Vibrations d'un système discret

On considère les trois matrices suivantes :

$$D_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad N_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 1. Calculez explicitement (à la main) les valeurs et vecteurs propres des matrices X_3, pour $X = D, N, P$.

Indication : les vecteurs propres sont des évaluations des fonctions trigonométriques sur des positions régulièrement espacées.

Exercice 2. Définissez des matrices tridiagonales D_n, N_n et P_n, de taille $n \times n$ pour $n \geq 3$, qui généralisent le cas particulier $n = 3$.

Exercice 3. À la vue de l'exercice 1, trouvez les valeurs et vecteurs propres des matrices D_n, N_n et P_n pour $n \geq 3$.

Définition. Si A est une matrice positive, on dénote par $\lambda_k(A)$, $k = 1, 2, \ldots$ les valeurs propres strictement positifs de A, ordonnées par ordre croissant.

Exercice 4. Vérifiez que les matrices $-D_n$, $-N_n$ et $-P_n$ sont positives et donnez une expression fermée pour les *partiels*

$$\mu_k(X_n) := \sqrt{\frac{\lambda_k(-X_n)}{\lambda_1(-X_n)}}$$

pour $X = D, N, P$ et $k \geq 1$. Démontrez que quand $n >> k$ on a $\mu_k \approx k$, et estimez la qualité de cette approximation (selon la valeur de $\frac{k}{n}$).

Exercice 5. Donnez une interprétation physique à ces matrices et à leurs vecteurs propres.

Exercice 6. Donnez une version continue de toutes ces constructions.