C. Probleme

C1. Enunţuri

1. Dacă $X = N(2,4)$, să se calculeze $P(0 \leq X \leq 5)$, $P(|X| < 2)$ şi $P(|X| < 2/|X| \geq 1)$.

2. Dacă $X = N(0,9)$ şi $Y = X^2 + 1$, să se determine pdf f_Y, media, dispersia şi momentele de ordin n ale v.a. Y.

3. Fie X, Y v.a. independente, cu distribuţia (repartiţia) comună $N(1,4)$.

(i) Să se calculeze $r(2X + 3Y + 5, 2X - 3Y + 5)$.

(ii) Să se determine media şi dispersia v.a. $T = \max(X,Y)$ şi $U = \min(X,Y)$.

4. Se consideră v.a. 2D $V = (X,Y)$ având pdf $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{(x-y)^2 + y^2}{2}\right].$$

Să se calculeze $D^2(X)$, $\mu_{21}(V)$ şi să se determine curbele de regresie ale v.a. $V = (X,Y)$.

5. În urma consultării a 25000 suporteri, realizată pe site-ul oficial al unui mare club de fotbal, se constată că 40% dintre suporteri doresc menţinerea antrenorului echipei, iar 75% dintre suporteri doresc achiziţionarea vedetei M. Ştiind că acest club are 500.000 de suporteri (plătitori), să se determine:

(i) Numărul suporterilor care doresc schimbarea antrenorului, luând în calcul o marjă de eroare de 2%.

(ii) Numărul suporterilor care doresc achiziţionarea vedetei M, cu o probabilitate de 99%.

6. Un ansamblu statistic de rezistenţe este repartizat normal $N(100\Omega; 81\Omega^2)$. Se iau la întâmplare 100 dintre aceste rezistenţe şi se controlează una câte una.

(i) Să se determine, în procente, probabilitatea de abatere cu mai mult de 9Ω de la valoarea nominală de 100Ω.

(ii) Să se determine, în procente, probabilitatea de a ne situa în limitele

$\pm 10\Omega$ faţă de valoarea de 100Ω.

un zar de 900 de ori. Să se determine:

itatea ca faţa 2 să apară de cel mult 160 ori.

itatea de a apare o faţă cu un număr de puncte care reprezintă de cel puţin 305 ori.

de 3%, un interval în care este situat numărul de apariţii număr par de puncte.

s-a constatat că 95% din televizoarele produse de o firmă cu sunt corespunzătoare calitativ (nu prezintă defecţiuni). Un pără 1000 de televizoare.

uleze probabilitatea ca distribuitorul să fi cumpărat cel mult efecte.

ermine, cu eroare de 1%, un interval în care se află numărul efecte.

ermine, cu probabilitate de 0,97, un interval în care se află are fără defecţiuni.

experimentul care constă în aruncarea monedei şi se fixează notată cu A.

mine un interval în care este situat numărul de apariţii ale siderare o eroare de maximum 2% şi un număr de 20000 monedei.

trebuie să aruncăm moneda astfel încât să putem afirma, 98%, că frecvenţa de apariţie a feţei A este cuprinsă între

nou-născuţi într-o zonă geografică sunt fete şi 48% sunt mine, relativ la un număr de 20000 nou născuţi:

itatea ca numărul băieţilor să fie cuprins între 9700 şi 9820.

al în care se găseşte numărul fetelor, luând în considerare o um 2%.

al în care se află numărul băieţilor, cu probabilitate de 0,97 (eroare de maximum 3%).

11. Durata de aşteptare într-un sistem de comunicaţii urmează o lege de probabilitate exponenţial-negativă de parametru $\lambda > 0$.

(i) Dacă $\lambda = 0,01$ să se determine durata de aşteptare care corespunde unei fiabilităţi de cel puţin 90%.

(ii) Ştiind că durata medie de aşteptare este 20s, să se determine probabilitatea ca un client să aştepte între 18s şi 24s.

12. Într-un sistem de servire din teoria aşteptării, intervalele de timp dintre două sosiri succesive sunt descrise de variabile aleatoare independente care urmează o lege exponenţial negativă de parametru $\lambda = 10$. Utilizând teorema limită centrală, să se determine probabilitatea ca al 1000-lea client să apară în intervalul de timp $[95, 110]$.

13. Numărul de solicitări la o staţie de taximetre este descris de o v.a. $X = Po(\lambda t)$, i.e.

$$f_X(n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{N},\ \lambda > 0,\ t > 0,$$

unde λ este numărul mediu de solicitări pe minut, iar $f_X(n)$ este probabilitatea ca în t minute să apară n solicitări.

1°. Pentru $\lambda = 3$, să se determine probabilitatea ca în 2 minute dispeceratul să fie solicitat de:

(i) exact 5 ori; **(ii)** cel puţin 2 ori; **(iii)** cel mult 3 ori.

2°. Presupunem că durata de rezolvare a fiecărei solicitări este reprezentată de o v.a. T de tip 1D Erlang de parametri 2 şi 2, i.e. $T = \Gamma(2; 2)$ şi

$$f_T(t) = 4te^{-2t}u(t).$$

Să se demonstreze că v.a. 1D discretă reprezentând numărul de solicitări sosite pe durata de rezolvare a unei solicitări date urmează o repartiţie binomial negativă $Pa\left(2; \dfrac{2}{\lambda+2}\right)$.

14. [10] Semnalul de intrare într-un canal de comunicaţii este descris de o v.a. simplă X care ia valorile -1 şi 1 cu probabilităţi egale. Semnalul de

… de v.a. $Y = X + L$, unde L este o v.a. de tip Laplace,

$$f_L(x) = \frac{a}{2}e^{-a|x|}, \quad a > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

…

… $Y < y)$ şi $P((X = -1) \cap (Y < y))$, $y \in \mathbb{R}$.

… repartiţie marginală a v.a. Y.

… a v.a. Y.

… care din valorile $X = 1$ şi $X = -1$ sunt mai probabile,

… care din probabilităţile $P(Y \geq 0/X = -1)$ şi $P(Y \geq$

… mare).

… elor unei elipse sunt descrise de v.a. independente X

… în intervalul $[0, 1]$. Să se determine:

… repartiţie, pdf, momentul de ordin n şi dispersia v.a. Z care

…

… de ordin n, dispersia, asimetria şi excesul pentru v.a.

… $S = X + Y$.

… area unui con sunt v.a. independente X şi Y, repar-

… alul $[0, 1]$. Să se determine:

…, unde Z este v.a. care descrie aria laterală a conului.

… şi $Me(T)$, unde $T = XY^{-1}$.

… $S = \max(X, Y)$, $M_n(S)$, $D^2(S)$ şi $Me(S)$.

…tate. Soluţii

$$\ldots = \phi\left(\frac{5-2}{2}\right) - \phi\left(\frac{0-2}{2}\right) \simeq 0,8345;$$

$$\ldots -2 < X < 2) = \phi\left(\frac{2-2}{2}\right) - \phi\left(\frac{-2-2}{2}\right) \simeq 0,4772$$

$$\ldots < 2/|X| \geq 1) = \frac{P((|X| < 2) \cap (|X| \geq 1))}{P(|X| \geq 1)}$$

$$= \frac{P(-2 < X \leq -1) + P(1 \leq X < 2)}{1 - P(-1 \leq X \leq 1)} \simeq 0,2314$$

2. $f_Y(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi(x-1)}} \exp\left(\dfrac{1-x}{18}\right) u(x-1),\ x \neq 1$

$M_n(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k A_{2k}^k \left(\frac{9}{2}\right)^k$; $M(Y) = 10$; $D^2(Y) = 162$.

3. **(i)** $r(2X + 3Y + 5, 2X - 3Y + 5) = r(2X + 3Y, 2X - 3Y)$

$$= \frac{4cov(X,X) - 9cov(X,Y)}{4D^2(X) + 9D^2(Y)} = -\frac{5}{13} \simeq -0,385$$

(ii) $F_T(x) = P(T < x) = P(X < x, Y < x)$

$$= P(X < x)P(Y < x) = (F_X(x))^2;$$

$$f_T(x) = F_T'(x) = 2F_X'(x)F_X(x) = 2f_X(x)F_X(x);$$

$$M(T) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_T(x) dx = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \simeq 2,128$$

Fie $F_U(x) = P(U < x)$

$$\Rightarrow\ 1 - F_U(x) = P(U \geq x) = P(X \geq x)P(Y \geq x) = (1 - F_X(x))^2$$

deci $F_U(x) = 1 - (1 - F_X(x))^2$ şi $f_U(x) = 2f_X(x) - f_T(x)$;

$$M(U) = 2M(X) - M(T) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \simeq -0,128$$

4. $f_1(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4}\right)$; $f_2(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{y^2}{2}\right)$; $x = y$; $2x = y$

5. **(i)** $m = np = 300000$; $\sigma^2 = npq = 120000$, deci $\sigma \approx 346,4$;

$[299192; 300808]$

(ii) $m = 375000$; $\sigma \simeq 306,2$; $[374211; 375789]$

6. $m = 100$, $\sigma = 9$;

(i) $1 - P(|X - 100| < 9) = 2 - 2\phi(1)$; 31,74%

(ii) $P(|X - 100| < 10) = 2\phi\left(\dfrac{10}{9}\right) - 1$; 73,3%

(i) $m = 150$, $\sigma = 5\sqrt{5}$;

$$P(0 < X < 160) = \phi\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \phi\left(-\frac{28}{\sqrt{5}}\right) \approx 0,814$$

$= 300$; $\sigma = 10\sqrt{2}$;

$$\geq 305) = \phi(\infty) - \phi\left(\frac{305 - 300}{10\sqrt{2}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \simeq 0,6381$$

$= 450$; $\sigma = 15$; $(m - 2,17\sigma, m + 2,17\sigma) \subseteq [417, 483]$

$0,95$; $q = 0,05$; $m = np = 950$; $\sigma = \sqrt{npq} = \frac{1}{2}\sqrt{190}$

$$\geq 960) = \phi(\infty) - \phi\left(\frac{960 - \sigma}{950}\right) \simeq 1 - \phi(1,003) \simeq 0,1586$$

$- 2,575\sigma; m + 2.575\sigma) \subseteq [932, 968]$; deci [32,68]

$- 2,17\sigma; m + 2,17\sigma) \subseteq [935; 965]$

$= 10000$; $\sigma = 50\sqrt{2} \simeq 70.71$;

$\sigma; m + 2,33\sigma] \subseteq [9835, 10165]$

$$\cdot\frac{48}{100} < X < n \cdot \frac{52}{100}\right) = 0,98 \Leftrightarrow 2\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{25}\right) - 1 = 0,98 \Leftrightarrow$$

$= 0,99 \Leftrightarrow \sqrt{n} \simeq 25.2,33$; $n = 3394$

600; $\sigma = \sqrt{4992} \simeq 70.65$

$$< X < 9820) = \phi\left(\frac{220}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{100}{\sigma}\right) \simeq 1 - 0,9215 = 0,0785$$

10565]

754]

$$\geq \frac{9}{10} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} \geq \frac{9}{10} \Leftrightarrow t \geq 100(\ln 10 - \ln 9) \geq 10.53s$$

$T < 24) = F(24) - F(18) = R(18) - R(24) = e^{-9/10} - e^{-12/5}$,

$= \frac{1}{\lambda} = 20$, deci $\lambda = 1/20$.

Aplicaţia 3, §A5.4; $Y_n = \dfrac{S_n - 10^{-1}n}{\sqrt{n} \cdot 10^{-1}}$

$$< S_{1000} < 110) = P(95 < Y_{1000}\sqrt{10} + 100 < 110)$$

$$\left(-\sqrt{\frac{5}{2}} < Y_{1000} < \sqrt{10}\right) = \phi(\sqrt{10}) - \phi\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$$

$$\simeq \phi(3,162) - 1 + \phi(1,581) \simeq 0,9395$$

13. 1°. **(i)** $f_X(5) = \dfrac{6^5}{5!}e^{-6} = 64,8e^{-5} \simeq 0,161;$

(ii) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f_X(n) = 1 - f_X(0) - f_X(1) \simeq 0,983;$

(iii) $\sum\limits_{n=0}^{3} f_X(n) \simeq 0,151$

2°. Avem $f_X(n) = P(Y = n/T = t) = f_{Y/T}(n/t) = f(n/t)$

$$f_Y(k) = P(Y = k) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)P(Y = k/T = t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)f(k/t)dt$$

$$= \frac{4\lambda^k}{k!}\int_0^{\infty} t^{k+1}e^{-(\lambda+2)t}dt = \frac{4\lambda^k}{k!}\mathcal{L}\{t^{k+1}\}(\lambda+2)$$

$$= \frac{4\lambda^k}{k!}\cdot\frac{(k+1)!}{(\lambda+2)^{k+2}} = (k+1)\left(\frac{2}{\lambda+2}\right)^2\left(1-\frac{2}{\lambda+2}\right)^k$$

Notând $p = \dfrac{2}{\lambda+2}$ rezultă $f_Y(k) = C_{k+1}^k p^2 q^k$, unde $q = 1 - p$, deci

$$Y = Pa\left(2; \frac{2}{\lambda+2}\right).$$

14. Avem

$$F_L(x) = \int_{-\infty}^{x} f_L(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{ax}, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-ax}, & x \geq 0 \end{cases}$$

(i) $g(y;n) = P((Y < y) \cap (X = n))$

$$= P(Y < y/X = n)P(X = n) = \frac{1}{2}P(n + L < y)$$

$$= \frac{1}{2}P(L < y - n) = \frac{1}{2}F_L(y-n) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{a(y-n)}, & y < n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-a(y-n)}, & y \geq n \end{cases} \quad ; \quad n \in \{-1, 1\}$$

(ii) $F_Y(y) = P(Y < y)$

$$= P((Y < y) \cap (X = -1)) + P((Y < y) \cap (X = 1)) = g(y;1) + g(y;-1)$$