

参赛密码 _____
(由组委会填写)



“华为杯”第十三届全国研究生 数学建模竞赛

学 校 上海交通大学

参赛队号 10248058

队员姓名 1. 陆宇
2. 周泽华
3. 周涵

题 目 多无人机协同任务规划

摘 要:

本文以最优化理论为基础,研究了多无人机协同任务规划问题。首先,通过两元素优化算法(2-opt)和基于贪心策略的覆盖法,求解了多无人机协同侦察问题(MUCRP),制订了FY-1型无人机完成所有目标群侦察任务的最佳路线和无人机调度策略;其次,基于协同侦察调度策略,制订了FY-2型无人机的协同通信调度方案,并通过定量分析,证明了提出的协同通信策略的可行性;再次,采用最近邻贪心算法和基于协同攻击的覆盖法,将FY-1与FY-3型无人机的协同作战问题转化为两步优化问题分别求解,保证了攻击方无人机滞留在防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小,并给出了完成规定火力打击任务的规划结果;接着,通过提出巡检待命无人机的设想,解决了基于防御方部署远程搜索雷达情形下的协同作战问题,并给出了巡检待命无人机的调度策略。最后,结合整个建模过程,对算法复杂度和无人机作战能力的提升作了定性分析。

问题一中,分三步求解了多无人机协同侦察模型MUCRP。通过对比两元素优化算法(2-opt)和蚁群算法(ACO)的求解结果,发现考虑最短路径和运行时间时,2-opt算法处理MUCRP效率更高,并得出需选择2台加载S-1型载荷的FY-1型无人机进行侦察,其最佳路线见文内图1。在此基础上,采用覆盖法得出,需选择1台加载S-2型载荷的FY-1型无人机进行侦察,其最佳路线见文内图2。最后通过求解时间差优化问题,给出了FY-1型无人机的综合调度策略(见文内表6)。最终求得FY-1型无人机滞留在防御方雷达有效探测范围内的时间总和为11h54m11s。

问题二中,基于问题一中的侦察调度方案,制订了两台FY-2型无人机协同通信方案,其航迹见文内图8。理论分析表明,在此方案下两台FY-2型无人机的飞行时间均小于8小时,于是为完成问题一的侦察任务,至少安排两架FY-2型通信中继无人机。

问题三中,将协同作战问题转化为两步优化问题,并分别建立了数学模型。第一步优化保证攻击方的无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小,需首先打击防御方雷达。理论分析发现,必须挂载D-1型炸弹对雷达实施打击。通过最近邻贪心算法,给出了打击所有雷达的FY-3型无人机调度方案(见文内表8),并求得攻击方无人机的滞留时间总和为4.7h。第二步优化是将没有配备雷达站的其它所有目标

点在最短的时间内打击掉。结合最近邻贪心算法和基于协同攻击的覆盖法，给出了打击剩余所有目标的 **FY-3** 型无人机调度方案（见文内表 9、表 11）。

问题四中，基于防御方部署远程搜索雷达的情形，提出安排巡检待命无人机的方案。理论计算发现，巡检待命的无人机必须携带 **D-1** 型炸弹。同时针对远程雷达的两类开机时机，分别给出了巡检待命无人机的调度方案（见文内 7.2.2）。

问题五中，首先对建模用到的 5 种算法进行了复杂度分析，然后从侦察型无人机加载载荷的拍摄距离和引导距离、通信型无人机的通信距离、攻击型无人机携带炸弹的能力和炸弹性能、续航能力等方面出发，对提升无人机作战能力的技术参数进行了分析。

关键字： 多无人机协同 任务规划 两元素优化 贪心算法 无人机调度

目录

1. 问题重述	5
1.1 问题背景	5
1.2 需要解决的问题	6
2. 模型的假设	7
3. 符号说明	8
4. 问题一（协同侦察）	9
4.1 问题分析及模型建立	9
4.2 问题求解	10
4.2.1 加载 S-1 型载荷的无人机的航迹优化	10
4.2.2 加载 S-2 型载荷的无人机的航迹优化	12
4.2.3 FY-1 型无人机的综合调度策略	14
5. 问题二（协同通信）	16
5.1 问题分析	16
5.2 问题求解	16
6. 问题三（协同作战）	17
6.1 问题分析	17
6.2 模型的建立	18
6.2.1 第一步优化问题模型的建立	18
6.2.2 第二步优化问题模型的建立	20
6.3 问题求解	20
6.3.1 第一步优化问题的求解	20
6.3.2 第二步优化问题的求解	21
7. 问题四（针对防御方新部署的协同作战）	24
7.1 问题分析	24
7.2 问题求解	24
7.2.1 巡检待命的无人机携带炸弹类型分析	24
7.2.2 巡检待命无人机的调度方案	25

8. 问题五 (模型的讨论)	26
8.1 算法复杂度分析	26
8.2 无人机作战能力的提升分析	26
9. 模型的评价	27
9.1 模型的优点	27
9.2 模型的缺点	27
10. 参考文献	27

1. 问题重述

1.1 问题背景

无人机（Unmanned Aerial Vehicle, UAV）是一种具备自主飞行和独立执行任务能力的新型作战平台，不仅能够执行军事侦察、监视、搜索、目标指向等非攻击性任务，而且还能够执行对地攻击和目标轰炸等作战任务。随着无人机技术的快速发展，越来越多的无人机将应用在未来战场。

某无人机作战部队现配属有 P01-P07 等 7 个无人机基地，各基地均配备一定数量的 FY 系列无人机。其中 FY-1 型无人机主要担任目标侦察和目标指示，FY-2 型无人机主要担任通信中继，FY-3 型无人机用于对地攻击。FY-1 型无人机的巡航飞行速度为 200km/h，最长巡航时间为 10h，巡航飞行高度为 1500m；FY-2 型、FY-3 型无人机的巡航飞行速度为 300km/h，最长巡航时间为 8h，巡航飞行高度为 5000m。受燃料限制，无人机在飞行过程中尽可能减少转弯、爬升、俯冲等机动动作，一般来说，机动时消耗的燃料是巡航的 2.4 倍。最小转弯半径 70m。

FY-1 型无人机可加载 S-1、S-2、S-3 三种载荷。其中载荷 S-1 系成像传感器，采用广域搜索模式对目标进行成像，传感器的成像带宽为 2km（附件 3 对成像传感器工作原理提供了一个非常简洁的说明，对性能参数进行了一些限定，若干简化亦有助于本赛题的讨论）；载荷 S-2 系光学传感器，为达到一定的目标识别精度，对地面目标拍照时要求距目标的距离不超过 7.5km，可瞬时完成拍照任务；载荷 S-3 系目标指示器，为制导炸弹提供目标指示时要求距被攻击目标的距离不超过 15km。由于各种技术条件的限制，该系列无人机每次只能加载 S-1、S-2、S-3 三种载荷中的一种。为保证侦察效果，对每一个目标需安排 S-1、S-2 两种不同载荷各自至少侦察一次，两种不同载荷对同一目标的侦察间隔时间不超过 4 小时。

为保证执行侦察任务的无人机与地面控制中心的联系，需安排专门的 FY-2 型无人机担任通信中继任务，通信中继无人机与执行侦察任务的无人机的通信距离限定在 50km 范围内。通信中继无人机正常工作状态下可随时保持与地面控制中心的通信。

FY-3 型无人机可携带 6 枚 D-1 或 D-2 两种型号的炸弹。其中 D-1 炸弹系某种类型的“灵巧”炸弹，采用抛投方式对地攻击，即投放后炸弹以飞机投弹时的速度作抛物运动，当炸弹接近目标后，可主动寻的攻击待打击的目标，因此炸弹落点位于目标中心 100m 范围内可视为有效击中目标。D-2 型炸弹在激光制导模式下对地面目标进行攻击，其飞行速度为 200m/s，飞行方向总是指向目标。攻击同一目标的 D-2 型炸弹在整个飞行过程中需一架 FY-1 型无人机加载载荷 S-3 进行全程引导，直到命中目标。由于某些技术上的限制，携带 D-2 型炸弹的无人机在投掷炸弹时要求距目标 10km-30km，并且要求各制导炸弹的发射点到目标点连线的大地投影不交叉（以保证弹道不交叉）。为达到一定的毁伤效果，对每个目标（包括雷达站和远程搜索雷达）需成功投掷 10 枚

D-1 型炸弹，而对同一目标投掷 2 枚 D-2 型炸弹即可达到相同的毁伤效果。

多架该型无人机在同时执行任务时可按照一定的编队飞行，但空中飞行时两机相距要求 200m 以上。由于基地后勤技术保障的限制，同一基地的两架无人机起飞时间间隔和降落回收的时间间隔要求在 3 分钟以上。无人机执行完任务后需返回原基地。根据任务要求，需完成侦察和打击的目标有 A01-A10 等 10 个目标群，每个目标群包含数量不等的地面目标，每个目标群均配属有雷达站，各目标群配属雷达对 FY 型无人机的有效探测距离为 70km。

1.2 需要解决的问题

围绕多无人机协同作战中的任务规划，本文依次解决如下问题：

问题 1 为 FY-1 型无人机完成 10 个目标群（共 68 个目标）的侦察任务拟制最佳的路线和无人机调度策略（包括每架无人机起飞基地、加载的载荷、起飞时间、航迹和侦察的目标），以保证侦察无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小。

问题 2 FY-1 型无人机对目标进行侦察时，须将侦察信息实时通过 FY-2 型无人机传回地面控制中心。鉴于 50km 通信距离的限制，需安排多架 FY-2 型无人机升空，以保证空中飞行的侦察无人机随时与 FY-2 型无人机的通信。为完成 1 的侦察任务，计算至少需要安排 FY-2 型无人机的架次。

问题 3 所有 FY-1 型无人机现已完成侦察任务并返回基地，均可加载载荷 S-3 用于为制导炸弹提供目标指示。现要求在 7 个小时内（从第一架攻击无人机进入防御方雷达探测范围内起，到轰炸完最后一个目标止）完成对 10 个目标群所有 68 个地面目标的火力打击任务，以请给出具体的无人机任务规划结果（包括每架无人机飞行路线、FY-3 型无人机携带炸弹的具体清单和攻击的目标清单），保证攻击方的无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小。

问题 4 由相关信息渠道获知在 A02、A05、A09 周边可能还配置有三部远程搜索雷达，该雷达对 FY 型无人机的有效作用距离是 200km。这三部雷达的工作模式是相继开机工作，即只有首先开机的雷达遭到攻击后才开启第二部雷达，同样只有第二部雷达被攻击后才开启第三部雷达。远程搜索雷达一旦开机工作，攻击方无人机群即可获知信号并锁定目标，而后安排距其最近的无人机对其摧毁。请基于防御方部署远程搜索雷达的情形重新考虑 3。

问题 5 对求解模型的算法的复杂度进行分析；并讨论如何有效地提高算法的效率，以增强任务规划的时效性。基于构建的数学模型和对模型解算的结果，讨论哪些技术参数的提高将显著提升无人机的作战能力。

2. 模型的假设

由于目标群比较集中，在整个求解过程中，假设：

假设 1 侦察机只要飞入目标点群，无人机就一直在雷达监测范围之内，直至飞机返航。

问题一中，进一步作出以下假设：

假设 2 由于雷达监测范围远大于目标群内的分散度，将目标群内目标简化为一个点，即雷达坐标。

假设 3 将侦察机从基地飞往第一个目标点过程中，处于雷达监视范围内的距离简化为半径 $70km$ 。同理，在离开时，也将此距离设置为 $70km$ 。

假设 4 为保证每个基地的 $FY-1$ 侦察机的配备量，每个基地只派出一架带有 $S1$ 载荷的侦察机。

假设 5 忽略加载 $S-1$ 、 $S-2$ 载荷无人机的飞行高度，于是载荷 $S-1$ 和载荷 $S-2$ 对目标的有效拍照距离不需要经过三角换算。

问题三中，我们进一步假设：

假设 6 $D-1$ 型炸弹为定点攻击，即只要 $FY-3$ 型无人机飞到目标点正上方投下 $D-1$ 型炸弹，便可对目标点进行火力打击。

假设 7 $FY-1$ 型无人机在引导携带 $D-2$ 型炸弹的 $FY-3$ 型无人机时， $FY-3$ 型无人机在执行火力打击时与 $FY-1$ 型无人机的距离始终保持可攻击区的面积最大。

问题四中，我们假设：

假设 8 部署的远程雷达不在目标群中配备雷达站的扫描覆盖范围内。

假设 9 $A02$ 、 $A05$ 、 $A09$ 组成三角形的内心位置为三个远程雷达圆心的组成三角形的内心。

3. 符号说明

符号	意义
A_i	第 i 个目标点
k	基地的编号, $k \in 1, 2, \dots, 6, 7$
l_1	FY-1 无人机的编号, 按照基地顺序从 1 开始
l_3	FY-3 无人机的编号, 按照基地顺序从 1 开始
B_k	第 k 个基地
s	摄像头型号, $s \in S_1, S_2, S_3$
T_0	68 个目标组成的点集
n	目标群编号, $n \in 1, 2, \dots, 9, 10$
$N = \{n\}$	目标群的编号集
p_k	若第 i 个基地派出飞机, $p_k = 1$, 否则 $p_k = 0$
O_k	第 k 个基地的目标群飞行顺序矩阵
$length_k$	第 k 个基地飞行的目标群数目, 也就是 O_k 的长度
$f : T_0 \rightarrow N$	将目标点映射到对应目标群
D_{ij}	点 i 和点 j 之间的距离 (km)
$x_{ij}^{kl_1s}$	FY-1 无人机目标 i 到目标 j 之间是否相连判断量
$y_{ij}^{kl_1s}$	FY-1 无人机目标 (基地) i 到基地 (目标) j 之间是否相连判断量
$x_{ij}^{kl_3}$	FY-3 无人机目标 i 到目标 j 之间是否相连判断量
$y_{ij}^{kl_3}$	FY-3 无人机目标 (基地) i 到基地 (目标) j 之间是否相连判断量
$T_j^{kl_1s}$	FY-1 无人机到达位置 j 时的时间
$T_{j0}^{kl_3}$	FY-3 无人机到达位置 j 时的时间
$T_{j1}^{kl_3}$	FY-3 无人机离开位置 j 时的时间
$g(T_{j0}^{kl_3}, T_{j1}^{kl_3}, D_{ij}, x_{ij}^{kl_3}, y_{ij}^{kl_3}) = 0$	与目标点和位置相关的时间和距离关系方程

4. 问题一（协同侦察）

4.1 问题分析及模型建立

问题一要求为 FY-1 型无人机拟制最佳的路线和无人机调度策略（包括每架无人机起飞基地、加载的载荷、起飞时间、航迹和侦察的目标），完成 10 个目标群（共 68 个目标）的侦察任务，以保证侦察无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小。为保证成像效果，侦察机在过程中，应保证匀速直线飞行。同时，过多的飞机爬坡、加速和俯冲会导致续航能力降低，应该减少加速，保持匀速。

无人机作匀速直线运动时，侦察无人机滞留时间总和最小意味着其在防御方雷达有效探测范围内的航迹最短，于是可将原问题转化为如下优化问题6（多无人机协同侦察问题（Multi-UAV Cooperative Reconnaissance Problem, MUCRP））。MUCRP 是一个典型的单目标优化模型，是一个 NP-hard 和复杂约束的优化问题。

问题 6 (MUCRP) 找到最优决策变量 $x_{ij}^{kl_1s}$ 、 $y_{ij}^{kl_1s}$ ，使得目标方程最小化。

$$\begin{aligned} \min J = & \sum_{k=1}^7 \sum_{l_1=1}^8 \sum_{s \in \{S1, S2\}} \sum_{i \in \{k\}} \sum_{j \in T_0} (70 - D_{f(j),j}) y_{ij}^{kl_1s} + \sum_{k=1}^7 \sum_{l_1=1}^8 \sum_{s \in \{S1, S2\}} \sum_{i \in T_0} \sum_{j \in \{k\}} \\ & (70 - D_{f(j),j}) y_{ij}^{kl_1s} + \sum_{k=1}^7 \sum_{l_1=1}^8 \sum_{s \in \{S1, S2\}} \sum_{i,j \in T_0} D_{ij} x_{ij}^{kl_1s} \end{aligned} \quad (1)$$

s.t.

$$0 < \sum_{k=1}^7 \sum_{l_1=1}^8 \sum_{s \in \{S1, S2\}} \sum_{i \in \{k\}} \sum_{j \in T_0} y_{ij}^{kl_1s} \leq 8 \quad (2)$$

$$0 < \sum_{k=1}^7 \sum_{l_1=1}^8 \sum_{s \in \{S1, S2\}} \sum_{i \in T_0} \sum_{j \in \{k\}} y_{ij}^{kl_1s} \leq 8 \quad (3)$$

$$\sum_{i \in \{k\}} \sum_{j \in T_0} D_{ij} y_{ij}^{kl_1s} + \sum_{i \in T_0} \sum_{j \in \{k\}} D_{ij} y_{ij}^{kl_1s} + \sum_{i,j \in T_0} D_{ij} x_{ij}^{kl_1s} \leq 2000, \forall k, l_1, s \in \{S1, S2\} \quad (4)$$

$$\sum_{j \in T_0} x_{ij}^{kl_1s} = 1, i \in T_0, \forall k, l_1, s \in \{S1\} \quad (5)$$

$$0 \leq MAXRA_j - MINA_j \leq 4 \quad (6)$$

其中 $x_{ij}^{kl_1s} = 1$ 表示基地 k 的 l_1 号 FY-1 型无人机挂载 s 型号摄像头从目标点 i 飞行到目标点 j , $x_{ij}^{kl_1s} = 1$ 则表示不从目标点 i 飞行到目标点 j ; $y_{ij}^{kl_1s} = 1$ 表示基地 k 的 l_1 号 FY-1 型无人机挂载 s 型号摄像头从目标点 (基地) i 飞行到基地 (目标点) j , $y_{ij}^{kl_1s} = 1$ 则表示不从目标点 (基地) i 飞行到基地 (目标点); 记 $MA_j = \{ma \mid ma = \sum_{j \in T_0} T_j^{kl_1s}, \forall k, l_1, s \in \{S1, S2\}\} - \{0\}$, $MAXA_j = \max(MA_j)$, $MINA_j = \min(MA_j)$, $RMA_j = MA_j - \{MAXA_j, MINA_j\}$, $MAXRA_j = \max(RMA_j)$,

$MINRA_j = \min(RMA_j)$, 有 $MA_j \neq \emptyset$, $MAXA_j \neq MINA_j$, $RMA_j \neq \emptyset$, $MAXRA_j = MINRA_j$ 。

目标函数前两项表示无人机从基地出发到目标群及从目标群离开返回基地过程中滞留在防御方雷达有效探测范围内的航迹，最后一项是无人机在目标群间执行侦查任务过程中滞留在防御方雷达有效探测范围内的航迹，这里要求无人机整个过程中滞留在防御方雷达有效探测范围内的航迹最短；约束条件 (2) 确保了从基地出发去目标群过程中执行任务的 FY-1 无人机数量满足要求；约束条件 (3) 确保了从目标群返回到基地过程中执行任务的 FY-1 无人机数量满足要求；约束条件 (4) 确保了对每个基地的每台执行任务的无人机，其最大巡航时间为 10h；约束条件 (5) 确保了加载 S-1 型载荷时目标群中的每个目标点都被侦察到；约束条件 (6) 保证了两种不同载荷对同一目标的侦察间隔时间不超过 4 小时。

当多个侦察机同时在雷达监测范围内工作时，总的滞留时间需要乘以侦察机数量。由此可知，使用多台侦察机同时进行工作，不会减少侦察机数量，反而会因为多次进出雷达监控区域，增加了所处监控区域的路程，所以由此可知侦察机的数量越少越好。对一个目标进行侦察，需要至少各执行一次 S-1 侦察和 S-2 侦察，且同一目标点两种载荷的侦察时间差不超过 4 小时。S-1 载荷侦察的特点是：侦察机需要距离目标至少 2km，至多 8km，且在飞行前就固定了拍照的方向。根据目标点群的分散度可知，S-1 侦察必须对每个点分别执行，而不能同时侦察两个目标点。S-2 载荷侦察的特点是：侦察机需要距离目标点不超过 7.5km，而且与 S-1 不同的是，S-2 不固定拍照侧，S-2 载荷可对以侦察机为圆心，7.5km 为半径的范围内进行侦查。由于目标群之间的距离远大于群内目标点之间的距离，所以不管是 S-1 还是 S-2，同具有相同的最优目标群顺序。但是在目标群内，最优的 S-1 路径规划和最优的 S-2 路径规划需要分别讨论。

4.2 问题求解

对于问题一，我们分三步求解：(1) 加载 S-1 载荷的无人机的航迹优化；(2) 加载 S-2 载荷的无人机的航迹优化；(3) 给出 FY-1 型无人机的综合调度策略。

4.2.1 加载 S-1 型载荷的无人机的航迹优化

在求解复杂的 MUCRM 问题，可以先忽略 FY-1 型无人机的续航时间，即假设单个 FY-1 型无人机进行侦察，在此基础上可以分析多个无人机协同侦察的情况。根据 S-1 型载荷的特点，可将其简化为对单个目标点进行侦察。接下来我们首先解决单个 FY-1 型无人机侦察 68 个目标点的航迹优化问题。根据上面的分析，简化后的 MUCRM 问题可以转化为首尾不相连的旅行商问题 (TSP)，于是 FY-1 无人机挂载 S1 型载荷进行侦察的航迹优化便是对 TSP 的求解。

对于 TSP 问题有很多中求解方法，其中使用最多的是两元素优化法 (2-opt) 和蚁

群算法（ACO）。下面我们分别采用两元素优化法（2-opt）和蚁群算法（ACO）对加载 S-1 载荷的无人机的航迹进行过优化，通过比较两种算法的航迹优化效果，确定一种适合本问题的求解算法，并用于后面问题的求解。

两元素优化法用于求解 MUCRP 问题的基本步骤如下算法 1。

算法 1：二元素优化法

- step1:** 任选一个可行路径 s ，并假设 s 是最优路径；
- step2:** 随机选取两点 i 和 k ，将 i 之前的路径不变添加到新路径中，将 i 到 k 之间的路径翻转其编号后添加到新路径中，将 k 之后的路径不变添加到新路径中，从而获得一个新的可行路径；
- step3:** 将新的可行路径与最优路径进行比较，取两者更优的路径为最优路径；
- step4:** 重复 step2 与 step3，直到找不到更优的路径为止。

蚁群算法用于求解 MUCRP 问题的基本步骤如下算法 2。

算法 2：蚁群算法

- step1:** 初始化参数。对相关的参数进行初始化，如蚁群的规模、信息素重要程度因子、启发函数重要程度因子、信息素挥发因子、信息素释放总量、最大迭代次数，迭代初始次数。
- step2:** 构建解空间。将各个蚂蚁随机地置于不同的目标点，对每个蚂蚁计算其下一个待访问的目标点，直到所有蚂蚁访问完所有的目标点。
- step3:** 更新信息素。计算各个蚂蚁经过的路径长度，记录当前迭代次数中的最优解（最短路径）。同时对各个目标点连接路径上的信息素进行更新。
- step4:** 判断是否终止。若没有终止，清空蚂蚁经过路径的记录表，并返回 step2；否则终止计算，输出最优解。

采用两元素优化法（2-opt）和蚁群算法（ACO）对 MUCRP 问题进行求解的结果见表1。表1对比了采用 2-opt 与 ACO 算法对 68 个目标点进行侦察的最短路径和算法运行时间。可以看出，两元素优化算法求解的最短路径优于蚁群算法，并且它的算法运行时间原小于蚁群算法。所以对于 MUCRP 问题，两元素优化算法效率更高，优化结果更好，因此下文采用两元素优化算法（2-opt）。

表 1 2-opt 和 ACO 结果对比表

方法	最短路径 (不包括进出目标群)	运行时间 (s)
2-opt	5h45m57s	0.01
ACO	5h51m30s	102.06

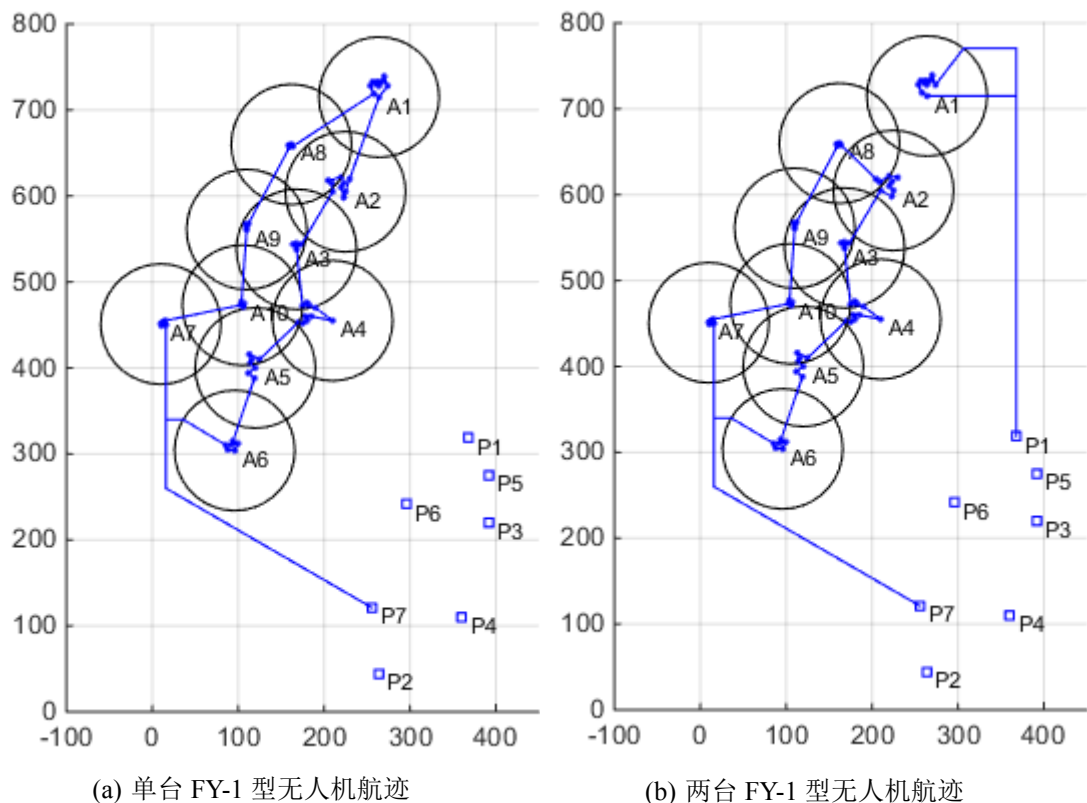


图 1 FY-1 型无人机加载 S-1 型载荷进行侦察的航迹图

加入进出内部目标群的时间，采用两元素优化算法计算到的单架 FY-1 型无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间为 6h27m57s，其航迹如下图1(a)。

现在考虑增加一台 FY-1 型无人机。增加一台 FY-1 型无人机可以减少一次目标群到目标群的飞行时间，但是会增加一进一出的时间。考虑两台 FY-1 型无人机时，必须将目标群分成两部分，分别由两台 FY-1 型无人机进行侦察。采用两元素优化算法求得的滞留在防御方雷达有效探测范围内的时间为 6h9m45s，其航迹如上图1(b)，飞行时间见表2，其中外部时间表示无人机在雷达覆盖区外飞行的时间。由表2可知，两台 FY-1 型无人机的飞行时间都不超过 10h，满足 FY-1 型无人机的续航时间。如果再增加 FY-1 型无人机，减少的飞行时间比进出时间小，反而会增大滞留在防御方雷达有效探测范围内的时间。所以加载 S-1 载荷的无人机进行航迹优化时，选择两台 FY-1 型无人机进行侦察。

4.2.2 加载 S-2 型载荷的无人机的航迹优化

与 S-1 型载荷不同的是，S-2 型载荷不固定拍照侧，它可对以侦察机为圆心、7.5km 为半径的范围内进行侦察。于是在加载 S-1 型载荷的无人机优化的航迹基础上，可对加载 S-2 型载荷的无人机的航迹进行进一步优化，这里在每个目标群内采用覆盖法，将加载 S-1 型载荷的无人机侦察的 68 个目标点，缩减为加载 S-2 型载荷的无人机需要侦

表 2 两台 FY-1 型加载 S-1 型载荷的飞行时间表

飞机编号	滞留时间	外部时间	总飞行时间
NO.1	54m49s	4h53m8s	5h47m57s
NO.7	5h14m56s	3h52m24s	9h7m20s

察的 28 个目标点。

覆盖法是一种贪心算法，它的基本思想是尽可能侦察覆盖周围目标点数多的目标点。由于 S-2 载荷的侦察范围是 7.5km 为半径范围，便被覆盖的目标点便可在侦察缩减后目标点的同时一并被侦察。覆盖法的算法原理见算法 3。

算法 3：覆盖法

step1： 找一个半径 7.5km 内覆盖目标点最多的那个目标点，保存该点，删去该点覆盖的所有的目标点；若出现覆盖目标点数相同的目标点，转 step3；

step2： 对剩下的目标点重复 step1；直到删去该群内的所有的点，转 step4；

step3： 选择距离配备雷达站的目标点最近的目标点；

step4： 最终保存的目标点列即为缩减后的目标点列。

对每个目标群内的目标点使用覆盖法之后，原先需要侦察的 68 个目标点，便转化为如下的 28 个目标点，具体目标点及其所属目标群如下表3。

表 3 FY-1 型无人机加载 S-2 型载荷进行侦察的目标点

目标群	目标点	目标群	目标点
A01	A0101,A0103,A0107,A0109	A06	A0601,A0602,A0604
A02	A0201,A0203,A0205,A0206,A0207,A0208	A07	A0701
A03	A0302	A08	A0801
A04	A0401,A0402,A0404,A0407,A04010	A09	A0901
A05	A0501,A0502,A0503,A0504,A0506	A10	A1001

接下来采用 4.2.1 中的方法，可以得出，仅使用 1 台 FY-1 型无人机加载 S-2 型载荷进行侦察，滞留防御方雷达有效探测范围内的时间最短。用 1 台 FY-1 型无人机加载 S-2 型载荷进行侦察，无人机的航迹如上图2。其飞行时间见表4，由表4可知，使用 1 台 FY-1 型无人机加载 S-2 型载荷进行侦察，滞留防御方雷达有效探测范围内的时间为 5h44m26s，总的飞行时间小于 10h，满足 FY-1 型无人机的续航时间要求。

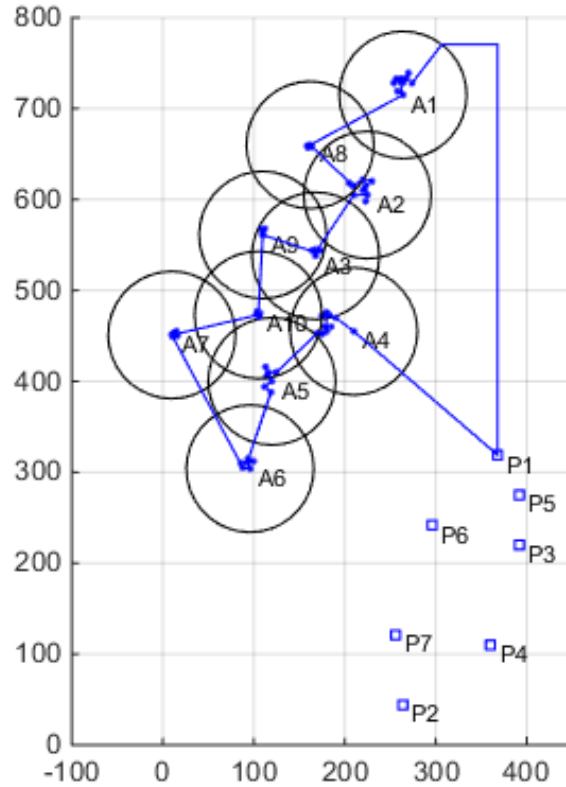


图 2 FY-1 型无人机加载 S-2 型载荷进行侦察的航迹图

表 4 1 台 FY-1 型加载 S-2 型载荷的飞行时间表

飞机编号	滞留时间	外部时间	总飞行时间
NO.2	5h44m26s	3h36m23s	9h20m49s

4.2.3 FY-1 型无人机的综合调度策略

假设所有的侦察机同时起飞，各侦察机到达各个目标群的时刻如下表5。

为了满足使用 S-1 型和 S-2 型载荷侦察同一目标点的时间间隔不超过 4 小时，加载 S-1 型载荷的侦察机与加载 S-2 型载荷的侦察机到达各个目标群的时间差应该不超过 4 小时。因此，需要调节各个飞机的起飞时间，使得目标群的最大时间差最小，即为求解如下优化问题

$$\min \left(\max_{i=1,7} |T_j^{kl_i S_1} - T_j^{kl_2 S_2} + t_i| \right) \quad (7)$$

式中， $T_j^{kl_i S_j}$ 表示基地 k 编号 i 的无人机加载 S-j 型载荷的飞行时间， t_i 表示侦察机 i 相对于侦察机 2 的滞后时间。

求解上述优化问题，得 $t_1 = 0h36min$ ， $t_2 = 1h40min$ ，即 FY-1 NO.1 无人机在 FY-1 NO.2 无人机后 36min 起飞，FY-1 NO.7 无人机在 FY-1 NO.2 无人机后 1h40min 起飞。

表 5 各侦察机到达各目标群的时刻表

飞机编号	目标群	到达时间	目标群	到达时间
NO.1	1	2h22m		
NO.7	2	4h13m	7	2h20m
	3	4h56m	8	3h53m
	4	5h21m	9	3h20m
	5	6h8m	10	2h51m
	6	6h47m		
NO.2	1	2h58m	6	6h45m
	2	4h2m	7	5h56m
	3	4h42m	8	3h42m
	4	7h45m	9	5h
	5	7h14m	10	5h26m

综上所述，侦察无人机 FY-1 的调度方案如表6。由表6可以求得，侦察无人机 FY-1 滞留在防御方雷达有效探测范围内的时间总和为 11h54m11s。

表 6 FY-1 型无人机的综合调度策略表

起飞基地	飞机编号	加载载荷	起飞时间	航迹与侦查目标	滞留时间
P1	FY-1 NO.1	S1	0h36min	Fig.1	0h54m49s
P7	FY-1 NO.7	S1	1h40min	Fig.2	5h14m56s
P1	FY-1 NO.2	S2	0h0min	Fig.1	5h44m26s

5. 问题二（协同通信）

5.1 问题分析

问题一的侦察任务完成后，须将侦察信息实时通过 FY-2 型无人机传回地面控制中心。通信中继无人机与执行侦察任务的无人机的通信距离限定在 50km 范围内，通信中继无人机正常工作状态下可随时保持与地面控制中心的通信。于是只需保证 FY-2 型无人机与执行侦察任务的 S-1 型无人机间的距离在 50km 范围内即可。此外，FY-2 型无人机在飞行过程中必须保证其续航能力，当飞行时间超过续航时间时，必须安排执行通信任务的 S-2 型无人机返回，同时起飞新的 FY-2 型无人机继续完成通信任务。

5.2 问题求解

由问题一的求解可知，FY-1 NO.2 无人机和 FY-1 NO.7 无人机的侦察路线不同。在同一时刻，FY-1 NO.2 无人机和 FY-1 NO.7 无人机不在同一个目标群内，最大距离超过 50km，因此一台 FY-2 型无人机不能够完成通信任务。

现在考虑两台 FY-2 型无人机执行通信任务情形。制订以下的协同通信策略：一台 FY-2 型无人机（记为 FY-2 NO.1）首先与 FY-1 NO.1 进行通信，通过目标群 1 后，FY-1 NO.1 返航，FY-2 型无人机继续为 FY-1 NO.2 通信，另一台 FY-2 型无人机（记为 FY-2 NO.2）与 FY-1 NO.7 无人机进行通信。整个协同通信过程中，两台 FY-2 型无人机的航迹如下图3。

表7给出了两台 FY-2 型无人机的飞行时间。由表7可知，两台 FY-2 型无人机的飞行时间均小于 8 小时，满足续航要求。所以这里制订的协同通信的调度方案可行。

综上所述，为完成问题一的侦察任务，至少安排 2 架次的 FY-2 型通信中继无人机。

表 7 FY-2 型无人机协同通信时的飞行时间表

基地 (飞机编号)	内部时间	外部时间	总时间
P1(FY-2 NO.1)	5h44m	2h2m	7h46m
P2(FY-2 NO.2)	5h15m	2h35m	7h50m

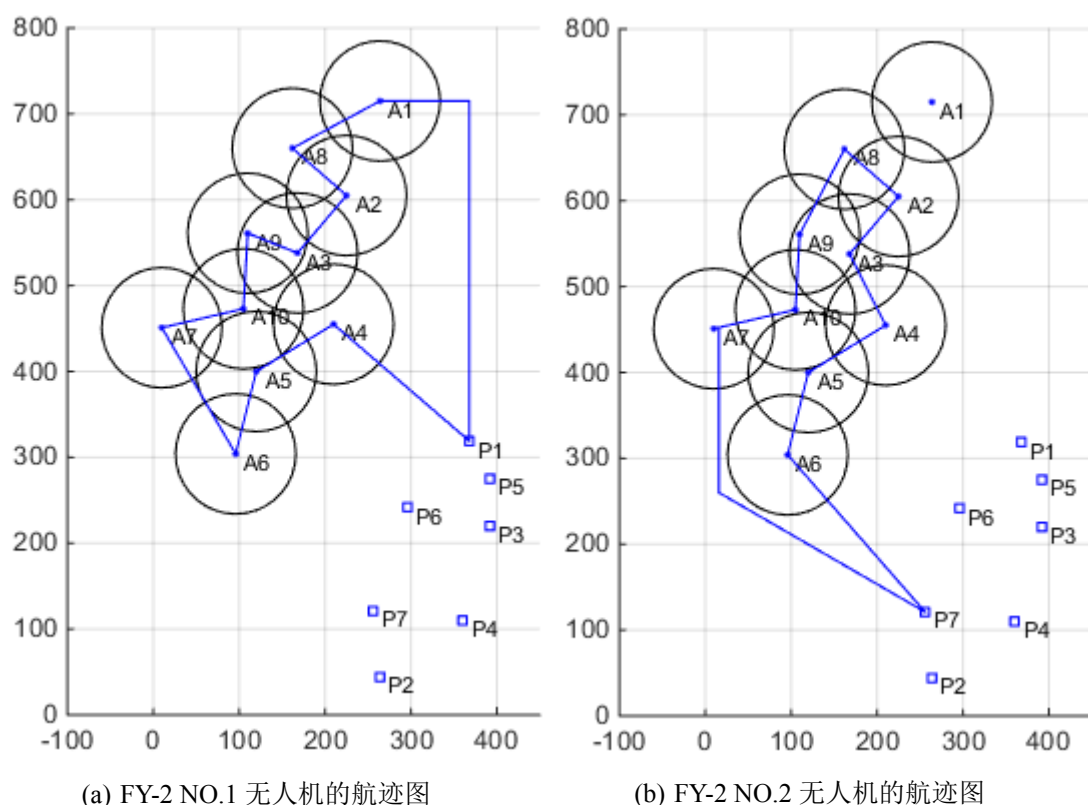


图 3 两台 FY-2 型无人机的航迹图

6. 问题三（协同作战）

6.1 问题分析

问题三要求在 7 个小时内（从第一架攻击无人机进入防御方雷达探测范围内起，到轰炸完最后一个目标止），攻击方完成对 10 个目标群所有 68 个地面目标的火力打击任务，并保证攻击方的无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小。这里可将这个复杂的问题转化为两步优化问题。

第一步优化保证攻击方的无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小。为保证攻击方的无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小，防御方雷达必须首先炸掉。这里主要涉及两个问题，一是需要对使用 D-1 型炸弹和 D-2 型炸弹在防御方雷达覆盖区的时间进行分析，找到适合第一级优化任务的作战导弹；二是需要对挂载选择类型导弹的 FY-3 型无人机作合理的调度。

第二步优化是将没有配备雷达站的其它所有目标点在最短的时间内打击掉。由于没有防御方雷达的限制，便不需要考虑滞留在防御方雷达有效探测范围内无人机滞留时间的叠加。不同的目标群的目标点的数目不一样，此时必须根据不同目标群的目标点数目合理选择 D-1 和 D-2 型导弹，同时需要对挂载两种类型导弹的 FY-3 型无人机作合理的调度，比第一步优化中的调度更复杂。

6.2 模型的建立

下面对两步优化问题分别建立模型。

6.2.1 第一步优化问题模型的建立

火力打击任务由 FY-1 型无人机和 FY-3 型无人机系统完成。对于每个目标点的火力打击，可以由 FY-1 型无人机引导 FY-3 型无人机携带 D-2 型炸弹完成，也可以由 FY-3 型无人机携带 D-1 型炸弹单独完成。

D-1 型炸弹接近目标后，可主动寻的攻击待打击的目标，由假设6,D-1 型炸弹的打击位置在 FY-1 型无人机的投弹位置的正下方。于是挂载 D-1 型导弹对目标点进行打击，滞留防御方雷达有效探测范围内的时间为 0.47h，计算过程如下：

$$\frac{70}{300} \times 2 = 0.47(h)$$

其中，70(km) 为雷达站中雷达的扫描半径，300(km/h) 为 FY-3 型无人机的飞行速度。由于每台 FY-3 型无人机只能携带的 6 枚 D-1 型炸弹，而每个目标点必须由 10 枚 D-1 型导弹摧毁，所以每台挂载 D-1 型导弹的 FY-3 型无人机只能打击 0.6 个目标，即每个目标点必须由 2 台挂载 D-1 型导弹的 FY-3 型无人机才能摧毁掉一个目标点。无人机在雷达扫描区的滞留时间是需要按照无人机数量进行叠加的，所以计算过程中乘以 2。

D-2 型炸弹在激光制导模式下对地面目标进行攻击，攻击同一目标的 D-2 型炸弹在整个飞行过程中需一架 FY-1 型无人机加载载荷 S-3 进行全程引导，直到命中目标。由于某些技术上的限制，携带 D-2 型炸弹的无人机在投掷炸弹时要求距目标 10km-30km，载荷 S-3 是目标指示器，为制导炸弹提供目标指示时要求距被攻击目标的距离不超过 15km，于是携带 D-2 型炸弹 FY-3 无人机的可攻击区为 D-2 型炸弹的攻击范围和 S-3 型目标指示器的指示范围的重叠区，如图4。

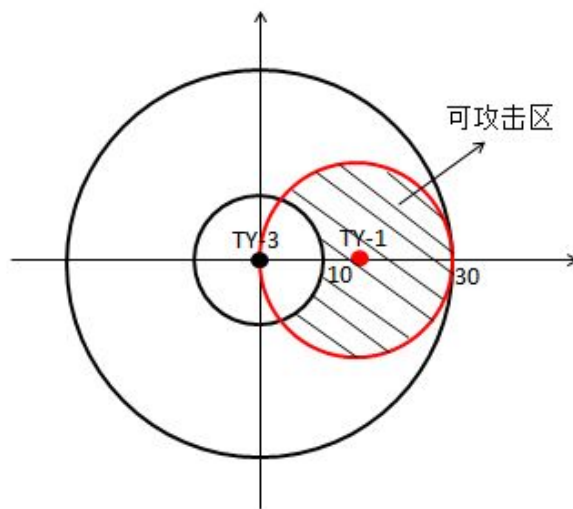


图4 FY-1 无人机引导 FY-3 无人机攻击时的可攻击区示意图

于是挂载 D-2 型导弹对目标点进行打击，滞留在防御方雷达有效探测范围内的时间为 0.49h，计算过程如下：

$$\frac{30}{720} \times 2 + \frac{55}{200} + \frac{40}{300} = 0.49(h)$$

其中第一项为导弹的飞行时间，由于每个目标点必须由 2 枚 D-2 型导弹摧毁，每枚 D-2 型导弹都需要 FY-1 型无人机进行引导，所以在 2 枚导弹的打击过程中，无人机都是在雷达扫描区内的，必须算入滞留时间；第二项为 FY-1 型无人机引导 D-2 型炸弹过程中的飞行时间；第三项为 FY-3 型无人机进入雷达扫描区到发射 D-2 型炸弹进行打击的一段时间。

由上面的计算可知，挂载 D-1 型导弹对目标点进行打击，滞留防御方雷达有效探测范围内的时间比挂载 D-1 型导弹对目标点进行打击的要短，所以在第一步优化问题中，必须选择 D-1 型导弹进行配备雷达站目标点的火力打击。于是第一步优化问题的数学表达如下问题 7。

问题 7 找到最优决策变量 $x_{ij}^{kl_3}$ 、 $y_{ij}^{kl_3}$ ，使得目标方程最小化。

$$\begin{aligned} \min J_1 = & \sum_{k=1}^7 \sum_{l_3=1}^{97} \sum_{i \in \{k\}} \sum_{j \in T_0} (70 - D_{f(j),j}) y_{ij}^{kl_3} + \sum_{k=1}^7 \sum_{l_3=1}^{97} \sum_{i \in T_0} \sum_{j \in \{k\}} (70 - D_{f(j),j}) y_{ij}^{kl_3} \\ & + \sum_{k=1}^7 \sum_{l_3=1}^{97} \sum_{i,j \in T_0} D_{ij} x_{ij}^{kl_3} \end{aligned} \quad (8)$$

s.t.

$$4 \leq \sum_{k=1}^7 \sum_{l_3=1}^{97} \sum_{i \in \{k\}} \sum_{j \in T_0} y_{ij}^{kl_3} \leq 8 \quad (9)$$

$$4 \leq \sum_{k=1}^7 \sum_{l_3=1}^{97} \sum_{i \in T_0} \sum_{j \in \{k\}} y_{ij}^{kl_3} \leq 8 \quad (10)$$

$$\sum_{i \in \{k\}} \sum_{j \in T_0} D_{ij} y_{ij}^{kl_3} + \sum_{i \in T_0} \sum_{j \in \{k\}} D_{ij} y_{ij}^{kl_3} + \sum_{i,j \in T_0} D_{ij} x_{ij}^{kl_3} \leq 2400, \forall k, l_3 \quad (11)$$

其中 $x_{ij}^{kl_3} = 1$ 表示基地 k 的 l_3 号 FY-3 型无人机从目标点 i 飞行到目标点 j ， $x_{ij}^{kl_3} = 1$ 则表示不从目标点 i 飞行到目标点 j ； $y_{ij}^{kl_3} = 1$ 表示基地 k 的 l_3 号 FY-3 型无人机从目标点（基地） i 飞行到基地（目标点） j ， $y_{ij}^{kl_3} = 1$ 则表示不从目标点（基地） i 飞行到基地（目标点）。

与问题 6 不同的是，目标函数中都是 FY-3 型无人机滞留在防御方雷达有效探测范围内的航迹大小。此外，不需要每个目标点都遍历一次，所以省去约束（4）；因为没有时间约束，所以省去约束（5）；约束条件（9）确保了从基地出发去目标群过程中执行任务的 FY-3 无人机数量满足要求；约束条件（10）确保了从目标群返回到基地过程中执行任务的 FY-3 无人机数量满足要求；约束条件（11）确保了对每个基地的每台执行任务的 FY-3 无人机，其最大巡航时间为 8h。

6.2.2 第二步优化问题模型的建立

每台 FY-3 型无人机携带的 6 枚 D-1 型炸弹只能打击 0.6 个目标，携带的 6 枚 D-2 型炸弹可以打击 3 个目标，显然携带 D-2 型炸弹的火力打击效率更高，然而 D-2 型炸弹需要 S-3 型载荷的引导，能加载 S-3 型载荷的 FY-1 型无人机的资源非常有限。于是最优的火力打击策略必然是，对于目标点数多的目标群，充分的利用 D-2 型炸弹，在 FY-1 型无人机资源匮乏的情况下辅助的利用 D-1 型炸弹进行火力打击。

于是第二步优化问题的数学表达如下问题8。

问题 8 找到最优决策变量 $T_{i1}^{kl3}, T_{i0}^{kl3}, x_{ij}^{kl1s}, y_{ij}^{kl3}$ ，使得目标方程最小化。

$$\min J_2 = \max_{i \in T_0} \{T_{i1}^{kl3}\} - \min_{i \in \{k\} \cup T_0} \{T_{i0}^{kl3}\} \quad (12)$$

s.t.

$$0 < \sum_{k=1}^7 \sum_{l_3=1}^{87} \sum_{i \in \{k\}} \sum_{j \in T_0} y_{ij}^{kl3} \leq 97 \quad (13)$$

$$0 < \sum_{k=1}^7 \sum_{l_3=1}^{87} \sum_{i \in T_0} \sum_{j \in \{k\}} y_{ij}^{kl3} \leq 97 \quad (14)$$

$$\sum_{i \in \{k\}} \sum_{j \in T_0} D_{ij} y_{ij}^{kl3} + \sum_{i \in T_0} \sum_{j \in \{k\}} D_{ij} y_{ij}^{kl3} + \sum_{i, j \in T_0} D_{ij} x_{ij}^{kl1} \leq 2400, \forall k, l_3 \quad (15)$$

$$\sum_{j \in T_0} x_{ij}^{kl1s} \geq 1, i \in T_0, \forall k, l_3 \quad (16)$$

$$g(T_{j0}^{kl3}, T_{j1}^{kl3}, D_{ij}, x_{ij}^{kl3}, y_{ij}^{kl3}) = 0 \quad (17)$$

这里目标函数表示将没有配备雷达站的其它所有目标点打击掉的时间最短；约束条件（13）和（14）分别确保了从基地出发和返回去目标群过程中执行任务的 FY-3 无人机数量满足要求；约束条件（15）确保了对每个基地的每台执行任务的 FY-3 无人机，其最大巡航时间为 8h；约束条件（16）确保了每个目标点都被打击掉，因为每个目标点要么被 FY-3 携带 D-2 型炸弹一次打击掉，要么被 FY-3 携带 D-1 型炸弹两次打击掉；约束条件（17）建立了时间与飞行路径之间的联系。

6.3 问题求解

下面分别对第一步和第二步优化问题进行求解，完成对整个问题三的求解。

6.3.1 第一步优化问题的求解

由 6.3.2 可知，对配备雷达站的目标点，必须都采用 D-1 型炸弹进行攻击，以保证攻击方的无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小。需要对挂载 D-1 型炸弹的 FY-3 型无人机进行调度。为此我们设计了最近邻贪心算法。

最近邻贪心算法的基本思想是尽量保证打击目标群内目标点的基地离目标群距离短。这其实也是一种基地任务分配策略，针对不同的目标群，分配不同的基地进行打击。最近邻贪心算法的算法原理见算法 4。

算法 4：最近邻贪心算法
step1： 给定要打击的目标点及相应的目标群；
step2： 对每个目标群，根据目标群内的目标点数，找距离该目标群最近的基地提供 FY-3 型无人机；若距离该目标群最近的基地无法提供无人机，转 step3；
step3： 找距离该目标群次近的基地提供 FY-3 型无人机，依此类推；
step4： 重复 step2，直到所有的目标点都分配好要打击的 FY-3 型无人机。

为打击所有配备雷达站的目标点，由上述的最近邻贪心算法，可求解到携带 D-1 型炸弹 FY-3 型无人机的调度方案, 如下表8。

表 8 打击所有配备雷达站的目标点的 FY-3 型无人机的调度方案

基地	目标群	数量	无人机类型	导弹	基地	目标群	数量	无人机类型	导弹
P01	A01	2	FY-3	D-1	P06	A05	2	FY-3	D-1
	A02	2	FY-3	D-1		A06	2	FY-3	D-1
	A03	2	FY-3	D-1		A07	2	FY-3	D-1
	A04	2	FY-3	D-1		A10	2	FY-3	D-1
	A08	2	FY-3	D-1					
	A09	2	FY-3	D-1					

表8的左侧第一行表示从基地 P01 派出两架挂载 D-1 型导弹的 FY-3 型无人机打击目标群 A02 中配备雷达站的目标点。其它以此类推。同时可以求得攻击方的无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和为 4.7h。

6.3.2 第二步优化问题的求解

由 6.2.2 可知，对于目标点数多的目标群，充分的利用 D-2 型炸弹，在 FY-1 型无人机资源匮乏的情况下辅助的利用 D-1 型炸弹进行火力打击。我们首先需要完成目标群的轰炸分配。

由于引导的 FY-1 型无人机只有八台，由假设7, 可以对 8 个目标群采用 D-2 型炸弹进行攻击，为了减少飞机数量，同时提高打击效率，选择目标点数较多的 8 个目标群，采用 D-2 型炸弹进行攻击。于是可采用 D-2 型炸弹进行攻击的目标群为 A01, A02,

A03, A04, A05, A06, A07, A08。

在完成目标群的轰炸分配后，同样采用上一节的最近邻贪心算法，可求解到 FY-3 型无人机携带 D-1 型炸弹和 D-2 型炸弹的调度方案，如下表9。

表 9 剩余目标点的 FY-3 型无人机调度方案

基地	目标群	数量	无人机类型	导弹	基地	目标群	数量	无人机类型	导弹
P01	A01	1	FY-3	D-2	P06	A03	2	FY-3	D-2
P03	A09	8	FY-3	D-1		A04	3	FY-3	D-2
	A10	2	FY-3	D-1		A05	2	FY-3	D-2
P05	A01	2	FY-3	D-2	P07	A06	2	FY-3	D-2
	A02	3	FY-3	D-2		A07	2	FY-3	D-2
	A08	8	FY-3	D-1					

表9的左侧第一列表示从基地 P01 派出 1 架挂载 D-2 型导弹的 FY-3 型无人机打击目标群 A01 中的剩余目标。其它以此类推。

在使用 D-2 型炸弹进行火力打击时，必须由 FY-1 型无人机加载 S-3 型载荷完成对 FY-3 型无人机的攻击引导。载荷 S-3 为制导炸弹提供目标指示时要求距被攻击目标的距离不超过 15km，其侦察条件和 S-2 型载荷相似，只是侦察范围变为 15km 的半径范围，所以这里可以借鉴使用问题一中对加载 S-2 载荷的无人机的航迹优化方法，缩减 FY-1 型无人机需要侦察的目标点。

但在问题三的第二步优化问题中，配备雷达站的目标点已经被火力打击掉，所以在使用基于贪心算法的覆盖法时，覆盖的目标点中必须首先不含配备雷达站的目标点。于是可以将问题一中的覆盖法进行改进，提出基于协同攻击的覆盖法，其算法原理见算法 5。

算法 5：基于协同攻击的覆盖法

step1： 找一个半径 15km 内覆盖目标点最多（覆盖的目标点中必须不含有配备雷达站的目标点）的那个目标点，保存该点，删去该点覆盖的所有的目标点；若出现覆盖目标点数相同的目标点，选择距配备雷达站的目标点最远目标点；

step2： 对剩下的目标点重复 step1，直到删去该群内的所有的点；

step3： 最终保存的目标点列即为缩减后的目标点列。

采用上述算法 5，可得缩减的 FY-1 型无人机的侦察目标点，如下表10。
于是可以得到 FY-1 型无人机的调度方案，如下表11。表11的第一列表示从基地

表 10 问题 3 中 FY-1 型无人机的飞行目标点

目标群	目标点	目标群	目标点
A01	A0104	A06	A0602
A02	A0204,A0209	A07	A0702
A03	A0302	A08	A0802
A04	A0406,A0407	A09	A0902
A05	A0502,A0506	A10	A1002

表 11 剩余目标点的 FY-1 型无人机调度方案

基地	目标群	数量	无人机类型	侦察的目标点
P01	A01	1	FY-1	A0104
P01	A02	1	FY-1	A0208, A0209
P03	A07	1	FY-1	A0702
P03	A08	1	FY-1	A0802
P05	A03	1	FY-1	A0302
P05	A04	1	FY-1	A0406, A0407
P07	A05	1	FY-1	A0502, A0506
P07	A06	1	FY-1	A0602

P01 派出 1 架 FY-1 型无人机侦察目标群 A01 中的目标点 A0104。其它以此类推。

当 20 架 FY-3 携带 D1 攻击雷达的时候，其余 FY-3 在雷达范围外等待，一旦雷达被摧毁，就进入目标群，攻击其他剩余目标。因此，从第一架攻击无人机进入防御方雷达探测范围内起，到轰炸完最后一个目标止的时间，可近似为一次 D1 和 D2 型导弹的攻击时间之和，即 0.96h，满足 7 小时要求。

7. 问题四（针对防御方新部署的协同作战）

7.1 问题分析

问题四要求基于防御方部署远程搜索雷达的情形重新考虑问题三。防御方在 A02、A05、A09 周边可能还配置有三部远程搜索雷达，该雷达对 FY 型无人机的有效作用距离是 200km。这三部雷达的工作模式是相继开机工作，前一部远程雷达被打击后，下一部雷达才开启。由于远程雷达的扫描范围很大，其一旦开机工作，攻击方无人机群即可获知信号，并必须在最短的时间内将其打击掉。

这时需要安排巡检待命的无人机在远程雷达部署周围。当远程雷达一旦开机，立即安排距离最近远程雷达最近的巡检待命的无人机将对其击毁。由假设8，打击原始 68 个目标点的无人机不会飞行去攻击远程雷达，这样问题三中的原始调度方案并不受到影响。这时需要考虑巡检待命的无人机携带炸弹的类型，并安排巡检待命无人机的数量及巡检飞行位置。此外，因为远程雷达的开机时机由防御方自主选择，可以分为 AB 两类，A 类为攻击方的无人机进入防御方的雷达探测范围之前开启，B 类为攻击方的无人机进入防御方的雷达探测范围之后开启，需要结合远程雷达的两类开机时机分类讨论巡检待命无人机的安排。

7.2 问题求解

这里主要解决两个问题：（1）安排巡检待命的无人机携带炸弹的类型；（2）巡检待命无人机的调度方案。下面对这两个问题分别进行求解。

7.2.1 巡检待命的无人机携带炸弹类型分析

仿照 6.2.1 中的分析方法，问题四中雷达的扫描范围由 70km 增加到 200km，由假设6,D-1 型炸弹的打击位置在 FY-1 型无人机的投弹位置的正下方。于是挂载 D-1 型导弹对目标点进行打击，滞留防御方远程雷达有效探测范围内的时间为 1.33h，计算过程如下：

$$\frac{200}{300} \times 2 = 1.33(h)$$

其中，200(km) 为远程雷达的扫描半径，300(km/h) 为 FY-3 型无人机的飞行速度。由于每个目标点必须由 2 台挂载 D-1 型导弹的 FY-3 型无人机才能摧毁掉，无人机在雷达扫描区的滞留时间是需要按照无人机数量进行叠加的，所以计算过程中乘以 2。

挂载 D-2 型导弹对目标点进行打击，滞留在防御方雷达有效探测范围内的时间为 1.58h，计算过程如下：

$$\frac{30}{720} \times 2 + \frac{185}{200} + \frac{170}{300} = 1.58(h)$$

其中 720 (km/h) 为 D-2 型炸弹的飞行速度，第一项为 D-2 型炸弹的飞行时间；第二项为 FY-1 型无人机引导 D-2 型炸弹过程中的飞行时间；第三项为 FY-3 型无人机进入雷

达扫描区到发射 D-2 型炸弹进行打击的一段时间。

显然，防御方部署远程雷达情形下，D-1 型炸弹的攻击时间比 D-2 型炸弹短，因此选择使用两架携带 D-1 型炸弹的 FY-3 型无人机对每一部远程雷达进行攻击。由于远程雷达位置与开机时间未知，可以在远程雷达未开启之前，布置携带 D-1 型炸弹的 FY-3 型无人机在一定范围内巡航，当雷达开机后，可以立即对其进行攻击。下面将讨论巡检待命无人机的调度方案。

7.2.2 巡检待命无人机的调度方案

由于远程雷达的搜索范围很大，各自搜索范围有重叠，其相对位置应如下图5。由假设9, 以 A02、A05、A09 组成三角形的内心位置为圆心， 60° 范围内布置两架携带 D-1 型炸弹的 FY-3 型无人机进行巡航。

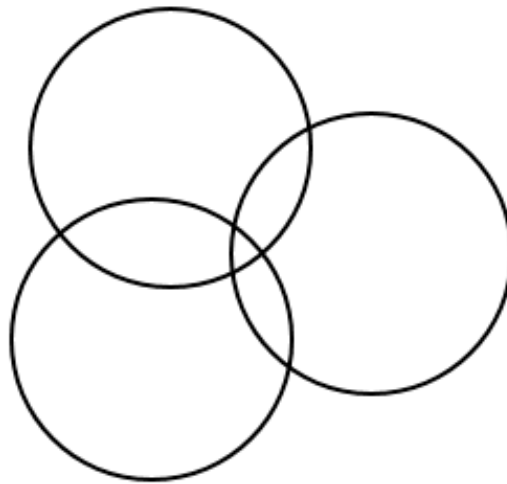


图 5 防御方远程雷达搜索范围示意图

若远程雷达的开机时机选为 A 类，即远程雷达在攻击方的无人机进入防御方的雷达探测范围之前开启，则发动问题三中的攻击之前即可知道远程雷达位置。派出 2 架携带 D-1 型炸弹的 FY-3 型无人机攻击已知位置的远程雷达，同时派出 10 架携带 D-1 型炸弹的 FY-3 型无人机，两两一组巡航，位置如图6。远程雷达被全部摧毁后，按照问题三中的调度方法，攻击目标点。

若远程雷达的开机时机选为 B 类，即远程雷达在攻击方的无人机进入防御方的雷达探测范围之后开启，则攻击之后知道远程雷达位置。同样按照问题三中的调度方法，攻击目标点。同时派出 12 架携带 D-1 型炸弹的 FY-3 型无人机，两两一组巡航，位置依然如图6。巡航位置到达时间应在无人机进入防御方的雷达探测范围之前。

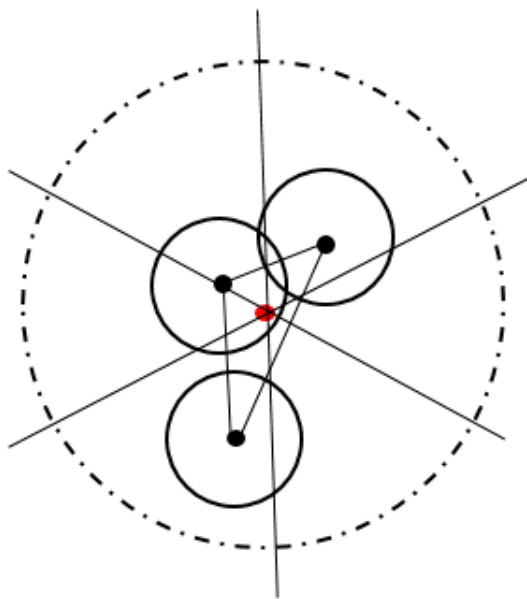


图 6 巡航待命的无人机的部署示意图

8. 问题五 (模型的讨论)

8.1 算法复杂度分析

问题一中采用了三种算法：二元素优化法（2-opt）、蚁群算法（ACO）和覆盖法。前两种算法针对简化后的 MUCRP 问题进行求解，即求解 TSP 问题，由于 TSP 问题是 NP-hard 问题，即可用一定数量的运算去解决多项式时间内可解决的问题。选择的两种算法都是启发式算法，基本蚁群算法的时间复杂度 $T(n)$ 为 $O(N_C n^2 m)$ ，其中 N_C 为迭代次数， m 为蚂蚁的总数，基本蚁群算法的时间复杂度 $S(n)$ 为 $O(n^2) + O(nm)$ 。在求解简化后的 MUCRP 问题时，可以分别采用多种优化算法，比较算法的运行时间和执行效果，便可有效地提高算法的效率。覆盖法的时间复杂度 $T(n)$ 为 $O(n^2)$ ，可以通过进一步优化覆盖法的判断条件来减少其算法复杂度。

问题三中采用了两种算法：最近邻贪心算法和基于协同攻击的覆盖法。最近邻贪心算法和基于协同攻击的覆盖法的时间复杂度 $T(n)$ 均为 $O(n^2)$ 。与问题一中覆盖法的算法优化讨论相似，可通过进一步优化覆盖法的判断条件来减少其算法复杂度，从而有效地提高算法的效率，以增强任务规划的时效性。

8.2 无人机作战能力的提升分析

在多无人机协同任务规划中，执行任务的无人机包括侦察无人机、通信无人机及攻击型无人机三种。由之前我们构建的数学模型以及对模型解算的结果可知：

对于 FY-1 型侦察型无人机，作侦察功能时，加载载荷的拍摄距离的增大可显著提

升无人机的作战能力；当其作引导功能时，加载载荷的引导距离的增大可显著提升无人机的作战能力。

对于 FY-2 型通信型无人机，其通信距离是关键参数，通信距离越远，无人机的作战能力越强。

对于 FY-3 型攻击型无人机，其携带炸弹的能力及所携带炸弹的性能都会影响其作战能力。当攻击型无人机携带炸弹的打击能力越强，同时炸弹的性能越优越时（比如自动导引、速度快等），无人机的作战能力越强。

此外，对于所有类型的无人机，续航能力都成为影响它们作战能力的重要指标，无人机的续航能力的提高可显著提升无人机的作战能力。

9. 模型的评价

9.1 模型的优点

问题一中，对加载 S-1 型载荷的 FY-1 型无人机，通过假设进出目标群的时间固定，将复杂的航迹规划转化为求解给定点的最短路径；对加载 S-2 型载荷的 FY-1 型无人机，通过贪心算法将问题转化为之前同样的问题。简化了模型计算的复杂程度，提高了模型的可行性。通过飞机同时出发达到每个目标群的时刻表，不仅证明了间隔小于 4 小时，更给出了最优的时刻表。

问题二中，通过制订 FY-1 型无人机在侦察机侦察过程中始终前后跟随的调度方案，简化了通信无人机的航迹。

问题三中，通过对 D-1 和 D-2 炸弹的分析，对不同的任务，选取了合适的导弹。同时通过贪心算法提出了一般情况下的基地任务分配模型，具有普遍意义。

问题四中，通过分类讨论，制订了不同情况下的应对策略，完善了模型。

9.2 模型的缺点

对于问题一，加载 S-1 型载荷的 FY-1 型无人机未考虑进出目标群内不同点的时间差问题，加载 S-2 型载荷的 FY-1 型无人机通过贪心算法对问题进行转换，可能得到的结果并不是最优。

对于问题二，忽略了 FY-1 型无人机与 FY-2 型无人机的飞行速度不同。

对于问题三，忽略了不同基地起飞的 FY-3 到目标群之间的时间差。

对于问题四，没有进行定性的探讨。

10. 参考文献

[1] 田菁, 沈林成. 多基地多无人机协同侦察问题研究 [J]. 航空学报, 2007, 28(4):913-921.

- [2] 李华伟. 多无人机协同任务规划研究与实现 [D]. 西安电子科技大学, 2014.
- [3] 王涛, 贺天宇, 谢英超. 基于 M-IPSO 算法的多无人机协同侦察任务规划技术研究 [C]// 中国指挥控制大会. 2015.
- [4] Croes G A. A method for solving traveling salesman problems[J]. Operations Research, 1958, 6(6):791-812.
- [5] 贾永基, 谷寒雨, 席裕庚. 一类车辆运输问题的多路径 k-opt 交换算法 [C]// 中国控制会议. 2004.
- [6] 史峰. MATLAB 智能算法 30 个案例分析 [M]. 北京航空航天大学出版社, 2011.
- [7] 哈林顿 (Harrington, P.). 机器学习实战 [M]. 人民邮电出版社, 2013.
- [8] 科曼. 算法导论 [M]. 机械工业出版社, 2013.

附录

A1. 数据

这里分别给出了问题一中加载 S-1 型载荷和 S-2 型载荷的 FY-1 型无人机的路线图。该路线图是按照题目中给定的目标点按照目标群顺序及在目标群内的顺序进行编号而来的。

加载 S-1 型载荷的 FY-1 型无人机的路线图：

第一条路线：P1 -> A1 -> A2 -> A5 -> A6 -> A7 -> A8 -> A4 -> A9 -> A10 -> A3 -> P1

第二条路线：P7 -> A51 -> A50 -> A49 -> A48 -> A52 -> A53 -> A66 -> A64 -> A65 -> A67 -> A68 -> A59 -> A60 -> A61 -> A62 -> A63 -> A57 -> A56 -> A55 -> A54 -> A58 -> A19 -> A16 18 -> A17 -> A15 -> A14 -> A11 -> A12 -> A13 -> A24 -> A23 -> A22 -> A21 -> A20 -> A33 -> A34 -> A32 -> A31 -> A25 -> A29 -> A30 -> A26 -> A27 -> A28 -> A38 -> A41 -> A40 -> A39 -> A35 -> A37 -> A36 -> A47 -> A45 -> A44 -> A42 -> A43 -> A46 -> P7

注意到这里无人机的实际路线图必须偏航 2km，因为 S-1 型载荷只能在 2km-8km 范围内拍摄。

加载 S-2 型载荷的 FY-1 型无人机的路线图：

P1 -> A3 -> A9 -> A7 -> A1 -> A54 -> A16 -> A18 -> A17 -> A15 -> A11 -> A13 -> A21 -> A59 -> A64 -> A48 -> A43 -> A42 -> A45 -> A36 -> A37 -> A35 -> A40 -> A38 -> A28 -> A26 -> A34 -> A31 -> A25 -> P1

A2. 源程序

所有的源程序可参见附件中程序文件夹下整理好的文件，由于篇幅约束，这里不再给出。