MA - curs 2

CAP. 2. VARIABILE ALEATOARE UNIDIMENSIONALE (1D)

§1. Definiție. Funcția de repartiție

1. Exemplu. La un test, la care participă 100 persoane, se acordă calificativele 1, 2, 3, 4, 5 (în ordinea crescătoare a îndeplinirii criteriilor testului). Repartiția este următoarea:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \to 5 \text{ persoane} \\ 2 \to 10 \text{ persoane} \\ 3 \to 40 \text{ persoane} \\ 4 \to 25 \text{ persoane} \\ 5 \to 20 \text{ persoane} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Probabilități: } \left\{\begin{array}{l} p_1 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} \\ p_2 = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \\ p_3 = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \\ p_4 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \\ p_5 = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \end{array}\right.$$

Experimentului îi atașăm tabelul:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Desigur, $\frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 1$.

Fie $E = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$; A_i = evenimentul ca o persoană să obțină calificativul i, $1 \le i \le 5$.

Definim funcția $X : E \to \mathbb{R}$, $X(A_i) = i$ și atașăm probabilitățile ~~$P(i)$~~ $P(A_i) = P(X = i) = p_i$, $1 \le i \le 5$; $p_1 = \frac{1}{20}$; $p_2 = \frac{1}{10}$; $p_3 = \frac{2}{5}$; $p_4 = \frac{1}{4}$; $p_5 = \frac{1}{5}$

2. Definiție (cazul discret). Dacă (E, K, P) este un câmp de probabilitate, E este o mulțime finită și $K = \mathcal{P}(E)$, ~~$E = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$~~ atunci o funcție $X : E \to \mathbb{R}$, ~~$E \ni$~~ $A_i \in E \longmapsto X(A_i) = x_i$ unde $x_i \in \mathbb{R}$, se numește variabilă aleatoare (discretă) asociată câmpului (E, K, P)

OBS 1. Este evident că $X(E)$ finită

OBS 2. În Exemplul 1, $X(A_i) = i$, deci $x_i = i$, $1 \le i \le 5$.

3. Definiție (cazul general)

Fie $(E, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate. Se numește variabilă aleatoare unidimensională (v.a. 1D) asociată câmpului dat o funcție $X : E \to \mathbb{R}$ cu următoarea proprietate:

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \{w \in E : X(w) < x\} \in \mathcal{K}$, i.e.

$\forall x \in \mathbb{R}$ mulțimea $\{w \in E : X(w) < x\}$ este un eveniment din câmp.

OBS. În Exemplul 1, unde $X(A_i) = i$, $1 \le i \le 5$, avem: $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$x = 1$: $\{w \in E : X(w) < 1\} = \{A_i \in E : X(A_i) < 1\} = \emptyset \in \mathcal{K} = \mathcal{P}(E)$

$x = 2$: $\{w \in E : X(w) < 2\} = \{A_i \in E : X(A_i) < 2\} = \{A_1\} \in \mathcal{P}(E)$

$x = 3$: $\{w \in E : X(w) < 3\} = \{A_i \in E : X(A_i) < 3\} = \{A_1, A_2\} \in \mathcal{P}(E)$

$x = 5.2$: $\{w \in E : X(w) < 5.2\} = \{A_i \in E : X(A_i) < 5.2\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\} = E \in \mathcal{P}(E)$

4. Proprietate X, Y v.a. 1D; $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow X + \lambda,\ \lambda X,\ |X|,\ X^2,\ X^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$, $X \pm Y,\ X \cdot Y,\ Y^{-1},\ XY^{-1} = \dfrac{X}{Y}$ (unde $Y \neq 0$) sunt v.a. 1D.

5. V.a. 1D independente. Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. 1D, $n \geq 2$.

Notăm $\{X_i < x\} = \{w \in E : X_i(w) < x\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Spunem că $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt v.a. 1D independente dacă

$$P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n) = P(X_1 < x_1) \cdot P(X_2 < x_2) \dots P(X_n < x_n)$$

OBS. Am notat $P(X < x, Y < y) = P(\{X < x\} \cap \{Y < y\})$.

6. Funcția de repartiție asociată unei v.a. 1D, notată X

Este funcția $F = F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$

$$F(x) = F_X(x) = P(X < x),$$

unde $P(X < x) = P(A)$; ~~unde~~ $A = \{X < x\} = \{w \in E : X(w) < x\}$

7. Proprietăți ale funcției de repartiție

7.1 $0 \le F(x) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$

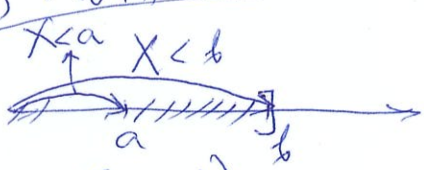
7.2 F este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$ $(x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2))$

7.3 $F(-\infty) = 0$; $F(\infty) = 1$, unde $F(\pm\infty) = \lim_{x \to \pm\infty} F(x)$

7.4 F continuă la stânga în orice punct $x_0 \in \mathbb{R}$, i.e.

$$F(x_0 - 0) = F(x_0) \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F(x) = F(x_0), \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

7.5 $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$



Dem. $P(a \le X < b) = P(\{-\infty < X < b\} \setminus (-\infty < X < a)) =$

$= P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a)$

7.6 $P(X = a) = F(a+0) - F(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} F(x) - F(a)$

7.7 $P(a < X < b) = F(b) - F(a+0)$

7.8 $P(a < X \le b) = F(b+0) - F(a+0)$

$P(a \le X \le b) = F(b+0) - F(a)$

$\left\{ \begin{array}{l} \forall a, b \in \mathbb{R} \\ a < b \end{array} \right.$

8. Funcția de repartiție (distribuție) condiționată

$(E, \mathcal{K}, P)$ câmp de probabilitate, $A \in \mathcal{K}$, $P(A) > 0$

funcția $F_A : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F_A(x) = P((X < x)/A) = \dfrac{P((X<x) \cap A)}{P(A)}$

se numește f. de rep. (distrib.) condiționată de A

Notații: $F_A(x)$ sau $F_X(x/A)$ sau $F(x/A)$

§2. Variabile aleatoare 1D discrete

Fie $I \ne \emptyset$ o mulțime de indici discretă (finită sau numărabilă), de exemplu $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ sau $I = \mathbb{N}$ sau $I = \mathbb{N}^*$ sau $I = \mathbb{Z}$.

1. <u>Definiție</u> O v.a. 1D, $X: E \to \mathbb{R}$, se numește <u>v.a. 1D discretă</u> dacă mulțimea valorilor sale, $X(E)$, este o mulțime discretă, i.e. $X(E) = \{x_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{R}$.

2. <u>V.a. 1D (discretă) simplă</u> Este v.a. 1D discretă astfel încât $X(E)$ este <u>finită</u>, i.e. $X(E) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$

<u>Tabloul de distribuție (repartiție)</u>

Fie $A_i = \{X = x_i\}$ și $p_i = P(A_i) = P(X = x_i)$, $1 \le i \le n$.

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 \dots & p_n \end{pmatrix} \longrightarrow$$ <u>tabloul de distribuție (repartiție) asociat v.a. X</u>.

<u>OBS.</u> deoarece $\{A_i : 1 \le i \le n\}$ este s.c.e. $\Longrightarrow$ $\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$

3. <u>V.a. 1D discretă numărabilă (cu o infinitate numărabilă de valori)</u>

$$X(E) = \{x_n : n \ge 1\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}; \ p_n = P(X = x_n)$$

<u>Tabloul de distribuție</u> $X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \dots & x_n \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 \dots & p_n \end{pmatrix}$ sau $X: \begin{pmatrix} x_n \\ p_n \end{pmatrix}_{n \ge 1}$

<u>OBS.</u> $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1}$

4. <u>Funcția de repartiție a unei v.a. discrete</u>

<u>Exemplul 1, §1</u> $X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

<u>Obs.</u> $x \le 1 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = 0$

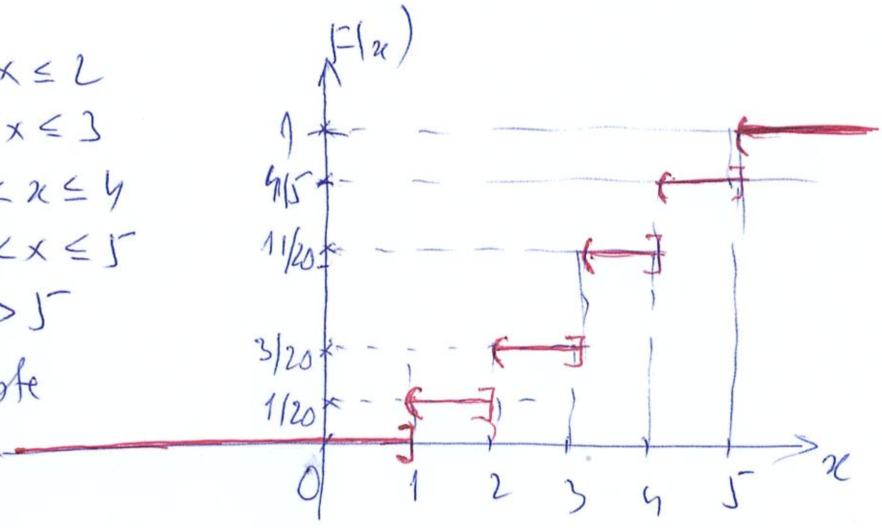
$1 < x \le 2 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = \frac{1}{20}$

$2 < x \le 3 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$

$3 < x \le 4 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{11}{20}$

$x > 5 \Rightarrow F(x) = P(X < x) = P(X=1) + \dots + P(X=5) = 1$

Deci
$$F(x)=\begin{cases} 0; & x\le 1\\ 1/20; & 1<x\le 2\\ 3/20; & 2<x\le 3\\ 11/20; & 3<x\le 4\\ 4/5; & 4<x\le 5\\ 1; & x>5\end{cases}$$



OBS.1 Graficul funcției $F(x)$ este o funcție etajată (în scară)

OBS.2
$$F(x)=\sum_{x_i<x} p_i = \sum_{i<x} p_i$$
$$\begin{cases} x_i < x\\ i < x\end{cases}$$

5. Funcția masă de probabilitate (funcția de frecvență) p.m.f.

Def.
$$\begin{cases} f: X(E)\to\mathbb{R}, \quad X(E)=\{x_i : i\in I\}\\ f(x_i)=p_i=P(X=x_i),\ i\in I.\end{cases}$$

OBS.1
$$X:\begin{pmatrix} x_i\\ p_i\end{pmatrix} \Leftrightarrow X:\begin{pmatrix} x_i\\ f(x_i)\end{pmatrix} \Leftrightarrow f(x_i)$$

OBS.2
$$F(x)=\sum_{x_i<x} f(x_i)$$

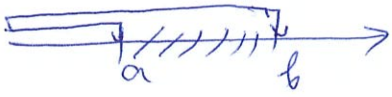
§3. Variabile aleatoare 1D continue

1. Densitate de probabilitate (p.d.f)

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \begin{cases} (i) & f \text{ integrabilă pe } \mathbb{R}\\ (ii) & f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ (iii) & \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1\end{cases}$$

2. Def. O v.a. 1D, X, având funcția de rep. $F(x)$ se numește v.a. 1D continuă dacă $\exists$ p.d.f., $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, a.i. $\begin{cases} F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt,\\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

3. Proprietăți ale v.a. 1D continue



(i) $P(a \le X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$

dem: $P(a \le X < b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$

(ii) $P(X=a) = 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$

(iii) f cont $\Rightarrow F'(x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

OBS. Condiția $P(X=x), \forall x \in \mathbb{R}$ se poate lua ca definiție a v.a. 1D continue.

4. Pdf condiționată

$A \in K, \ P(A) > 0$; $F_A(x) = F(x/A)$ funcția de rep. condiționată (§1.8, p.3)

Funcția $f_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f_A(x) \overset{not}{=} f(x/A)$ se numește pdf condiționată de A dacă

$F(x/A) = \int_{-\infty}^{x} f(t/A)\,dt$

§4. Caracteristici numerice (statistice) ale v.a. 1D (Expected values) → curs pag. 78-89

X v.a. 1D discretă $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$

X v.a. 1D continuă $f(x) \to$ p.d.f(X)

4.1. Valoarea medie (speranța matematică) → (expected value)

$$\begin{cases} M(X) = E(X) = \sum_{i \in I} p_i x_i \\ M(X) = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \end{cases}$$

Proprietăți $M(a) = 0$; $M(aX) = aM(X)$; $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$

$M\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k M(X_k)$; X, Y indep $\Rightarrow M(XY) = M(X)M(Y)$

4.2. Momente de ordin $r \in \mathbb{N}^*$

$$M_r(X) = M(X^r) = \begin{cases} \sum\limits_{i \in I} x_i^r p_i & \text{; v.a. discretă} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\,dx & \text{; v.a. continuă} \end{cases}$$

4.3. Moment centrat de ordin $r \in \mathbb{N}^*$

Fie $Y = X - m$; $m = M(X)$; abaterea v.a. X..

$$\mu_r(X) = M_r(X-m) = \begin{cases} \sum\limits_{i \in I} (x_i - m)^r p_i & \text{; v.a. discretă} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^r f(x)\,dx & \text{; v.a. continuă} \end{cases}$$

4.4. Dispersia (Varianța) engl. „Variance"

def. $D^2(X) = Var(X) = \mu_2(X) = M_2(X-m)$

V.a. discretă: $D^2(X) = \sum\limits_{i \in I} (x_i - m)^2 p_i$

V.a. continuă: $D^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx$

def. Abaterea medie pătratică $\sigma(X) = \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{Var(X)}$

Formula dispersiei
$$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$
$$D^2(X) = M_2(X) - M_1^2(X)$$

Proprietăți
(i) $D^2(a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$
(ii) $D^2(aX+b) = a^2 D^2(X)$; $\forall a, b \in \mathbb{R}$
(iii) $D^2(X) = Var(X) \geq 0$; $\forall$ v.a. X
(iv) X, Y indep. $\Rightarrow \begin{cases} D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y) \\ D^2(aX+bY) = a^2 D^2(X) + b^2 D^2(Y) \end{cases}$

Interpretare statistică: $D^2(X)$ sau $\sigma(X)$ este o măsură privind abaterea valorilor v.a. X de la valoarea medie $m = M(X)$
i.e. împrăștierea valorilor lui X față de m

Exemplu

Fie $X: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2p^2 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & p \end{pmatrix}$ v.a. 1D simplă

(i) $p = ?$; (ii) $M(X) = E(X)$; (iii) $D^2(X) = Var(X)$; (iv) $\sigma(X)$;
(v) $P(\ln 2 < X \leq 2)$; (vi) $F(e)$; (vii) $Mo(X)$; (viii) Entropia $H(X)$

R. (i) $p \in [0,1]$; $2p^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + p = 1 \Longrightarrow 16p^2 + 8p - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p_{1,2} = \frac{-4 \pm 8}{16} \begin{cases} p_1 = -3/4 \notin [0,1] \\ p_2 = \frac{1}{4} \in [0,1] \end{cases} \Longrightarrow p = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow X: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Longrightarrow X^2: \begin{pmatrix} (-1)^2 & 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(ii) $M(X) = E(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i x_i = (-1)\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{13}{8} = 1,625$

(iii) $D^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$ (Maritan = 1,25)

$M(X^2) = 1\cdot\frac{3}{8} + 4\cdot\frac{3}{8} + 9\cdot\frac{1}{4} = \frac{33}{8}$ $\Bigg\} \Rightarrow D^2(X) = \frac{33}{8} - \frac{169}{64} = \frac{264-169}{64} = \frac{95}{64} \simeq 1,49$

(iv) $\sigma(X) = \sqrt{D^2(X)} = \frac{\sqrt{95}}{8} \simeq 1.24$

(v) $P(\underbrace{\ln 2}_{0.7} < X \leq 2) \xlongequal[\ln 2 \simeq 0.7]{} P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

(vi) $F(e) = P(X < e) = P(X=-1) + P(X=1) + P(X=2) = 1 - P(X=3) = \frac{3}{4}$

(vii) $M_o(X) = x_s \Longleftrightarrow p_s = \max\{p_i : i \in I\}$

$\max\{p_i : i \in I\} = \max\{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\} = \frac{3}{8} \Rightarrow \underline{M_o(X) = 2}$

(viii) $H(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 (x_i)^{-1}$; $\underline{H(X) \leq \log_2 n}$

$H(X) = \frac{1}{8}\log_2\left(\frac{1}{8}\right)^{-1} + \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \frac{3}{8}\log_2\left(\frac{3}{8}\right)^{-1} + \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} =$

$= \frac{1}{8}\log_2 8 + \frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{3}{8}\log_2\frac{8}{3} + \frac{1}{4}\log_2 4 = \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{3}{8}(3 - \log_2 3) + \frac{1}{4}\cdot 2 =$

$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{9}{8} - \frac{3}{8}\log_2 3 = \frac{5}{2} - \frac{3}{8}\log_2 3 \leq 2 = \log_2 4.$ $\boxed{H(X) = \frac{1}{8}(20 - 3\log_2 3)}$