Capitolul IV

ELEMENTE DE STATISTICĂ MATEMATICĂ

§1. Noțiuni de bază ale statisticii matematice

1. Populație statistică. Frecvențe

În statistica matematică, în scopul aplicării ei la studiul fenomenelor social-economice, se întîlnesc probleme legate de analizarea și sistematizarea datelor privitoare la fenomenele cercetate și de concluziile bazate pe aceste analize, care să descrie într-o anumită formă desfășurarea lor în viitor.

Exemple: Fenomenul de apariție a unei epidemii într-o populație omenească; fenomenul de apariție de piese rebut într-o mulțime de piese fabricate la aceeași mașină unealtă; evoluția precipitațiilor atmosferice în ultima sută de ani ș.a.

Cercetarea unui fenomen cu ajutorul metodelor statisticii matematice vom numi-o cercetare statistică sau analiză statistică a fenomenului.

În general, fenomenele care sînt abordate în cercetarea statistică apar ca manifestări sau evoluții ale unor caracteristici ale elementelor unei mulțimi. De exemplu, fenomenul de apariție a rebuturilor într-o mulțime de 10 000 de bile de oțel poate fi determinat de variațiile diametrului bilelor.

Definiție. Mulțimea de elemente care se cercetează în statistică poartă numele de *populație statistică* sau, simplu, *populație.*

În exemplele de mai sus am întîlnit o populație omenească, o populație de piese fabricate la aceeași mașină-unealtă, o populație formată dintr-o sută de ani, o populație formată din 10 000 bile de oțel.

Obiectele care alcătuiesc o populație statistică se numesc *indivizi* sau *unități statistice.*

Analiza statistică poate avea în vedere una sau mai multe caracteristici.

Spre exemplu, o populație de brazi dintr-o plantație se poate cerceta lupă înălțimea brazilor și vîrsta lor. La o populație de 10 000 de pui nou ıăscuți se pot cerceta sexul și greutatea lor.

Caracteristicile care se pot măsura se numesc *cantitative.* Printre acestea e pot da ca exemple, pentru populații umane: înălțimea, talia, vîrsta, numărul de copii dintr-o familie, pentru populaţii de piese: dimensiunile unei piese etc.

Aceste caracteristici apar ca funcţii definite pe populaţia statistică cu valori numerice. De aceea în cele ce urmează, caracteristicile le vom numi uneori variabile.

Spre deosebire de caracteristicile cantitative există caracteristici care nu se pot măsura ca: starea civilă, sexul, culoarea feţei etc. care se numesc *calitative.*

Caracteristicile cantitative care pot lua numai valori întregi (de exemplu, numărul de promovaţi dintr-o clasă) se numesc *discrete* sau *discontinue.*

Caracteristicile cantitative care pot lua orice valoare dintr-un interval finit de numere reale se numesc *continue*, (de exemplu, greutatea unor discuri metalice de rază r şi densitate d).

2. Grupări de date

Definiţie. Să presupunem dată o populaţie $\mathcal{P}$ şi o caracteristică cantitativă, sau o variabilă, f. Caracteristica f asociază fiecărui individ x din populaţie o valoare $f(x)$, determinată în general prin măsurători empirice.

Mulţimea $\{(x, f(x)), x\in P\}$ ordonată după valorile lui x se numeşte *repartiţia empirică* a caracteristicii f pe populaţia $\mathcal{P}$ sau *serie statistică.*

Evident, dacă păstrăm f şi schimbăm populaţia $\mathcal{P}$, repartiţia empirică sau seria statistică se schimbă şi ea.

Exemplu. Pe o populaţie de 100 de arzătoare de cuarţ de 250 W pentru lămpi fluorescente, numerotate de la 1 la 100, s-a măsurat tensiunea în arc, în volţi. Cîmpul de toleranţă admis pentru tensiune este de 125—145 volţi. Repartiţia empirică a caracteristicii este dată în tabelul 1.

Definiţie. Pentru numărul real a, numărul indivizilor din mulţimea $\{x\,|\,x\in\mathcal{P},\ f(x)=a\}$ se numeşte *frecvenţa absolută* a valorii a.

Dacă $f(\mathcal{P})=\{f(x)\,|\,x\in\mathcal{P}\}$ este mulţimea valorilor caracteristicii f, atunci pentru orice $a\notin f(\mathcal{P})$ frecvenţa absolută este zero; pentru orice $a\in f(\mathcal{P})$ frecvenţa absolută este diferită de zero.

Frecvenţa absolută a valorii a se notează în general prin n_a şi $\sum\limits_{a\in f(P)} n_a = N$, $N=\text{card }(\mathcal{P})$*).

Definiţie. Dacă N este numărul unităţilor din populaţia $\mathcal{P}$ atunci $\frac{n_a}{N}$ se numeşte *frecvenţa relativă* a valorii a. Această frecvenţă se va nota cu f_a.

Suma tuturor frecvenţelor relative este 1. Adesea frecvenţa relativă se dă în procente.

*) Card $\mathcal{P}$ înseamnă cardinalul mulţimii $\mathcal{P}$, adică numărul de elemente din mulţime.

Tabelul 1

Nr. critic*)	Tensiunea	Nr. critic	Tensiunea	Nr. critic	Tensiunea	Nr. critic	Tensiunea	Nr. critic	Tensiunea
1	134	21	134	41	125	61	144	81	134
2	133	22	135	42	136	62	146	82	132
3	136	23	136	43	133	63	134	83	130
4	133	24	138	44	139	64	142	84	132
5	135	25	131	45	131	65	146	85	138
6	140	26	137	46	141	66	133	86	137
7	141	27	123	47	128	67	135	87	133
8	138	28	129	48	137	68	126	88	137
9	132	29	137	49	128	69	134	89	130
10	130	30	135	50	127	70	127	90	139
11	135	31	140	51	136	71	138	91	131
12	144	32	134	52	136	72	132	92	138
13	136	33	130	53	130	73	126	93	139
14	129	34	135	54	135	74	135	94	141
15	122	35	144	55	147	75	143	95	135
16	124	36	148	56	134	76	142	96	142
17	135	37	140	57	142	77	134	97	138
18	139	38	135	58	148	78	143	98	128
19	145	39	131	59	133	79	140	99	138
20	137	40	123	60	135	80	140	100	137

*) Nr. critic înseamnă numărul de ordine al arzătorului.

Definiție. Pentru numărul real a, numărul indivizilor din mulțimea $\{x|x\in\mathcal{P}, f(x) \leqslant a\}$ se numește *frecvența absolută cumulată crescătoare* a valorii a. Această frecvență se va nota cu $n_a\uparrow$.

Definiție. Pentru numărul real a, numărul indivizilor din mulțimea $\{x\,|\,x\in\in\mathcal{P}, f(x) \geqslant a\}$ se numește *frecvența absolută cumulată descrescătoare* a valorii a. Această frecvență se va nota cu $n_a\downarrow$.

În mod analog, schimbînd cuvîntul „absolut" cu „relativ" se definesc frecvențele relative cumulate crescătoare și descrescătoare. Acestea se vor nota respectiv cu $f_a\uparrow$ și $f_a\downarrow$. În cele ce urmează, pentru simplificarea exprimării, prin „frecvența — cumulată" se va înțelege „frecvență relativă cumulată crescătoare".

Se observă că urmărirea repartiției caracteristicii f pe tabelul 1 este destul de greoaie. Să ordonăm mulțimea valorilor $\{f(x), x\in\mathcal{P}\}$ și să considerăm aplicația prin care fiecărei valori $f(x) = a$ îi asociem frecvența n_a. Această aplicație se numește *gruparea datelor* sau *serie statistică grupată*, sau *repartiție*. Se obține tabelul 2.

Tabelul 2

Tensiunea	Nr. arzătoare	Tensiunea	Nr. arzătoare
122	1	135	12
123	2	136	6
124	1	137	7
125	1	138	7
126	2	139	4
127	2	140	5
128	3	141	3
129	2	142	4
130	5	143	2
131	4	144	3
132	4	145	1
133	6	146	2
134	8	147	1
		148	2
Total			100

Pe acest tabel se poate ușor observa că un număr mic de arzătoare se situează în afara cîmpului de toleranță, cuprins între limitele 125—145 volți; că tensiunea de 135 de volți se găsește în cel mai mare număr de arzătoare, că valorile din jurul acestei tensiuni se găsesc într-un număr mai mare de arzătoare, decît valorile mai depărtate de valoarea 135 V etc.

Tabelul 2 este format numai din două coloane de numere, prima corespunzînd valorilor caracteristicii și a doua corespunzînd numărului de indivizi ai populației care dau caracteristicii valoarea respectivă.

Pentru populația $\mathcal{P}$ și caracteristica f date, să considerăm în mulțimea $f(\mathcal{P}) = \{f(x),\ x \in \mathcal{P}\}$, $x_0 = \min f(\mathcal{P})$, $x_n = \max f(\mathcal{P})$ și o partiție $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ a intervalului $[x_0, x_n]$, unde $x_i \in f(\mathcal{P})$, $0 \leqslant i \leqslant n$.

Mulțimea $f(\mathcal{P}) \cap [x_i, x_{i+1}]$ se numește *clasa de valori*.

Observăm că în tabelul 2, lucrurile se simplifică și mai mult, aplicînd valorilor primei coloane o astfel de împărțire în clase. Lungimea fiecărei clase se alege după necesități, fie în exemplul dat, egală cu 3. Facem convenția ca limita superioară a clasei să nu aparțină clasei respective. Obținem tabelul 3.

Acest tabel ne arată că în numărul cel mai mare de arzătoare tensiunea în arc este cuprinsă între valorile 134—137 V. În practica statistică împărțirea în clase este indicată cînd numărul valorilor caracteristicii este mare și este absolut necesară în cazul caracteristicilor continue.

Definiție. Pentru intervalul $[a_i, a_{i+1})$, numărul indivizilor din mulțimea $\{x \mid x \in \mathcal{P},\ a_i \leqslant f(x) < a_{i+1}\}$ se numește *frecvența absolută* a intervalului $[a_i, a_{i+1})$ și se notează cu $n_{i,i+1}$.

Tabelul 3

Tensiunea	Nr. arzătoare
122–125	4
125–128	5
128–131	10
131–134	14
134–137	26
137–140	18
140–143	12
143–146	6
146–149	5
Total	100

Definiție. Numărul $\frac{n_{i,i+1}}{N}$ se numește frecvența relativă a intervalului $[a_i, a_{i+1})$ și se notează $f_{i,i+1}$.

Pentru intervalele $[a_i, a_{i+1})$ se pot de asemenea defini frecvențele absolute cumulate și relative cumulate în mod corespunzător definițiilor anterioare.

Exemple. În tabelul 2 avem:

$$n_{123} = 2;$$

$f_{135} = \frac{12}{100}$; sau $f_{135} = 12\%$

$n^{\uparrow}_{126} = 1 + 2 + 1 + 1 + 2 = 7;$

$n^{\downarrow}_{145} = 1 + 2 + 1 + 2 = 6;$

$f^{\uparrow}_{126} = 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}02 = 0{,}07$

$f^{\downarrow}_{145} = \frac{6}{100} = 0{,}06$

Pentru clasa 131–134 din tabelul 3 avem:

$n_{131,134} = 14;$

$f_{131,134} = \frac{14}{100};$

$n^{\uparrow}_{131,134} = 33$ (avem 33 arzătoare în care tensiunea în arc este strict mai mică decît 134 volți);

$n^{\downarrow}_{131,134} = 81$ (avem 81 de arzătoare în care tensiunea în arc este de cel puțin 131 volți);

$f^{\uparrow}_{131,134} = 0{,}04 + 0{,}05 + 0{,}10 + 0{,}14 = 0{,}33$ (în 33 % din arzătoare se găsește o tensiune sub 134 volți).

$f^{\downarrow}_{131,134} = 0{,}81$ (în 81 % din arzătoare tensiunea este de cel puțin 131 volți).

Gruparea datelor în cazul analizării unei populații după două caracteristici conduce la un tabel cu dublă intrare. Avem un astfel de exemplu în tabelul 4, care exprimă repartiția a 47 de elevi după notele obținute la tezele de matematică și fizică.

Tabelul 4

Note la fizică \ Note la matematică	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Total
10	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	4
9	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	5
8	0	0	4	6	2	0	0	0	0	0	12
7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	8	7	0	0	0	0	15
5	0	0	0	0	0	0	5	0	0	1	6
4	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	4
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Total	3	6	5	6	10	7	5	4	0	1	47

Tabelul 4 reprezintă notele obținute la tezele de matematică și fizică dintr-o clasă de 47 de elevi.

Vedem aici că 6 elevi au obținut 7 la teza de matematică și 8 la teza de fizică, 5 elevi au obținut 4 la teza de matematică și 5 la teza de fizică, nici un elev n-a obținut 10 la matematică și 8 la fizică etc.

3. Reprezentarea grafică a seriilor statistice pentru o singură caracteristică.

Definiție. Graficul

Se obține fig. 9.

În cazul seriilor statistice cu o caracteristică cantitativă, se întîlnesc în mod curent următoarele reprezentări grafice: *reprezentarea în batoane, histograma, poligonul frecvențelor*.

Reprezentarea în batoane se utilizează în cazul seriilor statistice în care caracteristica ia un număr mic de valori și valorile nu sînt grupate în clase. Construcția o dăm pe exemplul următor.

Exemplu. Să se reprezinte distribuția a 100 de șuruburi după valorile diametrului. Datele de observații sînt trecute în tabelul 5.

Tabelul 5

Diametrul în mm	Nr. de șuruburi n_a	Diametrul în mm	Nr. de șuruburi n_a
8,37	1	8,43	16
8,38	4	8,44	13
8,39	7	8,45	7
8,40	11	8,46	4
8,41	15	8,47	1
8,42	20	8,48	1

Se ia un sistem de axe rectangulare și o unitate de măsură potrivită pe fiecare din axe. Pe axa absciselor se trec punctele corespunzătoare valorilor caracteristicii, iar din aceste puncte se ridică segmente verticale de lungime egală cu frecvența absolută sau relativă corespunzătoare. Se obține figura 10.

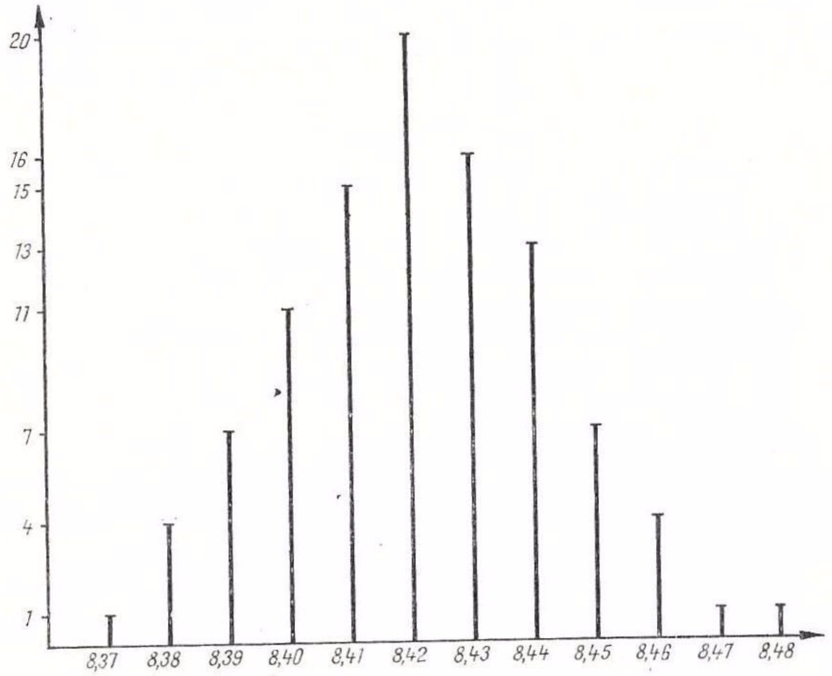

Fig. 10

Histograma se utilizează atunci cînd valorile caracteristicii apar grupate în clase și are următoarea construcție: să considerăm tabelul 3; pe axa absciselor se iau segmente egale între ele, în general egale cu amplitudinea claselor și pe acestea, considerate ca baze, se ridică dreptunghiuri de înălțimi proporționale cu frecvența absolută sau relativă a claselor. Se obține figura 11.

Poligonul frecvențelor se utilizează tot în cazul grupării datelor pe clase și se construiește astfel:

Exemplu. Să luăm din nou tabelul 3. În mijlocul fiecărui segment de pe abscisă (trasat ca și pentru histogramă) se ridică segmente verticale proporționale cu frecvențele absolute sau relative ale claselor corespunzătoare. Extremitățile acestor segmente se unesc printr-o linie poligonală. Se obține figura 12.

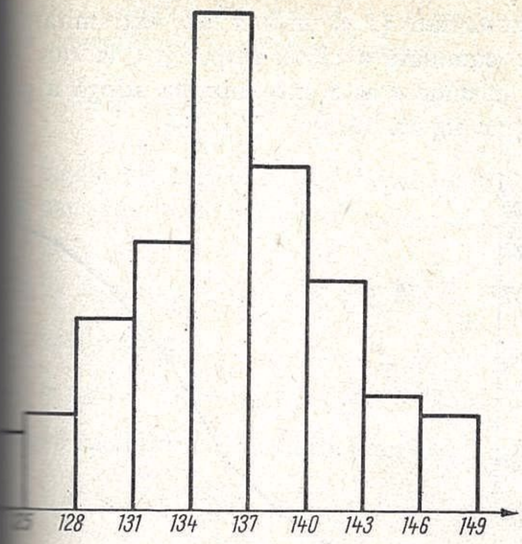
128 131 134 137 140 143 146 149

Fig. 11

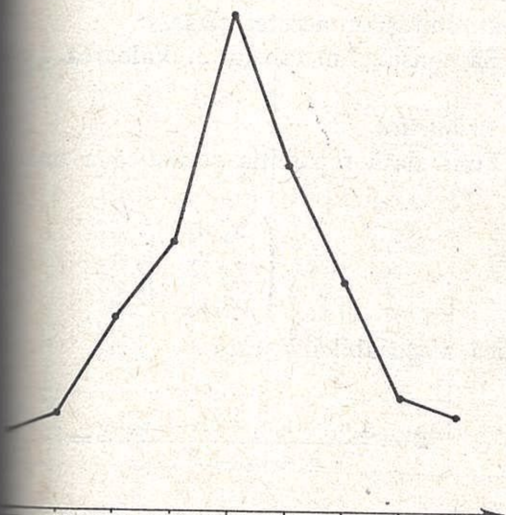
126,5 129,5 132,5 135,5 138,5 141,5 144,5 147,5

Fig. 12

Poligonul frecvențelor cumulate se obține unind printr-o linie poligonală punctele de coordonate (x,y) unde x este extremitatea dreaptă a unei clase și y frecvența cumulată a clasei respective, la care se adaugă punctul de coordonate $(0, a)$ unde a este extremitatea stîngă a primei clase. Pentru tabelul 3 se obține figura 13.

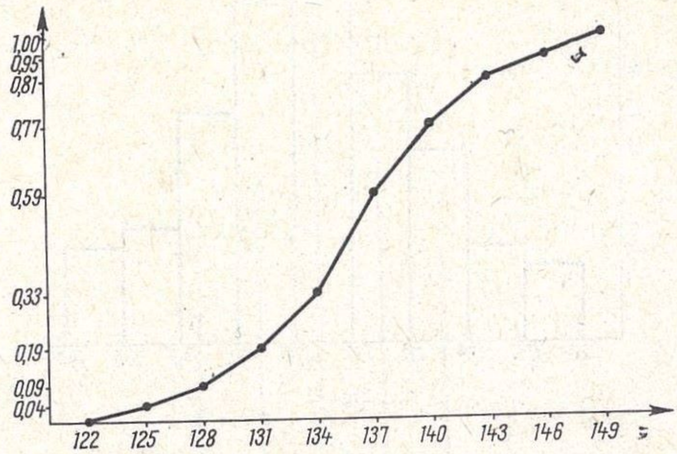

Fig. 13

4. Valori caracteristice ale unei serii statice

a) *Valoarea centrală a unei clase*

Definiție. Se numește *valoarea centrală* a unei clase $f(\mathcal{P}) \cap [x_i, x_{i+1})$ media aritmetică a extremităților acestei clase.

Exemplu. Să considerăm tabelul 3. Valoarea centrală a clasei 128—131 este 129,5.

b) *Media aritmetică*

Definiție. Fiind dată repartiția statistică a unei caracteristici f (variabile);

$$\begin{pmatrix} x_1 \; n_1 \\ x_2 \; n_2 \\ \vdots \\ x_N \; n_N \end{pmatrix},$$

media aritmetică a variabilei f este

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_N n_N}{n_1 + n_2 + \ldots + n_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i n_i}{N},$$

sau

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i f_i.$$

În cazul cînd valorile variabilei sînt grupate în clase, calculul mediei se dă cu ajutorul valorilor centrale ale claselor și anume:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} f_i.$$

În practică pentru media aritmetică se pot folosi unele artificii de calcul care sistematizează sau scurtează calculele.

Să punem

$$x_i = x_0 + (x_i - x_0), \quad 1 \leqslant i \leqslant N$$

și să înmulțim această relație cu n_i

$$x_i n_i = x_0 n_i + (x_i - x_0) n_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant N$$

Adunînd aceste relații membru cu membru și împărțind la N obținem:

$$\bar{x} = x_0 + \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_0) f_i$$

Calculul mediei aritmetice cu această formulă se numește metoda zeroului fals și poate conduce la simplificarea calculelor printr-o alegere potrivită a valorii x_0.

Exemple

Să completăm tabelul 3 după cum urmează, alegînd $x_0 = 135{,}5$

Tabelul 6

Clase	Frecvența absolută n_i	Valori centrale x_i	$x_i - x_0$	f_i	$f_i(x_i - x_0)$	$x_i f_i$
122—125	4	123,5	−12	0,04	−0,48	4,940
125—128	5	126,5	− 9	0,05	−0,45	6,325
128—131	10	129,5	− 6	0,1	−0,6	12,950
131—134	14	132,5	− 3	0,14	−0,42	18,550
134—137	26	135,5	0	0,26	0	35,230
137—140	18	138,5	3	0,18	0,54	24,930
140—143	12	141,5	6	0,12	0,72	16,980
143—146	6	144,5	9	0,06	0,54	8,670
146—149	5	147,5	12	0,05	0,60	7,375
Total	100				+ 0,45	135,950

Calculînd media după definiție obținem, însumînd termenii ultimei coloane:

$$\bar{x} = 135{,}95$$

Utilizînd metoda zeroului fals și alegînd $x_0 = 135{,}5$ calculele se simplifică. Însumînd termenii penultimei coloane obținem:

$$\sum_i f_i(x_i - x_0) = 0{,}45.$$

Urmează că

$$\bar{x} = 135{,}5 + 0{,}45 = 135{,}95$$

c) *Dispersia*

Definiție. Se numește dispersie a repartiției $\begin{pmatrix} x_1 & n_1 \\ x_2 & n_2 \\ \dots & \dots \\ x_N & n_N \end{pmatrix}$, care are media $\bar{x}$, mărimea

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 n_2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 n_N}{N}$$

sau

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 f_i$$

Mărimea $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ se numește *abaterea medie pătratică*. Această mărime ca și σ^2 caracterizează împrăștierea valorilor în jurul valorii medii; cu cît este mai mică abaterea medie pătratică, cu atît valorile seriei statistice se grupează mai mult în jurul valorii medii.

Se poate da și altă formulă pentru calculul dispersiei.

Dezvoltînd pătratele din expresia σ^2 obținem

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\,[x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \dots + x_N^2 n_N - 2\bar{x}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_N n_N) +$$

$$+ \bar{x}^2(n_1 + n_2 + \dots + n_N)] = \frac{x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \dots + x_N^2 n_N}{N} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

De unde

$$\sigma^2 = (\overline{x^2}) - (\bar{x})^2$$

Trecînd, ca în cazul mediei, la alegerea unui x_0 potrivit, calculul dispersiei se simplifică prin formula

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - x_0)^2 n_1 + (x_2 - x_0)^2 n_2 + \dots + (x_N - x_0)^2 n_N}{N} - (\bar{x} - x_0)^2,$$

sau ceea ce este același lucru

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_0)^2 f_i - (\bar{x} - x_0)^2.$$

Demonstrație. Se pune x_i sub forma:

$$x_i = x_0 + (x_i - x_0).$$

De aici

$$x_i - \bar{x} = (x_i - x_0) - (\bar{x} - x_0)$$

şi

$$(x_i - \bar{x})^2 = (x_i - x_0)^2 - 2(x_i - x_0)(\bar{x} - x_0) + (\bar{x} - x_0)^2.$$

Înmulţind cu frecvenţele absolute, făcînd suma după i şi împărţind la N obţinem

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 n_i}{N} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i - x_0)^2 n_i}{N} - 2(\bar{x} - x_0)\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i - x_0) n_i}{N} + (\bar{x} - x_0)^2$$

Dar

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i - x_0) n_i}{N} = \overline{x_i - x_0} = \bar{x} - x_0.$$

Prin urmare

$$\sigma^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i - x_0)^2 n_i}{N} - 2(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{x} - x_0)^2,$$

şi deci

$$\sigma^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i - x_0)^2 n_i}{N} - (\bar{x} - x_0)^2.$$

Exemple. Să calculăm prin ambele formule dispersia distribuţiei a 100 de şuruburi după valorile diametrului aşa cum este dată în tabelul 7. Se alege $x_0 = 8,41$.

Tabelul 7

x_i	n_i	f_i	$x_i - x_0$	$f_i(x_i - x_0)$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$	$(x_i - x_0)^2$	$(x_i - x_0)^2 f_i$
8,37	5	0,05	−0,04	−0,0020	−0,045	0,0020	0,00010	0,0016	0,00008
8,39	18	0,18	−0,02	−0,0036	−0,025	0,0006	0,00010	0,0004	0,00007
8,41	35	0,35	0	0	−0,005	0	0	0	0
8,43	29	0,29	0,02	0,0058	0,015	0,0002	0,00005	0,0004	0,00011
8,45	11	0,11	0,04	0,0044	0,035	0,0012	0,00013	0,0016	0,00017
8,47	2	0,02	0,06	0,0012	0,055	0,0030	0,00006	0,0036	0,00007
Total	100			0,0058			0,00044		0,00050

$$\bar{x} = 8,41 + 0,0058 = 8,4158$$

$$\sigma^2 = \sum_i f_i(x_i - \bar{x})^2 \simeq 0,00044$$

$$\sigma^2 = \sum_i f_i(x_i - x_0)^2 - (\bar{x} - x_0)^2 \simeq 0,00044$$

Pentru seriile statistice grupate pe intervale se procedează ca și în cazul mediei aritmetice; x_i reprezintă atunci valoarea centrală a clasei a i-a.

d) *Modul*

Definiție. Se numește *modul* sau *moda* unei serii statistice valoarea caracteristicii căreia îi corespunde cea mai mare frecvență.

În cazul grupării valorilor caracteristice în clase, modul este valoarea centrală a clasei căreia îi corespunde cea mai mare frecvență.

Exemple. În tabelul 2, modul este $M = 135$; în tabelul 6 modul este $M = 135{,}5$.

Există serii statistice fără mod, unde nici o valoare nu are frecvență maximă.

Exemplu. Un șir de valori 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 13 nu are mod; fiecare valoare are frecvența 1. Există serii statistice cu mai multe mode: bimodale, trimodale etc. (Bimodale: două valori distincte ale caracteristicii au aceeași frecvență maximă etc.).

e) *Mediana*

Definiție. Se numeste *mediana* unei serii statistice valoarea caracteristicii care împarte volumul populației în două părți egale.

Exemplu. În tabelul 2, mediana este Me $= 135$ deoarece există 13 valori ale caracteristicii < 135 și 13 valori ale caracteristicii > 135.

Dacă avem un număr par de valori ale caracteristicii:

$$2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9$$

mediana este media aritmetică a numerelor de la mijloc $\frac{5+6}{2} = 5{,}5$. La fel mediana poate fi considerată unul din numerele 5 și 6.

Să urmărim pe un exemplu, calculul medianei în cazul valorilor caracteristicii grupate în clase.

Exemplu. Să considerăm tabelul 3. Se presupune că arzătoarele ar fi aranjate în ordinea tensiunilor în arc respective; atunci ne interesează tensiunea în arc din al 50-lea arzător. Tensiunea din al 50-lea arzător se găsește în clasa 134—137. Acestei clase îi corespund 26 de arzătoare; pentru fiecare din ele variația este $\frac{137-134}{26}$. Ca să aflăm al cîtelea element al clasei 134—137 este arzătorul care ne interesează trebuie să scădem din 50 numărul 33 căci există $4 + 5 + 10 + 14 = 33$ arzătoare în care tensiunea este mai mică decît 134 V. Arzătorul considerat este deci al 17-lea element al clasei de variație **134** — 137.

Astfel mediana se găsește după formula:

$$\text{Me} = 134 + (50 - 33)\frac{137-134}{26} = 135{,}7.$$