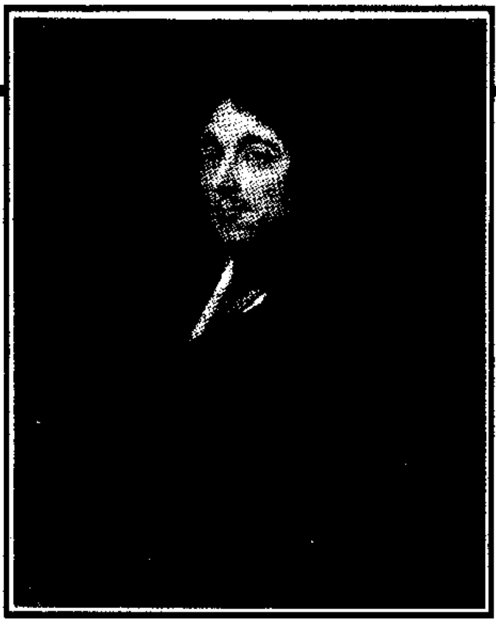
CAPÍTULO 1

Fundamentos del Álgebra



Matemático Pierre de Fermat, 1601–1665.
Fuente: Art Resource/Giraudon.

Con frecuencia se tiene la idea que las matemáticas es un tema que nunca cambia. ¡Es una idea muy equivocada! No son raros los descubrimientos radicales. Por ejemplo, en 1993 el doctor Andrew Wiles, matemático inglés en la Universidad de Princeton, descubrió una demostración del **último teorema de Fermat**, que había eludido a los mejores eruditos matemáticos durante más de 300 años.

El teorema de Fermat dice que si n es cualquier entero mayor que 2, no es posible hallar enteros positivos, x, y y z, tales que $x^n + y^n = z^n$. Esto es, no es posible que existan enteros positivos tales que

$$x^3 + y^3 = z^3, \text{ o bien, que } x^4 + y^4 = z^4, \text{ etcétera}$$

(Naturalmente, no hay problema si $n = 2$. ¿Por qué?) Fermat dijo haber demostrado este teorema, pero que no podía reproducir la demostración en los angostos márgenes de su libro.

El doctor Wiles, con técnicas que se desconocían en la época de Fermat, descubrió una demostración (que todavía está por confirmarse) que expuso en ¡200 páginas! ¿En realidad Fermat tendría una demostración más sencilla? ¿Habrá alguien que encuentre esa demostración? El reto permanece.

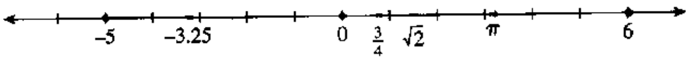
1.1 LOS NÚMEROS REALES Y SUS PROPIEDADES

Aunque las matemáticas crecen y cambian constantemente, sus fundamentos casi no varían y se necesitan como base de estudios posteriores. Por tanto, en este capítulo expondremos un repaso de gran parte de la esencia del álgebra, lo necesario para respaldar éste y otros cursos. Aconsejamos regresar a este capítulo si el lector se encuentra en áreas donde necesite ayuda.

A lo largo del curso trabajaremos con el **conjunto de los números reales**. A continuación presentamos algunos ejemplos de ellos:

$$-5 \qquad -3.25 \qquad 0 \qquad \frac{3}{4} \qquad \sqrt{2} \qquad \pi \qquad 6$$

Podemos localizar esos números en una **recta numérica**, en la que cada uno es **la coordenada** de algún punto de la recta.



¡ATIENDE LOS MÁRGENES! En todo el libro los emplearemos para notas especiales, mayores explicaciones y consejos.

A veces usaremos un **subconjunto**, o parte, de los números reales en una descripción. Por ejemplo, manejaremos subconjuntos de números como los siguientes:

El conjunto N de los **números naturales o de conteo:**	$\{1, 2, 3, \ldots\}$
El conjunto W de los **números enteros no negativos:**	$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
El conjunto Z de los **enteros:**	$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

*El conjunto de los números naturales se llama también **conjunto de enteros positivos,** y al conjunto de números enteros a menudo se le conoce como **conjunto de enteros no negativos.***

Nótese que todo entero se puede escribir en forma fraccionaria. Por ejemplo:

$$3 = \frac{3}{1} \qquad -2 = \frac{-2}{1} \qquad 0 = \frac{0}{1}$$

Sin embargo, hay fracciones que no se pueden escribir como enteros, como $\frac{2}{3}$ y $-\frac{3}{4}$. El conjunto de esas fracciones y enteros se llama conjunto de **números racionales.**

Para todo entero a, tenemos que $a = \frac{a}{1}$. Por consiguiente, todo entero es número racional.

> Un **número racional** es aquel que se puede escribir en la forma $\frac{a}{b}$, siendo a y b enteros y $b \neq 0$.

En los ejercicios 57 y 58 el lector aprenderá a convertir decimales repetitivos a la forma a/b.

Todo número racional, a/b, se puede convertir a su forma decimal dividiendo a entre b. La forma decimal será *finita*, como en $11/4 = 2.75$, o se *repetirá al infinito*. Con una calculadora podemos confirmar cada una de las siguientes expresiones, en los primeros tres ciclos de repetición:

$$\frac{2}{3} = .666\ldots \qquad \frac{4}{11} = .363636\ldots \qquad \frac{38}{111} = .342342342\ldots$$

El número irracional Pi (π) es la razón de la circunferencia de un círculo entre su diámetro (véase el ejercicio 62). Con una supercomputadora se ha calculado la forma decimal de π con más de 2 mil millones de cifras decimales.

Las formas decimales que no terminan ni se repiten se llaman **números irracionales**, como

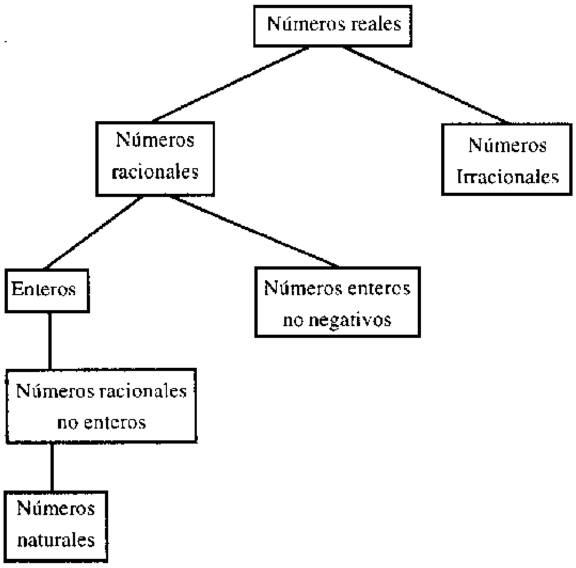
$$\sqrt{3} = 1.73205\ldots \qquad \pi = 3.14159\ldots$$

Los números irracionales *no* se pueden expresar como razón o cociente de dos enteros. Otros ejemplos de números irracionales son

$$\sqrt{5} \qquad \sqrt{12} \qquad \sqrt[3]{4} \qquad -\sqrt{17} \qquad \sqrt[4]{\frac{16}{9}} \qquad \frac{3\pi}{4}$$

El conjunto de los **números reales** consiste en el conjunto de números racionales e irracionales. Las relaciones entre los conjuntos de números que acabamos de describir se pueden ver mediante el diagrama siguiente:

Al leer desde abajo, cada conjunto de números es un subconjunto del conjunto de números que aparece arriba de él.



EJEMPLO 1 ¿A qué subconjuntos de los números reales pertenece cada uno de los siguientes números?

(a) 5 **(b)** $\frac{2}{3}$ **(c)** $\sqrt{7}$ **(d)** -14

Solución

(a) 5 es número natural, número entero no negativo, entero, número racional y número real.

(b) $\frac{2}{3}$ es número racional y número real.

(c) $\sqrt{7}$ es número irracional y número real.

(d) -14 es entero, número racional y número real. ■

EJEMPLO 2 Diga si lo siguiente es cierto o falso: Todo número entero no negativo es número natural.

Solución Para que sea cierta la afirmación, debe ser cierta en todos los casos posibles; de no ser así es falsa. Como 0 es número entero no negativo, pero *no* es número natural, la afirmación es falsa; se dice que 0 es un *contraejemplo* de la afirmación. Siempre que se pueda encontrar un solo caso en el que una afirmación no sea cierta, debemos llegar a la conclusión de que es falsa. ■

En este curso usaremos varias de las propiedades del conjunto de números reales; el lector ya se habrá encontrado antes con ellas. Presentamos un resumen de algunas de esas importantes propiedades.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Para todos los números reales a, b y c:	Suma	Multiplicación
Propiedad de cerradura	$a + b$ es número real	$a \cdot b$ es número real
Propiedad conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Propiedad asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Propiedad distributiva	$a(b + c) = ab + ac$	
Propiedad de identidad	$0 + a = a + 0 = a$ (**0 es el elemento identidad de la suma**)	$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ (**1 es el elemento identidad de la multiplicación**)
Propiedad del inverso	$a + (-a) = (-a) + a = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1,\ a \neq 0$
Propiedad de la multiplicación por cero		$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$
Propiedad del producto cero	Si $ab = 0$, entonces ($a = 0$ o $b = 0$), o bien (a la vez $a = 0$ y $b = 0$).	

PRUEBE SU COMPRENSIÓN

En este libro a veces nos detendremos, para que el lector pruebe su comprensión de las ideas que se le acaban de exponer. Si tiene usted dificultad con estas cortas series de ejercicios, debería volver a leer el material en la sección antes de proseguir. Las respuestas aparecen al final del capítulo.

Cite el nombre de la propiedad de los números reales que se ilustra

1. $3 + (\frac{1}{2} + 5) = (3 + \frac{1}{2}) + 5$

2. $3 + (\frac{1}{2} + 5) = (\frac{1}{2} + 5) + 3$

3. $6 + 4(2) = 4(2) + 6$

4. $8(-6 + \frac{2}{3}) = 8(-6) + 8(\frac{2}{3})$

5. $(17 \cdot 23)59 = (23 \cdot 17)59$

6. $(17 \cdot 23)59 = 17(23 \cdot 59)$

7. ¿Es cierto que $3 - 5 = 5 - 3$? ¿Existe la propiedad conmutativa para la resta?

8. Cite un *contraejemplo* para demostrar que el conjunto de números reales no es conmutativo respecto a la división. (Esto es, use un ejemplo específico para demostrar que $a \div b \neq b \div a$.)

9. ¿Es cierto que $(8 - 5) - 2 = 8 - (5 - 2)$? ¿Existe una propiedad asociativa para la resta?

10. Cite un contraejemplo para demostrar que el conjunto de números reales no es asociativa con respecto a la división.

11. Son números reales $3 + \sqrt{7}$ y $3\sqrt{7}$? Explique su respuesta.

(Respuestas: página 83)

Las propiedades anteriores se han descrito, principalmente, en términos de suma y multiplicación. Ahora podemos definir las operaciones básicas de resta y división en términos de las de suma y multiplicación, respectivamente.

Haga uso de lo siguiente para demostrar que la multiplicación se distribuye sobre la resta:
$a(b-c) = ab - ac$.
Comience con $a[b + (-c)]$.

Resta

La diferencia, $a - b$, de dos números reales, a y b, se define como

$a - b = a + (-b)$ Por ejemplo, $5 - 8 = 5 + (-8) = -3$

En forma alternativa decimos que

$$a - b = c \text{ si y sólo si } c + b = a$$

Así, $5 - 8 = -3$, porque $- 3 + (8) = 5$.

Cuando decimos "proposición *p si y sólo si* proposición *q*", significa que si alguna de las proposiciones es cierta, también lo será la otra. Así, la proposición $a - b = c$ *si y sólo si* $c + b = a$, quiere decir que:

Si $a - b = c$, entonces $c + b = a$ y también si $c + b = a$ entonces $a - b = c$.

División

El cociente $a \div b$ de dos números reales a y b se define como

$a \div b = a \cdot \dfrac{1}{b}$ $b \neq 0$ Por ejemplo, $8 \div 2 = 8 \times \frac{1}{2} = 4$

También podemos decir que

$$a \div b = c \text{ si y sólo si } c \times b = a \qquad b \neq 0$$

Entonces, $8 \div 2 = 4$, porque $4 \times 2 = 8$.

La afirmación $a \div b = c$ *si y sólo si* $c \times b = a$ quiere decir:

Si $a \div b = c$, entonces $c \times b = a$, y también si $c \times b = a$, entonces $a \div b = c$.

Lo siguiente es muy importante: NO ES POSIBLE LA DIVISIÓN ENTRE CERO. Lo veremos empleando una ***demostración indirecta,*** *esto es, suponiendo que es cierto lo contrario y llegando a un resultado falso o contradictorio.*

Al usar esta definición de la división podemos ver por qué no es posible dividir entre cero. Supongamos que es posible la división entre cero. Por ejemplo, *supongamos* que $2 \div 0 = x$, siendo x un número real. Entonces, por definición de la división, $0 \cdot x = 2$. Pero $0 \cdot x = 0$, y esto nos conduce a la proposición falsa de que $2 = 0$. Este argumento se puede repetir cuando se sustituye 2 por cualquier número distinto de cero. ¿Puede explicar el lector por qué $0 \div 0$ es *indeterminado*? (Véase el ejercicio 59.)

Vemos que el conjunto de números reales es cerrado con respecto a la resta, porque $a - b = a + (-b)$, y los números reales tienen propiedad de cerradura para la suma. Igualmente, a excepción de la división entre 0, el cociente de dos números reales cualesquiera es un número real. Sin embargo, hay algunos subconjuntos de los números reales que no tienen esas propiedades. Por ejemplo, el conjunto de números enteros no negativos *no es* cerrado con respecto a la resta, y el conjunto de los enteros *no es* cerrado con respecto a la división.

EJERCICIOS 1.1

Clasificar cada número como miembro de uno o más de los siguientes conjuntos: (a) los números naturales; (b) los números enteros no negativos; (c) los números enteros; (d) los números racionales; (e) los números irracionales; (f) los números reales.

1. -15 **2.** 72 **3.** $\sqrt{51}$ **4.** $-\frac{3}{4}$ **5.** $\frac{16}{2}$

6. 0.01 **7.** $0.$ **8.** 2π **9.** $\sqrt{12}$ **10.** $-\sqrt{2}$

Haga una lista o describa los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos.

11. El conjunto de los números naturales menores que 5.
12. El conjunto de los números enteros mayores que 100.
13. El conjunto de los números enteros entre 2 y 7.
14. El conjunto de los enteros mayores que -3.
15. El conjunto de los enteros negativos mayores que -3.
16. El conjunto de los enteros positivos menores que 5.
17. El conjunto de los enteros menores que 1.
18. El conjunto de los enteros que no son números enteros no negativos.
19. El conjunto de los números enteros no negativos que no son enteros.
20. El conjunto de los enteros que también son números racionales.

Conteste cierto o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Si es falsa, presente un contraejemplo específico para justificar la respuesta. (Recuerde que una afirmación cierta debe valer para todos los casos posibles; si no es así es falsa.)

21. El conjunto de los números enteros no negativos es cerrado con respecto a la multiplicación.
22. El conjunto de los números naturales es cerrado con respecto a la resta.
23. El conjunto de los enteros es cerrado con respecto a la división.
24. A excepción del 0, el conjunto de los números racionales es cerrado con respecto a la división.
25. El conjunto de los enteros es conmutativo con respecto a la resta.
26. El conjunto de los números racionales es asociativo con respecto a la multiplicación.
27. El conjunto de los números racionales contiene al inverso aditivo de cada uno de sus miembros.
28. Excepto para el cero, el conjunto de los números racionales contiene al inverso multiplicativo de cada uno de sus miembros.
29. El producto de dos números reales cualesquiera es un número real.
30. El cociente de dos números reales cualesquiera es un número real.

Dé el nombre de la propiedad que se ilustra en cada uno de los siguientes casos:

31. $\sqrt[3]{5} + 7$ es un número real **32.** $8 + \sqrt{7} = \sqrt{7} + 8$ **33.** $(-5) + 5 = 0$

34. $9 + (7 + 6) = (9 + 7) + 6$ **35.** $(5 \times 7) \times 8 = (7 \times 5) \times 8$ **36.** $(5 \times 7) \times 8 = 5 \times (7 \times 8)$

37. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ **38.** $(4 \times 5) + (4 \times 8) = 4(5 + 8)$ **39.** $-13 + 0 = -13$

40. $1 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ **41.** $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ **42.** $3 - 7 = 3 + (-7)$

43. $0\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) = 0$ **44.** $\sqrt{2} \times \pi$ es un número real **45.** $(3 + 9)(7) = (3)(7) + (9)(7)$

46. $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1$

Reemplace la variable n por un número real para hacer verdadera cada proposición.

47. $7 + n = 3 + 7$ **48.** $6 \times n = \sqrt{5} \times 6$ **49.** $(3 + 7) + n = 3 + (7 + 5)$

50. $6 \times (5 \times 4) = (6 \times n) \times 4$ **51.** $5(8 + n) = (5 \times 8) + (5 \times 7)$ **52.** $(3 \times 7) + (3 \times n) = 3(7 + 5)$

53. Si $5(x - 2) = 0$, entonces $x = 2$. Explique esta afirmación empleando una propiedad del cero que sea adecuada.

54. Cite un ejemplo donde se vea que la suma no se distribuye sobre la multiplicación. Ese ejemplo debe demostrar que $a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$.

55. Note que $2^4 = 4^2$. La operación de elevar un número a una potencia, ¿es conmutativa? Justifique su respuesta.

56. Explique por qué los números reales tienen la propiedad de cerradura para resta y división, excluyendo la división entre cero.

57. Todo decimal repetitivo se puede expresar como número racional de la forma a/b. Por ejemplo, veamos el decimal 0.727272 . . . y el siguiente proceso:

Sea $n = 0.727272\ldots$. Entonces $100n = 72.727272\ldots$

$$\begin{aligned} 100n &= 72.727272\ldots \\ \text{Restar:} \quad n &= 0.727272\ldots \\ \hline 99n &= 72 \\ \text{Despejar } n\text{:} \quad n &= \frac{72}{99} = \frac{8}{11} \end{aligned}$$

Use este método para expresar cada decimal como cociente de enteros y compruebe su respuesta dividiendo.

(a) 0.454545 . . . **(b)** 0.373737 . . . **(c)** 0.234234 . . .

(*Sugerencia*: En la parte (c), sea $n = 0.234234\ldots$; multiplique por 1000.)

58. Estudie el ejemplo siguiente para $n = 0.2737373\ldots$ y a continuación convierta cada decimal repetitivo en un cociente de enteros. Con frecuencia se coloca una barra arriba del conjunto de dígitos que se repiten. Es decir, podemos escribir 0.2737373 . . . como $0.2\overline{73}$.

Multiplicar n por 1000: $1000n = 273.\overline{73}$ El punto decimal queda después del primer ciclo.

Multiplicar n por 10: $10n = 2.\overline{73}$ El punto decimal queda antes del primer ciclo.

Restar: $990n = 271$

Dividir: $n = \dfrac{271}{990}$

(a) 0.4585858 . . . **(b)** 3.21444 . . . **(c)** $2.0\overline{146}$ **(d)** $0.00\overline{123}$

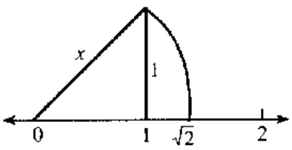
59. Explique por qué $\frac{0}{0}$ es indeterminado. (*Sugerencia:* Si $\frac{0}{0}$ tiene algún valor, debe ser valor único.) ¿Qué sucede si se trata de determinar el valor $0 \div 0$ en una calculadora?

60. A lo largo de la historia, los matemáticos han tratado de aproximar más el número π. En el siglo XIII, Fibonacci expresó π como igual a $\frac{864}{274}$. Después, en el siglo XVI, Tycho Brahe usó el valor $\frac{88}{\sqrt{785}}$ para π. Utilice una calculadora para determinar cuál de ellos se aproximó más.

61. Comenzando con cualquier fracción $\dfrac{a}{b}$ forme una nueva fracción $\dfrac{(a+b)+b}{a+b}$. Continúe de este modo hasta haber escrito, cuando menos, 6 fracciones con esta regla. Por ejemplo, comenzando con $\frac{2}{3}$, la secuencia de fracciones que se formará es $\frac{2}{3}, \frac{8}{5}, \frac{18}{13}, \frac{44}{31}, \frac{106}{75}, \frac{256}{181}$. Con una calculadora pase cada fracción a decimal, correcto a tres cifras decimales. Repita lo anterior cuando menos para otras 3 fracciones que usted escoja y comente los resultados. ¿Qué espera el lector que suceda si se continúa formando más fracciones en esta forma?

62. Tome un objeto circular, como una lata, y suponga que su diámetro es 1 unidad. Úsela como unidad de una recta numérica. Marque un punto en el objeto circular, y colóquelo de tal modo que coincida con el cero de la recta numérica. Ruede el círculo hacia la derecha y marque el lugar donde el punto coincida con la recta numérica, después de un giro completo. ¿Qué número corresponde a esta posición? ¿Por qué? Estime el número de veces que el diámetro cabe en el círculo desenrollado y compare sus resultados con los de sus compañeros de clase.

63. En la recta numérica, se puede localizar un punto con la coordenada irracional $\sqrt{2}$. En el punto cuya coordenada es 1 trace un segmento perpendicular a la recta numérica; ese segmento debe tener longitud de 1 unidad. Una el extremo de este segmento con el punto marcado con el 0. Es la hipotenusa de un triángulo rectángulo y, según el teorema de Pitágoras, es igual a la raíz cuadrada de 2, que se escribe $\sqrt{2}$. Con un compás se puede trasladar esa longitud a la recta numérica, y así se localiza un punto cuya coordenada es $\sqrt{2}$. Con ello se demuestra que los números irracionales corresponden a puntos de la recta numérica.



$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2}$$

Indique cómo localizar un punto sobre la recta numérica cuya coordenada sea $\sqrt{5}$.

Redacción Desde el punto de vista matemático se acostumbra pasar a los enteros después de haber descrito los números naturales, para después desarrollar los números racionales. Sin embargo, históricamente, se desarrollaron los números racionales positivos antes que los enteros negativos.

1. Describa algunos casos cotidianos en los que los enteros negativos no se usen en general, pero se podrían introducir fácilmente.
2. Describa la necesidad histórica del desarrollo de los números racionales positivos.

1.2 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES Y A LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Una proposición como $3(x + 3) = x + 5$ es un ejemplo de una **ecuación lineal**, porque la variable x sólo aparece elevada a la primera potencia. También se dice que es una **ecuación condicional**; es cierta para ciertas sustituciones de la variable x, pero no para otras. Por ejemplo, es verdadera cuando $x = -2$, pero es falsa para $x = 1$. Por otro lado, una ecuación como $3(x + 2) = 3x + 6$ se llama **identidad** porque es verdadera o válida para *todos* los números reales x.

Resolver una ecuación quiere decir determinar los números reales x para los cuales la ecuación dada es verdadera. A lo que se determina se le llama **soluciones** o **raíces** de la ecuación dada. Resolvamos la ecuación $3(x + 3) = x + 5$, para indicar los pasos importantes. Véase que en este caso la estrategia es reunir todos los términos donde aparezca la variable, de un lado de la ecuación, y las constantes del otro.

El primer paso es eliminar los paréntesis aplicando la propiedad distributiva.

$$3(x+3) = x+5$$

$$3x+9 = x+5$$

$$3x+9+(-9) = x+5+(-9) \qquad \text{Sumar } -9 \text{ a cada lado de la ecuación}$$

$$3x = x-4$$

$$3x+(-x) = x-4+(-x) \qquad \text{Sumar } -x \text{ a cada lado de la ecuación}$$

$$2x = -4$$

$$\tfrac{1}{2}(2x) = \tfrac{1}{2}(-4) \qquad \text{Multiplicar cada lado por } \tfrac{1}{2}$$

$$x = -2$$

Nota: No se debe decir que −2 es una solución hasta que no se haya comprobado.

Demostraremos que $x = -2$ es la solución comprobándola en la ecuación original. ¿Es cierto que $3[(-2)+3] = (-2)+5$?

En la solución anterior hemos empleado las dos *propiedades básicas de la igualdad.*

La importancia de estas dos propiedades reside en que producen ecuaciones equivalentes, ecuaciones que tienen las mismas raíces. Así, la propiedad de la suma convierte a la ecuación $2x - 3 = 7$ en la forma equivalente $2x = 10$.

PROPIEDAD DE IGUALDAD EN LA SUMA

Para todos los números reales, a, b y c, si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

PROPIEDAD DE IGUALDAD EN LA MULTIPLICACIÓN

Para todos los números reales, a, b y c, si $a = b$, entonces $ac = bc$.

PRUEBE SU COMPRENSIÓN

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones lineales x.

1. $x + 3 = 9$	**2.** $x - 5 = 12$	**3.** $x - 3 = -7$
4. $2x + 5 = x + 11$	**5.** $3x - 7 = 2x + 6$	**6.** $3(x - 1) = 2x + 7$
7. $3x + 2 = 5$	**8.** $5x - 3 = 3x + 1$	**9.** $x + 3 = 13 - x$
10. $2(x + 2) = x - 5$	**11.** $2x - 7 = 5x + 2$	**12.** $4(x + 2) = 3(x - 1)$

(Respuestas: página 83)

Se pueden emplear las propiedades de igualdad para resolver ecuaciones con más de una variable. El ejemplo que sigue muestra ese empleo para deducir una *fórmula* para una de las variables en términos de las demás.

EJEMPLO 1 La fórmula que relaciona los grados Fahrenheit y los grados Celsius es $\dfrac{5F-160}{9} = C$. Despeje á F en términos de C.

Solución Trate de explicar cada uno de los siguientes pasos.

Celsius	Fahrenheit	
100	212	el agua hierve
⋮	⋮	
37	98.6	temperatura corporal normal
⋮	⋮	
0	32	el agua se congela

$$\frac{5F-160}{9}=C$$

$$5F-160=9C$$

$$5F=9C+160$$

$$F=\left(\tfrac{1}{5}\right)(9C+160)$$

$$F=\tfrac{9}{5}C+32$$ ■

Exploremos ahora la solución de problemas que se expresan en palabras. Lo que haremos es traducir el enunciado de un problema en español en el leguaje matemático adecuado, y desarrollar una ecuación que podamos resolver.

En el problema siguiente, sugerimos reglas importantes para desarrollar la destreza de razonamiento crítico. Estudie con cuidado la solución, y también las soluciones de los ejemplos que siguen.

Con frecuencia, cuando se carece de una estrategia para resolver problemas en palabras muchos estudiantes tienen dificultades. Para resolver bien los problemas se necesita algo de paciencia y mucha práctica.

Problema: La longitud de un rectángulo es 1 cm menos que el doble de su ancho. El perímetro es 28 centímetros. Determine las dimensiones del rectángulo.

1. *Vuelva a leer el problema y trate de imaginar la situación que se describe. Tome nota de toda la información que se da en el problema.*

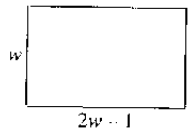
   La longitud es uno menos que el doble del ancho.

   El perímetro es 28.

2. *Determine qué es lo que se pide contestar. Introduzca una variable adecuada, que normalmente representa la cantidad que se debe determinar. Cuando sea apropiado, haga una figura.*

   Representando el ancho con w.

   Entonces, $2w - 1$ representa la longitud.



3. *Con la información disponible, forme una ecuación donde intervenga la variable.* El perímetro es la distancia que se recorre alrededor del rectángulo. Esto proporciona la información necesaria para escribir una ecuación.

$$w+(2w-1)+w+(2w-1)=28$$

4. *Resuelva la ecuación.*

$$w+(2w-1)+w+(2w-1)=28$$
$$6w-2=28$$
$$6w=30$$
$$w=5$$

5. *Regrese al problema original para ver si la respuesta obtenida tiene sentido. ¿Parece ser una solución razonable? ¿Quedó contestado lo que pregunta el problema?*
El problema original preguntaba las dos dimensiones. Si el ancho, w, es 5 cm, entonces la longitud, $2w - 1$, debe ser 9 cm.
6. *Compruebe la solución por sustitución directa de la respuesta en el enunciado original del problema.*
Como comprobación, vemos que la longitud del rectángulo, 9 cm, es 1 cm menos que el doble del ancho, 5 cm, tal como lo dice el problema. También, el perímetro es 28 cm.
7. *Por último, describa la solución en términos de las unidades correctas.*
Las dimensiones son 5 cm por 9 cm.

Aunque algunos de estos problemas pueden no parecer muy prácticos al lector, le ayudarán a desarrollar la destreza básica para resolver problemas, que le será útil después, cuando se encuentre con aplicaciones más realistas.

EJEMPLO 2 Un automóvil sale de cierta población a mediodía, y se dirige hacia el este a 40 millas por hora. A la 1:00 P.M. otro automóvil sale de la población, viaja en la misma dirección a una velocidad de 50 millas por hora. ¿Cuántas horas tarda el segundo vehículo en rebasar al primero?

REGLAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Lea el problema. Haga una lista de la información disponible.
↓
¿Qué es lo que se debe determinar? Introduzca una variable y defina lo que representa. Trace una figura o use una tabla si es necesario.
↓
Formule una ecuación.
↓
Resuelva la ecuación.
↓
¿Parece razonable la respuesta? ¿Ha contestado usted la pregunta que aparece en el problema?
↓
Compruebe su respuesta con la ecuación en el problema original.
↓
Describa la solución del problema.

Solución Con frecuencia, los problemas de movimientos de este tipo parecen difíciles a los alumnos de álgebra, cosa que no debería ser. La relación básica que debemos recordar es que la *velocidad multiplicada por el tiempo es igual a la distancia* ($r \times t = d$). Por ejemplo, un automóvil viajando a una velocidad de 60 millas por hora, durante 5 horas, recorre 60×5, o 300 millas.

Necesitamos ahora volver a leer el problema y ver qué parte de la información que ahí aparece puede ayudar a formar una ecuación. Los dos automóviles viajan a distintas velocidades, y durante distintos tiempos, pero ambos viajarán la misma distancia desde el punto de partida hasta que se encuentran. La pista es la siguiente: *Representar la distancia que viaja cada uno e igualar estas cantidades.*

Usaremos la x para representar la cantidad de horas que tardará el segundo automóvil en rebasar al primero. Entonces éste, que ha comenzado una hora antes, viaja $x + 1$ horas hasta el punto de encuentro. Es útil resumir esta información en forma de tabla.

	Velocidad	Tiempo	Distancia
Primer automóvil	40	$x + 1$	$40(x + 1)$
Segundo automóvil	50	x	$50x$

Al igualar las distancias llegamos a una ecuación de la que se puede despejar x:

$$50x = 40(x + 1)$$
$$50x = 40x + 40$$
$$10x = 40$$
$$x = 4$$

El segundo automóvil rebasa al primero en 4 horas. Esta respuesta, ¿parece razonable? Comprobemos el resultado. El primer automóvil viaja 5 horas a 40 millas por hora, lo

Reglas como las anteriores son útiles para organizar el trabajo, lo cual, a su vez, ayudará al lector a pensar con más sentido crítico y, finalmente, conducirá a mayores éxitos en la solución de problemas.

que hace un total de 200 millas. El segundo, viaja 4 horas a 50 millas por hora, y se obtiene el mismo total de 200 millas.

Respuesta El segundo vehículo tarda 4 horas en rebasar al primero. ■

EJEMPLO 3 La señora López invirtió 5000 dólares en un certificado de depósito que paga una tasa de interés anual del 4%. Su asesor financiero invirtió otros 3000 dólares en su representación, cantidad que también devenga una tasa anual. Si el interés total ganado en el año fue \$395, ¿cuál fue la tasa anual de su segundo depósito?

Solución Necesitamos emplear la fórmula $I = Prt$, en la cual I es el interés que gana un principal de P dólares invertidos con la tasa r (en forma decimal) durante t años. En este caso, $t = 1$. Sea r la tasa que gana la inversión de \$3000.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Interés al } 4\% & + & \text{Interés al } r\% & = & \text{Interés total} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(5000)(0.04)(1) & + & (3000)(r)(1) & = & 395 \\
200 & + & 3000r & = & 395 \\
 & & 3000r & = & 195 \\
 & & r & = & \dfrac{195}{3000} = 0.065
\end{array}$$

Respuesta La tasa para su inversión de 3000 dólares fue 6.5%. ■

Siempre haga la comprobación regresando al enunciado original del problema. Si sólo se concreta a comprobar en la ecuación que dedujo, y esa ecuación es incorrecta, no detectará el error.

EJEMPLO 4 Marcela tiene un salario base de \$250 semanales. Además, recibe una comisión del 12% de lo que vende. La semana anterior sus ingresos totales fueron \$520. ¿Cuáles fueron sus ventas totales durante esa semana?

Solución Sea x sus ventas totales de la semana. Entonces, podemos emplear la siguiente relación:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Salario} & + & \text{Comisión} & = & \text{Ingresos totales} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
250 & + & 0.12x & = & 520 \\
 & & 0.12x & = & 270 \\
 & & x & = & \dfrac{270}{0.12} \\
 & & x & = & 2250
\end{array}$$

(Recuerde: 12 % = 0.12.)

Respuesta Las ventas totales de Marcela, durante la semana fueron \$2250.

Comprobación: Según el enunciado del problema, se debe demostrar que \$250 más el 12% de \$2250 es igual a \$520. Vemos que 250 + 0.12(2250) = 520. ■

¡Ahora va usted! Con las directrices sugeridas en esta sección trate de resolver todos los problemas que pueda. No se desanime si encuentra dificultades; tenga la seguridad de que la mayoría de los estudiantes de matemáticas encuentran difíciles los problemas con palabras. Con el tiempo y la práctica, casi seguramente, desarrollará usted su destreza de razonamiento crítico.

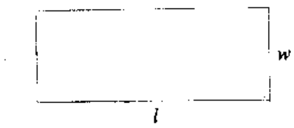
EJERCICIOS 1.2

Despeje a x y compruebe cada resultado.

1. $3x - 2 = 10$
2. $5x + 1 = 21$
3. $-2x + 1 = 9$
4. $-3x - 2 = 10$
5. $-3x - 5 = 7$
6. $3x + 2 = -13$
7. $2x - 1 = -17$
8. $-2x + 3 = -12$
9. $2(x + 1) = 11$
10. $3(x - 2) = 15$
11. $3x + 7 = 2x - 2$
12. $2.5x - 8 = x + 3$
13. $\frac{1}{2}x + 7 = 2x - 3$
14. $\frac{5}{2}x - 5 = 3x + 7$
15. $\frac{4}{3}x - 7 = \frac{1}{3}x + 8$
16. $5x - 1 = 5x + 1$
17. $\frac{3}{5}(x - 5) = x + 1$
18. $5(x + 4) = \frac{5}{2}x - 5$
19. $\frac{7}{2}x + 5 + \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}x - 6$
20. $2(x + 3) - x = 2x + 8$
21. $-3(x + 2) + 1 = x - 25$
22. $\frac{4}{3}(x + 8) = \frac{3}{4}(2x + 12)$
23. $1 - 12x = 7(1 - 2x)$
24. $2(3x - 7) - 4x = -2$
25. $x + 2\left(\frac{1}{6}x + 2\right) = \frac{6}{5}x + 16$

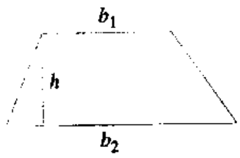
Despeje la variable indicada en cada fórmula.

26. Perímetro de un rectángulo:



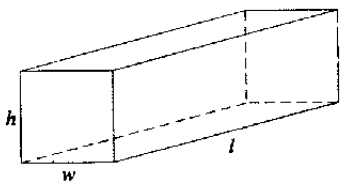
$P = 2\ell + 2w$
Despeje ℓ.

27. Área de un trapecio:



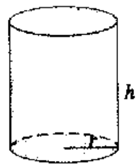
$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$
Despeje h.

28. Área superficial de una caja rectangular:



$A = 2\ell w + 2\ell h + 2wh$
Despeje h.

29. Volumen de un cilindro:



$V = \pi r^2 h$
Despeje h.

30. La fórmula que relaciona los grados Fahrenheit con los grados Celsius es $F = \frac{9}{5}C + 32$. Despeje a C en términos de F. Calcule C si $F = 77°$.

31. La fórmula $I = Prt$ expresa el interés I que ganan P dólares invertidos con la tasa r (en forma decimal) anual, durante t años. Despeje a P en términos de las demás variables. Calcule P cuando $I = \$220$, $r = 5.5\%$ y $t = 2$.

32. Despeje b de $c = \dfrac{2ab}{a+b}$

33. Despeje R de $V = \dfrac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$

34. Determine un número tal que dos tercios de él, incrementados en 1 sea igual a 13.

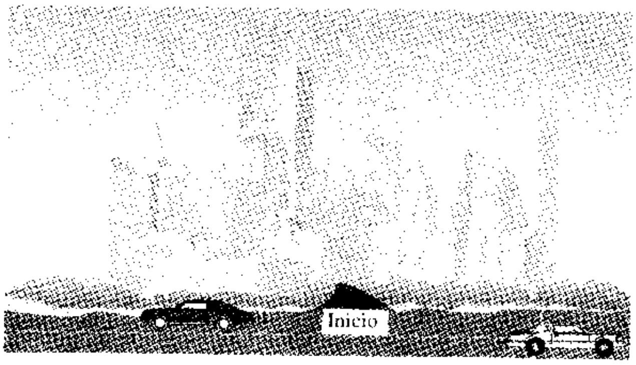
35. Determine las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 56 pulgadas, si la longitud es 4 pulgadas mayor que el ancho.

36. Cada uno de los dos lados iguales de un triángulo isósceles tiene 3 pulgadas más que la base. El perímetro tiene 21 pulgadas. Calcule la longitud de cada lado.

37. Carlos gastó \$6.15 en estampillas de 10, 25 y 30 centavos. En número de estampillas, compró la mitad de 25 centavos que las de 10 centavos, y tres veces más de 30 centavos que de 10 centavos ¿Cuántas estampillas compró de cada valor? (*Sugerencia*: Siempre que el lector maneje cierta cantidad de determinada estampilla, el *valor total* es la cantidad de estampillas multiplicada por el valor de esa estampilla.)

38. María tiene \$169 en billetes y monedas de uno, cinco y diez. Tiene el doble de monedas de uno que billetes de cinco, y cinco billetes más de diez que de cinco. ¿Cuántas monedas y billetes de cada denominación tiene? (Véase la sugerencia del ejercicio 37.)

39. Dos automóviles salen de una población al mismo tiempo y viajan en direcciones opuestas. Uno viaja a 45 millas por hora y el otro a 55 millas por hora. ¿En cuánto tiempo estarán alejados 350 millas?



40. Roberto da una caminata a un paso de 3 millas por hora. Dos horas después, Rogelio trata de alcanzarlo trotando a 7 millas por hora. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar donde está Roberto?

41. Demuestre que las magnitudes de los ángulos de un triángulo no se pueden representar por enteros impares consecutivos. (*Sugerencia:* La suma de los ángulos es 180.)

42. El ancho de una pintura es 4 pulgadas menos que su longitud. El marco que rodea la pintura tiene 2 pulgadas de ancho y su área es de 240 pulgadas cuadradas. ¿Cuáles son las dimensiones de la pintura? (*Sugerencia:* El área total menos el área de la pintura es igual al área del marco.)

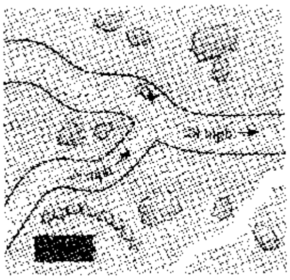
43. La longitud de un rectángulo es 1 pulgada menos que tres veces su ancho. Si se suman 6 pulgadas a la longitud y 5 al ancho, la longitud nueva es el doble del ancho nuevo. Calcule las dimensiones del rectángulo original.

44. El dígito de las unidades de un número de dos cifras es tres más que el dígito de las decenas. El número es igual a cuatro veces la suma de los dígitos. Calcule el número. (*Sugerencia:* Se puede representar un número de dos dígitos como $10t + u$.)

45. Determine tres enteros impares consecutivos tales que su suma sea 237. (*Sugerencia:* Los tres enteros se pueden representar como x, $x + 2$ y $x + 4$.)

46. La longitud de un rectángulo es 1 pulgada menos que dos veces su ancho. Si sumamos 11 pulgadas a la longitud y 5 al ancho, la nueva longitud será el doble del nuevo ancho. ¿Qué puede usted decir de los datos para este problema?

47. Gabi viaja 27.5 millas en automóvil para llegar a su trabajo. La primera parte de su trayecto es por una carretera vecinal por la que avanza a 35 millas por hora, y la segunda parte es por una autopista donde su velocidad media es 48 millas por hora. Si el tiempo durante el cual viaja en la autopista es 5 veces el tiempo que tarda en la carretera vecinal, ¿cuál es el tiempo total de su viaje?



48. La tarifa de un taxi es 80 centavos de dólar por el primer $\frac{1}{6}$ de milla y 20 centavos por cada $\frac{1}{6}$ de milla adicional. Si un pasajero paga \$6.00, ¿qué distancia recorrió el taxi?

49. Un asesor financiero invirtió dinero al 9% de interés anual. Invirtió \$2700 más que la primera cantidad, pero al 12% anual. El interés anual total de ambas inversiones es \$1794. ¿Cuánto invirtió a cada tasa? (*Nota:* Use la fórmula $I = Prt$, siendo I el interés ganado sobre un principal de P dólares invertidos a la tasa r (en forma decimal) anual. En este caso el tiempo, t, es un año.)

50. Luis gana un sueldo mensual de \$2250 más una comisión del 4% sobre sus ventas totales en el mes. El mes pasado, sus ingresos totales fueron \$2512. ¿Cuáles fueron sus ventas totales?

51. Ana compró un auto usado en \$9010, incluyendo ya el impuesto del 6% sobre el costo. ¿Cuál fue el costo del automóvil, sin el impuesto?

52. El costo total de dos certificados de depósito es \$12,800. Los intereses anuales de esos certificados son 3.5 y 4%. El interés anual sobre el certificado al 4% es \$92 más que el correspondiente del certificado al 3.5%. ¿Cuál fue el costo de cada certificado?

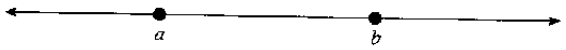
Reto Dos botes comienzan a moverse al mismo tiempo, pero desde las orillas opuestas de un río, que atraviesan una y otra vez. La primera vez que se crucen están a 700 pies de una de las orillas. Después de haber completado la travesía y regresado, se cruzan de nuevo a una distancia de 400 pies de la otra orilla. ¿Qué ancho tiene el río? Suponga que cada bote viaja a velocidad constante, sin perder tiempo en las vueltas.

Redacción A continuación vemos las instrucciones de un truco matemático. Primero, trate de resolverlo. A continuación, use representaciones algebraicas de cada frase (o instrucción) y explique por qué funciona este truco. Forme usted mismo un rompecabezas semejante.

Piense un número.
Sume 2.
Multiplique el resultado por 3.
Sume 9.
Multiplique lo obtenido por 2.
Divida el resultado entre 6.
Reste el número con el que empezó.
El resultado es 5.

1.3 ENUNCIADOS DE DESIGUALDAD Y SUS GRÁFICAS

Al continuar el estudio de las matemáticas, el lector encontrará que se da mucha atención a las *desigualdades*. Comenzaremos nuestro desarrollo de este tema con los números reales en la recta numérica. En la siguiente figura se dice que *a es menor que b*, porque a queda a la izquierda de b. Con símbolos, esto se escribe $a < b$.



También, vemos que b queda a la derecha de a. Esto es, $b > a$, lo cual se lee "*b es mayor que a*". Se dice que dos desigualdades, una con el símbolo < y la otra con el símbolo >, tienen *sentido contrario*.

He aquí dos ejemplos del empleo de estos *símbolos de desigualdad*.

Nótese que el símbolo de desigualdad "apunta" hacia el menor de los dos números, y "se abre" hacia el mayor.

$3 < 7$ *3 es menor que 7*

$5 > -2$ *5 es mayor que –2*

Como los números positivos quedan a la derecha del origen de una recta numérica, $a > 0$ quiere decir que a es positivo. Igualmente, $a < 0$ significa que a es negativo.

Algebraicamente se define $a < b$ como sigue:

> **DEFINICIÓN DE $a < b$**
>
> Para dos números reales cualesquiera, a y b, $a < b$ (o $b > a$) si y sólo si $b - a$ es un número positivo; esto es, si y sólo si $b - a > 0$.

Por ejemplo, $3 < 7$ porque $7 - 3 = 4$, que es número positivo; esto es, $7 - 3 > 0$. También, como $5 - (-2) > 0$, entonces $5 > -2$.

Una propiedad fundamental de las desigualdades es que para dos números reales cualesquiera, a y b, a es menor que b, a es igual a b, o a es mayor que b. Expresado en símbolos, esta propiedad es la siguiente:

> **PROPIEDAD DE TRICOTOMÍA**
>
> Para dos números reales cualesquiera, a y b, es válido exactamente uno de los siguientes casos:
>
> $a < b \qquad a = b \qquad a > b$

El mismo número se puede sumar a, o restar de cada lado de una desigualdad, y el *sentido* de la nueva desigualdad no cambiará. Por ejemplo:

Nota: $5 < 10$ *y* $8 < 13$ *tienen el mismo sentido.*

Como $5 < 10$, entonces $5 + 3 < 10 + 3$; esto es, $8 < 13$.

Como $9 > 5$, entonces $9 - 2 > 5 - 2$; esto es, $7 > 3$.

Lo anterior da lugar a la siguiente e importante propiedad de las desigualdades:

PROPIEDAD DE ORDEN DE LA SUMA

Para todos los números reales a, b y c:

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$

Vemos que esta propiedad se puede usar para resolver la siguiente desigualdad. Comenzaremos simplificando el lado derecho.

Como en las ecuaciones, la estrategia es aislar a la variable de un lado de la desigualdad, y las constantes del otro.

$$-4x - (3 - 5x) > 8$$
$$-4x - 3 + 5x > 8$$
$$x - 3 > 8$$
$$x - 3 + 3 > 8 + 3 \qquad \text{propiedad de orden de la suma}$$
$$x > 11$$

A menos que digamos lo contrario, siempre supondremos que estamos empleando el conjunto de los números reales. Por consiguiente, en este caso, el *conjunto de soluciones* consiste en todos los números reales que son mayores que 11. En lugar de emplear una descripción verbal, podemos emplear llaves y escribir este conjunto de soluciones en la **notación de conjuntos por construcción** del siguiente modo

$$\{x \mid x > 11\}$$

Esto se lee "el conjunto de las x tales que x es mayor que 11".

Los símbolos adicionales de desigualdad son $\leq$ y $\geq$ se emplean con mucha frecuencia:

La propiedad de orden de la suma también se aplica a desigualdades donde se usan los símbolos $\leq$ y $\geq$. Por ejemplo, si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.

$a \leq b$ significa que *a es menor que, o igual a b*; esto es, $a < b$ o $a = b$.

$a \geq b$ significa que *a es mayor que, o igual a b*; esto es, $a > b$ o $a = b$.

EJEMPLO 1 Determine el conjunto de soluciones de $3x + 7 \leq 2x - 1$.

Solución Aplicamos dos veces la propiedad de orden de la suma.

$$3x + 7 \leq 2x - 1$$
$$3x + 7 + (-7) \leq 2x - 1 + (-7)$$
$$3x \leq 2x - 8$$
$$3x + (-2x) \leq 2x - 8 + (-2x)$$
$$x \leq -8$$

El conjunto de soluciones consiste de todos los números reales que son menores que, o iguales a −8, esto es, $\{x \mid x \leq -8\}$.

Cuando se aplica la propiedad de orden de la suma, se producen **desigualdades equivalentes**. Esto es, la nueva desigualdad tiene el mismo conjunto de soluciones que la original. Veamos lo que sucede cuando multiplicamos (o dividimos) cada lado de una desigualdad por (o entre) el mismo número. He aquí algunos ejemplos:

$$\left.\begin{array}{r} 8 < 12 \rightarrow 2(8) < 2(12);\ \text{esto es, } 16 < 24 \\ 20 > -15 \rightarrow \frac{1}{5}(20) > \frac{1}{5}(-15);\ \text{esto es, } 4 > -3 \end{array}\right\} \text{Se conserva el sentido.}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5 < 6 \rightarrow -2(5) > -2(6);\ \text{esto es, } -10 > -12 \\ 6 > -4 \rightarrow -\frac{1}{2}(6) < -\frac{1}{2}(-4);\ \text{esto es, } -3 < 2 \end{array}\right\} \text{El sentido se invierte.}$$

Éstos fueron ejemplos de la siguiente propiedad:

Nota: Propiedades semejantes rigen para las desigualdades cuando $a > b$. También, nótese que cuando $c = 0$, entonces $ac = bc$; esto es, ambos lados son iguales a 0.

PROPIEDAD DE ORDEN DE LA MULTIPLICACIÓN

Para todos los números reales a, b y c:

Si $a < b$ y c es positivo, entonces $ac < bc$.
Si $a < b$ y c es negativo, entonces $ac > bc$.

EJEMPLO 2 Resuelva la desigualdad $5(3 - 2x) \geq 10$

Solución Multipliquemos por $\frac{1}{5}$ cada lado (o dividamos entre 5).

$$\frac{1}{5} \cdot 5(3 - 2x) \geq \frac{1}{5}(10) \qquad \text{propiedad de orden de la multiplicación}$$
$$3 - 2x \geq 2$$

Sumamos –3 a cada lado.

$$3 - 2x + (-3) \geq 2 + (-3) \qquad \text{propiedad de orden de la suma}$$
$$-2x \geq -1$$

Multiplicar por $-\frac{1}{2}$ (o dividir entre –2).

$$-\frac{1}{2}(-2x) \leq -\frac{1}{2}(-1) \qquad \text{propiedad de orden en la multiplicación}$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

El conjunto de soluciones es $\{x \mid x \leq \frac{1}{2}\}$. ■

A veces se puede resolver una desigualdad conociendo las propiedades de los números. Así, en el ejemplo que sigue, se llega a la solución porque sabemos que la fracción dada será negativa si el denominador y el numerador tienen signos diferentes.

EJEMPLO 3 Resuelva $\frac{2}{x+4} < 0$

Solución Como el numerador de la fracción es positivo, esa fracción será menor que cero si el denominador es negativo. Entonces

$$x + 4 < 0$$

$$x < -4$$

El conjunto de soluciones es $\{x \mid x < -4\}$.

PRUEBE SU COMPRENSIÓN

Determine el conjunto de soluciones.

1. $x + 3 < 12$ **2.** $x - 5 < 13$ **3.** $x - 1 > 8$

4. $x + 7 > 2$ **5.** $x + (-5) \leq 9$ **6.** $x + (-3) \geq -5$

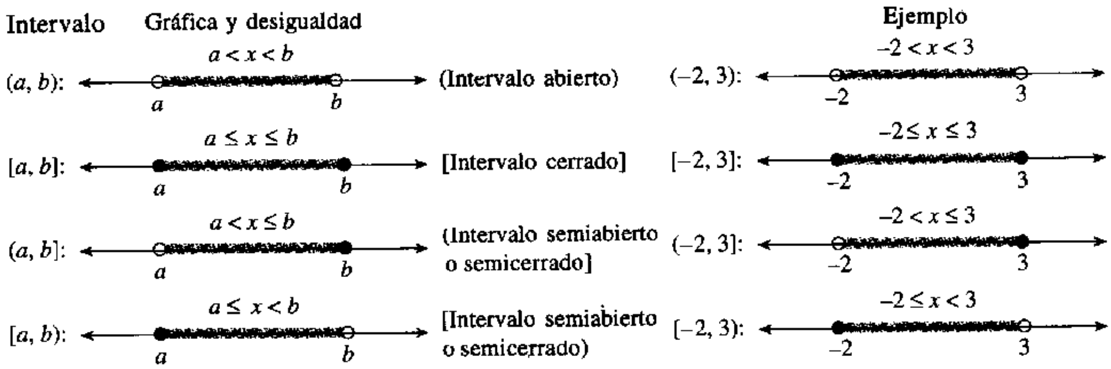
7. $3x + 8 < 2x + 12$ **8.** $3x - 6 \geq x + 8$ **9.** $5(x + 7) \leq 3x - 7$

10. $2(x - 1) \leq 5x + 1$ **11.** $\frac{5}{3 - x} < 0$ **12.** $\frac{1}{2}x + 3 < \frac{1}{3}x - 2$

(Respuestas: página 83)

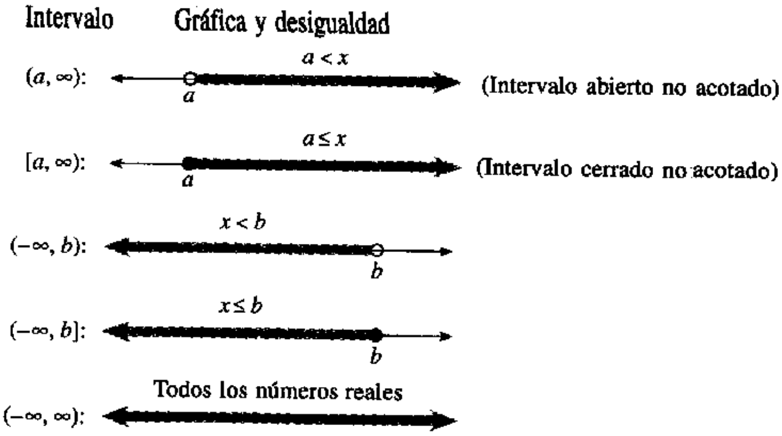
El punto lleno quiere decir que el punto extremo está incluido en el intervalo, y el círculo abierto significa que no se incluye en él.

Las dos desigualdades, $a < b$ y $b < c$ se pueden escribir en la forma $a < b < c$. De igual forma se procede cuando se remplazan uno o ambos signos de desigualdad, <, por ≤. Así, $a \leq b < c$ significa que $a \leq b$ y que $b < c$. También, cuando se invierte el sentido se obtienen formas como $a \geq b \geq c$. Esas desigualdades se pueden emplear para definir a los *intervalos acotados* en la recta numérica. Veamos lo anterior en la siguiente figura, con un ejemplo específico de cada caso.



También hay *intervalos no acotados*. Por ejemplo, el conjunto de todas las $x > 5$ se representa mediante $(5, \infty)$. Igualmente, $(-\infty, 5)$ representa todas las $x < 5$. Los símbolos ∞ y $-\infty$ representan "más infinito" y "menos infinito", pero *no* representan números. Son artificios simbólicos que se emplean para indicar que está incluida *toda* x en determinada dirección, sin fin, como en la siguiente figura:

Nótese, por ejemplo, que $(-\infty, b)$ *significa que* $\{x \mid x < b\}$.



La recta numérica puede emplearse para mostrar las gráficas de los conjuntos de soluciones de las desigualdades, como en el ejemplo siguiente.

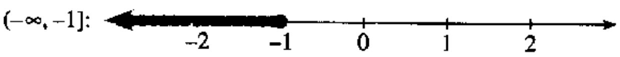
EJEMPLO 4 Grafique el conjunto de soluciones de $-2(x-1) \geq 4$

Solución

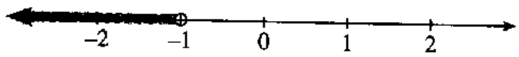
Como estamos multiplicando por (o dividiendo entre) un número negativo, se invierte el sentido.

$$-2(x-1) \geq 4$$
$$x - 1 \leq -2$$
$$x \leq -1$$

El conjunto de soluciones es $\{x \mid x \leq -1\}$ y su gráfica es la siguiente:



La flecha remarcada es para indicar que todos los puntos en la dirección indicada están incluidos. El punto lleno indica que -1 también está incluido en la solución. Cuando ese punto se reemplaza por un círculo hueco se obtiene la gráfica de $-2(x-1) > 4$:



¿Puede el lector describir la gráfica de $-2(x-1) < 4$?

También se pueden emplear las desigualdades para resolver problemas aplicados. Veremos esto en el ejemplo 5, donde se emplean desigualdades de la forma $a \leq b \leq c$.

EJEMPLO 5 En un negocio familiar pequeño se emplean dos trabajadores de tiempo parcial. Los sueldos totales que devengan van de \$128 a \$146 por semana. Si uno de ellos gana \$18 más que el otro, ¿cuáles son los sueldos semanales posibles de cada uno?

Solución Sea x = sueldo que se paga al empleado que gana menos. Entonces, $x + 18$ = sueldo del otro empleado. Como la suma de los sueldos es \$128, cuando menos, pero no más que \$146, la suma $x + (x + 18)$ satisface esta *desigualdad compuesta*:

$$128 \leq x + (x + 18) \leq 146$$

Ahora simplificamos para obtener las posibilidades de x.

Nota: se suma −18 a cada parte de la desigualdad compuesta, y después se divide cada parte entre 2.

$$128 \leq 2x + 18 \leq 146$$
$$110 \leq 2x \leq 128$$
$$55 \leq x \leq 64$$

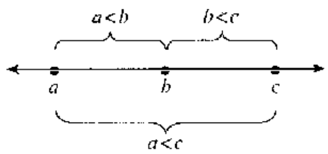
Para obtener el resultado del otro empleado sumamos 18 a la desigualdad anterior y simplificamos.

$$55 + 18 \leq x + 18 \leq 64 + 18$$
$$73 \leq x + 18 \leq 82$$

Un trabajador de tiempo parcial gana de \$55 a \$64 por semana, y el otro de \$73 a \$82 semanales. ■

Existen otras propiedades de orden, fundamentales para más adelante. Las enunciaremos en términos de las siguientes reglas.

REGLA 1. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
Ésta es la **regla de la propiedad transitiva del orden**. Dice, geométricamente, que si a está a la izquierda de b y b está a la izquierda de c, entonces a debe estar a la izquierda de c en la recta numérica.



Estas reglas también se pueden volver a enunciar invirtiendo el sentido. Por ejemplo, la regla 2 sería: Si $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$.

REGLA 2. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
Ejemplo: Como $5 < 10$ y $-15 < -4$, entonces $5 + (-15) < 10 + (-4)$; esto es, $-10 < 6$.

REGLA 3. Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$, entonces $ac < bd$.
Ejemplo: Como $3 < 7$ y $5 < 9$, entonces $(3)(5) < (7)(9)$; esto es, $15 < 63$.

REGLA 4. Si $a < b$ y $ab > 0$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Ejemplos: Como $5 < 10$, entonces $\frac{1}{5} > \frac{1}{10}$.

Como $-3 < -2$, entonces $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$.

EJERCICIOS 1.3

Diga si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera o falsa. Si es falsa, cite un contraejemplo específico para explicar su respuesta.

1. Si $x < 2$, entonces x es negativa.

2. Si $x > 1$ y $y > 2$, entonces $x + y > 3$.

3. Si $0 < x$, entonces $-x < 0$.

4. Si $x < 5$ y $y < 6$, entonces $xy < 30$.

5. Si $0 < x$, entonces $x < x^2$.

6. Si $x < y < -2$, entonces $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

7. Si $x \leq -5$, entonces $x - 2 \leq -7$.

8. Si $x \leq y$ y $y < z$, entonces $x < z$.

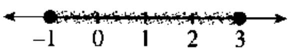
Exprese cada desigualdad con una notación de intervalo.

9. $-5 \leq x \leq 2$ **10.** $0 < x < 7$ **11.** $-6 \leq x < 0$ **12.** $-2 < x \leq 4$
13. $-10 < x < 10$ **14.** $3 \leq x \leq 7$ **15.** $x < 5$ **16.** $x < -2$
17. $-2 \leq x$ **18.** $2 < x$ **19.** $x \leq -1$ **20.** $x < 3$

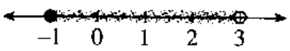
Muestre cada uno de los intervalos que siguen como gráfica en una recta numérica.

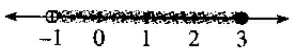
21. $(-3, -1)$ **22.** $(-3, -1]$ **23.** $[-3, -1)$ **24.** $[-3, -1]$
25. $[0, 5]$ **26.** $(-1, 3)$ **27.** $(-\infty, 0]$ **28.** $[2, \infty)$

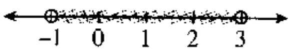
Escriba la desigualdad correspondiente a cada una de las gráficas que siguen. También, exprese cada una como intervalo de números reales.

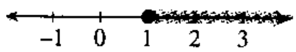
Por ejemplo: 

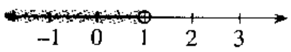
$-1 \leq x \leq 3$; $[-1, 3]$

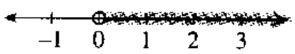
29. 

30. 

31. 

32. 

33. 

34. 

Determine el conjunto de soluciones.

35. $x + 5 > 17$ **36.** $x - 8 < 5$ **37.** $x - 7 \geq -3$
38. $x + 6 \leq -7$ **39.** $5x - 4 < 6 + 4x$ **40.** $3x + 12 > 2x - 5$
41. $3x > -21$ **42.** $9x \leq -45$ **43.** $-5x < 50$
44. $3x + 5 \geq 17$ **45.** $5x - 3 \leq 22$ **46.** $-2x + 1 \leq 19$
47. $2x + 7 \leq 5 - 6x$ **48.** $3x - 2 > x + 5$ **49.** $-5x + 5 < -3x + 1$
50. $3(x - 1) \geq 2(x - 1)$ **51.** $2(x + 1) < x - 1$ **52.** $3x + 5 + x > 2(x - 1)$
53. $\frac{1}{2}x - 5 > \frac{1}{4}x + 3$ **54.** $\frac{3}{4}x + 2 < \frac{5}{8}x - 3$ **55.** $-\frac{3}{5}x - 6 < -\frac{2}{5}x + 7$
56. $\frac{2 - x}{5} \geq 0$ **57.** $\frac{1}{x} < 0$ **58.** $-\frac{2}{x + 1} > 0$

Despeje a x.

59. $3x + 5 \neq 8$ (El símbolo $\neq$ quiere decir "distinto de".)
60. $2x + 1 \ngtr 5$ (El símbolo $\ngtr$ quiere decir "no es mayor que".)
61. $3x - 2 \nless 1$ (El símbolo $\nless$ quiere decir "no es menor que".)

62. $12x + 9 \neq 15(x - 2)$ **63.** $3(x - 1) \ngtr 5(x + 2)$ **64.** $2(x + 3) \nless 3(x + 1)$

65. $\frac{5}{3}x \nless 2x - 1$ **66.** $\frac{2}{9}(3x + 7) \ngeq 1 - \frac{4}{3}x$

Resuelva y grafique cada una de las siguientes desigualdades.

67. $2x + 3 < 11$ **68.** $-3x + 1 > -2$ **69.** $\frac{1}{2}x + 2 \leq 1$

70. $-3(x + 1) \geq 3$ **71.** $2(x + 1) < 3(x + 2)$ **72.** $-2(x - 2) > 3x - 3$

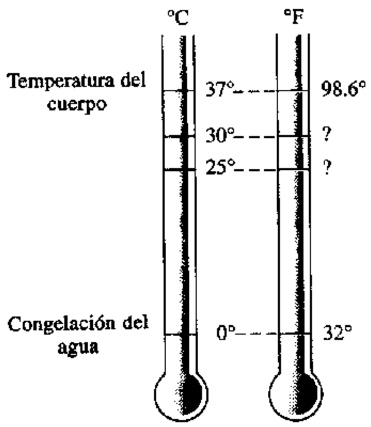
73. La suma de un entero más 5 menos que tres veces este entero está entre 34 y 54. Determine todos los posibles pares de enteros que satisfagan lo anterior.

74. Para obtener una calificación B^+ en álgebra, un estudiante debe pasar un examen con promedio mínimo de 86%, pero menos que 90%. Si las calificaciones en sus tres primeros exámenes fueron 85, 86 y 93%, ¿qué calificaciones en su cuarta prueba le garantizarán una B^+?

75. En el ejercicio anterior, ¿qué calificaciones en la cuarta prueba le garantizan una B^+ si esa prueba cuenta el doble que cada una de las demás?

76. Si x satisface $\frac{7}{4} < x < \frac{9}{4}$, ¿cuáles son los valores posibles de y, si $y = 4x - 8$? (*Sugerencia:* Aplique las propiedades de suma y multiplicación para desigualdades a la desigualdad citada, para obtener $4x - 8$ en la parte central.)

77. Durante cierto periodo, la temperatura en grados Celsius varió entre 25 y 30°. ¿Cuál fue el intervalo en grados Fahrenheit para este periodo? (*Sugerencia:* Comience con $25 < C < 30$ y aplique la idea del ejercicio 76, con $F = \frac{9}{5}C + 32$.)



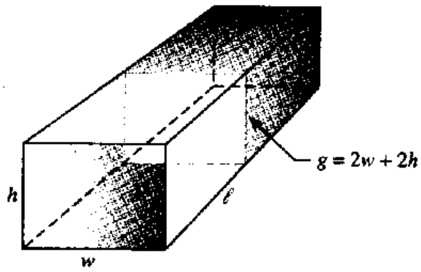
78. Suponga que una máquina está programada para producir placas metálicas rectangulares con su longitud una unidad mayor que dos veces su ancho, w. Cuando se introduce el valor $w = 2$ cm, el diseño de la máquina sólo garantiza que el ancho queda dentro de una tolerancia de un décimo con respecto a 2. Esto es, $2 - 0.1 < w < 2 + 0.1$.

(a) ¿Dentro de qué tolerancia respecto a 5 cm queda la longitud?
(b) Determine el intervalo de valores del área.

79. Un servicio de entregas acepta paquetes sólo si la suma de su longitud, ℓ, y su perímetro transversal, g, no es mayor que 110 pulgadas. También pide que cada dimensión tenga un mínimo de 2 pulgadas.

(a) Si $\ell = 42$ pulgadas, ¿cuáles son los valores permisibles para el perímetro g?

(b) Si $\ell = 42$ pulgadas y $w = 18$ pulgadas, ¿cuáles son los valores permisibles de h?



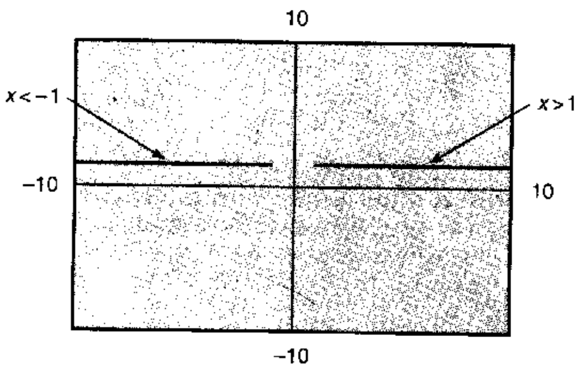
80. En una tienda hay dos empleados de tiempo parcial, a los cuales se paga en conjunto un total semanal de \$150 a \$180. Si uno de ellos gana \$15 más que el otro, ¿cuáles son los sueldos posibles que gana cada uno por semana?

81. Una tienda tiene tres empleados de tiempo parcial, a los cuales se les paga un total semanal de \$210 a \$252. Dos de ellos ganan lo mismo, y el tercero gana \$12 menos que los otros. Determine los sueldos posibles semanales que gana cada uno de ellos.

82. Un supermercado tiene 20 empleados de tiempo parcial, los cuales ganan un total de \$1544 a \$1984 semanales. Doce de ellos ganan lo mismo, y los ocho restantes ganan \$22 menos cada uno. Determine los sueldos semanales posibles que gana cada empleado.

Redacción Con sus propias palabras, enuncie las propiedades de igualdad y orden en suma y multiplicación, sin usar símbolo matemático alguno. Por ejemplo, el enunciado de la propiedad del orden en la suma podría comenzar: "Si se suma el mismo número a ambos lados de . . . "

Ejercicios para calculadora graficadora Algunas calculadoras graficadoras permiten usar *operadores relacionales (lógicos)*. Si la del lector lo permite, puede obtener una solución gráfica a desigualdades como $x^2 - 1 > 0$ graficando $y = (x^2 - 1 > 0)(1)$. En otras palabras, introduzca el signo de desigualdad dentro de un paréntesis, seguido del número 1 entre paréntesis, todo ello en la fórmula de y. El resultado son los intervalos de solución $\{x \mid x^2 - 1 > 0\}$ levantados una unidad sobre el eje x en la "ventana" de su calculadora.



Al elevar la gráfica de la solución sobre el eje x se gana en claridad del resultado. Si no fuera así, la gráfica no sería visible en el eje.

Si la calculadora del lector permite esta técnica, úsela para resolver las desigualdades siguientes, con los ajustes RANGE (intervalo) $-10 \leq x \leq 10$ por $-10 \leq y \leq 10$. Compruebe sus resultados empleando las técnicas algebraicas de esta sección.

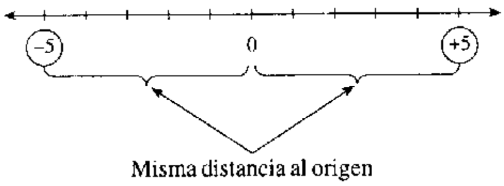
1. $3x + 1 \leq 2x + 5$

2. $4x - 2 > 6x + 7$

3. $3 < 2x + 4 < 15$ (*Sugerencia*: Multiplique dos enunciados de desigualdad.)

1.4 VALOR ABSOLUTO

¿Qué tienen en común los números -5 y $+5$? Es obvio que son distintos y que son las coordenadas de dos puntos distintos en la recta numérica. Sin embargo, ambos están a la misma distancia de 0, el **origen** de esa recta.



En otras palabras, -5 está a la misma distancia a la izquierda de 0 que $+5$ a la derecha de 0. Este hecho se indica con la **notación valor absoluto:**

$|-5| = 5$ quiere decir "El *valor absoluto* de -5 es 5".

$|+5| = 5$ quiere decir "El *valor absoluto* de $+5$ es 5".

Para cada número real x, la interpretación de $|x|$ es la distancia (sin importar la dirección) a la que se encuentra x del origen. Nótese que para un número positivo, $|x| = x$; $|+5| = 5$. Para un número negativo, $|x| = -x$; esto es, $|-5| = -(-5) = 5$. También, como 0 es el origen, es natural decir que $|0| = 0$.

Podemos resumir lo anterior en la siguiente definición.

En palabras, si a es positivo o cero, el valor absoluto de a es a. Si a es negativo, el valor absoluto es el opuesto de a. Por ejemplo:

$$|+3| = 3$$
$$|-3| = -(-3) = 3$$
$$|0| = 0$$

DEFINICIÓN DEL VALOR ABSOLUTO

Para cualquier número real a,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones para el ejemplo 1 es $\{x \mid x > 3\}$. Sin embargo, por simplicidad, con frecuencia se omite la notación de conjuntos por construcción. Así, aun cuando escribamos $x > 3$ como solución, se entiende que la solución consiste de todas las x tales que $x > 3$.

EJEMPLO 1 Despeje a x de $\dfrac{x-3}{|x-3|} = 1$

Solución Esta fracción será igual a 1 si numerador y denominador tienen el mismo valor. Por definición, $|x - 3| = x - 3$ sólo si $x - 3 \geq 0$, o sea, $x \geq 3$. Sin embargo, *para evitar la división entre* 0, $x \neq 3$. Por consiguiente, la solución es $x > 3$. Pruebe algunos valores de x para $x < 3$ y para $x > 3$, para comprobar esta solución. (Le será más fácil imaginarse que este problema tiene la forma $\dfrac{a}{|a|} = 1$, siendo $a = x - 3$.) ■

A continuación presentamos algunas propiedades importantes del valor absoluto, con ejemplos, pero sin demostración formal.

PROPIEDAD 1. Para $k > 0$, $|a| = k$ si y sólo si $a = k$, o $-a = k$.

Esta propiedad es consecuencia directa de la definición de valor absoluto. Por ejemplo, una ecuación como $|x| = 2$ tan sólo es otro modo de decir que $x = 2$, o que $x = -2$. La gráfica está formada por los dos puntos cuyas coordenadas son 2 y –2. Cada uno de esos puntos está a 2 unidades del origen.

EJEMPLO 2 Resolver: $|5 - x| = 7$

Usaremos la propiedad 1 para esta solución, notando que $5 - x$ desempeña el papel de a.

Solución

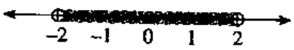
$$\begin{aligned} 5 - x &= 7 & \text{o sea} \quad -(5 - x) &= 7 \\ -x &= 2 & -5 + x &= 7 \\ x &= -2 & x &= 12 \end{aligned}$$

Comprobación: $|5 - (-2)| = |7| = 7$; $|5 - 12| = |-7| = 7$ ■

Veamos ahora la desigualdad $|x| < 2$. En este caso estamos considerando todos los números reales cuyo valor absoluto *es menor que* 2. En la recta numérica son los puntos cuya distancia al origen es menor de 2 unidades, esto es, todos los números reales entre –2 y 2, o $-2 < x < 2$. La gráfica de $|x| < 2$ es el intervalo $(-2,2)$.

Describa la gráfica de $|x| \leq 2$.

$|x| < 2$:



Al revés, la gráfica indica también que si $-2 < x < 2$, entonces $|x| < 2$.

Ahora, podemos generalizar por medio de la propiedad siguiente.

Nota: $-k < a < k$ es lo mismo que decir que $a < k$ y que $a > -k$. También, $|a| \leq k$ si y sólo si $-k \leq a \leq k$.

PROPIEDAD 2. Si $k > 0$, $|a| < k$ si y sólo si $-k < a < k$.

EJEMPLO 3 Resuelva $|x - 2| \leq 3$.

Solución Hagamos que $x - 2$ desempeñe el papel de a en la propiedad 2. En consecuencia, $|x - 2| \leq 3$ equivale a $-3 \leq x - 2 \leq 3$. Ahora sumamos 2 a cada parte para aislar a x en la parte media.

$$-3 \leq x - 2 \leq 3$$

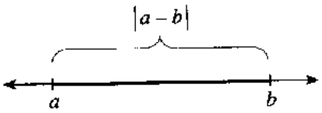
$$-3 + 2 \leq x - 2 + 2 \leq 3 + 2$$

Así, la solución consiste de todas las x tales que $-1 \leq x \leq 5$. ■

El valor absoluto se puede emplear para determinar la distancia entre dos puntos de la recta numérica. Por ejemplo, se puede calcular la distancia de 5 a –3 como sigue:

$$|5 - (-3)| = |8| = 8 \qquad \text{o bien} \qquad |(-3) - 5| = |-8| = 8$$

Lo anterior nos conduce a la definición siguiente:

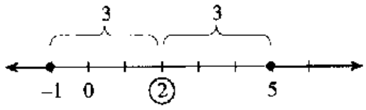


DEFINICIÓN DE LA DISTANCIA SOBRE LA RECTA NUMÉRICA

$|a-b|$ representa la distancia entre los puntos a y b sobre la recta numérica.

La idea de la distancia entre puntos de una recta numérica se puede emplear como método alternativo para resolver el ejemplo 3. Se puede uno imaginar que la expresión $|x-2|$ es la distancia entre x y 2 en la recta numérica, y con ello considerar que todos los puntos x cuya distancia a 2 es menor o igual a 3 unidades.

Piense usted: $|x-2|<3$ *significa que* x *está a menos de 3 unidades de 2. Por lo tanto,* $-1<x<5$.



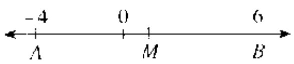
Note que el *punto medio* o *centro* del intervalo tiene la coordenada 2. Este valor se puede determinar calculando el promedio de los números −1 y 5; $\frac{-1+5}{2}=2$. En general, hemos llegado al resultado siguiente:

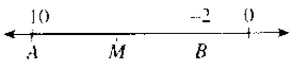
COORDENADA DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO DE RECTA

Si x_1 y x_2 son los extremos de un intervalo de la recta numérica, la coordenadas del punto medio es

$$\frac{x_2+x_1}{2}$$

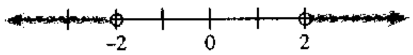
EJEMPLO 4 Determine la coordenada del punto medio, M, de cada uno de los siguientes segmentos de recta, AB.

(a)


(b)


Solución (a) $\frac{-4+6}{2}=1$ (b) $\frac{-10+(-2)}{2}=-6$ ■

A continuación veremos la desigualdad $|x|>2$. Sabemos que $|x|<2$ quiere decir que $-2<x<2$. Por consiguiente, $|x|>2$ está formado por aquellos valores de x para los cuales $x<-2$, o $x>2$.

$|x|>2$:


Esta gráfica muestra el conjunto de puntos cuya distancia a cero es mayor que 2 unidades. En general, tenemos:

También $|a|\geq k$ *si y sólo si* $a\leq -k$ *o si* $a\geq k$.

PROPIEDAD 3. Para $k\geq 0$, $|a|>k$ si y sólo si $a<-k$ o $a>k$.

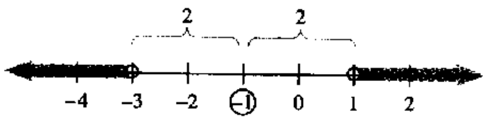
EJEMPLO 5 Grafique $|x + 1| > 2$.

Solución Usaremos la propiedad 3 como sigue:

$$|x + 1| > 2 \quad \text{quiere decir que} \quad x + 1 < -2, \quad \text{o bien que} \quad x + 1 > 2$$

Por consiguiente, $x < -3$ o $x > 1$. La palabra "o bien" indica que debemos considerar los valores de x que satisfacen cualquiera de las dos condiciones; esto es, x puede ser menor que -3, o mayor que 1.

También, se puede escribir $|x + 1|$ en la forma $|x - (-1)|$ para obtener la forma $|a - b|$, que representa la distancia entre x y -1 en la recta numérica. Localicemos ahora a todos los puntos que están alejados *más* de 2 unidades del punto -1, como sigue:



■

El enunciado $|x + y| \leq |x| + |y|$ *se llama* ***desigualdad del triángulo.***

A continuación presentamos otras propiedades útiles del valor absoluto:

$$|xy| = |x||y| \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \qquad |x + y| \leq |x| + |y|$$

(Véanse los ejercicios 46 y 47.)

Intercaladas en el texto encontraremos llamadas de PRECAUCIÓN. Son para presentar los errores que cometen los estudiantes con más frecuencia. Estúdielas con cuidado para que pueda comprender lo que se muestra y evite esas faltas.

PRECAUCIÓN: Aprenda a evitar estos errores

INCORRECTO	CORRECTO
$\left\lvert\frac{3}{4} - 2\right\rvert = \frac{3}{4} - 2 = -\frac{5}{4}$	$\left\lvert\frac{3}{4} - 2\right\rvert = \left\lvert-\frac{5}{4}\right\rvert = \frac{5}{4}$
$\lvert 5 - 7\rvert = \lvert 5\rvert - \lvert 7\rvert = -2$	$\lvert 5 - 7\rvert = \lvert -2\rvert = 2$
$\lvert x\rvert = -2$ tiene solución $x = 2$	No hay solución; el valor absoluto de un número nunca puede ser negativo.
$\lvert x - 1\rvert < 3$ si y sólo si $x < 4$	$\lvert x - 1\rvert < 3$ si y sólo si $-3 < x - 1 < 3$; esto es, $-2 < x < 4$.
$\lvert 2x\rvert > 1$ si y sólo si $x > \frac{1}{2}$.	$\lvert 2x\rvert > 1$ si y sólo si $x < -\frac{1}{2}$ o $x > \frac{1}{2}$.

EJERCICIOS 1.4

Clasifique como verdadera o falsa cada una de las siguientes proposiciones.

1. $-\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$ **2.** $|-1000| < 0$ **3.** $\left|-\frac{1}{2}\right| = 2$ **4.** $|\sqrt{2} - 5| = 5 - \sqrt{2}$

5. $\left|\frac{x}{y}\right| = |x| \cdot \frac{1}{|y|}$ **6.** $2 \cdot |0| = 0$ **7.** $||x|| = |x|$ **8.** $|-(-1)| = -1$

9. $|a| - |b| = a - b$ **10.** $|a - b| = b - a$

11. Determine la coordenada del punto medio de un segmento de recta cuyos extremos se dan a continuación:

(a) 3 y 9 **(b)** –8 y –2 **(c)** –12 y 0 **(d)** –5 y 8

12. Un extremo de un segmento de recta está en –7. El punto medio está en 3. ¿Cuál es la coordenada del otro extremo del segmento?

Despeje x.

13. $|x| = \frac{1}{2}$ **14.** $|3x| = 3$ **15.** $|x - 1| = 3$

16. $|3x - 4| = 0$ **17.** $|2x - 3| = 7$ **18.** $|6 - 2x| = 4$

19. $|4 - x| = 3$ **20.** $|3x - 2| = 1$ **21.** $|3x + 4| = 16$

22. $\left|\frac{1}{x - 1}\right| = 2$ **23.** $\frac{|x|}{x} = 1$ **24.** $\frac{x + 2}{|x + 2|} = -1$

Despeje x y trace la gráfica.

25. $|x + 1| = 3$ **26.** $|x - 1| \leq 3$ **27.** $|x - 1| \geq 3$

28. $|x + 2| = 3$ **29.** $|x + 2| \leq 3$ **30.** $|x + 2| > 3$

31. $|-x| = 5$ **32.** $|x| \leq 5$ **33.** $|x| \geq 5$

34. $|x - 5| \neq 3$ **35.** $|x - 5| \leq 3$ **36.** $|x - 5| \geq 3$

37. $|x - 3| < 0.1$ **38.** $|2 - x| < 3$ **39.** $|2x - 1| < 7$

40. $|3x - 6| < 9$ **41.** $|4 - x| < 2$ **42.** $|1 + 5x| < 1$

43. $|x - 4| \ngtr 1$ (*Nota:* $\ngtr$ quiere decir $\leq$.) **44.** $|x - 2| \ngeq 0$ (*Nota:* $\ngeq$ quiere decir $<$.) **45.** $\frac{1}{|x - 3|} > 0$

46. **(a)** Demuestre la regla del producto, $|xy| = |x| \cdot |y|$ para el caso en que $x < 0$ y $y > 0$.

(b) Demuestre la regla del cociente, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ para el caso en que $x < 0$ y $y < 0$.

47. Cite cuatro ejemplos distintos que confirmen cada una de las desigualdades, revisando los casos (i) $x > 0$, $y > 0$; (ii) $x > 0$, $y < 0$; (iii) $x < 0$, $y > 0$; (iv) $x < 0$, $y < 0$.

(a) $|x - y| \geq ||x| - |y||$

(b) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Redacción

1. Explique por qué $x^2 = |x^2| = |x|^2$ para todo número real x.

2. Explique el significado de la desigualdad $|x - 4| < 1$ en términos de la distancia en la recta numérica. Haga lo mismo con $|x + 4| > 1$, tomando nota de que $x + 4 = x - (-4)$.

3. Complete cada enunciado sin usar simbolismo matemático, de tal modo que se llegue a un equivalente de la definición de valor absoluto:

Para x positiva, . . .
Para x negativa, . . .

Razonamiento crítico

1. ¿Cómo puede demostrar usted que el conjunto de números reales *no es* asociativo con respecto a la división?
2. Demuestre que el conjunto de números reales no contiene al inverso multiplicativo de cada uno de sus miembros.
3. Explique el uso de un contraejemplo específico para refutar una afirmación que sea correcta en general. Presente varios ejemplos.
4. ¿Cuáles son los valores posibles del cociente $\frac{|2x|}{2x}$?
5. ¿Qué desigualdad representa al conjunto de números reales que están a menos de 3 unidades del punto -2 en la recta numérica?
6. ¿En qué sentido depende el concepto de resta del de suma?
7. Si $a < b$ y $c < d$, ¿será cierto que $a - c < b - d$? Explique su respuesta.

1.5 EXPONENTES ENTEROS

Gran parte de la notación matemática se puede considerar como abreviatura eficiente de largas operaciones. Por ejemplo:

$$4^9 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$$

En este ejemplo usamos un *exponente entero positivo*. En esta sección describiremos el empleo de enteros como exponentes.

Los modos más comunes de referirse a b^n son "b a la enésima potencia," "b a la ene" o "la enésima potencia de b".

DEFINICIÓN DE UN EXPONENTE ENTERO POSITIVO

Si n es un entero positivo y b es cualquier número real, entonces

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ factores}}$$

El número b se llama **la base** y n se llama **el exponente.**

A continuación presentamos algunos ejemplos de la definición:

PRECAUCIÓN
Tenga cuidado cuando maneje paréntesis. Tenga en cuenta que $(-3)^2 \neq -3^2$.
$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$
$-3^2 = -(3 \times 3) = -9$

$$b^1 = b$$
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$
$$10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1{,}000{,}000$$

Puede usted usar una calculadora para evaluar la potencia de un número. Estudie el manual de su calculadora para determinar cómo hacerlo. A continuación vemos dos secuencias de teclas para calcular 10^6:

$\boxed{10}\ \boxed{x^y}\ \boxed{6}\ \boxed{\text{EXE}}$ $\qquad$ $\boxed{10}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{6}\ \boxed{\text{ENTER}}$

Se pueden establecer fácilmente varias reglas importantes acerca de los exponentes enteros positivos, basadas en la definición anterior. He aquí una lista de ellas, en la cual

m y n son enteros positivos, a y b son dos números reales cualesquiera y los denominadores no pueden ser cero.

Cuando se multiplican potencias con una base común, se suman los exponentes y se usa la misma base.

REGLA 1. $b^m b^n = b^{m+n}$

Ejemplos: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 \qquad x^3 \cdot x^4 = x^7$

REGLA 2. $\dfrac{b^m}{b^n} = \begin{cases} b^{m-n} & \text{si } m > n \\ 1 & \text{si } m = n \\ \dfrac{1}{b^{n-m}} & \text{si } m < n \end{cases}$

Ejemplos: $(m > n) \qquad (m = n) \qquad (m < n)$

$$\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3 \qquad \frac{5^2}{5^2} = 1 \qquad \frac{2^2}{2^5} = \frac{1}{2^{5-2}} = \frac{1}{2^3}$$

$$\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3 \qquad \frac{x^2}{x^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^{5-2}} = \frac{1}{x^3}$$

La potencia de una potencia es el producto de las potencias con la misma base.

REGLA 3. $(b^m)^n = b^{mn}$

Ejemplos: $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 \qquad (x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$

La potencia de un producto es el producto de las potencias.

REGLA 4. $(ab)^m = a^m b^m$

Ejemplos: $(2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5 \qquad (xy)^5 = x^5 y^5$

La potencia de un cociente es el cociente de las potencias.

REGLA 5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

Ejemplos: $\left(\dfrac{3}{2}\right)^5 = \dfrac{3^5}{2^5} \qquad \left(\dfrac{x}{y}\right)^5 = \dfrac{x^5}{y^5}$

Más adelante ampliaremos las reglas de los exponentes para incluir a todos los números reales, no tan sólo los enteros positivos, en calidad de exponentes. Veremos que se siguen aplicando todas las reglas que acabamos de enunciar.

A continuación presentamos una demostración de la regla 4. El lector puede tratar de demostrar las demás en forma semejante.

$$(ab)^m = \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{m \text{ tiempos}} \qquad \text{por definición}$$

$$= \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ tiempos}}\underbrace{(b \cdot b \cdot \cdots \cdot b)}_{m \text{ tiempos}} \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{por uso repetido de las leyes} \\ \text{conmutativas y asociativas} \\ \text{de la multiplicación}\end{array}\right.$$

$$= a^m b^m \qquad \text{por definición}$$

Si se emplean en forma correcta, estas reglas pueden simplificar los cálculos, como en el ejemplo que sigue.

En este capítulo a veces se emplean algunas propiedades básicas de las fracciones, con las cuales el lector debe estar familiarizado ya. Estas propiedades se estudian con detalle en la sección 1.9.

EJEMPLO 1 Evalúe de dos maneras, $12^3\left(\frac{1}{6}\right)^3$.

Solución

(a) $12^3\left(\frac{1}{6}\right)^3 = 1728\left(\frac{1}{216}\right) = \dfrac{1728}{216} = 8$

(b) $12^3\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \left(12 \cdot \frac{1}{6}\right)^3 = 2^3 = 8$ ■

EJEMPLO 2 Simplifique: **(a)** $2x^3 \cdot x^4$ **(b)** $\dfrac{(x^3y)^2y^3}{x^4y^6}$

Solución

(a) $2x^3 \cdot x^4 = 2x^{3+4} = 2x^7$ (b) $\dfrac{(x^3y)^2y^3}{x^4y^6} = \dfrac{(x^3)^2y^2y^3}{x^4y^6} = \dfrac{x^6y^5}{x^4y^6} = \dfrac{x^2}{y}$ ■

Se debe tener cuidado con las reglas de multiplicación y división, cuando las bases no sean las mismas, como en el ejemplo que sigue.

PRECAUCIÓN

$$\frac{4^5}{9^3} \neq \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

La regla 2 no se aplica en este caso, porque las bases son distintas y la regla 5 tampoco, porque los exponentes son distintos.

EJEMPLO 3 Simplifique: $\dfrac{4^5}{8^3}$

Solución Como las bases no son las mismas no se aplica la regla 2. Sin embargo, para no calcular 4^5 ni 8^3, se puede simplificar este problema del siguiente modo:

$$\frac{4^5}{8^3} = \frac{(2^2)^5}{(2^3)^3} = \frac{2^{10}}{2^9} = 2$$ ■

PRUEBE SU COMPRENSIÓN

Evalúe (simplifique) cada una de las siguientes expresiones.

1. 5^3	**2.** $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$	**3.** $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{8}{27}$	**4.** $(10^3)^2$
5. $2^3(-2)^3$	**6.** $\left(\frac{1}{2}\right)^3 8^3$	**7.** $\dfrac{17^8}{17^9}$	**8.** $\dfrac{(-2)^3+3^2}{3^3-2^2}$
9. $\dfrac{(-12)^4}{4^4}$	**10.** $(ab^2)^3(a^2b)^4$	**11.** $\dfrac{2^2 \cdot 16^3}{(-2)^8}$	**12.** $\dfrac{(2x^3)^2(3x)^2}{6x^4}$

(Respuestas: página 83)

Esta presentación da el significado del uso del 0 como exponente. Esto es, definiremos ahora una expresión como 5^0.

Nuestra descripción de los exponentes se ha restringido al empleo de enteros positivos. Veamos ahora lo que significa un exponente 0. En particular, ¿qué significa 5^0? Sabemos que 5^3 quiere decir que se usa 5 tres veces como factor. Pero decididamente no tiene sentido usar cero veces 5. Con las reglas de los exponentes resolveremos este dilema.

Desearíamos que estas leyes de los exponentes fueran válidas aun si alguno de los exponentes es cero. Esto es, *quisiéramos* que la regla 2 diera como resultado

$$\frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0$$

Pero ya sabemos que

$$\frac{5^2}{5^2} = \frac{25}{25} = 1$$

Por consiguiente, a 5^0 se le debe asignar el valor 1. Entonces, para *preservar* las reglas de los exponentes debemos decir que $5^0 = 1$. Esto es, de ahora en adelante, convenimos en lo siguiente:

Vemos que la definición dice que b debe ser un número real distinto de 0. Esto es, no definimos una expresión como 0^0; esa expresión quedará indefinida.

DEFINICIÓN DEL EXPONENTE CERO

Si b es número real distinto de 0, entonces

$$b^0 = 1$$

Nuesto siguiente objetivo es dar un significado a exponentes enteros negativos. Por ejemplo, deseamos establecer el significado de x^{-3}. Nuestro lineamiento para ello será que *las reglas de los exponentes que hemos visto se apliquen a todo tipo de exponentes enteros*. Esto es, deseamos *preservar* la estructura de las reglas básicas. Con esto en mente observemos el efecto de la regla 1 cuando interviene un exponente negativo.

$$(x^3)(x^{-3}) = x^{3+(-3)} = x^0 = 1$$

Dividiendo ambos lados de $(x^3)(x^{-3}) = 1$, primero entre x^3 y después entre x^{-3} se obtienen las dos expresiones siguientes

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3} \qquad \text{y} \qquad x^3 = \frac{1}{x^{-3}}$$

Con ello quedamos listos para la siguiente definición:

Nótese que los exponentes $-n$ y n son opuestos, y que $-n$ puede ser negativo o positivo.

DEFINICIÓN DE b^{-n}

Si n es un entero y $b \neq 0$, entonces

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

¿Cómo puede demostrar que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$?

De acuerdo con esta definición, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$; porque $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$. En otras palabras, *una fracción a la potencia −1 es el recíproco de la fracción.*

Como en el primer ejemplo, con frecuencia es posible más de un procedimiento correcto. Depende mucho de la experiencia el encontrar el procedimiento más eficiente.

Ejemplos: $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{49}} = 49$ o sea $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = (7^{-1})^{-2} = 7^2 = 49$

$$\frac{5^{-2}}{15^{-2}} = \left(\frac{5}{15}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^2 = 9$$

PRECAUCIÓN
Tenga cuidado al aplicar la regla 2, en especial cuando uno de los exponentes sea negativo. Por ejemplo,

$$\frac{b^3}{b^{-2}} = b^{3-(-2)} = b^5;$$

$$\frac{b^3}{b^{-2}} \neq b^{3-2}$$

De acuerdo con las definiciones de b^0 y b^{-n}, se condensan los tres casos de la regla 2 en la forma única siguiente.

REGLA 2. (Revisada) $\dfrac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$

Ejemplos: $\dfrac{3^8}{3^2} = 3^6$ $\quad \dfrac{3^2}{3^8} = 3^{-6}$ $\quad \dfrac{3^2}{3^2} = 3^0 = 1$

$\dfrac{x^8}{x^2} = x^6$ $\quad \dfrac{x^2}{x^8} = x^{-6}$ $\quad \dfrac{x^2}{x^2} = x^0 = 1$

EJEMPLO 4 Simplifique, $\left(\dfrac{a^{-2}b^3}{a^3b^{-2}}\right)^5$ y exprese la respuesta empleando sólo exponentes positivos.

Solución Hay varios modos de proceder. Entre ellos, los dos siguientes.

(a) $\left(\dfrac{a^{-2}b^3}{a^3b^{-2}}\right)^5 = (a^{-5}b^5)^5 = (a^{-5})^5(b^5)^5 = a^{-25}b^{25} = \dfrac{b^{25}}{a^{25}}$

(b) $\left(\dfrac{a^{-2}b^3}{a^3b^{-2}}\right)^5 = \left(\dfrac{b^5}{a^5}\right)^5 = \dfrac{(b^5)^5}{(a^5)^5} = \dfrac{b^{25}}{a^{25}}$ ■

La notación exponencial se emplea en muchas situaciones. El ejemplo 5 muestra el uso de los exponentes para analizar un caso en el que la cantidad de una sustancia disminuye exponencialmente.

EJEMPLO 5 Supongamos que una sustancia radiactiva se desintegra de tal modo que después de 1 hora queda la mitad de la cantidad inicial. Si en cierto momento hay 320 gramos de la sustancia, ¿cuánto quedará después de 8 horas? ¿Cuánto después de n horas?

Solución Como la cantidad que queda después de cada hora es $\frac{1}{2}$ de los gramos al final de la hora anterior, la cantidad restante se calcula multiplicando el número de gramos anterior por $\frac{1}{2}$.

	Gramos que quedan
Inicio: 0 horas	$320(\frac{1}{2})^0 = 320$
Después de 1 hora	$320(\frac{1}{2})^1 = 160$
Después de 2 horas	$320(\frac{1}{2})^2 = 80$
Después de 3 horas	$320(\frac{1}{2})^3 = 40$
⋮	⋮
Después de 8 horas	$320(\frac{1}{2})^8 = 1.25$

Observemos que el exponente de $\frac{1}{2}$ es el mismo que el número de horas durante las que ha estado decayendo la sustancia. Si continúa la misma pauta, llegamos a la conclusión que después de n horas quedan $320(\frac{1}{2})^n = \frac{320}{2^n}$ gramos. ■

Los exponentes se pueden emplear para representar números muy grandes y muy pequeños de un modo conciso. Por ejemplo, la distancia de la Tierra al Sol es, aproximadamente, 150,000,000 de kilómetros. Esto se puede expresar en **notación científica** como sigue:

$$150{,}000{,}000 = 1.5 \times 10^8$$

También, un microscopio óptico recién desarrollado puede diferenciar detalles hasta de unos 12 *nanómetros* o mil millonésimos de metro. Esto es, en notación científica,

$$0.000000012 = 1.2 \times 10^{-8}$$

Los ejemplos anteriores indican que *un número N se ha escrito en notación científica cuando se ha expresado como producto de un número entre* 1 *y* 10, *por una potencia entera de* 10. Es decir:

$$N = x(10^c)$$

siendo $1 \leq x < 10$ y c entero.

Si el número es mayor que 1, el exponente de 10 es positivo; si es positivo y menor que 1, el exponente de 10 es negativo.

ESCRITURA DE UN NÚMERO EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

Ponga un punto decimal después del primer dígito distinto de cero. Con ello se obtiene el número entre 1 y 10. A continuación determine la potencia de 10 contando el número de lugares que se desplazó el punto decimal. Si movió el punto decimal hacia la izquierda, el exponente es positivo, y si lo movió hacia la derecha, es negativo.

Ejemplos:

$$2{,}070{,}000. = 2.07 \times 10^6$$

seis lugares a la izquierda

$$0.00000084 = 8.4 \times 10^{-7}$$

siete lugares a la derecha

Para convertir un número que está en notación científica a la notación normal, todo lo que se debe hacer es recorrer el punto decimal tantos lugares como indique el exponente de 10. Muévalo hacia la derecha si el exponente es positivo y a la izquierda si es negativo.

Cuando es necesario, las calculadoras presentan los números en notación científica. Por ejemplo, la respuesta al producto 3,500,000 × 450,000 se puede indicar en cualquiera de las tres formas siguientes:

1.575E + 12 1.575E12 1.575 12

Todas ellas quieren decir

$$1.575 \times 10^{12} = 1{,}575{,}000{,}000{,}000$$

Se cometen muchos errores cuando se manejan exponentes, por aplicar mal las reglas y definiciones básicas. La lista muestra algunos de los errores comunes que se deben tratar de evitar.

PRECAUCIÓN: Aprenda a evitar estos errores

INCORRECTO	CORRECTO
$5^2 \cdot 5^4 = 5^8$ (No multiplique los exponentes) $5^2 \cdot 5^4 = 25^6$ (No multiplique las bases)	$5^2 \cdot 5^4 = 5^6$ (Regla 1)
$\frac{5^6}{5^2} = 5^3$ (No divida los exponentes) $\frac{5^6}{5^2} = 1^4$ (No divida las bases)	$\frac{5^6}{5^2} = 5^4$ (Regla 2)
$(5^2)^6 = 5^8$ (No sume los exponentes)	$(5^2)^6 = 5^{12}$ (Regla 3)
$(-2)^4 = -2^4$ (Mala interpretación de paréntesis)	$(-2)^4 = (-1)^4 2^4 = 2^4$ (Regla 4)
$(-5)^0 = -1$ (Definición incorrecta de b^0)	$(-5)^0 = 1$ (Definición de b^0)
$2^{-3} = -\frac{1}{2^3}$ (Mala interpretación de b^{-n})	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ (Definición de b^{-n})

EJERCICIOS 1.5

Clasifique cada proposición como verdadera o falsa. Si no es correcta, modifique el lado derecho para obtener una proposición verdadera.

1. $3^4 \cdot 3^2 = 3^8$ **2.** $(2^2)^3 = 2^8$ **3.** $2^5 \cdot 2^2 = 4^7$ **4.** $\frac{9^3}{9^3} = 1$

5. $\frac{10^4}{5^4} = 2^4$ **6.** $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3}$ **7.** $(-27)^0 = 1$ **8.** $(2^0)^3 = 2^3$

9. $3^4 + 3^4 = 3^8$ **10.** $(a^2b)^3 = a^2b^3$ **11.** $(a+b)^0 = a + 1$ **12.** $a^2 + a^2 = 2a^2$

13. $\frac{1}{2^{-3}} = -2^3$ **14.** $(2+\pi)^{-2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}$ **15.** $\frac{2^{-5}}{2^3} = 2^{-2}$

Calcule el valor numérico.

16. -10^5 **17.** $2^0 + 2^1 + 2^2$ **18.** $(-3)^2(-2)^3$ **19.** $\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1$

20. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$ **21.** $\left(\frac{1}{2}\right)^4(-2)^4$ **22.** $\frac{3^2}{3^0}$ **23.** $\frac{(-2)^5}{(-2)^3}$

24. $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ **25.** $\frac{2^3 \cdot 3^4 \cdot 4^5}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4}$ **26.** $\frac{8^3}{16^2}$ **27.** $\frac{2^{10}}{4^3}$

28. $\frac{3^{-3}}{4^{-3}}$ **29.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ **30.** $[(-7)^2(-3)^2]^{-1}$

Escriba cada uno de estos números en notación científica.

31. 200,000,000 **32.** 32,100 **33.** 0.00037 **34.** 0.57721 **35.** 0.0000000555

Escriba cada uno de estos números en notación normal.

36. 7.89×10^4 **37.** 7.89×10^{-4} **38.** 1.75×10^{-1} **39.** 2.25×10^5 **40.** 1.11×10

Simplifique y exprese cada respuesta sólo con exponentes positivos.

41. $(x^{-3})^2$ **42.** $(x^3)^{-2}$ **43.** $x^3 \cdot x^9$ **44.** $\frac{x^9}{x^3}$

45. $(2a)^3(3a)^2$ **46.** $(-2x^3y)^2(-3x^2y^2)^3$ **47.** $(-2a^2b^0)^4$ **48.** $(2x^3y^2)^0$

49. $\frac{(x^2y)^4}{(xy)^2}$ **50.** $\left(\frac{3a^2}{b^3}\right)^2\left(\frac{-2a}{3b}\right)^2$ **51.** $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^4\left(\frac{-y}{x^2}\right)^2$ **52.** $\frac{(x-2y)^6}{(x-2y)^2}$

53. $\frac{x^{-2}y^3}{x^3y^{-4}}$ **54.** $\frac{(x^{-2}y^2)^3}{(x^3y^{-2})^2}$ **55.** $\frac{5x^0y^{-2}}{x^{-1}y^{-2}}$ **56.** $\frac{(2x^3y^{-2})^2}{8x^{-3}y^2}$

57. $\frac{(-3a)^{-2}}{a^{-2}b^{-2}}$ **58.** $\frac{3a^{-3}b^2}{2^{-1}c^2d^{-4}}$ **59.** $\frac{(a+b)^{-2}}{(a+b)^{-8}}$ **60.** $\frac{8x^{-8}y^{-12}}{2x^{-2}y^{-6}}$

61. $\frac{-12x^{-9}y^{10}}{4x^{-12}y^7}$ **62.** $\frac{(2x^2y^{-1})^6}{(4x^{-6}y^{-5})^2}$ **63.** $\frac{(a+3b)^{-12}}{(a+3b)^{10}}$ **64.** $\frac{(-a^{-5}b^6)^3}{(a^8b^4)^2}$

65. $x^{-2} + y^{-2}$ **66.** $(a^{-2}b^3)^{-1}$ **67.** $\left(\frac{x^{-2}}{y^3}\right)^{-1}$ **68.** $-2(1+x^2)^{-3}(2x)$

69. $-2(4-5x)^{-3}(-5)$ **70.** $-7(x^2-3x)^{-8}(2x-3)$

Determine un valor de x que haga cierta cada una de las siguientes ecuaciones.

71. $2^x \cdot 2^3 = 2^{12}$ **72.** $2^{-3} \cdot 2^x = 2^6$ **73.** $2^x \cdot 2^x = 2^{16}$

74. $2^x \cdot 2^{x-1} = 2^7$ **75.** $\frac{2^x}{2^2} = 2^{-5}$ **76.** $\frac{2^{-3}}{2^x} = 2^4$

77. Suponga que una sustancia decae de tal modo que $\frac{1}{2}$ de ella queda después de 1 hora. Si había 640 gramos al inicio, ¿cuánto queda después de 7 horas? ¿Cuánto después de n horas?

78. Si una cuerda tiene 243 pies de longitud y se cortan sucesivamente $\frac{2}{3}$ de su longitud, ¿cuánto queda después de 5 cortes? ¿Cuánto después de n cortes?

79. Para la cuerda del ejercicio anterior, ¿cuánto queda después de 5 cortes si cada vez se corta la tercera parte? ¿Cuánto queda después de n cortes?

80. Una empresa tiene un plan de 4 años para aumentar su personal la cuarta parte cada uno de esos años. Si el personal actual es de 2560, ¿cuántos habrá al final del plan cuatrienal? Formule una expresión exponencial que represente la fuerza laboral después de n años.

81. Cuando una inversión de P dólares gana i% de interés anual, y el interés se compone (capitaliza) anualmente, la fórmula de la cantidad final, A, después de n años, es $A = P(1+i)^n$, en la cual i se expresa en forma decimal. Calcule la cantidad A si se invierten $1000 al 10% compuesto anualmente durante 3 años.

82. Use la fórmula del problema anterior para calcular el número de años que tardaría en duplicarse una inversión de $1000, invertida al 10% de interés compuesto anualmente.

83. La "elevación a una potencia" no es propiedad conmutativa ni asociativa. Compruébelo indicando un contraejemplo para cada propiedad.

84. Con la definición de a^{-n} demuestre que $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$.

85. La luz viaja a una velocidad aproximada de 300,000 km por segundo. La distancia media de la Tierra al Sol es 150,000,000 de kilómetros. Use la notación científica para calcular cuánto tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra.

86. Basado en la información que aparece en el ejercicio 85, emplee notación científica para demostrar que 1 año luz, la distancia que la luz recorre en 1 año, es, aproximadamente, $9.44 \times 10^{12} = 9{,}440{,}000{,}000{,}000$ kilómetros.

Reto Suponga que chasquea sus dedos y los vuelve a chasquear 1 minuto después. A continuación espera 2 minutos y chasquea sus dedos, después, 4 minutos, 8 minutos, 16 minutos, etc. Esto es, se duplica el intervalo entre los chasquidos sucesivos. Si siguiera haciendo lo mismo durante 1 año, ¿cuántas veces chasquearía sus dedos? Primero adivine y después haga los cálculos.

Redacción Se ha dicho que 0^0 está indefinido. A continuación veremos por qué no se definió como igual a 1.

$$\textit{Suponga}\text{ que } 0^0 = 1. \text{ Entonces, } 1 = \frac{1}{1} = \frac{1^0}{0^0} = \left(\frac{1}{0}\right)^0.$$

1. ¿Cuál regla de los exponentes se usó en el último paso?
2. ¿Dónde estuvo el error?
3. Describa lo que sucede si se trata de evaluar 0^0 en una calculadora.

1.6 RADICALES Y EXPONENTES RACIONALES

¿Cuál es el valor de $\sqrt{25}$? ¿Dijo usted que ±5? Si lo hizo, ¡cometió un error muy común! Nótese que $\sqrt{25}$ se llama **radical** y sólo representa la raíz cuadrada positiva de 25; esto es, $\sqrt{25} = +5$. Para expresar la raíz cuadrada negativa de 25 se escribe $-\sqrt{25} = -5$. En resumen:

$$\text{Si } a > 0, \text{ entonces } \sqrt{a} = x, \text{ siendo } x > 0 \text{ y } x^2 = a.$$

La raíz cuadrada positiva $\sqrt{a}$, se llama *raíz cuadrada principal* de a.

Es propiedad fundamental de los números reales que todo número real positivo tiene exactamente una raíz enésima positiva. Además, todo número real negativo tiene una raíz enésima negativa, siempre que n sea impar.

En general, la **raíz enésima principal** de un número real $\sqrt[n]{a}$, se representa mediante $\sqrt[n]{a}$, pero esta expresión no siempre tiene significado. Por ejemplo, tratemos de evaluar $\sqrt[4]{-16}$:

$$2^4 = 16 \qquad (-2)^4 = 16$$

Parece que no hay número real x alguno tal que $x^4 = -16$. En general, *no hay número real que sea la raíz par de un número negativo.*

Tome nota de que, por ejemplo:

1. $\sqrt[3]{64} = 4$ *porque* $4^3 = 64$
2. $\sqrt[5]{0} = 0$ *porque* $0^5 = 0$.
3. $\sqrt[3]{-8} = -2$ *porque* $(-2)^3 = -8$
4. $\sqrt[4]{-16}$ *no es número real.*

DEFINICIÓN DE $\sqrt[n]{a}$; LA RAÍZ ENÉSIMA PRINCIPAL DE a

Sea a un número real y n un entero positivo, $n \geq 2$.

1. Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número positivo x tal que $x^n = a$.
2. $\sqrt[n]{0} = 0$.
3. Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número negativo x tal que $x^n = a$.
4. Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.

El símbolo $\sqrt[n]{a}$ también se llama **radical**; n es el **índice** o **raíz**, y a es el **radicando**.

EJEMPLO 1 Evalúe los radicales que sean números reales y compruebe lo obtenido. Si una expresión no es número real, diga por qué.

(a) $\sqrt[3]{-125}$ **(b)** $\sqrt{-9}$ **(c)** $(\sqrt[3]{8})^3$

Solución

(a) $\sqrt[3]{-125} = -5$

Comprobación: $(-5)^3 = -125$

En general, $(\sqrt[n]{a})^n = a$, *para n entero impar positivo.*

(b) $\sqrt{-9}$ no es número real, porque es la raíz par de un número negativo.

(c) $(\sqrt[3]{8})^3 = 8$

Comprobación: $\sqrt[3]{8} = 2$ y $2^3 = 8$ ■

Para multiplicar o dividir radicales, su índice debe ser igual, como vemos a continuación.

Ejemplos:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{-27} &= (2)(-3) = -6 \\ \sqrt[3]{(8)(-27)} &= \sqrt[3]{-216} = -6 \end{aligned}\right\} \quad \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(8)(-27)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}} &= \frac{6}{2} = 3 \\ \sqrt{\frac{36}{4}} &= \sqrt{9} = 3 \end{aligned}\right\} \quad \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}}$$

Para las siguientes reglas se supone que existen todos los radicales, de acuerdo con la definición de $\sqrt[n]{a}$ y, como siempre, que los denominadores no son cero.

Se pedirá demostrar estas reglas en los ejercicios 72 al 74.

REGLAS PARA LOS RADICALES

Si todos los radicales indicados son números reales, entonces

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ multiplicación de radicales
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ división de radicales, $b \neq 0$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Se sobrentiende que $\sqrt{a}$ quiere decir $\sqrt[2]{a}$.

Ejemplos: (Suponiendo que todas las variables representan números positivos.)

$$\sqrt{6x} \cdot \sqrt{7y} = \sqrt{6x \cdot 7y} = \sqrt{42xy}$$

$$\frac{\sqrt[3]{81x^7}}{\sqrt[3]{-3x}} = \sqrt[3]{\frac{81x^7}{-3x}} = \sqrt[3]{-27x^6} = -3x^2 \qquad \textit{Nota: } (-3x^2)^3 = -27x^6$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2 \qquad \textit{Nota: } 2^6 = 64$$

Ya estamos preparados para enunciar la ampliación del concepto exponencial para incluir exponentes fraccionarios. De nuevo, nuestra pauta será *preservar* las reglas anteriores para exponentes enteros. Primero, veamos la expresión $b^{1/5}$. Si se va a aplicar la regla 3 de los exponentes (página 31), entonces $(b^{1/5})^5 = b^{(1/5)(5)} = b$. Por tanto, $b^{1/5}$ es la raíz quinta de b; $b^{1/5} = \sqrt[5]{b}$. Esto da origen a la siguiente definición de $b^{1/n}$:

Como $\sqrt{-1}$ no es número real, $(-1)^{1/2}$ no está definido. En general, $b^{1/n}$ no está definido en el conjunto de los números reales cuando $b < 0$ y n es par.

DEFINICIÓN DE $b^{1/n}$

Para un número real, b, y un entero positivo, n ($n \geq 2$),

$$b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$$

siempre que exista $\sqrt[n]{b}$.

Ejemplos:

$$(-27)^{1/3} = \sqrt[3]{-27} = -3 \qquad 9^{-1/2} = \frac{1}{9^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$(-16)^{1/4}$ no está definido porque $\sqrt[4]{-16}$ no es número real.

Ahora que se ha definido $b^{1/n}$, podemos definir $b^{m/n}$, siendo $\dfrac{m}{n}$ cualquier número racional. De nuevo, deseamos que se apliquen las reglas anteriores de los exponentes. Por ejemplo, obsérvese que se puede evaluar $8^{2/3}$ con la *hipótesis* que se aplican las reglas de los exponentes enteros.

$$8^{2/3} = 8^{(1/3)\cdot 2} = (8^{1/3})^2 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$$

$$\uparrow$$

Regla 3

$$\downarrow$$

$$8^{2/3} = 8^{2\cdot(1/3)} = (8^2)^{1/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Nótese que siempre se puede expresar un número racional con un denominador positivo. Por ejemplo, $\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$.

Con estas observaciones llegamos a la definición siguiente:

DEFINICIÓN DE $b^{m/n}$

Sea $\frac{m}{n}$ un número racional, con $n \geq 2$. Si b es un número real tal que $\sqrt[n]{b}$ está definida, entonces

$$b^{m/n} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \sqrt[n]{b^m} \qquad \text{o bien} \qquad b^{m/n} = (b^{1/n})^m = (b^m)^{1/n}$$

Ejemplos:

$$(-64)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{-64}\right)^2 = (-4)^2 = 16 \quad \text{empleando } b^{m/n} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m$$

o bien

$$(-64)^{2/3} = \sqrt[3]{(-64)^2} = \sqrt[3]{4096} = 16 \quad \text{empleando } b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m}$$

En la mayor parte de los problemas como éstos es más fácil sacar primero la enésima raíz y después elevar a la emésima potencia, y no al revés.

Observamos que la definición anterior $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$ se amplía al caso $b^{-(m/n)}$ como sigue:

$$b^{-(m/n)} = b^{-m/n} = (b^{1/n})^{-m} = \frac{1}{(b^{1/n})^m} = \frac{1}{b^{m/n}}$$

EJEMPLO 2 Evaluar: $8^{-2/3} + (-32)^{-2/5}$

Solución Primero volvamos a escribir cada parte empleando exponentes positivos. Después apliquemos la definición de $b^{m/n}$ y sumemos:

$$8^{-2/3} + (-32)^{-2/5} = \frac{1}{8^{2/3}} + \frac{1}{(-32)^{2/5}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} + \frac{1}{(\sqrt[5]{-32})^2}$$

$$= \frac{1}{(2)^2} + \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ ■

Otro procedimiento para manejar un exponente fraccionario negativo:

$$8^{-2/3} = (8^{1/3})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

PRUEBE SU COMPRENSIÓN

Escriba lo siguiente empleando exponentes fraccionarios.

1. $\sqrt{7}$ **2.** $\sqrt[3]{-10}$ **3.** $\sqrt[4]{7}$ **4.** $\sqrt[3]{7^2}$ **5.** $(\sqrt[4]{5})^3$

Evalúe

6. $25^{1/2}$ **7.** $64^{1/3}$ **8.** $(\frac{1}{36})^{1/2}$ **9.** $49^{-1/2}$ **10.** $(-\frac{1}{27})^{-1/3}$

11. $4^{3/2}$ **12.** $4^{-3/2}$ **13.** $(\frac{81}{16})^{3/4}$ **14.** $(-8)^{2/3}$ **15.** $(-8)^{-2/3}$

Simplifique. Suponga que todas las variables representan números positivos.

16. $\sqrt[3]{-8x} \cdot \sqrt[3]{-27x^2}$ **17.** $\frac{\sqrt[5]{-4x^3}}{\sqrt[5]{128x^8}}$ **18.** $\sqrt[3]{\frac{1}{24}} \cdot \sqrt[3]{-81x^6}$

(Respuestas: página 83)

Las reglas básicas de los exponentes enteros se aplican también a los exponentes racionales. Trate de explicar cada paso en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Simplifique: $\left(\frac{-8a^3}{b^{-6}}\right)^{2/3}$

Solución

$$\left(\frac{-8a^3}{b^{-6}}\right)^{2/3} = \frac{(-8a^3)^{2/3}}{(b^{-6})^{2/3}} \qquad \text{Regla 5}$$

$$= \frac{(-8)^{2/3}(a^3)^{2/3}}{(b^{-6})^{2/3}} \qquad \text{Regla 4}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(-8)^2}a^2}{b^{-4}}$$

$$= 4a^2b^4 \qquad \sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

■

Cuando el índice de un radical es n y el radicando es una enésima potencia perfecta, no hay dificultad en calcular el radical. Por ejemplo:

$$\sqrt{36} + \sqrt[3]{-27} = 6 + (-3) = 3$$

Cuando el radicando no es enésima potencia perfecta, como en $\sqrt{24}$, podemos simplificar el radical para que no aparezca un cuadrado perfecto como factor del signo radical. Por ejemplo

Nota: El concepto fundamental que se usó aquí es que $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, siendo $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

Decimos que $2\sqrt{6}$ es la *forma simplificada* de $\sqrt{24}$.

EJEMPLO 4 Simplifique: **(a)** $\sqrt{50}$ **(b)** $\sqrt[3]{16}$ **(c)** $\sqrt[3]{-54}$

Solución

En las partes (b) y (c) buscamos si hay un cubo perfecto como factor bajo el signo radical.

(a) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

(b) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

(c) $\sqrt[3]{-54} = \sqrt[3]{(-27)(2)} = \sqrt[3]{-27} \cdot \sqrt[3]{2} = -3\sqrt[3]{2}$ ■

***Recuerde:** Para poder multiplicar dos radicales, deben tener el mismo índice.*

La regla de multiplicación de radicales constituye un modo de calcular el producto de dos radicales cualesquiera que tengan el mismo índice. En la suma de radicales, ¿tenemos algún caso semejante? Esto es, la suma de las raíces cuadradas de dos números ¿es igual a la raíz cuadrada de su suma? ¿ $\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{4+9}$? Podemos comprobarlo, como sigue:

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

Pero $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. Por consiguiente, $\sqrt{4} + \sqrt{9} \neq \sqrt{4+9}$.

En general, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b}$.

Para poder sumar o restar radicales, deben tener el mismo índice y el mismo radicando.

Por ejemplo, podemos emplear la propiedad distributiva para sumar radicales como sigue:

La siguiente tabla de cuadrados y cubos ayudará al lector a simplificar radicales.

$$3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = (3 + 4)\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$$

EJEMPLO 5 Simplifique: $\sqrt[3]{-24x^3} + 2\sqrt[3]{375x^3} - \sqrt[4]{162x^4} \qquad (x \geq 0)$

Solución Simplifique cada término buscando si tiene potencias perfectas como factores.

Entero	Cuadrado perfecto	Cubo perfecto
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1000

$$\sqrt[3]{-24x^3} = \sqrt[3]{(-8x^3)(3)} = -2x\sqrt[3]{3} \qquad (-2x)^3 = -8x^3$$

$$2\sqrt[3]{375x^3} = 2\sqrt[3]{(125x^3)(3)} = 2(5x)\sqrt[3]{3} = 10x\sqrt[3]{3} \qquad (5x)^3 = 125x^3$$

$$\sqrt[4]{162x^4} = \sqrt[4]{(81x^4)(2)} = 3x\sqrt[4]{2} \qquad (3x)^4 = 81x^4$$

Ahora, combine los términos que tengan el mismo índice y el mismo radicando.

$$-2x\sqrt[3]{3} + 10x\sqrt[3]{3} - 3x\sqrt[4]{2} = 8x\sqrt[3]{3} - 3x\sqrt[4]{2} \qquad ■$$

A veces se puede cambiar una fracción mediante un proceso llamado **racionalización del denominador**. Consiste en eliminar un radical del denominador de una fracción. Por ejemplo, veamos la fracción $4/\sqrt{2}$. Para racionalizar el denominador, multiplicamos por $\sqrt{2}$ el numerador y el denominador.

La razón principal para racionalizar los denominadores es obtener una forma con expresiones radicales en la que se puedan combinar o comparar con más facilidad.

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

EJEMPLO 6 Racionalice el denominador: **(a)** $\dfrac{6}{\sqrt{8}}$ **(b)** $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2}}$

Solución

(a) $\dfrac{6}{\sqrt{8}} = \dfrac{6 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{16}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Otra forma para simplificar la parte (a) es:

$$\frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(b) Multiplique numerador y denominador por $\sqrt[3]{4}$ para obtener la raíz cúbica de un cubo perfecto en el denominador.

$$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2} \qquad ■$$

EJEMPLO 7 Combine: $\dfrac{6}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{75} - \sqrt{3}$

Solución Racionalizamos el denominador del primer término, simplificamos el segundo término y combinamos:

$$\frac{6}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{75} - \sqrt{3} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} + 2\sqrt{25 \cdot 3} - \sqrt{3}$$
$$= 2\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 1\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

PRUEBE SU COMPRENSIÓN

Simplifique, de ser posible, cada una de las expresiones siguientes:

1. $\sqrt{8}+\sqrt{32}$ **2.** $\sqrt{12}+\sqrt{48}$ **3.** $\sqrt{45}-\sqrt{20}$

4. $\sqrt[3]{-16}+\sqrt[3]{54}$ **5.** $\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{125}$ **6.** $\sqrt[3]{-81}-\sqrt[3]{-24}$

7. $\frac{8}{\sqrt{2}}+\sqrt{98}$ **8.** $\frac{9}{\sqrt{3}}+\sqrt{300}$ **9.** $2\sqrt{20}-\frac{5}{\sqrt{5}}$

10. $3\sqrt{63}-\frac{14}{\sqrt{7}}$ **11.** $\frac{8}{\sqrt[3]{4}}+\sqrt[3]{16}$ **12.** $\sqrt[3]{81}-\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$

(Respuestas: página 83)

¿Cree usted que $\sqrt{x^2} = x$? Si ello fuera cierto, entonces, para $x = -5$, tendríamos que $\sqrt{(-5)^2} = -5$. Sin embargo, como dijimos en la página 38 el signo radical, $\sqrt{\ }$, indica la *raíz cuadrada positiva*. Por consiguiente, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{5^2} = 5$. Esto nos conduce al siguiente e importante resultado:

Para todos los números reales a, $\sqrt{a^2} = |a|$

Este resultado se puede ampliar como sigue:

Recuerde que $(\sqrt[n]{a})^n = a$ cuando n es impar o par, siempre que $\sqrt[n]{a}$ sea un número real.

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$, si n es par.

$\sqrt[n]{a^n} = a$, si n es impar.

Ejemplos:

$$\sqrt{75x^2} = \sqrt{25 \cdot 3}\sqrt{x^2} = 5\sqrt{3}|x|$$
$$\sqrt[7]{(-3)^7} = -3$$
$$\sqrt[8]{(-\tfrac{1}{2})^8} = |-\tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{2}$$

EJEMPLO 8 Simplifique $2\sqrt{8x^3} + 3x\sqrt{32x} - x\sqrt{18x}$

Nota: Las expresiones bajo los radicales serían negativas para $x < 0$. Como el índice es par, debemos suponer que $x \geq 0$, para que tengan significado.

Solución Para este problema, $x \geq 0$. Por consiguiente, no necesitamos usar la notación de valor absoluto.

$$2\sqrt{8x^3} = 2\sqrt{4 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x} = 4x\sqrt{2x}$$
$$3x\sqrt{32x} = 3x\sqrt{16 \cdot 2x} = 12x\sqrt{2x}$$
$$x\sqrt{18x} = x\sqrt{9 \cdot 2x} = 3x\sqrt{2x}$$

En cada caso, el radicando y el índice son iguales, de modo que se puede emplear la propiedad distributiva para simplificar.

$$4x\sqrt{2x} + 12x\sqrt{2x} - 3x\sqrt{2x} = (4x + 12x - 3x)\sqrt{2x} = 13x\sqrt{2x} \quad \blacksquare$$

PRECAUCIÓN: Aprenda a evitar estos errores

INCORRECTO	CORRECTO
$\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$	$\sqrt{9+16} = \sqrt{25}$
$(a+b)^{1/3} = a^{1/3} + b^{1/3}$	$(a+b)^{1/3} = \sqrt[3]{a+b}$
$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[2]{8} = \sqrt[5]{64}$	$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{8} = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
$2\sqrt{(x+1} = \sqrt{2x+2}$	$2\sqrt{x+1} = \sqrt{4(x+1)}$ $= \sqrt{4x+4}$
$\sqrt{(x-1)^2} = x-1$	$\sqrt{(x-1)^2} = \lvert x-1 \rvert$
$\sqrt{x^9} = x^3$	$\sqrt{x^9} = \sqrt{x^8 \cdot x} = x^4\sqrt{x}$
$a^{-1/2} + b^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$	$a^{-1/2} + b^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}$

EJERCICIOS 1.6

Evalúe.

1. $81^{-1/2}$ **2.** $\sqrt[3]{-64}$ **3.** $(64)^{-2/3}$

4. $(-64)^{1/3}$ **5.** $(-125)^{2/3}$ **6.** $(-125)^{-2/3}$

7. $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{-3}$ **8.** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ **9.** $\dfrac{\sqrt[3]{-3}}{\sqrt[3]{-24}}$

10. $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ **11.** $\dfrac{\sqrt{9}}{27^{-1/3}}$ **12.** $\dfrac{9^{1/2}}{\sqrt[3]{27}}$

13. $\sqrt[3]{(-125)(-1000)}$ **14.** $\sqrt{\sqrt{625}}$ **15.** $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-512}}$

16. $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$ **17.** $\sqrt{144 + 25}$ **18.** $\sqrt[5]{(-243)^2} \cdot (49)^{-1/2}$

19. $\left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{27}\right)^{1/3}$ **20.** $\sqrt{144} + \sqrt{25}$ **21.** $\left(\dfrac{16}{81}\right)^{3/4} + \left(\dfrac{256}{625}\right)^{1/4}$

22. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{1/3} + \left(\dfrac{1}{27}\right)^{-1/3}$ **23.** $\left(-\dfrac{125}{8}\right)^{1/3} - \left(\dfrac{1}{64}\right)^{1/3}$ **24.** $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-2/3} + \left(-\dfrac{32}{243}\right)^{2/5}$

Simplifique.

25. $\sqrt{2} + \sqrt{18}$ **26.** $\sqrt{32} + \sqrt{72}$ **27.** $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12}$

28. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{12}$ **29.** $2\sqrt{5} + 3\sqrt{125}$ **30.** $-5\sqrt{24} - 2\sqrt{54}$

31. $2\sqrt{200} - 5\sqrt{8}$ **32.** $3\sqrt{45} - 2\sqrt{20}$ **33.** $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{16}$

34. $\sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{81}$ **35.** $\dfrac{8}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{50}$ **36.** $\sqrt[3]{-54x} + \sqrt[3]{250x}$

37. $3\sqrt{8x^2} - \sqrt{50x^2}$ **38.** $5\sqrt{75x^2} - 2\sqrt{12x^2}$ **39.** $3\sqrt{10} + 4\sqrt{90} - 5\sqrt{40}$

40. $\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 10\sqrt{3} - 2\sqrt{12}$ **41.** $\dfrac{10}{\sqrt{5}} + 3\sqrt{45} - 2\sqrt{20}$ **42.** $10\sqrt{3x} - 2\sqrt{75x} + 3\sqrt{243x}$

43. $3\sqrt{9x^2} - 2\sqrt{16x^2} - \sqrt{25x^2}$ **44.** $\sqrt{2x^2} - 5\sqrt{32x^2} - 2\sqrt{98x^2}$ **45.** $\sqrt{x^2y} + \sqrt{8x^2y} + \sqrt{200x^2y}$

Racionalice los denominadores y simplifique.

46. $\dfrac{24}{\sqrt{6}}$ **47.** $\dfrac{8x}{\sqrt{2}}$ **48.** $\dfrac{10}{\sqrt{5}} - \dfrac{8}{\sqrt[3]{4}}$ **49.** $\dfrac{1}{\sqrt{18}}$

50. $\dfrac{1}{\sqrt{27}}$ **51.** $\dfrac{24}{\sqrt{3x^2}}$ **52.** $\dfrac{20x}{\sqrt{5x^3}}$ **53.** $\dfrac{8}{\sqrt[3]{2}}$

Simplifique y exprese todas las respuestas con exponentes positivos. (Suponga que todas las letras representan números positivos.)

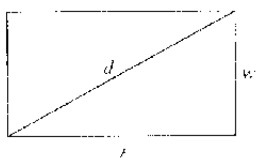
54. $(a^{-4}b^{-8})^{3/4}$ **55.** $(a^{-1/2}b^{1/3})(a^{1/2}b^{-1/3})$ **56.** $\dfrac{a^{-2}b^{-1/2}c^{1/3}}{a^{-3}b^{2}c^{-1/3}}$

57. $\left(\dfrac{64a^{6}}{b^{-9}}\right)^{2/3}$ **58.** $\dfrac{(49a^{-4})^{-1/2}}{(81b^{8})^{-1/2}}$ **59.** $\left(\dfrac{a^{-2}b^{3}}{a^{4}b^{-3}}\right)^{-1/2}\left(\dfrac{a^{4}b^{-5}}{ab}\right)^{-1/3}$

60. $\frac{2}{3}(3x-1)^{-1/3} \cdot 3$ **61.** $\frac{1}{2}(3x^2+2)^{-1/2} \cdot 6x$ **62.** $\frac{1}{3}(x^3+2)^{-2/3} \cdot 3x^2$

63. $\frac{1}{2}(x^2+4x)^{-1/2}(2x+4)$ **64.** $\frac{2}{3}(x^3-6x^2)^{-1/3}(3x^2-12x)$

65. La diagonal d, de un rectángulo se calcula con la fórmula $d = \sqrt{\ell^2 + w^2}$, siendo ℓ la longitud y w el ancho.



(a) Calcule d si $\ell = 20$ cm y $w = 15$ cm.
(b) Calcule d si $\ell = 16$ cm y $w = 10$ cm. Exprese la respuesta con una cifra decimal.

66. La fórmula $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ se llama **fórmula de Herón**. Expresa el área A de un triángulo cuyos lados son a, b y c, y cuyo semiperímetro es $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Demuestre que para un triángulo equilátero, cada uno de cuyos lados tiene longitud a, la fórmula de Herón se reduce a $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

***NOTA HISTÓRICA** Herón de Alejandría (véase el ejercicio 66) vivió aproximadamente en la segunda mitad del primer siglo d. de C. Escribió en el área de matemáticas aplicadas y demostró, por ejemplo, que los ángulos de incidencia y refracción en un espejo son iguales. Para más información, véase el libro de Eves,* An Introduction to the History of Mathematics, 5ª ed. *(Philadelphia: Saunders, 1983.)*

Combine y simplifique.

67. $\sqrt[3]{\frac{32}{x^3}} - \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x^4}}$ **68.** $\frac{\sqrt{72a^3}}{3b} - \frac{a\sqrt{50a}}{2b} + \frac{12a^2}{b\sqrt{2a}}$

Simplifique y exprese las respuestas sin radicales, usando sólo exponentes positivos. (Suponga que n es entero positivo y que las demás letras representan números positivos.)

69. $\sqrt[n]{\frac{x^{3n+1}y^n}{x^{3n-4}y^{2n}}}$ **70.** $\left(\frac{x^n}{x^{n+2}}\right)^{-1/2}$ **71.** $\sqrt[n]{\frac{x^n}{x^{n-2}}}$

Demuestre lo siguiente, suponiendo que todos los radicales son números reales.

72. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (*Sugerencia:* Sean $\sqrt[n]{a} = x$ y $\sqrt[n]{b} = y$. Entonces $x^n = a$ y $y^n = b$.)

73. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

74. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ (*Sugerencia:* Sea $x = \sqrt[mn]{a}$. Entonces $a = x^{mn}$.)

75. Use el resultado $\sqrt{a^2} = |a|$ y las reglas de los radicales para demostrar que $|xy| = |x|\cdot|y|$, siendo x y y números reales.

Redacción

1. Con las definiciones de $\sqrt{a}$ y de $|a|$ explique por qué $\sqrt{x^2} = |x|$ para todo número real x.
2. Vea la siguiente "demostración" de que 4 = – 4. Explique cuál fue el error en la deducción.

$$4 = \sqrt{16} = \sqrt{(-4)(-4)} = \sqrt{-4}\cdot\sqrt{-4} = (\sqrt{-4})^2 = -4$$

1.7 OPERACIONES FUNDAMENTALES CON POLINOMIOS

Nota: Todos los exponentes de la variable en un polinomio deben ser enteros no negativos. Por consiguiente, $x^3 + x^{1/2}$ y $x^{-2} + 3x + 1$ no son polinomios, por sus exponentes fraccionarios y negativos.

Algunos de esos polinomios tienen términos "faltantes". Por ejemplo, $x^3 - 3x + 12$ no tiene término en x^2, pero sigue siendo un polinomio de tercer grado.

La expresión $5x^3 - 7x^2 + 4x - 12$ se llama **polinomio en la variable x**. Su *grado* es 3, porque 3 es la mayor potencia de la variable x. Los *términos* de este polinomio son $5x^3$, $-7x^2$, $4x$ y -12. Los *coeficientes* son 5, –7, 4 y –12.

Una constante distinta de cero, como 9, es un polinomio de grado cero, porque $9 = 9x^0$. También al número cero se le llama polinomio constante, pero no se le asigna grado alguno.

Un polinomio se encuentra en su *forma estándar* si sus términos están ordenados de tal modo que las potencias de la variable queden en orden descendente o ascendente. A continuación presentamos algunos ejemplos.

Polinomio	Grado	Forma estándar
$x^3 - 3x + 12$	3	Sí
$\frac{2}{3}x^{10} - 4x^2 + \sqrt{2}\,x^4$	10	No
$32 - y^5 + 2y^2$	5	No
$6 + 2x - x^2 + x^3$	3	Sí

Los polinomios que tienen uno, dos o tres términos, tienen nombres especiales:

Número de términos	Nombre del polinomio	Ejemplo
Uno	Monomio	$17x^4$
Dos	Binomio	$\frac{1}{2}x^3 - 6x$
Tres	Trinomio	$x^5 - x^2 + 2$

En general, un polinomio de grado n en la variable x se puede escribir en cualquiera de las siguientes formas estándar:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son números reales, y los exponentes son enteros no negativos. El *coeficiente principal* es $a_n \neq 0$, y a_0 es el *término constante.* (También se puede considerar que a_0 es el coeficiente del término a_0x^0.)

En un polinomio como $3x^2 - x + 4$ la variable x representa un número real. Por consiguiente, cuando se sustituye un valor real específico en lugar de x, el resultado será un número real. Por ejemplo, con $x = -3$ en ese polinomio, se obtiene

$$3(-3)^2 - (-3) + 4 = 34$$

Nota: Los cálculos con polinomios se basan en las propiedades fundamentales de los números reales, porque las variables representan números reales.

La suma o resta de polinomios implica la reducción de **términos semejantes** (que son los que tienen el mismo exponente en la variable). La reducción se logra rearreglando y reagrupando primero los términos (propiedades asociativa y conmutativa) para después reducir empleando la propiedad distributiva.

EJEMPLO 1 Sumar: $(4x^3 - 10x^2 + 5x + 8) + (12x^2 - 9x - 1)$

Solución

(a) $(4x^3 - 10x^2 + 5x + 8) + (12x^2 - 9x - 1)$
$$= 4x^3 + (12x^2 - 10x^2) + (5x - 9x) + (8 - 1)$$
$$= 4x^3 + 2x^2 - 4x + 7$$

En el método (b) hacemos una lista, en forma de columna, de los polinomios, colocando los términos semejantes en la misma columna.

(b)
$$\begin{array}{rr} & 4x^3 - 10x^2 + 5x + 8 \\ (+) & 12x^2 - 9x - 1 \\ \hline & 4x^3 + 2x^2 - 4x + 7 \end{array}$$

■

Los polinomios pueden contener más de una variable, como en el ejemplo 2. Nuevamente, se puede llevar a cabo la resta de dos maneras distintas, como veremos.

El ejemplo 2 tiene la forma $a - b$. Imaginemos que es $a - 1 \cdot b$ usemos la propiedad distributiva para simplificar, en el método (a).

EJEMPLO 2 Restar: $(4a^3 - 10a^2b + 5b + 8) - (12a^2b - 9b - 1)$

Solución

(a) $(4a^3 - 10a^2b + 5b + 8) - (12a^2b - 9b - 1)$
$$= 4a^3 - 10a^2b + 5b + 8 - 12a^2b + 9b + 1$$
$$= 4a^3 - 10a^2b - 12a^2b + 5b + 9b + 8 + 1$$
$$= 4a^3 - 22a^2b + 14b + 9$$

(b)

$$\begin{array}{rr} & 4a^3 - 10a^2b + 5b + 8 \\ (-) & \underline{\phantom{4a^3 -{}} 12a^2b - 9b - 1} \\ & 4a^3 - 22a^2b + 14b + 9 \end{array}$$

■

El empleo de la propiedad distributiva es fundamental cuando se multiplican los polinomios. Quizá el caso más sencillo es el del producto de un **monomio** (polinomio que sólo tiene un término) por un polinomio de dos o más términos, como sigue:

$$\begin{aligned} 3x^2(4x^7 - 3x^4 - x^2 + 15) &= 3x^2(4x^7) - 3x^2(3x^4) - 3x^2(x^2) + 3x^2(15) \\ &= 12x^9 - 9x^6 - 3x^4 + 45x^2 \end{aligned}$$

En el primer renglón hemos empleado una versión ampliada de la propiedad distributiva, que es,

$$a(b - c - d + e) = ab - ac - ad + ae$$

A continuación observemos cómo se emplea la propiedad distributiva para multiplicar dos **binomios** (polinomios que tienen dos términos).

$$\begin{aligned} (2x + 3)(4x + 5) &= (2x + 3)4x + (2x + 3)5 \\ &= (2x)(4x) + (3)(4x) + (2x)(5) + (3)(5) \\ &= 8x^2 + 12x + 10x + 15 \\ &= 8x^2 + 22x + 15 \end{aligned}$$

Veamos a continuación un atajo para multiplicar dos binomios.

$8x^2$ 15

$$(2x + 3)(4x + 5)$$

$12x$

$10x$

$8x^2$ es el producto de los *primeros* términos de los binomios. $10x$ y $12x$ son los productos de los términos *exteriores* e *interiores*. 15 es el producto de los *últimos* términos.

$$(2x + 3)(4x + 5) = 8x^2 + 22x + 15$$

En general, podemos escribir como sigue el producto $(a + b)(c + d)$:

bd

ac

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

bc

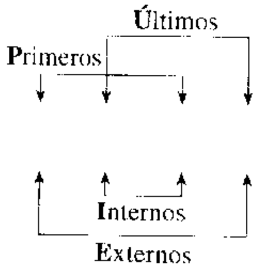
ad

Primeros Externos Internos Últimos

Recuerde este diagrama, como auxiliar para determinar mentalmente el producto de dos binomios.

EJEMPLO 3 Determine el producto de $ax + b$ por $cx + d$ con el método de inspección visual.

Solución



$$\overset{acx^2}{(ax} + \overset{bd}{b)(cx} + d) = acx^2 + (bc + ad)x + bd \qquad bcx \qquad adx$$

■

La propiedad distributiva se puede ampliar para multiplicar polinomios con tres términos, los **trinomios**, como en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Multiplique $3x^3 - 8x + 4$ por $2x^2 + 5x - 1$.

Nota: El método de la columna es muy cómodo y se organiza el trabajo. Asegúrese de mantener los términos semejantes en la misma columna. Haga $x = 2$ y compruebe la solución.

Solución

$$\begin{array}{lrrrrrrl}
 & & & 3x^3 & & -\ 8x & +\ 4 & \\
 & & & & 2x^2 & +\ 5x & -\ 1 & \\
\hline
\text{(sumar)} & & & -\ 3x^3 & & +\ 8x & -\ 4 & -1 \text{ por } 3x^3 - 8x + 4 \\
 & & 15x^4 & & -\ 40x^2 & +\ 20x & & 5x \text{ por } 3x^3 - 8x + 4 \\
 & 6x^5 & & -\ 16x^3 & +\ 8x^2 & & & 2x^2 \text{ por } 3x^3 - 8x + 4 \\
\hline
 & 6x^5 & +\ 15x^4 & -\ 19x^3 & -\ 32x^2 & +\ 28x & -\ 4 &
\end{array}$$

■

PRUEBE SU COMPRENSIÓN

Reduzca.

1. $(x^2 + 2x - 6) + (-2x + 7)$
2. $(x^2 + 2x - 6) - (-2x + 7)$
3. $(5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1) + (-5x^4 + 6x^3 + 10x)$
4. $(x^2y + 3xy + xy^2) + (3x^2y - 6xy) - (2xy - 5xy^2)$

Determine los productos.

5. $(-3x)(x^3 + 2x^2 - 1)$
6. $(2x + 3)(3x + 2)$
7. $(6x - 1)(2x + 5)$
8. $(4x + 7)(4x - 7)$
9. $(2x - 3y)(2x - 3y)$
10. $(x^2 - 3x + 5)(2x^3 + x^2 - 3x)$

(Respuestas: página 83)

A veces interviene más de una operación, como veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Simplifique efectuando las operaciones indicadas:

$$(x^2 - 5x)(3x^2) + (x^3 - 1)(2x - 5)$$

Solución Primero multiplicaremos y después reduciremos los términos semejantes.

$$\begin{aligned}(x^2 - 5x)(3x^2) + (x^3 - 1)(2x - 5) &= (3x^4 - 15x^3) + (2x^4 - 5x^3 - 2x + 5)\\ &= 5x^4 - 20x^3 - 2x + 5\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 6 Desarrollar $(a + b)^3$

PRECAUCIÓN $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

*El resultado del ejemplo 6 nos da una **fórmula para el cubo de un binomio**, esto es, para todos los desarrollos de la forma $(a + b)^3$.*

Solución Primero escribamos $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$. A continuación usaremos **la forma desarrollada de** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Así:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$ ■

El ejemplo que sigue muestra una aplicación del producto de binomios: usa el producto $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ para racionalizar denominadores. Cada uno de los dos factores, $a - b$ y $a + b$, se llama *conjugado* del otro.

EJEMPLO 7 Racionalice el denominador en: $\dfrac{5}{\sqrt{10} - \sqrt{3}}$

Solución

$\sqrt{10} + \sqrt{3}$ es el conjugado de $\sqrt{10} - \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}\frac{5}{\sqrt{10} - \sqrt{3}} &= \frac{5}{\sqrt{10} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{10} + \sqrt{3}}{\sqrt{10} + \sqrt{3}}\\ &= \frac{5(\sqrt{10} + \sqrt{3})}{10 - 3}\\ &= \frac{5(\sqrt{10} + \sqrt{3})}{7}\end{aligned}$$ ■

EJERCICIOS 1.7

Haga las siguientes sumas.

1. $\begin{array}{r} 3x^2 + 5x - 2 \\ \underline{5x^2 - 7x + 9} \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 5x^2 - 9x - 1 \\ \underline{2x^2 + 2x + 7} \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 3x^3 - 7x^2 + 8x + 12 \\ \underline{x^3 - 2x^2 + 8x - 9} \end{array}$

4. $\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 2x - 5 \\ \underline{5x^2 - x + 9} \end{array}$

5. $\begin{array}{r} 4x^2 + 9x - 17 \\ \underline{2x^3 - 3x^2 + 2x - 11} \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 - 7x + 1 \\ \underline{-2x^2 - x + 8} \end{array}$

En los ejercicios 7 al 9, reste el segundo polinomio del primero.

7. $\begin{array}{r} 3x^3 - 2x^2 - 8x + 9 \\ \underline{2x^3 + 5x^2 + 2x + 1} \end{array}$

8. $\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + 6x + 1 \\ \underline{- x^2 - 6x - 1} \end{array}$

9. $\begin{array}{r} 4x^3 + x^2 - 2x - 13 \\ \underline{2x^2 + 3x + 9} \end{array}$

Simplifique efectuando las operaciones indicadas.

10. $(3x + 5) + (3x - 2)$
11. $5x + (1 - 2x)$
12. $(7x + 5) - (2x + 3)$
13. $(y + 2) + (2y + 1) + (3y + 3)$
14. $h - (h + 2)$
15. $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^2 + 2x + 1)$
16. $7x - (3 - x) - 2x$
17. $5y - [y - (3y + 8)]$
18. $(2x^3y^2 - 5xy + x^2y^3) + (3xy - x^2y^3)$
19. $(5x - 2xy + x^2y^2) - (2x + xy - x^2y^2)$
20. $x(3x^2 - 2x + 5)$
21. $2x^2(2x + 1 - 10x^2)$
22. $-4t\left(t^4 - \frac{1}{4}t^3 + 4t^2 - \frac{1}{16}t + 1\right)$
23. $(x + 1)(x + 1)$
24. $(2x + 1)(2x - 1)$
25. $(4x - 2)(x + 7)$
26. $(12x - 8)(7x + 4)$
27. $(-2x + 3)(3x + 6)$
28. $(-2x - 3)(3x + 6)$
29. $(-2x - 3)(3x - 6)$
30. $\left(\frac{1}{2}x + 4\right)\left(\frac{1}{2}x - 4\right)$
31. $\left(\frac{2}{3}x + 6\right)\left(\frac{2}{3}x + 6\right)$
32. $(7 + 3x)(9 - 4x)$
33. $(7 - 3x)(4x - 9)$
34. $\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)$
35. $\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{4}\right)$
36. $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$
37. $(\sqrt{x} - 10)(\sqrt{x} + 10)$
38. $\left(\frac{1}{10}x - \frac{1}{100}\right)\left(\frac{1}{10}x - \frac{1}{100}\right)$
39. $(\sqrt{x} + \sqrt{2})(\sqrt{x} - \sqrt{2})$
40. $(x^2 - 3)(x^2 + 3)$
41. $(x^2 + x + 9)(x^2 - 3x - 4)$
42. $(x^{1/3} - 2)(x^{2/3} + 2x^{1/3} + 4)$
43. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
44. $(x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$
45. $(x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$
46. $(x^n - 4)(x^n + 4)$
47. $(x^{2n} + 1)(x^{2n} - 2)$
48. $5(x + 5)(x - 5)$
49. $3x(1 - x)(1 - x)$
50. $(x + 3)(x + 1)(x - 4)$
51. $(2x + 1)(3x - 2)(3 - x)$
52. $(2x^2 + 3)(9x^2) + (3x^3 - 2)(4x)$
53. $(x^3 - 2x + 1)(2x) + (x^2 - 2)(3x^2 - 2)$
54. $(2x^3 - x^2)(6x - 5) + (3x^2 - 5x)(6x^2 - 2x)$
55. $(x^4 - 3x^2 + 5)(2x + 3) + (x^2 + 3x)(4x^3 - 6x)$

Desarrolle cada una de las siguientes expresiones y reduzca los términos semejantes.

56. $(a - b)^2$
57. $(x - 1)^3$
58. $(x + 1)^4$
59. $(a + b)^4$
60. $(a - b)^4$
61. $(2x + 3)^3$
62. $\left(\frac{1}{2}x - 4\right)^2$
63. $\left(\frac{1}{3}x + 3\right)^3$
64. $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^3$

Racionalice el denominador y simplifique.

65. $\dfrac{12}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$
66. $\dfrac{20}{3 - \sqrt{2}}$
67. $\dfrac{14}{\sqrt{2} - 3}$
68. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$
69. $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$
70. $\dfrac{1}{\sqrt{x} + 2}$

Racionalice el numerador.

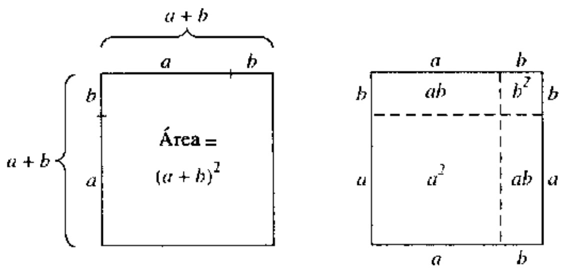
71. $\dfrac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{5}}$
72. $\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
73. $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

Indique cómo pasar de la primera fracción a la segunda.

74. $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$ **75.** $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$; $\dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}$

Reto Sin efectuar las operaciones aritméticas indicadas, calcule el valor de P si $P^3 = 2^{18} + 2^{12} \cdot 3^5 + 2^6 \cdot 3^9 + 3^{12}$. (*Sugerencia:* Use el desarrollo de $(a + b)^3$.)

Redacción En sus propias palabras, con un mínimo de símbolos algebraicos, explique cómo es que las figuras que siguen son una interpretación geométrica del desarrollo de $(a + b)^2$. A continuación determine una interpretación geométrica de la fórmula $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.



1.8 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

En cierto sentido, factorizar es "deshacer la multiplicación".

No es difícil multiplicar tres binomios, como $x + 2$, $x - 2$ y $x - 3$, y obtener el polinomio, en este caso, $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$. Sin embargo, es más difícil *comenzar* con $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ y **factorizarlo** (*deshacer la multiplicación*) llegando a la forma $(x + 2)(x - 2)(x - 3)$.

Uno de los métodos básicos de factorizar es el inverso de multiplicar por un monomio. Veamos este problema de multiplicación:

$$6x^2(4x^7 - 3x^4 - x^2 + 15) = 24x^9 - 18x^6 - 6x^4 + 90x^2$$

Al leer esta ecuación de derecha a izquierda se ve que implica una multiplicación por $6x^2$. Al leerla de derecha a izquierda implica "factorizar" el *monomio que es factor común*, $6x^2$. A continuación presentamos los detalles de este proceso de factorización:

En este ejemplo, vemos el uso de la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned}24x^9 - 18x^6 - 6x^4 + 90x^2 &= 6x^2(4x^7) - 6x^2(3x^4) - 6x^2(x^2) + 6x^2(15)\\ &= 6x^2(4x^7 - 3x^4 - x^2 + 15)\end{aligned}$$

Para variar, vamos a suponer, que usamos $3x$ como factor común:

$$24x^9 - 18x^6 - 6x^4 + 90x^2 = 3x(8x^8 - 6x^5 - 2x^3 + 30x)$$

La instrucción "factorizar" siempre significa que debemos determinar la forma totalmente factorizada de la expresión dada.

La factorización es correcta, pero no se considera que sea la *forma totalmente factorizada*, porque todavía se puede sacar a $2x$ como factor común de la expresión entre paréntesis.

Las técnicas de factorización se extienden a los polinomios con más de una variable, como en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 1 Factorice:

(a) $21x^4y - 14x^5y^2 - 63x^8y^3 + 91x^{11}y^4$

(b) $8x^2(x-1) + 4x(x-1) + 2(x-1)$

Solución

(a) $21x^4y - 14x^5y^2 - 63x^8y^3 + 91x^{11}y^4 = 7x^4y(3 - 2xy - 9x^4y^2 + 13x^7y^3)$

(b) $8x^2(x-1) + 4x(x-1) + 2(x-1) = 2(x-1)(4x^2 + 2x + 1)$ ■

Ahora pasaremos a describir varios procedimientos básicos para factorizar polinomios. El lector debe comprobar cada uno por multiplicación. Estas formas son muy útiles y se debe aprender a reconocerlas y a aplicarlas.

DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Ejemplos:

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$$
$$3x^2 - 75 = 3(x^2 - 25) = 3(x-5)(x+5)$$

Asegúrese de comprobar cada una de estas expresiones multiplicando.

DIFERENCIA (SUMA) DE DOS CUBOS

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Recuerde: Primero busque un monomio que sea factor común.

Ejemplos:

$$8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3 = (2x-3)(4x^2 + 6x + 9)$$
$$2x^3 + 128y^3 = 2(x^3 + 64y^3) = 2[x^3 + (4y)^3] = 2(x+4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$$

PRUEBE SU COMPRENSIÓN

Factorice el monomio común.

1. $3x - 9$ **2.** $-5x + 15$ **3.** $5xy + 25y^2 + 10y^5$

Factorice la diferencia de cuadrados.

4. $x^2 - 36$ **5.** $4x^2 - 49$ **6.** $(a+2)^2 - 25b^2$

Factorice la diferencia o suma de dos cubos.

7. $x^3 - 27$ **8.** $x^3 + 27$ **9.** $8a^3 - 125$

Factorice lo siguiente, considerando monomios que sean factores comunes.

10. $3x^2 - 48$ **11.** $ax^3 + ay^3$ **12.** $2hx^2 - 8h^3$

(Respuestas: página 83)

No es posible factorizar $x^2 - 5$ o $x - 8$ como diferencia de dos cuadrados empleando factores polinomiales con coeficientes enteros. Sin embargo, hay veces en que es deseable permitir otras factorizaciones, como en los siguientes casos.

$$x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2 = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$$
$$x - 8 = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{8})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{8})(\sqrt{x} - \sqrt{8})$$
$$x - 8 = (x^{1/3})^3 - 2^3 = (x^{1/3} - 2)(x^{2/3} + 2x^{1/3} + 4)$$

En general, cuando se factoriza seguimos esta regla general:

> A menos que se indique otra cosa, se usa el mismo tipo de coeficientes y exponentes numéricos en los factores, que el que aparece en la forma no factorizada.

De igual forma que podemos factorizar la diferencia de dos cuadrados o cubos, también podemos factorizar la diferencia de dos cuartas potencias, dos quintas potencias, etcétera. Todos esos casos se pueden agrupar en la forma general siguiente, que expresa la factorización de la diferencia de dos enésimas potencias, siendo n un entero mayor que 1.

La factorización de $a^n - b^n$ es una de las más útiles en matemáticas; se necesitará en cálculo.

DIFERENCIA DE DOS ENÉSIMAS POTENCIAS

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Para ayudarnos a recordar el segundo factor lo podemos escribir como sigue:

$$a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1}$$

El lector puede ver que los exponentes de a comienzan en $n - 1$ y decrecen hasta llegar a 0, mientras que los de b comienzan en 0 y crecen hasta $n - 1$. También, nótese que la suma de los exponentes de a y b en cada término es $n - 1$.

EJEMPLO 2 Factorice: $3y^5 - 96$

Solución Primero sacamos a 3 como factor común; después empleamos la forma $a^5 - b^5$.

$$3y^5 - 96 = 3(y^5 - 32) = 3(y^5 - 2^5)$$
$$= 3(y - 2)(y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 8y + 16)$$ ■

EJEMPLO 3 Factorice: $x^6 - 1$.

Solución Es posible hacerlo de varias formas.

(a) Con la fórmula de la diferencia de dos enésimas potencias:

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

(b) Con la fórmula de la diferencia de dos cubos:

$$x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$
$$= (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

Nótese que en (c) continuamos factorizando la diferencia y suma de dos cubos. Esto nos da la factorización completa de $x^6 - 1$, porque ninguno de los dos factores cuadráticos es factorizable.

(c) Con la fórmula de la diferencia de dos cuadrados:

$$\begin{aligned} x^6 - 1 &= (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$ ■

Algunos polinomios de 4 términos que no parecen ser factorizables, por no tener un monomio como factor común en todos los términos, se pueden factorizar con un método que se llama **agrupación**. A continuación agruparemos el polinomio dado en dos binomios, cada uno de los cuales es factorizable.

PRECAUCIÓN
$x^2(x + 3) + 9(x + 3)$ no es forma factorizada de la ecuación dada. ¿Por qué no?

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 9x + 27 &= (x^3 + 3x^2) + (9x + 27) \\ &= x^2(x + 3) + 9(x + 3) \\ &= (x^2 + 9)(x + 3) \end{aligned}$$

A continuación vemos un agrupamiento alterno que nos conduce a la misma respuesta.

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 9x + 27 &= (x^3 + 27) + (3x^2 + 9x) \\ &= (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + (x + 3)(3x) \\ &= (x + 3)(x^2 - 3x + 9 + 3x) \\ &= (x + 3)(x^2 + 9) \end{aligned}$$

No toda agrupación es productiva. Así, en el ejemplo 4 la agrupación $(ax^2 + 15) + (-3x - 5ax)$ no conduce a solución alguna.

EJEMPLO 4 Factorice $ax^2 + 15 - 5ax - 3x$ agrupando.

Solución

$$\begin{aligned} ax^2 + 15 - 5ax - 3x &= (ax^2 - 5ax) + (15 - 3x) \\ &= ax(x - 5) + 3(5 - x) \\ &= ax(x - 5) - 3(x - 5) \\ &= (ax - 3)(x - 5) \end{aligned}$$ ■

Podemos llegar a las siguientes fórmulas multiplicando $a + b$ por $a + b$, y $a - b$ por $a - b$:

Obsérvese que en $a^2 \pm 2ab + b^2$ el término de en medio es más o menos el doble del producto de a por b. Por consiguiente, la forma factorizada es el cuadrado de la suma $a + b$, o la diferencia $a - b$.

TRINOMIOS CUADRADOS PERFECTOS

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

EJEMPLO 5 Factorice: **(a)** $x^2 + 10x + 25$ **(b)** $9x^3 - 42x^2 + 49x$

Solución

En el ejemplo 5(b) sean $a = 3x$ y $b = 7$. Entonces, $2ab = 2(3x)(7) = 42x$.

(a) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2(x \cdot 5) + 5^2 = (x + 5)^2$

(b) $9x^3 - 42x^2 + 49x = x(9x^2 - 42x + 49) = x(3x - 7)^2$ ■

Otra técnica de factorización que describiremos es para trinomios que no necesariamente sean cuadrados perfectos, como $x^2 + 7x + 12$. De acuerdo con nuestra experiencia al multiplicar binomios, podemos anticipar que los factores de $x^2 + 7x + 12$ tendrán la forma siguiente:

$$(x + \underline{?})(x + \underline{?})$$

Necesitamos llenar los espacios con dos enteros cuyo producto sea 12. Además, el término intermedio del producto debe ser $+7x$. Las elecciones posibles de los dos enteros son

12 y 1 6 y 12 4 y 3

Ahora, la determinación del par correcto es cosa de tanteos. Las factorizaciones posibles son:

$$(x + 12)(x + 1) \qquad (x + 6)(x + 2) \qquad (x + 4)(x + 3)$$

Sólo la última forma produce el término intermedio correcto, $7x$. Por consiguiente, llegamos a la conclusión que $x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$.

EJEMPLO 6 Factorice: $x^2 - 10x + 24$

Solución El último término, +24, debe ser el producto de dos números positivos o dos negativos. (¿Por qué?) Como el término intermedio, $-10x$, tiene signo menos, la factorización deberá tener la forma siguiente:

$$(x - \underline{?})(x - \underline{?})$$

Ahora probaremos todos los pares de enteros cuyo producto sea 24: 24 con 1, 12 con 2, 8 con 3 y 6 con 4. Sólo el último de ellos produce $-10x$ como término intermedio. Por tanto,

$$x^2 - 10x + 24 = (x - 6)(x - 4)$$ ■

Pasaremos a ver un problema de factorización algo más complicado. Por ejemplo, para factorizar el trinomio $15x^2 + 43x + 8$ necesitamos tener en cuenta los factores posibles tanto de 15 como de 8:

Los signos más en los factores tentativos se deben a los dos signos más en el trinomio dado.

$$15 = 15 \cdot 1 \qquad 15 = 5 \cdot 3 \qquad 8 = 8 \cdot 1 \qquad 8 = 4 \cdot 2$$

Si usamos $15 \cdot 1$, escribimos la forma

$$(15x + \underline{?})(x + \underline{?})$$

*Con suerte y mucho más experiencia el lector puede, a menudo, evitar probar **todas** las posibilidades para poder determinar los factores correctos. Verá entonces que el trabajo se puede acortar mucho.*

Probemos 8 y 1 en los espacios, *de ambos modos*, o sea:

$$(15x + 8)(x + 1) \qquad (15x + 1)(x + 8)$$

Ninguno de ellos da un término intermedio igual a $43x$; por consiguiente probaremos ahora 4 y 2 en los huecos, de ambos modos. De nuevo verá el lector que tampoco trabaja alguno de esos casos. A continuación probaremos la forma

$$(5x + \underline{?})(3x + \underline{?})$$

De nuevo probemos 4 y 2 de ambas maneras y 8 y 1 también. La respuesta correcta es:

$$15x^2 + 43x + 8 = (5x + 1)(3x + 8)$$

El ejemplo 7 nos muestra que no todo trinomio se puede factorizar.

EJEMPLO 7 Factorice: $12x^2 - 9x + 2$

Solución Veamos las formas

$$(12x - \underline{?})(x - \underline{?}) \qquad (6x - \underline{?})(2x - \underline{?}) \qquad (4x - \underline{?})(3x - \underline{?})$$

En cada forma se prueban 2 y 1 de las dos maneras. Ninguna de ellas produce un término intermedio igual a $-9x$; por consiguiente llegamos a la conclusión que $12x^2 - 9x + 2$ *no es factorizable* con coeficientes enteros. ■

PRUEBE SU COMPRENSIÓN

Factorice los siguientes trinomios cuadrados.

1. $a^2 + 6a + 9$ **2.** $x^2 - 10x + 25$ **3.** $4x^2 + 12xy + 9y^2$

Factorice, de ser posible, cada uno de los trinomios siguientes.

4. $x^2 + 8x + 15$ **5.** $a^2 - 12a + 20$ **6.** $x^2 + 3x + 4$

7. $10x^2 - 39x + 14$ **8.** $6x^2 - 11x - 10$ **9.** $6x^2 + 6x - 5$

(Respuestas: página 83)

El lector verá que es más fácil no poner el signo de las dos formas binomiales mientras prueba varios casos. Como tenemos el término −8, los signos deben ser opuestos.

EJEMPLO 8 Factorice: $15x^2 + 7x - 8$

Solución Probaremos con las formas siguientes:

$$(5x \quad \underline{?})(3x \quad \underline{?}) \qquad (15x \quad \underline{?})(x \quad \underline{?})$$

En cada una de las formas se prueban los factores de 8 (que son 2 con 4 y 1 con 8) y se busca un término intermedio que sea $7x$. A continuación se insertan los signos adecuados para obtener $(15x - 8)(x + 1)$. ■

Todos los trinomios que hemos visto fueron de grado 2. Se pueden modificar los mismos métodos para factorizar ciertos trinomios de grado mayor, como en el ejemplo 9.

EJEMPLO 9 Factorice: **(a)** $x^4 - x^2 - 12$ **(b)** $a^6 - 3a^3b - 18b^2$

Solución

(a) Nótese que $x^4 = (x^2)^2$; sea $u = x^2$. Entonces

El paso de sustitución en el ejemplo 9(a) cambia la factorización de la de un trinomio de cuarto grado a la de uno de segundo grado. Si en la parte (b) $u = a^3$, tendremos el mismo efecto.

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 - 12 &= u^2 - u - 12 \\ &= (u - 4)(u + 3) \\ &= (x^2 - 4)(x^2 + 3) \\ &= (x - 2)(x + 2)(x^2 + 3) \end{aligned}$$

(b) $a^6 - 3a^3b - 18b^2 = (a^3 - 6b)(a^3 + 3b)$ ■

PRECAUCIÓN: Aprenda a evitar estos errores	
INCORRECTO	**CORRECTO**
$(x+2)3+(x+2)y=(x+2)3y$	$(x+2)3+(x+2)y$ $=(x+2)(3+y)$
$3x+1=3(x+1)$	$3x+1$ no es factorizable con enteros.
$x^3-y^3=(x-y)(x^2+y^2)$	$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$
x^3+8 no es factorizable.	$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$
$x^2+y^2=(x+y)(x+y)$	x^2+y^2 no es factorizable con números reales.
$4x^2-6xy+9y^2=(2x-3y)^2$	$4x^2-6xy+9y^2$ no es trinomio cuadrado perfecto y no se puede factorizar usando enteros.

EJERCICIOS 1.8

Factorice en forma de diferencia de dos cuadrados.

1. $4x^2 - 9$ **2.** $25x^2 - 144y^2$ **3.** $a^2 - 121b^2$

Factorice como diferencia o suma de dos cubos.

4. $x^3 - 8$ **5.** $x^3 + 64$ **6.** $8x^3 + 1$
7. $125x^3 - 64$ **8.** $8 - 27a^3$ **9.** $8x^3 + 343y^3$

Factorice como diferencia de dos cuadrados; se permite usar números irracionales y expresiones radicales. Todas las letras representan números positivos.

10. $a^2 - 15$ **11.** $3 - 4x^2$ **12.** $x - 1$
13. $x - 36$ **14.** $2x - 9$ **15.** $8 - 3x$

Factorice en forma de diferencia o suma de dos cubos; se permiten números irracionales y expresiones radicales.

16. $x^3 - 2$ **17.** $7 + a^3$ **18.** $1 - h$
19. $27x + 1$ **20.** $27x - 64$ **21.** $3x - 4$

Factorice agrupando.

22. $a^2 - 2b + 2a - ab$ **23.** $x^2 - y - x + xy$ **24.** $x + 1 + y + xy$
25. $-y - x + 1 + xy$ **26.** $ax + by + ay + bx$ **27.** $2 - y^2 + 2x - xy^2$

Factorice por completo.

28. $8a^2 - 2b^2$ **29.** $7x^3 + 7h^3$ **30.** $81x^4 - 256y^4$
31. $a^8 - b^8$ **32.** $40ab^3 - 5a^4$ **33.** $a^5 - 32$

34. $x^6 + x^2y^4 - x^4y^2 - y^6$ **35.** $a^3x - b^3y + b^3x - a^3y$ **36.** $7a^2 - 35b + 35a - 7ab$
37. $x^5 - 16xy^4 - 2x^4y + 32y^5$

Factorice cada uno de los trinomios siguientes.

38. $12a^2 - 13a + 1$ **39.** $20a^2 - 9a + 1$ **40.** $4 - 5b + b^2$ **41.** $9x^2 + 6x + 1$
42. $5x^2 + 31x + 6$ **43.** $14x^2 + 37x + 5$ **44.** $9x^2 - 18x + 5$ **45.** $8x^2 - 9x + 1$
46. $6x^2 + 12x + 6$ **47.** $8x^2 - 16x + 6$ **48.** $12x^2 + 92x + 15$ **49.** $12a^2 - 25a + 12$
50. $6a^2 - 5a - 21$ **51.** $4x^2 + 4x - 3$ **52.** $15x^2 + 19x - 56$ **53.** $24a^2 + 25ab + 6b^2$

Factorice cada uno de los trinomios siguientes cuando sea posible. Cuando sea el caso, primero saque como factor común un monomio.

54. $x^2 + x + 1$ **55.** $a^2 - 2a + 2$ **56.** $49r^2s - 42rs + 9s$
57. $6x^2 + 2x - 20$ **58.** $15 + 5y - 10y^2$ **59.** $2b^2 + 12b + 16$
60. $4a^2x^2 - 4abx^2 + b^2x^2$ **61.** $a^3b - 2a^2b^2 + ab^3$ **62.** $12x^2y + 22xy^2 - 60y^3$
63. $16x^2 - 24x + 8$ **64.** $16x^2 - 24x - 8$ **65.** $25a^2 + 50ab + 25b^2$
66. $x^4 - 2x^2 + 1$ **67.** $a^6 - 2a^3 + 1$ **68.** $2x^4 + 8x^2 - 42$
69. $6x^5y - 3x^3y^2 - 30xy^3$

Simplifique factorizando.

70. $(1 + x)^2(-1) + (1 - x)(2)(1 + x)$ **71.** $(x + 2)^3(2) + (2x + 1)(3)(x + 2)^2$
72. $(x^2 + 2)^2(3) + (3x - 1)(2)(x^2 + 2)(2x)$ **73.** $(x^3 + 1)^3(2x) + (x^2 - 1)(3)(x^3 + 1)^2(3x^2)$

74. Desarrolle los siguientes productos:

(a) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
(b) $(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
(c) $(a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

75. Use los resultados del ejercicio anterior para factorizar lo siguiente:

(a) $x^5 + 32$ (b) $128x^8 + xy^7$

76. Escriba la forma factorizada de $a^n + b^n$, donde n es entero positivo impar mayor que 1.
77. Compare los resultados de las partes (b) y (c) del ejemplo 3, página 55, para factorizar $x^4 + x^2 + 1$.
78. El resultado del ejercicio 77 se puede obtener también con el siguiente procedimiento:

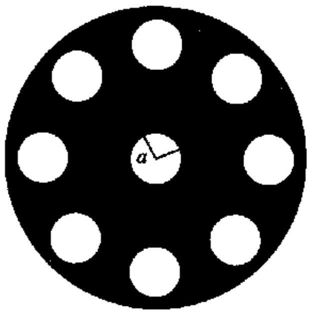
$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Use este procedimiento para factorizar lo siguiente:

(a) $x^4 + 3x^2 + 4$ (b) $9x^4 + 3x^2 + 4$ (c) $a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4$ (d) $a^4 - 3a^2 + 1$

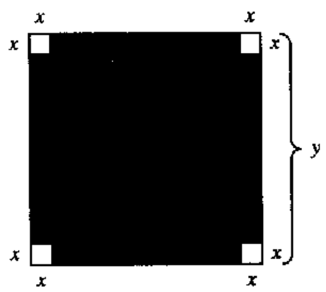
79. Factorice totalmente: $5(4x^2 + 4x + 1)^4(8x + 4)$.
80. Factorice totalmente: $3(x^4 - 2x^2 + 1)^2(4x^3 - 4x)$.
81. Si $y = x\sqrt{x^2 + 2}$, demuestre que $\sqrt{1 + y^2} = x^2 + 1$.
82. Si $y = 2x(x^2 + 1)^{1/2}$, demuestre que $\sqrt{1 + y^2} = 2x^2 + 1$.

83. El círculo grande de la siguiente figura tiene radio R y cada uno de los círculos pequeños tienen radio a. Formule la ecuación del área sombreada, en forma factorizada, y con el resultado calcule el área para $R = 15.7$ y $a = 3.1$.



84. **(a)** Si se cortan las cuatro esquinas cuadradas congruentes del cuadrado grande, deduzca una ecuación para el área de la figura resultante, en forma factorizada. Con este resultado calcule esa área cuando $y = 12.8$ y $x = 2.4$.

(b) Explique por qué la expresión $(y - 2x)^2 + 4x(y - 2x)$ también representa al área de la parte sombreada y demuestre que equivale al resultado obtenido en la parte (a).



? **Reto** Factorice: $x^3 - y^3 + xy^2 - x^2y - x + y$

Redacción Es frecuente oír que alguien dice que no se puede factorizar una expresión como $x^2 - 10$ en la forma de una diferencia de dos cuadrados. Explique lo que significa esta afirmación y describa su exactitud.

1.9 OPERACIONES FUNDAMENTALES CON EXPRESIONES RACIONALES

Una **expresión racional** es un cociente de polinomios. Las expresiones racionales son las "extensiones algebraicas" de los números racionales, y por tanto las reglas fundamentales del manejo de estos números abarcan las expresiones racionales.

A continuación describiremos las reglas importantes de manejo de expresiones racionales, que también se llaman *fracciones algebraicas*. En cada caso presentaremos un ejemplo de la regla bajo consideración, en términos de fracciones aritméticas, para que el lector pueda comparar los procedimientos que se siguen. También, se supone que se excluyen los valores de la variable en el denominador que sean iguales a cero.

Negativo de una fracción

REGLA 1. $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$ $\left[-\dfrac{2}{3} = \dfrac{-2}{3} = \dfrac{2}{-3}\right]$

Reducción de fracciones

REGLA 2. $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$ $\left[\dfrac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \dfrac{2}{5}\right]$

Multiplicación de fracciones

REGLA 3. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ $\left[\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}\right]$

División de fracciones

REGLA 4. $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$ $\left[\dfrac{3}{5} \div \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \dfrac{9}{10}\right]$

Suma y resta de fracciones; denominadores iguales

REGLA 5. $\dfrac{a}{d} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{d}$ $\left[\dfrac{3}{7} + \dfrac{2}{7} = \dfrac{3+2}{7} = \dfrac{5}{7}\right]$

REGLA 6. $\dfrac{a}{d} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{a-c}{d}$ $\left[\dfrac{7}{9} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{7-2}{9} = \dfrac{5}{9}\right]$

Suma y resta de fracciones; denominadores distintos

REGLA 7. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$ $\left[\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \dfrac{8+9}{12} = \dfrac{17}{12}\right]$

REGLA 8. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - bc}{bd}$ $\left[\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4 \cdot 3 - 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \dfrac{12 - 10}{15} = \dfrac{2}{15}\right]$

A continuación presentaremos varios ejemplos que ilustran estas reglas. Asegúrese de comprender cada uno de los pasos que se muestran.

EJEMPLO 1 Simplifique: **(a)** $\dfrac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 6x}$ **(b)** $\dfrac{5a - 3b}{3b - 5a}$

Solución

(a) $\dfrac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 6x} = \dfrac{(x-1)\cancel{(x+6)}}{x\cancel{(x+6)}} = \dfrac{x-1}{x}$ Regla 2

(b) $\dfrac{5a - 3b}{3b - 5a} = \dfrac{(-1)(-5a + 3b)}{(1)(3b - 5a)} = \dfrac{(-1)(3b - 5a)}{(1)(3b - 5a)} = -1$ ■

Todo número distinto de cero dividido entre su opuesto es igual a -1:

$$\frac{x-y}{y-x} = -1$$

Lo que vimos en el ejemplo anterior se puede abreviar dividiendo numerador y denominador entre $3b - 5a$:

$$\frac{5a-3b}{3b-5a} = \frac{\overset{-1}{\cancel{5a-3b}}}{\underset{1}{\cancel{3b-5a}}} = \frac{-1}{1} = -1$$

EJEMPLO 2 Determine el producto: $\dfrac{x+1}{x-1} \cdot \dfrac{2-x-x^2}{5x}$

Solución

Siempre que se trabaja con expresiones racionales se supone que las respuestas se han reducido a los términos más bajos, empleando la regla 2.

$$\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2-x-x^2}{5x} = \frac{(x+1)(2-x-x^2)}{(x-1)5x} \qquad \text{Regla 3}$$

$$= \frac{(x+1)\overset{-1}{\cancel{(1-x)}}(2+x)}{\underset{1}{\cancel{(x-1)}}5x}$$

$$= -\frac{(x+1)(x+2)}{5x} \quad \text{o} \quad -\frac{x^2+3x+2}{5x} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Determine el cociente: $\dfrac{(x+1)^2}{x^2-6x+9} \div \dfrac{3x+3}{x-3}$

Solución

$$\frac{(x+1)^2}{x^2-6x+9} \div \frac{3x+3}{x-3} = \frac{(x+1)^2}{(x-3)^2} \cdot \frac{x-3}{3(x+1)} \qquad \text{Regla 4}$$

$$= \frac{x+1}{3(x-3)} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Determine la suma: $\dfrac{3}{x^2+x} + \dfrac{2}{x^2-1}$

Solución

$$\frac{3}{x^2+x} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{3(x^2-1)+2(x^2+x)}{(x^2+x)(x^2-1)} \qquad \text{Regla 7}$$

$$= \frac{5x^2+2x-3}{(x^2+x)(x^2-1)} \qquad \text{Reducción de términos}$$

$$= \frac{(5x-3)(x+1)}{x(x+1)(x^2-1)} \qquad \text{Factorización}$$

$$= \frac{5x-3}{x(x^2-1)} \qquad \text{Regla 2} \qquad \blacksquare$$

A continuación veamos un método alternativo para manejar el último ejemplo, que con frecuencia es más cómodo. Emplea al **mínimo común denominador (MCD)** de las dos fracciones.

El MCD de las dos fracciones es $x(x + 1)(x - 1)$. Se expresa cada fracción con su denominador común y entonces se suman los numeradores.

$$\frac{3}{x^2 + x} + \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{3}{x(x + 1)} + \frac{2}{(x + 1)(x - 1)}$$

$$= \frac{3(x - 1)}{x(x + 1)(x - 1)} + \frac{2x}{(x + 1)(x - 1)x} \qquad \text{Regla 2}$$

$$= \frac{3(x - 1) + 2x}{x(x + 1)(x - 1)} \qquad \text{Regla 5}$$

$$= \frac{5x - 3}{x(x^2 - 1)}$$

EJEMPLO 5 Combine y simplifique: $\frac{3}{2} - \frac{4}{3x(x + 1)} - \frac{x - 5}{3x^2}$

Para determinar el MCD, se usa cada factor que aparece en las formas factorizadas de los denominadores, el número máximo de veces que aparezca en cualquiera de las formas factorizadas.

Solución El mínimo común denominador de las fracciones es $6x^2(x + 1)$.

$$\frac{3}{2} - \frac{4}{3x(x + 1)} - \frac{x - 5}{3x^2} = \frac{3 \cdot 3x^2(x + 1)}{2 \cdot 3x^2(x + 1)} - \frac{4 \cdot 2x}{3x(x + 1) \cdot 2x} - \frac{(x - 5) \cdot 2(x + 1)}{3x^2 \cdot 2(x + 1)}$$

$$= \frac{(9x^3 + 9x^2) - 8x - (2x^2 - 8x - 10)}{6x^2(x + 1)}$$

$$= \frac{9x^3 + 7x^2 + 10}{6x^2(x + 1)}$$ ■

Las expresiones racionales también intervienen cuando se divide un polinomio entre un monomio o entre otro polinomio. Primero veremos la división entre un monomio en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6 Simplifique: $(4a^2b^2 + 12a^4b^3 - 8a^3b^2) \div 4a^2b$

Un método alterno es factorizar $4a^2b$ del numerador, para emplear a continuación la regla 2.

Solución

$$\frac{4a^2b^2 + 12a^4b^3 - 8a^3b^2}{4a^2b} = \frac{4a^2b^2}{4a^2b} + \frac{12a^4b^3}{4a^2b} - \frac{8a^3b^2}{4a^2b}$$

$$= b + 3a^2b^2 - 2ab$$ ■

Para dividir un polinomio entre otro empleamos el proceso de división larga, que vemos en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 Efectuar la división: $(2x^3 + 3x^2 - x + 16) \div (x^2 + 2x - 3)$

Nótense los pasos del proceso. Se divide $2x^3$ entre x^2 para obtener $2x$. Se multiplica $2x$ por el divisor y se resta. A continuación se divide $-x^2$ de nuevo entre x^2, y así sucesivamente. Se detiene uno cuando el residuo es de grado menor que el del divisor.

Solución

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x - 1 \\ \hline
x^2 + 2x - 3 & 2x^3 + 3x^2 - x + 16 \\
 & \underline{2x^3 + 4x^2 - 6x} \quad \text{Multiplicar } x^2 + 2x - 3 \text{ por } 2x. \\
 & -x^2 + 5x + 16 \quad \text{Restar.} \\
 & \underline{-x^2 - 2x + 3} \quad \text{Multiplicar } x^2 + 2x - 3 \text{ por } -1. \\
 & 7x + 13 \quad \text{Restar.}
\end{array}$$

Detenerse cuando el residuo tenga grado *menor* que el del divisor.

El resultado de este ejemplo de la división se puede expresar también empleando expresiones racionales:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - x + 16}{x^2 + 2x - 3} = (2x - 1) + \frac{7x + 13}{x^2 + 2x - 3}$$

Para comprobar la respuesta, demuestre el lector que es correcto lo siguiente:

$$\underbrace{2x^3 + 3x^2 - x + 16}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(2x - 1)}_{\text{cociente}}\underbrace{(x^2 + 2x - 3)}_{\times\ \text{divisor}} + \underbrace{(7x + 13)}_{+\ \text{residuo}}$$

■

PRUEBE SU COMPRENSIÓN

Simplifique cada una de las expresiones reduciéndola a los términos mínimos.

1. $\frac{x^2}{x^2+2x}$ 2. $\frac{4b^2-4ab}{3a^2-3ab}$ 3. $\frac{3x^2+x-10}{5x-3x^2}$

Lleve a cabo la operación indicada y simplifique.

4. $\frac{4-2x}{2}\cdot\frac{x+2}{x^2-4}$ 5. $\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$

Simplifique.

6. $\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{2x}$ 7. $\frac{3}{2x}+\frac{5}{3x}+\frac{1}{x}$ 8. $\frac{7}{x-2}+\frac{3}{x+2}$

9. $\frac{5}{(x-1)(x+2)}-\frac{8}{4-x^2}$ 10. $\frac{1-4x}{2x+5}+\frac{8x^2-16x}{4x^2-25}-\frac{1}{2x-5}$

11. $\frac{15x^4y^6-10x^3y^3+20x^6y^4}{5x^2y^2}$ 12. $\frac{2x^3+x^2-x+3}{x+2}$

(Respuestas: página 84)

Se pueden usar las propiedades fundamentales de las fracciones para simplificar expresiones racionales cuyos numeradores y denominadores pueden, a su vez, contener fracciones. Cuando se tiene este caso se dice que se manejan *fracciones complejas*.

La expresión del ejemplo 8 es de un tipo con el que se encontrará el lector cuando estudie cálculo. Asegúrese de comprender cada paso de la solución.

EJEMPLO 8 Simplifique: $\dfrac{\dfrac{1}{5+h} - \dfrac{1}{5}}{h}$

Solución *Combinar las fracciones del numerador y después dividir.*

$$\frac{\dfrac{1}{5+h} - \dfrac{1}{5}}{h} = \frac{\dfrac{5-(5+h)}{5(5+h)}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{5(5+h)}}{h}$$

$$= \frac{-h}{5(5+h)} \div \frac{h}{1} = \frac{-h}{5(5+h)} \cdot \frac{1}{h} = -\frac{1}{5(5+h)}$$ ■

Muchas veces los estudiantes encuentran difícil el trabajo con fracciones. Estudie la lista siguiente; puede ayudarlo a evitar algunas de las pifias más comunes.

PRECAUCIÓN: Aprenda a evitar estos errores

INCORRECTO	CORRECTO
$\frac{2}{3}+\frac{x}{5}=\frac{2+x}{3+5}$	$\frac{2}{3}+\frac{x}{5}=\frac{2\cdot 5+3\cdot x}{3\cdot 5}=\frac{10+3x}{15}$
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b+a}{ab}$
$\frac{2x+5}{4}=\frac{x+5}{2}$	$\frac{2x+5}{4}=\frac{2x}{4}+\frac{5}{4}=\frac{x}{2}+\frac{5}{4}$
$2+\frac{x}{y}=\frac{2+x}{y}$	$2+\frac{x}{y}=\frac{2y+x}{y}$
$3\left(\frac{x+1}{x+1}\right)=\frac{3(x+1)}{3(x-1)}$	$3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{3(x+1)}{x-1}$
$a\div\frac{b}{c}=\frac{1}{a}\cdot\frac{b}{c}$	$a\div\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$
$\frac{1}{a^{-1}+b^{-1}}=a+b$	$\frac{1}{a^{-1}+b^{-1}}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{ab}{b+a}$
$\frac{x^2+4x+6}{x+2}=\frac{x^2+4x+\cancelto{3}{6}}{x+\cancelto{1}{2}}=\frac{x^2+4x+3}{x+1}$	$\frac{x^2+4x+6}{x+2}$ ya está en su forma más simple.

En el ejemplo 9 se necesita simplificar una fracción compleja donde aparecen exponentes negativos.

EJEMPLO 9 Simplifique: $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$

En este método se multiplican numerador y denominador por x^2y^2 para simplificar.

Solución

$$\frac{x^{-2}-y^{-2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}} = \frac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}} = \frac{\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\right)(x^2y^2)}{\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)(x^2y^2)} \quad \text{Regla 2}$$

Este problema también se puede resolver mediante el procedimiento que se vio en el ejemplo 8.

$$= \frac{y^2-x^2}{xy^2-x^2y}$$

$$= \frac{(y-x)(y+x)}{xy(y-x)}$$

$$= \frac{y+x}{xy}$$

■

EJERCICIOS 1.9

Diga si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Si es falsa, corrija el lado derecho para llegar a una igualdad correcta.

1. $\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$ **2.** $\frac{2x+y}{y-2x}=-2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ **3.** $\frac{3ax-5b}{6}=\frac{ax-5b}{2}$

4. $\frac{x+x^{-1}}{xy}=\frac{x+1}{x^2y}$ **5.** $x^{-1}+y^{-1}=\frac{y+x}{xy}$ **6.** $\frac{2}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{3}$

Simplifique, de ser posible.

7. $\frac{8xy}{12yz}$ **8.** $\frac{24abc^2}{36bc^2d}$ **9.** $\frac{45x^3+15x^2}{15x^2}$

10. $\frac{9y^2+12y^8-15y^6}{3y^2}$ **11.** $\frac{12x^3+8x^2+4x}{4x}$ **12.** $\frac{5a^2-10a^3+15a^4}{5a^2}$

13. $\frac{a^2b^2+ab^2-a^2b^3}{ab^2}$ **14.** $\frac{-6a^3+9a^6-12a^9}{-3a^3}$ **15.** $\frac{6a^2x^2-8a^4x^6}{2a^2x^2}$

16. $\frac{-8a^3x^3+4ax^3-12a^2x^6}{-4ax^3}$ **17.** $\frac{x^2-5x}{5-x}$ **18.** $\frac{n-1}{n^2-1}$

19. $\frac{n+1}{n^2+1}$ **20.** $\frac{(x+1)^2}{1-x^2}$ **21.** $\frac{3x^2+3x-6}{2x^2+6x+4}$

22. $\frac{x^3-x}{x^3-2x^2+x}$ **23.** $\frac{4x^2+12x+9}{4x^2-9}$ **24.** $\frac{x^2+2x+xy+2y}{x^2+4x+4}$

25. $\frac{a^2-16b^2}{a^3+64b^3}$ **26.** $\frac{a^2-b^2}{a^2-6b-ab+6a}$

Efectúe las operaciones indicadas y simplifique.

27. $\dfrac{2x^2}{y}\cdot\dfrac{y^2}{x^3}$

28. $\dfrac{3x^2}{2y^2}\div\dfrac{3x^3}{y}$

29. $\dfrac{2a}{3}\cdot\dfrac{3}{a^2}\cdot\dfrac{1}{a}$

30. $\left(\dfrac{a^2}{b^2}\cdot\dfrac{b}{c^2}\right)\div a$

31. $\dfrac{3x}{2y}-\dfrac{x}{2y}$

32. $\dfrac{a+2b}{a}+\dfrac{3a+b}{a}$

33. $\dfrac{a-2b}{2}-\dfrac{3a+b}{3}$

34. $\dfrac{7}{5x}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2x}$

35. $\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

36. $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x}\cdot\dfrac{x^3+x^2}{x+2}$

37. $\dfrac{1-x}{2+x}\div\dfrac{x^2-x}{x^2+2x}$

38. $\dfrac{x^2+3x}{x^2+4x+3}\div\dfrac{x^2-2x}{x+1}$

39. $\dfrac{2}{x}-y$

40. $\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{1}{1-x}$

41. $\dfrac{3y}{y+1}+\dfrac{2y}{y-1}$

42. $\dfrac{2a}{a^2-1}-\dfrac{a}{a+1}$

43. $\dfrac{2x^2}{x^2+x}+\dfrac{x}{x+1}$

44. $\dfrac{3x+3}{2x^2-x-1}+\dfrac{1}{2x+1}$

45. $\dfrac{5}{x^2-4}-\dfrac{3-x}{4-x^2}$

46. $\dfrac{1}{a^2-4}+\dfrac{3}{a-2}-\dfrac{2}{a+2}$

47. $\dfrac{2x}{x^2-9}+\dfrac{x}{x^2+6x+9}-\dfrac{3}{x+3}$

48. $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+7}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x+1}$

49. $\dfrac{x+3}{5-x}-\dfrac{x-5}{x+5}+\dfrac{2x^2+30}{x^2-25}$

50. $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}\div\dfrac{a^2+3ab+2b^2}{a^2-3ab+2b^2}$

51. $\dfrac{x^3+x^2-12x}{x^2-3x}\cdot\dfrac{3x^2-10x+3}{3x^2+11x-4}$

52. $\dfrac{n^2+n}{2n^2+7n-4}\cdot\dfrac{4n^2-4n+1}{2n^2-n-3}\cdot\dfrac{2n^2+5n-12}{2n^3-n^2}$

53. $\dfrac{n^3-8}{n+2}\cdot\dfrac{2n^2+8}{n^3-4n}\cdot\dfrac{n^3+2n^2}{n^3+2n^2+4n}$

54. $\dfrac{a^3-27}{a^2-9}\div\left(\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^3+b^3}\cdot\dfrac{a^3-a^2b+ab^2}{a^2+ab}\right)$

Como en el ejemplo 7, página 65 use el algoritmo de la división para determinar el cociente y el residuo. Compruebe cada uno de los resultados.

55. $(x^3-2x^2-13x+6)\div(x+3)$

56. $(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)$

57. $(x^3-x^2+7)\div(x-1)$

58. $(5x-2x^3-3)\div(x+2)$

59. $(5x^2-7x+x^3+8)\div(x-2)$

60. $(2x^3+9x^2-3x-1)\div(2x-1)$

61. $(4x^3-5x^2+x-7)\div(x^2-2x)$

62. $(8x^4-8x^2+6x+6)\div(2x^2-x)$

63. $(x^3-x^2-x+10)\div(x^2-3x+5)$

64. $(3x^3+4x^2-13x+6)\div(x^2+2x-3)$

Simplifique.

65. $\dfrac{\dfrac{5}{x^2-4}}{\dfrac{10}{x-2}}$

66. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{4}}{x-4}$

67. $\dfrac{\dfrac{1}{4+h}-\dfrac{1}{4}}{h}$

68. $\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{9}}{x-3}$

69. $\dfrac{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{3}}{x}$

70. $\dfrac{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x^2}}{x-2}$

71. $\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{16}}{x+4}$

72. $\dfrac{x^{-2}-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}}$

73. $\dfrac{x^{-1}-y^{-1}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}$

74. $\dfrac{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}}$

75. $\dfrac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$

76. $\dfrac{(x^2-9)(2x)-x^2(2x)}{(x^2-9)^2}$

77. $\dfrac{x^2(4-2x)-(4x-x^2)(2x)}{x^4}$

78. $\dfrac{(x+1)^2(2x)-(x^2-1)(2)(x+1)}{(x+1)^4}$

Simplifique y exprese como una sola fracción sin exponentes negativos.

79. $\dfrac{a^{-1} - b^{-1}}{a - b}$ **80.** $\dfrac{(a + b)^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}}$ **81.** $\dfrac{x^{-2} - y^{-2}}{xy}$

82. Para calificar un curso de matemáticas se tienen tres pruebas y un examen final. Sean a, b y c las calificaciones numéricas de las pruebas, y d la del examen final.

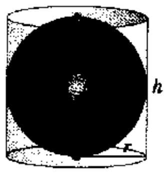
(a) Si se calcula la calificación total haciendo que el examen final cuente igual que el promedio de las tres pruebas, demuestre que el promedio final está expresado por $\dfrac{a+b+c+3d}{6}$.

(b) Suponga que el promedio de las tres pruebas forma el 60% de la calificación total, y que el examen final el 40%. Demuestre que la calificación total está expresada por $\dfrac{a+b+c+2d}{5}$.

83. En algunas calculadoras se requiere hacer ciertos cálculos en forma distinta, de acuerdo con la máquina. Demuestre que en cada caso, la expresión del lado izquierdo se puede calcular empleando la expresión equivalente del lado derecho.

(a) $\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{D} = \dfrac{\dfrac{A \cdot D}{B} + C}{D}$ **(b)** $(A \cdot B) + (C \cdot D) + (E \cdot F) = \left[\dfrac{\left(\dfrac{A \cdot B}{D} + C\right) \cdot D}{F} + E\right] \cdot F$

84. Arquímedes (287–212 a. de C.) descubrió una interesante relación entre un cilindro y una esfera inscrita. Determine, en su forma más sencilla, la relación del volumen del cilindro entre el volumen de la esfera.



85. La distancia entre dos poblaciones, A y B, es 120 millas. Si el lector conduce un automóvil en una dirección, a velocidad media de 60 mi/h, y regresa a 40 mi/h, ¿cuál es su velocidad promedio durante el viaje redondo? (En contra de nuestra intuición, *no es* 50 mi/h.) Calcule la respuesta empleando la fórmula de la velocidad promedio de un viaje redondo a velocidades medias s_1 y s_2 en las direcciones respectivas:

$$\frac{2}{\dfrac{1}{s_1} + \dfrac{1}{s_2}}$$

Determine una forma simplificada de esta fracción compleja y compruebe su respuesta.

86. Si $x^2 + y^2 = 4$, demuestre que $-\dfrac{y - x\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2} = -\dfrac{4}{y^3}$.

87. Si $y^3 - x^3 = 8$, demuestre que $\dfrac{2xy^2 - 2x^2y\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)}{y^4} = \dfrac{16x}{y^5}$.

88. Si $y = x^2 - \dfrac{1}{4x^2}$, demuestre que $\sqrt{1 + y^2} = x^2 + \dfrac{1}{4x^2}$.

89. Si $y = \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{2}{x^2}$, demuestre que $\sqrt{1 + y^2} = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{2}{x^2}$.

Reto Un señor heredó 17 caballos a sus 3 hijos. Dejó la mitad al mayor, la tercera parte al intermedio y la novena parte al menor. Ya que 17 no es divisible entre 2, 3 ni 9, los hijos pidieron prestado un caballo del vecino para tener un total de 18. A continuación el hijo mayor recibió $\frac{1}{2} \times 18 = 9$ caballos, el intermedio $\frac{1}{3} \times 18 = 6$ caballos y el menor $\frac{1}{9} \times 18 = 2$ caballos. Como $9 + 6 + 2 = 17$, que es la cantidad de caballos heredados a los hijos, fue posible regresar el caballo adicional al vecino. ¿Dónde está el error de esta historia?

Razonamiento crítico

1. Presente un argumento convincente para explicar por qué $3\left(\frac{x-1}{x-1}\right) \neq \frac{3x+1}{3x-1}$.
2. Note que $\frac{12}{\sqrt{150}} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$. ¿Es deseable una forma en comparación con la otra? Explique su respuesta.
3. Traduzca lo siguiente a forma simbólica:

   El cuadrado de la suma de dos números es *cuando menos* cuatro veces el producto de ambos.

   Probar que el enunciado es verdadero. (*Sugerencia:* Suponga que la desigualdad es verdadera y trabaje hacia atrás.)
4. Tres números se pueden ordenar verticalmente en una fracción, produciéndose los tres casos siguientes:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \qquad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$$

   Determine todos los casos distintos posibles con 4 números, a, b, c y d, ordenados verticalmente en una fracción.

1.10 INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS COMPLEJOS

En la definición de un radical se tuvo cuidado de evitar la raíz par de un número negativo, como $\sqrt{-4}$. Esto fue necesario porque no existe número real x cuyo cuadrado sea -4. En consecuencia, no puede haber número real que satisfaga la ecuación $x^2 + 4 = 0$. Suponga el lector, por el momento, que pudiéramos resolverla con métodos algebraicos:

$$\begin{aligned} x^2 + 4 &= 0 \\ x^2 &= -4 \\ x &= \pm\sqrt{-4} \\ &= \pm\sqrt{4(-1)} \\ &= \pm\sqrt{4}\sqrt{-1} \\ &= \pm 2\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Aunque se pudiera decir que $2\sqrt{-1}$ es solución de $x^2 + 4 = 0$, ciertamente no se trata de una solución con *número real*. En consecuencia, introduciremos $\sqrt{-1}$ como una nueva especie de número; será la unidad de un conjunto nuevo de números, los *números imaginarios*. El símbolo i se usa para representarlo y se define como sigue:

DEFINICIÓN DE i

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{e} \quad i^2 = -1$$

Al usar i, la raíz cuadrada de un número real negativo se define ahora como sigue:

$$\text{Para } x > 0, \quad \sqrt{-x} = \sqrt{-1}\,\sqrt{x} = i\sqrt{x}$$

EJEMPLO 1 Simplifique: **(a)** $\sqrt{-16} + \sqrt{-25}$ **(b)** $\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-25}$

En el ejemplo se reducen 4i y 5i empleando las reglas usuales del álgebra. Demostraremos que esos procedimientos se aplican para este nuevo tipo de número.

Solución

(a) $\sqrt{-16} + \sqrt{-25} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{25}$

$= i \cdot 4 + i \cdot 5 = 4i + 5i = 9i$

(b) $\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-25} = (4i)(5i) = 20i^2 = 20(-1) = -20$ ■

PRUEBE SU COMPRENSIÓN

Exprese lo siguiente, como producto de un número real e i.

1. $\sqrt{-9}$ **2.** $\sqrt{-49}$ **3.** $\sqrt{-5}$ **4.** $-2\sqrt{-1}$ **5.** $\sqrt{-\frac{4}{9}}$

Simplifique.

6. $\sqrt{-64} \cdot \sqrt{-225}$ **7.** $\sqrt{9} \cdot \sqrt{-49}$

8. $\sqrt{-50} + \sqrt{-32} - \sqrt{-8}$ **9.** $3\sqrt{-20} + 2\sqrt{-45}$

(Respuestas: página 84)

Un producto de un número real multiplicado por i, la unidad imaginaria, como $7i$ o $\sqrt{2}\,i$ se llama **número imaginario puro**. La suma de un número real y un número imaginario puro se llama **número complejo**.

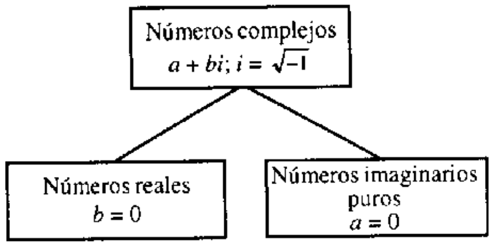
Un número complejo tiene la forma $a + bi$, siendo a y b números reales e $i = \sqrt{-1}$.

Se dice que el número real a es la **parte real** de $a + bi$, y que el número real b es la **parte imaginaria** de $a + bi$. En general, dos números complejos son iguales sólo que sus partes real e imaginaria sean iguales simultáneamente. Es decir,

$$a + bi = c + di \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d$$

Nótese, por ejemplo, que $\sqrt{\frac{4}{9}}$ es complejo, real y racional; $\sqrt{-10}$ es complejo e imaginario puro.

El conjunto de números complejos contiene todos los números reales, porque cualquier número real a se puede expresar como $a = a + 0i$. Igualmente, si b es real, $bi = 0 + bi$, de modo que los números complejos también contienen a los imaginarios puros.



¿Cómo se suman, restan, multiplican o dividen los números complejos? Para contestar esta pregunta debemos recordar que los números reales están incluidos en el conjunto de números complejos. Por consiguiente, las definiciones que establezcamos para los números complejos deben preservar las operaciones establecidas con los números reales.

Dos números complejos se suman y restan tomando por separado sus partes reales e imaginarias, según la definición que sigue.

SUMA Y RESTA DE NÚMEROS COMPLEJOS

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Estos procedimientos son muy semejantes a los que usamos para combinar polinomios. Por ejemplo:

$$(2 + 3i) + (5 + 7i) = (2 + 5) + (3 + 7)i = 7 + 10i$$

$$(8 + 5i) - (3 + 2i) = (8 - 3) + (5 - 2)i = 5 + 3i$$

La multiplicación de dos números complejos se asemeja a la de dos binomios. Por ejemplo:

$$(3 + 2i)(5 + 3i) = 15 + 10i + 9i + 6i^2$$

Lo anterior se puede simplificar, ya que $10i + 9i = 19i$, y $6i^2 = 6(-1) = -6$. El resultado es $9 + 19i$.

En general:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + (ad + bc)i + bd(-1) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Nota: En la práctica es más fácil determinar el producto con el procedimiento para multiplicar binomios que memorizando la definición formal.

PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Veamos ahora el cociente de dos números complejos, como

$$\frac{2 + 3i}{3 + i}$$

Se dice que el término "imaginario" se aplicó primero a estos números precisamente porque parecen desaparecer misteriosamente con ciertas multiplicaciones.

Nuestro objetivo es expresar este cociente en la forma $a + bi$. Para hacerlo, usaremos un método semejante a cuando racionalizamos el denominador. Véase lo que sucede cuando se multiplica $3 + i$ por su **conjugado**, $3 - i$:

$$(3 + i)(3 - i) = 9 + 3i - 3i - i^2 = 9 - i^2 = 9 + 1 = 10$$

En general, $(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$.

Podemos ahora terminar el problema de la división.

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{3+i} &= \frac{2+3i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}\\ &= \frac{6+9i-2i-3i^2}{9-i^2}\\ &= \frac{9+7i}{10} \qquad -3i^2 = -3(-1) = 3\\ &= \frac{9}{10}+\frac{7}{10}i \qquad \leftarrow \text{Es el cociente en la forma } a+bi.\end{aligned}$$

Cuando se multiplican el numerador y el denominador de $\frac{a+bi}{c+di}$ por el conjugado de $c + di$, llegamos a la siguiente definición de la división (véase el ejercicio 59):

Más que memorizar esta definición, tan sólo calcule los cocientes como en el ejemplo anterior.

COCIENTE DE NÚMEROS COMPLEJOS

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \qquad c+di \neq 0$$

Aunque por el momento no entraremos en detalles, se puede demostrar que algunas de las reglas básicas de los números reales se aplican a los números complejos. Por ejemplo, siguen vigentes las leyes conmutativa, asociativa y distributiva, mientras que las del orden no se aplican.

También es cierto que se aplican las reglas para exponentes enteros en el caso de los números complejos.

Por ejemplo, $(2 - 3i)^0 = 1$ y $(2 - 3i)^{-1} = \frac{1}{2 - 3i}$. En especial, las potencias enteras positivas de i se calculan con facilidad. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} i = \sqrt{-1} & i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^2 = -1 & i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i & i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i \\ i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 & i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot i^4 = 1 \end{array}$$

Obsérvese que las primeras cuatro potencias de i del lado izquierdo se repiten en los cuatro casos siguientes de la derecha. Este ciclo de i, -1, $-i$ y 1 continúa al infinito. Por consiguiente, para simplificar i^n cuando $n > 4$, se busca el múltiplo máximo de 4 dentro del entero n, como en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 2 Simplifique: **(a)** i^{22} **(b)** i^{39}

Solución

Como $20 = 5(4)$, 5 es el múltiplo máximo de 4 que cabe en 22. Como $36 = 9(4)$, 9 es el múltiplo máximo de 4 que cabe en 39.

(a) $i^{22} = i^{20} \cdot i^2 = (i^4)^5 \cdot i^2 = 1^5 \cdot i^2 = i^2 = -1$

(b) $i^{39} = i^{36} \cdot i^3 = (i^4)^9 \cdot i^3 = 1^9 \cdot i^3 = i^3 = -i$ ■

En el ejemplo siguiente veremos cómo se puede simplificar una potencia negativa de i.

EJEMPLO 3 Exprese $2i^{-3}$ como producto de un número real por i.

Como solución alternativa, se escribe $\frac{2}{i^3} = \frac{2}{-i}$. A continuación se multiplican numerador y denominador por i.

Solución Notaremos primero que $2i^{-3} = \dfrac{2}{i^3}$. A continuación, multiplicamos el numerador y el denominador por i, para obtener un número real en el denominador.

$$2i^{-3} = \frac{2}{i^3} \cdot \frac{i}{i} = \frac{2i}{i^4} = \frac{2i}{1} = 2i$$ ■

EJERCICIOS 1.10

Diga si cada una de las afirmaciones siguientes es correcta o incorrecta.

1. Todo número real es número complejo.
2. Todo número complejo es número real.
3. Todo número irracional es número complejo.
4. Todo entero se puede escribir en la forma $a + bi$.
5. Todo número complejo se puede expresar en forma de un número irracional.
6. Todo entero negativo se puede expresar en forma de un número imaginario puro.

Exprese cada uno de los números siguientes en forma $a + bi$.

7. $5 + \sqrt{-4}$ **8.** $7 - \sqrt{-7}$ **9.** -5 **10.** $\sqrt{25}$

Exprese lo siguiente en la forma bi.

11. $\sqrt{-16}$ **12.** $\sqrt{-81}$ **13.** $\sqrt{-144}$ **14.** $-\sqrt{-9}$
15. $\sqrt{-\frac{9}{16}}$ **16.** $\sqrt{-3}$ **17.** $-\sqrt{-5}$ **18.** $-\sqrt{-8}$

Simplifique lo siguiente.

19. $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-81}$ **20.** $\sqrt{4} \cdot \sqrt{-25}$ **21.** $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-2}$ **22.** $(2i)(3i)$
23. $(-3i^2)(5i)$ **24.** $(i^2)(i^2)$ **25.** $\sqrt{-9} + \sqrt{-81}$ **26.** $\sqrt{-12} + \sqrt{-75}$
27. $\sqrt{-8} + \sqrt{-18}$ **28.** $2\sqrt{-72} - 3\sqrt{-32}$ **29.** $\sqrt{-9} - \sqrt{-3}$ **30.** $3\sqrt{-80} - 2\sqrt{-20}$

Complete la operación indicada. Exprese todas las respuestas en la forma $a + bi$.

31. $(7 + 5i) + (3 + 2i)$ **32.** $(8 + 7i) + (9 - i)$ **33.** $(8 + 2i) - (3 + 5i)$

34. $(7 + 2i) - (4 - 3i)$ **35.** $(7 + \sqrt{-16}) + (3 - \sqrt{-4})$ **36.** $(8 + \sqrt{-49}) - (2 - \sqrt{-25})$

37. $2i(3 + 5i)$ **38.** $3i(5i - 2)$ **39.** $(3 + 2i)(2 + 3i)$

40. $(\sqrt{5} - 3i)(\sqrt{5} - 3i)$ **41.** $(5 - 2i)(3 + 4i)$ **42.** $(\sqrt{3} + 2i)^2$

43. $\dfrac{3 + 5i}{i}$ **44.** $\dfrac{5 - i}{i}$ **45.** $\dfrac{5 + 3i}{2 + i}$

46. $\dfrac{7 - 2i}{2 - i}$ **47.** $\dfrac{3 - i}{3 + i}$ **48.** $\dfrac{8 + 3i}{3 - 2i}$

Simplifique lo siguiente.

49. $3i^3$ **50.** $-5i^5$ **51.** $2i^7$ **52.** $3i^{-3}$ **53.** $-4i^{18}$ **54.** i^{-32}

Simplifique y exprese cada respuesta en la forma $a + bi$.

55. $(3 - 2i)^{-1}$ **56.** $(3 - 2i)^{-2}$

57. Una de las reglas básicas para trabajar con radicales es que $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, en la cual a y b son números reales no negativos. Demuestre que esta regla no se aplica cuando a y b son negativos a la vez, demostrando que $\sqrt{(-4)(-9)} \neq \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9}$.

58. Haga uso de la definición $\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$ $(x > 0)$ para demostrar que $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ cuando $a < 0$ y $b \geq 0$.

59. Escriba $\dfrac{a + bi}{c + di}$ en la forma $x + yi$. (*Sugerencia:* Multiplique el numerador y el denominador por el conjugado de $c + di$.)

60. El conjunto de los números complejos satisface la propiedad asociativa de la suma. Compruébelo completando el siguiente problema en dos modos distintos.

$$(3 + 5i) + (2 + 3i) + (7 + 4i)$$

61. Repita el ejercicio anterior para la multiplicación, con $(3 + i)(3 - i)(4 + 3i)$.

62. Se dice que $0 = 0 + 0i$ es la identidad aditiva (neutro aditivo) de los números complejos, porque $0 + z = z$ para toda $z = a + bi$. Determine el inverso aditivo (negativo) de z.

Lleve a cabo las operaciones indicadas y exprese las respuestas en forma $a + bi$.

63. $(5 + 4i) - 2(2 - 3i) - i(1 - 5i)$ **64.** $2i(3 - 4i)(3 - 6i) - 7i$

65. $\dfrac{(2 + i)^2(3 - i)}{2 + 3i}$ **66.** $\dfrac{1 - 2i}{3 + 4i} - \dfrac{2i - 3}{4 - 2i}$

Use números complejos para factorizar cada uno de los siguientes polinomios.

Ejemplo: $x^2 + 9 = x^2 - (-9) = x^2 - (3i)^2 = (x + 3i)(x - 3i)$

67. $x^2 + 1$ **68.** $9x^2 + 4$ **69.** $3x^2 + 75$ **70.** $x^2 - 4ix - 3$

71. Calcule el producto $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5 \cdot i^6 \cdot \ldots \cdot i^{100}$

Redacción Determine los valores posibles de la suma

$$i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{n-1} + i^n$$

siendo n cualquier entero positivo. Haga comentarios de sus respuestas.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

Sección 1.1 Los números reales y sus propiedades (página 2)

1. Enuncie la definición de un número racional.
2. Explique cómo clasificar los números reales en términos de sus representaciones decimales.
3. ¿A qué subconjuntos de los números reales pertenece cada uno de los siguientes?

   (a) -13 **(b)** $\sqrt{13}$ **(c)** $\frac{3}{5}$ **(d)** 7 **(e)** $\sqrt{36}$

4. Cite la propiedad que se muestra en cada una de las siguientes expresiones:

   (a) $3(7+8)=(3)(7)+(3)(8)$ **(b)** $(3\times 9)\times 5=(9\times 3)\times 5$

   (c) $8+(6+9)=(8+6)+9$ **(d)** $12+(-12)=0$

   (e) $4+2\sqrt{5}$ es número real.

5. Presente contraejemplos que demuestren que el conjunto de los números reales no es conmutativo ni asociativo con respecto a la resta.
6. Con símbolos enuncie la propiedad de producto cero de los números reales.
7. ¿Cuál es el elemento identidad para la suma? ¿Y para la multiplicación?
8. Explique por qué no es posible la división entre cero.

Reemplace la variable n por un número real para hacer válida cada una de las siguientes ecuaciones:

9. $15+(8+n)=(15+8)+9$
10. $(12\times n)\times 7=12\times(n\times 7)$
11. $2.5\,(8+n)=(2.5\times 8)+(2.5\times 10)$
12. $(7\times 13)+(7\times n)=7(13+8)$

Sección 1.2 Introducción a las ecuaciones y a la solución de problemas (página 8)

13. Enuncie la propiedad de suma de la igualdad.
14. Enuncie la propiedad de multiplicación de la igualdad.
15. Despeje x de: **(a)** $3(x-1)=x+2$ **(b)** $5(x+1)=2(x-2)$
16. La fórmula de la circunferencia C de un círculo, en términos de su radio, r, es $C=2\pi r$. Despeje r en términos de C. Calcule r si $C=88$ cm. (Use $\frac{22}{7}$ como aproximación de π.)
17. La longitud de un rectángulo es igual al doble de su ancho más uno. El perímetro es 32 cm. Calcule las dimensiones del rectángulo.
18. Tomás gana $475 semanales más una comisión del 4% sobre sus ventas. Si en una semana sus ingresos totales fueron $520, ¿cuáles fueron sus ventas en esa semana?
19. Elisa invirtió $4500 durante 2 años a interés simple y ganó $405. ¿A qué tasa de interés depositó su inversión?
20. El automóvil A sale de cierta población y viaja hacia el este a 50 mi/h. Una hora después, el automóvil B sale de la misma población y viaja hacia el oeste a 55 mi/h. ¿Cuántas horas habrán pasado, después de haber salido el auto A, para que los vehículos estén a 260 millas de distancia?

Sección 1.3 Enunciados de desigualdad y sus gráficas (página 16)

21. Cite la definición algebraica de la desigualdad $a < b$.
22. Enuncie la propiedad de orden de la suma.
23. Enuncie la propiedad de orden de la multiplicación.
24. Resuelva la desigualdad $-2n-(1-3n)<5$.
25. Determine el conjunto de soluciones de $5x-2\le 3x+6$.

26. Despeje x de: **(a)** $3(2 - x) > 9$ **(b)** $\dfrac{5}{x - 2} > 0$

27. Muestre cada uno de los intervalos siguientes en forma de una gráfica en la recta numérica:

(a) $(-5, 2)$ **(b)** $[-5, 2]$ **(c)** $(-5, 2]$ **(d)** $[-5, 2)$

28. Grafique el conjunto de soluciones de: **(a)** $-3(x - 2) \leq x + 2$ **(b)** $2x + 5 > 5x - 1$

29. Enuncie la propiedad transitiva de orden para los números reales a, b y c.

30. Si $a < b$ y $ab > 0$, ¿Qué se puede decir de los recíprocos de los dos números? Cite un ejemplo en el que ambos números sean positivos, y uno en el que ambos sean negativos.

31. Enuncie la propiedad de tricotomía en términos de dos números reales, a y b.

32. La suma de un entero y de tres veces ese entero más dos queda entre 12 y 31. Determine todos los pares posibles de enteros que satisfagan lo anterior.

Sección 1.4 Valor absoluto (página 25)

33. Cite la definición del valor absoluto de cualquier número real a.

34. Enuncie, en símbolos, otro modo de expresar $|a| > k$ $(k > 0)$ que no haga uso de la notación de valor absoluto.

35. Repita el ejercicio 34 para $|a| < k$.

36. ¿Cuál es la coordenada del punto medio de un segmento de recta cuyos extremos son x_1 y x_2?

37. Despeje a x de $\dfrac{|x - 2|}{x - 2} = 1$

38. Despeje a x de: **(a)** $|2 - x| = 5$ **(b)** $|2x - 1| \leq 3$.

39. Grafique: **(a)** $|x| < 5$ **(b)** $|x + 2| > 1$.

40. ¿Qué propiedad geométrica representa $|a - b|$ con respecto a los puntos a y b en una recta numérica? Cite dos ejemplos específicos.

41. ¿Bajo qué condiciones $|x + y| = |x| + |y|$? ¿Cuándo no es cierta esta igualdad?

42. ¿Es el valor absoluto del producto de dos números igual al producto de sus valores absolutos? Explique su respuesta.

Sección 1.5 Exponentes enteros (página 30)

43. Explique la diferencia, si es que la hay, entre -5^2 y $(-5)^2$.

44. Describa el motivo para definir a un exponente cero, como en b^0.

45. Simplifique: **(a)** $3x^2 \cdot x^4$ **(b)** $\dfrac{-8^3}{(-4)^2}$ **(c)** $10^3(\frac{1}{5})^3$ **(d)** $\dfrac{x^{12}y^0}{(2x)^2(2y)^{-1}}$

46. Simplifique y escriba sin exponentes negativos: $\left(\dfrac{a^3b^{-2}}{a^{-2}b^3}\right)^3$

Determine un valor de x que haga cierta la ecuación correspondiente.

47. $3^{-2} \cdot 3^x = 3^5$ **48.** $3^x \cdot 3^{x+2} = 3^{10}$ **49.** $\dfrac{3^x}{3^2} = 3^5$

50. Exprese en notación científica: **(a)** 420.000.000 **(b)** 0.000000023

51. Escriba en forma normal: **(a)** 3.25×10^5 **(b)** 2.5×10^{-6}

52. Suponga que una sustancia decae de tal modo que después de cada hora queda la mitad de la cantidad original. Si al principio habían 960 gramos, ¿cuánto queda después de 6 horas? ¿Cuánto después de n horas?

Sección 1.6 Radicales y exponentes racionales (página 38)

53. Enuncie la definición de $\sqrt[n]{a}$ para $a > 0$.

Diga si es verdera o falsa cada una de las ecuaciones siguientes.

54. (a) $\sqrt{9} - \sqrt{25} = \sqrt{9 - 25}$ (b) $\sqrt{36} = \pm 6$
55. (a) $(x + y)^{1/5} = \sqrt[5]{x + y}$ (b) $\sqrt{x^{16}} = x^4$
56. Evalúe: (a) $(\sqrt[3]{5})^3$ (b) $\sqrt[3]{64}$ (c) $\sqrt[3]{-\frac{1000}{125}}$
57. Simplifique: (a) $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{5b}$ (b) $\frac{\sqrt[3]{-54x^5}}{\sqrt[3]{2x^2}}$ (c) $\sqrt[5]{16x} \cdot \sqrt[5]{-2x^4}$
58. Evalúe: (a) $\left(\frac{16}{81}\right)^{3/4}$ (b) $64^{-2/3} + (-32)^{3/5}$
59. Simplifique: $\left(\frac{-64a^{-3}}{b^6}\right)^{2/3}$
60. Simplifique: (a) $\sqrt{75}$ (b) $\sqrt[3]{24}$ (c) $\sqrt[3]{-250}$
61. Simplifique: $\sqrt[3]{16x^3} + 2\sqrt[3]{-54x^3}$
62. Racionalice el denominador de: (a) $\frac{125}{\sqrt{125}}$ (b) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}$
63. Simplifique: $\frac{6}{\sqrt{12}} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{75}$
64. ¿Cuál es el valor de $\sqrt{a^2}$, para números reales a?
65. ¿Cuál es la regla para evaluar $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$? Úsela para evaluar $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$.
66. ¿Es lo mismo la raíz cuadrada de la suma de dos números que la suma de sus raíces cuadradas? Explique su respuesta con un ejemplo específico.

Sección 1.7 Operaciones fundamentales con polinomios (página 47)

67. Escriba la forma general de un polinomio de grado n en la variable x.
68. ¿Cuándo se dice que un polinomio en una variable está en su forma estándar?
69. Efectúe la suma: $(3x^3 - 8x^2 + 2x - 5) + (x^2 - 7x + 1)$
70. Combine lo siguiente: $(5a^3 - 6a^2b + 2b + 1) - (3a^2b - 2b + 1)$
71. Lleve a cabo la multiplicación: $2x^2(3x^3 - 2x^2 + x - 5)$
72. Determine el producto: $(ax + b)(cx + d)$

Determine cada uno de los siguientes productos.

73. $(2x + 1)(3x - 5)$ 74. $(4x + 5)(4x - 5)$
75. Multiplique: $2x^3 - 5x + 1$ por $x^2 - 3x + 2$.
76. Desarrolle: (a) $(2a - b)^2$ (b) $(a - 2b)^3$
77. Racionalice el denominador de: $\frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

Sección 1.8 Factorización de polinomios (página 53)

78. Cite las reglas para factorizar la suma y la diferencia de dos cubos.

Factorice totalmente:

79. $5x^6 + 25x^4 - 15x^2$ **80.** $3x^2 - 75$ **81.** $27 - 8x^3$ **82.** $(x - 1)^2 - 9$

83. $a^4 - b^4$ **84.** $2a^5 - 64$ **85.** $15 + ax^2 - 3x - 5ax$ **86.** $x^2 + 2xy + y^2$

87. $x^2 - 2xy - y^2$ **88.** $8x^2 + 29x - 12$ **89.** $6x^2 + x - 1$ **90.** $4x^3 + 4x^2 + x$

91. Factorice $x^2 - 3$ como diferencia de cuadrados empleando números irracionales.
92. Factorice $x - 8$ como diferencia de cubos, empleando expresiones radicales.
93. Escriba la forma factorizada de $a^n - b^n$ para cualquier entero $n \geq 2$.
94. Escriba la forma de un trinomio cuadrado perfecto y su forma factorizada.

Sección 1.9. Operaciones fundamentales con expresiones racionales (página 61)

95. ¿Qué quiere decir "expresión racional"? Cite un ejemplo.

Reduzca, si es posible, a los términos más simples.

96. $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 3x}$ **97.** $\dfrac{2a - 3b}{3b - 2a}$ **98.** $\dfrac{x^3 - 3}{x + 3}$

99. Multiplique: $\dfrac{x^2 + 2x}{x - 3} \cdot \dfrac{3 - 2x - x^2}{x}$ **100.** Divida: $\dfrac{8x^2 - 10x - 3}{x^2 - 4x + 4} \div \dfrac{3 - 2x}{2 - x}$

101. Determine la suma y simplifique: $\dfrac{4}{x^2 - x} + \dfrac{3}{1 - x^2}$

102. Combine y simplifique lo siguiente: $\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{6x(x - 1)} + \dfrac{3 - x}{2x^2}$

Haga la división y compruebe cada resultado.

103. $(2x^3 + x^2 - 5x + 2) \div (2x - 1)$ **104.** $(3x^2 - 8x + 2x^3 + 3) \div (x + 3)$

105. Simplifique: $\dfrac{\dfrac{1}{2 + h} - \dfrac{1}{2}}{h}$ **106.** Simplifique: $\dfrac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}{x^{-2} - y^{-2}}$

Sección 1.10 Introducción a los números complejos (página 70)

107. Enuncie la definición del número imaginario i.
108. Explique lo que se entiende por el ciclo de potencias de i.

109. Simplifique: (a) $\sqrt{-9} + \sqrt{-36}$ (b) $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-36}$

110. Multiplique: $(2 + 3i)(3 + 5i)$ **111.** Haga la división: $\dfrac{3 + 2i}{2 + i}$

Lleve a cabo las operaciones indicadas.

112. $8i[(3 + 2i) + (7 + 5i)]$ **113.** $(9 - 5i) - (2 + 3i)$
114. Simplifique: **(a)** i^{32} **(b)** i^{18} **(c)** i^{9} **(d)** i^{27}
115. Exprese $5i^{-3}$ como el producto de un número real por i.

116. Determine las partes real e imaginaria de $\dfrac{1}{1 + 2i}$.

117. Determine y simplifique el producto de los dos números complejos $a + bi$ y $c + di$.

118. Exprese el cociente $\dfrac{3 + 2i}{2 + i}$ en la forma $a + bi$.

CAPÍTULO 1: PRUEBA DE RESPUESTAS ÚNICAS

Con las siguientes preguntas pruebe sus conocimientos de las destrezas y conceptos básicos en el capítulo 1. A continuación compare sus respuestas con las que aparecen al final del libro.

1. Diga si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

(a) Los números irracionales negativos no son números reales.
(b) Todo entero es número racional.
(c) Algunos números irracionales son enteros.
(d) Cero es número racional.
(e) Si $x < y$, entonces $x - 5 > y - 5$.
(f) El valor absoluto de una suma es igual a la suma de los valores absolutos.
(g) Si $-5x < -5y$, entonces $x > y$.
(h) $|x - 2| < 3$ quiere decir que x está a menos de 2 unidades del 3 en la recta numérica.

2. Un extremo del segmento de una recta está en -7. El punto medio está en -2. ¿Cuál es la coordenada del otro extremo del segmento?

3. Despeje x de $\frac{2}{3}(x - 3) + 1 = 2x + 3$.

4. Determine las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 52 pulgadas. La longitud es 5 pulgadas mayor que el doble del ancho.

5. Un automóvil sale del punto B a medio día, viajando a 55 millas por hora. Una hora después otro automóvil sale del mismo punto, viajando a 45 mi/h en dirección opuesta. ¿Cuánto tardan los automóviles en estar alejados 200 millas?

6. Exprese en notación científica:

(a) 375,000,000 **(b)** 0.0000318

Despeje x.

7. $\dfrac{|x + 2|}{x + 2} = -1$ **8.** $|x + 2| < 1$

9. Resuelva y grafique cada una de las desigualdades siguientes: **(a)** $2(5x - 1) < x$ **(b)** $|2x - 1| \geq 3$

10. Diga si cada una de las siguientes ecuaciones es cierta o falsa:

(a) $\dfrac{x^3(-x)^2}{x^5} = x$ **(b)** $\left(\dfrac{3}{2 + a}\right)^{-1} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{a}{3}$ **(c)** $(-27)^{-1/3} = 3$

(d) $(x + y)^{3/5} = \left(\sqrt[3]{x + y}\right)^5$ **(e)** $\sqrt{9x^2} = 3|x|$ **(f)** $(8 + a^3)^{1/3} = 2 + a$

11. Simplifique y exprese las respuestas sólo con exponentes positivos: **(a)** $\dfrac{(2x^3y^{-2})^2}{x^{-2}y^3}$ **(b)** $\dfrac{(3x^2y^{-3})^{-1}}{(2x^{-2}y^2)^{-2}}$

Efectúe las operaciones indicadas y simplifique.

12. **(a)** $\sqrt{8} \cdot \sqrt{6}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{360}}{2\sqrt{2}}$ **(c)** $\dfrac{\sqrt[3]{-243x^8}}{\sqrt[3]{3x^2}}$

13. **(a)** $\sqrt{50} + 3\sqrt{18} - 2\sqrt{8}$ **(b)** $\dfrac{12}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}$

14. $5\sqrt{3x^2} + 2\sqrt{27x^2} - 3\sqrt{48x^2}$

15. $(x^2 + 3x)(3x^2) + (x^3 - 1)(2x + 3)$

16. $(6x^3 + x^2 + 3x + 2) \div (2x + 1)$

Factorice totalmente.

17. $64 - 27b^3$ **18.** $6x^2 - 7x - 3$ **19.** $2x^2 - 6xy - 3y^3 + xy^2$

Lleve a cabo las operaciones indicadas y simplifique.

20. $\dfrac{x^2 - 9}{x^3 + 4x^2 + 4x} \cdot \dfrac{2x^2 + 4x}{x^2 + 2x - 15}$ **21.** $\dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 4x - 12} \div \dfrac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x^3 - 6x^2}$

22. $\dfrac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{49}}{x - 7}$ **23.** $\dfrac{1}{x + 3} - \dfrac{2}{x^2 - 9} + \dfrac{x}{2x^2 + x - 15}$

24. Multiplique los números complejos $3 + 7i$ y $5 - 4i$ y exprese el resultado en la forma $a + bi$.

25. Divida $3 + 7i$ entre $5 - 4i$ y exprese el resultado en la forma $a + bi$.

CAPÍTULO 1: PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

I. Todo entero es la coordenada de algún punto en la recta numérica.
II. Todo número racional es un número real.
III. Todo punto en la recta numérica se puede identificar con un número racional.

(a) Sólo I **(b)** Sólo II **(c)** Sólo I y II **(d)** I, II y III **(e)** Ninguna de las anteriores

2. Exprese la desigualdad $-5 \le x$ en notación de intervalo.

(a) $(\infty, -5)$ **(b)** $(-\infty, -5)$ **(c)** $[-5, \infty)$ **(d)** $(\infty, -5]$ **(e)** Ninguna de las anteriores

3. Si $a + b$ es negativo, entonces $|a + b| =$

(a) 0 **(b)** $a + b$ **(c)** $-a + b$ **(d)** $-(a + b)$ **(e)** Ninguna de las anteriores

4. ¿Cuál de las proposiciones siguientes es *falsa*?

(a) $|8 - 2| = 8 - 2$ **(b)** $|2 - 7| = 2 - 7$ **(c)** $|6 + 8| = |6| + |8|$ **(d)** $|3 - 5| = -(3 - 5)$

(e) Ninguna de las anteriores

5. La desigualdad $|x| \ge k$ $(k \ge 0)$ es verdadera si y sólo si

(a) $x \le -k$ o $x \ge k$ **(b)** $x \le k$ o $x \ge -k$ **(c)** $-k \le x \le k$ **(d)** $x \ge k$ **(e)** Ninguna de las anteriores

6. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son ciertas para los números reales a, b y c?

I. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
II. Si $a < b$, entonces $ac < bc$ cuando $c > 0$.
III. Si $a < b$, entonces $ac > bc$ cuando $c < 0$.

(a) Sólo I **(b)** Sólo II **(c)** Sólo III **(d)** I, II y III **(e)** Ninguna de las anteriores

7. En representación de intervalo, la solución de la desigualdad $-3(x + 1) < 2x + 2$ es

(a) $(-\infty, -1)$ **(b)** $(-1, \infty)$ **(c)** $(1, \infty)$ **(d)** $(-\infty, 1)$ **(e)** Ninguna de las anteriores

8. La longitud de un rectángulo es 2 pulgadas menos que tres veces el ancho. Si la longitud aumenta 5 pulgadas y el ancho disminuye 1, la longitud será 5 veces el ancho. Si se usa x para representar el ancho original, ¿cuál de las siguientes ecuaciones se puede usar para resolver a x?

(a) $x - 1 = 5(3x + 3)$ **(b)** $3x - 2 = 5x - 1$ **(c)** $3x + 3 = 5(x - 1)$ **(d)** $3x + 3 = 5x - 1$

(e) Ninguna de las anteriores

9. ¿Cuáles de los siguientes equivalen a $(a + b)^{-1}$?

(a) $a^{-1} + b^{-1}$ **(b)** $\dfrac{1}{a+b}$ **(c)** $(-a) + (-b)$ **(d)** $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ **(e)** Ninguno

10. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son correctas?

I. $a^{-1/2} + b^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}$ **II.** $(-x)^{-1/3} = x^{1/3}$ **III.** $x^{3/4} = (\sqrt[3]{x})^4$

(a) Sólo I **(b)** Sólo II **(c)** Sólo III **(d)** I, II y III **(e)** Ninguna de las anteriores

11. Racionalice el denominador en $\dfrac{8}{\sqrt{5} - 1}$.

(a) $8(\sqrt{5} + 1)$ **(b)** $2(\sqrt{5} - 1)$ **(c)** $2(\sqrt{5} + 1)$ **(d)** $2\sqrt{5} + 1$ **(e)** Ninguno

12. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. $2\sqrt{x+1} = \sqrt{2x+1}$ **II.** $\sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$ **III.** $(x + y)^{1/3} = x^{1/3} + y^{1/3}$

(a) Sólo I **(b)** Sólo II **(c)** Sólo III **(d)** I, II y III **(e)** Ninguna de las anteriores

13. ¿Cuál es la forma totalmente factorizada de la expresión $x^2(x - 1) - 2x(x - 1) - (x - 1)$?

(a) $x(x - 2)(x - 1)$ **(b)** $(x - 1)(x^2 - 2x - 1)$ **(c)** $(x - 2x)(3x - 3)$ **(d)** $(x - 1)^3$

(e) Ninguna de las anteriores

14. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + y^2)$ **II.** $x^2 + y^2 = (x + y)(x + y)$ **III.** $4x^2 - 6xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$

(a) Sólo I **(b)** Sólo II **(c)** Sólo III **(d)** Sólo II y III **(e)** Ninguna de las anteriores

15. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

I. Todo entero se puede escribir en la forma $a + bi$, siendo $i = \sqrt{-1}$.
II. Todo número real es número complejo.
III. La suma, diferencia y producto de dos números complejos es número complejo.

(a) Sólo I **(b)** Sólo II **(c)** Sólo III **(d)** I, II y III **(e)** Ninguna de las anteriores

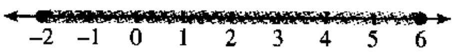
16. ¿Cuál de las siguientes desigualdades se puede usar para indicar que el número real x se encuentra a menos de 5 unidades de distancia del 2 en la recta numérica?

(a) $|x - 2| < 5$ **(b)** $|x + 2| < 5$ **(c)** $|x - 5| < 2$ **(d)** $|x + 5| < 2$ **(e)** Ninguno

17. En notación científica, 325,000,000 =

(a) 3.25×10^{-8} **(b)** 3.25×10^{8} **(c)** 325×10^{6} **(d)** 0.325×10^{9} **(e)** Ninguno

18. ¿Cuál de las desigualdades siguientes representa esta gráfica?



(a) $|x + 4| \leq 2$ **(b)** $|x - 4| \leq 2$ **(c)** $|x - 2| \leq 4$ **(d)** $|x + 2| \leq 4$

(e) Ninguna de las anteriores

19. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es *falsa*?

(a) $(x + y)^{1/3} = \sqrt[3]{x + y}$ **(b)** $x^{-1} + y^{-1} = \dfrac{x + y}{xy}$ **(c)** $\sqrt[3]{x^9} = x^{1/3}$ **(d)** $\sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1|$

(e) Ninguna de las anteriores

20. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. $\dfrac{1}{i} = -i$ **II.** $(3 - 2i)^0 = 1$ **III.** $\dfrac{1 + i}{1 - i} = i$

(a) Sólo I **(b)** Sólo II **(c)** Sólo III **(d)** I, II y III **(e)** Ninguna de las anteriores

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PRUEBE SU COMPRENSIÓN

Página 4

1. Propiedad asociativa de la suma. **2.** Propiedad conmutativa de la suma.

3. Propiedad conmutativa de la suma. **4.** Propiedad distributiva.

5. Propiedad conmutativa de la multiplicación. **6.** Propiedad asociativa de la multiplicación.

7. No; no. **8.** $12 \div 3 \neq 3 \div 12$ **9.** No; no. **10.** $(8 \div 4) \div 2 \neq 8 \div (4 \div 2)$

11. Sí, por las propiedades de cerradura de la suma y multiplicación de números reales, respectivamente.

Página 9

1. $x = 6$ **2.** $x = 17$ **3.** $x = -4$ **4.** $x = 6$ **5.** $x = 13$ **6.** $x = 10$
7. $x = 1$ **8.** $x = 2$ **9.** $x = 5$ **10.** $x = -9$ **11.** $x = -3$ **12.** $x = -11$

Página 19

1. $\{x \mid x < 9\}$ **2.** $\{x \mid x < 18\}$ **3.** $\{x \mid x > 9\}$ **4.** $\{x \mid x > -5\}$ **5.** $\{x \mid x \leq 14\}$
6. $\{x \mid x \geq -2\}$ **7.** $\{x \mid x < 4\}$ **8.** $\{x \mid x \geq 7\}$ **9.** $\{x \mid x \leq -21\}$ **10.** $\{x \mid x \geq -1\}$
11. $\{x \mid x > 3\}$ **12.** $\{x \mid x < -30\}$

Página 32

1. 125 **2.** $-\frac{1}{32}$ **3.** 0 **4.** 1,000,000 **5.** -64 **6.** 64 **7.** $\frac{1}{17}$ **8.** $\frac{1}{23}$
9. 81 **10.** $a^{11}b^{10}$ **11.** 64 **12.** $6x^4$

Página 41

1. $7^{1/2}$ **2.** $(-10)^{1/3}$ **3.** $7^{1/4}$ **4.** $7^{2/3}$ **5.** $5^{3/4}$ **6.** 5 **7.** 4 **8.** $\frac{1}{6}$
9. $\frac{1}{7}$ **10.** -3 **11.** 8 **12.** $\frac{1}{8}$ **13.** $\frac{27}{8}$ **14.** 4 **15.** $\frac{1}{4}$ **16.** $6x$
17. $-\dfrac{1}{2x}$ **18.** $-\frac{3}{2}x^2$

Página 44

1. $6\sqrt{2}$ **2.** $6\sqrt{3}$ **3.** $\sqrt{5}$ **4.** $\sqrt[3]{2}$ **5.** $4\sqrt[3]{2} + 5$ **6.** $-\sqrt[3]{3}$ **7.** $11\sqrt{2}$

8. $13\sqrt{3}$ **9.** $3\sqrt{5}$ **10.** $7\sqrt{7}$ **11.** $6\sqrt[3]{2}$ **12.** $2\sqrt[3]{3}$

Página 50

1. $x^2 + 1$ **2.** $x^2 + 4x - 13$ **3.** $2x^3 + 3x^2 + 8x + 1$ **4.** $4x^2y - 5xy + 6xy^2$
5. $-3x^4 - 6x^3 + 3x$ **6.** $6x^2 + 13x + 6$ **7.** $12x^2 + 28x - 5$ **8.** $16x^2 - 49$
9. $4x^2 - 12xy + 9y^2$ **10.** $2x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 14x^2 - 15x$

Página 54

1. $3(x - 3)$ **2.** $-5(x - 3)$ **3.** $5y(x + 5y + 2y^4)$ **4.** $(x + 6)(x - 6)$
5. $(2x + 7)(2x - 7)$ **6.** $(a + 2 + 5b)(a + 2 - 5b)$ **7.** $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$
8. $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$ **9.** $(2a - 5)(4a^2 + 10a + 25)$ **10.** $3(x + 4)(x - 4)$
11. $a(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ **12.** $2h(x + 2h)(x - 2h)$

Página 58

1. $(a+3)^2$ **2.** $(x-5)^2$ **3.** $(2x+3y)^2$ **4.** $(x+3)(x+5)$ **5.** $(a-10)(a-2)$
6. No factorizable. **7.** $(5x-2)(2x-7)$ **8.** $(3x+2)(2x-5)$ **9.** No factorizable.

Página 65

1. $\frac{x}{x+2}$ **2.** $-\frac{4b}{3a}$ **3.** $-\frac{x+2}{x}$ **4.** -1 **5.** 1 **6.** $\frac{4-3x}{6x^2}$ **7.** $\frac{25}{6x}$ **8.** $\frac{2(5x+4)}{(x-2)(x+2)}$
9. $\frac{13x-18}{(x-1)(x^2-4)}$ **10.** $\frac{2}{2x+5}$ **11.** $3x^2y^4-2xy+4x^4y^2$ **12.** $2x^2-3x+5$; residuo $=-7$.

Página 71

1. $3i$ **2.** $7i$ **3.** $i\sqrt{5}$ **4.** $-2i$ **5.** $\frac{2}{3}i$ **6.** -120 **7.** $21i$ **8.** $7i\sqrt{2}$ **9.** $12i\sqrt{5}$