Capitolul 1

Variabile aleatoare

1 Câmp de probabilitate. Formula probabilităţii totale

1.1. Preliminarii

Fie E mulţimea rezultatelor posibile (numite şi *realizări*) ale unui experiment aleator, numită uneori *spaţiul realizărilor* sau *spaţiul de eşantionare*; notăm cu $\mathcal{P}(E)$ mulţimea părţilor (submulţimilor) mulţimii E.

Prin *evenimente*, asociate experimentului dat, se înţeleg elemente ale mulţimii $\mathcal{P}(E)$. Dacă spaţiul realizărilor este discret, se consideră eveniment orice element al mulţimii $\mathcal{P}(E)$.

Elementul $E \in \mathcal{P}(E)$ se numeşte *eveniment sigur* iar complementarul său $\emptyset = \overline{E}$ se numeşte *eveniment imposibil*.

Reamintim că o mulţime M se numeşte *mulţime discretă* dacă M este finită sau numărabilă (i.e. M este cel mult numărabilă), respectiv *mulţime continuă* (sau *mulţime continuală*) dacă este infinită şi nenumărabilă (de exemplu, M conţine un interval din $\mathbb{R}$, de extremităţi $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, cu $a < b$).

Fiind date evenimentele A, B, presupunem cunoscute următoarele noţiuni:

- *implicaţia evenimentelor*, notaţie $A \subseteq B$

- *egalitatea evenimentelor*, notaţie $A = B$ (i.e. $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$)
- *reuniunea evenimentelor*, notaţie $A \cup B$
- *intersecţia evenimentelor*, notaţie $A \cap B$
- *trecerea la contrar*: $\overline{A} = E \setminus A$
- *diferenţa evenimentelor*, notaţie $B \setminus A$.

Evenimentele A şi B se numesc *incompatibile* dacă intersecţia lor [illegible] nimentul imposibil (i.e. $A \cap B = \emptyset$).

În cele ce urmează, desemnăm prin I o familie de indici [illegible] numărabilă; în mod uzual $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ dat, $I =$ [illegible] $I = \mathbb{N}^*$.

1.2. Sistem complet de evenimente (s.c.e.)

O familie (submulţime) de evenimente $S = \{A_i,\ i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(E)$ [illegible] *sistem complet de evenimente (s.c.e.)* dacă sunt îndeplinite [illegible] condiţii:

1.2.1. $A_i \neq \emptyset,\ \forall\, i \in I$

1.2.2. $A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall\, i, j \in I,\ i \neq j$, i.e. evenimentele din fam[illegible] incompatibile două câte două.

1.2.3. $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = E$.

Observaţie. Un s.c.e. se mai numeşte *partiţie* sau *desfacere* a [illegible] tului sigur E.

1.3. Câmp de evenimente

O submulţime $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(E)$ se numeşte *câmp de evenimente* sa[illegible] dacă:

1.3.1. $\mathcal{K}$ este nevidă

1.3.2. pentru orice $A \in \mathcal{K}$ rezultă $\overline{A} \in \mathcal{K}$

1.3.3. pentru orice $A, B \in \mathcal{K}$ rezultă $A \cup B \in \mathcal{K}$.

Observaţia 1. Condiţiile 1.3.2 şi 1.3.3 arată că submulţimea $\mathcal{K}$ este "închisă" relativ la reuniunea evenimentelor şi la trecerea la contrar.

Observaţia 2. Se demonstrează imediat că $E \in \mathcal{K}$, $\emptyset \in \mathcal{K}$ şi $A \cap B \in \mathcal{K}$, $\forall\, A, B \in \mathcal{K}$. Într-adevăr, din 1.3.1 rezultă că $\exists\, A \in \mathcal{K}$, de unde $\overline{A} \in \mathcal{K}$ (axioma 1.3.2) şi astfel $A \cup \overline{A} = E \in \mathcal{K}$ (axioma 1.3.3); mai departe $\overline{E} = \emptyset \in \mathcal{K}$ (axioma 1.3.1). În ceea ce priveşte închiderea faţă de intersecţie, avem succesiv: $A \in \mathcal{K}$, $B \in \mathcal{K} \overset{1.3.2}{\Rightarrow} \overline{A} \in \mathcal{K}$, $\overline{B} \in \mathcal{K} \overset{1.3.3}{\Rightarrow} \overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{K} \overset{1.3.2}{\Rightarrow} \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{K} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} \in \mathcal{K}$ $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{K}$, utilizând pe parcurs legile lui de Morgan ($\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$, $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$) şi egalitatea $\overline{\overline{X}} = X$, cu $X, Y \in \mathcal{P}(E)$.

Câmp borelian de evenimente (σ-corp). Dacă o submulţime $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(E)$ are o infinitate de elemente şi satisface axiomele 1.3.1, 1.3.2 şi

1.3.3'. pentru orice $A_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$, rezultă $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$,

atunci $\mathcal{K}$ se numeşte *câmp borelian de evenimente* sau *σ-corp*.

Notaţie. Un câmp de evenimente (borelian sau nu) se notează $(E, \mathcal{K})$.

Convenţie. Elementele câmpului de evenimente $(\mathcal{K}, E)$ dobândesc, în mod exclusiv, calitatea de evenimente.

1.4. Evenimente elementare

Fie $(E, \mathcal{K})$ un câmp de evenimente.

1.4.1. Definiţie. Un eveniment $A \in \mathcal{K}$ se numeşte:

- *eveniment compus* dacă $\exists\, B, C \in \mathcal{K} \setminus \{A\}$ astfel încât $A = B \cup C$
- *eveniment elementar* dacă nu este eveniment compus.

1.4.2. Observaţie. Un eveniment $A \in \mathcal{K}$ este *eveniment elementar* dacă şi numai dacă $\forall\, B \in \mathcal{K} \setminus \{A\}$ rezultă $A \subseteq B$ sau $A \cap B = \emptyset$.

1.4.3. Observaţie. Dacă spaţiul realizărilor E este discret, atunci un eveniment elementar este un eveniment care constă dintr-o singură realizare, adică noţiunea "*eveniment elementar*" este sinonimă cu aceea de "*rezultat posibil*".

1.4.4. Notaţie. Mulţimea evenimentelor elementare asociate câmpului

$(E, \mathcal{K})$ se notează cu Ω.

1.5. Definiţia axiomatică a probabilităţii. Câmp de probabilitate

Fie $(E, \mathcal{K})$ un câmp de evenimente. O funcţie $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ se numeşte *probabilitate pe* $\mathcal{K}$ dacă satisface următoarele axiome:

1.5.1. $P(A) \geq 0, \ \forall \ A \in \mathcal{K}$

1.5.2. $P(E) = 1$

1.5.3. Dacă $A, B \in \mathcal{K}$ astfel încât $A \cap B = \emptyset$ (adică A şi B sunt incompatibile), atunci $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Tripletul $(E, \mathcal{K}, P)$ se numeşte *câmp de probabilitate.*

Câmp borelian de probabilitate. Dacă $(E, \mathcal{K})$ este un câmp borelian de evenimente iar axioma 1.5.3 se înlocuieşte cu:

1.5.3'. $\forall \ A_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall \ i, j \in \mathbb{N}$ cu $i \neq j$ (adică evenimentele A_n, $n \in \mathbb{N}$, sunt incompatibile două câte două) are loc egalitatea

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n),$$

atunci tripletul $(E, \mathcal{K}, P)$ se numeşte *câmp borelian de probabilitate.*

Câmp de probabilitate. În cele ce urmează, prin câmp de probabilitate se înţelege un câmp finit sau borelian de probabilitate.

1.6. Definiţia clasică a probabilităţii

Presupunem că spaţiul realizărilor E este finit, i.e.

$$E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \ \mathcal{K} = \mathcal{P}(E)$$

şi fie

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}\} \in \mathcal{K}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n,$$

un eveniment.

Definim $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ prin $P(A) = \frac{m}{n}$, adică $P(A)$ *este raportul dintre numărul realizărilor evenimentului A (numite şi "cazuri favorabile") şi numărul realizărilor posibile (numite şi "cazuri posibile").*

Se verifică imediat că funcţia P este o probabilitate pe $\mathcal{K}$, iar tripletul $(E, \mathcal{K}, P)$ este un câmp finit de probabilitate.

Definiţia clasică a probabilităţii (numită şi *probabilitate apriori* sau *probabilitate teoretică*) se bazează pe una din însuşirile fundamentale ale fenomenelor aleatoare, anume *stabilitatea frecvenţelor relative*; de exemplu, dacă se aruncă un zar (perfect simetric din punct de vedere geometric şi omogen relativ la materia din care este construit) de mai multe ori şi se înregistrează numărul de apariţii ale feţei 2, se constată că frecvenţa de apariţie a acestei feţe (adică raportul dintre numărul de apariţii ale feţei 2 şi numărul total de aruncări), tinde să se stabilizeze în jurul numărului $p = \frac{1}{6}$, pe măsură ce numărul de aruncări devine tot mai mare.

1.7. Definiţia probabilităţii geometrice

1.7.1. Definiţie. Fie D o mulţime măsurabilă dată din spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$ şi A o submulţime măsurabilă a lui D. Notăm cu $\mu(D)$ măsura mulţimii D şi presupunem că $\mu(D) \neq 0$; de exemplu, în cazul când D este un interval nevid al axei reale ($n = 1$), $\mu(D)$ este lungimea lui D, iar dacă D este o submulţime măsurabilă din plan ($n = 2$), $\mu(D)$ este aria mulţimii D. Probabilitatea ca un punct luat la întâmplare din mulţimea D să aparţină mulţimii A este:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(D)}.$$

1.7.2. Exemplu. În cadrul unui exerciţiu tactic, un paraşutist poate fi lansat în domeniul $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $a > 0$, unde este delimitată zona A situată în exteriorul lemniscatei lui Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Se cere probabilitatea ca paraşutistul să ajungă în exteriorul zonei A ştiind că toate punctele domeniului D sunt egal accesibile.

Rezolvare. Este clar că $\mu(D) = ariaD = \pi a^2$.

Pe de altă parte, aria lemniscatei lui Bernoulli este:

$$aria(A) = \iint\limits_{A} dxdy,$$

unde A este zona haşurată din Fig.1.7.2.

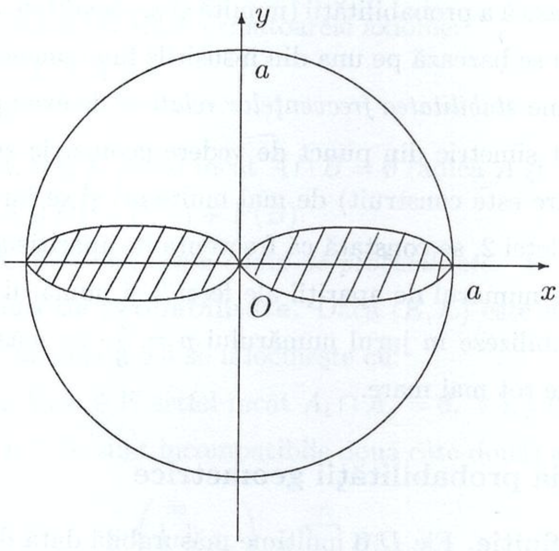

Fig.1.7.2.

Trecând la coordonate polare $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\cos\theta$, obţinem:

$$(A): \quad \rho^2 \le a^2\cos 2\theta \;\Leftrightarrow\; \theta \le \rho \le a\sqrt{\cos 2\theta}; \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Astfel,

$$aria(A) = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho d\rho = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta d\theta = a^2 \sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

În final,

$$P(D \setminus A) = \frac{aria(D \setminus A)}{ariaA} = \frac{1}{\pi a^2}(\pi a^2 - a^2) = 1 - \frac{1}{\pi} \simeq 0,682.$$

1.8. Proprietăţi ale probabilităţii

Dacă $(E, \mathcal{K}, P)$ este un câmp de probabilitate, atunci:

1.8.1. $P(\emptyset) = 0$

1.8.2. $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$; pentru $A_i \in \mathcal{K}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.

1.8.3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, $\forall\, A \in \mathcal{K}$

1.8.4. $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall\, A \in \mathcal{K}$

1.8.5. $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$, $\forall\, A, B \in \mathcal{K}$

1.8.6. $A, B \in \mathcal{K}$, $A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

1.8.7. Monotonia: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

1.8.8. Probabilitatea reuniunii: $\forall\, A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

1.8.9. Formula lui Poincaré. $\forall\, A_i \in \mathcal{K}$, $1 \leq i \leq n$ are loc egalitatea:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \cdots +$$

$$+(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) + \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Observaţie. Suma $\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ conţine C_n^k termeni.

1.8.10. Inegalitatea lui Boole. $\forall\, A_i \in \mathcal{K}$, $1 \leq i \leq n$, are loc relaţia:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1).$$

1.8.11. Proprietatea de subaditivitate. $\forall\, A_i \in \mathcal{K}$, $1 \leq i \leq n$, are loc inegalitatea:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Demonstraţie. 1.8.1. Din $A = A \cup \emptyset$, $\forall\, A \in \mathcal{K}$, rezultă

$$P(A) = P(A \cup \emptyset) \overset{1.5.3}{=\!=} P(A) + P(\emptyset),$$

de unde $P(\emptyset) = 0$.

1.8.2. Inducţie matematică (pentru câmp de probabilitate finit).

1.8.3. Din $E = A \cup \overline{A}$ obţinem:

$$1 = P(E) = P(A \cup \overline{A}) \xlongequal{1.5.3} P(A) + P(\overline{A}),$$

deci $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

1.8.4. Deoarece $\overline{A} \in \mathcal{K}$ din axioma 1.5.1 rezultă $P(\overline{A}) \geq 0$, iar di prietatea 1.8.3 deducem $1 - P(A) \geq 0$, de unde (via 1.5.1): $0 \leq P(A) \leq$

1.8.5. Din $B = A \cup (B \setminus A)$ obţinem:

$$P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) \xlongequal{1.5.3} P(A) + P(B \setminus A).$$

1.8.6. Rezultă din 1.8.5 ţinând seama de faptul că $A \cap B = A$.

1.8.7. Rezultă din 1.8.6 şi din inegalitatea $P(B \setminus A) \geq 0$, care ur din axioma 1.5.1.

1.8.8. Din relaţia $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ şi din Prop 1.8.2 şi 1.8.5 rezultă:

$$\begin{cases} P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) \\ P(A \setminus B) = P(A) - P(B \cap A) \\ P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) \end{cases}$$

Adunând membru cu membru ultimele trei egalităţi deducem form pusă.

1.8.9. Inducţie matematică.

1.8.10. Demonstrăm prin metoda inducţiei matematice.

Inegalitatea devine egalitate pentru $n = 1$, iar pentru $n = 2$ din $1 \geq P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ deducem

$$P(A_1 \cap A_2) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1.$$

Presupunem adevărată inegalitatea lui Boole pentru $n \geq 2$ şi o străm pentru $n + 1$. Avem succesiv:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right) = P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{k+1}\right) \geq P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) + P(A_{k+1}) -$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1) + P(A_{k+1}) - 1 = \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k) - (n+1-1);$$

prima inegalitate rezultă din inegalitatea lui Boole pentru $n = 2$, iar a doua inegalitate decurge din ipoteza inducţiei.

1.8.11. Se poate aplica metoda inducţiei matematice. O altă metodă foloseşte inegalitatea lui Boole sub forma

$$P\left(\bigcap \overline{A}_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} P(\overline{A}_k) - (n-1),$$

Proprietatea 1.8.3 şi formulele lui de Morgan.

1.9. Problema concordanţelor (coincidenţelor)

O urnă conţine n bile, numerotate de la 1 la n. Se extrage pe rând câte o bilă, fără a o pune înapoi în urnă (fără revenire) şi se efectuează n extrageri.

Să se determine probabilitatea de a extrage, cel puţin o dată, bila k la extragerea k, $1 \leq k \leq n$ şi limita acestei probabilităţi pentru $n \to \infty$.

Variantă echivalentă. O persoană scrie n scrisori distincte la n corespondenţi, apoi amestecă scrisorile şi le pune în mod aleator în n plicuri pe care erau scrise adresele celor n corespondenţi. Să se determine probabilitatea de a exista cel puţin un corespondent care primeşte scrisoarea care-i fusese destinată şi limita acestei probabilităţi pentru $n \to \infty$.

Rezolvare. Fie A_i evenimentul ca la extragerea de rang i să se obţină bila numerotată cu i, $1 \leq i \leq n$. Se cere probabilitatea evenimentului $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Utilizăm formula lui Poincaré (Proprietatea 1.8.9). Avem

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!};$$

într-adevăr, numărul "cazurilor posibile" este $n!$, iar numărul "cazurilor favorabile" este $(n-k)!$, deoarece la extragerile de rang $i_1, i_2, \ldots, i_k$ s-au extras bilele numerotate cu $i_1, i_2, \ldots, i_k$ respectiv, iar la celelalte extrageri (în număr

de $n - k$) se poate extrage oricare din cele $(n - k)$ bile rămase. Fo
Observaţia asociată Proprietăţii 1.8.9 rezultă:

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = C_n^k \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!},$$

deci

$$p_n = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{e} \cong 0,63.$$

1.10. Probabilităţi condiţionate

1.10.1. Definiţie. Fie $(E, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate şi A, B
două evenimente astfel încât $P(A) \neq 0$.

Probabilitatea evenimentului B condiţionată de A sau *probabilitate*
în raport cu A se notează $P_A(B)$ sau $P(B/A)$ şi se defineşte prin egali

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Similar se defineşte $P_B(A) = P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, dacă $P(B) \neq 0$.

Observaţie. Se demonstrează că tripletul $(E, \mathcal{K}, P_A)$ este un
probabilitate.

1.10.2. *Dacă $P(A) \neq 0$ şi $P(B) \neq 0$, atunci*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Aceste egalităţi decurg imediat din Definiţia 1.10.1.

1.10.3. Formula de înmulţire a probabilităţilor. *Dacă* A_i
$1 \le i \le n$ *şi* $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$, *atunci are loc egalitatea:*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Demonstraţia se face prin metoda inducţiei matematice.

1.11. Exemple

1.11.1. În problema concordanţelor (secţiunea 1.9), avem:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

$$= P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}/A_{i_1}) \cdot P(A_{i_3}/A_{i_1} \cap A_{i-2}) \ldots P(A_{i_k}/A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}})$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdots \frac{1}{n-k+1} = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

1.11.2. Un lot de n piese este supus controlului de calitate. Lotul este respins dacă se găseşte cel puţin un rebut în m verificări consecutive. Să se calculeze probabilitatea ca lotul să fie acceptat ştiind că acest lot conţine k piese defecte ($m < n$; $k < n$).

Rezolvare. Fie A_i evenimentul ca la extragerea de rang i să fie extrasă o piesă bună (stas), $1 \leq i \leq m$. Avem:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m)$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_m/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{m-1})$$

$$= \frac{n-k}{n} : \frac{n-k-1}{n-1} \cdots \frac{n-k-(m-1)}{n-(m-1)} = \frac{A_{n-k}^m}{A_n^m},$$

dacă $m \leq n-k$, respectiv $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m) = 0$, dacă $m > n-k$.

1.12. Evenimente independente

Fie $(E, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate.

1.12.1. Evenimentele $A, B \in \mathcal{K}$ se numesc *evenimente independente* dacă

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Observaţie. Din Proprietatea 1.10.2 rezultă că dacă A şi B sunt independente, atunci $P(B/A) = P(B)$ şi $P(A/B) = P(A)$, deci faptul că unul dintre evenimentele A, B se produce nu influenţează probabilitatea producerii celuilalt.

1.12.2. Evenimentele $A_i \in \mathcal{K}$, $i \in I$, se numesc *independente în ans*
lor dacă pentru orice submulţime $J \subseteq I$ are loc egalitatea

$$P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$

1.13. Formula probabilităţii totale

Fie $(E, \mathcal{K}, P)$ un câmp borelian de probabilitate şi $S = \{A_i : i \in I$
un s.c.e., astfel încât $P(A_i) \neq 0$, $\forall\, i \in I$.

Pentru fiecare eveniment $X \in \mathcal{K}$ are loc egalitatea

$$P(X) = \sum_{i\in I} P(A_i) \cdot P(X/A_i).$$

Demonstraţie. Din egalitatea $X = X \cap E = X \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$
$X = \bigcup_{i\in I} (X \cap A_i)$. Ţinând seama de relaţia

$$(X \cap A_i) \cap (X \cap A_j) = X \cap (A_i \cap A_j) = X \cap \emptyset = \emptyset$$

şi de proprietatea 1.10.2 obţinem:

$$P(X) = \sum_{i\in I} P(X \cap A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i) \cdot P(X/A_i).$$

Observaţie. Formula probabilităţii totale este adevărată, de
nea, pentru câmpuri finite de probabilitate şi o mulţime finită de
$I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

1.14. Formula lui Bayes (Teorema ipotezelor)

Fie $(E, \mathcal{K}, P)$ un câmp borelian de probabilitate şi $S = \{A_i : i \in$
un s.c.e. astfel încât $P(A_i) \neq 0$, $\forall\, i \in I$. Pentru fiecare eveniment X
$P(X) \neq 0$ şi pentru fiecare eveniment $A_k \in S$ are loc egalitatea:

$$P(A_k/X) = \frac{P(A_k)P(X/A_k)}{\sum_{i\in I} P(A_i)P(X/A_i)}$$

sau

$$P(A_k/X) = \frac{P(A_k)P(X/A_k)}{P(X)}.$$

Demonstraţie. Utilizând proprietatea 1.10.2 rezultă:

$$P(X) \cdot P(A_k/X) = P(A_k) \cdot P(X/A_k),$$

de unde deducem a doua egalitate din enunţul teoremei. În final, se înlocuieşte $P(X)$ din Formula probabilităţii totale (1.13).

Observaţie. Formula lui Bayes rămâne valabilă pentru câmpuri finite de probabilitate şi o mulţime finită de indici I.

1.15. Aplicaţii în Teoria transmiterii informaţiei (TTI)

1.15.1. Modelarea zgomotului într-un canal binar

La intrarea unui canal binar de transmisie se emit semnalele 0 şi 1, în raportul 3/4. În medie 25% din semnalele 0 se transmit eronat, iar semnalele 1 se transmit corect în proporţie de 80%.

Să se determine:

(i) Probabilitatea recepţionării semnalului 0

(ii) Probabilitatea recepţionării semnalului 1

(iii) Probabilitatea ca, în cazul recepţiei unui 0, să se fi emis tot 0

(iv) Probabilitatea ca, în cazul recepţiei unui 1, să se fi emis tot 1

(v) Probabilitatea ca, în cazul recepţiei unui 0, să se fi emis 1

(vi) Probabilitatea ca, în cazul recepţiei unui 1, să se fi emis 0

(vii) Probabilitatea recepţiei corecte

(viii) Probabilitatea recepţiei eronate.

Rezolvare. Să notăm cu X_0 şi X_1 evenimentele care reprezintă emiterea unui semnal 0, respectiv 1 şi cu Y_0, Y_1 evenimentele care reprezintă recepţionarea unui semnal 0, respectiv 1. Remarcăm faptul că $S_1 = \{X_0, X_1\}$ şi $S_2 = \{Y_0, Y_1\}$ sunt s.c.e. Din datele problemei rezultă că $P(X_0)+P(X_1) = 1$ şi $\frac{P(X_0)}{P(X_1)} = \frac{3}{4}$, deci $P(X_0) = \frac{3}{7}$; $P(X_1) = \frac{4}{7}$.

Diagrama de tranziţie a canalului binar este dată mai jos.