

参赛说明

1. 在赛前我们用 E-mail, 并书面通知了每个学校的参赛队号, 如果仍有学校没有收到队号, 请于竞赛期间尽快与组委会联系, 在交卷时一定要加上指定的队号, 并另寄报名表 (不要夹在答卷中)。

2. 如果在竞赛中对赛题的理解方面有问题, 可以在 www.shumo.com 的论坛上提问, 我们将组织命题人在网上解答, 不应回答的, 恕不回答。

3. 由于是研究生的竞赛题, 有一定的难度, 因此不必做完上一个问题, 才能回答下一个问题。而且为了完整地把实际问题表达出来, 题目中的问题较多, 很可能在四天之内做不完, 因此对后面的问题也可以不作回答, 有兴趣的同志可以在竞赛后再作深入研究。

4. 每队在 20 日 10: 00 前用特快专递寄出论文 (以当地邮戳为准)。并请于赛后几小时之内再将电子版的论文 (用光盘或软盘, 可以一个学校的论文刻在一张光盘上) 寄给组委会, 注意一定与纸质论文分开来寄。

5. 由于与大学生数学建模竞赛时间相同, 而评审委员多数身兼两职, 因此评审时间可能较晚, 敬请广大参赛研究生谅解。在此期间欢迎大家对赛题进行深入探讨, 我们准备和 2004 年一样正式发表研究生竞赛的优秀论文, 还准备正式发表一些通过竞赛之后的讨论写出的有关赛题的优秀论文, 欢迎广大师生积极参与。

6. 由于题目难度不可能完全相同, 评审中将向难度较大的题目倾斜, 请研究生在选题时加以考虑。

空中加油

对飞行中的飞机进行空中加油，可以大大提高飞机的直航能力。为了简化问题，便于讨论，我们作如下假设。

设 A 为空军基地，基地有一架作战飞机（简称主机）和 n 架加油机（简称辅机）。主机与辅机的速度和单位时间的耗油量均相同且为常数，油箱装满油后的最大航程均为 L （公里）。辅机可以对主机加油，辅机之间也可以相互加油。今主机要执行某作战任务（如侦察或空投），所有飞机在完成自身的任务后均要求返回基地。

主机的最大作战半径（简称作战半径）是指主机在 n 架辅机的协助下所能飞到的（并安全返回）离基地 A 的最远距离。显然当 $n=0$ 时，作战半径 $r_0 = L/2$ 。

问题 1 设飞机垂直起飞、垂直降落、空中转向、在地面或空中加油的耗时均忽略不计，每架飞机只能上天一次，在上述假设下的作战半径记为 r_n 。当 $n=1,2,3,4$ 时，求作战半径 r_n 。

问题 2 在问题 1 的假设下，当 $n>4$ 时，尽你的可能求出 r_n （提示：先假设辅机可以分为两类，第一类专为主机前进服务，第二类专为主机返回服务，再考虑一般情形），或给出 r_n 的上、下界；讨论当 $n \rightarrow \infty$ 的过程中 r_n 与 n 的渐近关系；试给出判断最优作战方案（主机能够飞到 r_n 处）的必要条件或充分条件。

问题 3 若每架辅机可以多次上天，辅机从机场上空降落及在地面检修、加油、再起飞到机场上空的时间相当于飞行 $L/12$ 的时间，飞机第一次起飞、转向、在空中加油的耗时仍忽略不计，此时的作战半径记为 R_n ，讨论与问题 1、问题 2 类似的问题。

问题 4 若另有 2 个待建的空军基地（或航空母舰） A_1, A_2 ，有 n 架辅机，主机从基地 A 起飞，向一给定的方向飞行，必须在基地 A 降落，辅机可在任一基地待命，可多次起飞，且可在任一基地降落。其他同问题 3 的假设，讨论 A_1, A_2 的选址和主机的作战半径 R_n^* 。

问题 5 设 $ABCD$ 为矩形， $AB=4L$ ， $AD=2L$ ， A, B, D 为三个空军基地，主机从 A 起飞，到 C 执行任务（执行任务时间仍忽略不计）再返回 A 。假设辅机起飞、降落的基地可任意选择，其他同问题 3 的假设，试按最快到达并返回和最少辅机架数两种情况给出你的作战方案。