



## “华为杯”第十五届中国研究生 数学建模竞赛

学    校 西南石油大学

参赛队号 18106150026

队员姓名 1. 杨小龙  
2. 沈蓉萍  
3. 张紫茵

# “华为杯”第十五届中国研究生 数学建模竞赛

## 题 目 跳台跳水难度系数的体型校正分析

### 摘要

国际泳联在跳水竞赛规则中规定了不同跳水动作的代码及其难度系数，它们与跳水运动员的起跳方及空中动作有关。起跳方式包括起跳时运动员正面朝向、翻腾方向，空中动作包括翻腾及转体圈数、身体姿势等。因此，出于公平性考虑，一个跳水动作的难度系数应充分反映该动作的真实难度。但是，出于实际生活经验，不同体型和身体素质的运动员在完成同样的翻腾和转体动作时具有不同的生理优势，故应当设置体型系数进行校正。

针对问题一，需要了解国际泳联跳台跳水的动作代码，理解跳台跳水难度系数的确定规则。然后依照跳水动作，先分组进行难度系数的局部分析得出翻转时间并不与难度系数呈线性关系，而且在同一组动作代码中，采用屈体或抱膝的方式难度系数更大。再进行全局分析得出翻腾周数以及转体周数对难度系数的影响较大，其中翻腾周数的影响力最大。

针对问题二，假设人体在跳台跳水时不考虑空气阻力问题，将跳台跳水运动可以建立为 Euler-Poinsot 刚体运动模型。这种运动规律必定遵循动量矩守恒的物理本质。然后在该模型的基础上，通过建立左右非对称和前后非对称的运动模型，用于模拟复杂的转体跳水和屈体抱膝跳水。运动刚体模型详述了旋运动的动力学原理并导出各物理参数之间定量关系。最后求解模型得出运动员完成各个跳水动作的时间，进而得出该时间与运动员体型(身高，体重)之间的关系。

针对问题三，根据问题二建立的运动模型，有必要设置体型校正公式，本文定义新的变量：体型扰动因子，来表示体型因素的不同动作的影响程度。体型扰动因子与动作完成时间的标准差正相关，通过解析与身高、体重及体型扰动因子有关的体型校正系数，辅以近似计算，确定体型扰动因子的临界值。以此建立了体型校正公式用于所有跳水动作的修正。

针对问题四，本文需要对所有给定动作赋予新的难度系数值。通过查阅资料，选择游泳运动员身高和体重的众数，将其带入第三问中所计算得出的体型系数修正公式，得到每个动作修正后的新的难度系数。通过对比该新系数与原系数的比较，结合动作所需时间和难度系数的相关性，阐述发生变化的难度系数的修正原因。

**关键字：** 跳台跳水 Euler-Poinsot 刚体模型 动量矩守恒 体型扰动因子

## 目录

<b>1. 问题重述</b>	<b>3</b>
1.1 引言	3
1.2 需要解决的问题	3
<b>2. 符号说明和模型假设</b>	<b>4</b>
2.1 符号说明	4
2.2 模型假设	4
<b>3. 问题分析</b>	<b>5</b>
3.1 问题一分析	5
3.2 问题二分析	5
3.3 问题三分析	5
3.4 问题四分析	5
<b>4. 问题一</b>	<b>6</b>
4.1 国际泳联跳台跳水的动作代码	6
4.2 国际泳联跳台跳水的难度系数	7
4.3 国际泳联跳台跳水难度系数分析	8
4.4 分析跳台跳水难度系数得出的结论	11
<b>5. 问题二</b>	<b>13</b>
5.1 刚体欧拉运动	13
5.2 转体运动的刚体模型	14
5.3 刚体左右非对称情形	16
5.4 刚体前后非对称情形	17
5.5 模型的建立以及求解	20
5.5.1 直体且对称跳水模型的建立	20
5.5.2 单臂非对称跳水模型的建立	20
5.5.3 屈体或抱膝跳水模型的建立	20
5.5.4 三种跳水模型的求解	21
<b>6. 问题三</b>	<b>23</b>
6.1 模型参数的分析	23
6.2 体型扰动因子的引入	25
6.3 校正系数的模型	26
<b>7. 问题四</b>	<b>28</b>
<b>8. 模型评价和未来展望</b>	<b>30</b>
8.1 问题一	30
8.2 问题二	30
8.3 问题三和问题四	30
8.4 未来展望	30
<b>参考文献</b>	<b>31</b>

# 1. 问题重述

## 1.1 引言

国际泳联在跳水竞赛规则中规定了不同跳水动作的代码及其难度系数，它们与跳水运动员的起跳方及空中动作有关。起跳方式包括起跳时运动员正面朝向、翻腾方向，空中动作包括翻腾及转体圈数、身体姿势等。裁判员们评分时，根据运动员完成动作的表现优劣及入水效果，各自给出从 10 到 0 的动作评分，然后按一定公式计算该运动员该动作的完成分，此完成分乘以该动作的难度系数即为该运动员该动作的最终得分。因此，出于公平性考虑，一个跳水动作的难度系数应充分反映该动作的真实难度。但是，出于实际生活经验，不同体型和身体素质的运动员在完成同样的翻腾和转体动作时具有不同的生理优势，故应当设置体型系数予以校正。

运动员在进行翻转运动时，根据力学原理，当物体绕定轴转动时动量矩等于转动惯量和角速度的乘积。若动量矩守恒，转动惯量的变化不仅影响角速度的大小也将改变角速度的方向。由于屈体时身体质量的分布距离转轴距离较远，转动惯量增大，抱膝团身的空翻动作，身体质量分布较为集中，离转轴距离较近，转动惯量较小 [1]。因此，运动员团身的松紧程度将很大程度上决定着转动惯量的大小。

## 1.2 需要解决的问题

根据跳水竞赛规则中起跳方式以及跳水动作，提出以下问题：

1. 研究分析关于国际泳联十米跳台跳水难度系数的确定规则，得出与运动员完成跳水动作时间、运动员体型相关且有意义的结论。
2. 请应用物理学方法，建立模型描述运动员完成各个跳水动作的时间与运动员体型（身高，体重）之间的关系。
3. 请根据建立的模型说明，在 10 米跳台跳水比赛中设置体型校正系数有无必要。如果有，应如何设置校正系数。
4. 请尝试基于建立的上述模型，给出题中所列的十米跳台跳水动作的难度系数。得出的结果与附件 1 中规定的难度系数有无区别。如果有区别，请作出解释。

## 2. 符号说明和模型假设

### 2.1 符号说明

符号	意义	符号	意义
$DD$	跳台跳水难度系数	$(x, y, z)$	刚体中心主轴坐标系
$A$	翻腾周数参数	$(a, b, c)$	惯性空间中的平动坐标系
$B$	空中技巧参数	$\vec{I}$	刚体绕质心的动量矩矢量
$C$	转体方式参数	$\omega$	刚体的角速度
$D$	翻腾体式参数	$\omega_t$	刚体的瞬时角速度
$E$	入水样式参数	$p、q、r$	$\omega_t$ 向各轴上的投影
$(S)$	刚体系	$N、V、L$	刚体的中心主惯性矩
$O$	$(S)$ 的质心	$S_0、S_1、S_2$	$S_0 + S_1 + S_2 = (S)$
$M$	$(S)$ 的质量	$S_3、S_4$	$S_3 + S_4 = (S)$
$H$	$(S)$ 的高度	$\Delta\Psi'$	$(S)$ 的空翻角增量
$m_i$	$S_i$ 的质量	$\Delta\Phi'$	$(S)$ 的转体角增量
$l$	$(S)$ 的半臂长度	$n$	每空翻一周的转体周数
$g$	$(S)$ 的肩宽一半	$m$	翻腾周数
$\Psi$	$(S)$ 的空翻速度	$n$	转体周数
$\Phi$	$(S)$ 的转体速度	$T_{\Psi i}$	空翻一周所用的时间
$\Psi'$	$(S)$ 的空翻角	$T_{\Phi i}$	转体一周所用的时间
$\Phi'$	$(S)$ 的转体角	$T_{dive}$	完成跳水动作的时间
$t_a$	起跳到入水时间	$t_f$	自由时间
$t_i$	完成跳水动作时间	$\kappa$	体型扰动因子
$t_d$	自由落体时间	$\Delta D$	体型校正参数

### 2.2 模型假设

- 飞身只能在屈体 B 或抱膝 C 状态时才可能发生。
- 翻腾半周时，只能在直体 A、屈体 B 和抱膝 C 状态时转体。
- 翻腾一周或一周半时，只能在任意姿势 D 状态时转体。
- 翻腾两周及以上时，只能在屈体 B 和抱膝 C 状态时转体。
- 臂立跳水翻腾半周、一周半或两周时，只能在任意姿势 D 状态时转体。
- 臂立跳水翻腾两周半及以上时，只能在屈体 B 和抱膝 C 状态时转体。
- 运动员在跳水时不考虑空气阻力问题。
- 转体跳水时，不考虑入水样式。
- 同一个体翻腾或旋转一圈的时间是一样的，不考虑连续翻转的惯性因素。

### 3. 问题分析

国际泳联在跳水竞赛规则中规定了不同跳水动作的代码及其难度系数，它们与跳水运动员的起跳方及空中动作有关。起跳方式包括起跳时运动员正面朝向、翻腾方向，空中动作包括翻腾及转体圈数、身体姿势等。裁判员们评分时，根据运动员完成动作的表现优劣及入水效果，各自给出从 10 到 0 的动作评分，然后按一定公式计算该运动员该动作的完成分，此完成分乘以该动作的难度系数即为该运动员该动作的最终得分。因此，出于公平性考虑，一个跳水动作的难度系数应充分反映该动作的真实难度。但是，出于实际生活经验，不同体型和身体素质的运动员在完成同样的翻腾和转体动作时具有不同的生理优势，故应当设置体型系数予以校正。

#### 3.1 问题一分析

问题一要求根据国际泳联十米跳台跳水难度系数的确定规则，分析该规则与运动员完成跳水动作时间、运动员体型相关且有意义的结论。需要首先了解国际泳联跳台跳水的动作代码，理解跳台跳水难度系数的确定规则。然后依照跳水动作，先分组进行难度系数的局部分析，再进行全局分析得出结论。

#### 3.2 问题二分析

问题二要求应用物理学方法，建立模型描述运动员完成各个跳水动作的时间与运动员体型(身高，体重)之间的关系。本文假设人体在跳台跳水时不考虑空气阻力问题，所以跳台跳水运动可以看作腾空运动。根据运动本质，跳台跳水动作可以视为刚体运动。而跳水运动员的空翻转体运动可以看作绕质心的运动，这种运动规律必定遵循动量矩守恒定理 [2]。。首先根据动量矩定理定性解释旋运动的物理本质。然后通过建立人体的刚体系模型来更加详细认识跳水时的刚体运动。其次分析绕质心运动的动力学方程，详述旋运动的动力学原理并导出各物理参数之间定量关系。最后建立并求解模型得出运动员完成各个跳水动作的时间，并且得出该时间与运动员体型(身高，体重)之间的关系。

#### 3.3 问题三分析

问题三要求根据建立的模型说明，在 10 米跳台跳水比赛中设置体型校正系数有无必要。如果有，应如何设置校正系数。本题首先需要定量判断是否有必要设置体型校正系数，然后考虑怎样设置体型校正系数。由第二问中得出了翻转时间与体型的关系，翻转时间并不与难度系数呈线性关系。因此无法直接利用翻转时间与难度系数的关系来推导体型与难度系数关系。在本节中，定义新的变量：体型扰动因子，来表示体型因素的不同动作的影响程度。体型扰动因子与动作完成时间的标准差正相关，即当不同体型在该动作上的差异越大，体型扰动因子越大。其次设置了与身高、体重及体型扰动因子有关的体型校正系数，通过校正系数的计算，确定体型扰动因子的临界值。当体型扰动因子超过临界值时，体型参数对难度系数的影响明显增加，即此时难度系数明显受体型因素的扰动。

#### 3.4 问题四分析

问题四要求尝试基于建立的上述模型，给出题中所列的十米跳台跳水动作的新难度系数，与原难度系数是否有区别。需要给出每个动作的新难度系数值。通过查阅资料，取游泳运动员身高和体重的众数，将其带入第三问中所计算得出的体型系数修正公式，得到每个动作修正后的新难度系数。通过比较动作所需时间与难度系数，以及查阅相关资料解释所得计算结果。

## 4. 问题一

问题一需要分析关于国际泳联十米跳台跳水难度系数的确定规则，得出与运动员完成跳水动作时间、运动员体型相关且有意义的结论。首先需要了解国际泳联跳台跳水的动作代码，理解跳台跳水难度系数的确定规则。然后依照跳水的分组动作，进行难度系数的分析并得出结论。

### 4.1 国际泳联跳台跳水的动作代码

在理解跳台跳水难度系数的确定规则之前，需要知道国际跳水的动作代码，并理解动作代码每一位的含义。国际跳水的动作代码一般为 3 位数字或 4 位数字，外加 1 位空中动作姿势识别码（字母）。空中动作姿势识别码一般为 4 种：A 为直体，B 为屈体，C 为抱膝，D 为任意姿势。

跳水动作代码主要分为两部分。从左到右看，第 1 位是动作组别、其余位为动作细节。动作细节包括是否有飞身、翻腾周数以及转体周数等。而动作组别有 6 组，主要分为 3 大类：

1. 第 1-4 组是基本的动作组别，其动作代码一般为 3 位；
2. 第 5 组是转体跳水，其动作代码一般为 4 位；
3. 第 6 组是臂立跳水，其动作代码可以为 3 位也可以为 4 位。

各组跳水动作代码位的具体意义表示如图 (1)(2)(3) 所示。

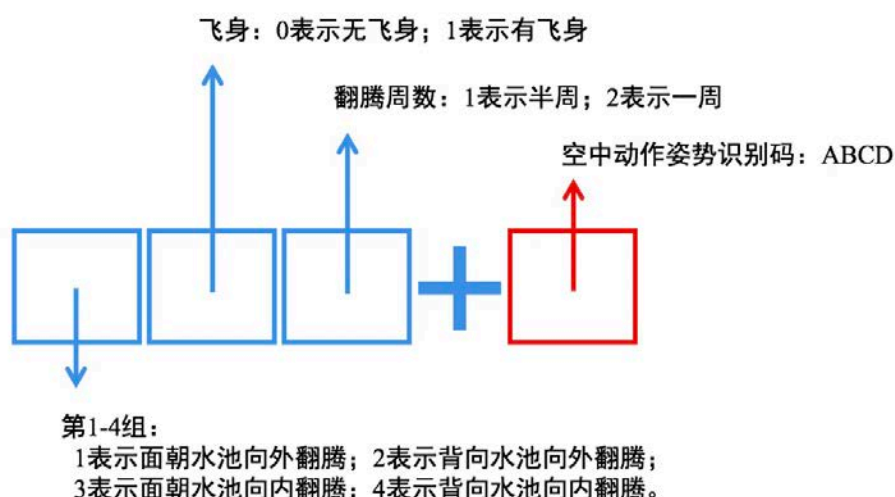


图 1

图 (1) 列出了第 1-4 组的跳水动作代码位的具体意义。第 1-4 组动作代码一般只有 3 位。例如“402B”表示背向水池屈体向内翻腾 3 周半，“412B”表示背向水池屈体向内翻腾 3 周半且伴有飞身。如果出现 4 位情况，那么应把最后两位看作一位，为运动员的翻腾周数。例如“1011C”表示面朝水池抱膝向外翻腾 5 周半。

图 (2) 列出了第 5 组的跳水动作代码位的具体意义。第 5 组动作代码一般有 4 位，“5375C”表示抱膝向内翻腾 3 周半且转体 2 周半。

图 (3) 列出了第 6 组的跳水动作代码位的具体意义。第 6 组动作代码可以有 3 位，也可以有 4 位。当跳水动作代码为 4 位时填写转体周数，若为 3 位则不管。例如“611A”表示臂立直体向前翻腾半周，“6243D”表示臂立任意姿势向后翻腾 2 周且转体 1 周半。

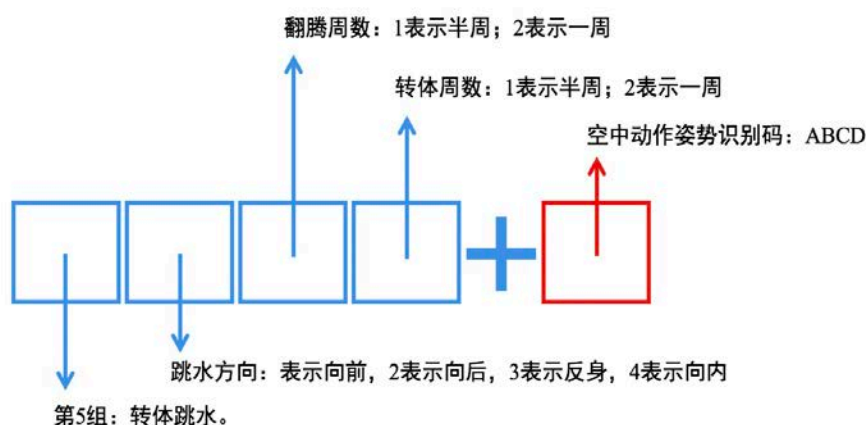


图 2

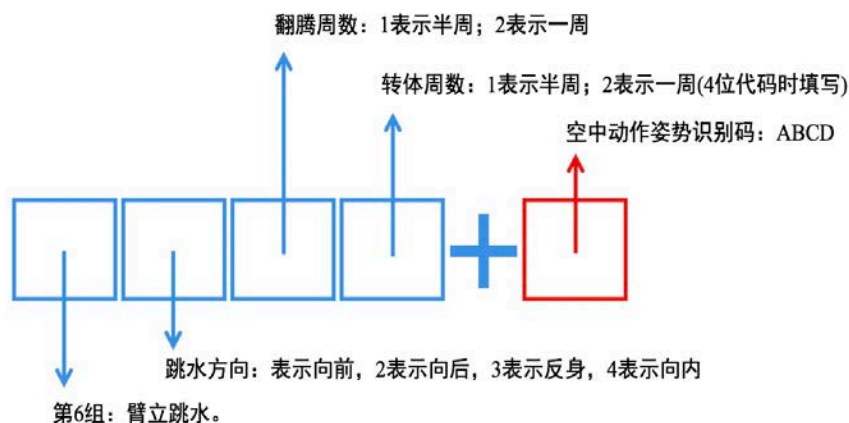


图 3

## 4.2 国际泳联跳台跳水的难度系数

根据跳水的动作代码，可以粗略知道跳水动作的难度系数与运动员起跳方式以及空中动作有关。国际泳联最新跳水规则如附件 1 所示，附件 1 的附录 3 为国际泳联跳台跳水难度系数的计算方法和各项参数，附录 4 为国际泳联跳台跳水难度系数。从附件 1 中得出国际跳水竞赛中用式 (1) 来计算跳台跳水难度系数，难度系数记为  $DD$ 。

$$DD = A + B + C + D + E \quad (1)$$

其中  $A$  是翻腾周数、 $B$  是空中技巧、 $C$  是转体方式、 $D$  是翻腾体式、 $E$  是入水样式，这均为跳水难度参数。

从附件 1 的附录 3 中可以得出各个参数对应的分数，没有分数的部分表示对应动作目前没有人能完成。例如附录 3 的参数  $A$  对应的表中，还没有人能够完成在 5m 高的跳台高度下翻腾 4 周及以上，所以对应位置没有分数。附录 3 的参数  $D$  有两个表，一个为非臂立跳水对应的  $D$ ，一个为臂立跳水对应的  $D$ ，在



计算过程中根据跳水代码选用相应的分数即可。但在跳台跳水时有以下假设：

1. 飞身只能在屈体 B 或抱膝 C 状态时才可能发生。
2. 翻腾半周时，只能在直体 A、屈体 B 和抱膝 C 状态时转体。
3. 翻腾一周或一周半时，只能在任意姿势 D 状态时转体。
4. 翻腾两周及以上时，只能在屈体 B 和抱膝 C 状态时转体。
5. 臂立跳水翻腾半周、一周半或两周时，只能在任意姿势 D 状态时转体。
6. 臂立跳水翻腾两周半及以上时，只能在屈体 B 和抱膝 C 状态时转体。
7. 转体跳水时，不考虑入水样式。

根据附录 3 中各个参数的分数可以得出不同跳水动作的难度系数。由于上述假设导致并非全部的跳说动作均有难度系数，例如翻腾 2 周以上的转体就只能在屈体 B 和抱膝 C 的状态下有难度系数。

根据以上的规则，国际泳联给出跳水动作的难度系数如附件 1 中附录 4 所示。

### 4.3 国际泳联跳台跳水难度系数分析

在跳台项目中，运动员需要完成六组规定动作，分别为向前跳水，向后跳水，反身跳水，向内跳水，转身跳水和臂立跳水。运动员的比赛动作必须在不同组别中选出，不能重复。因此，对 6 组动作分别进行分析。

#### 一. 第 1 组动作

在比赛中运动员经常选用的 1 组动作为 107B 及 109C，其难度系数分别为 3.0 及 3.7。图 (4) 展示了一组动作中，难度系数与翻腾周数的关系。其中  $x$  轴为翻腾周数， $y$  轴为难度系数。图 (4) 中虚线以上表示为难度系数超过 3 分的动作，通常在大赛中运动员都采用 3 分以上的动作。蓝色与橙色分别代表屈体动作及抱膝动作，红色的点标注了在大赛中运动员常使用的动作。横向对比可以看出，当难度系数超过 3 分以后，翻腾周数对难度系数的影响大大增加。纵向对比可以发现，屈体与抱膝的难度差异随翻腾周数也逐渐增加。对比屈体与抱膝类别与翻腾周数对与难度系数的影响可以看出，翻腾周数影响程度大于屈体抱膝类别。

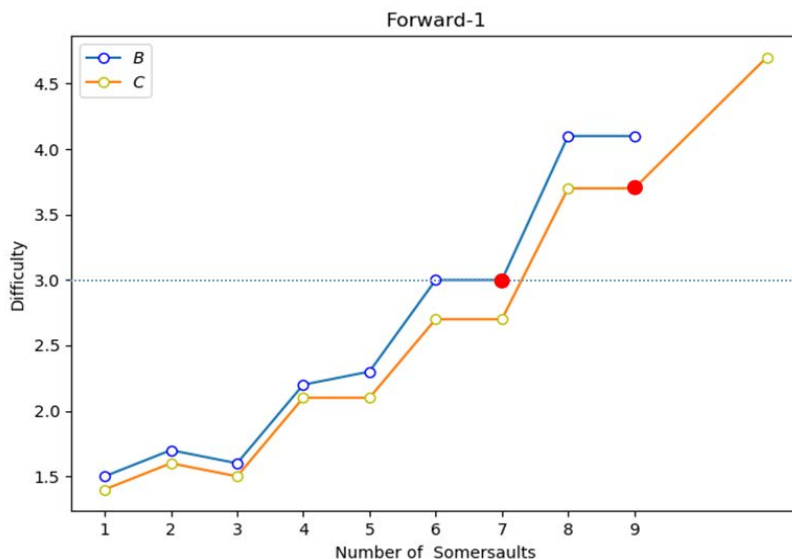


图 4

#### 二. 第 2 组动作

在比赛中运动员经常选用的 2 组动作为 207B 及 209C，难度系数分别为 3.3 及 3.6，如图 (5)。其中  $x$  轴为翻腾周数， $y$  轴为难度系数。同样，横向对比当难度系数超过 3 分以后，翻腾周数对难度系数的影响大大增加。纵向对比可以得出屈体与抱膝的难度差异不随翻腾周数增加。翻腾周数影响程度大于屈体抱膝类别。

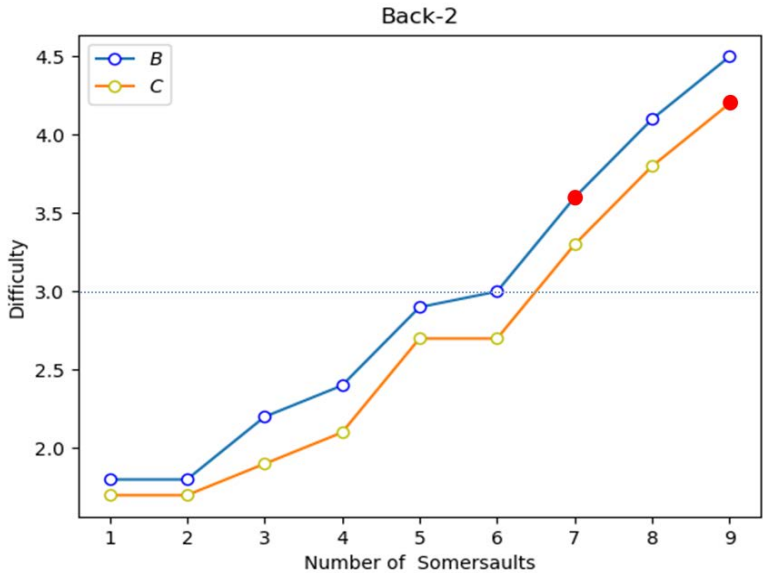


图 5

三. 第 3 组动作

在比赛中运动员经常选用的 3 组动作为 307C，难度系数为 3.4，如图 (6)。其中  $x$  轴为翻腾周数， $y$  轴为难度系数。同样，横向对比当难度系数超过 3 分以后，翻腾周数对难度系数的影响增加，但增幅不如 1,2 组动作。纵向对比可以得出屈体与抱膝的难度差异不随翻腾周数增加。翻腾周数影响程度大于屈体抱膝类别。

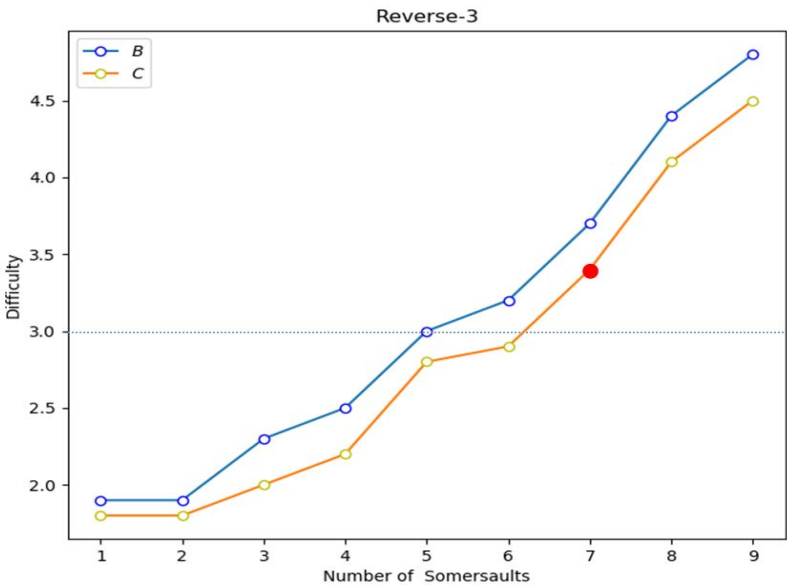


图 6

#### 四. 第 4 组动作

在比赛中运动员经常选用的 4 组动作为 407B, 307C, 难度系数分别为 3.5 及 3.2, 如图 (7)。其中  $x$  轴为翻腾周数,  $y$  轴为难度系数。同样, 横向对比当难度系数超过 3 分以后, 翻腾两周半、三周半、四周半之间难度系数明显增加。纵向对比可以得出屈体与抱膝的难度差异不随翻腾周数增加。翻腾周数影响程度大于屈体抱膝类别。

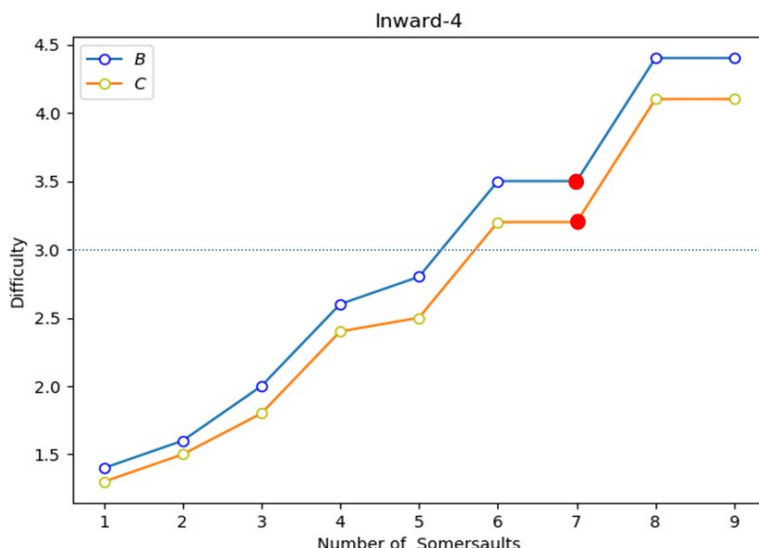


图 7

#### 五. 第 5 组动作

在比赛中运动员经常选用的 5 组动作为 5156B, 5253B, 5255B 难度系数分别为 3.8 及 3.2, 3.6。5 组动作难度系数如图 (8) 所示, 其中  $x$  轴为翻腾周数,  $y$  轴为转体周数。第一行为不含跳水动作的 2B 组动作作为对照, 第 2-10 行为以 52 开头的动作。其中, 黑色区域为难度系数表上没有数值的动作, 蓝色边框勾出难度系数超过 3 分的动作, 黄色边框勾出的是大赛中运动员常选用的跳水动作, 同时这两个动作难度系数也超过 3 分。从图中可以看出, 在难度系数超过 3 以后, 转体动作的难度增长略高于翻腾动作。纵向对比可以得出屈体与抱膝的难度差异不随翻腾周数增加。翻腾周数影响程度大于屈体抱膝类别。

#### 六. 第 6 组动作

在比赛中运动员经常选用的 5 组动作为 626B, 626C 及 6245D, 难度系数分别为 3.5, 3.3, 3.6。图 (9) 展示了臂立背对水池且不包含转体 (以 62 开头的三位数) 的一系列动作的难度系数。从图示可以看出, 当难度系数超过 3 分以后, 翻腾周数对难度系数的影响明显增加。

#### 七. 全局分析

由于第 1-4 组的跳水动作数字代码只有 3 位, 则说明只有跳水时正面朝向以及翻腾周数不同。因此选取第 1-4 组所有空中姿势识别码为 B 的跳水代码 (除带飞身的动作) 进行分析, 得出如图 (10) 所示。可以看出, 在同一翻转周数中, 第 2 组的难度系数普遍比其余组的高。由此得出在同种翻腾周数下, 背向水池向外翻转的动作难度系数更高。

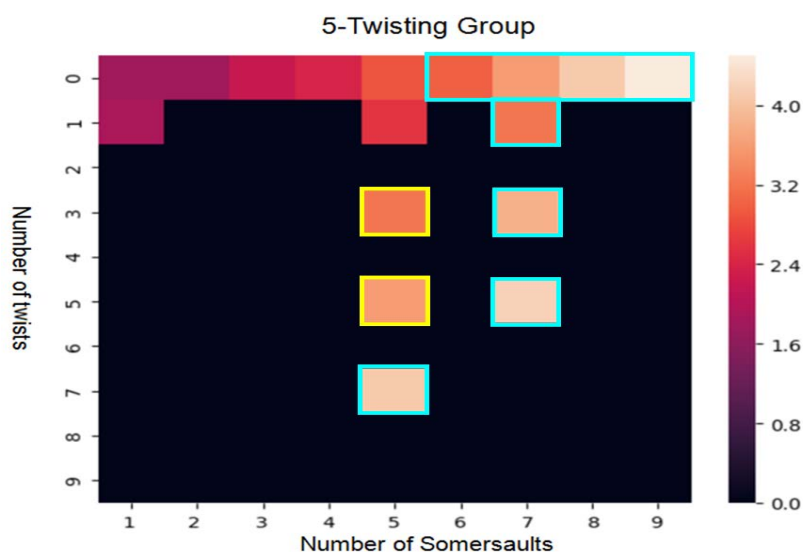


图 8

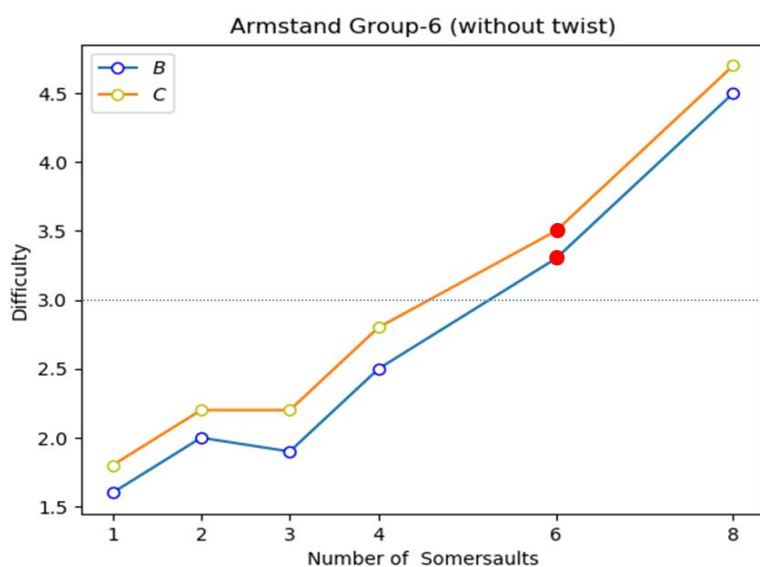


图 9

#### 4.4 分析跳台跳水难度系数得出的结论

由国际泳联给出的跳台跳水难度系数的确定规则，可以知道跳台跳水难度系数与翻腾周数  $A$ 、空中技巧  $B$ 、转体方式  $C$ 、翻腾体式  $D$  以及入水样式  $E$  有直接关系。

通过分析附录 4 中的数据，得出以下几个方面结论：

一. 跳水难度参数在难度系数中的占比

1. 在 1-4 组动作中，翻腾周数  $A$  对难度系数  $DD$  的影响最大， $A$  越大， $DD$  越高。

2. 在 5, 6 组动作中，翻腾周数  $A$  和转体周数  $C$  对难度系数  $DD$  的影响较大， $A$ ,  $C$  越大， $DD$  越高。

3. 在同一组动作代码中，采用屈体或抱膝的方式难度系数更大。

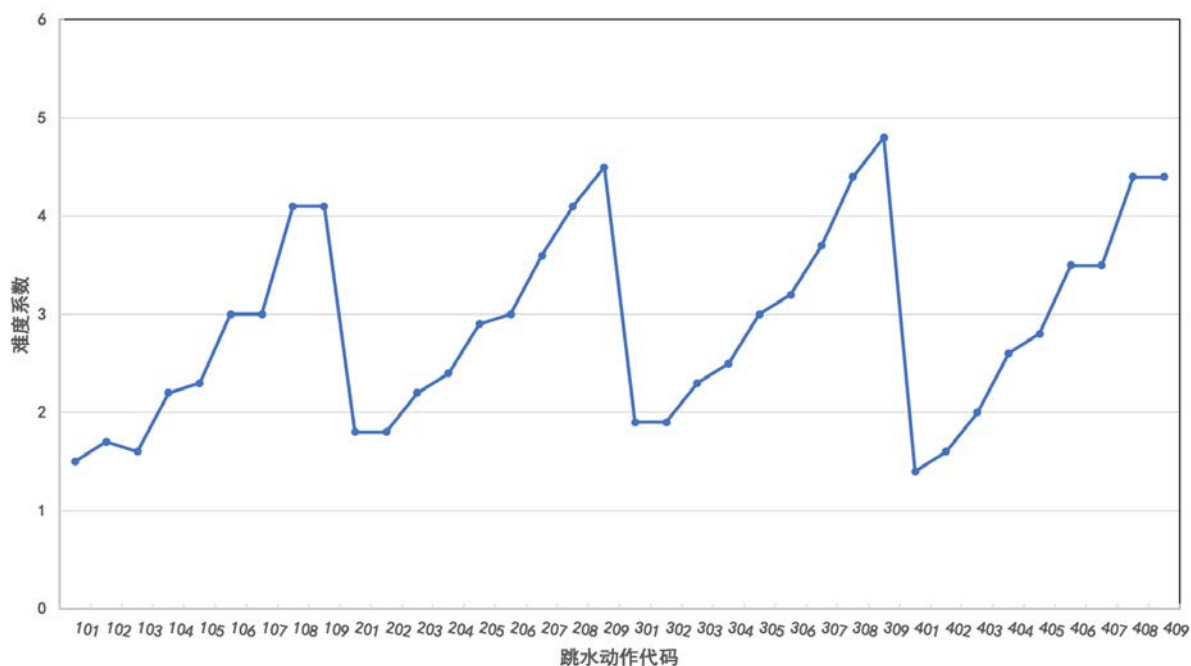


图 10

## 二. 难度系数随跳水难度参数的变化趋势

1. 在 6 组动作中，难度系数  $D$  与翻腾周数  $A$  并不呈严格线性关系。
2. 在 6 组动作中，当难度系数  $DD$  大于 3 时， $DD$  随翻腾周数  $A$  的增长速率增大。
3. 在 1 组动作中，当难度系数  $DD$  大于 3 时，采用屈体或抱膝方式对难度系数的影响增大，在其他组别该增长趋势中不明显。
4. 在同种翻腾周数下，背向水池向外翻转的动作难度系数更高。

综上所述，在跳水运动中，翻腾周数和转体周数对难度因素的影响最大，其余影响因素较低且数值几乎相同。同时，当难度系数大于 3 时，翻腾周数和转体周数的影响因子逐渐增大，而其余因素的影响因子无明显增加。

## 5. 问题二

假设人体在跳台跳水时不考虑空气阻力问题，所以跳台跳水运动可以看作腾空运动 [1]。根据运动本质，跳台跳水动作可以视为刚体运动 [3]。跳水运动员的空翻转体运动可以看作绕质心的运动，这种运动规律必定遵循动量矩守恒定理。首先根据动量矩定理定性解释旋运动的物理本质。然后通过建立人体的刚体的转动模型。其次分析绕质心运动的动力学方程 [4]，详述旋运动的动力学原理并导出各物理参数之间定量关系。最后建立并求解模型得出运动员完成各个跳水动作的时间，并且得出该时间与运动员体型 (身高，体重) 之间的关系。

### 5.1 Euler-Poinsot 刚体运动

跳台跳水运动可以看作古典刚体欧拉力学问题。首先，我们以刚体质心  $O$  为原点建立坐标系：刚体的中心主轴坐标系  $(x, y, z)$ ，惯性空间中的平动坐标系  $(a, b, c)$ ， $O_b$  沿守恒的刚体绕质心的动量矩矢量方向为  $\vec{l}$ 。

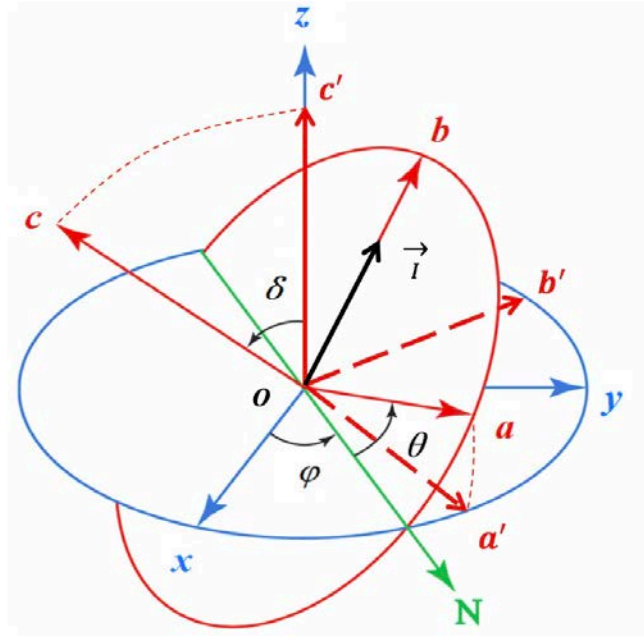


图 11

如图 (11) 所示，假设  $(a, b, c)$  绕  $O_b$  转动  $\theta$  角得到新的平动坐标系，然后绕新的  $Oa$  转动  $\delta$  角后为  $(a', b', c')$ ，此时  $Oc'$  与主轴  $Oz$  重合，再绕  $Oc'$  转动  $\varphi$  角后为  $(x, y, z)$ 。其中  $\theta$ 、 $\delta$ 、 $\varphi$  是  $(x, y, z)$  与  $(a, b, c)$  相对位置的角度坐标，与传统使用的欧拉角并不同。此时刚体的瞬时角速度  $\omega_t$  向各个轴上的投影为  $p$ 、 $q$ 、 $r$ ，其式子如式 (2) 所示

$$\begin{cases} p = \theta \cos \delta \sin \varphi + \delta \cos \varphi. \\ q = \theta \cos \delta \cos \varphi - \delta \sin \varphi. \\ r = \varphi - \theta \sin \delta. \end{cases} \quad (2)$$

设  $N$ 、 $V$ 、 $L$  为刚体的中心主惯性矩，将沿着  $b$  轴的矢量  $\vec{l}$  向  $(x, y, z)$  的各轴投影，并分别用  $N_p$ 、 $M_q$ 、 $L_r$  来表示，得到动力学方程如下：

其中：

那么式 (3) 存在的特解为:

这就表示刚体绕主轴  $Oy$  以  $\omega_0$  为角速度作匀速转动, 同时旋转轴在惯性空间中指向不改变, 这种情况称之为永久转动 [6]。

将式(3)中后两个子式相除就可以消去时间变量。设  $\delta_0$  为  $\delta$  的初始值,  $\varphi = 0$  对应初始时间, 积分得出

$\delta_0 > 0$ , 将式 (6) 代入式 (3) 消去  $\delta$ , 可以得到  $\varphi$  的微分方程为:

## 5.2 转体运动的刚体模型

人体的力学模型可以确定为 15 刚体较结成的刚体系。本节中考虑跳水直体情形, 可以将模型简化为  $S_0$  (头、身躯、腿部)、 $S_1$  (左臂)、 $S_2$  (右臂) 组成的刚体系 ( $S$ ), 如图 (12) 所示。



将  $S_i (i = 1, 2)$  简化为图 (12) 中两侧的矩形, 设  $O_0$ ,  $M$ ,  $H$  分别为  $(S)$  的质心、质量和高度,  $O_i$ ,  $m$  分别为  $S_i$  质心和质量,  $P_i$  为  $S_i$  与  $S_0$  在肩部相联结的铰接点。假设  $P_1$  与  $P_2$  的连线与过  $O_n$  指向头顶的纵轴  $O_0Z_0$  相交于  $Q$  点, 且  $O_0Q = h$ ,  $OP_i = q$ ,  $O_iP_i = l$ 。由人体构造可知, 一般情况下肩宽大概时平均



身高的 22%，臂展和肩宽和身高有固定关系：

$$H = 4l + 2g \quad (8)$$

设  $O$  为  $O_0Z_0$  上与  $O_0$  距离为  $2mh/(M+2m)$  的确定点，可证当  $S_1, S_2$  位于不同位置时，系统的质心位于以  $O$  为中心， $2ml/(M+2m)$  为半径的圆内。通过计算可知此圆半径为 3cm 左右，为了便于计算我们近似以  $O$  点作为  $O$  的质心位置。

因此，如图 (12) 所示，以  $O$  为原点建立  $S_n$  的形体轴坐标系  $(x_0, y_0, z_0)$ ： $Oz_0$  沿纵轴指向头顶， $Oy_0$  沿横轴指向左侧， $Ox_0$  指向腹部， $OQ = h = Mh_0/(M+2m)$ 。如果上下肢都保持在  $(y_0Oz_0)$  平面内，则  $(S)$  近似为相对  $(y_0Oz_0)$  平面的面对称刚体；如果上下肢保持左右对称位置，则  $(S)$  是相对  $(x_0Oz_0)$  平面的面对称刚体。本节讨论双腿并拢与  $z_n$  轴平行，双臂在  $(y_0Oz_0)$  平面内左右对称的特殊情况。这时  $(S)$  相对  $(y_0Oz_0)$  和  $(x_0Oz_0)$  两个平面都对称， $(x_0, y_0, z_0)$  与  $(S)$  的主轴坐标系  $(x, y, z)$  完全重合。设  $N_0, V_0, L_0$  为  $S_0$  相对  $O$  点的主惯性矩， $J$  为  $S_1$  相对过  $O_1$  垂直于对称轴  $O_iZ_i$  的主惯性矩。表 (1) 给出了不同手臂位置时  $(S)$  的主惯性矩。

表 1 不同手臂位置时  $(S)$  的主惯性矩

手臂位置	$N$	$V$	$L$
双臂平举	$N_0 + 2J + 2m[(l + g)^2 + h^2]$	$V_0 + 2mh^2$	$L_0 + 2J + 2m(l + g)^2$
双臂下垂	$N_0 + 2J + 2m[(h - l)^2 + g^2]$	$V_0 + 2J + 2m(h - l)^2$	$L_0 + 2mg^2$
双臂上举	$N_0 + 2J + 2m[(h + l)^2 + g^2]$	$V_0 + 2J + 2m(h + J)^2$	
右臂上举 左臂下垂	$N_0 + 2J + 2m(h^2 + l^2 + g^2)$	$V_0 + 2J + 2m(h^2 + l^2)$	
右臂下垂 左臂上举			

由于人直体时的  $\mu$  大于零，微小扰动  $\delta_0$  能显著改变运动状态，从而引起绕纵轴的单方向旋转，此即旋运动的物理本质。定义  $Oz_0$  和  $Oy^*$  为转体轴和空翻轴。 $Oz_0$  为纵轴， $Oy^*$  为人体横断平面  $(x_0Oy_0)$  与惯性坐标系平面  $(bOz)$  的交线。空翻轴  $Oy^*$  垂直于纵轴但不随体运动改变方位 [9]。令  $(S)$  的瞬时角速度  $\omega_t$  沿  $Oy^*$  和  $Oz_0$  的投影为空翻速度  $\Psi$  和转体速度  $\Phi$ ， $\Psi'$  和  $\Phi'$  定义为空翻角和转体角：

$$\Psi = \theta \cos \delta, \quad \Phi = \varphi - \theta \sin \delta \quad (9)$$

将式 (3) 与式 (6) 带入式 (19)，得到

$$\Psi = \omega_0 \cos \delta_0 (1 - \lambda \mu \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} (1 + \mu \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$$\Phi = -\omega_0 (1 + \lambda) (\sin^2 \delta_0 + \mu \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} (1 + \mu \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \quad (11)$$

将上两式与式 (7) 相除消去时间变量后对  $\varphi$  自 0 至  $2\pi$  积分，得到  $\varphi$  每变化一周



的空翻角与转体角增量：

$$\Delta\Psi' = -\frac{\cos\delta_0}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \lambda\mu\sin^2\varphi)d\varphi}{(1 + \mu\sin^2\varphi)(\sin^2\delta_0 + \mu\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (12)$$

$$\Delta\Phi' = \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \mu\sin^2\varphi} \quad (13)$$

定义转体系数  $n$  为每空翻一周的转体周数。

$$n = \frac{|\Delta\Psi'|}{|\Delta\Phi'|} \quad (14)$$

### 5.3 刚体左右非对称情形

如果在臂立跳水时，可能存在双腿直体姿势，但双臂在  $(yOz)$  平面但以  $z$  轴非对称。如图 (13) 所示的左图所示，这是一个人体单臂立的刚体示意图。和 5.2 节相同，把人体分成  $S_0$ 、 $S_1$  和  $S_2$  三个部分。

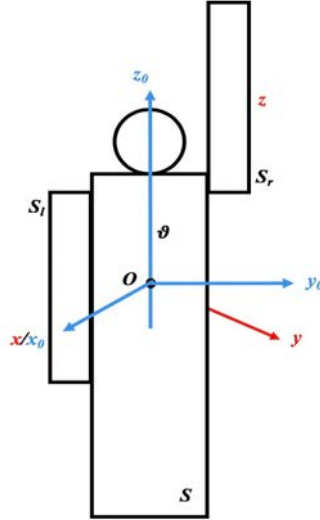


图 13

由于  $S_1$  和  $S_2$  在同一平面内不对称，那么在图 (13) 中，此时  $(S)$  的中心主轴坐标系  $(x, y, z)$  相对直体坐标系  $(x_0, y_0, z_0)$  绕  $Ox_0$  偏移角度为  $\vartheta$  时有：

$$\vartheta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2K}{L - V} \right) \quad (15)$$

式 (15) 中， $V$ 、 $L$  是表 (1) 中  $(S)$  相对于  $(x_0, y_0, z_0)$  的惯性参数 [7]。 $K$  是  $(S)$  相对  $Ox_0$  的惯性积，只有在左臂上举和右臂下垂时有值，且为  $-2mgl$ ，其余时候均为 0。可以看出  $(L - V) \gg K$ ，式 (15) 可以近似为  $\vartheta = K/(L - V)$ 。

仍然将  $Oz_0$  为转体轴，但不与中心主轴  $Oz$  重合。如图 (14)，空翻轴定义为平面  $(x_0Oy_0)$  与平面  $bOz$  的交线  $Oy^*$ 。那么应重新定义转体角速度  $\omega_1$ ，根据  $\omega_1$  沿  $Oy^*$  和  $Oz_0$  的投影，得出：

$$\Psi = [\theta \cos \delta \cos \vartheta - (\varphi - \theta \sin \delta) \sin \delta \cos \vartheta] \cdot (1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta)^{-\frac{1}{2}} \quad (16)$$

$$\Phi = (\varphi - \theta \sin \delta) \cos \vartheta + (\theta \cos \delta \cos \theta - \delta \sin \varphi) \sin \vartheta \quad (17)$$

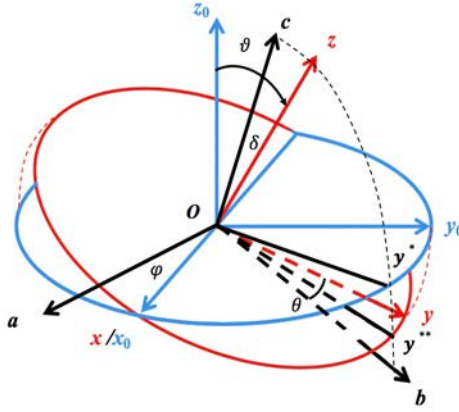


图 14

其中  $\theta$ 、 $\delta$ 、 $\varphi$  是  $(x, y, z)$  与  $(a, b, c)$  相对位置的角度坐标。设初始化时  $S$  的动量矩  $\vec{I}$  沿  $y_0$  轴，此时令  $\delta_0 = \vartheta$ ，并且将式 (3) 的前两个子式、式 (6) 以及式 (7) 代入式 (16) 得出：

$$\Psi = \frac{\omega_0[(1 - \lambda\mu\sin^2\varphi)\cos^2\vartheta + (1 + \lambda)(\mu\sin^2\varphi + \sin^2\vartheta)^{1/2}\sin\varphi\sin\vartheta]}{(1 + \mu\sin^2\varphi)^{1/2}(1 - \sin^2\varphi\sin^2\vartheta)^{1/2}} \quad (18)$$

$$\Phi = -\frac{\omega_0\cos\vartheta[(1 + \lambda)(\mu\sin^2\varphi + \sin^2\vartheta)^{1/2} - \sin\vartheta\sin\varphi]^{1/2}}{(1 + \mu\sin^2\varphi)} \quad (19)$$

经过与 5.2 节类似变换后得：

$$\Delta\Psi' = -\frac{\cos^2\vartheta}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \lambda\mu\sin^2\varphi)}{(1 + \mu\sin^2\varphi)(\mu\sin^2\varphi + \sin^2\vartheta)^{1/2}(1 - \sin^2\varphi\sin^2\vartheta)^{1/2}} d\varphi \quad (20)$$

$$\Delta\Phi' = \frac{(1 + \lambda)\cos\vartheta}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \mu\sin^2\varphi} d\varphi \quad (21)$$

然后将式 (20) 和式 (21) 代入式 (14) 就可以得到转体系数  $n$ 。

#### 5.4 刚体前后非对称情形

在本节中，我们将第三部分中的空翻模型拓展为包含屈体姿势的前后非对称模型。与之前对人体划分不同，在本节中我们将躯干与双腿分开。如双臂下垂，双腿停止向前收起呈屈体姿势，则  $(S)$  只相对  $(x_0Oz_0)$  平面对称但前后不对称。

因此我们将人体的力学模型  $(S)$  改为由  $S_3$ (头，躯干，双臂) 和  $S_4$ (双腿) 两个刚体组成，如图 (15) 所示。 $S_3$  和  $S_4$  在腰部可绕横轴相对转动，但在运动过程中保持固定而合为一个刚体。以质心  $O_0$  为原点建立  $S_i$  的形体轴坐标系  $(x_i, y_i, z_i)$ ，其中  $(i = 3, 4)$ ， $O_i y_i$  沿横轴， $O_i z_i$  沿各自的纵轴指向头顶  $(i = 3)$  或从足底指向腰部  $(i = 4)$  并相交于  $O'$  点。

如图 (16)。再建立原点不确定的  $(x_0, y_0, z_0)$  坐标系，其中  $y_0$  仍沿横轴， $z_0$  轴平行于  $z_3$  轴与  $z_4$  轴的平分角线方向， $\gamma$  为  $z_0$  轴与  $z_i$  轴的夹角。设  $m_i$  为  $S_i$

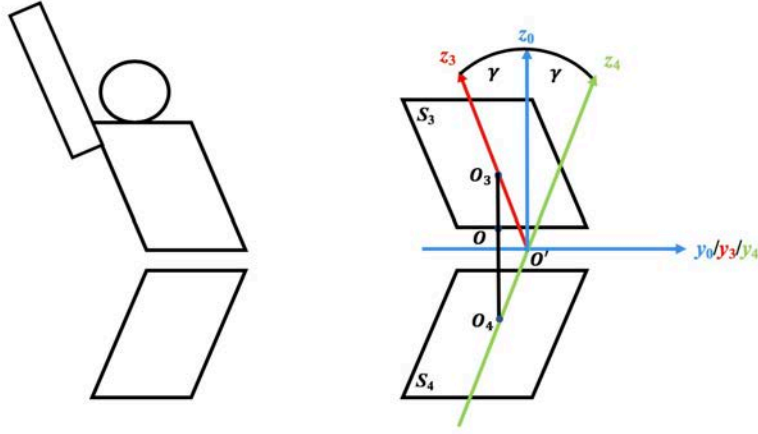


图 15

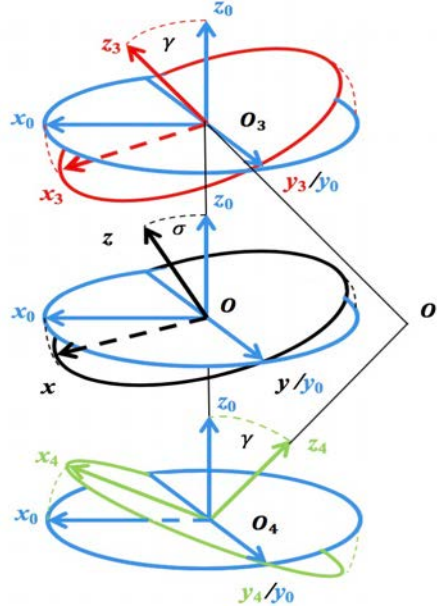


图 16

的质量,  $m = m_3 + m_4$  为  $(S)$  的质量,  $l_i$  为  $O_i$  至  $O'$  点的距离,  $(S)$  的质心  $O$  相对  $O_i$  的矢径  $\rho_i$  在 原点为  $O_i$  的  $(x_0, y_0, z_0)$  中投影为

$$\begin{cases} x_i = (-1)^i [-(m_i/m)] (l_3 - l_4) \sin \gamma. \\ y_i = 0. \\ z_i = (-1)^i [-(m_i/m)] (l_3 + l_4) \cos \gamma. \end{cases} \quad (22)$$

设  $N_i$ ,  $V_i$ ,  $L_i$  为  $S_i$  的中心主惯性矩, 则  $S_i$  相对  $O_i$  点对  $(x_0, y_0, z_0)$  的惯性张量各分量为

$$\begin{aligned} N_i &= N_i \cos^2 \gamma + L_i \sin^2 \gamma, V_i = V_i L_i = N_i \sin^2 \gamma + L_i \cos^2 \gamma, \\ K_i &= 0, E_i = (-1)^{i-1} (N_i - L_i) \cos \gamma \sin \gamma, F_i = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

计算  $S_{10}$  相对  $O$  点对  $(x_0, y_0, z_0)$  的惯性张量并相加得到  $(S)$  的总惯性张量 [8]。

$$\begin{cases} N_0 = [(A_3 + A_4 + \epsilon(l_3 + l_4)^2 \cos \gamma^2 + (C_3 + C_4) \sin \gamma^2]. \\ V_0 = (B_3 + B_4 + \epsilon(l_3 + l_4 + 2l_3 l_4) \cos 2\gamma). \\ L_0 = [(A_3 + A_4 + \epsilon(l_3 - l_4)^2 \sin \gamma^2 + (C_3 + C_4) \cos \gamma^2]. \\ E_0 = [(A_3 - C_3 - A_4 + C_4 + \epsilon(l_3^2 - l_4^2) \sin \gamma \cos \gamma]. \\ K_0 = F_0 = 0. \end{cases} \quad (24)$$

其中  $\epsilon = m_3 m_4 / m$ ，设  $(x, y, z)$  为以  $O$  为原点的  $(S)$  中心主轴坐标系，它相对  $(x_0, y_0, z_0)$  绕  $Oy_0$  转过  $\sigma$  角

$$\sigma = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{2E_0}{N_0 - L_0}\right) \quad (25)$$

$(S)$  的中心主惯性矩为

$$\begin{cases} N = N_0 \cos^2 \sigma + \cos \sigma \sin^2 \sigma + E_0 \sin 2\sigma. \\ V = V_0. \\ L = N_0 \sin^2 \sigma + \cos \sigma \cos^2 \sigma - E_0 \sin 2\sigma. \end{cases} \quad (26)$$

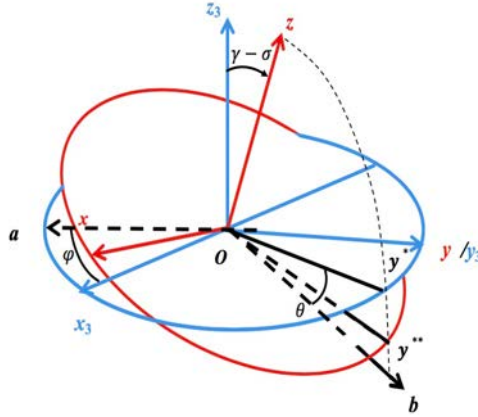


图 17

如图 (17) 所示，将  $(x_3, y_3, z_3)$  的原点移至  $O$ ，定义  $Oz_3$  为轴体轴， $S_3$  的横断面  $(x_3 Oy_3)$  与  $(bOz)$  平面的交线  $Oy^*$  为空翻轴，得到

$$\Psi = [\theta \cos \delta \cos(\gamma - \sigma) - (\varphi - \theta \sin \delta) \sin(\gamma - \sigma) \sin \varphi] \times [1 - \sin^2(\gamma - \sigma) \cos^2 \varphi]^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

$$\Phi = (\varphi - \theta \sin \delta) \cos(\gamma - \sigma) + (\varphi \cos \gamma \sin \sigma + \delta \sin \varphi) \sin(\gamma - \sigma) \quad (28)$$

经过与第三节类似的变换，积分得到

$$\Delta \Psi' = -\frac{\cos \delta_0 \cos(\gamma - \sigma)}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \lambda \mu \sin^2 \varphi) d\varphi}{(1 + \mu \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} ((\sin^2 \delta_0 + \mu \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}) [1 - \sin^2(\gamma - \sigma) \cos^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}} \quad (29)$$

$$\Delta \Phi' = \frac{(1 + \lambda \cos(\gamma - \sigma))}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \sin^2 \varphi} \quad (30)$$

将上面两式带入式 (14) 即得到转体系数  $n$ 。

## 5.5 模型的建立以及求解

由以上的刚体系分析可得，通过不同的跳水动作可以得到不同的空翻角  $\Psi'$  和转体角  $\Phi'$ 。而根据空翻角增量  $\Delta\Psi'$  与转体角增量  $\Delta\Phi'$  可以得出每空翻一周的转体系数  $n$ 。跳水动作时间不是运动员从起跳到入水间的时间，而是运动员在腾空状态完成跳水代码动作的时间，记为  $T_{dive}$ 。

### 5.5.1 直体且对称跳水模型的建立

在 5.2 节中，分析了跳水运动员在直体姿势跳水时的运动情况，即直体不旋转跳水动作。在直体且沿人体纵轴对称的姿势跳水时，根据刚体动力学，我们解出了在这种情况下转体周数  $n$ ，详细过程见 5.2 节。令空翻角增量  $\Delta\Psi'$  与转体角增量  $\Delta\Phi'$  均为  $2\pi$ ，转动一周时间为  $T$ 。联立式 (7) 有：

$$\begin{cases} \text{式(7)}. \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \end{cases} \quad (31)$$

可得：

$$T = \frac{\cos\delta_0}{\lambda^2}(1 - \lambda\mu\sin^2\phi) \quad (32)$$

此时联立式 (7) 有：

$$T_{\Psi_1} = \frac{\cos\delta \cdot (1 + \mu\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}{\lambda^2}(1 - \lambda\mu\sin^2\delta) \quad (33)$$

$$T_{\Phi_1} = \frac{1 + \lambda}{\lambda(1 + \mu\sin^2\varphi)} \quad (34)$$

从上面两式就是在采用直体且对称动作跳水时， $T_{\Psi_1}$  和  $T_{\Phi_1}$  为该模型下的翻腾一周所用的时间和转体一周所用的时间。

### 5.5.2 单臂非对称跳水模型的建立

在 5.3 节中，分析了跳水运动员在单臂姿势跳水时的运动情况，即直体旋转跳水动作。在单臂且沿人体左右非对称的姿势跳水时，根据刚体动力学，我们解出了在这种情况下转体周数  $n$ ，详细过程见 5.3 节。与上述类似解法可以得出采用单臂且人体沿中轴非对称动作跳水时，翻腾一周的时间  $T_{\Psi_2}$  和转体一周的时间  $T_{\Phi_2}$  如下：

$$T_{\Psi_2} = \frac{\cos^2\vartheta(1 - \lambda\mu\sin^2\varphi)}{\lambda^2(1 - \sin^2\vartheta\sin^2\phi)} \quad (35)$$

$$T_{\Phi_2} = \frac{(1 + \lambda)\cos\vartheta}{\lambda(1 + \mu\sin^2\varphi)} \quad (36)$$

### 5.5.3 屈体或抱膝跳水模型的建立

在 5.4 节中，分析了跳水运动员在屈体或抱膝姿势跳水时的运动情况，即一切屈体或抱膝跳水动作。在屈体或抱膝且沿人体前后非对称的姿势跳水时，根据刚体动力学，我们解出了在这种情况下转体周数  $n$ ，详细过程见 5.4 节。与上述类似解法可以得出采用屈体或抱膝且沿人体前后非对称动作跳水时，翻腾

一周的时间  $T_{\Psi_3}$  和转体一周的时间  $T_{\Phi_3}$  如下：

$$T_{\Psi_3} = \frac{\cos\delta_0 \cos(\gamma - \sigma)(1 - \lambda\mu \sin^2\varphi)}{\lambda^2[1 - \sin^2(\gamma - \sigma)\cos^2\varphi]^{\frac{1}{2}}} \quad (37)$$

$$T_{\Phi_3} = \frac{1 + \lambda\cos(\gamma - \sigma)}{\lambda(1 + \mu\sin^2\varphi)} \quad (38)$$

#### 5.5.4 三种跳水模型的求解

在各个模型中，根据表 (1) 中对应的中心主惯性矩，联立翻腾一周的时间  $T_{\Psi_i}$  和转体一周的时间  $T_{\Phi_i}$  以及式 (4)(8)，可以得出三种模型中翻腾一周时间  $T_{\Psi_i}$  与转体一周时间  $T_{\Phi_i}$  和身高  $H$ 、体重  $M$  的关系：

$$\begin{cases} T_{\Psi_i} \\ T_{\Phi_i} \\ \omega_0 = \frac{\vec{I}}{V} \\ \lambda = \frac{V-L}{L} \\ \mu = \frac{L(N-V)}{N(V-L)} \\ H = 2g + 4l \\ i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (39)$$

再根据建立的模型以及国际泳联制定的跳水规则，可以得到各个跳水动作需要完成的时间与  $T_{\Psi_i}$  与  $T_{\Phi_i}$  有直接关系。以双臂平举做翻腾一周为例，有

$$T_{\Psi_1} = \frac{\cos\delta \cdot (1 + \mu\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}{\lambda^2} (1 - \lambda\mu\sin^2\delta) \quad (40)$$

其中，

$$\begin{cases} \mu = \frac{(L_0 + 2J + 2m(l+g)^2)(N_0 + 2J + 2m[(L+g)^2 + h^2] - V_0 + 2mh^2)}{N_0 + 2J + 2m[(l+g)^2 + h^2](V_0 + 2mh^2 - L_0 - L) - 2m(l+g)^2} \\ \lambda = \frac{(V_0 + 2mh^2) - [L_0 + 2J + 2m(l+g)^2]}{L_0 + 2J + 2m(l+g)^2} \end{cases} \quad (41)$$

由此得出跳水时间和运动员体型（身高、体重）的关系。那么跳水动作的完成时间就应该为：

$$T_{dive} = m \times T_{\Psi_i} + n \times T_{\Phi_i} \quad (42)$$

其中  $m$  为翻腾周数、 $n$  为转体周数。以此得出不同模型下跳水动作和运动员体型（身高、体重）之间的关系。

跳水代码能够对应我们建立的模型，即每个跳水动作都能依照模型计算出跳水动作的时间。根据跳水动作代码可以知道，可以根据组别名称以及姿势识别码来确定模型的选择：

1. 模型一针对直体对称跳水动作，对应跳水代码应为第 1-4、6 组且姿势识别码为 A。
2. 模型二针对直体旋转跳水动作，对应跳水代码应为第 5 组且姿势识别码为 A。
3. 模型三针对屈体抱膝跳水动作，对应跳水代码应为第 1-6 组且姿势识别码为 BC。

具体示例如表 (2) 所示。

由表 (2) 可知，当跳水代码为“307B”时，根据组别和空中姿势代码，确定代入模型三。其翻腾圈数为 3.5，转体圈数为 0，则其跳水动作时间为  $3.5 \times T_{\Psi_3}$

表 2 跳水动作时间示例

跳水动作代码	姿势	高度	翻腾时间	转体时间	跳水动作时间
307	B	10	$3.5 \times T_{\Psi_3}$	0	$3.5 \times T_{\Psi_3}$
404	A	10	$2 \times T_{\Psi_1}$	0	$2 \times T_{\Psi_1}$
5374	A	10	$3.5 \times T_{\Psi_2}$	$2 \times T_{\Phi_2}$	$3.5 \times T_{\Psi_2} + 2 \times T_{\Phi_2}$
5371	C	10	$3.5 \times T_{\Psi_3}$	$0.5 \times T_{\Phi_3}$	$3.5 \times T_{\Psi_3} + 0.5 \times T_{\Phi_3}$

。当跳水代码为“5371A”时，根据组别和空中姿势代码，确定代入模型二。其翻腾圈数为 3.5，转体圈数为 0.5，则其跳水动作时间为  $3.5 \times T_{\Psi_2} + 2 \times T_{\Phi_2}$ 。

## 6. 问题三

本文中首先需要定量判断是否有必要设置体型校正系数，然后考虑怎样设置体型校正系数。由第二问中，我们得出了翻转时间与体型的关系，根据附件一得出翻转时间并不与难度系数呈线性关系。例如转体时间大于翻腾时间，但翻腾难度系数分值高于转体。因此，我们无法直接利用翻转时间与难度系数的关系来推导体型与难度系数关系。在本节中，我们定义新的变量：体型扰动因子，来表示体型因素的不同动作的影响程度。体型扰动因子与动作完成时间的标准差正相关，即当不同体型在该动作上的差异越大，体型扰动因子越大。其次，我们设置了与身高、体重及体型扰动因子有关的体型校正系数，通过校正系数的计算，我们找到了体型扰动因子的临界值。当体型扰动因子超过临界值时，体型参数对难度系数的影响明显增加，即此时明显受体型因素的扰动。

### 6.1 模型参数的分析

通过问题二模型的建立，我们可以得出跳水动作完成的时间与运动员体型（身高、体重）有关系。因此我们根据模型来进行仔细的分析。

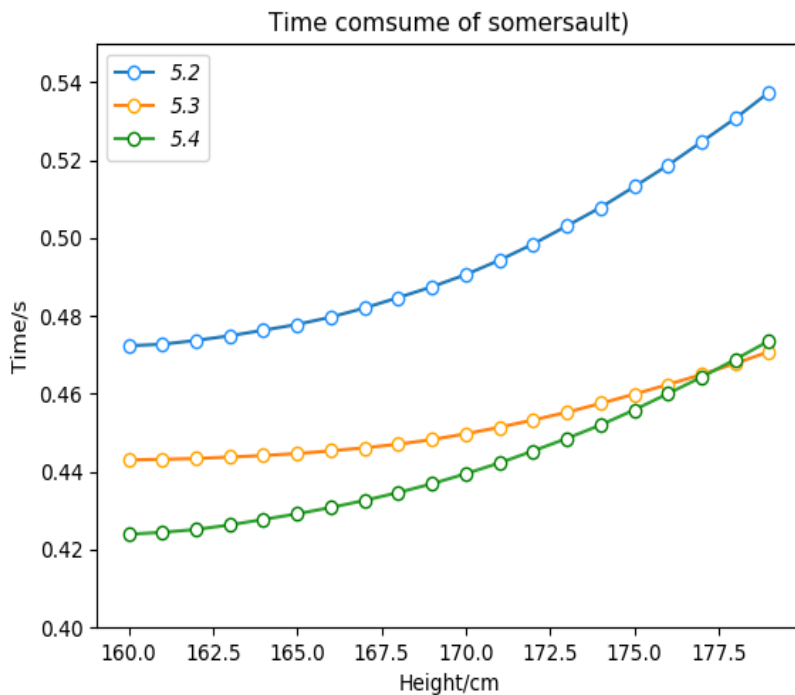


图 18

首先，假定运动员体重  $M = 65\text{kg}$ ，代入不同身高得出完成跳水动作的时间如下图 (18)(19) 所示。

图 (18) 中  $x$  轴为身高， $y$  轴为完成翻腾一周需要的时间。从纵向上来看，当运动员的身高一致时，模型一、模型二和模型三完成翻腾一周的动作所用时间依次减少。从横向上来看，运动员身高越高，其跳水时翻腾一周所用的时间越长。

图 (19) 中  $x$  轴为身高， $y$  轴为完成转体一周需要的时间。该图中没有模型一的线条，因为模型一不涉及转体。从纵向上来看，当运动员身高一致时，模型三完成转体一周的动作所用时间比模型二多。从横向上来看，运动员身高越



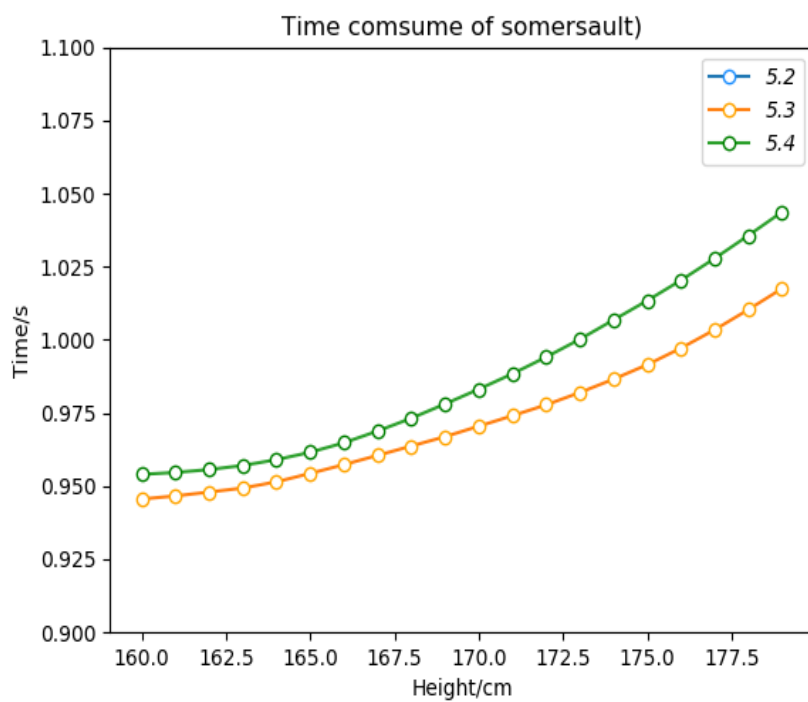


图 19

高，其跳水时转体一周所用的时间越长。

然后，我们假定运动员的身高  $H = 165\text{cm}$ ，代入不同体重得出完成跳水动作的时间如下图 (20)(21) 所示。

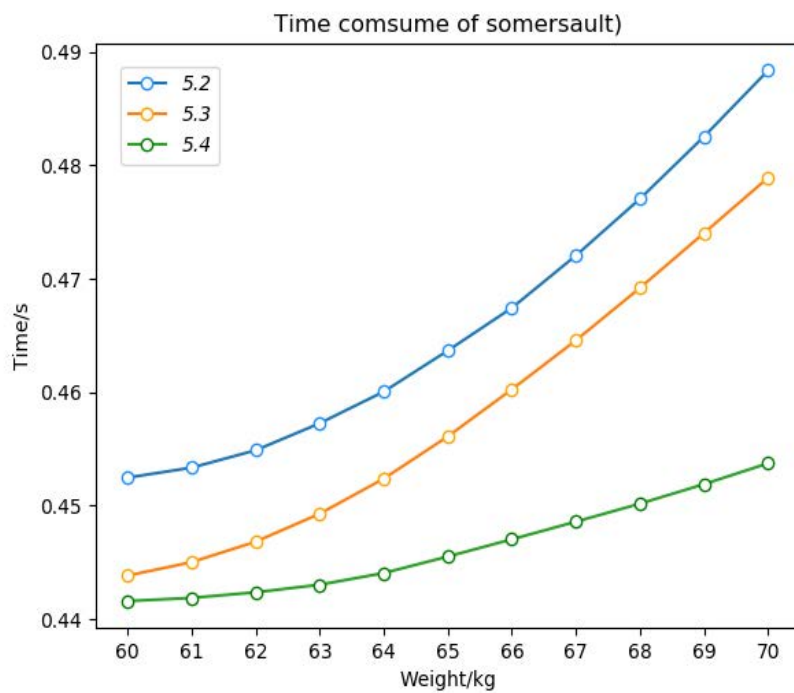


图 20

图 (20) 中  $x$  轴为体重,  $y$  轴为完成翻腾一周需要的时间。从纵向上来看, 当运动员的体重一致时, 模型一、模型二和模型三完成翻腾一周的动作所用时间依次减少。从横向上来看, 运动员体重越大, 完成翻腾一周的动作所用时间约长。

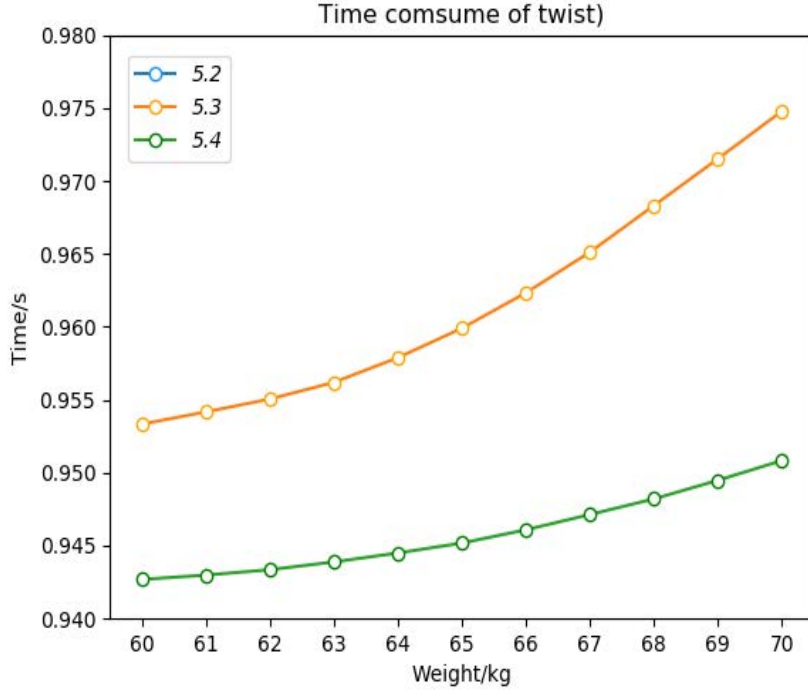


图 21

图 (21) 中  $x$  轴为体重,  $y$  轴为完成转体一周需要的时间。从纵向上来看, 当运动员体重一致时, 模型二完成转体一周的动作所用时间比模型三长。从横向上来看, 运动员体重越大, 其跳水时转体一周所用的时间越长。

通过对体型参数的定性分析, 我们可以确定需要设置体型校正系数。

## 6.2 体型扰动因子的引入

通过图可得出, 体型较瘦小的跳水运动员在完成翻转运动时所需时间较少, 因此能够更够完成翻转圈数较多的动作, 同时在完成同样动作时, 有更富余的时间来调整入水姿势。对于不同动作, 例如 203B 与 205B, 由于翻转圈数较少, 即使不同体型的运动员也能在规定时间内完成; 而对于如 5253B, 5255B 类的动作, 体型高大的运动员往往不能在空中完成动作, 因为其完成动作的时间可能大于其从起跳到入水的时间。因此, 我们首先分析体型对于动作影响因素的大小, 来确定是否需要对该动作进行校正。根据以上分析可以得到, 不同动作应该具有不同的体型影响因素。在本节中, 我们将该体型影响因素定义为体型扰动因子  $\kappa$ , 通过第二问中模型计算所得的动作完成时间来计算  $\kappa$  的值, 同时设定  $\kappa$  的临界值判断动作是否需要矫正。假设运动员起跳初始速度为  $v_0$ , 运动员身高为  $H$ , 重力加速度为  $g$ , 完整跳水过程所需时间为  $t_a$ , 即从起跳到入水时间, 即

$$t_a = \frac{v_0}{g} + \sqrt{2 \frac{10 + H}{g}} \quad (43)$$

完成动作  $i$  时间为  $t_i$ ，完成动作至身体接触水面时间为  $t_d$ ，有

$$t_d = \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (44)$$

我们将运动员可做动作时间定义为自由时间  $t_f$ ，那么

$$t_f = t_s - t_d = \frac{v_0}{g} + \sqrt{2\frac{10+H}{g}} - \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (45)$$

如果一位体型较为庞大的运动员选择一个难度系数很低并能保证完成的跳水动作，例如 401C。如果只是简单的设置体型校正系数，可能会使得该动作对该运动员的难度系数很高，从而导致其成绩突出的情况出现。因此我们设置体型扰动因子  $\kappa$  来避免这种情况出现。

对大多数运动员来说，动作时间  $t_i$  在自由时间  $t_f$  内占比越低，表明该运动员有富余时间可以调整入水姿势，使得表现分更高。假设共有运动员体型  $m$  类，不同体型运动员完成动作  $i$  的时间为  $t_j^i$ ，自由时间为  $t_j^f$ ， $\kappa$  因此定义为：

$$\kappa = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^m (t_j^i - t_{j+1}^i)^2}}{\sum_{j=1}^m t_j^f} \quad (46)$$

式 (46) 实际反应了每个动作中体型的影响程度。式 (46) 的上部分表示完成动作时间的标准差，即不同体型的人完成同一跳水动作所需的时间差异。标准差越大，表示该动作对不同体型的人区分度越大。下部分表示不同体型的人跳水时的平均自由时间。

### 6.3 校正系数的模型

在考虑对体型校正系数进行建模时，应同时考虑运动员身高、体重以及体型扰动因子的影响。我们的认为如果体型校正系数仅涉及身高、体重，那么考虑特殊情况如身高，体重特大的情况下，难度系数会出现不正常增长。因此，我们引入上文所计算的扰动因子，来限制身高，体重对难度系数的影响。

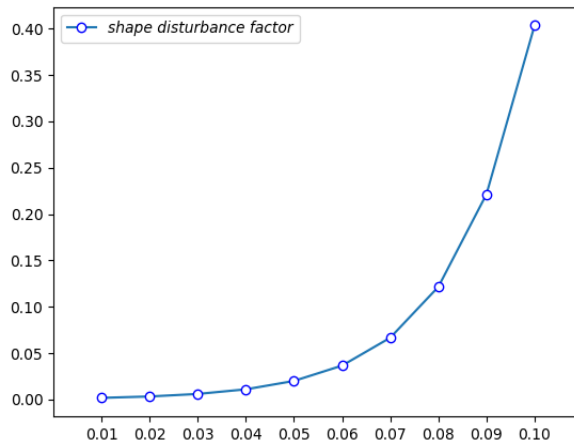


图 22

假设身高的影响因子为  $a$ ，体重的影响因子为  $b$ ，体型校正系数计算公式如下：

$$\Delta D = (a \frac{H}{170} + b \frac{m}{60}) * \exp(60\kappa) \quad (47)$$

上式中，身高、体重的影响因子  $a$ 、 $b$  通过拟合得出  $a = 0.00065$ 、 $b = 0.00035$ 。我们将身高 170cm、体重 60kg 看作跳水运动员的标准体型。如图 (22) 所示，横坐标为体型扰动因子  $\kappa$ ，纵坐标为标准体型带入体型校正系数计算公式中所得体型校正系数。

由图看出，当  $\kappa$  大于等于 0.08 时，体型校正系数的大于 0.1，即体型对难度系数影响较为明显。因此，我们将 0.08 设为体型扰动因子  $\kappa$  临界值，表列出了  $\kappa$  大于 0.8 的动作。当体型扰动因子  $\kappa > 0.08$  时，可认为体型对该动作完成具有较大影响，因此此类动作需要进行体型系数校正。通过计算  $\kappa$  我们发现很多动作都需要进行体型系数校正，部分跳水动作如表 (3) 所示。

**表 3 部分跳水动作代码的体型扰动因子**

跳水动作代码	体型扰动因子	跳水动作代码	体型扰动因子
5156B	0.091	5355C	0.081
5255B	0.081	5275C	0.092
5156C	0.091	5257C	0.102
5375C	0.092	5275B	0.092
5255C	0.081	5257B	0.102

## 7. 问题四

根据问题三中所得出的体型校正系数  $\Delta D$  及体型扰动因子  $\kappa$ ，我们可以计算任意动作在体型校正后的难度系数。由运动员身高体重和问题三结论可以得出的新难度系数：

$$DD' = DD - \Delta D \quad (48)$$

以 5156B 为例，根据表 (3) 得 5156B 的体型扰动因子为 0.091，将标准体型带入体型校正公式 (47)，得 5156B 经过体型校正后的新难度系数为 3.6。

表 4 十米跳台难度系数表

动作代码	PIKE		TUCK		动作代码	PIKE		TUCK	
	原	新	原	新		原	新	原	新
	B	B	C	C		B	B	C	C
105	2.3	2.3	2.1	2.1	5154	3.3	3.3	3.1	3.1
107	3.0	3.0	2.7	2.7	5156	3.8	3.6	3.6	3.4
109	4.1	4.1	3.7	3.7	5172	3.6	3.6	3.3	3.3
1011	—	—	4.7	4.7	5255	3.6	3.5	3.4	3.3
205	2.9	2.9	2.7	2.7	5257	4.1	3.7	3.9	3.6
207	3.6	3.4	3.3	3.1	5271	3.2	3.2	2.9	2.9
209	4.5	4.3	4.2	3.9	5273	3.8	3.8	3.5	3.5
305	3.0	3.0	2.8	2.8	5275	4.2	4.0	3.9	3.7
307	3.7	3.6	3.4	3.3	5353	3.3	3.3	3.1	3.1
309	4.8	4.6	4.5	4.3	5355	3.7	3.7	3.5	3.4
405	2.8	2.8	2.5	2.5	5371	3.3	3.3	3.0	3.0
407	3.5	3.3	3.2	3.0	5373	—	—	3.6	3.6
409	4.4	4.3	4.1	4.0	5375	—	—	4.0	3.8

通过表 (4) 可以看出，在 1,2,3,4 组的动作中，圈数在三周半以上的难度系数都有所减少；而在 5 组的动作中，5156B，5156C，5255B，5255C，5257B，5257C，5275B，5275C，5355C 和 5375C 动作分别有 0.1-0.4 不等的减少。

表 5 动作完成时间

动作代码	5156B	5156C	5255B	5255C	5257B
时间	1.55	1.39	1.38	1.29	1.76
动作代码	5257C	5275B	5275C	5355C	5375C
时间	1.65	1.69	1.58	1.37	1.59

通过查阅资料，取游泳运动员身高，体重的众数分别为 170cm、60kg。首先，以 5 组动作为例，给出各个运动的具体时间：根据式 (42) 计算所得以上 9

个动作的完成时时间分别为表 (5) 所列。从表 (5) 可以看出，根据在第二节中计算出的时间，原本的难度系数与完成动作所需时间并没有严格对应，因此无法体现动作的具体难度系数。在新难度系数表中，翻转周数较多的动作。难度系数都有所下降。而这些动作中运动员的体型扰动因子较大，以及不同体型的运动员完成动作的时间差异较大，通过降低这系列动作的难度系数，能够较为消减体型差异所带来的比赛不公平性。

## 8. 模型评价和未来展望

### 8.1 问题一

我们采用的是先分组别的局部分析结合整体趋势观察的全局分析来确定跳水难度的影响因素，并找到了影响力最大的因素——翻腾圈数。与此同时，我们还发现了不同的姿势和体态会影响跳水动作的选择，从而导致了不同的难度系数，为下文建立运动员身体素质与跳水难度系数打下了坚实的基础。

### 8.2 问题二

我们首先建立了最传统的 Euler-Poinset 刚体运动模型，用来模拟直体仅翻腾无转体的情况。通过严密的理论推导，求解了完成一圈翻腾的用时与运动员身体素质的具体关系。随着问题的深入，在此基础上建立左右不对称和前后不对称的复杂运动模型，分别用于模拟带转体的翻腾运动和有屈体抱膝的情况，求解了完成一圈翻腾和一圈转体分别的用时与运动员身体素质的具体关系。严谨的推导和详尽的相关关系，为下文分析难度系数是否要根据运动员身体素质做修正提供了有力的依据。

### 8.3 问题三和问题四

我们根据上文的公式，建立新的变量：体型扰动因子。结合附件的难度系数变化趋势，我们给出了跳水动作的体型扰动公式，即所有的跳水动作是否需要体型修正都可以将具体的数据代入，从而得到一个具体的结果。同时，我们也使用这个公式对问题四给出的确定跳水动作进行的修正，修正结果从直观逻辑上满足心理预期。

### 8.4 未来展望

受限于模型假设和方便求解，我们将每个运动的翻腾和转体每圈的时间默认是不变的，即第一圈和第二圈没有用时差别。实际上，通过引入疲劳参数和考虑空气阻力对速度的负面影响，完成跳水动作的用时可以得到更实际的结果，从而用于分析的时候更贴合实际，对规则的修正更有说服力。

## 参考文献

- [1] 余家荣. 空中转体的力学原理 [J]. 物理教学, 1987(9).
- [2] Tong W, Dullin H R. A New Twisting Somersault: 513XD[J]. Journal of Nonlinear Science, 2017, 27(6):2037-2061.
- [3] Bharadwaj S, Duignan N, Dullin H R, et al. The Diver with a Rotor[J]. Indagationes Mathematicae, 2015.
- [4] Dullin H R, Tong W. Twisting Somersault[J]. Physics, 2016.
- [5] Hanavan J E. A MATHEMATICAL MODEL OF THE HUMAN BODY. AMRL-TR-64-102.[J]. AMRL-TR, 1964, 18:1-149.
- [6] 钱雄平, 肖文龙, 徐建成, 等. 跳水空翻运动的半逆解模型 [J]. 生物数学学报, 1998, 13(4):493-496.
- [7] 关汝华, 李润, 于立然. OPTIMIZATION OF THE TAKE-OFF MOVEMENT OF SKI JUMPING WITH THE METHOD OF MATHEMATICAL PROGRAMMING[J]. 应用数学和力学 (英文版), 1992,13(7):669-674.
- [8] Frohlich C. The physics of somersaulting and twisting.[J]. Scientific American, 1980, 242(3):154.