

参赛密码 _____
(由组委会填写)

“华为杯”第十三届全国研究生
数学建模竞赛

学 校	河海大学
<hr/>	
参赛队号	10294006
<hr/>	
队员姓名	1.余学佳
	2.张凤勇
	3.贾雪慧
<hr/>	

参赛密码 _____

(由组委会填写)



“华为杯”第十三届全国研究生 数学建模竞赛

题 目

多无人机协同任务规划

摘 要：

本文以最优化原理为理论基础，对多无人机协同任务的问题进行了研究，分别建立了基于虚拟点的改进 Hamilton 回路模型、动态规划模型、分步规划模型和针对远程雷达的分步优化模型，并对重要模型进行了验证和复杂性分析。

针对问题一，采用基于虚拟点的改进 Hamilton 回路模型。首先将该问题近似等价成一个寻找一组或多组无人机成像带宽行程最短问题，并保证每个目标点都能被带宽覆盖到。为求得无人机成像带宽在雷达探测区内的最短路线，可通过在雷达区外增加虚拟点，将此问题转化成多点多旅行商问题（MTSP），而后通过修改赋权矩阵中虚拟点的距离矩阵，可求得任意条线路的最佳路线，并从中选取最优结果。从而利用该模型分别计算出了加载 S-1 和 S-2 的无人机成像带宽线路为 1 条、2 条、3 条和 4 条对应的最短路线，发现采用 2 架加载 S-1 和 2 架加载 S-2 的 FY-1 型无人机相应的时间总和最短，分别为 6.155h、5.140h，并对其进行细部优化，将成像带宽线路转化为加载 S-1 和 S-2 的无人机实际航线，可求得在雷达探测区的最短时间总和分别为 5.752h、5.092h，则此次侦察任务的无人机滞留雷达探测区内的时间总和为 10.844h。

针对问题二，可以采用动态规划的模型。根据问题一的最佳飞行路线和 FY-1 型无人机架次，先采用分类规划，假设使用 1 架 FY-2 型无人机可以完成任务，再利用规划的路线计算航行时间，发现超出 FY-2 型无人机最大巡航时间；因此，至少需要 2 架 FY-2 型无人机才能随时保持与 4 架 FY-1 通信服务，在对两架 FY-2 型无人机进行航线规划时发现问题 1 中的载荷 S-2 的两架无人机航线

可以进行局部优化,使得两架 FY-2 型无人机的航线转弯更少,航行时间更短,最终两架 FY-2 型无人机的航线分别为基地 P01→A01→A02→A08→A09→A03→A04→A05→A06→P01 和 P07→A07→A10→P07。

针对问题三,采用分步规划模型。据分析应首先同时击毁所有目标群中的雷达再击毁剩余目标。以滞留雷达防御区时间总和最小为目标函数,根据约束条件,利用分步规划得出仅使用 D-1 型炸弹击毁 10 个雷达要比仅使用 D-1 型炸弹以及 D-1 型和 D-2 型炸弹混合使用更节省时间。据此,第一步仅使用 D-1 型炸弹击毁 10 个雷达,滞留雷达防御区时间总和为 4.660h;第二步对目标群 A01 和目标群 A02 使用 D-1 型炸弹击毁所有目标,同时使用 D-2 型炸弹击毁其余 8 个目标群,从而完成打击任务。最终,整个任务过程从第一架无人机进入雷达区到击毁完最后一个目标总耗时为 4.964h,共使用 FY-3 无人机 65 架、载荷 S-3 的 FY-1 型无人机 8 架,共消耗 D-1 型炸弹 270 枚、D-2 型炸弹 82 枚。

针对问题四,采用针对远程雷达的分步优化模型。从战略角度考虑,应首先击毁三部远程雷达,然后该问题就可以借鉴问题三的模型和部分成果。由于一开始仅能确定一部远程雷达的具体位置,而其余两部不的具体位置以及开启顺序未知。为此,我们从防御方角度布置远程雷达的最佳位置,即攻击方击毁远程雷达的最不利情况。在此情况下,分析比较采用 D-1 型和 D-2 型炸弹击毁 3 部远程雷达的两种方案,发现全部采用 D-1 型炸弹击毁三部远程雷达时无人机滞留雷达防御区的时间总和最小,为 4.231h;消灭所有目标的无人机滞留雷达防御区的时间总和为 8.891h,最终,整个任务过程从第一架无人机进入雷达区到击毁完最后一个目标总耗时为 6.231h,共使用 FY-3 无人机 71 架、载荷 S-3 的 FY-1 型无人机 8 架,共消耗 D-1 型炸弹 300 枚、D-2 型炸弹 82 枚。

针对问题五,通过对模型的精确性分析,发现采用的改进的改良圈算法的复杂度为 $O(n^5)$,大于改良圈算法的 $O(n^4)$ 。改进改良圈算法结果的精度小于穷举法,但优于改良圈算法。

关键词: 多无人机任务;虚拟点;改良圈算法;最佳路线;分步规划

目录

1	问题重述	- 4 -
1.1	问题背景	- 4 -
1.2	需要解决的问题	- 5 -
2	问题分析	- 6 -
2.1	问题 1 的分析	- 6 -
2.2	问题 2 的分析	- 8 -
2.3	问题 3 的分析	- 8 -
2.4	问题 4 的分析	- 8 -
3	模型假设	- 9 -
4	符号系统	- 9 -
5	问题一：基于虚拟点的改进 hamilton 回路模型	- 9 -
5.1	多点多旅行商问题（MTSP）	- 9 -
5.2	MTSP 转换 TSP 旅行商问题的方法	- 11 -
5.3	改进 Hamilton 回路模型的求解	- 12 -
5.3.1	改良圈算法	- 13 -
5.3.2	改进改良圈算法	- 13 -
5.4	最小生成树模型	- 14 -
5.4.1	最小生成树的 Prim 算法	- 15 -
5.5	问题求解	- 16 -
5.5.1	改进的改良圈算法	- 16 -
5.5.2	最小生成树算法	- 27 -
5.5.3	最终结果	- 30 -
6	问题二：多任务无人机通信规划模型	- 34 -
6.1	动态规划模型	- 34 -
6.2	模型二的建立与求解	- 34 -
7	问题三：分步规划模型	- 37 -
7.1	分步规划模型的准备	- 37 -
7.2	模型三的建立与求解	- 38 -
8	问题四：针对远程雷达的分步优化模型	- 44 -
9	问题五：模型分析	- 48 -
9.1	模型算法分析	- 48 -
9.2	无人机作战能力分析	- 48 -
10	模型推广	- 49 -
11	结论	- 49 -

1 问题重述

1.1 问题背景

某无人机作战部队现配属有 P01~P07 等 7 个无人机基地，各基地均配备一定数量的 FY 系列无人机。其中 FY-1 型无人机主要担任目标侦察和目标指示，FY-2 型无人机主要担任通信中继，FY-3 型无人机用于对地攻击。FY-1 型无人机的巡航飞行速度为 200km/h，最长巡航时间为 10h，巡航飞行高度为 1500m；FY-2 型、FY-3 型无人机的巡航飞行速度为 300km/h，最长巡航时间为 8h，巡航飞行高度为 5000m。受燃料限制，无人机在飞行过程中尽可能减少转弯、爬升、俯冲等机动动作，一般来说，机动时消耗的燃料是巡航的 2~4 倍。最小转弯半径 70m。

FY-1 型无人机可加载 S-1、S-2、S-3 三种载荷。其中载荷 S-1 系成像传感器，采用广域搜索模式对目标进行成像，传感器的成像带宽为 2km；载荷 S-2 系光学传感器，为达到一定的目标识别精度，对地面目标拍照时要求距目标的距离不超过 7.5km，可瞬时完成拍照任务；载荷 S-3 系目标指示器，为制导炸弹提供目标指示时要求距被攻击目标的距离不超过 15km。由于各种技术条件的限制，该系列无人机每次只能加载 S-1、S-2、S-3 三种载荷中的一种。为保证侦察效果，对每一个目标需安排 S-1、S-2 两种不同载荷各自至少侦察一次，两种不同载荷对同一目标的侦察间隔时间不超过 4 小时。

为保证执行侦察任务的无人机与地面控制中心的联系，需安排专门的 FY-2 型无人机担任通信中继任务，通信中继无人机与执行侦察任务的无人机的通信距离限定在 50km 范围内。通信中继无人机正常工作状态下可随时保持与地面控制中心的通信。

FY-3 型无人机可携带 6 枚 D-1 或 D-2 两种型号的炸弹。其中 D-1 炸弹系某种类型的“灵巧”炸弹，采用抛投方式对地攻击，即投放后炸弹以无人机投弹时的速度作抛物运动，当炸弹接近目标后，可主动寻的攻击待打击的目标，因此炸弹落点位于目标中心 100m 范围内可视为有效击中目标。D-2 型炸弹在激光制导模式下对地面目标进行攻击，其飞行速度为 200m/s，飞行方向总是指向目标。攻击同一目标的 D-2 型炸弹在整个飞行过程中需一架 FY-1 型无人机加载载荷 S-3 进行全程引导，直到命中目标。由于某些技术上的限制，携带 D-2 型炸弹的无人机在投掷炸弹时要求距目标 10km~30km，并且要求各制导炸弹的发射点到目标点连线的大地投影不交叉（以保证弹道不交叉）。为达到一定的毁伤效果，对每个目标（包括雷达站和远程搜索雷达）需成功投掷 10 枚 D-1 型炸弹，而对同一目标投掷 2 枚 D-2 型炸弹即可达到相同的毁伤效果。

多架该型无人机在同时执行任务时可按照一定的编队飞行，但空中飞行时两机相距要求 200m 以上。由于基地后勤技术保障的限制，同一基地的两架无人机起飞时间间隔和降落回收的时间间隔要求在 3 分钟以上。无人机执行完任务后需返回原基地。

根据任务要求，需完成侦察和打击的目标有 A01~A10 等 10 个目标群，每个目标群包含数量不等的地面目标，每个目标群均配属有雷达站各目标群配属雷达对 FY 型无人机的有效探测距离为 70km。

1.2 需要解决的问题

(1) 一旦有侦察无人机进入防御方某一目标群配属雷达探测范围，防御方 10 个目标群的配属雷达均开机对空警戒和搜索目标，并会采取相应对策，包括发射导弹对无人机进行摧毁等，因此侦察无人机滞留防御方雷达探测范围内时间越长，被其摧毁的可能性就越大。现需为 FY-1 型无人机完成 10 个目标群（共 68 个目标）的侦察任务拟制最佳的路线和无人机调度策略（包括每架无人机起飞基地、加载的载荷、起飞时间、航迹和侦察的目标），以保证侦察无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小。

(2) FY-1 型无人机对目标进行侦察时，须将侦察信息实时通过 FY-2 型无人机传回地面控制中心。鉴于 50km 通信距离的限制，需安排多架 FY-2 型无人机升空，以保证空中飞行的侦察无人机随时与 FY-2 型无人机的通信。FY-2 型无人机可同时与多架在其有效通信范围的侦察无人机通信并转发信息。为完成问题（1）的侦察任务，至少安排多少架次的 FY-2 型通信中继无人机。

(3) 所有 FY-1 型无人机现已完成侦察任务并返回基地，均可加载载荷 S-3 用于为制导炸弹提供目标指示。现要求在 7 个小时内（从第一架攻击无人机进入防御方雷达探测范围内起，到击毁完最后一个目标止）完成对 10 个目标群所有 68 个地面目标的火力打击任务，如何进行任务规划以保证攻击方的无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小？请给出具体的无人机任务规划结果（包括每架无人机飞行路线、FY-3 型无人机携带炸弹的具体清单和攻击的目标清单）。

(4) 由相关信息渠道获知在 A02、A05、A09 周边可能还配置有三部远程搜索雷达，该雷达对 FY 型无人机的有效作用距离是 200km。这三部雷达的工作模式是相继开机工作，即只有首先开机的雷达遭到攻击后才开启第二部雷达，同样只有第二部雷达被攻击后才开启第三部雷达。远程搜索雷达一旦开机工作，攻击方无人机群即可获知信号并锁定目标，而后安排距其最近的无人机对其摧毁。请基于防御方部署远程搜索雷达的情形重新考虑问题（3）。

(5) 对求解模型的算法的复杂度进行分析；并讨论如何有效地提高算法的

效率，以增强任务规划的时效性。基于构建的数学模型和对模型解算的结果，讨论哪些技术参数的提高将显著提升无人机的作战能力。

2 问题分析

多无人机协同作战中的任务规划从功能上可大致划分为系统资源分配、任务分配、航线规划、轨迹优化、武器投放规划等。资源分配将多无人机系统要执行的总体任务分解为一系列可由无人机单机/编队完成的基本任务，进而根据系统资源的总体情况提出执行各个基本任务的资源需求，并给出任务执行的大体时间窗口。任务分配根据系统内各无人机平台的载荷挂载情况与任务能力，确定各无人机平台要执行或参与的一个或多个基本任务并且给出具体执行时间。路径规划是指根据无人机平台特性、任务环境约束规则以及任务环境等因素为多架无人机规划制定出若干条完成任务的飞行航线，包括航路规划、侦察方式、载荷规划、链路规划、起飞点、降落点、飞行时长等要素，并满足无人机在空间和时间上的协调一致^[1-2]。轨迹优化在航线规划的基础上，进一步对无人机的飞行航线进行平滑和优化，从而得到无人机平台飞行控制系统能够有效跟踪的飞行轨迹。

在国外，很早就开始了无人机协同他任务作战方面的研究，与无人机路径规划相关的文献较多，用到的方法一般有 A*算法、Voronoi 图、Dijkstra(迪杰斯特拉)、蚁群算法、粒子群算法等等^[3-4]。这些算法在航迹规划的运用中各有所长，但是也普遍存在着一些缺点，如传统的数学计算方法结果精确，但对于模型要求严格，且随着问题规模的增大，计算时间和所需的存储空间也迅速变大；新兴的智能计算方法计算速度快，对模型要求不高，但是算法易停滞和陷入局部最小值，实际应用中一般会根据具体的问题来改进算法^[4]。

2.1 问题 1 的分析

问题 1 要求对 FY-1 型无人机完成 10 个目标群的侦察任务拟制最佳的路线和无人机调度策略，以使无人机滞留防御雷达有效探测范围内的时间总和最小，即所有参与侦察的无人机滞留防御雷达有效探测范围内的累计总和最小，无人机滞留两个及以上防御雷达有效范围内的时间仅计算一次。显然这是一个最优化问题。但涉及到的约束条件较多，具体罗列如下：

- (1) FY-1 型无人机完成 10 个目标群（共 68 个目标）的侦察任务；
- (2) 为保证侦察效果，对每一个目标需安排 S-1、S-2 两种不同荷载各自至少侦察一次，且两次不同荷载对同一目标的侦察间隔时间不超过 4h；
- (3) FY-1 型无人机每次只能加载 S-1、S-2、S-3 三种荷载中的一种；
- (4) FY-1 型无人机的最长巡航时间为 10h；

(5) 机动（如转弯、爬升、俯冲等）时消耗的燃料是巡航的 2~4 倍，最小转弯半径 70m；

(6) 载荷 S-1 系成像传感器的成像带宽为 2km， $OA > 2\text{km}$ ， $OB < 8\text{km}$ ，且成像固定在无人机的某一侧，飞行中不再调整；

(7) 为保证成像效果，一般要求载机作匀速直线运动；

(8) 载荷 S-2 系光学传感器要求距目标的距离不超过 7.5km；

(9) 空中飞行时两机相距要求 200km 以上；

(10) 同一基地的两架无人机起飞时间间隔和降落回收的时间间隔要求在 3 分钟以上；

(11) 无人机执行任务后需返回原基地。

为精简数学模型，提高求解算法的效率，增强任务规划的时效性。对于下列约束条件的苛刻性进行初步分析：如 FY-1 型无人机的最长巡航时间为 10h，其飞行速度为 200km/h，即最长巡航路径为 2000km，而无人机绕最雷达区最外围一圈返回基地只有 1500 km；最长最小转弯半径为 70m，本题中各目标之间的距离均为千米级以上，故转弯半径肯定满足，且转弯路程相对于无人机的巡航距离过小，增加的油耗可忽略；载荷 S-1 传感器的带宽限定要求加载 S-1 载荷的 FY-1 型无人机需要无人机与目标保持 2~8m 的水平投影距离，因此 FY-1 型无人机必须进入防御雷达的有效范围内，且必须对每一个目标群的目标进行近距离侦察工作，2km 的成像带宽在短时间内不进行调整；载荷 S-2 传感器要求距目标的距离不超过 7.5km 即载荷 S-2 传感器距目标的水平投影距离不超过 7.35km，所以加载 S-2 载荷的无人机经过某一目标群时可完成目标群所有目标的拍照任务，无需对每一个目标进行近距离拍照；由于无人机作匀速直线运动，累计时间总和最小可转化为无人机完成所有目标群的侦察任务所飞行的路程最短。

因此，问题 1 可转化为加载 S-1 载荷和 S-2 载荷的 FY-1 型无人机分别完成 10 个目标群的侦察任务并返回原基地，在保证所有无人机的单个巡航距离不超过 2000km 的情况下，所有无人机累计在防御雷达有效范围内飞行的最短距离。求出在防御雷达有效范围内的最短距离后再进行进一步优化，分配由哪个基地的无人机负责哪些目标的侦察任务再返回原基地，进一步规范每架无人机进入和离开防御雷达有效范围内的路线，以使无人机滞留防御雷达有效范围内的路线最短，如无人机离开时尽量绕开防御雷达的有效范围，同时确保满足空中飞行时两机相距 200km 以上和同一基地的两架无人机起飞时间间隔和降落回收的时间间隔在 3 分钟以上这两个条件。

由以上分析可知，本题可以转换成寻找一条或多条路线以保证 68 个目标点

都有无人机经过，并使整个雷达区内行程最短的无人机飞行路线规划问题，即点多多旅行商问题（MTSP）。

2.2 问题 2 的分析

对于问题 2 要安排 FY-2 型无人机的架次会受到问题 1 中加载 S-1 载荷和 S-2 载荷的 FY-1 型无人机飞行路线息息相关，因此在分析 FY-2 型无人机架次分配时，要充分利用 FY-1 型无人机的起飞时间的不同，使得负责目标侦察和指示的无人机能随时有 FY-2 型无人机在其周围 50Km 以内，从而保证执行侦察任务的 FY-1 型无人机在侦察目标时能随时保持通信。

2.3 问题 3 的分析

问题 3 需要 FY-3 型无人机在 7 小时内完成对 10 个目标群所有 68 个地面目标的火力打击任务。10 个目标群各有一个雷达站和若干个普通目标，如果能够先将各目标群的雷达站消灭，那么其后进入击毁的 FY-3 型无人机将不被雷达探测到。即攻击方无人机完成所有目标的火力打击任务期间被防御方雷达探测的时间只有消灭雷达站的 FY-3 型无人机滞留防御雷达有效探测范围的时间的累加。为尽可能减少从第一架攻击无人机进入防御雷达探测范围内到击毁完最后一个目标之间的时间以满足 7 小时的要求，可尽可能多的安排多架 FY-3 无人机同时出击，并同时进入防御雷达的探测范围。故可安排消灭 10 个目标群的雷达站的无人机同时进入圆形探测区域，而消灭其他目标的无人机当雷达被消灭后立即从各自负责的目标的防御雷达的探测范围的边缘进入，然后对目标进行攻击。

2.4 问题 4 的分析

问题 4 在问题 3 的基础上增加三部远程搜索雷达，该雷达对 FY 型无人机的有效距离是 200km。将在 A02、A05、A09 周边的三部远程搜索雷达分别命名为 A02_super、A05_super、A09_super。

问题 4 中关于 3 个远程雷达有以下 2 个数据不确定：①3 部远程雷达的具体位置；②3 部远程雷达的开机顺序。上述 2 个数据不确定，无法展开无人机火力打击任务的规划，所以我们从防御方的角度来推测远程雷达具体位置和开机顺序，防御方的最利条件，即攻击方的最不利条件。因此，每个远程搜索雷达应尽量满足一下条件：

- （1）每个远程搜索雷达尽可能覆盖更多的目标群；
- （2）每个远程搜索雷达需要在相应的 A02、A05、A09 周边；
- （3）每个远程搜索雷达需要远离附近的几个目标群，以增加无人机摧毁它的时间。

由于 A02_super、A05_super、A09_super 的有效作用距离较大，无人机在进行火力打击任务时极易被探测到，故首先考虑将三部远程搜索雷达击毁，其后和问题 3 完全相同。

3 模型假设

在数学建模的过程中，在不影响模型意义与计算精度的前提下，为了使模型简单明确，建立了如下假设：

- (1) FY-1 型无人机滞留防御雷达探测范围内仅考虑其被摧毁的可能性，不考虑其被摧毁；
- (2) 载荷 S-1 的 FY-1 型无人机在某个时间点只能侦察满足要求的 2km 带宽的目标点，但不同时间点侦察目标的 2km 带宽可以在 2~8km 之间移动；
- (3) 如果雷达处于开启状态时，负责击毁任务的无人机可以探测其位置，并将其摧毁；
- (4) 机动动作时间较短，故不考虑机动时多消耗的燃料；
- (5) 不考虑天气等突发情况对无人机、雷达工作的影响；
- (6) 假设炸弹击毁目标后目标瞬间摧毁。

4 符号系统

w_{ij} ：目标点间或目标群简化点间的距离赋权矩阵；

B ：虚拟点之间的距离赋权矩阵；

G ：图论或规划中的有向区域；

T_1 ：加载 S-1 的 FY-1 型无人机在雷达探测区的航行时间总和；

T_2 ：加载 S-2 的 FY-1 型无人机在雷达探测区的航行时间总和；

r ：无人机在转弯处的转头半径；

θ ：无人机在转弯处的转角；

x_{mnj} 或 x_{mnk} ：规划中决策变量。

5 问题一：基于虚拟点的改进 hamilton 回路模型

5.1 多点多旅行商问题 (MTSP)

规划无人机最佳侦察路径的问题，通过在雷达区外增加虚拟点，可以将其转换成一个寻找多组线路保证每个目标点或者目标群简化点都有无人机经过，并使得无人机在雷达区内行程最短的路线规划问题，即多点多旅行商问题

(MTSP)。以加载 S-1 载荷的 FY-1 型无人机完成侦察任务为例进行说明：

总共有 68 个目标点需要侦察，按编号记为 $v(i)$ ， $i=1, \dots, 68$ ，点 $v(i)$ 和点 $v(j)$ 两点之间的距离可以记为： $w(v(i), v(j))$ 。可以验证任意两点之间的距离大于 S1 成像传感器的带宽 2km。即：

$$\min \{w(v(i), v(j))\} \geq 2\text{km}, i \neq j^{*1}$$

所以无人机路线规划时可以将带宽的航迹简化成一条没有宽度的直线。

假定共安排 k 架无人机完成整个侦察任务，那么无人机在雷达区的飞行路线为 k 组起点和终点都在雷达边界路线，如图 5-1。如果能够通过某种方法将这些起点和终点一一对应连接起来，那么该问题就是一个多旅行商问题。为此，考虑在雷达区外增加 k 个点，将这些起点和终点连接起来，如图 5-2。由于雷达区域外的无人机不被探测，所以该点到边界点的距离权重为 0，即该点为赋权有向图中的一个虚拟点，故将其命名为虚拟点。这样就通过增加虚拟点将其转换成了一个多出发点多旅行商问题（MTSP）^[5]。

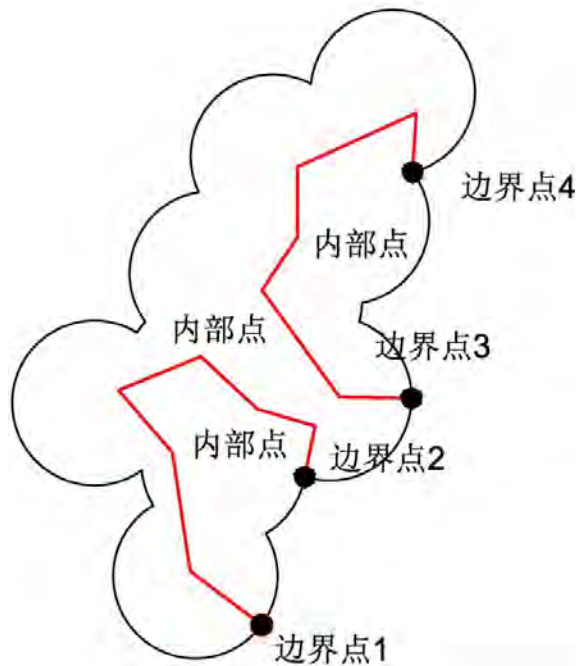


图 5-1 无虚拟点雷达区示意图

¹ 实际上有且只有一个 A0801 和 A0802 的距离小于 2km，等于 1.41km。考虑使模型具有普遍性，易于推广，在航迹规划中暂不考虑，该处在轨迹优化中另行考虑。

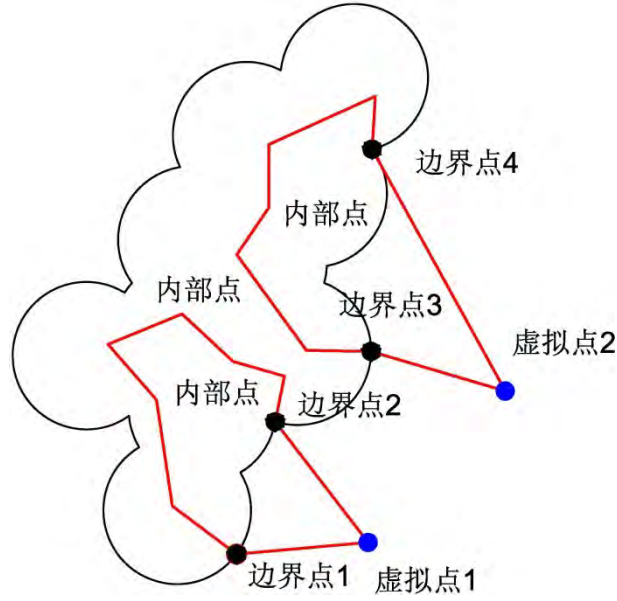


图 5-2 加虚拟点雷达区示意图

5.2 MTSP 转换 TSP 旅行商问题的方法

TSP 由于 MTSP 问题没有直接的求解算法，而旅行商问题（TSP）有较多的求解算法。我们想办法将上述 MTSP 转换 TSP 问题。

假设包含虚拟点在内的 $68+k$ 个点的 TSP 问题的赋权图为 $G(V, E)$ ，则有

$$G(V, E) = \begin{bmatrix} W & A \\ A^T & B \end{bmatrix}$$

式中 W 是个一个 68×68 的方阵，表示内部 68 个目标之间的距离 $w_{i,j} = w(v(i), v(j)), i, j = 1, \dots, 68$ 。 A 是个 $68 \times k$ 的矩阵，表示 k 个虚拟点和 68 个目标之间的距离，即 68 个目标点到边界的最小值，可以事先计算得到。
 $a_{i,j} = w(v(i), v(j)), i = 1, \dots, 68, j = 69, \dots, 68+k$ 。 B 是个 $k \times k$ 的方阵表示虚拟点之间的距离：

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

通过修改 $G(V, E)$ 中虚拟点距离矩阵 B 中除对角线外元素为一个远远大于 W 中的元素的值，如 10^5 ，即可以得到前述 MTSP 问题的有向图。

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 10^5 & \dots & 10^5 \\ 10^5 & \dots & 10^5 & \dots \\ \dots & 10^5 & 0 & 10^5 \\ 10^5 & \dots & 10^5 & 0 \end{bmatrix}$$

以 $k = 2$ 为例说明，此时

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 10^5 \\ 10^5 & 0 \end{bmatrix}$$

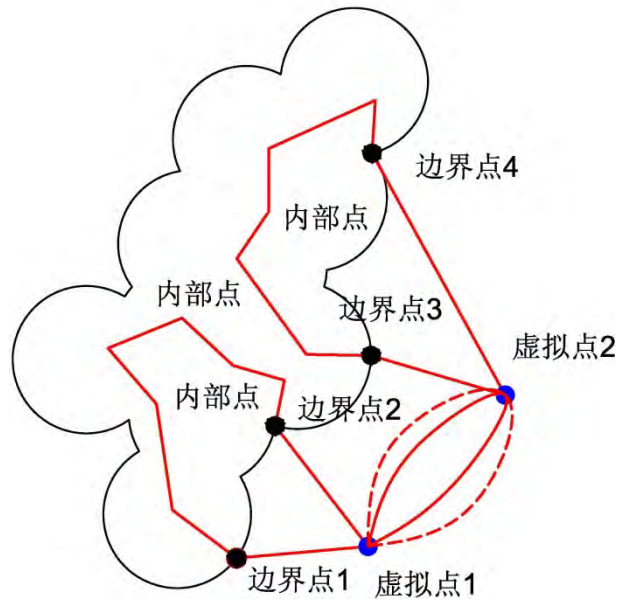


图 5-3 TSP 问题示意图

式中 2 个 0 代表图 5-1 中两个虚拟点之间的实线，表示能将几个相互分离的闭合圈通过虚拟点连成一个闭合圈。而 2 个 10^5 代表两个虚拟点之间的虚线，即表示 2 个虚拟点之间有且只有两条路径连接。如此可以保证虚拟点之间只来回一次，防止了虚拟点不和边界点直接相连情况（此处和采用最邻近算法求解有关）。

至此，MTSP 问题向 TSP 问题的转换就完成了。我们称此为基于虚拟点的改进 Hamilton 回路模型。

5.3 改进 Hamilton 回路模型的求解

众所周知，TSP 问题就是找一个具有最小权的 Hamilton 回路（称为最优 Hamilton 回路）。很遗憾，这属于 NP-Complete 问题，目前的研究仍没有一个求解最优 Hamilton 回路的有效算法，但存在着多种近似算法：如分支定界法、

改良圈算法、模拟退火算法、遗传算法、贪心算法、人工神经网络等方法^[6]。

5.3.1 改良圈算法

在此，我们采用一个较好的近似算法：改良圈算法，以获得“相当好”（但不一定最优）的解。

下面给出求解近似最优 Hamilton 圈的改良圈算法基本思路：

Step1 构造一个图 $G(V, E)$ ，其中 V 为各顶点矩阵， E 为两两景点间权值矩阵。任意选定一点 v_0 作为起点，在图内搜索与 v_0 直接相连且权值最小的边 e_1 ，同时确定另一端点 v_1 ，即得一条路径 v_0v_1 。

Step2 假设已选出路径为 $v_0v_1\cdots v_i$ ，则下一个顶点选取方法为搜索与 v_i 最邻近的 v_{i+1} 点，从而增加路径为 $v_0v_1\cdots v_iv_{i+1}$ 。

Step3 计数部分，若 $i+1 < n-1$ ，则用 i 代替 $i+1$ ，重复 Step2；否则，即说明已经到达所有顶点，可进行对起点 v_0 的返回，停止程序运行。

上述最邻近算法得到近似最优的 Hamilton 圈最大的问题为一般不能得到最优解，需对此方法进行改良，称为改良圈算法^[7]。

设 $C = v_1v_2\cdots v_nv_1$ 为图 G 的一个 Hamilton 圈，且圈内均满足 $1 < i+1 < j < n$ 的 i, j 可进行改良算法的计算：在 C 搜索在 $i \neq j$ 时使得 $v_iv_j \in E(G)$ ， $v_{i+1}v_{j+1} \in E(G)$ 且存在：

$$e_{v_iv_j} + e_{v_{i+1}v_{j+1}} < e_{v_iv_{i+1}} + e_{v_jv_{j+1}}$$

则可建新改良圈：

$$C' = v_1v_2\cdots v_iv_j\cdots v_{i+1}v_{j+1}\cdots v_nv_1$$

同理，用 C' 代替 C 重复上一步骤，直至各点均历经。

5.3.2 改进改良圈算法

改良圈算法在相比原输入序列的情况下可以得到适当的路径优化，但经常无法第一次即得出最优解，需要多次改变初始数组顺序进行最小值筛选。因此，需考虑对该改良圈算法进行优化，基于上述讨论过程可知，改良圈算法为基于初始给定序列顺序圈附近进行优化，也正是造成其初值敏感性强的主要原因，因此可将经历过一次改良结果的数据重新传入程序中，并赋值为新改良过程的初值，并进行循环处理。具体步骤如下：

Step1 设初始 Hamilton 圈为 $C = v_1 v_2 \dots v_n v_1$ ，调用改良圈算法进行一次改良得改良圈为 $C_1 = v_l v_m \dots v_k v_l$ ，且 $1 \leq l, m, k \leq n$ ， $l \neq m \neq k$ 。并记录此时 Hamilton 圈权值和为 d_1 。

Step2 将 C_1 取代 Step1 中初始输入圈 C ，进行再次改良圈运算，得到改良圈为 $C_2 = v_{\dot{l}} v_{\dot{m}} \dots v_{\dot{k}} v_{\dot{l}}$ ，且 $\dot{l}, \dot{m}, \dot{k} \leq n$ ， $\dot{l} \neq \dot{m} \neq \dot{k}$ 。并记录此时 Hamilton 圈权值和为 d_2 。

Step3 ξ 为预设精度值，进行精度分析：

$$\begin{cases} d_1 - d_2 < \xi, \text{ 显示数据并退出} \\ d_1 - d_2 \geq \xi, C = C_2 \text{ 并跳至 Step2} \end{cases}$$

若 $d_1 - d_2 < \xi$ ，即所得 Hamilton 圈权值和以满足精度要求即及已达到最优解，则显示数据，退出算法；

否则，将 C_2 取代 Step1 中初始输入圈 C ，在跳至 Step1 进行反复迭代，直至满足精度要求后退出算法。

此算法将每次优化排序作为初始排列情况进行再优化，不断寻找趋于最小权值和的 Hamilton 圈，具有快速收敛的优点，其收敛速度与初始 Hamilton 圈权值和大小有关⁸。

将上述算法写成 matlab 程序，代码见附件 1（包括 $k=1、2、3、4$ 四种情况）。

5.4 最小生成树模型

为验证改进的改良圈算法的正确性，我们采用最小生成树模型求解本问题。

在无向图 G 中，表示任意两点之间的边的大小，如果无向图 G 存在着权值之和最小即最小的生成树 T ，那么 T 就是 G 的最小生成树 (minimum spanning tree, MST)。如图 5- 所示为带权连通图和最小生成树。现实的问题都会借助最小生成树作为分析工具。一个典型例子就是旅行商问题的应用，这类问题就是通过找最小生成树来构造最优的解结构。

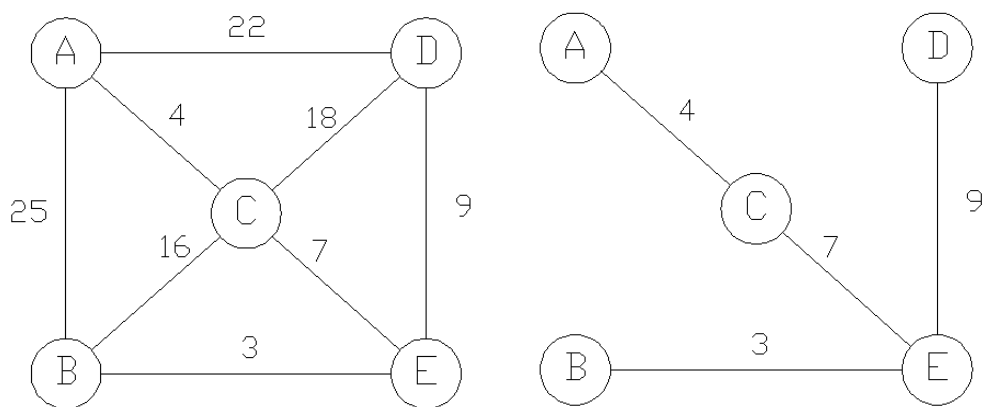


图 5-4 带权连通图和最小生成树

在连通无向图中，其生成树的一个特性就是该生成树必须包含了该图的所有项点和比顶点数少一的边数。因此，实际在寻找最优生成树的过程中，应当遵循以下几个规定：首先，最小生成树的边只存在于连通无向图；其次，最优生成树必须且仅能有连通无向图的所有顶点，顶点之间用点数减 1 的边数连通；此外，根据树的定义，不存在回路的最小生成树。

至今，最小生成树的解决办法主要还是借助于 Prim 和 Kruskal 这两种算法，其作用对象和范围随问题域的规模变化，但是它们都使用了一个重要的性质，称为生成树性质。在连通带权无向图 G 中，可以这样描述 MST：在 G 中，表示顶点到的边的大小，是真子集 V' 的元素 v_j 不是真子集 V' 的元素，若最小，那么这样的最小权值的边一定存在于最小生成树。

5.4.1 最小生成树的 Prim 算法

如下是 Prim 算法过程：

步骤 1：参数初始化：初始阶段，TV 点集只包含一个顶点 u_0 ，TE 边集是空集，后续操作会将满足条件的顶点和边分别加入到 TV 和 TE。

步骤 2：从 E 中找到符合条件的边：是 TV 的元素，是 $V-TV$ 的元素，且最小。之后，将不在 TV 中的点加入其中，并把边加入 TE，如此寻找出所有满足条件的边。

步骤 3：判断点集 TV 和点集 V 是否相等，若是，则结束算法，否则继续执行步骤 2，直到最小生成树构造完全为止。

由于 Prim 算法实现过程中会不断的得到最新的边加入最小生成树的边集 TE 中，因此这里定义一个 mstEdge 数组来存储表示最小生成树的边，mstEdge 数组的长度为 $n-1$ 。mstEdge 数组的元素表示的最小权的边，其中，是 TV 的元素，是 $V-TV$ 的元素。

Prim 算法构造最小生成树：开始时，j 值为空，且其区间是 $[0, n-1]$ 。算法开始阶段，从 mstEdge 数组中找出 $w(e)$ 最小的边和 mstEdge 数组的第 j 个元素

交换，并且将那么这第 j 个元素加入到边集 TE 中相应的顶点加入点集 TV ，需要说明的是，刚加入 TV 的顶点在这之前不是 TV 的元素；接着将 $mstEdge$ 数组根据是否在边集 TE 中分成两部分，0 到 j 个元素表示这些边已经在 TE ，剩下的一部分也就是从第 $j+1$ 个元素到数组结束部分表示边未被访问。

之后，需要对从 $j+1$ 个元素开始的边进行调整，使得 $mstEdge$ 数组剩下的部分元素所存放的边满足最小生成树的条件，即最小，包含于 TV ，包含于 $V-TV$ 。重复此过程，得到 $mstEdge$ 数组。

从 Prim 算法实现过程来看，Prim 算法利用了内外层的循环执行，其算法复杂度为 $O(n^2)$ ，可看出它只是顶点的函数，所以 Prim 算法适用于边复杂的图求解最小生成树。

5.5 问题求解

对于问题 1，由于载荷 S-1 的 FY-1 型无人机可以侦察 2km 带宽的目标区域，因此在无人机航行过程中可以等价为以宽为 2km 的条带向前行进，直至将所有的目标点侦察完；同理，对于载荷 S-2 的 FY-1 型无人机由于其要求拍照时距离目标不超过 7.5km，飞行高度为 1.5km，所以水平面投影的距离为 7.35km，因此此种无人机航行过程中可以等价为以宽为 14.6km 的条带向前行进。接下来用改进改良圈算法和最小生成树算法分别进行求解，并对两种模型的计算结果进行分析，从而求出最优解。

5.5.1 改进的改良圈算法

(1) 加载 S-1 载荷的 FY-1 型无人机

对加载 S-1 载荷的 FY-1 型无人机的路线进行规划时，根据自编的改进改良圈算法运用 MATLAB 软件求出分别采用 i ($i=1\sim 4$) 架无人机进行侦察任务的最短路线，再比较得到 4 种方法的最短路线同时得出采用几架无人机进行侦察任务。

根据自编的算法需将 10 个目标群 68 个目标进行依次编号，并列出从每个目标离开防御雷达探测范围的最近距离，具体见表 5-1。

表 5-1 68 个目标的编号及目标点据雷达边界的最短距离

目标	A0101	A0102	A0103	A0104	A0105	A0106	A0107	A0108
编号	1	2	3	4	5	6	7	8
距离 (km)	70	62.7890	53.5988	51.157	52.6239	50.8173	53.6418	51.974
目标	A0109	A0110	A0201	A0202	A0203	A0204	A0205	A0206
编号	9	10	11	12	13	14	15	16
距离	51.504	41.1556	70	63.5759	74.2584	71.3344	66.228	78.7684
目标	A0207	A0208	A0209	A0301	A0302	A0303	A0304	A0305
编号	17	18	19	20	21	22	23	24
距离	57.6905	65.8988	81.3172	70	70.216	74.3859	70.5267	64.4493
目标	A0401	A0402	A0403	A0404	A0405	A0406	A0407	A0408
编号	25	26	27	28	29	30	31	32
距离	70	67.3805	65.2955	67.5061	71.888	72.6148	67.8123	70.6773
目标	A0409	A0410	A0501	A0502	A0503	A0504	A0505	A0506
编号	33	34	35	36	37	38	39	40
距离	76.6423	71.0397	70	60.637	60.624	67.6055	64.7059	67.6996
目标	A0507	A0601	A0602	A0603	A0604	A0605	A0606	A0701
编号	41	42	43	44	45	46	47	48
距离	66.5501	70	61.9377	62.6406	62.463	58.7941	59.671	70
目标	A0702	A0703	A0704	A0705	A0706	A0801	A0802	A0803
编号	49	50	51	52	53	54	55	56
距离	67.7639	67.482	65.8722	67.2577	64.0301	70	68.6702	66.1593
目标	A0804	A0805	A0901	A0902	A0903	A0904	A0905	A1001
编号	57	58	59	60	61	62	63	64
距离	66.9355	70.9003	70	68.0269	66.0555	63.9173	63.4899	70
目标	A1002	A1003	A1004	A1005				
编号	65	66	67	68				
距离	72.0898	68.3277	70.1915	66.6087				

先求出无人机从侦察第一个目标开始到最后一个目标侦察结束的最短路线，然后以此为基础规划无人机进入和离开防御雷达探测范围的路线，在保证无人机在最长巡航时间内完成整个巡航任务并回到原基地的情况下，离开时可尽量绕开防御雷达的探测范围，因此应选择进入和离开都相对较近的基地的无人机完成侦察任务。具体计算结果见图 5-5~图 5-8 及表 5-2。

图中 A1~A10 表示 10 个目标群，黑色圆圈表示每个目标群的雷达范围；P1~P7 表示无人机基地，绿色圆圈表示配备载荷 S-1 传感器的基地，白色圆圈表示不配备载荷 S-1 传感器的基地；红色折线表示无人机内部飞行路线。

图 5-5 中，从基地 P07 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机从目标群 A06 的防御雷达的探测范围的右下方进入，沿红色折线飞行并进行侦察任务，最后从目标群 A07 防御雷达的探测范围的下方离开，绕目标群 A07 和 A06 的防御雷达的探测范围的边缘离开回到基地 P07，并保证飞行路线较短。经测量 1 架加载 S-1 载荷的无人机的总巡航路线不超过 2000km，即不超过最长巡航时间 10h。

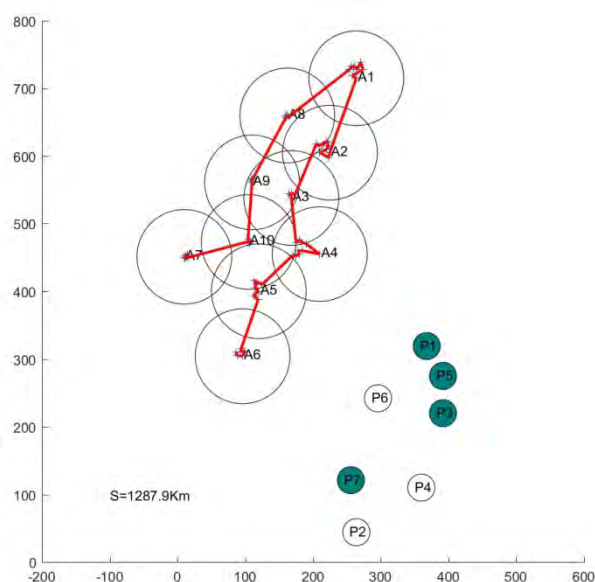


图 5-5 1 架加载 S-1 载荷的无人机的内部飞行路线

图 5-6 中，从基地 P07 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机进入，从目标群 A07 的防御雷达的探测范围的左下方进入，沿红色折线飞行并进行侦察任务，最后从目标群 A10 防御雷达的探测范围的左上方离开，绕目标群 A07 和 A06 的防御雷达的探测范围的边缘离开回到基地 P07，并保证飞行路线较短；从基地 P01 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机，从目标群 A01 的防御雷达的探测范围的右下方进入，沿红色折线飞行并进行侦察任务，最后从目标群 A06 的防御雷达的探测范围的右侧回到基地 P01，并保证飞行路线较短；经测量 2 架加载 S-1 载荷的无人机的总巡航路线均不超过 2000km，即不超过最长巡航时间 10h。

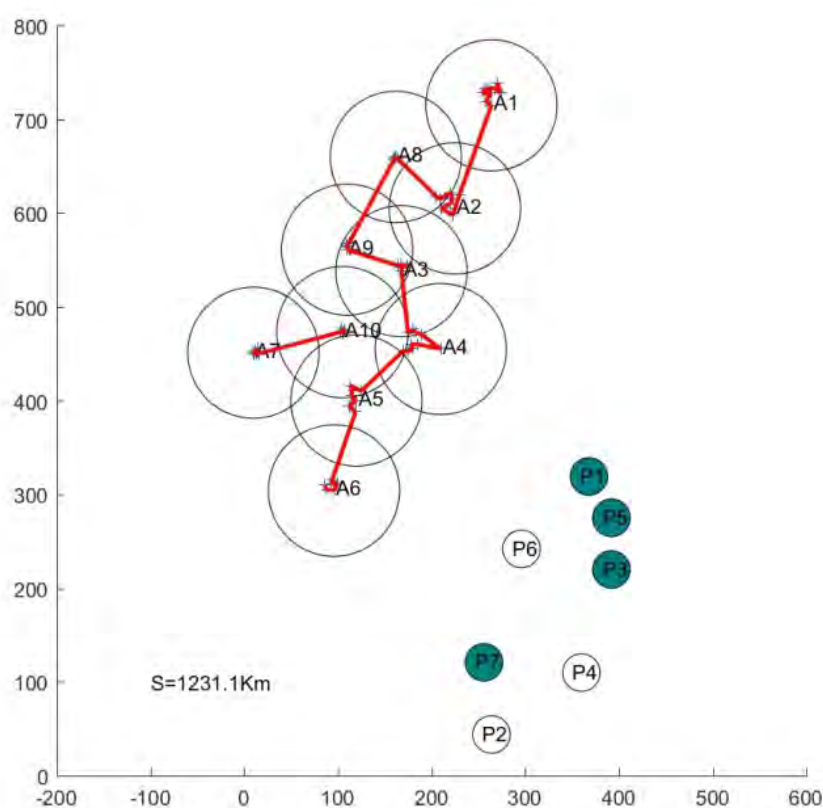


图 5-6 2 架加载 S-1 载荷的无人机的内部飞行路线

图 5-7 中，从基地 P07 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机从目标群 A07 防御雷达的探测范围的左下方进入，沿红色折线飞行并进行侦察任务，最后从目标群 A03 的防御雷达的探测范围的右下方离开，绕目标群 A04 的防御雷达的探测范围的右下方离开回到基地 P07，并保证飞行路线较短；从基地 3 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机从目标群 A04 防御雷达的探测范围的右下方进入，沿红色折线飞行并进行侦察任务，最后从目标群 A06 的防御雷达的探测范围的右下方离开回到基地 3，并保证飞行路线较短；从基地 P01 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机从目标群 A01 防御雷达的探测范围的右下方进入，沿红色折线飞行并进行侦察任务，最后从目标群 A08 的防御雷达的探测范围的上方离开，绕目标群 A08、A01 的防御雷达的探测范围的边缘回到基地 P01，并保证飞行路线较短；经测量 3 架加载 S-1 载荷的无人机的总巡航路线均不超过 2000km，即不超过最长巡航时间 10h。

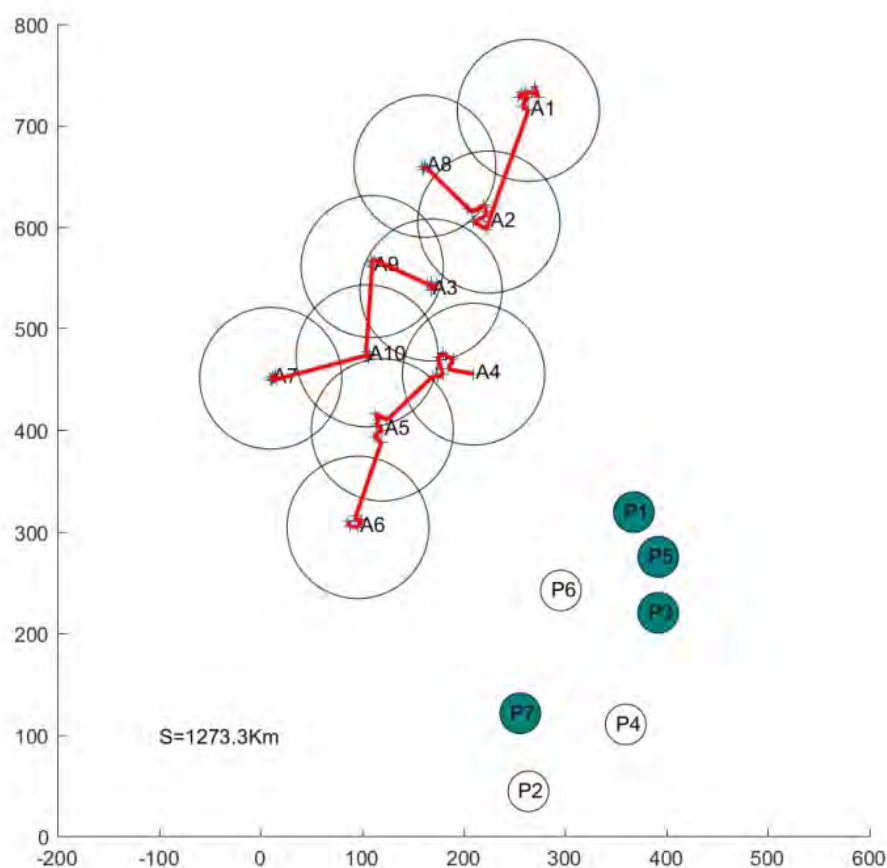


图 5-7 3 架加载 S-1 载荷的无人机的内部飞行路线

图 5-8 中，从基地 P07 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机从目标群 A06 防御雷达的探测范围的右下方进入，完成目标群 A06 的侦察任务后，直接从目标群 A06 防御雷达的探测范围的右下方离开回到基地 P07，并保证飞行路线较短；从基地 P03 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机从目标群 A04 防御雷达的探测范围的右下方进入，沿红色折线飞行并进行侦察任务，最后从目标群 A07 的防御雷达的探测范围的左下方离开，绕目标群 A06 的防御雷达的探测范围的边缘回到基地 P03，并保证飞行路线较短；从基地 P05 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机从目标群 A03 防御雷达的探测范围的右下方进入，沿红色折线飞行并进行侦察任务，最后从目标群 A09 的防御雷达的探测范围的上方离开，绕目标群 A08、A01 的防御雷达的探测范围的边缘回到基地 P05，并保证飞行路线较短；从基地 P01 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机从目标群 A01 防御雷达的探测范围的右下方进入，沿红色折线飞行并进行侦察任务，最后从目标群 A08 的防御雷达的探测范围的上方离开，绕目标群 A08、A01 的防御雷达的探测范围的边缘回到基地 P01，并保证飞行路线较短；经测量 4 架加载 S-1 载荷的无人机的总巡航路线均不超过 2000km，即不超过最长巡航时间 10h。

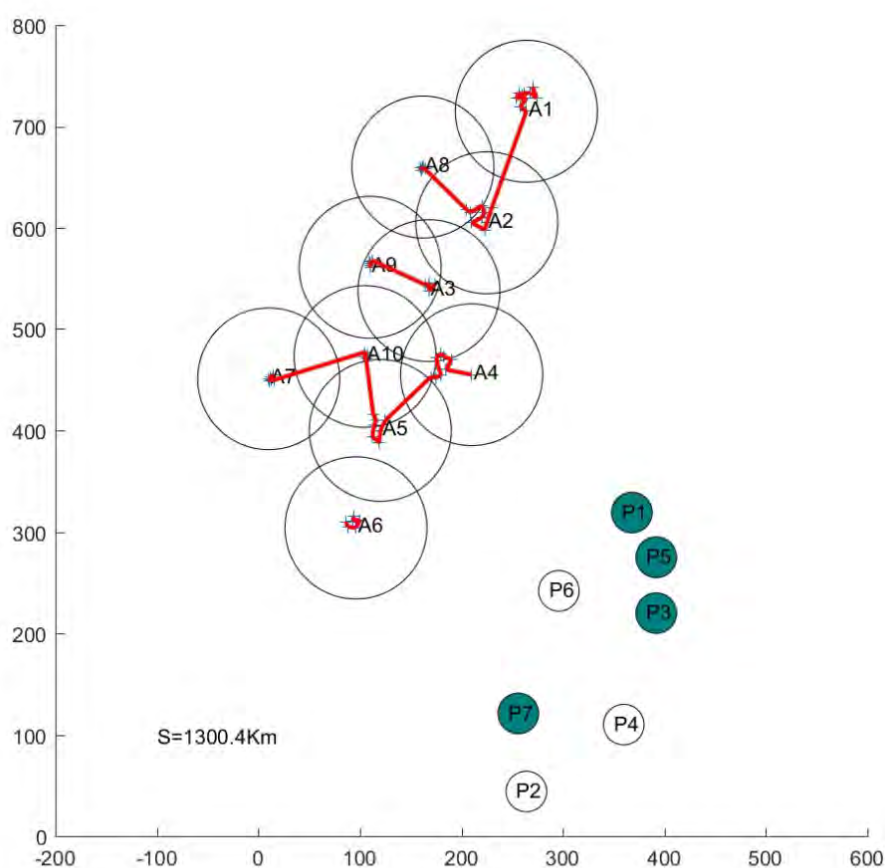


图 5-8 4 架加载 S-1 载荷的无人机的内部飞行路线

表 5-2 S-1 载荷下 4 种情况的初步优化成果表

无人机架数	雷达区内航程总和最小值 (km)
1 架无人机	1287.9
2 架无人机	1231.1
3 架无人机	1273.3
4 架无人机	1300.4

由表 5-2 可知，采用 2 架无人机可使加载 S-1 载荷的无人机从侦察第一个目标开始到最后一个目标侦察结束的路线最短为 1231.1km，对应时间为 6.156h，最短路线为：基地 P01→1→2→4→5→6→7→8→9→3→10→46→43→42→44→45→47→36→37→35→39→40→41→38→28→27→26→30→29→25→31→32→34→33→20→21→24→23→22→59→60→61→62→63→57→56→55→54→58→19→16→18→15→14→13→12→11→17→基地 P01，基地 P07→68→67→65→64→66→51→50→49→48→52→53→基地 P07。

(2) 加载 S-2 载荷的 FY-1 型无人机

对加载 S-2 载荷的 FY-1 型无人机的路线进行规划时，由于其距目标的距离不超过 7.5km 即可完成对地面目标的照相任务，故加载 S-2 载荷的 FY-1 型无人机飞行时可瞬时拍照的水平投影范围是宽为 14.7km，长为无人机飞行路线长度

的矩形区域，而每个目标群的目标之间的距离除个别目标外均远小 14.7km，故无人机飞行时可同时对多个目标进行拍照任务。因此，可以通过 CAD 软件首先规划目标群内部的线路，实现对目标群到点的简化，简化点的具体做法：单独取出每个目标群，对每个目标群的目标点分别以 14.7km 为直径画圆，要满足侦察到每个目标的前提下保证路径最短，所以所走的路线要尽可能地经过圆的切线或者各圆相交的公共区域，从而可以根据各个目标群点的位置分别规划代表点的位置，以目标群 A05 为例，见图 5-9，其中要侦察到所有目标点只需无人机航线经过图中的核心区域 1 和核心区域 2，所以此目标群可以等效为两个点。将 68 个简化成 15 个目标点如图 5-10(图中蓝点中心表示简化点的位置)，15 个点准确的坐标见表 5-3。如此，就可以套用 S-1 载荷的模型，得到简化的 15 个点的 S-2 载荷的模型。

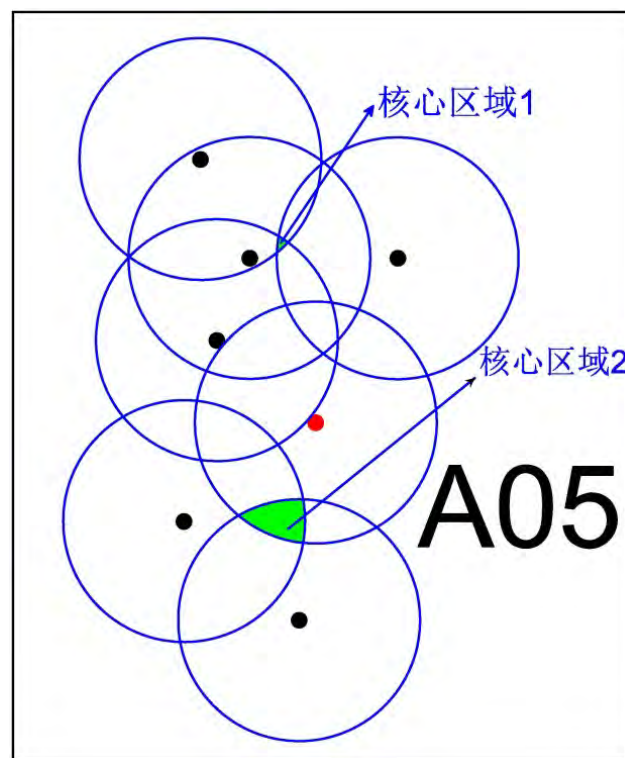


图 5-9 A05 目标群简化过程示意图

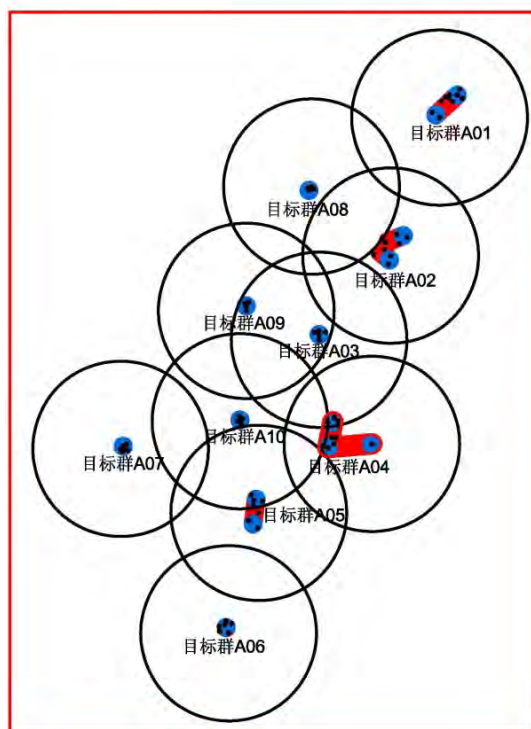


图 5-10 15 个点的简化模型

表 5-3 目标的编号、坐标及从目标点据雷达边界的最短距离

目标群	编号	X 坐标	Y 坐标	据雷达边界最短距离
A01	1	261	717	66.3944
	2	278	733	47.1965
A02	3	224	601.5	52.8264
	4	235	621	66.766
A03	5	168	542	70.216
A04	6	210	455	70
	7	175	452	65.2955
	8	179	472.5	74.0276
A05	9	117.9624	410.9869	69.8433
	10	115.5	391	61.7501
A06	11	94	308.5	65.1153
A07	12	12	453	67.2577
A08	13	160	657	66.9355
A09	14	110	565	66.0611
A10	15	105	474	68.6809

对该 15 个简化点运用改进改良圈算法求出分别采用 i ($i=1\sim 4$) 架无人机进行侦察任务的最短路线，再比较得到 4 种方法的最短路线同时得出采用几架无人机进行侦察任务。原理同对加载 S-1 载荷的 FY-1 型无人机的路线进行规划时相同，具体计算结果见图 5-11~5-14 及表 5-4。

图 5-11 中,从基地 P07 派出 1 架加载 S-2 载荷的无人机从目标群 A06 的防御雷达的探测范围的右下方进入,沿红色折线飞行并进行侦察任务,最后从目标群 A07 防御雷达的探测范围的下方离开,绕目标群 A07 和 A06 的防御雷达的探测范围的边缘离开回到基地 P07,并保证飞行路线较短。经测量 1 架加载 S-2 载荷的无人机的总巡航路线不超过 2000km,即不超过最长巡航时间 10h。

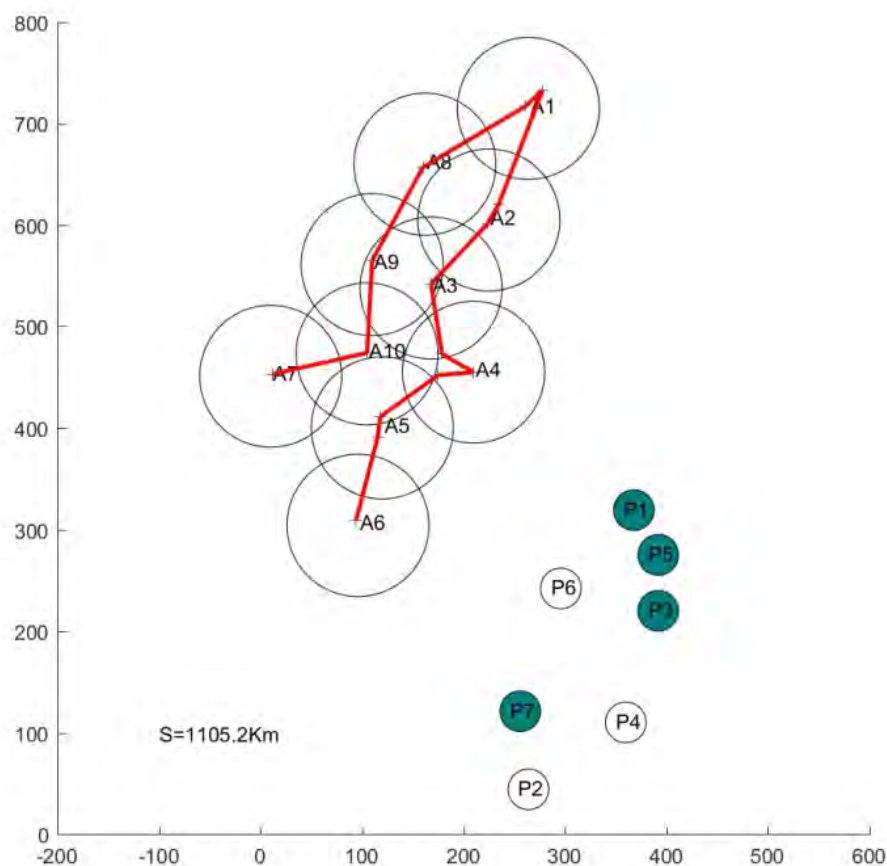


图 5- 11 1 架加载 S-2 载荷的无人机的内部飞行路线

图 5-12 中,从基地 P01 派出 1 架加载 S-2 载荷的无人机从目标群 A06 的防御雷达的探测范围的右下方进入,沿红色折线飞行并进行侦察任务,最后从目标群 A01 防御雷达的探测范围的右下方离开回到基地 P01,并保证飞行路线较短;从基地 P07 派出 1 架加载 S-2 载荷的无人机从绕目标群 A06 的防御雷达的探测范围的边缘从目标群 A07 的防御雷达的探测范围的左下方进入,完成侦察任务后从目标群 A07 防御雷达的探测范围的左下方绕目标群 A06 的边缘离开回到基地 P07,并保证飞行路线较短,经测量 02 架加载 S-2 载荷的无人机的总巡航路线均不超过 2000km,即不超过最长巡航时间 10h。

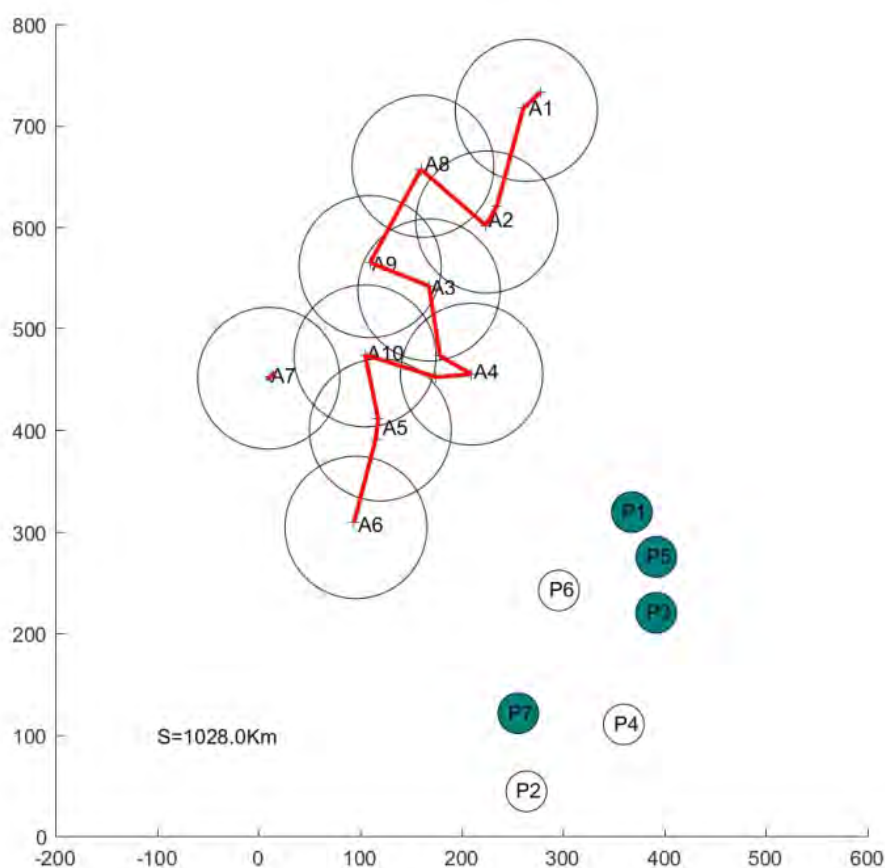


图 5-12 2 架加载 S-2 载荷的无人机的内部飞行路线

图 5-13 中,从基地 P07 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机从目标群 A07 防御雷达的探测范围的左下方进入,沿红色折线飞行并进行侦察任务,最后从目标群 A09 的防御雷达的探测范围的左侧离开,绕目标群 A07、A06 的防御雷达的探测范围的边缘离开回到基地 P07,并保证飞行路线较短;从基地 P03 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机从目标群 A06 防御雷达的探测范围的右下方进入,沿红色折线飞行并进行侦察任务,最后从目标群 A04 的防御雷达的探测范围的右下方离开回到基地 P03,并保证飞行路线较短;从基地 P01 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机从目标群 A01 防御雷达的探测范围的右下方进入,沿红色折线飞行并进行侦察任务,最后从目标群 A08 的防御雷达的探测范围的上方离开,绕目标群 A08、A01 的防御雷达的探测范围的边缘回到基地 P01,并保证飞行路线较短;经测量 3 架加载 S-1 载荷的无人机的总巡航路线均不超过 2000km,即不超过最长巡航时间 10h。

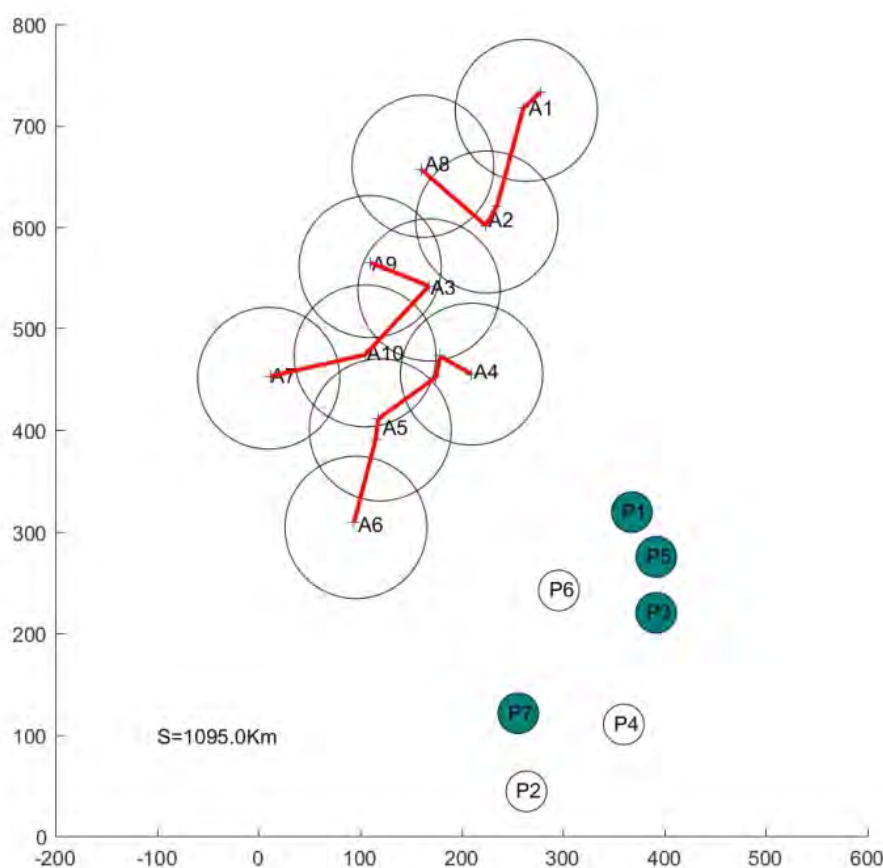


图 5-13 3 架加载 S-2 载荷的无人机的内部飞行路线

图 5-14 中,从基地 P07 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机绕目标群 A06 的防御雷达的探测范围的边缘,从目标群 A07 防御雷达的探测范围的左下方进入,完成目标群 A07 的侦察任务后直接从目标群 A07 防御雷达的探测范围的左下方离开回到基地 P07,并保证飞行路线较短;从基地 P03 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机从目标群 A06 的防御雷达的探测范围的右下方进入,沿红色折线飞行并进行侦察任务,最后从目标群 A04 的防御雷达的探测范围的右下方离开直接回到基地 P03,并保证飞行路线较短;从基地 1 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机绕目标群 A01、A08 的防御雷达的探测范围的边缘,从目标群 A08 防御雷达的探测范围的上方进入,沿红色折线飞行并进行侦察任务,最后从目标群 A09 的防御雷达的探测范围的上方离开,绕目标群 A08、A01 的防御雷达的探测范围的边缘回到基地 P01,并保证飞行路线较短;从基地 P05 派出 1 架加载 S-1 载荷的无人机从目标群 A01 防御雷达的探测范围的右下方进入,完成侦察任务后直接从目标群 A01 的防御雷达的探测范围的右下方方离开回到基地 P01,并保证飞行路线较短;经测量 4 架加载 S-1 载荷的无人机的总巡航路线均不超过 2000km,即不超过最长巡航时间 10h。

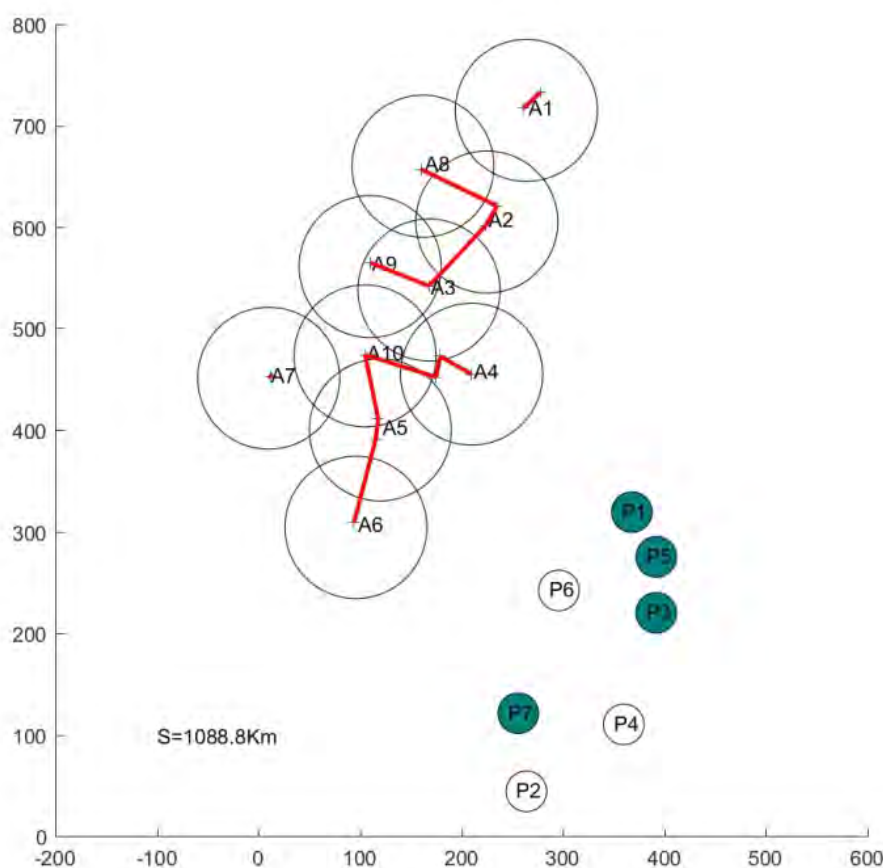


图 5-14 4 架加载 S-2 载荷的无人机的内部飞行路线

表 5-4 S-2 载荷下 4 种情况的初步优化成果表

无人机架数	雷达区内航程总和最小值 (km)
1 架无人机	1105.2
2 架无人机	1028.0
3 架无人机	1095.0
4 架无人机	1088.8

由表 5-4 可知，采用 2 架无人机可使加载 S-2 载荷的无人机从侦察第一个目标开始到最后一个目标侦察结束的路线最短为 1028.0km，对应时间为 5.140h，最短路线为：

基地 P01→A01→A02→A08→A09→A03→A04→A10→A05→A06→基地 P01，基地 P07→A01→基地 P07。

5.5.2 最小生成树算法

(1) 加载 S-1 载荷的 FY-1 型无人机

为了验证上述改进的 Hamilton 模型的正确性，本问题继续用生成树算法基于 MATLAB 软件计算加载 S-1 载荷的 FY-1 型无人机的航线树状图，如图 5-15，对于该结果并不能直接用于规划无人机最佳路线，因此需要对此图采用截断法从而得到较为优化的结果，截断优化结果如图 5-16，从截断优化图中可知需要

使用 3 架载荷 S-1 的 FY-1 型无人机，它们滞留防御方雷达有效探测范围内的航线距离总和为 1342.4km，对应总时间为 6.712h。

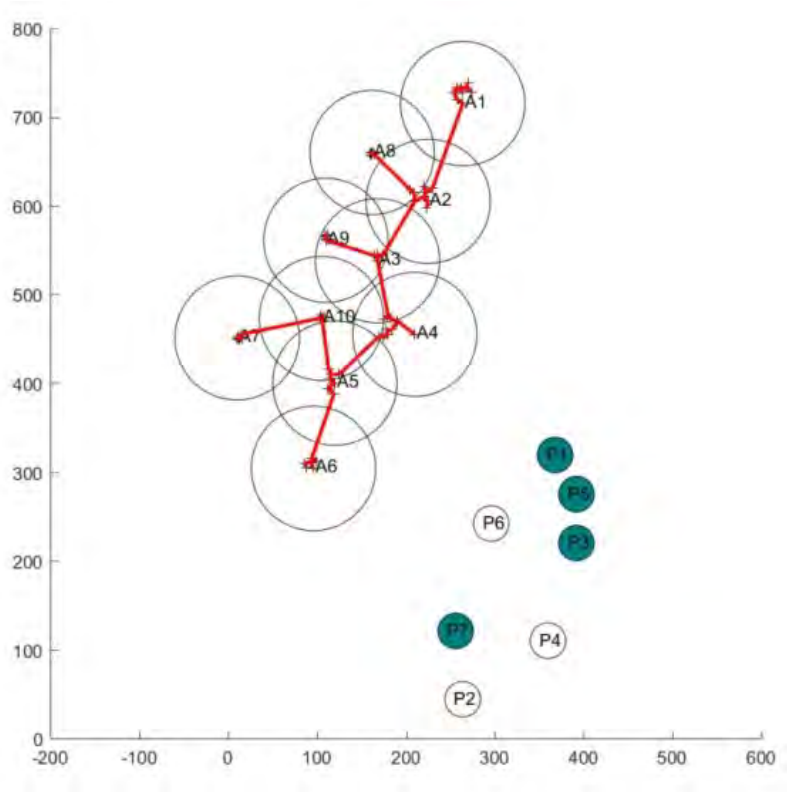


图 5-15 加载 S-1 载荷的 FY-1 型无人机的航线树状图

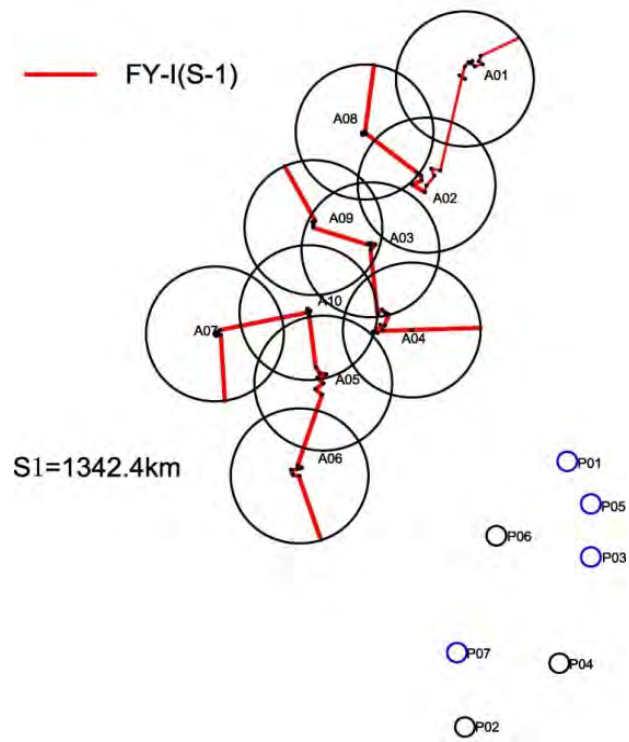


图 5-16 加载 S-1 载荷的 FY-1 型无人机的飞行路线优化结果

（2）加载 S-2 载荷的 FY-1 型无人机

类似于载荷 S-1，基于 MATLAB 软件计算加载 S-2 载荷的 FY-1 型无人机的航线树状图，如图 5-17，截断优化结果如图 5-18，从截断优化图中可知需要使用 3 架载荷 S-2 的 FY-1 型无人机，它们滞留防御方雷达有效探测范围内的航线距离总和为 1261.0km，对应总时间为 6.305h。

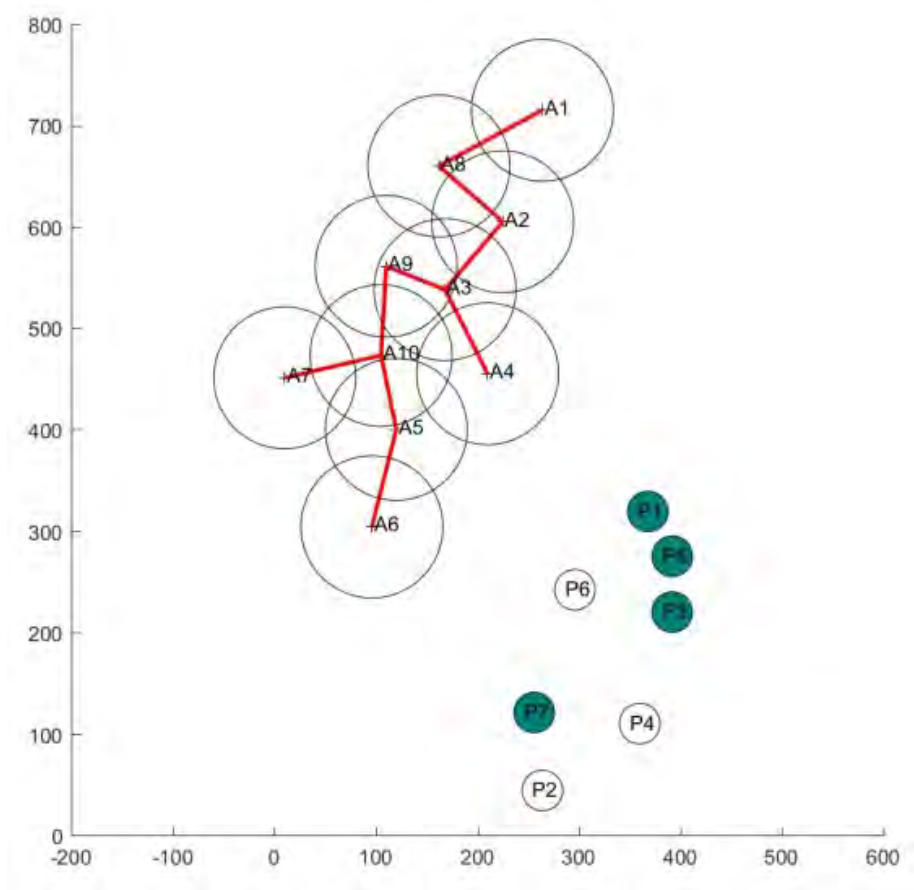


图 5-17 加载 S-2 载荷的 FY-1 型无人机的航线树状图

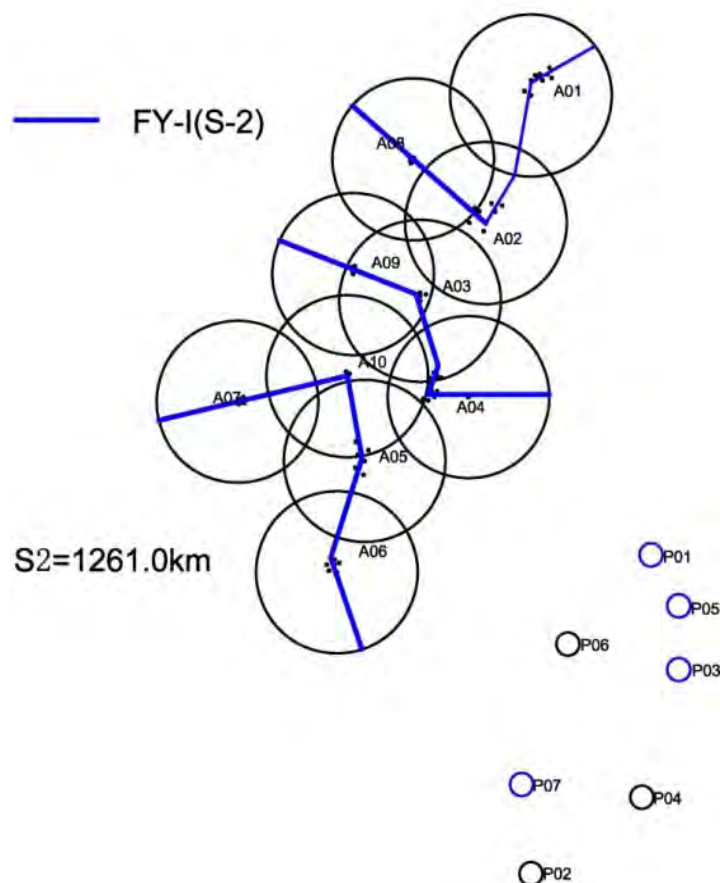


图 5-18 加载 S-2 载荷的 FY-1 型无人机的飞行路线优化结果

(3) 最小生成树算法结果

综合载荷 S-1 和 S-2 的 FY-1 型无人机最小生成树结果可知，整个侦察任务中 6 架 FY-1 型无人机总航程为 2603.4km，滞留雷达探测区域时间总和为 13.017h。

5.5.3 最终结果

综合分析两种算法可知，本文所提出的基于虚拟点改进的 Hamilton 回路模型相对于生成树算法所求得的结果更加优化，从而验证了该模型的精确性以及优越性。

由于对于加载 S-1 和 S-2 的 FY-1 型无人机利用 MATLAB 计算出来的结果是带宽行进的距离，因此需要对此结果进行优化，可根据具体路线对 S-1 偏移 2~8km，对 S-2 在 14.7km 宽度的带宽内进行调整，使得满足侦察所有目标点的条件下使无人机实际航行路线最短，优化结果见表 5-5。

表 5-5 S-1 载荷和 S-2 载荷 4 种情况的优化成果表

载荷	无人机架数	雷达区内无人机航程总和最小值 (km)	雷达区内时间最小值 (h)	单架总航程最大值 (km)	单架巡航时间最大值 (h)
S-1	1 架无人机	1234.3	6.172	1838.2	9.191
	2 架无人机	1150.4	5.752	1550.7	7.754
	3 架无人机	1217.2	6.086	998.1	4.991
	4 架无人机	1246.8	6.234	998.1	4.991
S-2	1 架无人机	1096.2	5.481	1655.5	8.278
	2 架无人机	1018.4	5.092	1347.6	6.738
	3 架无人机	1084.0	5.420	819.8	4.099
	4 架无人机	1080.8	5.404	786.5	3.933

假设第一架无人机从 0:00 时刻起飞, 每架无人机的起飞基地、加载的载荷、起飞时间和最佳路线表 5-6, 无人机飞行的总体航迹图和 10 个目标群的局部航迹图见图 5-19~图 5-29。从而可以得到当调度 2 架加载 S-1 载荷的 FY-1 型无人机和 2 架加载 S-2 载荷的 FY-1 型无人机进行侦察任务时能保证侦察无人机滞留防御方雷达有效探测区域的时间总和最小, 最小时间为 $5.752+5.092=10.844\text{h}$ 。

表 5-6 四架 FY-1 型无人机调度策略

	起飞基地	加载的载荷	起飞时间	侦察的目标
1	P01	S-1	0:00	A0101→A0102→A0104→A0105→A0106→A0107→A0108→A0109→A0103→A0110→A0605→A0602→A0601→A0603→A0604→A0606→A0502→A0503→A0501→A0505→A0506→A0507→A0504→A0404→A0403→A0402→A0406→A0405→A0401→A0407→A0408→A0410→A0409→A0301→A0302→A0305→A0304→A0303→A0901→A0902→A0903→A0904→A0905→A0804→A0803→A0802→A0801→A0805→A0209→A0206→A0208→A0205→A0204→A0203→A0202→A0201→A0207
2	P07	S-1	0:00	A1005→A1004→A1002→A1001→A1003→A0704→A0703→A0702→A0701→A0705→A0706
3	P01	S-2	0:05	A01→A02→A08→A09→A03→A04→A10→A05→A06
4	P07	2-2	0:05	A01

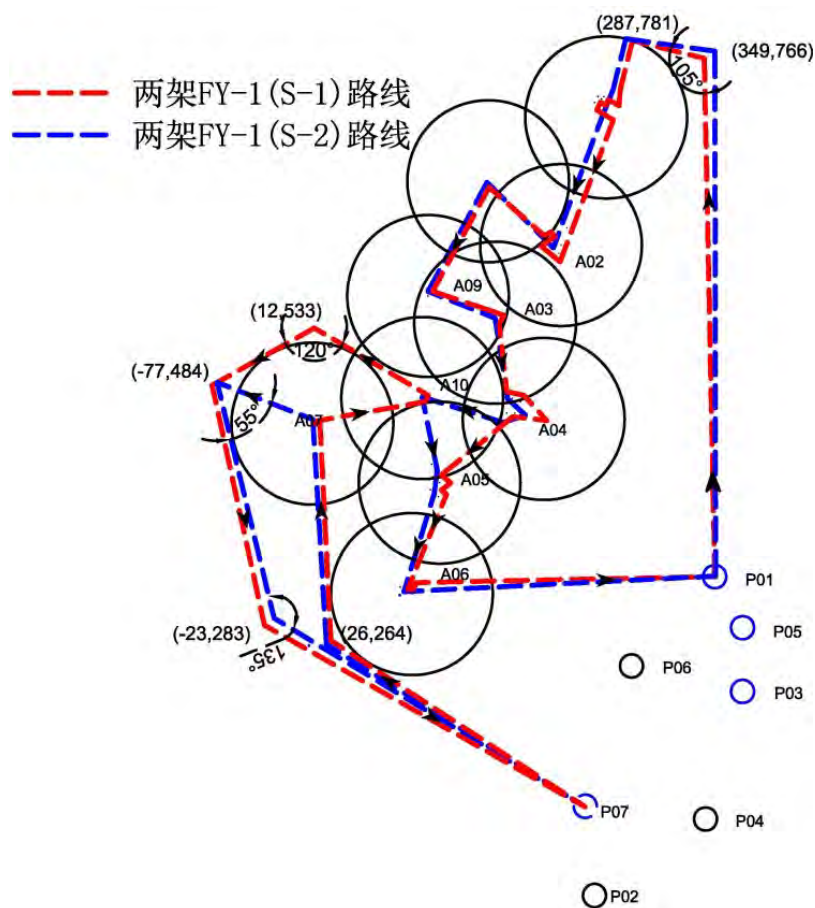


图 5-19 4 架 FY-1 型无人机的航迹

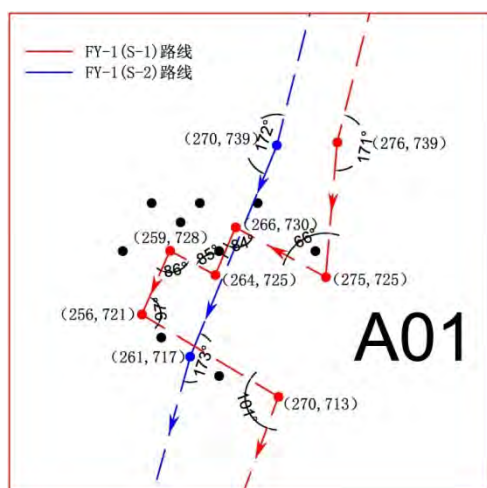


图 5-20 两种无人机在 A01 的航迹

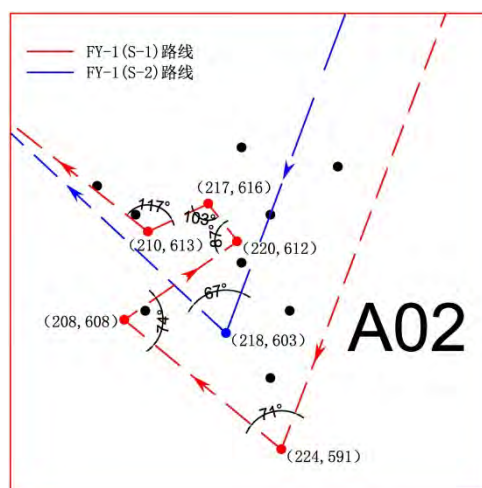


图 5-21 两种无人机在 A02 的航迹

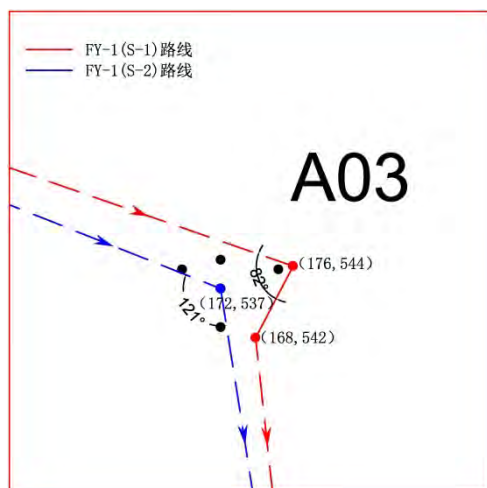


图 5-22 两种无人机在 A03 的航迹

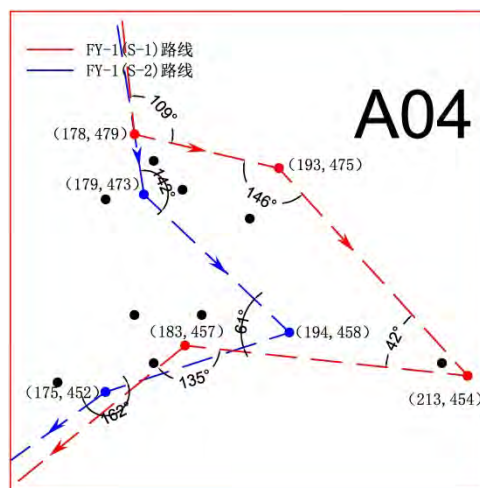


图 5-23 两种无人机在 A04 的航迹

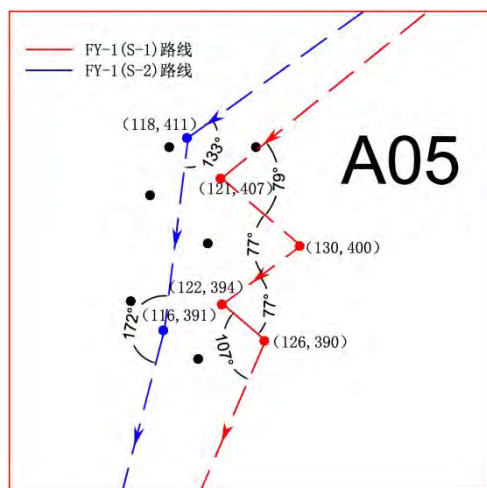


图 5-24 两种无人机在 A05 的航迹

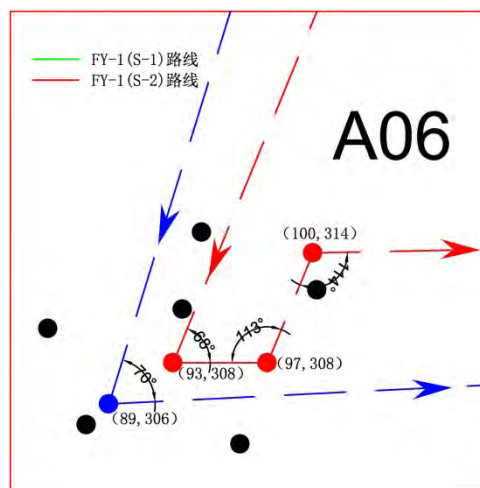


图 5-25 两种无人机在 A06 的航迹

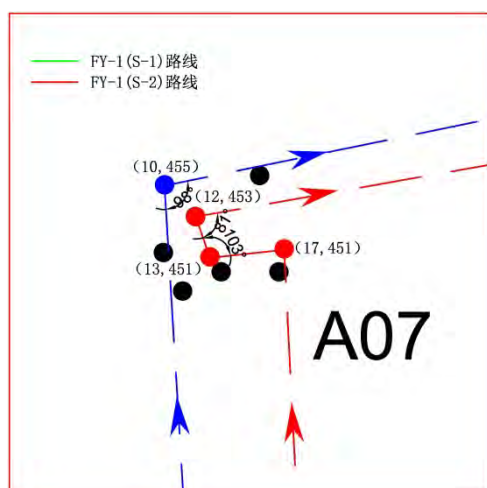


图 5-26 两种无人机在 A07 的航迹

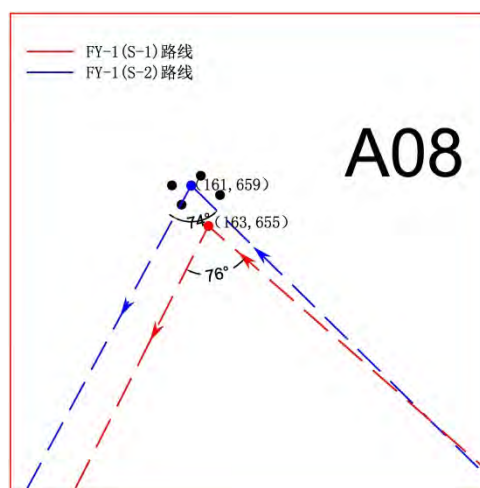


图 5-27 两种无人机在 A08 的航迹

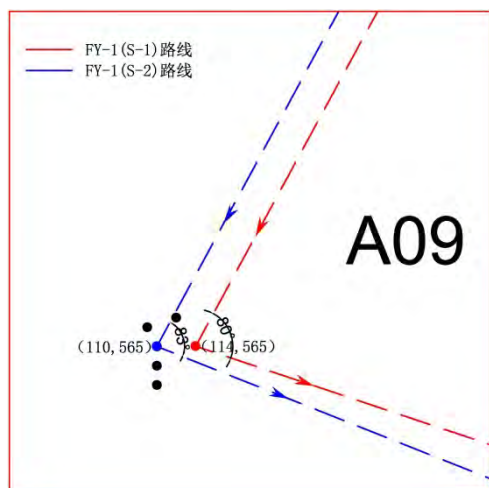


图 5- 28 两种无人机在 A09 的航迹

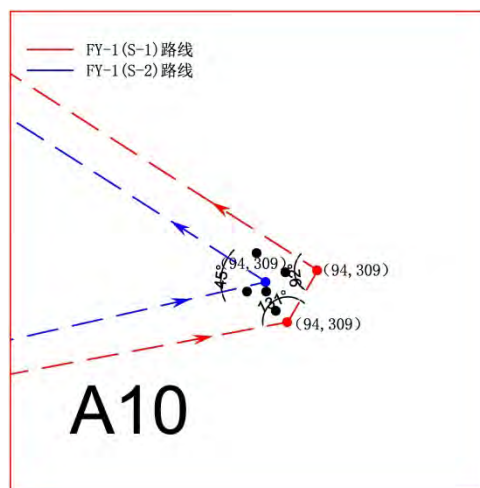


图 5- 29 两种无人机在 A10 的航迹

6 问题二：多任务无人机通信规划模型

6.1 动态规划模型

动态规划模型可以用来解决最有路径问题、资源分配问题、生产调度问题、库存问题、调度问题、排序问题、设备更新问题、生产过程最优控制问题等。

结合问题二可知,涉及到无人机的合理分配和如何在规定时间内返回基地,因此本题可以用最短路径和资源分配问题,解决最路径问题和资源分配问题最容易想到的是穷举法,即列出所有可能发生的可能和结果,从而找出最短路径和无人机最合理的分配计划,这种情况仅在数量较少的情况下才适用,当数据量很大时,计算量将会变得十分庞大,此种方法就行不通。因此,需要根据问题的特性,寻找一种合理的算法。

最短路径问题有一个特性:如果最短路径在第 k 站经过 x_k 目标点,则这一线路在由 x_k 出发到达终点的那一部分线路,以及以 x_k 为终点的所有线路,必定也是最短的,这就是最优化原理,即最优策略的子策略也是最优的。

对于资源分配问题,要将一种类型的无人机分配到多种类型无人机的多路线中,建立合理的 DP(dynamic programming)模型,使得完成通信任务的同时,使得所使用的通信无人机最少。

6.2 模型二的建立与求解

在问题 2 求解中,要满足的条件:

$$d_{12} \leq 50 \text{ km} , \quad V_1 \leq 200 \text{ km/h} , \quad V_2 \leq 300 \text{ km/h} , \quad T_1 \leq 10 \text{ h} , \quad T_2 \leq 8 \text{ h}$$

式中: d_{12} 表示 FY-1 型无人机与 FY-2 型无人机间距; v_1 表示 FY-1 型无人机飞行速度; v_2 表示 FY-2 型无人机飞行速度; T_1 表示 FY-1 型无人机从基地出

发到返回基地所需时间； T_2 表示 FY-2 型无人机从基地出发到返回基地所需时间。

要满足这些条件，可对问题 1 优化的结果进行简单的路线修改，即 FY-1(S-2)_1 本来要经过目标群 A10，现使其直接侦察完 A04 后直接去侦察 A05，目标群 A10 由 FY-1(S-2)_2 在侦察完 A07 后再进行侦察，整体路线与 FY-1(S-1) 的两架无人机类似，此种情况下加载 S-2 载荷的两架无人机在雷达监测范围内的飞行距离增加了 30.2km。根据问题 1 中所得到的 FY-1 型无人机巡航路线，仅安排一架 FY-2 型无人机要保证与 4 架 FY-1 型无人机同时进行通信，经验算，无法满足 $T_2 \leq 8h$ ，因此需要安排两架 FY-2 型无人机。计算得到总共配备 4 架 FY-1 型无人机和 2 架 FY-2 型无人机。4 架 FY-1 型无人机中 2 架加载 S-1 载荷，编号为 FY-1(S-1)_1 和 FY-1(S-1)_2；2 架加载 S-2 载荷，编号为 FY-1(S-2)_1 和 FY-1(S-2)_2，2 架 FY-2 型无人机编号为 FY-2(S-1)_1 和 FY-2(S-1)_2。具体规划步骤如下（规定无人机最开始从基地起飞时间为 0:00：

Step1：首先 FY-1(S-1)_1 无人机和 FY-1(S-2)_1 无人机以 200km/m 的速度分别在 0:00 和 0:05 从基地 P01 起飞（FY-1 巡航速度 200km/h，因此空中飞行间距 200m 很容易满足，错位起飞时间忽略不计），在一定的间隔时间 Δt 后，于 1:48 第一架 FY-2_1 型无人机从基地 P01 起飞，使其与 FY-1(S-1)_1 无人机和 FY-1(S-2)_1 无人机于 2:40 同时到达 A01 目标群，然后进行通信服务；

Step2：当 FY-1(S-1)_1 无人机和 FY-1(S-2)_1 无人机以及 FY-2_1 无人机于 5:58 离开目标群 A04 时，FY-2_1 无人机结束通信服务，于 6:44 返回基地 P01，FY-1(S-1)_1、FY-1(S-2)_1 无人机继续向目标群 A05 出发；

Step3：在 step2 的进行的过程中，问题 1 中另外一条路线的 FY-1(S-1)_2 无人机和 FY-1(S-2)_2 无人机分别于 3:07 和 3:12 从基地 P07 出发，第二架 FY-2_2 型无人机于 3:57 从基地 P07 出发，使他们同时于 5:28 到达目标群 A07，进而 FY-2_2 无人机开始对 FY-1(S-1)_2 无人机和 FY-1(S-2)_2 无人机进行通信服务，于 5:32 侦察完目标群 A07 后离开，沿着巡航路线向目标群 A10 出发，于 6:03 侦察完 A10 后，FY-1(S-1)_2 无人机和 FY-1(S-2)_2 无人机开始返航，分别于 9:41 和 9:46 到达基地 P07，FY-2_2 无人机继续向目标群 A05 出发。

Step4：通过对起飞时间的安排能够保证 FY-2_2 无人机与 FY-1(S-1)_1、FY-1(S-2)_1 无人机于 6:16 同时到达目标群 A05，继续侦察完目标群 A05 和目标群 A06 后，所有无人机返航，其中 FY-1(S-1)_1 无人机和 FY-1(S-2)_1 无人机分别于 8:23 和 8:28 返回基地 P01，FY-2_2 无人机于 7:54 返回基地 P07，结束通信服务。

由于 FY-1 型无人机和 2 架 FY-2 型无人机的巡航飞行速度不同, 加载 S-1 载荷和加载 S-2 载荷的 FY-1 型无人机在执行某一目标群的侦察任务时所需的时间也不同, 为确保所有负责相同目标群任务的无人机几乎在同一时间点到达和离开目标群, 并保证负责相应 FY-2 型无人机通信中继任务的 FY-1 型无人机与其距离在 50km 范围内, 加载 S-2 载荷的 FY-1 型无人机和 FY-2 型无人机需在飞行时做适当曲线飞行。部分无人机虽在同一时间点到达和离开目标群, 但仍需保证每架无人机相距 200m 以上, 相对于 FY-1 型无人机的飞行速度 200km/h, 仅为 3.6s, 故可忽略不计。此外, 同一基地的两架无人机起飞时间间隔和降落回收时间要求在 3 分钟以上, 因此, 从同一基地起飞的两架 FY-1 型无人机安排相隔 5 分钟起飞和降落。

根据上述步骤, FY-1 (S-1) _1、FY-1 (S-1) _2、FY-1 (S-2) _1、FY-1 (S-2) _2 四架无人机从基地出发到返回基地的总用时分别为 8.38h、6.57h、8.38h、6.57h, 均小于 10h, 满足最长巡航时间的要求; FY-2_1 和 FY-2_2 两架无人机的总用时分别为 5.01h, 4.0h, 均小于 8h, 满足最长巡航时间的要求。

4 架 FY-1 型无人机和 2 架 FY-2 型无人机的具体飞行时间安排见表 6-1, 飞行路线见图 6-1。

表 6-1 4 架 FY-1 型无人机和 2 架 FY-2 型无人机的飞行时间安排

	出发	到达	离开	到达	离开	到达	离开	到达	离开	到达	耗时(h)
FY-1 (S-1)_1	P01	A01		A04		A05		A06		P01	8.38
	0:00	2:40	3:00	5:30	5: 58	6: 16	6:32	6:57	7:06	8:23	
FY-1 (S-1)_2	P07	A07		A10		P7					6.57
	3:07	5:28	5:32	5:59	6:03	9:41					
FY-1 (S-2)_1	P01	A01		A04		A05		A06		P01	8.38
	0:05	2:40	3:00	5:30	5: 58	6: 16	6:32	6:57	7:06	8:28	
FY-1 (S-2)_2	P07	A07		A10		0P7					6.57
	3:12	5:28	5:32	5:59	6:03	9:46					
FY-2 (S-1)_1	P01	A01		A04		P01					5.01
	1:48	2:40	3:00	5:30	5: 58	6:44					
FY-2 (S-1)_2	P07	A07		A10		A05		A06		P07	4.00
	3:57	5:28	5:32	5:59	6:03	6: 16	6:32	6:57	7:06	7:54	

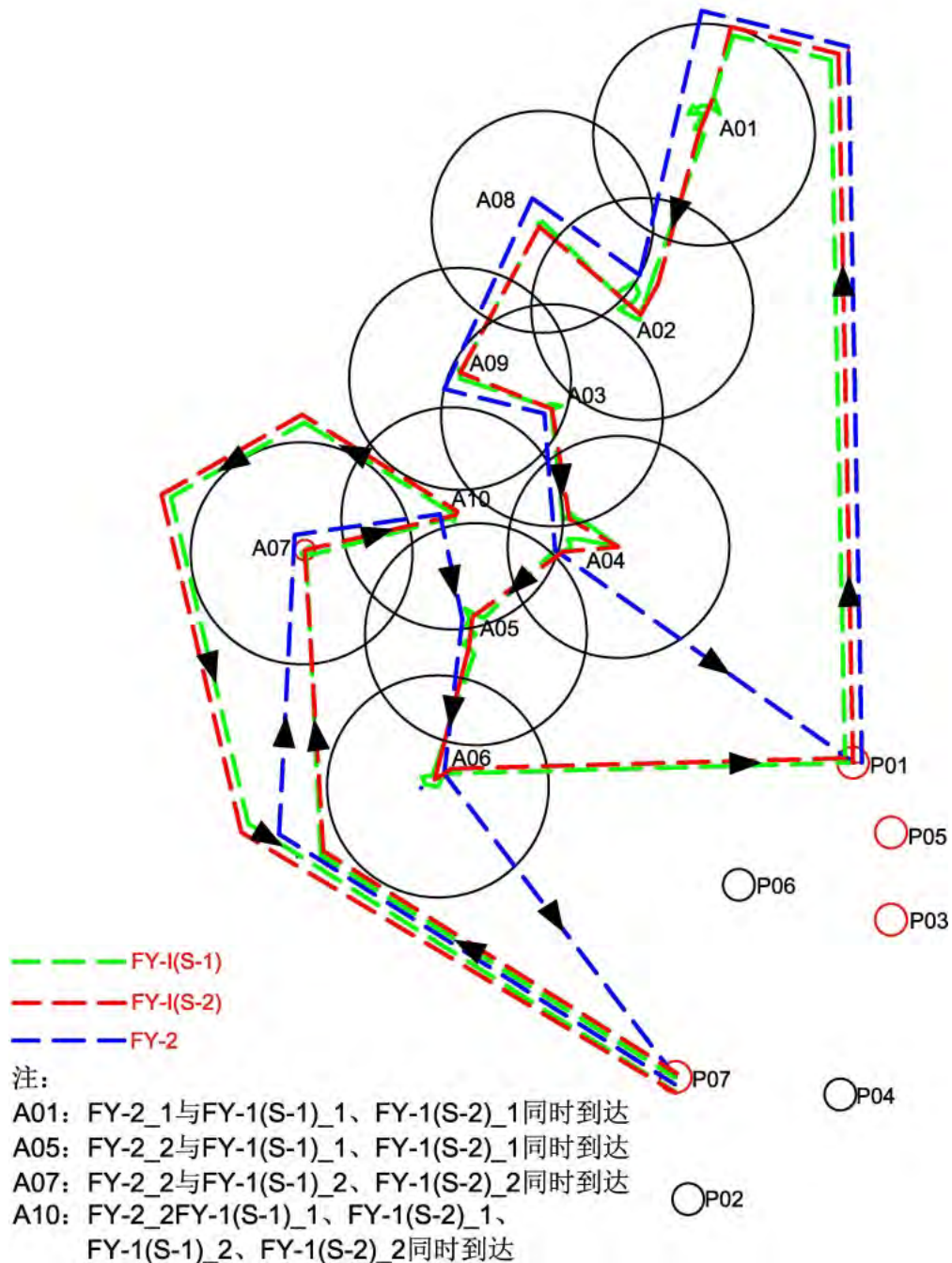


图 6- 1 架 FY-1 型无人机和 2 架 FY-2 型无人机的飞行时间

7 问题三：分步规划模型

7.1 分步规划模型的准备

假设要规划的区域为有向图 $G < V, E >$ 表示击毁区域， $V = \{i, V_j, V_k\}$ 表示无人机和目标点的集合， i 表示目标集编号， V_j 表示 FY-1(S-3)和 FY-3 无人机编号， V_k 表示目标点编号， D_j 表示 j 编号无人机的最大航程；

$E = \{ \langle m, n \rangle, m, n \in V, m \neq n \}$ 表示任意两个目标节点的航段， C_{mn} 表示航段 $\langle m, n \rangle$ 的欧式距离。引入决策变量如下：

$$x_{mnj} = \begin{cases} 1, & \text{若无人机经过航段 } \langle m, n \rangle \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$y_{mnk} = \begin{cases} 1, & \text{若航段 } \langle m, n \rangle \text{ 从目标节点 } k \text{ 出发} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

可得优化模型的目标函数如下：

$$\min T = \sum_{j \in V_j} \sum_{m, n \in V} x_{mnj} \frac{C_{mn}}{v} + \lambda \sum_{m, n \in V} y_{mnk} \frac{r\theta}{v}$$

式中： v 表示无人机航行速度； r 表示无人机在目标点处的转弯半径； θ 表示无人机在目标点处的转弯角度； λ 表示无人机在转弯处扩大系数，本文 $\lambda = 2 \sim 4$ 。

约束条件为：， $r \leq 0.07\text{km}$ ， C_{mn} 距离矩阵已知

$$\sum_{m, n \in V} \frac{C_{mn}}{v} \leq 7, \quad v_{F1} = 200\text{km/h}, \quad v_{F3} = 300\text{km/h}$$

$$\sum_{j \in V_j} \sum_{m, n \in V} x_{mnj} C_{mn} + D_{out} \leq 2000, \quad \text{对于 FY-1(S-1)}$$

$$\sum_{j \in V_j} \sum_{m, n \in V} x_{mnj} C_{mn} + D_{out} \leq 2400, \quad \text{对于 FY-3}$$

其中 D_{out} 表示无人机在雷达监测区域以外行驶的距离。

7.2 模型三的建立与求解

首先考虑如何安排 FY-3 型无人机进行火力打击，使得消灭一个目标群雷达时无人机被雷达探测到的时间最小。根据题意，有两种方案：

(1) 采用 10 枚 D-1 型炸弹

一架 FY-3 型无人机可携带 6 枚 D-1 型炸弹，击毁一个雷达站需要 10 枚 D-1 型炸弹，所以需要两架 FY-3 型无人机，共 12 枚 D-1 型炸弹。D-1 型炸弹需要离目标中心 100m 以内才能有效击中，所以 FY-3 型无人机需要在圆形雷达探测区内飞行 $70-0.1=69.9\text{km}$ 。FY-3 型无人机速度为 300 km/h，所以总共被雷达探测的时间为。

(2) 采用 2 枚 D-2 型炸弹

一架 FY-3 型无人机可携带 6 枚 D-2 型炸弹，消灭一个雷达站需要 2 枚 D-2 型炸弹，所以需要一架 FY-3 型无人机，共 6 枚 D-1 型炸弹。D-2 型炸弹在整个飞行过程中需要一架 FY-1 型无人机加载 S-3 载荷进行全程引导，其为 D-2 型炸弹提供指示时要求距被攻击目标的距离不超过 15 km，而携带 D-2 型炸弹的无人机在投掷炸弹时要求距目标 10km~30km，所以为保证无人机滞留防御导弹探测范围的时间最短，可令 FY-1 型无人机到达距雷达 15km 的点时 FY-3 型无人机恰好到达距雷达 30km 的点，此时 FY-3 型无人机需要在圆形雷达探测区内飞行 $70-30=40\text{km}$ ，D-2 型炸弹需要飞行 30 km，FY-3 型无人机速度为 300 km/h，D-2 型炸弹速度为 200m/s 即 720 km/h，所以 FY-3 型无人机被雷达探测的时间为 $40\div 300+30\div 720=0.175\text{h}$ ，FY-1 型无人机速度为 200 km/h，FY-1 型无人机需要在圆形雷达探测区内飞行 km。所以 FY-1 型无人机被雷达探测的时间为 $55\div 200+30\div 720=0.317\text{h}$ 。所以所有无人机被雷达探测的总时间为 $0.175+0.317=0.492\text{h}$ 。

将两种方案所需的资源见一并列入下表 7-1：

表 7-1 两种方案所需资源

炸弹型号	资源		雷达探测的总时间
	FY-1 (S-3)	FY-3	
D-1	0	2	0.466
D-2	1	1	0.492

所以采用 2 架 FY-3 携带 12 枚 D-1 炸弹击毁 1 个目标群的雷达站是最优的方案，被雷达站探测的总时间为 0.466h。据此可以得出采用 20 架 FY-3 型无人机携带 120 枚 D-1 型炸弹消灭 10 个目标群的的雷达站被雷达站探测的总时间为 $10\times 0.466=4.660\text{h}$ 。

上述推断成立的情况是：剩余的 $68-10=58$ 个目标被剩余的 $97-20=77$ 架 FY-3 型无人机击毁完后，从第一架攻击无人机进入防御雷达探测范围至击毁完最后一个目标的时间在 7 个小时以内。对此我们将在下文对其一一验证。

由于雷达已经被全部消灭，所以不再存在无人机被雷达探测的问题。我们的优化目标变成如何安排无人机进行火力打击使得消灭剩余目标的耗时最小。考虑三种方案：

(1) 全部采用 D-1 型炸弹，具体资源情况见表 7-2：

表 7-2 剩余目标全部采用 D-1 的资源情况

	剩余目标数	剩余目标所需资源	
		D-1 炸弹	FY-3
目标群 1	9	90	15
目标群 2	8	80	13
目标群 3	4	40	7
目标群 4	9	90	15
目标群 5	6	60	10
目标群 6	5	50	8
目标群 7	5	50	8
目标群 8	4	40	7
目标群 9	4	40	7
目标群 10	4	40	7
总计	58	580	97
所需 FY-3 总计		117	

可见所需 FY-3 数超过 97 架，不满足要求。

（2）全部采用 D-2 型炸弹

剩余 58 个目标，每个目标需 2 枚 D-2 型炸弹，则共需 116 枚 D-2 型炸弹，每架 FY-3 型无人机可携带 6 枚 D-2 型炸弹则共需 20 架 FY-3 型无人机。此外，由于 D-2 型炸弹在整个飞行过程中需一架 FY-1 型无人机，而一共仅有 8 架 FY-1 型无人机，所以 20 架无人机需分 3 个批次分别从基地飞向目标进行火力任务，那攻击剩余目标的所需时间较多，所以不可能全部采用 D-2。

（3）混合采用 D-1 和 D-2 型炸弹

观察消灭雷达后目标群剩余目标的分布，除原目标群 A01、A02 外，其他 8 个目标群的剩余目标都分别可以包含在一个半径为 15km 的圆内，即加载 S-3 载荷 FY-1 型无人机的引导范围内，故可以在其他八个目标群派出一架加载 S-3 载荷 FY-1 型无人机负责引导，再分配 D-2 型炸弹攻击。所以原目标群 A01、A02 采用 D-1 型炸弹消灭，A03-A10 采用 D-2 型炸弹消灭。具体资源情况见表 7-3：

表 7-3 剩余目标混合采用 D-1 和 D-2 的资源情况

	剩余目标数	剩余目标所需资源				
		D-1 炸弹	FY-3	D-2 炸弹	FY-3	FY-1
目标群 A01	9	90	15	0	0	0
目标群 A02	8	80	13	0	0	0
目标群 A03	4	0	0	8	2	1
目标群 A04	9	0	0	18	3	1
目标群 A05	6	0	0	12	2	1
目标群 A06	5	0	0	10	2	1
目标群 A07	5	0	0	10	2	1
目标群 A08	4	0	0	8	2	1
目标群 A09	4	0	0	8	2	1
目标群 A10	4	0	0	8	2	1
总计	58	170	28	82	17	8
所需 FY-3 总计		65				

按表 7-3 的规划资源, FY-3 型无人机架数低于所有基地 FY-3 配属量总和 94 架, 故可适当增加攻击目标群 A01、A02 的无人机, 每个目标派出 2 架携带 D-1 型炸弹的 FY-3 型无人机, 所有无人机在防御雷达被击毁后从防御雷达探测范围的边缘同时进入攻击各自的目标, 因此击毁目标群 A01 的最长时间为距离目标群 A01 的防御雷达探测范围边缘最远的点; 攻击目标群 A03~A10 的携带 D-2 型炸弹的 FY-3 型无人机同样为在防御雷达被击毁后从防御雷达探测范围的边缘同时进入攻击各自的目标, 每次需攻击 1~3 个目标, 因此攻击时间最长的为 7 个目标群中三个目标距离较远的目标群。攻击剩余 58 个目标的时间即为 10 个目标群中 FY-3 型无人机飞行路线最长的无人机所需时间。据此, 列出每个目标群中无人机飞行的最长路线, 为做部分简化, 我们所测量的最长路线均假设无人机直接飞行到目标上方进行击毁, 但实际上无人机在未到目标上方时即可投掷炸弹, 因此, 此处估计较为保守, 具体见表 7-4。

表 7-4 各目标群群中无人机飞行的最长路线

目标群	A01	A02	A03	A04	A05	A06	A07	A08	A09	A10
最长路线(km)	62.8	81.3	78.8	91.3	81.0	73.3	71.1	70.4	68.2	76.1

由表 7-4 可以看出, 无人机在单个目标群飞行的最长路线为 91.3km, FY-3 型无人机速度为 300 km/h, 则对剩余目标的打击需要 $91.3 \div 300 = 0.304\text{h}$, 加上击毁雷达的时间 4.660h, 共 4.964h, 满足 7 个小时内完成对 68 个地面目标的火力打击任务。

具体的无人机规划结果见表 7-5 和图 7-1, 由于同一基地的两架无人机起飞时间间隔和降落时间间隔在 3 分钟以上, 为此我们安排从同一基地的无人机起

飞时间间隔和降落时间间隔为 5 分钟。此外，飞行时无人机应保证与其他无人机保持 200m 以上间距。飞行距离最长的无人机的飞行距离为 6.5h，满足最长巡航时间要求。

按此规划攻击方无人机滞留防御雷达有效探测的总时间为 4.660h，总共需要 8 架 FY-1 型无人机、65 架 FY-3 型无人机、270 枚 D-1 型炸弹、82 枚 D-2 型炸弹。

表 7-5 无人机任务规划

基地	无人机（架）		雷达			其他目标			
	FY-1	FY-3	炸弹	个数	攻击目标	炸弹	个数	攻击目标	引导目标
P01	-	2	D-1	10	A0101	-	-	-	-
	-	2	D-1	10	A0301	-	-	-	-
	-	2	D-1	10	A0801	-	-	-	-
	-	2	D-1	10	A0901	-	-	-	-
	-	2	-	-	-	D-2	8	A0802、A0803、 A0804、A0805	A0802、A0803、 A0804、A0805
	1	-	-	-	-	-	-	-	A0902、A0903、 A0904、A0905
P02	-	2	-	-	-	D-2	10	A0602、A0603、 A0604、A0605、 A0606	-
P03	-	13	-	-	-	D-1	78	A0202（8 枚）、 A0203、A0204、 A0205、A0206、 A0207、A0208、 A0209	-
	1	-	-	-	-	-	-	-	A0502、A0503、 A0504、A0505、 A0506、A0507
	1	-	-	-	-	-	-	-	A1002、A1003、 A1004、A1005
P04	-	5	-	-	-	D-1	30	A0102、A0103、 A0104	-
P05	-	2	D-1	12	A0201	-	-	A0202（2 枚）	-
	-	10	-	-	-	D-1	60	A0105、A0106、 A0107、A0108、 A0109、A0110	-
	1	-	-	-	-	-	-	-	A0302、A0303、 A0304、A0305

	1	-	-	-	-	-	-	-	A0402、A0403、 A0404、A0405、 A0406、A0407、 A0408、A0409
P06	-	2	D-1	10	A0401	-	-	-	-
	-	2	D-1	10	A0501	-	-	-	-
	-	2	-	-	-	D-2	8	A0302、A0303、 A0304、A0305	-
	-	3	-	-	-	D-2	18	A0402、A0403、 A0404、A0405、 A0406、A0407、 A0408、A0409 A0410	-
	-	2	-	-	-	D-2	12	A0502、A0503、 A0504、A0505、 A0506、A0507	-
	-	2	-	-	-	D-2	8	A0902、A0903、 A0904、A0905	-
	-	2	-	-	-	D-2	8	A1002、A1003、 A1004、A1005	-
P07	-	2	D-1	10	A0601	-	-	-	-
	-	2	D-1	10	A0701	-	-	-	-
	-	2	D-1	10	A1001	-	-	-	-
	-	2	-	-	-	D-2	10	A0702、A0703、 A0704、A0705、 A0706	-
	1	-	-	-	-	-	-	-	A0602、A0603、 A0604、A0605、 A0606
	1	-				-	-	-	A0702、A0703、 A0704、A0705、 A0706
合 计	8	65	D-1 型炸 弹合计		270	D-2 型炸 弹合计		82	

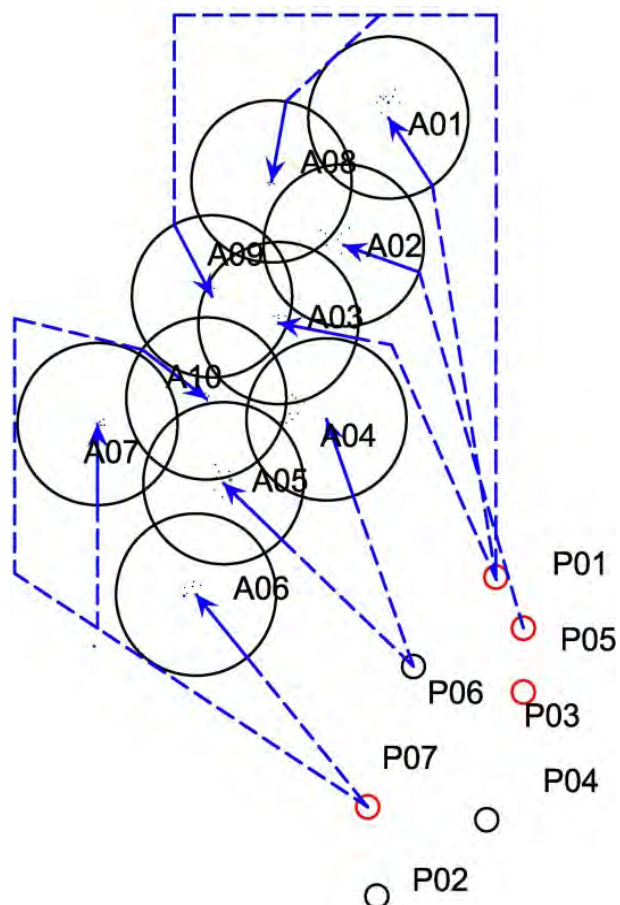


图 7-1 攻击雷达的无人机的飞行路线

8 问题四：针对远程雷达的分步优化模型

对于三部远程搜索雷达的位置可以作以下分析：

（1）远程搜索雷达应按防御方的最利条件布置，以考虑攻击方的最不利条件，从而考虑如何规划攻击方的火力打击任务；

（2）A02_super、A05_super 和 A09_super 远程搜索雷达布置在 A02、A05、A09 周边，则其应在 A02、A05、A09 的防御雷达与周边目标群防御雷达的连线交点所组成的多边形内部，即图 8-1 中的蓝色多边形区域。

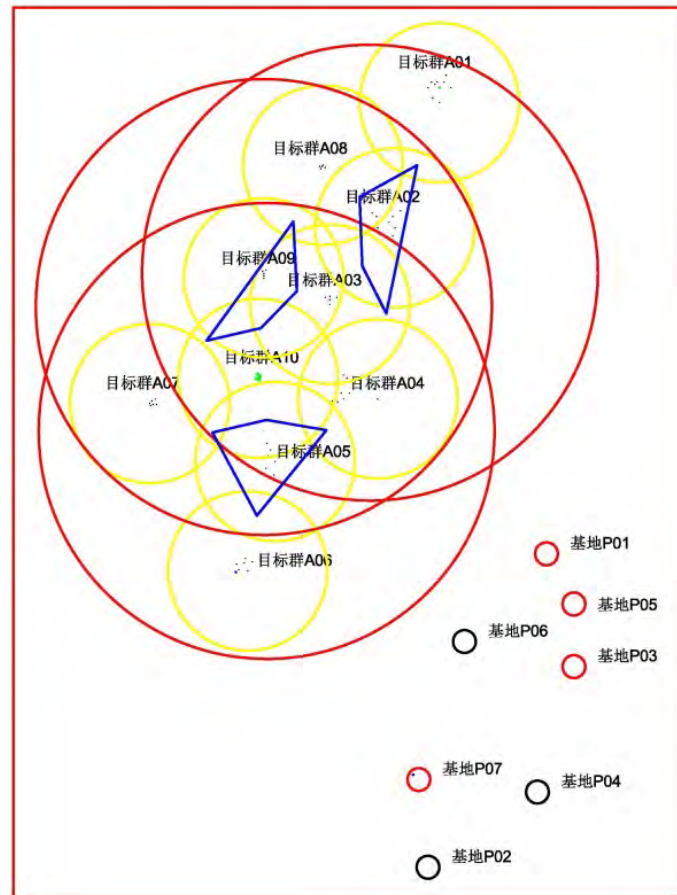


图 8-1 三部远程搜索雷达的位置

据此，初步分析三部远程搜索雷达的位置布置错误!未找到引用源。所示，A02_super、A05_super 和 A09_super 远程搜索雷达各自覆盖的目标群见表 8-1。

表 8-1 远程搜索类的覆盖目标群

远程搜索雷达	覆盖目标群	目标群个数
A02_super	A01、A02、A03、A04、A05、A08、A09、A10	8
A05_super	A03、A04、A05、A06、A07、A08、A10	7
A09_super	A02、A03、A04、A05、A07、A08、A09、A10	8

从防御方的角度来看，应首先开启 A02_super 或者 A09_super 远程搜索雷达。对此，我们假定 A09_super 远程搜索雷达先开，其次是 A02_super，最后是 A05_super。

作为攻击方应首先攻击 A09_super 远程搜索雷达，在无人机攻击 A09_super 远程搜索雷达时，我们同时安排无人机飞往 A02_super 和 A05_super 远程搜索雷达，在 A09_super 远程搜索雷达被消灭时，击毁 A02_super 的无人机恰好飞到 A09_super 远程搜索雷达的探测范围边缘并靠近 A02_super 蓝色多边形的某一角点。此时 A02_super 远程雷达开启，攻击方无人机可获知信号并锁定目标进行攻击；在 A02_super 远程搜索雷达被消灭时，击毁 A05_super 的无人机恰

好飞到 A05_super 远程搜索雷达的探测范围边缘并靠近 A05_super 蓝色多边形的某一角点。此时 A05_super 远程雷达开启，攻击方无人机可获知信号并锁定目标进行攻击。

如何安排无人机进行火力打击使得消灭远程搜索雷达时无人机被雷达探测到的时间最小，根据题意有两种方案：。

(1) 采用 10 枚 D-1 型炸弹

一架 FY-3 型无人机可携带 6 枚 D-1 型炸弹，消灭一个远程搜索雷达需要 10 枚 D-1 炸弹，所以需要两架 FY-3 型无人机，共 12 枚 D-1 炸弹。D-1 炸弹需要离雷达站 100m 以内才能有效击中目标，所以 FY-3 型无人机需要在 A09_super 远程搜索雷达的探测区内飞行 $200-0.1=99.9\text{km}$ ，此时 A02_super 远程雷达开启，FY-3 型无人机仍需在 A02_super 远程雷达的探测区内飞行，最近距离为 106km，FY-3 型无人机速度为 300 km/h，故这两架 FY-3 型无人机在雷达探测范围内飞行的时间为 $2 \times (99.9+106) \div 300 = 2.039\text{h}$ ；此时击毁 A02_super 远程雷达的两架 FY-3 型无人机开始攻击，假设其在距离 A02_super 蓝色多边形区域的最远角点，与 A02_super 距离 102km，则其在雷达探测范围飞行 $102-0.1=101.9\text{km}$ ，此时 A05_super 远程雷达开启，这两架 FY-3 型无人机仍需在 A05_super 远程雷达和目标群 A02 的雷达探测区内飞行，最近距离为 68km，故这两架 FY-3 型无人机在雷达探测范围内飞行的时间为 $2 \times (101.9+68) \div 300 = 1.133\text{h}$ ；此时击毁 A05_super 远程雷达的两架 FY-3 型无人机开始攻击，假设其在距离 A05_super 蓝色多边形区域的最远角点，与 A05_super 距离 73km，则其在雷达探测范围飞行 $73-0.1=72.9\text{km}$ ，这两架 FY-3 型无人机仍需在目标群 A05 的雷达探测范围内飞行，最近距离为 86km，故这两架 FY-3 型无人机在雷达探测范围内飞行的时间为 $2 \times (72.9+86) \div 300 = 1.059\text{h}$

所以总共被雷达探测的时间为 $2.039+1.133+1.059=4.231\text{h}$ 。

(2) 采用 2 枚 D-2 型炸弹

无人机攻击方式与采用 10 枚 D-1 型炸弹相同。一架 FY-3 可携带 6 枚 D-2 炸弹，消灭一个远程搜索雷达需要 2 枚 D-2 炸弹，所以需要一架 FY-3，共 6 枚 D-1 炸弹。D-2 炸弹需要一架加载 S-3 载荷的 FY-1 型无人机离雷达站 30km 以内才能有效击中目标，而 FY-1 型无人机需要距目标 15km 以内。每个远程搜索雷达用一架 FY-3 型无人机和一架 FY-1 型无人机进行攻击。

所以 FY-3 型无人机在攻击 A09_super 远程搜索雷达时需在雷达探测区内飞行 $200-30=170\text{km}$ ，D-2 炸弹需要飞行 30 km，FY-1 型无人机需要在雷达探测区内飞行 $200-15=185\text{km}$ 。此时 A02_super 远程雷达开启，FY-3 型无人机和 FY-1 型无人机仍需在 A02_super 远程雷达的探测区内飞行，最近距离为 106km，FY-3

无人机速度为 300 km/h, D-2 炸弹速度为 720 km/h, FY-1 型无人机速度为 200 km/h,所以 FY-3 无人机被雷达探测的时间为 $(170+106) \div 300 + 30 \div 720 = 0.962\text{h}$, FY-1 型无人机被雷达探测的时间为 $(185+106) \div 200 + 30 \div 720 = 1.496\text{h}$; 此时击毁 A02_super 远程雷达的 FY-3 型无人机开始攻击, 假设其在距离 A02_super 蓝色多边形区域的最远角点, 与 A02_super 距离 102km, 则 FY-3 型无人机在雷达探测范围飞行 $102-30=72\text{km}$, D-2 炸弹需要飞行 30 km, FY-1 型无人机需要飞行 $102-15=87\text{km}$, 此时 A05_super 远程雷达开启, 这两架无人机仍需在 A05_super 远程雷达和目标群 A02 的雷达探测区内飞行离开, FY-3 型无人机飞行 38km, FY-1 型无人机飞行 53km, 故 FY-3 型无人机在雷达探测范围内飞行的时间为 $(72+38) \div 300 + 30 \div 720 = 0.408\text{h}$, FY-1 型无人机在雷达探测范围内飞行的时间为 $(87+53) \div 200 + 30 \div 720 = 0.712\text{h}$; 此时击毁 A05_super 远程雷达的 FY-3 型无人机开始攻击, 假设其在距离 A05_super 蓝色多边形区域的最远角点, 与 A05_super 距离 73km, 则 FY-3 型无人机在雷达探测范围飞行 $73-30=43\text{km}$, FY-1 型无人机在雷达探测范围飞行 $73-15=58\text{km}$, D-2 炸弹需要飞行 30 km, 任务完成后这两架无人机仍需在目标群 A05 的雷达探测范围内飞行, FY-3 型无人机飞行 56km, FY-1 型无人机飞行 71km, 故 FY-3 型无人机在雷达探测范围内飞行的时间为 $(43+56) \div 300 + 30 \div 720 = 0.372\text{h}$, FY-3 型无人机在雷达探测范围内飞行的时间为 $(58+71) \div 200 + 30 \div 720 = 0.687\text{h}$ 。

所以总共被探测的时间为 $0.962+1.496+0.408+0.712+0.372+0.687=4.637\text{h}$ 。

将两种方案所需的资源与时间列入下表:

表 8-2 击毁单个目标群的雷达所需资源表

炸弹型号	资源		雷达探测的总时间(h)
	FY-1 (S-3)	FY-3	
D-1	0	2	4.231
D-2	1	1	4.637

由以上分析可知, 采用 2 架 FY-3 携带 12 枚 D-1 炸弹消灭 1 个目标群的雷达站是最优的方案, 雷达探测的总时间为 4.231h。此后, 击毁剩余目标的任务与问题 3 相同, 远程搜索雷达一旦全被消灭, 则攻击 10 个目标群雷达的无人机就进入雷达防御范围, 则总共被雷达探测到的时间为 $4.231+4.660=8.891\text{h}$ 。

完成击毁三部远程搜索雷达(从第一架攻击无人机进入防御雷达)的总时间为: $(199.9+101.9+72.9) \div 300 = 1.249\text{h}$, 加上攻击剩余目标的时间 4.964h, 总共 6.231h, 满足在 7 个小时内对所有目标的火力打击任务。且单个无人机飞行的最长时间为 6.87h, 满足最长巡航时间要求。

无人机飞行时, 从同一基地的无人机的起飞时间间隔和降落时间间隔为 5

分钟，每个无人机需与其他无人机保持 200m 以上的间距。

最终，整个任务过程从第一架无人机进入雷达区到击毁完最后一个目标总耗时为 6.231h，共使用 FY-3 无人机 71 架、载荷 S-3 的 FY-1 型无人机 8 架，共消耗 D-1 型炸弹 300 枚、D-2 型炸弹 82 枚。

9 问题五：模型分析

9.1 模型算法分析

以 10 个目标群，68 个目标点，安排两架无人机为例，依据我们建立的数学模型采用改良圈算法和改进改良圈算法程序运行的结果见表 9-1。

计算机参数：Intel(R) Core(TM) i5-6200U CPU @ 2.30GHz (4 CPUs), ~2.4GHz，可用内存：12184MB RAM

表 9-1 改良圈算法和改进改良圈算法的程序运行结果

		改良圈算法	改进改良圈算法				
			迭代次数				
			5	10	15	20	25
15 个目标点、两架路径	优化结果	1428.9	1193.0	1117.3	1028.0	1028.0	0.067439
	算法耗时	0.058055	0.060930	0.066418	0.061450	1028.0	0.080980
			迭代次数				
			10	25	50	75	100
68 个目标点、两架路径	优化结果	1875.9	1754.8	1507.4	1339.7	1231.1	1231.1
	算法耗时	0.047101	0.151572	0.318785	0.524554	0.644723	0.793288

由表 9-1 可以看出大概改良圈算法得出的结果精度很差，这说明该算法严重依赖初始点和初始路径的序列，难以寻找区域的全局最优解。改良圈算法随着迭代次数的增加，精度迅速增加，迭代收敛的步数大致等于目标点的数目 N。

实际上，Harmilton 图论问题是一个 N-P 问题，全局优化解只有通过穷举法球的。求解该模型的采用的改进改良圈算法属于近似算法，复杂度为 $O(n^5)$ ，小于穷举法 $O(e^n)$ ，大于改良圈算法的 $O(n^4)$ 。改进改良圈算法结果的精度小于穷举法，但优于改良圈算法。

9.2 无人机作战能力分析

针对哪些技术参数的显著提高将显著提升无人机的作战能力，在我们构建模型进行求解的过程中发现如下参数影响较大：

（1）无人机的速度

无人机的速度是影响无人机作战能力的重要因素之一。首先，如果无人机的速度能够提高，则无人机无论是在进行侦察任务还是攻击任务，其完成速度的时间都将大大提高，这样也能减少无人机滞留在防御雷达探测区的时间，减少无人机被击毁的概率，从而提高无人机的作战能力；其次是无人机速度的一致性，在比如问题二中对 FY-2 型通信中继无人机的规划中，FY-1 型无人机和 FY-2 型无人机的速度不同大大增加了规划的难度，也影响了无人机的作战能力，为此可提高 FY-1 型无人机的速度使之与 FY-2 相应。

（2）炸弹的攻击范围和作用形式

如问题三所示，本题中的两种类型的炸弹均存在一定不足，D-1 型炸弹需攻击时需接近目标，同时 10 枚 D-1 型炸弹才能击毁一个目标；而 D-2 型炸弹虽然 2 枚就可以击毁目标，但其需要一架 FY-1 型无人机加载载荷进行引导才能击中目标，这不仅增加了无人机的需求量，也加大了其被雷达探测到的危险性，从而影响无人机的作战能力。故，如若能提高炸弹的攻击范围并改善其作用形式，则可提高无人机的作战能力。

（3）无人机可携带炸弹数量

如问题三所示，如若一架无人机可携带 10 枚 D-1 型炸弹，则击毁一个目标仅需要一架无人机；若一架无人机可携带 8 枚 D-2 型炸弹，则在一架 FY-1 型无人机的引导下可击毁 4 个目标；如果一架无人机可携带的炸弹数量更多的话，无人机的作战能力将大大提高。

（4）无人机的最长巡航时间

显然，如果无人机的巡航时间更长，则其在执行侦察和打击任务时可更多的完成任务，从而提高其作战能力。

10 模型推广

本文所提出的基于虚拟点的改进 Hamilton 圈模型由于通过引入虚拟点，并对距离赋权矩阵加以处理，可以求取任意 n 段航线的最佳路线，从而找出最优航线段数，并求出最小的航程时间总和。因此，此模型可以适用更多目标点的情况，而且计算精度高，灵活性强。

由于本模型迭代次数的可调性，因此对于结构更复杂、任务更多样的多无人机任务协调模型等方面的问题，可以通过增大增大迭代次数，使其收敛直至达到最优解。

11 结论

问题一结论：为求得无人机成像带宽在雷达探测区内的最短路线，可通过

在雷达区外增加虚拟点，而后通过修改对应的距离赋权矩阵，可求得任意条线路的最佳路线，并从中选取最优结果。从而利用该模型分别计算出了加载 S-1 和 S-2 的无人机成像带宽线路为 1 条、2 条、3 条和 4 条对应的最短路线，发现采用 2 架加载 S-1 和 2 架加载 S-2 的 FY-1 型无人机相应的时间总和最短，分别为 6.155h、5.140h，并对其进行细部优化，将成像带宽线路转化为加载 S-1 和 S-2 的无人机实际航线，可求得在雷达探测区的最短时间总和分别为 5.752h、5.092h，则此次侦察任务的无人机滞留雷达探测区内的时间总和为 10.844h。

问题二结论：根据问题一的最佳飞行路线和 FY-1 无人机架次，假设使用 1 架 FY-2 无人机可以完成任务，再利用规划的路线计算航行时间发现不满足该无人机最大巡航时间；因此，至少需要 2 架 FY-2 无人机才能随时保持与 4 架 FY-1 通信服务，通过对两架 FY-2 无人机进行航线规划时发现对问题 1 中的载荷 S-2 的两架无人机航线可以重新进行规划，使得两架 FY-2 无人机的航线转弯更少，航行时间更短，最终两架 FY-2 无人机的航线分别为基地 P01→A01→A02→A08→A09→A03→A04→A05→A06→P01 和 P07→A07→A10→P07。

问题三结论：首先使用制导炸弹轰炸雷达目标，利用分步规划所列的优化目标函数和约束条件，得出仅使用 D-1 型炸弹轰炸 10 个雷达目标要比仅使用 D-1 型炸弹以及 D-1 型和 D-2 型混合使用情况更节省时间。因此，第一步仅使用 D-1 型炸弹轰炸 10 个雷达目标，在雷达区航行总耗时为 4.66h；第二步对目标群 A01 和目标群 A02 使用 D-1 型炸弹轰炸所有目标，同时使用 D-2 型炸弹轰炸其余 8 个目标群，从而完成轰炸任务。最终，整个任务过程从第一架攻击无人机进入雷达区到轰炸完最后一个目标总耗时为 4.964h，共使用 FY-3 攻击无人机 65 架、载荷 S-3 的 FY-1 无人机 8 架，共消耗 D-1 型炸弹 270 枚、D-2 型炸弹 82 枚。

问题四结论：从战略角度考虑，应首先击毁三部超级搜索雷达，并考虑攻击方击毁超级雷达的最不利情况，分析比较采用 D-1 型和 D-2 型炸弹的两种方案，据此求出击毁超级雷达时无人机滞留在雷达防御区的总时间为 4.231h，消灭所有目标的累计滞留时间为 8.891h。

问题五结论：通过对模型的精确性分析，发现采用的改进的改良圈算法的复杂度为 $O(n^5)$ ，大于改良圈算法的 $O(n^4)$ 。改进改良圈算法结果的精度小于穷举法，但优于改良圈算法。

模型优缺点：①基于虚拟点改进的 Hamilton 模型通过改进的算法可以求取雷达区任意条线路的最佳路线，灵活性强，精确度高；②可以利用增加迭代次数来提高计算结果的精度；③分布规划模型根据实际雷达区域的形状来确定最佳任务协调规划，计算的结果可信度高；④Hamilton 回路模型求取的结果只是

近似最优，所以后处理中必须进行进一步优化才能得到更理想的结果。

模型的改进:可对 Hamilton 回路模型程序原理是逐步搜索每一步的最短路线，直到搜索到最后一个点，即认为是最优线路。其实这种算法是有缺陷的，但对于绝大部分情况都可以得到近似最优的结果，因此要解决此问题，必须进行重新编写代码，找到更好的搜索最短路的算法。

参考文献

- [1]叶媛媛, 闵春平, 沈林成.多 UCAV 任务分配的混合遗传算法与约束处理[J].控制与决策, 2006, 21(7): P781-787.
- [2]李华伟. 多无人机协同任务规划研究与实现[D].西安电子科技大学, 2014.
- [3]M. Alighanbari,Y. Kuwata, J. P. How coordination and control of multiple UAVs with timing constraints and loitering. Proceedings of the 2003 American Control Conference.2003: 5311-5316
- [4] 韩攀. 多无人机协同任务规划[D].南京航空航天大学, 2013.
- [5] 杨国兴. 一种多出发点多旅行商问题到旅行商问题的转换[J]. 系统工程理论方法应用, 1993, 2 (3) :66-80.
- [6]J. A. Bondy , U. S. R. Murty. 图论及其应用 [M]. 又望名等译. 北京:科学出版社, 1984.
- [7]Tou J. Pattern Recognition Principles[J]. Reading, USA: Addison-Wesley, 1974
- [8]金华, 王丽华. 旅游规划学[M]. 沈阳: 东北财经大学出版社, 2002, 66-70.

附录

1. 程序

基于虚拟点的改进 hamilton 回路模型的求解程序 Q_68_2: 68 个目标点,
2 架无人机。

```
clear
k=2                %无人机架数
n=68+k;           %68 个目标点+k 个边界点
                  %读入 68 个目标坐标

mbq_co=[1 264 715
2  258 719
3  274 728
4  264 728
5  254 728
6  257 733
7  260 731
8  262 733
9  268 733
10 270 739
11 225 605
12 223 598
13 210 605
14 220 610
15 223 615
16 209 615
17 230 620
18 220 622
19 205 618
20 168 538
21 168 542
22 164 544
23 168 545
24 174 544
```

25 210 455
26 180 455
27 175 452
28 170 453
29 185 460
30 178 460
31 190 470
32 183 473
33 175 472
34 180 476
35 120 400
36 119 388
37 112 394
38 125 410
39 114 405
40 116 410
41 113 416
42 96 304
43 88 305
44 100 312
45 93 311
46 86 310
47 94 315
48 10 451
49 11 449
50 13 450
51 16 450
52 12 453
53 15 455
54 162 660
55 161 659
56 159 659
57 160 657

```

58 164 658
59 110 561
60 110 563
61 110 565
62 109 567
63 112 568
64 105 473
65 106 471
66 103 473
67 107 475
68 104 477]
d= zeros(n);           %获取目标点距离矩阵
for i =1:n-2
    for j=1:n-2

d(i,j)=sqrt((mbq_co(j,2)-mbq_co(i,2))^2+(mbq_co(j,3)-mbq_co(i,3))^2);
    end
end
bianjie=[70
62.789
53.5988
51.157
52.6239
50.8173
53.6418
51.974
51.504
41.1556
70
63.5759
74.2584
71.3344
66.228

```


78.7684
57.6905
65.8988
81.3172
70
70.216
74.3859
70.5267
64.4493
70
67.3805
65.2955
67.5061
71.888
72.6148
67.8123
70.6773
76.6423
71.0397
70
60.637
60.624
67.6055
64.7059
67.6996
66.5501
70
61.9377
62.6406
62.463
58.7941
59.671
70

67.7639

67.482

65.8722

67.2577

64.0301

70

68.6702

66.1593

66.9355

70.9003

70

68.0269

66.0555

63.9173

63.4899

70

72.0898

68.3277

70.1915

66.6087

];

d(1:68,n-1)=bianjie;

d(1:68,n)=bianjie;

d(n-1,1:68)=bianjie';

d(n,1:68)=bianjie';

d(69:n,69:n)=[0 10000;

10000 0];

%%%%%%%%%%%%%% 开始

计算

tic

n=size(d,2);

C=[linspace(1,n,n) 1];

for nnn=1:500

```

C1=C;
if n>3
    for m=4:n+1
        for i=1:(m-3)
            for j=(i+2):(m-1)
                if
(d(C(i),C(j))+d(C(i+1),C(j+1))<d(C(i),C(i+1))+d(C(j),C(j+1)))
                    C1(1:i)=C(1:i);
                    for k=(i+1):j
                        C1(k)=C(j+i+1-k);
                    end
                    C1((j+1):m)=C((j+1):m);
                end
            end
        end
    end
elseif n<=3
    if n<=2
        fprintf('It does not exist Hamilton circle. ');
    else
        fprintf('Any circlce is the right answer. ');
    end
end
end
C=C1;
d1=0;
for i=1:n
    d1=d1+d(C(i),C(i+1));
end
d1
end
toc
%%%%%%%%%%%%%%画圆
clf

```

```

figure(1)
scatter(mbq_co(:,2),mbq_co(:,3),'+')
axis equal
hold on
ld_co=[264 715
225 605
168 538
210 455
120 400
96 304
10 451
162 660
110 561
105 473];
for h=1:10
rectangle('Position',[ld_co(h,1)-70,ld_co(h,2)-70,140,140],'Curvature',[1,1])
str1='A';
str2=num2str(h);
dot=[str1,str2];
text(ld_co(h,1)+2,ld_co(h,2)+4,dot); %给点命名
end
dot= ['S=',num2str(d1,'%1f'),'Km'];
text(-100,100,dot);
n=size(d,2); %雷达距离，时间
jidi_co=[368 319
264 44
392 220
360 110
392 275
296 242
256 121];
%%%%%%%%%%%%画基地
for h=1:2:7

```

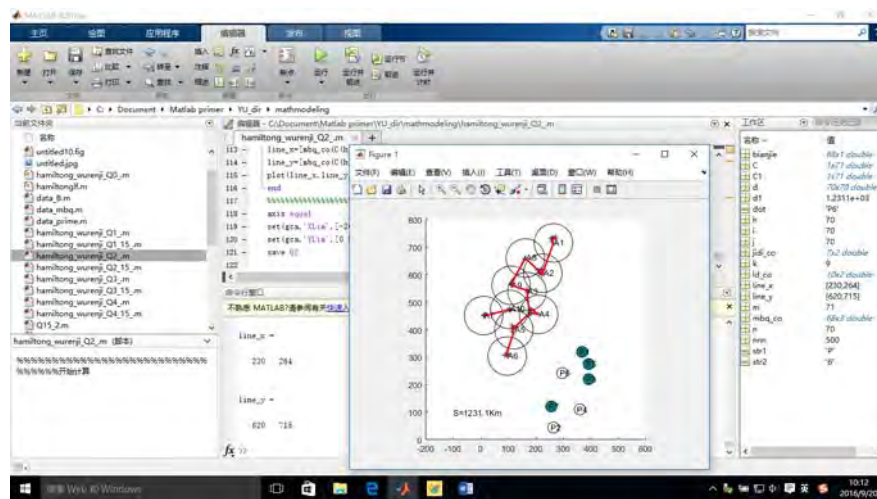
```

rectangle('Position',[jidi_co(h,1)-20,jidi_co(h,2)-20,40,40],'Curvature',[1,1],'FaceColor',[0.5.5])
str1='P';
str2=num2str(h);
dot=[str1,str2];
text(jidi_co(h,1)-10,jidi_co(h,2)+2,dot); %给点命名
end
for h=2:2:6
rectangle('Position',[jidi_co(h,1)-20,jidi_co(h,2)-20,40,40],'Curvature',[1,1],'FaceColor',[1 1 1])
str1='P';
str2=num2str(h);
dot=[str1,str2];
text(jidi_co(h,1)-10,jidi_co(h,2)+2,dot); %给点命名
end
%%%%%%%%%%%%%%画路线
for h=1:1:9
line_x=[mbq_co(C(h),2),mbq_co(C(h+1),2)]
line_y=[mbq_co(C(h),3),mbq_co(C(h+1),3)]
plot(line_x,line_y,'Color',[1 0 0],'LineWidth',2)
end
for h=12:1:21
line_x=[mbq_co(C(h),2),mbq_co(C(h+1),2)]
line_y=[mbq_co(C(h),3),mbq_co(C(h+1),3)]
plot(line_x,line_y,'Color',[1 0 0],'LineWidth',2)
end
for h=24:1:70
line_x=[mbq_co(C(h),2),mbq_co(C(h+1),2)]
line_y=[mbq_co(C(h),3),mbq_co(C(h+1),3)]
plot(line_x,line_y,'Color',[1 0 0],'LineWidth',2)
end
%%%%%%%%%%%%%%画圆
axis equal

```

set(gca,'XLim',[-200 600]);%X 轴的数据显示范围

set(gca,'YLim',[0 800]);%Y 轴的数据显示范围



程序 2:

15 个目标点， 2 架无人机问题的求解程序 Q_15_2: 对于为例给出

clc

clear

n=17;%15+2 个边界点

mbq_co=[1 261 717 66.3944

2 278 733 47.1965

3 224 601.5 52.8264

4 235 621 66.766

5 168 542 70.216

6 210 455 70

7 175 452 65.2955

8 179 472.5 74.0276

9 117.9624 410.9869 69.8433

10 115.5 391 61.7501

11 94 308.5 65.1153

12 12 453 67.2577

13 160 657 66.9355

14 110 565 66.0611

15 105 474 68.6809]

d= zeros(n);

```

for i=1:n-2
    for j=1:n-2

d(i,j)=sqrt((mbq_co(j,2)-mbq_co(i,2))^2+(mbq_co(j,3)-mbq_co(i,3))^2);
        end
    end
    bianjie=mbq_co(:,4);
    d(1:15,n-1)=bianjie;
    d(1:15,n)=bianjie;
    d(n-1,1:15)=bianjie';
    d(n,1:15)=bianjie';
    d(16:n,16:n)=[0 10000;
        10000 0];
    %%%%%%%%%%%%%%% 开始
计算
    tic
    n=size(d,2);
    C=[linspace(1,n,n) 1];
    %C=[1 2 16 12 11 17 8 7 6 9 10 15 14 5 3 4 13 1]
    for nnn=1:300
        C1=C;
        if n>3
            for m=4:n+1
                for i=1:(m-3)
                    for j=(i+2):(m-1)
                        if
(d(C(i),C(j))+d(C(i+1),C(j+1))<d(C(i),C(i+1))+d(C(j),C(j+1)))
                            C1(1:i)=C(1:i);
                            for k=(i+1):j
                                C1(k)=C(j+i+1-k);
                            end
                            C1((j+1):m)=C((j+1):m);
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end
elseif n<=3
    if n<=2
        fprintf('It does not exist Hamilton circle. ');
    else
        fprintf('Any circle is the right answer. ');
    end
end
end
C=C1;
d1=0;
for i=1:n
    d1=d1+d(C(i),C(i+1));
end
d1
end
toc
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%画圆
clf
figure(1)
scatter(mbq_co(:,2),mbq_co(:,3),'+')
axis equal
hold on
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%画圆
ld_co=[264 715
225 605
168 538
210 455
120 400
96 304
10 451
162 660

```



```

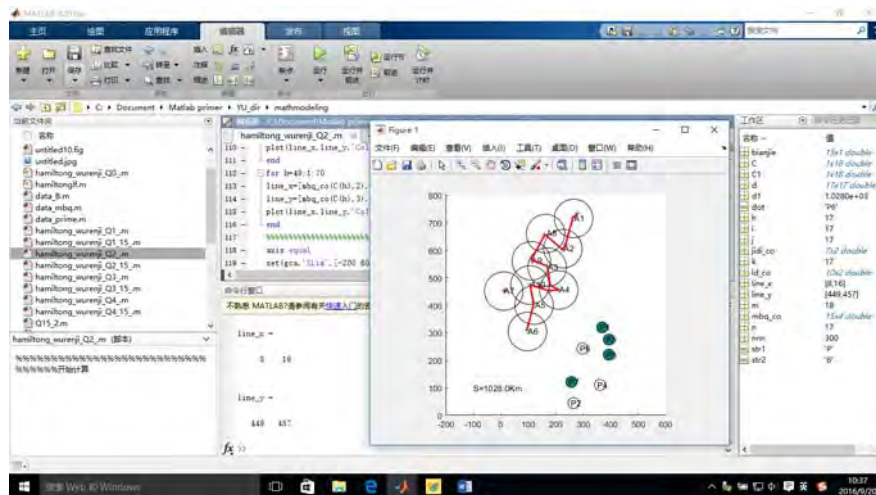
110 561
105 473];
for h=1:10
rectangle('Position',[ld_co(h,1)-70,ld_co(h,2)-70,140,140],'Curvature',[1,1])
str1='A';
str2=num2str(h);
dot=[str1,str2];
text(ld_co(h,1)+2,ld_co(h,2)+4,dot); %给点命名
end
dot= ['S=',num2str(d1,'%1f'),'Km'];
text(-100,100,dot);
n=size(d,2); %雷达距离，时间
jidi_co=[368 319
264 44
392 220
360 110
392 275
296 242
256 121];
%%%%%%%%%%%%%%画基地
for h=1:2:7
rectangle('Position',[jidi_co(h,1)-20,jidi_co(h,2)-20,40,40],'Curvature',[1,1],'FaceColor',[0 .5 .5])
str1='P';
str2=num2str(h);
dot=[str1,str2];
text(jidi_co(h,1)-10,jidi_co(h,2)+2,dot); %给点命名
end
for h=2:2:6
rectangle('Position',[jidi_co(h,1)-20,jidi_co(h,2)-20,40,40],'Curvature',[1,1],'FaceColor',[1 1 1])
str1='P';
str2=num2str(h);

```

```

dot=[str1,str2];
text(jidi_co(h,1)-10,jidi_co(h,2)+2,dot); %给点命名
end
%%%%%%%%%%%%%%画路线
for h=1:1:1
line_x=[mbq_co(C(h),2),mbq_co(C(h+1),2)]
line_y=[mbq_co(C(h),3),mbq_co(C(h+1),3)]
plot(line_x,line_y,'Color',[1 0 0],'LineWidth',2)
end
for h=6:1:17
line_x=[mbq_co(C(h),2),mbq_co(C(h+1),2)]
line_y=[mbq_co(C(h),3),mbq_co(C(h+1),3)]
plot(line_x,line_y,'Color',[1 0 0],'LineWidth',2)
end
line_x=[mbq_co(12,2)-4,mbq_co(12,2)+4]
line_y=[mbq_co(12,3)-4,mbq_co(12,3)+4]
plot(line_x,line_y,'Color',[1 0 0],'LineWidth',2)
axis equal
set(gca,'XLim',[-200 600]);%X 轴的数据显示范围
set(gca,'YLim',[0 800]);%Y 轴的数据显示范围

```



程序 3： 68 目标点的 prime 算法

```

clear
clc

```

mbq_co=[1 264 715

2 258 719

3 274 728

4 264 728

5 254 728

6 257 733

7 260 731

8 262 733

9 268 733

10 270 739

11 225 605

12 223 598

13 210 605

14 220 610

15 223 615

16 209 615

17 230 620

18 220 622

19 205 618

20 168 538

21 168 542

22 164 544

23 168 545

24 174 544

25 210 455

26 180 455

27 175 452

28 170 453

29 185 460

30 178 460

31 190 470

32 183 473

33 175 472

34 180 476
35 120 400
36 119 388
37 112 394
38 125 410
39 114 405
40 116 410
41 113 416
42 96 304
43 88 305
44 100 312
45 93 311
46 86 310
47 94 315
48 10 451
49 11 449
50 13 450
51 16 450
52 12 453
53 15 455
54 162 660
55 161 659
56 159 659
57 160 657
58 164 658
59 110 561
60 110 563
61 110 565
62 109 567
63 112 568
64 105 473
65 106 471
66 103 473

```

67 107 475
68 104 477]
k=size(mbq_co,1)
A = zeros(k);
for i=1:k
    for j=i:k

A(i,j)=sqrt((mbq_co(j,2)-mbq_co(i,2))^2+(mbq_co(j,3)-mbq_co(i,3))^2);
        end
    end
A = A+A'
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A(A==0) = Inf
P = zeros(1, k)
P(1,1) = 1;
V = 1:k;
V_P = V - P;
link = zeros(k-1,2);
m=1;
while m<k
    p = P(P~=0);
    v = V_P(V_P~=0);
    pv = min(min(A(p,v)));
    [x, y] = find(A==pv);
    for i=1:length(x)
        if any(P==x(i)) && any(V_P==y(i)) %%%%%%%%%集合
判断，关键！
            P(1,y(i)) = y(i);
            V_P = V - P;
            link(m, :) = [x(i), y(i)];
            m = m+1;
            break;
        end
    end

```

```

        end
    end
    scatter(mbq_co(:,2),mbq_co(:,3),'+k')
    hold on
    for n=1:k-1
        line_x=[mbq_co(link(n,1),2),mbq_co(link(n,2),2)]
        line_y=[mbq_co(link(n,1),3),mbq_co(link(n,2),3)]
        plot(line_x,line_y,'Color',[1 0 0],'LineWidth',2)
    end
    axis equal
    %%%%%%%%%%

```

画圆

```

ld_co=[264 715
225 605
168 538
210 455
120 400
96 304
10 451
162 660
110 561
105 473];
for h=1:10
    rectangle('Position',[ld_co(h,1)-70,ld_co(h,2)-70,140,140],'Curvature',[1,1])
    str1='A';
    str2=num2str(h);
    dot=[str1,str2];
    text(ld_co(h,1)+2,ld_co(h,2)+4,dot); %给点命名
end
axis equal
set(gca,'XLim',[-200 600]);%X 轴的数据显示范围
set(gca,'YLim',[0 800]);%X 轴的数据显示范围
jidi_co=[368 319

```

```

264 44
392 220
360 110
392 275
296 242
256 121];
%%%%%%%%%%%%%%画基地
for h=1:2:7
rectangle('Position',[jidi_co(h,1)-20,jidi_co(h,2)-20,40,40],'Curvature',[1,1],'FaceColor',[0.5.5])
str1='P';
str2=num2str(h);
dot=[str1,str2];
text(jidi_co(h,1)-10,jidi_co(h,2)+2,dot); %给点命名
end
for h=2:2:6
rectangle('Position',[jidi_co(h,1)-20,jidi_co(h,2)-20,40,40],'Curvature',[1,1],'FaceColor',[1 1 1])
str1='P';
str2=num2str(h);
dot=[str1,str2];
text(jidi_co(h,1)-10,jidi_co(h,2)+2,dot); %给点命名
end

```

