

全国第七届研究生数学建模竞赛



题 目 特殊工件磨削加工的数学模型研究

摘 要

本文主要以规划砂轮中心相对运动轨迹和砂轮作为研究对象,根据工件加工要求,运用工件包络加工方法和刀具插补运算方法建立了以加工时间最短,加工误差最小等目标的数学模型,给出了不同目标和约束下的加工方案,本文主要完成的工作有:

I 分析了磨床的工作原理和工件加工方案的制定原则给出了加工方案的确定方法和误差的分析方法,在此基础上建立了数学模型。

II 对问题 I, 在满足加工要求的前提下, 以加工误差最小和加工时间最短为目标函数, 采用了包络加工方法和改进的机床插补算法, 来制定加工方案, 使用目标搜索方法得到了最优的加工方案, 并求得次加工方案的加工误差。

III 对问题 II, 在满足加工要求的前提下, 以加工误差最小和加工时间最短为目标函数, 采用了包络加工方法和改进的机床插补算法, 以轮式砂轮中的相对工件运动轨迹为研究对象, 让中、下两台动而上台不动, 砂轮的外端轮廓参数 r 小于母线的最小曲率半径, 砂轮的侧面始终与加工母线垂直, 并按照上述原则来制定加工方案, 使用目标搜索法得到了最优的加工方案, 并求得此方案的加工误差。

IV 通过改变加工步中 x 、 y 的增量而使加工过程中圆柱型砂轮表面的磨损均匀

V 通过改变加工步中转角增量而使加工过程中砂轮表面磨损均匀

关键词: 插补, 包络, 多项式插值, 多级优化, 磨损均匀

参赛队号 10109001

队员姓名 陈栋梁, 叶泉, 陈芳芳

参赛密码

(由组委会填写)

中山大学承办

一、问题的重述和分析

1.1 问题的重述

一种大型精密内外圆曲线磨床，磨削下面两个工件

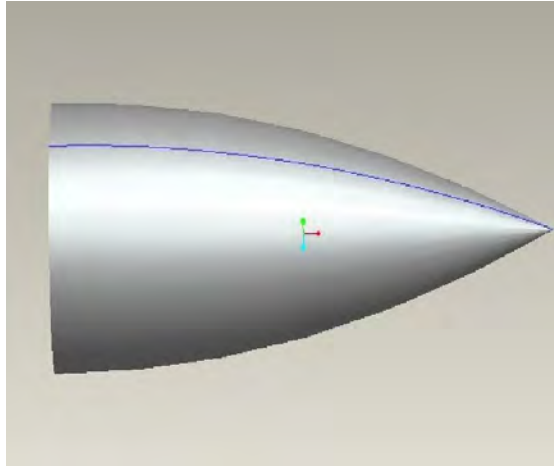


图 a

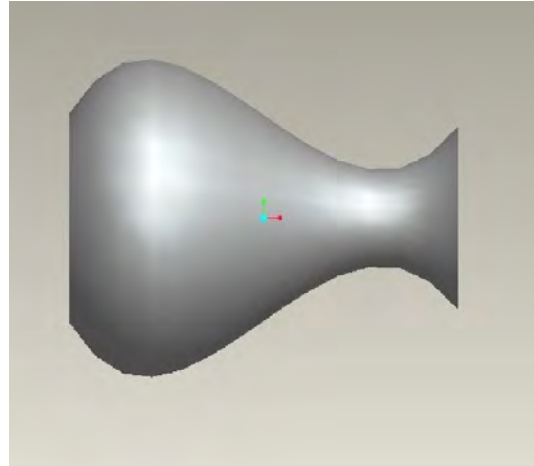


图 b

a 图采用圆柱型砂轮加工，b 图采用轮式砂轮加工，给出一个加工方案，对提出的方案作误差分析

提出一个修整策略，给出一个使轮式砂轮表面磨损尽量均匀，作相应误差分析

1.2 需要解决的问题：

- (1) 对工件 a，b 设计一个加工方案，并对其误差进行分析。
- (2) 对（1）中的加工方案，提出一个修整策略，得到一个石砂轮尽量磨损均匀的合理加工方案，作相应的误差分析。
- (3) 给出其它需要考虑的因素，给出合理的加工方案。

二、问题的假设

根据题意可进行如下的假设：

- 1、由于机床具有先进的控制设备，不考虑信息传递的时延。
- 2、由于机床上具有先进的冷却系统，不考虑温升对加工工件误差的影响。
- 3、由于步进电机、变速器、丝杠、螺母副的联接精密，对工件加工精度没有任何影响。
- 4、零件的材质均匀，受力不变形。

5、工件在预加工后留给磨削的加工余量可确保一次成形。

三、符号说明

y' : 工件母线方程在 (x, y) 处的切线斜率

H : 加工工件时最大加工余量

$F_{(\beta, \omega)}$: 关于自变量 β, ω 的函数

四、问题分析

4.1 解题思路:

本题涉及到了机械中机床的插补算法, 其中把插补出来的点描绘出图形可用图论里面的知识进行解决, 也涉及到了机械中包络加工方法, 求最大加工余量, 以及数值分析中的多项式插值等算法。

- (1) 要找误差最小, 需要考虑多重因素, 主要考虑插补路径所形成的误差和刀具磨损误差。
- (2) 考虑时间最短, 即在每秒的步长最大, 这样要求综合考虑机床的各种影响因素(频率、干涉等)来确定解题方法。

五 模型的建立和求解

数学模型中用到的数学知识:

(1) 多项式插值基本概念:

假设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的未知或复杂函数, 但已知该函数在点 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ 处的函数值 y_0, y_1, \cdots, y_n 。找一个简单的函数, 例如多项式函数 $P(x)$, 使之满足条件:

$$P(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

即在给定点 x_i 处, $P(x)$ 与 $f(x)$ 是相吻合的。

通常把上述 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 称为插值节点, 把 $P(x)$ 称为 $f(x)$ 的插值多项式(函数), $f(x)$ 称为被插函数。 $[a, b]$ 称为插值区间, 条件 (2.1) 称为插值条件, 并把求 $P(x)$ 的过程称为插值法。

如果 $P(x)$ 为 m 次多项式

$$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$$

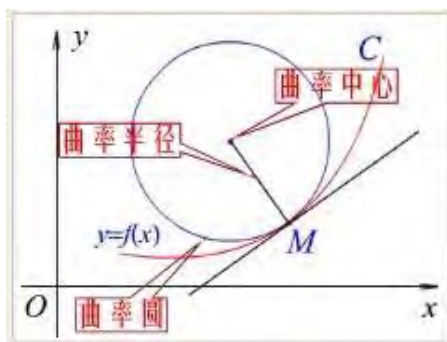
则称该插值法为多项式插值。

(2) 曲率与曲率半径

设曲线在点 M 处的曲率为 $K (K \neq 0)$ 。

在曲线凹的一侧作一个与曲线相切于 M 且半径为 $\rho = K^{-1}$ 的圆。

上述圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆，其圆心叫做曲率中心，其半径 ρ 叫做曲率半径。



曲率与曲率半径的关系：

$$\rho = \frac{1}{K} \quad K = \frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

数学模型：

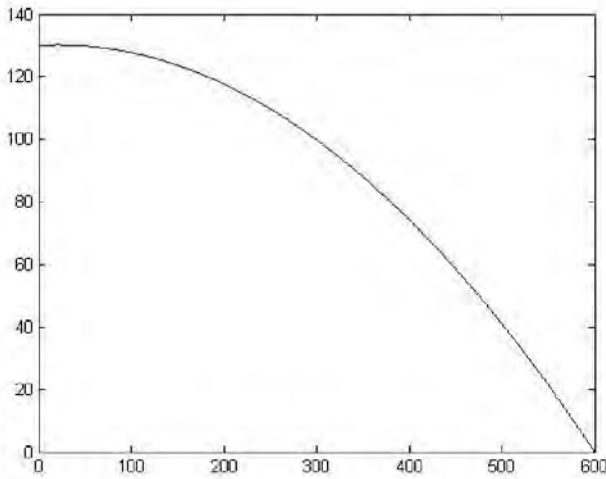
问题一，二建立的数学模型如下：

(1) 设加工工件外表面母线任意一点为 (a, b)

∴ 外母线方程为

$$y = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - x)^2 + 0.45(600 - x), x \in [0, 600] \quad [1-1]$$

外母线如图（1）所示：



图（1）

$$\therefore b = -\frac{7}{18 \times 10^3} (600 - a)^2 + 0.45(600 - a), a \in [0, 600] \quad [1-2]$$

外母线上任意一点 (a, b) 的切线斜率为：

$$y' = \frac{7 \times 2}{18 \times 10^3} (600 - a) - 0.45 = \frac{1}{60} - \frac{7a}{9000}, a \in [0, 600] \quad [1-3]$$

则母线上 (a, b) 法线斜率为：

$$y' = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{\frac{1}{60} - \frac{7a}{9000}}, a \in [0, 600] \quad [1-4]$$

则过 (a, b) 母线的法线方程为：

$$y - b = -\frac{1}{y'}(x - a), a \in [0, 600] \quad [1-5]$$



假设磨床砂轮与外母线垂直，且砂轮轴心没有明显跳动，砂轮磨损量很小，不考虑。

则以母线上点 (a, b) 为圆心，以砂轮半径 R 为半径做圆，圆的方程为：

$$(y - b)^2 + (x - a)^2 = R^2, a \in [0, 600] \quad [1-6]$$

(当圆心上的工件母线切线斜率 $k > a$ 时，则取 $x < a$ ，
当圆心上的工件母线切线斜率 $k < a$ 时则取 $x > a$)

注：由砂轮半径 R 选取 Mikron(美国米克伦公司)的柱式砂轮型号 *A60M6VCNM*

STOCK AVAILABILITY TABLE			
Cylindrical Wheels			
Size Dia x Thk x Bore	Std. Pkg.	Specification	Stock No.
TYPE 1 			
250 x 25 x 76.2	4	A60 M6 VCNM	V231M
300 x 25 x 127	3	A60 M6 VCNM	V267M
350 x 25 x 127	3	A60 M6 VCNM	V306M
350 x 25 x 127	3	A60 N6 VCNM	V307M
350 x 40 x 127	2	38A46 J8 VBE	V316
350 x 40 x 127	2	A60 M6 VCNM	V315M
350 x 50 x 127	2	A60 N6 VCNM	V326M
400 x 40 x 127	1	A60 M6 VCNM	V350M
450 x 63 x 254 1-325 x 13	1	A60 M6 VCNM	V387M
500 x 80 x 203.2	1	A60 M6 VCNM	V408M
TYPE 5 			
300 x 40 x 127 1-190 x 16	2	38A 60 K5 VBE	V286
300 x 40 x 127 1-190 x 16	2	A60 M6 VCNM	V285M
350 x 40 x 127 1-190 x 16	2	A60 M6 VCNM	V317M
400 x 40 x 127 1-190 x 16	1	A60 L6 VCNM	V340M
400 x 40 x 127 1-190 x 16	1	A60 M6 VCNM	V352M
500 x 63 x 254 1-325 x 13	1	A60 M6 VCNM	V405M
400 x 50 x 127 1-190 x 16	1	A60 M6 VCNM	V362M

联合[1-2] [1-4] [1-5] [1-6]用 matlab 程序选 a 的步长为 40/300, 求解其图形如图
图所示:

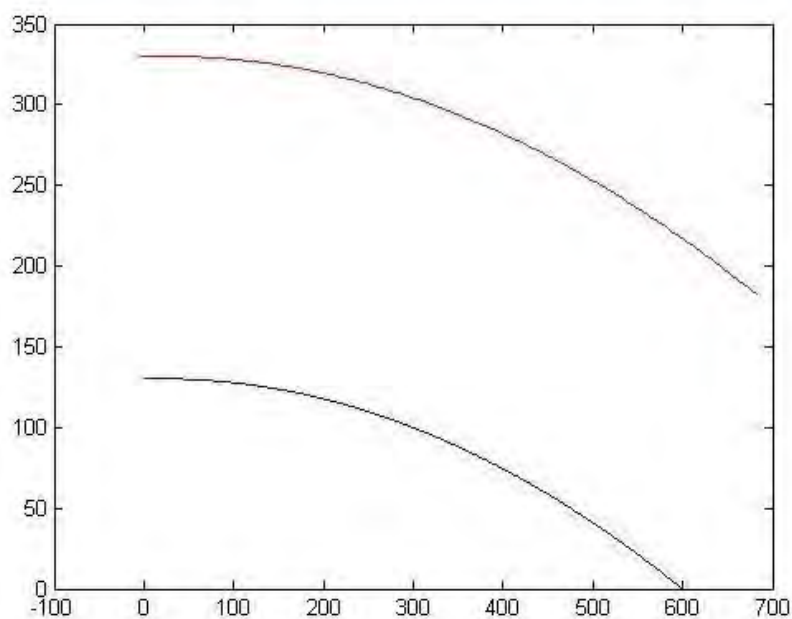


图 (2)

(2) 设加工工件外表面母线任意一点为 (a,b)

∴ 外母线方程为:

$$y = 30e^{-\frac{x}{400}} \sin\left[\frac{1}{100}(x + 25\pi)\right] + 130, x \in [0, 600] \quad [2-1]$$

外母线如图 (3) 所示:

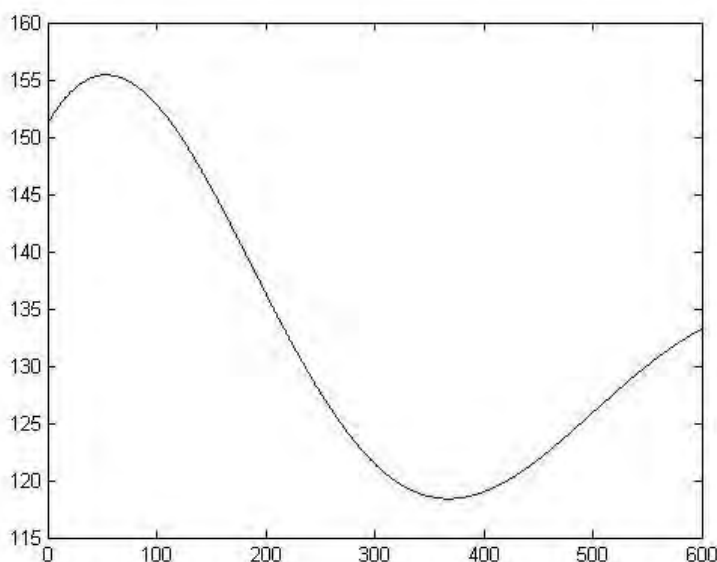


图 (3)

母线上任意一点 (a,b) , 则由[2-1]得

$$b = 30e^{-\frac{a}{400}} \sin\left[\frac{1}{100}(a + 25\pi)\right] + 130, a \in [0, 600] \quad [2-2]$$

则外母线上 (a,b) 上的切线斜率为:

$$y' = -\frac{1}{400} \times 30e^{-\frac{a}{400}} \sin\left[\frac{1}{100}(a + 25\pi)\right] + \frac{1}{100} \times 30e^{-\frac{a}{400}} \cos\left[\frac{1}{100}(a + 25\pi)\right] \quad [2-3]$$

则母线上 (a,b) 的法线方程为:

$$y' = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{-\frac{1}{400} \times 30e^{-\frac{a}{400}} \sin\left[\frac{1}{100}(a + 25\pi)\right] + \frac{1}{100} \times 30e^{-\frac{a}{400}} \cos\left[\frac{1}{100}(a + 25\pi)\right]}, a \in [0, 600]$$

[2-4]

则过 (a,b) 母线上的法线方程为：

$$y-b = -\frac{1}{y'}(x-a), a \in [0, 600] \quad [2-5]$$

假设磨床砂轮与 x 轴垂直且与砂轮轴心没有明显跳动，砂轮磨损量很小，不考虑则以母线上点 (a,b) 为圆心，以砂轮半径 R 为半径做圆，圆的方程为

$$(y-b)^2 + (x-a)^2 = R^2; a \in [0, 600], (y > R) \quad [2-6]$$

注：由砂轮半径 R 选取扬中市飞宇磨具公司的柱式砂轮型号规格 400*25*203 类型的轮式砂轮



联合 [2-2] [2-4] [2-5] [2-6] 用 matlab 程序选 a 的步长为 40/300，求解其图形如图所示：

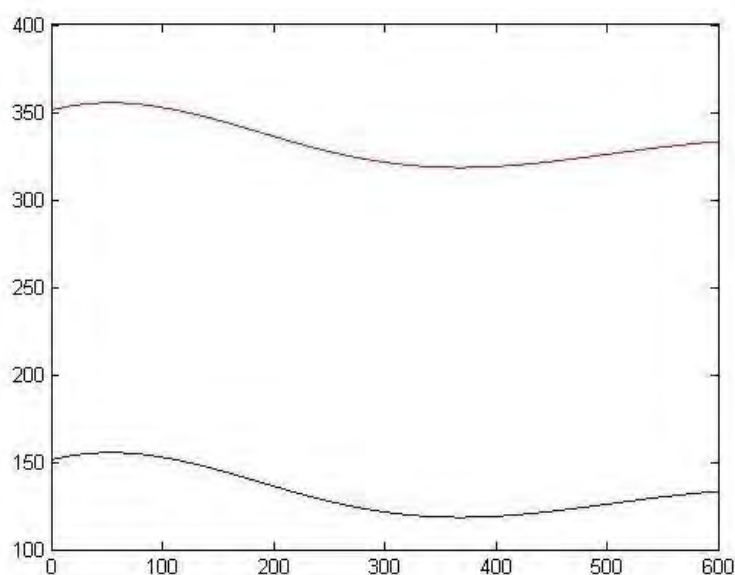


图 (4)

(3)

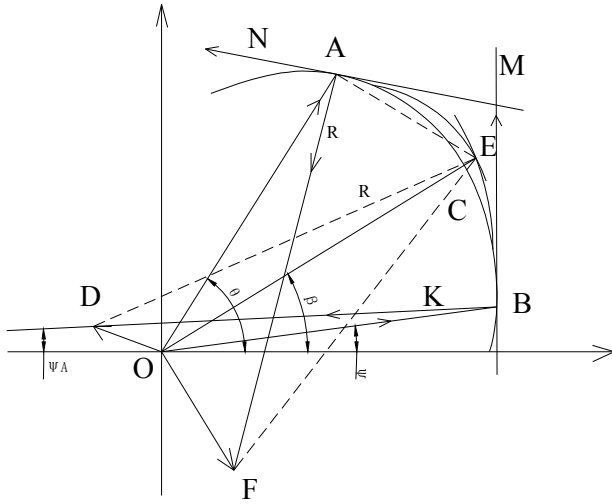


图 (5)

工件凸母线 B 点的矢径:

$$\overline{OB} = \{OB_i, OB_j\}$$

$$\text{其中} \quad \begin{cases} OB_i = \rho_{(\beta)} \cos \beta = B_i \\ OB_j = \rho_{(\beta)} \sin \beta = B_j \\ |\overline{OB}| = \rho_{(\beta)} \end{cases}$$

$$\text{记} \quad \rho_{(\beta)} = \rho, \quad \frac{d\rho_{(\beta)}}{d\beta} = \rho'$$

母线 B 点的切向矢量:

$$\overline{BM} = \frac{d(\overline{OB})}{d\beta} = \{BM_i, BM_j\}$$

$$\text{其中} \quad \begin{cases} BM_i = \rho' \cos \beta - \rho \sin \beta = B'_i \\ BM_j = \rho' \sin \beta + \rho \cos \beta = B'_j \\ |\overline{BM}| = \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} \end{cases}$$

母线 B 点的法向矢量:

$$\overline{BK} = (\overline{OB} \times \overline{BM}) \times \overline{BM} = (BK_i, BK_j)$$

$$\text{其中: } \begin{cases} BK_i = -\rho^2(\rho' \sin \beta + \rho \cos \beta) = -\rho^2 B_i' \\ BK_j = \rho^2(\rho' \cos \beta - \rho \sin \beta) = \rho^2 B_j' \\ |\overline{BK}| = \rho^2 \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} \end{cases}$$

$$\therefore \cos \phi_A = \cos(\overrightarrow{OX}, -\overline{BK}) = \frac{i \cdot \overline{KB}}{|\overline{BK}|} = \frac{\rho' \sin \beta + \rho \cos \beta}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}} = \frac{B_j'}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}} \quad (5)$$

$$\text{求 } \sin \phi_A = \frac{B_i'}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}} \quad (5a)$$

可用 (5) 或 (5a) 式求出 \overline{BD} 与 i 夹角 ϕ_A

$$\text{设 } \overline{BD} = T \cdot \overline{BK}$$

$$\therefore |\overline{BD}| = R$$

$$\therefore T = \frac{R}{|\overline{BK}|}$$

$$\overline{BD} = \{BD_i, BD_j\}$$

$$\text{其中 } \begin{cases} BD_i = -\frac{R(\rho' \sin \beta + \rho \cos \beta)}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}} = -\frac{RB_j'}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}} \\ BD_j = -\frac{R(\rho' \cos \beta - \rho \sin \beta)}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}} = \frac{RB_i'}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}} \\ |BD| = R \end{cases}$$

$$\text{矢量: } \overline{OD_i} = \overline{OB_i} + \overline{BD_i} = \{\overline{OD_i}, \overline{OD_j}\}$$

\therefore 加工 B 点, 刀具中心坐标

$$\overline{OD_i} = \overline{OB_i} + \overline{BD_i} = B_i - \frac{RB_i'}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}}$$

$$\overline{OD_j} = \overline{OB_j} + \overline{BD_j} = B_j + \frac{RB_j'}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}}$$

在给定最大加工余量:

CE=H 时求 $\angle BDE$

在 $\triangle BDE$ 中, 设 $\angle BDE$ 为 w , CE 为 H

$$\frac{\vec{k} \cdot (\vec{i} \cdot \overline{DE})}{|\overline{DE}|} = \sin(\vec{i}, \overline{DE}) = \sin(\omega + \phi_A) = \sin \omega \cos \phi_A + \cos \omega \sin \phi_A$$

$$\frac{\vec{i} \cdot \overline{DE}}{|\overline{DE}|} = \cos(\vec{i}, \overline{DE}) = \cos(\omega + \phi_A) = \cos \omega \cos \phi_A - \sin \omega \sin \phi_A$$

将 (5), (5a) 式代入 (8), (9) 求得:

$$\frac{DE_j}{R} = \frac{B_j'}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}} \sin \omega - \frac{B_i'}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}} \cos \omega$$

$$\frac{DE_i}{R} = \frac{B_j'}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}} \cos \omega + \frac{B_i'}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}} \sin \omega$$

$$\therefore \begin{cases} DE_i = \frac{R}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}} (B_j' \cos \omega + B_i' \sin \omega) \\ DE_j = \frac{R}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}} (B_j' \sin \omega - B_i' \cos \omega) \\ |\overline{DE}| = R \end{cases}$$

$$\text{矢量 } \overline{OE} = \overline{OD} + \overline{DE} = \{OE_i, OE_j\}$$

$$\text{其中: } \begin{cases} OE_i = OD_i + DE_i = B_i + \frac{R}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}} [(-1 + \cos \omega) B_j' + B_i' \sin \omega] \\ OE_j = OD_j + DE_j = B_j + \frac{R}{\sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}} [(1 - \cos \omega) B_i' + B_j' \sin \omega] \\ |\overline{OE}| = \sqrt{OE_i^2 + OE_j^2} \end{cases}$$

$$\cos(\overline{OE}, \vec{i}) = \cos(\beta + \varphi) = \frac{OE_i}{|\overline{OE}|} \text{ 或 } \sin(\overline{OE}, \vec{i}) = \frac{\vec{k} \cdot (\vec{i} \times \overline{OE})}{|\overline{OE}|} = \frac{OE_j}{|\overline{OE}|}$$

$$\beta_2 = \beta + \varphi \text{ 则 } \beta_2 = \sin^{-1} \frac{OE_j}{|\overline{OE}|}$$

$$|\overline{OC}| = \rho_{(\beta)_2} = \rho(\sin^{-1} \frac{OE_j}{|\overline{OE}|}) = \rho(\cos^{-1} \frac{OE_i}{|\overline{OE}|})$$

$$\therefore H = |\overline{OE}| - |\overline{OC}|$$

故可得方程

$$F_{(\beta, \omega)} = H + \rho(\cos^{-1} \frac{OE_i}{|OE|}) - |\overline{OC}| = 0$$

(4) 问题三,四建立的模型如下:

在整个加工过程中,若各个瞬时砂轮与加工工件的相切点是固定在底座和砂轮旋转轴的坐标系中同一个点(实际是点的一个邻域),随砂轮旋转形成一个圆周,那么砂轮在该圆周上的磨损会加大,从而影响加工质量。因此我们把问题考虑为在加工时使砂轮外侧圆周的表面磨损,即使砂轮加工的切点随时间而变化使它在砂轮圆周上分布均匀。对圆柱型砂轮来说就是使切点在直线上分布均匀,即改变 x、y 的增量,对轮式砂轮来说就是使切点在圆弧上分布均匀,即改变转角的增量。

问题 3 的数学模型如下:

$$\begin{cases} x(i-1) = x(i) - d \times \cos \theta_i; i \in 80 \cdot 2n \\ x(j-1) = x(j) + d \times \cos \theta_j; j \in 80 \cdot (2n+1) \end{cases} n = (1, 2, 3, \dots, (600/d+1)/80)$$

$$\begin{cases} y(i-1) = y(i) - d \times \sin \theta_i; i \in 80 \cdot 2n \\ y(j-1) = y(j) + d \times \sin \theta_j; j \in 80 \cdot (2n+1) \end{cases} n = (1, 2, 3, \dots, (600/d+1)/80)$$

d 为加工步长;

问题 4 的数学模型如下:

$$\begin{cases} \theta_i = -\theta_d; i \in (1, \dots, 120/\theta_d \times 1/2) \\ \theta_j = -\theta_d; j \in (120/\theta_d(1/2+2n)) \\ \theta_k = \theta_d; k \in (120/\theta_d(1/2+2n+1)) \end{cases} n \in ((600/d - 120/\theta_d \times 1/2)/(120 \cdot \theta_d))$$

θ_d 为转角步长;

3 模型的计算结果

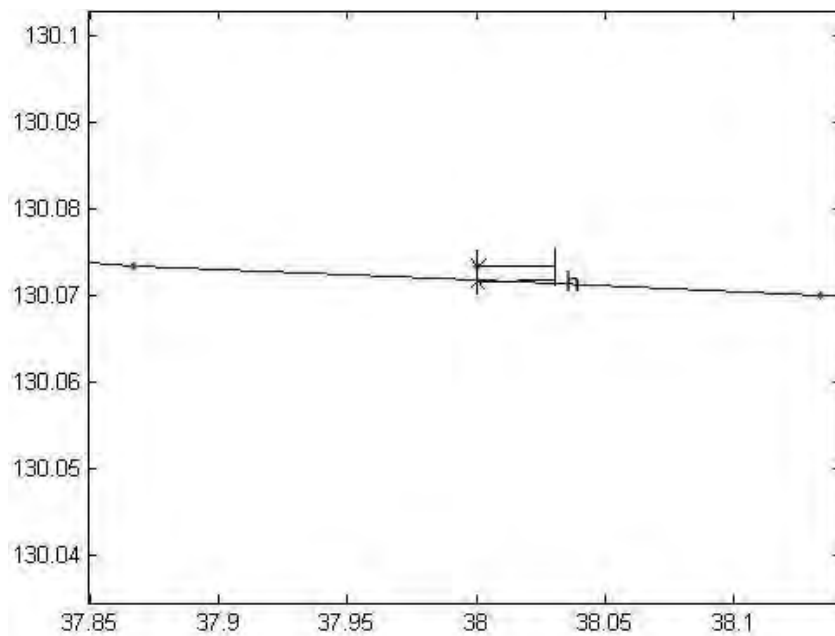
问题 1 的加工步骤和误差:

问题一加工步骤:

步骤一、对刀处坐标 (0,130), 刀具角度为 0.9549°

步骤二、按照每一步 x、y、 θ (转角) 所需的脉冲数发脉冲给步进电机

误差分析如图所示：



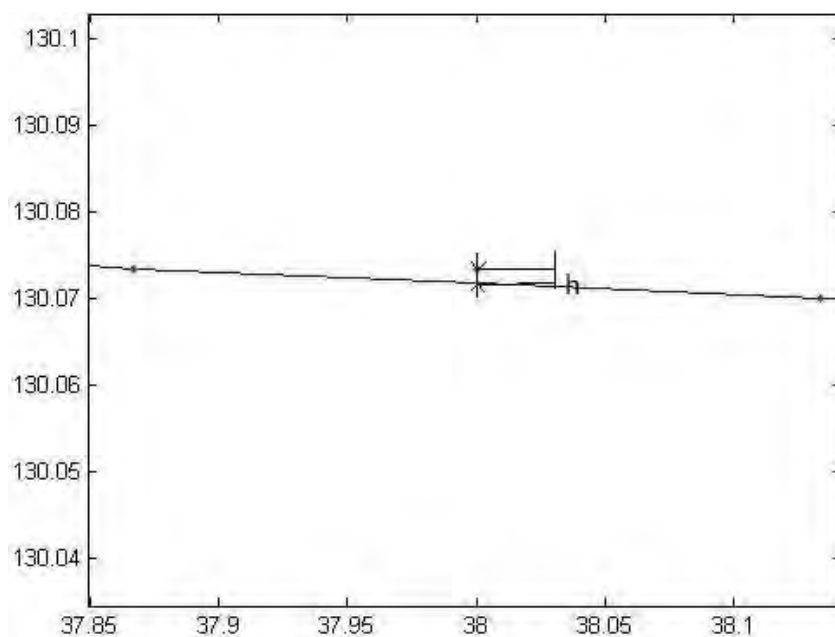
采用计算点 y 坐标和对应曲线上 y 坐标的最大差值。

问题 2 的加工步骤和误差：

步骤一、对刀处坐标 (0, 151.2133)

步骤二、按照每一步 x、y 所需的脉冲数发脉冲给步进电机

误差分析如图所示：



采用计算点 y 坐标和对应曲线上 y 坐标的最大差值。

问题 3 的 x 方向所需脉冲数的部分计算结果如下：

Columns 1 through 17

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Columns 18 through 34

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Columns 35 through 51

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Columns 52 through 68

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Columns 69 through 85

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 80 80 80 80 80 80

Columns 86 through 102

80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80

Columns 103 through 119

80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80 80

问题 3 的 y 方向所需脉冲数的部分计算结果如下：

Columns 1 through 17

0 -1 0 0 -1 0 0 -1 0 -1 0 0 -1 0 0 -1 0

Columns 18 through 34

-1 0 0 -1 0 -1 0 -1 0 -1 0 0 -1 0 -1 0 -1

Columns 35 through 51

0 -1 0 -1 0 -1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

Columns 52 through 68

0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1

Columns 69 through 85

0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1

Columns 86 through 102

0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0

Columns 103 through 119

1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0

Columns 120 through 136

0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0

问题 4 的转角所需脉冲数的部分计算结果如下：

Columns 1 through 8							
-9030	-9030	-9030	-9030	-9030	9030	9030	9030
Columns 9 through 16							
9030	9030	9030	9030	9030	9030	9030	9030
Columns 17 through 24							
9030	9030	9030	9030	9030	9030	9030	9030
Columns 25 through 32							
9030	-9030	-9030	-9030	-9030	-9030	-9030	-9030
Columns 33 through 40							
-9030	-9030	-9030	-9030	-9030	-9030	-9030	-9030
Columns 41 through 48							
-9030	-9030	-9030	-9030	-9030	9030	9030	9030
Columns 49 through 56							
9030	9030	9030	9030	9030	9030	9030	9030
Columns 57 through 64							
9030	9030	9030	9030	9030	9030	9030	9030
Columns 65 through 72							
9030	9030	-9030	-9030	-9030	-9030	-9030	-9030

参考文献

- 【1】 冯德坤、马香凤等 《包络原理及在机械方面的应用》，1994、12 超星图书库
- 【2】 王德全等 《砂轮特性与磨削加工》，2001、9 超星图书库
- 【3】 陈志雄、黄定明等 《数控编程》，2008、7 超星图书库
- 【4】 贾成斌 《天线罩数控专用磨床控制技术研究》 大连理工大学硕士毕业论文. 2005