厦门大学《数字信号处理》期中试题·答案

考试日期：2016.11　信息学院自律督导部整理

1.（16分）判断下列系统是否为线性、时不变的、因果的。

（1）$r(t)=q(0)+3t^2e(t)$　（2）$r(t)=e(t)\cos(t)$

（3）$r(t)=\int_{-\infty}^{3t}e(\tau)d\tau$　（4）$r(t)=e^{e(t)}$

（5）$r(t)=e(\frac{t}{2})$　（6）$r(t)=[\sin bt]e(t)$

（7）$r(t)=\begin{cases}0,t<0\\e(t),t>0\end{cases}$　（8）$r(t)=\int_{-\infty}^{3t}e(\tau)d\tau$

答案:

(1) 非线性、时变、因果。

(2) 线性、时变、因果。

(3) 线性、时变、非因果。

(4) 非线性、时不变、因果。

(5) 线性、时变、非因果。

(6) 线性、时变、因果。

(7) 线性、时变、因果。

2.（8分）计算下列卷积

（1）$e^{-t}u(t)*e^{-2t}u(t)$

（2）$3\delta(\mathrm{t})*\delta(3t)$

（3）$t[u(t)-u(t-2)]*\delta(1-t)$

（4）$[(1-3t)*\delta^{'}(1-t)]$

解：

(1) 公式法

$$e^{-t}u(t)*e^{-2t}u(t)=\int_0^t e^{-\tau}e^{-2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\cdot u(t)$$

$$=e^{-2}\int_0^t e^{\tau}\mathrm{d}\tau\cdot u(t)$$

$$=e^{-2t}(e^{t}-1u(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

（2）定义式法

$$3\delta(t)*\delta(3t)=3\delta(t)*\frac{1}{3}\delta(t)=\delta$$

（3）

$$t[u(t)-u(t-2)]*\delta(1-t)=t[u(t)-u(t-2)]*\delta(t-1)$$

$$=(t-1)[u(t-1)-u(t-3)]$$

（4）

$$[(1-3t)*\delta'(t)]=[1-3t]'=-3$$

3.（15分）给定系统微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+2\frac{d}{dt}r(t)+r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+3e(t)$$

若激励信号和起始状态为

$$e(t)=e^{-t}u(t+1)\text{ ， }r(0-)=1,r'(0-)=2$$

试求：（1）系统的完全响应；

（2）零输入响应，零状态响应，自由响应、强迫响应。

解：$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+2\frac{d}{dt}r(t)+r(t)=0$

$\alpha_1=\alpha_2=-1$

方程齐次解为：$r_h(t)=A_1e^{-t}+A_2te^{-t},t>0$

方程特解为：

$$r_p(t)=Bt^2e^{-t}$$
$$r_p^{'}(t)=2Bte^{-t}-Bt^2e^{-t}$$
$$r_p^{''}(t)=2Be^{-t}-2Bte^{-t}-2Bte^{-t}+Bt^2e^{-t}$$
$$=2Be^{-t}-4Bte^{-t}+Bt^2e^{-t}$$

代入方程得：

$$r_p(t)=Bt^2e^{-t}$$
$$r_p^{'}(t)=2Bte^{-t}-Bt^2e^{-t}$$
$$2Be^{-t}-4Bte^{-t}+Bt^2e^{-t}+4Bte^{-t}-2Bt^2e^{-t}+Bt^2e^{-t}=2Be^{-t}$$

$$e(t)=e^{-t}u(t+1)$$
$$t>0,e(t)=e^{-t},e'(t)=-e^{-t}$$

得：$e'(t)+3e(t)=-e^{-t}+3e^{-t}=2e^{-t}$

$B=1$

（1）系统的完全响应为：

$$r(t)=r_h(t)+r_p(t)=A_1e^{-t}+A_2te^{-t}+t^2e^{-t}，\ t>-1$$
$$r(0-)=1,r'(0-)=2，\ r''(0-)=3$$
$$r(0-)=A_1=1$$
$$r'(0-)=2=-A_1e^{-t}+A_2e^{-t}-A_2te^{-t}+2te^{-t}-t^2e^{-t}$$
$$A_2=3$$
$$r(t)=\left[e^{-t}+3te^{-t}+t^2e^{-t}\right]u(t+1)$$

$\therefore$系统完全响应为：

$$r(t)=\left[e^{-t}+3te^{-t}+t^2e^{-t}\right]u(t+1)$$

（2）系统的自由响应为：$\left(e^{-t}+3te^{-t}\right)u(t+1)$

系统的强迫响应为：　$t^2e^{-t}u(t+1)$

系统的零状态响应为：$r_{zs}(t)=A_1e^{-t}+A_2te^{-t}+t^2e^{-t}$，$t>0$

$$r_{zs}(0)=A_1e^{-t}+A_2te^{-t}+t^2e^{-t}=0\Rightarrow A_1=0$$

$$r_{zs}^{'}(0)=-A_1e^{-t}-A_2te^{-t}+A_2e^{-t}-t^2e^{-t}+2te^{-t}=0\Rightarrow A_2=0$$

$$r_{zs}(t)=t^2e^{-t}u(t+1)$$

系统零输入响应为：$r_{zi}(t)=\left(e^{-t}+3te^{-t}\right)u(t+1)$

系统的稳态响应为0，系统瞬态响应为全响应。

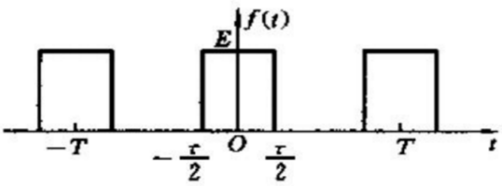
4.（12分）若周期矩形信号 $f_1(t)$和$f_2(t)$ 的波形如题图所示，$f_1(t)$的参数为τ=0.75μs，T=1.5μs．E=2V；$f_2(t)$的参数为τ=1.25μs，T=2.5μs．E=3V，分别求：

（1） 的谱线间隔和带宽（第一零点位置），频率单位以kHZ表示；

（2） 的谱线间隔和带宽：

（3） 与 的基波幅度之比；

（4） 基波与 三次谐波幅度之比。



解： 由题目可知，题图所示周期举行信号的傅里叶级数为

$$f(t)=\frac{E\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa(\frac{n\omega_1\tau}{2})e^{j\omega_1 t},\omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

且基波幅度为 $\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\left|\sin(\omega_1\cdot\frac{\tau}{2})\right|=\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\left|\sin(\frac{\pi\tau}{T})\right|$

三次谐波幅度为 $\frac{2\mathrm{E}}{3\pi}\left|\sin(3\omega_1\cdot\frac{\tau}{2})\right|=\frac{2\mathrm{E}}{3\pi}\left|\sin(\frac{3\pi\tau}{T})\right|$

另外，周期信号的频谱是离散的，每两根相邻谱线间的间隔就是基频 ω_1 。周期矩形信号频谱的包络线是抽样函数，其第一个零点位置为 $\omega=\frac{2\pi}{\tau}$ （令 $\frac{n\omega_1\tau}{2}=\pi\Rightarrow n\omega_1=\frac{2\pi}{\tau}$ ）。注意，频谱还可以表示为频率 f 的函数。由$\omega=2\pi f$ 可知，若以f 为频谱图横轴，则谱线间隔就为 $\frac{1}{T}$ ，第一个零点的位置就为 $f=\frac{1}{\tau}$ 。

依据以上结论，可得到题中各问题的答案如下：

（1）谱线间隔：$\frac{1}{T}=\frac{2}{3}*10^3$ KHZ

带宽（第一零点位置）：$\frac{1}{\tau}=\frac{4}{3}*10^3$ KHZ

（2）谱线间隔：$\frac{1}{T}=400$ KHZ

带宽（第一零点位置）：$\frac{1}{\tau}$=800 KHZ

（3）$f_1(t)$的基波幅度： $\frac{2E}{\pi}|\sin(\frac{\pi\tau}{T})|=\frac{4}{\pi}$

$f_2(t)$的基波幅度： $\frac{2E}{\pi}|\sin(\frac{\pi\tau}{T})|=\frac{6}{\pi}$

二者基波幅度之比2:3

（4）过程略，原理同上，二者基波幅度2:1

5.（12分）利用傅里叶变换的性质，求下列信号的傅里叶变换。

（1） $f(t)=\sin t\cos t$

（2） $f(t)=2Sa(2t)\cos(3t)$

（3） $f(t)=e^{-(2+2t)}\delta(t)$

（4） $f(t)=e^{-3t}\sin 2t\cdot u(t)$

（1）

解 $F(\omega)=\P\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos t\sin te^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin 2te^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}2t}-e^{-\mathrm{i}2t}}{2\mathrm{i}}e^{-\mathrm{i}\omega t}dt$

$$=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mathrm{i}(\omega-2)t}dt-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mathrm{i}(\omega+2)t}dt\right]=-\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[2\pi\delta(\omega+2)-2\pi\delta(\omega-2)\right]$$

$$=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\left[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)\right]$$

（2）

解： 由于 $g_\tau(t)\leftrightarrow\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$

令 $\tau=4$，有 $g_4(t)\leftrightarrow 4Sa(2\omega)$

由对称性，有 $4Sa(2t)\leftrightarrow 2\pi g_4(\omega)$

$\cos(3t)\leftrightarrow\pi[\delta(\omega+3)+\delta(\omega-3)]$

$$f(t)=2Sa(2t)\cos(3t)\leftrightarrow F(j\omega)=\frac{1}{2\pi}[\pi g_4(\omega)]*\pi[\delta(\omega+3)+\delta(\omega-3)]$$

$$F(j\omega)=\frac{\pi}{2}[g_4(\omega+3)+g_4(\omega-3)]$$

（3）

解：$f(t)=e^{-(2+2t)}\delta(t)=e^{-2}\delta(t)$

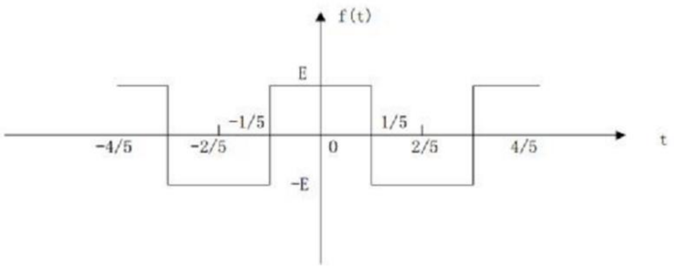
因为$\delta(t)\leftrightarrow 1$　所以有 $e^{-2}\delta(t)\leftrightarrow e^{-2}$

（4）解：$F(w)=\text{F[f(t)]}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-3t}u(t)\sin 2te^{-iwt}dt=\int_{0}^{+\infty}|e^{-3t}\frac{e^{i2t}-e^{-i2t}}{2i}e^{-iwt}dt$

$$=\frac{1}{2i}\int_{0}^{+\infty}(e^{-[3+i(w-2)]t}-e^{-[3+i(w+2)]t})=\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{-[3+i(w-3)t]}\Big|_{0}^{+\infty}}{-[3+i(w-2)]}-\frac{e^{-[3+i(w+3)t]}\Big|_{0}^{+\infty}}{-[3+i(w+2)]}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{3+i(w-2)}-\frac{1}{3+i(w+2)}\right)=\frac{1}{2i}\bullet\frac{4i}{(3+iw)+4}=\frac{2}{(3+iw)^{2}+4}$$

6.（13分）某周期对称方波信号　的波形如图所示，求其傅里叶级数的常用展开式，并画出其频谱图。



解：周期信号可由傅里叶级数展开表示，其中三角形式为

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\,cos(n\omega_1 t)+b_n\,sin(n\omega_1 t)]$$

其中 n 为正整数

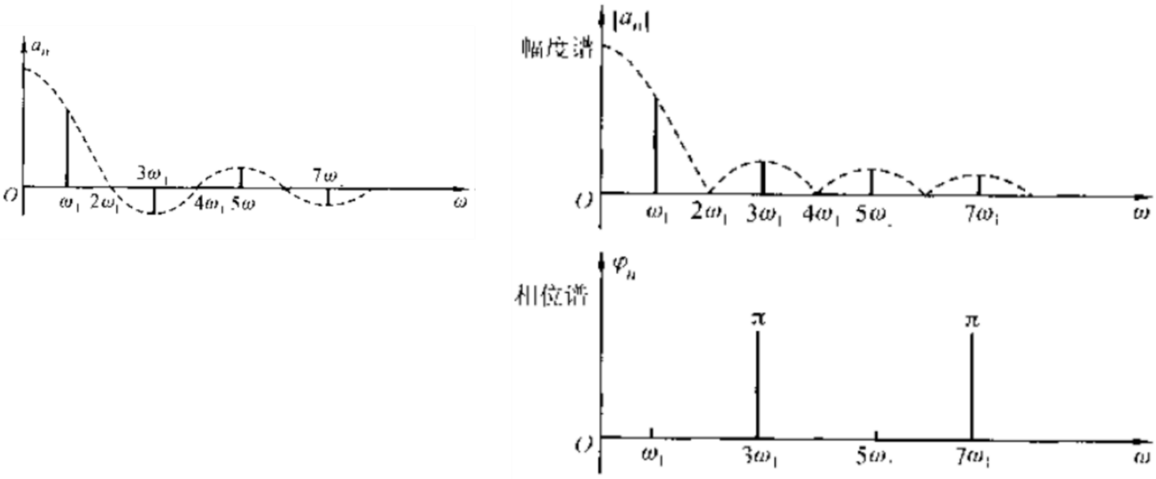
$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)dt$$
$$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\,cos(n\omega_1 t)\,dt$$
$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\,sin(n\omega_1 t)\,dt$$

T_1为$f(t)$的周期$T_1=\frac{4}{5}$，$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}=\frac{5\pi}{2}$，由图可以看出为偶函数，所以$b_n=0$，其他代入可得，由于它是正负交替的信号，其直流分量等于零，

$$f(t)=\frac{2E}{\pi}\left[\cos(\omega_1 t)-\frac{1}{3}\cos(3\omega_1 t)+|\frac{1}{5}\cos(5\omega_1 t)-\cdots\right]$$

其中$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}=\frac{5\pi}{2}$。

其频谱图为：



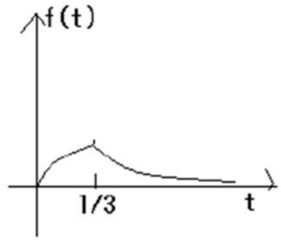
7. （12分）求连续信号$f(t)=te^{-3t}u(t)$的傅里叶变换，并绘制出信号波形和幅度谱$|F(\omega)|$。

解：这里考查的是第三章关于傅里叶变换的知识，要熟记傅里叶变换的公式，熟练掌握傅里叶变换的性质，并会灵活变通。

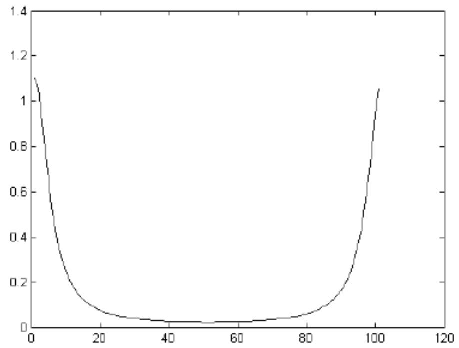
因为$f(t)=te^{-3t}u(t)$,又因为$e^{-3t}u(t)$的傅里叶变换为 1/(3+jw)

所以 $F(w)=-j\left(\frac{1}{3+jw}\right)' = -\left(\frac{1}{3+jw}\right)^2$

信号波形图如下：



幅度谱|F(W)|如下：



8. （12分）函数$f(t)$可以表示成偶函数$f_e(t)$和奇函数$f_o(t)$之和，试证明：

（1）若$f(t)$是实函数，则 $\mathcal{F}[f_e(t)]=\mathrm{Re}[F(w)]$ ，$\mathcal{F}[f_o(t)]=j\,\mathrm{Im}[F(w)]$ ；

（2）若$f(t)$是复函数，可表示为 $f(t)=f_r(t)+jf_i(t)$ 且 $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$

则 $\mathcal{F}[f_r(t)]=\frac{1}{2}\left[F(\omega)+F^*(-\omega)\right]$，$\Phi\left[f_i(t)\right]=\frac{1}{2j}[F(\omega)-F^*(-\omega)]$,其中$F^*(-\omega)=\Phi\left[f^*(t)\right]$。

证明 （1）已知$f(t)\leftrightarrow F(\omega)$，现考察$f(-t)$的傅里叶变换。

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{f(-t)\}&=\int_{-\infty}^{\infty}f(-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\xrightarrow{\text{令 }\tau=-t}\int_{\infty}^{-\infty}-f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因为$f(t)$是实函数，所以

$$f(t)=f^*(t)$$

则积分 $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t&=\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}]^*\mathrm{d}t\\&=\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right]^*=F^*(\omega)\end{aligned}$$

即 $$f(-t)\leftrightarrow F^*(\omega)$$

由于 $$f_e(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]$$

所以 $$\mathscr{F}\{f_e(t)\}=\frac{1}{2}[F(\omega)+F^*(\omega)]=\mathrm{Re}[F(\omega)]$$

又 $$f_o(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]$$

所以 $$\mathscr{F}\{f_o(t)\}=\frac{1}{2}[F(\omega)-F^*(\omega)]=\mathrm{jIm}[F(\omega)]$$

（2）已知 $$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \qquad ①$$

则 $$F(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

且 $$F^*(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]^*\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f^*(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \qquad ②$$

由式①+②，得

$$\begin{aligned}F(\omega)+F^*(-\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)+f^*(t)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=2\int_{-\infty}^{\infty}f_r(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

从而 $$\mathscr{F}\{f_r(t)\}=\frac{1}{2}[F(\omega)+F^*(-\omega)]$$

由式①－②，得

$$F(\omega) - F^*(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - f^*(t)] e^{-j\omega t} dt$$

$$= 2j \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) e^{-j\omega t} dt$$

从而 $$\mathscr{F}\{f_i(t)\} = \frac{1}{2j}[F(\omega) - F^*(-\omega)]$$