

全国第四届研究生数学建模竞赛



题号 D

题 目 邮政运输网络中的邮路规划和邮车调度

摘 要:

本题是一道 VRP 问题,它涉及到最短路线、最小费用等条件下的优化问题.我们首先利用 Dijkstra 算法求出任意点的最短距离,然后针对每一个小问题,我们提出了具体的求解策略:

问题一中,我们论证出最少需要 3 辆邮车才能满足要求.然后对 X1 区域根据装载量、时间要求遍历出所有的可行路线,最后选出因空车率而减小的收入最小的邮路,具体的路线安排见文中表 1.4. 其减少的收入为 49.35 元.

问题二中,我们对地市局发车数进行讨论,将整个区域进行划分,在每个小区域应用分枝定界法求出运行成本的路线.从而得到近似最优解,再通过对区域的微调讨论出使邮车数目更小的、更节省运行成本的邮路规划和调度方案.在不同的方案下得到的最优值如下:

方案	邮车数	运行成本(元)
区级邮车上、下午停留的支局相同	12	10197
区级邮车上、下午停留的支局不同	11	9771

问题三中,在允许区级邮车上、下午停留的支局不同的情况下,我们将 Z56,Z57 由县局 X1 负责运送,Z27 由县局 X2 负责运送,这样只需要 10 辆邮车,并使每天节省 354 元,具体的行车路线见文中表 3.2.

问题四是一个选址问题.我们借助于中心点算法,考虑各支局在本县区域内的位置,并结合与地市局的距离,提出了相应的选址方案:将 X1 县局移到 Z4,X2 县局移到 Z21,X5 县局移到 Z52,每天将节省 789 元的运行成本,具体调度方案见文中表 4.4.

参赛密码 _____
(由组委会填写)

参赛队号 1029301 参赛学校 南京邮电大学

参赛队员姓名 于文涛 马钰昕 李晗

一、问题重述:

某地区的邮政局分为地市中心局（简称地市局）、县级中心局（简称县局）和支局三级机构，该地区的邮政运输网络由区级邮政运输网和县级邮政运输网构成。区级邮政运输网由从地市局出发并最终返回地市局的区级邮车所行驶的全部邮路构成，县级邮政运输网由从县局出发并最终返回县局的县级邮车所行驶的全部邮路构成。为使邮政企业实现低成本运营和较高的服务质量，我们需要对该地区的邮政运输网络进行重构，确定合适的邮路规划方案并进行邮车的合理调度。

为了满足邮政的时限要求，必须尽可能地保证各县局、支局在营业时间内收寄的多数邮件能当天运送回地市局进行分拣封发等处理，以及每天到达地市局的多数邮件能当天运送到目的地县局、支局。该地区从地市局到县局每天两班车，从县局到支局每天仅有一班车。该地区的邮政运输流程及时限规定如下：

Step1: 区级第一班次邮车从地市局 D 出发将邮件运送到各县局 X_i 和沿途支局，并将各县局 X_i 和沿途支局收寄的邮件运送回地市局 D ；区级第一班次邮车出发时间必须在06:00之后，返回地市局 D 时间必须在11:00之前。

Step2: 县局 X_i 将当天区级第一班次邮车及前一天的区级第二班次邮车所送达的本县邮件进行集中处理，按寄达支局装上相应的县级邮车；县局 X_i 对邮件的集中处理时间为1小时（包括邮件的卸装、分拣封发等处理时间）。

Step3: 各县级邮车将邮件运送到其负责的支局并将这些支局收寄的邮件运送回县局 X_i ；

Step4: 区级第二班次邮车从地市局 D 出发将邮件运送到各县局 X_i 和沿途支局，并将各县局 X_i 收寄的邮件（包括当日各县级邮车运回县局 X_i 的邮件）和沿途支局收寄的邮件运送回地市局 D ；请注意区级第二班次邮车在县局 X_i 卸装完邮件后的出发时间必须在县局 X_i 的全部县级邮车返回县局并集中处理1小时以后，最终返回地市局 D 的时间必须在18:00之前。

假设区级两个班次邮车的行驶路线相同，要求区级邮政运输网必须至少覆盖该地市附近的16个支局 $Z_{58}, Z_{59}, \dots, Z_{73}$ 和5个县局 X_1, \dots, X_5 。各县级邮政运输网必须覆盖本县内区级邮车不到达的支局。该地区邮局间公路网分布见表1，并且县级邮车平均时速为30km/h，区级邮车的平均时速为65km/h，邮车在各支局卸装邮件耗时5分钟，在各县局卸装邮件耗时10分钟。

问题1:

以县局 X_1 及其所辖的16个支局 Z_1, Z_2, \dots, Z_{16} 为研究对象，假设区级第一班次邮车08:00到达县局 X_1 ，区级第二班次邮车16:00从县局 X_1 再出发返回地市局 D ，若每辆县级邮车最多容纳65袋邮件，试问最少需要多少辆邮车才能满足该县的邮件运输需求？同时，为提高邮政运输效益，应如何规划邮路 and 如何安排邮车的运行？（邮件量见表2，空车率=（邮车最大承运的邮件量（袋）-邮车运载的邮件量（袋））/邮车最大承运的邮件量（袋），单车由于空车率而减少的收入为（空车率*2元/公里））。

问题2:

采用尽可能少、尽可能短的邮路可以减少邮政部门车辆和人员等的投入，从而显著降低全区邮政运输网的总运行成本。考虑投入车况较好的邮车，通常每条邮路只需要一辆邮车即能满足运载能力要求，试问应如何构建该地区的邮政运输网络（县的划分不能变更），请你给出邮路规划和邮车调度方案。请注意邮车的

调度必须满足上文中有关该地区的邮政运输流程及时限规定。（每条邮路的运行成本为3元/公里）

问题3:

考虑到部分县与县交界地带的支局，其邮件由邻县县局负责运送可能会降低全区的运行成本，带来可观的经济效益。若允许在一定程度上打破行政区域的限制，你能否给出更好的邮路规划和邮车调度方案？（在此同样不必考虑邮车的运载能力的限制，每条邮路的运行成本为3元/公里）

问题4:

县局选址的合理与否对构建经济、快速的邮政运输网络起到决定性的作用。假设图 2 中县局 X_1 ，……， X_5 均允许迁址到本县内任一支局处，同时原来的县局弱化为普通支局。设想你是该地区网运部门负责人，请你重新为各个县局选址，陈述你的迁址理由并以书面材料形式提交省局网运处。

二、问题假设与符号说明

2.1、问题假设：

- 1、邮车在路上的速度总是一定，不会出现抛锚或阻塞而耽误时间；
- 2、分组之后，各小组只能走自己组内的路，不能走其它组的路；
- 3、各个小组的邮车行驶速度一样；
- 4、卸车寄达该局的所有邮件；上车该局收寄的所有邮件；
- 5、县局需对邮件处理 1 小时，且不包括区局邮车装卸邮件的时间；

2.2 符号说明：

符号	符号说明
D	区局
X_i	第 i 个县局
Z_i	第 i 个支局
$D_{i,j}$	从支局点 Z_i 到支局点 Z_j 路径的距离
$u(i)$	从支局点 Z_1 到支局点 Z_i 已选取的最小距离
$r(i)$	从支局点 Z_1 到支局点 Z_i 已选取的最小路径
I_i	第 i 个支局需寄达的邮件数量
O_i	第 i 个支局收寄的邮件数量
Q	寄达邮件总量
n	邮车数量
Ω	县局 X_1 所辖支局的分为三个区域，划分的集合
W_i	每辆邮车离开第 i 个支局时所装邮件数量
T_i	区级邮车到县局 X_i 花费的时间
K	邮车的空车率
S	总的空车损失费用
S_i	第 i 辆车的空车损失费用

A_i	第 i 辆车所经过的所有局的全排列
p_k	一辆邮车所经过局的全排列的第 k 个全排列
$W_{i,j}$	表示第 i 种分区方式下从第 j 个支局出发邮车上所装邮件数量
$K_{i,j}$	邮车从第 i 个局到第 j 个局邮车的空车率
t	邮车出行一共花费的时间
t_l	邮车第 l 种运行方式一共花费的时间
m_i	第 i 辆邮车一共经过的支局数目
v	县级邮车的行驶速度，为已知常量

三、模型求解准备

3.1 Dijkstra 算法:

为了求解整个区域中，任意 2 点之间的距离，我们是使用了 Dijkstra 算法，算法思想如下：

由题中给定的任意两个局（包括区局、县局、支局）之间的距离，根据图论的模型来求解任意两个局之间的最短距离。设有加权图 G ，顶点集 V 表示所有局的集合；加权边集 E 表示某两个局之间的距离的集合。

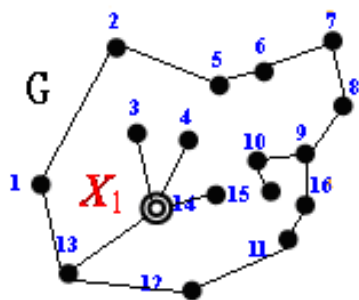


图 1.1 县局 X1 及所辖支局示意图

在加权图 G 中，求固定一点到其它顶点的最短距离，可以引入图论中对所有点调用 Dijkstra 算法

不妨固定点 $Z1$ 表示的点：设 $D_{i,j}$ 表示从支局点 Z_i 到支局点 Z_j 路径的距离； $u(i)$ 表示从 $Z1$ 到 Z_i 选取的路径的距离； $r(i)$ 表示 Z_i 的上一个节点，用来确定最短路径； j 表示新加入考察集的支局点， $j=0$ 表示县局。算法的过程就是在每一步改进这两个标记的值，使最终 $u(i)$ 表示从 $Z1$ 到 Z_i 的最小距离。算法过程：

(1)、赋初值：令 $u(i) = D_{1,i}$ ； $r(i) = 1$ ； $j = 0$ ；

(2)、考察所有未考察过的点，如果有 $u(i) > u(j) + D_{j,i}$ ，则令 $u(i) = u(j) + D_{j,i}$ ， $r(i) = j$ ；

(3)、令 j^* 是使得 $l(i)$ 取得最小值的支局点，则令第 j^* 个支局点为已考察， $j = j^*$ ；

(4)、如果从 1 到 16 所有支局点都已考察完毕，则算法结束；否则，执行 (2) 继续考察未考察过点的情况。

最后求得固定点 Z1 到任意点 Zi 间得的最小距离，用 $u(i)$ 表示；该最小距离经过的路径可以从数组 $r(i)$ 得到。

求得加权图 G 任意两点之间的最短距离，结果列表可得：

表 1.1——县局 X1 及所辖的 16 个支局之间最短距离

	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15	Z16	X1
Z1	0	31	27	38	51	58	71	67	57	47	52	48	21	41	52	61	27
Z2	31	0	19	33	27	32	45	64	53	47	61	57	52	48	56	63	36
Z3	27	19	0	14	27	34	47	49	39	29	42	38	38	29	38	44	17
Z4	38	33	14	0	13	20	33	35	25	15	33	32	32	15	24	30	11
Z5	51	27	27	13	0	9	21	37	26	26	43	45	45	28	29	38	24
Z6	58	32	34	20	9	0	13	32	32	35	47	52	52	35	33	42	31
Z7	71	45	47	33	21	13	0	19	30	39	50	65	65	48	44	40	44
Z8	67	64	49	35	37	32	19	0	11	20	31	54	61	34	25	21	40
Z9	57	53	39	25	26	32	30	11	0	10	20	43	51	24	14	13	30
Z10	47	47	29	15	26	35	39	20	10	0	18	36	41	14	9	18	20
Z11	52	61	42	33	43	47	50	31	20	18	0	23	46	25	14	23	25
Z12	48	57	38	32	45	52	65	54	43	36	23	0	27	22	33	42	21
Z13	21	52	38	32	45	52	65	61	51	41	46	27	0	39	48	57	21
Z14	41	48	29	15	28	35	48	34	24	14	25	22	39	0	11	20	18
Z15	52	56	38	24	29	33	44	25	14	9	14	33	48	11	0	9	27
Z16	61	63	44	30	38	42	40	21	13	18	23	42	57	20	9	0	36
X1	27	36	17	11	24	31	44	40	30	20	25	21	21	18	27	36	0

3.2 分枝定界算法

为了得到给定起始点的回路的最短路径，我们使用了分枝定界算法。算法思想如下：

以 X1 县来看，采用分枝定界法，设无向图 G 中共有 17 个点（包括作为起点及终点的县局 X1）， $\text{dis}(i, j)$ 为图中顶点 V_i 与顶点 V_j 的距离；

$\text{path}(Vk_1, Vk_2 \dots Vk_i)$ 表示经过的点的路径；经过路径的长度

$\text{cost} = \sum_{j=1}^{i-1} \text{dis}[Vk_j, Vk_{(j+1)}]$ ；Lmin 为所有路径中最短路径的长度；left (i, j) 保存

点 V_i 到点 V_j 的边是否已被选取；初始化令 Lmin=INF（即一个极大的数）：

1、以 X1 点为出发点，遍历每一条分枝[X1, Vk_1]作为路径到达 Vk_i 点（对于此

图，这样的分枝有 16 条），记 $\text{left}[0, k_1]=1$ ， $\text{cost} = \text{dis}[0, k_1]$ ；再以点 Vk_1 作

为出发点，遍历与点 Vk_1 相连的每一条边，记 $\text{left}[k_1, k_2] = 1$ ，

$\text{cost} = \text{cost} + \text{dis}[k_1, k_2]$ ；如此下去。

- 2、每到达一个新的点 Vk_j ，如果 $\text{cost} > \text{Lmin}$ ，则进行定界，终止该分枝的分枝操作，返回到点 Vk_{j-1} ，继续其它分枝的分枝操作。
- 3、如果 j 又回到值 0，则表明到达了终点，完成了一个回路。
- 4、如果 $\text{Lmin} > \text{cost}$ ，则令 $\text{Lmin} = \text{cost}$ ，并记录经过的点的路径 $\text{path}(Vk_1, Vk_2 \cdots Vk_j)$ 。
- 5、返回点 Vk_{j-1} ，取下一个分枝，返回（2），以新的 Lmin 作为比较的标准，进行新的分枝操作。

四、问题 1 的模型建立与求解

首先分析该县的邮件运输要求：

- 1、 每辆县级邮车最多容纳 65 袋邮件，即

$$W_i \leq 65, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 16 \quad \text{式 (1.1)}$$

- 2、 每辆县级邮车运行时间 t 必须在第一班区级邮车到来之后和第二班区级邮车离开之前，其中包含了区级邮车的装卸时间，即

$$t \leq (16 - 8) - 2 = 6 \quad \text{式 (1.2)}$$

4.1 最小邮车数的求解

定理 1.1：每辆县级邮车最多容纳 65 袋邮件，县局该县的邮件运输需求 X1 及其所辖的 16 个支局，最少需要 3 辆邮车才能满足 X1 县的邮件运输需求。

证明：已知各支局的邮件量表（包括寄达邮件量和寄出邮件）；每辆县级邮车最多容量为 65。设 R_i 分别表示支局 Z_i ， $i = 1, 2, \dots, 16$ 的邮件寄达量；设县局 X1 至少需要邮车 n 辆。

由各支局寄达邮件量 R_i 求得县局需要寄达支局的邮件总量 Q ：

$$Q = \sum_{i=1}^{16} I_i \quad \text{式 (1.3)}$$

根据式 (1.3) 求得 $Q = 176$ ；

因为要保证完成当天的送达邮件的任务，所以需送达的邮件总量必须小于所有邮车的最大送达能力，即

$$Q < 65n, \quad n \in N \quad \text{式 (1.4)}$$

$$\text{所以} \quad 176 \leq 65n, \quad n \in N \quad \text{式 (1.5)}$$

$$\text{所以} \quad \frac{176}{65} \leq n, \quad n \in N \quad \text{式 (1.6)}$$

$$\text{所以} \quad 3 \leq n, \quad n \in N \quad \text{式 (1.7)}$$

证毕 ■

下面我们通过找到问题的可行解，确定最小邮车数的最小上界。

定理 1.2：设县局 X1 只要 3 辆邮车数就可以完成邮件寄达任务。

证明：不妨将县局 X1 的 16 个支局分成 3 个区域，分别为：区域 1（包括支局： $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_{13}$ ）；区域 2（包括支局： $Z_5, Z_6, Z_7, Z_8, Z_9, Z_{10}$ ）；区域 3（包括支局： $Z_{11}, Z_{12}, Z_{14}, Z_{15}, Z_{16}$ ）；

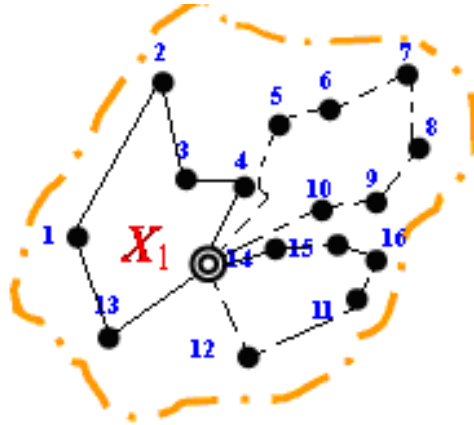


图 1.2 X1 县的区域 1, 2, 3 分区说明图

为每一个区域分配一辆邮车, 三辆邮车分别完成三个区域的任务。如果每一辆邮车都能完成该区域的任务, 则总的县局 X1 的任务可以完成; 对于每一辆邮车设定一种运行计划如表 1.2:

表 1.2——三辆邮车运行计划

邮车	邮车运行计划
1	$X_1 \rightarrow Z_{13} \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_3 \rightarrow Z_4 \rightarrow X_1$
2	$X_1 \rightarrow Z_{10} \rightarrow Z_9 \rightarrow Z_8 \rightarrow Z_7 \rightarrow Z_5 \rightarrow Z_6 \rightarrow X_1$
3	$X_1 \rightarrow Z_{16} \rightarrow Z_{15} \rightarrow Z_{12} \rightarrow Z_{11} \rightarrow Z_{14} \rightarrow X_1$

对于每辆邮车的运行计划考察可行性, 如果该邮车运行计划可以完成, 则该邮车的任务可以完成。将每辆邮车在每个到达站点的所装邮件数量和一共运行时间列表记录如表 1.3:

表 1.3——三辆邮车按计划运行情况

邮车	到达站点及邮件数量 W_i		一共时间 T
邮车 1	X1	51	4.60 小时
	Z13	53	
	Z1	52	
	Z2	51	
	Z3	50	
	Z4	51	
邮车 2	X1	64	4.87 小时
	Z10	56	
	Z9	58	
	Z8	63	
	Z7	61	
	Z5	57	
	Z6	61	

邮车 3	X1	61	5.55 小时
	Z16	59	
	Z15	62	
	Z12	57	
	Z11	62	
	Z14	56	

对每辆邮车的出行情况进行考察，满足该县的邮件运输要求，即式 (1.1) 和式 (1.2)。所以 3 辆邮车可以完成该县的邮件寄达任务。

证毕 ■

由问题分析可知该县所需邮车数不大于 3 辆，即 $n \leq 3$

又由定理 1.1 得：

$$3 \leq n \leq 3, \quad n \in N \quad \text{式 (1.8)}$$

所以 $n = 3$ ，即最少需要 3 辆邮车才能满足该县的邮件运输需求。

4.2 最佳邮路的规划

设 $A = \{1, 2, \dots, 16\}$ ，为所有支局编号的集合。设

$$\Omega = \{(A_1, A_2, A_3) \mid A_1 \cap A_2 = \Phi, A_1 \cap A_3 = \Phi, A_2 \cap A_3 = \Phi\}。$$

对 A 的任何一个子集 a ，定义其全排列集合为 $D(a)$ 。比如对集合 $a = \{1, 3, 6\}$ ，

$$\text{则 } D(a) = \{\{1, 3, 6\}, \{1, 6, 3\}, \{3, 1, 6\}, \{3, 6, 1\}, \{6, 1, 3\}, \{6, 3, 1\}\}$$

对给定的 A 的子集 a ，设 $d = \{d_1, d_2, \dots, d_{m_i}\} \in D(a)$ ，定义其因空车率而减少的收入函数为

$$g(d) = 2 \{ k_{d_0} L_{0,d_1} + (\sum_{j=1}^{m_i-1} k_{d_j} L_{d_j,d_{j+1}}) + k_{d_{m_i}} L_{d_{m_i},0} \}, \quad \text{式 (1.9)}$$

其中 $k_{d_k} = \frac{65 - W_{d_k}}{65}$ 为空车率， $L_{i,j}$ 表示支局 i 到支局 j 的最短路径。

$$W_{d_k} = \sum_{j=1}^{m_i} I_{d_j} - \sum_{j=1}^k (I_{d_j} - O_{d_j}) \text{ 表示邮车从支局 } d_k \text{ 出发时所携带的邮件袋数。}$$

对集合 a ，我们定义其因空车率而减少的收入函数为 $f(a) = \min_{d \in D(a)} g(d)$ 。最

终建立的数学模型如下：

$$\min_{(A_1, A_2, A_3) \in \Omega} \sum_{i=1}^3 f(A_i) = \min_{(A_1, A_2, A_3) \in \Omega} \sum_{i=1}^3 \left(\min_{d=\{d_1, d_2, \dots, d_{m_i}\} \in D(A_i)} 2 \{ k_{0,d_1} L_{0,d_1} + (\sum_{j=1}^{m_i-1} k_{d_j} L_{d_j,d_{j+1}}) + k_{d_{m_i},0} L_{d_{m_i},0} \} \right)$$

$$\begin{aligned}
s.t. \ t_d &= \frac{L_{0,d_1} + \sum_{j=1}^{m_i-1} L_{d_j,d_{j+1}} + L_{d_{m_i},0}}{v} + \frac{20+5m_i}{60} \leq 6 \\
W_{d_k} &= \sum_{j=1}^{m_i} I_{d_j} - \sum_{j=1}^k (I_{d_j} - O_{d_j}) \leq 65
\end{aligned}$$

式 (1.10)

分析及求解步骤如下：

因为寄达邮件总量 Q 为 176，而任一分区内的 R_i 的和值最大为 130，所以任一分区的 R_i 的和值最小为 $170-130=46$ 。即有：

$$46 \leq \sum I \leq 65 \quad \text{式 (1.11)}$$

类似

$$40 \leq \sum O_i \leq 65 \quad \text{式 (1.12)}$$

由此可以推出：任意分区点数在 3 到 8 之间。

第 1 步、对 $k=3$ ，将满足式 (1.15) 和式 (1.16) 的点集放在 S_3 集合中，类似给出 S_4, \dots, S_8 的集合。

第 2 步、对 S_3, \dots, S_8 中所有点集，比如 S_5 中的 $\{7,8,9,10,11\}$ ，给出所有 $120(=5!)$ 种可能的邮路(如 $X_1 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow X_1$)，(注：我们给出的邮路中， $X_1 \rightarrow 7$ 表示由 X_1 的最短路径走到 7，在 7 停留 5 分钟进行工作，而中途经过的其它点不停留)。对 120 个邮路，我们分别计算以下三个分量：总路程，在任何一个停留点装卸之后车上的最大袋数，空车损失，在计算过程中，若总路程过大使得邮车不能及时返回，或最大袋数大于 65，则令空车损失为一个很大的数（比如 10^6 ）。

第 3 步、对所有可能的邮路，（比如 S_5 中的点集，共有 120 种可能的邮路），求出最小空车损失，若最小空车损失小于 10^5 ，将该邮路置于集合 SS5 中。最终 SS3 到 SS8 的集合中的元素的个数分别为：

SS3 : 11, SS4 : 598, SS5 : 1740, SS6 : 748, SS7 : 14, SS8 : 0,

这表示了 k 个可行路线的数目。比如 5 个点的可行路线为 1740。

第 4 步、为使三个邮路完成 16 个支局的任务，这三个邮路中支局的数目可能由以下组合方式：

$$\{3,6,7\}, \{4,5,7\}, \{4,6,6\}, \{5,5,6\}$$

对任何一个组合方式，比如 $\{4,5,7\}$ ，先取 1 个点的邮路 ji_1 (对 SS7 中所有可能的邮路遍历)，在取 5 个点构成的邮路 ji_2 (对 SS5 中所有可能的邮路遍历)，若 ji_1 与 ji_2 中支局没有重复，则判断剩下的 4 个点构成的集合是否能与 SS4 中的一条可行邮路中的点一致。若能找到，令其为 ji_3 ，这样 ji_1 ， ji_2 ， ji_3 就成为一个可行分区方案。

第 5 步、对所有可能分区方案，找出取最小空车损失。

通过 Matlab 编程实现（程序附后），得到最小空车损失费用下的邮路规划方式，画出最优分区情况如图（1.3）：

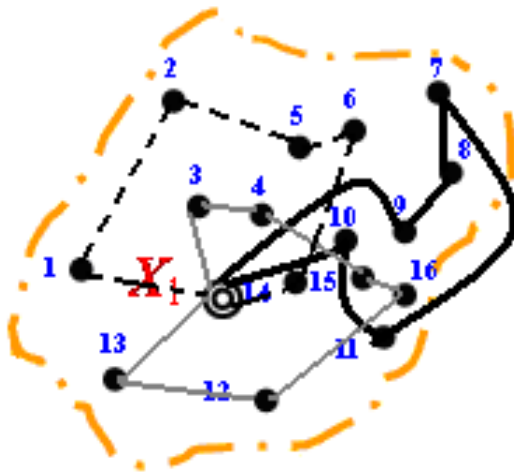


图 1.3

我们计算得到最小空车损失费用下的邮路规划方式及邮车安排方式，所得数据列表格得：

表 1.4——最优邮车安排方式

邮车	邮车运行计划	共花费时间	最小损失费用
1	$X_1 \rightarrow Z_9 \rightarrow Z_8 \rightarrow Z_7 \rightarrow Z_{11} \rightarrow Z_{10} \rightarrow X_1$	5.6833	22.62
2	$X_1 \rightarrow Z_{13} \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_3 \rightarrow Z_{14} \rightarrow X_1$	5.3800	11.08
3	$X_1 \rightarrow Z_{12} \rightarrow Z_4 \rightarrow Z_5 \rightarrow Z_6 \rightarrow Z_{16} \rightarrow Z_{15} \rightarrow X_1$	5.9333	15.65
合计			49.35

注：表中“共花费时间”是指每条邮路邮车行驶时间，支局停留时间（每个支局 5 分钟），以及县局卸装邮件耗时（一共两个 10 分钟）。该时间加上两个集中处理的 1 小时时间，小于 8 小时说明该邮路满足时间要求。

根据表 1.4 的每辆车的最小损失费用的函数，运用式（1.9）求得总的最小损失费用为：49.35 元(程序运行结果为 1604，将其除以 65，乘以 2 得到该损失费用)，邮政运输效益最大。表 1.4 三辆邮车的运行计划为问题所求的最优邮车安排方式。

五、问题 2 模型建立与求解

由题意所述知，全区邮政网络的最优邮路规划是一个 VRP 问题。首先分析题目要求，已知全区共有 73 个支局，5 个县局，1 个区局，对于任意两点之间的最短距离通过 Dijkstra 算法可以求得。

表 2.1——问题 2 新的符号说明

符号	说明	符号	说明
A_M	所有支局、县局、区局的集合	A_N	经过每个局的所有车的集合
X	所有县局的集合	U_i	第 i 个县局所辖区域的支局的集合
Y	区局所辖区域的支局的集合	N_1	经过区局邮车的集合
N_2^i	第 i 县局邮车的集合	$x_{i,j}^k$	第 k 车是否经过第 i 局到第 j 局
t_{\max}^k	第 k 辆邮车最大运行时间	$t_{i,j}^k$	第 k 车经过第 i 局到第 j 局花费时间
M	所有局的个数	N	所有车的个数

分析求第 k 辆邮车最大运行时间：

$$t_{\max}^k = 12 - \frac{20}{60} - 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M x_{i,j}^{k*} L_{ij}}{65}, i \in A_M, x_{i,l}^{k*} = 1, \forall l \in X \quad \text{式 (2.1)}$$

求问题的最短邮路，分析建立数学模型如下：

$$\begin{aligned} \min_N & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M x_{i,j}^k L_{ij} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} x_{j,l_1}^{k_2} = 0, \forall k_2 \in N_2^i, \forall l_1 \notin V_i, j \in A_M & (1) \\ \sum_{i=1}^M x_{i,l}^{k_1} \geq 2, \forall k_1 \in N_1, \forall l \in X & (2) \\ x_{i,l_1}^{k_2} = 0, \forall k_2 \notin N_1, \forall l_1 \in Y & (3) \\ \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M x_{i,j}^k = 2M & (4) \\ \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M t_{i,j}^l \leq t_{\max}^l, \forall l \in X & (5) \\ \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M t_{i,j}^{k_1} \leq 5, \forall k_1 \in N_1 & (6) \end{cases} \end{aligned} \quad \text{式 (2.2)}$$

我们令 $x_{i,j}^k$ 表示第 k 辆邮车是否经过第 i 局到第 j 局：

$$x_{i,j}^k = \begin{cases} 1, & \text{第 } k \text{ 辆车从邮局 } i \text{ 出发到邮局 } j \\ 0, & \text{其它} \end{cases};$$

统计第 k 辆邮车所经过的路程，就是对所经过相邻两个局的最短距离求和。由第一问，我们已经知道任意两点之间的最短距离为 L_{ij} 。所以根据第 k 辆邮车所经邮局的选取情况，可以求出第 k 辆经过的总的邮路的长度。最后结果除以 2 是因为我们考虑的是一个无向图， $x_{i,j}^k = x_{j,i}^k$ ，每条边被计算了两次。设共有 N 辆邮车，对所有邮车累和，最后得到总的邮路的长度，即为当前邮路规划的邮路长度。最后求出所有邮路规划的邮路长度，从中找出最小的邮路长度，即为问题 2 的最优解，对应的邮路规划就为所求的最优邮路规划方式。

在每求一个邮路长度时，必须满足模型中的 6 个约束条件：约束（1）表示本县的车只能到达本县的支局，外县的支局不能到达；约束（2）表示每辆区车必须至少经过 1 个以上的县局；约束（3）表示区级区内的支局只能被区级的邮车遍历；约束（4）表示所有支局都必须被遍历；约束（5）表示县局邮车运行时间必须在区级邮车运行时间之间，即区级邮车第一次到来之后和区级邮车第二次离开之前的这端时间；约束（6）表示区车从出去运行到运行后回来，要在 5 小时之内。这些约束条件都是我们根据题意及问题的假设分析得到。约束（5）要求当前邮路选择方式下，保证当前邮车运行时间小于等于第 k 辆邮车的最大运行时间。式（2.1）的分析是根据假设 5 得到的。

在解决问题 2 的过程中，我们采取了先解决区级邮车的邮路规划，然后解决县级邮车的邮路规划的步步推进的方法。在进行邮路规划的过程中，我们由题目本身的要求及其对于图形的认识，我们创造性的提出了如下的解决思路：

- 1、区级邮车尽量使用环回路由，而不要原路返回（因为如果原路返回，那行驶路程中就有一半的路程是浪费的）；
- 2、区级邮车经过的支局尽量装卸邮件，而不要一掠而过（因为如果区级邮车没有装卸邮件，必然要有县级的邮车来到该支局装卸邮件，那么相对的，县级的邮车来往该支局的路程是浪费的）；
- 3、由地区的邮政运输流程及时限规定决定，区级邮车经过县局 X_i 的路程耗费的时间 T_{xi} （包括汽车行驶时间和在各个县、支局卸装邮件的时间）要小于 5 小时；
- 4、区级邮车经过县局 X_i 的路径，尽量在路径附近的区内的支局停留并装卸邮件（因为区内的支局必须要由区级邮车装卸邮件，在路径附近的区内的支局停留并装卸邮件带来的路程上的耗费，一般比由专门来到该支局装卸邮件的区级邮车带来的路程上的耗费要小）；
- 5、区级邮车经过县局 X_i 的路程耗费的时间 T_{xi} 离 5 小时相差较大，可以在路径附近的非区内支局停留并装卸邮件；
- 6、县级邮车尽量使用环回路由，而不要原路返回（因为如果原路返回，那行驶路程中就有一半的路程是浪费的）；

7、县级邮车经过的支局尽量装卸邮件，而不要一掠而过（因为如果县级邮车没有装卸邮件，必然要有别的县级的邮车来到该支局装卸邮件，那么相对的，别的县级的邮车来往该支局的路程是浪费的）；

8、Xi 县的县级邮车运行时间要小于 $\left(9\frac{2}{3}-T_{Xi}\right)$ 小时；

下面的时间条总的长度由地区的邮政运输流程及时限规定决定，最大为 12 小时，表示区级邮车最大的工作时间，早上 6:00 第一班区级邮车出发，经过 t_1 时间到达县局，花 10 分钟装卸邮件，然后县局用 1 个小时进行集中处理，之后，县级邮车才能出发，下午，县级邮车回到县局后，先花 1 个小时进行集中处理，再花 10 分钟进行区级邮车装卸邮件，之后，区级邮车才能出发，而且必须经过 t_2 时间，在 18:00 前到达地市局。所以

县局邮车运行的最大的时间=12-区级邮车最快到达县局Xi的花费时间
-县局集中处理的时间×2-区级邮车装卸邮件的时间×2

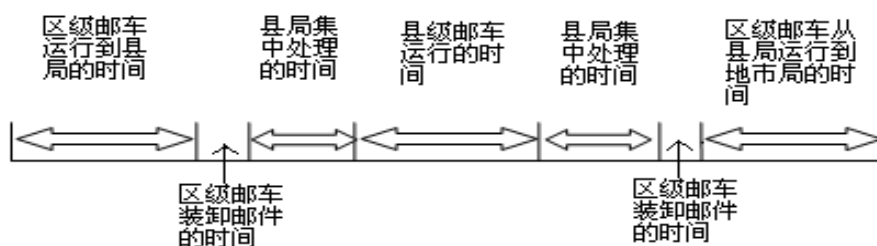


图 2.1 县级邮车运行时间说明图

9、各个支局到所属上级局的最短路径呈树枝状排布，在划分县级邮车的行驶的区域时，尽量把同一个“树枝”上的支局分在一起（因为在同一“树枝”上的支局若分在同一个行驶区域时，到达县局所经过的距离较短）；

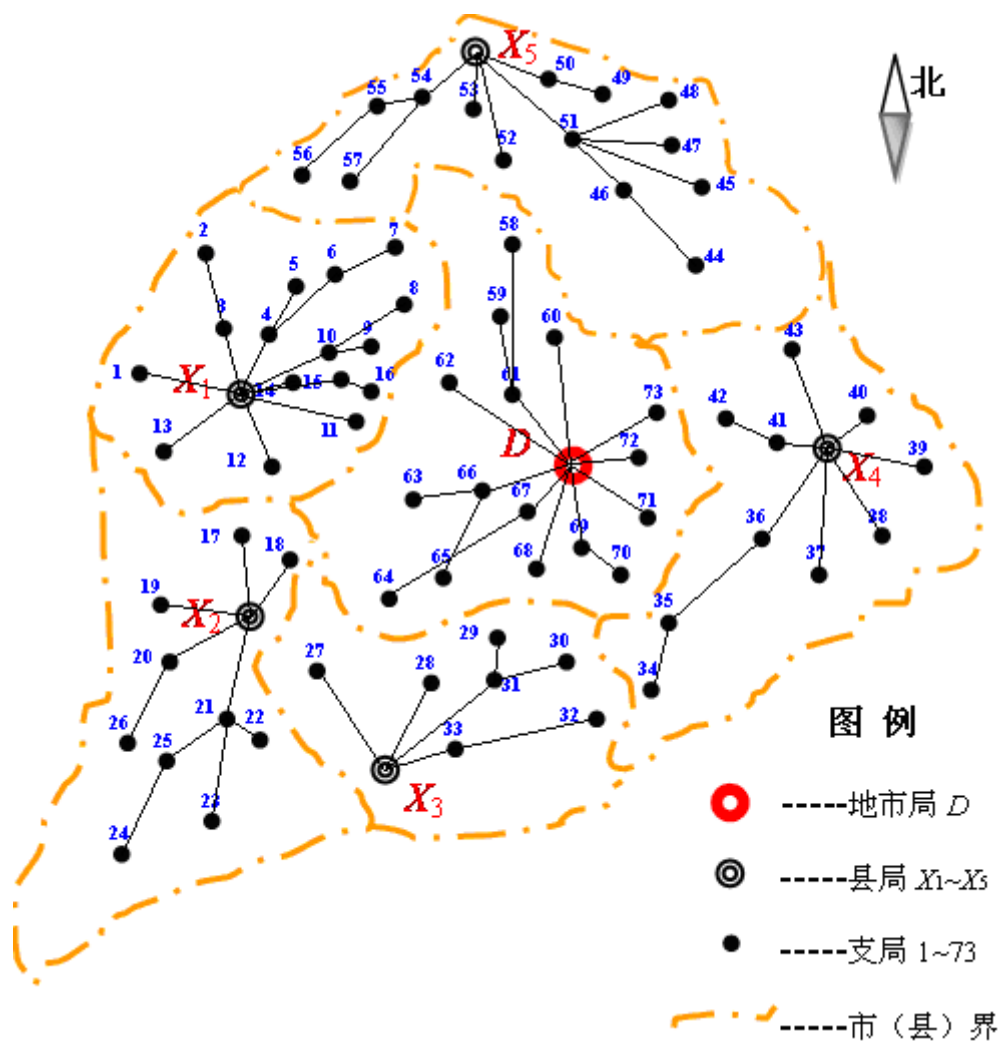


图 2.2 各个县区距离县局最近的连线

- 10、 县级邮车和区级邮车经过同一个支局时，尽量由县级邮车卸装这个支局的邮件（因为无论由县级邮车或者区级邮车卸装这个支局的邮件，带来的卸装时间是一样的，但如果由县级邮车卸装的话，将使区级邮车花费时间变短，从而该县内的县级邮车的花费时间的上限变高，有利于该县内的邮路的安排）；

关于到达各个县城的区级邮车的数量，我们进行如下的分析：

情况一、到达各个县城的区级邮车的数量为 5 辆

我们先设计一种较为普通的区级邮车的邮路规划，即由地市局发出 5 辆区级邮车，每辆邮车到达一个不同的县局。

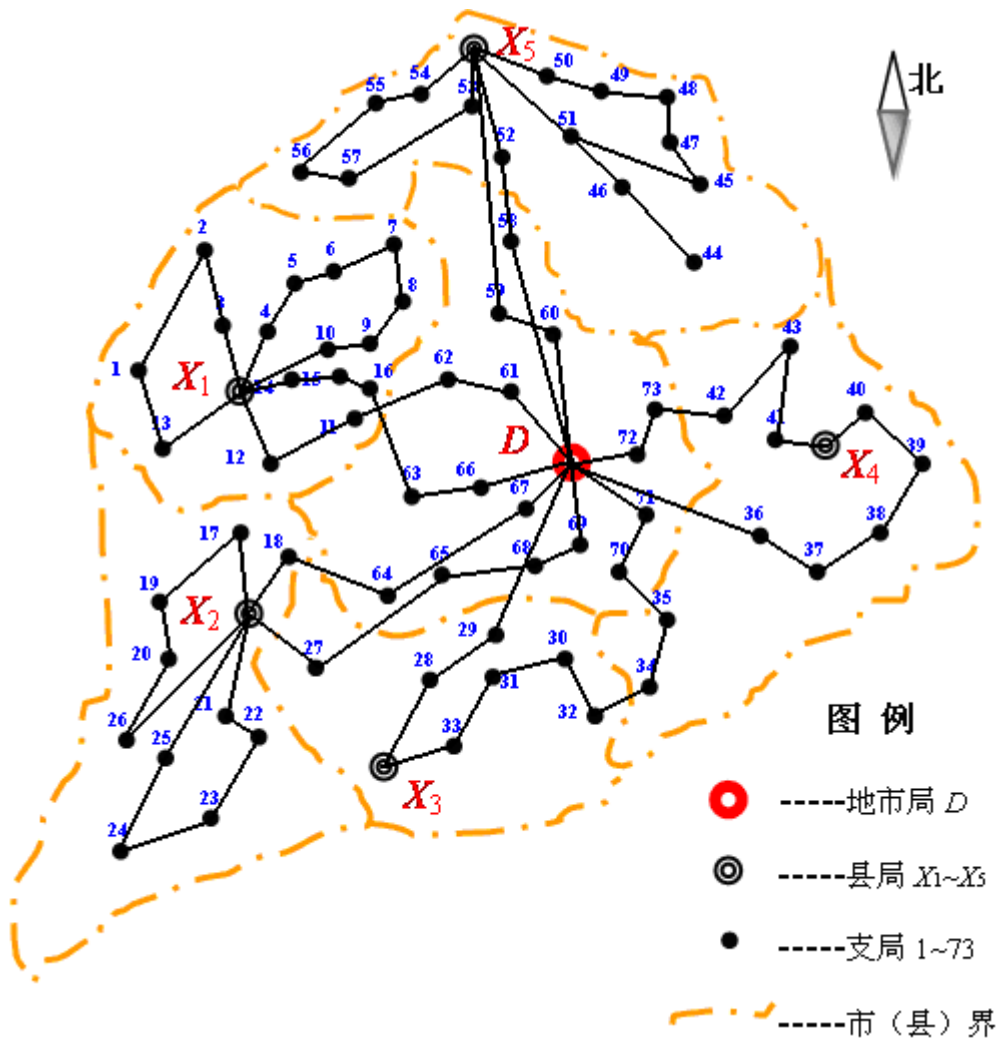


图 2.3 5 辆区级邮车运行邮路规划图

邮路的形成步骤如下：

- 1、从地市局 D 到县局 X5，区局邮车按照 D-Z61-Z58-Z52-X5 的路径到达县局 X5 并返回，共计耗时 4.23 小时，距离 5 小时的限定还有一定的距离，我们观察到区内支局 Z59，Z60，在路径的周围，把他们也放到路径中，使用分枝定界法，得到区级邮车经过县局 X5 的路径为 D-Z60-Z59-Z52-X5-Z58-Z61-D，得到总的路程为 263km，花费的时间为 4.6295 小时。那么 X5 县内县级邮车花费时间的上限为 5.0372 小时。但经过验证由于 X5 县内县级邮车花费时间的上限的限制，导致县内邮车运行总长度的大量增大，经过调整，区级邮车经过县局 X5 的路径为 D-Z60-Z59-Z52-X5-Z58-D，得到总的路程为 263km，花费的时间为 4.5462 小时。那么 X5 县内县级邮车花费时间的上限为 5.1205 小时；
- 2、从地市局 D 经过县局 X4，返回 D，如果走最短的距离，那么路径为 D-Z72-Z41-X4，到达县局 X4 并返回，共耗时 2.36 小时，距离 5 小时的限定还有一定的距离，我们观察到区内支局 Z73，X4 县内支局 Z42 在路径的周围，Z43，Z40 在县局的周围，把他们也放到路径中，同时，为了使返回路径尽可能的形成环路，我们又加入 X4 县内支局 Z39，Z38，Z37，Z36，使用分枝定界法，得到区级邮车经过县局 X4 的路径为

D-Z72-Z73-Z42-Z43-Z41-X4-Z40-Z39-Z38-Z37-Z36-D，得到总的路程为 259km，花费的时间为 4.9846 小时，那么 X4 县内县级邮车花费时间的上限为 4.6821 小时；

- 3、从地市局 D 经过县局 X3，返回 D，如果走最短的距离，那么路径为 D-Z66-Z65-Z28-X3，到达县局 X3 并返回，共耗时 3.0154 小时，距离 5 小时的限定还有一定的距离，市内支局距离 X3 县较近的有{Z71, Z70}2 个支局，X4 县内的{Z34, Z35}支局距离 X4 县局距离较远，而距离 X3 县局较近，经过调整，我们选取了{Z29, Z31, Z28, Z33, Z30, Z32, Z34, Z35, Z70, Z71}这几个支局构成区级邮车的回路，使用分枝定界法，得到区级邮车经过县局 X3 的路径为 D-Z29-Z28-X3-Z33-Z31-Z30-Z32-Z34-Z35-Z70-Z71-D，得到总的路程为 251km，花费的时间为 4.8615 小时，那么 X3 县内县级邮车花费时间的上限为 4.8052 小时；
- 4、从地市局 D 经过县局 X2，返回 D，如果走最短的距离，那么路径为 D-Z66-Z63-Z18-X2，到达县局 X2 并返回，共耗时 2.7385 小时，距离 5 小时的限定还有一定的距离，为了使尽可能构成回路，经过调整，我们选取了{Z67, Z65, Z64, Z27, Z18, X2, Z68, Z69}构成路径，使用分枝定界法，得到区级邮车经过县局 X3 的路径为：D-Z69-Z68-Z65-Z27-X2-Z18-Z64-Z67-D，得到总的路程为 238km，花费时间为 4.4115 小时，那么 X2 县内县级邮车花费时间的上限为 5.2552 小时；
- 5、从地市局 D 经过县局 X1，返回 D，如果走最短的距离，那么路径为 D-Z62-Z9-Z10-X1，到达县局 X1 并返回，共耗时 2.8308 小时，距离 5 小时的限定还有一定的距离，Z61 在路径的附近，把它加入到路径中，为了使尽可能构成回路，同时尽可能的使在同一个“树枝”上的支局分在一起，经过调整，我们选取了{Z11, Z12, Z14, Z15, Z16, Z63, Z66}放到路径中，把{Z9, Z10}移出路径，使用分枝定界法，得到区级邮车经过县局 X1 的路径为：D-Z61-Z62-Z11-Z12-X1-Z14-Z15-Z16-Z63-Z66-D，得到总的路程为 228km，花费时间为 4.4244 小时，那么 X1 县内县级邮车花费时间的上限为 5.2423 小时；
- 6、在 X1 县内，剩下的没有邮车经过的支局有{Z1, Z2, Z3, Z13, Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, Z10}，根据图 2 和处于一个“树枝”上的支局尽量分在一起由一辆邮车负责寄收邮件，我们把 X1 县内的支局分成 2 部分，{Z1, Z2, Z3, Z13}，{Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, Z10}，使用分枝定界法，得到他们各自的路径，路径一：X1-Z13-Z1-Z2-Z3-X1，长度为 109km，耗时 4.1167 小时，路径二：X1-Z4-Z5-Z6-Z7-Z8-Z9-Z10-X1，长度为 106km，耗时 3.5333 小时，以上两条路径的耗时都满足 X1 县内县级邮车花费时间的上限；
- 7、在 X2 县内，剩下的没有邮车经过的支局有{Z17, Z19, Z20, Z26, Z21, Z22, Z23, Z24, Z25}，如果一辆邮车可以完成上述所有支局的寄收任务，那么需要的时间为 7.2500 小时：大于在步骤 4 中规定的 X2 县内县级邮车花费时间的上限，故必然要使用 2 辆邮车完成 X2 县内剩下的没有邮车经过的支局的寄收任务，根据图 2 和处于一个“树枝”上的支局尽量分在一起由一辆邮车负责寄收邮件，我们把 X2 县内的支局分成 2 部分，{Z17, Z19, Z20, Z26}，{Z21, Z22, Z23, Z24, Z25}，使用分枝定界法，得到他们各自的路径，路径一：X2-Z17-Z19-Z20-Z26-X2，长度为 141km，耗时 5.0333 小时，路径二：X2-Z21-Z22-Z23-Z24-Z25-X2，长度为 127km，耗时 4.6500 小时。以上两条

- 路径的耗时都满足 X2 县内县级邮车花费时间的上限；
- 8、在 X3 县内，没有剩下支局没有邮车经过；
- 9、在 X4 县内，没有剩下支局没有邮车经过；
- 10、在 X5 县内，剩下的没有邮车经过的支局有{Z54, Z55, Z56, Z57, Z53, Z45, Z46, Z47, Z48, Z49, Z50, Z51}，根据图 2 和处于一个“树枝”上的支局尽量分在一起由一辆邮车负责寄收邮件，我们把 X5 县内的支局分成 2 部分，{Z54, Z55, Z56, Z57, Z53}，{Z44, Z45, Z46, Z47, Z48, Z49, Z50}，如果一辆邮车可以完成{Z54, Z55, Z56, Z57, Z53}的寄收任务，那么路径一：X5-Z54-Z55-Z56-Z57-Z53-X5，长度为 140km，耗时 5.0833 小时。满足步骤 1 规定的 X5 县内县级邮车花费时间的上限，所以该路径成立；如果一辆邮车可以完成{Z44, Z45, Z46, Z47, Z48, Z49, Z50, Z51}的寄收任务，那么需要花费时间为 6.1333 小时，超过 X5 县内县级邮车花费时间的上限，所以分成两个部分{Z44, Z46, Z51}，{Z50, Z49, Z48, Z47, Z45}，使用分枝定界法，得到路径二：X5-Z50-Z49-Z48-Z47-Z45-X5，长度为 133km，耗时 4.8500 小时，路径三：X5-Z51-Z46-Z44-X5，长度为 144km，耗时 5.0500 小时。以上两条路径的耗时都满足 X5 县内县级邮车花费时间的上限；整理上述的邮路规划得：

表 2.2——邮路规划

邮 车	邮车运行计划：经过的局号	花 费 时 间 (h)	单程行 驶距离 (km)	行驶距 离 (km)
1	X1 → Z13 → Z1 → Z2 → Z3 → X1	4.116 7	109	109
2	X1 → Z4 → Z5 → Z6 → Z7 → Z8 → Z9 → Z10 → X1	4.650 0	127	127
3	X2 → Z17 → Z19 → Z20 → Z26 → X2	5.033 3	141	141
4	X2 → Z21 → Z22 → Z23 → Z24 → Z25 → X2	4.650 0	127	127
5	X5 → Z54 → Z55 → Z56 → Z57 → Z53 → X5	5.083 3	140	140
6	X5 → Z50 → Z49 → Z48 → Z47 → Z45 → X5	4.850 0	133	133
7	X5 → Z51 → Z46 → Z44 → X5	5.050 0	144	144
8	D → Z61 → Z62 → Z11 → Z12 → X1 → Z14 → Z15 → Z16 → Z63 → Z66	4.424 4	228	456
9	D → Z69 → Z68 → Z65 → Z27 → X2 → Z18 → Z64 → Z67	4.411 5	238	576
1 0	D → Z29 → Z28 → X3 → Z33 → Z31 → Z30 → Z32 → Z34 → Z35 → Z70 → Z71	4.861 5	251	502
1 1	D → Z72 → Z73 → Z42 → Z43 → Z41 → X4 → Z40 → Z39 → Z38 → Z37 → Z36	4.984 6	259	518

1 2	D → Z60 → Z59 → Z52 → X5 → Z58 → Z61 → D	4.546 2	263	526
合计			2160	3399

注:单程行驶距离是指邮车由地市局或者县局出发,回到出发局所经过的路程,因为地市局每天要发 2 班邮车,所以区级邮车每天行驶的路程是单程行驶距离的 2 倍

情况二、到达各个县城的区级邮车的数量为 4 辆。

根据 Dijkstra 算法，得到由地市局到各个县局，及相邻各个县局之间的距离和经过的支局如下表图所示：

表 2.3——市局到各县局，及相邻各个县局之间的距离 单位：千米

	D 到 X1	D 到 X2	D 到 X3	D 到 X4	D 到 X5	X1 到 X2	X2 到 X3	X3 到 X4	X4 到 X5	X5 到 X1
距离	92	89	98	66	124	62	54	133	119	107

由于只使用了 4 辆区级邮车，那么必然有一辆邮车在 2 个县局装卸邮件，经过计算，得到邮路安排如下：

表 2.4——邮路规划表

邮 车	经过的局号	花费时 间 (h)	单程行 驶距离 (km)	行驶距 离 (km)
1	X1 → Z13 → Z1 → Z2 → Z3 → X1	3.9667	109	109
2	X1 → Z4 → Z5 → Z6 → Z7 → Z8 → Z9 → Z10 → X1	4.1167	106	106
3	X1 → Z14 → Z15 → Z16 → Z11 → X1	3.2000	86	86
4	X2 → Z19 → Z20 → Z26 → X2	4.0167	113	113
5	X2 → Z21 → Z22 → Z23 → Z24 → Z25 → X2	4.6500	127	127
6	X3 → Z31 → Z30 → Z32 → Z33 → X3	4.5000	125	125
7	X4 → Z43 → Z40 → Z39 → Z38 → X4	4.3667	121	121
8	X5 → Z46 → Z45 → X5	5.3500	153	153
9	X5 → Z50 → Z49 → Z48 → Z47 → Z51 → X5	4.1167	111	111
10	X5 → Z54 → Z55 → Z56 → Z57 → X5	4.7333	132	132
11	X5 → Z44 → X5	4.8833	144	144
12	D → Z62 → X1 → Z12 → Z17 → X2 → Z18 → Z63 → Z66 → D	4.6795	250	500
13	D → Z67 → Z64 → Z65 → Z27 → X3 → Z28 → Z29 → Z68 → Z69 → D	4.9103	265	530
14	D → Z72 → Z73 → Z42 → Z41 → X4 → Z36 → → Z37 → Z34 → Z35 → Z70 → Z71 → D	4.8769	252	504
15	D → Z61 → Z58 → Z53 → X5 → Z52 → Z59 → Z60 → D	4.7744	267	534
合 计			2361	3395

注：单程行驶距离是指邮车由地市局或者县局出发，回到出发局所经过的路程，因为地市局每天要发 2 班邮车，所以区级邮车每天行驶的路程是单程行驶距离的 2 倍

情况三、到达各个县城的区级邮车的数量为 3 辆

由地区的邮政运输流程及时限规定中，我们已知区局邮车最大的外出时间为 5 小时，而区局邮车必须要在每个经过的县邮局进行装卸邮件，所要化的时间为 10 分钟。

情况 3.1 有 2 辆区级邮车需要经过 2 个县局，1 辆区级邮车经过 1 个县局因为需要经过 2 个县局，所以共需要装卸邮件的时间为 20 分钟，又已知区局邮车的速度为 65km/h，那么当经过 2 个县局最大行驶里程数为：

$$4.667 \times 65 = 303.3(km)。$$

情况 3.1.1 一辆区级邮车经过 X1, X2 两个县局，一辆区级邮车经过 X3, X4 两个县局：

经过计算，区级邮车经过 X1, X2 返回地市局总的行驶距离最小为 $92+62+89=243$ (km) 区级邮车经过 X3, X4 返回地市局总的行驶距离最小为 $98+133+66=297(km)$ 。

若按照 1 辆区级邮车经过 X1, X2, 1 辆邮车经过 X3, X4, 1 辆邮车经过 X5。对于经过 X3, X4 的区级邮车，只能在经过的任何支局停留 1 次，如果停留 2 次，花费时间为： $297/65+2*10/60+10/60=5.0692>5$ 小时，假设经过支局 Z72；对于经过 X5 的区级邮车，在经过的支局及其路径周围的支局停留装卸邮件，共需要时间 4.9218 小时，此时，经过 Z61,Z60,Z59,Z58,Z73;对于经过 X1, X2 的区级邮车，在经过支局及其路径周围的支局停留装卸邮件，共需要时间 5.2641>5 小时,而此时还有 Z68,Z69,Z70,Z71 没有邮车经过装卸邮件。

则导致地市局所辖的支局不能被经过，所以不存在这样的可能。

情况 3.1.2 一辆区级邮车经过 X1, X5 两个县局，一辆区级邮车经过 X2, X3 两个县局：

经过计算，区级邮车经过 X1, X5 返回地市局总的行驶距离最小为 $124+92+107=323>303.3$ (km),所以这种情况不可能。

情况 3.2 有 1 辆区级邮车需要跑 3 个县局，2 辆区级邮车跑 2 个县局：

因为需要经过 3 个县局，所以共需要装卸邮件的时间为 30 分钟，又已知区局邮车的速度为 65km/h，那么最大行驶里程数为： $dis = 4.5 \times 65 = 292.5(km)$ 。

经过计算，经过 3 个县局的总的行驶距离最小为 $92+62+54+98=306>292.5$ (当区级邮车经过 X1, X2, X3 回地市局) 所以不存在这样的可能。

综上所述，到达各个县城的区级邮车的数量大于 3 辆

允许区级邮车上下午停留不同支局模型

我们考虑邮政运输的实际情况，同一个支局，在由县级邮车装卸邮件时，每天需要装卸邮件一次，而在由区级邮车装卸邮件时，每天需要装卸邮件两次，这样，各个支局之间，是不平权的。为了使各个支局都平权，我们假设区级邮车每天经过支局两次，但只装卸邮件一次，而且装卸邮件的时间可以自由选择（即可以选择在第一班车装卸邮件，也可以选择第二班车装卸邮件）。这样带来的变化如下：

1、由于区级邮车可以自由选择支局装卸邮件的时间，为了能使县级邮车的运

行时间尽可能的长，所以第一班区级邮车从地市局出发后按照既定邮路直接开到县局，路上不在支局停留装卸邮件，在返回的过程中经过的支局停留并装卸邮件，第二班区级邮车从地市局出发后按照既定的邮路经过支局并装卸邮件，从县局出发后直接返回地市局，在经过的支局不做停留，这样可以使县级邮车运行的时间极大化。

2、区级邮车的运行时间也可以由于经过的支局每天只要装卸邮件一次，从而减少

了每次的运行时间，最多可以减少 $\left\lfloor \frac{\text{经过支局的个数}}{2} \right\rfloor \times \frac{5}{60}$ (小时)

在如上的假设下，

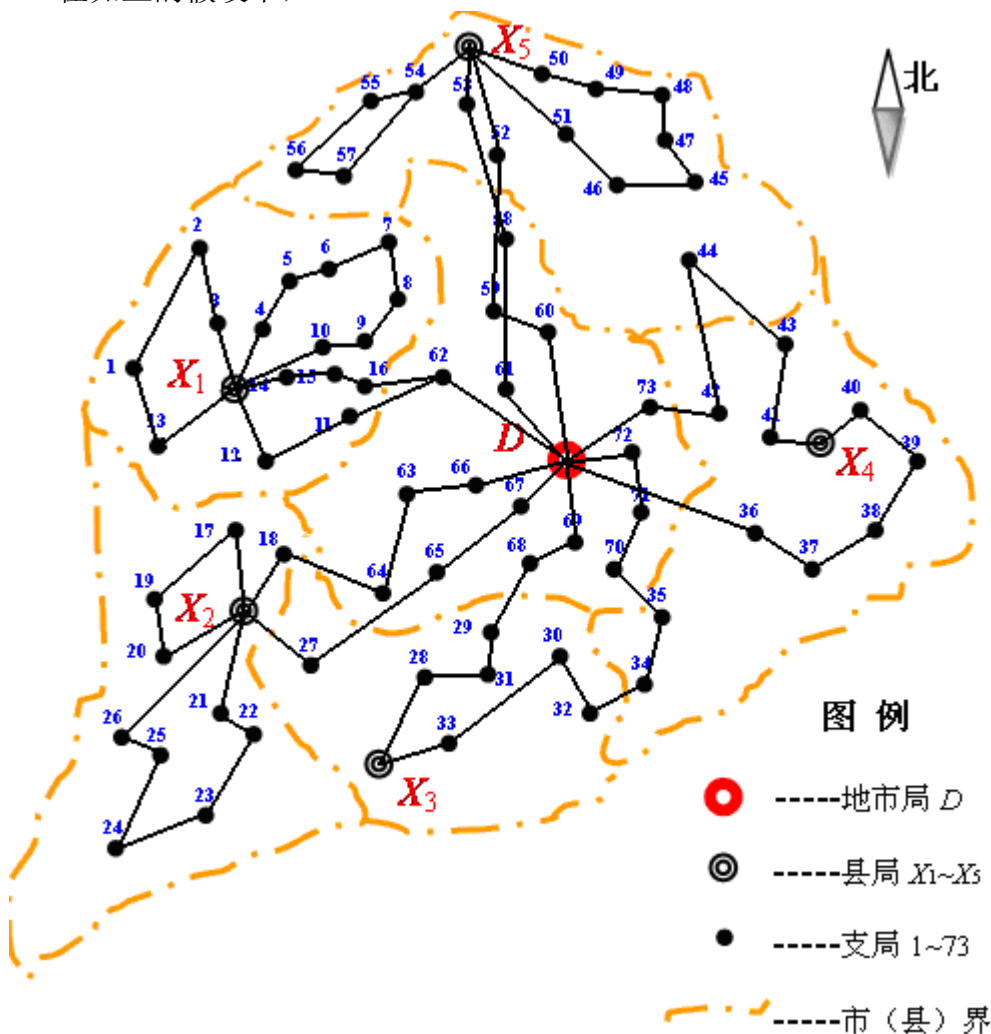


图 2.4 允许区级邮车上下午停留不同支局的邮路规划图

邮路的形成步骤：

- 1、从地市局 D 到县局 X5，区局邮车按照 D-Z61-Z58-Z52-X5 的路径到达县局 X5 并返回，共计耗时 4.23 小时，距离 5 小时的限定还有一定的距离，我们观察到区内支局 59, 60, X5 县内支局 53 在路径的周围，把他们也放到路径中，使用分枝定界法，得到区级邮车经过县局 X5 的路径为 D → Z61 → Z58 → Z53 → X5 → Z52 → Z59 → Z60 → D，得到总的路程为 267km，花费的时间为 4.5244 小时。区级邮车最快到达县局 X5 的时间为

$T_{x5}' = \frac{267}{65} = 4.1077$ ，那么 X5 县内县级邮车花费时间的上限为 5.5590 小时；

- 2、从地市局 D 经过县局 X4，返回 D，如果走最短的距离，那么路径为 D → Z72 → Z41 → X4，到达县局 X4 并返回，共耗时 2.36 小时，距离 5 小时的限定还有一定的距离，我们观察到区内支局 Z73，X4 县内支局 Z42 在路径的周围，Z43，Z40 在县局的周围，把他们也放到路径中，同时，X5 县内的 Z44 距离 X4 较近，而离 X5 较远，把他也放到路径中，使返回路径尽可能的形成环路，我们又加入 X4 县内支局 Z39，Z38，Z37，Z36，使用分枝定界法，得到区级邮车经过县局 X4 的路径为：

D → Z73 → Z42 → Z43 → Z44 → Z41 → X4 → Z40 → Z39 → Z38 → Z37 → Z36 → D

- 3、总的路程为 284km，花费的时间为 4.9525 小时；区级邮车最快到达县局 X4 的时间为 $T_{x4}' = \frac{284}{65} = 4.3692$ ，那么 X4 县内县级邮车花费时间的上限为 5.2975 小时；

- 4、从地市局 D 经过县局 X3，返回 D，如果走最短的距离，那么路径为 D-Z66-Z65-Z28-X3，到达县局 X3 并返回，共耗时 3.0154 小时，距离 5 小时的限定还有一定的距离，市内支局距离 X3 县较近的有 {Z68，Z69，Z70，Z71} 4 个支局，X4 县内的 {Z34，Z35} 支局距离 X4 县局距离较远，而距离 X3 县局较近，经过调整，我们选取了 {Z69，Z68，Z29，Z31，Z28，Z33，Z30，Z32，Z34，Z35，Z70，Z71，Z72} 这几个支局构成区级邮车的回路，使用分枝定界法，得到区级邮车经过县局 X3 的路径为 D-Z69-Z68-Z29-Z31-Z28-X3-Z33-Z30-Z32-Z34-Z35-Z70-Z71-Z72-D，得到总的路程为 275km，花费的时间为 4.9809 小时；区级邮车最快到达县局 X3 的时间为 $T_{x3}' = \frac{275}{65} = 4.2308$ ，那 X3 县内县级邮车花费时间的上限为 5.4359 小时；

- 5、从地市局 D 经过县局 X2，返回 D，如果走最短的距离，那么路径为 D-Z66-Z63-Z18-X2，到达县局 X2 并返回，共耗时 2.7385 小时，距离 5 小时的限定还有一定的距离，为了使尽可能构成回路，我们选取了 {Z67，Z65，Z64，Z27} 放到路径中，使用分枝定界法，得到区级邮车经过县局 X3 的路径为：D-Z66-Z63-Z64-Z18-X2-Z27-Z65-Z67-D，得到总的路程为 232km，花费时间为 4.0692 小时；区级邮车最快到达县局 X2 的时间为 $T_{x2}' = \frac{232}{65} = 3.5692$ ，那么 X2 县内县级邮车花费时间的上限为 6.0975 小时；

- 6、从地市局 D 经过县局 X1，返回 D，如果走最短的距离，那么路径为 D-Z62-Z9-Z10-X1，到达县局 X1 并返回，共耗时 2.8308 小时，距离 5 小时的限定还有一定的距离，为了使尽可能构成回路，同时尽可能的使在同一个“树枝”上的支局分在一起，经过调整，我们选取了 {Z11，Z12，Z14，Z15，Z16} 放到路径中，把 {Z9，Z10} 移出路径，使用分枝定界法，得到区级邮车经过县局 X1 的路径为：D-Z62-Z16-Z15-Z14-X1-Z12-Z11-D，得到总的路程为 211km，花费时间为 3.7462 小时；区级邮车最快到达县局 X1 的时间为 $T_{x1}' = \frac{211}{65} = 3.2462$ ，那么 X1 县内县级邮车花费时间的上限为 6.4202 小时；

- 7、在 X1 县内，剩下的没有邮车经过的支局有 {Z1，Z2，Z3，Z13，Z4，Z5，Z6，

- Z7, Z8, Z9, Z10}, 根据图 2 和处于一个“树枝”上的支局尽量分在一起由一辆邮车负责寄收邮件, 我们把 X1 县内的支局分成 2 部分, {Z1, Z2, Z3, Z13}, {Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, Z10}, 使用分枝定界法, 得到他们各自的路径, 路径一: X1 → Z13 → Z1 → Z2 → Z3 → X1, 长度为 109km, 耗时 4.2333 小时, 路径二: X1-Z4-Z5-Z6-Z7-Z8-Z9-Z10-X1, 长度为 106km, 耗时 3.5333 小时, 以上两条路径的耗时都满足 X1 县内县级邮车花费时间的上限;
- 8、在 X2 县内, 剩下的没有邮车经过的支局有{Z17, Z19, Z20, Z26, Z21, Z22, Z23, Z24, Z25}, 如果一辆邮车可以完成上述所有支局的寄收任务, 那么需要的时间为 7.2500 小时: 大于在步骤 2 中规定的 X2 县内县级邮车花费时间的上限, 故必然要使用 2 辆邮车完成 X2 县内剩下的没有邮车经过的支局的寄收任务, 根据图 2 和处于一个“树枝”上的支局尽量分在一起由一辆邮车负责寄收邮件, 我们把 X2 县内的支局分成 2 部分, {Z17, Z19, Z20}, {Z21, Z22, Z23, Z24, Z25, Z26}, 使用分枝定界法, 得到他们各自的路径, 路径一: X2-Z17-Z19-Z20-X2, 长度为 87km, 耗时 3.1500 小时, 路径二: X2 → Z21 → Z22 → Z23 → Z24 → Z25 → Z26 → X2, 长度为 148km, 耗时 5.4333 小时。以上两条路径的耗时都满足 X2 县内县级邮车花费时间的上限;
- 9、在 X3 县内, 没有剩下支局没有邮车经过;
- 10、在 X4 县内, 没有剩下支局没有邮车经过;
- 11、在 X5 县内, 剩下的没有邮车经过的支局有{Z54, Z55, Z56, Z57, Z45, Z46, Z47, Z48, Z49, Z50, Z51}, 根据图 2 和处于一个“树枝”上的支局尽量分在一起由一辆邮车负责寄收邮件, 我们把 X5 县内的支局分成 2 部分, {Z54, Z55, Z56, Z57}, {Z44, Z45, Z46, Z47, Z48, Z49, Z50}, 如果一辆邮车可以完成{Z54, Z55, Z56, Z57}的寄收任务, 那么路径一: X5-Z54-Z55-Z56-Z57-X5, 长度为 132km, 耗时 4.7333 小时。满足步骤 1 规定的 X5 县内县级邮车花费时间的上限, 所以该路径成立; 如果一辆邮车可以完成{Z44, Z45, Z46, Z47, Z48, Z49, Z50, Z51}的寄收任务, 那么路径二: X5 → Z50 → Z49 → Z48 → Z47 → Z45 → Z46 → Z51 → X5, 长度为 137km, 耗时 5.1500 小时。以上两条路径的耗时都满足 X5 县内县级邮车花费时间的上限;

表 2.5——优化的邮路规划表

邮车	经过的局号	花费时间 (h)	单程行驶距离 (km)	行驶距离 (km)
1	X1 → Z13 → Z1 → Z2 → Z3 → X1	4.2333	109	109
2	X1 → Z4 → Z5 → Z6 → Z7 → Z8 → Z9 → Z10 → X1	3.5333	106	106
3	X2 → Z17 → Z19 → Z20 → X2	3.1500	87	87
4	X2 → Z21 → Z22 → Z23 → Z24 → Z25 → Z26 → X2	5.4333	148	148
5	X5 → Z54 → Z55 → Z56 → Z57 → X5	4.7333	132	132
6	X5 → Z50 → Z49 → Z48 → Z47 → Z45 → Z46 → Z51 → X5	5.1500	137	137
7	D → Z62 → Z16 → Z15 → Z14 → X1 → Z12 → Z11 → D	3.7462	211	422
8	D → Z66 → Z63 → Z64 → Z18 → X2 → Z27 → Z65 → Z67 → D	4.0692	232	464
9	D → Z69 → Z68 → Z29 → Z31 → Z28 → X3 → Z33 → → Z30 → Z32 → Z34 → Z35 → Z70 → Z71 → Z72 → D	4.9809	275	550

10	D → Z73 → Z42 → Z43 → Z44 → Z41 → → X4 → Z40 → Z39 → Z38 → Z37 → Z36 → D	4.9525	284	568
11	D → Z61 → Z58 → Z53 → X5 → Z52 → Z59 → Z60 → D	4.5244	267	534
合计			1996	3257

注:单程行驶距离是指邮车由地市局或者县局出发,回到出发局所经过的路程,因为地市局每天要发 2 班邮车,所以区级邮车每天行驶的路程是单程行驶距离的 2 倍

六、问题 3 模型的建立和求解

6.1、数学模型及求解: 允许在一定程度上打破行政区域的限制, 求出更好的邮路规划和邮车调度方案。也就是在问题 2 的基础上, 减少约束条件, 求出最优解。符号的假设说明与问题 2 一致, 其所求数学模型为:

$$\begin{aligned}
 & \min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M x_{i,j}^k L_{ij} \\
 & s.t. \begin{cases} \sum_{i=1}^M x_{i,l}^{k_1} \geq 2, \quad \forall k_1 \in N_1, \quad \forall l \in X & (1) \\ x_{i,l_1}^{k_2} = 0, \quad \forall k_2 \notin N_1, \quad \forall l_1 \in Y & (2) \\ \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M x_{i,j}^k = 2M & (3) \\ \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M t_{i,j}^l \leq t_{\max}^l, \quad \forall l \in X & (4) \\ \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M t_{i,j}^{k_1} \leq 5, \quad \forall k_1 \in N_1 & (5) \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

$$\text{其中 } t_{\max}^k = 12 - \frac{20}{60} - 2 - \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M x_{i,j}^{k^*} L_{ij}}{65}, i \in A_M, x_{i,l}^{k^*} = 1, \quad \forall l \in X \tag{3.2}$$

问题 3 去掉本县的邮车只能到达本县的支局的约束; 因为本县某个支局的分布, 可能靠近另一个县很多, 且另一个县的邮车可能与该支局很接近, 去掉式

(2.2) 的约束条件, 将是问题的可行解增多, 所得邮路长度更小。

在第 2 问中得到的邮路规划, 由于无法突破行政区的划分, 从而导致了费用的提升, 考虑到部分县与县交界地带的支局, 其邮件由领县县局负责运送的化, 可以降低整个区的运行成本。

经过观察, 处于县与县交界处的, 且有可能降低整个区的运行成本的支局为: Z56, Z57, Z27。

对于 Z27 的分析: Z27 处于 X2 县和 X3 县的交界上, 他距离 Z65 较远, 为 50km, 距离 Z22 较近, 为 20km, 而 Z22 原来是由 X2 县的县级邮车负责寄收邮件的, 现可以把 Z27 的邮件寄收划归 X2 县局负责, 由 X2 县局的县级邮车经过, 使原来的县级邮车的运行范围: {X2, Z21, Z22, Z23, Z24, Z25, Z26}, 变更为 {X2, Z27, Z22, Z23, Z24, Z26, Z25, Z21}, 使原来的区级邮车的运行范围: {D, Z66, Z63, Z64, Z18, X2, Z27, Z65, Z67}, 变更为 {D, Z66, Z63, Z18, X2, Z64, Z65, Z67}, 其他不变。

验证上述变更的合理性: 对于地市局经过 X2 县局的区级邮车的运行范围 {D, Z66, Z63, Z18, X2, Z64, Z65, Z67}, 使用分枝定界法, 得到路径为:

D → Z66 → Z63 → Z18 → X2 → Z64 → Z65 → Z67 → D, 得到总路程为 199km, 花费时间为 3.7282 小时, 那么 X3 县内县级邮车花费时间的上限为 5.9385 小时;

调整 X2 县局的邮车运行范围为 {X2, Z21, Z22, Z23, Z24, Z25, Z27}, {Z17, Z19, Z20, Z26} 使用分枝定界法, 得到路径一为:

X2 → Z21 → Z25 → Z24 → Z23 → Z22 → Z27 → X2, 得到总路程为 138km, 花费时间为 5.1833 小时, 路径二为:

X2 → Z17 → Z19 → Z20 → Z26 → X2, 得到总路程为 141km, 花费时间为 5.0333 小时, 满足 X2 县内邮车花费时间的上限。

但总的运行距离增加了 $199 \times 2 + 138 + 141 - 232 \times 2 - 148 = 65\text{km}$, 所以不合理。

对于 Z56, Z57 的分析: Z56, Z57 处于 X1 县和 X5 县的交界上, 他们距离 Z55, Z54 较远, Z57 距离 Z54 为 33km, Z56 距离 Z55 为 28km, 而距离 Z6, Z7 较近, Z56 距离 Z6 为 26km, Z57 距离 Z7 为 26km, 而 Z56, Z57 原来是由 X5 县的县级邮车负责寄收邮件的, 现可以把 Z56, Z57 的邮件寄收划归 X1 县局负责, 由 X1 县局的县级邮车经过, 使原来的 X5 县局的县级邮车的运行范围: {X5, Z54, Z55, Z56, Z57}, 变更为 {X5, Z54, Z55}, 使原来的 X1 县局的县级邮车的运行范围: {X1, Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, Z10}, 变更为 {X1, Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, Z10, Z56, Z57}, 其他不变。

验证上述变更的合理性:

对于 X5 县局的邮车运行范围为 {X5, Z54, Z55}, 使用分枝定界法, 得到路径为: X5 → Z54 → Z55 → X5, 得到总路程为 72km, 花费时间为 2.5667 小时, 满足 X5 县内邮车花费时间的上限 5.5590 小时。

对于 X1 县局的邮车运行范围为 {X1, Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, Z10, Z56, Z57}, 使用分枝定界法, 得到路径为:

X1 → Z4 → Z5 → Z6 → Z56 → Z57 → Z7 → Z8 → Z9 → Z10 → X1, 得到总路程为 158km, 花费时间为 6.0167 小时, 超过 X1 县内邮车花费时间的上限 5.2423 小时。且通过其他的方法, 也无法减少总的路程。

同样分析其他交界的支局, 发现都无法减少整个区的运行成本, 邮车运行线路就是原来的线路, 得到在打破行政区后, 得到总的运行线路未发生改变为:

表 3.1—打破行政区划后运行线路

邮车	经过的局号	花费时间 (h)	单程行驶距离 (km)	行驶距离 (km)
1	X1-Z13-Z1-Z2-Z3-X1	4.1167	109	109
2	X1-Z4-Z5-Z6-Z7-Z8-Z9-Z10-X1	4.6500	127	127
3	X2-Z17-Z19-Z20-Z26-X2	5.0333	141	141
4	X2-Z21-Z22-Z23-Z24-Z25-X2	4.6500	127	127
5	X5-Z54-Z55-Z56-Z57-Z53-X5	5.0833	140	140
6	X5-Z50-Z49-Z48-Z47-Z45-X5	4.8500	133	133
7	X5-Z51-Z46-Z44-X5	5.0500	144	144
8	D-Z61-Z62-Z11-Z12-X1-Z14-Z15-Z16-Z63-Z66-D	4.4244	228	456
8	D-Z69-Z68-Z65-Z27-X2-Z18-Z64-Z67-D	4.4115	238	476
9	D-Z29-Z28-X3-Z33-Z31-Z30-Z32-Z34-Z35-Z70-Z71-D	4.8615	251	502
10	D-Z72-Z73-Z42-Z43-Z41-X4-Z40-Z39-Z38-Z37-Z36-D	4.9846	259	518
11	D-Z60-Z59-Z52-X5-Z58-Z61-D	4.5462	263	526
合计			2160	3399

注:单程行驶距离是指邮车由地市局或者县局出发,回到出发局所经过的路程,因为地市局每天要发 2 班邮车,所以区级邮车每天行驶的路程是单程行驶距离的 2 倍

6.2、允许区级邮车上下午停留不同的支局的情况:

同样对各个支局进行平权,我们假设区级邮车每天经过支局两次,但只装卸邮件一次,而且装卸邮件的时间可以自由选择(即可以选择在第一班车装卸邮件,也可以选择第二班车装卸邮件)。

对于 Z27 的分析: Z27 处于 X2 县和 X3 县的交界上,他距离 Z65 较远,为 50km,距离 Z22 较近,为 20km,而 Z22 原来是由 X2 县的县级邮车负责寄收邮件的,现可以把 Z27 的邮件寄收划归 X2 县局负责,由 X2 县局的县级邮车经过,使原来的县级邮车的运行范围: {X2, Z21, Z22, Z23, Z24, Z25, Z26}, 变更

为{X2, Z27, Z22, Z23, Z24, Z26, Z25, Z21}, 使原来的区级邮车的运行范围: {D, Z66, Z63, Z64, Z18, X2, Z27, Z65, Z67}, 变更为{D, Z66, Z63, Z18, X2, Z64, Z65, Z67}, 其他不变。

验证上述变更的合理性: 对于地市局经过 X2 县局的区级邮车的运行范围 {D, Z66, Z63, Z18, X2, Z64, Z65, Z67}, 使用分枝定界法, 得到路径为: D-66-63-18-X2-64-65-67-D, 得到总路程为 199km, 花费时间为 3.4782 小时, 区级邮车最快到达县局 X3 的时间为 $T_{x_3}' = \frac{199}{65} = 3.0615$, 那么 X3 县内县级邮车花费时间的上限为 6.6051 小时; 对于 X2 县局的邮车运行范围为{X2, Z21, Z22, Z23, Z24, Z25, Z26, Z27}, 使用分枝定界法, 得到路径为: X2-Z21-Z25-Z26-Z24-Z23-Z22-Z27-X2, 得到总路程为 164km, 花费时间为 6.0500 小时, 满足 X2 县内邮车花费时间的上限。且总的运行距离减少了 $232*2+148-199*2-164=50\text{km}$ 。

对于 Z56, Z57 的分析: Z56, Z57 处于 X1 县和 X5 县的交界上, 他们距离 Z55, Z54 较远, Z57 距离 Z54 为 33km, Z56 距离 Z55 为 28km, 而距离 Z6, Z7 较近, Z56 距离 Z6 为 26km, Z57 距离 Z7 为 26km, 而 Z56, Z57 原来是由 X5 县的县级邮车负责寄收邮件的, 现可以把 Z56, Z57 的邮件寄收划归 X1 县局负责, 由 X1 县局的县级邮车经过, 使原来的 X5 县局的县级邮车的运行范围: {X5, Z54, Z55, Z56, Z57}, 变更为{ X5, Z54, Z55}, 使原来的 X1 县局的县级邮车的运行范围: {X1, Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, Z10}, 变更为{ X1, Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, Z10, Z56, Z57}, 其他不变。

验证上述变更的合理性: 对于 X5 县局的邮车运行范围为{ X5, 54, 55}, 使用分枝定界法, 得到路径为: X5-54-55-X5, 得到总路程为 72km, 花费时间为 2.5667 小时, 满足 X5 县内邮车花费时间的上限 5.5590 小时。

对于 X1 县局的邮车运行范围为{ X1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 56, 57}, 使用分枝定界法, 得到路径为: X1-4-5-6-56-57-7-8-9-10-X1, 得到总路程为 158km, 花费时间为 6.0167 小时, 满足 X1 县内邮车花费时间的上限 6.4202 小时。

且总的运行距离减少了 $132*2+106-72*2-158=68\text{km}$

同样分析其他交界的支局, 发现都无法减少整个区的运行成本。

整理改变的邮车运行线路, 得到在打破行政区后, 将使行驶距离减少 $50+68=118\text{km}$, 并节省 $118*3=354$ 元。

得到总的运行线路为:

表 3.2—打破行政区划后运行线路

邮车	经过的局号	花费时间(h)	单程行驶距离(km)	行驶距离(km)
1	X1 → 13 → 1 → 2 → 3 → X1	4.2333	117	117
2	X1 → 4 → 5 → 6 → 56 → 57 → 7 → 8 → 9 → 10 → X1	6.0167	158	158
3	X2 → 17 → 19 → 20 → X2	3.1500	87	87
4	X2 → 21 → 25 → 26 → 24 → 23 → 22 → 27 → X2	6.0500	164	164
5	X5 → 54 → 55 → X5	2.5667	72	72
6	X5 → 50 → 49 → 48 → 47 → 45 → 46 → 51 → X5	5.1500	137	137
7	D → 62 → 16 → 15 → 14 → X1 → 12 → 11 → D	3.7462	211	422
8	D → 66 → 63 → 18 → X2 → 64 → 65 → 67 → D	3.4782	199	398

8	D → 69 → 68 → 29 → 31 → 28 → X3 → 33 → → 30 → 32 → 34 → 35 → 70 → 71 → 72 → D	4.9809	275	550
9	D → 73 → 42 → 43 → 44 → 41 → X4 → 40 → 39 → 38 → 37 → 36 → D	4.9525	284	568
10	D → 61 → 58 → 53 → X5 → 52 → 59 → 60 → D	4.5244	267	534
合计			1971	3207

注:单程行驶距离是指邮车由地市局或者县局出发,回到出发局所经过的路程,因为地市局每天要发 2 班邮车,所以区级邮车每天行驶的路程是单程行驶距离的 2 倍

七、问题 4 的求解

假设地市局的位置不发生改变，并不能跨行政区域，大致处于县域的中心，到其他各个支局（包括被降级的原县局）的距离和较小。在 X1 县中，经过计算，得到到其他各个支局（包括被降级的原县局）的距离和，其中距离和最小的三个点为：

表 4.1——距离和最小的三个支局距离和

支局	距离和
Z4	403
Z10	424
X1	428

我们可以看到 Z4 比其他 2 个支局的距离和要小好多，我们设它为新的 X1 县局的位置，那么就会带来整个邮路的变化。设它为新的 X1 县局的位置，为了下文的叙述方便，我们把原来 Z4 重新命名为 X1'，把原来的 X1 县局命名为 ZX1。

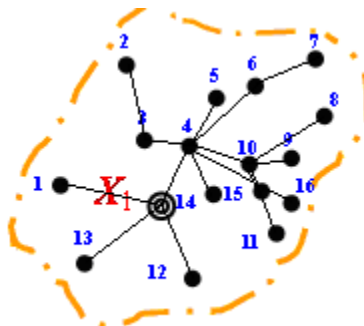


图 4.1 X1 县内离新的县局 Z4 距离最短的连线

从地市局 D 出发经过 X1' 的区级邮车的路径发生改变，在原有的问题二得到的结论上进行修改，得到现在的邮路为：

D-Z61-Z62-Z11-Z12-X1'-Z14-Z15-Z16-Z63-Z66-D，总的长度为 220km，耗时 4.3013 小时，那么 X1 县内县级邮车花费时间的上限为 5.3654 小时。

在 X1 县内，剩下的没有邮车经过的支局有{Z13, Z1, Z2, Z3, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, Z10, ZX1} 根据图 4.1 和处于一个“树枝”上的支局尽量分在一起由一辆邮车负责寄收邮件，我们把 X1 县内的支局分成 2 部分，{Z13, Z1, Z2, Z3, ZX1}，{Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, Z10}，使用分枝定界法，得到他们各自的路径，路径一：X1'-ZX1-Z13-Z1-Z2-Z3-X1'，长度为 117km，耗时 4.3167 小时，路径二：X1'-Z5-Z6-Z7-Z8-Z9-Z10-X1'，长度为 90km，耗时 3.5000 小时。以上两条路径的耗时都满足 X1 县内县级邮车花费时间的上限；且总的距离减少了： $109+127+228*2-117-90-220*2=45\text{km}$ 。

经过计算，如果把 Z10 当作新的县局，不会带来总的距离的减少。

在 X2 县中，经过计算，得到到其他各个支局（包括被降级的原县局）的距离和，其中距离和最小的三个点为：

表 4.2——把 Z10 当作新的县局最小三个支局距离和

支局	距离和
Z21	283
X2	317
Z20	318

我们可以看到 Z21 比其他 2 个支局的距离和要小好多，我们设它为新的 X2 县局的位置，那么就会带来整个邮路的变化。为了下文的叙述方便，我们把原来 Z21 重新命名为 X2'，把原来的 X2 县局命名为 ZX2。

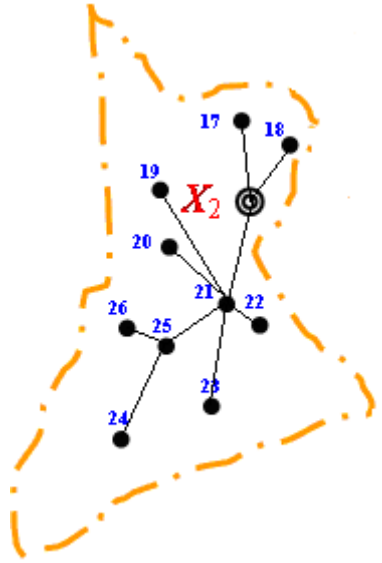


图 4.2 X2 县内离新的县局 Z21 距离最短的连线

从地市局 D 出发经过 X2' 的区级邮车的路径发生改变，在原有的问题二得到的结论上进行修改，得到现在的邮路为：

D-Z67-Z64-Z18-ZX2-X2'-Z27-Z65-Z68-Z69-D，总的长度为 259km，耗时 4.8179 小时，那么 X2 县内县级邮车花费时间的上限为 4.8488 小时。

在 X2 县内，剩下的没有邮车经过的支局有{Z17, Z18, Z19, Z20, Z26, ZX2, Z22, Z23, Z24, Z25}，如果一辆邮车可以完成上述所有支局的寄收任务，那么需要的时间为 7.2500 小时：大于规定的 X2 县内县级邮车花费时间的上限，故必然要使用 2 辆邮车完成 X2 县内剩下的没有邮车经过的支局的寄收任务，根据图 4.2 和处于一个“树枝”上的支局尽量分在一起由一辆邮车负责寄收邮件，我们把 X2 县内的支局分成 2 部分，{Z17, Z19, Z20, ZX2}，{Z22, Z23, Z24, Z25, Z26}，使用分枝定界法，得到他们各自的路径，路径一：X2'-ZX2-Z17-Z19-20-X2'，长度为 112km，耗时 4.18 小时，路径二：X2'-Z21-Z22-Z23-Z24-Z25-Z26-X2'，长度为 113km，耗时 3.9 小时。以上两条路径的耗时都满足 X2 县内县级邮车花费时间的上限；且总的距离减少了：141+127+238*2-112-113-259*2=1km。

经过计算，如果把 Z20 当作新的县局，不会带来总的距离的减少。
在 X5 县中，经过计算，得到到其他各个支局（包括被降级的原县局）的距离和，其中距离和最小的三个点为：

表 4.3——Z20 作新的县局的情况

支局	距离和
Z51	501
Z52	551
Z50	551

我们可以看到 Z51 比其他 2 个支局的距离和要小好多，我们设它为新的 X5 县局的位置，那么就会带来整个邮路的变化。但是在计算过程中，发现原 Z51（也就是现在 X5 县局）左侧的支局{Z56,Z57,Z55,Z54,53,Z52,X5}刚好无法用一

辆邮车完成其装卸邮件的任务，而使用两辆邮车的话又将造成大量的浪费，故舍去。我们再看 Z52，设它为新的 X5 县局的位置，为了下文的叙述方便，我们把原来 Z52 重新命名为 X5'，把原来的 X5 县局命名为 ZX5。

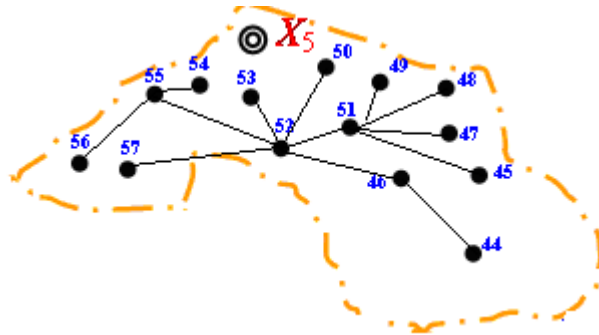


图 4.3 X5 县内离新的县局 Z52 距离最短的连线

从地市局 D 出发经过 X5' 的区级邮车的路径发生改变，在原有的问题二得到的结论上进行修改，得到现在的邮路为 D-Z60-Z59-X5'-Z58-D，总的长度为 201km，耗时 3.509 小时，那么 X5 县内县级邮车花费时间的上限为 6.1577 小时。在 X5 县内，剩下的没有邮车经过的支局有 {Z57, Z56, Z55, Z54, Z53, Z50, Z51, Z49, Z48, Z47, Z46, Z45, Z44} 根据图 4.3 和处于一个“树枝”上的支局尽量分在一起由一辆邮车负责寄收邮件，我们把 X5 县内的支局分成 2 部分，{Z50, Z49, Z48, Z47, Z45, Z44, Z46, Z51}，{Z53, ZX5, Z54, Z55, Z56, Z57}，使用分枝定界法，得到他们各自的路径，路径一：X5'-Z50-Z49-Z48-Z47-Z45-Z44-Z46-Z51-X5'，长度为 160km，耗时 6 小时，路径二：X5'-Z53-ZX5-Z54-Z55-Z56-Z57-X5'，长度为 164km，耗时 5.9667 小时。以上两条路径的耗时都满足 X5 县内县级邮车花费时间的上限；且总的距离减少了： $263*2+140+133+144-201*2-160-164=217\text{km}$ 。

经过计算，如果把 Z50 当作新的县局，不会带来总的距离的减少。在 X3, X4 两个县中，邮路呈环状分布，且均有区级邮车负责邮件的装卸，故改变县局所在地无法是邮路的长度减少。

经过调整后的，共可以减少行驶距离 $217+1+45= 263\text{km}$ 共可节省 $263*3=789$ 元。

各个邮路表示为：

表 4.4——经过调整后的邮路

邮车	经过的局号	单程行驶距离 (km)	行驶距离 (km)
1	X1' → ZX1 → Z13 → Z1 → Z2 → Z3 → X1'	117	117
2	X1' → Z5 → Z6 → Z7 → Z8 → Z9 → Z10 → X1'	90	90
3	X2' → ZX2 → Z17 → Z19 → 20 → X2'	112	112
4	X2' → Z21 → Z22 → Z23 → Z24 → Z25 → Z26 → X2'	113	113
5	X5' → Z50 → Z49 → Z48 → Z47 → Z45 → Z44 → Z46 → Z51 → X5'	160	160
6	X5' → Z53 → ZX5 → Z54 → Z55 → Z56 → Z57 → X5'	164	164

7	$D \rightarrow Z61 \rightarrow Z62 \rightarrow Z11 \rightarrow Z12 \rightarrow X1' \rightarrow Z14 \rightarrow$ $\rightarrow Z15 \rightarrow Z16 \rightarrow Z63 \rightarrow Z66 \rightarrow D$	220	440
8	$D \rightarrow Z67 \rightarrow Z64 \rightarrow Z18 \rightarrow ZX2 \rightarrow X2' \rightarrow$ $\rightarrow Z27 \rightarrow Z65 \rightarrow Z68 \rightarrow Z69 \rightarrow D$	259	518
9	$D \rightarrow Z29 \rightarrow Z28 \rightarrow X3 \rightarrow Z33 \rightarrow Z31 \rightarrow Z30 \rightarrow$ $\rightarrow Z32 \rightarrow Z34 \rightarrow Z35 \rightarrow Z70 \rightarrow Z71 \rightarrow D$	251	502
10	$D \rightarrow Z72 \rightarrow Z73 \rightarrow Z42 \rightarrow Z43 \rightarrow Z41 \rightarrow$ $\rightarrow X4 \rightarrow Z40 \rightarrow Z39 \rightarrow Z38 \rightarrow Z37 \rightarrow Z36 \rightarrow D$	259	518
11	$D \rightarrow Z60 \rightarrow Z59 \rightarrow X5' \rightarrow Z58 \rightarrow D$	201	402
合计		1946	3136

注:单程行驶距离是指邮车由地市局或者县局出发,回到出发局所经过的路程,因为地市局每天要发 2 班邮车,所以区级邮车每天行驶的路程是单程行驶距离的 2 倍。

八、参考文献:

- [1] 张志涌等.精通 MATLAB 6.5 版.北京航空航天大学出版社.北京,2003
- [2] 朱道元等.数学建模案例精选.科学出版社.北京.2003