

全国第七届研究生数学建模竞赛



题 目 磨削加工具有复杂母线的旋转体的微分模型

摘要

本文综合运用微分几何、坐标变换、样条插值及微分方程等数学工具, 将一个复杂的具体工程问题, 转化为这样一个数学模型: 给定某个先验的工程条件, 求解一个微分方程, 然后根据求出的解, 确定一个加工方案. 运用这样一个数学思路, 我们完美解决了问题一和问题二, 给出了一个保证上台电机进给速度恒定条件下, 加工时间尽可能短的加工方案. (不考虑其他误差的情况下, 加工第一题的工件只需要 50 分钟). 在给出加工方案的过程中, 为了解释一些现象, 我们发展了一个更好的, 缓解加工表面质量下降的标准. 同时, 作为解决问题二过程中的一个副产品, 我们编写了一系列 Matlab 程序, 可以很方便的解决具有任意母线的工件的加工问题. 总体而言, 我们的模型具有适用范围广、加工精度高等优点. 最后, 我们在减小砂轮磨损对加工过程产生误差的问题上, 做了创造性且富有前景的探索, 并且只需在前面给出的模型框架内, 运用相同的思想方法, 完全可以预期一个良好的结果.

关键字 磨削; 常微分方程; 坐标变换; 样条插值; 一般母线;

参赛队号 10269004

队员姓名 何永能、张韶越、周慧

参赛密码 _____ (由组委会填写)

中山大学承办

磨削加工具有复杂母线的旋转体的微分模型

1 问题重述

某科研单位和工厂研制了一种大型精密内外圆曲线磨床, 用来加工具有复杂母线旋转体的特殊工件, 如导弹天线罩等, 这些工件具有硬度高、尺度大、加工精度高和母线为连续光滑曲线等特点. 图 1.1 是几类加工工件示例, 工件 1.1(a) 的内外母线均为凸的, 工件 1.1(b) 的内母线是非单调凸的. 这些工件的最后精密成形工艺采用磨削加工.



图 1.1 几类特殊加工工件示例

该磨床主要由机床底座, 下工作台, 中工作台, 上工作台 (简称下台、中台和上台), 工件工作箱和砂轮机箱等组成 (见图 1.2, 其中仅画出砂轮而未显示砂轮机箱). 下台、中台可分别沿着设在底座和下台上的直导轨作直线运动, 这两组导轨相互垂直; 上台能沿中台上的圆导轨作转动. 驱动砂轮高速旋转的砂轮机箱安装在机床底座上, 砂轮的旋转轴线与底座导轨方向保持平行, 且与工件工作箱的旋转主轴等高 (即两旋转轴线位于同一水平面). 各工作台的移动量均可在机床控制面板上自动显示. 图 1.2 所示为磨削工件外表面时的情况, 更换砂轮后可加工内表面.

工件工作箱固装在上台上, 它通过专用夹具装夹工件, 使工件绕工件工作箱主轴以较慢的转速旋转, 同时随三个工作台的复合运动改变待加工工件与砂轮的相对位置. 三个台的运动必须相互配合, 使工件与砂轮相切磨削, 加工出满足要求的旋转体.

三个工作台的运动分别由三组步进电机控制. 步进电机是一种精密数控电动机, 每输入一个控制脉冲, 电机主轴转动一个精确的步进角度 (正向或反向), 它的大小与方向由电机结构和控制电路确定 (改变电机诸绕组的通电顺序就可改变其旋转方向); 既可输入适当个数的脉冲控制电机主轴的角位移量; 也可通过控制某时段中的脉冲频率或脉冲的分布使电机主轴转动速度达到某种要求: 若某时段中的脉冲频率为常数 (即脉冲为均匀分布), 则电机主轴的转动可视为匀速, 否则为变速, 从而实现调速. 电机主轴的转动通过变速器并由精密丝杠—螺母副的转换, 变为螺母的平动, 从而带动负载运动 (即下、中台的直线运动和上台的转动). 由于步进电机的输出功率较小, 在传动链路中需要专用电—液功率放大伺服机构将步进电机的转动功率放大. (图 1.2 中没有画出各组精密丝

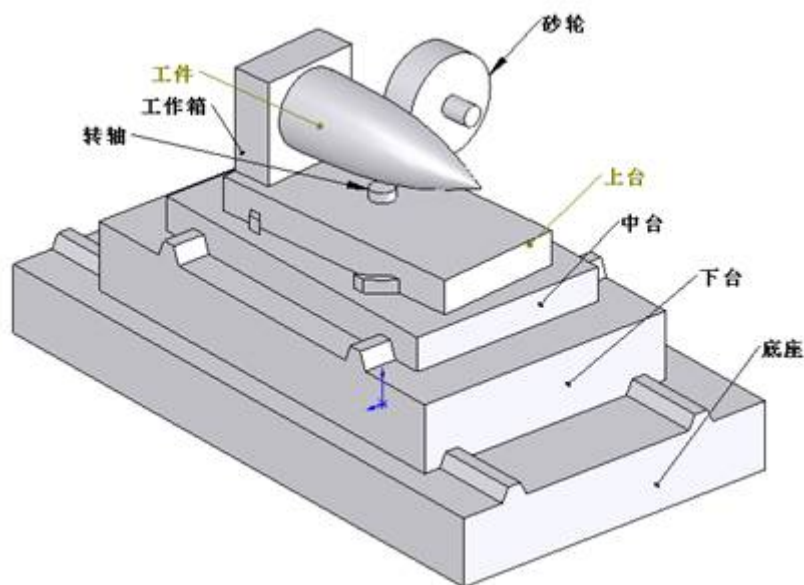


图 1.2 大型数控精密内外圆磨床的结构示意图

杠—螺母副和相应的功放伺服机构) 步进电机的输入脉冲则根据本题所研究的加工方案由机床主计算机控制分配.

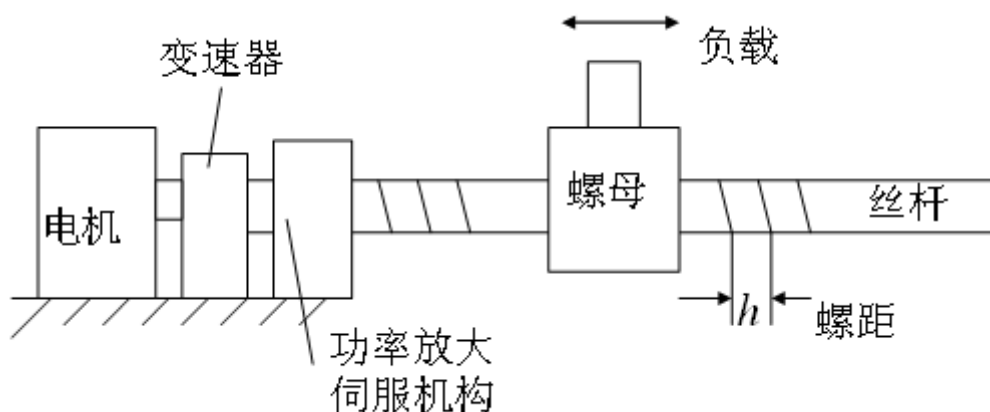


图 1.3 电机—伺服机构—丝杠—螺母副—负载之间传动链路

控制下台、中台运动的步进电机和相应的传动系统分别安装在机床底座、下台上, 其传动链路如图 1.3 所示. 控制上台的步进电机和相应的传动系统安装在中台上 (见图 1.4 所示), 因为上台作旋转, 其传动链路需增加环节. 中台的几何中心有一个垂直转轴, 上台能绕以该转轴中心为圆心、固定在中台上的圆导轨转动; 螺母通过上台的精密滑槽 (虚线所示) 带动上台转动. 图 1.4 为上台、中台某时刻的状态, b 为工件工作箱的夹具基准面到中台转轴的距离, 该基准实际上是工件母线 $x = 0$ 的起点; R 为中台转轴到控制丝杠—螺母副中心线的距离.

磨床的磨削工具是能磨削高硬度材质的金刚砂轮 (指磨削表面含有超高硬度的金刚

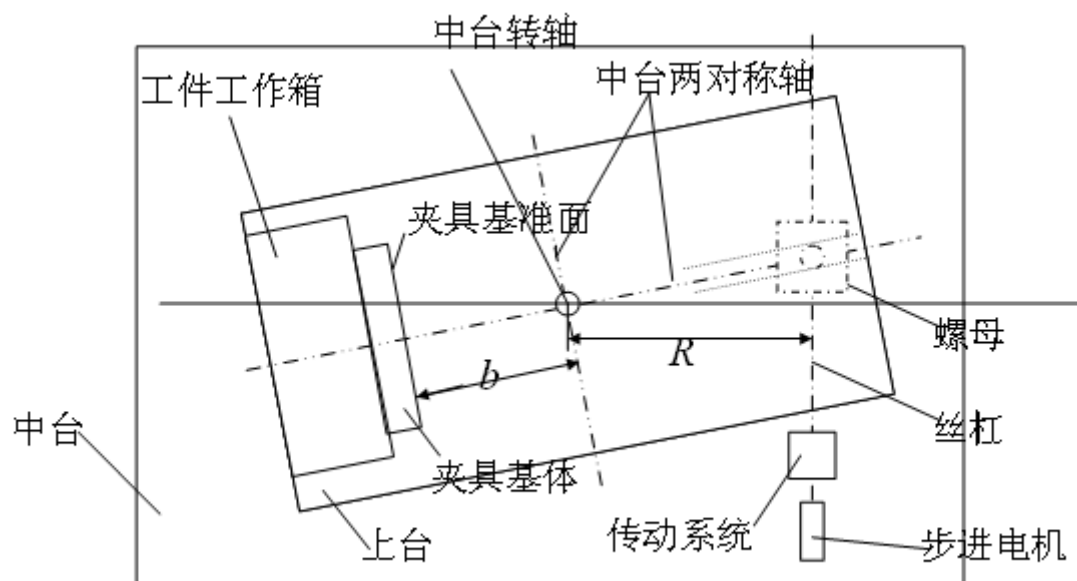


图 1.4 上台相对中台的转动示意关系

砂粒), 磨外圆时根据工件母线的形状, 砂轮可采用圆柱体式或轮式, 作内圆磨削的砂轮为轮式. 圆柱型砂轮的主要几何参数是砂轮直径 φ 和砂轮厚度 a . 轮式砂轮的主要几何参数有砂轮最大纵截面 (垂直于砂轮转轴的最大截面) 的直径 φ 和砂轮厚度 a , 以及其横截面 (通过砂轮转轴的截面) 的外端轮廓线参数 (理论上它可以是任一凸光滑曲线, 但工程上常选用半径为 r 、张角 α 不大于 180° 的圆弧), 合理的砂轮几何参数是加工能否实现的关键因素之一 (见图 1.5). 在整个加工过程中工件与砂轮不应脱离接触.

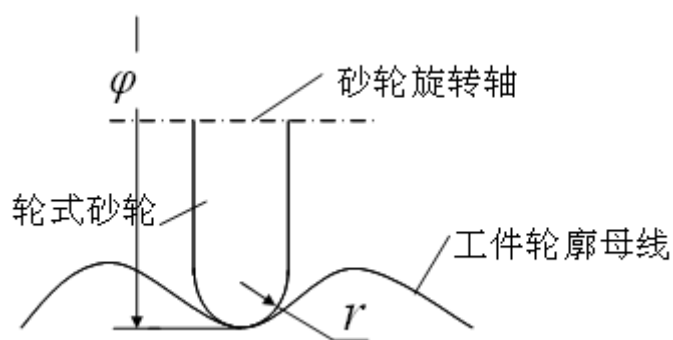


图 1.5 轮式砂轮加工具有凸凹母线的工件时的示意图

运用数学建模的方法, 根据旋转体工件的光滑母线方程 $y = f(x)$, 给出一个合理的加工方案, 在尽可能短的时间内完成磨削, 并作加工误差分析.

加工方案指为了完成加工任务的各个步骤 (含具体内容) 以及相应的数据, 包括如何确定加工基准, 如何选择加工次序, 如何选择砂轮几何尺寸, 如何确定三组控制步进电机在各时间段 (自主进行时间分段) 中各自应发的脉冲数和这些脉冲在该时段的分布等,

以及你们认为应给出的其他内容.

误差方析主要包括实际加工曲线与理论曲线在整体与局部的误差, 误差的来源分析, 你们采用什么数学量来表示上述误差, 你们采取的措施在减少加工误差方面的实际效果等, 以及你们认为应给出的其他内容.

加工方案的合理性主要指加工几何误差和加工表面光滑性要求. 实践表明相邻两时段间的脉冲频率 f_q 和 f_h (f_q, f_h 分别指前后时段中的脉冲频率) 相差大, 是造成工作台运动的不平稳, 加工表面的质量下降的重要原因. 可以采取的措施, 要求 $\frac{|f_q - f_h|}{f_q} \leq \delta$ (一般取 $\delta \leq 0.10$), 你们也可以进行机理分析提出其他言之成理的方法.

请依次研究下列 4 个问题 (单位: mm)

问题 1. 加工外表面母线为 $y = -\frac{7}{18 \times 10^3}(600 - x)^2 + 0.45(600 - x)$, $x \in [0, 600]$ 的某旋转体工件, 采用圆柱型砂轮加工, 给出一个加工方案; 对你的方案作误差分析.

问题 2. 加工外表面母线为 $y = 30e^{-\frac{x}{400}} \sin\left(\frac{1}{100}(x + 25\pi)\right) + 130$, $x \in [0, 600]$ 的某旋转体工件, 采用轮式砂轮加工, 给出一个加工方案; 对你的方案作误差分析.

问题 3. 在整个加工过程中, 若各个瞬时砂轮与加工工件的相切点是固定在底座和砂轮旋转轴的坐标系中同一个点 (实际是点的一个邻域), 随砂轮旋转形成一个圆周, 那么砂轮在该圆周上的磨损会加大, 从而影响加工质量. 为此, 希望在加工过程中使砂轮表面的磨损尽量均匀, 请结合上述第 1 问题, 提出一个修整策略, 给出一个合理的加工方案, 作相应的误差分析.

问题 4. 请结合上述第 2 问题, 提出一个修整策略, 给出一个使轮式砂轮表面的磨损尽量均匀的合理加工方案, 作相应的误差分析.

2 问题背景

军事上, 为了保护雷达天线, 很多天线都需要配备天线罩, 而且由于受到空气阻力的影响, 以及三防的要求, 机载、舰载和导弹天线都必须具备天线罩. 而导弹的天线罩, 很多时候都是母线为复杂光滑函数的旋转曲面.

导弹天线罩既是弹体的重要部件, 又是雷达制导系统的组成部分, 在保证导弹气动外形、保护其内部的雷达部件免收任何形式损伤的同时, 它还应该具有良好的电磁波传播特性, 保证罩体的存在基本不影响雷达的探测性能.^[1, 2] 可以说, 天线罩质量的优劣将直接影响导弹的性能. 高性能天线罩对质量要求十分严格, 仅仅控制物理厚度公差是不够的, 因为一些工艺缺陷和纤维的不均匀性都会降低天线罩的性能.^[3]

为了提高性能, 必须降低磨削的表面粗糙度. 表面粗糙度实际上就是砂轮加工点轨迹在被加工工件表面作用后的残留痕迹. 可以分析得知, 数控磨削旋转曲面工件的表面粗糙度形成从磨削加工过程的原理来说, 主要分两个方面: (1) 砂轮相邻的两颗磨粒加

工轨迹相互干涉在工件表面形成的残留高度. (2) 相邻两周螺旋线磨削轨迹相互干涉在工件表面形成的残留高度.^[4] 前者为沿着螺旋线方向形成, 后者为沿着螺旋节距方向形成. 螺旋节距方向对数控磨削表面粗糙度的影响相对很小. 所以设计合理的加工方案, 使得加工成形的工件在数学上的误差尽可能小, 是很有意义的.^[5]

3 问题分析

根据问题重述, 我们可以看到, 最终工件的磨削成形, 是通过工件和砂轮相对运动来实现的. 由于砂轮固定, 所以实际中这一相对运动, 是由下台和中台的平动, 以及上台的转动这一系列运动复合而成的. 直观的看到, 因为欲加工工件形状复杂, 所以如果直接把磨床上某个固定点作为坐标原点, 问题研究会非常复杂. 所以我们根据运动的相对性, 先把工件认为是静止的, 然后建立直角坐标系 $[O; x, y, z]$.

其中, 以工件工作箱的旋转主轴与夹具基准面的交点为原点; 工作箱的旋转主轴沿向右方向, 即母线表达方程中的 x 轴正方向, 作为我们的坐标系 x 轴正方向; 在 origin 所处水平面上, 与 x 轴成右手系, 即是母线所在平面的 y 轴位置, 建立我们的 y 轴; 以 x 轴, y 轴, z 轴依次成右手系的规则, 建立 z 轴.

在我们的坐标系 $[O; x, y, z]$ 中, 砂轮和工件的切点在实际工件表面做一个轨迹是螺旋线的运动, 这个运动是 x 轴方向的 (变速) 直线运动和 yOz 平面上匀速圆周运动的复合. 在运动过程中, 砂轮和工件的切点于 x 轴方向会产生一个位移, 这个位移关于时间的函数我们把它记成 $x(t)$. 此函数在我们的模型中是十分重要的, 因为后面我们会证明, 机床下台, 中台, 上台电机在加工过程中的进给量 x_g, y_g, z_g , 在任一时刻 $t = t_0$, 其实都是关于 x 的函数线性变化后得到的; 这些函数一旦确定, 那么所需要的, 三组控制步进电机在个时间段中各自应发的脉冲数和这些脉冲在该时段的分布, 就也被相应地确定下来了. 所以, 我们思维的关键, 是通过一定的先验假设, 构造出一个关于未知函数 $x(t)$ 的常微分方程, 然后求解这个方程, 并根据假设 7, 假设 10, 以及加工表面光滑性尽可能高的准则决定初值, 然后离散, 最终给出所要求的控制脉冲频率.

但是在实际计算中我们发现, 对已一些非常直观且合理的先验假设, 其最终导出的微分方程都是复杂的非线性方程, 并且不具有适定性. 从而在数值解的过程中, 会发生混沌现象, 导致其在工程上没有采用的价值. 但是, 对于某些先验条件, 母线方程比较特殊时, 可能会得到一个非常漂亮的方程, 是可以精确求解的. 所以, 受此启发, 所以我们采用了这样一个方法: 将原本的母线方程, 通过插值的方法, 近似成一个分段函数, 这个函数在每一个段上都是二次函数. 然后把这个近似后得到的母线代入原来的模型中, 这样就把某些我们原来没有解决的问题, 可以给出一个加工方案来.

由于磨削加工是一个复杂的工程问题, 其中牵涉大量的物理变化和统计误差. 出于时间有限, 我们主要专注于此模型的几何误差, 也就是着重探讨我们这个模型中, 所最终加工出的曲面和理论曲面在几何上的误差有多少. 并在现实可行的情况下, 如何选取合

适的砂轮尺寸, 工件基准等, 以减小误差. 从我们的模型来看, 这一误差主要是通过两个曲面 (理论曲面和模型加工出的曲面) 的面积差别, 以及理论母线下方面积和近似母线下方面积, 这些数学量来刻画的.

【问题一】 在问题一中, 我们建立的模型中, 先理想地认为砂轮和工件始终相切于一个点, 然后依次提出一下几个先验假设, 并尝试在每个先验假设下求解切点运动的轨迹, 从而得出所需要的加工方案以及分析每种方案相应的误差.

- (1) 上台进给速度均匀, 从而每个时间段内控制脉冲数都是一样的, 这样由上台引起加工表面质量下降可以控制到最小.
- (2) 中台进给速度均匀, 类似上一种情况.
- (3) 下台进给速度均匀, 类似上两种情况.
- (4) 切点沿着母线前进的速度是均匀的, 这样可以保证加工出来的曲线和理论母线尽可能地一致.
- (5) 切点沿着螺线的速度均匀, 从而磨削相同弧长所用的时间一样, 这样可以保证工件表面各个位置基本都受到相同程度的磨削.

在以上这些先验条件中, 上台给进速度均匀时, 由于此问题中母线形式的特殊性, 方程是线性的, 并且可以给出一个比较漂亮的解, 从而推出一个精确的加工方案.

而在情况 (2), (3), (4) 下, 即使把问题一中的母线换成一次函数, 得到的方程都是非线性的, 限于时间所限, 我们没有对这些方程给出深入的探讨.

情况 (5) 比较特殊, 因为如果直接把问题一中的母线方程带入, 所得到的是一个非线性的微分方程; 然而, 如果我们考虑一个圆锥体的磨削加工问题, 即把母线方程用一次函数带入, 方程会变成一个很简单的非齐次常系数二阶线性常微分方程; 这使得我们认为, 对于一般的母线方程, 也许可以通过线性插值的方法, 用一个分段线性的函数加以逼近, 从而得到一个较为简单的结果?

然而, 事实上, 具体研究发现, 对于一个和问题一中差不多大小的圆锥形工件, 如果希望其加工过程中满足先验条件 (5), 即使加工的初始速度非常小, 最终所加工耗费的时间都是非常短的. 就是说加工过程中, 切点沿 x 轴方向的速度会很快变得非常大, 不满足题目假设10, 从而不具有实际应用的价值.

所以综上, 我们在解决问题一和问题二的过程中, 主要设定先验条件 (1), 然后把初值作为待定系数, 解方程, 结合假设, 确定三台电机的给进量. 然后从最终成形曲面和原理想加工曲面的面积差别上, 进行误差分析, 并给出砂轮几何参数的一个条件.

【问题二】 问题二的求解类似问题一, 所不同的是, 问题二所给出的母线方程不具有问题一中, 一致凹的特性; 另外, 由于问题二加工过程中, 使用了不同于问题一的轮式砂轮, 所以, 在解答过程中, 砂轮几何参数的决定, 必须考虑到母线形状的特殊性. 具体来说, 砂轮外端弧形轮廓线的半径, 必须小于曲线最小密切圆的半径, 同时, 砂轮半径必须

充分小, 以保证砂轮后端不与工件已加工的部分相接触, 根据这两条, 结合问题一中的误差估计, 我们可以对砂轮的几何参数给出一个条件.

另外, 由于问题二中母线形式较复杂, 使得对于所有上述先验条件, 方程都不具有线性的特征. 所以我们采用的办法是, 通过线性插值, 用一个分段线性的函数加以逼近问题二中的母线方程, 在每一个线性部分上, 运用先验条件 (1); 同时结合母线凹凸性的改变, 最终类似问题一, 给出一个加工方案.

【问题三】在问题一的讨论解决中, 我们实际上, 在很多情况下, 是把砂轮看作一个切点了. 现在我们的想法是, 在保证切点轨迹不变的情况下, 使砂轮和工件之间, 沿母线方向产生相对滑动, 从而改变切点在砂轮上的实际位置. 这需要引入第三个, 以砂轮旋转轴为横轴的新坐标系, 然后建立一个方程, 描述砂轮切点滑动的运动状态. 最后结合原来的方程, 求解出一个加工方案.

【问题四】思路完全类似问题三, 只是由于现在砂轮几何形状的变复杂, 所以新坐标系下, 描述砂轮切点滑动的运动状态的方程也相应复杂, 导致问题的解决, 特别是误差的分析, 比较困难.

4 假设与符号

- 假设 1. 不考虑各组步进电机、变速器, 功放伺服机构和精密丝杠—螺母副的各种误差;
- 假设 2. 认为控制脉冲宽度的时间尺度不大于 ms 级 (10^{-3} 秒); 从而每个控制脉冲被视作瞬间产生作用.
- 假设 3. 三工作台的可移动范围足够大, 能保证被加工工件的加工;
- 假设 4. 工件在预加工后留给磨削的加工余量可确保一次磨削成形, 砂轮尺寸可任意选择;
- 假设 5. 砂轮与工件开始接触磨削前, 工作台应有一小段预运动, 以便与后续的磨加工运动平稳衔接, 称这一小段运动为预动. 题目要求的加工方案从预动后开始;
- 假设 6. 各组步进电机的步进角度 (每输入一个控制脉冲的主轴转动角) 均为 1° ;
- 假设 7. 对步进电机的控制脉冲的最高工作频率不大于每秒 100 脉冲;
- 假设 8. 各组变速器的传动比为 $10 : 1$ (即步进电机转 1° , 则变速器输出 0.1°); 丝杆的螺距为 12 mm;
- 假设 9. 中台转轴到上工作台的控制丝杠—螺母副中心线的距离 $R = 300$ mm, 工件工作箱的夹具基准面到中台转轴的距离 $b = 250$ mm;
- 假设 10. 为保证表面的加工质量, 要求工件每转动 100 转, 工件与砂轮的切点在工件工作箱的旋转轴方向上的移动量不超过 4 mm;

假设 11. 工件工作箱主轴转动速度设定为每分钟 250–300 转, 且为匀速转动, 可以精确设定.

假设 12. 不考虑计算机数值求解中, 出于数学软件编程算法所引起的结果误差

假设 13. 不考虑磨削过程中, 由于工件物理状态的改变, 所引起的数学上算法的不适用.

假设 14. 在问题一二中, 不考虑砂轮的磨损; 在问题三四中, 认为砂轮的磨损量很小, 从而不会改变砂轮的宏观几何参数.

- $b = 300 \text{ mm}$ 工件工作箱的夹具基准面到中台转轴的距离
- $R = 300 \text{ mm}$ 中台转轴到控制丝杠—螺母副中心线的距离
- φ 砂轮直径
- a 砂轮厚度
- r 轮式砂轮的外端圆弧半径
- α 轮式砂轮的外端圆弧张角
- $y = f(x)$ 母线方程
- f_q, f_h 分别指前后时段中的脉冲频率
- δ 前后时段中的脉冲频率的相对误差限
- w 工件转动的角速度
- l 工件的长度, 即在 x 轴上的最大值
- T 工件加工的总时间
- U 正交变换矩阵
- v_0 沿工件母线方向的初速度
- S 砂轮和工件切点相对砂轮中心运动的周期
- $[O; x, y, z]$ 以工件底面中心为原点的空间直角坐标系
- $[O_g; x_g, y_g]$ 以砂轮和工件切点为原点的平面直角坐标系
- $[O_s; x_s, y_s]$ 以工件底面中心为原点的平面直角坐标系
- $[O_q; x_q, y_q]$ 以砂轮几何中心为原点的平面直角坐标系
- $x_g(t)$ t 时刻下台位移量
- $y_g(t)$ t 时刻中台位移量
- $z_g(t)$ t 时刻上台位移量
- $x_s(t)$ t 时刻切点沿工件母线方向的位移量
- $n_x(t)$ t 时刻下台步进电机所发射的累积脉冲数
- $n_y(t)$ t 时刻中台步进电机所发射的累积脉冲数
- $n_z(t)$ t 时刻上台步进电机所发射的累积脉冲数
- Δt 时间间隔段

- ρ_{\max} 母线最大曲率
- $\zeta(t)$ 砂轮和工件切点到砂轮侧面中点的位移
- $x(t)$ 在 t 时刻, x 方向运动的位移
- $y(t)$ 在 t 时刻, y 方向运动的位移
- $z(t)$ 在 t 时刻, z 方向运动的位移
- $\theta(t)$ 在 t 时刻, x_s 轴和 x_t 轴的夹角

5 模型的建立与求解

5.1 概述

为了能用数学方法解决上述问题, 我们需要建立坐标系. 考虑到砂轮与工件的切点^[6]在母线上的移动, 以及上中下工作台的运动, 我们在砂轮的旋转轴线与工件工作箱的旋转轴线形成的水平面上, 建立两套直角坐标系.

第一套直角坐标系, 以工件工作箱的旋转轴线, 与夹具基准面的交点 O_s 为原点, 以旋转轴线为 x_s 轴, 取图 1.4 中向右的方向为正, 以 x_s 轴绕原点逆时针旋转 90° 为 y_s 轴, 建立平面直角坐标系 $[O_s; x_s, y_s]$, 如图 5.6 所示. 该坐标系用来刻画母线, 设 t 时刻, 母线与砂轮的磨削点坐标为 $(x_s(t), y_s(t))$, 则

$$y_s(t) = f(x_s(t)) \quad (5.1)$$

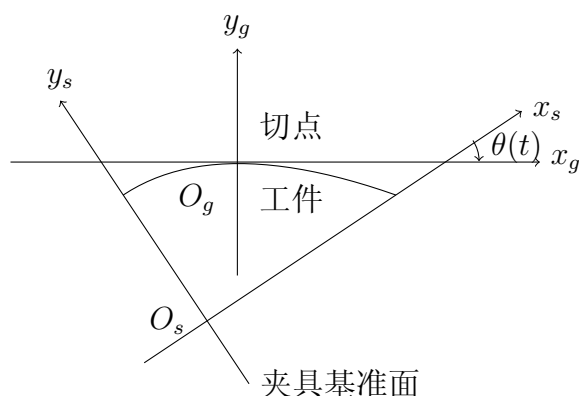


图 5.6 两套直角坐标系

第二套直角坐标系, 以砂轮和工件的切点 O_g (这个点在空间中相对底座静止) 为原点, 以过原点平行于砂轮转轴的直线为 x_g 轴, 取图 1.4 中向右的方向为正, 以 x_g 轴绕原点逆时针旋转 90° 为 y_g 轴, 建立平面直角坐标系 $[O_g; x_g, y_g]$, 如图 5.6 所示. 该坐标系用来刻画上中下工作台的运动, 设 t 时刻, 由安装在底座上的步进电机 1.3 转动, 带动螺母的移动, 进而推动下台的位移量为 $x_g(t)$, 以后简称下台进给位移量, 并简称它的导数为下台进给速度, 其他两个工作台类似. 设中台的进给位移量为 $y_g(t)$, 上台的进给位移量为 $z_g(t)$, 并记

$$g(t) = (x_g(t), y_g(t), z_g(t)) \quad (5.2)$$

我们的关键就是求出 $g(t)$, 之后转换为脉冲数, 脉冲频率, 进而指导磨床磨削出工件.

两套直角坐标系的相对位置是随着时间的变化不断改变的, 我们通过坐标变换将它们联系起来, 这样 $g(t)$ 就能完全由 $x_s(t)$ 来刻画. 为了得到 $x_s(t)$ 的形态, 我们尝试了多种假设, 最终的模型对于第一问题, 即母线为抛物线的情形, 得到了完美的解决, 对于一般的模型, 即第二问题, 我们利用特殊的分段抛物线插值函数, 转化为问题一的情形, 也得到了很好的解决. 后面的两个问题也化归到问题一的情形, 给出了具体的分析. 关于其他假设会导致的问题将在第 5.5 节中阐述, 相当于是对我们模型的假设的合理性做出解释. 总的来说, 对于问题解决的思路, 可用流程图 5.7 来表示.

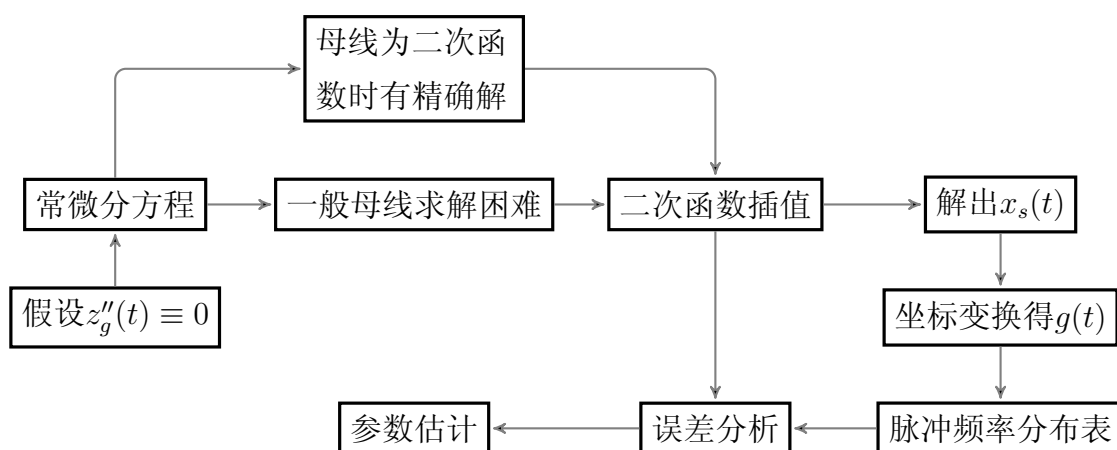


图 5.7 解决问题的流程图

5.2 抛物线型母线

假设上台进给速度为常数, 也即上台电机转速恒定 (实际中更容易操作), 从而

$$z_g''(t) = 0 \quad (5.3)$$

通过观察上台构造的简化图 1.4, 容易看到,

$$z_g(t) = -R \tan \theta(t) \quad (5.4)$$

其中 $\theta(t)$ 为 t 时刻, 从 x_g 轴正向转到 x_s 轴正向的角度, 如图 5.6 所示. 由平面几何知识和一元函数导数的几何意义, 显然有,

$$\tan \theta(t) = f'(x_s(t)) \quad (5.5)$$

因此

$$z_g(t) = -R f'(x_s(t)) \quad (5.6)$$

代入 (5.3) 化简得

$$f''(x_s(t)) x_s''(t) + x_s'(t)^2 f^{(3)}(x_s(t)) = 0 \quad (5.7)$$

上式对于一般的母线函数 $f(x)$ 是一个非线性的常微分方程, 但对于母线是抛物线的情形, 上式是可以精确求解的.

定理 5.1 对于母线为抛物线的情形, 若 (5.3) 式成立, 则

$$x_s''(t) = 0 \quad (5.8)$$

证: 取 $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$, 代入 (5.7), 化简即得证明. \square

根据定理 5.1, 我们完全有理由设

$$x_s(t) = v_0t \quad (5.9)$$

其中, v_0 是一个待定的常数. 这个式子的物理意义也是很明确的, 即切点沿着工件对称轴方向, 以速度 v_0 做匀速直线运动.

我们已经把 $z_g(t)$ 表示成了 $x_s(t)$ 的函数, 现在通过坐标轴变换把 $x_g(t)$ 和 $y_g(t)$ 也表示成关于 $x_s(t)$ 的函数. 由高等代数知识, 我们知道, 平面上的直角坐标变换总可以分解为旋转坐标变换与平移坐标变换的复合. 设点 O_s 在坐标系 $[O_g; x_g, y_g]$ 下的坐标为 X_0 , 则从坐标系 $[O_s; x_s, y_s]$ 到 $[O_g; x_g, y_g]$ 的坐标变换公式为,

$$X_s = TX_g + X_0 \Rightarrow X_g = T^{-1}(X_s - X_0) \quad (5.10)$$

其中

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, T^{-1} = T^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

对于我们这里的情形, 上台的转轴中心在 O_s 下的坐标是 $X_s = (b, 0)$, 初始值即为 $X_0 = (x_s(t), y_s(t))^T$, 代入可得

$$\begin{pmatrix} x_g(t) \\ y_g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & \sin \theta(t) \\ -\sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b - x_s(t) \\ -y_s(t) \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

设母线函数 $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$, 令

$$s_0 = v_0t, \quad d = \sqrt{1 + (a_1 + 2a_0s_0)^2}$$

得到上中下台的位移量随时间的变化函数, 即 $g(t)$ 的表达式.

$$\begin{cases} x_g(t) = \frac{(b - a_1a_2) - (1 + 2a_0a_2 + a_1^2)s_0 - 3a_0a_1s_0^2 - 2a_0^2s_0^3}{d} \\ y_g(t) = \frac{-(a_1b + a_2) - 2a_0bs_0 + a_0s_0^2}{d} \\ z_g(t) = -R(a_1 + 2a_0s_0) \end{cases} \quad (5.13)$$

以上过程的推导, 完全由 Mathematica 实现, 过程如下, 详情详见附件程序包文件 deduce.nb, 之后的数值计算全部由 Matlab 完成.

```
In[1]:= Theta[t] = ArcTan[f'[x_s[t]]]
Out[1] = ArcTan[f'[x_s[t]]]
In[2]:= z_g[t_] = -RTan[Theta[t]]
```

```

Out[2] = -R f' [x_s[t]]
In[3]:= D [z_g[t], {t, 2}]
Out[3] = -R (f'' [x_s[t]] x_s''[t] + x_s'[t]^2 f^(3) [x_s[t]])
In[4]:= f[x_] = a_0 x^2 + a_1 x + a_2
Out[4] = x^2 a_0 + x a_1 + a_2
In[5]:= %%
Out[5] = -2 R a_0 x_s''[t]
In[6]:= x_s[t] = v_0 t;
          y_s[t] = f [x_s[t]];
In[7]:= x_g[t] = (b - x_s[t]) Cos[Theta[t]] - y_s[t] Sin[Theta[t]];
          y_g[t] = -(b - x_s[t]) Sin[Theta[t]] - y_s[t] Cos[Theta[t]];
          g[t_] = Simplify [{x_g[t], y_g[t], z_g[t]}]
Out[7] = {
          
$$\frac{b - t a_1^2 v_0 - (t + 2 t a_0 a_2) v_0 - 2 t^3 a_0^2 v_0^3 - a_1 (a_2 + 3 t^2 a_0 v_0^2)}{\sqrt{1 + (a_1 + 2 t a_0 v_0)^2}}, \frac{-b a_1 - a_2 + t a_0 v_0 (-2 b + t v_0)}{\sqrt{1 + (a_1 + 2 t a_0 v_0)^2}},$$

          -R (a_1 + 2 t a_0 v_0)}

```

接下来, 我们把三个工作台的位移量 $g(t)$ 转换成三组控制步进电机在各时间段中, 各自应发送的脉冲数 $n(t) = (n_x(t), n_y(t), n_z(t))$ 和这些脉冲在该时段的分布. 由于带动螺母平动的距离是圈数与螺距的乘积, 以及变速器的传动比是 10 : 1, 因此

$$n(t) = \frac{g(t)}{h} \times 360 \times 10 \quad (5.14)$$

记 Δt 为时间间隔, t_k 时刻的总脉冲数为 $n(t_k)$, 经过 Δt 时间后, 总脉冲数目变为 $n(t_k + \Delta t)$. 那么在这个 Δt 时间段里, 脉冲数目的变化量就是第 k 时间段的脉冲频率 f_k , 即

$$f_k = \left[\frac{n(t_k + \Delta t) - n(t_k)}{\Delta t} \right] \quad (5.15)$$

其中 $[x]$ 表示取整, 毕竟频率都是整数. 由于题中限定, 控制脉冲的最高工作频率不大于每秒 100 脉冲, 所以最大脉冲频率为

$$f_{\max} = 100 \text{ Hz} \quad (5.16)$$

根据题目要求 $\frac{|f_q - f_h|}{f_q} \leq \delta$ (一般取 $\delta \leq 0.10$, 这个要求是不合理的, 后面会有说明), 定义脉冲频率的相对变化率为

$$\eta_k = \frac{|f_{k+1} - f_k|}{f_{k+1}} \leq \delta = 0.10 \quad (5.17)$$

5.3 一般母线

对于一般的母线函数, 我们没有办法求解方程 (5.7), 这里采用分段抛物线插值的方式, 将一般母线的问题转化为抛物线的情形, 进而求解. 然而传统的分段抛物线插值, 只

利用插值区间内的信息, 这样得到的分段抛物线函数的光滑性达不到要求, 这里巧妙的将每一段的抛物线与周围区间段的信息联系起来, 对问题二给出了很好的解答.

现在推导由三点计算通过这三点的抛物线的系数公式. 设抛物线 $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ 经过点 $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 即

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2$$

求解得

$$\begin{cases} a_0 = \frac{x_2(y_1 - y_0) + x_1(y_0 - y_2) + x_0(y_2 - y_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)} \\ a_1 = \frac{x_2^2(y_0 - y_1) + x_1^2(y_2 - y_1) + x_0^2(y_1 - y_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)} \\ a_2 = \frac{x_2^2(x_0y_1 - x_1y_0) + x_1^2(x_2y_0 - x_0y_2) + x_0^2(x_1y_2 - x_2y_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)} \end{cases} \quad (5.18)$$

这个计算过程已经写成 Matlab 函数 P2C.m, 参见程序包附件.

现在叙述解决问题二的总体思路. 首先将母线函数分成若干区间段, 将区间的端点和端点的函数值存储起来. 然后对每一段使用公式 (5.18) 求出抛物线的三个系数, 问题一的方案, 实际将任意抛物线的情形都完美地解决了, 现在已知每一段抛物线的三个系数, 套用前面的方法, 就能得到加工这一段母线时, 三个步进电机发送的脉冲频率分布. 最后将每一段脉冲频率分布拼接起来, 就得到加工整个工件的脉冲频率分布表.

由于抛物线插值需要三个点, 而一个区间段只有两个端点值, 传统的作法是, 若要分 m 段作抛物线插值, 则实际分成 $2m + 1$ 个区间段, 两个区间段一共三个端点, 利用这三个端点作抛物线插值. 这样的作法使得相邻两端抛物线在连接的地方奇异太大, 得到的分段插值函数达不到要求. 这里的作法是, 若要分 m 段作抛物线插值, 则实际也分成 m 个区间段, 若处理第一段以后的区间段, 则将前一区间的端点也考虑进来; 若处理第一段, 则将第二段的端点也考虑进来, 这样利用相邻两端的三个端点, 作出的分段抛物线插值函数, 实验表明, 能取得很好的效果.

最后, 由问题二中母线的特殊形态, 我们给出一个砂轮几何尺寸的限制条件. 简单起见, 把轮式砂轮外端圆弧形轮廓线的张角, 固定为 180° , 如此一来, 砂轮的厚度 $a = 2r$; 那么, 我们所需要限定的量, 主要是外端圆弧形轮廓线的半径 r , 以及砂轮直径 ϕ . 为了在数学上保证, 圆弧形砂轮在磨削过程中, 与工件表面只接触一个点 (在本题我们假设这个接触点是圆弧形轮廓的中点). 考虑到工件表面的特殊性 (它是一个旋转曲面), 所以我们只需要做到, 其半径 r 小于工件母线的最小密切圆半径. 由简单的微分几何知识可以看到, 正则曲线上任一点的密切圆半径, 等于这一点处曲率的倒数. 所以我们有: $r \leq \rho_{\max}^{-1}$, 其中:

$$\rho_{\max} = \max \left\{ \frac{f''(x)}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}} \mid x \in [0, 600] \right\} \quad (5.19)$$

$f(x)$ 是本题中的母线方程, 具体为

$$y = 30 e^{-\frac{\pi}{400}} \sin \left[\frac{1}{100}(x + 25\pi) \right] + 130, x \in [0, 600] \quad (5.20)$$

代入(5.19), 解得 $\rho_{\max} \approx 1440 \text{ mm}$, 注意到这是一个比较大的量, 就是说此题中, 轮式砂轮外端圆弧形轮廓线的半径 r 的选取, 是比较自由的.

下面我们考虑砂轮直径 ϕ 的选取. 容易看到, 此问题的母线中, 存在凹凸性改变的地方, 所以, 母线上任意一点的法线在延长后, 有可能和母线的其它点相交. 如果我们选取的砂轮直径 ϕ , 比母线上任一点, 到法线延长线与母线交点距离的最小值还要小的话, 且在砂轮厚度不太大的情况下, 那么在磨削过程中, 砂轮和母线的接触点就不会超过一个. 这个条件可以用如下数学语言刻画.

假设 (x_0, y_0) 是母线上任意给定一点, 则其法线和母线的交点坐标 (x, y) 满足如下两个联立的方程:

$$\begin{cases} y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), x_0 \in [0, 600] \\ y = f(x) \end{cases} \quad (5.21)$$

消去变量 y , 则问题变成如下一个条件极值问题:

目标函数

$$\min (x - x_0)^2 + (f(x) - f(x_0))^2 \quad (5.22)$$

约束条件

$$\begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{f'(x_0)} \\ x \in [0, 600] \\ x_0 \in [0, 600] \end{cases} \quad (5.23)$$

使用 Lagrange 乘数法求解这个条件极值问题, 得到 $r \leq 163 \text{ mm}$.

容易看到, 在问题二母线的形式下, (5.7) 是一个非线性的常微分方程, 即使是数值求解也非常困难. 所以, 我们的想法是, 把问题二中的超越函数母线, 进行两次差值逼近, 也就是选取母线上若干个点, 再寻找一条由分段抛物线连接而成的样条曲线, 使得其与原来的母线方程充分接近. 这样一来, 根据原来的问题一的解答, 切点在每一段抛物线上的磨削, 都可以保证上台电机进给量的均匀.

5.4 求解问题三四

在问题一的研究过程中, 我们一直认为, 砂轮和工件的切点, 相对于砂轮几何中心 O_q , 也即是砂轮转轴上到砂轮上下表面距离相等的点, 是没有位置改变的. 现在我们将这两者间的相对运动考虑进来. 为了刻画这一变化, 我们舍弃问题一中的平面直角坐标系 $[O_g; x_g, y_g]$, 转而考虑, 以砂轮几何中心为原点 O_q , 底座导轨上视向右方向为 x_q 轴正向, 在 x_q 轴所在水平面内, 把 x_q 轴逆时针旋转 90° , 得到一个新的平面直角坐标系

$[O_q; x_q, y_q]$. 类似问题一, 我们希望把中台转轴, 在坐标系 $[O_q; x_q, y_q]$ 中的运动轨迹方程给出来, 这样就容易给出加工方案了.

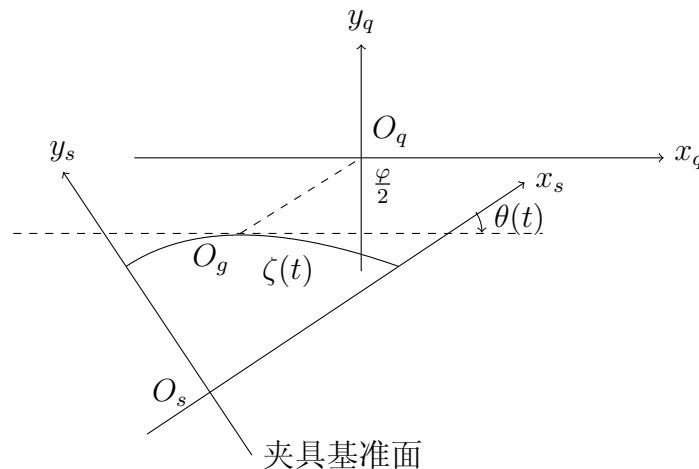


图 5.8 求解问题三的示意图

设砂轮和工件切点到砂轮侧面中点的位移为 $\zeta = \zeta(t)$; 显然有 $\zeta(t) \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$. 由图, 容易得到, 如果切点坐标是 $(x_s, f(x_s))$, (显然是在坐标系 $O_s - x_s y_s$ 中得到的), 那么, O_q 的坐标为:

$$O_q = \begin{pmatrix} x_s(t) \\ f(x_s(t)) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(x_s(t))}} \begin{pmatrix} \zeta(t) - \frac{\varphi}{2} f'(x_s(t)) \\ \zeta(t) f'(x_s(t)) + \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

上式中, 为了使砂轮磨损尽可能均匀, $\zeta(t)$ 应该取一个值域在 $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ 之间周期振动的函数. 理论上值域在这个区间中的任意周期函数都可以, 但为了简单起见, 同时为了满足一定的光滑性, 我们这里不妨先取成

$$\zeta(t) = \frac{a}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{S}t\right) \quad (5.25)$$

其中, S 是振动的周期, 决定了砂轮切点在砂轮表面遍历一遍的时间. 实际中, 可以根据加工材质的不同先决定.

把 O_q 坐标表示出来后, 类似问题一的求解过程, 我们做一个坐标变换, 即可给出中台转轴在坐标系 $[O_q; x_q, y_q]$ 中的轨迹方程, 然后得出修正后的, 关于未知函数 x_s 的相应的常微分方程. 由于这些方程形式复杂, 且我们的时间有限, 所以我们并没有在这个问题上给出一个非常确定的解答.

在问题四中, 我们要做的, 就是把问题三解决过程中的 $\zeta(t)$, 用切点到外端轮廓圆弧圆心连线和圆弧中点到圆心连线的夹角替换, 然后选取合适的函数, 使得切点在外端轮廓线上周期性地摆动, 从而达到砂轮磨损尽可能均匀的目的.

5.5 一个有趣的错误模型

由于运动是相对的, 为了处理的方便, 我们认为工件是静止不动的, 砂轮与工件的切

点在运动, 并建立切点随时间运动的模型.

以工件工作箱的旋转主轴与夹具基准面的交点 O 为原点, 以旋转主轴为 x 轴, 以夹具基准面为 y 轴, 以垂直于 Oxy 平面的方向为 z 轴, 建立空间直角坐标系 $[O; x, y, z]$. 砂轮和工件的切点在工件表面做一个轨迹是螺线的运动, 这个运动是 x 轴方向的(变速)直线运动和 yOz 平面上匀速圆周运动的复合. 所以有:

$$\begin{cases} x(t) = x(t) \\ y(t) = f(x(t)) \cos wt \\ z(t) = f(x(t)) \sin wt \end{cases} \quad (5.26)$$

由此得到切点运动的广义螺旋曲线模型, 图 5.9 是广义螺旋曲线的一个例子.

广义螺旋曲线

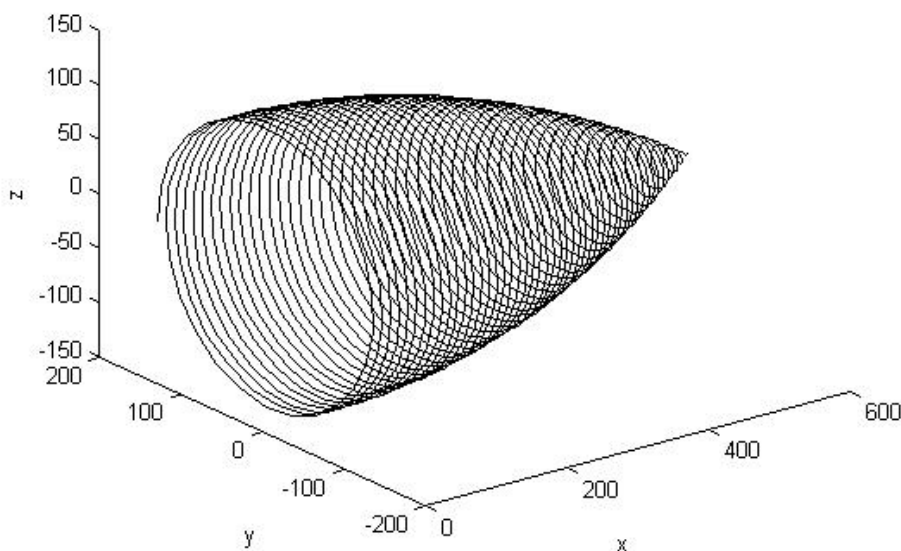


图 5.9 广义螺旋曲线

根据问题分析中的假设 5 (砂轮匀速打磨工件的每一个点), 得

$$[x'_s(t)]^2 + [y'_s(t)]^2 + [z'_s(t)]^2 = C \quad (5.27)$$

求导得

$$x'_s x''_s + y'_s y''_s + z'_s z''_s = 0 \quad (5.28)$$

将广义螺旋曲线的方程 (5.26) 代入上式, 并化简得

$$x' [f'(x) (w^2 f(x) + x'^2 f''(x)) + (1 + f'(x)^2) x''] = 0 \quad (5.29)$$

不考虑平凡解, 而采用如下的常微分模型

$$f'(x) (w^2 f(x) + x'^2 f''(x)) + (1 + f'(x)^2) x'' = 0 \quad (5.30)$$

考虑母线为常数函数的特殊情形, 即圆柱形工件, 设母线方程为

$$f(x) = c \quad (5.31)$$

代入 (5.30), 并化简得

$$x'' = 0 \quad (5.32)$$

考虑母线为一次函数的特殊情形, 即圆锥形或圆台形工件, 设母线方程为

$$f(x) = c - \frac{c}{l}x, \quad x \in [0, l] \quad (5.33)$$

代入 (5.30), 并化简得

$$x'' = \frac{c^2 w^2}{c^2 + l^2} (l - x) \quad (5.34)$$

这个方程是一个教科书式的, 二阶非齐次常系数线性常微分方程, 它可以精确地给出解答. 这样, 对于一般的母线方程, 我们只要采用线性插值的方法, 就可以将其近似, 并给出一个分段光滑的解, 从而确立一个加工方案.

但是, 实际的计算告诉我们, 这个加工方案在工程上是不可行的. 考虑一个简单的情况: 母线方程 $f(x) = 130 - \frac{130}{600}x$, 这是一个和问题一中工件的尺寸差不多的圆锥. 根据 (5.34), 我们可以很容易的计算出相应的 $x(t)$. 令 $x(T) = 600$, 出人意料的情况出现了: 此时解得的时间 T , 即工件完成加工的时间, 竟然只有 10 秒钟不到. 但加工一个类似尺寸的抛物型工件, 至少需要 50 分钟, 这是不可思议的.

事实上, 在上述圆锥形工件的加工过程中, 为了满足沿打磨螺线方向速度恒定的条件, 在很短的时间内, 切点沿母线方向的速度会上升地非常快, 并且在加工完成前持续上升. 这是导致最终理论加工时间非常短的原因. 这一问题的产生, 本质上是由圆锥形工件, 在靠近圆锥顶点的地方, 产生几何上的非正则性所导致的.

通过进一步的计算我们发现, 在上述加工过程中, 达到题目中所设定的, 切点沿母线方向速度上限的时间, 只有不到一秒. 所以, 即使试图通过分段线性插值的方法, 对一般母线逼近后设计加工方案, 其本质上的缺陷仍然无法避免. 在经过一番努力, 查阅相关资料, 并咨询了一些指导老师后, 基本确定这一缺陷无法弥补. 我们果断决定放弃这一具有和谐形式的模型, 转而研究其他的先验假设. 事实证明, 这一决断是明智的.

6 模型的检验

利用对问题一的求解来检验在第 5.2 节提出的模型. 题目中给出了下面的参数, 中台转轴到上工作台的控制丝杠—螺母副中心线的距离 $R = 300 \text{ mm}$, 工件工作箱的夹具基准面到中台转轴的距离 $b = 250 \text{ mm}$, 丝杆的螺距 $h = 12 \text{ mm}$.

此外, 由于工件工作箱主轴转动速度设定为每分钟 250–300 转, 因此工件转动的角速度 w , 满足

$$\frac{25\pi}{3} \leq w \leq 10\pi \quad (6.35)$$

又因为为保证表面的加工质量, 要求工件每转动 100 转, 工件与砂轮的切点在工件工作箱的旋转轴方向上的移动量不超过 4 mm, 所以

$$v_0 \leq \frac{w}{50\pi} \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{5} \right] \quad (6.36)$$

我们假设 $v_0 = 0.2 \text{ mm/s}$, 即切点沿着工件对称轴方向以最大速度前进, 如果在这种情形下, 三个步进电机的脉冲频率都不大于每秒 100 个脉冲, 且 $\frac{|f_q - f_h|}{f_q} \leq \delta$ (一般取 $\delta \leq 0.10$), 即在第 5.2 节中定义的 η_k 满足要求, 那么加工工件的时间最少.

Matlab 命令文件 parabola.m 利用上面的思想和模型, 解决了问题一, 实际上该程序能解决母线是抛物线的旋转体工件的磨削问题. 该程序绘出脉冲频率和脉冲频率的相对变化率的分布图, 并将三个步进电机发送脉冲的频率信息输出到文件 parabola.txt 中. 程序内容如下

```
% 磨床参数 (单位: mm)
R = 300; h = 12; b = 250;

% 在工件工作箱的旋转轴方向上的移动速度 (单位: mm/s)
v0 = 1/5;

% 抛物线 f(x) = a0*x^2 + a1*x + a2 的系数
a0 = -7/18000; a1 = 1/60; a2 = 130;

% 离散时间 t
t = (0:1:3000)';

% 变量代换
s0 = v0*t;
d = (1+(a1+2*a0*s0).^2).^(1/2);

xgt = ((b-a1*a2)-(1+2*a0*a2+a1^2)*s0-3*a0*a1*s0.^2-2*a0^2*s0.^3)./d;
ygt = -(a1*b+a2) - 2*a0*b*s0 + a0*s0.^2) ./ d;
zgt = -R*(a1 + 2*a0*s0);

g = [xgt ygt zgt]; % 在 t 时刻, 三个步进电机分别给上中
下工作台的位移量
```

```

n = g/h*360*10; % 在 t 时刻，三个步进电机发送的累积
脉冲数
fs = round(diff(n)); % 在 t 时刻，三个步进电机发送脉冲的
频率
eta = diff(fs) ./ fs(2:end,:); % 在 t 时刻，三个步进电机脉冲频率的
相对变化率

% 绘出脉冲频率和脉冲频率的相对变化率的分布图
subplot(3,2,1), plot(fs(:,1),'k'), subplot(3,2,2), plot(eta(:,1),'k')
subplot(3,2,3), plot(fs(:,2),'k'), subplot(3,2,4), plot(eta(:,2),'k')
subplot(3,2,5), plot(fs(:,3),'k'), subplot(3,2,6), plot(eta(:,3),'k')

% 将三个步进电机发送脉冲的频率信息输出到文件 parabola.txt 中
fid = fopen('parabola.txt','wt');
fprintf(fid,'%d %d %d\n',fs');

```

输出结果, 如图 6.10 所示, 我们看出, 三个步进电机发送脉冲的频率都不超过 100 Hz, 上下工作台的脉冲频率的相对变化率不超过 0.10. 但是中台的脉冲频率的相对变化率有超过 0.10 的情形, 仔细分析产生的原因是脉冲改变方向, 分母接近于 0, 所以相对变化率超标了, 尽管此时前后的脉冲频率变化很小. 这就是我们说 $\frac{|f_q - f_h|}{f_q} \leq 0.10$ 不合理的原因.

文件 parabola.txt 中, 以 3000×3 的形式, 保存了解决第一问的脉冲频率分布表, 该文件中前 10 行的数据如下

```

-54 12 14
-54 12 14
-54 12 14
-54 12 14
-54 12 14
-54 12 14
-54 12 14
-54 11 14
-54 11 14
-54 11 14

```

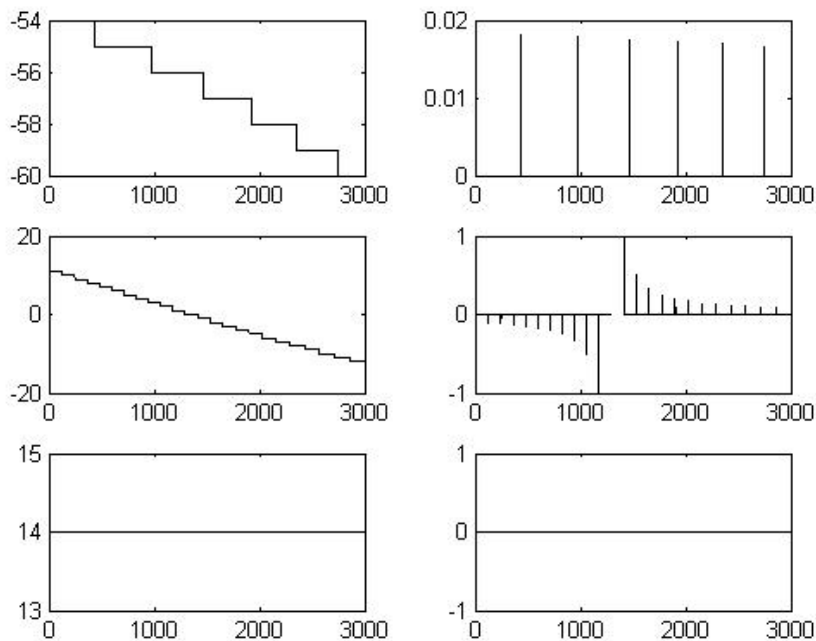


图 6.10 三个步进电机发送脉冲的频率和脉冲频率的相对变化率 (问题一)

利用对问题二的求解来检验在第 5.3 节提出的模型. 该模型通过 Matlab 命令文件 general.m 来实现, 该程序解决母线是一般函数的旋转体工件的磨削问题, 绘出脉冲频率和脉冲频率的相对变化率的分布图, 并将三个步进电机发送脉冲的频率信息输出到文件 general.txt 中.

```
% 磨床参数 (单位: mm)
R = 300; h = 12; b = 250;

% 在工件工作箱的旋转轴方向上的移动速度 (单位: mm/s)
v0 = 1/5;

% 母线信息 (单位: mm)
fun = @(x)30*exp(-x/400).*sin((x+25*pi)/100)+130;
p = 0; q = 600;

% 采样点信息 (至少分两段, 即 m>=2)
m = 100;
temp = (q-p)/m;
```

```

F(:,1) = p : temp : q;
F(:,2) = fun(F(:,1));
Delta_t = temp/v0;

% 分 m 段作抛物线插值, 并用问题 (1) 的方法求解
fs = [];
for i = 1 : m
    if i > 1
        C = P2C(F(i-1:i+1,:));
    else
        C = P2C(F(i:i+2,:));
    end
    a0 = C(1); a1 = C(2); a2 = C(3);

    t = ((i-1)*Delta_t : i*Delta_t)';
    s0 = v0*t;
    d = (1+(a1+2*a0*s0).^2).^(1/2);

    xgt = ((b-a1*a2)-(1+2*a0*a2+a1^2)*s0-3*a0*a1*s0.^2 ...
        -2*a0^2*s0.^3)./d;
    ygt = -(a1*b+a2) - 2*a0*b*s0 + a0*s0.^2 ./ d;
    zgt = -R*(a1 + 2*a0*s0);

    g = [xgt ygt zgt];           % 在 t 时刻, 三个步进电机分别给上中
    下工作台的位移量
    n = g/h*360*10;             % 在 t 时刻, 三个步进电机发送的累积
    脉冲数
    fs = [fs ; round(diff(n))]; % 在 t 时刻, 三个步进电机发送脉冲的
    频率
end

eta = diff(fs) ./ fs(2:end,:); % 在 t 时刻, 三个步进电机脉冲频率的
    相对变化率

```

```
% 绘出脉冲频率和脉冲频率的相对变化率的分布图
subplot(3,2,1), plot(fs(:,1),'k'), subplot(3,2,2), plot(eta(:,1),'k')
subplot(3,2,3), plot(fs(:,2),'k'), subplot(3,2,4), plot(eta(:,2),'k')
subplot(3,2,5), plot(fs(:,3),'k'), subplot(3,2,6), plot(eta(:,3),'k')

% 将三个步进电机发送脉冲的频率信息输出到文件 general.txt 中
fid = fopen('general.txt','wt');
fprintf(fid,'%d %d %d\n',fs');
```

输出结果, 如图 6.11 所示, 我们看出, 三个步进电机发送脉冲的频率都不超过 100 Hz, 而且各工作台的脉冲频率的相对变化率都很小, 而且变化率超标的时刻, 正好是脉冲改变方向的地方.

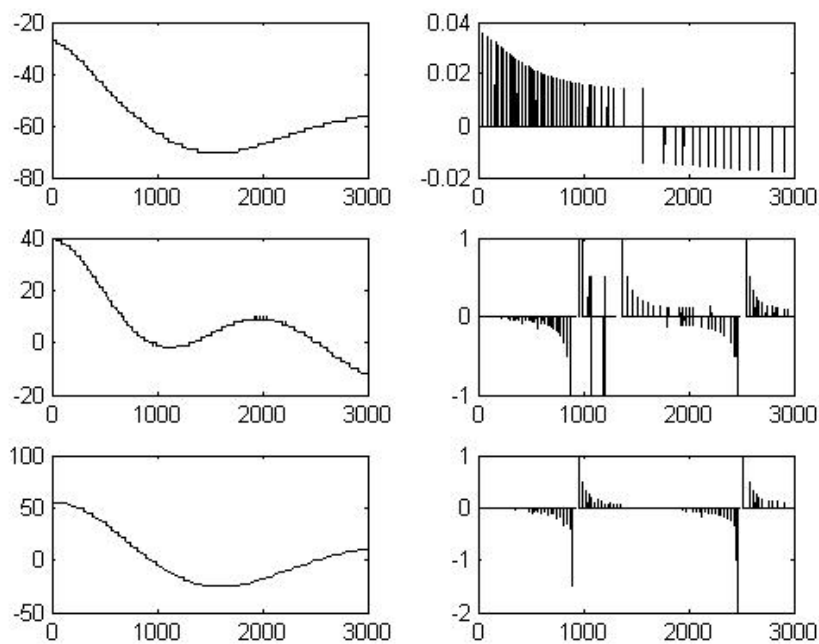


图 6.11 三个步进电机发送脉冲的频率和脉冲频率的相对变化率 (问题二)

文件 general.txt 中, 以 3000×3 的形式, 保存了解决第二问的脉冲频率分布表, 该文件中前 10 行的数据如下

```
-27 40 55
-27 40 55
-27 40 55
```

```
-27 40 55  
-27 40 55  
-27 40 55  
-27 40 55  
-27 40 55  
-27 40 55  
-27 40 55
```

文件 general.m 还将分段抛物线插值函数和原函数绘制在一张图上, 使得用户对插值函数的近似程度, 以及拟合的误差有一个直观的认识, 这段代码如下.

```
% 插值点信息  
N = 100; step = (q-p)/N;  
X = []; Y = [];  
  
% 计算插值点的插值函数值  
for x = p : step : q  
    for i = 2 : m+1                % 判断 x 属于哪个插值区间  
        if x <= F(i,1)  
            break  
        end                        % 判断出 x 属于区间 (F(i-1,1),F(i,1)]  
    end  
    X(end+1,1) = x;  
    if i > 2  
        C = P2C(F(i-2:i,:),:);  
    else  
        C = P2C(F(i-1:i+1,:),:);  
    end  
    Y(end+1,1) = C(1)*x^2 + C(2)*x + C(3);  
end  
  
% 通过绘图, 对比原函数与抛物线插值函数的区别  
x = (0:600)'; y = fun(x);  
figure(2), plot(x,y,'-k',X,Y,':k')
```



```
legend('原函数', '插值函数')
title('原函数 vs 抛物线插值函数')
```

输出结果, 如图 6.12 所示, 我们看出, 分段抛物线插值函数对原函数的近似效果很好.

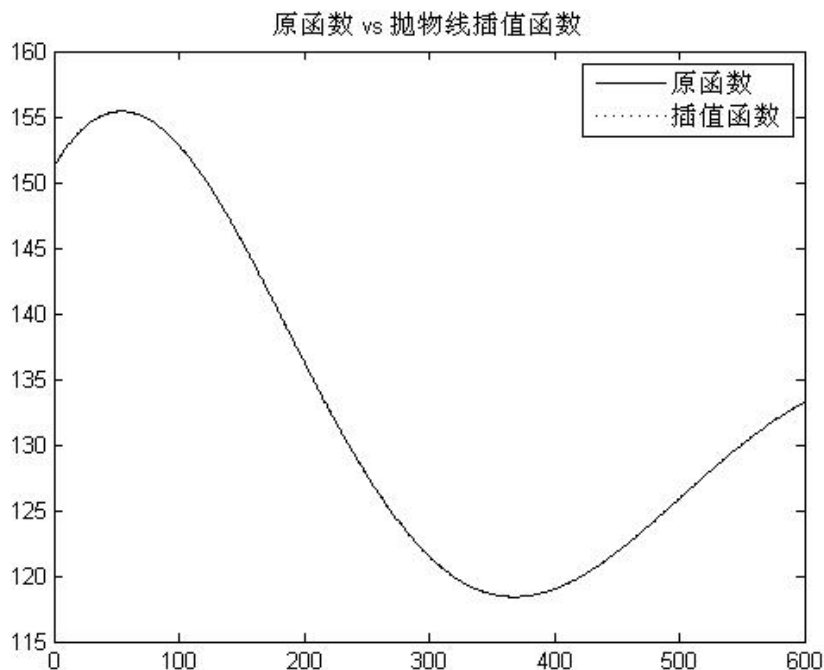


图 6.12 原函数与分段抛物线插值函数

7 模型的优缺点

我们这个模型的主要优点如下:

- (1) 模型适用范围广, 通用性强, 对于各种复杂母线都可以求解.
- (2) 在数学上比较简单, 结果相对简洁, 减少了人为出错的可能性
- (3) 避开了过于抽象前沿的数学工具, 易于将模型推广改进
- (4) 模型最终的可操作性和应用性比较强, 易于直接移植到不同种类的系统中
- (5) 模型方法新颖, 有比较强的创新性和独创性

当然, 鉴于竞赛时间仓促, 数学系研究生具体工程实践经验不足, 所以我们的模型在误差分析上给的不是十分全面, 没有对数学因素以外产生的误差有足够考虑; 同时, 问题四的加工方案, 还给得不够完整. 希望有机会在更好的条件之下, 做深入地研究, 相信这些问题在我们这个模型的大框架下, 都是不难解决的.

8 进一步讨论

首先, 我们应该看到, 在这四个问题所有的求解过程中, 我们都是把砂轮和工件的接触范围, 理想化地抽象成一个点, 也就是认为只需一颗磨粒的运动, 即可完成工件的打磨. 而事实上, 砂轮和工件的接触部分, 是一个小的区域. 这个小区域上, 砂轮多颗磨粒的共同作用, 磨削成形了最终需要的工件. 所以如果认为打磨区域始终是有一定面积, 那么最终加工出来的工件, 与理想的形状, 在数学上是有区别的. 这个区别可以用表面积的差别来度量. 事实上, 这可以从变分法的角度以及统计学的方面加以一定地研究.^[7]

另外, 在问题分析中提到的诸多先验条件中, 由于大部分所导出的微分方程是非线性的, 我们便在此止步, 没有细究. 而事实上, 这些非线性地微分方程, 有些通过一定的计算技巧, 是可以在数值求解上, 进行较深入地研究; 或者, 类似先验条件 (5), 所得到的微分方程对于比较特殊的母线方程有简单的精确解. 这些问题, 无论从数学上还是工程上, 假以时日, 进行一些研究, 都是非常有意义的.^[8]

最后, 对于问题四, 我们从数学思想上, 类似问题一和二, 已经给出了一个想法. 但从问题一和二解决过程中, 我们发现, 一些数学上漂亮的结果, 为了向具体工程上的限制条件妥协, 最终不得不放弃. 所以, 如何从数学思想过度到工程加工实际, 从而彻底解决问题四这一类问题, 是值得花时间去探讨的.

参考文献

- [1] 李合庆. 高速磨削及砂轮的现状[J]. 磨料磨具通讯, 2001, 7(4):1-7.
- [2] 李合庆. 超高速磨削加工的现状和课题[J]. 磨料磨具通讯, 2004, 7(4):1-5.
- [3] 郭东明, 盛贤君, 徐志祥, 等. 导弹天线罩专用修磨机床控制系统研究[J]. 大连理工大学学报, 2002, 42(5):560-563.
- [4] 熊烽, 宾鸿赞. 基于Matlab的数控加工代码仿真检验[J]. 工具技术, 2002, 36(7):11-13.
- [5] 姚斌, 曾景华, 李建刚, 等. 数控磨削回转面刀具时机床联动轴数的确定[J]. 工具技术, 2004, 38(10):40-42.
- [6] 何耀雄, 周艳红, 周济. 回转刀具数控磨削加工中的数学模型[J]. 磨料磨具通讯, 1998, 26(4):53-55.
- [7] 刘峰, 刘勇, 吴能章. 列表轴截形回转面电解磨削研究[J]. 沈阳工业学院学报, 2004, 6(4):42-48.
- [8] 张坤领, 韦建军. 基于 Matlab的数控磨削球面粗糙度分析及仿真[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2010, 3(4):16-21.