[redacted]

Intervale de încredere

[redacted]

Presupunem că studiem vâscozitatea unei anumite substanţe. Prin studierea unui eşantion s-a constatat că media acestei caracteristici este $\hat{\mu} = \overline{x} = 1000$. Dacă considerăm un alt eşantion este aproape imposibil să obţinem aceeaşi estimare numerică pentru media vâscozităţii. Nu putem spune nimic despre relaţia dintre cele două medii. Problema pe care o punem este următoarea: valoarea reală a vâscozităţii este cuprinsă între 900 şi 1100 sau între 990 şi 1100? Răspunsul la această întrebare afectează deciziile ulterioare legate de acest proces. Marginile unui interval plauzibil pentru valorile mediei constituie un interval estimat.

Acest interval unde bănuim că este situată valoarea reală a parametrului populaţiei studiate se numeşte *interval de încredere*. Intervalul de încredere constă din:

- *un interval*, obţinut cu ajutorul datelor furnizate de o selecţie,
- *un nivel de încredere*, care reprezintă probabilitatea ca intervalul să acopere valoarea reală a parametrului.

Nivelul de încredere se precizează. De regulă se consideră 0.90 sau mai mult. Se dă de obicei α, unde nivelul de încredere este $1-\alpha$ (0.95 corespunde pragului de semnificaţie $\alpha = 0.05$).

Definiţia 11.0.1 *Se numeşte* interval de încredere *pentru un parametru θ asociat unei populaţii orice interval $I = [a, b]$ pentru care se poate estima probabilitatea ca $\theta \in I$. Dacă α este un număr cuprins între 0 şi 1 şi dacă $P(\theta \in I) \geq 1-\alpha$, se spune că I este un interval de încredere pentru θ cu un nivel de încredere $1-\alpha$ (sau echivalent, cu un nivel de încredere $(1-\alpha)\,100\%$ sau cu eroare sub $\alpha 100\%$).*

În cele ce urmează vom construi intervale de încredere numai pentru caracteristici care urmează o distribuţie normală

11.1 Intervale de încredere pentru medie în cazul σ cunoscut

Presupunem că realizăm o selecţie populaţie a cărei caracteristică studiată urmează o distribuţie normală, $N[m, \sigma]$, cu σ cunoscut, m necunoscut. Situaţia este mai puţin întâlnită în realitate deoarece în mod normal atât media cât şi dispersia sunt necunoscute. Totuşi vom prezenta în continuare şi acest caz.

11.1.1 Construcţia intervalului de încredere

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valorile variabilelor de selecţie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ obţinute dintr-o populaţie care urmează o distribuţie normală, $N[m, \sigma]$, $\sigma > 0$ cunoscut, m necunoscut. Ştim că $Z = \dfrac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N([0, 1]$. Din această cauză putem scrie, (evident $z > 0$),

$$P(|Z| \leq z) = 1 - \alpha \Leftrightarrow 1 - \alpha = P\left(m \in \left[\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) \Leftrightarrow$$
$$1 - \alpha = \Phi(z) - \Phi(-z) \Leftrightarrow 1 - \alpha = 1 - 2\Phi(-z) \Leftrightarrow \Phi(-z) = \frac{\alpha}{2}$$

Notăm cu $z_{\frac{\alpha}{2}}$ valoarea (pozitivă) a lui z obţinută din relaţia $\Phi(-z) = = \dfrac{\alpha}{2}$. Pentru determinarea acestei valori se foloseşte tabelul pentru funcţia lui Laplace (a se vedea Anexa 1) sau programele Matlab sau Mathematica.

De îndată ce selecţia a fost realizată şi a fost calculată media de selecţie $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ se obţine intervalul,

$$\left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \tag{11.1}$$

Suntem tentaţi să spunem că $1 - \alpha$ este probabilitatea ca acest interval să cuprindă valoarea exactă a lui m, dar această afirmaţie nu este corectă. Trebuie să ţinem seama de faptul că întervalul de încredere este un interval aleator, el depinde de selecţia făcută, deci extremităţile sale sunt v. a. Prin urmare interpretarea corecta a lui $1 - \alpha$ este următoarea: dacă, facem un număr foarte mare de selecţii şi calculăm de fiecare dată întervalul de încredere cu nivelul de încredere $1 - \alpha$, atunci $(1 - \alpha)\,100\%$ din aceste intervale vor conţine valoarea exactă pentru m.

Observăm că intervalul de încredere pentru m este centrat în estimaţia punctuală $\overline{x}$. Când n creşte se obţine un *interval mai scurt* pentru acelaşi coeficient de încredere. Un interval de încredere mai scurt indică o mai mare încredere în $\overline{x}$ ca estimaţie a lui m.

[redacted]

Exemplul 11.1.1 Punctajele obţinute de studenţi care au promovat examenul de matematică şi care cuantifică cunoştinţele lor sunt:

{64, 62, 76, 82, 66, 76, 72, 71, 74, 72, 71, 73, 70, 75, 77, 84, 92, 86, 62, 58, 78, 80, 79, 84, 83, 82, 66, 68, 68, 82, 84, 78, 76, 69, 77, 58, 62, 82, 85, 58, 78, 84, 94, 88, 77, 78, 88, 91, 70, 71, 78, 58, 65, 53, 60, 49, 68, 74, 71, 66, 68, 71, 73, 70, 85, 78, 65, 54, 51, 78, 89, 66, 68, 95, 94, 99, 81, 81, 92, 88, 99, 81, 81}.

Se presupune că se cunoaşte $\sigma = 10.99$. Să se construiască intervalele de încredere pentru medie cu nivelele de încredere de 90%, 95% şi 99%.

Rezolvare. Am calculat $\overline{x} = \dfrac{1}{83}\sum\limits_{i=1}^{83} x_i = 75.0602$.

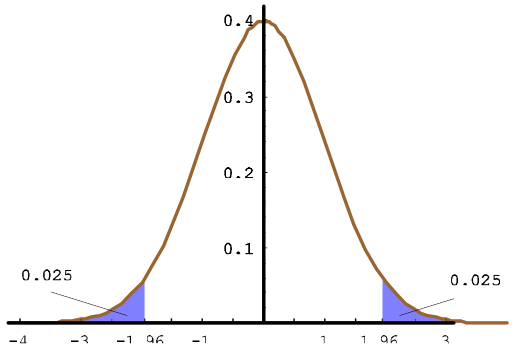
Calculăm intervalele de încredere cu nivelul de încredere de 90%, 95% şi 99%.

Pentru 90% avem $\alpha = 0.1$ şi

$$\Phi(-z) = 0.05 \Rightarrow -z = -1.6449 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.6449.$$

Atunci, conform (11.1), intervalul

$$I = \left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [73.0760; 77.0445].$$



este un interval de încredere pentru m cu 90% nivel de încredere.

Pentru 95% avem $\alpha = 0.05$ şi $\Phi(-z) = 0.025 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.9599$. Intervalul de încredere pentru m este

$$I = \left[\overline{x} - 1.9599 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + 1.9599 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [72.6960; 77.4245]\,.$$

Pentru 99% avem $\alpha = 0.01$ şi $\Phi(-z) = 0.005 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.5758$, intervalul de încredere pentru m este

$$I = \left[\overline{x} - 2.5758 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + 2.5758 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [71.9530; 78.1675]\,.$$

Observăm că dacă, de exemplu, nivelul de încredere este 0.95, atunci $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.9599$ trebuie să lase la dreapta sa o arie egală cu $\frac{\alpha}{2} = 0.025$, iar la stânga o arie egală cu $1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.025 = 0.975$.

Această modalitate de determinare a intervalului de încredere se poate sintetiza în **testul Z**.

Algoritmul testului Z

Presupunem dată o selecţie de valori independente (de volum n) dintr-o populaţie de medie m necunoscută şi dispersie σ^2 $(\sigma > 0)$ cunoscută.

Pasul 1. Se calculează $\overline{x}$.

Pasul 2. Se consideră statistica $Z = \dfrac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Pasul 3. Pentru un nivel de încredere prescris $(1-\alpha)\cdot 100\%$ se determină $z_{\frac{\alpha}{2}} > 0$ astfel încât $\Phi(-z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$.

Pasul 4. Se determină intervalul de încredere pentru m

$$\left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Comparăm intervalele obţinute în exemplul de mai sus în funcţie de nivelul de încredere

$(1-\alpha)\cdot 100\%$	$\frac{\alpha}{2}$	$z_{\frac{\alpha}{2}}$	$\left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
90%	0.05	1.6449	[73.0760; 77.0445]
95%	0.025	1.9599	[72.6960; 77.4245]
99%	0.005	2.5758	[71.9530; 78.1675]

Din tabel se observă că lungimea intervalului este invers proporţională cu nivelul de încredere.

Am putea spune că 95% dintre studenţi au punctajele cuprinse în intervalul $[72.6960; 77.4245]$? Această interpretare nu este corectă deoarece valoarea exactă a mediei nu este cunoscută şi afirmaţia $m \in [72.6960; 77.4245]$ poate fi corectă sau nu deoarece intervalul de încredere construit este aleator, el bazându-se pe o selecţie aleatoare.

Interpretarea corectă este: dacă facem un număr mare de selecţii şi de fiecare dată calculăm intervalul de încredere pentru medie cu nivelul de încredere de 95%, atunci în 95% din aceste intervale vor conţine valoarea corectă a mediei. Deci metoda folosită ne permite să obţinem intervale pentru medie care vor conţine în 95% din cazuri valoatrea corectă.

Alegerea nivelului de încredere este arbitrară. Ne punem problema ce se întâmplă dacă mărim nivelul de încredere, de exemplu, la 99%? Este rezonabil să dorim să mărim nivelul de încredere. În acest caz, pentru exemplul considerat, intervalul de încredere va fi $[71.9530; 78.1675]$, deci va fi mai mare decît în cazul nivelului de 95%. Dacă dimensiunea eşantionului şi abaterea medie pătratică sunt păstrate constante, atunci un nivel mai înalt de încredere atrage un interval de încredere mai mare.

Lungimea intervaluilui de încredere este o măsură a preciziei estimării. Din cele prezentate rezultă că precizia este invers proporţională cu nivelul de încredere. Este preferabil să obţinem un interval de încredere cît mai scurt pentru o problema pusă, dar cu un nivel de încredere adecvat. Un mod de a atinge acest scop este alegerea dimensiunii eşantionului astfel încât cu ajutorul acestei selecţii să putem obţine un interval de încredere de lungime specificată şi cu nivelul de încredere dat.

Intervalele de încredere studiate până acum sunt bilaterale în sensul că dădeau ca rezultat un interval închis. Dacă există o informaţie relativă la valoarea medie de forma că aceasta nu este limitată superior, atunci intervalul de încredere devine de forma $\left(\overline{x} - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$ şi este un interval de încredere unilateral.

În acest caz

$$P\left(Z > -z\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P\left(m \in \left(\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow$$
$$1 - \Phi\left(-z\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi\left(-z\right) = \alpha$$

Notăm cu z_α valoarea obţinută din relaţia $\Phi(-z) = \alpha$.

O situaţie similară are loc dacă valoarea medie nu este limitată inferior, intervalul de încredere fiind $\left(-\infty, \overline{x} + z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, iar valoarea z_α se obţine din relaţia $\Phi(z) = 1 - \alpha$.

11.2 Intervale de încredere pentru medie în cazul σ necunoscut

Presupunem că populaţia studiată are o distribuţie normală cu media m şi dispersia σ^2 necunoscute. Facem o selecţie de dimensiune n. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valorile variabilelor de selecţie $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Putem calcula media de selecţie $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ şi dispersia de selecţie modificată $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$.

Vrem să calculăm un interval de încredere pentru m. Dacă dispersia este cunoscută, ştim că $Z = \dfrac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ urmează o distribuţie normală. Dacă σ este necunoscut o procedură normală este de a înlocui σ cu s. Statistica devine acum $T = \dfrac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$. O întrebare logică care se pune este următoarea: care este efectul înlocuirii lui σ cu s asupra distribuţiei statisticii T? Dacă n este suficient de mare, răspunsul la această întrebare este: efectul este "destul de mic" şi putem considera că urmează o distribuţie normală standard. În general n trebuie să fie cel puţin 40. Teorema limită centrală are loc pentru $n \geq 30$, dar mărirea eşantionului recomandată este la cel puţin 40, deoarece înlocuirea lui σ cu s în Z conduce la modificări suplimentare ale distribuţiei.

În acest caz intervalul de încredere se construieşte astfel:

Pasul 1. Se calculează $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ şi $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})$.

Pasul 2. Se consideră statistica $Z = \dfrac{\overline{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$.

Pasul 3. Pentru un nivel de încredere prescris $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ se determină $z_{\frac{\alpha}{2}} > 0$ astfel încât $\Phi(-z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$.

Pasul 4. Se determină intervalul de încredere pentru m,

$$\left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Dacă n este mic, cum se întâmplă în multe probleme din inginerie, trebuie folosită distribuţia Student pentru construirea intervalului de încredere.

Testul Student

Presupunem că populaţia studiată are o distribuţie normală cu media m şi abaterea medie pătratică σ necunoscute. Facem o selecţie de dimensiune n, n mic. Vrem să calculăm un interval de încredere pentru m.

Teorema 11.2.1 *Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independente, care urmează o distribuţie normală cu media m şi dispersia σ^2. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ şi fie $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$, unde $\overline{x}$ reprezintă media de selecţie, s reprezintă abaterea medie de selecţie. Statistica $T = \dfrac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ urmează o distribuţie Student cu $n - 1$ grade de libertate.*

În tabelul din Anexă pentru funcţia de repartiţie a distribuţiei Student pe prima linie sunt date valorile lui α iar pe coloană sunt trecute gradele de libertate. Astfel calculăm

$$F(t_{\alpha,n}) = P\left(T \leq t_{\alpha,n}\right) = \int_{-\infty}^{t_{\alpha,n}} f(x)dx = 1 - \alpha,$$

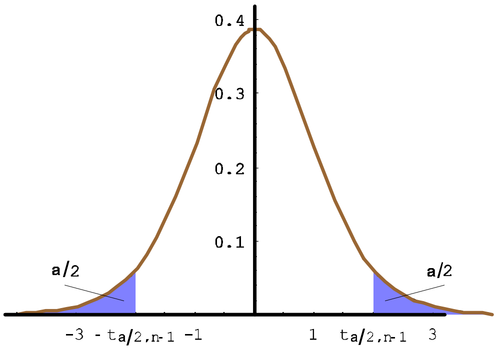
unde $f\left(x\right)$ este densitatea de probabilitate a distribuţiei Student.

Pentru valorile negative se foloseşte faptul că

$$F(-t_{\alpha,n}) = 1 - F(t_{\alpha,n}). \tag{11.2}$$

Deoarece distribuţia Student este simetrică, avem $t_{1-\alpha,n} = -t_{\alpha,n}$, ceea ce înseamnă că în partea dreaptă a lui $t_{\alpha,n}$, dar şi în partea stângă a lui $t_{1-\alpha,n}$, aria este α.

Pentru orice $\alpha \in (0, 1)$ se poate determina pragul $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} > 0$ astfel încât $P(|T_{n-1}| \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}) = 1 - \alpha$. Se alege $t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ astfel încât ariile colorate din figură. să fie fiecare $\dfrac{\alpha}{2}$.



Înlocuind $T_{n-1} = \dfrac{(\overline{X} - m)\sqrt{n}}{s}$, rezultă

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \le \frac{(\overline{X} - m)\sqrt{n}}{s} \le t_{\frac{\alpha}{2},n-1}) = 1 - \alpha \Leftrightarrow$$

$$P\left(m \in \left[\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},n-1}, \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right]\right) = 1 - \alpha.$$

Rezultă că intervalul

$$\left[\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},n-1}, \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right]$$

este un interval de încredere pentru media m cu coeficientul de încredere $100(1-\alpha)\%$.

Algoritmul testului Student (mai este cunoscut sub denumirea de **testul T**)

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o selecţie de variabile de selecţie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. dintr-o populaţie normală cu media m şi dispersia σ^2 necunoscute.

Pasul 1. Se calculează $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ şi $s = \left(\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Pasul 2. Se consideră statistica $T = \dfrac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$.

Pasul 3. Pentru un coeficient de încredere prescris $(1-\alpha)\cdot 100\%$ se determină din tabelul funcţiei de repartiţie Student sau cu ajutorul softurilor numărul $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} > 0$ astfel încât $P(|T| \le t_{\frac{\alpha}{2},n-1}) = 1 - \alpha$.

Pasul 4. Se determină intervalul de încredere pentru m,

$$\left[\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},n-1}, \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right].$$

Exemplul 11.2.2 Considerăm un eşantion de 36 studenţi care au obţinut punctajele: 64, 62, 76, 82, 66, 74, 72, 71, 73, 70, 75, 77, 84, 92, 86, 62, 58, 80, 79, 84, 83, 62, 78, 84, 94, 88, 77, 58, 65, 53, 60, 49, 68, 74, 78, 98.

Să se stabilească intervale de 90%, 95% şi 99% încredere pentru media punctajelor obţinute.

Rezolvare. Folosim testul Z.

Rezultă $\overline{x} = 73.7778$, $\sigma \simeq s = 11.6082$.

Statistica T este distribuită Student cu 35 grade de libertate (a se consulta anexa 2 cu tabelul valorilor funcţiei de repartiţie Student în funcţie de gradele de libertate).

Pentru 90% încredere (deci eroare sub 10%) avem $t_{0.05} = 1.68957$. Intervalul cerut are capetele $73.7778 \pm 1.68957 \cdot \frac{11.6082}{\sqrt{36}}$, adică $[70.509; 77.0466]$.

Pentru 95% încredere (deci eroare sub 5%) avem $t_{0.025} = 2.03011$. Intervalul cerut are capetele $73.7778 \pm 2.03011 \cdot \frac{11.6082}{\sqrt{36}}$, adică $[69.8501; 77.7054]$

Pentru 99% încredere (deci eroare sub 1%) avem $t_{0.005} = 2.72381$. Intervalul cerut are capetele $73.7778 \pm 2.72381 \cdot \frac{11.6082}{\sqrt{36}}$, adică $[68.5081; 79.0475]$

Şi în acest caz putem construi intervale de încredere de forma $\left(\overline{x} - t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \infty\right)$ sau $\left(-\infty, \overline{x} + t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ pentru intervale de încredere unilaterale.

11.3 Intervale de încredere pentru dispersie

Uneori este necesar calculul intervalului de încredere pentru dispersia unei caracteristici studiate. Dacă populaţia este modelată de o distribuţie normală putem aplica intervalele descrise în continuare.

Teorema 11.3.1 *Fie variabilele de selecţie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. (independente şi identic distribuite) cu $X \in N(m, \sigma)$, media m şi dispersia σ^2 necunoscute. Statistica*

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

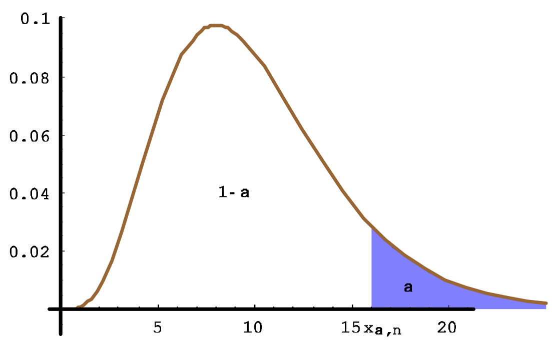
urmează o distribuţie hi-pătrat cu $n-1$ grade de libertate.

Definim $x_{\alpha,n}$ ca fiind punctul pentru care este satisfăcută inegalitatea

$$P\left(\chi^2 \leq x_{\alpha,n}\right) = \int_{-\infty}^{x_{\alpha,n}} f(t)dt = 1 - \alpha, \tag{11.3}$$

unde $f(t)$ este densitatea de probabilitate a distribuţiei $\chi^2(n)$.

Probabilitatea căutată este aria situată la stânga lui $x_{\alpha,n}$ din figura următoare.



Pentru a ilustra modul de utilizare a tabelului de valori ale funcţiei de repartiţie hi-pătrat observăm că pe prima coloană sunt trecute gradele de libertate iar pe linie sunt trecute valorile lui α. De exemplu, pentru $n = 10$ şi $\alpha = 0.05$ obţinem $x_{0.05,10} = 18.31$, iar $x_{1-0.05,10} = 3.94$.

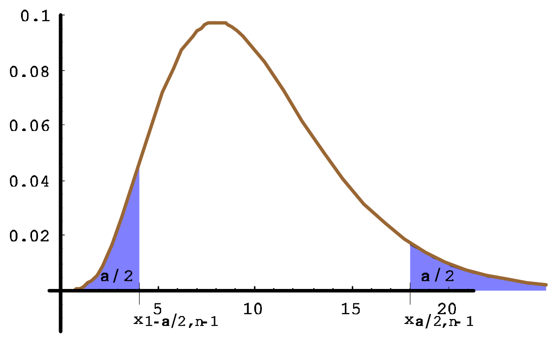
Deci $P(\chi^2 \leq x_{0.05,10}) = 1 - 0.05$, $P(\chi^2 \leq x_{0.95,10}) = 0.05$, $x_{0.05,10} = 18.31$, iar $x_{1-0.05,10} = 3.94$. $\Diamond$

Pentru construcţia intervalului de încredere pentru dispersie se foloseşte statistica $\chi^2_{n-1} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \in \chi^2\,(n-1)$. Pentru $\alpha \in (0,1)$ dat determinăm $x_1(\alpha)$ şi $x_2(\alpha)$ astfel încât

$$P\left(x_1(\alpha) \leq \chi^2_{n-1} \leq x_2(\alpha)\right) = 1-\alpha. \tag{11.4}$$

Numerele $x_1(\alpha)$ şi $x_2(\alpha)$ nu sunt unic determinate şi de obicei se aleg astfel încât $x_1(\alpha) = x_{1-\alpha/2,n-1}$ şi $P\left(\chi^2_{n-1} \leq x_{1-\alpha/2,n-1}\right) = \dfrac{\alpha}{2}$, iar $x_2(\alpha) = x_{\alpha/2,n-1}$ şi $P\left(\chi^2_{n-1} \geq x_{\alpha/2,n-1}\right) = \dfrac{\alpha}{2}$.

Semnificaţia valorilor $x_{1-\alpha/2,n-1}$ şi $x_{\alpha/2,n-1}$ poate fi vazută în figura următoare.



Înlocuind $\chi^2_{n-1} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ în (11.4) şi obţinem:

$$P\left(x_{1-\alpha/2,n-1} \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq x_{\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha. \tag{11.5}$$

Relaţia (11.5) poate fi rearanjată astfel:

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{x_{\alpha/2,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{x_{1-\alpha/2,n-1}}\right) = 1-\alpha. \tag{11.6}$$

Am obţinut astfel un interval de încredere pentru dispersie.

Algoritmul de determinare a intervalului de încredere pentru dispersie

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o selecţie de valori pentru variabilele de selecţie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. dintr-o populaţie normală cu media m şi dispersia σ^2 necunoscute.

Pasul 1. Se calculează $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ şi $s = \left(\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Pasul 2. Se alege statistica $\chi^2_{n-1} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ despre care se ştie că urmează o distribuţie χ^2 cu $n-1$ grade de libertate.

Pasul 3. Pentru un nivel de încredere prescris $(1-\alpha)\cdot 100\%$ se determină, din tabelul valorilor funcţiei de repartiţie χ^2 cu $n-1$ grade de libertate sau cu ajutorul softurilor Matlab sau Mathematica, numerele $x_{1-\alpha/2,n-1}$ şi $x_{\alpha/2,n-1}$ astfel încât

$$P\left(\chi^2_{n-1} \leq x_{1-\alpha/2,n-1}\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{şi} \quad P\left(\chi^2_{n-1} \leq x_{\alpha/2,n-1}\right) = 1-\frac{\alpha}{2}.$$

Pasul 4. Se determină intervalul $\left[\dfrac{(n-1)s^2}{x_{\alpha/2,n-1}}, \dfrac{(n-1)s^2}{x_{1-\alpha/2,n-1}}\right]$ şi rezultă intervalul de încredere pentru σ^2.

Observaţia 11.3.2 *Este posibil să determinăm intervale nemărginite inferior sau superior pentru dispersie cu un anumit nivel de încredere* $(1-\alpha)\,100\%$. *Acestea sunt* $\left(-\infty, \dfrac{(n-1)s^2}{x_{1-\alpha,n-1}}\right)$, *respectiv* $\left(\dfrac{(n-1)s^2}{x_{\alpha,n-1}}, \infty\right)$.

Exemplul 11.3.3 Reluăm Exemplul 11.1.1. Dorim să construim intervale de încredere pentru dispersie.

Rezolvare. Avem $n = 83$. Calculăm $s = 11.3517$. Considerăm statistica $\chi^2_{82} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \dfrac{82s^2}{\sigma^2}$.

Pentru nivelul de încredere de 90% avem $x_{0.95,83} = 62.1323$ şi $x_{0.05,83} = 104.139$. Intervalul de încredere pentru dispersie este $[101.468, 170.068]$.

Pentru nivelul de încredere de 95% avem $x_{0.975,83} = 58.8446$ şi $x_{0.025,83} = 108.937$. Intervalul de încredere pentru dispersie este $[96.998, 179.57]$.

Pentru nivelul de încredere de 99% avem $x_{0.995,83} = 52.7674$ şi $x_{0.005,83} = 118.726$. Intervalul de încredere pentru dispersie este $[89.0006, 200.251]$.

Exemplul 11.3.4 Media erorilor de măsurare a lungimilor unor baghete metalice este de 3 mm. Presupunem că aceste erori respectă legea normală cu media 3 mm şi dispersia necunoscută. Se face o selectie de volum 6: {-1, 4, 4, 1,3,1}. Se cere un interval de estimaţie pentru dispersie cu nivel de încredere de 90%.

Rezolvare. Avem $n = 6$, $m = 3$. Calculăm

$$s^2 = \frac{1}{3}\left((-1-3)^2 + (4-3)^2 + (4-3)^2 + (1-3)^2 + \right.$$
$$\left. +(3-3)^2 + (1-3)^2\right) = \frac{26}{3} = 8.666\,7$$

Considerăm statistica $\chi^2_5 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \dfrac{5s^2}{\sigma^2}$.

Pentru nivelul de încredere de 90% avem $x_{0.95,5} = 1.14548$ şi $x_{0.05,5} = 11.0705$.

Intervalul de încredere pentru dispersie este $[2.34858; 22.698]$.

Se observă că intervalul este destul de mare, deci precizia pentru dispersie este mică, chiar dacă apare cu probabilitate mare.

11.4 Intervale de încredere pentru proporţii

Pentru o populaţie a cărei membrii pot fi clasificaţi în funcţie de o anumită caracteristică în două categorii: fie p probabilitatea de a aparţine unei categorii, numit succes şi $1-p$ probabilitatea de a aparţine celeilalte categorii, numită eşec. Parametrul p poată denumirea de proporţia populaţiei şi ipotezele asupra lui p se fac numărând succesele, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \ (\leq n)$, unde

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Atunci $\hat{P} = \dfrac{X}{n}$ un estimator punctual al lui p. Reamintim că n şi p sunt parametrii unei distribuţii binomiale. Mai mult, statistica P urmează o distribuţie normală cu media p şi dispersia $\dfrac{p(1-p)}{n}$ dacă p nu este aproape de 0 sau 1 şi dacă n este relativ mare.

Aceasta înseamnă că pentru a folosi această aproximare este necesar ca $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$.

Teorema 11.4.1 *Dacă n este astfel încât $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$, atunci*

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

urmează aproximativ o distribuţie normală standard.

Pentru a construi un interval de încredere pentru p, observăm că

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

sau

$$P\Bigg(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\Bigg) = 1 - \alpha,$$

unde $z_{\frac{\alpha}{2}} > 0$ astfel încât $\Phi(-z_{\frac{\alpha}{2}}) = \dfrac{\alpha}{2}$.

Această relaţie poate fi rearanjată astfel:

$$P\Bigg(\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\Bigg) = 1 - \alpha.$$

Cantitatea $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ se numeşte *eroarea standard* a estimatorului punctual $\hat{P}$. Deoarece marginile intervalului conţin p care este necunoscut, o soluţie satisfăcătoare este înlocuirea sa cu $\hat{P}$. Astfel obţinem

$$P\left(\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\tfrac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq p \leq \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\tfrac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right) \simeq 1 - \alpha.$$

Aceasta conduce la determinarea unui interval de încredere cu nivelul de încredere de $(1-\alpha)100\%$ şi acesta este

$$\left[\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\tfrac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}, \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\tfrac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right].$$

Exemplul 11.4.2 Se presupune ca la 85 de autoturisme de o anumită marcă se studiază arborele cotit după un anumit timp de funcţionare. Se constată că la 10 automobile acesta prezenta defecte ce impunea înlocuirea lui. Să se determine un estimator punctual al numărului ce reprezintă ce proporţie dintre automobilele de acest tip prezintă această deficienţă. Să se interpreteze acest rezultat şi să se estimeze ce proporţie dintre automobilele de acest tip prezintă această deficienţă.

Rezolvare. Pentru fiecare autoturism studiat, se obţine rezultatul că arborele cotit este defect sau nu. Putem aplica modelul Bernoulli şi estimatorul de verosimilitate maximă va fi:

$$\hat{P} = \frac{10}{85} = 0.117\,655.$$

Eroarea standard a estimatorului punctual este

$$\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{10}{85}\left(1-\frac{10}{85}\right)}{85}} = 0.034946.$$

Nu este foarte clar cum interpretăm această valoare de 0.034 946. Este această estimare foarte exactă, exactă sau nu?

Construim un interval de încredere cu un nivel de încredere de 95% bazat pe valoarea observată 0.117 655.

$$\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq p \leq \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}},$$
$$0.117\,6 - 1.96\sqrt{\frac{0.117\,6\cdot 0.88}{85}} \leq p \leq 0.117\,6 + 1.96\sqrt{\frac{0.117\,6\cdot 0.88}{85}},$$
$$0.04915 \leq p \leq 0.186141.$$

Concluzia: în 95% din cazuri probabilitatea ca automobilul să prezinte defectul studiat este cuprinsă în intervalul $[0.0491534, 0.186141]$.