Capitolul 4

Semnale aleatoare (Procese aleatoare sau stochastice)

1 Noţiunea generală de semnal. Semnale deterministe şi semnale aleatoare

Din punct de vedere "tehnologic", prin *semnal* se înţelege orice mărime fizică dependentă de timp (mai general şi de frecvenţă, spaţiu sau alte variabile) care poate să transmită informaţie sau este purtătoare de informaţie.

1.1. Definiţia matematică a noţiunii de semnal

Fiind date mulţimile $\mathcal{T}$ (ale cărei elemente se numesc *momente*) şi $\mathcal{M}$, împreună cu o relaţie de ordine totală pe $\mathcal{T}$, prin *semnal* definit pe mulţimea $\mathcal{T}$ (numită şi *mulţime-timp*) cu valori în mulţimea $\mathcal{M}$ se înţelege orice funcţie $x : \mathcal{T} \to \mathcal{M}$, care asociază fiecărui moment $t \in \mathcal{T}$ un element $x(t) \in \mathcal{M}$, numit *eşantionul* semnalului x la momentul t.

De obicei, $\mathcal{T}$ este o submulţime a lui $\mathbb{R}$, înzestrată cu relaţia de ordine totală uzuală " $\leq$ "; asemenea semnale se numesc *semnale unidimensionale* (*1D*); analog se definesc *semnalele bidimensionale* (*2D*, unde $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^2$) sau *tridimensionale* (*3D*, unde $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^3$).

În continuare, ne vom referi la semnalele 1D.

1.2. Semnale continue (continuale) şi semnale discrete

Fie $x : \mathcal{T} \to \mathcal{M}$ un semnal dat.

(i) Dacă $\mathcal{T}$ este o mulţime "continuă" (de exemplu $\mathcal{T}$ este un interval nevid din $\mathbb{R}$ sau o submulţime din $\mathbb{R}$ care conţine intervale nevide), atunci x se numeşte *semnal continual* sau *semnal continuu*; dacă $x(\mathcal{T})$ este, de asemenea, o mulţime "continuă", atunci semnalul continuu x se numeşte *semnal analogic.*

(ii) Dacă $\mathcal{T}$ este o mulţime discretă (i.e. $\mathcal{T}$ este finită sau numărabilă, de exemplu $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ sau $\mathcal{T} = \mathbb{N}^*$ sau $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$), atunci semnalul x se numeşte *semnal discret*; dacă şi $x(\mathcal{T})$ este o mulţime discretă, atunci semnalul discret x se numeşte *semnal digital.*

1.3. Semnale deterministe

Un semnal este determinist dacă valorile sale sunt perfect determinate, situaţie în care se cunoaşte precis evoluţia semnalului (prezent, trecut şi viitor). Aceste semnale se asociază, de obicei, unei formule matematice; de fapt, semnalele deterministe reprezintă o "idealizare" matematică, absolut necesară studiului semnalelor aleatoare. Clasa cea mai generală a semnalelor deterministe (care cuprinse semnalele uzuale, continue şi discrete, împreună cu impulsurile) este spaţiul $\mathcal{S}'$ al distribuţiilor temperate, [17].

1.4. Semnale aleatoare

Fie $(E, \mathcal{K}, P)$ un câmp borelian de probabilitate şi $\mathcal{H}$ mulţimea variabilelor aleatoare asociate acestui câmp.

(i) Definiţie. Se numeşte *semnal aleator* sau *proces aleator (stochastic)* asociat câmpului $(E, \mathcal{K}, P)$ orice funcţie $X : \mathcal{T} \to \mathcal{H}$.

Aşadar un semnal aleator (proces aleator sau stochastic) asociază fiecărui moment-timp $t \in \mathcal{T}$ o variabilă aleatoare $X_t = X(t) : E \to \mathbb{R}$ din $\mathcal{H}$ astfel încât:

$$\omega \in E \mapsto X_t(\omega) = X(t; \omega) \in \mathbb{R}.$$

Să remarcăm, de asemenea, că o variabilă aleatoare $Y \in \mathcal{H}$ poate fi privită ca un semnal (proces) aleator "constant", i.e. $X : \mathcal{T} \to \mathcal{H}$, $X(t) = Y$, $\forall\, t \in \mathcal{T}$, ceea ce arată că noţiunea de semnal (proces) aleator reprezintă o extindere consistentă a noţiunii de variabilă aleatoare.

(ii) Notaţii. Se notează $X = \{X_t : t \in \mathcal{T}\} = \{X(t) : t \in \mathcal{T}\}$. Astfel un semnal aleator (proces aleator sau stochastic) poate fi privit (conceput) ca o familie de variabile aleatoare $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$, $X_t : E \to \mathbb{R}$, indexată după momentele-timp $t \in \mathbb{R}$. Să remarcăm de asemenea că, în acest capitol, X reprezintă semnalul (procesul) aleator în ansamblu (ca *funcţie* definită pe $\mathcal{T}$ cu valori în $\mathcal{H}$), iar X_t sau $X(t)$ reprezintă variabile aleatoare (în sensul definiţiei din Capitolul 1).

Mulţimea semnalelor (proceselor) aleatoare se notează S_a.

(iii) Clasificare. Fie $X : \mathcal{T} \to \mathcal{H}$ un proces (semnal) aleator sau stochastic.

Dacă mulţimea-timp $\mathcal{T}$ este o mulţime "continuă", atunci semnalul aleator continual X (în sensul secţiunii 1.2) se numeşte *proces (semnal) aleator cu parametru continuu.* Dacă $\mathcal{T}$ este o mulţime discretă, atunci semnalul (procesul) discret X se numeşte *proces (semnal) aleator cu parametru discret* sau *lanţ de variabile aleatoare* (ultima denumire este utilizată în mod preponderent).

1.5. Traiectoria unui semnal aleator

(i) Definiţie. Fie $X \in S_a$ dat şi $\omega \in E$ fixat. Semnalul determinist $X_\omega : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, $X_\omega(t) = X_t(\omega)$, $\forall\, t \in \mathcal{T}$, se numeşte *traiectorie* (*realizare* sau *selecţie*) a semnalului aleator X relativ la ω.

(ii) Observaţie. Din definiţia anterioară, deducem că un semnal aleator $X \in S_a$ poate fi privit şi ca o familie $\{X_\omega : \omega \in E\}$ de semnale deterministe, ceea ce arată, iarăşi, că semnalele aleatoare constituie o extindere sensibilă a semnalelor deterministe.

(iii) Eşantioanele unei traiectorii. Fie $N \in \mathbb{N}^*$ dat şi X_{ω_1}, $X_{\omega_2}, \ldots, X_{\omega_N}$ traiectorii (selecţii) fixate ale unui semnal aleator X. Pentru fiecare moment $\tau \in \mathcal{T}$, valorile $X_\tau(\omega_i)$, $1 \leq i \leq N$ se numesc *eşantioanele selecţiei (traiectoriei) la momentul* τ.

1.6. Funcţia de repartiţie asociată unui semnal aleator

Fie $X \in S_a$, $s \in \mathbb{N}^*$ şi $t_1, t_2, \ldots, t_s \in \mathcal{T}$ date. Funcţia $F_X : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = P(X(t_1) < x_1; X(t_2) < x_2; \ldots; X(t_s) < x_s),$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s$, se numeşte *funcţia de repartiţie (comună)* asociată semnalului aleator X la momentele $t_1, t_2, \ldots, t_s$ sau variabilelor aleatoare $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_s)$.

1.7. Exemple de semnale (procese) aleatoare

- **Polinoame aleatoare**

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ dat, $Y_k : E \to \mathbb{C}$, $0 \leq k \leq n$, variabile aleatoare date şi $f_k : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$, $0 \leq k \leq n$, semnale deterministe. Definim semnalul (procesul aleator) $X : \mathcal{T} \to \mathcal{H}$, $t \mapsto X_t$, unde

$$X_t(\omega) = \sum_{k=0}^{n} Y_k(\omega) f_k(t), \quad \omega \in E.$$

Identificăm, drept cazuri particulare în clasa de semnale aleatoare astfel definite, *polinoamele algebrice aleatoare*

$$P_n(t; \omega) = \sum_{k=0}^{n} Y_k(\omega) t^k$$

şi *polinoamele trigonometrice aleatoare*

$$T_n(t;\omega) = \frac{Y_0(\omega)}{2} + \sum_{k=1}^{n}[Y_k(\omega)\cos(kt) + Z_k(\omega)\sin(kt)].$$

Dacă $f : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ este un semnal determinist dat şi luăm $f_0 = f$, $f_k = 0$, $1 \le k \le n$ în expresia polinomului algebric aleator, obţinem $X_t(\omega) = f(t)$, $\forall\, \omega \in E$, deci *orice semnal determinist este un semnal aleator cu o singură traiectorie (selecţie).*

- **Semnalul aleator sinusoidal**

Fie A, α şi φ v.a. independente astfel încât $A \ge 0$, $\alpha \ge 0$, A şi α au repartiţie probabilistică comună, iar φ urmează o lege probabilistică uniformă pe $[0, 2\pi]$. Semnalul aleator $X : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$,

$$X(t) = A\sin(\alpha t + \varphi), \quad t \in \mathbb{R},$$

se numeşte *semnal aleator sinusoidal.* Traiectoriile sale sunt semnale sinusoidale uzuale.

- **Semnalul aleator gaussian**

Este un semnal (proces) aleator $X : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ cu proprietatea că $\forall\, t_1, t_2, \ldots, t_s \in \mathbb{R}$ vectorul aleator nD $V = (X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_s))$ urmează o lege de tip Gauss (§A2, Capitolul 3).

- **Semnalul aleator fără memorie**

Este un semnal aleator $X : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ cu proprietatea că pentru orice $\tau \in \mathbb{R}$ fixat, "viitorul" $(t > \tau)$ nu depinde de nici un "trecut" $(t < \tau)$ nici de "prezent" $(t = \tau)$.

În cazul unui semnal aleator discret $X : \mathbb{N} \to \mathcal{H}$, adică în cazul unui lanţ de v.a. $(X_n)_{n\ge 0}$, aceasta înseamnă că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi pentru orice valori (numite "stări") $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_k, s_{k+1}$ din $\mathbb{R}$ are loc egalitatea

$$P(X_{k+1} = s_{k+1}/X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_k = s_k) = P(X_{k+1} = s_{k+1}).$$

Remarcăm că un lanţ $(X_n)_{n\ge 0}$ de v.a. independente este un lanţ (semnal aleator) fără memorie.

- **Semnalul aleator markovian**

Este un semnal aleator $X : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ cu proprietatea că pentru orice $\tau \in \mathbb{R}$ fixat, viitorul $(t > \tau)$ depinde de "trecut" $(t \leq \tau)$ doar prin "prezent" $(t = \tau)$. Mai precis:

(i) Un şir de v.a. $(X_n)_{n\geq 0}$ se numeşte *lanţ Markov* dacă $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\forall\ \{s_0, s_1, \ldots, s_k\} \subseteq \mathbb{R}$ are loc egalitatea

$$P(X_{k+1} = s_{k+1}/X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_k = s_k) = P(X_{k+1} = s_{k+1}/X_k = x_k);$$

în acest caz, prezentul este $\tau = k$.

(ii) Un semnal aleator continuu $X : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ se numeşte *semnal aleator de tip Markov* dacă pentru orice şir de momente-timp $t_1 < t_2 < \ldots, t_3 < \ldots$ (din $\mathbb{R}$), şirul $(X(t_n))_{n\geq 1}$ este un lanţ Markov.

Lanţurile Markov vor fi studiate în paragraful următor.

2 Lanţuri Markov

2.1. Preliminarii. Sisteme de tip Markov

Noţiunea matematică de *lanţ Markov* a apărut în urma studierii unor probleme practice de tipul următor.

Să examinăm un sistem (fizic, tehnic, economic, biologic, social) la momente discrete de timp $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$. Presupunem că la fiecare moment k sistemul se poate afla în una din stările $s_1, s_2, \ldots, s_n$; punem $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, uneori $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Notăm cu X_k sau $X(k)$ variabila aleatoare care descrie starea sistemului la momentul k şi admitem că *evoluţia* sistemului este *probabilistică* sau *stochastică*, ceea ce înseamnă că, deşi se cunosc stările $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_k$ ale sistemului până la momentul k inclusiv, evoluţia sa viitoare, în particular starea X_{k+1} este cunoscută doar în termeni probabilistici (adică se poate determina probabilitatea cu care $X(k+1)$ ia o anumită valoare din S). În principiu, admitem că se cunosc probabilităţile

$$P(X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_k = s_k),\ \forall\ k \in \mathbb{N},\ \forall\ s_0, s_1, \ldots, s_k \in S$$

şi se pune problema calculării probabilităţilor condiţionate de tipul

$$P(X_{k+1} = s_{k=1}/X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_k = s_k).$$

Dacă $P(X_{k+1} = s_{k+1}/X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_k = s_k) = P(X_{k+1} = s_{k+1})$, atunci sistemul considerat este un *sistem fără memorie.*

Dacă $P(X_{k+1} = s_{k+1}/X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_a = s_a) = P(X_{k+1} = s_{k+1}/X_k = s_k)$, ceea ce înseamnă că pentru a cunoaşte "trecutul" sistemului este suficient să cunoaştem starea sa din momentul efectuării ultimei observaţii, iar modul în care sistemul a ajuns în această stare nu are importanţă, atunci sistemul considerat se numeşte *sistem de tip Markov* (sau *sistem markovian*).

În continuare vom considera două exemple de sisteme markoviene.

Exemplul 1. Mersul aleator (Mersul la întâmplare)

Se consideră o particulă care la un moment dat se află într-un punct $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ al segmentului $[0, n]$; fie $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$. Presupunem că la momentul $k = 0$, particula se află în poziţia $s_0 \in S$. Dacă la momentul $k \in \mathbb{N}$, particula se află în poziţia s_k, atunci la momentul $(k+1)$ particula se află într-o poziţie descrisă astfel:

- în poziţia s_k, cu probabilitatea r_{s_k}, $0 \le s_k \le n$
- în poziţia $s_k + 1$, cu probabilitatea p_{s_k}, $0 \le s_k \le n-1$
- în poziţia $s_k - 1$, cu probabilitatea q_{s_k}, $1 \le s_k \le n$.

Au loc relaţiile $r_{s_k} + p_{s_k} + q_{s_k} = 1$; $1 \le s_k \le n-1$; $r_0 + p_0 = 1$; $q_n + p_n = 1$.

Putem să fixăm datele descrise mai sus prin următoarea matrice pătratică de ordin $(n+1)$:

$$\begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q_{n-1} & r_{n-1} & p_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & q_n & r_n \end{pmatrix}$$

Notând cu X_k v.a. care reprezintă poziţia particulei la momentul k, rezultă

$$P(X_{k+1} = s_{k+1}/X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_k = s_k) = P(X_{k+1} = s_{k+1}/X_k = s_k),$$

deci modelul (sistemul) fizic descris este de tip markovian.

Asemenea modele descriu mişcarea browniană într-un mediu fluid, descompusă după diferite direcţii.

Deseori, modelul mersului aleator este asociat cu aşa-numitul "*mers al beţivului*" (luând, eventual, $r_k = 0$, $0 \leq k \leq n$).

Există două modele celebre ale unor fenomene fizice care reprezintă mersuri aleatoare şi care au fost concepute fără nici o legătură cu sistemele de tip Markov: *modelul lui Daniel Bernoulli* (1769) care descrie difuzia a două lichide incompresibile între două containere şi *modelul Ehrenfest* (1907), propus de soţii Tatiana şi Paul Ehrenfest, pe care îl prezentăm mai departe.

Exemplul 2. Modelul Ehrenfest

Acest model descrie schimbul de căldură între două câmpuri izolate având temperaturi diferite. Temperaturile sunt reprezentate prin numere asociate unor bile situate în două urne care conţin în total $2N$ bile, $N \in \mathbb{N}^*$, numerotate de la 1 la $2N$.

La momentul $k = 0$, prima urnă conţine m bile, iar a doua urnă $2N - m$ bile, $m \in \mathbb{N}$. La fiecare moment $k \geq 1$, se alege în mod aleator un număr întreg situat între 1 şi $2N$ (valori presupuse echiprobabile), iar bila cu acest număr este mutată din urna în care se află în cealaltă urnă. Fie X_k variabila aleatoare care reprezintă numărul de bile aflate în prima urnă, după schimbul efectuat la momentul k (X_k descrie temperatura primului corp). Avem $X_0 = m$ şi $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 2N\}$. Mai departe schimbul de căldură se descrie astfel:

- dacă $X_k = 0$, atunci $P(X_{k+1} = 1) = 1$ şi $P(X_{k+1} \in S \setminus \{1\}) = 0$
- dacă $X_k = s_k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2N-1\}$, atunci $P(X_{k+1} = s_k + 1) = \dfrac{2N - s_k}{2N}$;

$$P(X_{k+1} = s_k - 1) = \frac{s_k}{2N} \quad \text{şi} \quad P(X_{k+1} \in S \setminus \{s_k - 1, s_k + 1\}) = 0.$$

- dacă $X_k = 2N$, atunci $P(X_{k+1} = 2N-1) = 1$ şi $P(X_{k+1} \in S \setminus \{2N-1\}) = 0$.

Ataşăm modelului Ehrenfest următoarea matrice pătratică de ordin $2N+1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2N} & 0 & \frac{2N-1}{2N} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{2N} & 0 & \frac{2N-2}{2N} & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{2N-1}{2N} & 0 & \frac{1}{2N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observăm că

$$P(X_{k+1} = s_{k+1}/X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_k = s_k) = P(X_{k+1} = s_{k+1}/X_k = s_k),$$

deci modelul Ehrenfest corespunde unui sistem de tip Markov.

2.2. Matrice stochastică. Vector de probabilitate

- Un vector $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ se numeşte *vector de probabilitate* dacă $p_i \geq 0$, $\forall\, i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ şi $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.
- O matrice $\Pi = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte *matrice stochastică* dacă fiecare linie a sa este un vector de probabilitate, i.e.

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \ \forall\, i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \text{ şi } p_{ij} \geq 0, \ \forall\, i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

- O matrice $\Pi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte *matrice dublu stochastică* dacă toate liniile şi coloanele sale sunt vectori de probabilitate, i.e. Π şi Π^T sunt matrice stochastice.
- *Exemple.* Matricea

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

este o matrice stochastică dar *nu* este dublu stochastică. Matricea

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\ 3/8 & 1/4 & 1/8 & 1/4 \\ 1/8 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

este o matrice dublu stochastică.

De asemenea matricea unitate $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, i.e. matricea care are 1 pe diagonala principală şi 0 în rest, este o matrice dublu stochastică.

- **Proprietăţi ale matricelor stochastice**

Reamintim că dacă $A = (a_{ij})$ este o matrice pătratică de ordin n, numerele $\lambda \in \mathbb{C}$, care verifică egalitatea $Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)v = 0$, cu $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, se numesc *valori proprii* ale matricei A. Dacă $\lambda = \lambda_k$ este valoare proprie a matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci orice vector $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ care verifică egalitatea $(A - \lambda_k I_n)v = 0$ se numeşte *vector propriu* asociat valorii proprii λ_k. Se ştie că ecuaţia algebrică care furnizează valorile proprii ale matricei A este

$$\det(A - \lambda I_n) = 0, \text{ i.e. } \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Mai departe, listăm principalele proprietăţi ale matricelor stochastice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) Orice matrice stochastică are valoarea proprie $\lambda = 1$, iar un vector propriu asociat este $v = (1, 1, 1, \dots, 1)^T$.

(ii) Dacă A, B sunt matrice stochastice, atunci $A \cdot B$ este o matrice stochastică.

(iii) Dacă A este o matrice stochastică, atunci şi A^k este o matrice stochastică, $\forall\, k \geq 1$.

(iv) Dacă A este o matrice stochastică, atunci A^T are valoarea proprie $\lambda = 1$ (dar nu are, în general, vectorul propriu $(1, 1, 1, \dots, 1)^T$).

(v) Dacă A este o matrice dublu stochastică, atunci A^T este, de asemenea, o matrice dublu stochastică (deci $\lambda = 1$ şi $(1,1,1,\ldots,1)^T$ sunt valoare proprie, respectiv vector propriu, atât pentru A cât şi pentru A^T).

(vi) Orice valoare proprie λ a unei matrice stochastice verifică inegalitatea $|\lambda| \leq 1$.

(vii) *Exemplu.* Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Matricea A este stochastică, dar *nu* este dublu stochastică.

Valorile proprii rezultă din ecuaţia

$$\begin{vmatrix} (1/2)-\lambda & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1/6 & 1/3 & (1/2)-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-\lambda)\left[\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right] = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}.$$

Vectori proprii. Pentru $\lambda_1 = 1$, obţinem $v_1 = (1,1,1)^T$.

Pentru $\lambda_2 = 1/3$ ecuaţia

$$Av = \frac{1}{3}v \Leftrightarrow (A - \lambda I_3)v = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 0 \\ \frac{2}{3}x_2 = 0 \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 0 \end{cases}$$

are soluţiile $x_1 = \alpha$, $x_2 = 0$, $x_3 = -\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Luând $\alpha = 1$, obţinem vectorul propriu $v_2 = (1,0,-1)^T$.

Pentru $\lambda_2 = 2/3$ obţinem similar $v_3 = (1,0,1)^T$.

Rezultă matricea de pasaj

$$C = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

deci

$$A = CDC^{-1},$$

unde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

De aici $A^n = CD^nC^{-1}$ şi din

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

obţinem

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 3^{1-n} & 1 - 2 \cdot 3^{-n} & \frac{1}{2} \cdot 3^{-n} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 3^{-n} & 1 - 2 \cdot 3^{-n} & \frac{1}{2} \cdot 3^{1-n} \end{pmatrix}.$$

2.3. Noţiunea de lanţ Markov

Se consideră următoarele date:

- o mulţime $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, notată uzual $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, ale cărei elemente se numesc *stări*
- un vector de probabilitate

$$p^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) = (p_1(0), p_2(0), \ldots, p_n(0)),$$

ale cărui componente se numesc *probabilităţi iniţiale*

- o matrice stochastică Π, ale cărei elemente p_{ij} se numesc *probabilităţi de trecere* sau *probabilităţi de tranziţie*; matrice Π însăşi se numeşte *matrice de trecere* sau *matrice de tranziţie*, uneori *matrice de pasaj.*

2.3.1. Definiţie. Se numeşte *lanţ Markov* având mulţimea stărilor S un semnal aleator discret (şir de variabile aleatoare) cu valori în S, semnal (şir) notat $(X_k)_{k\geq 0}$ sau $(X(k))_{k\geq 0}$, având următoarea proprietate:
$\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\forall\, s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{k+1} \in S$ are loc egalitatea

$$P(X_{k+1} = s_{k+1}/X_k = s_k, X_{k-1} = s_{k-1}, \ldots, X_0 = s_0)$$

$$= P(X_{k+1} = s_{k+1}/X_k = s_k).$$

- Un sistem (fizic, tehnic, economic, biologic, social) a cărui evoluţie este generată (modelată) de un lanţ Markov se numeşte *sistem markovian.*
- Numărul $P(X_{k+1} = s_{k+1}/X_k = s_k)$ se numeşte *probabilitatea de trecere* de la starea s_k la starea s_{k+1} după un pas, de la momentul k la momentul $k+1$.

2.3.2. Observaţie. Din Definiţia 2.3.1 rezultă că stările anterioare $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}$ (la momentele $t < k$) stării prezente s_k (la momentul $t = k$) influenţează starea sistemului markovian s_{k+1} (la momentul următor $t = k+1$) doar prin starea prezentă s_k (la momentul prezent $t = k$). Într-o formulare liberă, mai puţin riguroasă ştiinţific, dar mai expresivă, se spune că, trecutul unui sistem markovian este condensat (înglobat, rezumat) în starea sa corespunzătoare ultimei observaţii sau că *un sistem markovian păstrează din trecutul său amintirea cea mai recentă.*

2.4. Noţiunea de lanţ Markov omogen (staţionar în timp)

Se consideră tripletul $(S, p^{(0)}, \Pi)$ introdus în secţiunea anterioară (secţiunea 2.3).

2.4.1. Definiţie. Se numeşte *lanţ Markov omogen sau staţionar în timp* asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$ un semnal aleator discret (şir de v.a. discrete), notat $(X_k)_{k\geq 0}$ sau $(X(k))_{k\geq 0}$ având următoarele proprietăţi:

1°. $P(X_0 = 1) = p_1^{(0)}$, $P(X_0 = 2) = p_2^{(0)}, \ldots, P(X_0 = n) = p_n^{(0)}$

2°. $\forall\, i,j \in S$, $\forall\, k \geq 0$ avem $P(X_{k+1} = j/X_k = i) = p_{ij}$, deci $\forall\, i,j \in S$ probabilitatea de trecere din starea i (la momentul $t = k$) în starea j (la momentul $t = k+1$) este *aceeaşi* pentru orice moment $k \geq 0$.

3°. $\forall\, k \geq 0$, $\forall\, s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{k+1} \in S$ are loc egalitatea:

$$P(X_{k+1} = s_{k+1}/X_k = s_k, X_{k-1} = s_{k-1}, \ldots, X_0 = s_0)$$

$$= P(X_{k+1} = s_{k+1}/X_k = s_k) \overset{not}{=\!=} p_{s_k, s_{k+1}}.$$

- Vectorul de probabilitate $p^0 = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)})$ se numeşte *repartiţia iniţială* a lanţului Markov $(X_k)_{k\geq 0}$.

2.4.2. Convenţie. În cele ce urmează, fără a mai specifica explicit întotdeauna, vom lua în considerare doar lanţuri Markov omogene.

2.4.3. Exemplu. Matricele descrise la Exemplul 1 şi Exemplul 2 din secţiunea 2.1 reprezintă matricele de trecere ale lanţurilor Markov asociate. Astfel, pentru Modelul Ehrenfest (Exemplul 2) avem:

- $p_{0j} = P(X_{k+1} = j/X_k = 0) = \begin{cases} 1, & j = 1 \\ 0, & j \neq 1 \end{cases}$
- $p_{ij} = P(X_{k+1} = j/X_k = i) = \begin{cases} \dfrac{2N-i}{2N}, & j = i+1,\ 1 \leq i \leq 2N-1 \\ \dfrac{i}{2N}, & j = i-1 \\ 0, & j \in S \setminus \{i-1, i+1\} \end{cases}$
- $p_{2N,j} = P(X_{k+1} = j/X_k = 2N) = \begin{cases} 1, & j = 2N-1 \\ 0, & j \neq 2N-1 \end{cases}$

Utilizând impulsul lui Dirac $\delta_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, vezi Anexa 3, obţinem: pentru $p_{ij} = P(X_{k+1} = j/X_k = i)$:

- $p_{0j} = \delta_1(j) = \delta(j-1)$, dacă $0 \leq j \leq 2N$
- $p_{ij} = \left(1 - \dfrac{i}{2N}\right)\delta_{i+1}(j) + \dfrac{i}{2N}\delta_{i-1}(j)$

$$= \left(1 - \frac{i}{2N}\right)\delta(j-i-1) + \frac{i}{2N}\delta(j-1+i);$$

dacă $1 \leq i \leq 2N-1$, $0 \leq j \leq 2N$

- $p_{2N,j} = \delta_{2N-1}(j) = \delta(j - 2N + 1)$, dacă $0 \leq j \leq 2N$.

2.4.4. Graful de trecere asociat unui lanţ Markov

Matricea de trecere Π poate fi înlocuită cu un *graf de trecere*, numit şi *diagramă de trecere* astfel: nodurile grafului sunt elementele mulţimii S, iar un arc arbitrar (s_i, s_j) reprezintă trecerea de la starea s_i (la momentul $t = k$) la starea s_j (la momentul $t = k + 1$), iar probabilitatea de trecere se înscrie pe arcul respectiv (arcul se omite dacă probabilitatea de trecere este nulă). Astfel, pentru matricea

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

avem graful de trecere descris în Fig.2.4.4.

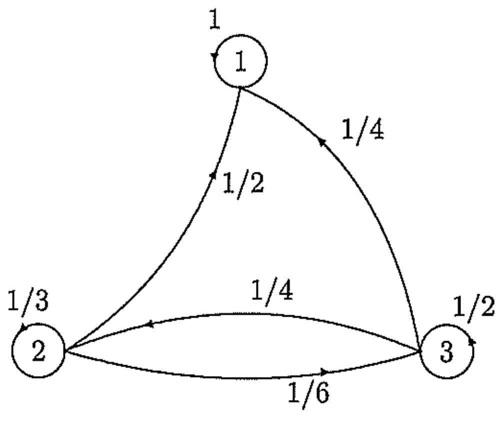

Fig.2.4.4.

2.4.5. Calculul unor probabilităţi condiţionate asociate unui lanţ Markov

Utilizând repartiţia iniţială $p^{(0)}$ şi matricea de trecere $\Pi = (p_{ij})$ aferente unui lanţ Markov omogen $(X_k)_{k\geq 0}$, se pot calcula diverse probabilităţi condiţionate. Iată un exemplu:

$$P(X_9 = \alpha, X_8 = d, X_7 = c, X_6 = b / X_5 = a)$$

$$= \frac{P(X_9 = \alpha, X_8 = d, X_7 = c, X_6 = b, X_5 = a)}{P(X_5 = a)}$$

$$= \frac{P(X_6 = b, X_5 = a)}{P(X_5 = a)} \cdot \frac{P(X_7 = c, X_6 = b, X_5 = a)}{P(X_6 = b, X_5 = a)}$$

$$\cdot \frac{P(X_8 = d, X_7 = c, X_6 = b, X_5 = a)}{P(X_7 = c, X_6 = b, X_5 = a)}$$

$$\cdot \frac{P(X_9 = \alpha, X_8 = d, X_7 = c, X_6 = b, X_5 = a)}{P(X_8 = d, X_7 = c, X_6 = b, X_5 = a)}$$

$$= P(X_6 = 6/X_5 = a) \cdot P(X_7 = c/X_6 = b, X_5 = a)$$

$$\cdot P(X_8 = d/X_7 = c, X_6 = b, X_5 = a)$$

$$\cdot P(X_9 = \alpha/X_8 = d, X_7 = c, X_6 = b, X_5 = a)$$

$$= p_{ab} \cdot P(X_7 = c/X_6 = b) \cdot P(X_8 = d/X_7 = c) \cdot P(X_9 = \alpha/X_8 = d)$$

$$= p_{ab} \cdot p_{bc} \cdot p_{cd} \cdot p_{d\alpha}$$

2.5. Relaţiile Chapman-Kolmogorov

Să considerăm un lanţ Markov (omogen) asociat tripletului (S, p^0, Π). Matricea de trecere Π caracterizează schimbările de stare ale lanţului Markov după un singur pas. Ne propunem să determinăm probabilităţile schimbărilor de stare după $m \geq 2$ paşi.

2.5.1. Matricea probabilităţilor de trecere după m paşi

Fie $(X_k)_{k\geq 0}$ un lanţ Markov asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$ şi m un număr natural nenul.

Puterea m a matricei de trecere Π are elementele

$$p_{ij}^{(m)} = p(m, i, j) = P(X_{k+m} = j/X_k = i),$$

numite **probabilităţile de trecere după m paşi, din starea i în starea j**, *i.e.*

$$\Pi^m = (p_{ij}^{(m)})_{1\leq i,j\leq n}, \ \forall\, m \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstraţie. Pentru $m = 2$, obţinem succesiv:

$$p_{ij}^{(2)} = P(X_{k+2} = j/X_k = i) = \sum_{s=1}^{n} P(X_{k+2} = j, X_{k+1} = s/X_k = i)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \frac{P(X_{k+2} = j, X_{k+1} = s, X_k = i)}{P(X_k = i)}$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \frac{P(X_{k+1} = s, X_k = i)}{P(X_k = i)} \cdot \frac{P(X_{k+2} = j, X_{k+1} = s, X_k = i)}{P(X_{k+1} = s, X_k = i)}$$

$$= \sum_{s=1}^{n} P(X_{k+1} = s/X_k = i) \cdot P(X_{k+2} = j/X_{k+1} = s, X_k = i)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} P(X_{k+1} = s/X_k = i) \cdot P(X_{k+2} = j/X_{k+1} = s) = \sum_{s=1}^{n} p_{is} \cdot p_{sj},$$

ceea ce arată că $p_{ij}^{(2)}$ sunt elementele matricei $P \cdot P = P^2$. Pentru $m \geq 2$ se procedează prin metoda inducţiei matematice, adoptând notaţia $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ şi convenţia

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_j(i) = \delta(i - j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

2.5.2. Relaţiile (ecuaţiile) Chapman-Kolmogorov

Utilizând relaţia matriceală $\Pi^{m+s} = \Pi^m \cdot \Pi^s$ obţinem în acord cu notaţiile şi rezultatele din secţiunea 2.5.1:

$$p_{ij}^{(m+s)} = \sum_{r=1}^{n} p_{ir}^{(m)} p_{rj}^{(s)}, \ \forall\, i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}, \ \forall\, m, s \geq 1.$$

Aceste egalităţi constituie *relaţiile (ecuaţiile) Chapman-Kolmogorov* asociate lanţului Markov descris în secţiunea 2.5.1.

2.5.3. Exemple

(i) $P(X_{19} = j/X_{10} = i) = p_{ij}^{(9)}$

(ii) $P(X_{20} = d, X_{10} = c, X_8 = b/X_7 = a)$

$$= \frac{P(X_{20} = d, X_{10} = c, X_8 = b, X_7 = a)}{P(X_7 = a)}$$

$$= \frac{P(X_8 = b, X_7 = a)}{P(X_7 = a)} \cdot \frac{P(X_{10} = c, X_8 = b, X_7 = a)}{P(X_8 = b, X_7 = a)}$$
$$\cdot \frac{P(X_{20} = d, X_{10} = c, X_8 = b, X_7 = a)}{P(X_{10} = c, X_8 = b, X_7 = a)}$$
$$= P(X_8 = b/X_7 = a) \cdot P(X_{10} = c/X_8 = b, X_7 = a)$$
$$\cdot P(X_{20} = d/X_{10} = c, X_8 = b, X_7 = a)$$
$$= P(X_8 = b/X_7 = a) \cdot P(X_{10} = c/X_8 = b) \cdot P(X_{20} = d/X_{10} = c)$$
$$= p_{ab}^{(1)} \cdot p_{bc}^{(2)} \cdot p_{cd}^{(10)}.$$

(iii) În general, dacă $m_1 > m_2 > \cdots > m_r > m_{r+1}$, obţinem:

$$P(X_{k+m_1} = s_1, X_{k+m_2} = s_2, \ldots, X_{k+m_r} = s_r / X_{k+m_{r+1}} = s_{r+1})$$
$$= p_{s_{r+1},s_r}^{(m_r - m_{r+1})} \cdot p_{s_r,s_{r-1}}^{(m_{r-1} - m_r)} \cdots p_{s_3,s_2}^{(m_2 - m_3)} \cdot p_{s_2,s_1}^{(m_1 - m_2)}.$$

2.6. Clasificarea stărilor unui lanţ Markov

Se consideră un lanţ Markov omogen asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$.

2.6.1. Se spune că starea j este *accesibilă* din starea i dacă $\exists\ m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $p_{ij}^{(m)} > 0$. Se notează $i \longrightarrow j$ şi se observă că relaţia "$i \longrightarrow j$" este tranzitivă.

2.6.2. Stările i şi j *comunică* dacă $i \longrightarrow j$ şi $j \longrightarrow i$; se notează $i \leftrightarrow j$.

2.6.3. Starea i este *reflexivă* dacă $i \longrightarrow i$.

Observaţie. Starea i este nereflexivă dacă $p_{ii}^{(m)} = 0$, $\forall\ m \geq 0$.

2.6.4. Starea i este *absorbantă* dacă $p_{ii} = 1$ (caz particular de stare reflexivă).

2.6.5. Relaţia de comunicare $i \leftrightarrow j$ este *relaţie de echivalenţă în mulţimea stărilor reflexive din S*. Astfel, mulţimea stărilor reflexive se împarte în clase corespunzătoare relaţiei de echivalenţă " $\leftrightarrow$ ". Admitem, de asemenea, că orice stare nereflexivă este, ea însăşi, o clasă.

2.6.6. Fie i o stare reflexivă. Numărul $d_i = cmmdc\{m \geq 1 : p_{ii}^{(m)} > 0\}$ se numeşte *perioadă* a stării i. Dacă $d_i \geq 2$, atunci starea i se numeşte *periodică*, iar dacă $d_{ii} = 1$ starea i este neperiodică.

2.7. Probabilităţi absolute

Fie $(X_k)_{k\geq 0}$ un lanţ Markov omogen asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$.

2.7.1. Definiţie

- Numerele $p_i^{(k)} = p_k(i) = P(X_k = i)$, $k \geq 0$, $i \in S$ se numesc *probabilităţi absolute* asociate lanţului Markov $(X_k)_{k\geq 0}$.
- Vectorul de probabilitate $p^{(k)} = p(k) = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)})$ se numeşte *repartiţie de probabilitate a lanţului Markov* la momentul $k \geq 0$. Din punct de vedere probabilistic, $p^{(k)}$ descrie starea sistemului markovian la momentul $t = k$.

2.7.2. Determinarea repartiţiei de probabilitate a unui lanţ Markov

Are loc egalitatea:

$$p^{(k)} = p^{(0)} \cdot \Pi^k$$

sau, în formă echivalentă,

$$(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}) = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}) \cdot \Pi^k, \ \forall\ k \geq 0;$$

(convenim $\Pi^0 = I_n$).

Demonstraţie. $p_i^{(k)} = P(X_k = i) = \sum_{s=1}^{n} P(X_k = i, X_0 = s)$

$$= \sum_{s=1}^{n} P(X_0 = s) \cdot P(X_k = i / X_0 = s) = \sum_{s=1}^{n} p_s^{(0)} \cdot p_{si}^{(k)}, \ \forall\ k \geq 1, \ \forall\ i \in S.$$

Matriceal, obţinem:

$$(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}) = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}) \cdot \begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & \dots & p_{1n}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & \dots & p_{2n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}^{(k)} & p_{n2}^{(k)} & \dots & p_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Observaţie. Formula de mai sus permite calculul probabilităţii ca un sistem markovian să se afle la momentul k în starea i, $\forall\ k \geq 1$, $\forall\ i \in S$.

$$p_i^{(k)} = P(X_k = i) = \left(p^{(0)} \cdot \Pi^k\right)_{\text{coloana } i}$$

2.8. Lanţuri Markov regulate

2.8.1. Definiţii

- O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte *matrice regulată* dacă A este stochastică şi există $m \geq 1$ astfel încât toate elementele matricei A^m sunt pozitive.
- Un *lanţ Markov* asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$ este *regulat* dacă matricea sa de trecere Π este o matrice regulată.

2.8.2. Proprietăţi ale matricelor regulate

- Dacă matricea A este regulată, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.
- Dacă A este o matrice regulată şi $B = \lim\limits_{n\to\infty} A^n$, atunci B este o matrice stochastică şi are toate liniile identice.

2.8.3. Exemplu. Matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

este o matrice regulată. Similar cu exemplul din secţiunea 2.2, obţinem valorile proprii $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{3}$, $\lambda_3 = \dfrac{1}{6}$ şi vectorii proprii $v_1 = (1,1,1)^T$, $v_2 = (1,0,-1)^T$, $v_3 = (2,3,-2)^T$. Astfel $A = CDC^{-1}$, unde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix},$$

deci

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{-n} \end{pmatrix}.$$

Mai departe $A^n = CD^nC^{-1}$ şi

$$B = \lim_{n\to\infty} CD^nC^{-1} = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

2.8.4. Teoremă. Dacă lanţul Markov asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$ este regulat, atunci există limita şirului $(p^{(k)})_{k\geq 0}$ al repartiţiilor de probabilitate ale lanţului.

2.9. Repartiţia limită a unui lanţ Markov regulat

2.9.1. Definiţie. Presupunem că lanţul Markov asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$ este regulat şi fie $p^* = \lim\limits_{k\to\infty} p^{(k)}$. Vectorul $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*)$ se numeşte *repartiţia limită* a lanţului Markov $(S, p^{(0)}, \Pi)$.

Observaţii

- Vectorul p^* există în conformitate cu Teorema 2.8.4.
- Egalitatea $p^* = \lim\limits_{n\to\infty} p^{(k)}$ înseamnă $p_i^* = \lim\limits_{k\to\infty} p_i^{(k)}$, $1 \leq i \leq n$.
- Vectorul p^* nu depinde de repartiţia iniţială $p^{(0)}$, ci numai de matricea de tranziţie Π.
- Noţiunea de repartiţie limită se poate ataşa oricărui lanţ Markov pentru care există $p^* = \lim\limits_{k\to\infty} p^{(k)}$.

2.9.2. Teoremă. Repartiţia limită p^* este un vector de probabilitate, iar $(p^*)^T$ este unicul vector propriu al matricei Π^T asociat valorii proprii $\lambda = 1$ care are toate componentele pozitive de sumă 1.

Astfel, p^* verifică relaţiile:

- $\Pi^T(p^*)^T = (p^*)^T$, cu $p_i^* \geq 0$ şi $p_1^* + p_2^* + \cdots + p_n^* = 1$ sau
- $p^* \cdot \Pi = p^*$, cu $p_i^* \geq 0$ şi $p_1^* + p_2^* + \cdots + p_n^* = 1$.

2.9.3. Teoremă. Dacă lanţul Markov asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$ este regulat, iar matricea sa de trecere este dublu stochastică, atunci repartiţia limită a lanţului Markov este

$$p^* = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right).$$

2.9.4. Observaţie. În cazul unui lanţ Markov regulat, are loc egalitatea

$$p_i^* = \lim_{k\to\infty} P(X_k = i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Pentru valori suficient de mari ale lui k putem scrie:

$$P(X_k = i) \simeq p_i^*, \ \forall\, k \geq k_0.$$

Aşadar, sistemul a cărui evoluţie o urmărim tinde să se stabilizeze, adică la fiecare moment $k \geq k_0$ există în mod practic aceeaşi probabilitate ca sistemul să se afle în starea i.

2.9.5. Exemplu. Să considerăm lanţul Markov $(S, p^{(0)}, \Pi)$, unde $S = \{1, 2\}$, $p^{(0)} = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$ şi $\Pi = \begin{pmatrix} 5/7 & 2/7 \\ 6/7 & 1/7 \end{pmatrix}$.

Observăm că acest lanţ Markov este regulat. Urmărim să determinăm repartiţia limită $p^* = (p_1^*, p_2^*)$.

Metoda 1. Determinăm valorile şi vectorii proprii asociate matricei de trecere Π. Ecuaţia $\det(\Pi - \lambda I_2) = 0$ i.e. $7\lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$ are soluţiile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{7}$. Vectorii proprii sunt $v_1 = (1, 1)^T$, $v_2 = (1, -3)^T$. Astfel

$$\Pi = ADA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix},$$

de unde $\Pi^k = AD^kA^{-1}$ şi

$$\Pi^k = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 + (-1)^k 7^{-k} & 1 - (-1)^k 7^{-k} \\ 3 - 3(-1)^k 7^{-k} & 1 + 3(-1)^k 7^{-k} \end{pmatrix};$$

deducem

$$\lim_{k \to \infty} \Pi^k = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

deci $p^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Pe de altă parte, repartiţia $p^{(k)}$ a lanţului Markov este

$$p^{(k)} = p^{(0)}\Pi^k \ \Leftrightarrow \ (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}) = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)})\Pi^k = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)\Pi^k,$$

deci

$$p_1^{(k)} = \frac{1}{28}\left[21 - \left(-\frac{1}{7}\right)^k\right] \quad \text{şi} \quad p_2^{(k)} = \frac{1}{28}\left[7 + \left(-\frac{1}{7}\right)^k\right];$$

astfel,

$$p_1^* = \lim_{k\to\infty} p_1^{(k)} = \frac{3}{4} \quad \text{şi} \quad p_2 = \lim_{k\to\infty} p_2^{(k)} = \frac{1}{4}.$$

În final,

$$p^* = (p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Metoda 2. Utilizăm Teorema 2.9.2. Din relaţiile $p^*\Pi = p^*$, $p_1^* \geq 0$, $p_2^* \geq 0$ şi $p_1^* + p_2^* = 1$ deducem succesiv

$$(p_1^*, p_2^*) \begin{pmatrix} 5/7 & 2/7 \\ 6/7 & 1/7 \end{pmatrix} = (p_1^*, p_2^*), \quad p_1^* \geq 0,$$

$$p_2^* \geq 0,\ p_1^* + p_2^* = 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{5}{7}p_1^* + \frac{6}{7}p_2^* = p_1^*;\ \frac{2}{7}p_1^* + \frac{1}{7}p_2^* = p_2^*;$$

$$\Leftrightarrow\ p_1^* \geq 0,\ p_2^* \geq 0,\ p_1^* + p_2^* = 1 \ \Leftrightarrow\ p_1^* = 3p_2^*;\ p_1^* + p_2^* = 1;$$

$$\Leftrightarrow\ p_1^* \geq 0,\ p_2^* \geq 0 \ \Leftrightarrow\ p_1^* = \frac{3}{4},\ p_2^* = \frac{1}{4} \ \Leftrightarrow\ p^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

2.10. Repartiţia staţionară

Fie $(X_k)_{k\geq 0}$ un lanţ Markov regulat asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$. Repartiţia limită p^* există şi este independentă de repartiţia iniţială $p^{(0)}$. Să luăm în rol de $p^{(0)}$ repartiţia limită $p^* = \widetilde{p}^T$, unde $\widetilde{p}$ este unicul vector propriu al matricei Π^T asociat valorii proprii $\lambda = 1$ care este şi vector de probabilitate (Teorema 2.9.2). Are loc egalitatea $\Pi^T\widetilde{p} = \widetilde{p}$, de unde deducem:

$$(\Pi^T)^k\widetilde{p} = \widetilde{p},\ \forall\, k \geq 1 \ \Leftrightarrow\ (\Pi^T)^k(p^*)^T = (p^*)^T.$$

Utilizând relaţia $p^{(k)} = p^{(0)}\Pi^k$ (secţiunea 2.7.2), obţinem:

$$p^{(k)} = p^{(0)}\Pi^k = p^*\Pi^k = ((\Pi^k)^T)(p^*)^T)^T = ((p^*)^T)^T = p^*,$$

i.e. $p_i^{(k)} = p_i^*;\ 1 \leq i \leq n;\ k \geq 1 \ \Leftrightarrow\ P(X_k = i) = p_i^*,\ \forall\, k \geq 1,\ \forall\, i \in S.$

Astfel este adevărată următoarea afirmaţie:

Dacă repartiţia iniţială a unui lanţ Markov regulat coincide cu repartiţia sa limită p^*, atunci repartiţia de probabilitate $p^{(k)}$ este constantă în raport cu k, i.e. $p^{(k)} = p^* = p^{(0)}$.

Definiţie. Vectorul $\widetilde{p}^T$ se numeşte *repartiţia staţionară* a lanţului Markov $(X_k)_{k\geq 0}$ asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$.

- Repartiţia limită este unicul exemplu de repartiţie staţionară.

2.11. Lanţuri Markov ergodice (Comportarea asimptotică a unui lanţ Markov)

2.11.1. Definiţie. Lanţul Markov $(X_k)_{k\geq 0}$ asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$, cu $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ se numeşte *lanţ Markov ergodic* dacă pentru orice stări i şi j din S există $\lim\limits_{m\to\infty} p_{ij}^{(m)}$ şi această limită este independentă de $i \in S$.

- Procesul modelat de un lanţ Markov ergodic se numeşte *proces ergodic.*
- fie $p_j^{(\infty)} = \lim\limits_{m\to\infty} p_{ij}^{(m)}$ cu $i, j \in S$ şi $p^{(\infty)} = (p_1^{(\infty)}, p_2^{(\infty)}, \ldots, p_n^{(\infty)})$. Vectorul $p^{(\infty)}$ se numeşte *vector ergodic.*

2.11.2. Teoremă. Lanţul Markov $(X_k)_{k\geq 0}$ asociat tripletului $(S, p^{(\infty)}, \Pi)$ este ergodic dacă şi numai dacă există $\Pi^{(\infty)} = \lim\limits_{m\to\infty} \Pi^m$ şi matricea $\Pi^{(\infty)}$ are toate liniile egale.

Prin urmare,

$$\Pi^{(\infty)} = \begin{pmatrix} p_1^{(\infty)} & p_2^{(\infty)} & \ldots & p_n^{(\infty)} \\ p_1^{(\infty)} & p_2^{(\infty)} & \ldots & p_n^{(\infty)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1^{(\infty)} & p_2^{(\infty)} & \ldots & p_n^{(\infty)} \end{pmatrix} = \lim_{m\to\infty} \begin{pmatrix} p_{11}^{(m)} & p_{12}^{(m)} & \ldots & p_{1n}^{(m)} \\ p_{21}^{(m)} & p_{22}^{(m)} & \ldots & p_{2n}^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1}^{(m)} & p_{n2}^{(m)} & \ldots & p_{nn}^{(m)} \end{pmatrix}$$

2.11.3. Observaţie. Din definiţia noţiunii de proces ergodic, deducem că un asemenea proces nu depinde (pentru $m \to \infty$) de starea i dintr-un trecut îndepărtat:

$$\lim_{m\to\infty} P(X_{k+m} = j / X_k = i) = p_j^{(\infty)}.$$

Este o remarcă importantă pentru cercetarea concretă, deoarece în analiza unor procese ergodice se poate face abstracţie de starea procesului la un moment îndepărtat de momentul prezent.

2.11.4. Teoremă. Un lanţ Markov este ergodic dacă şi numai dacă există $M \in \mathbb{N}^*$ şi există o stare $j \in S$ astfel încât $p_{ij}^{(M)} > 0$, $\forall\, i \in S$ (deci există $M \in \mathbb{N}^*$ astfel încât Π^M are cel puţin o coloană de elemente strict pozitive).

2.11.5. Legătura dintre lanţurile Markov regulate şi cele ergodice

- Orice lanţ Markov regulat este ergodic.
- Un lanţ Markov ergodic este regulat dacă şi numai dacă $p_j^{(\infty)} > 0$, $\forall\, j \in S$.

2.11.6. Teoremă. Să presupunem că lanţul Markov asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$ este ergodic. Atunci matricea de trecere Π este dublu stochastică dacă şi numai dacă

$$p^{\infty} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right).$$

2.11.7. Determinarea vectorului ergodic $p^{(\infty)}$

Vectorul ergodic $p^{(\infty)}$ este caracterizat de relaţiile

(1) $p_j^{\infty} = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{(\infty)} p_{ij}$, $1 \le j \le n$, i.e. $p^{(\infty)} = p^{(\infty)}\Pi \;\Leftrightarrow\; (\Pi - I_n)p^{(\infty)} = 0$ şi

(2) $p_1^{(\infty)} + p_2^{(\infty)} + \dots + p_n^{(\infty)} = 1$.

Relaţiile (1) constituie un sistem liniar şi omogen cu necunoscutele $p_j^{(\infty)}$, $1 \le j \le n$, având determinantul d nul. Într-adevăr,

$$d = \begin{vmatrix} p_{11} - 1 & p_{21} & \dots & p_{n1} \\ p_{12} - 1 & p_{22} - 1 & \dots & p_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1n} - 1 & p_{2n} & \dots & p_{nn} - 1 \end{vmatrix}$$

şi, întrucât $\lambda = 1$ este valoare proprie a matricei Π, deducem $d = 0$.

Aşadar sistemul (1) are soluţii nenule depinzând de un parametru λ, care se determină din condiţia (2).

Observaţie. Dacă lanţul considerat este regulat (deci şi ergodic), atunci $p^{(\infty)} = p^*$, i.e. $p^{(\infty)}$ coincide cu repartiţia limită (Definiţia 2.9.1).

2.11.8. Aproximarea probabilităţilor absolute

Trecând la limită în egalitatea $p^{(k)} = p^0\Pi^k$ (secţiunea 2.7.2), pentru $k \to$

∞, deducem

$$\lim_{k\to\infty} p^{(k)} = p^{(0)} \lim_{k\to\infty} \Pi^k = p^{(0)}\Pi^{(\infty)}.$$

Aşadar, pentru k suficient de mare, vectorul probabilităţilor absolute $p^{(k)}$ poate fi aproximat prin $p^{(0)}\Pi^{\infty}$. Prin calcul direct, utilizând Teorema 2.11.2 şi egalitatea $p_1^{(0)} + p_2^{(0)} + \cdots + p_n^{(0)} = 1$ (vectorul $p^{(0)}$ este un vector de probabilitate) rezultă

$$p^{(0)}\Pi^{(\infty)} = p^{(\infty)} = (p_1^{(\infty)}, p_2^{(\infty)}, \ldots, p_n^{(\infty)}).$$

Astfel, obţinem aproximarea: $p^{(k)} \approx p^{(0)}p^{(\infty)}$ i.e. $p^{(k)} \simeq p^{(\infty)}$, pentru $k \geq k_0$, ceea ce arată că *pentru valori suficient de mari ale lui k probabilităţile absolute $p^{(k)}$ ale unui lanţ Markov ergodic nu depind de probabilităţile iniţiale.*

2.11.9. Exemplu. [27] La concursul de admitere într-o universitate tehnică se consideră că se realizează o selecţie bună dacă raportul dintre numărul de candidaţi şi numărul de locuri este de minimum 2, situaţia contrară conducând la o selecţie slabă. Fie $S = \{s_1, s_2\}$, unde s_1, s_2 desemnează, respectiv, cele două situaţii descrise (selecţie bună, respectiv selecţie slabă). Dacă într-un an există situaţia s_1, atunci probabilitatea ca în anul următor să apară tot situaţia s_1 este 0.9, iar dacă există situaţia s_2 prin diverse măsuri se creează premise ca în anul următor să apară situaţia s_1 cu probabilitatea 0.7.

Să se determine probabilităţile celor două situaţii în următorii 5 ani, în fiecare dintre ipotezele:

(i) în primul an a existat situaţia s_1

(ii) în primul an a existat situaţia s_2.

Rezolvare. Matricea de trecere (de la un an la altul) este

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix},$$

deci P este o matrice regulată, aşadar lanţul Markov asociat este ergodic (secţiunea 2.11.5). Matricele Π^m, $2 \leq m \leq 5$ sunt:

$$\Pi^2 = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.12 \\ 0.84 & 0.16 \end{pmatrix}; \quad \Pi^3 = \begin{pmatrix} 0.876 & 0.124 \\ 0.868 & 0.132 \end{pmatrix};$$

$$\Pi^4 = \begin{pmatrix} 0.8752 & 0.1248 \\ 0.8736 & 0.1264 \end{pmatrix}; \quad \Pi^5 = \begin{pmatrix} 0.87504 & 0.12496 \\ 0.87472 & 0.12528 \end{pmatrix}$$

Probabilitățile absolute $p^{(k)} = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}) = p^{(0)}\Pi^k$ sunt date de următorul tabel:

	k	0	1	2	3	4	5
(i)	$p_1^{(k)}$	1	0.9	0.88	0.876	0.8752	0.87504
	$p_2^{(k)}$	0	0.1	0.12	0.124	0.1248	0.12496
(ii)	$p_1^{(k)}$	0	0.7	0.84	0.868	0.8736	0.87472
	$p_2^{(k)}$	1	0.3	0.16	0.132	0.1264	0.12528

Calculul vectorului ergodic $p^{(\infty)} = (p_1^{(\infty)}, p_2^{(\infty)})$

Din $p^{(\infty)} = p^{(\infty)}\Pi$ deducem:

$$\begin{cases} p_1^{(\infty)} = p_1^{(\infty)}p_{11} + p_2^{(\infty)}p_{21} \\ p_2^{(\infty)} = p_1^{(\infty)}p_{12} + p_2^{(\infty)}p_{22} \\ p_1^{(\infty)} + p_2^{(\infty)} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1^{(\infty)} = 0.9p_1^{(\infty)} + 0.7p_2^{(\infty)} \\ p_2^{(\infty)} = 0.1p_1^{(\infty)} + 0.3p_2^{(\infty)} \\ p_1^{(\infty)} + p_2^{(\infty)} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} p_1^{(\infty)} = 7p_2^{(\infty)} \\ p_1^{(\infty)} + p_2^{(\infty)} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow p^{(\infty)} = (p_1^{\infty}, p_2^{\infty}) = \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) = (0.875, 0.125).$$

Observăm că $p^{(5)} \approx p^{(\infty)}$ (primele 3 zecimale, practic, sunt identice).

2.12. Lanțuri Markov ascunse

2.12.1. Preliminarii

Să considerăm un lanț Markov $(X_k)_{k\geq 0}$ asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$, cu $S = \{1, 2, 3, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{N}^*$. Repartiția de probabilitate $p^{(k)}$, $k \geq 0$. satisface egalitatea $p^{(k)} = p^{(0)}\Pi^k$ (secțiunea 2.7.2); scriind această egalitate sub forma

$$p^{(k+1)} = p^{(0)}\Pi^{k+1} = (p^0\Pi^k)\Pi$$

deducem relația de recurență a probabilităților absolute

$$(1) \qquad p^{(k+1)} = p^{(k)}\Pi, \quad k \geq 0.$$

Interpretând $p^{(k)}$ drept un indicator al stării sistemului Markov la momentul k, se poate spune că egalităţile (1) reprezintă o *relaţie de actualizare* a stării sistemului Markov.

Există, totuşi, situaţii, în care starea sistemului nu poate fi observată direct, în schimb fiecare stare are o lege (distribuţie) probabilistică asociată.

Mai precis, în momentul când sistemul Markov ajunge în starea s la momentul k, ieşirea observată este asociată valorilor unei v.a. 1D discrete Y_k, în conformitate cu o distribuţie (masă) de probabilitate (pmf) condiţionată de starea sistemului la momentul k, adică de probabilitatea ca $X_k = s$.

Exemplul 1. Să presupunem că avem $N = 3$ urne cu următoarele compoziţii:

U_1: 4 bile albe, 3 bile negre, 2 bile verzi şi 1 bilă roşie i.e. $4a + 3n + 2v + 1r$

U_2: $5a + 5n + 7v + 3r$

U_3: $4a + 0n + 4v + 2r$

La fiecare moment fixat $k \geq 1$, se selectează o urnă în mod aleator, în acord cu starea sistemului la momentul anterior $k-1$ (deci în conformitate cu un model (sistem, lanţ) de tip Markov) şi se extrage o bilă din urma selectată. Astfel, bila este ceea ce se observă ca ieşire (rezultat) dar starea actuală a sistemului este ascunsă.

Mai departe, fie $M \in \mathbb{N}^*$ numărul ieşirilor posibile din toate stările sistemului (în exemplul precedent, $M = 4$). La momentul fixat $t = k$, pentru fiecare stare $s \in S$, se pune în evidenţă pmf condiţionată $f_{Y_k/s} : \{1, 2, 3 \ldots, M\} \to \mathbb{R}$,

$$f_{Y_k/s}(y/s) = P(Y_k = y/X_k = s), \quad 1 \leq y \leq M,$$

care se notează, pe scurt, $f_s(y)$ sau $f(y/s)$ sau, mai complet, $f_k(y/s)$.

Legea (distribuţia) de probabilităţi a fiecărei stări la fiecare moment dat poate fi de orice tip. În general, fiecare stare are, la fiecare moment dat, propria sa distribuţie (repartiţie, lege) de probabilitate. Totuşi, în practică, legile probabilistice ale fiecărei stări la un moment dat k sunt de acelaşi tip, dar cu parametri diferiţi. Astfel, în Exemplul 1, legile de probabilitate Y_k care descriu compoziţia urnelor U_1, U_2, U_3 sunt de tip multinomial; pentru urna U_1, tabloul de distribuţie este ($n = 1, s = 4$):

$$\begin{pmatrix} (1,0,0,0) & (0,1,0,0) & (0,0,1,0) & (0,0,0,1) \\ 2/5 & 3/10 & 1/5 & 1/10 \end{pmatrix}$$

Punem $\lambda_{ms}^{(k)} = P(Y_k = m/X_k = s) = f_k(m/s) = f_s(m)$, $1 \leq m \leq M$, $1 \leq s \leq N$ şi introducem matricea de tip $M \times N$

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} P(Y_k = 1/X_k = 1) & P(Y_k = 1/X_k = 2) & \dots & P(Y_k = 1/X_k = N) \\ P(Y_k = 2/X_k = 1) & P(Y_k = 2/X_k = 2) & \dots & P(Y_k = 2/X_k = N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P(Y_k = M/X_k = 1) & P(Y_k = M/X_k = 2) & \dots & P(Y_k = M/X_k = N) \end{pmatrix}$$

sau $\Lambda_k = (\lambda_{ms}^{(k)})_{1 \leq m \leq M, 1 \leq s \leq N}$.

Observăm că Λ_k^T *este o matrice stochastică.*

Exemplul 2. Să considerăm sistemul descris de urnele U_1, U_2, U_3 din Exemplul 1 şi considerăm că $Y_k = 1$ (respectiv 2; 3; 4) dacă bila extrasă din urnă este albă (respectiv neagră; verde; roşie) şi dacă extragerea se efectuează din urna s, $1 \leq s \leq 3$.

Avem

$$P(Y_k = 1/X_k = 2) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}; \quad P(Y_k = 2/X_k = 2) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4};$$

$$P(Y_k = 3/X_k = 2) = \frac{7}{20}; \quad P(Y_k = 4/X_k = 2) = \frac{3}{20} \text{ ş.a.m.d.}$$

Matricea Λ_k este

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/4 & 2/5 \\ 3/10 & 1/4 & 2/5 \\ 1/5 & 7/20 & 0 \\ 1/10 & 3/20 & 1/5 \end{pmatrix}$$

2.12.2. Definiţia noţiunii de lanţ Markov ascuns

Se consideră următoarele date:

- un lanţ Markov $(X_k)_{k\geq 0}$ asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$
- un lanţ de v.a. $(Y_k)_{k\geq 0}$ împreună cu un şir de pmf condiţionate $(f_k(y/s))_{k\geq 0}$ care descriu probabilităţile ieşirilor sistemului la fiecare moment $k \geq 0$ pentru fiecare stare s a sistemului.

Se numeşte *lanţ Markov ascuns* (pe scurt LMA) asociat acestor date semnalul aleator discret 2D sau lanţul aleator bidimensional $(X_k, Y_k)_{k\geq 0}$.

- Matricele Λ_k, $k \geq 0$, având elementele $\lambda_{ms}^{(k)} = P(Y_k = m/X_k = s) = f_k(m/s)$, $1 \leq m \leq M$, $1 \leq s \leq N$, definite la secţiunea 2.11.1 se numesc *matrice ale ieşirilor LMA $(X_k, Y_k)_{k\geq 0}$.*

2.12.3. Probabilităţi absolute de ieşire ale unui LMA

Fie $(X_k, Y_k)_{k\geq 0}$ un LMA dat.

- Numerele $q_m^{(k)} = P(Y_k = m)$, $1 \leq m \leq M$, $k \geq 0$, se numesc *probabilităţi absolute de ieşire* asociate LMA $(X_k, Y_k)_{k\geq 0}$.
- Vectorii de probabilitate $q^{(k)} = q(k) = (q_1^{(k)}, q_2^{(k)}, \ldots, q_m^{(k)})$, $k \geq 0$, se numesc *repartiţii de probabilităţi de ieşire* asociate LMA dat.
- *Are loc egalitatea:* $q^{(k)} = \Lambda_k p^{(k)}$, $k \geq 0$, unde $p^{(k)}$ sunt repartiţiile de probabilitate ale lanţului Markov $(X_k)_{k\geq 0}$, definite în paragraful 2.7.

Demonstraţie. Din formula probabilităţii totale rezultă:

$$q_m^{(k)} = P(Y_k = m) = \sum_{s=1}^{n} P(Y_k = m/X_k = s)P(X_k = s) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_{ms}^{(k)} p_s^{(k)},$$

deci $q^{(k)} = \Lambda_k p^{(k)}$.

2.12.4. Graf asociat unui LMA

Similar cu graful asociat unui lanţ Markov, putem ataşa unui LMA un graf, care pune în evidenţă elementele matricei Π şi pmf $f_s(y) = f(y/s)$. Redăm mai jos un asemenea graf (arcul lipseşte dacă probabilitatea asociată este nulă).

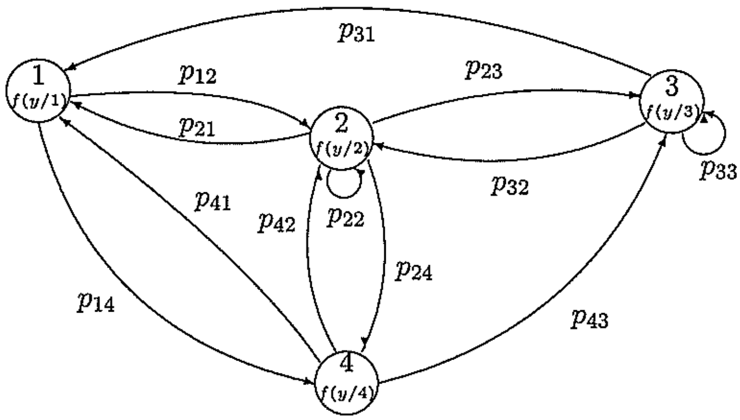

Fig.2.12.4. *Graf asociat unui LMA cu 4 stări (pentru k fixat)*

2.12.5. Aplicaţii. Lanţurile Markov ascunse se utilizează în recunoaşterea formelor ("pattern recognition") şi în recunoaşterea (procesarea) vorbirii ("speech recognition", "speech processing"). Fiecare cuvânt sau sunet care trebuie recunoscut se reprezintă printr-un LMA, în care ieşirea este un vector de "trăsături" care derivă din datele vorbirii. De exemplu într-un "vocabular" cu N cuvinte, există N lanţuri Markov ascunse, fiecare dintre lanţuri reprezentând parametrii pentru cuvântul asociat. Pentru a recunoaşte un cuvânt necunoscut se determină şirul corespunzător de vectori de "trăsături" şi se calculează probabilitatea acestui şir pentru fiecare din cele N lanţuri Markov ascunse; LMA corespunzător celei mai mari probabilităţi corespunde cuvântului necunoscut.

3 Semnale aleatoare continue (Procese aleatoare sau stochastice cu parametru continuu)

3.1. Probabilitate de trecere

Fie $(X_t)_{t\geq 0}$ sau $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un proces aleator (semnal aleator continual), A o mulţime de stări ale sistemului definit de procesul aleator considerat şi $x \in A$.

Notăm cu $p(t, x; \tau, A)$ *probabilitatea de trecere* a sistemului descris de procesul aleator dat într-o stare din mulţimea A la momentul $\tau > t$, ştiind că la momentul t sistemul s-a aflat în starea x.

3.2. Procese aleatoare de tip Markov

Sunt procese aleatoare (semnale aleatoare) în care probabilităţile $p(t, x; \tau, A)$ nu depind de stările sistemului la momentele $\tau < t$; se mai numesc *procese fără postacţiune.* Asemenea procese aleatoare sunt complet caracterizate de probabilităţile de trecere $p(t, x; \tau, A)$ şi de o probabilitate iniţială $P(A)$.

Mai departe, vom lua $A = (-\infty, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

3.3. Funcţia de repartiţie de trecere

Este funcţia $F(t, x; \tau, y) = P(X_\tau < y / X_t = x)$, adică probabilitatea ca la momentul τ semnalul (procesul) aleator asociat să ia o valoare mai mică decât y ştiind că la momentul $t < \tau$ a luat valoarea x.

Ipoteze asupra funcţiei F

- este definită pentru orice $\tau > t$
- este o funcţie de repartiţie în raport cu variabila y
- este continuă în raport cu t şi τ
- este integrabilă în raport cu x
- $F(t, x; t + 0, y) = F(t, x; t - 0, y) = \delta(x - y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$

3.4. Proces aleator aditiv (cu creşteri independente)

Este un proces aleator (X_t) în care $F(t, x; \tau, y)$ depinde numai de $x - y$, în afară de t şi τ, i.e. $F(t, x; \tau, y) = G(x - y, t, \tau)$.

3.5. Funcţia densitate de probabilitate (pdf) de trecere

Este funcţia $f(t,x;\tau,y)$ caracterizată de egalitatea

$$f(t,x;\tau,y)=\frac{\partial}{\partial y}F(t,x;\tau,y).$$

Dacă pdf de trecere există, atunci:

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;\tau,y)dy=1$
- $F(t,x;\tau,y)=\int_{-\infty}^{y} f(t,x;\tau,z)dz$
- $f(t,x;\tau,y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u,z;\tau,y)f(t,x;u,z)dz$, pentru orice $u\in(t,\tau)$;

această egalitate reprezintă generalizarea relaţiilor Chapman-Kolmogorov din cazul lanţurilor Markov (paragraful 2.5).

3.6. Procese (semnale) aleatoare Poisson

Este cel mai simplu proces (semnal continual) aleator de tip Markov.

3.6.1. Definiţie. Un proces Markov staţionar şi aditiv (X_t) se numeşte *proces Poisson staţionar* dacă:

(i) $\forall\ s,t\in\mathbb{R}$ cu $s<t$, diferenţa X_t-X_s este un număr întreg nenegativ

(ii) $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{P(X_{t+\Delta t}-X_t>1)}{P(X_{t+\Delta t}-X_t=1)}=0.$

3.6.2. Proprietăţi

Fie (X_t) un proces Poisson staţionar şi

$$P_n(t-s)=P(X_t-X_s=n),\quad t>s.$$

- Există o constantă $\lambda\geq 0$ astfel încât

$$P_n(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},\ \forall\ n\in\mathbb{N};$$

din acest motiv, procesul Poisson (X_t) se mai numeşte *proces Poisson de parametru* λ.

- $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)=1$; $M(X_t)=\lambda t$; $D^2(X_t)=\lambda t$; $\forall\ t\in\mathbb{R}$.

- Dacă (X_t), (Y_t) sunt două procese Poisson independente cu parametrii λ_1 şi λ_2 respectiv, atunci $(X_t + Y_t)$ este, de asemenea, un proces Poisson cu parametrul $\lambda_1 + \lambda_2$.

3.6.3. Aplicaţii

Procesele aleatoare de tip Poisson se utilizează în studiul aşa-numitelor "procese de naştere" şi (sau) "moarte", care descriu funcţionarea în timp a sistemelor complexe de tip tehnic, economic sau social. Pentru detalii, a se urmări [14], [21].

3.7. Valori medii. Corelaţii

Fie $X = (X_t)_{t\in\mathcal{T}} = (X(t))_{t\in\mathcal{T}}$ şi $Y = (Y_t)_{t\in\mathcal{T}} = (Y(t))_{t\in\mathcal{T}}$ semnale (procese) aleatoare (s.a.) date, discrete sau continuale.

- *Media s.a. X la momentul $t \in \mathcal{T}$* este $\mu_X(t) = E(X(t))$.
- *Autocorelaţia* s.a. X este $r_{XX}(t_1, t_2) = E(X(t_1) \cdot \overline{X}(t_2))$, $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$.
- *Autocovarianţa* s.a. X este:

$$c_{XX}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(\overline{X}(t_2) - \overline{\mu}_X(t_2))]$$

$$\Leftrightarrow \; c_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)\overline{X}(t_2)] - \mu_X(t_1)\overline{\mu}_X(t_2), \quad t_1, t_2 \in \mathcal{T}$$

- *Corelaţia încrucişată* a s.a. X şi Y este:

$$r_{XY}(t_1, t_2) = E(X(t_1)\overline{Y}(t_2))$$

- *Covarianţa încrucişată* a s.a. X şi Y este

$$c_{XY}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(\overline{Y}(t_2) - \overline{\mu}_Y(t_2))]$$

$$\Leftrightarrow \; c_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)\overline{Y}(t_2)] - \mu_X(t_1)\overline{\mu}_Y(t_2), \quad t_1, t_2 \in \mathcal{T}.$$