



## DESCRIÇÃO

Apresentação da Teoria dos Conjuntos como uma linguagem essencial para a descrição de temas matemáticos, e os principais métodos e estratégias combinatórias de contagem.

## PROPÓSITO

Apresentar os conceitos básicos envolvendo conjuntos e a sua importância para a adequada compreensão de qualquer literatura matemática.

## PREPARAÇÃO

Antes de iniciar este conteúdo, tenha em mãos papel, caneta e uma calculadora científica, ou use a calculadora de seu smartphone/computador.

## OBJETIVOS

# MÓDULO 1

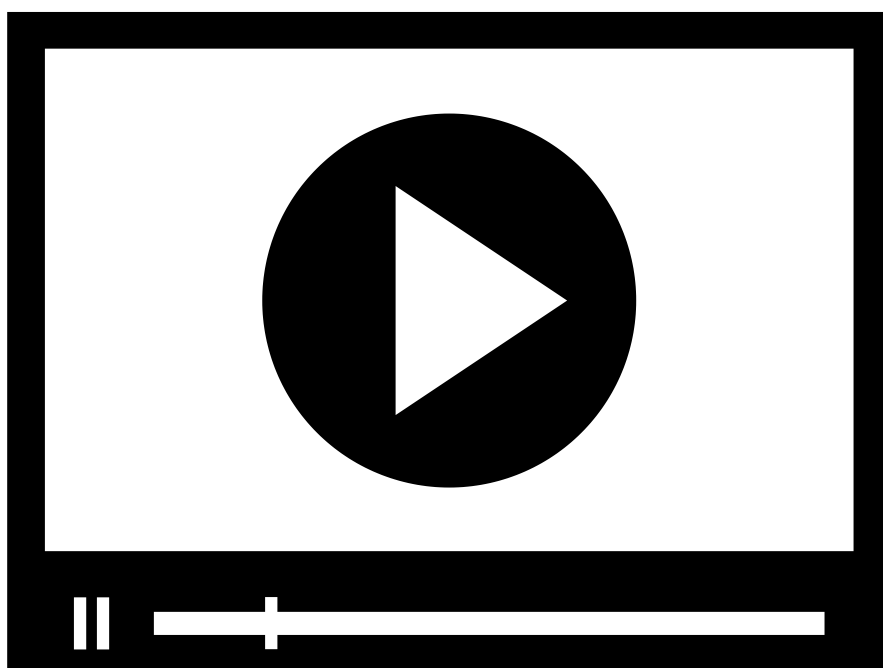
Reconhecer a linguagem da Teoria dos Conjuntos

# MÓDULO 2

Reconhecer os Princípios de Contagem

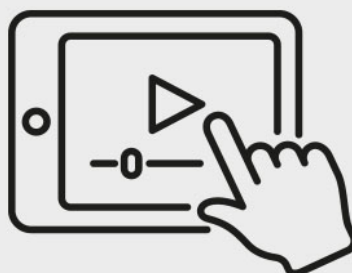
# MÓDULO 3

Identificar os principais agrupamentos combinatórios



A linguagem dos conjuntos e as técnicas de contagem

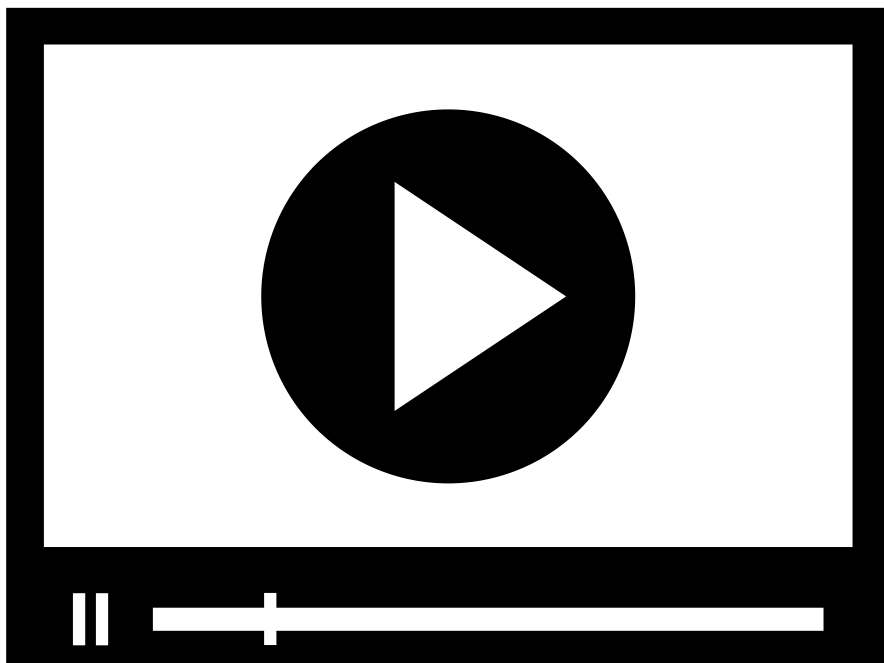
Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



# MÓDULO 1

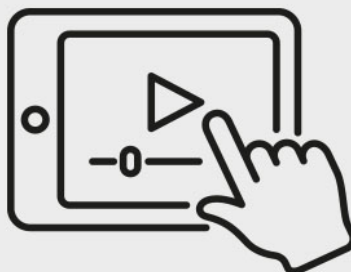
---

## 🕒 Reconhecer a linguagem da Teoria dos Conjuntos



A linguagem dos conjuntos

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



## REPRESENTAÇÃO DE CONJUNTOS

O conceito intuitivo de **conjunto** é estabelecido desde que somos ainda muito crianças:

O conjunto dos meus brinquedos, o conjunto das pessoas de minha família, o conjunto de meus amigos de turma, e assim por diante.

Naturalmente, na medida em que amadurecemos, travamos contato com conjuntos mais abstratos, aí incluídos os conjuntos numéricos e, além disso, conjuntos *finitos* e *infinitos*.

Assim, temos:

- O conjunto dos números pares positivos.
- O conjunto de todos os pontos de uma circunferência.
- O conjunto dos pontos do gráfico de uma reta cuja equação é  $y = x + 1$ .

O importante, de fato, é estabelecermos uma escrita mais formal e adequada para descrever conjuntos, sejam tais conjuntos finitos ou infinitos.

## REPRESENTAÇÃO EXPLÍCITA DE CONJUNTOS

Uma das formas usuais de descrever um conjunto é, simplesmente, enumerando seus objetos entre um *par de chaves*, separando-os por vírgulas ou, preferencialmente, por ponto e vírgula - para evitar que nosso separador decimal — a vírgula — cause ambiguidades.

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

Observe que, usando o separador vírgula, não podemos distinguir se os objetos do conjunto são os inteiros de 1 a 4 ou os dois números decimais 1,2 e 3,4, por exemplo. Por essa razão, em português, sempre que houver possibilidade de dúvida, preferimos utilizar o separador ponto e vírgula.

$$B = \{ 1; 3; 9; 7; 5 \}$$

Conjunto cujos elementos (objetos) que o compõem são os números ímpares entre 0 e 10.

Note que em um conjunto **não** existe o conceito de **ordem**. Fazendo uma analogia: Tudo se passa como se tivéssemos os objetos de um conjunto em uma caixa e os listássemos em qualquer ordem, entre o *par de chaves*. Mas sempre que fizer sentido listá-los em ordem crescente ou decrescente (quando seus objetos são números, por exemplo), facilitará a percepção de seus elementos, caso haja alguma lei de formação que os descreva.

$$C = \{ 1,7; 1,3; 1,5; 1,1; 1,9 \}$$

Os valores dos 5 primeiros termos de uma progressão aritmética de razão **0,2** e menor termo igual a **1,1**.

$$D = \{ 1; 4; 9; 16; 25; 36; \dots \}$$

Observe que a descrição desse conjunto sugere que desejamos descrever uma infinidade de elementos: Os tais *três pontinhos*, ao final, sugerem que estamos interessados nos quadrados de todos os números inteiros.

Convém ressaltar que essa forma de representar conjuntos infinitos só é indicada quando a lei de formação de seus elementos é natural, simples e não uma charada, como o exemplo a seguir:

$$E = \{ 4; 13; 34; 73; 136; \dots \}$$

Nesse caso, há infinitas lei de formação possíveis, uma das quais é  $n^3 + 2n + 1$  percorrendo os inteiros 1, 2, 3, ... não sendo essa notação adequada. Adiante, analisaremos a chamada *notação implícita* para conjuntos,

certamente mais adequada para situações dessa natureza.

## SÍMBOLO DE PERTINÊNCIA

Quando um objeto  $x$  é um dos elementos de um conjunto  $P$ , dizemos que  $x$  pertence a  $P$  e usamos o símbolo de pertinência, representado pela letra grega épsilon, estilizada: " $\in$ ". Assim:  $X \in P$ .

Caso  $X \notin P$ .

### ★ EXEMPLO

Perceba, em cada item, que cada pertinência indicada é, como assinalado, uma assertiva verdadeira (V) ou falsa (F).

$$12 \in \{ 4; 5; 10; 12; 18 \} \text{ (V)}$$

$$5 \notin \{ 4; 5; 10; 12; 18 \} \text{ (F)}$$

$$7 \notin \{ 4; 5; 10; 12; 18 \} \text{ (V)}$$

$$\sqrt{16} \notin \{ 4; 5; 10; 12; 18 \} \text{ (F)}$$

### ★ EXEMPLO

Observe que conjuntos podem, por sua vez, serem também objetos de conjuntos. Uma analogia curiosa, porém, extremamente útil, é imaginar uma sacola de compras, em que o objeto nela colocado diretamente é entendido como um de seus elementos.

Assim, se colocarmos uma caixa de ovos (contendo 10 ovos) na sacola de compras, é a caixa de ovos que pertence à sacola, pois, na verdade, cada ovo é um objeto da caixa de ovos, e não da sacola.

Por exemplo, se  $A$  é o conjunto  $\{ 1; 2; \{3, 4\}; 5; 6 \}$ , perceba que todas as relações de pertinência indicadas a seguir são assertivas verdadeiras.

$$1 \in \{ 1; 2; \{3, 4\}; 5; 6 \}$$

$$3 \notin \{ 1; 2; \{3, 4\}; 5; 6 \}$$

$$\{3; 4\} \notin \{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$$

$$7 \notin \{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$$

$$\{1; 2\} \notin \{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$$

$$\{1\} \notin \{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$$

$$\{1; 3\} \notin \{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$$

$$\{\{1; 3\}\} \notin \{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$$

## REPRESENTAÇÃO IMPLÍCITA DE CONJUNTOS

A chamada *notação implícita* de conjuntos utiliza outra estratégia para se referir a seus elementos: exige que seja explicitada uma propriedade (chamada, na lógica, de sentença aberta) que descreva os objetos nos quais temos interesse. A forma usual é a que se segue, embora sejam utilizadas algumas variantes semelhantes:

$$A = \{x \mid p(x)\}$$

que lemos, assim:

O conjunto dos objetos  $x$  tais que  $p(x)$  uma proposição verdadeira.

### 1. $F = \{X \mid X^2 = 9\}$

## RESOLUÇÃO

Ora, os valores cujo quadrado igualam 9 são exatamente 3 e  $-3$ , e apenas eles. Na verdade, é fácil perceber isso algebricamente. Veja:

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \text{ [um produto notável]} .$$

Mas o produto de dois números só vale zero, exatamente quando um deles é nulo, ou seja:

$$(x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$$

### 2. $G = \{X \mid X \text{ É INTEIRO E } X^2 < 9\}$

## RESOLUÇÃO

Como estamos restringindo  $x$  a ser, explicitamente, um número inteiro (a primeira das duas condições), é usual declararmos tal restrição escrevendo essa limitação antes do sinal da barra vertical. Usando, como usual, a letra  $\mathbf{Z}$  para indicar o conjunto dos números inteiros (incluindo os negativos), podemos escrever:

$$\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 < 9\},$$

Que lemos: “O conjunto dos valores de  $x$  pertencentes a  $\mathbf{Z}$  tais que  $x^2 < 9$ ”.

## RELAÇÃO DE INCLUSÃO ENTRE CONJUNTOS

A representação pictórica (geométrica) de um conjunto, através de alguma figura simples, é extremamente útil.

Veja: Se  $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ , a Figura 1 sugere que seu contorno delimita a representação de seus elementos, exibidos, por sua vez, como pontos:

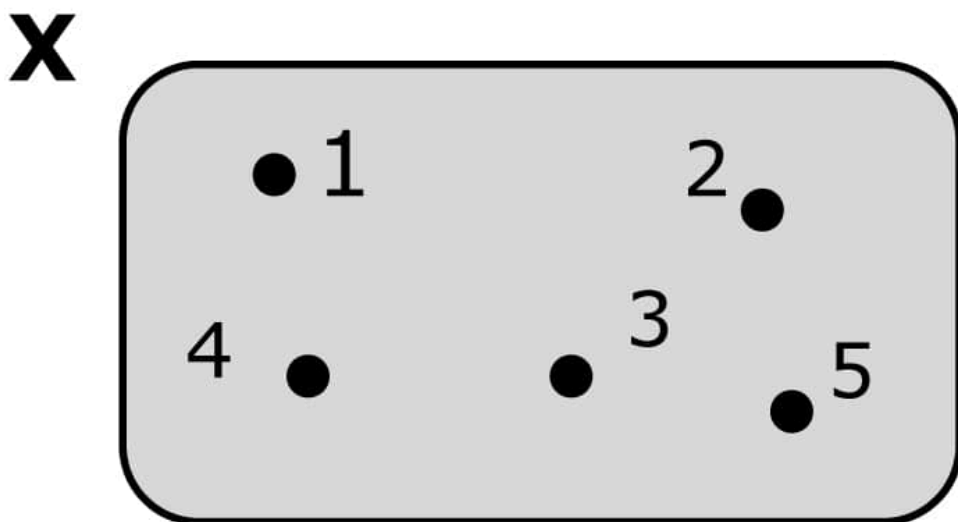


Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

📷 Figura 1

A figura a seguir, com o diagrama de  $Y$  contido no diagrama de  $x$ , sugere que todo elemento de  $Y$  é, também, um elemento de  $x$ .

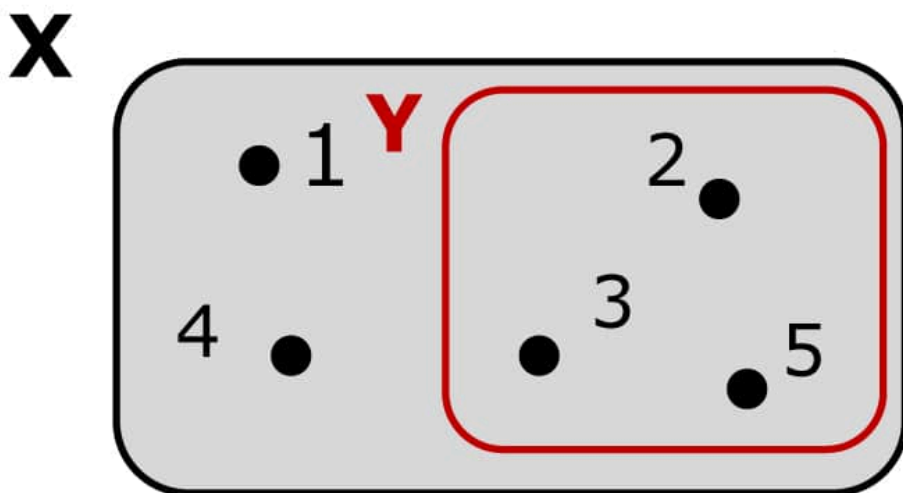


Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

Figura 2

Essa situação é matematicamente representada pela relação de inclusão entre dois conjuntos, em que dizemos que “Y está contido em x” ou que “x contém Y”.

Representamos situações de inclusão com os sinais usuais: “ $\subset$ ” e “ $\supset$ ”, assim:

$$X \subset Y \text{ ou } Y \supset X,$$

que se lê: “x está contido em Y” ou “x é parte de Y”, no primeiro caso e, “Y contém x”, no segundo caso.

Note que a afirmação “todo elemento de Y é, também, um elemento de x” é válida quando os dois conjuntos x e Y são iguais, ou seja, possuem os mesmos elementos. Assim, para qualquer conjunto x, são válidas as relações  $X \subset X$  e  $X \supset X$ . Naturalmente, como usual na matemática, uma barra “/” em um sinal que relaciona objetos nega o referido relacionamento. Veja alguns sinais e suas negações:

**EXEMPLO 01**

**EXEMPLO 02**

**EXEMPLO 03**

**EXEMPLO 04**

**EXEMPLO 05**

**IGUALDADE E DE DESIGUALDADE:**

$$a = b \text{ e } a \neq b.$$



## PARALELISMO E NÃO PARALELISMO:

$r \parallel s$  e  $r \nparallel s$ .

## PERTINÊNCIA E NÃO PERTINÊNCIA:

$x \in X$  e  $x \notin X$ .

## INCLUSÃO E NÃO INCLUSÃO:

$X \subset Y$  e  $X \not\subset Y$ .

## CONTINÊNCIA (DO VERBO CONTER) E NÃO CONTINÊNCIA:

$Y \supset X$  e  $Y \not\supset X$ .

## ★ EXEMPLO

Analisando as relações apresentadas, verdadeiras, verifique cuidadosamente a justificativa apontada:

$\{1; 5\} \subset \{1; 2; 5; 6\}$ .

Porque todo elemento do conjunto  $\{1; 5\}$ , os números **1** e **5** são, também, elementos do conjunto  $\{1; 2; 5; 6\}$ .

$\{1\} \subset \{0; 1; 6\}$ .

Porque o único elemento do conjunto  $\{1\}$ , que é o número **1** é, ele também, um elemento do conjunto  $\{0; 1; 6\}$ .

$\{1; 3\} \not\subset \{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$ .

Embora o número **1**, elemento do conjunto  $\{1; 3\}$ , seja também objeto do conjunto  $\{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$ , o número **3**, o outro elemento do conjunto  $\{1; 3\}$  não é elemento do conjunto  $\{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$ .

# O CONJUNTO VAZIO

É extremamente útil para a Teoria dos Conjuntos, como veremos adiante, imaginar um conjunto sem elementos, o conjunto **vazio**.

Designamos tal conjunto pela letra “**O**” cortada, assim:  $\emptyset$ . Ou, alternativamente,  $\{\}$ .



Imagem: Shutterstock.com

Veja que na analogia entre um conjunto e uma sacola de compras do supermercado, a sacola, sem nenhuma compra, representaria o conjunto vazio. É também útil considerar que o conjunto vazio  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto  $x$ , ou seja,  $\emptyset \subset x$ .

Embora a justificativa formal para essa relação seja pouco natural, podemos argumentar, intuitivamente, que, como não há elementos no conjunto  $\emptyset$ , é razoável supor que a afirmativa: todo elemento de  $\emptyset$  é também um elemento de  $x$ , não é contrariada. Portanto, é lícito admitir que, para qualquer conjunto  $x$ ,  $\emptyset \subset x$ .

# INTERVALOS NA RETA NUMÉRICA E VALOR ABSOLUTO

No estudo de conjuntos, dedicamos importância especial aos conjuntos numéricos, entre os quais os conjuntos básicos que se seguem:

## CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Tipicamente, os números naturais, representados por  $\mathbf{N}$ , são os números utilizados na contagem, isto é,  $\mathbf{N} = \{ 1; 2; 3; \dots \}$ ;

É importante ressaltar que alguns autores incluem o zero como número natural, mas outros, preferem omiti-lo.

## CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Esse conjunto, designado tipicamente pela letra **Z**, inclui os números naturais, o zero e o simétrico dos números naturais. Ou seja,  $\mathbf{Z} = \{ 0; -1; 1; -2; 2; -3; 3; \dots \}$ .

## CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Esse conjunto, designado pela letra **Q** (que lembra a palavra quociente), se refere aos números que podem ser obtidos pelo quociente de números inteiros. Incluem, naturalmente, os números próprios inteiros, os números decimais exatos, tipo **0,37** e **-3,78**, por exemplo; e, também, os números cuja parte decimal formam dízimas periódicas.

## CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

A totalidade dos números reais é designada, como usual, pela letra **R**

Além desses conjuntos, há uma família de conjuntos extremamente úteis, chamados de intervalos, que são objeto de nosso estudo a seguir.

## A RETA REAL E OS INTERVALOS

Representamos os números reais, usualmente, em uma reta-eixo. Está implícito nessa representação o seguinte fato:

**“CADA PONTO DA RETA-EIXO ESTÁ ASSOCIADO A UM ÚNICO NÚMERO REAL E VICE-VERSA, A CADA NÚMERO REAL ESTÁ ASSOCIADO UM ÚNICO PONTO DA RETA-EIXO”.**

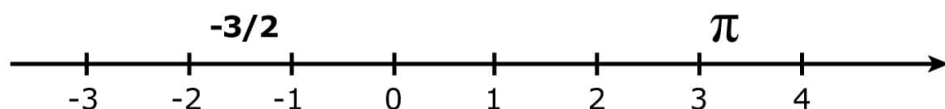


Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.


📷 Figura 3

Como decorrência da “continuidade” dos números na reta-eixo, parece interessante imaginar um conjunto de números cuja representação geométrica seja um segmento de reta ou uma semirreta, com os valores das extremidades sendo ou não incluídos no conjunto desejado.

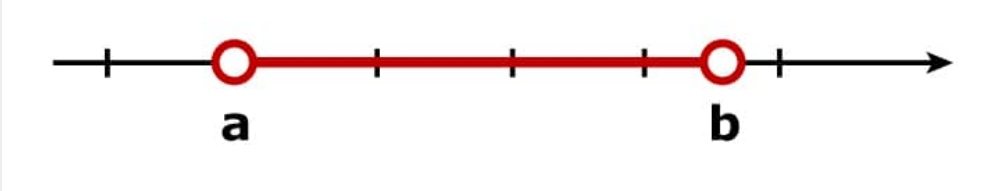


Tais conjuntos são exatamente os chamados *intervalos*, cujas convenções utilizadas nas representações gráficas e textuais relativas à inclusão ou não das extremidades estão descritas a seguir:

Inclui extremidade?	Nomenclatura	Representação no gráfico	Na notação escrita
Sim	Intervalo fechado nessa extremidade	Círculo cheio	Colchetes
Não	Intervalo aberto nessa extremidade	Círculo vazado ou seta	Parênteses ou colchetes invertidos

 **Atenção!** Para visualização completa da tabela utilize a rolagem horizontal

 Tabela - Representação de intervalos.  
Elaborada por Carlos Eddy Esaguy Nehab.

A tabela a seguir ilustra diversas situações:

Representação Implícita	Representação como intervalo	Representação Gráfica
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	$(a; b)$ ou $]a; b[$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a; b)$ ou $[a; b[$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a; +\infty)$ ou $[a; +\infty[$	

Representação Implícita      Representação como intervalo

Representação Gráfica

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	$(-\infty; b)$ ou $]-\infty; b[$	
-----------------------------------	-------------------------------------	--

Tabela - Representação de intervalos.  
Elaborada por Carlos Eddy Esaguy Nehab.

**Atenção!** Para visualização completa da tabela utilize a rolagem horizontal

VALOR ABSOLUTO

A criação do conceito de reta-eixo, genial, permite que associemos representações algébricas a representações geométricas, de maneira imediata.

Analisando a figura adiante, percebemos que a distância entre pontos associados a dois números na reta real pode ser calculada subtraindo-se o menor do maior.

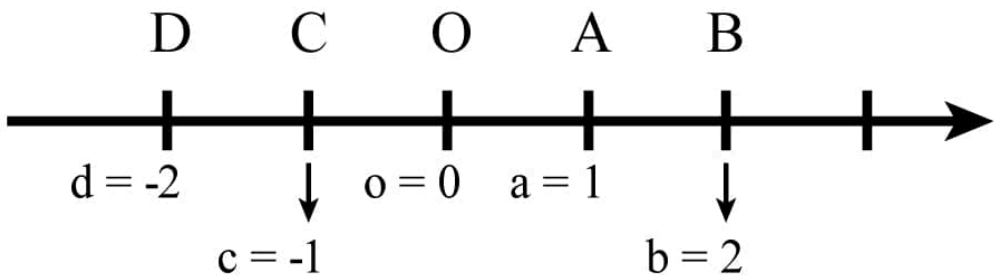


Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

Figura 4

Ou seja, a distância entre os pontos **A** e **B** vale **b – a**. De forma análoga, podemos calcular as distâncias entre:

O E A

A – O = 1 – 0 = 1



**D E C**

$$C - D = (-1) - (-2) = 1$$



**C E A**

$$A - C = 1 - (-1) = 2$$

Entretanto, como calcular, algebricamente, a distância de um número real (na verdade, o ponto associado) e a origem?

Essa distância é chamada de **módulo do número  $x$** , e é representada por  $|x|$ . Claro que  $|x|$  tem que ser um valor positivo, por ser uma distância. Então, para evitar a situação de número negativo nas diferenças  $x - 0$  ou  $0 - x$ , podemos usar duas possíveis expressões algébricas que tornam as diferenças (seja  $x$  ou  $-x$ ) sempre positivas:

$$|X| = \sqrt{X^2}$$

ou

$$|X| = X$$

se

$$X \geq 0$$

$$|X| = -X$$

se

$$X < 0$$



**Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Experimente atribuir valores positivos e negativos a  $x$  e calcule o resultado obtido pelas expressões indicadas.

## ★ EXEMPLO

Determine o conjunto-solução das expressões indicadas:

$$|x - 1| = 3$$

Ora, note que a expressão modular  $|x - 1|$  corresponde a distância, na reta real, entre  $x$  e  $1$ . Então, a nova pergunta é: Quais dos pontos do eixo distam **3** unidades de **1**? Ora, à direita de **1**, é o valor  $1 + 3 = 4$ ; e à esquerda de **1** é o valor  $1 - 3 = -2$ . Então, o conjunto-solução dessa desigualdade é  $S = \{ 4; -2 \}$ . Desenhe a reta real (Figura 3) para visualizar essa discussão.

$$|2x - 4| < 3$$

Inicialmente, convém dividir toda expressão por 2; obtemos  $|x - 2| < \frac{3}{2}$

Agora, a pergunta geométrica é: Quais  $x$ ises distam de **2** menos do que  $\frac{3}{2}$ ? Naturalmente, os  $x$ ises de interesse estão  $\frac{3}{2}$  à direita e à esquerda de **2**, no máximo. Ou seja, entre  $2 - \frac{3}{2}$  e  $2 + \frac{3}{2}$ , isto é, valores de  $x$  tais que  $0,5 < x < 3,5$ . Analise a discussão na reta real. Nesse caso, a resposta pode ser fornecida sob a forma de intervalo:  $S = ] 0,5; 3,5 [$ .

## OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

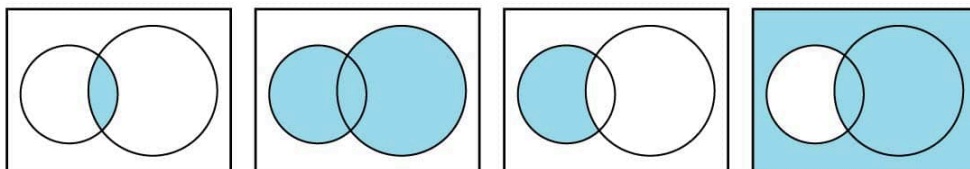


Imagem: Shutterstock.com

Operação entre objetos matemáticos não são novidade: por exemplo, operações de adição e multiplicação de números reais; adição de vetores, composta de funções, e assim por diante. Para estudar as operações entre conjuntos é útil representá-los graficamente, utilizando os chamados *Diagramas de Venn*.

## DIAGRAMAS DE VENN

Uma particular discussão envolvendo conjuntos está, em geral, restrita a certa categoria de objetos, em um certo universo de discussão. Tal conjunto de objetos é chamado, apropriadamente de conjunto **Universo (U)** e, nesses casos, todos os conjuntos em discussão são, naturalmente, subconjuntos de **U**.

Quando resolvemos uma equação, estamos sempre com algum conjunto universo em mente: o conjunto dos números naturais; dos números racionais etc. Ou seja, nada fora do universo de discussão tem interesse naquele momento. Assim, se você encontrar, algebricamente, uma raiz igual a **-4**, para uma equação, mas o universo da discussão for o conjunto dos números naturais, tal raiz deve ser descartada. Ela é chamada de *raiz estranha* ao universo.

Então, quando desenhamos diagramas para conjuntos, no contexto de um conjunto universo **U**, todos os conjuntos em discussão são, naturalmente, subconjuntos do universo escolhido.

Na Figura 5, os conjuntos **x** e **Y** são restritos ao conjunto universo **U** escolhido e, então, seus diagramas estão contidos no diagrama de **U**.

**x** = { **a**; **b**; **c**; **d**; **e**; **f**; **g** } e

**Y** = { **e**; **f**; **g**; **h**; **i**; **j**; **k**},

O universo **U** de discussão é constituído pelas letras do alfabeto de **a** até **p**.



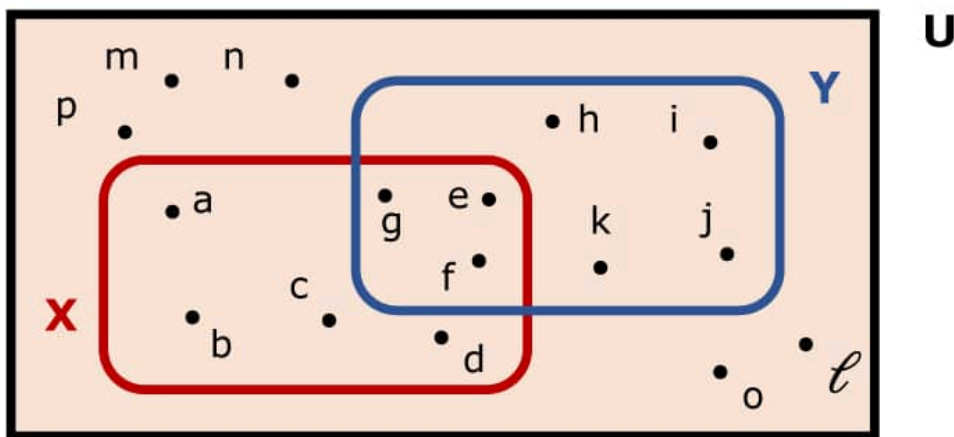


Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

Figura 5

Note que as Figuras 6 e 7 indicam duas situações interessantes:

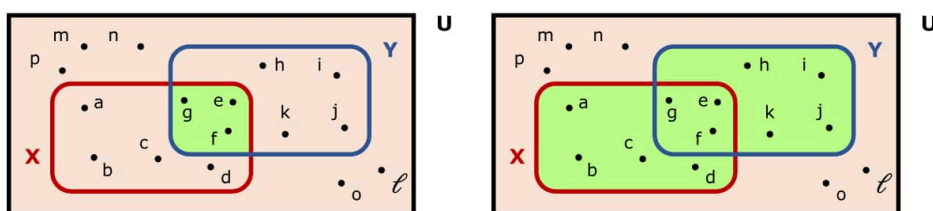


Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

Figuras 6 e 7

A Figura 6 sugere, em **verde**, os objetos que pertencem **simultaneamente** a **x** e **Y**. Esse novo conjunto, associado a esses objetos, é chamado de conjunto **interseção** de **x** e **Y**, e o representamos por  $X \cap Y$ .

A Figura 7, entretanto, destaca em **verde** a totalidade dos objetos que pertencem **a pelo menos um dos** conjuntos **x** ou **Y**, podendo, eventualmente, pertencer a **ambos**. O conjunto constituído por tais objetos é designado por **união** de **x** e **Y** e é representado por  $X \cup Y$ .

As Figuras 8 e 9 sugerem, em **verde**, respectivamente, o conjunto dos objetos que **pertencem a X, mas que, entretanto, não pertencem a Y**, e o conjunto dos objetos que **pertencem a Y, mas que não pertencem a X**.

Como essa situação lembra o ato de **retirar** (no sentido de subtrair) de um dos conjuntos os objetos do outro, chamamos essa operação de **diferença** entre os conjuntos e, no exemplo, as representamos, respectivamente por  $X - Y$  (e  $Y - X$ ).

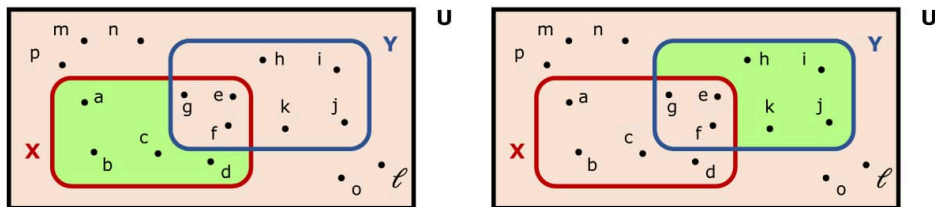


Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

## Figuras 8 e 9

Finalmente, é útil referenciar os objetos que **não** estão em dado conjunto, ou seja, objetos que estão fora do conjunto  $x$  (ou de  $Y$ ), mas, é claro, pertencem ao conjunto universo. Ora, essas situações, descritas nas Figuras 10 e 11, nada mais representam que as diferenças  $X - Y$  e  $U - Y$ .

Dada a importância dessas situações, determinar o que falta para um conjunto completar o conjunto universo, utilizamos uma nomenclatura adicional: Dizemos que, se  $Z$  é um conjunto,  $U - Z$  é o **complementar** de  $Z$  (claro, com relação ao conjunto universo), e escrevemos simplesmente  $Z'$  ( $Z$  linha).

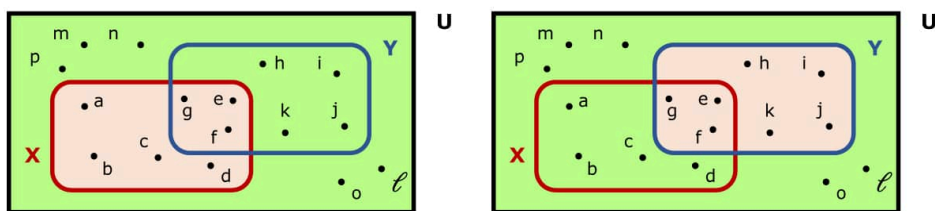


Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

## Figuras 10 e 11

# OPERAÇÕES USUAIS ENTRE CONJUNTOS

A análise do Diagrama de Venn permite explicitar operações entre conjuntos mais formalmente. Assim, se  $A$  e  $B$  são conjuntos restritos ao universo  $U$ , temos:

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

## EXEMPLO

Determine, para cada um dos pares de conjuntos A e B indicados, os conjuntos união, interseção e as diferenças entre ambos:

$$A = \{ 1; 2; 3; -1; -5 \} \text{ e } B = \{ -3; -2; 1; 3 \}.$$

$$A = ] -1; 3 ] \text{ e } B = ] -\infty; 1 [.$$

## SOLUÇÃO (IMEDIATA)

$$a) A \cap B = \{ 1; 3 \}$$

$$A \cup B = \{ 1; 2; 3; -1; -5; -3, -2 \}$$

$$A - B = \{ 2; -1; -5 \}$$

$$B - A = \{ -3; -2 \}$$

b) A Figura 12 ilustra a solução:

$$A \cap B = [-1; 1[$$

$$A \cup B = ]-\infty; 3[$$

$$A - B = [1; 3[ \text{ e}$$

$$B - A = ]-\infty; -1[$$

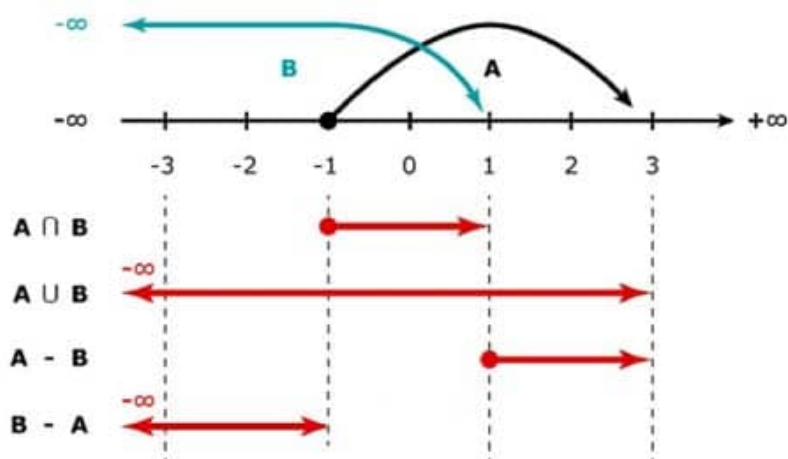


Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

📷 Figura 12

## MÃO NA MASSA

1. SE Q DESIGNA O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS E  $A = \{ 1; 3; -4; \frac{2}{3}; 0,111...; \pi(\pi) \}$ , PODEMOS AFIRMAR QUE  $A \cap Q$  É IGUAL A:

A)  $\{ 1; 3; -4; \frac{2}{3}; 0,111... \}$

B)  $\{ 1; 3 \}$

C)  $\{ \pi(\pi) \}$

D)  $\{ 1; 3; -4 \}$

E)  $\{ 0,111...; \pi(\pi) \}$

2. ASSINALE A OPÇÃO QUE CORRESPONDE À REPRESENTAÇÃO EXPLÍCITA DOS CONJUNTOS:

$A = \{X \in \mathbb{Z} \mid X^2 \leq 1\}$  E  $\{X \in \mathbb{R} \mid X^2 < 4\}$

A)  $A = \{ -2; -1; 0; 1; 2 \}$  e  $B = [-2; 2[$ .

B)  $A = \{ -1; 0; 1 \}$  e  $B = ] -2; 2 [$ .

C)  $A = \{ -1; 0; 1 \}$  e  $B = [-2; 2 ]$ .

D)  $A = \{ -2; -1; 0; 1; 2 \}$  e  $B = [-2; 2 ]$ .

E)  $A = \{ 0 \}$  e  $B = ] -2; 2 [$ .

3. CONSIDERE AS SEGUINTE IGUALDADES, EM QUE A, B E C SÃO CONJUNTOS ARBITRÁRIOS:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(A - B) \cup C = A - (B \cap C)$$

DAS AFIRMATIVAS REALIZADAS ACIMA ESTÃO CORRETAS:

A) Todas

B) Apenas (1) e (2)

C) Apenas (1) e (3)

D) Apenas (3)

E) Apenas (1), (2) e (4)

**4. CONSIDERANDO OS CONJUNTOS  $X = \{X \in \mathbb{Z} \mid 2X - 4 > 3\}$  E  $Y = \{X \in \mathbb{Z} \mid 3X - 5 > 11\}$ ,  
PODEMOS AFIRMAR QUE  $X \cap Y$  VALE:**

A)  $\{3; 4; 5\}$

B)  $\{4; 5\}$

C)  $\{3; 4; 5; 6\}$

D)  $\{4; 5; 6\}$

E)  $\emptyset$

**5. CONSIDERE O CONJUNTO  $A = \{X \in \mathbb{R} \mid -4 < X < 5\}$ . ENTÃO, O CONJUNTO  $B = \{X^2 \mid X \in A\}$  VALE:**

A)  $]16; 25[$

B)  $]0; 16[$

C)  $[0; 25[$

D)  $] -16; 25[$

E)  $\emptyset$

**6. A SOLUÇÃO DA INEQUAÇÃO  $|X - 3| < 5$ , NO UNIVERSO DOS NÚMEROS REAIS,  
PODE SER EXPRESSA PELO INTERVALO:**

A)  $]2; 8[$

B)  $] -2; 8[$

C)  $]2; 5[$

D)  $]5; 8[$

E)  $]0; 8[$

---

**GABARITO**

1. Se Q designa o conjunto dos números racionais e  $A = \{ 1; 3; -4; 2/3; 0,111...; \pi(\pi) \}$ , podemos afirmar que  $A \cap Q$  é igual a:

A alternativa "A" está correta.

Alternativa correta letra A. Todos os números de A, com exceção de  $\pi(\pi)$ , são racionais, pois podem ser expressos como quociente de dois inteiros (por exemplo,  $0,111... = 1 \div 9$ ).

2. Assinale a opção que corresponde à representação explícita dos conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 1\} \text{ e } \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\}$$

A alternativa "B" está correta.

Alternativa correta letra B. Se  $x$  é um número inteiro, a desigualdade  $x^2 \leq 1$  é satisfeita apenas por 0, 1 e -1. E se  $x$  é um número real tal que  $x^2 < 4$ , então  $x$  deve estar entre -2 e 2.

3. Considere as seguintes igualdades, em que A, B e C são conjuntos arbitrários:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(A - B) \cup C = A - (B \cap C)$$

Das afirmativas realizadas acima estão corretas:

A alternativa "B" está correta.

Analisando a figura abaixo, é imediato perceber que as relações (1) e (2) são verdadeiras, mas (3) é falsa:

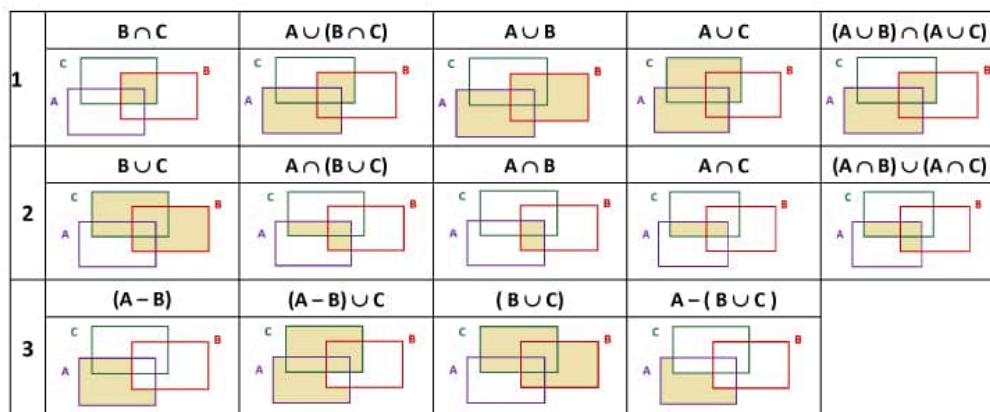


Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

4. Considerando os conjuntos  $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x - 4 > 3\}$  e  $Y = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x - 5 > 11\}$ , podemos afirmar que  $X \cap Y$  vale:

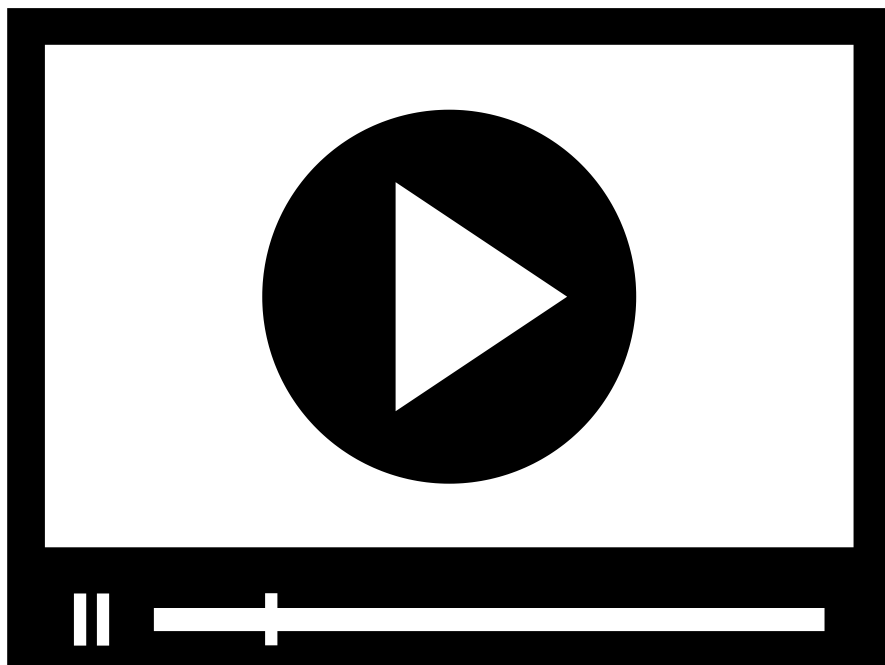
A alternativa "B" está correta.

A condição  $2x - 4 > 3$  acarreta  $x > 3,5$  e a condição  $3x - 5 > 11$  implica  $x > 16 \div 3 \approx 5,3$ . Mas como estamos restritos ao conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$ , a opção correta corresponde aos inteiros entre  $3,5$  e  $5,3$ .

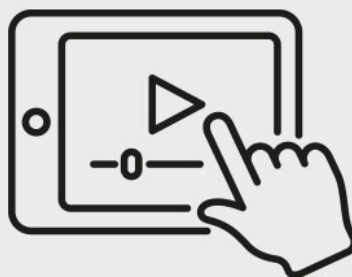
Logo, a opção correta é B.

5. Considere o conjunto  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 5\}$ . Então, o conjunto  $B = \{x^2 \mid x \in X\}$  vale:

A alternativa "C" está correta.



Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



6. A solução da inequação  $|x - 3| < 5$ , no universo dos números reais, pode ser expressa pelo intervalo:

A alternativa "B" está correta.

Alternativa correta letra B. Ora, a expressão  $|x - 3|$  representa a distância entre o número real  $x$  e o número real  $3$ . Se essa distância deve ser menor do que  $5$ ,  $x$  deve variar no máximo  $5$  unidades à esquerda de  $3$  e no máximo  $5$  unidades à direita de  $3$ . Ou seja,  $x$  deve variar entre  $-2$  e  $8$ !

---

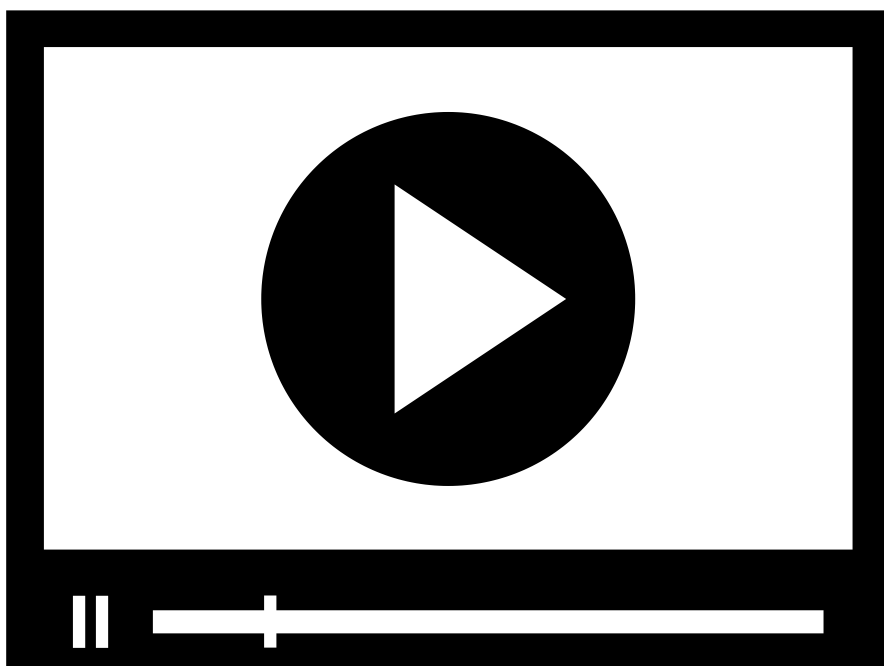
## GABARITO

# TEORIA NA PRÁTICA

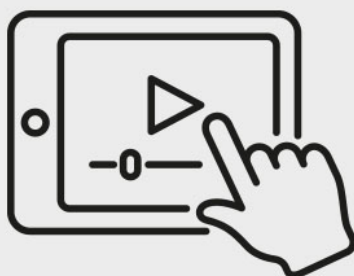
Resolver um sistema de equações/inequações é, conceitualmente, encontrar as soluções comuns a todas as equações/inequações que compõem o sistema. Então, resolver um sistema é determinar a interseção dos conjuntos solução de cada uma das equações. Assim, iremos resolver o sistema indicado.

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 4 \\ |2x - 7| \leq 2 \end{cases}$$

## RESOLUÇÃO



Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



## VERIFICANDO O APRENDIZADO



**1. SE SOMARMOS TODOS OS NÚMEROS REAIS DO INTERVALO  $] -2; 5 ]$  COM TODOS OS NÚMEROS DO INTERVALO  $[ 1; 7 [$  QUAL CONJUNTO OBTAMOS?**

- A)  $[ 0; 12 ]$
- B)  $] -1; 12 ]$
- C)  $[ -2 ; 11 [$
- D)  $] -1; 11 [$
- E)  $] -1; 12 [$

**2. DADOS OS CONJUNTOS  $A = \{ 1, 3, 5 \}$  E  $B = \{ 3; 5; 7 \}$  QUANTOS ELEMENTOS POSSUI O CONJUNTO  $(A - B) \cup (B - A)$ .**

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

---

## **GABARITO**

**1. Se somarmos todos os números reais do intervalo  $] -2; 5 ]$  com todos os números do intervalo  $[ 1; 7 [$  qual conjunto obtemos?**

A alternativa "E " está correta.

Uma forma interessante de encontrar a solução é imaginar o que ocorre ao intervalo  $] -2; 5 ]$  quando somamos apenas um mesmo valor, como **3**, por exemplo, a todos os seus elementos. É simples perceber que o resultado é um outro intervalo que vai de  $-2 + 3$  (exclusive) até  $5 + 3$  (inclusive), ou seja, o intervalo  $] 1; 8 ]$ .

Dessa forma, se somarmos ao intervalo  $] -2; 5 [$  todos os números do intervalo  $[ 1; 7 [$ , ou seja, números de **1** (inclusive) a **7** (exclusive), a solução será um intervalo que vai de  $-2 + 1$  (exclusive) a  $5 + 7$  (também exclusive).

**2. Dados os conjuntos  $A = \{ 1, 3, 5 \}$  e  $B = \{ 3; 5; 7 \}$  quantos elementos possui o conjunto  $(A - B) \cup (B - A)$ .**

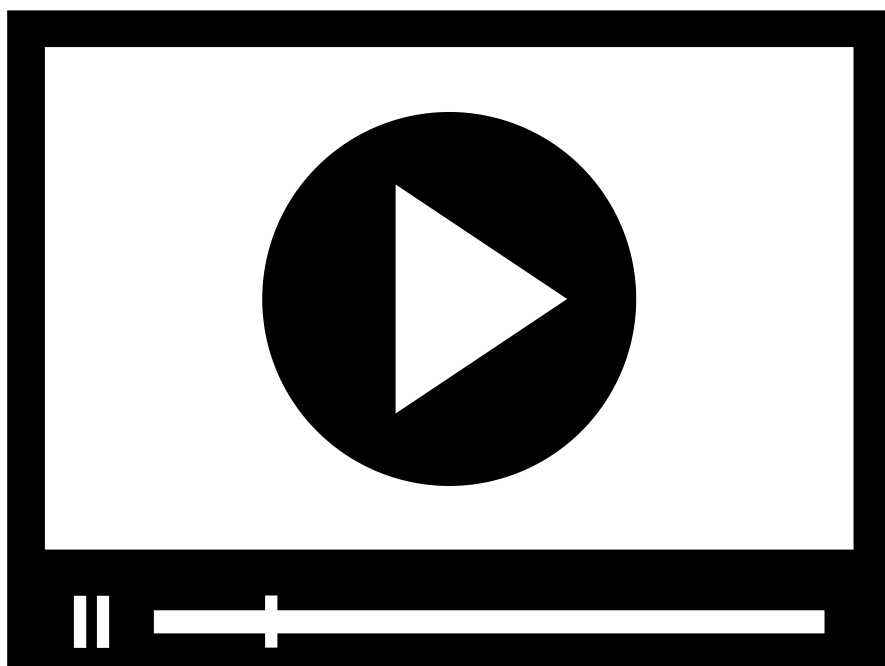
A alternativa "B " está correta.

Ora,  $X - Y$  representa o conjunto dos objetos de  $X$  que não estão em  $Y$ . Assim,  $A - B = \{1\}$  e  $B - A = \{7\}$ . Logo, a união desses conjuntos é  $\{1; 7\}$ , que possui 2 elementos.

## MÓDULO 2

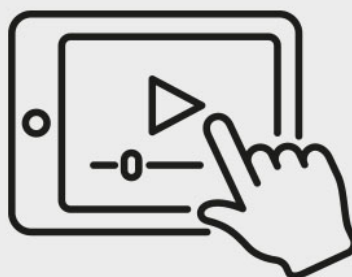
---

### 🕒 Reconhecer os Princípios de Contagem



Princípios de Contagem

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



## INTRODUÇÃO

Neste módulo iniciaremos o importante tópico *Princípios de Contagem*, onde analisaremos, inicialmente três princípios fundamentais, que nos possibilitarão criar estratégias essenciais à solução dos famosos problemas de Análise Combinatória, como este tópico é conhecido no Ensino Médio

# PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

O Princípio da Casa dos Pombos é, sem dúvida, um dos enunciados mais poderosos e interessantes da matemática da contagem. Surpreendente, possibilita a solução de problemas muitas vezes difíceis de abordar de uma forma elegante e simples. Vejamos:

## 📢 ATENÇÃO

Se  $n$  pombos devem ser colocados em  $m$  casas, com  $n > m$ , então **pelo menos uma casa** deverá conter **mais do que um pombo**.



Imagem: Wikipedia – Domínio Público

📷 Ilustração desse princípio, para  $n = 10$  e  $m = 9$

## EXEMPLO 1

Um exemplo clássico e divertido da aplicação do Princípio da Casa dos Pombos é o que se segue:

Mostre que, em uma cidade de um milhão de habitantes (por exemplo), pelo menos dois habitantes possuem o mesmo número de fios de cabelo.

## RESOLUÇÃO

Uma rápida consulta à web informa que o número de fios de cabelo de uma pessoa é por volta de 150.000, não ultrapassando 200.000. Ora, imagine 200.000 casas, numeradas de 1 a 200.000, onde as pessoas com  $m$

fios de cabelo serão colocadas na casa **m**.

Estamos diante da imediata aplicação do Princípio da Casa dos Pombos: O número de pessoas (os pombos) vale

**n** = 1.000.000; logo, é maior do que **m** = 200.000 (número de casas). Então haverá mais de um pombo (pessoa) na mesma casa, ou seja, com o mesmo número de fios de cabelo.

## EXEMPLO 2

Dados 12 números inteiros, mostre que, necessariamente, a diferença entre dois deles tem que ser divisível por 11.

### RESOLUÇÃO

Imagine os restos da divisão de cada um dos 12 números por 11. Como na divisão por 11 os restos são, necessariamente, números entre 0 e 10, então há apenas 11 restos diferentes (que serão associados a 11 casas, uma para cada resto). Logo, dois desses 12 números (os pombos, como no princípio) devem estar na mesma casa (mesmo resto quando divididos por 11). Mas se esses dois números deixam o mesmo resto quando divididos por 11, sua diferença é divisível por 11.

## EXEMPLO 3

Mostre que, se em quadrado de lado igual a 2cm há 5 pontos em seu interior, dois deles, necessariamente, distam menos do que  $\sqrt{2}$ .

### RESOLUÇÃO

Esse é um problema curioso e clássico. Veja a Figura 13, em que dividimos o quadrado de lado 2cm em 4 quadrados iguais, de 1cm de lado cada um. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, certamente 2 dos 5 pontos devem estar em um desses 4 quadrados menores, como sugerem os pontos P1 e P2.

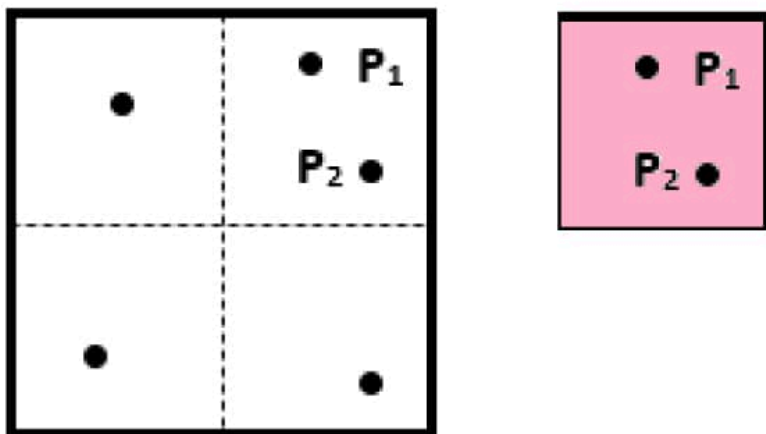


Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

📷 Figura 13

Além disso, como a maior distância entre dois pontos do quadrado menor é  $\sqrt{2}$  (sua diagonal), o enunciado está provado.

## PRINCÍPIO DA ADIÇÃO

O chamado Princípio da Adição, na sua forma mais simples, relaciona os quantitativos de elementos de **dois** conjuntos finitos com o quantitativo de elementos da sua união e de sua interseção.

Se indicarmos por  $n(X)$  o número de elementos do conjunto  $x$ , a figura sugere que:

$$n(A \cup B) + n(A \cap B) = n(A) + n(B), \text{ ou}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

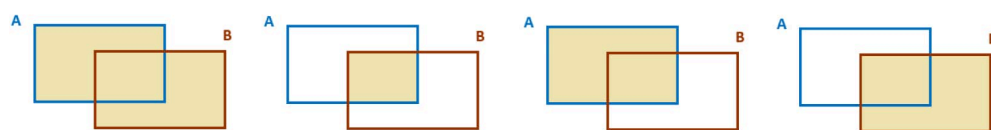


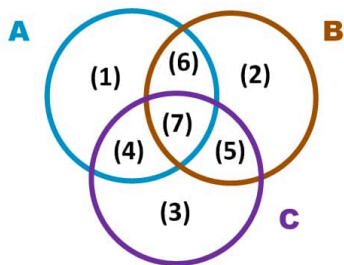
Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

📷 Figura 14

Se  $A \cap B = \emptyset$ , então obtemos a versão mais comum do Princípio da Adição, que diz que, se dois conjuntos não possuem elementos em comum, vale a igualdade.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

No caso de três conjuntos, a análise do Diagrama de Venn a seguir auxilia as situações de contagem, bastando observar que os três conjuntos definem uma partição de no máximo 7 regiões disjuntas cuja união reproduz a união dos três conjuntos. Veja:



Subconjunto		Elementos que estão...
(1)	$A - (B \cup C)$	exclusivamente em A...
(2)	$B - (A \cup C)$	exclusivamente em B...
(3)	$C - (A \cup B)$	exclusivamente em C...
(4)	$(A \cap C) - B$	em A e em C, mas não em B
(5)	$(B \cap C) - A$	em B e em C, mas não em A
(6)	$(A \cap B) - C$	em A e em B, mas não em C
(7)	$A \cap B \cap C$	em A, B e C simultaneamente.

Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

Figura 15

# EXEMPLO

Em uma escola de idiomas, 200 são os alunos matriculados em algum dos idiomas inglês, alemão e mandarim. Desses, 50 estudam inglês e alemão; 60 estudam inglês e mandarim; 70 estudam alemão e mandarim e 20 estudam os três idiomas. Quantos alunos estudam apenas um dentre os três idiomas?

# RESOLUÇÃO

Chamando as quantidades de alunos de cada parte do diagrama de m, n, o, p, q, r e s, note que o enunciado informa diretamente a quantidade de elementos na interseção dos três conjuntos, ou seja,  $s = 20$ ; analisando as diversas regiões do diagrama, podemos concluir, sucessivamente, que:

$$s = 20$$

$$q + s = 50 \Rightarrow q = 30$$

$$p + s = 60 \Rightarrow p = 40$$

$$r + s = 70 \Rightarrow r = 50$$

Mas a soma de todas as partes do diagrama (união dos três conjuntos) vale **200**. Como desejamos calcular **m + n + o**, o resultado é imediato:

$$m + n + o = 200 - (p + q + r + s) =$$

$$200 - (40 + 30 + 50 + 20) = 60.$$

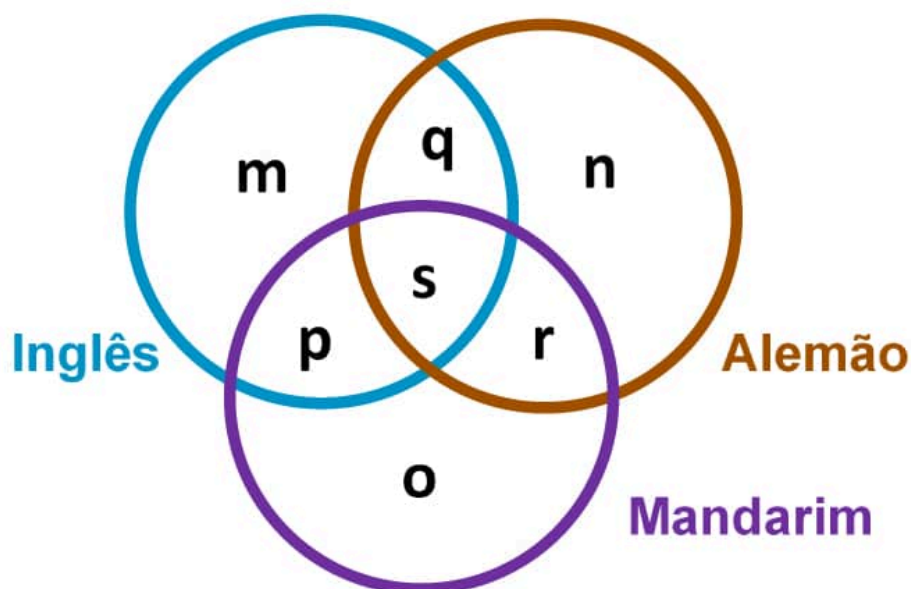


Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

📷 Figura 16

## PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO

### ❓ VOCÊ SABIA

O Princípio da Multiplicação é uma estratégia para contar o número total de casos possíveis, em situações em que ocorrem escolhas múltiplas, porém independentes.

Essa estratégia de contagem é bastante utilizada e, provavelmente, você já se deparou com um problema mais ou menos assim:

**UMA CRIANÇA POSSUI 4 CALÇAS E 3 CAMISAS.  
CONSIDERANDO EXCLUSIVAMENTE AS POSSÍVEIS ESCOLHAS  
DE UMA CALÇA E DE UMA CAMISA, DE QUANTAS FORMAS  
DIFERENTES ELA PODE SE VESTIR?**

É importante perceber, nesse exemplo, que a escolha de uma calça e a escolha de uma camisa são ações independentes, no sentido de que a escolha de cada uma delas não interfere na escolha da outra - são chamadas de ações *independentes*.

Assim, supondo que as 4 calças sejam chamadas de A, B C e D e as camisas, de X, Y e Z, o desenho a seguir sugere que cada uma das 4 calças pode ser associada a cada uma das 3 camisas, possibilitando  $4 \times 3 = 12$  escolhas diferentes. Veja a figura, a seguir:

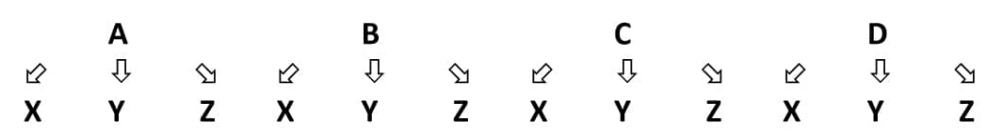


Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

Figura 17

Esse diagrama é usualmente chamado de **Árvore de Decisão**, pois explicita as possíveis escolhas e, de cabeça para baixo, parece uma árvore cujos galhos explicitam os desdobramentos das situações que podem ocorrer.

## O USO DO FATORIAL

É muito comum em problemas de contagem, de combinatória, ocorrerem produtos de inteiros consecutivos como o produto dos inteiros de 1 a 5, ou de 9 a 15, ou de 100 a 1000. Um conceito simples e muito útil para representar resultados como os produtos sugeridos é o uso do fatorial.

Se  $n$  é um número inteiro positivo, representamos por  $n!$  (ponto de exclamação) o produto de 1 a  $n$ , ou seja:  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ . Por exemplo,  $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$  e  $6! = 1 \times 2 \times \dots \times 6 = 720$ .

Note que produtos de inteiros consecutivos, como  $10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14$ , podem ser facilmente expressos com o uso de fatoriais. Veja:

$$10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} \times 10.11.12.13.14 = \frac{14!}{9!}$$

Convencionamos definir zero fatorial como igual a 1, ou seja:  $0! = 1$

**Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

## EXEMPLO

Determine quantas senhas de 6 algarismos podemos formar utilizando os algarismos de 0 a 9, nas seguintes hipóteses:



Podendo repetir algarismos.

Com os algarismos todos diferentes.

## RESOLUÇÃO

Nossa senha possui 6 algarismos: 1º 2º 3º 4º 5º 6º. A escolha de qualquer um desses algarismos pode ser, sem restrição, qualquer um dos 10 algarismos (de 0 a 9). Portanto, pelo Princípio da Multiplicação, a quantidade de senhas é simplesmente o produto das escolhas de cada um dos dígitos da senha:

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1.000.000.$$

Uma outra forma de pensar a solução desse problema, é que as possíveis senhas são, na verdade, todos os números que podemos escrever de 000000 até 999999. Ou seja, um milhão de senhas.

## EXEMPLO

Determine quantos são os números de 4 algarismos diferentes que podemos formar utilizando apenas os algarismos 0, 4, 5, 6, 7 e 8.

## RESOLUÇÃO

Nosso número possui 4 algarismos: M C D U. Então, devemos realizar 4 ações: Escolher um algarismo para milhar (M), um para a centena (C), um para a dezena (D) e um para unidade (U). Façamos as escolhas na ordem M, C, D e U.

*Escolha de M:* Como **M** é o algarismo de milhar, ele não pode ser 0. Portanto, há **5** possibilidades de escolha: 4, 5, 6, 7, e 8.

*Escolha de C:* Como já escolhemos um algarismo para M, e os algarismos devem ser diferentes, sobram **5** algarismos para utilizar como algarismo das centenas, **C** (aí incluso o 0, que não foi usado para **M**).

*Escolha de D:* Como já usamos dois algarismos, podemos escolher para **D** apenas **4** dos algarismos restantes ainda não usados.

*Escolha de U:* Restam apenas **3** dos seis algarismos. Portanto, há **3** possibilidades de escolha de **U**, algarismo das unidades.

Como as escolhas dos algarismos de cada ordem (M, C, D e U) são independentes, o número total desejado é, pelo Princípio da Multiplicação, igual ao produto das quantidades das escolhas anteriores:  $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$  números diferentes.

# AGRUPAMENTO ARRANJO

## DE QUANTAS MANEIRAS PODEMOS FAZER FILAS COM 5 ALUNOS, SE DISPOMOS DE 12 ALUNOS?

### SOLUÇÃO

Nesse caso, temos 5 lugares a preencher: 1º lugar ao 5º lugar da fila. Ora, para escolher o 1º da fila dispomos dos 12 alunos; logo, há 12 escolhas possíveis; para o 2º lugar da fila só há, agora,  $12 - 1 = 11$  alunos; continuando o raciocínio, é fácil perceber que o número total de filas será, pelo Princípio da Multiplicação, o produto das quantidades de escolhas para cada um dos 5 lugares na fila, ou seja:

$12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$  (total de 5 parcelas multiplicadas, do 12 ao 8).

Veja, agora, como expressar esse resultado na forma de fatorial:

$$12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{12!}{7!} = \frac{12!}{(12-5)!}$$

Esse tipo de situação, em que dispomos de  $n$  objetos e queremos criar filas (ordenações) usando apenas  $p$  dos  $n$  objetos disponíveis, é um dos agrupamentos usuais da análise combinatória: São os chamados **arranjos de  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$**  que, usualmente, representamos por  $A^n_p$  ou  $A_{n,p}$ .

A quantidade de situações a ser calculada pode ser expressa de duas maneiras. Veja:

Produto de  $p$  números consecutivos, a partir de  $n$ , inclusive, e de forma decrescente; ou o

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

Quociente dos fatoriais de  $n$  e de  $n - p$ , ou seja, .

Experimente agora refazer o exemplo anterior para os casos:

20 alunos com filas com 2 alunos.

10 alunos com filas de 3 alunos e, finalmente.

8 alunos com TODOS na fila.

Se você encontrou os valores a seguir, parabéns!

$$20 \times 19 = 20! \div (20 - 2)! = 20! \div 18! = 380 \text{ filas.}$$

$$10 \times 9 \times 8 = 10! \div (10 - 3)! = 10! \div 7! = 10 \times 9 \times 8 = 720 \text{ filas.}$$

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8! \div (8 - 8)! = 8! \div 0! = 8! = 40.320 \text{ filas.}$$

## AGRUPAMENTO PERMUTAÇÃO

Calcule o número de anagramas das palavras TRAPO e da palavra PUBLICAR. Antes de resolver o exercício proposto, observe o que se segue:

### ATENÇÃO

Se dispusermos de **n** objetos e colocarmos todos na fila, o número total de possíveis filas é o produto **n** × (**n** – 1) × ... × 2 × 1, porque podemos escolher um dos **n** objetos como **1º** da fila, um dos **n – 1** restantes como **2º** da fila e assim sucessivamente, até atingirmos o **último lugar** da fila em que só teremos **um** aluno para escolher.

Essa situação, em que **n = p**, ou seja, dispomos de **n** objetos para ordenar todos os **n** objetos, é um caso particular de arranjo (em que **p = n**) e preferimos chamá-lo de **permutação** de **n** objetos (porque pressupõe-se que desejamos ordenar todos eles).

A notação utilizada é **P<sub>n</sub> = n! = 1 × 2 × ... × n** e, é claro, **A<sup>n</sup><sub>n</sub> = P<sub>n</sub> = n!**

O anagrama de uma palavra possui as mesmas letras da palavra original, na mesma quantidade que cada letra ocorre (possua ou não significado). Por exemplo:

## PORTA



## PRATO



# OAPTR

Todas são anagramas da palavra TRAPO. Então, desejamos, simplesmente, calcular de quantas maneiras podemos embaralhar as letras da palavra TRAPO (que são todas diferentes). Claro que isso é equivalente a ordenar de todas as maneiras possíveis as 5 letras (diferentes) da palavra indicada. Naturalmente, a resposta é imediata:  $A_5^5 = P_5 = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$  anagramas.

## ★ EXEMPLO

No segundo caso, a palavra PUBLICAR também possui letras diferentes e um total de 8 letras. Então, o número de anagramas é  $A_8^8 = P_8 = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ . Essa discussão enfatiza que o agrupamento permutação nada mais é do que um caso particular do agrupamento arranjo, quando desejamos ordenar (criar nossas filas) com TODOS os  $n$  objetos, ou seja, o tamanho  $p$  das filas, igual ao próprio  $n$ .

**As situações em que há letras repetidas na palavra original serão tratadas no Módulo 3.**

## AGRUPAMENTO COMBINAÇÃO

**Vamos analisar o seguinte exemplo:** Determine quantos subconjuntos de 3 elementos podemos construir a partir de um conjunto com 7 elementos.

## SOLUÇÃO

Os últimos exemplos abordados tratam, basicamente, de ordenar objetos. Mas há situações em que a ordem dos objetos não é relevante. Esse exemplo é uma dessas situações, pois as notações  $\{a, b, c\}$  e  $\{a, c, b\}$ ,  $\{b, c, a\}$ ,  $\{b, a, c\}$ ,  $\{c, a, b\}$  e  $\{c, b, a\}$  representam o mesmo conjunto, cujos elementos são  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

## COMO SERIA POSSÍVEL REALIZAR O CÁLCULO SOLICITADO, AJUSTANDO O RACIOCÍNIO UTILIZADO NA ORDENAÇÃO DE OBJETOS PARA ESSE CASO?

É simples: Se desejamos saber quantas filas de 3 objetos podemos fazer com os 7 elementos de um conjunto, basta perceber que “arranjo de 7 objetos tomados três a três” responde parcialmente ao problema, pois estamos contando mais de uma vez um mesmo conjunto.

Se **a**, **b** e **c** são 3 dos 7 objetos do conjunto, então estamos contando as 6 filas diferentes como subconjuntos diferentes, que são, na verdade, iguais. Ora, então, ordenando 7 *objetos* 3 a 3 obtemos

$$A_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = 7.6.5 = 210.$$

Mas de cada três objetos escolhidos estamos contando  $3! = 6$  vezes o mesmo conjunto! Então, para ajustar nosso resultado devemos dividir o resultado anterior por  $3! = 6$ . Logo, podemos formar  $210 \div 3! = 35$  subconjuntos de 3 elementos a partir de um conjunto com 7 elementos.

Esse tipo de situação nos remete ao terceiro agrupamento básico, utilizado em contagem, e que chamamos de **combinação** de **n** objetos tomados **p** a **p**, ou **n** escolhe **p**, em que não importa a ordem dos objetos, mas apenas o subconjunto formado por eles. Então, no caso geral, devemos dividir o número de **filas** por **p!** para contarmos uma única vez cada uma das **p!** filas que compõem o mesmo conjunto.

Representando o número de **combinações** de **n**, **p** a **p** por  $C_p^n$  ou  $\binom{n}{p}$ , temos:

$$C_p^n = \frac{A_p^n}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$



**Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

## MÃO NA MASSA

**1. EM UM SACO COM 50 BOLAS, 20 SÃO AZUIS E 30 SÃO VERDES. QUAL O MENOR NÚMERO DE BOLAS QUE DEVEMOS RETIRAR DO SACO PARA GARANTIRMOS QUE RETIRAMOS PELO MENOS DUAS BOLAS AZUIS?**

- A) 21
- B) 22
- C) 25
- D) 31
- E) 32

**2. QUANTOS SÃO OS ANAGRAMAS DA PALAVRA ALFREDO?**

- A)  $8!$
- B)  $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$
- C)  $7!$
- D)  $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$
- E)  $6!$

**3. SE AS PLACAS DE CARRO DE UM PAÍS SÃO FORMADAS POR 2 LETRAS DISTINTAS, SEGUIDAS DE 4 ALGARISMOS, TAMBÉM DIFERENTES, QUANTAS SÃO AS POSSÍVEIS PLACAS?**

- A)  $26^2 \times 9^4$ .
- B)  $26 \times 25 \times 10^4$ .
- C)  $26^2 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7$ .
- D)  $26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7$ .
- E)  $26 \times 25 \times 10^3$ .

**4. UTILIZANDO OS ALGARISMOS DE 1 A 8, QUANTOS NÚMEROS PARES PODEMOS FORMAR DE 4 ALGARISMOS DISTINTOS?**

- A)  $8! = 40.329$
- B)  $7! \times 4 = 20.160$
- C)  $8 \times 7 \times 6 = 336$
- D)  $4 \times 7 \times 6 \times 5 = 840$
- E)  $8^3 \times 4$

**5. OS ARTIGOS EM UMA LOJA SÃO CODIFICADOS DA FORMA QUE SE SEGUE: TRÊS LETRAS MAIÚSCULAS DIFERENTES E CONSECUTIVAS, SEGUIDAS DE UM HÍFEN; MAIS 6 ALGARISMOS QUAISQUER (DE 0 A 6); MAIS UM HÍFEN E, FINALMENTE, MAIS**

UMA LETRA QUALQUER DO ALFABETO.

CONSIDERE, COMO EXEMPLO, O CONJUNTO DE CÓDIGOS: {AHD-4193678-K, GEQ-093044-Q, AAA-9497-X}.

QUAL O NÚMERO TOTAL DE PRODUTOS QUE PODEM SER CODIFICADOS DESSA MANEIRA?

A)  $26^4 \times 10^6$

B)  $26^2 \times 25 \times 24 \times 10^5$

C)  $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 7^6$

D)  $26! \times (7^6 \div 23!)$

E)  $26^2 \times 25 \times 24 \times 7^6$

6. DADO O CONJUNTO  $A = \{ A; B; C; D; E; F; G \}$ , QUANTOS SÃO OS SUBCONJUNTOS DE A QUE NÃO POSSUEM OS OBJETOS A E B MAS NECESSARIAMENTE POSSUEM OS OBJETOS F E G?

A) 20.

B) 16.

C) 12.

D) 8.

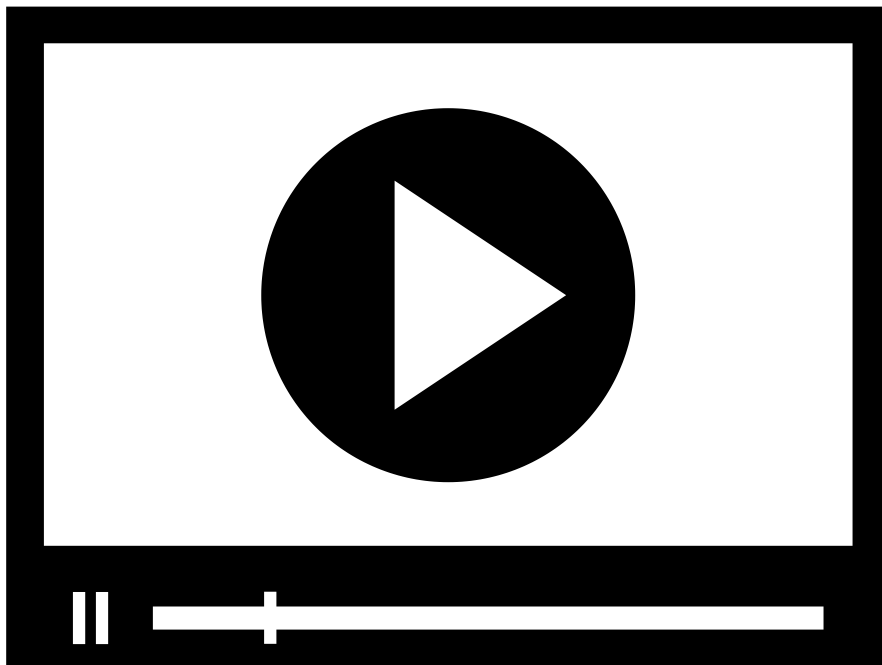
E) 6.

---

## GABARITO

1. Em um saco com 50 bolas, 20 são azuis e 30 são verdes. Qual o menor número de bolas que devemos retirar do saco para garantirmos que retiramos pelo menos duas bolas azuis?

A alternativa "E " está correta.



Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



## 2. Quantos são os anagramas da palavra ALFREDO?

A alternativa "C " está correta.

Como as letras da palavra ALFREDO são diferentes, basta embaralharmos todas, que são 7. Logo, a resposta correta é a permutação de 7 objetos, ou seja,  $P_7 = 7!$ .

## 3. Se as placas de carro de um país são formadas por 2 letras distintas, seguidas de 4 algarismos, também diferentes, quantas são as possíveis placas?

A alternativa "D " está correta.

A placa deve possuir 6 caracteres, assim:  $C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6$ . Para o primeiro caractere,  $C_1$ , podemos escolher qualquer uma das 26 letras do alfabeto; como segundo caractere, já que devem ser diferentes, podemos escolher apenas 25 letras; analogamente, os caracteres  $C_3$  a  $C_6$  poderão ser preenchidos, respectivamente, por 10, 9, 8 e 7 dígitos.

## 4. Utilizando os algarismos de 1 a 8, quantos números pares podemos formar de 4 algarismos distintos?

A alternativa "D " está correta.

Escolhendo os algarismos das unidades (U), dezenas (D), centenas (C) e milhares (M), nessa ordem, temos:



U: 4 alternativas  $\Rightarrow$  2, 4, 6, ou 8.

D: 7 alternativas  $\Rightarrow$  7 algarismos (exceto o já utilizado como U).

C: 6 alternativas  $\Rightarrow$  6 algarismos (exceto dois já usados).

M: 5 alternativas  $\Rightarrow$  5 algarismos (exceto três já usados).

Como as escolhas dos dígitos de cada ordem (milhar, centena, dezena e unidade) são independentes, o total desejado é  $4 \times 7 \times 6 \times 5 = 840$ .

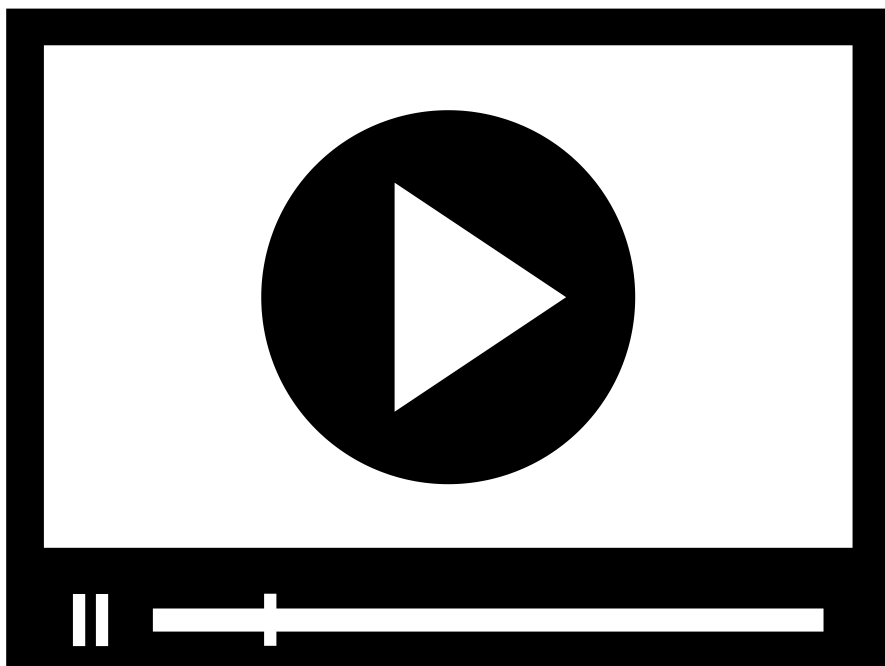
Uma outra solução é calcular todos os números de 4 dígitos distintos independentemente de serem pares ou ímpares. Equivalem a  $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$ . Como há 4 algarismos pares e 4 algarismos ímpares, por simetria, a metade é de números pares.

**5. Os artigos em uma loja são codificados da forma que se segue: Três letras maiúsculas diferentes e consecutivas, seguidas de um hífen; mais 6 algarismos quaisquer (de 0 a 6); mais um hífen e, finalmente, mais uma letra qualquer do alfabeto.**

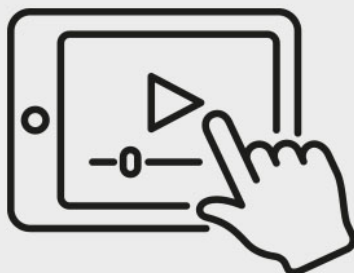
**Considere, como exemplo, o conjunto de códigos: {AHD-4193678-K, GEQ-093044-Q, AAA-9497-X}.**

**Qual o número total de produtos que podem ser codificados dessa maneira?**

A alternativa "E " está correta.



Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



6. Dado o conjunto  $A = \{ a; b; c; d; e; f; g \}$ , quantos são os subconjuntos de  $A$  que não possuem os objetos  $a$  e  $b$  mas necessariamente possuem os objetos  $f$  e  $g$ ?

A alternativa "**D**" está correta.

Ora, esta situação é equivalente a dispormos apenas dos objetos  $c$ ,  $b$  e  $e$  e escolhermos ou não tais objetos em nosso subconjunto! Ora, mas escolher ou não  $c$ , nos dão 2 alternativas; escolher ou não  $d$ , também, e escolher ou não  $e$ , também, duas alternativas. Como a escolha (ou não) de  $c$ ,  $d$  ou  $e$  são independentes, o princípio da multiplicação nos dá:

$2 \times 2 \times 2 = 8$  alternativas para formar os subconjuntos desejados.

---

## GABARITO

## TEORIA NA PRÁTICA

Dos 20 funcionários de uma empresa, 13 são homens e 7 são mulheres. Desejamos formar uma comissão constituída por 3 homens e 5 mulheres. Quantas são as possíveis comissões?

## RESOLUÇÃO



Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



## VERIFICANDO O APRENDIZADO

**1. QUANTAS SENHAS COM ALGARISMOS DIFERENTES PODEM SER FORMADAS COM NO MÍNIMO 4 E NO MÁXIMO 6 DÍGITOS, USANDO OS ALGARISMOS DE 0 A 9?**

- A) 186.480
- B) 188.455
- C) 139.339
- D) 122.222
- E) 111.987

**2. DADO O CONJUNTO  $A = \{ 1, 3, 5; 7; 9 \}$ , QUANTOS SÃO OS SUBCONJUNTOS DE A, COM 2 ELEMENTOS, MAS QUE NÃO POSSUEM O NÚMERO 5?**

- A) 2
- B) 4
- C) 6
- D) 12
- E) 24

---

### GABARITO

1. Quantas senhas com algarismos diferentes podem ser formadas com no mínimo 4 e no máximo 6 dígitos, usando os algarismos de 0 a 9?

A alternativa "A " está correta.

**Senhas com:**

**4** algarismos: **10** escolhas para o **1º** algarismo; **9** para o **2º**; **8** para o **3º** e **7** para o **4º**. Logo, há  $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$  senhas

**5** algarismos: analogamente,  $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30.240$  senhas

**6** algarismos:  $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151.200$

Observe que os conjuntos das senhas de **4**, **5** ou **6** algarismos são conjuntos disjuntos dois a dois. Então, pelo Princípio da Adição, o total de senhas é  $5.040 + 30.240 + 151.200 = 186.480$ .

**2. Dado o conjunto  $A = \{ 1, 3, 5; 7; 9 \}$ , quantos são os subconjuntos de A, com 2 elementos, mas que não possuem o número 5?**

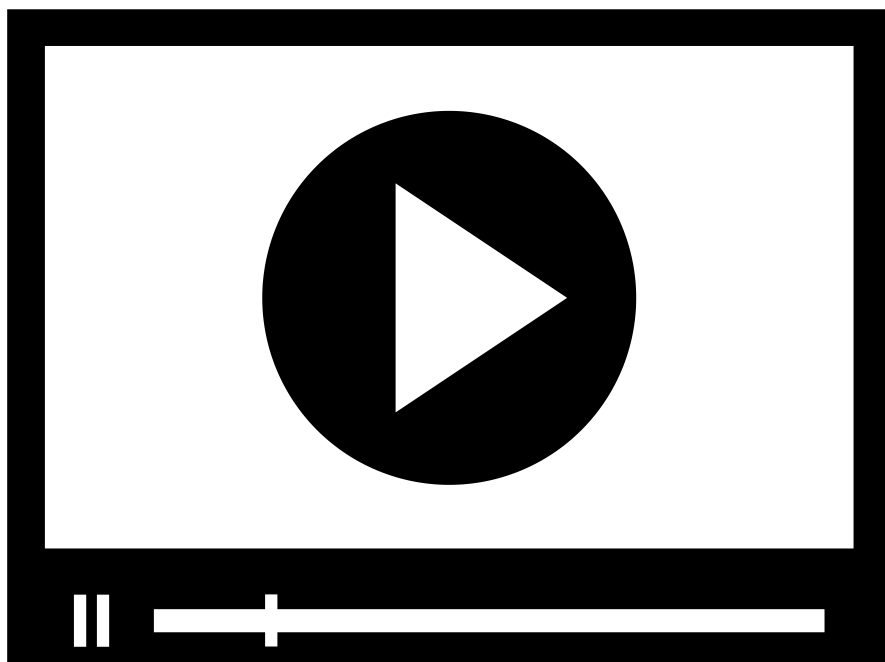
A alternativa "C " está correta.

Ora, se não podemos escolher o número **5**, tudo se passa como se dispuséssemos apenas de elementos (**1**, **3**, **7** e **9**) para escolher **4**. Então, o resultado desejado equivale a combinações de **4** elementos tomados **2 a 2**, ou seja:

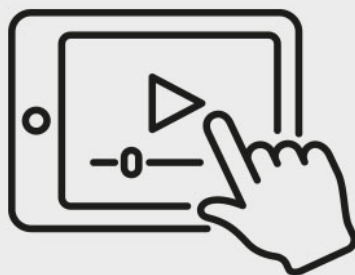
$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$$

## MÓDULO 3

🕒 Identificar os principais agrupamentos combinatórios



Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



## AGRUPAMENTOS COMBINATÓRIOS



Imagem: Shutterstock.com

A análise dos diversos tipos de problemas de contagem sugere que há padrões úteis, e que é possível, em casos mais simples, usar uma tipologia agrupamentos para tipificar inúmeros problemas. Destacamos a família dos arranjos, das permutações e a das combinações. No módulo anterior já abordamos algumas dessas situações utilizando os chamados arranjos, permutações e combinações simples, em que as duas situações a seguir são claramente percebidas:

Se, ao criar um agrupamento com os objetos disponíveis, a mudança da ordem dos objetos gera um agrupamento diferente, ou seja, a ordem em que os objetos formam o particular agrupamento é relevante, temos o caso clássico de filas, senhas etc., e os agrupamentos utilizados são os arranjos e as permutações;

Se, ao criar um agrupamento com os objetos disponíveis, a mudança da ordem dos objetos não gera um agrupamento diferente, ou seja, a ordem em que os objetos formam o agrupamento é irrelevante, temos

o caso clássico de formar subconjuntos ou comissões de pessoas: São as chamadas combinações.

Mas há situações adicionais, quando podemos repetir objetos nos agrupamentos. Por exemplo, determinar o número de anagramas de uma palavra, em que haja letras repetidas; ou, por exemplo, escolher um sorvete “casquinha” em que podemos escolher 3 dentre os 5 sabores disponíveis, sendo permitido repetir um sabor. Nesse módulo, trataremos de algumas dessas situações, em especial, as situações de agrupamentos com repetição.

## AGRUPAMENTOS ESPECIAIS

Agrupamentos que apresentam repetições de elementos. Vamos apresentá-los:

### ARRANJO COM REPETIÇÃO

Arranjos com repetição de  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$ , cuja quantidade é representada por  $AR_p^n$ , são agrupamentos da seguinte natureza:

Dispomos de  $n$  objetos e queremos saber de quantas maneiras podemos escolher  $p$  desses elementos de tal forma que possa haver repetição dos objetos no agrupamento formado.

Ora, para escolher o primeiro dos objetos, dispomos dos  $n$  objetos originais. Mas na escolha dos demais objetos, como pode haver repetição, há sempre  $n$  objetos disponíveis. Ou seja:

$$AR_p^n = n \times n \times \dots \times n = n^p$$



**Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Uma situação clássica é a formação de senhas de 6 caracteres, por exemplo, dispondo-se das letras (em que maiúsculas são contadas como diferentes das minúsculas) e dos 10 algarismos, não sendo permitidos caracteres especiais. Naturalmente, como o total de caracteres disponíveis é  $26 + 26 + 10 = 62$ , o número de senhas possíveis com 6 caracteres é  $62^6$  (superior a 60 bilhões, quase 10 vezes a quantidade de habitantes do planeta).

# PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Uma situação típica que esse agrupamento descreve são anagramas de uma palavra, quando a palavra original possui letras repetidas.

## ★ EXEMPLO

O cálculo do número de anagramas das palavras ARARAQUARA e da palavra MATEMÁTICA.

Note que, nas situações em que há objetos repetidos, podemos imaginar, inicialmente, que as letras repetidas são diferentes e analisar a consequência dessa abordagem. Imaginemos que as letras da palavra ARARAQUARA são, na verdade,  $A_1R_1A_2R_2A_3QU_1A_4R_3A_5$ .

Ora, se ordenarmos de todas as formas as **10** letras, obteremos um total de  $P_{10}$  situações, ou seja,  $P_{10} = 10!$

Mas, na verdade, muitos desses agrupamentos formados são o mesmo anagrama. Isso porque as letras  $A_1$  até  $A_5$ , por exemplo, são, na verdade, a mesma letra A. Então, imagine tais letras em suas posições nos anagramas anteriores.

Se você trocar de posição qualquer uma delas entre si (nas **5** posições que elas ocupam), você continuará com o mesmo anagrama. Então, é necessário dividir o total de  $10!$  por

$P_5 = 5!$  para evitar contagem múltipla. Da mesma forma, devemos dividir o total anterior por  $3!$  (repetições da letra R).

Então, a quantidade desejada é, na verdade:

$$\frac{10!}{5!3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$$

Esse tipo de situação é chamado Permutação com Repetição.

Nessa situação, escrevemos:  $PR_{5,3}^{10}$ , ou seja, dispomos de **10** objetos, dos quais **5** são iguais a **A** e **3** iguais a **B**.

No caso geral, em que dispomos de **n** objetos em que há **p**, **q**, ..., **t** objetos repetidos, escrevemos  $PR_{p,q,\dots,t}^n$ .

Utilizando o mesmo raciocínio desse exemplo, concluímos que precisamos dividir **n!** pelas repetições, que são **r!**, **s!**, ..., **t!**, ou seja:

$$PR_{p,q,r,..t}^n = \frac{n!}{p! \times q! \times \dots \times t!}$$



**Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Como consequência, calcular o número de anagramas da palavra MATEMÁTICA é imediato (em geral, os acentos não são considerados na análise de anagramas).

Há duas letras **M**, três letras **A** e duas letras **T** na palavra matemática (E, I e C ocorrem apenas uma vez). Logo, a quantidade desejada é:

$$PR_{2,3,2}^{10} = \frac{10!}{2! \times 3! \times 2!} = \frac{\cancel{10} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{(1 \cdot 2)} \cdot \cancel{(1 \cdot 2 \cdot 3)} \cdot \cancel{(1 \cdot 2)}} = 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 151.200$$

## PERMUTAÇÃO CIRCULAR

Normalmente, os agrupamentos são sequências de objetos dispostos em **linha**. Entretanto, um tipo especial de agrupamento ocorre quando desejamos dispor **n** objetos ou pessoas em volta de uma mesa – ou de um círculo.

Vejamos um exemplo: Desejamos dispor quatro amigos - Antônio, Bernardo, Carlos e Daniel em volta de uma mesa. Note que as posições **A**, **B**, **C** e **D** representam permutações diferentes, mas a disposição dos amigos na mesa é a mesma. Imagine que você apenas rodou a mesa, claro, com os amigos juntos.

**A:** Antônio; Bernardo; Carlos; Daniel.

**B:** Daniel; Antônio; Bernardo; Carlos.

**C:** Carlos; Daniel; Antônio; Bernardo.

**D:** Bernardo; Carlos; Daniel; Antônio.



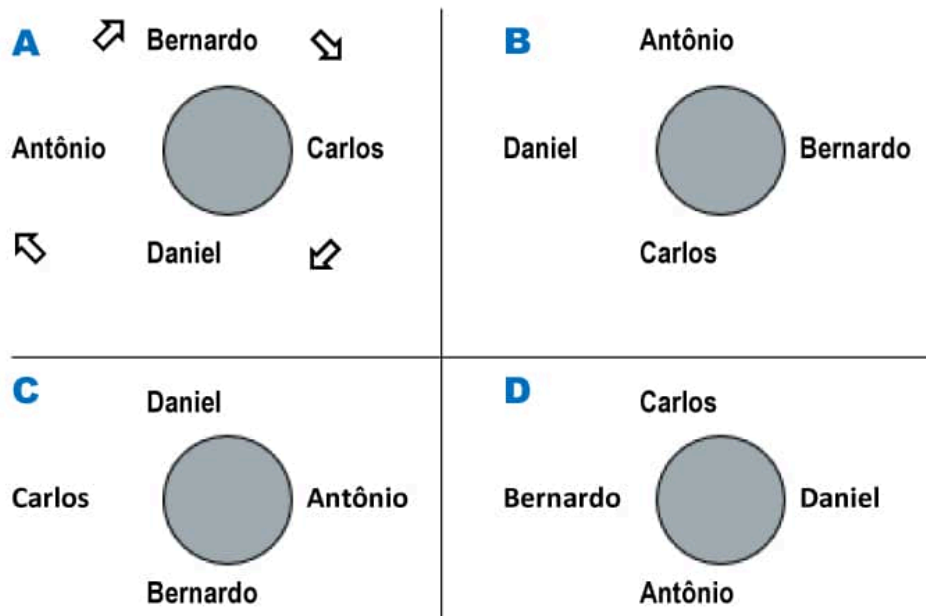


Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

Figura 18

Assim, diferentemente das permutações usuais de 4 objetos, que geram  $4! = 24$  permutações simples, nesse caso, temos apenas a quarta parte dessa quantidade como posições diferentes possíveis em volta da mesa. Dessa forma, na verdade, o número de permutações circulares é, então,  $4! \div 4 = 3! = 6$ .

Representando por  $PC_n$  o número de permutações circulares de  $n$  objetos, é imediato perceber que:

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n - 1)!$$

**Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

## COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO

Os agrupamentos combinações simples foram analisados no módulo anterior:

**ATENÇÃO**

São caracterizados por serem formados com **p** objetos, a partir de **n** objetos disponíveis, em que a ordem **não** é relevante e **não** há repetição de nenhum objeto no mesmo agrupamento.

Quando permitimos que objetos em um mesmo agrupamento possam ser repetidos, temos as chamadas combinações com repetição de **n** objetos tomados **p** a **p**.

Vamos analisar um exemplo curioso: Suponha que uma loja possui tabletes (barras) de chocolate de **três** marcas diferentes e você deseja comprar **oito** tabletes. De quantas formas diferentes podem ser escolhidos os tabletes em sua compra? Vejamos alguns exemplos de “escolhas” diferentes:

Tipo 1		Tipo 2		Tipo3	Total
■ ■	+	■ ■ ■	+	■ ■ ■	8
■	+	■ ■ ■ ■ ■	+	■ ■	8
	+	■ ■ ■ ■ ■ ■	+	■ ■	8

Imagem: Carlos Eddy Esaguy Nehab.

Figura 19

A estratégia clássica para realizarmos a contagem total de agrupamentos desse tipo é muito interessante. Dispomos de **dois** tipos de objetos: O **sinal de adição** (usado 2 vezes porque há 3 tipos de tabletes) e **quadrinhos** que simbolizam os **tabletes** de chocolate de qualquer tipo. Então, cada sequência de sinais de adição e de quadrinhos representa uma situação de compra. Veja:

- ■ + ■ + ■ ■ ■ ■ ■ ⇒ dois tabletes do tipo 1, um do tipo 2 e cinco do tipo 3;
- ■ ■ ■ ++ ■ ■ ■ ■ ⇒ quatro tabletes do tipo 1, nenhum do tipo 2 e quatro do tipo 3;
- ++ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ⇒ todos os 8 tabletes do tipo 3.

Assim, o problema de determinar a quantidade de combinações com repetição de **n** objetos **p** a **p** recai na contagem de quantas permutações com repetição de **10** objetos (**2** sinais de adição e **8** quadrinhos), o que pode ser calculado como:

$$CR_5^8 = PR_{2,8}^{10} = \frac{10!}{2!8!} = 45$$



**Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Note que, no caso geral de dispormos de **n** objetos e desejarmos calcular o número de combinações com repetição escolhendo **p** objetos, a expressão da quantidade desses agrupamentos será dada por:

$$CR_p^n = PR_{n,p-1}^{n+p-1}$$



**Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

que corresponde, também, ao número de combinações (simples) de **n + p - 1** tomados **n** a **n**...

A discussão anterior mostra que a **invenção** dos diversos tipos de agrupamentos e as expressões para o cálculo do quantitativo de cada um deles é, na prática, decorrente diretamente de estratégias e do Princípio da Multiplicação. Portanto, é perfeitamente possível, e diríamos, desejável, que possamos resolver problemas de contagem sem que sequer saibamos o que são arranjos, permutações e combinações!

## SÍNTESE DOS TIPOS DE AGRUPAMENTOS

Explicitamos, a seguir, as principais categorias de agrupamentos abordados, bem como as notações de seus quantitativos e as fórmulas associadas:

Tipo de agrupamento	Subtipo	Notação / Cálculo
Arranjos	Simples	$A_p^n = n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$

Tipo de agrupamento	Subtipo	Notação / Cálculo
	Com Repetição	$AR_p^n = n^p$
Permutações	Simples	$P_n = n \cdot (n - 1)(n - 2) \dots 1 = n!$
	Circular	$P_n = (n - 1)(n - 2) \dots 1 = (n - 1)!$
	Com Repetição	$P_{p,q,\dots,s}^n = \frac{n!}{p!q! \dots r!}$
Combinações	Simples	$C_p^n = \frac{A_p^n}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
	Com repetição	$CR_p^n = P_{n-1,p}^{n+p-1} = C_{n-1}^{n+p-1}$



**Atenção!** Para visualização completa da tabela utilize a rolagem horizontal



Elaborada por Carlos Eddy Esaguy Nehab.

# MÃO NA MASSA

## 1. QUANTOS SÃO OS ANAGRAMAS DA PALAVRA ARRANJO?

A) 10.080

B) 5040

C) 2520

D) 1260

E) 620

**2. DETERMINE DE QUANTAS MANEIRAS POSSO CONSTRUIR SENHAS DE EXATAMENTE 4 CARACTERES, A PARTIR EXCLUSIVAMENTE DAS 26 LETRAS MINÚSCULAS, DOS 10 ALGARISMOS, E DOS 3 SÍMBOLOS ESPECIAIS @, # E &?**

A)  $39^{39}$

B)  $4^{39}$

C)  $39^4$

D)  $4^4$

E)  $39 \times 4$

**3. NUMA PADARIA, HÁ 10 TIPOS DE BISCOITOS DOCES E 7 TIPOS DE BISCOITOS SALGADOS. VOCÊ DESEJA COMPRAR 4 PACOTES DE BISCOITO DOCE E 3 PACOTES DE BISCOITO SALGADO. SE VOCÊ PODERÁ COMPRAR PACOTES IGUAIS DE BISCOITOS, DE QUANTAS MANEIRAS OS 7 PACOTES DE BISCOITOS QUE VOCÊ PRETENDE COMPRAR PODEM SER ESCOLHIDOS?**

A)  $P_{10} \times P_4$

B)  $PR^{10}_4 \times PR^7_3$

C)  $A^{10}_4 \times A^7_3$

D)  $C^{10}_4 \times C^7_3$

E)  $CR^{10}_4 \times CR^7_3$

**4. DESEJAMOS ARRUMAR 5 LIVROS DE *PROBABILIDADE*, 7 LIVROS DE *CÁLCULO* E 8 DE *ÁLGEBRA* LINEAR EM UMA PRATELEIRA DE UMA ESTANTE, DE TAL FORMA**

**QUE LIVROS SOBRE O MESMO ASSUNTO FIQUEM JUNTOS. QUANTAS SÃO AS FORMAS DE ARRUMÁ-LOS?**

- A)  $3! \times 5! \times 7! \times 8!$
- B)  $20!$
- C)  $20! \div (5! \times 7! \times 8!)$
- D)  $5! \times 7! \times 8!$
- E)  $3! \times 20!$

**5. VAMOS RETORNAR À ANÁLISE DE PROBLEMAS DE CONTAGEM PRIORIZANDO A ESTRATÉGIA MAIS IMPORTANTE, O PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO, AO INVÉS DOS AGRUPAMENTOS.**

**“NUMA ELEIÇÃO PARA UM CLUBE, UM GRUPO DE 20 AMIGOS DESEJA FORMAR UMA CHAPA PARA SE CANDIDATAR, SENDO NECESSÁRIO UM NOME PARA PRESIDENTE, OUTRO PARA VICE-PRESIDENTE E OUTRO PARA DIRETOR TESOUREIRO, SENDO QUE TAIS CARGOS NÃO PODEM SER PREENCHIDOS PELA MESMA PESSOA. NO ESTATUTO DO CLUBE HÁ UMA RESTRIÇÃO QUANTO À ESCOLHA DO TESOUREIRO, QUE DEVE SER UM CONTADOR. SABENDO-SE QUE NO GRUPO DE AMIGOS HÁ APENAS 4 CONTADORES, QUANTAS CHAPAS DIFERENTES PODEM SER FORMADAS PELOS AMIGOS?**

- A)  $4 \times 20^2$
- B)  $20^2$
- C)  $4 \times 19^2$
- D)  $4 \times 19 \times 18$
- E)  $2 \times 19^2$

**6. QUANTOS SUBCONJUNTOS POSSUI UM CONJUNTO COM 7 ELEMENTOS?**

- A) 28
- B) 56
- C) 64
- D) 128
- E)  $8!$

## GABARITO

### 1. Quantos são os anagramas da palavra ARRANJO?

A alternativa "D " está correta.

Alternativa correta letra D. Ora, desejamos embaralhar (permutar) as 7 letras. Mas há duas letras **A**, e duas letras **R**. Portanto, trata-se de um agrupamento do tipo permutação com repetição. Logo, a quantidade de agrupamentos é  $PR_{2,2}^7 = 7! \div (2! \times 2!) = 1260$ .

### 2. Determine de quantas maneiras posso construir senhas de exatamente 4 caracteres, a partir exclusivamente das 26 letras minúsculas, dos 10 algarismos, e dos 3 símbolos especiais @, # e &?

A alternativa "C " está correta.

Alternativa correta letra C. Naturalmente, nesse caso, desejamos embaralhar um total de 4 objetos (podendo repeti-los), sendo que dispomos de um total de 39 deles. A solução é imediata porque temos 39 objetos para escolher como primeiro caractere da senha e, também, 39 objetos para os demais caracteres da senha. Pelo Princípio da Multiplicação, a quantidade total é, então,  $39 \times 39 \times 39 \times 39 = 39^4$ .

É claro que esse exemplo configura o agrupamento arranjo com repetição de  $n$  objetos, tomados  $p$  a  $p$ , em que  $n = 39$  e  $p = 4$ ; usando a fórmula, temos:  $AR_{4,4}^{39} = 39^4$ .

### 3. Numa padaria, há 10 tipos de biscoitos doces e 7 tipos de biscoitos salgados. Você deseja comprar 4 pacotes de biscoito doce e 3 pacotes de biscoito salgado. Se você poderá comprar pacotes iguais de biscoitos, de quantas maneiras os 7 pacotes de biscoitos que você pretende comprar podem ser escolhidos?

A alternativa "E " está correta.

Alternativa correta letra E. Inicialmente, é importante perceber que você deverá realizar duas ações independentes: Escolher os 4 pacotes de biscoitos doces dentre os 10 tipos disponíveis e, analogamente, escolher 3 pacotes de biscoitos salgados dentre os 7 tipos disponíveis. Ora, cada uma dessas duas ações corresponde a uma situação de combinar certa quantidade de biscoitos a partir de uma quantidade disponível, o que configura duas situações de combinações com repetição.

Quantidade de escolhas de pacotes doces:  $CR_{4,4}^{10} = C^{10+4-1}_{10} = C^{13}_4$ .

Quantidade de escolhas de pacotes salgados:  $CR_{3,3}^7 = C^{7+3-1}_3 = C^9_3$ .

Como essas duas ações são independentes, o número total de escolhas é dado pelo Princípio da Multiplicação:  $CR_{4,4}^{10} \times CR_{3,3}^7$ .

### 4. Desejamos arrumar 5 livros de *Probabilidade*, 7 livros de *Cálculo* e 8 de *Álgebra* linear em uma prateleira de uma estante, de tal forma que livros sobre o mesmo assunto fiquem juntos. Quantas são as formas de arrumá-los?

A alternativa "A " está correta.

Alternativa correta letra A. Se você imaginar que cada assunto é um bloco de livros, um primeiro aspecto do problema é calcular quantas são as formas de ordenar os **3** assuntos (claro, imaginando os livros de cada assunto *amarrados com barbante*): Naturalmente, é a quantidade de formas em que posso permutar **3** objetos (os amarrados): **3!**.

Mas, dentro de cada assunto, os livros também podem ser permutados entre si. Então, como cada uma dessas **4** ações são independentes entre si, a quantidade desejada é: **3! × 5! × 7! × 8!**.

**5. Vamos retornar à análise de problemas de contagem priorizando a estratégia mais importante, o Princípio da Multiplicação, ao invés dos agrupamentos.**

**“Numa eleição para um clube, um grupo de 20 amigos deseja formar uma chapa para se candidatar, sendo necessário um nome para presidente, outro para vice-presidente e outro para diretor tesoureiro, sendo que tais cargos não podem ser preenchidos pela mesma pessoa. No estatuto do clube há uma restrição quanto à escolha do tesoureiro, que deve ser um contador. Sabendo-se que no grupo de amigos há apenas 4 contadores, quantas chapas diferentes podem ser formadas pelos amigos?**

A alternativa **"D "** está correta.

Alternativa correta letra D. Vamos abordar o problema pensando diretamente no Princípio da Multiplicação, escolhendo, em primeiro lugar, as eventuais situações que possuem algum tipo de restrição. Vejamos:

Para escolher o tesoureiro, há apenas **4** amigos disponíveis;

Após essa escolha, restam **19** amigos para presidente;

Finalmente, após essa escolha, ainda há **18** amigos para vice-presidente.

Logo, como as escolhas para cada cargo são ações independentes, pelo Princípio da Multiplicação há exatamente **4 × 19 × 18** chapas para concorrer.

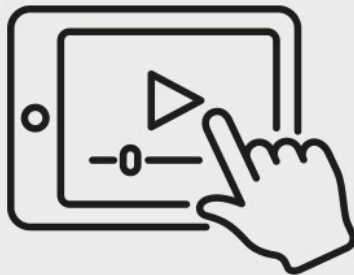
**6. Quantos subconjuntos possui um conjunto com 7 elementos?**

A alternativa **"D "** está correta.





Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



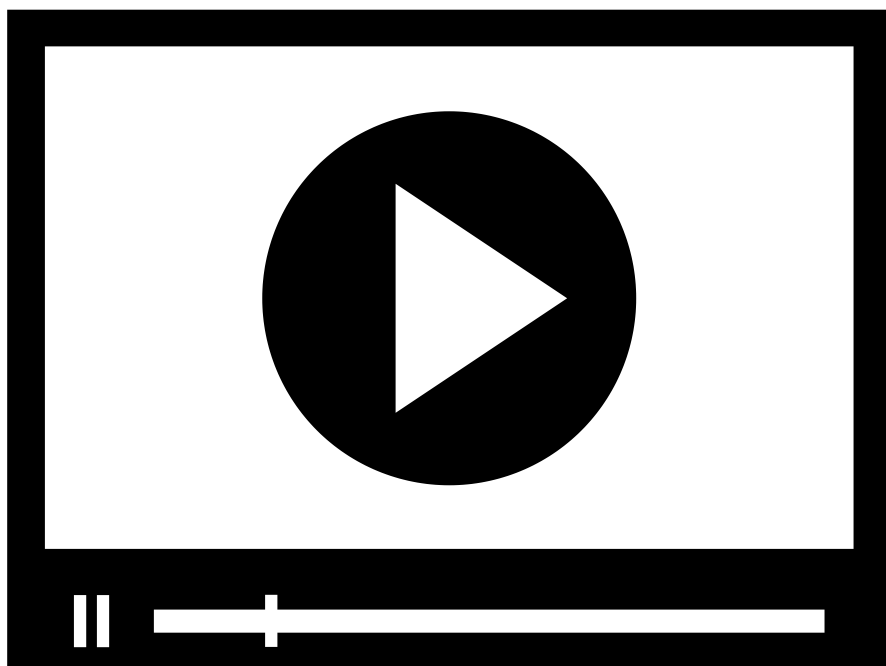
---

## GABARITO

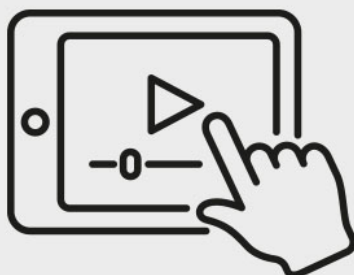
## TEORIA NA PRÁTICA

De quantas maneiras podemos dividir entre três herdeiros, uma herança de **20** moedas idênticas de ouro?

## RESOLUÇÃO



Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



# VERIFICANDO O APRENDIZADO

## 1. QUANTOS SÃO OS ANAGRAMAS DA PALAVRA ANAGRAMA?

- A)  $8!$
- B)  $8! \div 4!$
- C)  $4!$
- D)  $8! \div (4! \times 4!)$
- E)  $8^4$

## 2. UM GRUPO DE 10 CRIANÇAS FORMA UMA RODA PARA BRINCAR DA DANÇA DAS CADEIRAS. DE QUANTAS MANEIRAS DIFERENTES ESSAS CRIANÇAS PODEM FORMAR A RODA INICIAL?

- A)  $9! \div 10$
- B)  $8!$
- C)  $10!$
- D)  $10! \div 10$
- E)  $10^9!$

---

## GABARITO

### 1. Quantos são os anagramas da palavra ANAGRAMA?

A alternativa "B " está correta.

Quando permutamos as 8 letras da palavra ANAGRAMA, obtemos um total de  $8!$  anagramas. Mas há 4 letras **A**! Imagine, então, que você misturasse entre si, nos  $8!$  anagramas formados, essas 4 letras **A**. Estaríamos contando  $4! = 24$  anagramas como diferentes, quando na verdade são o mesmo anagrama. Portanto, devemos dividir  $8!$  por  $4! = 24$  para ajustar as repetições contidas nos  $8!$  anagramas iniciais. Outra forma direta de analisar o problema consiste em perceber que esse é um caso típico de permutações com repetição, ou seja:

$PR_{4,1,1,1}^8 = \frac{8!}{4!}.$

**2. Um grupo de 10 crianças forma uma roda para brincar da dança das cadeiras. De quantas maneiras diferentes essas crianças podem formar a roda inicial?**

A alternativa "**D**" está correta.

O que importa, nesse problema, é a ordem circular em que as crianças estão dispostas. A diferença dessa situação para simplesmente colocar as **10** crianças em fila, é que nas **10!** filas possíveis, ocorre a repetição **10** vezes de cada organização em círculo! Ou seja, estamos, tipicamente, com um agrupamento do tipo permutação circular. Então, o número desejado é a permutação (circular) de **10** objetos, dividido por **10**, ou seja,  $10! \div 10$ , que é exatamente o número de permutações circulares de **10** objetos, ou seja, **PC<sub>10</sub>**.

## CONCLUSÃO

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A abordagem adotada no módulo 1, chamada de teoria *ingênu*a dos conjuntos, enfatiza os aspectos gerais e básicos da representação de conjuntos, bem como suas principais operações. Os principais subconjuntos do conjunto dos números reais, em particular, os chamados intervalos, foram abordados nos aspectos de notação, de suas representações na reta real e das operações gerais sobre conjuntos.

O conceito de módulo é tratado sob o aspecto algébrico e, importantíssimo, sua interpretação como distância de um ponto na reta real à origem. É fundamental perceber que os conceitos básicos de conjuntos, aliados à argumentação lógica, são parte essencial da linguagem utilizada na narrativa matemática, em geral. Assim, podemos dizer, sem exagero, que esse módulo é pré-requisito para a leitura de qualquer texto que verse sobre matemática.

No módulo 2, vimos os princípios centrais da contagem – em especial, os Princípios da Adição e da Multiplicação e, a partir deles, identificamos categorias típicas de contagem de objetos, envolvendo ou não a possibilidade do uso de repetição nos agrupamentos formados a partir de um conjunto inicial de objetos disponíveis. Enfatizamos ainda o uso de padrões de contagem e exploramos os agrupamentos simples, notadamente os arranjos, as permutações e as combinações.

O módulo 3 aprofunda o tema de contagem, abordando problemas mais sofisticados, bem como explicita os agrupamentos que incluem a possibilidade de repetição de objetos na composição de cada um. Os problemas mais sofisticados de contagem normalmente exigem múltipla abordagem, ou seja, o eventual do Princípio da Multiplicação, aliado ao uso dos agrupamentos padrão já conhecidos e estudados. Podemos resolver qualquer problema de contagem sem conhecer os diversos agrupamentos convencionais encontrados na literatura aqui

estudados, mas jamais sem o uso dos Princípios da Multiplicação/Adição, esses, sim, os carros-chefe de todo processo de contagem.

## REFERÊNCIAS

HALMOS, P. **Teoria Ingênua dos Conjuntos**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2001.

MACEDO, R.S. **Teoria dos Conjuntos**: a alma do movimento da matemática moderna. e-book. 2020.

SANTOS, J.P.O. *et al.* **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. 4. ed. (revista) reimpressa em 2020

SANTOS, I. **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2020.

---

## EXPLORE+

Compreenda um pouco mais sobre o princípio de contagem lendo o artigo: *Intervenção em Princípios de Contagem: Desenvolvimento do Programa e Aplicação Inicial*.

---

## CONTEUDISTA

Carlos Eddy Esaguy Nehab

 **CURRÍCULO LATTES**