Regulatorul liniar pătratic pentru probleme de urmărire. Estimarea stării.

1 Problema de control optimal pentru sisteme de urmărire

Pentru un sistem continuu cu n variabile de stare şi m variabile de intrare, descris de:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{1}$$

cu condiţiile iniţiale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, se cere să se calculeze vectorul de comenzi optime $\mathbf{u}^*(t)$ care minimizează funcţia de performanţă:

$$J = \mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{S}\mathbf{x}(t_f) + \int_0^{t_f} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)dt$$

unde $\mathbf{S}$ şi $\mathbf{Q}$ sunt matrici simetrice pozitiv semidefinite cu dimensiunea $n \times n$, iar $\mathbf{R}$ este o matrice simetrică pozitiv definită cu dimensiunea $m \times m$.

2 LQR pentru probleme de stabilizare

Legea de comandă rezultă de forma:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \tag{2}$$

unde $\mathbf{K}$ este matricea de reacţie de la stare, cu dimensiunea $m \times n$. Implementarea unui regulator LQR într-un sistem cu reacţie de la stare este prezentată în Figura 1.

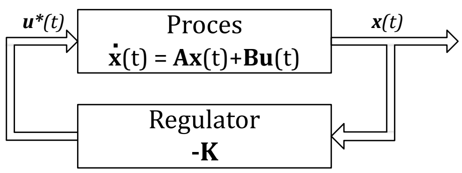

Figura 1: Schema bloc a sistemului de stabilizare

Sistemul închis va fi reprezentat de:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) \tag{3}$$

LQR este o lege de control care determină stările să tindă către 0, influenţând totodată şi energia consumată cu semnalele de comandă.

3 LQR pentru probleme de urmărire

În unele cazuri este de interes ca ieşirea sistemului să urmărească un semnal de referinţă $r(t)$, astfel încât ieşirea $y(t) = r(t)$ când $t \to \infty$. Observaţi că reacţia din Figura 1 este de la stare, nu de la ieşire.

Se consideră sistemul descris de ecuaţiile de stare:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \tag{4}$$

unde numărul de stări este n, numărul de intrări este m, iar numărul de ieşiri este p. Ca urmare, dimensiunile matricilor sunt: $\mathbf{A}_{n\times n}$, $\mathbf{B}_{n\times m}$, $\mathbf{C}_{n\times p}$.

3.1 Metoda 1. Precompensare

Spre deosebire de alte metode de proiectare a regulatoarelor, sistemele de control cu reacţie de la stare nu compară ieşirea cu referinţa, ci compară vectorul de stare înmulţit cu matricea de reacţie **K** cu referinţa. Este de aşteptat ca ieşirea să nu fie egală cu referinţa. În acest caz , referinţa se poate scala astfel încât ieşirea să fie egală cu referinţa în regim staţionar (Figura 2).

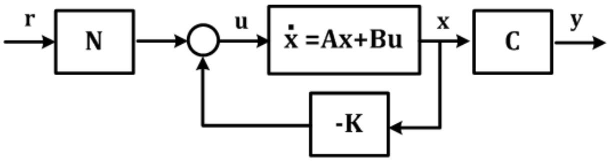

Figura 2: Schema bloc a sistemului de urmărire cu precompensare

Un mod simplu de a implementa un regulator care să urmărească o referinţă este modificarea legii de comandă (2) în:

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{N}\mathbf{r}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \tag{5}$$

În acest caz sistemul închis va fi descris de:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{BNr}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{Cx}(t) \end{cases} \tag{6}$$

Semnalul de referinţă a fost multiplicat cu o matrice constantă **N** care va fi calculată astfel încât pentru o referinţă treaptă $r(t) = \mathbf{R}$, valoarea ieşirii în regim staţionar să fie **R**.

Pentru o intrare de referinţă constantă, regimul staţionar corespunde unei condiţii de echilibru a sistemului închis pentru starea de echilibru notată $\mathbf{x}_{ss}$. Astfel, ecuaţia de stare devine:

$$\dot{\mathbf{x}}_{ss} = 0 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{BNR}$$

Valoarea ieşirii în regim staţionar va fi:

$$\mathbf{y}_{ss} = \mathbf{Cx}_{ss} = -\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-\mathbf{1}}\mathbf{BNR} = \mathbf{R} \tag{7}$$

iar matricea **N** rezultă:

$$\mathbf{N} = -(\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-\mathbf{1}}\mathbf{B})^{-1} = -(\mathbf{CA}_{\mathbf{cl}}^{-\mathbf{1}}\mathbf{B})^{-1} \tag{8}$$

unde $\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$.

Observaţii:

- dacă numărul de ieşiri p este egal cu numărul de intrări m, matricea $\mathbf{CA}_{\mathbf{cl}}^{-\mathbf{1}}\mathbf{B}$ este pătrată, altfel dimensiunea va fi $p \times m$ şi nu poate fi inversată.
- dacă numărul de ieşiri este mai mare decât numărul de intrări, $p > m$, vor exista soluţii pentru relaţia (8) doar în unele cazuri particulare. Nu sunt destule grade de libertate pentru ca variabila de comandă să determine sistemul să urmărească orice referinţă.
- dacă numărul de ieşiri este mai mic decât numărul de intrări $p < m$, vor exista mai multe soluţii pentru relaţia (7). Se poate alege una dintre ele sau se pot introduce ieşiri suplimentare astfel încât $p = m$.

3.2 Metoda 2. LQR pentru procese care au integrator

Metoda va fi descrisă pentru cazul în care intrarea în proces (semnalul $u(t)$) şi ieşirea $y(t)$ sunt scalare. Ca exemplu, ieşirea se consideră egală cu una din variabilele de stare $y(t) = x_1(t)$. în Figura 3 se prezintă schema bloc a sistemului de urmărire unde r este o referinţă treaptă.

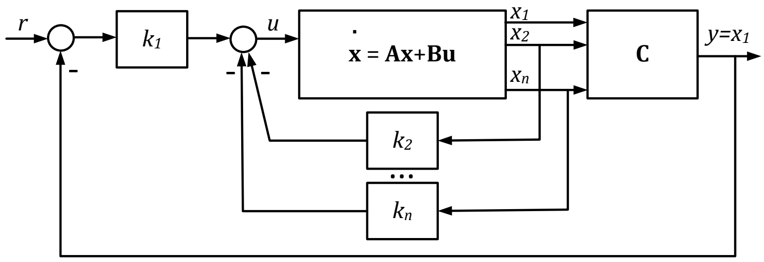

Figura 3: Schema bloc a sistemului de urmărire pentru procese cu integrator

Pentru acest caz, legea de control este dată de:

$$u^*(t) = -k_1(x_1(t) - r) - k_2x_2(t) - \cdots - k_nx_n(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + k_1 r \tag{9}$$

unde $\mathbf{K} = [k_1\ k_2\ \cdots\ k_n]$.

Sistemul închis este descris de:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}k_1 r \tag{10}$$

În regim staţionar (variabilele notate cu indicele ss) avem:

$$\dot{\mathbf{x}}_{ss} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{B}k_1 r \tag{11}$$

Prin scăderea ecuaţiilor (10) şi (11) obţinem:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{ss} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{ss})$$

Dacă se notează eroarea ca $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{ss}$, atunci dinamica erorii este:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{e}(t)$$

Ca urmare, problema este transformată în proiectarea unui regulator $\mathbf{K}$ care să aducă eroarea la zero din orice condiţii iniţiale. Metoda este aceeaşi cu cea prezentată iniţial pentru sisteme de stabilizare cu reacţie de la stare şi referinţă 0 (în secţiunea 2), dar schema bloc de implementare este cea prezentată în Figura 3.

3.3 LQR-servo. Adăugarea efectului integrator

Vom proiecta o lege de control LQR astfel încât ieşirea sistemului să urmărească un semnal de referinţă $\mathbf{r}(t)$.

Ecuaţiile de stare sunt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) && (12)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) && (13) \end{aligned}$$

O abordare diferită pentru ca eroarea staţionară să fie zero în regim staţionare este denumită LQR-servo. Se vor introduce un set de stări noi, $\mathbf{z}(t)$ pentru ca sistemul să integreze eroarea de urmărire:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \tag{14}$$

Dinamica extinsă este dată de:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \textbf{-C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\mathrm{t}) \\ \mathbf{z}(\mathrm{t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r} \tag{15}$$

şi noile variabile de stare se notează $\overline{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{x}(t)\ \ \mathbf{z}(t)]^T$. În regim staţionar, $\dot{\mathbf{z}} = 0$, sau $\mathbf{r} = \mathbf{y}$ sau $\mathbf{r} = \mathbf{C}\mathbf{x}$.

Comanda optimă calculată pentru minimizarea funcţiei de performanţă:

$$J = \int_0^{\infty} \left[\overline{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}_x \overline{\mathbf{x}} + \mathbf{u}^\mathbf{T} \mathbf{R}_\mathbf{u} \mathbf{u}\right] dt \tag{16}$$

este o lege de comandă după stare dată de:

$$\mathbf{u}(t) = -\left[\mathbf{K}_x \;\; \mathbf{K}_z\right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\mathrm{t}) \\ \mathbf{z}(\mathrm{t}) \end{bmatrix} \tag{17}$$

şi calculată prin procedura LQR pentru un sistem cu matricile:

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{-C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Perechea $(\mathbf{A}_e, \mathbf{B}_e)$ trebuie să fie controlabilă.

După ce se calculează matricile $\mathbf{K_x}$ şi $\mathbf{K_z}$, implementarea legii de control se face conform schemei bloc din Figura 4.

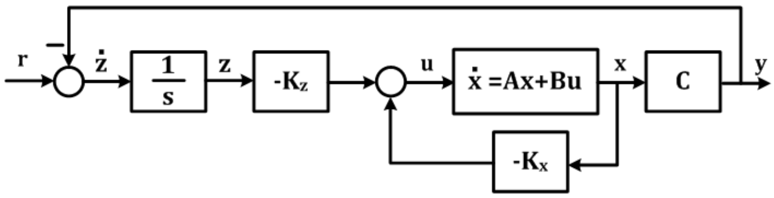

Figura 4: Schema bloc de implementare LQR servo

4 Studiu de caz

(problemă adaptată din http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=AircraftPitch&section=SystemModeling)

Ecuaţiile care descriu mişcarea unui avion sunt un set complicat de ecuaţii diferenţiale neliniare, cuplate. Totuşi, cu unele presupuneri simplificatoare, acestea pot fi decuplate şi liniarizate. Principalele forţe care acţionează asupra avionului şi coordonatele sunt prezentate în Figura 5. În acest studiu de caz se propune controlul unghiului θ (pitch) al avionului.

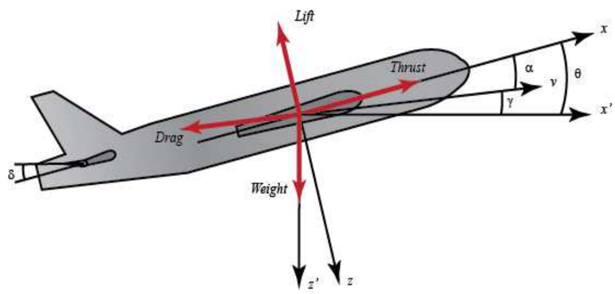

Figura 5: Avion

Modelul continuu liniarizat al procesului este:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{q}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.313 & 56.7 & 0 \\ -0.0139 & -0.426 & 0 \\ 0 & 56.7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ q(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.232 \\ 0.0203 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t)$$

unde intrarea este unghiul $\delta(t)$.

Se va implementa un regulator LQR care să determine sistemul să urmărească traiectoria de referinţă prezentată în Figura 6, din condiţii iniţiale nule, în variantele prezentate mai sus. Se doreşte ca eroarea staţionară să fie zero, iar răspunsul să fie rapid şi cu suprareglaj minim.

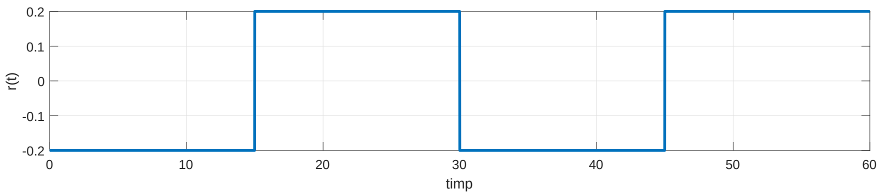

Figura 6: Referinţa

4.1 Etape de rezolvare şi analiză

1. Alegeţi matricile **Q** şi **R** de dimensiuni corespunzătoare, calculaţi matricea **K**, calculaţi N din relaţia (8) şi implementaţi sistemul de urmărire cu precompensare din Figura 2. Afişaţi pe acelaşi grafic referinţa şi ieşirea sistemului. Observaţi şi analizaţi rezultatele. Modificaţi matricile **Q** şi **R** şi încercaţi să obţineţi un răspuns mai bun.
2. Implementaţi sistemul de urmărire din Figura 3. Afişaţi pe acelaşi grafic referinţa şi ieşirea sistemului. Observaţi şi analizaţi rezultatele.
3. Implementaţi sistemul de urmărire din Figura 4:
   (a) Calculaţi matricile sistemului extins $\mathbf{A}_e$, $\mathbf{B}_e$ conform relaţiei (18). Ultima 'coloană' din matricea $\mathbf{A}_e$ şi ultima 'linie' din $\mathbf{B}_e$ vor fi constituite din matrici de zerouri de dimensiuni corespunzătoare. Verificaţi controlabilitatea sistemului extins.
   (b) Alegeţi matricile $\mathbf{Q}_x$ şi $\mathbf{R}_u$ de dimensiuni corespunzătoare.
   (c) Calculaţi matricea $[\mathbf{K}_x \ \ \mathbf{K}_z]$ cu funcţia Matlab *lqr*, apoi separaţi-o în $\mathbf{K}_x$ şi $\mathbf{K}_z$.
   (d) Implementaţi sistemul de urmărire din Figura 4.
   (e) Afişaţi pe acelaşi grafic referinţa şi ieşirea sistemului. Observaţi rezultatele.
4. Comparaţi rezultatele obţinute cu metodele de mai sus, comparaţi şi comentaţi rezultatele.

5 LQR cu estimarea stării

5.1 Estimatorul de stare

În proiectarea LQR prezentată până acum se presupune că toate stările sunt disponibile pentru reacţie la orice moment de timp. Aceasta înseamnă că stările pot fi măsurate cu unul sau mai mulţi senzori. Există totuşi situaţii în care nu toate stările pot fi măsurate sau se doreşte implementarea sistemului cu un număr minim de senzori.

Dacă pentru un set de semnale de ieşire sistemul este complet observabil este posibil ca stările să fie estimate din măsurătorile disponibile ale ieşirii şi din intrări. În continuare se va prezenta estimarea tuturor stărilor adică proiectarea unui observator de stare care va reconstitui toate stările.

Se consideră sistemul liniar:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \tag{19}$$

Dacă starea estimată se notează $\hat{\mathbf{x}}(t)$ şi ieşirea estimată este $\hat{y}(t)$, un estimator complet al sistemului (19) este dat de:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}\left(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)\right) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \tag{20}$$

Termenul care implică matricea **L** - *matricea estimatorului* - este introdus pentru a corecta starea estimată $\hat{\mathbf{x}}(t)$ astfel încât aceasta să tindă spre starea reală $\mathbf{x}(t)$ când $t \to \infty$. Cu alte cuvinte, eroarea de estimare dată de:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \tag{21}$$

trebuie să tindă la 0 când $t \to \infty$.

Un rezultat important al teoriei sistemelor este că dacă sistemul este complet observabil, matricea **L** poate fi întotdeauna determinată astfel încât să facă eroarea de estimare asimptotic stabilă (Dorf and Bishop, 2011).

Schema bloc a estimatorului de stare este prezentată în Figura 7.

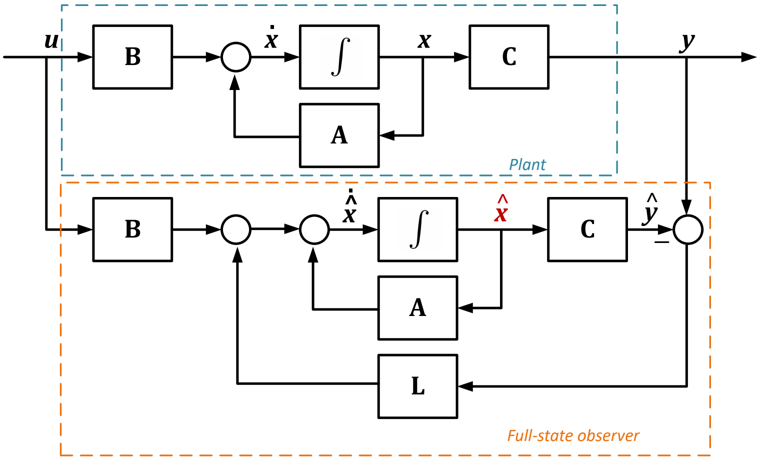

Figura 7: System and full-state observer, (Ogata, 2002)

Calculând derivata erorii de estimare (21) şi utilizând relaţiile (19) şi (20), obţinem:

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{L}\left(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}\right) = \mathbf{A}\left(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\right) - \mathbf{L}\mathbf{C}\left(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\right)$$

sau, dinamica erorii este descrisă de:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t) \tag{22}$$

Analizând ecuaţia diferenţială (22), se observă că eroarea $\mathbf{e}(t) \to 0$ când $t \to \infty$, pentru orice condiţii iniţiale $\mathbf{e}(t_0)$ dacă toate valorile proprii ale matricii sistemului $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ sunt localizate în semiplanul stâng al planului complex, sau sistemul (22) este asimptotic stabil.

Matricea $\mathbf{L}$ poate fi calculată de exemplu, prin alocarea polilor. Polii doriţi ai estimatorului se aleg $\begin{bmatrix} ep_1 & ep_2 & \cdots & ep_n \end{bmatrix}$ egali cu valorile proprii ale matricii sistemului care descrie dinamica erorii şi rezolvând:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})) = (\lambda_1 - ep_1)(\lambda_2 - ep_2)\cdots(\lambda_n - ep_n)$$

Viteza cu care descreşte eroarea de estimare este desigur determinată de polii estimatorului $(ep_1, ..., ep_n)$. De aceea, aceştia trebuie plasaţi în semiplanul stâng şi în general, trebuie să fie mai 'rapizi' decât polii sistemului. Deşi există diferite abordări pentru alocarea polilor estimatorului, o indicaţie ar putea fi: polii estimatorului se aleg aproximativ de 5 ori mai mici (sunt negativi) decât polii dominanţi ai sistemului.

Datorită pincipiului separării, estimatorul de stare şi regulatorul după stare se pot proiecta separat (vezi notele de curs).

Observaţi similaritatea între relaţia (22) care descrie dinamica erorii de estimare şi ecuaţia de stare a sistemului închis (3) pentru problema de stabilizare din secţiunea 2.

Datorită dualităţii controlabilitate/observabilitate (vezi notele de curs) matricea $\mathbf{L}^T$ poate fi obţinută prin alocarea polilor printr-o procedură similară cu o problemă de stabilizare pentru un sistem închis cu matricea sistemului $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ şi înlocuirile: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}^T$, $\mathbf{B} \to \mathbf{C}^T$ and $\mathbf{K} \to \mathbf{L}^T$.

5.2 Implementarea estimatorului de stare

Schema bloc a unui sistem de stabilizare cu estimarea stării este prezentat în Figura 8, (Ogata, 2002). Observaţi că legea de control $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$ utilizează starea estimată pentru reacţie şi nu starea reală a procesului. Modelul în spaţiul stărilor pentru întregul sistem de control se obţine după cum urmează. Ecuaţiile de stare ale procesului şi estimatorului sunt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{LC}\left(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\right) \end{aligned}$$

şi dacă se include legea de control $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$, acestea devin:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{BK}\hat{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{BK}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{LC}\left(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\right) = \mathbf{LC}\mathbf{x}(t) + (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) \end{aligned}$$

Ecuaţiile de ieşire pentru proces şi estimator sunt:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{aligned}$$

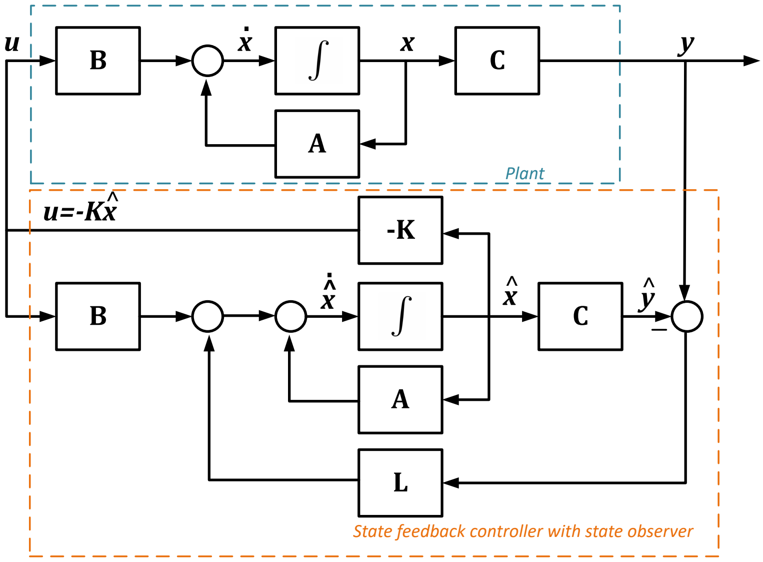

Figura 8: Sistem de stabilizare cu estimarea stării

Ecuaţiile de stare şi ieşire se pot scrie în forma matricială:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{LC} & \mathbf{A}-\mathbf{BK}-\mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \tag{24}$$

5.3 Studiu de caz

Pentru sistemul descris în secţiunea 4 se propune implementarea unui sistem de stabilizare cu estimarea stării. Ieşirea sistemului este a treia variabilă de stare. Sistemul are condiţii iniţiale ne-nule şi trebuie adus la echilibru (stările să ajungă la 0 în regim staţionar).

- Definiţi sistemul în buclă deschisă cu matricile: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ şi $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.
- Calculaţi matricile de controlabilitate şi observabilitate şi verificaţi că sistemul este controlabil şi observabil.
- Proiectaţi matricea de reacţie de la stare $\mathbf{K}$. Pentru metoda de proiectare LQR, alegeţi matricile $\mathbf{Q}$ şi $\mathbf{R}$ şi calculaţi $\mathbf{K}$, de exmplu cu funcţia Matlab *lqr*.
- Alegeţi polii estimatorului ep_i, $i = \overline{1,n}$. Este important ca estimatorul să nu facă sistemul închis mai lent. Polii estimatorului trebuie să fie mai 'rapizi' decât polii sistemului închis. Alegeţi de exemplu polii estimatorului aproximativ de 5 - 10 ori mai mici (reali negativi) decât polii sistemului închis. Dacă matricea $\mathbf{K}$ este calculată, polii sistemului închis sunt valorile proprii ale $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$.
- Calculaţi matricea $\mathbf{L}$ a estimatorului prin alocarea polilor. Aceasta se poate determina similar cu calculul unei matrici de reacţie după stare pentru un sistem cu matricile ($\mathbf{A}^T$, $\mathbf{C}^T$).

  De exemplu în Matlab se poate scrie: L = place(A', C', [ep1 ep2...])'. *Observaţi că rezultatul funcţiei* place *trebuie transpus.*
- Condiţiile iniţiale. În general, dacă stările nu pot fi măsurate, condiţiile iniţiale pentru stări nu sunt cunoscute. Dacă nici o altă informaţie nu este disponibilă, valorile iniţiale pentru stările estimate se pot alege zero $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$. Condiţiile iniţiale pentru stările reale ale procesului nu sunt în general egale cu $\hat{\mathbf{x}}_0$. Estimatorul trebuie să fie capabil să aducă stările estimate să tindă spre sările procesului când timpul creşte spre infinit, înpecând din orice condiţii iniţiale.
- Implementaţi sistemul cu reacţie după stare şi estimator după schema bloc din Figura 8, în simulink. Ca alternativă, pentru a simula sistemul cu estimator puteţi utiliza modelul în spaţiul stărilor pentru sistemul închis (23), (24) şi condiţiile iniţiale $\mathbf{x}_0$, $\hat{\mathbf{x}}_0$.
- Comparaţi evoluţia stărilor şi comenzii pentru sistemul cu estimator şi pentru un sistem de stabilizare fără estimator.

Bibliografie

Dorf, R. C. and Bishop, R. H. (2011). *Modern Control Systems.* Prentice Hall, 12th edition.

Ogata, K. (2002). *Modern Control Engineering.* Pearson Education International, 4th edition.