Regulatorul liniar pătratic (LQR)

Problema de control optimal pentru sisteme continue

Pentru un sistem continuu cu *n* variabile de stare şi *m* variabile de intrare, descris de:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}), \qquad (1)$$

cu condiţiile iniţiale $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$, se cere să se calculeze vectorul de comenzi optime $\mathbf{u}^*(t)$, care minimizează funcţia de performanţă:

$$J = \boldsymbol{x}(t_f)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(t_f) + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{tf}}(\boldsymbol{x}(t)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}(t)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t))dt \qquad (2)$$

unde **S** şi **Q** – sunt matrici simetrice pozitiv semidefinite cu dimensiunea *n x n*, iar **R** este o matrice simetrică pozitiv definită cu dimensiunea *m x m*.

Regulatorul LQR pentru sisteme continue

Comanda optimă rezultă de forma:

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}(t), \qquad (3)$$

sau

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t), \qquad (4)$$

unde ***K*** este matricea de reacţie de la stare, de dimensiune *m x n*.

Implementarea unui regulator LQR, într-un sistem cu reacţie de la stare este prezentată în Figura 1.

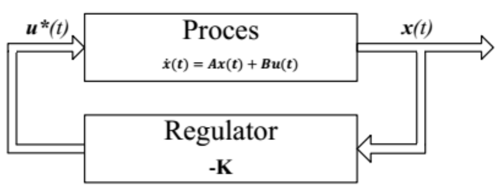

FIGURA 1. SCHEMA BLOC A SISTEMULUI CU REACŢIE DE LA STARE

Sistemul închis va fi reprezentat de ecuaţia de stare:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),$$

Exemplu: Pentru un sistem cu o singură variabilă de comandă (*m=1*), referinţă 0 şi condiţii iniţiale nenule, schema bloc de stabilizare a sistemului este prezentată în Figura 2. Dacă sistemul are *n* variabile de stare, $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t) \ldots x_n(t)]^T$, matricea de reacţie de la stare ***K*** va avea dimensiunea *1xn*, şi variabila u*(t) va avea expresia:

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) = -k_1\, x_1(t) - k_2\, x_2(t) - \ldots -k_n\, x_n(t)$$

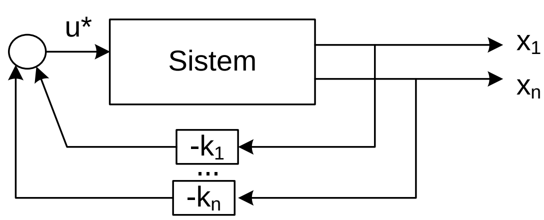

FIGURA 2 SCHEMA BLOC A SISTEMULUI ÎNCHIS

Problema de control optimal pentru sisteme discrete

Pentru un sistem liniar discret cu *n* variabile de stare şi *m* variabile de comandă, descris de:

$$\boldsymbol{x_{k+1}} = \boldsymbol{A x_k} + \boldsymbol{B u_k}, \tag{5}$$

cu $k = 1, \dots N-1$, şi condiţiile iniţiale $\boldsymbol{x_0}$, se cere să se calculeze secvenţa de comenzi optime: $\mathbf{u}_0^*$, $\mathbf{u}_2^*$,..., $\mathbf{u}_{N-1}^*$, care minimizează funcţia de performanţă:

$$J = \boldsymbol{x}_N^T \boldsymbol{H}_N \boldsymbol{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{x}_k^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{u}_k \tag{6}$$

unde:

$\boldsymbol{H_N}$ şi $\boldsymbol{Q}$ – sunt matrici simetrice pozitiv semidefinite cu dimensiunea *n x n*,

$\boldsymbol{R}$ - este o matrice simetrică pozitiv definită cu dimensiunea *m x m*.

Regulatorul LQR pentru sisteme discrete

Comanda optimă rezultă de forma:

$$\boldsymbol{u}^*_k = -\boldsymbol{K}_k \boldsymbol{x}_k, \tag{7}$$

sau

$$\boldsymbol{u}^*_k = -\boldsymbol{K} \boldsymbol{x}_k, \tag{8}$$

unde $\boldsymbol{K}$ este matricea de reacţie de la stare.

Schema bloc generală este prezentată în Figura 3.

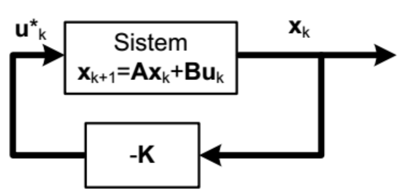

FIGURA 3. SCHEMA BLOC DE STABILIZARE A SISTEMULUI

Schema bloc de stabilizare a sistemului, cu referinţă 0, condiţii iniţiale nenule şi o singură variabilă de comandă este prezentată în Figura 4.

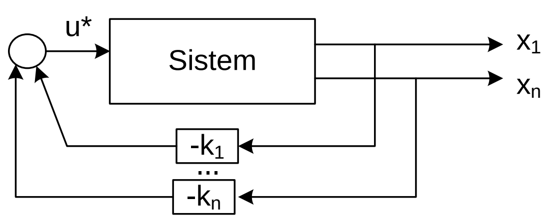

FIGURA 4. SCHEMA BLOC A SISTEMULUI ÎNCHIS (CU REFERINŢĂ 0 ŞI CONDIŢII INIŢIALE)

Studiu de caz

(problemă adaptată din http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=AircraftPitch&section=SystemModeling)

Ecuaţiile care descriu mişcarea unui avion sunt un set complicat de ecuaţii diferenţiale neliniare, cuplate. Totuşi, cu unele presupuneri simplificatoare, acestea pot fi decuplate şi liniarizate. Principalele forţe care acţionează asupra avionului şi coordonatele sunt prezentate în Figura 5. În acest studiu de caz se propune controlul unghiului θ (pitch) al avionului.

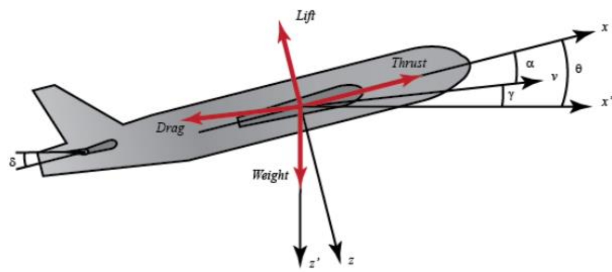

FIGURA 5. AVION

Modelul continuu liniarizat al procesului este:

$$\begin{bmatrix}\dot{\alpha}(t)\\ \dot{q}(t)\\ \dot{\theta}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.313 & 56.7 & 0\\ -0.0139 & -0.426 & 0\\ 0 & 56.7 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha(t)\\ q(t)\\ \theta(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.232\\ 0.0203\\ 0\end{bmatrix}\delta(t)$$

unde variabilele de stare au semnificaţia din Figura 5, iar intrarea este unghiul δ*(t)*.

P1. Se va implementa un regulator cu reacţie de la stare, LQR, care să aducă unghiul θ la valoarea 0, din condiţii iniţiale nenule.

sau

P2. Pentru sistemul discretizat, se va implementa un regulator cu reacţie de la stare LQR discret care să aducă unghiul θ la valoarea 0, din condiţii iniţiale nenule.

Etape de rezolvare şi analiză

1. ***LQR pentru sistemul continuu***
   1.1. Alegeţi un set de condiţii iniţiale pentru variabilele de stare, explicaţi semnificaţia lor fizică.
   1.2. Scrieţi o funcţie pătratică de performanţă care să fie minimizată astfel încât stările sistemului să ajungă în echilibru (toate variabilele de stare să fie zero în regim staţionar, sau referinţa = 0). Alegeţi un set de valori iniţiale pentru matricile ***Q*** şi **R**.
   1.3. Calculaţi matricea de reacţie de la stare ***K*** cu funcţia Matlab *lqr*.
   1.4. Simulaţi evoluţia sistemului cu reacţie de la stare din condiţiile iniţiale alese la punctul 1.1 şi cu regulatorul ***K*** calculat anterior, după schema bloc din Figura 1 sau Figura 2. Reprezentaţi grafic evoluţia stărilor şi a comenzii. Simularea poate fi realizată într-una din următoarele variante, sau altele, la alegere:
      1.4.1. Utilizaţi Simulink.
      1.4.2. Simulaţi sistemul închis într-un script Matlab. Integraţi ecuaţiile de stare pornind de la condiţiile iniţiale alese pentru sistemul închis.

1.4.3. Simulaţi răspunsul la condiţii iniţiale a sistemului închis utilizând funcţia Matlab *initial* pentru sistemul închis.

1.5. Variaţi pe rând elementele matricilor ***Q*** şi **R**, simulaţi sistemul în fiecare caz şi explicaţi care este influenţa lor asupra stărilor şi comenzii sistemului.

1.6. Calculaţi matricea de reacţie de la stare variabilă în timp, ***K(t)*** utilizând Algoritmul 2 din curs (pag. 15)

1.7. Reprezentaţi grafic elementele matricii de reacţie de la stare variabile ***K(t)*** calculate mai sus, în funcţie de timp şi arătaţi că acestea converg spre valorile calculate la punctul 1.3.

1.8. Pentru un set de valori ale matricilor ***Q*** şi **R** alese, simulaţi evoluţia stării şi comenzii pentru sistemul închis cu matricea regulator variabilă în timp ***K(t)***. Comparaţi rezultatele cu cele obţinute cu matricea ***K*** calculată cu funcţia Matlab *lqr* la punctul 1.4.

2. *LQR pentru sistemul discret*

2.1. Determinaţi un model discretizat al sistemului, păstrând semnificaţia variabilelor de stare.

2.2. Alegeţi un set de condiţii iniţiale pentru variabilele de stare şi explicaţi semnificaţia lor fizică.

2.3. Scrieţi o funcţie pătratică de performanţă care să fie minimizată astfel încât stările sistemului să ajungă în echilibru. Alegeţi un set de valori pentru matricile $\boldsymbol{H_N}$, ***Q*** şi **R**.

2.4. Calculaţi matricea de reacţie de la stare ***K*** cu funcţia Matlab *dlqr* .

2.5. Simulaţi evoluţia sistemului cu reacţie de la stare (Figura 3 sau Figura 4) din condiţiile iniţiale alese şi cu regulatorul ***K*** calculat anterior. Reprezentaţi grafic evoluţia stărilor şi a comenzii. Simularea poate fi realizată într-una din următoarele variante:

2.5.1. Utilizaţi Simulink.

2.5.2. Simulaţi sistemul închis într-un script Matlab. Calculaţi iterativ valorile stărilor pornind de la condiţiile iniţiale alese, valorile următoare fiind date de ecuaţiile de stare ale sistemului închis.

2.5.3. Simulaţi răspunsul la condiţii iniţiale a sistemului închis utilizând funcţia Matlab *dinitial* pentru sistemul închis.

2.6. Calculaţi matricea de reacţie de la stare variabilă în timp, $\boldsymbol{K_k}$ utilizând Algoritmul 1 din curs (pagina 9).

2.7. Reprezentaţi grafic elementele matricii de reacţie de la stare variabile $\boldsymbol{K_k}$ calculate mai sus, în funcţie de timp şi arătaţi că acestea converg spre valorile calculate la punctul 2.4.

2.8. Pentru un set de valori ale matricilor ***Q*** şi **R** alese, simulaţi evoluţia stării şi comenzii pentru sistemul închis cu matricea regulator variabilă în timp $\boldsymbol{K_k}$. Comparaţi rezultatele cu cele obţinute cu matricea ***K*** calculată cu funcţia Matlab *dlqr*.