

参赛密码 _____
(由组委会填写)



“华为杯”第十三届全国研究生 数学建模竞赛

学 校 南京航空航天大学

参赛队号 10287048

队员 姓名	1.	刘琛
	2.	缪程珠
	3.	杨淑超

题 目 基于无线通信基站的室内三维定位问题

摘 要：

随着无线网络的高速发展，对无线定位技术的需求日益趋增，定位精度和定位范围的要求也相应提高。但以往的 GPS 定位系统却无法在城市、室内等移动终端密集的地区进行定位，故使用无线通信基站对复杂室内环境下手持终端的三维精确定位问题获得极大关注。

真实的移动网络情况下，基站所测电信号的到达时间（TOA）往往会因为遭受系统测量、时间不同步及非视距传播（NSOL）等因素影响产生偏差，使得测得距离始终大于实际距离。为实现精确定位，本文首先通过给定的测试算例拟合得出 TOA 与视距传播时间呈正相关性，建立 TOA 与实际距离间的关系式作为 TOA 的测量模型，通过平衡关系抑制 NSOL 因素的影响，并引入时差及系统测量误差变量。以使各个基站对各个终端定位的测距与视距间距离差值平方的累加值达到最小为目标函数建立终端定位的单目标非线性规划模型。使用最速下降法，得出待测的 10 组手持终端的三维坐标。使用测试样本进行模型性能测试，以测试样本一为例，其 MSE 为 0.18461，模型的预估终端坐标与实际终端坐标距离的平均值为 0.429662 m，目标函数值为 418.839。

要实现基站数目最少及定位精度最优的目标，意味着在终端定位模型中，加入基站数目尽可能少的考虑，建立基站数量优化的双目标非线性规划模型。模型求解过程中需引入一个单基站累计误差参数，即每个基站对于所有终端的测距与视距差的平方求和，在计算过程中对累计误差较大的基站予以剔除。测试样本一为例，以所给数据中的基站顺序排序，依次剔除序号为 7、28、10、2、18、9、17、16、12、15、26、3、24、21、19 的基站。

不同基站对同一移动终端运动轨迹的跟踪测量和不同基站对不同终端的单点测量，其差距仅在于前者基站所测电信号的发散终端为同一终端，故此时各终端与标准时钟间的时差始终保持一致。继续以定位误差最小为目标，加入终端间时差一致的约束条件，建立目标跟踪的非线性规划模型。求解并绘制五组待测移动终端的运动轨迹。

使用拟合所得 TOA 与视距传播时间之间的线性关系，将基站的通信半径进行变换。根据变换后的通信半径进行有效基站的筛选，并将有效基站数与定位所需最低基站数进行比较判断终端是否被定位。由于无法根据定位坐标与实际坐标的误差程度来确定此次定位的精度，故从提高定位精度等价于缩小终端定位范围的角度出发，建立以有效基站数目和通信半径为变量的定位精度衡量函数。通过分析有效基站数目、通信半径与连接度数的关系，发现连接度数与有效基站数目、通信半径存在正相关关系。采用传递的思想，得出连接度数与定位精度正相关。

关键词：精确定位；非视距传播；非线性规划模型；连接度数

一、问题的重述

1.1 问题背景

随着无线通信网络和移动互联网的蓬勃发展，提供基于地理位置信息的服务（Location Based Service，简称 LBS）已经成为最具市场前景和发展潜力的业务之一。从传统的 GPS 导航，到大众点评、微信等基于地理位置的消费信息服务和社交软件，实现其功能的基础就是要通过手机、导航仪等终端设备收发信号，来获得距离、角度等测量信息，并利用定位算法将这些测量信息转换成坐标信息。由于 GPS 在室内环境下无法定位，使得研究基于移动终端定位的方法意义重大。

基于移动终端定位又可以称作前向链路定位或移动终端自定位，其基本思路是移动终端接收到来自三个及以上位置已知基站的信号，然后根据其中所包含的与移动终端位置相关的信息获得二者的位置关系，最后根据相关定位算法对移动终端进行定位^[1]。而达成这一目标的手段是通过测量无线电信号的强度、传播时间、到达角等物理指标，并将其转化成终端与基站之间的距离、角度等信息，最终利用定位算法将距离、角度等信息转化成终端的坐标信息。

基于移动终端定位的方法有到达时间（TOA）定位。主要依据为信号传播时间与距离成正比关系，属于基于距离定位方法的范畴。TOA 的定位基本思想是移动终端同时对来自多个基站的信号进行测量或多个基站同时对来自同一个移动终端的信号进行测量，通过获得信号传播时间来计算移动终端与基站的距离，再依据获得的三个及以上距离实现定位。

由于紧急情况通常发生在城市地区与室内等复杂环境。复杂环境下的多系统无缝融合导航成为世界上的研究热点。移动通信网络与 GPS 结合提供融合定位为导航产品的应用提供了更广泛的空间。国内有较多从事研究和开发移动通信网络定位技术的公司、高校及科研机构以及一大批致力于定位技术应用开发的很多公司。基于通信基站的定位系统，也将会成为羲和导航系统有利的技术手段。

1.2 具体要求

（1）通过给定的 LOS 或 NLOS 传播环境下从手持端到基站的 TOA 测量数据和所有基站的三维坐标，建模求解出 10 组待测终端（训练样本里的 case001~case0010）的三维坐标；

（2）在问题（1）的基础上优化算法，要求使用的基站数量尽量少，三维定位精度尽量高，并绘制出 10 组待测移动终端的运动轨迹（训练样本里的 case0011~case0020）；

（3）通过给定的移动过程中的终端采集到的 TOA 数据，设计算法计算出 5 组待测终端的运动轨迹（训练样本里的 case0021~case0025）；

（4）考虑基站的通信半径为 200 米，设计算法寻找出可以被基站定位的所有终端，并建立模型分析连接度数与定位精度之间的关系（训练样本里的 case0026~case0030）。

1.3 数据分析

文中所使用的数据分为训练样本数据和测试样本数据。前者用于按不同要求建立对移动终端定位的数学模型，而后者用于对建模的算法进行验证及模型性能的好坏判别。

- 训练样本数据

训练样本数据共有 30 组（_input.txt），每组给定了测量的基站个数、待定位的终端个数、标识位（2 代表二维，3 代表三维情景），所有基站的三维坐标和每个基站测量出的与手持终端之间的到达时间（TOA）。以第一组训练样本数据（case001_input.txt）为例，绘制格式示意表如表 1。

表 1 训练样本数据格式示意表

基站个数	30	—	—	—
终端个数	1100	—	—	—
标识位	3	—	—	—
基站三维坐标	42.39	-188.40	2.46	—
30 行	⋮	⋮	⋮	—
	-122.33	-255.17	5.42	—
TOA	0.00000194824290	0.00000257859249	...	0.00000086448079
1100 行	⋮	⋮	...	⋮
	0.00000169735916	0.00000203143130	...	0.00000149565031
	30 列			

此时的 TOA 矩阵中的第 i 行中的第 j 个元素，表示第 i 个基站测得的由第 j 个终端发送的电信号的到达时间。

值得注意的是对于训练样本 case0021~ case0025 的数据而言，其为不同基站对同一移动终端的 TOA 测量结果。故第二行表示的是所有基站对一个移动终端运行轨迹的采点数。且此时 TOA 矩阵中的第 i 行中的第 j 个元素，表示的是终端移动到标号为 i 的位置上时，到标号为 j 的基站之间的 TOA 测量值。其余数据与 case001 的含义相同。

- 测试数据样本

测试数据样本一共有 5 组，其中每组包含有一个（_input.txt）文件和一个（_ans.txt）文件，前者的格式与训练样本一致，后者为对应前面文件中未知的手持移动终端的实际三维坐标。可通过将所求得移动终端三维坐标与实际的三维坐标进行对比，来判别建模算法的优劣。

二、问题的分析

2.1 概念分析

基于无线移动通信网络的定位是以获取用户手持终端（包括手机或者平板等设备）的三维坐标值为目的。故在进行问题分析以前，需要对若干计算中涉及到的基本概念进行整理分析。

- 无线电信号的到达时间

信号在基站与终端之间的传播时间，被称为无线电信号的到达时间（Time Of Arrival，简称 TOA）。在实际场景中，受带宽、信噪比、时钟同步以及 NLOS 传播环境的影响，TOA 测量会产生不同的误差。由于时钟不同步问题引起的误差在

200ns 以内，由于 NLOS 导致的时延最高可能超过 400ns。在同一“时间坐标系”下 TOA 的计算公式为：

$$t^{toa} = t_1 - t_0 \quad (2.1)$$

其中， t_0 为终端发送无线电的时刻， t_1 为基站接收到无线电的时刻。

- 无线电的传播速度

无线电信号的传播速度为常量：

$$v = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (2.2)$$

- 基站与手持终端的距离

已知无线电信号的传播速度及基站与手持终端间的时间差，基站与手持终端间的距离（LOS）情况下为：

$$S = vt^{(toa)} \quad (2.3)$$

在 NLOS 情况下的距离有待进一步的研究。

- 手持终端的三维坐标

综上可以获得用户手持终端位置的流程图大致为图 1。

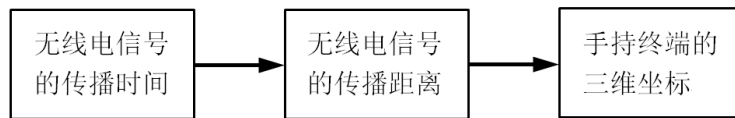


图 1 终端三维位置求解流程图

通过记录无线电信号的传播时间（TOA），得出传播距离从而得出待求手持终端的三维坐标的方法为 TOA 定位法。TOA 定位法是基于移动终端与三个基站的信号传播时间，通过建立三角定位关系，来确定移动用户位置。为简化说明，首先给出二维平面上的几何原理图。

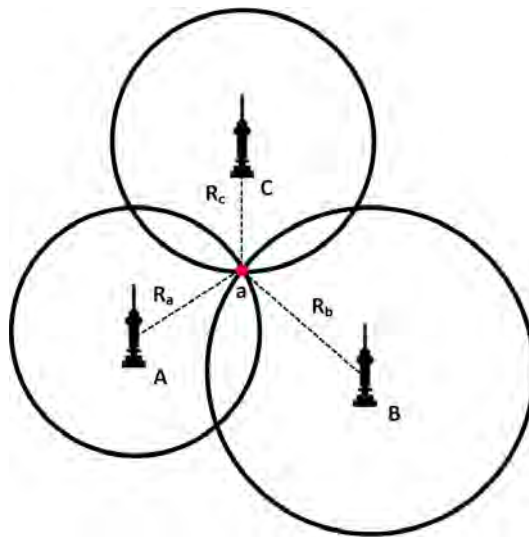


图 2 理想状态下的终端定位几何原理图（二维）

如图 2，A、B、C 为三个基站，其与手持终端的距离分别为 R_A 、 R_B 和 R_C ，

分别以 A、B、C 为圆心， R_A 、 R_B 和 R_C 为半径画圆。三个圆相交于 a 点，则该点即为手持终端所在位置，对应的二维坐标即为基站定位出的手持终端的二维坐标。拓展到三维平面，则应是四个球体的交点，具体定位方式与二维平面的情况类似。

但在实际的环境中通常是 SOL 和 NSOL 混合的环境下，由于 NSOL 情况下有电信号折射、反射等现象的产生，基站所测量的 TOA 数据与实际沿直线传播的 TOA 值之间有较大差距。而实际测量设备的测量误差也将影响所得 TOA 数据的准确性。TOA 的不准确性连带导致了测量半径与实际的终端与基站间的距离的差异，若再使用由 TOA 测得的半径进行圆周的绘制便不能再准确得重合于一点，而是相交成一个公共的区域，待求的手持终端则位于该公共区域之中。故需要确定一个最适合作为终端三维坐标的位置^[2]。对应的二维几何原理图如下。

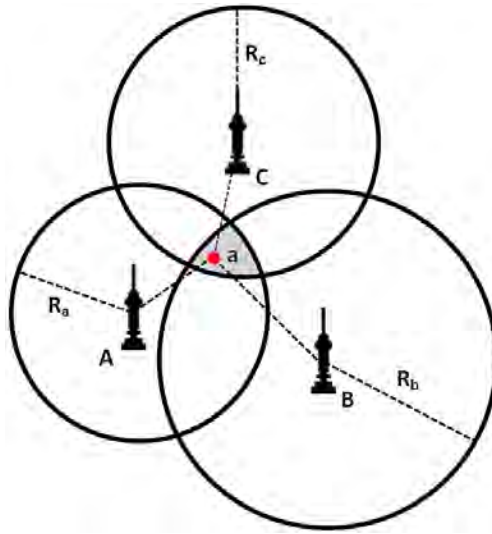


图 3 实际情况下的终端定位几何示意图（二维）

如图 3，以 A、B、C 为圆心 R_A 、 R_B 和 R_C 为半径画圆时，三个圆相交于如图中的灰色区域，手持端的位置则位于该区域之中，但无法确认其具体的三维坐标值。图中假设手持终端的位置处于 a 点，显然，基站 A、B、C 与 a 之间的距离均小于其对应的半径 R_A 、 R_B 和 R_C 。在三维中，四个（或以上）球体将相交于一个空间区域，待求的终端位置处于该空间区域之中。如何在已知的空间区域中突破各类误差限制，获得手持终端的精确位置，是求解本题的关键。

2.2 问题一

基站测量到达时间（TOA）过程中会因为受到设备测量系统、时间不同步和 NLOS 环境等因素的影响而产生测量误差。考虑通过建立测试实际距离与 TOA 测试距离的关系表达式，来消除 NLOS 的影响，并在表达式中引入时差变量和设备测试系统误差变量来体现其余两种误差的影响。再以测试实际距离与 TOA 测试距离差距最小为目标函数建立非线性规划方程，从而得出最精确的手持终端三维坐标。同时设定定位评价指标来进行模型性能的检验。

2.3 问题二

考虑使用尽可能少的基站数目达到较精确的测量结果，即在问题一达到精确定位手持终端三维坐标的情况下对基站数目进行优化。从而只需将单目标非线性规划模型优化成双目标非线性规划模型进行求解即可。

2.4 问题三

考虑到不同基站对同一移动终端的定位问题与不同基站对不同移动终端的定位问题的差距仅仅在于前者的终端始终是同一个，也就是终端与标准时钟之间的时差保持一致。仍旧以精确定位为目的进行非线性规划建模。

2.5 问题四

考虑到定位终端需要解决两个问题：1) 通信半径如何与 TOA 测量数据进行比较；2) 如何确定定位终端所需的最低基站数。由于无法根据定位坐标与实际坐标的误差程度来确定此次定位的精度，故从提高定位精度等价于缩小终端的定位范围的角度出发，发现可以用有效基站数目和通信半径来衡量定位精度。接着探究连接度数与这两个指标之间的关系。最后通过这两个指标将连接度数与定位精度联系起来。

三、模型的假设

- (1) 在定位过程中所有基站均处于正常运行状态；
- (2) 天气因素不干扰电信号的传播强度；
- (3) 所给 TOA 数据除正常因素的影响误差外不存在重大的测量偏差，即不存在异常数据。

四、名词解释与符号说明

4.1 名词解释

- 视距传播 (Line Of Sight propagation, 简称 LOS): 无线电信号在大气中从 A 点向 B 点传播时，如果传播过程中存在一个没有遮挡的直达路径，那么，这种传播环境被称为视距传播环境。
- 非视距传播 (Non-Line Of Sight, 简称 NLOS): 如果在传播过程中，由于建筑物或树木的遮挡、反射、折射等物理现象，使得从 A 点到 B 点之间存在多条无线电信号的传播路径，这种环境被称为非视距传播环境。
- 时钟同步：时钟同步也叫“对钟”，指使用标准时钟作搬钟，使各地的钟均与标准钟对准。

4.2 符号说明

符号	符号说明	单位
v	无线电传播速度，为常量	m/s
m	基站的总数	
n	终端的总数	

SB_i	第 i 个基站	$i = 1, 2, \dots, m$
MB_j	第 j 个终端	$j = 1, 2, \dots, n$
$t_i^{(bs)}$	基站 i 处时钟与标准时钟的时差	s
$t_j^{(ms)}$	终端 j 处时钟与标准时钟的时差	s
t_{ij}	基站 SB_i 与终端 MB_j 之间的视距时间	s
t_{ij}^{toa}	基站 SB_i 与终端 MB_j 之间的到达时间	s
d_{ij}	基站 SB_i 与终端 MB_j 之间的实际距离	m
(X_i, Y_i, Z_i)	基站 SB_i 的三维坐标	
(x_j, y_j, z_j)	终端 MB_j 的三维坐标	
λ	连接度数	

五、模型的建立

5.1 模型准备

无线定位系统中对移动终端的定位是通过检测移动终端与多个固定位置基站之间传播信号的特征参数（如信号场强、时间测量值）来估计目标终端的几何位置。若要精确定位，需选用适当的定位手段，且定位过程中需考虑到信噪比、时间不同步、系统测量及 NLOS 环境影响带来的定位误差，通过适当的方式予以抑制，并选用恰当的评价指标对定位算法进行性能评价。

5.1.1 视距传播时间和 TOA 时间成正比

根据测试样本给定的终端位置的真正三维坐标，结合基站所给的三维坐标位置和给定无线电的传播速度，可获得无线电在无阻挡（SOL）环境下的传播时间，本文称之为视距传播时间。通过对视距传播时间和测试时间 TOA 之间相关性的考察，可以间接获得测试结果与实际数据之间的关系，便于后续的建模分析。

为确认视距传播时间和测试实际之间的关系，取同一环境的所有终端到基站的视距传播时间和 TOA 数据进行拟合。以第一组测试样本（sample_case001）数据为例，绘制测试时间 TOA 与 SOL 情况下的电信号传播时间图像。

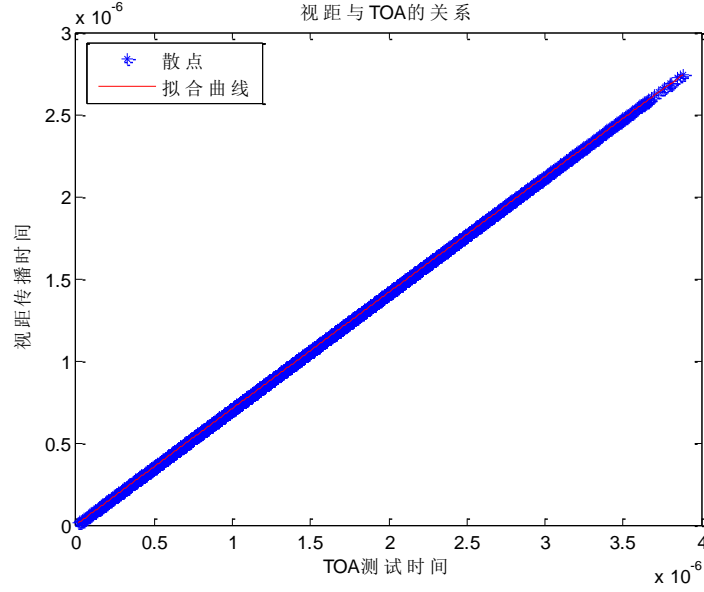


图 4 视距与 TOA 关系图

令 t_{ij} 为终端 MS_j 到基站 BS_i 的视距传播时间， $t_{ij}^{(toa)}$ 为终端 MS_j 到基站 BS_i 的到达时间（TOA），则其对应的拟合曲线为

$$t_{ij} = 0.7068655654t_{ij}^{(toa)} - 0.0000000012 \quad (5.1)$$

其中， $i=1,2,\dots,m$ ， $j=1,2,\dots,n$ ， m 和 n 则分别为基站的总数和待测终端的总数。

对应的置信度为 **0.9999982988**。这表明信号视距传播时间与 TOA 时间正相关。计算其余四组给定的测试样本，也可以获得相同的结果。故我们可以通过调整实际距离与测量距离的正比例系数来适当的对 TOA 测量距离进行缩放，以此达到减小测量误差的目的。由于每一个基站与终端所处的环境误差不同，故可以根据基站进行不同系数的设置。

5.1.2 定位评价指标

受测试设备及传播环境的影响，测量的定位参数会存在误差。对带有误差的测量数据进行处理，估计的目标位置也会偏离真是位置。将估计位置与真实位置之间的距离称之为定位误差^[3]。

考虑到定位误差是衡量定位系统准确性的主要指标。本文引入均方误差 (Mean Squared Error, MSE)、均方根误差 (Root Mean Squared Error, RMSE) (Cramér-Rao low bound, CRLB) 的概念。

(1) 均方误差 (MSE)

均方误差用于衡量“平均误差”，可以评价数据的变化程度。假定待定的手持终端 MS_j 的实际三维坐标为 (x_i, y_j, z_k) ， $(\hat{x}_i, \hat{y}_j, \hat{z}_k)$ 为 MS_j 的估计位置坐标。则此时均方误差的公式如下：

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^n [(x_j - \hat{x}_j)^2 + (y_j - \hat{y}_j)^2 + (z_j - \hat{z}_j)^2]}{n} \quad (5.2)$$

(2) 均方根误差 (RMSE)

均方根误差是均方误差的算术平均根。故其表达式为：

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n [(x_j - \hat{x}_j)^2 + (y_j - \hat{y}_j)^2 + (z_j - \hat{z}_j)^2]}{n}} \quad (5.3)$$

5.2 误差模型

要获得终端的精确位置需要先对实际环境中存在的误差进行抑制甚至消除。在考虑如何抑制环境误差的情况之前，应对存在的误差及其具体分布情况进行分析判断。

在城市环境下，由于建筑物、树木等障碍物阻挡引起的多径干扰和非视距误差以及蜂窝通信系统中“远近效应”引起的多址干扰都极大地影响基站测得的时间或距离信息的准确度，移动通信网络定位产生偏差^[基于移动通信网络的高精度定位关键技术研究]。对基于到达时间 (TOA) 技术的定位算法来说，影响定位精度的原因主要有三个：

- (1) 系统测量误差，如时间分辨能力较差^[5]。一般认为服从零均值高斯分布，在 LOS 和 NLOS 环境下均存在；
- (2) 同步时差，即基站与终端间由于时差不同引起的计算误差；
- (3) 附加延时 (NLOS) 误差，由传播信号的折射、反射等现象产生。一般认为服从均匀分布、指数分布、均匀值不为零的高斯分布或 Delta 分布等。

综合考虑电信号传播过程中上述三种误差的影响，可得出相应的误差模型。但由于在具体环境中 TOA 时间的测量存在 LOS 与 NLOS 的情况，故对应的误差模型有所区别，具体表达如下：

LOS 条件：

$$t_{ij}^{(toa)} = t_{ij} + t_i^{(bs)} \quad (5.8)$$

NLOS 条件：

$$t_{ij}^{(toa)} = t_{ij} + t_i^{(bs)} + t_{ij}^{(nlos)} \quad (5.9)$$

其中， t_i^{BS} 为基站的检测设备误差，即系统误差。由于基站与终端的时钟可能是不同步的，导致时间计算有误差，为零均值的高斯随机变量； $t_{ij}^{(nlos)}$ 为无线传播环境 (NLOS) 带来的误差，是误差的主要组成部分，其与 t_{ij} 成正比例关系。

5.3 TOA 测量模型

考虑到 TOA 数据的准确性是终端位置精确测量的重要前提，故需要对已测 TOA 的数据进行修正。本文通过建立测试实际距离与 TOA 测试距离的关系表达式来对 TOA 数据进行重新的测量修改。同时为 TOA 增加了置信因子来抑制 NLOS 环境的影响。这样的优势即在于不需要辨别 TOA 测量数据是否包含 NLOS 误差。且模型中考虑了同步时差的影响。

设第 i 个基站 BS_i 的坐标为 (X_i, Y_i, Z_i) ，时钟与标准时钟的时差为 $t_i^{(bs)}$ ；

第 j 个终端 MS_j 的坐标为 (x_j, y_j, z_j) ，时钟与标准时间的时差为 $t_j^{(ms)}$ ；

那么基站 BS_i 到终端 MS_j 的实际距离 d_{ij} 为:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_j - X_i)^2 + (y_j - Y_i)^2 + (z_j - Z_i)^2} \quad (5.10)$$

基站 BS_i 与终端 MS_j 的时差为 $\Delta t_{ij} = t_i^{(bs)} - t_j^{(ms)}$;

基站 BS_i 与终端 MS_j 的实际消耗时间为 $\hat{t}_{ij} = t_{ij}^{(toa)} - \Delta t_{ij}$;

基站 BS_i 与终端 MS_j 的信号传送距离为:

$$s_{ij} = v\hat{t}_{ij} = v(t_{ij}^{(toa)} - \Delta t_{ij}) \quad (5.11)$$

因为 NLOS 影响, 使得信号传播过程中很有可能不是直线传播, 导致测得的实际消耗时间增加。

前面得出实际距离和测试距离成正比, 设这个比例系数为 γ_i , 那么实际距离应该为:

$$\hat{s}_{ij} = \gamma_i s_{ij} + \varepsilon_{ij} = \gamma_i v(t_{ij}^{(toa)} - \Delta t_{ij}) + \varepsilon_{ij} \quad (5.12)$$

其中, ε_{ij} , 是符合均匀分布的系统测量误差。而 γ_i 是置信因子, 即基站 BS_i 到达时间 TOA 的置信度, 当传播环境为 LOS 时, 置信因子取最大值 $\gamma_i = 1$, 当传播环境为 NLOS 时, $\gamma_i < 1$ 。

结合式(5.10)和式(5.12), 得到 $d_{ij} = \hat{s}_{ij}$, 从而得到等式:

$$\sqrt{(x_j - X_i)^2 + (y_j - Y_i)^2 + (z_j - Z_i)^2} = \gamma_i v(t_{ij}^{(toa)} - \Delta t_{ij}) + \varepsilon_{ij} \quad (5.13)$$

该式即所需求解的终端三维坐标和到达时间 TOA 的关系。其中 Δt_{ij} 是由基站计时与终端计时所使用的时钟不同步引起的时差, γ_i 和 ε_{ij} 是由于信号传播过程中的环境引起的误差。

5.4 终端定位模型

由已建立的终端三维坐标与到达时间 TOA 之间的关系式可以看出, 实际距离与测量距离中往往会因为时差、设备测量误差及 NLOS 环境误差的影响而产生差距。而精确定位的主要目的即要满足预测终端位置与实际终端位置间的差距最小, 故可根据该目标建立非线性终端定位规划模型。

● 决策变量

根据式 (5.12) 中的未知变量, 可决定非线性规划方程中的决策变量如下:

- [1] 终端 MS_j 的坐标 (x_j, y_j, z_j) ;
- [2] 终端 MS_j 的时差 $t_j^{(ms)}$;
- [3] 基站 BS_i 的时差 $t_i^{(bs)}$;
- [4] 基站的置信因子 γ_i 。

● 目标函数

已知基站 BS_i 到终端 MS_j 的实际距离 d_{ij} 为

$$d_{ij} = \sqrt{(x_j - X_i)^2 + (y_j - Y_i)^2 + (z_j - Z_i)^2} \quad (5.14)$$

令 $\bar{s}_{ij} = \gamma_i v(t_{ij}^{(toa)} - \Delta t_{ij})$ ，将其代入式(5.12)中基站 BS_i 到终端 MS_j 的测量距离为

$$\hat{s}_{ij} = \gamma_i v(t_{ij}^{(toa)} - \Delta t_{ij}) + \varepsilon_{ij} = \bar{s}_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (5.15)$$

精确定位的目标即为使得测量距离与实际距离的差距最小，即：

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\bar{s}_{ij} - d_{ij}) \quad (5.16)$$

又考虑到迭代过程的复杂性，为方便后面计算和迭代，避免迭代过程中出现 $d_{ij} > s_{ij}$ 引起发散的情况，可将目标函数改为：

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (d_{ij} - \bar{s}_{ij})^2 \quad (5.17)$$

● 约束条件

在测量模型中建立了测试实际距离与 TOA 测试距离的关系表达式。由于现实网络里电信号的传播过程中往往存在反射、折射等现象，此时电信号的测量受到了 NLOS 环境的影响，使得测量出的 TOA 数值上要大于电信号传播的实际时间。对应的测量距离则要大于基站与终端间的实际距离，即：

$$\sqrt{(x_j - X_i)^2 + (y_j - Y_i)^2 + (z_j - Z_i)^2} \leq v t_{ij}^{(toa)} \quad (5.18)$$

当且仅当电信号为视距传播时等号成立。

即主要的约束条件为：

$$d_{ij} \leq v t_{ij}^{(toa)} \quad (5.19)$$

同时应满足的约束条件为：

$$\begin{cases} \bar{s}_{ij} = v t_{ij}^{(toa)} \\ d_{ij} = \sqrt{(x_j - X_i)^2 + (y_j - Y_i)^2 + (z_j - Z_i)^2} \end{cases} \quad (5.20)$$

置信因子应保持小于或等于 1：

$$0 < \gamma_i \leq 1 \quad (5.21)$$

由题意知，时差不会超过 200ns：

$$\begin{cases} -200ns < t_i^{(bs)} < 200ns \\ -200ns < t_j^{(ms)} < 200ns \end{cases} \quad (5.22)$$

综合上述条件，可得定位终端的非线性规划方程组为：

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (d_{ij} - \bar{s}_{ij})^2 \\
& \left\{ \begin{aligned}
& d_{ij} < vt_{ij}^{(toa)} \\
& \bar{s}_{ij} = \gamma_i v(t_{ij}^{(toa)} - \Delta t_{ij}) \\
& \Delta t_{ij} = t_i^{(bs)} - t_j^{(ms)} \\
& -200ns < t_i^{(bs)} < 200ns \\
& -200ns < t_j^{(ms)} < 200ns \\
& d_{ij} = \sqrt{(x_j - X_i)^2 + (y_j - Y_i)^2 + (z_j - Z_i)^2}
\end{aligned} \right. \quad (5.23)
\end{aligned}$$

5.5 基站数量优化模型

要使用尽可能少的基站数目进行终端的精确定位，这就意味着除了精度要保证外基站的数量也要进行优化，这使得要实现的最优目标有所增加。考虑将终端定位模型优化为双目标非线性规划模型。

● 决策变量

除了与终端定位模型中一致的决策变量外，需引入一个新的决策变量 m' 来表示实际计算过程中用到的基站个数。即对应的决策变量为：

- [1] 终端 MS_j 的坐标 (x_j, y_j, z_j) ；
- [2] 终端 MS_j 的时差 $t_j^{(ms)}$ ；
- [3] 基站 BS_i 的时差 $t_i^{(bs)}$ ；
- [4] 基站的置信因子 γ_i ；
- [5] 参与定位的基站数 m' 。

● 目标函数

根据基站定位的机理可知，定位过程中使用的基站个数越多，定位精度越高，相应的基站个数越少则精度越低。可见，基站数目的最少化与定位精度的增加之间存在负相关关系，为了在两者之间找到一个最优的解，需要建立一个双目标非线性规划模型来实现。故此时的目标函数有两个：

目标函数一：

$$\min m' \quad (5.24)$$

目标函数二：

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (d_{ij} - \bar{s}_{ij})^2 \quad (5.25)$$

● 约束条件

若不考虑其余决策变量，只考虑终端未知的三维坐标变量 (x_j, y_j, z_j) 。则此时的未知变量为 3 个，则需要三个基站的坐标与未知终端坐标建立距离方程进行求

解。如有基站 A、B、C 对应的坐标为 (X_a, Y_a, Z_a) 、 (X_b, Y_b, Z_b) 、 (X_c, Y_c, Z_c) ，终端 a 对应的坐标为 (x, y, z) ，根据公式(5.18)可建立相应的距离方程式为：

$$\begin{cases} (X_a - x)^2 + (Y_a - y)^2 + (Z_a - z)^2 \leq vt_{Aa}^{toa} \\ (X_b - x)^2 + (Y_b - y)^2 + (Z_b - z)^2 \leq vt_{Ba}^{toa} \\ (X_c - x)^2 + (Y_c - y)^2 + (Z_c - z)^2 \leq vt_{Ca}^{toa} \end{cases} \quad (5.26)$$

其中， t_{Aa}^{toa} 、 t_{Ba}^{toa} 、 t_{Ca}^{toa} 分别为基站 A、B、C 与终端 a 之间的到达距离。当且仅当测量环境处于无干扰情况下时等式成立。即便在等式成立的情况下，由于每个距离方程均为三元二次方程，故求解出的结果包含正负的两个情况。为筛选正负情况下的解的位置，还需引入一个基站进行正负号判别。故在理想情况下，起码需要 4 个基站进行协同合作来定位一个终端。若在真实的网络环境下测量，则需考虑外部环境的干扰，需引入其余决策变量，此时就需要四个以上的基站进行定位，即：

$$m' \geq 4 \quad (5.27)$$

显然，用到的基站个数应在基站总个数的范围内，结合上式，可得约束条件：

$$4 \leq m' \leq m \quad (5.28)$$

其余约束条件与定位模型中的一致。

综合可得基站数量优化的非线性规划模型方程组为：

$$\begin{aligned} & \min m' \\ & \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (d_{ij} - \bar{s}_{ij})^2 \\ & \begin{cases} d_{ij} < vt_{ij}^{(toa)} \\ 4 \leq m' \leq m \\ \bar{s}_{ij} = \gamma_i v(t_{ij}^{(toa)} - \Delta t_{ij}) \\ \Delta t_{ij} = t_i^{(bs)} - t_j^{(ms)} \\ -200ns < t_i^{(bs)} < 200ns \\ -200ns < t_j^{(ms)} < 200ns \\ d_{ij} = \sqrt{(x_j - X_i)^2 + (y_j - Y_i)^2 + (z_j - Z_i)^2} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.29)$$

5.6 目标跟踪模型

目标跟踪是多个基站对于同一个移动终端进行 TOA 的数据采集。与终端定位模型一样，目标跟踪模型也可以看作是以精确定位移动终端为目的的非线性规划模型。

● 决策变量

目标跟踪模型的决策变量与终端定位模型的决策变量一致。为：

[1] 终端 MS_j 的坐标 (x_j, y_j, z_j) ；

- [2] 终端 MS_j 的时差 $t_j^{(ms)}$;
- [3] 基站 BS_i 的时差 $t_i^{(bs)}$;
- [4] 基站的置信因子 γ_i 。

● 约束条件

不同基站对于同一移动过程中的终端进行 TOA 数据采集。其与不同基站对不同移动过程中的终端进行 TOA 数据采集的差异主要在于此时被测量的终端始终保持不变。故相交于定位模型而言，目标跟踪模型中各个终端相较于标准时钟的时差相同。故在定位模型的约束条件中应增加一项：

$$t_i^{(ms)} = t_j^{(ms)} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.30)$$

● 目标函数

与终端定位的要求一样，目标跟踪的目的也是精确定位移动终端的三维坐标位置，故其目标函数与终端定位模型一致。

综合上述条件，可得实现目标跟踪的非线性规划模型为：

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (d_{ij} - \bar{s}_{ij})^2 \\ & \begin{cases} d_{ij} < vt_{ij}^{(toa)} \\ \bar{s}_{ij} = \gamma_i v(t_{ij}^{(toa)} - \Delta t_{ij}) \\ \Delta t_{ij} = t_i^{(bs)} - t_j^{(ms)} \\ t_i^{(ms)} = t_j^{(ms)} (i, j = 1, 2, 3, \dots, n) \\ -200ns < t_i^{(bs)} < 200ns \\ -200ns < t_j^{(ms)} < 200ns \\ d_{ij} = \sqrt{(x_j - X_i)^2 + (y_j - Y_i)^2 + (z_j - Z_i)^2} \end{cases} \quad (5.31) \end{aligned}$$

5.7 给定基站通信半径下的终端定位模型

由于电信号传播距离越远，信号强度越小且环境干扰带来的噪声越大，故基站的通信距离实际有限。以该距离为半径，基站为圆心画出圆形区域，只有在该区域内的终端才有可能测到自身到基站的距离，故称该通信距离为基站的通信半径。而一个终端只有获得它与足够数目的基站之间的距离测量值，才能完成定位，即意味着终端只有处于足够多个基站的通信半径的重合覆盖范围内才能够实现对其的定位。

5.7.1 通信半径与 TOA 测量数据转换模型

假设每个基站的通信半径为 r 米，已知基站 BS_i 到终端 MS_j 的实际距离为 d_{ij} ，若要保证基站能够对终端发出的电信号到达时间进行测量，则要保证基站与终端之间的实际距离在通信半径内，即：

$$d_{ij} \leq r \quad (5.32)$$

上述过程已说明 TOA 测量时间和视距传播时间存在正相关关系，即：

$$t_{ij} = a \times t_{ij}^{(toa)} - b \quad (5.33)$$

结合公式 (5.32) 和 (5.33) 可得：

$$(a \times t_{ij}^{(toa)} - b) \times v \leq r \quad (5.34)$$

满足该式时，终端能测到自身到第 i 个基站 BS_i 的距离。

5.7.2 定位终端所需基站数下限确定

假设终端能测得自身到基站距离的基站数为 n 个^[6]，现通过分析二维平面来确定定位所需的最低基站数 n_{least} 。

- 当 $n=1$ 时，该终端能定位到的范围是以基站为圆心，测得距离为半径的圆弧上；
- 当 $n=2$ 时，该终端位于两个圆相交的两个点上；
- 当 $n=3$ 时，该终端将会定位于三个圆相交的点上。

可见，理想状况下，二维平面上定位基站所需的最低基站数 $n_{least} = 3$ ，拓展到三维空间，则定位需要的最低基站数 $n_{least} = 4$ 。

然而在实际情况中，由于基站的测量数据存在一定的误差，所以当满足最低基站数的要求时，也不一定能够具体定位到基站，而是在一定程度上缩减了基站的确定范围，进一步利用定位算法进行最终终端的确定。故在三维空间下，如果要定位终端，需满足：

$$n \geq n_{least} = 4 \quad (5.35)$$

5.7.3 确定终端定位状态

在获得终端到基站的 TOA 测量数据与基站的通信半径的情况下，我们可以按如下步骤进行终端定位状态 s_j 的确定：

Step1: 根据 TOA 测量数据与基站的通信半径数据，依据式判断哪些基站的测量数据有效，若满足 $(a \times t_{ij}^{(toa)} - b) \times v \leq r$ ，则认为第 i 个基站 BS_i 的测量数据有效；

Step2: 对当前终端汇总统计有效基站的数量，如果数量满足 $n \geq n_{least} = 4$ ，则表明当前终端可以被定位，此时 $s_j = 1$ ，否则，则当前终端无法被定位，此时 $s_j = 0$ 。

5.8 连接度数与定位精度关系模型

5.8.1 平均“连接度数”

在基站的通信半径为 r 米的情况下，我们可以根据上述给定基站通信半径下的终端定位模型，找出所有终端 MS_j 的定位状态 s_j 及与该终端相连接的有效基站数 n_j 。根据定义终端平均“连接度数”的定义：

$$\lambda = \frac{\text{所有可以被定位终端到基站之间的连接数}}{\text{终端数}} \quad (5.36)$$

可得平均连接度数的表达式：

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1}^n n_j \times s_j}{n} \quad (5.37)$$

其中， $s_j = \begin{cases} 0 & \text{不能定位} \\ 1 & \text{可以定位} \end{cases}$ 。

5.8.2 定位精度模型

由于终端确定后，无法根据定位坐标与实际坐标的误差程度来确定此次定位的精度。故这里我们不采用此种方式进行定位精度的确立。

要提高终端的定位精度，等价于缩小终端的定位范围，有两个方式可以进行优化：

- 1) 增加有效基站数目 n ；
- 2) 选择适宜的通信半径 r ，不要过大，也不要过小。

故由此我们可以发现，故由此我们可以发现定位精度与有效基站数目 n 和通信半径 r 相关，即：

$$\xi = f(n, r) \quad (5.38)$$

故可用有效基站数目 n 和通信半径 r 来衡量定位精度。

5.8.3 连接度数与定位精度关系

连接度数 λ 表达式中含有两个参数：

- 1) 所有终端 MS_j 的定位状态 s_j
- 2) 与该终端相连接的有效基站数 n_j 。

由于表达式中分母是定值，故要提高连接度数有两个方式：

- 1) 提高通信半径 r ；
- 2) 增加有效基站数目 n 。

由此可得连接度数 $\lambda \propto n, r$ 。显然，有效的基站数目越多，定位的精度越高，即 $\xi \propto n$ 。采用传递思想，可以得知 $\lambda \propto \xi$ ，即定位精度与连接度数之间为正相关。

六、模型的求解

6.1 问题一的求解

6.1.1 最速下降法求解

问题一中的非线性终端定位规划模型可以采用最速下降法进行快速高效地迭代求解。

终端 MS_j 在 x 方向的梯度方向为：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (d_{ij} - \bar{s}_{ij})^2}{\partial x_k} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial (d_{ik} - \bar{s}_{ik})^2}{\partial x_k} \\
 &= \sum_{i=1}^m 2(d_{ik} - \bar{s}_{ik}) \frac{\partial d_{ik}}{\partial x_k} \\
 &= \sum_{i=1}^m 2(d_{ik} - \bar{s}_{ij}) \frac{2(x_k - X_i)}{d_{ik}} \\
 &= \sum_{i=1}^m 4 \frac{(d_{ik} - \bar{s}_{ik})}{d_{ik}} (x_k - X_i)
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

同样地，在 y 、 z 方向上有：

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (d_{ij} - \bar{s}_{ij})^2}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^m 4 \frac{(d_{ik} - \bar{s}_{ik})}{d_{ik}} (y_k - Y_i) \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (d_{ij} - \bar{s}_{ij})^2}{\partial z_k} = \sum_{i=1}^m 4 \frac{(d_{ik} - \bar{s}_{ik})}{d_{ik}} (z_k - Z_i) \tag{6.3}$$

在终端时差的梯度方向为：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (d_{ij} - \bar{s}_{ij})^2}{\partial t_k^{(ms)}} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^m (d_{ik} - \bar{s}_{ik})^2}{\partial t_k^{(ms)}} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^m 2(d_{ik} - \bar{s}_{ik}) \partial \bar{s}_{ik}}{\partial t_k^{(ms)}} \\
 &= -\sum_{i=1}^m 2(d_{ik} - \bar{s}_{ik}) \gamma_i v
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

在基站置信因子方向的梯度：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (d_{ij} - \bar{s}_{ij})^2}{\partial \lambda_k} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial (d_{kj} - \bar{s}_{kj})^2}{\partial \lambda_k} \\
&= \sum_{j=1}^n 2(d_{kj} - \bar{s}_{kj}) \frac{\partial \hat{s}_{kj}}{\partial x_k} \\
&= \sum_{j=1}^n 2(d_{kj} - \bar{s}_{kj}) v(t_{kj}^{(toa)} - \Delta t_{kj}) \\
&= \sum_{j=1}^n 2v(d_{kj} - \bar{s}_{kj})(t_{kj}^{(toa)} - \Delta t_{kj})
\end{aligned} \tag{6.5}$$

在基站时差的梯度方向为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (d_{ij} - \bar{s}_{ij})^2}{\partial t_k^{(bs)}} &= \frac{\partial \sum_{j=1}^n (d_{kj} - \bar{s}_{kj})^2}{\partial t_k^{(bs)}} \\
&= \sum_{j=1}^n 2(d_{kj} - \bar{s}_{kj}) \frac{\partial \bar{s}_{kj}}{\partial t_k^{(bs)}} \\
&= \sum_{j=1}^n 2(d_{kj} - \bar{s}_{kj}) \gamma_k v
\end{aligned} \tag{6.6}$$

具体的迭代求解步骤如下：

(1) 初始化

初始化所有终端的位置为所有基站的重心，给学习率赋初始值为 0.025。

(2) 更新终端坐标

依次遍历所有终端，由公式(6.1)、(6.2)、(6.3)进行得到坐标值调整量：

$$\begin{cases} \Delta x_k = -\eta \sum_{i=1}^m 4 \frac{(d_{ik} - \bar{s}_{ik})}{d_{ik}} (x_k - X_i) \\ \Delta y_k = -\eta \sum_{i=1}^m 4 \frac{(d_{ik} - \bar{s}_{ik})}{d_{ik}} (y_k - Y_i) \\ \Delta z_k = -\eta \sum_{i=1}^m 4 \frac{(d_{ik} - \bar{s}_{ik})}{d_{ik}} (z_k - Z_i) \end{cases} \tag{6.7}$$

其中 η 是学习率，会随着迭代逐渐减小，调整终端的坐标。

(3) 更新终端的时差

根据公式(6.4)计算终端时差的调整量：

$$\Delta t_k^{(ms)} = -\eta \sum_{i=1}^m (d_{ik} - \bar{s}_{ik}) \gamma_i v \tag{6.8}$$

(4) 更新基站的置信因子

依次遍历所有基站，根据公式(6.5)计算置信因子的调整量：

$$\Delta\lambda_k = \eta \sum_{j=1}^n v(d_{kj} - \bar{s}_{kj})(t_{kj}^{(toa)} - \Delta t_{kj}) \quad (6.9)$$

(5) 更新基站的时差

根据公式(6.6)计算基站时差的调整量：

$$\Delta t_k^{(bs)} = \sum_{j=1}^n 2(d_{kj} - \bar{s}_{kj})\gamma_k v \quad (6.10)$$

(6) 循环判断

循环结束后，计算目标函数值，判断是否迭代完成，不满足终止迭代条件则返回步骤（2），满足终止条件则停止迭代。

将上述过程简化成流程图表达如下：

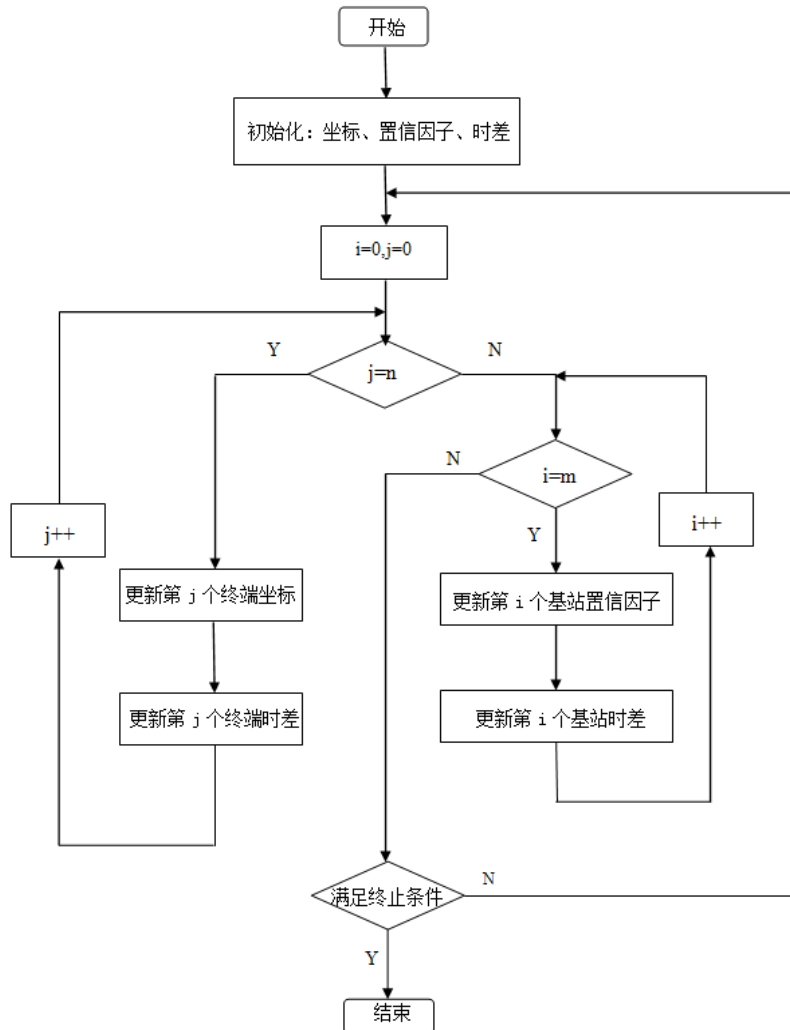


图 5 迭代步骤简化流程图

求解结果按要求以附件形式进行打包。

6.1.2 终端定位模型性能评价

通过 java 编写程序，实现上述迭代过程，取 sample_case001_input.txt 中的数据为例，并取出 sample_case001_ans.txt 中的结果进行对比，当迭代 30000 次时终止迭代绘制最终状态下的目标函数及均方误差曲线图如下：

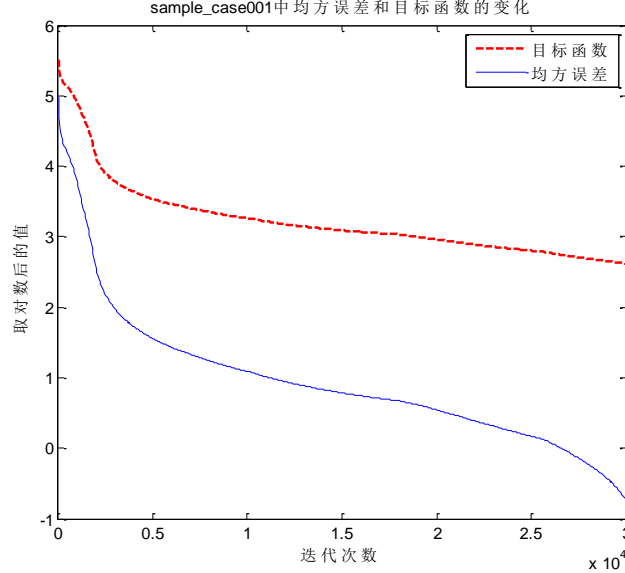


图 6 均方误差与函数变换比较图

图中为虚线为目标函数曲线，实线为均方误差函数曲线。其均随着迭代步数的增加，呈现下降的趋势。说明在不断的迭代过程中，目标函数的值向最优解靠拢，且均方误差不断变小。对其余四组测试用例均进行相同迭代，可以获得最终的 MSE 及 RMSE 的数值解，整合如表 2。

表 2 模型评价综合结果

测试用例	MSE	RMSE	目标函数值
sample_case001	0.184610	0.429662	418.839
sample_case002	0.184389	0.429405	437.598
sample_case003	0.179914	0.424163	463.904
sample_case004	0.172088	0.414835	507.778
sample_case005	0.205101	0.452881	386.386

以第一组测试样本为例，进行说明。其所得的 MSE 为 0.184610。同时，模型的预估终端坐标与实际终端坐标距离的平均值为 0.429662 m，获得的目标函数值的结果为 418.839。

6.2 问题二的求解

基站数目优化模型求解过程中需引入一个单基站累计误差参数 err_i ，表示基站 BS_i 对于所有手持终端测量误差的累加。具体表达式如下：

$$err_i = \sum_{j=1}^n (d_{ij} - \bar{s}_{ij})^2 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6.9)$$

可见， err_i 越大就意味着该基站定位的手持终端的位置与其实际位置之间的差距越大，即此基站的定位精度低，故该基站不被作为定位的基站选择。重复进行上述选择过程，即可求得最优的定位基站安排。

以 sample_case001_input.txt 中的数据为例，绘制迭代过程中的目标函数值和基站个数之间的关系图：

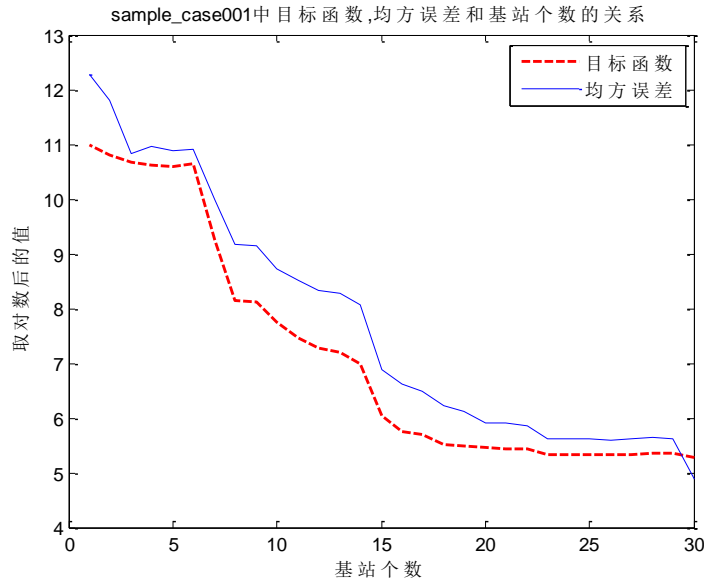


图 7 目标函数值和基站个数间关系图

从中可以发现，基站个数越多，定位越准确；随着基站个数的减少，误差逐渐增多，当基站个数缩减为 15 个的时候，误差有一个明显的升高；这里为了得到较优的定位精度，这里选取基站个数为 15，依次剔除的基站序号位为：7、28、102、18、9、17、16、12、15、26、3、24、21、19。

使用模型对待测的 10 组训练样本进行求解，整合结果列表如下：

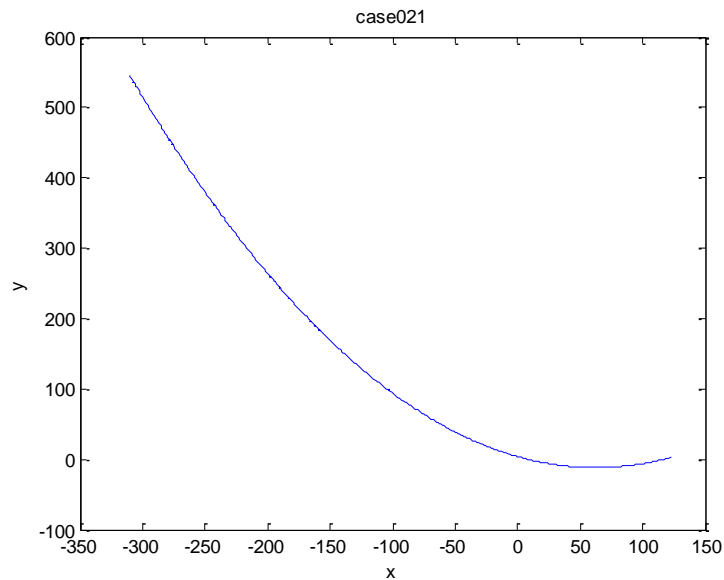
场景	目标函数	基站数	保留的基站编号	依次剔除的基站编号
case011	1128.88	10	21, 28, 1, 18, 27, 15, 7, 24, 25, 19	6, 4, 23, 12, 5, 22, 9, 11, 14, 10, 16, 13, 29, 26, 30, 20, 3, 17, 2, 8
case012	1218.28	20	25, 12, 40, 16, 29, 5, 36, 19, 4, 31, 3, 17, 8, 20, 1, 30, 13, 18, 39, 38	14, 15, 10, 27, 24, 11, 26, 37, 28, 34, 2, 21, 33, 9, 35, 6, 32, 7, 23, 22
case013	2063.62	19	43, 10, 14, 15, 48, 25, 29, 49, 30, 24, 12, 28, 35, 23, 37, 38, 44, 34, 21	41, 8, 9, 22, 7, 18, 45, 1, 5, 17, 2, 19, 31, 39, 4, 27, 50, 46, 36, 6, 3, 16, 13, 47, 33, 20, 42, 11, 40, 26, 32
case014	1452.52	23	58, 30, 36, 50, 12, 2, 28, 11, 22, 25, 29, 38, 47, 32, 48, 59, 33, 40, 8, 6, 10, 41, 13	49, 17, 16, 34, 21, 15, 44, 53, 26, 27, 35, 5, 37, 45, 57, 20, 46, 51, 19, 60, 18, 39, 55, 56, 42, 3, 52, 23, 7, 4, 1, 31, 24, 9, 14, 54, 43

case015	1184.11	11	1, 15, 8, 19, 16, 18, 2, 7, 6, 3, 4	17, 13, 12, 5, 10, 9, 11, 20, 14,
case016	1596.02	11	11, 14, 20, 18, 10, 6, 27, 23, 7, 9, 5	2, 25, 3, 16, 12, 1, 8, 28, 22, 24, 13, 4, 26, 21, 15, 30, 19, 17, 29
case017	1193.96	19	34, 26, 29, 17, 32, 24, 9, 37, 19, 30, 22, 6, 13, 21, 12, 25, 20, 7, 2,	15, 23, 5, 35, 8, 3, 40, 33, 16, 31, 28, 10, 4, 18, 27, 39, 36, 14, 11, 1, 38
case018	1097.16	22	4, 34, 11, 20, 31, 46, 15, 26, 16, 41, 44, 27, 50, 39, 7, 18, 6, 24, 36, 17, 28, 37	14, 30, 45, 33, 40, 38, 9, 21, 22, 5, 13, 49, 25, 42, 10, 35, 12, 2, 23, 3, 43, 47, 19, 8, 29, 32, 1, 48
case019	1099.85	15	53, 52, 51, 39, 5, 3, 35, 48, 20, 10, 45, 33, 12, 44, 29	55, 40, 57, 9, 8, 32, 50, 38, 16, 18, 21, 27, 19, 34, 7, 37, 11, 42, 2, 30, 36, 17, 13, 41, 49, 26, 58, 25, 24, 46, 28, 6, 14, 56, 31, 23, 22, 15, 59, 47, 1, 54, 43, 4, 60
case020	1845.6	8	16, 9, 5, 12, 14, 11, 19, 2	1, 13, 17, 7, 8, 18, 15, 4, 6, 20, 3, 10

同时，每个样本对应求出的 MSE 及 RMSE 的结果标注在各样本结果的图里，已添加在附件中，不再予以详细说明。

6.3 问题三的求解

同问题一的求解方式类似，利用迭代的方式进行数值求解，可得到训练样本组 case021~case025 中对应的 5 个移动终端的运动轨迹图如下：



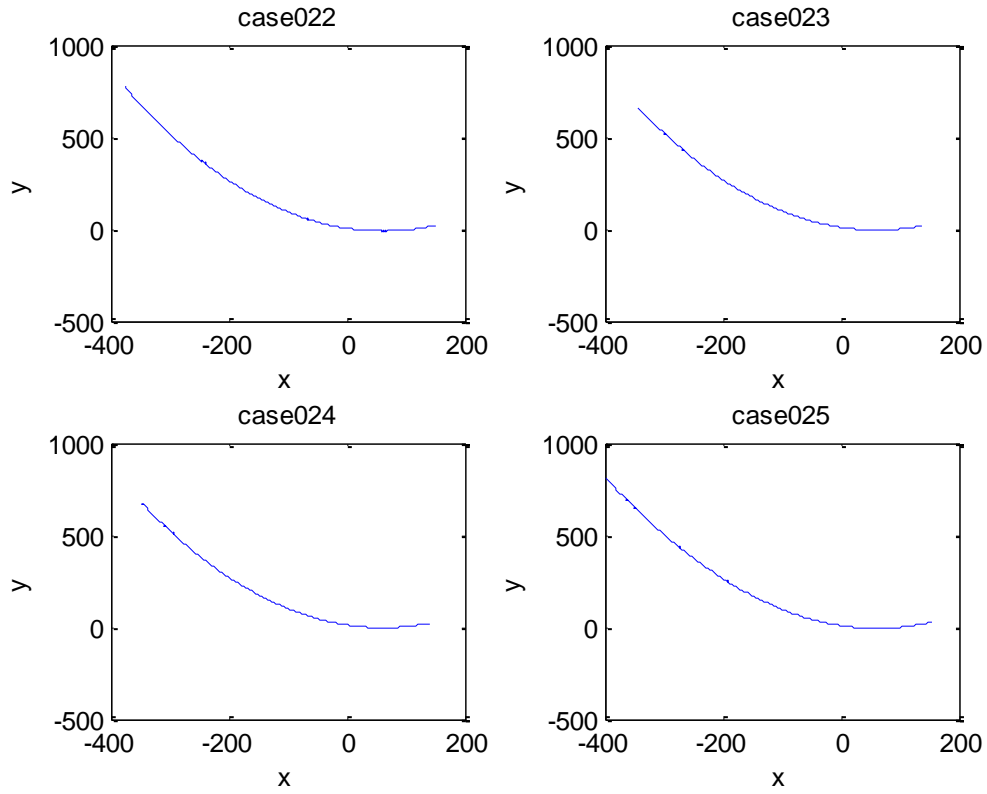


图 8 五组训练样本对应的终端运动轨迹整合图

6.4 问题四的求解

6.4.1 确定终端定位状态求解

在 TOA 测量时间和视距传播时间存在的关系：

$$t_{ij} = a \times t_{ij}^{(toa)} - b \quad (6.10)$$

根据上述测试样本拟合的结果，令 $a = 0.7068655654$ ， $b = 0.0000000012$ 。且一给定了通信半径为 $r = 200m$ 。将其带进行迭代求解。

求解结果按要求以附件形式进行打包。

6.4.2 连接度数与定位精度关系结果分析

由于定位精度可以用通信半径与有效基站数目来衡量，这里我们通过采用控制变量法将通信半径变化或者有效基站数目变化来观察衡量指标与连接度数的关系。

- 1) 固定最低基站 $n_{lease} = 4$ ，改变通信半径 r ；

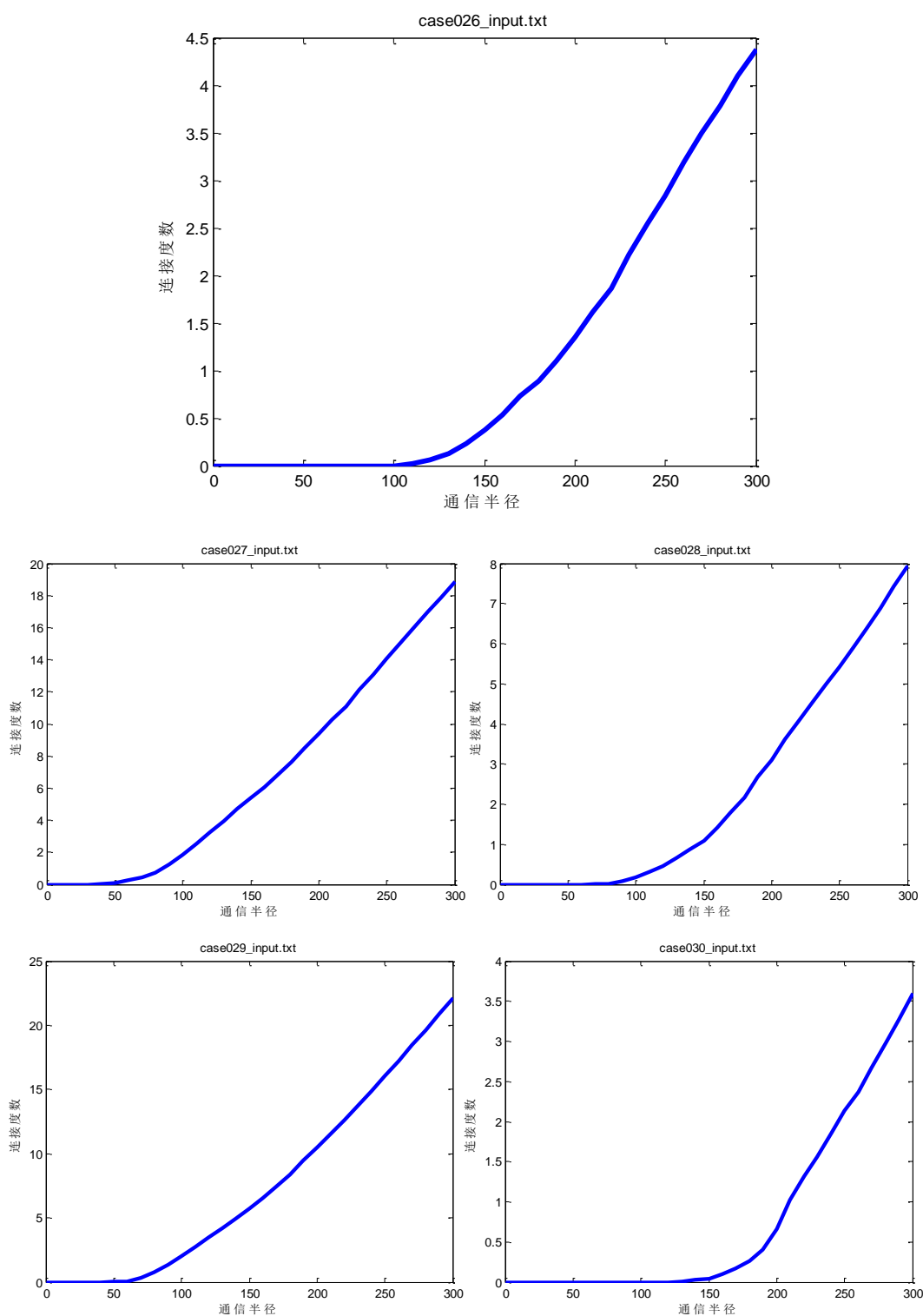


图 9 五组训练样本连接度数与通信半径的关系整合图

通过图 9 可以发现，当固定最低基站数的情况下，五组测试样本的连接度数均随着通信半径的增加而升高。这与上述分析的连接度数与通信半径存在正相关关系相符。

2) 固定通信半径 $r = 200m$ ，改变最低基站数 n_{least} 。

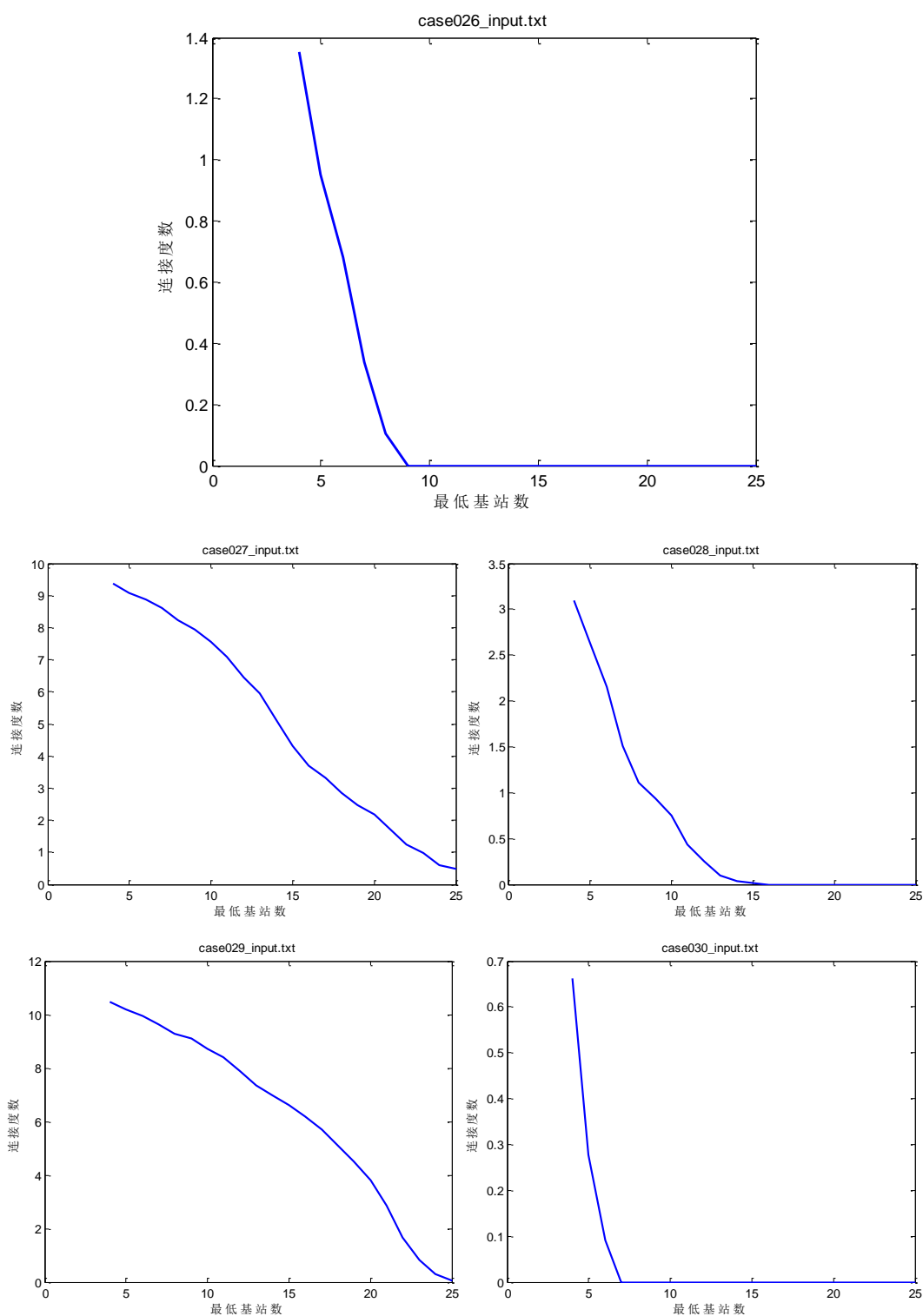


图 10 五组训练样本连接度数与通信半径的关系整合图

通过图 10 可以发现，在固定通信半径的情况下，五组测试样本的连接度数均随着最低基站数的增加而减小。而定位基站的下限越高，说明有效基站数越少，此时连接度数越低。与我们上述分析的连接度数与有效基站数存在正相关关系的论述相符。

综合上述结果可得本文所得的连接度数 λ 与基站数目及通信半径之间成正相关关系的分析与实际情况相符。

七、模型的评价

7.1 模型的评价

本文根据基站测量手持终端到达时间的不同环境，分别建立了用于不同基站对不同终端 TOA 数据测量情况下的终端定位模型，优化了基站数目的数量优化模型及不同基站对同一终端进行 TOA 数据测量的目标跟踪模型。三种模型均为非线性目标规划模型，其中第二个模型为双目标，其余为单目标。同时建立了连接度数与基站有效数目、通信半径之间的关系模型。

7.1.1 优点

(1) 通过建立视距传播时间与测量时间 (TOA) 之间的关系式，引入了差及系统设备测量误差变量，从而对时差测量误差带来的测量偏差加入模型的求解考虑之中。模型的最大的优势在于不需要辨别 TOA 测量数据是否包含 NLOS 误差。

(2) 创新性地引用了等价替换的思想，将连接度数与定位精度通过有效基站数与通信半径连接起来。步骤分解为两步：

- a) 确定定位所需最低基站数；
- b) 将通信半径与 TOA 测量时间进行转换比较。

在查找定位精度的衡量指标时，通过等价替换的思想。在“提高终端的定位精度，等价于缩小终端的定位范围”的设想下，将定位精度通过有效基站数目和通信半径来衡量。

7.1.2 缺点

- (1) 本文的模型通过迭代进行定位，算法的运行效率有待提高；
- (2) 定位精度与连接度数的关系并未量化说明，进行了定性分析。

参考文献

- [1] 徐永清. 移动终端的基站定位技术研究[与实现[D]. 大连海事大学, 2016.
- [2] Chan Y T, Tsui W Y, So H C, et al. Time-of-arrival based localization under NLOS conditions[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2006, 55(1) : 17-24.
- [3] 刘霞. TOA/TDOA 非直达波定位算法研究 [D]. 电子科技大学, 2007.
- [4] 黄亚萍. 基于 TDOA 和 TOA 的无线定位技术研究[D]. 江苏南京: 南京邮电大学, 2012.
- [5] 陈铁锋. 移动通信网络中 TOA/TDOA 终端定位方法研究[D]. 吉林大学, 2005.
- [6] 贺黎滔. 基于移动通信网络的高精度定位关键技术研究[D]. 北京邮电大学, 2010.
- [7] Hara S, Anzai D, Yabu T, et al. A perturbation analysis on the performance of TOA and TDOA localization in mixed LOS/NLOS environments[J]. IEEE Transactions on Communications, 2013, 61(2): 679-689.
- [8] 魏晓莉. 减小 NLOS 影响的 TOA 定位算法及其在 GSM 网中的应用研究 [D]. 湖南大学, 2005.

程序附件说明

文中的定位结果均根据题目的输出要求进行输出，结果汇总于附件中，说明如下：

文件名	解决的问题程序及答案
position	定位
answer1	问题一
answer2	问题二
answer3	问题三
answer4	问题四
output	case 坐标