

Rapport de Stage

Vianney de la Salle & Romain Dugast

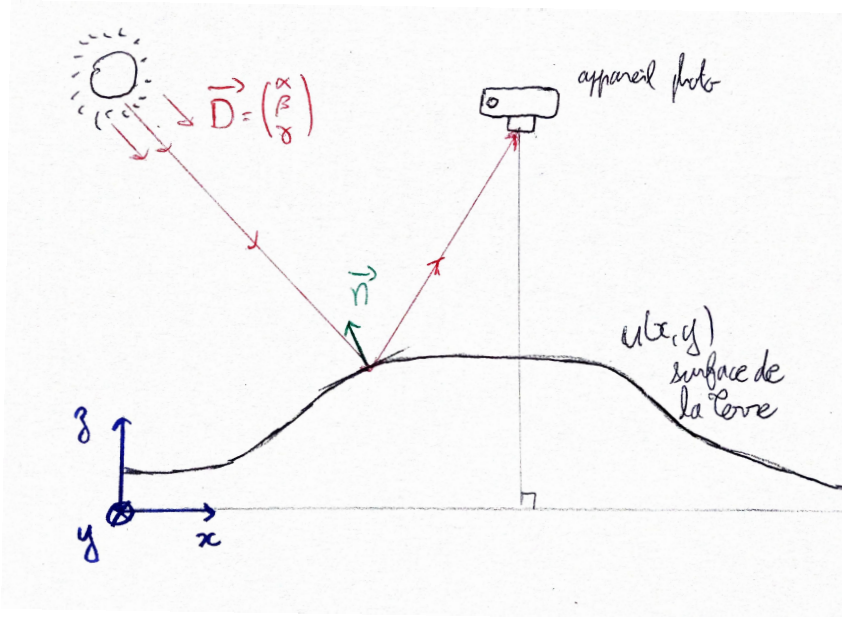
1 Introduction

Que ce soit pour la détermination d'un volume de tas de charbon, l'analyse du relief d'un astéroïde ou de l'environnement proche d'un robot, la reconstitution du relief d'une surface à partir d'une photo peut être un enjeu intéressant. (A poursuivre)

2 Modélisation

Problème à résoudre : Comment reconstruire le relief d'une surface à partir d'une photo ?

Le relief est mathématiquement modélisé par une fonction u donnant l'altitude aux points de coordonnées $(x, y) \in \Omega$. La photo est quant à elle la donnée d'une fonction I attribuant l'intensité reçue par l'appareil photo pour des rayons lumineux provenant des points de la surface étudiée (les points $(x, y, u(x, y))$ avec $(x, y) \in \Omega$). Nous cherchons donc à déterminer u , connaissant I . Pour cela, nous avons alors besoin d'une relation mathématiques entre ces deux fonctions, et celle-ci est donnée par le modèle physique de l'éclairage Lambertien comme le présente Horn dans son article de 1975 [1] :



Dans le repère orthonormée $(Oxyz)$,

\vec{D} est le vecteur de norme 1 qui donne la direction du soleil et \vec{n} est le vecteur normal à la surface. A est l'albédo de la surface réfléchissante que l'on supposera uniforme, I_0 est l'intensité du soleil et B est la luminosité ambiante. Toutes ces données, à l'exception du vecteur normal $\vec{n}(x, y)$ sont supposées connues. (I_0 ?)

Le modèle physique donne la formule suivante : $I = AI_0\langle D, n \rangle + B$

On peut alors expliciter le vecteur \vec{n} en fonction des dérivées directionnelles de u pour obtenir la relation entre I et u :

$$I(x, y) = A \frac{-\alpha u_x - \beta u_y + \gamma}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} + B \quad (1)$$

Du point de vue de notre problème (problème indirect), on appelle cette équation "équation de Shape From Shading" ou "équation SFS" puisqu'il s'agit d'une équation aux dérivées partielles dont la solution est le relief de la surface et qui est résolu à partir de l'intensité lumineuse I .

L'enjeu de ce stage est donc de résoudre cette équation non linéaire avec une méthode numérique bien particulière (Fast Marching). Nous commencerons par traiter ce problème avec des conditions aux bords de Dirichlet,

puis nous nous intéresserons aux conditions de bords mixtes (ce qui n'a pas encore été fait dans la littérature).

Les notations introduites dans cette partie seront réutilisées par la suite.

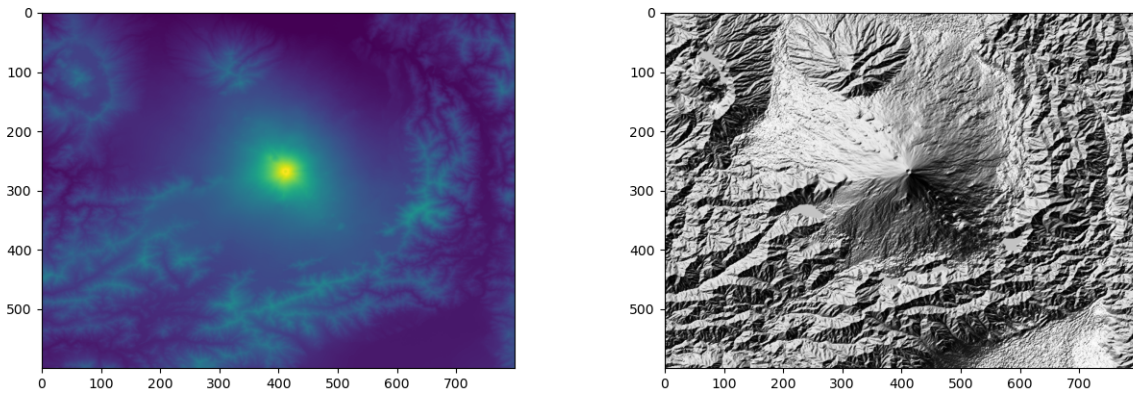
3 Prise en main du problème

Afin de se familiariser avec le sujet nous commençons par une tâche simple qui consiste à vérifier l'équation (1) en calculant une intensité I à partir d'un relief u connu. Il s'agit du problème direct, qui ne nécessite pas de résolution d'équation différentielle.

3.1 Résolution du problème direct

Nous disposons de la donnée d'un relief u sous forme de tableau *numpy* et nous voulons afficher l'intensité I correspondante (pour des paramètres α , β et γ choisis). Il s'agit ainsi de la simulation d'une photo du relief u éclairé par le soleil sous une direction $\vec{D} = (\alpha, \beta, \gamma)$. On va donc vérifier que l'on obtient bien une image ayant l'apparence d'une photographie.

On peut utiliser la discrétisation classique des dérivées directionnelles (à l'ordre 1) ou encore la fonction *gradient* du module *numpy* de *python* qui est plus précise. On obtient des images très similaires, mais l'image obtenue en utilisant la fonction *gradient* de *numpy* semble légèrement plus régulière.



Relief u du Mont-Fuji affichée avec une palette de couleur, et la simulation d'une photographie en utilisant la fonction *gradient* de *numpy*.

Le résultat étant convainquant (on a l'impression de voir une véritable photo), nous pouvons nous convaincre que la relation (1) est pertinente et nous allons donc par la suite tenter de l'utiliser pour reconstituer le relief d'une surface à partir d'une photo associée. Avant de mettre en place la méthode numérique permettant la résolution de l'équation SFS, nous commençons par nous intéresser à certains points théoriques sur lesquels nous pourrions nous appuyer lors de la mise en place du schéma.

4 Equations de Hamilton-Jacobi

On étudie ici certains résultats sur les équations de Hamilton-Jacobi qui serviront dans la résolution de l'équation Shape from Shading.

4.1 Introduction

Les équations de Hamilton-Jacobi avec conditions au bords nulles (conditions de type Dirichlet) sont de la forme :

$$(E) : \begin{cases} H(x, \nabla u(x)) = 0 \text{ sur } \Omega \\ u(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

H est le Hamiltonien de l'équation, et Ω est un domaine borné ouvert de \mathbb{R}^d .

Ces équations ne possèdent en général pas de solutions \mathcal{C}^1 .

Par exemple, l'équation sur $[-1, 1]$ donnée par $|u'(x)| = 1$ avec des conditions aux bords nulles n'admet pas de solution \mathcal{C}^1 , cela se voit directement avec le théorème de Rolle par exemple.

On définit maintenant les deux Hamiltoniens que nous allons principalement étudier dans la suite :

- Pour l'équation Shape from Shading (dimension 2), le Hamiltonien est tel que, pour x, y, p, q dans \mathbb{R} :

$$H(x, y, p, q) = \frac{I(x, y) - B}{A}(\sqrt{1 + p^2 + q^2}) + \alpha p + \beta q - \gamma$$

Dans la suite, on note par abus de notation " $I(x, y) := \frac{I(x, y) - B}{A}$ ", afin de simplifier. Ces termes seront bien considérés plus tard, et cette simplification ne change rien aux résultats démontrés.

- On considère le cas précédent pour un éclairage vertical, c'est-à-dire $\alpha = \beta = 0$. L'équation Shape from Shading devient, en notant $p = \langle \nabla u, e_1 \rangle$ et $q = \langle \nabla u, e_2 \rangle$, avec e_1 et e_2 les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 :

$$\frac{I(x, y)}{\gamma} \sqrt{1 + p^2 + q^2} = 1$$

Donc :

$$\sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{\frac{\gamma^2}{I(x, y)^2} - 1}$$

Autrement dit :

$$\|\nabla u\| = \eta(x)$$

avec η une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

On remarque que le calcul précédent est possible si I ne s'annule pas, ce qui est le cas pour un éclairage vertical lorsque le relief n'est pas discontinu, ce qu'il est raisonnable de supposer.

Cette équation correspond à l'équation dite Eikonale.

Dans la suite, on commencera par traiter de cette équation en considérant le cas $\eta(x) = 1$ afin de simplifier. On considère ainsi l'équation, en dimension n :

$$(E') : \begin{cases} \|\nabla u\| = 1 \text{ sur } \Omega \\ u(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Cette équation n'a pas de solution forte comme montré précédemment, et a fortiori l'équation shape from shading non plus. Il est donc nécessaire de définir une notion de solution faible pouvant nous servir dans la suite.

4.2 Caractéristiques

4.3 Solutions de Viscosité

4.3.1 Définition

Afin de définir une notion de solution faible, on utilise la notion de solution de viscosité introduite par Crandall et Lions en 1982. Celle-ci se base sur la méthode dite de *viscosité évanescence*, qui consiste à transformer l'équation en lui rajoutant un terme d'ordre 2, on résout alors :

$$\epsilon \Delta u + H(x, \nabla u) = 0$$

On peut alors montrer que sous certaines conditions sur le domaine et le Hamiltonien, la suite de solutions $\mathcal{C}^1 : (u_\epsilon)_\epsilon$ ainsi obtenue admet une suite extraite convergente (en utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli) au sens de la convergence uniforme.

La solution limite ainsi trouvée est uniformément continue & bornée (1), et vérifie les conditions aux bords (2). De plus, elle vérifie les conditions suivantes qui vont constituer la définition de solution de viscosité :

Pour toute fonction v de classe \mathcal{C}^∞ sur Ω , et pour tout x_0 dans Ω : (3)

$$\begin{cases} (u - v)(x_0) \text{ est un maximum local} \Rightarrow H(x_0, \nabla v(x_0)) \leq 0 \\ (u - v)(x_0) \text{ est un minimum local} \Rightarrow H(x_0, \nabla v(x_0)) \geq 0 \end{cases}$$

Une fonction vérifiant les conditions (1), (2) et (3) sur Ω est alors appelée *solution de viscosité* (on ne s'intéresse ici qu'aux solutions de viscosité continues).

4.3.2 Propriétés

On commence par montrer certaines propriétés des solutions de viscosité qui confirment leur pertinence.

Propriété : Si u est solution \mathcal{C}^1 de (E) , alors u est solution de viscosité.

Démonstration : Si u est une solution \mathcal{C}^1 de l'équation (E) , alors elle vérifie directement les conditions aux bords, et est uniformément continue car continue sur un domaine compact (Heine). Donnons-nous v une fonction \mathcal{C}^∞ sur Ω .

On suppose que $u - v$ atteint un extremum en x_0 . Alors on a nécessairement $\nabla u(x_0) = \nabla v(x_0)$. On a donc par suite :

$$H(x_0, \nabla v(x_0)) = H(x_0, \nabla u(x_0)) = 0$$

□

Propriété : Si u est solution de viscosité de (E) et est différentiable en x_0 alors : $H(x_0, \nabla u(x_0)) = 0$

Démonstration :

- On commence par montrer qu'il existe v de classe \mathcal{C}^1 tel que $u(x_0) = v(x_0)$ et $u - v$ a un maximum local en x_0 . On montre ce résultat dans le cas $x_0 = u(x_0) = \nabla u(x_0) = 0$, puisque s'il est vrai dans ce cas il l'est aussi dans le cas général.

Par ces hypothèses, et puisque u est supposée être différentiable en 0, on en déduit que la fonction ρ_1 définie par $\rho_1(x) := \frac{u(x)}{\|x\|}$ est bien définie et continue sur Ω . De plus, on définit sur \mathbb{R}_+ la fonction : $\rho_2 : x \mapsto \max_{x \in \Omega} |\rho_1(x)|$. Enfin, on pose

$$v : x \mapsto \int_{|x|}^{2|x|} \rho_2(r) dr + |x|^2$$

On a $v(0) = 0$. On constate que v vérifie bien les conditions souhaitées :

$$u(x) - v(x) = |x|\rho_1(x) - \int_{|x|}^{2|x|} \rho_2(r) dr - |x|^2$$

$$\leq -|x|^2 \leq 0 = u(0) - v(0)$$

par définition de ρ_2 , pour x dans un voisinage de 0 contenu dans Ω . Enfin, v est bien \mathcal{C}^1 sur Ω en dehors de 0. En 0, on a l'inégalité : $|v(x)| \leq \|x\|\rho_2(2|x|) + \|x\|^2$ donc v est bien différentiable en 0 de gradient nul. De l'égalité : $\nabla v(x) = \frac{2x}{\|x\|}\rho_2(\|x\|) - \frac{x}{\|x\|}\rho_2(\|x\|) + 2x$, on déduit que v est bien \mathcal{C}^1 sur Ω .

- On considère une fonction v comme explicitée précédemment, pour un point x_0 où u est différentiable. On a donc $u - v$ qui admet un maximum local en x_0 . On considère une suite régularisante $(\eta_\epsilon)_\epsilon$ telle que $(\eta_\epsilon * v)_\epsilon$ est une suite de fonctions \mathcal{C}^∞ qui convergent uniformément vers v (dans un voisinage $B(x_0, r)$ de x_0), et dont les gradients convergent aussi uniformément vers ∇v .

On dispose alors d'une suite (x_ϵ) qui converge vers x_0 telle que $u - v_\epsilon$ ait un maximum en x_ϵ (*). Puisque u est solution de viscosité de (E) , on en déduit immédiatement : pour tout $\epsilon \leq r$, $H(x_\epsilon, \nabla v(x_\epsilon)) \leq 0$. Par passage à la limite : $H(\nabla v(x_0))$. Or, $u - v$ admet un maximum en x_0 donc : $\nabla u(x_0) = \nabla v(x_0)$ donc $H(x_0, \nabla u(x_0)) \leq 0$. On applique le même raisonnement à $-u$, pour trouver une fonction \tilde{v} telle que $u - \tilde{v}$ admette un minimum en x_0 . On obtient alors de la même façon : $H(x_0, \nabla u(x_0)) \geq 0$ et donc finalement : $H(x_0, \nabla u(x_0)) = 0$.

- (*) En effet, pour $r > 0$ suffisamment petit, on a : $\max_{\partial B(x_0, r)} (u - v)(x) \leq (u - v)(x_0)$. Puisque $(u - v_\epsilon)$ converge uniformément vers $u - v$, pour ϵ suffisamment petit on a : $\max_{\partial B}(u - v_\epsilon)(x) \leq (u - v_\epsilon)(x_0)$ et donc par théorème de Weierstrass on dispose de x_ϵ dans $\overset{\circ}{B}(x_0, r)$ tel que $u - v_\epsilon$ atteigne son maximum en x_ϵ . On trouve ainsi bien une suite comme voulu.

□

Propriété : La fonction distance aux bords $x \mapsto d(x, \partial\Omega)$ est solution de viscosité de (E')

Démonstration : La fonction distance euclidienne aux bords du domaine vérifie directement les conditions aux bords nulles. De plus, elle est bien continue sur un domaine fermé borné donc uniformément continue par théorème de Heine. Enfin, si la fonction distance est différentiable en $x \in \Omega$, alors On vérifie ensuite le point important de la définition de solution de viscosité : on se donne v une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur Ω .

- On suppose d'abord que $u - v$ admet un maximum en x_0 (avec u la fonction distance). On suppose par l'absurde que $\|\nabla v(x_0)\| > 1$. On prend h colinéaire à $\nabla v(x_0)$, et on a alors :

$$\begin{aligned} v(x_0 + h) &= v(x_0) + \langle \nabla v(x_0), h \rangle + o(h) \\ &= v(x_0) + \|h\| \|\nabla v(x_0)\| + o(h) \end{aligned}$$

Par définition de la fonction u , on a aussi : $u(x_0 + h) \leq u(x_0) + \|h\|$. On en déduit donc :

$$\begin{aligned} (u - v)(x_0 + h) &\leq (u - v)(x_0) + \|h\|(1 - \|\nabla v(x_0)\|) + o(h) \\ &\leq (u - v)(x_0) \text{ par hypothèse, et pour } h \text{ assez petit} \end{aligned}$$

C'est donc absurde puisque $u - v$ est supposée avoir un maximum en x_0 .

- On suppose maintenant que $u - v$ admet un minimum en x_0 , et par l'absurde on suppose que $\|\nabla v(x_0)\| < 1$. Puisque $\partial\Omega$ est fermé, il existe y dans $\partial\Omega$ tel que $u(x_0) = \|x_0 - y\|$. On note g la fonction définie sur Ω par $x \mapsto \|x - y\|$. g est différentiable sur Ω et est telle que : $\forall x \in \Omega, \|\nabla g(x)\| = 1$. On note $e = -\nabla g(x_0)$, et on prend h dans \mathbb{R} . On a alors :

$$\begin{aligned} (g - v)(x_0 + he) &= (g - v)(x_0) - h + h\langle e, \nabla v(x_0) \rangle + o(h) \\ &\leq (g - v)(x_0) + h(\|\nabla v(x_0)\| - 1) + o(h) \text{ par inégalité de Cauchy-Schwarz} \end{aligned}$$

Par hypothèse, on en déduit : $(g - v)(x_0 + he) \leq (g - v)(x_0)$ pour h assez petit. Par définition de u et de g , on a : $\forall x \in \Omega, u(x) \leq g(x)$. On en déduit : $u(x_0 + he) \leq g(x_0 + he) \leq g(x_0) = u(x_0)$ ce qui est absurde par hypothèse.

On en déduit que $x \mapsto d(x, \partial\Omega)$ est solution de viscosité de (E') sur Ω .

□

4.3.3 Existence & Unicité

On énonce à présent deux théorèmes, un d'existence et un d'unicité concernant les solutions d'une équation de Hamilton-Jacobi comme présentée précédemment.

On suppose ici plusieurs hypothèses sur le Hamiltonien H :

- H est K -Lipschitzien en x
- H est convexe en p
- Il existe \underline{u} sous-solution de viscosité stricte de (E) de classe \mathcal{C}^1 , i.e. \underline{u} vérifie : $H(x, \nabla \underline{u}) < 0$ sur Ω .

Théorème : Sous ces hypothèses, on dispose de l'unicité pour les solutions de viscosité de (E)

Démonstration :

On suppose données u et v deux solutions de viscosité de (E) .

- On pose $u_t = tu + (1-t)\underline{u}$. Par hypothèse, on dispose de f strictement négative sur $\bar{\Omega}$ telle que $H(x, \nabla \underline{u}) < f(x)$ sur Ω . Quitte à remplacer \underline{u} par $\underline{u} - M$ qui vérifie les mêmes hypothèses, on peut supposer : $\underline{u} \leq u$ sur Ω . On a alors : $u_t \leq u$, $u_t > u$ quand t tend vers 1, et u_t continue $\forall t \in]0, 1[$.
On se donne maintenant ϕ dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et x_0 tels que $(u_t - \phi)(x_0)$ soit un maximum local de $u_t - \phi$. On note $p = \nabla \phi(x_0)$.
On pose $q = p - \frac{1-t}{t} \nabla \underline{u}$. On vérifie que $H(x_0, q) \leq 0(1)$. On obtient alors :

$$H(x_0, p) \leq tH(x_0, q) + (1-t)H(x_0, \nabla \underline{u}(x_0)) \leq (1-t)f(x)$$

par hypothèses, en utilisant la convexité du Hamiltonien.

- On raisonne à t fixé. On a $u_t \leq v$ sur $\partial\Omega$. On suppose que $M = \sup(u_t - v) > 0$ sur Ω . On pose alors : $\psi_\epsilon(x, y) = u_t(x) - v(y) - \frac{\|x - y\|^2}{\epsilon^2}$ définie sur $\Omega \times \Omega$. On considère la maximum de ψ_ϵ sur $\bar{\Omega}^2$ qui est compact, et on note (x_ϵ, y_ϵ) et M_ϵ un point de maximum et la valeur atteinte en ce maximum. On commence par montrer le Lemme suivant :

Lemme : Lorsque ϵ tend vers 0 :

1. $M_\epsilon \rightarrow M$
2. $\frac{\|x_\epsilon - y_\epsilon\|^2}{\epsilon^2} \rightarrow 0$
3. $u_t(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) \rightarrow M$
4. $x_\epsilon, y_\epsilon \in \Omega$ (pour ϵ assez petit)

Pour démontrer cela, on commence par remarquer que pour $x \in \Omega$, $\psi_\epsilon(x, x) \leq M_\epsilon$ donc $u_t(x) - v(x) \leq M_\epsilon$, et $M \leq M_\epsilon$.

On a donc : $M \leq \psi_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \leq 2R - \frac{\|x_\epsilon - y_\epsilon\|^2}{\epsilon^2}$ avec u_t et v bornées par R . Puisque $M > 0$, on obtient $\frac{\|x_\epsilon - y_\epsilon\|^2}{\epsilon^2} \leq 2R$, et finalement : $\|x_\epsilon - y_\epsilon\| \leq \sqrt{2R}\epsilon$.

On pose maintenant $m_v : t \mapsto \sup_{|x-y| \leq t} |v(x) - v(y)|$. Puisque v est uniformément continue, on remarque que

$$\lim_{t \rightarrow 0} m_v(t) = 0.$$

On a alors : $M \leq u_t(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) + m_v(\|x_\epsilon - y_\epsilon\|) \leq u_t(x_\epsilon) - v(x_\epsilon) + m_v(\|x_\epsilon - y_\epsilon\|) \leq M + m_v(\|x_\epsilon - y_\epsilon\|)$. On en déduit :

$$M \leq M_\epsilon \leq u_t(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) \leq M + m_v(\sqrt{2R}\epsilon)$$

. Cela démontre 1), 2) et 3). Enfin, si on dispose d'une suite (ϵ_n) telle que $x_{\epsilon_n} \in \partial\Omega$, alors : $u_t(x_{\epsilon_n}) - v(y_{\epsilon_n}) \leq u_t(x_{\epsilon_n}) - v(x_{\epsilon_n}) + \mu \leq \mu$ pour n assez grand puisque $u_t \leq v$ sur $\partial\Omega$. Par passage à la limite, on aurait alors $M \leq 0$ ce qui est absurde. On raisonne de même sur y_ϵ , ce qui permet d'en déduire (4).

- On remarque que x_ϵ est un point de maximum de la fonction $x \mapsto u_t(x) - (v(y_\epsilon) + \frac{\|x - y_\epsilon\|^2}{\epsilon^2})$. Par propriété de u_t , on en déduit : $H(x_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}) \leq (1-t)f(x_\epsilon)$. De même, y_ϵ est un point de minimum de $y \mapsto v(y) - (u(x_\epsilon) - \frac{\|x_\epsilon - y\|^2}{\epsilon^2})$. Par propriété sur v , on en déduit : $H(y_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}) \geq 0$. En combinant les deux inégalités, et par Lipschitzianité du Hamiltonien, on obtient :

$$(t-1)f(x_\epsilon) \leq H(y_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}) - H(x_\epsilon, \frac{2(x_\epsilon - y_\epsilon)}{\epsilon^2}) \leq K\|x_\epsilon - y_\epsilon\|$$

. Or , d'après le lemme, c'est absurde puisque $-f$ est strictement positive. On en déduit que $M \leq 0$.

- Enfin, puisqu'on a $u_t \leq v$ sur Ω pour tout t strictement inférieur à 1, par passage à la limite on obtient $u \leq v$. Or, on peut répéter la même démonstration en inversant les rôles de u et v qui vérifient les mêmes propriétés : on en déduit le théorème voulu : $u = v$ sur Ω .

(1) En effet, on a $u - (\frac{1}{t}\phi - \frac{1-t}{t}\bar{u})$ qui admet un maximum en x_0 par hypothèse. Or, $\frac{1}{t}\phi - \frac{1-t}{t}\bar{u}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω . A la façon de la propriété 2 de la partie précédente, on peut l'approcher par une suite de fonctions lisses ϕ_ϵ (à l'aide d'une suite régularisante par exemple). De la même façon, on construit alors une suite de points x_ϵ de maximums des fonctions $u - \phi_\epsilon$, et par passage à la limite on obtient bien : $H(x_0, q) \leq 0$.

□

Théorème : Sous les mêmes hypothèses, on dispose de l'existence d'une (unique) solution de viscosité de (E)

On ne donne pas ici les démonstrations de ce théorème dans le cas général (cf [] et []) qui nécessitent des connaissances dont nous ne disposons pas.

Nous remarquons tout de même qu'il existe 2 façon principales d'effectuer cette démonstration :

- La première méthode est de transformer l'équation en $\epsilon \Delta u + H(x, \nabla u) = 0$. On peut alors montrer que cette équation possède une solution u_ϵ . On peut ensuite sous certaines hypothèses extraire de la suite (u_ϵ) une sous suite convergente lorsque ϵ tend vers 0, à l'aide du théorème d'Arzela-Ascoli. Il est enfin possible de montrer que cette limite est bien solution de viscosité de (E) .
- La seconde méthode qui semble être plus utilisée en pratique consiste à utiliser la théorie du contrôle afin de transformer l'équation en un problème de contrôle optimal, à l'aide de propriétés des équations de Hamilton-Jacobi. On montre que la solution de ce problème est alors une solution de viscosité.

4.3.4 Application à l'équation Eikonale

On a montré que dans le cas d'un domaine ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n , et avec des conditions aux bords de Dirichlet nulles, la fonction distance au bord du domaine était solution de viscosité de l'équation Eikonale. On vérifie maintenant les hypothèses d'unicité sur le Hamiltonien :

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, p) \mapsto \|p\| - 1$$

- H est Lipschitzien car la norme l'est.
- H est convexe pour la même raison.
- La fonction nulle est une sous-solution de viscosité \mathcal{C}^1 stricte de l'équation.

On en déduit que la fonction distance est l'unique solution de viscosité de l'équation Eikonale.

4.3.5 Application à l'équation Shape from Shading

Le Hamiltonien est ici définie par :

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, p) \mapsto I(x, y) \sqrt{1 + \|p\|^2} - \langle (\alpha, \beta), p \rangle - \gamma$$

- On remarque d'abord que H est Lipschitzien si et seulement si I l'est. cela présuppose que le relief ne possède pas de "discontinuité de pente" d'après l'équation SFS. On supposera dans la suite que cette condition forte est vérifiée sur le relief recherché, et que I est lipschitzienne.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ étant convexe sur \mathbb{R} , la norme l'étant aussi ainsi que le produit scalaire, on en déduit que H est bien convexe en p .
- Enfin, sous la condition $I(x) < 1 \forall x$ et un éclairage non horizontal, on vérifie que la fonction $\underline{u}(x, y) \mapsto \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\beta}{\gamma}y$ est \mathcal{C}^1 et sous-solution stricte de viscosité : $H(x, \nabla \underline{u}(x)) = I(x) \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma^2}} - \frac{\|(\alpha, \beta, \gamma)\|^2}{\gamma^2} = \frac{I(x) - 1}{\gamma^2} < 0$ puisque (α, β, γ) est normé. Cette condition sur I revient à demander à ce que en aucun point du relief l'éclairage n'ait une incidence normale. On peut remarquer que si c'est le cas, il y a effectivement plusieurs solutions de viscosité au problème ce qui n'est alors pas satisfaisant. On suppose dans la suite que cette hypothèse est vérifiée, ce qui n'est pas déraisonnable puisque l'intensité manipulée numériquement n'est presque jamais exactement égale à 1.

Dans la suite, on va maintenant chercher à résoudre cette équation SFS numériquement en construisant un schéma convergent vers la solution de viscosité du problème, en se basant sur le fait que la solution de l'équation Eikonale, donc de SFS avec un éclairage vertical, ait pour solution la fonction de distance aux bords.

5 Résolution d'une équation différentielle par FMM

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'algorithme de fast-marching (fast marching method ou FMM) qui est une méthode de parcours de graphe. On peut en effet discrétiser le domaine Ω en un maillage X et calculer de proche en proche les approximations de la fonction u aux points de ce maillage.

Etant donnée une discrétisation de l'équation considérée, le problème est donc de savoir dans quel ordre sélectionner les points sur lesquels on calcul une solution approchée. On a vu précédemment que la solution de l'équation eikonale était la distance au bord, on peut donc voir ce problème comme celui d'un plus court chemin. Une façon intelligente de calculer numériquement cette solution est alors de parcourir le maillage à la manière de l'algorithme de Dijkstra, utilisé pour le calcul d'un plus court chemin dans un graphe pondéré. C'est sur ce principe que repose la FMM, qui va consister à calculer les valeurs approchées de la solution selon un "front d'onde", qui se propage des valeurs les plus faibles vers les valeurs les plus élevées de la solution.

Après avoir décrit le principe de fonctionnement du Fast-Marching, nous commencerons par présenter les résultats de son implémentation pour l'équation Eikonale, puis pour l'équation SFS.

5.1 Description de l'algorithme

On distingue trois types d'états pour les points du maillage sur lequel l'équation est à résoudre : Accepted, Trial et Far. Initialement, tous les points du maillage sont classés "Far", à l'exception de ceux du bord du domaine dont on connaît la valeur de u avec les conditions aux bords de l'équation à résoudre. Ces derniers sont classés "Trial". Les points "Accepted" sont ceux sur lesquels la valeur de u a été définitivement calculée. Les points "Trial" sont ceux qui ont déjà été considérés et pour lesquels une valeur de u a déjà été calculée. Les points "Far" sont ceux qui n'ont jamais été explorés et auxquels est associée une valeur infinie de u .

Ci-dessous le pseudo-code de l'algorithme :

Algorithm 1: Fast Marching

```

1 Initialisation (Accepted, Trial, Far);
2 while Trial  $\neq \{\}$  do
3   Trouver l'élément Trial  $x$  qui minimise  $u$ ;
4   Ajouter  $x$  à Accepted;
5   for  $y \in \mathcal{V}(x)$  do
6     Ajouter  $y$  dans Trial;
7     Actualiser la valeur de  $u(y)$ 
8   end
9 end
```

On précise que la notation $\mathcal{V}(x)$ désigne l'ensemble des voisins de x dans le maillage.

On note X l'ensemble des points du maillages et ∂X l'ensemble des points aux bords du domaine discret.

Actualisation des valeurs de u (ligne 7 dans le pseudo-code)

A chaque étape, un point x minimisant la valeur approchée de u parmi les points de "Trial" est donc considéré et accepté. On actualise alors ses voisins de la façon suivante.

On considère y un voisin de x . Si y est "accepted" ou si $y \in \partial X$ alors on ne modifie pas sa valeur. (on respecte la condition au bord imposée par le problème). Sinon, on calcule la valeur de $u(y)$ en résolvant l'équation associée au problème à résoudre.

Prenons le cas de l'équation eikonale : l'équation à résoudre est $\|\nabla u(x)\|^2 = 1, \forall x \in \Omega$. Si e_1 et e_2 désignent les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 , alors une façon classique de discrétiser la dérivée selon x est de remplacer $(\partial_1 u(x))^2$ par $\frac{1}{h} \max(0, u(x) - u(x - he_1), u(x) - u(x + he_1))^2$. On obtient alors le schéma suivant :

$$\frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^2 \max(0, U(x) - U(x - he_i), U(x) - U(x + he_i))^2 = 1$$

On remarque que dans le cas où le point est un minimum dans une direction, la discrétisation de la dérivée dans cette direction est nulle, tandis que ce schéma privilégie toujours les directions de plus fortes pentes dans les autres cas. Cette discrétisation est particulièrement adaptée lorsque les dérivées directionnelles sont élevées au carré, ce qui est le cas ici.

Pour appliquer ce schéma dans l'algorithme de fast-Marching, il suffit de choisir le voisin dont la valeur est la plus faible car il va maximiser la quantité $U(x) - U(x \pm he_i)$. Mais si dans une direction les deux voisins ne sont encore "Far", alors on a $U(x) - U(x - he_i) = U(x) - U(x + he_i) = -\infty$ et dans ce cas on ignore le terme qui discrétise la dérivée dans cette direction (on considère que la dérivée dans cette direction est nulle). Par exemple si dans la direction e_1 les voisins de x sont encore "Far" et qu'on a $z = \min(U(x - he_i), U(x + he_i))$, on cherche à résoudre l'équation $(\lambda - z)^2 = h^2$.

Remarque : Par principe du Fast Marching et du plus court chemin, si dans une direction les deux voisins de x sont "Far", alors $U(x)$ est un minimum dans cette direction (les points étant traités par valeur de U croissantes), et donc ignorer la dérivée dans cette direction, ce qui revient à la considérée comme nulle, se comprend bien.

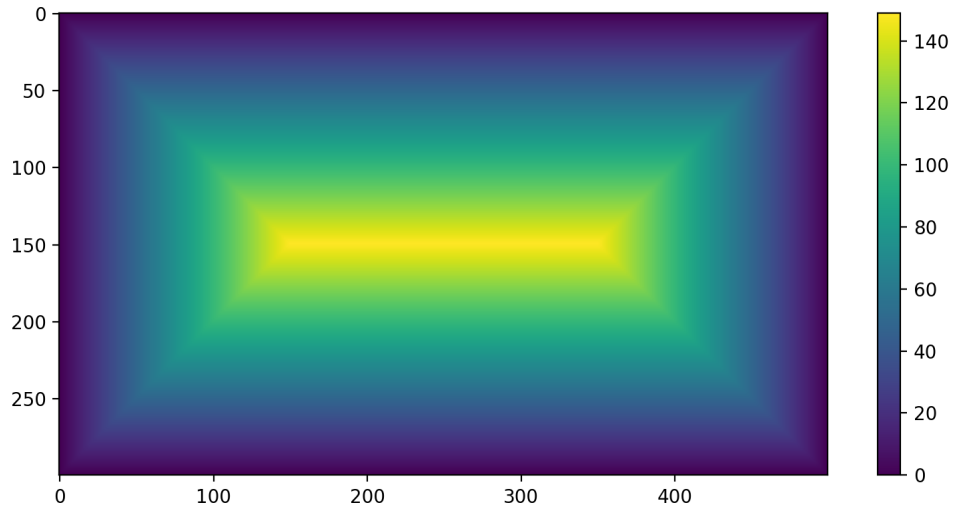
La valeur approchée de u en les voisins de x est donc calculé en résolvant une équation du second degré en $u(y)$.

À chaque équation quadratique à résoudre, on choisit la racine la plus grande car c'est ce qui assure d'obtenir la solution de viscosité (qui est la fonction distance au bord).

On obtient bien ainsi une méthode numérique permettant le calcul de solutions approchées à nos problèmes en estimant la valeur des points de proche en proche. On peut montrer que, dans le cas de l'équation Eikonale, ce schéma est bien convergent, stable et monotone, et donc qu'il est convergent. Au vu de la discrétisation choisie, on peut s'attendre à une ordre 1, cela sera confirmé plus tard.

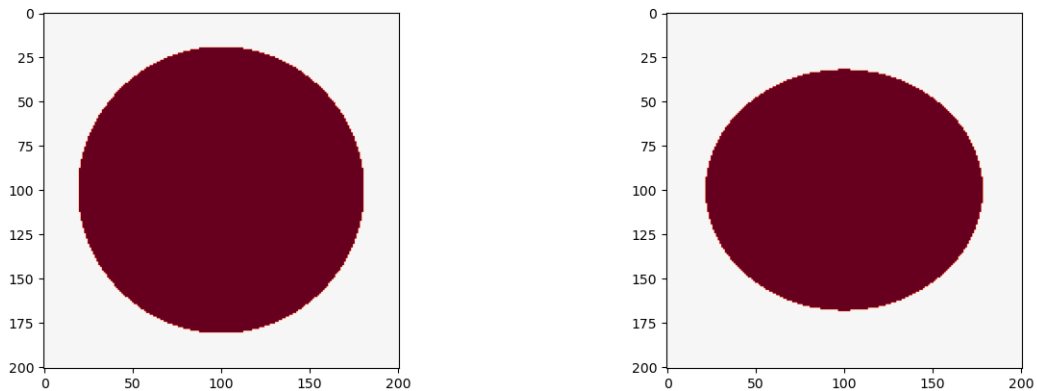
5.2 Implémentation et résultats pour l'équation eikonale

Nous avons implémenté le code correspondant (cf Annexe) et nous l'avons testé pour divers domaines Ω et des conditions de Dirichlet nulle au bords. Voici le résultat pour Ω un rectangle, et X le maillage rectangulaire de taille 300x500 :

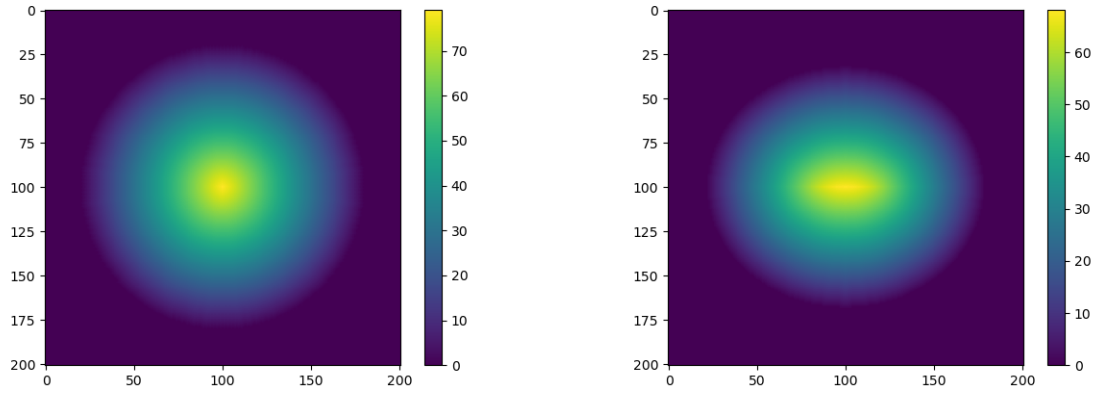


Le résultat correspond bien aux attentes théoriques : nous avons établi que les courbes caractéristiques pour ce problème étaient les lignes orthogonales aux bords du rectangle (jusqu'aux croisement), et que le long de ces courbes $(x(t), y(t))$ la dérivée de la fonction $u((x(t), y(t)))$ valait 1. On vérifie bien par exemple que la valeur de u augmente de 1 à chaque pixel quand on part du bas du rectangle vers le haut (puis qu'elle redescend de 1 à chaque pixel). En fait, on reconnaît bien dans ce résultat la fonction distance aux bords qui était attendue.

Nous avons alors testé l'algorithme sur différents domaines X , par exemple un disque et une ellipse :

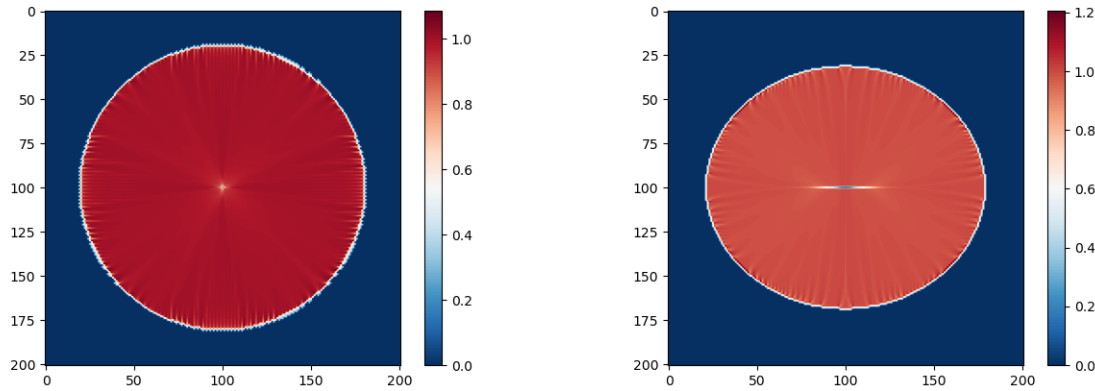


Domaines X de résolution de l'équation eikonale (en rouge).



Résultat de la résolution.

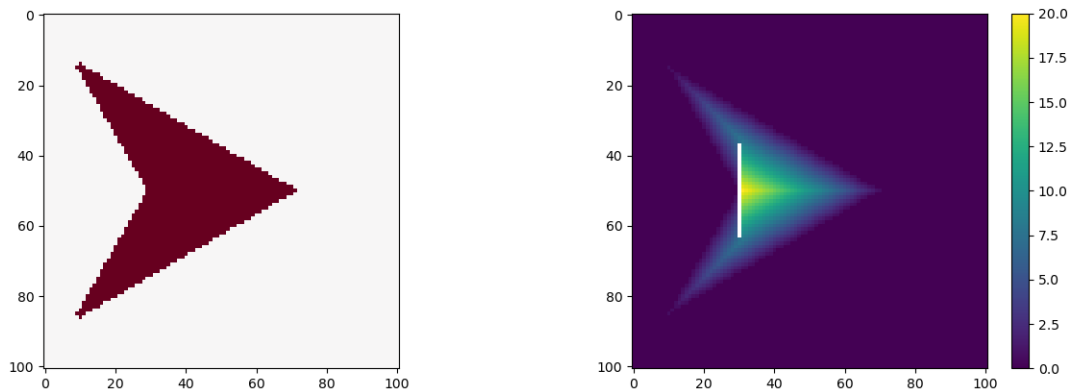
On vérifie que les reliefs obtenus sont bien solutions de l'équation eikonale en affichant la norme du gradient des reliefs :



Norme des gradients de chaque relief.

Les valeurs de la norme du gradient de u ne sont pas rigoureusement égales à 1 mais sont bien très proches dans l'intérieur du domaine $X \setminus \partial X$.

Ainsi, dans le cas de formes régulières, l'algorithme fournit bien les résultats voulus. Nous avons aussi testé sur des formes plus irrégulières, comme par exemple ce quadrilatère concave :



Norme des gradients de chaque relief.

Sur l'image de gauche, on précise le domaine X de résolution de l'équation eikonale, qui prend la forme d'un deltoïde. Á droite, la résolution obtenue avec le défaut algorithmique. Les deux pixels blancs aux extrémités de la bande blanche n'ont pas pu être calculés car l'équation quadratique associée à ces points possédait un discriminant négatif. Ils ont pris alors la valeur "nan" de numpy et cette valeur s'est propagée sur la bande blanche. Pour éviter ce problème, nous avons choisi de prendre la partie réelle des racines du polynôme du second degré lorsque ce cas

arrivait, en espérant que les parties imaginaires soient petites pour que cela ne soit pas la source de trop grosses erreurs. Cela était la plupart du temps le cas, mais pouvait néanmoins causer des soucis lors de la résolution. Nous revenons plus tard sur une amélioration de cette partie de la méthode.

6 Application de la FMM à l'équation SFS

Nous avons vu comment implémenter la FMM pour la résolution de l'équation eikonale simple, nous pouvons à présent la généraliser pour l'équation SFS à éclairage vertical. L'algorithme reste exactement le même dans sa structure mais puisque l'équation différentielle à résoudre est différentes, les équations quadratiques à résoudre à chaque itérations seront différentes.

6.1 Équation quadratique de SFS

Rappelons d'abord l'équation de Shape From Shading (1) :

$$I(x, y) = A \frac{-\alpha u_x - \beta u_y + \gamma}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} + B$$

On peut supposer $A = 1$ et $B = 0$ quitte à remplacer $I(x, y)$ par $\frac{I-B}{A}$ puisque A , B , et I sont toutes des données supposées connues. En passant la racine de l'autre côté, on se retrouve à devoir résoudre l'équation suivante :

$$I(x, y) \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} = -\alpha u_x - \beta u_y + \gamma$$

Il s'agit à présent de discrétiser cette équation afin de calculer les approximations des valeurs de la solution avec la FFM. On utilise le même schéma de discrétisation de la dérivée à l'ordre 1 que précédemment : en notant v_x (resp. v_y) la valeur minimale des voisins sur l'axe x (resp. y) du point z dont la valeur est à calculer on obtient $u_x \approx \epsilon_x \frac{u(z) - v_x}{h}$ (et l'approximation similaire en y) avec ϵ_x qui vaut 1 si le voisin choisi est à gauche de z et -1 s'il est à droite.

La valeur $u(z)$ à déterminer doit donc vérifier l'équation suivante :

$$I(x, y) \sqrt{1 + \left(\frac{u(z) - v_x}{h} \right)^2 + \left(\frac{u(z) - v_y}{h} \right)^2} = -\alpha \epsilon_x \frac{u(z) - v_x}{h} - \beta \epsilon_y \frac{u(z) - v_y}{h} + \gamma$$

Pour cela, on résout donc l'équation quadratique en λ suivante (en prenant la racine la plus grande comme pour l'équation eikonale précédente) :

$$I(x, y)^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda - v_x}{h} \right)^2 + \left(\frac{\lambda - v_y}{h} \right)^2 \right] - \left[-\alpha \epsilon_x \frac{\lambda - v_x}{h} - \beta \epsilon_y \frac{\lambda - v_y}{h} + \gamma \right]^2 = 0$$

En fonction du nombre de voisins disponibles, on peut comme précédemment décider d'éliminer des termes dans l'équation ou bien de résoudre l'équation plus tard lorsque plus de voisins seront disponibles.

6.2 Méthode de test

Pour tester nos codes, nous allons utilisé un relief connu et enregistré sous forme de tableau numpy (renseignant l'altitude des points de la surface) pour simuler une intensité reçu par un appareil photo. Avec ce deuxième tableau numpy, nous pouvons résoudre l'équation SFS avec la méthode de fast-marching décrite précédemment et que nous avons implémentée nous-même pour obtenir un nouveau relief. Nous voudrions que ce nouveau relief soit le plus proche possible du relief original, mais ce n'est pas exactement cela qui va assurer que le code fonctionne. En effet en cherchant une solution de l'équation SFS, le critère à vérifier est que l'intensité associé au nouveau relief obtenu correspond bien à celui qui été utilisé pour la résolution de SFS. Nous veillerons donc à comparer reliefs et intensités après chaque résolution de SFS. Puisque le but final du calcul de la solution de l'équation SFS est le calcul du volume de la forme étudiée, le calcul de l'erreur L^1 peut aussi être un indicateur pertinent.

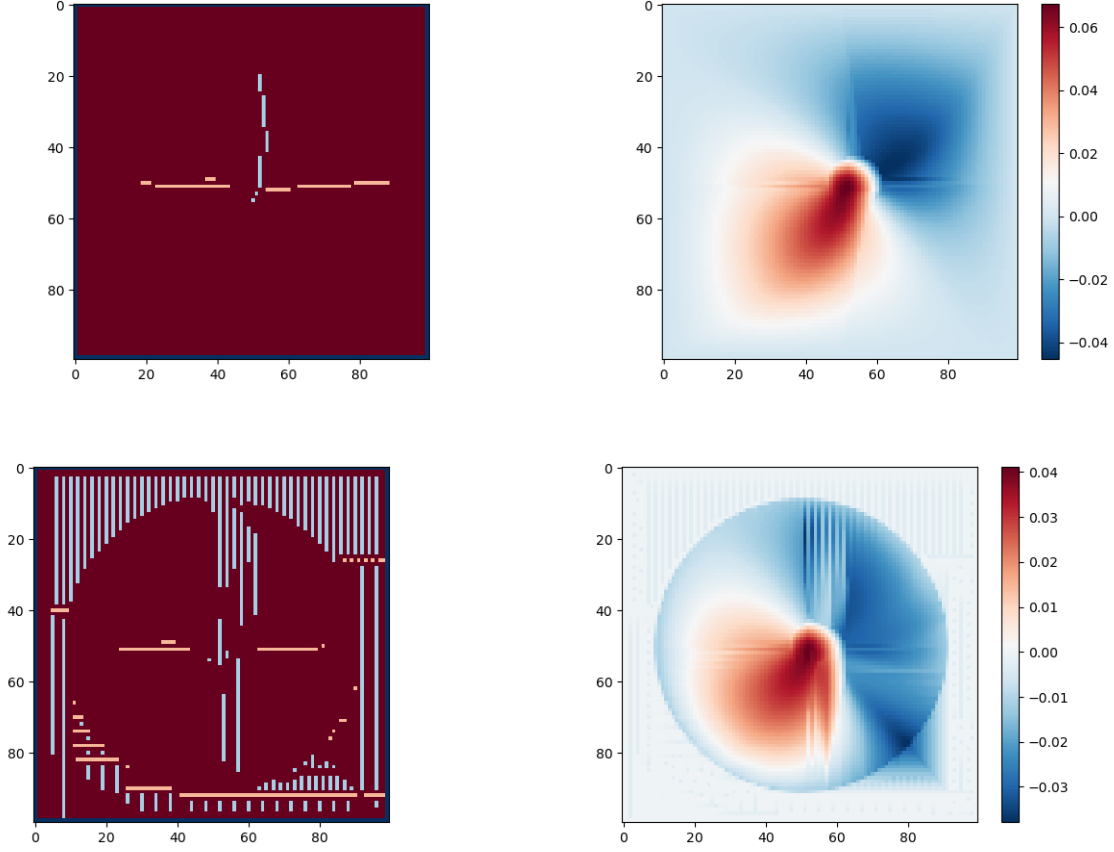
6.3 Résultat de l'implémentation pour un éclairage vertical

Nous avons d'abord testé notre code sur les reliefs que nous avons pu générer en résolvant les équations eikonales, et en premier lieu avec un éclairage proche de la vertical puisque le problème est alors proche de l'équation Eikonale. On obtient dans ce cas une reconstruction qui semble très correcte :

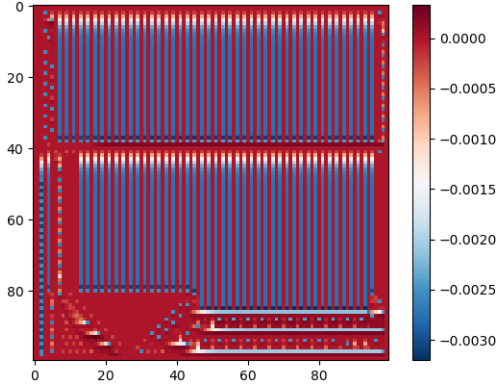
7 pense-bête/ A rajouter

7.1 problème de notre fast marching

On observe une corrélation entre les erreur de calculs des racines et le nombre de voisins utilisés.



Avec un relief nul, on n'obtient pas de fonction nulle après résolution de SFS :(problème pe réglé)



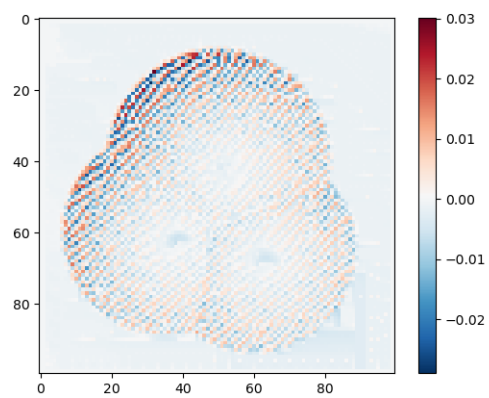
(écart de relief)

Explication :

Pour un relief nul, on a : $I = \gamma$. Lorsque les deux voisins sont nuls, la discrétisation de SFS donne l'équation suivante à résoudre : $(2\gamma^2 - (\alpha\epsilon_x + \beta\epsilon_y)^2)\lambda^2 + 2\gamma h(\alpha\epsilon_x + \beta\epsilon_y)\lambda = 0$

Les racines de ce polynôme sont 0 et $\frac{-2\gamma h(\alpha\epsilon_x + \beta\epsilon_y)}{2\gamma^2 - (\alpha\epsilon_x + \beta\epsilon_y)^2}$. Si la deuxième racine n'est pas négative, alors c'est elle que l'algorithme choisi et donc on obtient un relief non nul. On ne peut pas imposer cette condition car ϵ_x et ϵ_y peuvent prendre n'importe quel signe et donc le numérateur de la racine également.

Choisir la racine la plus grande n'est donc pas forcément une bonne idée (même si prendre la plus petite ne fonctionne pas du tout). On peut essayer de laisser un choix à l'algorithme de manière à optimiser la forme du relief. Par exemple en choisissant la racine qui minimise la variation du second ordre de la fonction. On obtient alors bien un relief nul. Mais cela donne de très mauvais résultats pour les autres formes :



On peut tout de même remarquer que la deuxième racine tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$!