

1 问题的重述

枪弹发射后，弹头上留下了枪管膛线的擦痕痕迹。枪管有 4 条凸膛线共 8 个棱，分为 4 个主棱和 4 个次棱。所以在弹头上留下的痕迹分为 4 片主棱线的痕迹和 4 片次棱线的痕迹。由于枪弹通过枪管时只旋转了一个很小的角度，擦痕分布成斜线状(与圆柱母线有一个夹角)，每一片痕迹的主要部分都显示为不同大小和不同深浅的线条。

在公安实践中，要根据弹头上的痕迹来判断两个弹头是否为同一支枪发射的。**传统方法**是通过显微镜肉眼观察，比对两个弹头上的线条型痕迹，看这些线条的粗细分布是否吻合。根据实践经验，对同一支枪发射的两个弹头，4 个主棱中通常有一至二个吻合得比较好；而 4 个次棱中通常可以有 2 至 3 个吻合比较好。

传统做法有两个弱点：一是效率极低，因为很多情况是“似是而非”的，所以对多个弹头（例如几十、几百个）的比对几乎无法进行；二是弹头样本不易保存，容易发生锈蚀损坏等情况。

现代高精度数据采集设备为**自动比对方法**创造了条件。**自动比对方法**的过程分为两步：

第一步，通过光学设备采集弹头上 8 片痕迹的 3 维数据，保存为 8 个文件。测量的基准平面取为固定在测量设备上的空间直角坐标系的 xoy 平面，沿 x 轴方向和沿 y 轴方向的测量步长均为 2.75 微米， z 的测量精度为 1 微米，数据的单位是毫米。由于数据量很大，题中只提供了对应 4 条次棱的数据，其顺序统一按照一个方向排序，例如按照从弹头的底部向头部看去为逆时针方向排序。基准平面在弹头痕迹的附近，测量时应调节弹头的姿态使得：（1）弹头圆柱中心线尽量平行于基准平面；（2） y 轴尽量平行于擦痕的走向。弹头的姿态靠人工调节，所以上述的两个平行都不是准确的平行。此外，这 4 条次棱的数据是分 4 次测量的，所以它们只能在 4 个独立的空间坐标系中分别显示它们的图像，没有一个参照系能使它们组合成一个整体图像在一个坐标系中显示。

第二步，采用适当的方法，通过电脑比对，判别一个弹头与样本弹头的相似程度，以便确认发射该弹头的枪支。这个问题很实用，但要求达到较高的准确性就很困难。本文需要解决下面几个问题：

- 1、在光学设备上采集弹头上痕迹的 3 维数据时，用于采集数据的光源和数据采集仪器是固定不动的，光源在被测弹头的侧上方，感光器在弹头的正上方；弹头由人工固定在支架上，可以由人工调节该弹头的位置和姿态（姿态是指弹头在空间的姿势或状态，通常与转动有关）。人工调节很难使两个弹头在同样位置和同样姿态情况下被测量，从而会造成测量误差。通常会造成 0.03mm 左右的平移误差和 0.2° 的转动误差。**第一个问题**是：如何处理由位置和姿态造成的测量误差，使得两个弹头可以尽量在相同位置和相同姿态的情况下进行比对。（这里假设弹头的直径为 7.90mm，长度约为 12mm）
- 2、弹头表面的损伤、锈迹、油斑、杂质物及痕迹生成的随机性，会造成数据误差和噪声。**第二个问题**是：采取适当的方法去消除这些误差和噪声。
- 3、附件中给出了两部分数据，第一份是给出了 6 支枪发射的 12 个弹头的次棱数据，**第三个问题**是：依据这些数据，找出可以用于对比的特征；并给出提取这些特征的方法；选用合适的方法，挑选出比对效果比较好的数据区域。

- 4、第二份数据是 11 支枪的 22 个弹头的次棱数据，**第四个问题是：**用解决第三个问题的方法给出这 22 个弹头痕迹两两之间的相似程度，并给出每个弹头按相似度由高到低给出与之相似的前 5 位的弹头文件号。

2 问题的分析

枪管内部的特征信息通过射击传递给子弹，表现为弹头表面深浅不同的细纹。现代高精度数据采集设备可以获得弹头表面的高度信息，从而使弹头自动对比成为可能。

利用光学设备采集弹头上痕迹的 3 维数据时，弹头的位置和姿态需人工调节。而人在操作设备时，很难使得两个弹头在同样的位置和姿态下被测量，故测量误差是不可避免的，只能通过处理测量数据来尽量消除误差。对于问题一，关键就在于如何利用题中所给的 3 维数据来刻画由弹头姿态和位置误差。文中提到测量误差指的是两个弹头在空间放置的位置和姿态的差异，是一种相对误差，可以通过固定其中一个弹头，另外一个弹头在误差范围调整位置和姿态的办法来消除。

实测数据不可避免地包含许多数据误差和噪声，所以消除完人工测量误差后，除噪成为第二个问题。目前已知的除噪方法有很多种，比如：小波分析、中值滤波、均值滤波等，关键是如何找到一种适合的除噪方法，既能除去无用的噪声又能尽可能真实地再现弹头表面的痕迹特征。

对于问题三，弹头表面的高度信息是弹痕的直接反应，可以利用等高线来再现弹头表面的纹理特征，通过对比等高线的分布形态以及对对应点的高度值，便可大致比对出结果。但是这种方法虽然简单直观，但是没有体现自动化比对的特征。所以需要我们找一种更加客观定量的方法。场的相关性分析可以比较两个高度场之间的相似程度，可以认为，每支枪在其枪管内某个特定的部位携带有能够标识自身的痕迹信息，表现在高度场中，即为在某个特定的区域，同一把手枪发射的弹头上的高度信息最相关，而不同手枪发射的弹头在该区域的高度信息不相关。由于题中提供的是 3 维空间数据，所以确定了特征区域，也就能找到合适的比对数据。

前面三个问题实际上是提出了一套自动对比的方案，问题四便是对这套方案效果的验证。

3 模型的假设与名词解释

模型的假设：

- 1、直角坐标系的 z 轴方向垂直向上，过 $z=0$ 的 xoy 平面与弹头圆柱上表面相切。
- 2、排除其他人工损坏和各种随机因素的影响，我们认为同一个弹头上的四条次棱线是相互平行的。

名词解释：

- 1、相对深度：弹痕表面相对于圆柱面在法线方向的深度
- 2、展平面：为了消除弹痕所在圆柱面的曲率对测量数据信息的影响，将弹痕所在圆柱曲面沿 x 轴拉伸而成的平行于 xoy 的平面，对某一条次棱而言，则是将其测量区域的弹头表面的圆弧展开而形成的平面。
- 3、姿态标识线：能够唯一表示弹头空间位置和姿态的直线。

4 问题一的求解

4.1 展平面模型

4.1.1 模型的准备

弹痕所在的圆柱面有一定的弧度，光学仪器所采集到的原始测量高度数据受到圆柱曲面的影响，原有高度数据不能够真实反映弹痕真实情况，需要去掉圆柱曲面曲率的影响，使得数据能够较好反映弹痕相对于圆柱面的真实深度。由于弹头受线膛内表面的挤压和剪切、刮擦作用在披甲表面形成的许多凹陷和突起的纹路。图 1 是固定某一 y 值，沿 xoz 平面的剖面图，利用该图我们来说明具体的校正过程：

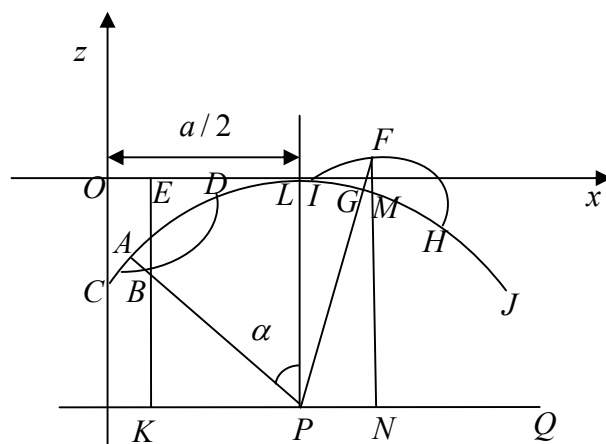


图 1 弹痕深度计算示意图

其中：圆弧 CLJ 为光学设备沿 x 方向的扫描区域， x 轴与弹头表面相切于扫描弧段的中点 L ； a 为 x 方向的扫描宽度； P 为弹头剖面的圆心，过圆心 P 作 x 轴的平行线 PQ ；弧 CBD 为凹痕截面，弧 IFH 为凸痕截面，设弹头半径为 R 。

对于凹痕 CBD 而言，凹痕截面内任意点 B ，过 B 作 z 轴的平行线分别交 x 轴于 E 点，交 PQ 于 K ，则 EB 为即为已知测量深度 z 。连接 PB 并延长 PB 交圆弧于 A ，由于半径 AP 垂直于过点 A 的切平面，则 AB 为凹痕的实际深度。显然，此种情况下，由于弹头本身曲率的影响，测量值与凹痕的实际深度有较大的误差，根据几何关系，我们可以求出凹痕相对于弹头表面的实际深度：

$$\begin{aligned} |AB| &= |AP| - |BP| \\ &= |AP| - \sqrt{|BK|^2 + |KP|^2} \end{aligned} \quad (1)$$

设 B 点的坐标为 (x, z) ，则：

$$|KP| = a/2 - x, |BK| = |EK| - |EB| \quad (2)$$

而： $|AP| = |EK| = |LP| = R, |EB| = |z|$ ，则凹痕点 B 相对于弹面的实际深度为：

$$|AB| = R - \sqrt{(R - |z|)^2 + (a/2 - x)^2} \quad (3)$$

由于凹痕始终是低于弹头表面的，所以在上述的坐标系下，凹痕处的 z 值是恒小于

0 的。于是有：

$$|AB| = R - \sqrt{(R+z)^2 + (a/2 - x)^2} \quad (4)$$

对于凸痕 IFH 而言，过 P 做任意直线交弹面圆弧于 G 点，交凸痕于 F 点，设其坐标为 F(x,y), 过 G 点做 GS ⊥ KP 于点 S, 则 F 点相对于弹面的实际高度：

$$\begin{aligned} |FG| &= |FP| - |GP| \\ &= \sqrt{|PN|^2 + |FN|^2} - R \end{aligned} \quad (5)$$

而 $|PN| = |x - a/2|$, $|FN| = R + z$, 故：

$$|FG| = \sqrt{(x - a/2)^2 + (R + z)^2} - R \quad (6)$$

4.1.2 模型的建立

在图 1 的基础上，固定 C 点，将弹头弧面 CLJ 沿 x 方向拉伸，展成与水平面平行的平面，并将 x 轴整体向下平移至 C 点，则弹头剖面变成如下图所示的结构：

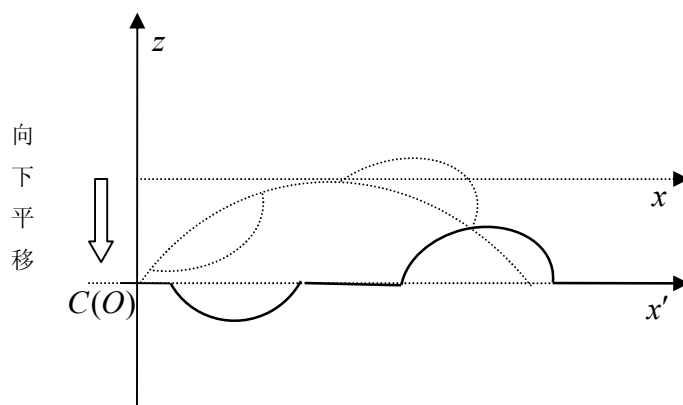


图 2 展平面过程示意图

从图 2 可以看出，弧面展成平面后，成功的将研究圆弧上的弹痕特征问题转化成为研究平面上的弹痕特征问题。凹痕点的坐标值恒为负值，凸痕的坐标值则始终大于零，很好的将凹痕和凸痕区别开来，提取出了弹痕特征。需要注意的是，原来圆弧上点的在拉伸后发生了变化：各个点的 x 坐标值在 x 方向上都有不同程度的拉伸，对于光滑圆弧上的点（非弹痕点），对于固定的 y 值，其在展平面中的新的 x 坐标值即为原坐标系中点 C 到该点的弧段长。

4.1.3 模型的求解

根据弹头表面不同点的位置特征，我们选取光滑表面点 A、凹痕点 B、凸痕点 E 为代表点，分别讨论其在展平面中的坐标取值。在下面的讨论中，x 表示为原坐标系的横轴，x' 表示新的坐标系的横轴，C 点为新坐标系的原点，P 点为圆心，PN 为垂直于 z 轴的射线，β 为 CP 与 PN 所成的角度，α 为 PN 与代表点与圆心的连线所夹的角度，γ 为 CP 代表点与圆心的连线时所成角度。

设点 A 的新的坐标系中的坐标为 A(x', z')，在原坐标系中的坐标为 A(x, z)，在原来的坐标系中求弧长：

1) 对于圆弧上的代表点 A：

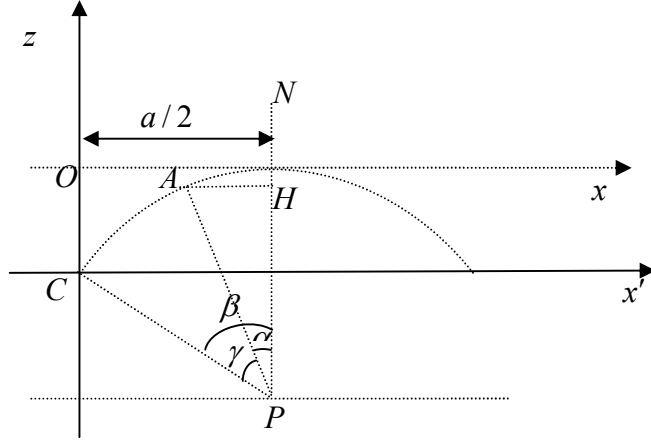


图 3 圆弧上点的 x 坐标换算图

\widehat{AC} 的长度即为 A 点在展平面内的新的 x 坐标值。连接 AP，并过 A 做 $AH \perp PN$ 。则有下面的关系：

$$\begin{cases} |\widehat{AC}| = R \times \gamma = R \times (\beta - \alpha) \\ \sin \beta = \frac{|OL|}{|CP|} = \frac{a/2}{R} \\ \tan \alpha = \frac{|AH|}{|HP|} = \frac{|a/2 - x|}{R + z} \end{cases} \quad (7)$$

故：

$$|\widehat{AC}| = R \times \gamma = \begin{cases} R \times (\arcsin \frac{a/2}{R} - \arctan \frac{a/2 - x}{R + z}) & (x < a/2) \\ R \times (\arcsin \frac{a/2}{R} + \arctan \frac{x - a/2}{R + z}) & (x \geq a/2) \end{cases} \quad (8)$$

综合 (7)、(8) 两式，A 点在展平面的 x 坐标的表达式可以统一为：

$$x' = |\widehat{CD}| = R \times (\arcsin \frac{a/2}{R} - \arctan \frac{a/2 - x}{R + z}) \quad (9)$$

则 A 点在展平面中的坐标为：

$$\begin{cases} x' = R \times (\arcsin \frac{a/2}{R} + \arctan \frac{x - a/2}{R + z}) \\ z' = 0 \end{cases} \quad (10)$$

2) 对于凹痕代表点 B，如图 4 所示。连接 PB 交圆弧于 D，过 D 点可做一条切线 $DM \perp DB$ 。

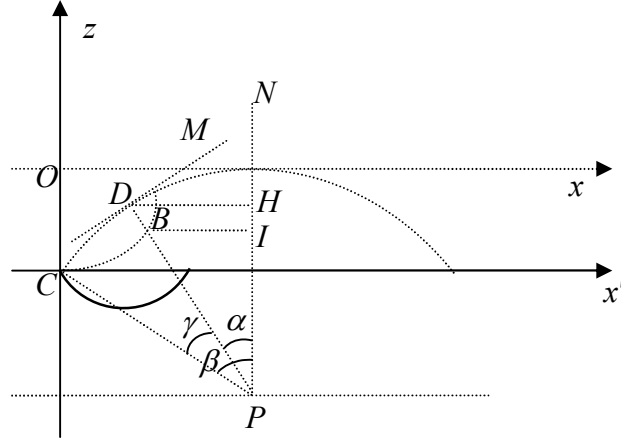


图 4 凹痕处点的 x 坐标换算图

由上面的分析可知， $|DB|$ 即为凹痕点相对于弹头表面的实际深度，则 B 点在展平面的高度坐标值为：

$$z'_B = -|BD| \quad (11)$$

根据上面高度校正后得到的结果， z'_B 还可以表示为：

$$z'_B = \sqrt{(x_B - a/2)^2 + (R + z_B)^2} - R \quad (12)$$

其中 (x_B, z_B) 为 B 点原来的坐标值。

$DM \perp DB$, DB 为 B 点深度值，故 B 点在展平面内的 x 坐标等于 D 点的 x 坐标，即： $x'_B = x'_D = |\widehat{CD}|$ ，在上面对 A 点的坐标值的讨论中，我们已经得到了光滑圆弧上的弧长公式，我们可以得到：

$$|\widehat{CD}| = R \times (\arcsin \frac{a/2}{R} - \arctan \frac{a/2 - x_D}{R + z_D}) \quad (13)$$

过 D 点做 $DH \perp PN$ ，过 B 点做 $BI \perp PN$ ， $\triangle BIP$ 与 $\triangle DPH$ 有共同的顶角 α ，于是有相似关系： $\frac{|BI|}{|IP|} = \frac{|DH|}{|HP|}$ ，而

$$|BI| = a/2 - x_B, |IP| = R + z_B; |DH| = a/2 - x_B, |HP| = R + z_B \quad (14)$$

所以有：

$$\frac{a/2 - x_D}{R + z_D} = \frac{a/2 - x_B}{R + z_B} \quad (15)$$

将上面的比例关系代入 $|\widehat{CD}|$ 的计算公式，则凹痕点代表点 B 在展平面内的坐标为：

$$\begin{cases} x'_B = R \times (\arcsin \frac{a/2}{R} - \arctan \frac{a/2 - x_B}{R + z_B}) \\ z'_B = \sqrt{(x_B - a/2)^2 + (R + z_B)^2} - R \end{cases} \quad (16)$$

因为 B 点是任意取的，则对于所有的凹痕点有

$$\begin{cases} x' = R \times (\arcsin \frac{a/2}{R} - \arctan \frac{a/2 - x}{R + z}) \\ z' = \sqrt{(x - a/2)^2 + (R + z)^2} - R \end{cases}$$

3) 对于位于凸痕上的点 E, 连接圆心 P, 交圆弧于 G, 过 E 做 $ES \perp PN$, 过 G 做 $GF \perp PN$, 如图 5 所示：

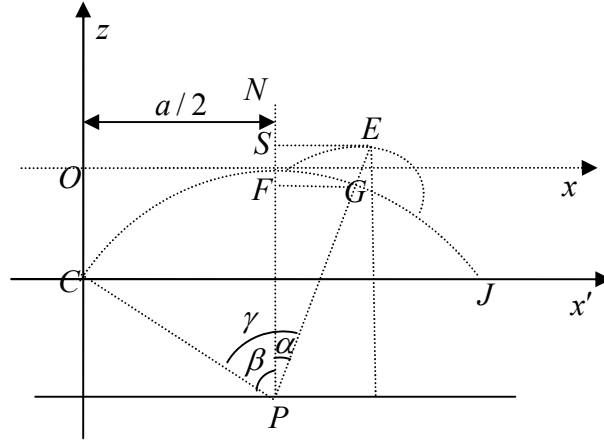


图 5 凸痕处点的 x 坐标换算图

同样，点 E 在展平面内的 x 坐标值即为弧长 $|\widehat{GC}|$ 。类似的，利用角度和相似关系可以求得：

$$\begin{cases} x' = |\widehat{CF}| = R \times (\arcsin \frac{a/2}{R} - \arctan \frac{a/2 - x}{R + z}) \\ z' = h = \sqrt{(x - a/2)^2 + (R + z)^2} - R \end{cases} \quad (17)$$

4.1.4 模型的结果

综合上面的讨论，对于弹头表面的任意点 A, 可以得下面的坐标变换关系式：

$$\begin{cases} x' = R \times (\arcsin \frac{a/2}{R} - \arctan \frac{a/2 - x}{R + z}) \\ z' = \begin{cases} 0 & \text{(当点A不是弹痕表面的点)} \\ \sqrt{(x - a/2)^2 + (R + z)^2} - R & \text{(当点A是弹痕表面的点)} \end{cases} \\ y' = y \end{cases} \quad (18)$$

其中， (x, y, z) 表示原坐标， (x', y', z') 表示展平面内的新坐标。

4.2 姿态标示线模型

4.2.1 模型的准备

4.2.1.1 姿态标识区的确定

利用 4.1.2 中得到的坐标转化公式处理附件一中提供的 6 支枪 12 个弹头的次棱的采集数据，可以得到展平面内订正过的 x, z 值，并利用修正过后的数据绘制等 z 线。画出了附件一中所有次棱线痕迹的等高线图，图 6 是其中一支手枪的两个不同弹头上四条次棱表面的等高线的分布图。

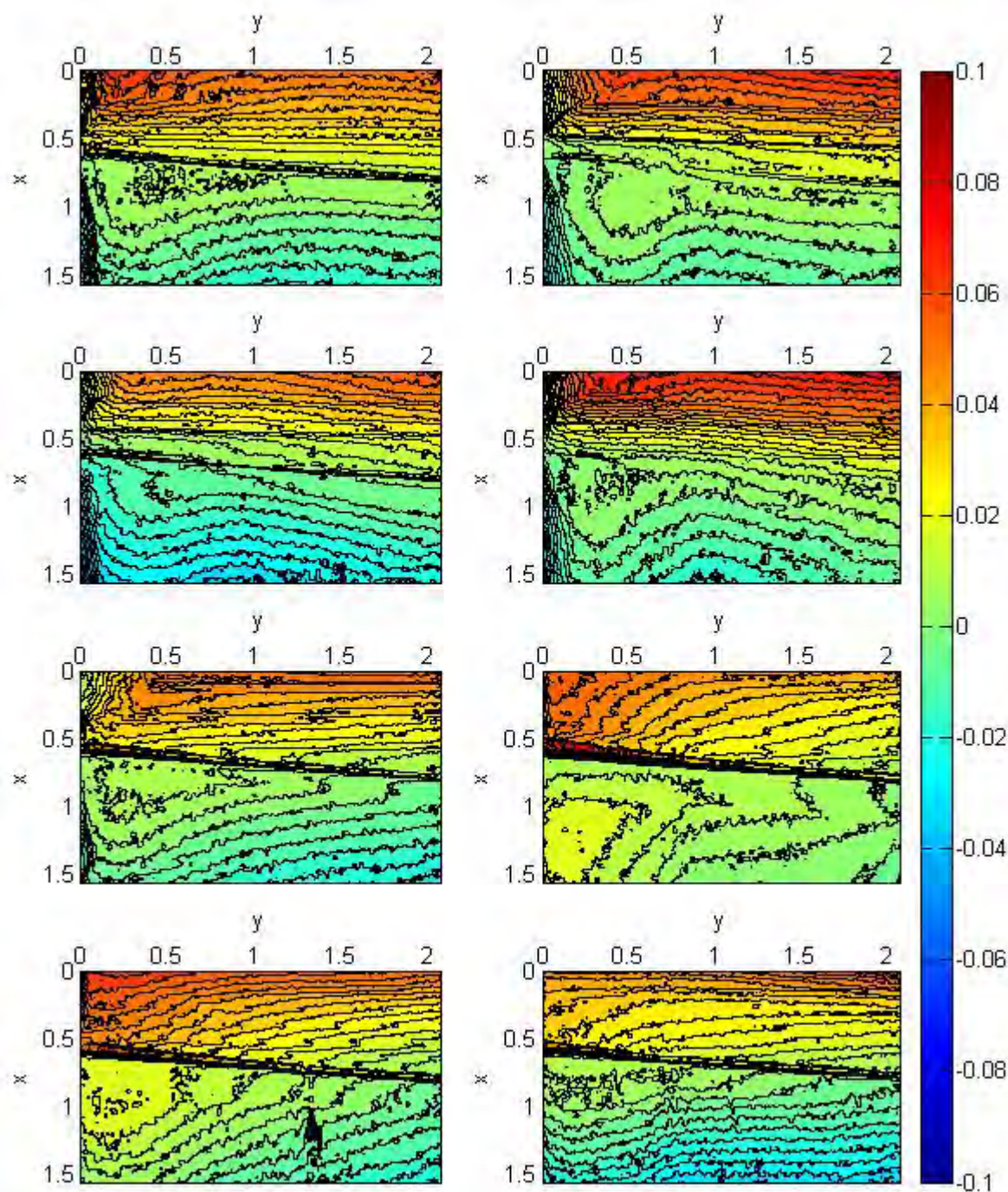


图 6 弹痕等高线分布图

图中横坐标为 y 轴，与弹体圆柱中心线走向大体一致，纵坐标为 x 轴。左侧四幅图像为同一弹头的不同四条次棱的痕迹图像，右侧则为另一个弹头的次棱的痕迹图像。观察 48 幅次棱表面的等高线图像可以发现次棱痕迹的一些特征：

1、绝大多数图像上都有一条明显的细带状高值区域，该条细带与 y 轴走向大体一致，与 y 轴有一定的夹角。

2、以细带为界，若从弹头的底部向头部看去，右侧为高度低值区，左侧为高值区。左侧高度值随 x 值的增大而递减。右侧的则完全反之，随着 x 值减小，高度值增大。

3、等高线基本上呈现线状分布，在高值细带右侧等高线的线状特征不如右侧明显，在弹尾处的次棱痕迹呈现山脊状分布；右侧的等高线基本与 y 轴的走向一致。

要消除由于子弹放置位置和姿态造成的测量误差，首先要解决的是如何利用已有信息来刻画子弹的空间位置。考虑到弹痕形态特征的空间分布是子弹空间位置和姿态很好的再现和反映，分析上面的观察结果，我们将细带高值区的空间分布作为空间位置和姿态的标识，理由如下：

1、在上面观察到的特征中，细带高值区的形态是最稳定，最显著，且最一致的；
2、细带高值区在 xoy 平面中分布近似为一直线，形态简单，直观，便于刻画；
3、对比同一手枪的两颗弹头的次棱线等高图，发现图中的细带区的倾斜程度和在 y 轴上的截段位置都极为相似，但是对比不同的手枪发射的弹头，该细带区的形态则存在差异。

4、对同一手枪发射的某一个弹头，四张次棱线等高图上该细带高值区基本平行。

所以，综合上面的分析，我们认为细带高值区就是要寻找的姿态标识区。

4.2.1.2 搜索局部极大值点

题中提到人工调节通常会造成 0.03mm 左右的平移误差和 0.2° 的转动误差。要消除如此微小的姿态误差，那么刻画姿态特征的标识也必须足够精确，否则，标识本身的误差就会将姿态误差淹没。所以我们要进一步提取细带状高值区的特征，尽可能的量化精确化子弹在空间的位置和姿态。

细带高值区在空间中的表现是 x 方向上一有限区间内高值点（高度）的集合，由于误差和噪声等各个方面的影响，图中表现出来的细带状区域在不同的区间的宽度不一，分布不是很均匀，达不到精度要求。所以考虑化“带”为“线”，通过寻找在 x 方向上的局部极大值点，拟合出一条姿态标识曲线。

1、确定剖面搜索上下界

固定 y 值不变，沿 x 方向的作出 xoz 平面内的弹痕高度剖面图如图 7 所示。

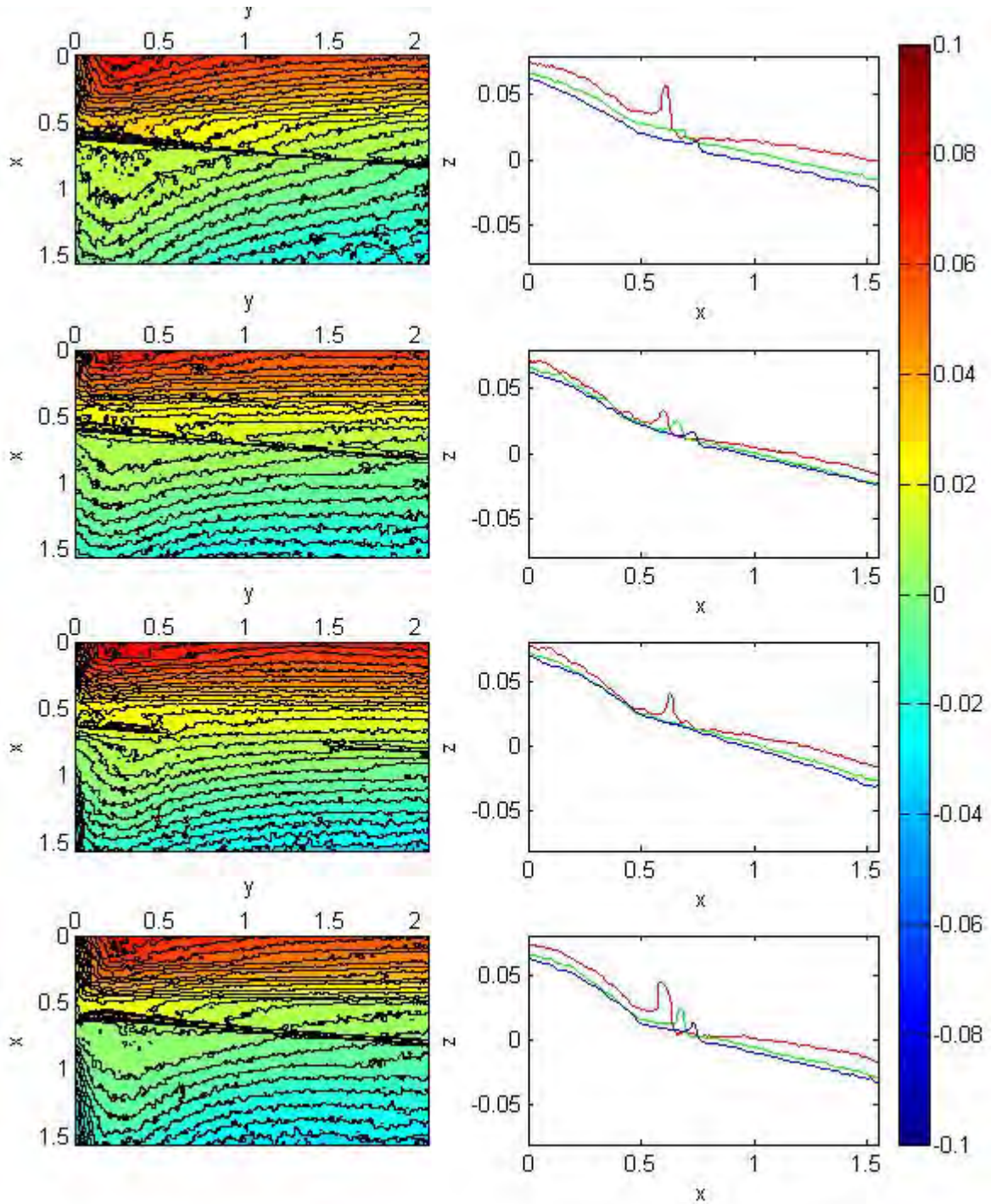


图 7 左侧：等高线图；右侧：固定 y 值，沿 x 方向的 xoz 平面内的高度剖面图

在图中，红、蓝、绿色曲线分别代表 $y=0.27225m$ ， $0.82225mm$ ， $1.37225mm$ 时高度随 x 的变化曲线。

不难看出三条曲线均在一段很小的范围内有一明显的极大值，极大值点一般落在 $[0.5, 0.8]$ 区间内，于是将此区间定为可行搜索区间。此处寻找上下界只是为了方便确定剖面点位置的可行搜索范围，上下界的具体坐标位置数值对弹痕姿态标识线的精确位置不是决定性的，所以只要指定一个尽量合理的区间上下界范围即可。

2、搜索姿态标识点

具体操作方法如下：

首先为了使得所寻找的上下界能够避免受到局地噪声等造成的极小值影响，进行高斯滤波，使得剖面深度曲线相对平滑；

其次，从 $y=0.00\text{mm}$ 开始，在 xoz 平面内，沿 x 正方向，在搜索区间内搜索 z 的极大值点，搜索结果可以分为以下三种情况：

1) 若在搜索区间内找不到极大值，姿态标识点不存在；

2) 若正好只找到一个局部极大值 $z_{0\max}$ 点，则在 $y=0$ 处姿态标识点的坐标为 $(0, z_{0\max})$ ；

3) 若在搜索区间内的极大值有 n 个： $z_{0\max 1}, z_{0\max 2}, z_{0\max 3}, \dots, z_{0\max n}$ ，观察弹痕表面沿 xoz 平面的变化曲线可知：曲线左高右低，说明弹痕表面为一斜面，这使得我们找到的极大值点往往不能刻画凸痕，因为点位于斜面上本来的高度值就较大，所以考虑计算各极大值和其左侧的临近的极小值之差（相对极大值）。若对于局部极大值 $z_{0\max 1}$ ，在其左侧找不到极小值，则 $z_{0\min 1} = 0.5$ ，找到 $\text{Max}(z_{0\max 1} - z_{0\min 1}, z_{0\max 2} - z_{0\min 2}, \dots, z_{0\max n} - z_{0\min n})$ 若 $z_{0\max i} - z_{0\min i}$ 最大，则在 y_0 处姿态标识点的坐标为 $(0, z_{0\max i})$ ；

最后，当一次搜索完成后，我们都可以得到一个姿态标识点 $(y_i, z_{\max i})$ ，(当然有找不到姿态标识点的情况，上面已经做出了阐述)，然后以 0.00275mm 为步长向 y 的正方向推进，重复上面的过程进行下一次搜索，直到 y 的最大观测值。

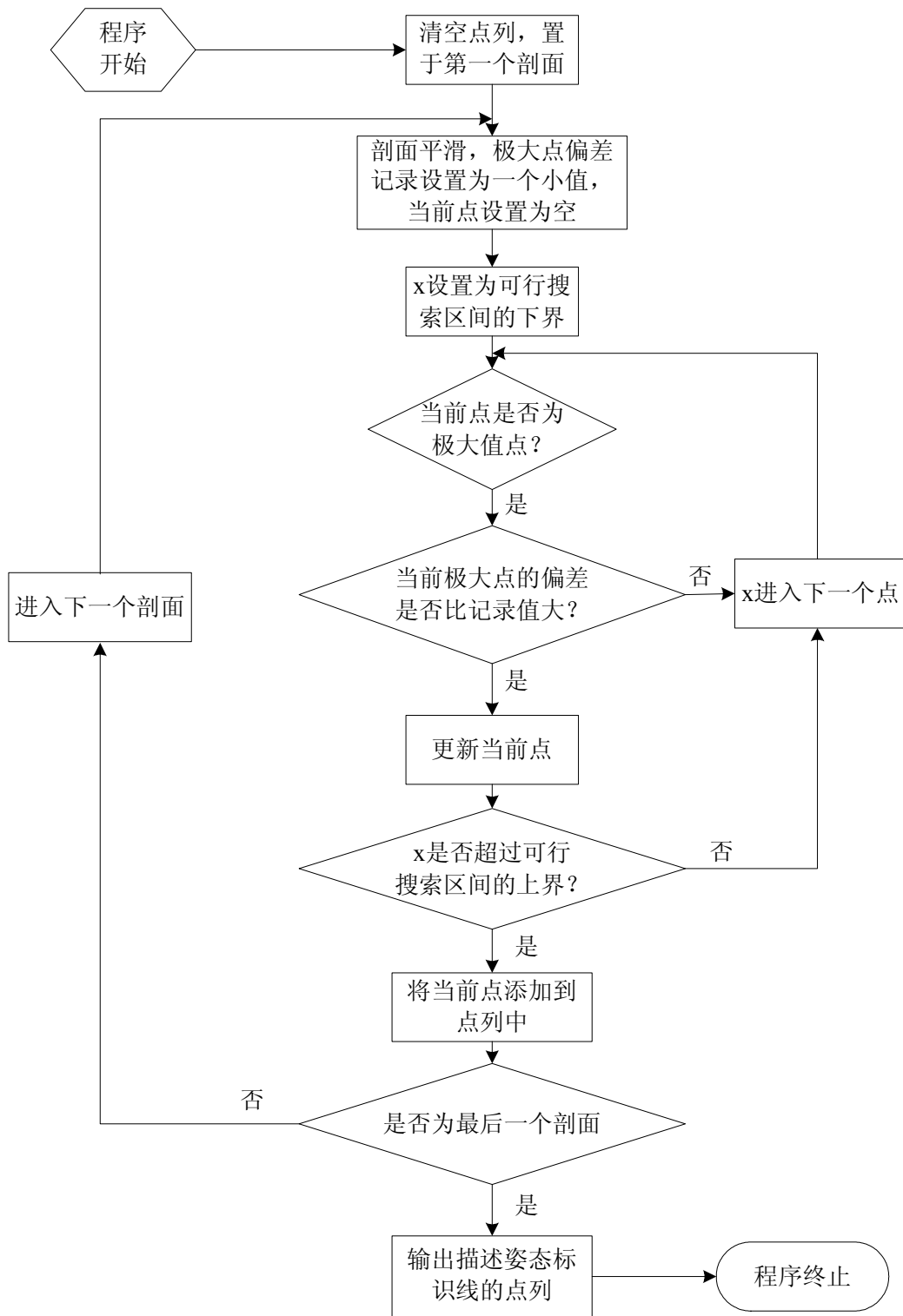


图 8 确定描述姿态标识线的点列程序流程图

4.2.2 模型的建立

前面我们已经得到了姿态标识点的点 $(y_0, z_{\max 0}), (y_1, z_{\max 1}) \cdots (y_i, z_{\max i}), \cdots (y_n, z_{\max n})$ 。

现在就是用直线拟合的方法用得到的点列来构造一条姿态标识线。（考虑到误差影响使得子弹上留下的弹痕姿态标识线点序列不是在一条直线上且会有震荡噪声。因此，

我们的目标是寻找点列连线最接近直线段线段。具体步骤如下（如图 9）：

- 1、对得到的姿态标识点列进行直线拟合。
- 2、由于我们得到的高度的局部极大值来自实测数据，这其中势必包含许多误差和噪声，个别点可能会严重偏离拟合直线，使得拟合效果变差，所以需要一定的方法剔除掉影响拟合效果的异常点。
- 3、计算姿态标识点到拟合直线的距离，若距离大于某一阈值，认为该点异常，剔除掉。这里考虑用 3 倍标准偏差作为距离阈值。在工程实际中，我们经常遇到服从正态分布的随机变量，由概率统计的知识可知，如果随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则有 $P(|\mu - \xi| < 3\sigma) > 0.997$ 。也就是说随机变量 ξ 落在区间 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的概率等于 0.003，这种小概率事件几乎是不可能发生的。落在区间 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 外的 ξ 值可以认为是异常值。
- 4、结合本题的具体情况，若将姿态标识点到拟合曲线的距离 d 近似地看做是服从 $N(0, \sigma^2)$ 的随机变量，于是：

$$\begin{cases} \bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i \\ \sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2 \end{cases} \quad (19)$$

其中： d_i 为姿态表示点 i 到拟合直线的距离。若 $|d_i| > 3\sigma$ 则去除该点。

- 5、剔除异常点后，重复操作第 1-3 个步骤，直到不再有点被剔除或者剩余点数小于 10 时，停止迭代。此时得到的拟合直线就是我们要找的姿态标识线。

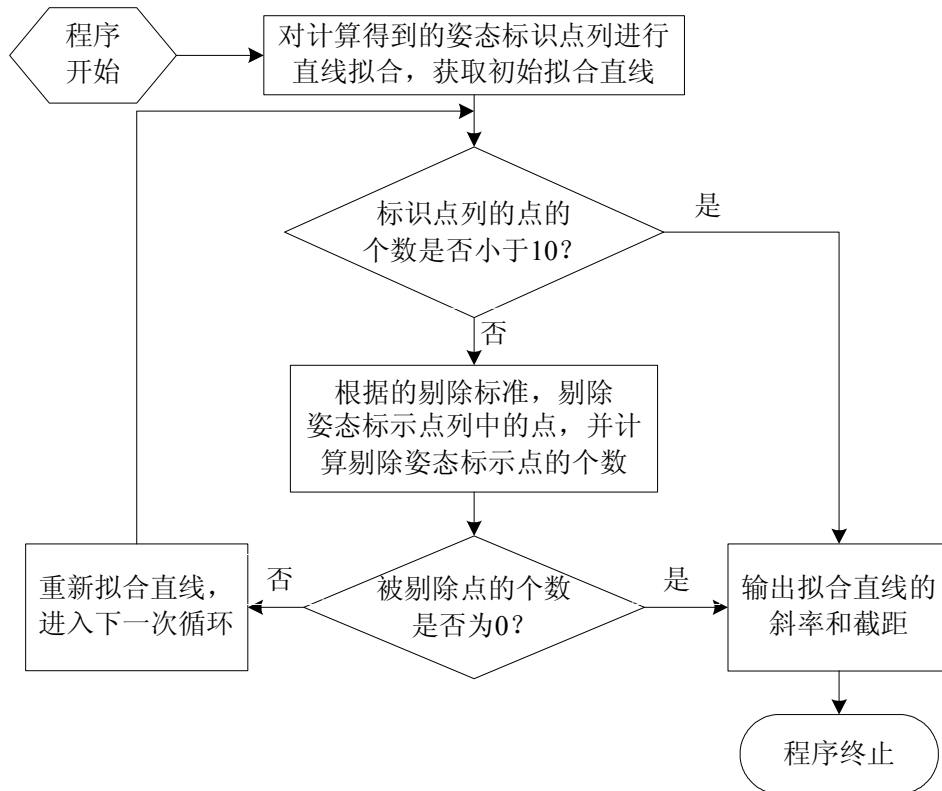


图 9 姿态标识线确定程序流程

4.2.3 模型结果的讨论

根据 4.2.3 描述的步骤，我们得到了 12 个弹头的 48 条标识特征线。图 10 为等高线图和与之对应的姿态标识线图。在标识线图中：红线是迭代拟合得到的标识线，黑线是极值点列的连线。

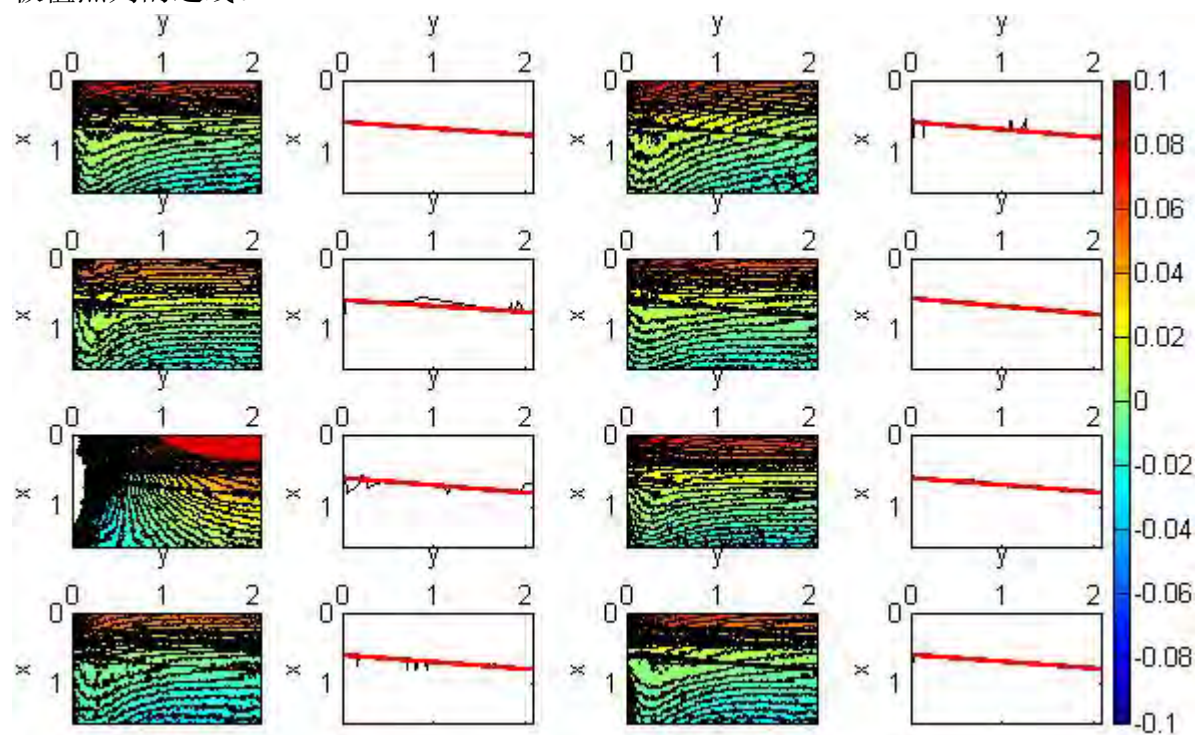


图 10 等高线图及其姿态标识线

从图 10 中可以看出弹头的标识线是基本平行的，这还是基本符合事实的。因为人工测量的造成的误差很小，所以，由人工测量造成的弹头姿态的偏移很小，换言之，大多数弹头都是出于基本相同的姿态和位置下被测量的。所以，标识其姿态的标识线也应该是基本平行的，所以我们得到的姿态标识线是能够反映弹头在空间的位置和姿态的。由拟合直线的方程，我们可以很容易的得到各条姿态标识线的截距和斜率，下表列出了其中两颗子弹的姿态标识线的情况：

表 1 姿态标识线的斜率和截距表

手枪	次棱	斜率	截距	倾角	手枪	次棱	斜率	截距	倾角
77T1-1203959	1	0.111	0.5491	6.3346	77T1-1812492	1	0.1041	0.547	5.9424
	2	0.0903	0.6194	5.1575		2	0.0836	0.571	4.7793
	3	0.097	0.5903	5.5409		3	0.0829	0.586	4.7398
	4	0.0955	0.5925	5.4558		4	0.0945	0.6094	5.3998
77T2-1203959	1	0.1202	0.5449	6.8552	77T2-1812492	1	0.1022	0.5719	5.8365
	2	0.1114	0.5627	6.3585		2	0.0466	0.5216	2.669
	3	0.098	0.5953	5.5953		3	0.0722	0.6469	4.1279
	4	0.0838	0.5948	4.792		4	0.0841	0.6113	4.8085
77T1-	1	0.0869	0.5596	4.9685	77T1-	1	0.0939	0.5886	5.3664

1504519	2	0.0161	0.5749	0.9224	1923252	2	0.1001	0.5769	5.7168
	3	0.0598	0.5864	3.4208		3	0.0942	0.5805	5.3805
	4	0.1218	0.5329	6.945		4	0.107	0.5712	6.1088
77T2- 1504519	1	-0.004	0.7663	-0.247	77T2- 1923252	1	0.0998	0.597	5.6983
	2	-0.016	0.6924	-0.895		2	0.0091	0.7605	0.52
	3	0.1396	0.6696	7.9487		3	0.1075	0.5692	6.1341
	4	0.064	0.6403	3.6632		4	0.0909	0.5754	5.1956
77T1- 1811345	1	0.0881	0.5862	5.0347	77T1- 1928033	1	0.0895	0.5868	5.1143
	2	0.0826	0.5945	4.7208		2	0.0834	0.5891	4.7668
	3	0.1031	0.6028	5.884		3	0.1013	0.5574	5.7833
	4	0.0985	0.5994	5.6259		4	0.0879	0.5709	5.0248
77T2- 1811345	1	0.1049	0.5834	5.9895	77T2- 1928033	1	0.1061	0.5594	6.0589
	2	0.1108	0.5697	6.3231		2	0.1128	0.5341	6.437
	3	0.0975	0.6043	5.5669		3	0.0949	0.5649	5.4225
	4	0.0956	0.5952	5.4624		4	-0.545	0.7786	-28.58

题中提到人工造成的平移误差一般 0.03mm 左右转动误差一般在 0.2° 左右。但是我们算得的结果呈现的偏差超出了人工调节误差的范围。在计算中，每一条次棱的数据都能得到一条姿态标识线，对于同一个弹头就会有四条姿态标示线。表 1 中前四列给出同一个弹头四条姿态标识线的截距和斜率，对比发现，这四条线的截距误差很小，倾角误差相对较大。在某一确定的时刻，而一个弹头在空间只可能有一个确定的姿态。且此种误差虽然很小，但是大于了人工测量误差的范围，所以不是测量引起的，这说明在姿态曲线的确定过程当中存在误差。分析误差产生的原因，主要有以下几点：

- 1、数据本身未经过预处理，会受到噪声干扰，产生误差；
- 2、在寻找姿态标识点时，人为固定了搜索区间，这使得搜索出现偏差；

综上所述，姿态曲线存在一定的偏差，而且这样的偏差是数据搜索方法的误差造成的，这同时也说明任何一条姿态标识线都会有此种误差，于是不会影响比对的结果。

4.3 模型的运用：测量误差的校正

利用前面建立姿态标识线模型和展平面模型，得到了弹头的姿态标识线，它是 yoz 平面内的一条直线。而斜率和截距是可以决定直线在平面内的位置和姿态的两个特征，所以，可以通过调整姿态标识线的截距和斜率来消除弹头的测量误差。

文中提到：“人为调节很难使两个弹头在同样位置和同样姿态情况下被测量，从而会造成测量误差。通常会造成 0.03mm 左右的平移误差和 0.2° 的转动误差”。因此，以其中一颗子弹作为参照物，通过调整另一颗子弹的斜率和截距，使得两颗子弹之间斜率与截距误差尽量小，但是要求调整范围不超过规定的误差值。

一般来说，平移具有 x 和 y 两个方向，但本题主要考虑 x 方向平移误差。理由如下：由于同一 x 位置在 y 方向上的弹痕基本上是同一个次棱经过同一个位置时留下的。由弹痕图也可以验证这一点，弹痕的等高线更趋向平行于 y 轴方向。由于 y 向平移测量导

致的子弹留下的痕迹误差会很小， y 方向的平移对特征误差识别影响较小，因此，本文主要考虑 x 方向上的平移。

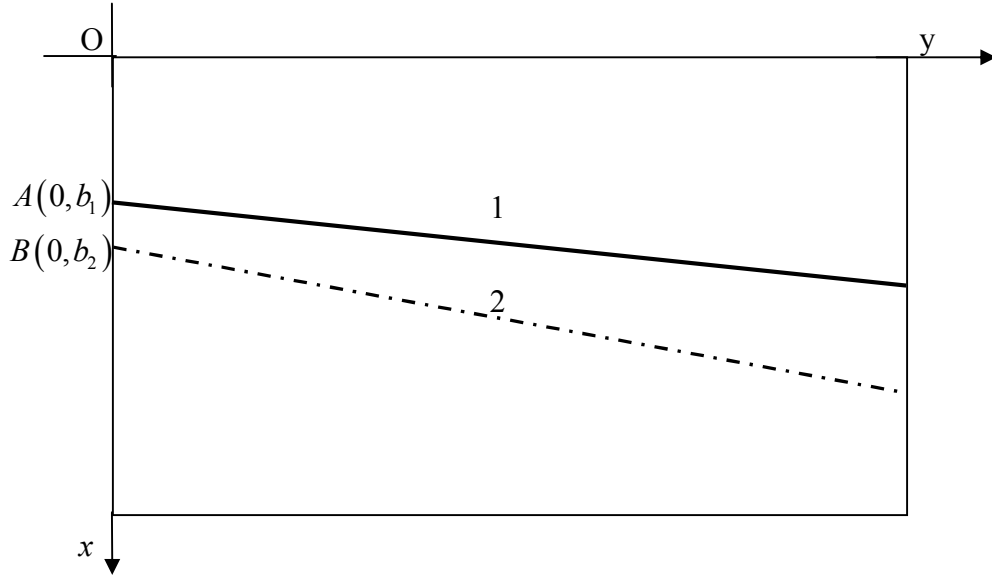


图 11 两个弹头的姿态标识线位置示意图

如图 11 所示，建立坐标轴。弹头 1 某次棱的姿态标识线 1（实线表示，以下称“线 1”）的方程为： $x = k_1 y + b_1$ 。其中 k_1 为线 1 斜率， b_1 为线 1 在 x 轴上的截距。弹头 2 某一次棱的姿态标识线 2（虚线表示，以下称“线 2”）方程： $x = k_2 y + b_2$ 。其中 k_2 为线 2 斜率， b_2 为线 2 在 x 轴上的截距。

通过平移和转动使线 2 向线 1 尽可能靠近，但是不能够超过其平移误差和转动误差规定值。由于误差具有正负之分，因此， 0.03mm 左右的平移误差表示其平移误差变动范围为 $[-0.03\text{mm}, 0.03\text{mm}]$ ； 0.2° 的转动误差表示其转动误差变动范围为 $[-0.2^\circ, 0.2^\circ]$ 。

线 2 向线 1 靠近可分两步完成。由于平移时对转动几乎没有影响，但转动时其横纵坐标且对平移影响大。所以我们采取首先减少平移误差，然后减少转动误差的方法。

第一步，减小平移误差。

以线 1 为基准，在允许的平移误差范围内，将姿态标识线 2（以下称“线 2”）沿着 x 轴向靠近线 1 的方向尽可能大地平移（尽可能大：平移距离 $\leq 2 * 0.03\text{mm}$ 且平移距离 $\leq |b_1 - b_2|$ ），具体如下：

如果 $|b_1 - b_2| \geq 2 * 0.03\text{mm}$ 和绕固定点方向上的旋转和绕固定点方向上的旋转：

$$b_{2N} = \begin{cases} b_2 + 2 \times 0.03\text{mm} & b_1 > b_2 \\ b_2 - 2 \times 0.03\text{mm} & b_1 < b_2 \end{cases} \quad (20)$$

$$x_N = \begin{cases} x + 2 \times 0.03\text{mm} & b_1 > b_2 \\ x - 2 \times 0.03\text{mm} & b_1 \leq b_2 \end{cases} \quad (21)$$

$$y_N = y \quad (22)$$

否则, $|b_1 - b_2| < 20.03mm$

$$b_{2N} = b_1 \quad (23)$$

$$x_N = x + (b_1 - b_2) \quad (24)$$

$$y_N = y \quad (25)$$

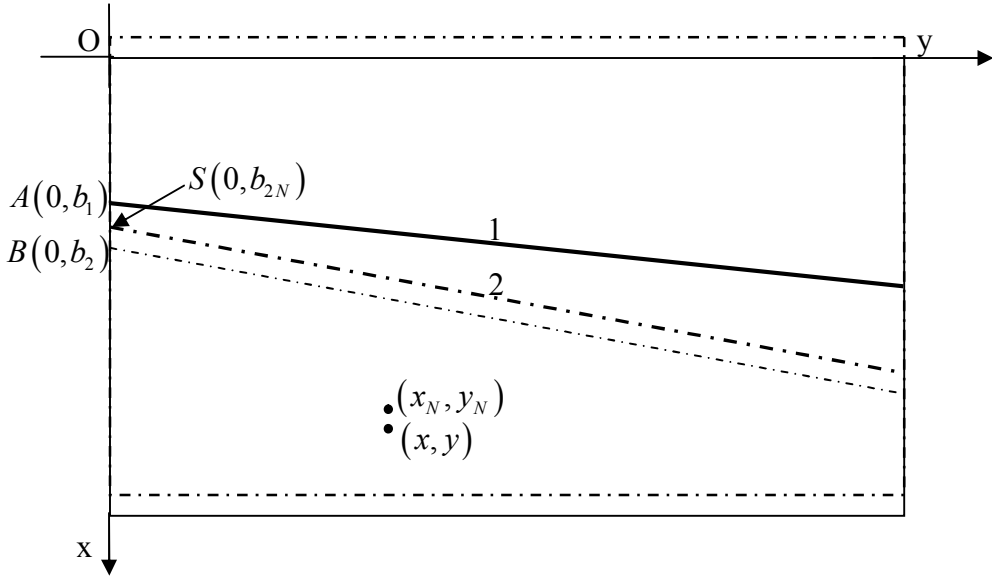


图 12 姿态标识线坐标平移

第二步：减小转动误差

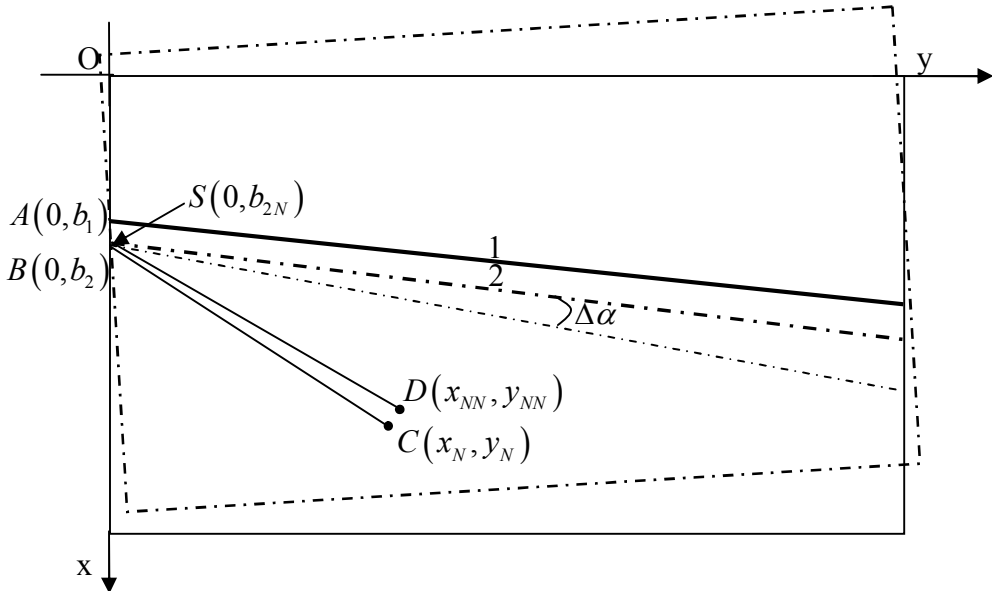


图 13 姿态标识线坐标转动

以经过点 $S(0, b_{2N})$ 且垂直于 $yo x$ 平面的直线为旋转轴，在允许的转动误差范围内，

线 2 绕着该旋转轴向靠近线 1 的方向尽可能大地旋转（尽可能大：转动角度 $\leq 2 \times 0.2^\circ$ 且

转动角度 $\leq |\alpha_1 - \alpha_2|$ ，其中 α_1 与 α_2 分别为线1与线2的倾角)，具体如下：

如果： $|\alpha_1 - \alpha_2| \geq 2 \times 0.2^\circ$

$$\Delta\alpha = \begin{cases} 2 \times 0.2^\circ & \alpha_1 > \alpha_2 \\ -2 \times 0.2^\circ & \alpha_1 \leq \alpha_2 \end{cases} \quad (26)$$

否则： $|\alpha_1 - \alpha_2| < 2 \times 0.2^\circ$

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \quad (27)$$

其中， $\Delta\alpha$ 为转动角度。当 $\Delta\alpha > 0$ 时，线2顺时针转动；反之，线2逆时针转动。点 $C(x_N, y_N)$ 绕点 $S(0, b_{1N})$ 变为点 $D(x_{NN}, y_{NN})$ 。根据复数知识：

$$\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SA} \times e^{i\Delta\alpha} \quad (28)$$

即：

$$(y_{NN} + i(x_{NN} - b_{2N})) = (y_N + i(x_N - b_{2N})) \times (\cos \Delta\alpha + i \sin \Delta\alpha) \quad (29)$$

推导得：

$$\begin{cases} y_{NN} = y_N \cos \Delta\alpha - (x_N - b_{2N}) \times \sin \Delta\alpha \\ x_{NN} = y_N \sin \Delta\alpha + (x_N - b_{2N}) \times \cos \Delta\alpha + b_{2N} \end{cases} \quad (30)$$

这样，弹头2就已经通过平移和转动姿态调整，以姿态标识线为基准，向弹头1靠近，使它们尽量在相同姿态的情况下进行比对。

但是，线2经过坐标平移和转动后，原来弹头2的测量坐标值 (x, y) 发生了改变，变成了新的经纬度坐标 (x', y') 。此时的经纬向网格不再是网格矩阵，对于线1的网格坐标来说，线2的 (x, y) 的经纬度值是倾斜的，即相对线1的网格坐标来说线2的经纬度坐标不是网格数据。

为使弹头1和弹头2能在相同位置进行比对，将弹头2的高度数据插值到弹头1的对应网格点上。考虑到平移和转动的幅度都比较小，这里采用线性插值。即将线2在线1坐标上的投影 (x', y') （非经纬度网格数据）当成观测数据，插值回到线1的网格点处得到新的高度值场。此时得到的插值后的高度场的经纬度坐标和线1所在的高度场的经纬度坐标是能够匹配的。值得注意的是，由于经过了旋转和平移，线1所在的高度场和线2所在的高度场有部分经纬度网格区域不完全重合。对两者进行比较时，取重合区域部分的数值进行比较。

5 滤波模型——问题二的求解

弹头表面由于损伤、锈迹、油斑、杂质物及其痕迹生成的随机性，会造成测量数据的误差和噪声。噪声通常是随机产生的，因而具有分布和大小的不规则性。去噪也就是滤波。去噪的方法有很多，去噪最重要的意义在于滤去随机噪声保留有效信号是去噪的重要内容。通常可分为线性滤波和非线性滤波两类，使用的方法有很多，为了比较去噪

效果，本文采用下面种滤除噪声方法。

5.1、均值滤波(Mean Filtering)

均值滤波是典型的线性滤波算法，其采用的主要方法为领域平均法。它是指在图像上对目标像素给一个模板，该模板包括了其周围的临近像素（以目标像素为中心的周围 8 个像素，构成一个滤波模板，即去掉目标像素本身）。再用模板中的全体像素的平均值来代替原来像素值^[1]。

均值滤波的基本原理是用均值代替原图像中的各个像素值，即对待处理的当前像素点 (x,y) ，选择一个模板，该模板由其近邻的若干像素组成，求模板中所有像素的均值，再把该均值赋予当前像素点 (x,y) 。

5.2、中值滤波(Median Filtering)

中值滤波是一种典型的非线性滤波技术，能有效滤除干扰噪声。它是指把以某点 (x,y) 为中心的小窗口内的所有像素的灰度按从大到小的顺序排列，将中间值作为 (x,y) 处的灰度值(若窗口中有偶数个像素，则取两个中间值的平均)。在滤除噪声的同时也会影响图像的边界和细节，中值滤波算法在此方面具有优越性，因此而得到了更广泛的应用。

5.3、小波分析去噪(Wavelet Analysis)

小波分析用于信号与图象压缩是小波分析应用的一个重要方面。它的特点是压缩比高，压缩速度快，压缩后能保持信号与图象的特征不变，且在传递中可以抗干扰。基于小波分析的压缩方法很多，比较成功的有小波包最好基方法，小波域纹理模型方法，小波变换零树压缩，小波变换向量压缩等。小波在信号分析中的应用也十分广泛。它可以用于边界的处理与滤波、时频分析、信噪分离与提取弱信号、求分形指数、信号的识别与诊断以及多尺度边缘检测等。在工程技术等方面的应用。包括计算机视觉、计算机图形学、曲线设计、湍流、远程宇宙的研究与生物医学方面。小波分析也称多分辨率分析，它被认为是傅里叶变换后取得的一个突破性进展。它既保持了傅里叶分析的优点，又弥补了其某些不足。

5.4、经验模态分解方法(Empirical Mode Decomposition)

经验模式分解（EMD）是 1998 年美国国家宇航局歌一种新的信号处理技术，它是基于数据本身的处理，且能在空间域中将信号进行分解,从而可以区分噪声和有用信号。

EMD 方法与小波分析相比，它具有小波分析的优点，同时又克服了小波分析在分辨率上的不清晰的缺点。由于 EMD 是自适应的，同时基于信号的局部变化特征，因此非常适合客观分析处理非线性、非平稳过程^[2]。

经验模态分解（EMD）方法的思路是通过多次移动过程逐个分解本征模态函数（IMF），在每次过程中，根据信号的波动上、下包络计算信号的局部，这里的上、下

包络由信号的局部极大值和极小值通过样条函数插值算出。EMD 通过多次移动过程，不仅消除了信号的骑行波，还对序列进行了平滑处理。得到的每一个 IMF 满足如下两个条件：①极大值、极小值点和过零点的数目必须相等或至多只相差一点；②在任意时刻，由极大值点定义的上包络和由极小值定义的下包络的平均值为零。满足上述两个条件的 IMF 就是一个单分量信号，这两个条件也是 EMD 分解过程结束的收敛原则。

设有一个资料序列为 $x(i)$ ，现将 EMD 方法中提取 IMF 分量步骤描述如下：

(1) 找出资料序列 $x(i)$ 各个局部的极大值，这里局部极大值定义为序列的某个点 i 位置的值，其前后一个时刻的值均不能比它大，利用三次样条插值的方法得到序列 $x(i)$ 上的包络线 $u(i)$ 。同样，找出 $x(i)$ 各个局部的极小值，可以得到序列 $x(i)$ 的下包络线 $v(i)$ 。那么，上、下包络线的平均曲线为：

$$m(i) = (u(i) + v(i)) / 2 \quad (31)$$

(2) 用原资料序列 $x(i)$ 减去 $m(i)$ 后的剩余部分为 $h_1(i)$ ，

$$h_1(i) = x(i) - m(i) \quad (32)$$

检验 $h_1(i)$ 是否满足 IMF 上述的两个条件。如果满足则认为 $h_1(i)$ 是 IMF，如果不满足，用 $h_1(i)$ 代替 $x(i)$ ，找出 $h_1(i)$ 相对应的上、下包络线 $u_1(i)$ 和 $v_1(i)$ ，重复上述过程，直到所得到的 $h_k(i)$ 满足上述 IMF 的两个条件。这样，就分解得到第一个 IMF，即

$$c_1(i) = h_k(i) \quad (33)$$

信号的剩余部分为：

$$r_1(i) = x(i) - c_1(i) \quad (34)$$

(3) 对剩余部分 $r_1(i)$ 继续重复过程 (1) ~ (2)，直到所剩余部分为一个单调序列，即趋近序列平均值时，则分解结束。

通常情况下，用前后 2 个 $h(i)$ 的标准差 SD 作为分解 IMF 过程停止的判据，即

$$SD = \sum_{i=0}^T \frac{(h_k(i) - h_{k-1}(i))^2}{h_{k-1}^2(i)} \quad (35)$$

达到一个较小值时，停止分解。一般而言， SD 越小，得到的 IMF 的稳定性较好，分解出的 IMF 的个数越多。实践表明， SD 取 0.2 ~ 0.3 时，IMF 的稳定性好，并能够使 IMF 具有较清晰的物理意义。

原始资料序列 $x(i)$ 可以表示为所有 IMF 及剩余部分之和，即

$$x(i) = \sum_{j=1}^n c_j(i) + r_n(i) \quad (36)$$

这里 n 为所提取的 IMF 的个数。由于 EMD 过程就是利用信号局部特征进行分解的，因此具有自适应性，分解得到的 IMF 数目也是有限的。EMD 分解的程序流程如图 14 所示。

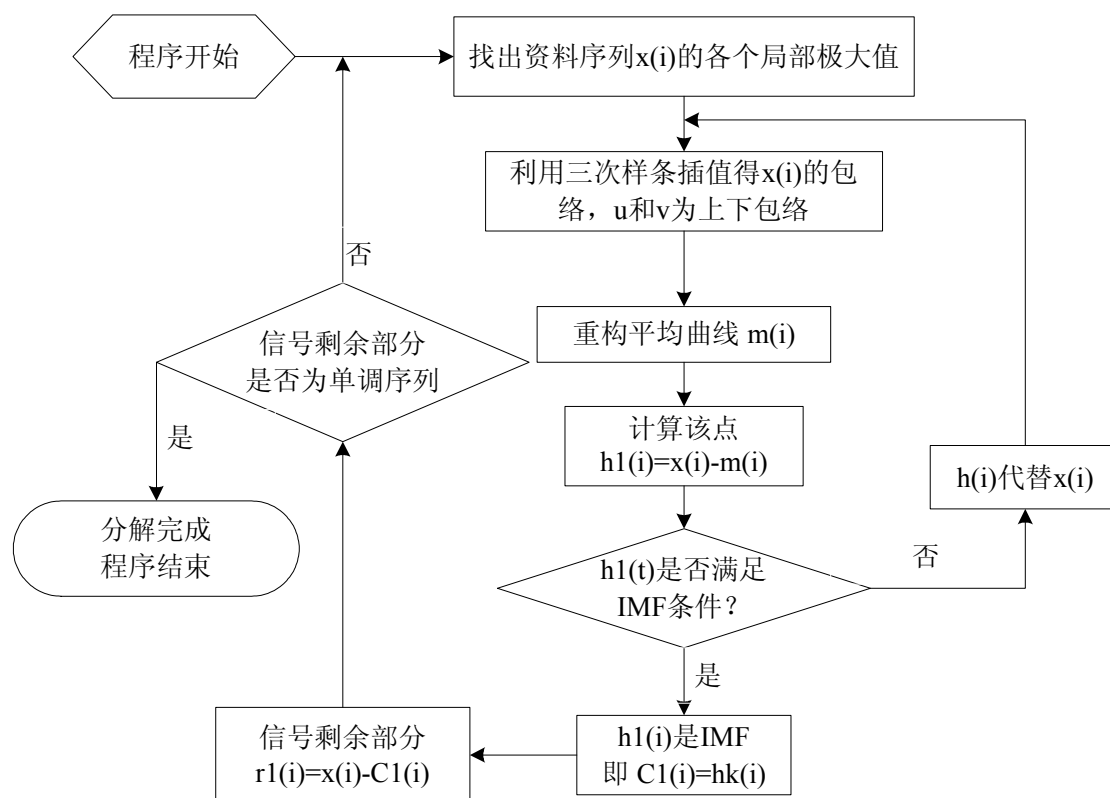


图 14 EMD 分解的程序流程

本文运用了中值滤波、均值滤波、小波分析去噪还有经验正交分解法（EMD）四种方法进行对比试验，任意选取几组不同弹头数据，测试四种方法的滤波效果，效果如图 15 至图 18 所示。图中，左侧中未经去噪处理的图像，右侧是去噪后的图像。

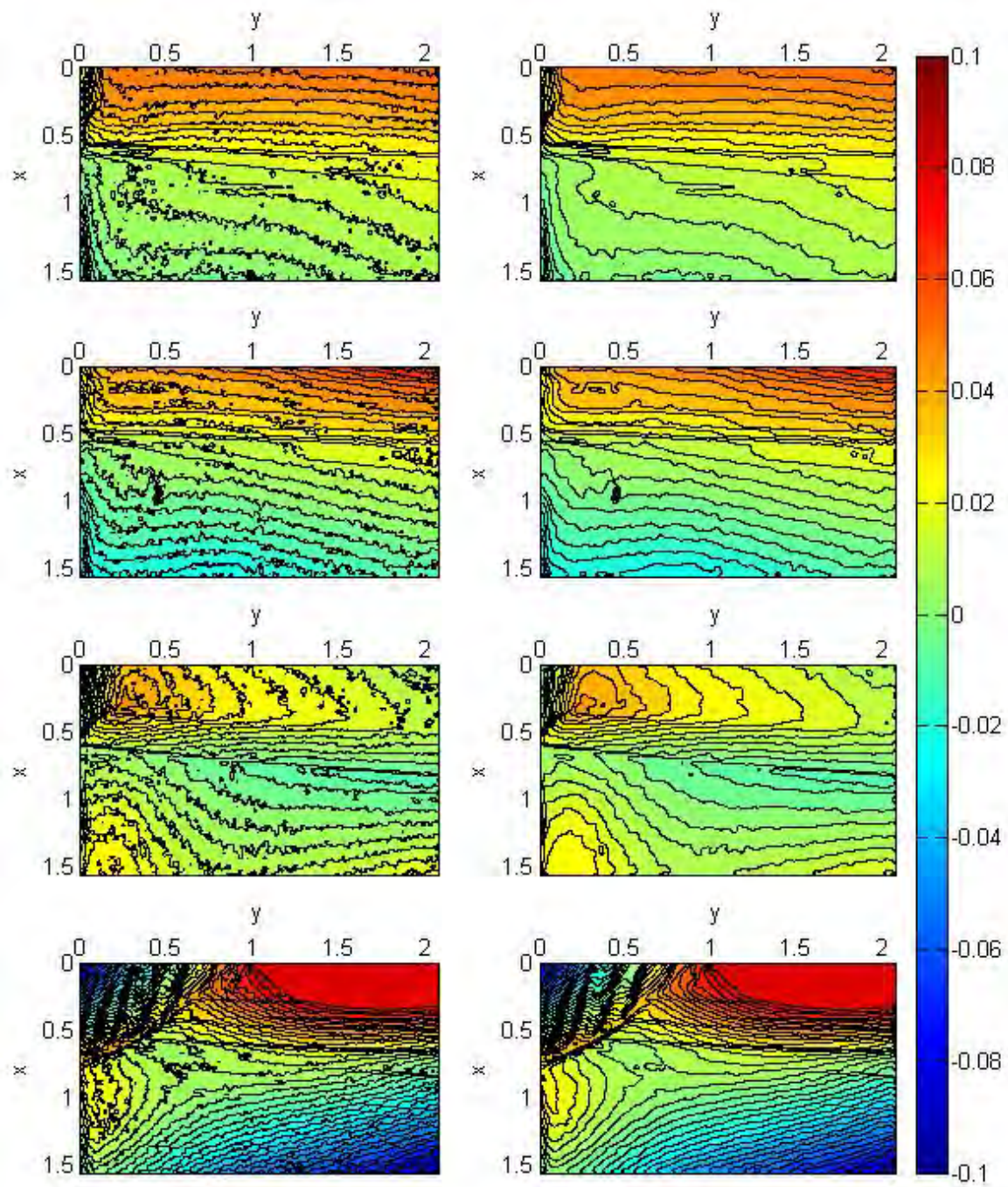


图 15 EMD 法效果图

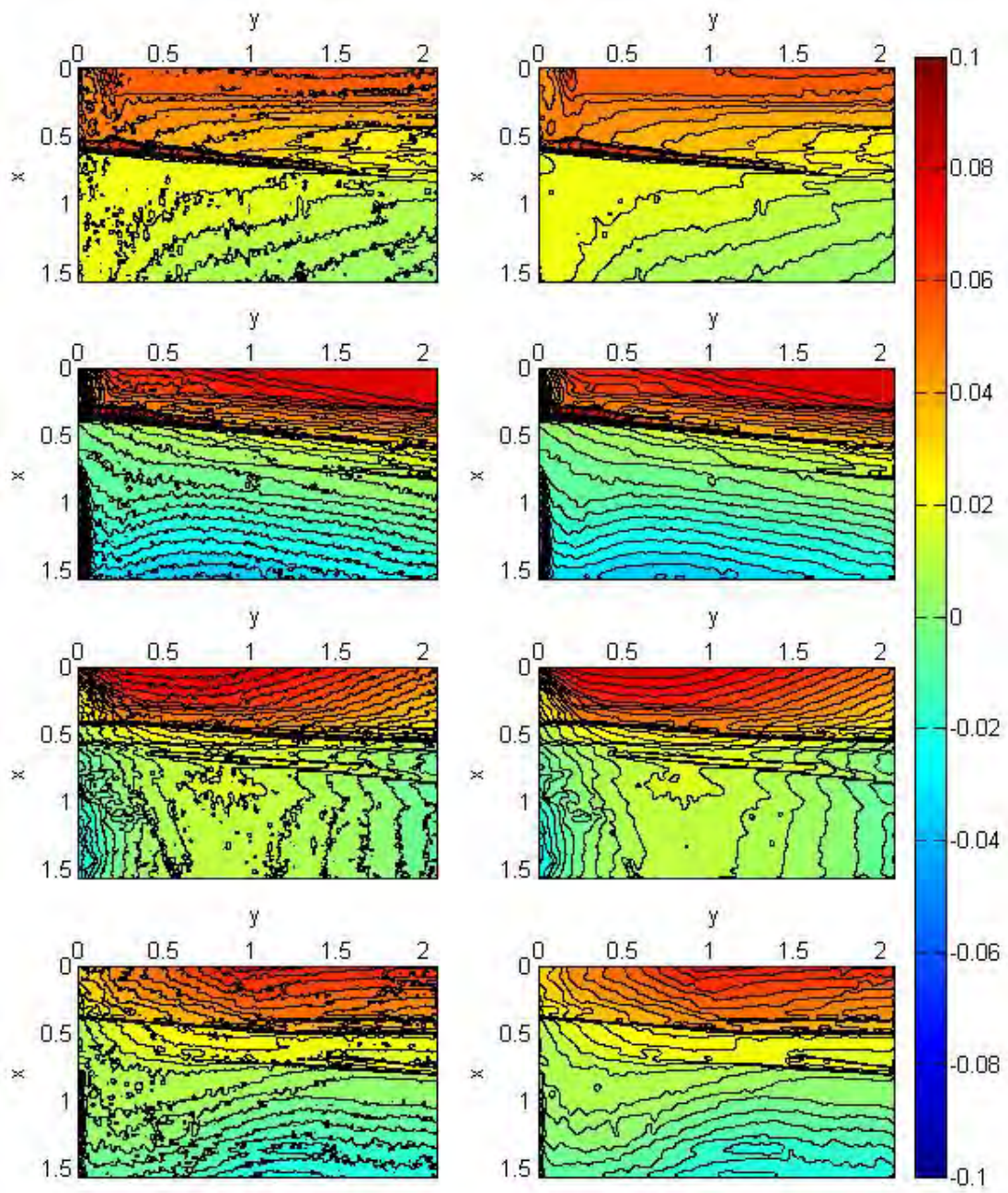


图 16 小波分析去噪效果图

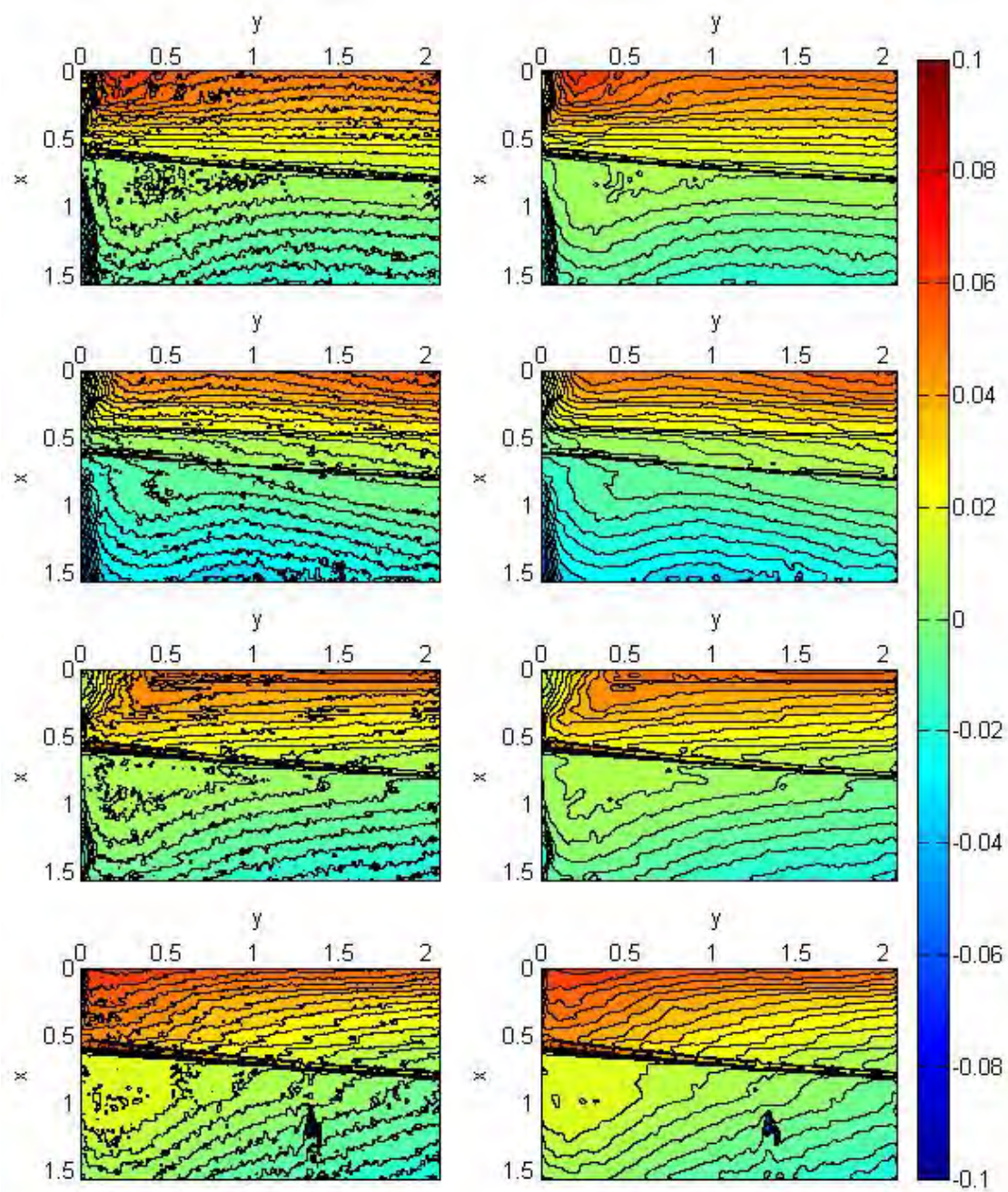


图 17 中值滤波去噪

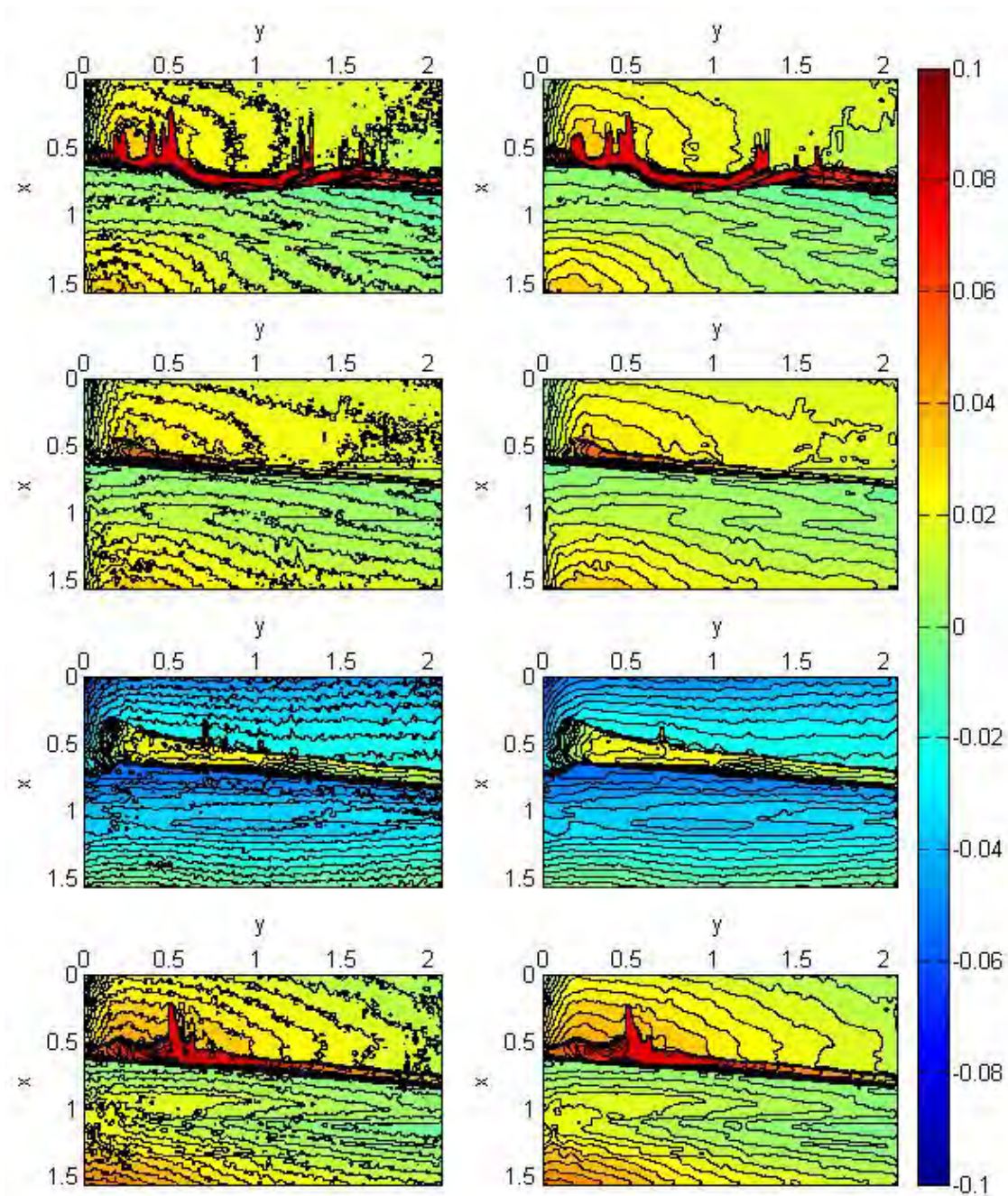


图 18 均值滤波效果图

从滤波效果可以看出，小波分析法效果较好，由于其固有的时窗可变性，是一种适用于处理稳定信号的工具。EMD 方法效果最佳，该方法有小波分析的优点，同时又克服了小波分析在分辨率上不清晰的缺点。中值滤波效果次之，均值滤波效果最不理想，因为均值滤波是一种线性滤波方法，过度平滑了高度场的细致特征。

6 问题三的求解

6.1 比对特征的提取方法

枪支在长期使用过程中，本身会因为制造过程中不可避免的加工误差和使用中损伤，在枪管中造成不可重复，可以唯一标识自身的痕迹。而且枪支会在发射的弹头上产生与自身特征相一致的特征痕迹，所以，可以通过弹头痕迹特征的比对来对具体枪支的进行归属认定。在本题中，如何从高度信息中提取出反映弹头特征痕迹的信息就变得十分重要。我们总结了以下几种可以用来比对的特征及提取方法。

6.1.1、等高线分布图法

根据所给数据的特点，我们可以将次棱数据看成高度场信息。提取高度场特征信息，最简单最直观的就是绘制等高线图，因为等高线的分布很好的反映了高度场的形态特征，同样也是弹痕形态的直接反应，下图是由原始数据经过展平面坐标变换后绘制的同一把枪发射出的两个弹头的次棱附近的等高线分布图。

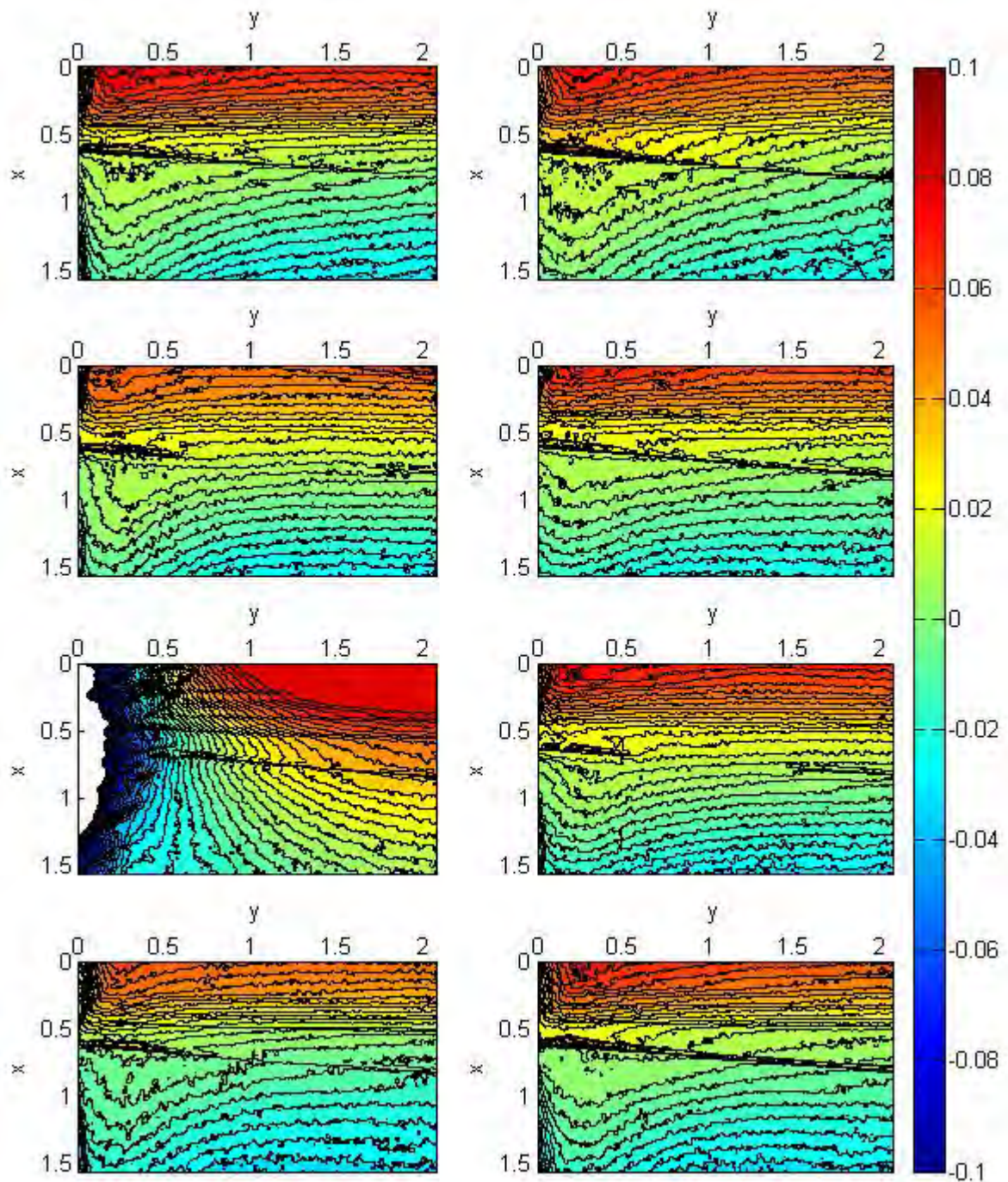


图 19 同一个子弹四条次棱附近的等高线（未除噪）分布图

图 19 左侧同一个子弹四条次棱附近的等高线分布图，右侧是同一把枪发射出的另外一颗子弹上次棱附近的等高线图。因为未经过任何除噪处理，图像难免会有少许失真，而且即使是同一把枪，不同次棱在子弹上留下的痕迹也会有差异，但是，上面的八张图无论是等高线的形态还是高度值的分布都极为相似。下面我们再来来看一下不同手枪发射的弹头表面等高线的对比图。

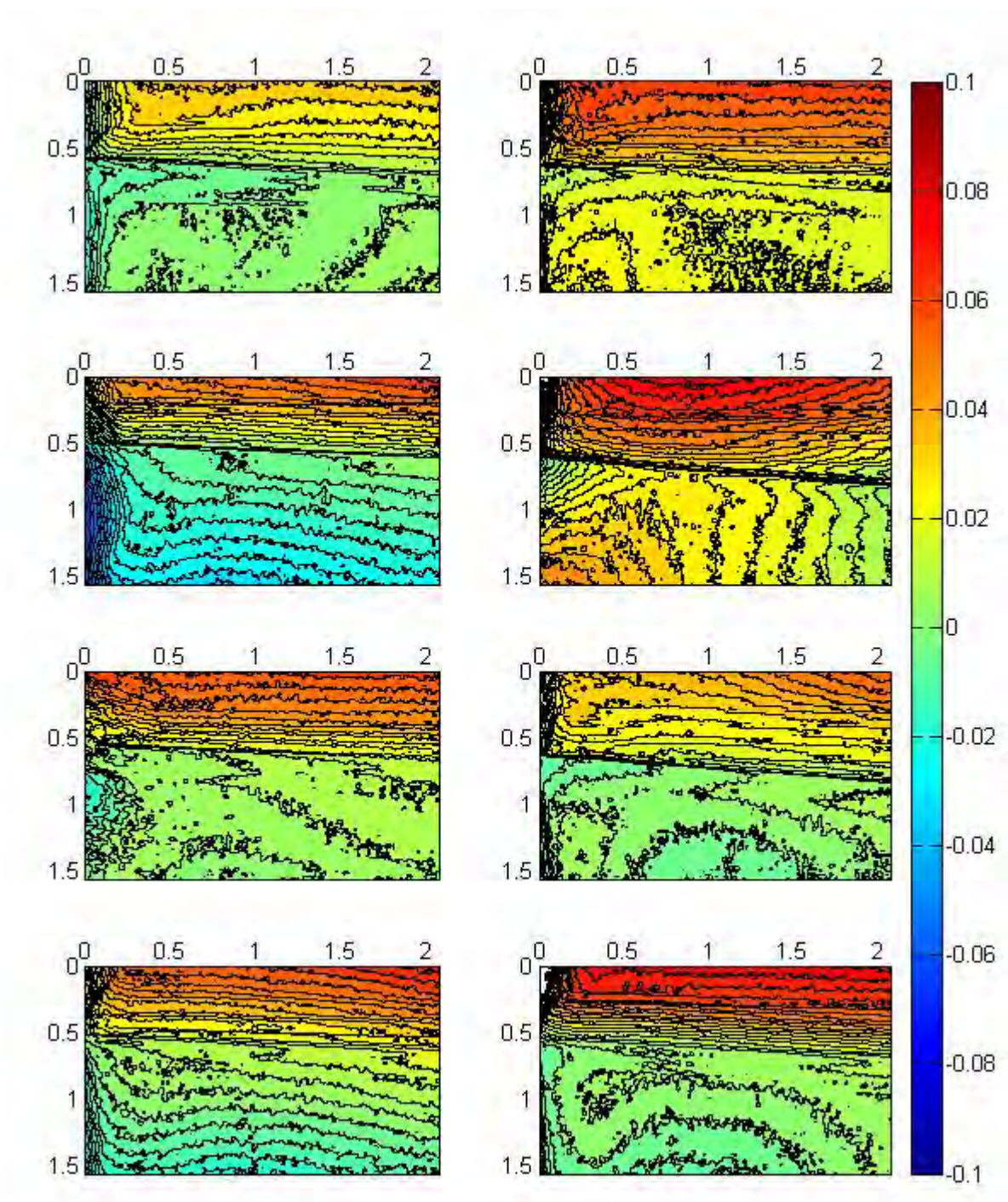


图 20 不同手枪发射的弹头表面等高线的对比图

从图 20 中可以看出，两侧的图像无论是纹理走向还是高度值分布都存在明显的差异，这说明了这两个弹头表面刻痕差异较大，属于同一把手枪发射的概率很小。

另外，对等高线进行滤波除噪处理，减小由于噪声等造成的图像的失真，图 20 是除噪后的效果图。

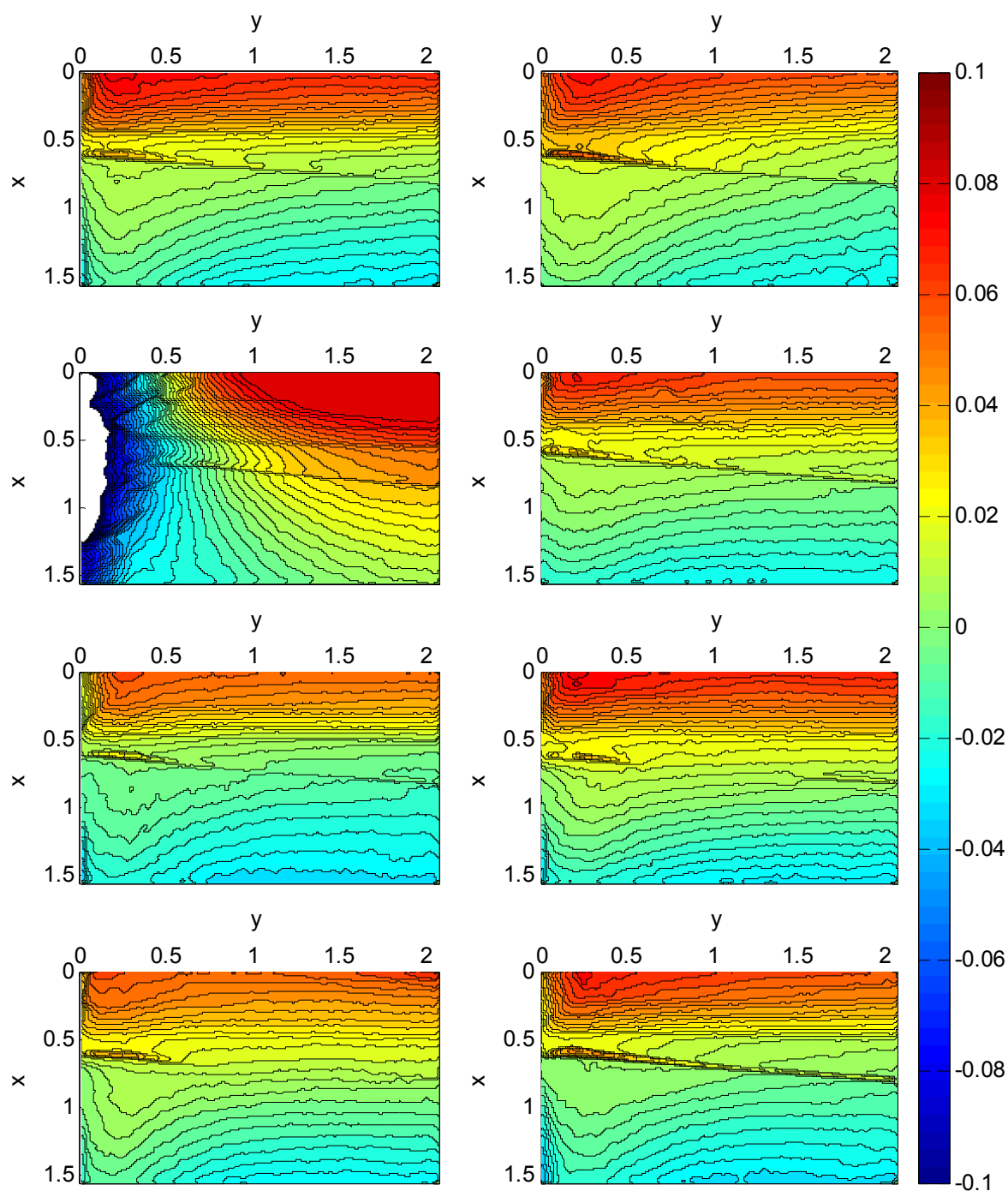


图 21 除噪后的相同手枪发射的弹头表面等高线的对比图

与图 20 相比，经过处理后的图像更加平滑，弹痕特征也更加明显。相对于传统的肉眼观察而言，等高线是前者的延续和升华。等高线详细刻画了弹痕纹理的走向，不仅提高了准确度，而且其精确的高度值信息使得对比结果更加可信。一方面，我们除了可以根据特征纹理线的走向来对比两者的相似程度，还可以对同一手枪发射出的不同弹头进行比对，通过等高线比对提取出它们共同的相似区域及其特定的形态特征，将这些区域和形态特征作为反映该枪支的样本特征，用于比对其他鉴定弹头。另外，等高线上的高度信息也可以作为对比特征之一。

尽管用等高线分布图来进行比对既简单又直接，且相对于肉眼观测提高了精度，但还是建立在人为判断的基础上，相似程度的界定模糊，主观性强，有一定的不确定性。所以需要更加客观定量的方法来提取比对特征。

6.1.2 相关系数法

对两个场进行比较，最常用的就是利用相关系数来刻画两者的相似程度。

对任意两个要素变量 x_k , x_l ，其相关系数计算公式为

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_k)(x_{li} - \bar{x}_l)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_k)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{li} - \bar{x}_l)^2}} \quad (37)$$

其中 s_k, s_l 分别为第 k 个和第 l 个变量。

对于同一手枪发射 A 、 B 两颗弹头，他们分别有 $c1$ 、 $c2$ 、 $c3$ 、 $c4$ 四条次棱数据。题目中表明， $c1$ 、 $c2$ 、 $c3$ 、 $c4$ 分别为同一个弹头的四个次棱按固定顺序的编号。因此， A 、 B 两颗弹头次棱之间的配对只有以下四种情况（表 2），如图 22 至图 25 所示。

表 2 偏移比对表

偏移比对	比较内容
0	$A_C1—B_C1, A_C2—B_C2,$ $A_C3—B_C3, A_C4—B_C4$
1	$A_C1—B_C2, A_C2—B_C3,$ $A_C3—B_C4, A_C4—B_C1$
2	$A_C1—B_C3, A_C2—B_C4,$ $A_C3—B_C1, A_C4—B_C2$
3	$A_C1—B_C4, A_C2—B_C1,$ $A_C3—B_C2, A_C4—B_C3$

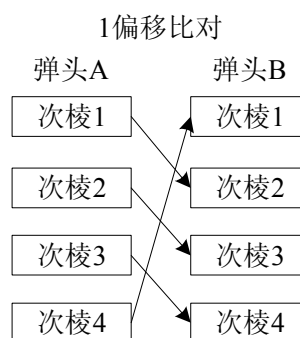
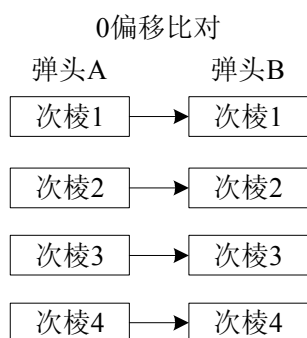


图 22

图 22

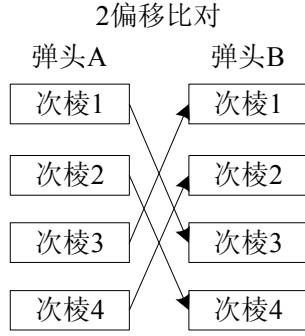


图 24

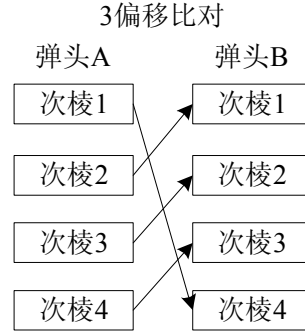


图 25

究竟弹头 A 、 B 是哪一种比对方式，我们可以对两颗弹头的各次棱表面高度场测量数据进行相关分析。找到相关系数最大的配对方式，并认为配对的两条次棱痕迹是由同一条次棱擦刮生成的。假设最佳配对为 2 比对，将所有配对的两条次棱附近的等高线图（如 $c4$ 和 $c2$ ）做相关分析，找到各自相关最显著的区域，作为各自次棱痕迹的特征区域。例如： $c4$ 和 $c2$ 做相关分析后发现等高线上有一区域 A 有相关系数极大值，则说明该区域的高度值信息最能反映弹痕特征，下次和另外的弹头比对时，将该区域的相关性作为比对的重要依据。同理，对另外 3 个配对的次棱附近的等高线图也照此法动作，找到属于各自次棱的特征区域。具体操作时，若四个特征区域中有两个以上相关系数较大，那么说明被测弹头很可能和样本弹头是同一把手枪发射出来的。

6.1.3、标准化均方差距离法（Normalized Mean Square Distance，简称为 NMSD）

客观的定量标准对 x_k ， x_l 两个场之间的差异采用标准化的均方距离来度量，定义为：

$$NMSD = \frac{\sum_{i=1}^N (x_{ki} - x_{li})^2}{\sum_{i=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_k)^2 + \sum_{i=1}^n (x_{li} - \bar{x}_l)^2} \quad (38)$$

其中，表达式的分子部分刻画了两个场中各点的绝对距离，这是两个场差异的直接量化反映，分母部分是两高度场各自的方差之和，相当于对绝对距离进行了归一化处理。相关分析的不足在于，两个高度场之间相关系数很高，只能说明两个高度场的分布很相似，但两高度场值可能会相差很大。这对于我们比对显然是不利的。标准化方差距离弥补了这个缺陷。

综上所述，可以从两个方面入手来提取高度场特征：

1、对原始高度场信息进行除噪、变化坐标等预处理，然后直接利用高度场信息绘制等高线图，观察等高线的分布来提取诸如弹痕的宽度、走向等几何对比特征或者直接从图上读取高度值信息对比。。

2、在绘制等高线的基础上，利用相关系数法和计算标准化方差距离，还有诸如计算标准化方差距离、方差距离等许多方法来刻画两个高度场之间的相似程度，根据相似程度的分布来提取对比特征。

6.2 相关序列模型

6.2.1 模型的准备

由于测量数据受到多种因素的影响,即使来自同一支枪经同一条次棱擦过上的两个次棱数据场,它们之间的差异也会随着所在地理位置的不同而不同。在这样的两张次棱图上,可能某些区域数据场比较一致、数据特征比较稳定,而另外一些区域差异则非常明显且特征不稳定。所以,对于来自同一支枪同一条次棱的数据进行比较,那些特征不很稳定的区域的数据可能会掩盖数据来源相同的真相,给枪痕比较带来一些困难。如果可以找到一个稳定且相关度高的弹痕测量数据区域,则进行数据场比较的效果可能会变好,使得数据比对的能力得到提高。

6.2.2 模型的建立

我们可以通过如下的思想寻找一个特征比较稳定的区域来用于比对:

1、将6支枪的12个弹头分成甲、乙两组,每组各包括6个弹头,且各组的6个弹头分别来自6支枪(也就是说,来自同一支枪的两个弹头不分在同一组)。

2) 将甲组的弹头按顺序编号排列,不妨设分别来自于第一支枪、第二支枪...第六支枪。乙组弹头按照“与甲组对应位置的弹头来自同一支枪”的原则排列,使得甲、乙两组对应位置的弹头都来自同一支枪。将甲、乙两组对应位置的弹头进行比对排列,使得甲乙两组对应位置的次棱数据来自于同一支枪的同一条棱。每一个弹头有四条次棱,于是甲、乙组一共有24条次棱,不妨分别极为次棱1至次棱24。

另外,我们有如下分析:如果忽略噪声、测量误差以及其它如油斑、杂质、油污等其它因素的的影响,则对于来自同一支枪的同一条次棱处的理想的次棱数据场应该是相同的。所以,在无其他因素影响的理想情况下,甲、乙两组对应位置的次棱数据高度场应该是相同的。而实际上由于各种要素的影响,使得来自同一支枪同一条次棱的数据有很大差异,且随着位置的不同而不同,有些区域数据特征而有些区域特征不稳定。

对于某个测量位置 (x_0, y_0) , 甲乙两组各 24 条次棱数据场对应存在 24 个数据值。如果理想情况下, 甲乙两组 24 条次棱对应的资料序列的高度观测值应该是相同的。容易得知, 甲乙两组测量位置 (x_0, y_0) 处的测量值越稳定, 则甲乙两组 24 条次棱对应的资料序列应该越一致, 否则由于噪声等各种因素, 甲乙两组 24 条棱对应的资料序列差别很大。因此, 对于该测量位置 (x_0, y_0) 可以计算 24 条次棱序列的相关系数和平均绝对误差。如果该点出相关系数通过显著性检验, 则表明该测量位置 (x_0, y_0) 的数据特征比较稳定可以用来进行特征比较, 而如果相关系数较小, 则表明数据受到噪声等污染大, 该点数据特征不稳定, 可能会干扰比对。



图 26 甲乙两组分类各 24 条次棱对应关系图

于是，对于弹痕的每一个测量位置 (x_0, y_0) 都可以计算其相关系数，整个弹痕数据场就可以画出相关系数等值线。（如图）

以下对相关系数进行显著性检验。每一个相关系数的计算样本 24 个（即 24 条棱），则 $t_\alpha = r_c \sqrt{\frac{n-2}{1-r_c^2}}$ ，式中 r_c 就是刚好通过检验的相关系数临界值，由此式可以解得：

$$r_c = \sqrt{\frac{t_\alpha^2}{n-2+t_\alpha^2}} \quad (39)$$

6. 2.3 模型的求解

样本容量 $n=24$ ，检验一批因子，在 $\alpha=0.05$ 时， $t_{0.05}=2.07$ ，计算相关系数的临界值为

$$r_c = \sqrt{\frac{2.07^2}{24-2+2.07^2}} = 0.4038 \quad (40)$$

于是，相关系数大于 0.4038 的区域通过了显著性为 $\alpha=0.05$ 的检验，可以认为具有显著相关关系。

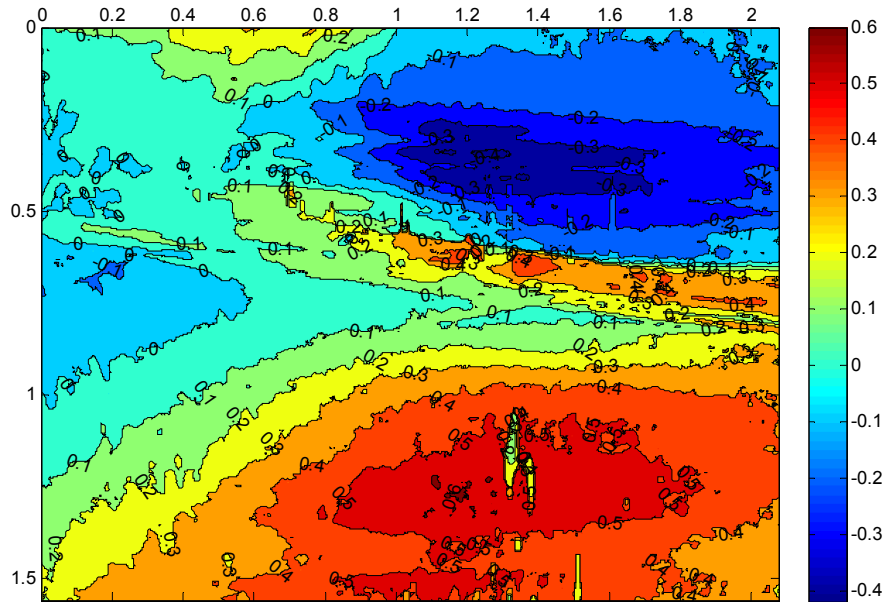


图 27 相关系数等值线图

从图 27 可以看出相关系数大于 0.4038 的区域主要位于图的右前方（按照从弹头的底部向头部看），而相关系数大于 0.4038 已经通过了 5% 的显著性检验。所以这就是我们认为可以用来比对数据的区域。具有显著相关的区域除了右前方以外，在我们原来画

的姿态标识线附近也出现了一个相关系数比较高的条状带,这也验证说明了我们前面选取的姿态标识线具有比较稳定的特征。

6.3 比对方案的确定

比对方案叙述如下:

假设有两个弹头A和B,每个弹头有4条次棱。分别计算0比对偏移量、1比对偏移量、2比对偏移量、3比对偏移量时各个次棱所各自对应的相关系数 $(r)_{4 \times 4}$ 和误差矩阵 $(error)_{4 \times 4}$ 。相关系数 r 和误差矩阵 e 均为 4×4 的矩阵,其中行代表偏移量,列代表次棱编号。比如 $r_{2,3}$ 代表1比对偏移量(1比对偏移量即c1对c2, c2对c3, c3对c4, c4对c1)时c3与c4的相关系数, $r_{i,j}$ 代表 $(i-1)$ 比对偏移量时与j对应的那条次棱。对于 $r_{4 \times 4}$ 和 $(error)_{4 \times 4}$ 的阵,我们进行如下计算步骤:

- 1、 $i=0$;
- 2、将相关系数 r 的各行由大到小排列;
- 3、对相关系数 r 每行前 i 个数据进行求和,找出其最大值所在的行的位置Idx_Max;
- 4、对误差的各行数值由大到小降序排列;
- 5、比较Idx_Max和Idx_min的大小。如果相等,则代表两种指标同时选择较优值(即相关系数最大,误差最小),输出Idx_min,得到最佳匹配:第一个和第Idx_max个,结束;否则, $i=i+1$,返回第一步)。

7 问题四的求解

7.1 比对模型的建立

问题四共有 22 个弹头,要计算弹头两两之间的相似程度。在计算之前我们并不知道弹头是否来自于同一支枪。如果弹头来自于不同的枪支,则次棱确定的顺序没有什么意义,从而进行两个弹头的比对也就失去了意义。只有当弹头来自于同一支枪,进行次棱的比对才有意义。

由于在进行计算(或判断)之前我们并不能确定是否弹头来自于同一支枪,在此不妨首先假定这两个弹头来自同一支枪,然后进行比对,得到次棱的配对情况。在进行配对以后再计算两个弹头之间的相关关系或误差。如果相关关系过小或误差过大,此时,可以认定两个弹头一定不是来自于同一支枪。这是因为若两个弹头来自于同一支枪,则弹头在进行完比对从而确定次棱对应关系后计算得到的相关关系应该较大(或误差应该较小)。

7.2 模型的求解

所以,对于 22 个弹头中任何一个弹头都要计算与其他 21 个弹头的相似程度。任取两个弹头(不妨设为弹头 A 和弹头 C)。则计算弹头 A 和弹头 C 之间相似程度计算步骤如下:对弹头 A 和弹头 C 进行比对,寻找出弹头 A 和弹头 C 的次棱的最佳匹配对应次

序。然后，对于进行过比对的弹头 A 和弹头 C 计算两者之间的相似程度。列表给出两两之间的相似程度。

弹头 A 和弹头 C 进行比对达到最佳匹配（或比对）的步骤仿照第三问第三小问进行。

7.3 模型的结果

计算弹头 A 和弹头 C 的相似程度是建立在已经进行过比对的基础上。如果已经进行完比对后，此时两个弹头之间的次棱对应关系已经知道了，这个时候再计算两个弹头的整体相似程度。如表三：

表 3 弹头两两之间的相关系数值

弹头 序号	弹头序号										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	—	0.79	0.73	0.83	0.62	0.80	0.74	0.78	0.82	0.80	0.43
2	0.79	—	0.78	0.88	0.71	0.79	0.84	0.79	0.82	0.83	0.35
3	0.73	0.78	—	0.87	0.72	0.78	0.79	0.81	0.86	0.92	0.34
4	0.83	0.88	0.87	—	0.79	0.86	0.95	0.91	0.91	0.88	0.37
5	0.62	0.71	0.72	0.79	—	0.77	0.73	0.72	0.70	0.69	0.31
6	0.80	0.79	0.78	0.86	0.77	—	0.89	0.83	0.87	0.85	0.44
7	0.74	0.84	0.79	0.95	0.73	0.89	—	0.85	0.88	0.84	0.34
8	0.78	0.79	0.81	0.91	0.72	0.83	0.85	—	0.91	0.79	0.33
9	0.82	0.82	0.86	0.91	0.70	0.87	0.88	0.91	—	0.85	0.42
10	0.80	0.83	0.92	0.88	0.69	0.85	0.84	0.79	0.85	—	0.32
11	0.43	0.35	0.34	0.37	0.31	0.44	0.34	0.33	0.42	0.32	—
12	0.87	0.84	0.89	0.92	0.78	0.85	0.88	0.87	0.89	0.91	0.40
13	0.81	0.84	0.85	0.97	0.80	0.87	0.93	0.89	0.88	0.88	0.37
14	0.69	0.76	0.74	0.83	0.75	0.86	0.76	0.75	0.75	0.75	0.32
15	0.87	0.88	0.73	0.91	0.77	0.87	0.86	0.82	0.83	0.82	0.35
16	0.81	0.78	0.82	0.91	0.76	0.87	0.86	0.81	0.80	0.84	0.36
17	0.42	0.14	0.27	0.24	0.23	0.21	0.12	0.24	0.23	0.10	0.17
18	0.67	0.58	0.65	0.67	0.49	0.75	0.65	0.70	0.69	0.75	0.32
19	0.84	0.84	0.84	0.94	0.77	0.87	0.92	0.89	0.91	0.86	0.35
20	0.41	0.39	0.45	0.45	0.45	0.42	0.43	0.43	0.42	0.43	0.27
21	0.39	0.50	0.48	0.45	0.21	0.59	0.29	0.33	0.44	0.29	0.14
22	0.79	0.82	0.89	0.91	0.81	0.85	0.89	0.83	0.86	0.83	0.36
弹头 序号	弹头序号										
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	0.87	0.81	0.69	0.87	0.81	0.42	0.67	0.84	0.41	0.39	0.79
2	0.84	0.84	0.76	0.88	0.78	0.14	0.58	0.84	0.39	0.50	0.82
3	0.89	0.85	0.74	0.73	0.82	0.27	0.65	0.84	0.45	0.48	0.89

4	0.92	0.97	0.83	0.91	0.91	0.24	0.67	0.94	0.45	0.45	0.91
5	0.78	0.80	0.75	0.77	0.76	0.23	0.49	0.77	0.45	0.21	0.81
6	0.85	0.87	0.86	0.87	0.87	0.21	0.75	0.87	0.42	0.59	0.85
7	0.88	0.93	0.76	0.86	0.86	0.12	0.65	0.92	0.43	0.29	0.89
8	0.87	0.89	0.75	0.82	0.81	0.24	0.70	0.89	0.43	0.33	0.83
9	0.89	0.88	0.75	0.83	0.80	0.23	0.69	0.91	0.42	0.44	0.86
10	0.91	0.88	0.75	0.82	0.84	0.10	0.75	0.86	0.43	0.29	0.83
11	0.40	0.37	0.32	0.35	0.36	0.17	0.32	0.35	0.27	0.14	0.36
12	—	0.91	0.84	0.92	0.87	0.25	0.71	0.90	0.49	0.35	0.93
13	0.91	—	0.80	0.89	0.91	0.18	0.67	0.95	0.47	0.33	0.93
14	0.84	0.80	—	0.79	0.82	0.11	0.60	0.82	0.51	0.52	0.76
15	0.92	0.89	0.79	—	0.85	0.12	0.66	0.87	0.46	0.51	0.93
16	0.87	0.91	0.82	0.85	—	0.19	0.61	0.91	0.49	0.41	0.88
17	0.25	0.18	0.11	0.12	0.19	—	0.32	0.20	0.06	0.07	0.12
18	0.71	0.67	0.60	0.66	0.61	0.32	—	0.62	0.35	0.22	0.61
19	0.90	0.95	0.82	0.87	0.91	0.20	0.62	—	0.47	0.46	0.91
20	0.49	0.47	0.51	0.46	0.49	0.06	0.35	0.47	—	0.21	0.49
21	0.35	0.33	0.52	0.51	0.41	0.07	0.22	0.46	0.21	—	0.33
22	0.93	0.93	0.76	0.93	0.88	0.12	0.61	0.91	0.49	0.33	—

(2) 列表给出每个弹头相似度由高到低给出与之相似的前五位弹头文件编号。

第四问答案——相关系数指标

表 3 每个弹头相似度由高到低与之相似的前五位弹头文件编号表

弹头编号	相似度高低排名				
	1	2	3	4	5
1	15	12	19	4	9
2	15	4	19	12	7
3	10	12	22	4	9
4	13	7	19	12	9
5	22	13	4	12	15
6	7	13	15	19	9
7	4	13	19	6	22
8	9	4	13	19	12
9	19	4	8	12	7
10	3	12	4	13	19
11	6	1	9	12	13
12	22	4	15	10	13
13	4	19	22	7	16
14	6	12	4	19	16
15	22	12	4	13	2
16	13	4	19	22	12
17	1	18	3	12	8
18	10	6	12	8	9

19	13	4	7	22	9
20	14	12	22	16	13
21	6	14	15	2	3
22	13	15	12	19	4

8 问题的结论

8.1 问题一的结论

将圆弧曲面拉伸成为水平面，并进行坐标变换，将高度场的原始信息转化成为展平面中经过处理的信息，将原来受圆弧曲率影响而失真的弹痕特征恢复了过来。搜索高度局部极大值点作为姿态标识点，对姿态标识点进行一次拟合确定了反映弹头位置和姿态特征的姿态标识线。将姿态标识线的斜率和在 z 轴上的截距作为标识弹头位置和姿态的两个指标。比对前，以其中一条姿态标识线为样本，另一条姿态标识线在误差范围内通过水平移动和转动向样本姿态线靠拢，使得两者在空间中的姿态尽可能的达到一致。以此来消除由人工测量造成的误差。

当两弹头进行比对时，考虑在旋转和平移后，坐标系也发生了相应的变化，采用线性插值的方法将弹头 2 的高度数据插值到弹头 1 的对应网格点上，然后在进行比对。

8.2 问题二的结论

本文运用了中值滤波、均值滤波、小波分析去噪还有经验正交分解法（EMD）四种方法进行对比试验，测试四种方法的滤波效果

从滤波效果可以看出，小波分析法效果较好，由于其固有的时窗可变性，是一种适用于处理稳定信号的工具。EMD 方法效果最佳，该方法有小波分析的优点，同时又克服了小波分析在分辨率上不清晰的缺点。中值滤波效果次之，均值滤波效果最不理想，因为均值滤波是一种线性滤波方法，过度平滑了高度场的细致特征。

8.3 问题三的结论

1、可以从两个方面入手来提取高度场特征：

（1）对原始高度场信息进行除噪、变化坐标等预处理，然后直接利用高度场信息绘制等高线图，观察等高线的分布来提取诸如弹痕的宽度、走向等几何对比特征或者直接从图上读取高度值信息对比。

（2）在绘制等高线的基础上，利用相关系数法和计算标准化方差距离，还有诸如计算标准化方差距离、方差距离等许多方法来刻画两个高度场之间的相似程度，根据相似程度的分布来提取对比特征。

2、通过建立相关序列模型，找到一个稳定且相关度高的弹痕测量数据区域。对于弹痕的每一个测量位置 (x_0, y_0) 都可以计算其相关系数，画出了整个弹痕数据场相关系数等值线分布图。对相关系数进行显著性检验，相关系数大于 0.4038 的区域通过了显

著性为 $\alpha = 0.05$ 的检验，可以认为具有显著相关关系。图中相关系数大于 0.4038 的区域就是我们可以用来比对数据的区域。

3、待比较的两个弹头 A,B,分别计算 0 比对偏移量、1 比对偏移量、2 比对偏移量、3 比对偏移量时各个次棱所各自对应的相关系数 $(r)_{4 \times 4}$ 和误差矩阵 $(error)_{4 \times 4}$ ，行动方案如下：

- 1) $i=0$;
- 1) 将相关系数 r 的各行由大到小排列;
- 2) 对相关系数 r 每行前 i 个数据进行求和，找出其最大值所在的行的位置 Idx_Max ;
- 3) 对误差的各行数值由大到小降序排列;
- 4) 找出每行前 i 个数据，找出其最小值所在位置 Idx_min ;
- 5) 比较 Idx_Max 和 Idx_min 的大小。如果相等，则代表两种指标同时选择较优值（即相关系数最大，误差最小），输出 Idx_min ，得到最佳匹配：第一个和第 Idx_max 个，结束；否则， $i=i+1$ ，返回 1)。

8.4 问题 4 的结论（详见第 35 页表 3）

9 模型的优缺点分析与推广

9.1 展平面模型

优点：将圆弧上失真的凹槽及凸痕的高度信息恢复过来，很好的再现了弹痕的真实形态，将弧面上的三维问题转化成为平面内的二维问题，图（）反映了展开前后高度场的变化情况。从图中可以看出，在未展开前，高度场基本上都是中间高，两边低，纹理特征几乎都被圆弧面所掩盖了。变化过后，高度场的特征完全凸显了出来。左侧明显高于右侧，层状的纹理特征明显，在左下方还有凹槽状条纹，这些都是原来的圆弧面中不能看到的信息。

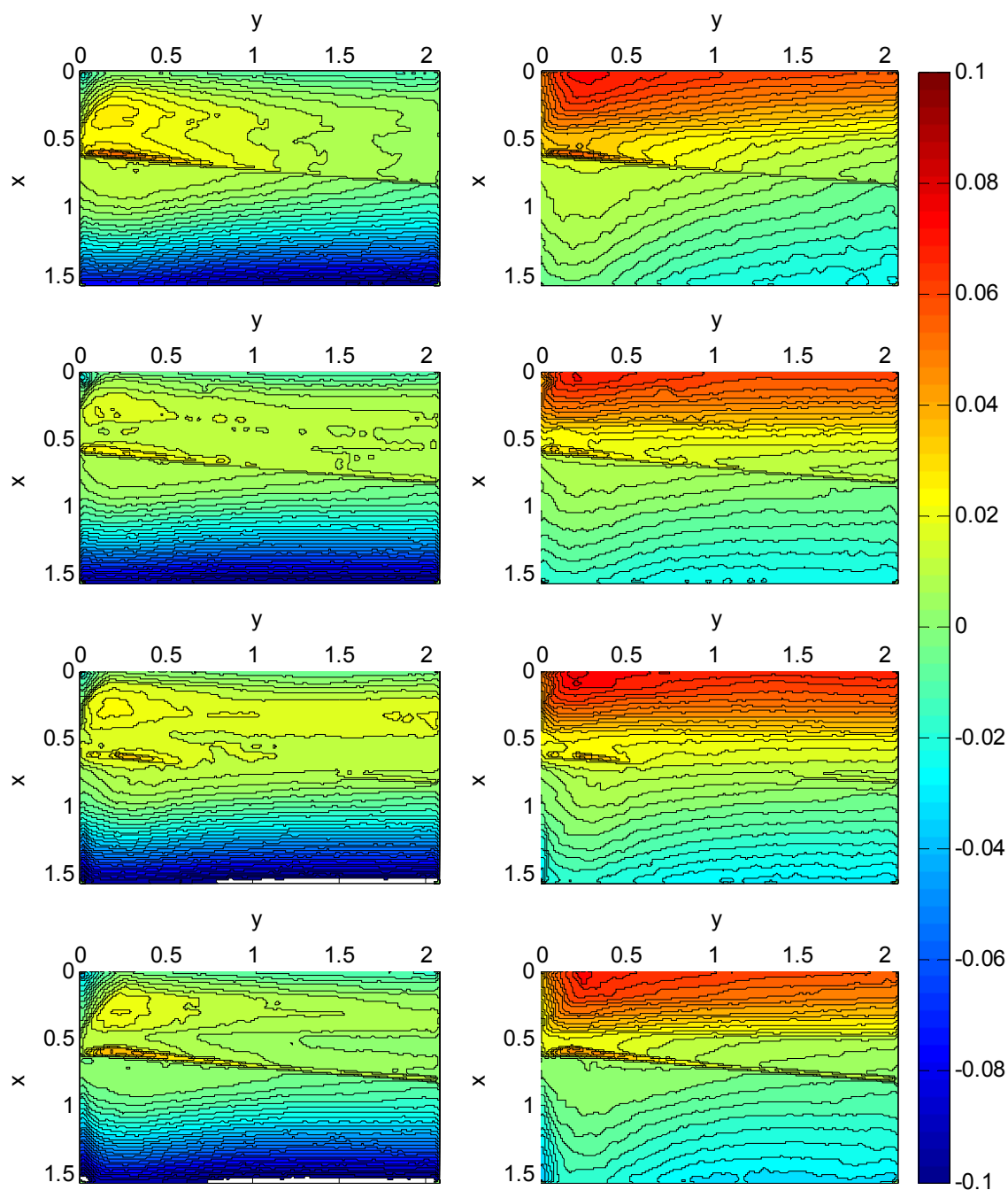


图28 原始等高线与展平面中的等高线比较图

缺点：子弹并不是正圆柱体，当扫描区域位于弹头前部时可能会有少许失真。

9.2 姿态标识线模型

优点：运用迭代拟合的思想成功的从高度场资料中提取出了反应弹头姿态特征的信息，利用简单的直线比较准确的刻画了弹头在空间的位置和姿态。

缺点：原始数据中不可避免的带有不真实的信息，使得在挑选姿态标识点时存在误差，进而影响了姿态标识线的精度。

推广：由前面 5.3 的分析可知，一个弹头在空间的姿态有 4 条姿态标识线来表示，由于

误差的存在,使得这4条标识线在形态上有差异,这与实际是不负。考虑到斜率和截距是直线标识直线的基本特征,为了尽可能真实的再现弹头的姿态,减小误差,可以综合考虑4条姿态标识线的特征信息,用一条姿态标识线 $l(k,b)$ 满足:

$$\begin{cases} k = \frac{w_1 \cdot k_1 + w_2 \cdot k_2 + w_3 \cdot k_3 + w_4 \cdot k_4}{4} \\ b = \frac{r_1 \cdot b_1 + r_2 \cdot b_2 + r_3 \cdot b_3 + r_4 \cdot b_4}{4} \end{cases}$$

其中, $(w_1, w_2, w_3, w_4), (r_1, r_2, r_3, r_4)$ 分别为四条姿态标识线的斜率和截距的权重,可以依据每条次棱的特征和重要性来确定。

9.3 相关序列模型

优点: 将相关分析与时间序列的思想巧妙地结合起来,找出空间中稳定且相关度高的弹痕测量数据区域,提取出了比对效果好的数据,比对效果好。

缺点: 用四模型来进行配对,在某些情况下效果不是最优。

9.4 比配模型

比配模型是建立在相关关系的基础上的,得到的结果能较好的反应比配弹头见的相似关系,但是并不能完全描述出比配特征,故得到的解不是完全最优。

参考文献

- [1] 均值滤波[], <http://baike.baidu.com/view/1220844.html?fromTaglist>, 访问时间(2009年9月20日)
- [2] 魏凤英, 经验模态分解(EMD)方法, 现代气候统计诊断与预测技术(第2版), 北京: 气象出版社, 2007
- [3] 魏凤英, 现代气候统计诊断与预测技术(第2版), 北京: 气象出版社, 2007