

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

## 第十一届华为杯全国研究生数学建模竞赛

学 校                      西北工业大学

---

参赛队号                      10699014

---

	1. 舒毅潇
队员姓名	2. 李睿超
	3. 陈超

---

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)



## 第十一届华为杯全国研究生数学建模竞赛

题 目                      乘用车物流运输的最优规划

### 摘                      要：

本文针对乘用车运输计划问题进行数学建模，综合图论和规划理论知识，完成了以下几点工作：

由题设可知，影响运输成本高低的首要因素是轿运车使用数量，其次是轿运车使用成本，最后是轿运车行驶里程数。轿运车使用数量和成本决定了其装载方案，行驶里程数决定了其运输方案。因此，可将整个运输问题分为轿运车装载问题和轿运车运输问题进行分步优化。

前三问是轿运车装载问题，本文对其进行建模并提出“车板”和“车板效率”的概念，将车板作为规划优化的基本单位，建立了轿运车装载整数线性规划模型。考虑所有的装载和数量约束后，优先以最小轿运车使用数量为目标进行第一步优化，得到最少的轿运车使用数量；在此基础上，以最少轿运车使用成本为目标（1-2 型与 1-1 型轿运车的成本比在 1.5 到 2 之间）作进一步优化，可得到符合题设的分步优化解。

整数线性模型可用分枝定界法计算得到其全局最优解。将问题一、二、三的数据代入此分步优化模型进行计算，得到结果：问题一需 18 辆轿运车，其中 1-1 型 16 辆，1-2 型 2 辆；问题二需 13 辆轿运车，其中 1-1 型 12 辆，1-2 型 1 辆；问题三需 30 辆轿运车，其中 1-1 型 25 辆，1-2 型 5 辆。

问题四要同时考虑轿运车的装载问题和运输问题。对于该问的装载问题，我们采用上述分步优化模型计算得到最少轿运车数量为 25 辆，再以最少轿运车使用成本为目标，代入模型约束，计算得到这 25 辆的组合为 21 辆 1-1 型与 4 辆 1-2 型车。对于轿运车运输问题，我们首先建立了一个基于多目标 TSP 的图论模型，提出了一种破圈和建立回路的新方法，将非线性约束转化为线性约束进行求解。由于此模型以整车（而不是车板）作为最小优化单元，我们便通过计算前面得到的整车数对应的全部装载方案后，得到最短行驶里程为 6404 个距离单位。

在此模型的多次计算中，我们发现轿运车运输存在着若干规律：1、装载量大的轿运车，被安排去较远的目的地；2、只有一小部分的轿运车会进行混装并运送到不同的目的地。3、对于此题的运输问题，事实上存在的线路可能性并没

有 TSP 问题所考虑的那么多，在不考虑四题城市 E 的情况下，所有的路线可能性只有 4 种；在考虑城市 E 的情况下，所有的线路的可能性也只有 6 种。

在这种经验和规律之下，本文又建立了基于确定线路的整数线性规划模型，将图论与此问题剖开，让问题的约束和目标都是线性的。根据此模型，我们对第四问进行计算，得到了与前面相同的最优解。

对于第五问，本文首先对题中所给出的 45 种乘运车和 10 种轿运车进行分类，减少装载方案的数量。对乘运车的分类，首先根据其高度和宽度的硬性规定分为 3 类，再根据其各自在所有轿运车中可装载的最大数量的数列进行相似性分析，最后将 45 种乘运车分为了 5 类；对于轿运车的分类，则根据其种类和长度，将其分为 7 类。在这样的分类中，本文为保证真实地可行性，进行保守的定性：即乘运车分类中取其中最长的长度作为此类车的长度，轿运车分类中，取其中最短的长度作为此类轿运车的长度。至此，这样的分类便缩小了整个问题的规模，使之可以用前面建立的模型进行计算。

将分类后的数据代入修改后的前文模型，首先算出了最少的乘运车使用数量为 134。再用 Matlab 的 YALMIP 工具箱进行装载求解，得到了其结果为 40808 个距离单位。

考虑到此工具箱的局限性，我们再根据前文经验建立了一个启发式算法。其规则简述为：首先，优先满足距离更远的地点的需求，然后一步一步从远至近，一次满足所有的地点的需求。编程计算其最后结果为 37196。

最后，我们对所有的模型进行了分析和评价，并给出了一些我们的建议。

关键词：整数线性规划 分步优化 分枝定界法 启发式算法

## 目 录

1 问题重述.....	4
2 问题分析.....	5
2.1 目标分析.....	5
2.2 决策变量的分析.....	6
2.3 约束分析.....	6
3 符号说明.....	7
4 轿运车装载问题的解决.....	9
4.1 轿运车装载整数线性规划模型.....	9
4.1.1 以最小轿运车使用数量为目标整数线性规划模型.....	9
4.1.2 以最少轿运车使用成本为目标整数线性规划模型.....	10
4.2 问题一的求解.....	11
4.3 对问题一结果的分析.....	15
4.4 问题二的求解.....	16
4.5 问题三的求解.....	18
5 问题四的求解.....	21
5.1 轿运车的装载.....	21
5.2 轿运车的运输.....	22
5.2.1 基于多目标 TSP 的图论模型.....	22
5.2.2 基于确定路线的整数线性规划模型.....	27
6 问题五的求解.....	31
6.1 轿运车的归类.....	31
6.2 乘用车的归类.....	31
6.3 轿运车的装载.....	32
6.4 轿运车的运输.....	33
6.5 轿运车运输的启发式算法.....	35
7 模型评价.....	36
参考文献.....	36
附表.....	37

# 1 问题重述

整车物流指的是按照客户订单对整车快速配送的全过程。我国汽车工业的快速发展不仅为整车物流业带来前所未有的发展机遇，也对整车物流企业运输网络的能力、成本、质量、服务等提出了更高的要求。

然而，由于整车物流配载涉及知识面广，技术要求高，实施难度大，在我国其发展才刚处于起步阶段，普遍存在着缺少科学方法指导，简单重复劳动工作量繁重的问题，大部分整车物流企业的配载过程仍主要依靠手工操作，配载方案的决策基本取决于装卸工人师傅的经验，造成了配载结果差错率高，运输工具运力浪费，装卸过程常有质损事故发生，进而信息传输变慢，管理效率降低等诸多弊端。而国外许多著名的整车物流企业都在运用计算机辅助技术，以及虚拟仿真软件等先进的科技手段来加大物流信息系统的建设力度和一体化集成趋势。一方面，整车物流业的性质使配载信息的处理格外重要，把信息技术广泛地应用于交通运输和物流领域，发展该领域的系统化、集成化和网络化技术，并使其适时地更新换代，从而全方位地提高和保证交通运输的安全性以及物流的准确、快速、节约和高效性。另一方面，在经济型轿车是主流的中国市场，在汽车厂的成本敏感度日益上升的今天，汽车整车物流成本的节约将是各汽车制造企业竞争制胜的重要因素<sup>[1][2]</sup>。

在此背景下，本文主要研究轿运车运输乘用车的物流问题。在确保完成运输任务的前提下，追求运输成本最低。为此，本文将为物流公司安排五次运输，制定详细计划，含所需要各种类型轿运车的数量、每辆轿运车的乘用车装载方案、行车路线。

问题一：物流公司要运输 I 车型的乘用车 100 辆及 II 车型的乘用车 68 辆；

问题二：物流公司要运输 II 车型的乘用车 72 辆及 III 车型的乘用车 52 辆；

问题三：物流公司要运输 I 车型的乘用车 156 辆、II 车型的乘用车 102 辆及 III 车型的乘用车 39 辆；

问题四：物流公司要运输 166 辆 I 车型的乘用车（其中目的地是 A、B、C、D 的分别为 42、50、33、41 辆）和 78 辆 II 车型的乘用车（其中目的地是 A、C 的，分别为 31、47 辆），具体路线见题目给出的图；

问题五：附件的表 1 给出了物流公司需要运输的乘用车类型（含序号）、尺寸大小、数量和目的地，附件的表 2 给出可以调用的轿运车类型（含序号）、数量和装载区域大小。对其进行运输规划。

## 2 问题分析

乘用车物流运输问题是整数线性规划问题。整数规划(Integer Programming)是数学规划的一个分枝,研究的是一类要求其部分或全部变量取整数的最优化问题。本文主要讨论的是整数线性规划问题,简称为 ILP 问题。整数线性规划问题的重点在于目标、决策变量和约束三部分。

### 2.1 目标分析

从整体上看,对于乘用车物流运输问题,以盈利为目的的物流公司必定在确保完成运输任务的前提下,追求运输成本最低。而根据题目中给出的信息可知,乘用车物流运输成本计算较为繁杂:影响运输成本高低最关键的是轿运车的使用数量,其次是轿运车的使用成本,最后是轿运车的行驶里程数。

若跳出题目给出的目标引导,而整体考虑乘用车物流运输全过程,此问题将是一个 NP 难问题<sup>[3]</sup>,其复杂度会随着问题规模的增大呈指数倍数增长,从而较难在解空间中得到全局最优解。因此,本文顺从题设引导,将乘用车物流运输问题分成两个子问题,分别为:轿运车装载问题和轿运车运输问题。

#### a. 轿运车装载问题

根据题目中给出的信息,轿运车的上、下层装载区均可等价长方形,而乘用车也可看作矩形体,因此轿运车装载问题可看成是规则装载问题(其前提是货物和装载容器都是规则的矩形体),亦通常称作 CLP(Container Loading Problem)问题。CLP 问题是一类组合优化(Combinatorial Optimization)问题,组合优化是通过对数学方法的研究去寻找离散事件的最优编排、分组、次序或者筛选等,为运筹学中的一个经典且重要的分支。实际上最优化所涉及的就是找问题的一个最优的解<sup>[4]</sup>。整数规划、动态规划和问题的启发式求解属于组合最优化问题的常用解法。

#### b. 轿运车运输问题

轿运车运输问题是指装载完成的轿运车将乘用车送达目的地的过程。此问题是一个图论问题,图论(Graph theory)是数学的一个分支,它以图为研究对象,研究顶点和边组成的图形的数学理论和方法。旅行推销员问题(Travelling Salesman Problem, 又称为旅行商问题、货郎担问题、TSP 问题)是一个典型的图论问题,亦是一个多局部最优的最优化问题:有多个城市,一个推销员要从其中某一个城市出发,唯一走遍所有的城市,再回到他出发的城市,求最短的路线。

轿运车运输问题的原理与 TSP 问题类似。相似之处在于：描述对象在图中的路径（也可以认为是选择经过点的顺序）与问题的目标直接相关，不同的路径会产生大量的可能性组合。

当解决轿运车装载问题时，本文将优先考虑降低轿运车的使用数量来降低成本，其次考虑降低轿运车的使用成本。而解决轿运车运输问题时，在最少轿运车使用数量和最低轿运车使用成本的前提下，来优化降低轿运车的行驶里程数以达到最低成本。

## 2.2 决策变量的分析

### a. “车板”的提出

轿运车整车装载乘用车的方案可能性较多，为降低其复杂性，本文提出“车板”这一概念，认为轿运车单列装载区域（如 1-1 车型轿运车的上、下层）为一个“车板”，双列装载区域（如 1-2 车型轿运车的上层）为两个并排放置的“车板”。此举可将轿运车整车装载看成轿运车车板装载的组合，即将轿运车整车装载问题简化为轿运车车板装载问题。

对于一个“车板”，我们可以根据其尺寸参数得到多个装载乘用车的方案。而一个装载方案中，乘用车可以有不同的排列方式。例如，若一个车板可以装载两辆 I 车型乘用车和一辆 II 车型乘用车，其排列方式可以是 {I, I, II}, {I, II, I}, {II, I, I}。当该车板以 {I, II, I} 的排列方式抵达第一个目的地，且该目的地需卸载 II 车型乘用车时，卸载工人需要先卸载一辆 I 车型乘用车，再卸载所需的 II 车型乘用车，然后再将之前卸载的 I 车型乘用车装载上。由于题目中指出忽略卸车成本，因此，{I, I, II}, {I, II, I}, {II, I, I} 这三个排列方式具有等价性。所以我们不需要考虑排列方式，而只需考虑装载方案即可。此举较大地减少了问题中的决策变量。

基于车板的概念，我们可以提出一个新的概念：“车板效率”，用理论可装载的最大数量与实际装载量之差，比上理论的可装载量。明显，当理论可装载的最大数量与实际装载量之差大于 4 时，很有可能浪费了一个车位。

### b. 车板卸载量

轿运车抵达某一城市，其卸载乘用车的数量是一个决策变量，但其卸载量必定不大于其本身装载量。

### c. 车板装载量

轿运车车板装载各个车型乘用车的数量，是规划问题的未知量。

## 2.3 约束分析

### a. 轿运车车板装载约束

在已知各轿运车车板和各车型乘用车尺寸参数的情况下，可提高单个车板的装载效率，即尽可能地利用车板内部、乘用车以及车位之间的二维几何空间。

题目中的表 1 和表 2 分别给出了乘用车和轿运车的规格，由于长度、宽度（宽度超过 1.7 米的乘用车不能装在 1-2 型上层和 2-2 型上下层）和高度的限制（高度超过 1.7 米的乘用车只能装在 1-1、1-2 型下层），根据表中数据可得到如下轿运车车板装载乘用车的约束。

1-1 型轿运车上层车板：

$$19 - (3.615 + 0.1) \leq (4.61 + 0.1) \cdot x_I'' + (3.615 + 0.1) \cdot x_{II}'' \leq 19 + 0.1 \quad (1)$$

1-1 型轿运车下层车板：

$$19 - (3.615 + 0.1) \leq (4.61 + 0.1) \cdot x_I^d + (3.615 + 0.1) \cdot x_{II}^d + (4.63 + 0.1) \cdot x_{III}^d \leq 19 + 0.1 \quad (2)$$

式中， $x_I''$  和  $x_{II}''$  分别表示装载在 1-1 车型轿运车上层车板的 I 型、II 型乘用车数量； $x_I^d$ 、 $x_{II}^d$  和  $x_{III}^d$  分别表示装载在 1-1 车型轿运车下层车板的 I 型、II 型和 III 型乘用车数量。

同理可得，1-2 车型轿运车上层车板（根据车板的定义，1-2 型轿运车双列上层被看作两个并排摆放的车板）：

$$24.3 - (3.615 + 0.1) \leq (4.61 + 0.1) \cdot x_I'' + (3.615 + 0.1) \cdot x_{II}'' \leq 24.3 + 0.1 \quad (3)$$

依次可类推 1-2 型轿运车下层车板和 2-2 型轿运车车板装载约束，此处不再详细叙述。

由于轿运车车型并不多，我们可根据上述的各型轿运车车板的装载约束，穷举出各个车板装载乘用车的所有可能性。

#### b. 轿运车的使用数量约束

题目中给出信息：物流公司 1-2 型轿用车拥有量小，因此在安排一次运输任务时，1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%。

#### c. 轿运车上层对称约束

对于 1-2 型和 2-2 型轿运车上层双列装载区域，题目要求装载力求对称以保证轿运车行驶平稳。我们认为只要双列装载区域的两车板上装载的乘用车数量差不超过两辆即为对称。

#### d. 轿运车下层装满约束

题目要求轿运车下层力争装满，因此，我们对于下层采取满载的装载方案。

### 3 符号说明

序号	符号	说明
1	$v \in \{1, 2, 3\}$	乘用车车型 (vehicle) 1、2、3 分别表示 I、II、III 型；



2	$T \in \{1, 2, 3\}$	轿运车车型 (Type) 1、2、3 分别代表 1-1、1-2、2-2 型;
3	$w_v$	在一次运输任务中 $v$ 型乘用车的任务运输量;
4	$x_T$	在一次运输任务中 $T$ 型轿运车的使用数量;
5	$M = \sum_T x_T$	在一次运输任务中轿运车总使用数量;
6	$m = 1, 2, \dots, M$	在一次运输任务中调用的轿运车编号;
7	$C_T^{up(low)}$	$T$ 型轿用车上 (下) 层车板装载方案序号的集合;
8	$R_{kv}^T$	$T$ 型轿用车上层车板 ( $R^T$ ) 第 $k$ 种装载方案中 $v$ 型乘用车的数量;
9	$Q_{kv}^T$	$T$ 型轿用车下层车板 ( $Q^T$ ) 第 $k$ 种装载方案中 $v$ 型乘用车的数量;
10	$N_k^{R^T}$	$T$ 型轿用车上层车板 ( $R^T$ ) 第 $k$ 种装载方案出现的次数;
11	$N_k^{Q^T}$	$T$ 型轿用车下层车板 ( $Q^T$ ) 第 $k$ 种装载方案出现的次数;
12	$d_{ij}$ $i, j \in \{O, A, B, C, D, E\}$	城市 $i$ 与城市 $j$ 之间的距离 (distance);
13	$L_v^m$	在一次运输任务中第 $m$ 辆轿运车上 $v$ 型乘用车的装载量 (Loading capacity);
14	$D_{iv}$	城市 $i$ 对于 $v$ 车型乘用车的需求量 (Demand);
15	$U_{iv}^m$	在一次运输任务中第 $m$ 辆轿运车在城市 $i$ 卸载 $v$ 型乘用车的量 (Unloading capacity);

---

## 4 轿运车装载问题的解决

对于问题一至问题三，物流公司给出了要求运输的乘用车车型和数量，且只有一个运输目的地，因此前三问仅仅是轿运车的装载问题。对于轿运车装载问题时，本文将优先考虑降低轿运车的使用数量来降低成本，其次考虑降低轿运车的使用成本。

### 4.1 轿运车装载整数线性规划模型

#### 4.1.1 以最小轿运车使用数量为目标的整数线性规划模型

在一次运输任务中，设  $x_T$  为  $T$  型轿运车的使用数量， $M$  为轿运车总使用数量，即  $M = \sum_{T=1}^2 x_T$ ， $T=1,2$  分别对应 1-1 型、1-2 型轿运车（根据题意，前四问均不考虑 2-2 型轿运车，下文不作重复叙述）。对于轿运车装载问题，影响运输成本高低最关键的是轿运车的使用数量，因此容易得到目标函数：

$$\min M = \sum_{T=1}^2 x_T \quad (4)$$

约束条件：

1、在一次运输任务中，安排的轿运车其能装载某型乘用车的最大量应不小于该车型乘用车的任务运输量，即

$$\sum_{T=1}^2 \left[ \sum_{k \in C_T^{up}} (N_k^{R^T} \cdot R_{kv}^T) + \sum_{k \in C_T^{low}} (N_k^{Q^T} \cdot Q_{kv}^T) \right] \geq w_v, \quad (5)$$

式中， $w_v$  ( $v=1,2,3$ ) 表示在一次运输任务中  $v$  型乘用车的任务运输量； $R_{kv}^T$  和  $Q_{kv}^T$  分别表示  $T$  型轿运车上层车板 ( $R^T$ ) 和下层车板 ( $Q^T$ ) 第  $k$  种装载方案中  $v$  型乘用车的数量； $N_k^{R^T}$  和  $N_k^{Q^T}$  分别表示  $T$  型轿运车上层车板 ( $R^T$ ) 和下层车板 ( $Q^T$ ) 第  $k$  种装载方案出现的次数； $C_T^{up}$  和  $C_T^{low}$  ( $T=1,2,3$ ) 分别表示  $T$  型轿运车上、下层车板装载方案序号的集合。

2、在一次运输任务中，1-1 型轿运车使用量应等于该车型上层车板装载乘用车方案出现的总次数，亦等于该车型下层车板装载乘用车方案出现的总次数，即

$$\sum_{k \in C_1^{up}} N_k^{R^1} = \sum_{k \in C_1^{low}} N_k^{Q^1} = x_1, \quad (6)$$

3、由于 1-2 型轿运车上层装载区域等价于两个上层车板，因此，在一次运输任

务中，1-2 型轿运车下层车板装载方案应等于该车型轿用车使用量，而下层车板装载方案应等于该车型轿用车使用量的两倍，即

$$\sum_{k \in C_2^{up}} N_k^{R^2} = 2x_2, \quad (7)$$

$$\sum_{k \in C_2^{low}} N_k^{Q^2} = x_2, \quad (8)$$

4、轿运车使用数量约束。在一次运输任务中，1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 车型轿运车使用量的 20%，即

$$x_2 \leq 0.2x_1 \quad (9)$$

因此，以最小轿运车使用数量为目标建立的整数线性模型如下：

$$\begin{aligned} \min \quad & M = \sum_{T=1}^2 x_T \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{T=1}^2 \left[ \sum_{k \in C_T^{up}} (N_k^{R^T} \cdot R_{kv}^T) + \sum_{k \in C_T^{low}} (N_k^{Q^T} \cdot Q_{kv}^T) \right] \geq w_v, \\ x_1 = \sum_{k \in C_1^{up}} N_k^{R^1}, \\ \sum_{k \in C_1^{up}} N_k^{R^1} = \sum_{k \in C_1^{low}} N_k^{Q^1}, \\ x_2 = \sum_{k \in C_2^{low}} N_k^{Q^2}, \\ 2 \sum_{k \in C_2^{low}} N_k^{Q^2} = \sum_{k \in C_2^{up}} N_k^{R^2}, \\ x_2 \leq 0.2x_1, \\ N_k^{R^T}, N_k^{Q^T} \geq 0, \quad T=1,2. \\ R_{kv}^T, Q_{kv}^T \geq 0, \quad v=1,2,3. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

#### 4.1.2 以最少轿运车使用成本为目标的整数线性规划模型

根据上述的以最小轿运车使用数量为目标的整数线性规划模型，可求解得到轿运车的最少使用数量，记作  $M_{\min}$ 。在已知轿运车最少使用数量的前提下，我们再考虑降低轿运车使用成本从而降低整车物流运输成本。

设轿运车的使用成本为  $p_T$  ( $T=1,2,3$ )。根据题目给出的信息：在轿运车使用数量相同情况下，1-1 型轿运车的使用成本较低，2-2 型较高，1-2 型略低于前两者的平均值，可得  $p_2 < (p_1 + p_3)/2$ 。因此，目标函数为

$$\min Z = \sum_{T=1}^2 (p_T \cdot x_T) \quad (11)$$

约束条件与以最少轿运车使用成本为目标的整数线性规划模型的约束条件一致。那么，以最少轿运车使用成本为目标的整数线性规划模型可写成如下形式：

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{T=1}^2 (p_T \cdot x_T) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \sum_{T=1}^2 \left[ \sum_{k \in C_T^{up}} (N_k^{R^T} \cdot R_{kv}^T) + \sum_{k \in C_T^{low}} (N_k^{Q^T} \cdot Q_{kv}^T) \right] \geq w_v, \\ x_1 = \sum_{k \in C_1^{up}} N_k^{R^1}, \\ \sum_{k \in C_1^{up}} N_k^{R^1} = \sum_{k \in C_1^{low}} N_k^{Q^1}, \\ x_2 = \sum_{k \in C_2^{low}} N_k^{Q^2}, \\ 2 \sum_{k \in C_2^{low}} N_k^{Q^2} = \sum_{k \in C_2^{up}} N_k^{R^2}, \\ x_2 \leq 0.2x_1, \\ x_1 + x_2 = M_{\min}, \\ N_k^{R^T}, N_k^{Q^T}, R_{kv}^T, Q_{kv}^T \geq 0, \quad T=1, 2. \quad v=1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

上述整数线性规划模型可以用分枝定界法<sup>[5]</sup>求解，LINGO 软件实现。分枝定界法（Branch and Bound Method）是通过有系统的“分枝”和“定界”步骤来寻求最优解的。这种方法有很强的适应能力，是目前较为成功地求解整数规划问题的一种方法，如旅行推销员问题、工厂设址问题、进度安排问题以及可行解数目有限的许多其他问题。用它来求解都能得到较好的结果。

在此，由于各乘运车的价格并不知道，我们只能进行定性分析，即，一个 1-2 型轿运车可对应于 1.5 个 1-1 型轿运车，在目标为最小的情况下，当其相对于 1-1 型车的权重大于 2 时，会得不偿失。所以，其权重值应该介于（1.5，2）之间。

## 4.2 问题一的求解

对于问题一，物流公司要求运输 I 型乘用车 100 辆及 II 型乘用车 68 辆，即 I、II 型乘用车任务运输量分别为  $w_1=100$ ， $w_2=68$ 。I 型和 II 型乘用车的宽度和高度尺寸满足 1-1 型和 1-2 型轿运车的装载约束，即 I 型和 II 型乘用车可以任意装载在各车型轿运车上，因此，我们可根据乘用车的长度尺寸给出轿运车车板装

载方案，如表 1 和表 2 所示。很显然，对于 1-1 型和 1-2 型轿运车，其上层车板与其下层车板的装载方案是一致的。也就是说，集合  $C_1^{up}$  和  $C_1^{low}$  中元素即为表 1 中的装载方案序号，表 1 中 I、II 型乘用车数量体现了  $R_{kt}^1$  和  $Q_{kt}^1$  的取值；同理，集合  $C_2^{up}$  和  $C_2^{low}$  中元素即为表 2 中的装载方案序号。

表 1 1-1 型轿运车上（下）层车板装载方案

装载方案 序号	I 型乘用车 (辆)	II 型乘用车 (辆)
1	0	5
2	1	3
3	2	2
4	3	1
5	4	0

表 2 1-2 型轿运车上（下）层车板装载方案

装载方案 序号	I 型乘用车 (辆)	II 型乘用车 (辆)
1	0	6
2	1	5
3	2	4
4	3	2
5	4	1
6	5	0

对于轿运车的装载问题，我们进行分步优化，先优化轿用车的使用数量，再优化轿用车的使用成本。因此，上述的以最小轿运车使用数量为目标的一般规划模型可改为：

$$\begin{aligned}
 \min \quad & M = x_1 + x_2 \\
 s.t. \quad & \begin{cases} \sum_{T=1}^2 \left[ \sum_{k \in C_T^{up}} (N_k^{R^T} \cdot R_{kt}^T) + \sum_{k \in C_T^{low}} (N_k^{Q^T} \cdot Q_{kt}^T) \right] \geq 100, \\ \sum_{T=1}^2 \left[ \sum_{k \in C_T^{up}} (N_k^{R^T} \cdot R_{kt}^T) + \sum_{k \in C_T^{low}} (N_k^{Q^T} \cdot Q_{kt}^T) \right] \geq 68, \\ x_1 = \sum_{k \in C_1^{up}} N_k^{R^1}, \\ \sum_{k \in C_1^{up}} N_k^{R^1} = \sum_{k \in C_1^{low}} N_k^{Q^1}, \\ x_2 = \sum_{k \in C_2^{low}} N_k^{Q^2}, \\ 2 \sum_{k \in C_2^{low}} N_k^{Q^2} = \sum_{k \in C_2^{up}} N_k^{R^2}, \\ x_2 \leq 0.2x_1, \\ N_k^{R^T}, N_k^{Q^T}, R_{kt}^T, Q_{kt}^T \geq 0, \quad T=1,2. \quad t=1,2. \end{cases} \quad (13)
 \end{aligned}$$

对上述模型进行求解，结果如表 3 所示。

表 3 问题一进行第一步优化后的结果

轿运车 车型	轿运车 使用数量	车板类型	装载方案	装载方案 出现次数	I 型乘用车 装载量	II 型乘用车 装载量
1-1	15	上层车板	方案 1	7	4	0
			方案 2	7	0	5
			方案 3	1	0	0
1-2	3	下层车板	方案 1	14	4	0
			方案 2	1	0	5
		上层车板	方案 1	6	2	4
		下层车板	方案 1	3	2	4

由表 3 可知，当物流公司调用 **18 辆** 轿运车进行装载（即  $M_{\min} = 18$ ）时，其运输成本最小。此时，需要 **15 辆 1-1 型**，**3 辆 1-2 型** 轿运车。其中，1-1 型轿运车上层车板有四种装载方案，下层车板只有两种；1-2 型轿运车上下层车板各有一种装载方案。表 3 中的数据是各型轿运车车板满载情况下的数据，统计其对各型乘用车的总装载量，并将其与运输任务量进行对比，得到相应的余载量，见表 4。

表 4 问题一第一步优化后满载量与任务量的对比

	轿运车车型		合计	运输任务量	余载量
	1-1	1-2			
运输 I 型 乘用车总数	84	18	102	100	2
运输 II 型 乘用车总数	40	36	76	68	8

在已知最小轿运车使用数量（ $M_{\min} = 18$ ）的情况下，对其进行使用成本的优化。以最少轿运车使用成本为目标的通用模型可改为：

$$\begin{aligned}
& \min Z = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \\
& s.t. \begin{cases} \sum_{T=1}^2 \left[ \sum_{k \in C_T^{up}} (N_k^{R^T} \cdot R_{k1}^T) + \sum_{k \in C_T^{low}} (N_k^{Q^T} \cdot Q_{k1}^T) \right] \geq 100, \\ \sum_{T=1}^2 \left[ \sum_{k \in C_T^{up}} (N_k^{R^T} \cdot R_{k2}^T) + \sum_{k \in C_T^{low}} (N_k^{Q^T} \cdot Q_{k2}^T) \right] \geq 68, \\ x_1 = \sum_{k \in C_1^{up}} N_k^{R^1}, \\ \sum_{k \in C_1^{up}} N_k^{R^1} = \sum_{k \in C_1^{low}} N_k^{Q^1}, \\ x_2 = \sum_{k \in C_2^{low}} N_k^{Q^2}, \\ 2 \sum_{k \in C_2^{low}} N_k^{Q^2} = \sum_{k \in C_2^{up}} N_k^{R^2}, \\ x_1 + x_2 = 18, \\ x_2 \leq 0.2x_1, \\ N_k^{R^T}, N_k^{Q^T} \geq 0, \quad T = 1, 2. \\ R_{kv}^T, Q_{kv}^T \geq 0, \quad v = 1, 2. \end{cases} \quad (14)
\end{aligned}$$

对上述模型进行求解，得到如表 5 至表 7 所示的结果。

表 5 问题一中各型轿运车的使用量及其满载结果

轿运车 车型	轿运车 使用数量	车板类型	装载方案	装载方案 出现次数	I 型乘用车 装载量	II 型乘用车 装载量
1-1	16	上层车板	方案 1	7	4	0
			方案 2	9	0	5
1-2	2	下层车板	方案 1	16	4	0
		上层车板	方案 1	4	2	4
		下层车板	方案 1	2	2	4

由表 5 可知，当调用 **16 辆 1-1 型轿运车**和 **2 辆 1-2 型轿运车**时，轿运车使用数量和使用成本达到最小。在此组合中，1-1 型轿运车上层车板有两种装载方案，下层车板只有一种；1-2 型轿运车上下层车板各有一种装载方案。根据表中的各车板装载方案，我们可以任意组合得到整车的装载方案。表 5 中的数据是各型轿运车车板满载情况下的数据，统计其对各型乘用车的总装载量，并将其与运输任务量进行对比，得到相应的余载量，见表 6。

表 6 问题一中满载量和任务量的对比

轿运车车型		合计	运输任务量	余载量
1-1	1-2			

运输 I 型 乘用车总数	92	12	104	100	4
运输 II 型 乘用车总数	45	24	69	68	1

根据表 6 中的数据，我们需要在轿运车满载情况下刨除余载量，得到各型轿运车的实际装载情况。刨除规则为：优先在 1-2 型上层车板进行成对刨除，其次在 1-1 型上层车板刨除，最后在任意型下层车板刨除（优先级：上层双列>上层单列>下层单列）。其结果如表 7 所示。表 7 中红色小括弧中数字表示车板满载情况下的各型乘用车数量。

表 7 问题一中各型轿运车的实际装载情况

轿运车 类型	相同类型、相同 装载方式的车辆 数	装在上层 I 型 乘用车数量	装在上层 II 型 乘用车数量	装在下层 I 型 乘用车数量	装在下层 II 型 乘用车数量
1-1	7	4	0	4	0
1-1	8	0	5	4	0
1-1	1	0	4 (5)	4	0
1-2	2	2 (4)	8	2	4

实际装载情况下，18 辆轿运车中有 1 辆 1-1 型和 2 辆 1-2 型轿运车未满载，其整车装载方式见图 1 和图 2。

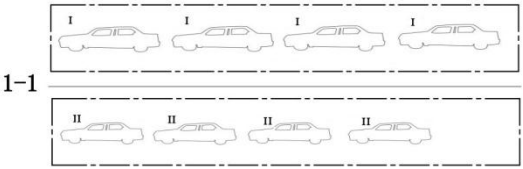


图 1 问题一中未满载的 1-1 型轿运车

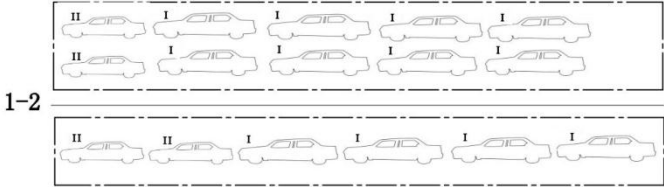


图 2 问题一中未满载的 1-2 型轿运车

### 4.3 对问题一结果的分析

从问题一的结果（见表 3 至表 7）可以看出，两步优化的结果不太一致。第一步优化（以轿运车使用数量最小为目标）得到结果：需要 18 辆轿运车，其中 1-1 型 15 辆，1-2 型 3 辆；然后在最小轿运车使用数量的前提下，进行第二步优化（以轿运车使用成本最少为目标），得到结果：需要 18 辆轿运车，而其中 1-1 型 16 辆，1-2 型 2 辆。

很显然，两步优化后的结果是更优的结果。第一步优化后，得到余载量：I 型乘用车 2 辆，II 型乘用车 8 辆，共 10 辆；而第二步优化后，余载量为：I 型乘用车 4 辆，II 型乘用车 1 辆，共 5 辆。这说明两步优化后的轿运车车型的分配得到了更高的装载空间利用率。而且 1-2 型轿运车使用成本高于 1-1 型，两步优化后的结果比一步优化更为节省成本。因此，进行分步优化是合理且必要的。



#### 4.4 问题二的求解

对于问题二，物流公司要求运输 II 型乘用车 72 辆及 III 型乘用车 52 辆，即 II、III 型乘用车任务运输量分别为  $w_2 = 72$ ,  $w_3 = 52$ 。II 型乘用车的宽度和高度尺寸满足 1-1 型和 1-2 型轿运车的装载约束，即 II 型乘用车可以任意装载在各车型轿运车上，而 III 型乘用车因车型高度超过 1.7 米只能装载在 1-1 型、1-2 型轿运车的下层。很显然，我们应在 1-1 型和 1-2 型上层车板只装载 II 型乘用车，而在 1-1 型和 1-2 型下层车板装载 II 型、III 型乘用车的组合。再根据乘用车的长度尺寸给出轿运车车板装载方案，如表 8 和表 9 所示。1-1 型和 1-2 型上层车板只有一种装载方案（ $C_1^{up}$  和  $C_2^{up}$  为单元数集合），即满载 II 型乘用车；1-1 型和 1-2 型下层车板装载方案序号集合  $C_1^{low}$  和  $C_2^{low}$  分别按照表 8 和表 9 来取值。

表 8 1-1 型轿运车下层车板装载方案

装载方案 序号	II 型乘用车 (辆)	III 型乘用车 (辆)
1	0	4
2	1	3
3	2	2
4	3	1
5	5	0

表 9 1-2 型轿运车下层车板装载方案

装载方案 序号	II 型乘用车 (辆)	III 型乘用车 (辆)
1	0	5
2	1	4
3	2	3
4	4	2
5	5	1
6	6	0

我们进行分步优化，先优化轿用车的使用数量，再优化轿用车的使用成本。因此，以最小轿运车使用数量为目标的通用规划模型可改为：

$$\begin{aligned}
& \min M = x_1 + x_2 \\
& s.t. \begin{cases} \sum_{T=1}^2 \left[ \sum_{k \in C_T^{up}} (N_k^{R^T} \cdot R_{k2}^T) + \sum_{k \in C_T^{low}} (N_k^{Q^T} \cdot Q_{k2}^T) \right] \geq 72, \\ \sum_{T=1}^2 \left[ \sum_{k \in C_T^{up}} (N_k^{R^T} \cdot R_{k3}^T) + \sum_{k \in C_T^{low}} (N_k^{Q^T} \cdot Q_{k3}^T) \right] \geq 52, \\ x_1 = \sum_{k \in C_1^{up}} N_k^{R^1}, \\ \sum_{k \in C_1^{up}} N_k^{R^1} = \sum_{k \in C_1^{low}} N_k^{Q^1}, \\ x_2 = \sum_{k \in C_2^{low}} N_k^{Q^2}, \\ 2 \sum_{k \in C_2^{low}} N_k^{Q^2} = \sum_{k \in C_2^{up}} N_k^{R^2}, \\ x_2 \leq 0.2x_1, \\ N_k^{R^T}, N_k^{Q^T}, R_{kv}^T, Q_{kv}^T \geq 0, \quad T=1,2. \quad t=2,3. \end{cases} \quad (15)
\end{aligned}$$

解得最小轿运车使用数量 ( $M_{\min} = 13$ ) 后, 进行第二步优化, 以最少轿运车使用成本为目标的通用模型可改为:

$$\begin{aligned}
& \min Z = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \\
& s.t. \begin{cases} \sum_{T=1}^2 \left[ \sum_{k \in C_T^{up}} (N_k^{R^T} \cdot R_{k2}^T) + \sum_{k \in C_T^{low}} (N_k^{Q^T} \cdot Q_{k2}^T) \right] \geq 72, \\ \sum_{T=1}^2 \left[ \sum_{k \in C_T^{up}} (N_k^{R^T} \cdot R_{k3}^T) + \sum_{k \in C_T^{low}} (N_k^{Q^T} \cdot Q_{k3}^T) \right] \geq 52, \\ x_1 = \sum_{k \in C_1^{up}} N_k^{R^1}, \\ \sum_{k \in C_1^{up}} N_k^{R^1} = \sum_{k \in C_1^{low}} N_k^{Q^1}, \\ x_2 = \sum_{k \in C_2^{low}} N_k^{Q^2}, \\ 2 \sum_{k \in C_2^{low}} N_k^{Q^2} = \sum_{k \in C_2^{up}} N_k^{R^2}, \\ x_1 + x_2 = 13, \\ x_2 \leq 0.2x_1, \\ N_k^{R^T}, N_k^{Q^T} \geq 0, \quad T=1,2. \\ R_{kv}^T, Q_{kv}^T \geq 0, \quad v=2,3. \end{cases} \quad (16)
\end{aligned}$$

两步优化后的结果见表 10 至表 12。

表 10 问题二中各型轿运车的使用量及其满载结果

轿运车 车型	轿运车 使用数量	车板类型	装载方案	装载方案 出现次数	II 型乘用车 装载量	III 型乘用车 装载量
1-1	12	上层车板	方案 1	12	5	0
		下层车板	方案 1	12	0	4
1-2	1	上层车板	方案 1	2	6	0
		下层车板	方案 1	1	0	5

由表 10 可知，当调用 **12 辆 1-1 型轿运车**和 **1 辆 1-2 型轿运车**时，轿运车使用数量和使用成本达到最小。在此组合中，1-1 型、1-2 型轿运车的上下层车板均只有一种装载方案。根据表中的各车板装载方案，我们可以任意组合得到整车的装载方案。表 10 中的数据是各型轿运车车板满载情况下的数据，统计其对各型乘用车的总装载量，并将其与运输任务量进行对比，得到相应的余载量，见表 11。

表 11 问题二中满载量和任务量的对比

	轿运车车型		合计	运输任务量	余载量
	1-1	1-2			
运输 II 型 乘用车总数	60	12	72	72	0
运输 III 型 乘用车总数	48	5	53	52	1

根据表 11 中的数据，我们根据刨除规则（优先级：上层双列>上层单列>下层单列）在轿运车满载情况下刨除余载量，得到各型轿运车的实际装载情况，如表 12 所示。表 12 中红色小括弧中数字表示车板满载情况下的各型乘用车数量。

表 12 问题二中各型轿运车的实际装载情况

轿用车 类型	相同类型、相同 装载方式的车辆 数	装在上层 II 型乘用车数 量	装在上层 III 型乘用车数量	装在下层 II 型乘用车数 量	装在下层 III 型乘用车数 量
1-1	12	5	0	0	4
1-2	1	12	0	0	4(5)

#### 4.5 问题三的求解

对于问题三，物流公司要求运输 I 型乘用车 156 辆、II 型乘用车 102 辆及 III 型乘用车 39 辆，即 I、II、III 型乘用车任务运输量分别为  $w_1=156$ ， $w_2=39$ ， $w_3=102$ 。I、II 型乘用车的宽度和高度尺寸满足 1-1 型和 1-2 型轿运车的装载约束，即 I、II 型乘用车可以任意装载在各车型轿运车上，而 III 型乘用车

因车型高度超过 1.7 米只能装载在 1-1 型、1-2 型轿运车的下层。根据乘用车的长度尺寸给出轿运车车板装载方案，对于 1-1 型轿运车，其下层车板装载方案见附表 1，其上层车板装载方案见表 1；对于 1-2 型轿运车，其下层车板装载方案见附表 2，其上层车板装载方案见表 2。也就是说， $C_1^{up}$ 、 $C_1^{low}$ 、 $C_2^{up}$  和  $C_2^{low}$  分别按照表 1、附表 1、表 2 和附表 2 来取值。

进行两步优化，第一步优化解得最小轿运车使用量，即  $M_{\min} = 30$ ，第二步优化中以最少轿运车使用成本为目标的通用模型可改为：

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{T=1}^2 \left[ \sum_{k \in C_T^{up}} (N_k^{R^T} \cdot R_{k1}^T) + \sum_{k \in C_T^{low}} (N_k^{Q^T} \cdot Q_{k1}^T) \right] \geq 156, \\ \sum_{T=1}^2 \left[ \sum_{k \in C_T^{up}} (N_k^{R^T} \cdot R_{k2}^T) + \sum_{k \in C_T^{low}} (N_k^{Q^T} \cdot Q_{k2}^T) \right] \geq 102, \\ \sum_{T=1}^2 \left[ \sum_{k \in C_T^{up}} (N_k^{R^T} \cdot R_{k3}^T) + \sum_{k \in C_T^{low}} (N_k^{Q^T} \cdot Q_{k3}^T) \right] \geq 39, \\ x_1 = \sum_{k \in C_1^{up}} N_k^{R^1}, \\ \sum_{k \in C_1^{up}} N_k^{R^1} = \sum_{k \in C_1^{low}} N_k^{Q^1}, \\ x_2 = \sum_{k \in C_2^{low}} N_k^{Q^2}, \\ 2 \sum_{k \in C_2^{low}} N_k^{Q^2} = \sum_{k \in C_2^{up}} N_k^{R^2}, \\ x_1 + x_2 = 30, \\ x_2 \leq 0.2x_1, \\ N_k^{R^T}, N_k^{Q^T}, R_{kv}^T, Q_{kv}^T \geq 0, \quad T = 1, 2, \quad v = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

两步优化后的结果见表 13 至表 15。

表 13 问题三中各型轿运车的使用量及其满载结果

轿运车 车型	轿运车 使用数量	车板类型	装载方案	装载方案 出现次数	I 型乘用车 装载量	II 型乘用车 装载量	III 型乘用车 装载量
1-1	25	上层车板	方案 1	20	4	0	0
			方案 2	5	0	5	0
		下层车板	方案 1	14	4	0	0
			方案 2	1	3	0	1
			方案 3	7	0	0	4
			方案 4	3	0	5	0
1-2	5	上层车板	方案 1	9	2	4	0

	方案 2	1	0	6	0
下层车板	方案 1	5	0	4	2

由表 13 可知，当调用 25 辆 1-1 型轿运车和 5 辆 1-2 型轿运车时，轿运车使用数量和使用成本达到最小。在此组合中，1-1 型轿运车上层车板有两种装载方案，下层车板有四种装载方案；1-2 型轿运车的上层车板有两种装载方案，下层只有一种。根据表中的各车板装载方案，我们可以任意组合得到整车的装载方案。表 13 中的数据是各型轿运车车板满载情况下的数据，统计其对各型乘用车的总装载量，并将其与运输任务量进行对比，得到相应的余载量，见表 14。

表 14 问题三中满载量和任务量的对比

	轿运车车型		合计	运输任务量	余载量
	1-1	1-2			
运输 I 型 乘用车总数	139	18	157	156	1
运输 II 型 乘用车总数	40	62	102	102	0
运输 III 型 乘用车总数	29	10	39	39	0

根据表 14 中的数据，我们根据刨除规则（优先级：上层双列>上层单列>下层单列）在轿运车满载情况下刨除余载量，得到各型轿运车的实际装载情况，如表 15 所示。表 15 中红色小括弧中数字表示车板满载情况下的各型乘用车数量。

表 15 问题三中各型轿运车的实际装载情况

轿用车 类型	相同类型、 相同装载方 式的车辆数	装在上层 I 型乘用 车数量	装在上层 II 型乘用 车数量	装在上层 III 型乘用 车数量	装在下层 I 型乘用车 数量	装在下层 II 型乘用 车数量	装在下层 III 型乘 用车数量
1-1	14	4	0	0	4	0	0
1-1	1	3(4)	0	0	3	0	1
1-1	2	4	0	0	0	0	4
1-1	5	0	5	0	0	0	4
1-1	3	4	0	0	0	5	0
1-2	4	4	8	0	0	4	2
1-2	1	2	10	0	0	4	2

## 5 问题四的求解

与前三问比较，问题四需要考虑多个运输目的地。这决定了问题四不仅仅要考虑轿运车的装载，也要考虑轿运车的运输。在最小轿运车使用数量和最少轿运车使用成本的前提下，物流公司追求轿运车行驶的里程数最短以达到降低运输成本的目标。很显然，轿运车运输问题是一个图论问题。

### 5.1 轿运车的装载

对于一次运输任务，我们先对轿运车进行装载，优先采用以最小轿运车使用数量为目的的整数线性规划模型，其次再采用以最少轿运车使用成本为目的的整数线性规划模型，分步优化得到各车型轿运车数量（同问题一至问题三的解题思路），如表 16 所示。

表 16 问题四中各型轿运车的使用量及其满载结果

轿运车 车型	轿运车 使用数量	车板类型	装载方案	装载方案 出现次数	I 型乘用车 装载量	II 型乘用车 装载量	III 型乘用车 装载量
1-1	21	上层车板	方案 1	15	4	0	0
			方案 2	6	0	5	0
		下层车板	方案 1	21	4	0	0
1-2	4	上层车板	方案 1	8	2	4	0
		下层车板	方案 1	4	2	4	0

由表 16 可知，经过两次分步规划之后得到结果：总共需要 **25 辆** 轿运车来进行运输，其中 **1-1 型轿运车需 21 辆**，**1-2 型轿运车需 4 量**。此组合能保证最小的轿运车使用数量和最少的轿运车使用成本。各型轿运车上下层车板的装载方案和整车的装载情况见表 18。

表 17 问题四中满载量和任务量的对比

车种	轿运车车型		合计	运输任务量	余载量
	1-1	1-2			
运输 I 型 乘用车总数	144	24	168	166	2
运输 II 型 乘用车总数	30	48	78	78	0

表 18 问题四中各型轿运车的实际装载情况

轿用车 类型	相同类型、 相同 装载方式的车辆数	装在上层 I 型 乘用车数量	装在上层 II 型乘用车数 量	装在下层 I 型 乘用车数量	装在下层 II 型乘用车数 量
1-1	15	4	0	4	0

1-1	6	0	5	4	0
1-2	3	4	8	2	4
1-2	1	2(4)	8	2	4

## 5.2 轿运车的运输

轿运车运输问题是一个图论问题，其机理类似多目标 TSP 问题（Travelling Salesman Problem，又称为旅行推销员问题、旅行商问题）。在一次运输任务中，物流公司会安排多辆轿运车将乘用车送达多个目的地，并追求轿运车行驶的路程最短。

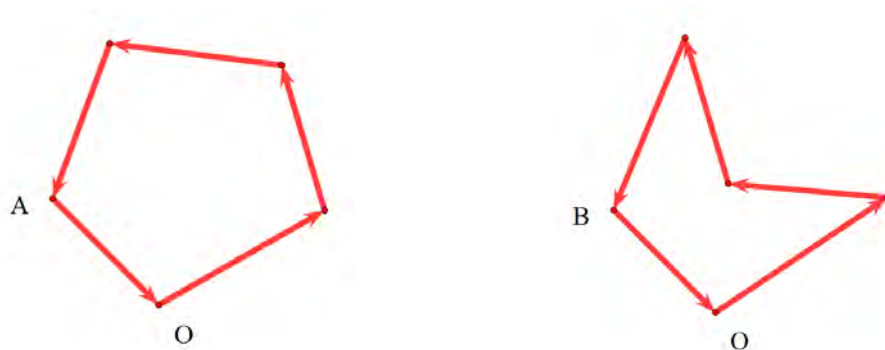
### 5.2.1 基于多目标 TSP 的图论模型

#### 5.2.1.1 模型建立

轿运车运输问题类似多目标 TSP 问题，其亦需要解决两个关键点：回路和破圈。

##### a. 回路

经典 TSP<sup>[6]</sup>问题的简单描述：有多个城市，一个推销员要从其中某一个城市出发，唯一走遍所有的城市，再回到他出发的城市，求最短的路线。因此，该问题存在一个闭合的圈，即回路。但对于轿运车运输问题，题目中已经指出，轿运车到达目的地后原地待命，无须放空返回，因此轿运车的行驶路线是单行的折线。为了能把问题套用到 TSP 的思想上去，我们引入一个很大值  $\gamma$ ，将其表示为目的地的到出发点的距离（不同的目的地到出发点的距离均相同），如图 3 所示。



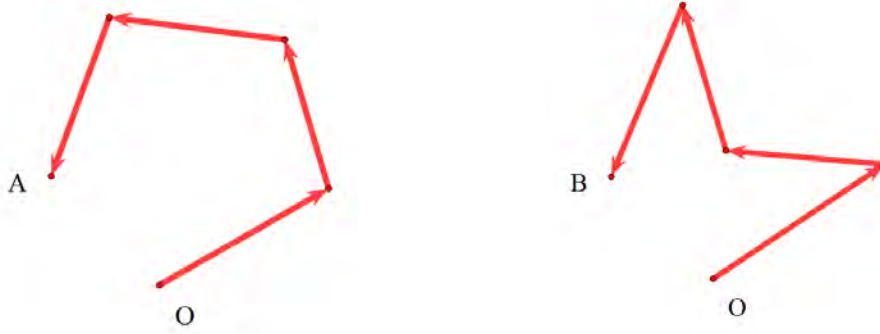


图 3 回路问题

现在，AO 与 BO 为相等的同一个大值，假如本来的 OA 圈总路径比 OB 圈的总路径更小，那么它们同时减去这个大值后，剩下的 OA 单行折线的总路径，依然比 OB 折线的总路径小。这样，去找一个最优的单行的折线 OA，可以转化为寻找对应的最优的圈 OA 的问题。

所以，我们可以假设轿运车到达目的地之后将返回至出发点而形成一个回路，此时就可以用类似多目标 TSP 问题的机理来建立模型。而轿运车实际的行驶里程数即为其行驶的回路减去大值  $\gamma$ 。

#### b. 破圈

破圈的目的在于确定关键路线。TSP 问题中会出现很多圈，但是只有以出发点作为起点和终点并单次通过目的地的圈，才是我们关注的重点，即关键路线。对于问题四，轿运车以城市 O 为出发点，四个城市为目的地进行运输，所以我们要规避以两个或三个目的地城市形成的圈，这可以从城市的“出度”和“入度”（出度指的是从某城市引出的路线数目，同理，入度是从某城市引入的路线数目）进行约束。

设城市之间的距离（distance）用矩阵  $d$  来表示， $d_{ij}$  ( $i, j \in \{O, A, B, C, D, E\}$ ) 表示城市  $i$  与城市  $j$  之间的距离。设 0-1 矩阵  $s^m$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ) 表示第  $m$  辆轿运车经过的各城市之间的路线。设

$$s_{ij}^m = \begin{cases} 0, & \text{若不从城市 } i \text{ 到城市 } j, \\ 1, & \text{若从城市 } i \text{ 到城市 } j, \end{cases} \quad (18)$$

在轿运车的运输问题中（轿运车使用数量及型号均已确定），影响成本的是轿运车的行驶里程数。行驶里程短成本低，因此，目标函数可表达为：

$$\min Z = \sum_i \sum_j \sum_m s_{ij}^m \cdot d_{ij} - M \cdot \gamma \quad (19)$$

式中， $M$  为运输任务中安排的轿运车数量；此处，大值  $\gamma$  取 1000。



约束条件：

1、考虑到同一城市之间不存在路线，即

$$s_{ii}^m = 0, \quad (20)$$

2、根据题意可知，城市  $O$  是运输任务的起始点。因此，在运输任务中，每辆装载好的轿运车必定从城市  $O$  出发（不在城市  $O$  卸载乘用车），最后回到城市  $O$ ，即

$$\sum_i s_{Oi}^m = \sum_i s_{iO}^m = 1, \quad (21)$$

3、在运输任务中，某一城市的“出度”必定等于其“入度”。且对于一辆轿运车而言，它要么经过某城市要么不经过，因此该城市的出入度必定不超过 1，即

$$\sum_i s_{ij}^m = \sum_i s_{ji}^m \leq 1, \quad (22)$$

4、每辆轿运车在所有城市卸载某型乘用车的总量应等于该轿运车对某型乘用车的装载量，即

$$L_v^m = \sum_i \left( U_{iv}^m \cdot \sum_j s_{ji}^m \right) \quad (23)$$

式中， $L_v^m$  表示在一次运输任务中第  $m$  辆轿运车上  $v$  型乘用车的装载量（Loading capacity）； $U_{iv}^m$  表示在一次运输任务中第  $m$  辆轿运车在城市  $i$  卸载  $v$  型乘用车的量（Unloading capacity）。

5、所有的轿运车在某城市对某型乘用车的卸载总量应等于该城市对该车型乘用车的需求量，即

$$D_{iv} \leq \sum_m \left( U_{iv}^m \cdot \sum_j s_{ji}^m \right) \quad (24)$$

式中， $D_{iv}$  表示城市  $i$  对于  $v$  型乘用车的需求量（Demand）。

6、破圈约束。要规避以两个或三个目的地城市形成的圈（如图 4 所示），因此城市的“出入度”需要被约束。对于两个城市形成的圈，这两个城市的出入度之和为 2，因此为避免此圈的形成，我们约束这两个城市的出入度之和不大于 1；三个城市形成的圈亦同理。

$$s_{ij}^m + s_{ji}^m \leq 1, \quad (i, j \neq O) \quad (25)$$

$$s_{ij}^m + s_{jk}^m + s_{ki}^m \leq 2, \quad (i, j, k \neq O) \quad (26)$$

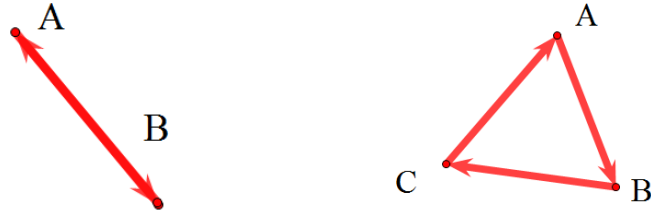


图 4 破圈约束

因此，基于多目标 TSP 的图论模型可表达成如下形式：

$$\begin{aligned}
 \min \quad & Z = \sum_i \sum_j \sum_m s_{ij}^m \cdot d_{ij} - M \cdot Q \\
 s.t. \quad & \begin{cases} s_{ii}^m = 0, \\ \sum_i s_{oi}^m = \sum_i s_{io}^m = 1, \\ \sum_i s_{ij}^m = \sum_i s_{ji}^m \leq 1, \\ L_v^m = \sum_i \left( U_{iv}^m \cdot \sum_j s_{ji}^m \right), \\ D_{iv} \leq \sum_m \left( U_{iv}^m \cdot \sum_j s_{ji}^m \right), \\ s_{ij}^m + s_{ji}^m \leq 1, \quad i, j \neq O \\ s_{ij}^m + s_{jk}^m + s_{ki}^m \leq 2, \quad i, j, k \neq O \end{cases} \quad (27)
 \end{aligned}$$

此模型中变量为  $U_{iv}^m$  与  $s_{ji}^m$ ，由于存在两者相乘项，所以此问题是非线性的整形规划问题，求解有一定难度。

#### 5.2.1.2 模型求解

用 Lingo 对模型进行编程求解，经过 10 分钟 23 秒计算得到结果（i7-3770 @3.4GHz）。附录 3 给出了此结果中 25 辆轿运车的行驶路线、其最后停放地点以及其装载的各型乘用车数量。其中， $m=1$  到 21 辆车都是 1-1 型轿运车， $m=22$  到 25 辆车都是 1-2 型轿运车。

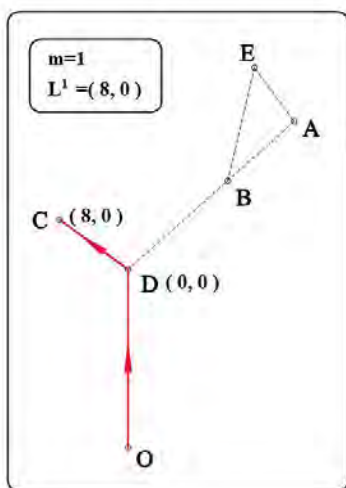


图 5 第 1 辆轿运车运输情况

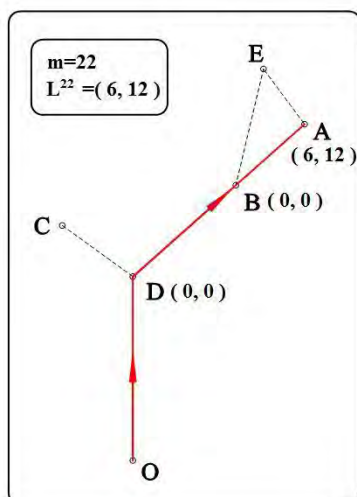


图 6 第 22 辆轿运车运输情况

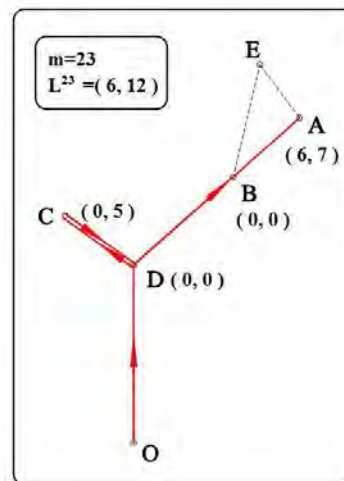


图 7 第 23 辆轿运车运输情况

从图 5 和图 6 可以看出，第 1 辆轿用车（1-1 型）只装载了 8 辆 I 型乘用车（ $L^1=(8,0)$ ），从城市  $O$  出发途径城市  $D$ （未卸载任何乘用车）最后抵达城市  $C$ ，在城市  $C$  卸载了 8 辆 I 型乘用车。第 22 辆轿运车（1-2 型）装载了 6 辆 I 型乘用车和 12 辆 II 型乘用车（ $L^{22}=(6,12)$ ），从城市  $O$  出发途径城市  $D$  和城市  $B$ （均未卸载任何乘用车）最后抵达城市  $A$ ，在城市  $A$  卸载了 6 辆 I 型乘用车和 12 辆 II 型乘用车。

相比较而言，第 23 辆轿运车行驶的路线稍微复杂些，如图 7 所示。第 23 辆轿运车（1-2 型）装载了 6 辆 I 型乘用车和 12 辆 II 型乘用车，从城市  $O$  出发途径城市  $D$  先抵达城市  $C$ ，并在城市  $C$  卸载了 5 辆 II 型乘用车，之后沿原路返回至城市  $D$ ，往城市  $A$  行驶，途径城市  $B$ （未卸载），抵达城市  $A$  后卸载了 6 辆 I 型乘用车和 7 辆 II 型乘用车。

我们发现，这 25 辆轿运车中只有第 23 辆车走了回头路（其他轿运车行驶路线见附录）。由于基于多目标 TSP 的图论模型是根据装载好的轿运车对其整车进行运输，而轿运车车板的重新组合可能导致不同结果。因此，我们对轿用车车板进行随机组合，发现走回头路这种情况是可以避免的。附录 4 给出了重组车板厚的 25 辆轿运车的行驶路线、其最后停放地点以及其装载的各型乘用车数量。

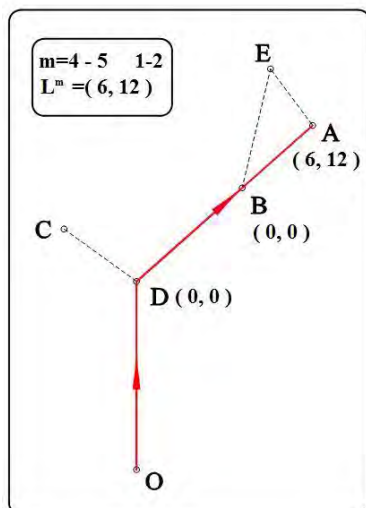


图 8 第 4(5)辆轿运车

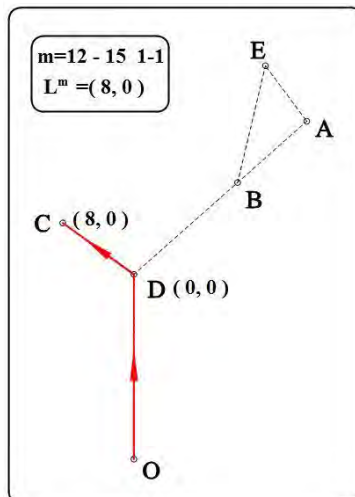


图 9 第 12-15 辆轿运车

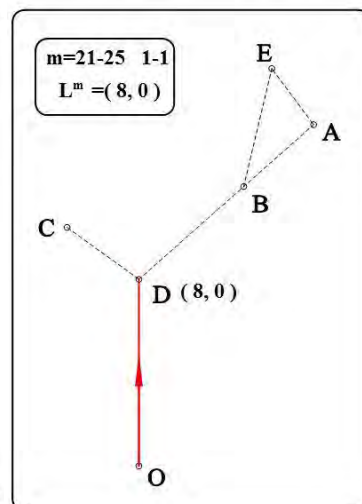


图 10 第 21-25 辆轿运车

从图 8 至图 10 可以看出，第 4(5)辆轿运车（1-2 型）装载了 6 辆 I 型、12 辆 II 型乘用车，从城市  $O$  出发途径城市  $D$  和城市  $B$ （未卸载任何乘用车）最后抵达城市  $A$ ，在城市  $A$  全部卸载；第 12-15 辆轿运车（1-1 型）至装载了 8 辆 I 型乘用车，从城市  $O$  出发途径城市  $D$ （未卸载）最后抵达城市  $C$ ，在城市  $C$  全部卸载；第 21-25 辆车（1-1 型）直达城市  $D$  将装载的乘用车全部卸载。

### 5.2.1.3 发现的运输规律

在上述重新组合轿运车车板进行运输规划过程中，我们发现若干轿运车运输规律，其描述如下：

- 大装载量的轿运车（如 1-2 型）往往倾向于运往距离较远的目的地；
- 大部分轿运车满载了同型乘用车；
- 轿运车内部较少出现混装的情况。

### 5.2.2 基于确定路线的整数线性规划模型

由于基于多目标 TSP 的图论模型是根据装载好的轿运车对其整车进行运输，这很可能会出现走回头路的情况。为避免这一情况，我们将在此小节建立运输车板的模型。

#### 5.2.2.1 路线的确定

题目给出的地图中，城市  $O$  为出发点，城市  $A, B, C, D, E$  为目的地。轿运车需要将乘用车运输到相应的目的地，图 11 至图 16 给出了所有可能的路线。

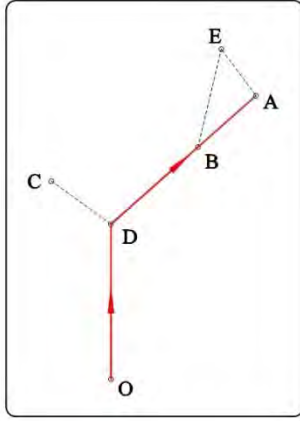


图 11 路线 1 (O-D-B-A)

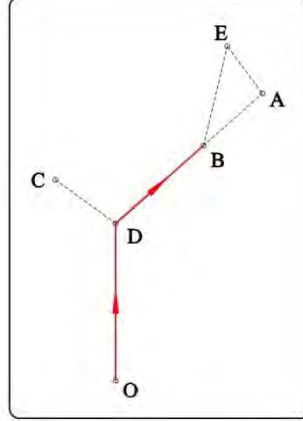


图 12 路线 2 (O-D-B)

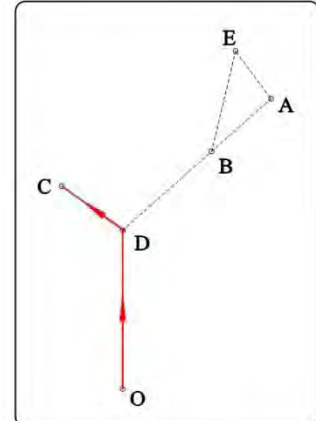


图 13 路线 3 (O-D-C)

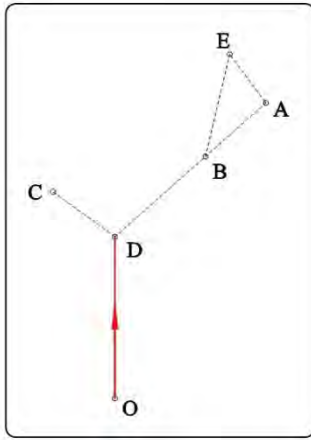


图 14 路线 4 (O-D)

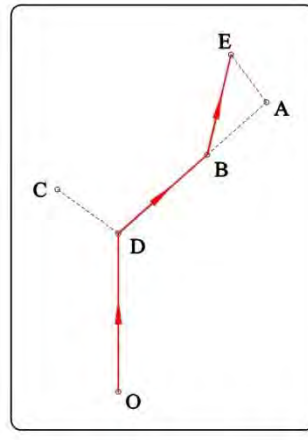


图 15 路线 5 (O-D-B-E)

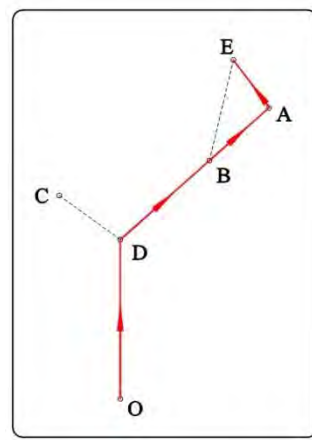


图 16 路线 6 (O-D-B-A-E)

值得说明的是，轿运车是不会走  $O-D-B-E-A$  路线的，因为路线 6 途经的城市与路线  $O-D-B-E-A$  一致，但其里程数短。

### 5.2.2.2 模型的建立

设  $d_l$  ( $l=1,2,\dots,6$ ) 为路线  $l$  的里程数 (问题四中目的地为  $A, B, C, D$ ，因此只有四条路线)， $x_{lT}$  ( $T=1,2$ ) 为沿着路线  $l$  行驶的  $T$  型轿运车的数量，在已知最小轿运车使用数量和最少轿运车使用成本的前提下，以轿运车行驶的里程数最短为目标，那么，模型的目标函数可写成如下形式：

$$\min G = \sum_{l=1}^4 \left( d_l \sum_{T=1}^2 x_{lT} \right) \quad (28)$$

约束条件：

1、最小轿运车使用数量和最少轿运车使用成本约束。上一模型已求解得到的各型轿运车使用数量：1-1 型 21 辆，1-2 型 4 辆。我们需满足此前提。

$$\sum_{l=1}^4 x_{l1} = 21, \quad (29)$$

$$\sum_{l=1}^4 x_{l2} = 4, \quad (30)$$

2、在某运输路线上，1-1 型轿运车使用量应等于该车型上层车板装载乘用车方案出现的总次数，亦等于该车型下层车板装载乘用车方案出现的总次数，即

$$x_{l1} = \sum_{k \in C_1^{up}} N_{lk}^{R^1} = \sum_{k \in C_1^{low}} N_{lk}^{Q^1} \quad (31)$$

3、由于 1-2 型轿运车上层装载区域等价于两个上层车板，因此，在某运输路线上，1-2 型轿运车下层车板装载方案应等于该车型轿用车使用量，而下层车板装载方案应等于该车型轿用车使用量的两倍，即

$$\sum_{k \in C_2^{low}} N_{lk}^{Q^2} = x_{l2} \quad (32)$$

$$\sum_{k \in C_2^{up}} N_{lk}^{R^2} = 2x_{l2} \quad (33)$$

式中， $N_{lk}^{R^T}$  ( $T=1,2$ ) 表示沿着路线  $l$  行驶的  $T$  型轿运车上层车板 ( $R^T$ ) 第  $k$  种装载方案出现的次数； $N_{lk}^{Q^T}$  ( $T=1,2$ ) 表示沿着路线  $l$  行驶的  $T$  型轿运车上下层车板 ( $Q^T$ ) 第  $k$  种装载方案出现的次数；

4、以城市  $A$  为目的地的所有轿运车（沿着路线 1 行驶），其上所装载的某型乘用车总数量必定不少于城市  $A$  对该型乘用车的需求量；城市  $C$  亦同理：

$$\sum_{T=1}^2 \left( \sum_{k \in C_T^{up}} N_{lk}^{R^T} \cdot R_{kv}^T + \sum_{k \in C_T^{low}} N_{lk}^{Q^T} \cdot Q_{kv}^T \right) \geq D_{Av} \quad (34)$$

$$\sum_{T=1}^2 \left( \sum_{k \in C_T^{up}} N_{3k}^{R^T} \cdot R_{kv}^T + \sum_{k \in C_T^{low}} N_{3k}^{Q^T} \cdot Q_{kv}^T \right) \geq D_{Cv} \quad (35)$$

式中， $R_{kv}^T$  表示  $T$  型轿运车上层车板第  $k$  种装载方案中  $v$  型乘用车的数量； $Q_{kv}^T$  表示  $T$  型轿运车下层车板第  $k$  种装载方案中  $v$  型乘用车的数量； $D_{iv}$  ( $i=A,B,C,D$ ) 表示城市  $i$  对  $v$  型乘用车的需求量。

5、以城市  $A$  和城市  $B$  为目的地的所有轿运车（沿着路线 1 和路线 2 行驶），其上所装载的某型乘用车总数量必定不少于城市  $A$  和城市  $B$  对该型乘用车的需求量之和：

$$\sum_{l=1}^2 \left[ \sum_{T=1}^2 \left( \sum_{k \in C_T^{up}} N_{lk}^{R^T} \cdot R_{kv}^T + \sum_{k \in C_T^{low}} N_{lk}^{Q^T} \cdot Q_{kv}^T \right) \right] \geq D_{Av} + D_{Bv} \quad (36)$$

6、在一次运输任务中，所有使用的轿运车对某型乘用车的总装载量必定不少于所有城市对该型乘用车的总需要量：

$$\sum_{l=1}^4 \left[ \sum_{T=1}^2 \left( \sum_{k \in C_T^{up}} N_{lk}^{R^T} \cdot R_{kv}^T + \sum_{k \in C_T^{low}} N_{lk}^{Q^T} \cdot Q_{kv}^T \right) \right] \geq \sum_{i=A}^D D_{iv} \quad (37)$$

因此，模型可写成如下形式：

$$\begin{aligned} \min \quad & G = \sum_{l=1}^4 \left( d_l \sum_{T=1}^2 x_{lT} \right) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{l=1}^4 x_{l1} = 21, \\ \sum_{l=1}^4 x_{l2} = 4, \\ x_{l1} = \sum_{k \in C_1^{up}} N_{lk}^{R^1}, \\ \sum_{k \in C_1^{up}} N_{lk}^{R^1} = \sum_{k \in C_1^{low}} N_{lk}^{Q^1}, \\ x_{l2} = \sum_{k \in C_2^{low}} N_{lk}^{Q^2}, \\ \sum_{k \in C_2^{up}} N_{lk}^{R^2} = 2 \sum_{k \in C_2^{low}} N_{lk}^{Q^2}, \\ \sum_{T=1}^2 \left( \sum_{k \in C_T^{up}} N_{lk}^{R^T} \cdot R_{kv}^T + \sum_{k \in C_T^{low}} N_{lk}^{Q^T} \cdot Q_{kv}^T \right) \geq D_{Av}, \\ \sum_{T=1}^2 \left( \sum_{k \in C_T^{up}} N_{lk}^{R^T} \cdot R_{kv}^T + \sum_{k \in C_T^{low}} N_{lk}^{Q^T} \cdot Q_{kv}^T \right) \geq D_{Cv}, \\ \sum_{l=1}^2 \left[ \sum_{T=1}^2 \left( \sum_{k \in C_T^{up}} N_{lk}^{R^T} \cdot R_{kv}^T + \sum_{k \in C_T^{low}} N_{lk}^{Q^T} \cdot Q_{kv}^T \right) \right] \geq D_{Av} + D_{Bv}, \\ \sum_{l=1}^4 \left[ \sum_{T=1}^2 \left( \sum_{k \in C_T^{up}} N_{lk}^{R^T} \cdot R_{kv}^T + \sum_{k \in C_T^{low}} N_{lk}^{Q^T} \cdot Q_{kv}^T \right) \right] \geq \sum_{i=A}^D D_{iv}. \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

### 5.2.2.3 模型的求解

基于 Matlab 软件的 yalmip 工具箱对上述模型进行求解，其求解结果与车板重组后的结果一致，见图 8 至图 10 和附录 4。其最短里程数为 6404 个距离单位。

## 6 问题五的求解

### 6.1 轿运车的归类

题目所附的表 1 给出了 10 种类型的轿运车的规格，根据其尺寸参数，我们可以将其进行归类。如表 19 所示，5 号车和 10 号车、7 号车和 8 号车、2 号车和 6 号车可以合并。以 5 号车和 10 号车为例进行说明。5 号车和 10 号车均为 1-2 型车，因此其车型结构一致，即下层单列装载，上层双列装载；两车的长宽高尺寸差异较小，不会影响到乘用车的装载。因此，我们将 10 种轿运车简化到了 7 种，其中 5 种为 1-1 型，1-2 型和 2-2 型各 1 种。

表 19 轿运车的归类

轿运车 编号	序号	类型		长	宽	高	拥有量 (辆)	合并 (辆)
1	3	十二位双桥双轮厢式	1-1 型	24.3	2.65	4.3	22	22
2	4	十位双桥边轮厢式	1-1 型	22	2.7	4.35	15	15
3	7	十位单桥双轮框架	1-1 型	21	2.65	3.6	4	20
	8	十位单桥双轮框架	1-1 型	21	2.65	3.9	16	
4	1	八位双桥边轮厢式	1-1 型	19	2.7	4.35	21	21
5	2	十位双桥双轮厢式	1-1 型	18.3	2.9	4.4	18	43
	6	十位单桥双轮框架	1-1 型	18.2	2.65	3.6	25	
6	5	十九位双桥双轮框架	1-2 型	23.7	2.8	3.9	10	25
	10	十七位双桥双轮框架	1-2 型	23.3	2.7	4.35	15	
7	9	十九位双桥双轮框架	2-2 型	19	3.5	3.4	5	5

### 6.2 乘用车的归类

题目所附的表 2 给出了 45 种类型的乘用车的规格，根据其尺寸参数，我们可以将其进行归类。首先，将 45 种乘用车分为三大类：

第一类，乘用车高度大于 1.7 米，其只能装载在 1-1 型和 1-2 型的下层。其车型编号集合为{1,12,17,24,25,26,31,37}；

第二类，乘用车宽度大于 1.7 米，而高度小于 1.7 米，其只能装载在轿运车下层；

第三类，除了第一类和第二类的乘用车，其能任意装载。其车型编号集合为{3,5,7,8,14,18,20,27,29,30,39,40}。

再对各大类中的乘用车进行归类。以第一类乘用车为例，用 10 种车板分别满载第一类中的乘用车，得到如下所示的表：



表 20 十种车板分别满载第一类乘用车

车型编号	车型	各型轿运车车板长度（米）									
		19	18.3	24.3	22	23.7	18.2	21	21	19	23.3
24	华翔驭虎	3	3	4	4	4	3	4	4	3	4
17	得利卡	3	3	4	4	4	3	4	4	3	4
25	领航者 CUV	3	3	5	4	4	3	4	4	3	4
1	大切诺基	4	3	5	4	5	3	4	4	4	5
26	帅威	4	3	5	4	5	3	4	4	4	5
12	嘉誉	4	4	5	4	5	3	4	4	4	5
31	瑞虎	4	4	5	5	5	4	4	4	4	5
37	五菱扬光	4	4	6	5	6	4	5	5	4	6

表中数据为每种乘运车在各型轿运车上能装载的最大数量。可以将每种车型的这个数量的排列作为一个序列，然后对不同序列进行相关性分析。然后根据我们的需要把相关性不大的分为两类，在此题中，由于乘运车类型数量会造成其排列可能性的指数爆炸最后便可得到我们的全部分类方式。

表 21 乘用车的归类

车型 编号	长度 (mm)	宽度 (mm)	高度 (mm)	A 需求数	B 需求数	C 需求数	D 需求数	E 需求数	总数
1	4420	1695	1590	70	52	95	88	78	217
2	6831	1980	1478	2	0	0	1	1	2
3	5035	1880	1605	196	137	114	111	106	447
4	5160	1895	1970	24	12	19	15	19	55
5	4285	1765	1860	0	10	24	20	13	34

### 6.3 轿运车的装载

根据第四节的整数线性规划模型，我们对问题五中轿运车的装载问题进行分步优化，结果见表 22。由表 22 可知，问题五的运输任务需要调用 **134 辆** 轿运车。

表 22 问题五轿运车的装载

轿运车编号	类型	拥有量	最小使用数量
1	1-1	22	22
2	1-1	15	15
3	1-1	20	20

4	1-1	21	21
5	1-1	43	30
6	1-2	25	21
7	2-2	5	5

#### 6.4 轿运车的运输

问题五中的目的地为  $A, B, C, D, E$ ，因此有六条条路线。乘用车有 5 类，轿运车有 7 类。在已知最小轿运车使用数量和最少轿运车使用成本的前提下，以轿运车行驶的里程数最短为目标，那么，模型的目标函数可写成如下形式：

$$\min G = \sum_{l=1}^6 \left( d_l \sum_{T=1}^7 x_{lT} \right) \quad (39)$$

约束条件：

1、最小轿运车使用数量和最少轿运车使用成本约束。上一小节已求解得到的各型轿运车使用数量（见表 22），我们需满足此前提。

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^6 x_{l1} = 22, \sum_{l=1}^6 x_{l2} = 15, \sum_{l=1}^6 x_{l3} = 20, \\ \sum_{l=1}^6 x_{l4} = \sum_{l=1}^6 x_{l6} = 21, \sum_{l=1}^6 x_{l5} = 30, \sum_{l=1}^6 x_{l7} = 5, \end{aligned} \quad (40)$$

2、在某运输路线上，1-1 型轿运车使用量应等于该车型上层车板装载乘用车方案出现的总次数，亦等于该车型下层车板装载乘用车方案出现的总次数，即

$$x_{lT} = \sum_{k \in C_T^{up}} N_{lk}^{R^T} = \sum_{k \in C_T^{low}} N_{lk}^{Q^T}, \quad T=1,2,\dots,5 \quad (41)$$

3、由于 1-2 型轿运车上层装载区域等价于两个上层车板，因此，在某运输路线上，1-2 型轿运车下层车板装载方案应等于该车型轿用车使用量，而下层车板装载方案应等于该车型轿用车使用量的两倍，即

$$\sum_{k \in C_6^{low}} N_{lk}^{Q^2} = x_{l6} \quad (42)$$

$$\sum_{k \in C_6^{up}} N_{lk}^{R^6} = 2x_{l6} \quad (43)$$

4、由于 2-2 型轿运车上下层装载区均等价于两个车板，因此，在某运输路线上，2-2 型轿运车下层车板装载方案应等于该车型上层车板装载方案，也等于该车型轿用车使用量的两倍，即

$$\sum_{k \in C_7^{up}} N_{lk}^{R^7} = \sum_{k \in C_7^{low}} N_{lk}^{Q^7} = 2x_{l7} \quad (44)$$

5、以城市  $C$  为目的地的所有轿运车（沿路线 3 行驶），其上所装载的某型乘用车总数量必定不少于城市  $C$  对该型乘用车的需求量：

$$\sum_{T=1}^7 \left( \sum_{k \in C_T^{up}} N_{3k}^{R^T} \cdot R_{kv}^T + \sum_{k \in C_T^{low}} N_{3k}^{Q^T} \cdot Q_{kv}^T \right) \geq D_{Cv} \quad (45)$$

6、以城市  $E$  为目的地的所有轿运车（沿路线 5 和路线 6 行驶），其上所装载的某型乘用车总数量必定不少于城市  $E$  对该型乘用车的需求量：

$$\sum_{l=5}^6 \left[ \sum_{T=1}^7 \left( \sum_{k \in C_T^{up}} N_{lk}^{R^T} \cdot R_{kt}^T + \sum_{k \in C_T^{low}} N_{lk}^{Q^T} \cdot Q_{kt}^T \right) \right] \geq D_{Et} \quad (46)$$

7、以城市  $A$  和城市  $E$  为目的地的所有轿运车（沿着路线 1、5、6 行驶），其上所装载的某型乘用车总数量必定不少于城市  $A$  和城市  $E$  对该型乘用车的需求量之和：

$$\sum_{l=1,5,6} \left[ \sum_{T=1}^7 \left( \sum_{k \in C_T^{up}} N_{lk}^{R^T} \cdot R_{kt}^T + \sum_{k \in C_T^{low}} N_{lk}^{Q^T} \cdot Q_{kt}^T \right) \right] \geq D_{At} + D_{Et} \quad (47)$$

8、以城市  $A$ 、 $B$ 、 $E$  为目的地的所有轿运车（沿着路线 1、2、5、6 行驶），其上所装载的某型乘用车总数量必定不少于城市  $A$ 、 $B$ 、 $E$  对该型乘用车的需求量之和：

$$\sum_{l=1,2,5,6} \left[ \sum_{T=1}^7 \left( \sum_{k \in C_T^{up}} N_{lk}^{R^T} \cdot R_{kt}^T + \sum_{k \in C_T^{low}} N_{lk}^{Q^T} \cdot Q_{kt}^T \right) \right] \geq D_{At} + D_{Bt} + D_{Et} \quad (48)$$

9、在一次运输任务中，所有使用的轿运车对某型乘用车的总装载量必定不少于所有城市对该型乘用车的总需要量：

$$\sum_{l=1}^6 \left[ \sum_{T=1}^7 \left( \sum_{k \in C_T^{up}} N_{lk}^{R^T} \cdot R_{kt}^T + \sum_{k \in C_T^{low}} N_{lk}^{Q^T} \cdot Q_{kt}^T \right) \right] \geq \sum_{i=A}^E D_{iv} \quad (49)$$

对上述模型进行求解，结果见表 23。其最短里程数为 40808 个距离单位。

表 23 问题五的运输结果

轿 用 车 序 号	相同类型、 相同装载方 式的车辆数	上 层 序 号	上 层 序 号	上 层 序 号	上 层 序 号	上 层 序 号	下 层 序 号	下 层 序 号	下 层 序 号	下 层 序 号	下 层 序 号	中间 停靠 地	目 的 地
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5		

5	6	0	0	3	0	0	0	0	3	0	0	DB	A
5	1	0	0	3	0	0	0	0	1	2	0		
3	1	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0		
6	9	10	0	0	0	0	0	0	4	0	0		
1	2	3	0	2	0	0	0	0	3	0	2	D	B
1	18	3	0	2	0	0	0	0	3	0	1		
6	1	10	0	0	0	0	0	0	0	4	0		
2	1	0	0	8	0	0	0	0	0	4	0		
3	2	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0		
3	2	0	0	4	0	0	0	0	2	2	0		
7	1	3	0	4	0	0	8	0	0	0	0		
1	1	0	0	4	0	0	1	0	3	0	1	D	C
1	1	3	0	2	0	0	0	0	2	1	2		
6	7	10	0	0	0	0	0	0	4	0	0		
6	2	10	0	0	0	0	0	0	0	4	0		
2	1	0	0	4	0	0	0	0	0	4	0		
3	2	0	0	4	0	0	0	0	3	1	0		
4	10	0	0	3	0	0	0	0	2	0	0		
4	1	3	0	1	0	0	0	0	2	0	0	-	D
6	1	10	0	0	0	0	0	1	1	2	0		
2	1	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0		
2	2	0	0	4	0	0	0	0	0	4	0		
2	2	0	0	4	0	0	0	0	2	2	0		
3	10	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	DB	E
6	1	10	0	0	0	0	0	0	4	0	0		
2	7	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0		
3	3	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0		
4	1	0	0	3	0	0	0	0	2	0	2		
4	8	3	0	1	0	0	0	0	2	0	2		
4	1	0	2	1	0	0	0	0	2	0	2		
7	3	6	0	2	0	0	8	0	0	0	0		
7	1	3	0	4	0	0	8	0	0	0	0		
5	10	0	0	3	0	0	0	0	0	3	0		
5	8	0	0	3	0	0	0	0	2	1	0		
5	4	0	0	3	0	0	0	0	3	0	0		
5	1	0	1	2	0	0	0	0	3	0	0		

## 6.5 轿运车运输的启发式算法

由于 Matlab 工具箱有一定局限性，我们建立的模型工具箱不能算出全局最优解，而它给出的结果太过保守。根据前文经验建立了一个启发式算法。

其规则为：

首先，优先满足距离更远的地点的需求，使用前三问的模型求的其需求结果；

然后，寻找到第二远的地点，判断其是否与最远的地点相连，若相连且处于其更近于出发点的位置，则一起考虑这两点的需求，求得其运载方式；若否，则孤立的计算满足其需求的运载方式；

就这样然后一步一步从远至近，一次满足所有的地点的需求。

基于以上算法规则，我们再对第五问进行了编程计算，Lingo 计算其最后结果为 37196。其具体结果如下。

轿运车编号	A	B	C	D	E
1	11	0	0	0	14
2	7	5	5	0	24
3	14	1	0	0	0
4	0	15	5	0	0
5	0	0	14	7	0
6	0	0	0	0	5
7	0	0	6	24	0

## 7 模型评价

- 1，在前四问中，本文建立了多种模型，对问题的各个方面进行刻画，问题的各个方面也得到了覆盖和分析。
- 2，前四问中，本文采用了多种方法，处理问题的非线性，最终将问题划归为了线性规划问题。
- 3，本文提出了“车板”“车板效率”等概念，以方便对结果进行评价。
- 4，第五问中的分类，虽然比较保守，但是能保证得到的安排方案一定可行。

## 参考文献

- [1] 杨浩雄，刘仲英，汪明艳，整车物流企业优选指标体系研究[J]，上海工程技术大学学报，18(3):230-231, 2004.
- [2] 王巍，徐卫华，刘仲英，基于模糊决策的汽车整车物流企业能力评价研究[J]，上海汽车，8:13-15, 2004.

- [3] Garey, M., D. Johnson. Computers and Intractability: A Guide to Theory of NP-Completeness[J]. W. H. Freeman, New York, 1979.
- [4] 陈赛虎, 沈利冰, 基于整数规划的轿车物流配载优化的研究[D], 上海交通大学, 2008.
- [5] 吴颖, 程赐胜, 基于分枝定界法的车辆配载问题[J], 长沙理工大学学报 (自然科学版), 5(4): 23-26, 2008.
- [6] 马良, 旅行推销员问题的算法综述[J], 数学实践与认识, 30(2): 156-165, 2000.
- [7] 张江静, 一维组合装车问题模型与算法研究[D], 上海交通大学, 2012.

## 附表

附录 1 1-1 型轿运车下层车板装载方案

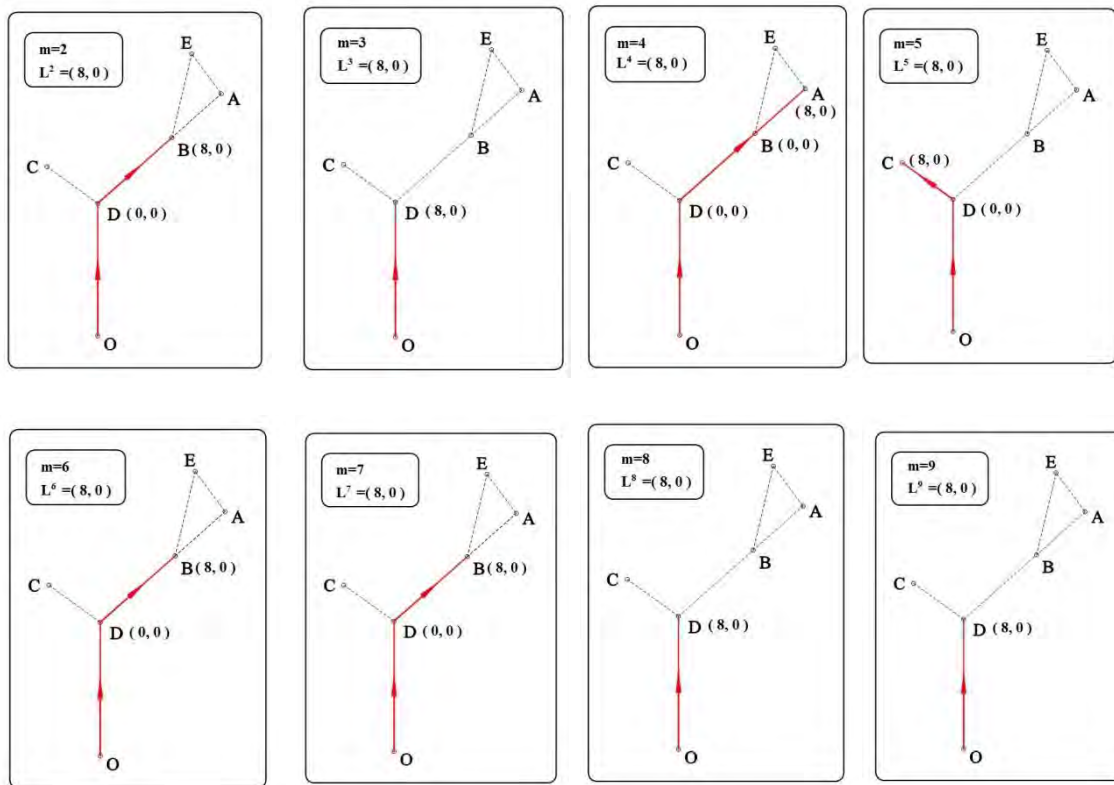
装载方案 序号	I 型乘用车 (辆)	II 型乘用车 (辆)	III 型乘用车 (辆)
1	0	5	0
2	1	3	0
3	2	2	0
4	3	1	0
5	4	0	0
6	0	3	1
7	1	2	1
8	2	1	1
9	3	0	1
10	0	2	2
11	1	1	2
12	2	0	2
13	0	1	3
14	1	0	3
15	0	0	4

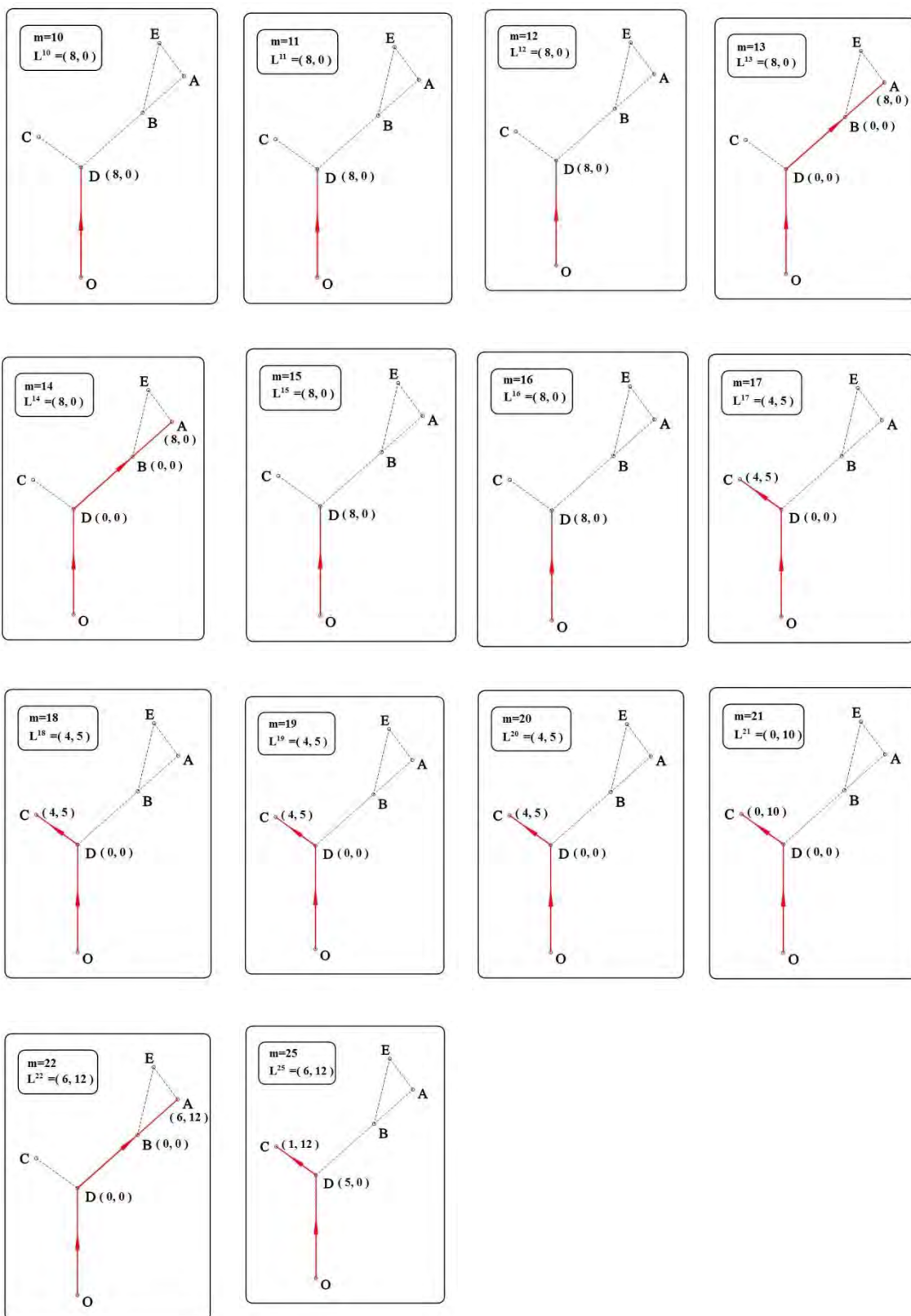
附录 2 1-2 型轿运车下层车板装载方案

装载方案 序号	I 型乘用车 (辆)	II 型乘用车 (辆)	III 型乘用车 (辆)
1	0	6	0
2	1	5	0
3	2	4	0
4	3	2	0
5	4	1	0
6	5	0	0
7	0	5	1

8	1	4	1
9	2	2	1
10	3	1	1
11	4	0	1
12	0	4	2
13	1	2	2
14	2	1	2
15	3	0	2
16	0	2	3
17	1	1	3
18	2	0	3
19	0	1	4
20	1	0	4
21	0	0	5

附录 3 基于多目标 TSP 的图论模型结果





附录 4



