



中国研究生创新实践系列大赛  
“华为杯”第十六届中国研究生  
数学建模竞赛

学 校

陆军工程大学

---

参赛队号

19910040006

---

1.曹 阳

队员姓名

2.狄恩彪

3.陈毓锴

---

# 中国研究生创新实践系列大赛

## “华为杯”第十六届中国研究生

### 数学建模竞赛

题 目

视觉情报信息分析

摘

要：

本文综合运用图像几何量测的多种数学模型以及求解优化问题的牛顿方法，完成了题目设定的视觉情报距离信息分析问题。

**任务 1 单幅图像距离信息分析：**首先建立了直线上交比测量模型与平面矩形测量模型，解决了同一平面上两物体相对距离的量测，并将模型推广到跨平面求解。该模型能对图 1、图 2 中两车相对距离、图 4 中梯形尺寸进行一定精度的求解。以上模型的优点是基于较少已知条件即可完成求解，但存在不能求解绝对深度且在跨平面求解时误差累计严重的问题。为求解绝对深度，并充分利用图片中可用的已知信息提高求解精度，提出并建立了 A-I (Actual Point to Image Point) 方程，完成了空间几何信息的测量模型。利用以上两个模型，完成了任务 1 所有图片距离的初步求解。鉴于训练空间几何信息测量模型参数时方程组为超定方程，建立了基于牛顿迭代法的多信息融合算法优化模型，求得最小范数解，实地标定实验表明，该优化模型将测量误差由 6% 以内降到 3% 以内（page26 表 2），任务 1 的测量结果如 page28 表 4 所示。

**任务 2、3、4 视频图像距离信息分析：**视频是图像的时间序列，因此将任务 2,3,4 视频转化为多幅图像来处理。

任务 2 中，针对视频场景狭窄容易带来较大测量误差的特点，假设视频拍摄过程中没有进行过推拉操作，相机关键参数不变，按照关键帧选取原则（page30），基于平面上矩形信息测量模型完成关键参量求解，并将参数应用于其他待测帧，并最终实现测量任务，其结果如 page32 表 6 所示。

任务 3 中，选取驾校科目二训练场，利用场景中车道宽度分别求解相隔 5 帧地面特征点不同时刻空间坐标，根据坐标点的空间位移估算出高铁速度为 302.8Km/h。求解河宽、桥间距、桥面高度等距离时，利用角度交比关系，提出一种快速计算拍摄方向角的方法（page33）。基于高铁速度及方向角度，建立桥上特征角点在不同时刻的位置模型，求解

出各个距离信息如 page36 表 7 所示。

任务 4 中，通过图像裁剪检测完成图像平面中心点纠正。选取停车场大巴作为参照物，基于任务 1 中的空间几何信息测量模型，求解出老宅的长宽尺寸并基于此求解其他建筑高度、长度。针对后花园为曲线的特点，选取了 12 个特征点对后花园曲线进行了拟合，针对树木投影点被遮挡问题，利用双目视线交汇法(page42)求解了树木最大高度。任务 4 结果如 page43 表 13 所示。为了进一步比较测量结果，另选停车场卫生间门高和宽作为已知参照物，计算了老宅的长度为 91.56m,宽为 68.56m。

为了检验模型精度和实用性，构建了实际测量场景和三维重建模型，对模型进行了检验，检验数据如 page26 表 2、page27 表 3 所示。

**关键词：**单目图像 测量 牛顿迭代法 A-I 方程 双目视线交汇法

## 本题数值结果汇总表

### 任务 1 结果

距离	初始解	优化解
附件图 1 中红色车辆 A 车头和白色车辆 B 车头之间的距离(m)	24.95	25.10
附件图 1 中拍照者距马路左侧边界的距离(m)	14.73	15.34
附件图 2 中黑色车辆 A 车头和灰色车辆 C 车尾之间的距离(m)	30.276	30.22
附件图 2 中拍照者距白色车辆 B 车头的距离(m)	27.5	26.9
附件图 3 中拍照者距岗亭 A 的距离(m)	28.78	27.3
附件图 3 中拍照者距离地面的高度(m)	4.68	4.69
附件图 4 中 AB 长度(m)	5.588	5.48
附件图 4 中 CD 长度(m)	4.608	4.59
附件图 4 中 AB 和 CD 之间的距离(m)	7.10	7.13

### 任务 2 结果

参量	值
别克英朗车与后方红色车辆之间的距离(取 0 到 259 帧)(m)	40.42
别克英朗车在第一秒时超越白色车辆时两车的速度差异(km/h)	39.835
别克英朗车在第三秒时超越白色车辆时两车的速度差异(km/h)	21.17

### 任务 3 结果

待测参量	值
高铁行驶方向左侧第一座桥桥面距水面的高度(m)	12.07
桥头处距高铁轨道距离(m)	496.22
桥尾处距高铁轨道距离(m)	536.08
高铁左侧第一座桥处的水面宽度 $L_1$ (m)	269.5
水面宽度 $L_2$ (m)	225.34
水面宽度 $L_3$ (m)	197.49
高铁行驶速度(km/h)	302.8

任务 4 结果

待测参量	值
老宅西侧道路宽度(m)	4.75
老宅东侧道路宽度(m)	2.85
老宅南侧道路宽度(m)	6.3
建筑物 $U'$ 高度(m)	9.74
建筑物 $V'$ 高度(m)	2.26
建筑物 $W'$ 高度(m)	6.46
建筑物 $T'$ 高度(m)	10.35
后花园中树木的最大高度(m)	14.19
老宅占地面积(不包含路面)( $\text{m}^2$ )	7685.90
老宅占地面积(包含路面)( $\text{m}^2$ )	9226.94
无人机平均飞行高度(m)	48.175
无人机平均速度(m/s)	12.85

实地标定测量值及测量误差

测量参量	拍摄者与 B 距离(m)	拍摄者与 A 距离(m)	箱子 B 高度(m)	相机距地 面高度(m)	E 点与 F 点距离(m)	C 点和 D 点的距离
真实值	2.54	1.845	0.143	1.19	0.90	0.765
测量值 (未优化)	2.65	1.94	0.1396	1.1766	0.9227	0.786
测量误差	4.33%	5.15%	2.38%	1.13%	2.52%	2.75%
测量值 (优化)	2.571	1.8971	0.1432	1.1863	0.8994	0.7608
测量误差	1.22%	2.82%	0.14%	0.31%	0.07%	0.55%

3D 仿真建模测量值及测量误差

测量参量	真实值	测量值	测量误差
拍摄者距 E 距离 (m)	2.0	1.9907	0.465%
相机距地面高度 (m)	1.5	1.4972	0.19%
C 点和 D 点距离 (m)	6.51	6.4905	0.30%
柱子 A 的高度 (m)	2.75	2.7505	0.02%
路灯 1、2 的距离 (m)	3.0	3.009	0.30%
俯仰角	20°	20.0155°	0.078%
相机拍摄方向	22°	22.0353°	0.16%
柱子 A 距人距离 (m)	4.6	4.5795	0.45%
柱子 B 距人距离 (m)	7.1	7.0994	0.0085%
路灯 1 距人距离 (m)	7.0	6.9591	0.58%

## 目录

1	问题的重述 .....	8
2	问题的分析 .....	8
3	模型假设和符号说明 .....	9
3.1	模型假设 .....	9
3.2	符号说明 .....	9
4	模型的准备 .....	10
4.1	图形裁剪检验及像平面中心点的纠正 .....	10
4.2	时间预处理 .....	11
5	单幅图像距离信息分析 .....	11
5.1	附件图 1 中的距离信息分析 .....	11
5.1.1	基于直线上交比信息测量模型的建立 .....	11
5.1.2	模型的求解 .....	12
5.1.3	基于平面上矩形信息测量模型的建立 .....	13
5.1.4	模型的求解 .....	15
5.2	附件图 2 中的距离信息分析 .....	16
5.2.1	跨平面测量模型的建立 .....	16
5.2.2	模型的求解 .....	17
5.3	附件图 3 的距离信息分析 .....	17
5.4	附件图 4 的距离信息分析 .....	19
5.4.1	基于空间中几何信息测量模型的建立 .....	19
5.4.2	模型的求解 .....	21
5.5	误差分析及模型的优化 .....	24
5.5.1	误差分析 .....	24
5.5.2	基于牛顿迭代法的模型优化 .....	25
5.6	模型的检验 .....	26
5.6	任务 1 的结果 .....	28
6	平面视频距离信息分析 .....	28
6.1	任务 2 的求解 .....	28
6.1.1	矩形的选取 .....	28
6.1.2	参量的计算 .....	30
6.1.3	模型的检验 .....	32

6.1.4 任务 2 结果 .....	32
6.2 任务 3 的求解 .....	32
6.2.1 高铁速度的估算 .....	32
6.2.2 拍摄方向角度的计算 .....	33
6.2.3 参量的求解 .....	35
7 立体视频距离信息分析 .....	37
7.1 图像裁剪检测 .....	37
7.2 参照物的选取 .....	37
7.3 模型的建立 .....	37
7.4 参量的求解 .....	38
7.4.1 建筑物的高度及道路长度、宽度以及老宅占地面积 .....	38
7.4.2 无人机飞行高度和速度 .....	40
7.4.3 后花园中树木的最大高度 .....	42
7.5 任务 4 的结果 .....	43
8 总结与分析 .....	43
8.1 模型的优点 .....	43
8.2 模型的缺点 .....	43
9 参考文献 .....	44



## 1 问题的重述

情报是特殊领域内解决特定问题所需要的特定知识和信息。视觉情报指的是通过图像或者视频获取的情报。本题以特殊领域情报分析工作为背景，以单幅图像距离信息分析、平面视频距离信息分析和立体视频距离信息分析为逻辑主线，提出如下四项任务：

**任务 1：**给出四幅不同的图片，要求测算图中两点之间、拍摄者与目标物之间、拍摄者所在高度等距离信息；

**任务 2：**给出高速公路上乘客通过后视镜拍摄的行车视频，要求估算该车和后方红色车辆之间的距离，以及超越白车时两车的速度差异。

**任务 3：**给出高铁乘客拍摄的高铁驶过一块水面的视频，要求测算高铁行驶方向左侧第一座桥桥面距水面的高度、距高铁轨道的距离、水面宽度和高铁的行驶速度。

**任务 4：**给出无人机拍摄的某老宅全景的视频，要求估算其中环绕老宅道路的长度、宽度、各建筑物的高度、后花园中树木的最大高度、老宅的占地面积以及无人机的飞行高度和速度。

## 2 问题的分析

在移动机器人、无人驾驶、计算机视觉等领域中，可以采用双目视觉测量系统或特殊配置的单目视觉系统来获取空间物体的距离，高度，深度等信息，此类方法的核心问题为相机标定、图像匹配以及三维结构计算<sup>[1]</sup>。但在题目给定的背景下，需要通过单幅图像或视频进行几何量测，这是本题的特别之处。

对单幅图像的距离信息分析，正如题目所述，像大庆油田泄密案一样，这类问题可以由富有经验的情报分析人员通过直觉判断来解决，但其结论的可靠性和精确性无疑存在着一定的偏差。通过数学建模来分析将会大大提高结果的精确性、可靠性和科学性。由于视频是图像的时间序列，所以视频可以分解为一组图片，进而用处理单幅图像的方法完成视频距离任务的测量。对需要完成的任务进行归纳，大致可以分为以下几类：

一是相对距离(或者相对深度)的求解。相对距离通常指图形或视频中可直接观察到的物体间距离。对于相对距离的求解，目前有很多成熟的方法。文献[2]给出了基于交比的直线测量模型、基于矩形(含可转化为矩形)的平面测量模型以及跨平面模型。适用以上方法求解的任务有：附件图片 1 中的两车距离，附件图片 2 中两车间距离，附件图片 4 中四边形 ABCD 的求解，任务 2 中车辆距离以及速度差异，任务 3 中的河面宽度以及桥距水面的

高度，任务 4 中的建筑物、树的高度，道路的长度、宽度以及住宅面积等。

二是深度测量，当需要测量的量的主体不同时可视，需要借助其他信息(含相机、其他非图内标志物等)进行求解。对于这类问题目前还没有通用的方法实现较高精度的距离信息求解。任务 1 中附件图片 1 中的拍照者距马路左侧边界距离，附件图片 2 中的拍照者与车之间的距离，附件图片 3 中拍照者与岗亭的距离以及距地面的高度，任务 3 中拍摄者与桥之间距离，任务 4 中无人机的高度等都可归于此类。查阅文献，本文将结合文献[3]中的模型并根据实际任务的不同进行部分创新改进，对问题的求解进行尝试。

### 3 模型假设和符号说明

#### 3.1 模型假设

- (1) 假设视频中摄像机没有推拉操作，即焦距不发生改变。
- (2) 假设图像或者视频中选取的参照物尺寸均与先验知识一致。
- (3) 假设图像或者视频没做除裁剪外的其他变形。

#### 3.2 符号说明

$\hat{O}$	像平面中心点
$A、B、C\dots$	像平面上的点
$A'、B'、C'\dots$	实际空间中的点
$O$	相机透镜中心
$f$	相机的焦距
$\beta$	相机俯仰角
$H$	相机的高度
$\varphi$	拍摄者拍摄方向
$s$	相机感光 CCD 器件的实际尺寸与图像像素坐标比例系数
$S_{AB}$	$AB$ 之间的距离
$u$	$u = s \bullet f$ (定义为像素焦距)
$l_m$	像平面上的线段
$V_p$	灭点

## 4 模型的准备

### 4.1 图形裁剪检验及像平面中心点的纠正

在图像信息分析中，像平面中心点的位置对于模型的求解至关重要。如果图像经过裁剪，其像平面的中心位置将会发生变化。因此，图像分析之前必须先检验其是否经过裁剪，检验原理如图 1 所示。

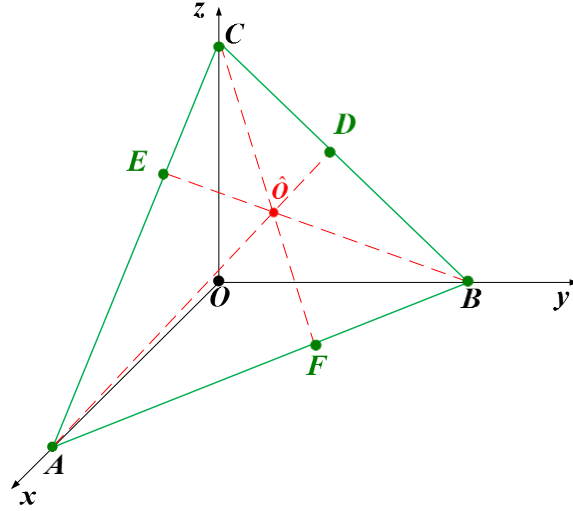


图 1 图形裁剪检验原理图

根据视觉成像原理，物理空间中的一组平行线在像平面上通常不再平行，而是汇聚于一点，这一点称为这组平行线的灭点。令  $A, B, C$  三点分别为平行于  $x$  轴方向， $y$  轴方向， $z$  轴方向的直线组所汇聚成的灭点。 $O$  点为相机透镜中心， $\hat{O}$  点为像平面中心点，连接  $A\hat{O}, B\hat{O}, C\hat{O}$  并延长至与  $BC, AC, AB$  分别交于点  $D, E, F$ ，则可证明  $\hat{O}$  为  $\triangle ABC$  垂心：

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} O\hat{O} \perp \text{平面} ABC &\Rightarrow O\hat{O} \perp BC \\ AO \perp \text{平面} BOC &\Rightarrow AO \perp BC \end{aligned} \right\} \Rightarrow BC \perp \text{平面} AO\hat{O} \\
 & \Rightarrow BC \perp A\hat{O} \Rightarrow AD \perp BC \\
 & \left. \begin{aligned} &\text{同理 } CF \perp AB \\ &BE \perp AC \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{O} \text{ 为平面 } ABC \text{ 的垂心}
 \end{aligned}$$

由此可知，一帧图像的像平面中心点为  $x$  轴， $y$  轴， $z$  轴三个方向上的灭点所构成的三角形的垂心。通常取像平面的中心位置为像平面中心点，如像平面的中心位置不是三个灭点构成的三角形的垂心，则可判定图像或者视频经过裁剪。经过分析，任务 1、2、3 中的图像或视频均未裁剪，而任务 4 视频经过了裁剪。此时，不再取像平面的中心位置作为像平面中心点，而是取  $x$  轴， $y$  轴， $z$  轴三个方向上的灭点所构成的三角形的垂心作为该帧图像的像平面中心点。

## 4.2 时间预处理

在附件的视频中，时间单位为 s，且视频的帧率均为 30 帧/s。为了便于后文参量的求解，我们以第 0 帧为时间起点，将时间单位转换为帧。例如，时刻“第 1s”转化为“第 30 帧”。

## 5 单幅图像距离信息分析

任务 1 是对单幅图像进行距离信息分析，对同一条直线上的物体求相对距离，建立基于直线上交比信息测量模型；对同一平面内距离信息的量测，建立基于平面上几何信息测量模型；而对不同平面的距离量测，采用跨平面测量模型；针对跨平面测量误差会随着平面的转换而传播，建立基于空间中几何信息测量模型。

### 5.1 附件图 1 中的距离信息分析

计算红色车辆 A 车头和白色车辆 B 车头的距离，发现二者近似处于同一直线，故**采取基于直线上交比信息测量模型，求得车辆 AB 间的距离**。拍摄者距马路左侧边界距离的计算属于深度测量范畴，采用交比无法求解，可利用车辆的前后轮胎拟合出两个椭圆并求解出平行共切线，再利用 4 个切点恢复出一个矩形，**通过建立基于矩形的平面几何信息的测量模型，完成拍摄者距马路左侧边界距离的求解**。

#### 5.1.1 基于直线上交比信息测量模型的建立

物体经过成像后，有一些摄影不变量，比如说交比，其为共线四点距离比的比值。如图 2 所示，设点  $F$  为平行的两条直线  $AB$  和  $GH$  汇聚而成的灭点。交比在摄影前后保持不变，即：

$$CR(AC, DV_p) = \frac{S_{AD}S_{CV_p}}{S_{AV_p}S_{CD}} = cr_1 = \frac{S_{A'D'}S_{C'V_p'}}{S_{A'V_p'}S_{C'D'}}$$

$$CR(BC, DV_p) = \frac{S_{BD}S_{CV_p'}}{S_{BV_p}S_{CD}} = cr_2 = \frac{S_{B'D'}S_{C'V_p'}}{S_{B'F'}S_{C'D'}}$$

其中  $S_{BD}, S_{CV_p}, S_{BV_p}, S_{CD}$  为像平面中线段  $BD, CV_p, BV_p, CD$  的长度， $S_{B'D'}, S_{C'V_p'}, S_{B'V_p'}, S_{C'D'}$  为现实空间中相应的长度。由于灭点是两条平行直线的汇聚点，在现实空间中，其在无穷远处，故  $S_{A'V_p'} = +\infty, S_{C'V_p'} = +\infty, S_{B'V_p'} = +\infty$ ，即

$$\begin{aligned} cr_1 &= S_{A'D'} / S_{C'D'} \\ cr_2 &= S_{B'D'} / S_{C'D'} \end{aligned} \quad (5.1)$$

方程组(5.1)中有两个方程，三个未知量  $S_{A'D'}, S_{B'D'}, S_{C'D'}$ ，只需知道其中一个量，就可以求解相对距离。

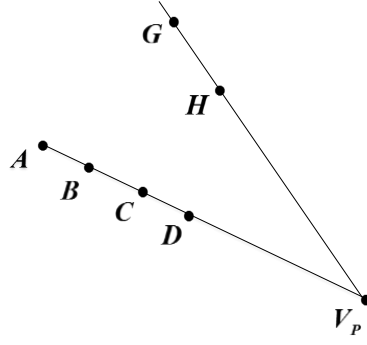


图 2 直线的交比关系

### 5.1.2 模型的求解

由于视觉远处图像的像素拾取容易引起较大的误差，鉴于实际中不同小型车辆的车头距离车辆前轮胎中心点距离近似相等，为了减少误差，本题采用两车的前轮胎中心点距离近似作为两车头之间的距离。

如图 3 所示，可以看出两车的轮胎中心点近似在一条直线上，取地面上与其平行的两条交通标志线，三条直线交于点  $V_p(828.9px, 213.3px)$ ，在蓝色直线上取四个点，分别为黑色车的前轮胎中心点  $P_A(-904.5px, 32.5px)$ ，后轮胎的中心点  $P_B(-622.5px, 61.5px)$ ，红色车辆 A 的前轮胎中心点  $P_C(-415.5px, 83.5px)$ ，红色车辆 B 的前轮胎中心点  $P_D(251.5px, 153.5px)$ 。由交比得：

$$CR(P_A P_C, P_D V_p) = \frac{S_{P_A P_D} S_{P_C V_p}}{S_{P_A V_p} S_{P_C P_D}} = cr_1 = \frac{S_{P'_A P'_D} S_{P'_C V'_p}}{S_{P'_A V'_p} S_{P'_C P'_D}} = \frac{S_{P'_A P'_D}}{S_{P'_C P'_D}}$$

$$CR(P_B P_C, P_D V_p) = \frac{S_{P_B P_D} S_{P_C V_p}}{S_{P_B V_p} S_{P_C P_D}} = cr_2 = \frac{S_{P'_B P'_D} S_{P'_C V'_p}}{S_{P'_B V'_p} S_{P'_C P'_D}} = \frac{S_{P'_B P'_D}}{S_{P'_C P'_D}}$$

由图可求得  $S_{P_A P_D}, S_{P_C V_p}, S_{P_A V_p}, S_{P_C P_D}, S_{P_B P_D}, S_{P_B V_p}$ ，故

$$cr_1 = \frac{S_{P_A P_D} S_{P_C V_p}}{S_{P_A V_p} S_{P_C P_D}} = 1.2442 = \frac{S_{P'_B P'_D} + S_{P'_A P'_B}}{S_{P'_C P'_D}}$$

$$cr_2 = \frac{S_{P_B P_D} S_{P_C V_p}}{S_{P_B V_p} S_{P_C P_D}} = 1.1235 = \frac{S_{P'_B P'_D}}{S_{P'_C P'_D}}$$

黑色车根据判断为奥迪 A6L 2014 款 TFSI 标准型车，其轮圈直径为 0.4318m，轴距为 3.012m<sup>[4]</sup>，故  $S_{P'_A P'_B} = 3.012m$ ，由此解得  $S_{P'_B P'_D} = 24.95m$ 。

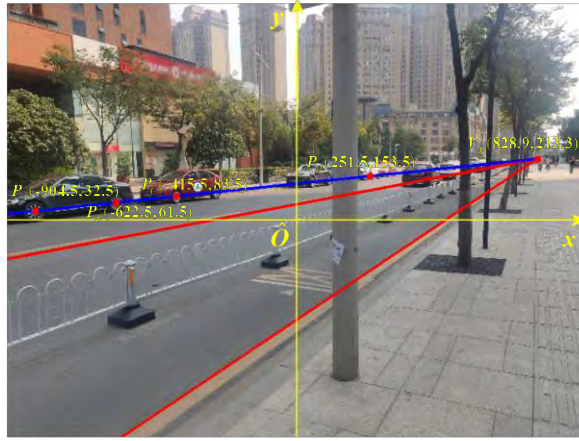


图 3 相对距离的求解

### 5.1.3 基于平面上矩形信息测量模型的建立

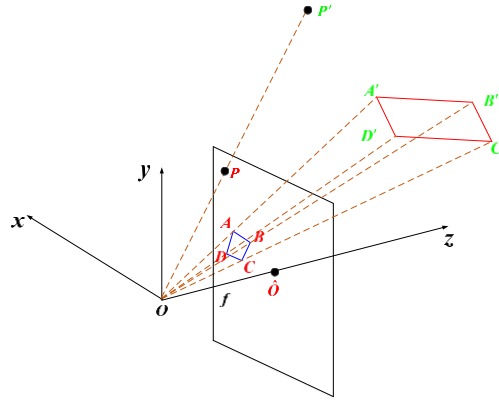


图 4 基于矩形信息的共面距离量测

如图 4 所示，点  $O$  为相机透镜中心， $\hat{O}$  为像平面中心， $O$  为坐标原点， $O\hat{O}$  方向为  $z$  轴方向，令  $|O\hat{O}| = f$ ，若在计算中以像素为单位，为了计算单位的统一，引入相机感光器件的实际尺寸与图像像素坐标之间的比例关系  $s$ ，令  $u = s \cdot f$ ，并定义  $u$  为像素焦距。矩形  $A'B'C'D'$  在像平面上的成像为四边形  $ABCD$ ，则  $A$  点坐标为  $(x_a, y_a, u)$ ， $B$  点坐标为  $(x_b, y_b, u)$ ， $C$  点坐标为  $(x_c, y_c, u)$ ， $D$  点坐标为  $(x_d, y_d, u)$ ，在像平面上可以得到  $x_a, y_a$  等值，而  $u$  为二维像平面还原到三维立体图引入的变量，其为未知数。令：

$$\begin{cases} \overline{OA'} = \lambda_a \overline{OA} & \overline{OB'} = \lambda_b \overline{OB} \\ \overline{OC'} = \lambda_c \overline{OC} & \overline{OD'} = \lambda_d \overline{OD} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} A' = (\lambda_a x_a, \lambda_a y_a, \lambda_a u) & B' = (\lambda_b x_b, \lambda_b y_b, \lambda_b u) \\ C' = (\lambda_c x_c, \lambda_c y_c, \lambda_c u) & D' = (\lambda_d x_d, \lambda_d y_d, \lambda_d u) \end{cases} \quad (5.2)$$

假设已知的矩形长边  $|A'B'|$ 、 $|C'D'|$  长为  $a$ ，短边  $|B'C'|$  长为  $b$ ，则：

$$\begin{cases} |\overline{A'B'}| = a & |\overline{B'C'}| = b & |\overline{C'D'}| = a \\ \overline{A'B'} \bullet \overline{B'C'} = 0 & \overline{B'C'} \bullet \overline{C'D'} = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

将(5.2)代入(5.3)，则方程组(5.3)有五个方程，五个未知量  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d, u$ ，可以求解出  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c, \lambda_d, u$  的值。由此，我们确定了点  $A, B, C, D$  以及  $A', B', C', D'$  的坐标。同时，由不共线的三点坐标  $A', B', C'$  可以确定平面  $A'B'C'D'$  的法向量  $\vec{n}$ 。设点  $P'$  为所要求的目标点，点  $P$  为其对应像平面上的成像。设  $OP' = \lambda_p OP$ ，点  $P$  坐标为  $(x_p, y_p, u)$ ，其中  $x_p, y_p$  的值可在像平面上读取出来， $u$  的值也已经求解出来。假设点  $P'$  位于平面  $A'B'C'D'$  上，则：

$$A'P' \perp \vec{n}$$

即

$$\begin{aligned} \overline{A'P'} \bullet \vec{n} &= 0 \Rightarrow (\overline{OA'} - \overline{OP'}) \bullet \vec{n} = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda_a \overline{OA} - \lambda_p \overline{OP}) \bullet \vec{n} = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_p = \frac{\overline{OP} \bullet \vec{n}}{\lambda_a \bullet \overline{OA} \bullet \vec{n}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

所以点  $P'$  坐标为  $(\lambda_p x_p, \lambda_p y_p, \lambda_p d)$ ，根据点  $P'$  的坐标可求得绝对深度为：

$$Dep = \sqrt{(\lambda_p x_p)^2 + (\lambda_p y_p)^2 + (\lambda_p u)^2} \quad (5.5)$$

问题中如果没有合适尺寸的矩形供使用，考虑到相离的两个等圆的平行公切线和圆的直径可以恢复出一个矩形。本题首先选择汽车轮胎作为等圆目标，再计算出矩形，最后基于矩形信息的测量模型，完成模型的求解。

如图 5 所示两圆，两条外切线与两圆相切的四个点所构成的四边形  $A'B'C'D'$  为矩形。圆形在像平面中往往呈现为椭圆形，根据射影不变性原理<sup>[5]</sup>，两圆的外切线映射到像平面上即为两椭圆的外切线，同时矩形  $A'B'C'D'$  映射到像平面上即为椭圆外切线与两椭圆相切的切点所构成的四边形。我们通过提取椭圆上的离散点，拟合出椭圆方程。设椭圆方程为：

$$oval_1 : x^2 + A_1 xy + B_1 y^2 + C_1 x + D_1 y + E_1 = 0 \quad (5.7)$$

$$oval_2 : x^2 + A_2 xy + B_2 y^2 + C_2 x + D_2 y + E_2 = 0 \quad (5.8)$$

设两椭圆的公切线方程为：

$$y = kx + b \quad (5.9)$$

将(5.9)带入(5.7)、(5.8)，利用  $\Delta = 0$  求得像平面上两椭圆的外切线，将其与椭圆方程联立，确定矩形  $A'B'C'D'$  的像  $ABCD$ ，便可使用基于平面上矩形信息的测量模型进行距离信息分析。

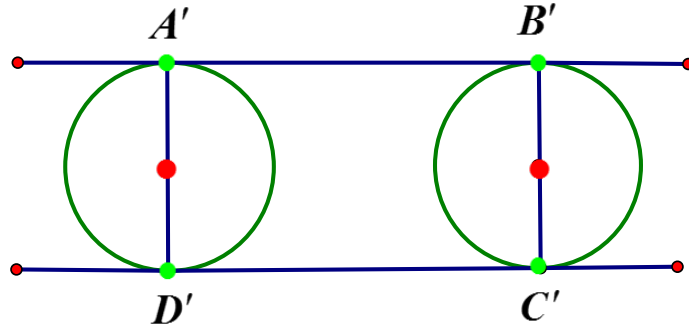


图 5 两圆的外切

#### 5.1.4 模型的求解

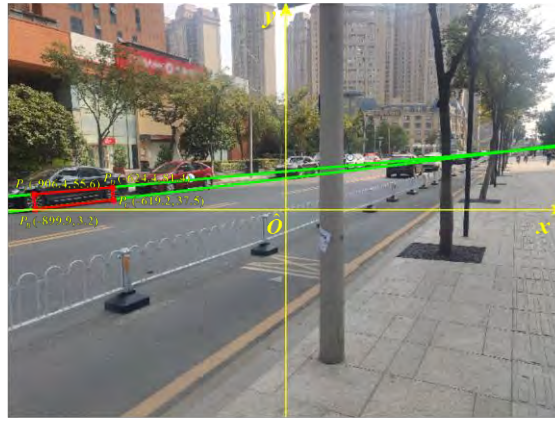


图 6 拍摄者距马路左侧边界距离求解

如图 6 所示，基于平面上矩形信息的测量模型求解出奥迪车轮胎的四个切点分别为：

$$\begin{aligned} P_A = (x_a, y_a) &= (-906.4px, 55.6px), P_B = (x_b, y_b) = (-899.9px, 3.2px) \\ P_C = (x_c, y_c) &= (-619.2px, 37.5px), P_D = (x_d, y_d) = (-624.4px, 81.4px) \end{aligned}$$

进一步解得其坐标为：

$$\left\{ \begin{array}{ll} P'_A = (-7.427m, 0.4556m, 13.756m) & P'_B = (-7.394m, 0.0263m, 13.795m) \\ P'_C = (-6.079m, 0.368m, 16.482m) & P'_D = (-6.115m, 0.797m, 16.44m) \end{array} \right\}$$

则平面  $P'_A P'_B P'_C P'_D$  的单位法向量为：

$$\vec{n}_e = \frac{\vec{P}'_A \times \vec{P}'_B}{|\vec{P}'_A \times \vec{P}'_B|} = (-0.8967, -0.028, 0.4418)$$

则拍照者距离奥迪车轮胎平面的垂直距离为：

$$d_1 = |\vec{OP}'_A \cdot \vec{n}_e| = 12.72m$$

而奥迪车的宽为 1.81m，且靠边停车不得超过 30 公分，假设奥迪车停车离马路边缘为 20 公分，则拍照者距马路左侧边界的距离为  $d = d_1 + 1.81 + 0.2 = 14.73m$ 。

小结：本题首先通过基于交比的模型求解出红色车辆 A 车头和白色车辆 B 车头之间



的距离为 24.95m，为进一步解决问题，建立基于平面上矩形信息测量模型，得出拍照者距马路左侧边界的距离为 14.73m。

## 5.2 附件图 2 中的距离信息分析

附件图 2 中，要求解路面上的距离及拍照者与车辆的绝对深度。考虑到路面有坡度且有明显弯曲，会对测量结果产生影响。通过改进基于平面上矩形信息测量模型，完成了跨平面的距离测量。

### 5.2.1 跨平面测量模型的建立

在现实生活中，平面内量测的范围比较有限，为了适应现实需求，需要实现从一个目标平面向另一个目标平面的跨越，从而实现多平面立体量测。如图 7 所示，平面 1 为基准平面，基于平面上矩形信息测量模型，可求得平面 1 矩形  $A'B'C'D'$  中  $A'$ ， $B'$ ， $C'$ ， $D'$  四点的坐标。同时可以在像平面上提取出两平面相交的离散点，并由此拟合出交线  $EF$ ，根据摄影不变性原理，其为图 7 中直线  $E'F'$  在像平面中的映射。由于  $E', F'$  点在平面 1 上，基于平面上矩形信息的测量模型，同样可以求出  $E', F'$  的坐标。平面 1 的法向量，即：

$$\vec{n}_1 = \vec{A'B'} \times \vec{B'C'}$$

由于  $E'F'$  为平面 1 和平面 2 的交线，通过  $\vec{n}_1$  及  $\vec{E'F'}$  可得平面 2 的法向量，即：

$$\vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{E'F'}$$

通过平面 2 上点  $E'$  和法向量  $\vec{n}_2$ ，平面 2 的方程也就随之确定。以求  $Q'$  坐标为例，点  $Q'$  位于平面 2 上，则：

$$\vec{E'Q'} \perp \vec{n}_2 \quad (5.10)$$

设点  $Q$  为  $Q'$  在像平面上的映射，并令  $\vec{OQ'} = \lambda_q \vec{OQ}$ ，则可在像平面上读出点  $Q$  坐标为  $(x_q, y_q, u)$ ，故式(5.10)即为：

$$\begin{aligned} \vec{E'Q'} \cdot \vec{n}_2 = 0 &\Rightarrow (\vec{OE'} - \vec{OQ'}) \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ &\Rightarrow (\vec{OE'} - \lambda_q \vec{OQ}) \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow \lambda_q = \frac{\vec{OQ} \cdot \vec{n}_2}{\vec{OE'} \cdot \vec{n}_2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

据此确定了  $Q'$  的坐标，实现了从平面 1 到平面 2 的跨平面距离量测。

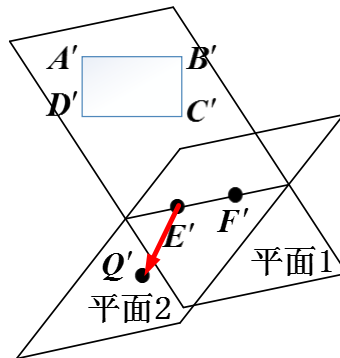


图 7 跨平面量测

### 5.2.2 模型的求解

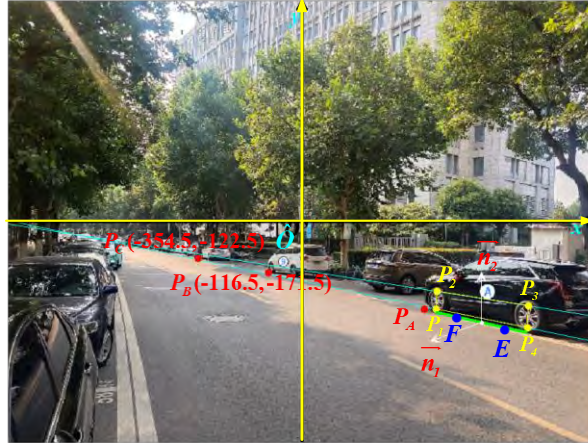


图 8 参量的求解

如图 8 所示，绿线为轮胎平面 1 和地平面 2 的交线，设  $P_1, P_2, P_3, P_4, E, F$  分别为  $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, E', F'$  在像平面上的像点，查阅得知 A 车为凯迪拉克 XT6 车，其尺寸为轴距 2.863m，轮胎直径 0.4572m<sup>[6]</sup>，基于平面上矩形信息的测量模型，可求得  $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, E', F'$  各点实际的坐标。则轮胎平面 1 法向量为  $\vec{n}_1 = \overrightarrow{P'_1P'_2} \times \overrightarrow{P'_2P'_3} / \left| \overrightarrow{P'_1P'_2} \times \overrightarrow{P'_2P'_3} \right|$ 。故地平面 2 法向量为  $\vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \overrightarrow{EF'}$ 。我们在像平面上读出地平面上各点的坐标为：

$$P_A = (414.5, -297.5), P_B = (-116.5, -171.5), P_C = (-354.5, -122.5)$$

由跨平面模型中的公式(5.11)我们求得：

$$\lambda_a = 7.989 \times 10^{-3}, \lambda_b = 1.616 \times 10^{-2}, \lambda_c = 2.557 \times 10^{-2}$$

故  $P'_A, P'_B, P'_C$  实际坐标为：

$$P'_A = (3.3114, -2.377, 13.504), P'_B = (-1.88, -2.77, 27.32), P'_C = (-9.06, -3.13, 43.22)$$

则图 2 黑色车辆 A 车头和灰色车辆 C 车尾的距离为  $\left| \overrightarrow{P'_AP'_C} \right| = 30.276m$ ，拍照者距白色车辆 B 车头的距离为： $\left| \overrightarrow{OP'_B} \right| = 27.5m$ 。

小结：区别于附件图 1 的求解，本题的求解环境复杂为具有坡度和明显弯曲的路面，因此，改进了基于矩形信息测量模型，完成跨平面距离信息的测量。计算得出黑色车辆 A 车头和灰色车辆 C 车尾之间的距离为 30.276m，拍照者距白色车辆 B 车头的距离为 27.5m。

### 5.3 附件图 3 的距离信息分析

如图 9 所示，通过观察，目标图形中可利用的已知信息有人行横道预告标志线和可跨越同向车行道分界线，由于车行道分界线较窄，不利于信息采集，故采用人行横道预告标志线作为参照物。查阅资料得，该菱形边长为 1.677m，两对角线长分别为 1.5m 及 3m<sup>[7]</sup>。设  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_A$  分别为  $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_A$  的像点。由于是基于菱形信息，需要对已有模型进行修改。方程组(5.3)做以下修改：

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \overrightarrow{P'_1 P'_2} \right| = 1.677 \quad \left| \overrightarrow{P'_2 P'_3} \right| = 1.677 \quad \left| \overrightarrow{P'_3 P'_4} \right| = 1.677 \\ \left| \overrightarrow{P'_2 P'_4} \right| = 3 \quad \left| \overrightarrow{P'_2 P'_4} \right| / \left| \overrightarrow{P'_1 P'_3} \right| = 2 \end{array} \right\}$$

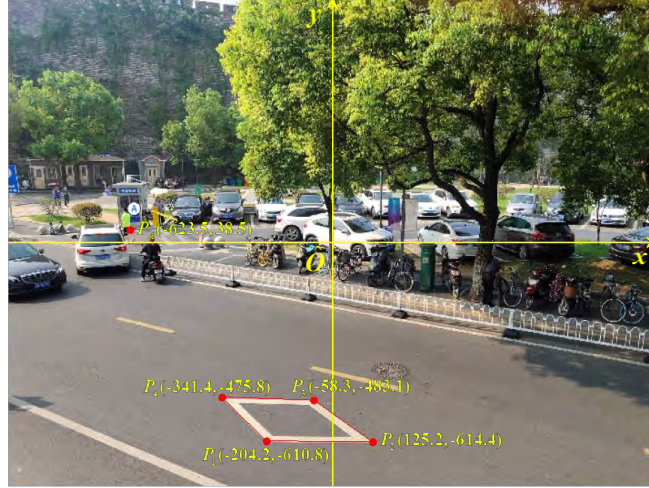


图 9 图像 3 参量的求解

解得各点的实际坐标如表 1 所示：

表 1 地平面上各点实际坐标

点	x(m)	y(m)	z(m)	点	x(m)	y(m)	z(m)
$P'_1$	-1.0404	-3.1121	8.2442	$P'_2$	0.6354	-3.1182	8.2121
$P'_3$	-0.7385	-2.8498	9.5448	$P'_4$	-2.0323	-2.8324	9.6322
$P'_A$	-10.3457	0.6388	26.8486				

则拍照者距岗亭 A 的距离为  $\left| \overrightarrow{OP'_A} \right| = 28.78m$ 。求得地平面的单位法向量为：

$$\vec{n}_e = \overrightarrow{P'_1 P'_2} \times \overrightarrow{P'_2 P'_3} / \left| \overrightarrow{P'_1 P'_2} \times \overrightarrow{P'_2 P'_3} \right| = (2.38 \times 10^{-4}, -0.9803, 0.1975)$$

则拍照者距离地面的高度为：

$$d = \left| \overrightarrow{OP'_A} \bullet \vec{n}_e \right| = 4.68m$$

小结：本题针对已知参考图形为菱形的特征，对基于矩形信息测量模型稍作修改，计算得到拍照者距岗亭 A 的距离为 **28.78m**，拍照者距离地面的高度为 **4.68m**。

#### 5.4 附件图 4 的距离信息分析

附件图 4 中, 地砖的尺寸已知, 由于线 AB,CD 与地面不在一个平面, 若采用跨平面量测, 要跨多个平面, 累计误差将比较大。通过建立空间坐标系, 改进文献[3]中小孔成像模型, 推导得出现实中任一点到像平面的映射, 建立了基于空间中几何信息测量模型, 完成测量任务。

#### 5.4.1 基于空间中几何信息测量模型的建立

如图 10 所示, 定义  $O$  点为相机透镜中心,  $\hat{O}$  点为像平面中心, 其为地面点  $O'$  的像点, 点  $G'$  为  $O$  在地平面上的投影,  $x$  轴方向为方向向量  $\overrightarrow{\hat{O}O}$  在地平面上的投影方向。同时, 在地平面上, 取  $\overrightarrow{G'E'} \perp \overrightarrow{G'O'}$ 。我们以  $G'$  为坐标原点,  $\overrightarrow{G'O'}$  方向为  $x$  轴正方向,  $\overrightarrow{G'E'}$  方向为  $y$  轴正方向,  $\overrightarrow{G'O}$  方向为  $z$  轴正方向。  $P$  点为过  $O$  点且与  $x$  轴平行的直线同像平面的中轴线的交点。由灭点的定义可知点  $P$  为平行于  $x$  轴的直线经摄影变换后在像平面上形成的直线所汇聚成的灭点。令  $F$  点为  $z$  轴与像平面中轴线的交点, 同理, 点  $F$  为平行于  $y$  轴的直线经摄影变换后在像平面上形成的直线所汇聚成的灭点, 则图中  $\angle OF\hat{O}$  与俯仰角  $\beta$  相等。不妨设  $|\overrightarrow{OG'}| = H$ , 焦距  $|\overrightarrow{O\hat{O}}| = f$ ,  $|\overrightarrow{\hat{O}P}| = p_0/s$ ,  $|\overrightarrow{\hat{O}F}| = z_0/s$ , 其中  $p_0, z_0$  为像平面上所读取出来的  $x$  轴的像素值(像平面中以  $\hat{O}$  点为坐标原点,  $\overrightarrow{\hat{O}P}$  方向为  $x$  轴正方向), 则:

$$\left. \begin{aligned} \tan \beta &= \frac{p_0 / s}{f} = \frac{p_0}{u} \\ \tan \beta &= \frac{f}{z_0 / s} = \frac{u}{Z_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u = \sqrt{p_0 z_0} \Rightarrow \beta = \arctan \frac{\sqrt{p_0}}{\sqrt{z_0}} \quad (5.12)$$

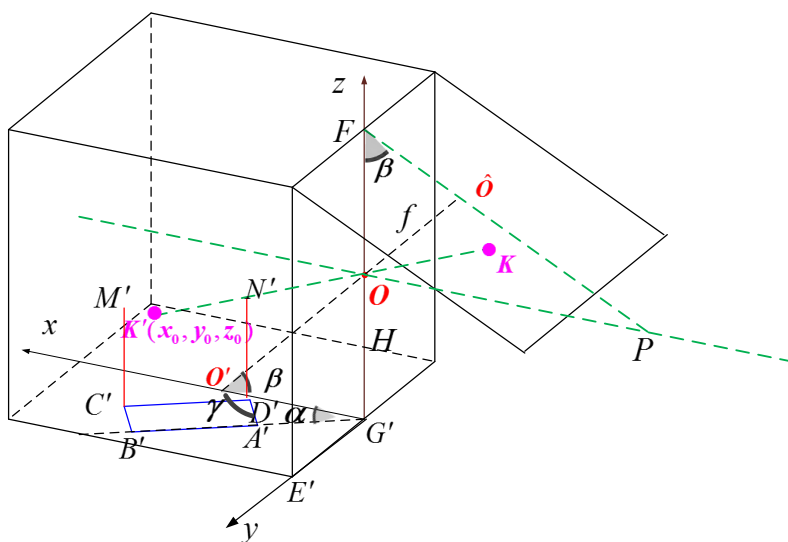


图 10 基于空间几何信息测量模型

由以上分析可以写出各点坐标为  $G'(0,0,0)$ ,  $O'(H/\tan\beta,0,0)$ ,  $O(0,0,H)$ ,  $\hat{O}(-f\cos\beta,0,H+f\sin\beta)$ ,  $P(-f/\cos\beta,0,0)$ ,  $F(0,0,f/\sin\beta+H)$ 。则像平面的法向量为  $\vec{n} = \overrightarrow{OO'} = (H/\tan\beta, 0, -H)$ , 又由于像平面过点  $F$ , 所以像平面方程为:

$$\frac{H}{\tan \beta} x - Hz + H^2 + fH \csc \beta = 0$$

即

$$x \cot \beta - z + H + f \csc \beta = 0$$

设空间上任意一点为  $K'(x_0, y_0, z_0)$ ，则直线  $\overrightarrow{K'O}$  方程为：

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z-H}{z_0-H}$$

其与像平面的交点为：

$$\begin{aligned} K &= \left( \frac{z-H}{z_0-H} x_0, \frac{y_0(z-H)}{z_0-H}, \frac{(H+f \csc \beta)(z_0 H) - H x_0 \cot \beta}{z_0-H-x_0 \cot \beta} \right) \\ &= \left( \frac{x_0 f \bullet \csc \beta}{z_0-H-x_0 \cot \beta}, \frac{y_0 \bullet f \bullet \csc \beta}{z_0-H-x_0 \cot \beta}, \frac{(H+f \csc \beta)(z_0-H) - H x_0 \cot \beta}{z_0-H-x_0 \cot \beta} \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

这里我们把式(5.13)命名为 A-I 方程，即空间任意一点到像平面上的映射(Actual Point to Image Point)。则

$$\overrightarrow{\hat{O}K} = \left( \frac{z_0 u \cos \beta - H u \cos \beta + x_0 u \sin \beta}{z_0-H-x_0 \cot \beta}, \frac{y_0 u \bullet \csc \beta}{z_0-H-x_0 \cot \beta}, \frac{u \cos \beta \bullet (x_0-H \cot \beta + z_0 \cot \beta)}{z_0-H-x_0 \cot \beta} \right)$$

特别地，如图 10 所示，我们在地平面上取矩形  $A'B'C'D'$  设  $|\overrightarrow{A'B'}| = d_1$ ， $|\overrightarrow{B'C'}| = d_2$ ，直线  $A'B'$  的斜率为  $k_{ab}$ ，直线  $A'D'$  的斜率为  $k_{ad}$ ，同时，令  $A'$  点坐标为  $(x_0, y_0, 0)$ ，则其余点坐标分别为：

$$\begin{aligned} B' &= \left( x_0 + \frac{d_1}{\sqrt{1+k_{ab}^2}}, y_0 + \frac{d_1 \bullet k_{ab}}{\sqrt{1+k_{ab}^2}}, 0 \right) \\ C' &= \left( x_0 + \frac{d_1}{\sqrt{1+k_{ab}^2}} + \frac{d_2}{\sqrt{1+k_{ad}^2}}, y_0 + \frac{d_1 \bullet k_{ab}}{\sqrt{1+k_{ab}^2}} + \frac{d_2 \bullet k_{ad}}{\sqrt{1+k_{ad}^2}}, 0 \right) \\ D' &= \left( x_0 + \frac{d_2}{\sqrt{1+k_{ad}^2}}, y_0 + \frac{d_2 \bullet k_{ad}}{\sqrt{1+k_{ad}^2}}, 0 \right) \end{aligned}$$

且  $k_{ab}$  与  $k_{ad}$  符合以下关系：

$$k_{ad} = \tan \gamma = \tan(\alpha + \pi - \pi/2) = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{k_{ab}}$$

设各点映射到像平面上分别为  $A, B, C, D$ 。通过 A-I 方程求得像平面上各点的坐标，若已知  $d_1, d_2$  的值，则坐标的表达式中只包含四个未知量： $x_0, y_0, k_{ab}, H$ 。根据坐标表达式推导出  $\angle ABC, \angle ADC, |\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{AD}|$  的表达式，则表达式中也只包含四个未知量  $x_0, y_0, k_{ab}, H$ 。令：

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \gamma_1 \quad \angle ADC = \gamma_2 \\ |\overrightarrow{AB}| &= d_{1\text{像}} \quad |\overrightarrow{AD}| = d_{2\text{像}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

$\gamma_1, \gamma_2, d_{1\text{像}}, d_{2\text{像}}$  的值可以在像平面上读出, 则方程组(5.14)有四个方程, 四个未知数, 可以解出  $x_0, y_0, k_{ab}, H$ 。

完成  $A-I$  方程的参数求解后, 就可以反求解出空间中任意一点的坐标。设  $\overrightarrow{CM'}$  为垂直于  $z$  轴的向量, 设  $|\overrightarrow{CM'}| = r$ , 则点  $M'$  坐标为:

$$M'(x_0 + \frac{d_1}{\sqrt{1+k_{ab}^2}} + \frac{d_2}{\sqrt{1+k_{ad}^2}}, y_0 + \frac{d_1 \bullet k_{ab}}{\sqrt{1+k_{ab}^2}} + \frac{d_2 \bullet k_{ad}}{\sqrt{1+k_{ad}^2}}, r)$$

$M$  点为  $M'$  的像点, 且  $M$  的坐标只包含一个未知量  $r$ ,  $|\overrightarrow{CM}|$  的值可以在像平面上读取, 点  $C$  坐标已知, 因此可求出  $r$  的值。

## 5.4.2 模型的求解

### 5.4.2.1 训练 $A-I$ 方程四个参数

如图 11 所示,  $\hat{O}$  为像平面中心点。直线 1, 2 为地面上水平方向上两条平行线, 其灭点为  $V_{p12}$ 。直线 3, 4 为地面上竖直方向上两条平行线, 其灭点为  $V_{p34}$ , 直线 5, 6 为垂直地平面方向上的两条平行线, 其灭点为  $V_{p56}$ 。而  $P$  点坐标的确定取直线  $V_{p1} V_{p2}$  与像平面中过  $\hat{O}$  的中轴线的交点, 则  $p_0 = |P\hat{O}|$ ,  $z_0 = |V_{p3}\hat{O}|$ 。根据公式(5.12)可以快速求解出俯仰角  $\beta = 11.06^\circ$  及  $u = 1412.7$ 。设  $G'H'$  为地砖的长,  $G'E'$  为地砖的宽, 其在像平面上对应的映射为  $GH, GE$ 。由于  $|G'H'| = d_1 = 0.8m$ ,  $|G'E'| = d_2 = 0.8m$ , 设直线  $G'H'$  的斜率为  $k_{gh}$ , 直线  $G'E'$  的斜率为  $k_{ge}$ , 同时, 令  $G'$  点坐标为  $(x_0, y_0, 0)$ , 则其余点坐标分别为:

$$\begin{aligned} H' & (x_0 + \frac{d_1}{\sqrt{1+k_{gh}^2}}, y_0 + \frac{d_1 \bullet k_{gh}}{\sqrt{1+k_{gh}^2}}, 0) \\ F' & (x_0 + \frac{d_1}{\sqrt{1+k_{gh}^2}} + \frac{d_2}{\sqrt{1+k_{ge}^2}}, y_0 + \frac{d_1 \bullet k_{gh}}{\sqrt{1+k_{gh}^2}} + \frac{d_2 \bullet k_{ge}}{\sqrt{1+k_{ge}^2}}, 0) \\ E' & (x_0 + \frac{d_2}{\sqrt{1+k_{ge}^2}}, y_0 + \frac{d_2 \bullet k_{ge}}{\sqrt{1+k_{ge}^2}}, 0) \end{aligned}$$

且  $k_{ge} = -1/k_{gh}$ 。通过  $A-I$  方程求得像平面上  $E, F, G, H$  各点的坐标, 则坐标的表达式中只包含四个未知量:  $x_0, y_0, k_{gh}, H$ 。容易解得:

$$x_0 = 258.2, y_0 = -96.6, k_{gh} = 7.56, H = 108.4$$

由图 10 可见,  $|MN'|$  为塔基三块砖的长度, 而  $|A'B'|$  为塔底 9 块砖的距离, 故

$$|A'B'| = 3|MN'| = 5.588m$$



图 11 求解 AB 长

#### 5.4.2.2 基于交比求解 CD 长

通过仔细观察和计算，发现灰白色塔基平面与深色地平面不平行，且不能近似平行，故不能简单套用基于空间几何信息测量模型。考虑到平面 ABCD 灭点可求且线段 AB 的长度已经解出，因此，采用改进的基于直线上交比信息的测量模型，完成 CD 距离测量任务。

如图 12 所示，直线 1 和直线 2 是平行直线，汇聚成的灭点为  $V_{p12}$ ，直线 3 和直线 4 也是平行直线，灭点为  $V_{p13}$ ，故灭线 5 即为  $V_{p12}$  与  $V_{p13}$  的连线。因为平面上灭线只有一条，故延长 AD 与灭线交于点  $V_{pAD}$ ，此点即为 AD 及其与之平行的直线所汇聚而成的灭点。连接  $V_{pAD}C$  并延长与 AB 交于点 R，则在实际空间中， $C'R' // A'D'$ 。在直线 2 上，通过交比可列出下式：

$$\frac{S_{AB}S_{RV_{p12}}}{S_{AV_{p12}}S_{BR}} = cr = \frac{S_{A'B'}S_{R'V'_{p12}}}{S_{A'V'_{p12}}S_{B'R'}} = \frac{S_{A'B'}}{S_{B'R'}}$$

已知  $S_{A'B'} = 5.588m$ ，解得  $S_{B'R'} = 0.98m$ 。则

$$S_{C'D'} = S_{A'R'} = S_{A'B'} - S_{B'R'} = 4.608m$$







**小结：**本题是对固定目标尺寸的测量，由于空间信息到平面信息是一个退化的过程，仅仅凭借直觉信息会带来巨大的测量误差。初解本题，我们拟近似认为塔基平面与参考地面为平行平面，那么图中 A 点的高度坐标可以通过测量周围围栏处塔基平面的高度得到，约为 0.45m，但实际塔基平面和地面并不平行，通过分析计算得 A 点的高度为 0.6m。最终，我们改进模型得出 AB 长度为 5.598m，CD 长度为 4.618m 以及 AB 和 CD 之间的距离为 7.1m。

## 5.5 误差分析及模型的优化

### 5.5.1 误差分析

在图像距离信息的分析中，存在着两类误差，一类为原始参数误差，一类为系统误差。

#### 5.5.1.1 原始参数误差

原始参数误差主要包括像素拾取误差和尺寸误差。像素拾取误差为拾取图像特征点时产生的偏差，由于图像分辨率的限制以及人为选取点存在着主观性等影响，难免会在拾取中不可避免地产生一个或若干个像素偏差<sup>[8]</sup>。误差大小表现为“远大近小”，即选取的特征点离拍摄者越远，拾取的不准确对测量结果的影响越大。尺寸误差即先验知识与实际尺寸的不一致。例如，在后文的处理中，我们可以利用交通标志的先验知识，其具体尺寸可以参照《道路交通标志和标线 GB 5768.3-2009》，但实际中交通标志和标线和标准尺寸存在误差，并且有些交通标线有多个尺寸标准。

#### 5.5.1.2 系统误差

系统误差主要有关键参数求解的误差，图像畸变误差等。关键参数求解的误差为图像中存在着多组方程可以对关键参数进行求解，选用哪组方程才能获得较高的精度？如基于空间几何信息测量模型中方程组(5.14)，只用到了像平面上矩形  $\angle ADC, \angle ADB, |\overline{AB}|, |\overline{AD}|$  的信息，而矩形另外两条边，两个角的信息没被利用，实质上可列出方程组(5.15)：

$$\begin{aligned} \angle ABC = \gamma_1 \quad \angle ADC = \gamma_2 \quad \angle BAC = \gamma_3 \quad \angle ACB = \gamma_4 \\ |\overline{AB}| = d_{1\text{像}} \quad |\overline{AD}| = d_{2\text{像}} \quad |\overline{BC}| = d_{3\text{像}} \quad |\overline{CD}| = d_{4\text{像}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

方程组中有 8 个方程，4 个未知量，由于像素拾取误差等的影响，方程组是超定的。任意 4 组方程求解结果不一致，这就存在着参数求解的误差。同时，一些非通过方程组解出的关键参数也存在着误差。比如说公式(5.12)灭点求解的不准确导致  $u, \beta$  求解的不准确。而灭点求解的不准确是由点位误差引起的，由于像素拾取、图像成像等误差的影响，导致多条平行线未必交于一点。

图像畸变误差包括径向畸变、偏心畸变和薄棱镜畸变，其也是影响量测值精确性的重要原因。在图像畸变中，径向畸变是最主要的影响因素<sup>[9]</sup>。径向畸变会使物体成像发生变

形，通常会在像片的边缘产生较大变形。

### 5.5.2 基于牛顿迭代法的模型优化

由于存在着原始参数误差及系统误差，为了得到精度更高的测量结果，需要对模型进行优化。针对像素误差，对于图像中的不同位置以及不同的取点方法，一个像素的偏差所产生的实际距离不尽相同，因此在选取中需细致小心，针对不同特征的图形，采用不同的方法来拾取点。针对尺寸误差，选取合适参照物可以有效减小其误差。

针对关键参数求解误差，本文通过基于牛顿迭代法的多信息融合(Multi-information fusion, MIF)算法对模型进行优化。以基于空间中几何信息的测量模型为例，矩形  $A'B'C'D'$  映射到像平面上为  $ABCD$ ，则角度  $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ ，边长  $|AB|, |BC|, |CD|, |AD|$  只包含四个未知量  $x_0, y_0, k_{ab}, H$ 。在求解四个参量时，可利用的线段方程有 4 个，可利用的角度方程有 4 个，即可以通过 8 个方程解出四个参量，且由于像素拾取等误差的影响，方程为不相容方程，求其最小范数解。建立的目标函数  $g(l, \theta)$  为：

$$g(l, \theta) = g_1(l) + g_2(\theta)$$

其中距离测量误差为：

$$g_1(l) = \sqrt{\left[\frac{f(l'_1) - |l_1|}{f(l'_1)}\right]^2 + \dots + \left[\frac{f(l'_m) - |l_m|}{f(l'_m)}\right]^2}$$

$f(l'_m)$  表示实际平面上线段  $l'_m$  通过  $A-I$  方程映射到像平面中的长度，即通过推导得出的  $|AB|, |BC|, |CD|, |AD|$  的长度表达式，其只包含  $x_0, y_0, k_{ab}, H$  四个参数， $|l_m|$  表示在像平面中读取出的  $l_m$  的长度，即在像平面上直接测量得到的  $|AB|, |BC|, |CD|, |AD|$  的长度。

角度测量误差为：

$$g_2(\theta) = \sqrt{\left[\frac{f(\theta'_1) - |\theta_1|}{f(\theta'_1)}\right]^2 + \dots + \left[\frac{f(\theta'_n) - |\theta_n|}{f(\theta'_n)}\right]^2}$$

同理， $f(\theta'_n)$  表示实际平面上角度  $\theta'_n$  通过  $A-I$  方程映射至像平面中的角度，即推导得到的  $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$  的角度表达式，其同样只包含  $x_0, y_0, k_{ab}, H$  四个参数， $\theta_n$  表示在像平面中读取出的角度  $\theta_n$  的大小，即在像平面上直接测量得到的  $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$  的角度。为了量纲的统一，将长度和角度进行归一化。则目标函数  $g(l, \theta)$  表示  $x_0, y_0, k_{ab}, H$  四个参数总体误差的大小。

采用牛顿迭代法求解上述优化模型，初始值取为通过基于空间中几何信息测量模型得到的  $x_0, y_0, k_{ab}, H$  的值，迭代得到  $x_0, y_0, k_{ab}, H$  的最优解，最终利用四个参数的最优解求解其他距离。流程图如图 14 所示：

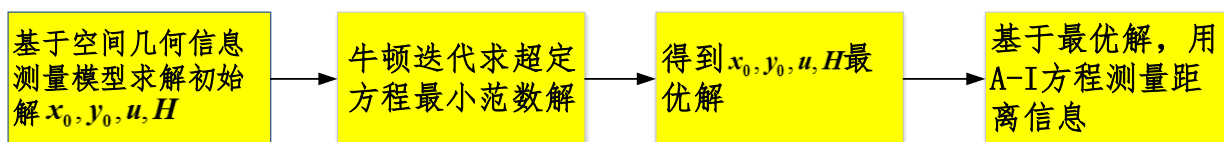


图 14 MIF 算法流程图

## 5.6 模型的检验



图 15 实地标定

图 15 为实地标定图(已知地砖尺寸为 $30\text{cm} \times 30\text{cm}$ )，关键参量以及待测长度信息真实值，未通过 MIF 算法求解出的测量值以及通过 MIF 算法求解出的测量值如表 2 所示。

表 2 实地标定测量值及测量误差

测量参量	拍摄者与 B 距离(m)	拍摄者与 A 距离(m)	箱子 B 高度(m)	相机距地 面高度(m)	E 点与 F 点距离(m)	C 点和 D 点的距离
真实值	2.54	1.845	0.143	1.19	0.90	0.765
测量值 (未优化)	2.65	1.94	0.1396	1.1766	0.9227	0.786
测量误差	4.33%	5.15%	2.38%	1.13%	2.52%	2.75%
测量值 (优化)	2.571	1.8971	0.1432	1.1863	0.8994	0.7608
测量误差	1.22%	2.82%	0.14%	0.31%	0.07%	0.55%

由表可见，未经过 MIF 算法优化前，求解出的相对距离或者深度的结果与真实值有一定误差，误差在 6%以内，这说明上述建立的模型是合理的。而经过 MIF 算法优化后，误差明显下降，误差在 3%以内。说明 MIF 算法适用于本模型。利用 MIF 算法对任务 1 进行优化，

得到的优化解见 5.6 节。下文中任务 2, 3, 4 均也采用了 MIF 算法进行参量的求解。

为了更加精准地检验各项测量数据以及相机的俯仰角、拍摄方向，采用 Unity 3D 建模再次对模型进行检验。

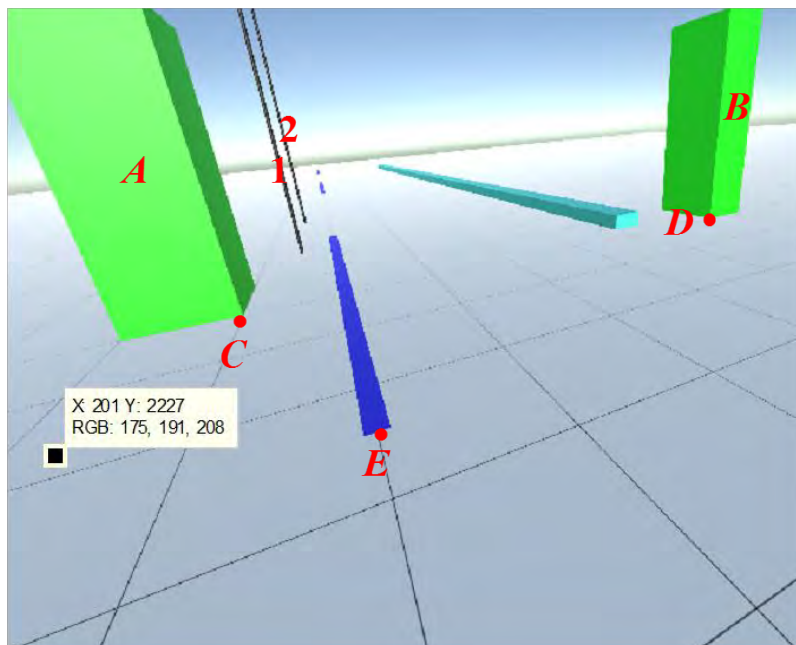


图 16 *Unity* 3D 建模检验

图 16 为我们利用 *Unity* 3D 建模软件做出的图，相机旋转角为 $5^{\circ}$ ，关键参量以及待测长度信息真实值如表 3 所示。由表可得，测量误差控制在 0.6%以内，相机的俯仰角、方向角测量误差不超过 0.2%，较为精准地还原了拍摄场景，进一步说明基于空间几何信息测量模型的合理性。

表 3 测量值及测量误差

测量参量	真实值	测量值	测量误差
拍摄者距 E 距离 (m)	2.0	1.9907	0.465%
相机距地面高度 (m)	1.5	1.4972	0.19%
C 点和 D 点距离 (m)	6.51	6.4905	0.30%
柱子 A 的高度 (m)	2.75	2.7505	0.02%
路灯 1、2 的距离 (m)	3.0	3.009	0.30%
俯仰角	$20^{\circ}$	$20.0155^{\circ}$	0.078%
相机拍摄方向	$22^{\circ}$	$22.0353^{\circ}$	0.16%
柱子 A 距人距离 (m)	4.6	4.5795	0.45%
柱子 B 距人距离 (m)	7.1	7.0994	0.0085%
路灯 1 距人距离 (m)	7.0	6.9591	0.58%

## 5.6 任务 1 的结果

通过建立的三种模型，求得关键参数的初始解，根据求得的初始解求解题目要求的参量。基于 MIF 优化算法，将求得的关键参数初始解作为牛顿迭代法的初始值，迭代得到关键参数的优化解，根据关键参数的优化解再次求解题目要求的参量。结果如表 4 所示：

表 4 任务 1 结果

距离	解	优化解
附件图 1 中红色车辆 A 车头和白色车辆 B 车头之间的距离(m)	24.95	25.10
附件图 1 中拍照者距马路左侧边界的距离(m)	14.73	15.34
附件图 2 中黑色车辆 A 车头和灰色车辆 C 车尾之间的距离(m)	30.276	30.22
附件图 2 中拍照者距白色车辆 B 车头的距离(m)	27.5	26.9
附件图 3 中拍照者距岗亭 A 的距离(m)	28.78	27.3
附件图 3 中拍照者距离地面的高度(m)	4.68	4.69
附件图 4 中 AB 长度(m)	5.588	5.48
附件图 4 中 CD 长度(m)	4.608	4.59
附件图 4 中 AB 和 CD 之间的距离(m)	7.10	7.13

## 6 平面视频距离信息分析

### 6.1 任务 2 的求解

#### 6.1.1 矩形的选取

视频 1 中的后视镜为副驾驶外后视镜，在后视镜行业规范中只规定了曲率半径的最小值，因此后视镜可以为平面镜或凸面镜。平面镜图像畸变来源于制造工艺产生的镜面畸变，当前的制造工艺所生产的平面镜镜面畸变可以忽略不计。凸面镜可为双曲面镜或球面镜，产生的效果相当于视角变宽。理论上双曲面镜的镜像畸变很小，球面镜图像畸变较明显，在图像边缘畸变肉眼可见。实际中制造双曲面镜成本高，通常只在主驾驶后视镜上采用，副驾驶后视镜通常采用球面镜或平面镜。观看视频 1 中后视镜画面，未见明显畸变，可认定为平面镜。

后视镜画面较小，所成的像更远，即像更小，在后视镜中选取路面标线为标定物时长边像素点多，误差小，短边像素极少，定位误差大。故我们利用灭点来减小矩形选取中的误差。

假设摄像机在拍摄过程中焦距不变，如图 17 所示，选取第 374 帧来求取像素焦距  $u$ 。

$$u = -\sqrt{A \bullet B}$$

其中 A 点坐标为(629.4px,444.6px)，B 点坐标为(-1189.1px,-89.6px),故  $u = 887.87$ 。

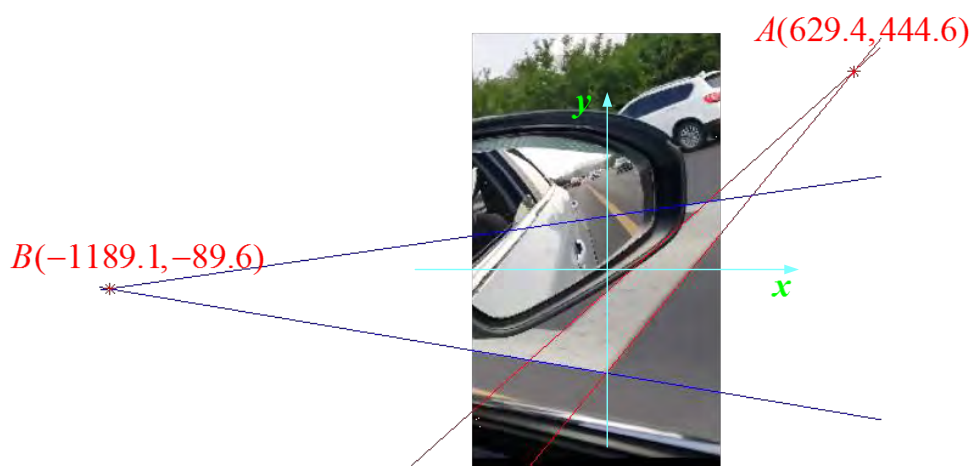


图 17 求解  $u$

通过平行线计算灭点时，为了减小误差，通常选择较长的平行线。如图 18 所示，车辆行驶方向上一组平行线较长，适合用于计算灭点，垂直于行驶方向的线段  $AB$ ，由于尺寸较小，不利于计算灭点。令垂直于行驶方向的灭点  $V_{pL}$  坐标为  $(x_L, y_L)$ ，易得

$$\sqrt{-V_{pL} \bullet V_{p12}} = u \quad (6.1)$$

另取垂直于行驶方向的直线 5 并令其方程为  $y = kx + b$  ( $k, b$  已知)，则：

$$y_L = kx_L + b \quad (6.2)$$

联立(6.1)、(6.2)，就可确定水平方向上灭点  $V_{pL}$ 。接着，取白色虚实线的左边缘点  $A$ 、 $C$ ，连接  $V_{pL}A, V_{pL}D$  并延长至与白色虚实线右边缘交于点  $B$ 、 $D$ ，则选取出来的矩形  $ABCD$  能较好得符合矩形的特征。

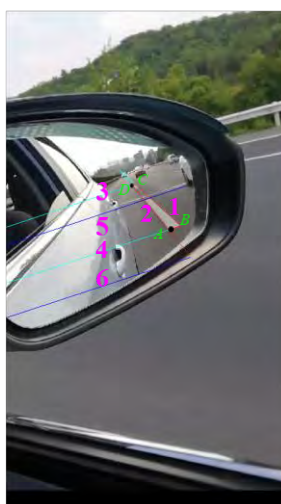


图 18 选取出的矩形  $ABCD$

### 6.1.2 参量的计算

利用 6.1.1 节选取矩形的方法, 在进行估算别克英朗 2016 款车和后方红色车辆之间的距离时, 采用的是基于平面上矩形信息测量模型。为了更好地选取矩形  $ABCD$ , 需要进行关键帧的选取。关键帧的选取原则为:

- (1) 中心白色虚实线完整;
- (2) 中心白色虚实线尽可能大。

根据以上原则, 本文选取了第 10、28、46、64、82、101、118、136、154、172、189、207、224、241、259 帧共 15 帧作为关键帧。求解别克英朗车和后方红色车辆之间的距离的方法与问题一中基于平面上矩形信息测量模型相同, 求解出的结果如表 5 所示:

表 5 别克英朗车与后方红车的距离

帧序号	距离红车距离(m)	帧序号	距离红车距离(m)	帧序号	距离红车距离(m)
10	47.21	28	45.17	46	52.01
64	41.73	82	39.71	101	41.20
118	42.14	136	40.50	154	40.27
172	39.56	189	38.84	207	39.99
224	41.87	241	39.88	259	39.35

将距离结果用图形表示, 如图 19 所示。由图可以看出, 在 0 到 259 帧时间段, 即 0 到 8.63s 时间段, 别克英朗车与后方红色车辆距离变化不大, 相对稳定, 距离值稳定在 40.42m。观察视频可以看出, 在该时间段里, 两车均没发生变道等突发情况, 故两车距离保持相对稳定是合理的。

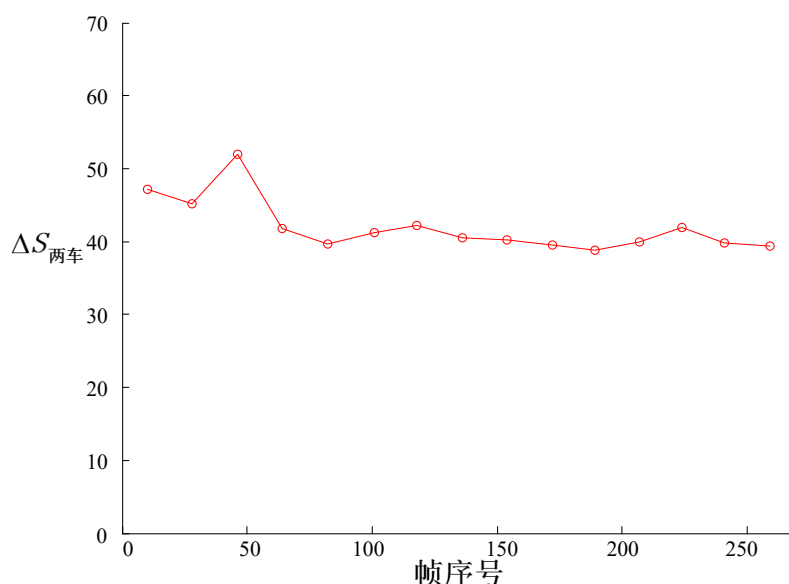


图 19 别克英朗与后方红车距离随时间的变化

对于求解别克英朗车的速度, 如图 20 所示, 基于平面上矩形信息测量模型, 对于  $t_1$  帧, 可以求出  $|AB|$  的值  $x_1$ ; 对于  $t_2$  帧, 可以求出  $|CD|$  的值  $x_2$ 。由于所取的时间帧间隔最多为 18

帧，对应 0.6s，近似认为在该时间段内，速度大小不变，则在  $\Delta t = t_2 - t_1$ ，汽车走的距离为：

$$s = |BD| = |AD - AB + CD| = |15 - x_1 + x_2|$$

则速度：

$$v = \frac{s}{\Delta t}$$

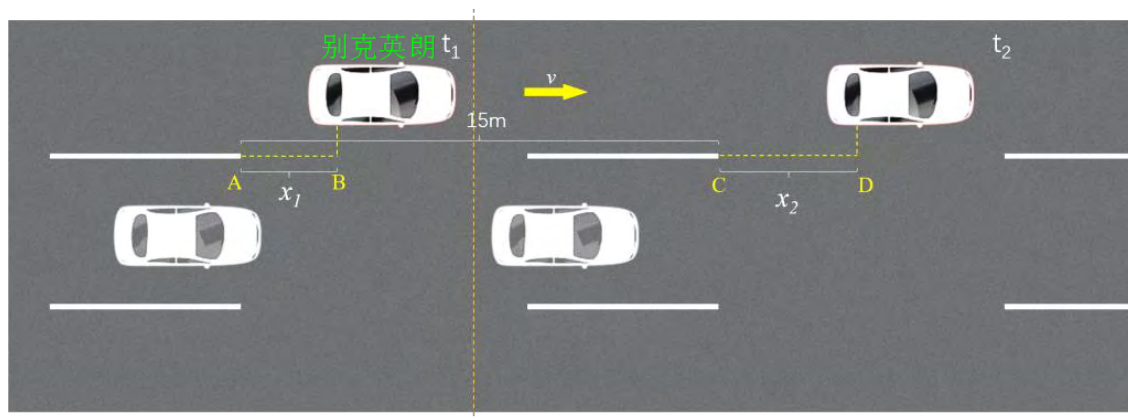


图 20 求别克英朗速度示意图

同理，求出超越的第一辆白色车辆的速度。两辆车求解出来的速度及速度差异如图 21 所示。由图可看出，别克英朗车在 0 到 250 帧速度基本稳定，稳定在 91.49km/h。第 189、207、224 帧时，别克英朗车处于后视镜能看到超越的第一辆白车，且两车距离不远，白车的速度分别为 67.09km/h，69.85km/h，69.40km/h，两车的速度差异分别为 21.53km/h，21.08km/h，20.91km/h。可见，超车时，两车速度差异基本稳定在 21.17km/h。

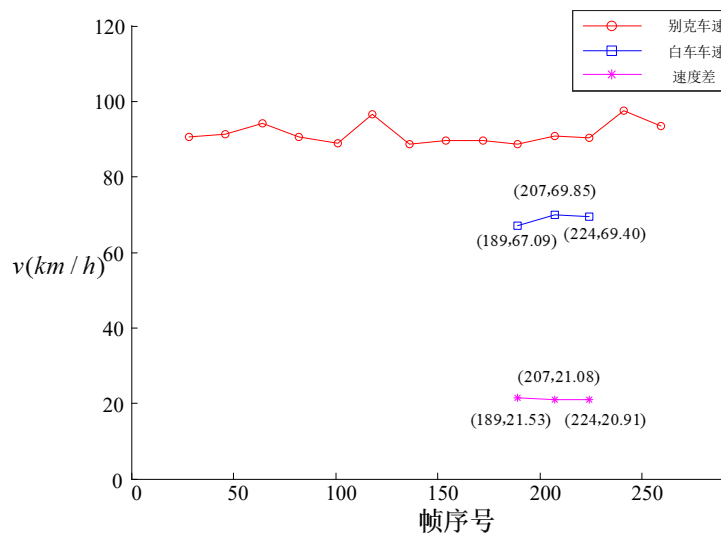


图 21 别克英朗与白车的速度差异

视频中还观察到别克英朗在第 1 秒超越了一辆白车，通过上述方法，求出：

$$\bar{v}_{\text{别}} = 91.216 \text{ km/h}, \bar{v}_{\text{白}} = 39.835 \text{ km/h}$$

两车的速度差异为 51.381km/h。观察视频看到，白车往应急车道行驶，故速度为较低的



39.835km/h 是合理的。

### 6.1.3 模型的检验

根据别克英朗车超越的第一辆白色车辆的车牌号皖 B2U853，查阅相关资料，其款式为凯翼 E32018 款车，其轴距为 2570mm，轮胎直径为 15 英寸，则轴距以及轮胎直径总长为 2.951m<sup>[10]</sup>。108 帧时凯 E2018 车后轮胎大致与图像边缘相切，大约 124 帧时前轮胎消失，时间间隔为 8/15s，故超车时速度差异为  $2.951/(8/15)=5.533\text{m/s}=19.92\text{km/h}$ ，这与模型算出来的结果相差不大，验证了模型的合理性。

### 6.1.4 任务 2 结果

通过基于矩形信息测量模型，估算的结果如表 6 所示。

表 6 任务 2 结果

参量	值
别克英朗车与后方红色车辆之间的距离(取 0 到 259 帧)(m)	40.42
别克英朗车在第一秒时超越白色车辆时两车的速度差异(km/h)	39.835
别克英朗车在第三秒时超越白色车辆时两车的速度差异(km/h)	21.17

## 6.2 任务 3 的求解

### 6.2.1 高铁速度的估算

如图 22 所示，这是个驾校训练场地，根据任务 2 矩形选取方法选取图中点 A，B。设  $V_p$  为竖直方向上直线 1 和 2 汇聚而成的灭点，首先通过第 144 帧算出  $u=1627.2$ ，以天际线为灭线，进而可以求解出水平方向上灭点  $V_{p1}$ ，在直线 1 的单车道右边缘线上任选一点 A，连接  $V_{p1}A$ ，并延长至与单车道左边缘线交于点 B，即直线 4，则 AB 垂直于直线 1。连接  $V_pB$  并延长，发现其与单车道左边缘吻合，说明取图中 AB 点作为直角转弯科目的单车道宽度是较为合适的。

G 点为地面上的特征点。由图 22 容易得到实际中地平面法向量为  $\vec{n} = \overrightarrow{OV_p} \times \overrightarrow{OV_{p1}}$ ，其中  $O(0,0,0)$ ， $V_p(x_p, y_p, u)$ ， $V_{p1}(x_{p1}, y_{p1}, u)$ ， $x_p, y_p, x_{p1}, y_{p1}$  均可在像平面读出来。由公式(5.11)有：

$$\overrightarrow{OB'} = (\overrightarrow{OA'} \bullet \vec{n} / \overrightarrow{OB'} \bullet \vec{n}) \bullet \overrightarrow{OB} \quad (6.3)$$

且

$$|A'B'| = L \quad (6.4)$$

L 即直角转弯科目的单车道宽度，为 3.548m<sup>[11]</sup>，设

$$\overrightarrow{OA'} = \lambda_a \overrightarrow{OA} \quad (6.5)$$

联立(6.3)、(6.4)、(6.5)，求得点  $A'$  坐标。又因为地平面法向量已求得，故地平面上任意一点坐标均可求。图 22 为第 21 帧时的图像，求出  $G$  点坐标  $(x_{g1}, y_{g1}, z_{g1})$ 。另外再取第 26 帧时的图像，算出在该时刻  $G$  点坐标  $(x_{g2}, y_{g2}, z_{g2})$ 。由于时间间隔短，近似取其平均速度即为高铁的速度，算出结果为 302.8km/h。



图 22 第 21 帧时地面特征点坐标的求解

### 6.2.2 拍摄方向角度的计算

如图 23 所示，直线 7 为水平面的灭线， $V_{p12}$  为水平面上水平方向上两条平行线 1，2 汇聚成的灭点， $V_{p34}$  为水平面上竖直方向上两条平行线 3，4 汇聚成的灭点。由于平面上所有灭点都在一条灭线上，故若已知灭线，只需要其中一条平行线就可确定灭点的位置。令直线 5 为拍摄者的拍摄方向上的直线在像平面上的映射，其与灭线的交点为  $V_{p5}$ ，则图中角度  $\hat{\varphi}$  对应到实际空间中，即为拍摄者拍摄方向  $\varphi$ 。令直线 6 为水平方向且过像平面中心的直线，其与灭线交于  $V_{p6}$ 。则图中  $\angle 2$  对应于实际空间中为  $90^\circ$ ， $\angle 3$  对应于实际空间中也为  $90^\circ$ ，故  $\angle 1$  对应于实际空间中为  $\varphi$ 。

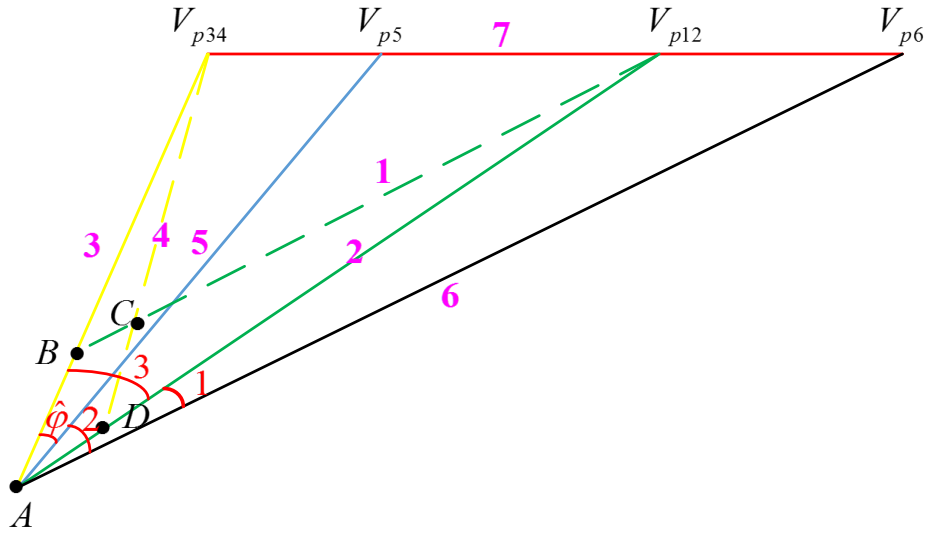


图 23 拍摄者拍摄方向求解原理图

则由交比公式可得：

$$\frac{S_{V_{p34}V_{p12}} S_{V_{p5}V_{p6}}}{S_{V_{p34}V_{p6}} S_{V_{p5}V_{p12}}} = cr = \frac{\sin(90^\circ) \sin(90^\circ)}{\sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ + \varphi)}$$

其中  $S_{V_{p34}V_{p12}}$  ,  $S_{V_{p5}V_{p6}}$  ,  $S_{V_{p34}V_{p6}}$  ,  $S_{V_{p5}V_{p12}}$  均可在像平面上读取出来, 故可以求解出  $\varphi$  。

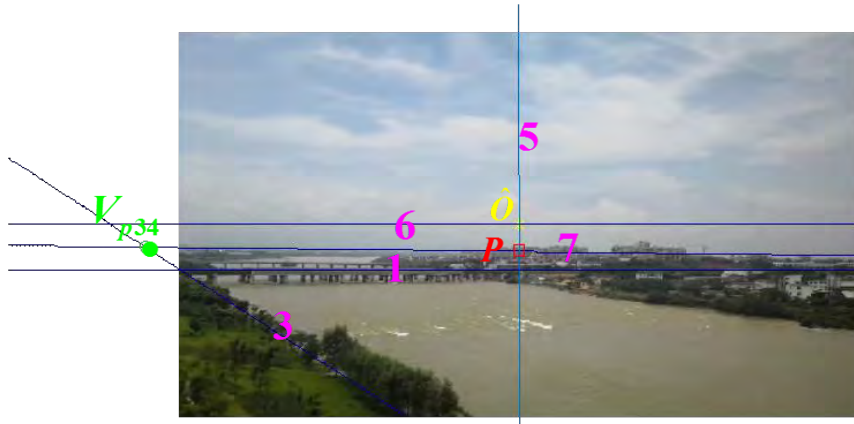


图 24 求解  $\varphi$

如图 24 所示, 取远方的天际线, 即直线 7, 为水平面的灭线; 桥面的边缘, 即直线 1, 为水平方向上的平行线, 其与灭线交于点  $V_{p12}$ 。近似认为水面左岸的树木的连线为水平面上的竖直方向上的平行线, 即直线 3, 其与灭线交于点  $V_{p34}$ 。直线 6 为水平方向且过像平面中心的直线, 其与灭线交于  $V_{p6}$ 。直线 5 为拍摄者的拍摄方向上的直线在像平面上的映射, 其与灭线的交点为  $V_{p5}$ 。通过  $V_{p12}$  ,  $V_{p34}$  ,  $V_{p6}$  ,  $V_{p5}$  四点的坐标, 可以求出  $\varphi = 33.20^\circ$ 。

### 6.2.3 参量的求解

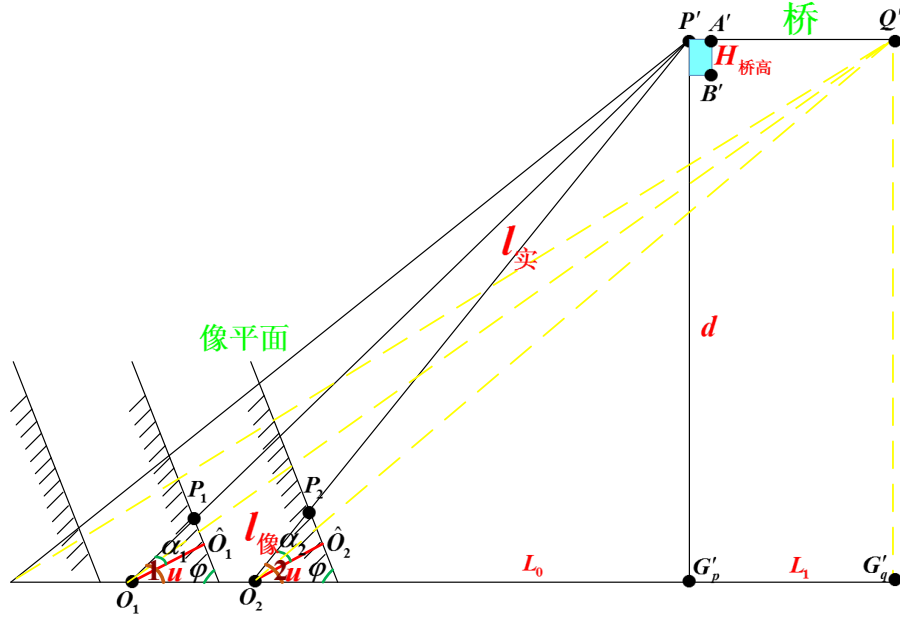


图 25 桥高、桥距高铁轨道距离、水面宽度求解原理示意图

如图 25 所示，高铁上拍摄者在  $t_1$  时刻(取第 144 帧)位于  $O_1$  处， $t_2$  时刻(取第 147 帧)位于  $O_2$  处， $\hat{O}_1, \hat{O}_2$  为分别为两帧的像平面中心，高铁从  $O_1$  行驶至  $O_2$  用时为  $t(t = t_2 - t_1)$ ，所以  $|O_1 O_2| = vt$ 。设  $P'$  为河面最左侧桥墩， $Q'$  为河面最右侧桥墩，过  $P', Q'$  往高铁轨道作垂线，垂足分别为  $G'_p, G'_q$ ，设  $|O_2 G'_p| = L_0$ ，高铁轨道与桥之间的距离  $|P' G'_p| = d$ ，水面宽度为  $|G'_p G'_q| = L_1$ ， $P_1$  为  $P'$  点  $t_1$  时刻在像平面上的像点， $P_2$  为  $P'$  点  $t_2$  时刻在像平面上的像点。在可以像平面上读取  $t_1$  时刻  $\hat{O}_1, P_1$  的坐标。求解出

$$\alpha_1 = \arctan \frac{|\hat{O}_1 P_1|}{u}$$

同理，在  $t_2$  时刻求解出

$$\alpha_2 = \arctan \frac{|\hat{O}_2 P_2|}{u}$$

显然，由图 25 得：

$$\begin{cases} \tan \angle 1 = \tan(\frac{\pi}{2} - \varphi + \alpha_1) = \frac{d}{L_0 + vt} \\ \tan \angle 2 = \tan(\frac{\pi}{2} - \varphi + \alpha_2) = \frac{d}{L_0} \end{cases} \quad (6.6)$$

由方程组(6.6)解出  $L_0 = 50.3945m, d_1 = 496.22m$ 。同理，对于河面最右侧桥墩，我们采取和

河面最左侧桥墩同样的方法，求得  $L_0 + L_1 = 319.8798m, d_2 = 536.08m$ 。故水面宽度为  $L_1 = 269.5m$  (高铁左侧第一座桥处的水面宽度)。另外，水面是不等宽的，除求出第一座桥的水面宽度外，我们还算出另外两处的水面宽度  $L_2 = 225.34m$ ， $L_3 = 197.49m$ ，示意图如图 26 所示，河从远至近变窄。

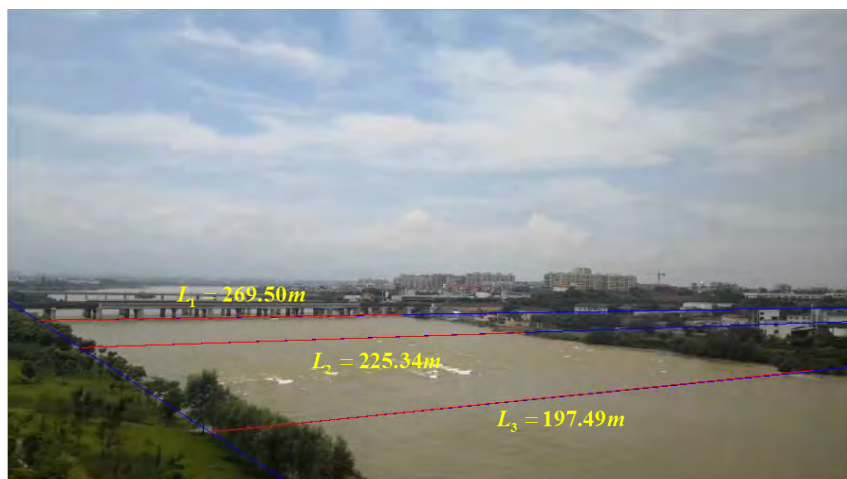


图 26 水面宽度

设桥墩顶  $A'$  以及桥墩与水面的交界点  $B'$  在像平面上的像点为  $A, B$ ，在像平面上分别读取其坐标，要求桥高  $H_{\text{桥高}}$ ，即左侧第一座桥桥面距水面的高度，有如下关系式：

$$\frac{l_{\text{像}}}{H_{AB}} = \frac{l_{\text{实}}}{H_{A'B'}}$$

其中  $l_{\text{像}} = \sqrt{u^2 + |O_2'P_2|^2}$ ,  $l_{\text{实}} = \sqrt{L_0^2 + d^2}$ 。所以  $H_{\text{桥高}} = H_{A'B'} = 12.07m$ 。

#### 6.2.4 任务 3 结果

通过基于平面上矩形信息测量模型，估算的结果如表 7 所示。

表 7 任务 3 结果

待测参量	值
高铁行驶方向左侧第一座桥桥面距水面的高度(m)	12.07
桥头处距高铁轨道距离(m)	496.22
桥尾处距高铁轨道距离(m)	536.08
高铁左侧第一座桥处的水面宽度 $L_1$ (m)	269.5
水面宽度 $L_2$ (m)	225.34
水面宽度 $L_3$ (m)	197.49
高铁行驶速度(km/h)	302.8

## 7 立体视频距离信息分析

### 7.1 图像裁剪检测

首先，先对视频进行是否裁剪检测，通过选取视频里的帧，发现平行于  $x$  轴， $y$  轴， $z$  轴三个方向的灭点所构成的三角形的垂心不再是图像的中心位置，故修正像平面中心点为三个方向的灭点的垂心，如图 27 所示，点  $\hat{O}$  为修正过的像平面中心点。

### 7.2 参照物的选取

在求解具体参量时，对于不同的模型，都需要选取已知尺寸的参照物。在此视频中基于概率模型对参照物进行选取。假设视频中的行人都是远道而来的游客，由于地处农村，假设回去只有视频中的一辆客车负责接送。视频中在路上行走的行人约有 30 人，加上可能还在屋内参观的游客，故客车容量为 40 人以上。通过查询宇通客车官网<sup>[12]</sup>，对 40 人以上容量的宇通客车的规格进行统计。统计结果为表 8 所示：

表 8 载客容量 40 人以上的宇通客车规格统计

型号	长(m)	高(m)
ZK6115B1V	10.69	3.2
Zk6120ZHQ	11.625	3.69
ZK6122HQ5	12	3.695
ZK6128HQA	12	3.695
ZK6128HQB	12	3.695
ZK6119B1VQ	11.3	3.45
ZK6113HQB	11.3	3.695
ZK6115HT5Z	10.69	3.23
ZK6119H5	10.99	3.58
ZK6109H5	10.49	3.58
ZK6996H	9.95	3.42
平均值	11.185	3.539090909

取平均值：长 11.185m，高 3.54m 作为本节中的第一个参照物(图 26 中矩形 ABCD)标准。第二个参照物标准取公共厕所，由于其离得较近，像素点误差较小，且公共厕所的门一般呈矩形，其作为参照物(图 26 中矩形  $A'B'C'D'$ )比较理想。根据生活经验，假设其尺寸为高 2m，门宽 1m。此题通过参照物尺寸，基于空间中几何测量模型，先算出老宅的长和宽，再基于老宅的长和宽求解其余待测物理量。由于通过第一个参照物和第二个参照物求解待测量方法一样，下文以客车为参照物测出所有待求物理量。以公共厕所为参照物时只测量老宅道路的长度、宽度，比较其与以客车为参照物的长度和宽度。

### 7.3 模型的建立

如图 27 所示，在像平面上， $\hat{O}$  为修正过的像平面中心点。点  $T, U, V, W$  为各建筑物的最高点，点  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  均表示为建筑物对应地平面上的投影点。竖直方向上一组平行



线 1, 2, 3, 4, 5 所汇聚成的灭点为  $V_{p1}$ , 水平方向上一组平行线 7, 8, 9, 10 所汇聚成的灭点为  $V_{p2}$ , 垂直方向上一组平行线 11, 12, 13, 14 所汇聚成的灭点为  $V_{p3}$ 。由公式(5.12)可以快速求解出俯仰角  $\beta$ 。  $A'B'$  为参照物客车的长,  $B'C'$  为客车的高, 其在像平面上对应的映射为  $AB, BC$ 。根据 A-I 方程, 将空间中的任意一点的坐标  $K'(x_0, y_0, z_0)$  映射到像平面上。我们令  $|A'B'| = d_1$ ,  $|B'C'| = d_2$ , 即  $d_1 = 11.185m, d_2 = 3.54m$ , 直线  $A'B'$  的斜率为  $k_{ab}$ , 而直线  $A'D'$  的斜率不存在。令  $B'$  点坐标为  $(x_0, y_0, 0)$ , 则其余点坐标分别为:

$$\begin{aligned} A' & \left( x_0 + \frac{d_1}{\sqrt{1+k_{ab}^2}}, y_0 + \frac{d_1 \cdot k_{ab}}{\sqrt{1+k_{ab}^2}}, 0 \right) \\ D' & \left( x_0 + \frac{d_1}{\sqrt{1+k_{ab}^2}}, y_0 + \frac{d_1 \cdot k_{ab}}{\sqrt{1+k_{ab}^2}}, d_2 \right) \\ C' & (x_0, y_0, d_2) \end{aligned}$$

接着通过 MIF 算法求得  $x_0, y_0, k_{ab}, H$ , 便可进行其余距离的测量。

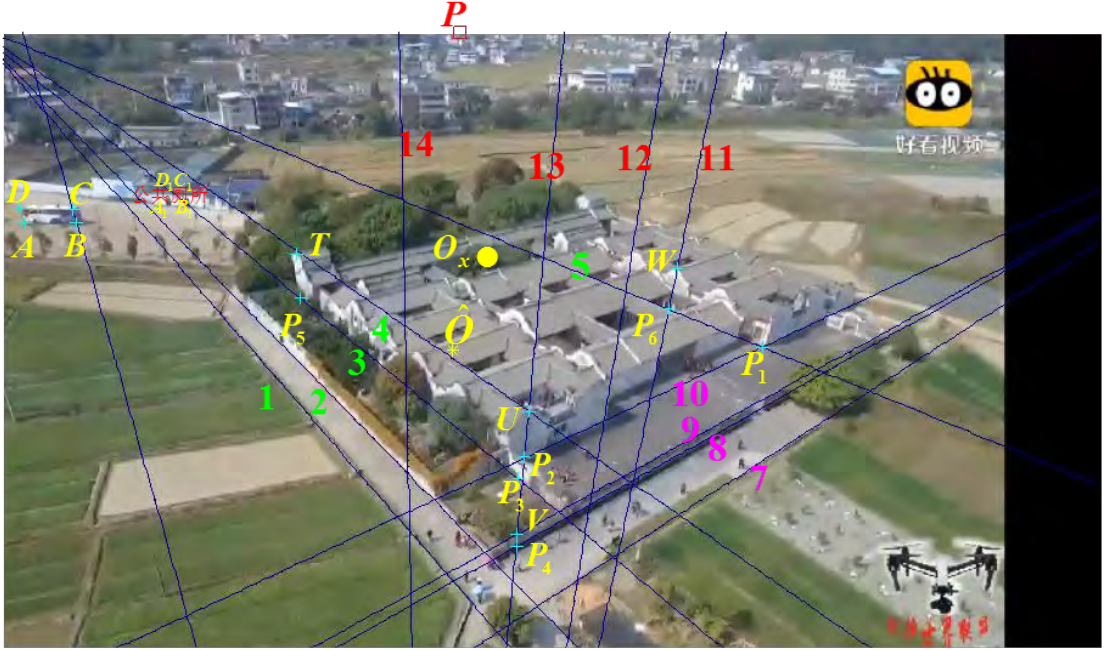


图 27 关键点的标记

## 7.4 参量的求解

### 7.4.1 建筑物的高度及道路长度、宽度以及老宅占地面积

为求得建筑物  $T'$  的高度, 需要先求得其在地平面上的投影  $P'_5$  的坐标。设  $P'_5$  坐标为  $(x_5, y_5, 0)$ , 同理, 利用 A-I 方程将其映射到像平面上, 表达式中只包含两个未知量:  $x_5, y_5$ 。令:

$$\begin{aligned} \angle P_5 AB &= \gamma_5 \\ |P_5 A| &= d_{5\text{像}} \end{aligned}$$

由于可以在像平面上读出 $\gamma_5, d_{5像}$ ，故可求解出 $x_5, y_5$ 。设建筑物 $T'$ 高度为 $r$ ,其坐标为 $(x_5, y_5, r)$ ，将其映射到像平面上，其像点 $T$ 的坐标中只包含一个未知量 $r$ ，我们可以在像平面上读取出 $|P_5T|$ 的值，且点 $P_5$ 坐标已知，由此可求出 $r$ 的值。类似地，若已知地面上的投影点位置，可求出像平面上任意一点的空间坐标，故老宅道路的长度、宽度、各建筑物的高度，老宅的占地面积均可求。

建筑物的高度如表 9 所示：

表 9 各建筑物的高度

建筑物	$U'$	$V'$	$W'$	$T'$
高度(m)	9.74	2.26	6.46	10.35

求解后花园外围形状时，考虑到围墙通常可以用 2 次方程近似，本文通过求解围墙曲线上的多个点并用最小二乘法进行了 2 次曲线拟合，如图 28 所示。

设弧的函数为 $y = f(x)$ ，则弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = 116.62m$$

后花园面积为：

$$S = \int_a^b f(x)dx = 1986.0m^2$$

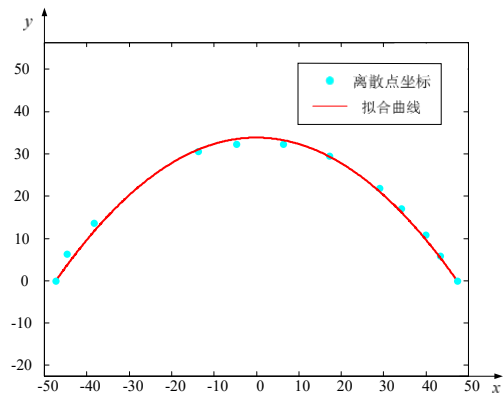


图 28 后花园围墙外轮廓的拟合

老宅的俯视图如图 30 所示，则各段道路的长度和宽度如表 10 所示：

表 10 各道路的长度和宽度 (以客车为参照物)

道路	$N'S'$	$Q'N'$	弧 $M'G'$	$Q'M'$	$G'R'$	$JK'$
长(m)	99.18	68.54	116.62	4.75	2.85	6.3

根据各道路的长度和宽度，求得老宅围墙内面积为：7685.9m<sup>2</sup>。包含老宅周围路面的总面积为：9226.94m<sup>2</sup>。围墙总长，即道路总长为：332.68m。

若以公共厕所为参照物，算出 $N'S'$ =91.56m,  $Q'N'$ =68.56m,如表 11 所示。



表 11 各道路的长度和宽度(以公共厕所为参照物)

道路	$N'S'$	$Q'N'$
长(m)	91.56	68.56

由表 11 可看出以公共厕所为参照物算出的老宅的长, 宽与以大巴为参照物算出的长, 宽相差不大, 佐证以大巴和以公共厕所为参照物都比较合理。

#### 7.4.2 无人机飞行高度和速度

对于视频中的每一帧图像, 若以摄像头中心在地平面上的投影  $O'$  为实际坐标原点, 则无人机的飞行位置均为  $(0,0,H)$ 。为了统一每一帧中的坐标系, 需要进行坐标系的转换, 以房屋群与后花园的交线的中点为坐标原点  $O_x$ , 具体位置如图 29 所示, 以交线的方向为  $x$  轴方向, 房屋中轴线的方向为  $y$  轴方向, 令  $EF$  为房屋的长。利用坐标转换过程中, 距离值始终不变的性质, 建立如下方程:

$$|O'E'| = \sqrt{(x_1 + |E'F'|/2)^2 + (y_1 + |F'G'|)^2 + H^2}$$

$$|O'F'| = \sqrt{(x_1 - |E'F'|/2)^2 + (y_1 + |F'G'|)^2 + H^2}$$

由此可以求解出在新坐标系下的坐标。

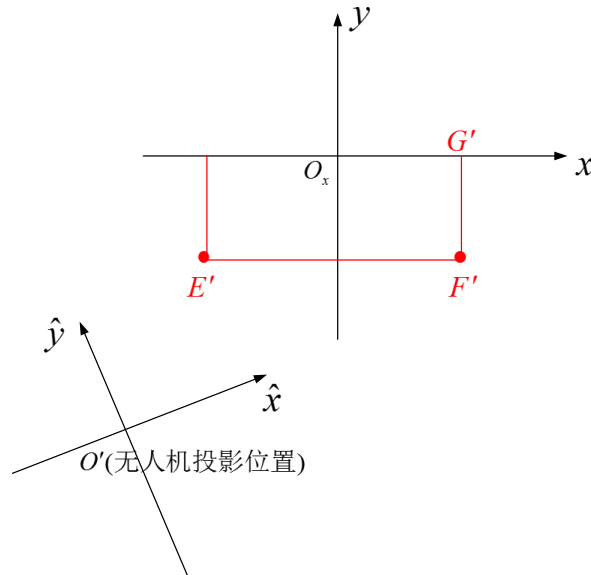


图 29 坐标系转换

转换坐标后, 在视频中取 16 帧进行计算, 为了算出无人机速度, 在选帧过程中, 在短暂时间内连续取两帧, 以两帧作为一组, 共取 8 组。由于每组内时间很短, 故速度可近似为  $v = \Delta s / \Delta t$ 。算出在新的坐标系下无人机位置及速度如表 12 所示。

表 12 无人机位置

组	t(帧)	x(m)	y(m)	z(m)	t(帧)	x(m)	y(m)	z(m)	v(m/s)
1	260	44.3	-105.9	49.3	263	45.1	-105.1	50.1	12.20
2	360	68.3	-89.0	50.6	363	69.66	-88.5	50.4	14.50
3	650	85.4	3.3	46.8	655	85.5	5.2	47.6	11.4
4	750	69.1	36.3	46.2	755	67.4	38.4	45.0	16.6
5	1100	-42.8	70.6	47.00	1105	-44.4	71.1	50.3	10.10
6	1250	-82.8	43.3	44.9	1253	-82.2	42.4	43.5	10.9
7	1670	-100.8	-72.6	49.1	1675	-98.6	-73.3	48.4	14.3
8	1800	-70.9	-104.1	50.9	1803	-70.5	-102.9	50.7	12.8

由各帧的无人机高度及速度，算出无人机平均速度为 12.85m/s，平均高度为 48.175m。

根据上述分析，为对老宅的布局有更直观的认识，将上述所求的物理量在图 30 中表示出来。

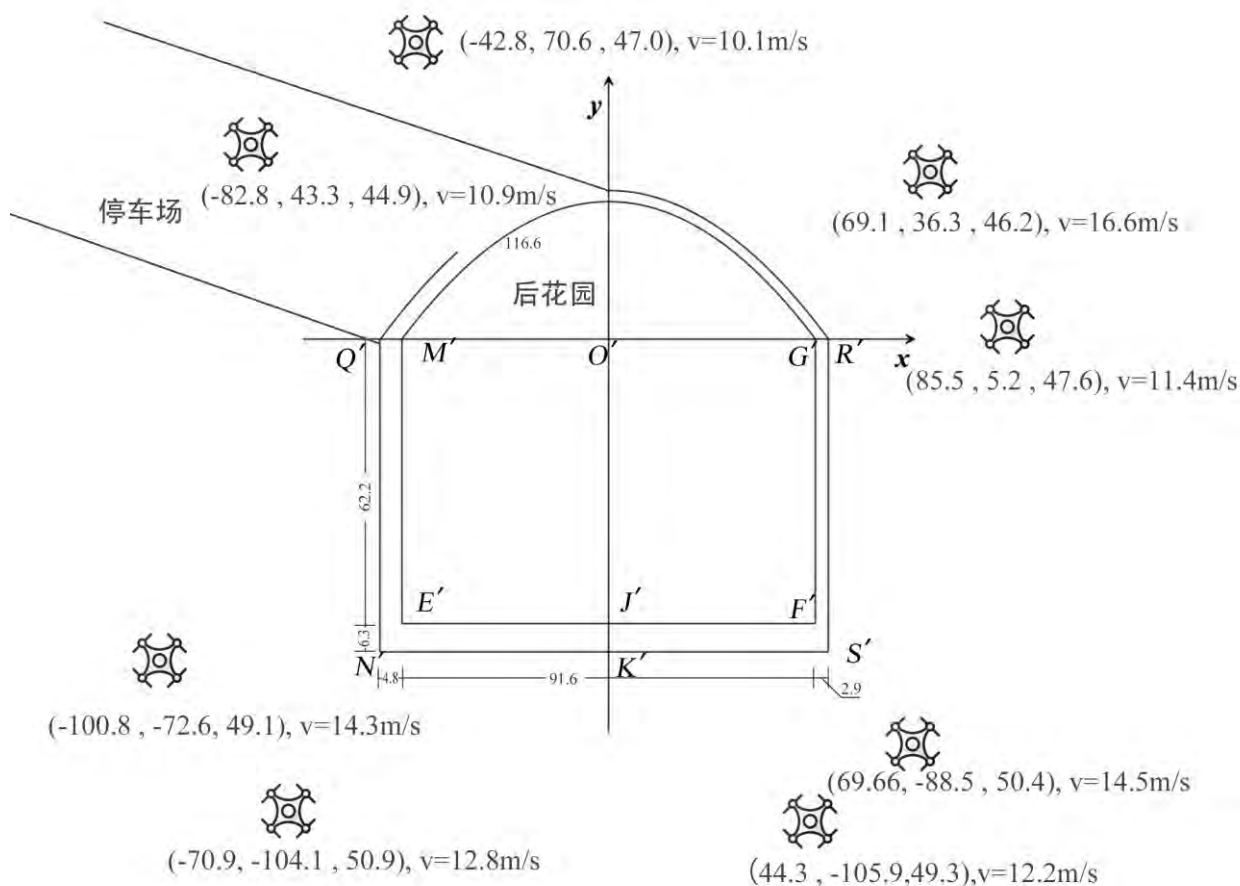


图 30 各物理量示意图

### 7.4.3 后花园中树木的最大高度

由于基于空间几何信息测量模型在求高度时需要确定投影点位置，在求树木高度时无法确定地面投影点，本文采用双目视线交汇法对树木高度进行求解。如图 31 所示，无人机 $t_1$ 时刻处于 $Q_1$ 位置， $t_2$ 时刻处于 $Q_2$ 位置，树顶为 $C$ ，连接 $Q_1C$ 与地平面交于点 $P_1$ ，连接 $Q_2C$ 与地平面交于点 $P_2$ ，则 $t_1$ 时刻， $t_2$ 时刻在像平面上拾取的 $C$ 点的像素点坐标即为 $P_1$ ， $P_2$ 的像素点坐标。

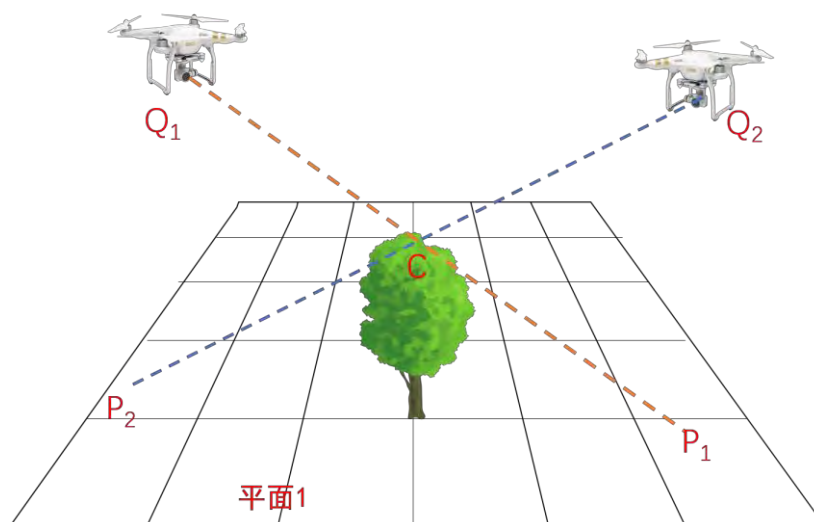


图 31 双目视线交汇

根据公式(5.11)，可以求出点 $P_1$ ， $P_2$ 的实际坐标。由于无人机位置已经求解出来，故直线 $Q_1P_1, Q_2P_2$ 随之确定。直线 $Q_1P_1, Q_2P_2$ 交于点 $C$ ，通过求解出来的 $C$ 点坐标就可确定树木的高度。如图 32 所示，发现树 1，树 2，树 3 高度高于其他树木，分别算出其高度为 14.19m, 11.17m, 12.81m, 故后花园中树木的最大高度为 14.19m。



图 32 树木的最大高度

## 7.5 任务 4 的结果

基于空间几何信息测量模型，测算出的结果如表 13 所示:

表 13 任务 4 结果

待测参量	值
老宅西侧道路宽度(m)	4.75
老宅东侧道路宽度(m)	2.85
老宅南侧道路宽度(m)	6.3
建筑物 $U'$ 高度(m)	9.74
建筑物 $V'$ 高度(m)	2.26
建筑物 $W'$ 高度(m)	6.46
建筑物 $T'$ 高度(m)	10.35
后花园中树木的最大高度(m)	14.19
老宅占地面积(不包含路面)( $\text{m}^2$ )	7685.90
老宅占地面积(包含路面)( $\text{m}^2$ )	9226.94
无人机平均飞行高度(m)	48.175
无人机平均速度(m/s)	12.85

## 8 总结与分析

### 8.1 模型的优点

本文构建了基于平面矩形信息测量模型及基于空间几何信息测量模型，并通过基于牛顿迭代法的多信息融合算法(MIF)进一步降低误差，计算精度高，实时性好。在现场标定实验中，将误差降到 3%以内。

### 8.2 模型的缺点

本文没有过多得考虑图像的畸变，后视镜有平面镜和凸面镜两种，在任务 2 中认为后视镜为平面镜，没有过多考虑畸变的影响。下一步，将考虑图像畸变，对模型进行进一步改进和优化。

## 9 参考文献

- [1]李宏伟. 双目立体视觉测距技术研究[D].哈尔滨理工大学,2018.
- [2]王美珍. 单幅图像中地物目标几何量测研究[D].南京师范大学,2011.
- [3]何立新. 单目视觉图像深度测量方法研究[D].中国科学技术大学,2018.
- [4] <https://car.autohome.com.cn/config/series/18-5585.html#pvareaid=3454437>
- [5] 姚扬中. 射影不变性识别[D].西安电子科技大学,2007.
- [6] <https://www.autohome.com.cn/5102/>
- [7] <https://www.fwxgx.com/questions/1941922>
- [8]隋铭明. 单幅近景图像空间信息提取及误差分析[D].南京师范大学,2013.
- [9]袁野,欧宗瑛. 一种考虑二阶径向畸变的主动视觉自标定算法[J]. 中国图象图形学报,2003(03):109-113.
- [10] <https://car.autohome.com.cn/config/series/4474.html#pvareaid=3454437>
- [11] <https://zhidao.baidu.com/question/51218637.html>
- [12] <https://www.yutong.com/thtml/product7-2-7-1-0-0-0-0-0-0-0.thtml>

部分程序:

```
function main%问题 1 图 1
```

```
clear;clc;
```

```
picPoint=[94.1486944197357 694.934853595926
```

```
100.643284083052 747.282043109203
```

```
381.263621154015 712.952508453878
```

```
376.137864088165 669.109935466523];%拟合轮胎椭圆得到 4 公切点
```

```
M=[1000.5 750.5];%图像中心
```

```
Len=[0.4318 3.012];%轮圈直径, 轴距
```

```
[x0,y0]=initialPara(picPoint,M,Len);%求解初始解
```

```
[x,fval,exitflag,output]=fminsearch(@(x)myOpticalEq(x,y0,picPoint,M,Len),x0);%牛顿法优化
```

```
H=x(3)%距离轮胎平面距离
```

```
end
```

```
%% 自定义函数
```

```
function [x,y]=initialPara(picPoint,M,Len) %求解初始解
```

```
A=picPoint(1,:);B=picPoint(2,:);C=picPoint(3,:);D=picPoint(4,:);
```

```
ortho1=T(line2crossPoint([A;B],[C;D]),M);
```

```
ortho2=T(line2crossPoint([A;D],[B;C]),M);%坐标转换
```

```
u=sqrt(-ortho1*ortho2);%用两灭点求 u
```

```
O=line2crossPoint([A;C],[B;D]);%像平面上 ABCD 对角线交点
```

```
k1=norm(A-O)/norm(C-O);%交点分割后线段比
```

```
k2=norm(B-O)/norm(D-O);
```

```
%坐标转换
```

```
A1=[T(A,M) u];
```

```
B1=[T(B,M) u];
```

```
C1=[T(C,M) u];
```

```
D1=[T(D,M) u];
```

```
%求像素空间坐标系与实际空间坐标系的转换系数
```

```
ka=norm(Len)/norm(A1-k1*C1);
```

```
kb=norm(Len)/norm(B1-k2*D1);
```

```
%转换到实际空间坐标系
```

```
A2=ka*A1;
```

```
B2=kb*B1;
```

```

C2=ka*k1*C1;
D2=kb*k2*D1;
%目标平面法向量
n=cross(A2-C2,D2-B2);
n=n/norm(n);
%相机在目标平面上的高度
H=abs(n*A2');
%俯仰角
beta=acos(n(3))-pi/2;

P=n*A2'*n;
Q=A2*n'/([0 0 u]*n')*[0 0 u];

nz=-P/norm(P);
nx=(P-Q)/norm(Q-P);
ny=cross(nz,nx);
PA=[(A2-P)*nx' (A2-P)*ny' (A2-P)*nz'];
PB=[(B2-P)*nx' (B2-P)*ny' (B2-P)*nz'];
kab=(PB(2)-PA(2))/(PB(1)-PA(1));

x=[-PA(1) PA(2) H u];
y=[beta/pi*180 -atan(kab)];
end
function p=T(X,M)%将坐标由默认像素点坐标转化为以图像中心为坐标原点的坐标
p=[X(1)-M(1),M(2)-X(2)];
end
function P=line2crossPoint(Lab,Lcd)% 求两线交点
pab=polyfit(Lab(:,1),Lab(:,2),1);
pcd=polyfit(Lcd(:,1),Lcd(:,2),1);
P=[(pab(2)-pcd(2))/(pcd(1)-pab(1)) (pcd(1)*pab(2)-pab(1)*pcd(2))/(pcd(1)-pab(1))];
end

%目标优化函数
function y=myOpticalEq(x,y,picPoint,CenterPoint,Len)%x 为待优化参数， y 为定参

```

```

x0=x(1);y0=x(2);H=x(3);u=x(4);%afa=x(5);
belta=y(1);kab=tan(y(2));
d01=Len(1);d02=Len(2);
a=picPoint(1,:);b=picPoint(2,:);c=picPoint(3,:);d=picPoint(4,:);
a=([a(1),a(2)]-CenterPoint(1:2))./(1+afa*(norm(a-CenterPoint))^2)+CenterPoint(1:2);
b=([b(1),b(2)]-CenterPoint(1:2))./(1+afa*(norm(b-CenterPoint))^2)+CenterPoint(1:2);
c=([c(1),c(2)]-CenterPoint(1:2))./(1+afa*(norm(c-CenterPoint))^2)+CenterPoint(1:2);
d=([d(1),d(2)]-CenterPoint(1:2))./(1+afa*(norm(d-CenterPoint))^2)+CenterPoint(1:2);

a=[[a(1),a(2)]./(1+afa*(norm(b-CenterPoint))^2),1];
b=[[b(1),b(2)]./(1+afa*(norm(b-CenterPoint))^2),1];
c=[[c(1),c(2)]./(1+afa*(norm(c-CenterPoint))^2),1];
d=[[d(1),d(2)]./(1+afa*(norm(d-CenterPoint))^2),1];

belta0=-belta*pi/180;
xx=x0;yy=y0;
%%
%ABCD 坐标
% 以下为 z 平面为 z=0 的坐标推导
thta=90;%AB,AD 的夹角
thta0=thta*pi/180;
kad=(kab+tan(thta0))/(1-kab*tan(thta0));
A=[xx,yy,0];%
B=[xx+d01/sqrt((1+kab^2)),yy+d01*kab/sqrt((1+kab^2)),0];
C=[xx+d01/sqrt((1+kab^2))+d02/sqrt((1+kad^2)),yy+d01*kab/sqrt((1+kab^2))+d02*kad/sqrt((1+kad^2)),0];
D=[xx+d02/sqrt((1+kad^2)),yy+d02*kad/sqrt((1+kad^2)),0];
%%
%距离量
AB=K2P(A,B,u,belta0,H); %平面的向量
BC=K2P(B,C,u,belta0,H);
AD=K2P(A,D,u,belta0,H);
CD=K2P(C,D,u,belta0,H);
BD=K2P(B,D,u,belta0,H);

```



```

AC=K2P(A,C,u,belta0,H);
%测量计算
ab=b-a;
ad=d-a;
bc=c-b;
cd=d-c;
%%建立方程
%%
%距离 归一化
eq1=1-norm(ab)./norm(AB);
eq2=1-norm(bc)./norm(BC);
eq3=1-norm(cd)./norm(CD);
eq4=1-norm(ad)./norm(AD);

%角度%归一化
eq7=1-acos(ab*ad'/norm(ab)/norm(ad))./acos(AB*AD'/norm(AB)/norm(AD));%a 角
eq8=1-acos(ab*bc'/norm(ab)/norm(bc))./acos(AB*BC'/norm(AB)/norm(BC));%b 角
eq9=1-acos(bc*cd'/norm(bc)/norm(cd))./acos(BC*CD'/norm(BC)/norm(CD));%c 角
eq10=1-acos(cd*ad'/norm(cd)/norm(ad))./acos(CD*AD'/norm(CD)/norm(AD));%c 角

y=sqrt(eq1.^2+eq2.^2+eq3.^2+eq4.^2)+sqrt(eq7.^2+eq8.^2+eq9.^2+eq10.^2);
end
function KP=K2P(K,P,u,belta,H)
% [x1,y1,z1]=K;
x1=K(1);y1=K(2);z1=K(3);
% [x2,y2,z2]=P;
x2=P(1);y2=P(2);z2=P(3);
kpx=(x2/(z2-H-x2*cot(belta))-x1/(z1-H-x1*cot(belta)))*u*csc(belta);
kpy=(y2/(z2-H-x2*cot(belta))-y1/(z1-H-x1*cot(belta)))*u*csc(belta);
kpz=(x2*z1-x1*z2+H*(x1-x2))*u*csc(belta)*cot(belta)/(z2-H-x2*cot(belta))/(z1-H-x1*cot(belta));
KP=[kpx,kpy,kpz];
End
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

%%%

function main%问题 4 求无人机数据

clear;clc;

%读取视频关键帧

obj = VideoReader('无人机拍庄园.mp4');

frame\_Index=263;

frame=read(obj,frame\_Index);

%求解水平灭点

P1=[770 553];P2=[839 369];

Q1=[175 332];Q2=[332 254];

cross1=line2crossPoint([P1;P2],[Q1;Q2]);

%求解水平另一垂直直线灭点

U1=[495 672];U2=[141 505];

V1=[420 226];V2=[768 300];

cross2=line2crossPoint([U1;U2],[V1;V2]);

%标定目标矩形角点坐标

Lab=[cross2;[13 396]];

Lad=[cross1;[13 396]];

Lbc=[cross1;[885 341]];

Lcd=[cross2;[885 341]];

picPoint=line4crossPoint(Lab,Lbc,Lcd,Lad);

O=[530.2687 362.8227];%矫正裁切图像后的图像中心点

Len=[91.5846 62.2364];%目标长宽

ortho1=(cross1-O).\*[1 -1];

ortho2=(cross2-O).\*[1 -1];

u=sqrt(-ortho1\*ortho2');%利用灭点求 u

A0=picPoint(1,:);%像平面上的坐标

B0=picPoint(2,:);

C0=picPoint(3,:);

D0=picPoint(4,:);

M=line2crossPoint([A0;C0],[B0;D0]);%四边形像的对角线交点

k1=norm(A0-M)/norm(C0-M);%对角线 AC 被 BD 分割后的线段长度比

k2=norm(B0-M)/norm(D0-M);%对角线 BD 被 AC 分割后的线段长度比

```

%像平面上的点建立像素空间坐标系后的空间像素坐标
A1=[(A0-O).*[1 -1] u];
B1=[(B0-O).*[1 -1] u];
C1=[(C0-O).*[1 -1] u];
D1=[(D0-O).*[1 -1] u];
%求解像素值与实际距离的比例
ka=norm(Len)/norm(A1-k1*C1);
kb=norm(Len)/norm(B1-k2*D1);
%将坐标转换到以相机为空间坐标原点，中心轴为 z 轴的空间坐标；
A2=ka*A1;
B2=kb*B1;
C2=ka*k1*C1;
D2=kb*k2*D1;
n=cross(C2-A2,B2-D2);%目标平面法向量
n=n/norm(n);
H=abs(n*A2');%相机在目标平面上的摄影高度
%坐标转换
M=(C2+D2)/2;
N=(A2+B2)/2;
n2=cross(M-N,n);
x=-M*n2'/norm(n2);
n3=cross(C2-D2,n);
y=M*n3'/norm(n3);
UAV_Position=[x y H];
end
%% 自定义函数
function P=line2crossPoint(Lab,Lcd)
pab=polyfit(Lab(:,1),Lab(:,2),1);
pcd=polyfit(Lcd(:,1),Lcd(:,2),1);
P=[(pab(2)-pcd(2))/(pcd(1)-pab(1)) (pcd(1)*pab(2)-pab(1)*pcd(2))/(pcd(1)-pab(1))];
end
function P=line4crossPoint(Lab,Lbc,Lcd,Lad)
pab=polyfit(Lab(:,1),Lab(:,2),1);
pad=polyfit(Lad(:,1),Lad(:,2),1);

```

```

pbc=polyfit(Lbc(:,1),Lbc(:,2),1);
pcd=polyfit(Lcd(:,1),Lcd(:,2),1);
A=[(pab(2)-pad(2))/(pad(1)-pab(1)) (pad(1)*pab(2)-pab(1)*pad(2))/(pad(1)-pab(1))];
B=[(pab(2)-pbc(2))/(pbc(1)-pab(1)) (pbc(1)*pab(2)-pab(1)*pbc(2))/(pbc(1)-pab(1))];
C=[(pcd(2)-pbc(2))/(pbc(1)-pcd(1)) (pbc(1)*pcd(2)-pcd(1)*pbc(2))/(pbc(1)-pcd(1))];
D=[(pcd(2)-pad(2))/(pad(1)-pcd(1)) (pad(1)*pcd(2)-pcd(1)*pad(2))/(pad(1)-pcd(1))];
P=[A;B;C;D];
end

```