Capitolul 7.

NOŢIUNI DE TEORIA ESTIMAŢIEI

§ 7.1. ESTIMAŢII CONSISTENTE. ESTIMAŢII ABSOLUT CORECTE

În numeroase aplicaţii ale statisticii matematice în tehnică există motive teoretice pentru a afirma că repartiţia fenomenului studiat este dată de o funcţie cunoscută care depinde însă de anumiţi parametri necunoscuţi. Aşa, de pildă, dacă ζ este variabila aleatoare care reprezintă dimensiunea unei piese, iar a este valoarea standard a dimensiunii, atunci abaterile $\xi = \zeta - a$ urmează legea normală.

Prin definiţie, o repartiţie este *specificată* dacă este exprimată printr-o funcţie dată (densitatea de repartiţie sau funcţia de repartiţie), care conţine anumiţi parametri necunoscuţi. În cazul exemplului de mai sus parametrii m şi σ^2 ai repartiţiei normale sînt necunoscuţi.

Pentru descrierea fenomenului cercetat este necesar să cunoaştem valorile numerice ale parametrilor. Această evaluare se face cu ajutorul unei selecţii de un anumit volum, extrasă din populaţia statistică observată.

Prin definiţie, o repartiţie este *complet specificată,* dacă este exprimată printr-o funcţie dată în care toţi parametrii sînt cunoscuţi.

Operaţia prin care determinăm valorile parametrilor se numeşte *estimarea parametrilor.*

Fie $x_1, \ldots, x_n$ o selecţie de volum n dintr-o repartiţie specificată. Există o infinitate de funcţii de $x_1, \ldots, x_n$ care pot fi luate drept valori ale parametrilor necunoscuţi. Aceste funcţii se mai numesc *estimaţii* sau *statistici.* Problema care se pune este de a alege din această infinitate de estimaţii pe acelea care se apropie cel mai mult de valorile adevărate ale parametrilor necunoscuţi. Estimaţia va fi cu atît mai bună cu cît repartiţia sa se concentrează mai puternic în jurul adevăratei valori a parametrului, sau — ceea ce este acelaşi lucru — cu cît dispersia (împrăştierea) valorilor repartiţiei faţă de valoarea adevărată este mai mică.

Fie λ un parametru al populaţiei generale (medie, dispersie etc.) şi fie $f(x\,;\,\lambda)$ densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare corespunzătoare. Fie de asemenea $\bar{\lambda}_n = \bar{\lambda}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o estimaţie a parametrului λ. Trebuie determinată funcţia $\bar{\lambda}$ astfel încît pentru diferite selecţii valorile ei să fie concentrate în jurul parametrului necunoscut λ.

Estimație consistentă. Dacă $\bar{\lambda}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ converge în probabilitate către parametrul λ vom spune că $\bar{\lambda}_n$ este o estimație *consistentă* a parametrului λ.

Estimație absolut corectă. Dacă

$$M[\bar{\lambda}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \lambda, \tag{7.1.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} D^2[\bar{\lambda}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = 0$$

vom spune că $\bar{\lambda}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o estimație *absolut corectă a parametrului* λ.

Prezentăm în continuare unele teoreme care dau estimațiile absolut corecte sau estimațiile consistente pentru parametrii cei mai uzuali ai repartițiilor teoretice.

1°. *Momentele de selecție sînt estimații absolut corecte ale momentelor teoretice.*

Într-adevăr, fie $\tilde{m}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r$ momentul de selecție de ordinul r al unei repartiții statistice date. Avem

$$M(\tilde{m}_r) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(x_i^r)$$

și cum variabilele x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt identic repartizate

$$M(\tilde{m}_r) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\mathrm{d}x = M_r,$$

unde M_r este momentul teoretic de ordinul r. Deoarece condiția (7.1.1) este verificată, teorema este demonstrată.

Urmează că *media de selecție $\bar{x}$ este o estimație absolut corectă pentru* $M(\xi)$.

2°. $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ *este o estimație consistentă pentru* $D^2(\xi)$.

Din legea numerelor mari (§ 1.13) $\bar{x} \xrightarrow{p} M(\xi)$ și $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \xrightarrow{p} M(\xi^2)$. Urmează că $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 \xrightarrow{p} M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = D^2(\xi)$, ceea ce trebuia demonstrat.

3°. $s'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ *este o estimație consistentă absolut corectă pentru* $D^2(\xi)$.

Avem

$$M(\bar{x}^2) = \frac{1}{n^2} M\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i\neq j} x_i x_j\right)$$

şi deoarece variabilele x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt independente şi identic repartizate, rezultă

$$M(\bar{x}^2) = \frac{1}{n} M(\xi^2) + \frac{n-1}{n} [M(\xi)]^2.$$

De aici

$$M(s^2) = \frac{n-1}{n} D^2(\xi)$$

şi deci

$$M(s'^2) = M\left(\frac{n}{n-1} s^2\right) = \frac{n}{n-1} M(s^2) = D^2(\xi).$$

Mai trebuie să arătăm că estimaţia s'^2 este consistentă. Într-adevăr, $n/(n-1)$ poate fi considerată ca o variabilă aleatoare ce ia valoarea $n/(n-1)$ cu probabilitatea 1. Cum $n/(n-1) \xrightarrow{p} 1$, urmează că $s'^2 \xrightarrow{p} D^2(\xi)$.

Observaţie. În § 1.11 am văzut că media şi dispersia unei variabile aleatoare Poisson sînt egale cu parametrul λ al repartiţiei. Pe de altă parte, teoremele 1° şi 3° arată că $\bar{x}$ şi s'^2 sînt estimaţii consistente şi absolut corecte pentru valoarea medie şi dispersia unei variabile ξ. Atunci, dacă $\bar{x}$ şi s'^2 sînt determinate pe baza unei selecţii dintr-o populaţie repartizată Poisson, trebuie să alegem una din aceste estimaţii pentru parametrul λ. Inegalitatea lui Cebîşev

$$P(|\bar{\lambda}_n - \lambda| \geqslant \varepsilon) < D^2(\bar{\lambda}_n)/\varepsilon^2,$$

unde $\bar{\lambda}_n$ este o estimaţie absolut corectă pentru parametrul $\lambda > 0$ şi $M(\bar{\lambda}_n^2) < \infty$, ne dă criteriul pentru alegerea estimaţiei; anume, vom alege acea estimaţie care are dispersia cea mai mică.

Se demonstrează că *dacă*, printre toate estimaţiile absolut corecte ale unui parametru λ, *există o estimaţie* $\bar{\lambda}_n$ *a cărei dispersie*

$$D^2[\bar{\lambda}_n(x_1, \ldots, x_n)] = \frac{1}{nM\left[\left(\frac{\partial \ln f(x;\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]}, \tag{7.1.2}$$

atunci această estimaţie este de dispersie minimă. În egalitatea (7.1.2) am admis că densităţile de probabilitate $f(x;\lambda)$ ale unei repartiţii specificate sînt continue şi au derivate parţiale de ordinul necesar în raport cu parametrul λ.

§ 7.2. ESTIMAŢII EFICIENTE

O estimaţie absolut corectă $\bar{\lambda}_n(x_1, \ldots, x_n)$ a parametrului λ care are dispersia minimă se numeşte *estimaţie eficientă*.

Dacă $\bar{\lambda}_n(x_1, \ldots, x_n)$ este o estimaţie absolut corectă a parametrului λ, raportul

$$E_n(\bar{\lambda}_n) = \frac{1}{D^2(\bar{\lambda}_n)nM\left[\left(\frac{\partial \ln f(x;\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]} \tag{7.2.1}$$

se numeşte *eficienţa* estimaţiei $\bar{\lambda}_n$. Se observă că $0 \leqslant E_n(\bar{\lambda}_n) \leqslant 1$. Dacă $E_n(\bar{\lambda}_n) = 1$, atunci estimaţia este eficientă, după cum rezultă din (7.1.2) şi (7.2.1).

Exemple. 1°. Să considerăm repartiţia Poisson

$$f(x;\,\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\quad x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

şi să verificăm dacă media de selecţie $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ este o estimaţie absolut corectă şi eficientă a parametrului λ.

Soluţie. Avem

$$\ln f(x;\,\lambda) = -\lambda + x\ln\lambda - \ln x!.$$

De aici

$$\frac{\partial \ln f(x;\,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{x}{\lambda} - 1,$$

iar

$$M\left[\left(\frac{\partial \ln f(x;\,\lambda)}{\partial\lambda}\right)^2\right] = \frac{M(\xi^2)}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda}M(\xi) + 1 = \frac{\lambda^2+\lambda}{\lambda^2} - \frac{2\lambda}{\lambda} + 1 = \frac{1}{\lambda}. \tag{7.2.2}$$

Apoi

$$M(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(\xi_k) = \frac{nM(\xi)}{n} = \frac{n\lambda}{n} = \lambda, \tag{7.2.3}$$

deoarece variabilele aleatoare ξ_k, $(1 \leqslant k \leqslant n)$, care iau valorile x_k au aceeaşi repartiţie ca şi variabila Poisson ξ. Dispersia mediei de selecţie este

$$D^2(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k) = \frac{1}{n^2}\cdot nD^2(\xi) = \frac{D^2(\xi)}{n} = \frac{\lambda}{n}, \tag{7.2.4}$$

deoarece dispersia variabilei aleatoare Poisson ξ este λ.

Înlocuind (7.2.2) şi (7.2.4) în (7.2.1) obţinem

$$E_n(\bar{x}_n) = \frac{1}{\frac{\lambda}{n}\cdot\frac{n}{\lambda}} = 1. \tag{7.2.5}$$

Aşadar, $\bar{x}$ este o estimaţie absolut corectă ((7.2.3) şi (7.2.4)) şi eficientă ((7.2.5)) a parametrului λ.

2°. Să considerăm repartiţia binomială

$$f(x;\,p) = p^x\,(1-p)^{1-x},\quad x = 0,\ 1,$$

unde parametrul este $\lambda = p$, $(0 \leqslant p \leqslant 1)$. Să cercetăm dacă media de selecţie

$\bar{x} = \frac{1}{n} \Sigma x_i$ reprezintă sau nu o estimaţie eficientă pentru parametrul p al repartiţiei.

Soluţie. Pentru această repartiţie ştim (§ 1.11) că

$$M(\xi) = p\,; \; D^2(\xi) = p(1 - p).$$

De aici deducem

$$M(\bar{x}) = p; \quad D^2(\bar{x}) = \frac{p(1 - p)}{n}.$$

Mai departe,

$$\ln f(x\,;\, p) = x \ln p + (1 - x) \ln (1 - p)$$

$$\frac{\partial \ln f(x\,;\, p)}{\partial p} = \frac{x}{p} - \frac{1 - x}{1 - p},$$

iar

$$M\left[\left(\frac{\partial \ln f(x\,;\, p)}{\partial p}\right)^2\right] = \frac{1}{p(1 - p)}.$$

Prin urmare

$$E_n(\bar{x}) = 1,$$

adică $\bar{x}$ este o estimaţie eficientă pentru parametrul p.

Observaţie. Deoarece p reprezintă probabilitatea constantă în fiecare probă de a se realiza evenimentul care dă naştere repartiţiei considerate, iar media de selecţie $\bar{x}$ este frecvenţa relativă a apariţiei fenomenului în cele n probe, putem afirma că frecvenţa relativă este o estimaţie eficientă a probabilităţii.

§ 7.3. ESTIMAŢII SUFICIENTE

Fie ξ o variabilă aleatoare definită pe o populaţie statistică şi fie $f(x\,;\,\lambda)$ densitatea ei de repartiţie, depinzînd de parametrul necunoscut λ. Extrăgînd succesiv n elemente din această colectivitate obţinem rezultatele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, care reprezintă n variabile aleatoare, independente între ele. Dacă prima extracţie dă valoarea x_1, a doua valoarea x_2 etc., avem eşantionul de valori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Probabilitatea apariţiei acestui eşantion în selecţie, $P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \ldots, \xi_n = x_n)$, adică probabilitatea ca variabila aleatoare ξ_1 să ia exact valoarea x_1, variabila aleatoare ξ_2 să ia exact valoarea x_2 etc., se numeşte *funcţie de verosimilitate*. Ea este o funcţie reală ψ de cele n valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi de parametrul λ, adică $\psi: R^n \times I \rightarrow R$, unde R^n este spaţiul de selecţie al valorilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, iar I este intervalul în care poate lua valori parame-

§2. Metoda verosimilității maxime (R.A. Fisher)

2.1. Funcția de verosimilitate (Likelihood Function). Fie X o v.a. definită pe o populație statistică și fie $f(x;\theta)$ densitatea de probabilitate (pdf sau pmf) depinzând de parametrul necunoscut θ. Extrăgând succesiv n elemente din această populație statistică, punem în evidență variabilele aleatoare de selecție $X_1, X_2, \dots, X_n$ (independente între ele). Dacă prima extracție dă valoarea x_1, a doua x_2, ..., a n-a x_n, obținem eșantionul de valori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Funcția $l : \mathbb{R}^n \times T \to \mathbb{R}$, ~~$l(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta)=$~~

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta) = P(X_1 = x_1; X_2 = x_2; \dots, X_n = x_n)$$

se numește funcția de verosimilitate atașată v.a X și eșantionului $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Deoarece $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt v.a independente avem:

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta) = P(X_1 = x_1)\cdot P(X_2 = x_2)\dots P(X_n = x_n),\ \text{i.e.}$$

$$(1)\quad l(x;\theta) = l(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta);\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \theta \in T.$$

2.2. Funcția de log-verosimilitate

Este funcția $L(x;\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta) = \ln l(x;\theta)$, i.e.

$$(1')\quad L(x;\theta) = \ln l(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i;\theta);\ x \in \mathbb{R}^n;\ \theta \in T.$$

2.3. Metoda verosimilității maxime (Maximum Likelihood Method) (MLM)

Se pune problema alegerii acelei statistici (acelui estimator) $\hat\theta = \hat\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a parametrului θ pentru care $l(x;\hat\theta)$ devine maximă $\iff L(x;\hat\theta)$ devine maximă.

Din punct de vedere matematic, această problemă se reduce la rezolvarea ecuației

$$(2)\quad \frac{\partial l}{\partial \theta} = 0 \quad \text{sau, echivalent,}$$

$$(2')\quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \iff \frac{\partial(\ln l(x;\theta))}{\partial \theta} = 0$$

Ecuația (2) sau (2') se numește ecuație de verosimilitate iar soluția sa $\hat{\theta}_M = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se numește estimare de verosimilitate maximă sau indicator de probabilitate maximă; pe scurt estimare ML (Maximum Likelihood)

2.4. Cazul ~~unei vector aleator X~~ repartițiilor multiparametrice

Dacă p.d.f (sau p.m.f) pentru X este de forma $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$, atunci funcția de verosimilitate, respectiv de log-verosimilitate este

(3) $l(x;\theta) = l(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$

(3') respectiv $L(x,\theta) = \ln(x;\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i;\theta)$; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$

Ecuațiile de verosimilitate (2) sau (2') devin sisteme de ecuații de verosimilitate:

(4) $\frac{\partial l}{\partial \theta_i} = 0$; $1 \le i \le s$

(4') $\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0$; $1 \le i \le s$.

care dau estimările de verosimilitate maximă $\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$; $1 \le i \le s$.
(estimări ML)

2.5. Observații

2.5.1. MVM furnizează estimatori $\hat{\theta}$ cu proprietăți statistice puternice, de obicei estimatori nedeplasați ai parametrilor respectivi (există și excepții). Una din proprietățile importante ale MVM este următoarea:
Dacă h este o funcție reală (de o anumită regularitate) ~~atunci~~ și $\hat{\theta}_M$ este un estimator de maximă verosimilitate pentru θ, atunci $h(\hat{\theta}_M)$ este un estimator de maximă verosimilitate pentru $h(\theta)$, notație

$h(\hat{\theta}_M) = \widehat{h(\theta)}_M$. În particular $\frac{1}{\hat{\theta}_M} = \widehat{\left(\frac{1}{\theta}\right)}_M$, adică inversul estimatorului ~~de VM~~ ML coincide cu ~~inversul~~ estimatorul ~~de VM~~ LM al inversului parametrului.

2.5.2. De obicei, în aplicații există două situații nefavorabile pentru MVM:

(i) ecuația (2) sau (2'), respectiv sistemul (4) sau (4') implică metode numerice de rezolvare; a se urmări Exemplul 2.6.3.

(ii) Ecuația (2) sau (2') respectiv sistemul (4) sau (4') nu are soluție. În aceste situații, se optează pentru alte metode de rezolvare, de exemplu metoda momentelor (§3)

2.6. Exemple

2.6.1. Fie $X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$; $q = 1-p$, $p \in [0,1]$.

Să se estimeze parametrul p pe baza unei selecții repetate $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

R. Funcția de verosimilitate este:

$l(x_1, x_2, \dots, x_n; p) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$. Dacă k dintre valorile $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt egale cu 1 iar restul ~~de~~ sunt 0, avem:

$l(x_1, x_2, \dots, x_n; p) = p^k q^{n-k} = p^k (1-p)^{n-k}$ și

$L(x_1, x_2, \dots, x_n; p) = k \ln p + (n-k) \ln(1-p)$.

Ecuația de verosimilitate maximă (2') este: $\frac{\partial L}{\partial p} = 0 \iff$

$\iff \frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p} = 0 \iff p = \frac{k}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \bar{x}$

Deci media de selecție $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ este o estimare de verosimilitate maximă pentru p. Se poate arăta, analog cu exemplul 1.10 că ~~e(0)~~ $e(\bar{x}) = 1$, deci $\bar{x}$ este și o estimare eficientă pentru p.

Observație: Orice funcție de estimație eficientă (i.e. orice estimare eficientă) a unui parametru θ verifică ecuația verosimilității maxime

2.6.2. Repartiția timpului de funcționare a unei lămpi electronice este dată de densitatea $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta} & ; t > 0 \\ 0 & ; t \le 0 \end{cases}$
(distribuție exponențială negativă)

Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ duratele de funcționare a n lămpi electronice

(i) Să se determine estimarea $\hat{\theta}$ de verosimilitate maximă

(ii) Să se arate că $\hat{\theta}$ este o estimare ~~nedeplasată~~ absolut corectă pentru θ.

(iii) Să se arate că $\hat{\theta}$ este o estimare eficientă pentru θ.

R. (i) $l(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdots f(x_n; \theta) =$

$= \theta^{-n} e^{-(x_1 + \dots + x_n)/\theta}$; $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Ecuația (2') este $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \iff -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, de unde

$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$

(ii) $M(\hat{\theta}) = M(\bar{x}) = \frac{1}{n} \cdot n\theta = \theta$, deci $\hat{\theta}$ este nedeplasată

Mai departe, $M(\hat\theta^2) = M_2(\hat\theta) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n M(x_i^2) + 2\sum_{i<j} M(x_i)M(x_j)\right)$

Dar $M(x_i^2) = \frac{1}{\theta}\int_0^\infty t^2 e^{-t/\theta}\, d\theta = \frac{1}{\theta}\mathcal{L}\{t^2\}\left(+\frac{1}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}\cdot\frac{2!}{s^3}\Big|_{s=+1/\theta} =$

$= \frac{1}{\theta}\cdot 2\cdot\theta^3 = 2\theta^2$, deci $M_2(\hat\theta) = \frac{1}{n^2}\left(2n\theta^2 + 2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\theta^2\right) = \frac{n+1}{n}\theta^2$

Astfel $D^2(\hat\theta) = M_2(\hat\theta) - M^2(\theta) = \frac{n+1}{n}\theta^2 - \theta^2 = \frac{\theta^2}{n}$, deci

$D^2(\hat\theta) = \frac{\theta^2}{n} \longrightarrow 0$ pentru $n\to\infty$. Astfel, $\hat\theta = \bar x$ este o estimare absolut corectă pentru parametrul θ

(iii) $I(\hat\theta) = n\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2 f(x;\theta)\,d\theta = n\int_0^\infty\left(\frac{x-\theta}{\theta^2}\right)^2\cdot\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\,dx =$

$= \frac{n}{\theta^5}\mathcal{L}\{(t-\theta)^2\}\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{n}{\theta^5}\left(\frac{2}{s^3} - 2\cdot\frac{1}{s^2}\cdot\theta + \theta^2\cdot\frac{1}{s}\right)\Big|_{s=1/\theta} = \frac{n}{\theta^2}$, deci

$e(\hat\theta) = \frac{1}{I(\hat\theta)D^2(\hat\theta)} = 1$, ceea ce arată că $\hat\theta$ este o estimare eficientă pt θ

2.6.3. Fie $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o selecție dintr-o populație în care caracteristica supusă cercetării este o variabilă aleatoare X de tip Gamma generalizată, i.e.

$$f(x;\theta,\alpha) = \begin{cases} \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\theta x} & ; x>0 \\ 0 & ; x\le 0 \end{cases} \quad ;\text{ unde } \theta>0, \alpha>0.$$

(i) Să se estimeze cu MLM parametrii α și θ.

(ii) În ipoteza că timpul de funcționare a unui generator electric este caracterizat prin pdf de mai sus și că duratele de funcționare a șapte generatoare sunt 100, 110, 150, 175, 185, 200 și 220 ore, să se estimeze cu MLM parametrii α și θ.

R: Avem $L(x;\theta,\alpha) = \ln \ell(x;\theta,\alpha) = \ln\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta,\alpha)$, deci:

$\cancel{L(x;\theta,\alpha) = \ln\left\{\frac{\theta^{n\alpha}}{(\Gamma(\alpha))^n}\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}\right)\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n x_i\right)\right\} = \frac{n\alpha}{(\Gamma(\alpha))^n}\ln\theta - \theta\sum_{i=1}^n x_i + \ln\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}}$

~~Sistemul de ecuații de VM (5) este~~ $\cancel{\frac{\partial L}{\partial\theta}=0;\ \frac{\partial L}{\partial\alpha}=0 \iff}$

$\iff \cancel{\frac{n\alpha}{(\Gamma(\alpha))^n}\frac{1}{\theta}}$ $L(x;\theta,\alpha) = \ln\left\{\frac{\theta^{n\alpha}}{(\Gamma(\alpha))^n}\left(\prod_{i=1}^n x_i^{(\alpha-1)}\right)\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n x_i\right)\right\} \iff$

$\iff L(x;\theta,\alpha) = n\alpha\ln\theta - n\ln\Gamma(\alpha) + \sum_{i=1}^n(\alpha-1)\ln x_i - \theta\sum_{i=1}^n x_i$

Sistemul de ecuații ~~de VM~~ (4') $\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$; $\frac{\partial L}{\partial \alpha}=0$ este:

$$\begin{cases} \frac{n\alpha}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0 \\ n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\cdot\frac{d\ln\Gamma(\alpha)}{d\alpha}=0 \end{cases}$$

Soluția acestui sistem nu se poate obține pe cale algebrică, de aceea se aplică metoda aproximațiilor succesive.

Dacă $\alpha \geq 2$ se poate lua $\frac{d}{d\alpha}\ln\Gamma(\alpha)\approx\ln(\alpha-\frac{1}{2})+\frac{1}{24}(\alpha-\frac{1}{2})^{-2}=g(\alpha)$

și se obține $\hat{\alpha}=\frac{\theta}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\theta\bar{x}$; $\hat{\theta}=(\exp g(\alpha))\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{-1/n}$; $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

deoarece $\exp(g(\alpha))=(\alpha-\frac{1}{2})\cdot\exp\left(\frac{1}{24}(\alpha-\frac{1}{2})^{-2}\right)$, iar pentru valori mici ale lui x avem $e^x\approx 1+x$ rezultă $\exp g(\alpha)\approx\alpha-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}(\alpha-\frac{1}{2})^{-1}$.

Astfel: $\hat{\alpha}=\hat{\theta}\bar{x}$; $\hat{\theta}=\left[\hat{\alpha}-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}(\hat{\alpha}-\frac{1}{2})^{-1}\right]\sqrt[n]{\frac{1}{x_1x_2\dots x_n}}$.

$$(ii)\begin{cases} \hat{\alpha}=\hat{\theta}\cdot\bar{x}=162{,}9\,\hat{\theta} \; ; \; \bar{x}=\frac{1}{7}(x_1+x_2+\dots+x_7) \\ \hat{\theta}=\left[162{,}9\,\hat{\theta}-\frac{1}{2}+\frac{1}{24(162{,}9\,\hat{\theta}-\frac{1}{2})}\right]\cdot 0{,}00637 \end{cases}$$

Rezolvând (eventual ~~aproximativ~~ prin metoda aproximațiilor) rezultă $\hat{\theta}=0{,}0891$; $\hat{\alpha}=13{,}70$.

2.6.4. Fie $X=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ un eșantion aleator (selecție) relativ la distribuția normală $N(m;\sigma^2)$. Aplicând MVM, să se determine ~~parametrii~~ estimanții $\hat{m}$ și $\hat{\sigma}^2$.

R. $f(x;m,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$;

$L(x;m,\sigma^2)=\ln\left\{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}\right)\right\}\iff$

$L(x;m,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-n\lg\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2$

Ecuațiile (4') dau: ~~sistemul VM dă~~: $\frac{\partial L}{\partial m}=0$; $\frac{\partial L}{\partial\sigma}=0\iff$

$$\iff\begin{cases} \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)=0 \\ -\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2=0 \end{cases}\iff\begin{cases} \hat{m}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x} \\ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{m})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \end{cases}$$

Observăm că în acest caz estimatorii ~~de MV~~ ML $\hat{m}$ și $\hat{\sigma}^2$ coincid cu ceea ce sugerează intuiția.

Interpretând estimatorii ML drept v.a., adică

$$\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X};\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \text{ obținem}$$

$$E\hat{m} = \frac{1}{n}\cdot n\, m = m \quad \cancel{E\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} M(X_i^2) - 2m\sum_{i=1}^{n} M(X_i) + n M(\overline{X}^2)\Big) =}$$

$$\cancel{= \frac{1}{n}\big(M(X^2)\cdot n - 2 M^2(X) + M(X^2) + (n-1)M^2(X)\big)}$$

și $E\hat{\sigma}^2 = M\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} D^2(X) = \frac{n}{n-1}\sigma^2$ (similar cu Exemplul 1.4.)

Astfel, $\hat{m}$ este un estimator nedeplasat, iar $\hat{\sigma}^2$ este un estimator deplasat; deoarece $E\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}\sigma^2 \to \sigma^2$ pentru $n\to\infty$, se spune că $\hat{\sigma}^2$ este un estimator asimptotic nedeplasat.

De asemenea, $var(\hat{m}) = D^2(\hat{m}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D^2(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 =$

$= \frac{\sigma^2}{n} \to 0$ pentru $n\to\infty$.

Deoarece $E\hat{m} = m$ și $var(\hat{m}) \to 0$ pentru $n\to\infty$, deducem că $\hat{m}$ este un estimator absolut corect.

2.6.5. Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o selecție (eșantion) dintr-o populație în care caracteristica de cercetare este o v.a. discretă X având ~~pdf~~ pmf (funcția de frecvență)

$$f(x;\theta) = \frac{1}{3}\sqrt{(5-2\theta)^{(3-x)(2-x)}}\cdot\sqrt{(\theta-1)^{(x-1)(4-x)}}, \text{ dacă}$$

$x \in \{1,2,3\}$ și $f(x;\theta) = 0$, dacă $x \in \mathbb{N}\setminus\{1,2,3\}$, iar parametrul $\theta \in T = [1, \frac{5}{2}]$. Să se determine estimarea ML pentru θ.

R. $L(x;\theta) = \ln\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \cancel{\ln\Big[\frac{1}{3^n}\prod_{i=1}^{n}(5-2\theta)}$

$$= \ln\Big[\frac{1}{3^n}\prod_{i=1}^{n}(5-2\theta)^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(3-x_i)(2-x_i)}\cdot\prod_{i=1}^{n}(\theta-1)^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)(4-x_i)}\Big] \Leftrightarrow$$

$$L(x,\theta) = -n\ln 3 + \frac{1}{2}\Big[\sum_{i=1}^{n}(3-x_i)(2-x_i)\Big]\ln(5-2\theta) + \frac{1}{2}\Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)(4-x_i)\Big]\ln(\theta-1)$$

Ecuația (2) este: $\frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{5-2\theta}\sum_{i=1}^{n}(6-5x_i+x_i^2) + \frac{1}{\theta-1}\sum_{i=1}^{n}(5x_i-4-x_i^2) = 0$

$\Leftrightarrow 2(\theta-1)(6n - 5\sum x_i + \sum x_i^2) = (5-2\theta)(5\sum x_i - 4n - \sum x_i^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ~~$\theta(4n$~~ $4n\theta = 15\sum x_i - 3\sum x_i^2 - 8n$, deci

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}_{ML} = \frac{15}{4}\bar{x} - \frac{3}{4n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2.$$

Să verificăm dacă $\hat{\theta}_{ML}$ este deplasat. Observăm că

$M(X) = 1\cdot f(1;\theta) + 2\cdot f(2;\theta) + 3 f(3;\theta) = 1\cdot\frac{1}{3}(5-2\theta) + 2\cdot\frac{1}{3}(\theta-1) + 3\cdot\frac{1}{3}(\theta-1) = \theta$

$M(X^2) = 1^2 f(1;\theta) + 2^2 f(2;\theta) + 3^2 f(3;\theta) = 1\cdot\frac{5-2\theta}{3} + \frac{4(\theta-1)}{3} + \frac{9(\theta-1)}{3} =$

$= \frac{11\theta-8}{3}$. De aici rezultă:

$E(\hat{\theta}_{ML}) = \frac{15}{4}E(\bar{x}) - \frac{3}{4n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i^2) - 2 = \frac{15}{4}\cdot\frac{1}{n}n\theta - \frac{3}{4n}\cdot n\cdot\frac{11\theta-8}{3} - 2 =$

$= \frac{15}{4}\theta - \frac{11\theta-8}{4} - 2 = \theta$, deci $\hat{\theta}_{ML}$ este un estimator nedeplasat.

De asemenea, var $\hat{\theta}_{ML} = D^2(\hat{\theta}_{ML}) = \frac{15}{4}D^2(\bar{x}) - \frac{9}{16n^2}\sum_{i=1}^{n} D^2(x_i)$;

$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{11\theta-8}{3} - \theta^2$; $D^2(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D^2(x_i) = \frac{1}{n^2}n D^2(X) =$

$= \frac{D^2(X)}{n}$, deci var $\hat{\theta}_{ML} = D^2(\hat{\theta}_{ML}) = \frac{15}{4}\cdot\frac{D^2(X)}{n} - \frac{9}{16n^2}\cdot n D^2(X) =$

$= \frac{15 D^2(X)}{4n} - \frac{9 D^2(X)}{16n} = \frac{51}{16n}D^2(X) = \frac{51}{16n}\cdot\frac{11\theta-8-3\theta^2}{3} \iff$

$\iff$ var $\hat{\theta}_{ML} = D^2(\hat{\theta}_{ML}) = \frac{17}{16n}(11\theta-8-3\theta^2) \to 0$ pentru $n\to\infty$;

în concluzie, $\hat{\theta}_{ML}$ este un estimator absolut corect.

§3. Metoda momentelor

În situația în care rezolvarea ecuației ML (2) (2') sau a sistemului ML (4), (4') ~~este~~ din §2 dificilă sau implică metode aproximative laborioase, se poate apela la așa-numita metodă a momentelor pentru determinarea estimatorilor ML.

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un eșantion statistic de v.a. identic distribuite, cu ~~o~~ funcția de repartiție $F(x)$ necunoscută. Considerând selecția $x_1, x_2, \dots, x_n$ de valori ale v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$, se poate defini funcția de distribuție a eșantionului (selecției)

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ \frac{m}{n}; & x_m \le x < x_{m+1};\ 1 \le m \le n-1 \\ 1; & x \ge x_n \end{cases}$$

Din legea numerelor mari rezultă că $\tilde{F}(x) \to F(x), \forall x\in\mathbb{R}$, pentru $n\to\infty$.

Să presupunem că distribuția (repartiția) $F(x)$ depinde de s parametri, $F(x) = F(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) = F(x; \theta)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ și fie $m_i(\theta) = M(X_k^i)$, $1 \le i \le s$. Notăm cu $\tilde{m}_i$ momentele de selecție (momentele aproximate), $\tilde{m}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^i$, $1 \le i \le s$.

Estimarea parametrului $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ se realizează rezolvând sistemul de ecuații

$$(1) \quad m_i(\theta) = \tilde{m}_i \iff E(X^i) = \tilde{m}_i, \quad 1 \le i \le s.$$

Soluția $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_s)$ a sistemului (1) depinde continuu de $\tilde{m} = (\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \dots, \tilde{m}_s)$ și $\hat{\theta} \to \theta$ pentru $n \to \infty$ cu probabilitatea 1.

~~Ae~~ Metoda momentelor (care constă, deci, în egalarea momentelor teoretice cu momentele de selecție) furnizează în unele cazuri estimări nedeplasate (estimatori nedeplasați).

<u>Exemple</u>

<u>3.1</u>. Fie v.a. X cu $F_X(x; \delta, b) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ \left(\frac{x}{b}\right)^{\delta}; & 0 \le x \le b;\ \delta > 0,\ b > 0 \\ 1; & x > b \end{cases}$

Aici $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta_1 = \delta$, $\theta_2 = b$. ; $f(x; \delta, b) = \frac{d}{dx}F_X(x; \delta, b) = \begin{cases} \frac{\delta}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{\delta-1} & \text{if } 0 < x < b \\ 0; & \text{în rest} \end{cases}$

<u>Obs.</u> MLM conduce la ecuația $\frac{\partial L}{\partial b} = 0$ care nu are soluție

Să aplicăm metoda momentelor

Avem $\tilde{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$; $\tilde{m}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ (momentele de selecție)

Momentele teoretice sunt $m_1(\delta, b) = \int_0^b x \cdot \underbrace{\delta\left(\frac{x}{b}\right)^{\delta-1}\frac{1}{b}}_{f(x;\delta,b)}dx = \frac{\delta}{b^{\delta}}\left.\frac{x^{\delta+1}}{\delta+1}\right|_0^b =$
$= \frac{\delta b}{\delta+1}$; $m_2(\delta, b) = \int_0^b x^2 \cdot \delta \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^{\delta-1}\frac{1}{b}dx = \frac{\delta b^2}{\delta+2}$

Sistemul (1) este: $m_1(\delta, b) = \tilde{m}_1$; $m_2(\delta, b) = \tilde{m}_2 \iff$

$$\iff \begin{cases} \delta b = \bar{x}(\delta+1) \\ (\delta+2)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n\delta b^2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{\delta+1}{\delta}\bar{x} \\ (\delta+2)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n\delta \cdot \frac{(\delta+1)^2}{\delta^2}\bar{x}^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} b = \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\bar{x} \\ \alpha\delta^2 + 2\alpha\delta - n\bar{x} = 0 \\ \alpha = \sum x_i^2 - \sum x_i = \sum x_i^2 - n\bar{x} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \hat{\delta} = \sqrt{1 + n\frac{\bar{x}}{\alpha}} - 1 \\ \hat{b} = \left(1 + \frac{1}{\hat{\delta}}\right)\bar{x} \end{cases}$$

; presupunem $\bar{x} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

3.2. Fie v.a. X cu $f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} ; & 0 \le x \le \theta \\ 1 ; & \text{în rest} \end{cases} ; \theta > 0$,

deci X este o v.a uniformă. Aici sistemul $(*)$ are o singură ecuație

$$m_1(\theta) = \bar{m}_1 \iff \int_0^\theta x \frac{1}{\theta}\, dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \iff \frac{1}{\theta} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^\theta = \bar{x} \iff$$

$$\iff \boxed{\hat{\theta} = 2\bar{x} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n x_i}$$

Observăm că $E(\hat{\theta}) = 2E(\bar{x}) = 2E(X) = 2\cdot\frac{\theta}{2} = \theta$, deci $\hat{\theta}$ este nedeplasat.

De asemenea $D^2(\theta) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^n D^2(X_i) = \frac{4}{n}D^2(X) = \frac{4}{n}\left(E(X^2) - E^2(X)\right) =$

$$= \frac{4}{n}\left(\int_0^\theta \frac{1}{\theta}x^2\,dx - \frac{\theta^2}{4}\right) = \frac{4}{n}\left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{\theta^3}{3} - \frac{\theta^2}{4}\right) = \frac{\theta^2}{3n}, \text{ deci}$$

$D^2(\theta) = \frac{\theta^2}{3n} \longrightarrow 0$ pentru $n \to \infty$.

În concluzie $\hat{\theta} = 2\bar{x}$ este un estimator absolut corect.

Observație. MLM nu are soluție. Într-adevăr,

$$L(x;\theta) = \ln \prod_{i=1}^n f(x_i;\theta) = \ln\frac{1}{\theta^n} = -n\ln\theta \ ; \quad 0 < x < \theta$$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta}$ și ecuația $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ nu are soluție.

§4. Metoda intervalelor de încredere (M.I.I)

M.I.I. permite estimarea unui parametru prin determinarea unui interval numit interval de încredere, căruia acesta îi aparține cu o probabilitate fixată (desigur, prin utilizarea M.I.I, asumăm implicit un anumit risc)

Fie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ o selecție asupra caracteristicii X.

Relativ la parametrul θ presupunem că se pot determina două funcții de selecție $\theta_1(x)$ și $\theta_2(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ astfel încât probabilitatea inegalității

$$\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \le \theta < \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

nu depinde de α, adică

$$P\left(\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \le \theta < \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\right) = \delta, \text{ unde } \delta \text{ nu depinde de } \theta.$$

Intervalul $[\theta_1(x), \theta_2(x)]$, $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, care acoperă θ cu probabilitatea δ, se numește <u>interval de încredere</u>; cu cât acest interval este mai mic și probabilitatea δ mai mare, cu atât avem o indicație mai precisă în legătură cu valoarea lui θ.

<u>Exemplu</u> <u>Determinăm parametrul m din legea normală $N(m;\sigma^2)$</u>

Avem $f(x;m,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$. Fie selecția (eșantionul) $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)$ media de selecție. Se știe că v.a. $Y = \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ urmează legea normală redusă $N(0;1)$ cu pdf ~~f(x)~~ $f(x;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Fie ~~$\delta > 0$ dat~~ $\delta \in (0,1)$ dat. Putem determina numerele α_1 și α_2 astfel încât $P(\alpha_1 \le Y \le \alpha_2) = \delta \iff \Phi(\alpha_2) - \Phi(\alpha_1) = \delta$, unde $\Phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ este funcția (tabelată) a lui Laplace.

Astfel avem: $\alpha_1 \le Y \le \alpha_2 \iff \alpha_1 \le \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}-m) \le \alpha_2 \iff$

$\iff \bar{x} - \alpha_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} - \alpha_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Intervalul $I = [\bar{x} - \alpha_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} - \alpha_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ este <u>intervalul de încredere pentru m</u> care acoperă parametrul m cu probabilitatea δ, i.e. $P(m \in I) = \delta$.

Dacă $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha > 0$, atunci $I = [\bar{x} - \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ este centrat în $\bar{x}$ și are lungimea $2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Numărul $1-\delta$ reprezintă probabilitatea ca parametrul m să nu aparțină intervalului de încredere și constituie <u>riscul</u> asumat de cercetător. Practic $1-\delta$, numit și <u>nivel de semnificație</u> este 0,05 sau 0,01.

<u>Observație</u> Practic pentru determinarea intervalelor de încredere se procedează astfel:

<u>(i)</u> folosind o selecție $x_1, x_2, \dots, x_n$ se construiește o funcție de selecție (statistică), de obicei $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)$

~~(ii)~~

(ii) În legătură cu caracteristica cercetată se introduce o v.a. Y, în care intervine funcție de selecție de la (i) și parametrul supus estimării, astfel încât se cunoaște repartiția (pdf sau pmf) pentru Y

(iii) Se dă o probabilitate $\delta \in (0,1)$. Se determină intervalul de variație $[\alpha_1, \alpha_2]$ al v.a. Y astfel încât $P(Y \in [\alpha_1, \alpha_2]) = \delta$.

(iv) Din intervalul $[\alpha_1, \alpha_2]$ se determină intervalul de încredere pentru parametrul supus estimării.

§5. Teoria estimării în sens Bayes

5.1. Funcția de risc ~~a lui Bayes~~

Fie $J_o = (\mathcal{J}, \mathcal{X}, D)$ un joc statistic, Δ ~~mulțimea~~ spațiul deciziilor, $\mathcal{X}$ spațiul observațiilor, T spațiul parametrilor și $\mathcal{D}$ mulțimea funcțiilor (regulilor) de decizie $D : \mathcal{X} \to \Delta$

Funcția $R : T \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$,

$$R(\theta, D) = E\, L(\theta, D(X)), \ \forall (\theta, D) \in T \times \mathcal{D},$$

unde $L : T \times \Delta \to \mathbb{R}$ este funcția de cost a jocului J_o, se numește funcția de risc a jocului statistic J_o. (pierderea medie)

Are loc egalitatea

$$R(\theta, D) = \int_{-\infty}^{\infty} L(\theta, D(x))\, f_{X|\theta}(x;\theta)\, dx, \ \forall (\theta, D) \in T \times \mathcal{D}.$$

Aici ~~parametrul~~ θ se consideră variabilă aleatoare (sau vector aleator).
De aceea, egalitatea de mai sus se scrie

$$R(\theta, D) = \int_{-\infty}^{\infty} L(t, D(x))\, f_{X|\theta}(x;t)\, dx, \ \forall (\theta, D) \in T \times \mathcal{D},$$

unde t este valoarea luată (asumată) de v.a. θ.

5.2. Funcția de risc a lui Bayes

În condițiile din secțiunea 5.1., funcția de risc a lui Bayes este media riscului $R(\theta, D)$ relativ la o distribuție a priori asumată pentru θ.