I],
[. 6061392405, . 5908744144+0.*I], [. 6160759494, . 6004058963+0.*I],
[. 6260126582, . 6099213650+0.*I], [. 6359493671, . 6194205304+0.*I],
[. 6458860760, . 6289031010+0.*I], [. 6558227848, . 6383687833+0.*I],
[. 6657594937, . 6478172827+0.*I], [. 6756962025, . 6572483029+0.*I],
[. 6856329114, . 6666615456+0.*I], [. 6955696203, . 6760567114+0.*I],
[. 7055063291, . 6854334986+0.*I], [. 7154430380, . 6947916040+0.*I],
[. 7253797469, . 7041307226+0.*I], [. 7353164557, . 7134505474+0.*I],
[. 7452531646, . 7227507697+0.*I], [. 7551898734, . 7320310786+0.*I],
[. 7651265823, . 7412911613+0.*I], [. 7750632912, . 7505307030+0.*I],
[. 7850000000, . 7597493868+0.*I], [. 7949367089, . 7689468934+0.*I],
[. 8048734177, . 7781229017+0.*I], [. 8148101266, . 7872770879+0.*I],
[. 8247468355, . 7964091263+0.*I], [. 8346835443, . 8055186885+0.*I],
[. 8446202532, . 8146054439+0.*I], [. 8545569620, . 8236690592+0.*I],
[. 8644936709, . 8327091986+0.*I], [. 8744303798, . 8417255237+0.*I],
[. 8843670886, . 8507176935+0.*I], [. 8943037975, . 8596853640+0.*I],
[. 9042405064, . 8686281888+0.*I], [. 9141772152, . 8775458181+0.*I],
[. 9241139241, . 8864378995+0.*I], [. 9340506329, . 8953040774+0.*I],
[. 9439873418, . 9041439930+0.*I], [. 9539240507, . 9129572845+0.*I],
[. 9638607595, . 9217435867+0.*I], [. 9737974684, . 9305025309+0.*I],
[. 9837341772, . 9392337450+0.*I], [. 9936708861, . 9479368537+0.*I],
[1. 003607595, . 9566114775+0.*I], [1. 013544304, . 9652572334+0.*I],
[1. 023481013, . 9738737347+0.*I], [1. 033417722, . 9824605905+0.*I],
[1. 043354430, . 9910174060+0.*I], [1. 053291139, . 9995437820+0.*I],
[1. 063227848, 1. 008039315+0.*I], [1. 073164557, 1. 016503598+0.*I],
[1. 083101266, 1. 024936218+0.*I], [1. 093037975, 1. 033336759+0.*I],
[1. 102974684, 1. 041704798+0.*I], [1. 112911392, 1. 050039909+0.*I],
[1. 122848101, 1. 058341660+0.*I], [1. 132784810, 1. 066609614+0.*I],
[1. 142721519, 1. 074843330+0.*I]:
> b :=[1. 142721519, 1. 074843330+0.*I], [1. 152658228, 1. 083555961],
[1. 162594937, 1. 092868881], [1. 172531646, 1. 102519673], [1. 182468354,
1. 112430281], [1. 192405063, 1. 122556901], [1. 202341772, 1. 132870231],
[1. 212278481, 1. 143348775], [1. 222215190, 1. 153975816], [1. 232151899,
1. 164737819], [1. 242088608, 1. 175623495], [1. 252025316, 1. 186623210],
[1. 261962025, 1. 197728588], [1. 271898734, 1. 208932241], [1. 281835443,
1. 220227569], [1. 291772152, 1. 231608614], [1. 301708861, 1. 243069946],
[1. 311645570, 1. 254606579], [1. 321582279, 1. 266213904], [1. 331518987,
1. 277887630], [1. 341455696, 1. 289623743], [1. 351392405, 1. 301418468],
[1. 361329114, 1. 313268237], [1. 371265823, 1. 325169667], [1. 381202532,
1. 337119534], [1. 391139241, 1. 349114757], [1. 401075949, 1. 361152382],

```

[1. 411012658, 1. 373229564], [1. 420949367, 1. 385343561], [1. 430886076,
 1. 397491719], [1. 440822785, 1. 409671463], [1. 450759494, 1. 421880289],
 [1. 460696203, 1. 434115756], [1. 470632911, 1. 446375478], [1. 480569620,
 1. 458657119], [1. 490506329, 1. 470958390], [1. 500443038, 1. 483277034],
 [1. 510379747, 1. 495610831], [1. 520316456, 1. 507957590], [1. 530253165,
 1. 520315142], [1. 540189873, 1. 532681339], [1. 550126582, 1. 545054047],
 [1. 560063291, 1. 557431146], [1. 570000000, 1. 569810522], [1. 579936709,
 1. 582190066], [1. 589873418, 1. 594567669], [1. 599810127, 1. 606941218],
 [1. 609746835, 1. 619308594], [1. 619683544, 1. 631667666], [1. 629620253,
 1. 644016288], [1. 639556962, 1. 656352297], [1. 649493671, 1. 668673501],
 [1. 659430380, 1. 680977689], [1. 669367089, 1. 693262609], [1. 679303798,
 1. 705525977], [1. 689240506, 1. 717765465], [1. 699177215, 1. 729978696],
 [1. 709113924, 1. 742163238], [1. 719050633, 1. 754316596], [1. 728987342,
 1. 766436210], [1. 738924051, 1. 778519437], [1. 748860760, 1. 790563548],
 [1. 758797468, 1. 802565719], [1. 768734177, 1. 814523012], [1. 778670886,
 1. 826432368], [1. 788607595, 1. 838290587], [1. 798544304, 1. 850094312],
 [1. 808481013, 1. 861840007], [1. 818417722, 1. 873523930], [1. 828354430,
 1. 885142110], [1. 838291139, 1. 896690302], [1. 848227848, 1. 908163949],
 [1. 858164557, 1. 919558132], [1. 868101266, 1. 930867495], [1. 878037975,
 1. 942086172], [1. 887974684, 1. 953207674], [1. 897911392, 1. 964224749],
 [1. 907848101, 1. 975129195], [1. 917784810, 1. 985911602], [1. 927721519,
 1. 996560975], [1. 937658228, 2. 007064191], [1. 947594937, 2. 017405124],
 [1. 957531646, 2. 027563187], [1. 967468354, 2. 037510629], [1. 977405063,
 2. 047206714], [1. 987341772, 2. 056581584], [1. 997278481, 2. 065441213]:
 > c:=[1. 997278481, 2. 065441213], [2. 007215190, 2. 065441186],
 [2. 017151899, 2. 073669407], [2. 027088608, 2. 081931938], [2. 037025317,
 2. 090228336], [2. 046962025, 2. 098558164], [2. 056898734, 2. 106920987],
 [2. 066835443, 2. 115316380], [2. 076772152, 2. 123743919], [2. 086708861,
 2. 132203187], [2. 096645570, 2. 140693771], [2. 106582279, 2. 149215262],
 [2. 116518987, 2. 157767256], [2. 126455696, 2. 166349354], [2. 136392405,
 2. 174961161], [2. 146329114, 2. 183602284], [2. 156265823, 2. 192272336],
 [2. 166202532, 2. 200970933], [2. 176139241, 2. 209697697], [2. 186075949,
 2. 218452250], [2. 196012658, 2. 227234219], [2. 205949367, 2. 236043237],
 [2. 215886076, 2. 244878937], [2. 225822785, 2. 253740956], [2. 235759494,
 2. 262628936], [2. 245696203, 2. 271542520], [2. 255632911, 2. 280481356],
 [2. 265569620, 2. 289445093], [2. 275506329, 2. 298433384], [2. 285443038,
 2. 307445885], [2. 295379747, 2. 316482255], [2. 305316456, 2. 325542154],
 [2. 315253165, 2. 334625246], [2. 325189873, 2. 343731198], [2. 335126582,
 2. 352859679], [2. 345063291, 2. 362010360], [2. 355000000, 2. 371182915],
 [2. 364936709, 2. 380377019], [2. 374873418, 2. 389592352], [2. 384810127,
 2. 398828593], [2. 394746836, 2. 408085425], [2. 404683544, 2. 417362534],
 [2. 414620253, 2. 426659606], [2. 424556962, 2. 435976329], [2. 434493671,
 2. 445312396], [2. 444430380, 2. 454667498], [2. 454367089, 2. 464041330],
 [2. 464303798, 2. 473433589], [2. 474240506, 2. 482843973], [2. 484177215,

```

2.492272182], [2.494113924, 2.501717918], [2.504050633, 2.511180883],
[2.513987342, 2.520660784], [2.523924051, 2.530157326], [2.533860760,
2.539670218], [2.543797468, 2.549199168], [2.553734177, 2.558743890],
[2.563670886, 2.568304094], [2.573607595, 2.577879494], [2.583544304,
2.587469807], [2.593481013, 2.597074748], [2.603417722, 2.606694035],
[2.613354430, 2.616327388], [2.623291139, 2.625974526], [2.633227848,
2.635635172], [2.643164557, 2.645309048], [2.653101266, 2.654995878],
[2.663037975, 2.664695387], [2.672974684, 2.674407300], [2.682911392,
2.684131346], [2.692848101, 2.693867252], [2.702784810, 2.703614747],
[2.712721519, 2.713373561], [2.722658228, 2.723143425], [2.732594937,
2.732924072], [2.742531646, 2.742715233], [2.752468354, 2.752516643],
[2.762405063, 2.762328037], [2.772341772, 2.772149148], [2.782278481,
2.781979714], [2.792215190, 2.791819472], [2.802151899, 2.801668158],
[2.812088608, 2.811525512], [2.822025317, 2.821391272], [2.831962025,
2.831265178], [2.841898734, 2.841146970], [2.851835443, 2.851036389],
[2.861772152, 2.860933176], [2.871708861, 2.870837074], [2.881645570,
2.880747826], [2.891582279, 2.890665174], [2.901518987, 2.900588863],
[2.911455696, 2.910518635], [2.921392405, 2.920454237], [2.931329114,
2.930395413], [2.941265823, 2.940341909], [2.951202532, 2.950293470],
[2.961139241, 2.960249844], [2.971075949, 2.970210776], [2.981012658,
2.980176013], [2.990949367, 2.990145304], [3.000886076, 3.000118396],
[3.010822785, 3.010095036], [3.020759494, 3.020074973], [3.030696203,
3.030057956], [3.040632911, 3.040043733], [3.050569620, 3.050032053],
[3.060506329, 3.060022665], [3.070443038, 3.070015319], [3.080379747,
3.080009764], [3.090316456, 3.090005749], [3.100253165, 3.100003025],
[3.110189873, 3.110001341], [3.120126582, 3.120000446], [3.130063291,
3.130000092], [3.140000000, 3.140000027]:
> e:=[a],[b],[c]:
> d:=seq([j*3.14/316,3.14/316*j],j=1..316):
> p1:=plot({e},style=point,color=[blue]):
> p2:=plot([d],style=point):
> plots[display]({p1,p2});

```

4. 生成内孔曲线形状的程序

```

p1:=plot(sqrt(1-x^2),-sqrt(1-x^2),x=-1.1..1.1,style=line,color=black):
p2:=plot(sqrt(1-x^2),x=0.1..1.1,style=point,color=black):
p3:=plot(-sqrt(1-x^2)+Pi/0.9,x=-1.1..-0.1,style=point,color=black):
p4:=plot(-7.503417849*x+1.745329222,x=-0.1..0.1,style=point,color=black):
p5:=plot(sqrt(1-x^2)+Pi/0.9,x=-1.1..1.1,style=point,color=red):
p6:=plot(pointplot([1,0],[1,0.05],[1,0.1],[1,0.15],[1,0.2],[1,0.25],[1,0.3],[1,0.35],[1,0.4],
[1,0.45],[1,0.5],[1,0.55],[1,0.6],[1,0.65],[1,0.7],[1,0.75],[1,0.8],[1,0.85],[1,0.9],[1,0.95],
[1,1.0],[1,1.05],[1,1.1],[1,1.15],[1,1.2],[1,1.25],[1,1.3],[1,1.35],[1,1.4],[1,1.45],[1,1.5],
[1,1.55],[1,1.6],[1,1.65],[1,1.7],[1,1.75],[1,1.8],[1,1.85],[1,1.9],[1,1.95],[1,2.0],[1,

```



```

2.05],[1,2.1],[1,2.15],[1,2.2],[1,2.25],[1,2.3],[1,2.35],[1,2.4],[1,2.45],[1,2.5],[1,2.55],[
1,2.6],[1,2.65],[1,2.7],[1,2.75],[1,2.8],[1,2.85],[1,2.9],[1,2.95],[1,3.0],[1,3.05],[1,3.1],[
1,3.15],[1,3.2],[1,3.25],[1,3.3],[1,3.35],[1,3.4],[1,3.45],[1,pi/0.9}],style=point,color=b
lack):
plots[display]({p1,p2,p3,p4,p5,p6});

```