Aplicaţii ale calculului variaţional. Ecuaţia Hamilton-Jacobi-Bellman

1 Problema de control optimal

Pentru un sistem descris în spaţiul stărilor de:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \text{cu condiţiile inin\c{t}iale } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

şi $t_0 \leq t \leq t_f$, se cere să se determine comanda optimală $\mathbf{u}^*(t)$ pentru care sistemul să urmeze o traiectorie optimală $\mathbf{x}^*(t)$ care să minimizeze funcţia de cost

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt \tag{2}$$

$\mathbf{x}(t)$ este vectorul de stare, de dimensiune $n \times 1$, iar $\mathbf{u}(t)$ este vectorul intrărilor (comenzilor), de dimensiune $m \times 1$.

2 Condiţiile necesare pentru control optimal

Hamiltonianul se defineşte ca:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = g + \lambda^T \mathbf{f}$$

unde $\lambda(t)$ este un vector de n funcţii de timp, necunoscute, numite *co-stări*.

Indiferent dacă vectorul de intrări $\mathbf{u}(t)$ este sau nu supus unor restricţii, Lev Pontryagin a arătat că $\mathbf{u}(t)$ trebuie să minimizeze Hamiltonianul.

Următoarele condiţii necesare pentru control optimal pot fi utilizate pentru determinarea soluţiilor candidate ale problemei:

1. Se scrie Hamiltonianul:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = g + \lambda^T \mathbf{f}$$

şi apoi se scriu condiţiile necesare:

2. Hamiltonianul trebuie minimizat în raport cu $\mathbf{u}(t)$. Dacă vectorul de intrări nu este restricţionat şi Hamiltonianul este derivabil de 2 ori în raport cu u, atunci prima derivată în raport cu $\mathbf{u}$ este zero:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = 0 \tag{3}$$

şi a doua derivată trebuie să fie pozitivă. Dacă există restricţii asupra vectorului $\mathbf{u}$, atunci minimul Hamiltonianului se determină din analiza problemei.

3. Vectorul de co-stări este dat de:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) \tag{4}$$

4. Ecuaţia de stare este:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \tag{5}$$

Ecuaţiile (4) şi (5) formează un set de $2n$ ecuaţii diferenţiale cu $2n$ variabile ($\mathbf{x}(t)_{n\times 1}$ şi $\lambda(t)_{n\times 1}$). O soluţie unică necesită un set de $2n$ condiţii pe frontieră. Acestea se determină conform următoarelor cazuri:

Cazul I. Dacă timpul final t_f este cunoscut şi starea finală $\mathbf{x}(t_f)$ este cunoscută.

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \tag{6}$$

sunt n relaţii care, împreună cu condiţiile iniţiale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ asigură soluţia unică a sistemului de ecuaţii diferenţiale (4) şi (5).

Cazul II. Dacă timpul final t_f este cunoscut, dar starea finală $\mathbf{x}(t_f)$ este necunoscută. Un set de n condiţii finale pentru $\lambda(t)$ se pot determina din:

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_f), t_f) \tag{7}$$

Cazul III. Dacă timpul final t_f este necunoscut, dar starea finală $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ este cunoscută. Atunci:

$$H(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \lambda(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \tag{8}$$

Cazul IV. Dacă timpul final t_f este necunoscut şi starea finală este necunoscută. Atunci condiţiile pe frontieră se determină din:

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_f), t_f) \tag{9}$$

$$H(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \lambda(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \tag{10}$$

3 Rezolvarea problemelor utilizând condiţiile necesare pentru optimalitate

Dacă stările şi comenzile nu sunt supuse restricţiilor, starea finală nu este precizată şi timpul final este precizat, atunci se urmează paşii:

1. Se scrie hamiltonianul:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

2. Se calculează $\mathbf{u}^*$ care minimizează hamiltonianul:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} > 0$$

În general, $\mathbf{u}^*$ rezultă ca funcţie de $\mathbf{x}(t)$, $\lambda(t)$ şi t:

$$\mathbf{u}^*(t) = U(\mathbf{x}(t), \lambda(t), t) \tag{11}$$

3. Se determină ecuaţiile diferenţiale pentru variabilele auxiliare, co-stările $\lambda(t)$:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \tag{12}$$

4. Se determină condiţiile finale pentru λ:

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_f)) \tag{13}$$

5. Se înlocuieşte $\mathbf{u}^*(t)$ determinat în (11) în sistemul de ecuaţii de stare:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{U}(\mathbf{x}, \lambda, t), t) \tag{14}$$

6. Se integrează sistemul de ecuaţii diferenţiale pentru λ (12) şi sistemul de ecuaţii de stare (14), cu condiţiile iniţiale pentru stări $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ şi condiţiile finale (13) calculate pentru co-stări.

7. Se înlocuiesc expresiile rezultate la pasul anterior în $\mathbf{u}^*(t) = U(\mathbf{x}(t), \lambda(t), t)$ şi se determină comanda optimală.

4 Ecuaţia Hamilton-Jacobi-Bellman

Pentru problema definită în secţiunea 1, ecuaţia Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) se obţine după cum urmează.

Se notează Hamiltonianul H:

$$H = g(x, u, t) + \frac{\partial J^*(x,t)}{\partial x} f(x, u, t) \tag{15}$$

Ecuaţia HJB este:

$$0 = \frac{\partial J^*(x,t)}{\partial t} + \min_u H \tag{16}$$

cu condiţia pe frontieră:

$$J^*(x(t_f), t_f) = h(x(t_f), t_f) \tag{17}$$

4.1 Rezolvarea unei probleme de control optimal utilizand ecuatia HJB

1. Se calculează expresia hamiltonianului.

2. Se determină $u^*(t)$ care minimizează hamiltonianul

3. Substituind $u^*(t)$ în H se determină $H^* = \min_u H$

4. Se scrie ecuaţia HJB:

$$H^* + \frac{\partial J^*(x,t)}{\partial t} = 0$$

5. Se scrie condiţia finală: $J^*(x(t_f), t_f) = h(x(t_f), t_f)$

6. Se estimează forma lui $J^*(x,t)$, se calculează $J_x^* = \frac{\partial J^*(x,t)}{\partial x}$ şi $J_t^* = \frac{\partial J^*(x,t)}{\partial t}$ şi se înlocuiesc în ecuaţia HJB. Estimarea formei lui $J^*(x,t)$ are ca scop transformarea ecuaţiei cu derivate parţiale într-o ecuaţie diferenţială ordinară. Pentru funcţii de cost pătratice, se poate folosi de obicei forma: $J^*(x(t),t) = p(t)x^2(t)$
7. Se rezolvă ecuaţia diferenţială ordinară obţinută la pasul anterior
8. Se calculează forma finală a lui $u^*(t)$ ca funcţie de timp şi / sau stări
9. Se integrează ecuaţia de stare şi se determină traiectoria de stare optimă $x^*(t)$.

5 Exerciţii

Rezolvaţi următoarele probleme utilizând:

- Condiţiile necesare pentru control optimal şi calcul analitic.
- Funcţia Matlab *dsolve* pentru integrarea ecuaţiilor diferenţiale (este necesar *Symbolic Math Toolbox*).

P1. Pentru sistemul dinamic descris de ecuaţia de stare:

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad x(0) = 1, \quad t \in [0,\ 5]$$

se cere să se determine comanda optimală $u^*(t)$ care minimizează funcţia de cost:

$$J = \int_0^5 \left(u^2(t) + x^2(t)\right) dt$$

Reprezentaţi grafic $u^*(t)$ şi traiectoria de stare optimă $x^*(t)$. Rezolvaţi problema folosind:

- ecuaţia Hamilton-Jacobi-Bellman
- principiul minimului

şi comparaţi rezultatele.

P2. Se consideră sistemul mecanic din Figura 1, unde m este masa maşinii, $u(t)$ este o forţă externă (semnalul de intrare), $v(t)$ este viteza maşinii (semnalul de ieşire) şi b este coeficientul de frecare cu suprafaţa orizontală.

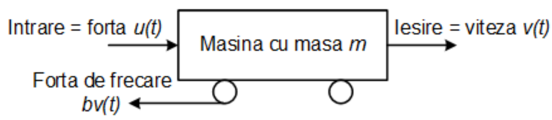

Figura 1: Sistem mecanic

Dacă $v(t)$ este viteza maşinii, prima sa derivată $dy(t)/dt$ este acceleraţia. Din echilibrul forţelor pe orizontală rezultă următoarea ecuaţia diferenţială:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = u(t) - bv(t)$$

Dacă se alege variabila de stare egală cu ieşirea sau viteza maşinii $x(t) = v(t)$, $b = 2$ şi $m = 1$, ecuaţia de stare a acestui sistem se scrie:

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t)$$

În momentul iniţial se poate considera viteza maşinii egală cu 0:

$$x(0) = 0$$

Problema este determinarea unei comenzi optime $u^*(t)$ care să determine sistemul să urmărească un semnal $\cos t$, într-un interval de timp $t \in [0, 20]$, cu consum minim de energie de comandă.

Funcţia de cost care trebuie minimizată va fi:

$$J = \int_0^{20} \left(a_1 \cdot u^2(t) + a_2 \cdot (x(t) - \cos t)^2 \right) dt$$

unde a şi b sunt ponderile asociate termenilor din funcţia de cost.

Rezolvaţi problema pentru diferite valori ale lui a şi b şi comparaţi rezultatele.

Reprezentaţi grafic $u^*(t)$. Reprezentaţi grafic traiectoria de stare optimă $x^*(t)$ pe acelaşi grafic cu semnalul de referinţă $\cos t$.

P3. Pentru sistemul dinamic descris de ecuaţiile de stare:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

cu condiţiile iniţiale $x_1(0) = x_2(0) = 0$, se cere să se determine comanda optimală $u^*(t)$ care minimizează funcţia de cost:

$$J = \frac{a}{2}(x_1(2) - 5)^2 + \frac{b}{2}(x_2(2) - 2)^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt$$

Rezolvaţi problema pentru diferite valori ale lui a şi b şi comparaţi rezultatele. Reprezentaţi grafic $u^*(t)$ şi traiectoriile de stare optime $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$.