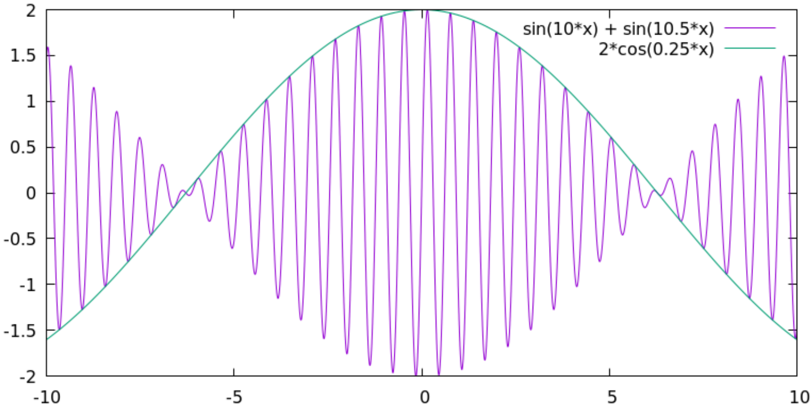
UNE OCTAVE DISSONANTE

CONTEXTE: DISSONANCE VS CONSONANCE

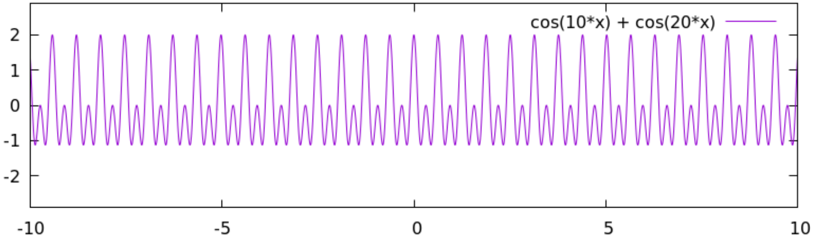
Dissonance: phénomène de baisse fréquence (battement) dû à la superposition de deux ondes pures de fréquence très proche.

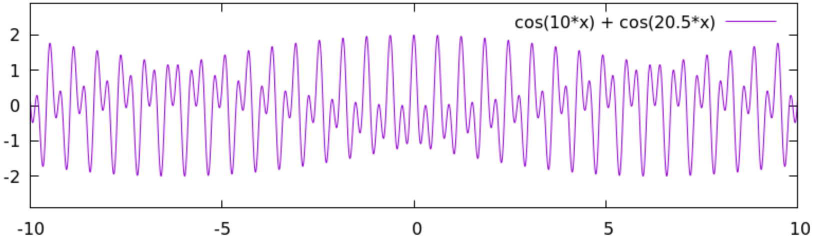
$$\sin\left[F t\right] + \sin\left[(F+\epsilon)t\right] = \sin\left[\left(F+\frac{\epsilon}{2}\right)t\right] \cdot 2\cos\left[\frac{\epsilon}{2}t\right]$$



CONTEXTE: DISSONANCE VS CONSONANCE

Le battement n’apparaît jamais pour fréquences bien éloignées.

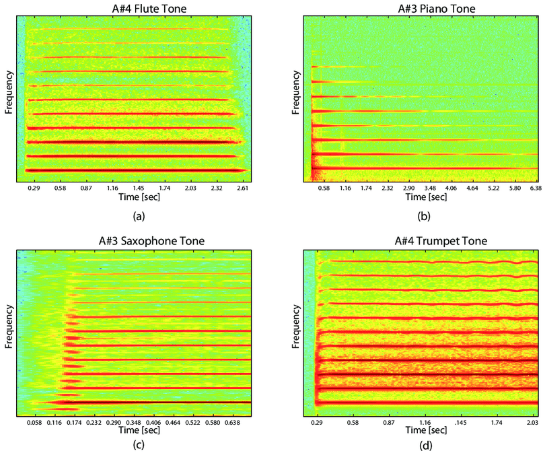




CONTEXTE: DISSONANCE VS CONSONANCE

Le son des **instruments traditionnels** est une somme d'ondes pures de fréquences multiples entiers de la fondamentale

$$s_F(t) = a_1 \sin\left[F t\right] + a_2 \sin\left[2F t\right] + a_3 \sin\left[3F t\right] + a_4 \sin\left[4F t\right] + \cdots$$



CONTEXTE: DISSONANCE VS CONSONANCE

Le son des **instruments traditionnels** est une somme d'ondes pures de fréquences multiples entiers de la fondamentale

$$s_F(t) = a_1 \sin[Ft] + a_2 \sin[2Ft] + a_3 \sin[3Ft] + a_4 \sin[4Ft] + \cdots$$

$$s_{(2+\epsilon)F}(t) = a_1 \sin[(2+\epsilon)Ft] + a_2 \sin[(4+2\epsilon)Ft] + a_3 \sin[(6+3\epsilon)Ft] + \cdots$$

Ainsi, quand on joue C4+C5# avec le piano on entend de la dissonance puisque les partiels sont presque bien alignés.

CONTEXTE: DISSONANCE VS CONSONANCE

Le **gamelan**, un instrument sacré d'Indonésie avec des sons fortement inharmoniques (les partiels ne sont pas du tout multiples entiers de la fondamentale).

OBJECTIF DU STAGE
=================

OBJECTIF DU STAGE
==================

Résoudre le problème d'algèbre linéaire suivant:

Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ et $\Sigma \in \mathbf{R}_+^n$ avec $m > n$, il faut trouver $W \in \mathbf{R}_+^m$ tel qu'il existe $U \in O_n(\mathbf{R})$ qui satisfait

$$B^\top \mathrm{diag}\left(W\right) B = U^\top \mathrm{diag}\left(\Sigma\right) U$$

Autrement dit, il faut trouver $W \in \mathbf{R}^m$ tel que

$$\mathrm{sp}_{\mathbf{R}}\left(B^\top \mathrm{diag}\left(W\right) B\right) = \Sigma$$

OBJECTIF DU STAGE

Résoudre le problème d'algèbre linéaire suivant:

Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ et $\Sigma \in \mathbf{R}_+^n$ avec $m > n$, il faut trouver $W \in \mathbf{R}_+^m$ tel qu'il existe $U \in O_n(\mathbf{R})$ qui satisfait

$$B^\top \mathrm{diag}\,(W)\, B = U^\top \mathrm{diag}\,(\Sigma)\, U$$

Autrement dit, il faut trouver $W \in \mathbf{R}^m$ tel que

$$\mathrm{sp}_{\mathbf{R}}\left(B^\top \mathrm{diag}\,(W)\, B\right) = \Sigma$$

Interprétation:
$B =$ topologie d'un maillage
$W =$ poids sur les liens du maillage (forme/rigidité)
$\Sigma =$ spectre de vibration ($\sigma_1 =$fondamentale, $\sigma_i =$partiels)
$U_i =$ modes de vibration

OBJECTIF DU STAGE

Construire un instrument de percussion qui produit un son de cette forme:

$$s_F(t) = \sin[Ft] + \sin[(2+\epsilon)Ft] + \sin[(3+\epsilon)Ft] + \sin[(4+\epsilon)Ft] + \cdots$$

Ainsi, les octaves s_F et s_{2F} produites par cet instrument seront fortement dissonantes.

Problème inverse de modélisation de formes: comment trouver une forme qui a un spectre de vibration donnée?

PROBLÈME DIRECT (FACILE)

Question: Étant donné la forme Ω d'un objet, quel est son spectre de vibration Σ?

Réponse:

1. Construire la matrice $L = B^\top W_\Omega B$
2. Appeler la fonction `scipy.sparse.linalg.eigs(L)`

$\mathbb{1}_\Omega$ W u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 u_8 u_9

PROBLÈME INVERSE (DIFFICILE)
============================

Question: Étant donné un spectre de vibration Σ, comment trouver un objet Ω tel que son spectre de vibration soit Σ?

PROBLÈME INVERSE (DIFFICILE)
============================

Question: Étant donné un spectre de vibration Σ, comment trouver un objet Ω tel que son spectre de vibration soit Σ?

Réponse (force brute): Minimiser la fonction

$$E(W) = \left\| \mathrm{sp}_{\mathbf{R}} \left(B^\top W B \right) - \Sigma \right\|^2$$

PROBLÈME INVERSE (DIFFICILE)

Question: Étant donné un spectre de vibration Σ, comment trouver un objet Ω tel que son spectre de vibration soit Σ?

Réponse (force brute): Minimiser la fonction

$$E(W) = \left\| \mathrm{sp}_{\mathbf{R}} \left(B^\top W B \right) - \Sigma \right\|^2$$

Petit problème technique: La fonction eigs n'est pas ''différentiable'' (on ne peut pas faire backtracking).

PROBLÈME INVERSE (DIFFICILE)
============================

Question: Étant donné un spectre de vibration Σ, comment trouver un objet Ω tel que son spectre de vibration soit Σ?

Réponse (force brute): Minimiser la fonction

$$E(W) = \left\| \mathrm{sp}_{\mathbf{R}} \left(B^\top W B \right) - \Sigma \right\|^2$$

Petit problème technique: La fonction eigs n'est pas ''différentiable'' (on ne peut pas faire backtracking).

Vrai objectif du stage: Une implémentation ''différentiable'' de la fonction eigs qui sert à calculer $\mathrm{sp}_{\mathbf{R}}(A)$.