

中国研究生创新实践系列大赛
“华为杯”第十七届中国研究生
数学建模竞赛

学 校

常州大学

参赛队号

20102920009

1. 巢新

队员姓名

2. 鲍向阳

3. 赫焕杰

中国研究生创新实践系列大赛

“华为杯”第十七届中国研究生

数学建模竞赛

题目 F 飞行器质心平衡供油策略优化研究

摘 要：

飞行器质心的变化严重影响飞行器的控制，而质心的变化主要是由各个油箱的供油策略决定的。为了解决这个问题。本文围绕基于飞行器质心平衡供油策略问题的优化研究，运用飞行器质心与理想质心的质心差最小作为目标函数建立数学模型。

针对问题一，应用质心的计算公式，飞行器质心的计算归结为各个油箱中油的质心计算，油的质心的 y 坐标与油箱中的 y 轴坐标相同，问题化为求油的质心的 x 、 z 轴坐标，在俯仰角为 0 时，油的质心的 x 坐标与油箱中心的 x 坐标相同，这时只要计算 z 坐标。在俯仰角不为 0 时，建立对应油箱的 xoz 坐标系，油的 x - z 截面归结为(1)直角三角形，(2)直角梯形，(3)直角梯形+矩形，证明了这三种形状形心的 x - z 坐标的计算公式。然后在俯仰角 θ 值分段，每段对应的油截面是上述 3 种形状之一，从而用公式算得该油箱油的质心的 x 、 z 坐标。最后算得每时刻飞行器的质心坐标，给出了质心变化曲线和各坐标的变化曲线，质心的最大偏移原点的距离为 **1.1092m**， x 坐标最大偏离原点的值为 **1.0913m**。

针对问题二，首先用 0-1 定性函数表示一个油箱是否等于参与供油的状态，将供油策略中的约束条件公式化，建立了一个二次规划混合优化模型，模型中每个时刻有 34 种供油油箱组合，对于 7200 个时刻，无法求得最优解。求次之，设每个油箱一次供油持续 $T=90s$ ，在 T 时间段内，建立二次规划典型的局部优化模型，用 Matlab 编程求得局部最优解，拼接起来求得原模型的比较理想的可行解，给出各个油箱的供油曲线和 4 个主油箱的总供油曲线，飞行器瞬时质心与理想质心距离的最大值为：**0.0062128m**，且在 $t=5941$ 秒时到达，4 个主油箱的总供油量为：**6441.5242kg**(与发动机总耗油量一致)。

针对问题三，由于发动机所需的总耗油量 $8 m^3$ ，从经济的角度，我们设置初始总油量为 $9 m^3$ 。以飞行器初始质心等于理想质心为目标，各油箱的油量为决策变量的规划模型，建立 6 个变量 4 个方程的超定方程组。给 3、6 号油箱加满油，从模型中解出另外 4 个油箱的初始油量。具体 6 个油箱的油量依次为：**0.6527, 1.621, 2.376, 1.116, 2.034, 1.2 m^3** 。然后用问题二的数学模型和求解方法进行求解，解出各个油箱的供油曲线和 4 个主油箱的总供油曲线，剩余油量为 $1 m^3$ 。飞行器瞬时质心与理想质心距离的最大值为：**0.045586 m**，且在 $t=5221$ 秒时到达。4 个主油箱的总供油量为：**6805.1747 kg**(与发动机总耗油量一致)。

针对问题四，设飞行器(不载油)质心为理想质心 $\vec{C}_i(t) = \vec{O}$ ，对于飞行器飞行的过程中加入了俯仰角的情况，运用问题一的数学模型求取油箱中油在俯仰角变化的情况下的质心坐标。然后用问题二的数学模型和求解方法进行求解，解出各个油箱的供油曲线和 4 个主油箱的总供油曲线，飞行器瞬时质心与理想质心距离的最大值为：**0.035237 m**，且在 **4860** 秒达到。4 个主油箱的总供油量为：**7035.5452kg**(与发动机总耗油量一致)。

关于本文算法的有效性：所有算法都可以用 Matlab 编程后成功运行，也可以用其他高

级语言编程运行；对问题 2 至问题 3，由本文算法求得的 6 个油箱的供油曲线，满足一切约束条件，进一步反求出飞行器每个时刻的质心，与理想质心的距离最大值与由优化模型求得的最大值一致。关于算法复杂性：对问题 1，归结为用代数公式计算质心坐标，复杂性为 $O(n)$ ；对问题 2 至 4，本文算法是求局部最优算法，实质是逐段求最优解，其复杂性也只有 $O(n)$ 。

关键词：质心平衡，二次规划混合优化模型，供油策略，质心，局部优化模型

目录

一、 问题重述	4
二、 基本假设与符号说明	4
2.1 基本假设	4
2.2 符号说明	5
三、 问题 1 的模型建立与求解	6
3.1 问题分析	6
3.2 模型的建立	6
3.3 模型的求解	7
3.3.1 飞行器平行飞行时情况	7
3.3.2 飞行器飞行有俯仰角时的情况	7
3.3.3 俯仰角 $\theta > 0$, 油箱油量小于 (或等于) 油箱体积一半时	10
3.3.4 俯仰角 $\theta > 0$, 油箱油量大于油箱体积一半时	12
3.3.5 俯仰角 $\theta < 0$, 油箱油量小于 (或等于) 油箱体积一半	14
3.3.6 俯仰角 $\theta < 0$, 油箱油量大于油箱体积一半	17
3.4 结果与分析	19
3.5 模型评价	21
四、 问题 2 的模型建立与求解	21
4.1 问题 2 分析	21
4.2 模型的建立	24
4.3 求局部最优解的模型与解法	24
4.4 结果与分析	27
4.5 模型评价	30
五、 问题 3 的模型建立与求解	31
5.1 问题 3 分析	31
5.2 采用问题 2 的模型	31
5.3 求局部最优解	33
5.4 结果与分析	33
5.5 模型评价	37
六、 问题 4 的模型建立与求解	37
6.1 问题 4 分析	37
6.2 采用问题 2 的模型	38
6.3 求局部最优解	39
6.4 结果与分析	39
6.5 模型评价	43
七、 总结与思考	43
参考文献	44

一、问题重述

随着科研技术的不断发展，多个种类的飞行器被应用到军事领域[1]以及民用领域之中，并针对不同的功用，对飞行器产生了更精准的技术要求。某一类的飞行器携带多个油箱，在飞行过程中，随着耗油量的增加，油箱的质量变化影响着飞行器的质心[2-5]变化，进而影响到对飞行器的控制。因此，如何联合若干个油箱对飞行器联合供油，亦即制定各油箱的供油策略[6]，是该类飞行器的一项重要任务。

已知飞行器的油箱个数 6，及各油箱供油情。已知油箱长、宽、高的三个方向与飞行器坐标系的 x, y, z 轴三个方向平行。油箱对飞行器的供油有以下限制：（1）油箱内部长、宽、高的三个方向与飞行器坐标系的 x, y, z 轴三个方向平行。不载油飞行器质心为 $\vec{C}_0(0,0,0)$ 。（2）第 i 个油箱的供油速度上限为 $U_i (U_i > 0)$ ， $i=1,2,\dots,6$ 。每个油箱一次供油的持续时间不少于 60 秒。（3）主油箱 2、3、4、5 可直接向发动机供油，油箱 1 和油箱 6 作为备份油箱分别为油箱 2 和油箱 5 供油，不能直接向发动机供油。（4）至多 2 个油箱可同时向发动机供油，至多 3 个油箱可同时供油。（5）飞行器在执行任务过程中，各油箱联合供油的总量应至少满足发动机的对耗油量的需要。

根据以上限制条件，需要对不同的问题求解。

问题 1: 已知飞行器的 6 个油箱的供油速度及飞行器在飞行过程中的俯仰角变化数据，计算该飞行器在此次任务执行过程中的质心变化曲线。

问题 2: 根据已知附件 3 中的飞行器计划耗油速度，以及飞行器坐标系下理想质心数据。需要求解，在满足约束条件情况下，以最小化飞行器每一时刻质心位置与理想质心位置的欧式距离作为目标，求解出飞行器 6 个油箱的供油策略。

问题 3: 已知某次任务的飞行器计划耗油速度数据，与飞行器在飞行器坐标系下的理想质心位置数据。在飞行器始终保持平飞过程中，制定满足上述限制条件的 6 个油箱初始载油量及供油策略，使得任务结束时 6 个油箱剩余燃油总量至少 1m^3 ，并且飞行器每一时刻的质心位置与理想质心位置的欧氏距离的最大值达到最小。

问题 4: 在实际任务规划过程中，飞行器俯仰角随时间变化。附件 5 给出了飞行器俯仰角的变化数据和耗油速度数据。请为本次任务制定油箱供油策略，使得飞行器瞬时质心与飞行器(不载油)质心的最大距离达到最小。

二、基本假设与符号说明

2.1 基本假设

1. 飞行器内部油箱长、宽、高的方向与飞行器坐标系的 x, y, z 轴三个方向平行；
2. 飞行器不载油的质心为 $\vec{C}_0=(0,0,0)$ ；
3. 飞行器在向 x 轴飞行，当飞行器出现俯仰变化时，默认油箱内的油切面呈现平面；
4. 计算油箱质心时，不考虑油箱本身的质量对质心的影响。

2.2 符号说明

符号表示	符号说明
a_i	第 i 个油箱内部的长
b_i	第 i 个油箱内部的宽
c_i	第 i 个油箱内部的高
\vec{C}_0	不载油时飞行器质心坐标
$\vec{C}_1(t)$	飞行器每一时刻的质心
$\vec{C}_2(t)$	飞行器理论质心
\vec{P}_i	第 i 个空油箱中心位置
b_k	第 k 个油箱的供油速度上限
h_i	飞行器水平飞行时，油箱里油的高度
m_i	第 i 个油箱的质量
\vec{k}_i	第 i 个油箱的中心
x_0	油箱坐标系下的质心 x 轴坐标
y_0	油箱坐标系下的质心 y 轴坐标
z_0	油箱坐标系下的质心 z 轴坐标
θ	飞行器飞行时的俯仰角度
T	油箱供油持续时间
$you_k(t)$	油箱的载油量
$open_k(t)$	油箱供油与否的示性函数
$hao(t)$	飞行器耗油速度函数
V_k	各油箱油的体积
$\vec{l}_i(t_0)$	油箱的质心

 $y_i(t_1)$

油箱在 t_1 时的供油体积

三、问题 1 的模型建立与求解

3.1 问题分析

由附件 2 给出了 6 个油箱的供油速度及对应每秒钟飞行器俯仰角变化数据，求解飞行器在飞行过程中的质心变化曲线，即求解飞行器在每一飞行时刻的质心坐标 $\vec{C}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 。根据求解目标分析，每个油箱的质心变化，影响飞行器的质心变化。在整个飞行过程中，飞行器各个油箱的质心随着飞行器飞行的俯仰角度变化而变化。油箱的质心坐标作为第一步求解内容，再由油箱的质心坐标进一步求解出飞行器质心坐标。

在飞行器坐标系下，求解飞行器质心变化曲线时，设飞行器质心为 \vec{C} ，每个油箱质心为 \vec{k}_i ($i=1,2,\dots,6$)。每个油箱质量为 m_i ($i=1,2,\dots,6$)。

第一步求解，已知飞行器在向 x 轴飞行，且飞行航向上只存在平飞与上下俯仰，随着油量的消耗，相对飞行器坐标系，飞行器的质心会改变，但各个油箱质心的 y 轴坐标不变。各个油箱质心的 x, z 轴坐标，随着飞行器在平直飞行和俯仰飞行等飞行状态的不同，求解的方式也不相同。飞行器平直飞行情况下，质心的 x 轴坐标不变，只需要求解随着飞行器飞行消耗油量导致质心的 z 轴坐标变化；飞行器俯仰飞行情况下，需要求解质心的 x, z 轴坐标，求解过程分多种情况讨论。

第二步求解，根据不同情况，能够分别求得不同情况下的油箱质心和油箱质量，然后求解此时飞行器的质心。

3.2 模型的建立

根据上述分析，可以建立以下模型来表示飞行器质心：

$$\vec{C}_1(t) = \frac{m_0 \times \vec{0} + \sum_{i=1}^6 m_i(t) \vec{k}_i(t)}{m_0 + \sum_{i=1}^6 m_i(t)} \quad (3.1)$$

其中， $\vec{C}_1(t)$ 表示飞行器在 t 时刻的质心， m_0 表示飞行器不载油时的质量， $m_i(t)$ 表示第 i 个油箱 t 时刻的质量， $\vec{k}_i(t)$ 表示第 i 个油箱 t 时刻的质心。

由于飞行器飞行过程中，除了油箱中的油之外，其余部分质量不变，只要重点考虑油箱中油对飞行器质心的影响。

3.3 模型的求解

如图 3.1 所示，以油箱的一个角点为坐标原点，相邻的三条棱线作为 x , y , z 轴建立对应的油箱直角坐标系，是飞行器坐标系的一个平移。此原点在飞行器坐标系中的坐标为 (x_i^0, y_i^0, z_i^0) 。

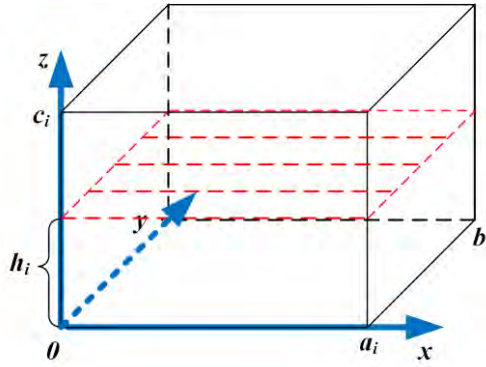


图 3.1 油箱坐标系

下面考虑飞行器在各种飞行状态下，各油箱中油的质心变化情况。

3.3.1 飞行器平行飞行时情况

这时 i 油箱中，油的质心的 x , y 轴坐标不变，只要计算 z 轴坐标 z_i ，其计算公式：

$$z_i = \frac{h_i}{2} \quad (3.2)$$

其中， h_i 为水平飞行时，油在油箱中的高度，在该油箱坐标系中的坐标为：

$$\left(\frac{a_i}{2}, \frac{b_i}{2}, \frac{h_i}{2} \right) \quad (3.3)$$

在飞行器坐标系下的坐标为：

$$\vec{k}_i = \left(x_i^0 + \frac{a_i}{2}, y_i^0 + \frac{b_i}{2}, z_i^0 + \frac{h_i}{2} \right) \quad (3.4)$$

3.3.2 飞行器飞行有俯仰角时的情况

这时，质心的 y 坐标不会变动，只要考虑质心的 x 与 z 坐标的变化，即只需要考虑平面图形的形心的位置 (x_0, z_0) 的变化。飞行器前进时只有俯仰角变化的情况下，油箱油的 x - z 截面形状可归结为三种形状：

1、直角三角形形心的位置，公式是

$$x_0 = \frac{a}{3}, \quad z_0 = \frac{b}{3}. \quad (3.5)$$

证明如下：

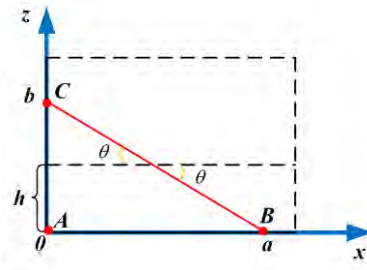


图 3.2 直角三角形

如图 3.2 所示，油箱里油的 x - z 截面为直角三角形。

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{2}{ab} \int_0^a \left(-\frac{b}{a}(x-a)x \right) dx = -\frac{2}{a^2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right) \Big|_0^a = -\frac{2}{a^2} \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right) = \frac{a}{3} \\ z_0 &= \frac{2}{ab} \int_0^b \left(-\frac{a}{b}z + a \right) z dz = -\frac{2}{b^2} \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_0^b + \frac{2a}{ab} \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^b = -\frac{2b}{3} + b = \frac{b}{3} \end{aligned} \quad (3.6)$$

2、直角梯形的形心位置，公式是

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{3} \frac{a^2 + b^2 + ab}{a+b} \\ z_0 &= \frac{1}{3} h \cdot \frac{2a+b}{a+b} \end{aligned} \quad (3.7)$$

证明如下：

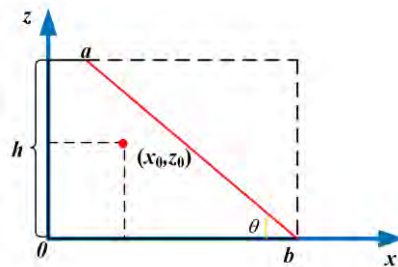


图 3.3 直角梯形

如图 3.3 所示，油箱里油的 x - z 截面为直角梯形。

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{\left[ah \times \frac{a}{2} + \frac{1}{2}(b-a)h \times \left(\frac{1}{3}(b-a) + a \right) \right]}{\frac{h}{2}(a+b)} = \frac{1}{3} \frac{a^2 + b^2 + ab}{a+b} \\
 z_0 &= \frac{\left[ah \times \frac{h}{2} + \frac{1}{2}(b-a)h \times \frac{h}{3} \right]}{\frac{h}{2}(a+b)} = \frac{1}{3} h \bullet \frac{2a+b}{a+b}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

3、直角梯形+矩形的形心位置，公式是

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{\left(b \times c \times \frac{b}{2} + \frac{a+b}{2}(h-c) \times \frac{1}{3} \frac{a^2 + b^2 + ab}{a+b} \right)}{A} \\
 z_0 &= \frac{\left(b \times c \times \frac{c}{2} + \frac{a+b}{2}(h-c) \times \left[\frac{1}{3}(h-c) \bullet \frac{2a+b}{a+b} + c \right] \right)}{A}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中，总面积 $A = b \times c + \frac{a+b}{2}(h-c)$ 。

证明如下：

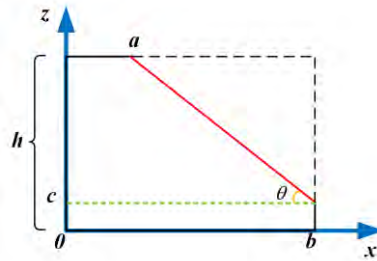


图 3.4 直角梯形+矩形

如图 3.3 所示，油箱里油的 x - z 截面为直角梯形+矩形。当 $h=c$ 时退化为矩形。，下面矩形的质心为 $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2} \right)$ ，上面直角梯形的质心为 $\left(\frac{1}{3} \frac{a^2 + b^2 + ab}{a+b}, \frac{1}{3}(h-c) \bullet \frac{2a+b}{a+b} + c \right)$ ，用质心计算公式，可得(3.9)。

俯仰角不同时，油箱中的油的截面会出现以上三种情况之一。

俯仰角不为 0 时，计算的是在油箱坐标系下，油截面的形心坐标，是相对油箱坐标系求得的结果，可以通过坐标平移公式求出在飞行器坐标系下的质心坐标。

3.3.3 俯仰角 $\theta > 0$ ，油箱油量小于（或等于）油箱体积一半时

油截面可能出现的形状，从而用上面的公式计算出相应的质心坐标。

1) 当 $0.5a_i \tan \theta < h_i$ 时

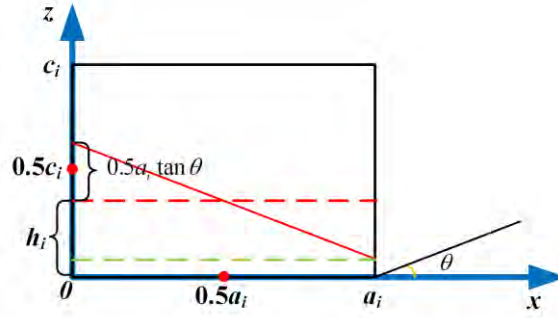


图 3.5 $\theta > 0$ ， $h_i < 0.5c_i$ 时直角梯形截面

如图 3.5 所示，红色虚线为油箱中油在飞行器平行飞时油的分布情况，绿色虚线为辅助线，红色实线为油的实际分布。此时 θ 较小，油箱倾斜不明显，油箱中的油大致成梯形分布。此时由图易 3.5 求得：

$$a = h_i - 0.5a_i \tan \theta, \quad b = h_i + 0.5a_i \tan \theta \quad (3.10)$$

此时， $h=a_i$ 代入公式求得油箱坐标系下的质心坐标：

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{3} \frac{a^2 + b^2 + ab}{a + b} = \frac{12h_i^2 + a_i^2 \tan^2 \theta}{8h_i} \\ z_0 &= \frac{1}{3} h \bullet \frac{2a + b}{a + b} = \frac{6h_i a_i - a_i \tan \theta}{12h_i} \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中， x_0 ， z_0 为图中所求的质心的 x 、 z 轴坐标。

2) 当 $h_i \leq 0.5a_i \tan \theta \leq c_i - h_i$ 时

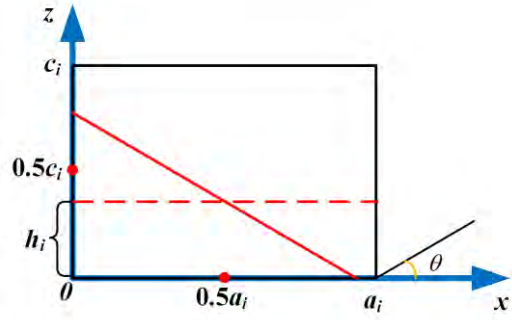


图 3.6 $\theta > 0$, $h_i < 0.5c_i$ 时直角三角形截面

如图 3.6 所示，红色虚线为油箱中油在飞行器平行飞时油的分布情况，红色实线为油的实际分布。油箱中的油大致成直角三角形分布。此时各油箱的质心求解过程如下所示。

此时由图 3.6 易求得：

$$a = \sqrt{\frac{2a_i h_i}{\tan \theta}}, \quad b = \sqrt{2a_i h_i \tan \theta} \quad (3.12)$$

代入公式，求得油箱坐标系下的质心坐标：

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{a}{3} = \frac{\sqrt{\frac{2a_i h_i}{\tan \theta}}}{3} \\ z_0 &= \frac{b}{3} = \frac{\sqrt{2a_i h_i \tan \theta}}{3} \end{aligned} \quad (3.13)$$

3) 当 $0.5a_i \tan \theta > c_i - h_i$ 时

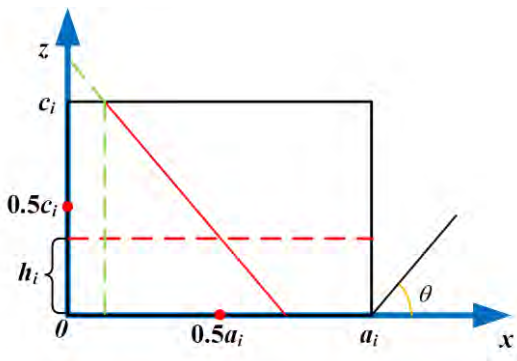


图 3.7 $\theta > 0$, $h_i < 0.5c_i$ 时直角梯形截面

如图 3.7 所示，红色虚线为油箱中油在飞行器平行飞时油的分布情况，绿色虚线为辅

助线，红色为油的实际分布。此时 θ 较大，油箱倾斜较为明显，油箱中的油大致成梯形分布。此时各油箱的质心求解过程如下所示。

此时由图 3.7 可得二元一次方程组：

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} \bullet c_i = h_i \bullet a_i \\ (a-b) \tan \theta = c_i \end{cases} \quad (3.14)$$

解方程易得：

$$a = \frac{h_i a_i}{c_i} + \frac{c_i}{2 \tan \theta}, \quad b = \frac{h_i a_i}{c_i} - \frac{c_i}{2 \tan \theta}。$$

其中， $h=c_i$ 代入公式求得油箱坐标系下的质心坐标：

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{3} \frac{a^2 + b^2 + ab}{a+b} = \frac{h_i a_i^2}{c_i} + \frac{c_i^3}{24 h_i a_i \tan^2 \theta} \\ z_0 &= \frac{1}{3} h \bullet \frac{2a+b}{a+b} = \frac{c_i}{2} + \frac{c_i^3}{12 h_i a_i \tan \theta} \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.3.4 俯仰角 $\theta > 0$ ，油箱油量大于油箱体积一半时

各类情况下油的形状。

1) 当 $0.5a_i \tan \theta < h_i$ 时

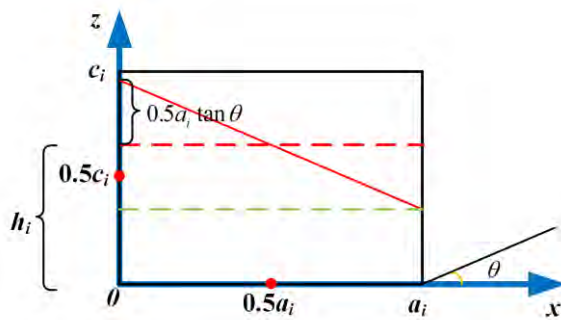


图 3.8 $\theta > 0$ ， $h_i > 0.5c_i$ 时直角梯形截面

如图 3.8 所示，红色虚线为油箱中油在飞行器平行飞时油的分布情况，绿色虚线为辅助线，红色实线为油的实际分布。此时 θ 较小， $0.5a_i \tan \theta < h_i$ ，油箱倾斜不明显，油箱中的油大致成梯形分布。此时各油箱的质心求解过程如下所示。

此时由图 3.8 易得：

$$a = h_i - 0.5a_i \tan \theta, \quad b = h_i + 0.5a_i \tan \theta \quad (3.16)$$

其中, $h=a_i$ 代入公式求得油箱坐标系下的质心坐标:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{3} \frac{a^2 + b^2 + ab}{a+b} = \frac{12h_i^2 + a_i^2 \tan^2 \theta}{8h_i} \\ z_0 &= \frac{1}{3} h \bullet \frac{2a+b}{a+b} = \frac{6h_i a_i - a_i \tan \theta}{12h_i} \end{aligned} \quad (3.17)$$

2) 当 $c_i - h_i < 0.5a_i \tan \theta < h_i$ 时

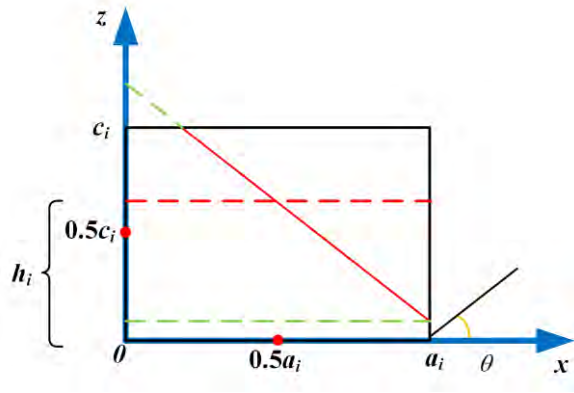


图 3.9 $\theta > 0$, $h_i > 0.5c_i$ 时直角梯形+矩形截面

如图 3.9 所示, 红色虚线为油箱中油在飞行器平行飞时油的分布情况, 红色实线为油的实际分布, 油箱中的空闲部分大致成直角三角形分布。此时各油箱的质心求解过程如下所示。

此时由图 3.9 易求得:

$$a = a_i - \sqrt{\frac{2a_i(c_i - h_i)}{\tan \theta}}, \quad b = a_i, \quad c = c_i - \sqrt{2a_i(c_i - h_i)\tan \theta}, \quad h = c_i \quad (3.18)$$

代入(3.9),

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\left(b \times c \times \frac{b}{2} + \frac{a+b}{2} (h-c) \times \frac{1}{3} \frac{a^2 + b^2 + ab}{a+b} \right)}{A} \\ z_0 &= \frac{\left(b \times c \times \frac{c}{2} + \frac{a+b}{2} (h-c) \times \left[\frac{1}{3} (h-c) \bullet \frac{2a+b}{a+b} + c \right] \right)}{A} \end{aligned} \quad (3.9)$$

3) 当 $0.5a_i \tan \theta > h_i$ 时

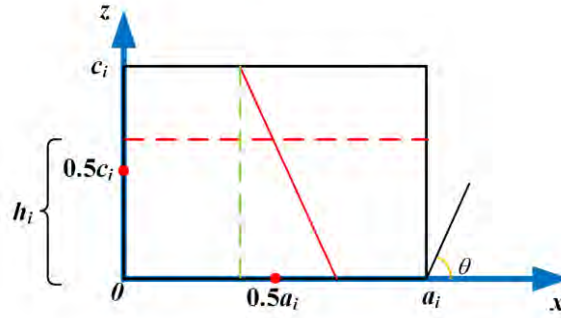


图 3.10 $\theta > 0$, $h_i > 0.5c_i$ 时直角梯形截面

如图 3.10 所示，红色虚线为油箱中油在飞行器平行飞时油的分布情况，绿色虚线为辅助线，红色为油的实际分布。此时 θ 较大，油箱倾斜较为明显，油箱中的油大致成梯形分布。此时各油箱的质心求解过程如下所示。

此时由图 3.10 可得二元一次方程组：

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} \cdot c_i = h_i \cdot a_i \\ (a-b) \tan \theta = c_i \end{cases} \quad (3.19)$$

解方程易得：

$$a = \frac{h_i a_i}{c_i} + \frac{c_i}{2 \tan \theta}, \quad b = \frac{h_i a_i}{c_i} - \frac{c_i}{2 \tan \theta}$$

其中， $h=c_i$ 代入公式求得油箱坐标系下的质心坐标：

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{3} \frac{a^2 + b^2 + ab}{a+b} = \frac{h_i a_i^2}{c_i} + \frac{c_i^3}{24 h_i a_i \tan^2 \theta} \\ z_0 &= \frac{1}{3} h \cdot \frac{2a+b}{a+b} = \frac{c_i}{2} + \frac{c_i^3}{12 h_i a_i \tan \theta} \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.3.5 俯仰角 $\theta < 0$ ，油箱油量小于（或等于）油箱体积一半

油箱中油的各类形状如下图所示。

1) 当 $0.5a_i \tan \theta < h_i$ 时

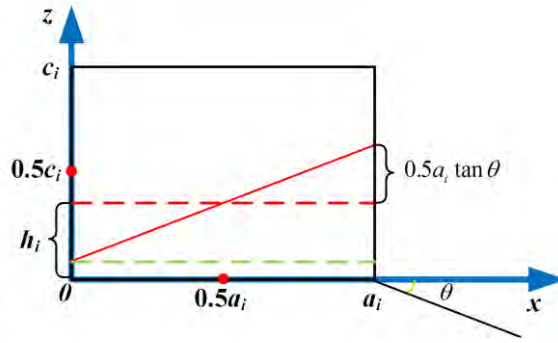


图 3.11 $\theta < 0$, $h_i < 0.5c_i$ 时直角梯形截面

如图 3.11 所示，当 $0.5a_i \tan \theta < h_i$ ，此时各油箱的质心求解过程如下所示。

此时由图 3.11 易求得：

$$a = h_i - 0.5a_i \tan \theta, \quad b = h_i + 0.5a_i \tan \theta \quad (3.21)$$

此时， $h=a_i$ 代入公式求得油箱坐标系下的质心坐标：

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{3} \frac{a^2 + b^2 + ab}{a + b} = \frac{12h_i^2 + a_i^2 \tan^2 \theta}{8h_i} \\ z_0 &= \frac{1}{3} h \bullet \frac{2a + b}{a + b} = \frac{6h_i a_i - a_i \tan \theta}{12h_i} \end{aligned} \quad (3.22)$$

其中， x_0 ， z_0 为图中所求的质心的 x 、 z 轴坐标。

2) 当 $h_i < 0.5a_i \tan \theta < c_i - h_i$ 时

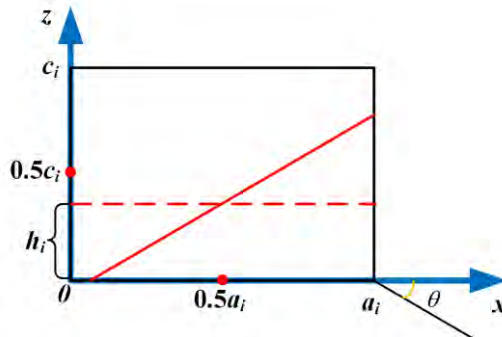


图 3.12 $\theta < 0$, $h_i < 0.5c_i$ 时直角三角形截面

如图 3.12 所示，各油箱的质心求解过程如下所示。

此时由图 3.12 易求得：

$$a = \sqrt{\frac{2a_i h_i}{\tan \theta}}, \quad b = \sqrt{2a_i h_i \tan \theta} \quad (3.23)$$

代入公式求得油箱坐标系下的质心坐标：

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{a}{3} = \frac{\sqrt{\frac{2a_i h_i}{\tan \theta}}}{3} \\ z_0 &= \frac{b}{3} = \frac{\sqrt{2a_i h_i \tan \theta}}{3} \end{aligned} \quad (3.24)$$

3) 当 $0.5a_i \tan \theta > c_i - h_i$ 时

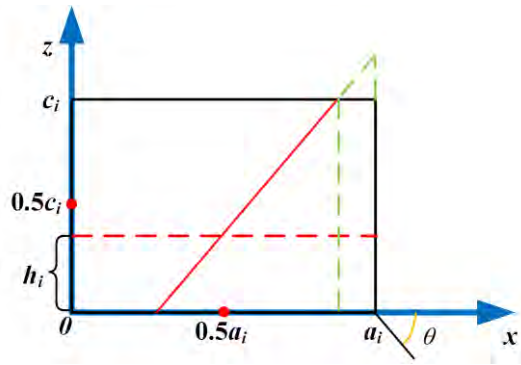


图 3.13 $\theta < 0$, $h_i < 0.5c_i$ 时直角梯形截面

如图 3.13 所示，质心坐标计算过程如下所示。

此时由图 3.13 可得二元一次方程组：

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} \cdot c_i = h_i \cdot a_i \\ (a-b) \tan \theta = c_i \end{cases} \quad (3.25)$$

解方程易得：

$$a = \frac{h_i a_i}{c_i} + \frac{c_i}{2 \tan \theta}, \quad b = \frac{h_i a_i}{c_i} - \frac{c_i}{2 \tan \theta}$$

其中， $h=c_i$ 代入公式求得油箱坐标系下的质心坐标：

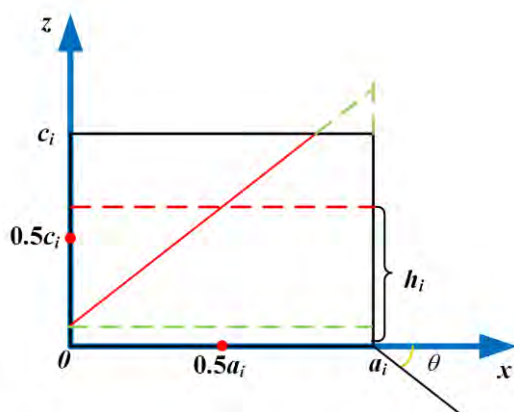


图 3.15 $\theta < 0$, $h_i > 0.5c_i$ 时直角梯形+矩形截面

如图 3.15 所示，油箱油的质心坐标计算过程如下所示。

此时由图 3.15 易求得：

$$a = a_i - \sqrt{\frac{2a_i(c_i - h_i)}{\tan \theta}}, \quad b = a_i, \quad c = c_i - \sqrt{2a_i(c_i - h_i)\tan \theta}, \quad h = c_i \quad (3.29)$$

代入(3.9),

$$x_0 = \frac{\left(b \times c \times \frac{b}{2} + \frac{a+b}{2} (h-c) \times \frac{1}{3} \frac{a^2 + b^2 + ab}{a+b} \right)}{A} \quad (3.9)$$

$$z_0 = \frac{\left(b \times c \times \frac{c}{2} + \frac{a+b}{2} (h-c) \times \left[\frac{1}{3} (h-c) \bullet \frac{2a+b}{a+b} + c \right] \right)}{A}$$

可以得到当前油箱油的质心坐标 x_0 , z_0 。

3) 当 $0.5a_i \tan \theta > h_i$ 时

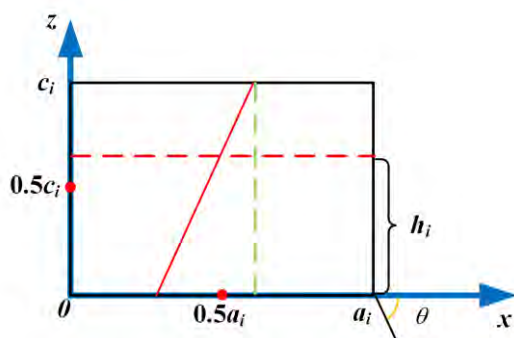


图 3.16 $\theta < 0$, $h_i > 0.5c_i$ 时直角梯形截面

如图 3.16 所示，质心坐标计算过程如下所示。

此时由图可得二元一次方程组：

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} \bullet c_i = h_i \bullet a_i \\ (a-b) \tan \theta = c_i \end{cases} \quad (3.30)$$

解方程易得： $a = \frac{h_i a_i}{c_i} + \frac{c_i}{2 \tan \theta}$, $b = \frac{h_i a_i}{c_i} - \frac{c_i}{2 \tan \theta}$ 。

其中， $h=c_i$ 代入公式求得油箱坐标系下的质心坐标：

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{3} \frac{a^2 + b^2 + ab}{a+b} = \frac{h_i a_i^2}{c_i} + \frac{c_i^3}{24 h_i a_i \tan^2 \theta} \\ z_0 &= \frac{1}{3} h \bullet \frac{2a+b}{a+b} = \frac{c_i}{2} + \frac{c_i^3}{12 h_i a_i \tan \theta} \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.4 结果与分析

根据附件 2 给出的油箱的供油速度、飞行器俯仰角数据，作为模型输入，用于求解各个油箱质量、油箱质心，进而通过公式求解不同时刻下飞行器质心坐标，并绘制出该飞行器在此次任务执行过程中的质心变化曲线。飞行器的质心变化曲线如图 3.17 所示。

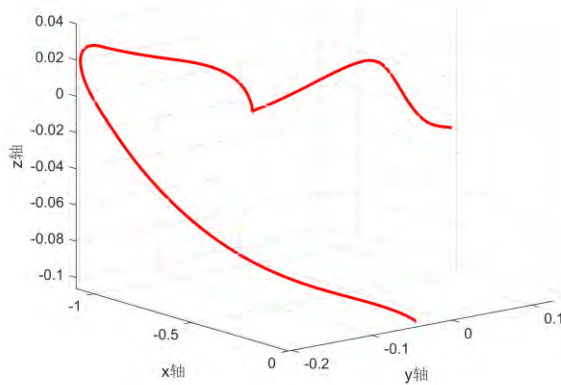
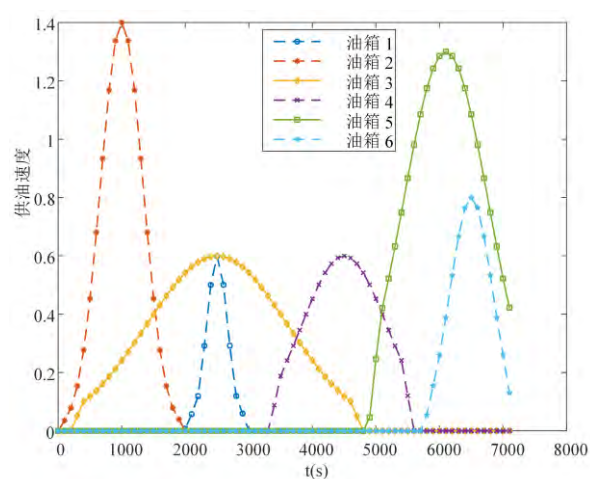


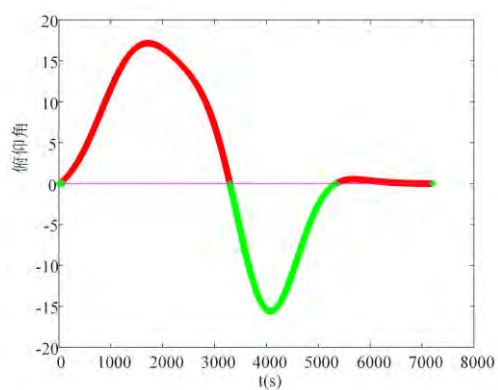
图 3.17 质心变化

从图 3.17 中，较为直观地看出随着飞行器的飞行，质心的位置是时刻发生变化的。

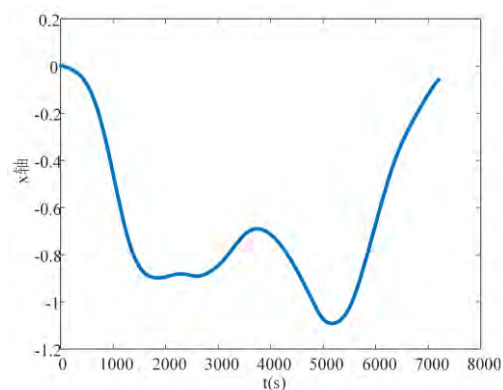
为了更为清晰地描述质心在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的变化情况，下面图 3.18 中展示了 6 个油箱的供油曲线，俯仰角的变化曲线，和飞行器质心在 x 轴、 y 轴和 z 轴方向上的变化。



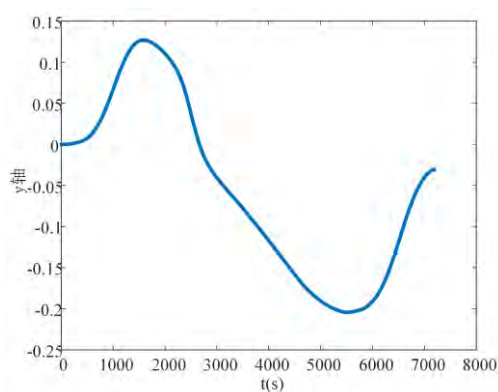
(a) 各油箱的供油曲线



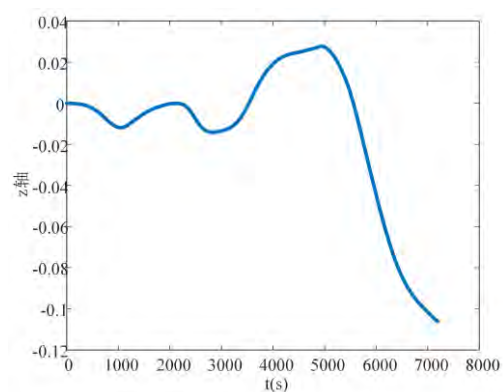
(b) 飞行过程中俯仰角变化



(c) 质心 x 轴坐标变化



(d) 质心 y 轴坐标变化



(e) 质心 z 轴坐标变化

图 3.18 飞行器质心的变化

图 3.18(a)中展示了飞行过程中，各油箱的供油情况。

图 3.18 (b)反应了空间中飞行器飞行过程中俯仰角的变化。

图 3.18(c)、图 3.18(d)和图 3.18(e)分别为飞行器质心在 x 轴、 y 轴和 z 轴方向上的变化曲线。

从图 3.18(c)、图 3.18(d)来看，飞行器在结束飞行时，它在 x 轴和 y 轴方向上可回归原点。

从图 3.18(e) 来看，飞行器在结束飞行时，由于消耗油，质心在 z 轴方向上没有回归原点。

从图 3.18(a)中看出随着油箱供油，质心向着不供油的油箱一边倾斜。

从图 3.18(c)、图 3.18(d)和图 3.18(e)和图 3.18(b)对比来看，在带有俯仰角时，质心变化更为明显。

质心坐标部分数据如表 3.1 所示。

表 3.1 质心坐标部分数据

时间(s)	质心 x 坐标	质心 y 坐标	质心 z 坐标
1	1.2569E-09	6.2847E-10	3.5671E-09
2	-2.268E-07	4.6605E-08	-1.356E-08
3	-6.83E-07	1.3856E-07	-4.78E-08
4	-1.367E-06	2.7649E-07	-9.917E-08
5	-2.28E-06	4.604E-07	-1.677E-07
		
66	-0.0027634	9.8628E-05	-3.05E-05
67	-0.0028173	0.00010166	-3.141E-05
68	-0.0028716	0.00010474	-3.234E-05
69	-0.0029263	0.00010787	-3.328E-05
70	-0.0029813	0.00011104	-3.423E-05

3.5 模型评价

算法有效性：本算法可以用 Matlab 等高级语言编程，顺利运行，所得结果理想。

算法复杂性：本算法是各个时间下用公式计算，其复杂性只有 $O(n)$ 。

四、问题 2 的模型建立与求解

4.1 问题 2 分析

首先根据附件 3 已知的飞行器耗油数据、理想质心坐标，以最小化与理想质心坐标的欧式距离作为目标函数。且满足：油箱供油时小于油箱的供油上限，且每次供油持续时间不少于 $T(T=60)$ 秒；只有部分油箱能直接向发动机供油，且同时直接供油油箱个数不大于 2，加上备份油箱，同时供油油箱个数不大于 3。先考虑满足约束条件的不同油箱向发动机供油的组合情况，且一旦按照某种油箱供油组合，油箱开始供油，供油状态至少持续 T 秒。计算每种组合情况下，油箱供油变化曲线，从而可以求取飞行器平行飞行时每一时刻的质心位置 $\vec{C}_1(t)$ ，得到质心变化曲线，对比与理想质心数据 $\vec{C}_2(t)$ 的欧式距离，确定一个结果最小的油箱供油组合。

在飞行器坐标系下，求解下面的优化问题：

$$\text{Min}_{y_1, \dots, y_6} \text{Max}_{1 \leq t \leq 7200} \left\| \vec{C}_1(t) - \vec{C}_2(t) \right\|_2 \quad (4.1)$$

其中， $\vec{C}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))^T$ ， $\vec{C}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))^T$ ，所以 $\left\| \vec{C}_1(t) - \vec{C}_2(t) \right\|_2$ 可表示为：

$$\left\| \vec{C}_1(t) - \vec{C}_2(t) \right\|_2 = \sqrt{\left(\vec{C}_1(t) - \vec{C}_2(t) \right)^T \left(\vec{C}_1(t) - \vec{C}_2(t) \right)} \quad (4.2)$$

$\vec{C}_1(t)$ 为实际情况下，飞行器每一时刻的质心位置， $\vec{C}_2(t)$ 为理想状态下，飞行器每一时刻的质心位置。 y_1, \dots, y_6 为 6 个油箱的供油速度曲线。

计算飞行器在 t 时刻的总质心 $\vec{C}_1(t) = \{x_1(t), y_1(t), z_1(t)\}$ 。

已知飞行器不载油时的质心为 $\vec{C}_1(0) = \{0, 0, 0\}$ 。载油时，各油箱的载油量为 t 的函数 $you_k(t)$ ，该函数也表示 k 油箱油的质量， $you_k(t)/850$ 为 k 油箱载油体积，由此可计算出 k 油箱内油的质心坐标 $\{x_{1k}(t), y_{1k}(t), z_{1k}(t)\} \stackrel{\Delta}{=} \vec{L}_k(t)$ ，因此 $\vec{C}_1(t)$ 可表示为：

$$\vec{C}_1(t) = \frac{m_0 \vec{C}_1(t) + \sum_{k=1}^6 you_k(t) \vec{L}_k(t)}{m_0 + \sum_{k=1}^6 you_k(t)} \quad (4.3)$$

下面要确定 $you_k(t)$ 与 $\vec{L}_k(t)$ 。

$\vec{L}_k(t)$ 由 $you_k(t)$ 决定, $you_k(t)$ 由供油策略决定, 必须满足以下若干条件。

接下来将约束条件公式化:

1、首先用 $open_k(t)$ 表示 k 油箱供油与否的示性函数:

$$open_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{油箱 } k \text{ 在非供油状态} \\ 1, & \text{油箱 } k \text{ 在供油状态} \end{cases} \quad (4.4)$$

2、用 $y_k(t)$ 表示 k 油箱在 t 时刻的供油速度函数。

3、用 $hao(t)$ 表示飞行器耗油速度函数(由附件 3 给定)

$$4、you_k(t_i) = you_k(t_{i-1}) - y_k(t_i)$$

约束条件:

设 $T+1$ 为一个油箱最短的连续供油时间长度(单位: 秒)

$$(1) \text{供油速度大于等于耗油速度: } \sum_{k=1}^6 y_k(t) open_k(t) \geq hao(t);$$

$$(2) \text{ If } open_k(t_i) - open_k(t_{i-1}) = 1 \quad i = 1, 2, \dots, (7200 - T), \text{ Then } \sum_{j=i}^{T+i} open_k(t_j) = T+1$$

$$(3) 1 \leq \sum_{k=2}^5 open_k(t) \leq 2$$

$$(4) \text{ If } open_1(t) + open_6(t) = 2, \text{ Then } 2 \leq \sum_{k=1}^5 open_k(t) \leq 3$$

$$(5) \text{ If } open_1(t) + open_6(t) = 1, \text{ Then } 2 \leq \sum_{k=1}^5 open_k(t) \leq 3$$

$$(6) y_k(t) \leq b_k, \quad b_k \text{ 为 } k \text{ 油箱供油速度上限(m}^3/\text{s)}。$$

(7) 油箱的供油组合一共有 34 种, 分别为:

a. $open_1(t) + open_6(t) = 0$ 时, 供油组合为:

2, 3, 4, 5, (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5), 共计 10 种情况。

b. $open_1(t)=1$, $open_6(t)=0$ 时, 供油组合为:

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), 共计 10 种情况。

c. $open_1(t)=0$, $open_6(t)=1$ 时, 供油组合为:

(6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 2, 3), (6, 2, 4), (6, 2, 5), (6, 3, 4), (6, 3, 5), (6, 4, 5), 共计 10 种情况。

d. $open_1(t)+open_6(t)=2$ 时, 供油组合为:

(1, 6, 2), (1, 6, 3), (1, 6, 4), (1, 6, 5),, 共计 4 种情况。

4.2 模型的建立

根据分析, 问题 2 的整体优化模型为:

$$\min_Y \max_t \left(\vec{C}_1(t) - \vec{C}_2(t) \right)^T \left(\vec{C}_1(t) - \vec{C}_2(t) \right) \quad (4.5)$$

$$s.t. \begin{cases} (1) \sum_{k=1}^6 y_k(t) open_k(t) \geq hao(t) \\ (2) \text{ If } open_k(t_i) - open_k(t_{i-1}) = 1 \quad i = 1, 2, \dots, (7200 - T), \text{ Then } \sum_{j=i}^{T+i} open_k(t_j) = T+1 \\ (3) 1 \leq \sum_{k=2}^5 open_k(t) \leq 2 \\ (4) \text{ If } open_1(t) + open_6(t) = 2, \text{ Then } 2 \leq \sum_{k=1}^5 open_k(t) \leq 3 \\ (5) \text{ If } open_1(t) + open_6(t) = 1, \text{ Then } 2 \leq \sum_{k=1}^5 open_k(t) \leq 3 \\ (6) y_k(t) \leq b_k \end{cases}$$

上述整体优化模型求解的计算量太大, 无法求得最优解, 我们设法求局部最优解。

4.3 求局部最优解的模型与解法

一、设置 6 个油箱初始油量

设定每个油箱一次供油持续 $T \geq 60s$

二、选下一次 T 秒内最优可行的参与供油油箱, 并确定该时间段的供油曲线。

表 4.1 T 秒内可能的供油组合

	1	2	3	4	5	6
$t = t_0$		✓	✓			
$t = t_1$		✓	✓			
$t = t_2$		✓	✓			
			...			
$t = T$		✓	✓			

每个组合求出供油曲线，要求选质心差与 $t(t_0 \leq t \leq t_0 + T)$ 有关，取最大质心差。对最大质心差，在组合中取其最小的那个组合。

三、决定供油量，设各油箱的体积 V_1 、 V_2 、 V_3 、 V_4 、 V_5 、 V_6

初始的质心 $\vec{C}_1(t_0)$ ：

$$\vec{C}_1(t_0) = \frac{\left[m_0 \times \vec{0} + 850 \sum_{i=1}^6 V_i \times \vec{l}_i(t_0) \right]}{m_0 + 850 \sum_{i=1}^6 V_i}$$

t_1 时刻的质心为 $\vec{C}_1(t_1)$ ：

$$\vec{C}_1(t_1) = \frac{\left[m_0 \times \vec{0} + 850 \left(\sum_{i=1}^6 (you_i(t_0) - y_i(t_1)) \vec{l}_i(t_1) + y_1(t_1) \vec{l}_2(t_1) + y_6(t_1) \vec{l}_5(t_1) \right) \right]}{(m_0 + 850 \sum_{i=1}^6 you_i(t_0) - \sum \text{发动机耗油量})}$$

$$(\text{记: } (m_0 + 850 \sum_{i=1}^6 you_i(t_0) - \sum \text{发动机耗油量}) = A)$$

$$\approx \frac{m_0 \times \vec{0} + 850 \sum_{i=1}^6 (you_i(t_0))}{A} - \frac{(\sum_{i=1}^6 y_i(t_1) \vec{l}_i(t_0) - y_1(t_1) \vec{l}_2(t_0) - y_6(t_1) \vec{l}_5(t_0)) \bullet 850}{A}$$

$$\approx \vec{C}_1(t_0) - \frac{850}{A} [y_1(t_1)(\vec{l}_1(t_0) - \vec{l}_2(t_0)) + y_2(t_1) \vec{l}_2(t_0) + \dots + y_5(t_1) \vec{l}_5(t_0) + y_6(t_1)(\vec{l}_6(t_0) + \vec{l}_5(t_0))]$$

$$\begin{aligned}
&\approx \vec{C}_1(t_0) - [(\vec{l}_1(t_0) - \vec{l}_2(t_0)), \vec{l}_2(t_0), \vec{l}_3(t_0), \vec{l}_4(t_0), \vec{l}_5(t_0), (\vec{l}_6(t_0) - \vec{l}_5(t_0))] \begin{bmatrix} y_1(t_1) \\ y_2(t_1) \\ \dots \\ y_6(t_1) \end{bmatrix} \bullet \frac{850}{A} \\
&\approx \vec{C}_1(t_0) - [(\vec{l}_1 - \vec{l}_2)(t_0), \vec{l}_2(t_0), \vec{l}_3(t_0), \vec{l}_4(t_0), \vec{l}_5(t_0), (\vec{l}_6 - \vec{l}_5)(t_0)] \begin{bmatrix} Y_1(t_1) \\ Y_2(t_1) \\ \dots \\ Y_6(t_1) \end{bmatrix} \\
&\approx \vec{C}_1(t_0) - BY
\end{aligned}$$

其中， B 为油箱质心 3×6 矩阵， $y_i(t_1)$ 为 i 油箱 t_1 时刻的供油量。

$$B = [(\vec{l}_1 - \vec{l}_2)(t_0), \vec{l}_2(t_0), \vec{l}_3(t_0), \vec{l}_4(t_0), \vec{l}_5(t_0), (\vec{l}_6 - \vec{l}_5)(t_0)],$$

$$Y = [Y_1(t_1), Y_2(t_1), \dots, Y_6(t_1)]^T,$$

$$Y_i(t_1) = y_i(t_1) \frac{850}{A},$$

其中， $y_i(t_1)$ 为 i 油箱在 t_1 时的供油体积（立方米）。

在 t_1 时刻，所求局部最优解的模型可以改写为：

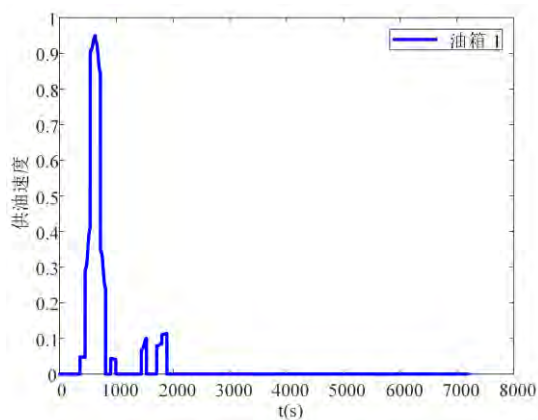
$$\begin{aligned}
&\min_Y \left[\vec{C}_1(t_0) - BY \right]^T \left[\vec{C}_1(t_0) - BY \right] \quad (4.6) \\
&s.t. \begin{cases} (1) \sum_{k=1}^6 y_k(t) open_k(t) \geq hao(t) \\ (2) 1 \leq \sum_{k=2}^5 open_k(t) \leq 2 \\ (3) \text{ If } open_1(t) + open_6(t) = 2, \text{ Then } 2 \leq \sum_{k=1}^5 open_k(t) \leq 3 \\ (4) \text{ If } open_1(t) + open_6(t) = 1, \text{ Then } 2 \leq \sum_{k=1}^5 open_k(t) \leq 3 \\ (5) y_k(t) \leq b_k \end{cases}
\end{aligned}$$

用 Matlab 程序求解上述局部优化模型。

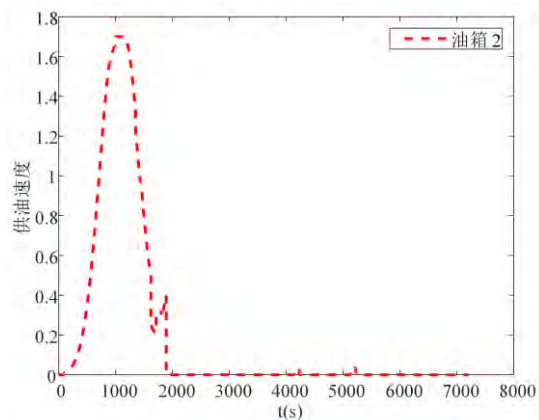
4.4 结果与分析

(1) 求解结果

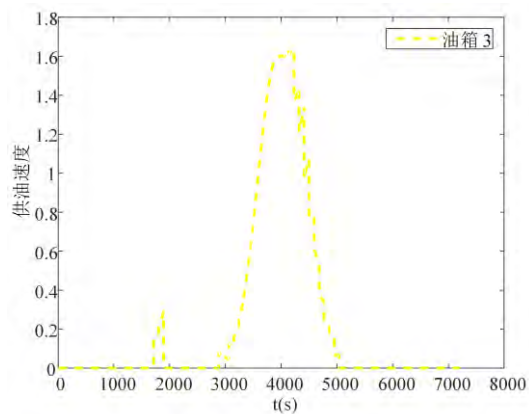
将附件 3 中数据导入 Matlab 程序求解满足条件的最优供油策略。本题中，设定每个油箱一次供油持续时间 $T = 90\text{ s}$ ，飞行器飞行过程中 6 个油箱各自的供油速度曲线如图 4.1 所示。



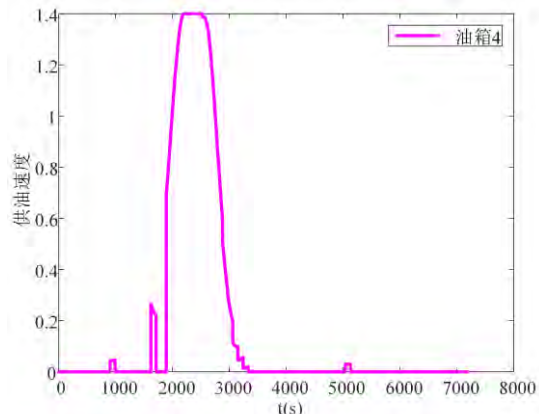
(a) 油箱 1 的供油曲线



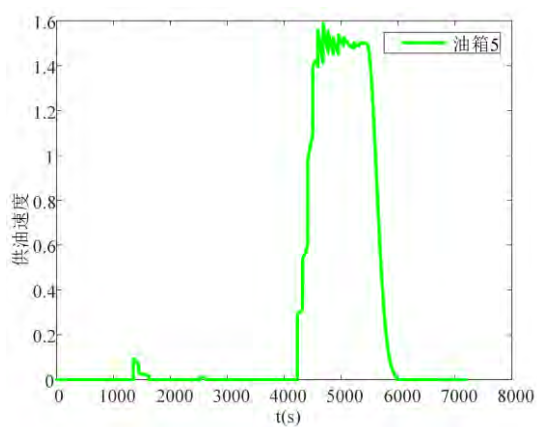
(b) 油箱 2 的供油曲线



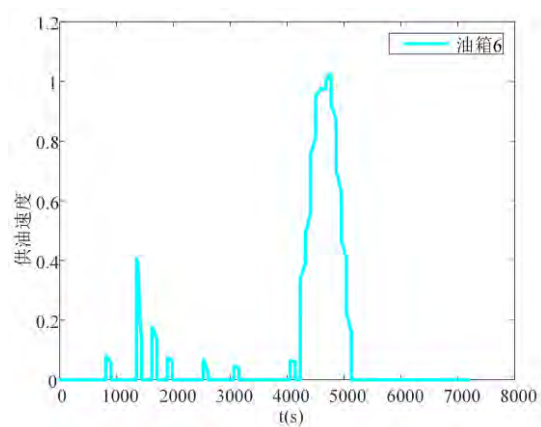
(c) 油箱 1 的供油曲线



(d) 油箱 4 的供油曲线



(e) 油箱 5 的供油曲线



(f) 油箱 6 的供油曲线

图 4.1 各油箱的供油曲线

图 4.1(a)至 4.1(f)分别为油箱 1 至 6 的供油曲线，为更加直观地了解供油策略，将 6 个油箱的供油曲线绘制在同一张图上，将供油策略表现地更为直观，6 个油箱整体的供油曲线如图 4.2 所示。

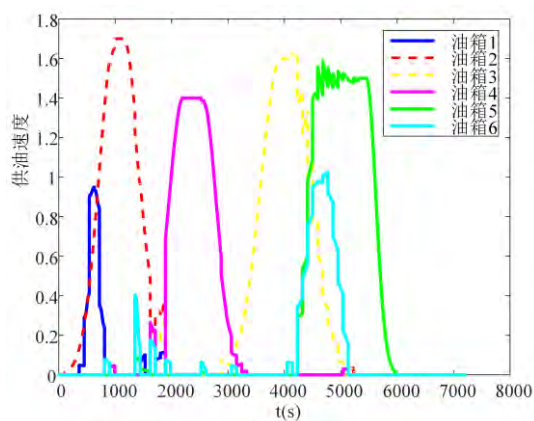


图 4.2 6 个油箱整体的供油曲线

主油箱 2、3、4、5 的总供油速度曲线如图 4.3 所示。

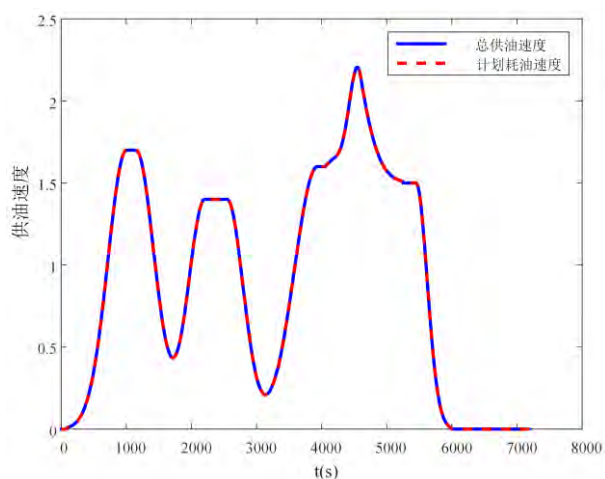


图 4.3 主油箱 2、3、4、5 的总供油速度曲线

飞行器飞行过程中实际质心与理想质心距离的**最大值**为：**0.0062128 (m)**。

在 **5941 (s)**时，飞行器质心与理想质心距离取到**最大值**。

4 个主油箱的**总供油量**为 **6441.5242 (kg)**，与发动机总耗油量一致。

(2) 供油策略

飞行器的供油策略的部分数据如表 4.2 所示。

表 4.2 飞行器的供油策略的部分数据

时间(s)	1 号油箱供油速度 (kg/s)	2 号油箱供油速度 (kg/s)	3 号油箱供油速度 (kg/s)	4 号油箱供油速度 (kg/s)	5 号油箱供油速度 (kg/s)	6 号油箱供油速度 (kg/s)
95	0	0.01005589	0	0	0	0
96	0	0.010170357	0	0	0	0
					
361	0.04818131	0.131418059	0	0	0	0

362	0.0481777	0.132472792	0	0	0	0
.....						
811	0	1.356629413	0	0	0	0.07711892
812	0	1.359846738	0	0	0	0.07708738
.....						
901	0.04363056	1.554177883	0	0.04282432	0	0
902	0.04362599	1.556112095	0	0.04287762	0	0
.....						
1351	0	1.227148586	0	0	0.09349872	0.40489283
1352	0	1.224061594	0	0	0.09326352	0.40440234
.....						
1711	0.07892354	0.291119225	0.14387003	0	0	0
1712	0.0789358	0.291065144	0.1438433	0	0	0
.....						

4.5 模型评价

算法有效性:

(1) 本算法可以用 Matlab 等高级语言编程，顺利运行，所得结果理想。

(2) 用所求的 6 个油箱的供油曲线与问题 1 一样，求出飞行器每个时刻的质心，计算与所给的理想质心的距离，其最大值与与优化模型所求得距离相同。理想供油曲线满足优化模型中的全部约束条件。理想质心曲线与供油策略反求质心曲线的对比如图 4.4 所示。

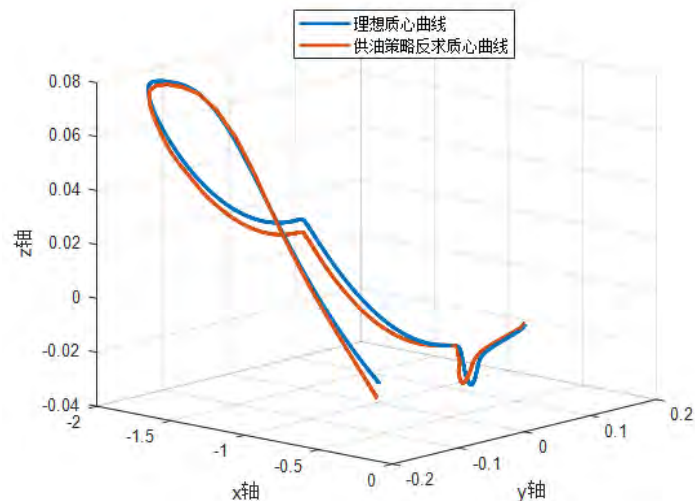


图 4.4 理想质心曲线与供油策略反求质心曲线的对比

算法复杂性：本算法是求局部最优算法，实质是逐段求最优解，其复杂性只有 $O(n)$ 。

五、问题 3 的模型建立与求解

5.1 问题 3 分析

问题 3 与问题 2 相比，需要先确定各油箱的初始油量，且满足约束条件：任务结束时 6 个油箱剩余燃油总量不少于 1 立方米。因此，可先建立模型求得每个油箱的初始油量，再通过问题 2 的模型，求得最优供油策略。

由题意可知，飞行器的初始油量是下面方程组的一个解。

设飞行器的理想质心为 x_0, y_0, z_0 ；油箱中心位置坐标分别是 $x_i, y_i, z_i, i=1, \dots, 6$ ；油箱的长宽高分别是 $l_i, s_i, n_i, i=1, \dots, 6$ 。

未知量：油量的体积分别为 V_i （待定） $i=1, \dots, 6$ 。

则油箱的底面积分别是 $S_i = l_i \times s_i$ ；

油面高度分别是 $h_i = \frac{V_i}{S_i}$ ；或油量体积分别是 $V_i = S_i \times h_i$ ；

各油箱分配的初始油量满足：

$$\begin{cases} 850 \times \sum_{i=1}^6 x_i V_i = (3000+V) \times x_0 \\ 850 \times \sum_{i=1}^6 y_i V_i = (3000+V) \times y_0 \\ 850 \times \sum_{i=1}^6 (z_i - \frac{n_i}{2} + \frac{V_i}{2s_i}) V_i = (3000+V) \times z_0 \\ \sum_{i=1}^6 V_i = V \end{cases} \quad (5.1)$$

方程式中含有 6 个变量，4 个方程，属于非线性方程。

求解方法：

- 1.选取接近质心处的 2 个油箱，3 号与 6 号油箱加满油；
- 2.由前两个和第四个方程求解出关系（三个变量依赖一个变量）；
- 3.代入第三个方程求得解；

用 Matlab 编程求得结果如下：

油箱 1	油箱 2	油箱 3	油箱 4	油箱 5	油箱 6
0.6527 m³	1.621 m³	2.3760 m³	1.116 m³	2.034 m³	1.2 m³

有了如上表的各油箱的初始油量，接着就用问题 2 的方法计算出本次任务的供油策略。

5.2 采用问题 2 的模型

根据分析，这里也用问题 2 的整体优化模型为：

$$\min_Y \max_t \left(\vec{C}_1(t) - \vec{C}_2(t) \right)^T \left(\vec{C}_1(t) - \vec{C}_2(t) \right) \quad (5.2)$$

$$s.t. \left\{ \begin{array}{l} (1) \sum_{k=1}^6 y_k(t) open_k(t) \geq hao(t) \\ (2) \text{ If } open_k(t_i) - open_k(t_{i-1}) = 1 \quad i = 1, 2, \dots, (7200 - T), \text{ Then } \sum_{j=i}^{T+i} open_k(t_j) = T+1 \\ (3) 1 \leq \sum_{k=2}^5 open_k(t) \leq 2 \\ (4) \text{ If } open_1(t) + open_6(t) = 2, \text{ Then } 2 \leq \sum_{k=1}^5 open_k(t) \leq 3 \\ (5) \text{ If } open_1(t) + open_6(t) = 1, \text{ Then } 2 \leq \sum_{k=1}^5 open_k(t) \leq 3 \\ (6) y_k(t) \leq b_k \end{array} \right.$$

与问题 2 一样，上述整体优化模型求解的计算量太大，无法求得最优解，我们设法求局部最优解。

5.3 求局部最优解

(1) 局部优化模型：在 t_1 时刻，所求局部最优解的模型可以改写为：

$$\min_Y \left[\vec{C}_1(t_0) - BY \right]^T \left[\vec{C}_1(t_0) - BY \right] \quad (5.3)$$

$$s.t. \left\{ \begin{array}{l} (1) \sum_{k=1}^6 y_k(t) open_k(t) \geq hao(t) \\ (2) 1 \leq \sum_{k=2}^5 open_k(t) \leq 2 \\ (3) \text{ If } open_1(t) + open_6(t) = 2, \text{ Then } 2 \leq \sum_{k=1}^5 open_k(t) \leq 3 \\ (4) \text{ If } open_1(t) + open_6(t) = 1, \text{ Then } 2 \leq \sum_{k=1}^5 open_k(t) \leq 3 \\ (5) y_k(t) \leq b_k \end{array} \right.$$

(2) 求解方法

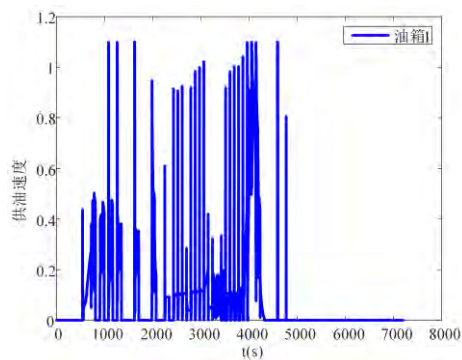
用问题 2 的 Matlab 程序求解上述局部优化模型。

5.4 结果与分析

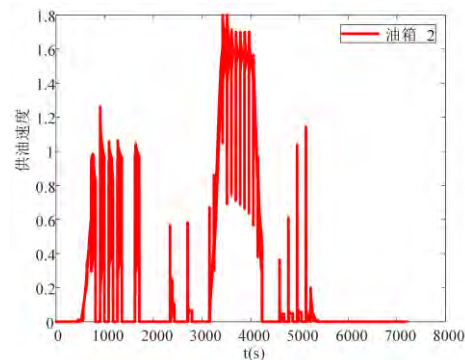
(1) 求解结果

利用 Matlab 求解得到 6 个油箱的初始载油量, 以及满足条件的最优供油策略。本题中, 设定每个油箱一次供油持续时间 $T = 90\text{ s}$ 。

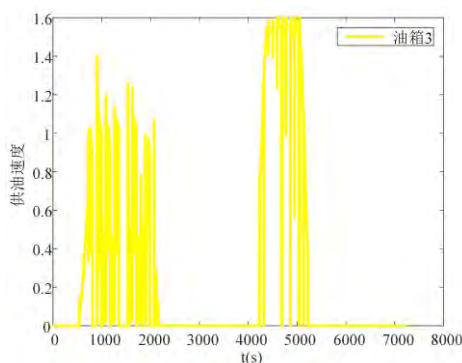
飞行器飞行过程中 6 个油箱各自的供油速度曲线如图 5.1 所示。



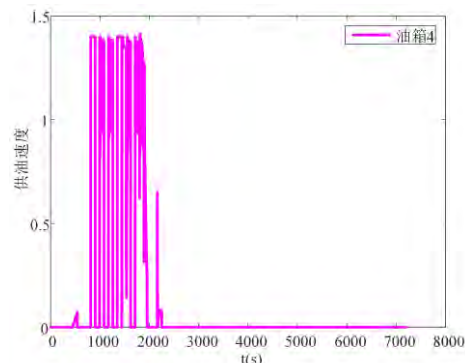
(a) 油箱 1 的供油曲线



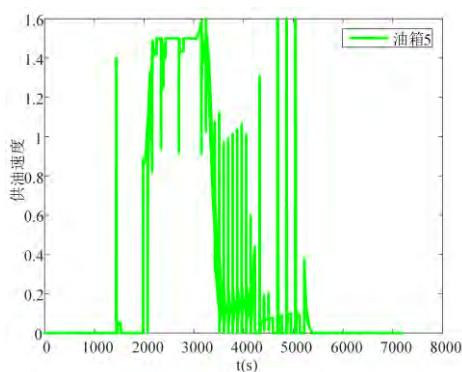
(b) 油箱 2 的供油曲线



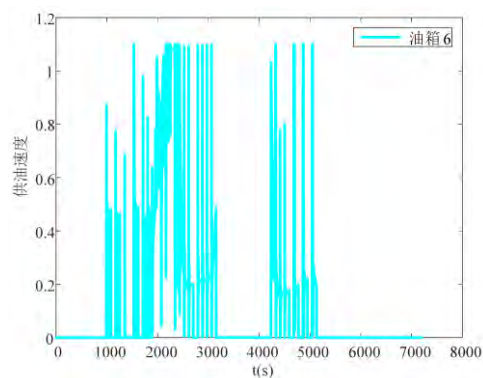
(c) 油箱 3 的供油曲线



(d) 油箱 4 的供油曲线



(e) 油箱 5 的供油曲线



(f) 油箱 6 的供油曲线

图 5.1 各油箱的供油曲线

图 5.1(a)至 5.1(f)分别为油箱 1 至 6 的供油曲线，为更加直观地了解供油策略，将 6 个油箱的供油曲线绘制在同一张图上，将供油策略表现地更为直观，6 个油箱整体的供油曲线如图 5.2 所示。

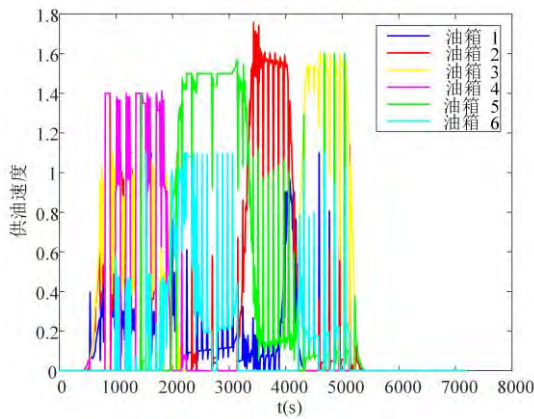


图 5.2 6 个油箱整体的供油曲线

主油箱 2、3、4、5 的总供油速度曲线如图 5.3 所示。

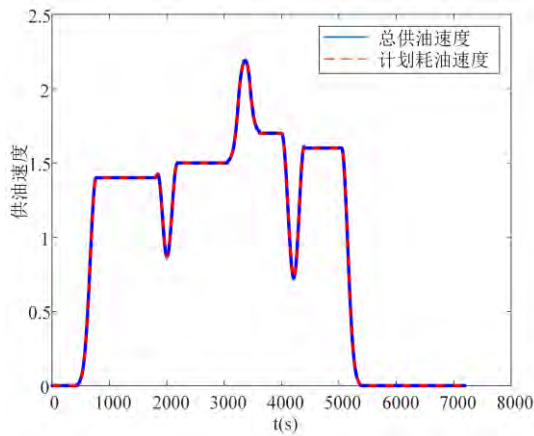


图 5.3 主油箱 2、3、4、5 的总供油速度曲线与计划耗油速度曲线

任务结束时，6 个油箱中油的剩余量：

油箱 1	油箱 2	油箱 3	油箱 4	油箱 5	油箱 6
0m³	0.2322 m³	0.1324 m³	0.0213 m³	0.4341m³	0.1736 m³

此时，6 个油箱总的剩余油量为 **1 m³**。

在飞行过程中，飞行器质心偏离理想质心位置距离的最大值为 **0.045586 m**。

4 个主油箱的总供油量为: **6805.1747 kg**，与发动机的总耗油量一致。

(2) 供油策略

飞行器的供油策略的部分数据如下面表 5.1 所示。

表 5.1 飞行器的供油策略的部分数据

时间(s)	1 号油箱供油速度(kg/s)	2 号油箱供油速度(kg/s)	3 号油箱供油速度(kg/s)	4 号油箱供油速度(kg/s)	5 号油箱供油速度(kg/s)	6 号油箱供油速度(kg/s)
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
.....						
446	0	0.01	0	0	0	0
447	0	0.01031	0	0	0	0
.....						
540	0	0.04526	0	0.073	0	0
542	0.3949	0.05626	0.0646	0	0	0
.....						
1350	0.2687	0.3685	1.0314	0	0	0
1351	0	0.0003	0	1.399	0	0.0741
.....						
1440	0	0.0001	0	1.3998	0	0.00008
1441	0	0	0	7.11E-06	1.399	0
.....						
7199	0	0	0	0	0	0
7200	0	0	0	0	0	0

5.5 模型评价

算法有效性:

(1) 本算法可以用 Matlab 等高级语言编程，顺利运行，所得结果理想。

(2) 用所求的 6 个油箱的供油曲线与问题 1 一样，求出飞行器每个时刻的质心，计算与所给的理想质心的距离，其最大值与与优化模型所求得距离相同。理想供油曲线满足优化模型中的全部约束条件。理想质心曲线与供油策略反求质心曲线的对比如图 5.4 所示。

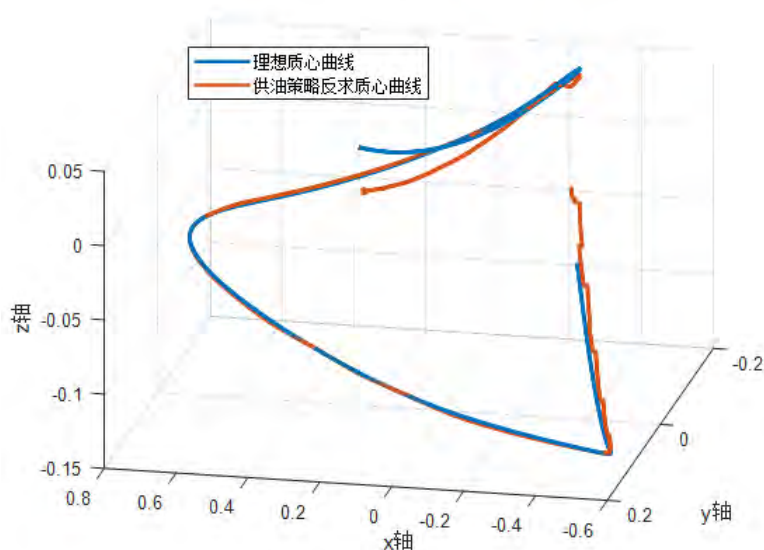


图 5.4 理想质心曲线与供油策略反求质心曲线的对比

算法复杂性: 本算法是求局部最优算法，实质是逐段求最优解，其复杂性只有 $O(n)$ 。

六、问题 4 的模型建立与求解

6.1 问题 4 分析

问题 4 与问题 2 相比，考虑了飞行器飞行过程中的俯仰角变化。因此，首先利用问题 1 的模型求得飞行器质心的变化，再通过问题 2 的模型求出最优供油策略。

由问题 1 的模型可知，飞行器的质心为：

$$\vec{C}_1(t) = \frac{m_0 \times \vec{0} + \sum_{i=1}^6 m_i(t) \vec{k}_i(t)}{m_0 + \sum_{i=1}^n m_i(t)} \quad (6.1)$$

在平飞时，各油箱的质心为

$$\vec{k}_i = (x_i^0 + \frac{a_i}{2}, y_i^0 + \frac{b_i}{2}, z_i^0 + \frac{h_i}{2})。$$

在带有俯仰角变化时，各油箱的质心坐标有以下几种情况：

(1) 油箱里油的 x - z 截面为直角三角形。此时，油箱的质心坐标为

$$\vec{k}_i = (x_i^0 + \frac{a_i}{3}, y_i^0 + \frac{b_i}{2}, z_i^0 + \frac{h_i}{3})；$$

(2) 油箱里油的 x - z 截面为直角梯形。此时，油箱的质心坐标为；

$$\vec{k}_i = (x_i^0 + \frac{a^2 + b^2 + ab}{3a + 3b}, y_i^0 + \frac{b_i}{2}, z_i^0 + \frac{(2a + b)h}{3a + 3b})；$$

(3) 油箱里油的 x - z 截面为直角梯形+矩形。此时，油箱的质心坐标为

$$\vec{k}_i = (x_i^0 + x_0, y_i^0 + \frac{b_i}{2}, z_i^0 + z_0)$$

其中，

$$x_0 = \frac{\left(b \times c \times \frac{b}{2} + \frac{a+b}{2} (h-c) \times \frac{1}{3} \frac{a^2 + b^2 + ab}{a+b} \right)}{A}$$

$$z_0 = \frac{\left(b \times c \times \frac{c}{2} + \frac{a+b}{2} (h-c) \times \left[\frac{1}{3} (h-c) \bullet \frac{2a+b}{a+b} + c \right] \right)}{A}$$

得到俯仰角变化时，飞行器质心的变化情况，接着就用问题 2 的方法计算出本次任务的供油策略。

6.2 采用问题 2 的模型

根据分析，这里也可用问题 2 的整体优化模型：

$$\min_Y \max_t \left(\vec{C}_1(t) - \vec{C}_2(t) \right)^T \left(\vec{C}_1(t) - \vec{C}_2(t) \right) \quad (6.2)$$

$$s.t. \begin{cases} (1) \sum_{k=1}^6 y_k(t) open_k(t) \geq hao(t) \\ (2) \text{ If } open_k(t_i) - open_k(t_{i-1}) = 1 \quad i = 1, 2, \dots, (7200 - T), \text{ Then } \sum_{j=i}^{T+i} open_k(t_j) = T + 1 \\ (3) 1 \leq \sum_{k=2}^5 open_k(t) \leq 2 \\ (4) \text{ If } open_1(t) + open_6(t) = 2, \text{ Then } 2 \leq \sum_{k=1}^5 open_k(t) \leq 3 \\ (5) \text{ If } open_1(t) + open_6(t) = 1, \text{ Then } 2 \leq \sum_{k=1}^5 open_k(t) \leq 3 \\ (6) y_k(t) \leq b_k \end{cases}$$

6.3 求局部最优解

(1) 局部优化模型：在 t_1 时刻，所求局部最优解的模型可以改写为：

$$\min_Y \left[\vec{c}_1(t_0) - BY \right]^T \left[\vec{c}_1(t_0) - BY \right] \quad (6.3)$$

$$s.t. \begin{cases} (1) \sum_{k=1}^6 y_k(t) open_k(t) \geq hao(t) \\ (2) 1 \leq \sum_{k=2}^5 open_k(t) \leq 2 \\ (3) \text{ If } open_1(t) + open_6(t) = 2, \text{ Then } 2 \leq \sum_{k=1}^5 open_k(t) \leq 3 \\ (4) \text{ If } open_1(t) + open_6(t) = 1, \text{ Then } 2 \leq \sum_{k=1}^5 open_k(t) \leq 3 \\ (5) y_k(t) \leq b_k \end{cases}$$

(2) 求解方法

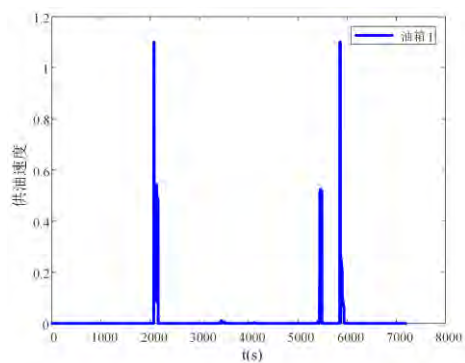
用问题 2 的 Matlab 程序求解上述局部优化模型。

6.4 结果与分析

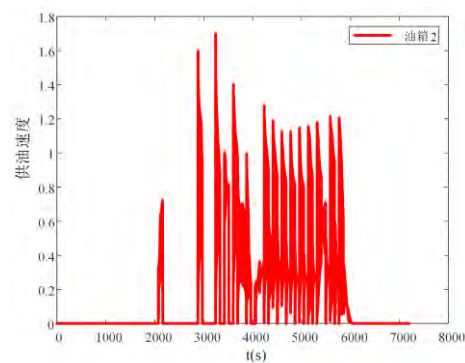
(1) 求解结果

利用 Matlab 求解得到满足条件的最优供油策略。本题中，设定每个油箱一次供油持续时间 $T = 90\text{ s}$ 。

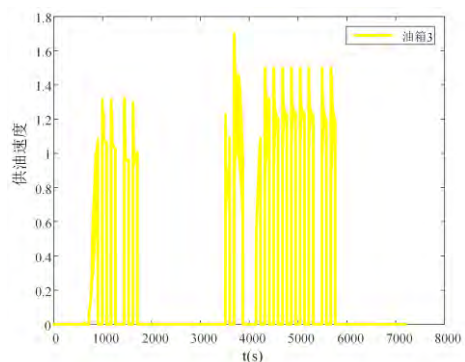
飞行器飞行过程中 6 个油箱各自的供油速度曲线如图 6.1 所示。



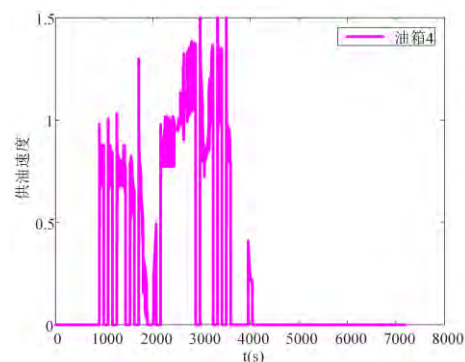
(a) 油箱 1 的供油曲线



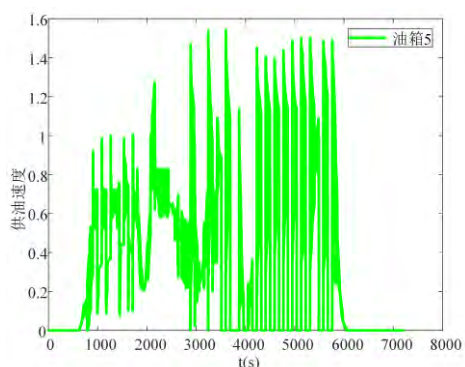
(b) 油箱 2 的供油曲线



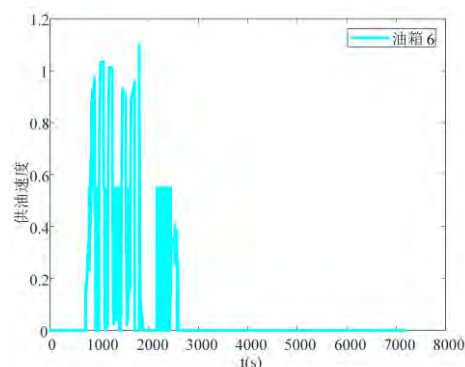
(c) 油箱 1 的供油曲线



(d) 油箱 4 的供油曲线



(e) 油箱 5 的供油曲线



(f) 油箱 6 的供油曲线

图 6.1 各油箱的供油曲线

图 6.1(a)至 6.1(f)分别为油箱 1 至 6 的供油曲线，为更加直观地了解供油策略，将 6 个油箱的供油曲线绘制在同一张图上，将供油策略表现地更为直观，6 个油箱整体的供油曲线如图 6.2 所示。

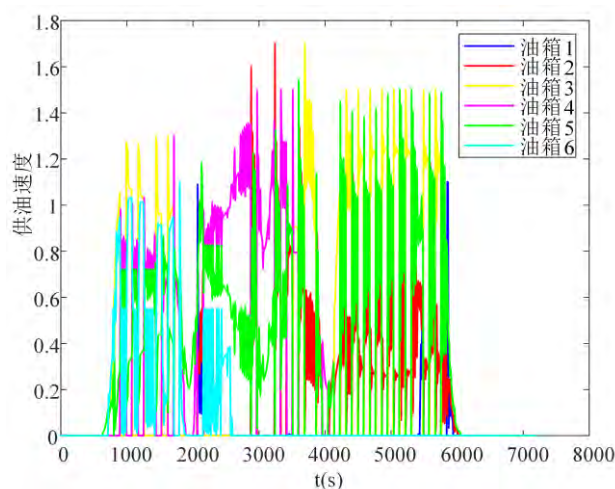


图 6.2 6 个油箱整体的供油曲线

主油箱 2、3、4、5 的总供油速度曲线与计划耗油速度如图 6.3 所示。

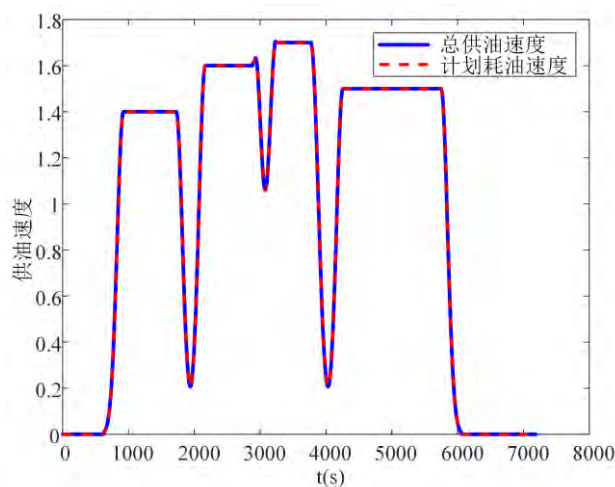


图 6.3 主油箱 2、3、4、5 的总供油速度曲线与计划耗油速度曲线

飞行器飞行过程中实际质心与理想质心距离的**最大值**为 **0.035237** (m)。

在 **4860** (s)时，飞行器质心与理想质心距离取到**最大值**。

4 个主油箱的总供油量为 **7035.5452** (kg)，与发动机总耗油量一致。

(2) 供油策略

飞行器的供油策略的部分数据如下面表 6.1 所示。

表 6.1 飞行器的供油策略的部分数据

时间 (s)	1 号油箱供 油速度 (kg/s)	2 号油箱供 油速度 (kg/s)	3 号油箱供 油速度 (kg/s)	4 号油箱供 油速度 (kg/s)	5 号油箱供 油速度 (kg/s)	6 号油箱供 油速度 (kg/s)
631	0	0	0	0	0.01105918 2	0
632	0	0	0	0	0.01143397 8	0
.....						
721	0	0	0.06880917 2	0	0.07120539 3	0.17801646 7
722	0	0	0.07045117 3	0	0.07281635 4	0.1739098
.....						
901	0	0	0	0.98231710 5	0.38581642 8	0.61920889 9
902	0	0	0	0.97787863	0.39332970 2	0.61708692 3
.....						
991	0	0	1.27318718 8	0	0.12681281 2	0.43794982 8
992	0	0	1.26903941	0	0.13096059	0.42885163 1
.....						
2071	1.08893411 1	0.31353456 1	0	0	0.68680253 4	0

2072	1.09999213	0.25663321	0	0	0.75369656	0
					8	
					
3061	2.13045E-0	0	0	0.72568237	0.34904419	0
	5			7	9	
3062	1.93046E-0	0	0	0.82549726	0.24731689	0
	5			8	8	
					

6.5 模型评价

算法有效性:

(1) 本算法可以用 Matlab 等高级语言编程，顺利运行，所得结果理想。

(2) 用所求的 6 个油箱的供油曲线与问题 1 一样，求出飞行器每个时刻的质心，计算与所给的理想质心的距离，其最大值与与优化模型所求得距离相同。理想供油曲线满足优化模型中的全部约束条件。

算法复杂性: 本算法是求局部最优算法，实质是逐段求最优解，其复杂性只有 $O(n)$ 。

七、总结与思考

飞行器在飞行过程中，质心的变化对飞行器的控制有着重要的影响，各个油箱内油量的分布和供油策略将导致飞行器质心的变化，进而影响到对飞行器的控制。为了解决这个问题，我们建立了飞行器质心平衡供油策略优化模型，使每秒钟飞行器质心与理想质心的偏差最小。

本文通过求取各个油箱在平行飞行或俯仰飞行的质心，其中俯仰飞行的过程中，由于质点在 y 轴坐标下不变，通过在 XZ 的截面得到不同的形状（直角梯形，三角形，多边形），求取不同形状的质心，得到油箱的质心，进而得到飞行器的质心，设置了各个油箱持续供油时间 T 为 90s, 遍历选择下一次 T 秒内最优可行的参与供油油箱每个组合，求出供油曲线，取最大质心差。在组合中取其与理想质点最大质心差最小的那个组合，通过优化质心与理想质心的质心差，来确定供油曲线。

但是本文的模型有一个不足之处，只能确定每秒钟供油的最优值，并不一定能得到整体供油的最优值。

参考文献

- [1] 田松, 张亮, 毛红保. 军用飞行器分类概论[M]. 国防工业出版社, 2016.
- [2] 李超群, 刘智慧, 张玉洁. 质心公式推导及其在求解积分中的应用[J]. 数学学习与研究, 2014.
- [3] 宋宇辰, 张玉英, 孟海东. 一种基于加权欧氏距离聚类方法的研究[J]. 计算机工程与应用, 2007.
- [4] 卢江仁, 石成英, 王国亮. 飞行器质心横偏量测量方法及误差分析[J]. 环境技术, 2017, 035(004):113-117.
- [5] 陈功, 徐明兴, 王文正, et al. 基于代理模型的升力式再入飞行器质心位置优化[J]. 飞行力学, 2019, 37(01):69-73.
- [6] 司守奎, 孙兆亮. 数学建模算法与应用[M]. 第 2 版. 北京: 国防工业出版社, 2016.