

参赛密码 _____

(由组委会填写)



“华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

学 校 上海理工大学

参赛队号 10252401

队员姓名 1.朱伟明

2.王宁

3.吕鹏程

参赛密码 _____

(由组委会填写)



“华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

题 目 无人机在抢险救灾中的优化运用

摘 要：

本文以最优化理论为基础，研究了多无人机协同巡查、救援及数据传送等规划问题。首先，通过“化零为整”的数学思想，对不同的海拔高度进行了分类和均一化处理，将三维空间问题转化为二维平面问题，使问题得到了简化。利用不同的算法如**模拟退火算法**、**遗传算法**等求解了多无人机协同巡查、救援及数据传送等问题。而本文的创新点在于根据无人机巡查或探测面积的不同对目标区域进行了离散化处理，大大减少了分析及计算的难度。

问题一中，分三步求解了第一小问的多无人机协同巡查问题。通过利用**最速下降法**求解，考虑最大的覆盖率和最少的无人机架数，求出了每架无人机的飞行最优路径，并得出**至少选择 5 架无人机进行巡查，覆盖率为 82.781%，其最佳路线见图 4.10**。第二小问利用与第一小问中相同的方法，先得出一组无人机探索尽可能多区域时的最优路径以及最少架次，计算可得**至少需要选择 18 架无人机进行巡查，覆盖率为 67.48%，其最佳路径见图 4.14**。共需三组即**54 架无人机**才能保证在 72 小时内，被巡查到的区域相邻两次被巡查的时间间隔不大于 3h，**每架无人机的时间安排见表 4.4**。

问题二中，先利用与问题一相同的区域离散化方法，将 3000 米以下的生命

探测区域离散为坐标点，再通过遗传算法，制定了两个基地 30 架无人机各自的最优飞行路线，其航迹见图 5.3。每架无人机分别按自己的最优路线飞行，即可保证探测面积最大，且第一架无人机飞出到最后一架无人机回到基地的时间间隔最短。

问题三中，分两步解决了多无人机与地面终端协同通信的问题，首先讨论了无人机飞行路线的各种可能情况，通过分析可知，所有无人机的飞行路线为同一个首尾相连的闭环结构时最优，继而将通信中继问题转化为了一个旅行商问题（TSP），利用模拟退火算法得出了无人机通信时的最优化路线，其路径图见图 6.3，路线长度为 508.28km。随后，在飞行的最优路径上，合理分配了每架无人机的位置，得出了至少需要 85 架无人机即可实现任意两点间的不间断通信。

问题四中，基于地面终端的分布情况及合理的假设前提下，提出了 3 架无人机传输数据的方案，发现当 3 架无人机同时起飞且飞行路线相同时，可在最短时间内完成任务。利用遗传算法求解可得，无人机的最优路线如图 7.3 所示，每台无人机的速度均为 98km/h，每台无人机所服务的用户均为终端 1-72，给每一个用户分配的功率均为 1.67W，得出完成任务的最短时间为 5.27h。

关键词：多无人机协同 区域离散化 模拟退火算法 遗传算法 无人机调度

目录

1. 问题重述	5
2. 模型假设	7
3. 符号说明	9
4. 问题一 灾情巡查	10
4.1 问题 1.1 巡查重点区域	10
4.1.1 问题分析	10
4.1.2 问题求解	11
4.2 问题 1.2 重复巡查问题	18
4.2.1 问题分析	18
4.2.2 问题求解	18
5. 问题二 生命迹象探测	23
5.1 问题分析	23
5.2 问题求解	23
6. 问题三 灾区通信中继	27
6.1 问题分析	27
6.2 问题求解	28
7. 问题四 无人机对地的数据传输	32
7.1 问题分析	32
7.2 问题求解	35
8. 模型的评价	37
8.1 模型的优点	37
8.2 模型的缺点	37
9. 参考文献	38

1. 问题重述

1.1 问题背景

2017 年 8 月 8 日,四川阿坝州九寨沟县发生 7.0 级地震,造成了不可挽回的人员伤亡和重大的财产损失。由于预测地震比较困难,及时高效的灾后救援是减少地震损失的重要措施。无人机作为一种新型运载工具,能够在救援行动中发挥重要作用。为提高其使用效率,需要解决无人机优化运用的几个问题。

附件 1 给出了震区的高程数据,共有 2913 列,2775 行。第一行第一列表示 (0,0)点处的海拔高度值(单位:米),相邻单元格之间的距离为 38.2 米,即第 m 行第 n 列单元格中的数据代表坐标 $(38.2(m-1), 38.2(n-1))$ 处的高度值。震区 7 个重点区域的中心位置如下表所示(单位:千米):

中心点	X 坐标	Y 坐标
A	30.3	89.8
B	66.0	84.7
C	98.4	76.7
D	73.7	61.0
E	57.9	47.6
F	86.8	22.0
G	93.6	48.8

除另有说明外,本题中的无人机都假设平均飞行速度 60 千米/小时,最大续航时间为 8 小时,飞行时的转弯半径不小于 100 米,最大爬升(俯冲)角度为 $\pm 15^\circ$,与其它障碍物(含地面)的安全飞行距离不小于 50 米,最大飞行高度为海拔 5000 米。所有无人机均按规划好的航路自主飞行,无须人工控制,完成任务后自动返回原基地。

1.2 需要解决的问题

问题一:灾情巡查

大地震发生后,及时了解灾区情况是制订救援方案的重要前提。为此,使用无人机携带视频采集装置巡查 7 个重点区域中心方圆 10 公里(并集记为 S)以内的灾情。假设无人机飞行高度恒为 4200 米,将在地面某点看无人机的仰角大于 60° 且视线不被山体阻隔视为该点被巡查。若所有无人机均从基地 $H(110,0)$ (单位:千米)处派出,且完成任务后再回到 H ,希望在 4 小时之内使区域 S 内海拔 3000 米以下的地方尽可能多地被巡查到,最少需要多少架无人机?覆盖率是多少?每架无人机的飞行路线应如何设计?在论文中画出相应的飞行路线图及巡查到的区域(不同的无人机的飞行路线图用不同的颜色表示)。

进一步,为及时发现次生灾害,使用无人机在附件 1 给出的高度低于 4000 米的区域(不限于 S)上空巡逻。问最少需要多少架无人机、如何设定每架无人机的飞行时间、路线,才能保证在 72 小时内,上述被巡查到的地方相邻两次被巡查的时间间隔不大于 3 小时(无人机均需从 H 出发并在 8 小时内回到 H ,再出发

的时间间隔不小于 1 小时)?

问题二：生命迹象探测

使用无人机携带生命探测仪搜索生命迹象，能够给灾后救援提供准确的目标定位。拟从基地 H(110,0), J(110,55)(单位：千米)处总共派出 30 架无人机(各 15 架)，任务完成后回到各自的出发地。探测仪的有效探测距离不超过 1000 米，且最大侧视角(探测仪到可探测处的连线与铅垂线之间的夹角)为 60 度。请你们规划它们的飞行路线，使附件 1 所给出的全区域内海拔 3000 米以下部分能被探测到的面积尽可能大，且使从第一架无人机飞出到最后一架完成任务的无人机回到基地的时间间隔尽量短。

问题三：灾区通信中继

大地震发生后，地面电力设施被破坏，灾区通信中断。太阳能无人机(白天不受续航能力限制，其余条件同前述)可以作为地面移动终端之间的通信中继，为灾区提供持续的通信保障(地面终端只能与无人机进行通信，无人机之间只要不超过最大通信距离就可以互相通信，地面与地面之间的通信由无人机转接)。假设无人机在空中飞行时，可与距离 3000 米以内的移动终端通信，无人机之间的最大通信距离为 6000 米，问最少需要多少架无人机、每架无人机的飞行路线如何，才能保证在白 12 小时内，附件 2 中的任意两个地面终端之间都能实现不间断通信(作为中继的无人机之间的切换时间忽略不计，地面终端的移动距离不超过 2 千米)?

问题四：无人机对地的数据传输

指挥中心拟从 H 派出 3 架无人机携带通信装备向灾区内的 72 个地面终端(分布见附件 2)发送内容不同，总量均为 500M(1M 按 10^6 比特计算)的数据。设每台通信装备的总功率是 5 瓦，可同时向不超过 10 个地面终端发送数据。数据传输过程可以简化为：当地面终端 i 看无人机的仰角大于 30° 、距离不超过 3000 米且没有山体阻隔时，如果无人机当前服务用户少于 10 个，则开始向 i 发送数据，并瞬间完成所有用户的功率再分配，否则，搁置 i 的需求，直到有地面用户退出，若此时 i 仍在可服务区域，则为 i 服务(先到先服务)。如果在一个服务时间区间(即无人机和终端之间满足可传输数据条件的时间范围)内不能传完全部数据，则以后区间可以续传。再设 i 用户在时刻 t 接收到无人机发送的信息速率为

$$r_i(t) = B_i \log_2 \left(1 + \frac{p_i(t)}{\rho_0 d^2(u, i)} \right) \text{ (比特/秒)}, \text{ 其中 } B_i \text{ 表示无人机服务 } i \text{ 的子信道带}$$

宽(取值见附件 2，单位 Hz)， $p_i(t)$ 表示 t 时刻无人机为第 i 个地面用户所在的子信道分配的功率,单位: w(瓦), $d(u, i)$ 表示 t 时刻无人机与 i 之间的欧氏距离，单位：米。 ρ_0 为信道特性参数，为简单起见，取为 4.314×10^{-10} (单位略)，

假设无人机飞行速度在 60~100 千米/小时之间可调(水平面内最大加速度 ± 5 米/秒²，铅垂面内最大加速 ± 2 米/秒²，可同时在两个方向上加速)，请你们为无人机设计恰当的航线、速度以及所服务的用户，并为每一个用户分配恰当的功率，使得无人机完成所有任务的时间总和尽量短。

2. 模型基本假设

1. 假设无人机的平均飞行速度为 60 千米/小时；
2. 假设无人机与其他障碍物（含地面）的安全飞行距离不小于 50 米，最大飞行高度为海拔 5000 米；
3. 假设所有无人机均按规划好的航路自主飞行，无须人工控制，完成任务后自动返回基地；
4. 假设无人机飞行过程中忽略空气阻力的影响；
5. 假设忽略无人机起飞、降落及转弯过程对飞行路程的影响。

验证忽略无人机起飞/降落过程影响的合理性

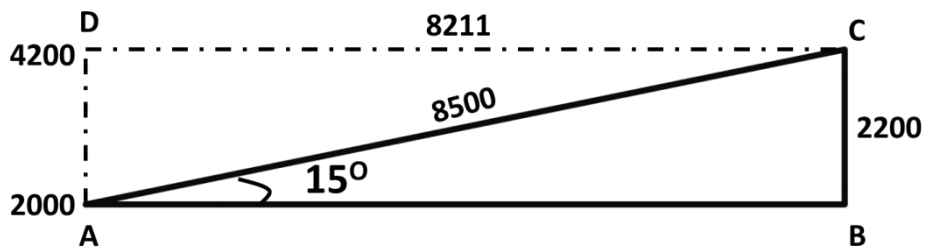


图 2.1 考虑/不考虑爬升角度过程影响的巡察路径示意图，单位（m）

研究数据发现，区域最高海拔为 4000 多米，最低海拔为 1000 多米。考虑到实际情况，假设基地的海拔高度为 2000 米，记为 A 点。以起飞爬升情况为例，无人机从 A 点到 C 点为整个起飞过程，AC 为实际起飞路径，而 DC 为忽略爬升角度的起飞路径。可以计算得出：

$$AC=2200/\sin 15^{\circ}=8500 \text{ m}; DC=2200/\tan 15^{\circ}=8211 \text{ m};$$

故而，可知实际多走距离 $\Delta s=AC-DC=289\text{m}=0.289\text{km}$ ；实际多消耗时间 $\Delta t=0.0048\text{h}=17.28\text{s}$ 。相比于问题 1 中巡航时间 4 h，占巡航总过程的 $0.0048/4=0.12\%$ ，说明无人机的起降对整体巡航的影响非常细微，拟制无人机最佳飞行路线和调度策略时可忽略该过程的影响。

验证忽略无人机转弯过程影响的合理性。

当转弯角度为 180 度时，与不考虑转弯过程相比，巡航过程之间的差别最大。

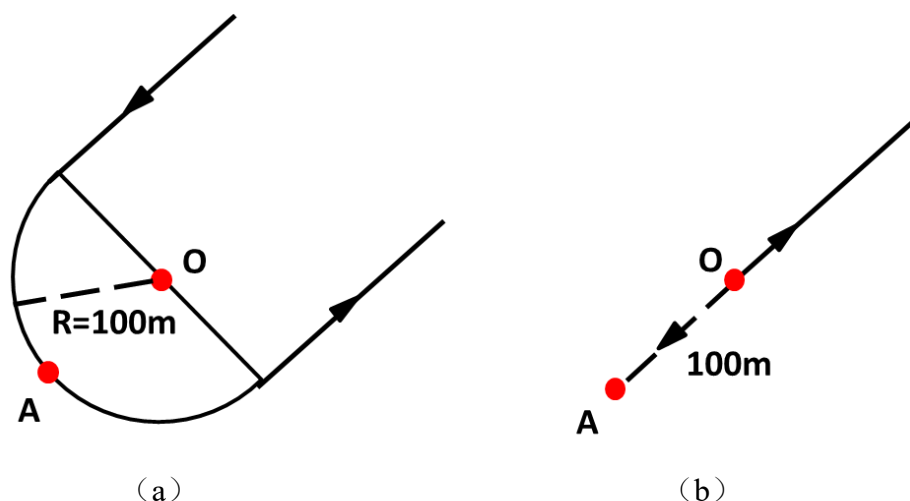


图 2.1 考虑/不考虑转弯过程影响的巡航路径示意图

如图 2.1 (a) 所示, 若考虑无人机的转弯过程, 无人机从 A 点进行转弯, 转弯圆弧所对应的圆心角为 180° , 通过相关计算可得出圆弧的长度 $S_{\text{转}}=314\text{m}$; 若不考虑无人机的转弯过程, 如图 2.1 (b) 所示, 无人机径直从 O 飞往 A 后直接返回, 其长度 $S_{\text{不转}}=200\text{m}$ 。

通过上述计算可知, 相对误差 $\frac{S_{\text{转}}-S_{\text{不转}}}{S_{\text{总}}} = \frac{314-200}{4 \times 60 \times 1000} = 0.0475\%$, 说明转弯过程对无人机整个飞行过程的影响非常细微, 所以在拟制无人机最佳飞行路线和调度策略时可忽略该过程的影响。

3. 符号说明

符号	意义
$M_i M_j$	分别为第 i 个目标点和第 j 个目标点 ($i < j$), i, j 为整数, 且 i 与 j 之间的整数点, 包括 i, j 取完之后剔除
m	目标点的总个数 ($i, j \in [1, m]$), 每题优化后的总目标点个数不同
N_k	第 k 架无人
n	无人机的总架次 ($k \in [1, n]$), 总架次根据题目不同而定
$X_{M_i, M_j}^{N_k}$	N_k 从基地起飞至 M_i 开始巡查, 到达 M_j 后开始返回到基地是否相连判断量, $X_{M_i, M_j}^{N_k} = 1$ 表示相连, 否则不相连
Cr	覆盖率 (Cover rate)
Cr_{max}	最大覆盖率 (无人机在最优路线上以扫描直径为宽度, 路线为长度的带状区域和目标巡查区域的交集与目标巡查区域的面积之比)
p	基地编号, $p \in \{1, 2\}$
Rp	第 p 个基地
$L_{Rp, Mi}$	Rp 与 Mi 之间的距离
$L_{Mj, Rp}$	Mj 与 Rp 之间的距离
$Y_{Mi, Mj}^{Rp, Nk}$	Nk 从 Rp 起飞到 Mi 开始探测, 到达 Mj 返回 Rp 是否相连的判断量, $Y_{Mi, Mj}^{Rp, Nk} = 1$ 表示相连, 否则不相连

4. 问题一 灾情巡查

4.1 问题 1.1 巡查重点区域

4.1.1 问题分析

从问题描述中可知，无人机目标巡查区域是以 7 个重点区域中心为圆心，10 公里为半径的圆形区域。这 7 个圆形区域与基地（110,0）的相对位置如图 4.1 所示。

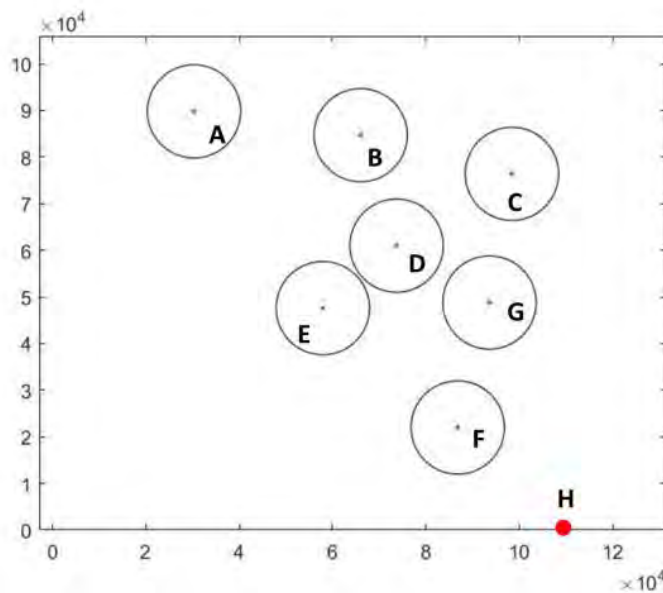


图 4.1 七个圆形区域与基地的相对位置

在无人机从 H 点出发的 4 个小时内，S 区域内海拔低于 3000m 的目标区域尽可能多的被巡查，求出最少需要多少无人机及其巡查覆盖率。通过分析，此题可以分为三步来解答：

第一步：将三维坐标转化为二维坐标。首先，可以通过“化零为整”的数学思想，在 A-G 的重点区域中，海拔 3000 米以下区域高度即 Z 坐标的大小是参差不齐的，这给建模和计算都带来了很大不便，需要将其均一化，转化为一个平面问题。通过计算可以得出区域 S 内海拔 3000 米以下区域的平均海拔 h ，并且以 h 优化为目标区域内全部点的海拔高度，这样就可以将三维坐标转化为二维坐标求解（山坡地形等因素带来的影响将在后文中详细讨论）。此外，因无人机飞行的海拔高度恒定为 4200 米，与 h 的高度差是一个恒定值，再结合无人机的仰角 60° ，即可计算出无人机在该平面上的巡查半径，若忽略地形因素的影响，即可认为无人机以恒定的巡查半径通过目标巡查区域。

第二步：目标巡查区域的离散化。目标巡查区域的数据量庞大，在一定程度上对问题求解造成很大困难。若能将目标巡查区域离散为具有代表性的点，在能减少计算量的同时也可以保证问题求解的准确度。

第三步：无人机综合调度策略的模型建立与求解。通过上述分析，寻求 n 架无人机在目标巡查区域的最优巡查路线可转化为求无人机经过离散后目标点

的最优巡查路线，再通过比较不同架次下的巡查覆盖率，可得出在保证覆盖率的同时，又可以找到无人机架次的最优解。

4.1.2 问题求解

依照上述分析，将问题分为三步求解：

(1) 将三维坐标转化为二维坐标

在求解复杂的三维空间问题时，我们可以设定一些条件将其转化为简单的二维平面问题。根据附件 1 的高程数据，可得到对应的三维坐标 (X, Y, Z) ，其中：

$$X=38.2(m-1); Y=38.2(n-1); Z=Z_{(m,n)}$$

注： m, n 即为附件 1 中第 m 行，第 n 列； $Z_{(m,n)}$ 为第 m 行，第 n 列对应的高程数据。将这些数据转化为可视的三维图，如图 4.2 所示：

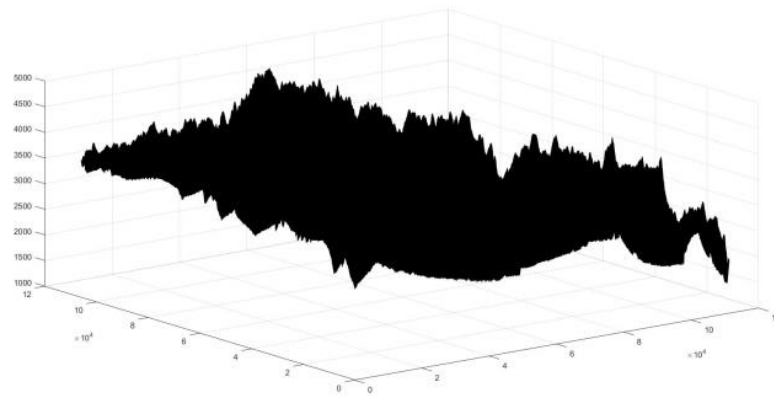


图 4.2 所给区域的地形图

根据题目要求，巡查范围为 S 区内海拔 3000 米以下的区域，且无人机固定飞行海拔高度为 4200 米，考虑与其它障碍物安全飞行距离不小于 50 米，所以当无人机遇到超过 4150 米海拔高度的障碍物（如山坡）时，不能直接翻过，而是需要绕行。并且，根据附件 1 可以分析出在海拔 3000 米以下的高程数据是参差不齐的，由于无人机与目标巡查点海拔距离的不断变化及其视线被山体阻隔等因素的影响，扫描面积会不断变化。因此我们采用“化零为整”的数学思想，将 S 区域内海拔 3000 米以下的数据进行筛选，并将其平均海拔高度作为目标巡查区域的统一海拔高度。此时，我们就可以使目标巡查区域转化一个平面，单位时间无人机巡查的范围也随之变为恒定。而海拔高度大于 4150 米的数据同样可以筛选出来，作为无人机的绕行区域。

下面提出具体简化方法：

首先可以求出所有海拔即 Z 轴小于 3000 的坐标点记为蓝色点，为可能需要巡查的区域。大于 4150 的坐标点记为红色点，为无人机的绕行区域，如图 4.3。

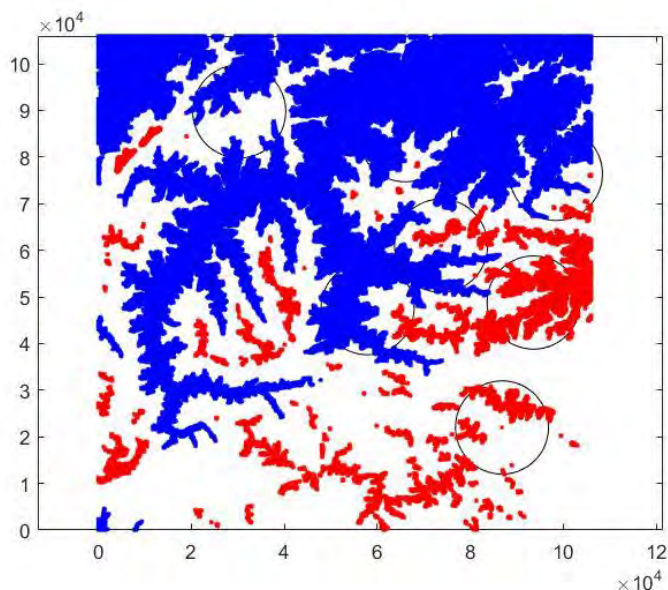


图 4.3 海拔 3000 米以下及 4150 米以上坐标点的平面分布图

再对其蓝色部分即可能巡查区域加上所提供的 7 个重点区域中心方圆 10km 的约束条件，如图 4.4。

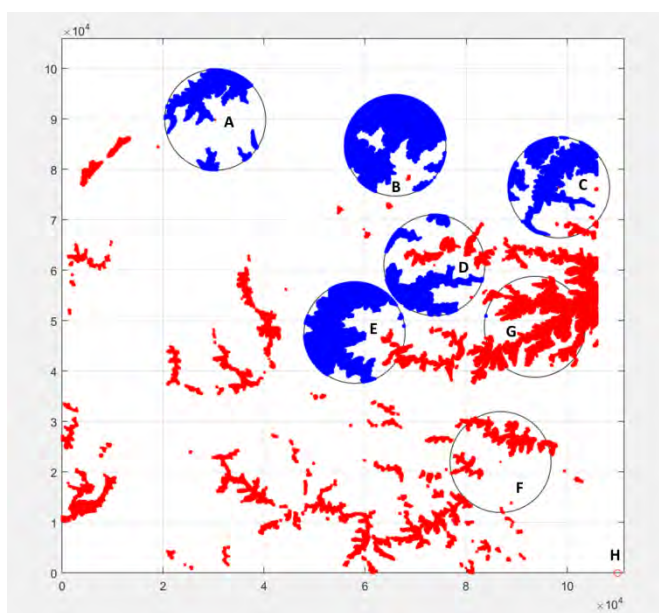


图 4.4 目标巡查区域分布示意图

由图 4.4 可知，重点区域 F 和 G 基本没有蓝点，即存在的目标巡查区域可以忽略不计，无人机的主要巡查范围集中于 A，B，C，D 和 E 区域。而红色区域主要集中在 G 区附近，所以无人机应尽量避免从 G 区经过。

下一步为对无人机扫描范围的优化，如图 4.5 所示，无人机的巡查范围是一个圆锥状的空间，当目标巡查区域的海拔高度不变时，其扫描范围是固定不变的。

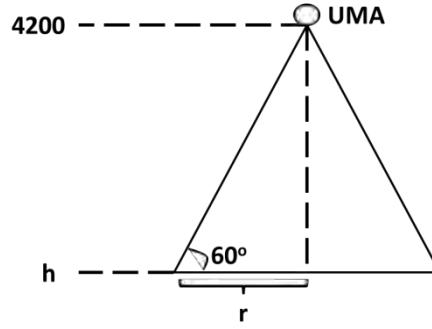


图 4.5 无人机扫描范围示意图

设无人机需要巡查的目标点的海拔高度为 h ，则其在 h 海拔高度上的巡查圆圈的半径为 r ，面积为 s ，则：

$$r = \frac{\sqrt{3}(4200-h)}{3} \text{ (m)}; s = \pi r^2 = \frac{(4200-h)^2}{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

在目标巡查区域部分，求出平均海拔值为 2.403km，并以此推算出其扫描平均半径为 1.037km，扫描范围为 3.3816km²。

(2) 目标巡查区域的离散化

由上一部分可知，目标巡查区域可简化为一个平面，海拔高度为恒定值。所以无人机的巡查范围可简化为以无人机为圆心， $R=1.037\text{km}$ 为半径的圆在指定区域内扫过的总面积。由于目标巡查区域的数据庞大、求解困难，所以要将目标巡查区域进一步优化，离散为合理数量的目标点。

首先考虑在每个目标群内中采用覆盖法，覆盖法是一种贪心算法，它的基本思想是尽可能覆盖周围目标点多的目标点，覆盖半径设置为无人机的扫描半径。这样，被覆盖的目标点便可在缩减后的目标点被巡查到的同时一并被巡查到。但在实际操作时发现数据量庞大，算法运行时间过长，短时间内无法对数据进行最优化地离散。所以这里考虑另一种离散方法，如图 4.6 所示，由于 XY 坐标均为 38.2 的倍数，即所测目标点在蓝色区域中是均匀分布的且间隔为 38.2m。

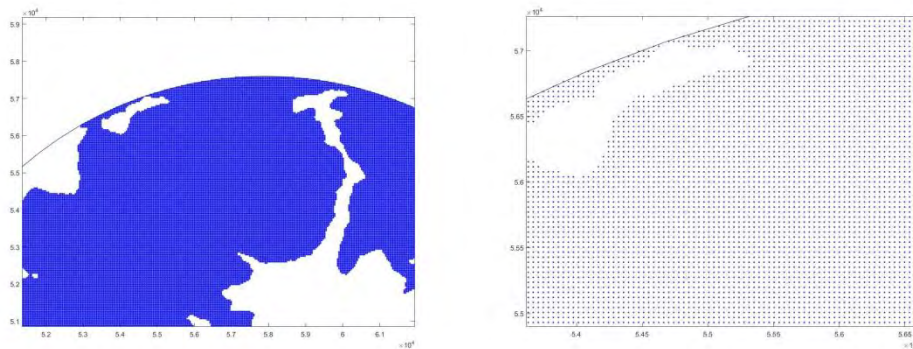


图 4.6 巡查区域局部放大图

在蓝色区域内，我们利用网格增大离散化程度，而单元格的边长设为 38.2 米的 55 倍，即为 2.101km，这与无人机扫描直径 2.074km 可以近似认为相等。这样设置单元格边长的原因是既可以保证无人机巡查范围基本不变，也能保证新建网格的点位为原蓝色区域点位的子集，有利于直接提取出新建网格位于蓝色区

域的点位，即离散成后续计算的目标点，如图 4.7 所示。

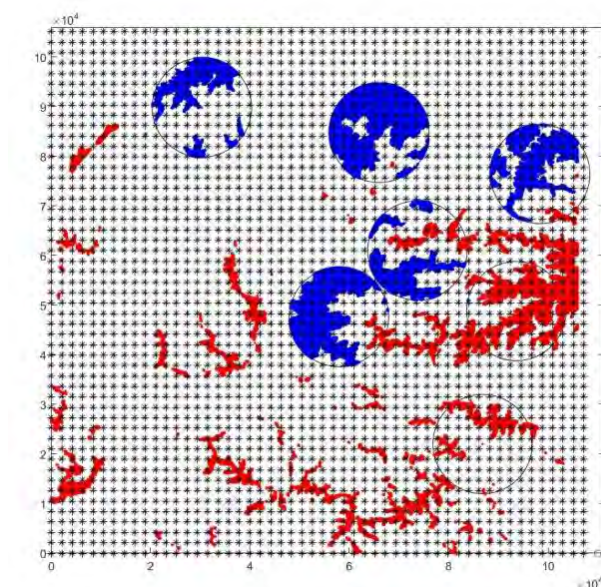


图 4.7 离散化程度增大后的点位平面分布图

下面考虑区域离散化的合理性：

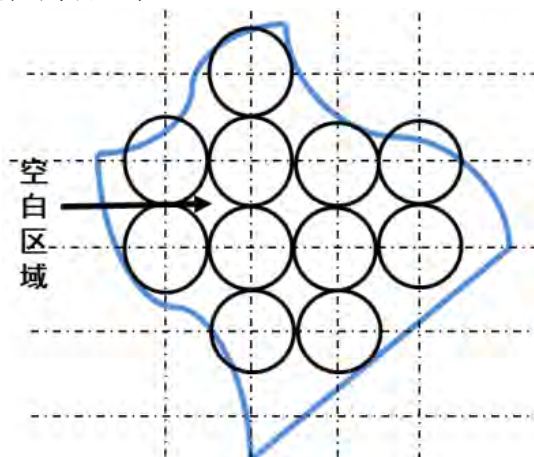


图 4.8 区域离散化示意图

如图 4.8 所示，建立网格以每个目标点为圆心，做出无人机在每个目标点时的扫描范围。虽然会有空白区域看似没有被巡查到，但考虑其实际情况，无人机从一个目标点飞往下一个目标点时的巡查路径会呈现出一个“带状”，这些空白区域也一定会被扫描到。其次，因为巡查区域边界存在凹凸不平，导致处于边界的某些区域可能不会被扫描到，但其面积相比于总巡查区域来说很小，故这些扫描不到的区域可忽略不计。

综上所述，目标巡查区域这样离散化是比较合理的，从而可以将 40 万的目标点转化为 151 个目标点。

(3) 无人机综合调度策略的模型建立与求解

模型的建立

找到最优决策变量 $x_{M_i, M_j}^{N_k}$ ，使得目标方程最大化。

$$MaxCr = \frac{\sum_{i \in [1, m]} \sum_{j \in [1, m]} \sum_{k \in [1, n]} (j - i + 1) X_{M_i M_j}^{N_k}}{m} \quad (1)$$

s.t.:

$$0 < \sum_{i \in [1, m]} \sum_{j \in [1, m]} (j - i + 1) \leq m \quad (2)$$

$$0 < \sum_{i \in [1, m]} \sum_{j \in [1, m]} \sum_{k \in [1, n]} X_{M_i M_j}^{N_k} \leq 240n \quad (3)$$

其中 $X_{M_i, M_j}^{N_k} = 1$ 表示 N_k 从基地起飞到 M_i 开始巡查, 直到 M_j 开始返回到基地。

约束 (2) 表示多架次无人机飞过的目标点个数要小于目标点的总数, 约束 (3) 表示多架次无人机要满足在 4 小时内巡查完较多的目标点后返回基地。在此模型中, 所需巡查的目标点个数已离散为 151 个点, 即 $m=151$ 。

基于灾难巡查的最速下降法 (Gradient Method, GM) [1]:

此问题是从所优化出的目标点中逐步搜索符合要求的目标点, 因此可以将这题看作多架次下的最速下降问题来求解。

Step 1: 从前文可知同一区域离散后的相邻目标点间距离恒定, 那么无人机从基地出发到达第一个点以恒定步长搜索下一个点, 在约束条件 (3) 下, 决定是否继续搜索;

Step 2: 然后在未搜索的目标点中, 转至 Step 1, 在无人机的架次约束条件 (2) 下, 完成所有搜索;

Step 3: 输出不同架次下, 与之相对应的最大覆盖率及飞行时间。

无人机的综合调度策略

基于灾难巡查的最速下降法求得不同架次无人机所对应的巡查目标点的个数、最大覆盖率和每架无人机飞行时间, 如表 4.1 所示:

表 4.1 不同架次无人机运行结果

无人机架次 n	巡查目标点个数	最大覆盖率 Cr_{max}	每架无人机飞行时间 (单位: h)
1	36	23.841%	3.944167
2	62	41.060%	3.984
3	82	54.305%	3.947
4	109	70.199%	3.9745
5	128	82.781%	3.930333
6	133	86.093%	3.537

经过计算, 无人机的架次多于 6 架时, 其在 4 小时的约束内无法到达更远的点, 因此 6 架无人机为能够派出无人机的最大架次。

以无人机架次 n 为横坐标, 最大覆盖率 Cr_{max} 为纵坐标, 做出它们的关系图, 如图 4.9 所示。

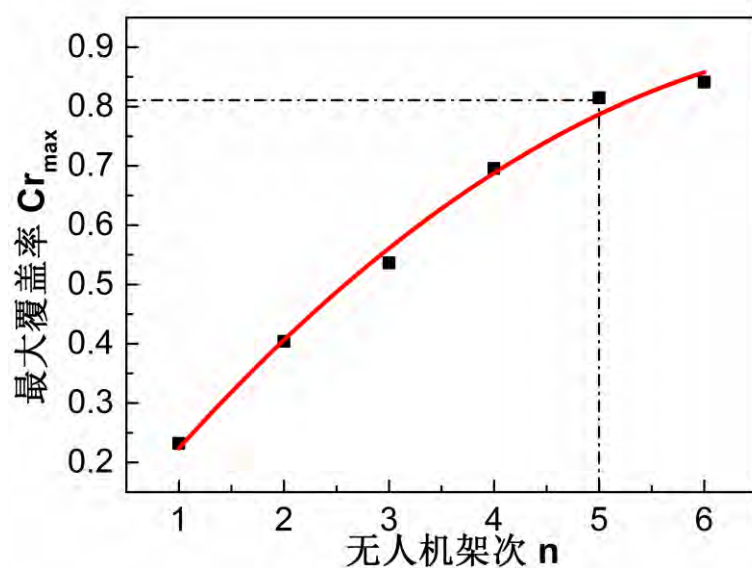


图 4.9 无人机架次 n 与最大覆盖率 Cr_{max} 的关系曲线图

根据拟合出来的曲线图，发现随着无人机架次增多，最大覆盖率逐渐趋于平缓，且在无人机架次为 5 的时候出现拐点，可以理解为最少 5 架无人机时，能够使得 4 小时之内海拔 3000 米以下的目标区域尽可能多的被巡查到，覆盖率为 82.781%。5 架无人机飞行时的路线如图 4.10 所示，图中每一种颜色代表一架无人机的飞行路线：

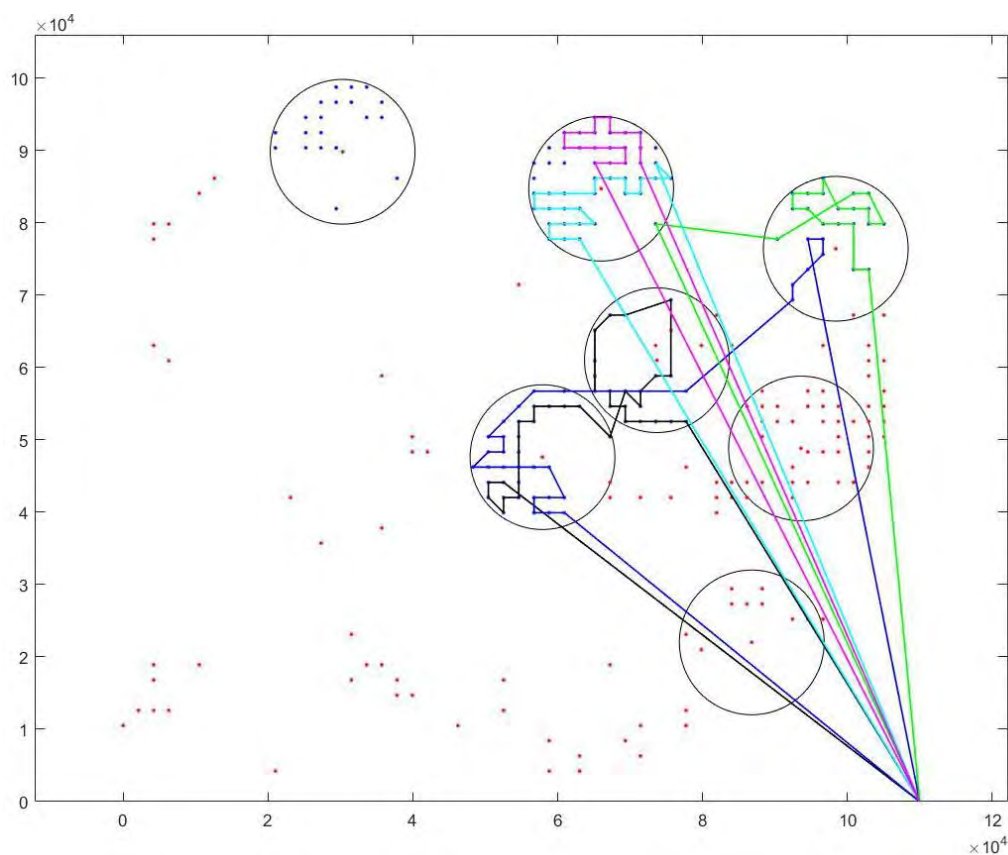


图 4.10 5 架无人机的飞行路线

表 4.2 给出了每架无人机详细的飞行路径坐标，其 MATLAB 程序见附件。

表 4.2 无人机飞行路线

第一架	(110000, 0) → (77737, 52525) → (73535, 52525) → (71434, 52525) → (69333, 52525) → (69333, 54626) → (67232, 54626) → (67232, 56727) → (65131, 56727) → (65131, 58828) → (65131, 60929) → (65131, 65131) → (67232, 67232) → (69333, 67232) → (75636, 69333) → (75636, 69333) → (73535, 58828) → (71434, 56727) → (71434, 54626) → (69333, 56727) → (67232, 50424) → (63030, 54626) → (60929, 54626) → (58828, 54626) → (56727, 54626) → (56727, 52525) → (54626, 52525) → (54626, 50424) → (54626, 48323) → (54626, 46222) → (54626, 44121) → (54626, 42020) → (52525, 42020) → (52525, 39919) → (50424, 42020) → (50424, 44121) → (52525, 44121) → (110000, 0)
第二架	(110000, 0) → (60929, 39919) → (58828, 39919) → (56727, 39919) → (56727, 42020) → (58828, 42020) → (60929, 42020) → (58828, 46222) → (56727, 46222) → (52525, 46222) → (50424, 46222) → (48323, 46222) → (50424, 48323) → (52525, 48323) → (52525, 50424) → (50424, 50424) → (52525, 52525) → (54626, 54626) → (56727, 56727) → (60929, 56727) → (77737, 56727) → (92444, 69333) → (92444, 71434) → (94545, 73535) → (96646, 75636) → (96646, 77737) → (94545, 77737) → (110000, 0)
第三架	(110000, 0) → (102949, 73535) → (100848, 73535) → (100848, 79838) → (98747, 79838) → (96646, 79838) → (94545, 81939) → (92444, 81939) → (92444, 84040) → (94545, 84040) → (96646, 84040) → (96646, 86141) → (98747, 81939) → (100848, 81939) → (102949, 81939) → (102949, 79838) → (105050, 79838) → (102949, 84040) → (100848, 84040) → (90343, 77737) → (73535, 79838) → (110000, 0)
第四架	(110000, 0) → (63030, 77737) → (60929, 77737) → (58828, 77737) → (58828, 79838) → (60929, 79838) → (63030, 79838) → (65131, 79838) → (63030, 81939) → (60929, 81939) → (58828, 81939) → (56727, 81939) → (56727, 84040) → (58828, 84040) → (60929, 84040) → (65131, 84040) → (65131, 86141) → (67232, 86141) → (69333, 86141) → (69333, 84040) → (71434, 84040) → (71434, 86141) → (73535, 86141) → (75636, 86141) → (73535, 88242) → (110000, 0)
第五架	(110000, 0) → (71434, 88242) → (69333, 88242) → (67232, 88242) → (65131, 88242) → (65131, 88242) → (65131, 90343) → (63030, 90343) → (60929, 90343) → (60929, 88242) → (58828, 88242) → (56727, 88242) → (56727, 86141) → (58828, 90343) → (60929, 92444) → (63030, 92444) → (65131, 92444) → (67232, 92444) → (67232, 90343) → (69333, 90343) → (71434, 90343) → (110000, 0)

(4) 忽略绕行情况的合理性

图 4.10 显示了 5 架无人机飞行路线，其中某一些会经过红色点状区域，即海拔高于 4150m 需要绕行的区域。首先，由表 2.1 可知无人机的飞行时间是小于 4h 的，这给无人机留出了一定的绕行时间。其次，再考虑到该处地理环境的实际情况，4150 米海拔的高山与高山之间有很长距离不留缝隙，完全不让无人机从山间穿过的概率是极低的。最后，所要巡查目标点间的最短距离为 2.101km，由常识可知，此距离大概率会大于无人机绕行造成的路程差，所以即便无人机必须绕行很长时间，也可以通过放弃巡查较远的 1 至 2 个目标点以弥补该路程差，保证在 4h 内返回基地。综合上述三种分析，在本题中无人机忽略绕行高山区域的情况是较为合理的。

4.2 问题 1.2 重复巡查问题

4.2.1 问题分析

此问与上问解决方法相似，可先求出无人机从 H 点出发，8 小时内高度低于 4000 米目标区域巡查尽可能多面积时的最少架次，再对无人机的飞行时刻进行合理安排。

第一组的无人机在 0 时刻同时起飞，沿着最优路径，8 小时内即可回到基地；根据题目要求，第一组的无人机起飞 3 小时后，必须有另一组的无人机同时起飞并沿着第一组无人机的飞行路线进行重复巡查，此时起飞的无人机记为第二组，起飞时刻为 3；同理，第一组起飞后 6 小时，第二组起飞后 3 小时，必须再有另一组的无人机起飞沿再同一路线巡查，记为第三组。

当第一组起飞在 8 小时内即可回到基地，此时第二组已飞行 5 小时，第三组已飞行 2 小时；当时刻为 9 时，需要第四组飞机起飞，用以衔接第三组，但是由题可知飞机休整 1 小时后即可再次起飞，那么之前到达基地的第一组休息时间已不小于 1 小时，第一组的无人机可以再次起飞，起飞时刻为 9；同理对第二和第三组，也可以仿照第一组的飞行方式，这样就可以组成一个循环飞行的过程，3 小时起飞一个无人机组，共需要 3 组飞机就能完成 72 小时内，同一区域两次被巡查的时间间隔不大于 3 小时的任务。

4.2.2 问题求解

与第一问类似，在第一问的基础上加算一步，使得能够满足同一区域两次被巡查的时间间隔不大于 3 小时。

1. 如图 4.11 所示，首先可以将所有海拔即 Z 轴小于 4000 米的坐标点记为蓝色点，根据上问的求解方法做出平面图。

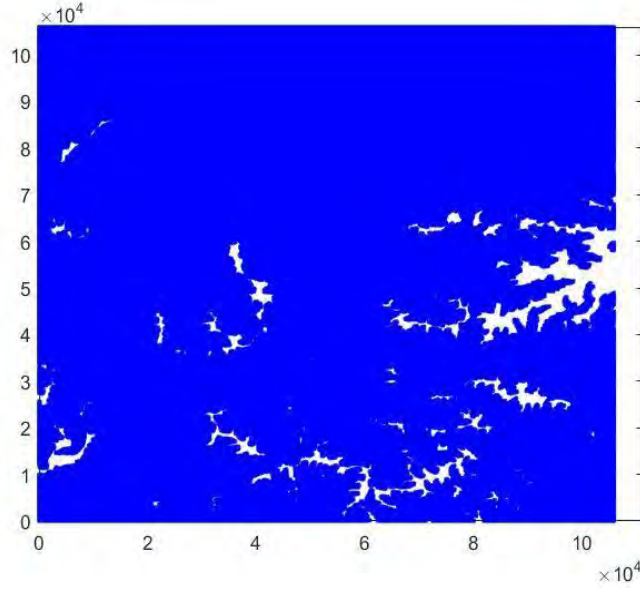


图 4.11 蓝色区域为海拔 4000 米以下区域

同理，在所需要巡查的蓝色区域部分，求出其平均海拔值为 3155.2 米，并以此推算出无人机的扫描半径为 0.603 千米，扫描面积为 1.142 平方千米。对蓝色区域进行离散化，如图 4.12 所示。紫色网格的节点就是区域离散化后所得目标点，这样目标巡查区域可以被转化为 6744 个目标点。

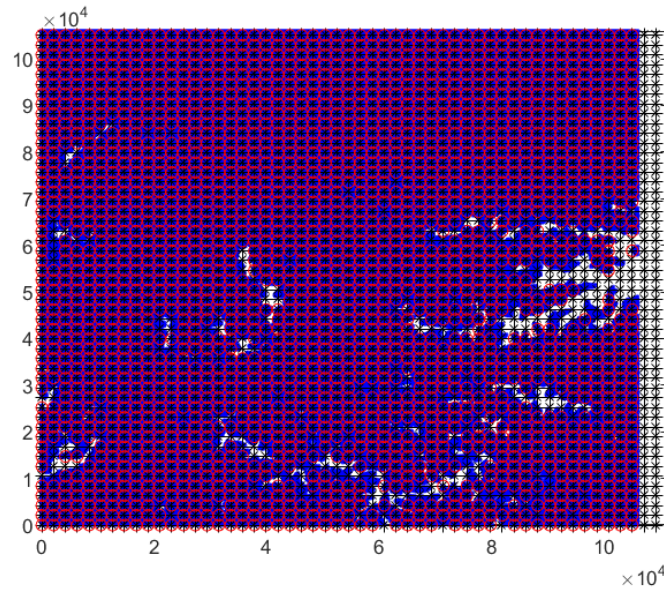


图 4.12 区域离散化后示意图

2. 建立数学模型：

找到最优决策变量 $x_{M_i, M_j}^{N_k}$ ，使得目标方程最大化。

$$\text{MaxCr} = \frac{\sum_{i \in [1, m]} \sum_{j \in [1, m]} \sum_{k \in [1, n]} (i - j + 1) x_{M_i M_j}^{N_k}}{m} \quad (4)$$

s.t.:

$$0 < \sum_{i \in [1, m]} \sum_{j \in [1, m]} (i - j + 1) < m \quad (5)$$

$$0 < \sum_{i \in [1, m]} \sum_{j \in [1, m]} \sum_{k \in [1, n]} X_{M_i M_j}^{N_k} < 480n \quad (6)$$

其中 $X_{M_i, M_j}^{N_k} = 1$ 表示 N_k 从基地起飞到 M_i 开始巡查, 直到 M_j 开始返回到基地。

约束条件 (5) 表示多架次无人机飞过的目标点个数要小于目标点的总数, 约束条件 (6) 表示多架次无人机要满足在 8 小时内巡查完目标点, 并且返回基地。在此模型中, 目标巡查区域离散化为 6744 个点, 即 $m=6744$ 。

3. 采用同样的方法, 进行模型求解, 其 MATLAB 程序及其说明见附件。表 4.3 列出了不同架次无人机飞行过程的运行结果, 结合图 4.13 可以看出当无人机架数为 18 架时, 覆盖率的上升幅度就较小, 即可作为一组无人机巡查的最少架数, 覆盖率为 67.48%。

表 4.3 不同架次无人机运行结果

架次	单个路线总长 (单位: m)	单个无人机飞行时间 (单位: h)	单个无人机巡查目标点数	总巡查个数	覆盖率
1	478101.592105	7.97	319	319	4.73%
2	478937.190782	7.98	336	655	9.71%
3	478365.492277	7.97	317	972	14.41%
4	478889.461700	7.98	267	1239	18.37%
5	475576.816544	7.93	272	1511	22.41%
6	479207.180347	7.99	242	1753	25.99%
7	479979.672339	8.00	250	2003	29.70%
8	478965.729690	7.98	269	2272	33.69%
9	478728.780253	7.98	243	2515	37.29%
10	471243.491437	7.85	243	2758	40.90%
11	478192.869744	7.97	177	2935	43.52%
12	478616.884332	7.98	225	3160	46.86%
13	479384.846902	7.99	256	3416	50.65%
14	479396.327613	7.99	216	3632	53.86%
15	479884.369963	8.00	222	3854	57.15%
16	479798.411105	8.00	211	4065	60.28%
17	479346.387748	7.99	263	4328	64.18%
18	478243.546256	7.97	223	4551	67.48%
19	477825.203015	7.96	109	4660	69.10%
20	475482.872513	7.92	109	4769	70.71%

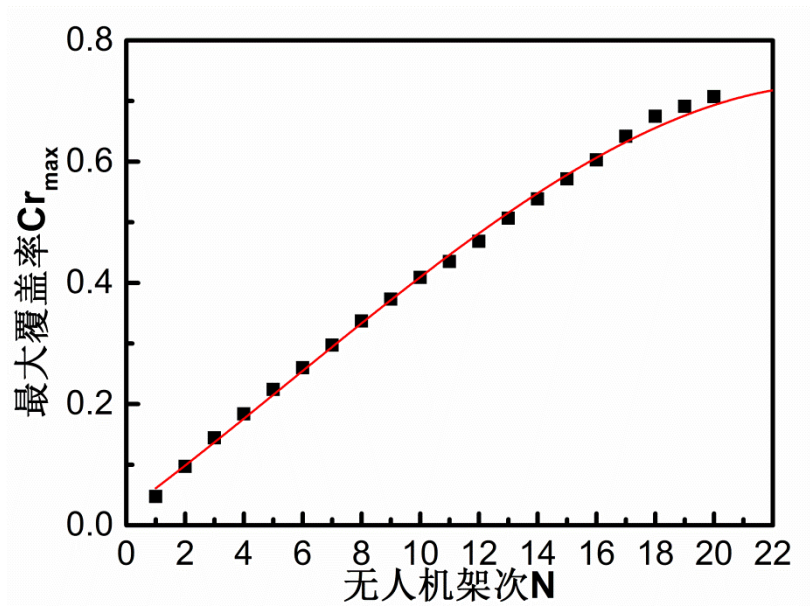


图 4.13 无人机架次 n 与最大覆盖率 Cr_{max} 的关系曲线图

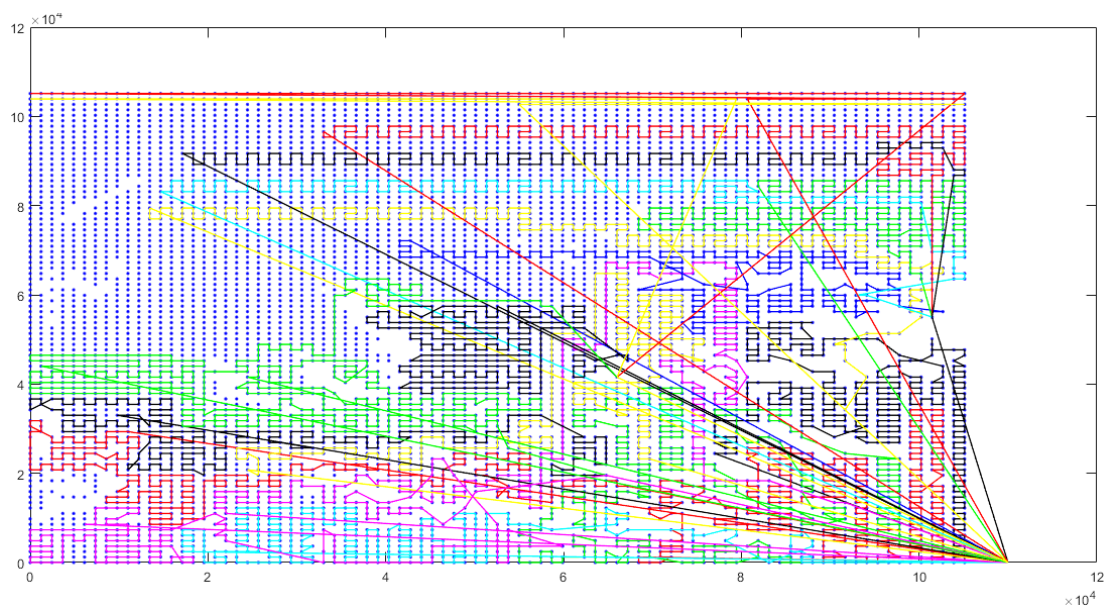


图 4.14 二十架无人机飞行路线图

综上所述，一组无人机所需最少架数为 18 架，所以无人机的总架数为 54 架，每组无人机飞行时刻安排如表 4.4 所示：

表 4.4 无人机飞行时刻表

时刻 (h)	事件
0	第一组无人机起飞
3	第二组无人机起飞
6	第三组无人机起飞
8	第一组无人机已全部回到基地，进行休整
9	第一组无人机起飞
11	第二组无人机已全部回到基地
12	第二组无人机起飞
14	第三组无人机已全部回到基地
15	第三组无人机起飞
17	第一组无人机已全部回到基地
18	第一组无人机起飞
...	...类比循环

5. 问题二 生命迹象探测

5.1 问题分析

此题以总数固定为 30 架的无人机在灾区进行生命迹象探测，要求尽可能多的探测到全区域内海拔 3000 米以下的区域。根据问题一可知，30 架无人机，最大续航 8 小时的时间里能够探测的区域远大于海拔 3000 米以下的区域。因此，每架无人机不一定都要以极限航行时间来飞行，就能探测完几乎所有的目标点。这个问题就转化为求解从两个基地起飞的 30 架无人机经过所有目标点，再回到原基地的最优路线。所有最优路线中单个无人机飞行的最长路线对应的时间，就是题目中从第一架无人机飞出到最后一架完成任务的无人机回到基地的最短时间间隔。

5.2 问题求解

1. 无人机探测范围最大化

由题意可知，无人机探测范围截面为一个扇形，可知当其位于拐角的时候，半径最大，最有利于生命迹象探测。计算可知其探测半径为 $R=0.866\text{km}$ ，探测范围 $S=2.357\text{km}^2$ ，此时飞行距地面高度 $H=0.5\text{km}$ 。

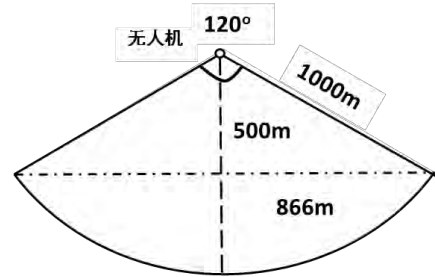


图 5.1 无人机探测范围示意图

2. 忽略无人机升降情况的合理性

本题未规定无人机飞行高度，因此我们可做出假设。无人机始终以最大的探测范围所对应的海拔高度飞行，当其海拔高度将要超过其安全距离时，无人机可以自行调整飞行高度，直接越过该山坡，无需绕行；当无人机对某区域进行生命迹象探测时，其也可以自行调整上升或下降高度，使得无人机的探测范围一直处于最优。而忽略爬升或下降路程所带来的误差的合理性已在模型基本假设中详细说明，这里只给出结果，单次爬升或降落对整个探测过程造成的影响是细微的，可以忽略不计。

3. 给出无人机最佳调度路径及模型建立

首先通过程序筛选出全区域海拔 3000 米以下部分，通过问题一中所述同样的方法将这些区域进行离散化为目标点如图 5.2。其中，其探测半径 R 为 0.866km ，直径为 1.732km ，所以用来离散区域的单元格边长为 1.719km 。探测更多区域的问题就转化为经过更多目标点的问题。

无人机从基地(110,0)经过最远点(0,105)的距离：

$$s = \sqrt{110^2 + 105^2} = 152(\text{km})$$

无人机从基地可飞行的最大路径为 480km ，远远大于到最远点再返航的距离，所以 30 架无人机一定可以在 8 小时内完成所有目标点的探查后再返航。

依题意，既要保证较大的探测面积，也要使得探测时间较短。而扩大探测面积的同时，也必然会造成探测时间的延长，二者是相对矛盾的。但考虑其实际情况，本题中的无人机是用于灾后的生命探测，无人机的探测面积越大，发现生命的概率也就越大，伤者获救的可能性也就越大。

所以，在进行生命探测时，我们首先保证最大的覆盖率，并在此基础上取得最短的探测路径，得到最短的探测时间。至此，该问题可以简化为一个多人旅行商问题(Multiple Traveling Salesman Problem, MTSP)^[2]。MTSP 是指 M 个旅行商从同一个城市(或不同城市)出发,分别走一条旅行路线,使得每个城市有且仅有一个旅行商经过(出发城市除外)，且总路程最短。

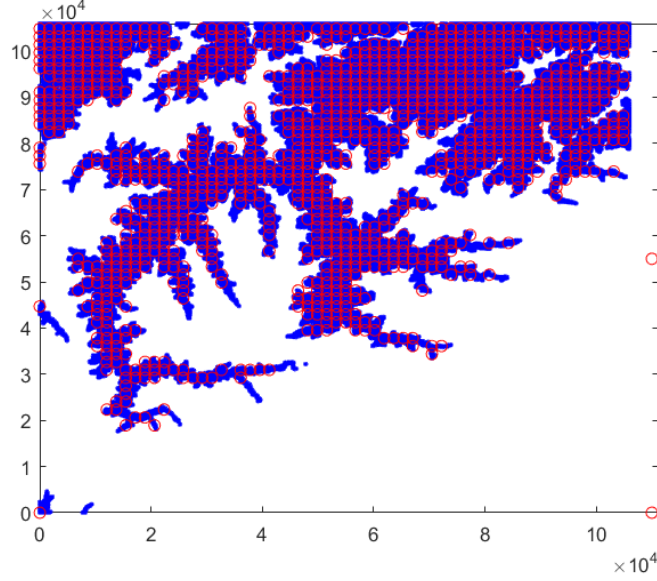


图 5.2 问题二中所求区域离散化后的坐标图

模型建立:

找到最优决策变量 $Y_{Mi,Mj}^{Rp,Nk}$ ，使得目标方程最小化。

$$\begin{aligned} \text{Min } L = \sum_{i \in [1,m]} \sum_{j \in [1,m]} \sum_{p \in \{1,2\}} \sum_{k \in [1,n]} [L_{Rp,Mi} + 1.719(j - i + 1) + L_{Mj,Rp}] \cdot \\ Y_{Mi,Mj}^{Rp,Nk} \end{aligned} \quad (7)$$

s.t.

$$0 \leq L_{Rp,Mi} + 1.719(j - i + 1) + L_{Mj,Rp} \leq 480 \quad (8)$$

$$0 \leq \sum_{i \in [1,m]} \sum_{j \in [1,n]} (j - i + 1) \leq m \quad (9)$$

由分析可知，此题中 n 为 15，m 为目标点总个数，m=1131。

美国 Michigan 大学的 Holland 教授提出的遗传算法(Genetic Algorithm, GA)是求解复杂的组合优化问题的有效方法，其思想来自 r 达尔文进化论和门德尔松遗传学说，它模拟生物进化过程来从庞大的搜索空间中筛选出较优秀的解，是一种高效而且具有强鲁棒性的方法，所以本文采用了遗传算法来求解多人旅行商问题。其主要特点是直接对结构对象进行操作，不存在求导和函数连续性的限定，

具有内在的隐并行性和更好的全局寻优能力。采用概率化的寻优方法，能自动获取和指导优化的搜索空间，自适应地调整搜索方向，不需要确定的规则。^[3] 遗传算法可分为如下 n 个步骤进行求解：

Step1: 在论域空间 U 上定义一个适应度函数 $f(x)$ ，给定种群规模 N ，交叉率 P_c ，变异率 P_m ，代数 Gen 。

Step2: 随机产生 U 中的 N 个染色体 s_1, s_2, \dots, s_N ，组成初始种群 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ 置代数 $t=1$ 。

Step3: 若终止条件满足，则取 S 中适应度最大的染色体作为所求结果，算法结束。

Step4: 计算 S 中每个染色体的适应度 $f()$ 。

Step5: 按选择概率 $p(s_i)$ 所决定的选中机会，每次从 S 中随机选中 1 个染色体并将其复制，共做 N 次，然后将复制得到的 N 染色体组成群体 S_1 。

Step6: 按 P_c 所决定的参加交叉的染色体数 c ，从 S_1 中随机确定 c 个染色体，配对进行交叉操作，并用产生的染色体代替原染色体，组成群体 S_2 。

Step7: 按 P_m 所决定的变异次数 m ，从 S_2 中随机确定 m 个染色体，分别进行变异操作，并用产生的新染色体代替原染色体，组成群体 S_3 。

Step8: 将群体 S_3 作为新种群，即用 S_3 代替 S ， $Gen = Gen + 1$ ，转步 3。

遗传算法的处理对象不是参数本身，而是对参数集进行了编码的个体。此操作使得遗传算法可直接对结构对象进行操作。传统搜索算法都是单点搜索算法，容易陷入局部的最优解。遗传算法同时处理群体中的多个个体，即对搜索空间中的多个解进行评估，减少了陷入局部最优解的风险，同时算法本身易于实现并行化。

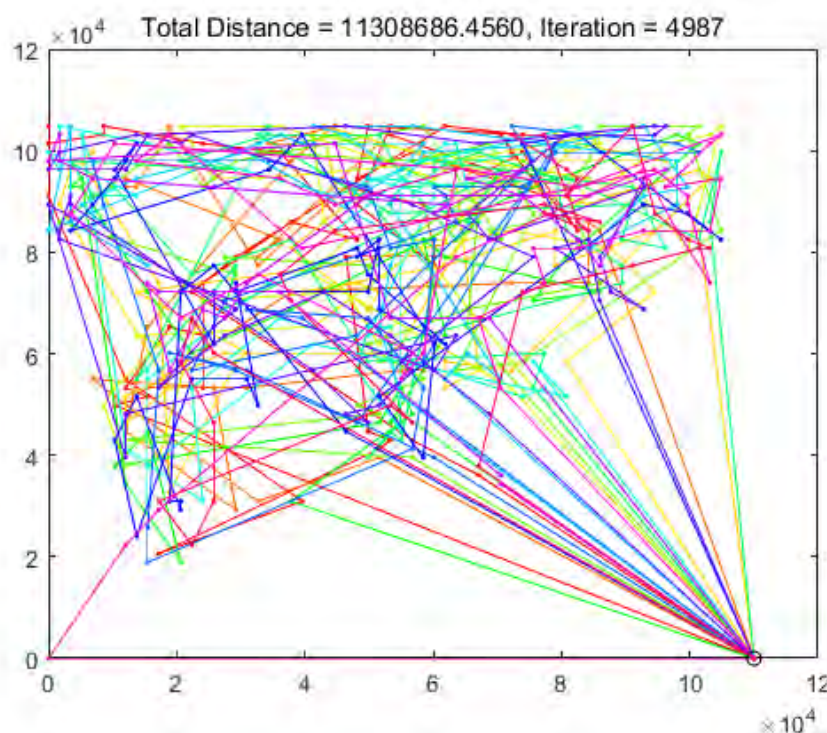


图 5.3(a) 无人机从基地 H 出发的最优路径图

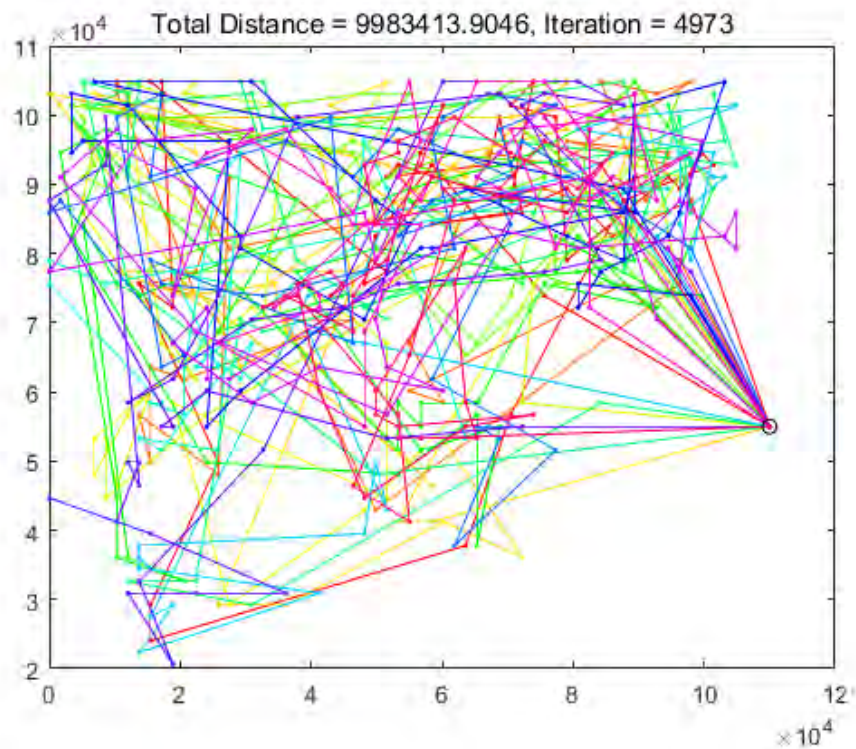


图 5.3(b) 无人机从基地 J 出发的最优路径图

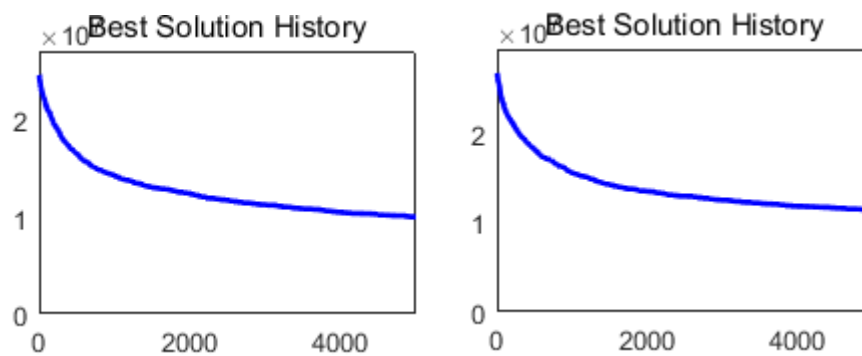


图 5.4 图 5.3 中(a)(b)遗传算法迭代次数示意图（左 a 右 b）

如图 5.3 (a) 及 (b)，给出了利用遗传算法计算出 30 架无人机飞行的最优路径图，每架无人机分别按自己的最优路线飞行，即可保证探测面积最大且第一架无人机飞出到最后一架无人机回到基地的时间间隔最短，其 MATLAB 源程序及数据结果图可在附件中详细查看。图 5.4 给出了此算法的迭代次数趋势图，当迭代次数为 3000 时基本趋于平稳。

6. 问题三 灾区通信中继

6.1 问题分析

因地震的影响，灾区的通信中断，需要无人机作为通讯中继。此问题中，做如下三个假设：

假设 1：白天 12 小时阳光充足，太阳能无人侦察机，能够一直飞行，不受续航能力限制；

假设 2：以地面终端为圆心，2 千米为半径的圆形区域内，地面终端可以瞬时到达圆形区域内的任意地点；

假设 3：无人机可自行调整合适的高度飞行，直接越过山体，即忽略了无人机绕行山体的情况。

1. 规划无人机的路线分布

为了保证任意两个地面移动终端都能通信（由原题附件 2 可知，任意两个地面移动终端间距过大时不能直接通讯，需要无人机转接），任意时刻与地面移动终端通讯的无人机周围 6km 内，必须存在另一架无人机，才能满足通讯不中断的条件。

此时，无人机的飞行路径分布情况可以设想为两种分布，网状分布和首尾相连的闭环分布。若无人机可以悬停在半空呈现一个静止状态，且地面终端分布的较为均匀时，网状分布应为最优。但是，无人机是一直处于高速移动或不断转弯的运动状态，并且地面终端的分布及其不均匀，所以想要在运动中让网状分布一直保持恒定是难以实现的。

在首尾相连的闭环分布中，也需要两种情况分别讨论：

第一种：飞行路径为一个大的闭环结构，此时每台无人机的飞行路线都是相同的，只需保证每隔 6km 至少有一台无人机即可保证通讯畅通。

第二种：飞行路径为若干个小的闭环结构所组成，每一个闭环内的无人机的飞行路线是相同的。但如果为若干个环状飞行路径，因为每一个环状飞行路径长度是不一样的，所以在环与环之间也必须需要另增加一架或几架无人机担任通讯中继的任务，以保证通讯不会中断，相比于第一种情况，需要更多无人机。

所以，以下分析都以飞行路径为第一种情况讨论。

2. 判断无人机是否需要经过地面终端上空

无论无人机飞行路径是否经过地面终端上空，当地面终端刚好位于两架无人机的中点或其垂直平分线上时，与无人机的距离是最远的，此时无人机与地面终端最大水平距离只能为 3km，才能保证两架无人机的距离满足小于 6km，如图 6.1 所示。虽然无人机与地面终端的欧氏距离可能会大于 3km，但因为地面终端具有半径为 2km 的可移动范围，所以当地面终端移动到距离无人机最近的点位时，又可以刚好满足传送距离 3km 的距离限制。

从无人机 1 到无人机 3 的路径为不经过地面终端上空的飞行路线，可知此时无人机 1 和 3 的距离必然小于 6km，并没有完全利用无人机间通信最大范围。而当无人机的飞行路线经过地面终端时，此时可很好的利用无人机间飞行的最大通

信范围，故而无人机的飞行路线是必要经过地面终端上空的。

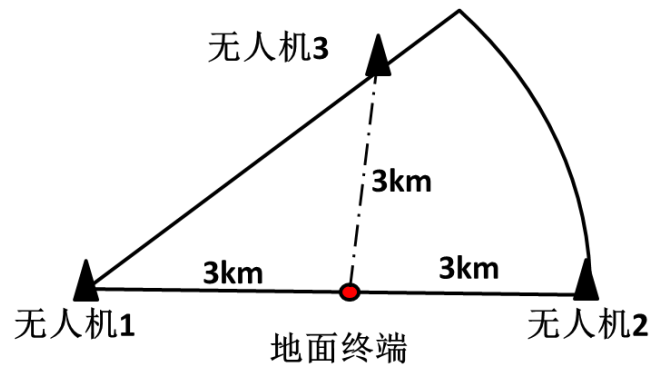


图 6.1 无人机与地面终端分布情况示意图

3. 选择合适的数学模型

此问题转化为无人机经过所有地面移动终端的最优路径的旅行商问题。先计算一台无人机飞过所有终端附近得出的最优路径，每架无人机都沿着最优路径循环飞行，然后在此路径上每隔最多 6km 放置一台无人机，即可使得所有终端间均可相互通信，同时需求的无人机架数也为最少。

6.2 问题求解

1. 地面终端海拔高度求解

根据附件 2 所给出的地面终端所给出的坐标位置，可以发现这些坐标点 X 和 Y 坐标并不是 38.2 的倍数即这些点并不在附件 1 所给的高程数据之中。考虑到地面或山体的连续性，我们以附件 1 中相近的点的海拔高度代替附件 2 所给地面终端点的高度。如对地面终端 1（单位：m）：

序号	X 坐标	Y 坐标	相近点 X 坐标	相近点 Y 坐标
1	91200	94300	91183.4	94315.8

可得出，地面终端 1 的海拔高度即为点附件 1 中点(91183.4, 94315.8)的高度为 2.515km，并以此类推可求出所有地面终端的高度。其中，序号为 50 (67.8,116.5)，52 (52.2,116.5)和 63 (91.2,124.3)超出了附件 1 所给区域，无法知道其海拔高度。这三个点以在区域中距离它们最近的点为来代替他们的海拔高度。

2. 无人机飞行高度求解

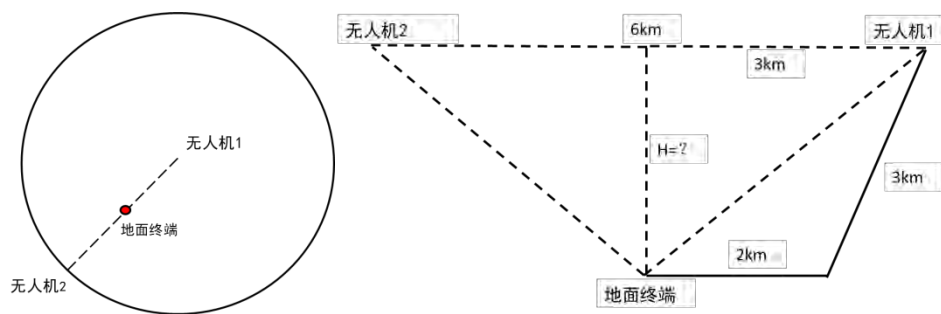


图 6.2 地面终端与无人机位置示意图

如图 6.2 所示，当地面终端位于两架无人机的中点位置时，距无人机的距离最远，其俯视图及截面图如图所示，但考虑到地面终端可在范围 2km 的区域内移动，所以只要终端保证位于中点位置时，范围 2km 的区域距无人机最近位置与无人机距离不大于 3km，而无人机飞的越地需要绕行的部分也就越多，所以当达到临界条件 3km 时即为无人机可以飞行的最大高度，通过计算可以得到无人机距离地面终端最大飞行高度为 $H=2.82\text{km}$ ，也就是说，只要无人机距地面终端的铅垂高度不大于 2.82km，就可以能保证通信不中断。

因为此题没有规定无人机飞行高度为一个恒定海拔高度(最大飞行海拔高度不超过 5km)，所以在飞行过程中无人机可以自行调整它的飞行海拔高度以满足距地面终端的铅垂高度始终不大于 2.82km。而无人机从一个地面终端到另一个地面终端的飞行过程中，如果遇到飞行高度不够需要绕行的情况时，它也可以自行调整自己飞行高度直接越过山坡以达到最短的飞行路线。

3. 无人机飞行的最优路径求解

无人机巡查的最优路径为一个旅行商问题(Traveling Salesman Problem, TSP)。可以理解为无人机从某一个地面终端出发经过所有地面终端后并回到出发地，如何选择飞行路线使得总行程最短。^[4]

旅行商问题是一个经典的组合优化问题。经典的 TSP 可以描述为：一个商品推销员要去若干个城市推销商品，该推销员从一个城市出发，需要经过所有城市后，回到出发地。应如何选择行进路线，以使总的行程最短。从图论的角度来看，该问题实质是在一个带权完全无向图中，找一个权值最小的 Hamilton 回路。由于该问题的可行解是所有顶点的全排列，随着顶点数的增加，会产生组合爆炸，它是一个 NP 完全问题。由于其在交通运输、电路板线路设计以及物流配送等领域内有着广泛的应用，国内外学者对其进行了大量的研究。早期的研究者使用精确算法求解该问题，常用的方法包括：分枝定界法、线性规划法、动态规划法等。但是，随着问题规模的增大，精确算法将变得无能为力，因此，在后来的研究中，国内外学者重点使用近似算法或启发式算法，主要有遗传算法、模拟退火法、蚁群算法、禁忌搜索算法、贪婪算法和神经网络等算法。^[5]

本题主要采用模拟退火算法(Simulated Annealing, SA)解决 TSP，SA 是一种通用概率算法，它是基于 Monte-Carlo 迭代求解策略的一种随机寻优算法，结合概率突跳特性在解空间中随机寻找目标函数的全局最优解，即在局部最优解能概率性地跳出并最终趋于全局最优^[5]。模拟退火算法是通过赋予搜索过程一种时变且最终趋于零的概率突跳性，从而可有效避免陷入局部极小并最终趋于

全局最优的串行结构的优化算法。

模拟退火算法新解的产生和接受可分为如下四个步骤：

Step1	由一个产生函数从当前解产生一个位于解空间的新解；
Step2	计算与新解所对应的目标函数差。因为目标函数差仅由变换部分产生，所以目标函数差的计算最好按增量计算；
Step3	判断新解是否被接受,判断的依据是一个接受准则，最常用的接受准则是 Metropolis 准则：若 $\Delta T < 0$ 则接受 S' 作为新的当前解 S ，否则以概率 $\exp(-\Delta T/T)$ 接受 S' 作为新的当前解 S 。
Step4	当新解被确定接受时，用新解代替当前解，这只需将当前解中对应于产生新解时的变换部分予以实现，同时修正目标函数值即可。

模拟退火算法与初始值无关，算法求得的解与算法迭代的起点无关；模拟退火算法具有渐近收敛性，已在理论上被证明是一种以概率 1 收敛于全局最优解的全局优化算法；模拟退火算法具有并行性。

计算次数	最优路径长度（单位：km）
1	524.88
2	523.55
3	548.27
4	516.80
5	528.00
6	508.28
7	522.59
8	.63
9	554.11
10	518.27
...	...

表 6.1 多次计算的最优路径长度

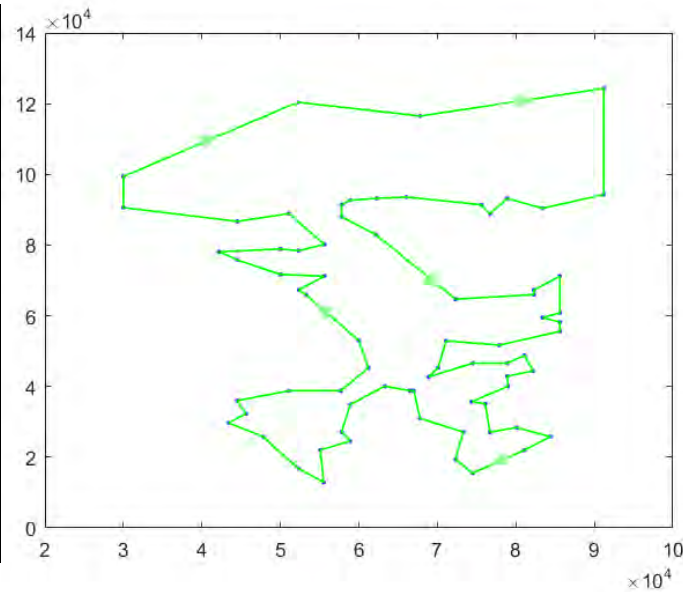


图 6.3 无人机最佳路径图

根据计算统计表 6.1，第 6 次的最优路径长度最短，故取第 6 次的最优路径为本题的最优解，其无人机的飞行路线如图 6.3 所示。

无人机飞行路径为：
 1→2→49→3→5→39→12→11→4→6→40→18→19→21→20→24→25→22→26→27→41→29→54→64→46→68→36→70→23→72→42→47→59→48→43→61→55→37→60→45→69→16→35→67→58→44→57→38→62→32→51→56→31→65→28→71→66→17→15→30→34→10→13→33→53→7→14→8→9→52→50→63→1。

上述编号为 72 个地面移动终端的编号（由附件 2）给出。飞行路程为 508.28km，其 MATLAB 程序及其说明见附件。

4. 验证忽略无人机爬升下降过程对路径造成影响的合理性

首先，地面终端里最低海拔高度为 1.461km，最高海拔高度为 4.410km，所以无人机可以飞行的最低海拔高度为 1.461+2.82=4.281km，最高海拔高度为 5km。以无人机爬升过程为例，无人机飞行时从最低海拔高度 4.281km 爬升至

最大海拔高度 5km 所造成路径误差是最大的。

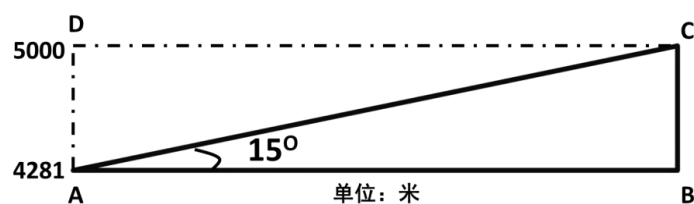


图 6.4 无人机爬升过程示意图

由图 6.4 通过计算可知，无人机实际飞行路径 $AC=2.778\text{km}$ ，忽略爬升过程飞行路径 $DC=2.683\text{km}$ ，所造成的误差 $\Delta s=0.0946\text{km}$ 。这与无人机飞行总最短路径 $S\text{ km}$ 相比较， $\frac{\Delta s}{S} = \frac{0.0946}{508.28} \times 100\% = 0.018\%$ ，说明它的上升过程和降落过程对整体飞行过程的影响非常细微，所以拟制无人机最优飞行路线时可忽略该过程的影响。

所以需要无人机的架数： $508.28 \div 6 = 84.71$ （架），需要进 1 为 85 架。所以无人机之间的实际距离为 $508.28 \div 85 = 5.98$ （km）。

综上，至少需要 85 架无人机，无人机的飞行路线为图 6.3，只要在此路径上每隔 5.98km 存在一架无人机即可实现任意两个地面移动终端不间断通信。

7. 问题四 无人机对地的数据传输

7.1 问题分析

假设 1: 3 架无人机能够同时对一个或多个地面终端传送数据（此题中最大为 3 个）；

假设 2: 地面终端接受数据不同，但 3 架无人机给每个地面终端携带的数据是相同的，即无人机之间可以相互续传数据。若第一架无人机脱离传输范围，第二架无人机进入传输范围后可以还接着续传。

从基地 $H(110, 0)$ 起飞 3 架无人机向 72 个地面移动终端传输相同总量 $500M$ (5×10^8 比特) 不同内容的数据。做如下数据分析：

(1) 无人机速度可以在 $60-100\text{km/h}$ 即 $16.66-27.77\text{m/s}$ 内可调，水平面内最大加速度为 $\pm 5\text{m/s}^2$ ，铅垂面内最大加速 $\pm 2\text{m/s}^2$ ，所以无人机改变速度最大也仅需 5.6s ，对比几小时的飞行时间几乎可以忽略不计，即认为无人机可以自行瞬时调整到合理的速度。

(2) 根据题目给出的地面移动终端接收到无人机发送的信息速率为： $r_i(t) = B_i \log_2 \left(1 + \frac{p_i(t)}{\rho_0 d^2(u, i)} \right)$ (比特/秒)。通过分析可可知，当子信道带宽 B_i (Hz)

越大，子信道分配功率 $p_i(t)$ (w) 越大及欧式距离 $d(u, i)$ (m) 越小时，地面终端接收的信息速率越大；当子信道带宽 B_i 越小，子信道分配功率 $p_i(t)$ 越小及欧式距离 $d(u, i)$ 越大时，地面终端接收的信息速率越小。

(3) 地面终端以 30° 仰角接收无人机的数据传输，并且与无人机的直线距离在 3000 米以内才能接收到无人机传送的数据。因此地面终端能接受信号的空间区域范围如图 7.1 所示。无人机从空间区域经过，虽然无人机在飞行时可以通过改变其飞行高度来延长经过该空间区域的时间，从而增加传输数据的总量。但是这也会造成飞行时间的延长，不能满足尽量短的时间内传输完数据的任务。能够最大限度的传送数据的要求是在空间区域同一高度停留时间长以及欧式距离短，同一高度的截面是一个圆形，直线航行经过圆心是停留时间最长。

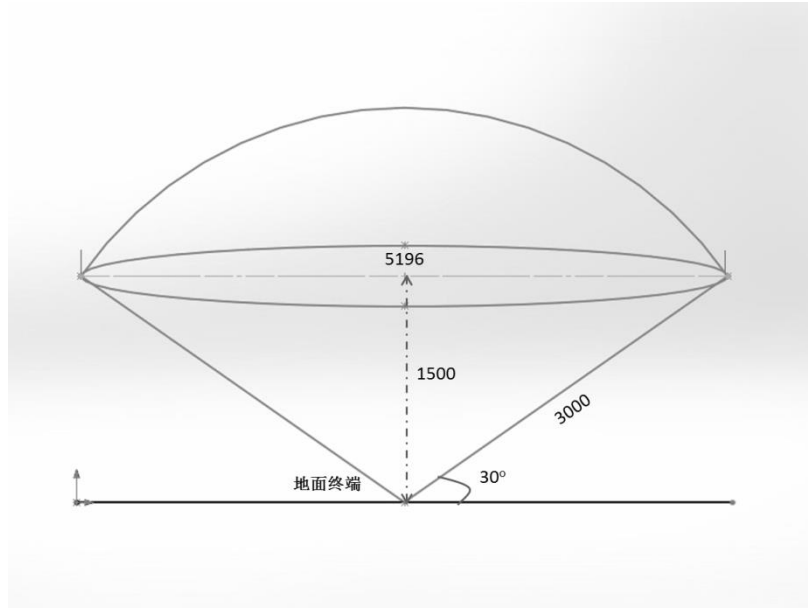


图 7.1 地面终端可接收数据的空间区域

若在这个空间区域高度 1500m-3000m 之间匀速飞行，导致欧式距离变长并且路过区域的时间也会变短，传输数据速率下降。若在次空间区域 50m 到 1500m 匀速 v (m/s) 飞行，欧式距离 $d(u, i)$ 与停留时间 t (s) 有一定量关系： $d(u, i) = \frac{\sqrt{3}}{3}vt$ ，此时数据传输量等于 $t \cdot \text{Bilog}_2 \left(1 + \frac{3p_i(t)}{\rho_0 v^2} \right)$ (假设分配功率 $p_i(t)$ 与子信道带宽 B_i 为定量)，停留时间越长，数据的传输量越大，飞行高度定为 1500m。图中所示空间区域在距地面终端垂直高度 1500m 时的截面面积最大且半径为 2598m 的圆，当无人机在此截面圆上且通过圆心飞行时，即无人机在空间区域接收的信号最多。此时 1500m 截面圆上无人机在直径上飞行的欧式距离范围为 1500-3000m。

- (4) 以 72 个地面终端为圆心，2.598km 为半径区域，画出分布图，如图 7.2 所示：

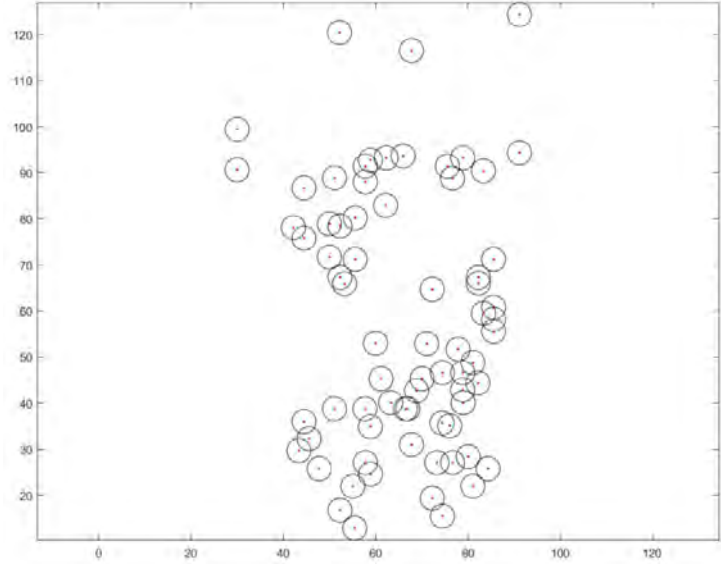


图 7.2 72 个地面终端为圆心，2.598km 为半径区域分布图

从图中看出 72 个圆形中有较多的重叠区域，在这些圆形区域中取任意点，至多 3 个圆形包含此点，则单架无人机的当前服务用户不超过 3 个，由于题目给出限定：只要无人机的当前服务用户少于 10 个，就能进行数据传输。因此就不存在因用户过多而停止传输信号的情况。

(4)因题目未提到当前移动终端可同时接受多少个来自不同无人机的数据，给出假设：同一时刻地面移动终端可接受多方数据，且这些数据不重复。计算出单个地面终端范围内极限传输数据与速度 98km/h 下的最小传输数据情况如下表 7.1 所示，子信道带宽由附录 2 给出。

表 7.1 单个地面终端范围内极限传输数据

最小速度 (km/h)	最大 B_i (Hz)	最大 $p_i(t)$ (w)	最小 $d(u, i)$ (m)	最大 $r_i(t)$ (比特/秒)	最大数据 (M)
60	200	5	1500	2466193.9	768.2656
最大速度 (km/h)	最小 B_i (Hz)	最小 $p_i(t)$ (w)	最大 $d(u, i)$ (m)	最小 $r_i(t)$ (比特/秒)	最小数据 (M)
100	100	5/3	3000	874908.3732	163.6569
速度 (km/h)	最小 B_i (Hz)	最小 $p_i(t)$ (w)	最大 $d(u, i)$ (m)	最小 $r_i(t)$ (比特/秒)	最小数据 (M)
98	100	5/3	3000	874908.3732	166.9968

移动终端之间存在海拔高度差，又需要满足与地面的最大通信半径为 3000m，无人机就必须有爬升和下降的过程，由前文叙述可知，这一过程可以忽略。

无人机信号传输时经过地面终端的上空时为最优，这一点已在问题 3 中详细分析过，这里不再赘述。此时 3 架无人机的飞行路径分为两种情况：

第一种：3 架无人机同时从基地起飞沿着同一路径飞行，某个地面终端的数据分别由 3 架无人机传输，无人机速度为 98km/h 时，总数据传输量 500.9904M，刚好满足；

第二种：3 架无人机同时从基地起飞沿着 3 条路径飞行，此种情况在最优路径的前提下，每个地面终端几乎只有一架无人机飞过，而一架无人机的最大

数据传输为 768.2656M，当无人机经过的区域有多个（最大具有 3 个）终端范围重叠时，不能在一次飞行过程中内完成所有移动终端都要接受到全部数据的任务，还需要返回该处再进行传输，因而对比与上一种决策，稍显较差。

7.2 问题求解

经过问题分析得出优化后的无人机飞行情况：3 架无人机从基地同时起飞，以 98km/h 的均匀速度沿着同一条路径传输信号，每架无人机分配给单个地面终端的功率为 1.67w，求解此时的最优路径，使得无人机完成所有任务的时间总和最短。

无人机对地的数据传输问题优化为基于无人机数据传输的不返回起点的旅行商问题。本题采用遗传算法 GA（Genetic Algorithm）进行求解。GA 的算法步骤可以见问题二。

表 7.2 多次计算的最优路径长度

计算次数	最优路径长度 (单位: km)
1	520.63
2	547.52
3	525.61
4	542.33
5	539.25
6	541.65
7	537.13
8	539.12
9	516.33
10	529.37
...	...

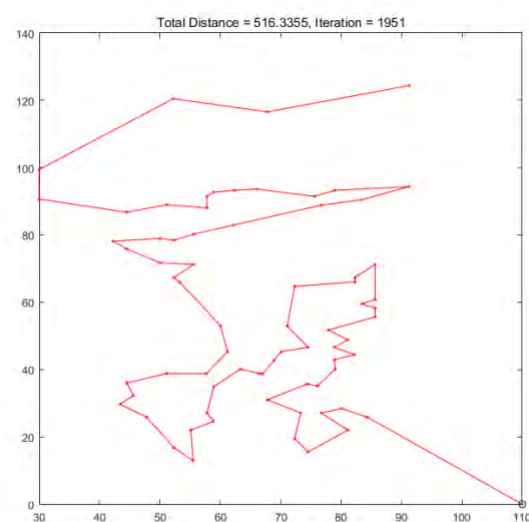


图 7.3 无人机最佳路径图

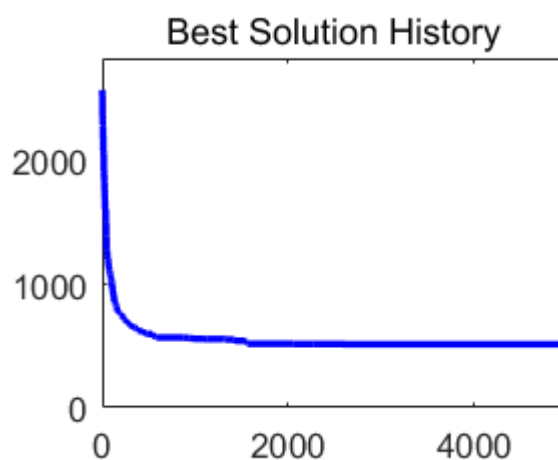


图 7.4 遗传算法迭代次数示意图

根据表中数据，取第 9 次的路径为最优路径，如图 7.3 所示，此时无人机的总

航程为 516.33km，结合前文所述的 98km/h 的飞行速度，无人机完成所有任务的时间总和为 5.27 小时。图 7.4 为遗传算法迭代次数趋势示意图。

考虑在实际传输数据的过程中，无人机的服务用户一般小于 3 个，可以提高其接收终端的传送功率，而我们计算也是以最大的 $d(u, i)$ 计算的传送速率，实际传输速率比计算的理论的传输速率要大。所以无人机可以在两路径点间飞行和传送用户较少时均可提升速度减少完成任务时间。但在本文中，为节省无人机速度变化和终端改变功率的消耗的能量，无人机速度及终端接收功率仍设置为保证完成任务的最小恒定值。

综上所述，本题的最优方案为：三架无人机同时从基地起飞，沿着如图 7.3 的路线以 98km/h 的不变速度，服务于每一个地面终端，单架无人机为用户分配 1.67w 的功率，使得无人机完成所有任务的时间最短为 5.27 小时，其 MATLAB 程序及其说明见附件。

无人机的飞行路径为：

49→60→48→44→62→56→38→61→73→43→24→71→37→47→69→28→27
→23→26→25→21→22→20→19→42→65→30→55→46→70→17→36→68→59
→45→58→39→63→33→52→57→32→66→29→72→67→18→16→31→35→11
→14→34→54→41→4→3→2→50→6→40→13→12→5→7→8→15→9→10→53
→51→64。

8. 模型的评价

8.1 模型的优点

- 对于问题一：**无人机需要巡查的区域是连续紧密的，并且海拔高度有高有低，这给模型的建立带来很大困难。本文通过将这些区域离散化，以均匀化的思想尽可能的减少海拔高度带来的求解难度。
- 对于问题二：**此题利用生命探测的题干要求，结合问题一的求解，将探测的面积尽可能大这一要求理解为探测完全部区域，将第二问巧妙的转化为固定多个出发点的多旅行商问题，给求解带来简化。
- 对于问题三：**此题为多架无人机在天空持续飞行，提供通信中继，利用题设条件以及合理的推理，找出一个无人机首尾相连的闭环飞行路线，并且得到最优的路线，将第三问转化为不固定起点且回到起点的经典旅行商问题。
- 对于问题四：**无人机对地面传输信号，这是一个复杂、各种条件瞬时变化的问题，通过极限思维摒弃了 3 架无人机沿不同路线飞行的情况，最终确定了 3 架无人机沿着同一路径飞行的最佳方案，转化为固定起点且不回到起点的旅行商问题。

8.2 模型的缺点

- 对于问题一：**此问题中将无人机巡查的区域离散化为点后，用巡查点个数求覆盖率，相比实际的巡查区域来说会少探查了部分边缘区域，因此求出的覆盖率相比实际情况偏大，且无人机飞行过程中会经过 4150m 海拔高度以上的区域，忽略了绕行对路线的影响。
- 对于问题二：**模型中，区域离散化后，目标点的数据量庞大，利用算法处理较为繁琐，且未能得出 30 架无人机飞行路线中最长的某条路径，无法定量计算题目所要求的时间间隔，只能得出这种路径的时间间隔为最小。
- 对于问题三：**此问题的模型分析较为理想化，未对其它飞行情况进行实际求解，只是得到当前模型下的最优路线，未与其它合理的飞行情况最优路线进行对比。
- 对于问题四：**此问题中简化出来的旅行商问题模型较为粗略，通过将某些变量赋予了一个极限值，计算出了极端情况下的传输数据相关参数，无法计算出实际每个时刻传输数据相关参数、无人机速度及地面终端功率分配。

9. 参考文献

- [1] 赵明旺, 基于遗传算法和最速下降法的函数优化混合数值算法[J], 系统工程理论与实践, 17(7): 59-64, 1997。
- [2] 俞庆生, 林冬梅, 王东, 多旅行商问题研究综述[J], 价值工程, 31(2): 166-168, 2012。
- [3] 于莹莹, 陈燕, 李桃迎, 改进的遗传算法求解旅行商问题[J], 控制与决策, 8: 1483-1488, 2014。
- [4] Charitopoulos V M, Dua V, Papageorgiou L G, Travelling Salesman Problem (TSP) based integration of Planning: Scheduling and optimal Control for Continuous Processes[J], Industrial & Engineering Chemistry Research, 95(3): 3271-3285, 2017。
- [5] 杨理云, 用模拟退火算法求解旅行商问题[J], 微电子学与计算机, 24(5):193-196, 2007。

10. 附录

由于本文中所编写的 MATLAB 程序过于庞杂，且输出、调用数据等操作频繁，源程序和数据表格均放在附件中，以下为各种文件的简短说明。

问题一：第一个问题

q1_1.m 程序为区域离散化的程序，并且输出了离散化数据。

x_2,y_2 文件存储海拔高度小于 3000 米且处于重点区域中心方圆 10 公里范围内的点的离散化数据。

x_3,y_3 文件存储海拔高度大于 4150 米的点的离散化数据。

q1.m 程序为解决问题一第一小问的主要计算程序。

问题一：第二个问题

q1_2.m 程序为第二个问题的主要计算程序。

x_z, y_z 文件为海拔高度小于 4000 米的点的区域离散后的数据，在 q1_2.m 程序中多次读入。

本问题无人机最优路线坐标见文件“无人机飞行路线.xlsx”

问题二：

问题二采用遗传算法进行求解。q2.m 为该问题优化求解的主程序，sub.m 和 mtspf_ga.m 作为两个函数在主程序中被调用。

3000x,3000y 文件为海拔高度小于 3000 米的点的区域离散后的数据。

问题三：

问题三采用模拟退火算法进行求解。q3.m 为这种算法的具体实现。

问题四：

问题四也采用遗传算法进行调度优化。mtspofs_ga.m 为实现程序。