

参赛密码 _____
(由组委会填写)

“华为杯”第十三届全国研究生
数学建模竞赛

学 校 中科院上海微系统与信息技术研究所

参赛队号 80138004

1.王文浩

队员姓名 2.卢晶

3.杨冬冬

参赛密码 _____
(由组委会填写)



“华为杯”第十三届全国研究生 数学建模竞赛

题 目 基于无线通信基站的室内三维定位问题

摘 要：

为研究无线通信基站的室内三维定位问题，本文综合运用参数估计，最小二乘法，迭代最邻近，非线性优化，数值计算方法，图优化等，建立了基于终端无线信号到达基站的时间来估计终端位置的预测模型。并基于此模型，对终端的位置进行了定位、追踪，为现实中的终端定位问题提供了理论依据。

针对第一问：首先分析 TOA 数据，发现 LOS 与 NLOS 的正相关关系，并对二者的关系进行拟合建模，然后以此消除场景中 NLOS 传播环境对 TOA 带来的误差。在此基础上再利用 TDOA 消除场景中的背景噪声，提升 LOS 的估计准确性。之后利用消除 NLOS 噪声和背景噪声的数据，采用最小二乘方法估计终端的位置坐标，并进行进一步的优化。

针对第二问：分析不同基站个数定位终端的可能性，提出评价定位准确性与基站个数的评价参数，并在此基础上对 3 个以上基站定位终端坐标的性能进行了评估，最终确定 5 个基站是最佳的选择。

针对第三问：首先利用第一问中建立的模型对终端在不同时间段的位置进行估计。之后对于移动终端的轨迹估计，非线性优化迭代求解图中每个结点（终端位置坐标），使得由误差构成的边的和最小，获得一个全局最优的轨迹。

针对第四问：依据第一问中建模得到的 NLOS 误差与终端到基站的距离呈正相关关系这一结论，可以推断最有可能有效定位终端的基站必定是距离终端最近的基站，因此选取距离终端距离最近的基站来估计终端位置，并依据估计位置反向验证这些基站用于定位的有效性，来判断终端是否可以被定位。然后统计每个终端的连接度数，并分析其与定位精度之间的关系。

关键词：定位 NLOS 参数估计 最小二乘法 运动估计

目录

一 问题重述.....	- 3 -
1.1 研究背景.....	- 3 -
1.2 基本问题.....	- 3 -
二 基本假设与符号说明.....	- 4 -
三 终端位置的估计.....	- 4 -
3.1 终端到基站真实距离与测量距离模型建立.....	- 4 -
3.2 终端到基站真实距离与测量误差的关系估计.....	- 4 -
3.3 模型参数求解.....	- 7 -
3.4 计算终端的估计位置.....	- 8 -
3.5 模型准确度估计.....	- 9 -
四 使用最少的基站精确估计终端的位置.....	- 11 -
4.1 估计终端的方法.....	- 11 -
五 运动轨迹估计.....	- 13 -
5.1 运动模型分析.....	- 13 -
5.2 图优化分析.....	- 15 -
5.3 算法流程.....	- 16 -
5.4 求解结果.....	- 17 -
六 连接度估计.....	- 19 -
6.1 寻找能够被定位的终端.....	- 19 -
七 模型评价.....	- 23 -
八 进一步研究的问题.....	- 23 -
参考文献.....	- 24 -

一 问题重述

1.1 研究背景

无线通信网络和移动互联网的飞速发展,无线定位在公共安全服务、犯罪侦查、导航、智能交通等领域的应用越来越广。如今手机、平板电脑、导航仪等设备的普及,为大众在日常生活中快速定位提供了硬件保障。

基于无线移动通信网络的定位是通过获取手持终端发送到基站的无线电信号强度,传播时间,到达角度等指标,将其换算成距离、角度等,最终通过定位算法组合这些信息并转换成终端的坐标[1]。

传统的 GPS 定位在室外空旷场景有较好的效果,但是在室内、地下、环境复杂的城市等场景中, GPS 并不能达到预期的目标。而通过无线通信网络基站来定位终端能够克服这些困难,因此具有很高的研究价值。并且通过对同一终端的连续定位,可以获得该终端的运动轨迹,能够在犯罪的侦查抓捕中起到重要作用。在景区、重要交通枢纽等地区,在同一时间对多个终端进行定位可以了解到人员、车辆的分布情况,可以借此对人员、车辆进行引导,减少拥堵、事故的发生。

估计终端坐标位置时,最常用的数据为无线电信号到达时间(TOA)、到达信号强度、信号到达时间差(TDOA)等。常见的 TDOA 算法包括 Chan 算法, Fang 算法, Taylor 级数展开法等[2][3]。Chan 算法在视距(LOS)条件下定位精度较高,而且计算量小,但是在非视距(NLOS)情况下,其定位精度显著下降。Fang 算法只在 3 个基站的情况下适用,因此准确性和适用性都不高。而 Taylor 级数展开法则需要一个初始位置进行迭代,初始位置的准确性很大程度上决定了算法的精度。因此需要一个高精度、实时、鲁棒的定位算法。

1.2 基本问题

(1) 测量误差的消除

无线通信基站得到的 TOA 大都不是在视距条件下获得的,因此这中间很可能含有 NLOS 的成分,时钟不同步,其他噪声等。如何估计并消除可能存在 NLOS 成分,是估算终端位置的重要前提。

(2) 终端坐标的估算

通过终端到各个基站的测量 TOA,依据误差模型消除 NLOS 误差和其他噪声误差,估计出终端到各个基站的 LOS 距离;并且根据这些距离定位基站的真实坐标位置。如何使用最少的基站同时准确定位终端也是问题的关键之一。

(3) 物体的运动轨迹

由于多径传播, NLOS 等干扰因素的存在,室内定位会有很多的噪声,尤其是对一目标进行追踪时,在短时间内容容易出现很大的定位偏移。因此在计算获得物体在运动过程中每个位置的估计值后,仍需要对这些坐标进行优化,来获得更加准确的运动轨迹。

(4) 连接度数与定位精度间的关系

由于基站到终端的距离决定了该组 TOA 数据的有效性,因此超过通信半径的数据不应加入考虑。并且由于定位精度的要求,只有当一终端通信半径内的

基站数目超过一定数量，该终端才能够被准确定位。

二 基本假设与符号说明

符号	意义
R_i	第 i 个基站到终端的真实距离
R_{ij}	第 i 个基站和第 j 个基站到同一终端的距离差
\hat{R}_i	第 i 个基站到终端的测量距离
c	光速 $3 \times 10^8 \text{m/s}$
R_{NLOS}	非视距传播造成的距离差
R_n	时钟不同步，噪声等引起的测量误差
x, y, z	终端的三维坐标
x_i, y_i, z_i	基站的三维坐标

三 终端位置的估计

3.1 终端到基站真实距离与测量距离模型建立

测量得到的 TOA 数据中的误差主要包含两大部分：

- (1) 基站与终端始终不同步导致的时钟误差；
- (2) 在非视距传播环境(NLOS)下的多径传播导致的误差；

终端到基站的测量距离可以通过无线电信号从终端发送到基站接受所需的时间 TOA 与无线电信号传输速率 c 相乘获得。同时由于 NLOS，接收时钟差等额外的存在，测量距离可以认为是真实距离与 NLOS 传播产生和距离和造成产生的距离的和。即：

$$\hat{R} = R + R_{NLOS} + R_n = c * toa; \quad (1)$$

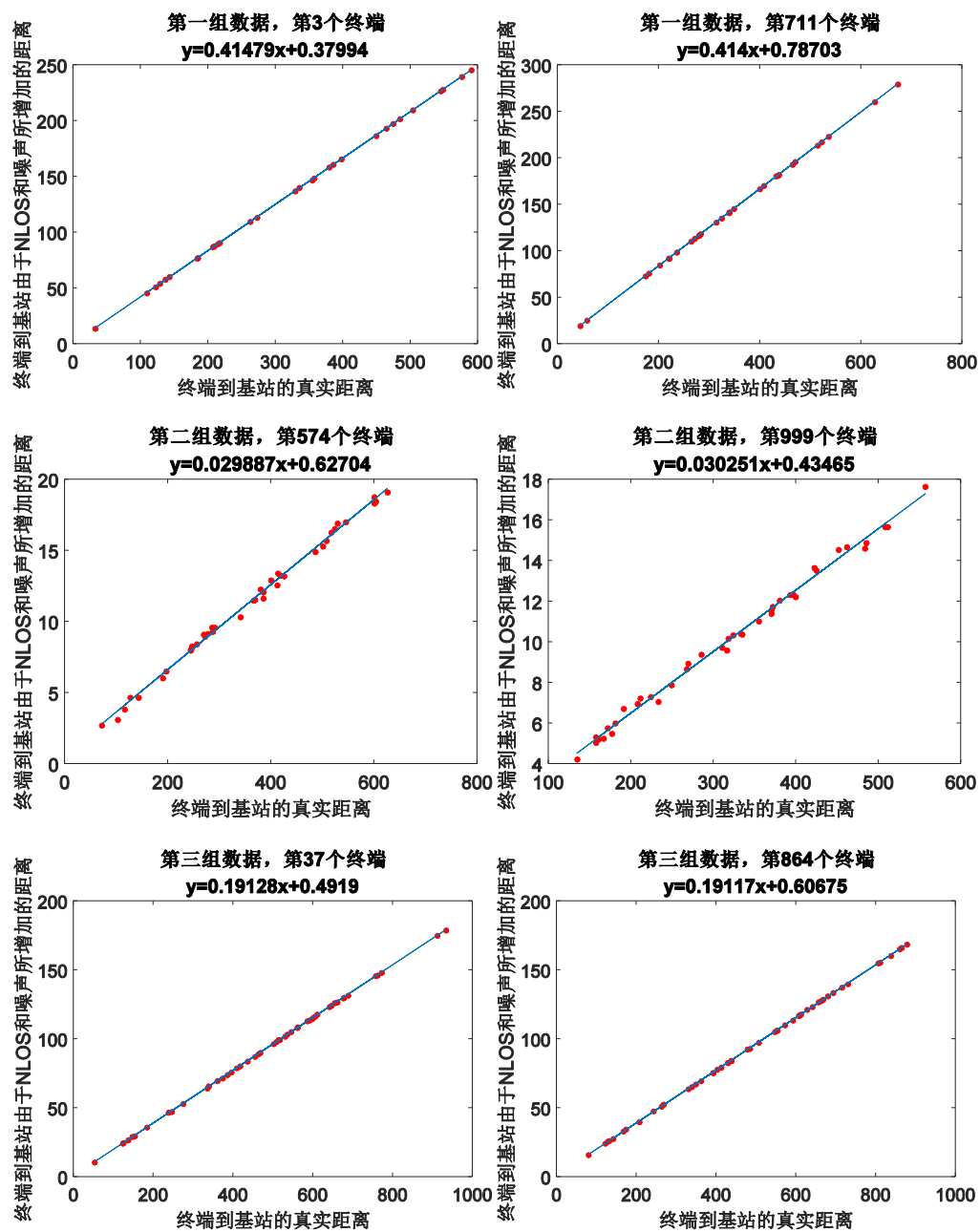
其中 R_{NLOS} 和 R_n 均大于等于 0。

3.2 终端到基站真实距离与测量误差的关系估计

利用给定的测试用例数据，我们绘制了终端到基站的实际距离 R 与通过 toa

偏差值 R_{NLOS} 关系图。其中实际距离 R 为 x 坐标，偏差值 R_{NLOS} 为 y 坐标。

将同一环境下不同终端与多个基站的真实距离和测量距离数据进行绘图显示，得到如以下的关系图：



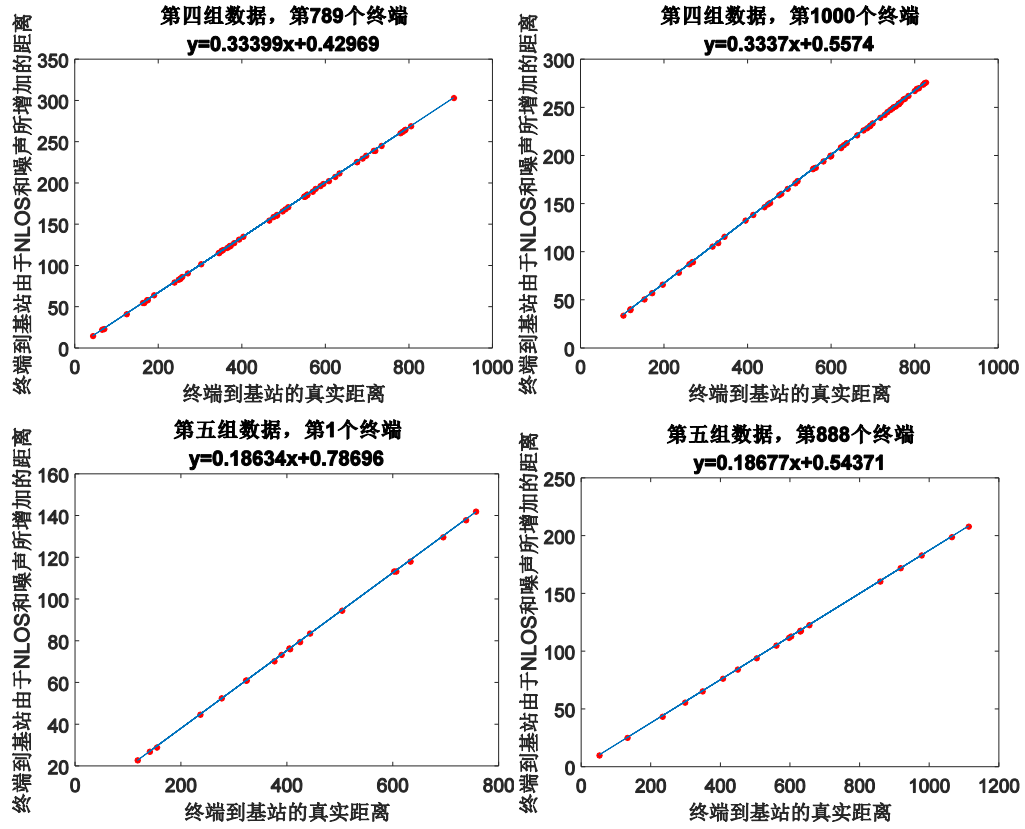


图 1 真实距离和测量距离拟合曲线图

其中每行图片来自同一组测试数据（即相似环境下）中的随机两个终端到各基站的真实距离与偏差值的关系。图中每个红点的横坐标为终端到基站的真实距离，纵坐标为测量距离与真实距离之间的偏差。

由上图可以观察到每个终端到基站的测量误差与终端到基站的真实距离呈现一个线性关系，即随着终端到基站的真实距离增大，NLOS 误差也相应地线性增大。并且在同一组数据中，斜率 k 的值非常接近，截距 b 的值因终端的不同而有所偏差。因此我们对数据进行线性回归处理，得到 NLOS 造成的误差 R_{NLOS} 与真实距离 R 的关系如下：

$$R_{NLOS} = k * R + b; \quad (2)$$

根据线性回归拟合的结果，我们得到以下两点结论：

(1) 在相同环境下，不同终端的距离测量误差随着距离的变化而相应变化的程度是一致的（ k 值基本相同），这表明在同一环境下距离测量误差是直接距离正相关的，且相关的程度是基本一致；

(2) 不同终端的距离测量误差与真实距离的线性关系并不是完全一致的，存在一个不同的误差偏移量（即 b 在一定范围内波动），推断这可能是不同终端与基站时钟不同步程度与噪声差异。

根据上面的公式建立测量距离 \hat{R} 与真实距离 R 的关系，对上面的公式两端同时加上 R 即可得到：

$$\hat{R} = R_{NLOS} + R = k * R + b + R = (k+1) * R + b \quad (3)$$

从而推得：

$$R = \frac{\hat{R} - b}{k + 1} \quad (4)$$

因此只要求解到适合当前 NLOS 环境下的 k, b 值, 就可以有效地消除 NLOS 误差, 还原终端到基站的真实距离 R 。

3.3 模型参数求解

我们通过遍历参数的解空间来寻找最适合模型的参数值, 具体的算法流程图如下：

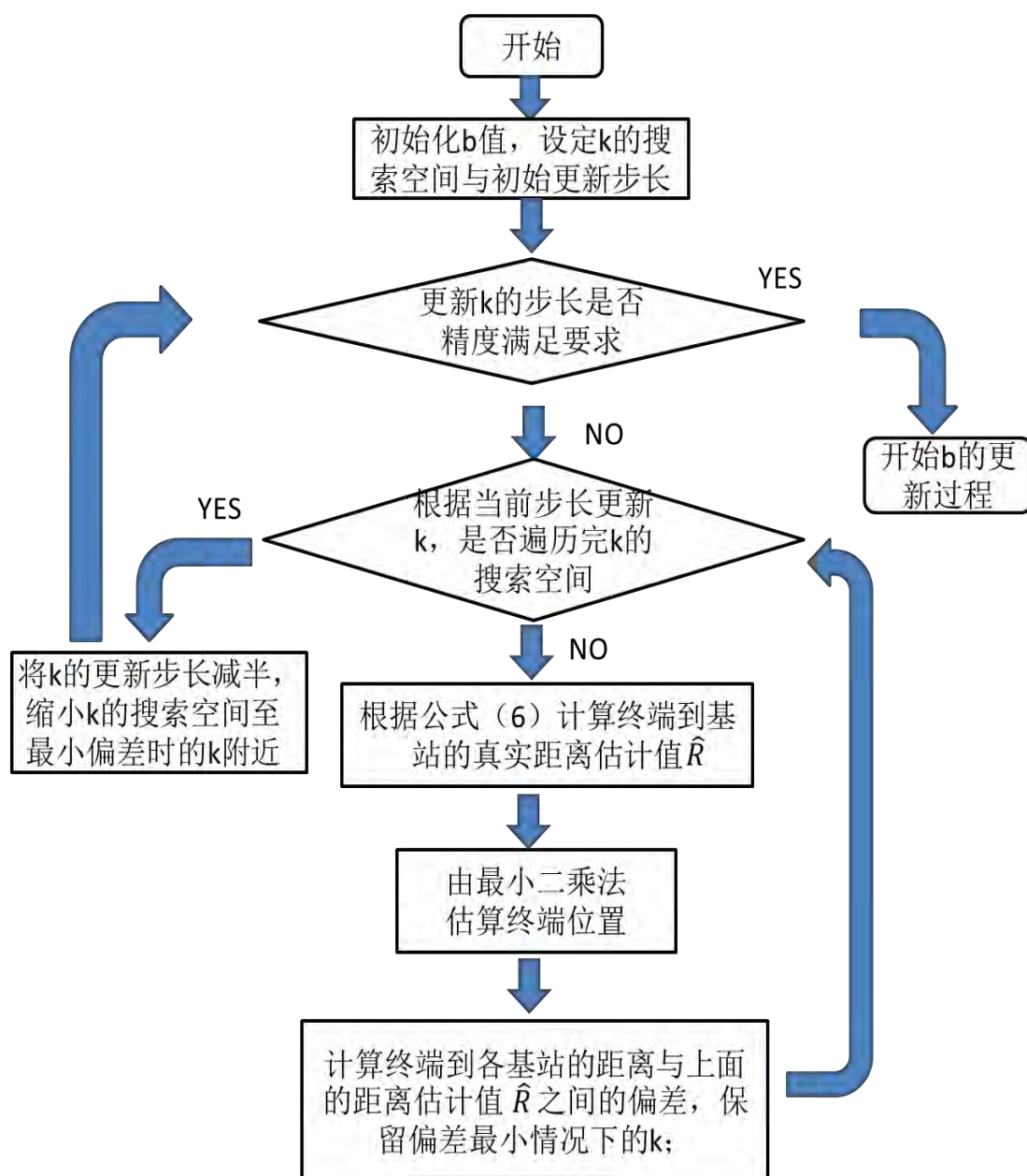


图 2 模型参数估计算法流程图 1

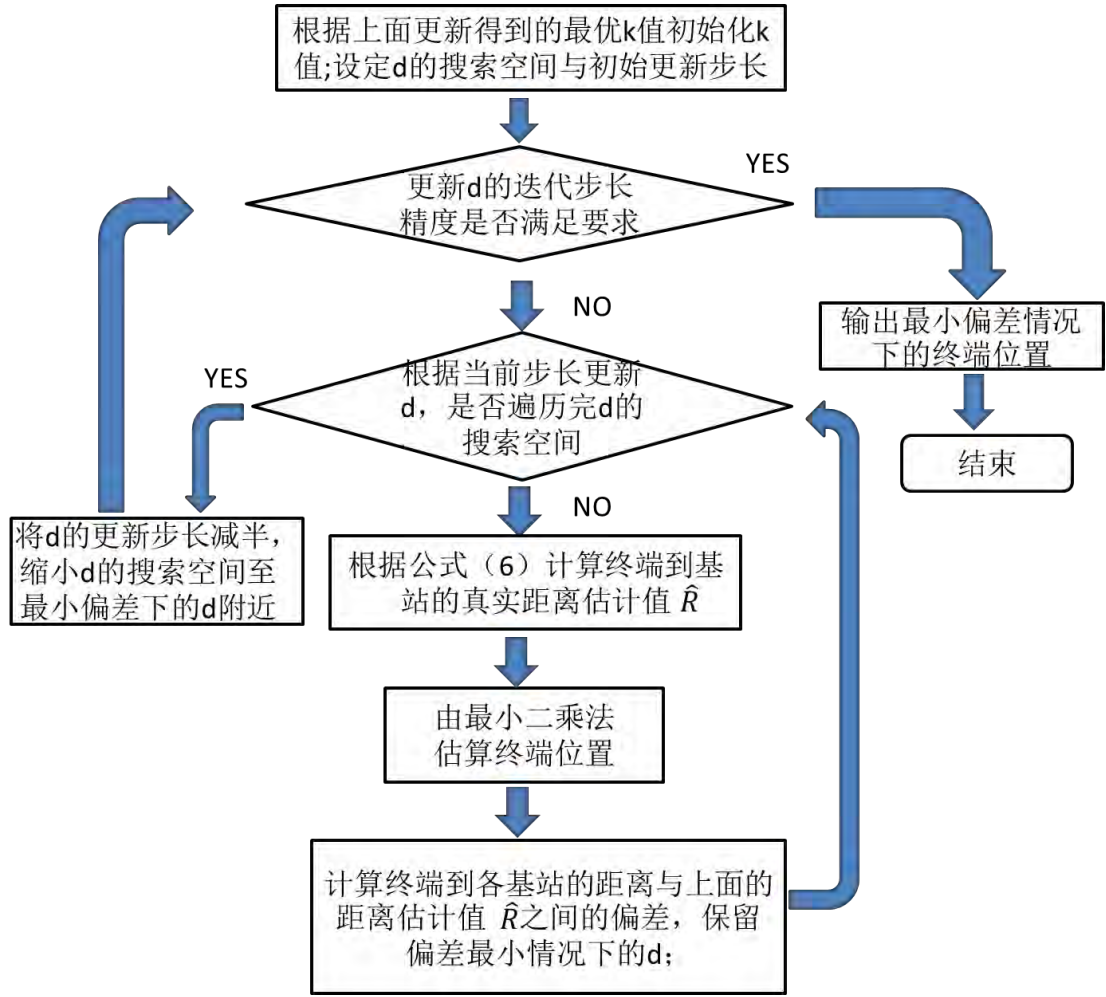


图 3 模型参数估计算法流程图 2

随着 k, b 参数的不断更新, 估计得到的终端位置不断接近真实位置, 当估计的终端坐标趋近于稳定时可以认为此时的 R 为最接近。

3.4 计算终端的估计位置

在已经求得接近真实距离的估计值的基础上, 通过最小二乘法(LS)[2]来对终端的坐标进行估计。令终端的坐标为 $Z=[x, y, z]^T$, 基站 M_i 的坐标为 $[x_i, y_i, z_i]^T$ 。那么终端到每个基站的距离平方为:

$$\begin{aligned} R_i^2 &= (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2 \\ &= k_i - 2x_i x - 2y_i y - 2z_i z + x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $k_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ 。

第一个基站到其他基站的距离平方差为:

$$R_{ij}^2 = R_i^2 - R_j^2 = (k_j - k_i) + 2(x_j - x_i)x + 2(y_j - y_i)y + 2(z_j - z_i)z, \quad j > 1 \quad (6)$$

根据上面的式子可以推出关于终端坐标的矩阵方程:

$$H = GZ \quad (7)$$

其中：

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_{12} + k_2 - k_1 \\ R_{13} + k_3 - k_1 \\ \vdots \\ R_{1i} + k_i - k_1 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1 \\ \vdots \\ x_i - x_1, y_i - y_1, z_i - z_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

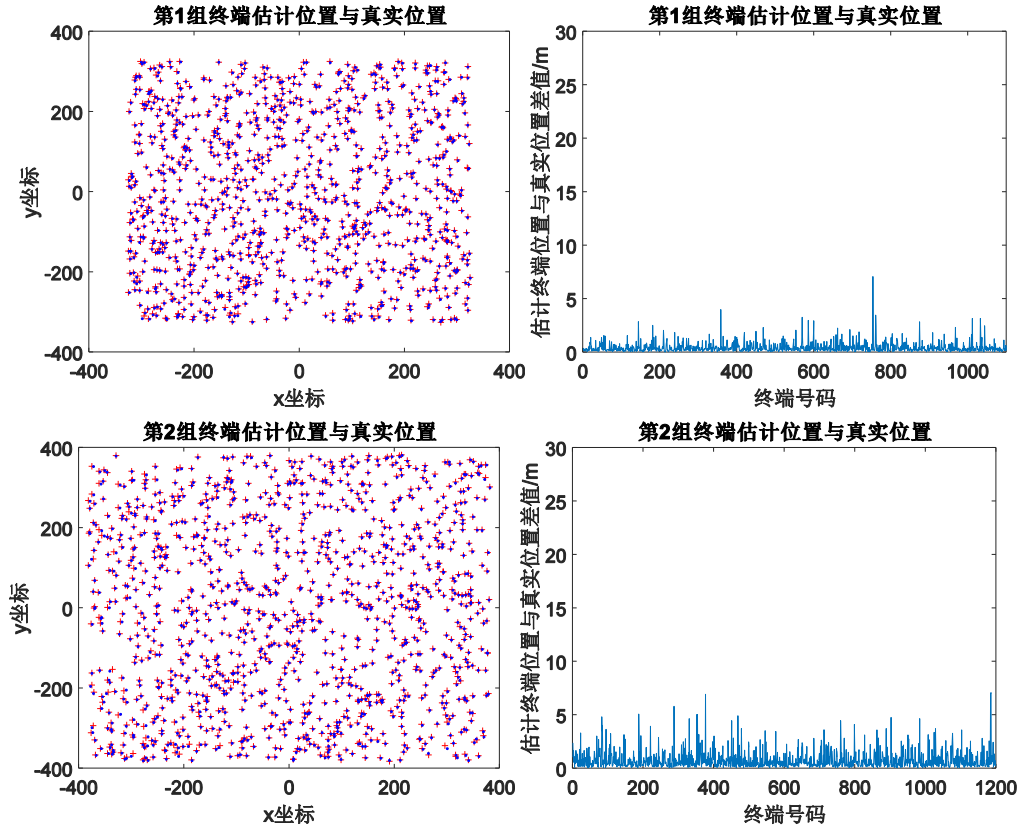
利用最小二乘法可以得到：

$$Z = (G^T G)^{-1} G^T H \quad (9)$$

此时得到的 Z 即为终端的估计位置。

3.5 模型准确度估计

利用上述方法对终端的坐标进行估计，将估计的坐标与真实坐标同时绘制在图中，可以看到估计的结果较为准确：



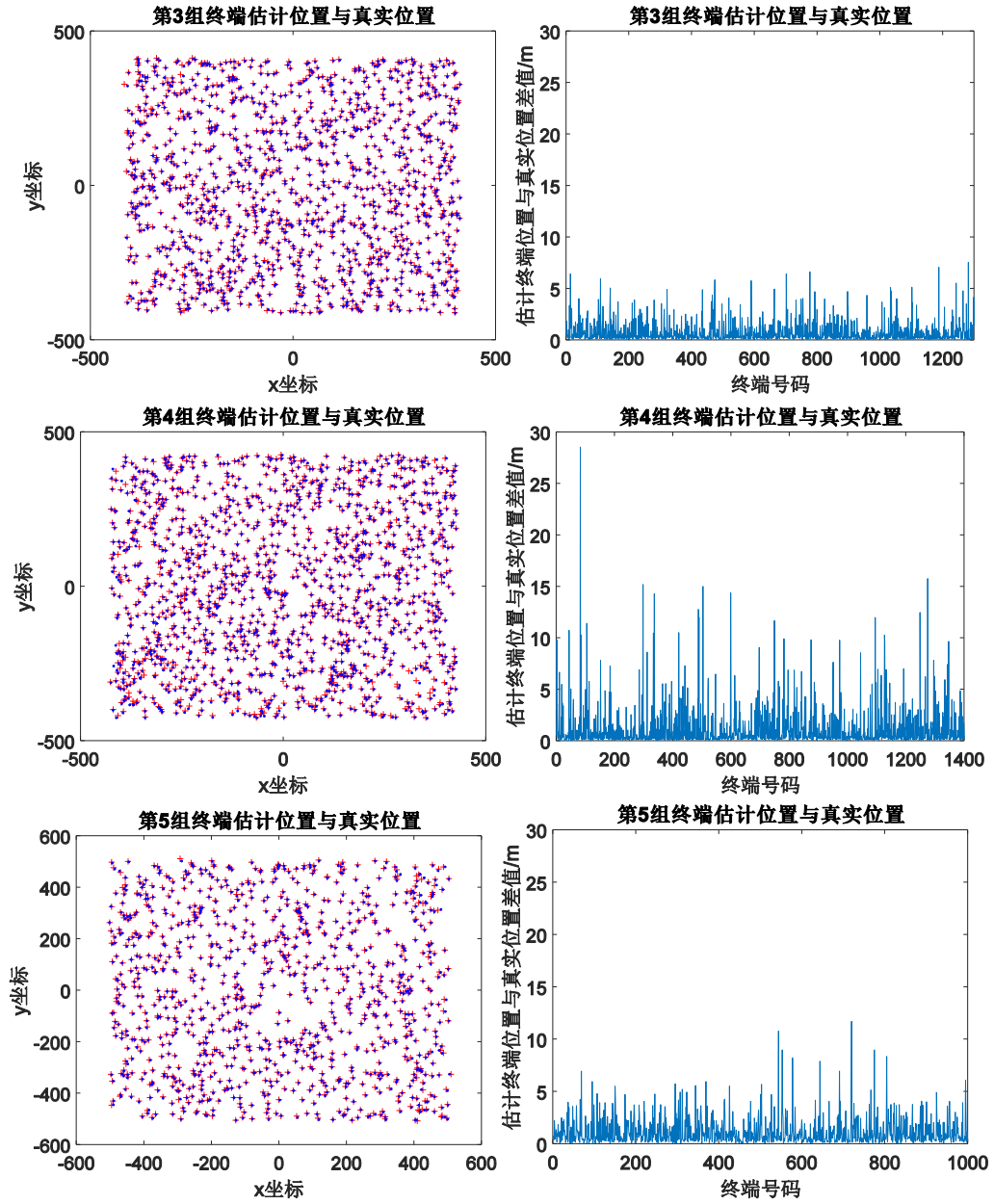


图 4 估算坐标与真实坐标误差分析

每一行代表一组测试数据，每行左边图片里红色十字代表估算获得的终端坐标，蓝色的圆点代表真实的终端坐标。右边图片代表每个终端估计位置与真实位置的距离。即：

$$dis = \sqrt{(x_{real} - x_{estimate})^2 + (y_{real} - y_{estimate})^2 + (z_{real} - z_{estimate})^2} \quad (10)$$

从左图的情况来看，大部分估算得到的坐标与真实坐标基本重合，右图中则可以更清楚地看到两者之间的差距是比较小的，大部分在 1.5m 以下。但是对于第四组数据，该模型的的平均误差较大，说明在这一场景中，噪声的影响比较大。

最终得到的五组测试数据平均误差如下：

表 1 终端定位的平均误差

	所有终端偏离实际位置的平均误差 m
Sample1	0.428810393679680
Sample2	0.771670998312892
Sample3	0.742138254480808
Sample4	1.184430652409307
Sample5	1.162844717874013

四 使用最少的基站精确估计终端的位置

4.1 估计终端的方法

理论上讲，如果得知终端到三个基站的视线距离，并且基站的坐标已知的情况下，可以列出三个方程：

$$\begin{aligned}
 R_{j1}^2 &= (x_{j1} - x)^2 + (y_{j1} - y)^2 + (z_{j1} - z)^2, \\
 R_{j2}^2 &= (x_{j2} - x)^2 + (y_{j2} - y)^2 + (z_{j2} - z)^2, \\
 R_{j3}^2 &= (x_{j3} - x)^2 + (y_{j3} - y)^2 + (z_{j3} - z)^2,
 \end{aligned} \tag{11}$$

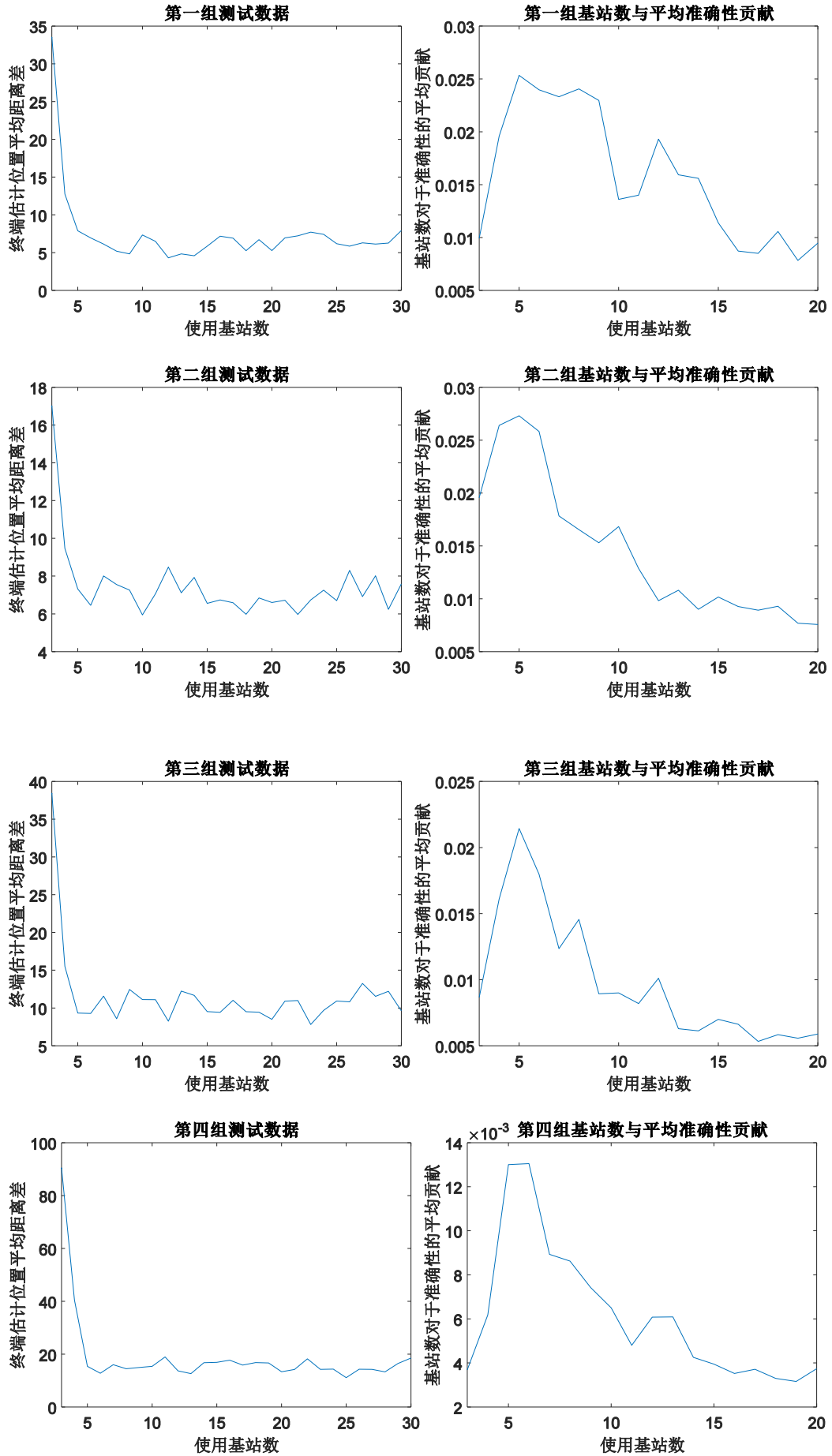
上面的三个方程中只存在三个未知量 (x, y, z) ，即终端的 $[x, y, z]$ 三个维度上的坐标。三个方程只要不存在线性相关的关系，就能够解出三个坐标的值。因此理论上定位一个终端位置需要的最少基站数是 3 个。但是由于噪声、非视距传播、多径效应等因素的影响，往往很难通过无线信号到达时间(TOA)获得终端到基站的准确距离。因此，只有三个基站的在实际中往往难以达到人们的需求精度[4]。

为了消除同一场景中一些相似的噪声，往往采用 TDOA 的方法去定位终端的位置。即以一个基站为参照，其他所有基站到终端的距离都先与该基站到终端的距离作差。这样就可以在一定程度上消除由于环境噪声造成的相同误差。

为了构造至少三个方程去计算终端的 (x, y, z) 坐标，则至少需要知道 4 个基站的坐标才能构建方程求解。

为了确定基站的个数与定位精度的关系，根据给定的验证数据集分别计算使用 3 到 30 个基站情况下的定位精度（其中 3 个基站情况下用 TOA 的方法进行定位，4 到 30 个基站情况下用 TDOA 的方法进行定位），再由计算得到的数据结果来分析二者的关系。基站从所有基站中随机选出，并且在每个基站数目情况下都重复多次实验以减少偶然性的发生；第五组测试数据只有 20 个基站，因此设定最大的基站数为 20。

下面给出使用不同基站数与定位精度的关系图。每行代表同一组测试数据，左列为基站数与终端估计位置误差的折线图，右列为使用基站数与基站平均准确性贡献折线图：



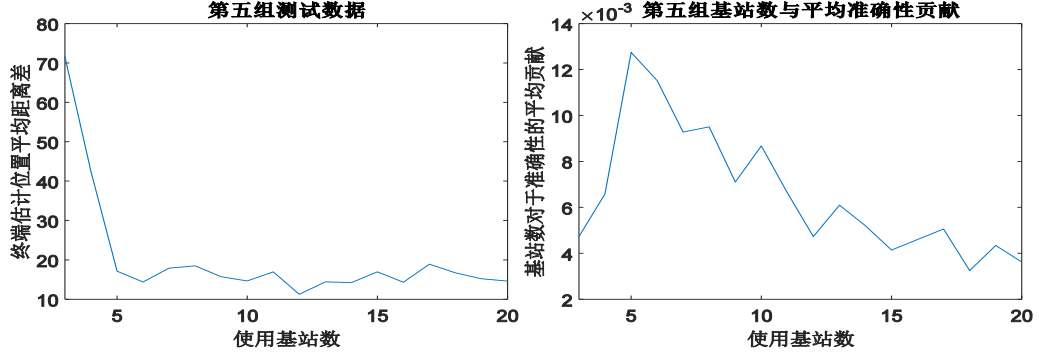


图 5 使用基站数量与估计获得的终端坐标误差关系

从图中可以发现当基站数为 3 时，定位误差非常大。当基站数为 4 时，定位误差大幅下降，但是有时候仍会有较大的波动。当基站数为 5 或以上时，定位误差基本稳定在一个值上下波动。即再增加基站数也不一定能够提升定位的准确性。

其次，我们定义平均准确性 P_M 为

$$P_M = \frac{1}{dist_error * M} \quad (12)$$

其中 M 为使用基站数， $dist_error$ 为当前终端估计坐标与真实坐标间的差值。从平均准确性贡献来看，当基站数为 5 时每个基站对于准确性的贡献率最大，当基站数大于 5 时，平均准确性贡献逐渐开始下降。因为当基站数大于 5 后，再增加基站数并不能显著提升定位的准确性，反而会提升成本。因此我们认为基站数最少为 5 时能够准确的定位终端的位置。

五 运动轨迹估计

5.1 运动模型分析

如图所示，终端从 A 运动到 B，在 A, B 出分别测得到所有基站的 TOA 数据，按照算法 1 终端位置的估计方法，可以得到 A,B 的初始坐标。

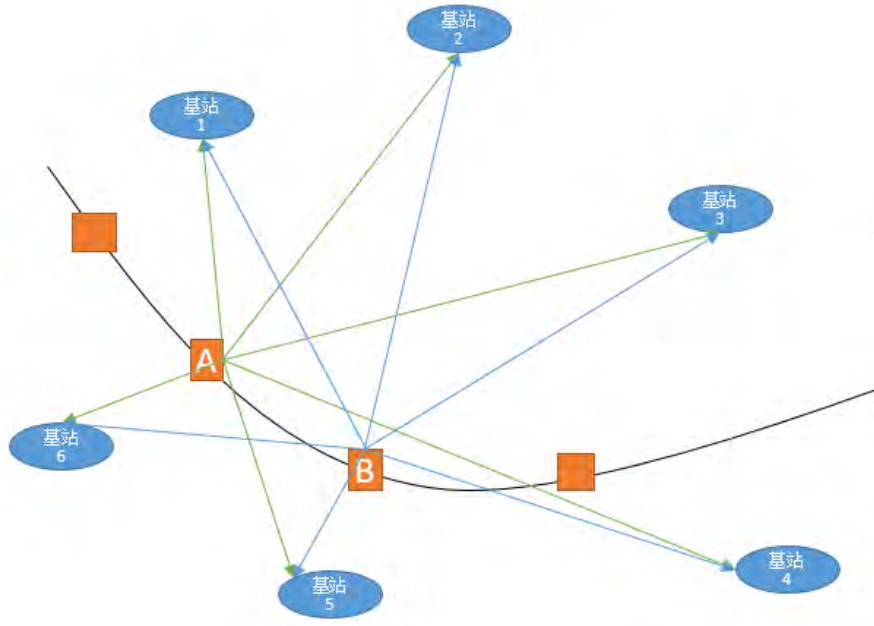


图 6 移动终端在基站中的运动轨迹模型图

轨迹估计是一个离散时间系统的状态估计，记录终端在各个时刻的位置状态为 $r_k = [x, y]$ ， k 表示终端在轨迹中的离散时间下标[5]。用两个方程描述状态估计问题：

$$\begin{cases} r_k = f(r_{k-1}, u_k, w_k) \\ z_k = g(r_k, v_k) \end{cases} \quad (13)$$

f -状态方程， g -观测方程， u -输入， w -系统噪声，

z -观测数据， v -观测噪声， \hat{r}'_k -状态预测， \hat{r}_{k-1} -状态估计， \hat{z}_k -测量预测

对应的预测方程和观测方程：

$$\begin{cases} \hat{r}'_k = f(\hat{r}_{k-1}, w_k) \\ \hat{z}_k = g(\hat{r}'_k, v_k) \end{cases} \quad (14)$$

构造残差方程： $e_k = z_k - g(\hat{r}'_k, v_k)$ ，残差反映的是预测和测量的误差，当残差最小时，说明预测和测量最吻合。通过这种反馈的形式降低噪声的影响，最终得到的各个位置的坐标就是残差平方最小化的解。

这实际是扩展卡尔曼滤波的思想。但由于这里的预测方程 f 无法给出，强制的假设一个运动模型进行 EKF 预测会带来较大误差。本题采用的非线性优化和滤波器思想相似，但求解方式不同。问题三将会采用在即时定位与地图构建 (SLAM) 中表现良好的图优化 (Graph Optimization) 方法。

5.2 图优化分析

图是由顶点 (Vertex) 和边 (Edge) 组成的结构。我们记一个图为 $G=\{V, E\}$ ，其中 V 为顶点集， E 为边集。一般用点来表示优化变量，边表示变量之间的关系。在本问题中，每个顶点表示一个位置坐标： $r_k=[x, y]_k$ ，每一条边表示真实距离和测得距离的误差 e_k 。

如图所示构造的图：

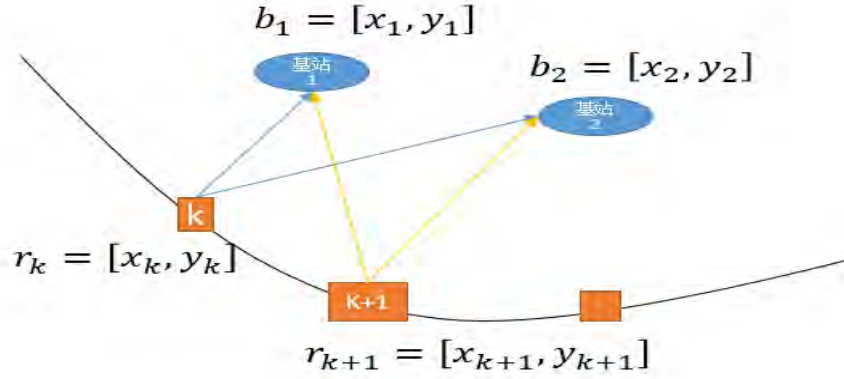


图 7 图优化中顶点和边的关系图

在 k 位置处，每个基站相当于一个路标点 (landmark)， k 位置能看到所有的路标点。在问题一的模型中，计算每个位置初始坐标 k 的过程中，已经求得相应的模型参数 k 和 b 。所以对于每个位置的坐标 r_k ，到每个基站有一个新的真实距离的估计值 R'_i ，对应于 NLOS 模型下的 TOA'_i 。

$$r'_k = h(TOA'_1, TOA'_2 \dots TOA'_M) \quad (15)$$

$$R'_i = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} \quad i = 1, 2, 3 \dots M, \quad (16)$$

$$TOA'_i = ((k+1)R' + b) / c \quad (17)$$

$$\left[r'_k, k', b', e'_k \right] = h(TOA'_1, TOA'_2 \dots TOA'_M) \quad (18)$$

根据算法一的估计终端位置方式 h 计算出新的终端位置坐标 r'_k 和估计误差 e'_k ，当上述每个估计误差达到最小或者达到迭代次数为止。

图优化是对终端在每个位置上进行上述迭代优化，事实上上述迭代思想和迭代最临近算法(ICP)相似。当整个途中所有结点的位置坐标都是最优迭代结果时，将结点连接起来，就是终端的运动轨迹。

5.3 算法流程

Step1:根据算法一求解终端在各个位置上的初始坐标和相应的 k 、 d 、均方误差。

Step2:根据 step1 中的初始坐标计算终端到每个基站的真实距离的估计值 R'_i ，并根据 $TOA'_i = ((k+1)R'_i + b)/c$ 计算出新的 TOA'_i 。

Step2:利用算法一求得新的位置坐标和相应的 k 、 d 、均方误差，如果均方误差减小，则以当前位置坐标作为初始坐标，转到 Step1.如果均方误差增大或者达到迭代次数，停止。当前位置坐标即终端在轨迹中的一个点。

Step4:对每个位置的终端重复 Step1-3，直到图中所有位置的均方误差达到最小，获得的所有终端位置，构造出运动的轨迹。

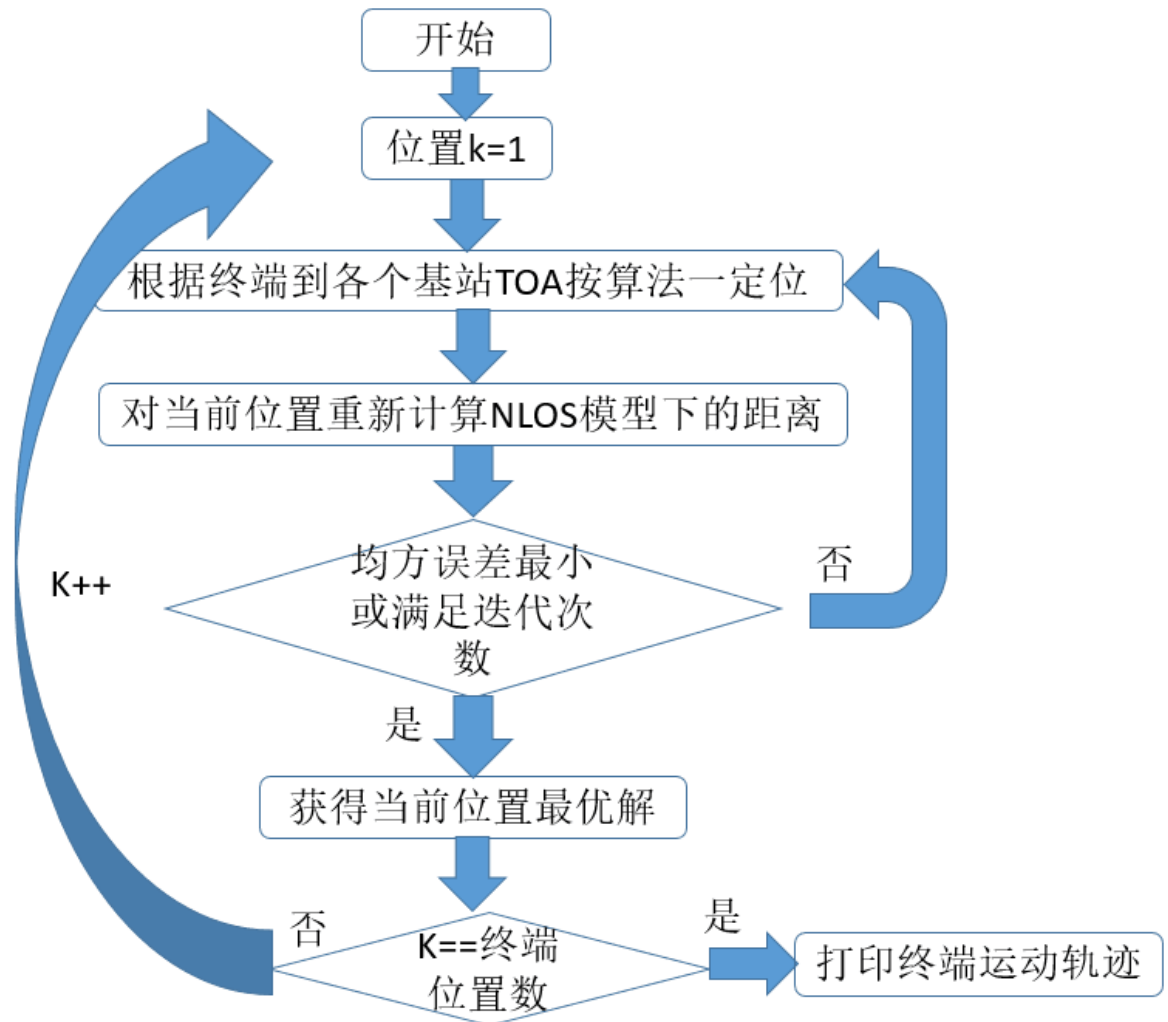


图 8 轨迹估计算法流程图

5.4 求解结果

对于给定 5 组对处于移动过程中的终端采集到的 TOA 数据（对应附录中编号为 case021_input.txt 到 case025_input.txt 的文件），计算得到的运动轨迹如下图所示：

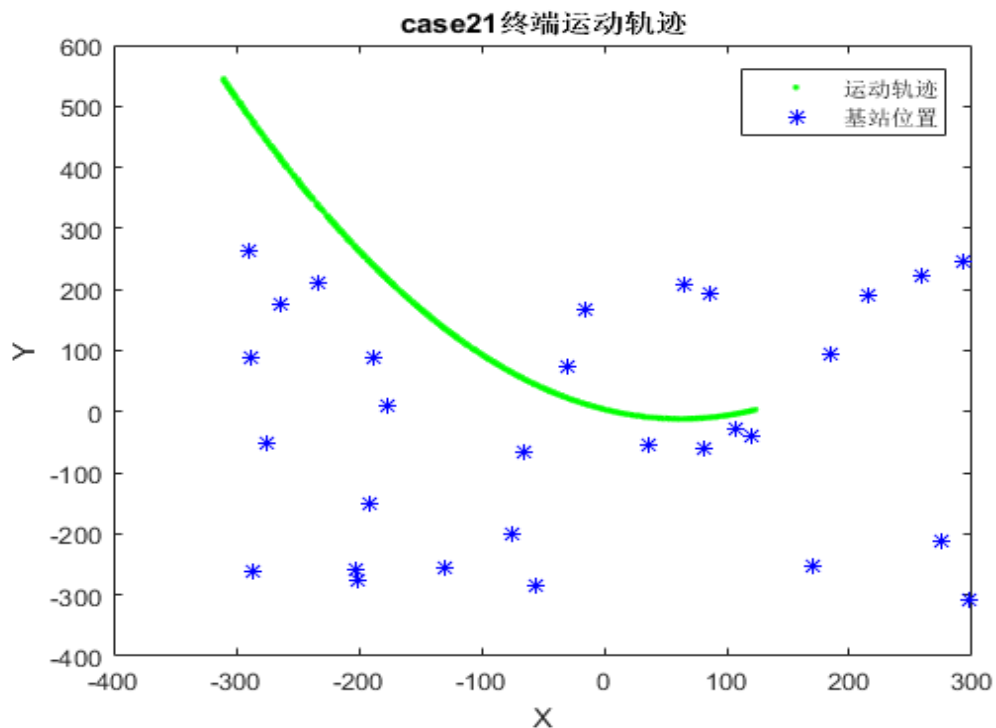


图 9 case21 终端运动轨迹和基站位置示意图

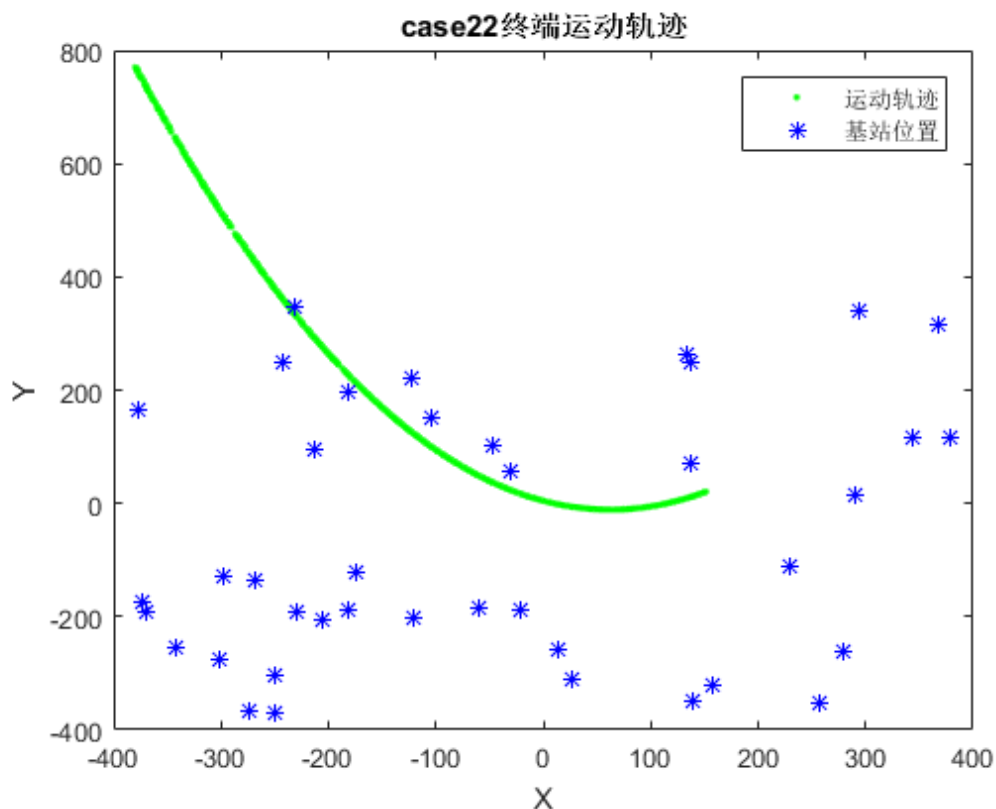


图 10 case22 终端运动轨迹和基站位置示意图

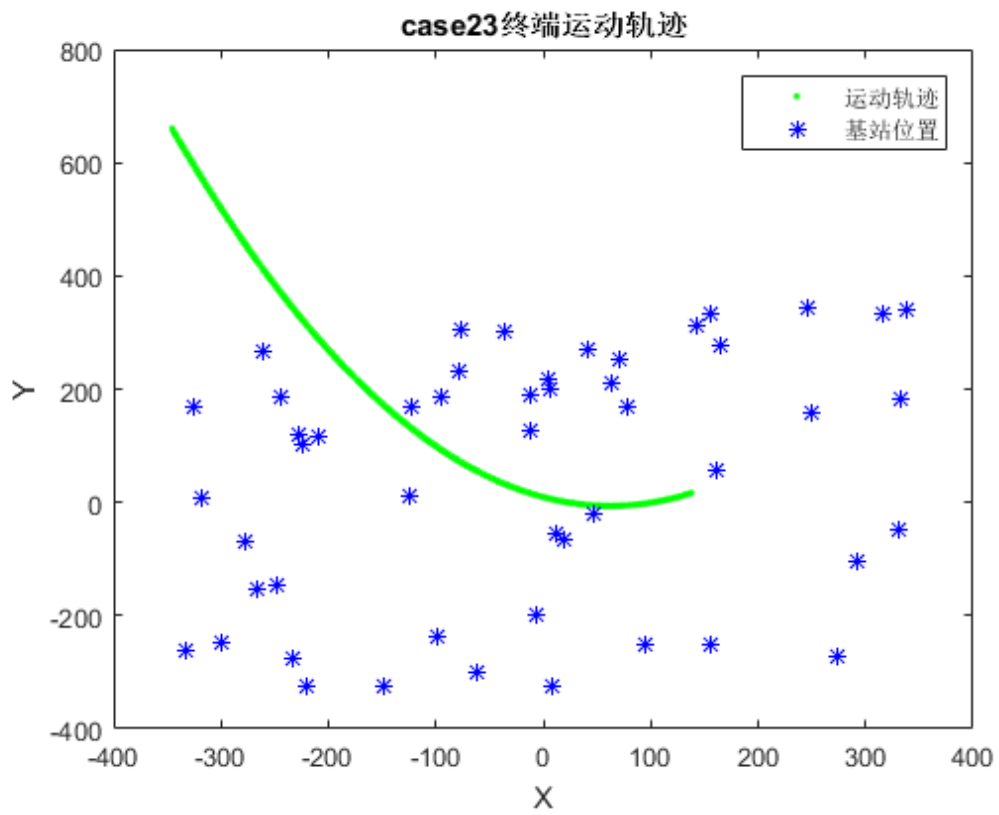


图 11 case23 终端运动轨迹和基站位置示意图

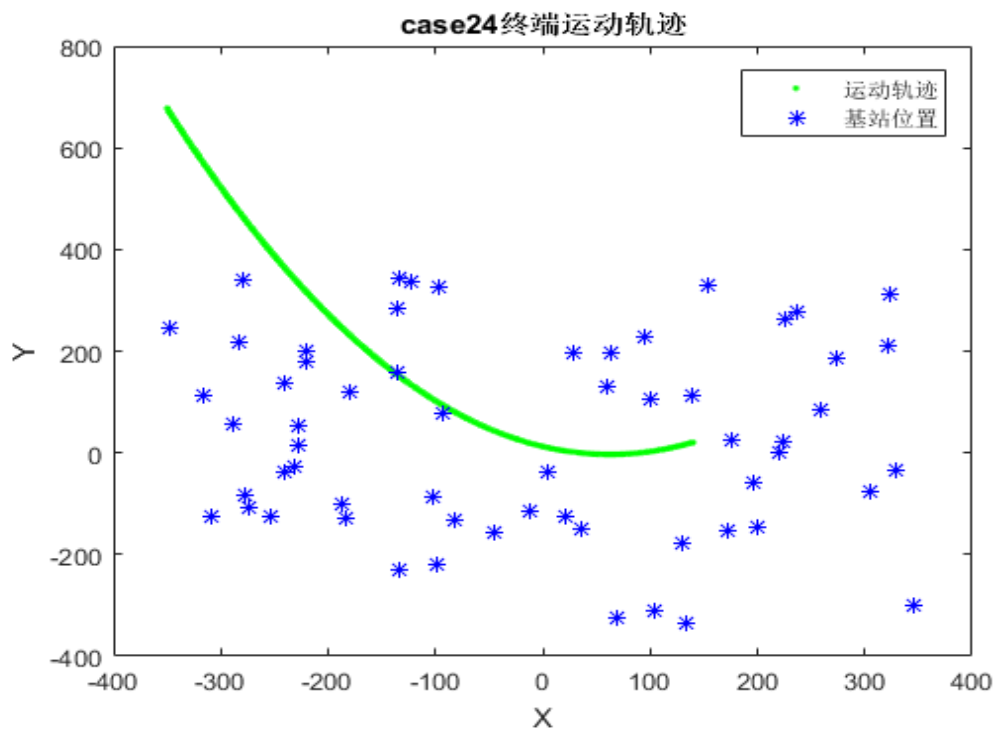


图 12 case24 终端运动轨迹和基站位置示意图

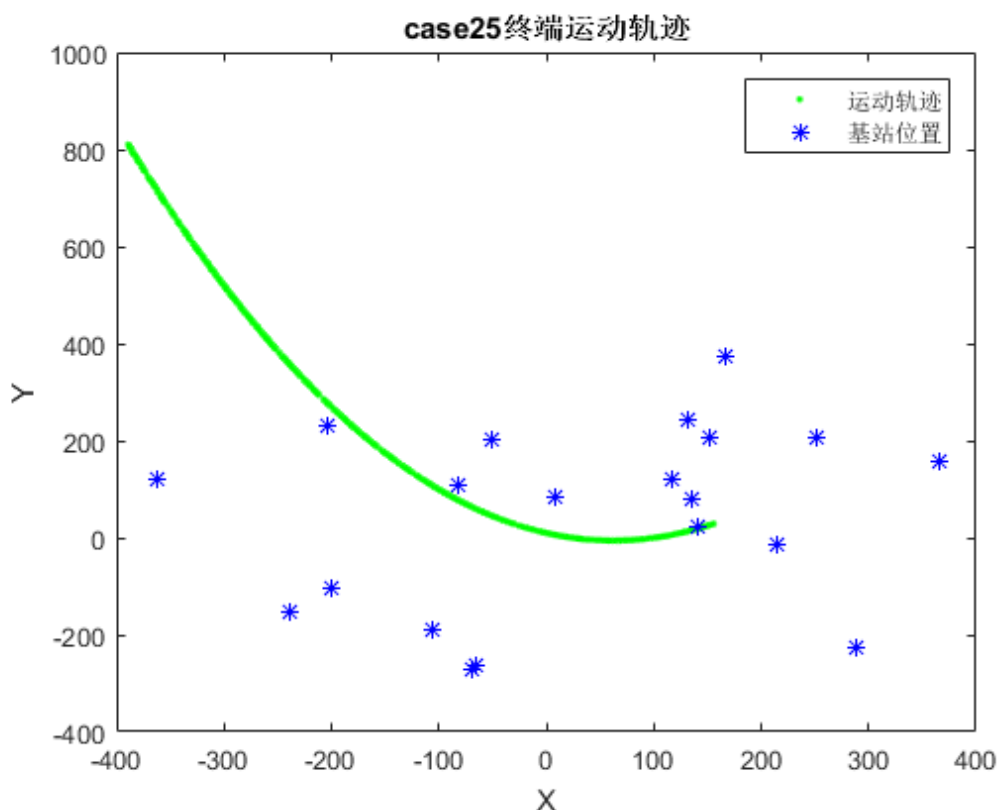


图 15 case25 终端运动轨迹和基站位置示意图

六 连接度估计

6.1 寻找能够被定位的终端

如果终端的位置落在基站通信范围之外（200 米半径之外），则这个基站是不能用来定位终端的，也就是说这个基站对于当前的终端的定位来说是不可靠的，定义为无效的基站，反之落在终端通信范围内的基站是有效基站。

最有可能成为有效基站的必定是距离终端最近的那些基站，因此首先利用距离最近的 K 个基站（根据题 2 中的结论， K 取 4 是较为合理的值）进行终端位置的估计。

在算法 1 中得到一个结论：同一环境下的终端估计得到的 k 值是非常接近的。因此在一个环境下，可以被定位和不能被定位的终端（不能被定位的终端就是用来定位的基站实际上是在终端的通信范围之外的）估计得到的 k 值偏差应当较大，不妨绘制出一个环境下所有终端估计到的 k 值的分布曲线：

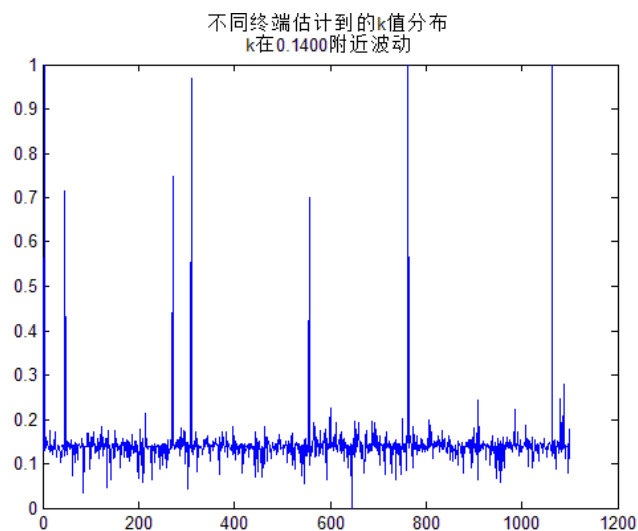


图 16 case26 中 k 值得分布情况

可以看到，一部分估计得到的 k 值在 0.1400 附近较小的范围内波动，而偏离较远的点就对应着无法被定位的基站。

综上，我们设计了如下的算法来计算可以被定位的终端：

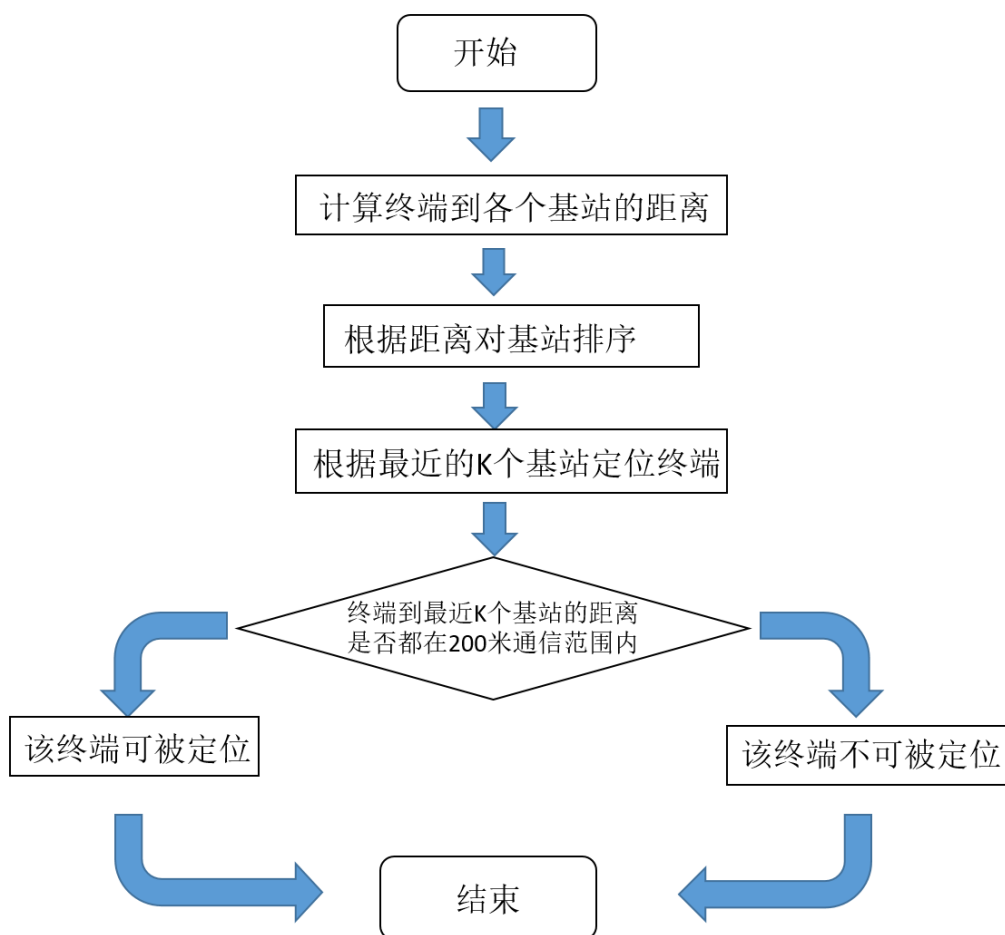


图 17 筛选可定位终端算法

如果确定当前终端可以被定位，主需要遍历所有的基站，计算终端与基站距离在通信范围内的基站数即可以得到该终端的连接数。

根据题 2 中的结论，最少只需要 4 个基站即可完成定位，在使用 5 个基站的情况下定位精度较高，给出这两种情况下计算得到的可以被定位终端数及其位置：

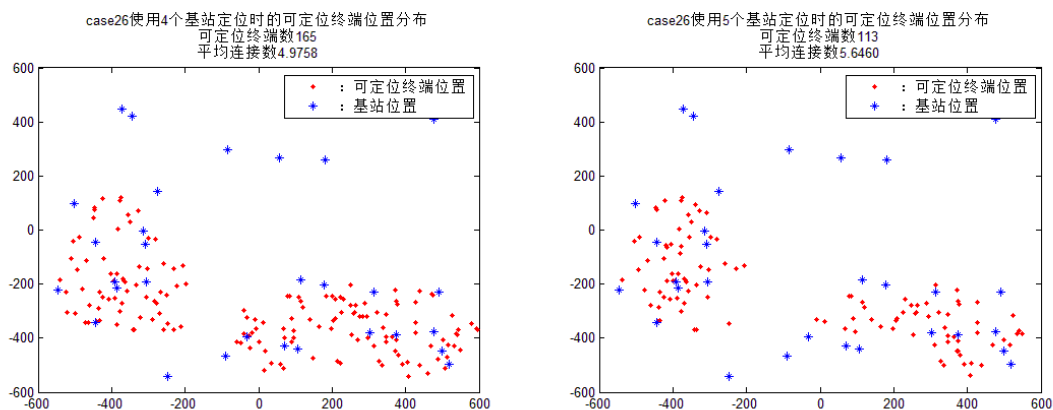


图 18 case26 数据的计算结果

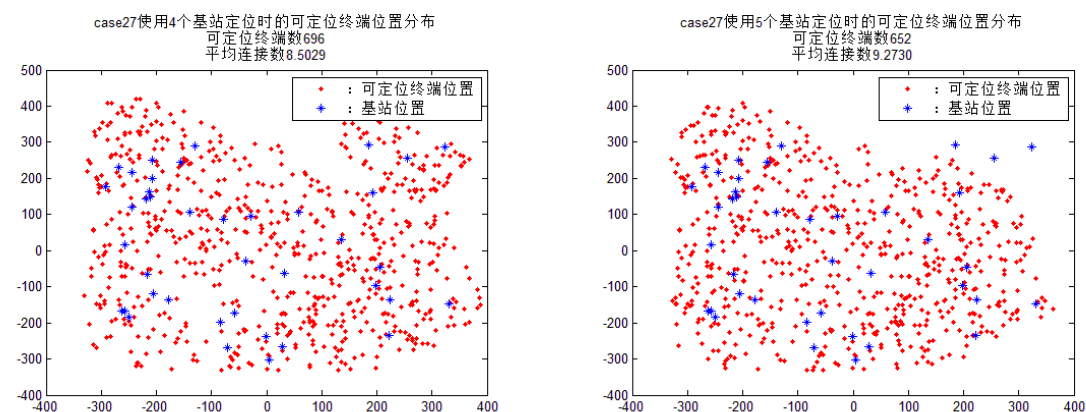


图 19 case27 数据计算结果

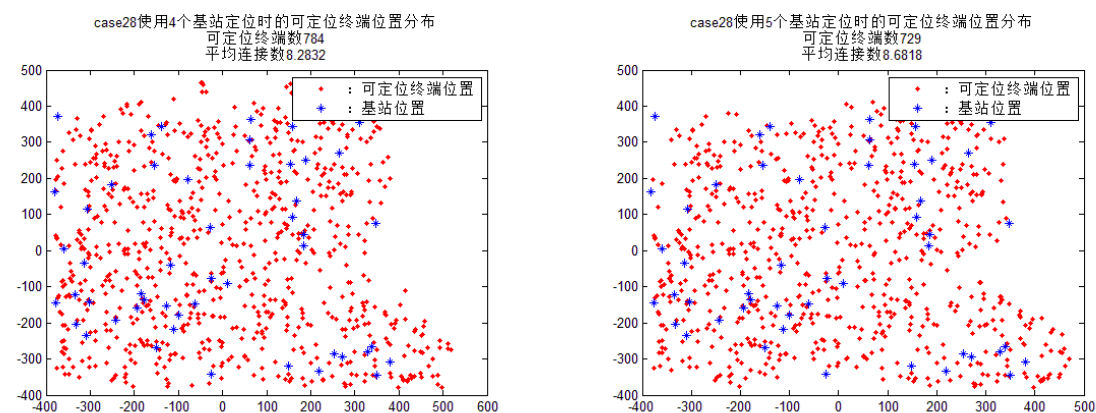


图 20 case28 数据计算结果

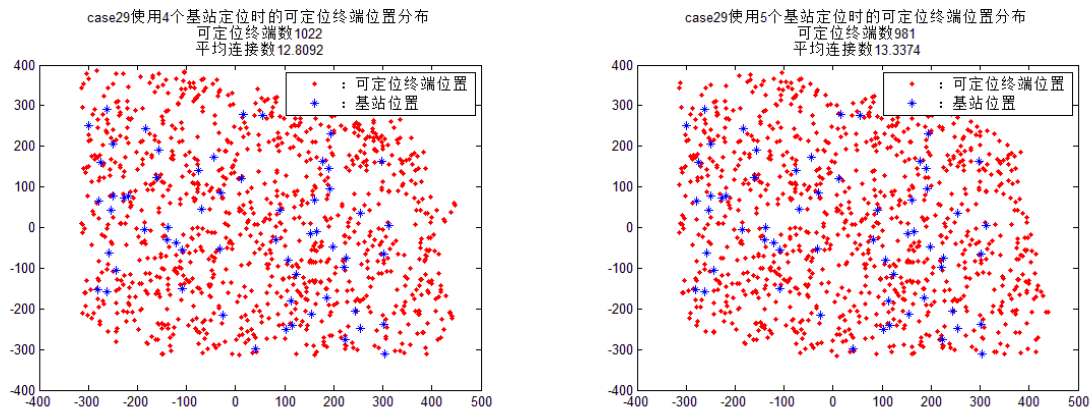


图 21 case29 数据计算结果

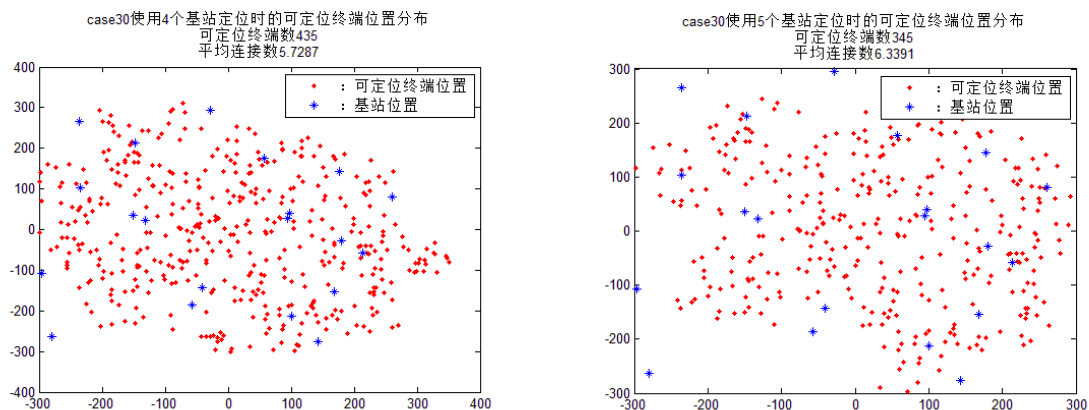


图 22 case30 数据计算结果

最终得到的可定位终端数和平均连接数 λ 为：

表 2 平均连接数 λ

	使用 4 基站定位 平均连接数 λ	使用 5 基站定位 平均连接数
Case26	4.9758	5.6460
Case27	8.5029	9.2730
Case28	8.2832	8.6818
Case28	12.8092	13.3374
Case28	5.7287	6.3391

表 3 可定位终端数

	使用 4 基站定位 的可定位终端数	使用 5 基站定位 的可定位终端数
Case26	165	113
Case27	696	652
Case28	784	729
Case29	1022	981
Case30	435	345

七 模型评价

1. 针对 TOA 中可能存在的 NLOS 噪声，分析 TOA 测量数据，并对 LOS 与 NLOS 的关系进行建模，消除场景中 NLOS 对于 TOA 测量带来的噪声。
2. 利用 TDOA 消除场景中的背景噪声，提升 LOS 的估计准确性。
3. 对消除 NLOS 噪声和背景噪声的数据采用最小二乘方法估计终端的坐标位置。
4. 利用估算得到的终端坐标位置反向计算 LOS，反复迭代，不断消除误差，逼近实际的终端坐标。
5. 分析不同基站个数定位终端的可能性，提出评价定位准确性与基站个数的评价参数。
6. 对于移动终端的轨迹估计，引用图论的思想，非线性优化迭代求解图中每个结点（终端位置坐标），使得由误差构成的边的和最小，获得一个全局最优的轨迹。
7. 依据建模得到的 NLOS 误差与终端与基站的距离呈正相关关系这一结论，可以推断最有可能有效定位终端的基站必定是距离终端最近的基站，因此选取距离终端距离最近的基站来估计终端位置，并依据估计位置反向验证这些基站用于定位的有效性，来判断终端是否可以被定位。

八 进一步研究的问题

1. z 轴的定位精度仍有提升的空间。本文提出的算法在 x 轴和 y 轴坐标上的精度都比较高，但 z 方向上的估计值距离真实数据仍有一定的误差。可以在模型中多考虑一些额外的因素，如信号的强度，信号间的互相影响等等。在估算终端的位置时还可以考虑信号的到达方向等对定位精度提升有帮助的信息。

2. 在追踪物体轨迹的时候可以将物体的运动速度加入考虑。因为终端与基站有相对移动，因此信号在到达终端时可能会有多普勒效应的产生，可以进一步对多普勒效应造成的误差进行建模，消除由于运动产生的噪声。

参考文献

- [1] 赵云轩. 非视距传播环境下移动台定位算法研究[D]. 吉林大学, 2005.
- [2] 蒋非颖. 无线蜂窝网中抗 NLOS 定位与跟踪技术研究[D]. 电子科技大学, 2006.
- [3] 冯治钢. 移动通信的定位系统研究[D]. 重庆大学, 2003.
- [4] 程龙. 无线传感器网络室内定位与网络修复方法研究[D]. 东北大学, 2013.
- [5] Rusinkiewicz S, Levoy M. Efficient variants of the ICP algorithm[C]. 2001.