Subiect nr. 1

Functia f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f(t) = $\begin{cases} 0, & t < 0 \\ ate^{-4t}, & t \geq 0 \end{cases}$, a > 0, este p.d.f. pentru o v.a. 1D, notata X. Sa se determine:

1⁰ Parametrul a

2⁰ Momentul de ordin n al v.a. X, i.e. M_n(X), n $\geq$ 0

3⁰ Deviatia standard (abaterea medie patratica) $\sigma(X)$

4⁰ Functia de fiabilitate ***R(t)*** si rata de hazard ***r(t)***

5⁰ P($-1 \leq$ X $\leq$ ln 3)

Subiect nr. 2

Functia f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f(x) = $\begin{cases} a \sin 5x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{5} \\ 0, & in\ rest \end{cases}$, a > 0, este p.d.f. pentru o v.a. 1D, notata X. Sa se determine:

1⁰ Parametrul a

2⁰ Valoarea medie $M(X)$

3⁰ Dispersia (Varianta) $D^2(X)$ (Var(X))

4⁰ Functia de fiabilitate ***R(t)*** si rata de hazard ***r(t)***

5⁰ P($-1 \leq$ X $\leq \frac{\pi}{10}$)

Subiect nr. 3

Se considera v.a. discreta

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \frac{p}{2} & p^2 & \frac{3}{2}p^3 \dots & & \frac{n}{2}p^n \dots & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n \\ \frac{n}{2}p^n \end{pmatrix}_{n\geq 1}$$

1^{0} Sa se arate ca 2p = 1

2^{0} Sa se calculeze valoarea medie a v.a. X

3^{0} Sa se calculeze dispersia (varianta) v.a. X

4^{0} Sa se calculeze P (X≥ 4)

5^{0} Sa se calculeze $F(\pi)$

Subiect nr. 4

In medie, 25% din semnalele emise intr-un canal binar cu zgomot sunt simboluri 0, iar restul sunt simboluri 1. Se emit 10000 de simboluri 0 si 1 si admitem ca v.a. care da numarul de simboluri 0 receptionate este de tip Bernoulli (binomiala). Utilizand aproximarea legii Bernoulli prin legea Gauss, sa se determine:

1^{0} Probabilitatea ca numarul de semnale (simboluri) 0 receptionate sa fie cuprins intre 2480 si 2570

2^{0} Probabilitatea ca numarul de semnale (simboluri) 1 receptionate sa fie cuprins intre 7400 si 7620

3^{0} Un interval in care se afla numarul de semnale (simboluri) 0 receptionate, luand in considerare o eroare de 3%

4^{0} Un interval in care se afla numarul de semnale (simboluri) 1 receptionate, luand in considerare o probabilitate de 98%

Subiect nr. 5

Statistic, s-s constatat ca intr-o zona geografica 49% dintre nou nascuti sunt baieti, iar restul sunt fete. Admitem ca variabila aleatoare care da numarul de nou nascuti (fete sau baieti) este de tip Bernoulli (binomiala). Utilizand aproximarea legii Bernoulli prin legea Gauss, sa se determine, pentru un esantion de 25000 de nou nascuti:

1^0 Probabilitatea ca numarul de baieti sa fie cuprins intre12200 si 12400

2^0 Probabilitatea ca numarul de fete sa fie cuprins intre 12600 si 12850

3^0 Un interval in care se afla numarul de baieti, luand in considerare o eroare de 2%

4^0 Un interval in care se afla numarul de fete, luand in considerare o probabilitate de 97%

Subiect nr. 6

Statistic, s-a constatat ca 95% din aparatele electrice comercializate la un magazin de specialitate nu prezinta defectiuni. Admitem ca variabila aleatoare care da numarul de defectiuni este de tip Bernoulli (binomiala). Utilizand aproximarea legii Bernoulli prin legea Gauss, sa se determine, pentru un esantion de 20000 de aparate:

1^0 Probabilitatea ca numarul aparatelor fara defectiuni sa fie cuprins intre 18950 si 19100

2^0 Probabilitatea ca numarul aparatelor cu defectiuni sa fie cuprins intre 910 si 1060

3⁰ Un interval in care se afla numarul aparatelor cu defectiuni, luand in considerare o eroare de 4%

4⁰ Un interval in care se afla numarul aparatelor fara defectiuni, luand in considerare o probabilitate de 98%

Subiect nr. 7

Intr-un sistem de asteptare timpul de servire a unui client este descris de o v.a. de tip B(p,n), avand media m = 10 (secunde) si deviatia standard $\sigma = 3$. Fie X_k v.a. care descrie timpul de servire a clientului de rang k si $S_N = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N$, $N \geq 1$ Admitem ca v.a. X_k , $k \geq 1$, sunt independente.

1⁰ Sa se arate ca $M(S_N) = 10N$ si $Var (S_N) = 9N$

2⁰ Sa se determine probabilitatea ca durata de servire a primilor 70 de clienti sa depaseasca 720 secunde

3⁰ Sa se determine probabilitatea ca durata de servire a primilor 200 de clienti sa fie situatea in intervalul [1925 s ; 2070s]

4⁰ Sa se determine numarul de client serviti astfel incat, cu probabilitate de 95% , timpul de servire sa depaseasca 1000s.

Subiect nr. 8

Intr-un sistem de asteptare, intervalele de timp dintre doua evenimente successive (de exemplu, sosirea clientilor intr-un sistem de servire) sunt descries de v.a. independente X_k , $k \geq 1$, care urmeaza o lege de probabilitate de tip exponential – negativ, avand valoarea medie m =

$M(S_k) = 5$, pentru fiecare $k \geq 1$. Fie $S_N = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N$, $N \geq 1$, v.a. asociata timpului de aparitie a evenimentului de rang N.

1⁰ Sa se arate ca $M(S_N) = 5N$ si $Var (S_N) = 25N$.

2⁰ Utilizand *Teorema limita centrala*, sa se determine probabilitatea ca evenimentul de rang 2000 sa apara in intervalul [9600 ; 10500]

3⁰ Utilizand *Teorema limita centrala*, sa se determine probabilitatea ca evenimentul de rang 1000 sa **nu** apara in intervalul [0 ; 4600].

Subiect nr. 9

Se considera lantul Markov $(X_k)_{k\geq 0}$ asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$,

unde $S = \{ 1, 2 \}$, $p^{(0)} = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ si $\prod = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

Sa se determine:

1⁰ Repartitia limita a lantului Markov

2⁰ $P (X_0 = 2 \ / X_2 \neq 1)$

3⁰ $P (X_2 = 1 \ / X_3 \neq 2, X_1 = 2)$

4⁰ $P (X_1 - X_0 = 1 \ / X_1 + X_2 + X_3 = 4)$

Subiect nr. 10

Se considera lantul Markov $(X_k)_{k\geq 0}$ asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$,

unde S = { 1, 2, 3 }, $p^{(0)} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ si $\prod = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

Sa se determine:

1^0 Repartitia limita a lantului Markov

2^0 $P(X_0 \neq 3 \ / X_2 = 3)$

3^0 $P(X_1 = 1 \ / X_2 \neq 1)$

4^0 $P(X_1 + X_0 = 6 \ / X_1 + X_2 + X_3 = 5)$

Subiect nr. 11

Se considera lantul Markov $(X_k)_{k\geq 0}$ asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$,

unde S = { 1, 2 }, $p^{(0)} = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ si $\prod = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$.

Sa se determine:

1^0 Repartitia limita a lantului Markov

2^0 $P(X_0 = 1 \ / X_2 \neq 1)$

3^0 $P(X_2 = 2 \ / X_3 \neq 2, X_1 = 1)$

4^0 $P(X_1 - X_0 = 1 \ / X_1 + X_2 + X_3 = 4)$

Subiect nr. 12

Functia f: ℝ → ℝ , f(t) = $\begin{cases} 0, & t < 0 \\ a(4t+3)\, e^{-2t}, & t \geq 0 \end{cases}$, $a > 0$, este p.d.f. pentru o v.a. 1D, notata X. Sa se determine:

1⁰ Parametrul a

2⁰ Momentul de ordin n al v.a. X, i.e. M_n(X), n ≥ 0

3⁰ Deviatia standard (abaterea medie patratica) $\sigma(X)$

4⁰ Functia de fiabilitate ***R(t)*** si rata de hazard ***r(t)***

5⁰ P(0 ≤ X ≤ ln 5)

Subiect nr. 13

Functia f: ℝ → ℝ , f(t) = $\begin{cases} a \cos 5x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{10} \\ 0, & in\ rest \end{cases}$, $a > 0$, este p.d.f. pentru o v.a. 1D, notata X. Sa se determine:

1⁰ Parametrul a

2⁰ Valoarea medie $M(X)$

3⁰ Dispersia (Varianta) $D^2(X)$ (Var(X))

4⁰ Functia de fiabilitate ***R(t)*** si rata de hazard ***r(t)***, pentru t > 0

5⁰ P($-1 \le X \le \frac{\pi}{15}$)

Subiect nr. 14

Se considera v.a. discreta

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & \dots \\ 2p & 2p^2 & 2p^3 \dots & & 2p^n & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n \\ 2p^n \end{pmatrix}_{n\ge1}$$

1^0 Sa se arate ca 3p = 1

2^0 Sa se calculeze valoarea medie a v.a. X

3^0 Sa se calculeze abaterea medie patratica (deviatia standard) a v.a. X

4^0 Sa se calculeze $P\ (X \ge \pi^2)$

5^0 Sa se calculeze $F(8\ )$

Subiect nr. 15

In medie, 25% din semnalele emise intr-un canal binar cu zgomot sunt simboluri 1, iar restul sunt simboluri 0. Se emit 30000 de simboluri 0 si 1 si admitem ca v.a. care da numarul de simboluri 1 receptionate este de tip Bernoulli (binomiala). Utilizand aproximarea legii Bernoulli prin legea Gauss, sa se determine:

1^0 Probabilitatea ca numarul de semnale (simboluri) 1 receptionate sa fie cuprins intre 7380 si 7710

2^0 Probabilitatea ca numarul de semnale (simboluri) 0 receptionate sa fie cuprins intre 22320 si 23000

3^0 Un interval in care se afla numarul de semnale (simboluri) 1 receptionate, luand in considerare o eroare de 3%

4^0 Un interval in care se afla numarul de semnale (simboluri) 0 receptionate, luand in considerare o probabilitate de 99%

Subiect nr. 16

Statistic, s-a constatat ca intr-o zona geografica 49% dintre nou nascuti sunt baieti, iar restul sunt fete. Admitem ca variabila aleatoare care da numarul de nou nascuti (fete sau baieti) este de tip Bernoulli (binomiala). Utilizand aproximarea legii Bernoulli prin legea Gauss, sa se determine, pentru un esantion de 35000 de nou nascuti:

1^0 Probabilitatea ca numarul de baieti sa fie cuprins intre17000 si 17350

2^0 Probabilitatea ca numarul de fete sa fie cuprins intre 17700 si 18000

3^0 Un interval in care se afla numarul de baieti, luand in considerare o eroare de 3%

4^0 Un interval in care se afla numarul de fete, luand in considerare o probabilitate de 98%

Subiect nr. 17

Statistic, s-a constatat ca 98% din aparatele electrice comercializate la un magazin de specialitate nu prezinta defectiuni. Admitem ca variabila aleatoare care da numarul de defectiuni este de tip Bernoulli (binomiala). Utilizand aproximarea legii Bernoulli prin legea Gauss, sa se determine, pentru un esantion de 25000 de aparate:

1⁰ Probabilitatea ca numarul aparatelor fara defectiuni sa fie cuprins intre 24400 si 24550

2⁰ Probabilitatea ca numarul aparatelor cu defectiuni sa fie cuprins intre 440 si 520

3⁰ Un interval in care se afla numarul aparatelor cu defectiuni, luand in considerare o eroare de 2%

4⁰ Un interval in care se afla numarul aparatelor fara defectiuni, luand in considerare o probabilitate de 97%

Subiect nr. 18

Intr-un sistem de asteptare timpul de servire a unui client este descris de o v.a. de tip B(p,n), avand media m = 7 (secunde) si deviatia standard $\sigma = 3$. Fie X_k v.a. care descrie timpul de servire a clientului de rang k si $S_N = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N$, $N \geq 1$ Admitem ca v.a. X_k, $k \geq 1$, sunt independente.

1⁰ Sa se arate ca $M(S_N) = 7N$ si $Var(S_N) = 9N$

2⁰ Sa se determine probabilitatea ca durata de servire a primilor 80 de clienti sa depaseasca 575 secunde

3⁰ Sa se determine probabilitatea ca durata de servire a primilor 200 de clienti sa fie situatea in intervalul [1340 s ; 1450s]

4⁰ Sa se determine numarul de client serviti astfel incat, cu probabilitate de 95% , timpul de servire sa depaseasca 900s.

Subiect nr. 19

Intr-un sistem de asteptare, intervalele de timp dintre doua evenimente successive (de exemplu, sosirea clientilor intr-un sistem de servire) sunt descries de v.a. independente X_k , $k \geq 1$, care urmeaza o lege de probabilitate de tip exponential – negativ, avand valoarea medie m = $M(S_k) = 8$, pentru fiecare $k \geq 1$. Fie $S_N = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N$, $N \geq 1$, v.a. asociata timpului de aparitie a evenimentului de rang N.

1⁰ Sa se arate ca $M(S_N) = 8N$ si $Var(S_N) = 64N$.

2⁰ Utilizand *Teorema limita centrala*, sa se determine probabilitatea ca evenimentul de rang 2000 sa apara in intervalul [15400 ; 16300]

3⁰ Utilizand *Teorema limita centrala*, sa se determine probabilitatea ca evenimentul de rang 1000 sa **nu** apara in intervalul [0 ; 7500].

Subiect nr. 20

Se considera lantul Markov $(X_k)_{k\geq 0}$ asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$,

unde $S = \{1, 2\}$, $p^{(0)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ si $\prod = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Sa se determine:

1⁰ Repartitia limita a lantului Markov

2⁰ $P(X_0 = 1 \;/\; X_2 \neq 1)$

3⁰ $P(X_2 = 1 \;/\; X_3 \neq 1, X_1 = 2)$

4⁰ $P(X_1 - X_0 = 1 \;/\; X_1 + X_2 + X_3 = 6)$

Subiect nr. 21

Se considera lantul Markov $(X_k)_{k\geq 0}$ asociat tripletului $(S, p^{(0)}, \Pi)$,

unde S = { 1, 2, 3 }, $p^{(0)} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ si $\prod = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Sa se determine:

1⁰ Repartitia limita a lantului Markov

2⁰ $P(X_0 \neq 2 \;/\; X_2 = 2)$

3⁰ $P(X_2 + X_0 = 6 \;/\; X_1 + X_2 + X_3 = 5)$

Subiect nr. 22

In medie, 25% din semnalele emise intr-un canal binar cu zgomot sunt simboluri 1, iar restul sunt simboluri 0. Se emit 30000 de simboluri 0 si 1 si admitem ca v.a. care da numarul de simboluri 1 receptionate este de tip Bernoulli (binomiala). Utilizand aproximarea legii Bernoulli prin legea Gauss, sa se determine:

1⁰ Probabilitatea ca numarul de semnale (simboluri) 1 receptionate sa fie cuprins intre 7440 si 7720

2⁰ Probabilitatea ca numarul de semnale (simboluri) 0 receptionate sa fie cuprins intre 22370 si 23300

3⁰ Un interval in care se afla numarul de semnale (simboluri) 1 receptionate, luand in considerare o eroare de 5%

4⁰ Un interval in care se afla numarul de semnale (simboluri) 0 receptionate, luand in considerare o probabilitate de 98%

Subiect nr. 23

Functia f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(t) = $\begin{cases} 0, & t < 0 \\ a(2t+1)e^{-4t}, & t \geq 0 \end{cases}$, $a > 0$, este p.d.f. pentru o v.a. 1D, notata X. Sa se determine:

1⁰ Parametrul a

2⁰ Momentul de ordin n al v.a. X, i.e. M_n(X), $n \geq 0$

3⁰ Deviatia standard (abaterea medie patratica) $\sigma(X)$

4⁰ Functia de fiabilitate ***R(t)*** si rata de hazard ***r(t)***

5⁰ P($0 \leq X \leq \ln 3$)

Subiect nr. 24

Functia f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(t) = $\begin{cases} 0, & t < 0 \\ a(5t+2)e^{-3t}, & t \geq 0 \end{cases}$, $a > 0$, este p.d.f. pentru o v.a. 1D, notata X. Sa se determine:

1⁰ Parametrul a

2⁰ Momentul de ordin n al v.a. X, i.e. M_n(X), $n \geq 0$

3⁰ Deviatia standard (abaterea medie patratica) $\sigma(X)$

4⁰ Functia de fiabilitate ***R(t)*** si rata de hazard ***r(t)***

5⁰ P($0 \leq X \leq \ln 2$)

Subiect nr. 25

Functia f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x) = $\begin{cases} a \sin 3x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ 0, & in\ rest \end{cases}$, $a > 0$, este p.d.f. pentru o v.a. 1D, notata X. Sa se determine:

1⁰ Parametrul a

2⁰ Valoarea medie $M(X)$

3⁰ Dispersia (Varianta) $D^2(X)$ (Var(X))

4⁰ Functia de fiabilitate ***R(t)*** si rata de hazard ***r(t)***

5⁰ P($-1 \leq X \leq \frac{\pi}{6}$)

Subiect 26

In medie, 25% din semnalele emise intr-un canal binar cu zgomot sunt simboluri 1, iar restul sunt simboluri 0. Se emit 30000 de simboluri 0 si 1 si admitem ca v.a. care da numarul de simboluri 1 receptionate este de tip Bernoulli (binomiala). Utilizand aproximarea legii Bernoulli prin legea Gauss, sa se determine:

1⁰ Probabilitatea ca numarul de semnale (simboluri) 1 receptionate sa fie cuprins intre 7430 si 7710

2⁰ Probabilitatea ca numarul de semnale (simboluri) 0 receptionate sa fie cuprins intre 22390 si 23100

3^0 Un interval in care se afla numarul de semnale (simboluri) 1 receptionate, luand in considerare o eroare de 2%

4^0 Un interval in care se afla numarul de semnale (simboluri) 0

receptionate, luand in considerare o probabilitate de 97%