

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

学 校 国防科学技术大学

参赛队号 90002014

队员姓名	1. 赵丹玲
	2. 程 然
	3. 杨凤波

参赛密码 _____
(由组委会填写)



第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

题 目 面向节能的单/多列车优化决策控制

摘 要：

面向节能的单/多列车优化决策问题主要是在不同的约束条件下找到最节能的列车运行策略，实际上就是规划问题。本文首先对列车进行受力分析，将列车的变加速运动看作是众多的匀变速运动进行处理，然后在各个问题的背景和约束下寻找列车运行优化策略。

问题一：由于列车在全过程都在做变加速运动，首先将列车的运动均匀分成很多段，则可以认为列车在各段内做匀变速运动。然后根据最节能的要求，计算出列车在 A6 到 A7 站之间运行所消耗的最小能量为 35161kJ，此时采取的运行策略为：先以最大的牵引力进行加速运行，然后到达一定的速度后进入惰行状态，最后以最大的加速度进行制动，使得列车在规定的时间内完成规定的路程。将 A6 到 A7 站以及 A7 到 A8 站之间实际运行时间按其距离比例进行划分，采用相同的运行策略，得到列车在 A6 到 A8 站之间运行所消耗的最小能量为 63153kJ，具体的速度距离曲线见文中图 4-10 和图 4-11。

问题二：利用系统思想将多列车看作是一个整体，那么要令总能耗最低，不仅需要使得单列车的能耗最小，而且需要尽可能利用列车制动过程产生的再生能量。

在列车发车间隔较大的情况下，不需要考虑列车受安全距离的限速，借助单列车的节能模型，得到列车最节能运行的速度距离曲线。接着将再生能量利用问题转化为前车制动时间和后车牵引时间的重叠问题，根据各列车的制动时间集合和牵引时间集合，可以得到不同的发车间隔对应的重叠时间，则问题转换成类似的完全背包问题。最后借鉴

贪心算法的思想设求解算法，得到最优时间间隔为 $H = \{\overbrace{641, 641, \dots, 641}^{50}, \overbrace{650, 650, \dots, 650}^{49}\}$ 。

在列车发车间隔较小的情况下，列车在运行过程中会受到其与前一列车之间距离的影响，针对这种情况下的节能优化，我们分为两部分考虑：处于高峰时间时段，列车出行主要考虑安全原则；处于非高峰时间时段，列车出行主要考虑节能原则。首先根据不受安全距离限速的多列车优化模型和算法，我们求出最节能情况下的发车时间间隔 H 为

$H = \{\overbrace{331, \dots, 331}^{22}, \overbrace{149, \dots, 149}^{36}, \overbrace{331, \dots, 331}^{22}, \overbrace{332, \dots, 332}^{39}, \overbrace{149, \dots, 149}^{48}, \overbrace{332, \dots, 332}^{40}\}$ ，其中高峰期的发车间隔为 149s。根据安全原则，我们引入速度余量 Δv 进行列车运行策略的调整。在列车运行的过车中，先是进行牵引加速，然后在每一秒末对列车的运行状态进行判断。若限制速度与实际速度的差值大于度余量 Δv ，则说明列车有较大的余量可以做加速运动，令列车做牵引运动；若限制速度与实际速度的差值不大于度余量 Δv ，则说明列车快要超过安全距离了，令列车做惰行运动。基于安全的原则下，我们通过计算可以得到高峰时期列车的运行图和速度路程曲线，具体见本文的表 5-4 和图 5-5。

问题三：在列车发生延误后要尽快恢复正点运行，则需要最少的路段中将延误时间尽可能缩小。文中引入了时间余量这一指标进行列车延误后的优化控制，时间余量是指列车计划运行时间和最短运行时间的差值。

当延误时间为固定变量时，控制策略为：若列车在 A_i 站的延误时间小于等于从 A_i 站到 A_{i+1} 站之间的时间余量，则将列车在两站间的运行时间减去延误的时间，然后根据最节能策略计算新的速度距离曲线。若列车在 A_i 站的延误时间大于 A_i 站到 A_{i+1} 站之间的时间余量，则将列车在 A_i 站到 A_{i+1} 之间采用最快速的运行策略，即以最大的牵引力加速到限定速度，做巡航运动，然后以最大的制动力减速到终点。然后将剩余的延误时间推到后一站进行。

当延误时间为随机变量且允许列车在各站到、发时间与原时间相比提前不超过 10 秒时，控制策略调整为：若列车在 A_i 站的延误时间大于 A_i 站到 A_{i+1} 之间的时间余量，则将列车在 A_i 站到 A_{i+1} 之间采用最快速的运行策略，然后在 A_{i+1} 站提前出发。若列车停站时间大于等于最小停站时间，则提早出发；若列车停站时间小于最小停站时间，则无法提前。然后将缩小的延误的时间推至下一段路程，直到列车恢复正点运行。

在列车延误 10s 情况下具体的调整策略见本文的表 6-2。当列车延误时间为随机值时，具体的调整策略见本文的表 6-4。

关键字： 优化控制 节能 速度距离曲线 匀变速运动 牵引 制动

目录

1 问题重述	5
2 假设和说明	6
3 符号说明	7
4 单列车节能运行优化控制问题	7
4.1 单节列车节能原理	9
4.2 单节列车节能模型	10
4.2.1 牵引过程	10
4.2.2 巡航过程	11
4.2.3 惰行过程	13
4.2.4 制动过程	13
4.3 单节列车节能模型的应用	15
4.3.1 从 A6 站到达 A7 站最节能运行的速度距离曲线	15
4.3.2 从 A6 站到达 A8 站最节能运行的速度距离曲线	16
5 多列车节能运行优化控制问题	18
5.1 多列车节能原则	18
5.2 多列车节能优化模型	18
5.2.1 不受安全距离限速影响的多列车节能优化模型	18
5.2.2 不受安全距离限速影响的多列车节能优化模型的应用	22
5.2.3 受安全距离限速影响的多列车节能优化模型	25
5.2.4 受安全距离限速影响的多列车节能优化模型的应用	26
6 列车延误后运行优化控制问题	27
6.1 两车站间的时间余量模型	28
6.2 基于固定延误时间的列车优化控制问题	28
6.3 基于随机延误时间的列车优化控制问题	30
7 稳定性分析	32
8 优缺点分析	34
9 问题的进一步讨论	34
参考文献	35
附录	36

1 问题重述

轨道交通系统的能耗是指列车牵引、通风空调、电梯、照明、给排水、弱电等设备产生的能耗。根据统计数据，列车牵引能耗占轨道交通系统总能耗 40% 以上。在低碳环保、节能减排日益受到关注的情况下，针对减少列车牵引能耗的列车运行优化控制近年来成为轨道交通领域的重要研究方向。本文主要研究下面几个问题：

问题一：单列车节能运行优化控制问题

(1) 建立计算速度距离曲线的数学模型，计算寻找一条列车从 A_6 站出发到达 A_7 站的最节能运行的速度距离曲线，其中两车站间的运行时间为 110 秒。

分析：查阅相关资料得知，大多数学者研究表明最经济节能的列车运行策略是：先以最大的牵引力进行加速运行，然后到达一定的速度后进入惰行状态，最后以最大的加速度进行制动，使得列车在规定的时间内完成规定的路程。对单列车进行受力分析的过程中，由于牵引力、阻力、制动力都是与速度有关的函数，所以列车在全过程都在做变加速运动。在计算过程中，我们可以将列车的运动逐渐逼近匀变速运动，将规定的时间分为多个小的时间段，则认为列车在各时间段内做匀变速运动，进而可以求出最节能的速度距离曲线和列车发动机所消耗的能量。

(2) 建立新的计算速度距离曲线的数学模型，计算寻找一条列车从 A_6 站出发到达 A_8 站的最节能运行的速度距离曲线，其中要求列车在 A_7 车站停站 45 秒， A_6 站和 A_8 站间总运行时间规定为 220 秒（不包括停站时间）。

分析：在上一问中我们已经得到了从 A_6 站出发到达 A_7 站的最节能运行的速度距离曲线，与上个问题不同的是这问有两端路程，且要保证两端路程所用的时间为 220s。由于 A_6 与 A_7 站之间的路况（坡度、限速和曲率）与 A_7 与 A_8 站之间的路况相差不大，故可以根据两者之间的距离关系来分配两者之间的时间，进而借用上一问的做法可以求出相应的最节能的速度距离曲线和列车发动机所消耗的能量。

问题二：多列车节能运行优化控制问题

(1) 当 100 列列车以间隔 $H=\{h_1, \dots, h_{99}\}$ 从 A_1 站出发，追踪运行，依次经过 A_2, A_3, \dots 到达 A_{14} 站，中间在各个车站停站最少 D_{\min} 秒，最多 D_{\max} 秒。间隔 H 各分量的变化范围是 H_{\min} 秒至 H_{\max} 秒。建立优化模型并寻找使所有列车运行总能耗最低的间隔 H 。要求第一列列车发车时间和最后一列列车的发车时间之间间隔为 $T_0=63900$ 秒，且从 A_1 站到 A_{14} 站的总运行时间不变，均为 2086s（包括停站时间）。

分析：对于多列车节能运行优化的问题，主要把握三点：一是列车本身的耗能要尽可能低；二是列车要尽可能延长做牵引运动和制动运动的时间；三是不同列车做牵引运动和制动运动的时间要尽可能重合，从而提高再生能量的利用率。由于从 A_1 站到 A_{14} 站的总运行时间不变，所以当停站时间较长时车辆的运行时间就会越短，在越短的时间内完成规定距离的运行会使得发动机消耗的能量增加，所以为了降低单列车的耗能要尽可能延长运行时间，即缩短停站时间。根据要求第一列列车发车时间和最后一列列车的发车时间之间间隔为 63900 秒，则前一列车与后一列车的发车间隔平均约 645s，由于最大值为 660s，基本能保证两车之间的距离较长，故可以不受安全距离的限速影响。根据第一问的模型和计算，可以在节能的前提下得到每一列车在各站间的速度距离曲线。然后根据重叠时间最大化的目标对列车的发车时间间隔进行规划，将问题转化成类似的完全背包问题，然后借鉴贪心算法思想设计求解的算法便可以得到使所有列车运行总能耗

最低的间隔 H 。

(2) 接上问，如果高峰时间（早高峰 7200 秒至 12600 秒，晚高峰 43200 至 50400 秒）发车间隔不大于 2.5 分钟且不小于 2 分钟，其余时间发车间隔不小于 5 分钟，每天 240 列。请重新为它们制定运行图和相应的速度距离曲线。

分析：高峰期间列车的发车间隔较小，则前后两列车之间的距离比较小，在这种情况下后一列车的运行速度会受到安全距离的限速影响。在高峰情况下，我们主要考虑列车行驶安全的原则，而在非高峰期，主要考虑节能原则，即非高峰时间问题回归到上一问。根据上一问中的模型和算法，我们可以求解出最优的发车间隔。接着根据确定的发车间隔来判断处于高峰期的列车的速度运行曲线。在列车运行的过程中，我们可以知道列车某时刻的实际速度以及限制速度，设定一个速度差值。当实际速度以及限制速度相差大于速度差值时，列车做牵引运动；当实际速度以及限制速度相差小于等于速度差值时，列车做惰行运动。直至列车做制动能够在规定时间内完成剩下的路程时，列车进入制动状态。

问题三：列车延误后运行优化控制问题

接上问，若列车 i 在车站 A_j 延误 D_j^i (10s) 发车，建立控制模型，找出在确保安全的前提下，首先使所有后续列车尽快恢复正点运行，其次恢复期间耗能最少的列车运行曲线。

假设 D_j^i 为随机变量，普通延误 ($0 < D_j^i < 10s$) 概率为 20%，严重延误 ($D_j^i > 10s$) 概率为 10%（超过 120s，接近下一班，不考虑调整），无延误 ($D_j^i = 0$) 概率为 70%。若允许列车在各站到、发时间与原时间相比提前不超过 10 秒，根据上述统计数据，对第二问的控制方案进行调整？

分析：首先考虑列车尽快恢复正点运行的要求，则可以对原来采取节能原则制定的速度距离曲线进行修改，根据快速原则计算列车完成规定路段所需花费的最小时间，计算计划时间和最小花费时间的差值则可以得到该路段的时间余量。在列车延误时，首先根据时间余量进行调整，若下一段路程的时间余量大于等于延迟时间，则将下一段时间的实际运行时间增加延迟的时间，下一站便可准时到达；若下一段路程的时间余量小于延迟时间，则在该路段采取最快速的原则，即以最大牵引力加速，然后根据限速进行巡航，最后以最大制动力进行制动，将未恢复的延迟时间推向下一段路程。在更新每段路程的实际运行时间后，采取最节能的方式重新计算最优的速度距离曲线。

2 假设和说明

- (1) 由于“线路参数”的附件中给出的所有路段的限速均小于列车的最大运行速度 80 公里/小时，因此在本文的讨论中可以忽略列车最大运行速度的限制，只需要考虑路段的限速。
- (2) 制动能可立即反馈到接触网上并可及时被牵引列车使用，如此时无牵引列车则产生的制动能被电阻消耗。
- (3) 只有在同一线路的相同运行方向上，且位于同一变电站范围内的相邻列车间的再生制动能可被吸收再利用。

根据题目我们知道列车均处于同一供电区间，也就是说制动列车产生的再生制动能可被其他列车使用。由于列车制动产生的能量不足以支撑下列车牵引的过程，与其将再生能量平均分给几列车，不如将其简化为能量仅能供下列车使用，从而对模型进行简化。

3 符号说明

F_{\max} : 最大牵引力

V_{\max} : 最大速度

$F_{i\max}$: 时间段 t_i 至 t_{i+1} 的最大牵引力

W : 总阻力

E_{mech} : 制动过程中机械能变化量

E_{reg} : 产生的再生能量

E_{used} : 被利用的再生能量

B_{\max} : 最大制动力

V_{limit} : 跟踪列车限制速度

L : 前后车之间距离

V_{line} : 当前位置线路限速

t_{overlap} : 列车 $i+1$ 的制动时间与列车 i 牵引时间的重叠时间

t_{brake} : 列车 $i+1$ 的制动时间

T_{F} : 列车做牵引运动的时间集合

T_{B} : 列车做制动运动的时间集合

$t_{\text{起}}^i$: 列车做第 i 段牵引运动的起点时刻

$t_{\text{终}}^i$: 列车做第 i 段牵引运动的终点时刻

n_{F} : 列车做牵引运动的次数

H : 发车间隔

4 单列车节能运行优化控制问题

列车在站间运行时会根据线路条件、自身列车特性、前方线路状况计算出一个限制

速度。列车运行过程中不允许超过此限制速度。限制速度会周期性更新。在限制速度的约束下列车通常包含四种运行工况：牵引、巡航、惰行和制动。

- 牵引阶段：列车加速，发动机处于耗能状态。
- 巡航阶段：列车匀速，列车所受合力为 0，列车是需要牵引还是需要制动取决于列车当时受到的总阻力。
- 惰行阶段：列车既不牵引也不制动，列车运行状态取决于受到的列车总阻力，发动机不耗能。
- 制动阶段：列车减速，发动机不耗能。如果列车采用再生制动技术，此时可以将动能转换为电能反馈回供电系统供其他用电设备使用，例如其他正在牵引的列车或者本列车的空调等（本列车空调的耗能较小，通常忽略不计）。

如果车站间距离较短，列车一般采用“牵引-惰行-制动”的策略运行。如果站间距离较长，列车通常会采用牵引到接近限制速度后，交替使用惰行、巡航、牵引三种工况，直至接近下一车站采用制动进站停车。

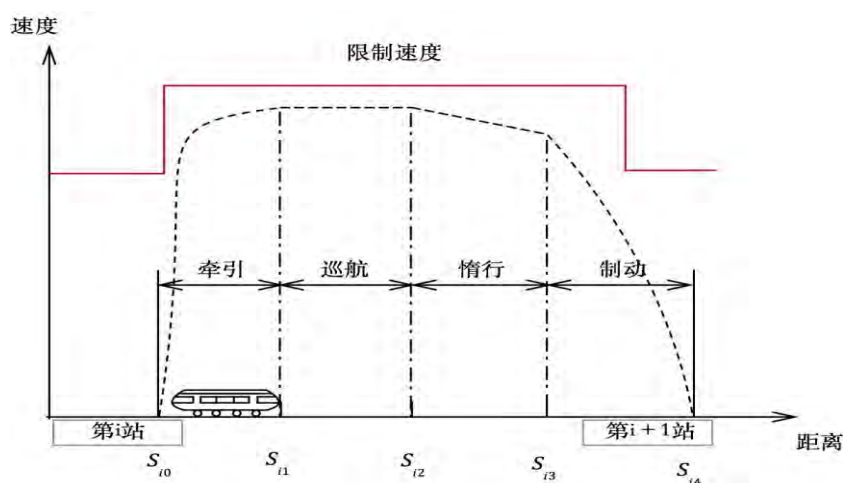


图 4-1 列车站间运行曲线

动车组在运行过程中最典型的运行策略有三种。

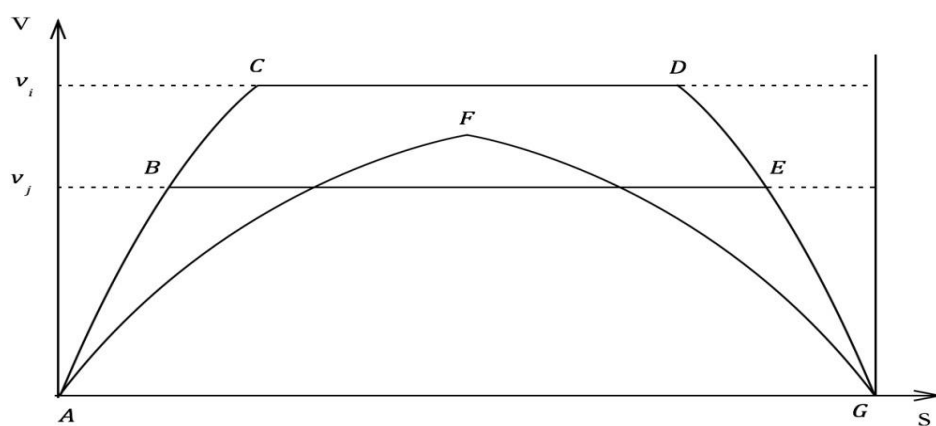


图 4-2 动车组运行典型策略

(1) 最快速策略

最快速策略需要尽可能发挥列车牵引力和制动力来使列车在最短的时间运行整个区段。在此运行状态下，列车在各个方面的能力都会发挥到最大，因此牵引力和制动力都要采用最大值，并且在限速区段采用匀速行驶，其过程如上图中的 A-C-D-G。

（2）最节能策略

最经济的牵引策略是：在给定区间和时间范围以内，开始状态以最大牵引力将速度加速到某一稳定值，如果时间允许可直接匀速惰行到终点，如果时间不足则可惰行一段时间后适当调节，采用最大制动力制动。其过程如上图中的 A-B-E-G。

（3）混合优化策略

混合优化策略是将最快速策略和最节能策略进行结合而建立的相对优化的运行策略，此优化策略在考虑速度的情况下又兼顾节能、舒适度、安全等性能指标。其运行过程如上图中的 A-F-G。

4.1 单节列车节能原理

单列车优化驾驶是以单列车为控制对象,寻找适当的列车驾驶策略从而减少单列车的运行能耗,它是列车控制中一个传统的研究热点。

由于在给定运行时间的条件下列车在站间有不同的运行策略,所以列车节能优化的关键在于驾驶策略的选取。

列车在区间内运行,一般情况下存在出站限速(区段 1)、线路永久限速(区段 2、4)、临时限速(区段 3)和进站限速(区段 5)。我们选择一个典型的站间运行情况,如图 4-3 所示。

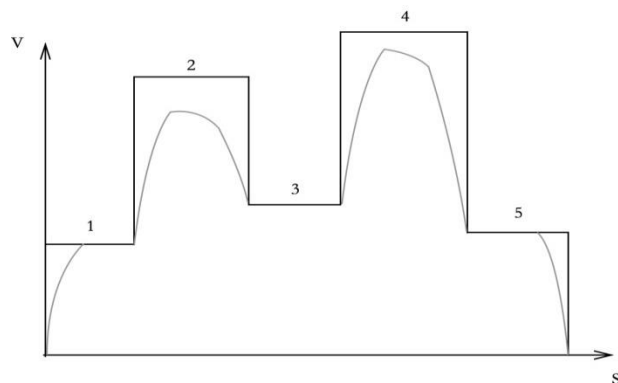


图 4-3 典型站间运行情况

文献^{[1][2]}已证明在这种线路条件下的节能驾驶策略为:区段 1: 最大加速+巡航; 区段 2: 最大加速+惰行+最大制动; 区段 3: 巡航; 区段 4: 最大加速+惰行+最大制动; 区段 5: 巡航+最大制动。

表 4-1 各区间对应的节能驾驶策略

区间段	节能驾驶策略
出站限速（区段 1）	最大加速+巡航
线路永久限速（区段 2、4）	最大加速+惰行+最大制动
临时限速（区段 3）	巡航
进站限速（区段 5）	巡航+最大制动

牵引过程是一个能量消耗的过程，牵引力需克服阻力做功消耗电能转换成列车的动能并产生一部分热能。相对的制动过程则是一个反向过程,是将动能转换成电能的过程。该过程不但不消耗能量还会产生大量的再生制动能，这部分能量可供其他列车使用^{[3][4]}。此外,还有巡航和惰行两个过程,巡航的特点是列车的速度保持不变;惰行过程列车以很小的加速度行驶,不产生也耗能量,适当的调整惰行的始、末时间可以降低单列车的运行能耗^[5]。

4.2 单节列车节能模型

列车在不同速度下牵引力/制动力有严格的上限要求,列车所有力的取值均要小于限制值。列车有四种运行工程,分别是牵引、巡航、惰行和制动。下面就列车运行的这四个过程进行分析:

4.2.1 牵引过程

牵引过程中列车受到牵引力和阻力的作用,若列车行驶的路段存在坡度,那么列车还将受到重量在速度方向的分力,具体的受力分析如下图:

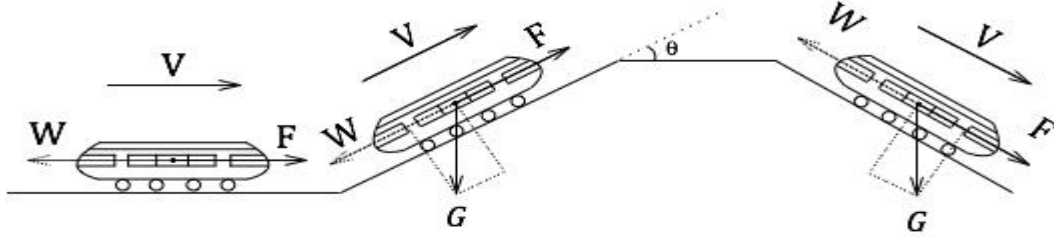


图 4-4 牵引过程中列车受力分析

根据题目的公式,我们知道最大牵引力 F_{\max} (kN) 和列车允许的最大速度 V_{\max} (km/h)。

$$F_{\max} = \begin{cases} 203 & 0 \leq v \leq 51.5 \text{ km/h} \\ -0.002032v^3 + 0.4928v^2 - 42.13v + 1343 & 51.5 < v \leq 80 \text{ km/h} \end{cases}$$

$$V_{\max} = 80 \text{ km/h}$$

其中 v 为列车速度,单位是 km/h 。

由于牵引过程是个变加速过程,故在计算时我们采取无限逼近的方式,将 Δt 内的运动看作是匀加速运动,抽象为如下过程:

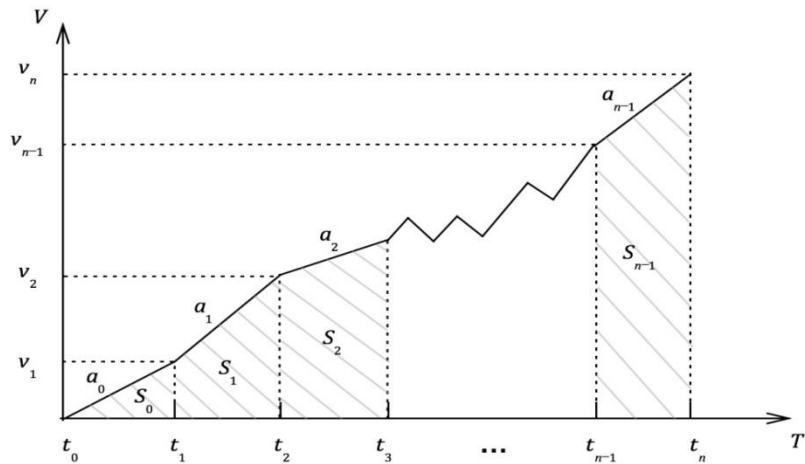


图 4-5 抽象处理后的牵引过程

则可以得到时刻 t_i 至 t_{i+1} 之间最大牵引力为:

$$F_{i\max} = \begin{cases} 203 & 0 \leq v_i \leq 51.5 \text{ km/h} \\ -0.002032v_i^3 + 0.4928v_i^2 - 42.13v_i + 1343 & 51.5 < v_i \leq 80 \text{ km/h} \end{cases}$$

其中 v_i 为 t_i 时刻列车的速度。

时刻 t_i 至 t_{i+1} 之间的总阻力可以认为是：

$$W = (A + Bv_i + Cv_i^2 + i + c/R) \times g \times M / 1000$$

根据受力分析，我们知道在时刻 t_i 至 t_{i+1} 之间加速度 a_i 为：

$$a_i = \frac{F_{i\max} - G \sin \theta_i - W_i}{M}$$

根据列车的受力情况计算列车在某一时刻的速度、加速度以及该时间间隔下列车运行的位移量，本次计算的末速度便是列车下一时刻点的初速度。根据匀加速运动的特性，可以得到 t_{i+1} 时刻的速度为：

$$v_{i+1} = v_i + a_i \times (t_{i+1} - t_i)$$

其中 $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ 。

那么在 t_i 至 t_{i+1} 之间列车走过的距离为：

$$s_i = \frac{v_{i+1}^2 - v_i^2}{2a_i}$$

由于牵引过程中消耗能量，根据牵引力的大小和运行的路程，我们计算列车在牵引过程所消耗的能量为：

$$E = \int F v dt$$

在 t_i 至 t_{i+1} 之间由于牵引力不变，列车做匀加速运动，则耗能计算公式为：

$$E = \sum_{i=0}^N F_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} v dt$$

其中 t 为列车做牵引运动的总时间， N 为每秒被分割成小时间段的段数。

4.2.2 巡航过程

巡航过程列车做匀速运动，列车所受合力为 0，此时列车是需要牵引还是需要制动取决于列车当时受到的总阻力。巡航过程中列车受到牵引力/制动力、阻力和重力在速

度方向的分力，与牵引过程不同的是巡航过程中列车的牵引力/制动力的的大小取决于阻力和重力分力的大小。巡航过程是列车匀速运行的过程，故列车所消耗的能量完全转换成其他形式能量而没有牺牲动能。

(1) 列车巡航过程中受到牵引力

当列车处于水平道路上、列车处于上坡路段以及列车处于下坡路段但 $G \sin \theta < W$ 时，列车受到牵引力的作用才能保持匀速运动，三种情况下受力分析为：

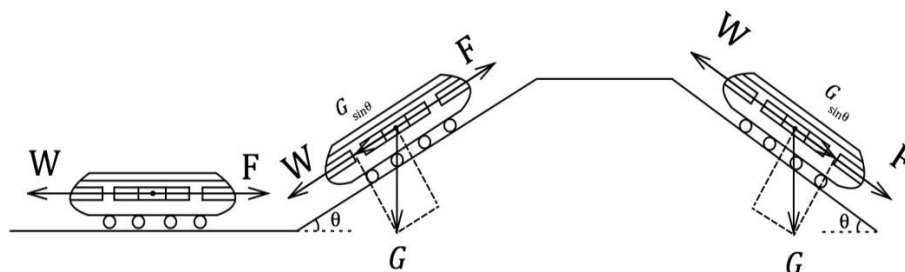


图 4-6 巡航过程中列车受力分析

此时：

$$F = W + G \sin \theta$$

$$W = (A + Bv_{\text{巡航}} + Cv_{\text{巡航}}^2 + i + c/R) \times g \times M / 1000$$

若列车做了 t 时间的巡航运动，则此时牵引力所做的功 $E_{\text{巡航}}$ 为：

$$E_{\text{巡航}} = \int F v dt = F v_{\text{巡航}} t$$

(2) 列车巡航过程中受到制动力

当列车处于下坡路段且 $G \sin \theta > W$ 时，列车受到制动力的作用才能保持匀速运动，此时的受力分析为：

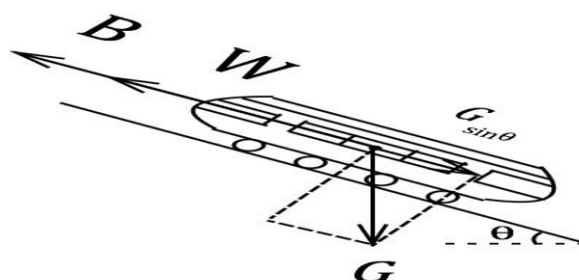


图 4-7 下坡路段的受力分析

此时：

$$B + W = G \sin \theta$$

$$W = (A + Bv_{\text{巡航}} + Cv_{\text{巡航}}^2 + i + c/R) \times g \times M / 1000$$

根据题目我们知道制动过程产生的再生能量为：

$$E_{\text{reg}} = (E_{\text{mech}} - E_f) \cdot 95\%$$

其中 E_{mech} 是制动过程中列车机械能的变化量， E_f 是制动过程中为克服基本阻力和附加阻力所做功。

若列车做了 t 时间的巡航运动，机械能的变化为：

$$E_{mech} = \frac{1}{2} M v_{\text{巡}}^2 + Mgh - E_f$$

则此时制动力产生的能量 $\bar{E}_{\text{巡航}}$ 为:

$$\bar{E}_{\text{巡航}} = (\frac{1}{2} M v_{\text{巡}}^2 + Mgh - 2E_f) \cdot 95\%$$

其中 h 为距平地（势能零点）的高度。

4.2.3 惰行过程

列车在速度方向只受阻力和重力的分力作用，该过程既不产生能量也不消耗能量。由于列车车轮与轨面之间的摩擦会产生热能，从能量转化的角度来看该过程牺牲了动能。惰行过程中列车以很小的减速度不断减速，对惰行过程进行受力分析可得：

$$Ma = W + G \sin \theta$$

$$W = (A + Bv + Cv^2 + i + c/R) \times g \times M / 1000$$

与牵引过程一样，我们 Δt 内的运动看作是匀变速运动，即运减速运动，则可以得到以下公式：

$$a_j = \frac{G \sin \theta + (A + Bv_j + Cv_j^2 + i + c/R) \times Mg / 1000}{M}$$

$$v_{j+1} = v_j - a_j \cdot \Delta t$$

a_j 为惰行过程中列车的加速度，惰行过程没有能量的消耗只有速度的变化，下面根据列车速度的变化以及加速度，计算某一段时刻内列车行驶的位移如下式：

$$s_j = \frac{v_{j+1}^2 - v_j^2}{2a_j}$$

惰行过程是一个节能的过程不消耗任何能量,但是该过程也是一个比较独立的过程,进入惰行过程的列车不会与其他列车进行能量的交互。

4.2.4 制动过程

制动过程中列车受到制动力和阻力的作用，若列车行驶的路段存在坡度，那么列车还将收到重量在速度方向的分力，具体的受力分析如下图：

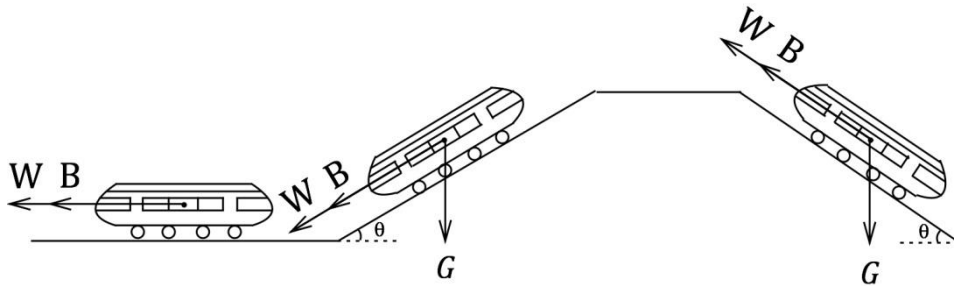


图 4-8 制动过程中列车受力分析

根据题目中给出的公式，我们知道最大制动力 B_{\max} (kN) 为：

$$B_{\max} = \begin{cases} 166 & 0 \leq v \leq 77 \text{ km/h} \\ 0.1343v^2 - 25.07v + 1300 & 77 < v \leq 80 \text{ km/h} \end{cases}$$

其中 v 为列车速度，单位是 km/h 。

由于制动过程是个变速过程，故在计算时我们采取无限逼近的方式，将每一小时间段 Δt 内的运动看作是匀减速运动，抽象为如下过程：

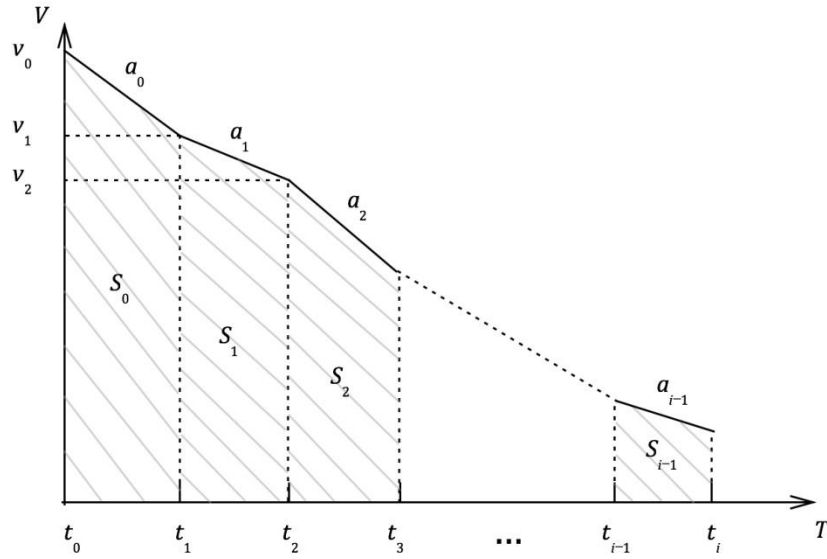


图 4-9 抽象后的制动过程

则可以得到时刻 t_i 至 t_{i+1} 之间最大制动力为：

$$B_{\max} = \begin{cases} 166 & 0 \leq v_i \leq 77 \text{ km/h} \\ 0.1343v_i^2 - 25.07v_i + 1300 & 77 < v_i \leq 80 \text{ km/h} \end{cases}$$

其中 v_i 为 t_i 时刻列车的速度。

则时刻 t_i 至 t_{i+1} 之间的总阻力可以认为是：

$$W_i = (A + Bv_i + Cv_i^2 + i + c/R) \times g \times M / 1000$$

根据受力分析，我们知道在时刻 t_i 至 t_{i+1} 之间加速度 a_i 为：

$$a_i = \frac{B_{i\max} + G \sin \theta_i + W_i}{M}$$

根据列车的受力情况计算列车在某一时刻的速度，加速度以及该时间间隔下列车运行的位移量，本次计算的末速度便是列车下一时刻点的初速度。根据匀变速运动的特性，

可以得到 t_{i+1} 时刻的速度为：

$$v_{i+1} = v_i - a_i \times (t_{i+1} - t_i)$$

其中 $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ 。

那么在 t_i 至 t_{i+1} 之间列车走过的距离为：

$$s_i = \frac{v_i^2 - v_{i+1}^2}{2a_i}$$

由于制动过程中产生能量，根据再生能量的计算公式，我们可以得到：

$$\bar{E} = (\frac{1}{2}Mv_0^2 + Mgh - 2E_f) \cdot 95\%$$

在 t_i 至 t_{i+1} 之间由于阻力不变，列车做匀减速运动，则内能消耗公式为：

$$E_f = \sum_{i=0}^{M_t} W_i \cdot s_i$$

其中 t 为列车做制动运动的总时间， N 为每秒钟被分割成小时间段的段数。

4.3 单节列车节能模型的应用

4.3.1 从 A6 站到达 A7 站最节能运行的速度距离曲线

根据上述的分析，我们知道最节能的方式是：以最大的牵引力加速，然后进行惰行，接着以最大的制动力进行制动^{[6][7]}。

根据题目我们知道从 A6 到 A7 之间的时间为 110 秒，即 $t=110s$ ，两站之间的距离 $s=1354m$ 。以起点 A6 站为 0 点，则从 A6 到 A7 之间的限速、坡度和曲率如下表所示：

表 4-2 A6 至 A7 的限速、坡度和曲率

路段起点	路段终点	坡度	限速	曲率
0	120	0	55	0
120	304	0	55	0
304	684	1.8	80	0
684	1304	-3.5	80	0
1304	1354	0	80	0

将相应路段的坡度、限速和曲率代入模型中，取 $\Delta t=0.05s$ ，则可以求得在规定时间内 t 内完成规定的路程 s 的最节能的速度曲线，具体表示为：

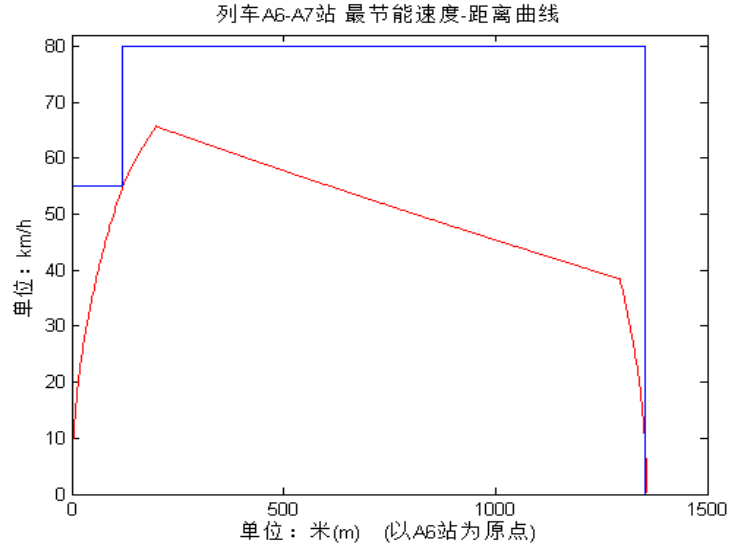


图 4-10 A6 至 A7 的最节能速度-距离曲线

在上图的速度距离曲线中，蓝色线段表示路段的限速，红色的曲线为最节能的速度距离曲线。此时发动机所消耗的能量为：

$$E = 35161kJ$$

根据模型的解和速度距离曲线，我们可以得到每一秒钟的曲线数据，将其填入文件“数据格式 1-1.xlsx”中并展示在本文的附录中。

4.3.2 从 A6 站到达 A8 站最节能运行的速度距离曲线

根据题目可知从 A6 站到达 A8 站的运行时间为 220s，则设从 A6 站到达 A7 站的运行时间为 t_1 ，从 A7 站到达 A8 站的运行时间为 t_2 ，则：

$$t_1 + t_2 = 220s$$

由 4.3.1 可知，从 A6 站到达 A7 站之间的距离：

$$s_1 = 1354m$$

根据附件数据计算得到，从 A7 站到达 A8 站之间的距离：

$$s_2 = 1280m$$

根据 4.1 的节能原理，我们知道最节能的方式是：以最大的牵引力加速，然后进行惰行，接着以最大的制动力进行制动。假设列车在 A6 到 A7 之间和 A7 到 A8 之间采用相同的节能模式，则根据两段道路的距离比例来分配时间。则：

$$t_1 = 220s \times \frac{s_1}{s_1 + s_2}$$

$$t_2 = 220s \times \frac{s_2}{s_1 + s_2}$$

以起点 A6 站为 0 点，则从 A6 到 A8 之间的限速、坡度和曲率如下表所示：

表 4-3 A6 至 A8 的限速、坡度和曲率

路段起点	路段终点	坡度	限速	曲率
0	120	0	55	0
120	304	0	80	0
304	684	1.8	80	0
684	1304	-3.5	80	0
1304	1354	0	80	0
1354	1474	0	55	0
1474	1594	0	80	0
1594	1994	3	80	0
1994	2554	-2	80	0
2554	2634	0	80	0

将相应路段的坡度、限速和曲率代入模型中，取 $\Delta t = 0.05s$ ，则可以求得在规定时间内 t 内完成规定的路程 s 的最节能的速度曲线，具体表示为：

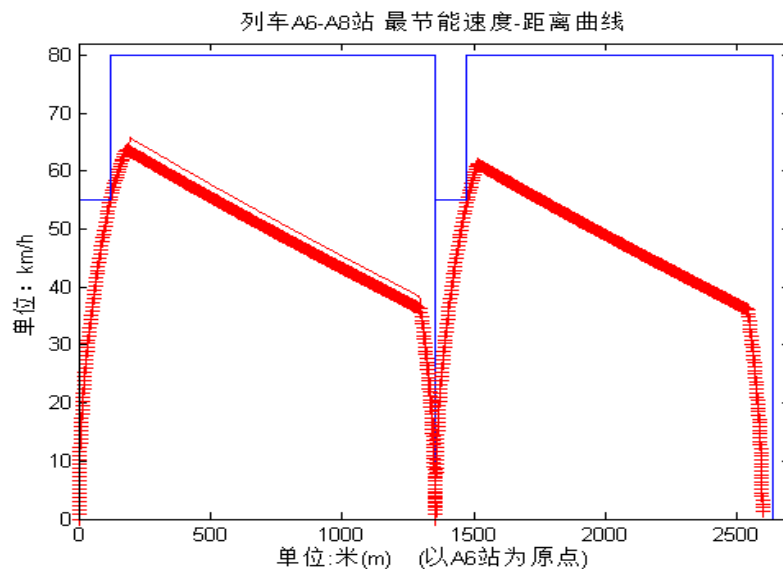


图 4-11 A6 至 A8 的最节能速度-距离曲线

在上图中，蓝色线段表示路段的限速，红色的曲线为最节能的速度距离曲线。

根据模型的解和速度距离曲线，我们可以得到每一秒钟的曲线数据，将其填入文件“数据格式 1-2.xlsx”中并展示在本文的附录中。

此时发动机所消耗的能量为：

$$E = 63153kJ$$

5 多列车节能运行优化控制问题

多列车运行节能优化模型是指在时刻表的约束条件下,使得多列车完成运营后总体能耗降低。针对于每一辆列车而言不同的运行策略决定了列车的能耗,而对于多列车整体而言,再生制动能的提出导致各列车间如何配合策略成了节能的关键^[8]。首先我们根据节能目标提出多列车的控制原则。

5.1 多列车节能原则

利用系统思想将多列车看作是一个整体,那么要求达到系统最优,则不仅需要考虑部分最优,而且需要考虑整体之间的联系。比如说由多列车的运行策略组合使得全线列车能耗最低,对于单个列车而言可能所需的能耗会有小幅度的增加,但对于整体这是更有利的。

针对单列车来说,要使得列车最节能,则采取的节能控制策略为:牵引-惰行-制动。在整体中,要使得系统最节能,则要充分利用制动产生的再生能量,故需要尽可能地延长牵引和制动的时间,以便提高再生能量的利用率。如果让牵引列车以适当小的牵引力等待制动列车的出现,这样就会相对延长列车原有的牵引过程时间,实现再生制动能的利用相对增多^{[9][10]}。总结来说,多列车的节能原则有:

(1) 单列车尽量采用节能控制策略,即牵引-惰行-制动。在此前提下,可以适当延长制动和牵引的运动时间;

(2) 尽量缩小列车的停战时间,使得列车在站间有足够的运行时间,从而降低牵引达到的最大速度,减小单列车的能耗。

(3) 调整多列车运行中不同列车的发车间隔,尽量使得同时工作的列车的牵引时间和制动时间的重叠较多。

多列车节能优化模型的意义在于,通过调整多列车在区间内的运行策略,从而实现全线能耗最低的目标。调整列车的运行策略会提高再生制动能的利用,再生制动能利用率的提高可能会大幅度降低能耗。

5.2 多列车节能优化模型

5.2.1 不受安全距离限速影响的多列车节能优化模型

在列车追踪运行时,为保证安全,跟踪列车(后车)速度不能超过限制速度 V_{limit} ,以免后车无法及时制动停车,发生追尾事故。其计算方式可简化如下:

$$V_{limit} = \min(V_{line}, \sqrt{2LB_e})$$

其中 V_{line} 是列车当前位置的线路限速(km/h), l 是当前时刻前后车之间的距离(m), B_e 是列车制动的最大减速度(m/s^2)。

当 $\sqrt{2LB_e} \geq V_{line}$ 时,列车的限制 $V_{limit} = V_{line}$,此时列车安全距离的限速不起作用,即

列车的限速还是受道路限速的影响，此时各列车的运行速度是独立的，并不受前一列车影响。

在多列车节能运行优化控制问题的第一问中，前后两列车的出发时间间隔平均约为 645s，接近最大的出发间隔 660s，所以在第一列列车发车时间和最后一列列车的发车时间之间间隔为 63900 秒的限制下，列车几乎不受安全距离限速的影响。因此我们将每节列车作为独立的主题进行最节能分析，则模型回归到单节列车节能运行优化问题。

根据题目已知从 A1 站到 A14 站的总运行时间不变，均为 2086s（包括停站时间），则实际的运行时间为：

$$t = 2086s - \sum_{i=2}^{13} D_i$$

其中 t 为实际的运行时间， D_i 为列车在 A_i 站的停战时间。

根据 4.1 的节能原理，我们知道最节能的方式是：以最大的牵引力加速，然后进行惰行，接着以最大的制动力进行制动。假设列车在任意两站间的运行均采用这样的节能模式，则根据运行道路的距离比例来分配实际运行时间。即：

$$t_i = t \times \frac{s_i}{\sum_{i=1}^{13} s_i}$$

其中 t_i 为列车从 A_i 站到 A_{i+1} 站之间的实际运行时间， s_i 为列车从 A_i 站到 A_{i+1} 站之间的距离。

已知 t_i 和 s_i ，可以得到单列车的最节能运行策略。对于多列车的节能优化问题，存在能量再生的过程，即再生制动时，牵引电动机转变为发电机工况，将列车运行的动能转换为电能，发电机产生的制动力使列车减速，此时列车向接触网反馈电能，此部分能量即为再生制动能，如下图所示：

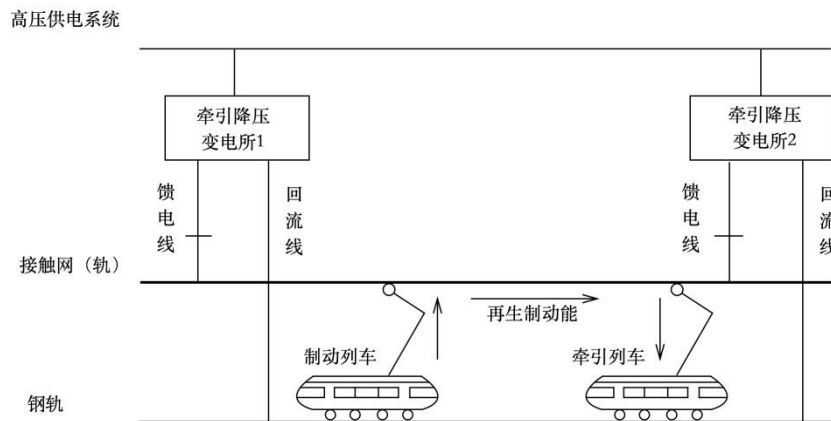


图 5-1 再生制动能示意图

根据题目假设可知产生的再生能量为：

$$E_{reg} = (E_{mech} - E_f) \cdot 95\%$$

其中具体的计算公式在 4.2.2 中已经给出了，则被利用的再生能量计算公式为：

$$E_{used} = E_{reg} \cdot t_{overlap} / t_{brake}$$

其中 $t_{overlap}$ 是列车 $i+1$ 的制动时间与列车 i 牵引时间的重叠时间, t_{brake} 是列车 $i+1$ 的制动时间。

通过调整计划运营图匹配再生能量的产生和利用实现节能, 本文主要从尽可能提高重叠时间的角度来进行研究讨论。

根据单列车节能策略进行计算, 可以得到单列车牵引和制动的时间段分别为 (以 0 为时间原点):

$$T_F = \{(t_{起}^1, t_{终}^1), (t_{起}^2, t_{终}^2), \dots, (t_{起}^{n_F}, t_{终}^{n_F})\}$$

$$T_B = \{(\bar{t}_{起}^1, \bar{t}_{终}^1), (\bar{t}_{起}^2, \bar{t}_{终}^2), \dots, (\bar{t}_{起}^{n_B}, \bar{t}_{终}^{n_B})\}$$

其中 T_F 和 T_B 分别为列车做牵引运动和制动运动的时间集合。 $t_{起}^i$ 为列车做第 i 段牵引运动的起点时刻, $t_{终}^i$ 为列车做第 i 段牵引运动的终点时刻, n_F 为列车做牵引运动的次数; $\bar{t}_{起}^i$ 为列车做第 i 段制动运动的起点时刻, $\bar{t}_{终}^i$ 为列车做第 i 段制动运动的终点时刻, n_B 为列车做制动运动的次数。

考虑列车之间的发车间隔, 对列车牵引和制动的时间段进行更新 (以第一列车的发车时间为时间 0 点), 则:

$$T_B^i = T_B + \sum_{j=0}^{i-1} h_j$$

$$T_F^i = T_F + \sum_{j=0}^{i-1} h_j$$

其中 h_j 为第 j 列车和第 $j+1$ 列车之间的发车间隔, T_F^i 为第 i 列车做牵引运动的时间集合, T_B^i 为第 i 列车做制动运动的时间集合。

则第 $i+1$ 列车加速时间和第 i 列车的制动时间的重叠时间 $t_{overlap}^i$ 为:

$$t_{overlap}^i = T_B^i \cap T_F^{i+1}$$

下面问题转换成使得重叠时间最大化的规划问题。

$$\max \sum_{i=1}^{99} t_{overlap}^i$$

$$st. \quad 120 \leq h_i \leq 660$$

$$\sum_{i=1}^{99} h_i = 63900$$

根据我们的假设，前一列车的再生能量仅能供后一列车使用，那么每两列车之间的重叠时间仅仅与发车间隔有关，即每一个发车间隔 h_i 决定了重叠时间 $t_{overlap}^i$ ，即时间间隔集合 $\bar{H} = \{h_i | 120 \leq i \leq 660\}$ 与重叠时间集合 $T_{overlap} = \{t_{overlap}^i\}$ 之间存在映射关系，为了方便计算，这里的 i 取整数。则问题转换成类似的完全背包问题。

完全背包问题：有 N 种物品和一个容量为 V 的背包，每种物品都有无限件可用。第 i 种物品的体积是 c ，价值是 w 。将哪些物品装入背包可使这些物品的体积总和不超过背包容量，且价值总和最大^[11]。

借鉴完全背包问题，可以将问题描述为：有 541 种物品和一个容量为 H （63900）的背包，每种物品都有无限件可用。第 i 件物品的体积为 h_i ，物品的价值是 $t_{overlap}^i$ ，将 N （99）件物品装入背包可使这些物品刚好把背包塞满，且价值总和最大。

为了解决上述的问题，我们借鉴贪心算法的思想设计了相应的求解算法。首先定义一个计算符号：

$$\bar{N} \otimes H = \sum_{i=1}^n n_i \times h_i$$

其中 $\bar{N} = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ ， $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ 。

算法的思想主要是：首先选取价值最大的 N 件物品放入背包中，进行判断：若物品的总体积超过了背包的容量，则找到比该物品体积小但价值最大的物品，计算超出的容量与两物品体积差的比值 n ，将背包中的 n 件物品拿出，换成新的物品放入，再进行判断；若物品的总体积小于背包的容量，则找到比该物品体积大但价值最大的物品，计算剩余容量与两物品体积差的比值 n ，将背包中的 n 件物品拿出，换成新的物品放入，再进行判断；若物品的总体积正好等于背包的容量，则此时找到了最优解。

具体的步骤为：

Step1: 首先根据物品的价值，从大到小对物品进行重新排序，得到新的集合 $T_{overlap}$ 和对应的体积集合 \bar{H} 。初始化背包，令所装的物品体积 $V = 0$ 。初始化数量集合 \bar{N} 和体积集合 H ，令其为空集。从 $T_{overlap}$ 中选出 N 件价值 $t_{overlap}^i$ 最大的物品 i ，更新数量集合 $\bar{N} = \{N\}$ ，体积集合 $H = \{h_i\}$

Step2: 令 $V = \bar{N} \otimes H$ ，判断物品体积 V 和背包容量的大小关系。若 $V > H$ ，转入 STEP3；若 $V < H$ ，转入 STEP4；若 $V = H$ ，转入 Step5。

Step3: 按 $T_{overlap}$ 的价值顺序选取体积小于 h_i 但价值最大的物品 j ，令 $n = \left\lfloor \frac{V-H}{h_i-h_j} \right\rfloor$ ，

将数量集合的最后一个元素更新为 $N-n$ ，将 n 加入数量集合 \bar{N} 中，对应地将 h_j 加入体

积集合 H 。转入 Step2。

Step4: 按 $T_{overlap}$ 的价值顺序选取体积大于 h_i 但价值最大的物品 j , 令 $n = \left\lfloor \frac{H-V}{h_j-h_i} \right\rfloor$, 将数量集合的最后一个元素更新为 $N-n$, 将 n 加入数量集合 \bar{N} 中, 对应地将 h_j 加入体积集合 H 。转入 Step2。

Step5: 程序结束, 得到使得价值最大的最优数量集合 \bar{N} 和体积集合 W 。

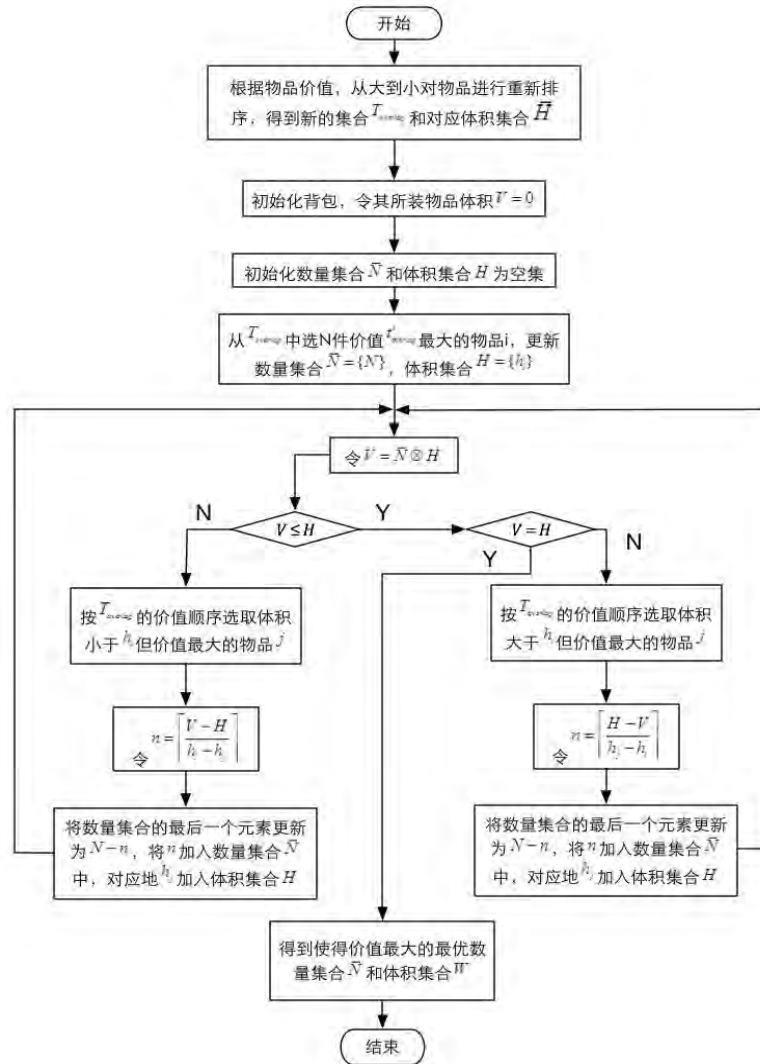


图 5-2 完全背包问题算法流程图

上述提出的算法得到的解是局部最优, 因为我们是尽可能满足价值大的物品先放的原则。为了求得全局的最优解, 我们可以改变最初放入背包中的物品的价值, 再根据上述的算法, 求出最优的答案。

5.2.2 不受安全距离限速影响的多列车节能优化模型的应用

根据 5.2.1 提出的优化模型, 我们将其应用在问题二的第 (1) 问上, 求解第 (1) 问中使得能耗最少的时间间隔 H 。

通过上节的分析, 我们知道实际运行时间越长可以使得列车的能耗越低, 于是尽量压缩停站时间。其实, 压缩停站时间的好处有:

- (1) 延长实际运行时间
- (2) 缩小两车间的距离，进一步保证安全问题。

综上，在此处我们令列车的停战时间取最小值，即：

$$D_i = D_{\min} = 30s$$

那么实际运行时间

$$t = 2086s - \sum_{i=2}^{13} D_i = 1726s$$

根据实际运行时间和距离的分配关系，我们可以得到每个站间的实际运行时间和距离分别为：

表 5-1 每个站间的距离和实际运行时间

路段	距离（m）	实际运行时间（s）
A1 到 A2	1334	101.3
A2 到 A3	1286	97.7
A3 到 A4	2086	158.4
A4 到 A5	2265	172.0
A5 到 A6	2338	177.6
A6 到 A7	1354	102.8
A7 到 A8	1280	97.2
A8 到 A9	1538	116.8
A9 到 A10	993	75.4
A10 到 A11	1982	150.5
A11 到 A12	2366	179.7
A12 到 A13	1275	96.8
A13 到 A14	2631	199.8

将相应路段的坡度、限速和曲率代入模型中，取 $\Delta t = 0.05s$ ，则可以求得单列车在规定运行时间内完成规定的路程的最节能的速度曲线，具体表示为：

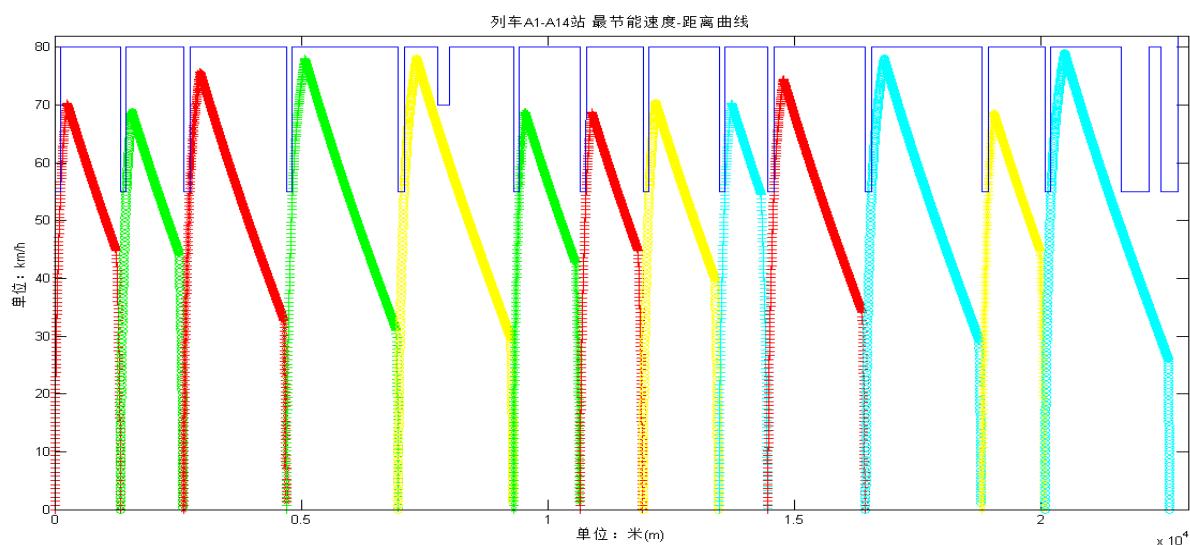


图 5-3 A1 至 A14 站最节能速度-距离曲线

根据速度曲线可以得到列车的牵引时间集合和制动时间集合，分别为：

表 5-2 列车的牵引时间集合和制动时间集合

区间	牵引时间段(s)	制动时间段(s)
A1-A2	1-23	87-101
A2-A3	132-153	215-229
A3-A4	260-286	407-417
A4-A5	448-476	609-619
A5-A6	650-678	818-827
A6-A7	858-879	947-960
A7-A8	991-1012	1073-1087
A8-A9	1118-1140	1221-1234
A9-A10	1265-1287	1322-1339
A10-A11	1370-1395	1508-1519
A11-A12	1550-1578	1720-1729
A12-A13	1760-1781	1842-1856
A13-A14	1887-1918	2077-2086

根据列车的牵引时间集合和制动时间集合，我们可以得到在不同发车间隔时间情况下的再生能量的重叠时间，选取部分数据展示如下：

表 5-3 部分发车时间间隔对应的重叠时间

发车时间间隔(s)	重叠时间(s)
121	10
148	52
175	67
202	51
229	53
256	44
283	33
310	41
337	51
364	38
391	42
418	24
445	60
472	49
499	27
526	20
553	50
580	54
607	41
634	18

根据 5.2.1 中设计的算法对规划模型进行求解，得到使得重叠时间最大，即耗能最

少的时间间隔 H 为:

$$H = \{\overbrace{641, 641, \dots, 641}^{50}, \overbrace{650, 650, \dots, 650}^{49}\}$$

发车间隔 H 中元素的顺序可以进行随意更换, 因为在前文中已经说明任意两列车之间的运行时独立的。

5.2.3 受安全距离限速影响的多列车节能优化模型

根据题目我们知道, 在高峰时间时发车间隔不大于 2.5 分钟且不小于 2 分钟, 其余时间发车间隔不小于 5 分钟。当发车间隔越为 2 分钟时, 前后两列车的距离较短, 根据第一问中 110s 运行 1354m 的结论进行推测, 两车的最大间隔大概为 1500m, 则安全速度限制小于路段速度限制, 即列车不能独立行进, 将收到前面列车的影响。

对于受安全距离限速影响的多列车节能优化问题, 我们分为两部分考虑:

- (1) 处于高峰时间时, 列车出行主要考虑安全问题
- (2) 处于其余时间时, 列车出行主要考虑节能问题

当列车的发车间隔大于 5 分钟的时候, 列车的行驶时独立进行的, 不受安全距离限速的影响, 故此时可回归到不受安全距离限速影响的多列车节能优化问题^[12]。

5.2.3.1 基于节能原则的非高峰时期列车发车间隔问题

根据题目可知早高峰为 7200 秒至 12600 秒, 晚高峰为 43200 至 50400 秒, 则高峰期的时间共为 12600 秒。

令高峰时间列车发车间隔为 2 分钟 (120 秒), 则可以估算出非高峰时期的平均发车间隔为:

$$D_{\max} = \frac{63900 - 12600}{239 - 12600 / 120} \approx 383s$$

令高峰时间列车发车间隔为 2.5 分钟 (150 秒), 则可以估算出非高峰时期的平均发车间隔为:

$$D_{\min} = \frac{63900 - 12600}{239 - 12600 / 150} \approx 331s$$

对于高峰时期, 我们假设发车的间隔时间是一样的, 因为一旦时间间隔改变, 则列车的运行策略要发生改变, 从而会发生连续的影响。根据非高峰时期最大和最小平均发车间隔的计算, 我们可以根据 5.2.1 中间隔时间和重叠时间的对应关系得到 $[D_{\min}, D_{\max}]$ 期间对应最大重叠时间的的时间间隔, 然后围绕此时间间隔根据 5.2.1 中提出的算法求解出最优的时间间隔, 同时也确定高峰期时间的发车间隔。

下面我们对高峰时期的问题进行讨论。

5.2.3.2 基于安全原则的高峰时期列车运行问题

在高峰时期, 列车运行的距离不变, 实际运行的时间也不变, 发车的时间间隔进行了压缩, 从而限制了后一列车的运行速度。因此, 后一列车的运行策略不能按照最节能的方式: 牵引-惰行-制动进行, 而要根据其与前车之间的距离来进行调整^[13]。

首先定义两个速度变量。

安全限制速度是列车追踪运行时, 为保证安全, 跟踪列车 (后车) 速度不能超过的速度, 计算公式为:

$$v_{limit} = \min(V_{line}, \sqrt{2LB_e})$$

实际运行速度 v 是指列车目前运行的实际速度。

在安全限速的前提下，列车的运行应该是在牵引-惰行、惰行-牵引、惰行-制动之间进行多次变化。下面我们制定列车运行的策略，首先设置一个速度余量 Δv 。

在列车运行的过车中，先是进行牵引加速，然后在每一秒末对列车的运行状态进行判断。在每次判断时都进行列车是否要进行制动结束运动的判断。若在剩余的时间内以做制动运动能完成剩余的路程，则列车做制动运动，结束运行。若不行，则继续判断下一秒的运行策略。若 $v_{limit} - v > \Delta v$ ，则说明列车有较大的余量可以做加速运动，则列车做

牵引运动；若 $v_{limit} - v \leq \Delta v$ ，则说明列车快要超过安全距离了，则列车做惰行运动。具体判断策略如下图所示：

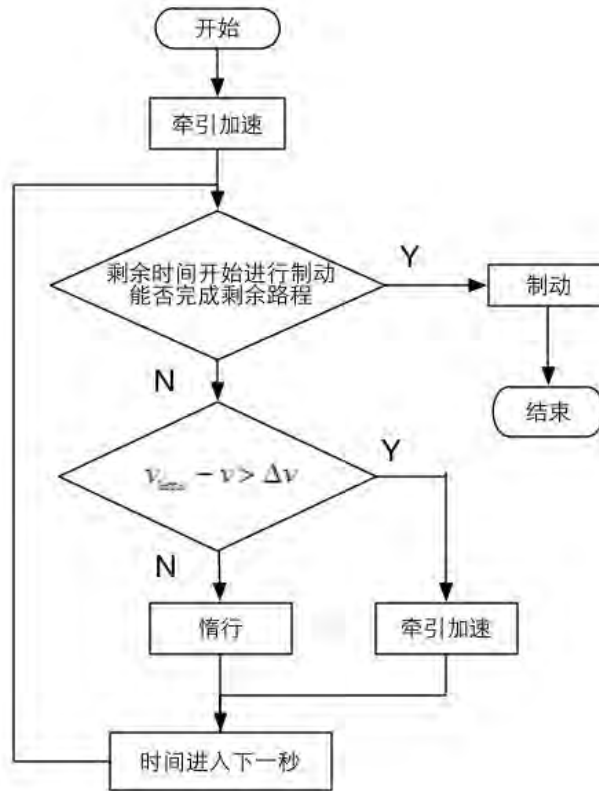


图 5-4 安全限速条件下判断策略

5.2.4 受安全距离限速影响的多列车节能优化模型的应用

对 5.2.3.1 中的模型进行求解，我们可以得到当非高峰期时期列车运行最节能时，列车之间的时间间隔为：

$$H = \{\overbrace{331, \dots, 331}^{22}, \overbrace{149, \dots, 149}^{36}, \overbrace{331, \dots, 331}^{22}, \overbrace{332, \dots, 332}^{39}, \overbrace{149, \dots, 149}^{48}, \overbrace{332, \dots, 332}^{40}\}$$

其中高峰时期列车的发车间隔为 149 秒。

根据 5.2.3.2 中提出的高峰时期基于安全原则的列车运行策略，我们通过计算可以得到高峰时期列车的速度路程曲线为：

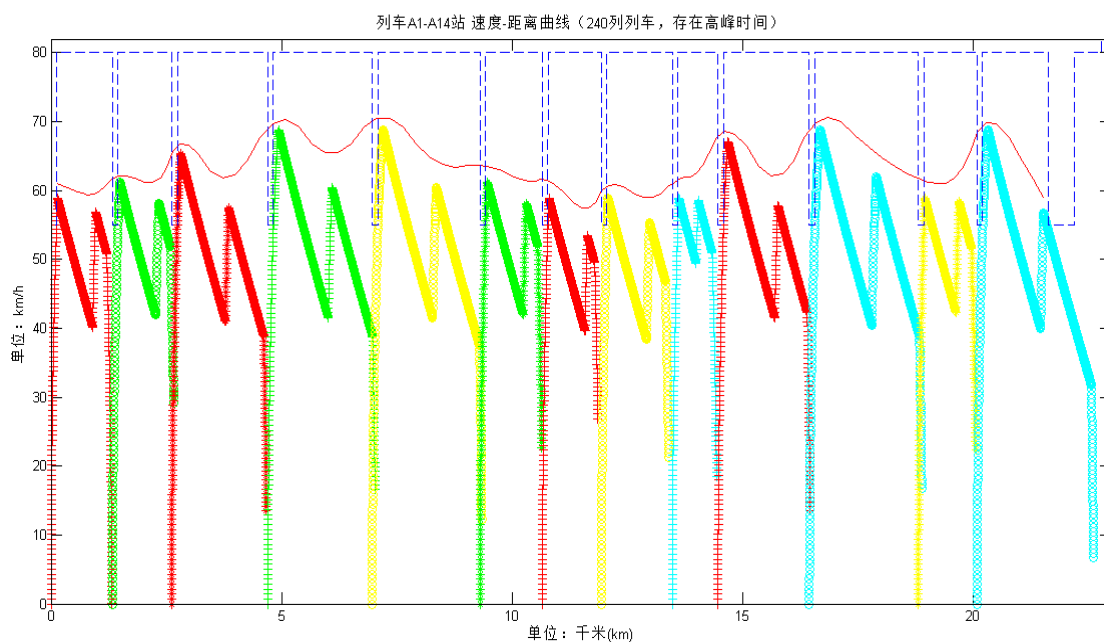


图 5-5 高峰时期列车的速度路程曲线

其中红色的线为两车间距离决定的限制速度，蓝色为道路限制速度。
此时列车的运行图为：

表 5-4 列车运行图

车站	到站时刻(s)	发车时刻(s)
A1		0
A2	101	131
A3	229	259
A4	417	447
A5	619	649
A6	827	857
A7	960	990
A8	1087	1117
A9	1234	1264
A10	1339	1369
A11	1520	1550
A12	1729	1759
A13	1856	1886
A14	2086	

根据上述分析，我们已经知道了每列车经过各个站点的时刻表以及列车发车之间的间隔 H ，则可以清楚得知每列车具体的时刻表和整体的列车运行图。

6 列车延误后运行优化控制问题

对于列车延误后的控制问题，首先要考虑的问题是使所有后续列车尽快恢复正点运行，其次是使得恢复期间的耗能最少。

6.1 两车站间的时间余量模型

考虑列车在延误后要尽快恢复正点运行，则首先对列车在车站间进行安全行驶的时间余量进行分析。在第二问的控制方案中，我们采取了最节能的策略去控制两车站间的速度距离曲线，得到每段路程实际的运行时间 t 。

两车站间的距离是固定的，那么在路段限速以及安全距离限速下，根据最快速策略：以最大的牵引力加速到限定速度，做巡航运动，然后以最大的制动力减速到终点，我们可以计算出每段路程最小的运行时间 t_{\min} 。

那么两车站之间的时间余量：即在保证安全行驶的前提下，列车允许延迟的时间，公式为：

$$\Delta t = t - t_{\min}$$

根据第二问的运行图，采取最快速策略，分别在高峰时期和非高峰时期对各车站间的速度曲线进行重新计算，得到最小的运行时间 t_{\min} 。结合每段路程实际的运行时间 t ，我们可以计算出各车站间的时间余量为：

表 6-1 各车站间时间余量

路段	高峰时期时间余量(s)	非高峰时期时间余量(s)
A1- A2	7.4	21.0
A2-A3	8.1	20.8
A3-A4	11.7	32.8
A4-A5	13.4	36.1
A5-A6	14.5	37.7
A6-A7	8.3	21.8
A7-A8	7.3	20.2
A8-A9	9.4	24.7
A9-A10	5.3	15.4
A10-A11	10.9	31.1
A11-A12	14.7	38.0
A12-A13	7.8	20.5
A13-A14	15.9	42.1

在已知列车延误后，我们可以根据各车站间的时间余量进行及时的控制，从而使列车尽快恢复正点运行^[14]。

列车延误后运行优化控制问题可以分为两类：其中一类是延误时间是固定的，另一类是延误时间是随机变量，在这两种情况下分别对列车的控制方案进行调整，得到列车延误后优化控制的方案。

6.2 基于固定延误时间的列车优化控制问题

若列车 i 在车站 A_j 延误了 DT_j^i (10s)，建立控制模型使得在确保安全的前提下，首先

使所有后续列车尽快恢复正点运行，其次恢复期间耗能最少的列车运行曲线。

针对这种延误时间一定的延误问题，对运行曲线的控制有以下两种情况（首先满足使所有后续列车尽快恢复正点运行）^{[15][16]}：

（1）在下一段路程（ A_j 站到 A_{j+1} 站之间）的运行过程中能将延误的时间补回来，即下一段路程可以在 $t-DT_j^i$ 时间内完成，则列车能在下一个站就开始恢复正点运行。在时间 $t-DT_j^i$ 内完成规定路程的前提下，尽可能采用最节能的速度距离曲线。

（2）在下一段路程（ A_j 站到 A_{j+1} 站之间）的运行过程中不能将延误的时间完全补回来，则在下一段路程中用最大的限速完成全程，然后将缩小的延误的时间推至下一段路程，直到列车恢复正点运行。

具体对列车的运行控制策略可以表示为：

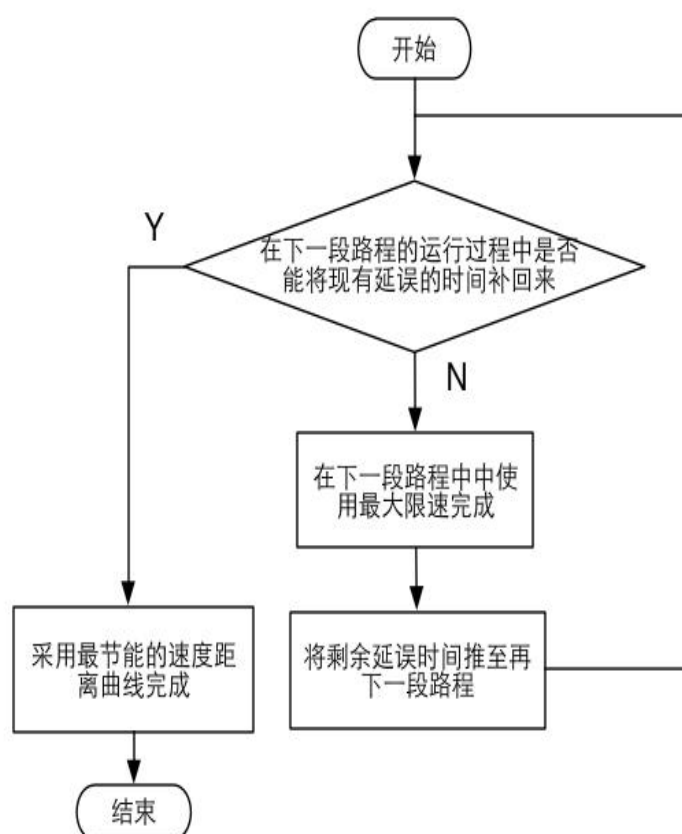


图 6-1 固定延误下运行控制策略图

根据题目我们知道延误时间为：

$$DT_j^i = 10s ,$$

在 6.1 中我们计算得到了列车在各站间的时间余量，若列车在 A_j 站发生延误，则可以得到相应的控制策略调整为：

表 6-2 各车站延误对应的调整策略

延误车站	高峰时期调整策略	非高峰时期调整策略
A1	将 A1-A2 间运行时间减少 10 秒	A1-A2 间采用最快速策略, 然后将 A2-A3 间运行时间减少 3.6 秒
A2	将 A2-A3 间运行时间减少 10 秒	A2-A3 间采用最快速策略, 然后将 A3-A4 间运行时间减少 1.9 秒
A3	将 A3-A4 间运行时间减少 10 秒	将 A3-A4 间运行时间减少 10 秒
A4	将 A4-A5 间运行时间减少 10 秒	将 A4-A5 间运行时间减少 10 秒
A5	将 A5-A6 间运行时间减少 10 秒	将 A5-A6 间运行时间减少 10 秒
A6	将 A6-A7 间运行时间减少 10 秒	A6-A7 间采用最快速策略, 然后将 A7-A8 间运行时间减少 1.7 秒
A7	将 A7-A8 间运行时间减少 10 秒	A7-A8 间采用最快速策略, 然后将 A8-A9 间运行时间减少 2.7 秒
A8	将 A8-A9 间运行时间减少 10 秒	A8-A9 间采用最快速策略, 然后将 A9-A10 间运行时间减少 0.6 秒
A9	将 A9-A10 间运行时间减少 10 秒	A9-A10 间采用最快速策略, 然后将 A10-A11 间运行时间减少 4.7 秒
A10	将 A10-A11 间运行时间减少 10 秒	将 A10-A11 间运行时间减少 10 秒
A11	将 A11-A12 间运行时间减少 10 秒	将 A11-A12 间运行时间减少 10 秒
A12	将 A12-A13 间运行时间减少 10 秒	A12-A13 间采用最快速策略, 然后将 A13-A14 间运行时间减少 2.2 秒
A13	将 A13-A14 间运行时间减少 10 秒	将 A13-A14 间运行时间减少 10 秒

6.3 基于随机延误时间的列车优化控制问题

列车的延误时间为随机变量, 具体出现的概率为:

表 6-3 延误时间概率表

延误类别	延误时间	出现的概率
普通延误	$0 < DT_j^i < 10s$	20%
严重延误	$DT_j^i \geq 10s$	10%
无延误	$DT_j^i = 0s$	70%

由于允许列车在各站到、发时间与原时间相比提前不超过 10 秒, 则对上节的调节策略进行修改。

若列车的延误时间较长, 在经过一段路程的调整后不能完全恢复正点运行时, 我们可以考虑令列车提前出发, 设提前出发时间为 t_p , 则

$$t_p \leq 10$$

在考虑令列车提前出发的问题时, 首先要确保列车的停战间隔大于最小停战时间

D_{\min} ，即

$$D - t_p \geq D_{\min}$$

针对允许列车提前出发的情况，对运行曲线的控制有以下两种情况：

(1) 在下一段路程（ A_j 站到 A_{j+1} 站之间）的运行过程中能将延误的时间补回来，即下一段路程可以在 $t - DT_j^i$ 时间内完成，则列车能在下一个站就开始恢复正点运行。在时间 $t - DT_j^i$ 内完成规定路程的前提下，尽可能采用最节能的速度距离曲线。

(2) 在下一段路程（ A_j 站到 A_{j+1} 站之间）的运行过程中不能将延误的时间完全补回来，则在下一段路程中用最大的限速完成全路程，并在 A_{j+1} 站提前出发。若 $D - t_p \geq D_{\min}$ ，则提早 t_p 出发；若 $D - t_p = D_{\min}$ ，则无法提前。然后将缩小的延误的时间推至下一段路程，直到列车恢复正点运行。

具体对列车的运行控制策略可以表示为：

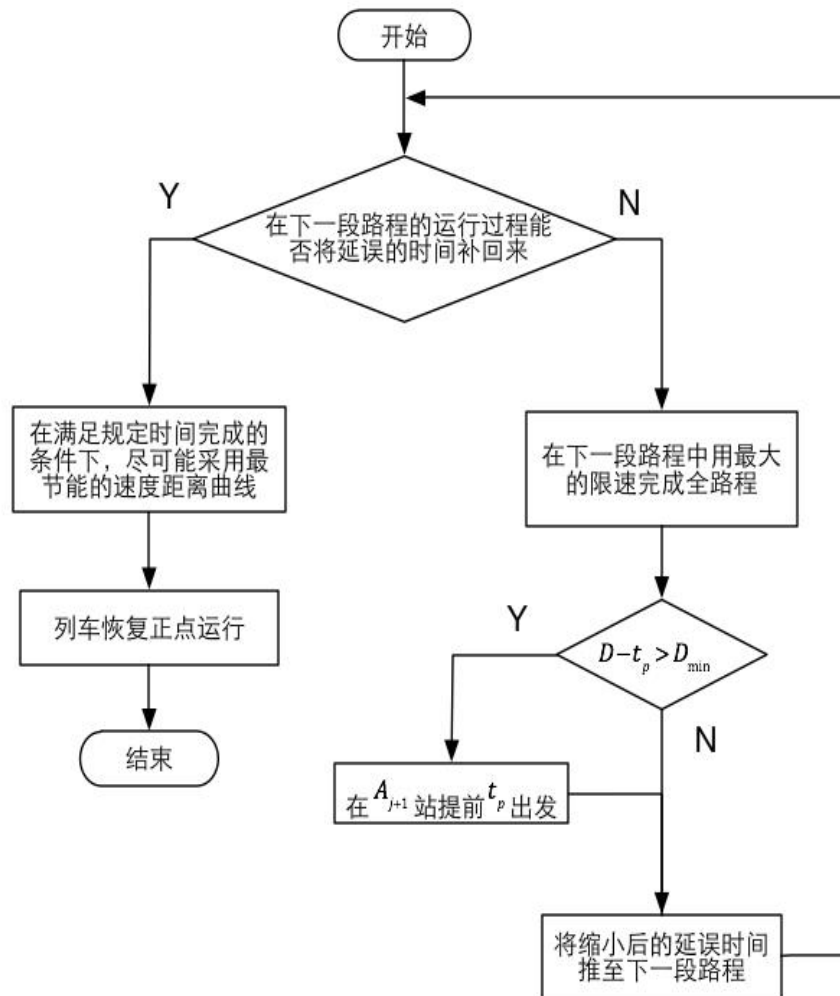


图 6-2 随机延误下运行控制策略

在 6.1 中我们计算得到了列车在各站间的时间余量，若列车在 A_j 站发生延误，则可以根据上述模型进行调整。下面以列车 30 和列车 10 为例，分别展示列车高峰时期和非

高峰时期发生 30s 延误的调整策略。

表 6-4 高峰时期和非高峰时期发生 30s 延误的调整策略表

发生延误的车站	高峰时期调整策略	非高峰时期调整策略
A1	A1-A4 间采用最快速策略, 然后将 A4-A5 间运行时间减少 2.8 秒	A1-A2 间采用最快速策略, 然后将 A2-A3 间运行时间减少 9 秒
A2	A2-A4 间采用最快速策略, 然后将 A3-A4 间运行时间减少 10.2 秒	A2-A3 间采用最快速策略, 然后将 A3-A4 间运行时间减少 9.2 秒
A3	A3-A5 间采用最快速策略, 然后将 A5-A6 间运行时间减少 4.9 秒	将 A3-A4 间运行时间减少 10 秒
A4	A4-A6 间采用最快速策略, 然后将 A6-A7 间运行时间减少 2.1 秒	将 A4-A5 间运行时间减少 10 秒
A5	A5-A7 间采用最快速策略, 然后将 A7-A8 间运行时间减少 7.2 秒	将 A5-A6 间运行时间减少 10 秒
A6	A6-A9 间采用最快速策略, 然后将 A9-A10 间运行时间减少 5 秒	A6-A7 间采用最快速策略, 然后将 A7-A8 间运行时间减少 8.2 秒
A7	A7-A10 间采用最快速策略, 然后将 A10-A11 间运行时间减少 8 秒	A7-A8 间采用最快速策略, 然后将 A8-A9 间运行时间减少 9.8 秒
A8	A8-A11 间采用最快速策略, 然后将 A11-A12 间运行时间减少 4.3 秒	A8-A9 间采用最快速策略, 然后将 A9-A10 间运行时间减少 5.3 秒
A9	A9-A11 间采用最快速策略, 然后将 A11-A12 间运行时间减少 13.8 秒	A9-A10 间采用最快速策略, 然后将 A10-A11 间运行时间减少 14.6 秒
A10	A10-A12 间采用最快速策略, 然后将 A12-A13 间运行时间减少 4.6 秒	将 A10-A11 间运行时间减少 10 秒
A11	A11-A13 间采用最快速策略, 然后将 A13-A14 间运行时间减少 8.7 秒	将 A11-A12 间运行时间减少 10 秒
A12	A12-A14 间采用最快速策略	A12-A13 间采用最快速策略, 然后将 A13-A14 间运行时间减少 9.5 秒
A13	A13-A14 间采用最快速策略	将 A13-A14 间运行时间减少 10 秒

7 稳定性分析

在 4.2 的模型中, 我们将变加速运动看成了很多段匀变速运动的组合, 认为列车在每一小段时间内做匀变速运动, 下面验证时间间隔 Δt 的大小对计算结果的影响。

下面我们令 Δt 分别为 0.05s, 0.10s, 0.15s, 0.2s, 分别画出列车最节能的速度距离曲线, 如下图所示:

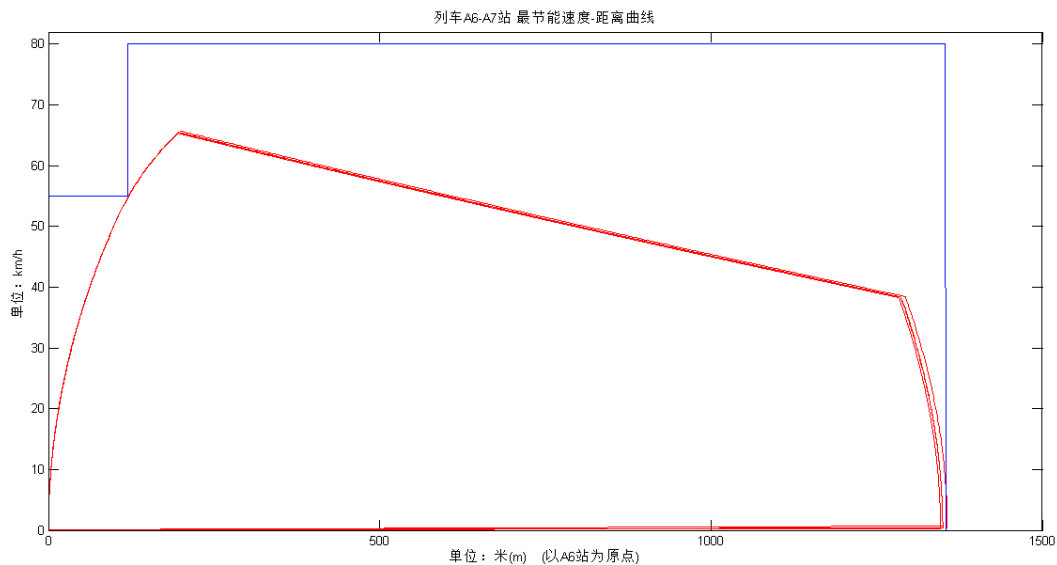


图 7-1 多种 Δt 条件下列车最节能的速度距离曲线

根据上图我们发现，四种情况下的速度距离曲线几乎是重合的，也就是说 Δt 的取值几乎不影响模型的稳定性。下面分别计算 Δt 的四种取值对应的发动机能耗：

表 7-1 四种 Δt 取值对应的发动机能耗表

Δt (s)	能耗(kJ)
0.05	35161
0.10	35479
0.15	35798
0.2	36118

同样的，我们令 Δt 分别为 0.05s, 0.10s, 0.15s, 0.2s, 分别画出列车在 A6 到 A8 之间运行最节能的速度距离曲线，如下图所示：

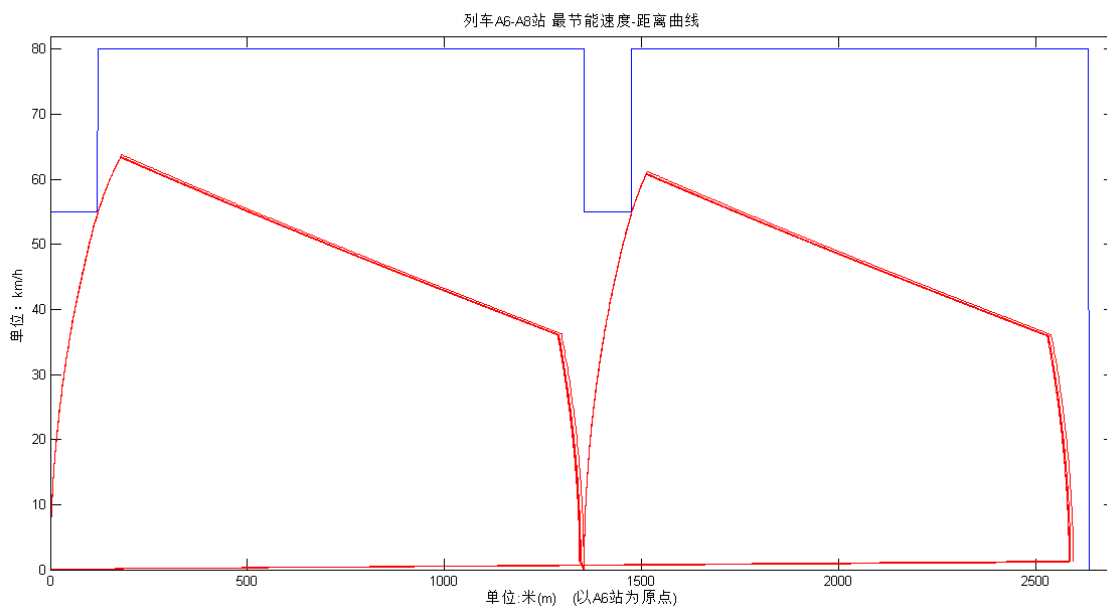


图 7-2 不同 Δt 取值下 A6 至 A8 运行最节能的速度距离曲线

根据上图我们发现，四种情况下的速度距离曲线几乎是重合的，也就是说 Δt 的取值也几乎不影响此模型的稳定性。下面分别计算 Δt 的四种取值对应的发动机能耗：

表 7-2 A6 至 A8 段四种 Δt 取值下对应的发动机能耗表

Δt (s)	能耗(kJ)
0.05	63153
0.10	63781
0.15	64040
0.2	65041

当 Δt 取值越小时，计算得到的结果越精确，因为列车是在变加速运动，而 Δt 取值越小，列车的运动越逼近匀变速运动。

根据上述的分析，我们可知本文提出的模型时较为稳定的，采用无限逼近的匀变速运动来近似计算变加速运动是合理可行的。

8 优缺点分析

◆ 优点

1. 在列车的运行过程中，将每一小段时间内的运动看作是匀变速运动，进而在较为准确的情况下简化了变加速运动的各种计算。根据稳定性分析可知，当时间区间的取值越小时，得到的结果越精确，且该模型的稳定性较好。

2. 在多列车节能运行优化控制中，充分考虑了安全距离对速度的限制，从而将问题分为高峰期和非高峰期的优化问题。在高峰时间主要考虑安全原则，在非高峰期主要考虑节能原则，从而综合考虑了多列车的节能问题和安全问题。

3. 在列车延误后运行优化控制问题中，我们引入了时间余量的概念，计算出了每段路程可进行调整的时间。对照每段路程的时间余量，我们可以很快对列车延误进行控制。

◆ 缺点

1. 在对最经济节能的列车运行方式的选择过程中，主要是通过查找资料得出的结论。而文献中的结论大多是根据学者经验所得，并没有严谨的证明过程。
2. 在多列车节能运行过程中，为了延长列车的形式时间，我们将停站时间设置为最小停站时间，降低了列车运行时刻表的鲁棒性，则当出现列车延误现象时，无法将列车的发车时间提前。

9 问题的进一步讨论

针对论文中没有考虑到的问题以及模型的缺点，在下一步研究中我们可以针对以下方面进行一定改进。

(1) 在选择最节能的运行方式过程中，应结合资料以及实际数据通过计算比较来得出最节能的运行策略，否则难以有强烈的说服力。

(2) 在初始建立模型时应充分考虑后期将会面对的情况，尽量保证运行时刻表具备一定的鲁棒性，以便在发生列车延误等不正常现象时列车能够较快恢复正常运行模式。

(3) 对于多列车节能优化运行过程中，考虑列车制动产生的能量能供同一电网中所有正在进行牵引运动的列车使用的情况，从而能得到更加精确的答案。

参考文献

- 【1】 丁力行, 包劲松, 陈宁, 刘广海. 《铁路客车空调负荷的非稳态计算方法研究》[J]. 中国铁道科学, 2003, 24 卷, 2 期, 19-23
- 【2】 方宇, 亮辉明, 杨检. 《上海城市轨道交通 2 号线车辆电阻制动能耗计算》m. 城市轨道交通研究, 2010, 13 卷, 8 期:25-27, 31
- 【3】 王自力. 列车节能运行优化操纵的研究[J]. 西南交通大学学报, 1994.
- 【4】 王峰, 刘海东, 丁勇, 等. 列车节能运行的算法及实施技术研究[J]. 北京交通大学学报, 2002, 26:13-18. DOI:doi:10.3969/j.issn.1673-0291.2002.05.003.
- 【5】 李坤妃. 多列车协同控制节能优化方法的研究[D]. 北京交通大学, 2014.
- 【6】 丁勇, 毛保华, 刘海东, 等. 列车节能运行模拟系统的研究[J]. 北京交通大学学报, 2004, 28:76-81. DOI:doi:10.3969/j.issn.1673-0291.2004.02.019.
- 【7】 崔恒斌, 冯晓云, 王青元, 等. 制动利用率对高速列车节能操纵策略的影响[J]. 铁道学报, 2012, 34:13-19. DOI:doi:10.3969/j.issn.1001-8360.2012.08.003.
- 【8】 刘剑锋, 丁勇, 刘海冬, 等. 城市轨道交通多列车运行模拟系统研究[J]. 交通运输系统工程与信息, 2005, 5(1):79-82. DOI:doi:10.3969/j.issn.1009-6744.2005.01.015.
- 【9】 付印平, 李克平. 列车运行节能操纵优化方法研究[J]. 科学技术与工程, 2009, 9:1337-1340. DOI:doi:10.3969/j.issn.1671-1815.2009.05.060.
- 【10】 刘海东, 毛保华, 丁勇, 等. 城市轨道交通列车节能问题及方案研究[J]. 交通运输系统工程与信息, 2007, 7(5):68-73. DOI:doi:10.3969/j.issn.1009-6744.2007.05.012.
- 【11】 insistGoGo, 背包问题九讲笔记_完全背包,
<http://blog.csdn.net/insistgogo/article/details/11081025>, 20150922.
- 【12】 付印平. 列车追踪运行与节能优化建模及模拟研究[D]. 北京交通大学, 2009.
DOI:doi:10.7666/d.y1578633.
- 【13】 刘莉, 王长林. 城市轨道交通列车运行调整的粒子群算法研究[J]. 铁路计算机应用, 2013, 22:62-64. DOI:doi:10.3969/j.issn.1005-8451.2013.06.017.
- 【14】 张少波. 基于停站时间模型的列车运行图生成及延迟分析[D]. 北京交通大学, 2014.
- 【15】 毛楚楚. 城轨列车运行延迟调整的若干问题研究[D]. 北京交通大学, 2014
- 【16】 许红, 龙建成, 杨浩. 城市铁路列车运行优化理论和方法的研究[C]// 可持续发展的中国交通——2005 全国博士生学术论坛(交通运输工程学科)论文集(上册) 2005.

附录

附录中包含问题一中的两个 excel 表格数据以及论文中所涉及到的程序代码。

下表为问题一中第（1）问的数据：

时刻 (hh:mm:ss)	实际速度 (cm/s)	实际速度 (km/h)	计算加速 度(m/s ²)	计算距离 (m)	计算公里 标(m)	当前坡度 (‰)	计算牵引 力(N)	计算牵引 功率(Kw)
00:00:01	100.0	3.6	1.00	0.5	13593.5	0	203.0	166.5
00:00:02	200.0	7.2	1.00	2.0	13592.0	0	203.0	369.5
00:00:03	300.0	10.8	1.00	4.5	13589.5	0	203.0	572.5
00:00:04	400.0	14.4	1.00	8.0	13586.0	0	203.0	775.5
00:00:05	500.0	18.0	1.00	12.5	13581.5	0	203.0	978.5
00:00:06	600.0	21.6	1.00	18.0	13576.0	0	203.0	1181.5
00:00:07	700.0	25.2	1.00	24.5	13569.5	0	203.0	1384.5
00:00:08	799.6	28.8	0.99	32.0	13562.0	0	203.0	1586.9
00:00:09	898.6	32.4	0.99	40.5	13553.5	0	203.0	1788.1
00:00:10	997.0	35.9	0.98	50.0	13544.0	0	203.0	1988.1
00:00:11	1094.8	39.4	0.97	60.4	13533.6	0	203.0	2186.8
00:00:12	1191.8	42.9	0.97	71.9	13522.1	0	203.0	2384.1
00:00:13	1288.2	46.4	0.96	84.3	13509.7	0	203.0	2579.9
00:00:14	1383.7	49.8	0.95	97.6	13496.4	0	203.0	2774.1
00:00:15	1477.3	53.2	0.88	111.9	13482.1	0	190.6	2934.1
00:00:16	1560.6	56.2	0.77	127.1	13466.9	0	171.2	2781.5
00:00:17	1634.2	58.8	0.69	143.1	13450.9	0	156.3	2643.6
00:00:18	1700.2	61.2	0.62	159.8	13434.2	0	144.6	2531.7
00:00:19	1760.0	63.4	0.57	177.1	13416.9	0	135.1	2439.8
00:00:20	1814.7	65.3	0.52	195.0	13399.0	0	127.3	2363.3
00:00:21	1814.2	65.3	-0.14	213.2	13380.8	0	0.0	0.0
00:00:22	1800.7	64.8	-0.13	231.2	13362.8	0	0.0	0.0
00:00:23	1787.4	64.3	-0.13	249.2	13344.8	0	0.0	0.0
00:00:24	1774.2	63.9	-0.13	267.0	13327.0	0	0.0	0.0
00:00:25	1761.2	63.4	-0.13	284.7	13309.3	0	0.0	0.0
00:00:26	1748.2	62.9	-0.13	302.2	13291.8	0	0.0	0.0
00:00:27	1735.5	62.5	-0.13	319.6	13274.4	1.8	0.0	0.0
00:00:28	1722.8	62.0	-0.13	336.9	13257.1	1.8	0.0	0.0
00:00:29	1710.3	61.6	-0.12	354.1	13239.9	1.8	0.0	0.0
00:00:30	1697.9	61.1	-0.12	371.1	13222.9	1.8	0.0	0.0
00:00:31	1685.6	60.7	-0.12	388.0	13206.0	1.8	0.0	0.0
00:00:32	1673.4	60.2	-0.12	404.8	13189.2	1.8	0.0	0.0
00:00:33	1661.4	59.8	-0.12	421.5	13172.5	1.8	0.0	0.0
00:00:34	1649.4	59.4	-0.12	438.1	13155.9	1.8	0.0	0.0

00:00:35	1637.6	59.0	-0.12	454.5	13139.5	1.8	0.0	0.0
00:00:36	1625.9	58.5	-0.12	470.8	13123.2	1.8	0.0	0.0
00:00:37	1614.4	58.1	-0.12	487.0	13107.0	1.8	0.0	0.0
00:00:38	1602.9	57.7	-0.11	503.1	13090.9	1.8	0.0	0.0
00:00:39	1591.5	57.3	-0.11	519.1	13074.9	1.8	0.0	0.0
00:00:40	1580.3	56.9	-0.11	534.9	13059.1	1.8	0.0	0.0
00:00:41	1569.1	56.5	-0.11	550.7	13043.3	1.8	0.0	0.0
00:00:42	1558.1	56.1	-0.11	566.3	13027.7	1.8	0.0	0.0
00:00:43	1547.1	55.7	-0.11	581.9	13012.1	1.8	0.0	0.0
00:00:44	1536.3	55.3	-0.11	597.3	12996.7	1.8	0.0	0.0
00:00:45	1525.6	54.9	-0.11	612.6	12981.4	1.8	0.0	0.0
00:00:46	1514.9	54.5	-0.11	627.8	12966.2	1.8	0.0	0.0
00:00:47	1504.4	54.2	-0.10	642.9	12951.1	1.8	0.0	0.0
00:00:48	1493.9	53.8	-0.10	657.9	12936.1	1.8	0.0	0.0
00:00:49	1483.6	53.4	-0.10	672.8	12921.2	1.8	0.0	0.0
00:00:50	1473.3	53.0	-0.10	687.5	12906.5	-3.5	0.0	0.0
00:00:51	1463.2	52.7	-0.10	702.2	12891.8	-3.5	0.0	0.0
00:00:52	1453.1	52.3	-0.10	716.8	12877.2	-3.5	0.0	0.0
00:00:53	1443.1	52.0	-0.10	731.3	12862.7	-3.5	0.0	0.0
00:00:54	1433.2	51.6	-0.10	745.7	12848.3	-3.5	0.0	0.0
00:00:55	1423.4	51.2	-0.10	759.9	12834.1	-3.5	0.0	0.0
00:00:56	1413.6	50.9	-0.10	774.1	12819.9	-3.5	0.0	0.0
00:00:57	1404.0	50.5	-0.10	788.2	12805.8	-3.5	0.0	0.0
00:00:58	1394.4	50.2	-0.10	802.2	12791.8	-3.5	0.0	0.0
00:00:59	1385.0	49.9	-0.09	816.1	12777.9	-3.5	0.0	0.0
00:01:00	1375.6	49.5	-0.09	829.9	12764.1	-3.5	0.0	0.0
00:01:01	1366.2	49.2	-0.09	843.6	12750.4	-3.5	0.0	0.0
00:01:02	1357.0	48.9	-0.09	857.2	12736.8	-3.5	0.0	0.0
00:01:03	1347.8	48.5	-0.09	870.8	12723.2	-3.5	0.0	0.0
00:01:04	1338.7	48.2	-0.09	884.2	12709.8	-3.5	0.0	0.0
00:01:05	1329.7	47.9	-0.09	897.5	12696.5	-3.5	0.0	0.0
00:01:06	1320.8	47.5	-0.09	910.8	12683.2	-3.5	0.0	0.0
00:01:07	1311.9	47.2	-0.09	924.0	12670.0	-3.5	0.0	0.0
00:01:08	1303.1	46.9	-0.09	937.0	12657.0	-3.5	0.0	0.0
00:01:09	1294.4	46.6	-0.09	950.0	12644.0	-3.5	0.0	0.0
00:01:10	1285.8	46.3	-0.09	962.9	12631.1	-3.5	0.0	0.0
00:01:11	1277.2	46.0	-0.09	975.7	12618.3	-3.5	0.0	0.0
00:01:12	1268.7	45.7	-0.08	988.5	12605.5	-3.5	0.0	0.0
00:01:13	1260.2	45.4	-0.08	1001.1	12592.9	-3.5	0.0	0.0
00:01:14	1251.9	45.1	-0.08	1013.7	12580.3	-3.5	0.0	0.0
00:01:15	1243.6	44.8	-0.08	1026.1	12567.9	-3.5	0.0	0.0

00:01:16	1235.3	44.5	-0.08	1038.5	12555.5	-3.5	0.0	0.0
00:01:17	1227.1	44.2	-0.08	1050.9	12543.1	-3.5	0.0	0.0
00:01:18	1219.0	43.9	-0.08	1063.1	12530.9	-3.5	0.0	0.0
00:01:19	1211.0	43.6	-0.08	1075.2	12518.8	-3.5	0.0	0.0
00:01:20	1203.0	43.3	-0.08	1087.3	12506.7	-3.5	0.0	0.0
00:01:21	1195.1	43.0	-0.08	1099.3	12494.7	-3.5	0.0	0.0
00:01:22	1187.2	42.7	-0.08	1111.2	12482.8	-3.5	0.0	0.0
00:01:23	1179.4	42.5	-0.08	1123.0	12471.0	-3.5	0.0	0.0
00:01:24	1171.6	42.2	-0.08	1134.8	12459.2	-3.5	0.0	0.0
00:01:25	1164.0	41.9	-0.08	1146.5	12447.5	-3.5	0.0	0.0
00:01:26	1156.3	41.6	-0.08	1158.1	12435.9	-3.5	0.0	0.0
00:01:27	1148.8	41.4	-0.08	1169.6	12424.4	-3.5	0.0	0.0
00:01:28	1141.2	41.1	-0.07	1181.0	12413.0	-3.5	0.0	0.0
00:01:29	1133.8	40.8	-0.07	1192.4	12401.6	-3.5	0.0	0.0
00:01:30	1126.4	40.5	-0.07	1203.7	12390.3	-3.5	0.0	0.0
00:01:31	1119.0	40.3	-0.07	1214.9	12379.1	-3.5	0.0	0.0
00:01:32	1111.7	40.0	-0.07	1226.1	12367.9	-3.5	0.0	0.0
00:01:33	1104.5	39.8	-0.07	1237.2	12356.8	-3.5	0.0	0.0
00:01:34	1097.3	39.5	-0.07	1248.2	12345.8	-3.5	0.0	0.0
00:01:35	1090.1	39.2	-0.07	1259.1	12334.9	-3.5	0.0	0.0
00:01:36	1083.0	39.0	-0.07	1270.0	12324.0	-3.5	0.0	0.0
00:01:37	1076.0	38.7	-0.07	1280.8	12313.2	-3.5	0.0	0.0
00:01:38	1069.0	38.5	-0.07	1291.5	12302.5	-3.5	0.0	0.0
00:01:39	993.9	35.8	-0.92	1301.9	12292.1	-3.5	0.0	0.0
00:01:40	902.2	32.5	-0.91	1311.4	12282.6	0	0.0	0.0
00:01:41	811.2	29.2	-0.91	1319.9	12274.1	0	0.0	0.0
00:01:42	720.7	25.9	-0.90	1327.6	12266.4	0	0.0	0.0
00:01:43	630.7	22.7	-0.90	1334.4	12259.6	0	0.0	0.0
00:01:44	541.1	19.5	-0.89	1340.2	12253.8	0	0.0	0.0
00:01:45	452.0	16.3	-0.89	1345.2	12248.8	0	0.0	0.0
00:01:46	363.3	13.1	-0.89	1349.3	12244.7	0	0.0	0.0
00:01:47	274.9	9.9	-0.88	1350.4	12243.6	0	0.0	0.0
00:01:48	186.8	6.7	-0.88	1351.9	12242.1	0	0.0	0.0
00:01:49	99.0	3.6	-0.88	1353.2	12240.8	0	0.0	0.0
00:01:50	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0	0.0	0.0

下表为问题一中第二小问的数据。

时刻 (hh:mm:ss)	实际速度 (cm/s)	实际速度 (km/h)	计算加速 度(m/s ²)	计算距离 (m)	计算公里 标(m)	当前坡度 (%)	计算牵引 力(N)	计算牵引 功率(Kw)
00:00:01	80.0	2.9	1.00	0.3	13593.7	0.0	203.0	166.5
00:00:02	180.0	6.5	1.00	1.6	13592.4	0.0	203.0	369.5
00:00:03	280.0	10.1	1.00	3.9	13590.1	0.0	203.0	572.5
00:00:04	380.0	13.7	1.00	7.2	13586.8	0.0	203.0	775.5
00:00:05	480.0	17.3	1.00	11.5	13582.5	0.0	203.0	978.5
00:00:06	580.0	20.9	1.00	16.8	13577.2	0.0	203.0	1181.5
00:00:07	680.0	24.5	1.00	23.1	13570.9	0.0	203.0	1384.5
00:00:08	779.7	28.1	0.99	30.4	13563.6	0.0	203.0	1586.9
00:00:09	878.9	31.6	0.99	38.7	13555.3	0.0	203.0	1788.1
00:00:10	977.4	35.2	0.98	48.0	13546.0	0.0	203.0	1988.1
00:00:11	1075.3	38.7	0.97	58.3	13535.7	0.0	203.0	2186.8
00:00:12	1172.5	42.2	0.97	69.5	13524.5	0.0	203.0	2384.1
00:00:13	1268.9	45.7	0.96	81.7	13512.3	0.0	203.0	2579.9
00:00:14	1364.6	49.1	0.95	94.9	13499.1	0.0	203.0	2774.1
00:00:15	1459.2	52.5	0.90	109.0	13485.0	0.0	195.2	2934.1
00:00:16	1544.8	55.6	0.79	124.0	13470.0	0.0	174.6	2781.5
00:00:17	1620.2	58.3	0.70	139.9	13454.1	0.0	159.0	2643.6
00:00:18	1687.5	60.8	0.63	156.4	13437.6	0.0	146.7	2531.7
00:00:19	1748.5	62.9	0.58	173.6	13420.4	0.0	136.9	2439.8
00:00:20	1749.6	63.0	-0.13	191.1	13402.9	0.0	0.0	0.0
00:00:21	1736.8	62.5	-0.13	208.6	13385.4	0.0	0.0	0.0
00:00:22	1724.2	62.1	-0.13	225.9	13368.1	0.0	0.0	0.0
00:00:23	1711.6	61.6	-0.12	243.0	13351.0	0.0	0.0	0.0
00:00:24	1699.2	61.2	-0.12	260.1	13333.9	0.0	0.0	0.0
00:00:25	1686.9	60.7	-0.12	277.0	13317.0	0.0	0.0	0.0
00:00:26	1674.7	60.3	-0.12	293.8	13300.2	0.0	0.0	0.0
00:00:27	1662.7	59.9	-0.12	310.5	13283.5	1.8	0.0	0.0
00:00:28	1650.7	59.4	-0.12	327.1	13266.9	1.8	0.0	0.0
00:00:29	1638.9	59.0	-0.12	343.5	13250.5	1.8	0.0	0.0
00:00:30	1627.2	58.6	-0.12	359.9	13234.1	1.8	0.0	0.0
00:00:31	1615.6	58.2	-0.12	376.1	13217.9	1.8	0.0	0.0
00:00:32	1604.1	57.7	-0.11	392.2	13201.8	1.8	0.0	0.0
00:00:33	1592.8	57.3	-0.11	408.2	13185.8	1.8	0.0	0.0
00:00:34	1581.5	56.9	-0.11	424.0	13170.0	1.8	0.0	0.0
00:00:35	1570.3	56.5	-0.11	439.8	13154.2	1.8	0.0	0.0
00:00:36	1559.3	56.1	-0.11	455.5	13138.5	1.8	0.0	0.0
00:00:37	1548.3	55.7	-0.11	471.0	13123.0	1.8	0.0	0.0
00:00:38	1537.5	55.3	-0.11	486.4	13107.6	1.8	0.0	0.0

00:00:39	1526.7	55.0	-0.11	501.7	13092.3	1.8	0.0	0.0
00:00:40	1516.1	54.6	-0.11	517.0	13077.0	1.8	0.0	0.0
00:00:41	1505.5	54.2	-0.10	532.1	13061.9	1.8	0.0	0.0
00:00:42	1495.1	53.8	-0.10	547.1	13046.9	1.8	0.0	0.0
00:00:43	1484.7	53.4	-0.10	562.0	13032.0	1.8	0.0	0.0
00:00:44	1474.4	53.1	-0.10	576.8	13017.2	1.8	0.0	0.0
00:00:45	1464.3	52.7	-0.10	591.5	13002.5	1.8	0.0	0.0
00:00:46	1454.2	52.4	-0.10	606.0	12988.0	1.8	0.0	0.0
00:00:47	1444.2	52.0	-0.10	620.5	12973.5	1.8	0.0	0.0
00:00:48	1434.3	51.6	-0.10	634.9	12959.1	1.8	0.0	0.0
00:00:49	1424.4	51.3	-0.10	649.2	12944.8	1.8	0.0	0.0
00:00:50	1414.7	50.9	-0.10	663.4	12930.6	1.8	0.0	0.0
00:00:51	1405.0	50.6	-0.10	677.5	12916.5	1.8	0.0	0.0
00:00:52	1395.5	50.2	-0.10	691.5	12902.5	-3.5	0.0	0.0
00:00:53	1386.0	49.9	-0.09	705.4	12888.6	-3.5	0.0	0.0
00:00:54	1376.6	49.6	-0.09	719.2	12874.8	-3.5	0.0	0.0
00:00:55	1367.2	49.2	-0.09	733.0	12861.0	-3.5	0.0	0.0
00:00:56	1358.0	48.9	-0.09	746.6	12847.4	-3.5	0.0	0.0
00:00:57	1348.8	48.6	-0.09	760.1	12833.9	-3.5	0.0	0.0
00:00:58	1339.7	48.2	-0.09	773.6	12820.4	-3.5	0.0	0.0
00:00:59	1330.7	47.9	-0.09	786.9	12807.1	-3.5	0.0	0.0
00:01:00	1321.8	47.6	-0.09	800.2	12793.8	-3.5	0.0	0.0
00:01:01	1312.9	47.3	-0.09	813.3	12780.7	-3.5	0.0	0.0
00:01:02	1304.1	46.9	-0.09	826.4	12767.6	-3.5	0.0	0.0
00:01:03	1295.4	46.6	-0.09	839.4	12754.6	-3.5	0.0	0.0
00:01:04	1286.7	46.3	-0.09	852.3	12741.7	-3.5	0.0	0.0
00:01:05	1278.1	46.0	-0.09	865.2	12728.8	-3.5	0.0	0.0
00:01:06	1269.6	45.7	-0.08	877.9	12716.1	-3.5	0.0	0.0
00:01:07	1261.2	45.4	-0.08	890.6	12703.4	-3.5	0.0	0.0
00:01:08	1252.8	45.1	-0.08	903.1	12690.9	-3.5	0.0	0.0
00:01:09	1244.5	44.8	-0.08	915.6	12678.4	-3.5	0.0	0.0
00:01:10	1236.2	44.5	-0.08	928.0	12666.0	-3.5	0.0	0.0
00:01:11	1228.0	44.2	-0.08	940.3	12653.7	-3.5	0.0	0.0
00:01:12	1219.9	43.9	-0.08	952.6	12641.4	-3.5	0.0	0.0
00:01:13	1211.9	43.6	-0.08	964.7	12629.3	-3.5	0.0	0.0
00:01:14	1203.9	43.3	-0.08	976.8	12617.2	-3.5	0.0	0.0
00:01:15	1195.9	43.1	-0.08	988.8	12605.2	-3.5	0.0	0.0
00:01:16	1188.1	42.8	-0.08	1000.7	12593.3	-3.5	0.0	0.0
00:01:17	1180.2	42.5	-0.08	1012.6	12581.4	-3.5	0.0	0.0
00:01:18	1172.5	42.2	-0.08	1024.3	12569.7	-3.5	0.0	0.0
00:01:19	1164.8	41.9	-0.08	1036.0	12558.0	-3.5	0.0	0.0

00:01:20	1157.2	41.7	-0.08	1047.6	12546.4	-3.5	0.0	0.0
00:01:21	1149.6	41.4	-0.08	1059.2	12534.8	-3.5	0.0	0.0
00:01:22	1142.1	41.1	-0.07	1070.6	12523.4	-3.5	0.0	0.0
00:01:23	1134.6	40.8	-0.07	1082.0	12512.0	-3.5	0.0	0.0
00:01:24	1127.2	40.6	-0.07	1093.3	12500.7	-3.5	0.0	0.0
00:01:25	1119.8	40.3	-0.07	1104.6	12489.4	-3.5	0.0	0.0
00:01:26	1112.5	40.1	-0.07	1115.7	12478.3	-3.5	0.0	0.0
00:01:27	1105.3	39.8	-0.07	1126.8	12467.2	-3.5	0.0	0.0
00:01:28	1098.1	39.5	-0.07	1137.8	12456.2	-3.5	0.0	0.0
00:01:29	1090.9	39.3	-0.07	1148.8	12445.2	-3.5	0.0	0.0
00:01:30	1083.8	39.0	-0.07	1159.6	12434.4	-3.5	0.0	0.0
00:01:31	1076.8	38.8	-0.07	1170.4	12423.6	-3.5	0.0	0.0
00:01:32	1069.8	38.5	-0.07	1181.2	12412.8	-3.5	0.0	0.0
00:01:33	1062.8	38.3	-0.07	1191.8	12402.2	-3.5	0.0	0.0
00:01:34	1055.9	38.0	-0.07	1202.4	12391.6	-3.5	0.0	0.0
00:01:35	1049.1	37.8	-0.07	1213.0	12381.0	-3.5	0.0	0.0
00:01:36	1042.3	37.5	-0.07	1223.4	12370.6	-3.5	0.0	0.0
00:01:37	1035.5	37.3	-0.07	1233.8	12360.2	-3.5	0.0	0.0
00:01:38	1028.8	37.0	-0.07	1244.1	12349.9	-3.5	0.0	0.0
00:01:39	1022.2	36.8	-0.07	1254.4	12339.6	-3.5	0.0	0.0
00:01:40	1015.6	36.6	-0.07	1264.6	12329.4	-3.5	0.0	0.0
00:01:41	1009.0	36.3	-0.07	1274.7	12319.3	-3.5	0.0	0.0
00:01:42	1002.5	36.1	-0.06	1284.7	12309.3	-3.5	0.0	0.0
00:01:43	927.8	33.4	-0.91	1294.5	12299.5	-3.5	0.0	0.0
00:01:44	836.6	30.1	-0.91	1303.3	12290.7	-3.5	0.0	0.0
00:01:45	745.9	26.9	-0.90	1311.2	12282.8	0.0	0.0	0.0
00:01:46	655.8	23.6	-0.90	1318.2	12275.8	0.0	0.0	0.0
00:01:47	566.1	20.4	-0.89	1324.3	12269.7	0.0	0.0	0.0
00:01:48	476.9	17.2	-0.89	1329.5	12264.5	0.0	0.0	0.0
00:01:49	388.0	14.0	-0.89	1333.9	12260.1	0.0	0.0	0.0
00:01:50	299.5	10.8	-0.88	1337.3	12256.7	0.0	0.0	0.0
00:01:51	211.4	7.6	-0.88	1339.8	12254.2	0.0	0.0	0.0
00:01:52	123.5	4.4	-0.88	1341.5	12252.5	0.0	0.0	0.0
00:01:53	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:01:54	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:01:55	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:01:56	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:01:57	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:01:58	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:01:59	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:00	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0

00:02:01	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:02	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:03	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:04	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:05	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:06	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:07	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:08	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:09	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:10	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:11	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:12	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:13	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:14	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:15	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:16	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:17	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:18	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:19	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:20	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:21	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:22	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:23	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:24	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:25	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:26	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:27	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:28	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:29	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:30	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:31	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:32	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:33	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:34	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:35	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:36	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:37	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:38	0.0	0.0	0.00	1354.0	12240.0	0.0	0.0	0.0
00:02:39	80.0	2.9	1.00	1354.3	12239.7	0.0	203.0	166.5
00:02:40	180.0	6.5	1.00	1355.6	12238.4	0.0	203.0	369.5
00:02:41	280.0	10.1	1.00	1357.9	12236.1	0.0	203.0	572.5

00:02:42	380.0	13.7	1.00	1361.2	12232.8	0.0	203.0	775.5
00:02:43	480.0	17.3	1.00	1365.5	12228.5	0.0	203.0	978.5
00:02:44	580.0	20.9	1.00	1370.8	12223.2	0.0	203.0	1181.5
00:02:45	680.0	24.5	1.00	1377.1	12216.9	0.0	203.0	1384.5
00:02:46	779.7	28.1	0.99	1384.4	12209.6	0.0	203.0	1586.9
00:02:47	878.9	31.6	0.99	1392.7	12201.3	0.0	203.0	1788.1
00:02:48	977.4	35.2	0.98	1402.0	12192.0	0.0	203.0	1988.1
00:02:49	1075.3	38.7	0.97	1412.3	12181.7	0.0	203.0	2186.8
00:02:50	1172.5	42.2	0.97	1423.5	12170.5	0.0	203.0	2384.1
00:02:51	1268.9	45.7	0.96	1435.7	12158.3	0.0	203.0	2579.9
00:02:52	1364.6	49.1	0.95	1448.9	12145.1	0.0	203.0	2774.1
00:02:53	1459.2	52.5	0.90	1463.0	12131.0	0.0	195.2	2934.1
00:02:54	1544.8	55.6	0.79	1478.0	12116.0	0.0	174.6	2781.5
00:02:55	1620.2	58.3	0.70	1493.9	12100.1	0.0	159.0	2643.6
00:02:56	1687.5	60.8	0.63	1510.4	12083.6	0.0	146.7	2531.7
00:02:57	1690.3	60.9	-0.12	1527.4	12066.6	0.0	0.0	0.0
00:02:58	1678.1	60.4	-0.12	1544.2	12049.8	0.0	0.0	0.0
00:02:59	1666.0	60.0	-0.12	1560.9	12033.1	0.0	0.0	0.0
00:03:00	1654.1	59.5	-0.12	1577.5	12016.5	0.0	0.0	0.0
00:03:01	1642.2	59.1	-0.12	1594.0	12000.0	0.0	0.0	0.0
00:03:02	1630.5	58.7	-0.12	1610.4	11983.6	3.0	0.0	0.0
00:03:03	1618.9	58.3	-0.12	1626.6	11967.4	3.0	0.0	0.0
00:03:04	1607.3	57.9	-0.11	1642.7	11951.3	3.0	0.0	0.0
00:03:05	1595.9	57.5	-0.11	1658.8	11935.2	3.0	0.0	0.0
00:03:06	1584.6	57.0	-0.11	1674.7	11919.3	3.0	0.0	0.0
00:03:07	1573.5	56.6	-0.11	1690.4	11903.6	3.0	0.0	0.0
00:03:08	1562.4	56.2	-0.11	1706.1	11887.9	3.0	0.0	0.0
00:03:09	1551.4	55.9	-0.11	1721.7	11872.3	3.0	0.0	0.0
00:03:10	1540.5	55.5	-0.11	1737.2	11856.8	3.0	0.0	0.0
00:03:11	1529.7	55.1	-0.11	1752.5	11841.5	3.0	0.0	0.0
00:03:12	1519.1	54.7	-0.11	1767.7	11826.3	3.0	0.0	0.0
00:03:13	1508.5	54.3	-0.11	1782.9	11811.1	3.0	0.0	0.0
00:03:14	1498.0	53.9	-0.10	1797.9	11796.1	3.0	0.0	0.0
00:03:15	1487.6	53.6	-0.10	1812.8	11781.2	3.0	0.0	0.0
00:03:16	1477.3	53.2	-0.10	1827.7	11766.3	3.0	0.0	0.0
00:03:17	1467.1	52.8	-0.10	1842.4	11751.6	3.0	0.0	0.0
00:03:18	1457.0	52.5	-0.10	1857.0	11737.0	3.0	0.0	0.0
00:03:19	1447.0	52.1	-0.10	1871.5	11722.5	3.0	0.0	0.0
00:03:20	1437.0	51.7	-0.10	1886.0	11708.0	3.0	0.0	0.0
00:03:21	1427.2	51.4	-0.10	1900.3	11693.7	3.0	0.0	0.0
00:03:22	1417.4	51.0	-0.10	1914.5	11679.5	3.0	0.0	0.0

00:03:23	1407.7	50.7	-0.10	1928.6	11665.4	3.0	0.0	0.0
00:03:24	1398.1	50.3	-0.10	1942.7	11651.3	3.0	0.0	0.0
00:03:25	1388.6	50.0	-0.09	1956.6	11637.4	3.0	0.0	0.0
00:03:26	1379.2	49.7	-0.09	1970.4	11623.6	3.0	0.0	0.0
00:03:27	1369.9	49.3	-0.09	1984.2	11609.8	3.0	0.0	0.0
00:03:28	1360.6	49.0	-0.09	1997.8	11596.2	-2.0	0.0	0.0
00:03:29	1351.4	48.7	-0.09	2011.4	11582.6	-2.0	0.0	0.0
00:03:30	1342.3	48.3	-0.09	2024.9	11569.1	-2.0	0.0	0.0
00:03:31	1333.2	48.0	-0.09	2038.2	11555.8	-2.0	0.0	0.0
00:03:32	1324.3	47.7	-0.09	2051.5	11542.5	-2.0	0.0	0.0
00:03:33	1315.4	47.4	-0.09	2064.7	11529.3	-2.0	0.0	0.0
00:03:34	1306.6	47.0	-0.09	2077.8	11516.2	-2.0	0.0	0.0
00:03:35	1297.8	46.7	-0.09	2090.8	11503.2	-2.0	0.0	0.0
00:03:36	1289.1	46.4	-0.09	2103.8	11490.2	-2.0	0.0	0.0
00:03:37	1280.5	46.1	-0.09	2116.6	11477.4	-2.0	0.0	0.0
00:03:38	1272.0	45.8	-0.08	2129.4	11464.6	-2.0	0.0	0.0
00:03:39	1263.5	45.5	-0.08	2142.1	11451.9	-2.0	0.0	0.0
00:03:40	1255.1	45.2	-0.08	2154.7	11439.3	-2.0	0.0	0.0
00:03:41	1246.8	44.9	-0.08	2167.2	11426.8	-2.0	0.0	0.0
00:03:42	1238.5	44.6	-0.08	2179.6	11414.4	-2.0	0.0	0.0
00:03:43	1230.3	44.3	-0.08	2191.9	11402.1	-2.0	0.0	0.0
00:03:44	1222.2	44.0	-0.08	2204.2	11389.8	-2.0	0.0	0.0
00:03:45	1214.1	43.7	-0.08	2216.4	11377.6	-2.0	0.0	0.0
00:03:46	1206.1	43.4	-0.08	2228.5	11365.5	-2.0	0.0	0.0
00:03:47	1198.1	43.1	-0.08	2240.5	11353.5	-2.0	0.0	0.0
00:03:48	1190.3	42.8	-0.08	2252.5	11341.5	-2.0	0.0	0.0
00:03:49	1182.4	42.6	-0.08	2264.3	11329.7	-2.0	0.0	0.0
00:03:50	1174.7	42.3	-0.08	2276.1	11317.9	-2.0	0.0	0.0
00:03:51	1166.9	42.0	-0.08	2287.8	11306.2	-2.0	0.0	0.0
00:03:52	1159.3	41.7	-0.08	2299.4	11294.6	-2.0	0.0	0.0
00:03:53	1151.7	41.5	-0.08	2311.0	11283.0	-2.0	0.0	0.0
00:03:54	1144.2	41.2	-0.08	2322.5	11271.5	-2.0	0.0	0.0
00:03:55	1136.7	40.9	-0.07	2333.9	11260.1	-2.0	0.0	0.0
00:03:56	1129.2	40.7	-0.07	2345.2	11248.8	-2.0	0.0	0.0
00:03:57	1121.9	40.4	-0.07	2356.5	11237.5	-2.0	0.0	0.0
00:03:58	1114.5	40.1	-0.07	2367.6	11226.4	-2.0	0.0	0.0
00:03:59	1107.3	39.9	-0.07	2378.8	11215.2	-2.0	0.0	0.0
00:04:00	1100.1	39.6	-0.07	2389.8	11204.2	-2.0	0.0	0.0
00:04:01	1092.9	39.3	-0.07	2400.8	11193.2	-2.0	0.0	0.0
00:04:02	1085.8	39.1	-0.07	2411.6	11182.4	-2.0	0.0	0.0
00:04:03	1078.7	38.8	-0.07	2422.5	11171.5	-2.0	0.0	0.0

00:04:04	1071.7	38.6	-0.07	2433.2	11160.8	-2.0	0.0	0.0
00:04:05	1064.8	38.3	-0.07	2443.9	11150.1	-2.0	0.0	0.0
00:04:06	1057.9	38.1	-0.07	2454.5	11139.5	-2.0	0.0	0.0
00:04:07	1051.0	37.8	-0.07	2465.1	11128.9	-2.0	0.0	0.0
00:04:08	1044.2	37.6	-0.07	2475.5	11118.5	-2.0	0.0	0.0
00:04:09	1037.4	37.3	-0.07	2485.9	11108.1	-2.0	0.0	0.0
00:04:10	1030.7	37.1	-0.07	2496.3	11097.7	-2.0	0.0	0.0
00:04:11	1024.0	36.9	-0.07	2506.6	11087.4	-2.0	0.0	0.0
00:04:12	1017.4	36.6	-0.07	2516.8	11077.2	-2.0	0.0	0.0
00:04:13	1010.8	36.4	-0.07	2526.9	11067.1	-2.0	0.0	0.0
00:04:14	1004.3	36.2	-0.07	2537.0	11057.0	-2.0	0.0	0.0
00:04:15	929.6	33.5	-0.91	2546.7	11047.3	-2.0	0.0	0.0
00:04:16	838.4	30.2	-0.91	2555.6	11038.4	0.0	0.0	0.0
00:04:17	747.7	26.9	-0.90	2565.5	11028.5	0.0	0.0	0.0
00:04:18	657.6	23.7	-0.90	2575.5	11018.5	0.0	0.0	0.0
00:04:19	567.9	20.4	-0.89	2584.6	11009.4	0.0	0.0	0.0
00:04:20	478.6	17.2	-0.89	2593.9	11000.1	0.0	0.0	0.0
00:04:21	389.8	14.0	-0.89	2603.2	10990.8	0.0	0.0	0.0
00:04:22	301.3	10.8	-0.88	2513.7	11080.3	0.0	0.0	0.0
00:04:23	213.1	7.7	-0.88	2627.3	10966.7	0.0	0.0	0.0
00:04:24	97.4	3.5	-0.88	2630.9	10963.1	0.0	0.0	0.0
00:04:25	0.0	0.0	0.00	2634.0	10960.0	0.0	0.0	0.0

单列车节能优化控制算法：

```

a=2.031; b=0.0622; c=0.001807;g=9.8; m=194295;
v=0; l=0; w=0; t1=0.2; i=1;
vv=zeros(1,551); ll=zeros(1,551);
for t=0.2:t1:20
    if(v<51.5)
        F=203;
    else
        F=-0.002032*v^3+0.4928*v^2-42.13*v+1343;
    end
    w0=a+b*v+c*v^2;
    aa=(F*1000-w0*g*m/1000)/m;
    if(aa>1)
        aa=1;
    elseif(aa<-1)
        aa=-1;
    end
    vv(i)=v; ll(i)=l;
    v=v+aa*t1; l=l+v*t1;
    i=i+1;
end

```

```

end
vvv(i)=v;lll(i)=l;
l=l+v*t1/3.6+0.5*aa*t1*t1;
v=v+aa*3.6*t1;
w=w+F*(v*t1/3.6+0.5*aa*t1*t1);
i=i+1;
disp('sdf:')
disp(l);
disp(v);

end
for t=20.2:t1:98
    w0=a+b*v+c*v^2;
    bb=-w0*g/1000;
    vvv(i)=v;lll(i)=l;
    l=l+v*t1/3.6+0.5*bb*t1*t1;
    v=v+bb*t1*3.6;
    i=i+1;
    disp(l);
    disp(v);
end
for t=98.2:t1:110
    if(v<=77)
        B=166;
    elseif(v<=80)
        B=0.1343*v^2-25.07*v+1300;
    end
    w0=a+b*v+c*v^2;
    cc=-(B*1000+w0*g*m/1000)/m;
    if(cc>1)
        cc=1;
    elseif(cc<-1)
        cc=-1;
    end
    vvv(i)=v;lll(i)=l;aaa(i)=cc;
    l=l+v*t1/3.6+0.5*cc*t1*t1;
    v=v+cc*t1*3.6;
    i=i+1;
    disp(l);
    disp(v);
end
disp(w);

```

```

plot(III,vvv,'r+');
title('列车 A6-A7 站 最节能速度-距离曲线');
xlabel('单位: 米(m)    (以 A6 站为原点)')
ylabel('单位: km/h')
axis ([0 1500 0 82]);
hold on;
pp=zeros(1,1000); qq=zeros(1,1000);j=1;
for p=0:0.5:3000
    pp(j)=p;
    if(p>0 && p<120)
        q=55;
    elseif(p<1354)
        q=80;
    else
        q=0;
    end
    qq(j)=q;
    j=j+1;
end
plot(pp,qq)

```

多列车节能优化控制算法

```

a1=zeros(1,101);
for i=1:23
    a1(i)=1;
end
for i=87:101
    a1(i)=-1;
end
a2=zeros(1,98);
for i=1:22
    a2(i)=1;
end
for i=84:98
    a2(i)=-1;
end
a3=zeros(1,158);
for i=1:27
    a3(i)=1;
end
for i=148:158
    a3(i)=-1;
end

```

```

a4=zeros(1,172);
for i=1:29
    a4(i)=1;
end
for i=162:172
    a4(i)=-1;
end
a5=zeros(1,178);
for i=1:29
    a5(i)=1;
end
for i=169:178
    a5(i)=-1;
end
a6=zeros(1,103);
for i=1:22
    a6(i)=1;
end
for i=90:103
    a6(i)=-1;
end
a7=zeros(1,97);
for i=1:22
    a7(i)=1;
end
for i=83:97
    a7(i)=-1;
end
a8=zeros(1,117);
for i=1:23
    a8(i)=1;
end
for i=104:117
    a8(i)=-1;
end
a9=zeros(1,75);
for i=1:23
    a9(i)=1;
end
for i=58:75
    a9(i)=-1;
end

```



```

a10=zeros(1,150);
for i=1:26
    a10(i)=1;
end
for i=139:150
    a10(i)=-1;
end
a11=zeros(1,180);
for i=1:29
    a11(i)=1;
end
for i=171:180
    a11(i)=-1;
end
a12=zeros(1,97);
for i=1:22
    a12(i)=1;
end
for i=83:97
    a12(i)=-1;
end
a13=zeros(1,101);
for i=1:32
    a13(i)=1;
end
for i=191:200
    a13(i)=-1;
end
a=zeros(1,30);
b=[a1 a a2 a a3 a a4 a a5 a a6 a a7 a a8 a a9 a a10 a a11 a a12 a a13];
c=zeros(1,541);f=b;
for k=1:2085
    d=0;
    for j=1:(2086-k)
        if(b(j)*b(j+k)==-1)
            d=d+1;
        end
    end
    c(k)=d;
end
t1=50; t2=49; t3=50*c(641)+49*c(650);
c(1,1:119)=0; c(1,661:1725)=0;

```

```
[Y,l]=max(c); t=l;  
disp('每两列列车最佳间隔时间为: ');  
disp(t); disp(t1); disp(t2);  
disp('总重合时间为: ')  
disp(t3)
```