Principiul minimului. Metode numerice. Probleme cu restricţii

1 Problema de control optimal

Pentru un sistem descris în spaţiul stărilor de:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad \text{cu condiţia iniţială } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

se cere să se determine comanda optimală $\mathbf{u}^*(t)$ pentru care sistemul să urmeze o traiectorie optimală $\mathbf{x}^*(t)$ care să minimizeze funcţia de cost

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt$$

2 Condiţiile necesare pentru control optimal

Se notează hamiltonianul H :

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{1}$$

Dacă stările şi variabilele de comandă nu sunt supuse restricţiilor, timpul final t_f este fixat şi starea finală nu este fixată, atunci condiţiile necesare pentru control optimal sunt:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}^* &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t) && (2)\\
\dot{\lambda}^* &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} && (3)\\
0 &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} && (4)\\
\mathbf{x}^*(t_0) &= \mathbf{x}_0 && (5)\\
\lambda^*(t_f) &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f)) && (6)
\end{aligned}$$

3 Rezolvarea problemelor utilizând condiţiile necesare pentru optimalitate

Dacă stările şi comenzile nu sunt supuse restricţiilor, starea finală nu este precizată şi timpul final este precizat, atunci se urmează paşii:

1. Scrieţi hamiltonianul
$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$
2. Se calculează $\mathbf{u}$ care minimizează hamiltonianul:
$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} > 0$$

3. Se determină ecuaţiile diferenţiale pentru variabilele auxiliare, co-stările $\lambda(t)$:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$$

4. Se determină condiţiile finale pentru λ:

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_f))$$

5. Se integreaza sistemul de ecuaţii diferenţiale pentru λ şi sistemul de ecuaţii de stare, cu condiţiile finale calculate pentru λ şi condiţiile iniţiale impuse pentru stările x. Dacă valorile finale ale co-stărilor depind de valorile finale ale stărilor, atunci se rezolvă problema TPBVP (Two Point Boundary Value Problem), urmând de exemplu algoritmul descris în continuare.

4 Rezolvarea TPBVP

Algoritmul se bazează pe observaţia că $u^*(t)$ care minimizează hamiltonianul va minimiza funcţia de cost J. Astfel, algoritmul numeric va determina funcţia u^* care anulează prima derivată a hamiltonianului.

4.1 Rezolvarea TPBVP utilizând funcţii de optimizare din Matlab

1. Scrieţi hamitonianul $H(x(t), u(t), \lambda(t))$.
2. Calculaţi prima derivată a hamiltonianului în raport cu u: $\partial H/\partial u$.
3. Scrieţi sistemul de ecuaţii diferenţiale pentru costări
4. Determinaţi condiţiile finale pentru $\lambda(t_f)$
5. Stabiliţi o aproximare discretă iniţială $u(t)$, $t \in [0,\ t_f]$. De exemplu împărţiţi intervalul $[t_0,\ t_f]$ în N subintervale şi consideraţi comanda u constantă pe fiecare subinterval: $u(t) = u(t_k),\ \ k = 1..N$
6. Minimizaţi H($\mathbf{u}$) cu o funcţie Matlab (de exemplu *fminunc* sau *fminsearch*) sau cu un algoritm numeric pentru determinarea minimului (de exemplu metoda de gradient). Funcţia de minimizat are ca argument de intrare vectorul de valori **u** şi trebuie să rezolve următoarele:
   (a) Utilizând vectorul **u** se integreaza ecuaţiile de stare cu condiţiile iniţiale $\mathbf{x(0)} = \mathbf{x0}$ şi se obţin valorile stărilor în acelaşi număr de puncte ca şi **u**, pe N subintervale.
   (b) Se calculează $\lambda(t_f)$
   (c) Se rezolvă sistemul de ecuaţii diferenţiale pentru co-stări, cu condiţiile finale $\lambda(t_f)$, integrând invers, de la timpul final spre timpul iniţial ($t_f \to t_0$). Se obţin vectori de valori pentru λ de aceeaşi dimensiune ca şi **x**.
   (d) Utilizând u, x şi λ se calculează hamiltonianul (prima derivată a hamiltonianului).
   (e) Funcţia de optimizat returnează norma hamiltonianului (sau a primei derivate a hamiltonianului).

4.2 Rezolvarea TPBVP utilizând metoda de gradient

1. Scrieţi hamitonianul $H(x(t), u(t), \lambda(t))$.
2. Calculaţi prima derivată a hamiltonianului în raport cu u: $\partial H/\partial u$.
3. Scrieţi sistemul de ecuaţii diferenţiale pentru costări
4. Determinaţi condiţiile finale pentru $\lambda(t_f)$

5. Stabiliţi o aproximare discretă iniţială $u(t)$, $t \in [0,\ t_f]$. De exemplu împărţiţi intervalul $[t_0,\ t_f]$ în N subintervale şi consideraţi comanda u constantă pe fiecare subinterval: $u(t) = u(t_k),\ \ k = 1..N$

6. Utilizând vectorul $\mathbf{u}$ se integreaza ecuaţiile de stare cu condiţiile iniţiale $\mathbf{x(0)} = \mathbf{x0}$ şi se obţin valorile stărilor în acelaşi număr de puncte ca şi $\mathbf{u}$, pe N subintervale.

7. Se calculează $\lambda(t_f)$

8. Se rezolvă sistemul de ecuaţii diferenţiale pentru co-stări, cu condiţiile finale $\lambda(t_f)$, integrând invers, de la timpul final spre timpul iniţial ($t_f \to t_0$). Se obţin vectori de valori pentru λ de aceeaşi dimensiune ca şi $\mathbf{x}$.

9. Utilizând u, x şi λ se calculează prima derivată a hamiltonianului $\frac{\partial H}{\partial u}$.

10. Dacă
$$\|\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}\| \leq \varepsilon \tag{7}$$
unde ε este o constantă mică pozitivă, procedura iterativă se termină şi se returneaza valorile comenzii optimale.

11. Dacă condiţia de oprire nu este îndeplinită se generează un nou vector $\mathbf{u}$, dat de iteraţia:
$$\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} - \tau \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \tag{8}$$
unde τ este pasul metodei de gradient.

5 Exerciţii

Rezolvaţi următoarele probleme utilizând:

- Condiţiile necesare pentru control optimal şi calcul analitic. Pentru integrarea ecuaţiilor diferenţiale se poate utiliza funcţia Matlab *dsolve*.
- Un algoritm numeric descris în secţiunea 4, la alegere:
  - Pentru optimizare cu funcţii Matlab utilizaţi *fminunc* sau *fminsearch*
  - Pentru optimizare cu metoda de gradient scrieţi algoritmul în Matlab.

P1. Pentru sistemul dinamic descris de ecuaţia de stare:
$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = 1$$
se cere să se determine comanda optimală $u^*(t)$ care minimizează funcţia de cost:
$$J = \int_0^2 \left(u^2(t) + x(t)\right) dt$$
Reprezentaţi grafic $u^*(t)$ şi traiectoria de stare optimă $x^*(t)$.

P2. Pentru sistemul dinamic descris de ecuaţia de stare:
$$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t), \quad x(0) = 0$$
se cere să se determine comanda optimală $u^*(t)$ care minimizează funcţia de cost:
$$J = \int_0^{10} \left(0.01u^2(t) + (x(t) - \cos t)^2\right) dt$$
Reprezentaţi grafic $u^*(t)$ şi traiectoria de stare optimă $x^*(t)$.

6 Probleme cu restricţii

R1. Arătaţi că pentru sistemul scalar

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = 1, \quad |u(t)| \leq M \quad t \in [0,\ 1] \tag{9}$$

un control admisibil $u^*(t)$ care minimizează funcţia de cost:

$$J = x(1) + \int_0^1 u^2(t)dt \tag{10}$$

este de forma:

(a) dacă $2M \geq 1$:

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}e^{t-1} \tag{11}$$

(b) dacă $2M < 1$:

$$u^*(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{t-1}, \text{ for } 0 \leq t \leq 1 + \ln 2M \\ -M, \text{ for } 1 + \ln 2M \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{12}$$

R2. Pentru sistemul descris de ecuaţia de stare:

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad x(0) = 5 \tag{13}$$

cu restricţia: $0 \leq u(t) \leq 2$, minimizaţi funcţia de cost:

$$J = \int_0^2 \left(u^2(t) + 3u(t) - 2x(t)\right) dt \tag{14}$$

R3. Verificaţi ca soluţia problemei:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = 0 \tag{15}$$

$$\min_u J = 2x(1) + \int_0^1 \left(x(t) + \frac{1}{2}u^2(t)\right) dt \tag{16}$$

cu restricţia $|u(t)| \leq M$ este controlul optimal:

$$u^*(t) = \begin{cases} -\lambda(t) & \text{dacă} \quad |\lambda(t)| \leq 1 \\ -M\text{sign}(\lambda(t)) & \text{dacă} \quad |\lambda(t)| > 1 \end{cases} \tag{17}$$

unde $\lambda(t) = 1 + e^{t-1}$ este soluţia ecuaţiei:

$$\dot{\lambda}(t) = \lambda(t) - 1, \quad \lambda(0) = 2 \tag{18}$$

Verificaţi că:

a)

$$u^*(t) = -M \quad \text{dacă} \quad M \leq 1 + e^{-1} \tag{19}$$

b)

$$u^*(t) = -1 - e^{t-1} \quad \text{dacă} \quad M \geq 2 \tag{20}$$

c)

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 - e^{t-1} & \text{dacă} \quad 0 \leq t \leq \ln(M-1) \\ -M & \text{if} \quad t > 1 + \ln(M-1) > 1 \end{cases} \tag{21}$$

dacă $1 + e^{-1} \leq M \leq 2$.