MA - curs 3

CAP. 2., §4 (continuare)

Caracteristici numerice (statistice) ale v.a. 1D

4.5. Inegalități legate de medie și dispersie

4.5.1. Inegalitatea lui Schwarz (p.84-85)

$$\exists M(X^2), \exists M(Y^2) \Longrightarrow |M(XY)| \le \sqrt{M(X^2)M(Y^2)}$$

OBS. $Y=1 \Rightarrow XY=X,\ M(Y)=1 \Rightarrow \boxed{|M(X)| \le \sqrt{M(X^2)} \Leftrightarrow M^2(X) \le M(X^2)}$

~~4.5.2.~~

$$\begin{cases} X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I} \Rightarrow \left(\sum_{i\in I} p_i x_i\right)^2 \le \sum_{i\in I} x_i^2 p_i \\ \left.\begin{matrix} X \text{ v.a. 1D cont} \\ f(x) \to \text{p.d.f.} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx\right)^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx \end{cases}$$

4.5.2. Inegalitatea lui Cebîșev (Cebyshev, Tchebycheff)

$$X \text{ v.a. 1D};\ \varepsilon>0 \Longrightarrow \begin{cases} P(|X-M(X)|<\varepsilon) \ge 1-\dfrac{D^2(X)}{\varepsilon^2} \\ \Updownarrow \\ P(|X-M(X)| \ge \varepsilon) \le \dfrac{D^2(X)}{\varepsilon^2} \end{cases}$$

Dem: Fie $m=M(X)$. Avem: $|x-m|\ge\varepsilon \Leftrightarrow (x-m)^2 \ge \varepsilon^2 \Leftrightarrow 1 \le \dfrac{(x-m)^2}{\varepsilon^2}$ (1)

Obținem: $P(|X-m|\ge\varepsilon) = \int\limits_{|x-m|\ge\varepsilon} f(x)\,dx = \int\limits_{|x-m|\ge\varepsilon} 1\cdot f(x)\,dx \overset{(1)}{\le}$

$\overset{(1)}{\le} \int\limits_{|x-m|\ge\varepsilon} \dfrac{(x-m)^2}{\varepsilon^2} f(x)\,dx = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{|x-m|\ge\varepsilon}(x-m)^2 f(x)\,dx \le \dfrac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f(x)\,dx =$

$= \dfrac{1}{\varepsilon^2} D^2(X).$

OBS. $|x-m|\ge\varepsilon \Leftrightarrow x-m \le -\varepsilon$ sau $x-m\ge\varepsilon \Leftrightarrow x\in(-\infty, m-\varepsilon)\cup(m+\varepsilon,\infty)$.

4.5.3. Regula celor trei sigma

Pornim de la inegalitatea lui Cebîşev $P(|X-m|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$

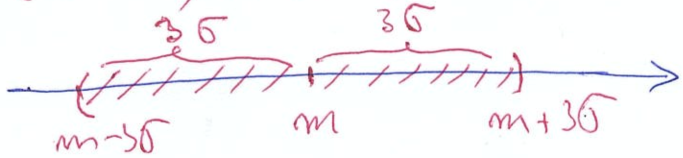
şi luăm $\varepsilon=3\sigma$, unde $\sigma=\sigma(X)=\sqrt{D^2(X)}$, deci $D^2(X)=\sigma^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(|X-m|<3\sigma)\geq 1-\frac{\sigma^2}{9\sigma^2} \Rightarrow \underline{P(|X-m|<3\sigma)\geq \frac{8}{9}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(X\in(m-3\sigma,m+3\sigma))\geq\frac{8}{9}\simeq 0.9}$$

Am utilizat $|X-m|<3\sigma \Leftrightarrow -3\sigma<X-m<3\sigma \Leftrightarrow X\in(m-3\sigma,m+3\sigma)$.

„Majoritatea" valorilor unei v.a. 1D (discrete sau continue) sunt situate în intervalul $(m-3\sigma, m+3\sigma)$, centrat în valoarea medie $m=M(X)=E(X)$



4.5.4. OBS. Analog cu 4.5.3., luăm $\varepsilon=n\sigma$; $n\geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(|X-m|<n\sigma)\geq 1-\frac{\sigma^2}{n^2\sigma^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(X\in(m-n\sigma,m+n\sigma))\geq 1-\frac{1}{n^2}}$$

Aşadar, probabilitatea ca $X\in(m-n\sigma, m+n\sigma)$ creşte odată cu n, ceea ce justifică faptul că $\sigma=\sqrt{D^2(X)}$ este o măsură a împrăştierii valorilor v.a. X în jurul valorii medii m.

§4.6. Alte caracteristici statistice ale unei v.a. 1D (p.87-88-89)

4.6.1. Asimetria ~~As~~ $As(X)=\frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)}$

4.6.2. Excesul $Ex(X)=\cancel{\mu_4(X)}\ \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)}-3$

4.6.3. Moda, notaţie $Mo(X)$, este abscisa punctului de maxim al p.m.f (pentru v.a. 1D discrete), respectiv al p.d.f. (pentru v.a. 1D continue)

OBS. $X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$; $p_s = \max\{p_i : i \in I\} \Longrightarrow M_o(X) = x_s$

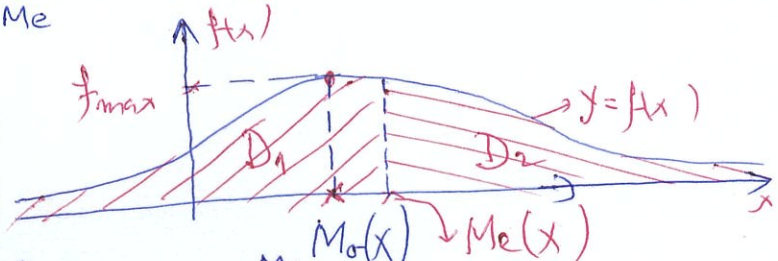
4.6.4. Mediana, notație $Me = Me(X)$, este definită prin dubla inegalitate: $F(M_e) \le \frac{1}{2} \le F(Me + 0) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow P(X < Me) \le \frac{1}{2} \le P(X \le Me)$

OBS.1 dacă F este o funcție continuă, atunci $F(Me) = \frac{1}{2}$, deci $Me = Me(X)$ este soluție a ecuației $F(x) = 1/2$.

OBS.2. Dacă X este v.a. continuă, atunci $Me = Me(X)$ se definește prin: $\int_{-\infty}^{Me} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \int_{Me}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Interpretare geometrică



$\begin{cases} Aria(D_1) = \int_{-\infty}^{Me} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \\ Aria(D_2) = \int_{Me}^{\infty} f(x)\,dx = 1/2 \end{cases}$

OBS.3 X v.a discretă $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$

$\sum_{x_i < Me} p_i \le \frac{1}{2} \le \sum_{x_i \le Me}$

$x_i < Me$ $x_i \le Me$

§ 4.7. Entropia

Noțiune introdusă de Shannon (1948).

~~Noțiunea~~ cantitatea de informații relevată de o v.a

Entropia cuantifică cantitatea de informații relevată de o v.a sau incertitudinea relativă la rezultatul unui experiment aleator.

4.7.1. Def. Fie $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 \dots & p_n \end{pmatrix}$ o v.a. 1D simplă

$$H(X) = H(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(p_i)$$

4.7.2. Unitatea de măsură: bit

OBS. $\log_2 \to \ln \Rightarrow$ u.m.: nat

$\log_2 \to \lg \Rightarrow$ u.m.: hartley

4.7.3. *Obs. 1* H depinde de $(n-1)$ variabile $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}$, deoarece $p_1+p_2+p_3+\dots+p_n=1$, deci $p_n = 1-p_1-\dots-p_{n-1}$.

Obs. 2 Fie $\tilde{X}: \begin{pmatrix} \log_2(1/p_i) \\ p_i \end{pmatrix} \Rightarrow \cancel{H(\tilde{X})=M}$ $H(X)=M(\tilde{X})$

Interpretând $\log_2(1/p_i)$ drept conținutul de informație al evenimentului $(X=x_i)$, entropia reprezintă informația medie furnizată de v.a. $\tilde{X}$.

4.7.4. *Exemplu* $X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$, $p\in(0,1)$.

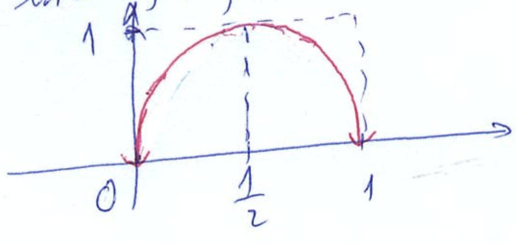
R. Avem $H(X) = H(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$

$$H'(p) = -\log_2 p - p\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\ln 2} + \log_2(1-p) - (1-p)\cdot\frac{-1}{1-p}\cdot\frac{1}{\ln 2} = \log_2\frac{1-p}{p}$$

$$H'(p)=0 \Rightarrow \frac{1-p}{p}=1 \Rightarrow p=1/2 \quad ; \quad H(1/2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$H''(p) = -\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{\ln 2} = \frac{-1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{p(1-p)} < 0 \Rightarrow H \text{ concavă}$$

p	0		$1/2$		1
$H'(p)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$H(p)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



4.7.5. *Proprietăți* (i) H continuă în raport cu $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}$

(ii) $\underline{H(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) \le \log_2 n}$

Avem $H(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) = \log_2 n \iff p_i = \frac{1}{n} \iff X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

Dem. *Ineg. Jensen* $\begin{cases} f \text{ concavă} \\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i f(t_i) \le f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i t_i\right)$, $\forall p_i\in[0,1]$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ și $\forall t_i \in \mathbb{R}$

Luăm $f(t)=\log_2 t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{\ln t}\cdot\frac{1}{t} \Rightarrow f''(t) = -\frac{1}{\ln t}\cdot\frac{1}{t^2} \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ concavă. Deci $\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2\frac{1}{p_i} \le f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{1}{p_i}\right) \Rightarrow H(X) \le f(n) = \log_2 n$

Luăm $t_i = \frac{1}{p_i}$

§4.8. Funcția de fiabilitate

4.8.1. Def. Fie T o v.a. 1D, având funcția de repartiție
$$F(t) = F_T(t) = P(T < t), \; t \in \mathbb{R}$$
funcția $R = R_T : \mathbb{R} \to [0,1]$, $\underline{R(t) = P(T > t), \; \forall t \in \mathbb{R}}$
se numește <u>funcția de fiabilitate</u> asociată v.a. T

4.8.2. Obs. $R(t) = 1 - P(T \le t) \Rightarrow \underline{R(t) = 1 - F(t+0)}$

Dacă F continuă $\Longrightarrow \underline{R(t) = 1 - F(t)}$

4.8.3. <u>Denumiri echivalente</u>: siguranța în funcționare; funcția ~~de supravi~~ de supraviețuire

4.8.4. <u>Interpretare în Teoria Fiabilității</u> Dacă v.a. T descrie (reprezintă) durata de viață sau de supraviețuire a unui sistem (sau ansamblu), atunci $R(t)$ reprezintă probabilitatea de bună funcționare până la momentul t a ~~de~~ sistemului (ansamblului) respectiv, adică ~~pro~~ probabilitatea ca sistemul să NU se defecteze până la momentul t.

4.8.5. Obs. Admitem $R(0) = 1$, adică sistemul este în stare de bună funcționare la pornire.

§4.9. Rata de defectare (Rata de hazard)

Ne situăm în ipotezele de la §4.8. notată $r(t) = r_T(t), \; t > 0$

4.9.1. Def. <u>Rata de defectare (hazard)</u> este legată de probabilitatea ca sistemul să SE defecteze în momentul imediat următor lui t, adică în intervalul $(t, t+dt)$, CONDIȚIONAT de faptul că NU s-a defectat până la momentul t.

Din p.v. matematic, rata de hazard este o funcție $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

4.9.2. Formule de calcul

Fie $F(t)$ funcția de repartiție și $f(t)$ p.d.f. ale unei v.a. 1D continue T. Admitem F continuă $\Rightarrow R(t) = 1 - F(t) \Rightarrow R'(t) = -F'(t) = -f(t)$.

$R(t) = P(T>t)$
$R(t) = 1 - F(t)$

(i) $r(t) = \dfrac{f(t)}{R(t)}$; (ii) $r(t) = \dfrac{f(t)}{1-F(t)}$

(iii) $r(t) = \dfrac{F'(t)}{1-F(t)} = \dfrac{'(t)}{F(t)-1}$; (iv) $r(t) = -\dfrac{R'(t)}{R(t)} = \dfrac{F'(t)}{R(t)}$

(v) $R(t) = \exp\left(-\int_0^t r(\tau)d\tau\right) = e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}$

Dem. (i) $r(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P(t \le T < t+\Delta t \,/\, T>t)}{\Delta t} =$

$= \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P(T \in \{[t, t+\Delta t) \cap (t, \infty)\})}{P(T>t)\cdot \Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P(t \le T < t+\Delta t)}{P(T>t)\Delta t} =$

$= \dfrac{1}{P(T>t)} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P(t \le T < t+\Delta t)}{\Delta t} = \dfrac{1}{R(t)} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} =$

$= \dfrac{1}{R(t)} F'(t) = \dfrac{f(t)}{R(t)}$ //

§4.10. Funcția caracteristică (p. 92-95)

4.10.1. Definiție. Fie X o v.a. 1D. Funcția $\varphi = \varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$\varphi(t) = M(e^{jtX}) = E(e^{jtX})$

se numește funcția caracteristică asociată v.a. X.

(i) X este v.a. 1D discretă ; $X = \begin{pmatrix} x_n \\ p_n \end{pmatrix}_{n\in I} \Rightarrow e^{jtX} : \begin{pmatrix} e^{jtx_n} \\ p_n \end{pmatrix}_{n\in I}$

$\Rightarrow \varphi(t) = \sum\limits_{n\in I} p_n e^{jtx_n} = \sum\limits_{n\in I} p_n \exp(jtx_n)$

(ii) X este v.a. 1D continuă ; $f(x) = $ pdf$(X) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{jtx} dx$

4.10.2. Proprietăți ale funcției caracteristice:

(i) $\varphi(0)=1$; (ii) $|\varphi(t)|\le 1$; (iii) $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$

(iv) Calcul momente, valoare medie, dispersie (varianța)

$$M_n(X)=j^{-n}\varphi^{(n)}(0)$$

$$M(X)=E(X)=j^{-1}\varphi'(0)\ ;\ M_2(X)=j^{-2}\varphi''(0)=-\varphi''(0)$$

$$D^2(X)=Var(X)=M_2(X)-M_1^2(X)=-\varphi''(0)+(\varphi'(0))^2$$

4.10.3. Exemplu: Legea exponențială-negativă T

$$f(x)=\begin{cases}0; & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}; & x\ge 0\end{cases}\quad ;\ \lambda>0 \text{ dat}$$

Se cere (i) $\varphi_T(t)$; (ii) $M(T)=E(T)$; (iii) $D^2(T)=Var(T)$

(iv) $R_T(t)$; (v) $r_T(t)$

R: (i) $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{jtx}dx=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}e^{jtx}dx=\lambda\int_0^{\infty}e^{-(\lambda-jt)x}\cdot 1\,dx=$

$$=\lambda\mathcal{L}\{1\}(\lambda-jt)=\lambda\cdot\frac{1}{\lambda-jt}=\frac{\lambda}{\lambda-jt}=\frac{\lambda(\lambda+jt)}{\lambda^2+t^2}$$

(ii) $M(T)=+j^{-1}\varphi'(0)=+\frac{1}{j}\left.\frac{\lambda j}{(\lambda-jt)^2}\right|_{t=0}=\frac{\lambda}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda}$

(iii) $\varphi''(t)=\left(\frac{\lambda j}{(\lambda-jt)^2}\right)'=\frac{2\lambda j^2}{(\lambda-jt)^3}\Rightarrow D^2(T)=Var(T)=-\varphi''(0)+(\varphi'(0))^2=$

$$=\cancel{\frac{-2\lambda}{\lambda^3}=-\frac{2}{\lambda^2}\Rightarrow D^2}=+\frac{2\lambda}{\lambda^3}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}\Rightarrow\sigma(T)=\frac{1}{\lambda}=M(T)$$

(iv) $R(t)=1-F(t)$; $F(t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)dx=\begin{cases}0; & t<0\\ \lambda\int_0^t e^{-\lambda x}dx; & t\ge 0\end{cases}=$

$$=\begin{cases}0; & t<0\\ \lambda\cdot\left.\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right|_0^t; & t\ge 0\end{cases}=\begin{cases}0; & t<0\\ 1-e^{-\lambda t}; & t\ge 0\end{cases}\Rightarrow R(t)=\begin{cases}1; & t<0\\ e^{-\lambda t}; & t\ge 0\end{cases}$$

(v) $r(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\begin{cases}0; & t<0\\ \lambda; & t\ge 0\end{cases}\Rightarrow r(t)=\lambda=ct,\ \forall t\ge 0$

OBS: Reciproc, dacă o v.a. T are rata de defectare constantă, atunci T urmează o lege de probabilitate exponențial-negativă (p. 146-147)

§5. Variabile aleatoare multi-dimensionale (2D, 3D, nD)

§5.1. Definiții. Formule de bază (p. 39-50)

1. Def. $(E, \mathcal{K}, P)$ câmp de probabilitate; $n \geq 1$; $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ v.a. 1D.

Funcția $V = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) : E \to \mathbb{R}^n$,

$V(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega), \dots, X_n(\omega))$, $\omega \in E$,

se numește variabilă aleatoare n-dimensională sau vector aleator n-dimensional, notată v.a. nD, asociată câmpului $(E, \mathcal{K}, P)$

(i) $n=2$ $V = (X, Y)$ v.a 2D

(ii) $n=3$ $V = (X, Y, Z)$ v.a. 3D

2. Funcția de repartiție ~~(nn~~

$F = F_V : \mathbb{R}^n \to [0,1]$; $F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$

(i) $n=2$ $F(x,y) = P(X < x; Y < y)$

(ii) $n=3$ $F(x, y, z) = P(X < x; Y < y; Z < z)$

3. Proprietăți $\boxed{(n=2)}$ (i) $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$; $F(\infty, \infty) = 1$

(ii) $P(a \leq X < b; c \leq Y < d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$

4. V. a. 2D discrete $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$; $Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j \in J}$; $\sum_{i \in I} p_i = \sum_{j \in J} q_j = 1$

$V = (X, Y) : \begin{pmatrix} (x_i; y_j) \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{(i,j) \in I \times J}$; $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j)$

5. Pdf 2D $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
(i) f integrabilă pe $\mathbb{R}^2$
(ii) $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

6. V. a. 2D continue $V = (X, Y)$: $\exists$ pdf $f(x,y)$ a.î.

$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(\sigma, t)\,d\sigma\,dt$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

7. Proprietăți v.a. 2D continue
(i) $f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$
(ii) $H \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow P((X,Y) \in H) = \iint_H f(x,y)\,dx\,dy$

§5.2. Caracteristici numerice (statistice) ale v.a. 2D (p. 99-101)

Fie $V=(X,Y)$; $m,n\in\mathbb{N}$;

1. Def. Momentul de ordin (m,n) $\quad M_{m,n}(X,Y)=M(X^m Y^n)$

2. Cazul discret $\quad X:\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$; $Y:\begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j\in J}$; $\sum_{i\in I} p_i=\sum_{j\in J} q_j=1$

$$M_{m,n}(X,Y)=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_i^m y_j^n p_{ij}\text{; unde}$$

$p_{ij}=P(X=x_i; Y=y_j)$. Dacă X,Y indep. $\Rightarrow p_{ij}=p_i q_j$

3. Cazul continuu $\quad f(x,y)$ p.d.f. pentru v.a. $V=(X,Y)$

$$M_{m,n}(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^m y^n f(x,y)\,dx\,dy$$

4. OBS. Admitem $X^0=Y^0=1 \Rightarrow \begin{cases} M_{m,0}(X,Y)=M_m(X) \\ M_{0,n}(X,Y)=M_n(Y) \end{cases}$

4. Momente centrate de ordin (m,n) $\quad m_1=M(X)$; $m_2=M(Y)$

$$\mu_{m,n}(X,Y)=M\left((X-m_1)^m (Y-m_2)^n\right)$$

Cazul discret $\quad \mu_{m,n}(X,Y)=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(x_i-m_1)^m (y_j-m_2)^n p_{ij}$

Cazul continuu $\quad \mu_{m,n}(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_1)^m (y-m_2)^n f(x,y)\,dx\,dy$

§6. Covarianța (Corelație). Coeficient de corelație

(p. 109-110)

6.1. Def. X,Y v.a. 1D; $m_1=M(X)$; $m_2=M(Y)$

$\boxed{\text{Covarianța}}$ $\quad \operatorname{cov}(X,Y)=M\left((X-m_1)(Y-m_2)\right)$

OBS. $\operatorname{cov}(X,Y)=\mu_{1,1}(X,Y)$

6.2. Formula covarianței $\quad \operatorname{cov}(X,Y)=M(XY)-M(X)M(Y)$

6.3 Proprietăți ale covarianței $\quad$ (i) $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$

(ii) $\operatorname{cov}(X,X)=M(X^2)-M^2(X)=D^2(X)=Var(X)$

(iii) X,Y independenți $\Rightarrow M(XY)=M(X)\cdot M(Y) \Rightarrow \underline{\operatorname{cov}(X,Y)=0}$

(iv). $D^2(X+Y) = Var(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2cov(X,Y)$

(v) $D^2(X_1+X_2+X_3+\dots+X_n) = \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} cov(X_i, X_j)$

6.4. Matrice de covarianță $a_{ij} = cov(X_i, X_j) \Rightarrow$

$$\Rightarrow M(cov(X,Y)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

6.5. Coeficient de corelație $r(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$,

unde $\sigma(X) = \sqrt{D^2(X)}$; $\sigma(Y) = \sqrt{D^2(Y)}$

Formula de calcul

discret $r(X,Y) = \dfrac{1}{\sigma(X)\sigma(Y)} \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} (x_i - m_1)(y_j - m_2) p_{ij}$

cont $r(X,Y) = \dfrac{1}{\sigma(X)\sigma(Y)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_1)(y-m_2) f(x,y)\, dx\, dy$

6.6. Proprietăți ale coef. corelație

(i) $|r(X,Y)| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le r(X,Y) \le 1$; (ii) $r(X,Y) = r(Y,X)$

(iii) $r(X,X) = 1$; $r(X,-X) = -1$

(iv) X, Y indep. $\Longrightarrow r(X,Y) = 0$

(v) $|r(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow r(X,Y) \in \{-1, 1\} \Longleftrightarrow X$ și Y au o dependență liniară $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, a \ne 0$ a.î. $Y = aX + b$.

OBS. Dacă $r(X,Y)$ este apropiat de zero $\Rightarrow X, Y$ sunt slab corelate

Dacă $|r(X,Y)|$ este apropiat de 1 $\Rightarrow X, Y$ sunt puternic corelate

§7. Dreapta de regresie (pp. 105 - 112)

7.1. Def. Fie $V = (X,Y)$ v.a. 2D.

(i) Funcția $m(x) = M(Y/X) = M(Y/X = x)$ se numește funcția de regresie a ~~lu~~ v.a. Y față de v.a. X.

(ii) Curba de ecuație $y = m(x)$ se numește curbă de regresie a v.a Y față de v.a. X.

7.2. Def. Dacă $m(x)$ din Def. 7.1. este o dreaptă, i.e. $y = m(x) = ax+b$, atunci $\underline{y = ax+b}$ se numește <u>dreapta de regresie</u> a v.a. Y față de v.a. X.

7.3. <u>Ecuația dreptei de regresie</u> a v.a. Y față de v.a. X.

$$y - M(Y) = \frac{cov(X,Y)}{D^2(X)}(x - M(X)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - M(Y) = r(X,Y)\cdot\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(x - M(X))$$

<u>OBS.</u> Analog, se scrie ecuația dreptei de regresie a v.a. X față de v.a. Y

$$x - M(X) = r(X,Y)\cdot\frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)}(y - M(Y))$$

7.4 <u>Interpretarea statistică</u> (Ajustarea liniară a datelor experimentale sau Aproximarea liniară prin metoda celor mai mici pătrate)

Se consideră o serie statistică experimentală $\{(x_i, y_i) : 1 \le i \le n\}$

X	x_1	x_2	$x_3 \dots$	x_n
Y	y_1	y_2	$y_3 \dots$	y_n

Fie $A_i(x_i, y_i)$, $1 \le i \le n$

Se caută o dreaptă $(d): \underline{y = ax+b}$, care să se afle „cel mai aproape" de $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ în următorul sens.

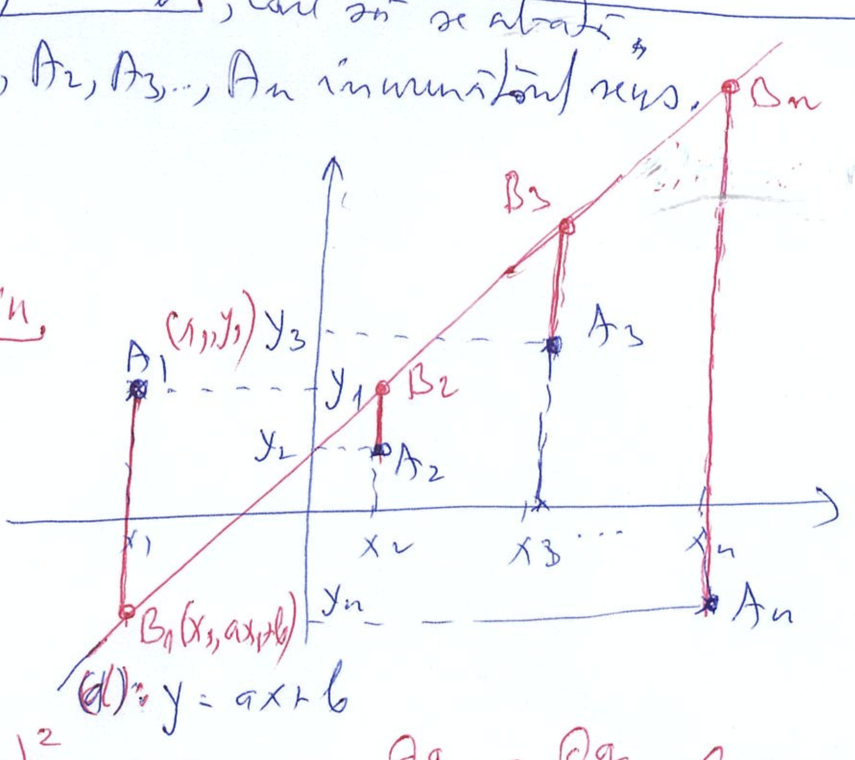
Fie $B_i(x_i, ax_i+b) \in d$

Impunem condiția:

$$A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + \dots + A_nB_n^2 \longrightarrow \underline{min}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_iB_i^2 \longrightarrow \underline{min}$$



Avem $A_iB_i^2 = (ax_i + b - y_i)^2$

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

Fie $g(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 \longrightarrow min \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial a} = 0, \frac{\partial g}{\partial b} = 0.$

Se demonstrează (p. 109-110) că dreapta $y=ax+b$ este dreapta de regresie a v.a. $Y: \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \dots & y_n \\ 1/n & 1/n & 1/n \dots & 1/n \end{pmatrix}$ față de v.a. $X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \dots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

(d) $y-\bar{y} = \frac{cov(X,Y)}{D^2(X)}(x-\bar{x})$; $\bar{x} = M(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $\bar{y} = M(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

EXEMPLU Să se determine dreapta de regresie (aproximarea liniară prin metoda celor mai mici pătrate) corespunzătoare setului de date experimentale

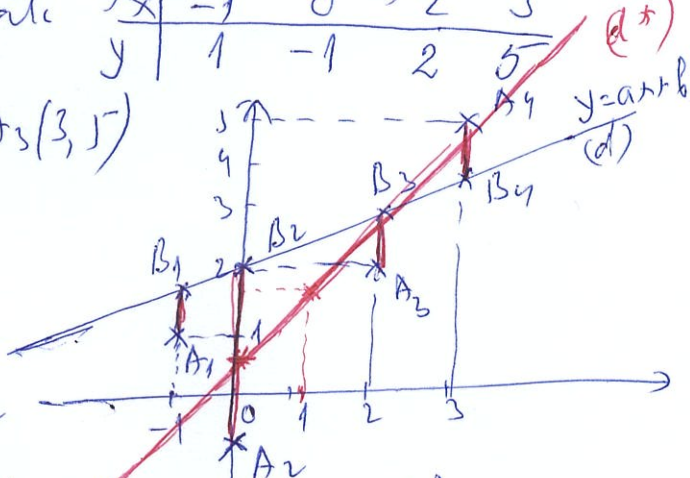
x	-1	0	2	3
y	1	-1	2	5

R: $A_1(-1,1)$, $A_2(0,-1)$, $A_3(2,2)$, $A_3(3,5)$

d: $\underline{y=ax+b}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow B_1(-1,-a+b)$, $B_2(0,b)$

$B_3(2,2a+b)$, $B_4(3,3a+b)$



$g(a,b) = A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + A_3B_3^2 + A_4B_4^2$

$g(a,b) = (-a+b-1)^2 + (b+1)^2 + (2a+b-2)^2 + (3a+b-5)^2 \longrightarrow \min.$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial a} = (-a+b-1)(-1) + (b+1)\cdot 0 + (2a+b-2)\cdot 2 + (3a+b-5)\cdot 3 = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial b} = (-a+b-1)\cdot 1 + (b+1)\cdot 1 + (2a+b-2)\cdot 1 + (3a+b-5)\cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14a+4b=18 \\ 4a+4b=7 \,|\cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a=11 \\ a+b=7/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{11}{10} \\ b=\frac{7}{4}-\frac{11}{10}=\frac{13}{20} \end{cases}$$

Deci $a^*=\frac{11}{10}$; $b^*=\frac{13}{20}$ $\Rightarrow (d^*)$: $\underline{y=\frac{11}{10}x+\frac{13}{20}}$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{13}{20}=0.65 \\ x=1 \Rightarrow y=1.25 \end{cases}$$

$(0;0.65)$; $(1;1.25)$

Dreapta de regresie $y=\frac{11}{10}x+\frac{13}{20}$ (d^*)