

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

第十二届“中关村青联杯”全国研究生  
数学建模竞赛

学 校	中南大学
-----	------

参赛队号	10533032
------	----------

	1.	盖永斌
队员姓名	2.	刘权
	3.	陈星燃

参赛密码 \_\_\_\_\_

(由组委会填写)



## 第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

题 目                      水面舰艇编队防空和信息化战争评估模型

---

### 摘                      要：

本文从研究水面舰艇编队的防空问题入手，先设计了一种特定条件下编队的最佳队形，接着对所设计的最佳编队队形的抗饱和攻击能力进行分析。最后建立了一种宏观的战略级信息化战争评估模型，并对海湾战争进行了模拟。

针对问题一：为应对所有可能的突发事件，在设计编队最佳队形时，分为两种情况进行考虑：第一种是护卫舰先探测到来袭导弹，并由指挥舰统一指挥进行防御；第二种是4艘护卫舰都没有探测到来袭导弹，驱逐舰探测到来袭导弹之后护卫舰再帮指挥舰进行防御。综合考虑以上两种情况，得出编队最佳队形为：1号、2号、3号、4号护卫舰分别位于指挥舰45度方向处、95度方向处、145度方向处、195度方向处，与指挥舰的距离均是59.155千米。

针对问题二：首先将20度-220度范围内的来袭角度离散化，接着依次建立了来袭导弹发现点求解模型，来袭导弹与射程范围交点的求解模型，来袭导弹与拦截导弹相遇点求解模型。通过以上三个模型即可求出每一个离散的来袭角度上该队形排布可以拦截的来袭导弹的最大数量，并画出图形。观察图形可以得出最危险方向为20度和220度的来袭方向（即边缘），且在最危险方向上，编队最多可以拦截9批导弹。

针对问题三：与问题二相比，问题三中仅改变了探测范围，所以可以用与问题二相同的离散化思想和模型。经计算，得出最薄弱点变为了 1 号或 4 号护卫舰和指挥舰连线的方向处。其原因是以护卫舰为中心，10 千米为半径的圆内不能进行拦截。在此情况下抗饱和攻击能力为 17 批，相比问题二，抗饱和能力提高了 88.9%。

针对问题四：首先对数据进行清洗和分类，包括更正重复记录的时间点以及重新排列顺序错误的数据。接着利用分类后的数据计算各个空中目标的方位角、距离、水平速度、航向角；再结合高度和雷达面积将新目标依次和已知意图的目标一起进行聚类分析，由此得到所有空中目标意图的分类：41006830、41006837、41006893 为监视；41006831、41006885、41006860 为其它；41006836 为掩护或其它；41006839、41006891 为侦察；41006842 航向改变前为侦察，改变后为其它；41006872 为攻击。

针对问题五：先提出了模拟战略级的黑箱模型，即将所有国家分为两组，盟军和伊军。在传统兰彻斯特方程的基础上，我们先后引入了多维兰彻斯特方程，协同作用，电磁环境的影响度，信息优势等，建立随机微分方程组。最后利用 C++ 编程模拟海湾战争的结果和实际数据的趋势一致：无论陆军、海军还是空军，盟军损失很小，但是伊拉克军队损失惨重。

关键字：最佳编队 抗饱和攻击能力 聚类分析 随机微分方程组

# 1 问题重述

## 1.1 问题背景

我海军由 1 艘导弹驱逐舰和 4 艘导弹护卫舰组成水面舰艇编队在我国南海某开阔海域巡逻，其中导弹驱逐舰为指挥舰，重要性最大。某一时刻  $t$  我指挥舰位置位于北纬 15 度 41 分 7 秒，东经 112 度 42 分 10 秒，编队航向 200 度，航速 16 节。编队各舰上防空导弹型号相同，数量充足，水平最小射程为 10 千米，最大射程为 80 千米，高度影响不必考虑，平均速度 2.4 马赫。编队仅依靠自身雷达对空中目标进行探测，但有数据链，所以编队中任意一艘舰发现目标，其余舰都可以共享信息，并由指挥舰统一指挥各舰进行防御。

以我指挥舰为原点的 20 度至 220 度扇面内，等可能的有导弹来袭。来袭导弹的飞行速度 0.9 马赫，射程 230 千米，航程近似为直线。由于来袭导弹一般采用超低空飞行和地球曲率的原因，各舰发现来袭导弹的随机变量都服从均匀分布，均匀分布的范围是导弹与该舰之间的距离在 20-30 千米。可以根据发现来袭导弹时的航向航速推算其不同时刻的位置，故不考虑雷达发现目标后可能的目标“丢失”。编队发现来袭导弹时由指挥舰统一指挥编队内任一舰发射防空导弹进行拦截，进行拦截的准备时间（含发射）均为 7 秒，拦截的路径为最快相遇。各舰在一次拦截任务中，不能接受对另一批来袭导弹的拦截任务，只有在本次拦截任务完成后，才可以执行下一个拦截任务。指挥舰对拦截任务的分配原则是，对每批来袭导弹只使用一艘舰进行拦截，且无论该次拦截成功与否，不对该批来袭导弹进行第二次拦截。并不考虑每次拦截使用的防空导弹数量。

## 1.2 待解决的问题

(1) 在未发现敌方目标时，设计编队最佳队形（各护卫舰相对指挥舰的方位和距离），应对所有可能的突发事件，保护好指挥舰，使其尽可能免遭敌导弹攻击。

(2) 当不考虑使用电子干扰和近程火炮（包括密集阵火炮）等拦截手段，仅使用防空导弹拦截来袭导弹，上述编队防御敌来袭导弹对我指挥舰攻击时的抗饱和和攻击能力如何（当指挥舰遭遇多批次导弹几乎同时攻击时，在最危险的方向上，编队能够拦截来袭导弹的最大批数）？

(3) 如果编队得到空中预警机的信息支援，对距离我指挥舰 200 千米内的所有来袭导弹都可以准确预警（即通报来袭导弹的位置与速度矢量），编队仍然保持上面设计的队形，仅使用防空导弹拦截敌来袭导弹对我指挥舰攻击时的抗饱和和攻击能力（定义同上）提高多少？

(4) 预警机发现前方有 12 批可疑的空中目标，从  $t$  时刻起，雷达测得的目标位置信息在附件 1 的表格中，各目标雷达反射面积见表 1，用于判断空中目标的意图的知识和规则的样本见表 2。请分析识别空中各目标可能的意图。

(5) 如果我方的预警机和水面舰艇编队的雷达和通信系统遭到敌方强烈的电子干扰，无法发现目标，也无法传递信息，这时，后果将是极其严重的，我编队防空导弹的拦截效能几乎降低到零。由此引起人们的深思，信息化条件下作战对传统的作战评估模型和作战结果已经产生重要的甚至某种程度上是决定

性的影响！请尝试建立宏观的战略级信息化战争评估模型，从一般意义上反映信息化战争的规律和特点，利用模型分析研究信息系统、指挥对抗、信息优势、信息系统稳定性，以及其它信息化条件下作战致胜因素的相互关系和影响。并通过信息化战争的经典案例，例如著名的海湾战争，对模型加以验证。

## 2 问题分析

### 2.1 针对问题一

由于题目中说到要在“未发现敌方目标”时“应对所有突发事件”，所以我们认为在攻击范围内（20 度至 220 度）等可能来袭的导弹除了由驱逐舰自己进行防御外，也有护卫舰帮驱逐舰进行防御，也就是可以只考虑护卫舰帮驱逐舰进行防御的情况。又各舰发现来袭导弹的随机变量都服从均匀分布，均匀分布的范围是导弹与该舰之间的距离在 20-30 千米，所以首先可以求出各舰发现来袭导弹距离的数学期望。接着以此数学期望为基础，设计编队最佳队形。设计编队最佳队形时，分为两种情况进行考虑：第一种是护卫舰先探测到来袭导弹，并由驱逐舰统一指挥进行防御；第二种是 4 艘护卫舰都没有探测到来袭导弹，驱逐舰探测到来袭导弹之后护卫舰再帮驱逐舰进行防御。综合以上两种情况，设计出编队最佳队形，使其可以应对所有可能的突发事件。

### 2.2 针对问题二

要得到抗饱和攻击能力（当指挥舰遭遇多批次导弹同时攻击时，在最危险方向上能够拦截的导弹的最大批数），必须先确定最危险的方向。但是拦截导弹的数量由几个复杂的因素决定，而且并不是连续或单调的。最为有效的办法就是穷举所有来袭方向，通过循环迭代的方法，计算每个来袭方向能够拦截导弹的最大批数。为了保证穷举的有效性，将 20 度至 220 度分为 2000 等份，分别对 2001 个来袭角度进行计算，最终即可确定最危险的来袭方向以及编队的抗饱和攻击能力。

### 2.3 针对问题三

问题三和问题二有着极为相似的地方。解决方法依然是穷举所有来袭方向角度。由于在 200 千米处的来袭导弹就被探索到了，所以导弹与任意舰攻击范围的第一个交点即使第一个拦截点，后面的全部拦截点同理通过循环迭代的方式计算得出，进而得出最危险的来袭方向和抗饱和攻击能力并最终可以发现编队抗饱和攻击能力在有了信息支援后的变化情况。

### 2.4 针对问题四

首先观察附件中的已知数据，可以发现记录的数据中存在不少脏数据，故

我们需要清洗数据。题目要求将待定目标的空中意图进行分类，故我们可以考虑使用聚类分析这一有效的分类方法。在使用之前应该先检验此方法的正确性，我们对已知的 15 组数据进行聚类分析，用得到的结果对比已知结果来检验使用此方法的正确性。其次，聚类分析需要指标组，故我们应该使用清洗后的数据求出 12 个待分类目标的指标。然后逐一地将这 12 个待分类目标与已知意图的目标进行聚类以判断待分类目标的空中意图。

## 2.5 针对问题五

问题五中我们需要建立战略级的模型去模拟和预测大型战争，并且用海湾战争的结果去检验我们的模型。阅读附件内容，模型中需要加入现代战争的特点，诸如电子化，信息化等。于是，在传统的兰彻斯特方程中，我们将二维的微分方程变为多维，再引入各兵种之间的协同作用。接着考虑电子化信息化战争的特点，把电磁环境的影响度加入模型，形成随机微分方程组。最后，需要考虑战争信息优势，于是我们引入战场感知能力。用 C++ 模拟出数值结果并与实际海湾战争进行对比。

# 3 模型假设

1. 假设来袭导弹和拦截弹均是匀速运动。
2. 本题不考虑舰艇对来袭导弹的电子干扰与来袭导弹的二次捕捉。
3. 在第四问的分析中，我们依然认为指挥舰保持静止。
4. 在第四问的分析中，将地球看成是一个均匀的球体。

# 4 模型的建立与求解

## 4.1 问题一的解答

### 4.1.1 雷达发现半径的确定

由于各舰发现来袭导弹的随机变量服从均匀分布，均匀分布的范围是导弹与该舰之间距离在 20-30 千米。于是，我们可以设各舰发现导弹的随机变量（即半径）为  $R$ ，则随机变量  $R$  服从  $[20,30]$  上的均匀分布，记为  $X \sim U[20,30]$ 。设该随机变量  $R$  的密度函数  $f(R)$ ，则各舰在某个特定半径的圆上发现导弹的概率即为  $f(R)$ 。该密度函数  $f(R)$  为：

$$f(R) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 20 \leq R \leq 30 \\ 1 & R > 30 \text{ or } R < 20 \end{cases}$$

进而可以求出其分布函数  $F(R)$ :

$$F(R) = \begin{cases} 0 & R > 30 \\ \frac{30-R}{10} & 20 \leq R \leq 30 \\ 1 & R < 20 \end{cases}$$

对各舰而言, 由于在不同半径的圆上发现来袭导弹的概率是不同的, 所以我们可以求出各舰发现来袭导弹半径  $R$  的数学期望, 记为  $\bar{R}$ , 并用期望半径表示各舰能发现来袭导弹的半径。则有:

$$\bar{R} = \int_{20}^{30} R f(R) dR = \frac{20+30}{2} km = 25km$$

即在期望半径  $\bar{R} = 25km$  的圆内, 我们认为各舰能发现来袭导弹。

#### 4.1.2 参考系的确定

本题中, 编队的航向为 200 度 (以正北为 0 度, 顺时针方向), 航速 16 节 (及每小时 16 海里)。设编队的航速为  $v_2$ , 则:

$$v_2 = 16 \text{海里/小时} = 8.2311 \text{m/s}$$

来袭导弹的范围是在以我指挥舰为原点的 20-220 度内, 设来袭导弹的速度为  $v_1$ , 则:

$$v_1 = 0.9 \times 340 \text{m/s} = 306 \text{m/s}$$

由于本问题重点在于研究来袭导弹与指挥舰之间的相对运动, 所以可以将参考系选定为匀速前进的指挥舰。那么此时可以设来袭导弹相对于指挥舰的速度为  $v$ , 其参数方程为:

$$\begin{cases} v_x = v_2 \cos 20^\circ - v_1 \cos \varphi \\ v_y = v_2 \sin 20^\circ - v_1 \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [20, 220]$$

即

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

在以我指挥舰为原点的 20-220 度内, 当来袭导弹从 20 度方向来袭时, 也就是来袭导弹的速度  $v_1$  和指挥舰的速度  $v_2$  同向时, 相对速度  $v$  取得最小值:

$$v_{\min} = v_1 - v_2 = 306m/s - 8.2311m/s = 297.7689m/s$$

当来袭导弹从 200 度方向来袭时，也就是来袭导弹的速度  $v_1$  和指挥舰的速度  $v_2$  反向时，相对速度  $v$  取得最大值：

$$v_{\max} = v_1 + v_2 = 306m/s + 8.2311m/s = 314.2311m/s$$

通过计算可知，相对速度最大值  $v_{\max}$  和最小值  $v_{\min}$  仅与来袭导弹的绝对速度  $v_1$  相差 2.690%，而其他方向的相对速度与来袭导弹绝对速度之差会更小。因此，为了分析问题的简化，可以认为来袭导弹的绝对速度近似等于来袭导弹相对于指挥舰的速度，也就是说可以将指挥舰看为静止，来袭导弹是相对于一个静止的参照系进行打击。

#### 4.1.3 编队最佳排布模型

设计编队最佳队形，保护好指挥舰，应使指挥舰尽可能免受敌来袭导弹的攻击。以指挥舰为原点的 20 度到 220 度的范围内，不论从任何方向，如果只来袭一枚导弹，则即使没有护卫舰，指挥舰也可以自己拦截这枚来袭导弹。所以在本题的最佳队形排布的设计中，只需考虑指挥舰无法自己拦截来袭导弹，需要护卫舰进行拦截这种情况。

在上述情况下，我们又分别考虑如下两种情况：第一种情况，在以指挥舰为原点的 20 度到 220 度范围内，无论以什么角度来袭的导弹都可以先被护卫舰探测到，然后由指挥舰统一指挥进行防卫；第二种情况，以指挥舰为原点的 20 度到 220 度范围内，四艘护卫舰存在探测死角，即来袭导弹没有被护卫舰探测到，直飞指挥舰，在这种情况下，护卫舰就要对指挥舰实施救援，也就是需要确定护卫舰对指挥舰的最大救援距离。

在满足以上两种情况的条件下，在任意方向上可以拦截的来袭导弹尽可能多，那么这种编排队形即是最佳队形。

##### 4.1.3.1 所有方向的来袭导弹均能被护卫舰探测到

舰艇编队之间有数据链，可以共享信息。同时舰艇可以根据发现来袭导弹的航向航速来推算其不同时刻的位置，故只要来袭导弹进入任意一艘舰艇期望半径的圆内，将被舰艇探测到，且无论此后来袭导弹怎么飞行，舰艇编队均能知道导弹的具体位置。

由前分析知，我们可以将指挥舰看作静止的原点，而导弹从远处沿某个直线方向对指挥舰进行打击。若要 4 艘护卫舰探测到 20 度到 220 度范围内所有的来袭导弹，就要 4 艘护卫舰的探测区域覆盖所有来袭导弹可能的直线方向。对每艘护卫舰而言，能探测到的角度范围为  $2\theta$ ，如图 4.1 所示：



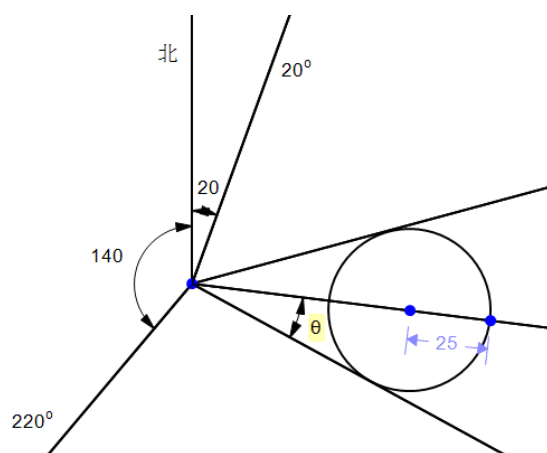


图 4.1 护卫舰探测角度示意图

在所有方向的来袭导弹均能被护卫舰探测到的前提下，还应满足在任意方向上可以拦截的来袭导弹尽可能多，也就是护卫舰应离指挥舰尽可能远，这样的极限情况便是 4 艘护卫舰的探测区域没有相互重叠的部分，恰好两两相切，并且在两边的护卫舰的探测区域应分别与 20 度及 220 度两条边界线相切。具体示意图见图 4.2 所示：

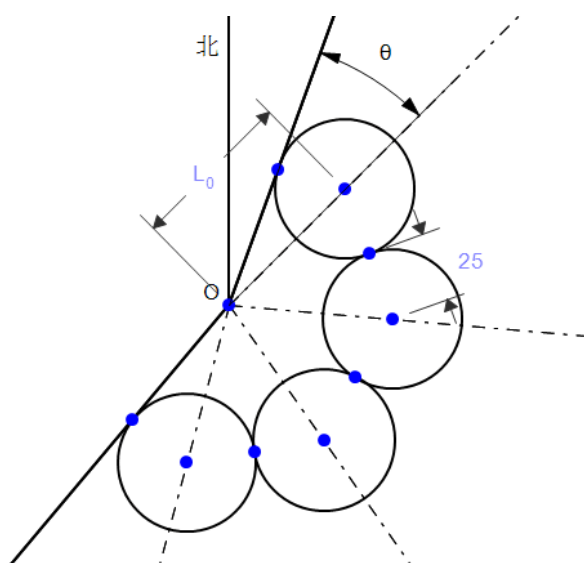


图 4.2 编队排布示意图

设此时护卫舰离指挥舰的距离为  $L$ ，又知各护卫舰的探测面积均是半径为  $\bar{R}$  的圆，可以得到：

$$\sin \theta = \frac{\bar{R}}{L}$$

又知在此情况下， $\theta = \frac{220^\circ - 20^\circ}{8} = 25^\circ$

因此可以算出在此极限情况下，护卫舰与指挥舰之间的距离，记为 $L_0$ ，则：

$$L_0 = \frac{\bar{R}}{\sin \theta} = \frac{25km}{\sin 25^\circ} = 59.1550km$$

此时在以指挥舰为原点的 20 度到 220 度范围内，所有方向上的来袭导弹都可以被护卫舰提前探测到，且各个方向探测到的位置距指挥舰最远。

#### 4.1.3.2 来袭导弹仅被指挥舰探测到

在这种情况下，我们认为 4 艘护卫舰存在探测盲区，在有些方向上的来袭导弹无法被护卫舰探测，只能由指挥舰自身探测。当指挥舰探测到来袭导弹，并且自身无法进行拦截的时候，就需要护卫舰进行救援。由于每次进行拦截的准备时间（含发射）均为 7 秒，且拦截导弹发射后需要飞行时间，故护卫舰与指挥舰之间存在一个极限的救援距离，设这个极限的救援距离为 $L_1$ 。

由前文可知，来袭导弹的速度为 $v_1 = 306m/s$ 。设拦截导弹的速度为 $v_3$ ，则可得：

$$v_3 = 2.4 \times 340m/s = 816m/s$$

同时，若来袭导弹与指挥舰的距离在 10 千米以内，为了防止拦截导弹误伤指挥舰，所以不能进行拦截。因此来袭导弹从被指挥舰探测到以后，只有在 25km-10km 的范围内，护卫舰才可以协助拦截。设护卫舰可以拦截的最大时间为 $t_1$ ，则：

$$t_1 = \frac{25-10}{0.306} s = 49.0196s$$

由于护卫舰进行拦截时还要考虑 7s 的准备时间，所以拦截导弹飞行的最大时间为：

$$t_2 = t_1 - 7s = 42.0196s$$

换言之，护卫舰发射拦截导弹的最大飞行距离为：

$$L_1 = v_3 \times t_2 = 816 \times 42.0196m = 34287.9936m = 34.2880km$$

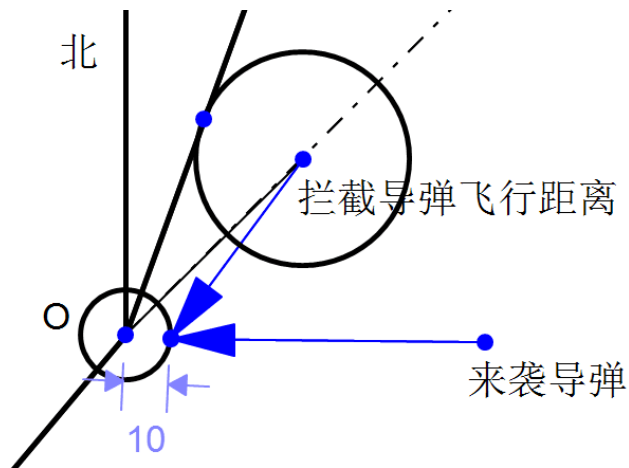


图 4.3 拦截位置示意图

由图 4.3 可以看出，护卫舰与指挥舰之间的极限距离便可以由拦截导弹的最大飞行距离求出。当拦截导弹、护卫舰和指挥舰在同一直线上时，即可求出护卫舰与指挥舰之间的极限距离：

$$L_{\max} = L_1 + 10km = 34.2880km + 10km = 44.2880$$

综合分析如上两种情况，我们发现  $L_{\max} < L_0$ 。既如若护卫舰存在探测死角，

即满足  $L > L_0$  的情况下，必然有  $L > L_{\max}$ ，也就是说如果护卫舰没有探测到来袭导弹，那么指挥舰探测到来袭导弹时护卫舰已经来不及救援。因此，如果护卫舰能够保护指挥舰，则一定不存在探测死角。

至此可以得出，上述第一种情况包含了第二种情况，最佳的排布方式如图 4.4 所示：

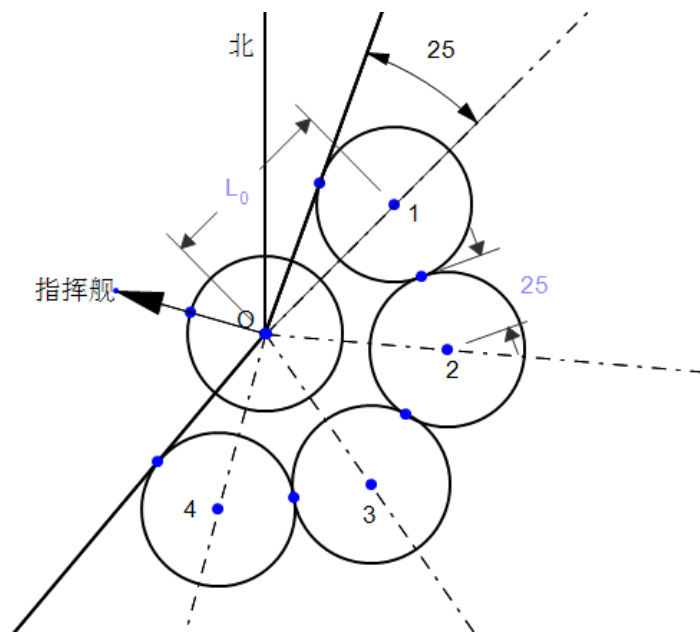


图 4.4 最佳排布示意图

各护卫舰相对于指挥舰的方位和距离分别为：

- 1) 1 号护卫舰位于指挥舰 45 度方向处，与指挥舰之间的距离为  $L_0 = 59.1550km$ ；
- 2) 2 号护卫舰位于指挥舰 95 度方向处，与指挥舰之间的距离为  $L_0 = 59.1550km$ ；
- 3) 3 号护卫舰位于指挥舰 145 度方向处，与指挥舰之间的距离为  $L_0 = 59.1550km$ ；
- 4) 4 号护卫舰位于指挥舰 195 度方向处，与指挥舰之间的距离为  $L_0 = 59.1550km$ 。

## 4.2 问题二的解答

由题可知，在以我指挥舰为原点的 20 度至 220 度扇面内，“等可能”的有导弹来袭，所以可以将 20 度至 220 度的扇形范围离散化，将其划分为  $n$  份，并认为在每一个角度上都有导弹源源不断地袭来。接着对这  $n+1$  条可能的来袭路线进行分析，其角度分别为：

$$\theta = \left( 20 + \frac{200}{n}i \right)^\circ (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

在每一个方向上，抗打击能力就是编队能够拦截来袭导弹的最大批数，而编队防御敌来袭导弹对我指挥舰攻击时的抗饱和能力是在最危险的方向上，编队能够拦截来袭导弹的最大批数。故本题我们首先研究编队在各个来袭方向上能够拦截的来袭导弹批数。

### 4.2.1 来袭导弹发现点位置求解

对于任一艘舰艇和任意一个方向，先建模讨论来袭导弹发现点的普遍位置，来袭导弹的发现位置即为来袭导弹第一次被我方舰艇探测到的位置。如前所述，来袭导弹的发现位置一定是位于护卫舰的探测边界上，也就是来袭导弹方向射线与某护卫舰探测圈的交点（远离指挥舰的那个交点），如图 4.5 所示：

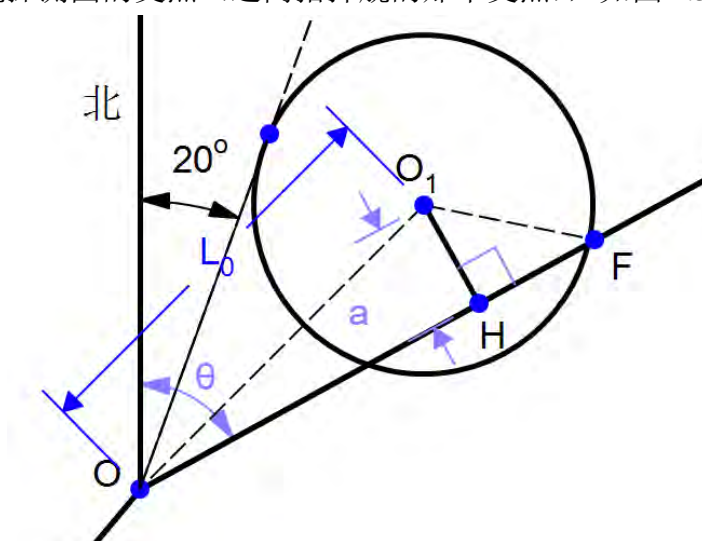


图 4.5 来袭导弹距离示意图

来袭导弹发现位置即为图 4.5 中的 F 点。若求出 F 点的坐标,即可确定来袭导弹发现位置的普遍坐标。

首先对来袭导弹  $n+1$  条可能来袭路线的角度  $\theta = \left(20 + \frac{200}{n}i\right)^\circ$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ )

进行讨论:

1) 当  $\theta \in [20^\circ, 70^\circ)$  时, 来袭导弹路线与第一个圆相交, 即这些来袭导弹由第一艘护卫舰发现;

2) 当  $\theta \in [70^\circ, 120^\circ)$  时, 来袭导弹路线与第二个圆相交, 即这些来袭导弹由第二艘护卫舰发现;

3) 当  $\theta \in [120^\circ, 170^\circ)$  时, 来袭导弹路线与第三个圆相交, 即这些来袭导弹由第三艘护卫舰发现;

4) 当  $\theta \in [170^\circ, 220^\circ]$  时, 来袭导弹路线与第四个圆相交, 即这些来袭导弹由第四艘护卫舰发现。

设第  $j$  个圆的圆心 (也就是第  $j$  艘护卫舰的位置) 为  $O_j(x_j, y_j)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ 。

图 4.5 是以 1 号护卫舰为例, 图中  $O_1$  表示 1 号艘护卫舰的位置,  $O$  点为指挥舰的位置 (即坐标系原点), 射线  $\overline{FO}$  为来袭导弹的来袭方向,  $A$  为  $O_1$  到射线  $\overline{FO}$  的垂足。由于射线  $\overline{FO}$  过原点, 所以能够写出  $\overline{FO}$  的方程为:

$$y \cos \theta - x \sin \theta = 0$$

进而, 可以求出圆心  $O_1$  到射线  $\overline{FO}$  的距离:

$$a = \frac{y_1 \cos \theta - x_1 \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}$$

由第一问模型可知,  $|\overline{OO_1}| = L_0$ ,  $|\overline{O_1F}| = R$ , 由勾股定理, 可知:

$$|\overline{OH}| = \sqrt{|\overline{OO_1}|^2 - |\overline{HO_1}|^2} = \sqrt{L_0^2 - a^2}$$

$$|\overline{HF}| = \sqrt{|\overline{FO_1}|^2 - |\overline{HO_1}|^2} = \sqrt{R^2 - a^2}$$

于是有:

$$|\overline{OF}| = |\overline{OH}| + |\overline{HF}| = \sqrt{L_0^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - a^2}$$

故可得 F 点的坐标为  $(|\overline{OF}| \cos \theta, |\overline{OF}| \sin \theta)$ 。

#### 4.2.2 舰艇最大射程与来袭导弹交点位置求解

由模型一可以求出，4 艘护卫舰的坐标分别为：

1 号护卫舰 (41.8289, 418289)

2 号护卫舰 (-5.1557, 58.9299)

3 号护卫舰 (-48.4570, 33.9299)

4 号护卫舰 (-57.1394, -15.3105)

又知每艘护卫舰距指挥舰的距离均为 59.1550 千米，小于护卫舰的最大射程 80 千米，所以来袭导弹在飞向指挥舰的过程中，一旦进入护卫舰的射程范围，在击中指挥舰之前一直处于护卫舰的射程范围。

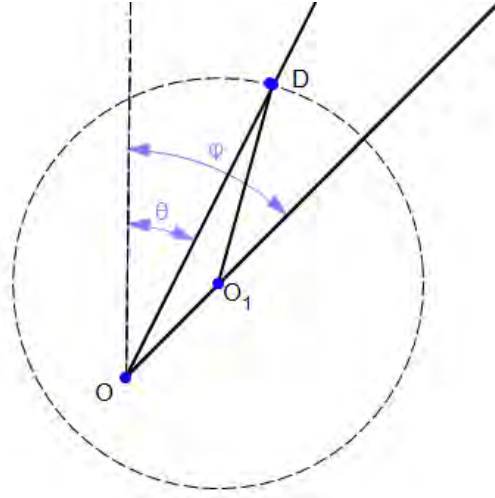


图 4.6 护卫舰防卫范围示意图

如图 4.6 所示，依然以 1 号护卫舰为例。1 号护卫舰射程范围与来袭导弹方向的交点为 D，则：

$$|\overline{O_1D}| = 80km, \quad |\overline{O_1O}| = L_0 = 59.1550km$$

记  $\overline{O_1O}$  与正北方向的夹角为  $\varphi$ ，则  $\varphi = \arctan \frac{y_1}{x_1}$ ，那么  $\angle O_1OD = \varphi - \theta$ 。由

余弦定理，可得：

$$|\overline{O_1O}|^2 + |\overline{OD}|^2 - 2\cos(\varphi - \theta)|\overline{OD}||\overline{O_1O}| = |\overline{O_1D}|^2$$

则：

$$|\overline{OD}| = \sqrt{|\overline{O_1D}|^2 - |\overline{O_1O}|^2 + 2\cos(\varphi - \theta)|\overline{OD}||\overline{O_1O}|}$$

因此可求出 D 点的坐标为  $(|\overline{OD}|\cos\theta, |\overline{OD}|\sin\theta)$ 。

#### 4.2.3 拦截导弹与来袭导弹相遇位置求解

在发现来袭导弹后，护卫舰或指挥舰就要发射拦截导弹去拦截。依然以 1

号艘护卫舰为例，设发射拦截导弹时来袭导弹的位置为  $P$ ，又  $C$  为指挥舰位置， $O_1$  为 1 号护卫舰的位置， $H$  为  $O_1$  到来袭导弹方向的垂足。发射拦截导弹时，来袭导弹可能位于垂足之前 ( $P_1$ )，垂足处 ( $P_2$ ) (也就是  $H$ )，或者垂足之后 ( $P_3$ )。以下分别对 3 种不同的情况进行分析。

#### 4.2.3.1 来袭导弹位于垂足之前

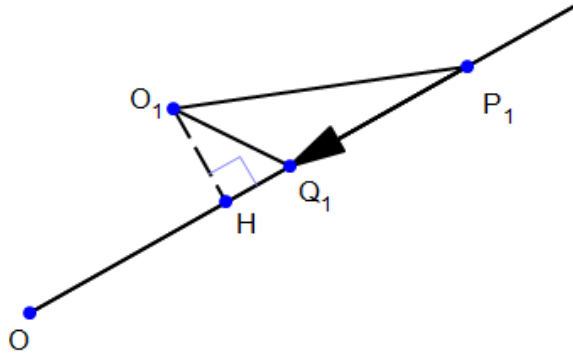


图 4.7 拦截位置示意图 1

设拦截位置为  $Q_1$ ， $|P_1Q_1| = x$ ，又由于拦截导弹的速度为 2.4 马赫，来袭导弹速度为 0.9 马赫，因此有：

$$\frac{|O_1Q_1|}{|P_1Q_1|} = \frac{v_{\text{拦截导弹}}}{v_{\text{来袭导弹}}} = \frac{2.4}{0.9}$$

由几何关系，可以很容易地可以求出  $|O_1H|$  以及  $|P_1H|$ ，因此可以认为  $|O_1H|$  和  $|P_1H|$  是已知的。由勾股定理：

$$|O_1Q_1| = \sqrt{|O_1H|^2 + |HQ_1|^2} = \sqrt{|O_1H|^2 + (|P_1H| - x)^2}$$

所以有：

$$\frac{\sqrt{|O_1H|^2 + (|P_1H| - x)^2}}{x} = \frac{2.4}{0.9} = \frac{8}{3}$$

求解可得：

$$x = \frac{1}{55} \left( -9|P_1H| \pm \sqrt{81|P_1H|^2 + 495(|P_1H|^2 + |O_1H|^2)} \right)$$

由于  $|P_1Q_1|$  为正数，又  $\sqrt{81|P_1H|^2 + 495(|P_1H|^2 + |O_1H|^2)} > \sqrt{81|P_1H|^2} = 9|P_1H|$ ，

所以：

$$x = \frac{1}{55} \left( -9|\overline{P_1H}| + \sqrt{81|\overline{P_1H}|^2 + 495 \left( |\overline{P_1H}|^2 + |\overline{O_1H}|^2 \right)} \right)$$

即：

$$|\overline{P_1Q_1}| = \frac{1}{55} \left( -9|\overline{P_1H}| + \sqrt{81|\overline{P_1H}|^2 + 495 \left( |\overline{P_1H}|^2 + |\overline{O_1H}|^2 \right)} \right)$$

又因为  $P_1$  的坐标已知，所以可以求得  $Q_1$  的坐标为：

$$(x_{P_1} - |\overline{P_1Q_1}| \cos \theta, y_{P_1} - |\overline{P_1Q_1}| \sin \theta)$$

#### 4.2.3.2 来袭导弹位于垂足处

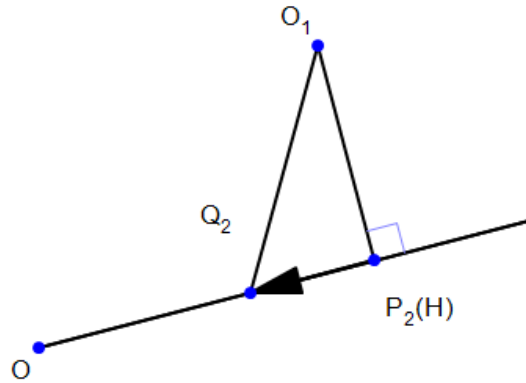


图 4.8 拦截位置示意图 2

设拦截位置为  $Q_2$ ， $|\overline{P_2Q_2}| = x$ ，又由于拦截导弹的速度为 2.4 马赫，来袭导弹速度为 0.9 马赫，同理有：

$$\frac{|\overline{O_1Q_2}|}{|\overline{P_2Q_2}|} = \frac{v_{\text{拦截导弹}}}{v_{\text{来袭导弹}}} = \frac{2.4}{0.9}$$

同理，可以很容易地可以求出  $|\overline{O_1P_2}|$ ，因此可以认为  $|\overline{O_1P_2}|$  是已知的。在直角三角形  $O_1Q_2P_2$  中：

$$\frac{|\overline{O_1Q_2}|}{|\overline{P_2Q_2}|} = \frac{8}{3}$$

所以有：

$$\sin \angle Q_2O_1P_2 = \frac{0.9}{2.4} = \frac{3}{8}$$

求解可得：



$$|\overline{P_2Q_2}| = |\overline{O_1P_1}| \times \tan[\arcsin(\angle Q_2O_1P_2)]$$

由于  $P_2$  的坐标已知，所以可以求得  $Q_2$  的坐标为

$$(x_{P_2} - |\overline{P_2Q_2}| \cos \theta, y_{P_2} - |\overline{P_2Q_2}| \sin \theta)$$

#### 4.2.3.3 来袭导弹位于垂足之后

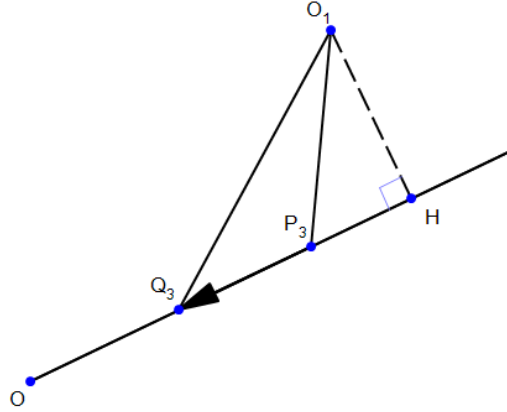


图 4.9 拦截位置示意图 3

同样，设拦截位置为  $Q_3$ ， $|\overline{P_3Q_3}| = x$ ，又由于拦截导弹的速度为 2.4 马赫，来袭导弹速度为 0.9 马赫，因此有：

$$\frac{|\overline{O_1Q_3}|}{|\overline{P_3Q_3}|} = \frac{v_{\text{拦截导弹}}}{v_{\text{来袭导弹}}} = \frac{2.4}{0.9}$$

由几何关系，可以很容易地可以求出  $|\overline{O_1H}|$  以及  $|\overline{P_3H}|$ ，因此可以认为  $|\overline{O_1H}|$  和  $|\overline{P_3H}|$  是已知的。由勾股定理：

$$|\overline{O_1Q_3}| = \sqrt{|\overline{O_1H}|^2 + |\overline{HQ_3}|^2} = \sqrt{|\overline{O_1H}|^2 + (|\overline{P_3H}| + x)^2}$$

所以有：

$$\frac{\sqrt{|\overline{O_1H}|^2 + (|\overline{P_3H}| + x)^2}}{x} = \frac{2.4}{0.9} = \frac{8}{3}$$

求解可得：

$$x = \frac{1}{55} \left( 9|\overline{P_3H}| \pm \sqrt{81|\overline{P_3H}|^2 + 495(|\overline{P_3H}|^2 + |\overline{O_1H}|^2)} \right)$$

由于  $|\overline{P_3Q_3}|$  为正数，又  $\sqrt{81|\overline{P_3H}|^2 + 495(|\overline{P_3H}|^2 + |\overline{O_1H}|^2)} > \sqrt{81|\overline{P_3H}|^2} = 9|\overline{P_3H}|$ ，

所以：

$$x = \frac{1}{55} \left( 9|\overline{P_3H}| + \sqrt{81|\overline{P_3H}|^2 + 495 \left( |\overline{P_3H}|^2 + |\overline{O_1H}|^2 \right)} \right)$$

即：

$$|\overline{P_3Q_3}| = \frac{1}{55} \left( 9|\overline{P_3H}| + \sqrt{81|\overline{P_3H}|^2 + 495 \left( |\overline{P_3H}|^2 + |\overline{O_1H}|^2 \right)} \right)$$

又因为  $P_3$  的坐标已知，所以可以求得  $Q_3$  的坐标为：

$$(x_{P_3} - |\overline{P_3Q_3}| \cos \theta, y_{P_3} - |\overline{P_3Q_3}| \sin \theta)$$

#### 4.2.4 首个拦截点位置的确定

若来袭导弹的被发现位置位于拦截导弹的射程范围内，显然在来袭导弹被发现的时刻，拦截导弹即开始准备发射；若来袭导弹的被发现位置位于拦截导弹的射程范围外，那么我们可以假设在发现的时刻拦截导弹开始准备发射，那么根据 4.2.3 所述可以求得一个理论拦截点，如果该拦截点位于拦截导弹的射程范围内，那么该拦截点就是一个合法拦截点，否则最大射程范围与导弹轨迹的第一个交点为实际拦截点。确定第一个拦截位置，后面每一个拦截位置可以通过循环迭代求得。

#### 4.2.5 编队抗饱和攻击能力的确定

将以上计算过程通过 C++ 编程进行实现，编译器为 GNU GCC Compiler，具体程序框图如图 4.10 所示：

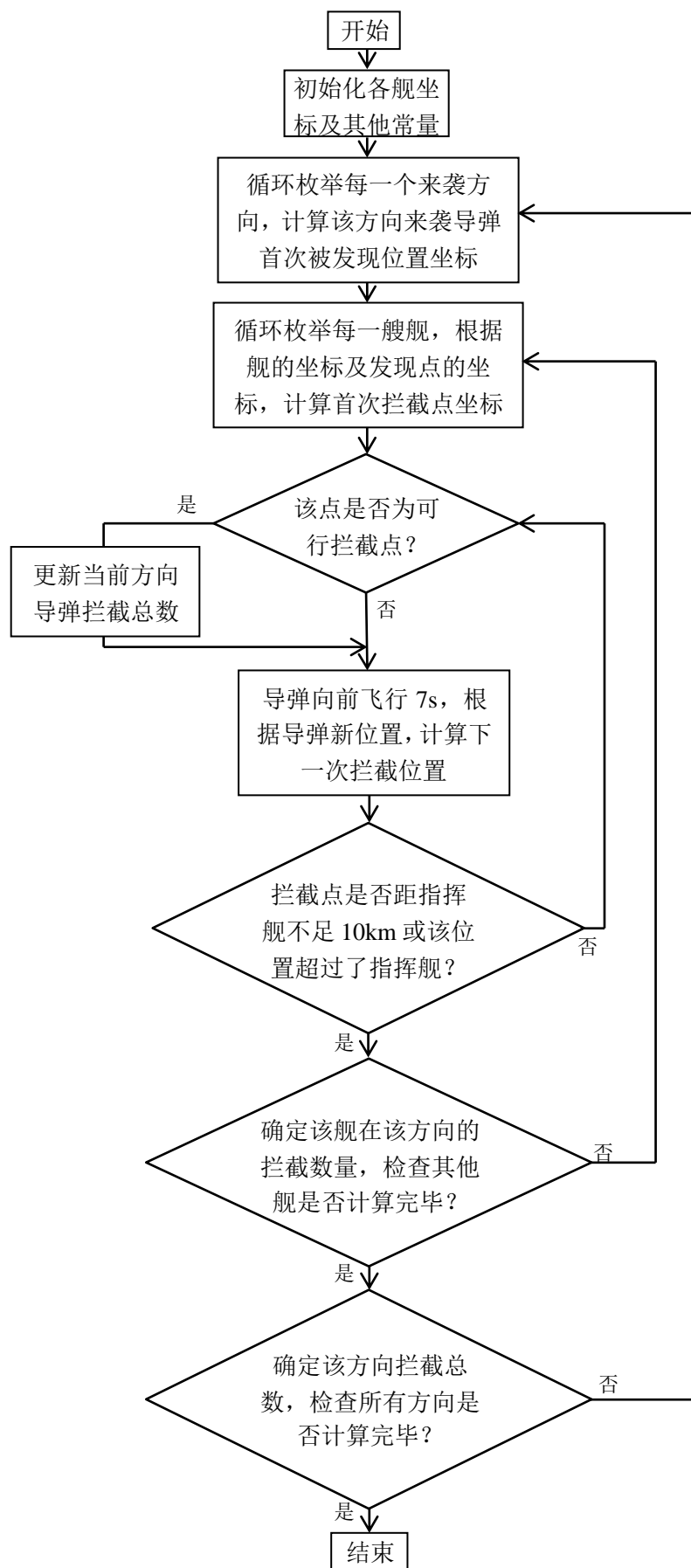


图 4.10 问题二程序框图

计算结果如图 4.11 所示：

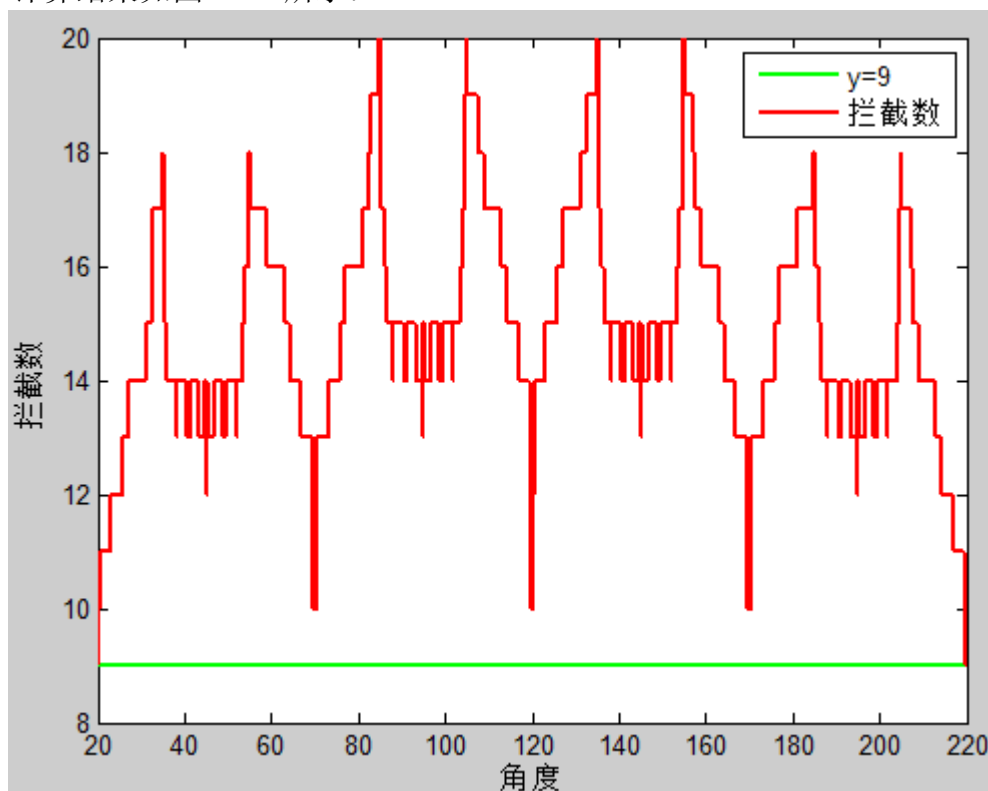


图 4.11 问题二来袭角度与抗饱和攻击能力关系图

#### 4.2.6 结论分析

据图 4.11，可得以下四点主要结论：

- 1、最危险的方向为 20 度和 220 度导弹来袭方向，该方向上，编队最多能够拦截 9 批导弹。这是因为，该方向对于来袭导弹的发现时间相对较晚，并且护卫舰发射的拦截导弹需要飞行相对较长的时间才能与来袭导弹相遇。
- 2、当来袭导弹轨迹接近护卫舰时，拦截数量出现振荡，原因是从舰队安全的角度出发，位于距离防卫舰 10km 以内的导弹不能被击落。
- 3、其他三个圆两两相切的地方也比较危险，这是因为其发现时间和最危险方向相同，但是相比于最危险方向，其被护卫舰的救援距离更短。
- 4、由于队形设计具有对称性，拦截数量在角度上具有对称性。

### 4.3 问题三的解答

由题可知，编队在得到空中预警机的信息支援后，对距离指挥舰 200 千米范围内的所有来袭导弹都可以准确预警，但编队队形和舰艇最大射程均保持不变。所以，问题三可以看做是问题二的改进，相对于问题二，只是发现域有所变大，也就是来袭导弹发现点位置的求解与问题二有所不同。

同样可以将 20 度至 220 度的扇形范围离散化，将其划分为  $n$  份，并认为在每一个角度上都有导弹源源不断地袭来。接着对这  $n+1$  条可能的来袭路线进行分析，其角度分别为：

$$\theta = \left( 20 + \frac{200}{n} i \right)^{\circ} (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

#### 4.3.1 来袭导弹发现点位置求解

由于探测范围增至以指挥舰为圆心 200 千米为半径的范围内，所以在 20 度至 220 度的扇形区域，最大的探测距离，即来袭导弹发现点位置均位于距指挥舰 200 千米，如图 4.所示：

设发现点为 F，则有  $|\overline{OF}| = 200km$ ，故可得 F 点的坐标为：

$$\left( |\overline{OF}| \cos \theta, |\overline{OF}| \sin \theta \right)。$$

由于各舰艇的射程与问题二中没有任何变化，所以“舰艇最大射程与来袭导弹交点位置求解”的模型与问题二中没有任何变化，所以在此不过多赘述。

同理，“拦截导弹与来袭导弹相遇位置求解”的模型与问题二也没有过多的变化，只是由于来袭导弹发现位置和拦截导弹与来袭导弹相遇位置相距甚远，远远超过拦截导弹准备时间（7s）时来袭导弹所飞行的距离，所以不用分为问题二中的两种情况进行分析，第一个拦截导弹与来袭导弹的相遇位置一定位于舰艇最大射程与来袭导弹的交点位置。

、

#### 4.3.2 编队抗饱和攻击能力的确定

同样将计算过程通过 C++编程进行实现，编译器为 GNU GCC Compiler，具体程序框图如图 4.12 所示：

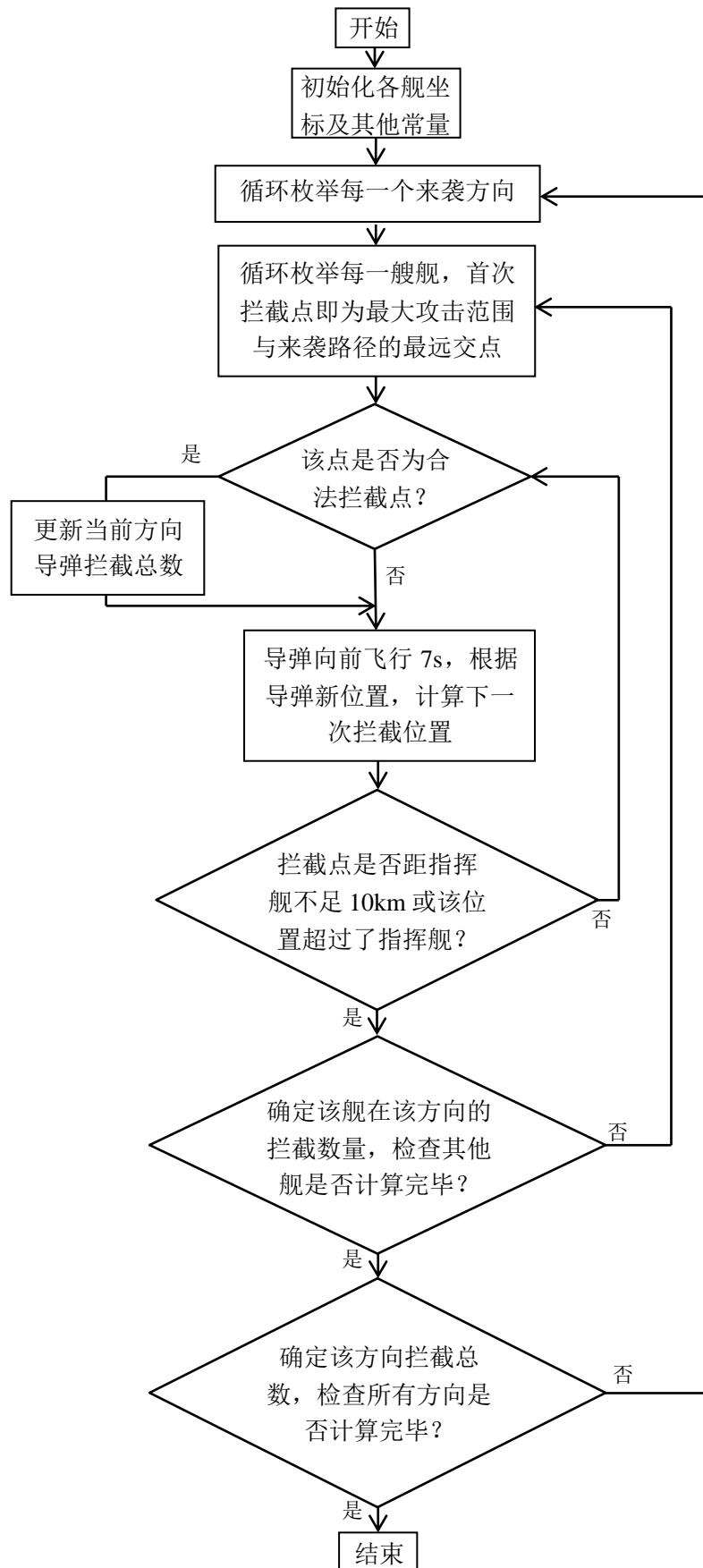


图 4.12 问题三程序框图

计算结果如图 4.13 所示

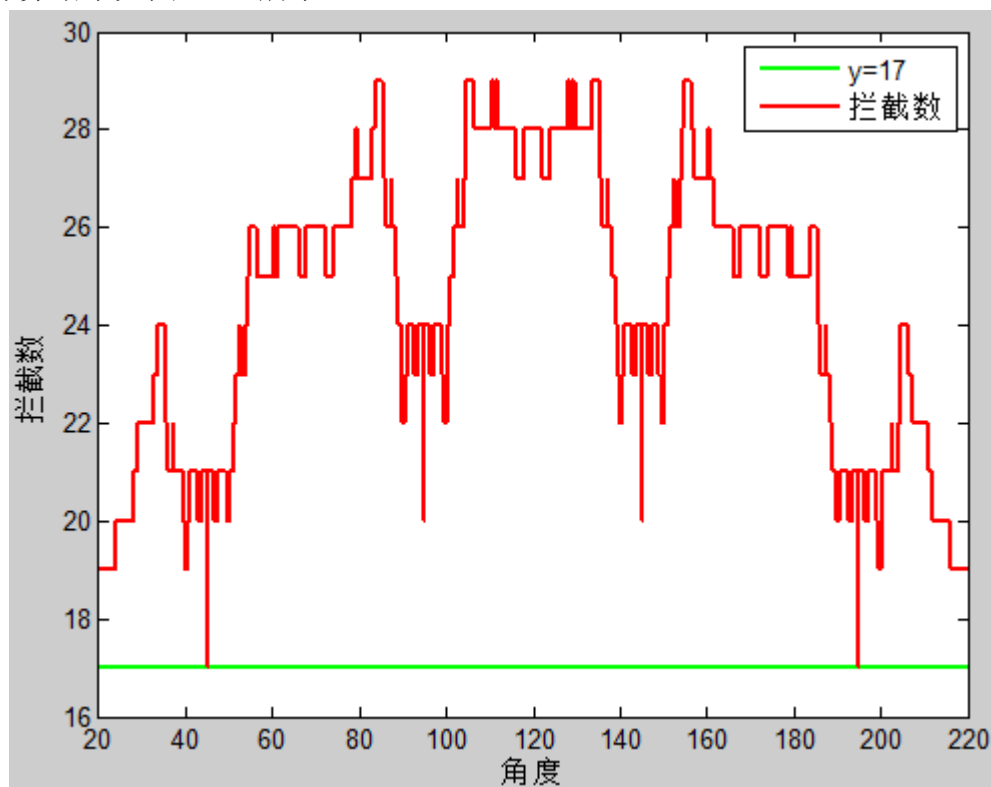


图 4.13 问题三来袭角度与抗饱和攻击能力关系图

### 4.3.3 结论分析

据图 4.13，可得以下 5 条主要结论：

- 1、相比于问题二抗饱和攻击能力为 9 批，编队的抗饱和攻击能力提升了 88.9%，这主要是由于空中预警机的信息支援扩大了编队的发现范围，能够更早更有效的部署规划防御导弹。
- 2、最危险的方向为 45 度和 195 度过圆心的附近，在该方向上，编队最多能够防卫 17 批导弹。这是因为从舰队安全的角度出发，位于距离护卫舰 10km 以内的导弹不能被击落，并且其他护卫舰对于该方向的救援距离相对较远。
- 3、20 度和 220 度并不是最危险的来袭方向，这是因为来袭导弹发现位置对于各个方向来说的都是相同的，而 20 度方向并没有半径为 10km 的防卫盲区。
- 4、振荡现象同样存在，原因和问题二同理。
- 5、由于队形设计具有对称性，拦截数量在角度上也具有对称性。

## 4.4 问题四的解答

### 4.4.1 数据的清洗与归类

问题四中给出了预警机发现的 12 批可疑空中目标，并在附件 1 的表格中给出了雷达测得的所有目标的位置。所以首先应对附件 1 中给出的数据进行归类，以目标 ID 为标准，分为 12 组目标位置。

通过观察，我们发现附件 1 中的数据有些明显的脏数据，这样的脏数据分为两类：一类是时间点重复，即空中目标的作战时间存在重复记录，另一类是顺序错误，即部分记录的数据的顺序出现错误。

接着，我们清洗这两类脏数据，首先对每一个空中目标，将该目标的记录数据进行排序，保证这些数据按照一个正确的顺序排列，然后修正重复的时间点。

由于表中所给目标位置经纬度的单位均为弧度，所以还需要通过换算将表中目标位置的经纬度换算为角度表示。

### 4.4.2 聚类分析检验

题目中表 2 给出了用于判断空中目标意图的知识和规则，所以首先应对表中的数据进行分析，检验题目所给的六个指标能否用于空中意图的聚类分析。表中数据见下表 1 所示：

表 1 已知目标的信息

目标	方位角	距离	水平速度	航向角	高度	雷达反射面积	属性	意图
1	810	281	250	202	6.0	3.0	中	侦察
2	2300	210	300	310	4.0	1.2	小	攻击
3	820	280	245	201	6.5	5.4	大	侦察
4	2 325	215	320	324	4.2	2.8	中	攻击
5	830	282	255	200	4.2	4.7	大	侦察
6	825	284	250	204	5.0	2.6	中	侦察
7	2 250	150	300	155	5.0	3.3	中	攻击
8	4 000	110	300	50	3.4	2.1	中	掩护
9	2 800	260	215	260	7.7	6.8	大	监视
10	5120	110	210	52	3.6	3.7	中	其它
11	4 020	120	280	52	3.6	1.7	小	掩护
12	4800	140	220	18	9.6	5.7	大	其它
13	480	295	292	245	9.9	6.9	大	其它
14	2 450	210	230	210	5.0	1.2	小	其它
15	2 900	290	272	350	5.6	5.2	大	攻击

从表 1 中可以看出，空中目标的最终意图主要受方位角  $\beta(mil)$ ，距离  $D(km)$ ，水平速度  $V(m/s)$ ，航向角  $\theta(^{\circ})$ ，高度  $H(km)$ ，雷达反射面积  $\sigma(m^2)$  6 个指标的影响。且空中目标 {1, 3, 5, 6} 为侦察类，{2, 4, 7, 15} 为攻击类，{8, 11} 为掩护类，{9} 为监视类，{10, 12, 13, 14} 为其它类。



接下来对这 6 个指标因素进行聚类分析检验，采用最短距离法，通过 matlab 2012b 软件进行实现。聚类分析之后的结果如图 4.14 所示：

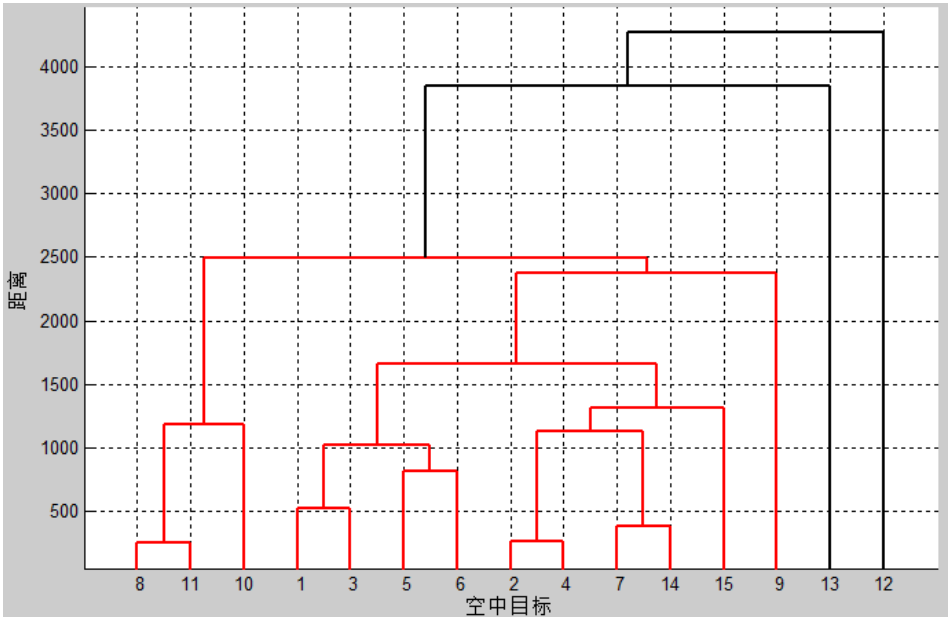
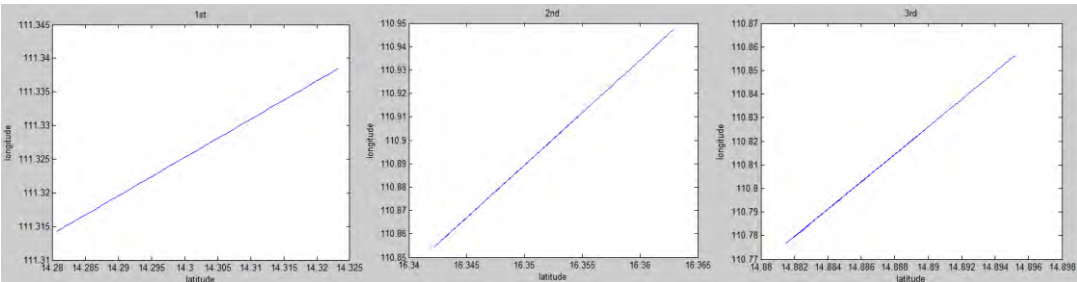


图 4.14 已知目标聚类分析

通过观察聚类分析之后的树状图 4.1，可以发现空中目标{1，3，5，6}为一类，{2，4，7，14，15}为一类，{8，10，11}为一类，{9}为一类，{13，12}为一类。对比上表 4.1 可以发现，除了空中目标 10 和 14 的分类与上表不同，其余空中目标的分类均相同，且空中目标 10 和 14 在表 4.1 中的意图均为“其他”类。相比“侦察”、“攻击”等具体意图，“其他”类确实更加不容易判断。由此可以认为聚类分析检验结果与表 4.1 中所列情况基本吻合，故认为该聚类分析方法切实可行。

#### 4.4.3 12 组可疑空中目标运动轨迹分析

通过数据的清洗与归类，目前已经得到了 12 组不同 ID 的空中目标在不同时刻的经纬度坐标。分别将这 12 组数据导入到 matlab 2012b 中，并以目标纬度为 x 轴，目标经度为 y 轴，画出空中目标飞行轨迹的图像。结果如图 4.15 所示：



目标 1: 41006830

目标 2: 41006831

目标 3: 41006836

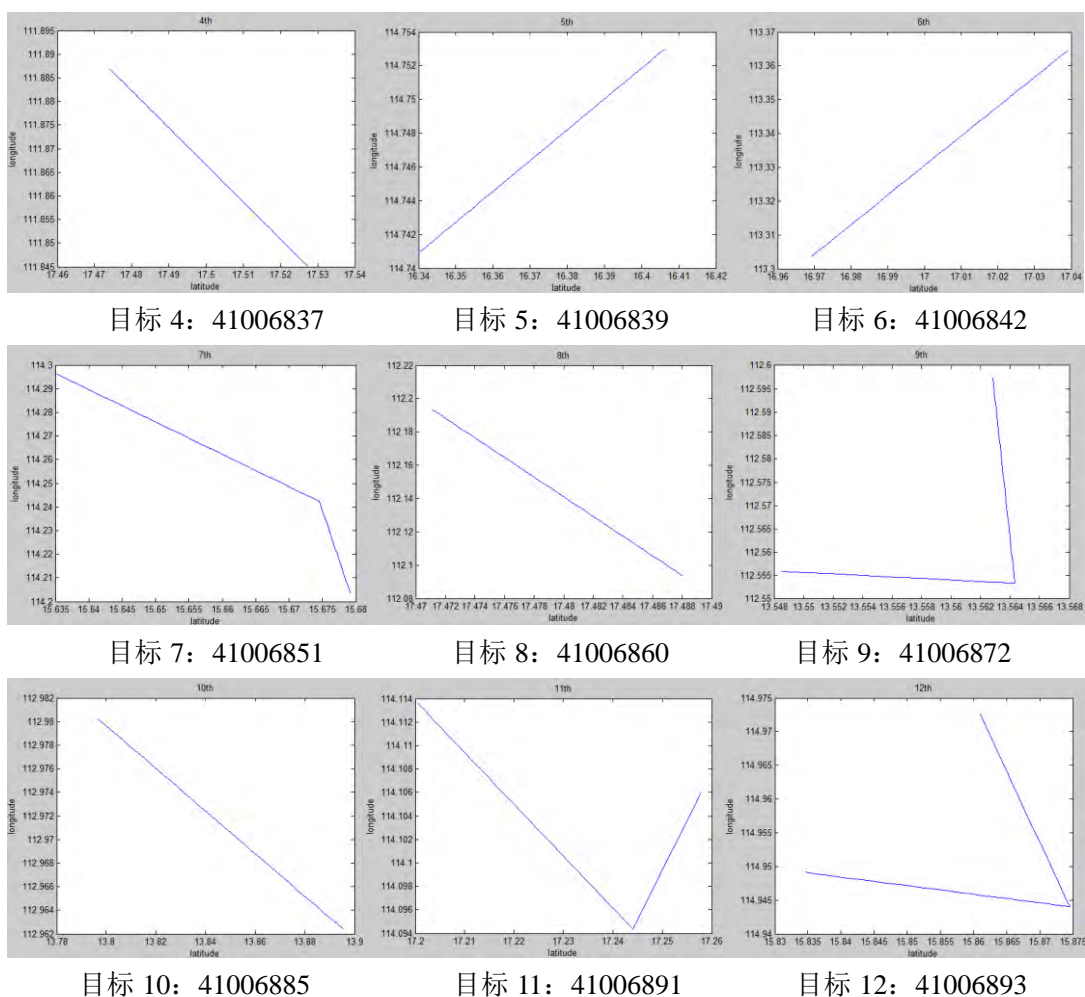


图 4.15 待分类目标飞行轨迹

从上图 4.15 中可以看出，大部分空中目标在记录的时间内的轨迹是直线运动，少数空中目标的运动轨迹不是一条直线，而是有速度改变。具体来说：1、2、3、4、6、8、10 号空中目标的运动轨迹是直线；5 号空中目标水平方向是直线运动，但分析表中数据可以发现竖直方向有一个向下的陡降；7、9、11、12 号空中目标水平方向的运动轨迹并非一条直接，而是有速度方向的变化，此外通过表中数据可知，7 号空中目标在改变水平速度方向的同时，在竖直方向上也出现了高度的骤降。

通过观察上图 12 个空中目标运动轨迹的曲线，可以初步认为：运动轨迹始终为一条直线的空中目标，它的意图比较容易判断；而运动轨迹发生明显变化的空中目标，可能意味着意图的改变，相比于直线运动的空中目标，其意图不容易判断。

根据以上分析，若要判断 12 个空中目标的意图，则需要分别确定这 12 个空中目标的 6 个指标（如上表所示），进而进行聚类分析判定其意图。

#### 4.4.4 距离计算模型

要确定距离  $D(km)$ ，则需要分别是水平距离和高度。

根据处理后的数据，可知这 12 个空中目标在任意时刻的经纬度，设

$(x_i(t), y_i(t))$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, 12$  为第  $i$  个空中目标在  $t$  时刻的坐标（也就是目标的经纬度）。又知指挥舰所在位置为北纬 15 度 41 分 7 秒，东经 112 度 42 分 10 秒，即  $(x_0, y_0) = (15.6853, 112.7028)$ 。在已知地球半径  $R = 6371km$  的情况下，可以分别计算出这 12 个空中目标在任意时刻与指挥舰之间的距离，地理学上，可查得计算公式为：

$$D_{\text{水平}} = R \arccos[\cos x_0 \cos x_i \cos(y_0 - y_i) + \sin x_0 \sin x_i], i = 1, 2, \dots, 12$$

在求得水平距离  $D_{\text{水平}}$  之后，通过  $D = \sqrt{D_{\text{水平}}^2 + H^2}$  即可求得距离  $D(km)$ 。

具体计算通过 C++ 编程进行实现，编译器为 GNU GCC Compiler。具体代码见附件。

#### 4.4.5 水平速度计算模型

在计算水平速度时，我们首先把空中目标分为两类：一类是水平方向运动轨迹始终为直线的目标，包括 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 号空中目标；另一类是水平方向运动轨迹有改变的空中目标，包括 7, 9, 11, 12 号目标。

##### 4.4.5.1 运动轨迹始终为直线的目标

对于始终做直线运动的目标，找到始末两点的坐标  $g_1(x_{g1}, y_{g1})$ ,  $g_2(x_{g2}, y_{g2})$ ,

其中  $x_{g1}$ 、 $x_{g2}$  表始末两点的经度， $y_{g1}$ 、 $y_{g2}$  表示始末两点的纬度。利用地理学上的距离公式即可求出始末两点的距离：

$$d_g = R \arccos[\cos x_{g1} \cos x_{g2} \cos(y_{g1} - y_{g2}) + \sin x_{g1} \sin x_{g2}]$$

另一方面，从表格中我们可以数出空中目标运动的总时间  $t$ ，于是水平平均速度为：

$$\bar{v} = \frac{d_g}{t}$$

##### 4.4.5.2 运动轨迹有变化的目标

对于 7、9、11、12 号空中目标而言，观察其运动轨迹图我们可以发现，这些目标在中途都有速度方向的改变，所以可以求得它们速度改变前后的两个不同水平平均速度。于是，我们需要找出三个点：始点，拐点，末点，将这三个点分别记为  $g_1(x_{g1}, y_{g1})$ ,  $g_2(x_{g2}, y_{g2})$ ,  $g_3(x_{g3}, y_{g3})$ 。因此，可以分别求得速度方向改变前的飞行距离和速度改变后的飞行距离：

$$d_g^1 = R \arccos[\cos x_{g1} \cos x_{g2} \cos(y_{g1} - y_{g2}) + \sin x_{g1} \sin x_{g2}]$$

$$d_g^2 = R \arccos [\cos x_{g2} \cos x_{g3} \cos(y_{g2} - y_{g3}) + \sin x_{g2} \sin x_{g3}]$$

进而，可以求出速度方向改变前的水平平均速度大小和速度方向改变后的水平平均速度大小：

$$\bar{v}_1 = \frac{d_g^1}{t}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{d_g^2}{t}$$

具体计算通过 matlab 2012b 实现，具体代码见附件。

#### 4.4.6 方位角计算模型

由于空中目标在观测的短时间内，仅在小范围运动，所以方位角也仅有微小的变化。设任一空中目标始末两点的坐标  $g_1(x_{g1}, y_{g1})$ ,  $g_2(x_{g2}, y_{g2})$ ，其中  $x_{g1}$ 、 $x_{g2}$  表始末两点的经度， $y_{g1}$ 、 $y_{g2}$  表示始末两点的纬度。根据始末两点坐标，可以得到一个由  $g_1$  到  $g_2$  的向量  $\vec{a} = (x_{g2} - x_{g1}, y_{g2} - y_{g1})$ ，再令正北方向的单位向量为  $\vec{e} = (1, 0)$ ， $\vec{a}$  与  $\vec{e}$  之间的夹角为  $\beta$ ，则有：

$$\vec{a} \cdot \vec{e} = |\vec{a}| |\vec{e}| \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}}{|\vec{a}| |\vec{e}|} = \frac{x_{g2} - x_{g1}}{\sqrt{(x_{g2} - x_{g1})^2 + (y_{g2} - y_{g1})^2}}$$

由此可以求得  $\beta$  的值， $\beta \in [0, \pi]$ 。

当  $x_{g2} - x_{g1} > 0$  时，此时  $\beta$  即为直线运动的方位角；当  $x_{g2} - x_{g1} < 0$  时，

$2\pi - \beta$  为直线的方位角。

具体计算通过 C++ 编程进行实现，编译器为 GNU GCC Compiler。具体代码见附件。

#### 4.4.7 航向角计算模型

在计算航向角时，我们同样要首先把空中目标分为两类：一类是水平方向运动轨迹始终为直线的目标，包括 1,2,3,4,5,6,8,10 号空中目标；另一类是水平方向运动轨迹有改变的空中目标，包括 7,9,11,12 号目标。

#### 4.4.7.1 运动轨迹始终为直线的目标

对于始终做直线运动的目标,找到始末两点的坐标  $g_1(x_{g1}, y_{g1})$ ,  $g_2(x_{g2}, y_{g2})$ , 其中  $x_{g1}$ 、 $x_{g2}$  表始末两点的经度,  $y_{g1}$ 、 $y_{g2}$  表示始末两点的纬度。则航向角  $\theta$  满足:

$$\cos \theta = \frac{x_{g2} - x_{g1}}{\sqrt{(x_{g2} - x_{g1})^2 + (y_{g2} - y_{g1})^2}}$$

$$\theta = \arccos \frac{x_{g2} - x_{g1}}{\sqrt{(x_{g2} - x_{g1})^2 + (y_{g2} - y_{g1})^2}}$$

由此可以求得  $\theta$  的值,  $\theta \in [0, \pi]$ 。当  $y_{g2} - y_{g1} \geq 0$  时, 此时  $\theta$  即为直线运动的航向角; 当  $y_{g2} - y_{g1} < 0$  时,  $2\pi - \theta$  为直线的航向角。

#### 4.4.7.2 运动轨迹有变化的目标

对于 7、9、11、12 号空中目标而言, 观察其运动轨迹图我们可以发现, 这些目标在中途都有速度方向的改变, 所以这些空中目标在中途都存在航向的改变。于是, 我们需要找出三个点: 始点, 拐点, 末点。将这三个点分别记为  $g_1(x_{g1}, y_{g1})$ ,  $g_2(x_{g2}, y_{g2})$ ,  $g_3(x_{g3}, y_{g3})$ 。因此, 可以分别求得速度方向改变前的航向和改变后的航向:

$$\theta_1 = \arccos \frac{x_{g2} - x_{g1}}{\sqrt{(x_{g2} - x_{g1})^2 + (y_{g2} - y_{g1})^2}}$$

$$\theta_2 = \arccos \frac{x_{g3} - x_{g2}}{\sqrt{(x_{g3} - x_{g2})^2 + (y_{g3} - y_{g2})^2}}$$

同样可以求得  $\theta_i$  的值,  $\theta_i \in [0, \pi]$ 。当  $y_{gi+1} - y_{gi} \geq 0$  时, 此时  $\theta_i$  即为直线运动的航向角; 当  $y_{gi+1} - y_{gi} < 0$  时,  $2\pi - \theta_i$  为直线的航向角,  $i = 1, 2$ 。

具体计算通过 matlab 2012b 实现, 具体代码见附件。

#### 4.4.7 12 组可疑空中目标的意图识别

通过如上四个模型, 分别可以得出 12 组可疑空中目标的方位角  $\beta(mil)$ , 距离  $D(km)$ , 水平速度  $V(m/s)$ , 航向角  $\theta(^{\circ})$ , 再加上附件 1 中给出的高度  $H(km)$  和

给出的雷达反射面积 $\sigma(m^2)$ ，就得到了用于判断空中目标意图的 6 个全部指标。

表 2.待分类目标的指标

目标 ID	方位角(初)	方位角(末)	距离(初)	距离 (末)	雷达面积
41006830	3994.14	4000.85	216.07	210.85	3.1
41006831	5048.50	5175.32	210.60	202.37	3.5
41006836	4397.12	4388.15	224.9455	216.69	5.7
41006837	5956.35	5964.16	224.14	217.93	1.9
41006839	1256.34	1283.28	217.10	185.61	4.3
41006842	462.67	445.82	156.49	252.50	5.5
41006851	1630.96	1604.13	160.64	294.49	2.6
41006860	6115.58	6067.99	210.92	268.37	5.5
41006872	3269.89	3250.49	236.35	118.11	6.2
41006885	3051.42	3053.27	200.94	294.41	1.7
41006891	742.08	763.7503	225.93	186.54	1.1
41006893	1521.28	1532.43	243.82	241.12	3.6

续表. 待分类目标的指标

目标 ID	速度 (初)	速度 (末)	航向角(初)	航向角(末)	高度
41006830	138.37	138.37	29.63	29.63	7000
41006831	254.77	254.77	77.43	77.43	9200
41006836	217.93	217.93	80.27	80.27	4600
41006837	185.22	185.22	141.86	141.86	5200
41006839	185.62	185.62	169.65	169.65	5200
41006842	252.50	252.50	138.91	138.91	3400
41006851	294.49	267.12	59.66	83.21	2600
41006860	268.37	268.37	80.39	80.39	9400
41006872	118.11	176.75	25.11	91.96	6000
41006885	294.41	294.41	10.22	10.22	1400
41006891	186.54	195.50	144.76	156.18	4800
41006893	150.89	213.46	78.03	172.77	8600

分别对 12 组可疑空中目标和表 2 中 15 组已知意图的目标进行聚类分析，即可判断这 12 组可疑空中目标的意图。

对于运动轨迹始终为直线的空中目标，分别对始末两个点进行聚类分析；对于运动轨迹有变化的空中目标，需对始点、拐点、末点三个点进行聚类分析。聚类分析的结果如下图 4.16 和图 4.17 所示：(以下仅列出 41006830 和 41006872 的聚类分析树状图，其他聚类分析树状图见附件)

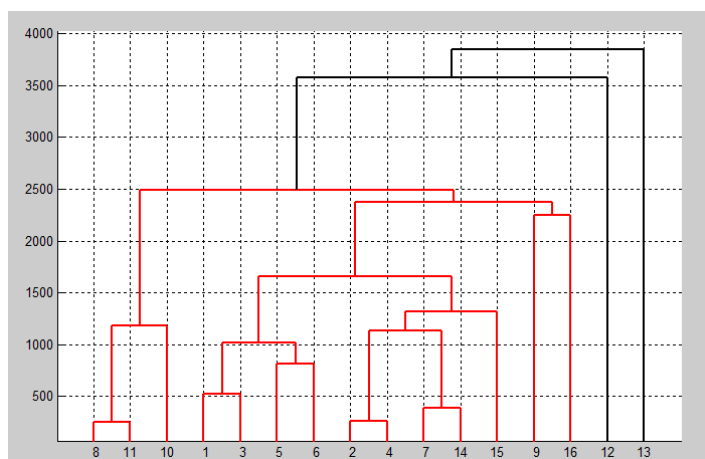


图 4.16 ID41006830 的分类树状图

通过图 4.16 可知, 16(ID 41006830)与 9 同属一类, 因为判断 16(ID 41006830)的意图为监视。

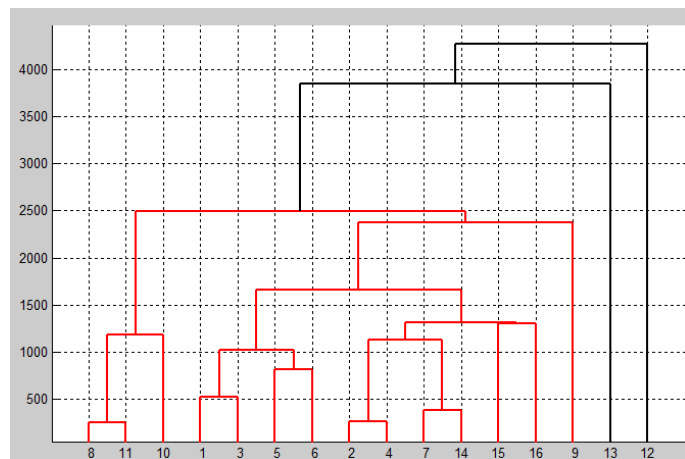


图 4.17 ID41006872 的分类

通过图 4.17 可知, 16 (ID 41006872) 与 15 同属一类, 因为判断 16 (ID 41006872) 的意图为攻击。

对 12 组可疑目标分别进行聚类分析后, 可以识别出各目标可能的意图, 见表 3:

表 3.待分类目标的分类意图

目标 ID	可能意图	目标 ID	可能意图
41006830	监视	41006851	先监视后其它
41006831	其它	41006860	其它
41006836	掩护或其它	41006872	攻击
41006837	监视	41006885	其它
41006839	侦察	41006891	侦察
41006842	先侦察后其它	41006893	监视

#### 4.5 问题五的解答

本题我们建立战略级模型, 运用黑箱去描述大型战争的过程。首先我们将美国及多国部队简记为盟军。我们把军种分为四类: 陆军、海军、空军、防空。

记A表示盟军，I表示伊拉克，用 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$ 分别表示盟军的陆军、海军、空军、防空，其中由表格可知盟军的防空系统没有，故 $A_4 = 0$ 。 $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$ 分别表示盟军的陆军、海军、空军、防空。

#### 4.5.1 传统模型（兰彻斯特方程）

经典的兰彻斯特方程对战争中的两种战术情况进行了研究。第一种情况称为线性律，其假定条件是交战双方兵力相互隐蔽，每一方火力集中在对方战斗成员的集结区域，不对个别目标实施瞄准，火力为面火力。第二种情况称为平方律，平方律建立在近代战斗模型基础上，基本假定是双方兵力互相暴露在对方视线范围内，每一方运用他们的全部兵力并集中火力射击对方兵力。

##### 4.5.1.1 平方定律：

$$\begin{aligned}\frac{dA(t)}{dt} &= -\beta I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -\alpha A(t)\end{aligned}$$

$A(t)$ 表示盟军在 $t$ 时刻的总兵力， $I(t)$ 表示伊拉克在 $t$ 时刻的总兵力。 $\beta$ 表示伊拉克军队的毁伤率， $\alpha$ 表示盟军的毁伤率，显然有 $\alpha > \beta$ 。

##### 4.5.1.2 线性定律：

$$\begin{aligned}\frac{dA(t)}{dt} &= -\beta I(t)A(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -\alpha A(t)I(t)\end{aligned}$$

$A(t)$ 表示盟军在 $t$ 时刻的总兵力， $I(t)$ 表示伊拉克在 $t$ 时刻的总兵力。 $\beta$ 表示伊拉克军队的毁伤率， $\alpha$ 表示盟军的毁伤率，显然有 $\alpha > \beta$ 。

#### 4.5.2 多维战争模型（无协同作战）

我们假设盟军四个军种 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$ 的毁伤系数分别是 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ 。伊拉克军队四个军种 $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$ 的毁伤系数分别是 $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ 、 $\beta_4$ 。伊军第 $j$ 个作战单位对盟军第 $i$ 个作战单位分配的火力系数为 $\phi_{ji}$ ，盟军第 $i$ 个作战单位对伊军第 $j$ 个作战单位分配的火力系数为 $\varphi_{ij}$ 。

我们认为：（1）每类作战单位有一类或多类攻击目标，并以一定比例攻击每类目标；（2）只考虑单个作战单位的平均毁伤能力和作战成员数量等可量化的因素，忽略心理素质、战斗意志、对领导的信任等不可量化的因素；（3）红蓝两个作战单位之间采用近代作战模型；（4）不考虑红蓝双方中各个作战单位之间的协同因素，则有：

$$\frac{dA(t)_j}{dt} = - \sum_{i=1}^4 \phi_{ji} \beta_i I(t)_i$$



$$\frac{dI(t)_i}{dt} = - \sum_{j=1}^4 \varphi_{ij} \alpha_j A(t)_j$$

#### 4.5.3 多维战争模型(有协同作战)

协同作战是指各种作战力量为形成整体作战能力，按照统一的协同计划，在行动上所进行的协调配合。协同作战可以增强己方作战体系的毁伤系数而增加敌方损耗。己方也因敌方火力降低而损耗减少，等价于己方加入兵力补充。

从附件资料中可以看出，整个海湾战争过程中，盟军各个军种的协同作战是盟军的战斗力大大提高，伊军几乎没有反抗的能力，我们有必要将协同作战引入战争模型。由于盟军的协同作战系数远远高于伊军的协同作战系数，所以我们设盟军第*i*个作战单位与第*j*个作战单位分配的火力系数为 $r_{ij}$ ，当*i* = *j*时，

有 $r_{ij} = 0$ ；设伊军各部队的协同作战系数为 0（伊拉克军队的协同作战能力相较于盟军来讲可以忽略不计）。

模型为：

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)_j}{dt} &= - \sum_{i=1}^4 \phi_{ji} \beta_i I(t)_i + \sum_{k=1}^4 r_{kj} A(t)_k A(t)_j \\ \frac{dI(t)_i}{dt} &= - \sum_{j=1}^4 \varphi_{ij} \alpha_j A(t)_j \end{aligned}$$

#### 4.5.4 带有电磁环境影响的战争模型

从附件资料中可以看出，盟军在作战过程中采用了电子战与信息战。电子战与信息战在作战过程中起到了举足轻重的作用。在电子战中，不仅需要比较好的电磁环境，还需要先进和稳定的信息系统。在此模型中，我们引入电磁环境作为方程的一个因素。由于盟军的电磁环境影响度远远大于伊军的电磁环境影响度，所以我们仅考虑盟军的电磁环境影响度，并认为伊军的电磁环境影响度为 0。在模型中加入电磁环境影响，模型如下：

$$\begin{aligned} \frac{dA_j}{dt} &= - \sum_{i=1}^4 \phi_{ji} \beta_i I_i + \sum_{k=1}^4 r_{kj} A_k A_j + e(t) A_j \\ \frac{dI_i}{dt} &= - \sum_{j=1}^4 \varphi_{ij} \alpha_j A_j \end{aligned}$$

$e(t)$ 为*t*时刻环境中的电磁环境影响度， $e(t) > 0$ 。我们定义 $e(t)$ 为电磁环境条件引起作战单位数量相对变化速率的绝对值。此模型表现为正值，即电磁环境的优势减少了盟军的伤亡。由此可见，电磁环境影响度是时间的函数。由于电磁环境具有随机性、动态性和对抗性等特点，电子战装备对其的感知在不同时间不一样。一般来说，电磁环境影响度由具体的电子环境条件及作战双方对

其适应、运用的能力这两个因素共同决定。

4.5.5 带有感知系数的模型

兰彻斯特线性律的基本假定是交战双方互相隐蔽，平方律的基本假定是作战双方相互暴露，因此都无法描述信息对战争进程的影响。在平方律和线性律的基础上，引入感知系数 $u_A$ 、 $u_I$ 来描述战争进程， $u_A$ 表示盟军的战场感知系数， $u_I$ 表示伊军的战场感知系数：

$$\begin{aligned}\frac{dA_j}{dt} &= -u_I \sum_{i=1}^4 \phi_{ji} \beta_i I_i - (1 - u_I) \sum_{i=1}^4 \beta_i \phi_{ji} I_i A_j + \sum_{k=1}^4 r_{kj} A_k A_j + e(t) A_j \\ \frac{dI_i}{dt} &= -u_A \sum_{j=1}^4 \varphi_{ij} \alpha_j A_j - (1 - u_A) \sum_{j=1}^4 \alpha_j \varphi_{ij} A_j I_i\end{aligned}$$

注意，我们称 $k = \frac{u_A}{u_I}$ 称为信息优势，当 $u_A = u_I$ 趋于 0 并取得极限时就得到线性律的标准形式，也符合线性律的基本假定，即交战双方互相隐蔽； $u_A = u_I = 1$ 时，得到平方律的标准形式，并符合平方律的基本假定，即交战双方互相暴露。

4.5.6 对海湾战争进行验证

我们用最后一个模型对海湾战争进行模拟。

4.5.6.1 初值的确定

表 4. 海湾战争实际初始信息

区分	美国及多国部队			伊军	对比
	美军	其他国家	合计		
总兵力	53.7 万	22.3 万	76 万	120 万	1:1.6
陆军	30 万	20 万	50 万	115 万	1:2.4
空军	5 万	3 万	8 万	4 万	2:1
海军	17.5 万	3 万	20.5 万	0.5 万	40:1
坦克	2500 辆	1000 辆	3500 辆	5600 辆	1:1.6
装甲车	2000 辆	1000 辆	3000 辆	7000 辆	1:2.3
固定翼飞机	2000 架	1300 架	3300 架	793 架	4.2:1
直升机	1700 架	200 架	1900 架	300 架	6.3:1
舰船	120 艘	60 艘	180 艘	60 艘	3:1
火炮	1200 门	400 门	1600 门	3000 门	1:1.9
防空导弹				380 座	
地面高炮				4700 门	

由上表，我们将陆军兵力、坦克、装甲车、火炮合称为陆军战斗力；将空军兵力、固定翼飞机、直升机合称为空军战斗力；将海军、舰船合称为海军战斗力；将防空导弹、地面高炮合称为防空战斗力。

对于装甲车、飞机、舰船我们进行如下处理：我们认为一辆坦克或装甲车

约为 10 人陆军兵力，一架飞机约为 10 人空军兵力，一艘舰船约为 10 人海军兵力，一门防空导弹或地面高炮约为 10 人防空兵力。

故经计算，我们可以估算出海湾战争的初始战斗力：

表 5.海湾战争初值

	陆军战斗力	海军战斗力	空军战斗力	防空战斗力
盟军	581000	100800	206800	0
伊军	1306000	50930	5600	50800

#### 4.5.6.1 参数的设定

由方程(), 可以看到方程中有很多参数，我们需要对其进行设定。参数设定如下：

$$\beta = (0.5, 0.4, 0.3, 0.7), \alpha = (0.6, 0.7, 0.8, 0.6)$$

$$r = \begin{bmatrix} 0 & 0.0015 & 0.002 & 0.0015 \\ 0.0015 & 0 & 0.0015 & 0.002 \\ 0.002 & 0.0015 & 0 & 0.0014 \\ 0.0015 & 0.002 & 0.0015 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.04 & 0.02 & 0.03 \\ 0.03 & 0.01 & 0.04 & 0.02 \\ 0.02 & 0.03 & 0.01 & 0.04 \\ 0.04 & 0.02 & 0.03 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$u_A = 0.8, u_I = 0.1$$

#### 4.5.7 模型结果

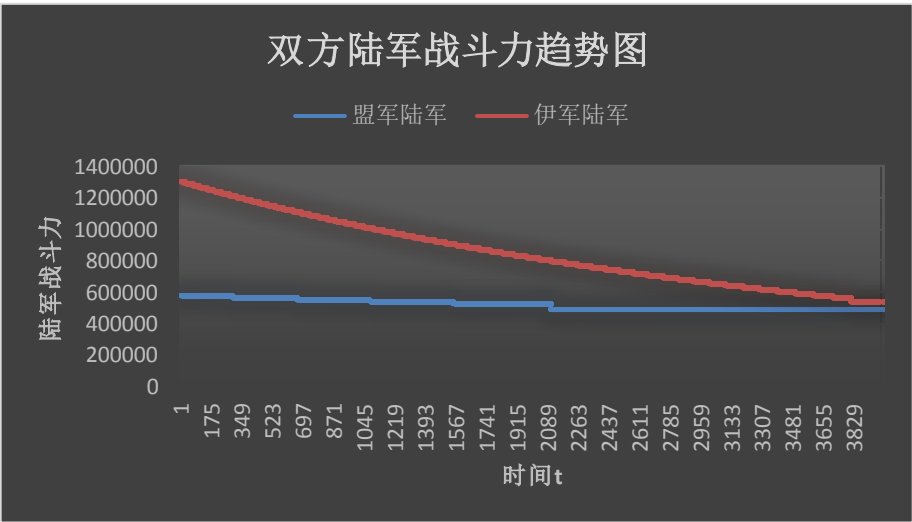


图 4.18 海湾战争陆军战斗趋势图

可以看出，盟军的陆军战斗力损失不大，但是伊拉克陆军战斗力却剧烈减少。

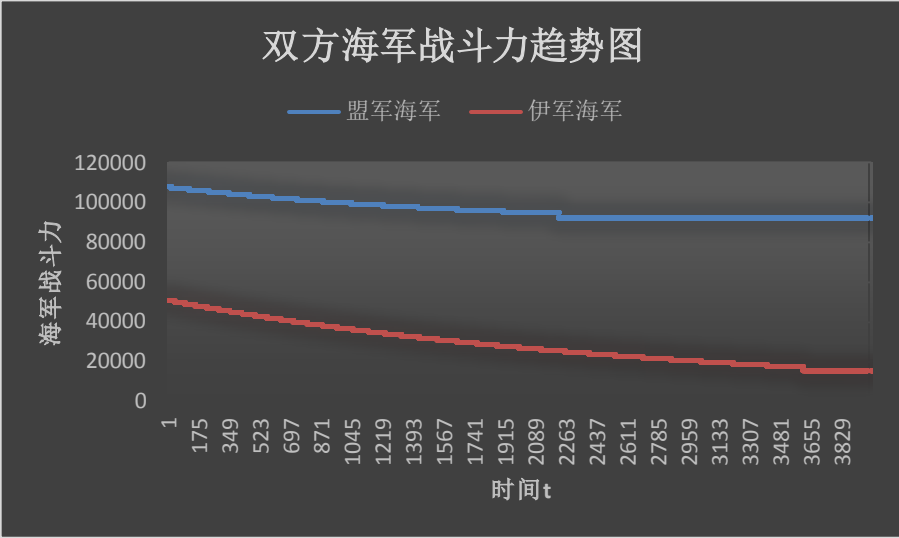


图 4.19 海湾战争海军战斗趋势图

从图中可以看出，盟军海军战斗力缓慢减少，但是伊拉克海军战斗力显著减少。

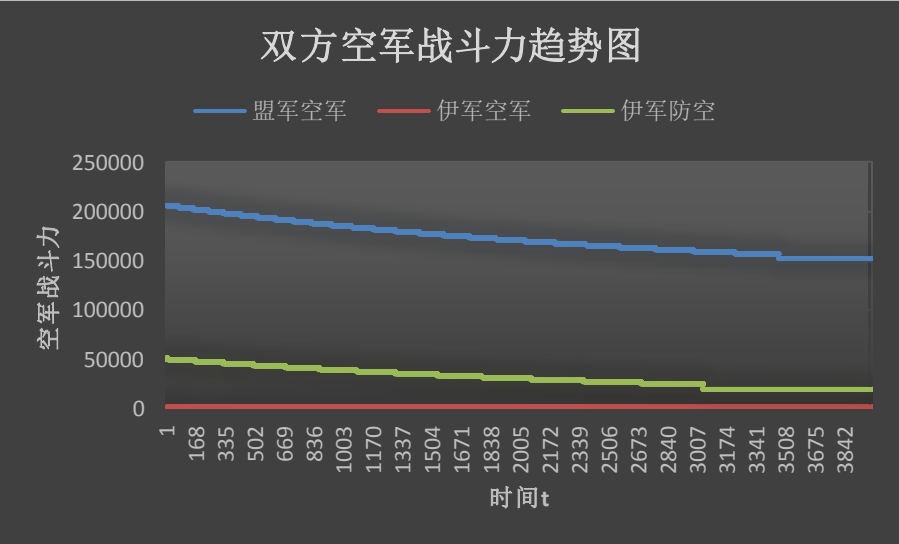


图 4.20 海湾战争空军战斗趋势图

从中可以看出，盟军空军战斗力有所减少，是因为既需要对付伊军空军，又需要对付伊军防空战斗力；其次，伊军空军战斗力减少接近于 0，防空战斗力也有显著减少。对比海湾战争的结果：

表 6.海湾战争实际结果

		多国部队	伊拉克	对比
人员	死亡	340	2.5 万	1:74
	受伤	776	7.5 万	1:97
	被俘、失踪	80	17.5 万	1:2188
装备	飞机	68	324	1:4.8
	坦克	35	3847	1:110
	装甲车	0	1450	
	火炮	0	2917	
	舰船	受伤 2	沉 57 伤 16	

我们发现，此模型模拟的结果趋势和实际海湾战争趋势大体相同：均是伊拉克部队损失惨重，而盟军部队损失甚微。

从模型结果我们可以得出以下结论：信息系统和电磁环境在现代战争中起着决定性作用。好好发挥现代信息化的优势，可以极大程度地减少己方损失同时又极大程度地打击敌方。

## 5 模型的分析与评价

### 5.1 模型的优点

1) 确定最佳编队的过程，我们找到了一个巧妙的切入点，利用反证的思想，避免了空洞的讨论。

2) 为求最薄弱处的抗击能力，我们采用了离散化的思想，将整个扇形进行了离散分割，再采用几何知识得到简明的几何关系，同时使得程序思路清晰。

3) 第四题我们避免了复杂的物理过程分析，单单从数据入手，利用聚类分析将待定空中目标进行了分类。

4) 在建立战略级模型中，我们在传统的兰彻斯特方程中加入了现代化信息战的特性，比如电磁环境影响度、各部队协同作战能力、信息优势等。

### 5.2 模型的缺点

1) 程序中，我们将以护卫舰和指挥舰为圆心，10 千米为半径的圆内的碰撞点直接挖去，实际中应该更加细致的讨论。

2) 第五问中有些非量化因素，诸如心理素质、战斗意志等没有进行合理地量化。

## 6 参考文献

- [1]陈行勇,张殿宗,雷国强.基于战场电磁环境影响度的兰彻斯特战斗模型[J].电子信息对抗技术, 2014, 29(2):60-64.
- [2]郭锐,赵晓哲.水面舰艇编队防空反导作战效能[J].火力与指挥控制, 2004, 29:57-61.
- [3]孔红山,张明清,唐俊.兰彻斯特方程的系统动力学模型研究[J].计算机工程与设计, 2011, 32(8): 2879-2816.
- [4]吴金平,陆铭华,黄文斌等.水面舰艇编队对反舰导弹的威胁判断研究[J].系统仿真学报, 2004, 16(5):879-882.
- [5]吴俊,杨峰,梁彦等.面向信息化战争的广义兰切斯特作战模型[J].火力与指挥控制, 2010, 35(2):50-53.
- [6]王步云,赵晓哲,王军.睡眠舰艇编队反舰作战中作战网络结构的优化[J].系统工程理论与实践, 2013, 33(9):2354-2361.
- [7]张啸天,李志强,邓红艳.多维战争中的兰彻斯特方程探讨[J].火力与指挥控制, 2008, 33(2):5-12.