Une octave dissonante

Encadrants :
Enric Meinhardt-Llopis <enric.meinhardt@ens-paris-saclay.fr>

Contexte

La superposition de deux ondes pures de fréquences très proches $e^{i\omega t}+e^{i(\omega+\epsilon)t} = e^{iwt}\left(1+e^{i\epsilon t}\right)$ entraîne une modulation de baisse fréquence connue sur le nom de battement ou *dissonance*. Ce phénomène n'apparait pas lorsque les fréquences sont bien éloignées, quel que soit le rapport entre elles—entier ou pas. Or, sur les instruments musicaux traditionnels, on entend aussi de la dissonance pour d'autres intervalles, par exemple celles très proches à une octave. Ceci vient du fait que le son de ces instruments n'est pas une onde pure mais une superposition d'ondes pures dont les fréquences sont multiples entiers (dits *harmoniques*) d'une fréquence fondamentale. Ainsi, les intervalles traditionnellement dissonantes le sont parce que leurs harmoniques sont *presque* bien alignées.

Objectif du stage

L'objectif de cet stage est construire un objet dont les vibrations naturelles soient presque multiples entiers, de sorte que les intervalles d'une octave deviennent extrêmement dissonants. Le problème direct, bien connu, consiste à trouver les premiers valeurs propres du Laplacien sur un maillage décrivant la forme de l'objet ; ces valeurs propres sont les fréquences de vibration naturelles de l'objet (cf. figure). En pratique, c'est le calcul du spectre $\mathrm{sp}_{\mathbf{R}}(A)$ d'une matrice A symétrique définie positive. On s'intéresse au problème inverse : étant donné un maillage, comment faire varier la longueur des liens du maillage—la forme de l'objet—de façon que son spectre coïncide avec un spectre objectif souhaitée ? Matriciellement, on se donne un spectre objectif $\Sigma \in \mathbf{R}^n$ et une structure de maillage décrite par une matrice $B \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, et on doit trouver des "poids" $W \in \mathbf{R}^m$ tels que $\mathrm{sp}_{\mathbf{R}}\left(B^T \mathrm{diag}(W) B\right) = \Sigma$.

$\mathbb{1}_\Omega$ W λ_1 λ_2 λ_3 λ_4 λ_5 λ_6 λ_7 λ_8 λ_9

On va résoudre ce problème par force brute, minimisant fonction $W \mapsto \left\|\mathrm{sp}_{\mathbf{R}}\left(B^T W B\right) - \Sigma\right\|^2$ avec des méthode d'optimisation modernes ; notamment celles utilisées en *deep-learning*, pour lesquelles ce problème est d'une taille considérée petite. Pour cela, il faut une implémentation de la fonction $A \mapsto \mathrm{sp}_{\mathbf{R}}(A)$ que l'optimiseur puisse dériver localement. C'est ici qu'il y aura la plupart du travail du stage, qui pourrait parfaitement être titré *"a differentiable implementaion of the eigenvalues computation"*.

Si le stage amène à une conclusion positive, on pourra soumettre une publication (première !) sur l'application des méthodes de deep learning à la modélisation d'instruments musicaux.

Références

[1] Kac, M.. *Can one hear the shape of a drum ?* The american mathematical monthly, (1966)
[2] McLachlan, N. et al. *The design of bells with harmonic overtones.* The Journal of the Acoustical Society of America, (2003).
[3] Henrique, L. L. et al. *Optimal design and physical modelling of mallet percussion instruments.* Acta Acustica (2003).
[4] Chu, M., & Golub, G. *Inverse eigenvalue problems : theory, algorithms, and applications*, OUP (2005)
[5] Sethares, W. A. *Tuning, timbre, spectrum, scale* Springer (2005)
[6] Noreland, D. et al. *The logical clarinet : numerical optimization of the geometry of woodwind instruments.* Acta Acustica (2013)
[7] Bharaj, Gaurav, et al. *Computational design of metallophone contact sounds.* SIGGRAPH (2015)
[8] Cosmo, Luca, et al. *Isospectralization, or how to hear shape, style, and correspondence.* CVPR (2019)