

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

学 校 郑州大学

参赛队号 10459037

1. 鲁兴学

队员姓名 2. 李 珂

3. 陈冠华

参赛密码 _____
(由组委会填写)



第十二届“中关村青联杯”全国研究生 数学建模竞赛

题 目 基于 S 型曲线的加减速优化控制与实例检验

摘 要

基于计算机的数控系统的工作原理，分析数控加工刀具运动的优化控制。具体问题及方法如下：

对于问题一，当加工型线为折线，在指定加工误差的条件下，当相邻两折线段夹角为 90° 和 135° 时，讨论通过折线交点时对应各坐标运动速度的变化。首先将折线夹角范围分为 $[0^\circ, 60^\circ]$ 、 $(60^\circ, 120^\circ]$ 、 $(120^\circ, 180^\circ]$ 三种情况，分别建立对应的高速高精度夹角过渡模型，直接过渡模型和圆弧过渡模型。根据进给速度、加速度、误差、半径、插补周期等约束条件，求出最终插补点的速度，即折线拐点速度大小。建立直角坐标系，根据折线段上起始点、拐点、终点坐标，利用向量知识计算出交点前后各轴分量表达式。结果发现当相邻两折线段夹角为 90° 和 135° 时，都将带来各运动轴的速度跳变，直接过渡模型保证了转接点的合成速度大小不发生变化，但合成速度是个矢量，其方向将被动地跳变为下一段的路径方向，这种方向的变化反应在各轴上即是速度的突变。此外还可对该模型的可行性和精度进行实例检验。

对于问题二，当加工型线是由直线段和圆弧段（相切或不相切）组成的连续曲线，在满足加工误差的条件下，将直线与圆弧之间的过渡简化为直线与直线之间的过渡，根据问题一中的模型，得到拐角速度与圆弧半径之间的关系表达式，可以发现：圆弧半径越大，速度越高，算法效率越高。

通过用Matlab进行编程（具体程序见附录），可得S型加减速控制曲线的速度、加速度、加加速度随时间变化规律曲线，建立圆弧插补模型和S曲线加减速模型规划算法，对加工路径示例进行模拟检验。由于不考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，考虑到每个路径节点的最大限制速度的不同，将加工路径分为两大类，直线段路径和圆弧路径。利用圆弧插补算法先求出满足误差和分辨率的圆弧上的插补点和插补次数，再利用夹角过渡模型求出满足精度的从直线到圆弧的过渡速度，算出过加工圆弧路径所用时间。利用S型曲线规划算法，考虑已知给进速度和加速度的范围，利用软件Matlab编程，只需输入起点速度 v_s 、指令速度 v 、终点速度 v_e ，根据待插补曲线的位移 s 和各节点速度限制，算出每个直线段路径所用时间，进而求出整个加工路径的所用时间为84.7252s。

对于问题三，考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，利用问题二中的程序，只需重新调整各节点的速度，节点1的速度为0.19m/min，节点11的速度为0.13m/min，期间要求最大速度为1.26 m/min，节点2处最大速度限制为0.19m/min，重新输入各阶段起点速度 v_s 、指令速度 v 、终点速度 v_e ，算出每个直线段路径所用时间，而圆弧节点的过渡速度与问题二中的相同，求出从节点1再到节点11所用总时间为84.3363s。

对于问题四，分析S型曲线的加减速控制方法的优缺点。在高速加工过程中，S曲线加减速模型，涉及参数较多，并且根据路径段长度有多种变化，算法实现较复杂，为此本文提出一种三次多项式加减速控制模型。通过模型检验发现三次多项式加减速控制模型始终能保证在高速运动过程中加速度曲线的连续，从而消除了进给过程的冲击，使机床运行平稳。且该模型在变速过程中加加速度、加速度、速度和位移的计算只涉及次数较少的四则运算，算法实现较简单。

关键词：优化;夹角过渡模型;圆弧插补;S曲线加减速算法;三次多项式加减速控制

目 录

1. 研究背景与问题重述	5
2. 问题分析	5
3. 模型假设与约定	6
4. 符号说明及名词定义	6
5. 模型建立	7
5.1 坐标系的确定原则	7
5.2 模型 I: 折线段夹角过渡模型	8
5.3 模型 II: 直线段与圆弧间的圆弧过渡模型	12
5.4 模型 III: 圆弧插补算法	12
5.5 模型 IV: S 型曲线加减速模型	13
5.6 模型 V: S 型曲线规划算法	14
6. 模型求解	16
6.1 问题一: 通过折线交点时对应各坐标运动速度的变化	16
6.2 问题二: 圆弧半径的变化对算法效率的影响及示例检验	16
6.3 问题三: 加工路径示例检验	19
6.4 问题四: 三次多项式加减速控制模型	20
7. 模型分析与检验	20
7.1 夹角过渡模型的检验	20
7.2 三次多项式加减速控制模型检验	21
8. 模型评价	21
8.1 模型的优点	21
8.2 模型的不足	22
9. 参考文献	22
10. 附录	23

1. 研究背景与问题重述

随着科学技术和社会的发展，机械产品的性能、精度日趋提高，结构更趋合理，对机械产品的性能、质量、生产率和成本等提出了越来越高的要求，数控加工技术的出现，在现代机械制造业中，发挥着重要的作用。为了实现数控加工技术的高速、高效、高精度的目标，使得机床各运动轴都能够在极短的时间内达到高速运行状态并实现高速准停，研究开发数控加工刀具运动满足高速、高精度要求的、有效柔性加减速控制方法，已成为现代高性能数控系统研究的重点。

基于计算机的数控系统的工作原理，假设不考虑刀具尺寸大小及刀具磨损，加工刀具抽象为一点，本文主要研究以下几个问题：

问题一：设加工型线为折线，在指定加工误差（指在加工型线的法线方向上加工型线与刀具实际轨迹的差值的最大值）的条件下，建立实时加工优化控制算法，当相邻两折线段夹角为 90° 和 135° 时，讨论通过折线交点时对应各坐标运动速度的变化；

问题二：设加工型线是由直线段和圆弧段（相切或不相切）组成的连续曲线，在指定加工误差的条件下，不考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，建立实时加工优化控制算法，讨论圆弧半径的变化对算法效率的影响；并应用所建立的模型对下面的加工路径示例进行检验；

问题三：在第 2 问基础上，考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，建立相对应的实时加工优化控制算法；并应用所建立的模型对下面的加工路径示例进行检验；

问题四：结合前 3 问，分析 S 型曲线的加减速控制方法的优缺点，在满足精度和速度要求的条件下，建立能提高机床运行平稳性的优化控制运动模型（如刀具在各坐标轴方向上的运动满足加加速度连续变化等）。

2. 问题分析

本题的难点在于数控机床对加工刀具在三个坐标轴方向的运动实行的是分别控制，但显然它们之间必须相互协调；加工刀具行走的路线一定是一系列首尾相接的直线段，因此加工刀具的运动轨迹一般与工件几何形状之间肯定存在误差；每一机床都有对应的分辨率，故加工刀具的运动方向受限制，并影响到加工刀具在三个坐标轴方向上的速度、加速度。

针对问题一，为了保证机床运动平稳，速度光滑、加速度连续，保证加工的高效率与高精度，对于折线加工型线，在折线拐角处不能将速度降为 0，否则加工效率太低，而且会引起机床较大振动，精度变低，所以要采用速度过渡方法。折线角度的大小对过渡方法的合理选取影响很大，因此将折线夹角的大小划分成三种情况，在指定加工误差的条件下，建立不同的高速平滑过渡模型，根据进给速度、加速、误差、过渡半径等约束条件，求出过渡时速度，且过渡时速度大小不变，方向改变，速度在各个坐标方向的分量大小和速度也会随着发生变化。通过建立直角坐标系，根据折线段上起始点、拐点、终点坐标，利用向量知识分析计算通过拐点时对应各坐标运动分速度的变化。还可对该模型的可行性和精度进行模拟检验。

针对问题二，当加工型线是由直线段和圆弧段（相切或不相切）组成的连续曲线，

取圆弧段的微小弧长，可将直线段与圆弧段的过渡转化为问题一中折线段的过渡模型，通过算出拐角速度与圆弧半径之间的关系表达式，具体分析讨论圆弧半径的变化对算法效率的影响。此外根据折线段的长度限制，以及过渡速度、加速度、分辨率、误差的约束条件，对折线段速度进行前瞻插补预处理，讨论 S 曲线加减速的 7 个阶段规划问题，并应用所建立的模型对给出的加工路径示例进行检验，由于给出的加工路径是对称的，所以只需以其中一段直线和与其连接的圆弧为例进行检验。前提是不考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，先求出圆弧段上的插补点，再求出满足精度的从直线到圆弧的过渡速度。最后根据过渡速度分析直线段包含 S 曲线加减速模型的哪几个阶段。

针对问题三，在第 2 问基础上，考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，在误差允许的条件下，重新整理 S 曲线加减速的 7 个阶段规划问题，建立相对应的实时加工优化控制算法；并应用 matlab 编程对给出的加工路径示例进行模拟检验。

针对问题四，首先分析 S 型曲线的加减速控制方法的优缺点，即在高速加工过程中，S 曲线加减速模型，涉及参数较多，并且根据路径段长度有多种变化，算法实现较复杂，在满足精度和速度要求的条件下，考虑到简单样条曲线便于处理，根据曲线拟合法提出一种三次多项式加减速控制模型，算法实现比较简单，建立能提高机床运行平稳性的优化控制运动模型。

3. 模型假设与约定

假设不考虑刀具尺寸大小及刀具补偿，加工刀具抽象为一点。

4. 符号说明及名词定义

符号	意义
v_1	AB段上终点的速度
v_2	BC段上起点的速度
θ	折线段夹角
l_1	直线段 B_0B 的长度
l_2	直线段 BB_1 的长度
l_3	直线段 B_0B_1 的长度
v	工件程序的编程进给速度
v_{link}	最终插补点速度，也是拐点过渡速度
T	数控系统插补周期
ε_{max}	设定的最大误差
ε	以最大速度通过折线段产生的形状误差
a	进给法向加速度

r	加工段圆弧半径
ε_1	来自圆弧转接误差
ε_2	来自插补圆弧时产生的弓高误差
L_c	转接圆弧的弧长
l_g	过渡段长度
v_s	起点速度
v_e	终点速度
N	插补点的个数
a_{\max}	机床最大加速度
s	待插补曲线的位移
j_{\max}	最大加加速度
s_{acc}	加速段位移
s_{dec}	减速段位移
t_i	S曲线中各个阶段所用的时间, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

5. 模型建立

5.1 坐标系的确定原则

机床坐标系的规定：标准的机床坐标系是一个右手笛卡尔直角坐标系。

如图 1 所示，在折线型加工过程中，当刀具运行轨迹绕过拐点 B，为确保进给过程中运行平稳和高效，认为刀具将会以一定速度绕过拐点 B。给定折线中两段刀具轨迹 AB、BC，假设在 AB 段上终点的速度为 v_1 ，在 BC 段上起点的速度为 v_2 ，为了保证速度平稳，在拐点前后速度大小相等，即 $v_1 = v_2$ ，并且都不为 0，只是速度矢量的方向发生了变化。

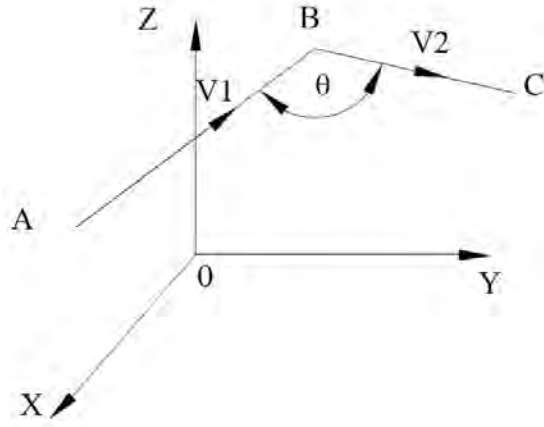


图 1 折线在直角坐标系中的表示

设 A 点坐标为 (x_1, y_1, z_1) ，B 点坐标为 (x_2, y_2, z_2) ，C 点坐标为 (x_3, y_3, z_3) ，则得

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2, z_3 - z_2)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_2) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_2),$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2}$$

设折线夹角为 θ ，则 $\cos(\pi - \theta) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$ ，设直线 AB 与 x 轴、y 轴、z 轴的夹角分

别为 α_1 、 β_1 、 γ_1 ，直线 BC 与 x 轴、y 轴、z 轴的夹角分别为 α_2 、 β_2 、 γ_2 ，则 $\cos \alpha_1 = \frac{x_2 - x_1}{|\overrightarrow{AB}|}$ ，

$\cos \beta_1 = \frac{y_2 - y_1}{|\overrightarrow{AB}|}$ ， $\cos \gamma_1 = \frac{z_2 - z_1}{|\overrightarrow{AB}|}$ ， $\cos \alpha_2 = \frac{x_3 - x_2}{|\overrightarrow{BC}|}$ ， $\cos \beta_2 = \frac{y_3 - y_2}{|\overrightarrow{BC}|}$ ， $\cos \gamma_2 = \frac{z_3 - z_2}{|\overrightarrow{BC}|}$ ，则

拐角前各个方向的速度为 $v_{1x} = v_1 \cdot \cos \alpha_1$ ， $v_{1y} = v_1 \cdot \cos \beta_1$ ， $v_{1z} = v_1 \cdot \cos \gamma_1$ ，拐角后各个方

向的速度为 $v_{2x} = v_2 \cdot \cos \alpha_2$ ， $v_{2y} = v_2 \cdot \cos \beta_2$ ， $v_{2z} = v_2 \cdot \cos \gamma_2$ 。

5.2 模型 I：折线段夹角过渡模型

为了减少由柔性冲击所造成的机械振动，使刀具轨迹能够高速平滑过渡，需要在指定加工误差（指在加工型线的法线方向上加工型线与刀具实际轨迹的差值的最大值）的条件下，对折线段速度进行前瞻插补预处理。它能有效地缩短加工时间，减小机床振动，

保护刀具免受冲击，提高加工质量，是在保证运动平稳性基础上提高加工效率的重要途径。前瞻处理的主要任务是获取路径信息，并根据速度、加速度和加加速度等机床运动约束条件和选定的加减速规律进行速度规划。对拐点速度和加速度同时进行约束，获得加工过程中的最优进给速度，最大限度地提高数控加工效率。

限制拐角处过渡速度的因素有二个方面：1、相邻两线段夹角允许速度最大速度 2、最大速度限制。最终拐角最优速度为两个限制条件所求速度的最小值。考虑到因素 1，我们将折线段夹角 θ 划分为三类情况^[3]，讨论如下：

(1) 当折线段夹角为 $\frac{2\pi}{3} < \theta \leq \pi$ 时，其过渡模型如图 2 所示，从图中可知其折线角度过渡相对较平缓。对于该类情况，如果需要其最终的插补路径通过线段终点 B，那么该插补的最终插补点将超过终点 B。对于此种情况，不管从插补的精度还是效率来考虑，该插补过渡方式都是没有必要的。因此，在该情况下需要提前过渡，其插补过程如下图插补线段 B_0B_1 所示。提前过渡，就是在前一条线段的最后一个插补点处，通过牺牲拐角处的误差，利用插补最后的一个插补周期直接过渡到下一条线段。如图所示，设直线段 B_0B 的长度为 l_1 ，直线段 BB_1 的长度为 l_2 ，直线段 B_0B_1 的长度为 l_3 ，若 B_0 点为 l_1 线段的最终插补点，那么在下一个插补周期内的插补长度的终点是线段 l_2 的 B_1 点，同时 B_1 点也是线段 l_2 的插补起点，这样就可以较平稳的过渡到下一个插补线段，即直接过渡法。

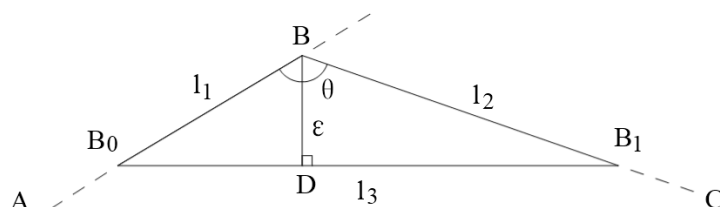


图 2 折线段夹角为 $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$ 的过渡示意图

根据最大误差、折线段夹角和插补周期，能够计算折线拐点速度 v_{link} ，其具体求解方法如下：

已知工件程序的编程进给速度为 v ，插补点 B_0 点速度为 v_{link} ，折线段夹角为 θ ，数控系统插补周期为 T ，设定的最大误差为 ϵ_{max} ，加工过程中折线段的长度通常不是加工步长的整数倍，所以在折线段拐角处必然产生链接误差，设以最大速度通过折线段产生的形状误差为 ϵ ，刀具通过连接点 B 处的实际运动路径为 B_0B_1 ，其产生的误差 ϵ 为 B 点到插补线段 B_0B_1 的距离 BD。则根据正弦定理， $\triangle B_0BB_1$ 的面积可以表示为

$S_{\Delta B_0 B B_1} = \frac{1}{2} l_1 l_2 \sin(\pi - \theta) = \frac{1}{2} l_3 \varepsilon$ ，根据三角形余弦定理可以得到 $l_3 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \theta}$ ，则

以连接速度通过拐角所产生的误差为 $\varepsilon = \frac{l_1 l_2 \sin \theta}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \theta}}$ ，当数控系统以编程速度通过折线段拐角时，所产生的连接误差最大，所以可得 $l_1 + l_2 \leq v \cdot T$ ，当且仅当 $l_1 = l_2 = \frac{v \cdot T}{2}$

时，误差 ε 取得最大值，即 $\varepsilon \leq \frac{v \cdot T \cdot \sin(\pi - \theta)}{\sqrt{8(1 + \cos(\pi - \theta))}}$ ，为了满足系统加工的误差要求，数控

系统以动态连接速度通过拐角所产生的连接误差 $\varepsilon \leq \varepsilon_{\max}$ ，即 $\frac{v_{\text{link}} \cdot T \cdot \sin \theta}{\sqrt{8(1 + \cos \theta)}} \leq \varepsilon_{\max}$ ，所以

可得 $v_{\text{link}} \leq \frac{\varepsilon_{\max} \sqrt{8(1 + \cos \theta)}}{T \cdot \sin \theta}$ 。

(2) 当折线段夹角为 $\frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ 时，如果采用(1)中的模型算法，将产生较大的弓高误差，而且也有可能出现跨段的情况，这是高精度加工所不允许的。基于以上考虑，我们将增加一个插补周期，并将线段的终点强行作为最终插补点，通过理论证明（见文献[3]）可知其过渡过程不但没有增大加速度变化所引起的冲击，还减小了其冲击，该过渡模型

图 3 所示。最终插补点即拐角速度为 $v_{\text{link}} = \frac{a_{\max} \cdot T}{2 \cos(\theta/2)}$ （见文献[3]），其中 a_{\max} 为系统允

许的最大加速度， T 为插补周期。

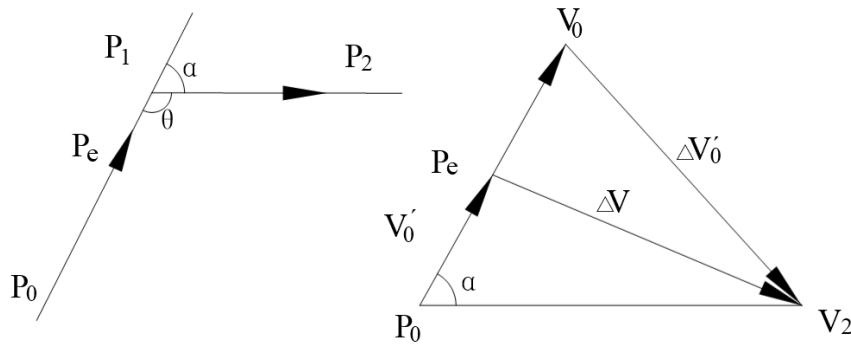


图 3 折线段夹角为 $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ 的过渡示意图

(3) 当折线段夹角为 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ 时，速度方向变化比较大，若采用(1)和(2)中的模型算法，合成速度的加减速次数减少，但各运动轴速度随着分量系数的变化而产生不同程度的跳变，在拐角处系统产生较大的误差并对机床产生较大的冲击。这不但影响机床的加工精度而且使机床的磨损严重，从而影响机械系统和刀具的使用寿命。因此采用空间圆弧转

接模型^[7]，在折线段间加入相切的空间圆弧，圆弧代替夹角，模型如图 4 所示，则线段间将被光滑地连接成整体，加工效率会进一步提高，各运动轴由于转接圆弧的存在而主动调整速度以适应后续段的需要，速度跳变得以避免。过渡小圆弧只是用来限制拐角速度、降低误差的，实际刀具路径并不变化。

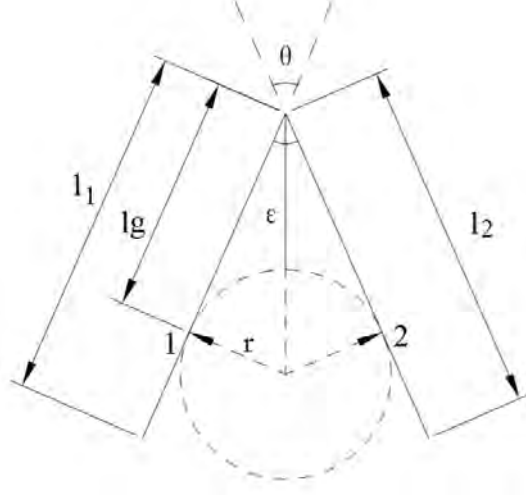


图 4 折线段夹角为 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ 的圆弧过渡示意图

设进给法向加速度 a 与进给速度 v 及过渡圆弧半径 r 之间的关系为 $a = \frac{v^2}{r}$ ，则最大允许

速度为 $v_{\max} = \sqrt{a_{\max} \cdot r}$ ，其中 a_{\max} 为最大允许进给法向加速度。

插入空间圆弧后应当保证其轨迹精度在最大允许误差 ε_{\max} 范围内。在加工过程中，其误差由两部分构成，一部分来自圆弧转接误差 ε_1 ，另一部分来自插补圆弧时产生的弓

高误差 ε_2 ，即要求 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon_{\max}$ ，其中 $\varepsilon_2 = r - \sqrt{r^2 - \frac{v_{link} \cdot T}{2}}$ 。应当有 $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_{\max} / 2$ ，取近似，

则有 $v_{link} \leq \frac{2\sqrt{\varepsilon_{\max} r}}{T}$ 。同时，使圆弧过渡有效，根据 Nyquist 采样定理^[5]，在圆周上至少

应有两个以上的插补点。由于相邻两线段夹角 $\theta \in [0, \pi]$ ，因此需要满足条件

$N = \frac{L_c}{v_{link} T} \geq 1$ ，其中 N 表示插补点的个数， L_c 表示转接圆弧的弧长， $L_c = r(\pi - \theta)$ ，即

要求 $v_{link} \leq \frac{r(\pi - \theta)}{T}$ ，可得插补点速度为 $v_{link} = \min \left\{ v, v_{\max}, \frac{r(\pi - \theta)}{T} \right\}$ ，两直线段过渡圆弧

的圆心在折线段夹角的对称轴上，设拐角点到圆弧的最短距离为 ε ，则有 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{r}{r + \varepsilon}$ ，

即 $r = \frac{\varepsilon \sin(\theta/2)}{1 - \sin(\theta/2)}$ ，过渡段 $l_g = \frac{r}{\tan(\theta/2)}$ ，若 $l_g > l_1$ 或 $l_g > l_2$ ，则取 $l_g = \min(l_1, l_2)$ ，其中 l_1

为加工段 1 的长度， l_2 为加工段 2 的长度。则由 l_1, l_2, θ 可反求出 v ，进而求出插补点速

度为 $v_{link} = \min \left\{ v, v_{\max}, \frac{r(\pi - \theta)}{T} \right\}$ 。

5.3 模型 II：直线段与圆弧间的圆弧过渡模型

当加工型线是由直线段和圆弧段（相切或不相切）组成的连续曲线，在指定加工误差的条件下，不考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，我们采用圆弧过渡模型^[8]。如图 5 所示：

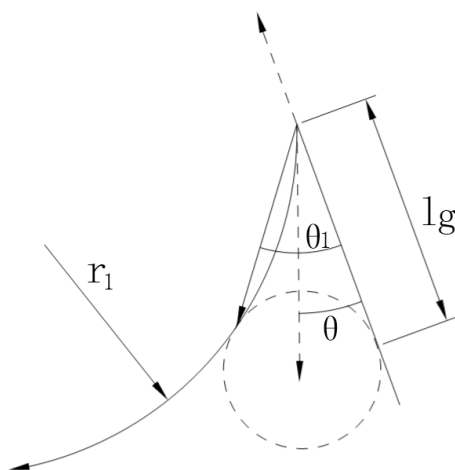


图 5 直线段与圆弧间的圆弧过渡

由于精确的计算两运动矢量相切的过渡圆弧比较繁琐，故可将圆弧段上的微段弦长 l_g 来近似的求过渡圆弧。在误差允许的情况下，这就将直线段与圆弧间的圆弧过渡变为直线段与直线段间的圆弧过渡，此时，需要加工段的夹角 θ_1 要大于实际的夹角 θ ，且满

足 $\theta_1 = \theta + \arcsin(\frac{l_g}{2r_1})$ ，其中 r_1 为圆弧段的半径。其具体求解方法和直线段与直线段间的过渡圆弧的求取方法相同。

5.4 模型 III：圆弧插补算法

对于圆弧的插补处理方法，在弓高误差和分辨率允许的情况下，我们以弦线逼近圆弧，对圆弧进行平均分割，找到圆弧上的插补点，并可以求出各插补点的位置^[9]。此圆弧插补法基于时间分割法，以弧长为进给量，以含方向的圆心角为增量，以其正负判断

进给方向，计算出下一插补点的坐标。下面以平面圆弧插补为例详述该插补法原理。

不失一般性，在 x - y 平面上，目标曲线圆弧方程为 $\begin{cases} X = R \cos \varphi \\ Y = R \sin \varphi \end{cases}$ ，目标曲线始于点

$S(X_s, Y_s)$ ，终止点 $E(X_e, Y_e)$ ，当前点是 $P_i(X_i, Y_i)$ ，下一个插补点为 $P_{i+1}(X_{i+1}, Y_{i+1})$ ，如图 6 所示

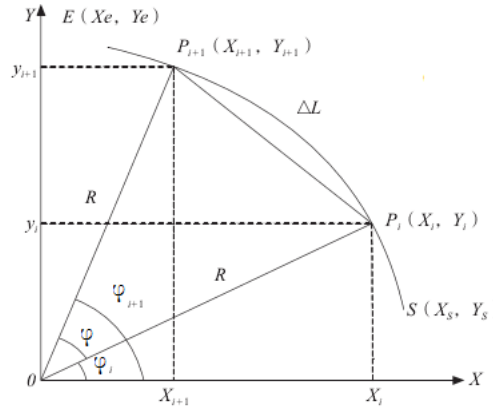


图 6 圆弧插补示意图

设当前的插补周期为 T_s ，进给速度为 v ，以圆弧 $P_i P_{i+1}$ 的弧长 ΔL 为进给量可得：

$\Delta L = FT_s$ ，圆弧 $P_i P_{i+1}$ 对应的圆心角 φ 为 $\varphi = \frac{\Delta L}{2\pi R}$ ，根据圆弧参数方程有 $\begin{cases} X_i = R \cos \varphi_i \\ Y_i = R \sin \varphi_i \end{cases}$ ，

由图可知，下一插补点的参数方程为 $\begin{cases} X_{i+1} = R \cos \varphi_{i+1} = R \cos(\varphi_i + \varphi) = X_i \cos \varphi - Y_i \sin \varphi \\ Y_{i+1} = R \sin \varphi_{i+1} = R \sin(\varphi_i + \varphi) = Y_i \cos \varphi + X_i \sin \varphi \end{cases}$ 。

为避免硬件计算精度限制带来的累积误差，确保插补点始终落在圆弧上，算法采用如下计算规则来计算 (X_{i+1}, Y_{i+1}) 。首先由 $X_{i+1} = X_i \cos \varphi - Y_i \sin \varphi$ 计算出 X_{i+1} ，则

$Y_{i+1} = \pm \sqrt{R^2 - X_{i+1}^2}$ ，其正负可在算法中根据 φ 的值判断。

各轴的位移量为 $\begin{cases} \Delta X_i = X_{i+1} - X_i \\ \Delta Y_i = Y_{i+1} - Y_i \end{cases}$

5.5 模型 IV：S 型曲线加减速模型

目前，数控加工对单个坐标运动的控制方法有多种，其中较有代表性的是基于 S 型曲线的加减速控制方法。其特点是将加减速过程分为 7 个阶段（每一阶段对应的加加速度为常量）：加加速段、匀加速段、减加速段、匀速段、加减速段、匀减速段、减减速段，

从而渐变地控制各段的加速度使机床运动速度按 S 型曲线形式平滑变化，以保证速度光滑，加速度连续，在一定程度上增强机床运行的平稳性。

在基于 S 型曲线的运动过程中，对于速度和加速度都有一定的限制性要求，速度 V 不大于机床最大速度 V_{\max} ，加速度 a 不大于机床最大加速度 a_{\max} ，加加速度为常量 J_{const} 。图 7 中各个阶段的速度、加速度、加加速度和位移随时间的变化规律公式如附录一所示。

S 型加减速控制曲线如图 7 所示。（Matlab 程序见附录二）

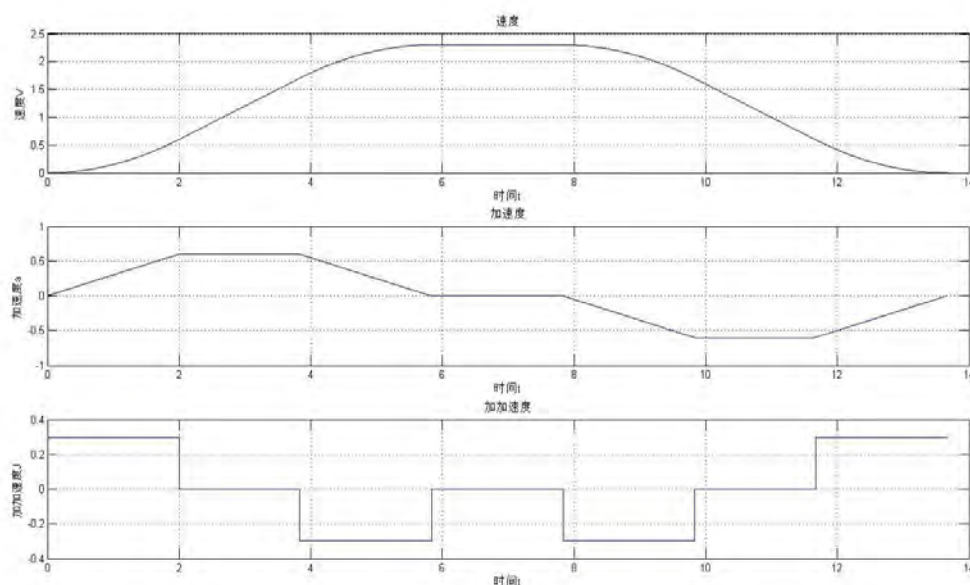


图 7 S 型加减速控制曲线的速度、加速度、加加速度随时间变化规律

5.6 模型 V: S 型曲线规划算法

在 S 型曲线加减速的运动过程中，对于速度和加速度都有一定的限制性要求，速度 v 不大于机床最大速度 v_{\max} ，加速度 a 不大于机床最大加速度 a_{\max} ，加加速度为常量 J_{const} 。由前面的讨论，根据给定的起点速度 v_s 、指令速度 v 、终点速度 v_e （即模型 I 中所说的最终插补点速度 v_{link} ）以及待插补曲线的位移 s ，S 曲线加减速可能不完整包含所有的 7 段过程：加加速段、匀加速段、减加速段、匀速段、加减速段、匀减速段、减减速段。S 曲线可能不含匀加速段、匀加速段或匀减速段等，由此归纳出可能出现的 S 曲线加减速方式^[10]。

首先根据 v_s 、 v 、 v_e 规划 S 曲线中的加速段及减速段，通过比较加减速段的总位移 s' 与待插补曲线的位移 s 的关系确定是否含有匀速段。如不含匀速段，则求解整个过程中所能达到的实际最大速度 v' ，并以此重新规划加速段及减速段。

(1) S 曲线加速段是否含有匀加速段，可由给定的起点速度 v_s 、指令速度 v 、机床允许的最大加速度 a_{\max} 以及最大加加速度 j_{\max} 确定。由 S 曲线特性可知，加加速段和减加速段对称。且在加速过程中，应尽量满足加速度 a 可达到 a_{\max} 。

若 $v - v_s > \frac{a_{\max}^2}{j_{\max}}$ ，则加速过程中存在匀加速段，加速过程中三段时间 t_1 、 t_2 和 t_3 分别为 $t_1 = \frac{a_{\max}}{j_{\max}}$ ， $t_2 = \frac{v - v_s}{a_{\max}} - t_1$ ， $t_3 = t_1$ ；

若 $v - v_s \leq \frac{a_{\max}^2}{j_{\max}}$ ，则加速过程中无匀加速段，加速过程中三段时间 t_1 、 t_2 和 t_3 分别为 $t_1 = \sqrt{\frac{v - v_s}{j_{\max}}}$ ， $t_2 = 0$ ， $t_3 = t_1$ 。加速过程中达到的实际最大加速度为 $a'_{\max} = \sqrt{(v - v_s)j_{\max}}$ ，将得到的 t_1 、 t_2 和 t_3 代入，若 $t_2 = 0$ ，则用 a'_{\max} 代替 a_{\max} ，求出加速段位移，记为 s_{acc} 。

按照相同的思路可规划出减速段中加减速段、匀减速段和减减速段各自的时间 t_5 、 t_6 和 t_7 ，求出减速段位移，记为 s_{dec} 。

(2) 若 $s_{acc} + s_{dec} < s$ ，则 S 曲线含有匀速段，匀速段时间为 $t_4 = \frac{s - s_{acc} - s_{dec}}{v}$ ；

若 $s_{acc} + s_{dec} \geq s$ ，则 S 曲线无匀速段，即 $t_4 = 0$ ；

若 $s_{acc} + s_{dec} > s$ ，则加速过程中实际能达到的最大速度 $v'_{\max} < v$ ，需要重新确定。下面说明 v'_{\max} 的求解过程。

首先假设实际最大速度 $v'_{\max} = \max(v_s, v_e) + \frac{a_{\max}^2}{j_{\max}}$ 。以 v_e 较大为例求出 v'_{\max} 。

因 $v_e > v_s$ ，所以加速段包含加加速段、匀加速段以及减加速段。求出 v'_{\max} 后，将加速过程总位移 s'_{\max} 与待插补位移 s 比较。

若 $s'_{\max} = s$ ，则求出的 v'_{\max} 即为规划出来的实际最大速度，即 $v_{\max} = v'_{\max}$ 。

若 $s'_{\max} < s$ ，则实际最大速度为

$$v'_{\max} = -\frac{a_{\max}^2}{2j_{\max}} + \frac{\sqrt{a_{\max}^4 - 2j_{\max}[a_{\max}^2(v_s + v_e) - j_{\max}(v_s^2 + v_e^2) - 2a_{\max}j_{\max}s]}}{2j_{\max}}$$

若 $s'_{\max} > s$ ，则 S 曲线规划中匀加速度段和匀减速段不同时存在，需重新求解 v_{\max} 。

此时假设实际最大速度 $v''_{\max} = \min(v_s, v_e) + \frac{a_{\max}^2}{j_{\max}}$ 。以 v_e 较大为例求出 v''_{\max} 。

因 $v_e > v_s$ ，所以减速段包含加减速段和减减速段。求出 v_{\max}'' 后，将加减速过程总位移 s_{\max}'' 与待插补位移 s 比较。

若 $s_{\max}'' = s$ ，则求出的 v_{\max}'' 即为规划出来的实际最大速度，即 $v_{\max} = v_{\max}''$ 。

若 $s_{\max}'' < s$ ，则 S 曲线只有匀加速段（若 $v_e > v_s$ ）或者匀减速段（ $v_e < v_s$ ），需重新求解 v_{\max} 。

若 $s_{\max}'' > s$ ，则 S 曲线不含匀加速段及匀减速段，需重新求解 v_{\max} 。

对于 $s_{\max}'' < s$ 及 $s_{\max}'' > s$ 这两种情况，可通过二分法迭代求解 v_{\max} 。由于在某个确定的速度 v_{\max} 下，加减速过程的总位移 s_{\max} 是 v_{\max} 的单调增函数，因此迭代一定次数可最终求出 v_{\max} 。求出 v_{\max} 后，将其代入变速段速度规划，即可最终完成 S 曲线规划，确定各阶段的时间。

6. 模型求解

6.1 问题一：通过折线交点时对应各坐标运动速度的变化

由 5.1 知，通过折线交点前各个方向的速度为

$$v_{1x} = v_1 \cdot \cos \alpha_1;$$

$$v_{1y} = v_1 \cdot \cos \beta_1;$$

$$v_{1z} = v_1 \cdot \cos \gamma_1;$$

通过后各个方向的速度为 $v_{2x} = v_2 \cdot \cos \alpha_2$ ， $v_{2y} = v_2 \cdot \cos \beta_2$ ， $v_{2z} = v_2 \cdot \cos \gamma_2$

当折线段夹角为 135° 时，采用模型 I（1）中的算法，当折线段夹角为 90° 时，采用模型 I（2）中的算法，都将带来各运动轴的速度跳变。直接过渡法保证了转接点的合成速度大小不发生变化，但合成速度是个矢量，其方向将被动地跳变为下一段的路径方向，这种方向的变化反应在各轴上即是速度的突变。

6.2 问题二：圆弧半径的变化对算法效率的影响及示例检验

（1）讨论圆弧半径 r_1 的变化对算法效率的影响

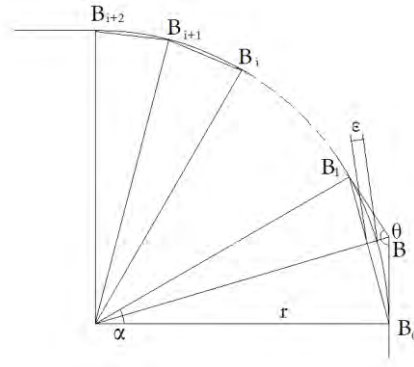


图 9 圆弧插补点示意图

将加工路径中的圆弧处放大，如图 9 所示。利用圆弧插补算法，根据误差要求和几何关系知， $\frac{r-\varepsilon}{r} = \cos \frac{\alpha}{2}$ ， $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|B_0B_1|}{2r}$ ，并且要求弦长 B_0B_1 的长度是分辨率的整数倍，

即 $N_0 = \left\lfloor \frac{|B_0B_1|}{\mu} \right\rfloor = 80$ ，其中 μ 是分辨率，取下整是为了满足误差条件，根据 r 和 ε 求出 α

和 $|B_0B_1|$ ，取下整之后根据调整后的 $|B_0B_1|$ ，再反求出 α ，将圆弧分成 $n = \frac{\pi}{2\alpha}$ 等份，也就是

圆弧插补次数，又因为 $\theta = \pi - \alpha$ ，将圆弧 $\widehat{B_0B_1}$ 过渡看做折线段 B_0BB_1 过渡，根据夹角过渡模型，求出 B_0 点的过渡速度 $v_{lin} = 0.0158 \text{ s/}$ ，则加工圆弧所用时间为

$$t_0 = \frac{\pi r}{2v_{link}} = 0.0496 \text{ s}。$$

步骤二：利用 S 型曲线规划算法，算出每类直线段路径所用时间。由步骤一知，节点 3,4,5,6,7,8,9,10 处的速度大小为 v_{link} ，节点 1 处速度为 0，节点 2 处最大速度限制为 0.19m/min，节点 11 处最大速度限制为 0.13m/min，考虑已知给进速度和加速度的范围，利用软件 Matlab 编程^[6]，只需输入起点速度 v_s 、指令速度 v 、终点速度 v_e ，根据待插补曲线的位移 s 和节点速度限制，即可求出每个直线段路径所用时间，结果如下：

1-2 段： $v_s = 0 \text{ m/s}$ ， $v_e = 0.19 / 60 = 0.0032 \text{ m/s}$ ，则经过加加速段、减加速段、匀速段，每个阶段所用时间为 $T_1 = T_3 = 0.1027 \text{ s}$ ， $T_4 = 7.1352 \text{ s}$ ，则从节点 1 到节点 2 所用时间为 $t_{12} = T_1 + T_3 + T_4 = 7.3406 \text{ s}$ 。

2-3 段： $v_s = 0.0032 \text{ m/s}$ ， $v_e = 0.0158 \text{ m/s}$ ，则经过加加速段、减加速段、匀速段、

减加速段、减减速段，每个阶段所用时间 $T_1 = T_3 = 0.2438s$ ， $T_5 = T_7 = 0.1314s$ ， $T_4 = 17.4452s$ ，则从节点 2 到节点 3 所用时间为 $t_{23} = T_1 + T_3 + T_4 + T_5 + T_7 = 18.1957s$ 。

4-5 段，6-7 段，8-9 段： $v_s = 0.0158m/s$ ， $v_e = 0.00158m/s$ ，则经过加加速段、减加速段、匀速段、加减速段、减减速段，每个阶段所用时间为 $T_1 = T_3 = T_5 = T_7 = 0.1314s$ ， $T_4 = 18.5868s$ ，则从节点 1 到节点 2 所用时间为 $t_{45} = t_{67} = t_{89} = T_1 + T_3 + T_4 + T_5 + T_7 = 19.1125s$ 。

10-11 段： $v_s = 0.0158m/s$ ， $v_e = 0m/s$ ，则经过加加速段、减加速段、匀速段、减加速段、减减速段，每个阶段所用时间 $T_1 = T_3 = 0.1314s$ ， $T_5 = T_7 = 0.2646s$ ， $T_4 = 0.8610s$ ，则从节点 2 到节点 3 所用时间为 $t_{1011} = T_1 + T_3 + T_4 + T_5 + T_7 = 1.653s$ 。

根据步骤一二，算出从节点 1 再回到节点 11 所用总时间为 $t_{11} = t_{12} + t_{23} + 3t_{45} + t_{1011} + 4t_0 = 84.7252s$ 。

6.3 问题三：加工路径示例检验

考虑瞬时启动加速度及瞬时启动速度，利用问题二中检验方法，只需重新调整各节点的速度，节点 1 的速度为 $0.13m/min$ ，节点 11 的速度为 $0.13m/min$ ，期间要求最大速度为 $1.26 m/min$ ，节点 2 处最大速度限制为 $0.19m/min$ ，而圆弧节点的过渡速度仍为 v_{link} 。计算结果如下：

1-2 段： $v_s = 0.13/60 = 0.0022m/s$ ， $v_e = 0.19/60 = 0.0032m/s$ ，则经过加加速段、减加速段、匀速段，每个阶段所用时间为 $T_1 = T_3 = 0.0577s$ ， $T_4 = 7.1407s$ ，则从节点 1 到节点 2 所用时间为 $t_{12} = T_1 + T_3 + T_4 = 7.2561s$ 。

10-11 段： $v_s = 0.0158m/s$ ， $v_e = 0.0022m/s$ ，则经过加加速段、减加速段、匀速段、减加速段、减减速段，每个阶段所用时间 $T_1 = T_3 = 0.1314s$ ， $T_5 = T_7 = 0.2506s$ ， $T_4 = 0.5846s$ ，则从节点 2 到节点 3 所用时间为 $t_{1011} = T_1 + T_3 + T_4 + T_5 + T_7 = 1.3486s$ 。

求出从节点 1 再回到节点 1 所用总时间为 $t_{11} = t_{12} + t_{23} + 3t_{45} + t_{1011} + 4t_0 = 84.3363s$

6.4 问题四：三次多项式加减速控制模型^[12]

在高速加工过程中，S 曲线加减速模型，涉及参数较多，并且根据路径段长度有多种变化，算法实现较复杂，为此，本文提出一种三次多项式加减速控制模型。

为满足高速加工的要求，构造的加减速曲线必须满足速度变化平稳、加速度连续的条件。由于绝对位移可通过平移得到，所以满足的边界条件为起始位移为 0，起始和终止速度须与要求速度一致，而其始终点加速度为 0。由于速度、加速度和加加速度满足导数关系，因此可以通过速度曲线的逐次求导获得其他特性曲线。速度曲线的三次多项式构造函数可写成如下形式 $v(u) = (a_1 + 2a_2u + 3a_3u^2 + 4a_4u^3)/t_m$ ，式中 $u = t/t_m$ ， t_m 为加速或减速过程所需的时间， $t \in [0, t_m]$ ，可得加速度、加加速度曲线函数关系式为

$a(u) = (2a_2 + 6a_3u + 12a_4u^2)/t_m^2$ ， $j(u) = (6a_3 + 24a_4u)/t_m^3$ ，对速度公式积分可得位移曲线函数为 $s(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4$ ，满足的边界条件为 $s(0) = 0$ ， $v(0) = v_s$ ， $v(1) = v_e$ ， $a(0) = a(1) = 0$ ，将边界条件代入上述表达式，可得三次多项式加减速控制模型的加加速度、加速度、速度和位移曲线函数为

$$j(u) = 6(v_e - v_s)(1 - 2u)/t_m^2$$

$$a(u) = 6(v_e - v_s)(u - u^2)/t_m$$

$$v(u) = v_s + 3(v_e - v_s)u^2 + 2(v_s - v_e)u^3$$

$$s(u) = t_mv_su + (v_e - v_s)t_mu^3 + 0.5(v_s - v_e)t_mu^4$$

7. 模型分析与检验

7.1 夹角过渡模型的检验^[5]

在折线段高速加工中，加工效率主要取决于满足精度条件下的过渡点许可速度即转接速度，考虑到精度限制时，直接过渡法的转接速度为

$$v_{tr} = \frac{2\varepsilon_{max}}{T \cdot \cos(\theta/2)} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{T}{2 \cdot \cos(\theta/2)} \quad \text{以典型的加工过程为例，分别取加工条件 I（最大}$$

速度 $v_{max} = 60m/min$ ，最大加速度 $a_{max} = 10m/s^2$ ，插补周期 $T = 1ms$ ，允许插补误差

$\varepsilon_{max} = 0.5\mu m$ ）和加工条件 II（ $v_{max} = 15m/min$ ， $a_{max} = 1m/s^2$ ， $T = 1ms$ ， $\varepsilon_{max} = 1\mu m$ ），

对折线夹角 $\theta \in [0, \frac{8\pi}{9}]$ 进行转接速度计算。为进一步反映两种方法的关系，同时算出直接过渡法的许可速度 v_{model1} 和空间圆弧转接法的许可速度 v_{model2} 的比值 $\beta = v_{model1} / v_{model2}$ 结果参考文献[5], 可以看出，基于空间圆弧转接的插补方法比直接过渡法在转接点处可获得更高的进给速度，尤其在折线夹角范围 $[0, \pi/3]$ 有更明显的优势。由此说明夹角过渡模型（3）中空间圆弧过渡法效率提升优势明显。而当折线夹角范围比较大时，直接过渡法就可以达到理想的效果，效率比较高，容易操作。

7.2 三次多项式加减速控制模型检验

对于三次多项式加减速控制模型，当 $u = 0.5$ 时，加速度达到最大值，由此可得始速度 v_s 减速至末速度 v_e 所需时间 $t_m = 3(v_s - v_e) / 4a_{max}$ ，则最大理论减速距离 $s_d = 0.5(v_s + v_e)t_m = 3(v_s^2 - v_e^2) / 4a_{max}$ ，三次多项式加减速控制模型速度 v 、加速度 a 、加加速度 j 的关系如图 10 所示（Matlab 程序见附录三）：

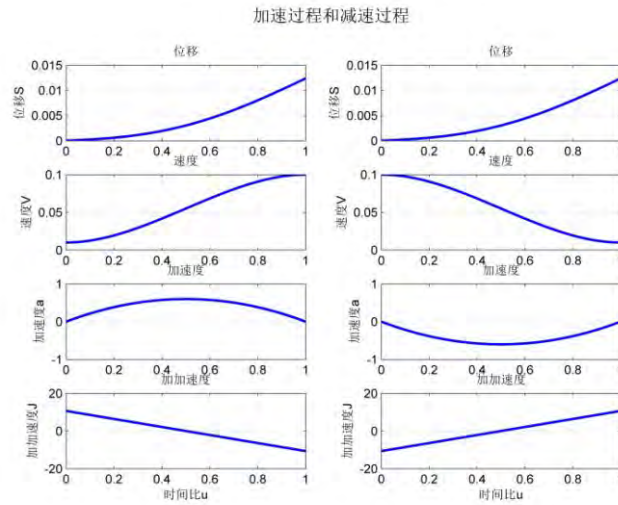


图 10 三次多项式加减速控制模型关系图

可见，三次多项式加减速控制模型始终能保证在高速运动过程中加速度曲线的连续，从而消除了进给过程的冲击，使机床运行平稳。且该模型在变速过程中加加速度、加速度、速度和位移的计算只涉及次数较少的四则运算，算法实现较简单。

8. 模型评价

8.1 模型的优点

- （1）本文中用到的夹角过渡模型，合理利用直接过渡法和圆弧过渡模型的优点，根据夹角范围有不同的算法分析，有利于提高数控精度和加工效率。

- (2) S 型曲线加减速算法, 通过对启动阶段即高速阶段的加速度衰减, 可实现加速度的连续变化, 来保证电动机性能的充分发挥和减小启动冲击, 兼顾了运动效率和平稳性, 提高工件的表面质量。
- (3) 三次多项式加减速控制模型始终能保证在高速运动过程中加速度曲线的连续, 从而消除了进给过程的冲击, 使机床运行平稳。且该模型在变速过程中加加速度、加速度、速度和位移的计算只涉及次数较少的四则运算, 算法实现较简单。

8.2 模型的不足

- (1) S型曲线加减速的模型是个分段连续函数, 且随着运动参数的不同, 函数的表达形式将发生较大的变化, 将给计算尤其是前瞻处理带来较大不便, 特别对于一些变化复杂的曲线, 频繁地加减速会加大系统的计算量。

9. 参考文献

- [1] 陈红康,杜洪香. 数控编程与加工[M].济南: 山东大学出版社, 2009.8:1-49.
- [2] 叶元烈. 机械优化理论与设计[M].北京: 中国计量出版社, 2000.12:81-83.
- [3] 田林.连续小线段前瞻插补算法的设计与实现[D].深圳: 深圳研究生院, 2012:19-31.
- [4] 王海涛.数控系统速度前瞻控制算法及实现[D].南京: 南京航空航天大学, 2011:19 -58.
- [5] 何均.高平稳数控运动控制算法与系统软件开发方法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2010:40-42.
- [6] 商允舜.CNC 数控系统加减速控制方法研究与实现[D]. 浙江: 浙江大学, 2006:19-27.
- [7] 张得礼,周来水.数控加工运动的平滑处理[J].航空学报, 27(1):125-130,2006.
- [8] 李小清,朱凯.数控加工小线段高速平滑衔接插补算法[J].设计与研究, (9):1-5,2010.
- [9] 李伟光,曾顺星,叶国强等.一种无直线逼近的高速高精度圆弧插补算法[J].组合机床与自动化加工技术,(3):53-57,2014.
- [10] 石川,赵彤,叶佩青.数控系统 S 曲线加减速规划研究[J].中国机械工程, 18(12): 1421-1424,2007.
- [11] 王海涛,赵东标,陆永华等.参数曲线柔性加减速前瞻控制算法[J].中国机械工程, 23(3):299-303,2012.
- [12] 冷洪滨,邬义杰,潘晓弘.三次多项式型微段高速自适应前瞻插补方法[J].机械工程学报, 45(6):73-78,2009.
- [13] 焦青松,李迪,王世勇.连续小线段高速加工插补技术综述[J].组合机床与自动化加工技术, (1):1-4,2014.
- [14] 叶伟,王小椿.一种连续小线段高速插补算法[J].南京理工大学学报, 32(4):443-448,2008.
- [15] 陈绪兵,熊蔡华,熊有伦.S 曲线加减速模式下的加工轨迹效率评价[J].华中科技大学学报, 36(2):1-4,2008.

- [16] 梁文胜,王清阳,裴海龙.高速加工中小线段速度衔接控制新算法研究[J].机械设计与制造, (3):62-64,2009.
- [17] 许海峰,王宇晗,李宇昊.小线段高速加工的速度模型研究和实现[J].机械工程师, (4):9-13,2005.
- [18] 章永年,赵东标,刘凯.一种实时前瞻的微线段直接插补算法[J].东南大学学报, 40(4):726-730,2010.
- [19] 潘海鸿,杨增启,陈琳.一种优化轨迹间衔接速度的自适应前瞻控制[J].机械工程学报, 51(5):151-159,2015.
- [20] 张园,陈友东,黄荣瑛.高速加工中连续微小线段的前瞻自适应插补算法[J].机床与液压, 36(6):1-4,2008.

10. 附录

附录一：图 7 中各个阶段速度、加速度、加加速度以及累计位移随时间的变化规律

附录二：S 型加减速控制曲线 Matlab 程序

附录三：三次多项式加减速控制模型 Matlab 程序

附录四：加工路径示例检验 Matlab 程序