

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学 校	华南农业大学
	10564001
参赛队号	
	1.郭慧敏
队员姓名	2.黄冠佳
	3.陈建平



第十届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目 空气中 PM2.5 问题的研究

摘 要:

本文主要研究空气污染中的 PM2.5 扩散问题, 首先使用相关分析探讨了 PM2.5 与 SO₂, NO₂, CO, PM10, O₃ 的相关性, 并建立了回归方程; 然后通过建立一维的反应扩散方程, 预测了 PM2.5 的浓度变化, 定量与定性分析了西安市的空气污染状况; 接着建立高斯烟羽模型, 拟合了持续高浓度 PM2.5 扩散的情形, 预测了污染物扩散的范围, 得到了重度污染和可能安全的区域; 最后通过建立了规划模型, 得到了经费较为合理而又有效的空气治理方案。同时对模型的检验, 结果得到模型是合理的。

问题一主要探讨 PM2.5 与 SO₂, NO₂, CO, PM10, O₃ 的相关性和关系。首先使用相关分析, 结果表明, PM2.5 与 PM10, CO, SO₂, NO₂ 呈正相关, 且相关性逐步减弱, PM2.5 与 O₃ 呈负相关, 同时通过相关资料, 发现了 PM2.5 还会与季节、降雨有关。然后, 使用线性回归方程分析 PM2.5 与其他污染物的关系, 结果得到

$$y_{PM2.5} = -129.7536 + 0.5845x_{SO_2} + 0.3854x_{NO_2} + 0.5548x_{PM10} + 2.2064x_{CO}$$

问题二主要探讨 PM2.5 的扩散规律与应急处理。对于第一个子问题, 首先, 通过空气质量分指数时序图和 13 个分区的 PM2.5 空间分布图, 得到 PM2.5 的时空分布规律是: PM2.5 浓度随时间的推移呈下降趋势, 1 月和 2 月份是浓度的高峰期, 随后转入低谷区, 13 个分区的变化趋势一致, 而且, 高压开关厂和广运潭是 PM2.5 浓度较高的两个区域, 小寨、高新西区和曲江文化集团是 PM2.5 浓度较低的区域。接着分区进行污染评估, 结果发现, 西安市的东南部的空气质量相对较优, 在该部分有小寨、纺织厂、曲江文化集团、兴庆小区, 这些都是生活区或者写字楼, 因此污染相对较少; 而广运潭和高压开关厂是城市的两大污染中心, PM2.5 的浓度较高, 而且持续时间也较长, 这应该是未来治理的重点。

对于第二个子问题, 在考虑风力、气温、压强的自然条件下, 建立一维的反应扩散方程, 研究下风向方向的 PM2.5 扩散规律。得到 PM2.5 的发生与演变规

律是：在污染源中心的浓度并不是最高，而是在大约 300 米处 $\text{PM}_{2.5}$ 的浓度才达到最大值，随后开始衰减。通过该模型，可以对西安市的高压开关厂附近地区的空气质量进行定量与定性分析，结果表明，在下风向方向，距离高压开关厂中心 272 米处浓度达到峰值，在该厂 1 公里之内 $\text{PM}_{2.5}$ 的浓度很高，空气质量指数类别属于重度污染；在该厂约 1 公里到 2 公里的地带，空气质量指数类别属于中度污染；在该厂约 2 公里到 3 公里的地带，空气质量指数类别属于轻度污染；在该厂约 3 公里到 6 公里的地带，空气质量指数类别属于良；在 6 公里以外的地域，空气质量指数类别为优。

对于第三个子问题，在考虑污染源海拔的情况下，使用高斯烟羽模型，分析 $\text{PM}_{2.5}$ 持续高浓度情况下的扩散规律，并对污染扩散进行预测。在 2013 年 2 月 10 日，市人民体育场 $\text{PM}_{2.5}$ 的浓度最高，模型的仿真结果表明，在 $\text{PM}_{2.5}$ 的浓度值升高两倍后，西安市中心区几乎都处在重度污染(包括严重污染)的区域，这时段几乎没有安全区域。两天后， $\text{PM}_{2.5}$ 的浓度得到降低，重度污染(包括严重污染)的区域仅包括市体育场附近的街区，西安市的周边县城已处于安全区域。五天后，市中心的重度污染区域已经消失，西安市的部分郊区及其外围地带也属于安全地带。

对于第四个子问题，通过与现实情况进行比对检验模型的合理性，上述两个模型的预测结果和实际较为吻合，说明模型是合理的。根据以上两个模型的仿真结果，可以得知 $\text{PM}_{2.5}$ 的一般性规律为：在下风向方向， $\text{PM}_{2.5}$ 的浓度下降得较快，在无持续风向的情况下呈辐射状扩散，若出现持续高浓度的污染物，周边地区一般 5 天左右可以将污染物的浓度降至无危害水平。

问题三探讨 $\text{PM}_{2.5}$ 的治理方案。子问题一提出了三个使 $\text{PM}_{2.5}$ 浓度从 $280 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 降到 $35 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 的治理计划：逐步提升空气质量指数级别法，总投入经费最优化法，等差下降 $\text{PM}_{2.5}$ 浓度最优化法，并分析这三种方法的优劣性。在子问题二中，在考虑经费的约束下，建立优化模型。结果表明，总投入经费最优化法所需经费最少，该方案是：每年使 $\text{PM}_{2.5}$ 的浓度平均下降 $49 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，五年需要投入总经费为 3.0503 亿元，每年投入经费约 6 千万元。最后给相关部门提出了一份治理空气污染的建議。

关键词 空气污染 $\text{PM}_{2.5}$ 相关分析 反应扩散方程 高斯烟羽模型 优化模型

1 问题重述

1.1 问题的背景介绍

空气，构成地球周围大气的气体。主要成分是氮气和氧气，还有极少量稀有气体和水蒸气、二氧化碳和尘埃等。空气，是地球环境的重要组成要素，它参与地球表面各种生命活动，为地球上生命的繁衍与人类的发展提供了理想的环境。空气质量的优与劣，对整个生态系统和人类健康有着直接的影响。许多自然过程与人类活动都需要与空气进行物质和能量交换，这些过程与活动都会对空气环境产生直接的影响。

从 18 世纪开始，经历两次工业革命之后，世界上局部地区开始出现了空气污染的现象。自二次世界大战以后，空气污染问题更日益严重。在一些大量燃烧矿物燃料的城市、工业区，曾发生多起严重的空气污染事件。如：20 世纪最早记录下的大气污染惨案——1930 年比利时马斯河谷烟雾事件，这次事件在一周内造成 60 多人死亡。除此事件外，还有 1952 年伦敦烟雾事件，导致数以万计的市民死亡。从此，空气污染，成为世界面临的重要环境问题之一。空气质量评价研究也迅速发展，迄今为止已走过半个世纪的历程。

空气环境质量评价是对空气环境状况优劣的定性和定量的评述[1]。它是认识和研究大气环境质量的一种方法。我国从 1962 年起就开始颁布《工业企业设计卫生标准》，到 1996 年开始对环境质量进行监管，颁布《环境空气质量标准》。到 2012 年，面对新的环境形势，我国加强对空气质量的监管与控制，颁布新标准——《环境空气质量标准》。在新标准中保留原有可吸入颗粒物 (PM₁₀)、二氧化硫 (SO₂)、二氧化氮 (NO₂)、一氧化碳 (CO)、臭氧 (O₃) 等 10 项污染物，同时还增添粒径小于等于 2.5 的可吸入颗粒物 (PM_{2.5}) 与臭氧 (O₃) 八小时平均浓度限值，重新调整 PM₁₀，NO₂，铅与苯并 (a) 芘等污染物的浓度限制。我国从 2012 年起逐步实施并发布 AQI (空气质量指数)。由此可见，我国对空气污染这一问题越来越重视。

AQI 作为空气质量检测指标，代替原来的空气污染指数 API。分项检测指标也从原来 3 个基本指标，上升为 6 个基本指标，分别是 SO₂，NO₂，PM₁₀，CO，O₃，PM_{2.5}。

PM_{2.5} 主要化学成分包括有机碳、碳黑、粉尘、硫酸铵 (亚硫酸铵)、硝酸铵等五类物质。当这五类物质粒径小于等于 2.5 时，易被人类吸入并进入肺泡，对人体健康造成极大危害，因此，也被称为入肺颗粒物。它是造成灰霾天气，并对人体健康危害最严重的一类大气污染物。其特征是：粒径小，重量轻，在大气中能长期滞留，可以被大气环流输送到很远的地方，造成大范围的空气污染。因此，PM_{2.5} 对环境的影响范围和对人体健康的危害程度，比 PM₁₀ 和 PM₁₀₀ 更大、更严重[2]。所以，必须对 PM_{2.5} 进行客观，正确的分析，从而改善生活工作环境。

1.2 要解决的问题

问题一要求分析 PM_{2.5} (含量) 与 SO₂，NO₂，PM₁₀，CO，O₃ 之间的相关性以及它们的关系，并依发掘除以上 5 种物质之外，与 PM_{2.5} (含量) 高度相关的要素。

问题二有四个子问题，分别是：

(1) 描述该地区内 PM2.5 的时空分布及其规律,并结合环境保护部新修订的《环境空气质量标准》分区进行污染评估。

(2) 建立能够刻画该地区 PM2.5 的发生和演变(扩散与衰减)等规律的数学模型,合理考虑风力、湿度等天气和季节因素的影响,并利用该地区的数据进行定量与定性分析。

(3) 假设该地区某监测点处的 PM2.5 的浓度突然增至数倍,且延续数小时,建立针对这种突发情形的污染扩散预测与评估方法。并以该地区 PM2.5 监测数据最高的一天为例,在全地区 PM2.5 浓度最高点处的浓度增至 2 倍,持续 2 小时,利用该模型进行预测评估,给出重度污染和可能安全区域。

(4) 采用适当方法检验(2)、(3)子问题的模型和方法的合理性,并根据已有研究成果探索 PM2.5 的成因、演变等一般性规律。

问题三有两个个子问题,分别是:

(1) 该地区目前 PM2.5 的年平均浓度估计为 280(单位为 $\mu\text{g}/\text{m}^3$),要求未来五年内逐年减少 PM2.5 的年平均浓度,最终达到年终平均浓度统计指标 35(单位为 $\mu\text{g}/\text{m}^3$),给出合理的治理计划,即给出每年的全年年终平均治理指标。

(2) 据估算,综合治理费用,每减少一个 PM2.5 浓度单位,当年需投入一个费用单位(百万元),专项治理投入费用是当年所减少 PM2.5 浓度平方的 0.005 倍(百万元)。现要为数据 1 所在地区设计有效的专项治理计划,使得既达到预定 PM2.5 减排计划,同时使经费投入较为合理,给出五年投入总经费和逐年轻费投入预算计划,并论述该方案的合理性。

2 问题的分析

2.1 问题一的分析

为了确定 PM2.5(含量)与 SO_2 , NO_2 , PM10, CO, O_3 之间的相关性,可以使用相关系数来体现这种联系。相关性从性质来分可分为正相关和负相关,从强度来分可分为强相关、弱相关和不相关,我们首先找出强相关关系,再从中区分正相关和负相关。根据 PM2.5 的成因,其他天气因素也会对其浓度造成影响,因此本文将探讨季节、降水对 PM2.5(含量)的影响。

2.2 问题二的分析

本问题分为四个子问题,首先要描述西安市的时空分布规律,即要分别描述其时间规律和空间规律。时间规律是同一个地点在不同时间段的浓度情况,空间规律是不同地点在同一时间的浓度分布,只要能求到某一地点某一时间 PM2.5 的浓度值,就可以进行污染评估。第二个子问题要建立刻画 PM2.5 扩散的模型,可以使用一维的反应扩散方程,这个模型有考虑风力问题,而且在确定扩散系数时,也考虑了气温、气压和湿度问题,所以在下风向方向的仿真有较好的效果。第三个子模型,要考虑污染物浓度持续处于高位的情况,给出重度污染的区域和相对安全的区域,高斯烟团模型和高斯烟羽模型都可以模拟这种情况,但后者相对较好。高斯烟羽模型有考虑污染源海拔高度,而且反映的是三维的扩散情形,对划分安全区域有较好的效果。第四个子问题是要检验前面两个模型的合理性,如果模型预测的结果和现实相符,可以认为是合理的,就可以根据模型得到的结果来归纳 PM2.5 传播的一般性规律。

2.3 问题三的分析

本问题是典型的规划问题。第一个子问题要求给出空气污染的治理方案，可以从以下三方面考虑，即按每年使空气污染下降一个等级方法，按平均每年使 PM2.5 的浓度下降 $49 \mu\text{g} / \text{m}^3$ 的方法，和按使每年 PM2.5 的浓度下降量成等差数列的方法。第二个子问题是第一个子问题的延续，之前已列举了若干种治理方案，在这里要考虑经费问题，要选取一种经费较少，而且能较好解决问题的方案。我们将讨论三种可能的治理方案，分别给出每种方案的优势与不足。

3 模型的假设

- (1) 假设 PM2.5 与 SO₂, NO₂, PM10, CO, O₃ 的浓度在一天之内没有变化；
- (2) 假设 PM2.5 的扩散不受地形与建筑物的影响；
- (3) 不考虑多污染源的关联影响，即拟合某个污染源的 PM2.5 的扩散情形时，不考虑其他污染源 PM2.5 扩散带来的影响；
- (4) 在考虑下风向方向的扩散情况时，假定风向与风速保持不变；
- (5) 忽略污染物之间相互发生化学方应导致的浓度变化；
- (6) 在反应扩散方程中，不考虑污染源的海拔问题。

4 符号说明

符号	说明
C_p	污染物 P 的质量浓度值
BP_{Hi}	与 C_p 相近的污染物浓度限制高位值
BP_{Lo}	与 C_p 相近的污染物浓度限制低位值
P	密度函数
t	扩散时间
$f(t, x, P)$	反应项
D	扩散系数
$D\Delta P$	扩散项
N	污染物浓度
u	风速
k	衰减系数
M	源强
H	污染源的高度
T	开尔文温度
p	气压
$V_{PM2.5}$	空气中 PM2.5 体积
V_{air}	空气体积
$\mu_{PM2.5}$	PM2.5 相对分子质量
μ_{air}	空气相对分子质量

5 基于相关因素分析的 PM2.5 相关性

5.1 PM2.5 的相关因素分析

5.5.1 问题分析

二氧化硫(SO₂), 二氧化氮(NO₂), 一氧化碳(CO)在一定环境条件下形成 PM2.5 前的主要气态物体。在 AQI 监测指标中正好有上面三个指标, 同时还包括 PM10(颗粒物粒径小于等于 10μm), 臭氧(O₃), PM2.5(颗粒物粒径小于等于 2.5μm)。我们希望 AQI 中各监测指标能呈现某种关系, 因此需要分析这六个指标的相关性以及独立性。由于 PM2.5 可能会受到 SO₂, NO₂, CO, PM10, O₃ 的影响, 因此需考察 PM2.5 与其余五个指标的关系。但是, 影响 PM2.5 浓度值除了 AQI 的指标外, 经过文献的查阅可知, 它还会受季节, 降雨等影响, 因此还需考察 PM2.5 与季节, 降雨等因素的相关性。

5.5.2 任意两个污染物之间的相关因素分析

通过查阅统计书籍相关知识可知, 相关系数 ρ_{ij} 的极大似然估计为

$$r_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii}\hat{\sigma}_{jj}}} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)^2 \sum_{k=1}^n (x_{kj} - \bar{x}_j)^2}}$$

其中 $\hat{\Sigma} = (\hat{\sigma}_{ij})$, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p)'$, $\hat{\sigma}_{ij}^2$ 为修正样本方差。因此, 上式也可表达为

$$r_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}s_{jj}}}$$

其中 $S = \frac{1}{n-1}A = (s_{ij})$ 。S 称为样本协方差矩阵, r_{ij} 为样本相关系数, $\hat{R} = (r_{ij})$ 为样本相关矩阵。

下面利用 R 软件, 对 SO₂, NO₂, PM10, CO, O₃, PM2.5 进行相关性与独立性的检测, 得出各污染物之间的相关系数, 如表 1 所示。

表 1 SO₂, NO₂, PM10, CO, O₃, PM2.5 之间的相关系数

	SO ₂	NO ₂	PM10	CO	O ₃	PM2.5
SO ₂	1.0000000	0.4948687	0.3857332	0.6472300	-0.4493658	0.6740747
NO ₂	0.4948687	1.0000000	0.3811220	0.3755755	-0.1021138	0.5172566
PM10	0.3857332	0.3811220	1.0000000	0.2997902	-0.2817080	0.7438832
CO	0.6472300	0.3755755	0.2997902	1.0000000	-0.4692849	0.7417853
O ₃	-0.4493658	-0.1021138	-0.2817080	-0.4692849	1.0000000	-0.4336267
PM2.5	0.6740747	0.5172566	0.7438832	0.7417853	-0.4336267	1.0000000

由统计的知识可知, 相关系数越接近±1 时, 说明两污染物越具有强相关性, 即其中一个污染物发生变化时, 另一污染物也会随之发生改变; 而相关系数越接近于 0 时, 说明两污染物越具有独立性, 即其中一个污染物发生改变的时候, 另

一污染物不会随意发生改变。从上面表格分析可得，除 O₃ 与 NO₂ 之间无相关性外，PM_{2.5}，SO₂，NO₂，PM₁₀，CO，O₃ 任意两个污染物之间都存在正相关性或负相关性。而相关系数大于 0 时，说明两污染物之间呈正相关性；当相关系数小于 0 时，说明两污染物呈负相关性。由表 1 可知，除 O₃ 与其余五个污染物之间呈负相关性外，PM_{2.5}，SO₂，NO₂，PM₁₀，CO 任意两个污染物均呈正相关性。

5.5.3 PM_{2.5} 与 SO₂，NO₂，PM₁₀，CO，O₃ 之间的相关性及其关系分析

自 2011 年 12 月 21 日，在第七次全国环境保护工作大会上，环保部部长宣布全国各地都需按照该新的环境空气质量标准监测和评价环境空气质量状况，并向社会发布监测结果，由此说明 PM_{2.5} 的重要性，因此有必要考察 PM_{2.5} 与各污染物之间的相关关系，如表 2 所示。

一般来说，使用 0.05 作为显著性水平，用于检测任意两个事件是否具有关系。当 p 值小于 0.05 时，说明两个污染物之间具有相关性；当 p 值大于等于 0.05 时，说明两个污染物之间具有独立性。即

$$\begin{cases} \text{相关, 若 } p < 0.05; \\ \text{不相关, 若 } p \geq 0.05. \end{cases}$$

表 2 PM_{2.5} 与 SO₂，NO₂，PM₁₀，CO，O₃ 之间的相关性

污染物	P 值	相关系数	相关性
SO ₂	< 2.2e-16	0.6740747	正相关
NO ₂	2.763e-09	0.5172566	正相关
PM ₁₀	< 2.2e-16	0.7438832	正相关
CO	< 2.2e-16	0.7417853	正相关
O ₃	1.159e-06	-0.4336267	负相关

由表 2 相关系数可知，PM_{2.5} 与 PM₁₀，CO，SO₂，NO₂，O₃ 的相关性逐渐减弱，PM_{2.5} 与 PM₁₀，CO，SO₂，NO₂ 呈正相关，即：PM_{2.5} 浓度越大，PM₁₀，CO，SO₂，NO₂ 浓度也越大；而 PM_{2.5} 与 O₃ 呈负相关，即：PM_{2.5} 浓度越大，O₃ 的浓度越小。

通过 R 软件的运算，可以得到 PM_{2.5} 与 SO₂，NO₂，PM₁₀，CO，O₃ 之间的线性回归方程

$$X_6 = -129.7536 + 0.5845X_1 + 0.3854X_2 + 0.5548X_3 + 2.2064X_4$$

其中，X₁，X₂，X₃，X₄，X₅，X₆ 分别表示为 SO₂，NO₂，PM₁₀，CO，O₃，PM_{2.5}。由此可得，尽管 O₃ 与 PM_{2.5} 呈负相关关系，但在回归方程中无体现；而 SO₂，NO₂，PM₁₀，CO 与 PM_{2.5} 呈正相关关系，与回归方程中回归系数的符号一致；PM_{2.5} 与 NO₂ 之间的相关系数最小，对应的回归系数也最小。

5.5.4 PM_{2.5} 与其他因素之间的相关分析

除 AQI 基本检测指标以外，我们通过查阅文献[2][3][4]可知，PM_{2.5} 还会与季节变化，降雨等因素有关。

表3 各季 PM2.5 日平均状况(单位: $\mu\text{g}/\text{m}^3$) [3]

季节	日平均浓度	超标率	最高日平均浓度	最低日平均浓度
春季	111	83%	295	18
夏季	71	15%	121	31
秋季	110	64%	411	11
冬季	108	70%	287	7

依据表3可分析得到,春季日平均浓度为 $111\mu\text{g}/\text{m}^3$,超标率为83%,PM2.5的污染程度最严重,而夏季日平均浓度为 $71\mu\text{g}/\text{m}^3$,超标率为15%,此季节PM2.5的污染程度最轻。由表3的超标率可知,春季>冬季>秋季>夏季。但是,虽然夏季整体浓度偏低,但最低日平均浓度反而在四季中最高,而最低日平均浓度出现在浓度相对较高的秋冬季。

这因为夏季冷空气活动不明显,PM2.5清洁主要出现在降水之后,而此时环境空气的相对湿度明显加大,某种程度上提高了细粒子的浓度水平,而其他三季降水相对较少,空气中颗粒物的清洁主要靠冷空气活动,秋,冬,春三季节中冷空气活动表现通常为气压上升、风速增大,这为污染物的水平输送和扩散提供了有利的条件[3]。

依据文献[2],需将24小时分为8段,每3小时为1时间段,进行PM2.5的测量。由图1可知,随着时间的变化,PM2.5质量浓度出现规律性的高低波动。冬季PM2.5质量浓度的变化趋势起伏最大,夏季则稍平缓一些。四季在大部分时段的分布特征基本相似。各季PM2.5的平均浓度最高值出现在VI(21:00~24:00)时段,而最低浓度则在IV(15:00~18:00)时段[2]。

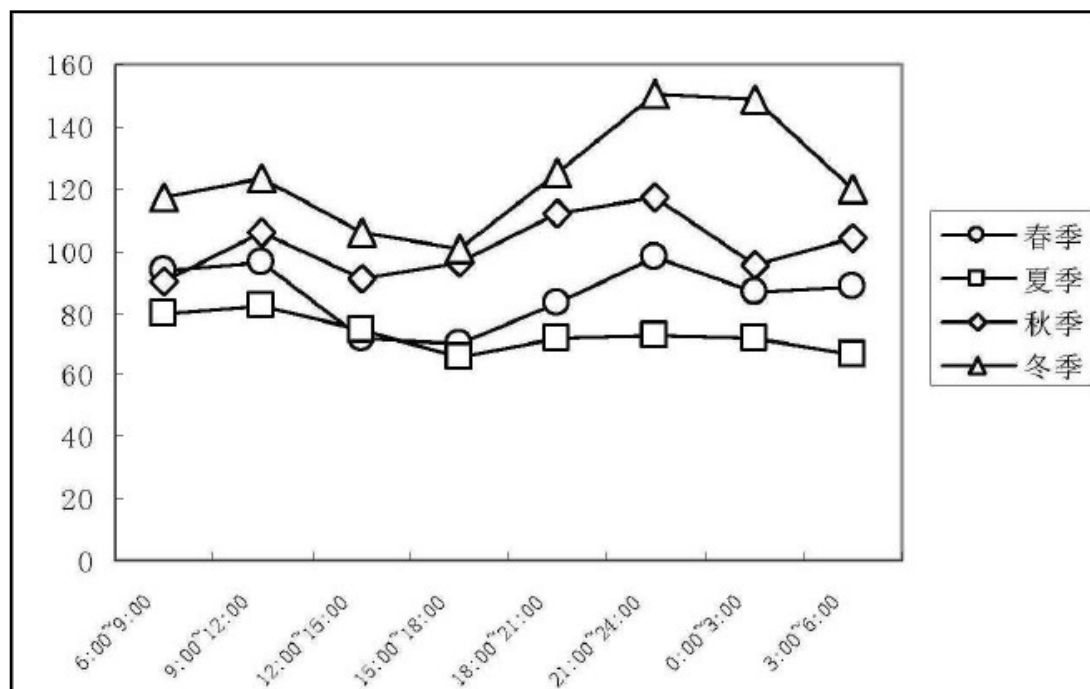


图1 西安市 PM2.5 不同时段浓度分布特征[2]

PM2.5 的浓度值除了与季节变化、时间段有关,还和降雨有关,见表4。

表 4 降雨前后 PM2.5 质量浓度变化(单位: $\mu\text{g}/\text{m}^3$) [2]

日期	雨前	雨后	去除率
5 月 20 日	143.537	104.114	27.47%
6 月 14 日	192.744	163.787	15.02%
7 月 3 日	191.405	181.596	5.12%
8 月 4 日	122.241	105.432	13.75%
9 月 11 日	151.773	135.190	10.93%
9 月 16 日	201.650	55.969	67.39%
10 月 3 日	133.209	103.091	22.61%
平均值	158.080	121.311	23.26%

通过表 4 可得, 降雨对 PM2.5 有一定的清除效果, 降水前后 PM2.5 的质量浓度含量差别较大, PM2.5 质量浓度平均去除率为 23.26%。最低去除率出现在 7 月 3 日, 只有 5.12%, 而 10 月 3 日去除率则有 67.39%。笔者分析, 这可能与降雨量与降雨大小程度有密切关系。当降雨量较多或降雨程度较高时, 去除 PM2.5 的能力较强; 反之, 当降雨量较小或降雨程度较低时, 去除 PM2.5 的能力较弱。

6 基于反应扩散方程的 PM2.5 分布模拟

6.1 西安地区的 PM2.5 分布规律与污染评估

6.1.1 数据的预处理

由附件 2 可以看到, 由于各种原因, 所测得的 PM2.5 的数据存在缺失值, 为了建模和分析的方便, 我们使用移动平均法将缺失数据补全, 即将缺失数据的前若干个值的平均值作为该值(第一个数据不缺失), 即

$$\hat{u}_n = \begin{cases} \frac{1}{5}(u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3} + u_{n-4} + u_{n-5}) & (n \geq 6) \\ \frac{1}{n-1}(u_1 + \cdots + u_{n-1}) & (n = 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$

例如, 高压开关厂的 2013 年 1 月 7 日的数据缺失, 将前五天的数据求平均, 即

$$\hat{u}_{110} = \frac{1}{5} \times (u_{109} + u_{108} + u_{107} + u_{106} + u_{105}) = 301.8$$

又如, 高新西区的 2013 年 4 月 7 日的数据缺失, 在其前面只有 4 个数据, 则

$$\hat{u}_5 = \frac{1}{4} \times (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) = 177.5$$

其他缺失数据可以按照上述方法相应补全。

6.1.2 西安地区的 PM2.5 时空分布规律

首先, 我们探讨 PM2.5 的时间分布规律, 即对某一个地点的不同时间的 PM2.5 的空气质量分指数进行分析。分别对高压开关厂、兴庆小区、纺织厂小寨、市人民体育场、高新西区、经开区、长安区、阎良区、临潼区、曲江文化集团、广运潭、草滩这 13 个地区以及全市平均的 PM2.5 的空气质量分指数作时间序列图, 为了使示意图清晰, 这里只把高压开关厂和全市平均的 PM2.5 的空气质量分指数画在同一幅时序图中, 如图 2 所示。

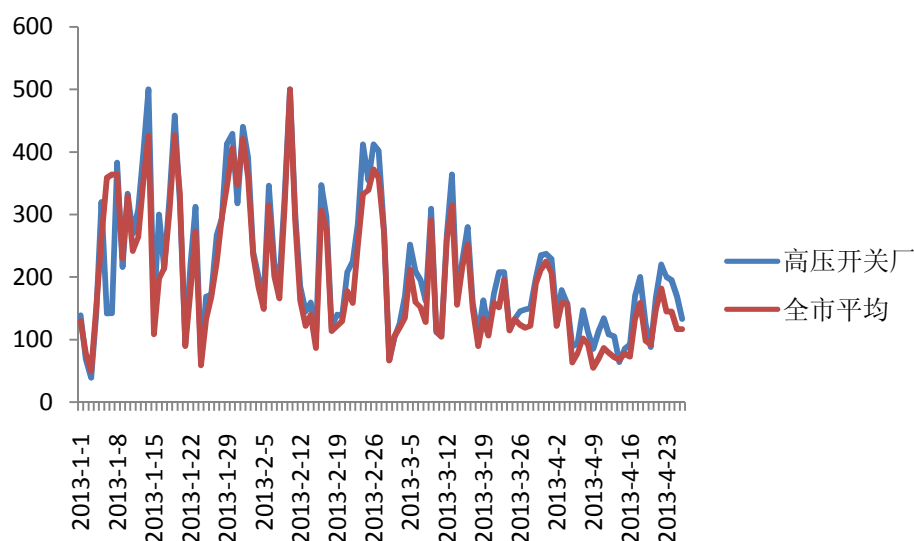
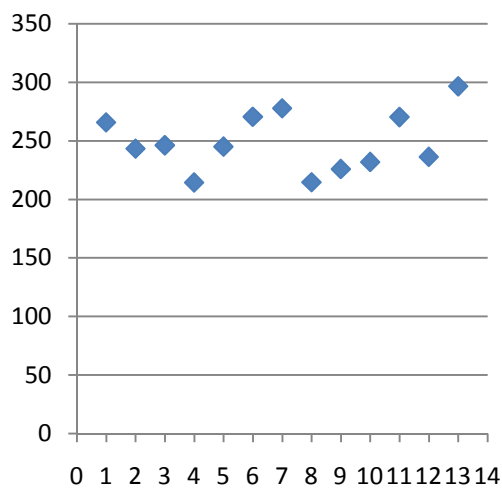


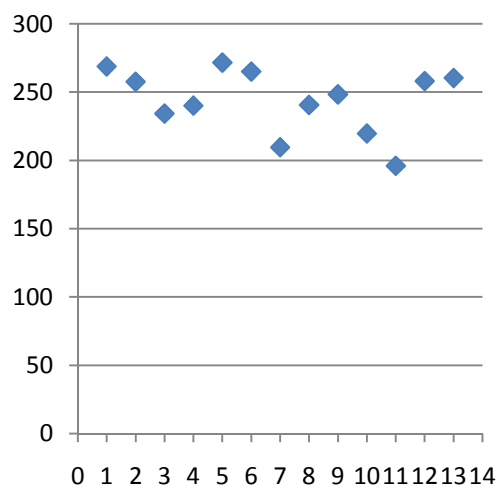
图 2 高压开关厂和全市平均的 PM2.5 的空气质量分指数时序图

由图 2 可以看出，PM2.5 的时间分布规律是：PM2.5 浓度随时间的推移呈下降趋势，1 月和 2 月份是浓度的高峰期，随后转入低谷期，而且高压开关厂和全市平均值的趋势呈同步变化特征，从而可以推知其他地点的 PM2.5 浓度也和全市平均值的趋势类似。

接下来探讨 PM2.5 的空间分布规律，就是分析在同一时间点不同地点的 PM2.5 浓度规律率。首先求出 13 个分区的 PM2.5 的空气质量分指数月平均值，然后作出 4 个月 13 个地区的散点图，如图 3 所示。



(a) 一月



(b) 二月

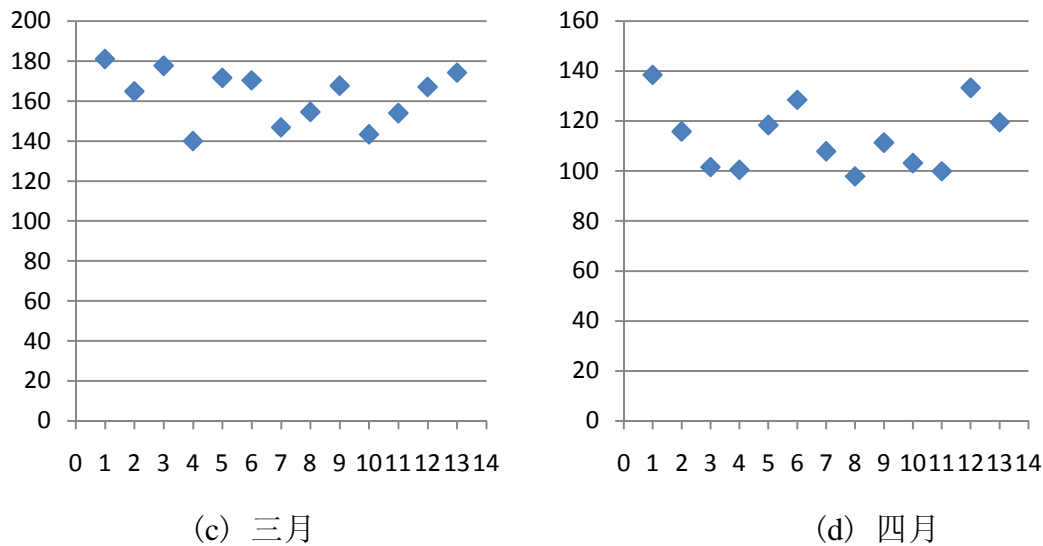


图 3 13 个分区的 PM2.5 散点图

在图 3 中，1-13 分别表示高压开关厂、兴庆小区、纺织厂、小寨、市人民体育场、高新西区、经开区、长安区、阎良区、临潼区、曲江文化集团、广运潭、草滩这 13 个分区。由于 PM2.5 的空气质量分指数和它的浓度呈正比，所以图 3 也可以看出 PM2.5 浓度的空间分布。由图 3 可以看出，PM2.5 的空间分布规律是：在一月份，小寨、长安区和阎良区的 PM2.5 浓度较低，经开区和草滩的 PM2.5 浓度较高；在二月份，经开区、临潼区、曲江文化集团的 PM2.5 浓度较低，高压开关厂、市人民体育场、高新西区的 PM2.5 浓度较高；在三月份，小寨、经开区、临潼区的 PM2.5 浓度较低，高压开关厂、纺织厂的 PM2.5 浓度较高；在四月份，纺织厂、小寨、长安区、临潼区、曲江文化集团的 PM2.5 浓度较低，高压开关厂、高新西区、广运潭的 PM2.5 浓度较高。其中，三月份的 PM2.5 空间分布图为

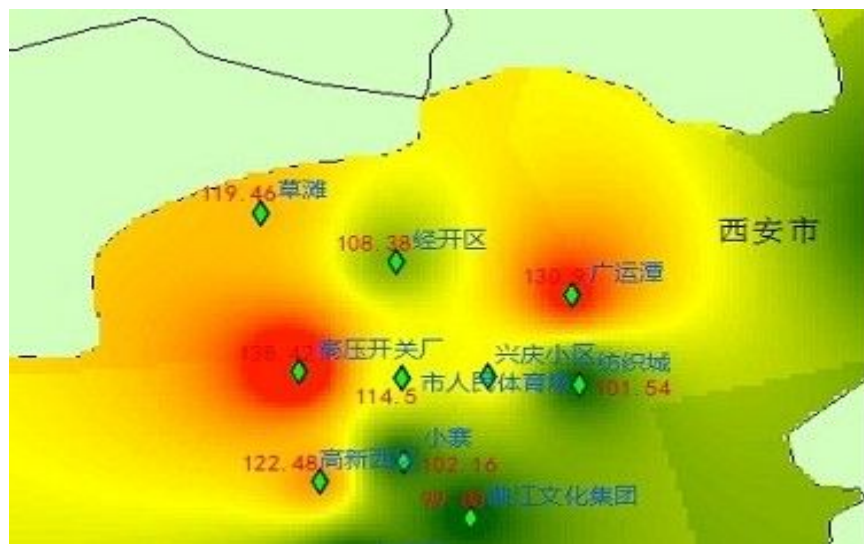


图 4 13 个分区的 PM2.5 空间分布图

由图 4 可以看出，高压开关厂和广运潭是 PM2.5 浓度较高的两个区域，小寨、高新西区和曲江文化集团是 PM2.5 浓度较低的区域。

6.1.2 西安地区的各分区污染评估

根据附件 2 的数据，对 2013 年西安市的 13 个分区进行污染评估，考虑空气质量为优良的天数、首要污染物及其出现的天数这三个指标，结果如表 5 所示。

表 5 2013 年西安市空气污染评估数据

分区	空气质量为优良的天数	占总天数的比例	首要污染物	首要污染物出现的天数	占总天数的比例
高压开关厂	10	8.62%	PM2.5	79	68.10%
兴庆小区	15	12.93%	PM2.5	68	58.62%
纺织厂	14	12.07%	PM2.5	68	58.62%
小寨	16	13.79%	PM10	72	62.07%
市人民体育场	9	7.76%	PM2.5	61	52.59%
高新西区	9	7.76%	PM2.5	67	57.76%
经开区	7	6.03%	PM2.5	64	55.17%
长安区	13	11.21%	PM2.5	74	63.79%
阎良区	12	10.34%	PM2.5	73	62.93%
临潼区	14	12.07%	PM2.5	61	52.59%
曲江文化集团	18	15.52%	PM2.5	58	50.00%
广运潭	12	10.34%	PM2.5	70	60.34%
草滩	10	8.62%	PM2.5	81	69.83%

由表 5 可以看出，空气质量为优和良的天数最多的三个分区是曲江文化集团、小寨、兴庆小区，分别是 18 天、16 天、15 天，空气质量为优和良的天数最少的三个分区是经开区、市人民体育场、高新西区，分别是 9 天、9 天、7 天；除小寨的首要污染物是 PM10 之外，其他 12 个分区的首要污染物都是 PM2.5，出现 PM2.5 天数排前三的是草滩、高压开关厂和长安区，其天数分别是 81 天、79 天、74 天，分别占总天数的 69.83%，68.10%，63.79%。

可以看出，西安市的东南部的空气质量相对较优，在该部分有小寨、纺织厂、曲江文化集团、兴庆小区，这些都是生活区或者写字楼，因此污染相对较少。而广运潭和高压开关厂是城市的两大污染中心，PM2.5 的浓度较高，而且持续时间也较长，这应该是未来治理的重点。

下面依据新的环境空气质量标准，可以将西安市 13 个区分为两类区，其类别可通过首要污染物对应 24 小时平均浓度限制进行划分。

西安市 13 个地区中只有小寨的首要污染物为 PM10，其余 12 个地区的首要污染物均为 PM2.5，因此高压开关厂，兴庆小区，纺织厂，小寨，市人民体育场，高新西区，经开区，长安区，阎良区，临潼区，曲江文化集团，广运潭，草滩对应首要污染物的日平均分指数分别为：213，195，187，194，212，210，191，177，188，178，186，199，203，194。显然通过新的环境空气质量标准中空气质量分指数及对应的污染物项目浓度表可知，13 个地区的污染程度均超过二级浓度限制，由于二类区为居住区，商业交通居民混合区，文化区，工业区和农村地区，其首要污染物日平均浓度限制需在二级浓度限制之内。从上面数据可以知道，上面 13 个数据中，最小值为 177，其浓度限制为： $143.9 \mu\text{g} / \text{m}^3$ ，远超于 $75 \mu\text{g} / \text{m}^3$ 。因此，西安市 13 个地区均不属于二类区。

6.2 基于反应扩散方程的 PM2.5 的扩散分析

6.2.1 反应扩散方程的建立

扩散现象是模拟在一个环境或媒体中许多个体的活动[4]。这里的个体可以是非常小的像物理学中的微粒子，化学中的分子，生物学中的细菌或细胞；也可以是非常大的个体，比如动物植物；还可以是某件事件，像传染病、谣言。

随着经济的快速发展和人类活动的增强，我国的环境污染事故已经日趋严重，其中空气污染事故是我国环境污染事故的主要类型。采用数学模型进行空气模拟计算具有灵活、快速、可操作性强等优点，有助于决策部门了解污染带的迁移状况和污染物在时间、空间上的变化，掌握污染物对周边城市造成的污染影响，从而对事故的发展做出及时、准确的反应。这类数学模型一般是以反应扩散方程的形式进行模拟。

为了便于讨论，首先考虑一维的情形，即考虑下风向方向的扩散情况。反应扩散方程的基本形式为

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\Delta P + f(t, x, P)$$

其中 P 是密度函数， t 表示扩散的时间， $f(t, x, P)$ 是反应项， D 是扩散系数， $D\Delta P$ 是扩散项，以及

$$\Delta P = \text{div}(\nabla P) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2}$$

考虑具有初值条件的情况[5] [6]

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - u_0 \frac{\partial N}{\partial x} - kN, -\infty < x < \infty, t \geq 0 \\ N(x, 0) = M\delta(x) = \begin{cases} \infty, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases} \text{ 且 } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \end{cases} \quad (1)$$

其中 N 表示污染物的浓度， t 表示扩散时间， D 表示扩散系数， x 表示扩散距离， u_0 表示传播方向的风速， k 表示衰减系数，与温度和湿度有关， $\delta(x)$ 在物理学中称 δ 函数， M 表示源强。

根据文献[5]，可以算到上述方程的精确解，为

$$N(x, t) = \frac{M}{2\sqrt{D\pi t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - u_0 t)^2}{4Dt} - kt\right) \quad (2)$$

根据附件 3，2013 年西安的风速都不大于 3 级，于是 $u_0 = 6m/s = 21.6km/h$ ，根据斐克定律，PM2.5 的扩散系数与气温有关，其表达式为

$$D = \frac{435.7T^{3/2}}{p(V_{PM2.5}^{1/3} + V_{air}^{1/3})^2} \sqrt{\frac{1}{\mu_{PM2.5}} + \frac{1}{\mu_{air}}} \quad (3)$$

其中， T 是开尔文温度， p 是气压，与湿度成反比， $V_{PM2.5}$ 和 V_{air} 表示在研究空间内两种气体的体积， $\mu_{PM2.5}$ 和 μ_{air} 表示 PM2.5 和空气的相对分子质量。

由于 PM2.5 是由 SO_2 转化而成的，可以考虑使用 SO_2 的分子量作为 PM2.5

的分子量。在常温常压条件下，代入相关物理量的值，求得 PM2.5 的扩散系数约为 $1.56 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 / \text{s}$ 。而且，PM2.5 在不治理的状况下，很难自动地消失，因此衰减系数可以近似地当作 0，即 $k = 0$ 。

由(3)式可知，PM2.5 的扩散系数受气温和压强的影响，而压强受湿度影响，压强与湿度成反比。将(3)代入(2)，取 $k = 0$ ，得到最终的扩散模型为

$$N(x,t) = \frac{M}{2 \sqrt{\frac{435.7T^{3/2}}{p(V_{PM2.5}^{1/3} + V_{air}^{1/3})^2} \sqrt{\frac{1}{\mu_{PM2.5}} + \frac{1}{\mu_{air}} \pi t}}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-u_0t)^2}{4t \frac{435.7T^{3/2}}{p(V_{PM2.5}^{1/3} + V_{air}^{1/3})^2} \sqrt{\frac{1}{\mu_{PM2.5}} + \frac{1}{\mu_{air}}}}\right) \quad (4)$$

6.2.2 拟合与仿真

为了检验上述模型的合理性，考虑 PM2.5 在污染中心高压开关厂的扩散情况，利用上一小节的模型，假设在只有这一个污染源的情况下，PM2.5 的演变规律。不考虑地形对扩散的影响，也不考虑污染源对海拔的高度，而且假设风向和风力是持续不变的。根据附件 2，高压开关厂 PM2.5 的 2013 年平均浓度为 $220.6 (\mu\text{g} / \text{m}^3)$ ，它的 PM2.5 扩散情况如图 5 所示。

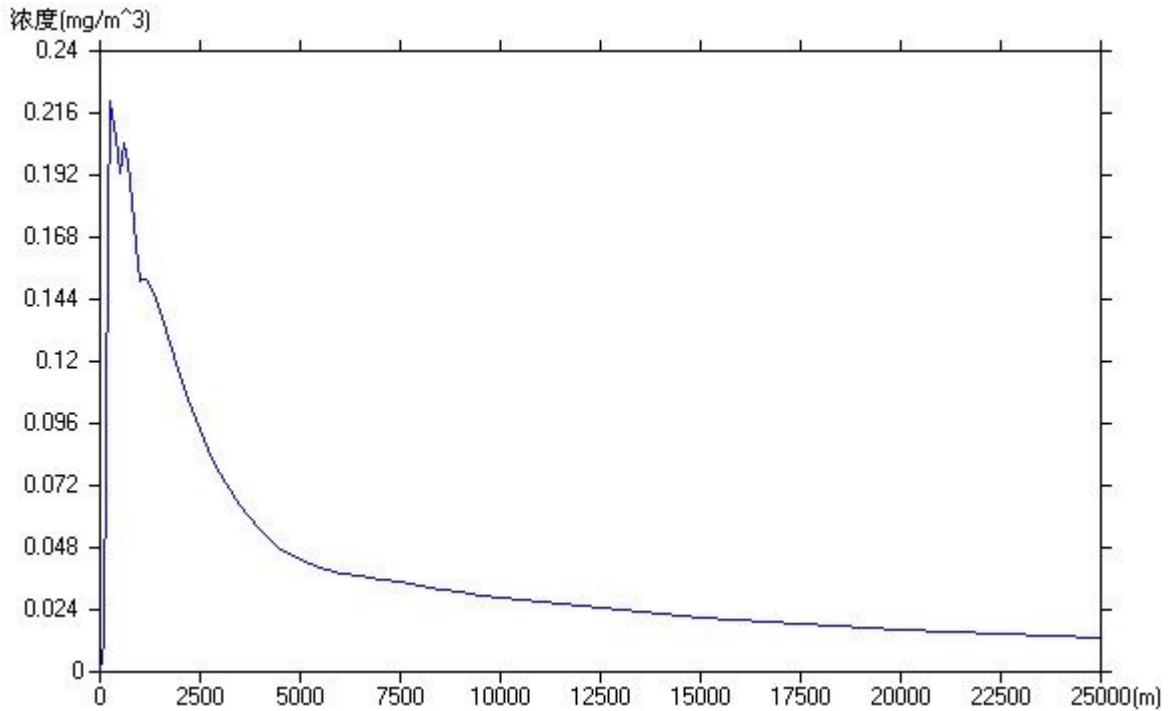


图 5 高压开关厂 PM2.5 沿风向方向的扩散意图

由图 5 可以看出，在污染源中心的浓度并不是最高，而是在大约 300 米处 PM2.5 的浓度才达到最大值，随后开始衰减。根据图 4，选取若干地点来分析西安市 PM2.5 的演变规律。

为了定性分析 PM2.5 的演变规律，需要将浓度值转化为空气质量分指数，根据文献[7]，污染物项目 P 的空气质量分指数为

$$IAQI_P = \frac{IAQI_{Hi} - IAQI_{Lo}}{BP_{Hi} - BP_{Lo}} (C_P - BP_{Lo}) + IAQI_{Lo} \quad (5)$$

其中, $IAQI_p$ 表示污染物项目 P 的空气质量分指数, C_p 表示污染物项目 P 的质量浓度值, BP_{Hi} 表示文献[7]中表 1 与 C_p 相近的污染物浓度限值的高位值, BP_{Lo} 表示文献[6]中表 1 与 C_p 相近的污染物浓度限值的低位值, $IAQI_{Hi}$ 表示与 BP_{Hi} 对应的空气质量分指数, $IAQI_{Lo}$ 表示与 BP_{Lo} 对应的空气质量分指数。

现在选取图 5 中的特殊点进行空气质量的定性和定量分析, 结果如表 6 所示。

表 6 高压开关厂 PM2.5 的扩散分析

距离(m)	PM2.5 浓度 ($\mu\text{g} / \text{m}^3$)	PM2.5 的空气质量 分指数	空气质量指数 类别
272	220.4	270.4	重度污染
500	192.6	242.6	重度污染
1000	150.5	200.5	重度污染
1500	139.2	184.6	中度污染
3000	76.84	102.3	轻度污染
5000	43.44	60.55	良
8000	33.28	47.54	优
10000	28.73	41.04	优
15000	20.77	29.67	优
20000	16.01	22.87	优
25000	12.96	18.51	优

由表 6 可以看出, 在下风向方向, 距离高压开关厂中心 272 米处浓度达到峰值, 在该厂 1 公里之内 PM2.5 的浓度很高, 空气质量属于重度污染; 在该厂约 1 公里到 2 公里的地带, 空气质量属于中度污染; 在该厂约 2 公里到 3 公里的地带, 空气质量属于轻度污染; 在该厂约 3 公里到 6 公里的地带, 空气质量属于良; 在 6 公里以外的地域, 空气质量为优。所以, 如果需要制造空气净化带, 可以考虑在高压开关厂 1 公里处和 3 公里处建造。

6.3 基于三维扩散浓度模型的 PM2.5 的应急处理

6.3.1 三维扩散浓度模型的建立

上一节的模型是一个一维的模型, 只能针对下风向方向进行模拟。然而, 污染物的扩散往往是在三维上进行的, 所以风向需要矢量分解, 而且污染源的海拔对扩散也是有较大的影响。为了克服一维反应扩散方程的缺陷, 本节提出三维扩散浓度模型。

如果以污染源为原点, 正下风向方向为 x 轴, 在水平面上与风向垂直的方向为 y 轴, 垂直地面向上为 z 轴, 则三维的空气污染模型可以用下列三维反应扩散方程来描述[8]

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} - u_0 \frac{\partial N}{\partial x} - u_1 \frac{\partial N}{\partial y} - u_2 \frac{\partial N}{\partial z} - kN \quad (6)$$

其中 N 表示污染物的浓度, t 表示扩散时间, D_x, D_y, D_z 表示各方向的扩散系数, u_0, u_1, u_2 表示 x 轴、 y 轴、 z 轴正方向的风速, 从而 $u_1 \approx 0, u_2 \approx 0$, k 表示衰减系数, 对于 PM2.5 而言, 一般不会衰减, 于是 $k=0$ 。

对于方程(6)，按照污染物泄露的时间不同，可以求出不同的解。如果污染物是瞬时泄露，即气体泄放的时间相对于气体扩散的时间较短的情形，将得到高斯烟团模型[9]

$$N(x, y, z, t) = \frac{M}{(2\pi)^{3/2} D_x D_y D_z} e^{-\frac{(x-ut)^2}{2D_x^2}} e^{-\frac{y^2}{2D_y^2}} \left(e^{-\frac{(z-H)^2}{2D_z^2}} + e^{-\frac{(z+H)^2}{2D_z^2}} \right) \quad (7)$$

其中， $N(x, y, z, t)$ 为污染物在某时刻某位置的浓度值， M 表示污染物单位时间排放量，即源强， t 表示扩散时间， D_x, D_y, D_z 表示各方向的扩散系数， u 表示风速， H 表示污染源的高度。

但是，如果污染物的泄露是持续的情形，则需要使用高斯烟羽模型[9]

$$N(x, y, z, t) = \frac{M}{2\pi u D_y D_z} e^{-\frac{y^2}{2D_y^2}} \left(e^{-\frac{(z-H)^2}{2D_z^2}} + e^{-\frac{(z+H)^2}{2D_z^2}} \right) \quad (8)$$

在(7)和(8)式中，源强的计算公式为

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u N dx dy$$

而对于每个方向的扩散系数的计算公式为

$$D_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c y^2 dy dz / \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c dy dz$$

$$D_z^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c z^2 dy dz / \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c dy dz$$

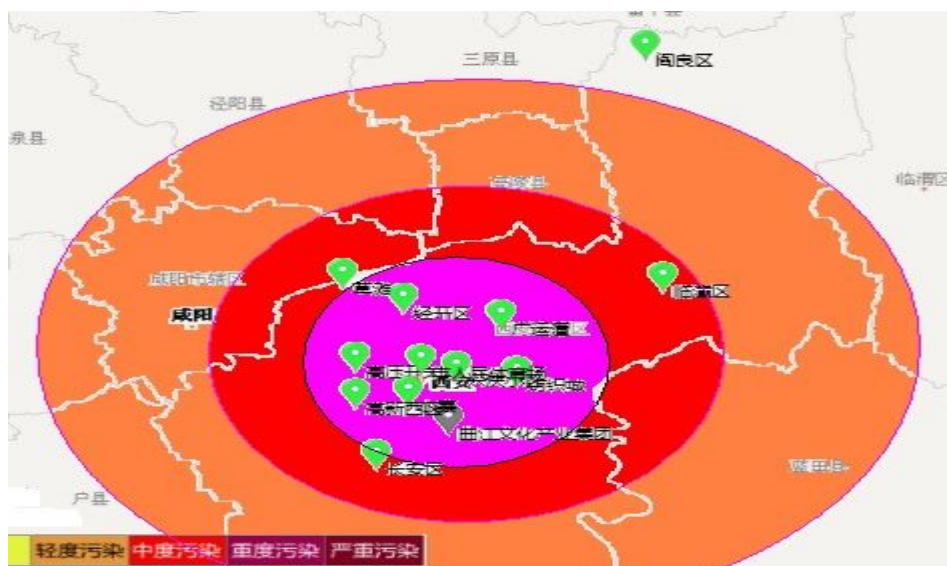
由于 x 轴方向为下风向方向，因此它的扩散系数如(3)所示。

6.3.2 模拟与仿真

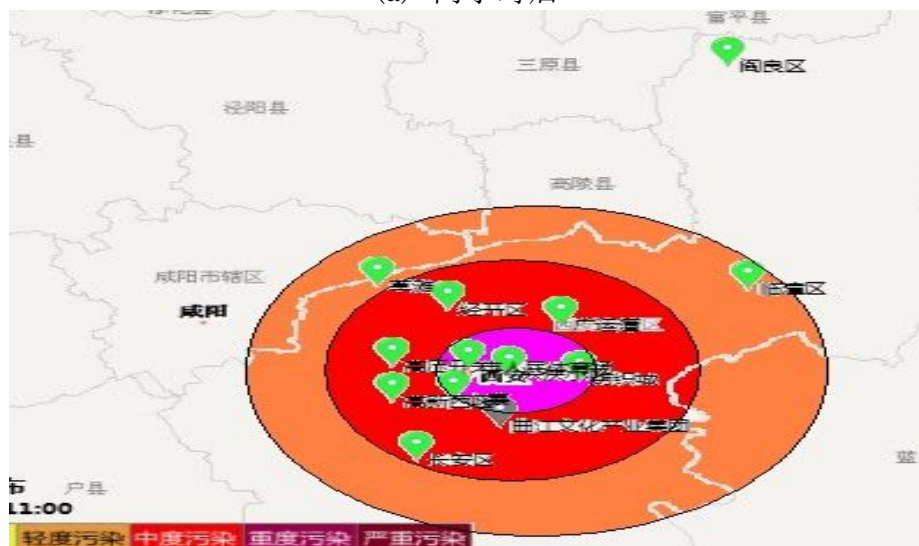
由附件 2 可以得知，2013 年 2 月 10 日 PM2.5 全市平均浓度最高，高压开关厂、兴庆小区、市人民体育场，高新西区和草滩的空气质量分指数都达到了 500。为了更好地分析污染物的扩散情况，选取市中心的市人民体育场作为污染源。根据附件 3，这一天西安市的风力不大于 3 级，而且无持续风向，因此风向对污染物的扩散影响不大。由于 PM2.5 的浓度是增长了两倍，而且持续两个小时，所以可以考虑使用高斯烟羽模型分别进行模拟。

首先考虑高斯烟羽模型，取 PM2.5 的浓度增长后的两小时，两天，五天进行预测评估，仿真图如图 6 所示。

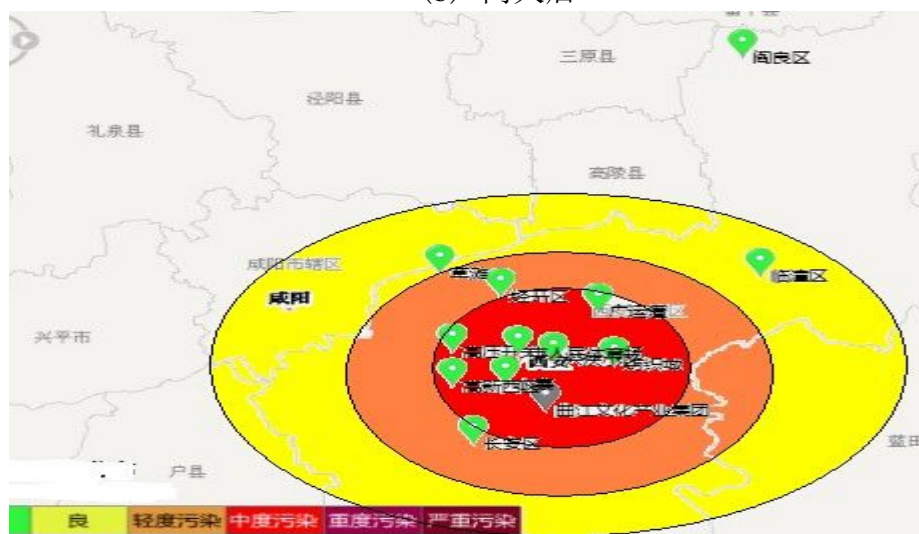
由图 6 可以看出，当 PM2.5 的浓度值升高两倍后，西安市中心区几乎都处在重度污染(包括严重污染)的区域，整个西安市郊区都处于中度污染区域，西安市附近的县城的空气也受到污染，附近县城的部分处于轻度污染的区域。过了两天，PM2.5 的浓度得到降低，重度污染(包括严重污染)的区域仅包括市体育场附近的街区，中度污染和轻度污染的区域得到缩小，西安市的周边县城已处于安全区域。又过了三天，即在 PM2.5 的浓度值升高两倍后的第五天，市中心的重度污染区域已经消失，轻度污染的区域也仅在距离市体育场 8 到 12 公里处的环形地带，西安市的部分郊区也属于安全地带。



(a) 两小时后



(b) 两天后



(c) 五天后

图 6 高斯烟羽模型仿真图

6.4 模型的检验与 PM2.5 传播规律的探讨

6.4.1 扩散模型的检验

对预测趋势类的模型而言,可通过观察它的预测结果是否符合实际来判断模型的正确性与合理性。由于只有这 13 个观测点的数据,周边县城的 PM2.5 浓度数据无法得到,所以只能进行定性检验,如果需要进行定量检验,则需要在周边县城设立更多的观测点。表 7 给出了模型(4)的检验结果。

表 7 一维反应扩散方程的检验

距离(m)	PM2.5 的空气 质量分指数	空气质量 指数类别	此距离对应的观 测点	观测点的气质 量指数类别	是否 一致
500	242.6	重度污染	高压开关厂	重度污染	是
1000	200.5	重度污染	高压开关厂附近	重度污染	是
1500	184.6	中度污染	高新西区附近	中度污染	是
3000	102.3	轻度污染	市人民体育场	轻度污染	是
5000	60.55	良	小寨	优	否
8000	47.54	优	兴庆小区	良	否

由表 8 可以看出,模型(4)做出的预测,有 4 个观测点与现实一致,有两个不一致,虽然有两个地点的预测结果与现实存在差异,但是空气质量都是控制在良以内,而且近距离的 4 个观测点都预测准确,图 5 的 PM2.5 浓度变化情况和图 4 的空间分布图基本吻合,说明模型是较为合理和准确的。在距离高压开关厂 8 公里的兴庆小区,可能还有其他污染源对其影响,导致其空气质量为良;而距离高压开关厂 5 公里的小寨,可能绿化面积较大,所以很好地吸收了部分的 PM2.5,以致它的空气质量为优。

对于 6.3 节的高斯烟羽模型,考虑了污染物持续排放的情形,而且考虑了排放的高度。由于研究周期无持续风向,由图 6 看出,各污染等级的范围呈环状分布是合理的。表 8 给出了模型(8)的检验结果。

表 8 高斯烟羽模型的检验

	2h 预测	2h 实际	2d 预测	2d 实际	5d 预测	5d 实际
高压开关厂	严重污染	严重污染	重度污染	中度污染	中度污染	轻度污染
兴庆小区	严重污染	严重污染	中度污染	中度污染	良	良
纺织厂	严重污染	严重污染	中度污染	中度污染	中度污染	良
小寨	严重污染	严重污染	中度污染	轻度污染	轻度污染	良
市人民体育场	严重污染	严重污染	重度污染	轻度污染	轻度污染	轻度污染
高新西区	严重污染	严重污染	重度污染	轻度污染	轻度污染	轻度污染
经开区	严重污染	中度污染	中度污染	中度污染	轻度污染	良
长安区	中度污染	严重污染	轻度污染	轻度污染	良	良
阎良区	严重污染	严重污染	中度污染	中度污染	轻度污染	轻度污染
临潼区	中度污染	严重污染	中度污染	中度污染	良	轻度污染
曲江文化集团	严重污染	严重污染	中度污染	轻度污染	轻度污染	良
广运潭	严重污染	严重污染	中度污染	中度污染	轻度污染	轻度污染
草滩	严重污染	严重污染	轻度污染	重度污染	轻度污染	轻度污染
预测准确率	10/13		7/13		7/13	

由表 8 可以看出, 高斯烟羽模型的预测准确率较高, 说明模型是正确与合理的。预测中出现的偏差, 主要是由于没有考虑各小区的净化能力, 以及地形对污染物传播的影响, 所以预测的结果的准确性相对较高。

6.4.2 PM2.5 传播规律的探讨

根据相关文献, PM2.5 的成因是: PM2.5 来源广泛, 成因复杂, 包括自然过程和人为排放过程, 主要是人为排放。人为排放部分包括化石燃料(煤、汽油、柴油、天然气)和生物质(秸秆、木柴)等燃烧、道路和建筑施工扬尘、工业粉尘、餐饮油烟等污染源直接排放的颗粒物, 也包括由一次排放出的气态污染物(主要有二氧化硫、氮氧化物、挥发性有机物、氨气等)转化生成的二次颗粒物。自然来源则包括: 风扬尘土、火山灰、森林火灾、漂浮的海盐、细菌等。

由模型(4)的仿真结果可知, PM2.5 的传播受风速、压强和气温的影响。它的传播规律是: PM2.5 的浓度在污染源中心约 300 米处达到峰值, 然后迅速下降, 距离中心约 5 公里处浓度开始趋于平稳, 但仍然缓慢下降, 在下风向方向, PM2.5 的浓度下降得更快。由高斯烟羽模型(8)的仿真结果可知, PM2.5 在无持续风向的情况下呈辐射状扩散, 若出现持续高浓度的污染物, 周边地区一般 5 天左右可以将污染物的浓度降至无危害水平。

7 基于最优化空气质量控制管理模型

7.1 每年 PM2.5 的治理计划与经费预算

7.7.1 问题分析

为建设良好的居住环境, 武汉市地方管理部门十分关心本地区空气质量首要污染物 PM2.5 的减排治污问题, 需要在 5 年内将 PM2.5 目前的年平均浓度从 $280\mu\text{g}/\text{m}^3$ 降到 $35\mu\text{g}/\text{m}^3$ 。同时, 拟采取综合治理与专项治理相结合的方案, 使 PM2.5 的年平均浓度迅速下降。因此, 依据武汉市地方环境管理部门的要求, 可以按每年逐步提升空气质量指数级别的方法, 或每年下降相同 PM2.5 浓度方法等方法改善空气质量, 同时还需使综合治理与专项治理的费用接近最小值。

7.7.2 方案 1——每年逐步提升空气质量指数级别法

笔者首先给出方案 1——按每年逐步提升空气质量指数级别的方法。从而给出每年治理 PM2.5 浓度的方法。

据公式(5), 可得出 $280\mu\text{g}/\text{m}^3$ 与 $35\mu\text{g}/\text{m}^3$ 对应空气质量分指数分别为 330 和 50。查阅空气质量指数相关信息可得, 现今的空气质量指数类别为严重污染, 空气质量指数级别为 6 级, 五年后需将空气质量指数级别提高到 1 级, 即空气质量指数类别为优。通过计算可得每年年终 PM2.5 平均治理指标, 如表 9 所示。

表 9 每年年终 PM2.5 平均治理指标(保留小数点后 2 位)

年份	分指数	下降分指数	浓度	下降百分比
第 1 年	300	30	250	10.71%
第 2 年	200	100	150	40.00%
第 3 年	150	50	115	23.33%
第 4 年	100	50	75	34.78%
第 5 年	50	50	35	53.33%

若按上表 9，PM2.5 浓度减少的比例，则可直接求出总费用和每年需要的费用，如表 10 所示。

表 10 治理 PM2.5 每年所需经费和总经费预算(保留小数点后 2 位)

年份	PM2.5	综合治理	专项治理	综合专项治理费用
第 1 年	30.00	30	4.50	34.50
第 2 年	100.00	100	50.00	150.00
第 3 年	35.00	35	6.13	41.13
第 4 年	40.00	40	8.00	48.00
第 5 年	40.00	40	8.00	48.00
合计	245.00	245	76.63	321.63

由表 9 和表 10 可见，若按逐步提升空气质量指数级别的方法，则每年下降的浓度值都不一致，第 1 年需下降 $30 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，第 2 年需下降浓度 $100 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，第 3 年又将浓度下降为 $50 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，第 4 年和第 5 年都下降 $40 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 。每年 PM2.5 下降目标值不同，而且第 1 年只需降低 $30 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 的浓度，有利于提高环境管理部门工作的积极性。但是由表 10 可见，五年总投入费用高达 321.63 百万元，即 3.2163 亿，其中第 1 年只需 34.5 百万元，但第 2 年治理的费用则需要 1.5 亿，是五年内治理费用最高的一年，比第 3 年到第 5 年费用之和还要高。因此，现在需要优化每年治理经费和总治理经费，使每年经费差异减少和下降总投入经费。

7.7.3 方案 2——总投入经费最优化方法

给出方案 2——应用最优化方法，求出每年年终 PM2.5 平均治理指标，并使总投入经费最小。利用 Matlab 软件，建立如下目标函数和约束条件

$$\begin{aligned} \min f &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + 0.005 \times (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 245 \leq y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \leq 280 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中， y_i 分别表示第 i 年 ($i=1,2,3,4,5$) 需要投入的经费。

由程序结果可得，若每年平均下降 PM2.5 浓度 $49 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，则可在 5 年内降低到目标值 $35 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 。从而有下表 11，每年年终 PM2.5 平均治理指标。

表 11 每年年终 PM2.5 平均治理指标(保留小数点后 2 位)

年份	下降百分比
第 1 年	17.5%
第 2 年	21.21%
第 3 年	26.92%
第 4 年	36.84%
第 5 年	58.34%

若 PM2.5 按每年 $49 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 的浓度减少，则可得出五年内每年所需要的经费和五年需要投入的总经费，如表 12 所示。

表 12 治理 PM2.5 每年所需经费和总经费预算(保留小数点后 2 位)

年份	PM2.5	综合治理	专项治理	综合专项治理费用
第 1 年	49.00	49	12.01	61.01
第 2 年	49.00	49	12.01	61.01
第 3 年	48.99	48.99	12.00	60.99
第 4 年	49.00	49	12.01	61.01
第 5 年	49.01	49.01	12.01	61.02
合计	245.00	245	60.03	305.03

通过最优化运算, 由表 11 和表 12 可得, 若每年平均下降 PM2.5 的浓度 $49 \mu\text{g}/\text{m}^3$, 则五年需要投入总经费为 305.03 百万元, 即为 3.0503 亿, 该数值为总投入经费的最小值。每年综合治理与专项治理费用都只需要大约 61 百万元。但是每年下降相同的 PM2.5 浓度, 则难以提高地方环境管理部门降低 PM2.5 的积极性。同时, 第 1 年就需要下降 $49 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 浓度, 这样的计划要求强度过大, 使环境管理部门难以达到目标。

因此, 需要再次优化模型, 既可以使投入的总经费接近最小值, 每年经费投入差异不大, 又可以略微降低第一年减少 PM2.5 的要求, 而降低 PM2.5 的要求可以逐年升高, 提高环境管理部门的积极性。

7.7.4 方案 3——等差下降 PM2.5 浓度最优化法

下面给出方案 3——依据国家新规定“十二五规划”——《重点区域大气污染防治“十二五”规划》, 重新计算 PM2.5 每年下降程度。

$$\hat{u}_n = \begin{cases} \frac{1}{5}(u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3} + u_{n-4} + u_{n-5}) & (n \geq 6) \\ \frac{1}{n-1}(u_1 + \cdots + u_{n-1}) & (n = 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$

由于附件 1 中, 有 2 个缺失数据, 分别是 2013 年 4 月 29 日和 2013 年 6 月 7 日对应的 PM10 数值。运用上面的公式, 求出缺失项。即 2013 年 4 月 29 日, PM10 的数值为 98.80; 2013 年 6 月 7 日, PM10 的数值为 72.2。

经过多次线性回归和广义线性回归的模拟, 得出 PM2.5 与 NO₂, PM10, CO, O₃ 之间的最优线性回归方程:

$$X_6 = -35.49315 + 0.53680X_2 + 0.87685X_3 + 2.26555X_4 - 0.33387X_5$$

其中 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ 分别表示为 SO₂, NO₂, PM10, CO, O₃, PM2.5 的下降浓度。现今需要降低 PM2.5 的年平均浓度, 即需要降低 SO₂, NO₂, PM10, CO 这 4 个污染物的年平均浓度以及提高 O₃ 年平均浓度。

《重点区域大气污染防治“十二五”规划》划定了 13 个大气污染防治重点区域, 包括京津冀、长三角、珠三角地区, 辽宁中部、山东、武汉及其周边、长株潭、成渝、海峡西岸、山西中北部、陕西关中、甘宁、新疆乌鲁木齐城市群[10]。PM2.5 事件的发酵使得政策不断趋严, 预计到 2017 年, 重点区域的 PM2.5 年平均浓度要下降 25%-30%。要完成这一目标, 必须直接控制颗粒物的排放和进一步压缩 SO₂、NO_x 等前体物质的产生量, 使得行业空间进一步扩容[11]。“十二五”规划提出, 可吸入颗粒物(PM10)、二氧化硫、二氧化氮、细颗粒物(PM2.5)年均浓度分别下降 10%、10%、7%、5%, 臭氧污染得到初步控制[12]。由于臭氧

存在于大气中，靠近地球表面浓度为 0.001~0.03ppm，是由大气中氧气吸收了太阳的波长小于 185nm 紫外线后生成的，有下面化学方程式[13]

$$3O_2 + hv = 2O_3$$

其中 1ppm=1%。因此，空气中臭氧的浓度在 0.001%与 0.03%之间。当大气中臭氧浓度为 $0.1\text{ mg} / \text{m}^3$ 时，可引起鼻和喉头粘膜的刺激；当臭氧浓度达到 $0.1\text{—}0.2\text{ mg} / \text{m}^3$ 时，能引起哮喘发作，导致上呼吸道疾病恶化，同时刺激眼睛，使视觉敏感度和视力降低；而当臭氧浓度在 $2\text{ mg} / \text{m}^3$ 以上时，可引起头痛、胸痛、思维能力下降，严重时可导致肺气肿和肺水肿。依据相关材料，“十二五”规划要求一氧化碳累计浓度下降至 16%。因此，估计每年需要下降 CO 浓度约为 3.5%，见表 13。

表 13 “十二五”规划对各污染物浓度要求

污染物	“十二五”要求浓度下降要求
SO ₂	10%
NO ₂	7%
PM10	10%
CO	3.5%
O ₃	0.001~0.03ppm
PM2.5	5%

运用 Matlab 软件，建立具有目标函数和约束条件的最优化问题

$$\begin{aligned} \min f &= -35.49315 + 0.53680x_1 + 0.87685x_2 + 2.26555x_3 - 0.33387x_4 \\ s.t. &\begin{cases} -35.49315 + 0.53680x_1 + 0.87685x_2 + 2.26555x_3 - 0.33387x_4 \geq -245 \\ 0.001 \leq x_5 \leq 0.03 \end{cases} \end{aligned}$$

其中，此处 x_1, x_2, x_3, x_4 分别代表 NO₂, PM10, CO 下降浓度和 O₃ 上升浓度。可得出五年内 NO₂, PM10, CO 累计下降浓度分别为： $-18.165\text{ }\mu\text{g} / \text{m}^3$, $-29.672\text{ }\mu\text{g} / \text{m}^3$, $-76.665\text{ }\mu\text{g} / \text{m}^3$ ，O₃ 累计上升浓度为 $0.15\text{ }\mu\text{g} / \text{m}^3$ 。从而，可得五年内 PM2.5 累计下降浓度为 $245.00\text{ }\mu\text{g} / \text{m}^3$ ，如表 14 所示。

表 14 污染物五年内累计下降浓度(保留小数点后 3 位)

污染物	五年累计下降浓度
NO ₂	18.165
PM10	29.672
CO	76.665
O ₃	0.150
PM2.5	245.000

由于现今需要将 PM2.5 的浓度从 $280\text{ }\mu\text{g} / \text{m}^3$ 降低为 $35\text{ }\mu\text{g} / \text{m}^3$ ，即由方法 2 可知，平均每一年需要下降浓度 $49\text{ }\mu\text{g} / \text{m}^3$ ，同时有五年总投入经费最少。因此，现在把 49 作为第 3 年基数，把 3 或 5 作为公差，从而求出每一年各污染物下降浓度和每年经费投入预算。

下面先取 3 作为公差，即第 1 年需要下降 $43 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，第 2 年需要下降 $46 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，第 3 年需要下降 $49 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，第 4 年需要下降 $52 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，第 5 年需要下降 $55 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 。通过 Matlab 的计算，得到 NO_2 ，PM10，CO，PM2.5 污染物每年下降浓度值和 O_3 每年上升浓度值，如表 15 所示。

表 15 各污染物每年下降浓度值(保留小数点后 3 位)

年份	NO_2	PM10	CO	O_3	PM2.5	下降比率
第 1 年	0.650	1.062	2.744	0.030	43.000	15.357
第 2 年	3.989	6.516	16.837	0.030	46.000	19.409
第 3 年	4.249	6.941	17.935	0.030	49.000	25.654
第 4 年	4.510	7.366	19.033	0.030	52.000	36.620
第 5 年	4.766	7.786	20.116	0.030	55.000	61.111

通过表 15，可以得到五年总投入经费和逐年经费投入预算，如表 16 所示。

表 16 治理 PM2.5 每年所需经费和总经费预算(保留小数点后 3 位)

年份	PM2.5	综合治理	专项治理	综合专项治理费用
第 1 年	43.000	43.000	9.245	52.245
第 2 年	46.000	46.000	10.580	56.580
第 3 年	49.000	49.000	12.005	61.005
第 4 年	52.000	52.000	13.520	65.520
第 5 年	55.000	55.000	15.125	70.125
合计	245.000	245.000	60.475	305.475

由表 16 可见，治理 PM2.5 的浓度从最初 $43 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 逐年上升到 $55 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，下降 PM2.5 的浓度强度逐步增强。但是五年总经费投入仅为 305.475 百万元，相比方案 2 每年下降 $49 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 所需要的总经费仅提升 0.445 百万元，即 45.5 万。同时，每年治理费用也相差不大，最大治理费用只为 70.125 百万元。因此，武汉市地方管理部门可以利用此方案作为治理计划，这既可以下降 PM2.5 的浓度，而且下降强度也不大，又可以减少经费投入。

下面以 49 作为第 3 年的基数，此时取公差为 5，即有第 1 年需要下降 $39 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，第 2 年需要下降 $44 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，第 3 年需要下降 $49 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，第 4 年需要下降 $54 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，第 5 年需要下降 $59 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 。运用 Matlab 计算，得到 NO_2 ，PM10，CO，PM2.5 污染物每年下降浓度值和 O_3 每年上升浓度值，如表 17 所示。

表 17 各污染物每年下降浓度值(保留小数点后 3 位)

年份	NO_2	PM10	CO	O_3	PM2.5	下降比率
第 1 年	0.303	0.495	1.280	0.030	39.000	13.929
第 2 年	3.816	6.233	16.105	0.030	44.000	18.257
第 3 年	4.249	6.941	17.935	0.030	49.000	24.873
第 4 年	4.683	7.650	19.765	0.030	54.000	36.486
第 5 年	5.113	8.352	21.580	0.030	59.000	62.766

通过表 17，可以得到五年投入总经费和逐年轻费投入预算，如表 18 所示。

表 18 治理 PM2.5 每年所需经费和总经费预算(保留小数点后 3 位)

年份	PM2.5	综合治理	专项治理	综合专项治理费用
第 1 年	39.000	39.000	7.605	46.605
第 2 年	44.000	44.000	9.60	53.680
第 3 年	49.000	49.000	12.005	61.005
第 4 年	54.000	54.000	14.580	68.580
第 5 年	59.000	59.000	17.405	76.405
合计	245.000	245.000	61.275	306.275

由表 18 可得，治理 PM2.5 的浓度逐年上升，从最初 $39 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 上升到 $59 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，治理 PM2.5 度逐步增强。同时，五年需要投入总经费为 306.275 百万元，相比方案 2 每年平均下降 $49 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 所需要的总费用仅提升 1.245 百万元。因此，武汉市地方管理部门也可利用此方案，既可以下降 PM2.5 的浓度，又可以减少经费投入。

7.7.5 三种方案合理性分析

上面的 3 种方案都具有合理性，具备自身优点，但同时也存在着缺点，环境管理部门可以依据自身的特点，选择不同的治理计划。

1) 若武汉市地方管理部门希望投入最少经费能将 PM2.5 的浓度值从 $280 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 降到 $35 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，同时每年下降 PM2.5 浓度差异不大，则可以使用方案 2——平均每年下降 PM2.5 浓度 $49 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ，因为，这一方法只需投入 305.03 百万元，是 3 种方法中预算最少的方法。但是这方法的缺点是：第一年下降 PM2.5 浓度的强度过大，而且每年下降同一浓度 PM2.5 值，难以调动环境管理部门的积极性。

2) 若武汉市地方管理部门希望每年治理 PM2.5 都能有成效，即空气质量指数类别能逐年上升，从严重污染到污染，五年后能达到优，则可以选择方案 1——按空气质量指数类别，逐年下降 PM2.5 浓度值。但是这一方法的缺点是：需要较大的经费投入，五年内所需要经费的预算为 321.63 百万元，比方法 2 的预算超出 16.60 百万元。同时，第 2 年需要投入 1.5 亿元，与其余 4 年相比，投入费用差异相当大。

3) 若武汉市地方管理部门既希望每年减少 PM2.5 有成效，又希望投入经费能接近最小值，同时每年需要投入的经费差异不大，则可以使用方案 3——以 3 或 5 作为公差，逐年提高降低 PM2.5 浓度值。但这一方法的缺点，无法立即看到成效，即第 2 年与第 3 年的空气质量指数类别都为严重。对于方案 3，环境管理部门还能通过表 15 与表 17 获得如下信息：若希望下降 PM2.5 的浓度值，则需要下降 NO₂，PM10，CO 的浓度值，并且固定 O₃ 的年平均浓度为 0.03ppm。尽管，SO₂ 的浓度值无法在线性回归方程中显示，但是从第一问的结论中可知，SO₂ 与 PM2.5 呈正相关性，即若希望 PM2.5 下降，只需 SO₂ 的浓度降低。

7.7.6 治理 PM2.5 的建议

PM2.5 是直径等于和小于 2.5 微米的大气颗粒物。它通过呼吸道进入人体肺部，严重危害人类健康，而 PM2.5 主要通过植物花粉和孢子，火山爆发等自

然源和燃烧燃料，工业生产过程，交通运输等人为源方式进行排放。因此，通过文献[14][15][16][17]，笔者总结出如下建议，用于减少人为源排放的 PM_{2.5} 浓度值。

1) 加强 PM₁₀ 与 PM_{2.5} 防治的法制建设和政府监管力度。政府要起到带头作用，统领全局，尽快颁布健全的法律法规制度，制定完善的污染物排放标准和流程。

2) 煤烟污染控制。燃煤排放的烟尘，是人类活动排放 PM_{2.5} 的主要来源之一。因此，要减少燃煤排放的烟尘，国人在日常生活则需多使用清洁能源，禁止或取缔街头烧烤。

3) 汽车尾气污染控制。汽车尾气排放，是 PM₁₀，PM_{2.5} 最重要的来源。首先，需要控制汽车数量，在上下班交通繁忙的时间，鼓励市民多使用公共交通工具，减少私家车使用，或每天限定私家车单双号出行。其次，提高机动车尾气排放控制标准。加强机动车尾气防治，对尾气检测不合格机动车禁止上路行驶，对尾气不达标的机动车不允许延长报废。最后，所有车辆都需使用清洁能源，完全符合国家标准。

4) 交通道路扬尘控制。加强城市道路的清扫保洁，交通干道定时洒水冲刷，消除交通扬尘隐患；在高速公路两端多种植物，并靠近居民居住地段安装防尘装置。

5) 施工工场及裸露地面扬尘控制。建筑施工工地，严格防止建筑工地运输车辆，在交通道路上散落泥土；完成已建成道路，裸露地面的绿化和铺装，提高城市绿化覆盖率，防止裸露地面遇风起尘。

6) 提高公众积极参与环境保护工作。保护环境，从我做起。需提高全体市民环境保护意识，自觉参与节能减排活动，从自身做起，做好节能减排工作。

8 模型与方法的评价

问题一使用了相关分析来确定 PM_{2.5}(含量)与 SO₂，NO₂，PM₁₀，CO，O₃ 之间的相关性，不仅数理简单，而且具有较高的准确性；不过相关分析只能反映两两指标之间的联系，不能反映多个指标和多个指标之间的关系，但是这六种物质显然可以发生化学反应的，因此可以考虑典型分析来解决此问题。

问题二的一维反应扩散方程考虑了风力、气温、压强、湿度等自然因素，有较高的仿真性，但这个模型只能对下风向方向进行预测，而且不考虑地形和建筑物的影响，具有一定的局限性。高斯烟羽模型是一个三维模型，除了考虑上述自然因素之外，还考虑了污染源的海拔高度，因此预测的结果更具真实性，然而，由于也是没有考虑地形对污染物传播的影响，于是预测的结果相对于实际还是偏大。而且，这两个模型都是考虑单污染源的情形，但事实上往往有多个污染源，而且每个地点还有自身的静化能力，因此这种关联影响不能体现出。

问题三的广义回归模型给出了 PM_{2.5} 与 NO₂，PM₁₀，CO，O₃ 的关系，可以通过控制 NO₂，PM₁₀，CO，O₃ 的浓度，使 PM_{2.5} 下降至要求的值，而且通过规划模型使得所耗费的资金最少。然而，回归模型级没有考虑高次项，也没有考虑交叉项，因此有可能会忽略一些很重要的关系。

参 考 文 献

- [1] 冯梅, 陈业勤, 张学兵等, 空气环境质量评价分析的数学方法及应用, 环境科学与技术, 31(8): 141-143, 2008 年。
- [2] 李芳, 西安市大气颗粒物 PM_{2.5} 污染特征及其与降水关系研究, 西安建筑大学, 2012 年。
- [3] 徐敬, 丁国安, 颜鹏等, 北京地区 PM_{2.5} 的成分特征及来源分析, 应用气象学报, 18(5): 645-654, 2007 年。
- [4] 魏玉香, 银燕, 杨卫芬, 南京地区 PM_{2.5} 污染特征及其影响因素分析, 环境科学与管理, 34(9): 29-34, 2009 年。
- [5] 李婷, 孙丽男, 基于反应扩散方程的水污染模型解析解的模拟, 吉林化工学院学报, 29(7): 88-91, 2012 年。
- [6] 李婷, 刘萍, 史俊平等, 一类基于一阶传递偏微分方程的水污染模型, 哈尔滨师范大学自然科学学报, 25(1): 4-6, 2009 年。
- [7] HJ 633-2012, 环境空气质量指数(AQI)技术规定(试行): 中华人民共和国国家环境保护标准。
- [8] 华丽妍, 刘萍, 王玉文, 三维水污染模型的稳态解, 哈尔滨师范大学自然科学学报, 27(5): 5-7, 2011 年。
- [9] 叶冬芬, 叶桥龙, 罗玮琛, 基于高斯扩散模型的化工危险品泄露区域计算及其实现, 计算机与应用化学, 29(2): 195-199, 2012 年。
- [10] 经济参考报, 《重点区域大气污染防治“十二五”规划》发布, <http://news.xinhuanet.com>, 2012 年 12 月 06 日。
- [11] 天和财富网, 2013 下半年环保行业投资策略: 从政策变迁看行业扩容, <http://www.thcf168.com>, 2013 年 08 月 07 日。
- [12] 证券时报网(深圳), 大气污染防治十二五规划正式发布, <http://money.163.com>, 2012 年 12 月 05 日。
- [13] 沈鑫甫等编, 中学教师实用化学辞典, 北京: 北京科学技术出版社, 2002: 189-190 页。
- [14] 杨新兴, 冯丽华, 尉鹏, 大气颗粒物 PM_{2.5} 及其危害, 前言科学(季刊), 21(6): 22-31, 2012 年。
- [15] 徐映如, 王丹侠, 张建文等, PM₁₀ 和 PM_{2.5} 危害、治理及标准体系的概况, 职业与健康, 29(1): 117-119, 2013 年。
- [16] 李斌莲, 管峰, 蒋建华, 浅析中国 PM_{2.5} 现状及防控措施, 能源与节能, (6): 54-71, 2012 年。
- [17] 杨洪斌, 邹旭东, 汪宏宇等, 大气环境中 PM_{2.5} 的研究进展与展望, 气象与环境学报, 28(3): 77-81, 2012 年。

附 录

第 1 问

R 软件程序——检验各污染物之间的相关性

```
> pm1<-read.csv("1.csv")
> colMeans(pm1) %求各列均值
> cov(pm1) %求协方差矩阵
> cor(pm1) %求相关系数矩阵
> cor.test(~X6+X1,data=pm1) %检验 X6 与 X1 的相关性
> cor.test(~X6+X2,data=pm1)
> cor.test(~X6+X3,data=pm1)
> cor.test(~X6+X4,data=pm1)
> cor.test(~X5+X4,data=pm1)
> cor.test(~X5+X3,data=pm1)
> cor.test(~X5+X2,data=pm1)
> cor.test(~X5+X1,data=pm1)
> cor.test(~X4+X2,data=pm1)
> cor.test(~X4+X3,data=pm1)
> cor.test(~X3+X1,data=pm1)
> cor.test(~X3+X2,data=pm1)
> cor.test(~X2+X1,data=pm1)
> lm.pm1<-lm(X6~X1+X2+X3+X4+X5,data=pm1) %求回归方程
> summary(lm.pm1)
> lm.pm1s<-step(lm.pm1)
> lm.pm1n<-lm(X6~X1+X2+X3+X4,data=pm1) %求回归方程
> summary(lm.pm1n)
```

第 3 问

R 软件程序——求回归方程

```
> PM<-read.csv("PM.csv")
> lm.PM<-lm(X6~X1+X2+X3+X4+X5,data=PM) %求回归方程
> summary(lm.PM)
> lm.PMstep<-step(lm.PM) %逐步回归法，求最佳线性回归模型
> lm.PMn<-lm(X6~X2+X3+X4+X5,data=PM)
> summary(lm.PMn)
> PMX<-cor(PM[1:5]) %多重共线性的判别
> kappa(PMX,exact=T)
> PM.glm1<-glm(X6~X2+X3+X4+X5,data=PM) %广义线性回归方程模型——二项式分布
> summary(PM.glm1)
> PM.glm1<-glm(X6~X2+X3+X4+X5,family=poisson,data=PM) 广义线性回归模型——泊松分布
> summary(PM.glm1)
> PM.glm1<-glm(X6~X2+X3+X4+X5,family=quasi,data=PM) 广义线性回归模型——quasi 分布
> summary(PM.glm1)
```

Matlab 软件程序——求解目标函数最优化

%Matlab 源程序，以总投入经费作为目标函数求最优解。

```
function f=optcon(x)
f=x(1)+x(2)+x(3)+x(4)+x(5)+0.005*(x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2+x(4)^2+x(5)^2)
;
```

%Matlab 命令窗口中输入约束条件。

```
>> A=[1,1,1,1,1;-1,-1,-1,-1,-1];
>> b=[280;-245];
>> x0=[0;0;0;0;0];
```

```

>> [x,f]=fmincon(@optcon,x0,A,b) %求目标函数最小值及对应最优解

%Matlab 源程序，以下降 PM2.5 浓度作为目标函数求最优解。
function f=optcon(x)
f=-35.49315+0.53680*x(1)+0.87685*x(2)+2.26555*x(3)-0.33387*x(4);
%Matlab 命令窗口中输入约束条件，五年各污染物累计浓度下降程度
>> A=[-0.53680,-0.87685,-2.26555,0.33387;0,0,0,1;0,0,0,-1];
>> b=[209.50685;0.15;-0.005];
>> x0=[0,0,0,0];
>> [x,f]=fmincon(@optcon,x0,A,b) %求目标函数的最小值及对应最优解
%第 1 年各污染物浓度下降程度，公差为 3
>> A=[-0.53680,-0.87685,-2.26555,0.33387;0,0,0,1;0,0,0,-1];
>> b=[7.50685;0.03;-0.001];
>> x0=[0,0,0,0];
>> [x,f]=fmincon(@optcon,x0,A,b)
%前 2 年各污染物浓度累计下降程度，公差为 3
>> A=[-0.53680,-0.87685,-2.26555,0.33387;0,0,0,1;0,0,0,-1];
>> b=[53.50685;0.03;-0.001];
>> x0=[0,0,0,0];
>> [x,f]=fmincon(@optcon,x0,A,b)
%前三年各污染物浓度累计下降程度，公差为 3
>> A=[-0.53680,-0.87685,-2.26555,0.33387;0,0,0,1;0,0,0,-1];
>> b=[102.50685;0.03;-0.001];
>> x0=[0,0,0,0];
>> [x,f]=fmincon(@optcon,x0,A,b)
%第 1 年到第 4 年各污染物浓度累计下降程度，公差为 3
>> A=[-0.53680,-0.87685,-2.26555,0.33387;0,0,0,1;0,0,0,-1];
>> b=[154.50685;0.03;-0.001];
>> x0=[0,0,0,0];
>> [x,f]=fmincon(@optcon,x0,A,b)

%第 1 年各污染物浓度下降程度，公差为 5
>> A=[-0.53680,-0.87685,-2.26555,0.33387;0,0,0,1;0,0,0,-1];
>> b=[3.50685;0.03;-0.001];
>> x0=[0,0,0,0];
>> [x,f]=fmincon(@optcon,x0,A,b)
%前 2 年各污染物浓度累计下降程度，公差为 5
>> A=[-0.53680,-0.87685,-2.26555,0.33387;0,0,0,1;0,0,0,-1];
>> b=[47.50685;0.03;-0.001];
>> x0=[0,0,0,0];
>> [x,f]=fmincon(@optcon,x0,A,b)
%前 3 年各污染物浓度累计下降程度，公差为 5
>> A=[-0.53680,-0.87685,-2.26555,0.33387;0,0,0,1;0,0,0,-1];
>> b=[96.50685;0.03;-0.001];
>> x0=[0,0,0,0];
>> [x,f]=fmincon(@optcon,x0,A,b)
%第 1 年到第 4 年各污染物浓度累计下降程度，公差为 5
>> A=[-0.53680,-0.87685,-2.26555,0.33387;0,0,0,1;0,0,0,-1];
>> b=[150.50685;0.03;-0.001];
>> x0=[0,0,0,0];
>> [x,f]=fmincon(@optcon,x0,A,b)

```