Seminar 2 – MA

Scheme și formule probabilistice

① Breviar teoretic

1.1. Def. $(\mathcal{K}, E)$ câmp de evenimente ; O funcție $P: \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ se numește **probabilitate** pe $\mathcal{K}$ dacă:
$$\begin{cases} 1^\circ.\ P(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{K} \\ 2^\circ.\ P(E) = 1 \\ 3^\circ.\ \forall A, B \in \mathcal{K};\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow \\ \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases}$$

1.2. Obs. Definiția clasică a probabilității
$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)} = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$$
(Presupunem E finită ; $A \subseteq E$).

1.3. Proprietăți (i) $P(\emptyset) = 0$; (ii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; (iii) $0 \leq P(A) \leq 1$;
(iv) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$; (v) $A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

1.4. Probabilitatea reuniunii (i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(ii) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

(iii) Poincaré
$$\begin{cases} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j)}_{C_n^2 \text{ termeni}} + \underbrace{\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)}_{C_n^3 \text{ termeni}} \\ - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \end{cases}$$

1.5. Probabilități condiționale $(E, \mathcal{K}, P)$ câmp de prob. ; $A, B \in \mathcal{K}$,
$P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$
$$\begin{cases} P(A \cap B) \overset{df}{=} P(A) \cdot P(B/A) \\ P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{cases} \qquad \begin{cases} P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) \\ P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{cases}$$

OBS: $P(A) P(B/A) = P(B) P(A/B)$

1.6. Formula de înmulțire a probabilităților
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

1.7. Evenimente independente A, B independente $\overset{def}{\Longleftrightarrow} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

1.8. Sistem complet de evenimente (s.c.e.)

$\{A_i : 1\le i\le n\}\subseteq \mathcal{K}$ s.c.e. $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} (i)\ A_i\neq\emptyset,\ \forall i=\overline{1,n} \\ (ii)\ A_i\cap A_j=\emptyset,\ \forall i\neq j \\ (iii)\ A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n = E \Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = E \end{cases}$

1.9. Formula probabilității totale (f.p.t.)

$(E,\mathcal{K},P)$ câmp de probabilitate, $\{A_i : 1\le i\le n\}$ s.c.e.

$\forall X\in\mathcal{K} \Rightarrow \begin{cases} P(X)=P(A_1)\cdot P(X/A_1)+P(A_2)\cdot P(X/A_2)+\ldots+P(A_n)P(X/A_n) \\ \text{sau}\quad P(x)=\sum_{k=1}^{n} P(A_i)\cdot P(X/A_i) \end{cases}$

1.10 Formula lui Bayes. Ne situăm în ipotezele f.p.t.; în plus, $P(X)\neq 0 \Longrightarrow P(A_k/X)=\dfrac{P(A_k)\cdot P(X/A_k)}{P(X)}$ sau

$$P(A_k/X)=\frac{P(A_k)\cdot P(X/A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_i)\cdot P(X/A_i)}$$

2) Ex. 1. Problema concordanțelor (coincidențelor) (curs MA, pp 21-22)

O persoană scrie n scrisori distincte la n corespondenți, apoi amestecă scrisorile și le pune în mod aleator în n plicuri, pe care eram deja scrise adresele celor n corespondenți. Să se determine probabilitatea de a exista cel puțin un corespondent care primește scrisoarea care-i fusese destinată și limita acestei probabilități pt. $n\to\infty$.

Rezolvare Fie A_i, $1\le i\le n$, evenimentul ca scrisoarea „i" să ajungă la corespondentul căreia îi era adresată. Se cere $P(A)$, unde $A=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$

~~Metoda~~ Utilizăm formula lui Poincaré (1.4, (iii))

(1) $P(A)=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)}_{C_n^1=n \text{ termeni}}-\underbrace{\sum_{1\le i<j\le k}P(A_i\cap A_j)}_{C_n^2 \text{ termeni}}+\underbrace{\sum_{1\le i<j<k}P(A_i\cap A_j\cap A_k)}_{C_n^3 \text{ termeni}}-\ldots+(-1)^{n+1}\underbrace{P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\right.}_{C_n^n=1 \text{ termen}}$

Avem $P(A_i)=\frac{1}{n}$, $\forall i\in\{1,2,3,\dots,n\}$ (2)

$P(A_i\cap A_j)=P(A_i)\cdot P(A_j/A_i)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n(n-1)}=\frac{(n-2)!}{n!}$; $\forall i\neq j$ (3)

$P(A_i\cap A_j\cap A_k)=P(A_i)\cdot P(A_j/A_i)\cdot P(A_k/A_i\cap A_j)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}=$
$=\frac{(n-3)!}{n!}$; $\forall i,j,k$ distincte (4)

În general, $P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2}/A_{i_1})\cdot P(A_{i_3}/A_{i_1}\cap A_{i_2})\cdot$
$\dots P(A_{i_k}/A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_{k-1}})=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdots\frac{1}{n-(k-1)}=$
$=\frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)\dots(n-1)n}=\frac{(n-k)!}{n!}$; $\forall i_1,i_2,\dots,i_k$ distincte (5)

În final, $P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cap A_2)\cdot$
$\dots P(A_n/A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1})=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{n!}$ (6)

Deoarece fiecare din cei C_n^k, $1\le k\le n$, termeni ai sumelor considerate au aceeași probabilitate, din (1), (2), (3), (4), (5) obținem:

$P(A)=n\cdot\frac{1}{n}-C_n^2\cdot\frac{(n-2)!}{n!}+C_n^3\cdot\frac{(n-3)!}{n!}+\dots+\underbrace{C_n^k\cdot\frac{(n-k)!}{n!}}(-1)^{k+1}+\dots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}$

În general, $C_n^k\cdot\frac{(n-k)!}{n!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{n!}=\frac{1}{k!}$, deci

$\underline{P(A)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k!}+\dots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}}\overset{not}{=}p_n$

În final, $\lim_{n\to\infty}p_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ (7) ; $\underline{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}$

Deoarece $e^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1+\frac{(-1)^1}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\dots+\frac{(-1)^n}{n!}+\dots=$

$=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots+\frac{(-1)^n}{n!}+\dots=1-\underbrace{\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}+\dots\right)}_{(7):\ \lim_{n\to\infty}p_n}$

~~avem e = 1~~ din (7) obținem:

$e^{-1}=1-\lim_{n\to\infty}p_n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}p_n=1-\frac{1}{e}\simeq0.63$

(3) **Ex. 2.** Din cele 20 subiecte ale unui examen, un student știe 16. La examen se extrag, pe rând, 3 subiecte, iar condiția de promovabilitate este ca studentul să cunoască toate cele 3 subiecte. Să se determine probabilitatea ca studentul să promoveze examenul.

R. Fie A_1, A_2, A_3 evenimentele ca studentul să știe subiectele 1, 2, 3 respectiv. Atunci $p = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2)$

$$= \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} = \frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{15}^{3}}{19} \cdot \frac{7}{\cancel{9}_{3}} = \frac{28}{57} \simeq 0.4912 \rightarrow 49{,}12\%$$

(4) Schema lui Bernoulli (Schema binomială sau schema bilei revenite)

4.1. Enunț Într-un experiment pot să apară evenimentele A (având probabilitatea p) sau $\bar{A}$ (având probabilitatea $q = 1-p$). Experimentul se realizează de n ori în condiții identice (Exemplu: o urnă cu bile albe și negre; se extrage de n ori câte o bilă, punându-se de fiecare dată urna înapoi în urnă). Probabilitatea ca în cele n experimente evenimentul A să apară de m ori, $0 \le m \le n$, este

$$P(n; m) = C_n^m \, p^m \, q^{n-m}; \quad 0 \le m \le n$$

4.2. Obs. $P(n; m)$ reprezintă coeficientul lui x^m în dezvoltarea binomială $(q+px)^n$, i.e.

$$(q+px)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m q^{n-m} (px)^m = \sum_{m=0}^{n} P(n; m) x^m \quad (1)$$

4.3. Obs. Punând $x = 1$ în (1) $\Rightarrow \underbrace{(q+p)}_{=1}^{n} = \sum_{m=0}^{n} P(n; m)$, deci

$$(2) \quad P(n;0) + P(n;1) + P(n;2) + \dots + P(n;n) = 1 \iff \sum_{m=0}^{n} P(n;m) = 1$$

4.4. Numărul cel mai probabil de „succese" în schema lui Bernoulli

Este numărul s cel mai probabil de apariții ale evenimentului A (bila albă)

Fie $s \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ definit prin

$$P(n; s) = \max\{P(n;0); P(n;1); P(n;2); \dots; P(n,n)\}$$

Avem
$$s = \begin{cases} 1+[np-q], & \text{dacă } 0 \le p < 1 \text{ și } np-q \notin \mathbb{N} \\ np-q \text{ sau } np-q+1, & \text{dacă } np-q \in \mathbb{N}-\{n\} \\ n & \text{, dacă } p=1 \end{cases}$$

unde $[a] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \le a\}$ este partea întreagă a lui $a \in \mathbb{R}$

4.5. Ex. 3: Un nod de comutație deservește 10 terminale. Probabilitatea ca un terminal să fie activ este $p = 0.4$. Să se determine:

(i) Probabilitatea de avea cel puțin 8 terminale active

(ii) Numărul cel mai probabil de terminale active

(iii) Câte terminale trebuie să aibă nodul astfel încât probabilitatea de a fi activ cel puțin un terminal să fie ≥ 0.9.

R: Schema lui Bernoulli; $p = 0.4$; $q = 1-p = 0.6$

Ob. Urnă: 40 albe, 60 negre.

(i) $P(10;8) + P(10;9) + P(10;10) = C_{10}^8 p^8 q^2 + C_{10}^9 p^9 q + C_{10}^{10} p^{10} =$

$= \frac{10 \cdot 9}{2}(0.4)^8(0.6)^2 + 10(0.4)^9(0.6) + (0.4)^{10} = (0.4)^8[45 \cdot 0{,}36 + 10 \cdot 0{,}24 + 0.16] =$

$= \left(\frac{2}{5}\right)^8(16{,}2 + 2.56) = \left(\frac{2}{5}\right)^8 \cdot 18{,}76 = \frac{256 \cdot 18{,}76}{625^2}$

(ii) Avem $np - q = 10 \cdot 0{,}4 - 0{,}6 = 3{,}4 \notin \mathbb{N}$, deci $s = 1 + [np-q] = 1+3 = 4$

(iii) Condiția este $P(n;1) + P(n;2) + \dots + P(n;n) \ge 0.9 \overset{(2)}{\Longleftrightarrow}$

$\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} 1 - P(n;0) \ge 0{,}9 \Leftrightarrow P(n;0) \le 0{,}1 \Leftrightarrow C_n^0 p^0 q^n \le 0{,}1 \Leftrightarrow (0.6)^n \le 0{,}1$

$\Leftrightarrow n \lg(0{,}6) \le \lg(0{,}1) \Rightarrow n \ge \frac{\lg(0{,}1)}{\lg(0{,}6)} = \frac{-1}{\lg 6 - 1} = \frac{1}{1-\lg 6}$, deci

$n \ge n_0$; $n_0 = \left[\frac{1}{1-\lg 6}\right] + 1$ OBS: Din $(0{,}6)^n \le 0{,}1 \Longrightarrow n_0 = 5$.

5 Schema bilei neîntoarse (Schema hipergeometrică)

5.1. Enunț O urnă conține a bile albe și b bile negre. Se extrag, pe rând, n bile ($n \le a+b$), fără revenire (i.e. fără a pune bila înapoi în urnă).

Probabilitatea de a extrage α bile albe și β bile negre, $\alpha+\beta=n$, este: $P(a,b;\alpha,\beta) = \dfrac{C_a^{\alpha}\cdot C_b^{\beta}}{C_{a+b}^{\alpha+\beta}} = \dfrac{C_a^{\alpha}\cdot C_b^{\beta}}{C_{a+b}^{n}}$

4.2. Ex. 4 Din cele 50 subiecte ale unui examen, un student știe 45. La examen se extrag 4 subiecte. Să se determine probabilitatea ca studentul să promoveze examenul, pentru următoarele criterii de promovabilitate:

(i) Candidatul știe toate cele 4 subiecte

(ii) Studentul știe cel puțin 3 subiecte

(iii) Studentul știe cel puțin 1 subiect.

Rezolvare (i) $a=45$; $b=5$; $\alpha=4$; $\beta=0$

$$p = P(45,5;4,0) = \frac{C_{45}^4\cdot C_5^0}{C_{45+5}^{4+0}} = \frac{C_{45}^4}{C_{50}^4} = \frac{4287}{6580} \simeq 0.647$$

(64,7%)

(ii) $p = P(45,5;4,0)+P(45,5;3,1) = \dfrac{4287}{6580} + \dfrac{C_{45}^3\cdot C_5^1}{C_{50}^4} =$

$$= \frac{4287}{6580} + \frac{1419}{4606} \simeq 0.647 + 0.308 = \underline{0.955}$$

95,5%

(iii) $p = P(45;5;4,0)+P(45;5;3,1)+P(45;5;2,2)+P(45;5;1,3)$

Deoarece $P(45;5;4,0)+P(45;5;3,1)+P(45;5;2,2)+P(45;5;1,3)+$ $+P(45;5;0,4)=1$ (s.c.e), deducem

$$p = 1-P(45,5;0,4) = 1-\frac{C_{45}^0\cdot C_5^4}{C_{50}^4} = 1-\frac{5}{C_{50}^4} \simeq 0.9998$$

99,98%

(6) • Schema generalizată Bernoulli (schema lui Bernoulli cu mai multe stări)

• Schema lui Poisson (o altă generalizare a schemei Bernoulli)

• Schema generalizată a bilei neîntoarse

• Schema lui Pascal

• Schema geometrică

canal de V.S.A. pp. 233–237 → teme referat

(7) Ex. 5 Modelarea zgomotului într-un canal binar

La intrarea unui canal binar de transmisie se emit semnalele 0 și 1, în raportul 4/5. În medie 20% din semnalele „0" se transmit eronat, iar 90% dintre semnalele „1" se transmit corect.

Să se determine:

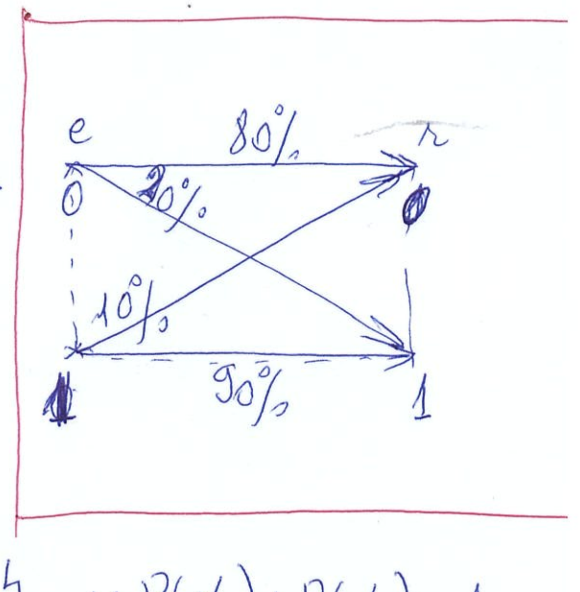
(i) Probabilitatea recepționării semnalului „0"

(ii) Probabilitatea recepționării semnalului „1"

(iii) Probabilitatea ca, în cazul recepției unui „1", să se fi emis „0"

(iv) Probabilitatea recepției corecte

(v) Probabilitatea recepției eronate.



R. Schema modelării zgomotului este: →

Fie X_0, X_1 evenimentele care reprezintă emiterea lui „0", respectiv „1".

Fie Y_0, Y_1 evenimentele care reprezintă recepția lui „0" respectiv „1".

Din datele problemei avem $\frac{P(X_0)}{P(X_1)} = \frac{4}{5}$ și $P(X_0)+P(X_1)=1$, deoarece $\{X_0, X_1\}$ și $\{Y_0, Y_1\}$ reprezintă s.c.e.

De aici $\Rightarrow \dfrac{P(X_0)}{P(X_0)+P(X_1)} = \dfrac{4}{4+5} \Rightarrow \dfrac{P(X_0)}{1} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(X_0) = \frac{4}{9},\ P(X_1) = \frac{5}{9}$ (1)

De asemenea, din schema de mai sus rezultă:

$$(2)\begin{cases} P(Y_0/X_0) = 80\% = \frac{80}{100} = \frac{4}{5} \\ P(Y_0|X_1) = 10\% = \frac{1}{10} \\ P(Y_1|X_0) = 20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \\ P(Y_1|X_1) = 90\% = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} \end{cases}$$

(i) ~~P(~~ Se cere $P(Y_0)$. Deoarece $\{X_0, X_1\}$ este un s.c.e, aplicând formula probabilității totale (Fpt) $\xRightarrow{(1),(2)}$

$\xRightarrow{(1),(2)} P(Y_0) = P(X_0)\cdot P(Y_0|X_0) + P(X_1)\cdot P(Y_0/X_1) = \frac{4}{9}\cdot\frac{4}{5} + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{10} =$

$= \frac{16}{45} + \frac{5}{90} = \frac{37}{90} \simeq 0{,}4111\ldots \simeq 41{,}11\%$

(ii) Analog cu (i); $P(Y_1) = P(X_0)\cdot P(Y_1|X_0) + P(X_1)\cdot P(Y_1|X_1) =$

$= \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{5} + \frac{5}{9}\cdot\frac{9}{10} = \frac{4}{45} + \frac{1}{2} = \frac{53}{90} \simeq 0.5888\ldots \simeq 58{,}88\%$

OBS. Deoarece $\{Y_0, Y_1\}$ este un s.c.e $\Rightarrow P(Y_1) = 1 - P(Y_0) = 1 - \frac{37}{90} = \frac{53}{90}$

(iii) Se cere $P(X_0/Y_1)$. Utilizăm formula lui Bayes, sau direct egalitatea $P(X_0 \cap Y_1) = \underline{P(X_0)\cdot P(Y_1/X_0) = P(Y_1)\cdot P(X_0/Y_1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(X_0/Y_1) = \dfrac{P(X_0)\cdot P(Y_1|X_0)}{P(Y_1)} \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \dfrac{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{53}{90}} = \frac{4}{45}\cdot\frac{90}{53} = \frac{8}{53} =$

$\simeq 0.1594 = 15.94\%$

(iv) Emitem „0" și recepționăm „0" (condiționat de emiterea lui „0") sau emitem „1" și recepționăm „1" (condiționat de emiterea lui „1"), așadar:

$P_{corect} = P((X_0 \cap Y_0) \cup (X_1 \cap Y_1))$. Deoarece $(X_0 \cap Y_0) \cap (X_1 \cap Y_1) = (X_0 \cap X_1) \cap (Y_0 \cap Y_1) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, deducem:

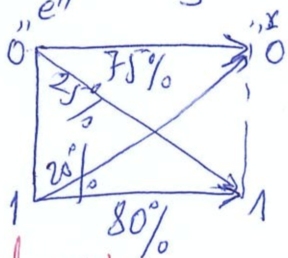
$P_{corect} = P(X_0 \cap Y_0) + P(X_1 \cap Y_1) = P(X_0) \cdot P(Y_0 | X_0) + P(X_1) P(Y_1 | X_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{16}{45} + \frac{1}{2} = \frac{77}{90} \simeq 0.8555 = 85,55\%$

(v) $P_{eronat} = 1 - P_{corect} = 1 - \frac{77}{90} = \frac{13}{90} \simeq 0.1445 = 14,45\%$

OBS. $P_{eronat} = P((X_0 \cap Y_1) \cup (X_1 \cap Y_0)) = P(X_0 \cap Y_1) + P(X_1 | Y_0) =$
$= P(X_0) \cdot P(Y_1 | X_0) + P(X_1) \cdot P(Y_0 | X_1) = \frac{4}{9} \frac{1}{5} + \frac{5}{9} \frac{1}{10} = \frac{13}{90} \simeq 0.1445$

(8) Ex. 6 (Temă)

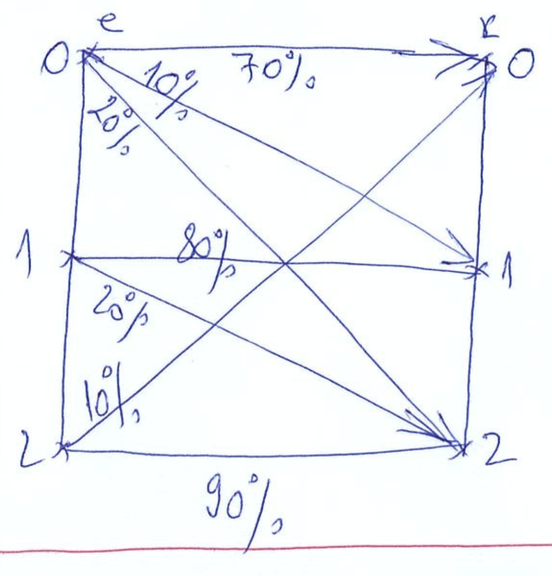
~~Datele de la Ex. 5~~ Similar cu Ex. 5; raportul este $\frac{2}{3}$, iar schema modelării zgomotului este:



(9) Ex. 7. ~~La intrarea unui~~ Modelarea zgomotului într-un canal ternar

La intrarea unui canal ternar de transmisiuni se emit semnalele 0, 1 și 2, direct proporțional cu numerele 2, 3, 5 respectiv. Schema modelării zgomotului în canal este dată în schema alăturată. Să se determine:

(i) Probabilitatea recepționării semnalului „0"
(ii) — " — " — " — „1"
(iii) — " — " — " — „2"
(iv) Probabilitatea ca, în cazul recepției unui „1", să se fi emis „2"
(v) Probabilitatea ca, în cazul recepționării unui „2", să se ~~fie~~ fi emis „0" sau „1"
(vi) Probabilitatea recepției corecte
(vii) Probabilitatea recepției eronate



R. Fie X_0, X_1, X_2 (Y_0, Y_1, Y_2) evenimentele care reprezintă emiterea (recepția) semnalelor „0”, „1”, „2”, respectiv. Desigur, $\{X_0, X_1, X_2\}$, $\{Y_0, Y_1, Y_2\}$ sunt s.c.e. Din datele problemei, avem:

$$\frac{P(X_0)}{2} = \frac{P(X_1)}{3} = \frac{P(X_2)}{5} \text{ și } P(X_0) + P(X_1) + P(X_2) = 1 \ (\text{s.c.e.}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(X_0)}{2} = \frac{P(X_1)}{3} = \frac{P(X_2)}{5} = \frac{P(X_0)+P(X_1)+P(X_2)}{2+3+5} = \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X_0) = \frac{1}{5};\ P(X_1) = \frac{3}{10};\ P(X_2) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

De asemenea, din schema modelării tranzmiterii avem:

$$(2) \begin{cases} P(Y_0/X_0) = 70\% = \frac{7}{10} \\ P(Y_0|X_1) = 0 \\ P(Y_0/X_2) = 10\% = \frac{1}{10} \end{cases} \quad \begin{array}{l} P(Y_1/X_0) = 10\% = \frac{1}{10} \\ P(Y_1|X_1) = 80\% = \frac{4}{5} \\ P(Y_1/X_2) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} P(Y_2/X_0) = 20\% = \frac{1}{5} \\ P(Y_2|X_1) = 20\% = \frac{1}{5} \\ P(Y_2/X_2) = 90\% = \frac{9}{10} \end{array}$$

(i) $$P(Y_0) \overset{\text{Fpt}}{=} P(X_0)\cdot P(Y_0|X_0) + P(X_1)\cdot P(Y_0|X_1) + P(X_2)\cdot P(Y_0|X_2) =$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{7}{10} + \frac{3}{10}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} = \frac{7}{50} + \frac{1}{20} = \frac{19}{100} = 19\%.$$

(ii) $$P(Y_1) \overset{\text{Fpt}}{=} P(X_0)\cdot P(Y_1/X_0) + P(X_1) P(Y_1|X_1) + P(X_2) P(Y_1|X_2) =$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10} + \frac{3}{10}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{50} + \frac{12}{50} = \frac{13}{50} = 26\%$$

(iii) $$P(Y_2) \overset{\text{s.c.e}}{=} 1 - P(Y_0) - P(Y_1) = 1 - \frac{19}{100} - \frac{13}{50} = \frac{55}{100} = \frac{11}{20} = 55\%$$

OBS. Aplicând F.p.t $\Rightarrow$ $P(Y_2) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10} = \frac{1}{25} + \frac{3}{50} + \frac{9}{20} = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$

(iv) $$P(X_0/Y_1) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(X_0)P(Y_1|X_0)}{P(Y_1)} = \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{13}{50}} = \frac{1}{13} \simeq 0.0769 = 7{,}69\%.$$

(v) $$P(X_0 \cup X_1 / Y_2) \overset{X_0 \cap X_1 = \emptyset}{=} P(X_0|Y_2) + P(X_1/Y_2) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(X_0)\cdot P(Y_2|X_0)}{P(Y_2)} +$$
$$+ \frac{P(X_1)P(Y_2/X_1)}{P(Y_2)} = \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{11}{20}} = \frac{1}{10}\cdot\frac{20}{11} = \frac{2}{11} \simeq 0.1818 = 18{,}18\%$$

(vi) $$P_{corect} = P((X_0 \cap Y_0) \cup (X_1 \cap Y_1) \cup (X_2 \cap Y_2)) =$$
$$= P(X_0 \cap Y_0) + P(X_1 \cap Y_1) + P(X_2 \cap Y_2), \text{ deoarece}$$

$(X_0\cap Y_0)\cap(X_1\cap Y_1)\cap(X_2\cap Y_2)=(X_0\cap X_1\cap X_2)\cap(Y_0\cap Y_1\cap Y_2)=\emptyset\cap\emptyset=\emptyset.$

Din egalitatea $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$, rezultă:

$$P_{corect}=P(X_0)P(Y_0/X_0)+P(X_1)P(Y_1|X_1)+P(X_2)\cdot P(Y_2/X_2)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10}=\frac{7}{50}+\frac{6}{25}+\frac{9}{20}=\frac{83}{100}=$$

$$=83\%$$

(vii) $P_{eronat}=1-P_{corect}=\frac{17}{100}=17\%$.

Obs. $P_{eronat}=P((X_0\cap Y_1)\cup(X_0\cap Y_2)\cap(X_1\cap Y_0)\cap(X_1\cap Y_2)\cap(X_2\cap Y_0)\cap(X_2\cap Y_1))$

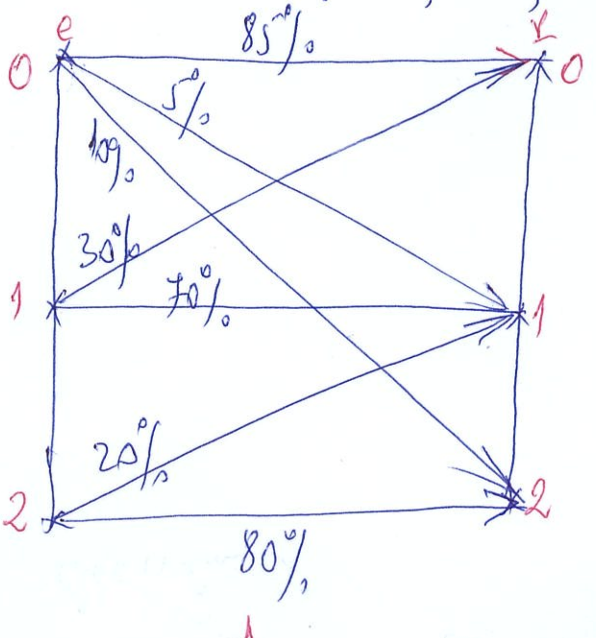
$=P(X_0\cap Y_1)+P(X_0\cap Y_2)+P(X_1\cap Y_0)+P(X_1\cap Y_2)+P(X_2\cap Y_0)+P(X_2\cap Y_1)$

ş.a.m.d.

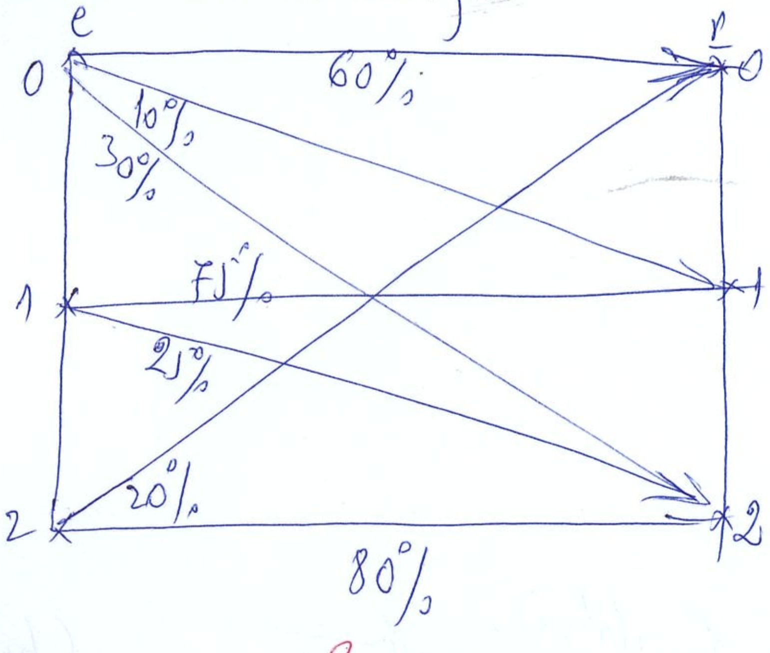
(10) Ex. 8 (Temă)

A. Similar cu Ex. 7; direct proporţional cu 3, 3, 4, respectiv. Schema de modelare a zgomotului dată mai jos

B. Similar cu Ex. 7; probabilităţile de emitere a semnalelor 0, 1, 2 sunt $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{7}$. Schema → dată mai jos



A



B