

PENDUL INVERSAT ROTATIV

CEOCA OVIDIU

CUPRINS

Lista figurilor	1
1. Descrierea Sistemului	2
1.1. Modelul sistemului în spațiul stărilor	2
1.2. Semnificația fizică a variabilelor de stare	3
2. Analiza sistemului în buclă deschisă	5
3. LQR pentru probleme de stabilizare	7
4. LQR pentru probleme de urmărire	12
5. LQR cu estimarea stării	16

LISTA FIGURILOR

1 Sistemul fizic	3
2 Valoarea intrării este 1 și condițiile inițiale sunt diferite de 0	5
3 Valoarea intrării este 1 și condițiile inițiale sunt 0	6
4 Evoluția stărilor și comanda de la regulator pentru K fix	8
5 Evoluția stărilor și comanda de la regulator K fix cu $100 \cdot Q$ și $R = 1$	8
6 Evoluția stărilor și comanda de la regulator K fix cu $Q = eye(1)$ și $20 \cdot R$	9
7 Valorile matricii K variabile	9
8 Evoluția stărilor și comanda de la regulator K variabil	10
9 Comparatie dintre K variabil și K fix	11
10 Răspunsul sistemului și comanda de la regulator	12
11 Evoluția stărilor	13
12 Răspunsul sistemului și comanda de la regulator pentru $50 \cdot Q$	14
13 Evoluția stărilor pentru $50 \cdot Q$	14
14 Răspunsul sistemului pentru LQR cu integrator	15
15 Răspunsul sistemului cu estimator	16
16 Comparatie răspuns sistem cu estimator și simplu	17
17 Comparatie răspuns sistem cu estimator și simplu și comanda	18
18 Evoluția stărilor pentru sistemul cu estimator și fără estimator	18

1. DESCRIEREA SISTEMULUI

Sistemul prezentat este un ***Pendul Inversat Rotativ*** care este alcătuit din următoarele elemente:

- (1) Motor DC
- (2) Brațul pendulului
- (3) Pendulul
- (4) Bază solidă

Motorul este orientat cu axul în partea de sus. De acesta se prinde brațul pendulului formând un unghi de 90 de grade, iar de brațul pendulului se prinde pendulul.

Scopul proiectului este de a calcula mai multe regulatoare cu diferite metode pentru a stabili pendulul, orientat în sus.

1.1. Modelul sistemului în spațiul stărilor.

$$A = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad B = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} 0 \\ B_{21} \\ 0 \\ B_{41} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$(1.2)$$

$$d_1 = \frac{K_t}{R_m} \quad (1.3)$$

$$d_2 = \frac{K_t^2}{R_m} \quad (1.4)$$

$$\lambda = (J_1 + m \cdot L_1^2) \cdot (J_2 + m \cdot L_2^2) - (m \cdot L_1 \cdot L_2)^2 \quad (1.5)$$

$$A_{21} = m \cdot g \cdot L_2 \cdot (J_1 + m \cdot L_1^2) \quad (1.6)$$

$$A_{22} = -C_2 \cdot (J_1 + m \cdot L_1^2) \quad (1.7)$$

$$A_{23} = 0 \quad (1.8)$$

$$A_{24} = -(m \cdot L_1 \cdot L_2)(C_1 + d_2) \quad (1.9)$$

$$A_{41} = m^2 \cdot g \cdot L_1 \cdot L_2^2 \quad (1.10)$$

$$A_{42} = -C_2 \cdot (m \cdot L_1 \cdot L_2) \quad (1.11)$$

$$A_{43} = 0 \quad (1.12)$$

$$A_{44} = (J_2 + m \cdot L_2^2) \cdot (C_1 + d_2) \quad (1.13)$$

$$B_{21} = d_1 \cdot (m \cdot L_1 \cdot L_2) \quad (1.14)$$

$$B_{41} = d_1 \cdot (J_2 + m \cdot L_2^2) \quad (1.15)$$

Nr.	Simbol	Valoare	Unitate de măsură	Descriere parametru
1	m	0.027	kg	masa pendulului
2	L_1	0.205	m	Lungimea brațului
3	J_1	0.0019	$kg \cdot m^2$	Momentul de inerție al brațului
4	L_2	0.328	m	Lungimea pendulului
5	J_2	0.0046617	$kg \cdot m^2$	Momentul de inerție al pendulului
6	C_1	0.025		Coeficientul de frecare al brațului
7	C_2	0.0017		Coeficientul de frecare al pendulului
8	g	9.81	$\frac{m}{s^2}$	acelerația gravitațională
9	K_t	0.0531	NmA^{-1}	Torque constant DC motor
10	R_m	11.7356	Ω	Rezistența armăturii

1.2. **Semnificația fizică a variabilelor de stare.** În Figura 1 este reprezentat sistemul fizic. Sistemul este alcătuit dintr-un motor situat la bază ce controlează brațul din partea inferioară și un pendul ce trebuie stabilizat.

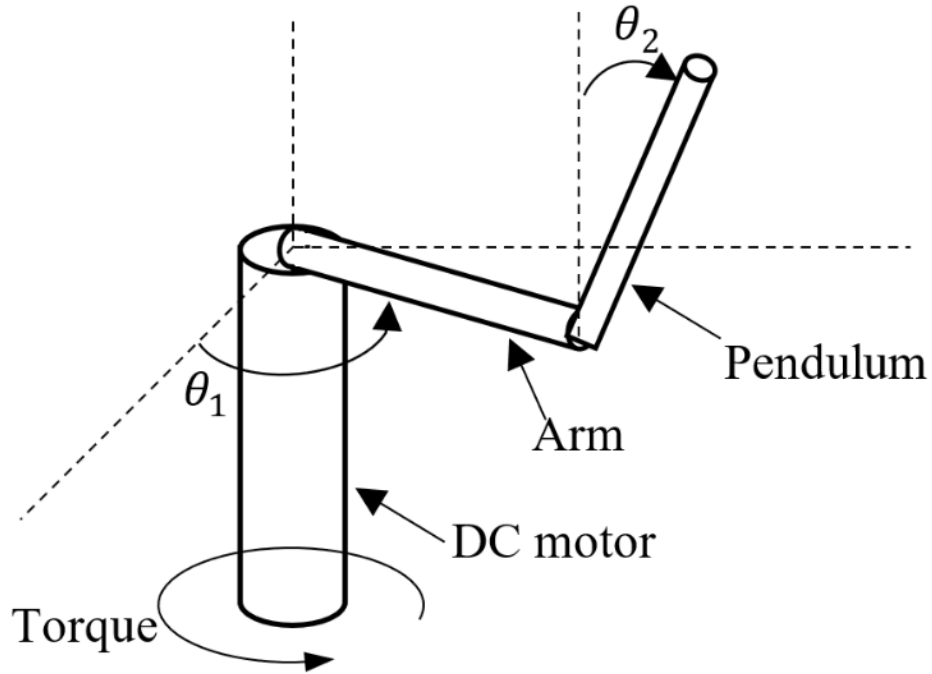


FIGURE 1. Sistemul fizic

Pentru acest sistem se dorește controlul optim al motorului (**poziția unghiulară**) în așa fel încât pendulul să rămână stabil, orientat în sus.

Sistemul are 4 stări reprezentate în relația 1.16.

$$\begin{aligned}x_1 &= \theta_2 \\x_2 &= \dot{\theta}_2 \\x_3 &= \theta_1 \\x_4 &= \dot{\theta}_1\end{aligned}\tag{1.16}$$

Unde x_1 este poziția pendulului, x_2 este viteza pendulului, x_3 este poziția brațului acționat de motor și x_4 este viteza brațului.

2. ANALIZA SISTEMULUI ÎN BUCLĂ DESCHISĂ

Se observă faptul că unele valori proprii ale matricii A sunt pozitive, astfel rezultă faptul că sistemul liniarizat este instabil.

$$\text{eig}(A) = [0 \quad -3.9904 \quad 3.9188 \quad 9.5205] \quad (2.1)$$

În Figura 2 este simulat sistemul în **buclă deschisă** ce are la intrare o referință de tip **treaptă unitară** (ce poate fi transpusă în realitate ca un semnal electric asupra motorului) și condiții inițiale $[1; 1; 1; 1]$, în timp ce în Figura 3 este reprezentat sistemul ce are condiții inițiale 0 și aceeași referință.

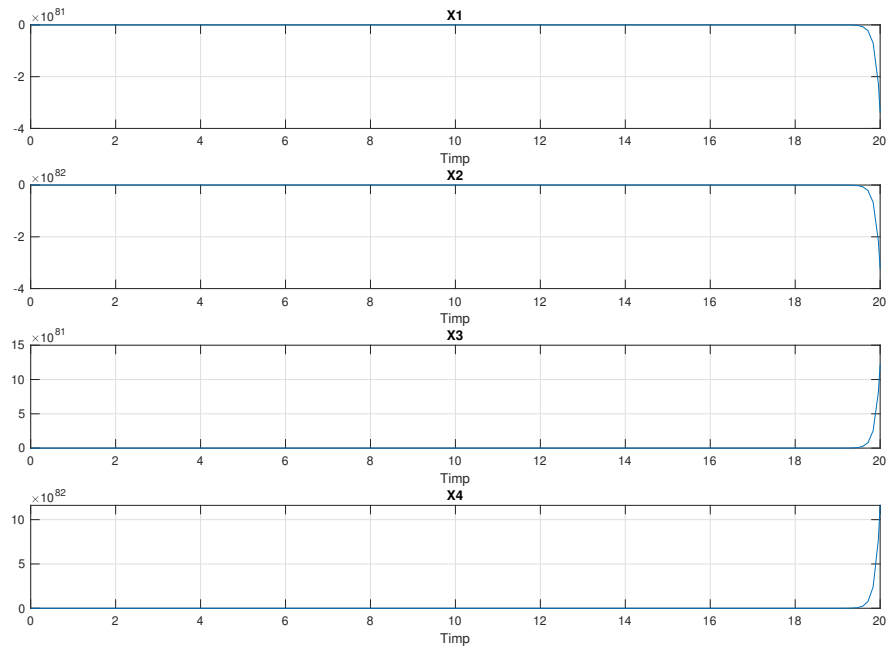


FIGURE 2. Valoarea intrării este 1 și condițiile inițiale sunt diferite de 0

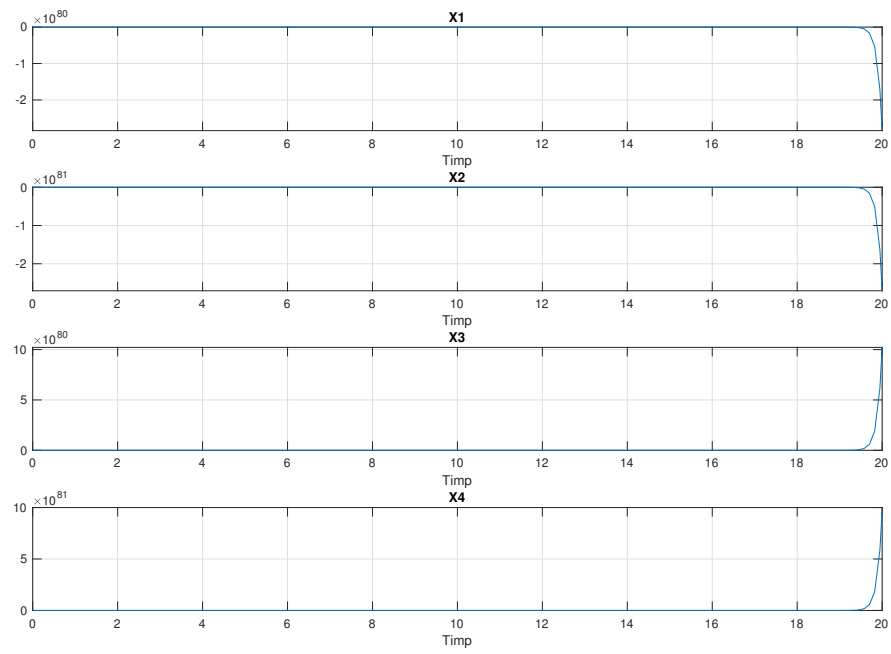


FIGURE 3. Valoarea intrării este 1 și condițiile inițiale sunt 0

În ambele cazuri se poate observa că fiecare stare este instabilă deci se poate afirma faptul că sistemul liniar este și el **instabil**.

3. LQR PENTRU PROBLEME DE STABILIZARE

Primul pas este de a verifica daca sistemul este controlabil. Acest lucru se poate afla prin verificare rangului matricii de controlabilitate ce se obține cu ajutorul comenzii **ctrb** din Matlab.

$$P = \text{ctrb}(A, B) \quad (3.1)$$

$$\text{rang} = \text{rank}(P) \quad (3.2)$$

$$\text{rang} = 4 \quad (3.3)$$

Se poate observa în relația 3.3 că rangul este 4 ceea ce înseamnă ca sistemul este controlabil pentru orice stare.

Problema de control optimal în acest caz este stabilizarea brațului pendulului inversat folosind un nivel minim de energie și o variație a comenzii cât se poate de mică. Astfel se poate scrie funcția de cost reprezentată în relația 3.4

$$J = \int_0^{t_f} (x(t)^T Q x(t) + u(t) R u(t)) dt \quad (3.4)$$

Pentru calculul matricii de reacție de la stare, **K** am folosit comanda **lqr** din Matlab ce a returnat un vector cu dimensiunea de 1×4 și are forma descrisă în relația 3.6.

$$K = \text{lqr}(A, B, Q, R) \quad (3.5)$$

$$K = [-49.3814 \quad -15.4970 \quad -1.0000 \quad 19.3299] \quad (3.6)$$

Unde matricea **Q** este pozitiv semidefinită și simetrică de dimensiune $n \times n$, iar matricea **R** este pozitiv definită și simetrică de dimensiune $m \times m$.

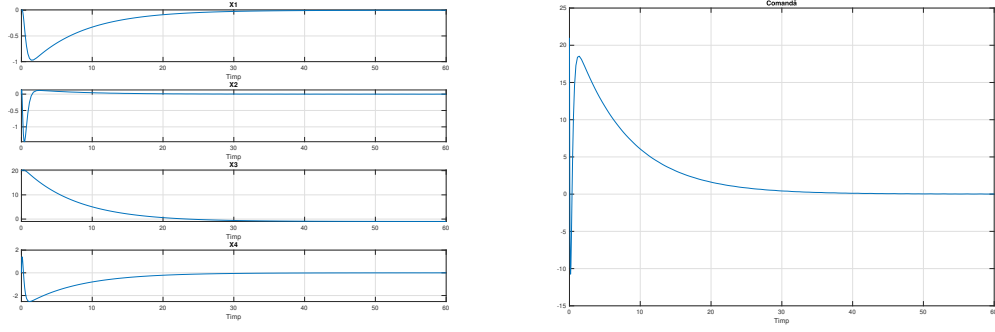
Valorile alese pentru **condițiile inițiale**, **matricea R** și **Q** sunt descrise în relațiile 3.7 3.8 3.9.

$$CI = [0 \quad 0 \quad 20 \quad 0] \quad (3.7)$$

$$R = 1 \quad (3.8)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

În Figura 4a se poate observa faptul că regulatorul funcționează corespunzător. Cu toate că sistemul pornește din condiții inițiale nenule, regulatorul reușește să aducă sistemul la stabilitate. Fiecare stare a sistemului pornește din condițiile sale inițiale și pe urmă revine la valoarea de 0. În Figura 4b este ilustrată comanda de la regulator care în primele 10 secunde este destul de agresivă deoarece eroarea sistemului este mare, dar se stabilizează pe măsură ce eroare scade.

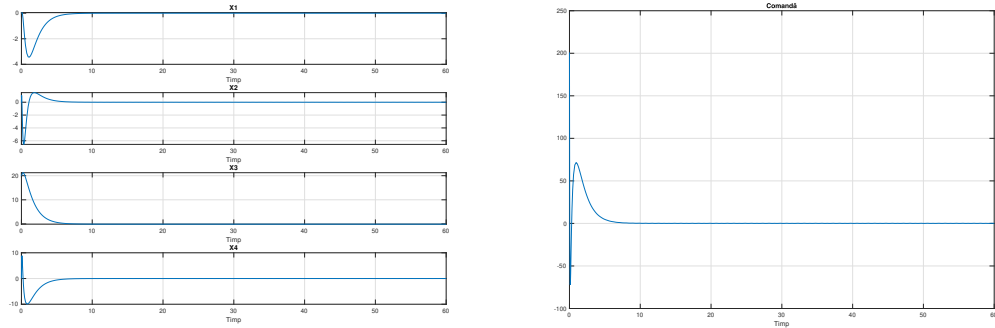


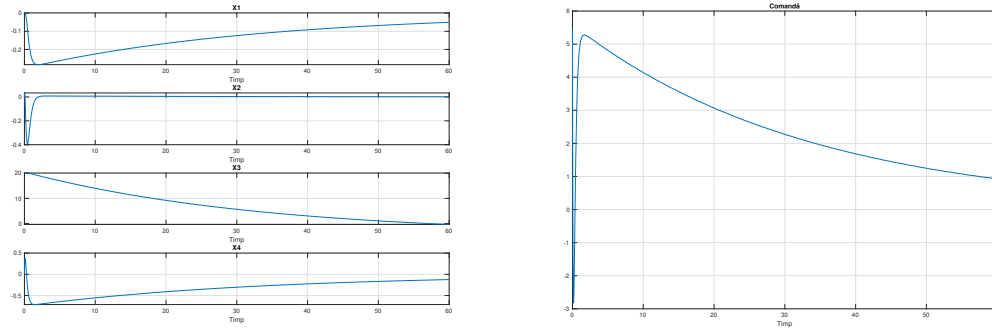
(A) Evoluția stărilor în timp

(B) Comanda

FIGURE 4. Evoluția stărilor și comanda de la regulator pentru K fix

Pentru a observa influența celor 2 matrici R și Q s-au efectuat mai multe teste ilustrate în Figura 5 și Figura 6. Prin amplificarea matricii Q , timpul de stabilizare a fiecărei stări s-a îmbunătățit, astfel sistemului devine mult mai rapid. Un dezavantaj al amplificării matricii Q este acela că, spre deosebire de comanda din Figura 4b (care atinge o valoare maximă de puțin peste 20), valoarea comenzii actuale este mult mai mare (de ordinul sutelor). Prin amplificarea factorului R , sistemul este mult mai lent (fiecare stare se stabilizează mult mai încet), iar comanda este și aceasta mult mai mică.

(A) Evoluția stărilor $100 \cdot Q$ și $R = 1$ (B) Comanda $100 \cdot Q$ și $R = 1$ FIGURE 5. Evoluția stărilor și comanda de la regulator K fix cu $100 \cdot Q$ și $R = 1$



(A) Evoluția stărilor $Q = eye(1)$ și $20 \cdot R$ (B) Comanda $Q = eye(1)$ și $20 \cdot R$

FIGURE 6. Evoluția stărilor și comanda de la regulator K fix cu $Q = eye(1)$ și $20 \cdot R$

Până în acest moment matricea K era fixă, iar prin rezolvarea ecuației **Ricatti** se poate determina K variabil ilustrat în Figura 7.

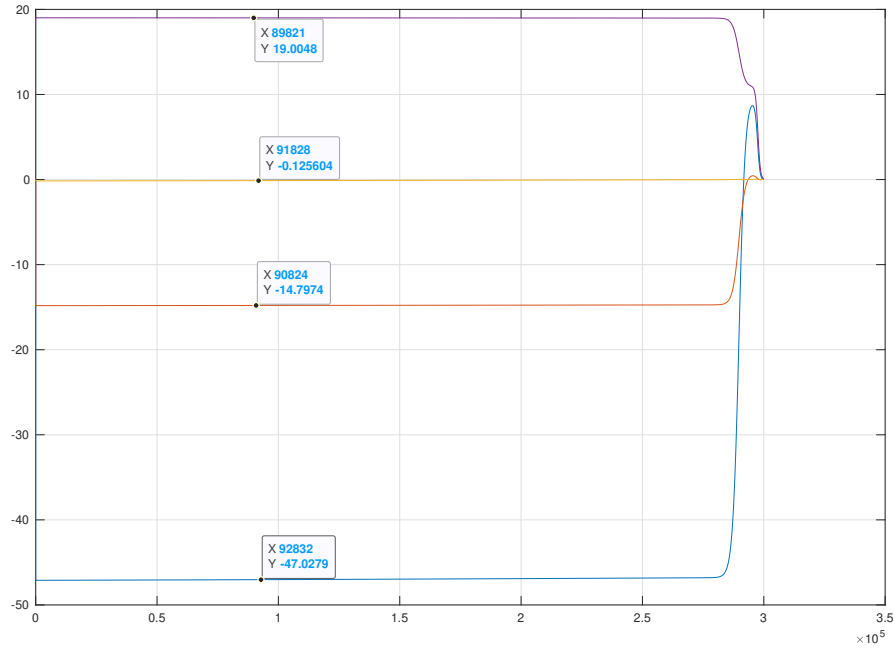


FIGURE 7. Valorile matricii K variabile

Structura calculată cu ajutorul comenzii **lqr** din Matlab este reprezentată de relația 3.10. Se poate observa că valorile finale coincid.

$$K = \begin{bmatrix} -47.2346 & -14.8560 & -0.2236 & 19.0262 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

În Figura 8 se poate observa evoluția fiecărei stări și comanda de la regulator în cazul când K este variabil. Performanțele sistemului sunt asemănătoare cu cele reprezentate în Figura 4.

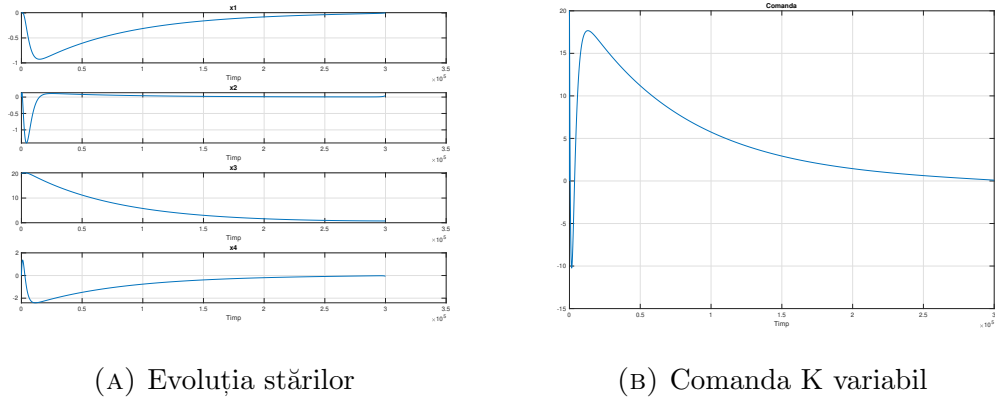
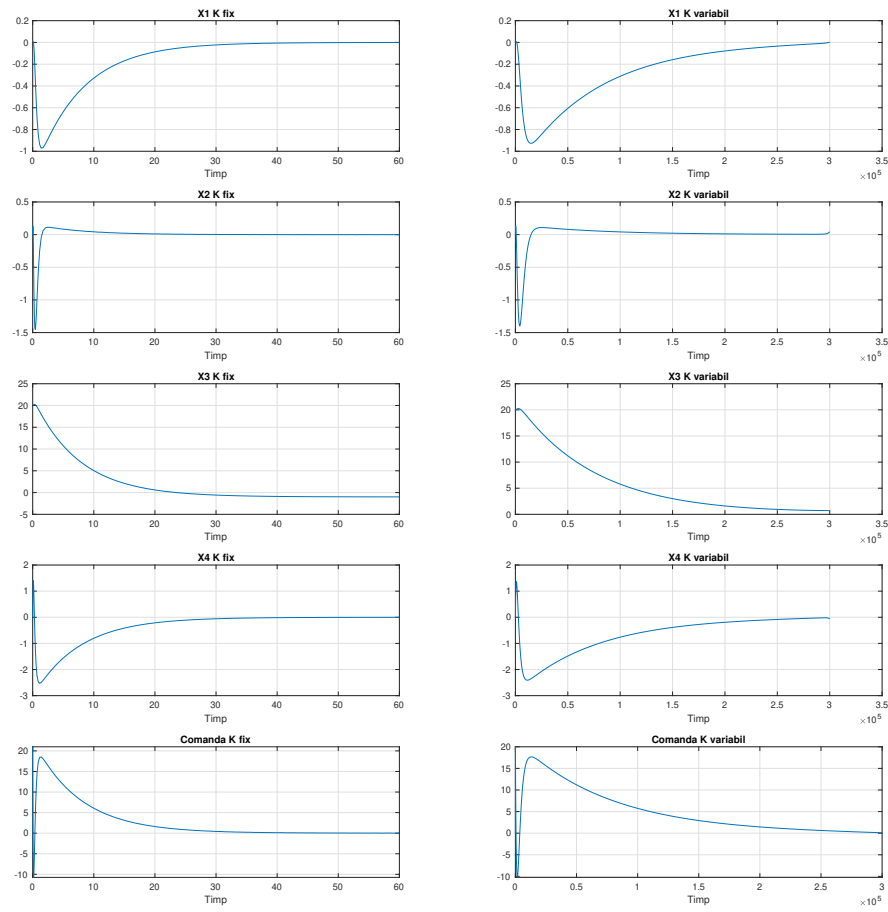


FIGURE 8. Evoluția stărilor și comanda de la regulator K variabil

Figura 9 reprezintă o comparație dintre K variabil și K fix. Se observă faptul că folosirea unui K variabil crește considerabil timpul de stabilizare a fiecărei stări. În ceea ce privește comanda de la regulator, aceasta are valori asemănătoare în ambele cazuri.


 FIGURE 9. Comparație dintre K variabil și K fix

4. LQR PENTRU PROBLEME DE URMĂRIRE

În ceea ce privește problema de urmărire, scopul acesteia este de a proiecta un regulator K care să fie capabil să aducă ieșirea sistemului la semnalul de intrare dat. Cu alte cuvinte, să reducă eroarea staționară la 0 indiferent de condițiile inițiale ale sistemului.

În Figura 10 se observă răspunsul sistemului la intrarea de tip PWM și comanda de la regulator. Răspunsul este destul de lent, asta se poate observa prin faptul că sistemul nu ajunge să se stabilizeze în nicio semiperioadă a referinței. În Figura 11 se observă evoluția stărilor sistemului. Semnalul de comandă ia valori mari în primele momente pentru a aduce sistemul la stabilitate, iar apoi ajunge să oscileze între valori mici.

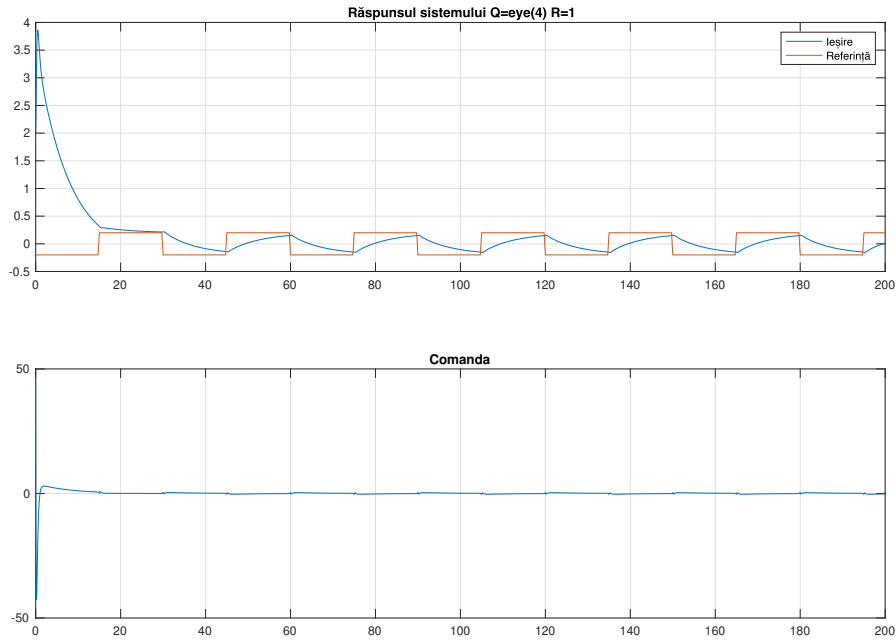


FIGURE 10. Răspunsul sistemului și comanda de la regulator

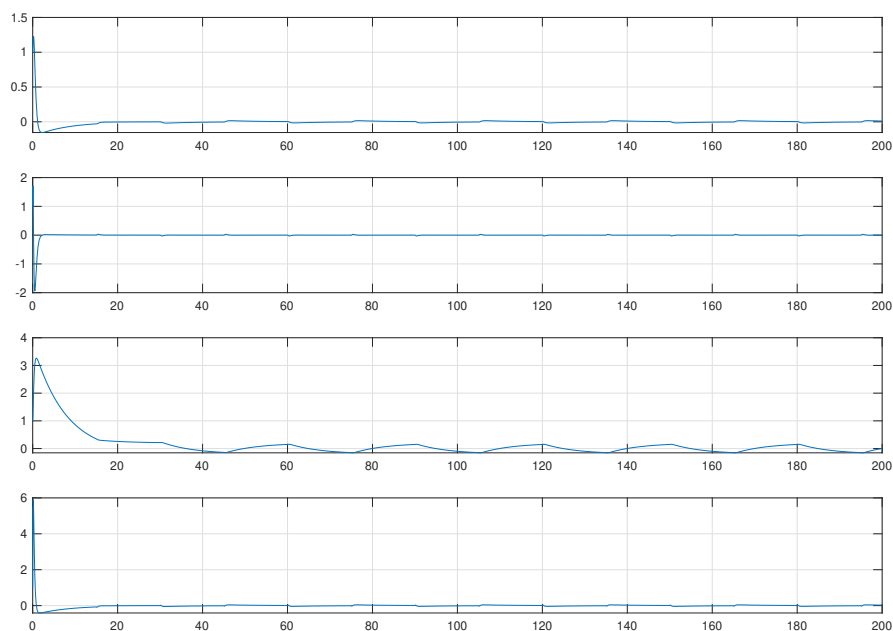


FIGURE 11. Evoluția stărilor

Cum s-a prezentat anterior, prin amplificarea matricii Q sistemului devine mai rapid. În Figura 12 se observă influența acestei amplificări (de la Q la $50 \cdot Q$). Sistemul este suficient de rapid încât să se stabilizeze în fiecare semiperioadă a semnalului de intrare. Astfel, urmărirea se face corespunzător, iar regulatorul lucrează corect. În Figura 13 se observă evoluția stărilor sistemului.

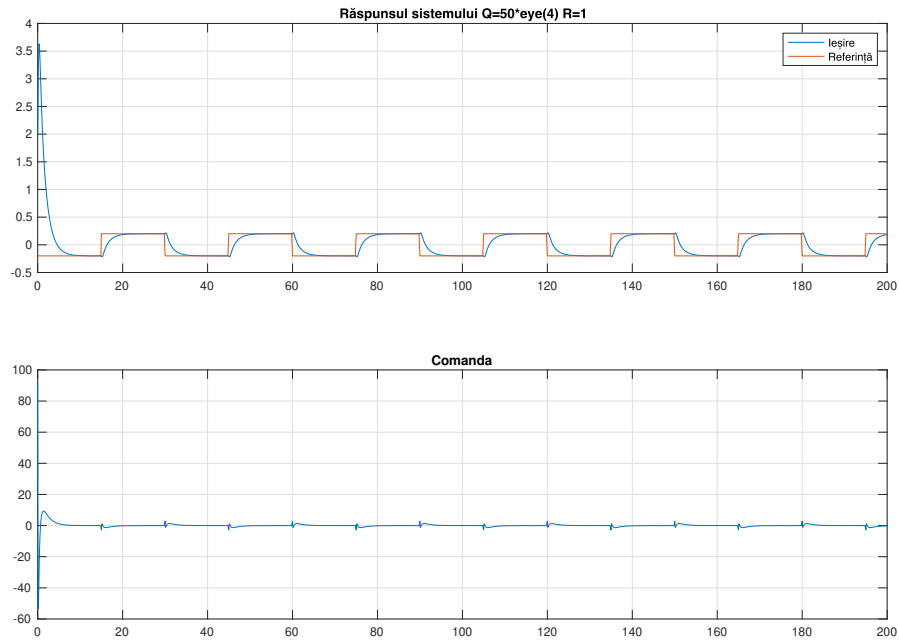


FIGURE 12. Răspunsul sistemului și comanda de la regulator pentru $50 \cdot Q$

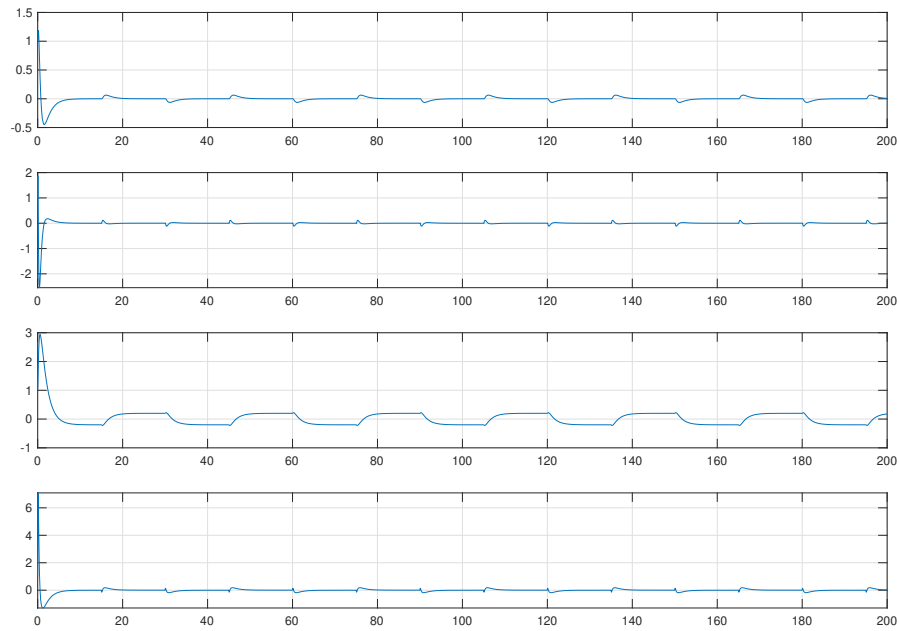


FIGURE 13. Evoluția stărilor pentru $50 \cdot Q$

În cazul în care se dorește adăugarea unui efect integrator, se observă faptul că performanțele scad considerabil. Răspunsul sistemului din Figura 14 este unul mult mai puțin performant deoarece încearcă să urmărească referința de tip PWM, însă nu este suficient de rapid. În cazul comenzii, aceasta ia valori destul de mari în primele momente pentru a stabiliza sistemul, însă pe parcurs nu e suficient de agresivă pentru a menține procesul pe referință.

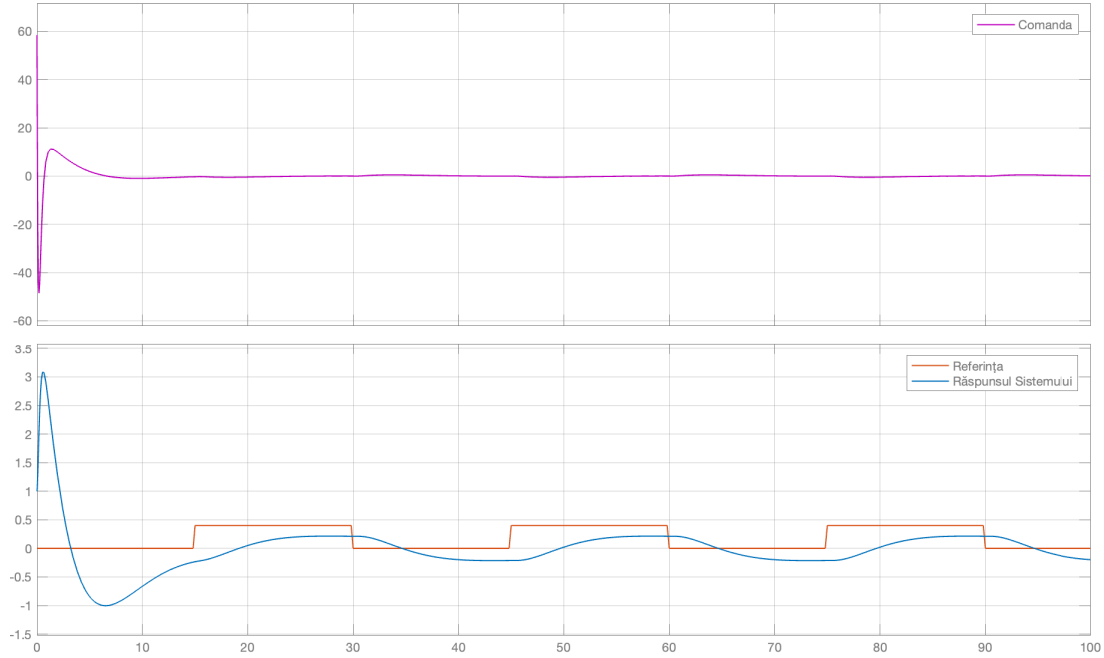


FIGURE 14. Răspunsul sistemului pentru LQR cu integrator

5. LQR CU ESTIMAREA STĂRII

Până în acest moment am pornit de la ipoteza că toate stările sunt măsurabile și pot fi controlate. În cazul în care există stări ce nu pot fi măsurate, este nevoie de implementarea unui estimator pentru a le putea controla.

Primul pas este de a verifica dacă sistemul este observabil. Acest lucru se poate afla prin verificare rangului matricii de observabilitate ce se obține cu ajutorul comenzii **obsv** din Matlab.

$$P = \text{obsv}(A, B) \quad (5.1)$$

$$\text{rang} = \text{rank}(P) \quad (5.2)$$

$$\text{rang} = 4 \quad (5.3)$$

Se poate observa în relația 5.3 că rangul este 4 ceea ce înseamnă că sistemul este observabil.

Matricea L ce reprezintă *matricea estimatorului* a fost calculată folosind metoda de alocare a polilor și are forma din relația 5.4.

$$L = [21072 \quad 40246 \quad 187 \quad 11241] \quad (5.4)$$

Răspunsul sistemului la referința de tip PWM (semnal de intrare pentru motorul DC) se poate observa în Figura 15. Procesul răspunde foarte bine la fiecare perioadă a semnalului de intrare. Semnalul PWM are o amplitudine de 1.5 cu o perioadă de 30 de secunde și un factor de umplere de 50%.

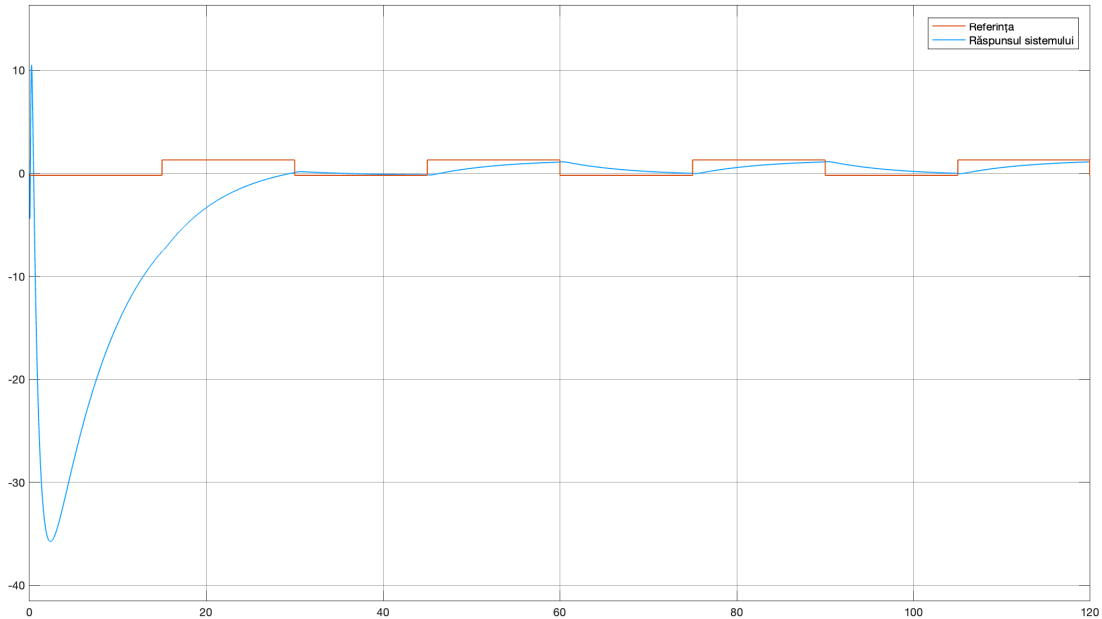


FIGURE 15. Răspunsul sistemului cu estimator

În Figura 16 este ilustrată diferența dintre răspunsul sistemului cu estimator și răspunsul sistemului fără estimator.

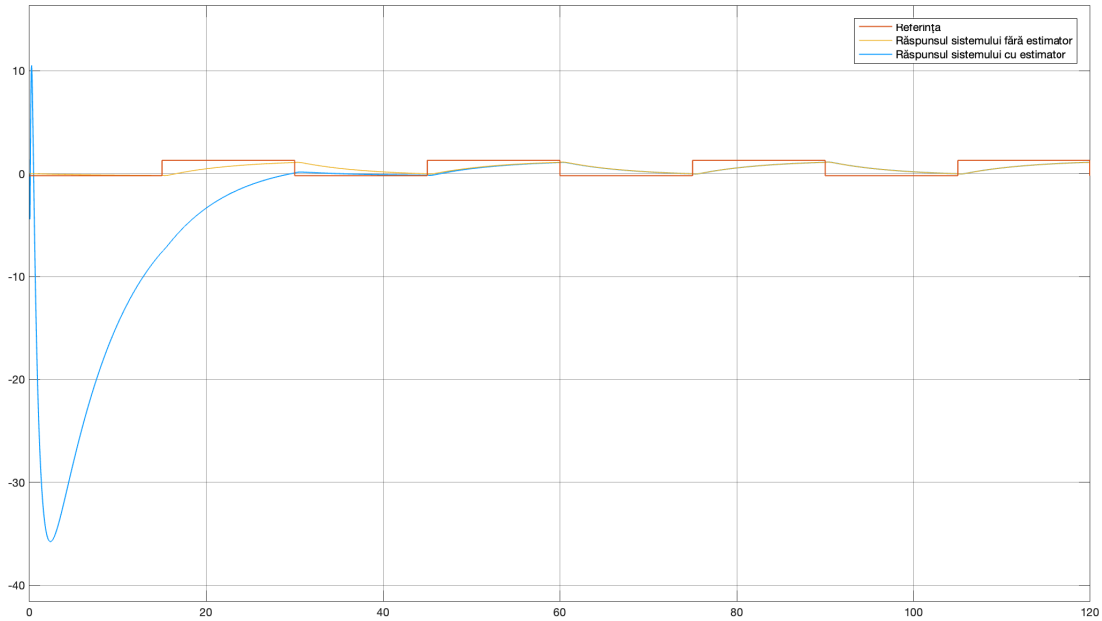


FIGURE 16. Comparație răspuns sistem cu estimator și simplu

Diferența majoră se află în primele 40 de secunde unde sistemul cu estimator răspunde mai agresiv. La momentul 60, cele două răspunsuri se suprapun.

În ceea ce privește comanda, aceasta este mult mai agresivă în cazul sistemului fără estimator și prezintă multe oscilații precum se poate vedea în Figura 17. Evoluția stărilor fiecărui sistem sunt reprezentate în Figura 18. La sistemul cu estimator, stările se stabilizează relativ repede și pe urmă rămân constante, în timp ce la sistemul fără estimator, stările sunt oscilante.

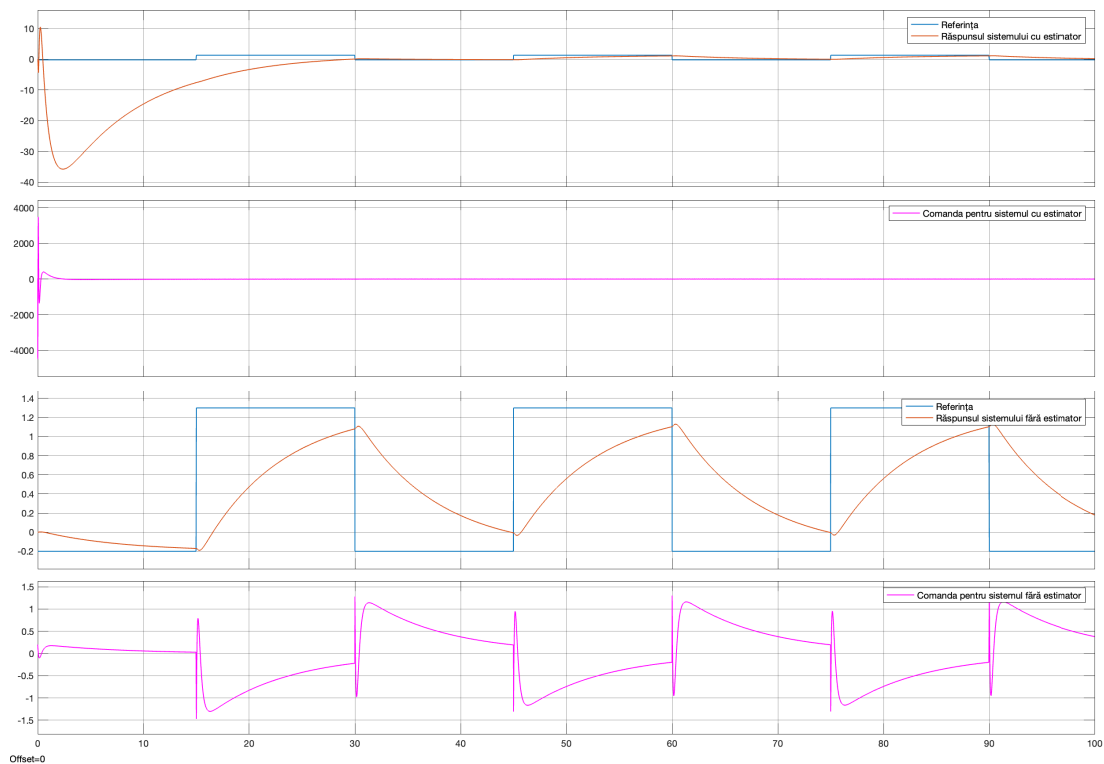


FIGURE 17. Comparație răspuns sistem cu estimator și simplu și comanda

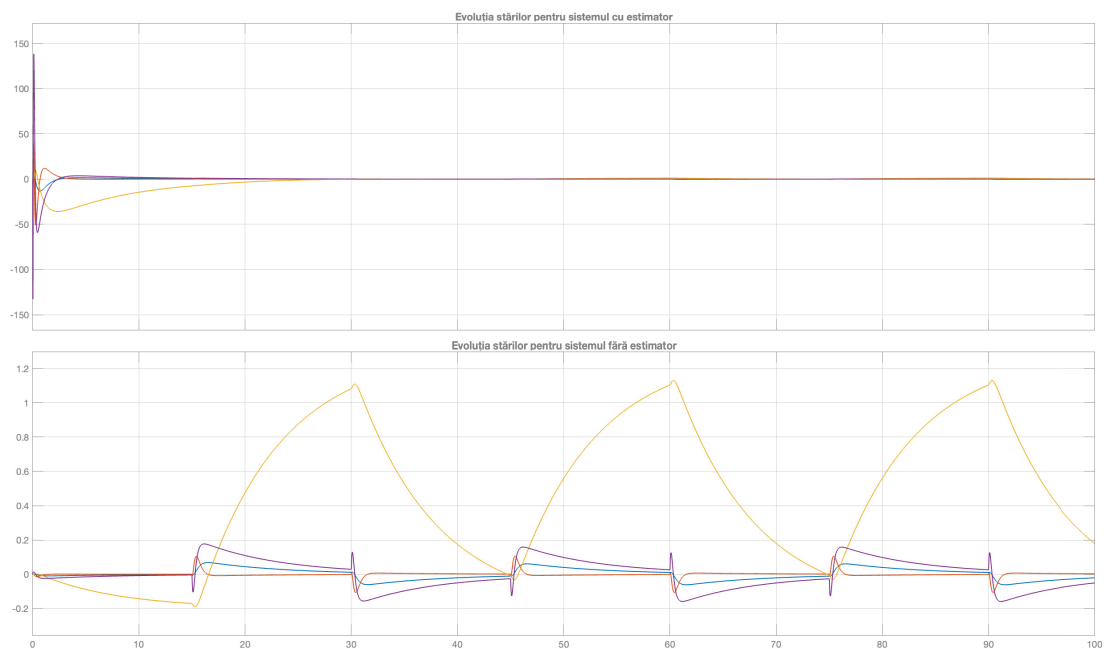


FIGURE 18. Evoluția stărilor pentru sistemul cu estimator și fără estimator