2002年 工程图学学报 2002
第3期 JOURNAL OF ENGINEERING GRAPHICS No.3

二元正态分布函数(Coons 曲面法)插值研究

邱 钧 孙洪泉 韩 伟

(北京信息工程学院，北京 100101)

摘 要：根据 Coons 曲面生成原理，给出了二元正态(Gauss)分布的插值方法。对于二元正态分布密度函数，仅需给定插值区域边界上的值，即可插值出该区域上任意一点密度函数值；对于二元正态分布函数，仅需给定插值区域两边的双边界值，即可得到该区域上任意一点分布函数值。该方法无需知道也无需计算出 Gauss 分布函数的各项参数，便于应用，插值结果精确，绝对误差为 $O\,(10^{-9})$，相对误差为 $O\,(10^{-11})$。

关 键 词：Gauss 分布；Coons 曲面；二元分布；插值曲面
中图分类号：TP 391
文献标识码：A **文 章 编 号**：1003-0158(2002)03-00-06

在自然界中，许多现象的统计规律非常近似于 Gauss 分布。对二元 Gauss 分布，当两个变量不是独立的情况下，二元 Gauss 分布密度函数是不能由它的两个边际分布密度来决定的。笔者根据 Coons 曲面生成原理，指出二元 Gauss 分布密度函数在任意一个矩形定义域上的值可以由它在边界上的值完全确定。笔者用 Coons 插值方法证明并十分简便地得到了极为精确的结果，而无需知道也无需计算出 Gauss 分布密度函数的各项参数。在给定二元 Gauss 分布函数在矩形区域的任意两个相邻边界上的双边界值，即可得到二元 Gauss 分布函数在该区域上任意一点的函数值。因而这一方法也可以用来验证非 Gauss 分布，同时也推广了 Coons 插值函数类。

1 Gauss 分布密度函数和 Coons 插值公式

1.1 二元 Gauss 分布函数的数学模型

1.1.1 密度函数

$$p(\hat{\imath},\ \c{c}) = \frac{1}{2\pi\acute{o}_1\acute{o}_2\sqrt{1-r^2}} \cdot exp\{-\frac{1}{2(1-r^2)} \cdot$$

收稿日期：2002-04-26
基金项目：北京市教委科研计划基金资助项目（00KG-125）
作者简介：邱 钧（1966-），男，江苏南京人，讲师，主要研究领域为应用数学和图像处理与分析等。

$$[\frac{(x-m_1)^2}{s_1^2} - 2r\frac{(x-m_1)(h-m_2)}{s_1 s_2} + \frac{(h-m_2)^2}{s_2^2}]\} \qquad (1)$$

其中: $-\infty < x < \infty$,$-\infty < h < \infty$, r, s_1, s_2, m_1, m_2 都是常数，且$-1 < r < 1$, $s_1 > 0$, $s_2 > 0$。

1.1.2　分布函数

$$F(x,\ y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(\hat{\imath},\ ç)\mathrm{d}\,\hat{\imath}\ \mathrm{d}\,ç \qquad (2)$$

1.2　Coons 曲面生成原理

下面介绍 Coons 曲面的生成方法[1]~[3]。

记矩形（如图 1）W 的 4 个顶点为 $P_1(x_0, y_0)$，$P_2(x_1, y_0)$，$P_3(x_1, y_1)$和 $P_4(x_0, y_1)$。设 $Q(x, y)$为W 内的任意一个计算点，经过点Q 作和W 的边界dW 平行的平行线，平行线与边界dW 的交点分别记为 $Q_1(x, y_0)$，$Q_2(x_1, y)$，$Q_3(x, y_1)$和 $Q_4(x_0,\ y)$。如果 $F(x,y)$在边界dW上是已知连续的，则 Coons 插值[1]是

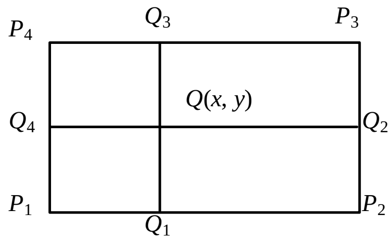


图 1　Coons 曲面生成区域

$$F(Q) = \sum_{i=1}^{4}\frac{A_i + A_{i+1}}{A} f(Q_i) - \sum_{i=1}^{4}\frac{A_i}{A} f(P_i) \qquad (3)$$

其 中　$A_1 = A_5 = (x_1 - x)(y_1 - y)$，$A_2 = (x - x_0)(y_1 - y)$， $A_3 = (x - x_0)(y - y_0)$，$A_4 = (x_1 - x)(y - y_0)$，$A_5 = A_1$，$A = (x_1 - x_0)(y_1 - y_0)$，从而 $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$。

这一计算公式，由边界dW上的 8 个点的已知值得到计算点 Q 的插值 $F(Q)$。第一个求和号的系数是面积加权平均，决定于计算点 $Q(x,y)$与边界距离的大小。第 2 个求和号的系数是面积加权平均，用以调整插值在边界的值的误差。论文[1], [3]研究了 Coons 插值是准确的函数类。

2　二元 Gauss 分布密度函数的插值计算

2.1　插值结果与计算结果的比较

在二元 Gauss 分布密度函数的数学表达式（1）中取定参数取 r=0.2, s_1=1, s_1=2, m_1=0, m_2=1, W 取作以点(－3，－2)、(3，－2)、(3，4)和(－3，4)为顶点的矩形区域，dW 为W 的边界。在边界dW 上给定二元 Gauss 分布密度函数的值。现在我们从边界dW上的 Gauss 分布密度函数值，用公式（3）的 Coons 曲面方法，对矩形区域W上的 Gauss 分布密度进行插值。将区间$-3 \le X \le 3$ 均分为 30 段，区间$-2 \le Y \le 4$ 均分为 20 段。这样在边界dW上取 108 个数据，来计算W 中的 600 个点上的 Coons 插值。为了便于比较，在矩形区域W 的相应插值点上，用二元 Gauss 分布密度函数的数学表达式（1）计算出 600 个分布密度值。计算结果：绝对误差为：$2.9153724170365 \times 10^{-17}$；相对误差为: $1.14278587722294 \times 10^{-17}$。二元 Gauss 分布密度函数计算结果与插值结果见图 2 和图 3。

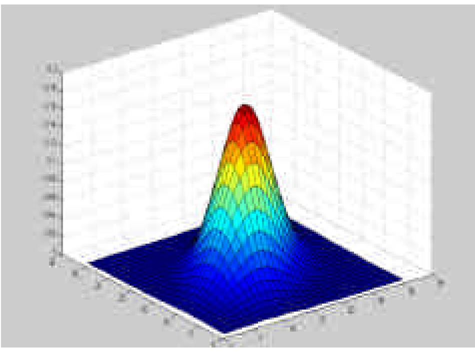


图 2　二维 Gauss 分布密度函数图形(计算结果)

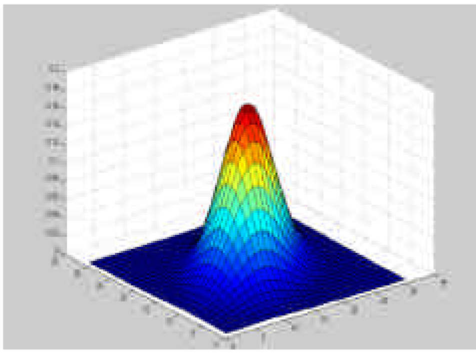


图 3　二维 Gauss 分布密度函数图形(插值结果)

抽取一些点进行比较（见表 1）。

表 1　二元 Gauss 分布密度计算结果与插值结果的比较

(x, y)	(0 , 1)	(-1 , 1)
$p(x, y)$	8.12184181806114E-02	4.82457968945969E-02
插值结果	8.12184181806116E-02	4.82457968945971E-02
(x, y)	(-1 , 0)	(0 , 3)
$p(x, y)$	4.70056142324788E-02	4.82457968945969E-02
插值结果	4.70056142324789E-02	4.82457968945969E-02
(x, y)	(2.8 , 3.4)	(2.5 , 1)
$p(x, y)$	0.00130187926408	3.13282048746292E-03
插值结果	0.00130187926408	3.13282048746293E-03
(x, y)	(1.5 , -1.9)	(-1.6 , 2.5)
$p(x, y)$	5.34996481755667E-03	1.24390400699179E-02
插值结果	5.34996481755669E-03	1.24390400699179E-02

2.2　计算步骤

假设 $p(x,y)$是公式(1)给出的二元 Gauss 分布密度函数，它在矩形的边界dW上是已知的，并令其值为 $p(x_i, y_i)$，$(x_i, y_i) \in dW$，$(i=1, 2,\cdots, n)$，则在区域W上二元 Gauss 分布密度函数插值算法步骤如下：

第 1 步，数据预处理，计算 $+np(x_i, y_i)$，$(x_i, y_i) \in dW$，$(i=1, 2,\cdots, n)$；

第 2 步，用 Coons 曲面插值公式(3)，求得矩形W上任意一点的值 $F(x,y)$, $(x,y) \in W$；

第 3 步，计算值 $e^{F(x,y)}$，$(x,y) \in W$，求得区域W上二元 Gauss 分布密度函数。

这一算法极其简单快速，极其精确。要特别指出，这个算法仅需要预先知道区域Ω 的边界上的数据是属于 Gauss 分布密度函数类的，并不需知道其分布参数。

3　二元 Gauss 分布函数插值

3.1　二元正态分布函数插值提法

令 $I=[a,b]$,　$J=[c,d]$；设区域 $D=I\times J=\{(x,y): a\le x\le b,\ \ c\le y\le d\}$。将 D 剖分

为网格

$$\begin{cases} a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b \\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_M = d \end{cases} \tag{4}$$

网格区间为 $\Delta_i = x_i - x_{i-1}(i = 1,2,\cdots,N)$；$\Delta_j = y_j - y_{j-1}(j = 1,2,\cdots M)$。

若已知分布函数 $F(x, y)$ 在给区域 D 的左边和下边的双重边界上的值 $F_{i,j}$，$(i = 0, 1, j = 0, 1, \cdots, M)$，$(j = 0, 1, i = 0, 1, \cdots, N)$，则可用 Coons 曲面插值方法，得到分布函数 $F(x, y)$在区域 $D^*=\{(x, y): x_1 \le x \le x_{N-1},\ \ y_1 \le y \le y_{M-1}\}$ 上的估计值 $F^*(x, y)$。且满足

$$F^*(x_i, y_j) = F(x_i, y_j),\quad i = 1, \cdots, N\text{-}1，j = 1, \cdots, M\text{-}1。 \tag{5}$$

3.2 插值方法与步骤

（1）根据已知 D 的左边和下边的双重边界上的值分布函数值 $F_{i,j}$，运用差分方法，分别求出区域 D^*的左边界上分布密度函数的值 $p^*_{i,1}(i = 1, 2, ..,. N\text{-}1)$，和下边界上分布密度函数的值 $p^*_{1,j}(j = 1, \cdots, M\text{-}1)$。

左边界的分布密度函数值为

$$p^*_{1,j} = \frac{F_{1,j} - F_{0,j} - F_{1,j-1} + F_{0,j-1}}{(x_i - x_{i-1})\cdot(y_j - y_{j-1})}，(j = 1, 2, \cdots, M\text{-}1) \tag{6}$$

下边界的分布密度函数值为

$$p^*_{i,1} = \frac{F_{i,1} - F_{i,0} - F_{i-1,1} + F_{i-1,0}}{(x_i - x_{i-1})\cdot(y_j - y_{j-1})}，(i = 1, 2, ..,. N\text{-}1) \tag{7}$$

进而可以求得右边界和上边界的分布密度函数值。

右边界的分布密度函数值为

$$p^*_{N,M-j+1} = p^*_{1,j}，(j = 1, 2, \cdots, M\text{-}1) \tag{8}$$

右边界的分布密度函数值为

$$p^*_{N-i+1,M} = p^*_{i,1}，(i = 1, 2, ..,. N\text{-}1) \tag{9}$$

（2）根据边界上分布密度函数的值 $p^*_{i,j}$，用 Coons 插值方法求出 D^*上的分布密度函数的值。区域 D^*为

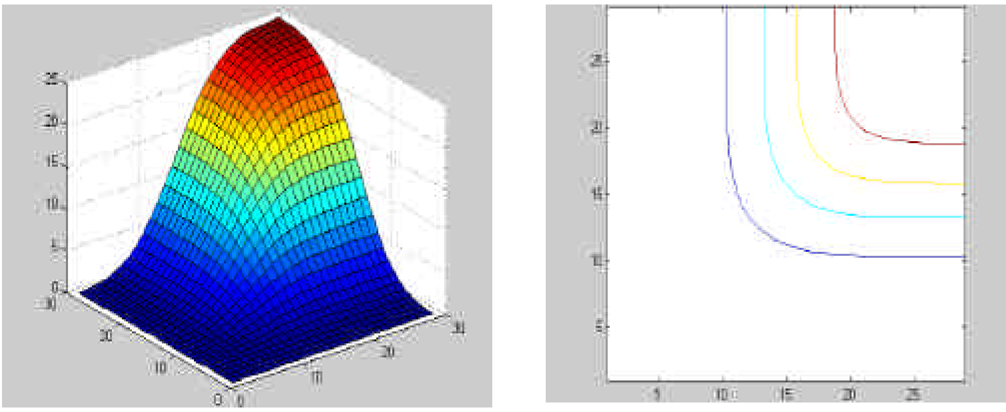
$$\begin{cases} a' = x_1 < \cdots < x_N = b \\ c' = y_1 < \cdots < y_M = d \end{cases} \tag{10}$$

（3）运用数值积分方法，求出区域 D^*上的分布函数的值 $F^*_{i,j}$。

事实上，对于已知任意相邻的双边界上的分布函数值，都可以用上述方法求得 D^*上的分布密度函数的值，只是公式(6)~(9)中有关变量的脚标要作相应的变换。

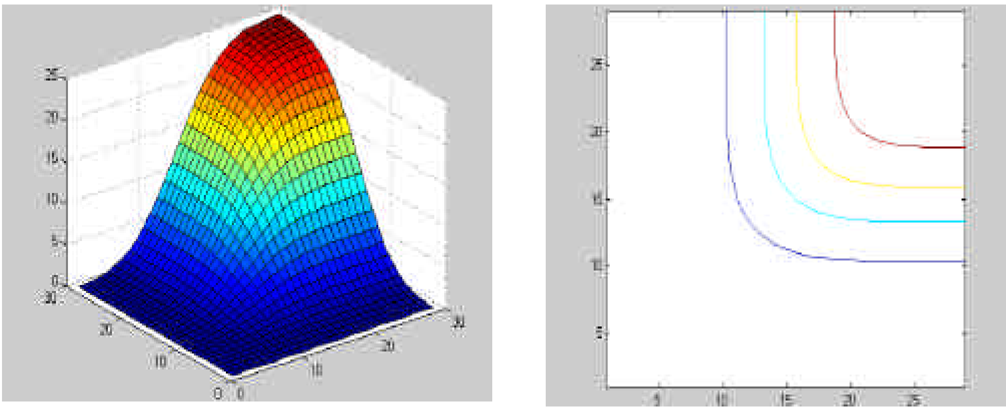
3.3 研究实例

为了便于比较，使用上一节对二元Gauss分布密度函数所用参数相同，首先运用公式(2)计算出区域D上的二元Gauss分布函数值(参见图4)。再运用其左边和下边的双边界数据，运用公式(6)~(9)求区域D4个边界上分布密度值，进而求得整个区域D上分布密度值。再运用数值积分法，求得区域D上二元Gauss分布函数值(参见图5)。其插值精度：绝对误差为$O(10^{-9})$；相对误差为$O(10^{-11})$。



(a) 分布曲面图　　　　　　　　　　　　　　　(b) 分布等值线图

图 4　二元 Gauss 分布函数图形（由公式(3)计算结果）



(a) 分布曲面图　　　　　　　　　　　　　　　(b) 分布等值线图

图 5　二元 Gauss 分布函数图形（用图 4 的双重边界进行插值结果）

4 讨　论

上述计算中，矩形W的边要求平行于 X 轴和 Y 轴的限制是不必要的，因为计算公式(2)的结构在刚体运动下是不变的。不仅如此，区域W可以是下面两个矩形拼起来的区域。

作 P_4P_5 线的延长线得 P_1P_2 上的一点 P'_5，作线 P_5P_6 的延长线得 P_3P_2（参见图 6）上的一点 P''_5，则这个区域中的任意一个点由边界上的点完全确定。例如，矩形中 $P_1P'_5P_5P_6$ 任意一点的值由线段 P_5P_6，P_6P_1，$P_1P'_5$ 和 $P_2P''_5$ 上的值完全决定。当然区域还可以推广为更一般的情形，究竟能够推广到

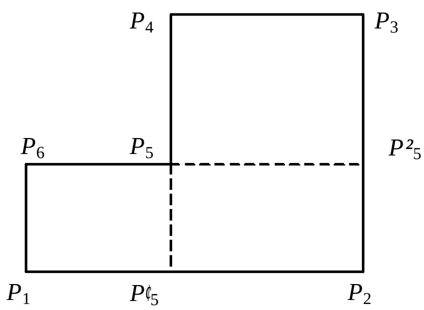


图 6　二元 Gauss 分布函数图形

怎样一般的情形，使得计算公式（2）可以从边界上的值计算区域的内点，是需要进一步研究的。

这一问题实际上是某个四阶差分方程的边值问题[1]，要研究边界取得怎样一般性的锯齿形状时，问题是适定的。

对于多元 Gauss 分布，用推广的 Coons 插值方法[3]同样会得到精确的计算值。

在重力场区域校正中，如果测得的场（例如重力场）由二个场叠加而成；一个场是大范围的（例如背景场），假如分布是正态的；另一个场是局部的（例如异常场），则用远离局部场作用的地方测得的场值，根据本项研究，应该可以从测得的叠加的场值中分离出局部场的场值。

参 考 文 献

[1] 张庭杰, 李海涛, 邱佩璋. 一类四阶差分方程边值问题及分形曲面的生成[J]. 应用数学学报, 1997, 20(3): 386~393.

[2] 张庭杰, 邱佩璋, 李海涛. Coons 型分形曲面的生成方法[J]. 软件学报, 1998, 9(9): 709~712.

[3] 邱佩璋, 张庭杰, 张 朋. Coons 型分形曲面[J]. 工程图学学报, 1999, 37(2): 8~14.

Study on Interpolation of Bivariate Normal Distribution with Coons Surface Method

QIU Jun SUN Hong-quan HAN Wei

(Beijing Information Technology Institute, Beijing 100101, China)

Abstract: The interpolation method of bivariate normal (Gauss) distribution with the principles of creating a Coons surface is presented. Based on the given values of bivariate normal distribution density function on the boundary of a rectangular region, the values of the density function on the rectangular region can be obtained. With the given values of bivariate normal distribution function on the two biboundaries of a rectangular region, the values of distribution function on the rectangular region can be found. This method features that the values of a normal distribution (or density) function on a field only dependent on its values on the boundary of the field, not on any parameters of the distribution function. In practice, it has higher precision: the absolute error is O (10^{-9}) and the relative error is O (10^{-11}).

Key words: Gauss distribution; Coons surface; bivariate distribution; interpolation surface