Lucian MATICIUC

Teoria Probabilităților

– Teorie și Aplicații –

Iași – 2022

Cuprins

Capitolul 1

Spații de probabilitate

1.1 Evenimente și operații cu evenimente

Printr-o **experiență aleatoare** $\mathscr{E}$ înțelegem acea experiență în care intervine întâmplarea. Rezultatele posibile ale unei experiențe aleatoare $\mathscr{E}$ se numesc probe sau cazuri posibile ale experienței și le vom nota cu ω.

Numim **eveniment aleator** (atașat unei experiențe) sau, mai simplu, **eveniment** orice situație care se poate realiza prin una sau mai multe probe și despre care putem spune cu certitudine că s-a produs sau nu.

Evenimentul elementar este un eveniment care se realizează printr-o singura probă a experienței. Evenimentul compus este acel eveniment care se realizează prin mai multe probe. Evenimentul sigur este acel eveniment care se realizează cu certitudine la fiecare efectuare a experienței, adică prin oricare dintre probe. Evenimentul imposibil este evenimentul care nu se realizează prin nici o probă a experienței. **Evenimentul complementar** (sau **contrar**) unui eveniment dat este evenimentul care se realizează atunci și numai atunci când nu se realizează evenimentul dat.

Evenimentele legate de o experiență $\mathscr{E}$ se notează cu litere cu majusculă.

Definiția 1.1 *Vom nota cu* Ω **mulțimea tuturor rezultatelor posibile** *în cadrul unei experienței* $\mathscr{E}$*. Un element generic al lui* Ω *se va nota cu* ω*; astfel,* $\{\omega\}$ *reprezintă un* **eveniment elementar** *asociat experienței* $\mathscr{E}$*.*

Un **eveniment** *va fi o colecție de elemente din* Ω*, prin urmare un eveniment este* *un element al mulțimii*[1] $\mathscr{P}(\Omega)$ *a părților lui* Ω.

Mulțimea tuturor *evenimentelor* asociate experienței $\mathscr{E}$ se notează cu $\mathscr{F}$, *prin urmare $\mathscr{F}$ va fi o submulțime a mulțimii părților $\mathscr{P}(\Omega)$ (dar $\mathscr{F}$ nu coincide neapărat cu întreaga mulțime a părților).*

Mulțimea Ω se numește și **evenimentul sigur**, $\varnothing$ este **evenimentul imposibil**, iar **evenimentul complementar** (sau **contrar**) lui A se va nota cu $\bar{A}$. Avem, evident,

$$\bar{\Omega} = \varnothing, \quad \bar{\varnothing} = \Omega, \quad \overline{\overline{A}} = A.$$

Exemplul 1.2 Fie $\mathscr{E}$ experiența aruncării simultane a două zaruri. Probele experienței sunt perechile

$$\begin{aligned} &(1,1), \ldots, (1,6), \\ &(2,1), \ldots, (2,6), \\ &\vdots \\ &(6,1), \ldots, (6,6). \end{aligned}$$

Proba (i,j) reprezintă apariția feței cu numărul i de puncte de la primul zar și a feței cu numărul j de puncte de la al doilea zar. Numărul tuturor probelor (al cazurilor posibile) este de $6 \cdot 6 = 36$.

Fie A evenimentul ca suma numărului de puncte de pe cele două fețe să fie 5. Atunci, A se realizează prin probele $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$. Acesta este un eveniment compus.

Fie B evenimentul ca suma numărului de puncte de pe cele două fețe să fie 13. Acesta este un eveniment imposibil.

Fie C evenimentul care constă în apariția probei $(6,6)$. Acesta este un eveniment elementar.

Fie D evenimentul care constă în apariția unei perechi (i,j), cu $i,j = \overline{1,6}$. Acesta este un eveniment sigur.

Evenimentul complementar $\bar{C}$ este evenimentul ce constă în apariția perechilor (i,j), cu $i,j = \overline{1,6}$ și $i+j < 12$. $\diamond$

Două evenimente A, B se numesc egale sau echivalente (și vom nota $A = B$) dacă ele se realizează prin aceleași probe.

Spunem că evenimentul A implică evenimentul B (și vom nota $A \subset B$) dacă realizarea evenimentului A implică realizarea evenimentului B. Deci

[1] **Mulțimea părților** $\mathscr{P}(\Omega)$ este dată de $\mathscr{P}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{A : A \subseteq \Omega\}$.

orice probă care realizează evenimentul A, realizează și evenimentul B. Are loc, evident, $A \subset \Omega$ și $\varnothing \subset A$, oricare ar fi evenimentul A.

Date două evenimente A și B numim reuniunea lor (notată $A \cup B$) evenimentul care se realizează atunci când se realizează cel puțin unul dintre evenimentele A și B.

Se numește intersecția evenimentelor A și B (notată $A \cap B$) evenimentul care se realizează atunci când se realizează simultan evenimentele A și B.

Vom numi diferența a două evenimente (notată $A \setminus B$) evenimentul dat de

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} A \cap \bar{B}.$$

Evenimentele A și B se numesc **compatibile** dacă se pot realiza simultan, adică dacă există probe care duc simultan atât la realizarea lui A cât și a lui B. În caz contrar evenimentele se numesc **incompatibile** sau **disjuncte** (i.e. ele nu se pot realiza simultan). Deci evenimentele A și B se numesc incompatibile sau disjuncte dacă $A \cap B = \varnothing$.

Propoziția 1.3 (Proprietăți ale operațiilor)

(i) *Dacă $A, B \in \mathscr{F}$ astfel încât $A \subset B$, atunci $A \cup B = B$ și $A \cap B = A$.*

(ii) *Pentru orice $A \in \mathscr{F}$,*

$$A \cup A = A, \qquad A \cup \varnothing = A, \qquad A \cup \bar{A} = \Omega, \qquad A \cup \Omega = \Omega, \qquad \Omega \cup \varnothing = \Omega,$$

$$A \cap A = A, \qquad A \cap \varnothing = \varnothing, \qquad A \cap \bar{A} = \varnothing, \qquad A \cap \Omega = A, \qquad \Omega \cap \varnothing = \varnothing.$$

(iii) *Dacă $A, B, C \in \mathscr{F}$ astfel încât $A \subset C$ și $B \subset C$, atunci $A \cup B \subset C$ și $A \cap B \subset C$.*

(iv) *Pentru orice $A, B \in \mathscr{F}$,*

$$A \cap B \subset A, \qquad A \cap B \subset B,$$

$$A \subset A \cup B, \qquad B \subset A \cup B.$$

(v) *Pentru orice $A, B, C \in \mathscr{F}$,*

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$

$$A \cap B = B \cap A, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(vi) *Pentru orice $A, B, C \in \mathscr{F}$ au loc următoarele proprietăți de distributivitate*[2]

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(vii) ***Legile lui De Morgan***[3]*: pentru orice $A, B \in \mathscr{F}$,*

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad \text{și} \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \tag{1.1}$$

Exemplul 1.4 Fie evenimentele $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$.

(a) Evenimentul ca nici unul dintre evenimentele $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ să nu aibă loc este dat de

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n .$$

Să observăm că evenimentul complementar acestuia este $\overline{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n}$ și reprezintă evenimentul ca cel puțin unul dintre evenimentele $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ să aibă loc.

(b) Deci evenimentul ca cel puțin unul dintre evenimentele $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ să aibă loc este dat de

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n .$$

$\diamond$

Exemplul 1.5 Fie evenimentele A, B, C. Vom exprima următoarele evenimente utilizând evenimentele A, B, C și operații între ele:

(a) Doar A are loc:

$$A \cap \bar{B} \cap \bar{C};$$

(b) Nici un eveniment nu are loc:

$$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C};$$

(c) Exact un singur eveniment are loc:

$$\left(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}\right) \cup \left(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}\right) \cup \left(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C\right);$$

[2] Proprietăți de distributivitate au loc și pentru o reuniune (respectiv intersecție) numărabilă de evenimente (vezi Nota 51).

[3] Legile lui De Morgan au loc și pentru o reuniune (respectiv intersecție) numărabilă de evenimente.

(d) Doar două evenimente au loc:

$$\left(A\cap B\cap \bar{C}\right)\cup\left(A\cap \bar{B}\cap C\right)\cup\left(\bar{A}\cap B\cap C\right);$$

(e) Cel puțin două evenimente au loc:

$$\left[\left(A\cap B\cap \bar{C}\right)\cup\left(A\cap \bar{B}\cap C\right)\cup\left(\bar{A}\cap B\cap C\right)\right]\cup\left(A\cap B\cap C\right);$$

(f) Cel mult un eveniment are loc:

$$\left(\bar{A}\cap \bar{B}\cap \bar{C}\right)\cup\left[\left(A\cap \bar{B}\cap \bar{C}\right)\cup\left(\bar{A}\cap B\cap \bar{C}\right)\cup\left(\bar{A}\cap \bar{B}\cap C\right)\right]$$

(g) Cel puțin un eveniment are loc:

$$A\cup B\cup C=\overline{\bar{A}\cap \bar{B}\cap \bar{C}}.$$

$\diamond$

1.2 Spațiu finit de probabilitate

Este natural ca primele probleme aplicative să fie legate de experiențe care au un număr finit de cazuri posibile; de asemenea, este natural să presupunem că toate cazurile posibile au aceeași șansă de apariție.

Fie $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$ mulțimea tuturor evenimentelor elementare corespunzătoare unei experiențe aleatoare $\mathscr{E}$.

Definiția 1.6 *Spunem că perechea* $(\Omega,\mathscr{F})$ *este un* **spațiu finit de evenimente** *(sau* **câmp finit de evenimente***) dacă* $\mathscr{F}$ *este o familie nevidă de părți ale lui* Ω*, i.e.* $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{P}(\Omega)$*, și sunt satisfăcute condițiile:*

$$\begin{array}{rl}(i) & \Omega\in\mathscr{F},\\ (ii) & \text{Dacă } A\in\mathscr{F},\quad \text{atunci } \bar{A}\in\mathscr{F},\\ (iii) & \text{Dacă } A,B\in\mathscr{F},\quad \text{atunci } A\cup B\in\mathscr{F}.\end{array}$$

Elemente lui $\mathscr{F}$ *se numesc evenimente aleatoare sau* **evenimente** *(deci* $\mathscr{F}$ *este mulțimea tuturor evenimentelor asociate experienței aleatoare).*

Remarca 1.7 În multe situații (probleme elementare etc.) vom lua drept mulțimea $\mathscr{F}$ a evenimentelor chiar mulțimea $\mathscr{P}(\Omega)$ a tuturor părților lui Ω.

Evident, dacă $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$, atunci $(\Omega, \mathscr{F})$ devine un spațiu finit de evenimente. ◇

Remarca 1.8 Având în vedere definiția precedentă, deducem că mulțimea evenimentelor $\mathscr{F}$ este închisă la operații de reuniune, intersecție, complementaritate și diferență, adică $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, $A \setminus B \in \mathscr{F}$, pentru orice $A, B \in \mathscr{F}$. Acest lucru este normal, având în vederă că noi vom lucra cu evenimente (adică elemente din $\mathscr{F}$) și vom dori ca operând cu aceste evenimente să rămânem în continuare în mulțimea de evenimente $\mathscr{F}$. ◇

Exemplul 1.9 Dacă n este numărul de evenimente elementare, atunci familia $\mathscr{P}(\Omega)$ conține 2^n evenimente.

Într-adevăr, dacă $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, atunci $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ este mulțimea formată cu toate submulțimile care se pot forma cu maxim n elemente (considerăm și mulțimea vidă) și este dată de

$$\begin{aligned}
&\varnothing, \\
&\{\omega_i\}, \quad 1 \le i \le n: \quad \text{în număr de } C_n^1, \\
&\{\omega_i, \omega_j\}, \quad 1 \le i < j \le n: \quad \text{în număr de } C_n^2, \\
&\{\omega_i, \omega_j, \omega_k\}, \quad 1 \le i < j < k \le n: \quad \text{în număr de } C_n^3, \\
&\vdots \\
&\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\} = \Omega: \quad \text{în număr de } C_n^n.
\end{aligned}$$

Deci numărul total de submulțimi ce se pot forma cu maxim n elemente este dat de[4] $1 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$. ◇

Propoziția 1.10 *Au loc următoarele proprietăți.*

(j) *Evident,* $\varnothing = \bar{\Omega} \in \mathscr{F}$.

(jj) *Dacă* $A_i \in \mathscr{F}$, *pentru* $i = \overline{1, r}$, *atunci*

$$\bigcup_{i=1}^{r} A_i \in \mathscr{F} \quad \text{și} \quad \bigcap_{i=1}^{r} A_i \in \mathscr{F}.$$

[4] Pentru o demonstrație a acestei identități, folosind analiza combinatorie, vezi Exercițiul 1.10.15.

Definiția 1.11 *Fie* $A_i \in \mathscr{F}$, *pentru* $i = \overline{1,r}$. *Spunem că* $(A_i)_{i=\overline{1,r}}$ *este un* **sistem complet de evenimente** *(sau o* **partiție** *sau o* **descompunere** *a lui* Ω*) dacă:*

$$\begin{aligned}
&(i) \quad A_i \neq \varnothing, \quad \text{pentru } i = \overline{1,r}, \\
&(ii) \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \text{pentru } i,j = \overline{1,r},\ i \neq j, \\
&(iii) \quad \bigcup_{i=1}^{r} A_i = \Omega.
\end{aligned}$$

Exemplul 1.12 (i) Dacă $A \in \mathscr{F}$, atunci $\{A, \bar{A}\}$ este o descompunere a lui Ω în două evenimente disjuncte.

(ii) Dacă $A, B \in \mathscr{F}$ astfel încât $A \cap B = \varnothing$, atunci $\{A, B, \overline{A \cup B}\}$ este o descompunere a lui Ω în trei evenimente disjuncte.

(iii) Dacă $\Omega = \{1,2,3\}$, atunci următoarele mulțimi reprezintă posibile descompuneri ale lui Ω :

$$\Big\{\{1\},\{2\},\{3\}\Big\}, \quad \Big\{\{1,2\},\{3\}\Big\}, \quad \Big\{\{1,3\},\{2\}\Big\}, \quad \Big\{\{2,3\},\{1\}\Big\}.$$

$\diamond$

Definiția 1.13 *Fie* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ *mulțimea tuturor evenimentelor elementare și* $(\Omega, \mathscr{F})$ *spațiul finit asociat de evenimente. Fie* $A \in \mathscr{F}$ *un eveniment. Numărul* $\mathbb{P}(A) = \frac{m}{n}$, *unde* m *reprezintă numărul probelor care duc la realizarea evenimentului* A *și* n *reprezintă numărul tuturor probelor posibile asociate experienței, se numește* **probabilitatea** *evenimentului* A, *i.e.*[5]

$$\text{(1.2)} \qquad \mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R} \qquad \text{și} \qquad \mathbb{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad \text{pentru orice } A \in \mathscr{F}.$$

Tripletul $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *se va numi* **spațiu finit de probabilitate** *(sau* **câmp finit de probabilitate***).*

Propoziția 1.14 *Au loc următoarele proprietăți*[6], *pentru orice* $A, B \in \mathscr{F}$ *și* $A_i \in \mathscr{F}$,

---

[5] Cardinalul unei mulțimi A se va nota cu card (A) sau cu $|A|$.

[6] Vezi și Propoziția 1.39.

pentru $i = \overline{1,n}$.

$$
\begin{aligned}
&(i) && 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, \\
&(ii) && \mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(\varnothing) = 0, \\
&(iii) && \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B), \quad \textit{dacă } A \cap B = \varnothing, \\
&(iv) && \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B), \\
&(v) && \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A), \\
&(vi) && \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i), \quad \textit{unde } A_i \cap A_j = \varnothing, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
&(vii) && \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B), \quad \textit{dacă } B \subseteq A.
\end{aligned}
$$

Remarca 1.15 Evident, proprietățile de mai sus nu sunt independente ci unele dintre ele se pot obține din celelalte: de exemplu, (iv) este o consecință[7] a lui (iii), iar (v) este o consecință directă a lui (ii) și (iii). $\diamond$

Remarca 1.16 Din definiția spațiului finit de probabilitate observăm că nu trebuie să avem neapărat ca orice eveniment elementar să fie din $\mathscr{F}$, adică nu trebuie să avem neapărat că $\{\omega\} \in \mathscr{F}$, pentru orice $\omega \in \Omega$.

De exemplu, să presupunem că într-o urnă avem trei bile: una albă și două negre identice. Se extrage o bilă din urnă și ne interesează culoarea ei. Deci $\Omega = \{A1, N1, N2\}$, iar mulțimea tuturor evenimentelor asociate experienței este dată de $\mathscr{F} = \{\varnothing, \Omega, \{A1\}, \{N1, N2\}\} \subsetneq \mathscr{P}(\Omega)$.

Evident, $(\Omega, \mathscr{F})$ este un spațiu finit de evenimente, dar evenimentele elementare $\{N1\}, \{N2\} \notin \mathscr{F}$. $\diamond$

Definiția 1.17 *Fie* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ *mulțimea tuturor evenimentelor elementare,* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ *un spațiu finit asociat de evenimente și probabilitatea* $\mathbb{P}$ *dată de (1.2), i.e.*

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}, \quad \textit{pentru orice } \omega \in \Omega.$$

În acest caz spunem că toate evenimentele elementare sunt **echiprobabile**, *i.e. evenimentele elementare au aceeași șansă de a se realiza.*

[7] Pentru demonstrație vezi pagina 35.

Atunci, $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *este un spațiu finit de probabilitate și este numit* **spațiu de probabilitate Laplace** *(sau* **câmp de probabilitate Laplace***).*

Noțiunea de probabilitate se poate introduce și pe cale axiomatică (vezi și Definiția 1.31, din cazul unui spațiu oarecare de evenimente).

Definiția 1.18 (Kolmogorov) *Se numește* **probabilitate** *pe un spațiu finit de evenimente* $(\Omega, \mathscr{F})$ *o funcție*

$$\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$$

care satisface condițiile:

$$(i) \quad \mathbb{P}(A) \geq 0, \quad \textit{oricare ar fi } A \in \mathscr{F},$$

$$(ii) \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B), \quad \textit{oricare ar fi } A, B \in \mathscr{F},\ A \cap B = \varnothing,$$

$$(iii) \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Remarca 1.19 Din definiția anterioară se vede că, de fapt, aplicația $\mathbb{P}$ ia valori în $[0, 1]$. ◇

Remarca 1.20 Se poate arăta că dacă aplicația $\mathbb{P}$ este definită de (1.2), atunci $\mathbb{P}$ verifică proprietățile date de Definiția 1.18. ◇

Să discutăm acum proprietățile probabilității unor evenimente în termeni de aruncare a unei monede.

Exemplul 1.21 Presupunem ca aruncăm o monedă de trei ori. În acest caz putem reprezenta rezultatele sub forma unei structuri de tip arbore. O cale în arbore corespunde unui posibil rezultat al experimentului. Deci dacă aruncăm o monedă de trei ori vom obține $2^3 = 8$ posibile combinații adică evenimentele elementare $A_1, A_2, \ldots, A_8$ și deci $\Omega = \{A_1, \ldots, A_8\}$. Vom presupune că fiecare rezultat elementar este echiprobabil, adică fiecare are probabilitatea de $1/8$.

Fie E evenimentul de a apărea cel puțin o dată capul monedei. Atunci, $\bar{E}$ înseamnă că nu apare capul monedei niciodată și deci $\bar{E} = \{A_8\}$, unde $A_8 =$ PPP. Deci

$$\mathbb{P}(\bar{E}) = \mathbb{P}(\{\text{PPP}\}) = 1/8$$

și, prin urmare,

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(\bar{E}) = 7/8.$$

Remarcăm că deseori este mult mai ușor să calculăm probabilitatea ca un eveniment să nu se producă decât ca acesta să se producă.

Să notăm cu A evenimentul ca primul rezultat să fie capul monedei și B evenimentul ca al doilea rezultat să fie pajura monedei. Din diagramă se vede că $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 4/8$. De asemenea $A \cap B = \{A_3, A_4\}$ și, prin urmare, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$. Obținem deci

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 1/2 + 1/2 - 1/4 = 3/4.$$

Evident, se poate vedea din diagramă că

$$A \cup B = \{\mathrm{CCC}, \mathrm{CCP}, \mathrm{CPC}, \mathrm{CPP}, \mathrm{PPC}, \mathrm{PPP}\}$$

deci prin simpla enumerare se poate vedea că $\mathbb{P}(A \cup B) = 6/8$. $\diamond$

Să considerăm acum experimentul aruncării a două zaruri.

Exemplul 1.22 Vom lua drept spațiul Ω mulțimea tuturor perechilor ordonate (i, j) cu $i, j = \overline{1, 6}$, adică

$$\Omega = \left\{(i, j) : i, j = \overline{1, 6}\right\}.$$

Având în vedere că sunt șase posibilități de alegere a lui i și fiecărei alegeri a lui i îi corespund șase alegeri pentru j, deducem că sunt 36 de posibile rezultate (despre care vom presupune că sunt echiprobabile, deci $\mathbb{P}(\{(i, j)\}) = 1/36$, pentru $i, j = \overline{1, 6}$).

Care este probabilitatea să se obțină suma șapte la aruncarea celor două zaruri? sau suma unsprezece?

Primul eveniment, notat cu A, este mulțimea

$$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\},$$

iar al doilea este $B = \{(5, 6), (6, 5)\}$. Deci $\mathbb{P}(A)$ este probabilitatea reuniunii celor șase evenimente elementare posibile care compun A adică este suma $\mathbb{P}((1, 6)) + \mathbb{P}((2, 5)) + \ldots = 6 \cdot 1/36 = 1/6$.

De asemenea, $\mathbb{P}(B) = 1/36 + 1/36 = 1/18$.

Dacă ne interesează probabilitatea obținerii a unei duble de unu sau de șase, atunci $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\{(1, 1)\} \cup \{(6, 6)\}) = 1/18$, iar $\mathbb{P}\left(\bar{C}\right) = 1 - 1/18 = 17/18$. $\diamond$

1.3 Spații de probabilitate

Fie Ω o mulțime abstractă (numită și mulțimea **evenimentelor elementare**). Un eveniment aleator (sau eveniment) va fi o submulțime a lui Ω, deci vom lua ca mulțime a evenimentelor o anumită familie de submulțimi a lui Ω, notată cu $\mathscr{F}$. În *Teoria probabilităților* măsurăm șansele de apariție a evenimentelor; deci trebuie să definim acele mulțimi (sau evenimente) care pot fi măsurate. În acest sens, folosim conceptul de $\sigma-$algebră peste Ω pentru a obține o colecție de submulțimi ale lui Ω pe care să definim măsura de probabilitate.

Prin urmare, vom cere ca familia $\mathscr{F}$ să fie o $\sigma-$algebră peste Ω. Proprietățile cerute sunt cele văzute deja în cazul spațiului finit de probabilitate.

Definiția 1.23 *Fie Ω o mulțime nevidă. Familia nevidă $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, de părți ale lui Ω, se numește* **algebră** *peste Ω dacă:*

$$(i) \quad \Omega \in \mathscr{F},$$

$$(ii) \quad \textit{dacă } A \in \mathscr{F}, \quad \textit{atunci } \bar{A} \in \mathscr{F},$$

$$(iii) \quad \textit{dacă } A, B \in \mathscr{F}, \quad \textit{atunci } A \cup B \in \mathscr{F}.$$

Elemente lui $\mathscr{F}$ se numesc evenimente aleatoare sau ***evenimente****.*

Remarca 1.24 Fie $\mathscr{F}$ să fie o algebră peste Ω. Din definiția anterioară se obține, folosind și legile lui De Morgan,

$$\begin{aligned} (iv) &\quad \varnothing \in \mathscr{F}, \\ (v) &\quad \text{dacă } A, B \in \mathscr{F}, \quad \text{atunci } A \cap B \in \mathscr{F}, \\ (vi) &\quad \text{dacă } A, B \in \mathscr{F}, \quad \text{atunci } A \setminus B \in \mathscr{F}. \end{aligned}$$

Într-adevăr, $\varnothing = \bar{\Omega} \in \mathscr{F}$.
Deoarece $\bar{A}, \bar{B} \in \mathscr{F}$, avem și $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \in \mathscr{F}$.
Ultima proprietate se obține doarece $A \setminus B = A \cap \bar{B} \in \mathscr{F}$. ◇

Remarca 1.25 Evident, proprietățile (iii) și (v) sunt adevărate și pentru un număr finit de evenimente din $\mathscr{F}$, i.e.

$$(iii)' \quad \text{dacă } A_i \in \mathscr{F}, \text{ pentru } i = \overline{1, n}, \quad \text{atunci } \bigcup\nolimits_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F},$$

$$(v)' \quad \text{dacă } A_i \in \mathscr{F}, \text{ pentru } i = \overline{1, n}, \quad \text{atunci } \bigcap\nolimits_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}.$$

$\diamond$

Remarca 1.26 Putem spune că o algebră peste Ω este o familie nevidă de părți ale lui Ω închisă la reuniuni finite, la intersecții finite și la trecerea la complementară. $\diamond$

Definiția 1.27 *Fie Ω o mulțime nevidă. Spunem că $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ este o $\sigma-$**algebră** peste Ω dacă este o algebră peste Ω și dacă are loc (de fapt, dacă (iii) este înlocuită cu)*

$$(iii)'' \quad \textit{dacă } A_i \in \mathscr{F}, \textit{ pentru } i \in \mathbb{N}^*, \quad \textit{atunci } \bigcup\nolimits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}.$$

Exemplul 1.28 Fie Ω o mulțime nevidă. Atunci, $\mathscr{F} = \{\varnothing, \Omega\}$ este cea mai „săracă" $\sigma-$algebră peste Ω (este cea mai mică $\sigma-$algebră peste Ω), iar $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ este cea mai „bogată" $\sigma-$algebră peste Ω (este cea mai mare $\sigma-$algebră peste Ω). $\diamond$

Remarca 1.29 Dacă $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ este o $\sigma-$algebră, atunci proprietatea $(v)'$ este adevărată și pentru un număr infinit, dar numărabil de evenimente, i.e.

$$(v)'' \quad \text{dacă } A_i \in \mathscr{F},\ i \in \mathbb{N}^*, \quad \text{atunci } \bigcap\nolimits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F},$$

$\diamond$

Remarca 1.30 Se poate arăta că dacă $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ sunt două $\sigma-$algebre, atunci:

- intersecția $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$ este tot o $\sigma-$algebră;
- reuniunea $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ nu este, în mod necesar, o $\sigma-$algebră; cea mai mică $\sigma-$algebră le conține pe ambele va fi $\sigma-$algebra generată de $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ (vezi Definiția 1.47), notată cu $\sigma(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2)$ sau cu $\mathscr{F}_1 \vee \mathscr{F}_2$.

Mai mult, se poate arăta că intersecția unui număr numărabil de $\sigma-$algebre este tot o $\sigma-$algebră. $\diamond$

Acum definim probabilitatea ca fiind o funcție definită pe $\sigma-$algebra $\mathscr{F}$ cu valori în $\mathbb{R}$ ce satisfac anumite proprietăți.

Putem defini probabilitatea $\mathbb{P}$ cu ajutorul a trei axiome, definiție dată de către Kolmogorov (vezi și Definiția 1.18 din cazul unui spațiu finit de evenimente).

Definiția 1.31 *Fie $\mathscr{F}$ o $\sigma-$algebră peste Ω. Se numește* **probabilitate** *o aplicație*

$$\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$$

astfel încât

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad \mathbb{P}(A) \geq 0, \quad \textit{oricare ar fi } A \in \mathscr{F};\\
&(ii) \quad \textbf{\textit{numărabila aditivitate:}}\\
&\qquad \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i), \quad \textit{oricare ar fi } (A_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \subset \mathscr{F},\\
&\qquad\qquad \textit{evenimente incompatibile două câte două;}\\
&(iii) \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1.
\end{aligned}
$$

Remarca 1.32 Având în vedere că am considerat, prin definiție, că $\mathbb{P}$ ia valori reale, atunci se obține ușor și proprietatea

$$(iv) \quad \mathbb{P}(\varnothing) = 0.$$

Într-adevăr, din (ii), luând $A_i = \varnothing$, pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$, obținem $\mathbb{P}(\varnothing) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) \cdot \infty$. Dacă am presupune că $\mathbb{P}(\varnothing) \neq 0$, atunci, deoarece $\mathbb{P}(\varnothing)$ nu poate fi decât finit, avem că $\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) \cdot \infty = \infty$ ceea ce constituie o contradicție. Deci probabilitatea evenimentului imposibil $\varnothing$ trebuie să fie nulă. $\diamond$

Remarca 1.33 Se poate arăta că, în cazul unui spațiu finit de evenimente, dacă aplicația $\mathbb{P}$ este definită de (1.2), atunci $\mathbb{P}$ verifică proprietățile date de Definiția 1.31. $\diamond$

Remarca 1.34 Putem defini probabilitatea $\mathbb{P}$ și ca pe o măsură. Se numește ***probabilitate*** (sau ***măsură***[8] ***de probabilitate***) o aplicație

$$\mathbb{P} : \mathscr{F} \to [0, \infty]$$

astfel încât

$$(j) \quad \mathbb{P}(\varnothing) = 0;$$

[8] Dacă $\mathscr{F}$ este o $\sigma-$algebră peste o mulțime abstractă Ω și dacă o aplicație $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ satisface doar primele două condiții, atunci spunem că μ este **masură**. Măsura devine de probabilitate dacă măsura spațiului întreg este 1.

$$(jj) \quad \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i), \quad \text{oricare ar fi } (A_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \subset \mathscr{F},$$

evenimente incompatibile două câte două;

$$(jjj) \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Similar ca în Remarca 1.32, se poate renunța la condiția (j) deoarece aceasta va deveni o proprietate (esențial fiind faptul că $\mathbb{P}(\Omega) = 1$). Într-adevăr, din (jj), luând $A_1 = \Omega$ și $A_i = \varnothing$, pentru orice $i \geq 2$, obținem $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} \mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\varnothing) \cdot \infty$. Dar $\mathbb{P}(\Omega) < \infty$ conform (jjj), deci obținem că $\mathbb{P}(\varnothing) \cdot \infty = 0$, adică $\mathbb{P}(\varnothing)$ nu poate fi decât nul. $\diamond$

Remarca 1.35 Avem că probabilitatea evenimentului imposibil $\varnothing$ este nulă. Dar să menționăm că, în cazul unui spațiu de probabilitate infinit, nu orice eveniment cu probabilitatea nulă (sau eveniment neglijabil[9]) este obligatoriu evenimentul imposibil. În acest sens, vezi, de exemplu, relația (3.5) care spune că în cazul oricărei variabile aleatoare $X : \Omega \to \mathbb{R}$ de tip continuu evenimentul $\{X = a\}$ este neglijabil, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, dar, pe de altă parte, dacă $a \in X(\Omega)$, atunci $\{X = a\}$ nu este un eveniment imposibil. $\diamond$

Definiția 1.36 *Dacă $\mathscr{F}$ este o $\sigma-$algebră peste Ω, atunci perechea $(\Omega, \mathscr{F})$ se numește* **spațiu măsurabil**.

Definiția 1.37 *Fie $(\Omega, \mathscr{F})$ un spațiu măsurabil și probabilitatea*

$$\mathbb{P} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}.$$

Atunci, tripletul $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ se numește **spațiu de probabilitate** *(sau* **câmp de probabilitate***).*

Remarca 1.38 Din definiția spațiului de probabilitate observăm că nu trebuie să avem, în mod necesar, ca orice eveniment elementar să fie din $\mathscr{F}$, adică nu trebuie să avem, în mod necesar, că $\{\omega\} \in \mathscr{F}$, pentru orice $\omega \in \Omega$. $\diamond$

[9] Spunem că mulțimea $A \subset \Omega$ este **nulă** sau $\mathbb{P}-$**nulă** sau **neglijabilă** dacă există $N \in \mathscr{F}$ cu $A \subseteq N$ astfel încât $\mathbb{P}(N) = 0$ (vezi Nota 58, Nota 152 și Nota 154). Prin urmare, o mulțime neglijabilă A nu este neapărat un eveniment, i.e. nu este obligatoriu ca $A \in \mathscr{F}$.

Dacă $\bar{A}$ este o mulțime neglijabilă, atunci spunem că mulțimea A are loc $\mathbb{P}-$**aproape sigur** (notat $\mathbb{P}-$**a.s.**).

Evident, evenimentul $A \in \mathscr{F}$ este **nul** sau $\mathbb{P}-$**nul** sau **neglijabil** dacă și numai dacă $\mathbb{P}(A) = 0$. Dacă $\bar{A}$ este eveniment neglijabil (i.e. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0$ sau, echivalent, $\mathbb{P}(A) = 1$), atunci spunem că evenimentul A se produce $\mathbb{P}-$**aproape sigur** (notat $\mathbb{P}-$**a.s.**).

Propoziția 1.39 *Fie* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *un spațiu de probabilitate. Au loc următoarele proprietăți:*

(v) ***finita aditivitate:***

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right), \quad \textit{oricare ar fi } A_i \in \mathscr{F},\ \textit{cu } i = \overline{1,n},$$

evenimente incompatibile două câte două;

(vi) ***probabilitatea evenimentului contrar:***

$\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A\right)$, *oricare ar fi* $A \in \mathscr{F}$;

(vii) $\mathbb{P}\left(B \setminus A\right) = \mathbb{P}\left(B\right) - \mathbb{P}\left(A\right)$, *oricare ar fi* $A, B \in \mathscr{F}$ *cu* $A \subseteq B$;

$(viii)$ $\mathbb{P}\left(A\right) \leq \mathbb{P}\left(B\right)$, *oricare ar fi* $A, B \in \mathscr{F}$ *cu* $A \subseteq B$;

(ix) $0 \leq \mathbb{P}\left(A\right) \leq 1$, *oricare ar fi* $A \in \mathscr{F}$, *adică, de fapt, aplicația* $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to [0,1]$;

(x) ***finita subaditivitate:***

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right), \quad \textit{oricare ar fi } A_i \in \mathscr{F},\ \textit{cu } i = \overline{1,n}.$$

Are loc și formula de calcul a probabilității unei reuniuni de două evenimente:

$$(xi) \quad \mathbb{P}\left(A \cup B\right) = \mathbb{P}\left(A\right) + \mathbb{P}\left(B\right) - \mathbb{P}\left(A \cap B\right), \ \textit{oricare ar fi } A, B \in \mathscr{F},$$

deci obținem și formula de calcul a probabilității unei intersecții de două evenimente:

$$(xii) \quad \mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \mathbb{P}\left(A\right) + \mathbb{P}\left(B\right) - \mathbb{P}\left(A \cup B\right), \ \textit{oricare ar fi } A, B \in \mathscr{F}.$$

Se obține formula de calcul a probabilității unei reuniuni de trei evenimente:

$$\begin{aligned} (xi)' \quad \mathbb{P}\left(A \cup B \cup C\right) &= \mathbb{P}\left(A\right) + \mathbb{P}\left(B\right) + \mathbb{P}\left(C\right) \\ &\quad -\mathbb{P}\left(A \cap B\right) - \mathbb{P}\left(A \cap C\right) - \mathbb{P}\left(B \cap C\right) \\ &\quad +\mathbb{P}\left(A \cap B \cap C\right), \quad \textit{oricare ar fi } A, B, C \in \mathscr{F} \end{aligned}$$

și apoi formula de calcul a probabilității unei intersecții de trei evenimente:

$$\begin{aligned} (xii)' \quad \mathbb{P}\left(A \cap B \cap C\right) &= \mathbb{P}\left(A\right) + \mathbb{P}\left(B\right) + \mathbb{P}\left(C\right) \\ &\quad -\mathbb{P}\left(A \cup B\right) - \mathbb{P}\left(A \cup C\right) - \mathbb{P}\left(B \cup C\right) \\ &\quad +\mathbb{P}\left(A \cup B \cup C\right), \quad \textit{oricare ar fi } A, B, C \in \mathscr{F}. \end{aligned}$$

Demonstrație. (v) Se ia $A_m = \varnothing$, pentru orice $m > n$ și se folosește numărabila aditivitate dată de (ii) precum și faptul că evenimentul imposibil are probabilitatea nulă.

(vi) Deoarece $\Omega = A \cup \bar{A}$, deducem, folosind (v), că $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\bar{A}\right)$.

(vii) Deoarece $A \subseteq B$ putem scrie că $B = A \cup (B \setminus A)$ și astfel, folosind (v), deducem că $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.

$(viii)$ Rezultă imediat din (vii).

(ix) Rezultă imediat din $(viii)$ și din condiția (iii).

(x) Să definim

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \quad B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right), \quad \text{pentru orice } n \geq 2.$$

Atunci, $(B_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt evenimente disjuncte două câte două astfel încât $B_i \subseteq A_i$, iar $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

Folosind (v) și $(viii)$ obținem

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

(xi) Vezi relația (1.14) și demonstrația de la pagina 35.

$(xi)'$ Se obține aplicând (xi) de trei ori.

(xii) Se obține direct din (xi).

$(xii)'$ Se obține din $(xi)'$ și (xii). ■

Remarca 1.40 Formulele $(xi)'$ și $(xii)'$ se pot generaliza la n evenimente. Astfel, se poate demonstra prin inducție că, dacă $A_i \in \mathscr{F}$, cu $i = \overline{1,n}$, atunci au loc următoarele formula de calcul a probabilității unei reuniuni și respectiv a unei intersecții de evenimente, numite **formulele lui Poincaré** sau **formulele de incluziune-excluziune**:

$$(xi)'' \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right)$$

sau, scris desfășurat,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2})$$

$$+\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}\mathbb{P}\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\right)$$
$$-\ldots+(-1)^{n-1}\,\mathbb{P}\left(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\right)$$

și

$$(xii)''\quad \mathbb{P}\Big(\bigcap_{1\le i\le n}A_i\Big)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\mathbb{P}\left(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k}\right)$$

sau, scris desfășurat,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{1\le i\le n}A_i\Big)&=\sum_{1\le i_1\le n}\mathbb{P}\left(A_{i_1}\right)-\sum_{1\le i_1<i_2\le n}\mathbb{P}\left(A_{i_1}\cup A_{i_2}\right)\\&\quad+\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}\mathbb{P}\left(A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup A_{i_3}\right)\\&\quad-\ldots+(-1)^{n-1}\,\mathbb{P}\left(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\right).\end{aligned}$$

Atunci, când lucrăm pe un spațiu de probabilitate finit, demonstrarea formulelor de mai sus se bazează, de fapt, pe următoarea versiune a formulei de incluziune-excluziune (sau **principiu de incluziune-excluziune**)

$$\begin{aligned}\Big|\bigcup_{1\le i\le n}A_i\Big|&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\left|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right|\\&=\sum_{1\le i_1\le n}\left|A_{i_1}\right|-\sum_{1\le i_1<i_2\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right|\\&\quad+\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\right|\\&\quad-\ldots+(-1)^{n-1}\left|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\right|,\end{aligned}\tag{1.3}$$

unde $|A|=\mathrm{card}\,(A)$, pentru $A\in\mathscr{F}$.

Similar, avem

$$\begin{aligned}\Big|\bigcap_{1\le i\le n}A_i\Big|&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\left|A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k}\right|\\&=\sum_{1\le i_1\le n}\left|A_{i_1}\right|-\sum_{1\le i_1<i_2\le n}\left|A_{i_1}\cup A_{i_2}\right|\\&\quad+\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}\left|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup A_{i_3}\right|\\&\quad-\ldots+(-1)^{n-1}\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\right|.\end{aligned}$$

$\diamond$

Definiția 1.41 *Fie* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un șir de evenimente din* $\mathscr{F}$. *Spunem că are loc convergența* $A_n \searrow A$, *pentru* $n \to \infty$, *dacă*

$$A_{n+1} \subset A_n, \quad \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N}^* \quad \textit{și}^{10} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

Spunem că are loc convergența $A_n \nearrow A$, *pentru* $n \to \infty$, *dacă*

$$A_n \subset A_{n+1}, \quad \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N}^* \quad \textit{și}^{11} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

În ambele cazuri putem scrie $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Propoziția 1.42 *Fie* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un șir de evenimente din* $\mathscr{F}$. *Atunci, are loc* **proprietatea de continuitate (secvențială) a măsurii** $\mathbb{P}$ **în raport cu șiruri monotone de evenimente**, *i.e.*

$$\begin{aligned}
&(xiii) \quad \textit{Dacă } A_n \nearrow A, \quad \textit{atunci } \mathbb{P}(A_n) \nearrow \mathbb{P}(A), \quad \textit{pentru } n \to \infty;\\
&(xiv) \quad \textit{Dacă } A_n \searrow A, \quad \textit{atunci } \mathbb{P}(A_n) \searrow \mathbb{P}(A), \quad \textit{pentru } n \to \infty;\\
&(xiii)' \quad \textit{Dacă } A_n \nearrow \Omega, \quad \textit{atunci } \mathbb{P}(A_n) \nearrow 1, \quad \textit{pentru } n \to \infty;\\
&(xiv)' \quad \textit{Dacă } A_n \searrow \varnothing, \quad \textit{atunci } \mathbb{P}(A_n) \searrow 0, \quad \textit{pentru } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Demonstrație. $(xiii)$ Fie $A_n \nearrow A$, pentru $n \to \infty$. Să definim

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus A_{n-1}, \quad \text{pentru orice } n \geq 2.$$

Atunci, $(B_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt evenimente disjuncte două câte două, iar

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_n \quad \text{și} \quad \bigcup_{i\geq 1} B_i = \bigcup_{i\geq 1} A_i = A.$$

Folosind (ii) din Definiția 1.31 precum și (v) obținem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1} A_i\Big)\\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1} B_i\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i)
\end{aligned}$$

[10] Evident, in condițiile date, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \inf_{n\geq 1} A_n$.

[11] Evident, in condițiile date, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sup_{n\geq 1} A_n$.

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

iar șirul $(\mathbb{P}(A_n))_n$ este șir nedescrescător.

(xiv) Dacă $A_n \searrow A$, atunci $\bar{A}_n \nearrow \bar{A}$, deci $\mathbb{P}(\bar{A}_n) \nearrow \mathbb{P}(\bar{A})$ sau, echivalent, conform (vi), $\mathbb{P}(A_n) \searrow \mathbb{P}(A)$, pentru $n \to \infty$. ∎

Remarca 1.43 Dacă $\mathbb{P}$ este o măsură de probabilitate doar finit aditivă (adică (ii) din Definiția 1.31 este verificată doar pentru o reuniune finită; vezi punctul (v) al Propoziției 1.39), atunci oricare dintre afirmațiile $(xiii)$, (xiv), $(xiii)'$ sau $(xiv)'$ asigură[12] faptul că $\mathbb{P}$ devine o probabilitate (deci numărabil aditivă).

Prin urmare, pentru o măsură de probabilitate finit aditivă (i.e. care verifică Definiția 1.31 cu (ii) înlocuită cu (v)) proprietatea (ii) de numărabilă aditivitate este echivalentă cu oricare dintre afirmațiile $(xiii)$, (xiv), $(xiii)'$ sau $(xiv)'$.

Într-adevăr, (ii) din Definiția 1.31 implică afirmația $(xiii)$, conform demonstrației precedente.

Apoi, $(xiii)$ este echivalentă cu afirmația (xiv), conform demonstrației precedente.

Evident, $(xiii)$ implică afirmația $(xiii)'$.

Pe de altă parte, evident, $(xiii)'$ este echivalentă cu afirmația $(xiv)'$.

Dar $(xiv)'$ implică numărabila aditivitate (ii) deoarece:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1} A_i\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) + \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\geq n+1} A_i\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\geq n+1} A_i\Big).$$

Să observăm că $\bigcup_{i\geq n+1} A_i \searrow \varnothing$, pentru $n \to \infty$, deci $\mathbb{P}\big(\bigcup_{i\geq n+1} A_i\big) \searrow 0$, pentru $n \to \infty$. Prin urmare,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1} A_i\Big)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\geq n+1} A_i\Big)$$

[12] Vezi și demonstrația din [15, T55, Capitolul I].

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

◇

Propoziția 1.44 *Fie* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un șir de evenimente din* $\mathscr{F}$. *Atunci, are loc proprietatea de* **numărabilă subaditivitate** *(vezi și punctul* (x) *al Propoziției 1.39):*

$$(xv) \quad \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i). \tag{1.4}$$

Demonstrație. Să definim

$$B_1 = A_1, \quad B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \text{pentru orice } n \ge 2.$$

Atunci, $B_n \nearrow \bigcup_{i\ge 1} B_i$, pentru $n \to \infty$, iar

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{și} \quad \bigcup_{i\ge 1} B_i = \bigcup_{i\ge 1} A_i.$$

Folosind finita subaditivitate (x) obținem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\ge 1} A_i\Big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\ge 1} B_i\Big)\\
&= \mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big)\\
&\le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).
\end{aligned}$$

■

Remarca 1.45 Folosind proprietatea precedentă (xv) deducem că reuniunea unui număr numărabil de evenimente neglijabile este tot un eveniment neglijabil.

Prin urmare, folosind legile lui De Morgan (1.1), se obține și faptul că intersecția unui număr numărabil de evenimente care se produc $\mathbb{P}-$a.s. este tot un eveniment care se produce $\mathbb{P}-$a.s.. ◇

Fie, în continuare, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir de evenimente din $\mathscr{F}$. Să observăm, mai întâi, că, având în vedere că $\mathscr{F}$ este o $\sigma-$algebră,

$$\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{m\geq n} A_m \quad \text{și} \quad \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n} A_m$$

sunt, de asemenea, evenimente.

Pe de altă parte, să observăm că șirul $\left(\bigcap_{m\geq n} A_m\right)_n$ este nedescrescător[13], iar șirul $\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right)_n$ este necrescător[14] deci există limitele acestora (în sensul Definiției 1.41), i.e. există $\lim_{n\to\infty}\bigcap_{m\geq n} A_m = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{m\geq n} A_m$ și respectiv $\lim_{n\to\infty}\bigcup_{m\geq n} A_m = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n} A_m$.

Ele se numesc **limita inferioară** și respectiv **limita superioară** a șirului de evenimente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și se notează (vezi și Definiția 1.41):

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} A_n &\overset{\text{def}}{=\!=} \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{m\geq n} A_m\\ &= \lim_{n\to\infty}\bigcap_{m\geq n} A_m\\ &= \sup_{n\geq 1}\bigcap_{m\geq n} A_m\end{aligned} \tag{1.5}$$

și respectiv

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n &\overset{\text{def}}{=\!=} \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n} A_m\\ &= \lim_{n\to\infty}\bigcup_{m\geq n} A_m\\ &= \inf_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n} A_m\,.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Evident,

$$\overline{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} \bar{A}_n\,,$$

deoarece

$$\overline{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \overline{\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{m\geq n} A_m} = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n} \bar{A}_m = \limsup_{n\to\infty} \bar{A}_n\,.$$

Astfel avem și

$$\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 1 - \mathbb{P}\big(\liminf_{n\to\infty} \bar{A}_n\big), \tag{1.7}$$

[13] Spunem că un șir este **nedescrescător** dacă este crescător, dar nu neapărat strict crescător.

[14] Spunem că un șir este **necrescător** dacă este descrescător, dar nu neapărat strict descrescător.

deoarece

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n} A_m\Big)\\ &= 1-\mathbb{P}\Big(\overline{\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n} A_m}\Big)\\ &= 1-\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{m\geq n} \bar{A}_m\Big)\\ &= 1-\mathbb{P}\big(\liminf_{n\to\infty} \bar{A}_n\big).\end{aligned}$$

Folosind definiția, obținem că

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} A_n &= \{\omega : \text{există } n \text{ astfel încât, pentru orice } m\geq n,\ \text{avem } \omega\in A_m\}\\ &= \{\omega : \omega\in A_m \text{ pentru } m \text{ suficient de mare}\}\\ &= \{A_m \text{ se realizează „în cele din urmă”}\}.\end{aligned}$$

și respectiv că

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n &= \{\omega : \text{pentru orice } n,\ \text{există } m\geq n \text{ astfel încât } \omega\in A_m\}\\ &= \{\omega : \omega\in A_m \text{ pentru infinit de multe valori } m\}\\ &= \{A_m \text{ se realizează „infinit de des”}\}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Propoziția 1.46 *Fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir de evenimente din $\mathscr{F}$. Atunci au loc inegalitățile:*

$$(xvi)\quad \mathbb{P}\big(\liminf_{n\to\infty} A_n\big)\leq \liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)\leq \limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)\leq \mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big).$$

În particular, se obține generalizarea Propoziția 1.42, mai precis, dacă șirul de evenimente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge la A, pentru $n\to\mathbb{R}$, atunci se obține **proprietatea de continuitate (secvențială) a măsurii $\mathbb{P}$ în raport cu un șir de evenimente**, *i.e.*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n). \tag{1.9}$$

Demonstrație. Folosind definițiile (1.5) și (1.6) și proprietate de continuitate a lui $\mathbb{P}$ în raport cu șirul monoton $\left(\bigcap_{m\geq n} A_m\right)_n$ și respectiv $\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right)_n$, i.e. Propoziția 1.42, deducem că

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\bigcap_{m\geq n} A_m\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\nolimits_{m\geq n} A_m\right)$$

și respectiv

$$\mathbb{P}\left(\limsup\nolimits_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\lim\nolimits_{n\to\infty} \bigcup\nolimits_{m\geq n} A_m\right) = \lim\nolimits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{m\geq n} A_m\right). \tag{1.10}$$

Deci

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\liminf\nolimits_{n\to\infty} A_n\right) &= \lim\nolimits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\nolimits_{m\geq n} A_m\right) \\
&= \liminf\nolimits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\nolimits_{m\geq n} A_m\right) \\
&\leq \liminf\nolimits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) \\
&\leq \limsup\nolimits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) \\
&\leq \limsup\nolimits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{m\geq n} A_m\right) \\
&= \lim\nolimits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{m\geq n} A_m\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\limsup\nolimits_{n\to\infty} A_n\right).
\end{aligned}$$

■

În general, este dificil să lucrăm cu o $\sigma-$algebră (fiind un concept abstract). Dar dacă vom considera o $\sigma-$algebră generată de $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, atunci este mai ușor de lucrat cu ea; astfel, dacă arătăm că au loc anumite proprietăți pentru orice element din $\mathscr{C}$, atunci ele au loc și pentru orice element din $\sigma-$algebra generată de $\mathscr{C}$.

Definiția 1.47 *Fie $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ o colecție de mulțimi din Ω. Vom nota $\sigma-$**algebra generată** de $\mathscr{C}$ cu $\sigma(\mathscr{C})$ și este, prin definiție, de cea mai mică $\sigma-$algebră care conține pe $\mathscr{C}$.*

Deci $\sigma(\mathscr{C})$ este definită de:

(a) $\sigma(\mathscr{C})$ este $\sigma-$algebră;

(b) $\mathscr{C} \subseteq \sigma(\mathscr{C})$;

(c) $\sigma(\mathscr{C})$ este cea mai mică $\sigma-$algebră care conține pe $\mathscr{C}$, i.e. dacă $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$, iar $\mathscr{D}$ este o altă $\sigma-$algebră, atunci $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$.

Remarca 1.48 Vom spune că $\mathscr{C}$ este constituie un sistem de generatori pentru $\sigma(\mathscr{C})$ sau că $\mathscr{C}$ generează $\sigma(\mathscr{C})$. $\diamond$

Exemplul 1.49 Dacă $\mathscr{C} = \{\varnothing\}$ sau $\mathscr{C} = \{\Omega\}$, atunci se obține

$$\sigma(\mathscr{C}) = \{\Omega, \varnothing\},$$

adică cea mai mică $\sigma-$algebră peste Ω.

Evident, dacă $\mathscr{C}$ este chiar o $\sigma-$algebră, atunci $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$. $\diamond$

Exemplul 1.50 Dacă avem un spațiu măsurabil $(\Omega, \mathscr{F})$ și un eveniment $A \in \mathscr{F}$, atunci

$$\sigma(A) = \left\{\Omega, \varnothing, A, \bar{A}\right\}$$

este $\sigma-$algebra generată de evenimentul $A \in \mathscr{F}$. $\diamond$

Exemplul 1.51 Dacă avem un spațiu măsurabil $(\Omega, \mathscr{F})$ și evenimentele $A, B \in \mathscr{F}$, astfel încât $A \subset B$, atunci

$$\sigma(A, B) = \left\{\Omega, \varnothing, A, B, \bar{A}, \bar{B}, A \cup \bar{B}, \bar{A} \cap B\right\}$$

este $\sigma-$algebra generată de evenimentele $A, B \in \mathscr{F}$. $\diamond$

Definiția 1.52 *Notația $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ desemnează $\sigma-$**algebra Borel** și este dată de $\sigma-$algebra generată de clasa de submulțimi deschise ale spațiului topologic $\mathbb{R}$.*

Remarca 1.53 Se poate arăta că $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ poate fi generată de orice fel de intervale. De exemplu,

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}),$$

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}),$$

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}).$$

$\diamond$

Remarca 1.54 Se poate arăta (există exemple în acest sens) că nu orice submulțime din $\mathbb{R}$ este obligatoriu din $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. $\diamond$

Exercițiul 1.55 (a) *Să se arate că pentru orice $a < b$ și orice $\epsilon_n \to 0_+$, pentru $n \to \infty$, au loc:*

$$\begin{aligned} A_n &= [a, b+\epsilon_n] \searrow [a,b], & B_n &= [a, b+\epsilon_n) \searrow [a,b], \\ C_n &= (a, b+\epsilon_n] \searrow (a,b], & D_n &= (a, b+\epsilon_n) \searrow (a,b], \\ E_n &= [a, b-\epsilon_n] \nearrow [a,b), & F_n &= [a, b-\epsilon_n) \nearrow [a,b), \\ G_n &= (a, b-\epsilon_n] \nearrow (a,b), & H_n &= (a, b-\epsilon_n) \nearrow (a,b). \end{aligned}$$

(b) *Să se determine limita*[15]*, când $n \to \infty$, a următoarelor șiruri de mulțimi din spațiul măsurabil $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, unde $a < b$:*

$$\begin{aligned} A_n^1 &= \Big[a, b+\frac{1}{n}\Big], & A_n^2 &= \Big[a, b+\frac{1}{n}\Big), & A_n^3 &= \Big(a, b+\frac{1}{n}\Big], & A_n^4 &= \Big(a, b+\frac{1}{n}\Big), \\ B_n^1 &= \Big[a-\frac{1}{n}, b\Big], & B_n^2 &= \Big(a-\frac{1}{n}, b\Big], & B_n^3 &= \Big[a-\frac{1}{n}, b\Big), & B_n^4 &= \Big(a-\frac{1}{n}, b\Big), \\ C_n^1 &= \Big[a, b-\frac{1}{n}\Big], & C_n^2 &= \Big[a, b-\frac{1}{n}\Big), & C_n^3 &= \Big(a, b-\frac{1}{n}\Big], & C_n^4 &= \Big(a, b-\frac{1}{n}\Big), \\ D_n^1 &= \Big[a+\frac{1}{n}, b\Big], & D_n^2 &= \Big(a+\frac{1}{n}, b\Big], & D_n^3 &= \Big[a+\frac{1}{n}, b\Big), & D_n^4 &= \Big(a+\frac{1}{n}, b\Big), \\ E_n^1 &= \big[a, n\big), & E_n^2 &= \big(a, n\big), & E_n^3 &= \big(-n, b\big], & E_n^4 &= \big(-n, b\big), \\ F_n^1 &= \Big[a, a+\frac{1}{n}\Big], & F_n^2 &= \Big[a, a+\frac{1}{n}\Big), & F_n^3 &= \Big[a-\frac{1}{n}, a\Big], & F_n^4 &= \Big(a-\frac{1}{n}, a\Big], \\ G_n^1 &= \Big(a, a+\frac{1}{n}\Big], & G_n^2 &= \Big(a, a+\frac{1}{n}\Big), & G_n^3 &= \Big[a-\frac{1}{n}, a\Big), & G_n^4 &= \Big(a-\frac{1}{n}, a\Big). \end{aligned}$$

Propoziția 1.56 (Lema lui Borel–Cantelli) *Fie $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un spațiu de probabilitate și $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir de evenimente din $\mathscr{F}$. Atunci,*

(i) *dacă $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, atunci $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 0$;*

(ii) *dacă $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt evenimente independente în ansamblu*[16] *(vezi Definiția 1.75) și $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, atunci $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 1$.*

[15] Vezi și Remarca 2.2.

[16] Concluzia punctului (ii) are loc și dacă evenimentele $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt independente două câte două; pentru demonstrație vezi, de exemplu, [15, P6, Capitolul III].

Remarca 1.57 Evident, (i) este echivalent cu:

(i') dacă $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) > 0$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$.

Prin urmare, (ii) reprezintă, în condiții suplimentare, reciproca *parțială* a afirmației (i) sau (i'). $\diamond$

Remarca 1.58 Afirmația (i) spune, vezi definiția (1.8), că dacă probabilitatea evenimentelor $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tinde la 0, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ este convergentă, atunci probabilitatea

$$\mathbb{P}\left(\{A_n \text{ se realizează „infinit de des”}\}\right) = 0,$$

adică trebuie ca evenimentele $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ să înceteze să apară, $\mathbb{P}-$a.s.. $\diamond$

Remarca 1.59 Lema lui Borel–Cantelli, dată de Propoziția 1.56, ne asigură, printre altele, și o caracterizare a convergenței de tip aproape sigur (vezi Definiția 5.10 și Teorema 5.14).

De asemenea, vezi Nota 296, lema lui Borel–Cantelli sugerează definirea unui nou tip de convergență (convergența completă), mai tare decât convergența în probabilitate (vezi Nota 298) precum și decât convergența aproape sigură (vezi Teorema 5.14). $\diamond$

Demonstrație. (i) Avem, folosind proprietatea de subaditivitate (1.4) satisfăcută de probabilitatea $\mathbb{P}$,

$$\begin{aligned}
0 &\le \mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\ge 1}\bigcup_{m\ge n} A_m\Big) \\
&\le \mathbb{P}\Big(\bigcup_{m\ge n} A_m\Big) \\
&\le \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_m) \to 0, \quad \text{pentru } n\to\infty,
\end{aligned}$$

deoarece $\sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_m)$ este restul seriei convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

(ii) Să observăm mai întâi că, folosind (1.7) avem

$$\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\big(\liminf_{n\to\infty} \bar{A}_n\big) = 0.$$

Conform proprietății de subaditivitate avem

$$0 \le \mathbb{P}\big(\liminf_{n\to\infty} \bar{A}_n\big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\ge 1}\bigcap_{m\ge n} \bar{A}_m\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{m\ge n} \bar{A}_m\Big).$$

Prin urmare, este suficient să arătăm că

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{m\ge n} \bar{A}_m\Big) = 0, \quad \text{pentru orice } n \ge 1,$$

pentru a obține concluzia afirmației (ii) .

În acest sens, folosim proprietatea de continuitate în raport cu șirul monoton $\bigcap_{m=n}^{r} \bar{A}_m$ (vezi Propoziția 1.42) și independența evenimentelor $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și deducem

$$\begin{aligned}
0 &\le \mathbb{P}\Big(\bigcap_{m\ge n} \bar{A}_m\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\lim_{r\to\infty} \bigcap_{m=n}^{r} \bar{A}_m\Big) \\
&= \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{m=n}^{r} \bar{A}_m\Big) \\
&= \lim_{r\to\infty} \prod_{m=n}^{r} \mathbb{P}\big(\bar{A}_m\big) \\
&= \lim_{r\to\infty} \prod_{m=n}^{r} \big(1 - \mathbb{P}(A_m)\big) \\
&= \prod_{m=n}^{\infty} \big(1 - \mathbb{P}(A_m)\big) \\
&\le \prod_{m=n}^{\infty} e^{-\mathbb{P}(A_m)} \\
&= e^{-\sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_m)} \\
&= e^{-\infty} = 0,
\end{aligned}$$

deoarece are loc $1 - x \le e^{-x}$, pentru orice $x \ge 0$. ■

Exemplul 1.60 Dacă $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt evenimente independente în ansamblu și $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, atunci $\mathbb{P}\big(\bigcup_{m\ge 1} A_m\big) = 1$.

Într-adevăr, conform (ii) , obținem

$$1 = \mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = \mathbb{P}\big(\bigcap_{n\ge 1}\bigcup_{m\ge n} A_m\big) \le \mathbb{P}\big(\bigcup_{m\ge 1} A_m\big) \le 1.$$

◇

Remarca 1.61 Fie evenimentele $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ independente în ansamblu.

Folosind lema lui Borel–Cantelli, deducem că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \quad \text{dacă și numai dacă} \quad \mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 0, \tag{1.11}$$

dar și

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \quad \text{dacă și numai dacă} \quad \mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 1.$$

Deoarece (1.11) este echivalentă cu faptul că $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ dacă și numai dacă $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) > 0$, deducem că

$$\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) > 0 \quad \text{dacă și numai dacă} \quad \mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 1,$$

deci $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big)$ ori este 0 ori este 1.

Prin urmare[17],

dacă $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathscr{F}$ sunt independente în ansamblu[18],

atunci $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) \in \{0,1\}$,

mai precis

$$\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty, \\ 1, & \text{dacă } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty. \end{cases}$$

◇

Remarca 1.62 Condiția de independență este esențială pentru a obține reciproca afirmației (i).

Un contraexemplu este următorul: să considerăm măsura Lebesgue λ și spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \stackrel{\text{def}}{=} ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$.

Fie

$$A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

[17] Acest tip de rezultat face parte dintr-o serie de teoreme numite **legi de tip $\mathbf{0-1}$**.

[18] Conform lemei lui Borel–Cantelli, concluzia are loc și dacă evenimentele $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt independente două câte două.

deci $\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n = \varnothing$.

Astfel, am obținut că $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 < 1$ și, cu toate acestea, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = \infty$. $\diamond$

Remarca 1.63 Condiția de independență este esențială în (ii).

Un contraexemplu simplu este următorul: să considerăm evenimentul $A \in \mathscr{F}$ astfel încât $\mathbb{P}(A) \in (0,1)$ și $A_n = A$. Deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

dar, cu toate acestea, $\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = \mathbb{P}\big(A\big) < 1$. $\diamond$

1.4 Probabilități condiționate

Să presupunem că ne interesează probabilitatea ca un nou născut să aibă mai puțin de trei kilograme și, mai mult, ne interesează dacă sexul noului născut are vreo influență asupra acestei probabilități. Fie A evenimentul ca noul născut să fie băiat și B evenimentul ca noul născut să aibă sub trei kilograme. Dorim să aflăm deci probabilitatea lui B condiționată de A. În urma a n observații, să presupunem că avem m băieți (restul de $n-m$ sunt fete), p nou născuți sub trei kilograme (deci $n-p$ peste trei kilograme) și q nou născuți sunt băieți sub trei kilograme (deci $m-q$ sunt băieți peste trei kilograme). Deci $\mathbb{P}(A) = \dfrac{m}{n}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{p}{n}$ și $\mathbb{P}(A\cap B) = \dfrac{q}{n}$.

Pe de altă parte, fie evenimentul B condiționat de producerea evenimentului A, notat $B|A \overset{\text{def}}{=} \{$nou născutul are sub trei kilograme, condiționat de faptul că acesta este băiat$\}$. Dacă evenimentul A s-a realizat, atunci avem m cazuri posibile dintre care q sunt favorabile apariției lui B. Deci probabilitatea evenimentului condiționat este dată de $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{q}{m}$.

Prin urmare, $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{q}{m} = \dfrac{q/n}{m/n} = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

Similar, $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{q}{p} = \dfrac{q/n}{p/n} = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ (probabilitatea evenimentului ca nou născutul să fie băiat, condiționat de faptul că acesta are sub trei kilograme).

Aceste considerații sugerează următoarea definiție a probabilității condiționate.

Definiția 1.64 *Fie $A, B \in \mathscr{F}$ astfel încât $\mathbb{P}(A) > 0$. Probabilitatea evenimentului B în ipoteza că evenimentul A s-a realizat, se numește probabilitatea lui B condiționată de A și va fi notată cu $\mathbb{P}(B|A)$ și este dată de*

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}. \tag{1.12}$$

Remarca 1.65 Prin urmare, obținem relația:

$$\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B).$$

$\diamond$

Remarca 1.66 Fie $A \in \mathscr{F}$ un eveniment arbitrar fixat astfel încât $\mathbb{P}(A) > 0$; atunci $\mathbb{P}(B|A)$ este o notație pentru $\mathbb{P}_A(B)$ unde $\mathbb{P}_A$ este funcția

$$\mathbb{P}_A : \mathscr{F} \to [0,1], \quad \text{definită de} \quad \mathbb{P}_A(B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}, \quad B \in \mathscr{F}.$$

Se poate arăta că această nouă funcție este o măsură de probabilitate, iar tripletul $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_A)$ este, de asemenea, un spațiu de probabilitate.

De asemenea, dacă se notează $\mathscr{F}_A \stackrel{\text{def}}{=} \{B \in \mathscr{F} : B \subseteq A\}$, atunci tripletul $(A, \mathscr{F}_A, \mathbb{P}_A)$ este și el spațiu de probabilitate numit **spațiul de probabilitate indus** pe A de spațiul $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Dacă $\mathscr{E}$ este experiențe aleatoare ce este modelată de spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, atunci $(A, \mathscr{F}_A, \mathbb{P}_A)$ modelează experiența aleatoare $\mathscr{E}_A$ dată de: $\mathscr{E}_A$ se produce dacă $\mathscr{E}$ se produce și rezultatul implică apariția lui A. $\diamond$

Remarca 1.67 Să observăm că și probabilitatea originală $\mathbb{P}$ poate fi văzută ca o probabilitate condiționată, mai precis, putem lua $\mathbb{P}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_\Omega(B)$. $\diamond$

Remarca 1.68 Precizăm că probabilitatea condiționată $\mathbb{P}(B|A)$ a evenimentului B în raport cu evenimentul A poate fi văzută (vezi exemplul de la începutul acestei secțiunii) și ca probabilitatea $\mathbb{P}$ aplicată unui nou eveniment: evenimentul condiționat $B|A$ (deși noi nu am definit formal acest nou tip de eveniment).

Mai precis, să considerăm mulțimea finită Ω și spațiul de probabilitate Laplace $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ și evenimentul arbitrar fixat $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ astfel încât $\mathbb{P}(A) > 0$; atunci probabilitatea condiționată este dată de

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|A|}, \quad B \in \mathscr{P}(\Omega).$$

Prin urmare, dacă știm că evenimentul A s-a produs, atunci pentru calculul probabilității condiționate putem folosi spațiul Laplace luând drept *spațiu de bază* mulțimea A (adică putem considera că mulțimea evenimentelor elementare s-a micșorat la A). $\diamond$

Remarca 1.69 Obținem imediat și formule de calcul a probabilității unei intersecții de evenimente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A), \\
\mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbb{P}(C|A \cap B) \cdot \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(C|A \cap B) \cdot \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A), \\
\mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap D) &= \mathbb{P}(D|A \cap B \cap C) \cdot \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&= \mathbb{P}(D|A \cap B \cap C) \cdot \mathbb{P}(C|A \cap B) \cdot \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A),
\end{aligned}$$

oricare ar fi $A, B, C, D \in \mathscr{F}$ astfel încât $\mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap D) > 0$. $\diamond$

1.5 Evenimente independente

Intuitiv, spunem că evenimentele A, B sunt independente dacă probabilitatea ca unul dintre ele să se realizeze nu depinde de realizarea sau de nerealizarea celuilalt.

Definiția 1.70 *Spunem că evenimentele A și B sunt* **independente** *dacă*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B). \tag{1.13}$$

Remarca 1.71 Relația de independență este deci simetrică. $\diamond$

Remarca 1.72 Dacă evenimentele A, B sunt independente, atunci sunt indepedente și evenimentele $A, \bar{B}$, precum și evenimentele $\bar{A}, B$, precum și evenimentele $\bar{A}, \bar{B}$.

Într-adevăr, se poate arăta că egalitatea (1.13) va implica oricare dintre relațiile

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\bar{B}), \\
\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) &= \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(B), \\
\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) &= \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B}).
\end{aligned}$$

De exemplu, având în vedere că $A = (A \cap B) \cup \left(A \cap \bar{B}\right)$, obținem, dacă A, B sunt independente, că

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A)\left(1 - \mathbb{P}(B)\right) \\ &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\bar{B}). \end{aligned}$$

$\diamond$

Propoziția 1.73 *Evenimentele A și B sunt independente dacă și numai dacă are loc oricare dintre următoarele relații*

$$\begin{aligned} (i) &\quad \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B), \\ (ii) &\quad \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A), \\ (iii) &\quad \mathbb{P}\left(B|\bar{A}\right) = \mathbb{P}(B), \\ (iv) &\quad \mathbb{P}\left(A|\bar{B}\right) = \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Caracterizările de mai sus au loc în condițiile suplimentare $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(A) < 1$ și respectiv $\mathbb{P}(B) < 1$.

Remarca 1.74 Avem următoarea legătură între independență și incompabilitate: dacă două evenimente A și B, care nu sunt neglijabile, sunt independente, atunci evenimentele A și B sunt compatibile.

Sau echivalent, dacă două evenimente, care nu sunt neglijabile, A și B sunt incompatibile, atunci evenimentele A și B sunt dependente.

Într-adevăr, dacă am presupune că evenimentele independente A și B sunt și incompatibile, atunci $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$, deci A sau B este un eveniment neglijabil. $\diamond$

Definiția 1.75 *Spunem că evenimentele din familia $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt* **independente (în ansamblu**[19]**)** *dacă probabilitatea intersecției a oricâte evenimente din familia dată este egală cu produsul probabilităților evenimentelor intersectate, i.e. are loc*

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{r} A_{i_k}\Big) = \prod_{k=1}^{r} \mathbb{P}(A_{i_k}), \quad \text{oricare ar fi } 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n.$$

[19] Dacă nu se precizează explicit, atunci independența înseamnă independența în ansamblu.

Definiția 1.76 *Spunem că evenimentele din familia* $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ *sunt* **independente două câte două** *dacă probabilitatea intersecției a oricare două evenimente din familia dată este egală cu produsul probabilităților evenimentelor intersectate, i.e. are loc*

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j), \quad \textit{oricare ar fi } 1 \le i < j \le n.$$

Remarca 1.77 Evident, dacă evenimentele $\{A_1, \ldots, A_n\}$ sunt independente în ansamblu, atunci sunt independente și două câte două. Reciproca nu este adevărată. $\diamond$

Exemplul 1.78 Fie $\Omega = \{a, b, c, d\}$ și $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un spațiu de probabilitate Laplace. Fie evenimentele $A = \{a, b\}, B = \{a, c\}, C = \{a, d\}$. Se poate arăta că evenimentele A, B, C sunt independente două câte două, dar nu sunt independente în ansamblu deoarece

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C).$$

$\diamond$

Exemplul 1.79 Pe de altă parte, există exemple în care se vede că relația

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$

nu implică independența două câte două a evenimentelor A, B, C.

De exemplu, în cazul aruncării a două zaruri, să luăm $A = \{(i, j) \in \Omega : j = 1, 2, 5\}$, $B = \{(i, j) \in \Omega : j = 4, 5, 6\}$ și $C = \{(i, j) \in \Omega : i + j = 9\}$. $\diamond$

Remarca 1.80 În particular, independența în ansamblu a n evenimente asigură și

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap\nolimits_{i=1}^{k} A_i\Big) = \prod\nolimits_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i), \quad \text{pentru } k = \overline{1, n}.$$

În cazul $n = 2$ relația precedentă este echivalentă cu independența (două câte două) a celor n evenimente.

Dar, în cazul $n \geq 3$, relația precedentă nu implică și independența două câte două a evenimentelor $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ (vezi contraexemplul dat în [19, Problema 1.23]). $\diamond$

Propoziția 1.81 *Dacă evenimentele* $A_1, \ldots, A_n$ *sunt independente, atunci și evenimentele* $B_1, \ldots, B_n$ *sunt independente, unde* $B_i = A_i$ *sau* $B_i = \bar{A}_i$, *cu* $i = \overline{1, n}$.

Exercițiul 1.82 *De exemplu, dacă evenimentele A, B și C sunt independente, atunci sunt indepedente și A, B și $\bar{C}$, precum și $A, \bar{B}$ și C etc. (vezi și Remarca 1.72).*

Pentru a ilustra Definiția 1.70 să considerăm următorul exemplu.

Exemplul 1.83 Presupunem că avem două cutii cu bile roșii și albe. Prima cutie conține o bilă roșie și trei albe, iar a doua cutie conține două bile roșii și trei bile albe. Extragem câte o bilă din fiecare cutie. Care este probabilitatea ca să extragem două bile roșii?

Numărul total de posibile perechi este de $4 \cdot 5 = 20$ (fiecărei bile din prima cutie îi corespund cinci bile din a doua cutie pentru a face o pereche). Sunt două posibilități de a extrage două bile roșii: bila roșie din prima cutie (eveniment notat cu A) cuplată pe rând cu cele două bile roșii ale cutiei a doua (eveniment notat cu B).

Evident, folosind exclusiv semnificația lor, evenimentele A și B sunt independente.

Pe de altă parte, probabilitatea de a extrage două bile roșii este dată de $\mathbb{P}(A \cap B) = 2/20$.

Apoi, probabilitatea extragerii unei bile roșii din prima cutie este $1/4$, iar probabilitatea extragerii unei bile roșii din a doua cutie este $2/5$, deci are loc egalitatea (1.13):

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4 \cdot 2/5 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Similar se poate afla probabilitatea extragerii a două bile albe care este de $3/4 \cdot 3/5$, și deci probabilitatea de a extrage o bilă roșie și una albă este complementara evenimentelor de mai sus, deci are probabilitatea $1 - (2/20 + 9/20) = 9/20$. $\diamond$

1.6 Formule probabiliste

În cele ce urmează, fie $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un spațiu de probabilitate.

1.6.1 Probabilitatea unei reuniuni de evenimente

Oricare ar fi evenimentele $A, B \in \mathscr{F}$ are loc relația

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).} \tag{1.14}$$

În particular, dacă evenimentele sunt incompatibile, atunci

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Pentru a demonstra formula (1.14) în cazul unui spațiu finit de probabilitate să considerăm o experiență $\mathscr{E}$ cu n cazuri posibile și A, B evenimente legate de această experiență. Presupunem că m este numărul de cazuri favorabile realizării lui A și s este numărul de cazuri favorabile realizării lui B. Presupunem că dintre cele m cazuri, t sunt favorabile realizării lui $A \cap B$. Atunci, numărul de cazuri favorabile realizării lui $A \cup B$ este $m + s - t$. Deci $\mathbb{P}(A) = m/n$, $\mathbb{P}(B) = s/n$ și

$$\mathbb{P}(A \cup B) = (m + s - t)/n = m/n + s/n - t/n = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

În cazul unui spațiu de probabilitate oarecare formula (1.14) se demonstrează[20] cu ajutorul proprietăților satisfăcute de probabilitatea $\mathbb{P}$ și date de Propoziția 1.39. Astfel, are loc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\big((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})\big) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A \cap \bar{B}\right),\\
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\big((B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})\big) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}\left(B \cap \bar{A}\right),\\
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}\big((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})\big)\\
&= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A \cap \bar{B}\right) + \mathbb{P}\left(B \cap \bar{A}\right),
\end{aligned}$$

deoarece $(A \cap B) \cap \left(A \cap \bar{B}\right) = \varnothing$, $(B \cap A) \cap \left(B \cap \bar{A}\right) = \varnothing$ și $(A \cap B) \cap \left(A \cap \bar{B}\right) \cap \left(B \cap \bar{A}\right) = \varnothing$.

Astfel, obținem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}\left(A \cap \bar{B}\right) + \mathbb{P}\left(B \cap \bar{A}\right) + \mathbb{P}(A \cap B)\\
&= \mathbb{P}(A \cup B).
\end{aligned}$$

Remarca 1.84 Formula (1.14) se poate generaliza la n evenimente. Astfel, se obține, mai întâi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)&\\
- \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3)&\\
+ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)&
\end{aligned} \tag{1.15}$$

[20] Pentru o demonstrație alternativă vezi Remarca 2.119.

și, în cazul general, se poate demonstra prin inducție că, dacă $A_i \in \mathscr{F}$, cu $i = \overline{1,n}$, atunci ***probabilitatea realizării a cel puțin unui eveniment din familia*** $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ este dată de

$$\mathbb{P}(\bigcup_{1\le i\le n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}),$$

adică

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcup_{1\le i\le n} A_i) = \sum_{1\le i_1\le n} \mathbb{P}(A_{i_1}) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2})\\ + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3})\\ - \ldots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n).\end{aligned} \tag{1.16}$$

◇

Exercițiul 1.85 *Să se arate că, în cazul în care evenimentele* $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ *sunt independente în ansamblu, identitatea (1.16) devine*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\le i\le n} A_i\right) = 1 - \prod_{1\le i\le n} (1 - \mathbb{P}(A_i)).$$

Exemplul 1.86 Fie $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un spațiu de probabilitate și $A, B \in \mathscr{F}$ două evenimente. Se arate că probabilitatea ca exact unul dintre evenimente să se producă este

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A\cap B).$$

Într-adevăr, evenimentul ca exact unul dintre evenimentele A și B să apară este dat de

$$(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B),$$

iar evenimentele $(A\cap\bar{B})$ și $(\bar{A}\cap B)$ sunt incompatibile.

Pe de altă parte,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A\cap\bar{B})$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B\cap A) + \mathbb{P}(B\cap\bar{A}),$$

deci probabilitatea ca exact unul dintre evenimentele A și B să apară este:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\,(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)\,) &= \mathbb{P}(A\cap\bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{A}\cap B)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A\cap B).\end{aligned} \tag{1.17}$$

◇

Exemplul 1.87 Fie $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un spațiu de probabilitate și $A, B \in \mathscr{F}$ două evenimente independente. Dacă probabilitatea de realizare a unuia singur dintre ele este $1/2$, să se arate că cel puțin unul din evenimente are probabilitatea de realizare $1/2$.

Într-adevăr, evenimentul ca unul singur dintre cele două evenimente A, B să se realizeze este dat de

$$\left(A \cap \bar{B}\right) \cup \left(B \cap \bar{A}\right), \quad \text{unde } \left(A \cap \bar{B}\right) \cap \left(B \cap \bar{A}\right) = \varnothing,$$

deci

$$\mathbb{P}\left(\left(A \cap \bar{B}\right) \cup \left(B \cap \bar{A}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

Folosind formula (1.17) și independența, deducem

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$$

sau echivalent

$$(2\mathbb{P}(A) - 1)(2\mathbb{P}(B) - 1) = 0.$$

$\diamond$

1.6.2 Regula de înmulțire a probabilităților

Pentru două evenimente arbitrare $A, B \in \mathscr{F}$, astfel încât $\mathbb{P}(A) > 0$, putem scrie definiția probabilității condiționate

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)},$$

deci au loc formulele

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A), \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B). \end{aligned}} \tag{1.18}$$

Similar se obține și:

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(C|A \cap B) \cdot \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A),} \tag{1.19}$$

oricare ar fi $A, B, C \in \mathscr{F}$ astfel încât $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) > 0$.

Formula (1.19) se poate generaliza la n evenimente și obținem **probabilitatea realizării simultane a n evenimente** $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ sau probabilitatea unei intersecții de n evenimente sau **regula de înmulțire a probabilităților**:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = &\, \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \\ &\cdot \mathbb{P}(A_{n-1} | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \\ &\cdot \ldots \\ &\cdot \mathbb{P}(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &\cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1),\end{aligned} \tag{1.20}$$

oricare ar fi $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$ astfel încât $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$.

1.6.3 Formula probabilității totale (se aplică atunci când A_i, $i = \overline{1,n}$, s-au realizat)

Fie $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ un sistem complet de evenimente și X un eveniment oarecare. Presupunem că evenimentele A_i, $i = \overline{1,n}$, s-au realizat.

Atunci, are loc **formula probabilității totale** (numită și **legea probabilității totale**) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X) &= \mathbb{P}(X|A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(X|A_2)\,\mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(X|A_n)\,\mathbb{P}(A_n) \\ &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X|A_i)\,\mathbb{P}(A_i).\end{aligned} \tag{1.21}$$

Pentru demonstrație observăm mai întâi că $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ și deci

$$X = X \cap \Omega = X \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_n) = (X \cap A_1) \cup (X \cap A_2) \cup \ldots \cup (X \cap A_n).$$

Deoarece $A_i \cap A_j = \varnothing$, pentru orice $i \neq j$, rezultă că și $(X \cap A_i) \cap (X \cap A_j) = \varnothing$, pentru orice $i \neq j$.

Folosind punctul (iv) al Propoziției 1.39 obținem, mai întâi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X) &= \mathbb{P}(X \cap A_1) + \mathbb{P}(X \cap A_2) + \ldots + \mathbb{P}(X \cap A_n) \\ &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X \cap A_i)\end{aligned} \tag{1.22}$$

(numită și ea **formula probabilității totale** sau **legea probabilității totale**) apoi, aplicând formula (1.18), deducem că

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(X|A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(X|A_2)\,\mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(X|A_n)\,\mathbb{P}(A_n),$$

adică formula (1.21).

1.6.4 Formula lui Bayes (se aplică atunci când X s-a realizat)

Folosind relația (1.12) se obține formula lui Bayes

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)}$$

care ne dă posibilitatea să calculăm probabilitatea condiționată $\mathbb{P}(B|A)$ dacă se cunoaște probabilitatea condiționată $\mathbb{P}(A|B)$.

În general, fie $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ un sistem complet de evenimente și X un eveniment oarecare. Presupunem că X s-a realizat.

Atunci, are loc **formula lui Bayes**:

$$\boxed{\mathbb{P}(A_i|X) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(X|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}(X|A_j)}, \quad i = \overline{1,n}.} \tag{1.23}$$

Pentru demonstrație observăm că

$$\mathbb{P}(A_i \cap X) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(X|A_i) = \mathbb{P}(X)\,\mathbb{P}(A_i|X)$$

și deci

$$\mathbb{P}(A_i|X) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(X|A_i)}{\mathbb{P}(X)}.$$

Apoi folosim (1.21).

1.7 Metode de numărare

Calculul probabilităților în cazul unui spațiu de probabilitate finit conduce la numărarea diferitelor cazuri posibile. Vom vedea orice eveniment elementar ca pe un $k-$**uplu** $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, adică o mulțime cu k poziții și în care contează ordinea[21]; un eveniment oarecare este, astfel, o mulțime de upluri.

Astfel, este esențială problema numărării tuturor tipurilor posibile de upluri ce se pot forma (în condițiile date); în acest sens, vom folosi principiul de bază al analizei combinatorii (principiul multiplicării), iar ulterior, pe baza acestuia, vom defini noțiunile de aranjamente (inclusiv permutări) și combinări (atât coeficienții binomiali, cât și coeficienții multinomiali).

Mai precis, este vorba de un concept și de cele cinci reguli fundamentale de numărare:

- notiunea de $k-$**uplu**, adică mulțimi cu k poziții și în care contează ordinea;
- principiul multiplicării (pentru a putea număra $k-$uplurile posibile care se pot face);
- numărarea de $k-$upluri în care contează ordinea iar elementele se pot repeta;
- numărarea de $k-$upluri în care contează ordinea iar elementele nu se pot repeta (**aranjamente**);
- numărarea de $k-$upluri în care nu contează ordinea iar elementele nu se pot repeta (**combinari; coeficienți binomiali**);
- numărarea partițiilor care se pot face prin împărțirea a n elemente în r grupe de câte k_i elemente fiecare, astfel încât $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$ (deci elementele din respectiv fiecare grupă nu se pot repeta și nu contează ordinea lor) (**coeficienți multinomiali**).

1.7.1 Regula de bază al numărării (principiul multiplicării)

Să presupunem că avem două evenimente astfel încât primul se poate realiza în m_1 moduri, iar al doilea în m_2 moduri. Atunci, ambele evenimente se pot realiza simultan în $m_1 \cdot m_2$ moduri.

În general, dacă avem n evenimente, iar fiecare se poate realiza în m_i moduri, cu $i = \overline{1, n}$, atunci cele n evenimente se pot realiza simultan în

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n \text{ moduri}$$

[21] Să remarcăm că noțiunea de uplu este diferită de noțiunea de mulțime. De exemplu, mulțimile $\{2, 3\} = \{3, 2\} = \{2, 3, 2\}$, dar uplurile $(2, 3) \neq (3, 2)$, $(2, 3) \neq (2, 3, 2)$ și $(2, 2, 3) \neq (2, 3, 2)$.

Dacă suntem în cazul particular $m_i = m$, $i = \overline{1,n}$, atunci cele n evenimente se pot realiza simultan în

$$m^n \quad \text{moduri.} \tag{1.24}$$

Acest principiu se poate exprima și astfel: dacă avem elementele $(a_i)_{i=\overline{1,n}}$, iar dacă elementele pot fi alese în respectiv $m_1, m_2, \ldots, m_n$ moduri, atunci numărul total de $n-$**upluri** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (adică mulțimi în care contează ordinea și cu n poziții) care se pot forma este $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$.

Exemplul 1.88 Numărul situațiilor posibile care pot apărea dacă aruncăm două zaruri este $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$.

Să furnizăm și modelul matematic al experienței aleatoare propuse, altfel spus să determinăm spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Mulțimea Ω a evenimentelor elementare (sau mulțimea rezultatelor posibile) se poate scrie sub forma

$$\Omega = \{(FZ1, FZ2) : FZ1, FZ2 \in \{1, 2, \ldots, 6\}\},$$

iar conform principiului multiplicării $|\Omega| = 6^2$ care reprezintă numărul tuturor cazurilor posibile.

În ceea ce privește spațiul de evenimente, mulțimea $\mathscr{F}$ a părților este chiar mulțimea $\mathscr{P}(\Omega)$ a tuturor părților, adică a tuturor reuniunilor de elemente (sau evenimente) din Ω. Probabilitatea $\mathbb{P}$ a unui eveniment $A \in \mathscr{F}$ este $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$, unde $|A|$ este numărul tuturor uplurilor care apar în A, iar $|\Omega|$ este numărul tuturor uplurilor care apar în Ω.

Menționăm că, de asemenea, putem scrie Ω și sub forma

$$\Omega = \{f : \{FZ1, FZ2\} \to \{1, 2, \ldots, 6\} : f \text{ este funcție}\},$$

iar $|\Omega| = 6^2$, care este numărul tuturor posibilelor funcții între două mulțimi de cardinal finit (vezi Remarca 1.105). ◇

Exemplul 1.89 Numărul situațiilor posibile care pot apărea dacă aruncăm trei monede este $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

Modelul matematic al experienței aleatoare propuse este similar celui propus mai sus.

Mulțimea Ω a evenimentelor elementare este

$$\Omega = \{(FM1, FM2, FM3) : FM1, FM2, FM3 \in \{C, P\}\},$$

iar conform principiului multiplicării $|\Omega| = 2^3$ care reprezintă numărul tuturor cazurilor posibile.

Mulțimea $\mathscr{F}$ a părților este mulțimea tuturor reuniunilor de evenimente elementare din Ω. Probabilitatea $\mathbb{P}$ a unui eveniment $A \in \mathscr{F}$ se definește similar ca mai sus.

Putem scrie Ω și sub forma

$$\Omega = \{f : \{FM1, FM2, FM3\} \to \{C, P\} : f \text{ este funcție}\},$$

iar $|\Omega| = 2^3$. $\diamond$

Exemplul 1.90 Numărul de coduri de trei cifre care se pot forma cu cifrele 0, 1,…,9 este 10^3.

Într-adevăr,

$$\Omega = \{(CP1, CP2, CP3) : CP1, CP2, CP3 \in \{0, 1, \ldots, 9\}\},$$

iar conform principiului multiplicării $|\Omega| = 10^3$. $\diamond$

În continuare vom face distincție între o mulțime în care ne interesează ordinea elementelor sale și o mulțime în care nu ne interesează ordinea elementelor sale.

1.7.2 Permutări. Aranjamente. Combinări

Dacă, de exemplu, avem o mulțime cu 3 elemente $\{a, b, c\}$, atunci acestea se pot aranja astfel: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Deci prima poziție poate fi ocupată de oricare dintre cele trei elemente, a doua poziție poate fi ocupată de oricare dintre cele două elemente rămase, iar a treia poziție poate fi ocupată doar de singurul element rămas. Aplicând principiul multiplicării, obținem astfel un număr de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ posibile aranjamente a celor 3 elemente.

În general, dacă avem un $n-$uplu (adică o multime ordonată cu n poziții), prima poziție poate fi ocupată de oricare dintre cele n elemente, a doua poziție poate fi ocupată de oricare dintre cele $(n-1)$ elemente rămase ș.a.m.d.. Ultima poziție, a $n-$a, poate fi ocupată doar de singurul element rămas. Aplicând principiul multiplicării, obținem astfel un număr de

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

posibile aranjamente a celor n elemente.

Fiecare $n-$uplu format cu n elemente alese din n elemente astfel încât acestea nu se pot repeta și contează ordinea lor se numește **permutare** a elementelor acelei mulțimi de elemente, iar numărul total de permutări posibile ale celor n elemente este $n!$.

Dacă avem un $n-$uplu, atunci ne poate interesa și în câte moduri se pot aranja $k \leq n$ elemente. Astfel prima poziție poate fi ocupată de oricare dintre cele n elemente, a doua poziție poate fi ocupată de oricare dintre cele $(n-1)$ elemente rămase ș.a.m.d.. Ultima poziție, a $k-$a, poate fi ocupată de elemente rămase, care sunt în număr de $(n-(k-1))$. Aplicând principiul multiplicării, obținem astfel un număr de

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

posibile aranjamente a celor k elemente.

Fiecare $k-$uplu format cu $k \leq n$ elemente alese din n elemente astfel încât acestea nu se pot repeta și contează ordinea lor se numește **aranjament** al celor n elemente luate câte k, iar numărul total de aranjamente posibile este notat și dat de

$$A_n^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1.25}$$

Evident, aranjarea a n elemente luate câte n reprezintă $A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$, adică exact numărul de permutări.

Exemplul 1.91 Dacă avem la dispoziție pânză de steag de cinci culori diferite, putem face un steag tricolor (contează ordinea culorilor) în $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$ moduri. $\diamond$

Exemplul 1.92 Câte parole cu câte cinci litere se pot forma, dacă literele nu se pot repeta? Dar dacă se pot repeta? (considerăm că sunt 26 de litere)

Dacă nu se pot repeta, atunci avem A_{26}^5 moduri (sau de submulțimi ordonate). Dacă se pot repeta, atunci avem 26^5 moduri, datorită principiului multiplicării, deoarece fiecare poziție poate sa fie ocupată de oricare dintre cele 26 de litere, independent de celelalte. $\diamond$

Dacă, de exemplu, avem o mulțime cu 5 elemente $\{a, b, c, d, e\}$, atunci ne poate interesa câte grupe de câte 3 se pot forma cu aceste elemente. Urmând metoda de numărare de la aranjamente obținem $5 \cdot 4 \cdot 3$ posibile modalități de aranjare în grupe de câte 3 elemente. Pe de altă parte, în fiecare grupă obținută contează ordinea. De exemplu, o posibilă grupă de aceleași 3 elemente este numărată de 3! ori deoarece apar variantele: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Deci numărul total de grupe ce pot fi obținute din cele 5 elemente și pentru care nu contează ordinea în fiecare grupă este $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$.

În general, dacă avem o mulțime cu n elemente și dorim să obținem grupe (neordonate) de câte k elemente, atunci numărul acestor grupe este

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Fiecare $k-$uplu format cu $k \leq n$ elemente alese din n elemente astfel încât acestea nu se pot repeta și nu contează ordinea lor se numește **combinare** al celor n elemente luate câte k, iar numărul total de combinărilor posibile este notat și dat de

$$C_n^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}. \tag{1.26}$$

A alege un $k-$uplu ca mai sus înseamnă, de fapt, a alege o grupă de k elemente din n elemente (deci cele k elemente nu se pot repeta și nu contează ordinea lor). Iar aceasta înseamnă, de fapt, a alege două grupe, una de k elemente și cealaltă cu restul de $(n-k)$ elemente (deci elementele din respectiv fiecare grupă nu se pot repeta și nu contează ordinea lor).

Astfel putem vedea C_n^k și drept **numărul total de $n-$upluri care se pot forma cu n elemente alese din n elemente astfel încât acestea sunt împărțite în două grupe, una de k elemente și cealaltă de $n-k$ elemente (deci elementele din respectiv fiecare grupă nu se pot repeta și nu contează ordinea lor).**

Prin convenție vom lua

$$C_n^k = 0 \quad \text{ori de câte ori} \quad k < 0 \quad \text{sau} \quad k > n.$$

Remarca 1.93 Termenul C_n^k este numit coeficent binomial deoarece este cel care apare în **binomul lui Newton**

$$(x+y)^n = \sum\nolimits_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}. \tag{1.27}$$

$\diamond$

Exemplul 1.94 Pentru un joc avem cinci fete și trei băieți care trebuie să formeze o echipă de câte patru persoane. În câte moduri se poate forma echipa?

O grupă de patru persoane se poate forma, dacă avem în vedere structura echipei, în $C_5^4 \cdot C_3^0 + C_5^3 \cdot C_3^1 + C_5^2 \cdot C_3^2 + C_5^1 \cdot C_3^3 = 70$ moduri.

Pe de altă parte, sunt C_8^4 echipe posibile (deoarece nu contează nici ordinea nici dacă sunt băieți sau fete).

Am obținut și am demonstrat, folosind astfel analiza combinatorie, identitatea[22]

$$C_5^4 \cdot C_3^0 + C_5^3 \cdot C_3^1 + C_5^2 \cdot C_3^2 + C_5^1 \cdot C_3^3 = C_8^4.$$

◇

Exemplul 1.95 În câte moduri 10 studenți pot ocupa 10 bănci? Dar 12 bănci?

Evident, 10 studenți pot ocupa 10 bănci în $A_{10}^{10} = 10!$ moduri.

În cazul a 12 bănci avem: 10 bănci pot fi alese în C_{12}^{10} moduri, iar pentru 10 bănci fixate avem $10!$ moduri de a se așeza studenții. Conform principiului multiplicării vom obține $C_{12}^{10} \cdot 10! = A_{12}^{10}$ moduri. ◇

Putem generaliza formularea problemei de mai sus considerând următoarea situație: avem o mulțime cu n elemente și dorim să obținem r grupe (neordonate) de câte k_i elemente fiecare, unde $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$. Atunci, numărul total de grupe posibile este dat, conform principiului multiplicării, de

$$\begin{aligned}
&C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-k_1-\ldots-k_{r-1}}^{k_r} \\
&= \frac{n!}{k_1! \cdot (n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2! \cdot (n-k_1-k_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-k_1-\ldots-k_{r-1})!}{k_r! \cdot (n-k_1-\ldots-k_r)!} \\
&= \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_r!}.
\end{aligned}$$

S-a obținut o **partiționare a celor n elemente luate în r grupe de câte k_i elemente fiecare** astfel încât $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$, iar numărul tuturor partițiilor posibile, de acest tip, este notat și dat de

$$C_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!} \tag{1.28}$$

(vezi și Secțiunea 3.4.1, formula (3.94)).

[22] Vezi și formula (1.35).

Astfel putem vedea $C_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r}$ drept **numărul total de $n-$upluri care se pot forma cu n elemente alese din n elemente astfel încât acestea sunt împărțite în r grupe, fiecare cu câte k_i elemente, unde $i=\overline{1,r}$** (deci elementele din respectiv fiecare grupă nu se pot repeta și nu contează ordinea lor).

Remarca 1.96 Evident, divizarea a n elemente în 2 grupe de câte k_1 și respectiv k_2 elemente fiecare ($k_1=k$, iar $k_2=n-k$) dată de definiția (1.28) reprezintă combinarea celor n elemente luate câte k dată de definiția (1.26), i.e.

$$C_n^k \stackrel{\text{not}}{=\!=} C_n^{k,n-k}.$$

◇

Remarca 1.97 Termenul $C_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r}$ este numit coeficent multinomial deoarece este cel care apare în **dezvoltarea multinomială**

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n &= \sum\nolimits_{\substack{k_1=0,\ldots,k_r=0\\k_1+\ldots+k_r=n}}^{n} C_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_r^{k_r}\\ &= \sum\nolimits_{\substack{k_1,\ldots,k_r\in\mathbb{N}\\k_1+\ldots+k_r=n}} C_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_r^{k_r}.\end{aligned} \tag{1.29}$$

Astfel, dezoltarea binomială (1.27) se poate scrie și sub forma

$$(x_1+x_2)^n = \sum\nolimits_{\substack{k_1,k_2\in\mathbb{N}\\k_1+k_2=n}} C_n^{k_1,k_2}x_1^{k_1}x_2^{k_2}.$$

◇

Exemplul 1.98 O secție de poliție are angajați 10 polițiști. Știm că 5 polițiști trebuie să fie pe teren, 2 polițiști lucrează la birou, iar 3 polițiști sunt pentru situații de urgență.

Atunci, sunt posibile

$$C_{10}^5\cdot C_5^2\cdot C_3^3=\frac{10!}{5!2!3!}=C_{10}^{5,2,3}$$

moduri în care se pot diviza cei 10 polițiști în 3 grupe. ◇

Exemplul 1.99 Se aruncă un zar de 14 ori. Să se arate că probabilitatea ca fața 1 să apară de 3 ori, fața 2 să apară o dată, fața 3 să apară de 4 ori, fața 4 să apară de 2 ori, fața 5 să apară de 3 ori și fața 6 să apară o singură dată este $\dfrac{C_{14}^{3,1,4,2,3,1}}{6^{14}}$.

Într-adevăr, numărul cazurilor tuturor posibile de $14-$upluri este de 6^{14}. Pe de altă parte, numărul tuturor cazurilor favorabile apariției evenimentului avut în vedere este

$$C_{14}^{3} \cdot C_{11}^{1} \cdot C_{10}^{4} \cdot C_{6}^{2} \cdot C_{4}^{3} \cdot C_{1}^{1} = \frac{14!}{3!\,1!\,4!\,2!\,3!\,1!} = C_{14}^{3,1,4,2,3,1}.$$

$\diamond$

Remarca 1.100 Coeficientul multinomial apare și în numărul de posibile rearanjări ale literelor unui cuvânt. De exemplu, numărul de posibile cuvinte care se pot forma cu literele cuvântului *PEPPER* este $C_6^{3,2,1} = \dfrac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!}$.

Într-adevăr, avem 6 litere: *P1,E1,P2,P3,E2,R1*, deci avem $6!$ variante posibile de permutare a literelor. Pe de altă parte, anumite litere sunt identice, deci în cele $6!$ variante va apărea orice permutare a literelor *P1,P2,P3* (adică șase variante: *P1,P2,P3,* *P1,P3,P2,* *P2,P1,P3* etc.) precum și orice permutare a literelor *E1,E2* (adică *E1,E2* și *E2,E1*) (precum și orice permutare a literei *R1*).

Deci anumite variante se vor repeta. De exemplu, dacă luăm varianta de aranjare *PEPPER*, atunci cele $6!$ variante posibile numără și permutările *P*-urilor, mai precis,

P1E1P2P3E2R1, *P1E1P3P2E2R1,*
P2E1P1P3E2R1, *P2E1P3P1E2R1,*
P3E1P1P2E2R1, *P3E1P2P1E2R1.*

Prin urmare, pentru a evita duplicatele, trebuie să împărțim la numărul tuturor variantelor care se repetă, deci avem $\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!}$ variante posibile de rearanjare. $\diamond$

Remarca 1.101 Ne putem imagina și problema obținerii de **submulțimi neordonate de k elemente, dar care se pot repeta, formată din n elemente**. Se poate arăta că numărul tuturor combinărilor posibile de n elemente luate în grupe de câte k care se pot și repeta este dat[23] de C_{n+k-1}^{k}.

Astfel, să presupunem că avem o mulțime cu n elemente; vom lua, fără a restrânge generalitatea, mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dorim să numărăm, în condițiile în care nu contează ordinea, toate $k-$uplurile posibile ce se pot forma

[23] Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [55, Example 4, page 2] sau Wikipedia: Stars and bars (combinatorics).

din n elemente. Astfel, ne interesează $k-$uplurile $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$, unde $c_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, cu $i = \overline{1, k}$. Deoarece nu contează ordinea în cadrul uplului, vom lua, fără a restrânge generalitatea, componentele $c_1, c_2, \ldots, c_k$ în ordine crescătoare.

Dacă repetiția nu este permisă, atunci trebuie să impunem restricțiile

$$1 \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_k \leq n.$$

Așa cum am văzut deja, când s-a obținut (1.26), numărul tuturor $k-$uplurilor posibile $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ ce se pot forma din n elemente astfel încât să nu conteze ordinea și repetiția să nu fie permisă este C_n^k.

Dacă repetiția este permisă, atunci trebuie să impunem restricțiile

$$1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_k \leq n.$$

Pentru a putea aplica cazul precedent să definim $k-$uplul $(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_k)$ prin

$$d_1 = c_1, \quad d_2 = c_2 + 1, \quad d_3 = c_3 + 2, \quad \ldots, \quad d_k = c_k + k - 1.$$

Se obțin restricțiile:

$$1 \leq d_1 < d_2 < \ldots < d_k \leq n + k - 1,$$

deoarece $c_1 \geq 1$, iar $c_k \leq n$.

Astfel, ne interesează să numărăm toate $k-$uplurile $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ ce se pot forma din $(n + k - 1)$ elemente astfel încât să nu conteze ordinea și repetiția să nu fie permisă. Conform cazului precedent se obține că numărul posibil al unor asemenea $k-$upluri este C_{n+k-1}^k. $\diamond$

Exercițiul 1.102 *Să se arate că numărul tuturor rădăcinilor numere întregi și nenegative ale ecuației*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

este C_{n+k-1}^n.

Dorim să numărăm toate $k-$uplurile $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ce se pot forma în condițiile de mai sus. Pentru a obține cadrul de lucru al Remarcii 1.101 (i.e. pentru a pune elementele în ordine nedescrescătoare) să definim $(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k)$ prin:

$$y_1 = 1 + x_1,$$

$$\begin{aligned} y_2 &= 1 + x_1 + x_2\,, \\ &\vdots \\ y_{k-1} &= 1 + x_1 + \ldots + x_{k-1}\,, \\ y_k &= 1 + x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k = 1 + n\,. \end{aligned}$$

Astfel, ne interesează, de fapt, $(k-1)$ −uplurile $(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1})$ cu restricțiile:

$$y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_{k-1}\,, \quad \textit{unde } y_i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}\,, \quad \textit{cu } i = \overline{1, k-1},$$

deoarece $x_1 \ge 0$, iar $y_{k-1} \le y_k = 1 + n$.

Prin urmare, trebuie să numărăm toate $(k-1)$ −uplurile $(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1})$ ce se pot forma din $(n+1)$ elemente astfel încât să nu conteze ordinea și repetiția să fie permisă. Conform Remarcii 1.101 se obține că numărul posibil al unor asemenea $(k-1)$ −upluri este $C^{k-1}_{(n+1)+(k-1)-1} = C^{k-1}_{n+k-1}$ care coincide cu C^{n}_{n+k-1}.

Remarca 1.103 Prin urmare, folosind (1.24), (1.25), (1.26) și Remarca 1.101, se obține următoarea sinteză legată de numărul total de $k-$upluri ce se pot forma din n elemente, conform celor două criterii avute în vedere (vezi [55, Table 1.1, page 4]):

Modul de formare \ **Tipul de $k-$uplu**	**Contează ordinea**	**Nu contează ordinea**
Repetiția este permisă	n^k	C^k_{n+k-1}
Repetiția nu este permisă	A^k_n	C^k_n

◇

Exemplul 1.104 De exemplu, dacă ne interesează submulțimi de 2 elemente care se pot forma, în diverse moduri, din 3 elemente, atunci avem următoarele variante:

Modul de formare \ Tipul de $2-$uplu	Contează ordinea	Nu contează ordinea

Repetiția este permisă	$(1,1)$ $(1,2)$ $(1,3)$ $(2,1)$ $(2,2)$ $(2,3)$ $(3,1)$ $(3,2)$ $(3,3)$	$(1,1)$ $(1,2)$ $(1,3)$ $(2,2)$ $(2,3)$ $(3,3)$
Repetiția nu este permisă	$(1,2)$ $(1,3)$ $(2,1)$ $(2,3)$ $(3,1)$ $(3,2)$	$(1,2)$ $(1,3)$ $(2,3)$

$\diamond$

Remarca 1.105 Dacă D, C sunt două mulțimi cu un număr finit de elemente $|D| = n$ și $|C| = m$, atunci **numărul tuturor funcțiilor** $f : D \to C$ este

$$m^n = |C|^{|D|}.$$

Într-adevăr, fiecărui element al mulțimii D i se poate asocia oricare dintre cele m valori, deci, folosind principiul multiplicării, numărul tuturor $n-$uplurilor ordonate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ posibile este $\underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{\text{de } n\text{-ori}} = m^n$.

Evident, dacă $|D| = n > m = |C|$, atunci nu există nici o funcție injectivă între D și C. Dacă $n \leq m$, **numărul tuturor funcțiilor injective** $f : D \to C$ este

$$A_m^n = A_{|C|}^{|D|}.$$

Într-adevăr, dacă $n \leq m$, atunci elementului a_1 i se pot asocia m valori, elementului a_2 i se pot asocia $(m-1)$ valori (deoarece asocierea este injectivă și deci o valoare din C nu se mai poate asocia nici unui alt element din D) ș.a.m.d.. În final, elementului a_n i se pot asocia $(m-(n-1))$ valori. Deci, folosind principiul multiplicării, numărul tuturor $n-$uplurilor ordonate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ care se pot scrie este

$$m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!} = A_m^n.$$

Evident, **numărul tuturor funcțiilor bijective** $f : D \to C$ este

$$n! = A_{|C|}^{|C|}$$

deoarece trebuie să avem $|C| = |D|$.

În ceea ce privește numărul de funcții surjective să observăm că dacă $|D| = n < m = |C|$, atunci nu există nici o funcție surjectivă între D și C. Dacă $n \geq m$, atunci se poate arăta că **numărul tuturor funcțiilor surjective** $f : D \to C$ este (vezi [55, Problem 8, page 158])

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i (m-i)^n .$$

Într-adevăr, să numărăm, mai întâi, funcțiile care nu sunt surjective; în acest sens, să notăm cu A_k mulțimea tuturor funcțiilor $f : D \to C$ care nu iau valoarea $k = \overline{1,m}$ (adică $f(x) \neq k$, pentru orice $x \in \{1, \ldots, n\}$). Astfel, numărul tuturor funcțiilor care nu sunt surjective este dat de $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$. Conform formulei (1.3), avem

$$\left| \bigcup_{1 \leq k \leq m} A_k \right| = \sum_{\ell=1}^{m} (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_\ell \leq m} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_\ell}|.$$

Pe de altă parte, dacă $f \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_\ell}$, atunci f nu poate lua ℓ din cele m valori din C, deci sunt doar $(m-\ell)$ variante posibile de valori; adică ne interesează numărul de funții posibile $f : D \to C^\ell$, unde $|D| = n$, iar $\left|C^\ell\right| = m - \ell$. Deci

$$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_\ell}| = (m-\ell)^n .$$

În plus, observăm că suma $\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_\ell \leq m}$ are C_m^ℓ termeni, deci

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{1 \leq k \leq m} A_k \right| &= \sum_{\ell=1}^{m} (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_\ell \leq m} (m-\ell)^n \\ &= \sum_{\ell=1}^{m} (-1)^{\ell+1} C_m^\ell (m-\ell)^n . \end{aligned}$$

Având în vedere că numărul tuturor funcțiilor este m^n, deducem că numărul tuturor funcțiilor surjective este

$$\begin{aligned} m^n - \sum_{\ell=1}^{m} (-1)^{\ell+1} C_m^\ell (m-\ell)^n &= m^n + \sum_{\ell=1}^{m} (-1)^{\ell} C_m^\ell (m-\ell)^n \\ &= \sum_{\ell=0}^{m} (-1)^{\ell} C_m^\ell (m-\ell)^n . \end{aligned}$$

Prin urmare, în cazul particular al funcțiilor bijective, numărul tuturor funcțiilor este obținut luând $n = m$.

Deci, ca o consecință, obținem, folosind astfel analiza combinatorie[24], identitatea

$$n! = \sum\nolimits_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i (n-i)^n .$$

$\diamond$

1.8 Probabilității geometrice

Să considerăm în $\mathbb{R}^n$ o mulțime $\mathscr{D} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ mărginită și de măsură Lebesgue nenulă și $\mathscr{C} \subsetneq \mathscr{D}$ astfel încât $\mathscr{C} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

Prin definiție, vom lua probabilitatea $\mathbb{P}$ ca un punct ales la întamplare din $\mathscr{D}$ să aparțină părții $\mathscr{C}$ ca fiind $\dfrac{\lambda(\mathscr{C})}{\lambda(\mathscr{D})}$, unde λ este măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}^n$.

În acest caz, toate subdomeniile mulțimii $\mathscr{D}$ formează mulțimea de evenimente, iar probabilitatea definită mai sus satisface Definiția 1.31.

Astfel, obținem spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathscr{D}, \mathscr{B}(\mathscr{D}), \mathbb{P})$.

1.9 Scheme clasice de probabilitate

1.9.1 Schema lui Poisson (schema binomială generalizată)

Fie $\mathscr{E}$ o experiență care constă în efectuarea a n experiențe independente $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_n$ și $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ evenimente legate respectiv de experiențele $\mathscr{E}_i$. Fie X evenimentul care constă în realizarea a k evenimente ($0 \leq k \leq n$) din cele n evenimente $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$, când se efectuează experiența $\mathscr{E}$.

Atunci, are loc

Propoziția 1.106 *Probabilitatea evenimentului X este coeficientul lui x^k din polinomul*

$$Q(x) = (p_1 x + q_1) \cdot (p_2 x + q_2) \cdot \ldots \cdot (p_n x + q_n),$$

unde $p_i = \mathbb{P}(A_i)$ și $q_i = 1 - p_i = \mathbb{P}(\bar{A}_i)$.

Demonstrație. Pentru simplitate, vom considera doar cazul $n = 4$ și $k = 2$. Evenimentul a cărui realizare înseamnă realizarea a 2 evenimente și neralizarea

[24] Vezi Nota 33.

a 2 evenimente este scris sub forma unei reuniuni de alte $C_4^2 = 6$ evenimente (în fiecare dintre ele 2 se realizează și celelalte 2 nu):

$$\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4\right)$$
$$\cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4\right).$$

Toate cele 6 evenimente sunt incompatibile între ele, iar fiecare dintre ele este intersecția a patru evenimente independente. Prin urmare, probabilitatea evenimentului precedent este

$$p_1p_2q_3q_4 + p_1q_2p_3q_4 + p_1q_2q_3p_4 + q_1p_2p_3q_4 + q_1p_2q_3p_4 + q_1q_2p_3p_4$$

care este exact coeficientul lui x^2 din polinomul

$$Q(x) = (p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3)(p_4x + q_4).$$

În cazul general, X contă în reuniunea a C_n^k evenimente, fiecare dintre acestea scriindu-se ca intersecția a n evenimente independente (dintre care k sunt de tipul A_i, iar $(n-k)$ sunt de tipul $\bar{A}_j$). ■

Remarca 1.107 Se vede din demonstrație că rezultatul obținut nu simplifică calculul efectiv al probabilității cerute. Este doar o formulare condensată a metodei de calcul. ◇

O variantă concretă și des întâlnită a schemei Poisson este următoarea: se dau n urne $U_1, ..., U_n$ care conțin bile albe și negre în proporții cunoscute (adică se cunosc probabilitățile p_i de extragere a unei bile albe din urna U_i, cu $i = \overline{1,n}$). Fie $\mathscr{E}$ experiența extragerii a câtei unei bile din fiecare urnă U_i, $i = \overline{1,n}$. Dacă X reprezintă evenimentul extragerii a k bile albe (și deci a $n-k$ bile negre), când din fiecare urnă se extrage câte o bilă, atunci $\mathbb{P}(X)$ este a_k, unde a_k este coeficientul lui x^k din polinomul

$$Q(x) = (p_1x + q_1) \cdot (p_2x + q_2) \cdot \ldots \cdot (p_nx + q_n).$$

Remarca 1.108 Uneori se poate considera că cele n evenimente A_i coincid între ele, $A_i = A$, $i = \overline{1,n}$. Evenimentul X constă atunci în faptul că evenimentul A se realizează de k ori și de $(n-k)$ ori nu se realizează, atunci când se efectuează experiența $\mathscr{E}$ ce constă în cele n experiențe $\mathscr{E}_i$. În acest caz particular se obține schema binomială. ◇

1.9.2 Schema binomială (schema bilei revenite)

Fie $\mathscr{E}$ o experiență și A un eveniment legat de experiența $\mathscr{E}$. Notăm cu $p = \mathbb{P}(A)$. Fie X evenimentul care constă în realizarea lui A de k ori și în nerealizarea lui A de $n-k$, când se efectuează experiența $\mathscr{E}$ de n ori.

Atunci, are loc

Propoziția 1.109 *Probabilitatea evenimentului X este*

$$\mathbb{P}(X) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{cu } q = 1-p.$$

Demonstrație. Se observă că suntem într-un caz particular al schemei lui Poisson în care pentru $i = \overline{1,n}$, $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}$, $A_i = A$, deci $p_i = p$, $q_i = 1-p$, iar $Q(x) = (px+q)^n$. Prin urmare, probabilitatea cerută este coeficientul lui x^k, adică $C_n^k p^k q^{n-k}$. ■

Remarca 1.110 O variantă concretă a schemei binomiale este următoarea: se dă o urnă U care conține bile a albe și b bile negre (deci probabilitatea p de extragere a unei bile albe din urna U este $p = a/(a+b)$ și, evident, $q = b/(a+b)$). Fie $\mathscr{E}$ experiența extragerii unei bile din urna U, urmând ca bila să fie pusă înapoi. Se efectuează $\mathscr{E}$ de n ori. Dacă X reprezintă evenimentul extragerii a k bile albe și a $n-k$ bile negre, atunci, conform Propoziției 1.109,

$$\mathbb{P}(X) = C_n^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}. \tag{1.30}$$

Putem determina[25] probabilitatea precedentă și dacă formalizăm evenimentele elementare ω. Să observăm că putem scrie mulțimea Ω asociată experienței aleatoare:

$$\Omega = \left\{ (BP1, BP2, \ldots, BPn) : \quad BPi \in \{1, 2, \ldots, a+b\},\ i = \overline{1,n} \right\}$$

și astfel, conform principiului multiplicării, $|\Omega| = (a+b)^n$.

Apoi evenimentul X este dat de

$$X = \left\{ (BP1, BP2, \ldots, BPn) \in \Omega : \quad k \text{ poziții sunt albe}, \right.$$
$$\left. \text{restul } (n-k) \text{ poziții sunt negre} \right\},$$

[25] Vezi și Exercițiul 1.10.8, punctul (a).

deci, conform principiului multiplicării,

$$|X| = C_n^k \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } k \text{ ori}} \cdot \underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{de } (n-k) \text{ ori}} = C_n^k a^k b^{n-k},$$

deoarece sunt posibile C_n^k variante de grupe de k bile albe (și, respectiv, grupe de $(n-k)$ bile negre) dintre cele n.

Astfel obținem $\mathbb{P}(X) = \frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n}$, adică tot formula (1.30) $\diamond$

Exercițiul 1.111 *Dintr-o urnă cu* 14 *de bile, dintre care* 8 *albe și* 6 *negre, se extrag cu revenire* 3 *bile. Care este probabilitatea ca cele* 3 *bile extrase să fie* 2 *albe și una neagră? (suntem în cazul* $n = 3$, $k = 2$, $p = 8/14 = 4/7$, $q = 3/7$*)*

1.9.3 Schema multinomială

Fie $\mathscr{E}$ o experiență și $(A_i)_{i=\overline{1,r}}$ un sistem complet de evenimente legate de acea experiență cu probabilitățile de realizare $p_i = \mathbb{P}(A_i)$, cu $i = \overline{1,r}$ (deci trebuie ca $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$). Se repetă experiența de n ori în aceleași condiții. Fie X evenimentul care constă în realizarea fiecărui eveniment A_i de k_i ori, unde $k_i = \overline{0,n}$, cu $i = \overline{1,r}$, astfel încât $k_1 + \ldots + k_r = n$.

Utilizând argumente de numărare folosite și în cazul schemei binomiale precum și deducerea definiției termenului multinomial $C_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r}$ dat de (1.28) deducem următorul rezultat[26].

Propoziția 1.112 *Probabilitatea evenimentului* X *este*

$$\mathbb{P}(X) = C_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r},$$

unde $k_i = \overline{0,n}$, *cu* $i = \overline{1,r}$, *astfel încât* $k_1 + \ldots + k_r = n$.

O variantă concretă a schemei multinomiale este următoarea: se dă o urnă U care conține bile de r culori, iar probabilitatea de extragere a unei bile de culoare c_i este p_i, cu $i = \overline{1,r}$. Fie $\mathscr{E}$ experiența extragerii unei bile din urnă, urmând ca bila să fie pusă înapoi. Se efectuează $\mathscr{E}$ de n ori. Atunci, X este evenimentul care constă în apariția de k_i ori a bilei de culoare c_i, unde $i = \overline{1,r}$, iar $k_1 + \ldots + k_r = n$.

[26] Vezi și distribuția multinomială.

Exemplul 1.113 Se aruncă un zar de 14 ori. Care este probabilitatea de a obține de 3 ori fața 1, o dată fața 2, de 4 ori fața 3, de 2 ori fața 4, de 3 ori fața 5 și o singură dată fața 6?

Avem

$$\mathbb{P}(X) = C_{14}^{3,1,4,2,3,1}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{14!}{3!1!4!2!3!1!}\frac{1}{6^{14}}.$$

◇

1.9.4 Schema hipergeometrică[27] (schema bilei nerevenite)

Să considerăm o urnă U cu m bile dintre care a bile albe și $b = m - a$ bile negre. Experiența $\mathscr{E}$ constă în **extragerea succesivă a n bile fără a pune bila extrasă înapoi** (sau se poate considera că **se scot n bile simultan**).

Fie X evenimentul ca din cele n bile extrase α să fie albe și $\beta = n - \alpha$ să fie negre (evident, impunem $1 \leq n \leq m$, $0 \leq \alpha \leq a$ și $0 \leq \beta \leq b$).

Atunci, are loc următorul rezultat.

Propoziția 1.114 *Probabilitatea evenimentului X este*

$$\mathbb{P}(X) = \frac{C_a^\alpha \cdot C_b^\beta}{C_{a+b}^{\alpha+\beta}}, \quad \textit{unde } \alpha + \beta = n,\ a + b = m.$$

Demonstrație. Să presupunem că se extrag n bile deodată. Numărul cazurilor posibile este C_{a+b}^n. Pe de altă parte, α bile albe se pot extrage în C_a^α, iar β bile negre se pot extrage în C_b^β, deci, conform principiului multiplicării, α bile albe și β bile negre se pot extrage în $C_a^\alpha \cdot C_b^\beta$ moduri (fiecare grupă de α bile albe se poate grupa cu fiecare grupă de β bile negre). Apoi folosim definiția clasică a probabilității.

Cazul în care bilele se extrag una câte una se rezolvă similar. În această situație, numărul cazurilor posibile este $A_{a+b}^n = n!C_{a+b}^n$, iar cel al cazurilor favorabile este $n! \cdot C_a^\alpha \cdot C_b^\beta$. ■

Remarca 1.115 Să observăm că dacă ne interesează probabilitatea apariției unui $n-$uplu cu o anumită structură în ceea ce privește culorile (și nu ne interesează nimic legat de ordinea de apariție a culorilor în cadrul $n-$uplului), atunci

[27] Pentru denumirea „hipergeometrică" vezi Remarca 2.134.

probabilitatea cerută se poate calcula folosind atât schema hipergeometrică (indiferent de numarul de elemente extrase simultan), cât și folosind reprezentarea extragerilor sub forma unei structuri de tip arbore (reprezentare practică doar în cazul extragerii unui număr mic de elemente, de exemplu, 2, 3 sau 4 elemente). În acest sens, vezi demonstrația dată în cadrul Remarcii 2.138.

De exemplu, cerințele Exercițiului 1.10.31 sunt rezolvate folosind reprezentarea sub forma unei structuri de tip arbore, dar se pot face complet folosind și schema hipergeometrică (vezi indicațiile de la pagina 78). Pe de altă parte, cerințele Exercițiului 1.10.32 (rezolvate folosind reprezentarea sub forma unei structuri de tip arbore) nu se pot face folosind schema hipergeometrică deoarece se cere probabilitatea evenimentului ca, dintre cele trei piese din primul lot, primele două să fie bune și a treia defectă, deci contează ordinea de apariție (vezi indicațiile de la pagina 81). $\diamond$

Exemplul 1.116 La o extragere, din 400 de bilete, 4 sunt câștigătoare. O persoană cumpără 10 bilete. Care este probabilitatea ca să nu aibă nici un bilet câștigător?

Avem $a = 4$, $b = 396$, $\alpha = 0$, $\beta = 10$, $n = 10$. Deci probabilitatea să obținem $k = 0$ bilete câștigătoare este $\dfrac{C_4^0 \cdot C_{396}^{10}}{C_{400}^{10}} = 0.903$. $\diamond$

Putem să generalizăm în felul următor: să considerăm o urnă U cu m bile de r culori; mai precis, avem a_i bile din fiecare culoare c_i, pentru $i = \overline{1, r}$. Experiența $\mathscr{E}$ constă în extragerea succesivă a n bile fără a pune bila extrasă înapoi ($n \leq \sum_{i=1}^{r} a_i$) (sau se poate considera că se scot n bile simultan).

Fie X evenimentul ca din cele n bile extrase α_1 bile să fie de culoarea c_1, α_2 bile să fie de culoarea c_2, $\ldots$, α_r bile să fie de culoarea c_r, cu $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = n$ astfel încât $\alpha_i \leq a_i$.

În mod similar Propoziției 1.114 se poate demonstra următorul rezultat.

Propoziția 1.117 *Probabilitatea evenimentului X este*

$$\mathbb{P}(X) = \frac{C_{a_1}^{\alpha_1} \cdot C_{a_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot C_{a_m}^{\alpha_m}}{C_{a_1+\ldots+a_m}^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}}, \quad \textit{unde } \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = n.$$

Remarca 1.118 Remarca 1.115 se menține adevărată și în acest caz. $\diamond$

Exemplul 1.119 O urnă conține 8 bile albe, 9 bile negre și 10 bile roșii. Se extrag 3 bile. Care este probabilitatea ca bilele extrase să fie de culori diferite?

Dorim ca grupul celor trei bile să arate astfel: una albă, una neagră și una roșie. Deci probabilitatea evenimentului cerut este $\dfrac{C_8^1 \cdot C_9^1 \cdot C_{10}^1}{C_{27}^3} = 0.246.$ $\diamond$

Exemplul 1.120 Un magazin vinde un același tip de marfă produsă de trei firme. Magazinul are 300 de unități de la prima firmă, 260 de unități de la a doua firmă, 420 de unități de la a treia firmă și vinde 260 de produse. Care este probabilitatea 80 de unități să fie de la prima firmă, 50 de unități de la a doua firmă și 130 de unități să fie de la a treia firmă? $\diamond$

1.10 Exerciții rezolvate

1.10.1 Amestecăm un pachet de 10 cărți de joc numerotate cu $1, 2, \ldots, 10$. Care este probabilitatea ca deasupra să fie cartea 1? Dar probabilitatea ca pe primele două poziții să fie cărțile 1 și respectiv 2?

Rezolvare:

Cele 10 cărți pot fi aranjate în $A_{10}^{10} = 10!$ moduri posibile. Cazul favorabil este orice aranjare în care pe primul loc se află numărul 1, iar apoi celelalte 9 numere (indiferent de ordine). Deci numărul cazurilor favorabile este $9!$, deci probabilitatea ca prima carte să fie 1 este $\dfrac{9!}{10!} = \dfrac{1}{10}$.

Putem formaliza și scrie și sub forma: **mulțimea Ω a tuturor evenimentelor elementare poate fi văzută ca fiind o mulțime de $n-$upluri de tipul**

$$\Omega = \Big\{ (CJP1, CJP2, \ldots, CJP10) : \quad CJPi \in \{1, 2, \ldots, 10\}, \\ CJPi \neq CJPj, \quad i, j = \overline{1, 10},\ \text{cu } i \neq j \Big\},$$

iar numărul tuturor cazurilor posibile este $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1 = A_{10}^{10} = 10!$ (deoarece prima poziție a $10-$uplului are 10 variante posibile, a doua poziție are 9 variante posibile etc.).

Primul eveniment avut în vedere este

$$A = \Big\{ (\mathbf{CJ1}, CJP2, \ldots, CJP10) \in \Omega : \quad CJPi \in \{2, \ldots, 10\}, \quad i = \overline{2, 10} \Big\},$$

iar $|A| = A_9^9 = 9!$. Deci $\mathbb{P}(A) = \dfrac{A_9^9}{A_{10}^{10}} = \dfrac{1}{10}$.

Putem face și direct: să observăm că pe primul loc poate fi oricare din cele 10 cărți, deci avem zece cazuri posibile. Dintre acestea unul singur este favorabil (apariția cărții 1). Deci probabilitatea este $1/10$.

Al doilea eveniment avut în vedere este

$$B = \Big\{ (\mathbf{CJ1}, \mathbf{CJ2}, CJP3, \ldots, CJP10) \in \Omega : \quad CJPi \in \{3, \ldots, 10\}, \quad \text{unde } i = \overline{3,10} \Big\},$$

iar $|B| = A_8^8 = 8!$. Deci $\mathbb{P}(B) = \dfrac{A_8^8}{A_{10}^{10}} = \dfrac{1}{90}$.

Putem face și direct: să observăm că pe primele două poziții poate fi orice pereche ordonată de numere, deci numărul cazurilor posibile este de $A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 90$. Dintre acestea unul singur este favorabil (apariția cărților 1 și 2). Deci probabilitatea este $1/90$.

1.10.2 Un număr de telefon este compus din șase cifre. Care este probabilitatea ca toate cifrele să fie diferite una de alta? (toate cifrele pot avea una dintre valorile $0, 1, \ldots, 9$).

Rezolvare:

Formalizăm, văzând **mulțimea Ω a tuturor evenimentelor elementare ca pe o mulțime de $6-$upluri:**

$$\Omega = \Big\{ (TP1, TP2, \ldots, TP6) : \quad TPi \in \{0, 1, \ldots, 9\}, \quad i = \overline{1,6} \Big\},$$

iar numărul tuturor cazurilor posibile (toate numerele de telefon din șase cifre, nu neapărat diferite) este $|\Omega| = 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10 = 10^6$ (deoarece prima poziție a $6-$uplului are 10 variante posibile, a doua poziție are tot 10 variante posibile etc.).

Eveniment avut în vedere este

$$A = \Big\{ (TP1, TP2, \ldots, TP6) \in \Omega : \quad TPi \neq TPj, \quad i, j = \overline{1,6}, \quad \text{cu } i \neq j \Big\},$$

iar $|A| = 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 5 = A_{10}^6$ (deoarece prima poziție a $6-$uplului are 10 variante posibile, a doua poziție are 9 variante posibile etc.).

Deci probabilitatea cerută este $\mathbb{P}(A) = \dfrac{A_{10}^6}{10^6} = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{10^6} = 0.1512.$

1.10.3 Într-un oraș se găsesc 10000 de biciclete numerotate de la 0 la 9999. Care este probabilitatea ca numărul primei biciclete întâlnite să nu conțină cifra 8?

Rezolvare:

Formalizăm, văzând **mulțimea Ω a tuturor evenimentelor elementare ca pe o mulțime de $4-$upluri:**

$$\Omega = \left\{ (BP1, BP2, BP3, BP4): \quad BPi \in \{0, 1, \ldots, 9\}, \quad i = \overline{1,4} \right\},$$

iar numărul tuturor cazurilor posibile este $|\Omega| = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$ (deoarece prima poziție a $4-$uplului are 10 variante posibile, a doua poziție are tot 10 variante posibile etc.).

Eveniment avut în vedere este

$$A = \left\{ (BP1, BP2, BP3, BP4) \in \Omega: \quad BPi \neq 8, \quad i = \overline{1,4} \right\},$$

iar $|A| = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^4$ (deoarece prima poziție a $4-$uplului are 9 variante posibile, a doua poziție are 9 variante posibile etc.).

Deci probabilitatea cerută este $\mathbb{P}(A) = \dfrac{9^4}{10^4} = (0.9)^4 = 0.6561$.

1.10.4 Care este probabilitatea ca într-un grup de n persoane să existe cel puțin 2 care să-și aniverseze ziua de naștere în aceeași zi a anului? (se presupune că anul are 365 de zile)

Rezolvare:

Evident, dacă $n > 365$, atunci probabilitatea cerută este 1. Să presupunem că $n \leq 365$. Este mai ușor de calculat probabilitatea evenimentului contrar, notat $\bar{A}$, adică evenimentul ca fiecare dintre cele n persoane își aniverseze ziua de naștere într-o zi diferită de ziua celorlalte $(n-1)$ persoane.

Mulțimea evenimentelor elementare (sau mulțimea rezultatelor posibile) se poate scrie sub forma

$$\Omega = \left\{ (ZNP1, ZNP2, \ldots, ZNPn): \quad ZNPi \in \{1, 2, \ldots, 365\}, \ i = \overline{1,n} \right\},$$

deci numărul cazurilor posibile este $|\Omega| = 365^n$, conform principiului multiplicării.

Evenimentul contrar este dat de

$$\bar{A} = \left\{ (ZNP1, ZNP2, \ldots, ZNPn) \in \Omega: \quad ZNPi \neq ZNPj, \quad i, j = \overline{1,n}, \right.$$
$$\left. \text{cu } i \neq j \right\},$$

iar $|\bar{A}| = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1) = A_{365}^{n}$ (deoarece prima poziție a $n-$uplului are 365 de variante posibile, a doua poziție are 364 de variante posibile etc.).

Deci probabilitatea cerută este $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \dfrac{A_{365}^{n}}{365^n}$.

Să observăm că **putem scrie Ω și cu ajutorul funcțiilor**:

$$\Omega = \left\{ f : \{ZNP1, ZNP2, \ldots, ZNPn\} \to \{1, 2, \ldots, 365\} : \quad f \text{ este funcție} \right\},$$

iar $|\Omega| = 365^n$ (care este numărul[28] tuturor posibilelor funcții între două mulțimi de cardinal finit).

Scrisă în acest fel, evenimentul $\bar{A}$ este, de fapt,

$$\bar{A} = \left\{ f : \{ZNP1, ZNP2, \ldots, ZNPn\} \to \{1, 2, \ldots, 365\} : \quad f \text{ este funcție injectivă} \right\},$$

iar $|\bar{A}| = A_{365}^{n}$ (care este numărul tuturor posibilelor funcții injective între două mulțimi de cardinal finit).

Deci probabilitatea evenimentului cerut este $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \dfrac{A_{365}^{n}}{365^n}$.

În final menționăm că dacă, de exemplu, $n = 23$, atunci se obține

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{343 \cdot 345 \cdot \ldots \cdot 364 \cdot 365}{365^{23}} = 0.5072,$$

iar dacă $n = 50$, atunci se obține

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{316 \cdot 317 \cdot \ldots \cdot 364 \cdot 365}{365^{50}} = 0.9703.$$

1.10.5 Un lift urcă cu k persoane într-o clădire cu n etaje. Care este probabilitatea ca la fiecare etaj să coboare cel mult o persoană?

Rezolvare:

[28] De fapt, pentru a număra riguros funcțiile dintre doua mulțimi de cardinal finit trebuie să folosim noțiunea asociată de uplu și, astfel, numărarea funcțiilor cu anumite proprietăți se reduce la numărarea (folosind regulile cunoscute) uplurilor cu proprietăți asociate celor cerute pentru funcții.

Dacă $n < k$, atunci probabilitatea cerută este 0. Să considerăm deci cazul $n \geq k$.

La fiecare etaj cele k persoane pot coborî din lift în n^k moduri.

Pe de altă parte, daca la fiecare etaj coboara cel mult o persoana, atunci cele k persoane pot coborî, maxim una pe etaj, în A_n^k moduri. Deci probabilitatea cerută este $\dfrac{A_n^k}{n^k}$.

În cazul particular $n = 10$ și $k = 7$ obținem probabilitatea $\dfrac{A_{10}^7}{10^7} = 0.060$.

Evident, putem formaliza, similar cu problema precedentă,

$$\Omega = \big\{ f : \{PP1, PP2, \ldots, PPk\} \to \{E1, E2, \ldots, En\} : \quad f \text{ este funcție} \big\},$$

iar numărul cazurilor posibile este deci $|\Omega| = n^k$.

Evenimentul cerut este

$$A = \big\{ f : \{PP1, PP2, \ldots, PPk\} \to \{E1, E2, \ldots, En\} : \quad f \text{ este funcție injectivă} \big\},$$

iar numărul tuturor funcții injective este $|A| = A_n^k$.

1.10.6 O urnă conține n bile colorate respectiv în n culori. Din această urnă se extrag k bile (unde $1 \leq k \leq n$) cu revenirea bilei în urnă după fiecare extragere. Care este probabilitatea ca toate bilele alese să fie de culori diferite între ele.

1.10.7 Numerele $1, 2, \ldots, n$ sunt așezate la întâmplare. Care este probabilitatea ca numerele 1 și 2 să fie așezate în șir în ordine crescătoare și consecutive?

Rezolvare:

Cele n numere se pot scrie în $n!$ moduri.

Într-adevăr, formalizăm, văzând mulțimea Ω a tuturor evenimentelor elementare ca pe o mulțime de $n-$upluri:

$$\Omega = \big\{ (NP1, NP2, \ldots, NPn) : \quad NPi \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad NPi \neq NPj, \quad i, j = \overline{1, n}, \text{ cu } i \neq j \big\},$$

iar numărul tuturor cazurilor posibile este $|\Omega| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = A_n^n = n!$ (deoarece prima poziție a $n-$uplului are n variante posibile, a doua poziție are $(n-1)$ variante posibile etc.).

Evenimentul avut în vedere conține $n-$upluri în care apare, pe de o parte, $(1,2)$ în $(n-1)$ variante posibile și, pe de altă parte, celelalte $(n-2)$ numere în $(n-2)$ poziții posibile, deci în $A_{n-2}^{n-2} = (n-2)!$ variante posibile. Prin urmare, $|A| = (n-1) \cdot A_{n-2}^{n-2}$, deci $\mathbb{P}(A) = \dfrac{(n-1) \cdot A_{n-2}^{n-2}}{A_n^n} = \dfrac{1}{n}$.

1.10.8 O urnă conține n bile albe și m bile negre. Din această urnă se extrag k bile (unde $1 \leq k \leq n+m$).

(a) Dacă extragerile au loc cu revenirea bilei în urnă după fiecare extragere, care este probabilitatea[29] ca bila apărută la extragerea $i = \overline{1,k}$ să fie albă?

(b) Dacă extragerile au loc fără revenirea bilei în urnă după fiecare extragere, care este probabilitatea[30] ca bila apărută la extragerea $i = \overline{1,k}$ să fie albă?

Rezolvare:

Fie A_i evenimentul ca bila i extrasă să fie albă, unde $i = \overline{1,k}$.

(a) Dacă extragerile au loc cu revenirea bilei în urnă după fiecare extragere, atunci, evident,

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{n}{n+m}, \quad \text{pentru } i = \overline{1,k}.$$

Să observăm că putem vedea evenimentele elementare și ca pe un $k-$uplu și astfel putem scrie mulțimea Ω a evenimentelor elementare asociate experienței date sub forma:

$$\Omega = \left\{ (BP1, BP2, \ldots, BPk) : \quad BPi \in \{1, 2, \ldots, n+m\}, \ i = \overline{1,k} \right\}$$

și astfel, conform principiului multiplicării, $|\Omega| = (n+m)^k$.

Apoi evenimentul A_i este dat de

$$A_i = \left\{ (BP1, BP2, \ldots, BPk) \in \Omega : \quad BPi \text{ este albă} \right\},$$

deci, conform principiului multiplicării, $|A_i| = (n+m) \cdot \ldots \cdot (n+m) \cdot n \cdot (n+m) \cdot \ldots \cdot (n+m) = n\,(n+m)^{k-1}$.

[29] Vezi și Remarca 1.110.

[30] Vezi și Exercițiul 1.10.46, Remarca 2.137 și Exercițiul 2.4.27.

Astfel obținem

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{n(n+m)^{k-1}}{(n+m)^k} = \frac{n}{n+m}, \quad \text{pentru } i = \overline{1,k}.$$

(b) În cazul în care extragerile au loc fără revenirea bilei în urnă după fiecare extragere avem, evident, $\mathbb{P}(A_1) = \frac{n}{n+m}$.

Pentru determinarea lui $\mathbb{P}(A_2)$ folosim formula probabilității totale (1.22) și astfel

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_1) + \mathbb{P}\left(A_2 \cap \bar{A}_1\right),$$

deoarece $\left\{A_1, \bar{A}_1\right\}$ reprezintă un sistem complet de evenimente.

Să observăm că putem scrie și mulțimea Ω a evenimentelor elementare asociate acestei experiențe aleatoare:

$$\Omega = \big\{ (BP1, BP2, \ldots, BPk) : \quad BPi \in \{1, 2, \ldots, n+m\}, \quad BPi \neq BPj, \quad i, j = \overline{1,k}, \text{ cu } i \neq j \big\}$$

și astfel, conform principiului multiplicării, obținem $|\Omega| = A_{n+m}^k$.

Apoi evenimentul $A_1 \cap A_2$ este dat de

$$A_1 \cap A_2 = \big\{ (BP1, BP2, \ldots, BPk) \in \Omega : \quad BP1, BP2 \text{ sunt albe} \big\},$$

deci, conform principiului multiplicării, $|A_1 \cap A_2| = n \cdot (n-1) \cdot (n+m-2) \cdot (n+m-3) \cdot \ldots \cdot (n+m-k+1) = n(n-1)\, A_{n+m-2}^{k-2}$.

Similar, evenimentul $\bar{A}_1 \cap A_2$ este dat de

$$\bar{A}_1 \cap A_2 = \big\{ (BP1, BP2, \ldots, BPk) \in \Omega : \quad BP1 \text{ este neagră}, \quad BP2 \text{ este albă} \big\},$$

deci, conform principiului multiplicării, și similar ca mai sus, $\left|\bar{A}_1 \cap A_2\right| = mnA_{n+m-2}^{k-2}$.

Astfel obținem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_2) &= \frac{n(n-1)\, A_{n+m-2}^{k-2}}{A_{n+m}^k} + \frac{nmA_{n+m-2}^{k-2}}{A_{n+m}^k} \\
&= \frac{n(n-1)}{(n+m-1)(n+m)} + \frac{nm}{(n+m-1)(n+m)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{n}{n+m}.$$

Similar, folosind tot formula probabilității totale (1.22), putem scrie, având în vedere că $\{A_2, \bar{A}_2\}$ reprezintă un sistem complet de evenimente,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_3) &= \mathbb{P}(A_3 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_3 \cap \bar{A}_2) \\ &= \mathbb{P}(A_3 \cap A_2 \cap A_1) + \mathbb{P}(A_3 \cap A_2 \cap \bar{A}_1) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_3 \cap \bar{A}_2 \cap A_1) + \mathbb{P}(A_3 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_1)\end{aligned}$$

și astfel, după calcule similare celor de mai sus, se obține

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{n}{n+m}.$$

1.10.9 Într-o cameră întunecoasă sunt cinci perechi de pantofi de aceeași mărime și model. Alegem la întâmplare cinci pantofi. Care este probabilitatea ca printre pantofii aleși să fie cel puțin o pereche?

Rezolvare:

Avem C_{10}^5 cazuri posibile de a alege o grupă de cinci pantofi dintre cei zece. Evenimentul contrar, de a nu fi nici măcar o pereche, are două cazuri favorabile (cinci pantofi stângi sau cinci pantofi drepți). Deci probabilitatea cerută este $1 - \frac{2}{C_{10}^5}$.

1.10.10 Într-o cameră întunecoasă sunt cinci perechi de pantofi de mărimi diferite. Alegem la întâmplare cinci pantofi. Care este probabilitatea ca printre pantofii aleși să fie cel puțin o pereche de aceeași mărime?

Rezolvare:

Avem C_{10}^5 cazuri posibile de a alege o grupă de cinci pantofi dintre cei zece.

Vom studia probabilitatea evenimentului contrar, de a nu fi nici măcar o pereche de aceeași mărime.

Să notăm cei zece pantofi cu $\{D1, D2, D3, D4, D5, S1, S2, S3, S4, S5\}$ și să numărăm cazurile favorabile.

Avem un număr de C_5^5 variante de tipul $(D1, D2, D3, D4, D5)$, apoi C_5^4 variante[31] de tipul $(D1, D2, D3, D4, S5)$, apoi C_5^3 variante de tipul $(D1, D2, D3, S4, S5)$, apoi C_5^2 variante de tipul $(D1, D2, S3, S4, S5)$, apoi C_5^1 variante de tipul $(D1, S2, S3, S4, S5)$ și C_5^0 variante de tipul $(S1, S2, S3, S4, S5)$. Deci numărul cazurilor favorabile este $C_5^5 + C_5^4 + C_5^3 + C_5^2 + C_5^1 + C_5^0 = (1+1)^5$. Prin urmare, probabilitatea cerută este $1 - \dfrac{2^5}{C_{10}^5}$.

1.10.11 Într-un tramvai cu două vagoane urcă nouă pasageri. Care este probabilitatea ca în primul vagon să urce trei persoane și în al doilea celelalte șase persoane?

Rezolvare:

Putem să formalizăm considerând evenimentele elementare de tipul unui $9-$uplu, i.e.

$$\Omega = \left\{ (PP1, PP2, \ldots, PP9) : \quad PPi \in \{1, 2\}, \quad i = \overline{1, 9} \right\}$$

și astfel numărul tuturor cazurilor posibile este $|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^9$.

Pe de altă parte, să observăm că putem formaliza și considerând evenimentele elementare de tipul unui $2-$uplu, i.e. $\omega = (VP1, VP2)$, astfel încât în fiecare $VPi \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, cu $i = \overline{1, 2}$, sunt grupe de maxim 9 pasageri și are loc restricția $VP1 + VP2 = 9$.

În primul vagon poate urca orice grup de $k_1 \in \{0, \ldots, 9\}$ persoane, iar numărul variantelor este astfel $C_9^{k_1}$; apoi în al doilea vagon poate urca orice grup de $(9 - k_1) = k_2$ persoane (cele care au rămas), iar numărul variantelor este astfel $C_{9-k_1}^{k_2} = 1$ (trebuie luat $k_1 + k_2 = 9$).

Prin urmare, numărul tuturor cazurilor posibile este, în acest caz, dat de (vezi și definiția coeficenților binomiali $C_9^{k_1, k_2}$ dați de (1.28) în cazul $r = 2$)

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \sum\nolimits_{\substack{k_1, k_2 \in \mathbb{N} \\ k_1 + k_2 = 9}} C_9^{k_1} \cdot C_{9-k_1}^{k_2} \\ &= \sum\nolimits_{\substack{k_1, k_2 \in \mathbb{N} \\ k_1 + k_2 = 9}} \frac{9!}{k_1!\,(9-k_1)!} \cdot \frac{(9-k_1)!}{k_2!\,(9-k_1-k_2)!} \end{aligned}$$

[31] Este vorba de oricare patru pantofi drepți și un singur stâng astfel încât să nu avem nici o pereche; variantele sunt $(D1, D2, D3, D4, S5)$, $(D1, D2, D3, D5, S4)$, $(D1, D2, D4, D5, S3)$, $(D1, D3, D4, D5, S2)$, $(D2, D3, D4, D5, S1)$.

$$= \sum_{\substack{k_1,k_2\in\mathbb{N}\\ k_1+k_2=9}} \frac{9!}{k_1!k_2!}$$
$$= \sum_{\substack{k_1,k_2\in\mathbb{N}\\ k_1+k_2=9}} C_9^{k_1,k_2}.$$

Identificând, obținem, folosind astfel analiza combinatorie, identitatea[32]

$$|\Omega| = \sum_{\substack{k_1,k_2\in\mathbb{N}\\ k_1+k_2=9}} C_9^{k_1,k_2} = 2^9. \tag{1.31}$$

În ceea ce privește evenimentul cerut: trei persoane pot urca în primul vagon în C_9^3 moduri; deci cele șase persoane rămase pot urca în al doilea vagon în C_6^6 moduri. Prin urmare, numărul de cazuri favorabile este

$$C_9^3 \cdot C_6^6 = \frac{9!}{3!6!} = C_9^{3,6},$$

deci probabilitatea cerută este

$$\frac{C_9^{3,6}}{\sum_{\substack{k_1,k_2\in\mathbb{N}\\ k_1+k_2=9}} C_9^{k_1,k_2}} = \frac{C_9^{3,6}}{2^9}.$$

1.10.12 Să se numere (în două moduri diferite[33]) câte cuvinte din 9 litere se pot forma dacă avem 2 litere la dispoziție; mai întâi, direct, apoi concentrându-ne pe structura cuvantului, mai precis, presupunând că prima literă apare de k_1 ori, iar a doua apare de k_2 ori, unde $k_1 + k_2 = 9$. Să se scrie identitatea asociată.

Rezolvare:

Este o reformulare a problemei precedente.

1.10.13 Într-un tramvai cu trei vagoane urcă nouă pasageri. Care este probabilitatea ca în primul vagon să urce trei persoane, în al doilea două persoane și

[32] Să observăm că identitatea cerută se poate obține și direct din identitatea algebrică $(a+b)^9 = \sum_{\substack{k_1,k_2\in\mathbb{N}\\ k_1+k_2=9}} C_9^{k_1,k_2} a^{k_1} b^{k_2}$.

[33] Legat de numărarea în două moduri a elementelor aceleiași mulțimi vezi și Exemplul 1.94, Exercițiului 1.10.14, Exercițiului 1.10.16, Exercițiului 1.10.18, Exercițiului 1.10.60, Exercițiului 1.10.62, Exercițiului 1.10.64 și Exercițiului 1.10.67.

Pentru alte exemple de identități demostrate folosind analiza combinatorie vezi https://www.math.uaic.ro/~maticiuc/didactic/Applications_of_Probability_Theory.pdf, Sections I.5 și I.6.

în ultimul celelalte patru persoane? Dar ca într-un vagon să urce trei persoane, în alt vagon două persoane și în alt vagon patru persoane?

Care este probabilitatea ca în primul vagon să urce trei persoane? Dar ca în primul vagon să urce trei persoane, în al doilea trei persoane și în ultimul celelalte trei persoane?

Rezolvare:

Putem să formalizăm considerând evenimentele elementare de tipul unui $9-$uplu, i.e.

$$\Omega = \left\{ (PP1, PP2, \dots, PP9) : \quad PPi \in \{1,2,3\}, \quad i = \overline{1,9} \right\}$$

și astfel numărul tuturor cazurilor posibile este $|\Omega| = 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 3^9$.

Pe de altă parte, să observăm că putem formaliza și considerând evenimentele elementare de tipul unui $3-$uplu, i.e. $\omega = (VP1, VP2, VP3)$, astfel încât în fiecare $VPi \in \{1, 2, \dots, 9\}$, cu $i = \overline{1,3}$, sunt grupe de maxim 9 pasageri și are loc restricția $VP1 + VP2 + VP3 = 9$.

În primul vagon poate urca orice grup de $k_1 \in \{0, \dots, 9\}$ persoane, iar numărul variantelor este astfel $C_9^{k_1}$; apoi în al doilea vagon poate urca orice grup de $(9 - k_1)$ persoane (cele care au rămas), iar numărul variantelor este astfel $C_{9-k_1}^{k_2}$; apoi în al treilea vagon poate urca orice grup de $(9 - k_1 - k_2) = k_3$ persoane (cele care au rămas), iar numărul variantelor este astfel $C_{9-k_1-k_2}^{k_3} = 1$ (trebuie luat $k_1 + k_2 + k_3 = 9$). Prin urmare, numărul tuturor cazurilor posibile este, în acest caz, dat de (vezi și definiția coeficenților multinomiali $C_9^{k_1,k_2,k_3}$ dați de (1.28) în cazul $r = 3$)

$$\begin{aligned}
|\Omega| &= \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{N} \\ k_1+k_2+k_3=9}} C_9^{k_1} \cdot C_{9-k_1}^{k_2} \cdot C_{9-k_1-k_2}^{k_3} \\
&= \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{N} \\ k_1+k_2+k_3=9}} \frac{9!}{k_1!\,(9-k_1)!} \cdot \frac{(9-k_1)!}{k_2!\,(9-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(9-k_1-k_2)!}{k_3!\,(9-k_1-k_2-k_3)!} \\
&= \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{N} \\ k_1+k_2+k_3=9}} \frac{9!}{k_1! k_2! k_3!} \\
&= \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{N} \\ k_1+k_2+k_3=9}} C_9^{k_1,k_2,k_3}.
\end{aligned}$$

Identificând, obținem, folosind astfel analiza combinatorie, identitatea[34]

$$|\Omega| = \sum\nolimits_{\substack{k_1,k_2,k_3\in\mathbb{N}\\ k_1+k_2+k_3=9}} C_9^{k_1,k_2,k_3} = 3^9.$$

În ceea ce privește primul eveniment cerut: trei persoane pot urca în primul vagon în C_9^3 moduri; apoi, dintre cele șase persoane care au rămas, două persoane pot urca în al doilea vagon în C_6^2 moduri; deci cele patru persoane rămase pot urca în al treilea vagon în C_4^4 moduri. Prin urmare, numărul de cazuri favorabile este

$$C_9^3 \cdot C_6^2 \cdot C_4^4 = \frac{9!}{3!2!4!} = C_9^{3,2,4},$$

deci prima probabilitate cerută este

$$\frac{C_9^{3,2,4}}{\sum\nolimits_{\substack{k_1,k_2,k_3\in\mathbb{N}\\ k_1+k_2+k_3=9}} C_9^{k_1,k_2,k_3}} = \frac{C_9^{3,2,4}}{3^9}.$$

În ceea ce privește al doilea eveniment, diferența față de cazul precedent este că nu se știe vagonul exact al fiecărui grup în parte. Avem, prin urmare, următoarele 3! posibile structuri în cele trei vagoane:

$$(3,2,4)\,,(3,4,2)\,,(2,3,4)\,,(2,4,3)\,,(4,2,3)\,,(4,3,2)\,.$$

Fiecare structură este un eveniment de tipul celui precedent, deci numărul de cazuri favorabile este

$$3! \cdot C_9^{3,2,4}.$$

Prin urmare, a doua probabilitate cerută este $\dfrac{3! \cdot C_9^{3,2,4}}{3^9}$.

În ceea ce privește al treilea eveniment, trei persoane într-un vagon pot urca în C_9^3 moduri. Dacă trei persoane s-au urcat în primul vagon, atunci celelalte șase pot urca în celelalte două vagoane în 2^6 moduri. Deci numărul de cazuri favorabile este $C_9^3 \cdot 2^6$, iar a treia probabilitate cerută este $\dfrac{C_9^3 \cdot 2^6}{3^9}$.

Probabilitatea celui de-al patrulea eveniment este

$$\frac{C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3}{3^9} = \frac{C_9^{3,3,3}}{3^9}.$$

[34] Să observăm că identitatea cerută se poate obține și direct din identitatea algebrică $(a+b+c)^9 = \sum\nolimits_{\substack{k_1,k_2,k_3\in\mathbb{N}\\ k_1+k_2+k_3=9}} C_9^{k_1,k_2,k_3} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_2}$.

1.10.14 Să se numere (în două moduri diferite) câte cuvinte din 9 litere se pot forma dacă avem 3 litere la dispoziție; mai întâi, direct, apoi concentrându-ne pe structura cuvantului, mai precis, presupunând că prima literă apare de k_1 ori, a doua literă apare de k_2 ori, iar a treia apare de k_3 ori, unde $k_1+k_2+k_3 = 9$. Să se scrie identitatea asociată.

Rezolvare:

Este o reformulare a problemei precedente. Vezi și Nota 33.

1.10.15 Să se determine, în două moduri, numărul tuturor grupelor (de orice mărime) care se pot forma cu maxim n persoane? Să se deducă apoi identitatea de tipul (1.31), i.e.

$$1 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Rezolvare:

Formalizăm, văzând mulțimea Ω a tuturor evenimentelor elementare ca pe o mulțime de $n-$upluri:

$$\Omega = \left\{ (PP1, PP2, \ldots, PPn) : \quad PPi \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n} \right\}$$

(PPi poate să facă sau să nu facă parte dintr-un grup de maxim n persoane, deci sunt două variante posibile pentru fiecare PPi; vom nota cu 0 dacă PPi nu apare și respectiv cu 1 dacă PPi apare în acel grup).

Astfel, numărul tuturor cazurilor posibile este $|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$.

Pe de altă parte, așa cum am văzut în Exemplul 1.9, toate submulțimile care se pot forma cu cele n persoane (considerăm și mulțimea vidă) și este dată de $1 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$.

Identificând, obținem, folosind astfel analiza combinatorie, identitatea $1 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

1.10.16 Să se numere (în două moduri diferite) câte cuvinte din n litere se pot forma dacă avem 2 litere la dispoziție; mai întâi, direct, apoi concentrându-ne pe structura cuvantului, mai precis, presupunând că prima literă apare de k_1 ori, iar a doua literă apare de k_2 ori, unde $k_1 + k_2 = n$. Să se scrie identitatea asociată.

Rezolvare:

Este o reformulare a problemei precedente. Vezi și Nota 33.

1.10.17 **L.** este un student dintr-o grupă de 40 de studenți. Se formează comisii de câte 3 studenți.

(a) Câte comisii se pot forma?

(b) Câte comisii în care să fie și **L.** se pot forma? dar în care **L.** nu este?

(c) Să se deducă identitatea asociată punctelor (a) și (b).

(d) Câte comisii se pot forma în cazul în care comisia este formată dintr-un președinte, un secretar și un cenzor (prin urmare, contează ordinea în care sunt aleși cei trei membri)?

1.10.18 Să se numere (în două moduri diferite) câte grupe de k persoane se pot forma dintr-o mulțime cu n persoane; mai întâi, direct, apoi concentrându-ne pe o persoană anume, numită, de exemplu, persoana **1**, mai precis, numărând grupele care conțin persoana **1** și apoi grupele care nu conțin persoana **1**. Să se deducă identitatea asociată, i.e.

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k .$$

Rezolvare:

Este o reformulare a problemei precedente. Vezi și Nota 33.

1.10.19 Într-un lot de 100 de piese 5 sunt defecte. Se aleg la întâmplare 5 piese din acest lot. Care este probabilitatea ca printre piesele alese cel puțin una să fie defectă?

Rezolvare:

Să observăm că un sistem complet de evenimente este format de sistemul de evenimente $(X_k)_{k=\overline{0,5}}$, unde X_k este dat de **notația standard**

$$\begin{aligned} X_k &= \{k \textbf{\textit{ Succese}},\ (n-k)\ \textbf{\textit{Eșecuri}}\} \\ &= \{k \textbf{\textit{ Succese}} \text{ din } n \text{ încercări}\}, \quad k=\overline{0,n}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Deci

$$X_0 = \{\text{nici o piesă nu este defectă}\},$$

$$X_1 = \{\text{o piesă este defectă, patru sunt bune}\},$$

$$X_2 = \{\text{două piese sunt defecte, trei sunt bune}\},$$

$$X_3 = \{\text{trei piese sunt defecte, două sunt bune}\},$$

$$X_4 = \{\text{patru piese sunt defecte, una este bună}\},$$

$$X_5 = \{\text{toate piesele alese sunt defecte}\}.$$

Evenimentul cerut este $A = X_1 \cup \ldots \cup X_5$. Deci

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X_1 \cup \ldots \cup X_5) = \sum\nolimits_{i=1}^{5} \mathbb{P}(X_i).$$

Pe de altă parte, observăm că

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(X_0),$$

iar $\mathbb{P}(X_0)$ este mai ușor de calculat.

Avem C_{100}^5 moduri în care putem lua câte 5 piese din totalul de 100 și C_{95}^5 moduri în care putem lua câte 5 piese din cele 95 de piese bune. Deci $\mathbb{P}(X_0) = \dfrac{C_5^0 \cdot C_{95}^5}{C_{100}^5}$ și, prin urmare, $\mathbb{P}(A) = 1 - \dfrac{C_5^0 \cdot C_{95}^5}{C_{100}^5}$.

1.10.20 Din 100 de mere 10 sunt stricate. Scoatem la întâmplare 5 mere. Care este probabilitatea ca între cele 5 mere să existe și mere stricate?

Rezolvare:

Avem că evenimentul contrar, toate cele 5 mere sunt bune, are probabilitatea $\dfrac{C_{90}^5}{C_{100}^5}$. Probabilitatea cerută este $1 - \dfrac{C_{90}^5}{C_{100}^5}$.

1.10.21 Dacă se aruncă de patru ori un zar[35], care este probabilitatea să apară cel puțin o dată fața șase?

[35] Vezi și rezolvarea Exercițiului 1.10.57.

Dacă se aruncă două zaruri de 24 de ori, care este probabilitatea să apară cel puțin o dată fața șase pe ambele zaruri dintr-o pereche (i.e. cel puțin o dată dubla $(6,6)$)?

Dar să apară cel puțin o dată o față șase (pe cel puțin unul dintre zaruri dintr-o pereche)?

Dar să apară o singură dată fața șase pe un singur zar dintr-o pereche?

Să se scrie și spațiul de probabilitate în care se lucrează.

Rezolvare:

Dacă se aruncă de patru ori un zar, atunci numărul rezultatelor posibile este de 6^4. Evenimentul să apară, la patru aruncări, măcar o dată fața șase este complementar evenimentului de a nu apărea niciodată fața șase (apar doar fețele cu $1, 2, 3, 4$ sau 5 puncte). Deci numărul rezultatelor posibile să apară una din cele cinci fețe, la patru aruncări, este de 5^4. Prin urmare, probabilitatea ca la patru aruncări să nu apară niciodată fața șase este $\frac{5^4}{6^4}$, iar probabilitatea să apară măcar o dată fața șase este atunci $1 - \frac{5^4}{6^4}$.

Dacă se aruncă două zaruri, atunci numărul rezultatelor posibile este 36, deci dacă se aruncă de 24 de ori, atunci numărul rezultatelor posibile este 36^{24} (adică $24-$upluri în care fiecare poziție este o pereche de fețe de două zaruri, deci fiecare poziție are 36 variante posibile).

La o aruncare, numărul posibil de perechi diferite de dubla $(6,6)$ este 35 și deci, dacă se aruncă de 24 de ori, atunci numărul rezultatelor posibile în care nu apare niciodată dubla $(6,6)$ este 35^{24} (fiecare poziție a $24-$uplului are 35 variante posibile). Probabilitatea ca să nu apară, la 24 de aruncări, niciodată dubla $(6,6)$ este deci de $\frac{35^{24}}{36^{24}}$.

Prin urmare, probabilitatea ca să apară, la 24 de aruncări, cel puțin o dată dubla $(6,6)$ este de $1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \simeq 0.4914$.

La o aruncare, numărul posibil de perechi care nu conțin fața șase este 25 (sunt 11 perechi care conțin măcar o față de șase puncte) deci, dacă se aruncă de 24 de ori, atunci numărul rezultatelor posibile în care nu apare niciodată o față șase este 25^{24} (fiecare poziție a $24-$uplului are 25 variante posibile). Prin urmare, probabilitatea ca să apară, la 24 de aruncări, cel puțin o dată o față șase este de $1 - \dfrac{25^{24}}{36^{24}} \simeq 0.9998$.

La o aruncare, numărul posibil de perechi care conțin fața șase o singură dată este 10, iar numărul posibil de perechi care nu conțin nici o față șase sau două fețe șase este 26 (sunt 25 variante fără nici o față cu șase puncte și 1 variante cu două fețe de șase puncte). Dacă se aruncă de 24 de ori, atunci numărul rezultatelor posibile în care apare o singură dată fața șase este dat de raționamentul următor: o poziție a $24-$uplului (oricare din cele 24 de poziții) care are o singură față cu șase puncte are 10 variante posibile; apoi celelalte 23 de poziții nu mai au voie să conțină o singură față cu șase puncte, deci sunt 26^{23} variante posibile. Prin urmare, probabilitatea ca să apară, la 24 de aruncări, o singură dată fața șase este $C_{24}^{1} \dfrac{10 \cdot 26^{23}}{36^{24}}$.

Să menționam că probabilitatea se poate calcula folosind și schema binomială; astfel, probabilitatea cerută este $C_{24}^{1} \left(\frac{10}{36}\right)^{1} \left(\frac{26}{36}\right)^{23}$.

1.10.22 Să definim A ca fiind evenimentul în care fața șase apare cel puțin o dată la aruncarea unui zar de 4 ori și B ca fiind evenimentul în care fața șase apare de cel puțin două ori la aruncarea a două zaruri de 24 de ori (pe perechi diferite de zaruri, adică excludem apariția dublei $(6, 6)$). Care dintre cele două evenimente este mai probabil?

Rezolvare:

Se arată că $\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = \dfrac{5^4}{6^4}$ și că $\mathbb{P}\left(\bar{B}\right) = \dfrac{26^{24}}{36^{24}} + C_{24}^{1} \dfrac{10 \cdot 26^{23}}{36^{24}}$ și se compară cele două valori.

1.10.23 La un joc participă doi jucători. Partida este câștigată de jucătorul care câștigă trei jocuri. Dacă jocul este forțat să se întrerupă la scorul de $2-1$, atunci cum trebuie împărțită miza?

Rezolvare:

Mai întâi trebuie stabilit criteriul de împărțire a mizei. Astfel, se poate propune ca fiecare jucător să ia o parte din miză proporțională cu probabilitatea pe care o are de a câștiga jocul, dacă acesta ar continua. Să calculăm aceste probabilități.

Este evident că dacă se continuă jocul, atunci în maxim două jocuri se poate stabili câștigătorul. Să notăm cu A jucătorul care a câștigat două partide și cu B pe cel care a câștigat o partidă. Atunci, după cele două jocuri avem patru posibilități: (A, A), (A, B), (B, A), (B, B) (prima poziție înseamnă cine a câștigat primul joc, iar a doua cine a câștigat al doilea joc). Deci șansele de câștig ale jucătorului A sunt de $3/4$, iar ale lui B sunt de $1/4$ (iar aceasta este regula după care trebuie împărțită miza).

1.10.24 O urnă conține patru bile albe, dintre care două numerotate cu 1 și două numerotate cu 2, și cinci bile negre, dintre care trei numerotate cu 1 și două numerotate cu 2. Se extrage o bilă din urnă. Care este probabilitatea ca bila extrasă să aibă numărul 1, condiționată de faptul că bila extrasă este albă?

Rezolvare:

Să notăm evenimentele $A = \{\text{bila extrasă este albă}\}$, $B = \{\text{bila extrasă are numărul } 1\}$. Atunci, $\mathbb{P}(A) = 4/9$, $\mathbb{P}(B) = 5/9$, iar $\mathbb{P}(A \cap B) = 2/9$. Conform definiției (1.12) a probabilității condiționate, probabilitatea cerută este

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{2/9}{4/9} = \frac{2}{4}.$$

Pe de altă parte, se poate vedea și direct că $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{2}{4}$ (sunt 4 cazuri posibile, în care bila este albă, și 2 cazuri favorabile).

1.10.25 O urnă conține trei bile albe și patru bile negre. Se extrag simultan (i.e. succesiv și fără revenirea în urnă a bilei extrase) două bile din urnă. Care este probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albă, în ipoteza că prima este albă?

Rezolvare:

Să folosim **notația standard**

$$A_i = \{\text{la extragerea } i \text{ apare } \textbf{\textit{Succesul}}\}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.33}$$

adică să notăm cu A_i evenimentul obținerii unei bile albe la extragerea $i = \overline{1, 2}$.

Atunci, $\mathbb{P}(A_1) = 3/7$, iar $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 6/42$, deoarece numărul cazurilor posibile este $A_7^2 = 42$, iar cel al cazurilor favorabile este $A_3^2 = 6$. Conform definiției (1.12) probabilitatea cerută este dată de $\mathbb{P}(A_2|A_1) = \dfrac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \dfrac{1/7}{3/7} = \dfrac{1}{3}$.

Pe de altă parte, se poate vedea și direct (este utilă și reprezentarea celor două alegeri sub forma unei structuri de tip arbore) că $\mathbb{P}(A_2|A_1) = 2/6$ deoarece sunt 6 cazuri posibile (după ce s-a extras prima bilă și este albă în urnă au rămas două bile albe și patru bile negre) și 2 cazuri favorabile.

1.10.26 O urnă conține 16 bile numerotate de la 1 la 16. Primele trei bile sunt albe, următoarele zece sunt negre, iar ultimele trei sunt roșii. Se extrage o bilă din această urnă. Să notăm evenimentele $A = \{$bila extrasă este neagră$\}$, $B = \{$bila extrasă are numărul mai mic sau egal decât $9\}$. Să se calculeze $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A|B)$ și $\mathbb{P}(B|A)$.

Aceleași cerințe în cazul în care eliminăm ultima bilă roșie.

Rezolvare:

Avem $\mathbb{P}(A) = 10/16,\ \mathbb{P}(B) = 9/16,\ \mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 6/16,\ \mathbb{P}\left(\bar{B}\right) = 7/16$. Avem și $\mathbb{P}(A \cap B) = 6/16$, deci $\mathbb{P}(B|A) = 6/10$. De asemenea, putem determina și direct $\mathbb{P}(B|A) = 6/10$, iar $\mathbb{P}\left(B|\bar{A}\right) = 3/6$. Pe de altă parte, $\mathbb{P}(A|B) = 6/9$, iar $\mathbb{P}\left(A|\bar{B}\right) = 4/7$. Deci observăm că fiecare din evenimentele A sau B își schimbă probabilitatea în funcție de realizarea sau nu a celuilalt. Deci aceste două sunt dependente unul de celălalt.

1.10.27 Se aruncă un zar o singură dată. Se consideră evenimentele $A = \{$se obține una dintre fețele $1, 2$ sau $3\}$, $B = \{$se obține una dintre fețele $2, 3, 4$ sau $5\}$. Sunt independente cele două evenimente?

Rezolvare:

Avem $\mathbb{P}(A) = 3/6,\ \mathbb{P}(B) = 4/6$ și $\mathbb{P}(A \cap B) = 2/6$. Deci este verificată relația $\mathbb{P}(A \cap B) = 3/6 \cdot 4/6 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, ceea ce înseamnă că cele două evenimente sunt independente.

1.10.28 Doi arcași trag asupra unei ținte. Primul nimerește această țintă cu probabilitatea de $7/9$, iar al doilea cu probabilitatea $9/11$. Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă cel puțin o dată?

Rezolvare:

Să folosim notația standard A_i, unde $i = \overline{1,2}$, dată de (1.33), adică să notăm cu A_i evenimentul nimeririi țintei la de către arcașul $i = \overline{1,2}$.

Să observăm că aceste evenimente sunt independente, dar nu sunt și disjuncte (sunt compatibile).

Trebuie determinat $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$. Folosind (1.14) obținem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2) \\ &= \frac{7}{9} + \frac{9}{11} - \frac{7}{9} \cdot \frac{9}{11}.\end{aligned}$$

1.10.29 Trei arcași trag asupra unei ținte. Primul nimerește această țintă cu probabilitatea de $2/3$, al doilea cu probabilitatea $3/4$, iar al treilea cu probabilitatea $4/5$. Care este probabilitatea[36] ca ținta să fie atinsă de trei ori? Dar probabilitatea ca ținta să fie atinsă de două ori? Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă cel puțin o dată?

Rezolvare:

Să folosim notația standard A_i, unde $i = \overline{1,3}$, dată de (1.33), adică să notăm cu A_i evenimentul nimeririi țintei la de către arcașul $i = \overline{1,3}$.

Avem $\mathbb{P}(A_1) = 2/3$, $\mathbb{P}(A_2) = 3/4$, $\mathbb{P}(A_3) = 4/5$.

Prima probabilitate cerută este $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) = 2/5$ (deoarece evenimentele sunt independente).

A doua probabilitate cerută este a evenimentului $A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$ sau $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$ sau $\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$. Cele trei mulțimi de intersecție sunt evenimente disjuncte, iar evenimentele A_1, A_2, A_3 sunt independente, prin urmare obținem

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right)\right] \\ &= \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) + \mathbb{P}\left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) + \mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_3\right) + \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right) \cdot \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{13}{30}.\end{aligned}$$

Pentru a treia probabilitate cerută este mai ușor să calculăm probabilitatea evenimentului contrar lui $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, care este $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$. Deci, evenimentele indicate fiind independente, obținem

$$\mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) = \mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_3\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{60}.$$

[36] Probabilitatea se poate calcula folosind și schema lui Poisson.

Deci probabilitatea evenimentului cerut este

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) = 1 - \frac{1}{60}.$$

1.10.30 Fie $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ un sistem de evenimente cu $\mathbb{P}\left(A_i\right) = p_i$, cu $i = \overline{1,n}$. Să se determine probabilitatea realizării a cel puțin unui eveniment A_i.

Rezolvare:

Să definim X ca fiind evenimentul care constă în realizarea a cel puțin unui eveniment A_i, $i = \overline{1,n}$. Atunci[37], $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, iar acum folosim formula (1.16):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{1\le i\le n} A_i\Big) = & \sum_{1\le i\le n} \mathbb{P}\left(A_i\right) - \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) \\ & + \sum_{1\le i<j<k\le n} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - \ldots \\ & + (-1)^{n-1}\,\mathbb{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right). \end{aligned}$$

1.10.31 Într-o urnă sunt cinci bile albe și cinci bile negre. Se scot trei bile simultan. Care este probabilitatea obținerii a trei bile albe? Dar probabilitatea obținerii a două bile albe și a uneia negre? Care este probabilitatea obținerii a cel puțin două bile albe? Dar a cel puțin unei bile albe?

Rezolvare:

Să folosim notația standard A_i, unde $i = \overline{1,3}$, dată de (1.33), adică să notăm cu A_i evenimentul ca bila să fie albă la extragerea $i = \overline{1,3}$.

Avem imediat că $\mathbb{P}\left(A_1\right) = 5/10$, $\mathbb{P}\left(A_2|A_1\right) = 4/9$, $\mathbb{P}\left(A_3|A_1 \cap A_2\right) = 3/8$ (este utilă și reprezentarea celor trei alegeri sub forma unei structuri de tip arbore).

Acum, folosind regula (1.20) de înmulțire a probabilităților obținem

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_2|A_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_3|A_1 \cap A_2\right) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}.$$

Să observăm că probabilitatea precedentă se poate calcula folosind și schema hipergeometrică. În acest sens, alegem o grupă de 3 bile din cele 10 date și

[37] Vezi și rezolvarea Exercițiului 1.10.51.

dorim ca grupa să aibă următoarea structură: 3 bile albe (oricare 3 din cele 5 albe) și 0 bile negre (oricare 0 din cele 5 negre); astfel probabilitatea ceruta este

$$\mathbb{P}\left(\{\text{trei bile A din trei încercări}\}\right) = \frac{C_5^3 \cdot C_5^0}{C_{10}^3} = \frac{5! \cdot 7!}{2! \cdot 10!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{12}.$$

A doua probabilitate cerută este a evenimentului $A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$ sau $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$ sau $\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$. Cele trei mulțimi de intersecție sunt evenimente disjuncte, prin urmare obținem

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right)\right] \\
&= \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) + \mathbb{P}\left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) + \mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \\
&= \mathbb{P}\left(A_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_2 | A_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_3 | A_1 \cap A_2\right) + \mathbb{P}\left(A_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_2 | A_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_3 | A_1 \cap \bar{A}_2\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_2 | \bar{A}_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_3 | \bar{A}_1 \cap A_2\right) \\
&= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \\
&= \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} \\
&= \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Într-adevăr, de exemplu, $\mathbb{P}\left(\bar{A}_3 | A_1 \cap A_2\right) = 5/8$ este probabilitatea să extragi o bilă neagră în ipoteza că evenimentul $A_1 \cap A_2$ este realizat, adică urna conține 3 bile albe și 5 bile negre. Apoi $\mathbb{P}\left(A_3 | A_1 \cap \bar{A}_2\right) = 4/8$ este probabilitatea să extragi o bilă albă în ipoteza că evenimentul $A_1 \cap \bar{A}_2$ este realizat, adică urna conține 4 bile albe și 4 bile negre.

Să observăm că probabilitatea precedentă se poate calcula folosind și schema hipergeometrică. În acest sens, alegem o grupă de 3 bile din cele 10 date și dorim ca grupa să aibă următoarea structură: 2 bile albe (oricare 2 din cele 5 albe) și 1 bile negre (oricare 1 din cele 5 negre); astfel probabilitatea ceruta este

$$\mathbb{P}\left(\{\text{două bile A din trei încercări}\}\right) = \frac{C_5^2 \cdot C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{5! \cdot 5! \cdot 7!}{2! \cdot 4! \cdot 10!} = 3 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 5}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{5}{12}.$$

A treia probabilitate cerută este a evenimentului

$$\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \cup \left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right).$$

Se va obține suma celor două probabilități precedente.

Pentru al patrulea eveniment cerut trebuie determinată, mai întâi, probabilitatea obținerii unei bile albe și a două negre:

$$\left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right).$$

Evenimentul obținerii a cel puțin unei bile albe este atunci

$$\begin{aligned}&\left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right)\\ &\cup \left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \cup \left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right),\end{aligned}$$

iar probabilitatea lui este suma probabilităților fiecărui termen al reuniunii.

Este mai ușor obținerea evenimentului contrar evenimentului patru: nu se obține nici o bilă albă. Acesta este deci $\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right)$, iar apoi se va calcula $\mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right)$.

1.10.32 Într-un lot de 48 de piese 3 sunt defecte, iar în alt lot de 50 de piese 3 sunt defecte. Din fiecare lot se iau câte 3 piese. Care este probabilitatea ca, din primul lot, primele două piese să fie bune și a treia să fie defectă, iar, din al doilea lot, toate trei să fie bune?

Rezolvare:

Să notăm evenimentele:

$A = \{$din primul lot primele două piese luate sunt bune, iar a treia este defectă$\}$,

$B = \{$din al doilea lot toate cele 3 piese luate sunt bune$\}$,

$A_i = \{$piesa i din primul lot este bună$\}$, $\quad i = \overline{1,3}$,

$B_j = \{$piesa j din al doilea lot este bună$\}$, $\quad j = \overline{1,3}$.

Deoarece A, B sunt independente avem că $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Pe de altă parte (este utilă și reprezentarea celor trei alegeri sub forma unei structuri de tip arbore),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_3|A_1 \cap A_2\right)\\ &= \frac{45}{48} \cdot \frac{44}{47} \cdot \frac{3}{46},\end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2) \\ &= \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{48}.\end{aligned}$$

Să observăm că probabilitatea evenimentului A nu se poate calcula folosind și schema hipergeometrică deoarece se cere probabilitatea evenimentului ca, dintre cele trei piese din primul lot, primele două să fie bune și a treia defectă, deci contează ordinea de apariție. Pe de altă parte, probabilitatea evenimentului B se poate calcula folosind schema hipergeometrică. În acest sens, alegem o grupă de 3 piese din cele 50 date și dorim ca grupa să aibă următoarea structură: 3 piese bune (oricare 3 din cele 47 bune) și 0 piese defecte (oricare 0 din cele 3 defecte); astfel, probabilitatea ceruta este

$$\mathbb{P}(\{\text{trei piese defecte din trei încercări}\}) = \frac{C_{47}^3 \cdot C_3^0}{C_{50}^3} = \frac{44! \cdot 50!}{47! \cdot 47!} = \frac{48 \cdot 49 \cdot 50}{45 \cdot 46 \cdot 47}.$$

Deci

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{45}{48} \cdot \frac{44}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{48} = \frac{297}{6273}.$$

1.10.33 O urnă conține trei bile albe și patru bile negre, iar altă urnă conține patru bile albe și cinci bile negre. Se extrage o bilă la întâmplare din una din cele două urne. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă?

Rezolvare:

Să notăm evenimentele

$$X = \{\text{bila aleasă este albă}\},$$

$$A_1 = \{\text{urna aleasă este prima}\},$$

$$A_2 = \{\text{urna aleasă este a doua}\} = \bar{A}_1.$$

Este mai dificil de spus imediat cine este $\mathbb{P}(X)$. Dar, conform enunțului, avem că $\mathbb{P}(X|A_1) = \frac{3}{7}$, $\mathbb{P}(X|A_2) = \frac{4}{9}$ (este utilă și reprezentarea celor două alegeri sub forma unei structuri de tip arbore).

Folosind formula probabilității totale (1.21) obținem și probabilitatea cerută:

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(X|A_1) + \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(X|A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{55}{126}.$$

1.10.34 Într-un depozit se aduc piese de la trei ateliere. Primul are două mașini care fabrică aceste piese și care dau 3% rebut. Al doilea are două mașini, care dau 2% rebut. Al treilea are trei mașini, care dau 3% rebut. Care este probabilitatea ca o piesă luată din depozit, la întâmplare, să fie defectă? (fiecare mașină produce același număr de piese în unitatea de timp)

Rezolvare:

Să notăm:

$$X = \{\text{piesa aleasă este defectă}\},$$
$$A_i = \{\text{piesa aleasă provine de la atelierul } i\}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Evenimentele A_1, A_2 și A_3 formează un sistem complet de evenimente. Având în vedere numărul diferit de piese de la cele trei ateliere, avem

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{7}, \quad \mathbb{P}(A_2) = \frac{2}{7}, \quad \mathbb{P}(A_3) = \frac{3}{7}.$$

Pe de altă parte (este utilă și reprezentarea celor două alegeri sub forma unei structuri de tip arbore),

$$\mathbb{P}(X|A_1) = \frac{3}{100}, \quad \mathbb{P}(X|A_2) = \frac{2}{100}, \quad \mathbb{P}(X|A_3) = \frac{3}{100}.$$

Deci, folosind formula probabilității totale (1.21), obținem și probabilitatea cerută:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X) &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(X|A_1) + \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(X|A_2) + \mathbb{P}(A_3) \cdot \mathbb{P}(X|A_3) \\ &= \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{100} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{100} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{100} = \frac{19}{700}.\end{aligned}$$

1.10.35 O urnă conține trei bile albe și patru bile negre, iar altă urnă conține patru bile albe și cinci bile negre. Se extrage o bilă la întâmplare din una din cele două urne. Dacă bila extrasă este albă, care este probabilitatea ca ea să provină din prima urnă?

Rezolvare:

Se cere $\mathbb{P}(A_1|X)$ (vezi notațiile Exercițiului 1.10.33). Avem că $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 1/2$.

Folosind formula (1.23) a lui Bayes obținem (este utilă și reprezentarea celor două alegeri sub forma unei structuri de tip arbore):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1|X) &= \frac{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(X|A_1)}{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(X|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(X|A_2)} \\ &= \frac{1/2 \cdot 3/7}{1/2 \cdot 3/7 + 1/2 \cdot 4/9} \\ &= \frac{27}{55}.\end{aligned}$$

1.10.36 Un student are trei conturi de e-mail. Cele mai multe dintre mesaje (mai precis 70%) ajung în primul cont. Alte 20% ajung în contul al doilea, iar 10% ajung în cel de-al treilea cont. Dintre mesaje doar 1% sunt de tip *spam* în primul cont, iar pentru celelalte conturi ratele sunt de 2% și respectiv 5%. Care este probabilitatea ca un mesaj primit de acel student să fie de tip *spam*?

Care este probabilitatea ca un mesaj care s-a dovedit a fi un *spam* să provină de la al treilea cont?

Rezolvare:

Se folosește formula (1.23) a lui Bayes. Este utilă și reprezentarea celor două alegeri sub forma unei structuri de tip arbore.

1.10.37 La întrebarea de la un examen un student ori știe răspunsul ori îl ghicește. Fie p probabilitatea ca studentul să știe răspunsul. Să presupunem că probabilitatea ca studentul să răspundă corect în condițiile în care acesta nu știe răspunsul este de $1/m$ (unde m este numărul de posibilități alternative). Care este probabilitatea ca acest student să știe răspunsul la întrebarea examenului în condițiile în care răspunsul lui este corect?

1.10.38 Într-un depozit se aduc piese de la trei ateliere. Primul are două mașini care fabrică aceste piese și care dau 3% rebut. Al doilea are două mașini, care dau 2% rebut. Al treilea are trei mașini, care dau 3% rebut. Din depozit a fost luată o piesă, la întâmplare, care s-a dovedit a fi defectă. Care este probabilitatea ca piesa luată din depozit să provină de la al doilea atelier? Dar probabilitatea ca piesa luată din depozit să provină de la al treilea atelier?

Rezolvare:

Se cer $\mathbb{P}(A_2|X)$ și $\mathbb{P}(A_3|X)$ (vezi notațiile Exercițiului 1.10.34). Folosind formula (1.23) a lui Bayes obținem (este utilă și reprezentarea celor două alegeri sub forma unei structuri de tip arbore):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2|X) &= \frac{\mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(X|A_2)}{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(X|A_1)+\mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(X|A_2)+\mathbb{P}(A_3)\,\mathbb{P}(X|A_3)}\\ &= \frac{2/7\cdot 2/100}{2/7\cdot 3/100+2/7\cdot 2/100+3/7\cdot 3/100}\\ &= \frac{4}{19}\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_3|X) &= \frac{\mathbb{P}(A_3)\,\mathbb{P}(X|A_3)}{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(X|A_1)+\mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(X|A_2)+\mathbb{P}(A_3)\,\mathbb{P}(X|A_3)}\\ &= \frac{3/7\cdot 3/100}{2/7\cdot 3/100+2/7\cdot 2/100+3/7\cdot 3/100}\\ &= \frac{9}{19}.\end{aligned}$$

1.10.39 Patru urne au următoarele distribuții: prima urnă conține 7 bile albe și 2 bile negre, a doua urnă conține 8 bile albe și 4 bile negre, a treia conține 10 bile albe și 12 bile negre, iar a patra urnă conține 8 bile albe și 12 bile negre. Se extrage o bilă la întâmplare din una din cele patru urne. Care este probabilitatea de a extrage o bilă albă?

Dacă bila extrasă este albă, care este probabilitatea ca ea să provină din cea de a treia urnă?

Rezolvare:

Să notăm evenimentele $X = \{\text{bila aleasă este albă}\}$, $A_i = \{\text{urna aleasă este } i\}$, $i=\overline{1,4}$. Evenimentele $(A_i)_{i=\overline{1,4}}$ formează un sistem complet de evenimente.

Avem că $\mathbb{P}(A_i) = 1/4$, $i=\overline{1,4}$, iar $\mathbb{P}(X|A_1) = 7/9$, $\mathbb{P}(X|A_2) = 8/12$, $\mathbb{P}(X|A_3) = 10/22$, $\mathbb{P}(X|A_3) = 8/20$.

Mai întâi se cere $\mathbb{P}(X)$. Folosind formula probabilității totale (1.21) obținem (este utilă și reprezentarea celor două alegeri sub forma unei structuri de tip arbore)

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(X|A_1)+\mathbb{P}(A_2)\cdot\mathbb{P}(X|A_2)$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathbb{P}(A_3)\cdot\mathbb{P}(X|A_3)+\mathbb{P}(A_4)\cdot\mathbb{P}(X|A_4)\\
&=1/4\cdot 7/9+1/4\cdot 8/12+1/4\cdot 10/22+1/4\cdot 8/20\\
&=569/990.
\end{aligned}
$$

Apoi se cere $\mathbb{P}(A_3|X)$. Folosind formula (1.23) a lui Bayes obținem:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_3|X) &= \frac{\mathbb{P}(A_3)\,\mathbb{P}(X|A_3)}{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(X|A_1)+\ldots+\mathbb{P}(A_4)\,\mathbb{P}(X|A_4)}\\
&= \frac{1/4\cdot 10/22}{1/4\cdot 7/9+1/4\cdot 8/12+1/4\cdot 10/22+1/4\cdot 8/20}\\
&= \frac{225}{1138}.
\end{aligned}
$$

1.10.40 Un laborator de teste medicale detectează cu probabilitatea de 0.95 prezența unei afecțiuni, când afecțiunea este prezentă în realitate. De asemenea, testul este pozitiv pentru 1% dintre cei care fac testul, dar care nu au acea afecțiune. Să presupunem că 0.5% din populație are într-adevăr afecțiunea. Testăm, la întâmplare, o persoană și observăm că testul a fost pozitiv. Care este probabilitatea ca persoana să aibă într-adevăr afecțiunea?

Rezolvare:

Folosim notațiile $B = \{\text{persoana este bolnavă}\}$, $T+ = \{\text{testul este pozitiv}\}$. Se va determina $\mathbb{P}(B|T+)$ folosind formula (1.23) a lui Bayes.

1.10.41 Un magazin de electronice vinde DVD playere de la trei producători diferiți, 50% de la firma 1 (cele mai ieftine), 30% sunt de la firma 2, și 20% sunt de la firma 3. Fiecare producător oferă 1 an de garanție. Se știe că 25% din DVD playerele de la firma 1 necesită reparații în cadrul garanție, iar procentajele pentru produsele de la firmele 2 și 3 sunt de 20% și de respectiv 10%.

(a) Care este probabilitatea ca un DVD player cumpărat la întâmplare din magazin să provină de la firma 2 și să necesite reparații în cadrul garanției?

(b) Dacă un cumpărător se întoarce în magazin cu un DVD player care necesită reparații în cadrul garanției, care este probabilitatea ca acel DVD player să provină de la firma 3?

Rezolvare:

Se folosește formula (1.23) a lui Bayes.

1.10.42 Un mesaj este trimis ca o succesiune de 0 și 1. Probabilitatea ca 0 să fie transmis, la un moment dat, este $1/3$. Dacă a fost transmisă cifra 1, atunci, cu o probabilitate de 0.2, va fi recepționat greșit, drept 0 și dacă a fost transmisă cifra 0, atunci, cu o probabilitate de 0.1, va fi recepționat greșit, drept 1.

(a) Care este probabilitatea ca, într-un moment arbitrar, semnalul recepționat să fie 0.

(b) Dacă a fost recepționat 1, care este probabilitatea ca cifra 0 să fi fost transmisă.

1.10.43 O companie de asigurări lucrează cu două categorii de persoane: cele care sunt predispuse la accidente și cele care nu sunt. Datele indică faptul că o persoană predispusă la accidente va avea un accident într-o perioadă de 1 an cu probabilitatea 0.1; probabilitatea pentru toți ceilalți este de 0.05. Să presupunem că probabilitatea ca un nou asigurat să fie predispus la accidente este de 0.2.

(a) Care este probabilitatea ca un nou asigurat să aibă un accident în primul an?

(b) În cazul în care un nou asigurat are un accident în primul an, care este probabilitatea că acesta să fie predispus la accidente?

Rezolvare:

Se pot folosi notațiile $A = \{\text{noul asigurat este predispus la accidente}\}$ și $B = \{\text{noul asigurat are accidente în primul an}\}$.

1.10.44 Două urne conțin bile albe și negre cu compozițiile (n, m) și respectiv (r, s).

(a) Dacă se extrage o bilă la întâmplare din una din urne, care este probabilitatea ca bila aleasă să fie albă?

(b) Se extrage o bilă la întâmplare din prima urnă și apoi se pune în a doua urnă. Care este probabilitatea ca o bilă aleasă din urna a doua să fie albă?

Rezolvare:

Se folosește formula probabilității totale (1.21).

1.10.45 Următorul model poate fi folosit pentru simularea răspândirii unei boli contagioase. Avem o cutie cu g bile galbene și m bile magenta. Extragem o bilă și apoi o punem înapoi împreună cu i copii (bile „infectate”) de aceeași culoare. Apoi procesul este repetat.

(a) Care este probabilitatea ca primele trei bile alese să fie magenta.

(b) Care este probabilitatea ca a treia bilă aleasă să fie galbenă. Este egală cu probabilitatea ca a doua bila aleasă să fie galbenă? dar cu probabilitatea ca prima bila aleasă să fie galbenă?

(c) În condițiile în care s-a observat că a doua bilă extrasă este galbenă, care e probabilitatea ca prima bila aleasă să fi fost magenta?

1.10.46 Un examen oral constă în răspusul corect la un bilet de examinare ales, la întâmplare, din 25 de bilete. Dintre acestea doar 15 conțin subiecte învățate de studentul **L.**. Care este probabilitatea ca **L.** să promoveze examenul dacă este primul care alege biletul? Dar dacă este al doilea? Dar dacă este al treilea student[38] care alege un bilet?

1.10.47 Avem trei loturi de câte 100 de piese. În primul lot trei piese sunt defecte, în al doilea lot patru piese sunt defecte, iar în al treilea lot cinci piese sunt defecte. Din fiecare lot se ia câte o piesă. Care este probabilitatea obținerii a două piese bune și a uneia defecte?

Rezolvare:

Să folosim notația standard A_i, unde $i = \overline{1,3}$, dată de (1.33), adică să notăm cu A_i evenimentul extragerii unei piese bune din lotul L_i, $i = \overline{1,3}$.

Acestea sunt evenimente independente. Probabilitatea $p_i = \mathbb{P}(A_i)$, deci $p_1 = 97/100$, $p_2 = 96/100$, $p_3 = 95/100$ și respectiv $q_1 = 1 - p_1 = 3/100$, $q_2 = 4/100$, $q_3 = 5/100$. Atunci, conform schemei lui Poisson, probabilitatea ca două din cele trei piese să fie bune (i.e. $k = 2$ piese bune și $(3-2)$ piese defecte) este coeficientul corespunzător lui x^2 din polinomul

$$\begin{aligned} Q(x) &= (p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2)(p_3 x + q_3) \\ &= p_1 p_2 p_3 x^3 + (p_1 p_2 q_3 + p_1 p_3 q_2 + p_2 p_3 q_1) x^2 \\ &\quad + (p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2) x + q_1 q_2 q_3, \end{aligned}$$

adică probabilitatea cerută este $p_1 p_2 q_3 + p_1 p_3 q_2 + p_2 p_3 q_1$.

1.10.48 Fie trei urne cu următoarele proporții de bile albe și negre. Urna U_1 : trei albe și patru negre, urna U_2 : patru albe și cinci negre, iar urna U_3 : cinci albe și șase negre. Dacă din fiecare urnă se extrage câte o bilă atunci care este

[38] Vezi și Exercițiul 1.10.8, Remarca 2.137 și Exercițiul 2.4.27.

probabilitatea ca bilele extrase să fie albe? Care este probabilitatea ca una să fie albă și două negre? Dar probabilitatea ca cele trei bile extrase să fie negre?

Rezolvare:

Să folosim notația standard A_i, unde $i = \overline{1,3}$, dată de (1.33), adică să notăm cu A_i evenimentul extragerii unei bile albe din urna U_i, $i = \overline{1,3}$.

Acestea sunt evenimente independente. Probabilitatea $p_i = \mathbb{P}(A_i)$, deci $p_1 = 3/7$, $p_2 = 4/9$, $p_3 = 5/11$ și respectiv $q_1 = 1 - p_1 = 4/7$, $q_2 = 5/9$, $q_3 = 6/11$.

Atunci, probabilitatea ca cele trei bile extrase să fie albe (i.e. $k = 3$ bile albe și $(3-3)$ bile negre) este coeficientul corespunzător lui x^3 din polinomul $Q(x) = (p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2)(p_3 x + q_3)$, adică probabilitatea cerută este $p_1 p_2 p_3$.

De asemenea, probabilitatea ca să extragem $k = 1$ bile albe și $(3-1)$ bile negre este coeficientul corespunzător lui x^1 din polinomul $Q(x)$, adică probabilitatea cerută este $p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2$.

Probabilitatea ca să extragem $k = 0$ bile albe și $(3-0)$ bile negre este coeficientul corespunzător lui x^0 din polinomul $Q(x)$, adică probabilitatea cerută este $q_1 q_2 q_3$.

1.10.49 Patru arcași trag asupra unei ținte. Primul atinge ținta cu probabilitatea $2/3$, al doilea cu probabilitatea $3/4$, al treilea cu probabilitatea $4/5$, iar al patrulea cu probabilitatea $5/6$. Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă de 3 ori?

Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă de cel puțin 2 ori? Dar probabilitatea ca ținta să fie atinsă de cel mult 2 ori?

Rezolvare:

Să folosim notația standard A_i, unde $i = \overline{1,4}$, dată de (1.33), adică să notăm cu A_i evenimentul atingerii țintei de către arcașul $i = \overline{1,4}$.

Acestea sunt evenimente independente. Probabilitatea $p_i = \mathbb{P}(A_i)$, deci $p_1 = 2/3$, $p_2 = 3/4$, $p_3 = 4/5$, $p_4 = 5/6$ și respectiv $q_1 = 1 - p_1 = 1/3$, $q_2 = 1/4$, $q_3 = 1/5$, $q_4 = 1/6$.

Să folosim și notația standard X_k, unde $k = \overline{0,4}$, dată de (1.32), adică să notăm cu X_k evenimentul ca ținta să fie atinsă de k ori, unde $k = \overline{0,4}$.

Atunci, putem calcula probabilitatea $\mathbb{P}(X_0)$ folosind și scrierea

$$X_0 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 .$$

De asemenea, folosind schema lui Poisson (în cazul $k = 0$ atingeri și $(4-0)$ ratări), probabilitatea ca ținta să nu fie atinsă niciodată este coeficientul corespunzător lui x^0 din polinomul

$$\begin{aligned} Q(x) &= (p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2)(p_3 x + q_3)(p_4 x + q_4) \\ &= \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{5}x + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right). \end{aligned}$$

Deci

$$\mathbb{P}(X_0) = q_1 q_2 q_3 q_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{360}.$$

Putem calcula probabilitatea $\mathbb{P}(X_1)$ folosind și scrierea

$$\begin{aligned} X_1 = &\left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4\right) \\ &\cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4\right). \end{aligned}$$

De asemenea, folosind schema lui Poisson (în cazul $k = 1$ atingeri și $(4-1)$ ratări), probabilitatea ca ținta să fie atinsă o singură dată este coeficientul corespunzător lui x^1 din polinomul $Q(x)$. Deci

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1) &= p_1 q_2 q_3 q_4 + p_2 q_1 q_3 q_4 + p_3 q_1 q_2 q_4 + p_4 q_1 q_2 q_3 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{7}{180}. \end{aligned}$$

Putem calcula probabilitatea $\mathbb{P}(X_2)$ folosind și scrierea

$$\begin{aligned} X_2 = &\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4\right) \\ &\cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4\right) \\ &\cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4\right). \end{aligned}$$

De asemenea, folosind schema lui Poisson (în cazul $k = 2$ atingeri și $(4-2)$ ratări), probabilitatea $\mathbb{P}(X_2)$ este coeficientul corespunzător lui x^2 din polinomul $Q(x)$. Deci

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2) = &\, p_1 p_2 q_3 q_4 + p_1 p_3 q_2 q_4 + p_1 p_4 q_2 q_3 \\ &+ p_2 p_3 q_1 q_4 + p_2 p_4 q_1 q_3 + p_3 p_4 q_1 q_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\\
&\quad+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\\
&= \frac{71}{360}.
\end{aligned}
$$

Putem calcula probabilitatea $\mathbb{P}(X_3)$ folosind și scrierea

$$
\begin{aligned}
X_3 = {}& \left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap \bar{A}_4\right)\cup\left(A_1\cap A_2\cap \bar{A}_3\cap A_4\right)\\
&\cup\left(A_1\cap \bar{A}_2\cap A_3\cap A_4\right)\cup\left(\bar{A}_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\right).
\end{aligned}
$$

De asemenea, folosind schema lui Poisson (în cazul $k=3$ atingeri și $(4-3)$ ratări), probabilitatea $\mathbb{P}(X_3)$ este coeficientul corespunzător lui x^3 din polinomul $Q(x)$. Deci

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_3) &= p_1p_2p_3q_4+p_1p_2p_4q_3+p_1p_3p_4q_2+p_2p_3p_4q_1\\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\\
&= \frac{77}{180}.
\end{aligned}
$$

putem calcula probabilitatea $\mathbb{P}(X_4)$ folosind și scrierea

$$X_4 = A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4.$$

De asemenea, folosind schema lui Poisson (în cazul $k=4$), probabilitatea $\mathbb{P}(X_4)$ este coeficientul corespunzător lui x^4 din polinomul $Q(x)$. Deci

$$\mathbb{P}(X_4) = p_1p_2p_3p_4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{3}.$$

Să definim Y ca fiind evenimentul ca ținta să fie atinsă de cel puțin 2 ori. Atunci, $Y = X_2\cup X_3\cup X_4$, iar $(X_i)_{i=\overline{0,4}}$ sunt evenimente disjuncte, deci $\mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(X_2\cup X_3\cup X_4) = \mathbb{P}(X_2)+\mathbb{P}(X_3)+\mathbb{P}(X_4)$, și se vor folosi rezultatele precedente.

Să definim Z ca fiind evenimentul ca ținta să fie atinsă de cel mult 2 ori. Atunci, $Z = X_0\cup X_1\cup X_2$, deci $\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X_0\cup X_1\cup X_2) = \mathbb{P}(X_0)+\mathbb{P}(X_1)+\mathbb{P}(X_2)$, și se vor folosi rezultatele precedente (sau $\bar{Z} = X_3\cup X_4$, iar $\mathbb{P}(Z) = 1-\mathbb{P}\left(\bar{Z}\right) = 1-\mathbb{P}(X_3)-\mathbb{P}(X_4)$).

Să observăm în final că evenimentele $(X_i)_{i=\overline{0,4}}$ formează un sistem complet, deci $\bigcup_{i=0}^{5} X_i = \Omega$ (și, folosind valorile obținute mai sus, se poate vedea că, într-adevăr, $\sum_{i=0}^{5} \mathbb{P}(X_i) = 1$).

1.10.50 Trei arcași trag asupra unei ținte. Probabilitatea să atingă ținta este pentru fiecare arcaș în parte p_1, p_2 și respectiv p_3. După trageri s-a constatat că ținta a fost atinsă o singură dată. Care este probabilitatea ca ținta să fi fost atinsă de primul arcaș?

Rezolvare:

Fie A_i evenimentul nimeririi țintei de către arcașul i, cu $i = \overline{1,3}$ și B evenimentul că un singur arcaș nimerește ținta.

Se cere $\mathbb{P}(A_1|B)$ care este dată de formula $\mathbb{P}(A_1|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Mai întâi observăm că are loc $A_1 \cap B = A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$, deci, evenimentele fiind independente,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap B) = \mathbb{P}\left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right)\mathbb{P}\left(\bar{A}_3\right) = p_1 q_2 q_3\,,$$

unde $q_2 = 1 - p_2\,,\, q_3 = 1 - p_3\,.$

Pe de altă parte, $\mathbb{P}(B)$ se obține din schema lui Poisson și este egală cu coeficientul lui x^1 din polinomul

$$\begin{aligned} Q(x) &= (p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2)(p_3 x + q_3) \\ &= p_1 p_2 p_3 x^3 + (p_1 p_2 q_3 + p_1 p_3 q_2 + p_2 p_3 q_1)\, x^2 \\ &\quad + (p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2)\, x + q_1 q_2 q_3\,. \end{aligned}$$

Deci probabilitatea cerută este $\mathbb{P}(A_1|B) = \dfrac{p_1 q_2 q_3}{p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2}$.

Similar se pot determina probabilitățile $\mathbb{P}(A_2|B)$ și $\mathbb{P}(A_3|B)$.

Să menționăm că putem utiliza și formula (1.23) a lui Bayes:

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(B|A_1)}{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(B|A_2) + \mathbb{P}(A_3)\,\mathbb{P}(B|A_3)},$$

unde

$$\mathbb{P}(B|A_1) = \mathbb{P}\left(\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) = \mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_3\right) = q_2 q_3\,,$$

$$\mathbb{P}(B|A_2) = \mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_3\right) = \mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_3\right) = q_1 q_3\,,$$

$$\mathbb{P}(B|A_3) = \mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2\right) = \mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right) = q_1 q_2\,.$$

1.10.51 Într-o țintă trag simultan n arcași, în condiții identice, fiecare având probabilitatea $p_i,\ i = \overline{1,n}$, de a nimeri ținta. Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă (de cel puțin un arcaș)?

Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă de cel puțin 3 ori? Dar probabilitatea ca ținta să fie atinsă de cel mult 3 ori?

Rezolvare:

Să folosim notația standard A_i, unde $i = \overline{1,n}$, dată de (1.33), adică să notăm cu A_i evenimentul atingerii țintei de către arcașul $i = \overline{1,n}$.

Acestea sunt evenimente independente (dar sunt și compatibile) cu probabilitățile $\mathbb{P}(A_i) = p_i$.

Să folosim și notația standard X_k, unde $k = \overline{0,n}$, dată de (1.32), adică să notăm cu X_k este evenimentul ca ținta să fie atinsă de k ori, unde $k = \overline{0,n}$. Acestea sunt evenimente incompatibile.

Fie X evenimentul ca ținta să fie atinsă cel puțin o dată. Atunci, evident, evenimentul $\bar{X}$ ca ținta să nu fie atinsă deloc se poate scrie în două moduri:

$$\bar{X} = X_0 \quad \text{sau} \quad \bar{X} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n\,.$$

Deci, X se poate și el scrie în două moduri:

$$X = \bar{X}_0 = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \quad \text{sau}$$

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \overline{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n}\,,$$

deoarece $(X_k)_{k=\overline{0,n}}$ constituie un sistem complet de evenimente (și deci $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n} X_k$).

Pentru calculul probabilității $\mathbb{P}\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big)$ folosim (1.16):

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{1\le i\le n} p_i - \sum_{1\le i<j\le n} p_i p_j$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n} p_i p_j p_k - \ldots + (-1)^{n-1} p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n\,. \tag{1.34}$$

Putem calcula și probabilitatea evenimentului complementar $\bar{X}$:

$$\mathbb{P}(X) = 1 - \mathbb{P}(\bar{X}) = 1 - \mathbb{P}(X_0) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\Big) = 1 - \prod_{i=1}^n q_i\,,$$

unde $q_i = 1 - p_i$.

Dacă se fac calculele se va obține exact formula (1.34):

$$\mathbb{P}(X) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i) = \sum_{1\le i\le n} p_i - \sum_{1\le i<j\le n} p_i p_j + \sum_{1\le i<j<k\le n} p_i p_j p_k - \ldots + (-1)^{n-1} p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n\,.$$

Fie Y evenimentul ca ținta să fie atinsă cel puțin de trei ori. Atunci,

$$Y = X_3 \cup X_4 \cup \ldots \cup X_n = \bigcup_{j=3}^n X_j\,.$$

Fie Z evenimentul ca ținta să fie atinsă cel mult de trei ori. Atunci,

$$Z = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3\,.$$

Obținem

$$\mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=3}^n X_j\Big) = \sum_{j=3}^n \mathbb{P}(X_j)$$
$$\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3) = \sum_{j=0}^3 \mathbb{P}(X_j)\,.$$

Probabilitatea $\mathbb{P}(X_k)$, $k = \overline{0, n}$, se obține din schema lui Poisson și este egală cu coeficientul lui x^k din polinomul

$$Q(x) = \prod_{i=1}^n (p_i x + q_i)\,.$$

Deci

$$\mathbb{P}(X_k) = \sum p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k} q_{i_{k+1}} q_{i_{k+2}} \ldots q_{i_n}\,.$$

1.10.52 Doi arcași trag asupra unei ținte. Probabilitatea fiecăruia de a nimeri ținta este de $1/3$. Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă cel puțin o dată?

Rezolvare:

Să folosim notația standard A_i, unde $i = \overline{1,2}$, dată de (1.33), adică să notăm cu A_i evenimentul atingerii țintei de către arcașul $i = \overline{1,2}$.

Acestea sunt evenimente independente. Probabilitatea de apariție a *succesului* este $p = \mathbb{P}(A_i) = 1/3$ și respectiv $q = 2/3$.

Să folosim și notația standard X_k, unde $k = \overline{0,2}$, dată de (1.32), adică să notăm cu X_k evenimentul ca ținta să fie atinsă de k ori, unde $k = \overline{0,2}$.

Evenimentul cerut este $X = X_1 \cup X_2$ sau, echivalent, $\bar{X} = X_0$, unde

$$\begin{aligned}
X_0 &= \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2, \\
X_1 &= \left(A_1 \cap \bar{A}_2\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2\right), \\
X_2 &= A_1 \cap A_2,
\end{aligned}$$

adică $X = \left(A_1 \cap \bar{A}_2\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2\right) \cup (A_1 \cap A_2)$ sau, echivalent, $\bar{X} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$. Folosind prima formulă probabilistă, dar și independența evenimentelor $(A_i)_{i=\overline{1,2}}$ obținem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X) &= \mathbb{P}\left(\left(A_1 \cap \bar{A}_2\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2\right) \cup (A_1 \cap A_2)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(A_1 \cap \bar{A}_2\right) + \mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap A_2\right) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\
&= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right) + \mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right) \cdot \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \\
&= p \cdot q + q \cdot p + p^2 = p^2 + 2pq
\end{aligned}$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}(X) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{X}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right) = 1 - q^2.$$

De asemenea, putem folosi schema binomială și obținem direct

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X) = C_2^1 p^1 q^1 + C_2^2 p^2 q^0 = 2pq + p^2 \quad \text{sau, echivalent,} \\
&\mathbb{P}(X) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{X}\right) = 1 - C_2^0 p^0 q^2 = 1 - q^2
\end{aligned}$$

deoarece X reprezintă evenimentul ca *Succesul* să apară cel puțin o dată din două încercări.

1.10.53 Dintr-un lot de 1000 piese, alegem la întâmplare 100 de piese (punând de fiecare dată piesa înapoi). Știind că 2% dintre piese sunt defecte, care este probabilitatea ca printre piesele alese cel puțin 3 să fie defecte?

Rezolvare:

Dintre cele 100 de piese 2 sunt defecte și 98 sunt bune. Fie A evenimentul care constă în alegerea unei piese defecte, deci $p = \mathbb{P}(A) = 0.02$. Avem $3 \leq k \leq 100$ și $n = 100$. Atunci, probabilitatea evenimentului cerut este, conform schemei binomiale,

$$\mathbb{P}(X) = \sum_{k=3}^{100} C_{100}^{k} (0.02)^{k} (0.98)^{100-k}.$$

Se poate determina și probabilitatea evenimentului contrar, de a obține maxim două piese defecte. Astfel,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bar{X}) &= \sum_{k=0}^{2} C_{100}^{k} (0.02)^{k} (0.98)^{100-k}\\ &= C_{100}^{0} (0.02)^{0} (0.98)^{100} + C_{100}^{1} (0.02)^{1} (0.98)^{99} + C_{100}^{2} (0.02)^{2} (0.98)^{98}\\ &= (0.98)^{100} + 100 \cdot 0.02 \cdot (0.98)^{99} + \frac{100 \cdot 99}{2} (0.02)^{2} (0.98)^{98}\\ &= 0.677,\end{aligned}$$

deci $\mathbb{P}(X) = 0.323$.

1.10.54 Se consideră experiența aruncării a două zaruri de opt ori. Care este probabilitatea obținerii sumei 7 de trei ori?

Rezolvare:

Să definim A ca fiind evenimentul apariției sumei 7 la aruncarea unei perechi de zaruri. Probabilitatea $p = \mathbb{P}(A) = 6/36$ (sunt 36 de perechi posibile și 6 perechi sunt favorabile). Avem $k = 3$ și $n = 8$. Atunci, conform schemei binomiale, $\mathbb{P}(X) = C_8^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^5$.

1.10.55 Motoarele unui avion au probabilitatea $1 - p$, unde $p \in (0, 1)$, de a se defecta (independent unul de altul). Pentru ca avionul să termine cursa trebuie să funcționeze cel puțin jumătate dintre motoarele lui.

(a) Dacă avionul are 3 motoare, care este probabilitatea avionul să termine cursa?

(b) Dacă avionul are 5 motoare, care este probabilitatea avionul să termine cursa?

(c) Pentru ce valori ale lui p un avion cu 5 motoare are mai multe șanse să funcționeze decât un avion cu 3 motoare?

1.10.56 O urnă conține 10 bile albe și 4 bile negre. Din această urnă se fac extrageri cu revenire.

(a) Să se determine probabilitatea ca primele k bile extrase să fie toate albe;

(b) Să se determine probabilitatea ca în primele k bile extrase să fie o singură bilă albă;

(c) Se fac extrageri repetate până când apare prima bilă albă. Sa se calculeze probabilitatea evenimentului de a se face k extrageri până când apare prima bilă albă;

(d) Se fac extrageri repetate până când apar primele două bile albe. Sa se calculeze probabilitatea evenimentului de a se face k extrageri până când apar primele două bile albe;

(e) Se fac extrageri repetate până când apar primele trei bile albe. Sa se calculeze probabilitatea evenimentului de a se face k extrageri până când apar primele trei bile albe.

Rezolvare:

Se folosește schema binomială. Este utilă și notația standard A_i, unde $i \in \mathbb{N}^*$, dată de (1.33), adică A_i este evenimentul obținerii unei bile albe la extragerea $i \in \mathbb{N}^*$. Acestea sunt evenimente independente, iar $\mathbb{P}\left(A_i\right) = \frac{10}{14}$, pentru $i \in \mathbb{N}^*$.

(c) Evenimentul cerut este

$$X = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k .$$

Vezi și Remarca 2.167 din cadrul distribuției geometrice.

(d) Evenimentul cerut este

$$X = A \cap A_k ,$$

unde A este evenimentul obținerii unei singure bile albe în primele $(k-1)$ extrageri.

Conform schemei binomiale, obținem $\mathbb{P}(A) = C_{k-1}^1 \left(\frac{10}{14}\right)^1 \left(\frac{4}{14}\right)^{k-1}$.

Vezi și Remarca 2.175 din cadrul distribuției binomiale cu exponent negativ.

1.10.57 Dacă se aruncă de patru ori un zar[39], care este probabilitatea să apară cel puțin o dată fața unu?

[39] Vezi și rezolvarea Exercițiului 1.10.21.

Dacă se aruncă două zaruri de 24 de ori, care este probabilitatea să apară cel puțin o dată fața unu pe ambele zaruri dintr-o pereche (i.e. cel puțin o dată dubla $(1,1)$)?

Dar cel puțin de două ori fața unu pe ambele zaruri (i.e. cel puțin de două ori dubla $(1,1)$)?

Dar cel puțin de două ori fața unu (pe cel puțin unul dintre cele două zaruri dintr-o pereche) (i.e. cel puțin o dată fața unu pe cel puțin două perechi de zaruri)?

Dar cel puțin de două ori fața unu (pe unul singur dintre cele două zaruri dintr-o pereche) (i.e. o singură față unu pe cel puțin două perechi de zaruri)?

Dar să apară cel puțin o dată o față șase (pe cel puțin unul dintre zaruri dintr-o pereche)?

Dar să apară o singură dată fața șase pe un singur zar dintr-o pereche?

Să se scrie și spațiul de probabilitate în care se lucrează.

Rezolvare:

În primul caz, fie A evenimentul de a apărea fața unu. Atunci, $\bar{A}$ este evenimentul de a nu apărea fața unu (deci $\bar{A}$ este evenimentul de a apărea doar celalte fețe), iar $\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 5/6$. Repetăm experiența de $n = 4$ ori și să definim X ca fiind evenimentul ca $\bar{A}$ să apară de $k = 4$ ori. Conform schemei binomiale,

$$\mathbb{P}\left(X\right) = C_4^4 \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

Deci probabilitatea să apară măcar o dată fața unu este $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0.5178.$

În al doilea caz, fie B evenimentul de a apărea fața unu pe ambele zaruri. Atunci, $\bar{B}$ este evenimentul de a nu apărea fața unu pe ambele zaruri, iar $\mathbb{P}(\bar{B}) = \frac{35}{36}$. Repetăm experiența de $n = 24$ ori și să definim Y ca fiind evenimentul ca $\bar{B}$ să apară de $k = 24$ ori. Conform schemei binomiale,

$$\mathbb{P}\left(Y\right) = C_{24}^{24} \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \left(\frac{1}{36}\right)^0.$$

Evident, putem gândi similar Y ca fiind evenimentul ca B să apară de $k = 0$ ori, deci $\mathbb{P}(Y) = C_{24}^0 \left(\frac{1}{36}\right)^0 \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Prin urmare, probabilitatea să apară măcar o dată fața unu pe ambele zaruri este $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0.4914$.

În al treilea caz, fie C evenimentul de a apărea fața unu pe ambele zaruri, iar $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{36}$. Repetăm experiența de $n = 24$ ori și să definim Z ca fiind evenimentul ca C să apară de $k = 0$ sau de $k = 1$ ori. Conform schemei binomiale, $\mathbb{P}(Z) = C_{24}^0 \left(\frac{1}{36}\right)^0 \left(\frac{35}{36}\right)^{24} + C_{24}^1 \left(\frac{1}{36}\right)^1 \left(\frac{35}{36}\right)^{23}$. Deci probabilitatea să apară cel puțin de două ori fața unu pe ambele zaruri este $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} - 24\left(\frac{1}{36}\right)\left(\frac{35}{36}\right)^{23} \simeq 0.1427$.

În al patrulea caz, fie D evenimentul de a apărea fața unu, pe cel puțin unul dintre cele două zaruri. Avem $\mathbb{P}(D) = \frac{11}{36}$. Repetăm experiența de $n = 24$ ori și să definim T ca fiind evenimentul ca D să apară de $k = 0$ sau de $k = 1$ ori. Conform schemei binomiale, $\mathbb{P}(T) = C_{24}^0 \left(\frac{11}{36}\right)^0 \left(\frac{25}{36}\right)^{24} + C_{24}^1 \left(\frac{11}{36}\right)^1 \left(\frac{25}{36}\right)^{23}$. Deci probabilitatea să apară cel puțin o dată fața unu pe cel puțin două perechi de zaruri este $1 - \left(\frac{25}{36}\right)^{24} - 24\frac{11}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^{23} \simeq 0.9943$.

În al cincilea caz, fie E evenimentul de a apărea fața unu, pe un singur zar dintre cele două zaruri. Avem $\mathbb{P}(E) = \frac{10}{36}$. Repetăm experiența de $n = 24$ ori și să definim U ca fiind evenimentul ca E să apară de $k = 0$ sau de $k = 1$ ori. Conform schemei binomiale, $\mathbb{P}(T) = C_{24}^0 \left(\frac{10}{36}\right)^0 \left(\frac{26}{36}\right)^{24} + C_{24}^1 \left(\frac{10}{36}\right)^1 \left(\frac{26}{36}\right)^{23}$. Deci probabilitatea să apară o singură față unu pe cel puțin două perechi de zaruri este $1 - \left(\frac{26}{36}\right)^{24} - 24\frac{10}{36}\left(\frac{26}{36}\right)^{23} \simeq 0.986$.

1.10.58 Un arcaș trage asupra unei ținte și o atinge cu probabilitatea 0.8. Dacă trage de 10 ori, atunci care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă de 5 ori?

Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă de cel mult 3 ori? Dar de cel puțin 8 ori?

Rezolvare:

Să folosim și notația standard X_k, unde $k = \overline{0,10}$, dată de (1.32), adică să notăm cu X_k este evenimentul ca ținta să fie atinsă de k ori, unde $k = \overline{0,10}$. Acestea sunt evenimente incompatibile.

Atunci, $\mathbb{P}(X_k) = C_{10}^k (0.8)^k (0.2)^{10-k}$.

Primul eveniment cerut este X_5, iar

$$\mathbb{P}(X_5) = C_{10}^5 (0.8)^5 (0.2)^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} (0.8)^5 (0.2)^5 = 0.026.$$

Al doilea eveniment este $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3$, iar

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(X_0) + \mathbb{P}(X_1) + \mathbb{P}(X_2) + \mathbb{P}(X_3) = \sum\nolimits_{k=0}^{3} C_{10}^k (0.8)^k (0.2)^{10-k}.$$

Al treilea eveniment este $Y = X_8 \cup X_9 \cup X_{10}$, iar

$$\mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(X_8) + \mathbb{P}(X_9) + \mathbb{P}(X_{10}) = \sum\nolimits_{k=8}^{10} C_{10}^k (0.8)^k (0.2)^{10-k}.$$

1.10.59 Într-o urnă sunt $2n$ bile, dintre care n bile albe și n bile negre. Se extrag n bile deodată. Care este probabilitatea extragerii a k bile albe?

Să se deducă apoi identitatea[40]

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^{n-1}\right)^2 + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

Rezolvare:

Să folosim și notația standard X_k, unde $k = \overline{0,n}$, dată de (1.32), adică să notăm cu X_k este evenimentul ca să fie extrase k bile albe și $(n-k)$ bile negre. Atunci, conform schemei hipergeometrice,

$$\mathbb{P}(X_k) = \frac{C_n^k \cdot C_n^{n-k}}{C_{2n}^n} = \frac{\left(C_n^k\right)^2}{C_{2n}^n}.$$

[40] Să observăm că identitatea cerută se poate obține și direct din identificarea coeficienților lui $a^n b^n$ din identitatea $(a+b)^n (a+b)^n = (a+b)^{2n}$.

Pe de altă parte, evenimentele $(X_k)_{k=\overline{0,n}}$ formează un sistem complet de evenimente. Prin urmare,

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{k=0}^{n} X_k\right) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_k).$$

Deci, ca o consecință, obținem, folosind astfel analiza combinatorie, identitatea $\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(C_n^k\right)^2}{C_{2n}^n} = 1$ sau, echivalent,

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

1.10.60 Să se numere (în două moduri diferite) câte grupe de n persoane se pot forma dintr-o mulțime cu n femei și n bărbați; mai întâi, direct, apoi concentrându-ne pe structura grupului, mai precis, presupunând că grupul dat este format dintr-un subgrup de k_1 femei și un alt subgrup de k_2 bărbați, unde $k_1 \in \{0, \ldots, n\}$, $k_2 \in \{0, \ldots, n\}$ sunt aleși astfel încât $k_1 + k_2 = n$. Să se scrie identitatea asociată.

Rezolvare:

Este o reformulare a problemei precedente. Vezi și Nota 33.

1.10.61 Într-un lot de $(n + m)$ piese, n sunt conform standardelor și m piese nu. S-au controlat $k \leq n + m$ piese (prin extragearea simultană a k piese). Care este probabilitatea ca dintre cele k piese, $r \leq k$ să fie conform standardelor?

Să se arate că, pentru orice[41] $n, m, k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $k \leq n + m$, au loc identitățile[42]:

$$C_n^{(k-m)\vee 0} \cdot C_m^{k-(k-m)\vee 0} + C_n^{(k-m)\vee 0+1} \cdot C_m^{k-(k-m)\vee 0-1} + \ldots + C_n^{k\wedge n} \cdot C_m^{k-k\wedge n} = C_{n+m}^k \tag{1.35}$$

și

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

[41] Operatorii binari $\wedge$ și $\vee$ sunt definiți de

$$a \wedge b = \min\{a, b\} \quad \text{și respectiv} \quad a \vee b = \max\{a, b\}.$$

[42] Să observăm că identitatea cerută se poate obține și direct din identificarea coeficienților lui $a^k b^{n+m-k}$ din identitatea $(a+b)^n (a+b)^m = (a+b)^{n+m}$.

Rezolvare:

Fie numărul natural r astfel încât

$$0 \leq r \leq k, \quad 0 \leq k - r \leq k \quad \text{și}$$

$$0 \leq r \leq n, \quad 0 \leq k - r \leq m.$$

Vom obține

$$0 \vee (k - m) \leq r \leq k \wedge n.$$

Vezi notația standard (1.32): fie X_r evenimentul de a extrage r piese conform standardelor și $(k - r)$ piese necorespunzătoare. Atunci, conform schemei hipergeometrice,

$$\mathbb{P}(X_r) = \frac{C_n^r \cdot C_m^{k-r}}{C_{n+m}^k}, \quad r = \overline{0 \vee (k - m), k \wedge n}.$$

Pe de altă parte, evenimentele $(X_r)_{r=\overline{0\vee(k-m),k\wedge n}}$ formează un sistem complet de evenimente. Prin urmare,

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{r=0\vee(k-m)}^{k\wedge n} X_r\right) = \sum\nolimits_{r=0\vee(k-m)}^{k\wedge n} \mathbb{P}(X_r).$$

Deci, ca o consecință, obținem, folosind astfel analiza combinatorie, identitatea $\sum_{r=0\vee(k-m)}^{k\wedge n} \frac{C_n^r \cdot C_m^{k-r}}{C_{n+m}^k} = 1$ sau, echivalent[43],

$$C_n^{0\vee(k-m)} \cdot C_m^{k-0\vee(k-m)} + C_n^{0\vee(k-m)+1} \cdot C_m^{k-0\vee(k-m)-1} + \ldots$$
$$+ C_n^{k\wedge n} \cdot C_m^{k-k\wedge n} = C_{n+m}^k. \tag{1.36}$$

Deoarece $0 \vee (k - m) = k - (k \wedge m)$, să observăm că putem scrie și sub forma

$$\sum\nolimits_{r=k-(k\wedge m)}^{k\wedge n} \frac{C_n^r \cdot C_m^{k-r}}{C_{n+m}^k} = 1$$

[43] În ceea ce privește restricțiile asupra coeficienților, să **reamintim convenția**:

$$C_b^a = 0 \quad \text{ori de câte ori} \quad a < 0 \quad \text{sau} \quad a > b.$$

Cu această convenție formula (1.36) se poate scrie sub forma mai simplă

$$\sum\nolimits_{r=0}^{n+m} C_n^r \cdot C_m^{k-r} = C_{n+m}^k.$$

sau, echivalent,

$$C_n^{k-(k\wedge m)} \cdot C_m^{k\wedge m} + C_n^{k-(k\wedge m)+1} \cdot C_m^{(k\wedge m)-1} + \ldots + C_n^{k\wedge n} \cdot C_m^{k-k\wedge n} = C_{n+m}^k .$$

Menționăm că formula (1.36) în cazul în care $n = m = k$ devine:

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n ,$$

în cazul în care $k \leq n \wedge m$ devine:

$$C_n^0 \cdot C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k \cdot C_m^0 = C_{n+m}^k ,$$

în cazul $n < k \leq m$ devine:

$$C_n^0 \cdot C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + \ldots + C_n^n \cdot C_m^{k-n} = C_{n+m}^k ,$$

în cazul $m < k \leq n$ devine:

$$C_n^{k-m} \cdot C_m^m + C_n^{k-m+1} \cdot C_m^{m-1} + \ldots + C_n^k \cdot C_m^0 = C_{n+m}^k ,$$

iar în cazul $n \vee m < k \leq n + m$ devine:

$$C_n^{k-m} \cdot C_m^m + C_n^{k-m+1} \cdot C_m^{m-1} + C_n^{k-m+2} \cdot C_m^{m-2} + \ldots + C_n^n \cdot C_m^{k-n} = C_{n+m}^k .$$

1.10.62 Să se numere (în două moduri diferite) câte grupe de k persoane se pot forma dintr-o mulțime cu n femei și m bărbați; mai întâi, direct, apoi concentrându-ne pe structura grupului, mai precis, presupunând că grupul dat este format dintr-un subgrup de k_1 femei și un alt subgrup de k_2 bărbați, unde $k_1 \in \{0, \ldots, n\}$, $k_2 \in \{0, \ldots, m\}$ sunt aleși astfel încât $k_1 + k_2 = k$. Să se scrie identitatea asociată.

Rezolvare:

Este o reformulare a problemei precedente. Vezi și Nota 33.

1.10.63 Într-un set de 100 de bilete există 3 bilete câștigătoare. Un jucător cumpără 40 de bilete. Care este probabilitatea ca să cumpere un bilet câștigător? Dar probabilitatea ca el să cumpere cel puțin un un bilet câștigător?

Rezolvare:

Vezi notația standard (1.32): fie X_r evenimentul de a extrage r bilete câștigătoare și a $(40 - r)$ bilete necâștigătoare, $r = \overline{40 - (40 \wedge 96)\,, 40 \wedge 3} = \overline{0, 3}$.

Probabilitatea de a avea 1 bilet câștigător este, conform schemei hipergeometrice, $\mathbb{P}(X_1) = \dfrac{C_3^1 \cdot C_{97}^{39}}{C_{100}^{40}}$.

Evenimentul de a extrage cel puțin 1 un bilet câștigător este $X_1 \cup X_2 \cup X_3$, iar probabilitatea este dată de

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \cup X_2 \cup X_3) &= \mathbb{P}(X_1) + \mathbb{P}(X_2) + \mathbb{P}(X_3) \\ &= \frac{C_3^1 \cdot C_{97}^{39}}{C_{100}^{40}} + \frac{C_3^2 \cdot C_{97}^{38}}{C_{100}^{40}} + \frac{C_3^3 \cdot C_{97}^{37}}{C_{100}^{40}}.\end{aligned}$$

Pe de altă parte, evenimentele $(X_r)_{r=\overline{0,3}}$ formează un sistem complet de evenimente. Prin urmare,

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{r=0}^{3} X_r\right) = \sum\nolimits_{r=0}^{3} \mathbb{P}(X_r).$$

Dar $\mathbb{P}(X_r) = \dfrac{C_3^r \cdot C_{97}^{40-r}}{C_{100}^{40}}$. Deci, ca o consecință, obținem, folosind astfel analiza combinatorie, identitatea $\sum_{r=0}^{3} \frac{C_3^r \cdot C_{97}^{40-r}}{C_{100}^{40}} = 1$ sau, echivalent,

$$C_3^0 \cdot C_{97}^{40} + C_3^1 \cdot C_{97}^{40-1} + C_3^2 \cdot C_{97}^{40-2} + C_3^3 \cdot C_{97}^{40-3} = C_{100}^{40},$$

care este formula (1.35) scrisă în cazul $3 = n < k = 40 \leq m = 97$.

1.10.64 Să se numere (în două moduri diferite) câte grupe de 40 persoane se pot forma dintr-o mulțime cu 3 femei și 97 bărbați; mai întâi, direct, apoi concentrându-ne pe structura grupului, mai precis, presupunând că grupul dat este format dintr-un subgrup de k_1 femei și un alt subgrup de k_2 bărbați, unde $k_1 \in \{0, \ldots, 3\}$, $k_2 \in \{0, \ldots, 97\}$ sunt aleși astfel încât $k_1 + k_2 = 40$. Să se scrie identitatea asociată.

Rezolvare:

Este o reformulare a problemei precedente. Vezi și Nota 33.

1.10.65 Într-o urnă sunt 20 de bile, dintre care 8 bile albe și 12 bile negre. Se extrag 6 bile deodată. Care este probabilitatea extragerii a r bile albe? Să se deducă apoi valoarea sumei de tipul $\sum_r C_n^r C_m^{k-r}$.

Rezolvare:

Se folosește schema hipergeometrică.

1.10.66 Într-un set de 12 bilete există 8 bilete câștigătoare. Un jucător cumpără 5 bilete. Să se deducă identitatea (1.35).

Rezolvare:

Vezi notația standard (1.32): fie X_r evenimentul de a extrage r bilete câștigătoare și a $(5-r)$ bilete necâștigătoare, cu $r = \overline{5-(5\wedge 4)\,, 5\wedge 8} = \overline{1,5}$.

Pe de altă parte, evenimentele $(X_r)_{r=\overline{1,5}}$ formează un sistem complet de evenimente. Prin urmare,

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{r=1}^{5} X_r\right) = \sum\nolimits_{r=1}^{5} \mathbb{P}(X_r)\,.$$

Dar $\mathbb{P}(X_r) = \dfrac{C_8^r \cdot C_4^{5-r}}{C_{12}^5}$. Deci, ca o consecință, obținem, folosind astfel analiza combinatorie, identitatea $\sum_{r=1}^{5} \frac{C_8^r \cdot C_4^{5-r}}{C_{12}^5} = 1$ sau, echivalent,

$$C_8^1 \cdot C_4^4 + C_8^2 \cdot C_4^3 + C_8^3 \cdot C_4^2 + C_8^4 \cdot C_4^1 + C_8^5 \cdot C_4^0 = C_{12}^5\,,$$

care este formula (1.35) scrisă în cazul în care $4 = m < k = 5 \le n = 8$.

1.10.67 Să se numere (în două moduri diferite) câte grupe de 5 persoane se pot forma dintr-o mulțime cu 8 femei și 4 bărbați; mai întâi, direct, apoi concentrându-ne pe structura grupului, mai precis, presupunând că grupul dat este format dintr-un subgrup de k_1 femei și un alt subgrup de k_2 bărbați, unde $k_1 \in \{0,\ldots,8\}$, $k_2 \in \{0,\ldots,4\}$ sunt aleși astfel încât $k_1 + k_2 = 5$. Să se scrie identitatea asociată.

Rezolvare:

Este o reformulare a problemei precedente. Vezi și Nota 33.

1.10.68 Dintr-un lot de 1000 piese, alegem la întâmplare 100 de piese. Știind că 2% dintre piese sunt defecte, care este probabilitatea ca printre piesele alese cel puțin 3 să fie defecte?

Rezolvare:

Conform enunțului, cele 100 de piese sunt luate simultan (adică succesiv, fără revenire), deci trebuie folosită schema hipergeometrică.

1.10.69 Un departament al unei universități are 25 de imprimante, dintre care 20 sunt de tip *laser*, iar restul de tip *inkjet* (i.e. cu cerneală). Un tehnician alege, la întâmplare, pentru control, 6 dintre ele. Care este probabilitatea ca 3 imprimante dintre cele 6 alese să fie de tip *inkjet*? Dar ca cel puțin 4 imprimante să fie de tip *inkjet*? Să se deducă, în cadrul problemei date, valoarea sumei de tipul $\sum_j C_n^j C_m^{k-j}$.

Rezolvare:

Se folosește schema hipergeometrică.

1.10.70 Într-un set de 52 de bile, 4 sunt albe. Bilele se împart în patru grupe egale, de câte 13 bile. Care este probabilitatea ca fiecare grupă să conțină o bilă albă?

Rezolvare:

Probabilitatea ca prima grupă să conțină o bilă albă este, conform schemei hipergeometrice, $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{C_4^1 \cdot C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}}$.

Să observăm că cele patru evenimente A_1, A_2, A_3 și A_4 nu sunt independente (notațiile sunt cele standard).

După formarea primei grupe au rămas 39 de bile dintre care 3 albe. În această condiție, probabilitatea ca a doua grupă să conțină o bilă albă este $\mathbb{P}(A_2|A_1) = \dfrac{C_3^1 \cdot C_{36}^{12}}{C_{39}^{13}}$.

După formarea celei de doua grupe au rămas 26 de bile dintre care 2 albe. În aceste condiții, probabilitatea ca a treia grupă să conțină o bilă albă este $\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \dfrac{C_2^1 \cdot C_{24}^{12}}{C_{26}^{13}}$.

Să observăm că, în condițiile precedente, probabilitatea ca a patra grupă formată să conțină o bilă albă este $\mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \dfrac{C_1^1 \cdot C_{12}^{12}}{C_{13}^{13}} = 1$.

Probabilitatea cerută este atunci

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= \mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) \\
&= \frac{C_1^1 \cdot C_{12}^{12}}{C_{13}^{13}} \cdot \frac{C_4^1 \cdot C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}} \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_{36}^{12}}{C_{39}^{13}} \cdot \frac{C_2^1 \cdot C_{24}^{12}}{C_{26}^{13}}.
\end{aligned}
$$

1.10.71 Într-un lot de 100 de piese 8 sunt defecte, iar în alt lot de 120 de piese 9 sunt defecte. Din unul din aceste loturi, luat la întâmplare, se iau 10 piese. Care este probabilitatea ca între piesele alese să fie 8 bune?

Rezolvare:

Să notăm evenimentele $A = \{\text{piesele sunt luate din primul lot}\}$ și $B = \{\text{din piesele luate, } 8 \text{ sunt bune}\}$.

Atunci, conform formulei probabilității totale (1.21), avem că

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}\left(\bar{A}\right) \cdot \mathbb{P}\left(B|\bar{A}\right),$$

deoarece $\left\{A, \bar{A}\right\}$ formează un sistem complet de evenimente.

Conform schemei hipergeometrice avem

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{C_{92}^{8} C_{8}^{2}}{C_{100}^{10}} \quad \text{și} \quad \mathbb{P}\left(B|\bar{A}\right) = \frac{C_{111}^{8} C_{9}^{2}}{C_{120}^{10}}.$$

Deci

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \frac{C_{92}^{8} C_{8}^{2}}{C_{100}^{10}} + \frac{1}{2} \frac{C_{111}^{8} C_{9}^{2}}{C_{120}^{10}}.$$

1.10.72 Jucătorul A are a lei, iar jucătorul B are b lei. Jocul constă într-o serie de partide în care cel care câștigă dă un leu partenerului. Jocul continuă până când unul dintre jucători pierde toți banii. Presupunem că șansele de câștig la fiecare partidă sunt egale pentru jucători. Care este probabilitatea ca A să ia toți banii lui B?

Rezolvare:

Fie C evenimentul că jucătorul A, care are n lei, câștigă jocul, iar C_1 evenimentul că jucătorul A, care are n lei, câștigă primul joc. Să notăm cu p_n probabilitatea ca jucătorul A, care are n lei, să câștige jocul. Atunci, conform formulei probabilității totale (1.21), avem că

$$p_n = \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C_1) \cdot \mathbb{P}(C|C_1) + \mathbb{P}\left(\bar{C}_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(C|\bar{C}_1\right),$$

deoarece $\left\{C_1, \bar{C}_1\right\}$ formează un sistem complet de evenimente.

Evident, $\mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}\left(\bar{C}_1\right) = 1/2$. Pe de altă parte, conform definiției precedente, $\mathbb{P}(C|C_1) = p_{n+1}$, iar $\mathbb{P}\left(C|\bar{C}_1\right) = p_{n-1}$. Deci

$$p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{2} p_{n+1},$$

unde $p_0 = 0$, iar $p_{a+b} = 1$.

Se obține $p_i = \frac{i}{i+1} p_{i+1}$, pentru $i = \overline{1, a+b-1}$.

Deci, pe de o parte, $p_{a+b-1} = \frac{a+b-1}{a+b} p_{a+b} = \frac{a+b-1}{a+b}$, iar, pe de altă parte, $p_{a+b-1} = (a+b-1)\, p_1$.

Avem $p_1 = \frac{1}{a+b}$ și apoi $p_i = i p_1$, $i = \overline{1, a+b}$.

Deci probabilitatea ca jucătorul A să câștige jocul este $p_a = \frac{a}{a+b}$.

1.10.73 (Problema lui Banach) Un fumător cumpără două cutii de chibrituri, fiecare conținând n bețe. De fiecare dată când are nevoie de un chibrit scoate la întâmplare o cutie și consumă un băț. Care este probabilitatea ca în momentul în care constată că o cutie este goală cealaltă să conțină k bețe?

Pe baza rezultatului obținut să se deducă și identitatea

$$C_{2n}^{n} + 2C_{2n-1}^{n} + 2^2 C_{2n-2}^{n} + \ldots + 2^{n-1} C_{n+1}^{n} + 2^n C_n^n = 2^{2n}.$$

Rezolvare:

Să observăm că pentru a constata că o cutie goală aceasta trebuie deschisă de $(n+1)$ ori. Dacă în acest moment cealaltă cutie mai are k bețe, atunci aceasta a fost deschisă de $(n-k)$ ori. Deci cutiile au fost deschise de $(2n-k+1)$ ori.

Problema poate fi enunțată și în modul următor: o urnă conține o bilă albă și una neagră. Se extrage din urnă o bilă punându-se bila înapoi și se repetă experiența până când o bilă (nu contează care dintre ele) apare de $(n+1)$ ori. Care este probabilitatea ca în acel moment cealaltă bilă să fi ieșit de $(n-k)$ ori?

Să definim evenimentele:

$$A = \{\text{în } (2n-k) \text{ extrageri, bila albă apare de } n \text{ ori}\},$$

$$B = \{\text{în } (2n-k) \text{ extrageri, bila neagră apare de } n \text{ ori}\},$$

$$C = \{\text{la extragerea } (2n-k+1) \text{ apare bila albă}\}.$$

În aceste notații, se cere probabilitatea $\mathbb{P}\left((A \cap C) \cup \left(B \cap \bar{C}\right)\right)$.

Evident, din motive de simetrie, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

Deci

$$\mathbb{P}\left((A \cap C) \cup \left(B \cap \bar{C}\right)\right) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}\left(B \cap \bar{C}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{C}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(A) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B) \\
&= \mathbb{P}(A).
\end{aligned}
$$

Dar probabilitatea $\mathbb{P}(A)$ se poate calcula folosind schema binomială: avem o experiență care se efectuează de $(2n-k)$ ori și se cere probabilitatea apariției bilei albe de n ori (și a $(n-k)$ bile negre). Deci

$$\mathbb{P}(A) = C_{2n-k}^{n} p^n q^{n-k} = C_{2n-k}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_{2n-k}^{n} \frac{1}{2^{2n-k}}$$

și atunci probabilitatea cerută este $\mathbb{P}\left((A \cap C) \cup \left(B \cap \bar{C}\right)\right) = C_{2n-k}^{n} \frac{1}{2^{2n-k}}$.

Pe de altă parte, $(A_k)_{k=\overline{0,n}}$ constituie un sistem complet de evenimente, unde cu A_k am notat evenimentul din enunț, i.e. $A_k = \{$când se constată că una dintre cutii este goală, cealaltă conține k bețe$\}$. Prin urmare,

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Deci, ca o consecință, obținem, folosind astfel analiza combinatorie, identitatea $\sum_{k=0}^{n} C_{2n-k}^{n} \frac{1}{2^{2n-k}} = 1$ sau, echivalent,

$$C_{2n}^{n} + 2C_{2n-1}^{n} + 2^2 C_{2n-2}^{n} + \ldots + 2^{n-1} C_{n+1}^{n} + 2^n C_{n}^{n} = 2^{2n}.$$

1.10.74 (Problema concordanțelor) O urnă conține n bile numerotate de la 1 la n. Se extrag la întâmplare, una câte una, toate aceste bile. Spunem că s-a produs o concordanță dacă la extragerea k s-a obținut bila cu numărul k. Care este probabilitatea obținerii a cel puțin unei concordanțe?

Rezolvare:

Să folosim notația standard A_i, unde $i = \overline{1,n}$, dată de (1.33), adică să notăm cu A_i evenimentul obținerii unei concordanțe la extragerea $i = \overline{1,n}$.

Prin urmare (vezi și rezolvarea Exercițiului 1.10.51), evenimentul obținerii a cel puțin unei concordanțe este dat de $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Deci ne interesează calculul probabilității $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Sunt $n!$ moduri posibile de a ieși cele n bile. Dacă fixăm poziția i, atunci celelalte $(n-1)$ poziții se pot aranja în $(n-1)!$ moduri, adică există $(n-1)!$

de cazuri favorabile. Deci $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$. Se poate raționa și direct: la extragerea i pe poziția i poate apărea oricare dintre cele n bile, iar numărul cazurilor favorabile este unul singur, prin urmare $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{1}{n}$.

Dacă fixăm doi indici $i, j = \overline{1, n}$ astfel încât $i < j$, atunci celelalte $(n-2)$ poziții se pot aranja în $(n-2)!$ moduri, adică există $(n-2)!$ de cazuri favorabile. Deci $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{A_n^2}$. Se poate raționa și direct: la extragerile i și j, perechea ordonată (i, j) poate apărea în A_n^2 moduri, iar numărul cazurilor favorabile este unul singur, prin urmare $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \dfrac{1}{A_n^2}$.

Putem extinde și obținem, pentru orice $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{A_n^k}.$$

Utilizăm formula (1.16)

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i^n A_i\right) = \sum\nolimits_i \mathbb{P}(A_i) - \sum\nolimits_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum\nolimits_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k)$$
$$- \ldots + (-1)^{n-1}\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Pe de altă parte,

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}, \quad i = \overline{1, n},$$

sunt în număr de C_n^1,

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad \text{astfel încât } i < j,$$

sunt în număr de C_n^2,

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{(n-3)!}{n!}, \quad i, j, k = \overline{1, n}, \quad \text{astfel încât } i < j < k,$$

sunt în număr de C_n^3 ș.a.m.d..

Prin urmare, probabilitatea de a obține cel puțin o concordanță este dată de:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i^n A_i\right) = C_n^1 \cdot \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \cdot \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \cdot \frac{(n-3)!}{n!} - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} C_n^n \cdot \frac{0!}{n!}$$
$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.$$

Evident, probabilitatea de a nu avea nici o concordanță este dată de:

$$\mathbb{P}\Big(\overline{\bigcup_i^n A_i}\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Folosim dezvoltarea în serie de puteri a funcției exponențiale[44] și obținem, în particular,

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots .$$

Deci $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}\Big) = e^{-1}$, adică, la limită, probabilitatea ca să nu se obțină nici măcar o concordanță este e^{-1}.

1.10.75 Un grup compus din n perechi (soț și soție) dansează. Se formează perechi. Care este probabilitatea ca, după formarea perechilor, nici un bărbat să nu danseze cu soția lui? Să se determine limita acestei probabilități când n tinde la infinit.

Rezolvare:

Problema este o reformulare a problemei concordanțelor. Se va nota cu A_i evenimentul ca bărbatul cu numărul i să danseze cu soția sa. Probabilitatea de a obține cel puțin o pereche este $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$. Apoi trebuie să determinăm $\mathbb{P}\left(\bigcap_i \bar{A}_i\right)$.

1.10.76 (Paradoxul lui Bertrand) Care este probabilitatea ca alegând o coardă, la întâmplare, în interiorul unui cerc, aceasta să fie mai mare decât lungimea laturii triunghiului echilateral înscris în cerc?

Rezolvare:

Problema comportă mai multe rezolvări, în funcție de modul în care înțelegem alegerea „la întâmplare” a coardei.

[44] Dezvoltarea în serie de puteri a funcției exponențiale, i.e. dezvoltarea Taylor în jurul lui $a = 0$, adică seria Maclaurin, asociată funcției e^x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Coarda dusă aleator în cerc este complet determinată, de exemplu, de următorii doi parametri: distanța de la centrul cercului la coardă, notată d, și unghiul făcut de perpendiculară cu un diametru fixat, unghi notat α. În acest caz domeniul parametrilor este

$$\mathscr{D} : d \in [0, R),\ \alpha \in [0, 2\pi).$$

Fie un cerc de rază R, o coardă PQ cu mijlocul M și triunghiul echilateral ABC de latură l înscris în acel cerc.

Din calcule obținem: $l = R\sqrt{3}$, $|PQ| = 2\sqrt{R^2 - d^2}$ și deci

$$\mathbb{P}\left(|PQ| \geq l\right) = \mathbb{P}\left(d \leq R/2\right).$$

Domeniul situațiilor favorabile este atunci

$$\mathscr{D}' : d \in [0, R/2],\ \alpha \in [0, 2\pi).$$

Probabilitatea geometrică cerută este

$$\mathbb{P}\left(|PQ| \geq l\right) = \frac{\mathscr{Aria}\,(\mathscr{D}')}{\mathscr{Aria}\,(\mathscr{D})} = \frac{2\pi R/2}{2\pi R} = \frac{1}{2}.$$

(b) Coarda dusă aleator în cerc este complet determinată, de exemplu, de următorii doi parametri: unghiul făcut de raza OQ cu un diametru fixat, unghi notat α, și unghiul $\widehat{OQP}$, notat β. În acest caz domeniul parametrilor este

$$\mathscr{D} : \alpha \in [0, 2\pi),\ \beta \in [0, \pi/2).$$

Din calcule obținem: $l = R\sqrt{3}$, $|PQ| = 2R\cos\beta$ și deci

$$\mathbb{P}\left(|PQ| \geq l\right) = \mathbb{P}\big(\cos\beta \geq \sqrt{3}/2\big) = \mathbb{P}\left(0 \leq \beta \leq \pi/6\right).$$

Domeniul situațiilor favorabile este atunci

$$\mathscr{D}' : \alpha \in [0, 2\pi),\ \beta \in [0, \pi/6].$$

Probabilitatea geometrică cerută este

$$\mathbb{P}\left(|PQ| \geq l\right) = \frac{\mathscr{Aria}\,(\mathscr{D}')}{\mathscr{Aria}\,(\mathscr{D})} = \frac{2\pi \cdot \pi/6}{2\pi \cdot \pi/2} = \frac{1}{3}.$$

(c) Să considerăm mijlocul M al coardei dusă aleator în cerc. Observăm din desen că, dacă $|PQ| \geq l$ atunci punctul M aparține interiorului cercului înscris în triunghiul echilateral, respectiv, dacă PQ este o coardă oarecare în cerc atunci M este, evident, situat în interiorul cercului dat.

Deci

$$\mathbb{P}(|PQ| \geq l) = \frac{\mathscr{A}ria\,(\text{cercului înscris})}{\mathscr{A}ria\,(\text{cercului})} = \frac{\pi \cdot (R/2)^2}{\pi \cdot R^2} = \frac{1}{4}.$$

1.10.77 Care este probabilitatea ca alegând o coardă, la întâmplare, în interiorul unui cerc de rază R, aceasta să fie cel mult R?

Rezolvare:

Problema comportă mai multe rezolvări.

Să considerăm notațiile Exercițiului 1.10.76, cazurile (a) și respectiv (b).

(a) Domeniul parametrilor este

$$\mathscr{D} : d \in [0, R),\ \alpha \in [0, 2\pi).$$

Din calcule obținem $|PQ| = 2\sqrt{R^2 - d^2}$ și deci

$$\mathbb{P}(|PQ| \leq R) = \mathbb{P}\big(d \geq R\sqrt{3}/2\big).$$

Domeniul situațiilor favorabile este atunci

$$\mathscr{D}' : d \in [R\sqrt{3}/2, R],\ \alpha \in [0, 2\pi).$$

Probabilitatea geometrică cerută este

$$\mathbb{P}(|PQ| \leq R) = \frac{\mathscr{A}ria\,(\mathscr{D}')}{\mathscr{A}ria\,(\mathscr{D})} = \frac{2\pi R\left(1 - \sqrt{3}/2\right)}{2\pi R} = 1 - \sqrt{3}/2 = 0.134.$$

(b) Domeniul parametrilor este

$$\mathscr{D} : \alpha \in [0, 2\pi),\ \beta \in [0, \pi/2).$$

Din calcule obținem $|PQ| = 2R\cos\beta$ și deci

$$\mathbb{P}(|PQ| \leq R) = \mathbb{P}(\cos\beta \leq 1/2) = \mathbb{P}(\beta \geq \pi/3).$$

Domeniul situațiilor favorabile este atunci $\mathscr{D}' : \alpha \in [0, 2\pi)$ și $\beta \in [\pi/3, \pi/2]$.

Probabilitatea geometrică cerută este

$$\mathbb{P}(|PQ| \leq R) = \frac{\mathscr{A}ria\,(\mathscr{D}')}{\mathscr{A}ria\,(\mathscr{D})} = \frac{2\pi \cdot (\pi/2 - \pi/3)}{2\pi \cdot \pi/2} = \frac{1}{3} = 0.333.$$

1.10.78 Care este probabilitatea ca alegând o coardă, la întâmplare, în interiorul unui cerc, aceasta să aibă lungimea cuprinsă între a și b?

Rezolvare:

Să considerăm notațiile Exercițiului 1.10.76, cazul (a).

Domeniul parametrilor este

$$\mathscr{D} : d \in [0, R), \ \alpha \in [0, 2\pi).$$

Din calcule obținem $|PQ| = 2\sqrt{R^2 - d^2}$ și deci

$$\mathbb{P}\left(a \leq |PQ| \leq b\right) = \mathbb{P}\Big(\sqrt{R^2 - b^2/4} \leq d \leq \sqrt{R^2 - a^2/4}\Big).$$

Domeniul situațiilor favorabile este atunci

$$\mathscr{D}' : d \in \left[\sqrt{R^2 - b^2/4}, \sqrt{R^2 - a^2/4}\right], \quad \alpha \in [0, 2\pi).$$

Probabilitatea geometrică cerută este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(a \leq |PQ| \leq b\right) &= \frac{2\pi \cdot \left(\sqrt{R^2 - a^2/4} - \sqrt{R^2 - b^2/4}\right)}{2\pi R} \\ &= \frac{1}{R}\Big(\sqrt{R^2 - a^2/4} - \sqrt{R^2 - b^2/4}\Big).\end{aligned}$$

1.10.79 Un segment de lungime ℓ este rupt în trei segmente. Care este probabilitatea ca acestea să poată fi laturile unui triunghi?

Rezolvare:

Fie segmentul AB, de lungime ℓ, rupt în trei segmente de punctele aleator alese P, Q. Notăm $x = |AP|$, $y = |PQ|$. Domeniul cazurilor posibile este dat atunci de $\mathscr{D} : x \in [0, \ell]$, $y \in [0, \ell]$ astfel încât $x + y \leq \ell$, adică

$$\mathscr{D} : x \in [0, \ell]\,, \ y \in [0, \ell - x]\,.$$

Cele trei segmente formează un triunghi dacă și numai dacă au loc următoarele inegalități

$$\begin{cases} |AP| \leq |PQ| + |QB|\,, \\ |PQ| \leq |AP| + |QB|\,, \\ |QB| \leq |AP| + |PQ| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \ell/2, \\ y \leq \ell/2, \\ x + y \geq \ell/2. \end{cases}$$

Domeniul cazurilor favorabile este dat atunci de

$$\mathscr{D}' : x \in [0, \ell/2] \, , \ y \in [\ell/2 - x, \ell/2] \, .$$

Probabilitatea geometrică cerută este

$$\frac{\mathscr{A}ria\,(\mathscr{D}')}{\mathscr{A}ria\,(\mathscr{D})} = \frac{\ell^2/8}{\ell^2/2} = \frac{1}{4} .$$

Aceeași probabilitate obținem și dacă folosim notațiile $x = |AP|$, $y = |AQ|$.

În acest caz vom obține

$$\mathscr{D} : \{(x, y) : x, y \in [0, \ell]\}$$

și

$$\begin{aligned} \mathscr{D}' : &\{(x, y) : x, y \in [0, \ell] \, , \ x \le \ell/2, \ y \ge \ell/2, \ y \le x + \ell/2\} \\ &\cup \{(x, y) : x, y \in [0, \ell] \, , \ x \ge \ell/2, \ y \le \ell/2, \ y \ge x - \ell/2\} \end{aligned}$$

(am luat în considerare faptul că punctele pot fi în ordinea A, P, Q, B sau în ordinea A, Q, P, B).

Probabilitatea geometrică cerută este

$$\frac{\mathscr{A}ria\,(\mathscr{D}')}{\mathscr{A}ria\,(\mathscr{D})} = \frac{(\ell/2)^2/2 + (\ell/2)^2/2}{\ell^2} = \frac{1}{4} .$$

1.10.80 Fie segmentul AB, de lungime ℓ, rupt în trei segmente de punctele P, Q, alese aleator. Care este probabilitatea ca lungimea segmentului PQ să fie mai mică decât $\tilde{\ell}$ (cu $\tilde{\ell} \le \ell$)?

Rezolvare:

Să considerăm reperul xOy cu originea în A și astfel încât B este tot pe axa Ox. Vom nota cu x, y abscisele punctelor P și respectiv Q.

Domeniul cazurilor posibile este dat atunci de $\mathscr{D} : x \in [0, \ell]$, $y \in [0, \ell]$.

Domeniul cazurilor favorabile este dat de $\mathscr{D}' : x, y \in [0, \ell]$ astfel încât $|x - y| \le \tilde{\ell}$ ceea ce duce la

$$\mathscr{D}' : \{(x, y) : x, y \in [0, \ell] \, , \ y \le x + \tilde{\ell}\} \cap \{(x, y) : x, y \in [0, \ell] \, , \ y \ge x - \tilde{\ell}\}.$$

Probabilitatea geometrică cerută este

$$\frac{\mathscr{A}ria\,(\mathscr{D}')}{\mathscr{A}ria\,(\mathscr{D})} = \frac{\ell^2 - (\ell - \tilde{\ell})^2}{\ell^2} = \frac{2\ell\tilde{\ell} - \tilde{\ell}^2}{\ell^2} = \frac{2\tilde{\ell}}{\ell} - \frac{\tilde{\ell}^2}{\ell^2} .$$

1.10.81 Două semnale ajung la un dispozitiv de recepție uniform în intervalul de timp $[0, T]$. Aparatul se blochează dacă semnalele sosesc la interval mai mic de a minute unul față de celălalt ($a < T$). Care este probabilitatea ca aparatul să se blocheze?

Rezolvare:

Dacă x, y notează timpul când semnalul ajunge la aparat, atunci domeniul parametrilor, în funcție de situațiile posibile este $\mathscr{D} : x, y \in [0, T]$.

Domeniul situațiilor favorabile blocării este atunci $\mathscr{D}' : |x - y| < a$ ceea ce este echivalent cu $-a \leq x - y \leq a$.

Obținem

$$\mathbb{P}\left(|x-y|<a\right) = \frac{\mathscr{A}ria\left(\mathscr{D}'\right)}{\mathscr{A}ria\left(\mathscr{D}\right)}.$$

Domeniul este același cu cel obținut în Exercițiul 1.10.80. Deci

$$\mathbb{P}\left(|x-y|<a\right) = \frac{T^2-(T-a)^2}{T^2} = 1-\left(1-\frac{a}{T}\right)^2.$$

1.10.82 Doi prieteni sosesc aleator, la un loc de întâlnire, între orele h și $h + T$. Fiecare așteaptă doar un sfert de oră pe celălalt. Care este probabilitatea întâlnirii lor?

Rezolvare:

Dacă $T \leq 1/4$, atunci, evident, probabilitatea cerută este 1.

Dacă $T > 1/4$, atunci, reluând tipul de raționament din problema precedentă, probabilitatea cerută este

$$\frac{T^2-(T-1/4)^2}{T^2} = 1-\left(1-\frac{1}{4T}\right)^2.$$

1.10.83 În interiorul unui triunghi echilateral se alege la întâmplare (repartizat în mod uniform) un punct. Care este probabilitatea ca distanțele la cele trei laturi ale triunghiului considerat să fie laturile unui triunghi?

Rezolvare:

Să notăm cu M punctul din interiorul triunghiului echilateral ABC și cu P, Q, R picioarele perpendicularelor pe laturile BC, AC și respectiv AB. Deoarece $\mathscr{A}_{\Delta ABC} = \mathscr{A}_{\Delta AMC} + \mathscr{A}_{\Delta AMC} + \mathscr{A}_{\Delta BMC}$ deducem că

$$|MP| + |MQ| + |PQ| = (\text{constant}) = h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Deci problema este similară cu Exercițiul 1.10.79.

Să se dea și o interpretare geometrică a rezultatului (unde se poate situa punctul M astfel încât să aibă loc condițiile cerute în enunț?).

1.10.84 (Problema acului lui Buffon) Pe un plan este trasat un fascicul de drepte paralele, echidistante, având distanța $2a$ între drepte. Se aruncă pe acest fascicul un ac de lungime 2ℓ ($2\ell < 2a$). Care este probabilitatea ca acul să intersecteze una dintre dreptele fasciculului?

Rezolvare:

Se notează cu A, B capetele acului dat și cu M mijlocul lui. Se notează cu α unghiul făcut de AB cu dreptele paralele și cu d distanța cea mai scurtă de la M la o dreaptă din fascicul. Poziția acului este atunci unic determinată de d și α. Atunci, domeniul parametrilor este

$$\mathscr{D} : \alpha \in [0, \pi]\,,\ d \in [0, a]\,.$$

Ducem perpendiculara pe o dreaptă din fascicul și formăm triunghiul dreptunghic ABC (cu latura AC paralelă cu dreptele din fascicul). Obținem că $|BC| = 2\ell \sin \alpha$. În acest caz situațiile favorabile ca acul sa atingă o dreaptă este ca

$$d \leq |BC|/2 \quad \Leftrightarrow \quad d \leq \ell \sin \alpha.$$

Domeniul situațiilor favorabile este atunci

$$\mathscr{D}' : \alpha \in [0, \pi]\,,\ d \in [0, \ell \sin \alpha]\,.$$

Obținem

$$\mathscr{A}ria\,(\mathscr{D}') = \int_0^\pi \ell \sin \alpha d\alpha = -\ell \cos \alpha \Big|_0^\pi = 2\ell,$$

deci probabilitatea este $\dfrac{2\ell}{a\pi}$.

Având în vedere rezultatul obținut mai sus, se pot obține, prin experimentări, valori aproximative ale numărului π. Astfel, să luăm $\ell = a/2$. Dacă se aruncă acul de n ori și de k ori are loc intersecția, atunci se obține că frecvența relativă (vezi pagina 601) a evenimentului de avea loc intersecția este k/n.

Dar, conform limitei (5.22), probabilitatea teoretică este aproximată de această frecvență relativă, deci $\frac{2\ell}{a\pi} = \frac{1}{\pi} \simeq \frac{k}{n}$.

Astfel, obținem că $\pi \simeq \frac{n}{k}$.

1.10.85 Pe segmentul OA de lungime ℓ situat pe axa Ox se alege la întâmplare un punct B. Să se determine probabilitatea ca cel mai mic dintre segmentele OB și AB să aibă o lungime mai mare ca $\ell/3$.

Rezolvare:

Se va obține probabilitatea $1/3$.

1.10.86 Pe segmentul AB de lungime ℓ se aleg la întâmplare două puncte C și D. Să se determine probabilitatea ca C să fie situat mai aproape de D decât de A. Pozițiile punctelor C și D sunt egal posibile.

Rezolvare:

Se va obține probabilitatea $3/4$.

1.10.87 Se aleg la întâmplare două numere pozitive x și y mai mici sau egale cu 2. Să se determine probabilitatea ca produsul lor să nu depășească 1, iar y/x să nu depășească pe 2.

Rezolvare:

Se va obține probabilitatea $(1 + 3\ln 2)/8$.

1.10.88 Într-un cerc de rază R se marchează la întâmplare un punct M. Să se determine probabilitatea ca punctul să se găsească:

(a) în interiorul unui pătrat înscris în cerc;

(b) în interiorul unui triunghi echilateral înscris în cerc. Pozițiile punctului M sunt egal posibile.

Rezolvare:

Se va obține probabilitatea $2/\pi$ și respectiv $3\sqrt{3}/(4\pi)$.

Capitolul 2

Variabile aleatoare discrete

2.1 Variabile aleatoare. Generalități

O mărime legată de o experiență aleatoare $\mathscr{E}$ și care ia valori la întâmplare, în funcție de rezultatele experienței, se numește variabilă aleatoare.

Pentru o definiție mai riguroasă, să considerăm un spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Definiția 2.1 *Funcția*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

se numește **variabilă aleatoare** *(pe scurt* **v.a.***) dacă*

$$\{X \leq x\} \in \mathscr{F}, \quad \textit{pentru orice } x \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

unde

$$\{X \leq x\} \stackrel{\text{not}}{=} \{\omega : X(\omega) \leq x\}.$$

Remarca 2.2 Astfel, X este o v.a. dacă impunem ca, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, mulțimea $\{X \leq x\}$ să fie un eveniment, adică să fie un element din $\mathscr{F}$.

Apoi, având în vedere că $\mathscr{F}$ este o $\sigma-$algebră, obținem că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, mulțimea

$$\{\omega : X(\omega) > x\} \stackrel{\text{not}}{=} \{X > x\} = \overline{\{X \leq x\}}.$$

este tot un eveniment (fiind complementara unui alt eveniment).

De asemenea, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\{\omega : x < X(\omega) \leq y\} \overset{\text{not}}{=\!=} \{x < X \leq y\} = \{X > x\} \cap \{X \leq y\}$$

și astfel $\{x < X \leq y\}$ este tot un eveniment deci[45]

$$\{\omega : X(\omega) = x\} \overset{\text{not}}{=\!=} \{X = x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{x - 1/n < X \leq x\}$$

este un tot un eveniment.

Similar, se obține că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, mulțimile

$$\begin{aligned}
\{X < x\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{X \leq x - 1/n\} \\
\{X \geq x\} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{X > x - 1/n\} \\
\{x \leq X \leq y\} &= \{X \geq x\} \cap \{X \leq y\} \\
\{x \leq X < y\} &= \{X \geq x\} \cap \{X < y\} \\
\{x < X < y\} &= \{X > x\} \cap \{X < y\}
\end{aligned}$$

sunt și ele evenimente. $\diamond$

Are loc și scrierea[46]

$$\begin{aligned}
\{X \leq x\} &= \{\omega : X(\omega) \leq x\} \\
&= \{\omega : X(\omega) \in (-\infty, x]\} \\
&= X^{-1}((-\infty, x]),
\end{aligned}$$

unde notația $X^{-1}(A)$ desemnează **preimaginea**[47] (sau **imaginea inversă** a) mulțimii Borel[48] $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ prin X.

---

45 Vezi și Exercițiul 1.55.

46 Similar, putem scrie, de exemplu, și

$$\begin{aligned}
\{X > x\} &= \{\omega : X(\omega) \in (x, \infty)\} = X^{-1}((x, \infty)), \\
\{x < X \leq y\} &= \{\omega : X(\omega) \in (x, y]\} = X^{-1}((x, y]), \\
\{X = x\} &= \{\omega : X(\omega) \in \{x\}\} = X^{-1}(\{x\}).
\end{aligned}$$

47 **Preimaginea** (sau **imaginea inversă a**) unei mulțimi $A \subset \mathscr{V}$ printr-o funcție $f : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ este dată de

$$f^{-1}(A) \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \in \mathscr{U} : f(x) \in A\}.$$

Preimaginea unei mulțimi printr-o funcție există chiar dacă funcția nu admite inversă în sensul uzual.

48 Pentru $\sigma-$algebra Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ vezi Definiția 1.52.

Prin urmare, Definiția 2.1 devine: funcția $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este o v.a. dacă

$$\text{pentru orice } x \in \mathbb{R}, \quad X^{-1}\left((-\infty, x]\right) \in \mathscr{F}.$$

Aceasta înseamnă, echivalent (vezi Remarca 1.53), că $X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$, pentru orice $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, adică X este o funcție măsurabilă și astfel Definiția 2.1 este echivalentă cu următoarea definiție.

Definiția 2.3 *Spunem că funcția $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este o v.a. dacă este o* **funcție măsurabilă**[49] *între spațiile măsurabile $(\Omega, \mathscr{F})$ și $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, i.e.*

$$\boxed{X^{-1}(B) \in \mathscr{F}, \quad \text{pentru orice } B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),}$$

.

Remarca 2.4 Evident, Definiția 2.3 este echivalentă (vezi Remarca 1.53) și cu definiția: funcția $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este o v.a. dacă

$$\{X < x\} \in \mathscr{F}, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

◇

Mulțimea $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ este mulțimea valorilor v.a. Vom clasifica[50] o v.a. X astfel:

- X este o **v.a. de tip discret** dacă mulțimea $X(\Omega)$ este numărabilă[51] (finită sau infinit numărabilă).
- X este o **v.a. de tip continuu** dacă mulțimea $X(\Omega)$ este un interval (posibil nemărginit) sau o reuniune de intervale din $\mathbb{R}$ (un interval poate fi nemărginit).

Exemple de v.a. discrete: v.a. care are drept valori numărul de puncte apărute pe o față a zarului, la aruncarea unui zar; v.a. care are drept valori

[49] Să observăm că definiția unei funcții măsurabile $X : A_1 \to A_2$ depinde de $\sigma-$algebra asociată respectiv celor două spații A_1, A_2.

[50] Pentru o clasificare exhaustivă vezi Remarca 3.14.

[51] Spunem că o mulțime este **numărabilă** dacă are același cardinal cu o submulțime a lui $\mathbb{N}$. Prin urmare, o mulțime numărabilă este fie finită fie infinită, dar cu același cardinal cu $\mathbb{N}$.
Se poate arăta (vezi, de exemplu, [24, Proposition 1.10]) că
$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^*| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|.$$

numărul de apeluri zilnice primite de un Serviciu Clienți al unei firme; v.a. care are drept valori numărul de cutremure apărute într-o anumită zonă seismică.

Exemple de v.a. de tip continuu: v.a. ale cărei valori reprezintă timpul de funcționare a unui aparat, până la prima defectare; v.a. ale cărei valori reprezintă durata de viață a unui organism; v.a. ale cărei valori reprezintă mărimile erorilor comise la efectuarea măsurătorilor.

În fiecare din aceste exemple, unui fenomen supus aleatorului, i se asociază un număr real, deci se stabilește o corespondență între spațiul Ω convenabil ales și $\mathbb{R}$. În practică este deseori dificil să găsim valorile acestor corespondențe, dar este posibil să apreciem cât de des sunt luate aceste valori.

Definiția 2.5 *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. Funcția*

$$\mathbb{P}_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1],$$

definită prin

$$\mathbb{P}_X(B) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}), \quad B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \tag{2.2}$$

se numește **legea** *sau* **repartiția** *sau* **distribuția** *v.a. X.*

Remarca 2.6 Putem scrie și sub forma

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(B)\right) = \left(\mathbb{P} \circ X^{-1}\right)(B), \quad B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

$\diamond$

Remarca 2.7 În *Teoria probabilităților* suntem interesați nu de valorile pe care le poate lua o v.a., ci de probabilitățile ca X să ia valori într-o anumită mulțime $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, adică $\mathbb{P}(X \in B)$, pentru $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, deci de legea v.a. X. $\diamond$

Remarca 2.8 Se poate demonstra că dacă $\mathbb{P}_X$ este legea unei v.a. X, atunci $\mathbb{P}_X : (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}$ este o probabilitate, deci tripletul $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ devine un spațiu de probabilitate. $\diamond$

Având în vedere că $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ poate fi generată de intervale de tipul $(-\infty, x]$, adică $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\})$, a cunoaște legea unei v.a. este echivalent cu a cunoaște $\mathbb{P}_X\left((-\infty, x]\right)$. Astfel, obținem următoarea noțiune.

Definiția 2.9 *Fie* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *o v.a. Funcția*

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1],$$

definită prin

$$F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X \le x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

se numește **funcția de repartiție** *(sau* **funcția de distribuție** *sau* **funcția de distribuție cumulativă***) asociată v.a.* X.

Remarca 2.10 Putem scrie și sub forma

$$F_X(x) = \mathbb{P}\big(X^{-1}((-\infty, x])\big) = \mathbb{P}_X\big((-\infty, x]\big). \tag{2.4}$$

$\diamond$

Remarca 2.11 Prin urmare, determinarea funcției de repartiție F_X, asociată v.a. X, calculată în punctul $x \in \mathbb{R}$, înseamnă determinarea probabilității evenimentului ca v.a. X să ia valori mai mici decât x. $\diamond$

Remarca 2.12 *Teoria probabilităților* se ocupă cu studiul legilor v.a. sau, echivalent, al funcțiilor de repartiție, și al proprietăților acestora. Tocmai această concentrare asupra studiului repartițiilor este ceea ce distinge *Teoria probabilităților* de *Teoria măsurii.* $\diamond$

Propoziția 2.13 *Au loc următoarele* **proprietăți caracteristice ale funcției de repartiție***:*

(i) *Funcția* F_X *este monoton nedescrescătoare*[52].

(ii) *Funcția* F_X *este continuă la dreapta în orice punct* $x \in \mathbb{R}$, *i.e.*

$$F_X(x) = F_X(x+0), \quad \textit{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

unde $F_X(x+0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} F_X(y)$.

[52] Spunem că o funcție este **nedescrescătoare** dacă este crescătoare, dar nu neapărat strict crescătoare.

(iii) *Au loc*[53] *și*

(2.5) $$F_X(-\infty) = 0 \quad \text{și} \quad F_X(\infty) = 1,$$

unde

$$F_X(-\infty) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{x\to-\infty} F_X(x), \qquad F_X(\infty) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{x\to\infty} F_X(x).$$

Remarca 2.14 O funcție oarecare $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ care satisface cele trei proprietăți din Propoziția 2.13 se numește ***funcție de repartiție*** (sau ***funcție de distribuție*** sau ***funcție de distribuție cumulativă***). $\diamond$

Demonstrație. (i) Într-adevăr, dacă $x < y$, atunci $\{X \le x\} \subseteq \{X \le y\}$, deci $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) \le \mathbb{P}(X \le y) = F_X(y)$.

(ii) Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $x_n \searrow x$, pentru $n \to \infty$. Atunci, pentru orice n, avem $\{X \le x_n\} \supseteq \{X \le x_{n+1}\}$, iar

$$\bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*} \{X \le x_n\} = \{X \le x\},$$

adică (vezi Definiția 1.41)

$$\{X \le x_n\} \searrow \{X \le x\}.$$

Folosind continuitatea probabilității $\mathbb{P}$ în raport cu șiruri monotone de evenimente (vezi Propoziția 1.42) obținem

$$F_X(x_n) = \mathbb{P}(X \le x_n) \searrow \mathbb{P}(X \le x) = F_X(x).$$

(iii) Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $x_n \to -\infty$, pentru $n \to \infty$. Atunci, șirul de evenimente $(\{X \le x_n\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ este necrescător, iar $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \{X \le x_n\} = \varnothing$, adică

$$\{X \le x_n\} \searrow \varnothing.$$

Aplicând Propoziția 1.42, obținem

$$F_X(x_n) = \mathbb{P}(X \le x_n) \searrow \mathbb{P}(\varnothing) = 0.$$

Apoi fie șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $y_n \to \infty$, pentru $n \to \infty$. Atunci, șirul de evenimente $(\{X \le y_n\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nedescrescător, iar $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{X \le y_n\} = \Omega$, adică

$$\{X \le y_n\} \nearrow \Omega.$$

[53] În plus față de limitele date de (2.5), au loc limitele date de (3.32).

Aplicând Propoziția 1.42, obținem

$$F_X(y_n) = \mathbb{P}(X \leq y_n) \nearrow \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

■

Remarca 2.15 Vom arăta în Propoziția 3.95 că dacă o funcție $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ este funcție de repartiție (în sensul Remarcii 2.14), atunci există un spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ și există o v.a. X definită pe acesta astfel încât F să fie funcția de repartiție asociată lui X, i.e. $F = F_X$. ◇

Remarca 2.16 Egalitatea

$$\mathbf{P}\big((-\infty, x]\big) = F(x), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

stabilește o corespondență biunivocă[54] între măsurile de probabilitate $\mathbf{P}$ pe $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ (conform Definiției 1.31) și funcțiile de repartiție F (în sensul Remarcii 2.14).

Într-adevăr, dacă se dă o măsură de probabilitate $\mathbf{P}$ pe $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, atunci se poate arăta că $F(x) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathbf{P}\big((-\infty, x]\big)$ este o funcție de repartiție pe $\mathbb{R}$.

Invers, dacă se dă o funcție de repartiție F pe $\mathbb{R}$, atunci se poate arăta că există o măsură de probabilitate $\bar{\mathbf{P}} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ astfel încât funcția de repartiție F să fie funcția de repartiție asociată acelei măsuri de probabilitate $\bar{\mathbf{P}}$.

În acest sens, să definim, mai întâi, colecția de mulțimi $\mathscr{E}$ care constă în toate reuniunile finite de intervale de tipul $(a,b], (-\infty, a], (b, \infty), (-\infty, \infty)$, cu $-\infty < a < b < \infty$; se poate arăta că această colecție $\mathscr{E}$ este o algebră peste $\mathbb{R}$ (vezi Definiția 1.23). Să observăm că $\sigma-$algebra generată de $\mathscr{E}$ coincide cu $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ (vezi Definiția 1.47). Apoi definim aplicația $\mathbf{P}$ pe algebra $\mathscr{E}$ astfel (vezi formulele de tip (2.10)):

$$\mathbf{P}\big((a,b]\big) = F(b) - F(a), \quad \mathbf{P}\big((-\infty, a]\big) = F(a),$$

$$\mathbf{P}\big((b,\infty)\big) = 1 - F(b), \qquad \mathbf{P}\big((-\infty,\infty)\big) = 1, \quad \text{pentru orice } a < b \text{ din } \mathbb{R},$$

și extindem în mod natural definiția lui $\mathbf{P}$ pe reuniuni finite de intervale disjuncte din $\mathscr{E}$: $\mathbf{P}\big(\bigcup_{i=1}^n A_i\big) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$, pentru orice $A_i \in \mathscr{E}$ disjuncte două

54 Vezi și [33, Theorem 7.1, Theorem 7.2].

câte două (e ușor de vazut, folosind definiția inițială, că $\mathbf{P}$ satisface această proprietate).

Se poate arăta că $\mathbf{P}$, definită anterior doar pe algebra $\mathscr{E}$, este măsură de probabilitate, adică verifică, în plus, numărabila aditivitate (vezi Definiția 1.31); în mod echivalent (conform Remarcii 1.43), se poate arăta că $\mathbf{P}$ verifică continuitatea secvențială în raport cu șiruri descrescătoare de evenimente convergente la $\varnothing$ (vezi [27, Chapter 7, Problem 18]).

Conform unei teoreme de extensie (vezi, de exemplu, [27, Chapter 7, Theorem 19]) deducem că există, în condițiile de mai sus, o unică măsură de probabilitate $\bar{\mathbf{P}}$ definită pe $\sigma-$algebra generată de $\mathscr{E}$, adică pe $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, astfel încât $\bar{\mathbf{P}}$ este o extensie a lui $\mathbf{P}$, i.e. $\bar{\mathbf{P}}(A) = \mathbf{P}(A)$, pentru orice $A \in \mathscr{E}$.

Astfel, $\bar{\mathbf{P}}\big((-\infty, b]\big) = \mathbf{P}\big((-\infty, b]\big) = F(b)$, adică funcția de repartiție F este chiar funcția de repartiție asociată acestei măsuri de probabilitate $\bar{\mathbf{P}}$.

Prin urmare, dacă este dată legea unei v.a., atunci există o unică funcție de repartiție asociată, i.e. definită de (2.4). Invers, dacă este dată o funcție de repartiție (în sensul Remarcii 2.14), atunci există o unică lege asociată[55], i.e. o măsură de probabilitate astfel încât funcția de repartiție dată este funcția de repartiție asociată acelei măsuri de probabilitate. $\diamond$

Propoziția 2.17 *Au loc următoarele* **proprietăți suplimentare ale funcției de repartiție***:*

(iv) *Funcția F_X admite o mulțime numărabilă de puncte de discontinuitate (care sunt doar de specia întâi).*

(v) *Funcția F_X admite limită la stânga în orice punct $x \in \mathbb{R}$, i.e.*

$$\text{există } F_X(x-0) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} F_X(y).$$

(vi) *Au loc următoarele formule, pentru orice $a \in \mathbb{R}$:*

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{P}(X < a) = F_X(a-0), \\ &\mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a), \\ &\mathbb{P}(X \geq a) = 1 - F_X(a-0). \end{aligned}} \tag{2.6}$$

[55] Pentru alte funcții care determină în mod unic legea unei v.a. vezi Remarca 3.8, Remarca 4.19 și Remarca 4.34 (inclusiv Teorema 4.35).

(vii) *Pentru orice* $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a-0). \tag{2.7}$$

Prin urmare,

$$F_X \text{ este continuă în } a \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(X = a) = 0 \tag{2.8}$$

și, deoarece F *admite un număr numărabil de salturi, deducem că mulțimea punctelor* a *pentru care* $\mathbb{P}(X = a) \neq 0$ *este și ea numărabilă:*

$$\{a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X = a) > 0\} \quad \text{este numărabilă.}$$

$(viii)$ *Au loc următoarele formule*[56]*, pentru orice* $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$*,*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a < X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a), \\ \mathbb{P}(a < X < b) &= F_X(b-0) - F_X(a), \\ \mathbb{P}(a \leq X < b) &= F_X(b-0) - F_X(a-0), \\ \mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a-0). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Evident, formulele precedente se pot scrie utilizând legea v.a. $\mathbb{P}_X$ *a unei v.a.* X*; astfel, obținem exprimarea legii* $\mathbb{P}_X$ *cu ajutorul funcției de repartiție (formule adevărate pentru orice* $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$*):*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X\big((a,b]\big) &= F_X(b) - F_X(a), \\ \mathbb{P}_X\big((a,b)\big) &= F_X(b-0) - F_X(a), \\ \mathbb{P}_X\big([a,b)\big) &= F_X(b-0) - F_X(a-0), \\ \mathbb{P}_X\big([a,b]\big) &= F_X(b) - F_X(a-0). \end{aligned} \tag{2.10}$$

(ix) *Prin urmare, dacă* F *este continuă, atunci, pentru orice* $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$*,*

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) &= \mathbb{P}(a < X \leq b) \\ &= \mathbb{P}(a < X < b) \\ &= \mathbb{P}(a \leq X < b) \\ &= \mathbb{P}(a \leq X \leq b). \end{aligned} \tag{2.11}$$

---

[56] Formulele (2.9) conțin, în exprimarea lor, și formulele (2.6) și (2.7).

(x) *Dacă X, Y sunt două v.a. astfel încât $X \leq Y$, $\mathbb{P}-$a.s., atunci $F_X(x) \geq F_Y(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstrație. (iv) Având în vedere că funcția F_X este nedescrescătoare, obținem că mulțimea punctelor de discontinuitate este cel mult numărabilă (pentru demonstrație vezi, de exemplu, [24, Lemma 1.12]).

În particular, obținem și faptul că orice funcție de repartiție este funcție măsurabilă.

(v) Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $x_n \nearrow x$, pentru $n \to \infty$. Atunci, pentru orice n, avem $\{X \leq x_n\} \subseteq \{X \leq x_{n+1}\}$, iar

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{X \leq x_n\} = \{X < x\},$$

adică (vezi Definiția 1.41)

$$\{X \leq x_n\} \nearrow \{X < x\}.$$

Aplicând Propoziția 1.42, obținem

$$F_X(x_n) = \mathbb{P}(X \leq x_n) \nearrow \mathbb{P}(X < x),$$

deci există $F_X(x-0)$, iar $F_X(x-0) = \mathbb{P}(X < x)$.

(vi) Pentru demonstrație sunt utile egalitățile:

$$\{X \leq a\} \cup \{X > a\} = \Omega,$$
$$\{X < a\} \cup \{X \geq a\} = \Omega, \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

(vii) Pentru demonstrație este utilă egalitatea:

$$\{X < a\} \cup \{X = a\} = \{X \leq a\}, \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

$(viii)$ Pentru demonstrație sunt utile egalitățile:

$$\{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\} = \{X \leq b\},$$
$$\{X \leq a\} \cup \{a < X < b\} = \{X < b\},$$
$$\{X < a\} \cup \{a \leq X < b\} = \{X < b\},$$
$$\{X < a\} \cup \{a \leq X \leq b\} = \{X \leq b\},$$

pentru orice $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$.

(x) Din ipoteză (vezi Nota 9 și Nota 58) rezultă că există evenimentul neglijabil N (i.e. $N \in \mathscr{F}$ cu $\mathbb{P}(N) = 0$) astfel încât $X(\omega) \leq Y(\omega)$, pentru orice $\omega \in \Omega \setminus N$ (deci $X(\omega) > Y(\omega)$, pentru orice $\omega \in N$). Astfel obținem că

$$\begin{aligned}\{Y \leq x\} &= \{\omega \in \Omega \setminus N : Y(\omega) \leq x\} \cup \{\omega \in N : Y(\omega) \leq x\} \\ &\subseteq \{\omega \in \Omega \setminus N : X(\omega) \leq x\} \cup N \\ &\subseteq \{X \leq x\} \cup N\end{aligned}$$

și deci

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(N) = F_X(x).$$

■

Definiția 2.18 *Spunem că v.a.* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *sunt* **identic distribuite** *sau* **identic repartizate** *sau* **egale în distribuție**[57] *sau* **egale în lege** *, notat*

$$X \overset{\mathrm{d}}{=} Y \quad \textit{sau} \quad X \overset{\text{lege}}{=\!=} Y,$$

dacă au aceeași lege, i.e.

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y, \quad \textit{pe } \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

sau, echivalent, dacă au aceeași funcția de repartiție, i.e.

$$F_X = F_Y, \quad \textit{pe } \mathbb{R},$$

sau, echivalent, dacă urmează aceeași distribuție.

Remarca 2.19 Două v.a. discrete sunt identic distribuite dacă și numai dacă au același tablou de repartiție (vezi paginile 133 și 204).

Două v.a. continue sunt identic distribuite dacă și numai dacă densitățile lor de repartiție sunt egale a.p.t. pe $\mathbb{R}$ în raport cu măsura Lebesgue (vezi Nota 152 și Remarca 3.8). ◇

Remarca 2.20 Să menționăm că dacă

$$X + Z \overset{\mathrm{d}}{=} Y + Z \quad \not\Longrightarrow \quad X \overset{\mathrm{d}}{=} Y$$

(pentru demonstrație vezi [31, Example 4.3.2]). ◇

[57] Pentru o caracterizare a egalității în distribuție a două v.a. vezi Propoziția 5.38.

Definiția 2.21 *Spunem că v.a. X, Y sunt* **egale aproape sigur (în raport cu măsura de probabilitate $\mathbb{P}$)** *și scriem*

$$X \overset{\text{a.s.}}{=} Y \qquad \textit{sau} \qquad X = Y, \quad \mathbb{P} - \textit{a.s.},$$

dacă[58] *există evenimentul neglijabil N (i.e. mulțimea $N \in \mathscr{F}$ cu $\mathbb{P}(N) = 0$) astfel încât*

$$X(\omega) = Y(\omega), \quad \textit{pentru orice } \omega \in \Omega \setminus N.$$

Astfel, $X = Y$, $\mathbb{P}-$a.s., înseamnă[59]

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1 \quad \textit{sau, echivalent,}$$
$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 0.$$

Lema 2.22 *Fie două v.a. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$. Dacă X, Y sunt egale $\mathbb{P}-$a.s., atunci cele două v.a. sunt identic distribuite, i.e.*

$$\boxed{X \overset{\text{a.s.}}{=} Y \quad \Longrightarrow \quad X \overset{\text{d}}{=} Y}$$

adică

$$X = Y, \quad \mathbb{P} - \textit{a.s.} \quad \Longrightarrow \quad F_X = F_Y, \quad \textit{pe } \mathbb{R}.$$

Remarca 2.23 Evident, reciproca nu este adevărată: putem să avem două v.a. diferite $\mathbb{P}-$a.s. (pot fi diferite chiar în orice $\omega \in \Omega$), dar care să fie identic distribuite.

De fapt, este posibil ca cele două v.a. nici macar să nu fie definite pe același spațiu de probabilitate, dar, totuși, v.a. sa fie egale în lege. ◇

---

[58] Fie spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Spunem că o proprietate $\mathscr{A}$ are loc $\mathbb{P}-$**aproape sigur** (notat $\mathbb{P}-$**a.s.**) sau $\mathbb{P}-$**aproape pentru toți** $\omega \in \Omega$ (notat $\mathbb{P}-$**a.p.t.** $\omega \in \Omega$) sau $\mathbb{P}-$**aproape peste tot pe** Ω (notat $\mathbb{P}-$**a.p.t.** pe Ω) sau cu **cu probabilitatea** 1 dacă există o mulțime neglijabilă $N \subset \Omega$ astfel încât proprietatea $\mathscr{A}$ are loc pentru orice $\omega \in \Omega \setminus N$ (vezi Nota 9, Nota 152 și Nota 154).

Să observăm că mulțimea M pentru care proprietatea $\mathscr{A}$ nu are loc nu este neapărat de probabilitate nulă deoarece M nu trebuie, în mod necesar, să fie eveniment, i.e. $M \in \mathscr{F}$. Prin urmare, știm că există M, N, N_1 astfel încât $M \subseteq N \subseteq N_1$, iar N_1 este eveniment neglijabil, i.e. $N_1 \in \mathscr{F}$ cu $\mathbb{P}(N_1) = 0$, iar proprietatea $\mathscr{A}$ are loc pentru orice $\omega \in (\Omega \setminus N) \cup (N \setminus M)$ și nu are loc pentru orice $\omega \in M$.

[59] Evident, mulțimea $\{X = Y\} = (X - Y)^{-1}(\{0\})$ este eveniment sau, echivalent, $\{X \neq Y\}$ este eveniment, deci $\{X = Y\}$ are loc aproape sigur dacă și numai dacă $\mathbb{P}(X = Y) = 1$ sau, echivalent, $\{X \neq Y\}$ este mulțime neglijabilă dacă și numai dacă $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$.

Demonstrație. Avem $\mathbb{P}(A) = 0$, unde $A = \{X \neq Y\}$. Atunci, pentru orice $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\{X \in B\} &= \{X \in B, Y = X\} \cup \{X \in B, Y \neq X\} \\ &= \{Y \in B\} \cup \{X \in B, Y \neq X\} \\ &\subseteq \{Y \in B\} \cup \{X \neq Y\}\end{aligned}$$

și, similar,

$$\{Y \in B\} \subseteq \{X \in B\} \cup \{X \neq Y\},$$

deci

$$\{X \in B\} \subseteq \{Y \in B\} \cup A \subseteq \{X \in B\} \cup A.$$

Astfel, obținem

$$\mathbb{P}(X \in B) \leq \mathbb{P}(Y \in B) + \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(X \in B) + \mathbb{P}(A),$$

deci $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(Y \in B)$, pentru orice $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, adică X și Y au aceeași lege. ∎

Definiția 2.24 *Dacă $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este o v.a., atunci $\sigma-$algebra generată de v.a. X este dată de*[60] *(vezi Definiția 1.47):*

$$\sigma(X) \overset{\text{def}}{=\!=} \sigma\left(\left\{X^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\right\}\right).$$

Remarca 2.25 Deoarece, în mod evident, $X^{-1}(B) \in \sigma(X)$, pentru orice $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, obținem ușor, conform Definiției 2.3, că $\sigma(X)$ este cea mai mică $\sigma-$algebră în raport cu care X este funcție măsurabilă. ◇

Remarca 2.26 Se poate arăta (vezi Remarca 1.53) că $\sigma-$algebra generată de v.a. X este dată de

$$\sigma(X) = \sigma\left(\left\{X^{-1}((-\infty, x]) : x \in \mathbb{R}\right\}\right).$$

◇

[60] De fapt, familia $\left\{X^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\right\}$ este chiar o $\sigma-$algebră, deci putem lucra cu definiția $\sigma(X) = \left\{X^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\right\}$.

Definiția 2.27 *Spunem că v.a.* $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ *sunt independente în ansamblu dacă* $\sigma-$*algebrele* $(\sigma(X_i))_{i=\overline{1,n}}$ *, generate de v.a. date, sunt* $\sigma-$*algebre independente în ansamblu, i.e.*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} C_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i),$$

pentru orice evenimente $C_i \in \sigma(X_i), i = \overline{1,n}$.

Având în vedere că $\sigma(X_i) = \{X_i^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\} = \{X_i \in B : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$, deducem că $C_i \in \sigma(X_i)$ dacă există $B_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ astfel încât $C_i = \{X_i \in B_i\}$, prin urmare putem defini și în modul următor.

Definiția 2.28 *Spunem că v.a.* $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ *sunt* **independente în ansamblu** *dacă*

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \in B_n),$$

pentru orice mulțime Borel $B_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, *cu* $i = \overline{1,n}$.

Remarca 2.29 Egalitatea precedentă se poate scrie și sub forma

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in B_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in B_i). \tag{2.12}$$

$\diamond$

Remarca 2.30 Evident, dacă v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt independente în sensul Definiției 2.28, atunci, alegând niște borelieni convenabili, se obține că și orice subfamilie de $k \leq n$ v.a. este formată tot din v.a. independente. $\diamond$

Definiția 2.31 *Spunem că v.a.* $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ *sunt* **independente două câte două** *dacă*

$$\mathbb{P}(X_i \in B_1, X_j \in B_2) = \mathbb{P}(X_i \in B_1) \cdot \mathbb{P}(X_j \in B_2),$$

pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *cu* $i \neq j$ *și pentru orice mulțimi Borel* $B_1, B_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Remarca 2.32 Evident, dacă v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt independente în sensul Definiției 2.28, atunci, alegând niște borelieni convenabili, se obține că ele sunt independente și două câte două.

Reciproca acestei afirmații nu este adevărată. Există exemple în care v.a. sunt independente două câte două, dar nu sunt independente în ansamblu. $\diamond$

Remarca 2.33 Alegând $B_i = (-\infty, a_i]$ obținem caracterizarea: v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt independente în ansamblu dacă și numai dacă

$$\mathbb{P}(X_1 \leq a_1, \ldots, X_n \leq a_n) = \prod\nolimits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq a_i),$$

pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. $\diamond$

Definiția 2.34 *Spunem $(X_i)_{i\in I}$ este o* **familie independentă în ansamblu** *de v.a. dacă are loc relația de tipul (2.12):*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap\nolimits_{i\in I} X_i \in B_i\right) = \prod\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}(X_i \in B_i).$$

2.2 Variabile aleatoare discrete cu un număr finit de valori

Cunoașterea legii $\mathbb{P}_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$, dată de $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$, unde $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, asociată unei v.a. discrete X, cu un număr finit sau infinit, dar numărabil de valori, este echivalentă cu cunoașterea valorilor pe care le poate lua v.a. (adică a mulțimii $X(\Omega)$) și a probabilităților cu care este luată fiecare valoare din $X(\Omega)$.

Putem reprezenta aceste informații sub forma unui **tablou** (sau **tabloul de repartiție** sau **tabloul de distribuție**) :

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=\overline{1,n}}, \tag{2.13}$$

unde $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, iar $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$, cu $i = \overline{1,n}$, deci[61]

$$p_i \geq 0, \text{ pentru } i = \overline{1,n}, \quad \text{și} \quad \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i = 1$$

(prin convenție, am scris valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale v.a. în ordine strict crescătoare).

[61] Într-adevăr, $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X = x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i$ deoarece $(\{X = x_i\})_{i=\overline{1,n}}$ formează un sistem complet de evenimente.

Să menționăm că legea unei v.a. discrete X, cu un numar finit de valori, este cunoscută complet de cunoașterea familiei finite de valori

$$(p_i)_{i=\overline{1,n}} \stackrel{\text{not}}{=\!=} (\mathbb{P}(X = x_i))_{i=\overline{1,n}},$$

astfel încât $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

Putem scrie și sub forma: o v.a. discretă X, cu un numar finit de valori, este descrisă complet prin cunoașterea funcției $p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$p_X(x_i) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathbb{P}(X = x_i), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.14}$$

astfel încât $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$, numită și **funcția masă de probabilitate** (care este, de fapt, **funcția densitate de repartiție** (2.39) **asociată unei v.a. discrete**).

Remarca 2.35 (vezi și Remarca 2.144) Să menționăm că o funcție $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definită pe un spațiu finit de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ este v.a. (vezi Definiția 2.1 sau Definiția 2.3) dacă și numai dacă $\{X = x\} \in \mathscr{F}$, pentru orice $x \in X(\Omega)$.

Prin urmare, în cazul unei funcții $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definită pe un spațiu finit de probabilitate $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ condiția din Definiția 2.1 are loc întotdeauna, adică

orice funcție $\quad X : (\Omega, \mathscr{P}(\Omega)) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))\quad$ este v.a. (i.e. măsurabilă).

$\diamond$

Exemplul 2.36 Dacă luăm $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{P}(\Omega)$, afirmația precedentă nu mai este adevărată.

Într-adevăr, fie spațiul finit de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ cu $\Omega = \{1, 2, 3\}$ și $\mathscr{F} = \{\varnothing, \Omega, \{1, 2\}, \{3\}\}$. Atunci, funcția identitate $X : \Omega \to \mathbb{R}$, dată de $X(1) = 1$, $X(2) = 2$, $X(3) = 3$, nu este măsurabilă, deoarece, de exemplu, $X^{-1}(\{1\}) = \{X = 1\} = \{1\} \notin \mathscr{F}$. $\diamond$

Exemplul 2.37 În cazul unei v.a. constante funcția de repartiție se calculează foarte ușor. Mai precis, dacă $X = c$, $\mathbb{P}-$a.s., atunci se obține:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ \\ 1, & x \geq c. \end{cases}$$

$\diamond$

De fapt, funcția de repartiție, dată de Definiția 2.9, asociată oricărei v.a. discrete (cu un număr finit sau infinit de valori), este o funcția în scară (adică e constantă pe porțiuni și nedescrescătoare). Deci

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ x_i \leq x}} \mathbb{P}(X = x_i), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

De exemplu, dacă $x < x_1$ avem $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

Apoi, pentru $x_1 \leq x < x_2$, avem

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x_1) = \mathbb{P}(X = x_1) = p_1.$$

Pentru $x_2 \leq x < x_3$ avem

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x_2) \\ &= \mathbb{P}(X \in \{x_1, x_2\}) \\ &= \mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2) \\ &= p_1 + p_2. \end{aligned}$$

Ș.a.m.d..

Astfel, se obține

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < x_1, \\ p_1, & \text{dacă } x_1 \leq x < x_2, \\ p_1 + p_2, & \text{dacă } x_2 \leq x < x_3, \\ \vdots & \\ p_1 + \ldots + p_{n-1}, & \text{dacă } x_{n-1} \leq x < x_n, \\ 1 = p_1 + \ldots + p_n, & \text{dacă } x_n \leq x. \end{cases} \tag{2.16}$$

Observăm că, în acest caz, funcția de repartiție F_X este o funcție continuă în orice punct din $\mathbb{R}$ cu excepția $\{x_k\}_{k=\overline{1,n}}$, mai precis, singurele puncte de discontinuitate sau de salt sunt $\{x_k\}_{k=\overline{1,n}}$.

Pe de altă parte, dacă se dă o funcție de tipul (2.16), atunci se poate arăta că ea este o funcție de repartiție (în sensul Remarcii 2.14) și, în plus, putem determina v.a. X căreia funcția îi este asociată. Astfel, probabilitățile $\mathbb{P}(X = x)$ sunt date de (2.7):

$$\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x - 0), \quad \text{pentru orice } x \in X(\Omega).$$

Prin urmare,

$$\begin{array}{ll} \mathbb{P}(X = x) = 0, & \text{pentru orice } x \text{ în care } F_X \text{ este continuă,} \\ \mathbb{P}(X = x) \neq 0, & \text{pentru orice } x \text{ în care } F_X \text{ are un salt,} \end{array}$$

deci X ia doar valorile x în care F_X este discontinuă.

Remarca 2.38 De asemenea, deducem că X este v.a. discretă dacă și numai dacă funcția de repartiție F_X asociată v.a. este constantă pe porțiuni. $\diamond$

Exemplul 2.39 **Funcția indicatoare $\mathbb{1}_A$ a evenimentului** $A \in \mathscr{F}$, dată de

$$\mathbb{1}_A(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases}$$

este o v.a. discretă.

Mai mult, se poate arăta ușor că dacă $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ este o mulțime, atunci funcția $\mathbb{1}_A$ este v.a. (adică funcție măsurabilă, vezi Definiția 2.3) dacă și numai dacă A este eveniment, adică $A \in \mathscr{F}$.

Într-adevăr, concluzia se obține dacă observăm că

$$(\mathbb{1}_A)^{-1}(B) = \begin{cases} \varnothing, & \text{dacă } 0 \notin B, 1 \notin B, \\ A, & \text{dacă } 0 \notin B, 1 \in B, \\ \bar{A}, & \text{dacă } 0 \in B, 1 \notin B, \\ \Omega, & \text{dacă } 0 \in B, 1 \in B, \end{cases}$$

pentru orice $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. $\diamond$

Remarca 2.40 Prin urmare, dacă X este o v.a. de tip discret (cu un număr finit sau infinit de valori) definită pe spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, atunci putem scrie v.a. X sub forma

$$X = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{1}_{\{X = x_i\}}, \tag{2.17}$$

unde I este o mulțime numărabilă, $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$, iar

$$A_i \stackrel{\text{def}}{=\!=} X^{-1}(\{x_i\}) = \{X = x_i\} = \{\omega : X(\omega) = x_i\}, \quad i \in I.$$

Evident, evenimentele $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ reprezinta un sistem complet de evenimente.

Deci, dată o v.a. cu un număr numărabil de valori, putem să-i atașăm un sistem complet de evenimente $(A_i)_{i\in I}$, de exemplu, $A_i = \{X = x_i\}$, pentru $i \in I$.

Are loc și reciproca: dat un sistem complet de evenimente $(A_i)_{i\in I}$ se poate defini o v.a. X care are tabloul de repartiție (2.13), alegând $p_i = \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$, pentru $i \in I$. $\diamond$

Exemplul 2.41 Să considerăm experiența care constă în aruncarea unui zar. Fie X v.a. ale cărei valori reprezintă numărul de puncte apărute la aruncarea unui zar. Să se scrie tabloul de repartiție și să se determine funcția de repartiție.

Mulțimea evenimentelor este $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și ea coincide cu Ω, adică

$$\Omega = \{\omega = i : i \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}.$$

Atunci $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este dată de

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Funcția de repartiție este $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1/6, & 1 \le x < 2, \\ 2/6, & 2 \le x < 3, \\ \vdots & \\ 5/6, & 5 \le x < 6, \\ 1, & 6 \le x. \end{cases}$

$\diamond$

2.2.1 Funcția delta a lui Dirac

Definiția 2.42 ***Funcția treaptă Heaviside*** *(sau* ***funcția treaptă unitate Heaviside****)* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este dată de*

$$H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Definiția 2.43 ***Funcția delta a lui Dirac*** $\delta_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este o funcție egală peste tot cu* 0 *cu excepția punctului* $x = 0$ *în care funcția ia valoarea* ∞ *și care satisface restricția* $\int_{\mathbb{R}} \delta_0(x)\, dx = 1$*, adică*

$$\begin{aligned} &(i) \quad \delta_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} ; \\ &(ii) \quad \int_{\mathbb{R}} \delta_0(x)\, dx = 1. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Remarca 2.44 În plus, funcția delta a lui Dirac δ_0 satisface și următoarele două condiții formale:

$$\begin{aligned} &(iii) \quad \delta_0(x) = \frac{dH}{dx}(x), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}; \\ &(iv) \quad H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta_0(t)\, dt, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

$\diamond$

Remarca 2.45 Această funcție δ_0 nu este o funcție în sensul standard deoarece nici o funcție propriu-zisă nu satisface toate cele patru condiții. $\diamond$

Această funcție apare astfel: să definim, pentru orice $\alpha > 0$,

$$H^{\alpha}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & x < -\alpha/2, \\ \dfrac{1}{\alpha}\left(x + \dfrac{\alpha}{2}\right), & -\alpha/2 \leq x \leq \alpha/2, \\ 1, & x > \alpha/2, \end{cases}$$

și apoi, pentru $\alpha > 0$,

$$\delta_0^\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dH^\alpha}{dx}(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \alpha/2, \\ \dfrac{1}{\alpha}, & |x| < \alpha/2. \end{cases} \tag{2.21}$$

Atunci funcția delta δ_0 a lui Dirac apare ca limită a funcției δ_0^α pentru $\alpha \to 0_+$, adică definiția (i–2.19):

$$\lim_{\alpha\to 0_+} \delta_0^\alpha(x) = \delta_0(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Evident,

$$\lim_{\alpha\to 0_+} H^\alpha(x) = H(x), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Dacă am putea trece la limită în membrul drept al definiției (2.21), am obține relația (iii–2.20), adică am obține scrierea formală

$$\delta_0(x) = \frac{dH}{dx}(x).$$

Relația (iii–2.20) se mai poate obține și astfel: având în vedere că putem scrie pe $\delta_0^\alpha(x)$ cu ajutorul lui $H(x)$ sub forma

$$\delta_0^\alpha(x) = \frac{H(x+\alpha/2) - H(x-\alpha/2)}{\alpha},$$

deducem, dacă H ar fi derivabilă, că

$$\begin{aligned} \delta_0(x) &= \lim_{\alpha\to 0_+} \delta_0^\alpha(x) \\ &= \lim_{\alpha\to 0_+} \frac{1}{2}\left(\frac{H(x+\alpha/2) - H(x)}{\alpha/2} + \frac{H(x) - H(x-\alpha/2)}{\alpha/2}\right) \\ &= \lim_{\alpha\to 0_+} \frac{1}{2}\left(H'(x) + H'(x)\right) \\ &= H'(x). \end{aligned}$$

Acum, pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrar, dar fixat, să luăm, prin definiție,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\delta_0(x-x_0)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha\to 0_+} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\delta_0^\alpha(x-x_0)\,dx. \tag{2.22}$$

Dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție oarecare continuă în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrar, dar fixat, atunci are loc formula de calcul

$$(v) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \delta_0(x - x_0)\, dx = g(x_0)\,. \tag{2.23}$$

Într-adevăr, conform (2.22), avem că

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \delta_0(x - x_0)\, dx &= \lim\nolimits_{\alpha \to 0_+} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \delta_0^{\alpha}(x - x_0)\, dx \\
&= \lim\nolimits_{\alpha \to 0_+} \int_{x_0 - \alpha/2}^{x_0 + \alpha/2} g(x)\, \frac{1}{\alpha}\, dx \\
&= \lim\nolimits_{\alpha \to 0_+} \frac{1}{\alpha} \int_{x_0 - \alpha/2}^{x_0 + \alpha/2} g(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Deoarece g este continuă în x_0, avem că pentru orice $\epsilon > 0$, există $\eta > 0$, astfel încât pentru orice $|x - x_0| < \eta$ să avem $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$. Deci, pentru $\epsilon > 0$ arbitrar, dar fixat, există α_0 (luat, de fapt, $\alpha_0 = 2\eta$) astfel încât pentru orice $0 < \alpha < \alpha_0$, avem că

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\alpha} \int_{x_0 - \alpha/2}^{x_0 + \alpha/2} g(x)\, dx - g(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{\alpha} \int_{x_0 - \alpha/2}^{x_0 + \alpha/2} (g(x) - g(x_0))\, dx \right| \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \int_{x_0 - \alpha/2}^{x_0 + \alpha/2} |g(x) - g(x_0)|\, dx \\
&< \lim\nolimits_{\alpha \to 0_+} \frac{1}{\alpha} \int_{x_0 - \alpha/2}^{x_0 + \alpha/2} \epsilon\, dx \\
&= \lim\nolimits_{\alpha \to 0_+} \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \cdot \epsilon \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

deoarece, dacă $x \in (x_0 - \alpha/2, x_0 + \alpha/2)$, atunci $|x - x_0| < \alpha/2 < \alpha_0/2 = \eta$ și astfel, din continuitatea în x_0, trebuie ca $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$.

Astfel, conform definiției, am obținut că are loc

$$\lim\nolimits_{\alpha \to 0_+} \frac{1}{\alpha} \int_{x_0 - \alpha/2}^{x_0 + \alpha/2} g(x)\, dx = g(x_0)\,,$$

adică (2.23).

În cazul particular $g = 1$ pe $\mathbb{R}$ avem:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0 (x - x_0)\, dx &= \lim_{\alpha \to 0_+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0^{\alpha} (x - x_0)\, dx \\
&= \lim_{\alpha \to 0_+} \int_{x_0 - \alpha/2}^{x_0 + \alpha/2} \frac{1}{\alpha}\, dx \\
&= \lim_{\alpha \to 0_+} \frac{1}{\alpha} \int_{x_0 - \alpha/2}^{x_0 + \alpha/2} dx \\
&= \lim_{\alpha \to 0_+} \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \\
&= 1,
\end{aligned}$$

adică am obținut relația (ii–2.19).

Deci relația (v–2.23) reprezintă o generalizare a proprietății (ii–2.19).

Acum, pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrar, dar fixat, avem, conform definiției (2.22), pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{x} \delta_0 (t - x_0)\, dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \to 0_+} \int_{-\infty}^{x} \delta_0^{\alpha} (t - x_0)\, dt.$$

Deci

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} \delta_0 (t - x_0)\, dt &= \lim_{\alpha \to 0_+} \int_{(-\infty, x] \cap \left[x_0 - \frac{\alpha}{2}, x_0 + \frac{\alpha}{2}\right]} \frac{1}{\alpha}\, dt \\
&= \lim_{\alpha \to 0_+} \begin{cases} \displaystyle\int_{\varnothing} \frac{1}{\alpha}\, dt, & x < x_0 - \dfrac{\alpha}{2}, \\ \displaystyle\int_{\left[x_0 - \frac{\alpha}{2}, x\right]} \frac{1}{\alpha}\, dt, & x \in \left[x_0 - \dfrac{\alpha}{2}, x_0 + \dfrac{\alpha}{2}\right], \\ \displaystyle\int_{\left[x_0 - \frac{\alpha}{2}, x_0 + \frac{\alpha}{2}\right]} \frac{1}{\alpha}\, dt, & x > x_0 + \dfrac{\alpha}{2} \end{cases} \\
&= \lim_{\alpha \to 0_+} \begin{cases} 0, & x < x_0 - \dfrac{\alpha}{2}, \\ \dfrac{1}{\alpha} \left(x - x_0 + \dfrac{\alpha}{2}\right), & x \in \left[x_0 - \dfrac{\alpha}{2}, x_0 + \dfrac{\alpha}{2}\right], \\ 1, & x > x_0 + \dfrac{\alpha}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\alpha \to 0_+} H^{\alpha}(x - x_0) \\
&= H(x - x_0),
\end{aligned}
$$

adică am obținut relația (iv–2.20).

Definiția 2.46 *Definim **funcția delta a lui Dirac** δ_{x_0}, unde $x_0 \in \mathbb{R}$, sub forma*

$$\delta_{x_0}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_0(x - x_0), \quad \textit{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

și atunci funcția $\delta_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este acea funcție egală peste tot cu 0 cu excepția punctului $x = x_0$ în care funcția ia valoarea ∞ și care satisface restricția (ii–2.19), i.e.

$$
\begin{aligned}
&(j) \qquad \delta_{x_0}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \infty, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}; \\
&(jj) \qquad \int_{\mathbb{R}} \delta_{x_0}(x)\, dx = 1.
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Remarca 2.47 În plus, funcția delta a lui Dirac δ_{x_0} satisface și următoarele două condiții formale:

$$
\begin{aligned}
&(jjj) \quad \delta_{x_0}(x) = \frac{dH}{dx}(x - x_0), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}; \\
&(jv) \quad H(x - x_0) = \int_{-\infty}^{x} \delta_{x_0}(t)\, dt, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

$\diamond$

Remarca 2.48 Formula (2.23) se scrie acum sub forma

$$(v) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \delta_{x_0}(x)\, dx = g(x_0), \tag{2.26}$$

satisfăcută de orice funcție g care este continuă în punctul x_0.

Evident, relația (v–2.26) este o generalizare a proprietății (jj–2.24). $\diamond$

Remarca 2.49 Să menționăm că funcția delta a lui Dirac δ_{x_0} apare și ca limită a unor funcții de densitate. Mai precis, pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$ (așa cum s-a văzut deja și în (2.21)),

$$\lim_{a \to 0_+} f_{\mathcal{U}(x_0 - a, x_0 + a)}(x) = \delta_{x_0}(x), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

De asemenea,

$$\lim_{\sigma\to 0_+} f_{\mathcal{N}(x_0,\sigma^2)}(x) = \delta_{x_0}(x), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

◇

Remarca 2.50 Dacă X este o v.a. discretă (cu un număr finit sau infinit de valori) cu $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$, atunci funcția de repartiție dată de (2.15) se poate scrie cu ajutorul funcției Heaviside

$$F_X(x) = \sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot H(x - x_i), \quad \text{unde } p_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X = x_i), \tag{2.27}$$

și, prin urmare, folosind funcția delta a lui Dirac și ($jv-$2.25), deducem scrierea formală, cu ajutorul unei integrale, a funcției de repartiție F_X asociată unei v.a. discrete:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot \int_{-\infty}^{x} \delta_{x_i}(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} \sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot \delta_{x_i}(t)\, dt. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Putem introduce (ca și în cazul continuu) **funcția densitate de repartiție** f_X **asociată unei v.a. discrete** X, folosind funcția delta a lui Dirac,

$$f_X(t) = \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \delta_{x_i}(t), \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R} \tag{2.29}$$

(vezi și **funcția masă de probabilitate** (2.14) sau (2.88)).

Să observăm că, și în acest caz discret, funcția densitate f_X satisface condițiile formale impuse de Definiția 3.1 deoarece $f_X(t) \geq 0$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, și, conform ($jj-$2.24), are loc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_X(t)\, dt &= \int_{\mathbb{R}} \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \delta_{x_i}(t)\, dt \\ &= \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \int_{\mathbb{R}} \delta_{x_i}(t)\, dt \\ &= \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Cu această notație formula (2.28), i.e.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt, \tag{2.30}$$

reprezintă varianta din cazul discret a formulei (3.1) corespunzătoare unei v.a. continue X.

Pe de altă parte, având în vedere (jjj−2.25) și folosind exprimarea (2.27) a funcției de repartiție, deducem scrierea formală, cu ajutorul derivatei funcției de repartiție, a funcției densitate de repartiție f_X asociată unei v.a. discrete:

$$\begin{aligned} \frac{dF_X}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot H(x - x_i)\right) \\ &= \sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot \frac{d}{dx}\left(H(x - x_i)\right) \\ &= \sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot \delta_{xi}(x) \\ &= f_X(x). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Astfel egalitatea (2.31) reprezintă varianta din cazul discret a formulei (3.4) corespunzătoare unei v.a. continue X. ◇

2.2.1.1 Măsura Dirac

Funcția delta a lui Dirac δ_x (asociată unei valori $x \in \mathbb{R}$) dată de definiția (2.24), poate fi definită riguros în două moduri:

- o modalitate este să o vedem **ca pe o măsură** $\delta_x : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, numită **măsura Dirac concentrată în punctul** $x \in \mathbb{R}$, dată de

  $$\delta_x(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_A(x), \quad \text{pentru orice } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \tag{2.32}$$

  unde $x \in \mathbb{R}$ este fixat, iar $\mathbb{1}_A$ este **funcția indicatoare a mulțimii** A, i.e.

  $$\mathbb{1}_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A; \end{cases}$$

- cealaltă modalitate este să o vedem **ca pe o distribuție** $\delta_x : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, dată de

  $$\delta_x(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x), \quad \text{pentru orice funcție test } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \tag{2.33}$$

unde $x \in \mathbb{R}$ este fixat, iar $C_0^\infty(\mathbb{R})$ este spațiul funcțiilor $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinit diferențiabile pe $\mathbb{R}$ și cu suport compact în $\mathbb{R}$, i.e. $\mathrm{Supp}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\}}$ este mulțime compactă în $\mathbb{R}$.

Folosind definiția și proprietățile integralei Lebesgue în raport cu măsura Dirac δ_x dată de (2.32) se poate arăta[62] că are loc

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, \delta_x(dt) = h(x), \tag{2.34}$$

pentru orice funcție continuă h cu suport compact.

Evident, măsura Dirac δ_x este o măsură de probabilitate deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_x(dt) = \delta_x(\mathbb{R}) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x) = 1.$$

Aceasta are un singur atom[63] dat de $\{x\}$; deci putem spune că măsura Dirac δ_x este concentrată în punctul $x \in \mathbb{R}$.

Folosind definițiile (2.32) și (2.18), vedem că funcția treapta unitate Heaviside verifică

$$H(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) = \mathbb{1}_{(-\infty,x]}(0) = \delta_0\big((-\infty, x]\big) = \int_{-\infty}^{x} \delta_0\big(dt\big). \tag{2.35}$$

Remarca 2.51 Să menționăm că dacă vedem funcția delta a lui Dirac δ_0 ca pe o distribuție, conform definiției (2.33), atunci are loc și relația „inversă" formulei (2.35), adică $H' = \delta_0$, dar în sens distribuțional, mai precis,

$$H'(\varphi) = \delta_0(\varphi), \quad \text{pentru orice funcție test } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

[62] De exemplu, o modalitate de a demonstra (2.34) este următoarea. Fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar, dar fixat și să notăm $c = h(x)$. Evident, $\delta_x(h = c) = \delta_x(\{t : h(t) = c\}) = \mathbb{1}_{\{t:h(t)=c\}}(x) = 1$, adică $h = c$, a.p.t. (vezi Nota 152) în raport cu măsura δ_x. Având în vedere proprietățile integralei Lebesgue, obținem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, \delta_x(dt) = \int_{-\infty}^{\infty} c\, \delta_x(dt) = c \int_{-\infty}^{\infty} \delta_x(dt) = c\delta_x(\mathbb{R}) = c = h(x).$$

[63] Dat un spațiu măsurabil $(\Omega, \mathscr{F})$ oarecare și o măsură μ (nu neapărat de probabilitate) pe acest spațiu, spunem că $A \in \mathscr{F}$ este **atom** pentru μ dacă

$$\mu(A) > 0$$

și dacă, pentru orice $B \subset A$, cu $B \in \mathscr{F}$, are loc

$$\mu(B) < \mu(A) \quad \Rightarrow \quad \mu(B) = 0.$$

Într-adevăr, pe de o parte, prin definție, $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$. Pe de altă parte, reamintim că o funcție oarecare G poate fi văzută ca o distribuție, luând, prin definiție,

$$G(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} G(x)\varphi(x)\,dx, \quad \text{pentru orice funcție test } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \tag{2.36}$$

iar derivata unei distribuții oarecare G este dată, prin definiție, de

$$G'(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} -G(\varphi'). \tag{2.37}$$

Deci, dacă atât H cât și derivata ei în sens distribuțional, atunci obținem:

$$\begin{aligned}
H'(\varphi) &= -H(\varphi') \\
&= -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} H(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} 0\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{\infty} 1\varphi'(x)\,dx \\
&= -\varphi(\infty) + \varphi(0) \\
&= \varphi(0) \\
&= \delta_0(\varphi),
\end{aligned}$$

deoarece φ are suport compact în $\mathbb{R}$, deci $\varphi(\infty) = 0$. ◇

Fie acum X o v.a. discretă cu $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$. Atunci, folosind formula (2.27) de reprezentare a funcției de repartiție cu ajutorul funcției Heaviside precum și legătura (2.35), obținem:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot H(x - x_i) \\
&= \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \delta_0\big((-\infty, x - x_i]\big) \\
&= \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \delta_{x_i}\big((-\infty, x]\big) \\
&= \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) \int_{(-\infty,x]} \delta_{x_i}(dt) \\
&= \int_{(-\infty,x]} \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i)\, \delta_{x_i}(dt),
\end{aligned} \tag{2.38}$$

unde δ_{x_i} este măsura Dirac concentrată în punctul x_i, dată de (2.32).

Putem introduce (ca și în cazul continuu) **funcția densitate de repartiție** f_X **asociată unei v.a. discrete** X prin

$$f_X(t) = \sum\nolimits_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \mathbb{1}_{\{t = x_i\}}, \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}, \tag{2.39}$$

sau, echivalent,

$$f_X(t) = \sum\nolimits_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \delta_{x_i}(\{t\}), \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}, \tag{2.40}$$

care este chiar **funcția masă de probabilitate** (2.14) sau (2.88).

Astfel, din (2.38) obținem următoarea legătură cu funcția de repartiție scrisă cu ajutorul unei integrale Lebesgue (vezi și varianta acestei formule dată de (3.1), din cazul unei v.a. X continue):

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(dt), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},} \tag{2.41}$$

în raport cu măsura de probabilitate discretă $f_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, dată de

$$\boxed{f_X(B) = \sum\nolimits_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \delta_{x_i}(B), \quad \text{pentru } B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).} \tag{2.42}$$

Să observăm că, și în acest caz discret, funcția densitate f_X satisface condițiile formale impuse de Definiția 3.1 deoarece $f_X(B) \geq 0$, pentru orice $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, și

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_X(dt) &= \int_{\mathbb{R}} \sum\nolimits_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \delta_{x_i}(dt) \\
&= \sum\nolimits_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \int_{\mathbb{R}} \delta_{x_i}(dt) \\
&= \sum\nolimits_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \delta_{x_i}(\mathbb{R}) \\
&= \sum\nolimits_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Remarca 2.52 Să menționăm (vezi și Remarca 2.51) că dacă în definiția funcției de repartiție F_X vedem funcția delta a lui Dirac δ_{x_i} ca pe o distribuție, atunci are loc și relația „inversă” formulei (2.41), adică (vezi și varianta (3.4) din cazul unei v.a. continue) $F_X' = f_X$, dar în sens distribuțional, mai precis,

$$F_X'(\varphi) = f_X(\varphi), \quad \text{pentru orice funcție test } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{2.43}$$

Într-adevăr, pe de o parte, prin definție,

$$f_X(\varphi) = \sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot \delta_{x_i}(\varphi) = \sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot \varphi(x_i).$$

Pe de altă parte, funcția F_X văzută ca o distribuție este, prin definiție, dată de (2.36), iar derivata în sens distribuțional a acesteia este, prin definție, dată de (2.37).

Deci, dacă privim F_X și derivata ei în sens distribuțional, atunci obținem:

$$\begin{aligned}
F_X'(\varphi) &= -F_X(\varphi') \\
&= -\int_{\mathbb{R}} F_X(x)\,\varphi'(x)\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot H(x-x_i)\,\varphi'(x)\,dx \\
&= -\sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot \int_{\mathbb{R}} H(x-x_i)\,\varphi'(x)\,dx \\
&= -\sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot \left(\int_{-\infty}^{x_i} H(x-x_i)\,\varphi'(x)\,dx - \int_{x_i}^{\infty} H(x-x_i)\,\varphi'(x)\,dx\right) \\
&= -\sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot \left(\int_{-\infty}^{x_i} 0\varphi'(x)\,dx - \int_{x_i}^{\infty} 1\varphi'(x)\,dx\right) \\
&= -\sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot (\varphi(\infty) - \varphi(x_i)) \\
&= \sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot \varphi(x_i) \\
&= f_X(\varphi),
\end{aligned}$$

deoarece φ are suport compact în $\mathbb{R}$, deci $\varphi(\infty) = 0$. ◇

Deci cu ajutorul măsurii Dirac putem redefini (vezi și Remarca 3.14) o v.a. discretă (cu un număr finit sau infinit de valori) astfel: spunem că o v.a. X este discretă dacă legea $\mathbb{P}_X$ asociată ei este **măsură de probabilitate discretă**[64],

[64] Menționăm că, dacă Ω este numărabilă, atunci orice măsură de probabilitate definită pe

adică există $\{p_i, x_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}$, unde I este o mulțime numărabilă de indici, astfel încât $p_i \geq 0$ și măsura $\mathbb{P}_X$ poate fi reprezentată astfel:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X(B) &= \sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot \delta_{x_i}(B) \\ &= \sum\nolimits_{\substack{i\in I \\ x_i\in B}} p_i\,, \quad \text{unde } B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\,. \end{aligned} \tag{2.44}$$

În acest caz

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = \begin{cases} p_i\,, & x = x_i\,, \\ 0, & \text{în rest,} \end{cases}$$

Pe de altă parte,

$$\mathbb{P}_X(\{x_i\}) = \mathbb{P}(X \in \{x_i\}) = \mathbb{P}(X = x_i)\,,$$

deci

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X = x_i) = p_i\,, & \text{pentru } i \in I, \quad \text{și} \\ \mathbb{P}(X = x) = 0, & \text{pentru orice } x \notin \{x_i\}_{i\in I}\,, \end{cases}$$

și astfel (2.44) devine

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}_X(B) &= \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \delta_{x_i}(B) \\ &= \sum\nolimits_{\substack{i\in I \\ x_i\in B}} \mathbb{P}(X = x_i)\,, \quad \text{unde } B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\,, \end{aligned}} \tag{2.45}$$

adică, folosind definiția (2.42),

$$\mathbb{P}_X(B) = f_X(B)\,, \quad \text{pentru orice } B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\,. \tag{2.46}$$

Remarca 2.53 În cazul particular în care legea $\mathbb{P}_X$ este dată de

$$\mathbb{P}_X = \delta_{x_0}\,, \quad \text{pentru un } x_0 \in \mathbb{R},$$

$\sigma-$algebra $\mathscr{F}$ peste Ω trebuie să fie discretă.

Pe de altă parte, dacă Ω este infinită și nenumărabilă, atunci putem înzestra spațiul măsurabil $(\Omega, \mathscr{F})$ cu o măsură discretă. De exemplu, dacă luăm o v.a. X discretă, atunci legea ei asociată $\mathbb{P}_X$ este măsură de probabilitate discretă definită pe $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

obținem că

$$\mathbb{P}(X = x_0) = 1 \quad \text{și} \quad \mathbb{P}(X = x) = 0, \quad \text{pentru } x \neq x_0,$$

adică X este o v.a. constantă $\mathbb{P}-$a.s., i.e.

$$X = x_0, \quad \mathbb{P} - \text{a.s.}.$$

Evident, are loc și reciproca: dacă X este o v.a. egală cu o constantă, $\mathbb{P}-$a.s., mai precis, $X = x_0$, $\mathbb{P}-$a.s., atunci legea ei este dată de $\mathbb{P}_X = \delta_{x_0}$. $\diamond$

2.2.2 Operații cu variabile aleatoare

Având în vedere că v.a. sunt funcții definite pe mulțimea evenimentelor elementare și cu valori reale, putem defini suma și produsul a două v.a (ca și la funcții). Astfel, dacă ω este un eveniment elementar și X, Y au același domeniu de definiție, atunci definim (suma, produsul și produsul cu un scalar α)

$$(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega),$$

$$(X \cdot Y)(\omega) = X(\omega) Y(\omega),$$

$$(\alpha X)(\omega) = \alpha X(\omega).$$

Fie v.a. discrete X, Y cu tablourile

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

unde $p_i, q_j \in [0,1]$, cu $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, și

$$\sum\nolimits_{i=1}^{m} p_i = 1 = \sum\nolimits_{j=1}^{n} q_j.$$

Pentru $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ să notăm cu

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}).$$

Remarca 2.54 Dacă X, Y sunt independente, atunci au loc relațiile

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} p_{ij} = p_i, \quad \sum\nolimits_{i=1}^{m} p_{ij} = q_j, \quad \text{pentru } i = \overline{1,n},\, j = \overline{1,n}.$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\{X = x_i\} &= \{X = x_i\} \cap (\{Y = y_1\} \cup \{Y = y_2\} \cup \cdots \cup \{Y = y_n\}) \\ &= (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_1\}) \cup (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_2\}) \\ &\quad \cup \ldots \cup (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_n\}),\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}p_i &= \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{j=1}^{n} \{X = x_i, Y = y_j\}\right) \\ &= \sum\nolimits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum\nolimits_{j=1}^{n} p_{ij}.\end{aligned}$$

◇

De exemplu, tabloul de repartiție al v.a. $X + Y$ este dat de

$$X + Y : \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & \ldots & x_1 + y_n & \ldots & x_m + y_n \\ p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} & \ldots & p_{mn} \end{pmatrix},$$

iar pentru produsul $X \cdot Y$ avem

$$X \cdot Y : \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \ldots & x_1 y_n & \ldots & x_m y_n \\ p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} & \ldots & p_{mn} \end{pmatrix}.$$

În particular, dacă $Y = a$ este o v.a. constantă, atunci

$$a + X : \begin{pmatrix} a + x_1 & a + x_2 & \ldots & a + x_m \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_m \end{pmatrix},$$

$$aX : \begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 & \dots & ax_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}.$$

În particular, adunând v.a. aX și b, se obține și

$$aX + b : \begin{pmatrix} ax_1 + b & ax_2 + b & \dots & ax_m + b \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}.$$

De asemenea, dacă luăm $X = Y$ atunci obținem pătratul unei v.a.

$$X^2 \stackrel{\text{def}}{=} X \cdot X : \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix},$$

deoarece în acest caz $X = Y$ și, pentru $i \neq j$,

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, X = x_j) = \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{X = x_j\}) = 0,$$

iar pentru $i = j$,

$$p_{ii} = \mathbb{P}\left(X^2 = x_i^2\right) = \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{X = x_i\}) = \mathbb{P}(X = x_i) = p_i\,.$$

2.2.3 Caracteristici numerice

Fie v.a. X cu tabloul de repartiție

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix},$$

unde $p_i \in [0, 1]$, cu $i = \overline{1, m}$ și $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Definiția 2.55 *Vom numi* **media**[65] *v.a. discrete X, numărul*

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \stackrel{\text{def}}{=} x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_mp_m = \sum_{i=1}^{m} x_ip_i\,.} \tag{2.47}$$

[65] Pentru definiția mediei unei v.a. discrete cu un număr infinit de valori sau al unei v.a. continue vezi Definiția 2.146 și respectiv Definiția 3.35.

Remarca 2.56 Definiția precedentă o putem scrie și sub forma[66]

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum\nolimits_{x \in X(\Omega)} x \cdot \mathbb{P}(X = x)}$$

(vezi și definiția (2.90) din cazul unei v.a. discrete cu un număr infinit de valori). ◇

Remarca 2.57 Media unei v.a. X mai este numită și **valoarea medie** sau **valoarea așteptată** sau **speranța**. ◇

Remarca 2.58 Denumirea de medie este justificată dacă ținem seama de sensul ei practic. Să presupunem că am repetat de N ori o experiență și am obținut valorile x_i, cu $i = \overline{1, N}$ (valorile x_i se pot repeta sau nu).

Să definim v.a.

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ 1/N & 1/N & \dots & 1/N \end{pmatrix}.$$

Media aritmetică a tuturor valorilor luate de X este, prin urmare,

$$\bar{X} \overset{\text{not}}{=\!=} \frac{x_1 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N} x_1 + \frac{1}{N} x_2 + \ldots + \frac{1}{N} x_N,$$

adică exact media v.a. X.

Dar cele N valori luate de X se pot repeta, deci să le renotăm astfel încât fiecare valoare distinctă x_i să fie luată de n_i ori, cu $i = \overline{1, m}$, unde $1 \leq m \leq N$, iar $\sum_{i=1}^{m} n_i = N$ (astfel avem $m \leq N$ valori distincte între ele).

Valoarea n_i/N reprezintă raportul dintre numărul cazurilor în care s-a obținut valoarea x_i și numărul total de experiențe efectuate, adică (vezi pagina 601) numărul n_i reprezintă frecvența absolută de apariție a valorii x_i, iar n_i/N reprezintă frecvența relativă de apariție a valorii x_i. Deci $p_i = n_i/N$ reprezintă probabilitatea de apariție a valorii x_i, adică putem scrie

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 = n_1/N & p_2 = n_2/N & \dots & p_m = n_m/N \end{pmatrix}.$$

[66] De fapt (vezi Remarca 2.150 precum și calculele de la paginile 208-209), dacă $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ este un spațiu de probabilitate și X este o v.a. oarecare (discretă sau continuă) definită pe acest spațiu, atunci media ei este definită de integrala Lebesgue $\mathbb{E}(X) \overset{\text{def}}{=\!=} \int_{\Omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$ (în caz că aceasta există) pe Ω în raport cu măsura $\mathbb{P}$.

În acest caz media aritmetică a valorilor luate de X va fi

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{x_1 + \ldots + x_N}{N} \\ &= \frac{\underbrace{x_1 + \ldots + x_1}_{\text{de } n_1 \text{ ori}} + \ldots + \underbrace{x_m + \ldots + x_m}_{\text{de } n_m \text{ ori}}}{N} \\ &= \frac{n_1}{N} x_1 + \ldots + \frac{n_m}{N} x_m \\ &= p_1 x_1 + \ldots + p_m x_m,\end{aligned}$$

adică exact media v.a. X.

Media lui X ne arată la ce valoare putem să ne așteptăm pentru media aritmetică a unui mare număr de valori ale lui X, obținute în urma repetării experienței date. ◇

Remarca 2.59 În cazul în care nu este specificat explicit, următoarele definiții și proprietăți și formule de calcul sunt **valabile și în cazul unor v.a.** X **oarecare (nu neapărat cu un număr numărabil de valori).** ◇

Propoziția 2.60 (Proprietăți ale mediei[67])

(i) *Valoarea medie a unei constante[68] este egală cu constanta. Mai precis,*

$$\boxed{X = c, \quad \mathbb{P} - a.s. \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(c) = c.}$$

(ii) *Dacă v.a. X, Y admit medie[69], atunci*

$$\boxed{\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y), \quad \textit{pentru orice } a, b \in \mathbb{R}.}$$

[67] Pentru detalii legate de demonstrația lor, vezi, de exemplu, [55, pages 220–222].

[68] De fapt, putem vedea c ca fiind v.a. $\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$. Iar egalitatea $X = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$ reprezintă chiar $X = c$, $\mathbb{P}-$a.s. (vezi Nota 58). Prin urmare, $\mathbb{E}(X) = c \cdot 1 = c$.

[69] În cazul a două v.a. cu un număr finit de valori această condiție este satisfăcută. În cazul a două v.a. oarecare (nu neapărat cu un număr finit de valori) trebuie impusă condiția ca cele două v.a. să admită medie finită (vezi Definiția 2.146 și Definiția 3.35).

(iii) *V.a. dată de funcția indicatoare $\mathbb{1}_A$ a evenimentului $A \in \mathscr{F}$ are media*[70] *(vezi și Remarca 2.118)*

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A\right) = \mathbb{P}\left(A\right). \tag{2.48}$$

(iv) *Dacă v.a. X admite medie*[71]*, atunci*

$$\left|\mathbb{E}\left(X\right)\right| \leq \mathbb{E}\big(\left|X\right|\big). \tag{2.49}$$

(v) *Dacă*

$$\textit{există } \mathbb{E}\left(X\right) \quad \Longrightarrow \quad \textit{există și } \mathbb{E}\left(X\,\mathbb{1}_A\right),$$

pentru orice eveniment $A \in \mathscr{F}$.

(vi) *Dacă X, Y sunt două v.a. astfel încât X admite medie, atunci*

$$X = Y, \quad \mathbb{P} - a.s. \quad \Longrightarrow \quad \textit{există și } \mathbb{E}\left(Y\right), \textit{ iar } \quad \mathbb{E}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(Y\right).$$

(vii) *Dacă X, Y sunt două v.a. astfel încât X admite medie, atunci, folosind definiția generală (3.21) a mediei, exprimată cu ajutorul integralei Lebesgue, sau chiar formula (3.23), obținem (vezi Definiția 2.18) că*[72]

$$X \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y \quad \Longrightarrow \quad \textit{există și } \mathbb{E}\left(Y\right), \textit{ iar } \quad \mathbb{E}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(Y\right).$$

$(viii)$ *Dacă v.a. X admite medie, atunci*[73]

$$X \geq 0, \quad \mathbb{P} - a.s. \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\left(X\right) \geq 0.$$

---

[70] Dacă folosim definiția generală (3.21) a mediei și proprietățile integralei Lebesgue, obținem

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A\right) = \int_\Omega \mathbb{1}_A\left(\omega\right) \mathbb{P}\left(d\omega\right) = \int_A \mathbb{P}\left(d\omega\right) = \mathbb{P}\left(A\right) \quad \text{pentru orice } A \in \mathscr{F}.$$

[71] Reamintim că dacă folosim definiția generală (3.21), are loc proprietatea (3.22), i.e. există $\mathbb{E}\left(X\right) < \infty$ dacă și numai dacă există $\mathbb{E}\left(|X|\right) < \infty$.

[72] Prin urmare, mediile a două v.a. pot fi egale fără ca v.a. să fie egale aproape sigur; este suficient ca v.a. să fie egale în lege (vezi și Lema 2.22), adică să urmeze aceeași distribuție (deci v.a. pot fi diferite, eventual, în orice punct ω, vezi și Remarca 2.23).

[73] Dacă $X \geq 0$, $\mathbb{P}-$a.s., atunci spunem că X ia valori nenegative $\mathbb{P}-$a.s.. Spunem că un număr este **nenegativ** dacă este pozitiv, dar nu neapărat strict pozitiv.

Dacă v.a. X admite medie și, în plus, $X \geq 0$, $\mathbb{P}-$a.s., atunci[74]

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X = 0, \quad \mathbb{P} - a.s..} \tag{2.50}$$

Prin urmare, dacă X este o v.a. care admite medie, atunci

$$X > 0, \quad \mathbb{P} - a.s. \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X) > 0.$$

De asemenea, tot din (2.50), deducem că dacă X^2 admite medie, atunci

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X^2\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X = 0, \quad \mathbb{P} - a.s.}$$

(vezi și demonstrația punctului (ii) din Propoziția 2.97).

(ix) *Evident, conform $(viii)$, dacă X, Y sunt două v.a. care admit medie, atunci*

$$X \leq Y, \quad \mathbb{P} - a.s. \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y).$$

(x) *Dacă X este o v.a. care admite medie (vezi și proprietatea (3.22)), atunci*[75] *ea este finită $\mathbb{P}-$a.s., adică*

$$\mathbb{E}(X) < \infty \quad \Longrightarrow \quad |X| < \infty, \quad \mathbb{P} - a.s.. \tag{2.51}$$

(xi) *Dacă X, Y sunt două v.a. care admit medie astfel încât*

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_A), \quad \text{pentru orice eveniment } A \in \mathscr{F},$$

atunci[76] $X = Y$, $\mathbb{P}-$*a.s..*

---

[74] Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [48, Teorema 8.1-10].

[75] Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [48, Teorema 8.2-12]).

[76] Să menționăm că dacă folosim definiția generală (3.21) a mediei, exprimată cu ajutorul integralei Lebesgue, atunci obținem că

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{1}_A(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_A X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_A X\, d\mathbb{P}.$$

Prin urmare, (xi) afirmă (vezi și Nota 153) că dacă $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_A)$, adică dacă are loc egalitatea următoarelor integrale Lebesgue, în raport cu măsura de probabilitate $\mathbb{P}$:

$$\int_A X\, d\mathbb{P} = \int_A Y\, d\mathbb{P}, \quad \text{pentru orice eveniment } A \in \mathscr{F},$$

atunci $X = Y$, $\mathbb{P}-$a.s..

Pentru proprietatea din cazul integralei Riemann vezi [58, Propoziția 9.2.13].

(xii) *Dacă* X, Y *sunt două v.a. care admit medie astfel încât*

$$\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_A\right) \leq \mathbb{E}\left(Y\mathbb{1}_A\right), \quad \textit{pentru orice eveniment } A \in \mathscr{F},$$

atunci $X \leq Y, \quad \mathbb{P}-$*a.s..*

$(xiii)$ *Dacă două v.a. sunt independente care admit medie, atunci*[77] *media produsului este produsul mediilor, i.e.*

$$X, Y \textit{ independente} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\left(XY\right) = \mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Y\right). \tag{2.52}$$

Remarca 2.61 Relația (2.52) oferă o condiție necesară pentru independența a două v.a., dar ea nu este și suficientă. În acest sens, vezi exemplele indicate în Remarca 2.93. ⋄

O condiție suficientă a independenței a două v.a., în spiritul relației (2.52), este dată de următorul rezultat (vezi și caracterizarea dată de Propoziția 2.66).

Propoziția 2.62 (vezi [16, Problemele 14,15, Capitolul III])
(a) *Dacă* X, Y *sunt v.a. discrete, cu* $|X(\Omega)|$ *și* $|Y(\Omega)|$ *finite, și dacă*

$$\mathbb{E}(X^kY^l) = \mathbb{E}(X^k)\mathbb{E}(Y^l),$$

pentru orice $1 \leq k \leq |X(\Omega)| - 1$ *și orice* $1 \leq l \leq |Y(\Omega)| - 1$*, atunci* X, Y *sunt v.a. independente.*

(b) *În cazul unor v.a. oarecare, dacă* X, Y *sunt v.a. mărginite și dacă*

$$\mathbb{E}(X^kY^l) = \mathbb{E}(X^k)\mathbb{E}(Y^l), \quad \textit{pentru orice } k, l \in \mathbb{N}^*,$$

atunci X, Y *sunt v.a. independente.*

Următorul rezultat arată că independența a două v.a. implică independența oricăror funcții aplicate acestor v.a..

Propoziția 2.63 (vezi [25, Proposition 7.14]) *Dacă* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *sunt două v.a., atunci*

$$X, Y \textit{ independente} \quad \Longleftrightarrow \quad g(X), h(Y) \textit{ independente,}$$
$$\textit{pentru orice } g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

[77] Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [15, T22, Capitolul III] sau [35, Theorem 5.4].

Având în vedere că avem $X \in [a_1, a_2]$ dacă și numai dacă $\left|X - \frac{a_1+a_2}{2}\right| \leq \frac{a_2-a_1}{2}$, se poate arăta următorul rezultat.

Propoziția 2.64 (vezi [32, Teorema 3, pag. 127]) *Dacă $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sunt două v.a., atunci*

$$X, Y \textit{ independente} \iff |X + a|, |Y + b| \textit{ independente}$$
$$\textit{pentru orice } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 2.65 Prin urmare, dacă X, Y sunt v.a. independente, atunci $|X|, |Y|$ sunt v.a. independente. Dar reciproca nu este adevarată, așa cum se va vedea în exemplul următor.

Să considerăm spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \overset{\text{def}}{=\!=} ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$, unde λ este măsura Lebesgue. Fie v.a. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ date de

$$X(\omega) = Y(\omega) = \begin{cases} -1, & 0 \leq \omega < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq \omega \leq 1. \end{cases}$$

Deoarece $|X(\omega)| = |Y(\omega)| = 1$, pentru orice $\omega \in \Omega$, obținem că $|X|, |Y|$ sunt v.a. independente.

Pe de altă parte, evident, X, Y nu sunt v.a. independente (fiind identice). Putem folosi și definiția. De exemplu,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < 0, Y < 0) &= \mathbb{P}(X < 0) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) < 0\}) \\ &= \mathbb{P}([0, 1/2)) \\ &= \lambda([0, 1/2)) \\ &= \frac{1}{2} \\ &\neq \frac{1}{4} \\ &= \mathbb{P}(X < 0)\,\mathbb{P}(Y < 0)). \end{aligned}$$

◇

Următorul rezultat ne dă o altă caracterizare a independenței (vezi și relația (2.52)).

Propoziția 2.66 (vezi [25, Proposition 7.15]) *Dacă* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *sunt două v.a., atunci*

$$\boxed{\begin{aligned} X, Y \textit{ independente} \quad \Longleftrightarrow \quad & \mathbb{E}\left(g\left(X\right)h\left(Y\right)\right) = \mathbb{E}\left(g\left(X\right)\right)\mathbb{E}\left(h\left(Y\right)\right), \\ & \textit{pentru orice funcții } g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{aligned}}$$

astfel încât $g\left(X\right), h\left(Y\right)$ *admit medie.*

Propoziția 2.67 *Fie* X *o v.a. discretă (cu un număr finit sau infinit de valori) și care ia valori în* $\mathbb{N}$. *Dacă* X *admite medie, atunci*[78]

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(X > n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X \geq n\right)} \tag{2.53}$$

sau, echivalent,

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - F_X\left(n\right)\right).} \tag{2.54}$$

Demonstrație. Folosind definiția (2.47) sau (2.89) a mediei obținem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}\left(X = k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}\left(X = k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{k}\right)\mathbb{P}\left(X = k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}\left(X = k\right). \end{aligned}$$

Pentru a putea schimba ordinea de sumare în sumele iterate precedente trebuie, mai întâi, să introducem indicatoarea și apoi să verificăm dacă sunt satisfăcute condiții suficiente pentru ca **o sumă infinită să comute cu o altă sumă**

---

[78] Pentru formula mediei unei v.a. continue vezi Propoziția 3.47 și Propoziția 3.58 (dar și Exercițiile 3.50 și 3.55).

Pentru formula similară din cazul unei integrale Lebesgue oarecare vezi [35, Theorem 4.26].

infinită de v.a., adică să folosim un rezultat teoretic[79] (de tip Fubini) care ne permite acest lucru. Astfel[80],

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{n\leq k\}}\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{k\geq n\}}\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\sum\nolimits_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq n).\end{aligned}$$

■

Propoziția 2.68 (vezi [31, Theorem 2.12.1]) *Fie X o v.a. nenegativă (discretă sau continuă). Atunci,*

$$\begin{aligned}&(a)\quad \mathbb{E}(X)<\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq n)<\infty;\\ &(b)\quad \mathbb{E}(X^r)<\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}n^{r-1}\mathbb{P}(X\geq n)<\infty.\end{aligned}$$

Remarca 2.69 Folosind argumente similare se poate arăta că dacă X este o v.a. discretă (cu un număr finit sau infinit de valori) care ia valori în $\mathbb{N}$ și dacă X^2 admite medie, atunci[81]

$$2\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(X>n) = \mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}(X)$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(2n+1)\mathbb{P}(X>n).$$

◇

[79] Putem folosi, de exemplu, Teorema 3 și Corolarul de la pagina 312 din [23, Capitolul XI, § 5]: Fie $\{a_{n,k}\}_{n,k}$ un șir dublu de numere reale. Dacă seria iterată $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}$ este absolut convergentă, atunci ambele serii iterate $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}$ și $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,k}$ precum și seria dublă $\sum_{n,k=0}^{\infty}a_{n,k}$ sunt convergente și au loc egalitățile:

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}a_{n,k} = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}a_{n,k} = \sum\nolimits_{n,k=0}^{\infty}a_{n,k}$$

(vezi și [57, Problem 2.6.13] sau [55, Corollary, page 223]).

[80] În acest caz folosim faptul că seria iterată care apare în prima egalitate este absolut convergentă (și are suma $\mathbb{E}(X)$) ceea ce va permite ca cele două sume infinite să comute.

[81] Pentru formula mediei pătratului unei v.a. continue vezi Propoziția 3.51 și Propoziția 3.61.

Exercițiul 2.70 (vezi [5, Exercise 48, Chapter 2]) *Fie X o v.a. discretă (cu un număr finit sau infinit de valori) și care ia valori în $\mathbb{N}$.*

(a) *Dacă $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, N\}$, cu $N \in \mathbb{N}^*$, să se arate, regrupând termenii, că*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \ldots + \mathbb{P}(X = N)& \\ +\mathbb{P}(X = 2) + \ldots + \mathbb{P}(X = N)& \\ \vdots \quad & \\ +\mathbb{P}(X = N).&\end{aligned}$$

(b) *Folosind (a) să se arate că dacă $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, N\}$, cu $N \in \mathbb{N}^*$, atunci*

$$\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=0}^{N-1} (1 - F_X(n)).$$

(c) *Luând $N \to \infty$ în (b) să se arate că dacă X admite medie, atunci are loc[82] formula (2.53) sau, echivalent, (2.54) de exprimare a mediei, i.e.*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - F_X(n)). \tag{2.55}$$

Să observăm că rezultatul se menține chiar dacă v.a. X are un număr finit de valori (caz în care $1 - F_X(n) = \mathbb{P}(X > n) = 0$, pentru orice $n \geq N$).

(d) *Conform punctului (c) observăm că media $\mathbb{E}(X)$ este finită dacă și numai dacă seria*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - F_X(n)) \quad \text{este convergentă.}$$

[82] Să observăm că formula (2.55) se poate obține și cu ajutorul Teoremei lui Riemann (vezi Nota 108). Într-adevăr, având în vedere că media v.a. X există, rezultă că seria respectivă este convergentă și chiar absolut convergentă. Conform Teoremei lui Riemann obținem că putem permuta oricum termenii seriei numerice și natura seriei nu se va schimba. Având în vedere tipul de permutare sugerat de punctul (a), deducem că

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \ldots + \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X = n+1) + \ldots& \\ +\mathbb{P}(X = 2) + \ldots + \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X = n+1) + \ldots& \\ \vdots \quad& \\ +\mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X = n+1) + \ldots& \\ \vdots \quad&\end{aligned}$$

deci $\sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$.

Reluând tipul de raționament din Propoziția 2.67 se arată următorul rezultat.

Propoziția 2.71 *Fie X o v.a. discretă (cu un număr finit sau infinit de valori) și care ia valori în $\mathbb{Z}$. Să se arate că*[83]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\left(n < X \leq n+\ell\right) = \ell, \quad \textit{pentru orice } \ell \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație. Avem[84]

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\left(n < X \leq n+\ell\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{n+\ell} \mathbb{P}\left(X = k\right). \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\{n<k\leq n+\ell\}} \mathbb{P}\left(X = k\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\{n<k\leq n+\ell\}} \mathbb{P}\left(X = k\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\{k-\ell\leq n<k\}} \mathbb{P}\left(X = k\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\{k-\ell\leq n<k\}}\right) \mathbb{P}\left(X = k\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=k-\ell}^{k-1} \mathbb{1}_{\{k-\ell\leq n<k\}}\right) \mathbb{P}\left(X = k\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \ell \mathbb{P}\left(X = k\right) \\
&= \ell \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\left(X = k\right) \\
&= \ell.
\end{aligned}$$

■

Definiția 2.72 (vezi Definiția 3.62) *Se numește* **moment de ordin** $r > 0$ *al v.a. X, media v.a. X^r (dacă este bine definită). Vom nota*

$$\mu_r \stackrel{\text{not}}{=} \mathbb{E}(X^r). \tag{2.56}$$

[83] Pentru formula din cazul unei v.a. oarecare vezi Propoziția 3.48.

[84] Pentru a putea schimba ordinea de sumare trebuie să folosim un rezultat teoretic de tip Fubini care să ne permită ca **o sumă infinită să comute cu o altă sumă infinită** (vezi Nota 79).

În acest caz folosim faptul că seria iterată care apare în a treia egalitate este absolut convergentă (și are suma ℓ) ceea ce va permite ca cele două sume infinite să comute.

Deci, în cazul unei v.a. discrete X, cu un număr finit de valori,

$$\mu_r = \sum\nolimits_{i=1}^{m} x_i^r p_i = \sum\nolimits_{x \in X(\Omega)} x^r \cdot \mathbb{P}(X = x) .$$

Evident, momentul de ordin 1 este exact media v.a. X, i.e. $\mu_1 = \mathbb{E}(X)$.

Definiția 2.73 (vezi Definiția 3.63) *Se numește* **moment central de ordin** $r > 0$ *al v.a. X, media v.a. $(X - \mu_1)^r$ (dacă este bine definită). Vom nota*

$$\nu_r \overset{\text{not}}{=\!=} \mathbb{E}\big[(X - \mu_1)^r \big] = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X))^r \big]. \tag{2.57}$$

Deci, în cazul unei v.a. discrete X, cu un număr finit de valori,

$$\nu_r = \sum\nolimits_{i=1}^{m} (x_i - \mu_1)^r p_i = \sum\nolimits_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^r \cdot \mathbb{P}(X = x) .$$

Definiția 2.74 *Având în vedere că media v.a. $X - \mathbb{E}(X)$ este nulă:*

$$\mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X)\big) = 0,$$

vom spune că v.a. $X - \mathbb{E}(X)$ este ***v.a. centrată****.*

Definiția 2.75 (vezi Definiția 3.64) *Se numește* **moment absolut de ordin** $r > 0$ *al v.a. X, media v.a. $|X|^r$.*

Deci, în cazul unei v.a. discrete X, cu un număr finit de valori,

$$\mathbb{E}(|X|^r) = \sum\nolimits_{i=1}^{m} |x_i|^r p_i = \sum\nolimits_{x \in X(\Omega)} |x|^r \cdot \mathbb{P}(X = x) . \tag{2.58}$$

Media unei funcții aplicată unei v.a. poate fi calculată folosind următorul rezultat.

Teorema 2.76 (Formula de transfer) *Fie X o .v.a. discretă cu tabloul de repartiție*

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}.$$

Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție măsurabilă. Atunci, $h(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ este și ea o v.a. și are media dată de:

$$\mathbb{E}(h(X)) = \sum\nolimits_{i=1}^{m} h(x_i)\, p_i . \tag{2.59}$$

Remarca 2.77 Formula precedentă o putem scrie și sub forma

$$\mathbb{E}\left(h(X)\right) = \sum\nolimits_{x\in X(\Omega)} h(x)\cdot \mathbb{P}\left(X = x\right).$$

◇

Exemplul 2.78 În cazul particular $h(x) = x^2$ obținem formula de calcul pentru pătratul unei v.a. discrete:

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum\nolimits_{x\in X(\Omega)} x^2\cdot \mathbb{P}\left(X = x\right).$$

◇

De multe ori la o v.a. ne interesează cât de mult se abat valorile variabilei de la valoarea medie. Trebuie să stabilim un indicator al împrăștierii valorilor v.a. în jurul valorii medii. Valoarea medie a abaterii $X - \mathbb{E}\left(X\right)$ (adică al v.a. centrate) este zero deci nu poate caracteriza această împrăștiere. Foarte utilă va fi folosirea cantității $\mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\right]$.

Definiția 2.79 (vezi Definiția 3.65) *Se numește* **dispersia** *(sau* **varianța***) v.a. X, notată cu $\mathrm{D}^2\left(X\right)$ (sau cu $\mathrm{Var}\left(X\right)$), momentul central de ordin 2 al v.a. X, i.e.*

$$\mathrm{D}^2\left(X\right) = \mathrm{Var}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_2 = \mathbb{E}\left(X - \mu_1\right)^2, \quad \textit{unde } \mu_1 = \mathbb{E}\left(X\right). \tag{2.60}$$

Deci, în cazul unei v.a. discrete X,

$$\mathrm{D}^2\left(X\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{m}\left(x_i - \mu_1\right)^2 p_i = \sum\nolimits_{x\in X(\Omega)}\left(x - \mathbb{E}(X)\right)^2\cdot \mathbb{P}\left(X = x\right).$$

Remarca 2.80 (vezi Remarca 3.67) În cazul unei v.a. oarecare (discrete sau continue), folosind formula (2.61) și inegalitatea lui Liapunov (vezi și Remarca 5.8), observăm că momentul de ordinul 2, i.e. media $\mathbb{E}\left(X^2\right)$, există și este finit dacă și numai dacă momentul de ordinul 1 și dispersia, i.e. media $\mathbb{E}\left(X\right)$ și $\mathrm{D}^2\left(X\right)$, există și sunt finite:

$$\text{există } \mathbb{E}\left(X^2\right) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \text{există} \quad \mathbb{E}\left(X\right) < \infty \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2\left(X\right) < \infty.$$

◇

Remarca 2.81 Menționăm că dispersia unei v.a. X este, într-un anume sens, cea mai bună valoare care caracterizează împrăștierea valorilor v.a. X față de medie (vezi Exercițiul 2.4.17 și Exercițiul 3.82). $\diamond$

Remarca 2.82 Deoarece v.a. $X - \mathbb{E}(X)$ are media zero, obținem și proprietatea

$$\mathrm{D}^2\left(X - \mathbb{E}(X)\right) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right) - \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}(X)\right)\right]^2 = \mathrm{D}^2(X),$$

adică dispersia v.a. centrate coincide cu dispersia v.a.. $\diamond$

Remarca 2.83 Având în vedere formula de transfer (2.59), în cazul particular al unei v.a. discrete X cu tabloul de repartiție

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}$$

obținem **definiția dispersiei în cazul unei v.a. discrete**:

$$\mathrm{D}^2(X) = \sum\nolimits_{i=1}^{m} p_i \left(x_i - \mu_1\right)^2.$$

Din definiția de mai sus deducem

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^2(X) &= \sum\nolimits_{i=1}^{m} p_i x_i^2 - 2\sum\nolimits_{i=1}^{m} p_i x_i \mu_1 + \sum\nolimits_{i=1}^{m} p_i \mu_1^2 \\
&= \sum\nolimits_{i=1}^{m} p_i x_i^2 - 2\mu_1 \sum\nolimits_{i=1}^{m} p_i x_i + \mu_1^2 \sum\nolimits_{i=1}^{m} p_i \\
&= \sum\nolimits_{i=1}^{m} p_i x_i^2 - 2\mu_1\mu_1 + \mu_1^2 \cdot 1,
\end{aligned}$$

și astfel obținem **formula de calcul a dispersiei în cazul unei v.a. discrete**:

$$\mathrm{D}^2(X) = \sum\nolimits_{i=1}^{m} p_i x_i^2 - \mu_1^2,$$

adică

$$\boxed{\mathrm{D}^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2.} \tag{2.61}$$

$\diamond$

Remarca 2.84 (vezi Remarca 3.66) Formula precedentă este adevărată și în cazul unei v.a. X oarecare (nu neapărat discretă). Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^2(X) &= \mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \mathbb{E}\left[X^2 - 2\mathbb{E}(X)\cdot X + (\mathbb{E}(X))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X)\cdot X\right] + \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}(X))^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 .
\end{aligned}$$

$\diamond$

Remarca 2.85 Să presupunem că am repetat de N ori o experiență și am obținut valorile x_i, cu $i=\overline{1,N}$ (valorile x_i se pot repeta sau nu). Să definim v.a. (vezi Remarca 2.58)

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_N \\ 1/N & 1/N & \ldots & 1/N \end{pmatrix}.$$

În acest caz definiția dispersiei este

$$\mathrm{D}^2(X) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\bar{X}\right)^2}{N}, \tag{2.62}$$

unde

$$\bar{X} \overset{\text{not}}{=\!=} \mathbb{E}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}.$$

$\diamond$

Exemplul 2.86 Să presupunem că, în urma unei experiențe, citim următoarele date $20.1, 20.5, 20.2, 21.7, 20.5, 21.8, 21.9, 20.5$. Deci, folosind frecvențele relative de apariție a datelor, definim următoarea v.a. empirică

$$X : \begin{pmatrix} 20.1 & 20.2 & 20.5 & 21.7 & 21.8 & 21.9 \\ 1/8 & 1/8 & 3/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

Atunci, media aritmetică este $\frac{167.2}{8} = 20.9$, iar media v.a. X este

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1\cdot 20.1 + 1\cdot 20.2 + 3\cdot 20.5 + 1\cdot 21.7 + 1\cdot 21.8 + 1\cdot 21.9}{8} = 20.9$$

Mediana $x_{1/2}$ este, conform definiției (3.13), dată de Remarca 3.29, valoarea $x_{1/2} = 20.5$ deoarece

$$\mathbb{P}(X \leq 20.5) = 5/8 \geq 1/2 \quad \text{și} \quad \mathbb{P}(X \geq 20.5) = 6/8 \geq 1/2.$$

Moda (sau **modul** sau **valoarea modală** sau **valoarea cea mai probabilă**) este, prin definiție[85], valoarea v.a. X care are probabilitatea maximă de apariție; deci, în cazul nostru, moda este 20.5.

Pentru a calcula dispersia, calculăm mai întâi

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{1 \cdot (20.1)^2 + 1 \cdot (20.2)^2 + 3 \cdot (20.5)^2 + \ldots + 1 \cdot (21.9)^2}{8} = 437.32.$$

deci

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 437.32 - (20.9)^2 = 0.51.$$

◇

Definiția 2.87 (vezi Definiția 3.70) *Se numește* **covarianța** *v.a.* X *și* Y, *notată* $\mathrm{Cov}(X, Y)$, *media*[86]

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))\right].} \tag{2.63}$$

Remarca 2.88 (vezi Remarca 3.71) Plecând de la expresia precedentă obținem imediat **formula de calcul a covarianței**[87]:

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).} \tag{2.64}$$

◇

[85] În cazul unei v.a. continue **moda** este, prin definiție, valoarea v.a. X în care funcția de densitate are valoarea maximă. Dacă densitatea are o singură valoare maximă locală, atunci distribuția v.a. se numește **unimodală**; dacă densitatea are mai multe valori maxime locale, atunci distribuția v.a. se numește **multimodală**.

Să menționăm că în cazul unei v.a. ce urmează o distribuție simetrică (vezi Nota 93) media (în caz că există) și mediana coincid.

De asemenea, în cazul unei v.a. ce urmează o distribuție simetrică și unimodală media (în caz că există) și mediana și moda coincid.

[86] Pentru formula de calcul din cazul discret vezi (3.86) precum și Exemplul 3.200.

[87] Pentru formula de calcul din cazul discret vezi (3.87).

Remarca 2.89 În cazul unei v.a. oarecare (discrete sau continue), folosind inegalitatea $XY \leq \frac{1}{2}\left(X^2 + Y^2\right)$, observăm că dacă impunem condiția ca v.a. X^2 și Y^2 să admită medie, i.e. există $\mathbb{E}\left(X^2\right) < \infty$ și $\mathbb{E}\left(Y^2\right) < \infty$ sau, echivalent (conform Remarcii 2.80), ca v.a. X și Y să admită dispersie, atunci covarianța $\operatorname{Cov}(X, Y)$ există și este finită. ◇

Remarca 2.90 Evident, covarianța dintre v.a. X și ea însăși este chiar dispersia, deci putem lua drept definiție:

$$\boxed{\mathrm{D}^2(X) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Cov}(X, X).}$$

◇

Remarca 2.91 În particular, covarianța dintre o v.a. oarecare și o v.a. constantă este nulă deoarece

$$\operatorname{Cov}(X, c) = \mathbb{E}(cX) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(c) = 0.$$

Mai general, dacă v.a. $Y = c$, $\mathbb{P}-$a.s., atunci $XY = cX$, $\mathbb{P}-$a.s., deci, folosind Propoziția 2.60, proprietatea (vi), deducem că $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$ și astfel

$$Y = c, \quad \mathbb{P} - \text{a.s.} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{Cov}(X, c) = 0.$$

◇

Definiția 2.92 (vezi Definiția 3.74) *Dacă* $\mathrm{D}^2(X) > 0$ *și* $\mathrm{D}^2(Y) > 0$, *atunci*

$$\boxed{\operatorname{Cor}(X, Y) = \rho(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(X)} \cdot \sqrt{\mathrm{D}^2(Y)}}} \tag{2.65}$$

se numește **corelația** *(sau* **coeficientul de corelație** *al) v.a.* X *și* Y.

Remarca 2.93 Dacă două v.a. X, Y sunt independente, atunci, folosind (2.52), obținem covarianța (sau, echivalent, corelația) nulă, i.e. $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0 = \rho(X, Y)$. În acest caz spunem că cele două v.a. sunt **necorelate**.

Deci (2.52) ne spune că

(2.66) $\boxed{\text{dacă două v.a. sunt independente, atunci sunt necorelate.}}$

Reciproca nu este adevărată. În acest sens, vezi Exemplele 2.94, 2.95, 3.94, 3.201, 3.134 și 3.135. ◇

Exemplul 2.94 Se poate arăta că v.a.

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad Y = \begin{cases} 1, & \text{dacă } X = 0, \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

sunt două v.a. necorelate, dar ele sunt, evident, dependente.

Într-adevăr, obținem

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad X \cdot Y = 0, \quad \mathbb{P} - \text{a.s.},$$

deci $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathbb{E}(Y) = 1/3$, iar $\mathbb{E}(X \cdot Y) = 0$. $\diamond$

Exercițiul 2.95 *Se poate arăta (vezi [30, Section 3.11, Problem 16]) că dacă X, Y sunt două v.a. independente distribuite Bernoulli, de parametru $1/2$, atunci $U = X + Y$ și $V = |X - Y|$ sunt v.a. necorelate, dar sunt, în mod evident, dependente.*

Remarca 2.96 Se poate arăta[88] că

$$\left(\mathrm{Cov}(X, Y)\right)^2 \leq \mathrm{D}^2(X) \cdot \mathrm{D}^2(Y)$$

sau, echivalent,

$$\boxed{|\rho(X, Y)| \leq 1}$$

și că

$$\boxed{\begin{gathered} |\rho(X, Y)| = 1 \quad \text{dacă și numai dacă} \\ \text{există } a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \text{cu } a, b \neq 0, \quad \text{astfel încât } aX + bY = c, \quad \mathbb{P} - \text{a.s.}, \end{gathered}}$$

adică $\mathbb{P}(aX + bY = c) = 1$.

Să remarcăm faptul că dependența liniară obținută nu are loc pentru toți ω ci are loc aproape sigur în raport cu măsura de probabilitate $\mathbb{P}$, adică există evenimentul neglijabil N, i.e. $N \in \mathscr{F}$ cu $\mathbb{P}(N) = 0$, astfel încât $aX(\omega) + bY(\omega) = c$, pentru orice $\omega \in \Omega \setminus N$.

[88] Vezi, de exemplu, [35, Theorem 5.8] sau [30, Section 3.6, Lemma 8].

Astfel, putem spune că ρ este o **măsură a gradului de dependență liniară dintre cele două v.a.**. Dacă $|\rho| = 1$, atunci dependența este liniară. Dacă $\rho \in (-1, 1)$, atunci dependența nu este complet liniară, dar poate fi o dependență (de tip neliniar).

Știm că dacă cele două v.a. sunt independente atunci ele sunt necorelate (i.e. $\rho = 0$), dar dacă $\rho = 0$, atunci aceasta nu înseamnă că cele două v.a. sunt independente, ci doar indică o absență totală a unei dependențe liniare. Prin urmare, două variabile pot fi necorelate, dar pot fi totuși dependente într-un mod neliniar. $\diamond$

Propoziția 2.97 (Proprietăți ale dispersiei)

(i) *Dispersia unei constante este nulă. Mai precis, pentru $c \in \mathbb{R}$,*

$$\boxed{X = c, \quad \mathbb{P} - a.s. \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{D}^2(X) = 0.}$$

(ii) *Dispersia unei v.a. este nulă dacă și numai dacă v.a. este constantă $\mathbb{P}$−a.s., i.e.*[89]

$$\boxed{\mathrm{D}^2(X) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X = c, \quad \mathbb{P} - a.s. \quad (unde\ c = \mathbb{E}(X)).} \tag{2.67}$$

(iii) *Dacă v.a. X admite dispersie*[90]*, atunci*

$$\boxed{\mathrm{D}^2(aX) = a^2 \mathrm{D}^2(X), \quad pentru\ orice\ a \in \mathbb{R}.}$$

(iv) *Dacă v.a. X admite dispersie, atunci*

$$\boxed{\mathrm{D}^2(a + bX) = b^2 \mathrm{D}^2(X), \quad pentru\ orice\ a, b \in \mathbb{R}.}$$

(v) *Dacă v.a. X, Y admit dispersie, atunci, dacă v.a. sunt necorelate, atunci dispersia sumei este suma dispersiilor, i.e.*

$$\boxed{X, Y\ necorelate^{91} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{D}^2(X + Y) = \mathrm{D}^2(X) + \mathrm{D}^2(Y).}$$

---

89 Adică $\mathrm{D}^2(X) = 0$ dacă și numai dacă $X = \mathbb{E}(X)$, $\mathbb{P}$−a.s..

90 În cazul unei v.a. cu un număr finit de valori această condiție este satisfăcută. În cazul unei v.a. oarecare (nu neapărat cu un număr finit de valori) trebuie impusă condiția ca v.a. să admită dispersie finită, i.e. pătratul v.a. să admită medie finită (vezi Remarca 2.80, Definiția 2.146 și Definiția 3.35).

Reciproca nu este adevărată.

Dacă v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ *admit dispersie, atunci, dacă v.a. sunt necorelate două câte două, atunci dispersia sumei este suma dispersiilor, i.e.*

$$(X_i)_{i=\overline{1,n}} \text{ necorelate}^{92} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{D}^2\left(\sum\nolimits_{i=1}^n X_i\right) = \sum\nolimits_{i=1}^n \mathrm{D}^2\left(X_i\right). \tag{2.68}$$

(vi) *Dacă v.a. X, Y admit dispersie, atunci are loc următoarea formulă de calcul a dispersiei sumei a două v.a. în cazul general (în care v.a. nu sunt neapărat necorelate):*

$$\mathrm{D}^2\left(X+Y\right) = \mathrm{D}^2\left(X\right) + \mathrm{D}^2\left(Y\right) + 2\mathrm{Cov}\left(X,Y\right).$$

În cazul combinației liniare a două v.a., formula de calcul a dispersiei este dată de formula

$$\mathrm{D}^2\left(aX+bY\right) = a^2\mathrm{D}^2\left(X\right) + b^2\mathrm{D}^2\left(Y\right) + 2ab\mathrm{Cov}\left(X,Y\right), \tag{2.69}$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

Dacă v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ *admit dispersie, atunci dispersia sumei este dată de formula*

$$\mathrm{D}^2\left(\sum\nolimits_{i=1}^n X_i\right) = \sum\nolimits_{i=1}^n \mathrm{D}^2\left(X_i\right) + 2\sum\nolimits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^n \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right). \tag{2.70}$$

Demonstrație. (i) Avem $\mathrm{D}^2\left(c\right) = \mathbb{E}\left(c^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(c\right)\right)^2 = c^2 - c^2 = 0.$

(ii) În cazul unei v.a. X discrete să arătăm mai întâi că $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 0$ implică $X = 0$, $\mathbb{P}-$a.s..

Într-adevăr, deoarece avem că o sumă de numere nenegative este nulă, i.e.

$$0 = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum\nolimits_{i=1} x_i^2 \mathbb{P}\left(X = x_i\right),$$

deducem că pentru orice $x_i \neq 0$, $\mathbb{P}\left(X = x_i\right) = 0$.

---

[91] Evident, vezi (2.66), dacă cele două v.a. sunt independente, atunci obținem aceeași concluzie.

[92] Evident, vezi (2.66), dacă cele n v.a. sunt independente două câte două, atunci obținem aceeași concluzie.

Prin urmare, singura probabilitate diferită de zero este $\mathbb{P}(X=0)=1$.

Apoi, dacă $\mathrm{D}^2(X)=\mathbb{E}(X-\mu_1)^2=0$, deducem, folosind pasul precedent, că $X=\mu_1$, $\mathbb{P}-$a.s..

Dar rezultatul este adevărat și în cazul v.a. continue. În acest caz, folosim definiția dispersiei și faptul că media este o integrală Lebesgue dată de (3.21):

$$\mathrm{D}^2(X)=\mathbb{E}(X-\mu_1)^2=\int_\Omega (X(\omega)-\mu_1)^2\,\mathbb{P}(d\omega).$$

Pe de altă parte, se știe că, vezi (2.50), dacă $Y:\Omega\to\mathbb{R}_+$ este funcție măsurabilă și nenegativă, atunci $\int_\Omega Y(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)=0$ dacă și numai dacă $Y=0$, $\mathbb{P}-$a.s. (vezi, de exemplu, [48, Teorema 8.1-10]).

Prin urmare, $\mathrm{D}^2(X)=0$ dacă și numai dacă $X=\mu_1$, $\mathbb{P}-$a.s. (pentru o demonstrație alternativă vezi și [1, Theorem 2.4.8]).

(iii) Avem

$$\mathrm{D}^2(aX)=\sum_{i=1}^m p_i\,(ax_i-a\mu_1)^2=a^2\sum_{i=1}^m p_i\,(x_i-\mu_1)^2=a^2\mathrm{D}^2(X).$$

Evident, formula este adevărată și în cazul unei v.a. X oarecare (nu neapărat discretă):

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^2(aX)&=\mathbb{E}(aX)^2-(\mathbb{E}(aX))^2\\&=a^2\big(\mathbb{E}(X)^2-(\mathbb{E}X)^2\big)\\&=a^2\mathrm{D}^2(X).\end{aligned}$$

(iv) Avem

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^2(a+bX)&=\mathbb{E}\big((a+bX)^2\big)-(\mathbb{E}(a+bX))^2\\&=a^2+2ab\mathbb{E}(X)+b^2\mathbb{E}\left(X^2\right)-a^2-2ab\mathbb{E}(X)-b^2(\mathbb{E}(X))^2\\&=b^2\mathrm{D}^2(X).\end{aligned}$$

(v) Avem

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^2(X+Y)&=\mathbb{E}\big((X+Y)^2\big)-(\mathbb{E}(X+Y))^2\\&=\mathbb{E}\left(X^2\right)+2\mathbb{E}(XY)+\mathbb{E}\left(Y^2\right)-(\mathbb{E}X)^2-2\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)-(\mathbb{E}Y)^2\\&=\mathbb{E}\left(X^2\right)+\mathbb{E}\left(Y^2\right)-(\mathbb{E}X)^2-(\mathbb{E}Y)^2\end{aligned}$$

$$= \mathrm{D}^2(X) + \mathrm{D}^2(Y).$$

(vi) Avem

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^2(X+Y) &= \mathbb{E}\big((X+Y)^2\big) - (\mathbb{E}(X+Y))^2 \\ &= \mathbb{E}\left(X^2\right) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}\left(Y^2\right) - (\mathbb{E}X)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - (\mathbb{E}Y)^2 \\ &= \mathrm{D}^2(X) + \mathrm{D}^2(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y).\end{aligned}$$

■

Definiția 2.98 (vezi Definiția 3.68) *De obicei, gradul de împrăștiere a valorilor unei v.a. X se exprimă nu prin dispersie ci prin* **deviația standard** *(sau* **abaterea standard***) notată* $\mathrm{D}(X)$ *și definită de*

$$\mathrm{D}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{\mathrm{D}^2(X)}. \tag{2.71}$$

Această noțiune are avantajul că se exprimă prin aceleași unități de măsură ca și valorile v.a. X.

Propoziția 2.99 (Proprietăți ale deviației standard)

$$(i) \quad X = c, \quad \mathbb{P} - a.s. \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{D}(X) = 0.$$

$$(ii) \quad \mathrm{D}(aX) = |a|\,\mathrm{D}(X), \quad \textit{pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

Remarca 2.100 Folosind formula (2.64) se obține următoarea formulă de schimbare a covarianței la o transformare liniară de v.a.

$$\mathrm{Cov}(aX+b, cY+d) = ac\mathrm{Cov}(X,Y),$$

pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Apoi obținem (vezi și Nota 249)

$$\begin{aligned}\rho(aX+b, cY+d) &= \frac{\mathrm{Cov}(aX+b, cY+d)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(aX+b)} \cdot \sqrt{\mathrm{D}^2(cY+d)}} \\ &= \frac{ac\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{a^2\mathrm{D}^2(X)} \cdot \sqrt{c^2\mathrm{D}^2(Y)}}\end{aligned}$$

$$= \frac{ac}{|ac|} \rho(X, Y)$$
$$= \operatorname{sgn}(ac) \cdot \rho(X, Y),$$

prin urmare, dacă a și c au același semn, atunci **coeficientul de corelație nu se modifică la schimbări liniare ale v.a.**, mai precis, pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y), \quad \text{dacă } ac > 0}$$

și

$$\rho(aX + b, cY + d) = -\rho(X, Y), \quad \text{dacă } ac < 0.$$

◇

Remarca 2.101 Momentul central de ordin 3, i.e. $\nu_3 = \mathbb{E}\left[(X - \mu)^3\right]$ este, de asemenea, important. El este folosit pentru a măsura lipsa de simetrie a distribuției.

Dar ν_3 depinde de unitatea de măsură utilizată pentru valorile lui X. Pentru a deveni independentă în raport cu unitatea de măsură vom considera momentul de ordin 3 al v.a. standardizate asociată v.a. X (vezi Remarca 3.128).

Astfel, dacă $\mu = \mathbb{E}(X)$, iar $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}^2(X)}$, definim **coeficientul de asimetrie** (sau ***skewness***)

$$S_3 = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3\right].$$

Distribuția normală standard (vezi formulele (3.125)) și orice altă distribuție simetrică[93] (cu momentul de ordin 3 finit) are coeficientul de asimetrie $S_3 =$

[93] Spunem că distribuția v.a. X este **simetrică (în raport cu** 0**)** dacă v.a. X și $-X$ urmează aceeași distribuție.

Deci, dacă X este o v.a. discretă, atunci distribuția v.a. X este simetrică (în raport cu 0) dacă v.a. X și $-X$ au același tablou de repartiție. Având în vedere că v.a. $-X$ are tabloul de repartiție dat de valorile $(\mathbb{P}(-X = x))_{x \in X(\Omega)} = (\mathbb{P}(X = -x))_{x \in X(\Omega)}$, spunem că v.a. X este simetrică dacă

$$\mathbb{P}(X = -x) = \mathbb{P}(X = x), \quad \text{pentru orice } x \in X(\Omega).$$

Dacă X este o v.a. continuă, atunci distribuția lui X este simetrică (în raport cu 0) dacă v.a. X și $-X$ au aceeași densitate. Având în vedere că v.a. $-X$ are densitatea $f_{-X}(x) = f_X(-x)$ (vezi Remarca 3.34), spunem că v.a. X este simetrică dacă

$$f_X(x) = f_X(-x), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

deci dacă densitatea ei are dreapta Oy drept axă de simetrie, adică densitatea este o funcție pară.

Spunem că distribuția v.a. X este **simetrică în raport cu** a dacă v.a. $(X - a)$ și $(a - X)$ urmează aceeași distribuție.

0. Astfel, distribuția simetrică, mai precis valoarea 0 pentru S_3, devine un element de comparație pentru alte distribuții.

Reamintim că într-o distribuție simetrică și unimodală media (în caz că există), mediana și moda coincid. Coeficientul de asimetrie este pozitiv strict dacă moda este la stânga valorii medii și este negativ strict dacă moda este la dreapta valorii medii.

Momentul central de ordin 4 este utilizat pentru a descrie gradul de apropiere față de densitatea distribuției normale standard. Dacă $\mu = \mathbb{E}(X)$, iar $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}^2(X)}$, definim **coeficientul de exces** (sau **gradul de aplatizare** sau ***kurtosis*** (în limba greacă ***kurtos*** înseamnă curbare, arcuire).

$$E_4 = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right].$$

Distribuția normală standard are coeficientul de exces $E_4 = 3$ (vezi formulele (3.125)). Astfel, distribuția normală standard, mai precis valoarea 3 pentru E_4, devine un element de comparație pentru alte distribuții. ◇

Remarca 2.102 Dacă X reprezintă valorile unei **caracteristici** avute în vedere, și care urmează o distribuție oarecare (discretă sau continuă), atunci spunem că familia de v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ este o **selecție** (sau **eșantion**) de volum n dacă v.a. sunt independente și urmează aceeași distribuție[94] și anume distribuția v.a. X.

Să presupunem că X este de pătrat integrabil. Prin urmare,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X) \overset{\text{not}}{=\!=} \mu < \infty, \quad \text{iar}\\ &\mathrm{D}^2(X_i) = \mathrm{D}^2(X) \overset{\text{not}}{=\!=} \sigma^2 < \infty, \quad \text{pentru } i = \overline{1,n}.\end{aligned}$$

V.a.

$$\bar{X}_n \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Deci, dacă X este o v.a. continuă, atunci distribuția v.a. X este simetrică în raport cu a dacă v.a. $(X-a)$ și $(a-X)$ au aceeași densitate (sau, echivalent, dacă v.a. X și $(2a-X)$ au aceeași densitate), adică (vezi Remarca 3.34) dacă

$$f_X(a+x) = f_X(a-x), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

deci dacă densitatea ei are dreapta $x = a$ drept axă de simetrie.

[94] Dacă v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt independente și urmează aceeași distribuție atunci vom scrie prescurtat că v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt de tip **i.i.d.** (**independente și identic distribuite**).

se numește **media de selecție**.

Media mediei de selecție $\bar{X}_n$ este dată de

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right) &= \frac{\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{n} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_k\right)}{n} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_1\right)}{n} \\ &= \mathbb{E}\left(X_1\right) \\ &= \mathbb{E}\left(X\right) \\ &= \mu,\end{aligned} \tag{2.72}$$

deci media mediei de selecție $\bar{X}_n$ este chiar media teoretică $\mu = \mathbb{E}(X)$.

Deoarece media estimatorului $\bar{X}_n$ coincide cu valoarea μ pe care dorim să o estimăm, i.e. $\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right) = \mu$, spunem că media de selecție $\bar{X}_n$ este un **estimator nedeplasat** (*unbiased*) al mediei teoretice μ.

Dispersia mediei de selecție $\bar{X}_n$ este dată, având în vedere egalitatea (2.68), de

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^2\left(\bar{X}_n\right) &= \frac{\mathrm{D}^2\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{n^2} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}^2\left(X_k\right)}{n^2} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}^2\left(X_1\right)}{n^2} \\ &= \frac{n\mathrm{D}^2\left(X_1\right)}{n^2} \\ &= \frac{1}{n}\mathrm{D}^2\left(X_1\right) \\ &= \frac{1}{n}\mathrm{D}^2\left(X\right) \\ &= \frac{1}{n}\sigma^2.\end{aligned} \tag{2.73}$$

Prin urmare, **dispersia mediei de selecție** $\bar{X}_n$ este mult mai mică decât dispersia teoretică σ^2, mai precis

$$\mathrm{D}^2\left(\bar{X}_n\right) \to 0, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

$\diamond$

Remarca 2.103 Dacă suntem în cadrul de lucru al Remarcii 2.102, atunci să definim v.a. $\bar{\mathrm{S}}_n^2$ numită **dispersia de selecție** (sau **varianța de selecție**)

$$\bar{\mathrm{S}}_n^2 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2}{n}$$

(această definiție, vezi (2.62), **urmează exact definiția dispersiei teoretice**).

Ridicând la pătrat, avem

$$\begin{aligned}
\bar{\mathrm{S}}_n^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2}{n} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i^2 - 2X_i\bar{X}_n + \bar{X}_n^2\right)}{n} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - 2\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\bar{X}_n + \bar{X}_n^2 \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - 2\bar{X}_n^2 + \bar{X}_n^2
\end{aligned}$$

și astfel obținem **formula de calcul** a dispersiei de selecție (varianta deplasată)

$$\bar{\mathrm{S}}_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}_n^2.$$

Deoarece au loc formulele (2.73) și (2.72),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_n^2\right) &= \mathrm{D}^2\left(X_n\right) + \left[\mathbb{E}\left(X_n\right)\right]^2 = \sigma^2 + \mu^2, \\
\mathbb{E}\left(\bar{X}_n^2\right) &= \mathrm{D}^2\left(\bar{X}_n\right) + \left[\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right)\right]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2.
\end{aligned}$$

Prin urmare, folosind formula de calcul, putem calcula **media dispersiei de selecție** $\bar{\mathrm{S}}_n^2$:

$$\mathbb{E}\left(\bar{\mathrm{S}}_n^2\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}_n^2\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_i^2\right)}{n} - \mathbb{E}\left(\bar{X}_n^2\right) \\
&= \left(\sigma^2 + \mu^2\right) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \\
&= \frac{n-1}{n}\,\sigma^2 \\
&\neq \sigma^2.
\end{aligned}
$$

Această egalitate ne spune că dispersia de selecție S_n^2 este un **estimator deplasat** (*biased*) al dispersiei teoretice σ^2 (deoarece media estimatorului $\bar{\mathrm{S}}_n^2$ nu coincide cu valoarea σ^2 pe care dorim să o estimăm).

Din acest motiv **se ia drept definiție a dispersiei de selecție** varianta modificată S_n^2 în loc de varianta $\bar{\mathrm{S}}_n^2$:

$$
\mathrm{S}_n^2 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{n}{n-1}\,\bar{\mathrm{S}}_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2}{n-1}.
$$

Evident, și dispersia de selecție S_n^2 verifică o formulă de calcul similară:

$$
\mathrm{S}_n^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \bar{X}_n^2\right).
$$

În acest caz, media estimatorului S_n^2 coincide cu valoarea σ^2 pe care dorim să o estimăm, i.e.

$$
\mathbb{E}\big(\mathrm{S}_n^2\big) = \frac{n}{n-1}\,\mathbb{E}\big(\bar{\mathrm{S}}_n^2\big) = \sigma^2,
$$

deci S_n^2 devine un **estimator nedeplasat** (*unbiased*). ◇

Prezentăm, în continuare, o serie de inegalități importante care folosesc media.

Teorema 2.104 (Inegalitatea lui Markov) *Fie $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ o funcție nedescrescătoare și măsurabilă și X o v.a. astfel încât există $\mathbb{E}\left(g\left(X\right)\right)$.*

Atunci, are loc, pentru orice $\epsilon > 0$,

$$
\boxed{\mathbb{P}\left(X \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(g\left(X\right)\right)}{g\left(\epsilon\right)}.} \tag{2.74}
$$

Demonstrație. Având în vedere că (vezi formula (2.48) și Remarca 2.118)

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A),$$

obținem, pentru orice $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X)) &\geq \mathbb{E}\left(g(X)\,\mathbb{1}_{[\epsilon,\infty)}(X)\right) \\ &\geq g(\epsilon)\,\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[\epsilon,\infty)}(X)\right) \\ &= g(\epsilon)\,\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X\geq\epsilon\}}\right) \\ &= g(\epsilon)\,\mathbb{P}(X \geq \epsilon).\end{aligned}$$

■

În particular, alegând diverse funcții particulare g în inegalitatea (2.74) a lui Markov, obținem alte inegalități importante.

Corolarul 2.105

(a) *Dacă X este v.a. astfel încât există $\mathbb{E}(X)$ și $g(x) = x\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, obținem, pentru orice $\epsilon > 0$,*

$$\boxed{\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\epsilon},}$$

deci, dacă v.a. X are medie finită, atunci

$$0 \leq \lim_{\epsilon\to\infty} \mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \mathbb{E}(|X|) \cdot \lim_{\epsilon\to\infty} \epsilon^{-1} = 0$$

și astfel obținem[95]

$$\mathbb{P}(X = \infty) = \lim_{\epsilon\to\infty} \mathbb{P}(X \geq \epsilon) = 0.$$

---

[95] Într-adevăr, folosind Propoziția 1.42, i.e. continuitatea secvențială a măsurii $\mathbb{P}$ în raport cu șirul necrescător $(\{X \geq \epsilon\})_{\epsilon>0}$, obținem:

$$\mathbb{P}(X = \infty) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\epsilon>0} \{X \geq \epsilon\}\right) = \lim_{\epsilon\to\infty} \mathbb{P}(X \geq \epsilon).$$

Prin urmare, dacă X este o v.a. cu valori nenegative, atunci

$$\mathbb{P}(X = \infty) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X) = \infty$$

sau, echivalent, vezi și (2.51),

$$\mathbb{E}(X) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(X = \infty) = 0.$$

Se obține, de fapt, un rezultat binecunoscut: **orice funcție integrabilă este finită aproape peste tot**.

Mai precis, obținem că dacă există și este finită media v.a. X, adică integrala Lebesgue a funcției X (sau, echivalent, există și este finită integrala Lebesgue a funcției $|X|$), atunci $\mathbb{P}(|X| = \infty) = 0$.

(b) *În cazul particular al punctului* (a) *în care* X *este o v.a. cu valori nenegative astfel încât există* $\mathbb{E}(X)$, *obținem, pentru orice* $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\epsilon}.$$

(c) *Dacă* X *este v.a. și* $g(x) = e^{-\theta x}$, *cu* $\theta > 0$, *obținem, pentru orice* $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \epsilon) \leq e^{-\epsilon\theta}\mathbb{E}(e^{\theta X}),$$

deci, dacă v.a. X *are momente exponențiale finite, atunci funcția* $\epsilon \mapsto \mathbb{P}(X \geq \epsilon)$ *descrește exponențial, mai precis*

$$0 \leq \lim_{\epsilon\to\infty} \mathbb{P}(X \geq \epsilon) \leq \mathbb{E}(e^{\theta X}) \cdot \lim_{\epsilon\to\infty} e^{-\epsilon\theta} = 0$$

și astfel obținem

$$\mathbb{P}(X = \infty) = \lim_{\epsilon\to\infty} \mathbb{P}(X \geq \epsilon) = 0.$$

(d) *Dacă* X *este v.a. astfel încât există* $\mathbb{E}\left(X^2\right) < \infty$ *și* $g(x) = x^2 \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, *obținem* **inegalitatea lui Cebâșev**

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{D}^2(X)}{\epsilon^2}, \quad \textit{pentru orice } \epsilon > 0, \tag{2.75}$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\mathrm{D}^2(X)}{\epsilon^2}, \quad \textit{pentru orice } \epsilon > 0. \tag{2.76}$$

(e) *În cazul particular* $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathrm{D}^2(X) = \sigma^2 < \infty$ *și* $\epsilon = k\sigma$, *inegalitatea (2.75) a lui Cebâșev devine*

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}, \quad \textit{pentru orice } k > 0,$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}, \quad \textit{pentru orice } k > 0. \tag{2.77}$$

Remarca 2.106 Inegalitățile lui Markov și Cebâșev (precum și celelalte cazuri particulare) au loc pentru orice tip de v.a.

În schimb, estimările furnizate de ele sunt destul de grosiere. În acest sens, vezi Remarca 3.125.

Astfel, de exemplu, în cazul particular al unei v.a. $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, inegalitatea (2.77) a lui Cebâșev furnizează estimarea

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu|<3\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{3^2} \simeq 0.8889,$$

dar, pe de altă parte, valoarea aproximativă a aceleași probabilități este dată de (3.71), adică

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu| \leq 3\sigma\right) \simeq 0.9973.$$

$\diamond$

Remarca 2.107 (vezi și Remarca 5.20) Inegalitatea lui Cebâșev este foarte utilă pentru a demonstra convergența în probabilitatea a unui șir de v.a. (vezi, de exemplu, legea slabă a numerelor mari dată de Corolarul 5.91 sau, într-o formă particulară, de Exercițiul 5.5.16). $\diamond$

Exemplul 2.108 Fie v.a.

$$X:\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Să se obțină o estimare a probabilității $\mathbb{P}\left(|X-\mu_1|<0.2\right)$.

Media și dispersia sunt date de

$$\mathbb{E}\left(X\right)=0.4, \quad \mathbb{E}\left(X^2\right)=0.17, \quad \mathrm{D}^2\left(X\right)=0.17-0.16=0.01.$$

Avem deci, aplicând inegalitatea (2.76) a lui Cebâșev,

$$\mathbb{P}\left(|X-0.4|<0.2\right) \geq 0.75.$$

$\diamond$

2.2.4 Exemple de v.a. discrete (cu un număr finit de valori)

2.2.4.1 Distribuția uniformă discretă

Spunem că v.a. X urmează o distribuție discretă de tip uniform, și scriem $X \sim \mathscr{DU}(n)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, dacă ia un număr finit de valori (mai precis n), iar valorile pe care le poate lua sunt echiprobabile. Prin urmare, tabloul de repartiție este dat de

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}.$$

Evident, avem $\mathbb{P}(X = x_k) = 1/n \geq 0$ și suma probabilităților este 1.

Remarca 2.109 Valoarea n se numește parametrul distribuției. $\diamond$

Remarca 2.110 Legea unei v.a. $X \sim \mathscr{DU}(n)$ este măsură de probabilitate discretă și este dată, conform (2.44) sau (2.45), de

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \cdot \delta_{x_k}(A), \quad \text{pentru } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

unde δ_{x_k} este măsura Dirac concentrată în punctul x_k, cu $k = \overline{1,n}$. $\diamond$

Remarca 2.111 Fie v.a. $X \sim \mathscr{DU}(n)$ de tipul $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$. Media este dată de

$$\mathbb{E}(X) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum\nolimits_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2},$$

iar

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum\nolimits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

deci dispersia este

$$\mathrm{D}^2(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

$\diamond$

2.2.4.2 Distribuția Poisson (cu un număr finit de valori)

Fie X o v.a. care ia drept valori numărul total de bile albe extrase din n urne U_i, pentru $i = \overline{1,n}$, care conține fiecare în proporții diferite, dar cunoscute, bile albe și negre. Probabilitatea de a extrage o bilă albă din urna U_i este p_i, iar o bilă neagra $q_i = 1 - p_i$. Să definim X_i v.a. care ia valoarea 1 dacă din U_i se extrage o bilă albă și 0 dacă se extrage o bilă neagră:

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_i & p_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Avem și

$$X_i^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_i & p_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,n},$$

iar media

$$\mathbb{E}\left(X_i\right) = p_i, \quad \mathbb{E}\left(X_i^2\right) = p_i$$

și dispersia

$$\mathrm{D}^2\left(X_i\right) = p_i - p_i^2 = p_i\left(1 - p_i\right) = p_i q_i.$$

Prin urmare, dacă v.a. X este numărul total de bile albe extrase, atunci X este, de fapt, suma celor n v.a. independente X_i, i.e.

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Folosind schema clasică de probabilitate a lui Poisson se poate calcula probabilitatea evenimentului $\{X = k\}$, cu $k = \overline{0,n}$.

Mai precis, spunem că v.a. X urmează o distribuție de tip Poisson dacă tabloul de repartiție este dat de

$$X : \begin{pmatrix} k \\ a_k \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}},$$

unde $a_k = \mathbb{P}\left(X = k\right)$ este coeficientul lui x^k din polinomul

$$Q\left(x\right) = \left(p_1 x + q_1\right) \cdot \left(p_2 x + q_2\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_n x + q_n\right),$$

iar $p_i, q_i \geq 0$ cu $q_i = 1 - p_i$, pentru $i = \overline{1,n}$.

Evident, avem $a_k \geq 0$ și $\sum_{k=0}^{n} a_k = 1$, deoarece

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n} a_k x^k = \prod\nolimits_{k=0}^{n} (p_k x + q_k)$$

și luând $x = 1$, obținem $\sum_{k=0}^{n} a_k = \prod_{k=0}^{n} (p_k + q_k) = 1$.

Remarca 2.112 Semnificația schemei este următoarea: fie o experiență care constă din n experiențe independente și $A_1, \ldots, A_n$ evenimente legate de fiecare experiență în parte. Fie $p_i = \mathbb{P}(A_i)$, $q_i = 1 - p_i$, $i = \overline{1, n}$. Atunci, X reprezintă v.a. care ia drept valori numărul de realizări ale evenimentului A_i când au loc cele n experiențe. $\diamond$

Propoziția 2.113 *V.a. X este dată și de relația*

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i .$$

Deci media și dispersia v.a. distribuite Poisson X sunt date de

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i ,\\ \mathrm{D}^2(X) &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mathrm{D}^2(X_i) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i q_i ,\end{aligned}$$

deoarece v.a. X_i sunt independente.

2.2.4.3 Distribuția Bernoulli

Fie X o v.a. care ia drept valori[96] numărul total de bile albe extrase dintr-o urnă U care conține bile albe și negre; probabilitatea de a extrage o bilă albă din urna U este p și respectiv o bilă neagră este $q = 1 - p$. Prin urmare, v.a. X ia valoarea 1 dacă din U se extrage o bilă albă și 0 dacă se extrage o bilă neagră.

Astfel, spunem că v.a. X urmează o **distribuție de tip Bernoulli**, și scriem $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$, dacă tabloul de repartiție este dat de

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad \text{unde } q = 1 - p. \tag{2.78}$$

[96] De fapt, X este o v.a. distribuită Poisson în cazul particular $i = 1$ și astfel $U_i = U$, $p_i = p$, iar $q_i = q$.

Remarca 2.114 Valoarea p se numește parametrul distribuției. $\diamond$

Evident,

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

și astfel media

$$\mathbb{E}(X) = p, \quad \mathbb{E}\left(X^2\right) = p$$

și dispersia

$$\mathrm{D}^2(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Astfel am demonstrat:

Propoziția 2.115 *Dacă* $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$, *atunci media și dispersia sunt date de:*

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = p \qquad \text{și} \qquad \mathrm{D}^2(X) = pq.} \tag{2.79}$$

Remarca 2.116 Legea unei v.a. $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$ este măsură de probabilitate discretă și este dată, conform (2.44) sau (2.45), de

$$\mathbb{P}_X(A) = q \cdot \delta_0(A) + p \cdot \delta_1(A), \quad \text{pentru } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

unde δ_k este măsura Dirac concentrată în punctul $k \in \{0, 1\}$. $\diamond$

Remarca 2.117 Semnificația distribuției este următoarea: fie o experiență și **S** un eveniment legat de ea care se realizează cu probabilitatea $p = \mathbb{P}(\mathbf{S})$. Dacă efectuăm experiența o singură dată, spunem că a apărut *Succesul* dacă s-a produs evenimentul **S**. Dacă nu s-a produs evenimentul **S**, adică a apărut evenimentul $\bar{\mathbf{S}}$, atunci spunem că a apărut *Eșecul*.

Atunci, X **reprezintă v.a. care ia drept valori numărul de realizări ale evenimentului S dacă se efectuează o singură dată experiența, i.e. numărul de apariții ale *Succesului* la o singură efectuare a experienței.**

În notațiile de mai sus, este evident că tabloul de repartiție al v.a. X este dat de (2.78). $\diamond$

Remarca 2.118 Să observăm că v.a. indicatoare $\mathbb{1}_A$ a evenimentului $A \in \mathscr{F}$ este chiar v.a. de tip $\text{Bernoulli}\,(p)$, adică

$$\mathbb{1}_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad \text{unde } p \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathbb{P}(A).$$

Într-adevăr, dacă v.a. este $\mathbb{1}_A(\omega) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$, atunci

$$p = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(\{\omega : \mathbb{1}_A(\omega) = 1\}) = \mathbb{P}(A).$$

Se obține imediat, vezi și formula (2.48), că

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)} \tag{2.80}$$

și apoi $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A^2\right) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$, deci

$$\mathrm{D}^2(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)),$$

adică Propoziția 2.115. ◇

Remarca 2.119 Modalitatea de a exprima probabilitatea unui eveniment folosind media unei anumite v.a., dată de formula (2.80), este utilă și pentru a demonstra formula (1.14) de calcul a reuniunii de evenimente.

Să observăm că, folosind definiția indicatoarei, obținem, pentru orice evenimente A, B,

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \quad \text{și} \quad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B. \tag{2.81}$$

Prin urmare,

$$1 = \mathbb{1}_\Omega = \mathbb{1}_{A\cup\bar{A}} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{\bar{A}},$$

deci

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A\cup B} &= 1 - \mathbb{1}_{\overline{A\cup B}} \\ &= 1 - \mathbb{1}_{\bar{A}\cap\bar{B}} \\ &= 1 - \mathbb{1}_{\bar{A}} \cdot \mathbb{1}_{\bar{B}} \\ &= 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}\,.
\end{aligned}
$$

Aplicând media, obținem

$$\mathbb{P}\left(A \cup B\right) = \mathbb{P}\left(A\right) + \mathbb{P}\left(B\right) - \mathbb{P}\left(A \cap B\right).$$

Pentru a generaliza la cazul a n evenimente să observăm că

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \mathbb{1}_{A_i}\right).$$

Efectuând înmulțirea, folosind formula (2.81) și, aplicând media, obținem formula (1.16). $\diamond$

2.2.4.4 Distribuția binomială

Fie X o v.a. care ia drept valori[97] numărul total de bile albe extrase din n urne U care conține bile albe și negre; probabilitatea de a extrage o bilă albă din urna U este p și respectiv o bilă neagră este $q = 1 - p$.

Folosind schema binomială, mai precis Propoziția 1.109, se poate calcula probabilitatea evenimentului $\{X = k\}$, pentru $k = \overline{0, n}$.

Astfel spunem că v.a. X urmează o distribuție binomială, și scriem $X \sim \mathscr{B}\left(n, p\right)$, dacă tabloul de repartiție este dat de

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ C_n^0 p^0 q^n & C_n^1 p^1 q^{n-1} & C_n^2 p^2 q^{n-2} & \dots & C_n^k p^k q^{n-k} & \dots & C_n^n p^n q^0 \end{pmatrix}$$

sau, scris pe scurt,

$$X : \begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}}, \quad \text{unde } q \overset{\text{def}}{=\!=} 1 - p. \tag{2.82}$$

[97] De fapt, X este o v.a. distribuită Poisson în cazul particular $U_i = U$ și astfel $p_i = p$, iar $q_i = q$, pentru $i = \overline{1, n}$.

Evident, avem $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \geq 0$. Pentru a arăta că suma probabilităților este 1 folosim binomul lui Newton[98] (ceea ce justifică și numele distribuției):

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Remarca 2.120 Valorile n și p se numesc parametri distribuției. $\diamond$

Remarca 2.121 Semnificația distribuției este următoarea: fie o experiență și $\mathbf{S}$ un eveniment legat de ea care se poate realiza cu probabilitatea $p = \mathbb{P}(\mathbf{S})$. Dacă efectuăm experiența o singură dată, spunem că a apărut *Succesul* dacă s-a produs evenimentul $\mathbf{S}$. Dacă nu s-a produs evenimentul $\mathbf{S}$, adică a apărut evenimentul $\bar{\mathbf{S}}$, atunci spunem că a apărut *Eșecul*. Se repetă experiența de n ori și în aceleași condiții.

Atunci, X **reprezintă v.a. care ia drept valori numărul de realizări ale evenimentului S la** n **efectuări ale experienței, i.e. numărul de apariții ale** ***Succesului*** **la** n **efectuări ale experienței.**

Într-adevăr, în notațiile de mai sus, este evident că $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$ și apoi se poate arăta, folosind notațiile standard date de (1.33) (vezi Propoziția 1.109 sau, mai precis, tipul de demonstrație dat de Propoziția 1.106), că tabloul de repartiție al v.a. X este dat de (2.82). $\diamond$

Remarca 2.122 În cazul particular $n = 1$ obținem distribuția Bernoulli, adică

$$\boxed{\mathscr{B}(1, p) = \text{Bernoulli}(p),}$$

deci $X \sim \mathscr{B}(1, p)$ înseamnă

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

$\diamond$

[98] **Binomul lui Newton**:
$$(a+b)^r = \sum_{i=0}^{r} C_r^i a^i b^{r-i} = b^r + C_r^1 a b^{r-1} + C_r^2 a^2 b^{r-2} + \cdots + C_r^{r-1} a^{r-1} b + a^r,$$
pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ și orice $r \in \mathbb{N}^*$.

Propoziția 2.123 *Dacă $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, atunci media și dispersia sunt date de:*

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot p \qquad \text{și} \qquad \mathrm{D}^2(X) = n \cdot pq. \tag{2.83}$$

Demonstrație. Într-adevăr, mai întâi avem că

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum\nolimits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= np \sum\nolimits_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k')!\,((n-1)-k')!} p^{k'} q^{(n-1)-k'} \\
&= np \sum\nolimits_{k'=0}^{n-1} C_{n-1}^{k'} p^{k'} q^{(n-1)-k'} \\
&= np\,(p+q)^{n-1} \\
&= np
\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \sum\nolimits_{k=0}^{n} k^2 \cdot C_n^k p^k q^{n-k} \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} (k-1) \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&\quad + \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= n\,(n-1)\,p^2 \sum\nolimits_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} p^{k-2} q^{n-k} \\
&\quad + np \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} \\
&= n\,(n-1)\,p^2 \sum\nolimits_{k'=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(k')!\,((n-2)-k')!} p^{k'} q^{(n-2)-k'} \\
&\quad + np \sum\nolimits_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k')!\,((n-1)-k')!} p^{k'} q^{(n-1)-k'}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= n\,(n-1)\,p^2 \sum\nolimits_{k'=0}^{n-2} C_{n-2}^{k'} p^{k'} q^{(n-2)-k'} + np \sum\nolimits_{k'=0}^{n-1} C_{n-1}^{k'} p^{k'} q^{(n-1)-k'} \\
&= n\,(n-1)\,p^2\,(p+q)^{n-2} + np\,(p+q)^{n-1} \\
&= n\,(n-1)\,p^2 + np.
\end{aligned}
$$

Deci

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}^2\,(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}\,(X)\right)^2 \\
&= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\
&= np - np^2 \\
&= npq.
\end{aligned}
$$

■

Remarca 2.124 Funcția de repartiție este $F\,(x) = 0$, pentru orice $x < 0$, și

$$
F\,(x) = \mathbb{P}\,(X \le x) = \sum\nolimits_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{pentru orice } x \ge 0,
$$

unde $\lfloor x \rfloor$ este partea întreagă[99] a numărului real x. ◇

Propoziția 2.125 *Suma a două v.a. independente care urmează o distribuție de tip binomial este o v.a care urmează o distribuție tot de tip*[100] *binomial. Mai precis*[101]*,*

$$
X_i \sim \mathscr{B}(n_i, p)\,,\ i = \overline{1,2}, \quad \textit{independente} \quad \Longrightarrow \quad X_1 + X_2 \sim \mathscr{B}(n_1 + n_2, p)\,.
$$

[99] **Partea întreagă** a numărului real x este cel mai mare întreg mai mic sau egal cu x și se notează cu $\lfloor x \rfloor$ (numită și funcția *floor*). Deci

$$
\lfloor x \rfloor \stackrel{\text{def}}{=\!=} \max\left\{m \in \mathbb{Z} : m \le x\right\}.
$$

Mai există și notația $\lceil x \rceil$ care reprezintă cel mai mic întreg mai mare sau egal decât x (numită și funcția *ceiling*). Deci

$$
\lceil x \rceil \stackrel{\text{def}}{=\!=} \min\left\{n \in \mathbb{Z} : n \ge x\right\}.
$$

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există două unice numere întregi $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$
x - 1 < m \le x \le n < x + 1.
$$

Astfel, avem că $m = \lfloor x \rfloor$ și $n = \lceil x \rceil$.

[100] Pentru proprietatea similară satisfacută de alte distribuții vezi Propoziția 2.165, Propoziția 2.180, Propoziția 2.182, Propoziția 3.131, Propoziția 3.143, Propoziția 3.171 și respectiv Exercițiul 3.6.41.

[101] Acest rezultat se poate demonstra și cu ajutorul funcției caracteristice (vezi Exercițiul 4.2.11).

Demonstrație. Valorile pe care le poate lua X_1+X_2 sunt $k \in \{0,1,\ldots,n_1+n_2\}$. Atunci[102],

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_1+X_2=k\right) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_{i\in\mathbb{N}}\left\{X_1=i, X_2=k-i\right\}\Big)\\ &= \sum\nolimits_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{P}\big(\left\{X_1=i\right\}\cap\left\{X_2=k-i\right\}\big)\\ &= \sum\nolimits_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{P}\left(X_1=i\right)\cdot\mathbb{P}\left(X_2=k-i\right),\end{aligned}$$

unde indicele $i\in\mathbb{N}$ satisface restricțiile: $0\le i\le n_1$ și $0\le k-i\le n_2$ sau, echivalent, $k-n_2\le i\le k$.

Folosim relația (1.35) și obținem, de exemplu, în cazul $k\le n_1\wedge n_2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_1+X_2=k\right) &= \sum\nolimits_{i=0}^{k}\mathbb{P}\left(X_1=i\right)\cdot\mathbb{P}\left(X_2=k-i\right)\\ &= \sum\nolimits_{i=0}^{k}C_{n_1}^{i}p^{i}q^{n_1-i}\cdot C_{n_2}^{k-i}p^{k-i}q^{n_2-k+i}\\ &= p^{k}q^{n_1+n_2-k}\cdot\sum\nolimits_{i=0}^{k}C_{n_1}^{i}\cdot C_{n_2}^{k-i}\\ &= p^{k}q^{n_1+n_2-k}C_{n_1+n_2}^{k}.\end{aligned}$$

Celelalte cazuri se studiază similar (vezi pagina 102).

Deci v.a. $X_1+X_2\sim\mathscr{B}(n_1+n_2,p)$. ■

Remarca 2.126 Ca o consecință a rezultatului anterior se obține următoarea proprietate.

Dacă avem n v.a. independente, distribuite Bernoulli de același parametru p, adică n v.a. independente $X_i\sim\text{Bernoulli}\left(p\right)=\mathscr{B}\left(1,p\right)$, atunci suma lor este distribuită binomial, mai precis,

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n=\sum\nolimits_{i=1}^{n}X_i\sim\mathscr{B}\left(n,p\right).$$

Aceasta este evident, având în vedere că dacă X_i reprezintă numărul de *succese* obținute la încercarea $i=\overline{1,n}$ (adică X_i ia doar valorile 0 sau 1), atunci

102 Dacă X,Y sunt două v.a. independente discrete astfel încât $X\left(\Omega\right),Y\left(\Omega\right)\subseteq\mathbb{N}$, atunci formula de determinare a legii v.a. $X+Y$

$$\mathbb{P}\left(X+Y=k\right)=\sum\nolimits_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{P}\left(X=i\right)\cdot\mathbb{P}\left(Y=k-i\right),\quad k\in\mathbb{N}^*$$

este numită **formula de convoluție** (vezi și Nota 228, pentru cazul continuu).

numărul natural aleator $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ reprezintă numărul total de *succese* obținute în n încercări, adică $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Deci

> orice v.a. distribuită binomial $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ poate fi văzută
>
> ca o sumă de n v.a. independente și de tip Bernoulli.

În plus, știm că $\mathbb{E}(X_i) = p$, iar $\mathrm{D}^2(X_i) = pq$, deci **este foarte ușor să obținem și să reținem media și dispersia unei v.a. distribuite binomial**, adică formulele (2.83):

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = n \cdot p$$

și

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}^2(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = n \cdot pq.$$

$\diamond$

Definiția 2.127 *Așa cum am văzut deja, moda este valoarea $\lambda \in \{0, 1, \ldots, n\}$ a v.a. X care e cea mai probabilă, i.e. valoarea λ pentru care $\mathbb{P}(X = \lambda) = C_n^{\lambda} p^{\lambda} q^{n-\lambda}$ are valoarea maximă.*

Propoziția 2.128 *Moda λ al v.a. $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ satisface inegalitatea*

$$np - q \leq \lambda \leq np + p.$$

Demonstrație. Trebuie să fie satisfăcute următoarele inegalități

$$\mathbb{P}(X = \lambda - 1) \leq \mathbb{P}(X = \lambda) \quad \text{și} \quad \mathbb{P}(X = \lambda + 1) \leq \mathbb{P}(X = \lambda).$$

Obținem

$$\begin{aligned} C_n^{\lambda-1} p^{\lambda-1} q^{n-\lambda+1} &\leq C_n^{\lambda} p^{\lambda} q^{n-\lambda} \quad \text{și} \\ C_n^{\lambda+1} p^{\lambda+1} q^{n-\lambda-1} &\leq C_n^{\lambda} p^{\lambda} q^{n-\lambda} \end{aligned}$$

sau, echivalent, $\frac{1}{(n-\lambda+1)} q \leq \frac{1}{\lambda} p$ și $\frac{1}{\lambda+1} p \leq \frac{1}{(n-\lambda)} q$, unde $q = 1 - p$. $\blacksquare$

Remarca 2.129 Să observăm că

$$np + p = (np - q) + 1.$$

(a) În general, evident, $np - q \notin \mathbb{Z}$ deci echivalent $np + p \notin \mathbb{Z}$. În acest caz λ este acel număr natural între 0 și n astfel încât

$$(np - q) < \lambda < (np - q) + 1 = np + p,$$

adică λ este partea întreagă a lui $np + p$, i.e. cel mai mare întreg mai mic sau egal cu $np + p$, deci

$$\lambda = \lfloor np + p \rfloor .$$

(b) Dacă avem că $np - q \in \mathbb{Z}$ atunci echivalent și $np + p \in \mathbb{Z}$ și, în acest caz, λ ia două valori $\lambda_1 = np - q$ și $\lambda_2 = np + p$, având în vedere că

$$\mathbb{P}(X = np - q) = \mathbb{P}(X = np + p) .$$

$\diamond$

Remarca 2.130 (a) Calculând valorile $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ pentru diferite valori ale lui p și $q = 1 - p$ se constată că ele sunt distribuite asimetric, cu excepția cazului când $p = q = 0.5$. Asimetria este cu atât mai pronunțată cu cât p este mai mic.
(b) Dacă n crește, asimetria devine din ce în ce mai puțin pronunțată astfel încât pentru $p = 0.1$ și $n \geq 100$ se ajunge la o distribuție simetrică (confirmând astfel Teorema 5.113 a lui Moivre-Laplace). $\diamond$

2.2.4.5 Distribuția hipergeometrică

Spunem că v.a. X urmează o distribuție de tip hipergeometric dacă tabloul ei de repartiție este dat de

$$X : \begin{pmatrix} k \\ \dfrac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}} . \tag{2.84}$$

Remarca 2.131 În definiția v.a. precedente trebuie să folosim convenția dată de Nota 43. Mai precis, valorile $k = \overline{0,n}$ ale v.a. X trebuie să satisfăcă restricțiile

$$\max(0, n - b) \leq k \leq \min(n, a) .$$

$\diamond$

Evident, avem $\mathbb{P}(X=k)=\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}\geq 0$. Pentru a arăta că suma probabilităților este 1 folosim identitatea (1.35) sau Nota 42.

Remarca 2.132 Valorile a, b și n se numesc parametri distribuției. $\diamond$

Remarca 2.133 Semnificația distribuției este următoarea: fie o urnă cu a bile albe și b bile negre din care **se extrag pe rând n bile, dar fără a pune bila la loc** (sau **se extrag simultan n bile**), cu $n \leq a+b$.

Atunci, X **reprezintă v.a. care ia drept valori numărul de apariții ale *Succesului* (apariția unei bile albe) în cele n extrageri.**

Într-adevăr, în notațiile de mai sus, este evident că $X(\Omega) \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ și apoi folosind schema hipergeometrică, mai precis Propoziția 1.114, se poate calcula probabilitatea evenimentului $\{X=k\}$, pentru $k=\overline{0, n}$, și se va obține că tabloul de repartiție al v.a. X este dat de (2.84). $\diamond$

Remarca 2.134 Să menționăm că, în cazul unei v.a. X distribuite hipergeometric, funcția generatoare de probabilități asociată ei (vezi pagina 513) este

$$G_X(t)=\mathbb{E}\left(t^X\right)=\sum\nolimits_{k=0}^{n} t^k \mathbb{P}(X=k)=\sum\nolimits_{k=0}^{n} p_k t^k,$$

unde p_k sunt termenii unei **serii hipergeometrice**, ceea ce justifică denumirea distribuției.

Mai precis, să notăm $r=a+b$, $p=\frac{a}{a+b}=\frac{a}{r}$, $q=\frac{b}{a+b}=\frac{b}{r}$. Atunci, $p_k=\frac{C_{rp}^k C_{rq}^{n-k}}{C_r^n}$. Deci $p_0=\frac{(rq-n+1)\cdot\ldots\cdot(rq-1)\cdot rq}{(r-n+1)\cdot\ldots\cdot(r-1)\cdot r}$ și apoi

$$\begin{aligned} p_k = p_0 & \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \\ & \cdot \frac{rp\cdot(rp-1)\cdot\ldots\cdot(rp-k+1)}{(rq-n+k)\cdot(rq-n+k-1)\cdot\ldots\cdot(rq-n+1)}. \end{aligned}$$

Acum, dacă notăm cu $\alpha=-n, \beta=-rp, \gamma=rq-n+1$, rescriem p_k astfel

$$p_k=p_0\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+k-1)}{k!}\,\frac{\beta\cdot(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+k-1)}{\gamma\cdot(\gamma+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+k-1)}.$$

Prin urmare, folosind notațiile $(\alpha)_k, (\beta)_k, (\gamma)_k$ pentru termenii din fracțiile precedente, funcția generatoare de probabilități conține termeni de tipul

$$\frac{(\alpha)_k\cdot(\beta)_k}{(\gamma)_k}\cdot\frac{1}{k!}$$

care sunt cei care apar în **seria hipergeometrică**. $\diamond$

Propoziția 2.135 *Media și dispersia v.a. distribuite hipergeometric X sunt date de*

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot \frac{a}{a+b} \qquad \textit{și} \qquad \mathrm{D}^2(X) = n \cdot \frac{a}{a+b} \frac{b}{a+b} \frac{a+b-n}{a+b-1}. \tag{2.85}$$

Remarca 2.136 Dacă notăm numărul total de bile cu

$$N = a + b \quad \text{și cu} \quad p = \frac{a}{a+b}$$

probabilitatea de a obține a bile albe la prima extragere (deci $q = \frac{b}{a+b}$), atunci formulele (2.85) se scriu:

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(X) = npq \cdot \frac{N-n}{N-1},$$

adică formula pentru media unei v.a. distribuite hipergeometric (i.e. cazul a n extrageri fără revenirea bilei în urnă) este exact cea din cazul v.a. distribuite binomial (i.e. cazul a n extrageri cu revenirea bilei în urnă). Deci **este foarte ușor să reținem media unei v.a. distribuite hipergeometric**.

De asemenea, în formula pentru dispersia unei v.a. distribuite hipergeometric recunoaștem termenul npq din cazul v.a. distribuite binomial (apare termenul $\frac{N-n}{N-1}$ care este numit **factor de corecție al populației finite**). Deci **este foarte ușor să reținem și dispersia unei v.a. distribuite hipergeometric**.

Dar să observăm două aspecte:

- deoarece $\frac{N-n}{N-1} < 1$, obținem că dispersia din cazul hipergeometric (cazul în care eșantionul de volum n este ales fără revenirea elementului în eșantion) este mai mică decât cea din cazul v.a. distribuite binomial (cazul în care eșantionul de volum n este ales cu revenirea elementului în eșantion). Pe de altă parte, cu cât mai mare este volumul n al eșantionului ales de noi, în raport cu volumul N al populației, cu atât mai mică este dispersia;

- de asemenea, dacă volumul N al populației este foarte mare în comparație cu volumul n al eșantionului ales de noi, atunci factorul de corecție $\frac{1-n/N}{1-1/N}$ este foarte aproape de 1, deci dispersia devine $\mathrm{D}^2(X) = npq$, adică exact cea din cazul v.a. distribuite binomial (vezi și Remarca 2.140 și Remarca 2.143).

◇

Demonstrația Propoziției 2.135. Folosind identitatea (1.35)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{a!}{k!\,(a-k)!} \cdot \frac{b!}{(n-k)!\,(b-n+k)!} \cdot \frac{n!\,(a+b-n)!}{(a+b)!} \\
&= \frac{an}{a+b} \sum_{k=1}^{n} \frac{(a-1)!}{(k-1)!\,((a-1)-(k-1))!} \cdot \frac{b!}{(n-k)!\,(b-n+k)!} \\
&\quad \cdot \frac{(n-1)!\,((a+b-1)-(n-1))!}{(a+b-1)!} \\
&= \frac{an}{a+b} \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{C_{a-1}^{k'} C_b^{(n-1)-k'}}{C_{a+b-1}^{n-1}} \\
&= \frac{an}{a+b}.
\end{aligned}
$$

Similar

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \\
&= \frac{an}{a+b} \sum_{k=1}^{n} (k-1) \frac{(a-1)!}{(k-1)!\,(a-k)!} \cdot \frac{b!}{(n-k)!\,(b-n+k)!} \\
&\quad \cdot \frac{(n-1)!\,(a+b-n)!}{(a+b)!} \\
&\quad + \frac{an}{a+b} \sum_{k=1}^{n} \frac{(a-1)!}{(k-1)!\,(a-k)!} \cdot \frac{b!}{(n-k)!\,(b-n+k)!} \\
&\quad \cdot \frac{(n-1)!\,(a+b-n)!}{(a+b-1)!} \\
&= \frac{an\,(n-1)}{a+b} \frac{a-1}{a+b-1} \sum_{k=2}^{n} \frac{(a-2)!}{(k-2)!\,(a-k)!} \frac{b!}{(n-k)!\,(b-n+k)!} \\
&\quad \cdot \frac{(n-2)!\,(a+b-n)!}{(a+b-2)!} + \frac{an}{a+b} \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{C_{a-1}^{k'} C_b^{(n-1)-k'}}{C_{a+b-1}^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Deci

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \frac{an\left(n-1\right)}{a+b}\,\frac{a-1}{a+b-1}\sum\nolimits_{k'=0}^{n-2}\frac{C_{a-2}^{k'}C_b^{(n-2)-k'}}{C_{a+b-2}^{n-2}}+\frac{an}{a+b}\\ &= \frac{an\left(n-1\right)}{a+b}\,\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{an}{a+b}.\end{aligned}$$

Obținem

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^2\left(X\right) &= \frac{an\left(n-1\right)}{a+b}\,\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{an}{a+b}-\left(\frac{an}{a+b}\right)^2\\ &= \frac{an}{a+b}\left(\frac{\left(a-1\right)\left(n-1\right)}{a+b-1}+1-\frac{an}{a+b}\right)\\ &= \frac{an}{a+b}\,\frac{b\left(a+b-n\right)}{\left(a+b-1\right)\left(a+b\right)}.\end{aligned}$$

■

Remarca 2.137 La fel ca și în cazul unei v.a. distribuite binomial (vezi Remarca 2.126), să definim v.a. X_i ca fiind[103] numărul de bile albe obținute la extragerea $i=\overline{1,n}$ (adică X_i ia doar valorile 0 sau 1, deci X_i sunt v.a. care urmează o lege de tip Bernoulli) în cadrul de lucru dat de Remarca 2.133: din urna cu a bile albe și b bile negre se extrag pe rând $n \leq a+b$ bile, dar fără a pune bila la loc (sau se extrag simultan n bile). Prin urmare, X_i sunt v.a. care nu sunt independente între ele.

Pe de altă parte, numărul natural aleator $X_1+X_2+\ldots+X_n$ reprezintă numărul total de bile albe obținute după cele n extrageri, prin urmare

$$X = X_1+X_2+\ldots+X_n$$

reprezintă o v.a. distribuită hipergeometric[104].

Deci

orice v.a. X distribuită hipergeometric poate fi văzută

ca o sumă de n v.a. **dependente** și de tip Bernoulli.

---

[103] Vezi și Exercițiul 1.10.8, Exercițiul 1.10.46 și Exercițiul 2.4.27.

[104] Pentru demonstrația formală, în cazul în care numărul n de extrageri este mic (2, 3 sau 4 elemente), vezi Remarca 2.138. Astfel, folosind reprezentarea de tip arbore, putem calcula probabilitatea evenimentului $\{X=k\}$, pentru $k=\overline{0,n}$, și se va obține că tabloul de repartiție al v.a. X este dat de (2.84) (vezi identitățile de la pagina 201), adică X este v.a. de tip hipergeometric.

Pe de altă parte, evident, $X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$, deci $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{a}{a+b}$.

Apoi obținem și tabloul v.a. $X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$, deoarece avem o structură de tip arbore și, folosind formula probabilității totale (1.21), putem calcula:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 0) &= \mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0) \\ &= \frac{b}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b}{a+b} \\ &= \frac{b}{a+b},\end{aligned}$$

iar

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{a}{a+b}$$

sau, în mod similar,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0) \\ &= \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b-1} \cdot \frac{b}{a+b} \\ &= \frac{a}{a+b}.\end{aligned}$$

Tabloul v.a. $X_3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$, deoarece avem o structură de tip arbore și, folosind formula probabilității totale (1.21), putem calcula:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_3 = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_3 = 0|X_2 = 1, X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_3 = 0|X_2 = 0, X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_3 = 0|X_2 = 1, X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_3 = 0|X_2 = 0, X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0) \\ &= \frac{b}{a+b-2} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{b-1}{a+b-2} \cdot \frac{b}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{b-1}{a+b-2}\cdot\frac{a}{a+b-1}\cdot\frac{b}{a+b}+\frac{b-2}{a+b-2}\cdot\frac{b-1}{a+b-1}\cdot\frac{b}{a+b}\\
&=\frac{ab\left(a+b-2\right)}{\left(a+b\right)\left(a+b-1\right)\left(a+b-2\right)}+\frac{b\left(b-1\right)\left(a+b-2\right)}{\left(a+b\right)\left(a+b-1\right)\left(a+b-2\right)}\\
&=\frac{b\left(a+b-1\right)}{\left(a+b\right)\left(a+b-1\right)}\\
&=\frac{b}{a+b},
\end{aligned}
$$

prin urmare $\mathbb{P}\left(X_3=1\right)=\dfrac{a}{a+b}$.

Similar,

$$
X_i:\begin{pmatrix} 0 & 1\\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b}\end{pmatrix},\qquad \text{deci } \mathbb{E}\left(X_i\right)=\frac{a}{a+b},\qquad \text{pentru } i=\overline{1,n}.
$$

Deci **este foarte ușor să obținem și să reținem media unei v.a. distribuite hipergeometric**, adică formula (2.85) (vezi și Remarca 2.136):

$$
\mathbb{E}\left(X\right)=\mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\nolimits_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i\right)=\sum\nolimits_{i=1}^{n}\frac{a}{a+b}=n\cdot\frac{a}{a+b}.
$$

În ceea ce privește dispersia, $\left(X_i\right)_{i=\overline{0,n}}$ nefiind independente, este mai greu de calculat $\mathrm{D}^2\left(X\right)$ folosind doar $\mathrm{D}^2\left(X_i\right)$. ◇

Remarca 2.138 (vezi și Remarca 2.137) Să observăm că, dacă suntem în cadrul de lucru al Remarcii 2.133 și dacă numărul de extrageri este mic (2, 3 sau 4 elemente), atunci putem determina tabloul v.a. X atât folosind faptul ca X este o v.a. de tip hipergeometric (adică folosind schema hipergeometrică și scriind efectiv formulele pentru probabilitățile respective) cât și făcând calcule mai detaliate utilizând reprezentarea de tip arbore (vezi și Remarca 1.115).

Astfel, în cazul particular $n=3$, avem, evident, $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3\\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3\end{pmatrix}$.

Pe de o parte, conform (2.84),

$$
p_i=\frac{C_a^i\cdot C_b^{3-i}}{C_{a+b}^3},\qquad \text{pentru } i=0,1,2,3.
$$

Pe de altă parte, reprezentând sub forma unei structuri de tip arbore, obținem, folosind formula (1.19) (vezi și notațiile și calculele date de Remarca 2.137),

$$\begin{aligned}
p_0 &= \mathbb{P}(X=0) \\
&= \mathbb{P}(\{X_1=0, X_2=0, X_3=0\}) \\
&= \mathbb{P}(X_3=0 | X_2=0, X_1=0) \cdot \mathbb{P}(X_2=0 | X_1=0) \cdot \mathbb{P}(X_1=0) \\
&= \frac{b-2}{a+b-2} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b}{a+b}
\end{aligned}$$

și, similar,

$$\begin{aligned}
p_3 &= \mathbb{P}(X=3) \\
&= \mathbb{P}(\{X_1=1, X_2=1, X_3=1\}) \\
&= \mathbb{P}(X_3=1 | X_2=1, X_1=1) \cdot \mathbb{P}(X_2=1 | X_1=1) \cdot \mathbb{P}(X_1=1) \\
&= \frac{a-2}{a+b-2} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b}.
\end{aligned}$$

Apoi

$$\begin{aligned}
p_1 &= \mathbb{P}(X=1) \\
&= \mathbb{P}(\{X_1=1, X_2=0, X_3=0\}) + \mathbb{P}(\{X_1=0, X_2=1, X_3=0\}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\{X_1=0, X_2=0, X_3=1\}) \\
&= \mathbb{P}(X_3=0 | X_2=0, X_1=1) \cdot \mathbb{P}(X_2=0 | X_1=1) \cdot \mathbb{P}(X_1=1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_3=0 | X_2=1, X_1=0) \cdot \mathbb{P}(X_2=1 | X_1=0) \cdot \mathbb{P}(X_1=0) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_3=1 | X_2=0, X_1=0) \cdot \mathbb{P}(X_2=0 | X_1=0) \cdot \mathbb{P}(X_1=0) \\
&= \frac{b-1}{a+b-2} \cdot \frac{b}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{b-1}{a+b-2} \cdot \frac{a}{a+b-1} \cdot \frac{b}{a+b} \\
&\quad + \frac{a}{a+b-2} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b}{a+b} \\
&= \frac{3ab(b-1)}{(a+b-2)(a+b-1)(a+b)}
\end{aligned}$$

și, similar,

$$p_2 = \mathbb{P}(X=2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left(\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0\}\right) + \mathbb{P}\left(\{X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1\}\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\{X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_3 = 0 | X_2 = 1, X_1 = 1\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_2 = 1 | X_1 = 1\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(X_3 = 1 | X_2 = 0, X_1 = 1\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_2 = 0 | X_1 = 1\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(X_3 = 1 | X_2 = 1, X_1 = 0\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_2 = 1 | X_1 = 0\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_1 = 0\right) \\
&= \frac{b}{a+b-2} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{a-1}{a+b-2} \cdot \frac{b}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b} \\
&\quad + \frac{a-1}{a+b-2} \cdot \frac{a}{a+b-1} \cdot \frac{b}{a+b} \\
&= \frac{3ab\,(a-1)}{(a+b-2)\,(a+b-1)\,(a+b)}
\end{aligned}
$$

Să observăm că

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \frac{C_a^0 \cdot C_b^3}{C_{a+b}^3} \\
&= \frac{\frac{a!}{0!\,a!} \cdot \frac{b!}{3!\,(b-3)!}}{\frac{(a+b)!}{3!\,(a+b-3)!}} \\
&= \frac{(b-2)\,(b-1)\,b}{3!} \cdot \frac{3!}{(a+b-2)\,(a+b-1)\,(a+b)} \\
&= \frac{b\,(b-1)\,(b-2)}{(a+b-2)\,(a+b-1)\,(a+b)},
\end{aligned}
$$

adică p_0 are aceeași valoare, prin ambele metode.

Similar, are loc egalitatea

$$
p_3 = \frac{C_a^3 \cdot C_b^0}{C_{a+b}^3} = \frac{a\,(a-1)\,(a-2)}{(a+b-2)\,(a+b-1)\,(a+b)}.
$$

Similar, se poate observa că au loc și egalitățile

$$
p_1 = \frac{C_a^1 \cdot C_b^2}{C_{a+b}^3} = \frac{3ab\,(b-1)}{(a+b-2)\,(a+b-1)\,(a+b)} \quad \text{și}
$$

$$
p_2 = \frac{C_a^2 \cdot C_b^1}{C_{a+b}^3} = \frac{3ab\,(a-1)}{(a+b-2)\,(a+b-1)\,(a+b)}.
$$

◇

Remarca 2.139 Dintr-o populație statistică de mărime N s-a făcut o selecție de n indivizi, nerepetată (individul extras nu se întoarce în populație) în vederea cercetării unei caracteristici A (sau se poate considera că la n indivizi se face simultan cercetarea caracteristicii A). Dacă presupunem că o parte dintre indivizii populației posedă caracteristica A, iar restul nu o posedă, atunci numărul de indivizi cercetați posedând proprietatea A urmează schema hipergeometrică (sau schema bilei nerevenite). $\diamond$

Remarca 2.140 (vezi și Remarca 2.136) Distribuția hipergeometrică este utilă atunci când volumul N al populației este mic sau când volumul n al selecției este comparabil cu N. Dacă volumul N este suficient de mare și volumul n este mic în comparație cu N, atunci putem utiliza distribuția binomială care aproximează, în acest caz, distribuția hipergeometrică. De exemplu, dacă $a = b = 1000000$, atunci prima bilă extrasă este albă cu probabilitatea $p = \frac{1000000}{2000000} = 0.5$. După prima extragere, a doua bilă extrasă este albă cu probabilitatea $p_1 = \frac{99999}{199999} = 0.499997$, dacă prima bilă extrasă este albă și respectiv $p_2 = \frac{100000}{199999} = 0.500002$, dacă prima bilă extrasă este neagră. Deci indiferent de culoare primei bile extrase, probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albă este practic tot 0.5 (deci, în acest caz particular, se poate considera că urna nu își modifică compoziția). $\diamond$

Observația precedentă este justificată teoretic de următorul rezultat de legătură dintre distribuția binomială și distribuția hipergeometrică.

Teorema 2.141 *Distribuția binomială $\mathscr{B}(n, p)$ este un caz limită al distribuției hipergeometrice dată de (2.84), când $a, b \in \mathbb{N}^*$ cu $a, b \to \infty$ astfel încât există $p \in (0, 1)$ astfel încât $\frac{a}{a+b} \to p$ (și, echivalent, $\frac{b}{a+b} \to q = 1 - p$).*

Mai precis, are loc limita

$$\lim_{\substack{\mathbb{N}^* \ni a,b \to \infty \\ \frac{a}{a+b} \to p,\ \frac{b}{a+b} \to q}} \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \textit{pentru } k = \overline{0, n}. \tag{2.86}$$

Remarca 2.142 Relația (2.86) se poate scrie sub forma (vezi și Definitia 5.26 și Remarca 5.32):

$$\lim_{\substack{a,b \to \infty \\ \frac{a}{a+b} \to p}} \mathbb{P}(X_{a,b} = k) = \mathbb{P}(X = k), \quad \text{pentru } k = \overline{0, n},$$

unde $X_{a,b}$ sunt v.a. de tip hipergeometric de parametri a, b, și n, iar $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, adică are loc convergența $X_{a,b} \xrightarrow{F} X$, pentru $a, b \to \infty$ (în condițiile precizate mai sus). $\diamond$

Demonstrație. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $k = \overline{0,n}$ arbitrar fixate. Avem

$$\begin{aligned}
&\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \\
&= \frac{a!}{k!\,(a-k)!} \, \frac{b!}{(n-k)!\,(b-n+k)!} \, \frac{n!\,(a+b-n)!}{(a+b)!} \\
&= C_n^k \frac{a!}{(a-k)!} \, \frac{b!}{(b-n+k)!} \, \frac{(a+b-n)!}{(a+b)!} \\
&= C_n^k \frac{(a-k+1)\,(a-k+1)\dots a \cdot (b-(n-k)+1)\,(b-(n-k)+2)\dots b}{(a+b-n+1)\,(a+b-n+2)\dots(a+b)} \\
&= C_n^k \frac{a-k+1}{a+b-n+1} \, \frac{a-k+2}{a+b-n+2} \cdots \frac{a-k+k}{a+b-n+k} \\
&\quad \cdot \frac{b-(n-k)+1}{a+b-(n-k)+1} \, \frac{b-(n-k)+2}{a+b-(n-k)+2} \cdots \frac{b-(n-k)+(n-k)}{a+b-(n-k)+(n-k)} \\
&= C_n^k \prod\nolimits_{r=1}^{k} \frac{a-k+r}{a+b-n+r} \prod\nolimits_{s=1}^{n-k} \frac{b-(n-k)+s}{a+b-(n-k)+s}.
\end{aligned}$$

Dar, dacă $a, b \to \infty$ astfel încât $\frac{a}{a+b} \to p$, $\frac{b}{a+b} \to q$, când $a, b \to \infty$, atunci, pentru orice r și s, avem

$$\frac{a-k+r}{a+b-n+r} = \frac{\frac{a}{a+b} - \frac{k-r}{a+b}}{1 - \frac{n-r}{a+b}} \longrightarrow p,$$

iar

$$\frac{b-(n-k)+s}{a+b-(n-k)+s} = \frac{\frac{b}{a+b} - \frac{(n-k)-s}{a+b}}{1 - \frac{(n-k)-s}{a+b}} \longrightarrow q.$$

Prin urmare,

$$\lim_{\substack{a,b\to\infty \\ \frac{a}{a+b}\to p,\ \frac{b}{a+b}\to q}} \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = C_n^k \prod\nolimits_{r=1}^{k} p \prod\nolimits_{s=1}^{n-k} q = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Deci, dacă $a, b > 0$ sunt suficient de mari și $\dfrac{a}{a+b}$ este suficient de aproape de o valoare $p \in (0,1)$, atunci putem aproxima distribuția binomială de parametri n și p prin distribuții hipergeometrice de parametri a, b și n. ∎

Remarca 2.143 Cu alte cuvinte, când numărul de bile albe și bile negre este foarte mare valoarea probabilității dată de schema bilei nerevenite se apropie de valoarea probabilității dată de schema bilei revenite (schema binomială), i.e.

$$\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \simeq C_n^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}, \quad \text{pentru } k = \overline{0,n}.$$

Acest rezultat este de așteptat având în vedere că o bilă scoasă dintr-o urnă cu foarte multe bile albe și foarte multe bile negre nu influențează foarte mult compoziția urnei; astfel, în această situație, extragerile fără revenirea bilei în urnă se pot vedea ca niște extrageri cu revenirea bilei în urnă, deci ca o succesiune de extrageri independente, cu aceeași șansă de apariție a *succesului*, așa cum este în cazul distribuției binomiale. ◇

2.3 Variabile aleatoare discrete cu un număr infinit de valori

Ca și în cazul v.a. cu un număr finit de valori (vezi pagina 133), cunoașterea legii dată de $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$, unde $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, asociată unei v.a. discrete X, cu un număr infinit, dar numărabil, de valori, este echivalentă cu cunoașterea valorilor pe care le poate lua v.a., adică a mulțimii $X(\Omega)$, și a probabilităților cu care este luată fiecare valoare din $X(\Omega)$.

Putem reprezenta aceste informații sub forma unui **tablou** (sau **tabloul de repartiție** sau **tabloul de distribuție**) :

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}, \tag{2.87}$$

unde I este o mulțime numărabilă (prin convenție, am scris valorile $x_1, x_2, \dots, x_n$ ale v.a. în ordine strict crescătoare).

Deci $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, iar $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$, cu $i \in I$, deci[105]

$$p_i \geq 0, \quad \text{pentru } i \in I, \quad \text{și} \quad \sum\nolimits_{i \in I} p_i = 1$$

(seria $\sum_{i \in I} p_i$ este convergentă și are suma 1).

Să menționăm că legea unei v.a. discrete X este cunoscută complet prin cunoașterea familiei numărabile de valori

$$(p_i)_{i \in I} \stackrel{\text{not}}{=} (\mathbb{P}(X = x_i))_{i \in I},$$

astfel încât $\sum_{i \in I} p_i = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

Putem scrie și sub forma: o v.a. discretă X este descrisă complet prin cunoașterea funcției $p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$p_X(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X = x_i), \quad i \in I, \tag{2.88}$$

astfel încât $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$, numită și **funcția masă de probabilitate** (care este, de fapt, **funcția densitate de repartiție** (2.39) **asociată unei v.a. discrete**).

Are loc, și în acest caz, modalitatea de scriere (2.17) a unei v.a. discrete, dată de Remarca 2.40:

$$X = \sum\nolimits_{i \in I} x_i \mathbb{1}_{A_i},$$

unde $A_i = X^{-1}(\{x_i\}) = \{X = x_i\}$, pentru $i \in I$.

Remarca 2.144 (vezi și Remarca 2.35) Să menționăm că o funcție $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definită pe un spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ cu $X(\Omega)$ numărabilă este v.a. (vezi Definiția 2.1 sau Definiția 2.3) dacă și numai dacă $\{X = x\} \in \mathscr{F}$, pentru orice $x \in X(\Omega)$.

Prin urmare, în cazul unei funcții $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definită pe un spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ cu $X(\Omega)$ numărabilă, condiția din Definiția 2.1 are loc întotdeauna, adică

$$\text{orice funcție} \quad X : (\Omega, \mathscr{P}(\Omega)) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \quad \text{este v.a. (i.e. măsurabilă).}$$

$\diamond$

[105] Într-adevăr, $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} \{X = x_i\}\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i \in I} p_i$ deoarece $(\{X = x_i\})_{i \in I}$ formează un sistem complet de evenimente.

Funcția de repartiție este dată de Definiția 2.9 și este o funcția în scară:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum\nolimits_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ x_i \leq x}} \mathbb{P}(X = x_i), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Operațiile cu variabile cu un număr infinit de valori se definesc ca și în cazul v.a. discrete cu un număr finit de valori (vezi Secțiunea 2.2.2).

Exemplul 2.145 Fie v.a. discrete X, Y independente și care urmează aceeași distribuție, cu tablourile date de $\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(Y = x_i) = p_i$, cu $i \in I$. Să se determine[106] $\mathbb{P}(X = Y)$.

Avem, folosind independența,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = Y) &= \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{i \in I} \{X = x_i, Y = x_i\}\right) \\ &= \sum\nolimits_{i \in I} \mathbb{P}(\{X = x_i, Y = x_i\}) \\ &= \sum\nolimits_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \mathbb{P}(Y = x_i) \\ &= \sum\nolimits_{i \in I} p_i^2 .\end{aligned}$$

◇

2.3.1 Caracteristici numerice

Definiția 2.55 se poate da și în cazul unei v.a. discrete cu un număr infinit de valori. Pentru simplitatea scrierii vom lua $I = \mathbb{N}^*$.

Definiția 2.146 *Fie v.a. discretă* $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{N}^*}$. *Spunem că v.a.* X **admite medie** *(sau că* **este integrabilă**[107]*), dacă seria* $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} x_i p_i$ *este absolut convergentă.*

Dacă v.a. X *admite medie, atunci suma seriei precedente se va numi* **media** *v.a. discrete* X*, i.e.*

$$\mathbb{E}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\nolimits_{i \in \mathbb{N}^*} x_i p_i . \tag{2.89}$$

---

[106] Vezi și Exemplul 3.211.

[107] Acest termen este justificat având în vedere că media unei v.a. oarecare (discrete sau continue) este, de fapt, o integrală Lebesgue calculată pe mulțimea Ω, în raport cu măsura $\mathbb{P}$, a funcției X (vezi Remarca 2.150 și Remarca 3.36).

Remarca 2.147 Dacă v.a. X admite medie, atunci putem scrie (2.89) și sub forma

$$\mathbb{E}(X) = \sum\nolimits_{x \in X(\Omega)} x \cdot \mathbb{P}(X = x). \tag{2.90}$$

◇

Remarca 2.148 Media unei v.a. discrete cu un număr finit de valori există întotdeauna, fiind o sumă finită, pe când media unei v.a. discrete cu un număr infinit de valori nu; astfel, seria modulelor care apare în definiția mediei este o serie cu termeni nenegativi și poate să fie convergentă (are suma finită) sau nu (are suma infinită).

Să observăm că dacă se impune ca seria care definește media să fie absolut convergentă, atunci seria fără module, i.e. $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} x_i p_i$, este convergentă, prin urmare media este bine definită și este suma acelei serii. ◇

Remarca 2.149 (vezi și Remarca 2.151) Se impune ca seria $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} x_i p_i$ să fie absolut convergentă deoarece se dorește ca **prin orice permutare a termenilor seriei să se obțină o serie tot convergentă și cu aceeași sumă**[108].

Astfel, se impune absoluta convergentă deoarece, atunci când se calculează media v.a., să nu conteze ordinea de scriere a valorilor v.a. și respectiv a termenilor sumei din definiția mediei. ◇

Remarca 2.150 De fapt, vezi Remarca 3.36, dacă $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ este un spațiu de probabilitate și X este o v.a. oarecare (discretă sau continuă) definită pe acest spațiu, atunci media ei este dată de integrala Lebesgue (în caz că aceasta există)

[108] Vezi [23, pag. 291]: dacă seria $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} a_i$ este absolut convergentă, atunci orice altă serie obținută printr-o permutare a termenilor este de asemenea convergentă și are aceeași sumă cu seria inițială.

Dacă seria $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} a_i$ este doar convergentă, fără să fie absolut convergentă, atunci, conform Teoremei lui Riemann (vezi [23, pag. 292]), există o permutare a termenilor astfel încât noua serie să fie convergentă cu suma un număr real arbitrar dat $\mathbf{S} \in \mathbb{R}$ sau să fie divergentă cu șirul sumelor parțiale având limita $\mathbf{S} \in \{-\infty, \infty\}$ sau să fie divergentă cu șirul sumelor parțiale neavând limită deloc.

În cazul unei serii cu termeni nenegativi nu mai este necesară convergența, dar rezultatul se pastrează. Mai precis, dacă seria $\sum_{i \in \mathbb{N}^*} a_i$ este cu $a_i \geq 0$, pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$, atunci, evident, suma ei există (finită sau nu) și se poate demonstra că această sumă nu se modifică prin nici o permutare a termenilor seriei inițiale.

pe Ω, în raport cu măsura $\mathbb{P}$, a funcției X:

$$\mathbb{E}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \stackrel{\text{not}}{=} \int_\Omega X\,d\mathbb{P}. \tag{2.91}$$

Utilizând definiției integralei Lebesgue, se demonstrează[109] că X este integrabilă Lebesgue (adică integrala există și este finită) dacă și numai dacă $|X|$ este integrabilă Lebesgue, adică

$$\text{există } \mathbb{E}(X) < \infty \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbb{E}(|X|) < \infty. \tag{2.92}$$

Se poate arăta (vezi pagina 293) că integrala precedentă se poate exprima cu ajutorul integralei Lebesgue pe $\mathbb{R}$ în raport cu măsura $\mathbb{P}_X$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_\mathbb{R} x\,\mathbb{P}_X(dx)\,. \tag{2.93}$$

De exemplu, în cazul în care v.a. X este discretă, avem, conform Remarcii 2.40, $X = \sum_{i\in I} x_i \mathbb{1}_{A_i}$, unde I este o mulțime numărabilă, $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$, iar

---

[109] Să reamintim definiția integralei Lebesgue. Fie $X : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ o funcție măsurabilă și $X^+ = \max\{X, 0\}$, $X^- = -\min\{X, 0\}$ partea pozitivă și respectiv partea negativă a funcției X. Având în vedere că X^+ și X^- sunt funcții măsurabile nenegative, integralele $\int_\Omega X^+\,d\mathbb{P}$ și $\int_\Omega X^-\,d\mathbb{P}$ există, finite sau nu (și au același semn).

În cazul în care cel puțin una dintre integralele $\int_\Omega X^+\,d\mathbb{P}$ și $\int_\Omega X^-\,d\mathbb{P}$ este finită, definim (folosind scrierea $X = X^+ - X^-$) **integrala Lebesgue pe** Ω, a funcției măsurabile X, în raport cu măsura $\mathbb{P}$, prin

$$\int_\Omega X\,d\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega X^+\,d\mathbb{P} - \int_\Omega X^-\,d\mathbb{P}$$

(diferența celor două integrale are sens dacă cel puțin una dintre integrale este finită, folosind convențiile $\infty - a = \infty$ și $a - \infty = -\infty$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$).

Dacă ambele integrale $\int_\Omega X^+\,d\mathbb{P}$ și $\int_\Omega X^-\,d\mathbb{P}$ sunt finite, atunci integrala $\int_\Omega X\,d\mathbb{P}$ este finită și atunci spunem că X este **integrabilă Lebesgue pe** Ω.

Dacă ambele integrale $\int_\Omega X^+\,d\mathbb{P}$ și $\int_\Omega X^-\,d\mathbb{P}$ sunt infinite (de același semn), atunci integrala $\int_\Omega X\,d\mathbb{P}$ nu este definită (și spunem că integrala nu există).

Evident, folosind și scrierea $|X| = X^+ + X^-$, obținem că X este integrabilă Lebesgue dacă și numai dacă $|X|$ este integrabilă Lebesgue.

În termeni de medie a unei v.a., lucrăm cu

$$\mathbb{E}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-)\,,$$

unde $\mathbb{E}(X^+) = \int_\Omega X^+\,d\mathbb{P}$ și $\mathbb{E}(X^-) = \int_\Omega X^-\,d\mathbb{P}$.

$A_i = \{X = x_i\}$, pentru $i \in I$, caz în care[110]:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_\Omega \sum\nolimits_{i\in I} x_i \mathbb{1}_{\{X=x_i\}}(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \\
&= \sum\nolimits_{i\in I} x_i \int_\Omega \mathbb{1}_{\{X=x_i\}}(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \\
&= \sum\nolimits_{i\in I} x_i \int_{\{X=x_i\}} \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \sum\nolimits_{i\in\mathbb{N}^*} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) \\
&= \sum\nolimits_{i\in\mathbb{N}^*} x_i \cdot \mathbb{P}_X(\{x_i\}),
\end{aligned}$$

adică definiția (2.91) a mediei unei v.a. oarecare s-a redus, în cazul particular al unei v.a discrete, la formula de calcul (2.90).

În plus, dacă scriem legea $\mathbb{P}_X$ cu ajutorul măsurii Dirac (vezi (2.45)) și dacă folosim apoi proprietatea (2.34), obținem

$$\begin{aligned}
\int_\mathbb{R} x\mathbb{P}_X(dx) &= \int_\mathbb{R} x \sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot \delta_{x_i}(dx) \\
&= \sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot \int_\mathbb{R} x\delta_{x_i}(dx) \\
&= \sum\nolimits_{i\in I} p_i \cdot x_i \\
&= \sum\nolimits_{i\in\mathbb{N}^*} x_i \cdot \mathbb{P}_X(\{x_i\})
\end{aligned}$$

și astfel am demonstrat (2.93) în cazul particular al unei v.a discrete. ◇

[110] Pentru a putea schimba ordinea între integrare și sumare trebuie să folosim un rezultat teoretic de tip Fubini care să ne permită ca **o integrală să comute cu o sumă infinită** (vezi condițiile suficiente prezentate în Remarca 5.55).

În acest caz sunt satisfacute atât condițiile suficiente date de [31, Corollary 2.5.3] (deoarece are loc (2.92)) cât și cele date de [49, Teorema 5.2-17] (deoarece are loc absoluta convergență a seriei dată de (2.89)), ceea ce va permite ca integrala să comute cu suma infinită.

Remarca 2.151 (vezi și Remarca 2.149) Având în vedere că media unei v.a. discrete este, de fapt, o integrală Lebesgue precum și proprietatea (2.92) a unei funcții integrabile Lebesgue, obținem o altă motivație pentru care se impune, pentru existența mediei, condiția ca seria care apare în definiția (2.90) să fie absolut convergentă. ◇

Exemplul 2.152 Un exemplu de v.a. discretă a cărei medie nu există[111] este dat de v.a. X cu valorile $X(\Omega) = \mathbb{Z}^*$ și cu probabilitățile $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{3}{\pi^2 n^2}$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}^*$.

Se verifică, mai întâi, că

$$\sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}^*} \mathbb{P}(X = n) = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{3}{\pi^2 n^2} = \frac{3}{\pi^2} \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1.$$

Acum, având în vedere că

$$\mathbb{E}(|X|) = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}^*} |n|\, \mathbb{P}(X = n) = \frac{3}{\pi^2} \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|} = \frac{6}{\pi^2} \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

deducem, conform (2.92) (vezi și Definiția 2.146), că v.a. discretă X nu admite medie finită.

Pentru a obține că media nu există trebuie, conform Notei 109, să studiem valoarea integralelor $\mathbb{E}(X^+) = \int_\Omega X^+ d\mathbb{P}$ și $\mathbb{E}(X^-) = \int_\Omega X^- d\mathbb{P}$.

Se poate arăta (vezi Remarca 2.150 și Remarca 3.36) că au loc formulele de calcul $\mathbb{E}(X^+) = \int_0^\infty x\mathbb{P}_X(dx)$ și $\mathbb{E}(X^-) = -\int_{-\infty}^0 x\mathbb{P}_X(dx)$ care în cazul unei v.a. discrete devin

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X^+\right) &= \sum\nolimits_{x\geq 0} x\mathbb{P}(X = x)\, dx \quad \text{și} \\ \mathbb{E}\left(X^-\right) &= -\sum\nolimits_{x\leq 0} x\mathbb{P}(X = x)\, dx. \end{aligned}$$

Reluând calculele obținem că

$$\mathbb{E}\left(X^+\right) = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*} n \frac{3}{\pi^2 n^2} = \frac{3}{\pi^2} \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = \infty$$

[111] Un exemplu de v.a. continuă a cărei medie nu există este dat Exemplul 3.40.

și

$$\mathbb{E}\left(X^{-}\right)=-\sum\nolimits_{(-n)\in\mathbb{N}^*}(-n)\,\frac{3}{\pi^2 n^2}=\frac{3}{\pi^2}\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}=\infty,$$

deci, conform Notei 109, integrala Lebesgue $\mathbb{E}\left(X\right)=\int_\Omega X\,d\mathbb{P}$ nu există. $\diamond$

Exemplul 2.153 Un exemplu de v.a. discretă a cărei medie (există dar) este infinită este dat de v.a. X cu valorile $X\left(\Omega\right)=\mathbb{N}^*$ și cu probabilitățile date de $\mathbb{P}\left(X=n\right)=\dfrac{6}{\pi^2 n^2}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Se verifică, mai întâi, că

$$\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{P}\left(X=n\right)=\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{6}{\pi^2 n^2}=\frac{6}{\pi^2}\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}=1.$$

Pe de altă parte, având în vedere că

$$\mathbb{E}\left(|X|\right)=\mathbb{E}\left(X\right)=\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*}n\mathbb{P}\left(X=n\right)=\frac{6}{\pi^2}\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}=\infty,$$

deducem că v.a. discretă X nu admite medie finită.

Pentru a obține că media există și este infinită trebuie, conform Notei 109, să studiem valoarea integralelor $\mathbb{E}\left(X^{+}\right)$ și $\mathbb{E}\left(X^{-}\right)$. Reluând calculele obținem că

$$\mathbb{E}\left(X^{+}\right)=\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*}n\,\frac{6}{\pi^2 n^2}=\frac{6}{\pi^2}\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}=\infty$$

și, evident, $\mathbb{E}\left(X^{-}\right)=0$, deci, conform Notei 109, integrala Lebesgue $\mathbb{E}\left(X\right)=\int_\Omega X\,d\mathbb{P}$ există și este infinită. $\diamond$

Media unei funcții aplicată unei v.a. poate fi calculată folosind următorul rezultat.

Teorema 2.154 (Formula de transfer) *Fie v.a. discretă* $X:\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in\mathbb{N}^*}$ *și o funcție măsurabilă* $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Atunci, $h\left(X\right):\Omega\to\mathbb{R}$ *este și ea o v.a. și această v.a. admite medie dacă și numai dacă*

$$\sum\nolimits_{i\in\mathbb{N}^*}\left|h\left(x_i\right)\right|p_i<\infty.$$

În cazul în care $h(X)$ admite medie, aceasta este dată de:

$$\mathbb{E}(h(X)) = \sum\nolimits_{i\in\mathbb{N}^*} h(x_i)\ p_i.$$

Remarca 2.155 Dacă v.a. $h(X)$ admite medie, atunci formula precedentă o putem scrie și sub forma

$$\mathbb{E}(h(X)) = \sum\nolimits_{x\in X(\Omega)} h(x)\cdot\mathbb{P}(X=x).$$

$\diamond$

Remarca 2.156 (vezi Remarca 2.59 și Remarca 3.75) Au loc și în cazul v.a. discrete cu un număr infinit de valori definițiile (2.56) pentru momentul de ordin r, (2.57) pentru momentul central de ordin r, (2.75) pentru momentul absolut de ordin r, (2.60) pentru dispersie, (2.63) pentru covarianță, (2.65) pentru corelație, (2.71) pentru deviația standard (doar că, în acest caz, toate sumele care eventual apar vor fi sume infinite, iar pentru toate definițiile propuse trebuie impuse condițiile ca sumele infinite respective să fie absolut convergente (vezi Definiția 2.146, dar și formula de transfer dată de Teorema 2.154)).

De asemenea, în cazul v.a. discrete cu un număr infinit de valori au loc și formulele de calcul (2.61) pentru dispersie și (2.64) pentru covarianță, proprietățile stabilite de Propoziția 2.60 (pentru medie), Remarca 2.96 (pentru corelație), Propoziția 2.97 (pentru dispersie) și Propoziția 2.99 (pentru deviația standard), precum și inegalitatea lui Markov dată de Teorema 2.104 și inegalitatea lui Cebâșev dată de Corolarul 2.105. $\diamond$

2.3.2 Exemple de v.a. discrete (cu un număr infinit de valori)

2.3.2.1 Distribuția Poisson

Spunem că X este o v.a. este de tip Poisson de parametru $\lambda \in (0,\infty)$, și scriem $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, dacă are tabloul

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ e^{-\lambda} & \dfrac{\lambda}{1!}e^{-\lambda} & \dfrac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} & \dots & \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} & \dots \end{pmatrix}.$$

Evident, avem $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} > 0$, unde $k \in \mathbb{N}$. Pentru a arăta că suma probabilităților este 1 folosim dezvoltarea în serie de puteri a funcției exponențiale (vezi Nota 44):

$$\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} p_k = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Remarca 2.157 Distribuția Poisson este un model matematic potrivit atunci când numărăm aparițiile unui tip de eveniment (ce continuă să apară) într-un interval de timp precizat, dacă se observă că sunt satisfăcute anumite condiții[112]:

- evenimentele apar independent unele de altele;
- evenimentele apar cu o anumită rată sau intensitate medie de apariție (aceeași în unitatea de timp);
- evenimentele apar individual (nu grupate);
- este practic imposibil să înregistrăm două sau mai multe sosiri simultane.

În condițiile de mai sus, se poate arăta că dacă X este numărul acelor evenimente, atunci X are tabloul unei v.a. de tip Poisson.

De exemplu, v.a. distribuite Poisson pot fi cele care reprezintă numărul de accidente ce apar într-un an, într-o anumită secțiune a unei străzi; numărul persoanelor care mor într-un an din cauza bolii Lyme; numărul de cutremure

[112] În general, să notăm cu N_t numărul de evenimente ce au loc într-un interval de timp de lungime $t \geq 0$. Vom presupune că sunt satisface următoarele condiții:

- probabilitatea ca să apară k evenimente în intervalul de timp $(t_0, t_0 + t)$, adică a evenimentului $\{N_t = k\}$, nu depinde de t_0 (ci numai de k și de lungimea t a intervalului de timp, adică procesul este cu *creșteri staționare*) și nici de numărul intrărilor înregistrate în intervale anterioare momentului t_0 (adică procesul este cu *creșteri independente*);
- probabilitatea înregistrării a două sau mai multe sosiri într-un interval foarte mic de timp este, practic, neglijabilă;
- probabilitatea de a înregistra o singură sosire într-un interval foarte mic de timp este aproximativ proporțională cu lungimea acelui interval de timp.

Aceste condiții ne asigură că unitățile sosesc individual (nu în grupuri) și independent unele de altele. Într-adevăr, proprietatea a doua spune că este practic imposibil să înregistrăm două sau mai multe sosiri simultane. Independența sosirilor este asigurată de prima proprietate, în timp ce proprietatea a treia ne asigură că diferența dintre adevărata valoare a probabilității unei sosiri într-un interval de timp foarte mic, de lungime h, și λh este neglijabilă în raport cu h, adică, pentru intervale foarte mici, această probabilitate este proporțională cu lungimea h a intervalului.

În cele trei condiții de mai sus se poate arăta că v.a. $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$. Familia de v.a. $(N_t)_{t \geq 0}$ se va numi **proces stochastic Poisson** de parametru λ.

de mică intensitate ce apar într-un an, într-o anumită zonă geografică; numărul de apeluri primite zilnic, într-un anume interval orar, de Serviciul Clienți al unei firme. $\diamond$

Remarca 2.158 Legea unei v.a. $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ este măsură de probabilitate discretă și este dată, conform (2.44) sau (2.45), de

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \cdot \delta_k(A), \quad \text{pentru } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

unde δ_k este măsura Dirac concentrată în punctul $k \in \mathbb{N}$. $\diamond$

Propoziția 2.159 *Media și dispersia v.a. distribuite Poisson X sunt date de*

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \qquad \text{și} \qquad \mathrm{D}^2(X) = \lambda. \tag{2.94}$$

Remarca 2.160 Deci, în cazul unei v.a. de tip $\mathscr{P}(\lambda)$, parametrul ei este chiar media (precum și dispersia) v.a.. $\diamond$

Demonstrație. Într-adevăr,

$$\mathbb{E}(X) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

și

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} k^2 p_k \\
&= \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum\nolimits_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= \lambda^2 + \lambda,
\end{aligned}$$

deci
$$\mathrm{D}^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda.$$
■

Remarca 2.161 Deoarece $\mathbb{E}(X) = \lambda$, parametrul $\lambda > 0$ poate fi văzut ca **rata** sau **intensitatea medie de apariție a evenimentului** pe unitatea de timp. ◇

Avem următorul rezultat de legătură dintre distribuția Poisson și distribuția binomială.

Teorema 2.162 *Distribuția Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ este un caz limită al distribuției binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, când $n \to \infty$ și $p \to 0_+$ astfel încât produsul $np = \lambda$ (rămâne constant).*

Mai precis, are loc limita

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p=\lambda/n\to 0_+}} C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \textit{pentru } k \in \mathbb{N}. \tag{2.95}$$

Remarca 2.163 Similar se poate demonstra că distribuția Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ este un caz limită al distribuției binomiale $\mathscr{B}(n,p_n)$, când $p_n \to 0_+$ astfel încât $n \cdot p_n \to \lambda$, pentru $n \to \infty$.

Mai precis, are loc limita (2.95), iar aceasta se poate scrie sub forma:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k), \quad \text{pentru } k \in \mathbb{N},$$

unde $X_n \sim \mathscr{B}(n,p_n)$, astfel încât $n \cdot p_n \to \lambda$, pentru $n \to \infty$, iar $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, adică (vezi Definiția 5.26 și Remarca 5.32) are loc convergența $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$ (în condițiile precizate mai sus). ◇

Demonstrație. Fie $k \in \mathbb{N}^*$ arbitrar fixat și fie $\mathbb{N}^* \ni n > k$. Să considerăm v.a. $X_n \sim \mathscr{B}(n,p_n)$, unde $p_n \stackrel{\text{def}}{=} \lambda/n$, deci $\mathbb{E}(X_n) = np_n = \lambda$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Atunci, pentru $k \neq 0$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \lim_{n\to\infty} C_n^k (p_n)^k (q_n)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots(n-1)n}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots(n-1)\,n}{n^k} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left[\left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}}\right]^{\frac{-\lambda(n-k)}{n}} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}.
\end{aligned}
$$

În cazul $k=0$ avem

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n=0\right) &= \lim_{n\to\infty} C_n^0 \left(p_n\right)^0 \left(q_n\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\lambda/n\right)^{-n/\lambda}\right]^{\frac{-\lambda(n-k)}{n}} \\
&= e^{-\lambda}.
\end{aligned}
$$

■

Remarca 2.164 Deci distribuția numărului de apariții ale unui eveniment care are probabilitatea $p=\lambda/n$ de apariție foarte mică (adica un eveniment rar), într-un număr n de încercări care este mare, poate fi aproximată cu distribuția Poisson de parametru $\lambda = np$.

Mai concret, putem preciza că, pentru $n \geq 20$ și $p < 0.05$, atunci distribuția binomială este o bună aproximare a distribuției Poisson și scriem

$$\mathscr{B}\left(n, \lambda/n\right) \simeq \mathscr{P}\left(\lambda\right).$$

Putem spune și astfel: distribuția Poisson se aplică atunci când avem un număr mare de obiecte ce sunt repartizate uniform pe un domeniu foarte mare.

De aceea distribuția Poisson mai poartă numele de **legea evenimentelor rare**. ◇

Propoziția 2.165 *Suma a două v.a. independente care urmează o distribuție de tip*

Poisson este o v.a care urmează o distribuție tot de tip[113] *Poisson. Mai precis*[114],

$$X_i \sim \mathscr{P}(\lambda_i)\,,\ i=\overline{1,2},\quad \textit{independente}\quad \Longrightarrow \quad X_1+X_2\sim \mathscr{P}(\lambda_1+\lambda_2)\,.$$

Demonstrație. Valorile pe care le poate lua X_1+X_2 sunt $k\in\mathbb{N}$. Atunci,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1+X_2=k) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_{i=0}^{k}\{X_1=i,X_2=k-i\}\Big)\\
&= \sum\nolimits_{i=0}^{k}\mathbb{P}\big(\{X_1=i\}\cap\{X_2=k-i\}\big)\\
&= \sum\nolimits_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X_1=i)\cdot\mathbb{P}(X_2=k-i)\\
&= \sum\nolimits_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}\\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum\nolimits_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}\\
&= \frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum\nolimits_{i=0}^{k}C_k^i\lambda_2^i\lambda_2^{k-i}\\
&= \frac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^k\,.
\end{aligned}$$

Deci v.a. $X_1+X_2\sim\mathscr{P}(\lambda_1+\lambda_2)\,.$ ∎

Folosind Propoziția 2.165 obținem:

Propoziția 2.166 *Dacă $X_i\sim\mathscr{P}(\lambda)$, pentru $i=\overline{1,n}$, sunt v.a. independente, atunci*

$$S_n \overset{\text{not}}{=\!=} X_1+X_2+\ldots+X_n\sim\mathscr{P}(n\lambda)\,.$$

2.3.2.2 Distribuția geometrică

Spunem că v.a. X urmează o distribuție de tip geometric de parametru $p\in(0,1)\,$, și scriem $X\sim\mathscr{G}(p)\,$, dacă tabloul ei de repartiție este dat de

$$X:\begin{pmatrix} k\\ pq^{k-1}\end{pmatrix}_{k\in\mathbb{N}^*}\,. \tag{2.96}$$

[113] Pentru proprietatea similară satisfacută de alte distribuții vezi Propoziția 2.125, Propoziția 2.180, Propoziția 2.182, Propoziția 3.131, Propoziția 3.143, Propoziția 3.171 și respectiv Exercițiul 3.6.41.

[114] Acest rezultat se poate demonstra și cu ajutorul funcției caracteristice (vezi Exercițiul 4.2.13).

Evident, avem $\mathbb{P}(X=k)=pq^{k-1}\geq 0$. Pentru a arăta că suma probabilităților este 1 folosim seria geometrică[115] (ceea ce justifică și numele distribuției):

$$\sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}^*} p_k=\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}=p\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} q^{k-1}=p\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} q^{k}=p\frac{1}{1-q}=1.$$

Remarca 2.167 Semnificația distribuției este următoarea: fie o experiență și $\mathbf{S}$ un eveniment legat de ea care se poate realiza cu probabilitatea $p=\mathbb{P}(\mathbf{S})$. Dacă efectuăm experiența o singură dată, spunem că a apărut *Succesul* dacă s-a produs evenimentul $\mathbf{S}$. Dacă nu s-a produs evenimentul $\mathbf{S}$, adică a apărut evenimentul $\bar{\mathbf{S}}$, atunci spunem că a apărut *Eșecul*. Se repetă experiența de oricâte ori și în aceleași condiții.

Atunci, X reprezintă v.a. care ia drept valori **numărul de încercări efectuate**[116] **până când are loc prima realizare a evenimentului S, i.e. apariția primului *Succes*.**

Într-adevăr, evenimentul $\{X=k\}$ este evenimentul ca în primele $(k-1)$ efectuări ale experienței, evenimentul $\mathbf{S}$ nu se produce deloc (spunem că s-au produs $(k-1)$ eșecuri) și în efectuarea k a experienței evenimentul $\mathbf{S}$ se produce sigur (spunem că apare primul *Succes*). Deci, folosind notațiile standard date de (1.33), avem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k)&=\mathbb{P}\left(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_{k-1}\cap A_k\right)\\&=\mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right)\cdot\mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}\left(\bar{A}_{k-1}\right)\cdot\mathbb{P}\left(A_k\right)\\&=\underbrace{q\cdot q\cdot\ldots\cdot q}_{\text{de }(k-1)\text{-ori}}\cdot p\\&=q^{k-1}p,\end{aligned}$$

deci tabloul v.a. X este dat de (2.96). $\diamond$

---

[115] **Seria geometrică** este suma termenilor unei progresii geometrice și este dată de următoarea dezvoltare în serie de puteri, i.e. dezvoltarea Taylor în jurul lui $a=0$, adică seria Maclaurin, asociată funcției $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} x^k,\quad \text{pentru orice } |x|<1.$$

[116] Se mai poate poate vedea X ca reprezentând **timpul scurs** (sau **timpul de așteptare**) **până la prima apariție a *Succesului*.**

Remarca 2.168 Putem defini distribuția geometrică și în modul următor: fie o experiență și $\mathbf{S}$ un eveniment legat de ea care se poate realiza cu probabilitatea $p = \mathbb{P}(\mathbf{S})$. Dacă efectuăm experiența o singură dată, spunem că a apărut *Succesul* dacă s-a produs evenimentul $\mathbf{S}$. Dacă nu s-a produs evenimentul $\mathbf{S}$, adică a apărut evenimentul $\bar{\mathbf{S}}$, atunci spunem că a apărut *Eșecul*. Se repetă experiența de oricâte ori și în aceleași condiții.

Să definim X ca fiind v.a. care ia drept valori **numărul de eșecuri până când are loc prima realizare a evenimentului S, i.e. apariția primului *Succes*.**

Atunci, evenimentul $\{X = k\}$ este evenimentul ca în primele k efectuări ale experienței, evenimentul $\mathbf{S}$ nu se produce deloc și în efectuarea $(k+1)$ a experienței evenimentul $\mathbf{S}$ se produce sigur.

Deci, folosind notațiile standard date de (1.33), avem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}\left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_k \cap A_{k+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bar{A}_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_2\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(\bar{A}_k\right) \cdot \mathbb{P}\left(A_{k+1}\right) \\
&= \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{\text{de } k\text{-ori}} \cdot p \\
&= q^k p,
\end{aligned}$$

deci tabloul v.a. X este dat de

$$X : \begin{pmatrix} k \\ pq^k \end{pmatrix}_{k \in \mathbb{N}}.$$

◇

Propoziția 2.169 *Media și dispersia unei v.a. $X \sim \mathscr{G}(p)$ sunt date de*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{și} \qquad \mathrm{D}^2(X) = \frac{q}{p^2}. \tag{2.97}$$

Demonstrație. Folosim dezvoltări cunoscute, plecând[117] de la dezvoltarea func-

[117] Derivând o dată dezvoltarea funcției $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ obținem dezvoltarea

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{pentru orice } |x| < 1.$$

Se obține imediat și

ției $\dfrac{1}{1-x}$ în serii de puteri (i.e. de la seria geometrică). Obținem

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

și

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = p \frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{2-p}{p^2},$$

deci

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

■

Exercițiul 2.170 *Să se calculeze media și dispersia în cazul în care X numără eșecurile până la apariția primului* succes.

Propoziția 2.171 *Dacă $X \sim \mathscr{G}(p)$, atunci funcția de repartiție este dată de (vezi și relațiile (3.61) din cazul distribuției exponențiale)*

(2.98) $$\boxed{F(n) = 1 - q^n \qquad \textit{sau, echivalent,} \qquad \mathbb{P}(X > n) = q^n,}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație. Într-adevăr,

$$F(n) = \mathbb{P}(X \leq n) = \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} = p \sum_{k=0}^{n-1} q^k = p \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n.$$

■

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \text{pentru orice } |x| < 1.$$

Derivând încă o dată obținem dezvoltarea

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad \text{pentru orice } |x| < 1$$

și respectiv dezvoltarea

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad \text{pentru orice } |x| < 1.$$

Integrând dezvoltarea funcției $\frac{1}{1-x}$ obținem

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right), \quad \text{pentru orice } |x| < 1.$$

Remarca 2.172 Evident, obținem

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in (-\infty, 1), \\ 1 - q^{\lfloor x \rfloor} & \text{dacă } x \in [1, \infty), \end{cases}$$

unde $\lfloor x \rfloor$ este partea întreagă a lui x, i.e. cel mai mare întreg mai mic sau egal cu x. ◇

Exercițiul 2.173 *(a) Să se determine probabilitatea de a obține o dublă atunci când se aruncă, o singură dată, două zaruri.*

(b) Se aruncă două zaruri în mod repetat, până când se obține prima dublă. Fie X v.a. care reprezintă numărul de încercări. Să se determine legea v.a. X.

(c) Să se determine probabilitatea de a nu avea nici o dublă în primele 5 aruncări (i.e. $\mathbb{P}(X > 5)$).

Exercițiul 2.174 *Fie $X \sim \mathscr{G}(p)$. Să se calculeze media $\mathbb{E}(X)$ folosind formula (2.54) adică să se calculeze media $\mathbb{E}(X)$ folosind doar funcția de repartiție dată de (2.98).*

2.3.2.3 Distribuția binomială cu exponent negativ

Spunem că v.a. X urmează o distribuție de tip binomial cu exponent negativ de parametri $r \in \mathbb{N}^*$, $p \in (0,1)$, și scriem $X \sim \mathscr{NegB}(r,p)$, dacă tabloul ei de repartiție este dat de

$$X : \begin{pmatrix} k \\ C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r} \end{pmatrix}_{k \in \mathbb{N},\, k \geq r}.$$

Evident, $C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r} \geq 0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ cu $k \geq r$. Pentru a arăta că suma probabilităților este 1 folosim **seria binomială cu exponent negativ**[118] (ceea ce justifică și numele distribuției):

$$\frac{1}{(1-x)^r} = 1 + \frac{r}{1!} x + \frac{r(r+1)}{2!} x^2 + \ldots$$

[118] **Seria binomială** (generalizare a binomului lui Newton):

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots,$$

pentru orice $|x| < 1$ și pentru orice $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
&+\frac{r(r+1)(r+2)\cdots(r+n-1)}{n!}x^n+\dots \\
(2.99)\qquad &= C_{r-1}^{r-1}+C_r^{r-1}x+C_{r+1}^{r-1}x^2+C_{r+2}^{r-1}x^2+\dots \\
&+C_{r+n-1}^{r-1}x^n+\dots \\
&=\sum\nolimits_{k=r}^{\infty}C_{k-1}^{r-1}x^{k-r}, \quad \text{pentru orice } |x|<1 \text{ și orice } r\in\mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Obținem

$$\sum\nolimits_{k=r}^{\infty}p_k=\sum\nolimits_{k=r}^{\infty}C_{k-1}^{r-1}p^rq^{k-r}=p^r\sum\nolimits_{k=r}^{\infty}C_{k-1}^{r-1}q^{k-r}=\frac{p^r}{(1-q)^r}=1.$$

Remarca 2.175 Semnificația distribuției este următoarea: fie o experiență și **S** un eveniment legat de ea care se poate realiza cu probabilitatea $p=\mathbb{P}(\mathbf{S})$. Dacă efectuăm experiența o singură dată, spunem că a apărut *Succesul* dacă s-a produs evenimentul **S**. Dacă nu s-a produs evenimentul **S**, adică a apărut evenimentul $\bar{\mathbf{S}}$, atunci spunem că a apărut *Eșecul*. Se repetă experiența de oricâte ori și în aceleași condiții.

Atunci, v.a. X reprezintă **numărul de încercări efectuate**[119] **până când evenimentul S se realizează de r ori, i.e. apare *Succesul* de r ori**.

Într-adevăr, evenimentul $\{X=k\}$, unde $k\geq r$, este intersecția a două evenimente independente: în primele $(k-1)$ efectuări ale experienței, evenimentul **S** se produce de $r-1$ ori și la efectuarea k a experienței evenimentul **S** se produce sigur.

Probabilitatea primului eveniment este, conform schemei binomiale, dat de $C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}q^{(k-1)-(r-1)}$, iar probabilitatea celui de-al doilea eveniment este p. Deci probabilitatea intersecției este

$$\mathbb{P}(X=k)=C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}q^{k-r}\cdot p=C_{k-1}^{r-1}p^rq^{k-r}.$$

$\diamond$

Remarca 2.176 În cazul particular $r=1$ distribuția binomială cu exponent negativ devine distribuția geometrică, mai precis,

$$\boxed{\mathscr{NegB}(1,p)=\mathscr{G}(p).}$$

[119] Se mai poate poate vedea X ca reprezentând **timpul scurs** (sau **timpul de așteptare**) **până la apariția primelor** r ***Succese***.

Într-adevăr, dacă $X \sim \mathscr{NegB}(1,p)$, atunci $\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. $\diamond$

Remarca 2.177 Are loc următoarea **legătură dintre v.a. distribuite binomial și cele distribuite binomial cu exponent negativ**.

Astfel, fie $S_n \sim \mathscr{NegB}(n,p)$ și $N_k \sim \mathscr{B}(k,p)$. Atunci, are loc următoarea egalitate între evenimente[120]

$$\{S_n \leq k\} = \{N_k \geq n\}. \tag{2.100}$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\{S_n \leq k\} &= \{\text{nr. de încercări până se obțin primele } n \text{ } \textit{Succese} \text{ este } \leq k\}\\ &= \{\text{în primele } k \text{ încercări } \textit{Succesul} \text{ apare de cel puțin } n \text{ ori}\}\\ &= \{N_k \geq n\}.\end{aligned}$$

Prin urmare, are loc egalitatea (2.100) sau, echivalent,

$$F_X(n) = 1 - F_Y(r-1),$$

deoarece $\mathbb{P}(Y \geq r) = 1 - \mathbb{P}(Y < r) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq r-1)$. $\diamond$

Propoziția 2.178 *Media și dispersia unei v.a. $X \sim \mathscr{NegB}(r,p)$ distribuite binomial, cu exponent negativ, sunt date de*

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = r \cdot \frac{1}{p} \qquad \textit{și} \qquad \mathrm{D}^2(X) = r \cdot \frac{q}{p^2}.}$$

Demonstrație. Derivând seria binomială (2.99)

$$\frac{x^r}{(1-x)^r} = \sum\nolimits_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} x^k$$

obținem

$$\sum\nolimits_{k=r}^{\infty} k C_{k-1}^{r-1} x^{k-1} = \left(\frac{x^r}{(1-x)^r}\right)'$$

[120] Vezi și Exercițiul 2.4.40 și Exercițiul 2.4.41.

$$= \frac{rx^{r-1}(1-x)^r + rx^r(1-x)^{r-1}}{(1-x)^{2r}}$$
$$= \frac{rx^{r-1}}{(1-x)^{r+1}},$$

deci

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum\nolimits_{k=r}^{\infty} kp_k \\
&= \sum\nolimits_{k=r}^{\infty} kC_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r} \\
&= p^r q^{-(r-1)} \sum\nolimits_{k=r}^{\infty} kC_{k-1}^{r-1} q^{k-1} \\
&= p^r q^{-(r-1)} \frac{rq^{r-1}}{(1-q)^{r+1}} \\
&= \frac{r}{p}.
\end{aligned}$$

■

Remarca 2.179 Dacă $X \sim \mathscr{NegB}(r, p)$ este, conform Remarcii 2.175, **numărul total de încercări până la apariția *Succesului* de ordin r (sau a primelor r *Succese*)**, atunci putem vedea X ca fiind o sumă de r v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,r}}$ independente definite astfel: X_1 reprezintă numărul de încercări efecuate până la apariția primului *Succes* și, pentru $i \geq 2$, v.a. X_i reprezintă **numărul de încercări**[121] **efectuate după apariția *Succesului* de ordin $(i-1)$ până la apariția *Succesului* de ordin i.**

În definițiile de mai sus $(X_i)_{i=\overline{1,r}}$ reprezintă r v.a. independente distribuite geometric de același parametru p, i.e. $X_i \sim \mathscr{G}(p)$, deci

orice v.a. distribuită negativ binomial $X \sim \mathscr{NegB}(r, p)$ poate fi văzută ca o sumă de r v.a. independente și de tip geometric,

[121] Astfel, X_1 reprezintă, vezi Nota 116, timpul scurs până apariția primului *Succes*, iar X_i reprezintă, pentru $i \in \mathbb{N}^*$, **timpul scurs de la apariția *Succesului* de ordin $(i-1)$ până la apariția *Succesului* de ordin i** (sau **timpul de așteptare dintre doua *Succese* succesive**).

Vezi și definițiile alternative (2.103) și (2.104) ale unei v.a. de tip $\mathscr{NegB}(r, p)$ precum și definiția alternativă (2.105) a lui X_i .

Vezi și definițiile similare, din cazul continuu, date de Remarca 3.146 și de Exercițiul 3.6.33.

i.e.

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_r = \sum\nolimits_{i=0}^{r} X_i \sim \mathcal{NegB}(r, p).$$

În plus, știm că $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{p}$, iar $\mathrm{D}^2(X_i) = \frac{q}{p^2}$, deci **este foarte ușor să obținem și să reținem media și dispersia unei v.a. distribuite binomial cu exponent negativ** $\mathcal{NegB}(r, p)$:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{r} X_i\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{r} \mathbb{E}(X_i) = \sum\nolimits_{i=1}^{r} \frac{1}{p} = r \cdot \frac{1}{p} \tag{2.101}$$

și

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{D}^2\left(\sum\nolimits_{i=1}^{r} X_i\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{r} \mathrm{D}^2(X_i) = \sum\nolimits_{i=1}^{r} \frac{q}{p^2} = r \cdot \frac{q}{p^2}. \tag{2.102}$$

◇

Legătura precedentă dintre o v.a. distribuită binomial cu exponent negativ și o sumă de v.a. distribuite geometric poate fi demonstrată și formal.

Propoziția 2.180 *Suma a două v.a. independente care urmează o distribuție de tip geometric este o v.a care urmează o distribuție de tip*[122] *negativ binomial. Mai precis*[123]*,*

$$X_1, X_2 \sim \mathcal{G}(p) \quad \textit{independente} \quad \Longrightarrow \quad X_1 + X_2 \sim \mathcal{NegB}(2, p).$$

Demonstrație. Valorile pe care le poate lua suma $X_1 + X_2$ sunt $k \in \{2, 3, \ldots\}$, deoarece $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Atunci,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) &= \sum\nolimits_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_1 = i) \cdot \mathbb{P}(X_2 = k - i) \\
&= \sum\nolimits_{i=1}^{k-1} pq^{i-1} \cdot pq^{k-i-1} \\
&= \sum\nolimits_{i=1}^{k-1} p^2 q^{k-2} \\
&= (k-1)\, p^2 q^{k-2}
\end{aligned}$$

[122] Pentru proprietatea similară satisfacută de alte distribuții vezi Propoziția 2.125, Propoziția 2.165, Propoziția 2.182, Propoziția 3.131, Propoziția 3.143, Propoziția 3.171 și respectiv Exercițiul 3.6.41.

[123] Acest rezultat se poate demonstra și cu ajutorul funcției caracteristice (vezi Exercițiul 4.2.14).

$$= C_{k-1}^{2-1} p^2 q^{k-2}, \quad \text{pentru orice } k \geq 2,$$

adică $X_1 + X_2 \sim \mathscr{NegB}(2, p)$. ■

Exercițiul 2.181 *Un arcaș trage asupra unei ținte. Probabilitatea de a atinge ținta este de $2/3$. Să se determine tabloul v.a. X care are drept valori numărul de încercări înregistrate până când ținta este atinsă de trei ori.*

Să se determine și tabloul v.a. Y care are drept valori numărul de eșecuri până la primele trei nimeriri ale țintei (vezi și Remarca 2.168).

Pentru rezolvare se poate folosi semnificația distribuției și tipul de calcul dat de Remarca 2.175 sau tipul de calcul dat de Propoziția 2.180.

Propoziția 2.182 *Suma a două v.a. independente care urmează o distribuție de tip negativ binomial este o v.a care urmează o distribuție tot de tip*[124] *negativ binomial. Mai precis*[125]*,*

$$X_i \sim \mathscr{NegB}(r_i, p), \ i = \overline{1,2}, \quad \textit{indep.} \quad \Longrightarrow \quad X_1 + X_2 \sim \mathscr{NegB}(r_1 + r_2, p).$$

Folosind Propoziția 2.182 obținem:

Propoziția 2.183 *Dacă $X_i \sim \mathscr{NegB}(r, p)$, pentru $i = \overline{1,n}$, sunt v.a. independente, atunci*

$$S_n \stackrel{\text{not}}{=} X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim \mathscr{NegB}(nr, p).$$

2.4 Exerciții rezolvate

2.4.1 Să considerăm experiența care constă în aruncarea a două zaruri. Fie X v.a. ale cărei valori reprezintă numărul maxim de puncte apărute pe cele două fețe. Să se determine tabloul de repartiție și funcția de repartiție. Să se determine media și dispersia v.a. X.

Rezolvare:

Vom lucra pe spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, unde

$$\Omega = \{\omega = (i, j) : i, j \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}$$

[124] Pentru proprietatea similară satisfacută de alte distribuții vezi Propoziția 2.125, Propoziția 2.165, Propoziția 2.180, Propoziția 3.131, Propoziția 3.143, Propoziția 3.171 și respectiv Exercițiul 3.6.41.

[125] Acest rezultat se poate demonstra și cu ajutorul funcției caracteristice (vezi Exercițiul 4.2.15).

și $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{(i,j)\}) = 1/36$ (evenimentele elementare sunt echiprobabile).

Atunci, v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este definită de $X(\omega) = \max(i,j)$, pentru orice $\omega = (i,j) \in \Omega$.

Deci

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/36 & 3/36 & 5/36 & 7/36 & 9/36 & 11/36 \end{pmatrix},$$

deoarece

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}\big(\{\,(1,1)\,\}\big) = 1/36,$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}\big(\{\,(1,2)\,,(2,1)\,,(2,2)\,\}\big) = 3/36,$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}\big(\{\,(1,3)\,,(2,3)\,,(3,3)\,,(3,1)\,,(3,2)\,\}\big) = 5/36$$

ș.a.m.d..

Obținem[126]

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{2k-1}{36} = \frac{1}{18}\sum_{k=1}^{6} k^2 - \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{161}{36}.$$

Apoi

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot \frac{2k-1}{36} = \frac{1}{18}\sum_{k=1}^{6} k^3 - \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{791}{36}.$$

Dispersia este

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296}.$$

2.4.2 Dintr-o urnă se extrage o bilă albă cu probabilitatea p. Se fac două extrageri punându-se bila înapoi după extragere. Fie X, Y v.a. ce reprezintă

[126] Sunt utile formulele:

$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

numărul de bile albe obținute la prima extragere, respectiv la a doua extragere. Să se determine tabloul de repartiție al v.a. $X, Y, X+Y, XY$ și apoi $X^2, X^3, 5X-2$. Să se determine și media și dispersia v.a. obținute.

Rezolvare:

Avem că

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \text{ unde } q = 1 - p,$$

adică X, Y sunt două v.a. de tip Bernoulli, mai precis, $X, Y \sim \mathrm{Bernoulli}\,(p)$.

Deci

$$X + Y : \begin{pmatrix} 0+0 & 0+1 & 1+0 & 1+1 \\ q^2 & pq & pq & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \end{pmatrix},$$

deoarece

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\,(X+Y=0) &= \mathbb{P}\,(X=0, Y=0) = \mathbb{P}\,(X=0)\,\mathbb{P}\,(Y=0) = q^2, \\ \mathbb{P}\,(X+Y=1) &= \mathbb{P}\big(\{X=0, Y=1\} \cup \{X=1, Y=0\}\big) \\ &= \mathbb{P}\,(X=0)\,\mathbb{P}\,(Y=1) + \mathbb{P}\,(X=1)\,\mathbb{P}\,(Y=0) \\ &= pq + pq = 2pq, \\ \mathbb{P}\,(X+Y=2) &= \mathbb{P}\,(X=1, Y=1) = \mathbb{P}\,(X=1)\,\mathbb{P}\,(Y=1) = p^2. \end{aligned}$$

Similar

$$X \cdot Y : \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 \\ q^2 & pq & pq & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q^2 + 2pq & p^2 \end{pmatrix},$$

deoarece

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\,(XY=0) &= \mathbb{P}\big(\{X=0, Y=0\} \cup \{X=0, Y=1\} \cup \{X=1, Y=0\}\big) \\ &= \mathbb{P}\,(X=0)\,\mathbb{P}\,(Y=0) + \mathbb{P}\,(X=0)\,\mathbb{P}\,(Y=1) \\ &\quad + \mathbb{P}\,(X=1)\,\mathbb{P}\,(Y=0) \\ &= q^2 + 2pq, \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 1) = p^2.$$

În final

$$X^2 = X \cdot X : \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 \\ q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix},$$

deoarece

$$\mathbb{P}\left(X^2 = 0\right) = \mathbb{P}(X = 0) = q,$$

$$\mathbb{P}\left(X^2 = 1\right) = \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Valoarea medie este

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$$

iar $\mathbb{E}(X + Y) = 0 \cdot q^2 + 1 \cdot 2pq + 2 \cdot p^2 = 2p(p + q) = 2p.$

Apoi obținem $\mathbb{E}(XY) = 0 \cdot \left(q^2 + 2pq\right) + 1 \cdot p^2 = p^2$ și $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$

2.4.3 Fie X o v.a. de tip Bernoulli cu parametrul $1/3$. Fie $Y = 1 - X$. Să se determine tabloul de repartiție al v.a. Y și să se calculeze $\mathrm{D}^2(Y)$.

Rezolvare:

Dacă $X \sim \mathrm{Bernoulli}(1/3)$, atunci

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = 2/3,$$

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/3,$$

ceea ce înseamnă că $Y \sim \mathrm{Bernoulli}(2/3)$.

Dispersia este $\mathrm{D}^2(Y) = 1 \cdot 2/3 \cdot 1/3 = 2/9.$

2.4.4 Fie X o v.a. discretă dată de: $\mathbb{P}(X = -1) = 1/8$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1/4$, $\mathbb{P}(X = 1) = a$. Să se determine a astfel încât X să fie o v.a. Să se determine tipul de distribuție al v.a. $Y = X^2$ și $Z = |X|$. Să se calculeze dispersia și deviația standard a v.a. $1 - X$.

Rezolvare:

Să calculăm

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(\{X = -1\} \cup \{X = 1\}) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1) = 3/4$$

$$\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(X=0)=1/4,$$

ceea ce înseamnă că $Y \sim \text{Bernoulli}(3/4)$.

Similar se obține $Z \sim \text{Bernoulli}(3/4)$.

Prin urmare, am obținut două v.a. cu același tablou de repartiție, adică identic distribuite.

Dar, evident, cele două v.a. nu sunt independente.

2.4.5 Fie X o v.a. discretă dată de: $\mathbb{P}(X=-2) = 1/6$, $\mathbb{P}(X=0) = 1/3$, $\mathbb{P}(X=2)=a$.

(a) Să se determine a și să se determine tipul de distribuție al v.a. $Y = X^2/4$ și $Z = |X|/2$.

(b) Să se calculeze dispersia și deviația standard a v.a. $2-3X$.

2.4.6 Se dau trei urne. Prima conține o bilă albă și una neagră, a doua conține două bile albe și șapte negre, iar a treia conține o bilă albă și trei negre. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă.

Se cere media și dispersia v.a. care are drept valori numărul total de bile albe apărute în cele trei extrageri.

Rezolvare:

V.a. X_i desemnează numărul de bile albe obținute la extragerea din urna $i=\overline{1,3}$ și au tablourile

$$X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7/9 & 2/9 \end{pmatrix}, \quad X_3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Mediile sunt

$$\mathbb{E}(X_1) = 1/2, \quad \mathbb{E}(X_2) = 2/9, \quad \mathbb{E}(X_3) = 1/4,$$

iar dispersiile

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2(X_1) &= 1^2 \cdot 1/2 - (1/2)^2 = 1/4, \\ \mathrm{D}^2(X_2) &= 1^2 \cdot 2/9 - (2/9)^2 = 14/81, \\ \mathrm{D}^2(X_3) &= 1^2 \cdot 1/4 - (1/4)^2 = 3/16. \end{aligned}$$

Atunci, numărul total de bile albe apărute în cele trei extrageri definește v.a.

$$X = X_1 + X_2 + X_3.$$

Obținem

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = 1/2 + 2/9 + 1/4 = 35/36$$

și, deoarece X_1, X_2 și X_3 sunt independente,

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{D}^2(X_1) + \mathrm{D}^2(X_2) + \mathrm{D}^2(X_3) = 1/4 + 14/81 + 3/16 = 0.61.$$

2.4.7 Se dau trei urne. Prima conține o bilă albă și una neagră, a doua conține două bile albe și șapte negre, iar a treia conține o bilă albă și trei negre. Din prima urnă se extrage o bilă și se introduce în cea de a doua urnă. Apoi se extrage o bilă din a doua urnă și se introduce în cea de a treia. La sfârșit se extrage o bilă din a treia urnă.

Se cere media și dispersia v.a. care are drept valori numărul de bile albe apărute în cele trei extrageri.

Rezolvare:

V.a. X_i desemnează numărul de bile albe obținute la extragerea din urna $i = \overline{1,3}$. V.a. X_1, X_2 și X_3 nu sunt independente. Numărul total de bile albe apărute în cele trei extrageri definește v.a. $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Tabloul v.a. X_1 este dat de $X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Pentru a determina X_2 folosim formula (1.21) a probabilității totale. Atunci, $X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ deoarece

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 0) &= \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2=1) &= \mathbb{P}(X_1=0)\cdot\mathbb{P}(X_2=1|X_1=0)+\mathbb{P}(X_1=1)\cdot\mathbb{P}(X_2=1|X_1=1)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Similar, $X_3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ deoarece, folosind formula (1.21) a probabilității totale,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_3=0) &= \mathbb{P}(X_2=0)\cdot\mathbb{P}(X_3=0|X_2=0)+\mathbb{P}(X_2=1)\cdot\mathbb{P}(X_3=0|X_2=1)\\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_3=1) &= \mathbb{P}(X_2=0)\cdot\mathbb{P}(X_3=1|X_2=0)+\mathbb{P}(X_2=1)\cdot\mathbb{P}(X_3=1|X_2=1)\\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Media este

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(X_1)+\mathbb{E}(X_2)+\mathbb{E}(X_3)=1/2+1/4+1/4=1.$$

Pentru dispersie determinăm mai întâi tabloul

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 8/25 & 21/50 & 1/5 & 3/50 \end{pmatrix}$$

deoarece

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X_1=0,X_2=0,X_3=0)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 0 | X_1 = 0, X_2 = 0) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{4}{5} \\
&= \frac{8}{25}
\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}(\{X_1 = 1, X_2 = X_3 = 0\} \cup \{X_1 = X_3 = 0, X_2 = 1\} \\
&\quad \cup \{X_1 = X_2 = 0, X_3 = 1\}) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 0 | X_1 = 1, X_2 = 0) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 0 | X_1 = 0, X_2 = 1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 1 | X_1 = 0, X_2 = 0) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{5} \\
&= \frac{21}{50}
\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(\{X_1 = X_2 = 1, X_3 = 0\} \cup \{X_1 = X_3 = 1, X_2 = 0\} \\
&\quad \cup \{X_2 = X_3 = 1, X_1 = 0\}) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 0 | X_1 = 1, X_2 = 1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 1 | X_1 = 1, X_2 = 0) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 1 | X_1 = 0, X_2 = 1) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{5} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 1 | X_1 = 1, X_2 = 1) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{50}.$$

2.4.8 Fie v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$, de tip i.i.d., cu tablourile date de

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Fie $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine $\mathbb{E}(S_n)$ și $\mathrm{D}^2(S_n)$.

Rezolvare:

Media $\mathbb{E}(X_i) = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 = 1$, iar $\mathbb{E}\left(X_i^2\right) = 0^2 \cdot 1/4 + 1^2 \cdot 1/2 + 2^2 \cdot 1/4 = 3/2$, deci $\mathrm{D}^2(X_i) = 3/2 - 1 = 1/2$.

Media $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = n$ și, deoarece v.a. X_i sunt independente, dispersia este $\mathrm{D}^2(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{D}^2(X_i) = n/2$.

2.4.9 V.a. X desemnează numărul de produse cumpărate de cineva dintr-un magazin. Avem următoarele date

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1) = 8/12, \quad \mathbb{P}(1 \leq X \leq 2) = 7/12,$$

$$\mathbb{P}(0 \leq X < 3) = 10/12, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X \geq 4).$$

(a) Să se determine tabloul de repartiție al v.a. X și $2 - X$ și $(2 - X)^2$.

(b) Să se determine media $\mathbb{E}\left(\frac{1}{3X-2}\right)$ și apoi dispersia $\mathrm{D}^2(3X - 2)$.

(c) Să se determine și funcția de repartiție F_X.

Rezolvare:

Avem

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 8/12$$

$$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 7/12$$

$$\mathbb{P}(0 \leq X < 3) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 10/12.$$

Obținem $\mathbb{P}(X = 0) = 3/12$, $\mathbb{P}(X = 1) = 5/12$, $\mathbb{P}(X = 2) = 2/12$.

Apoi

$$\begin{aligned}1 &= \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \\ &= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X \geq 4) \\ &= \frac{3}{12} + \frac{5}{12} + \frac{2}{12} + 2\mathbb{P}(X=3),\end{aligned}$$

deci $\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(X \geq 4) = 1/12$.

2.4.10 O urnă conține 12 bile negre, 6 albe și 4 verzi. Se extrage o bilă și ea revine în urnă. Apoi se mai extrage o dată. Ș.a.m.d. Să presupunem că vom câștiga 2€ pentru fiecare bilă verde aleasă și vom pierde 1€ pentru fiecare bilă neagră aleasă.

(a) Să se determine tabloul v.a. X_1 care desemnează câștigul nostru (euro câștigați sau pierduți) la extragerea primei bile.

(b) Să se determine tabloul v.a. X_2 care desemnează câștigul nostru (euro câștigați sau pierduți) la extragerea celei de a doua bile.

(c) Să se determine tabloul v.a. S_2 care desemnează câștigul nostru total după extragerea succesivă a primelor două bile precum și valoarea așteptată a câștigului nostru.

(d) Să se determine și distribuția v.a. $|S_2|$ precum și media v.a. $|S_2|$ și deviația standard a v.a. $2 - 3S_2$.

(e) Să se determine tabloul v.a. S_3 care desemnează câștigul nostru total după extragerea succesivă a primelor trei bile precum și valoarea așteptată a câștigului nostru.

Rezolvare:

Se determină direct sau se observă că $S_2 = X_1 + X_2$ și $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$.

2.4.11 O urnă conține bile galbene și magenta în proporție de $p \in (0,1)$ și respectiv $q = 1 - p$. Extragem câte o bilă, punând de fiecare dată bila înapoi. Să presupunem că vom câștiga 1 € pentru fiecare bilă magenta extrasă și vom pierde 1 € pentru fiecare bilă galbenă extrasă.

(a) Să se determine legea v.a. Y_k care desemnează câștigul nostru (euro câștigați sau pierduți) la extragerea de ordin $k \in \mathbb{N}^*$ a unei bile.

(b) Să se determine legea v.a. U_n care desemnează câștigul nostru total (euro câștigați sau pierduți la final) după extragerea succesivă a $n \in \mathbb{N}^*$ bile (pentru

$n = 2, 3, 4, 5$ și apoi cazul general), și $\mathbb{P}(U_n = i)$, precum și valoarea așteptată a câștigului nostru.

2.4.12 Fie X o v.a. discretă dată de

$$X : \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ a & 5/32 & b & 5/16 & c & 1/32 \end{pmatrix}.$$

Se știe că $\mathbb{E}(X) = -1/2$ și că $\mathrm{D}^2(X) = 5/4$. Să se determine a, b, c și să se calculeze $\mathrm{D}^2(3 - 2X)$.

Rezolvare:

Deoarece $\sum_{k=-3}^{2} \mathbb{P}(X = k) = 1$, $\mathbb{E}(X) = -1/2$ și $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathrm{D}^2(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = 5/4 + 1/4 = 3/2$, obținem

$$\begin{cases} a + \dfrac{5}{32} + b + \dfrac{5}{16} + c + \dfrac{1}{32} = 1 \\ -3a - 2 \cdot \dfrac{5}{32} - b + 0 \cdot \dfrac{5}{16} + c + 2 \cdot \dfrac{1}{32} = -\dfrac{1}{2} \\ (-3)^2 a + (-2)^2 \cdot \dfrac{5}{32} + (-1)^2 b + 0^2 \cdot \dfrac{5}{16} + c + 2^2 \cdot \dfrac{1}{32} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} a + b + c = \dfrac{1}{2} \\ -3a - b + c = -\dfrac{1}{4} \\ 9a + b + c = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Obținem $a = 1/32$, $b = 5/16$, $c = 5/32$.

Să calculăm

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2(3 - 2X) &= \mathbb{E}(3 - 2X)^2 - (\mathbb{E}(3 - 2X))^2 \\ &= 9 - 12\mathbb{E}(X) + 4\mathbb{E}\left(X^2\right) - 9 + 12\mathbb{E}(X) - 4(\mathbb{E}(X))^2 \\ &= 4\mathrm{D}^2(X) \\ &= 5. \end{aligned}$$

2.4.13 Fie X o v.a. discretă dată de $X : \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ a & 6/32 & b & 1/4 & c \end{pmatrix}$.

(a) Se știe că $\mathbb{E}\left(X\right) = -13/16$ și că $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 33/16$. Să se determine a, b, c.

(b) Să se determine tabloul v.a. X^2, $X + 3$ și să se calculeze media $\mathbb{E}\left(\frac{1}{2+3X}\right)$ și dispersia $\mathrm{D}^2\left(2 + 3X\right)$.

(c) Să se determine și funcția de repartiție F_X.

2.4.14 Fie X o v.a. discretă dată de $X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ a & b & 1/4 & c \end{pmatrix}$. Se știe că media lui X este $-5/8$, iar dispersia este $47/64$.

(a) Să se determine a, b, c. Să se determine apoi tabloul v.a. X^2, $X + 3$.

(b) Să se calculeze media lui $\frac{1}{2+3X}$ și dispersia lui $2X - 3X^2$.

(c) Să se determine și funcția de repartiție F_X.

2.4.15 Fie funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $F\left(x\right) = \begin{cases} 1 + a, & x < 0, \\ 2b, & x \in [0, 2), \\ c + b, & x \in [2, 3), \\ d, & x \geq 3. \end{cases}$

(a) Să se precizeze restricțiile pentru a, b, c, d astfel încât F să fie o funcție de repartiție (în sensul Remarcii 2.14).

(b) Fie X o v.a. astfel încât F este funcția ei de repartiție. Să se determine a, b, c, d dacă se știe că $\mathbb{P}\left(X \geq 2.5\right) = 0.45$ și $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1.5) = 0.50$.

(c) Să se determine tabloul de repartiție al v.a. X.

Rezolvare:

Din proprietățile funcției de repartiție obținem $a = -1$, $d = 1$ și $b \leq c$. În plus, trebuie să impunem ca $2b, c + b \in [0, 1]$.

Avem

$$0.45 = \mathbb{P}\left(X \geq 2.5\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X < 2.5\right) = 1 - F\left(2.5 - 0\right) = 1 - c - b$$

și

$$0.50 = \mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1.5) = F(1.5) - F(-1-0) = 2b - 1 - a = 2b.$$

Obținem $b = 0.25$ și $c = 0.30$.

Determinăm acum

$$\mathbb{P}(X = 0) = F(0) - F(0-0) = 0.50,$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = F(2) - F(2-0) = 0.05,$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = F(3) - F(3-0) = 0.45.$$

Evident, $\mathbb{P}(X = \alpha) = 0$, pentru orice $\alpha \neq 0, 2, 3$, iar tabloul v.a. X este dat de

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0.50 & 0.05 & 0.45 \end{pmatrix}.$$

2.4.16 Variabila X desemnează numărul de persoane care așteaptă la o coadă, la un anume ghișeu, într-o anumită perioadă a zilei și are funcția de repartiție

$$F_X(x) = \begin{cases} a, & x < 0, \\ 0.30, & 0 \leq x < 3, \\ 0.55, & 3 \leq x < 5, \\ 0.75, & 5 \leq x < 7, \\ b, & 7 \leq x. \end{cases}$$

(a) Să se determine a, b și apoi probabilitatea ca la acea coadă să fie trei persoane, precum și $\mathbb{P}(3 \leq X \leq 6)$ și $\mathbb{P}(X \geq 5)$.

(b) Să se determine și legea v.a. X.

2.4.17 Fie X o v.a. cu tabloul

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Să se determine minimul[127] funcției $\mathbb{R} \ni a \mapsto \mathbb{E}\big((X-a)^2 \big)$.

Să se arate că deviația standard verifică inegalitatea[128]

$$\mathrm{D}\,(X) \leq \frac{x_n - x_1}{2}.$$

Rezolvare:

Să definim funcția $f\,(a) = \mathbb{E}\big((X-a)^2 \big)$, $a \in \mathbb{R}$. Pentru a găsi minimul funcției f calculăm

$$f'\,(a) = \Big(\sum\nolimits_{k=1}^{n} p_k\,(x_k - a)^2 \Big)'_a = -2 \sum\nolimits_{k=1}^{n} p_k\,(x_k - a)\,,$$
$$f''\,(a) = 2 \sum\nolimits_{k=1}^{n} p_k = 2$$

și observăm că $f'\,(a) = 0$ dacă și numai dacă

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} (x_k - a)\,p_k = \sum\nolimits_{k=1}^{n} x_k p_k - \sum\nolimits_{k=1}^{n} a p_k = \sum\nolimits_{k=1}^{n} x_k p_k - a = 0,$$

deci minimul se realizează pentru $a = \mathbb{E}\,(X)$.

Prin urmare,

dispersia $\mathrm{D}^2\,(X)$ **este valoarea minimă a funcției** $f\,(a) = \mathbb{E}\big((X-a)^2 \big)$.

și aceasta se realizează pentru $a = \mathbb{E}\,(X)$.

Astfel, am demonstrat că

$$\mathbb{E}\big((X-a)^2 \big) \geq \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}\,(X))^2 \big) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{D}^2\,(X)\,, \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

Aplicând rezultatul precedent, deducem că dispersia verifică inegalitatea:

$$\mathrm{D}^2\,(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2 \big)$$
$$\leq \mathbb{E}\Big(X - \frac{x_1 + x_n}{2} \Big)^2$$

[127] Vezi și Exercițiul 3.82. Rezultatul care se va obține va fi adevărat și în cazul v.a. continue.

[128] Vezi și Exercițiul 3.83.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} p_k \left(x_k - \frac{x_1 + x_n}{2} \right)^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} p_k \left(x_n - \frac{x_1 + x_n}{2} \right)^2 \\
&= \left(\frac{x_n - x_1}{2} \right)^2,
\end{aligned}
$$

deoarece, pentru $k = \overline{1, n}$,

$$
x_k - \frac{x_1 + x_n}{2} \leq x_n - \frac{x_1 + x_n}{2}.
$$

Prin urmare, obținem $\mathrm{D}(X) \leq \dfrac{x_n - x_1}{2}$.

2.4.18 (vezi Problema concordanțelor) La o petrecere n persoane își lasă pălăriile la garderobă. La plecare fiecare persoană ia câte o pălărie, la întâmplare. Să se determine media și dispersia v.a. X care reprezintă numărul persoanelor care își aleg propria lor pălărie.

Rezolvare:

Să definim v.a. X_i ca fiind v.a. care ia valoarea 1 dacă persoana i își alege propria pălărie sau 0 dacă nu își alege propria pălărie, unde $i = \overline{1, n}$.

Prin urmare, suma v.a. X_i reprezintă numărul tuturor persoanelor care își aleg propria lor pălărie, i.e.

$$
X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.
$$

Evident, v.a. $(X_i)_i$ nu sunt v.a. independente (deoarece *succesul* unei persoane influențează *succesul* sau *eșecul* următoarei persoane care alege).

În notațiile standard de la Problema concordanțelor,

$$
\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \quad i = \overline{1, n},
$$

deci

$$
\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}\left(\bar{A}_i\right) = 1 - \frac{1}{n}, \quad i = \overline{1, n}.
$$

Obținem

$$
X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 1/n & 1/n \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n},
$$

deci

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(X_i) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

și apoi

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

În ceea ce provește dispersia, folosim formula (2.70), deoarece v.a. nu sunt independente:

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{D}^2\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mathrm{D}^2(X_i) + 2\sum\nolimits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Acum să determinăm tabloul v.a. $X_i \cdot X_j$. Deoarece $(X_i \cdot X_j)(\Omega) = \{0, 1\}$, iar

$$\mathbb{P}(X_i \cdot X_j = 1) = \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}, \quad 1 \le i < j \le n,$$

obținem

$$X_i \cdot X_j : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - (n-2)!/n! & (n-2)!/n! \end{pmatrix}, \quad 1 \le i < j \le n.$$

Putem calcula covarianța folosind formula (2.64):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\,\mathbb{E}(X_j) \\
&= 0 \cdot \left(1 - \frac{(n-2)!}{n!}\right) + 1 \cdot \frac{(n-2)!}{n!} - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^2(n-1)}.
\end{aligned}$$

Astfel,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^2(X) &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2\sum\nolimits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \frac{1}{n^2(n-1)} \\
&= n\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2C_n^2 \frac{1}{n^2(n-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n-1}{n} + 2\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\frac{1}{n^2\,(n-1)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2.4.19 Fie două v.a. independente $X, Y \sim \mathscr{DU}\,(n)$. Să se determine $\mathbb{P}\,(X = Y)$ și $\mathbb{P}\,(X \leq Y)$.

Rezolvare:

Avem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\,(X = Y) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_{k=1}^{n} \{X = k, Y = k\}\Big) \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\,(X = k, Y = k) \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\,(X = k)\,\mathbb{P}\,(Y = k) \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\,(X \leq Y) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_{k=1}^{n} \{X \leq Y, X = k\}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcup\nolimits_{k=1}^{n} \big\{X = k, Y \in \{k, k+1, \ldots, n\}\big\}\Big) \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\,(X = k, Y \in \{k, k+1, \ldots, n\}) \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\,(X = k) \sum\nolimits_{j=k}^{n} \mathbb{P}\,(Y = j) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum\nolimits_{k=1}^{n} \sum\nolimits_{j=k}^{n} 1 \\
&= \frac{1}{n^2} \sum\nolimits_{k=1}^{n} (n - k + 1) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(n^2 - \frac{n\,(n+1)}{2} + n\right) \\
&= \frac{n+1}{2n}.
\end{aligned}$$

2.4.20 Presupunem că probabilitatea unei mașini de a funcționa este de 0.8. Într-un atelier se află cinci mașini. Să se determine tabloul de repartiție și funcția de repartiție a v.a. X care reprezintă numărul de mașini care funcționează la un moment dat. Să se determine și media v.a. X.

Rezolvare:

Probabilitatea p_k ca să lucreze k mașini, $0 \leq k \leq 5$, este, conform schemei binomiale, $p_k = C_5^k (0.8)^k (0.2)^{5-k}$. Deci, dacă scriem sub forma unui tablou, atunci v.a. este dată de

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.0003 & 0.0064 & 0.0512 & 0.2048 & 0.4096 & 0.3277 \end{pmatrix}$$

deoarece

$$\mathbb{P}(X = 1) = C_5^1 (0.8) (0.2)^4 = 0.0064,$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = C_5^2 (0.8)^2 (0.2)^3 = 10 (0.8)^2 (0.2)^3 = 0.0512$$

ș.a.m.d..

Obținem $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0.0003 + 1 \cdot 0.0064 + 2 \cdot 0.0512 + \ldots = 4$.

Evident, putem să observăm direct că X este distribuită binomial, i.e. $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, unde $n = 5$ și $p = 0.8$, adică

$$X : \begin{pmatrix} k \\ C_5^k p^k q^{5-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,5}}, \quad \text{unde } p = 0.8, q = 0.2.$$

Folosind (2.83), obținem:

$$\mathbb{E}(X) = np = 5 \cdot 0.8 = 4$$

$$\mathrm{D}^2(X) = npq = 5 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.8.$$

2.4.21 Un sistem de comunicații consistă în n componente care funcționează fiecare (independent unul de altul) cu probabilitatea p. Spunem că sistemul funcționează eficient dacă funcționează cel puțin jumătate dintre componentele lui. Să notăm cu X v.a. care are drept valori numărul de componente care funcționează în sistem.

(a) Dacă sistemul are 3 componente, care este probabilitatea să funcționeze eficient? Să se determine legea v.a. X precum și valoarea așteptată și dispersia numărului de componente care funcționează în sistem.

(b) Dacă sistemul are 5 componente, care este probabilitatea să funcționeze eficient? Să se determine legea v.a. X precum și valoarea așteptată și dispersia numărului de componente care funcționează în sistem.

(c) Pentru ce valori ale lui p un sistemul de 5 componente are mai multe șanse să funcționeze decât un sistem de 3 componente?

2.4.22 V.a. X reprezintă numărul de Steme obținute de jucătorul J1 la aruncarea a două monede trucate, iar Y reprezintă numărul de Steme obținute de jucătorul J2 la aruncarea a trei monede trucate (probabilitatea de a se obține Stema la o aruncare a monedei trucate folosite este de $1/3$). Jocul este câștigat de cel care are mai multe Steme obținute. Apoi jocul se repetă.

(a) Să se determine tablourile v.a. X și Y.

(b) Care este probabilitatea ca J1 să câștige după al doilea joc? (i.e. la primul joc a fost egalitate (adică $X = Y$), iar la al doilea a câștigat J1 (adică $X > Y$)).

2.4.23 Fie f_n frecvența absolută de apariție a stemei (adică numărul total de apariții ale stemei) la n aruncări ale unei monede (vezi pagina 601).

Să definim v.a.

$$X_1 \stackrel{\text{def}}{=\!=} f_1\,, \quad X_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=\!=} f_{n+1} - f_n\,, \quad \text{pentru } n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Să se scrie tablourile v.a. f_1, f_2, f_3, f_n, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. V.a. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt independente? Să se determine, folosind notațiile standard date de (1.33), probabilitățile

$$\mathbb{P}\left(f_1 = 0, f_2 = 0\right), \quad \mathbb{P}\left(f_1 = 1, f_2 = 1\right),$$

$$\mathbb{P}\left(f_1 = 0, f_2 = 1\right), \quad \mathbb{P}\left(f_1 = 1, f_2 = 0\right),$$

$$\mathbb{P}\left(f_1 = 1, f_2 = 2\right), \quad \mathbb{P}\left(f_1 = 2, f_2 = 1\right)$$

și apoi

$$\mathbb{P}\left(f_2 = 0, f_3 = 0\right), \quad \mathbb{P}\left(f_2 = 1, f_3 = 1\right), \quad \mathbb{P}\left(f_2 = 2, f_3 = 2\right),$$

$$\mathbb{P}\left(f_2 = 0, f_3 = 1\right), \quad \mathbb{P}\left(f_2 = 1, f_3 = 0\right),$$

$$\mathbb{P}\left(f_2 = 1, f_3 = 2\right), \quad \mathbb{P}\left(f_2 = 2, f_3 = 1\right).$$

(b) Să se determine valorile și apoi tablourile v.a. X_1, X_2, X_3, X_n, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Care e semnificația v.a. X_1, X_2, X_3, X_n?

(c) Să se calculeze $\mathbb{E}(f_n), \mathrm{D}^2(f_n)$ și $\mathbb{E}(X_n), \mathrm{D}^2(X_n)$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Să se arate, folosind inegalitatea (2.75) a lui Cebâșev, că pentru orice $\epsilon > 0$ are loc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{f_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Să se interpreteze rezultatul[129].

2.4.24 O urnă conține 10 bile albe și 4 bile negre. Dacă din această urnă se fac 6 extrageri fără revenire să se determine:

(a) V.a. care are drept valori numărul de bile albe extrase și apoi funcția de repartiție asociată.

(b) Să se deducă apoi valoarea sumei de tipul $\sum_j C_n^j C_m^{k-j}$.

2.4.25 Dintr-o urnă cu 5 bile albe și 3 bile negre se extrag simultan 4 bile. Fie X v.a. care are drept valori numărul de bile negre obținute.

(a) Să se scrie spațiul de probabilitate care modelează experiența aleatoare și să se determine legea v.a. X și apoi $\mathbb{E}(X)$.

(b) Să se scrie și sistemul complet de evenimente asociate experienței aleatoare de mai sus și să se deducă apoi identitatea asociată.

2.4.26 O urnă conține 12 bile negre, 6 albe și 4 verzi. Se extrage o bilă și ea nu mai revine în urnă. Apoi se mai extrage o dată. Ș.a.m.d. Să presupunem că vom câștiga 2€ pentru fiecare bilă verde aleasă și vom pierde 1€ pentru fiecare bilă neagră aleasă.

(a) Să se determine tabloul v.a. X_1 care desemnează câștigul nostru (euro câștigați sau pierduți) la extragerea primei bile.

(b) Să se determine tabloul v.a. X_2 care desemnează câștigul nostru (euro câștigați sau pierduți) la extragerea celei de a doua bile.

(c) Să se determine tabloul v.a. S_2 care desemnează câștigul nostru total după extragerea primelor două bile precum și valoarea așteptată a câștigului nostru.

(d) Să se determine și distribuția v.a. $|S_2|$ precum și media v.a. $|S_2|$ și deviația standard a v.a. $2 - 3S_2$.

[129] Vezi și Exercițiul 5.5.16 și Exemplul 5.93.

(e) Să se determine tabloul v.a. S_3 care desemnează câștigul nostru total după extragerea primelor trei bile precum și valoarea așteptată a câștigului nostru.

Rezolvare:

Se poate folosi o structură de tip arbore și se observă că $S_2 = X_1 + X_2$ și $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$.

De asemenea, se poate folosi și schema hipergeometrică pentru a obține direct tabloul lui S_3.

2.4.27 Un examen oral constă în răspusul corect la un bilet de examinare ales, la întâmplare, din 25 de bilete. Dintre acestea doar 15 conțin subiecte învățate de studentul **L.**. Intră trei studenți (oarecare) la examenul oral și fiecare extrage, în ordine, câte un bilet. Fie X_i numărul de bilete favorabile pentru **L.**, extrase de studentul $i = \overline{1,3}$. Se notează cu $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i$, unde $n = \overline{1,3}$.

(a) Să se determine spațiul de probabilitate pe care se lucrează. Să se determine numărul de variante posibile de bilete care se pot extrage.

(b) Să se determine legea v.a. X_1. Apoi media și dispersia v.a. X_1.

(c) Să se determinea legea v.a. X_2 și X_3.

(d) Care este probabilitatea ca **L.** să promoveze examenul dacă este al treilea student[130] care alege biletul? dar dacă este al doilea student care alege biletul? dar dacă este primul student care alege biletul?

(e) Care este probabilitatea ca, dintre toate biletele extrase, unul singur să fie favorabil lui **L.**?

(f) Sunt v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,3}}$ independente? Să se determine legea și media lui S_2.

(g) Să se determine legea v.a. $X_1 \cdot X_2$. Să se calculeze dispersia lui S_2 (fără a folosi tabloul lui S_2).

(h) Care este semnificația v.a. S_3?

2.4.28 Fie două v.a. independente $X \sim \mathscr{B}(n_1, p)\,, Y \sim \mathscr{B}(n_2, p)$. Să se arate că[131]

$$\mathbb{P}\left(X = k \,|\, X + Y = m\right) = \frac{C_{n_1}^{k}\, C_{n_2}^{m-k}}{C_{n_1+n_2}^{m}},$$

pentru orice m și k astfel încât $m = \overline{0, n_1 + n_2}\,, k = \overline{0, n_1}$ și $m - k = \overline{0, n_2}$.

[130] Vezi și Exercițiul 1.10.8, Exercițiul 1.10.46 și Remarca 2.137.

[131] Vezi și Exercițiul 2.4.33 și Exercițiul 2.4.44.

Rezolvare:

Reamintim, vezi Propoziția 2.125, că $X+Y \sim \mathscr{B}(n_1+n_2, p)$, deci

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k|X+Y=m) &= \frac{\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{X+Y=m\})}{\mathbb{P}(X+Y=m)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=m-k\})}{\mathbb{P}(X+Y=m)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X=k)\cdot\mathbb{P}(Y=m-k)}{\mathbb{P}(X+Y=m)} \\
&= \frac{C_{n_1}^k p^k q^{n_1-k}\cdot C_{n_2}^{m-k} p^{m-k} q^{n_2-m+k}}{C_{n_1+n_2}^m p^m q^{n_1+n_2-m}} \\
&= \frac{C_{n_1}^k\cdot C_{n_2}^{m-k}}{C_{n_1+n_2}^m}.
\end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $m=\overline{0, n_1+n_2}$ este arbitrar fixat, în condițiile în care știm că a avut loc evenimentul $\{X+Y=m\}$, i.e. știm că v.a. $X+Y$ a luat valoarea m, obținem că v.a. (condiționată) X este distribuită hipergeometric de parametri n_1, n_2 și m.

2.4.29 Fie v.a. $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Să definim v.a. Y prin $Y=0$, dacă X este par și $Y=\dfrac{X+1}{2}$, dacă X este impar. Să se determine tabloul de repartiție al v.a. Y.

Rezolvare:

Avem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=0) &= \mathbb{P}(X \text{ este par}) \\
&= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ par}}}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=2i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2i}}{(2i)!}e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Pentru $k\geq 1$,

$$\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(X=2k-1)=\frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}e^{-\lambda}.$$

Se verifică și condiția $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k)=1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k) &= \mathbb{P}(Y=0)+\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2i}}{(2i)!} e^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j}}{j!} \\ &= 1.\end{aligned}$$

2.4.30 Fie v.a. $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Să definim v.a. Y prin $Y=\dfrac{X}{2}$, dacă X este par și $Y=\dfrac{1-X}{2}$, dacă X este impar. Să se determine tabloul de repartiție al v.a. Y.

Rezolvare:

Fie $k \in \mathbb{N}^{*}$. Dacă $X=2k$, atunci $Y=k$, iar dacă $X=2k+1$, atunci $Y=-k$, Deci, pentru orice $k \in \mathbb{N}^{*}$,

$$\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(X=2k)=\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda}$$

și

$$\mathbb{P}(Y=-k)=\mathbb{P}(X=2k+1)=\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\lambda},$$

iar

$$\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)=e^{-\lambda}+\frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda}=(1+\lambda) e^{-\lambda}.$$

Se verifică și faptul că $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(Y=k)=1$, deoarece

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(Y=k) &= \mathbb{P}(Y=0)+\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y=-k)+\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y=k) \\ &= (1+\lambda) e^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda} \\ &= (1+\lambda) e^{-\lambda}+e^{-\lambda} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\lambda^{j}}{j!}\end{aligned}$$

$$= (1+\lambda)\, e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} - 1 - \frac{\lambda}{1!} \right)$$
$$= 1.$$

2.4.31 Doi studenți au dat examenul scris la disciplina *P&S*. V.a. X și Y desemnează numărul de greșeli făcute de primul și respectiv al doilea student și presupunem că X și Y sunt distribuite Poisson (de parametri λ și respectiv μ) și că sunt independente între ele.

(a) Să se scrie tabloul vectorului aleator[132] (X, Y) . Să se determine parametrii distribuțiilor Poisson știind că numărul mediu de greșeli ale primului student este 7, iar pentru cel de-al doilea este 9. Să se arate că media și dispersia numărului de greșeli pe care le face primul student sunt egale între ele.

(b) Să se determine tipul distribuției[133] pe care îl urmează numărul total de erori făcute de cei doi studenți la examen. Care este probabilitatea ca cel mult o eroare să fie făcută de cei doi studenți împreună.

Rezolvare:

(a) Se calculează $\mathbb{E}(X), \mathrm{D}^2(X)$;

(b) Se arată că $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$; se determină apoi $P(X + Y \leq 1)$.

2.4.32 Fie X_t numărul de avioane de pasageri și Y_t numărul de avioane tip cargo care aterizează (într-un aeroport), independent între ele, într-un interval de lungime $t > 0$. Fie Z_t numărul total de avioane care sosesc în acel aeroport într-un interval de lungime t. Se știe că $X_t \sim \mathscr{P}(7t)$ și $Y_t \sim \mathscr{P}(t)$.

(a) Care este probabilitatea ca să nu aterizeze nici un avioan de pasageri în timpul unei ore? dar să aterizeze 5? dar cel mult 5?

(b) Să se determine numărul mediu de avioane de pasageri care sosesc într-un interval de 90 de minute (i.e. 1.5 ore) și apoi deviația standard a acestui număr de avioane?

(c) Să se determine funcția caracteristică asociată v.a. Z_t pentru un interval de 90 de minute, și apoi, folosind funcția caracteristică, media și deviația standard a v.a. Z_t.

(d) Să se determine, folosind, eventual, funcția caracteristică, tipul de distribuție al v.a. Z_t de la (c).

[132] Vezi Remarca 3.188 și Propoziția 3.190.

[133] Pentru o demonstrație alternativă vezi Exercițiul 4.2.13.

2.4.33 Fie două v.a. independente $X \sim \mathscr{P}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathscr{P}(\lambda_2)$. Să se arate că[134]

$$\mathbb{P}(X = k | X + Y = n) = C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $k = \overline{0, n}$.

Rezolvare:

Să observăm mai întâi, vezi Propoziția 2.165, că $X + Y \sim \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$. Deci

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k | X + Y = n) &= \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{X + Y = n\})}{\mathbb{P}(X + Y = n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = n - k\})}{\mathbb{P}(X + Y = n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = k) \cdot \mathbb{P}(Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} \\
&= \frac{\frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} \\
&= C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este arbitrar fixat, în condițiile în care știm că a avut loc evenimentul $\{X + Y = n\}$, i.e. știm că v.a. $X + Y$ a luat valoarea n, obținem că v.a. (condiționată) X este distribuită binomial de parametri n și $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

2.4.34 Fie v.a. $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție măsurabilă și mărginită. Să se arate că

$$\mathbb{E}(X \cdot f(X)) = \lambda \mathbb{E}(f(X + 1)).$$

Rezolvare:

Suntem în condițiile Teoremei 2.154, deci există media

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X \cdot f(X)) &= \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} k f(k) \cdot \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} f(k) \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

[134] Vezi și Exercițiul 2.4.28 și Exercițiul 2.4.44.

$$
\begin{aligned}
&= \lambda \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} f(k+1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} f(k+1) \cdot \mathbb{P}(X = k) \\
&= \lambda \mathbb{E}(f(X+1)).
\end{aligned}
$$

2.4.35 Fie v.a. $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Să se arate că

$$\mathbb{P}(X \geq k) < \mathbb{P}(X = k) \frac{k+1}{k+1-\lambda}, \quad \text{pentru orice } k > \lambda - 1.$$

Să se arate și:

$$\mathbb{P}(X > k) < \mathbb{P}(X = k), \quad \text{pentru orice } k > 2\lambda - 1.$$

Rezolvare:

Avem

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq k) &= \sum\nolimits_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{k+1} + \frac{\lambda^2}{(k+1)(k+2)} + \dots\right) \\
&< \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{k+1} + \frac{\lambda^2}{(k+1)^2} + \dots\right) \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(k+1)^i} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{k+1}} \\
&= \frac{k+1}{k+1-\lambda} \mathbb{P}(X = k).
\end{aligned}
$$

Deoarece $\frac{\lambda}{k+1-\lambda} < 1$, obținem și

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > k) &= \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X = k) \\
&< \frac{k+1}{k+1-\lambda} \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(X = k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{k+1-\lambda}\mathbb{P}(X=k) \\
&< \mathbb{P}(X=k).
\end{aligned}
$$

2.4.36 Probabilitatea unui arcaș de a atinge ținta este de $1/3$.

(a) Să se determine tabloul v.a. care are drept valori numărul de trageri înregistrate până când ținta este lovită (prima dată). Să se determine numărul mediu de trageri ce trebuie făcute până când ținta este atinsă.

(b) Aceleași cerințe și în cazul în care v.a. are drept valori numărul de eșecuri înregistrate până când ținta este atinsă.

(c) Să se determine tabloul v.a. care are drept valori numărul de trageri înregistrate până când ținta este atinsă de două ori.

Rezolvare:

(a) Dacă numărăm încercările până la primul *succes*, atunci v.a. este distribuită geometric cu tabloul

$$
X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 & \dots & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} & \dots \end{pmatrix}.
$$

Pentru a calcula media și dispersia acesteia folosim formulele (2.97) (sunt utile și diversele serii de puteri date de Nota 117):

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{p} = 3, \\
\mathrm{D}^2(X) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3} - 3^2 = \frac{q}{p^2} = 6.
\end{aligned}
$$

2.4.37 Începând cu o dată anume se ia în evidență fiecare nou născut la un spital până când se naște o fată. Să presupunem că probabilitatea ca să se nască o fată este $p \in (0,1)$. De asemenea, să presupunem că nașterile sunt independente.

(a) Să se determine, folosind, eventual, notațiile standard date de (1.33), tabloul v.a. X_1 care are drept valori numărul de nașteri observate până când se naște prima fată.

(b) Care este probabilitatea ca să fie înregistrate exact 5 nașteri până când se naște prima fată? Care este probabilitatea ca să fie înregistrate cel puțin 5 nașteri până când se naște prima fată? (i.e. $\mathbb{P}(X_1 > 5)$).

(c) Să se determine funcția de repartiție asociată v.a. X_1.

(d) Să se determine tabloul v.a. Y care are drept valori numărul de nașteri observate până când se nasc primele 2 fete.

(e) Să se determine tabloul v.a. Z care are drept valori numărul de nașteri observate până când se nasc primele 4 fete.

2.4.38 Un mesaj este trimis ca o succesiune de 0 și 1. Probabilitatea ca 0 să fie transmis, la un moment dat, este $1/3$. Fie v.a. X reprezentând numărul de cifre (1 sau 0) transmise succesiv și independent până la prima apariție a succesiunii $(1, 0)$.

Să se determine, folosind, eventual, notațiile standard date de (1.33), probabilitățile $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$, $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{P}(X = k)$, pentru $k \geq 2$, și apoi valoarea așteptată a v.a. X.

2.4.39 Un joc constă în aruncarea repetată a unei monede trucate (probabilitatea de a se obține Stema la o aruncare a monedei este de $1/3$). Mai întâi aruncă jucătorul J1, apoi J2, apoi J1 ș.a.m.d.. Jocul este câştigat de cel care obţine primul Stema (apoi jocul se oprește).

(a) Care este probabilitatea ca J1 să câştige după prima aruncare? Dar după primele două aruncări? Dar după primele trei? Dar după primele patru? etc.

(b) Să se determine probabilitatea ca J1 să câştige jocul? Să se determine tabloul v.a. X_1 care reprezintă numărul de Steme obținute de J1.

(c) Să se determine tabloul v.a. $\mathbb{1}_{\mathrm{P1}}$, unde P1 este evenimentul ca J1 să câștige competiția.

(d) Să se rezolve cerințele (a), (b) și (c) în cazul jucătorului J2.

Rezolvare:

Se pot folosi, eventual, notațiile standard date de (1.33).

2.4.40 O urnă conține a bile albe și b bile negre. Se extrag bile din urnă (punând după fiecare extragere bila înapoi). Fie[135] Y_i v.a. care drept valori numărul de bile albe obținute la extragerea $i \in \mathbb{N}^*$ și fie

$$N_k = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k,$$

[135] Familia de v.a. $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ se va numi **proces stochastic Bernoulli** de parametru p.

adică N_k este numărul total de bile albe obținute în $k \in \mathbb{N}^*$ extrageri.

De asemenea, definim[136]

$$S_1 = \inf \{k \in \mathbb{N}^* : N_k = 1\} . \tag{2.103}$$

(a) Să se determine tablourile v.a. Y_i, N_k și S_1.

(b) Să se arate, folosind semnificația lui N_k și a lui S_1, relația (2.100):

$$\{S_1 \leq k\} = \{N_k \geq 1\} .$$

Să se determine funcția de repartiție asociată v.a. S_1 și apoi să se deducă, din nou, tabloul v.a. S_1.

(c) Să se calculeze $\mathbb{E}(Y_i)$, $\mathrm{D}^2(Y_i)$ și să se arată că

$$\mathbb{E}(N_k) = k\frac{a}{a+b}, \quad \mathrm{D}^2(N_k) = k\frac{ab}{(a+b)^2}$$

și

$$\mathbb{E}(S_1) = \frac{a+b}{a}, \quad \mathrm{D}^2(S_1) = \frac{b(a+b)}{a^2} .$$

2.4.41 O urnă conține a bile albe și b bile negre. Se extrag bile din urnă (punând după fiecare extragere bila înapoi). Fie Y_i v.a. care drept valori numărul de bile albe obținute la extragerea $i \in \mathbb{N}^*$ și fie[137]

$$N_k = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k ,$$

adică N_k este numărul total de bile albe obținute în $k \in \mathbb{N}^*$ extrageri.

---

[136] Astfel, putem spune că S_1 este **numărul de extrageri necesare până la prima apariție a *Succesului*** (definit ca fiind evenimentul obținerii unei bile albe) sau că S_1 este **rangul extragerii la care se obține pentru prima dată *Succesul*** sau că S_1 este **momentul primei apariții a *Succesului*** sau că S_1 este **timpul de așteptare până la apariția primului *Succes*** într-un șir de încercări independente de tip Bernoulli, cu probabilitatea p de obținere a *Succesului*; vezi și Remarca 2.179.

Se va arăta că S_1 urmează distribuția geometrică de parametru p.

Aceasta este o metodă de a genera v.a. distribuite geometric folosind v.a. distribuite Bernoulli.

Putem defini v.a. S_1 și în modul următor:

$$S_1 = \sup \{k \in \mathbb{N}^* : N_k < 1\} = \sup \{k \in \mathbb{N}^* : N_k = 0\} .$$

Similar, se poate arăta că v.a. $S_1 + 1$ urmează distribuția geometrică de parametru p.

[137] Vezi și definițiile și notațiile similare, din cazul continuu, date de Remarca 3.146, Remarca 3.150 precum și Exercițiul 3.6.33 asociat.

De asemenea, definim[138] $S_0 = 0$ și

$$S_n = \inf\{k \in \mathbb{N}^* : N_k = n\}, \quad \text{pentru } n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.104}$$

și[139]

$$X_i = S_i - S_{i-1}, \quad \text{pentru } i \in \mathbb{N}^*. \tag{2.105}$$

(a) Să se determine tablourile v.a. Y_i, N_k și S_2.

(b) Să se arate, folosind semnificația lui N_k și a lui S_2, relația (2.100):

$$\{S_2 \le k\} = \{N_k \ge 2\}.$$

Să se determine funcția de repartiție asociată v.a. S_2 și apoi să se deducă, din nou, tabloul v.a. S_2.

(c) Să se arate, folosind semnificația lui N_k și a lui S_n, relația (2.100):

$$\{S_n \le k\} = \{N_k \ge n\}.$$

Să se determine funcția de repartiție asociată v.a. S_n și apoi tabloul v.a. S_n, pentru $n \ge 3$.

(d) Să se determine tabloul v.a. X_i.

2.4.42 Fie X o v.a. discretă cu probabilitățile date de $\mathbb{P}(X = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$, cu $a > 0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Să se calculeze media și dispersia v.a. X.

---

[138] Astfel, putem spune că S_2 este **numărul de extrageri necesare până la apariția celui de-al doilea *Succes*** (definit ca fiind evenimentul obținerii unei bile albe) sau că S_2 este **rangul extragerii la care se obține al doilea *Succes*** sau că S_2 este **momentul celei de a doua apariții a *Succesului*** sau că S_2 este **timpul de așteptare până la a doua apariție a *Succesului*** într-un șir de încercări independente de tip Bernoulli, cu probabilitatea p de obținere a *Succesului*; vezi și Remarca 2.179. Similar se obține și semnificația v.a. S_n, pentru $n \ge 3$.

Se va arăta că S_2 urmează distribuția binomială de exponent negativ de parametri 2 și p.

Aceasta este o metodă de a genera v.a. distribuite binomial de exponent negativ folosind v.a. distribuite Bernoulli.

Putem defini v.a. S_2 și în modul următor:

$$S_2 = \sup\{k \in \mathbb{N}^* : N_k < 2\} = \sup\{k \in \mathbb{N}^* : N_k \le 1\}.$$

Similar, se poate arăta că v.a. $S_2 + 1$ urmează distribuția binomială de exponent negativ de parametri 2 și p.

[139] Pentru semnificația v.a. X_i vezi Remarca 2.179 și Nota 121.

Rezolvare:

Avem (sunt utile și diversele serii de puteri date de Nota 117):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} k\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} \\ &= \frac{a}{(1+a)^2}\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{a}{1+a}\right)^{k-1} \\ &= \frac{a}{(1+a)^2}\frac{1}{\left(1-\frac{a}{1+a}\right)^2} \\ &= a,\end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} k^2\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} \\ &= \frac{a}{(1+a)^2}\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{a}{1+a}\right)^{k-1} \\ &= \frac{a}{(1+a)^2}\frac{1+\frac{a}{1+a}}{\left(1-\frac{a}{1+a}\right)^3} \\ &= a(1+2a).\end{aligned}$$

Deci $\mathrm{D}^2(X) = a(1+2a) - a^2 = a + a^2$.

2.4.43 Fie v.a. $X \sim \mathscr{G}(p)$. Să se determine $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

Rezolvare:

Folosind formula de calcul a mediei dată de Teorema 2.154 (formula de transfer), obținem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k}\mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k}pq^{k-1} \\ &= \frac{p}{q^2}\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}q^{k+1}\end{aligned}$$

$$= \frac{p}{q^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}q^{k+1} - q\right)$$
$$= \frac{p}{q^2}\left(\ln\left(\frac{1}{1-q}\right) - q\right)$$
$$= \frac{p}{q^2}\left(-\ln p - q\right)$$

(sunt utile și diversele serii de puteri date de Nota 117).

2.4.44 Fie două v.a. independente $X, Y \sim \mathscr{G}(p)$. Să se arate că[140]

$$\mathbb{P}(X = k | X + Y = n+1) = \frac{1}{n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $k = \overline{1, n}$.

Rezolvare:

Avem

$$\mathbb{P}(X = k | X + Y = n+1) = \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{X + Y = n+1\})}{\mathbb{P}(X + Y = n+1)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = n-k+1\})}{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = n-i+1\})}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(\{X = k\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y = n-k+1\})}{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(\{X = i\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y = n-i+1\})}$$
$$= \frac{pq^{k-1} \cdot pq^{n-k}}{\sum_{i=1}^{n} pq^{i-1} \cdot pq^{n-i}}$$
$$= \frac{q^{n-1}}{\sum_{i=1}^{n} q^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{n}.$$

Prin urmare, dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este arbitrar fixat, în condițiile în care știm că a avut loc evenimentul $\{X + Y = n+1\}$, i.e. știm că v.a. $X + Y$ a luat valoarea $n+1$, obținem că v.a. (condiționată) X este distribuită uniform de tip discret cu n valori (vezi Remarca 2.111).

[140] Vezi și Exercițiul 2.4.28 și Exercițiul 2.4.33.

2.4.45 Fie v.a. $X \sim \mathscr{G}(p)$. Să se arate că pentru orice $k, n \in \mathbb{N}$ are loc

$$\boxed{\mathbb{P}(X = n + k | X > n) = \mathbb{P}(X = k).} \tag{2.106}$$

Rezolvare:

În cazul în care $k = 0$ se obține egalitatea.

Să luăm $k > 0$. Conform relației (2.98),

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = n + k | X > n) &= \frac{\mathbb{P}(\{X = n + k\} \cap \{X > n\})}{\mathbb{P}(X > n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = n + k)}{\mathbb{P}(X > n)} \\
&= \frac{pq^{n+k-1}}{q^n} \\
&= pq^{k-1} \\
&= \mathbb{P}(X = k),
\end{aligned}$$

deoarece $\{X = n + k\} \subset \{X > n\}$.

Știm că o v.a. $X \sim \mathscr{G}(p)$ reprezintă numărul de încercări (extrageri, cu revenire, a unei bile dintr-o urnă) până când se obține pentru prima dată evenimentul A, cu $\mathbb{P}(A) = p$ dată. Egalitatea (2.106) arată că dacă A nu s-a produs până la încercarea n, atunci numărul k de încercări rămase pentru obținerea pentru prima dată a lui A are aceeași distribuție ca numărul de încercări pentru obținerea lui A într-o distribuție geometrică nouă (ca și cum nu s-ar fi făcut deja cele n încercări).

Astfel, spunem că distribuția geometrică are proprietatea de a fi „**fărămemorie**". Acest fapt este legat de jocurile de noroc, deoarece, conform egalității obținute, nici o strategie bazată pe rezultatele obținute în trecut nu poate ajuta jucătorul în deciziile viitoare.

2.4.46 Fie v.a. $X \sim \mathscr{G}(p)$. Să se arate că pentru orice $k, n \in \mathbb{N}$ are loc

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq n + k | X > n) = \mathbb{P}(X \geq k).}$$

Similar

$$\boxed{\mathbb{P}(X > n + k | X > n) = \mathbb{P}(X > k).} \tag{2.107}$$

Rezolvare:

În cazul în care $k > 0$ avem, conform relației (2.98),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X \geq n+k | X > n\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\{X \geq n+k\} \cap \{X > n\}\right)}{\mathbb{P}\left(X > n\right)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(X \geq n+k\right)}{\mathbb{P}\left(X > n\right)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(X > n+k\right) + \mathbb{P}\left(X = n+k\right)}{\mathbb{P}\left(X > n\right)} \\ &= \frac{q^{n+k} + pq^{n+k-1}}{q^n} \\ &= q^k + pq^{k-1} \\ &= \mathbb{P}\left(X > k\right) + \mathbb{P}\left(X = k\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \geq k\right),\end{aligned}$$

deoarece $\{X \geq n+k\} \subset \{X > n\}$.

Egalitățile obținute arată, în principal, același lucru ca egalitatea (2.106): dacă știm că X depășește valoarea n, atunci probabilitatea ca X să depășească cu cel puțin k unități pe n este chiar probabilitatea ca X să fie cel puțin k.

De asemenea, vezi Exercițiul 2.4.47, lipsa de memorie a unei v.a. discrete, dată de egalitatea (2.107), implică faptul că v.a. este distribuită geometric, prin urmare (2.107) caracterizează distribuția geometrică.

Deci distribuția geometrică este singura[141] distribuție discretă „fără memorie”.

2.4.47 Dacă X este o v.a. discretă, cu valori numere naturale nenule, care satisface proprietatea $\mathbb{P}\left(X > n+k | X > n\right) = \mathbb{P}\left(X > k\right)$, pentru orice $k, n \in \mathbb{N}$, atunci există $p \in [0,1]$ astfel încât $X \sim \mathscr{G}\left(p\right)$.

Rezolvare:

Să notăm cu $G\left(n\right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\left(X > n\right)$, unde $n \in \mathbb{N}$. Egalitatea dată în enunț devine

$$\frac{\mathbb{P}\left(\{X > n+k\} \cap \{X > n\}\right)}{\mathbb{P}\left(X > n\right)} = G\left(k\right)$$

[141] Singura distribuție continuă „fără memorie” este cea exponențială: vezi Exercițiul 3.6.11 și Exercițiul 3.6.12.

sau, echivalent,

$$\frac{\mathbb{P}(X > n+k)}{\mathbb{P}(X > n)} = G(k) \quad \Leftrightarrow \quad G(n+k) = G(k)\,G(n)\,,$$

pentru orice $k, n \in \mathbb{N}$.

Dând valori particulare se obține $G(n) = (G(1))^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Să notăm $p \stackrel{\text{def}}{=\!=} 1 - G(1)$ și $q \stackrel{\text{def}}{=\!=} G(1)$.

Obținem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - G(1) = p, \\
\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(X \leq 2) \\
&= 1 - G(2) \\
&= 1 - q^2 \\
&= p(1+q) \\
&= p + pq.
\end{aligned}$$

Deci $\mathbb{P}(X = 2) = pq$.

Se va obține $\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, adică $X \sim \mathscr{G}(p)$.

2.4.48 Fie X, Y două v.a. independente astfel încât $X \sim \mathscr{G}(p_1)$ și $Y \sim \mathscr{G}(p_2)$. Să se determine[142] funcția de repartiție asociată v.a. V precum și legea v.a. V, unde

$$V = \min(X, Y).$$

Rezolvare:

Funcția de repartiție a v.a. V este

$$\begin{aligned}
F_V(n) &= 1 - \mathbb{P}(\min(X,Y) > n) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X > n, Y > n) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X > n) \cdot \mathbb{P}(Y > n) \\
&= 1 - (1 - F_X(n))(1 - F_Y(n)) \\
&= 1 - q_1^n q_2^n,
\end{aligned}$$

[142] Vezi și Exercițiul 3.6.30.

deoarece F_X, F_Y sunt date de (2.98).

Prin urmare, $F_V(n) = 1 - (q_1 q_2)^n$, adică $V \sim \mathscr{G}(1 - q_1 q_2)$.

2.4.49 Fie v.a. $X \sim \mathscr{G}(p)$. Să definim $Y = \max(X, m)$ și $Z = \min(X, m)$, unde $m \in \mathbb{N}^*$. Să se determine tabloul de repartiție al v.a. Y. Să se arate că $Y + Z = X + m$. Să se determine $\mathbb{E}(Y)$ și $\mathbb{E}(Z)$.

Rezolvare:

Să observăm, mai întâi, că, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\{Y = k\} = \{X \leq m, m = k\} \cup \{X \geq m, X = k\}.$$

Dacă $m < k$, atunci

$$\mathbb{P}(Y = k) = 0 + \mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1},$$

dacă $m > k$, atunci

$$\mathbb{P}(Y = k) = 0,$$

iar dacă $m = k$, atunci, conform relației (2.98),

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X \leq m) = 1 - q^m.$$

Tabloul lui Y este

$$Y : \begin{pmatrix} m & m+1 & m+2 & m+3 & \ldots \\ 1 - q^m & pq^m & pq^{m+1} & pq^{m+2} & \ldots \end{pmatrix}$$

Avem

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{k=m}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) &= 1 - q^m + pq^m + pq^{m+1} + pq^{m+2} + \ldots \\ &= (1 - q)\left(1 + q + \ldots + q^{m-1}\right) + pq^m + pq^{m+1} + pq^{m+2} + \ldots \\ &= p + pq + \ldots + pq^{m-1} + pq^m + pq^{m+1} + \ldots \\ &= p \frac{1}{1 - q} = 1. \end{aligned}$$

Media este[143], folosind și dezvoltările date de Nota 117,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum\nolimits_{k=m}^{\infty} k\mathbb{P}(Y = k)$$

[143] Derivând identitatea $\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ obținem, pentru orice $x \neq 1$,

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right)' = \frac{-(n+1)x^n(1 - x) + \left(1 - x^{n+1}\right)}{(1 - x)^2}.$$

$$
\begin{aligned}
&= m\left(1-q^{m}\right)+\sum\nolimits_{k=m+1}^{\infty} kpq^{k-1} \\
&= m\left(1-q^{m}\right)+p\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}-p\sum\nolimits_{k=1}^{m} kq^{k-1} \\
&= m-mq^{m}+p\frac{1}{(1-q)^{2}}-p\frac{-(m+1)\,q^{m}\,(1-q)+\left(1-q^{m+1}\right)}{(1-q)^{2}} \\
&= m-mq^{m}+\frac{1}{p}-\frac{-(m+1)\,pq^{m}+1-q^{m+1}}{p} \\
&= m+\frac{q^{m}\,(p+q)}{p}=m+\frac{q^{m}}{p}.
\end{aligned}
$$

Pentru orice $k \in \mathbb{N}^{*}$,

$$\{Z=k\}=\{X\leq m, X=k\}\cup\{X\geq m, m=k\}.$$

Dacă $m<k$, atunci

$$\mathbb{P}(Z=k)=\mathbb{P}(X\leq m, X=k)+\mathbb{P}(X\geq m, m=k)=0$$

dacă $m>k$, atunci

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \mathbb{P}(X\leq m, X=k)+\mathbb{P}(X\geq m, m=k) \\
&= \mathbb{P}(X=k)+0 \\
&= pq^{k-1},
\end{aligned}
$$

iar dacă $m=k$, atunci, conform relației (2.98),

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \mathbb{P}(X\geq m) \\
&= \mathbb{P}(X>m)+\mathbb{P}(X=m) \\
&= q^{m}+pq^{m-1}=q^{m-1}.
\end{aligned}
$$

Tabloul lui Z este

$$Z:\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m-2 & m-1 & m \\ p & pq & \ldots & pq^{m-3} & pq^{m-2} & q^{m-1} \end{pmatrix}$$

Avem

$$\sum\nolimits_{k=1}^{m}\mathbb{P}(Z=k)=p+pq+\ldots+pq^{m-2}+q^{m-1}$$

$$= p\frac{1-q^{m-1}}{1-q} + q^{m-1}$$
$$= 1 - q^{m-1} + q^{m-1} = 1.$$

Media este

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum\nolimits_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(Z=k) \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{m-1} kpq^{k-1} + mq^{m-1} \\
&= p\sum\nolimits_{k=1}^{m-1} kq^{k-1} + mq^{m-1} \\
&= p\frac{-mpq^{m-1}+1-q^{m}}{(1-q)^{2}} + mq^{m-1} \\
&= \frac{-mpq^{m-1}+1-q^{m}}{p} + mq^{m-1} \\
&= \frac{1-q^{m}}{p}.
\end{aligned}$$

2.4.50 Fie șirul de v.a. discrete și cu valori nenegative $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și N o v.a. de tip discret cu valori în $\mathbb{N}^*$ și independentă de șirul de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Să definim S_N ca fiind **suma aleatoare** de v.a. dată de

$$S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

(prin convenție, dacă $N = 0$, atunci $S_N = 0$).

(a) Să se determine legea v.a. S_N.

(b) Să presupunem că v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și N au media finită, iar v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ au aceeași medie. Să se arate că[144]

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X_1). \tag{2.108}$$

[144] Formula (2.108) obținută se numește **identitatea lui Wald** sau **ecuația lui Wald** și reprezintă formula de calcul a mediei sumei cu un număr aleator de termeni $S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$. Se poate arăta (vezi [28, Theorem 5.5.3]) că formula (2.108) a lui Wald are loc în următoarele condiții, mai generale: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt v.a. nenegative oarecare (nu neapărat discrete), iar N este o v.a. discretă, cu valori în $\mathbb{N}^*$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, v.a. $\mathbb{1}_{\{N=n\}}$ depinde doar de v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
În cazul unui șir $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a continue formula (2.108) a lui Wald are aceeași formă; vezi Exercițiul 3.6.99.

(c) În cazul în care $X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$, unde $p \in (0,1)$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, și $N \sim \mathscr{P}(\lambda)$, unde $\lambda > 0$, să se determine tipul de distribuție al v.a. S_N.

Rezolvare:

Să observăm, mai întâi, că, în cazul particular în care N este un număr natural arbitrar fixat, adică N este o v.a. constantă (din $\mathbb{N}^*$), se obține, evident,

$$\mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{k=1}^{N} X_k\right) = \sum\nolimits_{k=1}^{N} \mathbb{E}(X_k) = \sum\nolimits_{k=1}^{N} \mu = \mu \cdot N = \mu \cdot \mathbb{E}(N).$$

Deci identitatea (2.108) a lui Wald generalizează acest rezultat la cazul când suma nu mai este cu un număr determinist de termeni (i.e. numărul de termeni N este v.a. constantă) ci se adună un număr N aleator de termeni (i.e. numărul de termeni N este v.a. discretă oarecare).

În cazul general, al unei v.a. N, v.a. $S_N : \Omega \to \mathbb{R}$ depinde de ω astfel:

$$S_N(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + \ldots + X_{N(\omega)}(\omega),$$

deoarece și N este tot o v.a..

(a) Fie $x \in \mathbb{R}$. Vom determina $\mathbb{P}(S_N = x)$ folosind legea probabilității totale (1.22), asociată sistemului complet de evenimente $(\{N = n\})_{n\in\mathbb{N}}$, precum și independența v.a. N în raport cu v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deci și cu v.a. S_N:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_N = x) &= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_N = x, N = n)\\ &= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = x, N = n)\\ &= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = x)\,\mathbb{P}(N = n).\end{aligned}$$

Să observăm că putem determina legea v.a. S_N și în cazul general, al unui șir de v.a. nenegative oarecare. Astfel vom determina $\mathbb{P}(S_N \in A)$, unde $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, folosind tot legea probabilității totale (1.22):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_N \in A) &= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_N \in A, N = n)\\ &= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \in A, N = n)\\ &= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \in A)\,\mathbb{P}(N = n).\end{aligned} \tag{2.109}$$

(b) Avem[145]

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_N) &= \sum\nolimits_{x\in S_N(\Omega)} x\mathbb{P}(S_N = x)\\ &= \sum\nolimits_{x} x\left(\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = x)\,\mathbb{P}(N = n)\right)\\ &= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\nolimits_{x} x\mathbb{P}(S_n = x)\,\mathbb{P}(N = n)\right)\\ &= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(N = n)\left(\sum\nolimits_{x} x\mathbb{P}(S_n = x)\right)\\ &= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{E}(S_n)\\ &= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(N = n)\,n\mathbb{E}(X_1)\\ &= \mathbb{E}(X_1)\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(N = n)\\ &= \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(N),\end{aligned}$$

deoarece

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = n\mathbb{E}(X_1).$$

Prin urmare, s-a obtinut (2.108).

Să observăm că putem demonstra (2.108) folosind formula (2.109), în cazul $A = (k,\infty)$, și formula (2.53) de calcul a mediei unei v.a. discrete nenegative folosind funcția de repartiție[146]:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_N) &= \sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(S_N > k)\\ &= \sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(S_n > k)\,\mathbb{P}(N = n)\\ &= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(S_n > k)\,\mathbb{P}(N = n)\end{aligned}$$

[145] Pentru a putea schimba ordinea de sumare trebuie să folosim un rezultat teoretic de tip Fubini care să ne permită ca **o sumă infinită să comute cu o altă sumă infinită** (vezi Nota 79).

În acest caz folosim faptul că seria iterată care apare în a doua egalitate este absolut convergentă (la $\mathbb{E}(S_N)$) ceea ce va permite ca cele două sume infinite să comute.

[146] Pentru a putea schimba ordinea de sumare trebuie să folosim un rezultat teoretic de tip Fubini care să ne permită ca **o sumă infinită să comute cu o altă sumă infinită** (vezi Nota 79).

În acest caz folosim faptul că seria iterată care apare în a doua egalitate este absolut convergentă (la $\mathbb{E}(S_N)$) ceea ce va permite ca cele două sume infinite să comute.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{P}(N=n) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n > k) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\, \mathbb{E}(S_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\, n\mathbb{E}(X_1) \\
&= \mathbb{E}(X_1) \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(N=n) \\
&= \mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{E}(N),
\end{aligned}
$$

deoarece

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n\mathbb{E}(X_1).$$

Prin urmare s-a obtinut, din nou, formula (2.108).

Pentru o altă demonstrație a formulei (2.108), în cazul unui șir de v.a. ne-negative $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ oarecare (nu neapărat discrete), vezi [35, Theorem 5.5] (caz în care trebuie să folosim egalitatea (5.17) conform căreia media comută cu o sumă infinită de v.a.). Aceeași metodă este utilă și în determinarea formulei de calcul a dispersiei sumei S_N cu un număr aleator de termeni.

(c) Deoarece $X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$, obținem că v.a. S_N ia valori în $\mathbb{N}$.

Folosind Remarca 2.126 observăm că $S_n \sim \mathscr{B}(n,p)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deci $\mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, pentru orice $0 \le k \le n$, și $\mathbb{P}(S_n = k) = 0$, pentru orice $k > n$.

Prin urmare, pentru orice $k \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_N = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_N = k, N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = k, N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\, \mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k p^k q^{n-k} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \frac{p^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} q^{n-k} \lambda^n \\
&= \frac{p^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} q^m \lambda^{m+k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum\nolimits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (\lambda q)^m \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda q} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p},
\end{aligned}
$$

adică suma aleatoare $S_N \sim \mathscr{P}(\lambda p)$.

Capitolul 3

Variabile aleatoare continue

Fie $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un spațiu de probabilitate. Vorbind neriguros, spunem că v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este de tip continuu dacă poate lua orice valoare dintr-un interval, posibil nemărginit, $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

În cazul v.a. continue nu ne interesează probabilitatea ca X să ia o singură valoare ci doar probabilități de forma $\mathbb{P}(X < a)$ sau $\mathbb{P}(a < X < b)$, deoarece vom vedea că probabilitatea $\mathbb{P}(X = a) = 0$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

O v.a. continuă este bine determinată dacă se cunoaște fie funcția de repartiție F asociată ei (vezi Definiția 2.9) fie densitatea de repartiție f (aceasta este mai importantă pentru o v.a. continuă, deoarece ea suplinește tabloul de repartiție din cazul v.a. discrete).

Dacă X este o v.a. continuă atunci vom vedea că funcția ei de repartiție F_X este funcție continuă (ceea ce justifică și numele v.a.), prin urmare graficul acestei funcții este o curbă plană continuă, spre deosebire de v.a. discrete când F_X este o funcție în scară (constantă pe porțiuni, nedescrescătoare și cu un număr numărabil de salturi).

3.1 Densitatea de repartiție

Definiția 3.1 *Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o* **densitate de repartiție** *(sau* **densitate de probabilitate***) dacă:*

(i) $f(x) \geq 0$, *pentru orice $x \in \mathbb{R}$;*

(ii) *f este integrabilă Lebesgue pe $\mathbb{R}$, în raport cu măsura Lebesgue λ, cu*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\lambda(dt) = 1.$$

Remarca 3.2 Având în vedere că f este nenegativă, avem (vezi [49, Theorem 5.3-10.]) că dacă f este integrabilă Riemann pe $\mathbb{R}$, atunci f este și integrabilă Lebesgue pe $\mathbb{R}$, în raport cu măsura Lebesgue λ, caz în care cele două integrale coincid și astfel

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\lambda(dt) = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 1.}$$

De aceea vom putea lucra, de fapt, cu funcții de densitate integrabile Riemann pe $\mathbb{R}$ și, respectiv, cu integrale Riemann pe $\mathbb{R}$. ◇

Exemplul 3.3 Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de[147] $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$ este o densitate de repartiție.

Într-adevăr, $f \geq 0$ pe $\mathbb{R}$ și

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left.\frac{-1}{x}\right|_{x=1}^{x=\infty} = 1.$$

◇

Definiția 3.4 *Să considerăm o v.a. X pentru care există o densitate de repartiție $f_X : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ astfel încât funcția de repartiție F_X, dată de (2.3), asociată v.a. X, se poate scrie sub forma*[148]

$$F_X(x) = \int_{(-\infty,x]} f_X(t)\,\lambda(dt), \quad \textit{pentru orice } x \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

[147] Prin convenție, vom considera că produsul

$$g(x)\cdot \mathbb{1}_A(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} g(x), & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

adică $g(x)\cdot\mathbb{1}_A(x)$ este 0 ori de câte ori $x \notin A$, indiferent daca funcția g este sau nu bine definită pe domeniul $\mathbb{R}\setminus A$.

[148] Pentru formula similară din cazul v.a. discrete vezi formula (2.30) (în cazul în care scriem densitatea f_X cu ajutorul funcției delta a lui Dirac, iar scrierea (2.30) este formală) sau formula (2.41) (în cazul în care scriem densitatea f_X cu ajutorul măsurii Dirac).

unde λ este măsura Lebesgue.

În acest caz, funcția f_X se numește **densitatea de repartiție** *(sau* **densitatea de probabilitate** *sau* **densitatea***) asociată v.a. X, iar v.a. X se numește* **v.a. de tip continuu**[149].

Remarca 3.5 Vezi Remarca 3.2: având în vedere că f este nenegativă, avem că dacă f este integrabilă Riemann pe $\mathbb{R}$, atunci f este și integrabilă Lebesgue pe $\mathbb{R}$, în raport cu măsura Lebesgue λ, caz în care, pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \int_{(-\infty,x]} f_X(t)\, \lambda(dt) = \int_{(-\infty,x]} f_X d\lambda$$

(vezi și relațiile (3.2) și (3.3) din cazul v.a. de tip absolut continue).

De aceea vom putea lucra, de fapt, cu funcții de repartiție exprimate cu ajutorul integralelor Riemann. ◇

Remarca 3.6 Evident, având în vedere formula de reprezentare (3.1), obținem că funcția de repartiție F_X satisface proprietățile caracteristice date de Propoziția 2.13, precum și proprietățile suplimentare date de Propoziția 2.17. ◇

Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o densitate de repartiție, atunci se poate demonstra (vezi Propoziția 3.95) că există un spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ și o v.a. definită pe acesta astfel încât f este densitatea de repartiție asociată lui X. Prin urmare, are loc următoarea caracterizare.

Propoziția 3.7 *Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este densitatea de repartiție a unei v.a. dacă și numai dacă f satisface cele două condiții din Definiția 3.1.*

Remarca 3.8 Densitatea asociată unei v.a. care urmează o anumită lege nu este unică (în sensul egalității peste tot), dar **densitatea asociată unei v.a. care urmează o anumită lege (dată în prealabil) este unică**[150] **în sensul egalității aproape peste tot**.

[149] Vezi și clasificarea riguroasă dată de Remarca 3.14, mai precis v.a. de tip absolut continuu.

[150] Pentru alte funcții care determină în mod unic legea unei v.a. vezi Remarca 2.16, Remarca 4.19 și Remarca 4.34 (inclusiv Teorema 4.35).

Astfel, dacă $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sunt două funcții integrabile Riemann[151] pe $\mathbb{R}$, atunci:

> f, g sunt două densități pentru o v.a. care urmează o lege dată
>
> dacă și numai dacă $\quad f = g \quad$ a.p.t.[152] pe $\mathbb{R}$
>
> (în raport cu măsura Lebesgue).

Demonstrația sensului direct se bazează pe următoarele două rezultate:

- dacă f este o funcție nenegativă și dacă f este integrabilă Riemann pe $\mathbb{R}$, atunci (vezi Remarca 3.2) f este integrabilă Lebesgue pe $\mathbb{R}$, în raport cu măsura Lebesgue λ, iar cele două integrale coincid, i.e. $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$;
- dacă f și g sunt funcții integrabile Lebesgue pe $\mathbb{R}$, în raport cu măsura Lebesgue λ, și dacă funcțiile de repartiție coincid, deci

$$\int_{(-\infty,x]} f(t)\, \lambda(dt) = \int_{(-\infty,x]} g(t)\, \lambda(dt), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

atunci[153] $f = g$ a.p.t. pe $\mathbb{R}$, în raport cu măsura Lebesgue λ.

---

151 Dacă cele două funcții sunt integrabile Lebesgue pe $\mathbb{R}$, în raport cu măsura Lebesgue, atunci rezultatul enunțat se menține.

152 Fie spațiul măsurabil $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ înzestrat cu o măsură μ. Spunem că o proprietate $\mathscr{A}$ are loc $\mu-$**aproape pentru toți** $x \in \mathbb{R}$ (notat $\mu-$**a.p.t.** $x \in \mathbb{R}$) sau $\mu-$**aproape peste tot pe** $\mathbb{R}$ (notat $\mu-$**a.p.t.** pe $\mathbb{R}$) dacă există mulțimea neglijabilă $N \subset \mathbb{R}$ (i.e. există $N_1 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ cu $N \subseteq N_1$ și $\mu(N_1) = 0$) astfel încât proprietatea $\mathscr{A}$ are loc pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus N$ (vezi Nota 9, Nota 58 și Nota 154).

O altă variantă posibilă de definiție este următoarea: spunem că o proprietate $\mathscr{A}$ are loc $\mu-$**aproape pentru toți** $x \in \mathbb{R}$ sau $\mu-$**aproape peste tot pe** $\mathbb{R}$ dacă există mulțimea neglijabilă $N \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ (deci avem că $\mu(N) = 0$) astfel încât proprietatea $\mathscr{A}$ are loc pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus N$.

153 Vezi și Nota 76: dacă are loc egalitatea următoarelor integrale Lebesgue, în raport cu măsura Lebesgue λ :

$$\int_E g(t)\lambda(dt) = \int_E h(t)\lambda(dt), \quad \text{pentru orice mulțime măsurabilă } E,$$

atunci $g = h$, a.p.t. pe $\mathbb{R}$, în raport cu măsura Lebesgue (pentru demonstrație vezi [24, Lemma 5.11]).

Echivalent, dacă are loc egalitatea următoarelor integrale Lebesgue, în raport cu măsura λ :

$$\int_{(-\infty,x]} g(t)\lambda(dt) = \int_{(-\infty,x]} h(t)\lambda(dt), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

Invers, dacă avem o funcție de densitate f_X asociată unei v.a. X, iar g este o funcție obținută prin modificarea lui f_X într-o mulțime neglijabilă[154] (în raport cu măsură Lebesgue) de puncte, i.e. $f_X = g$ a.p.t. pe $\mathbb{R}$, în raport cu măsura Lebesgue, astfel încât g rămâne măsurabilă pe $\mathbb{R}$, atunci g este și ea o funcție de densitate pentru o v.a. Y cu aceeași funcție de repartiție ca și X.

Într-adevăr, modificând f_X într-o mulțime neglijabilă de puncte, valoarea integralei Lebesgue nu se modifică, iar integrala Lebesgue coincide cu integrala Riemann, deci

$$F_X(x) = \int_{(-\infty,x]} f_X \, d\lambda = \int_{(-\infty,x]} g \, d\lambda = \int_{-\infty}^{x} g(t)\, dt = G(x),$$

adică funcția de repartiție asociată densității g coincide cu funcția de repartiție asociată densității f_X.

Prin urmare, este suficient să cunoaștem o densitate asociată unei v.a. (de lege dată) în orice punct din $\mathbb{R}$ exceptând, eventual, o mulțime numărabilă de puncte.

$\diamond$

Exemplul 3.9 Dacă definim $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ și $g(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, atunci ambele funcții sunt densități. În plus, $f = g$ a.p.t. pe $\mathbb{R}$ (în raport cu măsura Lebesgue) și ambele sunt densități asociate v.a. X și respectiv Y cu funcțiile de repartiție $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} f_Y(t)\, dt = F_Y(x)$, deci

$$F_X(x) = F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases}$$

atunci $g = h$, a.p.t. pe $\mathbb{R}$, în raport cu măsura Lebesgue.

Pentru proprietatea similară din cazul integralei Riemann vezi [58, Propoziția 9.2.13].

[154] Spunem că mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ este **nulă** sau **neglijabilă** în raport cu măsura μ pe $\mathbb{R}$ dacă există mulțimea $N \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ cu $A \subseteq N$ și astfel încât $\mu(N) = 0$ (vezi Nota 9, Nota 58 și Nota 152).

Evident, mulțimea $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ este **nulă** sau **neglijabilă** în raport cu măsura μ pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\mu(A) = 0$.

adică X și Y sunt identic distribuite. Să observăm că $X, Y \sim \mathcal{U}[0,1]$.

Deci, dacă v.a. $X \sim \mathcal{U}[0,1]$, atunci putem să considerăm că X are densitatea $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ sau $g(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, cu $x \in \mathbb{R}$. $\diamond$

Exemplul 3.10 Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

este o densitate de repartiție.

Evident, $f \geq 0$ pe $\mathbb{R}$. Se poate arăta că f nu este integrabilă Riemann pe $[0,1]$, dar $f = 1$, a.p.t. pe $\mathbb{R}$ (în raport cu măsura Lebesgue), deci f este integrabilă Lebesgue pe $[0,1]$, iar integrala Lebesgue este dată de

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(dx) &= \int_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} f(x)\lambda(dx) + \int_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} f(x)\lambda(dx) + \int_{\mathbb{R}\setminus[0,1]} f(x)\lambda(dx) \\ &= \int_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} 1\lambda(dx) + \int_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} 0\lambda(dx) + \int_{\mathbb{R}\setminus[0,1]} 0\lambda(dx) \\ &= 1 \cdot \lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q}) \\ &= 1, \end{aligned}$$

deoarece

$$1 = \lambda([0,1]) = \lambda([0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) + \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) = \lambda([0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})),$$

deci sunt satisfăcute condițiile Definiției 3.1.

Această densitate f poate fi interpretată ca densitatea unei v.a. X care reprezintă numerele iraționale din $[0,1]$, distribuite uniform.

În plus, dacă v.a. U are densitatea $f_U(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, adică U reprezintă numerele reale din $[0,1]$, distribuite uniform, notat și $U \sim \mathcal{U}[0,1]$, atunci

$$f_X(x) = f_U(x), \quad \text{pentru orice } x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q},$$

iar $\lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$, ceea ce înseamnă că $f_X = f_U$ a.p.t. pe $\mathbb{R}$ (în raport cu măsura Lebesgue), deci v.a. X și U sunt identic distribuite. $\diamond$

Remarca 3.11 Conform teoremei lui Lebesgue de caracterizare a funcțiilor integrabile Riemann (vezi [48, Teorema 8.3-3] sau [55, Theorem 10, page 242]) știm că (vezi Nota 152)

dacă f este mărginită pe $[a, b]$, atunci:

f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă și numai dacă

f este continuă a.p.t. pe $[a, b]$, în raport cu măsura Lebesgue.

Prin urmare, dacă o funcție f, mărginită pe $[a, b]$, este integrabilă Riemann pe $[a, b]$, atunci este integrabilă și Lebesgue pe $[a, b]$ (și cele două integrale coincid).

De asemenea, dacă o funcție nenegativă $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ are suportul în $[a, b]$, i.e. $\text{Supp}(f) \overset{\text{def}}{=\!=} \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \subseteq [a, b] \subset [0, \infty)$, și dacă f este mărginită pe $[a, b]$, atunci[155] f este o densitate de repartiție dacă și numai dacă f este continuă a.p.t. pe $[a, b]$, în raport cu măsura Lebesgue, și valoarea integralei pe $\mathbb{R}$ este 1. ◇

Remarca 3.12 Dacă f este o funcție de densitate, atunci $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ este convergentă, deci ne putem aștepta ca $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, dar nu este obligatoriu (există exemple[156] în acest sens). ◇

Remarca 3.13 **O funcție de densitate nu trebuie neapărat să fie mărginită**. De exemplu, dacă X este o v.a. cu funcția de repartiție

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases}$$

---

155 În general, știm doar că dacă există integrala Riemann $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$, atunci f este continuă a.p.t. pe $\mathbb{R}$, în raport cu măsura Lebesgue, dar reciproca afirmației nu este adevărată (vezi, de exemplu, Exemplul 3.40).

156 Se poate arăta (vezi pagina 583 din [23, Capitolul XIII, § 5]) că dacă integrala $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ este convergentă, atunci:

(a) dacă există limita $\lim_{x\to\infty} f(x)$, atunci aceasta trebuie să fie 0;

(b) dacă există limita $\lim_{x\to\infty} x f(x)$, atunci aceasta trebuie să fie 0.

atunci densitatea asociată este

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

care nu este mărginită în 0.

Cu toate acestea, $f_X \geq 0$ pe $\mathbb{R}$, iar $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx = \int_{0_+}^{1} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 1$.

Un alt exemplu de densitate nemărginită este dat de densitatea distribuției $\chi^2(1, \sigma)$ cu un singur grad de libertate. ◇

Remarca 3.14 În probleme concrete cel mai adesea folosim v.a. discrete (caz în care funcția de repartiție este nedescrescătoare de la 0 la 1, constantă pe porțiuni și continuă la dreapta) și v.a. continue (caz în care funcția de repartiție este dată de integrala (3.1), deci este nedescrescătoare de la 0 la 1 și continuă).

Dar se poate da[157] (vezi [46, pag. 2-3]) și **o clasificare riguroasă a v.a.** X :

- spunem că X este **v.a. discretă** dacă există $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ numărabilă astfel încât $\mathbb{P}(X \in B) = 1$; s-a arătat deja că X este v.a. discretă dacă și numai dacă funcția ei de repartiție este constantă pe porțiuni;
- spunem că X este **v.a. continuă**[158] dacă $\mathbb{P}(X \in B) = 0$, pentru orice $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ numărabilă; în această definiție se obtine, conform (2.7), că X este v.a. continuă dacă și numai dacă funcția ei de repartiție este continuă (vezi și Nota 161).

În cadrul v.a. continue avem clasificarea:

- spunem că X este **v.a. absolut continuă**[159] dacă $\mathbb{P}(X \in B) = 0$, pentru orice $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ neglijabilă în raport cu măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$, i.e. dacă legea $\mathbb{P}_X$ este măsură absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue; se poate arăta, folosind Teorema lui Radon-Nikodym (vezi, de exemplu, [48, Teorema 11.2-6]), că X este v.a. absolut continuă dacă și numai dacă există o funcție nenegativă și măsurabilă f, integrabilă Lebesgue pe $\mathbb{R}$, astfel încât

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B f d\lambda = \int_B f(t)\lambda(dt), \quad \text{pentru orice } B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \tag{3.2}$$

[157] Pentru o clasificare similară, dar a funcțiilor de repartiție, vezi [55, pages 188–192].

[158] Nu este sensul dat de Definiția 3.4.

[159] Acesta este, de fapt, sensul dat de Definiția 3.4.

sau, echivalent[160],

$$F_X(x) = \int_{(-\infty,x]} f d\lambda = \int_{(-\infty,x]} f(t)\lambda(dt), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

(integralele sunt integrale Lebesgue pe $\mathbb{R}$, în raport cu măsura Lebesgue λ, vezi și Remarca 3.2); de asemenea, se poate arăta (vezi, de exemplu, [48, Propoziția 11.2-5] sau [37, Propoziția 1.9.2]) că X este v.a. absolut continuă dacă și numai dacă funcția ei de repartiție este funcție absolut continuă;

- spunem că X este **v.a. singulară** dacă X este v.a. continuă și dacă există $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ neglijabilă în raport cu măsura Lebesgue astfel încât $\mathbb{P}(X \in B) = 1$.

Să observăm ca v.a. continue în sensul Definiției 3.4 sunt, de fapt, v.a. absolut continue (în sensul definiției de mai sus). Noi **vom lucra doar cu v.a. discrete și cu v.a. absolut continue; nu vom lucra cu v.a. singulare și nu vom lucra nici cu v.a. obținute ca „amestec” de v.a. discrete și v.a. continue**.

Pentru un exemplu de v.a. singulară vezi [55, pages 190–192] sau [42, Cap. II, § 2] sau [48, Exemplu 11.2-1] (funcția de repartiție asociată acestei v.a. este **funcția lui Cantor**). ◇

Evident, se pot construi ușor exemple de v.a. care să fie de tip mixt, adică v.a. X să ia anumite valori cu probabilitate strict pozitivă, iar alte valori ale v.a. X să formeze un interval.

Exemplul 3.15 O v.a. de tip mixt poate să apară în felul următor.

(i) Fie X timpul de funcționare al unui echipament. Prin urmare, valorile lui X sunt în $[0, \infty)$. Dar să presupunem că există o probabilitate strict pozitivă p ca echipamentul să nu funcționeze deloc, adică să nu funcționeze la momentul $X = 0$. Atunci, $\mathbb{P}(X = 0) = p$ și $\mathbb{P}(X > 0) = \int_0^\infty f(x)\, dx = 1 - p$.

(ii) Un alt exemplu de v.a. mixtă apare în cazul în care X reprezintă timpul de așteptare al unei persoane la un semafor. Prin urmare, valorile lui X sunt în $[0, \infty)$. Este posibil ca atunci când persoana ajunge la acel semafor să nu aștepte deloc, adică există $p > 0$ astfel încât $\mathbb{P}(X = 0) = p$; în cazul în care persoana trebuie să aștepte, timpul de așteptare definește o v.a. de tip continuu. Prin urmare, există f astfel încât $\mathbb{P}(X > 0) = \int_0^\infty f(x)\, dx = 1 - p$. ◇

[160] Vezi și Remarca 3.5.

Exemplul 3.16 Pentru alte exemple de v.a. mixte vezi Exemplul 3.23, [30, Section 2.3, Example 5], [30, Section 2.4, Example 4], [24, Exercise 1, page 51] precum și trunchierea unei v.a. continue dată de [30, Section 2.4, Exercise 2], cum ar fi, de exemplu,

$$Y = \begin{cases} -1, & X < -1, \\ X, & -1 \le X \le 1, \\ 1, & X > 1, \end{cases} \qquad \text{unde } X \sim \mathscr{U}\left[-2, 2\right].$$

◇

Propoziția 3.17 *Fie X o v.a. continuă și F_X funcția ei de repartiție. Atunci,*

(i) *F_X este funcție continuă*[161] *pe $\mathbb{R}$ (ceea ce justifică denumirea de v.a. continuă).*

Astfel, cuvântul „continuu" din denumirea „v.a. continue" se referă mai degrabă la o proprietate a funcției de repartiție F_X decât la o proprietate a funcției măsurabile X.

(ii) *F_X este derivabilă în orice punct $x \in \mathbb{R}$ în care f_X este continuă*[162] *și are loc*[163]

$$F_X'(x) = f_X(x), \tag{3.4}$$

în orice punct de continuitate x al funcției f_X.

(iii) *Folosind (2.7) (vezi și (2.8)) deducem*[164] *că*

$$\mathbb{P}(X = a) = 0, \quad \textit{pentru orice } a \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

[161] Daca X este o v.a. de tip continuu, atunci funcția de repartiție asociată este funcție continuă, dar reciproca nu este adevarată. Nu orice funcție de repartiție care este și continuă pe $\mathbb{R}$ corespunde unei v.a. continue (în sensul Definiției 3.4), adică relația (3.1) de reprezentare a unei funcții de repartiție este mai puternică decât proprietatea de continuitate a acestei funcții.

[162] Conform [48, Teorema 12.2-4] avem și următorul rezultat: dacă f_X este integrabilă Lebesgue pe $\mathbb{R}$, atunci funcția F_X definită de (3.1) este derivabilă a.p.t. pe $\mathbb{R}$ și are loc egalitatea $F_X' = f_X$ a.p.t. pe $\mathbb{R}$, în raport cu măsura Lebesgue λ.

[163] Pentru formula similară din cazul v.a. discrete vezi formula (2.31) (în cazul în care scriem densitatea f_X cu ajutorul funcției delta a lui Dirac, iar scrierea (2.31) este formală) sau formula (2.43) (în cazul în care scriem densitatea f_X cu ajutorul distribuției Dirac, iar egalitatea (2.43) este în sens distribuțional).

[164] Vezi și Exemplul 3.211.

(iv) *Folosind (2.9) (vezi și (2.11)) deducem că, pentru orice* $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$,

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\,dt &= \mathbb{P}(a < X \leq b) \\ &= \mathbb{P}(a < X < b) \\ &= \mathbb{P}(a \leq X < b) \\ &= \mathbb{P}(a \leq X \leq b)\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Remarca 3.18 Ultima relație se mai poate scrie și sub forma

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_{[a,b]} f_X(t)\,dt, \quad \text{pentru orice } -\infty \leq a < b \leq \infty.$$

Prin urmare, dacă $[a,b]$ nu este din $\mathrm{Supp}(f_X)$, adică $f_X(x) = 0$, pentru orice $x \in [a,b]$, atunci $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_{[a,b]} f_X(t)\,dt = 0$.

Deci, dacă există $a < b$ astfel încât $f_X(x) = 0$, pentru orice $x \in [a,b]$, atunci $\{c \leq X \leq d\}$ este un eveniment neglijabil, pentru orice $c, d \in [a,b]$. $\diamond$

Remarca 3.19 Mai general, dacă v.a. X admite densitatea f_X, atunci (vezi și formula de legătură (3.2) precum și formula (3.91) din cazul bidimensional)

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x)\,dx, \tag{3.7}$$

pentru orice $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Pentru o demonstrație alternativă vezi și Remarca 3.43. $\diamond$

Remarca 3.20 Dacă X este o v.a. de tip continuu cu densitatea f_X, atunci putem deduce formula (3.5) și în modul următor. Mai întâi, să observăm că, pentru $a \in \mathbb{R}$ arbitrar, dar fixat,

$$\{X = a\} = \bigcap\nolimits_{\epsilon > 0} \{X \in [a, a+\epsilon)\}\,,$$

adică

$$\{X \in [a, a+\epsilon)\} \searrow \{X = a\}\,, \quad \text{pentru } \epsilon \to 0_+\,,$$

deci, folosind proprietatea de continuitate dată de Propoziția 1.42, dar și formula (3.6) sau (3.7), obținem că

$$\mathbb{P}(X = a) = \lim_{\epsilon \to 0_+} \mathbb{P}(X \in [a, a+\epsilon)) = \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_a^{a+\epsilon} f_X(t)\, dt = 0.$$

$\diamond$

Remarca 3.21 Semnificația geometrică a densității de repartiție este următoarea: f_X este acea funcție nenegativă și integrabilă cu proprietatea că aria domeniului $\mathscr{D}$ din plan cuprins între dreptele $x = a$, $x = b$, axa Ox și curba $y = f(x)$ este egală, pe de o parte, cu integrala $\int_a^b f_X(t)\, dt$, iar, pe de altă parte, este egală cu probabilitatea ca X să ia valori între a și b, i.e.

$$\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_a^b f_X(t)\, dt = \mathbb{P}(a \le X \le b).$$

$\diamond$

Remarca 3.22 (vezi și pagina 146) Dacă X este o v.a. discretă cu $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$, unde I este numărabilă, rolul densității de repartiție este jucat de măsura definită de (2.42):

$$f_X(B) = \sum\nolimits_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \delta_{x_i}(B), \quad \text{pentru } B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \tag{3.8}$$

unde δ_{x_i} este măsura Dirac concentrată în punctul x_i.

Astfel, formula (3.7) se poate scrie și în acest caz, dar într-o formă similară, mai precis

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(dx), \tag{3.9}$$

unde integrala Lebesgue este în raport cu măsura de probabilitate discretă $f_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, dată de (3.8).

Într-adevăr, dacă folosim (2.46) precum și proprietățile integralei Lebesgue în raport cu măsura de probabilitate $\mathbb{P}_X$ (vezi și (3.29)), atunci avem, pentru orice $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_X(B) = \int_B \mathbb{P}_X(dx) = \int_B f_X(dx).$$

Astfel, din (3.9) obținem din nou (2.44) sau (2.45):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in B) &= \int_B f_X(dx) \\
&= \int_B \sum\nolimits_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i)\, \delta_{x_i}(dx) \\
&= \sum\nolimits_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) \int_B \delta_{x_i}(dx) \\
&= \sum\nolimits_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i)\, \delta_{x_i}(B) \\
&= \sum\nolimits_{x_i \in B} \mathbb{P}(X = x_i) \\
&= \sum\nolimits_{x \in B} \mathbb{P}(X = x) .
\end{aligned}$$

◇

Exemplul 3.23 Un exemplu concret de v.a. de tip mixt este dat de v.a. X cu următoarea funcția de repartiție:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.1 + 0.8x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Această funcție este o funcție de repartiție deoarece este nedescrescătoare, continuă la dreapta pe $\mathbb{R}$, iar $F_X(-\infty) = 0$ și $F_X(\infty) = 1$.

Dar această funcție nu este nici constantă pe porțiuni (cazul v.a. discrete) și nici continuă pe $\mathbb{R}$ (cazul v.a. continue).

Să observăm că putem scrie F_X ca o combinație convexă[165] de două funcții de repartiție, una constantă pe porțiuni și alta continuă pe $\mathbb{R}$:

$$F_X(x) = 0.2 F_{X_d}(x) + 0.8 F_{X_c}(x) ,$$

[165] Pentru detalii teoretice legate de descompunerea unei funcții de repartiție vezi [42, Cap. II, § 2] sau [37, Corolarul 1.9.2] sau [32, Teorema 4, pag. 118].

unde

$$F_{X_d}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{și} \quad F_{X_c}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

De fapt, F_{X_d} este o funcție de repartiție corespunzătoare unei v.a. discrete X_d, iar F_{X_c} este o funcție de repartiție corespunzătoare unei v.a. continue X_c.

Deci

$$X = 0.2X_d + 0.8X_c,$$

unde v.a. discretă X_d si v.a. continuă X_c sunt date de tabloul si respectiv densitatea:

$$X_d : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad f_{X_c}(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x).$$

Prin urmare, obținem că X ia valori în $[0,1]$ și că există două mulțimi D și C astfel încât $D \cup C = [0,1]$ și

$$\begin{cases} D \text{ este numărabilă} \quad \text{și} \quad 0 < \mathbb{P}(X \in D) < 1, \\ \mathbb{P}(X = a) = 0, \quad \text{pentru orice } a \in C. \end{cases}$$

Avem $D = \{0, 1\}$, iar

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in D) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) \\ &= F(0) - F(0-0) + F(1) - F(1-0) \\ &= 0.1 + 0.1 = 0.2 \end{aligned}$$

și $C = (0, 1)$, iar

$$\mathbb{P}(X = a) = F(a) - F(a-0) = 0, \quad \text{pentru orice } a \in (0,1) = C.$$

Deci, pentru orice $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, putem scrie sub forma (vezi și formula (3.2) de legătură):

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum\nolimits_{x \in A} \mathbb{P}(X = x) + 0.8 \int_A f_{X_c}(x)\, dx,$$

unde densitatea f_{X_c} este dată de $f_{X_c}(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$.

Avem $\mathbb{P}(X \in [0,1]) = 1$ și

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0.1, \quad \mathbb{P}(X = 1) = 0.1, \quad \mathbb{P}(X \in (0,1)) = 0.8. \tag{3.10}$$

Să observăm că putem scrie legea $\mathbb{P}_X$ ca o combinație convexă[166] dintre o măsură de probabilitate discretă și una absolut continuă:

$$\boxed{\mathbb{P}_X(A) = 0.2\mathbb{P}_{X_d}(A) + 0.8\mathbb{P}_{X_c}(A), \quad \text{pentru } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),}$$

unde

$$\mathbb{P}_{X_c}(A) = \int_A f_{X_c}(x)\,dx,$$

iar (vezi și formula (2.44) de reprezentare)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X_d}(A) &= \frac{1}{0.2}\sum\nolimits_{x \in A \cap \{0,1\}} \mathbb{P}(X = x) \\ &= \frac{1}{0.2}\sum\nolimits_{x \in \{0,1\}} \mathbb{P}(X = x) \cdot \delta_x(A),\end{aligned}$$

deci, folosind (3.10), obținem (vezi și formula (2.45) de reprezentare)

$$\mathbb{P}_{X_d}(A) = \mathbb{P}(X_d = 0) \cdot \delta_0(A) + \mathbb{P}(X_d = 1) \cdot \delta_1(A),$$

unde δ_x este măsura Dirac concentrată în punctul x.

Obținem (vezi definițiile din cadrul Remarcii 3.14) că **v.a.** X **nu este nici discretă**: într-adevăr, dacă ar exista B cel mult numărabilă astfel încât $\mathbb{P}(X \in B) = 1$, atunci trebuie ca $\{0,1\} \subset B$ și apoi obținem o contradicție:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in B) &= \sum\nolimits_{x \in B} \mathbb{P}(X = x) + 0.8\int_B f_{X_c}(x)\,dx \\ &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + 0.8 \cdot 0 \\ &= 0.2,\end{aligned}$$

deoarece $\int_B f_{X_c}(x)\,dx = 0$ fiind calculată pe o mulțime numărabilă.

---

[166] Pentru detalii teoretice legate de descompunerea unei măsuri de probabilitate pe $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ vezi [37, Propoziția 1.9.8].

Pe de alta parte, **v.a.** X **nu este nici continuă**: într-adevăr, deși $D = \{0, 1\}$ este mulțime numărabilă, totuși $\mathbb{P}(X \in D) = 0.2 \neq 0$.

Densitatea v.a. X este dată de

$$f_X(x) = 0.2 f_{X_d}(x) + 0.8 f_{X_c}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

unde

$$f_{X_c}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{în rest}, \end{cases}$$

iar (vezi și formula (2.40) de reprezentare)

$$f_{X_d}(x) = 0.5\delta_0(\{x\}) + 0.5\delta_1(\{x\}), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

În notațiile de mai sus, obținem, vezi formulele (3.9) și (3.7),

$$\mathbb{P}(X \in A) = 0.2 \int_A f_{X_d}(dx) + 0.8 \int_A f_{X_c}(x)\, dx, \quad \text{pentru } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

unde, vezi și (2.42) sau (2.46), măsura de probabilitate discretă f_{X_d} este dată de

$$f_{X_d}(A) = \mathbb{P}(X_d = 0) \cdot \delta_0(A) + \mathbb{P}(X_d = 1) \cdot \delta_1(A), \quad \text{pentru } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

$\diamond$

Definiția 3.24 *Fie* $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *o funcție de repartiție, i.e. o funcție care satisface cele trei proprietăți date de Propoziția 2.13. Atunci* **inversa generalizată a funcției de repartiție** *(numită și* **funcția cuantilă** *) este funcția* $F^{-1} : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *definită de*

$$F^{-1}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}. \tag{3.11}$$

Remarca 3.25 Se poate arăta că definiția (3.11) a inversa generalizate a funcției de repartiție este echivalentă cu definiția:

$$F^{-1}(p) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < p\}.$$

$\diamond$

Definiția 3.26 *În cazul unei v.a. X oarecare (discretă sau continuă)* **cuantila** *corespunzătoare pragului de probabilitate $p \in (0,1)$ (sau cuantila de ordin p) este valoarea $x_p \in \mathbb{R}$ dată de*

$$x_p \overset{\text{def}}{=} F_X^{-1}(p), \tag{3.12}$$

unde $F_X^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ este inversa generalizată a funcției de repartiție F_X dată de (3.11).

Remarca 3.27 Salturile funcției F corespund intervalelor în care inversa F^{-1} definită de (3.11) este constantă, iar intervalele mărginite în care funcția F este constantă corespund salturilor funcției F^{-1}.

În cazul particular în care X este o v.a. continuă, iar funcția de repartiție F_X asociată este strict crescătoare[167] pe intervalul $[a,b]$, se obține că F_X este inversabilă pe $[a,b]$, caz în care inversa generalizată F_X^{-1} este chiar inversa propriu-zisă[168], iar cuantila este unica soluție a ecuației $F_X(x_p) = p$.

În cazul în care X este o v.a. discretă, cu un număr finit de valori, cu funcția de repartiție F_X asociată dată de (2.16), se obține că inversa generalizată F_X^{-1} este o funcție constantă pe porțiuni (pentru forma exactă, vezi Nota 200). $\diamond$

Remarca 3.28 În plus, pentru orice $p \in (0,1)$ și $x \in \mathbb{R}$, inversa F^{-1} definită de (3.11) satisface (vezi [34, Theorem 2.1,Lemma 2.1], [26, Appendix A.3] și [57, Problem 3.8.8]):

(i) F^{-1} este nedescrescătoare;

(ii) F^{-1} este continuă la stânga[169];

(iii) $F^{-1}(p) \le x \quad \Leftrightarrow \quad p \le F(x)$ sau, echivalent,

(iv) $x < F^{-1}(p) \quad \Leftrightarrow \quad F(x) < p$;

(v) $F^{-1}(F(x)) \le x$ (luând $p = F(x)$ în (iii));

(vi) $F\left(F^{-1}(p) - 0\right) \le p \le F\left(F^{-1}(p)\right)$;

167 De exemplu, dacă X este o v.a. continuă care ia valori doar în intervalul $[a,b]$, adică $\mathrm{Supp}(f_X) = [a,b]$, iar dacă densitatea f_X este continuă pe $[a,b]$, atunci se poate arăta că funcția de repartiție F_X este strict crescătoare pe $[a,b]$ (vezi (3.6) și [58, Propoziția 9.2.13, Corolarul 4]).

168 Pentru demonstrație vezi [34, Lemma 2.3].

(vii) $F\left(F^{-1}\left(F\left(x\right)\right)\right) = F\left(x\right)$
(se aplică F în (v) și apoi se ia $p = F\left(x\right)$ în (vi));

$(viii)$ $F^{-1}\left(F\left(F^{-1}\left(p\right)\right)\right) = F^{-1}\left(p\right)$
(similar demonstrației punctului (vii))

și, în plus,

(ix) dacă F este continuă, atunci $F\left(F^{-1}\left(p\right)\right) = p$;

(x) dacă F este continuă, atunci $F^{-1}(p) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} : F\left(x\right) > p\right\}$;

(xi) dacă F este continuă, atunci $F^{-1}(p) = \max\left\{x \in \mathbb{R} : F\left(x\right) = p\right\}$.

◇

Remarca 3.29 Folosind proprietatea (vi) din cadrul Remarcii 3.28 observăm că dacă x_p este o cuantilă, conform definiției (3.12), atunci valoarea x_p verifică inegalitatea

$$\mathbb{P}\left(X < x_p\right) \leq p \leq \mathbb{P}\left(X \leq x_p\right) \tag{3.13}$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}\left(X \leq x_p\right) \geq p \quad \text{și} \quad \mathbb{P}\left(X \geq x_p\right) \geq 1 - p. \tag{3.14}$$

Condițiile (3.13) sau, echivalent, (3.14) pot fi luate drept o **definiție alternativă** a cuantilei.

Dacă valoarea x_p verifică inegalitățile (3.13), atunci ea nu este obligatoriu și unică (în acest sens, vezi Exemplul 3.31).

Dacă valoarea x_p verifică inegalitățile (3.13), atunci nu se obține neapărat că ea coincide cu valoarea dată de (3.12) (în acest sens, vezi Exemplul 3.31).

---

[169] Din acest motiv inversa F^{-1} dată de definiția (3.11) se poate numi inversa generalizată continuă la stânga.

Se poate lua ca definiție a inversei generalizate a funcției de repartiție și varianta (vezi [7, Chapter 2, Section 1.22])

$$F^{-1}(p) \overset{\text{def}}{=\!=} \sup\left\{x \in \mathbb{R} : F\left(x\right) \leq p\right\}$$

sau, echivalent, $F^{-1}(p) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} : F\left(x\right) > p\right\}$.

Se poate arăta că această inversă este continuă la dreapta și, din acest motiv, inversa F^{-1} definită astfel (și care e deci diferită de cea dată de definiția (3.11)) se poate numi inversa generalizată continuă la dreapta.

Mai precis, conform [26, Lemma A.19], valoarea x_p verifică definiția (3.13) dacă și numai dacă x_p este o valoare cuprinsă între[170] cuantila dată de definiția (3.12), i.e. $x_p = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$, și respectiv cuantila dată de definiția din Nota 169, i.e. $x_p = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq p\}$. ◇

Remarca 3.30 Cuantila de ordin 2 se numește ***mediana*** repartiției și este valoarea $x_{1/2}$ astfel încât

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X < x_{1/2}\right) \leq 1/2 \leq \mathbb{P}\left(X \leq x_{1/2}\right)} \tag{3.15}$$

sau, echivalent,

$$\max\left\{\mathbb{P}\left(X < x_{1/2}\right), \mathbb{P}\left(X > x_{1/2}\right)\right\} \leq 1/2$$

sau, echivalent,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X \leq x_{1/2}\right) \geq 1/2 \quad \text{și} \quad \mathbb{P}\left(X \geq x_{1/2}\right) \geq 1/2} \tag{3.16}$$

sau, echivalent,

$$\min\left\{\mathbb{P}\left(X \leq x_{1/2}\right), \mathbb{P}\left(X \geq x_{1/2}\right)\right\} \geq 1/2$$

sau, echivalent,

$$F_X\left(x_{1/2} - 0\right) \leq 1/2 \leq F_X\left(x_{1/2}\right).$$

Cuantilele de ordin 4 se numesc ***cuartile*** și sunt valorile $x_{1/4}, x_{2/4}, x_{3/4}$ astfel încât

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(X < x_{1/4}\right) \leq 1/4 \leq \mathbb{P}\left(X \leq x_{1/4}\right); \\ &\mathbb{P}\left(X < x_{2/4}\right) \leq 2/4 \leq \mathbb{P}\left(X \leq x_{2/4}\right); \\ &\mathbb{P}\left(X < x_{3/4}\right) \leq 3/4 \leq \mathbb{P}\left(X \leq x_{3/4}\right) \end{aligned}}$$

sau, echivalent,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(X \leq x_{1/4}\right) \geq 1/4 \quad \text{și} \quad \mathbb{P}\left(X \geq x_{1/4}\right) \geq 3/4; \\ &\mathbb{P}\left(X \leq x_{2/4}\right) \geq 2/4 \quad \text{și} \quad \mathbb{P}\left(X \geq x_{2/4}\right) \geq 2/4; \\ &\mathbb{P}\left(X \leq x_{3/4}\right) \geq 3/4 \quad \text{și} \quad \mathbb{P}\left(X \geq x_{3/4}\right) \geq 1/4 \end{aligned}$$

[170] Din acest motiv inversa F^{-1} dată de definiția (3.11) se poate numi inversa generalizată inferioară, iar inversa F^{-1} dată de definiția din Nota 169 se poate numi inversa generalizată superioară

sau, echivalent,

$$F_X\left(x_{1/4}-0\right) \leq 1/4 \leq F_X\left(x_{1/4}\right);$$
$$F_X\left(x_{2/4}-0\right) \leq 2/4 \leq F_X\left(x_{2/4}\right);$$
$$F_X\left(x_{3/4}-0\right) \leq 3/4 \leq F_X\left(x_{3/4}\right).$$

Cuantilele de ordin 100 se numesc ***percentile*** (sau ***centile***). Avem 99 de centile. De exemplu, $x_{20/100}$ este valoarea sub care sunt găsite cel puțin 20% din valorile v.a. X și respectiv valoarea peste care sunt găsite cel puțin 80% din valorile v.a. X.

În particular, dacă X este o v.a. continuă, obținem că, dacă x_p este cuantilă, atunci cele două condiții din definiția (3.13) a cuantilei se reduc la

$$\mathbb{P}\left(X \leq x_p\right) = p.$$

Apoi obținem că

$$\mathbb{P}\left(x_p \leq X \leq x_{2p}\right) = F_X\left(x_{2p}\right) - F_X\left(x_p\right) = 2p - p = p$$

ș.a.m.d..

Deci, în cazul unei v.a. continue, putem vedea cuantilele și ca pe acele puncte care împart valorile v.a. X în intervale de probabilități egale.

În practică vom lua $p = \frac{k}{q}$, unde $q \in \mathbb{N}^*$ se va numi ordinul cuantilei, iar valorile $k = \overline{1, q-1}$ vor defini cuantilele de ordin q.

Avem o singură cuantilă de ordin 2 (luăm $p = \frac{k}{2}$, unde $k = 1$), deci mediana este valoarea $x_{1/2}$ astfel încât

$$\mathbb{P}\left(X \leq x_{1/2}\right) = \mathbb{P}\left(X \geq x_{1/2}\right) = 1/2 \tag{3.17}$$

sau, echivalent,

$$F_X\left(x_{1/2}\right) = 1/2,$$

adică mediana $x_{1/2}$ împarte volumul valorilor lui X în două părți egale.

Avem trei cuantilele de ordin 4 (luăm $p = \frac{k}{4}$, unde $k = \overline{1, 3}$), deci cuartilele sunt valorile $x_{1/4}, x_{2/4}, x_{3/4}$ astfel încât

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X \le x_{1/4}\right) &= \mathbb{P}\left(x_{1/4} \le X \le x_{1/2}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(x_{1/2} \le X \le x_{3/4}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \ge x_{3/4}\right) \\ &= 1/4 \end{aligned}}$$

sau, echivalent,

$$F_X\left(x_{1/4}\right) = 1/4, \quad F_X\left(x_{1/2}\right) = 1/2, \quad F_X\left(x_{3/4}\right) = 3/4,$$

adică cuartilele $x_{1/4}, x_{2/4}, x_{3/4}$ împart volumul valorilor lui X în patru părți egale.

Avem 99 cuantile de ordin 100 (luăm $p = \frac{k}{100}$, unde $k = \overline{1, 99}$) numite percentile (sau centile). De exemplu, $x_{20/100}$ este valoarea sub care sunt găsite 20% din valorile v.a. X. $\diamond$

Exemplul 3.31 Să determinăm mediana în cazul unei v.a. X de tip $\mathrm{Bernoulli}\,(p)$.

Astfel, ne interesează determinarea valorii $x_{1/2}$ astfel încât au loc inegalitățile date de definiția (3.16), i.e.

$$\mathbb{P}\left(X \le x_{1/2}\right) \ge 1/2 \quad \text{și} \quad \mathbb{P}\left(X \ge x_{1/2}\right) \ge 1/2.$$

Să observăm că

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\,(X \le a) = q, \quad \text{pentru orice } a \in [0, 1), \\ &\mathbb{P}\,(X \le 1) = 1, \\ &\mathbb{P}\,(X \ge 0) = 1, \\ &\mathbb{P}\,(X \ge a) = p, \quad \text{pentru orice } a \in (0, 1]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Deci, dacă $p > 1/2$, atunci

$$\mathbb{P}\,(X \le 1) = 1 \ge 1/2 \quad \text{și} \quad \mathbb{P}\,(X \ge 1) = p \ge 1/2,$$

iar dacă $p < 1/2$, atunci

$$\mathbb{P}\,(X \le 0) = q \ge 1/2 \quad \text{și} \quad \mathbb{P}\,(X \ge 0) = 1 \ge 1/2.$$

Prin urmare, dacă $p > 1/2$, atunci mediana $x_{1/2}$ este 1, iar dacă $p < 1/2$, atunci mediana $x_{1/2}$ este 0.

Evident, în cazul $p = 1/2$, mediana dată de definiția (3.16) este orice valoare $x_{1/2} \in [0, 1]$ deoarece, conform inegalităților (3.18),

$$\mathbb{P}\left(X \leq a\right) \geq 1/2, \quad \text{pentru orice } a \in [0, \infty),$$

$$\mathbb{P}\left(X \geq a\right) \geq 1/2, \quad \text{pentru orice } a \in (-\infty, 1].$$

Dacă luăm drept definiției a cuantilei $x_{1/2}$ expresia (3.12), i.e. $x_{1/2} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F\left(x\right) \geq 1/2\}$, atunci obținem că mediana este dată de

$$x_{1/2} = \inf\left\{x \in \mathbb{R} : x \in [0, \infty)\right\} = 0.$$

Dacă luăm drept definiției a cuantilei $x_{1/2}$ expresia dată de Nota 169, i.e. $x_{1/2} = \sup\left\{x \in \mathbb{R} : F\left(x\right) \leq 1/2\right\}$, atunci obținem că mediana este dată de

$$x_{1/2} = \sup\left\{x \in \mathbb{R} : x \in (-\infty, 1)\right\} = 1.$$

Astfel, să observăm că mediana $x_{1/2}$ dată de definiția (3.16) este orice valoare cuprinsă între mediana dată de definiția (3.12) și respectiv mediana dată de definiția din Nota 169. $\diamond$

Următorul rezultat ne arată cum se modifică densitatea de repartiție la transformări e v.a..

Teorema 3.32 *Fie X o .v.a. continuă cu densitatea de repartiție f_X. Fie $g : \mathscr{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție astfel încât:*

$$(i) \quad g \text{ este derivabilă pe } \mathscr{D},$$

$$(ii) \quad g \text{ este bijectivă},$$

$$(iii) \quad \operatorname{Supp}(f_X) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{x : f_X\left(x\right) \neq 0\}} \subseteq \mathscr{D}.$$

Să definim $h(y) = g^{-1}(y)$. Atunci, densitatea noii v.a. $Y = g\left(X\right)$ este dată de[171]

$$f_Y\left(y\right) = f_X\left(h\left(y\right)\right) \left|h'(y)\right| \mathbb{1}_{g(\mathscr{D})}\left(y\right), \tag{3.19}$$

în orice punct $y \in \mathbb{R}$ astfel încât f_X este continuă în $h\left(y\right)$.

[171] Vezi și formula (3.97) dată de Remarca 3.225.

Demonstrație. Esențial este formula de schimbare de variabilă în integrală. Deoarece g este injectivă și continuă obținem că g este strict monotonă. În cazul în care $h = g^{-1}$ este strict crescătoare (deci $h'(z) > 0$, pentru orice z) avem, pentru orice $y \in g(\mathscr{D})$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(g(X) \leq y) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq g^{-1}(y)\right) \\ &= \mathbb{P}(X \leq h(y)) \\ &= \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)\, dx \\ &= \int_{h^{-1}(-\infty)}^{y} f_X(h(z))\, d(h(z)) \\ &= \int_{-\infty}^{y} f_X(h(z))\, h'(z)\, dz \\ &= \int_{-\infty}^{y} f_X(h(z))\, |h'(z)|\, dz. \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(z)\, dz,$$

deci obținem[172] concluzia (3.19).

Cazul $h = g^{-1}$ strict descrescătoare se tratează similar.

Evident, în cazul în care h este strict crescătoare, putem scrie și direct, pentru orice $y \in g(\mathscr{D})$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y) = \mathbb{P}\left(X \leq g^{-1}(y)\right) = F_X(h(y)),$$

deci, conform (3.4),

$$\begin{aligned} f_Y(y) = F_Y'(y) &= [F_X(h(y))]' \\ &= F_X'(h(y)) \cdot h'(y) \\ &= f_X(h(y)) \cdot h'(y), \quad \text{pentru orice } y \in g(\mathscr{D}). \end{aligned}$$

■

[172] Vezi Nota 153.

Corolarul 3.33 *Fie X o .v.a. continuă cu densitatea de repartiție f_X. Fie $a \neq 0$ și*

$$Y = aX + b \quad \text{sau, echivalent,} \quad X = \frac{Y-b}{a}.$$

Atunci, densitatea v.a. Y este

$$f_Y\,(y) = \frac{1}{|a|} f_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big), \quad \text{pentru orice } y \in \mathbb{R}.$$

Remarca 3.34 În particular, dacă X este o v.a. continuă cu densitatea de repartiție f_X, atunci v.a. $Y = -X$ are densitatea

$$f_Y\,(y) = f_X(-y), \quad \text{pentru orice } y \in \mathbb{R}.$$

V.a. $Z = a - X$, unde $a \in \mathbb{R}$, are densitatea

$$f_Z\,(y) = f_X(a-y), \quad \text{pentru orice } y \in \mathbb{R}.$$

V.a. $W = X - a$, unde $a \in \mathbb{R}$, are densitatea

$$f_W\,(y) = f_X(a+y), \quad \text{pentru orice } y \in \mathbb{R}.$$

◇

3.2 Caracteristici numerice

În cazul discret media unei v.a. este suma unei serii numerice (vezi Definiția 2.146), dar în cazul continuu media este dată de o integrală.

Definiția 3.35 *Fie v.a. continuă X cu densitatea de repartiție f_X. Spunem că v.a. X* **admite medie** *(sau că* **este integrabilă***) dacă integrala $\int_{\mathbb{R}} x\, f_X\,(x)\,dx$ este absolut convergentă.*

Dacă v.a. X admite medie, atunci valoarea integralei precedente se va numi **media** *v.a. continue X, i.e.*

(3.20)
$$\boxed{\mathbb{E}\,(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f_X\,(x)\,dx.}$$

Remarca 3.36 De fapt (vezi și Remarca 2.150), dacă $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ este un spațiu de probabilitate și X este o v.a. definită pe acest spațiu, atunci

media v.a. X (indiferent de tipul ei) este dată de integrala Lebesgue

(în caz că aceasta există) pe Ω, în raport cu măsura $\mathbb{P}$, a funcției X,

adică

$$\mathbb{E}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \stackrel{\text{not}}{=} \int_{\Omega} X\,d\mathbb{P}. \tag{3.21}$$

Utilizând definiției integralei Lebesgue, se poate demonstra (vezi și Nota 109) că v.a. X este integrabilă Lebesgue (adică integrala există și este finită) dacă și numai dacă v.a. $|X|$ este integrabilă Lebesgue, adică

$$\text{există } \mathbb{E}(X) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}(|X|) < \infty. \tag{3.22}$$

Aplicând o teoremă de schimbare de variabilă în integrala Lebesgue anterioară (vezi, de exemplu, [55, Theorem 7, page 234] sau [49, Teorema 5.2-24] sau [25, Theorem 14.12]), obținem că media se poate exprima cu ajutorul integralei Lebesgue pe $\mathbb{R}$ în raport cu măsura $\mathbb{P}_X$ (legea asociată v.a. X):

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\,\mathbb{P}_X(dx) \tag{3.23}$$

Având în vedere că legea unei v.a. este unic determinată de funcția de repartiție F_X (vezi Remarca 2.16 sau [55, Theorem 1, page 185]), obținem, de fapt, că măsura $\mathbb{P}_X$ este chiar măsura Lebesgue-Stieltjes generată de funcția nedescrescătoare și continuă la dreapta F_X. Astfel integrala precedentă se poate exprima[173] și cu ajutorul integralei Lebesgue-Stieltjes[174] pe $\mathbb{R}$, în raport cu măsura generată de funcția nedescrescătoare și continuă la dreapta F_X asociată v.a. X :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\,dF_X(x)\,. \tag{3.24}$$

[173] Pentru demonstrația egalității directe $\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x\,dF_X(x)$, vezi, de exemplu, [42, Capitolul III, pag. 58].

[174] De fapt, în cadrul nostru de lucru, integrala Lebesgue-Stieltjes $\int_{\mathbb{R}} x\,dF_X(x)$ în raport cu măsura generată de F_X va coincide cu integrala Riemann-Stieltjes $\int_{\mathbb{R}} x\,dF_X(x)$ în raport cu funcția nedescrescătoare și continuă la dreapta F_X.

Să menționăm că cele trei exprimări, de mai sus, ale mediei $\mathbb{E}(X)$ sunt valabile pentru orice tip de v.a..

Dacă lucrăm cu v.a. absolut continue (vezi pagina 276), atunci, prin definiție, $\mathbb{P}_X$ este măsură absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$, deci (conform Teoremei lui Radon-Nikodym dată, de exemplu, de [48, Teorema 11.2-6]) există o funcție nenegativă și măsurabilă f, integrabilă Lebesgue pe $\mathbb{R}$, astfel încât are loc (3.2) și astfel formula (3.23) devine (vezi, de exemplu, [48, Teorema 11.2-8]) formula (3.20) de calcul a mediei unei v.a. absolut continue[175], i.e.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \mathbb{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx.$$

Evident, în cazul v.a. absolut continue și funcția de repartiție F_X devine funcție absolut continuă, deci are loc (3.3) și astfel formula (3.24) devine tot formula de calcul (3.20). $\diamond$

Remarca 3.37 Având în vedere că media unei v.a. absolut continue este, de fapt, o integrală Lebesgue precum și proprietatea (3.22) a unei funcții integrabile Lebesgue, obținem motivația pentru care se impune, pentru existența mediei, condiția ca integrala care apare în definiția (3.20) să fie absolut convergentă. $\diamond$

Remarca 3.38 Dacă X este o v.a. discretă cu $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$, unde I este numărabilă, rolul densității de repartiție poate fi jucat de funcția definită de (2.29):

$$f_X(t) = \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \delta_{x_i}(t), \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}, \tag{3.25}$$

unde δ_{x_i} este funcția delta a lui Dirac.

Să menționăm că formula (3.20) de calcul a mediei unei v.a. continue se menține și în cazul discret.

Într-adevăr, din (3.20), folosind și proprietatea ($v-$2.26), regăsim formula (2.90) de calcul a mediei unei v.a. discrete:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx$$

[175] În cazul unei v.a. discrete, formula (3.23) de calcul a mediei devine (vezi paginile 208-209) formula (2.90) de calcul.

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} x \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}\left(X = x_i\right) \cdot \delta_{x_i}\left(x\right) dx \\
&= \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}\left(X = x_i\right) \int_{\mathbb{R}} x \delta_{x_i}\left(x\right) dx \\
&= \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}\left(X = x_i\right) x_i ,
\end{aligned}
$$

Deci formula (3.20) de calcul a mediei unei v.a. continue rămâne adevărată și în cazul unei v.a. discrete dacă folosim definiția (2.29) a densității de repartiție (scrisă cu ajutorul funcției delta a lui Dirac) asociată unei v.a. discrete. ◇

Remarca 3.39 Dacă X este o v.a. discretă cu $X\left(\Omega\right) = \{x_i\}_{i\in I}$, unde I este numărabilă, rolul densității de repartiție poate fi jucat de măsura definită de (2.42):

$$
f_X\left(B\right) = \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}\left(X = x_i\right) \cdot \delta_{x_i}\left(B\right), \quad \text{pentru } B \in \mathscr{B}\left(\mathbb{R}\right), \tag{3.26}
$$

unde δ_{x_i} este măsura Dirac concentrată în punctul x_i.

Să menționăm că formula (3.20) de calcul a mediei unei v.a. continue se menține și în cazul discret, dar scrisă într-o formă similară, mai precis

$$
\mathbb{E}\left(X\right) = \int_{\mathbb{R}} x f_X\left(dx\right), \tag{3.27}
$$

unde integrala Lebesgue este în raport cu măsura de probabilitate discretă $f_X : \mathscr{B}\left(\mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}$, dată de (3.26).

Într-adevăr, dacă folosim formula generală (3.23) de calcul al mediei unei v.a. oarecare, dar și (2.46), atunci

$$
\mathbb{E}\left(X\right) = \int_{\mathbb{R}} x \mathbb{P}_X\left(dx\right) = \int_{\mathbb{R}} x f_X\left(dx\right).
$$

Astfel, din (3.27), folosind și proprietatea (2.34), regăsim formula (2.90) de calcul a mediei unei v.a. discrete:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X\right) &= \int_{\mathbb{R}} x f_X\left(dx\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} x \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}\left(X = x_i\right) \delta_{x_i}\left(dx\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum\nolimits_{i \in I} \mathbb{P}\left(X = x_i\right) \int_{\mathbb{R}} x \, \delta_{x_i}\left(dx\right) \\
&= \sum\nolimits_{i \in I} \mathbb{P}\left(X = x_i\right) x_i .
\end{aligned}
$$

Deci formula (3.20) de calcul a mediei unei v.a. continue rămâne adevărată și în cazul unei v.a. discrete dacă folosim definiția (2.42) a densității de repartiție (scrisă cu ajutorul măsurii Dirac) asociată unei v.a. discrete. $\diamond$

Exemplul 3.40 Un **exemplu de v.a. continuă**[176] **a cărei medie nu există este dat de o v.a. distribuită Cauchy**[177] $X \sim \mathscr{C}\left(0,1\right)$, i.e. o v.a. cu densitatea de repartiție $f\left(x\right) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Se verifică, mai întâi, că

$$
\int_{\mathbb{R}} f\left(x\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} dx = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(x\right) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = 1.
$$

Dacă dorim să aratam doar că v.a. X nu admite medie finită este suficient, conform (3.22), să studiem valoarea mediei $\mathbb{E}\left(|X|\right)$ (vezi și Definiția 3.35). Astfel, în cazul unei v.a. de tip Cauchy,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|X|\right) = \int_{\mathbb{R}} |x| \, f\left(x\right) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{1+x^2} dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \ln\left(1+x^2\right) \Big|_{0}^{\infty} \\
&= \infty .
\end{aligned}
$$

[176] Un **exemplu de v.a. discretă a cărei medie nu există** este dat Exemplul 2.152.

[177] Dacă o v.a. X are densitatea de repartiție $f\left(x\right) = \frac{1}{\pi\gamma\left(1+\left(\frac{x-a}{\gamma}\right)^2\right)}$, unde $a \in \mathbb{R}$ și $\gamma > 0$, atunci spunem că X urmează **distribuția Cauchy** de parametri a și γ, și scriem $X \sim \mathscr{C}\left(a,\gamma\right)$.

Semnificația parametrilor este următoarea: $x_{1/2} = a$ este mediana, iar $x_{1/4} = a-\gamma$, $x_{1/2} = a$, $x_{3/4} = a+\gamma$ sunt cuartilele distribuției $\mathscr{C}\left(a,\gamma\right)$.

În cazul $X \sim \mathscr{C}\left(0,1\right)$ avem că $x_{1/2} = 0$ este mediana lui X, i.e. $\mathbb{P}\left(X \leq 0\right) = \mathbb{P}\left(X \geq 0\right) = \frac{1}{2}$, iar $x_{1/4} = -1$, $x_{1/2} = 0$, $x_{3/4} = 1$ sunt cuartilele, i.e. $\mathbb{P}\left(X \leq -1\right) = \mathbb{P}\left(-1 \leq X \leq 1\right) = \mathbb{P}\left(X \geq 1\right) = \frac{1}{4}$.

În cazul general $X \sim \mathscr{C}\left(a,\gamma\right)$ avem că $x_{1/2} = a$ este mediana lui X, iar $x_{1/4} = a-\gamma$, $x_{1/2} = a$, $x_{3/4} = a+\gamma$ sunt cuartilele.

Prin urmare, v.a. X nu admite medie finită.

O modalitate de a demonstra că media unei v.a. nu există constă, conform definiției date de Nota 109, în a studia valoarea integralelor $\mathbb{E}\left(X^{+}\right)=\int_{\Omega} X^{+} d \mathbb{P}$ și $\mathbb{E}\left(X^{-}\right)=\int_{\Omega} X^{-} d \mathbb{P}$. Se poate arăta (vezi Remarca 3.36) că au loc formulele de calcul $\mathbb{E}\left(X^{+}\right)=\int_{0}^{\infty} x d F_{X}(x)$ și $\mathbb{E}\left(X^{-}\right)=-\int_{-\infty}^{0} x d F_{X}(x)$ care în cazul unei v.a. continue devin

$$\mathbb{E}\left(X^{+}\right)=\int_{0}^{\infty} x f_{X}(x) d x \quad \text{și} \quad \mathbb{E}\left(X^{-}\right)=-\int_{-\infty}^{0} x f_{X}(x) d x .$$

Reluând calculele obținem că

$$\mathbb{E}\left(X^{+}\right)=\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^{2}} d x=\infty$$

și

$$\mathbb{E}\left(X^{-}\right)=\frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^{2}} d x=\infty,$$

deci, conform Notei 109, integrala Lebesgue $\mathbb{E}(X)=\int_{\Omega} X d \mathbb{P}$ nu există.

O altă modalitate de a demonstra că media acestei v.a. nu există constă în folosirea formulei de calcul (3.20) și a definiției integralei improprii:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X)=\int_{\mathbb{R}} x f(x) d x=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi\left(1+x^{2}\right)} d x & \\
&=\lim_{\substack{a \rightarrow-\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_{a}^{b} \frac{x}{\pi\left(1+x^{2}\right)} d x \\
&=\frac{1}{2 \pi} \lim_{\substack{a \rightarrow-\infty \\ b \rightarrow \infty}} \ln \left(1+x^{2}\right)\Big|_{x=a}^{x=b} .
\end{aligned}$$

Observăm că, alegând șirurile $a_{n}=-n, b_{n}=n$, limita devine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1+x^{2}\right)\Big|_{x=-n}^{x=n}=0$$

iar pentru $a_{n}=-n, b_{n}=2 n$, limita devine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1+x^{2}\right)\Big|_{x=-n}^{x=2 n}=\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1+4 n^{2}}{1+n^{2}}=\ln 4,$$

ceea ce arată că limita depinde de șirurile alese a_{n} și b_{n} astfel încât $a_{n} \rightarrow-\infty$ și $b_{n} \rightarrow \infty$, adică $x \mapsto \frac{x}{\pi\left(1+x^{2}\right)}$ nu este integrabilă Riemann pe $\mathbb{R}$. $\diamond$

Remarca 3.41 Pentru exemple de v.a. continue ale căror momente există, dar sunt infinite vezi paginile 516-518. $\diamond$

Media unei funcții aplicată unei v.a. poate fi calculată folosind următorul rezultat.

Teorema 3.42 (Formula de transfer) *Fie X o .v.a. continuă cu densitatea de repartiție f_X. Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție măsurabilă. Atunci, $h(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ este și ea o v.a. și această v.a. admite medie dacă și numai dacă*

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)| f_X(x)\, dx < \infty.$$

În cazul în care $h(X)$ admite medie, aceasta este dată de:

$$\boxed{\mathbb{E}(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(x)\, dx.} \tag{3.28}$$

Remarca 3.43 În cazul particular în care luăm $h(x) = \mathbb{1}_B(x)$, unde $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ este arbitrar fixată, formula (3.28) devine

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x) f_X(x)\, dx = \int_B f_X(x)\, dx.$$

Pe de altă parte, folosind definiția mediei, avem

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X)) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_B(X)\, d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X\in B\}}\, d\mathbb{P} = \int_{\{X\in B\}} d\mathbb{P} = \mathbb{P}(X \in B),$$

deoarece, folosind proprietățile integralei Lebesgue, avem (vezi și Nota 70)

$$\boxed{\int_{\Omega} \mathbb{1}_A\, d\mathbb{P} = \int_A d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A), \quad \text{pentru orice } A \in \mathscr{F}.} \tag{3.29}$$

Astfel, am demonstrat din nou formula (3.2) sau (3.7) din cazul v.a. de tip continuu:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x)\, dx.$$

$\diamond$

Remarca 3.44 În general, dacă X este o v.a. (de orice tip) și $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție măsurabilă, atunci dacă există una din integralele[178] de mai jos, atunci există și celelalte și au loc egalitățile (vezi și Remarca 3.36)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(h\left(X\right)\right) &\overset{\text{def}}{=\!=} \int_{\Omega} h\left(X\right) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} h\left(X\left(\omega\right)\right) \mathbb{P}\left(d\omega\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h\left(x\right) \mathbb{P}_X\left(dx\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h\left(x\right) dF_X\left(x\right), \end{aligned} \tag{3.30}$$

unde $\mathbb{P}_X$ este legea v.a. X, iar F_X este funcția de repartiție asociată v.a. X.

În cazul în care v.a. X admite densitatea f, integralele de mai sus coincid cu integrala Riemann dată de (3.28) deoarece avem egalitățile, scrise formal,

$$\mathbb{P}_X(dx) = f_X(x)dx = dF_X(x).$$

$\diamond$

Propoziția 3.45 *Fie X o v.a. (discretă sau continuă) cu funcția de repartiție F_X. Dacă X admite medie, atunci*[179]

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} x \cdot \left(1 - F_X\left(x\right)\right) = 0, \\ &\lim_{x\to-\infty} x \cdot F_X\left(x\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Demonstrație. Având în vedere că există media, avem $\int_{\mathbb{R}} |y|\, dF_X\left(y\right) < \infty$, deci și integralele următoare sunt finite:

$$\int_0^{\infty} |y|\, dF_X\left(y\right) < \infty \quad \text{și} \quad \int_{-\infty}^{0} |y|\, dF_X\left(y\right) < \infty.$$

---

[178] Primele două integrale sunt integrale Lebesgue în raport cu măsura $\mathbb{P}$, a treia integrală este o integrală Lebesgue în raport cu măsura $\mathbb{P}_X$, iar ultima integrală este o integrală Lebesgue-Stieltjes în raport cu măsura generată de funcția nedescrescătoare și continuă la dreapta F_X.
Să menționăm că dacă funcția h ar fi continuă, atunci integrala $\int_{\mathbb{R}} h\left(x\right) dF_X\left(x\right)$ în sensul Lebesgue-Stieltjes ar coincide cu integrala $\int_{\mathbb{R}} h\left(x\right) dF_X\left(x\right)$ în sensul Riemann-Stieltjes.

[179] Evident, aceste limite implică limitele date de (2.5).

Prin urmare, pentru $x > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^\infty y dF_X(y) = \lim_{x\to\infty} \int_x^\infty |y| \, dF_X(y) = 0.$$

Pe de altă parte, pentru $x > 0$,

$$0 \le x(1 - F_X(x)) = x \int_x^\infty dF_X(y) = \int_x^\infty x dF_X(y) \le \int_x^\infty |y| \, dF_X(y),$$

deci $\lim_{x\to\infty} x(1 - F_X(x)) = 0_+$.

Similar, pentru $x < 0$,

$$\lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^x y dF_X(y) = -\lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^x |y| \, dF_X(y) = 0.$$

Pe de altă parte, pentru $x < 0$,

$$\begin{aligned} 0 \le -xF_X(x) &= -x \int_{-\infty}^x dF_X(y) \\ &= \int_{-\infty}^x (-x) \, dF_X(y) \\ &\le \int_{-\infty}^x (-y) \, dF_X(y) \\ &= \int_{-\infty}^x |y| \, dF_X(y), \end{aligned}$$

deci $\lim_{x\to-\infty} xF_X(x) = 0_-$. ■

Remarca 3.46 Fie X o v.a. (discretă sau continuă) cu funcția de repartiție F_X. Dacă X^r admite medie, unde $r \in \mathbb{N}^*$, atunci, repetând demonstrația Propoziției 3.45, se obține

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} x^r \cdot (1 - F_X(x)) = 0, \\ &\lim_{x\to-\infty} x^r \cdot F_X(x) = 0. \end{aligned}} \tag{3.32}$$

◇

Propoziția 3.47 *Fie X o v.a. continuă cu densitatea f_X astfel încât* $\mathrm{Supp}(f_X) \subseteq [0, \infty)$ *și funcția de repartiție F_X. Dacă X admite medie, atunci*[180]

$$\boxed{\mathbb{E}\,(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}\,(X > x)\,dx} \tag{3.33}$$

sau, echivalent,

$$\boxed{\mathbb{E}\,(X) = \int_0^\infty (1 - F_X\,(x))\,dx.}$$

Demonstrație. Folosind (3.6) obținem

$$\int_0^\infty \mathbb{P}\,(X > x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_x^\infty f_X\,(y)\,dy \right) dx.$$

Pentru a putea schimba ordinea de integrare în integralele iterate precedente trebuie, mai întâi, să introducem indicatoarea și apoi să verificăm dacă sunt satisfăcute condiții suficiente pentru ca **o integrală să comute cu o altă integrală**, adică să folosim un rezultat teoretic (de tip Fubini) care ne permite acest lucru. Astfel,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathbb{P}\,(X > x)\,dx &= \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f_X\,(y)\,\mathbb{1}_{(x,\infty)}\,(y)\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}\,(x)\,dy \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f_X\,(y)\,\mathbb{1}_{(x,\infty)}\,(y)\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}\,(x)\,dx \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty \mathbb{1}_{(x,\infty)}\,(y)\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}\,(x)\,dx \right) f_X\,(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Să observăm că

$$\boxed{\mathbb{1}_{(x,\infty)}\,(y) = \mathbb{1}_{(-\infty,y)}\,(x)\,,}$$

deci (folosim faptul că variabila de integrare $y > x \geq 0$)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathbb{P}\,(X > x)\,dx &= \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty \mathbb{1}_{(-\infty,y)}\,(x)\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}\,(x)\,dx \right) f_X\,(y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty \mathbb{1}_{[0,y)}\,(x)\,dx \right) f_X\,(y)\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}\,(y)\,dy
\end{aligned}$$

[180] Pentru formula mediei unei v.a. discrete vezi Propoziția 2.67 și Exercițiul 2.70.
Pentru formula similară din cazul unei integrale Lebesgue oarecare vezi [35, Theorem 4.26].

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \left(\int_0^y dx \right) f_X(y)\, dy \\
&= \int_0^\infty y f_X(y)\, dy \\
&= \mathbb{E}(X).
\end{aligned}
$$

■

Reluând tipul de raționament din propoziția precedentă se arată următorul rezultat.

Propoziția 3.48 *Fie X o v.a. continuă. Atunci, are loc*[181]

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(x < X \leq x + a)\, dx = a, \quad \textit{pentru orice } a > 0. \tag{3.34}
$$

Demonstrație. Folosind (3.6) obținem

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(x < X \leq x + a)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)\, \mathbb{1}_{(x,x+a]}(y)\, dy \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)\, \mathbb{1}_{(x,x+a]}(y)\, dx \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{(x,x+a]}(y)\, dx \right) f_X(y)\, dy.
\end{aligned}
$$

Să observăm că

$$
\mathbb{1}_{(x,x+a]}(y) = \mathbb{1}_{[y-a,y)}(x),
$$

deci

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(x < X \leq x + a)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[y-a,y)}(x)\, dx \right) f_X(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{y-a}^{y} dx \right) f_X(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} a f_X(y)\, dy
\end{aligned}
$$

[181] Generalizarea acestui rezultat este dată de inegalitatea (3.37). De asemenea, precizăm că formula similară din cazul unei v.a. discrete este dată de Propoziția 2.71.

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)\, dy$$
$$= a.$$

■

Remarca 3.49 Să menționăm că formula (3.34) este adevărată pentru orice tip de v.a. (atât discretă cât și continuă). Pentru demonstrarea ei putem raționa și în modul următor[182].

Avem, folosind și (3.29),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(x < X \leq x + a)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{x < X(\omega) \leq x + a\}} \mathbb{P}(d\omega) \right) dx.$$

Pentru a putea schimba ordinea de integrare folosim un rezultat teoretic (de tip Fubini) care ne permite ca **o integrală să comute cu o altă integrală.** Prin urmare,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(x < X \leq x + a)\, dx &= \int_{\Omega} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\{x < X(\omega) \leq x + a\}}\, dx \right) \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_{\Omega} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X(\omega) - a \leq x < X(\omega)\}}\, dx \right) \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_{\Omega} \left(\int_{X(\omega)-a}^{X(\omega)} dx \right) \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_{\Omega} a \mathbb{P}(d\omega) \\
&= a \mathbb{P}(\Omega) \\
&= a.
\end{aligned}$$

◇

Exercițiul 3.50 (vezi [5, Exercise 37 și Exercise 38, Chapter 3]) *Fie X o v.a. continuă și nenegativă*[183] *cu densitatea f_X și funcția de repartiție F_X.*

[182] Vezi și demonstrația din Remarca 3.52.

[183] În loc de nenegativă putem cere ca X să fie o v.a. continuă cu densitatea f_X astfel încât suportul ei $\mathrm{Supp}(f_X) \subseteq [0, \infty)$.

(a) *Să se arate că*

$$\int_x^\infty y f_X(y)\,dy \geq x \cdot \mathbb{P}(X > x) = x \cdot (1 - F_X(x)), \quad x > 0.$$

(b) *Folosind* (a) *să se arate că dacă* X *admite medie*[184]*, atunci are loc concluzia (3.31), i.e.*

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot (1 - F_X(x)) = 0.$$

(c) *Folosind* (b) *să se arate că dacă* X *admite medie, atunci are loc concluzia (3.33), i.e.*

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\,dx.$$

(d) *Să se arate că media* $\mathbb{E}(X)$ *există dacă și numai dacă*

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot (1 - F_X(x)) = 0.$$

Propoziția 3.51 *Fie* X *o v.a. continuă cu densitatea* f_X *cu* $\mathrm{Supp}(f_X) \subseteq [0,\infty)$. *Dacă* X^r *admite medie, unde* $r > 0$, *atunci*[185]

$$\boxed{\mathbb{E}(X^r) = r\int_0^\infty x^{r-1}\mathbb{P}(X > x)\,dx.} \tag{3.35}$$

Demonstrație. Folosind (3.6) obținem

$$r\int_0^\infty x^{r-1}\mathbb{P}(X > x)\,dx = r\int_0^\infty x^{r-1}\left(\int_x^\infty f_X(y)\,dy\right)dx.$$

Pentru a putea schimba ordinea de integrare în integralele iterate precedente să introducem indicatoarea. Astfel,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty r x^{r-1}\mathbb{P}(X > x)\,dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty r x^{r-1} f_X(y)\,dy\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty r x^{r-1} f_X(y)\,\mathbb{1}_{[x,\infty)}(y)\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,dy\right)dx
\end{aligned}$$

[184] Deci există și este finită $\lim_{x\to\infty}\int_0^x y f_X(y)\,dy = \int_0^\infty y f_X(y)\,dy = \mathbb{E}(X)$.

[185] Pentru formula mediei pătratului unei v.a. discrete vezi Remarca 2.69.

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} r x^{r-1} f_X(y)\, \mathbb{1}_{[x,\infty)}(y)\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\, dx \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} r x^{r-1} \mathbb{1}_{(-\infty,y]}(x)\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\, dx \right) f_X(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} r x^{r-1} \mathbb{1}_{[0,y]}(x)\, dx \right) f_X(y)\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\, dy \\
&= \int_{0}^{\infty} \left(\int_{0}^{y} r x^{r-1} dx \right) f_X(y)\, dy \\
&= \int_{0}^{\infty} y^r f_X(y)\, dy \\
&= \mathbb{E}(X^r).
\end{aligned}
$$

■

Remarca 3.52 Să menționăm că formula (3.35) este adevărată pentru orice tip de v.a. nenegativă (atât discretă cât și continuă). Astfel, pentru demonstrarea formulei (3.35) putem raționa și în modul următor. Să observăm, mai întâi, că

$$X^r(\omega) = \int_0^{X(\omega)} r x^{r-1} dx = \int_0^{\infty} r x^{r-1} \mathbb{1}_{\{x \le X(\omega)\}} dx.$$

Integrăm în raport cu $\mathbb{P}$, iar pentru a putea schimba ordinea de integrare folosim un rezultat teoretic (de tip Fubini) care ne permite ca **o integrală să comute cu o altă integrală.** Astfel, vezi și (3.29),

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^r) &= \int_\Omega X^r(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^{\infty} r x^{r-1} \mathbb{1}_{\{x \le X(\omega)\}} dx \right) \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_\Omega r x^{r-1} \mathbb{1}_{\{x \le X(\omega)\}} \mathbb{P}(d\omega) \right) dx \\
&= \int_0^{\infty} r x^{r-1} \left(\int_\Omega \mathbb{1}_{\{x \le X(\omega)\}} \mathbb{P}(d\omega) \right) dx \\
&= \int_0^{\infty} r x^{r-1} \mathbb{P}(X \ge x)\, dx.
\end{aligned}
$$

◇

Remarca 3.53 O altă demonstrație alternativă pentru formula (3.35) se poate face dacă folosim (3.31) și formula de integrare prin părți în cadrul integralei Riemann-Stieltjes dată de (3.30)

$$\mathbb{E}\left(X^r\right) = \int_0^\infty x^r \, dF_X(x)$$

(vezi demonstrația Propoziției 3.58).

Nici această demonstrație nu depinde de tipul ales al v.a. (discretă sau continuă). $\diamond$

Exercițiul 3.54 *Fie X o v.a. cu valori nenegative (discretă sau continuă) și $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă și astfel încât $g(X)$ admite medie. Atunci,*

$$\mathbb{E}\left(g\left(X\right)\right) = g\left(0\right) + \int_0^\infty g'\left(t\right) \mathbb{P}\left(X > t\right) dt.$$

Vom utiliza o abordare ușor diferită, față de demonstrația formulelor similare (3.33) și (3.35), utilizând formula (3.23) de exprimare a mediei cu ajutorul legii $\mathbb{P}_X$ asociată v.a. X precum și o teoremă de tip Fubini.

Nici această demonstrație nu depinde de tipul ales al v.a..

Astfel, obținem, vezi și (3.29),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(g\left(X\right)\right) &= \int_0^\infty g\left(x\right) \mathbb{P}_X\left(dx\right) \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}_X\left(dx\right) \left(g\left(0\right) + \int_0^x g'\left(t\right) dt\right) \\
&= g\left(0\right) \int_0^\infty \mathbb{P}_X\left(dx\right) + \int_0^\infty \left(\int_0^x g'\left(t\right) dt\right) \mathbb{P}_X\left(dx\right) \\
&= g\left(0\right) \mathbb{P}_X\left(\left[0, \infty\right)\right) + \int_0^\infty \left(\int_t^\infty \mathbb{P}_X\left(dx\right)\right) g'\left(t\right) dt \\
&= g\left(0\right) + \int_0^\infty \mathbb{P}\left(X > t\right) g'\left(t\right) dt.
\end{aligned}$$

Exercițiul 3.55 (vezi [5, Exercise 38, Chapter 3]) *Fie X o v.a. continuă și nenegativă cu funcția de repartiție F_X. Fie $r \in \mathbb{N}^*$.*

(a) *Folosind argumente similare cu cele folosite în Exercițiul 3.50 să se arate că dacă* X^r *admite medie, atunci are loc concluzia (3.35), i.e.*

$$\mathbb{E}\left(X^r\right)=\int_0^{\infty} r x^{r-1}\left(1-F_X(x)\right) dx.$$

(b) *Să se arate că momentul* $\mathbb{E}\left(X^r\right)$ *de ordin* r *există dacă și numai dacă*

$$\lim_{x\to\infty} x^r\cdot\left(1-F_X(x)\right)=0.$$

Exercițiul 3.56 *Să presupunem că v.a. continuă* X *are funcția de repartiție*

$$F_X(x)=1-(1+x)^{-3}, \quad \text{dacă } x>0.$$

Să se determine, fără a calcula densitatea f_X, *media și deviația standard a v.a.* X.

Tehnica de lucru utilizată în demonstrația Propoziției 3.47 și a Propoziției 3.51 se poate aplica și pentru a demonstra Formula de Transfer dată de Teorema 3.42.

Propoziția 3.57 *Fie* X *o v.a. continuă cu densitatea* f_X *și* $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcție măsurabilă astfel încât* $h(X)$ *să fie v.a. continuă. Să presupunem că* h *ia valori*[186] *în* $[0,\infty)$. *Atunci,*

$$\boxed{\mathbb{E}\left(h(X)\right)=\int_{\mathbb{R}} h(x)\, f_X(x)\, dx.}$$

Demonstrație. Folosind (3.33) și apoi (3.7) obținem

$$\mathbb{E}\left(h(X)\right)=\int_0^{\infty}\mathbb{P}\left(h(X)\geq x\right)dx=\int_0^{\infty}\left(\int_{\mathscr{D}} f_X(y)\,dy\right)dx,$$

unde $\mathscr{D}=\{y\in\mathbb{R}: h(y)\geq x\}$.

Pentru a putea schimba ordinea de integrare în integralele iterate precedente să introducem indicatoarea. Astfel,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\mathbb{P}\left(h(X)\geq x\right)dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)\,\mathbb{1}_{\mathscr{D}}(y)\,dy\right)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)\,\mathbb{1}_{\mathscr{D}}(y)\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,dx\right)dy\end{aligned}$$

186 Rezultatul are loc și în cazul în care h ia valori nu neapărat nenegative.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\mathscr{D}}(y)\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\, dx \right) f_X(y)\, dy.$$

Să observăm că $y \in \mathscr{D}$ dacă și numai dacă $x \in (-\infty, h(y)]$, adică

$$\mathbb{1}_{\mathscr{D}}(y) = \mathbb{1}_{\{h(y) \geq x\}} = \mathbb{1}_{(-\infty, h(y)]}(x),$$

deci (folosim faptul că variabila de integrare $g(y) \geq 0$)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \mathbb{P}(h(X) \geq x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{(-\infty, h(y)]}(x)\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\, dx \right) f_X(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[0, h(y)]}(x)\, dx \right) f_X(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{h(y)} dx \right) f_X(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, f_X(y)\, dy \\
&= \mathbb{E}(h(X)).
\end{aligned}$$

■

Prezentăm în continuare o generalizare a Propoziției 3.47. Demonstrația nu va fi o reluare a celei date pentru Propoziția 3.47 ci una alternativă; ea va folosi, în mod esențial, limitele date de (3.31).

De asemenea, menționăm că atât demonstrația cât și formula obținută nu depind de tipul ales al v.a. (discretă sau continuă).

Propoziția 3.58 *Fie X o v.a. cu funcția de repartiție F_X. Dacă X admite medie, atunci*

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x)\, dx - \int_{-\infty}^{0} \mathbb{P}(X \leq x)\, dx$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\, dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x)\, dx. \tag{3.36}$$

Demonstrație. Să observăm că

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{0} y\,dF_X(y) + \int_{0}^{\infty} y\,dF_X(y) \\ &= \lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{0} y\,dF_X(y) + \lim_{v\to\infty}\int_{0}^{v} y\,dF_X(y)\,.\end{aligned}$$

Integrând prin părți obținem

$$\int_{u}^{0} y\,dF_X(y) = yF_X(y)\Big|_{y=u}^{y=0} - \int_{u}^{0} F_X(y)\,dy = -uF_X(u) - \int_{u}^{0} F_X(y)\,dy$$

și

$$\begin{aligned}\int_{0}^{v} y\,dF_X(y) &= yF_X(y)\Big|_{y=0}^{y=v} - \int_{0}^{v} F_X(y)\,dy \\ &= vF_X(v) - \int_{0}^{v} F_X(y)\,dy \\ &= -v(1-F_X(v)) + \int_{0}^{v}(1-F_X(y))\,dy.\end{aligned}$$

Prin urmare, folosind și limitele (3.31),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= -\lim_{u\to-\infty} uF_X(u) - \int_{-\infty}^{0} F_X(y)\,dy \\ &\quad - \lim_{v\to\infty} v(1-F_X(v)) + \int_{0}^{\infty}(1-F_X(y))\,dy \\ &= -\int_{-\infty}^{0} F_X(y)\,dy + \int_{0}^{\infty}(1-F_X(y))\,dy.\end{aligned}$$

■

Remarca 3.59 Folosind (3.36) deducem că

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{0}^{\infty}(1-F_X(x))\,dx = \int_{-\infty}^{0} F_X(x)\,dx.$$

Observând că $\mathbb{E}(X-\mu) = 0$, unde $\mu = \mathbb{E}(X)$, și că $F_{X-\mu}(x) = F_X(x+\mu)$, putem generaliza astfel:

$$\mathbb{E}(X) = a \quad \Leftrightarrow \quad \int_{a}^{\infty}(1-F_X(x))\,dx = \int_{-\infty}^{a} F_X(x)\,dx.$$

$\diamond$

Exercițiul 3.60 (vezi [57, Problem 2.6.42]) *Fie două v.a. continue X, Y. Aplicând Propoziția 3.58, deducem că*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathbb{P}(0 < x \leq X) - \mathbb{P}(X < x \leq 0)\right] dx.$$

Prin urmare, se poate arăta că, dacă X, Y admit medie, atunci

$$\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathbb{P}(Y < x \leq X) - \mathbb{P}(X < x \leq Y)\right] dx. \tag{3.37}$$

Observăm că demonstrația formulei (3.36) s-a făcut folosind (3.32) și formula de integrare prin părți în cadrul integralei Riemann-Stieltjes dată de (3.30). Astfel, în același mod, se poate arăta o generalizare a Propoziției 3.58.

Propoziția 3.61 (vezi [55, Corollary 2, page 247]) *Fie X o v.a. cu funcția de repartiție F_X. Dacă X^r admite medie, unde $r \in \mathbb{N}^*$, atunci*

$$\boxed{\mathbb{E}(|X|^r) = r\int_0^{\infty} x^{r-1}\left[1 - F(x) + F(-x)\right] dx}$$

sau, echivalent,

$$\boxed{\mathbb{E}(|X|^r) = r\int_0^{\infty} x^{r-1}\mathbb{P}(|X| > x) dx}$$

și

$$\boxed{\mathbb{E}(X^r) = r\int_0^{\infty} x^{r-1}\left[1 - F(x) + (-1)^r F(-x)\right] dx.}$$

Definiția 3.62 (vezi Definiția 2.72) *Se numește* **moment de ordin** $r > 0$ *al v.a. X, media v.a. X^r (dacă este bine definită). Vom nota*

$$\boxed{\mu_r \overset{\text{not}}{=} \mathbb{E}(X^r) = \int_{\mathbb{R}} x^r f(x)\, dx.}$$

Deci momentul μ_1 este chiar media v.a. X.

Definiția 3.63 (vezi Definiția 2.73) *Se numește* **moment central de ordin** $r > 0$ *al v.a. X, media v.a. $(X - \mu_1)^r$ (dacă este bine definită). Vom nota*

$$\nu_r \overset{\text{not}}{=\!=} \mathbb{E}\left[(X - \mu_1)^r \right] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu_1)^r f(x)\, dx .$$

Definiția 3.64 (vezi Definiția 2.75) *Se numește* **moment absolut de ordin** $r > 0$ *al v.a. X, media v.a. $|X|^r$, deci*

$$\mathbb{E}(|X|^r) = \int_{\mathbb{R}} |x|^r f(x)\, dx .$$

Definiția 3.65 (vezi Definiția 2.79) *Se numește* **dispersia** *(sau* **varianța***) v.a. X, notată cu $\mathrm{D}^2(X)$ (sau cu $\mathrm{Var}(X)$), momentul central de ordin 2 al v.a. X, i.e.*

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{Var}(X) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathbb{E}(X - \mu_1)^2 .$$

Având în vedere formula de transfer (3.28), obținem, în cazul unei v.a. continue X care admite densitatea f_X,

$$\mathrm{D}^2(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)\, dx .$$

Remarca 3.66 (vezi Remarca 2.84) Având în vedere definiția, obținem **formula de calcul a dispersiei**:

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 . \tag{3.38}$$

◇

Remarca 3.67 (vezi Remarca 2.80) În cazul unei v.a. oarecare (discrete sau continue), folosind formula (3.38) și inegalitatea lui Liapunov (vezi și Remarca 5.8), observăm că momentul de ordinul 2, i.e. media $\mathbb{E}\left(X^2\right)$, există și este finit dacă și numai dacă momentul de ordinul 1 și dispersia, i.e. media $\mathbb{E}(X)$ și $\mathrm{D}^2(X)$, există și sunt finite:

$$\text{există } \mathbb{E}\left(X^2\right) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \text{există} \quad \mathbb{E}(X) < \infty \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(X) < \infty.$$

◇

Definiția 3.68 (vezi Definiția 2.98) *Cantitatea definită de*

$$\boxed{\mathrm{D}(X) \overset{\text{def}}{=\!=} \sqrt{\mathrm{D}^2(X)}}$$

se numește **deviația standard** *(sau* **abaterea standard***).*

Remarca 3.69 Evident,

$$\nu_1 = \mathbb{E}(X - \mu_1) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mu_1) = 0.$$

Calculând obținem

$$\begin{aligned}\nu_2 = \mathbb{E}\big((X-\mu_1)^2\big) &= \mathbb{E}\left(X^2 - 2\mu_1 X + \mu_1^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mu_1 \mathbb{E}(X) + \mu_1^2 \\ &= \mu_2 - \mu_1^2\end{aligned}$$

și similar

$$\begin{aligned}\nu_3 = \mathbb{E}\big((X-\mu_1)^3\big) &= \mathbb{E}\left(X^3 - 3\mu_1 X^2 + 3\mu_1^2 X - \mu_1^3\right) \\ &= \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3.\end{aligned}$$

◇

Definiția 3.70 (vezi Definiția 2.87) *Se numește* **covarianța** *v.a. X și Y, notată* $\mathrm{Cov}(X,Y)$, *media*[187]

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))\right].} \tag{3.39}$$

Remarca 3.71 (vezi Remarca 2.88) Dacă facem calculele, obținem **formula de calcul a covarianței**[188]**:**

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).} \tag{3.40}$$

◇

[187] Pentru formula de calcul din cazul continuu vezi (3.89).

[188] Pentru formula de calcul din cazul continuu vezi (3.90).

Remarca 3.72 (vezi Remarca 2.89) În cazul unei v.a. oarecare (discrete sau continue), folosind inegalitatea $XY \leq \frac{1}{2}\left(X^2+Y^2\right)$, observăm că dacă impunem condiția ca v.a. X^2 și Y^2 să admită medie, i.e. există $\mathbb{E}\left(X^2\right)<\infty$ și $\mathbb{E}\left(Y^2\right)<\infty$ sau, echivalent (conform Remarcii 3.67), v.a. X și Y admit dispersie, atunci covarianța $\mathrm{Cov}\,(X,Y)$ există și este finită. $\diamond$

Remarca 3.73 (vezi Remarca 2.90) Evident, covarianța dintre v.a. X și ea însăși este chiar dispersia, deci putem lua drept definiție:

$$\boxed{\mathrm{D}^2\,(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cov}\,(\mathrm{X},\mathrm{X})\,.}$$

$\diamond$

Definiția 3.74 (vezi Definiția 2.92) *Dacă* $\mathrm{D}^2\,(X)>0$ *și* $\mathrm{D}^2\,(Y)>0$, *atunci*

$$\boxed{\mathrm{Cor}(X,Y)=\rho\,(X,Y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Cov}\,(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}^2\,(X)\cdot\mathrm{D}^2\,(Y)}}} \tag{3.41}$$

se numește **corelația** *(sau* **coeficientul de corelație** *al) v.a.* X *și* Y*.*

Remarca 3.75 (vezi Remarca 2.59 și Remarca 2.156) Au loc și în cazul v.a. continue proprietățile stabilite de Propoziția 2.60 (pentru medie), Remarca 2.96 (pentru corelație), Propoziția 2.97 (pentru dispersie) și Propoziția 2.99 (pentru deviația standard), precum și inegalitatea lui Markov dată de Teorema 2.104 și inegalitatea lui Cebâșev dată de Corolarul 2.105. $\diamond$

Exemplul 3.76 Fie X o v.a. cu densitatea de repartiție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\,(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathbb{1}_{[0,1]}\,(x)$. Media ei este dată de

$$\mathbb{E}\,(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f\,(x)\,dx=\int_0^1 x\Big(x+\frac{1}{2}\Big)dx=\Big(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\Big)\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{7}{12}.$$

$\diamond$

Remarca 3.77 (vezi și Remarcile 3.81 și 3.84) Să presupunem că dorim să facem o predicție a valorilor unei v.a. X. O primă posibilitate este aceea de a prezice valoarea lui X printr-o constantă, notată cu a. Astfel, ne poate interesa, de exemplu, valoarea absolută a erorii, adică a diferenței dintre valoarea reală a v.a. X și valoarea prezisă a.

Mai precis, ne poate interesa găsirea constantei a astfel încât să minimizăm pierderea așteptată, i.e. să minimizăm $\mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big]$. Vom vedea că minimul se va realiza în cazul în care a este chiar mediana v.a. X. $\diamond$

Exercițiul 3.78 (vezi [62, Chapter VIII, Section 2.1]) *Fie X o v.a. continuă cu densitatea f și cu mediana $x_{1/2}$. Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big] = \mathbb{E}\big[|X-x_{1/2}|\big] + 2\int_a^{x_{1/2}} (x-a)\,f(x)\,dx + \big(x_{1/2}-a\big)\left[2\int_{x_{1/2}}^{\infty} f(x)\,dx - 1\right]. \tag{3.42}$$

Apoi să se determine minimul funcției $\mathbb{R} \ni a \mapsto \mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big]$.

Vom arăta identitatea, mai întâi, în cazul $a < x_{1/2}$; cazul $a > x_{1/2}$ se tratează similar.

Astfel, pentru orice $a < x_{1/2}$, avem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big] &= \int_{\mathbb{R}} |x-a|\,f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{a} \big(a-x_{1/2}\big)\,f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{a} \big(x_{1/2}-x\big)\,f(x)\,dx \\
&\quad + \int_{a}^{x_{1/2}} \big(x-x_{1/2}\big)\,f(x)\,dx + \int_{a}^{x_{1/2}} \big(x_{1/2}-a\big)\,f(x)\,dx \\
&\quad + \int_{x_{1/2}}^{\infty} \big(x-x_{1/2}\big)\,f(x)\,dx + \int_{x_{1/2}}^{\infty} \big(x_{1/2}-a\big)\,f(x)\,dx \\
&= \bigg[\int_{-\infty}^{a} \big(x_{1/2}-x\big)\,f(x)\,dx + \int_{a}^{x_{1/2}} \big(x_{1/2}-x\big)\,f(x)\,dx \\
&\quad + \int_{x_{1/2}}^{\infty} \big(x-x_{1/2}\big)\,f(x)\,dx\bigg] - \int_{a}^{x_{1/2}} \big(x_{1/2}-x\big)\,f(x)\,dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{a} \big(a-x_{1/2}\big)\,f(x)\,dx + \int_{a}^{x_{1/2}} \big(x-x_{1/2}\big)\,f(x)\,dx \\
&\quad + \int_{a}^{x_{1/2}} \big(x_{1/2}-a\big)\,f(x)\,dx + \int_{x_{1/2}}^{\infty} \big(x_{1/2}-a\big)\,f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|x-x_{1/2}\right| f(x)\,dx \\ &+ \left[\int_{x_{1/2}}^{\infty} \left(x_{1/2}-a\right) f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_{1/2}} \left(x_{1/2}-a\right) f(x)\,dx\right] \\ &+ \int_{-\infty}^{x_{1/2}} \left(x_{1/2}-a\right) f(x)\,dx + \int_{a}^{x_{1/2}} \left(x-x_{1/2}\right) f(x)\,dx \\ &+ \int_{-\infty}^{a} \left(a-x_{1/2}\right) f(x)\,dx + \int_{a}^{x_{1/2}} \left(x-x_{1/2}\right) f(x)\,dx \\ &+ \int_{a}^{x_{1/2}} \left(x_{1/2}-a\right) f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Prin urmare, pentru orice $a < x_{1/2}$, *obținem*[189] *egalitatea (evidentă în cazul* $a = x_{1/2}$*)*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|x-x_{1/2}\right| f(x)\,dx \\ &+ \left(x_{1/2}-a\right)\left[\int_{x_{1/2}}^{\infty} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_{1/2}} f(x)\,dx\right] \\ &+ 2\int_{a}^{x_{1/2}} (x-a)\, f(x)\,dx,\end{aligned}$$

adică egalitatea (3.42).

Reluând, în mod similar, calculele precedente, dar corespunzătoare cazului $a > x_{1/2}$, *obținem că are loc egalitatea (tot evidentă în cazul* $a = x_{1/2}$*)*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|x-x_{1/2}\right| f(x)\,dx \\ &+ \left(a-x_{1/2}\right)\left[\int_{-\infty}^{x_{1/2}} f(x)\,dx - \int_{x_{1/2}}^{\infty} f(x)\,dx\right] \\ &+ 2\int_{x_{1/2}}^{a} (a-x)\, f(x)\,dx,\end{aligned}$$

[189] Să observăm că este mai simplu (și este suficient) să se arate egalitatea (3.42) în cazul particular $x_{1/2} = 0$, considerând cazurile $a > 0$ și $a < 0$ (vezi [57, Problem 1.4.5]).

adică tot egalitatea (3.42) (dacă folosim convenția $\int_a^b h(x)dx = -\int_b^a h(x)dx$, dacă $a > b$).

Prin urmare, egalitatea (3.42) are loc pentru $a \in \mathbb{R}$.

Acum observăm că

$$\int_a^{x_{1/2}} (x-a)\, f(x)\, dx \geq 0, \quad \textit{pentru orice } a$$

(indiferent dacă $a < x_{1/2}$ sau dacă $a > x_{1/2}$) și, folosind definiția (3.17) a medianei $x_{1/2}$ din cazul continuu, avem

$$\int_{x_{1/2}}^{\infty} f(x)\, dx = \mathbb{P}\big(X \geq x_{1/2}\big) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}\big(X \leq x_{1/2}\big) = \int_{-\infty}^{x_{1/2}} f(x)\, dx.$$

Astfel, din egalitatea (3.42) rezultă că

$$\inf_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big] = \mathbb{E}\big[|X - x_{1/2}|\big]$$

și minimul se realizează pentru $a = x_{1/2}$, adică

$$\boxed{\mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big] \geq \mathbb{E}\big[\,\big|X - x_{1/2}\big|\,\big], \quad \textit{pentru orice } a \in \mathbb{R},} \tag{3.43}$$

unde $x_{1/2}$ este mediana asociată v.a. X.

Prin urmare, vezi și Remarca 3.77,

valoarea minimă a pierderii așteptate $\mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big]$ se realizează

în cazul în care a este chiar mediana v.a. X.

Inegalitatea (3.43) este adevărat și în cazul unei v.a. de tip discret.

Exercițiul 3.79 (vezi [47, Example 13, Section 3.2]) *Fie X o v.a. discretă cu mediana $x_{1/2}$ și dată de $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$, pentru orice $k \in I$, unde $I \subseteq \mathbb{N}$ este o familie de indici. Să se arate că, pentru orice $a \leq x_{1/2}$,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big] = \mathbb{E}\big[|X - x_{1/2}|\big] & \\ + 2 \sum\nolimits_{a \leq x < x_{1/2}} (x-a)\, \mathbb{P}(X = x) & \\ + \big(x_{1/2} - a\big) \left[2 \sum\nolimits_{x \geq x_{1/2}} \mathbb{P}(X = x) - 1\right]. & \end{aligned} \tag{3.44}$$

și că, pentru orice $a \geq x_{1/2}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big] &= \mathbb{E}\big[|X-x_{1/2}|\big] \\ &\quad + 2\sum\nolimits_{x_{1/2}<x\leq a}(a-x)\,\mathbb{P}\,(X=x) \\ &\quad + \big(a-x_{1/2}\big)\left[1-2\sum\nolimits_{x>x_{1/2}}\mathbb{P}\,(X=x)\right].\end{aligned} \tag{3.45}$$

Apoi să se determine minimul funcției $\mathbb{R} \ni a \mapsto \mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big]$.

Vom arăta identitatea, mai întâi, în cazul $a < x_{1/2}$; cazul $a > x_{1/2}$ se tratează similar.

Astfel, pentru orice $a < x_{1/2}$, avem

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big] \\ &= \sum\nolimits_{x\in X(\Omega)}|x-a|\,\mathbb{P}\,(X=x) \\ &= \sum\nolimits_{x<a}\big(a-x_{1/2}\big)\,\mathbb{P}\,(X=x) + \sum\nolimits_{x<a}\big(x_{1/2}-x\big)\,\mathbb{P}\,(X=x) \\ &\quad + \sum\nolimits_{a\leq x<x_{1/2}}\big(x-x_{1/2}\big)\,\mathbb{P}\,(X=x) + \sum\nolimits_{a\leq x<x_{1/2}}\big(x_{1/2}-a\big)\,\mathbb{P}\,(X=x) \\ &\quad + \sum\nolimits_{x\geq x_{1/2}}\big(x-x_{1/2}\big)\,\mathbb{P}\,(X=x) + \sum\nolimits_{x\geq x_{1/2}}\big(x_{1/2}-a\big)\,\mathbb{P}\,(X=x) \\ &= \Big[\sum\nolimits_{x<a}\big(x_{1/2}-x\big)\,\mathbb{P}\,(X=x) + \sum\nolimits_{a\leq x<x_{1/2}}\big(x_{1/2}-x\big)\,\mathbb{P}\,(X=x) \\ &\quad + \sum\nolimits_{x\geq x_{1/2}}\big(x-x_{1/2}\big)\,\mathbb{P}\,(X=x)\Big] - \sum\nolimits_{a\leq x<x_{1/2}}\big(x_{1/2}-x\big)\,\mathbb{P}\,(X=x) \\ &\quad + \sum\nolimits_{x<a}\big(a-x_{1/2}\big)\,\mathbb{P}\,(X=x) + \sum\nolimits_{a\leq x<x_{1/2}}\big(x-x_{1/2}\big)\,\mathbb{P}\,(X=x) \\ &\quad + \sum\nolimits_{a\leq x<x_{1/2}}\big(x_{1/2}-a\big)\,\mathbb{P}\,(X=x) + \sum\nolimits_{x\geq x_{1/2}}\big(x_{1/2}-a\big)\,\mathbb{P}\,(X=x)\,.\end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big] \\ &= \sum\nolimits_{x\in X(\Omega)}\big|x-x_{1/2}\big|\,\mathbb{P}\,(X=x) \\ &\quad + \Big[\sum\nolimits_{x\geq x_{1/2}}\big(x_{1/2}-a\big)\,\mathbb{P}\,(X=x) - \sum\nolimits_{x<x_{1/2}}\big(x_{1/2}-a\big)\,\mathbb{P}\,(X=x)\Big]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum\nolimits_{x<x_{1/2}}\left(x_{1/2}-a\right)\mathbb{P}\left(X=x\right)+\sum\nolimits_{a\leq x<x_{1/2}}\left(x-x_{1/2}\right)\mathbb{P}\left(X=x\right)\\
&+\sum\nolimits_{x<a}\left(a-x_{1/2}\right)\mathbb{P}\left(X=x\right)+\sum\nolimits_{a\leq x<x_{1/2}}\left(x-x_{1/2}\right)\mathbb{P}\left(X=x\right)\\
&+\sum\nolimits_{a\leq x<x_{1/2}}\left(x_{1/2}-a\right)\mathbb{P}\left(X=x\right).
\end{aligned}
$$

Prin urmare, pentru orice $a<x_{1/2}$, obținem egalitatea (evidentă în cazul $a=x_{1/2}$)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\,|X-a|\,\right]=&\sum\nolimits_{x\in X(\Omega)}\left|x-x_{1/2}\right|\mathbb{P}\left(X=x\right)\\
&+\left(x_{1/2}-a\right)\left[\sum\nolimits_{x\geq x_{1/2}}\mathbb{P}\left(X=x\right)-\sum\nolimits_{x<x_{1/2}}\mathbb{P}\left(X=x\right)\right]\\
&+2\sum\nolimits_{a\leq x<x_{1/2}}\left(x-a\right)\mathbb{P}\left(X=x\right),
\end{aligned}
$$

adică egalitatea (3.44).

Reluând, în mod similar, calculele precedente, dar corespunzătoare cazului $a>x_{1/2}$, obținem că are loc egalitatea (tot evidentă în cazul $a=x_{1/2}$)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\,|X-a|\,\right]=&\sum\nolimits_{x\in X(\Omega)}\left|x-x_{1/2}\right|\mathbb{P}\left(X=x\right)\\
&+\left(a-x_{1/2}\right)\left[\sum\nolimits_{x\leq x_{1/2}}\mathbb{P}\left(X=x\right)-\sum\nolimits_{x>x_{1/2}}\mathbb{P}\left(X=x\right)\right]\\
&+2\sum\nolimits_{x_{1/2}<x\leq a}\left(a-x\right)\mathbb{P}\left(X=x\right),
\end{aligned}
$$

adică egalitatea (3.45).

Acum observăm că

$$
\sum\nolimits_{a\leq x<x_{1/2}}\left(x-a\right)\mathbb{P}\left(X=x\right)\geq 0,\quad \textit{pentru orice } a
$$

(indiferent dacă $a<x_{1/2}$ sau dacă $a>x_{1/2}$, dacă folosim convenția $\sum_{a\leq x<b}h(x)=-\sum_{b<x\leq a}h(x)$, dacă $a>b$) și, folosind definiția (3.15) a medianei $x_{1/2}$, avem

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{x\geq x_{1/2}}\mathbb{P}\left(X=x\right)=\mathbb{P}\left(X\geq x_{1/2}\right)\geq\frac{1}{2}\quad \textit{sau, echivalent,}\\
&\sum\nolimits_{x<x_{1/2}}\mathbb{P}\left(X=x\right)=\mathbb{P}\left(X<x_{1/2}\right)\leq\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

și

$$\sum\nolimits_{x\leq x_{1/2}} \mathbb{P}\left(X=x\right)=\mathbb{P}\left(X\leq x_{1/2}\right)\geq\frac{1}{2} \quad \textit{sau, echivalent,}$$
$$\sum\nolimits_{x> x_{1/2}} \mathbb{P}\left(X=x\right)=\mathbb{P}\left(X> x_{1/2}\right)\leq\frac{1}{2}.$$

Astfel, din egalitățile (3.44) și (3.45) rezultă că inegalitatea (3.43) are loc și pentru v.a. de tip discret.

Propoziția 3.80 *Fie X o v.a. cu media $\mathbb{E}\left(X\right)$ și dispersia $\mathrm{D}^2\left(X\right)$ finite și cu mediana $x_{1/2}$. Să se arate că*[190]

$$\left|\mathbb{E}\left(X\right)-x_{1/2}\right|\leq\mathrm{D}\left(X\right).$$

Demonstrație. Folosind proprietatea (2.49), apoi proprietatea (3.43) a medianei și apoi inegalitatea lui Liapunov cu $p=1<2=q$, obținem:

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left(X\right)-x_{1/2}\right| &\leq \mathbb{E}\left(\left|X-x_{1/2}\right|\right)\\ &\leq \mathbb{E}\left(\left|X-\mathbb{E}\left(X\right)\right|\right)=\mathbb{E}\sqrt{\left(X-\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2}\\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}\big[\left(X-\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2\big]}=\sqrt{\mathrm{D}^2\left(X\right)}\\ &= \mathrm{D}\left(X\right).\end{aligned}$$

■

Remarca 3.81 (vezi și Remarcile 3.77 și 3.84) Să presupunem că dorim să facem o predicție a valorilor unei v.a. X printr-o constantă, notată cu a. O varianta ar fi sa ne intereseze găsirea constantei a astfel încât să minimizăm pătratul pierderii pe care ne așteptatăm să o avem, i.e. să minimizăm $\mathbb{E}\big[\left(X-a\right)^2\big]$. Vom vedea că minimul se va realiza în cazul în care a este chiar media v.a. X, iar valoarea în acest punct este chiar dispersia v.a. X. ◇

Exercițiul 3.82 *Fie X o v.a. (discretă sau continuă). Să se arate că*

$$\mathbb{E}\big[\left(X-a\right)^2\big]=\mathrm{D}^2\left(X\right)+\left(\mathbb{E}\left(X\right)-a\right)^2, \quad \textit{pentru orice } a\in\mathbb{R}.$$

[190] Vezi și estimările date de [31, Proposition 3.6.1].

Apoi să se determine minimul[191] *funcției* $\mathbb{R} \ni a \mapsto \mathbb{E}\big[\,|X-a|\,\big]$.

Identitatea este ușor de obținut:

$$\mathbb{E}\big[\,(X-a)^2\,\big] = \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2a\mathbb{E}(X) + a^2$$
$$= \mathrm{D}^2(X) + (\mathbb{E}(X))^2 - 2a\mathbb{E}(X) + a^2.$$

În plus, $\inf_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[\,(X-a)^2\,\big] = \mathrm{D}^2(X) + \inf_{a\in\mathbb{R}} (\mathbb{E}(X)-a)^2 = \mathrm{D}^2(X)$*, iar minimul se realizează pentru* $a = \mathbb{E}(X)$.

Prin urmare, vezi și Remarca 3.81,

$$\textbf{\textit{dispersia}}\ \mathrm{D}^2(X)\ \textbf{\textit{este valoarea minimă a funcției}}\ g(a) = \mathbb{E}\big[\,(X-a)^2\,\big]$$

$$\textbf{\textit{și aceasta se realizează pentru}}\ a = \mathbb{E}(X).$$

Astfel, am demonstrat că

$$\boxed{\mathbb{E}\big[\,(X-a)^2\,\big] \geq \mathbb{E}\big[\,(X-\mathbb{E}(X))^2\,\big] \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{D}^2(X), \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{R}.}$$

Prin urmare, ***media*** $\mathbb{E}(X)$ ***este constanta care aproximează cel mai bine v.a.*** X ***în spațiul*** $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *care este spațiul funcțiilor măsurabile* $X : \Omega \to \mathbb{R}$*, astfel încât*

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_\Omega |X(\omega)|^2\, \mathbb{P}(d\omega) < \infty.$$

Exercițiul 3.83 *Fie* X *o v.a. (discretă sau continuă). Să se arate*[192]*, folosind exercițiul precedent, că dispersia unei v.a. este mai mică decât pătratul semidiferenței dintre valorile sale extreme, i.e.*

$$\mathrm{D}^2(X) \leq \left(\frac{M-m}{2}\right)^2, \quad \text{unde } m = \inf_{\omega\in\Omega} X(\omega) \quad \text{și} \quad M = \sup_{\omega\in\Omega} X(\omega)$$

sau, echivalent, abaterea standard a unei v.a. este mai mică decât semidiferența dintre valorile sale extreme, i.e.

$$\mathrm{D}(X) \leq \frac{M-m}{2}.$$

[191] Vezi și Exercițiul 2.4.17.

[192] Vezi și rezultatul similar din cadrul Exercițiului 2.4.17.

Într-adevăr, folosind

$$\mathbb{E}\big[\,(X-a)^2\,\big] = \mathrm{D}^2\,(X) + (\mathbb{E}\,(X) - a)^2\,, \quad \textit{pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

obținem, pentru $a = \dfrac{m+M}{2}$,

$$\mathrm{D}^2\,(X) \leq \mathbb{E}\left[\left(X - \frac{m+M}{2}\right)^2\right]$$

cu egalitate pentru $\mathbb{E}\,(X) = \frac{m+M}{2}$.

Deoarece $m \leq X \leq M$ *este echivalent cu*

$$-\frac{M-m}{2} \leq X - \frac{m+M}{2} \leq \frac{M-m}{2},$$

care este echivalent cu

$$\left(X - \frac{m+M}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{M-m}{2}\right)^2,$$

deducem că

$$\mathrm{D}^2\,(X) \leq \mathbb{E}\left[\left(X - \frac{m+M}{2}\right)^2\right] = \left(\frac{M-m}{2}\right)^2.$$

Remarca 3.84 (vezi și Remarcile 3.77 și 3.81) Să presupunem că dorim să facem o predicție a valorilor unei v.a. Y, dar nu printr-o constantă ci printr-o altă v.a., de tipul $aX+b$. O varianta ar fi să ne intereseze găsirea constantelor a și b astfel încât să minimizăm pătratul pierderii pe care ne așteptatăm să o avem, i.e. să minimizăm $\mathbb{E}\big[\,(Y-aX-b)^2\,\big]$. ◇

Exercițiul 3.85 *Fie* X, Y *două v.a. (discrete sau continue). Să se arate că, pentru orice* $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\big[\,(Y-aX-b)^2\,\big] = \mathrm{D}^2\,(Y) + a^2\mathrm{D}^2\,(X) - 2a\,\mathrm{Cov}\,(X,Y) + \tilde{b}^2, \tag{3.46}$$

unde $\tilde{b} = b - \mathbb{E}\,(Y) + a\mathbb{E}\,(X)$.

Apoi să se determine minimul funcției $\mathbb{R}^2 \ni (a,b) \mapsto \mathbb{E}\big[\,(Y-aX-b)^2\,\big]$.

Având în vedere că $\mathbb{E}\big[X - \mathbb{E}(X)\big] = \mathbb{E}\big[Y - \mathbb{E}(Y)\big] = 0$*, se obține identitatea cerută:*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[(Y - aX - b)^2\big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\big((Y - \mathbb{E}(Y)) - a(X - \mathbb{E}(X)) - (b - \mathbb{E}(Y) + a\mathbb{E}(X))\big)^2\Big] \\
&= \mathbb{E}\big[(Y - \mathbb{E}(Y))^2\big] + a^2\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X))^2\big] + \tilde{b}^2 \\
&\quad -2a\mathbb{E}\big[(Y - \mathbb{E}(Y))(X - \mathbb{E}(X))\big] - 2\tilde{b}\mathbb{E}\big[Y - \mathbb{E}(Y)\big] + 2a\tilde{b}\mathbb{E}\big[X - \mathbb{E}(X)\big].
\end{aligned}$$

Acum trebuie să studiem extremele funcției de două variabile $(a, b) \mapsto g(a, b) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\big[(Y - aX - b)^2\big]$*. În acest sens, calculăm derivatele parțiale de ordinul întâi și obținem*

$$\begin{aligned}
g'_a(a, b) &= \Big(\mathrm{D}^2(Y) + a^2\mathrm{D}^2(X) - 2a\mathrm{Cov}(X, Y) + \tilde{b}^2\Big)'_a \\
&= 2\mathrm{D}^2(X)\,a - 2\mathrm{Cov}(X, Y) + 2(b - \mathbb{E}(Y) + a\mathbb{E}(X))\,\mathbb{E}(X), \\
g'_b(a, b) &= \Big(\mathrm{D}^2(Y) + a^2\mathrm{D}^2(X) - 2a\mathrm{Cov}(X, Y) + \tilde{b}^2\Big)'_b \\
&= 2(b - \mathbb{E}(Y) + a\mathbb{E}(X)),
\end{aligned}$$

deci punctele critice sunt date de

$$\begin{cases}
\mathrm{D}^2(X)\,a - \mathrm{Cov}(X, Y) + (b - \mathbb{E}(Y) + a\mathbb{E}(X))\,\mathbb{E}(X) = 0, \\
b - \mathbb{E}(Y) + a\mathbb{E}(X) = 0,
\end{cases}$$

adică de

$$\begin{cases}
a_0 = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{D}^2(X)}, \\
b_0 = \mathbb{E}(Y) - a\mathbb{E}(X).
\end{cases}$$

Apoi calculăm derivatele parțiale de ordinul doi:

$$\begin{aligned}
g''_{aa}(a, b) &= \big[2\mathrm{D}^2(X)\,a - 2\mathrm{Cov}(X, Y) + 2(b - \mathbb{E}(Y) + a\mathbb{E}(X))\,\mathbb{E}(X)\big]'_a \\
&= 2\mathrm{D}^2(X) + 2(\mathbb{E}(X))^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\mathbb{E}\left(X^2\right), \\
g''_{bb}(a,b) &= \left[2\left(b - \mathbb{E}(Y) + a\mathbb{E}(X)\right)\right]'_b \\
&= 2, \\
g''_{ab}(a,b) &= \left[2\left(b - \mathbb{E}(Y) + a\mathbb{E}(X)\right)\right]'_a \\
&= 2\mathbb{E}(X).
\end{aligned}
$$

Deci derivatele parțiale de ordinul doi în punctul critic (a_0, b_0) *sunt date de:*

$$
\begin{aligned}
A &\overset{\text{not}}{=\!=} g''_{aa}(a_0,b_0) = 2\mathbb{E}\left(X^2\right), \\
C &\overset{\text{not}}{=\!=} g''_{bb}(a_0,b_0) = 2, \\
B &\overset{\text{not}}{=\!=} g''_{ab}(a_0,b_0) = 2\mathbb{E}(X).
\end{aligned}
$$

Dacă presupunem că $\mathrm{D}^2(X) > 0$ *sau, echivalent,* $\mathrm{D}^2(X) \neq 0$ *sau, echivalent, conform (2.67),* $X \neq c$, $\mathbb{P}-$*a.s., atunci avem*

$$
A > 0 \quad \text{și} \quad AC - B^2 = 4\left[\mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2\right] = 4\mathrm{D}^2(X) > 0,
$$

deci punctul critic (a_0, b_0) *este punct de extrem, mai precis de minim.*

Prin urmare,

$$
\begin{aligned}
&\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\,(Y - aX - b)^2\,\right] \\
&= \mathrm{D}^2(Y) + \left(\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\mathrm{D}^2(X)}\right)^2 \mathrm{D}^2(X) - 2\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\mathrm{D}^2(X)}\operatorname{Cov}(X,Y) \\
&= \mathrm{D}^2(Y) - \frac{\operatorname{Cov}^2(X,Y)}{\mathrm{D}^2(X)},
\end{aligned}
$$

adică

$$
\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\,(Y - aX - b)^2\,\right] = \mathrm{D}^2(Y)\left[1 - \rho^2(X,Y)\right], \tag{3.47}
$$

unde $\rho(X,Y)$ *este corelația v.a.* X, Y *dată de (3.41), iar minimul se realizează pentru*

$$
a = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\mathrm{D}^2(X)} \quad \text{și} \quad b = \mathbb{E}(Y) - \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\mathrm{D}^2(X)}\mathbb{E}(X).
$$

Dreapta

$$y = ax + b,$$

cu a, b *determinați mai sus, se numește* ***dreapta de regresie****.*

Să menționăm că (3.47) se poate obține și direct, din (3.46). Astfel, să observăm că minimul în raport cu a *și* b *se obține, mai întâi, dacă luăm* a *și* b *astfel încât* $\tilde{b} = 0$ *sau, echivalent,* $b = \mathbb{E}(Y) - a\mathbb{E}(X)$*, caz în care*

$$\mathbb{E}\big[(Y - aX - b)^2\big] \geq \mathrm{D}^2(Y) + a^2\mathrm{D}^2(X) - 2a\,\mathrm{Cov}(X, Y),$$

$$\text{pentru orice } a, b \in \mathbb{R}.$$

Apoi, dacă presupunem că $\mathrm{D}^2(X) \neq 0$*, sau, echivalent, conform (2.67),* $X \neq c$*,* $\mathbb{P}-$*a.s., trinomul de gradul al doilea în* a *are forma canonică*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}^2(X)\, a^2 - 2\mathrm{Cov}(X, Y)\, a + \mathrm{D}^2(Y) \\
&= \mathrm{D}^2(X)\left[a - \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{D}^2(X)}\right]^2 + \mathrm{D}^2(Y) - \frac{\mathrm{Cov}^2(X, Y)}{\mathrm{D}^2(X)} \\
&= \mathrm{D}^2(X)\left[a - \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{D}^2(X)}\right]^2 + \mathrm{D}^2(Y)\big[1 - \rho^2(X, Y)\big],
\end{aligned}$$

unde $\rho(X, Y)$ *este corelația v.a.* X, Y*.*

Prin urmare, dacă presupunem că $X \neq c$*,* $\mathbb{P}-$*a.s., atunci (3.46) este echivalentă cu*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(Y - aX - b)^2\big] &= \mathrm{D}^2(X)\left[a - \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{D}^2(X)}\right]^2 + \mathrm{D}^2(Y)\big[1 - \rho^2(X, Y)\big] \\
&\quad + (b - \mathbb{E}(Y) + a\mathbb{E}(X))^2 \\
&\geq \mathrm{D}^2(Y)\big[1 - \rho^2(X, Y)\big], \quad \text{pentru orice } a, b \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

iar minimul este atins în cazul în care $a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{D}^2(X)}$*, iar* $b = \mathbb{E}(Y) - a\mathbb{E}(X)$*.*

3.3 Exemple de v.a. continue

3.3.1 Distribuția uniformă

Spunem că v.a. X urmează distribuția uniformă pe intervalul $[a,b]$, și scriem $X \sim \mathcal{U}[a,b]$, dacă are densitatea de repartiție dată de

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.} \tag{3.48}$$

Se verifică imediat că $f \geq 0$ și că

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = \frac{1}{b-a}\,x\Big|_{x=a}^{x=b} = 1.$$

Funcția de repartiție corespunzătoare este $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$, dacă $x < a$.

Dacă $a \leq x < b$, atunci

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a},$$

iar dacă $x \geq b$, atunci

$$\begin{aligned} F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{b-a}(b-a) = 1. \end{aligned}$$

Deci

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{dacă } a \leq x < b, \\ 1, & \text{dacă } x \geq b. \end{cases}} \tag{3.49}$$

Graficele funcțiilor f și F se pot desena cu ușurință.

Remarca 3.86 În cazul unei v.a. distribuite uniform pe $[a, b]$ cadrul de lucru este următorul. Fie $\Omega = [a, b]$ (de exemplu, se măsoară o caracteristică, iar toate posibilele ei valori pot fi doar între limitele a și b). Apoi vom lua $\sigma-$algebra $\mathscr{F} = \mathscr{B}([a, b])$ și măsura de probabilitate dată de (vezi pagina 52)

$$\mathbb{P}([u, v]) = \frac{\lambda([u, v])}{\lambda([a, b])} = \frac{1}{b-a} \cdot (v-u), \quad \text{pentru orice } a \leq u \leq v \leq b,$$

unde λ este măsura Lebesgue (aceasta înseamnă că probabilitatea ca mărimea acelei caracteristici să fie în intervalul $[u, v]$ este proporțională cu lungimea acelui interval).

Pe spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ să definim v.a.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \text{dată de} \quad X(\omega) = \omega, \quad \omega \in \Omega. \tag{3.50}$$

Funcția de repartiție este dată de

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in [a, b] : \omega \leq x\}),$$

deci se obține

$$F_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(\varnothing) = 0, & \text{dacă } x < a, \\ \mathbb{P}([a, x]) = \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{dacă } a \leq x < b, \\ \mathbb{P}([a, b]) = 1, & \text{dacă } x \geq b, \end{cases}$$

adică (3.49).

Conform (3.4) obținem densitatea:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < a \text{ sau } x > b, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{dacă } a < x < b, \end{cases}$$

și astfel, folosind Remarca 3.8, putem considera

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

adică (3.48), deci v.a. definită de (3.50) este de tipul $X \sim \mathscr{U}[a, b]$. $\diamond$

Remarca 3.87 De exemplu, despre v.a. X care are drept valori erorile de rotunjire până la cel mai apropiat întreg din stânga valorii măsurate (erori obținute atunci când se măsoară o anumită caracteristică), se poate presupune că urmează o distribuție uniformă pe intervalul $(0,1)$ (vezi Exercițiul 5.5.5).

De asemenea, despre v.a. X care are drept valori erorile de rotunjire până la cel mai apropiat întreg de valoarea măsurată (întregul poate fi cel din stânga sau cel din dreapta, vezi Nota 322) se poate presupune că urmează o distribuție uniformă pe intervalul $(-0.5, 0.5)$ (vezi Exercițiul 5.5.6). $\diamond$

Propoziția 3.88 *Media și dispersia v.a. distribuite uniform $X \sim \mathcal{U}[a,b]$ sunt date de*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{și} \qquad \mathrm{D}^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Demonstrație. Într-adevăr, conform definiției

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx,$$

deci

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{a+b}{2}.$$

Pe de altă parte,

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\, dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

deci

$$\mathrm{D}^2(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

■

Exemplul 3.89 Fie $X \sim \mathcal{U}[0,1]$. Atunci,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \le 0, \\ x & \text{dacă } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{dacă } x > 1. \end{cases} \tag{3.51}$$

Deci probabilitatea $\mathbb{P}(1/4 \le X \le 3/4) = F(3/4) - F(1/4) = 1/2$. $\diamond$

Exercițiul 3.90 *Fie o v.a.* $X \sim \mathscr{U}(0,1)$ *și* $n \in \mathbb{N}^*$*. Să se arate că*[193]

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \lfloor nX \rfloor + 1 \sim \mathscr{DU}(n),$$

unde $\lfloor nX \rfloor$ *este partea întreagă a v.a.* nX, *i.e. cel mai mare întreg aleator mai mic sau egal decât v.a.* nX.

Deoarece $X \in (0,1)$ *obținem că* $nX \in (0,n)$, *deci* $\lfloor nX \rfloor \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ *adică mulțimea valorilor v.a.* U *este* $\{1,2,\ldots,n\}$.

Pentru orice $k \in \{1,2,\ldots,n\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U=k) &= \mathbb{P}(\lfloor nX \rfloor = k-1) \\
&= \mathbb{P}(k-1 \le nX < k) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{k-1}{n} \le X < \frac{k}{n}\right) \\
&= \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} dx \\
&= \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

prin urmare $U : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1/n & 1/n & \ldots & 1/n \end{pmatrix}$, *adică* $U \sim \mathscr{DU}(n)$.

Exercițiul 3.91 *Fie o v.a.* $X \sim \mathscr{U}(0,1)$ *și* $q \in (0,1)$. *Să se determine tipul v.a.*

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \left\lfloor \frac{\ln(X)}{\ln(q)} \right\rfloor + 1.$$

Se va obține, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(U=k) = pq^{k-1},$$

prin urmare[194] $U \sim \mathscr{G}(p)$, *unde* $p = 1-q$.

[193] Aceasta este o metodă de a genera v.a. discrete distribuite uniform folosind v.a. continue distribuite uniform pe $(0,1)$. Vezi și Exemplul 5.80.

[194] Aceasta este o metodă de a genera v.a. distribuite geometric folosind v.a. distribuite uniform pe $(0,1)$.

Propoziția 3.92 *V.a.* $X \sim \mathcal{U}[a,b]$ *dacă și numai dacă*[195] *v.a.*

$$Y = \frac{X-a}{b-a} \sim \mathcal{U}[0,1].$$

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) &= \mathbb{P}\Big(\frac{X-a}{b-a} \le y\Big) \\ &= \mathbb{P}(X \le (b-a)y + a) \\ &= F_X((b-a)y+a), \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} f_Y(y) = (F_Y(y))' &= (F_X((b-a)y+a))' \\ &= (b-a) f_X((b-a)y+a) \\ &= (b-a) \cdot \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}((b-a)y+a) \\ &= \mathbb{1}_{[0,1]}(y), \end{aligned}$$

deoarece

$$a \le (b-a)y + a \le b \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le y \le 1,$$

adică

$$\mathbb{1}_{[a,b]}((b-a)y+a) = \mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

Prin urmare, Y corespunde unei v.a. distribuite uniform pe $[0,1]$. ■

Remarca 3.93 Similar se arată că v.a. $X \sim \mathcal{U}[0,1]$ dacă și numai dacă v.a.

$$Y = (b-a)X + a \sim \mathcal{U}[a,b].$$

◇

Exemplul 3.94 Relația (2.52), i.e.

$$X, Y \text{ independente} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

[195] Vezi și demonstrația alternativă dată de formula (3.97), aplicată în Exemplul 3.226.

oferă o condiție necesară pentru independența a două v.a., dar ea nu este și suficientă.

În acest sens, fie $X \sim \mathscr{U}(-a,a)$, cu $a>0$, și $Y=X^2$. Se obține ușor că $\mathbb{E}(X)=0=\mathbb{E}\left(X^3\right)$, deci

$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}\left(X^3\right)=0=0\cdot\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y),$$

dar, evident, X,Y nu sunt independente. ◇

Propoziția 3.95 *Fie $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ o funcție de repartiție, i.e. o funcție care satisface cele trei proprietăți date de Propoziția 2.13. Atunci, există*[196] *un spațiu de probabilitate $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ și o v.a. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ astfel încât F să fie funcția de repartiție a v.a. X.*

Demonstrație. Vom lua $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})\overset{\text{def}}{=\!=}\big((0,1),\mathscr{B}\big((0,1)\big),\lambda\big)$, unde λ este măsura Lebesgue.

Fie $F^{-1}:(0,1)\to\mathbb{R}$ inversa generalizată a funcției F, dată de definiția (3.11). Fie $U\sim\mathscr{U}(0,1)$. Vom arăta[197] că **noua v.a.**

(3.52) $$X\overset{\text{def}}{=\!=}F^{-1}\circ U$$

admite pe F drept funcție de repartiție, i.e. $F=F_X$.

Să folosim relația (iii) din cadrul Remarcii 3.28:

$$F^{-1}(u)\le x \quad\Leftrightarrow\quad u\le F(x).$$

Prin urmare, pentru orice $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}F_X(x)=\mathbb{P}(X\le x)&=\mathbb{P}\left(F^{-1}(U)\le x\right)\\&=\mathbb{P}(U\le F(x))\\&=F_U(F(x))\\&=F(x),\end{aligned}$$

deoarece $F_U(u)=u$, pentru orice $u\in[0,1]$. ■

[196] Pentru o demonstrație alternativă vezi, de exemplu, [20, Theorem 1.2.2].

[197] Aceasta este o metodă de a genera v.a., atât discrete cât și continue, folosind v.a. distribuite uniform pe $(0,1)$.

Această metodă se numește **metoda inversei funcției de repartiție** (vezi Exemplul 3.98 și Exemplul 3.99, pentru cazul unei v.a. discrete, precum și Exercițiul 3.6.13 și Nota 239 pentru cazul unei v.a. continue).

Remarca 3.96 Dacă X este o v.a. cu funcția de repartiție F_X, atunci[198], conform demonstrației Propoziției 3.95, are loc următoarea egalitate în lege (vezi Definiția 2.18),

$$F_X^{-1}(U) \stackrel{\mathrm{d}}{=} X. \tag{3.53}$$

$\diamond$

Remarca 3.97 Rezultatul precedent este foarte util atunci când dorim să **simulăm valorile unei v.a. (atât cazul v.a. discrete cât și cel al v.a. continue)**, cu o funcție de repartiție F dată în prealabil, utilizand doar v.a. de tip uniform pe $(0,1)$, adică **să generăm o serie de valori numerice (numită eșantion) ale unei v.a. (discrete sau continue)**, cu o funcție de repartiție F dată, utilizând doar un eșantion de valori ale unei v.a. de tip uniform pe $(0,1)$.

Mai precis, dacă generăm mai întâi, prin diverse alte metode cunoscute,

$$\text{eșantionul de valori} \quad y_1, \ldots, y_n \quad \text{al unei v.a.} \quad Y \sim \mathscr{U}(0,1),$$

atunci, conform definiției (3.52) și a concluziei Propoziției 3.95, valorile

$$x_1 = F^{-1}(y_1), \ldots, x_n = F^{-1}(y_n) \quad \text{reprezintă un eșantion de valori}$$
$$\text{al unei v.a.} \quad X \quad \text{cu funcția de repartiție } F.$$

Această metodă de simulare a unei v.a. (discrete sau continue) se numește **metoda inversei funcției de repartiție**. $\diamond$

Exemplul 3.98 Să observăm că, dacă luăm v.a. $U \sim \mathscr{U}(0,1)$ și $p \in (0,1)$, atunci[199] (vezi și scrierea (2.17) a unei v.a. discrete):

$$X = \mathbb{1}_{[0,p]}(U) = \mathbb{1}_{\{U \in [0,p]\}} \tag{3.54}$$

este o v.a. discretă, cu tabloul

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

---

198 Vezi și concluzia Propoziției 3.102.

199 Aceasta este o metodă de a genera v.a. discrete de tip Bernoulli(p) folosind v.a. distribuite uniform pe $(0,1)$.

deoarece

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}\left(\mathbb{1}_{\{U\in[0,p]\}}=1\right)\\ &= \mathbb{P}(U\in[0,p])\\ &= \int_0^p f_U(u)\,du\\ &= p.\end{aligned}$$

Astfel putem obține v.a. discretă dată de (3.55), i.e. $X \sim$ Bernoulli(p), utilizând v.a. $U \sim \mathscr{U}(0,1)$.

Să observăm că, de fapt, am aplicat chiar metoda inversei funcției de repartiție. În acest sens, să luăm funcția de repartiție

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0, \\ q, & \text{dacă } x \in [0,1), \\ 1, & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases} \tag{3.56}$$

Inversa generalizată a funcției F, definită de (3.11), este dată de[200]

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } u \in (0,q], \\ 1, & \text{dacă } u \in (q,1), \end{cases}$$

deoarece, pentru orice $a \in (0,q]$,

$$F^{-1}(a) = \inf\{x\in\mathbb{R} : F(x) \geq a\} = \inf\{x\in\mathbb{R} : F(x)\geq q\} = 0,$$

[200] În general, dacă X este o v.a. discretă, cu un număr finit de valori și cu tabloul dat de (2.13), atunci funcția de repartiție este dată de (2.16) și are inversa generalizată dată de

$$F_X^{-1}(u) = \begin{cases} x_1, & \text{dacă } u \leq p_1, \\ x_2, & \text{dacă } p_1 < u \leq p_1+p_2, \\ \vdots & \\ x_{n-1}, & \text{dacă } p_1+\ldots+p_{n-2} < u \leq p_1+\ldots+p_{n-1}, \\ x_n, & \text{dacă } p_1+\ldots+p_{n-1} < u. \end{cases}$$

iar, pentru orice $a \in (q, 1)$,

$$F^{-1}(a) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq a\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 1\} = 1.$$

Deci, dacă avem o v.a. $U \sim \mathscr{U}(0,1)$ și funcția de repartiție F dată de (3.56), atunci funcția dată de (3.52), i.e.

$$X \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(U),$$

este o v.a. care are drept funcție de repartiție chiar funcția F, adică X este v.a. discretă cu tabloul dat de (3.55). ◇

Pentru un caz mai general, vezi exemplul următor.

Exemplul 3.99 Dacă dorim să obținem, de exemplu, v.a. discretă

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.2. & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

utilizând v.a. $U \sim \mathscr{U}(0,1)$, atunci luăm funcția de repartiție

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 1, \\ 0.2, & \text{dacă } x \in [1,2), \\ 0.7, & \text{dacă } x \in [2,3), \\ 1, & \text{dacă } x \geq 3. \end{cases} \tag{3.58}$$

Se poate arăta (vezi și Nota 200) că inversa generalizată a funcției F, definită de (3.11), este dată de

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } u \in (0, 0.2], \\ 2, & \text{dacă } u \in (0.2, 0.7], \\ 3, & \text{dacă } u \in (0.7, 1), \end{cases}$$

deoarece, de exemplu,

$$F^{-1}(0.3) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 0.3\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 0.7\} = 2.$$

Deci, dacă avem o v.a. $U \sim \mathscr{U}(0,1)$ și funcția de repartiție F dată de (3.58), atunci[201] funcția dată de (3.52), i.e.

$$X \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(U),$$

este o v.a. care are drept funcție de repartiție chiar funcția F, adică X este v.a. discretă cu tabloul dat de (3.57).

De fapt, are loc scrierea (2.17) a unei v.a. discrete:

$$\begin{aligned} X &= 1 \cdot \mathbb{1}_{(0,0.2]}(U) + 2 \cdot \mathbb{1}_{(0.2,0.7]}(U) + 3 \cdot \mathbb{1}_{(0.7,1)}(U) \\ &= 1 \cdot \mathbb{1}_{\{U \in (0,0.2]\}} + 2 \cdot \mathbb{1}_{\{U \in (0.2,0.7]\}} + 3 \cdot \mathbb{1}_{\{U \in (0.7,1)\}}, \end{aligned}$$

unde $U \sim \mathscr{U}(0,1)$. $\diamond$

Exemplul 3.100 Să se determine legea v.a. $X = -\mathbb{1}_{(0,0.3]}(U) + \mathbb{1}_{(0.3,1)}(U)$, unde $U \sim \mathscr{U}[0,1]$. $\diamond$

Exercițiul 3.101 *Fie X o v.a. continuă cu densitatea $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, pentru $x \in \mathbb{R}$. Fie v.a. (vezi și definiția (3.52) și concluzia Propoziției 3.95)*

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} F_X(X)$$

(a) *Să se arate că X are funcția de repartiție*

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & \text{dacă } x < 0, \\ \frac{1}{2}\left(2 - e^{-x}\right), & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

(b) *Să se calculeze $F_Y(y)$ în cazul $y \in (0,1/2)$ și apoi în cazul $y \in (1/2,1)$. Să se deducă faptul că*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } y < 0, \\ y, & \text{dacă } y \in [0,1], \\ 1, & \text{dacă } y > 1, \end{cases}$$

adică Y este distribuită uniform pe $[0,1]$.

[201] Aceasta este o metodă de a genera v.a. discrete folosind v.a. distribuite uniform pe $(0,1)$.

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \le y) \\
&= \mathbb{P}(Y \le y, X < 0) + \mathbb{P}(Y \le y, X \ge 0) \\
&= \mathbb{P}(F_X(X) \le y, X < 0) + \mathbb{P}(F_X(X) \le y, X \ge 0) \\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{2}e^X \le y, X < 0\Big) + \mathbb{P}\Big(\frac{1}{2}\left(2 - e^{-X}\right) \le y, X \ge 0\Big) \\
&= \mathbb{P}(X \le \ln(2y), X < 0) + \mathbb{P}(X \le -\ln[2(1-y)], X \ge 0).
\end{aligned}$$

Dacă $y \in (0, 1/2)$, *atunci*

$$\ln(2y) < 0 \qquad \text{și} \qquad -\ln[2(1-y)] < 0,$$

prin urmare

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X \le \ln(2y)) + \mathbb{P}(\varnothing) = F_X(\ln(2y)) = \frac{1}{2}e^{\ln(2y)} = y.$$

Dacă $y \in (1/2, 1)$, *atunci*

$$\ln(2y) > 0 \qquad \text{și} \qquad -\ln[2(1-y)] > 0,$$

prin urmare

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(0 \le X \le -\ln[2(1-y)]) \\
&= F_X(0) + F_X(-\ln[2(1-y)]) - F_X(0) \\
&= \frac{1}{2}\Big(2 - e^{\ln(2(1-y))}\Big) \\
&= y.
\end{aligned}$$

De fapt, se poate arăta următorul rezultat general (indiferent de forma concretă a funcției de repartiție F_X, cum a fost în exercițiul precedent).

Propoziția 3.102 *Fie X o v.a. continuă cu funcția de repartiție F_X și v.a.*[202]

$$U \overset{\text{def}}{=\!=} F_X(X). \tag{3.59}$$

[202] Vezi și concluzia (3.53) din cadrul Remarcii 3.96.

Atunci[203]*, v.a.* U *este distribuită uniform pe* $[0,1]$ *.*

În plus (față de relația (3.53)), are loc și egalitatea

$$F_X^{-1}(U) = X, \quad \mathbb{P} - a.s..$$

Demonstrație. Reamintim proprietatea (3.53), i.e. $F_X^{-1}(V) \overset{\mathrm{d}}{=} X$, unde F_X^{-1} este inversa generalizată a funcției de repartiție F_X, iar $V \sim \mathscr{U}(0,1)$.

Având în vedere că F_X este continuă și mărginită, rezultă, conform (5.14), că are loc și egalitatea în lege

$$F_X\left(F_X^{-1}(V)\right) \overset{\mathrm{d}}{=} F_X(X).$$

Pe de altă parte, conform proprietății (ix) din cadrul Remarcii 3.28, avem că dacă F_X este continuă, atunci

$$F_X\left(F_X^{-1}(V)\right) = V, \quad \mathbb{P} - \text{a.s.}$$

și astfel obținem că

$$V \overset{\mathrm{d}}{=} F_X(X),$$

deci $V \overset{\mathrm{d}}{=} U$, adică U este distribuită uniform pe $[0,1]$.

Să observăm acum, conform proprietății (v) din cadrul Remarcii 3.28, că

$$F_X^{-1}(U) = F_X^{-1}(F_X(X)) \leq X, \quad \mathbb{P} - \text{a.s.}.$$

Pe de altă parte, deoarece $U \sim \mathscr{U}(0,1)$, avem că $F_X^{-1}(U) \overset{\mathrm{d}}{=} X$, deci, evident (vezi și Propoziția 5.38), rezultă că

$$\mathbb{E}\left(F_X^{-1}(U)\right) = \mathbb{E}(X),$$

adică

$$\mathbb{E}\left(X - F_X^{-1}(U)\right) = 0.$$

Folosind proprietatea (2.50), deducem că

$$X = F_X^{-1}(U), \quad \mathbb{P} - \text{a.s.}$$

sau că $X = F_X^{-1}(F_X(X))$, $\mathbb{P}-$a.s.. ■

[203] Pentru o demonstrație alternativă vezi, de exemplu, [25, Lemma 6.2].

Remarca 3.103 Să menționăm că în cazul în care F_X ar fi strict crescătoare, inversa standard a funcției F_X există, deci (vezi Nota 167) inversa generalizată coincide cu cea standard, iar calculul pentru demonstrarea Propoziției 3.102 devine elementar.

Dacă $u < 0$, atunci

$$F_U(u) = \mathbb{P}(U \leq u) = \mathbb{P}(F_X(X) \leq u) = 0,$$

iar dacă $u > 1$, atunci

$$F_U(u) = \mathbb{P}(U \leq u) = \mathbb{P}(F_X(X) \leq u) = 1.$$

Dacă $u \in [0, 1]$, atunci

$$\begin{aligned} F_U(u) = \mathbb{P}(U \leq u) &= \mathbb{P}(F_X(X) \leq u) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq F_X^{-1}(u)\right) \\ &= F_X\left(F_X^{-1}(u)\right) \\ &= u \end{aligned}$$

și astfel $U \sim \mathscr{U}[0, 1]$. ◇

3.3.2 Distribuția exponențială

Spunem că v.a. X urmează distribuția exponențială de parametru $\lambda > 0$, și scriem $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, dacă are densitatea de repartiție dată de

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.60}$$

Evident, $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\bigg|_{x=0}^{x=\infty} = 1 - e^{-\infty} = 1.$$

Remarca 3.104 Adesea, distribuția exponențială este folosită drept model pentru **durata de funcționare** (**durata de viață**) a unui anume dispozitiv, i.e. **timpul de așteptare** până la defectarea unui anume dispozitiv, de exemplu, durata de viață a unui bec.

În alte situații, distribuția exponențială este folosită drept model pentru **timpul de așteptare dintre două apariții succesive ale unui eveniment** anume (care tot continuă să apară); de exemplu, timpul de așteptare dintre apariția a două cutremure, de mică intensitate, succesive. Este esențial să se presupună că numărul de acest tip de evenimente, apărute în intervalul $[0, t]$, urmează o distribuție de tip Poisson cu parametrul direct proporțional cu lungimea intervalului de timp[204], adică $\mathscr{P}(\lambda t)$. Atunci, se poate arăta, vezi, de exemplu, [24, Proposition 10.4], că timpul de așteptare dintre oricare două apariții succesive ale unui eveniment (astfel încât aparițiile lor sunt modelate de un proces stochastic Poisson) este o v.a. de tip exponențial de parametru λ. $\diamond$

Funcția de repartiție corespunzătoare este $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$, dacă $x \leq 0$ și, dacă $x > 0$, atunci

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\Big|_{x=0}^{t=x},$$

deci (vezi și relațiile (2.98) din cazul distribuției geometrice), pentru orice $x > 0$ avem

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad \text{sau, echivalent,} \qquad \mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x}. \tag{3.61}$$

Evident, putem scrie funcția de repartiție și sub forma

$$F(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Să menționăm că funcția definită de

$$r_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - F_X(x) = \mathbb{P}(X > x)$$

este numită **funcția de supraviețuire** sau **funcția de fiabilitate** și, datorită formei simple din cazul distribuției exponențiale, este preferabil să lucrăm cu ea.

Remarca 3.105 (vezi și Remarca 3.150) Să folosim semnificația dată de Remarca 3.104, conform căreia distribuția exponențială modelează timpul de așteptare dintre oricare două apariții succesive ale unui eveniment anume (care tot continuă să apară) despre care se presupune că urmează o distribuție de tip Poisson cu parametrul direct proporțional cu lungimea intervalului de timp în care numărăm apariția evenimentelor[205].

[204] Vezi definiția unui proces stochastic Poisson dată de Nota 112.

[205] Vezi definiția unui proces stochastic Poisson dată de Nota 112.

Astfel, să definim v.a. X_1 ca fiind **timpul de așteptare până la prima apariție a evenimentului** și, pentru $i \geq 2$, definim X_i ca fiind **timpul de așteptare de la momentul apariției de ordin** $(i-1)$ **a evenimentului până la apariția de ordin** i **a evenimentului** avut în vedere. De asemenea, să considerăm un proces stochastic Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ definit de Nota 112, prin urmare N_t reprezintă numărul de evenimente ce au loc într-un interval de lungime t (indiferent de momentul inițial). Deci avem și faptul că v.a. $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$.

Atunci are loc egalitatea

$$\boxed{\{X_i > t\} = \{N_t = 0\}} \tag{3.62}$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\{X_i > t\} &= \{\text{timpul dintre producerea evenimentului de ordin } (i-1) \text{ și} \\ &\qquad \text{evenimentul de ordin } i \text{ este } > t\} \\ &= \{\text{într-un interval de lungime } t \text{ nu apare nici un eveniment}\} \\ &= \{N_t = 0\}.\end{aligned}$$

Acum, dacă folosim și faptul că $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$, deducem că

$$F_{X_i}(t) = 1 - \mathbb{P}(X_i > t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Prin urmare, densitatea v.a. X_i este dată de

$$f_{X_i}(t) = (F_{X_i}(t))' = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \text{pentru orice } t > 0.$$

Prin urmare, am obținut expresia densității (3.60) asociată v.a. X_i, adică $X_i \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$, folosind doar semnificația v.a. X_i și N_t precum și tipul de distribuție al v.a. N_t. ◇

Remarca 3.106 Ca și distribuția geometrică, din cazul discret (vezi Exercițiul 2.4.45, Exercițiul 2.4.46 și Exercițiul 2.4.47), și distribuția exponențială are proprietatea de a fi „**fără memorie**”. Mai mult chiar, distribuția exponențială este singura distribuție continuă „fără memorie”.

Aceasta proprietate este dată de egalitatea (vezi Exercițiul 3.6.11 și Exercițiul 3.6.12):

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq s+t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t), \quad \text{pentru orice } s, t > 0,} \tag{3.63}$$

sau, echivalent,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X \geq s+t\right) = \mathbb{P}\left(X \geq s\right)\mathbb{P}\left(X \geq t\right), \quad \text{pentru orice } s,t > 0.} \tag{3.64}$$

deoarece $\{X \geq s+t\} \subset \{X \geq s\}$, pentru orice $s,t > 0$. ◇

Propoziția 3.107 *Media și dispersia v.a. distribuite exponențial* $X \sim \mathrm{Exp}\left(\lambda\right)$ *sunt date de*

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{\textit{și}} \qquad \mathrm{D}^2\left(X\right) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{3.65}$$

Remarca 3.108 Deci, în cazul unei v.a. de tip $\mathrm{Exp}\left(\lambda\right)$, parametrul ei este chiar inversul mediei v.a.. ◇

Demonstrație. Conform definiției, integrând prin părți, obținem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X\right) &= \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \lambda \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx \\
&= -\frac{x}{e^{\lambda x}}\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_{x=0}^{x=\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda x^2 \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \lambda \int_0^\infty 2x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx \\
&= -\frac{x^2}{e^{\lambda x}}\Big|_{x=0}^{x=\infty} + 2\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx \\
&= 2\frac{\mathbb{E}\left(X\right)}{\lambda} \\
&= \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Deci

$$\mathrm{D}^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

■

Avem următorul rezultat de legătură dintre distribuția exponențială și distribuția geometrică.

Teorema 3.109 *Distribuția exponențială* $\mathrm{Exp}(\lambda)$ *este un caz limită al distribuției geometrice* $\mathcal{G}(p)$*, când* $p \to 0_+$*, în sensul următor: dacă* $X \sim \mathcal{G}(p)$ *și* $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$*, atunci are loc următoarea limită*

$$\lim_{\substack{a\to\infty \\ p=\lambda/a\to 0_+}} \mathbb{P}\left(\frac{X}{a} \le y\right) = \mathbb{P}(Y \le y), \quad \textit{pentru orice } y > 0. \tag{3.66}$$

sau, echivalent (vezi (3.61)),

$$\lim_{\substack{a\to\infty \\ p=\lambda/a\to 0_+}} \mathbb{P}\left(\frac{X}{a} > y\right) = e^{-\lambda y}.$$

Remarca 3.110 Relația (3.66) se poate scrie sub forma (vezi și Definitia 5.26):

$$\lim\nolimits_{a\to\infty} F_{X/a}(y) = F_Y(y), \quad \text{pentru } y \in (0,\infty).$$

unde $X \sim \mathcal{G}(\lambda/a)$, iar $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, adică are loc convergența $\dfrac{X}{a} \xrightarrow{F} Y$, pentru $a \to \infty$. ◇

Demonstrație. Fie $y \in (0,\infty)$ arbitrar fixat. Fie $p \in (0,1)$. Să considerăm v.a. $X \sim \mathcal{G}(p)$ și apoi v.a. $\dfrac{X}{a}$, unde $a = \lambda/p \in (0,\infty)$.

Să observăm, mai întâi, că noua v.a. $\dfrac{X}{a}$ ia valori în $(0,\infty)$.

Deoarece X ia valori în $\mathbb{N}^*$ deducem, folosind și (2.98), că

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{a} > y\right) = \mathbb{P}(X > ay) = \mathbb{P}(X \ge \lfloor ay \rfloor + 1) = \mathbb{P}(X > \lfloor ay \rfloor) = (1-p)^{\lfloor ay \rfloor},$$

unde $\lfloor ay \rfloor$ este partea întreagă a numărului ay, i.e. cel mai mare întreg mai mic sau egal decât ay.

Deci

$$\lim\nolimits_{a\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X}{a} > y\right) = \lim\nolimits_{a\to\infty} (1-p)^{\lfloor ay \rfloor}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a\to\infty} \left\{ (1-p)^{\frac{1}{-p}} \right\}^{-p\lfloor ay \rfloor} \\
&= e^{-\lim_{a\to\infty}(p\lfloor ay \rfloor)} \\
&= e^{-\lim_{a\to\infty} apy \frac{\lfloor ay \rfloor}{ay}} \\
&= e^{-\lambda y},
\end{aligned}$$

deoarece $\frac{ay-1}{ay} < \frac{\lfloor ay \rfloor}{ay} \leq \frac{ay}{ay}$, deci $\lim_{a\to\infty} \frac{\lfloor ay \rfloor}{ay} = 1$.

Deci, dacă $a > 0$ este suficient de mare, atunci putem aproxima distribuția exponențială de parametru λ prin distribuții de tipul $\dfrac{X}{a}$, unde X este o v.a. de tip geometric de parametru $p = \lambda/a$.

Sau, echivalent, dacă $p > 0$ este suficient de mic, atunci putem aproxima distribuția exponențială de parametru λ prin distribuții de tipul $\dfrac{pX}{\lambda}$, unde X este o v.a. de tip geometric de parametru p. ■

Exercițiul 3.111 *Fie o v.a.* $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. *Să se calculeze funcția de repartiție* F_U, *unde* $U = \lfloor X \rfloor$, *adică partea întreagă a v.a.* X, *i.e. cel mai mare întreg aleator mai mic sau egal decât v.a.* X.

Să notăm $q = e^{-\lambda}$ *și* $p = 1 - q$. *Se obține că, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U > n) = \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor > n) &= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor \geq n+1) \\
&= \mathbb{P}(X \geq n+1) \\
&= e^{-\lambda(n+1)} \\
&= q^{n+1},
\end{aligned}$$

deci

$$F_U(n) = 1 - q^{n+1}.$$

Astfel, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U = n) &= \mathbb{P}(U > n-1) - \mathbb{P}(U > n) \\
&= q^n - q^{n+1} \\
&= q^n(1-q) = pq^n,
\end{aligned}$$

adică[206] $U \sim \mathcal{G}(p)$ *(varianta dată de Remarca 2.168).*

Putem raționa și astfel:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U = n) = \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n) = \mathbb{P}(n \leq X < n+1) &= \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \left.\frac{e^{-\lambda x}}{-1}\right|_{x=n}^{x=n+1} \\ &= e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)} \\ &= \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^n \\ &= pq^n.\end{aligned}$$

Astfel, putem spune că ***distribuția geometrică este versiunea discretă a distribuției exponențiale****.*

3.3.3 Distribuția normală

Spunem că v.a. X urmează distribuția normală (sau distribuția Gaussiană) de parametri $\mu \in \mathbb{R}$ și $\sigma^2 > 0$, și scriem $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, dacă are densitatea de repartiție dată de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Uneori se scrie sub forma $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, adică se consideră că parametrii sunt $\mu \in \mathbb{R}$ și $\sigma > 0$.

3.3.3.1 Densitatea de repartiție

Propoziția 3.112 *Funcția f este o densitate de repartiție.*

Demonstrație. Evident, $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

[206] Aceasta este o metodă de a genera v.a. distribuite geometric folosind v.a. distribuite exponențial.

Dacă facem schimbarea de variabilă $\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} = t$ sau echivalent $x = \sqrt{2}\sigma t + \mu$, atunci $dx = \sqrt{2}\sigma dt$ și

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \sqrt{2}\sigma dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \\ &= 1,\end{aligned}$$

deoarece avem următoarea valoare a **integralei Gauss** (sau Euler-Poisson)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.} \tag{3.67}$$

Se obțin ușor și valorile

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Să demonstrăm (3.67).

Are loc $e^y > 1 + y$, pentru orice $y > 0$, deci

$$e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

dar $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(\infty) - \arctan(0) = \pi/2$ adică este convergentă. Deci integrala improprie $I_1 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ este și ea convergentă.

Pe de altă parte,

$$(I_1)^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{x,y\geq 0} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Pentru calculul acestei integrale duble se va folosi trecerea la coordonate polare $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ cu determinantul Jacobian $J = \rho$. Obținem

$$(I_1)^2 = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\rho^2}}{-2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=\infty} d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Deci $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 2I_1 = \sqrt{\pi}$. ■

Remarca 3.113 Referitor la graficul densității de repartiție f :

(i) Graficul este cunoscut sub numele de **clopotul lui Gauss** și este simetric în raport cu dreapta $x = \mu$ (adică, vezi Nota 93, distribuția v.a. X este simetrică în raport cu μ)

(ii) Parametrul σ^2 dă gradul de turtire al graficului (sau gradul de împrăștiere al valorilor lui X față de valoarea medie μ).

(iii) Graficul are axa Ox drept asimptotă orizontală la $\pm\infty$ deoarece avem $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

(iv) Graficul admite un maxim în punctul $M\left(\mu, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)$ și două puncte de inflexiune date de $\mu - \sigma$ și $\mu + \sigma$.

Într-adevăr, derivata

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{x-\mu}{-\sigma^2} = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} f(x).$$

Punctele de extrem sunt date de

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \mu.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3}\left(e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + (x-\mu)\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{x-\mu}{-\sigma^2}\right) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{\sigma^2 - (x-\mu)^2}{\sigma^2} \\ &= -\frac{\sigma^2 - (x-\mu)^2}{\sigma^4} f(x). \end{aligned}$$

Deci punctele de inflexiune sunt date de

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \mu \pm \sigma.$$

◇

Remarca 3.114 Luând $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 1$ se obțin v.a. distribuite de tip $\mathcal{N}(0,1)$, numite și v.a. distribuite normal standard, cu densitatea

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Graficul densității de repartiție este simetric în raport cu axa Oy (adică densitatea f este funcție pară și, prin urmare, distribuția v.a. X este simetrică în raport cu 0) și admite un maxim în punctul $M\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$.

De asemenea, $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \simeq 0.3989$ și $f(3.99) = f(-3.99) \simeq 10^{-4} \simeq 0$. Deci valorile $f(x)$ pentru $|x| > 4$ sunt neglijabile, adică curba se apropie foarte repede de axa absciselor Ox când x crește. $\diamond$

Propoziția 3.115 *Media și dispersia v.a. distribuite normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sunt date de*

$$\mathbb{E}(X) = \mu \qquad \text{și} \qquad \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2.$$

Remarca 3.116 Deci, în cazul unei v.a. de tip $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, parametrii ei reprezintă chiar media și dispersia v.a.. $\diamond$

Demonstrație. Utilizăm (3.67) și obținem, luând $x = \sqrt{2}\sigma t + \mu$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma t + \mu) e^{-t^2} \sqrt{2}\sigma dt \\
&= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \\
&= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2}}{-2} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \\
&= 0 + \mu
\end{aligned}$$

și

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma t + \mu)^2 e^{-t^2} \sqrt{2}\sigma dt \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt + \frac{2\sqrt{2}\mu\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} t \frac{e^{-t^2}}{-2} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{-2} dt + 0 + \frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \\
&= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \frac{t}{e^{t^2}} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt + \mu^2 \\
&= \sigma^2 + \mu^2.
\end{aligned}
$$

Deci $\mathrm{D}^2(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$. ■

3.3.3.2 Funcția de repartiție

Funcția de repartiție asociată v.a. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ se notează cu Φ :

$$\Phi(x) \stackrel{\text{not}}{=} F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R},$$

iar pentru diverse valori ale ei există tabele.

Pe de altă parte, funcția de repartiție $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} f_X(t)\, dt$ reprezintă aria domeniului din plan cuprins între dreapta $x = z$, axa Ox și curba $y = f_X(x)$.

Remarca 3.117 Evident, dacă folosim interpretarea cu ajutorul ariei funcției Φ, observăm că

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}$$

și, folosind simetria graficului funcției de densitate f_X, obținem că

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad \text{pentru orice } x > 0, \tag{3.68}$$

prin urmare este suficient să cunoaștem doar valorile funcției Φ în argumente strict pozitive. ◇

Remarca 3.118 Avem că $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$. Dacă folosim tabelele, citim următoarele valori:

$$\begin{aligned} &\Phi(1.00) \simeq 0.841345, \quad &\Phi(2.00) \simeq 0.977250,\\ &\Phi(3.00) \simeq 0.998650, \quad &\Phi(3.80) \simeq 0.999928,\\ &\Phi(3.90) \simeq 0.999952, \quad &\Phi(3.98) \simeq 0.999966. \end{aligned}$$

$\diamond$

Exemplul 3.119 Fie v.a. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Citim din tabele valoarea $\Phi(1.68) \simeq 0.954$, deci probabilitatea ca X să ia valori mai mici decât 1.68 reprezintă aproximativ 95% din întreaga arie mărginită de densitatea de repartiție și de axa Ox. $\diamond$

Propoziția 3.120 *Fie $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Are loc următoarea legătură între funcția de repartiție F_X și funcția de repartiție Φ pentru care există tabele de valori:*

$$F_X(x) = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big), \quad \textit{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{3.69}$$

Demonstrație. Într-adevăr,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Acum se va face schimbarea de variabilă

$$\frac{t-\mu}{\sigma} = s \quad \Leftrightarrow \quad t = \sigma s + \mu \quad \Rightarrow \quad dt = \sigma ds$$

deci

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{s^2}{2}} \sigma ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big).$$

$\blacksquare$

Remarca 3.121 Deoarece $\Phi(0) = 1/2$ obținem că

$$F(\mu) = \frac{1}{2},$$

deci media $\mu = x_{1/2}$ este și mediana distribuției, deoarece împarte mulțimea valorilor în două părți egale, i.e. are loc definiția (3.17) a medianei $x_{1/2}$ din cazul continuu:

$$\mathbb{P}(X \leq \mu) = \mathbb{P}\left(X \leq x_{1/2}\right) = 1/2,$$

iar

$$\mathbb{P}(X > \mu) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq x_{1/2}\right) = 1/2.$$

$\diamond$

Propoziția 3.122 *Fie $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Atunci, pentru orice $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, $\epsilon > 0$ și $k > 0$,*

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),\\
&(ii) \quad \mathbb{P}(|X-\mu| \leq \epsilon) = F_X(\mu+\epsilon) - F_X(\mu-\epsilon)\\
&\qquad = \Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\epsilon}{\sigma}\right)\\
&\qquad = 2\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) - 1,\\
&(iii) \quad \mathbb{P}(|X-\mu| \leq k\sigma) = 2\Phi(k) - 1,\\
&(iv) \quad \mathbb{P}(|X-\mu| > k\sigma) = 2(1-\Phi(k)).
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

Exemplul 3.123 Fie v.a. $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Să calculăm $\mathbb{P}(|X| \leq \sigma)$.

Luând $k = 1$ în (3.70) obținem (vezi și Remarca 3.118):

$$\mathbb{P}(|X| \leq \sigma) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.841345 - 1 = 0.6826.$$

Deci probabilitatea ca X să ia valori în intervalul $(-\sigma, \sigma)$ reprezintă aproximativ 68% din aria mărginită de densitatea de repartiție și de axa Ox. $\diamond$

Remarca 3.124 Fie $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Să calculăm

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \leq \sigma), \quad \mathbb{P}(|X-\mu| \leq 2\sigma), \quad \mathbb{P}(|X-\mu| \leq 2\sigma).$$

Luând $k = 3$ în (3.70) obținem (vezi și Remarca 3.118):

$$\mathbb{P}(|X-\mu| > 3\sigma) = 2(1-\Phi(3)) \simeq 2 \cdot 0.00135 = 0.0027.$$

Având în vedere că valoarea 0.0027 poate fi neglijată, obținem că o v.a. repartizată normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ia valori semnificative în intervalul $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ (numită și *„**regula celor** 3σ”*), i.e.

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \leq 3\sigma) = \mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \simeq 99.73\%. \tag{3.71}$$

Similar se va obține

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \leq \sigma) = \mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \simeq 68.26\%,$$

și

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \leq 2\sigma) = \mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \simeq 95.45\%. \tag{3.72}$$

$\diamond$

Remarca 3.125 Fie X o v.a oarecare (discretă sau continuă) cu media μ și dispersia σ^2.

Putem obține o estimare a probabilității $\mathbb{P}(|X - \mu| < 3\sigma)$ și cu ajutorul inegalității (2.77) a lui Cebâșev:

$$\mathbb{P}(|X - \mu| < 3\sigma) \geq 1 - \frac{1}{3^2} \simeq 0.8889.$$

Să observăm că marginea inferioară obținută, folosind inegalitatea lui Cebâșev, pentru probabilitatea $\mathbb{P}(|X - \mu| < 3\sigma)$ este mult mai mică decât valoarea aproximativă a probabilității respective în cazul particular al unei v.a. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, care este 0.9973, dată de (3.71).

Similar, putem obține o estimare a probabilității $\mathbb{P}(|X - \mu| < 2\sigma)$ și cu ajutorul inegalității (2.77) a lui Cebâșev:

$$\mathbb{P}(|X - \mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{2^2} \simeq 0.750.$$

Să observăm că marginea inferioară obținută, folosind inegalitatea lui Cebâșev, pentru probabilitatea $\mathbb{P}(|X - \mu| < 2\sigma)$ este mult mai mică decât valoarea aproximativă a probabilității respective în cazul particular al unei v.a. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, care este 0.9545, dată de (3.72). $\diamond$

Propoziția 3.126 *Fie $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Atunci*

(i) *aria* $\mathscr{A}$ *a domeniului cuprins între* $x = -a$, $x = a$, *graficul lui* f *și axa* Ox, *unde* $a > 0$, *este, folosind și simetria funcției* f, *dar și interpretarea geometrică a valorii integralei* $\Phi(a)$,

$$\mathscr{A} = \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt = 2\left(\Phi(a) - \frac{1}{2}\right) = 2\Phi(a) - 1,$$

deci, folosind scrierea (3.6),

$$\mathscr{A} = \mathbb{P}(|X| \leq a) = 2\Phi(a) - 1, \quad \textit{pentru orice } a > 0;$$

(ii) *aria* $\mathscr{A}$ *a domeniului cuprins între graficul lui* f *și axa* Ox *și aflat la stânga dreptei* $x = a$ *reunit cu domeniul cuprins între graficul lui* f *și axa* Ox *și aflat la dreapta dreptei* $x = a$, *unde* $a > 0$, *este*

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_{-\infty}^{-a} f(t)\,dt + \int_{a}^{\infty} f(t)\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt - \int_{-a}^{a} f(t)\,dt\\ &= 1 - (2\Phi(a) - 1)\\ &= 2(1 - \Phi(a)),\end{aligned}$$

iar, pe de altă parte, folosind scrierea (3.6),

$$\int_{-\infty}^{-a} f(t)\,dt + \int_{a}^{\infty} f(t)\,dt = \mathbb{P}(\{X \leq -a\} \cup \{X \geq a\}) = \mathbb{P}(|X| \geq a),$$

deci

$$\mathscr{A} = \mathbb{P}(|X| \geq a) = 2(1 - \Phi(a)), \quad \textit{pentru orice } a > 0;$$

(iii) *aria* $\mathscr{A}$ *a domeniului cuprins între* $x = a$, $x = b$, *graficul lui* f *și axa* Ox *este*

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_{a}^{b} f(t)\,dt\\ &= \mathbb{P}(a \leq X \leq b)\\ &= \Phi(b) - \Phi(a), \quad \textit{pentru orice } -\infty \leq a \leq b \leq \infty.\end{aligned}$$

Pentru demonstrarea următoarelor rezultate vezi și Corolarul 3.33.

Propoziția 3.127 *Are loc*[207]

$$X \sim \mathcal{N}\big(\mu, \sigma^2\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)\,.$$

Remarca 3.128 Dacă X este o v.a., atunci spunem că noua v.a.

$$\frac{X-\mathbb{E}\,(X)}{\sqrt{\mathrm{D}^2\,(X)}} \quad \text{se numește } \textbf{standardizarea}^{208} \text{ v.a. } X.$$

De exemplu, dacă $X \sim \mathcal{N}\big(\mu, \sigma^2\big)$, atunci v.a. $\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(X)}}$ este chiar standardizarea v.a. X. ◇

Demonstrație. Să notăm cu $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. Avem

$$F_Y\,(y) = \mathbb{P}\,(Y \leq y) = \mathbb{P}\Big(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq y\Big) = \mathbb{P}\,(X \leq \sigma y + \mu) = F_X\,(\sigma y + \mu)\,.$$

Deci

$$\begin{aligned} f_Y\,(y) = (F_Y\,(y))' &= (F_X\,(\sigma y + \mu))' \\ &= \sigma f_X\,(\sigma y + \mu) \\ &= \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\sigma y)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \end{aligned}$$

adică Y corespunde unei v.a. distribuite normal standard. ■

[207] Vezi și demonstrația alternativă dată de formula (3.97), aplicată în Exemplul 3.227.

[208] Să observăm că **v.a. standardizată are media** 0 **și dispersia** 1 (dacă v.a. de la care s-a plecat admite medie și dispersie finită). Într-adevăr, folosind proprietățile mediei și ale dispersiei, avem

$$\mathbb{E}\left(\frac{X-\mathbb{E}\,(X)}{\sqrt{\mathrm{D}^2\,(X)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}^2\,(X)}}\mathbb{E}\,(X-\mathbb{E}\,(X)) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}^2\,(X)}}\,(\mathbb{E}\,(X)-\mathbb{E}\,(X)) = 0$$

și respectiv

$$\mathrm{D}^2\left(\frac{X-\mathbb{E}\,(X)}{\sqrt{\mathrm{D}^2\,(X)}}\right) = \frac{1}{\mathrm{D}^2\,(X)}\mathrm{D}^2\,(X-\mathbb{E}\,(X)) = \frac{1}{\mathrm{D}^2\,(X)}\mathrm{D}^2\,(X) = 1.$$

Remarca 3.129 Similar se arată că

$$X \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\,.$$

$\diamond$

Propoziția 3.130 *Are loc, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a \neq 0$,*

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Longleftrightarrow \quad aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)\,.$$

Demonstrație. Să notăm cu $Y = aX + b$. Avem

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(aX + b \leq y) = \mathbb{P}\Big(X \leq \frac{y-b}{a}\Big) = F_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big).$$

Deci

$$\begin{aligned} f_Y(y) = (F_Y(y))' &= \left(F_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big)\right)' \\ &= \frac{1}{|a|} f_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big) \\ &= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2\sigma^2}} e^{-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2}}\,, \end{aligned}$$

adică Y corespunde unei v.a. distribuite normal $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. ■

Demonstrarea următorului rezultat se poate face folosind formula (3.98) de calcul a densitatii sumei a doua v.a. (vezi Exemplul 3.234) sau cu ajutorul funcției caracteristice (vezi Exercițiul 4.2.23).

Propoziția 3.131 *Suma a două v.a. independente care urmează o distribuiție de tip normal este o v.a care urmează o distribuiție tot de tip*[209] *normal. Mai precis,*

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)\,,\ i = \overline{1,2}, \quad \textit{indep.} \quad \Longrightarrow \quad X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

[209] Pentru proprietatea similară satisfacută de alte distribuții vezi Propoziția 2.125, Propoziția 2.165, Propoziția 2.180, Propoziția 2.182, Propoziția 3.143, Propoziția 3.171 și respectiv Exercițiul 3.6.41.

Remarca 3.132 Distribuția normală este cazul limită al multor distribuții. În acest sens, vezi Teorema Limită Centrală dată de Teorema 5.108 și rezultatele asociate date de Remarcile 5.111, 5.117, 5.119, 5.121, 5.123, 5.124 și respectiv 5.127.

Deci, pentru valori mari ale lui n, putem folosi, dacă ținem cont și de relația (3.69), doar tabelele de valori ale funcției de repartiție Φ asociată unei distribuții normale standard. $\diamond$

Remarca 3.133 Dacă suntem în cadrul de lucru al Remarcii 2.102, mai precis, dacă avem v.a. X reprezentând o caracteristică cercetată și v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ de tip **i.i.d.**, urmând repartiția lui X, atunci $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ reprezintă o selecție (sau eșantion) de volum n.

Să observăm că, în cazul particular în care caracteristica cercetată urmează distribuția normală, i.e. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, unde $\mu > 0$ și $\sigma > 0$, putem determina chiar tipul de distribuție al mediei de selecție.

Astfel, utilizând Propoziția 3.131 obținem că suma

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

și apoi, folosind Propoziția 3.130, deducem că media de selecție este v.a. de tipul

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)\,. \tag{3.73}$$

Pentru cazul în cazul în care caracteristica X urmează o distribuție oarecare, vezi Remarca 5.112. $\diamond$

Exemplul 3.134 Fie $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ și ϵ o v.a. discretă de tip uniform, independentă de X, dată de $\mathbb{P}(\epsilon = 1) = \mathbb{P}(\epsilon = -1) = 1/2$. Fie v.a. $Y = \epsilon X$.

Deoarece v.a. X și ϵ sunt independente și au media zero, covarianța v.a. X și Y este dată de

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(XY) - 0 \cdot 0 \\
&= \mathbb{E}\left(\epsilon X^2\right) \\
&= \mathbb{E}(\epsilon)\,\mathbb{E}\left(X^2\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

deci v.a. X, Y sunt necorelate.

Să calculăm și funcția de repartiție a lui Y :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}(\epsilon X \leq x) \\
&= \mathbb{P}(\epsilon X \leq x, \epsilon = 1) + \mathbb{P}(\epsilon X \leq x, \epsilon = -1) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x)\, \mathbb{P}(\epsilon = 1) + \mathbb{P}(X \geq -x)\, \mathbb{P}(\epsilon = -1) \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(X \geq -x)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(-X \leq x)\right] \\
&= \mathbb{P}(X \leq x),
\end{aligned}$$

deoarece, conform Propoziției 3.130,

$$-X \sim \mathcal{N}(0,1),$$

deci

$$\mathbb{P}(-X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

sau deoarece, având în vedere că densitatea f_X este o funcție pară, are loc, pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq -x) &= \int_{-x}^{\infty} f_X(y)\, dy \\
&= \int_{x}^{-\infty} f_X(-y')\,(-dy') \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_X(y')\, dy' \\
&= \mathbb{P}(X \leq x)
\end{aligned}$$

(am facut schimbarea de variabila $y' = -y$).

Deci s-a obținut că v.a. Y este și ea distribuită normal standard $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Pe de altă parte, v.a. normale standard au momentele de ordin par date de formulele (3.124):

$$\mathbb{E}\big(X^{2k}\big) = (2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1),$$

deci
$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{E}\left(Y^2\right) = 1 \quad \text{și} \quad \mathbb{E}\left(X^4\right) = \mathbb{E}\left(Y^4\right) = 3.$$
Obținem
$$\mathbb{E}\left(X^2Y^2\right) = \mathbb{E}\left(\epsilon^2X^4\right) = \mathbb{E}\left(\epsilon^2\right)\mathbb{E}\left(X^4\right) = 1\cdot 3 = 3,$$
$$\mathbb{E}\left(X^2\right)\cdot\mathbb{E}\left(Y^2\right) = 1\cdot 1 = 1,$$
adică $\mathbb{E}\left(X^2Y^2\right) \neq \mathbb{E}\left(X^2\right)\cdot\mathbb{E}\left(Y^2\right)$, ceea ce arată că v.a. X, Y nu sunt independente.

Pe de altă parte, este evident din însăși definiția lor că v.a. X și $Y = \epsilon X$ nu sunt independente.

Astfel, avem un exemplu de două v.a. care sunt necorelate, dar care sunt totuși dependente. ◇

Exemplul 3.135 Un alt exemplu de v.a. care sunt necorelate, dar nu sunt totuși independente este următorul.

Fie $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ și $Y = X^2$. Deoarece v.a. normale standard au momentele de ordin impar nule, vezi formulele (3.124), i.e.
$$\mathbb{E}\big(X^{2k+1}\big) = 0,$$
obținem
$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(X^3\right) - 0\cdot\mathbb{E}\left(X^2\right) = 0$$
deci v.a. X, Y sunt necorelate.

Pe de altă parte, este evident din însăși definiția lor că v.a. X și $Y = X^2$ nu sunt independente. ◇

Remarca 3.136 Fie a o mărime fizică și n măsurători ale ei $\{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$. Să definim erorile de măsurare $\epsilon_i \overset{\text{def}}{=} a - a_i$, $i = \overline{1,n}$. Problema este de a determina o valoare aproximativă pentru a (cu o eroare minimă). Ne interesează **erorile accidentale,** care apar datorită unor factori aleatori, neidentificabili. Nu există posibilitatea depistării și eliminării lor (ele nu sunt erori *grosolane* sau *sistematice*). Aceste erori pot fi văzute ca valori ale unei v.a..

În anumite cazuri se poate considera că aceste erorile accidentale urmează o repartiție de tipul $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. ◇

Exemplul 3.137 (Problema inversă Exemplului 3.119) Pentru orice grup de observații și erorile asociate lor, să găsim probabilitatea de 50% să apară (adică, oricare ar fi eroarea unei măsurători, sa aibă aceeași șansă să fie între anumite limite sau să nu fie între acele limite). Să determinăm valoarea $E_{0.5}$ care este dată de definiția[210]

$$\mathbb{P}\left(|X| \leq E_\delta\right) = \delta, \quad \text{cu } \delta \in (0,1)\,,$$

unde $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Să determinăm și valoarea $E_{0.5}$ corespunzătoare v.a. $Y \overset{\text{def}}{=\!=} \sigma X \sim \mathcal{N}\big(0,\sigma^2\big)$.

Utilizând (3.70) obținem că valoarea $E_{0.5}$ este dată de

$$0.5 = \mathbb{P}\left(|X| \leq E_{0.5}\right) = 2\Phi\left(E_{0.5}\right) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(E_{0.5}\right) = 0.75.$$

Folosind tabelul funcției funcției de repartiție asociate unei v.a. $\mathcal{N}(0,1)$ obținem că $E_{0.5}$ este o valoare situată între 0.67 și 0.68 deoarece $\Phi\left(0.67\right) = 0.748571$ și $\Phi\left(0.68\right) = 0.751748$. Valoarea lui $E_{0.5}$ se va găsi, de exemplu, prin interpolare liniară.

Astfel,

$$\frac{E_{0.5} - 0.67}{0.68 - 0.67} = \frac{0.75 - 0.748571}{0.751748 - 0.748571} = 0.44980$$

deci $E_{0.5} = 0.01 \cdot 0.44980 + 0.67 = 0.67450$

Dacă $Y \sim \mathcal{N}\big(0,\sigma^2\big)$, atunci valoarea $E_{0.5}$ este dată de

$$0.5 = \mathbb{P}\left(|Y| \leq E_{0.5}\right) = 2\Phi\left(\frac{E_{0.5}}{\sigma}\right) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{E_{0.5}}{\sigma}\right) = 0.75.$$

Obținem $E_{0.5} = 0.6745 \cdot \sigma$. $\diamond$

[210] Se poate folosi și notația E_{50} în loc de $E_{0.5}$.

Exemplul 3.138 Dacă $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ obținem similar valorile

E_δ	Valoarea	Procentul din aria întreagă
$E_{0.5}$	$0.6745\,\sigma$	50%
$E_{0.9}$	$1.645\,\sigma$	90%
$E_{0.95}$	$1.960\,\sigma$	95%
$E_{0.99}$	$2.576\,\sigma$	99%
$E_{0.997}$	$2.968\,\sigma$	99.7%
$E_{0.999}$	$3.29\,\sigma$	99.9%

Observăm că din valoarea lui $E_{0.997}$ se deduce „**regula celor** 3σ”. ◇

3.3.4 Distribuția Gamma

Spunem că v.a. X urmează distribuția Gamma de parametri unde $p > 0$ și $\lambda > 0$, și scriem $X \sim \text{Gamma}\,(p, \lambda)$, dacă are densitatea de repartiție dată de

$$f(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.74}$$

unde Γ este **funcția Gamma**

$$\Gamma(p) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0.$$

Folosim un criteriu de convergență și deducem că această integrală improprie este convergentă pentru orice $p > 0$, deoarece, pentru orice $\alpha > 1$, avem $x^\alpha x^{p-1} e^{-x} = \frac{x^{\alpha+p-1}}{e^x} \to 0 < \infty$, când $x \to \infty$.

Remarca 3.139 Distribuția exponențială este un caz particular al distribuției Gamma:

$$\boxed{\text{Exp}\,(\lambda) = \text{Gamma}\,(1, \lambda)\,.}$$

Distribuția Erlang (vezi Nota 290) este un caz particular al distribuției Gamma:

$$\boxed{\text{Erlang}\,(n, \lambda) = \text{Gamma}\,(n, \lambda)\,, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,}$$

deci $\text{Exp}\,(\lambda) = \text{Gamma}\,(1, \lambda) = \text{Erlang}\,(1, \lambda)$. ◇

Propoziția 3.140 *Proprietăți ale funcției Gamma sunt:*

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad \text{pentru orice } p > 0, \\
&(ii) \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, \\
&(iii) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Demonstrație. Proprietatea (i) se demonstrează utilizând procedeul de integrare prin părți, iar (ii) este o consecință imediată a lui (i).

Din (3.67) avem

$$I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

și apoi, facând substituția $x^2 = t$ sau echivalent $x = t^{1/2}$, obținem

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Deci $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. ■

Se verifică și proprietățile unei densități de repartiție: $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx &= \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)}\int_0^\infty x^{p-1}e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty (x')^{p-1}e^{-x'} dx' \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\Gamma(p) = 1,
\end{aligned}$$

deoarece am facut schimbarea de variabila $x' = \lambda x$.

Propoziția 3.141 *Media și dispersia v.a. distribuite Gamma* $X \sim \mathrm{Gamma}(p, \lambda)$ *sunt date de*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p}{\lambda} \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(X) = \frac{p}{\lambda^2}. \tag{3.75}$$

Demonstrație. Avem

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)}\int_0^\infty x \cdot x^{p-1}e^{-\lambda x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty x^p e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\lambda \Gamma(p)} \int_0^\infty (x')^{(p+1)-1} e^{-x'} dx' \\
&= \frac{1}{\lambda \Gamma(p)} \Gamma(p+1) \\
&= \frac{p}{\lambda}
\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty x^2 x^{p-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty x^{p+1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(p)} \int_0^\infty (x')^{(p+2)-1} e^{-x'} dx' \\
&= \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(p)} \Gamma(p+2) \\
&= \frac{p(p+1)}{\lambda^2},
\end{aligned}$$

deci

$$\mathrm{D}^2(X) = \frac{p(p+1)}{\lambda^2} - \frac{p^2}{\lambda^2} = \frac{p}{\lambda^2}.$$

■

Remarca 3.142 Momentele de ordin k sunt ușor de calculat:

$$\begin{aligned}
\mu_k = \mathbb{E}(X^k) &= \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty x^k x^{p-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty x^{(p+k)-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\lambda^k \Gamma(p)} \Gamma(p+k) \\
&= \frac{p(p+1)\dots(p+k-1)}{\lambda^k}.
\end{aligned}$$

◇

Propoziția 3.143 *Suma a două v.a. independente care urmează o distribuție de tip Gamma este o v.a care urmează o distribuție tot de tip*[211] *Gamma. Mai precis*[212]*,*

$$X_i \sim \text{Gamma}\,(p_i, \lambda)\,,\ i = \overline{1,2}, \quad \textit{indep.} \quad \Longrightarrow \quad X_1 + X_2 \sim \text{Gamma}\,(p_1 + p_2, \lambda)\,.$$

În particular, folosind Remarca 3.139, obținem că suma de v.a. independente și distribuite exponențial de același parametru λ urmează o distribuție de tip Gamma (vezi și Exercițiul 4.2.18).

Propoziția 3.144 *Suma a două v.a. independente care urmează o distribuție de tip exponențial este o v.a care urmează o distribuție de tip Gamma. Mai precis,*

$$X_i \sim \text{Exp}(\lambda),\ i = \overline{1,2}, \quad \textit{independente} \quad \Longrightarrow \quad X_1 + X_2 \sim \text{Gamma}\,(2, \lambda)\,.$$

Remarca 3.145 Ca o consecință a rezultatului anterior se obține următoarea proprietate.

Dacă avem n v.a. independente, distribuite exponențial de același parametru λ, adică n v.a. independente $X_i \sim \text{Exp}(\lambda) = \text{Gamma}\,(1, \lambda)$, atunci suma lor este distribuită de tip Gamma, mai precis, de tip Erlang:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}\,(n, \lambda) = \text{Erlang}(n, \lambda),$$

adică

orice v.a. $X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$ poate fi văzută
ca o sumă de n v.a. de tip exponențial și independente.

În plus, conform (3.65), avem că $\mathbb{E}\,(X_i) = \dfrac{1}{\lambda}$, iar $\text{D}^2\,(X_i) = \dfrac{1}{\lambda^2}$, deci **este foarte ușor să obținem și să reținem media și dispersia unei v.a. distribuite de tip** Gamma (n, λ) în cazul $n \in \mathbb{N}^*$, adică formulele (3.75):

$$\mathbb{E}\,(X) = \mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,(X_i) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} = n \cdot \frac{1}{\lambda}$$

[211] Pentru proprietatea similară satisfacută de alte distribuții vezi Propoziția 2.125, Propoziția 2.165, Propoziția 2.180, Propoziția 2.182, Propoziția 3.131, Propoziția 3.171 și respectiv Exercițiul 3.6.41.

[212] Acest rezultat se poate demonstra și cu ajutorul funcției caracteristice (vezi Exercițiul 4.2.17).

și

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{D}^2\left(\sum\nolimits_{i=1}^n X_i\right) = \sum\nolimits_{i=1}^n \mathrm{D}^2(X_i) = \sum\nolimits_{i=1}^n \frac{1}{\lambda^2} = n \cdot \frac{1}{\lambda^2}.$$

◇

Remarca 3.146 Să folosim semnificația dată de Remarca 3.104, conform căreia distribuția exponențială modelează timpul de așteptare dintre oricare două apariții succesive ale unui eveniment anume (care tot continuă să apară) despre care se presupune că urmează o distribuție de tip Poisson cu parametrul direct proporțional cu lungimea intervalului de timp în care numărăm apariția evenimentelor[213].

În aceste condiții, dacă definim v.a. X_1 ca fiind **timpul de așteptare până la prima apariție a evenimentului** și, pentru $i \geq 2$, definim X_i ca fiind **timpul de așteptare**[214] **de la momentul apariției de ordin** $(i-1)$ **a evenimentului până la apariția de ordin** i **a evenimentului** avut în vedere, atunci v.a.

$$S_n = \sum\nolimits_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Gamma}(n, \lambda)$$

va reprezenta **timpul total de așteptare de la momentul inițial până la apariția** n **a evenimentului** ◇

Exercițiul 3.147 *Vom arăta că, în cazul particular al unei v.a.* $S_n \sim \mathrm{Gamma}(n,\lambda)$, *cu* $n \in \mathbb{N}^*$, *avem*

$$F_{S_n}(t) = \mathbb{P}(S_n \leq t) = 1 - \sum\nolimits_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}(S_n > t) = \sum\nolimits_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \tag{3.76}$$

Într-adevăr, $F_{S_n}(t) = \int_0^t \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *și* $t > 0$.

Conform (3.61), avem că $F_{S_1}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

[213] Vezi definiția unui proces stochastic Poisson dată de Nota 112.

[214] Vezi și Exercițiul 3.6.33. De asemenea, vezi și definițiile similare, din cazul discret, date de Remarca 2.179 și de Nota 121.

În cazul $n \geq 2$, avem, integrând prin părți,

$$\begin{aligned} F_{S_n}(t) &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(x^{n-1}\left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right)\Big|_{x=0}^{x=t} - \int_0^t (n-1)\,x^{n-2}\,\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\,dx\right) \\ &= -\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t} + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}\int_0^t x^{n-2}e^{-\lambda x}\,dx \\ &= -\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t} + F_{S_{n-1}}(t), \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} F_{S_n}(t) &= -\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t} + F_{S_{n-1}}(t) \\ &= -\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t} - \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}t^{n-2}e^{-\lambda t} + F_{S_{n-2}}(t) \\ &= \ldots \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Folosind exercițiul precedent se poate obține următoarea **legătură între distribuția Gamma și distribuția Poisson**.

Exercițiul 3.148 *Fie două v.a astfel încât $X \sim \mathrm{Gamma}(n,1)$, $Y \sim \mathscr{P}(t)$, unde $n \in \mathbb{N}^*, t > 0$. Atunci, are loc:*

$$\mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(Y < n) = \mathbb{P}(Y \leq n-1) \tag{3.77}$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(Y \geq n).$$

Într-adevăr, folosind (3.76) obținem că

$$\mathbb{P}(X > t) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}e^{-t}.$$

Pe de altă parte, folosind tabloul de repartiție al unei v.a. Poisson de parametru t, obținem forma funcției de repartiție:

$$F_Y(n-1) = \mathbb{P}(Y \leq n-1) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}e^{-t}.$$

Similar se poate arăta rezultatul următorul rezultat mai general.

Exercițiul 3.149 *Dacă v.a.* $S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$, $N(t) \sim \mathscr{P}(\lambda t)$, *unde* $n \in \mathbb{N}^*$ *și* $\lambda, t > 0$, *atunci are loc*[215] *relația (3.77):*

$$\mathbb{P}(S_n > t) = \mathbb{P}(N(t) < n) = \mathbb{P}(N(t) \leq n-1) \tag{3.78}$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) = \mathbb{P}(N(t) \geq n).$$

În particular, dacă v.a. $S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$, $N \sim \mathscr{P}(\lambda)$, *unde* $n \in \mathbb{N}^*, \lambda > 0$, *atunci are loc:*

$$\mathbb{P}(S_n > 1) = \mathbb{P}(N < n) = \mathbb{P}(N \leq n-1).$$

De asemenea, în particular, se obține și următorul rezultat, cunoscut deja, vezi (3.61): dacă v.a. $S_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$, $N(t) \sim \mathscr{P}(\lambda t)$, *unde* $\lambda, t > 0$, *atunci are loc:*

$$\mathbb{P}(S_1 > t) = \mathbb{P}(N(t) < 1) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = \frac{(\lambda t)}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}.$$

Remarca 3.150 (vezi și Remarca 3.105) Relația (3.78) se poate demonstra și dacă folosim exclusiv semnificațiile date de Remarca 3.146. Mai precis, să considerăm un proces stochastic Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ definit de Nota 112, prin urmare N_t reprezintă numărul de evenimente ce au loc într-un interval de lungime t (indiferent de momentul inițial). Deci avem și faptul că v.a. $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$.

Să definim și S_n ca fiind timpul de așteptare de la momentul inițial până la apariția n a evenimentului avut în vedere. Atunci are loc egalitatea, vezi și relația (3.78):

$$\boxed{\{S_n > t\} = \{N_t < n\}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*, t > 0,} \tag{3.79}$$

sau, echivalent,

$$\{S_n \leq t\} = \{N_t \geq n\}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*, t > 0.$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\{S_n > t\} &= \{\text{momentul de producere al evenimentului de ordin } n \text{ este } > t\} \\ &= \{\text{în intervalul } [0,t] \text{ s-au produs maxim } (n-1) \text{ evenimente}\}\end{aligned}$$

[215] Vezi și Exercițiul 3.6.33.

$$\begin{aligned}&= \{N_t \leq n-1\}\\ &= \{N_t < n\}.\end{aligned}$$

Acum, dacă folosim și faptul că $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$, deducem că

$$F_{S_n}(t) = 1 - \mathbb{P}(S_n > t) = 1 - \sum\nolimits_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}.$$

Prin urmare, densitatea v.a. S_n, cu semnificația de mai sus, este dată de

$$\begin{aligned}f_{S_n}(t) = (F_{S_n}(t))' &= \Big(1 - \sum\nolimits_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}\Big)'\\ &= -\Big(e^{-\lambda t} + \sum\nolimits_{i=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}\Big)'\\ &= \lambda e^{-\lambda t} - \sum\nolimits_{i=1}^{n-1} \Big(\frac{i(\lambda t)^{i-1}\lambda}{i!} e^{-\lambda t} - \lambda \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}\Big)\\ &= \lambda e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \sum\nolimits_{i=1}^{n-1} \Big(\frac{(\lambda t)^i}{i!} - \frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!}\Big)\\ &= \lambda e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \Big(\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} - 1\Big)\\ &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\\ &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t}, \quad \text{pentru orice } t > 0.\end{aligned}$$

Prin urmare, am obținut expresia densității (3.74) asociată v.a. S_n, în cazul $n \in \mathbb{N}^*$, adică $S_n \sim \mathrm{Gamma}(n, \lambda)$, folosind doar semnificația v.a. S_n și N_t precum și tipul de distribuție al v.a. N_t. ◇

Demonstrarea următorului rezultat se poate face cu ajutorul funcției caracteristice (vezi Exercițiul 4.2.19).

Propoziția 3.151 *Pentru orice $c > 0$ are loc:*

$$X \sim \mathrm{Gamma}(p, \lambda) \quad \textit{dacă și numai dacă} \quad cX \sim \mathrm{Gamma}\Big(p, \frac{\lambda}{c}\Big).$$

În particular,

$$X \sim \mathrm{Gamma}(p, \lambda) \quad \textit{dacă și numai dacă} \quad \lambda X \sim \mathrm{Gamma}(p, 1).$$

3.3.5 Distribuția Student

Spunem că v.a. X urmează distribuția Student de parametru $n > 0$, și scriem $X \sim t(n)$, dacă are densitatea de repartiție dată de

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.80}$$

Remarca 3.152 În cazul particular $n = 1$, densitatea devine

$$f(x) = \frac{\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(1 + x^2\right)^{-1} = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

care definește o v.a. distribuită Cauchy $\mathscr{C}(0,1)$ (vezi Nota 177), adică

$$\boxed{t(1) = \mathscr{C}(0,1).}$$

◇

Remarca 3.153 **Funcția Beta** este definită de:

$$\beta(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\,dx, \quad u, v > 0$$

sau, echivalent, făcând schimbarea de variabilă $y = \frac{1-x}{x}$, de

$$\beta(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \frac{y^{v-1}}{(1+y)^{u+v}}\,dx, \quad u, v > 0.$$

Atunci, pentru orice $u, v > 0$, are loc[216]

$$(i) \quad \beta(u,v) = \beta(v,u),$$

$$(ii) \quad \beta(u,v) = \frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

[216] Pentru a demonstra proprietatea (ii) se poate, de exemplu, folosi schimbarea de variabilă $x = uv$ și $y = u(1-v)$ în integrala dublă $\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \iint_{(0,\infty)\times(0,\infty)} x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy$. Observăm că $x + y = u$ și că dacă $x, y \in (0,\infty)$, atunci $u \in (0,\infty)$ și $v \in (0,1)$.

Cu aceste notații densitatea f se poate rescrie:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n}\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

◇

Are loc

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx.$$

Acum se va face schimbarea de variabilă $\frac{x}{\sqrt{n}} = y$ sau echivalent $x = \sqrt{n}y$, deci $dx = \sqrt{n}dy$.

Obținem

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} \sqrt{n}dy \\
&= \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{0}^{\infty} \left(1 + y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} dy
\end{aligned}$$

(integrandul este o funcție pară).

Am obținut o integrală binomă, și putem face substituția $\frac{1+y^2}{y^2} = t^{-1}$ sau echivalent $y = \sqrt{\frac{t}{1-t}}$. Se va obține $dy = \frac{1}{2\sqrt{\frac{t}{1-t}}} \left(\frac{t}{1-t}\right)' dt$ și deci

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{\frac{t}{1-t}}} \frac{1 - t + t}{(1-t)^2} dt = \frac{1}{2} t^{-1/2} (1-t)^{-3/2} dt.$$

Apoi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx &= \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{1-t}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \frac{1}{2} t^{-1/2} (1-t)^{-3/2} dt \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{0}^{1} (1-t)^{\frac{n+1}{2}} t^{-1/2} (1-t)^{-3/2} dt \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{0}^{1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} t^{-1/2} dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \beta\Big(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\Big)$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$
$$= 1.$$

Remarca 3.154 Parametrul n reprezintă gradele de libertate ale distribuției și de obicei este un număr natural. $\diamond$

Remarca 3.155 Distribuția student $t\,(n)$ este utilizată la verificarea ipotezelor statistice. $\diamond$

Remarca 3.156 Referitor la graficul densității de repartiție f :

(i) Graficul este simetric în raport cu axa Oy (adică densitatea f este funcție pară și, prin urmare, distribuția v.a. X este simetrică în raport cu 0) și este asemănător cu graficul densității distribuției normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$, doar că, atunci când $x \to \infty$, graficul se apropie mai încet de axa Ox.

(ii) Graficul are axa Ox drept asimptotă orizontală la $\pm\infty$ deoarece avem $\lim_{x\to\pm\infty} f\,(x) = 0$.

(iii) Derivata este

$$f'\,(x) = C\left(-\frac{n+1}{2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}-1} \frac{2x}{n},$$

unde $C = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

Dacă $x < 0$, atunci f crește de la $f\,(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} f\,(x) = 0$ la $f\,(0) = C$, iar dacă $x > 0$, atunci f descrește de la $f\,(0) = C$ la $f\,(\infty) = 0$.

$\diamond$

Remarca 3.157 Pentru distribuția $t\,(n)$ există tabele de valori care dau probabilități de forma

$$\mathbb{P}\,(X > t_\epsilon) = \epsilon,$$

unde $X \sim t\,(n)$.

Deoarece $\mathbb{P}\,(X > t_\epsilon) = \int_{t_\epsilon}^{\infty} f\,(x)\,dx$, deducem că $\epsilon = \mathbb{P}\,(X > t_\epsilon)$ este chiar aria domeniului cuprins între dreapta $x = t_\epsilon$, graficul funcției f și axa Ox. $\diamond$

Exemplul 3.158 Dacă dorim să obținem 98% din aria totală astfel încât ariile domeniilor rămase la stânga și la dreapta să fie egale fiecare cu 1%, atunci trebuie să determinăm din tabel numărul $t_{0.01}$.

Folosind simetria graficului densității f_X în raport cu axa Oy, aria căutată va fi dată de

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \mathbb{P}\left(|X| < t_{0.01}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-t_{0.01} < X < t_{0.01}\right) \\
&= 1 - 2\mathbb{P}\left(X > t_{0.01}\right) \\
&= 1 - 2 \cdot 0.01 \\
&= 0.98.
\end{aligned}$$

Dacă numărul n al gradelor de libertate și ϵ sunt date, atunci obținem t_ϵ.

Invers, dat n și numărul t_ϵ obținem valoarea $\epsilon = \mathbb{P}\left(X > t_\epsilon\right)$. ◇

Propoziția 3.159 *Media și dispersia v.a. distribuite Student $X \sim t\left(n\right)$ sunt date de*

$$\mathbb{E}\left(X\right) = 0, \text{ dacă } n > 1, \qquad \text{și} \qquad \mathrm{D}^2\left(X\right) = \frac{n}{n-2}, \text{ dacă } n > 2.$$

Remarca 3.160 De fapt, se obține că media unei v.a. distribuite student $t\left(n\right)$ există și este finită dacă și numai dacă $n > 1$, iar dispersia unei v.a. distribuite student $t\left(n\right)$ există și este finită dacă și numai dacă $n > 2$. ◇

Demonstrație. Să notăm $C_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$. Media este dată de

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_0 x \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx \\
&= C_0 \int_{-\infty}^{0} x \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx + C_0 \int_{0}^{\infty} x \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx \\
&= C_0 \int_{0}^{\infty} x \left(1 + \frac{\left(x'\right)^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx' - C_0 \int_{0}^{\infty} x \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx
\end{aligned}$$

(făcând substituția $x' = -x$).

Pe de altă parte, aplicând un criteriu de convergență, observăm că

$$x^{\alpha}\cdot x\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}=n^{\frac{n+1}{2}}\frac{x^{\alpha+1}}{\left(x^2+n\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Luând $\alpha=n$ obținem $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha+1}}{(x^2+n)^{\frac{n+1}{2}}}=1\in(0,\infty)$, deci integrala improprie $\int_0^\infty x\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx$ este convergentă dacă $n>1$ și divergentă dacă $n\in(0,1]$.

Mai precis, obținem că media $\mathbb{E}\left(X\right)$ este 0, dacă $n>1$ și nu există[217] dacă $n\in(0,1]$ (faptul că funcția care se integrează este impară nu este suficient că să tragem concluzia că media este zero).

În ceea ce privește dispersia, calculăm

$$\mathbb{E}\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}C_0x^2\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx=2C_0\int_0^{\infty}x^2\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx$$

(integrandul fiind funcție pară).

Pe de altă parte, aplicând un criteriu de convergență, observăm că

$$x^{\alpha}\cdot x^2\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}=n^{\frac{n+1}{2}}\frac{x^{\alpha+2}}{\left(x^2+n\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Luând $\alpha=n-1$ obținem $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha+2}}{(x^2+n)^{\frac{n+1}{2}}}=1\in(0,\infty)$, deci integrala improprie $\int_0^\infty x^2\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx$ este convergentă dacă $n>2$ și divergentă dacă $n\in(0,2]$.

Obținem că media $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ (deci și dispersia) există și este finită doar în cazul în care $n>2$.

În acest caz făcând schimbarea de variabilă $\frac{x^2}{n}=y$ obținem

$$\mathbb{E}\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f\left(x\right)dx$$

[217] În cazul în care $n=1$ v.a. $X\sim t(1)=\mathscr{C}\left(0,1\right)$, deci media v.a. X nu există (vezi Exemplul 3.40).

$$
\begin{aligned}
&= 2\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty ny\,(1+y)^{-\frac{n+1}{2}}\,\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{y}}\,dy\\
&= \frac{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty y^{\frac{1}{2}}\,(1+y)^{-\frac{n+1}{2}}\,dy\\
&= \frac{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty y^{\frac{3}{2}-1}\,(1+y)^{-\frac{n-2}{2}-\frac{3}{2}}\,dy\\
&= \frac{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\beta\left(\frac{3}{2},\frac{n-2}{2}\right)\\
&= \frac{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\\
&= \frac{n\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\frac{n-2}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\\
&= \frac{n}{n-2},
\end{aligned}
$$

deci

$$
\mathrm{D}^2\left(X\right) = \frac{n}{n-2} - 0^2 = \frac{n}{n-2}.
$$

■

Remarca 3.161 Momentele de ordin impar sunt nule deoarece funcția care se integrează este impară, iar $\int_0^\infty x^{2k+1}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx$ este convergentă:

$$
\mu_{2k+1} = \mathbb{E}(X^{2k+1}) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{2k+1}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx = 0.
$$

◇

3.3.6 Distribuția χ^2

Spunem că v.a. X urmează distribuția χ^2 de parametri $n \in \mathbb{N}^*$ și $\sigma > 0$, și scriem $X \sim \chi^2(n, \sigma)$, dacă are densitatea de repartiție dată de

$$
f\left(x\right) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}\mathbb{1}_{(0,\infty)}\left(x\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.81}
$$

Remarca 3.162 Având în vedere definiția (3.74) obținem următoarea legătură între distribuția χ^2 și distribuția Gamma:

$$\chi^2(n,\sigma) = \text{Gamma}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right), \quad \text{pentru } n \in \mathbb{N}^* \text{ și } \sigma > 0. \tag{3.82}$$

◇

Se verifică proprietățile unei densități de repartiție. Într-adevăr, dacă se face schimbarea de variabilă $\frac{x}{2\sigma^2} = y$, obținem

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} \left(2\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y} \left(2\sigma^2\right) dy \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Remarca 3.163 Parametrul n reprezintă gradele de libertate ale distribuției și de obicei este un număr natural. ◇

Remarca 3.164 Distribuția $\chi^2(n,\sigma)$ este utilizată la verificarea ipotezelor statistice. ◇

Propoziția 3.165 *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\sigma > 0$. Pentru orice $a > 0$,*

$$X \sim \chi^2(n,\sigma) \quad \textit{dacă și numai dacă} \quad aX \sim \chi^2\left(n, \sqrt{a}\,\sigma\right). \tag{3.83}$$

În particular,

$$X \sim \chi^2(n,\sigma) \quad \textit{dacă și numai dacă} \quad \frac{1}{\sigma^2} X \sim \chi^2(n,1).$$

Demonstrație. Pentru orice $y \leq 0$ avem $F_{aX}(y) = 0$. Apoi, pentru pentru orice $y > 0$, avem

$$F_{aX}(y) = \mathbb{P}(aX \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y/a) = F_X(y/a).$$

Deci

$$
\begin{aligned}
f_{aX}(y) &= (F_{aX}(y))' \\
&= \left(F_X\left(\frac{y}{a}\right)\right)' \\
&= f_X\left(\frac{y}{a}\right)\frac{1}{a} \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{a}\sigma\right)^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2(\sqrt{a}\sigma)^2}},
\end{aligned}
$$

adică $aX \sim \chi^2(n, \sqrt{a}\sigma)$. ■

Remarca 3.166 Referitor la graficul densității de repartiție f (pentru simplitatea prezentării vom considera doar cazul $\sigma = 1$):

(i) Cazul $n = 1$ (sau, echivalent, $1 - n/2 > 0$).

Funcția f devine $f(x) = \dfrac{1}{C}\dfrac{1}{x^{1-n/2}e^{x/2}}, \quad x > 0$, unde $C = 2^{n/2}\Gamma(n/2)$.

Avem

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Se obține

$$f'(x) = \frac{1}{C}x^{n/2-2}e^{-x/2}\frac{n-2-x}{2} < 0, \quad \text{pentru orice } x > 0 > n-2,$$

deci f descrește de la $f(0_+) = \infty$ la $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(ii) Cazul $n = 2$ (sau, echivalent, $1 - n/2 = 0$).

Funcția f devine $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^{x/2}}, \quad x \geq 0$, deoarece $C = 2\Gamma(1) = 2$.

Avem

$$f(0_+) = 1/2, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Se obține

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}\frac{-1}{2} < 0, \quad \text{pentru orice } x > 0,$$

deci f descrește de la $f(0_+) = 1/2$ la $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(iii) Cazul $n > 2$ (sau, echivalent, $n/2 - 1 > 0$).

Funcția f devine $f(x) = \dfrac{1}{C}\dfrac{x^{n/2-1}}{e^{x/2}}, \quad x \geq 0$.

Avem

$$f(0_+) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Se obține

$$f'(x) = \frac{1}{C} x^{n/2-2} e^{-x/2} \frac{n-2-x}{2}$$

deci $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (n-2, \infty)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, n-2)$, adică f crește de la $f(0_+) = 0$ la $f(n-2)$ și descrește de la $f(n-2)$ la $f(\infty) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to\infty} f(x)$. ◇

Remarca 3.167 Pentru distribuția $X \sim \chi^2(n, 1)$ există tabele de valori care dau probabilități de forma

$$\mathbb{P}\left(X > \chi_\epsilon^2\right) = \epsilon.$$

De fapt, $\mathbb{P}\left(X > \chi_\epsilon^2\right) = \int_{\chi_\epsilon^2}^{\infty} f(x)\, dx$ adică $\mathbb{P}\left(X > \chi_\epsilon^2\right)$ este aria domeniului cuprins între dreapta $x = \chi_\epsilon^2$, graficul funcției f și axa Ox. ◇

Exercițiul 3.168 *Dacă dorim să obținem 98% din aria totală astfel încât ariile domeniilor rămase la stânga și la dreapta să fie egale fiecare cu 1%, atunci trebuie să determinăm din tabel numerele $\chi_{0.99}^2$ și $\chi_{0.01}^2$. Aria căutată va fi atunci*

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \mathbb{P}\left(\chi_{0.99}^2 < X < \chi_{0.01}^2\right)\\ &= \mathbb{P}\left(X > \chi_{0.99}^2\right) - \mathbb{P}\left(X > \chi_{0.01}^2\right)\\ &= 0.99 - 0.01 = 0.98\end{aligned}$$

Dacă numărul n al gradelor de libertate și ϵ sunt date, atunci obținem χ_ϵ^2.

Exemplul 3.169 Invers, dacă se dau numărul natural n și valoarea χ_ϵ^2, obținem $\epsilon = \mathbb{P}\left(X > \chi_\epsilon^2\right)$. ◇

Propoziția 3.170 *Media și dispersia v.a. $X \sim \chi^2(n, 1)$ sunt date de*

$$\mathbb{E}(X) = n \qquad \text{și} \qquad \mathrm{D}^2(X) = 2n. \tag{3.84}$$

Demonstrație. Avem

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x f(x)\, dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

Făcând schimbarea de variabilă $\frac{x}{2} = y$ obținem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} (2y)^{\frac{n}{2}}\, e^{-y}\, 2dy \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} y^{\frac{n}{2}} e^{-y} dy \\
&= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \\
&= n.
\end{aligned}$$

Apoi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} (2y)^{\frac{n}{2}+1}\, e^{-y}\, 2dy \\
&= \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} y^{\frac{n}{2}+1} e^{-y} dy \\
&= \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right) \\
&= 4\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right),
\end{aligned}$$

deci

$$\mathrm{D}^2(X) = 4\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) - n^2 = 2n.$$

■

Demonstrarea următorului rezultat se poate face cu ajutorul funcției caracteristice (vezi Exercițiul 4.2.27).

Propoziția 3.171 *Suma a două v.a. independente care urmează o distribuție de tip χ^2 este o v.a care urmează o distribuție tot de tip*[218] χ^2. *Mai precis,*

$$X_i \sim \chi^2(n_i, \sigma),\ i = \overline{1,2}, \quad \textit{independente} \quad \Longrightarrow \quad X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1+n_2, \sigma).$$

[218] Pentru proprietatea similară satisfacută de alte distribuții vezi Propoziția 2.125, Propoziția 2.165, Propoziția 2.180, Propoziția 2.182, Propoziția 3.131, Propoziția 3.143, și respectiv Exercițiul 3.6.41.

3.3.7 Distribuția Fisher

Spunem că v.a. X urmează distribuția Fisher de parametri $m > 0$ și $n > 0$, și scriem $X \sim F(m, n)$, dacă are densitatea de repartiție dată de

$$f(x) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1}\left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Remarca 3.172 Parametri m, n reprezintă gradele de libertate ale distribuției și de obicei sunt număre naturale. $\diamond$

Remarca 3.173 Pentru distribuția $X \sim F(m, n)$ există tabele de valori care dau probabilități de forma

$$\mathbb{P}(X > F_\epsilon) = \epsilon.$$

De fapt, $\mathbb{P}(X > F_\epsilon) = \int_{F_\epsilon}^{\infty} f(x)\,dx$ adică $\mathbb{P}(X > F_\epsilon)$ este aria domeniului cuprins între dreapta $x = F_\epsilon$, graficul funcției f și axa Ox. $\diamond$

Propoziția 3.174 *Media și dispersia v.a.* $X \sim F(m, n)$ *sunt date de*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{n-2} \qquad \text{\textit{și}} \qquad \mathrm{D}^2(X) = \frac{2n^2(n+m-2)}{m(n-2)^2(n-4)}.$$

3.4 Vectori aleatori

Definiția 3.175 *Fie spațiul de probabilitate* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. *Funcția*

$$\mathbf{X} : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$$

se numește **variabilă aleatoare** $n-$**dimensională** *sau* **vector aleator** $n-$**dimensional** *dacă este o funcție măsurabilă.*

Remarca 3.176 Dacă $n = 1$, vom spune că $\mathbf{X}$ este variabilă aleatoare reală sau, mai simplu, **variabilă aleatoare**. Dacă $n \geq 2$, vom spune că $\mathbf{X}$ este vector aleator $n-$dimensional sau, mai simplu, **vector aleator**. $\diamond$

Remarca 3.177 În definiția vectorului aleator am scris întregul spațiu de probabilitate deși probabilitatea $\mathbb{P}$ nu intervine în definiție (dar vectorii aleatori se asociază unor experimente aleatoare pentru care este esențial spațiul de probabilitate).

Deci, de fapt, $\mathbf{X} : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ este vector aleator dacă este o funcție măsurabilă între cele două spații măsurabile. $\diamond$

Remarca 3.178 Funcția

$$\mathbf{X} : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)), \quad \text{cu} \quad \mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n),$$

este vector aleator dacă și numai dacă fiecare componentă $X_i : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ este v.a. reală, cu $i = \overline{1, n}$. $\diamond$

Definiția 3.179 *Fie* $\mathbf{X} : (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ *un vector aleator dat de* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. *Funcția*

$$F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to [0, 1],$$

definită prin

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) &= F_{(X_1, \ldots, X_n)}(x_1, \ldots, x_n) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n), \quad \textit{pentru } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

se numește **funcția de repartiție comună** *(sau* **funcția de distribuție comună** *sau* **funcția comună de distribuție cumulativă***) asociată vectorului aleator* $\mathbf{X}$.

Remarca 3.180 Putem scrie și sub forma

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \in B) = \mathbb{P}\left(\mathbf{X}^{-1}(B)\right) = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}(B),$$

unde $B = (-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n] \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, iar $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ este legea asociată vectorului aleator $\mathbf{X}$. $\diamond$

Propoziția 3.181 *Au loc următoarele proprietăți ale funcției de repartiție* $F_{\mathbf{X}}$:

(i) *Funcția* $F_{\mathbf{X}}$ *este monoton nedescrescătoare în fiecare argument al ei.*

(ii) *Funcția* $F_{\mathbf{X}}$ *este continuă la dreapta în fiecare argument al ei.*

(iii) *Dacă* $i = \overline{1, n}$, *atunci*

$$\lim_{x_i \to -\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0, \quad \textit{pentru orice } x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x_1 \to \infty, \ldots, x_n \to \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = 1.$$

(iv) *Pentru orice* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ *cu* $i = \overline{1, n}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(a_1 < X_1 \le b_1, \ldots, a_n < X_n \le b_n) \\
&= F_{\mathbf{X}}(b_1, \ldots, b_n) - \sum\nolimits_{i=1}^{n} F_{\mathbf{X}}(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \ldots, b_n) \\
&\quad + \sum\nolimits_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} F_{\mathbf{X}}(b_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, b_n) - \ldots \\
&\quad + (-1)^n F_{\mathbf{X}}(a_1, \ldots, a_n).
\end{aligned}$$

(v) *În cazul particular* $n = 2$ *punctul* (iv) *devine: pentru orice* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *avem*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a < X_1 \le b, X_2 \le c) &= F_{\mathbf{X}}(b, c) - F_{\mathbf{X}}(a, c), \\
\mathbb{P}(X_1 \le a, b < X_2 \le c) &= F_{\mathbf{X}}(a, c) - F_{\mathbf{X}}(a, b), \\
\mathbb{P}(a < X_1 \le b, c < X_2 \le d) &= F_{\mathbf{X}}(b, d) - F_{\mathbf{X}}(a, d) \\
&\quad - F_{\mathbf{X}}(b, c) + F_{\mathbf{X}}(a, c).
\end{aligned}$$

Remarca 3.182 **În cazul** $1-$**dimensional proprietățile** $(i), (ii), (iii)$ **sunt caracteristice unei funcții de repartiție**.

În cazul multidimensional trebuie impusă condiția (care se obține din (iv)):

$$(iv)' \quad \Delta_{a_1,b_1}\left[\Delta_{a_2,b_2}\left[\ldots \Delta_{a_n,b_n}\left[F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)\right]\right]\right] \ge 0$$

$$\text{pentru orice } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \text{ cu } a_i \le b_i,$$

unde

$$\begin{aligned}
\Delta_{a_i,b_i}\left[F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)\right] &\stackrel{\text{def}}{=} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\
&\quad - F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Cu notațiile de mai sus, **în cazul multidimensional (**$n \ge 2$**), proprietățile** $(i), (ii), (iii)$ **și** $(iv)'$ **sunt caracteristice unei funcții de repartiție**. ◇

Definiția 3.183 *Dacă* $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *este un vector aleator, iar* $F_{\mathbf{X}}$ *este funcția de repartiție, atunci* **funcția marginală de repartiție** *a v.a.* X_i, *cu* $i = \overline{1, n}$, *este dată de*

$$F_{X_i}(x_i) = \lim\nolimits_{\substack{x_j \to \infty \\ j \ne i}} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

Remarca 3.184 Prin urmare, dacă $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ este un vector aleator bidimensional, iar $F_{(X,Y)}$ este funcția de repartiție asociată, atunci funcțiile marginale de repartiție sunt date de

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = F_{(X,Y)}(x,\infty),$$
$$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = F_{(X,Y)}(\infty,y).$$

◇

Remarca 3.185 Dacă știm funcția de repartiție a vectorului aleator atunci putem determina și funcția marginală de repartiție a fiecărei componente. Reciproca nu este adevărată: dacă știm funcția marginală de repartiție a fiecărui v.a. componente atunci nu putem obține funcția de repartiție a vectorului aleator în întregime. ◇

Folosind Remarca 2.33 obținem următoarea caracterizare a independenței unor v.a..

Propoziția 3.186 *Dacă $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ este un vector aleator, atunci*

$$X, Y \text{ independente} \iff F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y), \quad \text{pentru orice } x,y \in \mathbb{R}.$$

Propoziția 3.187 *V.a. $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, sunt independente în ansamblu dacă și numai dacă*[219]

$$F_{(X_1,X_2,\ldots,X_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2)\cdot\ldots\cdot F_{X_n}(x_n),$$

pentru orice $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$.

Remarca 3.188 Similar cazului unei v.a. discrete (vezi pagina 204), cunoașterea legii unui vector aleator discret (X,Y) (vector care poate lua un număr numărabil de valori) este echivalentă cu cunoașterea valorilor pe care le poate lua vectorul aleator, adică a mulțimii $X(\Omega)\times Y(\Omega)$, și a probabilităților cu care este luată fiecare valoare din $X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

[219] Vezi și caracterizările independenței a două v.a. date de Propoziția 3.190, Propoziția 3.218, Remarca 3.219 și de Teorema 4.27.

Putem reprezenta aceste informații sub forma unui **tabloul bidimensional de repartiție** (vezi Exemplul 3.200 și Exemplul 3.201) în care apar valorile perechi $\{(x_i, y_j)\}_{(i,j)\in I\times J} = X(\Omega) \times Y(\Omega)$ (I și J sunt mulțimi numărabile) precum și probabilitățile

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j), \quad \text{cu } i \in I, j \in J,$$

astfel încât

$$p_{ij} \geq 0, \quad \text{pentru } i \in I, j \in J, \quad \text{și} \quad \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} p_{ij} = 1$$

(seria dublă $\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} p_{ij}$ este convergentă și are suma 1). $\diamond$

Remarca 3.189 Dacă $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ este un vector aleator discret, atunci, pentru $x \in X(\Omega)$, probabilitatea $\mathbb{P}(X = x)$ se calculează astfel

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x) &= \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \Omega) \\
&= \mathbb{P}\Big(\{X = x\} \bigcap \Big(\bigcup\nolimits_{y\in Y(\Omega)} \{Y = y\} \Big) \Big) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{y\in Y(\Omega)} \{X = x, Y = y\} \right) \\
&= \sum\nolimits_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)
\end{aligned}$$

și, similar, pentru $y \in Y(\Omega)$, probabilitatea $\mathbb{P}(Y = y)$ este dată de

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = y) &= \mathbb{P}(\{Y = y\} \cap \Omega) \\
&= \mathbb{P}\Big(\{Y = y\} \bigcap \Big(\bigcup\nolimits_{x\in X(\Omega)} \{X = x\} \Big) \Big) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{x\in X(\Omega)} \{Y = y, X = x\} \right) \\
&= \sum\nolimits_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y).
\end{aligned}$$

Prin urmare, **tablourile marginale** (sau **tablourile de repartiție marginală** sau **tablourile de distribuție marginală** sunt date de

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum\nolimits_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y), \quad \text{pentru orice } x \in X(\Omega)$$

și respectiv de

$$\mathbb{P}(Y=y)=\sum\nolimits_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x,Y=y)\,,\quad \text{pentru orice } y\in Y(\Omega)\,.$$

◇

Propoziția 3.190 *Dacă* $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ *este un vector aleator discret, atunci*[220]

$$X,Y \text{ independente} \iff \mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)\,,\quad \text{pentru orice } x\in X(\Omega)\,,y\in Y(\Omega)\,.$$

Exemplul 3.191 Se aruncă două zaruri simultan. Fie vectorul aleator bidimensional (X,Y) unde X,Y iau drept valori numărul de puncte apărute la aruncarea primului și respectiv celui de al doilea zar.

Atunci,

$$F_{(X,Y)}(x,y)=\sum\nolimits_{\substack{x_i\in X(\Omega)\\ x_i\leq x}}\sum\nolimits_{\substack{y_i\in Y(\Omega)\\ y_i\leq y}}\mathbb{P}(X=x_i,Y=y_i)$$

De exemplu,

$$\begin{aligned}F_{(X,Y)}(3,2)&=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1)+\mathbb{P}(X_1=1,X_2=2)\\&\quad+\mathbb{P}(X_1=2,X_2=1)+\mathbb{P}(X_1=2,X_2=2)\\&\quad+\mathbb{P}(X_1=3,X_2=1)+\mathbb{P}(X_1=3,X_2=2)\\&=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}\\&=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

◇

În cazul unui vector aleator $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$, în caz că există media componentelor, definim **media vectorului aleator X** ca fiind

$$\mathbb{E}(\mathbf{X})=\mathbb{E}\big((X_1,\ldots,X_n)\big)\overset{\text{def}}{=\!=}\big(\mathbb{E}(X_1)\,,\ldots,\mathbb{E}(X_n)\big).$$

De asemenea, se poate defini covarianța $\operatorname{Cov}(X_i,X_j)$ a v.a. componente X_i și X_j. Prin urmare, introducem următoarea notație.

[220] Vezi și caracterizările independenței a două v.a. date de Propoziția 3.187, Propoziția 3.218, Remarca 3.219 și de Teorema 4.27.

Definiția 3.192 *Fie* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ *un vector aleator (coloană de tip* $n \times 1$*). Să definim, urmând (2.63),* ***matricea de covarianță*** *(sau* ***matricea de varianță*** *sau* ***matricea de dispersie*** *sau* ***matricea de varianță-covarianță****) asociată vectorului* $\mathbf{X}$*, notată prin* $\operatorname{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ *sau* $\operatorname{Var}(\mathbf{X})$*, ca fiind media:*

$$\boxed{\operatorname{Var}(\mathbf{X}) \overset{\text{not}}{=\!=} \operatorname{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathbb{E}\Big[\big(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X})\big) \cdot \big(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X})\big)^T\Big].} \tag{3.85}$$

Prin urmare, $\operatorname{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ *este matricea (de tip* $n \times n$*)*

$$\operatorname{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{bmatrix} \operatorname{Var}(X_1) & \operatorname{Cov}(X_1, X_2) & \ldots & \operatorname{Cov}(X_1, X_n) \\ \operatorname{Cov}(X_2, X_1) & \operatorname{Var}(X_2) & \ldots & \operatorname{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}(X_n, X_1) & \operatorname{Cov}(X_n, X_2) & \ldots & \operatorname{Var}(X_n) \end{bmatrix},$$

unde $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathbb{E}\left[(X_i - \mathbb{E}(X_i)) \cdot (X_j - \mathbb{E}(X_j))\right], \quad$ *cu* $i, j = \overline{1, n}$.

Remarca 3.193 Formula de calcul este dată de

$$\boxed{\operatorname{Var}(\mathbf{X}) \overset{\text{not}}{=\!=} \operatorname{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathbb{E}\left(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T\right) - \mathbb{E}(\mathbf{X}) \cdot \mathbb{E}(\mathbf{X})^T.}$$

$\diamond$

Definiția 3.194 *Fie* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ *și* $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ *doi vector aleatori (coloane de tip* $n \times 1$*). Putem extinde (3.85) definind* ***matricea de covarianță dintre cei doi vectori*** $\mathbf{X}$ ***și*** $\mathbf{Y}$*, notată cu* $\operatorname{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *ca fiind media*

$$\boxed{\operatorname{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathbb{E}\Big[\big(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X})\big) \cdot \big(\mathbf{Y} - \mathbb{E}(\mathbf{Y})\big)^T\Big].}$$

Prin urmare, $\operatorname{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *este matricea (de tip* $n \times n$*)*

$$\operatorname{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \big(\operatorname{Cov}(X_i, Y_j)\big)_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Remarca 3.195 Formula de calcul este dată de

$$\boxed{\operatorname{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbb{E}\left(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}^T\right) - \mathbb{E}(\mathbf{X}) \cdot \mathbb{E}(\mathbf{Y})^T.}$$

$\diamond$

Propoziția 3.196 *Matricea de covarianță satisface următoarele proprietăți:*
(a) *având în vedere că* $\text{Cov}\,(X_i, X_j) = \text{Cov}\,(X_j, X_i)$, ***matricea de covarianță*** $\text{Cov}\,(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ ***este o matrice simetrică****, i.e.*

$$\text{Cov}\,(\mathbf{X}, \mathbf{X})^T = \text{Cov}\,(\mathbf{X}, \mathbf{X})\,;$$

(b) *matricea de covarianță* $\text{Cov}\,(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ *este o matrice pozitiv semi-definită, i.e.*

$$\mathbf{a}^T \cdot \text{Cov}\,(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \cdot \mathbf{a} \geq 0, \quad \textit{pentru orice } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}\,;$$

(c) *matricea de covarianță dintre vectorii* $\mathbf{X}$ *și* $\mathbf{Y}$ *satisface:*

$$\text{Cov}\,(\mathbf{X}, \mathbf{Y})^T = \text{Cov}\,(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\,.$$

Remarca 3.197 Următorul rezultat este o generalizare a celui dat de Remarca 2.96.

Se poate arăta[221] că

$$\boxed{\begin{gathered}\det\left(\text{Cov}\,(\mathbf{X}, \mathbf{X})\right) = 0 \quad \text{dacă și numai dacă} \\ \text{există } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \text{ și } b \in \mathbb{R} \text{ astfel încât} \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{X} \rangle = a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n = b, \quad \mathbb{P} - \text{a.s.,}\end{gathered}}$$

adică $\mathbb{P}\,(a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n = b) = 1$.

Să observăm că în cazul particular $n = 1$ matricea de covarianță devine

$$\text{Cov}\,(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathrm{D}^2\,(X_1)\,,$$

deci, folosind Propoziția 2.97,

$$\det\left(\text{Cov}\,(\mathbf{X}, \mathbf{X})\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{D}^2\,(X_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_1 = c, \quad \mathbb{P} - \text{a.s..}$$

În cazul particular $n = 2$ matricea de covarianță devine

$$\text{Cov}\,(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathrm{D}^2\,(X_1) & \text{Cov}\,(X_1, X_2) \\ \text{Cov}\,(X_1, X_2) & \mathrm{D}^2\,(X_2) \end{bmatrix},$$

[221] Vezi, de exemplu, [29, Section 3.11, Problem 15].

deci

$$\det\left(\operatorname{Cov}\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\rho\left(X,Y\right)\right|=1,$$

iar pentru $\left|\rho\left(X,Y\right)\right|=1$ vezi Remarca 2.96. ◇

Media unei funcții aplicată unui vector aleator discret poate fi calculată folosind următorul rezultat.

Teorema 3.198 (Formula de transfer) *Fie (X,Y) un vector aleator discret cu probabilitățile date de $\mathbb{P}\left(X=x,Y=y\right)$, unde $x\in X\left(\Omega\right)$ și $y\in Y\left(\Omega\right)$. Fie $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ o funcție măsurabilă. Atunci, $h\left(X,Y\right):\Omega\to\mathbb{R}$ este o v.a. și această v.a. admite medie dacă și numai dacă*

$$\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}}\left|h\left(x,y\right)\right|\mathbb{P}\left(X=x,Y=y\right)<\infty.$$

În cazul în care $h\left(X,Y\right)$ admite medie, aceasta este dată de:

$$\boxed{\mathbb{E}(h(X,Y))=\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}}h\left(x,y\right)\mathbb{P}\left(X=x,Y=y\right).}$$

Remarca 3.199 Prin urmare, dacă $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ este un vector aleator discret, atunci covarianța dintre X și Y definită de (2.63) se calculează folosind formula:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}\left(X,Y\right)&=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left(X\right)\right)\left(Y-\mathbb{E}\left(Y\right)\right)\right]\\&=\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}}\left(x-\mathbb{E}\left(X\right)\right)\left(y-\mathbb{E}\left(Y\right)\right)\mathbb{P}\left(X=x,Y=y\right).\end{aligned}\tag{3.86}$$

De asemenea, covarianța dintre v.a. X și Y se calculează și cu ajutorul formulei (2.64) unde $\mathbb{E}\left(XY\right)$ este dată, în cazul discret, de formula de calcul:

$$\boxed{\mathbb{E}\left(XY\right)=\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}}xy\mathbb{P}\left(X=x,Y=y\right).}\tag{3.87}$$

◇

Exemplul 3.200 Fie vectorul aleator discret (X, Y) dat de tabloul bidimensional următor:

$Y \backslash X$	2	4	5
3	0.05	0.05	0.10
5	0.15	0.20	0.15
6	0.10	0.15	0.05

(a) Să se determine $F_{(X,Y)}(3, 5)$. Să se studieze dacă v.a. X, Y sunt independente.

(b) Să se determine covarianța dintre X și Y.

(c) Să se scrie formula de calcul pentru dispersia $\mathrm{D}^2(X - Y)$ și apoi să se determine valoarea acestei dispersii.

(d) Să se determine tabloul v.a. $Z = X - Y$.

(a) Să calculăm, mai întâi, distribuțiile marginale ale lui X și respectiv Y :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 5) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 6) \\
&= 0.05 + 0.15 + 0.1 = 0.3 \\
\mathbb{P}(X = 4) &= \mathbb{P}(X = 4, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 5) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 6) \\
&= 0.05 + 0.2 + 0.15 = 0.4 \\
\mathbb{P}(X = 5) &= \mathbb{P}(X = 5, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 5) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 6) \\
&= 0.1 + 0.15 + 0.05 = 0.3
\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 3) &= \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 3) \\
&= 0.05 + 0.05 + 0.1 = 0.2 \\
\mathbb{P}(Y = 5) &= \mathbb{P}(X = 2, Y = 5) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 5) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 5) \\
&= 0.15 + 0.2 + 0.15 = 0.5 \\
\mathbb{P}(Y = 6) &= \mathbb{P}(X = 2, Y = 6) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 6) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 6) \\
&= 0.1 + 0.15 + 0.05 = 0.3.
\end{aligned}$$

Deci v.a. X, Y nu sunt independente deoarece, de exemplu,

$$\mathbb{P}(X = 2) \cdot \mathbb{P}(Y = 3) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06 \neq 0.05 = \mathbb{P}(X = 2, Y = 3).$$

Tablourile v.a. X, Y sunt

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

(b) Pentru a determina covarianța, determinăm mai întâi mediile $\mathbb{E}(X) = 3.7$, $\mathbb{E}(Y) = 4.9$ și apoi

$$(X - \mathbb{E}(X))(\Omega) = \{-1.7, 0.3, 1.3\} \quad \text{și} \quad (Y - \mathbb{E}(Y))(\Omega) = \{-1.9, 0.1, 1.1\},$$

iar covarianța va fi dată de formula (3.86):

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X, Y) &= \sum\nolimits_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} (x - \mathbb{E}(X))(y - \mathbb{E}(Y))\, \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&= (-1.7) \cdot (-1.9) \cdot 0.05 + (-1.7) \cdot 0.1 \cdot 0.15 + (-1.7) \cdot 1.1 \cdot 0.10 \\
&\quad + 0.3 \cdot (-1.9) \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.1 \cdot 0.20 + 0.3 \cdot 1.1 \cdot 0.15 \\
&\quad + 1.3 \cdot (-1.9) \cdot 0.10 + 1.3 \cdot 0.1 \cdot 0.15 + 1.3 \cdot 1.1 \cdot 0.05 \\
&= -0.051 + 0.027 - 0.156 \\
&= -0.18.
\end{aligned}$$

De asemenea, covarianța poate fi calculată folosind și formula (2.64)

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y),$$

unde $\mathbb{E}(XY)$ este dată de (3.87):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum\nolimits_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} xy \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&= 2 \cdot 3 \cdot 0.05 + 2 \cdot 5 \cdot 0.15 + 2 \cdot 6 \cdot 0.10 \\
&\quad + 4 \cdot 3 \cdot 0.05 + 4 \cdot 5 \cdot 0.20 + 4 \cdot 6 \cdot 0.15 \\
&\quad + 5 \cdot 3 \cdot 0.10 + 5 \cdot 5 \cdot 0.15 + 5 \cdot 6 \cdot 0.05 \\
&= 3.0 + 8.2 + 6.75 \\
&= 17.95.
\end{aligned}$$

Deci $\mathrm{Cov}(X,Y) = 17.95 - 3.7 \cdot 4.9 = -0.18$.

(c) Se utilizează formula (2.69).

(d) Având în vedere tabloul vectorului aleator (X,Y), tabloul v.a. $Z = X - Y$ este dat de

$$Z : \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.15 & 0.15 & 0.3 & 0.15 & 0.05 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

De exemplu,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z=-1) &= \mathbb{P}(X=2, Y=3) + \mathbb{P}(X=4, Y=5) + \mathbb{P}(X=5, Y=6) \\ &= 0.05 + 0.2 + 0.05 = 0.3. \end{aligned}$$

◇

Exemplul 3.201 Fie vectorul aleator discret (X,Y) dat de tabloul bidimensional următor:

$Y \backslash X$	-4	-2	2	4
-2		0.25		
-1				0.25
1	0.25			
2			0.25	

Se calculează, mai întâi, distribuțiile marginale ale lui X și respectiv Y și se poate arăta că v.a. X, Y nu sunt independente. De exemplu,

$$\mathbb{P}(X=-4) \cdot \mathbb{P}(Y=1) = 0.25 \cdot 0.25 = 0.0625 \neq 0.25 = \mathbb{P}(X=-4, Y=1).$$

Apoi se calculează covarianța celor două v.a.:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{E}(XY) \\ &= \sum\nolimits_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} xy\mathbb{P}(X=x, Y=y) \\ &= (-4) \cdot 1 \cdot 0.25 + (-2) \cdot (-2) \cdot 0.25 + 2 \cdot 2 \cdot 0.25 + 4 \cdot (-1) \cdot 0.25 \\ &= 0, \end{aligned}$$

deoarece mediile $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$.

Conform (2.66) știm că dacă două v.a. sunt independente, atunci sunt necorelate.

Exemplul propus arată că reciproca nu este adevărată. Astfel, am obținut două v.a. care au covarianța nulă (i.e. sunt necorelate), dar care nu sunt independente. $\diamond$

Exercițiul 3.202 *Cele mai comune tipuri de erori făcute de programatori sunt cele de sintaxă și cele de logică. Fie X variabilă care dă numărul de erori de sintaxă, iar Y variabila care dă numărul de erori de logică la rularea programului. Să presupunem că X și Y au următorul tablou de repartiție (pentru un anume programator care face un anume program):*

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0.71	0.03	0.02	0.01
1	0.04	0.06	0.03	0.01
2	0.03	0.03	0.02	0.01

(a) *Care este probabilitatea ca acel program să aibă strict mai multe erori de sintaxă decât cele de logică?*

(b) *Să se determine tablourile marginale. Sunt X și Y independente?*

(c) *Care este numărul mediu de erori de sintaxă care se pot produce? Dar numărul mediu de erori de logică? Să presupunem că un evaluator acordă puncte acelui program după formula $100-4X-9Y$. Care este numărul de puncte care te aștepți să fie acordate acelui program?*

(d) *Să se calculeze dispersiile $\mathrm{D}^2(100-9Y)$ și $\mathrm{D}^2(100-4X-9Y)$.*

Exercițiul 3.203 *Fie (X, Y) un vector aleator discret cu tabloul de repartiție*

$Y \backslash X$	2	4
1	a	0.1
2	0.1	0.3
3	a	$3a$

(a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât tabloul de mai sus să fie asociat unui vector aleator și apoi să se determine distribuțiile marginale ale v.a. X și Y.

(b) Să se determine tabloul v.a. X^2, $X+3$ și $2X-0.5Y+1$ și să se calculeze dispersia $\mathrm{D}^2\left(2-3X\right)$.

(c) Să se calculeze $\mathbb{P}(X+Y \leq 4)$, $\mathbb{P}(X \geq 2, Y \geq 3)$, $\mathbb{P}(Y \leq 3 | X \geq 2)$ și $F_{(X,Y)}(2,3)$ (unde $F_{(X,Y)}$ este funcția de repartiție asociată lui (X,Y)).

(d) Să se studieze dacă X și Y sunt independente.

Definiția 3.204 (vezi Definiția 3.1) *Funcția $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o densitate de repartiție dacă:*

(i) $f\left(x\right) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) f este integrabilă[222] Lebesgue pe $\mathbb{R}^n$ cu

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(t_1,\ldots,t_n\right)\lambda(dt_1,\ldots,dt_n) = 1.$$

Definiția 3.205 (vezi Definiția 3.4) *Să considerăm un vector aleator $(X_1,\ldots,X_n)$, notat cu $\mathbf{X}$, pentru care există o densitate de repartiție $f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ astfel încât funcția de repartiție $F_{\mathbf{X}}$, dată de Definiția 3.179, asociată vectorului aleator $\mathbf{X}$, se poate scrie sub forma[223]*

$$F_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{x}\right) = \int_{(-\infty,x_1]\times\cdots\times(-\infty,x_n]} f_{\mathbf{X}}\left(t_1,\ldots,t_n\right)\lambda(dt_1,\ldots,dt_n), \tag{3.88}$$

pentru orice $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, unde λ este măsura Lebesgue.

În acest caz, funcția $f_{\mathbf{X}}$ se numește **densitatea comună de repartiție** *asociată vectorului aleator $\mathbf{X}$, iar vectorul aleator $\mathbf{X}$ se numește* **vectorul aleator de tip continuu**.

[222] Vezi Remarca 3.2: având în vedere că f este nenegativă, dacă f este integrabilă Riemann, atunci f este și integrabilă Lebesgue pe $\mathbb{R}^n$, în raport cu măsura Lebesgue λ, iar $\int_{\mathbb{R}^n} f\left(t\right)dt = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(t\right)\lambda(dt) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda = 1$. De aceea vom putea lucra, de fapt, cu funcții de densitate integrabile Riemann pe $\mathbb{R}^n$ și, respectiv, cu integrale Riemann pe $\mathbb{R}^n$.

[223] Vezi Remarca 3.5: având în vedere că f este nenegativă, dacă f este integrabilă Riemann, vom putea lucra, de fapt, cu funcții de repartiție exprimate cu ajutorul integralelor Riemann pe $\mathbb{R}^n$.

Media unei funcții aplicată unui vector aleator discret poate fi calculată folosind următorul rezultat.

Teorema 3.206 (Formula de transfer) *Fie (X, Y) un vector aleator care admite densitatea $f_{(X,Y)}$. Fie $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție măsurabilă. Atunci, $h(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ este o v.a. și această v.a. admite medie dacă și numai dacă*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |h(x, y)| \, f_{(X,Y)}(x, y) \, dxdy < \infty.$$

În cazul în care $h(X, Y)$ admite medie, aceasta este dată de:

$$\boxed{\mathbb{E}(h(X, Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) \, f_{(X,Y)}(x, y) \, dxdy.}$$

Remarca 3.207 Prin urmare, dacă $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ este un vector aleator continuu, atunci covarianța dintre X și Y definită de (3.39) se calculează folosind formula:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} (x - \mathbb{E}(X))(y - \mathbb{E}(Y)) \, f_{(X,Y)}(x, y) \, dxdy. \end{aligned}} \tag{3.89}$$

De asemenea, covarianța dintre v.a. X și Y, dată de formula (3.40), se calculează, în cazul continuu, folosind formula:

$$\boxed{\mathbb{E}(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy \, f_{(X,Y)}(x, y) \, dxdy.} \tag{3.90}$$

$\diamond$

Propoziția 3.208 *Dacă $\mathbf{X} = (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un vector aleator care admite densitatea de repartiție $f_{\mathbf{X}}$, atunci $F_{\mathbf{X}}$ admite derivată parțială mixtă de ordinul doi în orice punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ în care $f_{\mathbf{X}}$ este continuă și*

$$f_{\mathbf{X}}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\mathbf{X}}}{\partial x \partial y}(x, y).$$

Remarca 3.209 Dacă vectorul aleator $\mathbf{X}$ admite densitatea $f_{\mathbf{X}}$, atunci

$$\mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in B) = \int \cdots \int_B f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \cdots dx_n,$$

pentru orice mulțime $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. $\diamond$

Remarca 3.210 De exemplu, dacă vectorul aleator (X, Y) admite densitatea $f_{(X,Y)}$, atunci

$$\mathbb{P}\left((X, Y) \in [a, b] \times [c, d]\right) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{(X,Y)}\,(x, y)\, dx\, dy,$$

pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Dacă vectorul aleator (X, Y) admite densitatea $f_{(X,Y)}$, atunci (vezi și (3.7))

$$\mathbb{P}\left((X, Y) \in \mathscr{D}\right) = \iint_{\mathscr{D}} f_{(X,Y)}\,(x, y)\, dx\, dy, \tag{3.91}$$

pentru orice domeniu $\mathscr{D} \in \mathscr{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Pentru o demonstrație alternativă vezi și Remarca 3.43. $\diamond$

Exemplul 3.211 (a) Fie vectorul aleator continuu (X, Y) cu densitatea $f_{(X,Y)}$. Să se arate[224] că

$$\mathbb{P}\,(X = Y) = 0.$$

Într-adevăr, folosind formula (3.91) obținem

$$\mathbb{P}\,(X = Y) = \mathbb{P}\left((X, Y) \in \mathscr{D}\right) = \iint_{\mathscr{D}} f_{(X,Y)}\,(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

unde $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\}$, deoarece integrala dublă se calculează pe o mulțime $\mathscr{D}$ de măsură Lebesgue 0.

Putem raționa și astfel: v.a. $X - Y$ este și ea de tip continuu, cu densitatea dată de (3.101), deci, conform (3.5), deducem că $\mathbb{P}\,(X - Y = 0) = 0$.

(b) Fie v.a. independente X, Y astfel încât X e de tip continuu, iar Y e de tip discret. Să se arate că

$$\mathbb{P}\,(X = Y) = 0.$$

Într-adevăr, folosind independența obținem:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\,(X = Y) &= \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{i\in I} \{X = x_i, Y = x_i\}\right) \\ &= \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}\left(\{X = x_i, Y = x_i\}\right)\end{aligned}$$

[224] Vezi și Exemplul 2.145.

$$= \sum\nolimits_{i\in I} \mathbb{P}\left(X = x_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(Y = x_i\right)$$
$$= \sum\nolimits_{i\in I} 0p_i = 0.$$

$\diamond$

Remarca 3.212 Având în vedere calculul

$$\begin{aligned} F_{X_1}\left(x_1\right) = \mathbb{P}\left(X_1 \le x_1\right) &= \mathbb{P}\left(X_1 \le x_1, X_2 < \infty, \ldots, X_n < \infty\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) \in \left(-\infty, x_1\right] \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \left(\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f\left(x_1, \ldots, x_n\right) dx_2 \cdots dx_n\right) dx_1 , \end{aligned}$$

deducem că, dacă se cunoaște densitatea de repartiție a vectorului aleator $\mathbf{X}$, atunci **densitatea marginală de repartiție** a componentei X_i, unde $i = \overline{1,n}$, este dată de

$$f_{X_i}\left(x_i\right) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f\left(x_1, \ldots, x_n\right) dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n ,$$

pentru orice $x_i \in \mathbb{R}$. $\diamond$

Remarca 3.213 Prin urmare, dacă $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ este un vector aleator bidimensional, iar $f_{(X,Y)}$ este densitatea asociată, atunci **densitățile marginale** sunt date de

$$\boxed{\begin{aligned} f_X\left(x\right) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}\left(x,y\right) dy, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}, \\ f_Y\left(y\right) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}\left(x,y\right) dx, \quad \text{pentru orice } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}} \tag{3.92}$$

$\diamond$

Exemplul 3.214 Funcția

$$f\left(x,y\right) = \frac{1}{\left(b-a\right)\left(d-c\right)} \mathbb{1}_{[a,b]\times[c,d]}\left(x,y\right), \quad \text{pentru orice } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

este o densitate de repartiție.

Într-adevăr

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \frac{1}{(b-a)(d-c)}\,dxdy = 1.$$

Funcția de repartiție unui vector aleator (X,Y) cu densitatea f este

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{(b-a)(d-c)} \mathbb{1}_{[a,b]\times[c,d]}(t,s)\,dtds \\ &= \frac{1}{(b-a)(d-c)}(x-a)(y-c), \end{aligned}$$

pentru orice $(x,y) \in [a,b]\times[c,d]$.

Apoi $F_{(X,Y)}(x,y) = 0$, pentru $x < a$ sau $y < c$, și $F_{(X,Y)}(x,y) = 1$, pentru $x > b$ sau $y > d$.

Vectorul (X,Y) **reprezintă coordonatele unui punct distribuit uniform în dreptunghiul** $[a,b]\times[c,d]$, iar $F_{(X,Y)}$ este distribuția rectangulară pe $[a,b]\times[c,d]$.

Densitățile marginale sunt date de formulele (3.92), deci obținem, pentru orice $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(b-a)(d-c)} \mathbb{1}_{[a,b]\times[c,d]}(x,y)\,dy = \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_c^d dy, \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(b-a)(d-c)} \mathbb{1}_{[a,b]\times[c,d]}(x,y)\,dx = \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b dx. \end{aligned}$$

Deci se obține

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x), \quad \text{pentru orice } x\in\mathbb{R}, \\ f_Y(y) &= \frac{1}{d-c}\mathbb{1}_{[c,d]}(y), \quad \text{pentru orice } y\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

◇

Exemplul 3.215 În cazul particular $f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{6}\mathbb{1}_{[0,2]\times[0,3]}(x,y)$, pentru orice $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, să calculăm $\mathbb{P}(1\le X\le 3, -1\le Y\le 2)$.

Utilizând Remarca 3.209 obținem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(1 \leq X \leq 3, -1 \leq Y \leq 2\right) &= \int_1^3 \int_{-1}^2 \frac{1}{6} \mathbb{1}_{[0,2]\times[0,3]}\left(x, y\right) dxdy \\
&= \int_1^2 \int_0^2 \frac{1}{6} dxdy \\
&= \frac{1}{6} \cdot x\Big|_{x=1}^{x=2} \cdot y\Big|_{y=0}^{y=2} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$\diamond$

Exemplul 3.216 Dacă $\mathscr{D}$ este discul cu centrul în origine și de rază 1, atunci funcția

$$f\left(x, y\right) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{\mathscr{D}}\left(x, y\right), \quad \text{pentru orice } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

este o densitate de repartiție.

Vectorul (X, Y) reprezintă coordonatele unui punct distribuit uniform în discul $\mathscr{D}$ de rază 1. $\diamond$

Exemplul 3.217 Funcția

$$f\left(x, y\right) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad \text{pentru orice } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

este o densitate de repartiție.

Într-adevăr

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} f\left(x, y\right) dxdy &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \right) d\theta \\
&= -e^{-\frac{\rho^2}{2}} \Big|_{\rho=0}^{\rho=\infty} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Un vector aleator (X, Y) cu densitatea f spunem că este distribuit normal bidimensional (vezi Nota 256). $\diamond$

Propoziția 3.218 *Dacă $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ este un vector aleator care admite densitatea de repartiție $f_{(X,Y)}$, atunci*[225]

$$X,Y \text{ independente} \iff f_{(X,Y)}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y),\quad \text{a.p.t. } (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

(în raport cu măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}^2$).

Demonstrație. Știm că v.a. X,Y sunt independente dacă și numai dacă

$$\mathbb{P}(X\le x,Y\le y)=\mathbb{P}(X\le x)\,\mathbb{P}(Y\le y),\quad \text{pentru orice } x,y\in\mathbb{R}.$$

Dacă v.a. X,Y sunt independente, atunci, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dudv &= \mathbb{P}(X\le x,Y\le y)\\ &=\mathbb{P}(X\le x)\,\mathbb{P}(Y\le y)\\ &=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du\cdot\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv\\ &=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_X(u)\,f_Y(v)\,dudv.\end{aligned}$$

Având în vedere că egalitatea integralelor are loc pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$, deducem (vezi Nota 153) egalitatea integranzilor, i.e. $f_{(X,Y)}(u,v)=f_X(u)\,f_Y(v)$, a.p.t. pe $\mathbb{R}^2$, în raport cu măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}^2$.

Reciproc, dacă avem egalitatea $f_{(X,Y)}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$ a.p.t. pe $\mathbb{R}^2$, atunci, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$, integralele sunt egale:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\le x,Y\le y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dudv\\ &=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_X(u)\cdot f_Y(v)\,dudv\\ &=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du\cdot\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv\\ &=\mathbb{P}(X\le x)\cdot\mathbb{P}(Y\le y).\end{aligned}$$

■

[225] Vezi și caracterizările independenței a două v.a. date de Propoziția 3.187, Propoziția 3.190, Remarca 3.219 și de Teorema 4.27.

Remarca 3.219 De fapt, **are loc următoarea caracterizare a independenței a doua v.a.**: dacă $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ este un vector aleator care admite densitatea de repartiție $f_{(X,Y)}$, atunci[226] X, Y sunt v.a. independente dacă și numai dacă există două funcții $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât are loc scrierea

$$f_{(X,Y)}(x, y) = g(x) \cdot h(y), \quad \text{a.p.t. } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.93}$$

caz în care densitățile marginale sunt date de $f_X = g$ și $f_Y = h$.

Într-adevăr, dacă X, Y sunt două v.a. independente, atunci, folosind relația dată de Propoziția 3.218, rezultă că are loc, evident, și relația (3.93).

Invers, dacă are loc relația (3.93), atunci se pot calcula densitățile marginale plecând de la $f_{(X,Y)}$ dat de (3.93) și se obține $f_X = g$ și $f_Y = h$ și astfel are loc relația dată de Propoziția 3.218, adică independența v.a. X și Y. $\diamond$

3.4.1 Distribuția multinomială

Un exemplu important de vector aleator discret este cel distribuit multinomial.

Fie $\mathscr{E}$ o experiență și $(A_i)_{i=\overline{1,r}}$ un sistem complet de evenimente legat de acea experiență. Evenimentele A_i se pot realiza cu probabilitățile $p_i = \mathbb{P}(A_i)$, $i = \overline{1, r}$ și impunem $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$. Se repetă experiența de n ori în aceleași condiții.

Să definim $\mathbf{X}$ ca fiind vectorul aleator care ia drept valori numărul de realizări ale fiecărui eveniment A_i, mai precis $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_r)$, unde X_i este v.a. care are drept valori numărul de apariții ale evenimentului A_i la n efectuări ale experienței[227].

Utilizând argumente de numărare folosite și în cazul distribuției binomiale (vezi și deducerea definiției termenului $C_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r}$ dat de (1.28)) spunem că vectorul aleator $\mathbf{X}$ urmează o distribuție multinomială, și scriem

$$\mathbf{X} \sim \mathscr{B}(n, p_1, \ldots, p_r),$$

dacă tabloul de repartiție este dat de:

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} = (k_1, \ldots, k_r)) = \mathbb{P}(X_1 = k_1, \ldots, X_r = k_r) \tag{3.94}$$

[226] Vezi și caracterizările independenței a două v.a. date de Propoziția 3.187, Propoziția 3.190, Propoziția 3.218 și de Teorema 4.27.

[227] Vezi și schema multinomială.

$$= \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r} \mathbb{1}_{\{k_1+\ldots+k_r=n\}},$$

unde $k_i = \overline{0,n}$, $i = \overline{1,r}$.

Remarca 3.220 Să observăm că probabilitatea $\mathbb{P}(X_1 = k_1, \ldots, X_r = k_r)$ este coeficientul termenului $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{k_r}$ din dezvoltarea multinomială

$$(p_1x_1 + \ldots + p_rx_r)^n = \sum\nolimits_{\substack{k_1=0,\ldots,k_r=0 \\ k_1+\ldots+k_r=n}}^{n} C_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r} p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}$$

(vezi și formula (1.97)). ◇

De asemenea, folosind dezvoltarea polinomului $(p_1 + \ldots + p_r)^n$ obținem că suma tuturor probabilităților de mai sus este 1. Într-adevăr,

$$\sum\nolimits_{\substack{k_1=0,\ldots,k_r=0 \\ k_1+\ldots+k_r=n}}^{n} \mathbb{P}(X = (k_1, \ldots, k_r)) = \sum\nolimits_{\substack{k_1=0,\ldots,k_r=0 \\ k_1+\ldots+k_r=n}}^{n} \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$$
$$= (p_1 + \ldots + p_r)^n = 1.$$

O variantă concretă a schemei multinomiale este următoarea: se dă o urnă U care conține bile de r culori, iar probabilitatea de extragere a unei bile de culoare c_i este p_i, cu $i = \overline{1,r}$. Fie $\mathscr{E}$ experiența extragerii unei bile din urnă, urmând ca bila să fie pusă înapoi. Se efectuează $\mathscr{E}$ de n ori. Atunci, $\mathbf{X}$ este vectorul aleator ce are drept valori vectorul $r-$dimensional $(k_1, \ldots, k_r)$, unde k_i este numărul de bile de culoarea c_i, unde $i = \overline{1,r}$.

În cazul particular $r = 3$ numărul de termeni $p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$ este dat astfel: avem $C_n^{k_1}$ posibilități de a alege k_1 bile de culoarea c_1 din n bile extrase; apoi avem $C_{n-k_1}^{k_2}$ posibilități de a alege k_2 bile de culoarea c_2 din $(n - k_1)$ bile rămase (și respectiv $C_{n-k_1-k_2}^{k_3} = C_{k_3}^{k_3} = 1$ posibilități de a alege k_3 bile de culoarea c_3 din $(n - k_1 - k_2) = k_3$ bile rămase). Deci

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = n - k_1 - k_2)$$
$$= C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} C_{n-k_1-k_2}^{k_3} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$$
$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$$
$$= \frac{n!}{k_1! k_2! (n-k_1-k_2)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3},$$

adică are loc formula (3.94).

Remarca 3.221 Luând $r = 2$ observăm că distribuția binomială $\mathscr{B}(n,p)$ este un caz particular al distribuției multinomiale. În acest caz avem distribuțiile marginale:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = k_1) &= \sum\nolimits_{\substack{k_2=0\\k_1+k_2=n}}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2)\\ &= \mathbb{P}(X_1 = k_1, X_2 = n-k_1)\\ &= \frac{n!}{k_1!\,(n-k_1)!}p_1^{k_1}p_2^{n-k_1}\\ &= C_n^{k_1}p_1^{k_1}p_2^{n-k_1}\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = k_2) &= \sum\nolimits_{\substack{k_1=0\\k_1+k_2=n}}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2)\\ &= \mathbb{P}(X_1 = n-k_2, X_2 = k_2)\\ &= C_n^{k_2}p_2^{k_2}p_1^{n-k_2},\end{aligned}$$

unde $p_2 = 1-p_1$, iar $k_1 = \overline{0,n}$. $\diamond$

Propoziția 3.222 *Dacă vectorul aleator* $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_r) \sim \mathscr{B}(n,p_1,\ldots,p_r)$, *atunci* $X_i \sim \mathscr{B}(n,p_i)$, *pentru* $i = \overline{1,r}$.

Demonstrație. Pentru simplitatea expunerii vom arăta concluzia doar în cazul $r = 3$ (vezi și Remarca 3.221).

Avem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = k_1) &= \sum\nolimits_{\substack{k_2=0,k_3=0\\k_2+k_3=n-k_1}}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3)\\ &= \sum\nolimits_{k_2=0}^{n-k_1} \mathbb{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = n-k_1-k_2)\\ &= \sum\nolimits_{k_2=0}^{n-k_1} \frac{n!}{k_1!k_2!\,(n-k_1-k_2)!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}p_3^{n-k_1-k_2}\\ &= \frac{n!}{k_1!\,(n-k_1)!}p_1^{k_1}\sum\nolimits_{k_2=0}^{n-k_1}\frac{(n-k_1)!}{k_2!\,(n-k_1-k_2)!}p_2^{k_2}p_3^{n-k_1-k_2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{k_1!\,(n-k_1)!}\,p_1^{k_1}\,(p_2+p_3)^{n-k_1} \\
&= C_n^{k_1}\,p_1^{k_1}\,(1-p_1)^{n-k_1}\,.
\end{aligned}
$$

Similar se obține

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\,(X_2=k_2) &= C_n^{k_2}\,p_2^{k_2}\,(1-p_2)^{n-k_2}\,, \\
\mathbb{P}\,(X_3=k_3) &= C_n^{k_3}\,p_3^{k_3}\,(1-p_3)^{n-k_3}\,.
\end{aligned}
$$

■

Propoziția 3.223 *Dacă* $\mathbf{X} \sim \mathscr{B}\,(n,p_1,\ldots,p_r)$, *atunci media vectorului aleator este dată de*

$$
\mathbb{E}\,(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} np_1 \\ np_2 \\ \vdots \\ np_r \end{bmatrix}
$$

și matricea de covarianță este

$$
\mathrm{Cov}\,(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} np_1\,(1-p_1) & -np_1p_2 & \cdots & -np_1p_r \\ -np_1p_2 & np_2\,(1-p_2) & \cdots & -np_2p_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -np_1p_r & np_2p_r & \cdots & np_r\,(1-p_r) \end{bmatrix}.
$$

Demonstrație. Într-adevăr, $\mathbb{E}\,(X_i) = np_i$ și $\mathrm{D}^2\,(X_i) = np_i\,(1-p_i)\,.$

Se poate arăta și formula de calcul a covarianței:

$$
\mathrm{Cov}\,(X_i,X_j) = -np_ip_j\,, \quad \text{unde } i,j=\overline{1,r}, \quad \text{cu } i \neq j.
$$

De exemplu, în cazul particular $r=2$, avem două v.a. de tip binomial, $X_1 \sim \mathscr{B}\,(n,p)$ și $X_2 \sim \mathscr{B}\,(n,q)$, astfel încât $X_1+X_2=n$, iar $p+q=1$. Atunci, v.a. X_1 și X_2 nu sunt independente, iar media produsului este

$$
\mathbb{E}\,(X_1\cdot X_2) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} k\,(n-k)\,\mathbb{P}\,(X_1=k, X_2=n-k)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} k\,(n-k)\, \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= n\,(n-1)\,pq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} p^{k-1} q^{n-k-1} \\
&= n\,(n-1)\,pq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!\,(n-k-2)!} p^{k} q^{n-k-2} \\
&= n\,(n-1)\,pq\,(p+q)^{n-2}.
\end{aligned}
$$

Deci, conform (3.40),

$$\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2) = \mathbb{E}\,(X_1 X_2) - \mathbb{E}\,(X_1)\,\mathbb{E}\,(X_2) = n\,(n-1)\,pq - n^2 pq = -npq.$$

■

3.4.2 Transformări ale vectorilor aleatori

Fie $(X, Y) : \Omega \to \mathscr{D}$ un vector aleator care admite densitatea de repartiție $f_{(X,Y)}$ astfel încât $\mathrm{Supp}\,(f) \subset \mathscr{D}$. Să considerăm transformarea

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2,$$

dată de

$$\begin{cases} x = \Phi_1\,(u, v)\,, \\ y = \Phi_2\,(u, v)\,, \quad (u, v) \in \Delta, \end{cases}$$

astfel încât

(i) Φ este bijecție,

(ii) Φ și Φ^{-1} admit derivate parțiale de ordinul întâi pe Δ și respectiv $\mathscr{D}$,

(iii) $J_\Phi\,(u, v) \overset{\text{def}}{=\!=} \dfrac{D\,(\Phi_1, \Phi_2)}{D\,(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$ pentru $(u, v) \in \Delta$

(J_Φ se numește **determinantul Jacobian** al transformării Φ).

Atunci, $\Phi^{-1}\,(X, Y)$ este tot un vector aleator notat cu (U, V), i.e.

$$(U, V) = \Phi^{-1}\,(X, Y) \quad \Leftrightarrow \quad (X, Y) = \Phi\,(U, V)\,.$$

Să notăm cu $f_{(X,Y)}$ și $f_{(U,V)}$ densitățile de repartiție corespunzătoare vectorilor aleatori (X,Y) și respectiv (U,V).

Fie acum $\Delta' \subset \Delta$ arbitrar ales și $\Phi(\Delta) = \mathscr{D}' \subset \mathscr{D}$. Folosind schimbarea de variabilă în integrala dublă obținem

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathscr{D}'} f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy \\ &= \iint_{\Delta'} f_{(X,Y)}(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv. \end{aligned} \tag{3.95}$$

Dar probabilitatea ca (X,Y) să ia valori în $\mathscr{D}'$ coincide cu probabilitatea ca (U,V) să ia valori în Δ', i.e.

$$\mathbb{P}((X,Y) \in \mathscr{D}') = \mathbb{P}((U,V) \in \Delta'),$$

deci

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta'} f_{(U,V)}(u,v)\,dudv &= \mathbb{P}((U,V) \in \Delta') \\ &= \mathbb{P}((X,Y) \in \mathscr{D}') \\ &= \iint_{\mathscr{D}'} f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy \\ &= \iint_{\Delta'} f_{(X,Y)}(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv. \end{aligned}$$

Având în vedere că $\Delta' \subset \Delta$ este ales arbitrar, **din egalitatea celor două integrale calculate pe Δ', deducem egalitatea integranzilor (vezi Nota 153)**, adică următoarea formulă care exprimă **densitatea vectorului aleator (U,V) folosind densitatea vectorului aleator (X,Y)** :

$$\boxed{\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v))\,|J(u,v)|, \\ \text{a.p.t. } (u,v) \in \Delta. \end{aligned}} \tag{3.96}$$

Să menționăm că egalitatea precedentă nu are loc pentru toți $(u,v) \in \Delta$, ci are loc aproape pentru toți $(u,v) \in \Delta$, în raport cu măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}^2$ (vezi Nota 152).

Evident, dacă $(u, v) \notin \Delta$, atunci $f_{(U,V)}(u, v) = 0$ și astfel formula precedentă devine

$$f_{(U,V)}(u, v) = f_{(X,Y)}(\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v)) |J(u, v)| \mathbb{1}_\Delta(u, v),$$
$$\text{a.p.t. } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Remarca 3.224 Relația (3.96) se poate generaliza ușor și la cazul unei transformări $\Phi : \Delta \to \mathscr{D}$, cu $\Delta, \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$. $\diamond$

Remarca 3.225 Formula (3.19) dată de Teorema 3.32 reprezintă un caz particular al formulei (3.96). Astfel, dacă luăm

$$\Phi : \Delta \subset \mathbb{R} \to \mathscr{D} \subset \mathbb{R}$$

astfel încât $\Phi \in C^1(\Delta)$, inversabilă, atunci $\Phi^{-1}(X)$ este tot o v.a. notată cu U, i.e.

$$\boxed{U = \Phi^{-1}(X) \quad \Leftrightarrow \quad X = \Phi(U),}$$

și are loc următoarea formulă care exprimă **densitatea v.a.** U **folosind densitatea v.a.** X :

$$\boxed{f_U(u) = f_X(\Phi(u)) |\Phi'(u)|, \quad \text{a.p.t. } u \in \Delta} \tag{3.97}$$

(în raport cu măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$).

Evident, dacă $u \notin \Delta$, atunci $f_U(u) = 0$. $\diamond$

Exemplul 3.226 Dacă $X \sim \mathscr{U}[0, 1]$, atunci v.a. $Y = a + (b - a) X \sim \mathscr{U}[a, b]$, deoarece $X = \dfrac{Y - a}{b - a}$ și legătura dintre densități este dată de relația (vezi și Corolarul 3.33)

$$f_Y(y) = \frac{1}{b-a} f_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[0,1]}\left(\frac{y-a}{b-a}\right) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(y),$$

deoarece $0 \le \dfrac{y-a}{b-a} \le 1$ dacă și numai dacă $a \le y \le b$, adică

$$\mathbb{1}_{[0,1]}\left(\frac{y-a}{b-a}\right) = \mathbb{1}_{[a,b]}(y).$$

$\diamond$

Exemplul 3.227 Dacă $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ și $Y = aX + b$, $a \neq 0$, atunci obținem

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(a\sigma)^2}} e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}},$$

adică $Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

În particular, $X - \mu \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ și $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$. ◇

Remarca 3.228 Similar putem demonstra (vezi și Propoziția 3.92 și Propoziția 3.130 unde demonstrația se face cu ajutorul funcției de repartiție):

$$\begin{array}{llll}
(a) & X \sim \mathcal{U}[0,1] & \iff & (b-a)X + a \sim \mathcal{U}[a,b]; \\
(b) & X \sim \mathcal{U}[a,b] & \iff & \dfrac{X-a}{b-a} \sim \mathcal{U}[0,1]; \\
(c) & X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) & \iff & \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1); \\
(d) & X \sim \mathcal{N}(0,1) & \iff & \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2); \\
(e) & X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) & \iff & aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).
\end{array}$$

◇

Propoziția 3.229 (Densitatea sumei a două v.a.) *Fie X, Y două v.a. independente ale căror densități de repartiție sunt f_X și respectiv f_Y.*

Atunci[228]*,*

$$\boxed{\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u-v) f_Y(v)\, dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(v) f_Y(u-v)\, dv, \quad \textit{a.p.t. } u \in \mathbb{R} \end{aligned}} \tag{3.98}$$

[228] Reamintim definiția **convoluției dintre două funcții** g și h (vezi și Nota 102, pentru cazul discret):

$$(g * h)(u) = \int_{\mathbb{R}} g(u-v)\, h(v)\, dv.$$

Astfel, deducem că densitatea sumei a două v.a. este chiar convoluția dintre funcțiile densitate a celor două v.a., i.e.

$$f_{X+Y} = f_X * f_Y.$$

și

$$f_{X-Y}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u+v) f_Y(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(u-v)\, du, \quad a.p.t.\ v \in \mathbb{R} \tag{3.99}$$

(în raport cu măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$).

Remarca 3.230 A doua egalitate din (3.98) se obține ușor făcând schimbarea de variabilă $u - v = v'$, deci $v = u - v'$ și $dv = -dv'$.

Similar și pentru a doua egalitate din (3.99): se notează $u + v = u'$, deci $u = u' - v$ și $du = du'$. ◇

Demonstrație. Alegem transformarea

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x - y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \Phi_1(u,v) = \frac{1}{2}(u+v), \\ y = \Phi_2(u,v) = \frac{1}{2}(u-v). \end{cases}$$

Să calculăm determinantul Jacobian $J(u,v) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/2.$

Folosind (3.96) deducem că are loc următoarea relație, a.p.t. $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\left|\frac{-1}{2}\right|.$$

Densitățile marginale pentru U, V sunt date de formulele (3.92):

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(U,V)}(u,v)\, dv, \quad f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(U,V)}(u,v)\, du, \tag{3.100}$$

deci obținem

$$f_U(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\left|\frac{-1}{2}\right| dv.$$

Dacă notăm $\frac{u-v}{2} = v'$ sau echivalent $v = u - 2v'$, integrala devine

$$f_U(u) = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{-\infty} f_{(X,Y)}(u - v', v')(-2)\, dv',$$

deci obținem relația

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(u - v, v)\, dv, \quad \text{a.p.t. } u \in \mathbb{R}.$$

Deci, în cazul în care v.a. sunt independente, se obține formula

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u - v)\, f_Y(v)\, dv, \quad \text{a.p.t. } u \in \mathbb{R}.$$

Apoi

$$f_{X-Y}(v) = f_V(v) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) du.$$

Dacă notăm $\frac{u-v}{2} = u'$ sau echivalent $u = 2u' + v$, integrala devine

$$\begin{aligned} f_{X-Y}(v) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(u' + v, u')\, 2du' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(u + v, u)\, du. \end{aligned} \tag{3.101}$$

Deci, în cazul în care v.a. sunt independente, se obține formula

$$f_{X-Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u + v)\, f_Y(u)\, du, \quad \text{a.p.t. } v \in \mathbb{R}.$$

■

Remarca 3.231 Alegând transformarea $\begin{cases} u = x + y, \\ v = y, \end{cases}$ se obține, de asemenea, că densitatea marginală a v.a. $U = X + Y$ este dată de prima egalitate din (3.98). Alegând transformarea $\begin{cases} u = x + y, \\ v = x, \end{cases}$ se obține, de asemenea, că densitatea marginală a v.a. $U = X + Y$ este dată de a doua egalitate din (3.98).

◇

Remarca 3.232 Alegând transformarea $\begin{cases} u = x - y, \\ v = y, \end{cases}$ se obține, de asemenea, că densitatea marginală a v.a. $U = X - Y$ este dată de prima egalitate din (3.99).

Alegând transformarea $\begin{cases} u = x - y, \\ v = x, \end{cases}$ se obține, de asemenea, că densitatea marginală a v.a. $U = X - Y$ este dată de a doua egalitate din (3.99). $\diamond$

Exemplul 3.233 Dacă avem două v.a. independente $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, atunci $X + Y$ urmează tot o distribuție normală[229] și $X + Y \sim \mathcal{N}(0,2)$.

Folosind formula (3.98) de calcul a densității sumei a două v.a. și (3.67) obținem

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u-v)\, f_Y(v)\, dv \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(u-v)^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(v^2 - uv\right)} dv \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{\frac{u^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(v - \frac{u}{2}\right)^2} dv \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(v'\right)^2} dv' \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{4}} \sqrt{\pi} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sqrt{2}\right)^2}} e^{-\frac{u^2}{2\left(\sqrt{2}\right)^2}},
\end{aligned}
$$

ceea ce înseamnă că $X + Y \sim \mathcal{N}(0,2)$. $\diamond$

Exemplul 3.234 Dacă avem două v.a. independente $X \sim \mathcal{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, $Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$, atunci $X + Y$ urmează tot o distribuție normală, mai precis,

$$X + Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right).$$

[229] Demonstrarea acestui rezultat se poate face și cu ajutorul funcției caracteristice (vezi Exercițiul 4.2.22).

Să considerăm, mai întâi, cazul $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Fie transformarea:

$$\begin{cases} u = ax + by, \\ v = ax - by \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2a}, \\ y = \dfrac{u-v}{2b} \end{cases}$$

cu determinantul Jacobian $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2ab}$.

Obținem, pentru $a, b > 0$,

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) &= \left| -\frac{1}{2ab} \right| f_{(X,Y)}\left(\frac{u+v}{2a}, \frac{u-v}{2b} \right) \\ &= \frac{1}{2ab}\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\left(\frac{u+v}{2a}\right)^2}{2}} e^{-\frac{\left(\frac{u-v}{2b}\right)^2}{2}} \\ &= \frac{1}{4ab\pi} e^{-\frac{(a^2+b^2)u^2 + 2(b^2-a^2)uv + (a^2+b^2)v^2}{8a^2b^2}}. \end{aligned}$$

Pentru a calcula densitatea marginală f_U folosim formulele (3.92) și integrala (3.67):

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{1}{4ab\pi} e^{-\frac{(a^2+b^2)u^2}{8a^2b^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2(b^2-a^2)uv + (a^2+b^2)v^2}{8a^2b^2}} dv \\ &= \frac{1}{4ab\pi} e^{-\frac{(a^2+b^2)u^2}{8a^2b^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}v + \frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}u\right)^2 - \left(\frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}u\right)^2}{8a^2b^2}} dv \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{1}{4ab\pi} e^{-\frac{(a^2+b^2)u^2}{8a^2b^2}} e^{\frac{(b^2-a^2)^2}{8a^2b^2(a^2+b^2)}u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}v + \frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}u\right)^2}{8a^2b^2}} dv \\ &= \frac{1}{4ab\pi} e^{\frac{(b^2-a^2)^2u^2 - (a^2+b^2)^2u^2}{8a^2b^2(a^2+b^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(v')^2} \frac{2\sqrt{2}ab}{\sqrt{a^2+b^2}} dv' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{\frac{-u^2}{2(\sqrt{a^2+b^2})^2}} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(a^2+b^2)}} e^{\frac{-u^2}{2(a^2+b^2)}}, \end{aligned}$$

unde $v' = \frac{\sqrt{a^2+b^2}v + \frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}u}{2\sqrt{2}ab}$.

Deci s-a obținut $aX + bY \sim \mathcal{N}\left(0, a^2 + b^2\right)$ și, folosind Remarca 3.228 sau Propoziția 3.130, obținem $aX + bY + c \sim \mathcal{N}\left(c, a^2 + b^2\right)$.

În general, dacă avem $X \sim \mathcal{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, $Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$, atunci aplicăm rezultatul precedent v.a. $\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}, \frac{Y-\mu_2}{\sigma_2} \sim \mathcal{N}(0,1)$ și obținem

$$X + Y = \sigma_1 \frac{X-\mu_1}{\sigma_1} + \sigma_2 \frac{Y-\mu_2}{\sigma_2} + (\mu_1 + \mu_2) \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right).$$

$\diamond$

Propoziția 3.235 *Fie X, Y două v.a. independente ale căror densități de repartiție sunt f_X și respectiv f_Y.*

Atunci,

$$\boxed{f_{X\cdot Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|v|} f_X\left(\frac{u}{v}\right) f_Y(v)\, dv, \quad \textit{a.p.t. } u \in \mathbb{R}} \tag{3.102}$$

și

$$\boxed{f_{\frac{X}{Y}}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} |u|\, f_X(uv)\, f_Y(u)\, du, \quad \textit{a.p.t. } v \in \mathbb{R}} \tag{3.103}$$

(în raport cu măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$).

Demonstrație. Alegem o transformare bijectivă $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \Delta \to \mathcal{D}$ dată de

$$\begin{cases} u = x \cdot y, \\ v = y, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{u}{v}, \\ y = v. \end{cases}$$

Să calculăm determinantul Jacobian $J(u,v) = \begin{vmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1/v.$

Folosind (3.96) deducem că are loc următoarea relație, a.p.t. $(u,v) \in \Delta$,

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(u/v, v) \left|\frac{1}{v}\right| = \left|\frac{1}{v}\right| f_X(u/v)\, f_Y(v),$$

deoarece X, Y sunt independente.

Densitatățile marginale pentru U, V sunt date de (3.92), deci obținem

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|v|} f_X\left(\frac{u}{v}\right) f_Y(v)\, dv, \quad \text{a.p.t. } u \in \mathbb{R}.$$

Similar, alegând o transformare bijectivă $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \Delta \to \mathscr{D}$ dată de

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{y}, \\ v = y, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = uv, \\ y = v. \end{cases}$$

se va obține densitatea marginală a v.a. $U = \dfrac{X}{Y}$. ■

Exemplul 3.236 Fie X, Y două v.a. independente astfel încât $X \sim \text{Exp}(1)$ și Y este o v.a. arbitrară, de tip continuu și cu valori nenegative. Să se arate că[230]

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} > r\right) = \mathbb{E}\left(e^{-rY}\right), \quad \text{pentru orice } r \geq 0.$$

Într-adevăr, pentru orice $r \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} > r\right) &= \int_r^{\infty} f_{\frac{X}{Y}}(v)\, dv \\ &= \int_r^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u|\, f_X(uv)\, f_Y(u)\, du\right) dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_r^{\infty} |u|\, f_X(uv)\, f_Y(u)\, dv\right) du \\ &= \int_0^{\infty} |u|\, f_Y(u) \left(\int_r^{\infty} e^{-uv}\, \mathbb{1}_{\{uv \geq 0\}}\, dv\right) du \\ &= \int_0^{\infty} u\, f_Y(u)\, \frac{e^{-uv}}{-u}\Bigg|_{v=r}^{v=\infty} du \\ &= \int_0^{\infty} f_Y(u)\, e^{-ru}\, du \end{aligned}$$

[230] De fapt, vezi Definiția 4.6 și respectiv Nota 260, se obține că $\mathbb{P}(U > r) = M_X(-r)$, unde M_X este funcția generatoare de momente asociată v.a. X sau transformata Laplace asociată densității f_X.

$$= \mathbb{E}\left(e^{-rY}\right),$$

deoarece $f_Y(u) = f_Y(u)\, \mathbb{1}_{\{u \geq 0\}}$, pentru orice $u \in \mathbb{R}$.

Evident, se observă că $\mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} > r\right) = 0$, pentru orice $r < 0$. $\diamond$

Remarca 3.237 Formulele (3.98), (3.99), (3.102) și (3.103) de mai sus se pot demonstra și prin calcularea unor integrale duble pe domenii convenabil alese, mai precis cu ajutorul funcțiilor de repartiție și a formulei (3.91).

Astfel, fie $U = X + Y$. Să calculăm

$$\begin{aligned} F_U(u) = \mathbb{P}(U \leq u) &= \mathbb{P}(X + Y \leq u) \\ &= \mathbb{P}((X, Y) \in \mathscr{D}) \\ &= \iint_{\mathscr{D}} f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy, \end{aligned}$$

unde $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq u\right\}$.

Explicitând domeniul avem $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ y \leq u - x\right\}$, deci

$$F_U(u) = \iint_{\mathscr{D}} f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{u-x} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy \Big) dx.$$

Facem substituția $x + y = y'$ și apoi, inversând ordinea de integrare, obținem

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{u} f_{(X,Y)}(x, y' - x)\, dy' \Big) dx \\ &= \int_{-\infty}^{u} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y - x)\, dx \Big) dy. \end{aligned}$$

Având în vedere că $F_U(u) = \int_{-\infty}^{u} f_U(y)\, dy$, identificăm și deducem că are loc a.p.t. $y \in \mathbb{R}$

$$f_U(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y - x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(y - x)\, dx, \tag{3.104}$$

deoarece X, Y sunt v.a. independente.

Astfel, am obținut a doua egalitate din (3.98).

Pentru a obține prima egalitate din (3.98) trebuie să explicităm domeniul $\mathscr{D}$ în raport cu cealaltă axă, i.e. $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R},\ x \le u - y\right\}$.

De asemenea, prima egalitate din (3.98) se poate obține și dacă facem schimbarea de variabilă $y - x = x'$ în (3.104):

$$f_U(y) = \int_{\infty}^{-\infty} f_X(y - x') f_Y(x')(-dx') = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y - x) f_Y(x)\, dx.$$

Similar se calculează F_{X-Y} și apoi f_{X-Y} pentru a obține formula (3.99).

Dacă notăm $U = X \cdot Y$, atunci

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \mathbb{P}(U \le u) = \mathbb{P}(X \cdot Y \le u) \\ &= \mathbb{P}((X, Y) \in \mathscr{D}) \\ &= \iint_{\mathscr{D}} f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy, \end{aligned}$$

unde $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \le u\right\}$.

Explicitând domeniul avem

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \iint_{\mathscr{D}} f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{0} \Big(\int_{u/x}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy \Big) dx + \int_{0}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{u/x} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy \Big) dx. \end{aligned}$$

În prima integrală, în cazul $x < 0$, facem substituția $xy = y'$:

$$\int_{u/x}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy = \int_{u}^{-\infty} f_{(X,Y)}\Big(x, \frac{y'}{x}\Big) \frac{dy'}{x} = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{|x|} f_{(X,Y)}\Big(x, \frac{y}{x}\Big) dy.$$

Similar, în a doua integrală, în cazul $x > 0$, se schimbă variabila și se obține

$$\int_{-\infty}^{u/x} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{|x|} f_{(X,Y)}\Big(x, \frac{y}{x}\Big) dy,$$

deci

$$F_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{u} \frac{1}{|x|} f_{(X,Y)}\Big(x, \frac{y}{x}\Big) dy \Big) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{u} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{(X,Y)}\left(x, \frac{y}{x}\right) dx \right) dy.$$

Dar $F_U(u) = \int_{-\infty}^{u} f_U(y)\, dy$ deci, identificând, deducem că are loc a.p.t. $y \in \mathbb{R}$

$$f_U(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{(X,Y)}\left(x, \frac{y}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x)\, f_Y\left(\frac{y}{x}\right) dx,$$

deoarece X, Y sunt v.a. independente.

Schimbând variabila în integrala precedentă (sau explicitând domeniul $\mathscr{D}$ în raport cu cealaltă axă), se poate obține și formula

$$f_U(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X\left(\frac{y}{x}\right) f_Y(x)\, dx.$$

Astfel, am obținut formula (3.102).

Similar se calculează $F_{\frac{X}{Y}}$ și apoi $f_{\frac{X}{Y}}$ pentru a obține formula (3.103). $\diamond$

Exemplul 3.238 Utilizând tehnica folosită mai sus (calculul unor probabilități folosind calcularea unor integrale duble pe domenii convenabil alese, mai precis formula (3.91)) se poate arăta că, dacă X, Y sunt două v.a. continue, atunci

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u, y)\, du \right) dy. \tag{3.105}$$

Dacă folosim formula de transfer (3.28)), obținem, în cazul particular în care X, Y sunt două v.a. continue independente, formula de calcul:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}(X < Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y)\, f_Y(y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X \le y)\, f_Y(y)\, dy \\ &= \mathbb{E}(F_X(Y)). \end{aligned}} \tag{3.106}$$

Într-adevăr, explicitând domeniul avem $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R},\ x < y\right\}$, deci

$$\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}((X, Y) \in \mathscr{D}) = \iint_{\mathscr{D}} f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx \Big) dy,$$

adică (3.105).

Dacă cele două v.a. sunt independente, atunci $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$, deci

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{y} f_X(x)\, dx \Big) f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y)\, f_Y(y)\, dy,$$

adică (3.106).

Explicitând altfel obținem $\mathscr{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ y > x\big\}$, deci

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{x}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx \Big) dx,$$

iar dacă cele două v.a. sunt independente, atunci se obține formula de calcul

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{x}^{\infty} f_Y(y)\, dx \Big) f_X(x)\, dx,$$

deci

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}(X < Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_Y(x))\, f_X(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(x < Y)\, f_X(x)\, dx. \end{aligned}} \tag{3.107}$$

◇

Exemplul 3.239 Dacă X, Y sunt două v.a. de tip exponențial și independente, cu parametri λ și respectiv μ, atunci

$$\mathbb{P}(X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Într-adevăr, conform (3.105),

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_{0}^{\infty} \Big(\int_{0}^{y} \lambda\mu e^{-\lambda u} e^{-\mu y}\, du \Big) dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda\mu \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda u}}{-\lambda}\Big|_{u=0}^{u=y} e^{-\mu y}\, dy \\
&= -\mu \int_0^\infty \left(e^{-\lambda y} - 1\right) e^{-\mu y}\, dy \\
&= -\mu \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu) y}\, dy + \mu \int_0^\infty e^{-\mu y}\, dy \\
&= -\mu \frac{e^{-(\lambda+\mu)y}}{-(\lambda+\mu)}\Big|_{y=0}^{y=\infty} + \mu \frac{e^{-\mu y}}{-\mu}\Big|_{y=0}^{y=\infty} \\
&= \frac{-\mu}{\lambda+\mu} + 1 \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.
\end{aligned}
$$

Aceeași formulă se obține și dacă se folosește formula (3.107) de calcul. $\diamond$

3.5 Relații între distribuții

Propoziția 3.240 *Dacă* $X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$, *unde* $\lambda > 0$, *atunci v.a.* $Y = pe^X$, *unde* $p > 0$, *are densitatea de repartiție*[231]

(3.108)
$$f_Y(y) = \frac{\lambda p^\lambda}{y^{\lambda+1}} \mathbb{1}_{[p,\infty)}(y).$$

Demonstrație. Pentru orice $y < p$ obținem $F_Y(y) = 0$.

Pentru $y \geq p$ avem

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\left(pe^X \leq y\right) = \mathbb{P}\Big(X \leq \ln \frac{y}{p}\Big) = F_X\Big(\ln \frac{y}{p}\Big).$$

Deci

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) = (F_Y(y))' &= \Big(F_X\Big(\ln \frac{y}{p}\Big)\Big)' \\
&= f_X\Big(\ln \frac{y}{p}\Big) \frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

[231] Dacă o v.a. Y are densitatea de repartiție dată de (3.108), cu $p > 0$ și $\lambda > 0$, atunci spunem că Y urmează **distribuția Pareto** de parametri p și λ.

$$
\begin{aligned}
&= \lambda \frac{1}{y} e^{-\lambda \ln \frac{y}{p}} \\
&= \lambda \frac{1}{y} \left(\frac{y}{p}\right)^{-\lambda} \\
&= \lambda p^{\lambda} y^{-\lambda-1}.
\end{aligned}
$$

■

Propoziția 3.241 *Dacă X, Y sunt v.a. independente astfel încât $X \sim \mathrm{Exp}\,(1)$ și $Y \sim \mathrm{Gamma}\,(p, \lambda)$, unde $p > 0$ și $\lambda > 0$, atunci:*

(a) *V.a. $U = \dfrac{X}{Y}$ are densitatea de repartiție*

$$f_U\,(u) = \frac{p\lambda^p}{(\lambda + u)^{p+1}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}\,(u)\,;$$

(b) *V.a.*

$$V = \frac{X}{Y} + \lambda \sim \mathrm{Pareto}(\lambda, p)$$

(vezi Nota 231).

Demonstrație. Se utilizează formula (3.103). Vezi și Exemplul 3.236.

Utilizând Remarca 3.34 observăm, în plus, că

$$f_{U+\lambda}\,(v) = f_U\,(v - \lambda) = \frac{p\lambda^p}{v^{p+1}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}\,(v - \lambda) = \frac{p\lambda^p}{v^{p+1}} \mathbb{1}_{[\lambda,\infty)}\,(v)\,,$$

adică v.a. $\dfrac{X}{Y} + \lambda$ urmează distribuția Pareto de parametri λ și p. ■

În mod similar se arată următorul rezultat.

Propoziția 3.242 *Dacă X, Y sunt v.a. independente astfel încât $X \sim \mathrm{Exp}\,(\lambda)$ și $Y \sim \mathrm{Gamma}\,(n, \lambda)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ și $\lambda > 0$, atunci v.a.*

$$V = \frac{X}{Y} + 1 \sim \mathrm{Pareto}(1, n).$$

Propoziția 3.243 *Dacă* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, *unde* $\mu > 0$ *și* $\sigma > 0$, *atunci v.a.* $Y = e^X$ *are densitatea de repartiție*[232]

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{y} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y). \tag{3.109}$$

Demonstrație. Avem, pentru orice $y \leq 0$, $F_Y(y) = 0$ și pentru orice $y > 0$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\left(e^X \leq y\right) = \mathbb{P}(X \leq \ln y) = F_X(\ln y).$$

Deci

$$f_Y(y) = (F_Y(y))' = (F_X(\ln y))' = f_X(\ln y)\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{y} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

■

Propoziția 3.244 *Dacă* X, Y *sunt v.a. independente cu* $X \sim \mathrm{Gamma}(p, \lambda)$ *și* $Y \sim \mathrm{Gamma}(q, \lambda)$, *unde* $p > 0, q > 0$ *și* $\lambda > 0$, *atunci v.a.* $U = \dfrac{X}{X+Y}$ *are densitatea de repartiție*[233]

$$f_U(u) = \frac{1}{\beta(p,q)} u^{p-1}(1-u)^{q-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(u). \tag{3.110}$$

Demonstrație. Să considerăm transformarea bijectivă $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \Delta \to \mathscr{D}$, unde $\Delta = (0,1) \times (0,\infty)$, iar $\mathscr{D} = (0,\infty) \times (0,\infty)$, dată de

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{x+y}, \\ v = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \Phi_1(u,v) = \dfrac{uv}{1-u}, \\ y = \Phi_2(u,v) = v \end{cases}$$

cu determinantul Jacobian

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{v}{(1-u)^2} & \dfrac{u}{1-u} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{v}{(1-u)^2}.$$

[232] Dacă o v.a. Y are densitatea de repartiție dată de (3.109), cu $\mu > 0$ și $\sigma > 0$, atunci spunem că Y urmează **distribuția Lognormală** de parametri μ și σ.

[233] Dacă o v.a. U are densitatea de repartiție dată de (3.110), cu $p > 0$ și $q > 0$, unde β este funcția Beta (vezi pagina 366), atunci spunem că U urmează **distribuția Beta** de parametri p și q.

Folosind (3.96) deducem că are loc următoarea relație, a.p.t. $(u,v) \in \Delta$,

$$
\begin{aligned}
f_{(U,V)}(u,v) &= f_{(X,Y)}\left(\frac{uv}{1-u}, v\right)\left|\frac{v}{(1-u)^2}\right| \\
&= f_X\left(\frac{uv}{1-u}\right) f_Y(v)\,\frac{v}{(1-u)^2} \\
&= \frac{\lambda^{p+q}}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\left(\frac{uv}{1-u}\right)^{p-1} e^{-\lambda\frac{uv}{1-u}}\, v^{q-1} e^{-\lambda v}\,\frac{v}{(1-u)^2} \\
&= \frac{\lambda^{p+q}}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\,\frac{u^{p-1}v^{p+q-1}}{(1-u)^{p+1}}\, e^{-\lambda\frac{v}{1-u}}\,.
\end{aligned}
$$

Evident, dacă $(u,v) \notin \Delta$, atunci $f_{(U,V)}(u,v) = 0$.

Să calculăm densitatea marginală

$$
\begin{aligned}
f_U(u) &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{p+q}}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\,\frac{u^{p-1}v^{p+q-1}}{(1-u)^{p+1}}\, e^{-\lambda\frac{v}{1-u}}\,dv \\
&= \frac{\lambda^{p+q}}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\,\frac{u^{p-1}}{(1-u)^{p+1}}\int_0^{\infty} v^{p+q-1} e^{-\lambda\frac{v}{1-u}}\,dv \\
&= \frac{\lambda^{p+q}}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\,\frac{u^{p-1}}{(1-u)^{p+1}}\int_0^{\infty} \frac{(1-u)^{p+q-1}}{\lambda^{p+q-1}}(v')^{p+q-1} e^{-v'}\,\frac{1-u}{\lambda}\,dv' \\
&= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\,u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,,
\end{aligned}
$$

pentru orice $u \in (0,1)$. ■

Propoziția 3.245 *Dacă X, Y sunt două v.a. independente distribuite normal, de tipul $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, unde $\sigma > 0$, atunci*

$$
X^2 \sim \chi^2(1,\sigma) \quad \textit{și} \quad \left(X^2+Y^2\right) \sim \chi^2(2,\sigma)\,.
$$

Demonstrație. Avem, pentru orice $y \leq 0$, $F_{X^2}(y) = 0$ și pentru orice $y > 0$,

$$
F_{X^2}(y) = \mathbb{P}\left(X^2 \leq y\right) = \mathbb{P}\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right) = F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X\left(-\sqrt{y}\right).
$$

Deci

$$
f_{X^2}(y) = \left(F_{X^2}(y)\right)'
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X\left(-\sqrt{y}\right)\right)' \\
&= f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X\left(-\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} \\
&= f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{1}{\sqrt{y}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{y}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}},
\end{aligned}
$$

adică X^2 corespunde unei v.a. distribuite $\chi^2(1,\sigma)$.

Dacă $X, Y \sim \mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$, atunci $X^2, Y^2 \sim \chi^2(1,\sigma)$ și, prin urmare, folosind Propoziția 3.171, obținem $\left(X^2 + Y^2\right) \sim \chi^2(1+1,\sigma)$. ■

Se poate generaliza la cazul a n v.a. independente.

Propoziția 3.246 *Dacă v.a.* $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ *sunt de tip* ***i.i.d.****, urmând distribuția normală* $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$*, unde* $\sigma > 0$*, atunci*

$$
\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n,\sigma). \tag{3.111}
$$

Propoziția 3.247 *Dacă v.a.* $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ *sunt de tip* ***i.i.d.****, urmând distribuția normală* $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$*, unde* $\mu > 0$ *și* $\sigma > 0$*, și dacă*[234]

$$
\bar{X} \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n},
$$

atunci[235]

$$
\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 \sim \chi^2(n-1,\sigma).
$$

Demonstrație. Deoarece $X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$, avem, conform (3.73),

$$
\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2/n\right).
$$

[234] De fapt, vezi Remarca 2.102, $\bar{X}$ poate fi văzută ca o medie de selecție.

[235] Dacă suntem în cadrul de lucru al Remarcii 2.103, atunci să observăm că v.a. $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ este cea care apare în definirea dispersiei de selecție.

Aplicând Propoziția 3.130, deducem că

$$(X_i - \mu) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{și} \quad (\bar{X} - \mu) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/n)\,.$$

Obținem, aplicând (3.111), $(X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(1, \sigma)$ și conform Propoziției 3.171,

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n, \sigma)$$

Aplicând din nou (3.111), avem

$$(\bar{X} - \mu)^2 \sim \chi^2(1, \sigma/\sqrt{n})$$

și apoi, aplicând (3.83), $n\,(\bar{X} - \mu)^2 \sim \chi^2(1, \sigma)\,.$

Pe de altă parte, avem că

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \\
&= \sum\nolimits_{i=1}^{n} \left[(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)\right]^2 \\
&= \sum\nolimits_{i=1}^{n} \left[(X_i - \mu)^2 - 2\,(X_i - \mu)\,(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2\right] \\
&= \sum\nolimits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2\,(\bar{X} - \mu) \sum\nolimits_{i=1}^{n} (X_i - \mu) + \sum\nolimits_{i=1}^{n} (\bar{X} - \mu)^2 \\
&= \sum\nolimits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2\,(\bar{X} - \mu) \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) + n\,(\bar{X} - \mu)^2 \\
&= \sum\nolimits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2n\,(\bar{X} - \mu)^2 + n\,(\bar{X} - \mu)^2
\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - n\,(\bar{X} - \mu)^2 \\
&\sim \chi^2(n, \sigma) - \chi^2(1, \sigma) \\
&= \chi^2(n - 1, \sigma)\,.
\end{aligned}$$

■

Are loc următoarea legătura dintre distribuția normală, distribuția χ^2 și distribuția Student.

Propoziția 3.248 *Dacă* $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ *și* $Y \sim \chi^2(n, \sigma)$, *unde* $n \in \mathbb{N}^*$ *și* $\sigma > 0$, *sunt două v.a. independente, atunci*

$$T \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n).$$

Demonstrație. Vectorul aleator (X, Y) are densitatea de repartiție

$$\begin{aligned} f_{(X,Y)}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{2^{n/2}\sigma^n \Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma^{n+1} 2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x^2+y}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},\ y \geq 0. \end{aligned}$$

Să considerăm transformarea

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{\sqrt{\frac{y}{n}}}, \\ v = y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u\sqrt{v}}{\sqrt{n}}, \\ y = v, \end{cases}$$

cu determinantul Jacobian

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{n}} & \frac{u}{2\sqrt{n}\sqrt{v}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{n}}.$$

Folosind (3.96) deducem că are loc următoarea relație:

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}\left(\frac{u\sqrt{v}}{\sqrt{n}}, v\right) \left|\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{n}}\right| = \frac{v^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{v}{2\sigma^2}\left(\frac{u^2}{n}+1\right)}}{\sqrt{n\pi}\,\sigma^{n+1}\, 2^{\frac{n+1}{2}}\, \Gamma(n/2)}.$$

Densitatea marginală este dată de (avem $v = y \geq 0$)

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}\,\sigma^{n+1}\, 2^{\frac{n+1}{2}}\, \Gamma(n/2)} \int_0^\infty v^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{v}{2\sigma^2}\left(\frac{u^2}{n}+1\right)} dv.$$

Facem substituția $\frac{v}{2\sigma^2}\left(\frac{u^2}{n}+1\right) = v'$ deci $dv = \frac{2\sigma^2}{\frac{u^2}{n}+1} dv'$ și

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}\sigma^{n+1} 2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(n/2)} \int_0^\infty \left(\frac{2\sigma^2}{\frac{u^2}{n}+1}\right)^{\frac{n-1}{2}} (v')^{\frac{n-1}{2}} e^{-v'} \frac{2\sigma^2}{\frac{u^2}{n}+1} dv'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(n/2\right)}\left(\frac{u^2}{n}+1\right)^{-\frac{n+1}{2}}\int_0^\infty v^{\frac{n-1}{2}}e^{-v}dv$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(n/2\right)}\left(\frac{u^2}{n}+1\right)^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Deci U urmează distribuția Student cu n grade de libertate. ∎

Aplicând, în principal, rezultatul precedent, se pot demonstra următoarele două rezultate.

Propoziția 3.249 *Dacă v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt de tip **i.i.d.**, urmând distribuția normală $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, unde $\sigma>0$, și dacă $\bar{X} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$, atunci*

$$\frac{\bar{X}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n(n-1)}}} \sim t\left(n-1\right).$$

Demonstrație. Utilizând Propozițiile 3.247 și 3.165 obținem

$$\bar{X}\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2/n) \quad \text{și} \quad \frac{\sum_{i=1}^n\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n}\sim\chi^2\left(n-1,\sigma/\sqrt{n}\right).$$

Concluzia se obține utilizând Propoziția 3.248:

$$\frac{\bar{X}}{\sqrt{\frac{\frac{\sum_{i=1}^n\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n}}{n-1}}} \sim t\left(n-1\right).$$

∎

Propoziția 3.250 *Dacă v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ sunt de tip **i.i.d.**, urmând distribuția normală $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, unde $\sigma>0$, atunci*

$$\frac{X_{n+1}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}}} \sim t\left(n\right). \tag{3.112}$$

Are loc următoarea legătura dintre distribuția Student și distribuția Fisher.

Propoziția 3.251 *Dacă* $X \sim t(n)$, *unde* $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci*

$$X^2 \sim F(1,n).$$

Demonstrație. Vom determina, mai întâi funcția de repartiție asociată v.a. X^2. Astfel, pentru orice $y > 0$,

$$F_{X^2}(y) = \mathbb{P}\left(X^2 \leq y\right) = \mathbb{P}\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right) = F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X\left(-\sqrt{y}\right).$$

Conform (3.4) obținem densitatea:

$$\begin{aligned} f_{X^2}(y) &= F'_{X^2}(y) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X\left(\sqrt{y}\right) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X\left(-\sqrt{y}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}} f_X\left(\sqrt{y}\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

Evident, pentru orice $y < 0$, avem $F_{X^2}(y) = \mathbb{P}\left(X^2 \leq y\right) = 0$, deci $f_{X^2}(y) = 0$ și astfel, folosind Remarca 3.8, putem considera

$$f_{X^2}(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare, recunoaștem că $X^2 \sim F(1,n)$. ∎

Are loc următoarea legătura dintre distribuția χ^2 și distribuția Fisher.

Propoziția 3.252 *Dacă* $X \sim \chi^2(m,1)$ *și* $Y \sim \chi^2(n,1)$, *unde* $m \in \mathbb{N}^*$ *și* $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci*

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}} \sim F(m,n).$$

Demonstrație. Să calculăm mai întâi funcția de repartiție a v.a. $\frac{X}{Y}$:

$$F_{\frac{X}{Y}}(u) = \iint_{\mathscr{D}} f_X(x)\, f_Y(y)\, dx dy,$$

unde $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y > 0,\ \frac{x}{y} \leq u\right\}$.

Notez

$$C_1 = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad C_2 = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \sigma^m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Explicitând și domeniul $\mathscr{D}$ obținem $\mathscr{D} = \left\{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq \frac{x}{u}\right\}$, deci

$$F_{\frac{X}{Y}}(u) = C_1 C_2 \int_0^{\infty} \left(\int_{x/u}^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x+y}{2\sigma^2}} dy \right) dx.$$

Derivând funcția de repartiție de mai sus conform formulei de derivare a unei integrale cu parametru (vezi Nota 240), obținem

$$\begin{aligned} f_{\frac{X}{Y}}(u) &= C_1 C_2 \int_0^{\infty} (-) \left(\frac{x}{u}\right)' x^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x+\frac{x}{u}}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{C_1 C_2}{u^{1+m/2}} \int_0^{\infty} x^{\frac{n+m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}\left(1+\frac{1}{u}\right)} dx. \end{aligned}$$

În această integrală facem substituția $\frac{x}{2\sigma^2}\left(1 + \frac{1}{u}\right) = x'$ cu $dx = \frac{2\sigma^2}{1+1/u} dx'$, deci

$$\begin{aligned} f_{\frac{X}{Y}}(u) &= \frac{C_1 C_2}{u^{1+m/2}} \int_0^{\infty} \left(\frac{2\sigma^2}{1+1/u} x' \right)^{\frac{n+m}{2}-1} e^{-x'} \frac{2\sigma^2}{1+1/u} dx' \\ &= \frac{C_1 C_2}{u^{1+m/2}} \frac{\left(2\sigma^2\right)^{\frac{n+m}{2}}}{(1+u)^{\frac{n+m}{2}} u^{-\frac{n+m}{2}}} \int_0^{\infty} x^{\frac{n+m}{2}-1} e^{-x} dx \\ &= C_1 C_2 \frac{u^{n/2-1}}{(1+u)^{\frac{n+m}{2}}} \left(2\sigma^2\right)^{\frac{n+m}{2}} \Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right). \end{aligned}$$

Înlocuind C_1, C_2 obținem

$$f_{X/Y}(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{u^{n/2-1}}{(1+u)^{\frac{n+m}{2}}}.$$

Se notează acum $V = \frac{m}{n} U$, se aplică formula (3.97) cu $v = \frac{m}{n} u$ și se obține

$$f_V(v) = f_U\left(\frac{n}{m} v\right) \frac{n}{m},$$

adică, folosind și legătura dintre funcția Gamma și Beta, obținem

$$
\begin{aligned}
f_V(v) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{\left(\frac{n}{m}v\right)^{n/2-1}}{\left(1+\frac{n}{m}v\right)^{\frac{n+m}{2}}} \frac{n}{m} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\frac{n}{m}\right)^{n/2} v^{\frac{n}{2}-1}\left(1+\frac{n}{m}v\right)^{-\frac{n+m}{2}} \\
&= \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{n/2}}{\beta\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)} v^{\frac{n}{2}-1}\left(1+\frac{n}{m}v\right)^{-\frac{n+m}{2}}, \quad v \geq 0.
\end{aligned}
$$

Relația din enunț se poate obține și calculând direct densitatea de repartiție $f_{\frac{X}{Y}}$ cu ajutorul formulei (3.103). ■

Propoziția 3.253 *Dacă v.a. independente* $(X_i)_{i=\overline{1,m}}$ *și* $(Y_j)_{j=\overline{1,n}}$ *sunt distribuite* $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, *unde* $\sigma > 0$, *atunci*

$$
U = \frac{n}{m}\frac{X_1^2+\ldots+X_m^2}{Y_1^2+\ldots+Y_n^2} \sim F(m,n).
$$

3.6 Exerciții rezolvate

3.6.1 Funcții de repartiție. Densități de repartiție

3.6.1 Să se determine a, b astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x) = a + b\arctan(x)$, pentru $x\in\mathbb{R}$, să fie o funcție de repartiție.

Rezolvare:

Impunând condițiile $F(-\infty) = 0$ și $F(\infty) = 1$ obținem $a = \frac{1}{2}$ și $b = \frac{1}{\pi}$ (ceea ce este suficient ca F să satisfacă și celelate condiții ale unei funcții de repartiție).

3.6.2 Se dă funcția

$$
F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}
$$

Să se determine a astfel încât F să fie o funcție de repartiție și să se determine densitatea de repartiție corespunzătoare. Dacă X este o v.a. cu funcția de repartiție F, să se calculeze $\mathbb{P}\left(0.25 \leq X < 0.5\right)$.

Rezolvare:

Impunând condiția ca F să fie continuă la dreapta în punctul $x = 1$ obținem $a = 1$ (ceea ce este suficient ca F să satisfacă și celelate condiții ale unei funcții de repartiție).

Conform (3.4) obținem densitatea

$$f_X\left(x\right) = F_X'\left(x\right) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \text{ sau } x > 1, \\ 2x, & \text{dacă } 0 < x < 1, \end{cases}$$

și astfel, folosind Remarca 3.8, putem considera densitatea

$$f_X\left(x\right) = 2x\mathbb{1}_{[0,1]}\left(x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Are loc

$$\mathbb{P}\left(0.25 \leq X < 0.5\right) = F\left(0.5\right) - F\left(0.25\right) = 0.5.$$

3.6.3 Să se determine c astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de

$$f\left(x\right) = cx\mathbb{1}_{[0,1]}\left(x\right) + \left(2 - x\right)\mathbb{1}_{(1,2]}\left(x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

să fie o densitate de repartiție.

Dacă X este o v.a. cu densitatea f, să se calculeze $F_X\left(1/2\right)$.

Rezolvare:

Impunem ca

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) dx \\ &= \int_0^1 cx dx + \int_1^2 \left(2 - x\right) dx \\ &= c\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=1}^{x=2} \\ &= \frac{c}{2} + \left(4 - 2\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

și obținem $c = 1$.

Avem și

$$F_X(1/2) = \int_{-\infty}^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1/2} = 1/8.$$

3.6.4 Fie v.a. X cu densitatea de repartiție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = 2x\,\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze $\mathbb{P}(1/4 \le X \le 1/2)$.

Rezolvare:

Avem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1/4 \le X \le 1/2) &= F_X(1/2) - F_X(1/4)\\ &= \int_{1/4}^{1/2} f(x)\,dx\\ &= \int_{1/4}^{1/2} 2x dx\\ &= x^2\Big|_{x=1/4}^{x=1/2}\\ &= 3/16.\end{aligned}$$

3.6.5 Să se determine c astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{c}{x^5}\mathbb{1}_{(1,2)}(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$, să fie o densitate de repartiție.

Dacă X este o v.a. cu densitatea f, să se calculeze $\mathbb{P}(1 \le X \le 3/2)$.

Rezolvare:

Avem

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{c}{x^5}\,dx = c\frac{x^{-4}}{-4}\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{c}{-4}\left(2^{-4} - 1^{-4}\right)$$

deci $c = 64/15$.

Obținem

$$\mathbb{P}(1 \le X \le 3/2) = \int_1^{3/2} f(x)\,dx = \frac{64}{15}\,\frac{x^{-4}}{-4}\Big|_{x=1}^{x=3/2} = \frac{208}{243}.$$

3.6.6 Se dă funcția $f(x) = a\cos x\,\mathbb{1}_{[-\pi/2,\pi/2]}(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$. Să se determine a astfel încât f să fie o densitate de repartiție și apoi să se determine funcția de repartiție corespunzătoare. Dacă X este o v.a. cu densitatea f, să se calculeze $\mathbb{P}(0 \leq X \leq \pi/4)$.

Rezolvare:

Obținem $a = 1/2$.

Funcția de repartiție este $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2, \\ \dfrac{1}{2}(1+\sin x), & x \in [-\pi/2, \pi/2), \\ 1, & x \geq \pi/2. \end{cases}$

Are loc

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq \pi/4) = F(\pi/4) - F(0) = \sqrt{2}/4.$$

3.6.7 Se dă funcția

$$f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Să se determine a astfel încât f să fie o densitate de repartiție. Să se calculeze $\mathbb{P}(X < 1, Y \leq 1)$ și $\mathbb{P}(X < 1, Y \geq 1)$, unde X, Y sunt două v.a. independente care au densitatea f.

Rezolvare:

Obținem $a = 2/\pi$. Într-adevăr, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{e^x+e^{-x}} dx = a\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ și se va face substituția $e^x = t$, deci $dt = e^x dx$ și apoi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{e^x + e^{-x}} dx = a\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = a\pi/2.$$

Deoarece X, Y sunt două observații independente avem, mai întâi,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f_Y(t)\,dt = F_Y(x).$$

Apoi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 1, Y \leq 1) &= \mathbb{P}(X < 1)\,\mathbb{P}(Y \leq 1) \\ &= F_X(1)\,F_Y(1) = (F_X(1))^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx \right)^2 \\
&= \frac{4}{\pi^2} \left(\int_{-\infty}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \right)^2 \\
&= \frac{4}{\pi^2} \left(\arctan(e^x) \Big|_{x=-\infty}^{x=1} \right)^2 \\
&= \frac{4}{\pi^2} \arctan^2(e).
\end{aligned}$$

Apoi, folosind $\mathbb{P}(Y \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Y < 1)$,

$$\mathbb{P}(X < 1, Y \geq 1) = \mathbb{P}(X < 1)\,\mathbb{P}(Y \geq 1) = F_X(1) \cdot (1 - F_X(1)).$$

3.6.8 Se dă funcția $f(x) = \dfrac{a}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} \mathbb{1}_{[-\ell,\ell]}(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$. Să se determine a astfel încât f să fie densitatea de repartiție asociată unei v.a. X și apoi să se determine funcția de repartiție corespunzătoare. Să se calculeze probabilitățile $\mathbb{P}(0 < X \leq \ell)$ și $\mathbb{P}(\ell/2 < X < \ell)$.

Rezolvare:

Se obține $a = 1/\pi$.

Funcția de repartiție este $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\ell, \\ \dfrac{1}{\pi} \arcsin \dfrac{x}{\ell} + \dfrac{1}{2}, & x \in (-\ell, \ell), \\ 1, & x \geq \ell. \end{cases}$

3.6.9 Durata de viață, în ore, a unei particule este o v.a distribuită exponențial cu densitatea $f(x) = \dfrac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$. Să se determine media de viață a particulei și apoi probabilitatea ca particula să trăiască cel mult 7 ore.

Rezolvare:

Deoarece X este distribuită exponențial obținem $\lambda = 10^{-1}$. Media de viață este $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 10$ ore.

Probabilitatea cerută este

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 7) = \int_0^7 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = -e^{-\frac{x}{10}} \Big|_{x=0}^{x=7} = 1 - e^{-0.7} \simeq 0.5.$$

3.6.10 La un magazin, timpii (în minute) consumați la casa $i = \overline{1,2}$ se notează cu X_i, sunt independenți unul de altul și au densitatea $3e^{-3x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ și respectiv $2.5e^{-2.5x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$.

(a) Să se determine funcția de repartiție a v.a. X_1 și apoi $\mathbb{P}(X_1 \geq x)$, unde $x \in \mathbb{R}$; apoi să se determine valorile $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care au loc

$$\mathbb{P}(X_1 \leq a) = \mathbb{P}(a \leq X_1 \leq b) = \mathbb{P}(X_1 \geq b).$$

(b) Să se determine probabilitatea ca la cele două case să se stea același timp; apoi probabilitatea ca la ambele case să se stea cel puțin 1.5 minute; apoi probabilitatea ca cel puțin la o casă să se stea cel puțin 1.5 minute.

3.6.11 Fie v.a. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Să se arate că are loc

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq s+t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t), \quad \text{pentru orice } s, t > 0} \tag{3.113}$$

sau, echivalent,

$$\boxed{\mathbb{P}(X > s+t | X > s) = \mathbb{P}(X > t), \quad \text{pentru orice } s, t \geq 0.}$$

Rezolvare:

Folosind (3.61), avem $\mathbb{P}(X \geq t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t}$, pentru orice $t > 0$.

Deci

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq s+t | X \geq s) &= \frac{\mathbb{P}(\{X \geq s+t\} \cap \{X \geq s\})}{\mathbb{P}(X \geq s)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\{X \geq s+t\})}{\mathbb{P}(X \geq s)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} \\
&= \mathbb{P}(X \geq t),
\end{aligned}$$

deoarece $\{X \geq s+t\} \subset \{X \geq s\}$.

Așa cum am văzut deja în Remarca 3.106, egalitatea (3.113) reprezintă proprietatea de „lipsă de memorie” a distribuției exponențiale.

Dacă folosim distribuția exponențială drept model pentru durata de funcționare a unui anume dispozitiv, de exemplu, a unui bec, atunci lipsa de memorie a distribuției exponențiale implică faptul că dispozitivul **nu se uzează niciodată**. Adică, indiferent de cât de mult timp a funcționat deja becul (de exemplu, dacă el a funcționat deja cel puțin s unități de timp), probabilitatea de a se defecta în următoarele t unități de timp este aceeași cu probabilitatea de a se defecta a unui bec nou în următoarele t unități de timp de funcționare (sau probabilitatea aceluiași bec de a se defecta în primele lui t unități de timp de funcționare).

Dacă folosim distribuția exponențială drept model pentru timpul de așteptare dintre două apariții succesive ale unui eveniment[236] anume (care tot continuă să apară), atunci lipsa de memorie a distribuției exponențiale implică faptul că trecutul (până la momentul s) nu are nici un efect asupra comportamentului viitor. Astfel, probabilitatea ca timpul de așteptare pentru apariția acelui eveniment să fie de cel puțin t unități de timp, în condițiile în care ai așteptat deja s unități de timp, coincide cu probabilitatea ca timpul de așteptare pentru apariția acelui eveniment să fie de t unități de timp (fără nici o altă informație suplimentară), ca și cum primele s unități de timp în care ai așteptat nu ar conta sau ca și cum timpul de așteptare s-ar *restarta* după producerea fiecărui eveniment.

De asemenea, vezi Exercițiul 3.6.12, lipsa de memorie a unei v.a. continue, dată de egalitatea (3.113), implică faptul că v.a. este distribuită exponențial, prin urmare (3.113) caracterizează distribuția exponențială.

Deci distribuția exponențială este singura[237] distribuție continuă „fără memorie".

3.6.12 Dacă X este o v.a. continuă astfel încât $\mathbb{P}(X > 0) = 1$, iar $\mathbb{P}(X > t) > 0$ și care satisface proprietatea $\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$, pentru orice $s, t \geq 0$, atunci există $\lambda > 0$ astfel încât $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Rezolvare:

Să notăm cu $G(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(t)$.

[236] Se presupune că numărul de evenimente care apar într-un interval de timp este distribuit de tip Poisson cu parametrul direct proporțional cu lungimea intervalului de timp. Vezi și definiția unui proces stochastic Poisson dată de Nota 112.

[237] Singura distribuție discretă „fără memorie" este cea geometrică: vezi Exercițiul 2.4.45, Exercițiul 2.4.46 și Exercițiul 2.4.47.

Evident, $G(t) = 1$, pentru orice $t \leq 0$, deci $G(0) = 1$, și G este o funcție nedescrescătoare.

Deoarece X este v.a. continuă, deducem că funcția de repartiție F_X asociată este funcție continuă deci, echivalent, G este funcție continuă.

Egalitatea dată devine

$$G(t) = \frac{\mathbb{P}(\{X > s+t\} \cap \{X > t\})}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(\{X > s+t\})}{\mathbb{P}(X > s)}$$

sau, echivalent[238],

$$G(s+t) = G(s)\, G(t), \quad \text{pentru orice } s, t \geq 0$$

(vezi și egalitatea (3.64)).

Are loc, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $s_i \geq 0$ cu $i = \overline{1,n}$,

$$G(s_1 + \ldots + s_n) = G(s_1) \cdot \ldots \cdot G(s_n).$$

Dând valori particulare se obține $G(1) = \left(G\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Atunci, $G\left(\frac{m}{n}\right) = G\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(G\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = (G(1))^{\frac{m}{n}}$.

Să notăm

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=\!=} -\ln(G(1)) = -\ln(\mathbb{P}(X > 1)),$$

deci $e^{-\lambda} = G(1)$.

Obținem $G(r) = e^{-\lambda r}$, pentru orice $r \in \mathbb{Q}$ cu $r \geq 0$.

Fie $t \in [0, \infty)$ arbitrar ales și $r_n \in \mathbb{Q}$ astfel încât $r_n \searrow t$, când $n \to \infty$. Atunci,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{X > r_n\} = \{X > t\}$$

deci (vezi (1.9) și Propoziția 1.42)

$$\begin{aligned} G(t) &= \mathbb{P}(\{X > t\}) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{X > r_n\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\lim_{n \to \infty} \{X > r_n\}\right) \end{aligned}$$

[238] Pentru funcții care satisfac relații de acest tip (pornind de așa numita *ecuație funcțională a lui Cauchy*) vezi [31, Lemma 8.1, Lemma 8.2, Appendix].

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{X > r_n\}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} G\left(r_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda r_n} \\
&= e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

Deci funcția de repartiție $F_X(t) = 0$, pentru orice $t \leq 0$, și

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - G(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \text{pentru orice } t > 0,$$

adică, echivalent, vezi (3.61), $X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$.

3.6.13 Fie o v.a. repartizată uniform $X \sim \mathscr{U}(0,1)$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde, pentru $\lambda > 0$,

$$\begin{array}{lll}
(a)\ U = \ln \dfrac{1}{X}, & (b)\ U = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(X), & (c)\ U = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X), \\
(d)\ U = X^2, & (e)\ U = X^3, & (f)\ U = \sqrt{X}, \\
(g)\ U = \dfrac{1}{X}. & &
\end{array}$$

Rezolvare:

În multe situații este comod să găsim densitatea de repartiție a unei noi v.a., care este dată ca funcție de o v.a. dată inițial, calculând mai întâi funcție de repartiție a noii v.a. (obținute printr-o transformare, nu neapărat bijectivă, a v.a. dată inițial).

Funcția de repartiție a v.a. X este dată de

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq 0, \\ x, & \text{dacă } x \in (0,1], \\ 1, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

(a) Funcția de repartiție a v.a. U este

$$F_U(u) = \mathbb{P}(U \leq u) = \mathbb{P}\left(X \geq e^{-u}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X < e^{-u}\right) = 1 - F_X\left(e^{-u}\right),$$

deci

$$F_U(u) = \begin{cases} 1 - e^{-u}, & \text{dacă } e^{-u} \leq 1 \\ 1 - 1, & \text{dacă } e^{-u} > 1. \end{cases}$$

Conform (3.4) obținem densitatea

$$f_X(u) = F'_X(u) = \begin{cases} e^{-u}, & \text{dacă } u > 0, \\ 0, & \text{dacă } u < 0, \end{cases}$$

și astfel, folosind Remarca 3.8, putem considera densitatea

$$f_X(u) = e^{-u}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(u), \quad u \in \mathbb{R},$$

adică $U \sim \operatorname{Exp}(1)$.

Putem să calculăm f_U aplicând și formula (3.97) cu $u = \ln\frac{1}{x}$, deci $x = \Phi(u) = e^{-u}$ și $J(u) = \Phi'(u) = -e^{-u}$, unde $\Phi : [0,\infty) \to (0,1]$.

(b) Similar ca la punctul precedent se obține $f_U(u) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(u)$, adică[239] $U \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$.

(d) Dacă $u \leq 0$, atunci funcția de repartiție este 0 și dacă $u > 0$, atunci

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \mathbb{P}\left(X^2 \leq u\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-\sqrt{u} \leq X \leq \sqrt{u}\right) \\ &= F_X(\sqrt{u}) - F_X(-\sqrt{u}) \\ &= F_X(\sqrt{u}), \end{aligned}$$

deci

$$F_U(u) = \begin{cases} \sqrt{u}, & \text{dacă } \sqrt{u} \leq 1, \\ 1, & \text{dacă } \sqrt{u} > 1. \end{cases}$$

239 Aceasta este o metodă de a genera v.a. distribuite exponențial folosind v.a. distribuite uniform pe $(0,1)$. De fapt, este vorba de metoda inversei funcției de repartiție (vezi Remarca 3.97).
Astfel, dacă dorim să generăm variabile de tip $\operatorname{Exp}(\lambda)$, atunci amintim că $F_X(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right)\mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$. Să considerăm restricția $F_X : [0,\infty) \to [0,1]$ care este bijecție, deci există inversa $F_X^{-1}(y) = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-y)$. Deci, în notațiile și conform Propoziției 3.102 și a Propoziției 3.95, dacă $Y \sim \mathscr{U}[0,1]$, atunci

$$X = F_X^{-1}(Y) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-Y) \sim \operatorname{Exp}(\lambda).$$

Pe de altă parte, $Y \sim \mathscr{U}[0,1]$ dacă și numai dacă $(1-Y) \sim \mathscr{U}[0,1]$, deci, similar,

$$-\frac{1}{\lambda}\ln(Y) \sim \operatorname{Exp}(\lambda).$$

Conform (3.4) obținem densitatea

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{u}}, & \text{dacă } 0 < u < 1, \\ 0, & \text{dacă } u < 0 \text{ sau } u > 1, \end{cases}$$

și astfel, folosind Remarca 3.8, putem considera densitatea

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \mathbb{1}_{(0,1)}(u) \\ &= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{2}, 1\right)} u^{\frac{1}{2}-1} (1-u)^{1-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(u), \quad u \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

adică U este distribuită Beta de parametri $\frac{1}{2}$ și 1 (vezi Nota 233).

(e) $f_U(u) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \mathbb{1}_{(0,1]}(u)$.

(f) $f_U(u) = 2u \mathbb{1}_{(0,1]}(u)$.

(g) $f_U(u) = \dfrac{1}{u^2} \mathbb{1}_{[1,\infty)}(u)$.

3.6.14 Fie v.a. independente $X, Y \sim \mathscr{U}[0,1]$ și $U = 1000 \ln \dfrac{1}{X}$.

(a) Să se determine funcția de repartiție F_X și densitatea de repartiție f_U.

(b) Să se arate că media și deviația standard a v.a. U sunt egale. Apoi să se calculeze $\mathbb{P}(U \geq 1000)$.

(c) Să se calculeze $\mathbb{E}(X+Y)$, $D^2(X+Y)$, $\mathbb{P}(X = 0.25)$ și $\mathbb{P}(Y \geq 0.25)$.

3.6.15 Fie o v.a. repartizată uniform $X \sim \mathscr{U}[-1,1]$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde:

$$(a)\ U = e^X, \quad (b)\ U = 2X+1, \quad (c)\ U = 2X^2+1, \quad (d)\ U = 2|X|+1.$$

Rezolvare:

Funcția de repartiție a v.a. X este dată de

$$F_X(u) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq -1, \\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{dacă } x \in (-1,1], \\ 1, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

(a) Funcția de repartiție a v.a. U este, evident, $F_U(u) = 0$, pentru orice $u < 0$. Pentru $u > 0$ avem

$$F_U(u) = \mathbb{P}(X \leq \ln u) = F_X(\ln u) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \ln u \leq -1, \\ \dfrac{1 + \ln u}{2}, & \text{dacă } \ln u \in (-1, 1], \\ 1, & \text{dacă } \ln u > 1. \end{cases}$$

Conform (3.4) obținem densitatea

$$f_X(u) = F'_X(u) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } u < e^{-1} \text{ sau } u > e, \\ \dfrac{1}{2u}, & \text{dacă } e^{-1} < u < e, \end{cases}$$

și astfel, folosind Remarca 3.8, putem considera densitatea

$$f_U(u) = F'_U(u) = \frac{1}{2u} \mathbb{1}_{[e^{-1}, e]}(u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Putem să calculăm f_U aplicând și formula (3.97) cu $u = e^x$.

(b) Funcția de repartiție a v.a. U este

$$F_U(u) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{u-1}{2}\right) = F_X\left(\frac{u-1}{2}\right),$$

deci, conform (3.4),

$$f_U(u) = F'_U(u) = F'_X\left(\frac{u-1}{2}\right)\left(\frac{u-1}{2}\right)' = \frac{1}{2} f_X\left(\frac{u-1}{2}\right)$$

și astfel, folosind Remarca 3.8, putem considera densitatea

$$f_U(u) = \frac{1}{4} \mathbb{1}_{(-1,3)}(u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Putem să calculăm f_U aplicând și formula (3.97) cu $u = 2x + 1$.

(c) Funcția de repartiție a v.a. U este, evident, $F_U(u) = 0$, pentru $u < 1$. Pentru $u > 1$ avem

$$F_U(u) = \mathbb{P}\left(X^2 \leq \frac{u-1}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left(-\sqrt{\frac{u-1}{2}} \leq X \leq \sqrt{\frac{u-1}{2}} \right) \\
&= \mathbb{P}\left(X \leq \sqrt{\frac{u-1}{2}} \right) - \mathbb{P}\left(X < -\sqrt{\frac{u-1}{2}} \right) \\
&= F_X\left(\sqrt{\frac{u-1}{2}} \right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{u-1}{2}} \right) \\
&= \int_{-\sqrt{\frac{u-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{u-1}{2}}} f_X(t)\, dt,
\end{aligned}
$$

deci, conform (3.4),

$$
f_U(u) = F_U'(u) = \left(\int_{-\sqrt{\frac{u-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{u-1}{2}}} f_X(t)\, dt \right)_u' .
$$

Vom aplica o teoremă de derivare a integralei cu parametru[240] și astfel obținem

$$
\begin{aligned}
f_U(u) &= \left(\sqrt{\frac{u-1}{2}} \right)' f_X\left(\sqrt{\frac{u-1}{2}} \right) - \left(-\sqrt{\frac{u-1}{2}} \right)' f_X\left(-\sqrt{\frac{u-1}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2(u-1)}} \left[f_X\left(\sqrt{\frac{u-1}{2}} \right) + f_X\left(-\sqrt{\frac{u-1}{2}} \right) \right]
\end{aligned}
$$

și deci, folosind Remarca 3.8, putem considera densitatea

$$
f_U(u) = \frac{1}{2\sqrt{2(u-1)}} \mathbb{1}_{(1,3)}(u), \quad u \in \mathbb{R}, \tag{3.114}
$$

deoarece $0 < \sqrt{\frac{u-1}{2}} < 1$ este echivalent cu $u \in (1,3)$.

Putem face și calculul direct, plecand de la $F_X\left(\sqrt{\frac{u-1}{2}} \right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{u-1}{2}} \right)$. Astfel, pentru $u > 1$,

$$
f_U(u) = F_U'(u)
$$

240 În anumite condiții de regularitate, integrala cu parametru $I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx$ este derivabilă și are loc relația

$$
I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx + b'(y) f(b(y), y) - a'(y) f(a(y), y).
$$

.

$$
\begin{aligned}
&= \left[F_X\left(\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right)\right]' - \left[F_X\left(-\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right)\right]' \\
&= F_X'\left(\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right)' - F_X'\left(-\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right)\left(-\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\,(u-1)}}\left[f_X\left(\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right) + f_X\left(-\sqrt{\frac{u-1}{2}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

și obținem aceeași densitate, dată de (3.114).

Să se studieze și posibilitatea aplicării formulei (3.97) cu $u = 2x^2 + 1$.

3.6.16 Fie v.a. $X \sim \mathscr{U}\,[-2, 3]$.

(a) Să se determine funcția de repartiție F_X și apoi funcția de repartiție F_Y și, cu ajutorul ei, densitatea de repartiție f_Y, unde $Y = 2X^2 - 5$.

(b) Să se calculeze media și deviația standard a v.a. X. Apoi să se calculeze $\mathbb{P}\,(X \geq 2)\,,\ \mathbb{P}\,(X = 2)\,.$

3.6.17 Fie v.a. $X \sim \mathscr{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde

$$U = \cos X\,.$$

Rezolvare:

Densitatea este dată de $f_X\,(x) = \dfrac{1}{\pi}\,\mathbb{1}_{(-\pi/2,\pi/2)}\,(x)\,.$

Funcția de repartiție a v.a. U este, evident, $F_U\,(u) = 0$, pentru $u < -1$ și $F_U\,(u) = 1$, pentru $u > 1$. Pentru $|u| < 1$ să observăm că pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ funcția $u = \cos x$ nu este inversabilă, dar putem scrie

$$
\begin{aligned}
F_U\,(u) &= \mathbb{P}\,(\cos X \leq u) \\
&= \mathbb{P}\,(\cos X \leq u,\ X \in (-\pi/2, 0)) + \mathbb{P}\,(\cos X \leq u,\ X \in (0, \pi/2)) \\
&= \mathbb{P}\,(X \in (-\pi/2, -\arccos u)) + \mathbb{P}\,(X \in (\arccos u, \pi/2)) \\
&= \int_{-\pi/2}^{-\arccos u} f_X\,(x)\,dx + \int_{\arccos u}^{\pi/2} f_X\,(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Deci, conform (3.4), avem $f_U\,(u) = F_U'\,(u) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, pentru $|u| < 1$, și astfel, folosind Remarca 3.8, putem considera densitatea

$$f_U\,(u) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathbb{1}_{(-1,1)}\,(u)\,, \quad u \in \mathbb{R}.$$

3.6.18 Fie v.a. $X \sim \mathscr{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde

$$U = \tan(X).$$

Rezolvare:

Densitatea este dată de $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi}\mathbb{1}_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)$.

Să observăm că pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ funcția $u = \tan(x)$ este inversabilă. Avem

$$F_U(u) = \mathbb{P}(X \leq \arctan(u)) = \int_{-\infty}^{\arctan(u)} \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)\, dx.$$

Obținem, conform (3.4),

$$f_U(u) = F_U'(u) = \left(\frac{1}{\pi}\arctan(u) + \frac{1}{2}\right)' = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+u^2},$$

adică v.a. $\tan(X)$ este distribuită Cauchy[241] de tip $\mathscr{C}(0,1)$.

3.6.19 Fie v.a. $X \sim \mathscr{U}(0,1)$. Să se calculeze[242] densitatea de repartiție f_U, unde

$$U = \tan\left[\pi\left(X - \frac{1}{2}\right)\right].$$

3.6.20 Fie o v.a. $X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Să se calculeze funcția de repartiție F_U și apoi densitatea de repartiție f_U, unde $U = e^{-\lambda X}$.

Rezolvare:

Se obține că $U \sim \mathscr{U}[0,1]$.

[241] Aceasta este o metodă de a genera v.a. distribuite Cauchy folosind v.a. distribuite uniform. De asemenea, tipul v.a. X și definiția lui U indică și o interpretarea a v.a. distribuite Cauchy: X reprezintă un număr uniform ales din $(-\pi/2, \pi/2)$, deci poate fi văzut ca un unghi orientat făcut cu axa Oy (partea negativă) de către o semidreaptă cu capătul fixat în punctul $(0,1)$ din plan, care se rotește liber și uniform de o parte și de alta a axei Oy. Atunci, $|U|$ reprezintă lungimea segmentului dintre originea $O(0,0)$ și punctul de intersecție al acelei semidrepte cu axa Ox. Prin urmare, v.a. U va reprezenta lungimea cu semn a acelui segment și se arată că este distribuită Cauchy de parametri 0 și 1. Din această interpretare se vede și faptul că v.a. distribuită Cauchy nu admite medie.

[242] Aceasta este o metodă de a genera v.a. distribuite Cauchy folosind v.a. distribuite uniform.

3.6.21 Fie o v.a. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U = e^{-X}$.

Rezolvare:

Densitatea de repartiție a v.a. X este $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Aplicăm formula (3.97) luând $u = e^{-x}$, deci $\Phi'(u) = -1/u$, unde $\Phi : [0,\infty) \to (0,1]$.

Obținem, pentru $u \in (0,1]$,

$$f_U(u) = \left|\frac{-1}{u}\right| \lambda e^{-\lambda(-\ln u)} = \frac{1}{u} \lambda e^{\lambda \ln u} = \lambda u^{\lambda-1}.$$

3.6.22 Fie o v.a. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U = X^{1/\alpha}$, unde $\alpha > 0$.

Rezolvare:

Densitatea de repartiție a v.a. X este $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Aplicăm formula (3.97) luând $u = x^{1/\alpha}$, deci $\Phi'(u) = \alpha u^{\alpha-1}$, unde $\Phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$.

Obținem[243], pentru $u \in (0,\infty)$,

$$f_U(u) = \left|\alpha u^{\alpha-1}\right| \lambda e^{-\lambda u^{\alpha}} = \alpha\lambda u^{\alpha-1} e^{-\lambda u^{\alpha}}.$$

3.6.23 Fie o v.a. repartizată normal $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde:

$$(a)\ \ U = 3|X|, \quad (b)\ \ U = e^{X^2}.$$

Rezolvare:

Densitatea de repartiție a v.a. X este $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

---

[243] Dacă o v.a. U are densitatea de repartiție $f_U(u) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-(u/\lambda)^{\alpha}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u)$, unde $\alpha > 0$ și $\lambda > 0$, atunci spunem că U urmează **distribuția Weibull** de parametri α și λ.

De asemenea, se poate arăta că U are funcția de repartiție

$$F_U(x) = 1 - e^{(x/\lambda)^{\alpha}}, \quad \text{pentru orice } x > 0,$$

deci distribuția Weibull este generalizarea distribuției exponențiale avand în vedere că

$$F_{\text{Exp}(1/\lambda)}(x) = 1 - e^{(x/\lambda)}, \quad \text{pentru orice } x > 0.$$

Evident, se poate scrie formal:

$$\text{Exp}(\lambda) = \text{Weibull}\Big(1, \frac{1}{\lambda}\Big).$$

(a) Funcția de repartiție a v.a. U este $F_U(u) = 0$, pentru $u < 0$. Pentru $u > 0$ avem

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \mathbb{P}(|X| \leq u/3) \\ &= \mathbb{P}(-u/3 \leq X \leq u/3) \\ &= F_X(u/3) - F_X(-u/3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u/3}^{u/3} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \end{aligned}$$

deci, conform (3.4),

$$f_U(u) = F_U'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{3} e^{-\frac{(u/3)^2}{2}} - \frac{-1}{3} e^{-\frac{(-u/3)^2}{2}} \right) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} 2e^{-\frac{u^2}{18}}$$

și astfel, folosind Remarca 3.8, putem considera densitatea

$$f_U(u) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} 2e^{-\frac{u^2}{18}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

(b) Funcția de repartiție a v.a. U este $F_U(u) = 0$, pentru $u < 1$. Pentru $u > 1$ avem

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \mathbb{P}\left(X^2 \leq \ln u\right) \\ &= \mathbb{P}\big(-\sqrt{\ln u} \leq X \leq \sqrt{\ln u}\big) \\ &= F_X\big(\sqrt{\ln u}\big) - F_X\big(-\sqrt{\ln u}\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{\ln u}}^{\sqrt{\ln u}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \end{aligned}$$

deci, conform (3.4),

$$\begin{aligned} f_U(u) &= F_U'(u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{2\sqrt{\ln u}} \frac{1}{u} e^{-\frac{(\sqrt{\ln u})^2}{2}} - \frac{-1}{2\sqrt{\ln u}} \frac{1}{u} e^{-\frac{(-\sqrt{\ln u})^2}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{u\sqrt{2\pi}\sqrt{\ln u}} e^{-\frac{\ln u}{2}} \\ &= \frac{1}{u\sqrt{u}\sqrt{2\pi}\sqrt{\ln u}} \end{aligned}$$

și astfel, folosind Remarca 3.8, putem considera densitatea

$$f_U(u) = \frac{1}{u\sqrt{u}\sqrt{2\pi}\sqrt{\ln u}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Să se studieze și posibilitatea aplicării formulei (3.97) cu $u = e^{x^2}$, respectiv $u = 3|x|$.

3.6.24 Fie o v.a. repartizată normal standard $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U = \dfrac{1}{1+X^2}$.

Rezolvare:

Funcția de repartiție a v.a. U este, evident, $F_U(u) = 0$, pentru $u < 0$ și $F_U(u) = 1$, pentru $u > 1$. Pentru $u \in (0,1)$ avem

$$\begin{aligned}
F_U(u) &= \mathbb{P}\left(X^2 \geq \tfrac{1-u}{u}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left\{X \geq \sqrt{\tfrac{1-u}{u}}\right\} \bigcup \left\{X \leq -\sqrt{\tfrac{1-u}{u}}\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X \geq \sqrt{\tfrac{1-u}{u}}\right) + \mathbb{P}\left(X \leq -\sqrt{\tfrac{1-u}{u}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\frac{1-u}{u}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{1-u}{u}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{1-u}{u}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= 2F_X\left(-\sqrt{\frac{1-u}{u}}\right),
\end{aligned}$$

deci, conform (3.4),

$$\begin{aligned}
f_U(u) &= F_U'(u) \\
&= \left(2F_X\left(-\sqrt{\frac{1-u}{u}}\right)\right)' \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(-\sqrt{\frac{1-u}{u}}\right)^2}{2}} \left(-\sqrt{\tfrac{1-u}{u}}\right)'
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1-u}{2u}} \frac{1}{u\sqrt{u(1-u)}}$$

și astfel, folosind Remarca 3.8, putem considera densitatea

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1-u}{2u}} \frac{1}{u\sqrt{u(1-u)}} \mathbb{1}_{(0,1)}(u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Să se studieze și posibilitatea aplicării formulei (3.97) cu $u = \frac{1}{1+x^2}$.

3.6.25 Fie două v.a. independente $X, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$, cu $\lambda > 0$, și ϵ o v.a. discretă de tip uniform, independentă de X, Y dată de $\mathbb{P}(\epsilon = 1) = \mathbb{P}(\epsilon = -1) = 1/2$.

(a) Să se calculeze densitatea de repartiție a v.a. $U = \epsilon X$.

(b) Să se determine legea v.a. $V = \begin{cases} X, & \epsilon = 1, \\ -Y, & \epsilon = -1. \end{cases}$

Rezolvare:

(a) Să calculăm funcția de repartiție a lui U :

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \mathbb{P}(\epsilon X \leq u) \\ &= \mathbb{P}(\epsilon X \leq u, \epsilon = 1) + \mathbb{P}(\epsilon X \leq u, \epsilon = -1) \\ &= \mathbb{P}(X \leq u)\,\mathbb{P}(\epsilon = 1) + \mathbb{P}(X \geq -u)\,\mathbb{P}(\epsilon = -1) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{P}(X \leq u) + \mathbb{P}(X \geq -u)) \\ &= \frac{1}{2}(F_X(u) + 1 - F_X(-u)). \end{aligned}$$

Dacă $u \leq 0$, atunci $F_U(u) = \frac{1}{2}(1 - F_X(-u))$, iar dacă $u > 0$, atunci $F_U(u) = \frac{1}{2}(F_X(u) + 1)$.

Deci dacă $u < 0$, atunci, conform (3.4),

$$f_U(u) = F_U'(u) = \frac{1}{2} F_X'(-u) = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda u},$$

iar dacă $u > 0$, atunci

$$f_U(u) = F_U'(u) = \frac{1}{2} F_X'(u) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda u}.$$

Obținem[244] că $U = \epsilon X$ are densitatea $f_U(u) = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|u|}$, deci este distribuită Laplace[245] de parametri $\frac{1}{\lambda}$ și 0.

(b) Să calculăm funcția de repartiție a lui V :

$$\begin{aligned}
F_V(v) &= \mathbb{P}(V \le v) \\
&= \mathbb{P}(V \le v, \epsilon = 1) + \mathbb{P}(V \le v, \epsilon = -1) \\
&= \mathbb{P}(X \le v, \epsilon = 1) + \mathbb{P}(-Y \le v, \epsilon = -1) \\
&= \mathbb{P}(X \le v)\,\mathbb{P}(\epsilon = 1) + \mathbb{P}(-Y \le v)\,\mathbb{P}(\epsilon = -1) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X \le v) + \mathbb{P}(Y \ge -v)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(F_X(v) + 1 - F_Y(-v)\right).
\end{aligned}$$

Dacă $v \le 0$, atunci $F_V(v) = \frac{1}{2}(1 - F_Y(-v))$, iar dacă $u > 0$, atunci $F_V(v) = \frac{1}{2}(F_X(v) + 1)$.

Deci, dacă $v < 0$, atunci, conform (3.4),

$$f_V(v) = F_V'(v) = \frac{1}{2} F_Y'(-v) = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda v},$$

iar dacă $v > 0$, atunci

$$f_V(v) = F_V'(v) = \frac{1}{2} F_X'(v) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda v},$$

adică V este distribuită Laplace de parametri $\frac{1}{\lambda}$ și 0.

3.6.26 Fie X o v.a. cu densitatea de repartiție $f_X(x) = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, pentru $x \in \mathbb{R}$, unde $\lambda > 0$.

(a) Să se determine legea v.a. $U = \begin{cases} 1, & X \ge 0, \\ -1, & X < 0. \end{cases}$

(b) Fie $V = |X|$. Să se arate că $V \sim \text{Exp}(\lambda)$.

[244] Aceasta este o metodă de a genera v.a. distribuite Laplace folosind v.a. distribuite exponențial.

[245] Dacă o v.a. X are densitatea de repartiție $f(x) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{|x-\mu|}{a}}$, unde $a > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, atunci spunem că X urmează **distribuția Laplace** de parametri a și μ și scriem $X \sim$ Laplace(a, μ).

Rezolvare:

(a) Să calculăm funcția de repartiție a lui U :

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \mathbb{P}(U \le u) \\ &= \mathbb{P}(U \le u, X \ge 0) + \mathbb{P}(U \le u, X < 0) \\ &= \mathbb{P}(1 \le u, X \ge 0) + \mathbb{P}(-1 \le u, X < 0). \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $u < -1$, atunci

$$F_U(u) = \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing) = 0.$$

Dacă $u \in [-1, 1)$, atunci

$$F_U(u) = \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(X < 0) = 1/2.$$

Dacă $u \ge 1$, atunci

$$F_U(u) = \mathbb{P}(X \ge 0) + \mathbb{P}(X < 0) = 1.$$

3.6.27 Fie o v.a. $X \sim \mathscr{C}(0, 1)$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde

$$(a)\ U = \frac{1}{X}, \quad (b)\ U = 1 - X^3.$$

Rezolvare:

(a) Determinăm, mai întâi, funcția de repartiție a v.a. U.

Avem

$$\begin{aligned} F_U(0_-) &= \lim_{u \to 0_-} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{X} \le u\Big) \\ &= \lim_{u \to 0_-} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{u} \le X < 0\Big) \\ &= \lim_{u \to 0_-} \int_{\frac{1}{u}}^{0} \frac{1}{\pi(1 + x^2)}\, dx \\ &= \lim_{u \to 0_-} \frac{1}{\pi} \arctan(x) \Big|_{x=1/u}^{x=0} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

și

$$
\begin{aligned}
F_U(0_+) &= \lim_{u\to 0_+} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{X} \leq u\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{X} < 0\Big) + \lim_{u\to 0_+} \mathbb{P}\Big(0 < \frac{1}{X} \leq u\Big) \\
&= \mathbb{P}(X < 0) + \lim_{u\to 0_+} \mathbb{P}\Big(X \geq \frac{1}{u}\Big) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx + \lim_{u\to 0_+} \int_{\frac{1}{u}}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \arctan(x) \Big|_{x=-\infty}^{x=0} + \lim_{u\to 0_+} \frac{1}{\pi} \arctan(x) \Big|_{x=1/u}^{x=\infty} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Pentru $u < 0$, obținem

$$
\begin{aligned}
F_U(u) &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{X} \leq u\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{u} \leq X < 0\Big) \\
&= \int_{\frac{1}{u}}^{0} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx \\
&= -\frac{1}{\pi} \arctan\Big(\frac{1}{u}\Big),
\end{aligned}
$$

deci, conform (3.4),

$$
f_U(u) = F_U'(u) = \frac{-1}{\pi} \frac{-1}{u^2} \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} = \frac{1}{\pi(1+u^2)}.
$$

Pentru $u > 0$, obținem

$$
\begin{aligned}
F_U(u) &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{X} \leq u\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{X} < 0\Big) + \mathbb{P}\Big(0 < \frac{1}{X} \leq u\Big) \\
&= \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}\Big(X \geq \frac{1}{u}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} dx + \int_{\frac{1}{u}}^{\infty} \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \arctan\left(x\right) \Big|_{x=-\infty}^{x=0} + \lim_{u \to 0_+} \frac{1}{\pi} \arctan\left(x\right) \Big|_{x=1/u}^{x=\infty} \\
&= 1 - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{u}\right),
\end{aligned}
$$

deci

$$
f_U\left(u\right) = F_U'\left(u\right) = \frac{-1}{\pi} \frac{-1}{u^2} \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} = \frac{1}{\pi\left(1+u^2\right)}.
$$

Obținem

$$
f_U\left(u\right) = \frac{1}{\pi\left(1+u^2\right)}, \quad u \in \mathbb{R},
$$

adică $X \sim \mathscr{C}\left(0,1\right)$ dacă și numai dacă $\frac{1}{X} \sim \mathscr{C}\left(0,1\right)$.

(b) Aplicăm formula (3.97). Să considerăm transformarea $u = 1 - x^3$, deci $x = \Phi\left(u\right) = \left(1-u\right)^{\frac{1}{3}}$ și $\Phi'\left(u\right) = \frac{1}{3}\left(1-u\right)^{\frac{-2}{3}}$, cu $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Obținem

$$
f_U\left(u\right) = \left|\frac{1}{3}\left(1-u\right)^{-2/3}\right| \frac{1}{\pi\left(1+\left(1-u\right)^{2/3}\right)} = \frac{\left(1-u\right)^{-2/3}}{3\pi\left(1+\left(1-u\right)^{2/3}\right)}.
$$

3.6.28 Fie X, Y două v.a. independente astfel încât $X, Y \sim \mathscr{U}\left[a,b\right]$. Să se determine densitatea de repartiție a v.a.

$$
U = \max\left(X, Y\right).
$$

Rezolvare:

Funcția de repartiție a v.a. U este

$$
\begin{aligned}
F_U\left(u\right) &= \mathbb{P}\left(X \le u, Y \le u\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X \le u\right) \cdot \mathbb{P}\left(Y \le u\right) \\
&= F_X(u) F_Y(u) \\
&= F_X^2(u),
\end{aligned}
$$

unde $F_X(u) = F_Y(u)$ este dată de (3.49), și astfel

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } u \leq a, \\ \left(\dfrac{u-a}{b-a}\right)^2, & \text{dacă } a < u \leq b, \\ 1, & \text{dacă } u > b. \end{cases}$$

Conform (3.4) obținem densitatea:

$$\begin{aligned} f_U(u) &= F_U'(u) = 2F_X(u)F_X'(u) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < a \text{ sau } x > b, \\ 2\dfrac{u-a}{b-a}\dfrac{1}{b-a}, & \text{dacă } a < x < b, \end{cases} \end{aligned}$$

și astfel, folosind Remarca 3.8, putem considera

$$f_U(u) = \frac{2}{b-a}\frac{u-a}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

3.6.29 Fie X, Y două v.a. independente astfel încât $X, Y \sim \mathcal{U}[a,b]$. Să se determine densitatea de repartiție a v.a.

$$V = \min(X, Y).$$

Rezolvare:

Funcția de repartiție a v.a. V este

$$\begin{aligned} F_V(v) &= 1 - \mathbb{P}(V \geq v) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \geq v, Y \geq v) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \geq v) \cdot \mathbb{P}(Y \geq v) \\ &= 1 - (1 - F_X(v))(1 - F_Y(v)) \\ &= 1 - (1 - F_X(v))^2, \end{aligned}$$

deci

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } v \leq a, \\ 1 - \left(1 - \dfrac{v-a}{b-a}\right)^2, & \text{dacă } a < v \leq b, \\ 1, & \text{dacă } v > b. \end{cases}$$

Conform (3.4) obținem densitatea:

$$\begin{aligned} f_V(v) &= F'_V(v) = 2\left(1 - F_X(v)\right) F'_X(v) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < a \text{ sau } x > b, \\ 2\Big(1 - \dfrac{v-a}{b-a}\Big)\dfrac{1}{b-a}, & \text{dacă } a < x < b, \end{cases} \end{aligned}$$

și astfel, folosind Remarca 3.8, putem considera

$$f_V(v) = \frac{2}{b-a}\Big(1 - \frac{v-a}{b-a}\Big)\mathbb{1}_{[a,b]}(u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

3.6.30 Fie v.a. $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ de tip i.i.d., cu funcția de repartiție F.
(a) Să se arate că funcția de repartiție asociată v.a.

$$U = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

este dată de

$$F_U(u) = [F(u)]^n.$$

(b) Să se arate că funcția de repartiție asociată v.a.

$$V = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

este dată de

$$F_V(v) = 1 - [1 - F(v)]^n.$$

(c) Dacă v.a. $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ sunt de tip continuu cu densitatea de repartiție f, să se arate că densitatea de repartiție asociată v.a. U și V sunt date de:

$$f_U(u) = n[F(u)]^{n-1} f(u), \qquad f_V(v) = n[1 - F(v)]^{n-1} f(v).$$

3.6.31 Fie v.a. independente $X, Y \sim \mathcal{U}[0,1]$ și definim

$$U = \max(X, Y) \quad \text{și} \quad V = \min(X, Y).$$

(a) Să se determine funcția de repartiție și apoi densitatea de repartiție asociată v.a. V.

(b) Folosind relațiile de legătură

$$U + V = X + Y \quad \text{și} \quad U \cdot V = X \cdot Y,$$

să se determine media v.a. U și apoi covarianța dintre U și V.

Rezolvare:

(a) Se va obține $f_V(x) = 2(1-x)\,\mathbb{1}_{[0,1]}$.

(b) Se va obține $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(A) + \mathbb{E}(B) - \mathbb{E}(V) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ și apoi

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(U,V) &= \mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(V) \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(V) \\
&= \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(V) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

3.6.32 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de tip i.i.d., cu $X_k \sim \mathscr{U}[0,1]$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. Să se determine funcția de repartiție și apoi densitatea de repartiție asociată v.a.

$$\begin{aligned}
Y_n &= \max(X_1, X_2, \ldots, X_n), \\
Z_n &= \min(X_1, X_2, \ldots, X_n), \quad n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Rezolvare:

Se va obține că $Y_n \sim \operatorname{Beta}(n,1)$, iar $Z_n \sim \operatorname{Beta}(1,n)$.

3.6.33 Să presupunem că un șir de evenimente (numite ***Succese***), de același tip, se produc, independent, în timp. Să definim X_1 ca fiind v.a. dată de momentul apariției primului *Succes* și apoi, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$, să definim v.a. X_k ca fiind **timpul**[246] **dintre producerea *Succesului* de ordin** $(k-1)$ **și *Succesul* de ordin** k**.** Astfel, v.a. X_k are valori pozitive și să presupunem că v.a. $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sunt de tip i.i.d., cu $X_k \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$, unde $\lambda > 0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Să definim v.a.

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

care reprezintă **timpul apariției *Succesului* de ordin** $n \in \mathbb{N}^*$.

[246] Vezi și definițiile și notațiile similare, din cazul discret, date de Remarca 2.177, Remarca 2.179 și de Nota 121 precum și exercițiile asociate: Exercițiul 2.4.40 și Exercițiul 2.4.41.

De asemenea, definim[247] v.a. N_t cu valori în $\mathbb{N}$ astfel:

$$N_t = 0, \quad \text{dacă } S_1 = X_1 > t$$

și

$$N_t = \sup\{n \in \mathbb{N}^* : S_n \leq t\}, \quad t > 0,$$

care reprezintă **numărul total de *Succese* produse în intervalul** $[0, t]$.

(a) Să se determine tipul de distribuție al v.a. S_n.

(b) Să se arate, folosind semnificația lui S_k și a lui N_t, relația (3.79):

$$\{N_t < k\} = \{S_k > t\}, \quad \text{pentru orice } k \in \mathbb{N}^*, t > 0 \tag{3.115}$$

sau, echivalent,

$$\{N_t \geq k\} = \{S_k \leq t\}, \quad \text{pentru orice } k \in \mathbb{N}^*, t > 0.$$

(c) Folosind (b) și funcția de repartiție F_{S_k} să se arate[248] că v.a. $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$.

Rezolvare:

(a) Folosind Propoziția 3.144 (vezi și Remarca 3.145), obținem că v.a. $S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$, adică $f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$.

(c) Deci, pentru orice $t > 0$, avem

$$F_{N_t}(k) = \mathbb{P}(N_t \leq k) = \mathbb{P}(N_t < k+1) = \mathbb{P}(S_{k+1} > t).$$

Pe de altă parte, $S_{k+1} \sim \text{Gamma}(k+1, \lambda)$ și, folosind (3.76), obținem

$$F_{N_t}(k) = \mathbb{P}(S_{k+1} > t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

și acum recunoaștem că $F_{N_t}(k)$ este funcția de repartiție asociată unei v.a. de tip $\mathscr{P}(\lambda t)$, adică $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$.

---

[247] Vezi și semnificațiile date de Remarca 3.146. Astfel, dacă se dă o familie de v.a. $(N_t)_{t \geq 0}$ astfel încât $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$ și apoi se definesc v.a. X_i și respectiv suma S_n, atunci se arăta că X_i sunt independente și că $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, deci suma $S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$.

Problema noastră este acum inversă. Se dau v.a. independente $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, deci suma lor $S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$. Apoi se definește familia de v.a. $(N_t)_{t \geq 0}$. În aceste condiții, se va arăta că $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$.

[248] Aceasta este o metodă de a genera v.a. distribuite Poisson folosind v.a. distribuite de tip Gamma.

3.6.34 Fie două v.a. independente, distrubuite uniform, $X \sim \mathcal{U}[0,1]$, $Y \sim \mathcal{U}[0,2]$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_{X+Y}.

Rezolvare:

În formula (3.98) de calcul a densității sumei a două v.a. folosim expresiile densităților celor două v.a. date în enunț: $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ și $f_Y(y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2]}(y)$. Deci

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u-v)\, f_Y(v)\, dv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u-v)\, \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2]}(v)\, dv \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 f_X(u-v)\, dv \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(u-v)\, dv.
\end{aligned} \tag{3.116}
$$

Să facem schimbarea de variabilă

$$u - v = v' \quad \Leftrightarrow \quad v = u - v' \quad \Rightarrow \quad dv = -dv'$$

și integrala devine

$$f_{X+Y}(u) = \frac{-1}{2}\int_u^{u-2} f_X(v')\, dv' = \frac{1}{2}\int_{u-2}^{u} \mathbb{1}_{[0,1]}(v)\, dv = \frac{1}{2}\int_{[u-2,u]\cap[0,1]} dv.$$

Dacă $u \leq 0$, atunci $f_{X+Y}(u) = 0$.
Dacă $u \in (0,1]$, atunci

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{2}\int_{u-2}^{0} f_X(v)\, dv + \frac{1}{2}\int_0^u f_X(v)\, dv = \frac{1}{2}\int_0^u dv = \frac{u}{2}.$$

Dacă $u \in (1,2]$, atunci

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{2}\int_{u-2}^{0} f_X(v)\, dv + \frac{1}{2}\int_0^1 f_X(v)\, dv + \frac{1}{2}\int_1^u f_X(v)\, dv = \frac{1}{2}.$$

Dacă $u \in (2,3]$, atunci

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{2}\int_{u-2}^{1} f_X(v)\, dv + \frac{1}{2}\int_1^u f_X(v)\, dv = \frac{1}{2}\int_{u-2}^{1} dv = \frac{3-u}{2}.$$

Dacă $u > 3$, atunci

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{2}\int_{u-2}^{u} f_X(v)\, dv = 0.$$

O altă abordare este aceea de a rescrie indicatoarea $\mathbb{1}_{[0,1]}(u-v)$ în integrala (3.116) (în loc de a schimba variabila). Mai precis, avem

$$0 \leq u - v \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad u - 1 \leq v \leq u,$$

deci

$$\boxed{\mathbb{1}_{[0,1]}(u-v) = \mathbb{1}_{[u-1,u]}(v).}$$

Obținem

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \frac{1}{2}\int_0^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(u-v)\, dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \mathbb{1}_{[u-1,u]}(v)\, dv \\ &= \frac{1}{2}\int_{[u-1,u]\cap[0,2]} dv, \end{aligned}$$

iar acum avem iarăși discuție în funcție de valorile lui u.

3.6.35 Fie două v.a. independente, distribuite uniform $X, Y \sim \mathcal{U}[a,b]$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_{X+Y}.

Rezolvare:

Folosim $f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ și obținem, conform formulei (3.98),

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f_X(u-v)\, dv.$$

Să facem schimbarea de variabilă

$$u - v = v' \quad \Leftrightarrow \quad v = u - v' \quad \Rightarrow \quad dv = -dv'$$

și integrala devine

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{b-a}\int_{u-b}^{u-a} f_X(v')\, dv'.$$

Dacă $u-a \leq a$, adică $u \leq 2a$, atunci $f_{X+Y}(u)=0$.
Dacă $u-a \in (a,b]$, adică $u \in (2a, a+b]$, atunci

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \frac{1}{b-a}\int_{u-b}^{a} f_X(v')\,dv' + \frac{1}{b-a}\int_{a}^{u-a} f_X(v')\,dv' \\ &= \frac{u-2a}{(b-a)^2}. \end{aligned}$$

Dacă $u-a>b$ și $u-b \in (a,b]$, adică $u \in (a+b, 2b]$, atunci

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \frac{1}{b-a}\int_{u-b}^{b} f_X(v')\,dv' + \frac{1}{b-a}\int_{b}^{u-a} f_X(v')\,dv' \\ &= \frac{2b-u}{(b-a)^2}. \end{aligned}$$

Dacă $u-b>b$, adică $u>2b$, atunci $f_{X+Y}(u)=0$.

Prin urmare,

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \frac{u-2a}{(b-a)^2}\,\mathbb{1}_{(2a,a+b]}(u) + \frac{2b-u}{(b-a)^2}\,\mathbb{1}_{(a+b,2b]}(u) \\ &= \frac{1}{(b-a)^2}\left[(b-a)-|u-(a+b)|\right]\mathbb{1}_{(2a,2b]}(u). \end{aligned} \tag{3.117}$$

În cazul particular în care $X, Y \sim \mathcal{U}[-1,1]$, obținem

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \frac{1}{4}(2+u)\,\mathbb{1}_{[-2,0]}(u) + \frac{1}{4}(2-u)\,\mathbb{1}_{(0,2]}(u) \\ &= \frac{1}{4}(2-|u|)\,\mathbb{1}_{[-2,2]}(u). \end{aligned} \tag{3.118}$$

În cazul particular în care $X, Y \sim \mathcal{U}[-1/2,1/2]$, obținem

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= (1+u)\,\mathbb{1}_{[-1,0]}(u) + (1-u)\,\mathbb{1}_{(0,1]}(u) \\ &= (1-|u|)\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(u). \end{aligned} \tag{3.119}$$

În cazul particular în care $X, Y \sim \mathcal{U}[0,1]$, obținem

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= u\,\mathbb{1}_{[0,1]}(u) + (2-u)\,\mathbb{1}_{(1,2]}(u) \\ &= (1-|u-1|)\,\mathbb{1}_{[0,2]}(u). \end{aligned} \tag{3.120}$$

Densitatea (3.117) și cazurile particulare (3.118–3.120), se pot reprezenta grafic cu ușurință, prin urmare este justificată următoarea denumire: dacă o v.a are densitatea dată de una dintre formulele (3.117–3.120), atunci spunem că v.a. urmează o **distribuție triunghiulară**

Deci am obținut că:

suma a două v.a. uniforme și de tip **i.i.d.** urmează o distribuție triunghiulară.

3.6.36 Fie v.a. independente, distribuite uniform $X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{U}\left[0,1\right]$ și $Y_i = X_i - \dfrac{1}{2}$, pentru $i = \overline{1,3}$.

(a) Să se calculeze și să se reprezinte grafic densitatea de repartiție $f_{X_1-X_2}$.

(b) Să se calculeze și să se reprezinte grafic densitățile de repartiție $f_{X_1+X_2}$, $f_{X_1+X_2+X_3}$ și $f_{X_1+X_2+X_3+X_4}$.

(c) Să se determine tipul de distribuție al v.a. Y_i, pentru $i = \overline{1,3}$, și apoi să se calculeze și să se reprezinte grafic densitățile de repartiție $f_{Y_1+Y_2}$, $f_{Y_1+Y_2+Y_3}$ și $f_{Y_1-Y_2}$.

Rezolvare:

(a) Folosind formula (3.99) se obține densitatea:

$$\begin{aligned} f_{X_1-X_2}\left(v\right) &= \left(1+v\right)\mathbb{1}_{[-1,0)}\left(v\right) + \left(1-v\right)\mathbb{1}_{[0,1]}\left(v\right) \\ &= \left(1-|v|\right)\mathbb{1}_{[-1,1]}\left(v\right). \end{aligned}$$

(b) Se observă imediat că dacă $X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{U}\left[0,1\right]$, atunci v.a. X_1+X_2 ia valori în $[0,2]$, $X_1+X_2+X_3$ ia valori în $[0,3]$, iar $X_1+X_2+X_3+X_4$ ia valori în $[0,4]$.

Folosind formula (3.98) se obțin următoarele densități:

$$f_{X_1+X_2}\left(u\right) = u\mathbb{1}_{[0,1)}\left(u\right) + \left(2-u\right)\mathbb{1}_{[1,2]}\left(u\right) = \left(1-|u-1|\right)\mathbb{1}_{[0,2]}\left(u\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1!}u, & \text{dacă } x \in [0,1), \\ \dfrac{1}{1!}\left(u - C_2^1\left(u-1\right)\right), & \text{dacă } x \in [1,2], \\ 0, & \text{dacă } x \notin [0,2] \end{cases}$$

sau, scrisă cu ajutorul funcției signum[249],

$$f_{X_1+X_2}(u) = \frac{1}{2\cdot 1!}\sum\nolimits_{k=0}^{2}(-1)^k\, C_2^k\,(u-k)^1\,\mathrm{sgn}\,(u-k)\,.$$

Apoi

$$\begin{aligned} f_{X_1+X_2+X_3}(u) &= \frac{u^2}{2}\mathbb{1}_{[0,1)}(u) + \left(\frac{3}{4}-\left(u-\frac{3}{2}\right)^2\right)\mathbb{1}_{[1,2)}(u) \\ &\quad + \frac{1}{2}(u-3)^2\,\mathbb{1}_{[2,3]}(u) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2!}u^2, & \text{dacă } x\in[0,1),\\ \frac{1}{2!}\left(u^2 - C_3^1\,(u-1)^2\right), & \text{dacă } x\in[1,2),\\ \frac{1}{2!}\left(u^2 - C_3^1\,(u-1)^2 + C_3^2\,(u-2)^2\right), & \text{dacă } x\in[2,3),\\ 0, & \text{dacă } x\notin[0,3] \end{cases} \end{aligned}$$

sau, scrisă cu ajutorul funcției signum,

$$f_{X_1+X_2+X_3}(u) = \frac{1}{2\cdot 2!}\sum\nolimits_{k=0}^{3}(-1)^k\, C_3^k\,(u-k)^2\,\mathrm{sgn}\,(u-k)\,.$$

În general, pentru $n\in\mathbb{N}^*$ v.a. $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ de tip i.i.d., cu $X_k\sim\mathscr{U}[0,1]$, unde $k=\overline{1,n}$, v.a. $\sum_{i=1}^n X_i$ ia valori în $[0,n]$, iar densitatea este dată de

$$\begin{aligned} &f_{\sum_{i=1}^n X_i}(u) \\ &= \frac{1}{(n-1)!}u^{n-1}\,\mathbb{1}_{[0,1)}(u) \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!}\left(u^{n-1} - C_n^1\,(u-1)^{n-1}\right)\mathbb{1}_{[1,2)}(u) \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!}\left(u^{n-1} - C_n^1\,(u-1)^{n-1} + C_n^2\,(u-2)^{n-1}\right)\mathbb{1}_{[2,3)}(u) \\ &\quad \ldots \end{aligned}$$

[249] **Funcția signum** $\mathrm{sgn}:\mathbb{R}\to\{0,\pm1\}$ este definită de $\mathrm{sgn}\,(x)=\frac{x}{|x|}$, pentru orice $x\neq 0$, și $\mathrm{sgn}\,(0)=0$; deci $\mathrm{sgn}\,(x)$ este -1, dacă x este negativ și $\mathrm{sgn}\,(x)=1$, dacă x este pozitiv.

$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(u^{n-1}-C_n^1\,(u-1)^{n-1}+\ldots+C_n^{n-1}\,(u-n)^{n-1}\right)\mathbb{1}_{[n-1,n]}\,(u)$$

sau, scrisă cu ajutorul funcției signum[250],

$$f_{\sum_{i=1}^n X_i}\,(u)=\frac{1}{2\cdot\,(n-1)!}\sum\nolimits_{k=0}^{n}(-1)^k\,C_n^k\,(u-k)^{n-1}\operatorname{sgn}(u-k)\,. \tag{3.121}$$

Să observăm că densitatea f_{X_1} este o funcție discontinuă; densitatea $f_{X_1+X_2}$ este o funcție continuă, dar cu derivata de ordinul întâi discontinuă; densitatea $f_{X_1+X_2+X_3}$ este o funcție continuă, cu derivata de ordinul întâi continuă, dar cu derivata de ordinul discontinuă ș.a.m.d..

(c) Se obține $Y_i \sim \mathscr{U}\,[-1/2,1/2]$. Se observă că $Y_1+Y_2=(X_1+X_2)-1$, deci, folosind (b) ,

$$f_{Y_1+Y_2}\,(u)=f_{X_1+X_2}\,(u+1)=(1-|u|)\,\mathbb{1}_{[-1,1]}\,(u)\,.$$

Avem și

$$f_{Y_1+Y_2+Y_3}\,(u)=f_{X_1+X_2+X_3}\,(u+3/2)\,,$$

deoarece $Y_1+Y_2+Y_3=(X_1+X_2+X_3)-3/2$.

Se observă că $Y_1-Y_2=X_1-X_2$ și că are aceeași lege ca v.a. Y_1+Y_2.

În ceea ce privește graficul densității $f_{\sum_{i=1}^n X_i}$, cu $n\geq 2$ dat, se observă că acesta aproximează graficul, translat cu $n/2$, al densității $f_{\mathscr{N}(0,1)}$ a unei v.a. normale standard.

Dacă se aplică Teorema Limită Centrală, dată de Teorema 5.108, se va obține o demonstrație riguroasă a ceea ce se vede și din graficul densității, și anume a faptului că standardizarea v.a. $X_1+X_2+\ldots+X_n$, i.e. v.a.

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i-\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\sqrt{\mathrm{D}^2\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}}=\frac{\sum_{i=1}^n X_i-n/2}{\sqrt{n/12}}\,,$$

[250] Dacă o v.a. X are densitatea de repartiție dată de (3.121), i.e.

$$f_X\,(x)=\frac{1}{2\cdot\,(n-1)!}\sum\nolimits_{k=0}^{n}(-1)^k\,C_n^k\,(x-k)^{n-1}\operatorname{sgn}(x-k)\,\mathbb{1}_{[0,n]}\,(x)\,,$$

atunci spunem că X urmează **distribuția Irwin-Hall** de parametru $n\in\mathbb{N}^*$.
Această densitate apare atunci când se adună $n\in\mathbb{N}^*$ v.a. de tip i.i.d. și care urmează distribuția uniformă pe $[0,1]$.

va converge în lege, pentru $n \to \infty$, către o v.a. $Z \sim \mathscr{N}(0,1)$.

De asemenea, și graficul densității $f_{Y_1+Y_2+Y_3}$ aproximează graficul densității normale standard $f_{\mathscr{N}(0,1)}$. Se poate generaliza pentru $i = \overline{1,n}$ și se va obține, aplicând Teorema Limită Centrală dată de Teorema 5.108, ceea ce se vede și din graficul densității, și anume că standardizarea v.a. $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ va converge în lege către o v.a. $Z \sim \mathscr{N}(0,1)$.

3.6.37 Fie două v.a. independente $X, Y \sim \mathscr{U}[-1,1]$.

(a) Să se determine funcțiile de repartiție F_X, F_U și densitatea de repartiție f_U, unde $U = 2X - 1$.

(b) Să se determine funcția de repartiție F_V și densitatea de repartiție f_V, unde $V = \dfrac{X+1}{2}$.

(c) Să se calculeze media și deviația standard a v.a. $X + Y$ și apoi $\mathbb{P}(X = 0.5)$ și $\mathbb{P}(X \geq 0.5)$.

(d) Să se determine densitatea de repartiție a v.a $Z = X + Y$.

3.6.38 Fie două v.a. independente $X, Y \sim \mathscr{U}[-2,0]$.

(a) Să se determine funcțiile de repartiție F_X, F_U și densitatea de repartiție f_U, unde $U = \dfrac{X+2}{2}$.

(b) Să se calculeze media și deviația standard a v.a. $X + Y$ și apoi $\mathbb{P}(X \geq 0.9)$ și $\mathbb{P}(X = 0.9)$.

3.6.39 Un băiat și prietena lui au fixat o întâlnire la o anume locație. Știm că cei doi ajung independent unul de altul, iar timpul de sosire al fiecăruia (X și respectiv Y) este distribuit uniform între ora 12 și ora 13.

(a) Să se determine probabilitatea ca cel care ajunge primul să îl aștepte pe celălalt cel puțin 10 minute. Care este probabilitatea ca cei doi să ajungă în același moment? Să se determine și funcția de repartiție asociată timpului sosirii băiatului, i.e. F_X.

(b) Să se calculeze media și deviația standard a v.a. $X+Y$ și apoi probabilitatea ca băiatul să ajungă după 12.5 și apoi probabilitatea ca fata să ajungă la 12.3.

Rezolvare:

(a) trebuie să se determine $\mathbb{P}(|X - Y| \geq 10)$, adică $\mathbb{P}(X \geq Y + 10)$ și $\mathbb{P}(Y \geq X + 10)$; în acest sens, se calculează, mai întâi, densitatea $f_{X-Y}(u)$, a diferenței, dată de formula (3.99).

3.6.40 Fie U, V două v.a. independente cu $U, V \sim \mathscr{U}[0,1]$.

(a) Să se determine densitatea f_{U+12}. Să se determine și densitatea f_{U+V} a sumei v.a.. Reprezentați grafic densitatea f_{U+V}.

(b) Să se determine funcția de repartiție și apoi densitatea v.a.

$$Y = \max(U, V) \quad \text{și} \quad Z = \min(U, V).$$

3.6.41 Fie două v.a. independente distribuite Cauchy $X, Y \sim \mathscr{C}(0,1)$. Să se calculeze densitatea de repartiție a v.a. $U = X + Y$ și apoi densitatea de repartiție[251] a v.a. $V = \dfrac{X+Y}{2}$.

Rezolvare:

Obținem, folosind formula (3.98), că

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(u-v)^2} \frac{1}{1+v^2} dv.$$

Pentru calculul integralei raționale trebuie să descompunem fracția precedentă în fracții simple, adică să găsim a, b, c, d astfel încât

$$\frac{1}{1+(u-v)^2} \frac{1}{1+v^2} = \frac{a+b(u-v)}{1+(u-v)^2} + \frac{c+dv}{1+v^2}.$$

În urma calculelor obținem $a = c = \dfrac{1}{(4+u^2)}$ și $b = d = \dfrac{2}{u(4+u^2)}$, adică

$$\frac{1}{1+(u-v)^2} \frac{1}{1+v^2} = \frac{1}{u^2(4+u^2)} \left(\frac{2u(u-v)+u^2}{1+(u-v)^2} + \frac{2uv+u^2}{1+v^2} \right).$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $u - v = v'$ în $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2u(u-v)+u^2}{1+(u-v)^2} dv$, obținem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2u(u-v)+u^2}{1+(u-v)^2} dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2uv'+u^2}{1+(v')^2} dv',$$

deci

$$f_{X+Y}(u) = \frac{2}{\pi^2 u^2 (4+u^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2uv+u^2}{1+v^2} dv$$

[251] Vezi și rezolvarea Exercițiului 4.2.20.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi^2 u^2 (4+u^2)} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2uv}{1+v^2} dv + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{1+v^2} \Big) dv \\
&= \frac{4u}{\pi^2 u^2 (4+u^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{1+v^2} dv + \frac{2}{\pi^2 (4+u^2)} \arctan(v) \Big|_{v=-\infty}^{v=\infty} \\
&= \frac{4u}{\pi^2 u^2 (4+u^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{1+v^2} dv + \frac{2}{\pi (4+u^2)}.
\end{aligned}
$$

Să observăm că integrala improprie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{1+v^2} dv = \frac{1}{2} \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to-\infty}} \ln \frac{1+a^2}{1+b^2}$ este divergentă. Dar, pe de altă parte, integrala improprie

$$
f_{X+Y}(u) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(u-v)^2} \frac{1}{1+v^2} dv
$$

este convergentă pentru orice $u \in \mathbb{R}$ deoarece

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(u-v)^2} \frac{1}{1+v^2} dv &\le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+v^2} dv \\
&= \arctan(v) \Big|_{v=-\infty}^{v=\infty} \\
&= \pi,
\end{aligned}
$$

deci integrala impropie $f_{X+Y}(u)$ coincide cu valoare ei principală, adică

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(u) &= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f_X(u-v) f_Y(v) dv \\
&= \frac{1}{\pi^2} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{1}{1+(u-v)^2} \frac{1}{1+v^2} dv.
\end{aligned}
$$

Astfel, obținem

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(u) &= \frac{4u}{\pi^2 u^2 (4+u^2)} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{v}{1+v^2} dv + \frac{2}{\pi (4+u^2)} \\
&= \frac{4u}{\pi^2 u^2 (4+u^2)} \lim_{T\to\infty} \ln\left(1+v^2\right) \Big|_{v=-T}^{v=T} + \frac{2}{\pi (4+u^2)} \\
&= \frac{4u}{\pi^2 u^2 (4+u^2)} \lim_{T\to\infty} 0 + \frac{2}{\pi (4+u^2)},
\end{aligned}
$$

deci

$$f_{X+Y}(u) = \frac{2}{\pi(4+u^2)} = \frac{1}{2\pi\left(1+\left(\frac{u}{2}\right)^2\right)},$$

adică[252]

$$X+Y \sim \mathscr{C}(0,2).$$

Aplicând Corolarul 3.33, deducem că

$$\begin{aligned} f_{\frac{X+Y}{2}}(u) &= \frac{1}{1/2} f_{X+Y}\left(\frac{u-0}{1/2}\right) \\ &= 2 f_{X+Y}(2u) \\ &= \frac{4}{\pi(4+4u^2)} \\ &= \frac{1}{\pi(1+u^2)}, \end{aligned}$$

adică

$$\frac{X+Y}{2} \sim \mathscr{C}(0,1).$$

3.6.42 Fie două v.a. independente cu densitățile de repartiție $f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, pentru $x \in \mathbb{R}$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U = X+Y$.

Rezolvare:

Obținem, folosind formula (3.98), că

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u-v|}e^{-|v|}dv.$$

Dacă $u < 0$ atunci

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{u} e^{-|u-v|}e^{v}dv + \frac{1}{4}\int_{u}^{0} e^{-|u-v|}e^{v}dv + \frac{1}{4}\int_{0}^{\infty} e^{-|u-v|}e^{-v}dv \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{u} e^{2v-u}dv + \frac{1}{4}\int_{u}^{0} e^{u}dv + \frac{1}{4}\int_{0}^{\infty} e^{u-2v}dv \end{aligned}$$

[252] Pentru proprietatea similară satisfacută de alte distribuții vezi Propoziția 2.125, Propoziția 2.165, Propoziția 2.180, Propoziția 2.182, Propoziția 3.131, Propoziția 3.143 și respectiv Propoziția 3.171.

$$= \frac{e^u (1-u)}{4}.$$

Dacă $u > 0$ atunci prin calcule similare obținem $f_{X+Y}(u) = \frac{e^{-u}(1+u)}{4}$.

3.6.43 Fie două v.a. independente cu densitățile de repartiție $f_X(x) = f_Y(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{e^x + e^{-x}}$, pentru $x \in \mathbb{R}$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U = X + Y$.

Rezolvare:

Obținem, folosind formula (3.98), că

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \frac{4}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{u-v} + e^{v-u}} \frac{1}{e^v + e^{-v}} dv \\ &= \frac{4e^u}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2v}}{1 + e^{2v}} \frac{1}{e^{2u} + e^{2v}} dv. \end{aligned}$$

Se face schimbarea de variabilă $e^{2v} = v'$ și deci $dv' = 2e^{2v}dv$ și se obține, calculând o integrală dintr-o funcție rațională,

$$f_{X+Y}(u) = \frac{4e^u}{\pi^2} \frac{u}{e^{2u} - 1}.$$

3.6.44 Fie două v.a. independente $X, Y \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$, cu $\lambda > 0$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U = X - Y$.

Rezolvare:

Aplicăm formula (3.99) și obținem

$$\begin{aligned} f_{X-Y}(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(u+v)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u+v) \cdot \lambda e^{-\lambda u} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u)\, du \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda v} \int_0^{\infty} e^{-2\lambda u} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u+v)\, du. \end{aligned}$$

Rescriem indicatoarea $\mathbb{1}_{(0,\infty)}(u+v)$ folosind

$$0 < u + v < \infty \quad \Leftrightarrow \quad -v < u < \infty$$

și obținem

$$\mathbb{1}_{(0,\infty)}(u+v) = \mathbb{1}_{(-v,\infty)}(u),$$

deci

$$f_{X-Y}(v) = \lambda^2 e^{-\lambda v} \int_{[0,\infty)\cap[-v,\infty)} e^{-2\lambda u} du.$$

Dacă $v < 0$, atunci

$$\begin{aligned} f_{X-Y}(v) &= \lambda^2 e^{-\lambda v} \int_{[-v,\infty)} e^{-2\lambda u} du \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda v} \frac{e^{-2\lambda u}}{-2\lambda} \Big|_{u=-v}^{u=\infty} \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{\lambda v}. \end{aligned}$$

Dacă $v > 0$, atunci

$$\begin{aligned} f_{X-Y}(v) &= \lambda^2 e^{-\lambda v} \int_{[0,\infty)} e^{-2\lambda u} du \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda v} \frac{e^{-2\lambda u}}{-2\lambda} \Big|_{u=0}^{u=\infty} \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda v}. \end{aligned}$$

Obținem că $X - Y$ are densitatea $f(v) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|v|}$, deci este distribuită Laplace de parametri $\frac{1}{\lambda}$ și 0 (vezi Nota 245).

3.6.45 Să notăm timpii de viață a două componente electronice cu X_1 și respectiv X_2. Să presupunem că timpii de viață sunt independenți unul de altul și că sunt distribuiți de tip exponențial cu parametri λ_1 și respectiv λ_2.

(a) Să se scrie densitatea $f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)$. Să se determine parametrii λ_1, λ_2 știind că timpul de viață așteptat al celor două componente este de 1000 ore și respectiv 1200 ore.

(b) Să se determine probabilitatea ca ambele componente să trăiască cel puțin 1500 ore. Să se determine probabilitatea ca prima componentă să trăiască 1500 ore.

(c) Să se determine probabilitatea ca timpul total de viață al celor două componente să fie de cel mult 3000 ore.

(d) În cazul în care $\lambda_1 = \lambda_2$ să se determine densitățile $f_{X_1+X_2}$ și $f_{\frac{X_1}{X_1+X_2}}$.

Rezolvare:

(b) Se determină $\mathbb{P}(X_1 \geq 1500, X_2 \geq 1500)$.

(c) Se utilizează formula (3.98).

(d) Se utilizează formula (3.96) cu $U = X_1 + X_2$, $V = \frac{X_1}{X_1+X_2}$; trebuie să se determine și domeniile variabilelor u, v. Apoi se determină densitățile marginale $f_U(u)$ și $f_V(v)$.

3.6.46 Fie două v.a. independente distribuite exponențial $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \text{Exp}(\mu)$, $\lambda, \mu > 0$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_V, unde $V = \dfrac{X}{Y}$.

Rezolvare:

Aplicăm formula (3.103) și obținem, pentru $v > 0$,

$$
\begin{aligned}
f_V(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} |u|\, f_X(uv)\, f_Y(u)\, du \\
&= \lambda\mu \int_0^{\infty} u e^{-(\lambda v+\mu)u} du \\
&= \frac{-\lambda\mu}{\lambda v+\mu}\left(u e^{-(\lambda v+\mu)u}\Big|_{u=0}^{u=\infty} - \frac{e^{-(\lambda v+\mu)u}}{-(\lambda v+\mu)}\Big|_{u=0}^{u=\infty}\right) \\
&= \frac{\lambda\mu}{(\lambda v+\mu)^2},
\end{aligned}
$$

deoarece $\lambda v + \mu > 0$ și astfel $\lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^{(\lambda v+\mu)u}} = 0$.

Evident, tot din formula (3.103), obținem ca $f_V(v) = 0$, pentru orice $v < 0$.

3.6.47 Fie două v.a. independente distribuite Laplace de parametri 1 și 0. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U = \dfrac{X}{Y}$.

Rezolvare:

Obținem

$$
f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |v|\ f_X(uv)\ f_Y(v)\, dv = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} |v|\, e^{-(|u|+1)|v|} dv.
$$

Facem schimbarea de variabilă $v = -v'$ și obținem, integrând prin părți,

$$
f_U(u) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} v e^{-(|u|+1)v} dv = \frac{1}{2(|u|+1)^2}.
$$

3.6.48 Fie două v.a. de tip i.i.d., cu $X, Y \sim \mathscr{U}[0,1]$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U = \dfrac{X}{Y}$.

Rezolvare:

Obținem

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |v| \; f_X(uv) \; f_Y(v)\, dv = \int_0^1 v f_X(uv)\, dv.$$

Pentru $u < 0$ obținem $uv < 0$ și deci $f_X(uv) = 0$.

Pentru $u \in (0,1)$ obținem, schimbând variabila $uv = v'$, $dv' = udv$ și

$$f_U(u) = \int_0^u \frac{v'}{u} f_X(v') \frac{dv'}{u} = \frac{1}{u^2} \int_0^u v f_X(v)\, dv = \frac{1}{u^2} \int_0^u v dv = \frac{1}{2}.$$

Pentru $u > 1$ obținem, schimbând variabila $uv = v'$, $dv' = udv$ și

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{1}{u^2} \int_0^u v f_X(v)\, dv \\ &= \frac{1}{u^2} \left(\int_0^1 v f_X(v)\, dv + \int_1^u v f_X(v)\, dv \right) \\ &= \frac{1}{u^2} \int_0^1 v\, dv \\ &= \frac{1}{2u^2}. \end{aligned}$$

3.6.49 Fie două v.a. independente distribuite normal $X, Y \sim \mathscr{N}(0, \sigma^2)$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U = \dfrac{X}{Y}$.

Rezolvare:

Obținem

$$\begin{aligned} f_{\frac{X}{Y}}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} |v| \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u^2 v^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left(\int_{-\infty}^{0} (-v)\, e^{-\frac{u^2 v^2 + v^2}{2\sigma^2}} dv + \int_0^{\infty} v e^{-\frac{u^2 v^2 + v^2}{2\sigma^2}} dv \right). \end{aligned}$$

În prima integrală fac schimbarea de variabilă $v = -v'$ și deci $dv = -dv'$:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} (-v)\, e^{-\frac{u^2v^2+v^2}{2\sigma^2}} dv = \int_{0}^{\infty} v e^{-\frac{\left(u^2+1\right)v^2}{2\sigma^2}} dv.$$

Notând cu $v' = -\frac{\left(u^2+1\right)v^2}{2\sigma^2}$ obținem $dv' = -\frac{\left(u^2+1\right)}{\sigma^2} v\,dv$ și

$$I_1 = \frac{-\sigma^2}{u^2+1}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = \frac{\sigma^2}{u^2+1}.$$

Deci

$$f_{\frac{X}{Y}}(u) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\frac{2\sigma^2}{u^2+1} = \frac{1}{\pi\left(u^2+1\right)},$$

adică raportul a două v.a. distribuite normal $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$ este distribuit Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$.

3.6.50 Fie două v.a. independente distribuite normal $X \sim \mathcal{N}\left(\mu_1,\sigma^2\right)$, $Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_2,\sigma^2\right)$. Să se arate că $\dfrac{X-\mu_1}{Y-\mu_2} \sim \mathcal{C}(0,1)$.

Rezolvare:

Folosim Remarca 3.228 și problema precedentă.

3.6.51 Fie două v.a. de tip i.i.d., cu $X, Y \sim \mathcal{U}[-1,1]$. Să se calculeze densitatea de repartiție f_U, unde $U = \sqrt{X^2+Y^2}$.

Rezolvare:

Vom calcula mai întâi densitatea de repartiție pentru X^2 și Y^2. Funcția de repartiție a v.a. X^2 este, evident, $F_{X^2}(u) = 0$, pentru $u < 0$ și $F_{X^2}(u) = 1$, pentru $u > 1$. Pentru $u \in (0,1)$ avem

$$\begin{aligned} F_{X^2}(u) &= \mathbb{P}\left(X^2 \le u\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-\sqrt{u} \le X \le \sqrt{u}\right) \\ &= F_X\left(\sqrt{u}\right) - F_X\left(-\sqrt{u}\right) \\ &= \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} f_X(x)\, dx. \end{aligned}$$

Conform (3.4) obținem, derivând integrala cu parametru (vezi Nota 240) sau direct diferența $F_X(\sqrt{u}) - F_X(-\sqrt{u})$,

$$\begin{aligned} f_{X^2}(u) &= F'_{X^2}(u) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} f_X(\sqrt{u}) - \frac{-1}{2\sqrt{u}} f_X(-\sqrt{u}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \left(f_X(\sqrt{u}) + f_X(-\sqrt{u})\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \end{aligned}$$

și, similar,

$$f_{Y^2}(u) = F'_{Y^2}(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

Astfel, folosind Remarca 3.8, putem considera

$$f_{X^2}(u) = f_{Y^2}(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \mathbb{1}_{(0,1)}(u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Să calculăm acum densitatea sumei $X^2 + Y^2$:

$$f_{X^2+Y^2}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X^2}(u-v) f_{Y^2}(v)\, dv = \int_0^1 f_{X^2}(u-v) \frac{1}{2\sqrt{v}} dv.$$

Schimbând variabila $u - v = v'$ obținem $dv = -dv'$ și

$$f_{X^2+Y^2}(u) = \frac{1}{2} \int_{u-1}^{u} f_{X^2}(v) \frac{1}{\sqrt{u-v}} dv.$$

Dacă $u \leq 0$, atunci $f_{X^2+Y^2}(u) = 0$.

Dacă $u \in (0, 1]$, atunci

$$\begin{aligned} f_{X^2+Y^2}(u) &= \frac{1}{2} \int_{u-1}^{0} f_{X^2}(v) \frac{1}{\sqrt{u-v}} dv + \frac{1}{2} \int_0^u f_{X^2}(v) \frac{1}{\sqrt{u-v}} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^u \frac{1}{2\sqrt{v(u-v)}} dv. \end{aligned}$$

Pentru a calcula această integrală o putem considera ca o integrală binomă sau o putem rezolva formând o sumă sau diferență sub radical,

$$uv - v^2 = \frac{u^2}{4} - \left(v - \frac{u}{2}\right)^2.$$

Deci integrala devine, notând $v - \frac{u}{2} = v'$ cu $dv = dv'$,

$$
\begin{aligned}
f_{X^2+Y^2}(u) &= \frac{1}{2}\int_{-u/2}^{u/2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{u^2}{4} - (v')^2}}\, dv' \\
&= \frac{1}{4}\arcsin \frac{v'}{\frac{u}{2}}\Big|_{v'=-u/2}^{v'=u/2} \\
&= \frac{1}{4}\left(\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right) \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Dacă $u \in (1, 2]$, atunci

$$
\begin{aligned}
f_{X^2+Y^2}(u) &= \frac{1}{2}\int_{u-1}^{1} f_{X^2}(v)\frac{1}{\sqrt{u-v}}\, dv + \frac{1}{2}\int_{1}^{u} f_{X^2}(v)\frac{1}{\sqrt{u-v}}\, dv \\
&= \frac{1}{2}\int_{u-1}^{1} \frac{1}{2\sqrt{v(u-v)}}\, dv.
\end{aligned}
$$

Calculând ca mai sus,

$$
\begin{aligned}
f_{X^2+Y^2}(u) &= \frac{1}{2}\int_{u/2-1}^{1-u/2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{u^2}{4} - (v')^2}}\, dv' \\
&= \frac{1}{4}\arcsin \frac{v'}{\frac{u}{2}}\Big|_{v'=u/2-1}^{v'=1-u/2} \\
&= \frac{1}{4}\left(\arcsin \frac{1-u/2}{u/2} - \arcsin \frac{u/2-1}{u/2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{u} - 1\right).
\end{aligned}
$$

Dacă $u > 2$, atunci $f_{X^2+Y^2}(u) = 0$.

Deci

$$f_{X^2+Y^2}(u)=\begin{cases}0, & \text{dacă } u\le 0,\\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{dacă } u\in(0,1],\\ \dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{2}{u}-1\right), & \text{dacă } u\in(1,2],\\ 0 & \text{dacă } u>2.\end{cases}$$

Să calculăm acum densitatea v.a. $\sqrt{U}$, unde $U=X^2+Y^2$, folosind formula (3.97) cu $v=\sqrt{u}$ sau echivalent $u=\Phi(v)=v^2$ cu $\Phi:(0,2]\to(0,\sqrt{2}]$, iar $J(v)=\Phi'(v)=2v$. Obținem

$$f_{\sqrt{U}}(v)=f_U(v^2)\,|2v| \tag{3.122}$$

și, în cazul nostru,

$$f_{\sqrt{X^2+Y^2}}(u)=f_{X^2+Y^2}\left(u^2\right)|2u|=\begin{cases}0 & \text{dacă } u\le 0,\\ \frac{\pi}{4}, & \text{dacă } u\in(0,1],\\ u\arcsin\frac{2-u}{u}, & \text{dacă } u\in(1,\sqrt{2}],\\ 0 & \text{dacă } u>\sqrt{2}.\end{cases}$$

3.6.52 Fie două v.a. independente X,Y cu densitățile (vezi Nota 147)

$$f_X(x)=f_Y(x)=\frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Să se găsească densitatea de repartiție a v.a. $U=\sqrt{XY}$.

Rezolvare:

Să considerăm transformarea bijectivă $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2):\Delta\to\mathscr{D}$, unde $\Delta=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: u,v\ge 1 \text{ și } u^2\ge v\right\}$, iar $\mathscr{D}=[1,\infty)\times[1,\infty)$, cu Φ dată de

$$\begin{cases}u=\sqrt{xy},\\ v=x\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=\Phi_1(u,v)=v,\\ y=\Phi_2(u,v)=\frac{u^2}{v}\end{cases}$$

cu determinantul Jacobian $J_\Phi(u,v) = \frac{-2u}{v}$.

Folosind (3.96) deducem că are loc următoarea relație, a.p.t. $(u,v) \in \Delta$,

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}\left(v, \frac{u^2}{v}\right)\left|\frac{-2u}{v}\right| = f_X(v)\, f_Y\left(\frac{u^2}{v}\right)\frac{2u}{v} = \frac{2}{u^3 v}.$$

Evident, dacă $(u,v) \notin \Delta$, atunci $f_{(U,V)}(u,v) = 0$.

Folosind (3.92) obținem densitățile marginale f_U, f_V. Astfel,

$$f_U(u) = \int_1^{u^2} \frac{2}{u^3 v} dv = \frac{2}{u^3} \ln u^2, \quad u \geq 1.$$

și $f_U(u) = 0$, pentru orice $u < 1$.

3.6.53 Fie două v.a. independente X, Y cu densitățile

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Să se găsească densitatea de repartiție a vectorului aleator

$$\left(XY, \frac{X}{Y}\right).$$

Rezolvare:

Deoarece v.a. X, Y sunt independente,

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \frac{1}{x^2 y^2} \mathbb{1}_{[1,\infty)\times[1,\infty)}(x,y).$$

Să considerăm transformarea bijectivă $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \Delta \to \mathscr{D}$, unde $\Delta = \{(u,v) \in [1,\infty) \times (0,\infty) : \frac{1}{u} \leq v \leq u\}$, iar $\mathscr{D} = [1,\infty) \times [1,\infty)$, cu Φ dată de

$$\begin{cases} u = x \cdot y, \\ v = x/y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u^{1/2} v^{1/2} = \Phi_1(u,v), \\ y = u^{1/2} v^{-1/2} = \Phi_2(u,v) \end{cases}$$

cu determinantul Jacobian

$$J_\Phi(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{u^{-1/2} v^{1/2}}{2} & \dfrac{u^{1/2} v^{-1/2}}{2} \\ \dfrac{u^{-1/2} v^{-1/2}}{2} & -\dfrac{u^{1/2} v^{-3/2}}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2v}.$$

Folosind (3.96) deducem că are loc următoarea relație, a.p.t. $(u,v) \in \Delta$,

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right)\left| -\frac{1}{2v}\right| = \frac{1}{2v}\frac{1}{uv}\frac{1}{uv^{-1}} = \frac{1}{2u^2 v}.$$

Evident, dacă $(u,v) \notin \Delta$, atunci $f_{(U,V)}(u,v) = 0$.

3.6.54 Dacă X, Y sunt două v.a. de tip i.i.d., cu $X, Y \sim \mathscr{U}(0,1)$, atunci v.a.

$$U = \sqrt{-2\ln X}\cos(2\pi Y), \quad V = \sqrt{-2\ln X}\sin(2\pi Y)$$

sunt independente distribuite normal[253] standard $\mathscr{N}(0,1)$.

Rezolvare:

Să considerăm transformarea

$$\begin{cases} u = \sqrt{-2\ln x}\cos(2\pi y), \\ v = \sqrt{-2\ln x}\sin(2\pi y) \end{cases}$$

și obținem

$$u^2 + v^2 = -2\ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos(2\pi y) = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Transformarea inversă este deci

$$\begin{cases} x = e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}, \\ y = \dfrac{\arccos\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}}{2\pi} \end{cases}$$

cu determinantul Jacobian

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} -ue^{-\frac{u^2+v^2}{2}} & -ve^{-\frac{u^2+v^2}{2}} \\ -\frac{v}{2\pi(u^2+v^2)} & \frac{u}{2\pi(u^2+v^2)} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}.$$

[253] Aceasta este metoda Box-Muller de a genera v.a. distribuite normal folosind v.a. distribuite uniform pe $(0,1)$. Vezi și Exercițiului 3.6.63.
O altă metodă de a genera v.a. distribuite normal, dar fără a utiliza funcții trigonometrice, este următoarea: fie $X, Y \sim \mathscr{U}[-1,1]$ două v.a. independente și $S \overset{\text{def}}{=} X^2 + Y^2$. Atunci, v.a. $U = X\sqrt{-2\frac{\ln S}{S}}$, $V = Y\sqrt{-2\frac{\ln S}{S}}$ sunt independente și repartizate normal standard.

Folosind (3.96) deducem că are loc următoarea relație, având în vedere că variabilele X, Y sunt și independente,

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) &= f_X\left(e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\right) f_Y\left(\frac{\arccos\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}}{2\pi}\right)\left| -\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}. \end{aligned}$$

Dacă luăm

$$f_U(u) = f_V(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}},$$

atunci din ultima egalitate se vede că U, V sunt independente, deoarece obținem egalitatea $f_{(U,V)}(u,v) = f_U(u) f_V(v)$ și, în plus, $U, V \sim \mathcal{N}(0,1)$ (vezi și Remarca 3.219).

3.6.55 Vectorul aleator (X, Y) este dat prin densitatea de repartiție

$$f(x,y) = \frac{1}{6}(x+4y)\,\mathbb{1}_{(0,2)\times(0,1)}(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Să se arate că f este o densitate. Să se determine și densitățile de repartiție marginale. Sunt v.a. X, Y independente?

Rezolvare:

Avem

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy &= \frac{1}{6}\int_0^2\left(\int_0^1 (x+4y)\,dy\right)dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^2 \left(xy+2y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{x=0}^{x=2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Densitățile marginale sunt

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}\mathbb{1}_{(0,2)}(x)\int_0^1 (x+4y)\,dy \\
&= \frac{1}{6}\mathbb{1}_{(0,2)}(x)\left(xy+2y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{x+2}{6}\mathbb{1}_{(0,2)}(x)\,, \\
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx \\
&= \frac{1}{6}\mathbb{1}_{(0,1)}(y)\int_0^2 (x+4y)\,dx \\
&= \frac{1}{6}\mathbb{1}_{(0,1)}(y)\left(\frac{x^2}{2}+4xy\right)\Big|_{x=0}^{x=2} \\
&= \frac{4y+1}{3}\mathbb{1}_{(0,1)}(y)\,.
\end{aligned}
$$

Conform Propoziției 3.218, avem că X și Y nu sunt independente deoarece nu are loc egalitatea $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)\,,$ pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$.

3.6.56 Vectorul aleator (X,Y) este dat prin densitatea de repartiție[254]

$$
f(x,y) = Ce^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\{x\geq 0,|y|\leq x\}}\,,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \text{unde } \lambda>0.
$$

Să se determine mai întâi C astfel încât f să fie o densitate. Apoi să se determine și densitățile de repartiție marginale. Sunt v.a. X, Y independente?

Rezolvare:

Impunem

$$
\begin{aligned}
1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy \\
&= C\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\{x\geq 0,|y|\leq x\}}dxdy
\end{aligned}
$$

[254] Indicatoarea $\mathbb{1}_A(x)$ a mulțimii $A\subset\mathbb{R}^n$ în punctul $x\in\mathbb{R}^n$ se poate scrie sub și sub forma $\mathbb{1}_{\{x\in A\}}$; de exemplu, $\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) = \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$.
Scrierea este utilă în cazul în care condiția $x\in A$ este mai complicată adică A este mai greu de precizat.

$$\begin{aligned}
&= C \int_0^{\infty} \left(\int_{-x}^{x} e^{-\lambda x} dy \right) dx \\
&= 2C \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{2C}{-\lambda} x e^{-\lambda x} \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{2C}{-\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{2C}{\lambda} \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \Big|_{x=0}^{x=\infty} \\
&= \frac{2C}{-\lambda^2} \left(e^{-\infty} - 1 \right) \\
&= \frac{2C}{\lambda^2},
\end{aligned}$$

deci $C = \lambda^2/2$.

Densităţile marginale sunt

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{-x}^{x} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}, \\
f_Y(y) &= \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{|y| \leq x\}} dx \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \int_{|y|}^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \Big|_{x=|y|}^{x=\infty} \\
&= \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|}.
\end{aligned}$$

Conform Propoziţiei 3.218, avem că X şi Y nu sunt independente deoarece nu are loc egalitatea $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Observăm că $X \sim \text{Gamma}(2, \lambda)$, deoarece $\Gamma(2) = 1$, şi Y este distribuită Laplace de parametri $\frac{1}{\lambda} > 0$ şi 0.

3.6.57 Vectorul aleator (X, Y) este dat prin densitatea de repartiţie

$$f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{0<y<x\}}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ unde } \lambda > 0.$$

Să se determine densitățile de repartiție marginale. Sunt v.a. X, Y independente? Să se determine și densitatea vectorului $(Y - X, Y)$.

Rezolvare:

Densitățile marginale sunt

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{0<y<x\}} dy \\ &= \lambda^2 \int_0^x e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\, dy \\ &= \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \\ f_Y(y) &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{0<y<x\}} dx \\ &= \lambda^2 \int_y^{\infty} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)\, dx \\ &= \int_y^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda^2 \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \left. \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right|_{x=y}^{x=\infty} \\ &= \lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y). \end{aligned}$$

Conform Propoziției 3.218, avem că X și Y nu sunt independente deoarece nu are loc egalitatea $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Să observăm și faptul că $X \sim \text{Gamma}(2, \lambda)$, deoarece $\Gamma(2) = 1$, iar $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Să considerăm transformarea bijectivă $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \Delta \to \mathscr{D}$, unde $\Delta = (-\infty, 0) \times (0, \infty)$, iar $\mathscr{D} = \{(x,y) : 0 < y < x\}$, dată de

$$\begin{cases} u = y - x, \\ v = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \Phi_1(u,v) = v - u, \\ y = \Phi_2(u,v) = v \end{cases}$$

cu determinantul Jacobian $J_\Phi(u,v) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$

Folosind (3.96) deducem că are loc următoarea relație, a.p.t. $(u, v) \in \Delta$,

$$f_{(U,V)}(u, v) = |-1| \, f_{(X,Y)}(v - u, v) = \lambda^2 e^{-\lambda(v-u)} \mathbb{1}_{(-\infty,0)\times(0,\infty)}(u, v).$$

Evident, dacă $(u, v) \notin \Delta$, atunci $f_{(U,V)}(u, v) = 0$.

3.6.58 Vectorul aleator (X, Y) este dat prin densitatea de repartiție

$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,x]}(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ unde } \lambda > 0.$$

Să se arate că f este o densitate. Să se determine și densitățile de repartiție marginale. Sunt v.a. X, Y independente?

Rezolvare:

Avem

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dxdy = \lambda^2 \int_0^\infty \left(\int_0^x e^{-\lambda x} dy \right) dx = 1.$$

Densitățile marginale sunt

$$f_X(x) = \lambda^2 \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \int_0^x e^{-\lambda x} dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$
$$f_Y(y) = \lambda^2 \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \int_y^\infty e^{-\lambda x} dx = \lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y),$$

deoarece $\mathbb{1}_{[0,x]}(y) = \mathbb{1}_{[y,\infty)}(x)$.

Conform Propoziției 3.218, avem că X și Y nu sunt independente deoarece nu are loc egalitatea $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3.6.59 Vectorul aleator (X, Y) este dat prin densitatea de repartiție

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\pi^2 (1 + x^2)(1 + y^2)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Să se găsească funcția de repartiție precum și $\mathbb{P}((X, Y) \in \mathscr{D})$, unde $\mathscr{D} = [0, 1] \times [0, 1]$. Să se determine și funcțiile de repartiție marginale și densitățile de repartiție marginale. Sunt v.a. X, Y independente?

Rezolvare:

Funcția de repartiție este

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{P}(X \le x, Y \le y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\pi^2 (1+x^2)(1+y^2)} dtds \\
&= \left(\frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} \arctan(y) + \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Probabilitatea $\mathbb{P}((X,Y) \in \mathscr{D}) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} dxdy = \frac{1}{16}$.

Să calculăm acum F_X, F_Y, f_X, f_Y.

Avem

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \lim_{y\to\infty} F_{(X,Y)}(x,y) \\
&= \lim_{y\to\infty} \left(\frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} \arctan(y) + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}, \\
F_Y(y) &= \lim_{x\to\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{\pi} \arctan(y) + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

și

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\pi^2 (1+x^2)(1+y^2)} \\
&= \frac{1}{\pi^2 (1+x^2)} \arctan(y) \Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} \\
&= \frac{1}{\pi (1+x^2)}, \\
f_Y(y) &= \frac{1}{\pi (1+y^2)}.
\end{aligned}
$$

Deoarece are loc egalitatea $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ sau, echivalent, egalitatea $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, deducem, conform Propoziției 3.187 și respectiv Propoziției 3.218, că X și Y sunt independente.

3.6.60 Vectorul aleator (X,Y) este dat prin densitatea de repartiție

$$
f(x,y) = \frac{y}{(1+x)^4} e^{-\frac{y}{1+x}} \mathbb{1}_{[0,\infty)\times[0,\infty)}(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.
$$

Să se găsească densitatea de repartiție a vectorului aleator

$$\left(\frac{Y}{1+X}, \frac{1}{1+X}\right).$$

Rezolvare:

Să considerăm transformarea

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{1+x}, \\ v = \dfrac{1}{1+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{v} - 1, \\ y = \dfrac{u}{v} \end{cases}$$

cu determinantul Jacobian

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{v^2} \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{v^3}.$$

Folosind (3.96) deducem că are loc următoarea relație:

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}\left(\frac{1}{v} - 1, \frac{u}{v}\right)\left|\frac{1}{v^3}\right| = ue^{-u}.$$

De asemenea, din definiția lui u și v obținem $u \geq 0$ și $v \in [0,1]$.

3.6.61 Densitatea de repartiție a vectorului (X,Y) este

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & \text{dacă } x,y > 0, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \tag{3.123}$$

Să se calculeze densitate de repartiție v.a. $X+Y$ și $\dfrac{X}{Y}$.

Rezolvare:

Să considerăm transformarea

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = \dfrac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{uv}{1+v}, \\ y = \dfrac{u}{1+v} \end{cases}$$

cu determinantul Jacobian

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = -\frac{u}{(1+v)^2}.$$

Folosind (3.96) deducem că are loc următoarea relație:

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) &= f_{(X,Y)}\left(\frac{uv}{1+v}, \frac{u}{1+v}\right)\left|-\frac{u}{(1+v)^2}\right| \\ &= e^{-\left(\frac{uv}{1+v}+\frac{u}{1+v}\right)}\frac{u}{(1+v)^2} \\ &= e^{-u}\frac{u}{(1+v)^2}, \quad u,v \geq 0. \end{aligned}$$

Din ultima egalitate calculăm densitățile marginale f_U și f_V :

$$f_U(u) = \int_0^\infty e^{-u}\frac{u}{(1+v)^2}dv = ue^{-u}, \quad v \geq 0,$$

și

$$f_V(v) = \int_0^\infty e^{-u}\frac{u}{(1+v)^2}du = \frac{1}{(1+v)^2}, \quad v \geq 0.$$

3.6.62 Fie două v.a. independente X, Y cu densitățile

$$f_X(x) = f_Y(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că v.a. $X+Y$ și $\dfrac{X}{Y}$ sunt de asemenea independente.

Rezolvare:

Notăm $\begin{cases} u = x+y, \\ v = \dfrac{x}{y} \end{cases}$ și calculăm funcția de repartiție:

$$\begin{aligned} F_{(U,V)}(u,v) &= \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v) \\ &= \mathbb{P}((X,Y) \in \mathscr{D}) \end{aligned}$$

$$= \iint_{\mathscr{D}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy$$
$$= \iint_{\mathscr{D}} f_X(x)\,f_Y(y)\,dxdy,$$

unde $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x + y \leq u,\ \frac{x}{y} \leq v\right\}$.

Explicităm domeniul și obținem

$$\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq \frac{uv}{1+v},\ 0 < \frac{x}{v} \leq y \leq u - x\right\},$$

deci

$$\begin{aligned}
F_{(U,V)}(u,v) &= \int_0^{\frac{uv}{1+v}} \left(\int_{\frac{x}{v}}^{u-x} e^{-x-y} dy\right) dx \\
&= -\int_0^{\frac{uv}{1+v}} e^{-x-y}\Big|_{y=x/v}^{y=u-x} dx \\
&= \int_0^{\frac{uv}{1+v}} e^{-x}\left(e^{-x/v} - e^{-u+x}\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{uv}{1+v}} \left(e^{-x\frac{1+v}{v}} - e^{-u}\right) dx \\
&= \frac{e^{-x\frac{1+v}{v}}}{-\frac{1+v}{v}}\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{uv}{1+v}} - e^{-u}x\Big|_{x=0}^{x=\frac{uv}{1+v}} \\
&= \frac{v}{1+v}\left(1 - e^{-u}(1+u)\right),
\end{aligned}$$

pentru orice $u, v > 0$.

Avem că $f_{(U,V)}(u,v) = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v)$ deci

$$f_{(U,V)}(u,v) = ue^{-u}\frac{1}{(1+v)^2}.$$

Densitatea marginală este dată de

$$f_U(u) = \int_0^{\infty} ue^{-u}\frac{1}{(1+v)^2} dv = ue^{-u}, \quad u > 0,$$
$$f_V(v) = \int_0^{\infty} ue^{-u}\frac{1}{(1+v)^2} du = \frac{1}{(1+v)^2}, \quad v > 0.$$

Astfel am obținut atât densitățile de repartiție ale sumei și câtului, precum și faptul că ele sunt independente deoarece (vezi Propoziția 3.218)

$$f_{U,V}(u,v) = f_U(u)\, f_V(v)\,.$$

Se pot calcula f_{X+Y} și $f_{X/Y}$ folosind și formulele (3.98) și (3.103).

3.6.63 Dacă X, Y sunt două v.a. independente astfel încât $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, atunci[255] v.a.

$$U = \exp\left[\frac{-1}{2}\left(X^2+Y^2\right)\right], \quad V = \frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{X}{Y}\right)$$

sunt de asemenea independente și au repartiții rectangulare pe intervalul $(0,1)$.

Rezolvare:

Să calculăm direct funcția de repartiție:

$$F_{(U,V)}(u,v) = \iint_{\mathscr{D}} f_X(x)\, f_Y(y)\, dxdy, = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} dxdy,$$

unde $\mathscr{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} \le u,\ \frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{x}{y}\right) \le v\right\}$ (de unde se vede că trebuie să luăm $(u,v)\in[0,1]\times[0,1]$; daca $(u,v)\notin[0,1]\times[0,1]$, atunci este usor de calculat funcția de repartiție $F_{(U,V)}(u,v)$).

Folosim coordonatele polare și ecuațiile de legatură $\begin{cases} x = \rho\sin\theta, \\ y = \rho\cos\theta \end{cases}$ și domeniul de integrare devine

$$\begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} \le u, \\ \dfrac{1}{2\pi}\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) \le v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \ge \sqrt{-2\ln u}, \\ \theta \le 2\pi v. \end{cases}$$

Atunci, pentru orice $(u,v)\in[0,1]\times[0,1]$,

$$F_{(U,V)}(u,v) = \int_{\sqrt{-2\ln u}}^{\infty}\left(\int_0^{2\pi v}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\rho d\theta\right)d\rho = uv,$$

[255] Vezi și Exercițiului 3.6.54.

ceea ce demonstrează că (U, V) urmează o repartiție rectangulară pe $[0,1]\times[0,1]$ (vezi și Exemplul 3.214) și, în plus, U și V sunt independente (vezi Propoziția 3.187 sau Propoziția 3.218).

3.6.64 Dacă X, Y sunt două v.a. independente astfel încât $X, Y \sim \mathscr{N}(0, \sigma^2)$, atunci v.a.

$$U = X^2 + Y^2,\ V = \frac{X}{Y}$$

sunt de asemenea independente.

Rezolvare:

Conform Propoziției 3.245, $U = X^2+Y^2 \sim \chi^2(2,\sigma)$, deci $f_U(u) = \frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}$, cu $u \geq 0,\ \sigma > 0$.

Apoi, conform Exercițiului 3.6.49, $V = \frac{X}{Y} \sim \mathscr{C}(0,1)$, deci $f_V(v) = \frac{1}{\pi(1+u^2)}$, cu $u \in \mathbb{R}$.

Să calculăm

$$F_{(U,V)}(u,v) = \iint_{\mathscr{D}} f_X(x)\, f_Y(y)\, dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint_{\mathscr{D}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy,$$

unde $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq u,\ \frac{x}{y} \leq v\right\}$.

Folosim coordonatele polare și ecuațiile de legătură $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ și obținem că $\rho \leq \sqrt{u}$. Pentru a calcula domeniul lui θ folosim formulele trigonometrice

$$\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan(\theta)} = \tan\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right).$$

Atunci, avem că $\frac{x}{y} \leq v$ este echivalent cu $\frac{1}{\tan(\theta)} \leq v$.

Observăm, în plus, că $\mathscr{D} = \mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2$, unde $\mathscr{D}_1 = \{(x,y) \in \mathscr{D} : y \geq 0\}$, iar $\mathscr{D}_2 = \{(x,y) \in \mathscr{D} : y < 0\}$. În cazul lui $\mathscr{D}_1$ obținem

$$y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta \in [0,\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \theta - \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

deci

$$\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan(\theta)} \geq -v \quad \Leftrightarrow \quad \theta \geq \frac{\pi}{2} - \arctan(v).$$

În consecință $\theta \in \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(v), \pi\right]$.

În cazul lui $\mathscr{D}_2$ obținem

$$y < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta \in (\pi, 2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \theta - \frac{3\pi}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

deci

$$\tan\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan(\theta)} \geq -v \quad \Leftrightarrow \quad \theta \geq \frac{3\pi}{2} - \arctan(v).$$

În consecință $\theta \in [\frac{3\pi}{2} - \arctan(v), 2\pi)$.

Explicitarea domeniului $\mathscr{D}$ este dată de

$$\begin{cases} \rho \in [0, \sqrt{u}] \\ \theta \in \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(v), \pi\right] \bigcup \left[\frac{3\pi}{2} - \arctan(v), 2\pi\right). \end{cases}$$

Atunci, integrala dublă este

$$\begin{aligned} F_{(U,V)}(u,v) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_{\mathscr{D}_1} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dxdy + \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_{\mathscr{D}_2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(1 - e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}\right)\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \arctan(v) + 2\pi - \frac{3\pi}{2} + \arctan(v)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(1 - e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}\right)(\pi + 2\arctan(v)), \end{aligned}$$

deci

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{u}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\pi(1+v^2)},$$

ceea ce demonstrează că U și V sunt independente (vezi Propoziția 3.218 sau Remarca 3.219).

3.6.65 Vectorul aleator (X, Y) este dat prin densitatea de repartiție (3.123). Să se calculeze $\mathbb{P}(X < 2Y)$, $\mathbb{P}(X > 1)$ și $\mathbb{P}(X = Y)$.

Rezolvare:

$$\mathbb{P}(X < 2Y) = \mathbb{P}((X,Y) \in \mathscr{D}) = \iint_{\mathscr{D}} e^{-x-y} \mathbb{1}_{\{x>0, y>0\}} dxdy,$$

unde $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2y\right\}$.

Explicităm domeniul, ținând cont și de expresia densității $f_{(X,Y)}$, și obținem domeniul de integrare $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > x/2\right\}$, deci

$$\mathbb{P}\left(X < 2Y\right) = \int_0^\infty \left(\int_{x/2}^\infty e^{-x-y} dy\right) dx = 2/3.$$

Densitatea marginală este dată de

$$f_X\left(x\right) = \int_0^\infty e^{-x-y} dy = e^{-x}, \quad x \geq 0,$$

deci

$$\mathbb{P}\left(X > 1\right) = 1 - F_X\left(1\right) = 1 - \int_{-\infty}^1 f_X\left(x\right) dx = 1 - \int_0^1 e^{-x} dx = e^{-1}.$$

Avem

$$\mathbb{P}\left(X = Y\right) = \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}} e^{-x-y} dx dy = 0.$$

3.6.66 Vectorul aleator (X, Y) este repartizat constant în pătratul de latură a și nul în afara lui. Să se determine densitatea $f_{(X,Y)}$, funcția de repartiție $F_{(X,Y)}$ precum și densitățile marginale f_X, f_Y.

Să se stabilească dacă X și Y sunt independente.

Rezolvare:

Obținem (vezi și Exemplul 3.214)

$$f_{(X,Y)}\left(x,y\right) = \frac{1}{a^2} \mathbb{1}_{\mathscr{D}}\left(x,y\right), \quad \text{pentru orice } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

unde $\mathscr{D} = [-a/2, a/2] \times [-a/2, a/2]$ este un pătrat de latură a centrat în origine.

Astfel, **vectorul** (X, Y) **reprezintă coordonatele unui punct distribuit uniform în pătratul** $\mathscr{D}$ **de latură** a.

Densitățile marginale sunt

$$f_X\left(x\right) = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a^2} \mathbb{1}_{[-a/2,a/2]}\left(x\right) dy = \frac{1}{a} \mathbb{1}_{[-a/2,a/2]}\left(x\right),$$

$$f_Y\left(y\right) = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a^2} \mathbb{1}_{[-a/2,a/2]}\left(y\right) dx = \frac{1}{a} \mathbb{1}_{[-a/2,a/2]}\left(y\right),$$

deci X și Y sunt v.a. independente (vezi Propoziția 3.218 sau Remarca 3.219).

3.6.67 Funcția f este constantă în interiorul unui cerc de rază r și nulă în afară. Să se determine f astfel încât să fie o densitate de repartiție pentru vectorul aleator (X, Y). Să se calculeze și densitățile marginale f_X, f_Y.

Rezolvare:

Obținem (vezi și Exemplul 3.216)

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\pi r^2} \mathbb{1}_{\mathscr{D}}(x, y), \quad \text{pentru orice } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

unde

$$\begin{aligned} \mathscr{D} &= \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq r \right\} \\ &= \left\{ (x, y) : x \in [-r, r], y \in \left[-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

este un disc de rază r centrat în origine.

Astfel, **vectorul (X, Y) reprezintă coordonatele unui punct distribuit uniform în discul $\mathscr{D}$ de rază r.**

Densitățile marginale sunt

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{\pi r^2} \mathbb{1}_{[-r,r]}(x)\, dy = \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - x^2}\, \mathbb{1}_{[-r,r]}(x)$$

și

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-r}^{r} \frac{1}{\pi r^2} \mathbb{1}_{[-\sqrt{r^2-x^2}, \sqrt{r^2-x^2}]}(y)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx \\ &= \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - y^2}\, \mathbb{1}_{[-r,r]}(y), \end{aligned}$$

deoarece

$$\mathbb{1}_{\left[-\sqrt{r^2-x^2}, \sqrt{r^2-x^2}\right]}(y) = \mathbb{1}_{\left[-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2}\right]}(x).$$

3.6.68 Fie două v.a. independente $X, Y \sim \mathscr{N}(0, 1)$. Să se determine raza cercului cu centru în origine astfel încât

$$\mathbb{P}((X, Y) \in \mathscr{D}) = 0.95,$$

unde $\mathscr{D} = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$ este discul cu centrul în origine și de rază R.

Rezolvare:

Densitatea de repartiție a vectorului (X, Y) este dată de (vezi Remarca 3.219) $f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, cu $x, y \in \mathbb{R}$, (vezi Exemplul 3.217).

Deci

$$\mathbb{P}\left((X, Y) \in \mathscr{D}\right) = \iint_{\mathscr{D}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx dy.$$

Folosim coordonatele polare și ecuațiile de legătură $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ și obținem

$$\mathbb{P}\left((X, Y) \in \mathscr{D}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} \, d\rho \right) d\theta = 1 - e^{-R^2/2}.$$

Din condiția impusă obțin

$$0.95 = 1 - e^{-R^2/2} \quad \Leftrightarrow \quad R = \sqrt{2\ln 20}.$$

3.6.69 Un arcaș lovește o țintă sub forma unui punct din plan. Dacă (X, Y) reprezintă coordonatele locului țintit M, acesta este un vector normal bidimensional[256] cu densitatea de repartiție

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{2\sigma^2}}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

unde (a, b) reprezintă coordonatele țintei.

Să se calculeze probabilitatea ca toate săgețile să fie trase în cercul de rază R și centru (a, b).

---

[256] În general, dacă un vector aleator bidimensional $\mathbf{Z} = (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ are densitatea de repartiție $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\mathbf{\Sigma})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu})}$, pentru orice $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$, unde $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^2$, iar $\mathbf{\Sigma} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică, pozitiv semi-definită și inversabilă, atunci spunem că $\mathbf{Z}$ urmează **distribuția normală bidimensională** de parametri $\boldsymbol{\mu}$ și $\mathbf{\Sigma}$, și scriem $\mathbf{Z} \sim \mathscr{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$. În acest caz vom obține că parametrul $\boldsymbol{\mu}$ este media vectorului aleator $\mathbf{Z}$, iar $\mathbf{\Sigma}$ este matricea de covarianță asociată vectorului aleator $\mathbf{Z}$, dată de definiția (3.85).

În cazul problemei noastre $\boldsymbol{\mu} = (a, b)$, iar $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

Fie $\mathscr{D}$ discul de rază R și centru (a, b). Să notăm

$$G(R) = \mathbb{P}((X, Y) \in \mathscr{D}) = \iint_{\mathscr{D}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{2\sigma^2}} dxdy.$$

Folosim ecuațiile de legătură cu coordonatele polare $\begin{cases} x = a + \rho\cos\theta, \\ y = b + \rho\sin\theta \end{cases}$ și obținem că

$$\mathbb{P}((X, Y) \in \mathscr{D}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho \right) d\theta = 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}.$$

Densitatea de repartiție a razei este deci

$$f(R) = G'(R) = \frac{R}{\sigma^2} e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}.$$

3.6.70 Un arcaș lovește o țintă sub forma unui punct din plan. Dacă (X, Y) reprezintă coordonatele locului țintit M, acesta este un vector normal bidimensional cu densitatea de repartiție

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ținta poate fi un disc sau interiorul unui pătrat, dar de arii egale. Pentru ce formă a țintei probabilitatea de ochire este mai mare?

Rezolvare:

Notăm cu $\mathscr{D}$ discul cu centrul în origine și de rază R. Avem

$$\mathbb{P}((X, Y) \in \mathscr{D}) = \iint_{\mathscr{D}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_{\Delta} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho d\theta,$$

unde $\Delta = \{(\rho, \theta) : \rho \in [0, R],\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Notăm cu $\mathscr{P}$ pătratul cu centrul în origine. Atunci, $\mathbb{P}((X, Y) \in \mathscr{P})$ este dată de o integrală dublă cu același integrand, dar calculată pe un alt domeniu Δ.

Observăm că integrandul $\dfrac{\rho}{e^{\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}}$ este o funcție descrescătoare în raport cu ρ, deci integrala este mai mare dacă ρ este mai mic.

În cazul discului avem $\rho \leq R$, iar în cazul pătratului ρ poate lua valoarea maximă (în colțuri) $R\sqrt{2} > R$, deci integrala dublă este mai mare în cazul discului.

3.6.2 Valori medii. Momente

3.6.71 Fie X, Y două v.a. independente. Să se arate că

$$D^2(XY) = D^2(X)\,D^2(Y) + [\mathbb{E}(X)]^2 D^2(Y) + [\mathbb{E}(Y)]^2 D^2(X).$$

Dacă $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ și $Y \sim \mathcal{N}(1, \sigma^2)$, să se calculeze $D^2(XY)$.

Rezolvare:

Avem

$$\begin{aligned} D^2(XY) &= \mathbb{E}[(XY)^2] - [\mathbb{E}(XY)]^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - [\mathbb{E}(X)]^2[\mathbb{E}(Y)]^2 \\ &= (D^2(X) + [\mathbb{E}(X)]^2)(D^2(Y) + [\mathbb{E}(Y)]^2) - [\mathbb{E}(X)]^2[\mathbb{E}(Y)]^2 \\ &= D^2(X)\,D^2(Y) + [\mathbb{E}(X)]^2 D^2(Y) + [\mathbb{E}(Y)]^2 D^2(X). \end{aligned}$$

3.6.72 Să se arate că dacă v.a. X are valori nenegative și media $\mathbb{E}(X) = \mu$, iar dacă $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1)$, atunci

$$\lambda \leq \mu \leq \lambda + 1.$$

Rezolvare:

Deoarece $\bigcup_{n=0}^{\infty} \{n \leq X < n+1\} = \Omega$ avem că

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(n \leq X < n+1) = 1.$$

Să definim acum v.a. discrete $Y = n$, dacă $X \in [n, n+1)$ și $Z = n+1$, dacă $X \in [n, n+1)$.

Evident

$$Y \leq X < Z$$

și deci

$$\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Z).$$

Pe de altă parte,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1) = \lambda,$$

iar

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(Z=n) \\ &= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\mathbb{P}(Z=n+1) \\ &= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\mathbb{P}(n \leq X < n+1) \\ &= \lambda + 1.\end{aligned}$$

3.6.73 Fie v.a. X cu media $\mathbb{E}(X) = 30$ și deviația standard $\sigma = 4$. Să se arate că

$$\mathbb{P}(16 < X < 44) \geq 45/49.$$

Rezolvare:

Din inegalitatea (2.76) a lui Cebâșev obținem

$$\mathbb{P}(|X-30| < 14) \geq 1 - \frac{4^2}{14^2} = \frac{45}{49}.$$

3.6.74 Fie X, Y v.a. independente astfel încât $X \sim \mathcal{N}(1,4)$ și $Y \sim \mathcal{U}[0,2]$. Să se calculeze $\mathbb{E}\left(X^2\right)$, $\mathbb{E}\left(X^2 - Y^2\right)$, $\mathrm{D}^2(X+Y)$, $\mathrm{D}^2(X-Y)$.

Rezolvare:

Se determină mai întâi distribuțiile lui X^2 și Y^2 folosind Propoziția 3.245 precum și Exercițiul 3.6.13.

3.6.75 Fie X o v.a. a cărei densitate de repartiție este:

$$\begin{aligned}&(a)\ \ f(x) = c\ln\left(\frac{a}{x}\right)\mathbb{1}_{(0,a)}(x), && (b)\ \ f(x) = |x|\,\mathbb{1}_{(-1,1)}(x), \\ &(c)\ \ f(x) = (1-|1-x|)\,\mathbb{1}_{(0,2)}(x), && (d)\ \ f(x) = 2x\,\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \\ &(e)\ \ f(x) = ce^{-\frac{x}{\sigma}}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x),\ \text{cu } \sigma > 0, && (f)\ \ f(x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{\{|x-1|\leq c\}}.\end{aligned}$$

Să se calculeze valoarea medie și dispersia v.a. X (și acolo unde este cazul să se determine mai întâi c).

Rezolvare:

(a) Impunem

$$\begin{aligned}1 &= \int_0^a c \ln\left(\frac{a}{x}\right) dx \\ &= ac\ln(a) - c\int_0^a \ln(x)\,dx \\ &= ac\ln(a) - cx\ln(x)\big|_{x=0}^{x=a} + c\int_0^a dx.\end{aligned}$$

Folosind limita $\lim_{x\to 0_+} x\ln x = 0$ obținem $c = 1/a$.

Apoi $\mathbb{E}(X) = \frac{a}{4}$ și $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{a^2}{9}$.

(b) $\mathbb{E}(X) = 0$ și $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 2\int_0^1 x^2\,|x|\,dx = \frac{1}{2}$.

(c) $\mathbb{E}(X) = 1$ și $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{14}{3}$.

(d) $\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3}$ și $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{1}{2}$.

3.6.76 Fie X o v.a. a cărei densitate este

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)\cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze valoarea medie și dispersia v.a. X și $Y = |\sin X|$.

Rezolvare:

Se obține $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathrm{D}^2(X) = \pi^2/4 - 2$, $\mathbb{E}(Y) = 1/2$, $\mathrm{D}^2(Y) = 1/12$.

3.6.77 Să se calculeze momentul absolut de ordin $a > 0$ al unei v.a. distribuite Cauchy $X \sim \mathscr{C}(0,1)$.

Rezolvare:

Folosind definiția obținem

$$\mathbb{E}\left(|X|^a\right) = \int_{\mathbb{R}} |x|^a f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^a}{\pi\left(1+x^2\right)}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2}dx.$$

Să folosim un criteriu de convergență pentru integrale improprii. Avem:

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot \frac{x^a}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{a+\alpha}}{1+x^2} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } a+\alpha = 2, \\ 0, & \text{dacă } a+\alpha < 2, \\ \infty, & \text{dacă } a+\alpha > 2. \end{cases}$$

Prin urmare, pentru orice $a \in (0,1)$, obținem că există $\alpha > 1$ (de fapt, luăm orice $\alpha \in (1, 2-a)$) astfel încât $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} \cdot \frac{x^a}{1+x^2} = 0 < \infty$, deci integrala

$$\mathbb{E}\left(|X|^a\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2}\,dx < \infty.$$

Pe de altă parte, deoarece pentru orice $a > 1$, avem că există $\alpha \leq 1$ (de fapt, luăm $\alpha = 1$) astfel încât $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} \cdot \frac{x^a}{1+x^2} = \infty > 0$, deducem că integrala este divergentă, deci

$$\mathbb{E}\left(|X|^a\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2}\,dx = \infty.$$

Evident, în cazul $a = 1$, avem că există $\alpha \leq 1$ (de fapt, luăm $\alpha = 1$) astfel încât $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} \cdot \frac{x}{1+x^2} = 1 \in (0,\infty)$, și astfel obținem că integrala este divergentă, deci

$$\mathbb{E}\left(|X|\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \infty.$$

Prin urmare, o v.a. distribuită Cauchy nu admite momente absolute finite de nici un ordin $a \geq 1$.

Astfel obținem că o **v.a. distribuită Cauchy nu admite (vezi Exemplul 3.40), moment de ordin** 1 **(i.e. nu admite medie), dar admite momente absolute de orice ordin** $a > 0$, iar acestea sunt **finite ori de câte ori** $a \in (0,1)$.

3.6.78 Să se calculeze media v.a. $Y = \cos X$, unde $X \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$.

Rezolvare:

Avem

$$\mathbb{E}(\cos X) = \int_{\mathbb{R}} \cos(x)\, f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x)\,dx = 0.$$

3.6.79 Fie X o v.a. cu densitatea de repartiție $f_X(x) = ae^{-|x|}$, pentru $x \in \mathbb{R}$. Să se determine a și apoi să se calculeze media $\mathbb{E}(X)$, dispersia $\mathrm{D}^2(X)$ și deviația standard $\mathrm{D}(X)$.

Rezolvare:

Funcția este pară și impunem

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-|x|}dx = 2\int_0^{\infty} ae^{-|x|}dx = 2a\,\frac{e^{-x}}{-1}\Big|_{x=0}^{x=\infty} = 2a,$$

deci $a = 1/2$, adică X este o v.a. distribuită Laplace de parametri 1 și 0.

Funcția $xe^{-|x|}$ este impară, deci

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} xe^{-|x|}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} xe^{-|x|}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx.
\end{aligned}$$

Aplicăm un criteriu de convergență: pentru orice $\alpha > 1$, obținem

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} \cdot xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{e^{x}} = 0 < \infty,$$

deci integrala improprie $\int_0^\infty xe^{-x}dx$ este convergentă (integrala se poate și calcula folosind metoda de integrare prin părți).

Deci $\mathbb{E}(X) = 0$.

În ceea ce privește dispersia, funcția $x^2e^{-|x|}$ este pară, deci

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-|x|}dx \\
&= \int_{0}^{\infty} x^2e^{-x}dx \\
&= x^2\frac{e^{-x}}{-1}\Big|_{x=0}^{x=\infty} - 2\int_{0}^{\infty} x\frac{e^{-x}}{-1}dx \\
&= -\frac{x^2}{e^{x}}\Big|_{x=0}^{x=\infty} + 2\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx \\
&= 2x\frac{e^{-x}}{-1}\Big|_{x=0}^{x=\infty} - 2\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{-1}dx \\
&= 2\frac{e^{-x}}{-1}\Big|_{x=0}^{x=\infty} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Obținem

$$\mathrm{D}^2(X) = 2 \quad \text{și} \quad \mathrm{D}(X) = \sqrt{2}.$$

3.6.80 Să se calculeze media, dispersia și deviația standard a unei v.a. X distribuită Laplace (vezi Nota 245).

Rezolvare:

Pentru a calcula media facem substituția $x' = \frac{x-\mu}{a}$. Obținem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{|x-\mu|}{a}}dx \\
&= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\mu} xe^{-\frac{|x-\mu|}{a}}dx + \frac{1}{2a}\int_{\mu}^{\infty} xe^{-\frac{|x-\mu|}{a}}dx \\
&= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{0} a\left(ax'+\mu\right)e^{x'}dx' + \frac{1}{2a}\int_{0}^{\infty} a\left(ax'+\mu\right)e^{-x'}dx' \\
&= \mu,
\end{aligned}$$

având în vedere că $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx = -\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx = -1$ și $\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx = 1$.

Similar se obține

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\frac{|x-\mu|}{a}}dx \\
&= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\mu} x^2e^{-\frac{|x-\mu|}{a}}dx + \frac{1}{2a}\int_{\mu}^{\infty} x^2e^{-\frac{|x-\mu|}{a}}dx \\
&= 3a^2,
\end{aligned}$$

deci $\mathrm{D}^2(X) = 2a^2$, iar $\mathrm{D}(X) = a\sqrt{2}$.

3.6.81 Se dă densitatea de repartiție $f(x) = ax^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$. Să se determine a și să se calculeze apoi media și dispersia v.a. X.

Rezolvare:

Impunem, folosind substituția $x' = \frac{x^2}{2}$,

$$\begin{aligned}
1 &= a\int_{0}^{\infty} x^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= a\int_{0}^{\infty} \left(2x'\right)^{\frac{n-1}{2}}e^{-x'}\left(2x'\right)^{-\frac{1}{2}}dx'
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{\frac{n}{2}-1} a \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} dx \\
&= 2^{\frac{n}{2}-1} a \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Deci $a = 2^{1-\frac{n}{2}} / \Gamma\left(n/2\right).$

Obținem media

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X\right) &= a \int_0^\infty x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= a \int_0^\infty \left(2x'\right)^{\frac{n}{2}} e^{-x'} \left(2x'\right)^{-\frac{1}{2}} dx' \\
&= a 2^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty x^{\frac{n-1}{2}} e^{-x} dx \\
&= \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},
\end{aligned}
$$

iar $\mathbb{E}\left(X^2\right) = n.$

3.6.82 Se dă densitatea de repartiție $f\left(x\right) = a x^{-p} e^{-\frac{\gamma}{x}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}\left(x\right)$, pentru $x \in \mathbb{R}$, unde $\gamma > 0$. Să se determine a și să se calculeze momentele μ_k de ordin k.

Rezolvare:

Impunem, folosind substituția $x' = \frac{\gamma}{x}$,

$$
\begin{aligned}
1 &= a \int_0^\infty x^{-p} e^{-\frac{\gamma}{x}} dx \\
&= a \int_\infty^0 \gamma^{-p} \left(x'\right)^p e^{-x'} \frac{-\gamma}{\left(x'\right)^2} dx' \\
&= a \gamma^{1-p} \int_0^\infty x^{(p-1)-1} e^{-x} dx \\
&= a \gamma^{1-p} \Gamma\left(p-1\right).
\end{aligned}
$$

Deci $a = \gamma^{p-1} / \Gamma\left(p-1\right).$

Pentru orice $k < p - 1$ avem

$$
\mu_k = \mathbb{E}(X^k) = a \int_0^\infty x^{k-p} e^{-\frac{\gamma}{x}} dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= a \int_{\infty}^{0} \gamma^{k-p} \left(x'\right)^{p-k} e^{-x'} \frac{-\gamma}{\left(x'\right)^2} dx' \\
&= a\gamma^{k-(p-1)} \int_0^\infty x^{(p-k-1)-1} e^{-x} dx \\
&= \gamma^k \frac{\Gamma(p-1-k)}{\Gamma(p-1)}.
\end{aligned}
$$

3.6.83 Se dă densitatea de repartiție $f(x) = ax^n e^{-\alpha^2 x^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$. Să se determine a și α astfel încât f fie densitatea de repartiție a unei v.a. cu media m.

Rezolvare:

Se obține $a = \frac{2\alpha^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, $\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{m\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

3.6.84 Fie v.a. $X \sim \mathcal{U}[0,1]$. Să se calculeze $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|)$ și

$$
\iint_{\mathbb{R}^2} |x-y| f_X(x) f_X(y) \, dxdy.
$$

Rezolvare:

Conform Propoziției 3.88, media este $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$. Deci

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|) &= \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| dx \\
&= \int_0^{1/2} \left| x - \frac{1}{2} \right| dx + \int_{1/2}^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| dx \\
&= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - x \right) dx + \int_{1/2}^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Apoi

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^2} |x-y|\, f_X(x)\, f_X(y)\, dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 |x-y|\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^x |x-y|\, dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_x^1 |x-y|\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=x} dx + \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} - xy \right) \Big|_{y=x}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x - \frac{x^2}{2} + x^2 \right) dx \\
&= \frac{x^3}{6} \Big|_{x=0}^{x=1} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

3.6.85 Fie X o v.a. cu densitatea de repartiție $f(x) = \dfrac{x^m}{\Gamma(m+1)} e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, pentru $x \in \mathbb{R}$. Să se arate, folosind inegalitatea lui Cebâșev, că

$$\mathbb{P}(0 < X < 2(m+1)) \geq \frac{m}{m+1}.$$

Rezolvare:

Folosim Propoziția 3.140 și obținem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty x \frac{x^m}{\Gamma(m+1)} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \Gamma(m+2) \\
&= \frac{(m+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1)} \\
&= m+1
\end{aligned}$$

și $\mathrm{D}^2(x) = m+1$ deoarece

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_0^\infty x^2 \frac{x^m}{\Gamma(m+1)} e^{-x} dx = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \Gamma(m+3) = (m+1)(m+2).$$

Aplicăm inegalitatea (2.76) a lui Cebâșev:

$$\mathbb{P}\left(|X-(m+1)|<\epsilon\right) \geq 1-\frac{m+1}{\epsilon^2}$$

și obținem, luând $\epsilon = m+1$,

$$\mathbb{P}\left(0<X<2\left(m+1\right)\right) \geq \frac{m}{m+1}.$$

3.6.86 Fie v.a. $X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$. Să se determine condițiile în care v.a. $Y = e^X$ admite medie și dispersie (vezi și Propoziția 3.240).

Rezolvare:

Se obține că există media dacă $\lambda - 1 > 0$, iar dispersia dacă $\lambda - 2 > 0$.

Avem

$$\mathbb{E}\left(Y\right) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-1)x} = \frac{\lambda}{-\left(\lambda-1\right)} e^{-(\lambda-1)x}\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

și

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-2)x} = \frac{\lambda}{-\left(\lambda-2\right)} e^{-(\lambda-2)x}\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-2}.$$

3.6.87 Fie o v.a. repartizată normal $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Să se calculeze media v.a. $U = e^{tX^2}$, unde $t \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

Avem

$$\mathbb{E}\left(U\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2\left(\frac{1}{2}-t\right)} dx,$$

care este finită doar dacă $\left(\frac{1}{2}-t\right) > 0$.

În acest caz folosim substituția $x\sqrt{\frac{1}{2}-t} = x'$ și obținem

$$\mathbb{E}\left(U\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x')^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}-t}} dx'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} - t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x')^2} dx'$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} - t}} \sqrt{\pi}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-2t}}.$$

3.6.88 Să se calculeze momentele centrale ν_k de ordin k ale v.a. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Rezolvare:

Momentele centrale de ordin k sunt definite de $\nu_k = \mathbb{E}\big((X-\mu)^k\big)$, deci $\nu_0 = 1$, iar $\nu_1 = \mathbb{E}(X-\mu) = 0$.

În cazul $k \geq 2$ facem substituția $(x-\mu)/\sqrt{2}\sigma = t$:

$$\nu_k = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^k f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^k}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma t)^k e^{-\frac{(\sqrt{2}\sigma t)^2}{2\sigma^2}} \sqrt{2}\sigma dt$$
$$= \frac{(\sqrt{2}\sigma)^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2} dt$$
$$= \frac{(\sqrt{2}\sigma)^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-1} \Big(\frac{e^{-t^2}}{-2}\Big)' dt,$$

deci

$$\nu_k = \frac{(\sqrt{2}\sigma)^k}{-2\sqrt{\pi}} \left(t^{k-1} e^{-t^2}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - (k-1) \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-2} e^{-t^2} dx \right)$$
$$= \frac{(\sqrt{2}\sigma)^k}{-2\sqrt{\pi}} \left(0 - (k-1) \frac{\nu_{k-2}}{\frac{(\sqrt{2}\sigma)^{k-2}}{\sqrt{\pi}}} \right)$$
$$= (k-1)\,\sigma^2 \nu_{k-2}.$$

Deoarece $\nu_1 = 0$ și $\nu_2 = \sigma^2$, obținem, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} &\nu_{2k+1} = 0 \quad \text{și} \\ &\nu_{2k} = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot \sigma^{2k} = (2k-1)!! \cdot \sigma^{2k}. \end{aligned} \tag{3.124}$$

În particular,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\big(\,(X-\mu)^3\,\big) = 0 \quad \text{și} \\ &\mathbb{E}\big(\,(X-\mu)^2\,\big) = \sigma^2, \quad \mathbb{E}\big(\,(X-\mu)^4\,\big) = 3\sigma^4. \end{aligned} \tag{3.125}$$

3.6.89 Să se calculeze $\mathbb{E}\left(|X-\mu|\right)$ în cazul v.a. $X \sim \mathcal{N}\big(\mu, \sigma^2\big)$.

Rezolvare:

Facem substituția $(x-\mu)/\sqrt{2}\sigma = t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(|X-\mu|\right) = \int_{\mathbb{R}} |x-\mu|\, f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x-\mu|}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\sqrt{2}\sigma t\right| e^{-\frac{(\sqrt{2}\sigma t)^2}{2\sigma^2}} \sqrt{2}\sigma dt \\ &= \frac{2\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t e^{-t^2} dt \\ &= \frac{2\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \left.\frac{e^{-t^2}}{-2}\right|_{x=0}^{x=\infty} \\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

3.6.90 Să se calculeze momentele absolute

$$\beta_{2r} = \mathbb{E}\big(\,|X|^{2r}\,\big) \quad \text{și} \quad \beta_{2r+1} = \mathbb{E}\big(\,|X|^{2r+1}\,\big)$$

în cazul v.a. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Rezolvare:

Facem substituția $x/\sqrt{2} = t$:

$$\begin{aligned} \beta_{2r} = \int_{\mathbb{R}} |x|^{2r} f(x)\, dx = 2\int_0^{\infty} \frac{|x|^{2r}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (\sqrt{2}t)^{2r} e^{-\frac{(\sqrt{2}t)^2}{2}} \sqrt{2} dt \\ &= \frac{2^{r+1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{2r} e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2^{r+1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{2r-1} \Big(\frac{e^{-t^2}}{-2}\Big)' dt \\
&= \frac{-2^r}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{t^{2r-1}}{e^{t^2}} \Big|_{x=0}^{x=\infty} - (2r-1) \int_0^\infty t^{2r-2} e^{-t^2} dt \right) \\
&= \frac{2^r (2r-1)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\beta_{2r-2}}{2^r} \\
&= (2r-1)\,\beta_{2r-2}\,.
\end{aligned}
$$

Dar $\beta_2 = \mathbb{E}\left(X^2\right) = 1$, deoarece $\mathbb{E}\left(X\right) = 0$ și $\mathrm{D}^2\left(X\right) = 1$. Deci

$$\beta_{2r} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2r-1) \stackrel{\text{def}}{=\!=} (2r-1)!!.$$

Să calculăm și

$$
\begin{aligned}
\beta_{2r+1} = \int_{\mathbb{R}} |x|^{2r+1} f(x)\,dx &= 2\int_0^\infty \frac{|x|^{2r+1}}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (\sqrt{2}t)^{2r+1} e^{-\frac{(\sqrt{2}t)^2}{2}} \sqrt{2}dt \\
&= \frac{2^{r+1}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{2r+1} e^{-t^2} dt \\
&= \frac{2^{r+1}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{2r} \Big(\frac{e^{-t^2}}{-2}\Big)' dt \\
&= \frac{-2^r\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{t^{2r}}{e^{t^2}} \Big|_{x=0}^{x=\infty} - 2r \int_0^\infty t^{2r-1} e^{-t^2} dt \right) \\
&= \frac{2r\,2^r\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\beta_{2r-1}}{2^r\sqrt{2}} \\
&= 2r\,\beta_{2r-1}\,.
\end{aligned}
$$

Dar

$$
\begin{aligned}
\beta_1 = \int_{\mathbb{R}} |x|\, f(x)\,dx &= 2\int_0^\infty \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{-1} \Big|_{x=0}^{x=\infty}
\end{aligned}
$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

deci

$$\beta_{2r+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2r) = 2^r r! \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

3.6.91 Fie v.a. X distribuită Beta de parametri p, q (vezi Nota 233). Să se verifice că f este o densitate și să se calculeze momentele μ_1, μ_2 precum și dispersia.

Rezolvare:

Avem, mai întâi,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{1}{\beta(p,q)} \beta(p,q) = 1.$$

Media este dată de

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-1}\,dx \\
&= \frac{1}{\beta(p,q)} \beta(p+1,q) \\
&= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} \\
&= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} \\
&= \frac{p}{p+q}.
\end{aligned}$$

Dispersia este dată de $\mathrm{D}^2(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$, deoarece

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\,dx \\
&= \frac{1}{\beta(p,q)} \beta(p+2,q) \\
&= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{\Gamma(p+2)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+2)} \\
&= \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}.
\end{aligned}$$

3.6.92 Fie o v.a. repartizată Gamma $X \sim \mathrm{Gamma}\,(p, 1)$. Să se calculeze momentele centrale ν_k de ordin k ale v.a. X.

Rezolvare:

Conform Remarcii 3.142, media $\mu_1 = \mathbb{E}\,(X) = p$ și, folosind Remarca 3.69, deducem

$$\nu_2 = \mu_2 - \mu_1^2 = p\,(p+1) - p^2 = p$$

precum și

$$\nu_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3 = p\,(p+1)\,(p+2) - 3p^2\,(p+1) + 2p^3 = 2p.$$

3.6.93 Fie o v.a. repartizată Student $X \sim t\,(n)$. Să se calculeze momentele μ_k de ordin k și momentele centrale ν_k de ordin k ale v.a. X.

Rezolvare:

Să considerăm cazul $n > 2$. Să notăm $C_0 = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

Evident, $\nu_k = \mu_k$, deoarece $\mu_1 = 0$.

Să calculăm

$$\begin{aligned}\nu_{2k+1} = \mu_{2k+1} = \mathbb{E}(X^{2k+1}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} f\,(x)\,dx \\ &= \int_0^{\infty} x^{2k+1} f\,(x)\,dx - \int_0^{\infty} x^{2k+1} f\,(x)\,dx\end{aligned}$$

(integrandul fiind funcție impară).

Pe de altă parte, aplicând un criteriu de convergență, observăm că

$$x^{\alpha+2k+1}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = n^{\frac{n+1}{2}}\,\frac{x^{\alpha+2k+1}}{(x^2+n)^{-\frac{n+1}{2}}}.$$

Luând $\alpha = n - 2k$ obținem $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+2k+1}}{(x^2+n)^{-\frac{n+1}{2}}} = 1 \in (0,\infty)$, deci integrala improprie $\int_0^{\infty} x^{\alpha+2k+1}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$ este convergentă dacă $n > 2k+1$ și divergentă dacă $n \in (0, 2k+1]$. Obținem că media $\mathbb{E}(X^{2k+1}) = 0$, dacă $n > 2k+1$ și nu există dacă $n \in (0, 2k+1]$.

Deci

$$\nu_{2k+1} = \mu_{2k+1} = 0, \quad \text{pentru orice } k \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } n > 2k+1$$

și

$$\mu_{2k+1} \text{ nu există,} \quad \text{pentru orice } k \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } n \in (0, 2k+1].$$

Să calculăm

$$\nu_{2k} = \mu_{2k} = \mathbb{E}(X^{2k}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} f(x)\, dx = 2\int_0^{\infty} x^{2k} f(x)\, dx$$

(integrandul fiind funcție pară).

Aplicând un criteriu de convergență, observăm că

$$x^{\alpha+2k}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = n^{\frac{n+1}{2}} \frac{x^{\alpha+2k}}{(x^2+n)^{-\frac{n+1}{2}}}.$$

Luând $\alpha = n+1-2k$ obținem $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+2k}}{(x^2+n)^{-\frac{n+1}{2}}} = 1 \in (0,\infty)$, deci integrala improprie $\int_0^{\infty} x^{\alpha+2k}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$ este convergentă dacă $n > 2k$ și divergentă dacă $n \in (0, 2k]$. Obținem că media $\mathbb{E}(X^{2k})$ există și este finită doar dacă $n > 2k$.

Să presupunem că $n > 2k$. Facem schimbarea de variabilă $\frac{x}{\sqrt{n}} = y$, deci $dx = \sqrt{n}dy$. Obținem

$$\begin{aligned}\mu_{2k} &= 2C_0 \int_0^{\infty} x^{2k+1} f(x)\, dx \\ &= 2C_0 \sqrt{n}^{2k+1} \int_0^{\infty} y^{2k}\left(1+y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} dy.\end{aligned}$$

În integrala binomă facem substituția

$$\frac{1+y^2}{y^2} = t^{-1} \quad \text{sau, echivalent,} \quad y = t^{1/2}(1-t)^{-1/2}.$$

Se va obține $dy = \frac{1}{2}t^{-1/2}(1-t)^{-3/2}\, dt$ și

$$\mu_{2k} = 2C_0\sqrt{n}^{2k+1}\int_0^1 t^k (1-t)^{-k}\left(\frac{1}{1-t}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \frac{1}{2}t^{-1/2}(1-t)^{-3/2}\, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= C_0 \sqrt{n}^{2k+1} \int_0^1 t^{\left(k+\frac{1}{2}\right)-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-k-1} \, dt \\
&= C_0 \sqrt{n}^{2k+1} \beta\left(k+\frac{1}{2}, \frac{n}{2}-k\right) \\
&= \frac{n^k}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$

Dar

$$
\begin{aligned}
\Gamma\Big(k+\frac{1}{2}\Big) &= \Big(k-\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(k-\frac{1}{2}\Big) \\
&= \Big(k-\frac{1}{2}\Big)\Big(k-\frac{3}{2}\Big) \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big),
\end{aligned}
$$

iar

$$
\begin{aligned}
\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big) &= \Big(\frac{n}{2}-1\Big)\Gamma\Big(\frac{n}{2}-1\Big) \\
&= \Big(\frac{n}{2}-1\Big)\Big(\frac{n}{2}-2\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(\frac{n}{2}-k\Big)\Gamma\Big(\frac{n}{2}-k\Big).
\end{aligned}
$$

Deci, pentru $n > 2k$,

$$
\begin{aligned}
\nu_{2k} = \mu_{2k} &= n^k \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(k-\frac{3}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{n}{2}-1\right) \cdot \left(\frac{n}{2}-2\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n}{2}-k\right)} \\
&= n^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot (2k-3)}{(n-2k) \cdot (n-2k+2) \cdot \ldots \cdot (n-4)\,(n-2)}.
\end{aligned}
$$

De exemplu, $\mathrm{D}^2(X) = \mu_2 = \frac{n}{n-2}$, dacă $n > 2$.

3.6.94 Să se calculeze media și dispersia unei v.a. X cu densitatea definită de $f(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+x^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$, pentru $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

Se va obține media $\mathbb{E}(X) = 0$ (integrandul este funcție impară) și, folosind substituția $\frac{1+x^2}{x^2} = t$, se va obține $\mathrm{D}^2(X) = \frac{1}{n-2}$ (vezi și rezolvarea Exercițiului 3.6.93).

3.6.95 Fie o v.a. repartizată Fisher $X \sim F(m,n)$. Să se verifice că f este o densitate și să se calculeze momentele μ_k ale v.a. X.

Rezolvare:

Densitatea este în acest caz $f(x) = C_0 x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, unde $C_0 = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}$.

Se arăm mai întât că f este o densitate de repartiție. Facem substituția $x' = \frac{x\cdot m/n}{1+x\cdot m/n}$, deci $x = \frac{n}{m}\cdot\frac{x'}{1-x'}$ și apoi $dx = \frac{n}{m}\cdot\frac{1}{(1-x')^2}dx'$ și

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx &= C_0\int_0^{\infty} x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} \\
&= \frac{nC_0}{m}\int_0^1 \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{x'}{1-x'}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{x'}{1-x'}\right)^{-\frac{m+n}{2}} \frac{dx'}{(1-x')^2} \\
&= \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 x^{\frac{m}{2}-1}(1-x)^{\frac{n}{2}-1}\,dx \\
&= \frac{1}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Să calculăm, folosind aceeași substituție,

$$\begin{aligned}
\mu_k &= \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\,dx \\
&= C_0\int_0^{\infty} x^{k+\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} \\
&= C_0\int_0^1 \left(\frac{n}{m}\right)^{k+\frac{m}{2}-1}\left(\frac{x'}{1-x'}\right)^{k+\frac{m}{2}-1}\left(\frac{1}{1-x'}\right)^{-\frac{m+n}{2}} \frac{n}{m}\frac{dx'}{(1-x')^2} \\
&= \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^k}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 x^{k+\frac{m}{2}-1}(1-x)^{\frac{n}{2}-k-1}\,dx \\
&= \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^k}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\beta\left(\frac{m}{2}+k,\frac{n}{2}-k\right) \\
&= \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^k}{\beta\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Deci, pentru $n > 2k$,

$$\begin{aligned}\mu_k &= \left(\frac{n}{m}\right)^k \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\ &= \left(\frac{n}{m}\right)^k \frac{\left(\frac{m}{2}+k-1\right)\left(\frac{m}{2}+k-2\right)\cdot\ldots\cdot\frac{m}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n}{2}-k\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)} \\ &= \left(\frac{n}{m}\right)^k \frac{m\left(m+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(m+2k-2\right)}{\left(n-2k\right)\left(n-2k+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-2\right)}.\end{aligned}$$

3.6.96 Fie X, Y două v.a. independente astfel încât $X, Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ și $V = \sqrt{X^2+Y^2}$. Să se determine densitatea de repartiție f_V și să se calculeze dispersia v.a. V.

Rezolvare:

Conform Propoziției 3.245

$$\left(X^2+Y^2\right) \sim \chi^2(2,\sigma),$$

adică $f_{X^2+Y^2}\left(u\right) = \dfrac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{u}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}\left(u\right).$

Folosim și relația (3.122) pentru a calcula

$$f_{\sqrt{X^2+Y^2}}\left(v\right) = f_{X^2+Y^2}\left(v^2\right)\left|2v\right| = \frac{1}{\sigma^2} v e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}\left(v\right).$$

Facând substituția $v = \sqrt{2}\sigma t$ și urmând aceleași calcule[257] ca în Propoziția 3.115 obținem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(V\right) &= \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty v^2 e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty (\sqrt{2}\sigma t)^2 e^{-\frac{(\sqrt{2}\sigma t)^2}{2\sigma^2}} \sqrt{2}\sigma\, dt \\ &= 2\sqrt{2}\sigma\int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt\end{aligned}$$

[257] Ne interesează integralele:

$$\int_0^\infty t e^{-t^2} dt = \int_0^\infty t^3 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}, \quad \int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

și

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(V^2\right) &= \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty v^3 e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\,dv \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty (\sqrt{2}\sigma t)^3 e^{-\frac{(\sqrt{2}\sigma t)^2}{2\sigma^2}}\sqrt{2}\sigma\,dt \\
&= 4\sigma^2\int_0^\infty t^3 e^{-t^2}\,dt \\
&= 2\sigma^2.
\end{aligned}$$

Deci $\mathrm{D}^2\left(V\right) = 2\sigma^2 - \pi\sigma^2/2$.

3.6.97 Fie X, Y două v.a. independente astfel încât $X, Y \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. Să se determine media și dispersia v.a.

$$U = \max\left(|X|, |Y|\right).$$

Rezolvare:

Funcția de repartiție a v.a. U este, evident, $F_U\left(u\right) = 0$, pentru $u < 0$. Pentru $u > 0$ avem

$$\begin{aligned}
F_U\left(u\right) &= \mathbb{P}\left(|X| \le u, |Y| \le u\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|X| \le u\right) \cdot \mathbb{P}\left(|Y| \le u\right) \\
&= \left(F_X(u) - F_X(-u)\right)\left(F_Y(u) - F_Y(-u)\right) \\
&= \left(F_X(u) - F_X(-u)\right)^2.
\end{aligned}$$

Conform (3.4) obținem densitatea:

$$\begin{aligned}
f_U\left(u\right) &= F_U'\left(u\right) \\
&= 2\left(F_X(u) - F_X(-u)\right)\left(F_X'(u) + F_X'(-u)\right) \\
&= \frac{4}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\left(F_X(u) - F_X(-u)\right),
\end{aligned}$$

deoarece

$$\begin{aligned}
F_X'(-u) &= f_X(-u) = f_X(u) \\
F_X'(u) &= f_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}.
\end{aligned} \tag{3.126}$$

Astfel, folosind Remarca 3.8, putem considera

$$f_U(u) = \frac{4}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \left(F_X(u) - F_X(-u)\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Să calculăm

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U) &= \frac{4}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty u e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \left(F_X(u) - F_X(-u)\right) du \\
&= \frac{4}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{-\frac{1}{\sigma^2}}\right)' \left(F_X(u) - F_X(-u)\right) du \\
&= \frac{4}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(\frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{-\frac{1}{\sigma^2}} \left(F_X(u) - F_X(-u)\right)\Big|_{x=0}^{x=\infty}\right. \\
&\qquad \left. - \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{-\frac{1}{\sigma^2}} \left(F'_X(u) + F'_X(-u)\right) du\right) \\
&= \frac{4\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du \\
&= \frac{8\sigma^2}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{\sigma^2}} du \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^\infty e^{-(u')^2} \sigma du' \\
&= \frac{4\sigma}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

Apoi

$$\mathbb{E}\left(U^2\right) = \frac{4}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty u^2 e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \left(F_X(u) - F_X(-u)\right) du.$$

Integrând prin părți și folosind (3.126) obținem

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty u^2 e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} F_X(u) du \\
&= \frac{4}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty u \left(\frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{-\frac{1}{\sigma^2}}\right)' F_X(u) du
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\left(\frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{-\frac{1}{\sigma^2}} uF_X(u)\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{-\frac{1}{\sigma^2}}\left[uF_X(u)\right]' du\right)\\
&= \frac{4\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\left[uF_X'(u)+F_X(u)\right]du\\
&= \frac{4\sigma^2}{2\pi\sigma^2}\int_0^\infty ue^{-\frac{u^2}{\sigma^2}}du + \frac{4\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}F_X(u)du\\
&= \frac{2}{\pi}\frac{e^{-\frac{u^2}{\sigma^2}}}{-\frac{2}{\sigma^2}}\Big|_{x=0}^{x=\infty} + 4\sigma^2\int_0^\infty F_X(u)F_X'(u)du\\
&= \frac{\sigma^2}{\pi} + 2\sigma^2F_X^2(u)\Big|_{x=0}^{x=\infty}\\
&= \frac{\sigma^2}{\pi} + 2\sigma^2(F_X^2(\infty)-F_X^2(0)),
\end{aligned}
$$

deci

$$\frac{4}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_0^\infty u^2e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}F_X(u)du = \frac{\sigma^2}{\pi}+\frac{3\sigma^2}{2}.$$

Similar

$$-\frac{4}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_0^\infty u^2e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}F_X(-u)du = \frac{\sigma^2}{\pi}-\frac{\sigma^2}{2}.$$

Deci

$$\mathbb{E}\left(U^2\right) = \frac{2\sigma^2}{\pi}+\sigma^2,$$

iar dispersia este

$$\mathrm{D}^2\left(U\right) = \sigma^2 - \frac{2\sigma^2}{\pi}.$$

3.6.98 Fie X, Y două v.a. independente astfel încât $X, Y \sim \mathcal{N}\big(0,\sigma^2\big)$. Să se determine media v.a.

$$V = \min\left(|X|, |Y|\right).$$

Rezolvare:

Deoarece $\mathbb{P}\left(|X|\le v\right) = \left(F_X(v)-F_X(-v)\right) = \mathbb{P}\left(|Y|\le v\right)$, obținem

$$
\begin{aligned}
F_V\left(v\right) &= 1-\mathbb{P}\left(\min\left(|X|,|Y|\right)\ge v\right)\\
&= 1-\mathbb{P}\left(|X|\ge v, |Y|\ge v\right)\\
&= 1-\mathbb{P}\left(|X|\ge v\right)\cdot\mathbb{P}\left(|Y|\ge v\right)
\end{aligned}
$$

$$= 1 - (1 - \mathbb{P}(|X| \leq v)) \cdot (1 - \mathbb{P}(|Y| \leq v))$$
$$= 1 - [1 - (F_X(v) - F_X(-v))]^2,$$

dacă $v > 0$ și $F_V(v) = 0$, dacă $v \leq 0$.

Deci, folosind (3.126) și identitatea $1 - F_X(v) = F_X(-v)$, deducem

$$\begin{aligned} f_V(v) &= F'_V(v) \\ &= 2(1 - (F_X(v) - F_X(-v)))(F'_X(v) + F'_X(-v))\mathbb{1}_{(0,\infty)}(v) \\ &= \frac{8}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} F_X(-v)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(v). \end{aligned}$$

Media este

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V) &= \frac{8}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty v e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} F_X(-v) dv \\ &= \frac{8}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}}{-\frac{1}{\sigma^2}} \right)' F_X(-v) dv \\ &= \frac{8}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(\frac{e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}}{-\frac{1}{\sigma^2}} F_X(-v) \Big|_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}}{-\frac{1}{\sigma^2}} F'_X(-v) dv \right) \\ &= \frac{4\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} - \frac{8\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \\ &= \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{\sigma^2}} dv \\ &= \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty e^{-(v')^2} \sigma dv' \\ &= \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} - \frac{4\sigma}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} - \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

3.6.99 Fie șirul de v.a. continue și cu valori nenegative $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și N o v.a. de tip discret cu valori în $\mathbb{N}^*$ și independentă de șirul de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Să definim S_N ca fiind **suma aleatoare** de v.a. dată de

$$S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

(prin convenție, dacă $N = 0$, atunci $S_N = 0$).

(a) Să se determine legea v.a. S_N.

(b) Să presupunem că v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și N au media finită, iar v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ au aceeași medie. Să se arate că[258]

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X_1)\,. \tag{3.127}$$

Rezolvare:

(a) Reluând demonstrația formulei (2.109), vom determina $\mathbb{P}(S_N \in A)$, unde $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, folosind legea probabilității totale (1.22), asociată sistemului complet de evenimente $(\{N = n\})_{n\in\mathbb{N}}$, precum și independența v.a. N în raport cu v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deci și cu v.a. S_N :

$$\mathbb{P}(S_N \in A) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \in A)\,\mathbb{P}(N = n)\,.$$

(b) Conform formulei precedente, în cazul $A = (x, \infty)$, și a formulei (3.33) de calcul a mediei unei v.a. continue nenegative folosind funcția de repartiție, avem[259]

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_N) &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(S_N > x)\,dx \\
&= \int_0^{\infty} \Big(\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n > x)\,\mathbb{P}(N = n)\Big)dx \\
&= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \Big(\int_0^{\infty} \mathbb{P}(S_n > x)\,\mathbb{P}(N = n)\Big)dx \\
&= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\Big(\int_0^{\infty} \mathbb{P}(S_n > x)\,dx\Big) \\
&= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{E}(S_n)
\end{aligned}$$

[258] În cazul unui șir $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a discrete formula (3.127) a lui Wald are aceeași formă; vezi Exercițiul 2.4.50.

[259] Pentru a putea schimba ordinea între integrare și sumare trebuie să folosim un rezultat teoretic de tip Fubini care să ne permită ca **o integrală să comute cu o sumă infinită** (vezi condițiile suficiente prezentate în Remarca 5.55).

În acest caz folosim faptul că seria care apare în a doua egalitate este cu termeni nenegativi și convergentă (la $\mathbb{P}(S_N > x)$) ceea ce va permite ca integrala să comute cu suma infinită.

$$
\begin{aligned}
&= \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(N=n\right) n \mathbb{E}\left(X_1\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X_1\right) \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} n \mathbb{P}\left(N=n\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X_1\right) \mathbb{E}\left(N\right),
\end{aligned}
$$

deoarece

$$
\mathbb{E}\left(S_n\right) = \mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_i\right) = n\mathbb{E}\left(X_1\right).
$$

Prin urmare, s-a obtinut (3.127).

Pentru o altă demonstrație a formulei (3.127), în cazul unui șir de v.a. nenegative $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ oarecare (nu neapărat continue), vezi [35, Theorem 5.5] (caz în care trebuie să folosim egalitatea (5.17) conform căreia media comută cu o sumă infinită de v.a.). Aceeași metodă este utilă și în determinarea formulei de calcul a dispersiei sumei S_N cu un număr aleator de termeni.

Capitolul 4

Funcția generatoare de momente

Definiția 4.1 *Dacă X este o v.a. discretă astfel încât $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$, atunci media*

$$G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum\nolimits_{k \in \mathbb{N}} t^k \mathbb{P}(X = k),$$

se numește **funcția generatoare de probabilități** *asociată acestei distribuții.*
Funcția $t \mapsto G_X(t)$ este definită doar pentru acei t pentru care media $\mathbb{E}\left(t^X\right)$ există și este finită.

Remarca 4.2 Evident, seria care definește funcția G_X este convergentă cel puțin pentru orice $t \in (-1, 1)$. Se poate ca în anumite cazuri domeniul de convergență să fie mai mare decât $(-1, 1)$. $\diamond$

Remarca 4.3 Justificarea denumirii este simplă: dacă funcția G_X se poate scrie ca o serie de puteri, atunci probabilitatea $\mathbb{P}(X = k)$, unde $k \in \mathbb{N}$, este coeficientul lui t^k din dezvoltarea funcției $G_X(t)$ în serie de puteri.

Dacă funcția G_X nu se poate scrie ca o serie de puteri, atunci probabilitățile $\mathbb{P}(X = k)$, unde $k \in \mathbb{N}$, sunt date de derivatele funcției G_X, mai precis,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De asemenea, are loc

$$\boxed{G'_X(1) = \mathbb{E}(X) \quad \text{și} \quad G''_X(1) = \mathbb{E}[X(X-1)].}$$

Mai precis, se poate arăta (vezi [57, Problem 2.6.29]) că dacă X este o v.a. discretă astfel încât $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$ și $r \in \mathbb{N}^*$, atunci:

(a) dacă $\mathbb{E}(X^r) < \infty$, atunci există media $\mathbb{E}\big[X(X-1)\dots(X-r+1)\big]$ și aceasta este dată de

$$\mathbb{E}\big[X(X-1)\dots(X-r+1)\big] = G_X^{(r)}(1);$$

(b) dacă $\mathbb{E}(X^r) = \infty$, atunci $\mathbb{E}\big[X(X-1)\dots(X-r+1)\big] = \infty$ și

$$\lim_{t\to 1} G_X^{(r)}(t) = \infty.$$

◇

Propoziția 4.4 *Fie X, Y două v.a. discrete astfel încât $X(\Omega), Y(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$ și cu G_X, G_Y funcțiile lor generatoare de probabilități. Dacă X, Y sunt independente, atunci*

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t).$$

Demonstrație. Deoarece X, Y sunt v.a. independente putem scrie

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\big(t^{X+Y}\big) = \mathbb{E}\big(t^X\big) \cdot \mathbb{E}\big(t^Y\big) = G_X(t) \cdot G_Y(t).$$

■

Remarca 4.5 Evident, dacă X, Y sunt două v.a. independente, atunci

$$G_{X-Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y\left(\frac{1}{t}\right).$$

◇

Definiția 4.6 *Dacă X este o v.a. (nu neapărat discretă), atunci media*

$$\boxed{M_X(t) = \mathbb{E}\big(e^{tX}\big)} \tag{4.1}$$

se numește **funcția generatoare de momente** *asociată acestei distribuții.*

Funcția $t \mapsto M_X(t)$ este definită doar pentru acei t pentru care media $\mathbb{E}\big(e^{tX}\big)$ există și este finită.

Remarca 4.7 Justificarea denumirii este dată de următorul rezultat. Dacă există $M_X^{(k)}(0)$, atunci există și momentul de ordin $k \in \mathbb{N}^*$ și acesta este dat de:

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X^k\right) = M_X^{(k)}(0)\,, \quad k \in \mathbb{N}^*.}$$

În plus, dacă, pentru orice $t \in (a, b)$, există $M_X^{(k)}(t)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$M_X(t) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left(X^k\right)}{k!} t^k.$$

Mai precis, având în vedere dezvoltarea exponențială (vezi Nota 44), deducem că

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \mathbb{E}\left(1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \ldots + \frac{(tX)^n}{n!} + \ldots\right).$$

Pe de altă parte, media unei sume infinite nu este neapărat suma mediilor, dar, în condiții destul de generale (care în general sunt satisfăcute în problemele avute în vedere de noi), acest lucru este adevărat. Astfel, dacă aceste condiții sunt satisfăcute, atunci

$$M_X(t) = 1 + t\mathbb{E}(X) + \frac{t^2\mathbb{E}\left(X^2\right)}{2!} + \ldots + \frac{t^n\mathbb{E}\left(X^n\right)}{n!} + \ldots = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left(X^k\right)}{k!} t^k.$$

Acum, dacă derivăm funcția $t \mapsto M_X(t)$, obținem derivata unei sume infinite. Din nou, în condiții speciale (care în general sunt satisfăcute în problemele avute în vedere de noi), are loc că derivata sumei infinite este suma derivatelor, i.e.

$$M_X'(t) = \mathbb{E}(X) + \frac{t\mathbb{E}\left(X^2\right)}{1!} + \frac{t^2\mathbb{E}\left(X^3\right)}{2!} + \ldots + \frac{t^{n-1}\mathbb{E}\left(X^n\right)}{(n-1)!} + \ldots.$$

Prin urmare, în caz că $M_X'(0)$ există, obținem

$$\boxed{M_X'(0) = \mathbb{E}(X)\,.}$$

Similar,

$$M_X''(t) = \mathbb{E}\left(X^2\right) + \frac{t\mathbb{E}\left(X^3\right)}{1!} + \ldots + \frac{t^{n-2}\mathbb{E}\left(X^n\right)}{(n-2)!} + \ldots.$$

Prin urmare, în caz că $M_X''(0)$ există, obținem

$$\boxed{M_X''(0) = \mathbb{E}\left(X^2\right).}$$

◇

Remarca 4.8 Se poate arăta (vezi [57, Problem 2.6.32]) că dacă funcția $M_X(t)$ este definită pentru orice t dintr-o vecinătate a originii (i.e. $t \in [-a, a]$, pentru un $a > 0$), atunci există derivatele $M_X^{(k)}(0)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ și are loc formula de legătură:

$$M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}\big(X^k\big), \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

◇

Remarca 4.9 (i) Dacă X este v.a. discretă cu tabloul $X : \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix}_{k \in I \subseteq \mathbb{N}^*}$, atunci, folosind formula de transfer dată de Teorema 2.154, definiția (4.2) devine formula de calcul

$$M_X(t) = \sum\nolimits_{k \in I} e^{t\,x_k} p_k .$$

(ii) Dacă X este v.a. continuă cu densitatea f_X, atunci, folosind formula de transfer dată de Teorema 3.42, definiția (4.2) devine formula de calcul [260]

$$M_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{t\,x} f_X(x)\, dx.$$

◇

Exercițiul 4.10 *Fie v.a.* $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, *unde* $\lambda > 0$. *Să se arate că:*

$$(a) \quad M_X(t) = \infty, \quad \textit{pentru orice } t \geq \lambda;$$

$$(b) \quad M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad \textit{pentru orice } t < \lambda.$$

Obținem, pentru $t \neq \lambda$,

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{t\,x} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda}\bigg|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\lambda}{t-\lambda}\left(e^{(t-\lambda)\infty} - 1\right)$$

[260] Dacă $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă, atunci funcția $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$\tilde{f}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-tx} f(x)\, dx$$

se numește **transformata Laplace** a funcției f.

Astfel, în cazul în care X ia valori nenegative, are loc următoarea legătură între funcția generatoare de momente și transformata Laplace a densității:

$$M_X(t) = \tilde{f}_X(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

și astfel obținem concluzia (vezi și pagina 533).

Exercițiul 4.11 *Fie v.a.* $X \sim \mathscr{C}(0,1)$ *și* $a > 0$. *Să se arate că:*

$$(a) \quad M_X(t) = \infty, \quad \text{pentru orice } t \neq 0;$$

$$(b) \quad \mathbb{E}(|X|^a) < \infty \quad \text{dacă și numai dacă } a \in (0,1).$$

Să observăm, mai întâi, că

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{tx} + e^{-tx}}{1+x^2} dx.$$

Să folosim un criteriu de convergență pentru integrale improprii. Având în vedere că $\lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot \frac{e^{tx}+e^{-tx}}{1+x^2} = \infty > 0$, *pentru orice* $\alpha \leq 1$ *și orice* $t \neq 0$, *deducem că integrala* $M_X(t)$ *este divergentă. Mai mult, obținem că*

$$M_X(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{tx} + e^{-tx}}{1+x^2} dx = \infty, \quad \text{pentru orice } t \neq 0.$$

În ceea ce privește momentul absolut de ordin a, *vezi Exercițiul 3.6.77.*

Exercițiul 4.12 *Fie v.a.* $X \sim \mathrm{Pareto}(1,a)$. *Să se arate că:*

$$(a) \quad M_X(t) = \infty, \quad \text{pentru orice } t > 0;$$

$$(b) \quad M_X(t) < \infty, \quad \text{pentru orice } t \leq 0;$$

$$(c) \quad \mathbb{E}(X^n) < \infty \quad \text{dacă și numai dacă} \quad a > n.$$

Să folosim un criteriu de convergență pentru integrale improprii. Având în vedere că $\lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot \frac{e^{tx}}{x^{a+1}} = \infty > 0$, *pentru orice* $\alpha \leq 1$ *și orice* $t > 0$, *deducem că integrala* $M_X(t)$ *este divergentă. Mai mult, obținem că*

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \int_1^{\infty} e^{tx} \frac{a}{x^{a+1}} dx = \infty, \quad \text{pentru orice } t > 0.$$

Pe de altă parte, deoarece $\lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot \frac{e^{tx}}{x^{a+1}} = 0 < \infty$, *pentru orice* $\alpha > 1$ *și orice* $t < 0$, *deducem că integrala*

$$M_X(t) = \int_1^{\infty} e^{tx} \frac{a}{x^{a+1}} dx < \infty, \quad \text{pentru orice } t < 0.$$

În ceea ce privește media avem, pentru orice $n \neq a$,

$$\mathbb{E}\left(X^n\right) = \int_1^{\infty} x^n \frac{a}{x^{a+1}}\, dx = a \frac{x^{n-a}}{n-a}\bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{n-a}\left(\infty^{n-a} - 1\right),$$

deci $\mathbb{E}\left(X^n\right) < \infty$ dacă și numai dacă $(n-a) < 0$.

Remarca 4.13 Fie v.a. $X \sim \text{Pareto}(1, a)$. Obținem următoarele exemple:

(i) dacă $a \in (0, 1]$, atunci X este o **v.a. care nu admite medie** (media există, dar este infinită).

(ii) dacă $a \in (1, 2]$, atunci X este o **v.a. care admite medie, dar nu admite dispersie** (dispersia există, dar este infinită).

◇

Remarca 4.14 Dacă v.a. $X \sim \mathscr{C}(0, 1) = t(1)$, atunci, conform Exemplului 3.40, X este o **v.a. care nu admite medie** (media nu există).

◇

Remarca 4.15 Dacă v.a. $X \sim t(2)$, atunci, conform Propoziției 3.159, X este o **v.a. care admite medie, dar nu admite dispersie** (dispersia există, dar este infinită).

◇

Exercițiul 4.16 *Fie X o v.a. pentru care există media și dispersia. Să definim funcția $L_X(t) = \ln\left[M_X(t)\right]$, i.e.*

$$L_X(t) \overset{\text{def}}{=\!=} \ln\left[\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)\right].$$

Folosind demonstrația Teoremei 4.30 (mai precis, este vorba de teorema de derivare a integralei Lebesgue dată de [25, Lemma 12.31]), să se arate că $L_X(0) = 0$ și că

$$\boxed{L_X'(0) = \mathbb{E}(X) \quad \text{și} \quad L_X''(0) = \mathrm{D}^2(X).}$$

Prin urmare, derivatele de ordinul 1 și 2 ale funcției L_X ne dau exact media și respectiv dispersia v.a. X.

Propoziția 4.17 *Fie X, Y două v.a. cu M_X, M_Y funcțiile lor generatoare de momente. Dacă X, Y sunt independente, atunci*

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t).$$

Demonstrație. Deoarece X, Y sunt v.a. independente putem scrie

$$M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\big(e^{t(X+Y)}\big) = \mathbb{E}\big(e^{tX}\big) \cdot \mathbb{E}\big(e^{tY}\big) = M_X(t) \cdot M_Y(t).$$

■

Remarca 4.18 Evident, dacă X, Y sunt două v.a. independente, atunci

$$M_{X-Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(-t).$$

◇

Remarca 4.19 Atât funcția generatoare de probabilități cât și funcția generatoare de momente au proprietatea că sunt **unice pentru fiecare distribuție** în sensul următor: dacă două v.a. discrete au aceeași funcție generatoare de probabilități, atunci cele două v.a. sunt identic distribuite (vezi Definiția 2.18); similar, dacă două v.a. (discrete sau continue) au aceeași funcție generatoare de momente, atunci cele două v.a. sunt identic distribuite[261]. ◇

4.1 Funcția caracteristică

Evident, v.a. e^{tX} poate să nu admită medie pentru orice $t \in \mathbb{R}$. De exemplu, o v.a. distribuită Cauchy, de tip $\mathscr{C}(0, 1)$, nu admite funcție generatoare de momente în nici un punct $t \neq 0$ (vezi Exercițiile 4.10 - 4.12). În acest sens, se poate utiliza o altă funcție, strâns legată de funcția generatoare de momente, mai precis, funcția $M_X(it) = \mathbb{E}\big(e^{itX}\big)$ care **este bine definită pentru orice** $t \in \mathbb{R}$.

Definiția 4.20 *Fie v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Funcția $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definită de*

$$\varphi_X(t) \stackrel{\text{def}}{=\!=} M_X(it), \quad t \in \mathbb{R}$$

se numește **funcția caracteristică** *asociată v.a. X.*

[261] Pentru alte funcții care determină în mod unic legea unei v.a. vezi Remarca 2.16, Remarca 3.8 și Remarca 4.34 (inclusiv Teorema 4.35).

Astfel,

$$\boxed{\varphi_X(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\big(e^{itX}\big), \quad t \in \mathbb{R},} \tag{4.2}$$

sau, echivalent, folosind exprimarea cu ajutorul integralei Riemann-Stieltjes (vezi formulele (3.30)),

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_X(x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

unde F_X este funcția de repartiție asociată v.a. X.

Remarca 4.21 Având în vedere definiția exponențialei complexe

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

putem scrie

$$\varphi_X(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\cos(tX) + i\mathbb{E}\sin(tX), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Prin urmare,

$$\left|\mathbb{E}\left(e^{itX}\right)\right| \leq \mathbb{E}\left|e^{itX}\right| = \mathbb{E}(1) = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

deoarece $\left|e^{itX(\omega)}\right| = 1$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și $\omega \in \Omega$.

Deci v.a. e^{itX} este integrabilă, i.e. media $\mathbb{E}\left(e^{itX}\right)$ există pentru orice $t \in \mathbb{R}$, adică funcția φ_X este bine definită pe $\mathbb{R}$. $\diamond$

Remarca 4.22 (i) Dacă X este v.a. discretă cu tabloul $X : \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix}_{k \in I \subseteq \mathbb{N}^*}$, atunci, folosind formula de transfer dată de Teorema 2.154 pentru termenii care apar în (4.4), definiția (4.2) devine formula de calcul

$$\boxed{\varphi_X(t) = \sum\nolimits_{k \in I} e^{itx_k} p_k.}$$

(ii) Dacă X este v.a. continuă cu densitatea f_X, atunci, folosind formula de transfer dată de Teorema 3.42 pentru termenii care apar în (4.4), definiția (4.2) devine formula de calcul[262]

$$\boxed{\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)\, dx.}$$

$\diamond$

[262] Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă pe $\mathbb{R}$, atunci funcția $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dată de

Propoziția 4.23 *Fie X o v.a. și φ_X funcția ei caracteristică. Atunci,*

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} &(i) \quad |\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \\ &(ii) \quad \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t) = \overline{\varphi_X(t)}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ &(iii) \quad \varphi_X \text{ este funcție uniform continuă pe } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demonstrație. (i) Aplicând inegalitatea lui Jensen[263], deducem

$$|\varphi_X(t)| = \left|\mathbb{E}\left(e^{itX}\right)\right| \leq \mathbb{E}\left|e^{itX}\right| = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ii) $\varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t) = \mathbb{E}\left(e^{-itX}\right) = \mathbb{E}\cos(tX) - i\mathbb{E}\sin(tX) = \overline{\varphi_X(t)}$.

(iii) Să calculăm

$$\begin{aligned} |\varphi_X(t_1) - \varphi_X(t_2)| &= \left|\mathbb{E}\left(e^{it_1X}\right) - \mathbb{E}\left(e^{it_2X}\right)\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left|e^{it_1X} - e^{it_2X}\right| \\ &= \mathbb{E}\left(\left|e^{it_2X}\right|\left|e^{i(t_1-t_2)X} - 1\right|\right) \\ &= \mathbb{E}\left|e^{i(t_1-t_2)X} - 1\right|. \end{aligned}$$

Folosind

$$\left|e^{ia} - 1\right|^2 = (\cos a - 1)^2 + \sin^2 a = 2 - 2\cos a = 4\sin^2(a/2) \leq a^2$$

deducem inegalitatea

$$\left|e^{ia} - 1\right| \leq |a|, \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

$$\hat{f}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)\, dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

se numește **transformata Fourier** a funcției f.

Astfel, are loc următoarea legătură între funcția caracteristică și transformata Fourier a densității de repartiție:

$$\varphi_X(t) = \hat{f}_X(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

263 În contextul teoriei probabilităților inegalitatea standard a lui Jensen are urmatoarea formă. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție convexă și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. astfel încât $|X|$ admite medie finită. Să presupunem că $\mathbb{E}(g(X)) \leq \infty$. Atunci are loc **inegalitatea lui Jensen**:

$$g(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(g(X)).$$

Deci

$$\left|e^{i(t_1-t_2)X(\omega)}-1\right| \leq |t_1-t_2|\,|X(\omega)|\,, \quad \omega \in \Omega.$$

Pe de altă parte, $\left|e^{i(t_1-t_2)X(\omega)}-1\right|$ este mărginit de 2, pentru orice $\omega \in \Omega$. Folosind Teorema 5.52 a Convergenței Dominate a lui Lebesgue deducem că

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{|t_1-t_2|\leq\epsilon}\mathbb{E}\left|e^{i(t_1-t_2)X}-1\right| = 0,$$

deci $\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{|t_1-t_2|\leq\epsilon}|\varphi_X(t_1)-\varphi_X(t_2)| = 0$, adică φ_X este funcție uniform continuă pe $\mathbb{R}$. ∎

Propoziția 4.24 *Fie X, Y două v.a. cu φ_X, φ_Y funcțiile lor caracteristice. Dacă X, Y sunt independente, atunci*

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)\,, \quad \textit{pentru orice } t \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Demonstrație. Deoarece X, Y sunt v.a. independente putem scrie

$$\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(e^{it(X+Y)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right)\cdot\mathbb{E}\left(e^{itY}\right) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)\,.$$

∎

Remarca 4.25 Prin urmare, dacă v.a. $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ sunt independente, atunci

$$\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(t)\,, \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

În particular, dacă v.a. $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ sunt de tip **i.i.d.**, atunci

$$\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \left[\varphi_{X_1}(t)\right]^n\,, \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

deoarece, conform definiției funcției φ (vezi și formulele de calcul din Remarca 4.22), dacă două v.a. au aceeași distribuție, atunci coincid și funcțiile lor caracteristice. ◇

Remarca 4.26 Reciproca Propoziției 4.24 nu este adevărată (vezi exemplele date de Exercițiul 4.2.30 și Exercițiul 4.2.31). Dar există o caracterizare a independenței a 2 v.a. legată de formula (4.6). Mai precis, utilizând și (4.12), se poate arăta următorul rezultat. ◇

Teorema 4.27 (vezi [55, Theorem 4, page 343]) *Să definim funcția caracteristică, notată* $\varphi_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, *asociată vectorului aleator* $\mathbf{X} = (X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2) = \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\big(e^{i\langle \mathbf{t},\mathbf{X}\rangle}\big) = \mathbb{E}\left(e^{it_1X_1+it_2X_2}\right),$$

unde $\mathbf{t} = (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$.

Atunci[264]

$$\boxed{X_1, X_2 \text{ sunt v.a. independente} \iff \varphi_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2) = \varphi_{X_1}(t_1)\cdot\varphi_{X_2}(t_2) \quad \text{pentru orice } t_1,t_2 \in \mathbb{R}.}$$

Remarca 4.28 Dacă X este o v.a. cu funcția caracteristică φ_X, atunci v.a. $aX+b$ are funcția caracteristică

$$\boxed{\varphi_{aX+b}(t) = \mathbb{E}\big(e^{it(aX+b)}\big) = e^{itb}\,\mathbb{E}\big(e^{iatX}\big) = e^{itb}\varphi_X(at), \quad t \in \mathbb{R}.}$$

◇

Remarca 4.29 Evident, dacă X, Y sunt două v.a. independente, atunci

$$\varphi_{X-Y}(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(-t).$$

◇

Următorul rezultat arată legătura dintre momentele v.a. X și derivatele funcției caracteristice.

Teorema 4.30 (vezi [55, Theorem 1, page 334]) *Fie X o v.a. și să presupunem că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\mathbb{E}|X|^n < \infty$. Atunci, funcția caracteristică este derivabilă de ordin $k = \overline{1,n}$, cu derivata de ordin k continuă, dată de*

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}\big((iX)^k e^{itX}\big), \quad \text{pentru } k = \overline{1,n}. \tag{4.9}$$

În particular,

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \cdot \mathbb{E}\big(X^k\big), \quad \text{pentru } k = \overline{1,n}.$$

Prin urmare, momentele de ordin $k = \overline{1,n}$ sunt date de:

$$\boxed{\mu_k = \mathbb{E}\big(X^k\big) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k}.} \tag{4.10}$$

[264] Vezi și caracterizările independenței a două v.a. date de Propoziția 3.187, Propoziția 3.190, Propoziția 3.218 și de Remarca 3.219.

Demonstrație. Folosind inegalitatea lui Hölder[265] obținem că $\mathbb{E}|X|^n < \infty$ asigură $\mathbb{E}|X|^k < \infty$ pentru orice $k = \overline{1,n}$.

În cazul $k = 1$ obținem, aplicând teorema de derivare sub integrală[266],

$$\varphi_X'(t) = \left(\mathbb{E}(e^{itX})\right)' = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right)' = \mathbb{E}\left(iX\,e^{itX}\right),$$

iar $\mathbb{E}\left(iX\,e^{itX}\right)$ există deoarece $\left|iX\,e^{itX}\right| = |X|$ care este v.a. integrabilă.

În cazul $k = 2$ de asemenea putem aplica teorema de derivare sub integrală:

$$\varphi_X''(t) = (\varphi_X'(t))' = \left(\mathbb{E}(iX\,e^{itX})\right)' = \mathbb{E}\left(iX\,e^{itX}\right)' = \mathbb{E}\left((iX)^2\,e^{itX}\right).$$

Pe de altă parte, $\mathbb{E}\left((iX)^2\,e^{itX}\right)$ există deoarece $\left|(iX)^2\,e^{itX}\right| = |X|^2$ care este v.a. integrabilă.

Ș.a.m.d.. ■

Remarca 4.31 Se poate arăta (vezi [31, Theorem 4.4.2]) că, în ipotezele Teoremei 4.30, are loc și formula lui Taylor asociată funcției caracteristice φ_X :

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \sum\nolimits_{k=0}^{n} \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{k!} t^k + o(|t|^n) \\ &= 1 + \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left(X^k\right) + o(|t|^n), \quad \text{pentru } t \to 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

unde[267] $\lim_{t\to 0} \frac{o(|t|^n)}{t^n} = 0$.

265 **Inegalitatea lui Hölder** (vezi [55, page 230]): fie $\alpha, \beta \in (1,\infty)$ astfel încât $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ și $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ două v.a. astfel încât $|X|^\alpha$ și $|Y|^\beta$ admit medie finită. Atunci, $\mathbb{E}(XY) < \infty$ și are loc inegalitatea

$$\boxed{\mathbb{E}|XY| \leq \left(\mathbb{E}|X|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \left(\mathbb{E}|Y|^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}.}$$

În cazul particular $\alpha = \beta = 2$ se obține **inegalitatea Cauchy-Schwarz**:

$$\boxed{\left[\mathbb{E}|XY|\right]^2 \leq \mathbb{E}|X|^2 \cdot \mathbb{E}|Y|^2.}$$

266 Pentru o teoremă de derivare a integralei Lebesgue, vezi, de exemplu, [25, Lemma 12.31].

267 Notăm $f(h) = o(g(h))$, pentru $h \to h_0$, și spunem că f este dominată asimptotic de g sau că f crește mai încet decât g, pentru $h \to h_0$, dacă

$$\lim_{h\to h_0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0.$$

De exemplu, $h^2 = o(h)$, pentru $h \to 0$, iar $h^3 = o\left(h^2\right)$, pentru $h \to 0$, iar $\sqrt{h} = o(h)$, pentru $h \to \infty$.

În particular, dacă avem $\mathbb{E}(X) = 0$, iar $D^2(X) = 1$, obținem formula

$$\varphi_X(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o\left(|t|^2\right), \quad \text{pentru } t \to 0.$$

◇

Se poate demonstra și reciproca Teoremei 4.30 (vezi, de exemplu, [15]).

Teorema 4.32 *Dacă există $\varphi_X^{(k)}(0)$ pentru orice $k = \overline{1,n}$, atunci există momentele $\mathbb{E}(X^k)$ pentru orice $k = \overline{1,n}$, dacă n este par și orice $k = \overline{1,n-1}$, dacă n este impar*[268]*, și acestea sunt date de (4.10).*

Remarca 4.33 Prin urmare, dacă există $\varphi_X''(0)$, atunci obținem formulele de calcul al momentelor de ordinul 1 și 2 folosind funcția caracteristică:

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i}\varphi_X'(0) \quad \text{și} \quad \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi_X''(0).}$$

◇

Remarca 4.34 Evident, dacă două v.a. sunt identic distribuite, atunci au aceeași funcție caracteristică.

Se poate arăta că are loc și reciproca[269]:

(4.12) dacă două v.a. au aceeași funcție caracteristică, atunci sunt identic distribuite.

Mai precis, se poate arăta că dacă două v.a. au aceeași funcție caracteristică, atunci au aceeași funcție de repartiție (vezi [55, Theorem 2, page 339]). Astfel,

---

268 Se va arăta, de fapt, că dacă există $\varphi_X^{(n)}(0)$, atunci există și $\mathbb{E}(X^{2m})$, unde $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $2m \leq n$. Existența celorlalte momente se obține folosind inegalitatea lui Hölder.

269 Pentru alte funcții care determină în mod unic legea unei v.a. vezi Remarca 2.16, Remarca 3.8 și Remarca 4.19.

dacă $\varphi_F(t) = \varphi_G(t)$, pentru orice[270] $t \in \mathbb{R}$, i.e.

$$\text{dacă } \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dG(x), \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R},$$

$$\text{atunci } F(x) = G(x), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Astfel, am obținut că și funcția caracteristică este **unică pentru fiecare distribuție**. ◇

Forma exactă a funcției de repartiție și a densității de repartiție a unei v.a. căreia îi cunoaștem funcția caracteristică este dată de teorema de inversare a transformatei Fourier.

Pentru următoarele rezultate vezi, de exemplu, [55, Theorem 3, page 340], [30, Section 5.9] sau [31, Theorems 4.1.2–4.1.6].

Teorema 4.35 *Fie v.a. X cu funcția de repartiție F_X și funcția caracteristică φ_X. Atunci,*

(i) *pentru orice $a < b$, avem*[271]

$$\frac{F_X(b) + F_X(b-0)}{2} - \frac{F_X(a) + F_X(a-0)}{2}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \cdot \varphi_X(t)\, dt$$

sau, echivalent, conform (2.7),

$$\left[F_X(b) - F_X(a)\right] - \frac{1}{2}\left[\mathbb{P}(X = b) - \mathbb{P}(X = a)\right]$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \cdot \varphi_X(t)\, dt;$$

270 Este esențial ca egalitatea funcțiilor caracteristice să aibă în orice punct din $\mathbb{R}$. Egalitatea $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$, pentru orice $t \in (a, b) \subsetneq \mathbb{R}$ nu este suficientă pentru a obține $X \stackrel{d}{=} Y$ (există exemple în acest sens, vezi [31, Example 4.3.1]).

271 Să observăm că dacă F_X este continuă în punctul b, atunci $\frac{F_X(b)+F_X(b-0)}{2} = F_X(b)$, iar dacă F_X nu este continuă în punctul b, atunci $F_X(b) \neq F_X(b-0)$, iar $\frac{F_X(b)+F_X(b-0)}{2}$ reprezintă o valoare medie.

(ii) *în particular, pentru orice $a < b$ puncte de continuitate pentru funcția de repartiție F_X, avem*

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \cdot \varphi_X(t)\, dt; \tag{4.13}$$

(iii) *dacă $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_X(t)|\, dt < \infty$, atunci v.a. X este de tip continuu, iar densitatea ei de repartiție f_X este dată de formula de inversiune:*

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \cdot \varphi_X(t)\, dt. \tag{4.14}$$

În plus, având în vedere formula precedentă, obținem și faptul că densitatea de repartiție f_X este o funcție mărginită și continuă;

(iv) *dacă $\mathbb{P}(X = a) > 0$, atunci*

$$\mathbb{P}(X = a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{-ita} \cdot \varphi_X(t)\, dt.$$

Remarca 4.36 Concret, în unele probleme, se procedează astfel. Se dau două v.a. X, Y.

- Se știe tipul de distribuție al v.a. X și se calculează φ_X.
- Nu se știe tipul de distribuție al v.a. Y, dar se poate calcula φ_Y (folosind, de exemplu, modul de definire al v.a. Y).
- Se observă că $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$.
- Atunci, folosind (4.12) sau Teorema 4.35, se poate trage concluzia că tipul de distribuție al v.a. Y este același cu tipul v.a. X, adică X și Y sunt identic distribuite.

$\diamond$

Remarca 4.37 Conform $(4.5 - ii)$, funcția φ_X este cu valori reale dacă și numai dacă

$$\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(t), \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R},$$

deci, folosind (4.12), se poate face identificarea și se obține că X și $-X$ urmează aceeași distribuție ceea ce înseamnă (vezi Nota 93) că distribuția v.a. X este simetrică. $\diamond$

4.2 Exerciții rezolvate

4.2.1 Să se calculeze funcția caracteristică și apoi media și dispersia (cu ajutorul funcției caracteristice) asociate v.a. $X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

Avem[272]

$$\varphi_X(t) = e^{it(-1)}\frac{1}{2} + e^{it}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) = \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4.2.2 Se aruncă două zaruri. Să se determine funcția caracteristică a v.a. X care ne dă numărul de puncte obținute pe cele două zaruri.

Rezolvare:

Notând cu X_i v.a. care are drept valori numărul de puncte obținute pe zarul $i = \overline{1,2}$, obținem $X = X_1 + X_2$.

Obținem

$$\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_2}(t) = \sum_{k=1}^{6} e^{itk}\,\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{6} e^{itk}\frac{1}{6},$$

deci, folosind formula (4.8), obținem

$$\varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) = \frac{1}{36}\left(\sum_{k=1}^{6} e^{itk}\right)^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4.2.3 Să se calculeze funcția caracteristică și apoi media și dispersia (cu ajutorul funcției caracteristice) asociate v.a. X, unde:

$(a)\quad X \sim \mathscr{B}(n,p)$,	$(b)\quad X \sim \mathscr{P}(\lambda)$,	$(c)\quad X \sim \mathscr{G}(p)$,
$(d)\quad X \sim \mathscr{NegB}(r,p)$	$(e)\quad X \sim \mathscr{U}[a,b]$,	$(f)\quad X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$,
$(g)\quad X \sim \mathscr{N}(\mu,\sigma^2)$,	$(h)\quad X \sim \mathrm{Gamma}(p,\lambda)$,	$(i)\quad X \sim \chi^2(n,\sigma)$.

[272] Folosind definiția exponențialei complexe obținem formula
$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare:

(a) Având în vedere că X are tabloul $X : \begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}}$ obținem

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum\nolimits_{k=0}^{n} C_n^k \left(pe^{it}\right)^k q^{n-k}.$$

Deci, folosind binomul lui Newton,

$$\boxed{\varphi_{\mathscr{B}(n,p)}(t) = \left(pe^{it} + q\right)^n, \quad t \in \mathbb{R}.} \tag{4.15}$$

Evident,

$$\boxed{\varphi_{\text{Bernoulli(p)}}(t) = pe^{it} + q, \quad t \in \mathbb{R}.} \tag{4.16}$$

Având în vedere că există derivatele $\varphi_X^{(k)}$ de orice ordin k, deducem, folosind Teorema 4.32, că există momentele $\mu_k = \mathbb{E}\big(X^k\big) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k}$.

Astfel, obținem

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\varphi_X'(0)}{i} = \frac{1}{i} n \left(pe^{it} + q\right)^{n-1} ipe^{it}\Big|_{t=0} = np$$

și

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) = \frac{\varphi_X''(0)}{i^2} &= \frac{1}{-1} ipn\big(\left(pe^{it} + q\right)^{n-1} e^{it}\big)'\Big|_{t=0} \\
&= -ipn\big(i(n-1)\left(pe^{it}+q\right)^{n-2} pe^{it} + i\left(pe^{it}+q\right)^{n-1} e^{it}\big)\Big|_{t=0} \\
&= -ipn\big(ip(n-1) + i\big) \\
&= -ipn(ipn + iq) = n^2p^2 + npq,
\end{aligned}$$

deci $\mathrm{D}^2(X) = npq$.

Reamintim, vezi Propoziția 2.125, că dacă luăm v.a. $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ de tip i.i.d. și distribuite Bernoulli,

$$X_k \sim \text{Bernoulli}(p) = \mathscr{B}(1,p), \ k = \overline{1,n} \quad \Longrightarrow \quad S_n \overset{\text{not}}{=\!=} \sum\nolimits_{k=1}^{n} X_k \sim \mathscr{B}(n,p).$$

Acest rezultat se poate obține și folosind funcția caracteristică. Într-adevăr, $X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, deci $\varphi_{X_k}(t) = qe^0 + pe^{it}$ și, folosind formula (4.8), obținem

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \left(pe^{it} + q\right)^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Având în vedere observația (4.12) (vezi și Remarca 4.36) și formula (4.15), recunoaștem că $S_n \sim \mathscr{B}(n, p)$.

(b) Având în vedere că X are tabloul $X : \begin{pmatrix} k \\ \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{pmatrix}_{k \in \mathbb{N}}$ obținem, folosind dezvoltarea exponențialei (vezi Nota 44) care are loc și pentru numere complexe,

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{it}\right)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}.$$

Deci

$$\boxed{\varphi_{\mathscr{P}(\lambda)}(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}, \quad t \in \mathbb{R}.} \tag{4.17}$$

Să calculăm

$$\begin{aligned}
\varphi_X'(t) &= i\lambda e^{it} e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)} \\
\varphi_X''(t) &= i\lambda\left(e^{it} e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}\right)' \\
&= i\lambda\left(ie^{it} e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)} + i\lambda (e^{it})^2 e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}\right) \\
&= i^2 \lambda e^{it} e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}\left(1 + \lambda e^{it}\right).
\end{aligned}$$

Obținem

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\varphi_X'(0)}{i} = \frac{1}{i} i\lambda e^{it} e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}\Big|_{t=0} = \lambda$$

și

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{\varphi_X''(0)}{i^2} = \frac{1}{-1} i^2 \lambda e^{it} e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}\left(1 + \lambda e^{it}\right)\Big|_{t=0} = \lambda(\lambda + 1),$$

deci $\mathrm{D}^2(X) = \lambda$.

(c) Având în vedere că X are tabloul $X:\begin{pmatrix} k \\ pq^{k-1}\end{pmatrix}_{k\in\mathbb{N}^*}$, obținem

$$\varphi_X(t)=\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} e^{itk}pq^{k-1}=pe^{it}\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\left(qe^{it}\right)^{k-1}.$$

Folosind dezvoltarea funcției $\frac{1}{1-x}$ (vezi Nota 115), care are loc și pentru numere complexe, obținem

(4.18)
$$\boxed{\varphi_{\mathcal{G}(p)}(t)=\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}},\quad t\in\mathbb{R}.}$$

(d) Folosim seria binomială cu exponent negativ (2.99), care are loc și pentru numere complexe:

$$\frac{1}{(1-x)^r}=\sum\nolimits_{k=r}^{\infty}C_{k-1}^{r-1}x^{k-r},\quad \text{pentru orice } |x|<1 \text{ și orice } r\in\mathbb{N}^*.$$

Deoarece X are tabloul $X:\begin{pmatrix} k \\ C_{k-1}^{r-1}p^rq^{k-r}\end{pmatrix}_{k\in\mathbb{N},k\geq r}$, unde $r\in\mathbb{N}^*$, obținem

$$\begin{aligned}\varphi_X(t)&=\sum\nolimits_{k=r}^{\infty}e^{itk}C_{k-1}^{r-1}p^rq^{k-r}\\&=\left(pe^{it}\right)^r\sum\nolimits_{k=r}^{\infty}C_{k-1}^{r-1}\left(qe^{it}\right)^{k-r}\\&=\left(pe^{it}\right)^r\frac{1}{\left(1-qe^{it}\right)^r},\end{aligned}$$

deci

(4.19)
$$\boxed{\varphi_{\mathcal{NegB}}(t)=\left(\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\right)^r,\quad t\in\mathbb{R}.}$$

(e) Avem

$$\varphi_X(t)=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}f_X(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}dx.$$

Prin urmare, $\varphi_X(t)=1$, dacă $t=0$, și

(4.20)
$$\boxed{\varphi_{\mathcal{U}[a,b]}(t)=\frac{1}{b-a}\,\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it},\quad t\in\mathbb{R}^*.}$$

În particular, dacă $X \sim \mathscr{U}[0,1]$, obținem, evident, $\varphi_X(0) = 1$ și

$$\boxed{\varphi_{\mathscr{U}[0,1]}(t) = \frac{e^{it}-1}{it}, \quad t \in \mathbb{R}^*.}$$

De asemenea, în particular, dacă $X \sim \mathscr{U}[-a,a]$, obținem[273]

$$\boxed{\varphi_{\mathscr{U}[-a,a]}(t) = \frac{1}{2a}\frac{e^{ita}-e^{-ita}}{it} = \frac{\sin(at)}{at}, \quad t \in \mathbb{R}^*,} \tag{4.21}$$

iar dacă $X \sim \mathscr{U}[-1,1]$, obținem

$$\boxed{\varphi_{\mathscr{U}[-1,1]}(t) = \frac{\sin t}{t}, \quad t \in \mathbb{R}^*,} \tag{4.22}$$

și, evident, $\varphi_X(0) = 1$.

Deci, în acest caz, funcția caracteristică asociată v.a. X este o funcție cu valori reale, deci (vezi Remarca 4.37) distribuția v.a. X este simetrică (adică X și $-X$ urmează aceeași distribuție).

Să mai observăm că dacă luăm v.a. $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ de tip i.i.d. și distribuite uniform pe $[-1,1]$, i.e. $X_k \sim \mathscr{U}[-1,1]$, atunci $\varphi_{X_k}(t) = \frac{\sin t}{t}$ și, folosind formula (4.8), obținem

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod\nolimits_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n,$$

unde $S_n \overset{\text{not}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} X_k$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

(f) Avem

$$\varphi_X(t) = \lambda \int_0^\infty e^{itx} e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - it)x} dx = \lambda \frac{e^{-(\lambda-it)x}}{-(\lambda - it)}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty}.$$

Deoarece $\lambda > 0$, obținem

$$\lim\nolimits_{x\to\infty} |e^{-(\lambda-it)x}| = \lim\nolimits_{x\to\infty} e^{-\lambda x} |e^{itx}| = \lim\nolimits_{x\to\infty} e^{-\lambda x} = 0,$$

---

[273] Folosind definiția exponențialei complexe obținem formula

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \sin x, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

deci

(4.23) $$\boxed{\varphi_{\mathrm{Exp}(\lambda)}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

(g) Să considerăm mai întâi v.a. normală standard $Y \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Luând $x' = x/\sqrt{2}$ obținem

$$\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sqrt{2}x'} e^{-(x')^2} \sqrt{2} dx' \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(it/\sqrt{2})^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x - it/\sqrt{2})^2} dx.
\end{aligned}$$

Utilizând rezultate din teoria funcțiilor complexe se poate arăta[274] că

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-it/\sqrt{2})^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy,$$

deci putem face, formal, schimbarea de variabilă $x - it/\sqrt{2} = y$ și obținem

$$\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(it/\sqrt{2})^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-it/\sqrt{2})^2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{(it/\sqrt{2})^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy.
\end{aligned}$$

Deci[275]

(4.24) $$\boxed{\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

Să menționăm că, în acest caz, funcția caracteristică asociată v.a. Y este o funcție cu valori reale, deci distribuția v.a. Y este simetrică (adică Y și $-Y$ urmează aceeași distribuție).

[274] Pentru demonstrație vezi pagina 132 din [19, Problema 2.55, Soluția 4].

[275] Să observăm că **funcția caracteristică asociata unei v.a. de tip $\mathcal{N}(0,1)$ este, exceptând o constantă multiplicativă, chiar densitatea v.a. de tip $\mathcal{N}(0,1)$** (vezi și Nota 279 și Nota 280):

$$\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = \sqrt{2\pi} f_{\mathcal{N}(0,1)}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Folosim apoi legătura $X = \sigma Y + \mu$ precum și Remarca 4.28 pentru a deduce că

$$\varphi_X(t) = \varphi_{\sigma Y + \mu}(t) = e^{it\mu}\varphi_Y(\sigma t),$$

deci[276]

$$\boxed{\varphi_{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}(t) = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.} \tag{4.25}$$

Să calculăm acum

$$\varphi_X'(t) = \left(i\mu - \sigma^2 t\right) e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$\varphi_X''(t) = \left(\left(i\mu - \sigma^2 t\right) e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\right)' = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\left((i\mu - \sigma^2 t)^2 - \sigma^2\right).$$

Obținem

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i}\left(i\mu - \sigma^2 t\right) e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\Big|_{t=0} = \mu$$

și

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{-1} e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\left((i\mu - \sigma^2 t)^2 - \sigma^2\right)\Big|_{t=0} = \mu^2 + \sigma^2,$$

deci $\mathrm{D}^2(X) = \sigma^2$.

(h) Avem

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{itx} x^{p-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-(\lambda - it)x} dx.$$

Utilizând rezultate din teoria funcțiilor complexe se poate demonstra că putem face, formal, schimbarea de variabilă $(\lambda - it)\, x = y$ în integrala complexă și obținem

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-(\lambda - it)x} dx = \int_0^\infty \left(\frac{y}{\lambda - it}\right)^{p-1} e^{-y} \frac{dy}{\lambda - it}$$
$$= (\lambda - it)^{-p}\, \Gamma(p),$$

deci

$$\boxed{\varphi_{\mathrm{Gamma}(p,\lambda)}(t) = \left(\frac{1}{1 - it/\lambda}\right)^p = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-p}, \quad t \in \mathbb{R}.} \tag{4.26}$$

---

[276] Pentru alte metode de demonstrație vezi Exercițiul 4.2.6 și [19, Problema 2.55].

Să calculăm

$$\varphi_X'(t) = \frac{ip}{\lambda}\Big(1-\frac{it}{\lambda}\Big)^{-p-1},$$

$$\begin{aligned}\varphi_X''(t) &= \Big(\frac{ip}{\lambda}\Big(1-\frac{it}{\lambda}\Big)^{-p-1}\Big)' \\ &= \frac{i^2 p(p+1)}{\lambda^2}\Big(1-\frac{it}{\lambda}\Big)^{-p-2} \\ &= -\frac{p(p+1)}{\lambda^2}\Big(1-\frac{it}{\lambda}\Big)^{-p-2}.\end{aligned}$$

Obținem

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i}\frac{ip}{\lambda}\Big(1-\frac{it}{\lambda}\Big)^{-p-1}\Big|_{t=0} = \frac{p}{\lambda}$$

și

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{i^2}\frac{-p(p+1)}{\lambda^2}\Big(1-\frac{it}{\lambda}\Big)^{-p-2}\Big|_{t=0} = \frac{p(p+1)}{\lambda^2},$$

deci $\mathrm{D}^2(X) = \frac{p}{\lambda^2}$.

(i) Să notăm $C_0 = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$. Avem

$$\varphi_X(t) = C_0\int_0^\infty e^{itx}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}dx = C_0\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}-it\right)x}dx.$$

Utilizând rezultate din teoria funcțiilor complexe se poate demonstra că putem face, formal, schimbarea de variabilă $\left(\frac{1}{2\sigma^2}-it\right)x = y$ în integrala complexă și obținem

$$\varphi_X(t) = C_0\left(\frac{1}{2\sigma^2}-it\right)^{-\frac{n}{2}}\int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1}e^{-y}dx = C_0\left(\frac{1}{2\sigma^2}-it\right)^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Deci

$$\varphi_{\chi^2(n,\sigma)}(t) = \left(1-2i\sigma^2 t\right)^{-\frac{n}{2}}, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{4.27}$$

Să calculăm

$$\varphi_X'(t) = in\sigma^2\left(1-2i\sigma^2 t\right)^{-\frac{n}{2}-1}$$

$$\begin{aligned}\varphi''_X(t) &= \left(in\sigma^2\left(1-2i\sigma^2 t\right)^{-\frac{n}{2}-1}\right)' \\ &= i^2 n(n+2)\,\sigma^4\left(1-2i\sigma^2 t\right)^{-\frac{n}{2}-2}.\end{aligned}$$

În general,

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k n(n+2)\dots(n+2k-2)\,\sigma^{2k}\left(1-2i\sigma^2 t\right)^{-\frac{n}{2}-k}.$$

Obținem

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i} in\sigma^2\left(1-2i\sigma^2 t\right)^{-\frac{n}{2}-1}\Big|_{t=0} = n\sigma^2$$

și

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{-1} i^2 n(n+2)\,\sigma^4\left(1-2i\sigma^2 t\right)^{-\frac{n}{2}-2}\Big|_{t=0} = n(n+2)\,\sigma^4,$$

deci $\mathrm{D}^2(X) = 2n\sigma^4$.

4.2.4 Fie v.a. $X \sim \mathscr{U}[0,1]$ și $U = 1000\ln\dfrac{1}{X}$. Să se determine funcția caracteristică a v.a. X și U și apoi, folosind funcția caracteristică, să se determine tipul de distribuție al v.a. $V = 2X - 1$.

4.2.5 Dacă v.a $X_k : \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2^k} & \dfrac{1}{2^k} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}^*$, sunt v.a. independente, să se determine funcția caracteristică asociată v.a. $S_n \overset{\text{not}}{=\!=} \sum_{k=1}^n X_k$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:

Avem $\varphi_{X_k}(t) = e^{-\frac{it}{2^k}}\frac{1}{2} + e^{\frac{it}{2^k}}\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$ și

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod\nolimits_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2^2}\right)\dots\cos\left(\frac{t}{2^n}\right).$$

Având în vedere că $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ obținem

$$\begin{aligned}\varphi_{S_n}(t)\cdot\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) &= \cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2^2}\right)\dots\cos\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)\cdot\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2^2}\right)\dots\cos\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)\sin\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2^2}\right)\dots\cos\left(\frac{t}{2^{n-2}}\right)\sin\left(\frac{t}{2^{n-2}}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sin(t),$$

deci $\varphi_{S_n}(t) = \dfrac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$.

Astfel, obținem, vezi relația (4.22), că

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n}(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(t)}{t \cdot \frac{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\frac{t}{2^n}}} \\
&= \frac{\sin(t)}{t} \\
&= \varphi_{\mathscr{U}[-1,1]}(t).
\end{aligned}$$

Deducem că distribuția limită obținută este cea uniformă pe $[-1,1]$. Adică șirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge în funcția caracteristică la v.a. $X \sim \mathscr{U}[-1,1]$ și scriem

$$S_n \xrightarrow{\varphi} X, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

4.2.6 Să se calculeze, folosind ecuațiile diferențiale, funcția caracteristică[277] și apoi media și dispersia (cu ajutorul funcției caracteristice) asociate v.a. X, unde:

$$(a)\ \ X \sim \mathscr{C}(0,1), \quad (b)\ \ X \sim \mathscr{C}(0,n), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (c)\ \ X \sim \mathscr{N}(0,1).$$

Rezolvare:

(a) Avem

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(tx)}{1+x^2} dx.
\end{aligned}$$

[277] Pentru alte metode de demonstrație vezi Exercițiul 4.2.3, punctul (g), și [19, Problema 2.55].

Având în vedere că $\left|\dfrac{\sin(tx)}{1+x^2}\right| \le \dfrac{1}{1+x^2}$, iar $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ este convergentă, obținem că $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{1+x^2}dx$ este convergentă. Folosind și imparitatea funcției $\dfrac{\sin(tx)}{1+x^2}$ deducem

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(tx)}{1+x^2}dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin(tx)}{1+x^2}dx + \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{1+x^2}dx\\ &= \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{1+x^2}dx - \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{1+x^2}dx\\ &= 0,\end{aligned}$$

deci $\varphi_X(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}dx.$

Se poate arăta că ambele integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}dx$ și $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos(tx)}{1+x^2}\right)'_t dx$ sunt uniform convergente, deci putem deriva integrala cu parametru și obținem

$$\varphi'_X(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos(tx)}{1+x^2}\right)'_t dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-x\sin(tx)}{1+x^2}dx.$$

Pe de altă parte, se poate arăta[278] că $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi$ sau, notând $x/t = y$, cu $t > 0$, obținem $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ty)}{y}dy = \pi.$

Deci, pentru $t > 0$,

$$\begin{aligned}\varphi'_X(t) + 1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(tx)}{x}dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(tx)}{1+x^2}dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x^2)\sin(tx) - x^2\sin(tx)}{x(1+x^2)}dx\end{aligned}$$

---

[278] Integrala improprie $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ este convergentă conform criteriului lui Dirichlet. Definim integrala cu parametru $I(a) = \int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin(ax)}{x}dx$, cu $a \ge 0$, $k > 0$. Se poate deriva integrala și deducem $I'(a) = \int_0^\infty e^{-kx}\cos(ax)\,dx$ care se va calcula și se obține $I'(a) = \frac{k}{a^2+k^2}$. Deci $I(a) = \int_0^a \frac{k}{u^2+k^2}du = \arctan\left(\frac{a}{k}\right)$. Luând $\alpha = 1$ și trecând la limită obținem $\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to 0}\arctan\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to 0} I(a) = \lim_{k\to 0}\int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx.$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)} dx,$$

iar

$$\varphi_X''(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)} \right)_t' dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(tx)}{x(1+x^2)} dx = \varphi_X(t).$$

Obținem că funcția caracteristică satisface ecuația diferențială cu coeficienți constanți

$$\varphi_X''(t) - \varphi_X(t) = 0, \quad t > 0,$$

care are ecuația caracteristică $\lambda^2 - 1 = 0$.

Soluția acestei ecuații este $\varphi_X(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$. Deoarece $|\varphi_X(t)| \leq 1$ obținem că $c_1 = 0$, deci $\varphi_X(t) = c_2 e^{-t}, \quad t > 0$.

Prin calcule similare se obține $\varphi_X(t) = c_4 e^t$, dacă $t < 0$.

Impunând $\varphi_X(0) = 1$ obținem $c_2 = c_4 = 1$. Deci [279]

$$\boxed{\varphi_{\mathscr{C}(0,1)}(t) = e^{-|t|}.} \tag{4.28}$$

Să menționăm că, în acest caz, distribuția v.a. X este simetrică (deoarece funcția caracteristică asociată este o funcție cu valori reale).

Pentru demonstrația aceluiași rezultat (4.28), dar utilizând rezultate din teoria funcțiilor complexe, vezi pagina 133 din [19, Problema 2.55, Soluția 1].

(b) Utilizând Nota 177 avem, dacă notăm $\frac{x}{n} = x'$,

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{n\pi\left(1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{it2x'} \frac{1}{n\pi\left(1 + (x')^2\right)} n dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{itnx'} \frac{1}{\pi\left(1 + (x')^2\right)} dx'
\end{aligned}$$

---

[279] Să observăm legătura dintre **distribuția Cauchy și distribuția Laplace**, mai precis dintre funcția caracteristică asociată unei v.a. de tip $\mathscr{C}(0,1)$ și densitatea unei v.a. de tip Laplace$(1,0)$. Astfel, **funcția caracteristică a uneia este, exceptând o constantă multiplicativă, densitatea celeilalte** (vezi și Nota 280 și Nota 275):

$$\varphi_{\mathscr{C}(0,1)}(t) = 2 f_{\text{Laplace}(1,0)}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} &= \varphi_{\mathscr{C}(0,1)}(nt) \\ &= e^{-|nt|}, \end{aligned}$$

deci

$$\varphi_{\mathscr{C}(0,n)}(t) = e^{-n|t|}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{4.29}$$

(c) Avem

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Metoda I

Se poate arăta că putem deriva integrala cu parametru și obținem

$$\begin{aligned} \varphi_X'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)_t' dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} it e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \\ &= i^2 t \cdot \varphi_X(t), \end{aligned}$$

deoarece

$$\lim_{x\to\pm\infty} |e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}| = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} |e^{itx}| = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Obținem că funcția caracteristică satisface ecuația diferențială cu variabile separabile

$$\varphi_X'(t) = -t\varphi_X(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Deci

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_X'(t)}{\varphi_X(t)} = -t \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\ln \varphi_X(t)\right)' = \left(-\frac{t^2}{2}\right)' \\ &\Rightarrow \quad \ln \varphi_X(t) - \ln \varphi_X(t_0) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t_0^2}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi_X(t) = \varphi_X(t_0)\, e^{-\frac{t^2}{2}+\frac{t_0^2}{2}} = ce^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Impunând $\varphi_X(0) = 1$ obținem $c = 1$, deci

$$\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Să menționăm că, în acest caz, distribuția v.a. X este simetrică (deoarece funcția caracteristică asociată este o funcție cu valori reale).

Metoda II

Avem

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx.\end{aligned}$$

Având în vedere că $\left|\sin(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right| \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$, iar $\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ este convergentă, obținem că $\int_0^{\infty} \sin(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ este convergentă. Folosind și imparitatea funcției $\sin(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ deducem

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \int_{-\infty}^{0} \sin(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^{\infty} \sin(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_0^{\infty} \sin(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_0^{\infty} \sin(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 0,\end{aligned}$$

deci $\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Se poate arăta că putem deriva integrala cu parametru și obținem

$$\begin{aligned}\varphi_X'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right)_t' dx \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \sin(tx)\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\sin(tx)\,e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{\mathbb{R}} t\cos(tx)\,e^{-\frac{x^2}{2}}dx\Big)\\
&= -t\cdot\varphi_X(t),
\end{aligned}$$

deoarece

$$\lim_{x\to\pm\infty}|\sin(tx)\,e^{-\frac{x^2}{2}}| \le \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Obținem că funcția caracteristică satisface aceeași ecuație diferențială cu variabile separabile

$$\varphi_X'(t) = -t\varphi_X(t), \quad t\in\mathbb{R},$$

cu soluția $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, pentru $t\in\mathbb{R}$, deoarece $\varphi_X(0)=1$.

4.2.7 Să se calculeze funcția caracteristică asociată v.a. X cu densitatea:

$$(a)\ f_X(x) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{|x|}{4}\Big)\mathbb{1}_{\{|x|\le 2\}}, \qquad (b)\ f_X(x) = \frac{a}{2}e^{-a|x|}, \quad a>0,$$

$$(c)\ f_X(x) = \Big(\frac{1}{c} - \frac{|x-a|}{c^2}\Big)\mathbb{1}_{\{|x-a|\le c\}}, \quad (d)\ f_X(x) = \frac{a-|x|}{a^2}\mathbb{1}_{\{|x|\le a\}}.$$

Rezolvare:

(a) Schimbând variabila și apoi integrând prin părți obținem

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{itx}\left(1-\frac{|x|}{2}\right)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} e^{itx}\Big(1+\frac{x}{2}\Big)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} e^{itx}\Big(1-\frac{x}{2}\Big)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\Big(1-\frac{x}{2}\Big)\left(e^{itx}+e^{-itx}\right)dx = \int_0^2\Big(1-\frac{x}{2}\Big)\cos(tx)\,dx\\
&= \frac{\sin(tx)}{t}\Big|_{x=0}^{x=2} - \frac{1}{2}\left(x\frac{\sin(tx)}{t}\Big|_{x=0}^{x=2} - \frac{1}{t}\,\frac{\cos(tx)}{-t}\Big|_{x=0}^{x=2}\right)\\
&= \frac{\sin(2t)}{t} - \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin(2t)}{t} + \frac{\cos(2t)}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right)\\
&= \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2.
\end{aligned}$$

Să observăm că densitate de repartiție și funcția caracteristică corespund sumei a două v.a. uniforme pe $[-1,1]$.

Într-adevăr, dacă $U, V \sim \mathcal{U}[-1,1]$ sunt două v.a. independente, atunci, folosind Propoziția 4.24,

$$\varphi_{U+V}(t) = \varphi_U(t) \cdot \varphi_V(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2,$$

deci cele două funcții caracteristice coincid:

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \varphi_{U+V}(t).$$

Având în vedere observația (4.12) (vezi și Remarca 4.36) obținem că $U+V$ și X sunt identic distribuite, adică deducem că densitatea v.a. $U+V$ coincide cu densitatea v.a. X, i.e.

$$f_{U+V}(x) = f_X(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{|x|}{4}\right) \mathbb{1}_{\{|x| \leq 2\}}.$$

Reamintim că această relație a fost demonstrată folosind produsul de convoluție dintre f_U și f_V și a fost deja obținută prin formula (3.118).

(b) Să observăm că densitatea f corespunde unei v.a. X distribuite Laplace de parametri $\frac{1}{a}$ și 0.

Schimbând variabila și apoi integrând prin părți obținem

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-a|x|} dx \\
&= \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{itx} e^{-a|x|} dx + \frac{a}{2}\int_{0}^{\infty} e^{itx} e^{-a|x|} dx \\
&= \frac{a}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\left(e^{itx} + e^{-itx}\right) dx \\
&= a\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos(tx)\, dx \\
&= \frac{a^2}{a^2+t^2}.
\end{aligned}$$

Deci [280]

$$\varphi_{\text{Laplace}\left(\frac{1}{a},0\right)}(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}$$

[280] Să observăm **legătura dintre distribuția Laplace și distribuția Cauchy**, mai precis dintre

$$= 1 - \left(\frac{t}{a}\right)^2 + \left(\frac{t}{a}\right)^4 - \ldots + (-1)^n \left(\frac{t}{a}\right)^{2n} + \ldots$$

și observăm astfel că momentele de ordin impar sunt nule.

(c) Integrând prin părți obținem

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \frac{1}{c^2}\int_{a-c}^{a} e^{itx}(x-a+c)\,dx - \frac{1}{c^2}\int_{a}^{a+c} e^{itx}(x-a-c)\,dx \\
&= \frac{1}{c^2}\int_{a-c}^{a} xe^{itx}dx + \frac{c-a}{c^2}\frac{e^{itx}}{it}\Big|_{x=a-c}^{x=a} \\
&\quad - \frac{1}{c^2}\int_{a}^{a+c} xe^{itx}dx + \frac{c+a}{c^2}\frac{e^{itx}}{it}\Big|_{x=a}^{x=a+c} \\
&= \frac{1}{c^2t^2}e^{iat}\left(2-\left(e^{ict}+e^{-ict}\right)\right) \\
&= \frac{2}{c^2t^2}e^{iat}\left(1-\cos(ct)\right) \\
&= e^{iat}\left(\frac{\sin(ct/2)}{ct/2}\right)^2.
\end{aligned}$$

(d) Schimbând variabila și apoi integrând prin părți obținem

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a} e^{itx}(a-|x|)\,dx \\
&= \frac{1}{a^2}\int_{-a}^{0} e^{itx}(a-|x|)\,dx + \frac{1}{a^2}\int_{0}^{a} e^{itx}(a-|x|)\,dx \\
&= \frac{1}{a^2}\int_{0}^{a}(a-x)\left(e^{itx}+e^{-itx}\right)dx \\
&= \frac{2}{a^2}\int_{0}^{a}(a-x)\cos(tx)\,dx,
\end{aligned}$$

funcția caracteristică asociată unei v.a. de tip Laplace$(1,0)$ și densitatea unei v.a. de tip $\mathscr{C}(0,1)$. Astfel, **funcția caracteristică a uneia este, exceptând o constantă multiplicativă, densitatea celeilalte** (vezi și Nota 279 și Nota 275):

$$\varphi_{\text{Laplace}(1,0)}(t) = \pi f_{\mathscr{C}(0,1)}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

deci

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \frac{2}{a}\int_0^a \cos(tx)\,dx - \frac{2}{a^2}\int_0^a x\cos(tx)\,dx \\ &= \frac{2}{at}\sin(at) - \frac{2}{a^2t^2}\left(\cos(at) - 1 + at\sin(at)\right) \\ &= \frac{4}{a^2t^2}\sin^2\left(\frac{at}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\sin\frac{at}{2}}{\frac{at}{2}}\right)^2 .\end{aligned}$$

4.2.8 Să se determine funcțiile de repartiție corespunzătoare v.a. cu următoarele funcții caracteristice:

$$(a)\ \varphi(t) = \cos t, \qquad (b)\ \varphi(t) = \cos^2 t,$$
$$(c)\ \varphi(t) = \frac{1}{4}\left(1+e^{it}\right)^2, \quad (d)\ \varphi(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{e^{it}}{2}}.$$

Rezolvare:

Deducem mai întâi v.a. care are funcția caracteristică dată. Apoi scriem funcțiile de repartiție corespunzătoare.

(a) Deoarece $\varphi(t) = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}$, deducem că v.a. corespunzătoare are tabloul

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

adică X este distribuită discret de tip uniform $X \sim \mathscr{DU}(2)$ cu valorile $\{-1, +1\}$.

(b) Deoarece

$$\varphi(t) = \cos^2 t = \left(\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{-2it} + \frac{1}{2}e^{it0} + \frac{1}{4}e^{2it},$$

deducem că v.a. corespunzătoare are tabloul

$$X : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Pe de altă parte, să observăm că funcția dată inițial se poate scrie sub forma $\varphi(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t)$, unde $\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_2}(t) = \cos t$, adică X, Y sunt două v.a. de tip i.i.d., cu tablourile date de (4.30). Deci $\varphi(t) = \varphi_{X_1+X_2}(t)$, adică v.a. căutată este suma $X_1 + X_2$, care se poate calcula ușor. Astfel, obținem, din nou, tabloul (4.31).

(c) Deoarece $\varphi(t) = \frac{1}{4}\left(1+e^{it}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{4}e^{2it}$, deducem că v.a. corespunzătoare are tabloul

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(d) Dezvoltând în serie de puteri deducem

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{e^{it}}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{it}}{2} + \frac{e^{2it}}{2^2} + \ldots + \frac{e^{nit}}{2^n} + \ldots\right).$$

Deci v.a. corespunzătoare are tabloul

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n & \ldots \\ \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2^2} & \dfrac{1}{2^3} & \ldots & \dfrac{1}{2^{n+1}} & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ \\ \dfrac{1}{2^k} \end{pmatrix}_{k\in\mathbb{N}}.$$

4.2.9 Să se determine, folosind formula de inversiune (4.14), densitatea de repartiție corespunzătoare v.a. cu următoarele funcții caracteristice:

$$(a)\ \ \varphi(t) = e^{-|t|}, \quad (b)\ \ \varphi(t) = e^{-a^2t^2}, \quad a > 0.$$

Rezolvare:

(a) Avem

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-|t|}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-itx}e^{t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-itx}e^{-t}dt \end{aligned}$$

și facem schimbarea de variabilă $t' = -t$ în prima integrală.

Obținem

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \left(e^{itx} + e^{-itx} \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(tx)\, dt \\ &= \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \end{aligned}$$

deoarece

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(tx)\, dt &= -e^{-t} \cos(tx) \Big|_{t=0}^{t=\infty} - x \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(tx)\, dt \\ &= 1 - x \left(-e^{-t} \sin(tx) \Big|_{t=0}^{t=\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(tx)\, dt \right) \\ &= 1 - x^2 \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(tx)\, dt. \end{aligned}$$

Deci $X \sim \mathscr{C}(0,1)$.

(b) Utilizând rezultate din teoria funcțiilor complexe se poate demonstra că următorul calcul este corect (notăm $t' = at + \frac{ix}{2a}$ în integrala complexă):

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-a^2 t^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(at + \frac{ix}{2a}\right)^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t')^2} \frac{1}{a} dt' \\ &= \frac{1}{2a\pi} e^{-\frac{x^2}{4a^2}} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(a\sqrt{2}\right)^2}} e^{-\frac{x^2}{2(a\sqrt{2})^2}}, \end{aligned}$$

adică $X \sim \mathscr{N}\left(0, a\sqrt{2}\right)$.

4.2.10 Să se calculeze, folosind formula de inversiune (4.14), funcția caracteristică asociată v.a. Y cu densitatea:

$$(a)\ \ f\left(x\right)=\frac{2}{\pi a^{2}x^{2}}\sin^{2}\left(\frac{ax}{2}\right),\quad (b)\ \ f\left(x\right)=\frac{a}{\pi\left(a^{2}+x^{2}\right)},$$

unde $a>0$.

Rezolvare:

(a) Schimbând variabila $x'=-x$ obținem

$$\begin{aligned}\varphi_{Y}\left(t\right)&=\frac{2}{\pi a^{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\frac{1}{x^{2}}\sin^{2}\left(\frac{ax}{2}\right)dx\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx'}\left(\frac{\sin\left(\frac{ax'}{2}\right)}{\frac{ax'}{2}}\right)^{2}dx'.\end{aligned}$$

Observăm că egalitatea precedentă reprezintă tocmai formula de inversiune (4.14) aplicată funcției caracteristice $\left(\frac{\sin\left(\frac{at}{2}\right)}{\frac{at}{2}}\right)^{2}$.

Mai precis, folosind Exercițiul 4.2.7, punctul (d), precum și formula de inversiune (4.14) putem scrie egalitatea $f_{X}\left(x\right)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}e^{-itx}\varphi_{X}\left(t\right)dt$, adică obținem valoarea integralei

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\left(\frac{\sin\left(\frac{at}{2}\right)}{\frac{at}{2}}\right)^{2}dt=\frac{a-|x|}{a^{2}}\mathbb{1}_{\{|x|\leq a\}}.$$

Identificând, rezultă $\varphi_{Y}\left(x\right)=\frac{a-|x|}{a^{2}}\mathbb{1}_{\{|x|\leq a\}}$.

(b) Schimbând variabila $x'=-x$ obținem

$$\varphi_{Y}\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\frac{a}{\pi\left(a^{2}+x^{2}\right)}dx=\frac{1}{a\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx'}\frac{a^{2}}{a^{2}+(x')^{2}}dx'.$$

Observăm că egalitatea precedentă reprezintă tocmai formula de inversiune (4.14) aplicată funcției caracteristice $\frac{a^{2}}{a^{2}+t^{2}}$.

Mai precis, folosind Exercițiul 4.2.7, punctul (b), precum și formula de inversiune (4.14) obținem valoarea integralei:

$$\frac{a}{2}e^{-a|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{a^2}{a^2+x^2}dt.$$

Identificând, rezultă $\varphi_Y(x) = e^{-a|x|}$.

Să observăm că $Y \sim \mathscr{C}(0,a)$ și, prin urmare, putem calcula funcția caracteristică folosind direct formulele (4.28) sau (4.29).

4.2.11 Fie două v.a. independente $X \sim \mathscr{B}(n,p), Y \sim \mathscr{B}(m,p)$. Să se arate, folosind funcția caracteristică, că[281]

$$X+Y \sim \mathscr{B}(n+m,p).$$

4.2.12 Fie un șir $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip i.i.d., cu $X_k \sim \text{Bernoulli}(p)$, pentru $k \in \mathbb{N}^*$ și fie

$$S_n \overset{\text{not}}{=\!=} \sum\nolimits_{k=1}^{n} X_k, \quad \text{pentru } n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se determine funcția caracteristică a v.a. X_k și S_n și apoi, folosind funcția caracteristică, să se determine media și dispersia v.a. X_k și S_n precum și tipul distribuției v.a. S_n.

4.2.13 Fie două v.a. independente $X \sim \mathscr{P}(\lambda), Y \sim \mathscr{P}(\mu)$. Să se arate, folosind funcția caracteristică, că[282]

$$X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\mu). \tag{4.32}$$

Rezolvare:

Avem

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}e^{\mu\left(e^{it}-1\right)} = e^{(\lambda+\mu)\left(e^{it}-1\right)},$$

adică $X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

4.2.14 Fie două v.a. independente $X, Y \sim \mathscr{G}(p)$. Să se arate, folosind funcția caracteristică, că[283]

$$X+Y \sim \mathscr{NegB}(2,p).$$

281 Pentru o demonstrație alternativă vezi Propoziția 2.125.

282 Pentru o demonstrație alternativă vezi Propoziția 2.165.

283 Pentru o demonstrație alternativă vezi Propoziția 2.180.

4.2.15 Fie două v.a. independente $X \sim \mathscr{NegB}(r,p), Y \sim \mathscr{NegB}(s,p)$. Să se arate, folosind funcția caracteristică, că[284]

$$X + Y \sim \mathscr{NegB}(r+s,p)\,. \tag{4.33}$$

4.2.16 Fie v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ de tip i.i.d., cu $X_i \sim \mathscr{NegB}(r,p)$. Să definim $S_n \overset{\text{not}}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Să se determine funcția caracteristică φ_{S_n} și apoi tipul de distribuție al v.a. S_n. Să se determine, utilizând funcția caracteristică, media și dispersia v.a. S_n.

Rezolvare:

Conform (4.19), avem că

$$\varphi_{X_i}(t) = \left(\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\right)^r, \quad i = \overline{1,n},$$

deci, folosind formula (4.8), obținem

$$\varphi_{S_n}(t) = \left(\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\right)^{nr},$$

adica $S_n \sim \mathscr{NegB}(nr,p)$.

Prin urmare,

$$\begin{aligned}
\varphi'_{S_n}(t) &= nr\,\frac{ipe^{it}\left(1-qe^{it}\right) - pe^{it}\left(-iqe^{it}\right)}{\left(1-qe^{it}\right)^2}\left(\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\right)^{nr-1} \\
&= nr\,\frac{ipe^{it}}{\left(1-qe^{it}\right)^2}\left(\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\right)^{nr-1} \\
&= inr\,\frac{\left(pe^{it}\right)^{nr}}{\left(1-qe^{it}\right)^{nr+1}}\,.
\end{aligned}$$

Media este dată de

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{i}\varphi'_{S_n}(0) = \frac{nr}{p}\,. \tag{4.34}$$

[284] Pentru o demonstrație alternativă vezi Propoziția 2.182.

Apoi

$$\begin{aligned}\varphi''_{S_n}(t) &= inr\left(pe^{it}\right)^{nr}\left(1-qe^{it}\right)^{nr}\frac{inr\left(1-qe^{it}\right)-(nr+1)\left(-iqe^{it}\right)}{\left(1-qe^{it}\right)^{2nr+2}}\\ &= inr\left(pe^{it}\right)^{nr}\frac{i\left(nr+qe^{it}\right)}{\left(1-qe^{it}\right)^{nr+2}},\end{aligned}$$

deci

$$\mathbb{E}\left(S_n^2\right)=\frac{1}{i^2}\varphi''_{S_n}(0)=nrp^{nr}\frac{(nr+q)}{(1-q)^{nr+2}}=\frac{n^2r^2+nrq}{p^2}, \tag{4.35}$$

iar

$$\mathrm{D}^2\left(S_n\right)=\frac{n^2r^2+nrq}{p^2}-\frac{n^2r^2}{p^2}=\frac{nrq}{p^2}.$$

4.2.17 Fie două v.a. independente $X\sim\mathrm{Gamma}(\alpha,\lambda)\,, Y\sim\mathrm{Gamma}(\beta,\lambda)$. Să se arate, folosind funcția caracteristică, că[285]

$$X+Y\sim\mathrm{Gamma}(\alpha+\beta,\lambda)\,.$$

Rezolvare:

Avem

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^{\alpha}\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^{\beta}=\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^{\alpha+\beta},$$

adică $X+Y\sim\mathrm{Gamma}(\alpha+\beta,\lambda)\,.$

4.2.18 Fie două v.a. independente $X,Y\sim\mathrm{Exp}(\lambda)$. Să se arate, folosind funcția caracteristică, că

$$X+Y\sim\mathrm{Gamma}(2,\lambda)=\mathrm{Erlang}(2,\lambda)\,.$$

Rezolvare:

Suntem într-un caz particular al problemei precedente deoarece distribuția exponențială este un caz particular al distribuției Gamma, mai precis, $\mathrm{Exp}(\lambda)=\mathrm{Gamma}(1,\lambda)\,.$

[285] Pentru o demonstrație alternativă vezi Propoziția 3.143.

4.2.19 Fie v.a. $X \sim \text{Gamma}\,(p, \lambda)$. Să se arate că, dacă $c > 0$, atunci

$$cX \sim \text{Gamma}\left(p, \frac{\lambda}{c}\right).$$

Rezolvare:

Avem

$$\varphi_{cX}(t) = \mathbb{E}\left(e^{itcX}\right) = \varphi_X(ct) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - ict}\right)^p = \left(\frac{\lambda/c}{\lambda/c - it}\right)^p = \varphi_Y(t),$$

unde $Y \sim \text{Gamma}\,(p, \lambda/c)$.

4.2.20 Fie două v.a. independente $X, Y \sim \mathscr{C}(0,1)$. Să se arate[286] că

$$(a)\;\; X+Y \sim \mathscr{C}(0,2), \quad (b)\;\; \frac{X+Y}{2} \sim \mathscr{C}(0,1).$$

Rezolvare:

(a) Avem, folosind (4.28) și (4.29),

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = e^{-|t|}e^{-|t|} = e^{-2|t|},$$

adică $X+Y \sim \mathscr{C}(0,2)$.

(b) Avem

$$\varphi_{\frac{X+Y}{2}}(t) = \mathbb{E}\left(e^{it\,\frac{X+Y}{2}}\right) = \varphi_{X+Y}\left(\frac{t}{2}\right) = e^{-2\left|\frac{t}{2}\right|} = e^{-|t|}.$$

4.2.21 Fie v.a. $(X_k)_{k=\overline{1,n}}$ de tip i.i.d., cu $X_k \sim \mathscr{C}(0,1)$, unde $k = \overline{1,n}$. Să se arate că[287]

$$(a)\;\; X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim \mathscr{C}(0,n), \quad (b)\;\; \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim \mathscr{C}(0,1).$$

---

[286] Pentru o demonstrație alternativă vezi Exercițiul 3.6.41.

[287] Să observăm că v.a. $X_k \sim \mathscr{C}(0,1)$ au funcția caracteristică $\varphi_{X_k}(t) = e^{-c|t|^\alpha}$, pentru un $c > 0$ și $\alpha = 1$. Pe de altă parte, v.a. X_k satisfac proprietatea

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n^{1/\alpha}} \sim \mathscr{C}(0,1),$$

adică distribuția $\mathscr{C}(0,1)$ este inchisă la convoluții (vezi și Nota 289).

Rezolvare:

(b) Avem, folosind (4.28) și (4.29),

$$\begin{aligned}\varphi_{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}}(t) &= \mathbb{E}\left(e^{it\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}}\right)\\ &= \varphi_{X_1+X_2+\ldots+X_n}\left(\frac{t}{n}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}\left(\frac{t}{n}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n} e^{-\left|\frac{t}{n}\right|}\\ &= e^{-n\left|\frac{t}{n}\right|}\\ &= e^{-|t|},\end{aligned}$$

adică $\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \sim \mathscr{C}(0,1)$.

Să observăm că rezultatul obținut nu intră în contradicție cu Legea Numerelor Mari sau cu Teorema Limită Centrală având în vedere că media și dispersia v.a. de tip Cauchy nu există (vezi Exemplul 3.40).

4.2.22 Fie v.a. independente $X, Y \sim \mathscr{N}(0,1)$. Să se arate, folosind funcția caracteristică, că

$$X+Y \sim \mathscr{N}(0,2).$$

Rezolvare:

Avem

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{(\sqrt{2})^2 t^2}{2}},$$

adică $X+Y \sim \mathscr{N}\big(0,(\sqrt{2})^2\big)$.

4.2.23 Fie n v.a. independente $X_k \sim \mathscr{N}\big(\mu_k,\sigma_k^2\big)$, $k=\overline{1,n}$. Să se arate, folosind funcția caracteristică, că[288]

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathscr{N}\Big(\sum_{k=1}^{n}\mu_k, \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\Big).$$

Rezolvare:

[288] Pentru o demonstrație alternativă vezi Propoziția 3.131.

Știm că $\varphi_{X_k}(t) = e^{it\mu_k - \frac{\sigma_k^2 t^2}{2}}$. Fie $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Folosind (4.7) obținem

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^n e^{it\mu_k - \frac{\sigma_k^2 t^2}{2}} = e^{it\left(\sum_{k=1}^n \mu_k\right) - \frac{\left(\sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right) t^2}{2}}.$$

Folosind proprietatea de unicitate dată de Remarca 4.34 deducem concluzia.

4.2.24 Fie n v.a. independente $X_k \sim \mathcal{N}\big(\mu, \sigma^2\big)$, $k = \overline{1,n}$. Să se arate că

$$\bar{X}_n \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \sim \mathcal{N}\Big(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\Big).$$

Rezolvare:

Știm că $\varphi_{X_k}(t) = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$. Fie $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Folosind (4.8) obținem

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = e^{itn\mu - \frac{n\sigma^2 t^2}{2}},$$

adică $S_n \sim \mathcal{N}\big(n\mu, n\sigma^2\big)$.

Conform teoremei de transformare a v.a., obținem

$$f_{\bar{X}_n}(u) = n f_{S_n}(nu) = \frac{n}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-\frac{(nu-n\mu)^2}{2n\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{n}}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\frac{\sigma^2}{n}}}.$$

Deci $\bar{X}_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \sim \mathcal{N}\Big(\mu, \big(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\big)^2\Big)$.

4.2.25 Fie n v.a. independente $X_k \sim \mathcal{N}\big(0, \sigma^2\big)$, $k = \overline{1,n}$. Să se arate că[289]

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}\big(0, \sigma^2\big).$$

[289] Să observăm că v.a. $X_k \sim \mathcal{N}\big(0, \sigma^2\big)$ au funcția caracteristică $\varphi_{X_k}(t) = e^{-c|t|^\alpha}$, pentru un $c > 0$ și $\alpha = 2$. Pe de altă parte, v.a. X_k satisfac proprietatea

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n^{1/\alpha}} \sim \mathcal{N}\big(0, \sigma^2\big),$$

adică distribuția $\mathcal{N}\big(0, \sigma^2\big)$ este inchisă la convoluții (vezi și Nota 287).

4.2.26 Mai mulți elevi participă la un concurs care consistă în două probe: *Înțelegerea unui text* și *Matematică*. Să notăm cu X și respectiv Y v.a. care desemnează numărul de puncte obținute la cele două probe de către un elev ales la întâmplare. Să presupunem că v.a. X, Y sunt independente și distribuite normal cu media 49 și deviatia standard 11 și respectiv 51 și 12.

(a) Să se scrie densitatea vectorului aleator (X, Y). Să se determine funcția de repartiție F_X cu ajutorul funcției de repartiție Φ asociată unei v.a. normale standard.

(b) Să se determine, folosind funcția caracteristică, tipul distribuției numărului total de puncte obținute de un elev. Care este probabilitatea ca acel elev să aibă totalul de puncte de cel puțin 125 puncte?

(c) Să se determine, folosind funcția caracteristică, tipul distribuției diferenței numărului de puncte obținute de un elev la cele două probe. Care este probabilitatea ca acel elev să ia la proba a doua mai multe puncte decât la prima?

Rezolvare:

(b) Se determină, folosind funcția caracteristică, tipul distribuției v.a. $X + Y$ și apoi $\mathbb{P}\left(X + Y \geq 125\right)$ cu ajutorul funcției Φ pentru care există tabele de valori.

(c) Se determină, folosind funcția caracteristică, tipul distribuției v.a. $X - Y$ și apoi $\mathbb{P}\left(X < Y\right) = \mathbb{P}\left(X - Y < 0\right)$ cu ajutorul funcției Φ.

4.2.27 Fie două v.a. independente $X \sim \chi^2(n, \sigma)$, $Y \sim \chi^2(m, \sigma)$. Să se arate, folosind funcția caracteristică, că

$$X + Y \sim \chi^2(n + m, \sigma)\,. \tag{4.36}$$

Rezolvare:

Avem

$$\begin{aligned}
\varphi_{X+Y}\left(t\right) &= \varphi_X\left(t\right) \cdot \varphi_Y\left(t\right) \\
&= \left(1 - 2i\sigma^2 t\right)^{-\frac{n}{2}} \left(1 - 2i\sigma^2 t\right)^{-\frac{m}{2}} \\
&= \left(1 - 2i\sigma^2 t\right)^{-\frac{n+m}{2}}\,,
\end{aligned}$$

adică $X + Y \sim \chi^2(n + m, \sigma)$.

4.2.28 Fie n v.a. independente $X_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $k = \overline{1, n}$. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \sim \chi^2(n, \sigma) .$$

Rezolvare:

Conform Propoziției 3.245, obținem că $X_k^2 \sim \chi^2(1, \sigma)$.

Prin urmare, folosind (4.27), $\varphi_{X_k^2}(t) = \left(1 - 2i\sigma^2 t\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Notând $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$, avem

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k^2}(t) = \left(1 - 2i\sigma^2 t\right)^{-\frac{n}{2}} ,$$

adică $S_n \sim \chi^2(n, \sigma)$.

4.2.29 Fie n v.a. independente $X_k \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$, $k = \overline{1, n}$. Să definim $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Să se determine funcția caracteristică $\varphi_{S_n}(t)$ și să se verifice că densitatea de repartiție[290] este

$$f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) . \tag{4.37}$$

Rezolvare:

Avem, conform formulei (4.8),

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n .$$

Pe de altă parte,

$$\varphi_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-(\lambda - it)x} x^{n-1} dx.$$

Utilizând rezultate din teoria funcțiilor complexe se poate demonstra că următorul calcul este corect (notăm $x' = (\lambda - it)\, x$ în integrala complexă):

$$\varphi_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \frac{1}{(\lambda - it)^n} \int_0^\infty e^{-x'} (x')^{n-1} dx'$$

[290] Dacă o v.a. X are densitatea de repartiție dată de (4.37), cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $\lambda > 0$, atunci spunem că X urmează **distribuția Erlang** de parametri n și λ și scriem $X \sim \operatorname{Erlang}(n, \lambda)$.
Distribuția Erlang este un caz particular al distribuției Gamma:
$$\operatorname{Gamma}(n, \lambda) = \operatorname{Erlang}(n, \lambda) .$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \frac{1}{(\lambda - it)^n} \Gamma(n)$$
$$= \frac{\lambda^n}{(\lambda - it)^n}.$$

Deci

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \text{Erlang}(n,\lambda) = \text{Gamma}(n,\lambda). \tag{4.38}$$

Concluzia problemei se putea obține și direct, folosind Exercițiul 4.2.17 sau Exercițiul 4.2.18. Într-adevăr, dacă $X_k \sim \text{Exp}(\lambda) = \text{Gamma}(1,\lambda)$, atunci $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \text{Gamma}(n,\lambda) = \text{Erlang}(n,\lambda)$.

Pentru orice $x > 0$, funcția de repartiție este dată de (vezi și Exercițiul 3.147)

$$F_{S_n}(x) = \int_0^x \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} dt$$
$$= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^x t^{n-1} \left(\frac{e^{-\lambda t}}{-1}\right)' dt$$
$$= -\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \left(t^{n-1} e^{-\lambda t} \Big|_{t=0}^{t=x} - (n-1) \int_0^x t^{n-2} e^{-\lambda t} dt \right)$$
$$= -\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} (n-1) \int_0^x t^{n-2} e^{-\lambda t} dt.$$

Se va obține

$$F_{S_n}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}.$$

Deci obținem legătura dintre funcțiile de repartiție (vezi și relația (3.78) de legătura)

$$F_{\text{Gamma}(n,\lambda)}(x) = 1 - F_{\mathscr{P}(\lambda x)}(n-1), \quad \text{pentru } x > 0,$$

iar în particular, pentru $x = 1$,

$$F_{\text{Gamma}(n,\lambda)}(1) = 1 - F_{\mathscr{P}(\lambda)}(n-1).$$

4.2.30 Fie v.a. $X \sim \mathscr{C}(0,1)$ și v.a. $Y = X$. Să se arate că

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t), \quad \text{pentru } t \in \mathbb{R},$$

deși X și Y nu sunt independente.

Rezolvare:
Folosind (4.28) sau (4.29) avem, pentru orice $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{X+Y}(t) &= \varphi_{2X}(t) \\
&= \mathbb{E}\left(e^{it2X}\right) \\
&= \varphi_X(2t) \\
&= e^{-2|t|} = e^{-|t|}e^{-|t|} \\
&= \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t).
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, evident, X și Y nu sunt v.a. independente. Astfel, am obținut un contraexemplu (vezi și Exercițiul 4.2.31) pentru a vedea că reciproca Propoziției 4.24 nu este adevărată.

4.2.31 Fie vectorul aleator (X, Y) cu densitatea

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{4}\left[1 + xy\left(x^2 - y^2\right)\right]\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1, |y|\leq 1\}}.$$

Să se arate că $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, dar X și Y nu sunt v.a. independente.

Rezolvare:

Calculăm densitățile marginale și obținem

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}} \quad \text{și} \quad f_Y(y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|y|\leq 1\}},$$

adică $X, Y \sim \mathscr{U}[-1, 1]$.

Obținem astfel și faptul că X, Y nu sunt independente.

Pe de altă parte, conform (4.22),

$$\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Să calculăm acum

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(u - v, v)\,dv$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(1+(u-v)^3 v-(u-v)v^3\right)\mathbb{1}_{\{|u-v|\le 1\}}dv$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(1+(u-v)^3 v-(u-v)v^3\right)\mathbb{1}_{[u-1,u+1]}(v)\,dv.$$

Dacă $u \in [-2,0]$, atunci $u-1 \le -1 \le u+1 \le 1$ și deci

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{u+1}\left(1+(u-v)^3 v-(u-v)v^3\right)dv$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{u+1}\left(1+u^3v-3u^2v^2+2uv^3\right)dv$$
$$= \frac{1}{4}(2+u).$$

Dacă $u \in [0,2]$, atunci $-1 \le u-1 \le 1 \le u+1$ și deci

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{4}\int_{u-1}^{1}\left(1+(u-v)^3 v-(u-v)v^3\right)dv$$
$$= \frac{1}{4}\int_{u-1}^{1}\left(1+u^3v-3u^2v^2+2uv^3\right)dv$$
$$= \frac{1}{4}(2-u).$$

Deci f_{X+Y} este dată tot de relația (3.118):

$$f_{X+Y}(u) = \frac{1}{4}(2-|u|)\,\mathbb{1}_{[-2,2]}(u)$$

și, efectând calculele,

$$\varphi_{X+Y}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} f_{X+Y}(u)\,du$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-2}^{0} e^{itu}(2+u)\,du + \frac{1}{4}\int_{0}^{2} e^{itu}(2-u)\,du$$
$$= \frac{1}{2t^2}\left(1-\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2t^2}(1-\cos(2t))$$

$$= \frac{\sin^2 t}{t^2}.$$

Deci s-a obținut egalitatea

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$$

deși X și Y nu sunt independente. Astfel, am obținut un alt contraexemplu (vezi și Exercițiul 4.2.30) pentru a vedea că reciproca Propoziției 4.24 nu este adevărată.

4.2.32 Fie X, Y două v.a. independente cu densitățile f_X, f_Y și funcțiile caracteristice corespunzătoare φ_X, φ_Y. Să definim $V = \frac{X}{Y}$. Să se arate că

$$\varphi_V(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_X\left(\frac{t}{x}\right) f_Y(x)\, dx.$$

Rezolvare:

Conform formulei (3.103) avem $f_{\frac{X}{Y}}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} |u|\, f_X(uv)\, f_Y(u)\, du$, deci, schimbând ordinea de integrare și folosind substituția $uv = v'$,

$$\begin{aligned}
\varphi_V(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itv} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u|\, f_X(uv)\, f_Y(u)\, du \right) dv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u|\, f_Y(u)\, e^{itv} f_X(uv)\, dv \right) du \\
&= \int_{-\infty}^{0} |u|\, f_Y(u) \left(\int_{-\infty}^{0} e^{itv} f_X(uv)\, dv + \int_{0}^{\infty} e^{itv} f_X(uv)\, dv \right) du \\
&\quad + \int_{0}^{\infty} |u|\, f_Y(u) \left(\int_{-\infty}^{0} e^{itv} f_X(uv)\, dv + \int_{0}^{\infty} e^{itv} f_X(uv)\, dv \right) du \\
&= \int_{-\infty}^{0} |u|\, f_Y(u) \left(\int_{\infty}^{0} e^{itv'/u} f_X(v')\, \frac{dv'}{u} + \int_{0}^{-\infty} e^{itv'/u} f_X(v')\, \frac{dv'}{u} \right) du \\
&\quad + \int_{0}^{\infty} |u|\, f_Y(u) \left(\int_{-\infty}^{0} e^{itv'/u} f_X(v')\, \frac{dv'}{u} + \int_{0}^{\infty} e^{itv'/u} f_X(v')\, \frac{dv'}{u} \right) du \\
&= \int_{-\infty}^{0} |u|\, f_Y(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itv'/u} f_X(v')\, \frac{1}{-u}\, dv' \right) du \\
&\quad + \int_{0}^{\infty} |u|\, f_Y(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itv'/u} f_X(v')\, \frac{1}{u}\, dv' \right) du
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |u| \, f_Y(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itv'/u} f_X(v') \, \frac{1}{|u|} \, dv' \right) du$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t/u)v'} f_X(v') \, dv' \right) du$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(u) \, \varphi_X\left(\frac{t}{u}\right) du.$$

4.2.33 Fie X o v.a. care urmează o repartiție Poisson de parametru ν. Să considerăm parametrul ν drept o v.a. cu densitatea de repartiție

$$f(x) = \frac{a^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-ax} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad \text{cu } a > 0.$$

Atunci, obținem $\mathbb{P}(X=0) = \left(\frac{a}{1+a}\right)^{\lambda}$ și, pentru $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \int_0^{\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-x} \frac{a^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-ax} dx$$
$$= \left(\frac{a}{1+a}\right)^{\lambda} \frac{(-1)^k}{(1+a)^k} \frac{(-\lambda)(-\lambda-1)\cdots(-\lambda-k+1)}{k!}.$$

Să se calculeze $\mathrm{D}^2(X)$ cu ajutorul funcției caracteristice.

Rezolvare:

Avem

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \mathbb{P}(X=k)$$
$$= \mathbb{P}(X=0) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} \mathbb{P}(X=k)$$
$$= C_0 + C_0 \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} \frac{(-1)^k}{(1+a)^k} \frac{(-\lambda)(-\lambda-1)\cdots(-\lambda-k+1)}{k!}$$
$$= C_0 + C_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-e^{it}}{1+a}\right)^k \frac{(-\lambda)(-\lambda-1)\cdots(-\lambda-k+1)}{k!},$$

unde $C_0 = \left(\frac{a}{1+a}\right)^{\lambda}$.

Folosind seria binomială (2.99):

$$(1+x)^{-\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-k+1)}{k!} x^k,$$

valabilă și pentru orice număr complex $|x| < 1$ și pentru orice $(-\alpha) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, obținem

$$\varphi_X(t) = C_0\Big(1 - \frac{e^{it}}{1+a}\Big)^{-\lambda}.$$

Să calculăm

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{i}\varphi'_X(0) = C_0\frac{\lambda e^{it}}{1+a}\Big(1 - \frac{e^{it}}{1+a}\Big)^{-\lambda-1}\Big|_{t=0} = \frac{\lambda}{a}$$

și, similar, obținem $\mathrm{D}^2(X) = \frac{\lambda}{a} - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2$.

Capitolul 5

Șiruri de variabile aleatoare. Convergențe

5.1 Tipuri de convergențe

Fie v.a. X și un șir $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. definite pe același spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Definiția 5.1 *Dacă $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este o v.a. definim, pentru $p \in (0, \infty)$,*

$$\|X\|_p \overset{\text{def}}{=} (\mathbb{E}\,|X|^p)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |X|^p \, d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\mathbb{R} |x|^p \, \mathbb{P}_X\,(dx)\right)^{\frac{1}{p}}$$

și respectiv

$$\begin{aligned}\|X\|_\infty &\overset{\text{def}}{=} \inf\{C \geq 0 : \mathbb{P}\,(|X| > C) = 0\} \\ &= \inf\{C \geq 0 : |X| \leq C, \quad \mathbb{P} - \textit{a.s.}\}\,.\end{aligned}$$

Definiția 5.2 *Pentru $p \in (0, \infty]$ definim*

$$\mathscr{L}^p\,(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \overset{\text{def}}{=} \{X : \Omega \to \mathbb{R} : X \textit{ v.a. astfel încât } \|X\|_p < \infty\}\,,$$

care este spațiu vectorial deoarece are loc inegalitatea[291]

$$|X+Y|^p \le \begin{cases} |X|^p + |Y|^p, & \textit{pentru orice } p \in [0,1]\,, \\ 2^{p-1}\left(|X|^p + |Y|^p\right), & \textit{pentru orice } p \in (1,\infty), \end{cases}$$

Remarca 5.3 Evident, $\|aX\|_p = |a|\,\|X\|_p$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$. Să observăm că $\|\cdot\|_p$ devine o seminormă pe spațiul $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ doar dacă $p \in [1,\infty]$, deoarece[292] inegalitatea triunghiulară este satisfacută doar în cazul $p \ge 1$, mai precis,

$$\|X+Y\|_p^{p\wedge 1} \le \|X\|_p^{p\wedge 1} + \|Y\|_p^{p\wedge 1}, \quad \text{pentru orice } p \in (0,\infty].$$

Pe de altă parte, $\|\cdot\|_p$ nu satisface condiția $\|X\|_p = 0$ dacă și numai dacă $X = 0$, pe Ω. Aplicând (2.50), obținem doar echivalența

$$\|X\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_\Omega |X|^p \, d\mathbb{P} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = 0, \quad \mathbb{P} - \text{a.s.}.$$

Prin urmare, pentru ca $\|\cdot\|_p$ să devină o normă trebuie să lucrăm pe spațiul

$$L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \overset{\text{def}}{=\!=} \left\{\bar{X} = X + \mathscr{N} : X \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})\right\},$$

unde $\mathscr{N} = \{Z : \Omega \to \mathbb{R} : Z \text{ v.a. astfel încât } Z = 0, \mathbb{P} - \text{a.s.}\}$.

Dacă $\bar{X} \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, să definim $\|\bar{X}\|_p = \|X\|_p$ și $\int_\Omega \bar{X}\, d\mathbb{P} = \int_\Omega X\, d\mathbb{P}$, pentru orice $X \in \bar{X}$.

Evident, $\|\bar{X}\|_p$ și $\int_\Omega \bar{X}\, d\mathbb{P}$ nu depind de alegerea reprezentantului $X \in \bar{X}$ deoarece lucrăm cu integrale Lebesgue și dacă $X_1, X_2 \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, atunci

$$X_1, X_2 \in \bar{X} \quad \Leftrightarrow \quad X_1 = X_2, \quad \mathbb{P} - \text{a.s.}.$$

Astfel, $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ conține, de fapt, clase de echivalență, adica clase de v.a. din spațiul $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, în fiecare clasă fiind doar v.a. egale între ele, $\mathbb{P}$−a.s..

Vom identifica o clasă de echivalență din $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ cu un reprezentant al ei și vom vorbi, în continuare, despre $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ca despre un spațiu de funcții, deși, în realitate, elementele lui $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ sunt clase de funcții. ⋄

291 În cazul $p > 1$ folosim faptul că funcția $x \mapsto |x|^p$ este convexă, deci putem aplica inegalitatea lui Jensen (vezi Nota 263); în cazul $p \in (0,1)$ folosim faptul ca funcția $x \mapsto |x|^p$ este concavă (și pozitivă), deci este subaditivă.

292 **Inegalitatea lui Minkowski** (vezi [55, page 231]): fie $p \ge 1$ și v.a. $X, Y \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Atunci $X + Y \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ și

$$\|X+Y\|_p \le \|X\|_p + \|Y\|_p.$$

Remarca 5.4 Dacă $p > 0$, atunci $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ este spaţiu complet în raport cu metrica $d(X, Y) = \mathbb{E}|X - Y|^p$.

Deci, dacă $p \in [1, \infty]$, atunci

$$L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \quad \text{este spaţiu vectorial, normat şi complet,}$$

adică $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ este spaţiu Banach pentru $p \in [1, \infty]$. ◇

Definiţia 5.5 *Fie $p \in [1, \infty]$ şi $X \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Spunem că şirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$* **converge în** L^p *la X, şi scriem*

$$X_n \xrightarrow{L^p} X, \quad \textit{pentru } n \to \infty,$$

dacă

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p = 0.$$

Deci, pentru $p \in [1, \infty)$, scriem $X_n \xrightarrow{L^p} X$, pentru $n \to \infty$, dacă

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X|^p = 0.$$

Propoziţia 5.6 *Dacă $X_n \xrightarrow{L^p} X$, pentru $p \in [1, \infty)$, atunci, folosind inegalitatea lui Minkowski, are loc şi*

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) \longrightarrow \mathbb{E}(|X|^p), \quad \textit{pentru } n \to \infty.$$

Remarca 5.7 Folosind inegalitatea lui Hölder se obţine **inegalitatea lui Liapunov** (vezi şi [55, page 230]):

$$(\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\mathbb{E}|X|^q)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{pentru orice } 0 < p < q, \tag{5.1}$$

adică

$$\|X\|_p \le \|X\|_q, \quad \text{pentru orice } 0 < p < q.$$

Deci, pentru orice $0 < p < q$, dacă $X \in L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, atunci $X \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, adică

$$L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \subseteq L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}), \quad \text{pentru orice } 0 < p < q.$$

De asemenea, pentru orice $1 \le p < q$, dacă $X_n, X \in L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, atunci $X_n, X \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ şi

$$\text{dacă } X_n \xrightarrow{L^q} X, \quad \text{atunci} \quad X_n \xrightarrow{L^p} X, \text{ pentru } n \to \infty.$$

◇

Remarca 5.8 Ca o consecință a inegalității lui Liapunov obținem și inegalitatea dintre momentele absolute:

$$\mathbb{E}|X| \leq \left(\mathbb{E}|X|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \ldots \leq \left(\mathbb{E}|X|^n\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Prin urmare,

- **dacă o v.a. admite moment de ordin** 2**, i.e. există** $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$**, atunci admite și medie** sau, echivalent,
- **dacă o v.a. nu admite medie, atunci nu admite nici moment de ordin** 2.

Prin urmare, momentul $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ de ordin 2 al unei v.a. X există și este finit dacă și numai dacă media $\mathbb{E}(X)$ și dispersia $\mathrm{D}^2(X)$ există și sunt finite. ◇

Remarca 5.9 Convergența $X_n \xrightarrow{L^2} X$, pentru $n \to \infty$, se mai numește convergența în medie pătratică. ◇

Definiția 5.10 *Spunem că șirul* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge aproape sigur** *la* X, *și scriem*

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X, \quad \textit{pentru } n \to \infty,$$

dacă

$$\mathbb{P}\left(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1. \tag{5.2}$$

Remarca 5.11 Deci $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, pentru $n \to \infty$, dacă există o mulțime neglijabilă N astfel încât șirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge punctual la X pe $\bar{N}$, adică mulțimea punctelor ω pentru care nu are loc convergența punctuală $X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)$ este o mulțime neglijabilă. ◇

Remarca 5.12 Să observăm că pentru a putea calcula probabilitatea mulțimii $\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}$ aceasta trebuie să fie un eveniment, adică din $\mathscr{F}$.

Dacă are loc convergența $|X_n(\omega) - X(\omega)| \to 0$, pentru $n \to \infty$, atunci pentru orice $\epsilon > 0$, există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|X_m(\omega) - X(\omega)| \leq \epsilon$, pentru orice $m \geq N$, și astfel putem scrie și sub forma

$$\begin{aligned}\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} &= \{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} \\ &= \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{m\geq N} \{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \leq \epsilon\}\end{aligned} \tag{5.3}$$

care nu este în mod necesar din $\mathscr{F}$ fiind o intersecție după $\epsilon > 0$, deci nenumărabilă, de elemente din $\mathscr{F}$. De aceea, vom lucra cu exprimarea echivalentă[293]

$$\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = \bigcap\nolimits_{r\in\mathbb{N}^*} \bigcup\nolimits_{N\geq 1} \bigcap\nolimits_{m\geq N} \{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \leq 1/r\}$$

care este în mod necesar din $\mathscr{F}$ fiind o intersecție după $r \in \mathbb{N}^*$, deci numărabilă, de elemente din $\mathscr{F}$.

Mulțimea $\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}$ devine, folosind definiția precedentă, eveniment deci putem acum să-i calculăm probabilitatea și astfel să impunem condiția (5.2).

Prin urmare, $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ dacă $\mathbb{P}(\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}) = 1$, adică, echivalent, dacă

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}\left(\bigcap\nolimits_{r\in\mathbb{N}^*} \bigcup\nolimits_{N\geq 1} \bigcap\nolimits_{m\geq N} \{|X_m - X| \leq 1/r\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap\nolimits_{\epsilon>0} \bigcup\nolimits_{N\geq 1} \bigcap\nolimits_{m\geq N} \{|X_m - X| \leq \epsilon\}\right) \end{aligned} \tag{5.4}$$

sau, echivalent,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{r\in\mathbb{N}^*} \bigcap\nolimits_{N\geq 1} \bigcup\nolimits_{m\geq N} \{|X_m - X| > 1/r\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{\epsilon>0} \bigcap\nolimits_{N\geq 1} \bigcup\nolimits_{m\geq N} \{|X_m - X| > \epsilon\}\right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

$\diamond$

Remarca 5.13 Există exemple[294] în care $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt v.a. și are loc $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, pentru $n \to \infty$, dar totuși limita X nu este v.a.. Pentru a evita această

---

[293] Într-adevăr, se poate arăta ușor (prin dublă incluziune) că are loc următoarea egalitate dintre evenimente:

$$\bigcap\nolimits_{\epsilon>0} \bigcup\nolimits_{N\geq 1} \bigcap\nolimits_{m\geq N} \{|X_m - X| \leq \epsilon\} = \bigcap\nolimits_{r\in\mathbb{N}^*} \bigcup\nolimits_{N\geq 1} \bigcap\nolimits_{m\geq N} \{|X_m - X| \leq 1/r\}$$

sau, echivalent, egalitatea

$$\bigcup\nolimits_{\epsilon>0} \bigcap\nolimits_{N\geq 1} \bigcup\nolimits_{m\geq N} \{|X_m - X| > \epsilon\} = \bigcup\nolimits_{r\in\mathbb{N}^*} \bigcap\nolimits_{N\geq 1} \bigcup\nolimits_{m\geq N} \{|X_m - X| > 1/r\}.$$

[294] Esența constă în a găsi un spațiu de probabilitate și apoi două aplicați $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ astfel încât X este v.a. și $X = Y$, $\mathbb{P}-$a.s., dar funcția Y să nu fie totuși v.a. (adică să nu fie măsurabilă). Astfel, $X_n \stackrel{\text{def}}{=} X \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$ (sau, echivalent, $X = Y$, $\mathbb{P}-$a.s.), dar fără ca Y să fie v.a..

problemă, și deci a asigura că limita oricărui șir de v.a. este tot o v.a., trebuie impus ca spațiul pe care se lucrează să fie **spațiu de probabilitate complet**[295].

Orice spațiu de probabilitate se poate completa prin adaugarea la $\mathscr{F}$ a tuturor submulțimilor mulțimilor neglijabile din $\mathscr{F}$, mai precis, lucrând cu $\sigma-$algebra generată de $\mathscr{F} \cup \mathscr{N}$ (notată cu $\sigma(\mathscr{F} \cup \mathscr{N})$ sau cu $\mathscr{F} \vee \mathscr{N}$; vezi Remarca 1.30 și Definiția 1.47), unde $\mathscr{N}$ este mulțimea tuturor submulțimilor evenimentelor $\mathbb{P}-$neglijabile, i.e.

$$\mathscr{N} = \{A \subset \Omega : \text{există } N \in \mathscr{F} \text{ cu } \mathbb{P}(N) = 0 \text{ astfel încât } A \subset N\}.$$

Evident, domeniul măsurii $\mathbb{P}$ poate fi extins ușor astfel încât $\mathbb{P}$ să fie definită pe $\sigma(\mathscr{F} \cup \mathscr{N})$. $\diamond$

Lema lui Borel–Cantelli, dată de Propoziția 1.56, ne asigură, printre altele, o condiție suficientă pentru a avea loc $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$ care este foarte utilă în demonstrarea convergenței de tip aproape sigur. Mai precis, are loc următoarea caracterizare a convergenței aproape sigure.

Teorema 5.14 *Pentru $\epsilon > 0$ să notăm cu*

$$A_n^\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}.$$

(i) *Are loc convergența $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, pentru $n \to \infty$, dacă și numai dacă*

$$\mathbb{P}\left(\liminf_n \overline{A_n^\epsilon}\right) = 1, \quad \textit{pentru orice } \epsilon > 0.$$

sau, echivalent, vezi (1.7),

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n^\epsilon) = 0, \quad \textit{pentru orice } \epsilon > 0,$$

sau, echivalent,

$$\lim_n \mathbb{P}\left(\sup_{m \geq n} \{|X_m - X| > \epsilon\}\right) = 0, \quad \textit{pentru orice } \epsilon > 0,$$

[295] Spunem că spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ este **spațiu de probabilitate complet** dacă orice mulțime nulă (sau neglijabilă, vezi Nota 9) este un eveniment, adică orice submulțime a unui eveniment $\mathbb{P}-$nul este tot eveniment. Mai precis, dacă $N \in \mathscr{F}$ este o mulțime neglijabilă, i.e. există evenimentul $N_1 \in \mathscr{F}$ astfel încât $N \subseteq N_1$ și $\mathbb{P}(N_1) = 0$, atunci N este, de asemenea, eveniment, i.e. $N \in \mathscr{F}$ (prin urmare, se obține și $\mathbb{P}(N) = 0$).
Sau, echivalent, dacă $N \in \mathscr{F}$ este un eveniment neglijabil, i.e. $\mathbb{P}(N) = 0$, atunci orice $M \subset N$ este, de asemenea, eveniment, i.e. $M \in \mathscr{F}$ (prin urmare, se obține și $\mathbb{P}(M) = 0$).

(ii) *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^\epsilon)$ *este convergentă, pentru orice* $\epsilon > 0$, *atunci are loc convergența* $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, *pentru* $n \to \infty$.

(iii) *Dacă familia* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este independentă în ansamblu și* X *este v.a. constantă* $\mathbb{P}-$*a.s., atunci are loc și reciproca afirmației* (ii), *i.e. dacă* $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} c$, *pentru* $n \to \infty$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^\epsilon)$ *este convergentă*[296], *pentru orice* $\epsilon > 0$.

Remarca 5.15 Având în vedere formularea (1.8) putem scrie caracterizarea (i) sub forma:

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\{A_n^\epsilon \text{ se realizează „infinit de des"}\}\right) = 0,$$
$$\text{pentru orice } \epsilon > 0,$$

adică $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, pentru $n \to \infty$, dacă și numai dacă, pentru orice $\epsilon > 0$, evenimentele $(A_n^\epsilon)_{n\in\mathbb{N}^*}$ încetează să se mai producă, $\mathbb{P}-$a.s.. $\diamond$

Remarca 5.16 Având în vedere punctele (ii) și (iii) obținem următoarea caracterizare a convergenței aproape sigure: dacă familia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este independentă în ansamblu, atunci

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} c \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - c| > \epsilon) < \infty,$$
$$\text{pentru orice } \epsilon > 0,$$

$\diamond$

Demonstrație. (i) Dacă $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, pentru $n \to \infty$, atunci, folosind (5.3), are loc

$$1 = \mathbb{P}\left(\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}\right)$$

[296] Să notăm cu $A_n^\epsilon = \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}$, pentru orice $\epsilon > 0$. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^\epsilon)$ este convergentă, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) < \infty$, pentru orice $\epsilon > 0$, atunci spunem ca șirul de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge complet** la v.a. X și scriem $X_n \xrightarrow{\text{complet}} X$.
Deci, conform afirmației (ii) avem că

$$X_n \xrightarrow{\text{complet}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X.$$

Conform afirmației (iii) avem că dacă familia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este independentă în ansamblu, atunci

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} c \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\text{complet}} c.$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left(\bigcap\nolimits_{\epsilon>0}\bigcup\nolimits_{N\geq 1}\bigcap\nolimits_{m\geq N}\{|X_m - X| \leq \epsilon\}\right)\\
&\leq \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{N\geq 1}\bigcap\nolimits_{m\geq N}\{|X_m - X| \leq \epsilon\}\right)\\
&\leq 1,
\end{aligned}
$$

deci, folosind definiția (1.5), se obține că are loc, pentru orice $\epsilon > 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\liminf\nolimits_N \overline{A_N^\epsilon}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{N\geq 1}\bigcap\nolimits_{m\geq N}\overline{A_m^\epsilon}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{N\geq 1}\bigcap\nolimits_{m\geq N}\{|X_m - X| \leq \epsilon\}\right)\\
&= 1
\end{aligned}
$$

sau, echivalent, vezi (1.7),

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\limsup\nolimits_N A_N^\epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap\nolimits_{N\geq 1}\bigcup\nolimits_{m\geq N} A_m^\epsilon\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup\nolimits_{N\geq 1}\bigcap\nolimits_{m\geq N}\overline{A_m^\epsilon}}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Evident,

$$
\bigcup\nolimits_{m\geq n} A_m^\epsilon = \bigcup\nolimits_{m\geq n}\{|X_m - X| > \epsilon\} = \sup\nolimits_{m\geq n}\{|X_m - X| > \epsilon\},
$$

deci, vezi (1.10),

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathbb{P}\left(\limsup\nolimits_n A_n^\epsilon\right)\\
&= \lim\nolimits_n \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{m\geq n} A_m^\epsilon\right)\\
&= \lim\nolimits_n \mathbb{P}\left(\sup\nolimits_{m\geq n}\{|X_m - X| > \epsilon\}\right), \quad \text{pentru orice } \epsilon > 0.
\end{aligned}
$$

Reciproc[297], dacă $\mathbb{P}\left(\liminf_N \overline{A_N^\epsilon}\right) = 1$, pentru orice $\epsilon > 0$, atunci, conform (5.4),

$$
\mathbb{P}\left(\{\lim\nolimits_{n\to\infty} X_n = X\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap\nolimits_{\epsilon>0}\liminf\nolimits_N \overline{A_N^\epsilon}\right)
$$

297 În esență, demonstrația constă în utilizarea Remarcii 1.45.

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap\nolimits_{r\in\mathbb{N}^*} \liminf\nolimits_N \overline{A_N^{1/r}}\right)$$
$$= \lim\nolimits_{r\to\infty} \mathbb{P}\left(\liminf\nolimits_N \overline{A_N^{1/r}}\right)$$
$$= 1,$$

deoarece $\left(\liminf_N \overline{A_N^{1/r}}\right)_{r\in\mathbb{N}^*}$ este șir necrescător și astfel putem folosi proprietatea (xiv) dată de Propoziția 1.42.

Evident, dacă folosim că, pentru orice $\epsilon > 0$, are loc $\mathbb{P}\left(\limsup_n A_n^\epsilon\right) = 0$, atunci, conform (5.5) și (1.4),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{\lim\nolimits_{n\to\infty} X_n \neq X\}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{\epsilon>0} \limsup\nolimits_n A_n^\epsilon\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup\nolimits_{r\in\mathbb{N}^*} \limsup\nolimits_n A_n^{1/r}\right)\\ &\leq \sum\nolimits_{r=1}^\infty \mathbb{P}\left(\limsup\nolimits_n A_n^{1/r}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Astfel am obținut că $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, pentru $n \to \infty$.

(ii) Deoarece $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}\left(A_n^\epsilon\right) < \infty$, obținem, folosind punctul (i) al Lemei lui Borel–Cantelli, că $\mathbb{P}\left(\limsup_n A_n^\epsilon\right) = 0$ ceea ce este echivalent, conform (i), cu convergența $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, pentru $n \to \infty$.

(iii) Dacă familia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este independentă în ansamblu, atunci și familia $(X_n - c)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este independentă în ansamblu și astfel familia de evenimente A_n^ϵ este independentă în ansamblu.

Dacă am presupune că seria $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}\left(A_n^\epsilon\right) = \infty$, obținem, folosind punctul (ii) al Lemei lui Borel–Cantelli, că $\mathbb{P}\left(\limsup_n A_n^\epsilon\right) = 1$ ceea ce este în contradicție cu faptul că $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} c$, pentru $n \to \infty$. ∎

Au loc și următoarele proprietăți de stabilitate ale convergenței aproape sigure în raport cu diverse operații.

Propoziția 5.17 *Dacă* $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ *și* $Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$, *pentru* $n \to \infty$, *atunci*

(i) $\quad X_n + Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X + Y, \quad$ *pentru* $n \to \infty$;

$(ii)\quad X_n - Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X - Y,\quad$ *pentru* $n \to \infty;$

$(iii)\quad X_n \cdot Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \cdot Y,\quad$ *pentru* $n \to \infty;$

$(iv)\quad \dfrac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \dfrac{X}{Y},\quad$ *pentru* $n \to \infty,\quad$ *unde* $\mathbb{P}(Y \neq 0) = 1;$

$(v)\quad h(X_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} h(X),\quad$ *pentru* $n \to \infty,\quad$ *pentru orice funcţie continuă* h.

Demonstraţie. Pentru demonstraţie vezi [31, Theorem 5.11.1] (pentru demonstraţia punctului (v) vezi [31, Theorem 5.10.1]). ■

Remarca 5.18 Se poate arăta (vezi [31, Theorem 5.11.1]) că proprietăţile de stabilitate în raport cu suma şi respectiv cu diferenţa sunt adevărate şi în cazul convergenţei în L^p. ◇

Definiţia 5.19 *Spunem că şirul* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge în probabilitate** *la* X, *şi scriem*

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X,\quad \text{pentru } n \to \infty,$$

dacă[298], *pentru orice* $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0. \tag{5.6}$$

Remarca 5.20 Având în vedere termenul care apare în definiţia (5.6), o metodă de a stabili că are loc convergenţa în probabilitate este, în anumite cazuri convenabile, utilizarea inegalităţii (2.75) sau, echivalent, (2.76) a lui Cebâşev. În acest sens, vezi, de exemplu, legea slabă a numerelor mari dată de Corolarul 5.91 sau, într-o formă particulară, de Exerciţiul 5.5.16. ◇

Propoziţia 5.21 (vezi [8, Capitolul I, § 4.2]) *Limita în probabilitate a unui şir de v.a.* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este unică* $\mathbb{P}$*–a.s., i.e.*

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X,\quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \quad\Longrightarrow\quad X = Y,\quad \mathbb{P} - a.s.. \tag{5.7}$$

[298] Să observăm că probabilitatea care apare în definiţia (5.6) este cea care apare şi în definiţia convergenţei complete dată de Nota 296.

Să observăm că, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon)$ este convergentă, atunci, evident, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$ şi astfel avem următoarea legătură dintre convergenţe:

$$X_n \xrightarrow{\text{complet}} X \quad\Longrightarrow\quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X.$$

Remarca 5.22 Folosind definiția, se poate arăta că limita în L^p și limita aproape sigură a unui șir de v.a. sunt și ele unice $\mathbb{P}-$a.s., în sensul dat de (5.7) (vezi [31, Theorem 5.2.1]). ◇

Următorul rezultat ne oferă o caracterizare a convergenței în probabilitate.

Propoziția 5.23 *Fie* $r > 0$. *Atunci,* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, *pentru* $n \to \infty$, *dacă și numai dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|^r}{1 + |X_n - X|^r}\right) = 0. \tag{5.8}$$

Demonstrație. Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [31, Theorem 5.7.1]. ■

Are loc chiar rezultatul mai general:

Propoziția 5.24 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, *pentru* $n \to \infty$, *dacă și numai dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[g\left(|X_n - X|\right)\right] = 0,$$

unde $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *este o funcție nedescrescătoare, continuă și mărginită astfel încât* $g(x) > g(0) = 0$, *pentru orice* $x > 0$.

Au loc și următoarele proprietăți de stabilitate ale convergenței în probabilitate în raport cu diverse operații (vezi și Propoziția 5.17).

Propoziția 5.25 *Dacă* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *și* $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, *pentru* $n \to \infty$, *atunci*

(i) $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$, *pentru* $n \to \infty$;

(ii) $X_n - Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X - Y$, *pentru* $n \to \infty$;

(iii) $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \cdot Y$, *pentru* $n \to \infty$;

(iv) $\dfrac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \dfrac{X}{Y}$, *pentru* $n \to \infty$, *unde* $\mathbb{P}(Y \neq 0) = 1$;

(v) $h(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(X)$, *pentru* $n \to \infty$, *pentru orice funcție continuă* h.

Demonstrație. Pentru demonstrație vezi [31, Theorem 5.11.1] (pentru demonstrația punctului (v) vezi [31, Theorem 5.10.2]). ■

Definiția 5.26 *Fie X o v.a. definită pe spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ și un șir $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. astfel încât fiecare v.a. X_n este definită pe spațiul de probabilitate $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n)$. Spunem că șirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$* **converge în funcția de repartiție** *la X, și scriem*

$$X_n \xrightarrow{F} X, \text{ pentru } n \to \infty,$$

dacă

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

pentru orice punct de continuitate $x \in \mathbb{R}$ al funcției F_X (vezi și caracterizarea (2.8)).

Remarca 5.27 Deci, evident, $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$, dacă[299]

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x),$$

pentru orice punct $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathbb{P}(X = x) = 0$. ◇

Remarca 5.28 Este natural și suficient să cerem convergența doar în punctele de continuitate ale funcției F_X; în acest sens, vezi Nota 311 și v.a. date în Exemplul 5.78 și Exemplul 5.79. ◇

Remarca 5.29 Așa cum am văzut deja în Propoziția 5.21 și în Remarca 5.22, limita în L^p, limita aproape sigură precum și limita în probabilitate sunt unice $\mathbb{P}-$a.s.. Acest lucru nu mai este adevărat în cazul limitei în funcția de repartiție; în acest caz are loc doar unicitatea în lege a limitei (vezi Definiția 2.18), mai precis

$$X_n \xrightarrow{F} X, \quad X_n \xrightarrow{F} Y \quad \Longrightarrow \quad X \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y.$$

Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [31, Theorem 5.2.1]. ◇

Remarca 5.30 Convergența punctuală doar în punctele de continuitate pentru F_X este suficientă pentru a obține faptul că limita, în sensul funcției de repartiție, este unică în lege.

Într-adevăr, dacă $X_n \xrightarrow{F} X$ și $X_n \xrightarrow{F} Y$, pentru $n \to \infty$, atunci $F_X(x) = F_Y(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ în care F_X și F_Y sunt continue. Dar funcțiile F_X și F_Y sunt continue pe $\mathbb{R}$ cu excepția unei mulțimi numărabile (vezi Propoziția 2.17). Astfel, reuniunea mulțimilor punctelor de discontinuitate pentru F_X și respectiv F_Y este numărabilă (deci și neglijabilă în raport cu măsura Lebesgue)

[299] Pentru un exemplu concret, vezi Teorema 3.109.

și, prin urmare, se poate arăta (vezi [39, Propoziția 1.8.4]) că mulțimea complementară, a punctelor de continuitate, este densă în $\mathbb{R}$. Folosind faptul că F_X, F_Y sunt funcții de repartiție (mai precis, continue la dreapta) se va obține (vezi [39, Propoziția 1.8.11]) că $F_X(x) = F_Y(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, adică X, Y urmează aceeași distribuție, adică sunt egale în lege. $\diamond$

Remarca 5.31 În cazul convergenței în funcția de repartiție fiecare v.a. X_n poate fi definită (eventual, nu obligatoriu) pe un alt de spațiu de probabilitate $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Evident, funcțiile de repartiție vor fi definite pe același spațiu $F_X, F_{X_n} : \mathbb{R} \to [0,1]$.

Menționăm că în cazul convergenței în probabilitate, a convergenței aproape sigure precum și a convergenței în L^p este esențial ca v.a. X și X_n să fie definite pe același spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. $\diamond$

Remarca 5.32 În cazul particular în care v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și X sunt discrete și iau valori în $\mathbb{N}$, i.e. $X_n(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$ și $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$, are loc următoarea caracterizare:

$$X_n \xrightarrow{F} X, \text{ pentru } n \to \infty,$$

dacă și numai dacă[300]

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = \ell) = \mathbb{P}(X = \ell), \quad \text{pentru orice } \ell \in X(\Omega).$$

Într-adevăr, dacă $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$, atunci (vezi Remarca 5.27) avem:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leq a) = \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(a) = F_X(a) = \mathbb{P}(X \leq a),$$

pentru orice $a \in \mathbb{R}$ în care F_X este continuă, adică pentru orice $a \in \mathbb{R}$ în care $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

Fie $\ell \in X(\Omega)$ o valoare arbitrară, dar fixată, a v.a. discrete X. Deci ℓ nu este punct de continuitate pentru F_X, dar, pentru $\epsilon > 0$ suficient de mic, $\ell \pm \epsilon$ sunt puncte de continuitate pentru F_X (de exemplu, putem lua $\epsilon = 1/2$). Prin urmare,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = \ell) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\ell - \epsilon < X_n \leq \ell + \epsilon) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leq \ell + \epsilon) - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leq \ell - \epsilon)\end{aligned}$$

[300] Pentru exemple concrete, vezi Teorema 2.141 și Teorema 2.162.

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(X \leq \ell + \epsilon) - \mathbb{P}(X \leq \ell - \epsilon) \\
&= \mathbb{P}(\ell - \epsilon < X \leq \ell + \epsilon) \\
&= \mathbb{P}(X = \ell).
\end{aligned}
$$

Reciproc, dacă

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = \ell) = \mathbb{P}(X = \ell), \quad \text{pentru orice } \ell \in X(\Omega),$$

atunci, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ punct de continuitate pentru F_X, adică pentru orice $a \in \mathbb{R}\backslash X(\Omega)$, avem

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(a) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leq a) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{0\leq \ell \leq \lfloor a \rfloor} \mathbb{P}(X_n = \ell) \\
&= \sum_{0\leq \ell \leq \lfloor a \rfloor} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = \ell) \\
&= \sum_{0\leq \ell \leq \lfloor a \rfloor} \mathbb{P}(X = \ell) \\
&= F_X(a),
\end{aligned}
$$

deoarece suma este finită deci comută cu limita.

Astfel am obținut că $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$. ◇

Remarca 5.33 În cazul în care și valorile v.a. X_n depind de n avem următoarea caracterizare (vezi Remarca 5.32): dacă v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și X sunt discrete și nenegative, atunci

$$X_n \xrightarrow{F} X, \text{ pentru } n \to \infty,$$

dacă și numai dacă[301]

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = x_{m,n}) = \mathbb{P}(X = \ell), \quad \text{pentru orice } \ell \in X(\Omega),$$

unde $x_{m,n} \in X_n(\Omega)$ este astfel încât $x_{m,n} \to \ell$, pentru $n \to \infty$. ◇

Următorul rezultat ne oferă o caracterizare a convergenței în funcția de repartiție.

Teorema 5.34 *Fie v.a. X_n definite pe spațiul de probabilitate $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n)$ și v.a. X definită pe spațiul $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

[301] Pentru exemple concrete, vezi Exemplul 5.76, Exemplul 5.78 și Exemplul 5.79.

(i) $X_n \xrightarrow{F} X$, *pentru* $n \to \infty$;

(ii) *are loc*

$$\mathbb{E}\left(h\left(X_n\right)\right) \to \mathbb{E}\left(h\left(X\right)\right), \quad \textit{pentru } n \to \infty, \tag{5.9}$$

pentru orice funcție $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de tipul* $h\left(x\right) = \mathbb{1}_{[a,b]}\left(x\right) \cdot g\left(x\right)$, *unde* a, b *sunt două puncte de continuitate ale funcției* F_X, *iar* g *este o funcție continuă pe* $[a, b]$;

(iii) *are loc*

$$\mathbb{E}\left(h\left(X_n\right)\right) \to \mathbb{E}\left(h\left(X\right)\right), \quad \textit{pentru } n \to \infty, \tag{5.10}$$

pentru orice funcție $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuă și mărginită.*

Demonstrație. Pentru demonstrația echivalenței dintre (i) și (ii) vezi, de exemplu, [30, Section 7.2, Theorem 19] sau [31, Theorem 5.5.6, Theorem 5.6.1].

Pentru demonstrația echivalenței dintre (i) și (iii) vezi, de exemplu, [30, Section 7.2, Theorem 19] sau [31, Theorem 5.5.7, Theorem 5.6.1]. ■

Remarca 5.35 Dacă $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$, atunci are loc concluzia (5.9) scrisă pentru cazul particular $h\left(x\right) = \mathbb{1}_{(a,b]}\left(x\right)$, unde a, b sunt două puncte de continuitate ale funcției F_X.

Într-adevăr, dacă $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$, atunci, folosind Definiția 5.26, avem, pentru orice puncte de continuitate a, b ale funcției F_X,

$$\mathbb{P}\left(a < X_n \leq b\right) = F_{X_n}\left(b\right) - F_{X_n}\left(a\right) \to F_X\left(b\right) - F_X\left(a\right) = \mathbb{P}\left(a < X \leq b\right),$$

pentru $n \to \infty$.

Pe de altă parte, vezi și Remarca 3.43,

$$\mathbb{P}\left(a < X_n \leq b\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(a,b]}\left(X_n\right)\right) \quad \text{și} \quad \mathbb{P}\left(a < X \leq b\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(a,b]}\left(X\right)\right),$$

deci

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(a,b]}\left(X_n\right)\right) \to \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(a,b]}\left(X\right)\right), \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

◇

Remarca 5.36 Având în vedere (5.10) și formula de transfer (3.28), deducem, în cazul în care v.a. X_n și X admit densități de repartiție, că $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$, dacă și numai dacă

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)\, f_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, f(x)\, dx,$$

pentru orice funcție $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă și mărginită. $\diamond$

Remarca 5.37 Având în vedere (5.10) și formula de transfer (3.30), deducem că $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$, dacă și numai dacă (vezi și [55, Theorem 2, page 379])

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)\, \mathbb{P}_{X_n}(dx) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, \mathbb{P}_X(dx)\,, \tag{5.11}$$

pentru orice funcție $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă și mărginită.

De asemenea, având în vedere că legea este unic determinată de funcția de repartiție (vezi observațiile de la pagina 293 precum și Remarca 2.16), relația (5.11) este echivalentă cu (vezi și [55, Theorem 2, page 379])

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)\, dF_{X_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, dF_X(x)\,, \tag{5.12}$$

pentru orice funcție $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă și mărginită. $\diamond$

Dacă alegem $X_n = Y$ în (5.10), se obține următoarea caracterizare a egalității în lege.

Propoziția 5.38 (vezi [31, Theorem 5.6.2]) *Fie două v.a. X, Y. Atunci,*

$$X \overset{\mathrm{d}}{=} Y \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}(h(X)) = \mathbb{E}(h(Y))\,, \tag{5.13}$$

pentru orice funcție $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă și mărginită.

Remarca 5.39 Fie două v.a. X, Y. Atunci, conform caracterizării (5.13),

$$X \overset{\mathrm{d}}{=} Y \quad \Longrightarrow \quad h(X) \overset{\mathrm{d}}{=} h(Y)\,, \tag{5.14}$$

pentru orice funcție $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă și mărginită. $\diamond$

Definiția 5.40 *Fie spațiile de probabilitate* $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n)$ *și* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, *unde* $n \in \mathbb{N}^*$. *Spunem că* ***șirul de măsuri de probabilitate*** $(\mathbb{P}_n)_n$ ***converge slab la măsura de probabilitate*** $\mathbb{P}$, *pentru* $n \to \infty$, *dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)\, \mathbb{P}_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, \mathbb{P}(dx), \tag{5.15}$$

pentru orice funcție $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuă și mărginită.*

Definiția 5.41 *Similar, spunem că* ***șirul de funcții de repartiție*** $(F_n)_n$ ***converge slab la funcția de repartiție*** F, *pentru* $n \to \infty$, *dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)\, dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, dF(x), \tag{5.16}$$

pentru orice funcție $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuă și mărginită.*

Remarca 5.42 Se poate arăta[302] că un șir de funcții de repartiție $(F_n)_n$ converge slab la funcția de repartiție F dacă și numai dacă

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ în care F este continuă. $\diamond$

Prin urmare, în plus față de Teorema 5.34, avem următoarele caracterizări[303] ale convergenței în funcția de repartiție (vezi și Remarca 5.37).

Teorema 5.43 *Fie v.a.* X_n *definite pe spațiul de probabilitate* $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n)$ *și v.a.* X *definită pe spațiul* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. *Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) $X_n \xrightarrow{F} X$, *pentru* $n \to \infty$;

(ii) *șirul de legi* $(\mathbb{P}_{X_n})_n$ *converge slab la legea* $\mathbb{P}_X$, *pentru* $n \to \infty$;

(iii) *șirul de funcții de repartiție* $(F_{X_n})_n$ *converge slab la* F_X, *pentru* $n \to \infty$;

302 Pentru demonstrație vezi [39, Teorema 1.8.1, Teorema 3.3.1].

303 Pentru demonstrație vezi [3, Theorem 2.1 & page 26] sau [4, Theorem 25.8].

(iv) *are loc*
$$\mathbb{P}\left(X_n \in B\right) \to \mathbb{P}\left(X_n \in B\right), \quad \textit{pentru } n \to \infty,$$
pentru orice borelian $B \in \mathscr{B}\left(\mathbb{R}\right)$ *astfel încât*[304] $\mathbb{P}\left(X \in \mathrm{Bd}\left(B\right)\right) = 0.$

Remarca 5.44 Punctul (iv) implică punctul (i).

Într-adevăr, frontiera $\mathrm{Bd}\left((-\infty, x]\right) = x$, deci
$$\mathbb{P}(X \in \mathrm{Bd}((-\infty, x])) = \mathbb{P}(X = x) = 0$$
dacă și numai dacă x este punct de continuitate pentru F_X.

Astfel, alegând $B = (-\infty, x]$ în (iv), obținem că
$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}\left(x\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n \leq x\right) = \mathbb{P}\left(X \leq x\right) = F_X\left(x\right),$$
pentru orice punct de continuitate $x \in \mathbb{R}$ al funcției F_X, adică exact (i). $\diamond$

Remarca 5.45 Observațiile și definițiile precedente justifică astfel denumirile alternative ale convergenței în funcția de repartiție.

Astfel, acest tip de convergență se mai numește și **convergența în distribuție**, notată $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$, sau **convergența în lege**, notată $X_n \xrightarrow{\mathrm{lege}} X$ sau $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, sau **convergența slabă**, notată $X_n \xrightarrow{\mathrm{weak}} X$. $\diamond$

Au loc și următoarele proprietăți de stabilitate ale convergenței în funcția de repartiție în raport cu diverse operații (vezi și Propoziția 5.17 și Propoziția 5.25).

Propoziția 5.46 *Dacă* $X_n \xrightarrow{F} X$ *și*[305] $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$, *pentru* $n \to \infty$, *atunci*

(i) $\quad X_n + Y_n \xrightarrow{F} X + c, \quad$ *pentru* $n \to \infty$

(ii) $\quad X_n - Y_n \xrightarrow{F} X - c, \quad$ *pentru* $n \to \infty$;

(iii) $\quad X_n \cdot Y_n \xrightarrow{F} X \cdot c, \quad$ *pentru* $n \to \infty$;

[304] Notația $\mathrm{Bd}\left(B\right)$ reprezintă frontiera mulțimii $B \in \mathscr{B}\left(\mathbb{R}\right)$. Dacă $\mathbb{P}\left(X \in \mathrm{Bd}\left(B\right)\right) = 0$, atunci spunem că B este **mulțime de continuitate** pentru X în raport cu măsura $\mathbb{P}$.

[305] Reamintim Remarca 5.65: convergența în probabilitate la o v.a. constantă este echivalentă cu convergența în funcția de repartiție la acea v.a. constantă.

$$(iv) \quad \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{F} \frac{X}{c}, \quad \textit{pentru } n \to \infty, \quad \textit{unde } c \neq 0;$$

$$(v) \quad h(X_n) \xrightarrow{F} h(X), \quad \textit{pentru } n \to \infty, \quad \textit{pentru orice funcție continuă } h.$$

Demonstrație. Pentru demonstrație vezi Teorema lui Slutsky dată de [31, Theorem 5.11.4] (pentru demonstrația punctului (v) vezi [31, Theorem 5.10.4]). ■

Definiția 5.47 *Fie v.a. X_n definite pe spațiul de probabilitate $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n)$ și v.a. X definită pe spațiul $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Spunem că șirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$* **converge în funcția caracteristică** *la X, și scriem*

$$X_n \xrightarrow{\varphi} X, \ \textit{pentru } n \to \infty,$$

dacă

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t), \quad \textit{pentru orice } t \in \mathbb{R}.$$

Remarca 5.48 În cazul convergenței în funcția caracteristică (ca și în cazul convergenței în funcția de repartiție) fiecare v.a. X_n poate fi definită pe un alt de spațiu de probabilitate $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n)$. Evident, funcțiile caracteristice sunt definite pe același spațiu $\varphi_X, \varphi_{X_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. ◇

Remarca 5.49 Convergența în L^p, convergența a.s. și convergența în probabilitate au proprietatea, conform definițiilor respective, că șirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge la X dacă și numai dacă $(X_n - X)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge la 0.

Dar această proprietate nu mai este valabilă în cazul convergenței în funcția de repartiție și a convergenței în funcția caracteristică (vezi și Remarca 5.31 și Remarca 5.48). ◇

5.1.1 Legături dintre tipuri de convergențe

Următoarele rezultate stabilesc legăturile dintre diversele tipuri de convergențe prezentate mai sus (pentru demonstrații sau alte rezultate similare vezi [15, Capitolul V, VI]).

Teorema 5.50

$$(i) \qquad X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X.$$

$$(ii) \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad \textit{există } (n_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \textit{ astfel încât } X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{a.s.}} X.$$

Demonstrație. (i) Conform Teoremei 5.14 avem, pentru orice $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}0 &\le \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{|X_n - X| > \epsilon\}\right)\\ &\le \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{m\ge n} \{|X_m - X| > \epsilon\}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{m\ge n} \{|X_m - X| > \epsilon\}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\ge 1} \bigcup_{m\ge n} \{|X_m - X| > \epsilon\}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\limsup_n \{|X_m - X| > \epsilon\}\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

deci $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0$, pentru orice $\epsilon > 0$.

(ii) Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [31, Theorem 5.3.4]. ■

Remarca 5.51 Reciproca implicației (i) a Teoremei 5.50 nu este adevarată; în acest sens, vezi Exemplul 5.74 și Exemplul 5.75. ◇

Teorema 5.52 (Teorema convergenței dominate a lui Lebesgue)

$$\textit{În condiții suplimentare, } X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^p} X.$$

Mai precis, dacă $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$*, pentru* $n \to \infty$*, și dacă există v.a.* $Y \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$*,* $p \ge 1$*, astfel încât* $|X_n| \le Y$*,* $\mathbb{P}-$*a.s., pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$*, atunci* $X \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *și* $X_n \xrightarrow{L^p} X$*, pentru* $n \to \infty$*.*

În plus, au loc și convergențele

$$\mathbb{E}\left(|X_n|^p\right) \longrightarrow \mathbb{E}\left(|X|^p\right), \quad \textit{pentru } n \to \infty;$$

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) \longrightarrow \mathbb{E}\left(X\right), \quad \textit{pentru } n \to \infty.$$

Demonstrație. Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [31, Theorem 5.4.4, Theorem 5.5.2]. ■

Remarca 5.53 Implicația dată de Teorema 5.52 nu este adevarată fără condițiile suplimentare menționate; în acest sens, vezi Exemplul 5.71 și Exemplul 5.72.

Reciproca implicației dată de Teorema 5.52 nu este adevarată (decât pe un subșir, vezi Remarca 5.58); în acest sens, vezi Exemplul 5.74 și Exemplul 5.75. ◇

Teorema 5.54

$$\text{\textit{În condiții suplimentare, }} X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^1} X.$$

Mai precis, dacă $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$*, pentru* $n \to \infty$*, și dacă există* $r > 1$ *astfel încât*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(|X_n|^r\right) < \infty,$$

atunci $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *și* $X_n \xrightarrow{L^1} X$*, pentru* $n \to \infty$*.*

În plus, au loc și convergențele

$$\mathbb{E}\left(|X_n|\right) \longrightarrow \mathbb{E}\left(|X|\right), \quad \text{\textit{pentru} } n \to \infty;$$

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) \longrightarrow \mathbb{E}\left(X\right), \quad \text{\textit{pentru} } n \to \infty.$$

Demonstrație. Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [31, Theorem 5.4.2, Theorem 5.5.2]. ∎

Remarca 5.55 Folosind definiția generală (3.21) a mediei precum și teorema convergenței monotone a lui Beppo Levi sau teorema convergenței dominate a lui Lebesgue se obțin condiții suficiente pentru ca **media (adică integrala Lebesgue) să comute cu o sumă infinită de v.a.**. Astfel:

- dacă v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt nenegative și dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$ converge[306] la o v.a., atunci, cu ajutorul teoremei convergenței monotone a lui Beppo Levi (vezi [31, Corollary 2.5.2] sau [49, Teorema 5.1-17]), se obține că media comută cu suma infinită de v.a., i.e.

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} X_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left(X_n\right); \tag{5.17}$$

- dacă v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu sunt neapărat nenegative, dar dacă

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{E}\,|X_n|\right) < \infty,$$

  atunci, cu ajutorul teoremei convergențe dominate a lui Lebesgue (vezi [49, Teorema 5.2-17]), se obține că $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge a.s., iar suma sa este o v.a. integrabilă și, în plus, are loc aceeași concluzie (5.17);

[306] Având în vedere că v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt nenegative, deducem că limita $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ există, finită sau nu.
Conform [31, Corollary 2.5.2] să menționăm că relația (5.17) se menține adevărată doar în ipoteza că v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt nenegative (deci (5.17) are loc și dacă limita $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} X_n$ este infinită).

- dacă v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu sunt neapărat nenegative, dar dacă

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right| \leq Y,$$

  unde Y este o v.a. integrabilă, și dacă $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge a.s., atunci, cu ajutorul teoremei convergențe dominate a lui Lebesgue (vezi [31, Corollary 2.5.3]), se obține că $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ și X_n, cu $n \in \mathbb{N}^*$, sunt integrabile și, în plus, are loc aceeași concluzie (5.17).

$\diamond$

Teorema 5.56

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X.$$

Demonstrație. Folosind inegalitatea (2.74) a lui Markov, obținem, pentru orice $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right)}{\epsilon^p},$$

deci dacă avem $X_n \xrightarrow{L^p} X$, pentru $n \to \infty$, atunci rezultă și $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, pentru $n \to \infty$. ■

Remarca 5.57 Reciproca implicației precedente nu este adevarată; în acest sens, vezi Exemplul 5.71 și Exemplul 5.72. $\diamond$

Remarca 5.58 Ca o consecință imediată a Teoremei 5.56 și a Teoremei 5.50 obținem:

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \quad \Longrightarrow \quad \text{există } (n_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ astfel încât } X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{a.s.}} X.$$

$\diamond$

Teorema 5.59 (Teorema convergenței dominate a lui Lebesgue)

$$\textit{În condiții suplimentare, } X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^p} X.$$

Mai precis, Teorema 5.52 rămâne adevărată dacă înlocuim convergența aproape sigură cu convergența în probabilitate.

Demonstrație. Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [31, Theorem 5.4.4, Theorem 5.5.4]. ■

Remarca 5.60 Implicația dată de Teorema 5.59 nu este adevarată fără condițiile suplimentare menționate; în acest sens, vezi Exemplul 5.71 și Exemplul 5.72. $\diamond$

Teorema 5.61

$$\text{\textit{În condiții suplimentare, }} X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^1} X.$$

Mai precis, Teorema 5.54 rămâne adevărată dacă înlocuim convergența aproape sigură cu convergența în probabilitate.

Demonstrație. Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [31, Theorem 5.4.2, Theorem 5.5.4]. ■

Teorema 5.62

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{F} X$$

(v.a. X, X_n sunt definite pe același spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$).

Demonstrație. Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [31, Theorem 5.3.1]. ■

Remarca 5.63 Reciproca implicației dată de Teorema 5.62 nu este adevarată; în acest sens, vezi Exemplul 5.82 și Exemplul 5.83. $\diamond$

Dacă X este v.a. constantă $\mathbb{P}-$a.s., atunci are loc și reciproca Teoremei 5.62.

Teorema 5.64

$$X_n \xrightarrow{F} c \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c,$$

unde c este o v.a. constantă.

Demonstrație. Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [31, Theorem 5.3.3]. ■

Remarca 5.65 Astfel, conform Teoremei 5.62 și Teoremei 5.64, obținem echivalența:

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{F} c.$$

$\diamond$

Teorema 5.66 (Teorema convergenței dominate a lui Lebesgue)

$$\text{\textit{În condiții suplimentare, }} X_n \xrightarrow{F} X \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\left(|X_n|^p\right) \longrightarrow \mathbb{E}\left(|X|^p\right).$$

Mai precis, dacă $X_n \xrightarrow{F} X$*, pentru* $n \to \infty$*, și dacă există v.a.* $Y \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$*,* $p \geq 1$*, astfel încât* $|X_n| \leq Y$*,* $\mathbb{P}$*–a.s., pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$*, atunci* $X \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *și* $\mathbb{E}(|X_n|^p) \longrightarrow \mathbb{E}(|X|^p)$*, pentru* $n \to \infty$*.*

În plus, are loc și convergența

$$\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow \mathbb{E}(X), \quad \textit{pentru } n \to \infty.$$

Demonstrație. Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [31, Theorem 5.5.9]. ■

Teorema 5.67

$$\textit{În condiții suplimentare, } X_n \xrightarrow{F} X \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}(|X_n|) \longrightarrow \mathbb{E}(|X|).$$

Mai precis, dacă $X_n \xrightarrow{F} X$*, pentru* $n \to \infty$*, și dacă există* $r > 1$ *astfel încât*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{E}(|X_n|^r) < \infty,$$

atunci $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *și* $\mathbb{E}(|X_n|) \longrightarrow \mathbb{E}(|X|)$*, pentru* $n \to \infty$*.*

În plus, are loc și convergența

$$\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow \mathbb{E}(X), \quad \textit{pentru } n \to \infty.$$

Demonstrație. Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [31, Theorem 5.5.9]. ■

Teorema 5.68 (Teorema lui Lévy) *Fie* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *un șir de funcții de repartiție și* $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *șirul de funcții caracteristice corespunzătoare*[307] *funcțiilor de repartiție date. Atunci:*

- (i) *dacă șirul* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge slab către o funcție de repartiție* F *(vezi Definiția 5.41), atunci* $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge punctual pe* $\mathbb{R}$ *la funcția caracteristică corespunzătoare lui* F*;*
- (ii) *dacă șirul* $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge punctual către o funcție* φ *care este continuă în punctul* 0*, atunci există funcția de repartiție* F *astfel încât șirul* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge slab către* F*. În plus,* φ *este funcția caracteristică corespunzătoare lui* F*.*

[307] Vezi formula (4.3): dacă F este o funcție de repartiție dată, atunci funcția caracteristică φ corespunzătoare lui F este definită de integrala Riemann-Stieltjes $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Demonstrație. Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [55, Theorem 1, page 389]. ■

Remarca 5.69 În punctul (ii) al Teoremei 5.68 condiția de continuitate în punctul 0 a limitei φ este esențială; în acest sens, vezi Exemplul 5.84. ◇

În particular, obținem următoarea legătură dintre convergența în funcția de repartiție și convergența în funcția caracteristică.

Corolarul 5.70 *Fie v.a. X_n definite pe $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n)$ și v.a. X definită pe $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Atunci,*

$$X_n \xrightarrow{F} X \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\varphi} X.$$

Demonstrație. Pentru demonstrație vezi, de exemplu, [31, Theorem 5.9.1]. ■

5.2 Exemple și contraexemple

Prezentăm în continuare exemple de șiruri de v.a. care satisfac, sau nu, diverse tipuri de convergențe.

Exemplul 5.71 Vom arăta că:

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \quad \not\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^p} X,$$

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \not\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^p} X$$

și

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a \quad \not\Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbb{E}\left(X_n\right) \longrightarrow a, \\ \mathrm{D}^2\left(X_n\right) \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Fie λ măsura Lebesgue. Să considerăm spațiul de probabilitate

$$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \stackrel{\text{def}}{=} \big((0,1), \mathscr{B}\big((0,1)\big), \lambda\big).$$

Să definim v.a.

$$X_n : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X_n(\omega) = n\,\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Este evident că pentru orice $\epsilon > 0$ și pentru orice $\omega \in (0,1)$, există $n_\epsilon(\omega)$ astfel încât $\omega \notin \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, pentru orice $n \geq n_\epsilon(\omega)$.

Obținem $X_n(\omega) = 0$, pentru orice $n \geq n_\epsilon(\omega)$, deci $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0$.

A rezultat astfel convergența punctuală a lui X_n la 0, deci $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, pentru $n \to \infty$.

Să facem legătura și cu caracterizarea dată de Teorema 5.14.

Pentru orice $\epsilon > 0$ și pentru orice $\omega \in (0,1)$, avem că $\omega \in \bigcap_{m \geq n_\epsilon(\omega)} B_m^\epsilon$, unde $B_m^\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega : |X_m(\omega)| \leq \epsilon\}$.

Deci orice $\omega \in (0,1)$ satisface[308]

$$\omega \in \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m \geq n} B_m^\epsilon,$$

adică, pentru orice $\epsilon > 0$, $\lambda\left(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{m\geq n} B_m^\epsilon\right) = 1$ și deci, conform Teoremei 5.14, $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, pentru $n \to \infty$.

Pe de altă parte, folosind (3.21), pentru orice $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|X_n|^p\right) &= \int_\Omega |X_n(\omega)|^p \, \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_0^1 n^p \mathbb{1}_{\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)}(\omega)\, \lambda(d\omega) \\
&= n^p \lambda\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)\right) \\
&= n^{p-1} \\
&\nrightarrow 0, \quad \text{pentru } n \to \infty
\end{aligned}$$

deci $X_n \overset{L^p}{\not\longrightarrow} 0$, pentru $n \to \infty$.

Apoi

$$\mathrm{D}^2(X_n) = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) - \left(\mathbb{E}(X_n)\right)^2 = n - 1^2.$$

Pentru orice $0 < \epsilon < n$ avem

$$\lambda(|X_n| > \epsilon) = \lambda\Big(\left\{\omega : n\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)}(\omega) > \epsilon\right\}\Big)$$

---

308 Este evident că $\omega \in \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{m\geq n} B_m^\epsilon$ dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $m \geq n$, $\omega \in B_m^\epsilon$. De asemenea, $\omega \in \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n} B_m^\epsilon$ dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (oricât de mare), există $m \geq n$ astfel încât $\omega \in B_m^\epsilon$.

$$= \lambda\Big(\Big\{\omega : \mathbb{1}_{\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)}(\omega) > \frac{\epsilon}{n}\Big\}\Big)$$
$$= \lambda\left(\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{n},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(|X_n| > \epsilon) = 0,$$

adică[309] $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, pentru $n \to \infty$.

Să observăm că pentru a obține convergența în probabilitate este suficient să luam indicatoarea oricărui interval de lungime a_n, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, cu $a_n \to 0$, pentru $n \to \infty$.

Am obținut astfel un exemplu de șir pentru care $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ și $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, dar $X_n \overset{L^p}{\not\longrightarrow} 0$, pentru $n \to \infty$, oricare ar fi $p \geq 1$. În plus, avem $\mathbb{E}(X_n) = 1 \not\to 0$ și $\mathrm{D}^2(X_n) = n - 1 \not\to 0$, pentru $n \to \infty$. $\diamond$

Exemplul 5.72 Un alt exemplu, similar celui de mai sus, este șirul definit de $X_n(\omega) = e^n \mathbb{1}_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}(\omega)$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. $\diamond$

Exemplul 5.73 Să considerăm spațiul de probabilitate din Exemplul 5.71 și v.a.

$$X_n : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X_n(\omega) = \mathbb{1}_{\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Vom arată, în mod similar, că $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ și, pentru orice $p > 0$, $X_n \xrightarrow{L^p} 0$, pentru $n \to \infty$.

Într-adevăr,

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)}(\omega)\,\lambda(d\omega) = \lambda\left(\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} \to 0, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Pentru orice $\epsilon > 0$,

$$\lambda(|X_n| > \epsilon) = \lambda\Big(\big\{\omega : \mathbb{1}_{\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)}(\omega) > \epsilon\big\}\Big) = \lambda\left(\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\right) = \frac{1}{n},$$

[309] Evident, dacă am arătat deja că șirul dat converge aproape sigur, atunci are loc, conform Teoremei 5.50, și convergența în probabilitate.

deci $\lim_{n\to\infty} \lambda\left(|X_n| > \epsilon\right) = 0$.

Am obținut un exemplu de șir pentru care $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ și, pentru orice $p > 0$, $X_n \xrightarrow{L^p} 0$, pentru $n \to \infty$. ◇

Exemplul 5.74 Vom arăta că:

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \quad \not\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$$

și

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \not\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X.$$

Să considerăm spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \overset{\text{def}}{=\!=} ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$, unde λ este măsura Lebesgue.

Să definim[310] v.a.

$$X_n : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X_n(\omega) = \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $k, m \in \mathbb{N}^*$ sunt aleși astfel încât $n = 2^m + k$ și $k < 2^m$. Evident, $n \to \infty$ dacă și numai dacă $m \to \infty$.

De exemplu, $X_1 = \mathbb{1}_{[0,1]}$, $X_2 = \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}$, $X_3 = \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2},1\right]}$, $X_4 = \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{4}\right]}$, $X_5 = \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right]}$, $X_6 = \mathbb{1}_{\left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right]}$ etc.

Pentru orice $p > 0$,

$$\mathbb{E}\left(|X_n|^p\right) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]}(\omega)\, \lambda(d\omega) = \lambda\Big(\Big[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\Big]\Big) = \frac{1}{2^m},$$

deci $X_n \xrightarrow{L^p} 0$, pentru $n \to \infty$.

Pentru orice $\epsilon > 0$,

$$\lambda\left(|X_n| > \epsilon\right) = \lambda\Big(\Big\{\omega : \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]}(\omega) > \epsilon\Big\}\Big) = \lambda\Big(\Big[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\Big]\Big) = \frac{1}{2^m},$$

deci $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, pentru $n \to \infty$.

---

310 Putem defini și în modul următor: fie mulțimile $A_n^k = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ și v.a. $X_n^k(\omega) = \mathbb{1}_{A_n^k}(\omega)$, pentru $k = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Vom defini un nou șir $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ obținut din termenii X_n^k ordonați mai întâi după n și apoi după k.

Pe de altă parte, pentru orice $\omega \in [0,1]$, există o infinitate de indici k, m astfel încât $\omega \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$ și deci $X_n(\omega) = 1$.

Mai precis, obținem că pentru orice $\epsilon > 0$, $\omega \in [0,1]$ și $n \in \mathbb{N}^*$, există $m \geq n$, astfel încât $\omega \in \overline{B_m^\epsilon}$, unde $B_m^\epsilon \overset{\text{def}}{=\!=} \{\omega : |X_m(\omega)| \leq \epsilon\}$. Deci

$$\omega \in \bigcap\nolimits_{n\geq 1} \bigcup\nolimits_{m\geq n} \overline{B_m^\epsilon},$$

adică $\lambda\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} \overline{B_m^\epsilon}\right) = 1$ și deci, conform Teoremei 5.14, $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}}\!\!\!\!\!\!\!\!/\;\;\;\; 0$. ◇

Exemplul 5.75 Fie v.a. independente $X_n \sim \text{Bernoulli}(p_n)$, adică $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$, iar $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

Vom arăta că acest șir satisface:

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad p_n \to 0, \\ X_n \xrightarrow{L^r} 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad p_n \to 0, \\ X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} p_n < \infty. \end{aligned}$$

Într-adevăr, pentru orice $0 < \epsilon < 1$,

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = p_n.$$

Pentru orice $r > 0$,

$$\mathbb{E}(|X_n|^r) = p_n.$$

Fie $\epsilon > 0$. Avem

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} p_n.$$

Deci, dacă $p_n \to 0$, atunci $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, pentru $n \to \infty$, și, pentru orice $r > 0$, $X_n \xrightarrow{L^r} 0$, pentru $n \to \infty$.

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ este divergentă (alegând, de exemplu, $p_n = \frac{1}{n}$), atunci, conform Teoremei 5.14, $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}}\!\!\!\!\!\!\!\!/\;\;\;\; 0$, pentru $n \to \infty$.

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ este convergentă (alegând, de exemplu, $p_n = \frac{1}{n^2}$), atunci, conform Teoremei 5.14, $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, pentru $n \to \infty$.

Deci, alegând $p_n = \frac{1}{n}$ obținem alt exemplu pentru afirmațiile din cadrul Exemplului 5.74. ◇

Exemplul 5.76 Fie v.a. $X_n = \dfrac{n+1}{n}X$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, unde $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Vom arată că $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ și $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$.

Obținem $X_n : \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{n+1}{n} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ și $|X_n - X| = \dfrac{1}{n}\,|X| = \dfrac{1}{n}X$, deci

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon, X = 0\right) + \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon, X = 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X}{n} > \epsilon, X = 0\right) + \mathbb{P}\left(\frac{X}{n} > \epsilon, X = 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} > \epsilon, X = 1\right).\end{aligned}$$

Obținem $\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = \frac{1}{3}$, dacă $n < \frac{1}{\epsilon}$ și $\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0$, dacă $n \geq \frac{1}{\epsilon}$, adică $\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = \frac{1}{3}\mathbb{1}_{\left\{n < \frac{1}{\epsilon}\right\}}$.

Deci pentru orice $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\left\{n < \frac{1}{\epsilon}\right\}} = 0,$$

adică $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, pentru $n \to \infty$.

Să calculăm și funcțiile de repartiție:

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{2}{3}, & 0 \leq x < \frac{n+1}{n}, \\ 1, & x \geq \frac{n+1}{n} \end{cases} \quad \text{și} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{2}{3}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Deci, pentru $n \to \infty$,

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{2}{3}, & 0 \leq x < \frac{n+1}{n}, \\ 1, & x \geq \frac{n+1}{n} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{2}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

și astfel obținem că $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$. $\diamond$

Exemplul 5.77 Fie v.a. $X_n \sim \mathcal{U}\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Vom arată că $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, pentru $n \to \infty$.

Avem $f_{X_n}(x) = \frac{n}{2} \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]}(x)$. Fie $\epsilon > 0$ arbitrar și n suficient de mare astfel încât $\frac{1}{n} < \epsilon$. Atunci,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) &= 1 - \mathbb{P}(|X_n| \leq \epsilon) \\
&= 1 - \frac{n}{2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]}(x)\, dx \\
&= 1 - \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dx \\
&= 0,
\end{aligned}$$

deci $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = 0$, adică $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, pentru $n \to \infty$. $\diamond$

Exemplul 5.78 Fie v.a. (constante) $X_n = 1/n$, $\mathbb{P}-$a.s., unde $n \in \mathbb{N}^*$. Vom arăta că[311] $X_n \xrightarrow{F} 0$, pentru $n \to \infty$.

Într-adevăr, avem $X_n : \begin{pmatrix} 1/n \\ 1 \end{pmatrix}$ și $X : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, deci (vezi Exemplul 2.37) funcțiile de repartiție sunt date de

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/n, \\ 1, & x \geq 1/n \end{cases} \quad \text{și} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Avem, pentru $n \to \infty$,

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/n, \\ 1, & x \geq 1/n \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

[311] Având în vedere că v.a. sunt, $\mathbb{P}-$a.s., constante, este natural să ne așteptăm să obținem ca $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$; de fapt, vezi Remarca 2.53, avem că legea v.a. X este $\mathbb{P}_X = \delta_0$, iar legea v.a. X_n este $\mathbb{P}_{X_n} = \delta_{1/n}$, unde δ_a este măsura Dirac concentrată în punctul a.
Dar vom vedea că are loc convergența $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ doar în punctele de continuitate ale funcției F_X și nu în orice $x \in \mathbb{R}$.

Într-adevăr, pentru orice $x < 0$, avem $F_{X_n}(x) = 0 \to 0 = F_X(x)$, pentru $n \to \infty$.

Pentru orice $x > 0$, există $N_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x \geq 1/n$, pentru orice $n \geq N_0$, deci $F_{X_n}(x) = 1 \to 1 = F_X(x)$, pentru $n \to \infty$.

În punctul $x = 0$ nu are loc convergența, deoarece $F_{X_n}(0) = 0 \not\to 1 = F_X(0)$, dar să observăm că F_X nu este continuă în $x = 0$.

Prin urmare, are loc convergența $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ doar pentru $x \in \mathbb{R}^*$, adică pentru orice punct de continuitate pentru F_X, deci are loc convergența $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$. $\diamond$

Exemplul 5.79 Fie v.a. (constante) $X_n = a_n$, $\mathbb{P}-$a.s., unde $n \in \mathbb{N}^*$ și $X = a$, $\mathbb{P}-$a.s., unde șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este astfel încât $a_n \to a$, pentru $n \to \infty$. Similar ca în exemplul precedent, se poate arăta că $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$. $\diamond$

Exemplul 5.80 Fie v.a. $X \sim \mathscr{U}(0,1)$ și $X_n : \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} & 1 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Vom arăta că[312] $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$.

Să reamintim, vezi (3.51), că funcția de repartiție $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$

Pentru $x \leq 0$, obținem $0 = F_{X_n}(x) \to F_X(x) = 0$, pentru $n \to \infty$.

Pentru $x \geq 1$, obținem $1 = F_{X_n}(x) \to F_X(x) = 1$, pentru $n \to \infty$.

Fie $x \in (0,1)$. Atunci,

$$F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) = \sum\nolimits_{\substack{\ell=\overline{0,n-1} \\ \frac{\ell}{n} \leq x}} \frac{1}{n} = \frac{k}{n},$$

unde $k = \overline{0, n-1}$ este astfel încât $\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}$ sau, echivalent, $k \leq nx < k+1$, adică valoarea $k = \overline{0, n-1}$ este chiar partea întreagă $\lfloor nx \rfloor$, i.e. cel mai mare întreg mai mic sau egal decât nx.

312 Să observăm că $X_n \sim \mathscr{DU}(n)$. Vezi și Exemplul 3.90, dar și Exercițiul 5.5.5.

Deci
$$F_{X_n}(x) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \quad \text{pentru } x \in (0,1).$$
Ținând cont de inegalitățile $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$, deducem că
$$\frac{nx-1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq \frac{nx}{n},$$
deci $F_{X_n}(x) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \to x = F_X(x)$, pentru $n \to \infty$.

Prin urmare, $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, adică are loc convergența $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$. $\diamond$

Exemplul 5.81 Fie v.a. $X \sim \mathscr{U}(0,1)$ și $X_n : \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \dots & \frac{n-1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$.

În aces caz, pentru $x \in (0,1)$,
$$F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) = \sum\nolimits_{\substack{\ell=\overline{0,n-1} \\ \frac{\ell}{n} \leq x}} \frac{1}{n} = \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n},$$
unde $\lfloor nx \rfloor$ este partea întreagă a lui nx. $\diamond$

Exemplul 5.82 Vom arăta că:
$$X_n \xrightarrow{F} X \quad \not\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X.$$
Să considerăm spațiul de probabilitate din Exemplul 5.74 și v.a. $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ prin $X_n(\omega) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}(\omega)$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, și $X(\omega) = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(\omega)$.

Avem
$$F_{X_n}(x) = F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$
deci $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$.

Apoi $X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\not\longrightarrow} X$ deoarece $|X_n - X| = 1$ i.e. $\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| = 1\} = \Omega$ și deci, pentru orice $0 < \epsilon < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 1.$$

$\diamond$

Exemplul 5.83 Vom arăta că:

$$X_n \xrightarrow{F} X \quad \not\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X.$$

Fie $X_n = 1 - X$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, unde $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Obținem $X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ și apoi $F_{X_n}(x) = F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$

Deci $X_n \xrightarrow{F} X$, pentru $n \to \infty$.
Pe de altă parte,

$$|X_n - X| = |1 - 2X| = \begin{cases} |1-0|, & \text{dacă } X = 0, \\ |1-2|, & \text{dacă } X = 1. \end{cases}$$

Pentru orice $0 < \epsilon < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 1,$$

deci $X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\not\longrightarrow} X$, pentru $n \to \infty$. $\diamond$

Exemplul 5.84 Fie v.a. $X_n \sim \mathcal{U}[-n, n]$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Să se studieze convergența în funcția de repartiție și convergența în funcția caracteristică a șirului dat.

Avem, vezi (3.49),

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < -n, \\ \dfrac{x+n}{2n}, & -n \leq x \leq n, \\ 1, & x \geq n, \end{cases}$$

iar, conform (4.21),

$$\varphi_{X_n}(t) = \frac{\sin(nt)}{nt}, \quad \text{dacă } t \neq 0 \quad \text{și} \quad \varphi_{X_n}(0) = 1.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \frac{1}{2} \overset{\text{def}}{=} F(x), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Să observăm că funcția limită F obținută nu este o funcție de repartiție și că funcția limită φ nu este continuă în punctul 0.

Am obținut astfel un exemplu de șir de funcții caracteristice $(\varphi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ care converge punctual către funcția φ fără ca șirul $(F_{X_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de funcții de repartiție să conveargă slab (vezi definiția (5.12)) către o altă funcție de repartiție. Prin urmare, este esențială condiția din Teorema 5.68 de continuitate a lui φ în punctul 0. $\diamond$

5.3 Legea Numerelor Mari

Unul dintre rezultatele fundamentale ale Teoriei Probabilităților este Legea Numerelor Mari.

Aceasta ne ajută să justificăm riguros intuiția legată de comportamentul frecvenței relative de apariție a unui eveniment, la un numar mare de încercari (vezi Exemplul 5.93 precum și Exemplul 5.102).

De asemenea, dacă suntem în de cadrul de lucru al Remarcii 2.102 și al Remarcii 2.103, atunci Legea Numerelor Mari va oferi răspuns și la problema comportamentului mediei de selecție și apoi al dispersiei de selecție, când volumul selecției este mare (vezi Remarca 5.105 precum și Remarca 5.106).

În următoarele două secțiuni vom folosi următoarele notații. Dacă $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este un șir de v.a., atunci[313]

$$S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{și} \quad \bar{X}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_n}{n}, \quad \text{unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

Definiția 5.85 *Dacă un șir $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. satisface*

$$\boxed{\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \textit{pentru } n \to \infty} \tag{5.18}$$

sau, echivalent,

$$\boxed{\bar{X}_n - \mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \textit{pentru } n \to \infty}$$

sau, echivalent, pentru orice $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}\right)\right| > \epsilon\right) = 0,$$

atunci spunem că șirul dat satisface **legea slabă a numerelor mari (LSNM)**.

Aplicând caracterizarea (5.8) a convergenței în probabilitate, obținem următorul rezultat.

Teorema 5.86 *Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. integrabile. Atunci, șirul dat satisface* ***LSNM****, adică*

$$Z_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \textit{pentru } n \to \infty,$$

dacă și numai dacă

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{Z_n^2}{1+Z_n^2}\right) = 0.$$

Corolarul 5.87 *Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de pătrat integrabil astfel încât*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = 0.} \tag{5.19}$$

Atunci, șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LSNM**.

313 În anumite condiții, vezi Remarca 2.102, $\bar{X}_n$ poate fi văzută ca o medie de selecție.

Demonstrație. Deoarece $\mathbb{E}\left(Z_n\right)=0$, obținem, folosind și Remarca 2.82,

$$0 \leq \mathbb{E}\left(\frac{Z_n^2}{1+Z_n^2}\right) \leq \mathbb{E}\left(Z_n^2\right)=\mathrm{D}^2\left(Z_n\right)=\mathrm{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right).$$

■

În cazul în care v.a. sunt independente două câte două, obținem, având în vedere egalitatea (2.68), următorul corolar.

Corolarul 5.88 *Fie $\left(X_k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de pătrat integrabil și independente două câte două*[314] *astfel încât*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathrm{D}^2\left(X_k\right)=0. \tag{5.20}$$

Atunci, șirul $\left(X_k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ satisface **LSNM**.

Remarca 5.89 În cazul particular în care v.a. $\left(X_k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sunt de pătrat integrabil și independente două câte două astfel încât șirul $\left(\mathrm{D}^2\left(X_k\right)\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit, condiția (5.20), deci și (5.19), este satisfăcută. ◇

Remarca 5.90 În cazul particular în care v.a. $\left(X_k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sunt de pătrat integrabil și de tip **i.i.d.** (independența este două câte două), atunci condiția (5.20), deci și (5.19), este satisfăcută deoarece, vezi și (2.73),

$$\mathrm{D}^2\left(\bar{X}_n\right)=\mathrm{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n} \mathrm{D}^2\left(X_1\right) \rightarrow 0, \quad \text{pentru } n \rightarrow \infty.$$

Având în vedere, vezi și (2.72), că

$$\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right)=\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)=\mathbb{E}\left(X_1\right),$$

deducem, folosind Definiția 5.19, că **LSNM** înseamnă convergența

$$\bar{X}_n=\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\left(X_1\right), \quad \text{pentru } n \rightarrow \infty.$$

◇

[314] Este suficient, vezi (2.68), dacă impunem ca v.a. să fie necorelate.

Astfel obținem rezultatul clasic privind **LSNM**:

Corolarul 5.91 *Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de tip* ***i.i.d.*** *(independența este două câte două) astfel încât să avem*

$$\mathbb{E}\left(X_k\right)=\mu<\infty \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2\left(X_k\right)=\sigma^2<\infty, \quad \text{pentru orice } k\in\mathbb{N}^*.$$

Atunci, șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LSNM**, *mai precis, se obține*

$$\boxed{\frac{S_n}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}\mu, \quad \text{pentru } n\to\infty.} \tag{5.21}$$

Demonstrație. Pentru demonstrație vezi Remarca 5.90.

Să menționăm că relația (5.21) poate fi obținută și direct, folosind inegalitatea (2.76) a lui Cebâșev.

Conform (2.72) și (2.73), avem că $\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right)=\mu$ și $\mathrm{D}^2\left(\bar{X}_n\right)=\dfrac{\sigma^2}{n}$.

Utilizând (2.76) obținem

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n-\mu\right|<\epsilon\right)\geq 1-\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n-\mu\right|<\epsilon\right)=1,$$

adică $\left(\bar{X}_n-\mu\right)\xrightarrow{\mathbb{P}}0$ sau, echivalent, folosind Definiția 5.19, $\bar{X}_n\xrightarrow{\mathbb{P}}\mu$, pentru $n\to\infty$. ■

Remarca 5.92 Având în vedere, vezi (2.72) și (2.73), că

$$\mathbb{E}\left(\left|\bar{X}_n-\mu\right|^2\right)=\mathrm{D}^2\left(\bar{X}_n\right)=\frac{\sigma^2}{n}\to 0, \quad \text{pentru } n\to\infty,$$

deducem că are loc convergența (5.21) și în L^2, i.e.

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{L^2}\mu, \quad \text{pentru } n\to\infty.$$

◇

Exemplul 5.93 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de tip **i.i.d.**, cu

$$X_k \sim \text{Bernoulli}\,(p) = \mathscr{B}\,(1,p)\,, \quad k\in\mathbb{N}^*.$$

Putem vedea X_k ca v.a. care desemnează numărul de apariții ale unui eveniment A (numit ***Succes***) la încercarea k, cu probabilitatea p de apariție a ***Succesului***:

$$X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad k\in\mathbb{N}^*.$$

V.a.

$f_n \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{k=1}^n X_k$ se numește **frecvența absolută de apariție a *Succesului***

în cele n probe și are drept valori numărul de apariții ale *Succesului* în cele n observații.

Prin urmare, f_n urmează o distribuție de tip binomial cu $f_n \sim \mathscr{B}\,(n,p)$.

V.a.

$\dfrac{f_n}{n}$ se numește **frecvența relativă de apariție a *Succesului***.

Avem

$$\mathbb{E}\,(X_k) = p \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2\,(X_k) = pq \le \frac{1}{4}, \quad \text{pentru orice } k\in\mathbb{N}^*.$$

Conform Remarcii 5.89 obținem

$$\frac{f_n}{n} - \frac{\sum_{k=1}^n p}{n} = \frac{f_n}{n} - p \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{pentru } n\to\infty$$

sau, echivalent[315] (folosind Definiția 5.19),

$$\frac{f_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} p, \quad \text{pentru } n\to\infty, \tag{5.22}$$

[315] Vezi și Exercițiul 2.4.23 și Exercițiul 5.5.16.

adică **șirul fecvențelor relative de apariție a *Succesului* converge în probabilitate la p (care este probabilitatea, teoretică, de apariție a *Succesului* la o singură încercare)**.

Cu alte cuvinte, dacă f_n este frecvența absolută de apariție a unui eveniment A în n probe independente și p este probabilitatea de apariție a lui A (indiferent de probă), atunci frecvența relativă $\dfrac{f_n}{n}$ de apariție a evenimentului A în cele n probe tinde în probabilitate la p, i.e. limita (5.22). $\diamond$

Conform exemplului precedent, obținem că limita (5.22) se poate scrie sub forma:

Teorema 5.94 (Teorema lui Bernoulli) *Dacă $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este un șir de evenimente independente astfel încât $\mathbb{P}(A_k) = p$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, atunci are loc:*

$$\boxed{\frac{1}{n}\left(\mathbb{1}_{A_1} + \ldots + \mathbb{1}_{A_n}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} p, \quad \textit{pentru } n \to \infty.}$$

Remarca 5.95 Să observăm că dacă șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LSNM**, i.e.

$$\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

și dacă[316], în plus, are loc

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) \to \mu, \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

atunci are loc chiar (5.21), i.e.

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Într-adevăr, folosind Exemplul 5.79, avem următoarea convergență a șirurilor numerice (văzute ca v.a. constante)

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{F} \mu, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

[316] Vezi, de exemplu, Exercițiul 5.5.14.

iar apoi, folosind Propoziția 5.46, putem scrie **LSNM** sub forma (5.21).

Evident, dacă $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este un șir de v.a. de tip **i.i.d.**, atunci $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mu$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, iar atunci nu mai trebuie să folosim Propoziția 5.46 ci chiar Definiția 5.19; astfel, șirul dat satisface (vezi Remarca 5.90) **LSNM** sub forma (5.21). $\diamond$

În toate rezultatele de mai sus s-a cerut ca v.a. să fie de pătrat integrabil. Se poate arăta că șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LSNM** presupunând doar integrabilitatea v.a.. Demonstrația se face prin trunchierea v.a., luând, mai întâi, $\tilde{X}_k = X_k \mathbb{1}_{\{|X_k|\le k\}}$.

Teorema 5.96 *Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. integrabile și de tip* ***i.i.d.*** *(independența este două câte două) astfel încât*

$$\mathbb{E}(X_k) = \mu < \infty, \quad \textit{pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci, șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LSNM**, *mai precis, se obține*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu, \quad \textit{pentru } n \to \infty.$$

Ne interesează în continuare ca condițiile ca limita (5.18) să aibă loc aproape sigur.

Definiția 5.97 *Dacă un șir $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. satisface*

$$\boxed{\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \textit{pentru } n \to \infty}$$

sau, echivalent,

$$\boxed{\bar{X}_n - \mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \textit{pentru } n \to \infty}$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega : \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k(\omega)}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}\right)\right) = 0\right\}\right) = 1,$$

atunci spunem că șirul dat satisface **legea tare a numerelor mari (LTNM)**.

Se demonstrează mai întâi următorul rezultat.

Propoziția 5.98 (vezi [15, P29, Capitolul V]) *Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de tip* ***i.i.d.*** *(independența este în ansamblu) astfel încât $\mathbb{E}\left(X_1^4\right) < \infty$. Să notăm*

$$\mathbb{E}\left(X_k\right) = \mu, \quad \textit{pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci, șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LTNM***, mai precis, folosind Definiția 5.10, se obține*

$$\boxed{\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu, \quad \textit{pentru } n \to \infty.}$$

Rezultatul precedent se poate generaliza prin slăbirea ipotezelor:

Propoziția 5.99 (vezi [15, C36, Capitolul V]) *Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente în ansamblu și de pătrat integrabil astfel încât*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{D}^2\left(X_k\right)}{k^2} < \infty.} \tag{5.23}$$

Atunci, șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LTNM***.*

Remarca 5.100 În cazul particular în care $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este un șir de v.a. independente în ansamblu și de pătrat integrabil astfel încât șirul $\left(\mathrm{D}^2\left(X_k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit, condiția (5.23) este satisfacută, deci $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LTNM.** ⋄

Folosind condiția suficientă (5.23) se obține rezultatul clasic privind **LTNM**:

Corolarul 5.101 *Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de tip* ***i.i.d.*** *(independența este în ansamblu) astfel încât să avem*

$$\mathbb{E}\left(X_k\right) = \mu < \infty \quad \textit{și} \quad \mathrm{D}^2\left(X_k\right) = \sigma^2 < \infty, \quad \textit{pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci, șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LTNM***, mai precis, se obține*

$$\boxed{\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu, \quad \textit{pentru } n \to \infty.}$$

Exemplul 5.102 Aplicând Corolarul 5.101, obținem, utilizând notațiile și cadrul de lucru din Exemplul 5.93,

$$\boxed{\frac{f_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} p, \quad \text{pentru } n \to \infty,} \tag{5.24}$$

adică **șirul fecvențelor relative de apariție a *Succesului* converge aproape sigur la p (care este probabilitatea, teoretică, de apariție a *Succesului* la o singură încercare)**.

Cu alte cuvinte, dacă f_n este frecvența absolută de apariție a unui eveniment A în n probe independente și p este probabilitatea de apariție a lui A (indiferent de probă), atunci frecvența relativă $\frac{f_n}{n}$ de apariție a evenimentului A în cele n probe tinde aproape sigur la p, i.e. limita (5.24). $\diamond$

Conform exemplului precedent, obținem că limita (5.24) se poate scrie sub forma:

Corolarul 5.103 (Teorema lui Borel) *Dacă $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este un șir de evenimente independente în ansamblu astfel încât $\mathbb{P}(A_k) = p$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, atunci are loc*

$$\frac{1}{n}\left(\mathbb{1}_{A_1} + \ldots + \mathbb{1}_{A_n}\right) \xrightarrow{\text{a.s.}} p, \quad \textit{pentru } n \to \infty.$$

LTNM în ipoteze slăbite (v.a. nu mai sunt neapărat de pătrat integrabil, iar independența nu mai este neapărat în ansamblu) este dată de următorul rezultat, stabilit de N. Etemadi în 1981. Pentru demonstrație vezi [7, Chapter 3, Theorem 6.4] sau [35, Theorem 5.5].

Teorema 5.104 *Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de tip* ***i.i.d.*** *(independența este două câte două) astfel încât*

$$\mathbb{E}(X_k) = \mu \quad \textit{există (finită sau infinită)}, \quad \textit{pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci, șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LTNM**, *mai precis, se obține*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu, \quad \textit{pentru } n \to \infty.$$

Remarca 5.105 Dacă suntem în cadrul de lucru al Remarcii 2.102, mai precis, dacă avem v.a. X reprezentând o caracteristică cercetată și v.a. $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ de tip **i.i.d.**, urmând repartiția lui X, atunci $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ reprezintă o selecție (sau eșantion) de volum n.

Conform Corolarului 5.91, **LSNM** înseamna că media de selecție converge, în probabilitate, la media teoretică, i.e.

$$\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X), \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Conform Propoziției 5.98 sau a Teoremei 5.104 se va obține chiar convergența aproape sigură a mediei de selecție la media teoretică $\mathbb{E}(X)$:

$$\boxed{\bar{X}_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}(X), \quad \text{pentru } n \to \infty.}$$

◇

Remarca 5.106 Dacă suntem în cadrul de lucru al Remarcii 2.102 și al Remarcii 2.103, atunci Legea Numerelor Mari ne ajută la stabilirea convergenței, în diverse sensuri, și a dispersiei de selecție (atât varianta deplasată $\bar{\mathrm{S}}_n^2$ cât și varianta nedeplasată S_n^2) când volumul selecției $n \to \infty$.

Reamintim formula de calcul a dispersiei de selecție (varianta deplasată):

$$\bar{\mathrm{S}}_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}_n^2.$$

Pe de o parte, vezi Remarca 5.105, folosind limita $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}(X)$, pentru $n \to \infty$, a mediei de selecție precum și Propoziția 5.17 avem

$$\bar{X}_n^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} [\mathbb{E}(X)]^2, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Pe de altă parte, aplicând Propoziția 5.98 sau Teorema 5.104 șirului de v.a. $\left(X_i^2\right)_i$, se va obține și convergența

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}\left(X^2\right), \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Folosind, din nou, Propoziția 5.17, deducem că

$$\bar{\mathrm{S}}_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}_n^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2, \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

adică dispersia de selecție va converge aproape sigur la dispersia teoretică:

$$\bar{\mathrm{S}}_n^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathrm{D}^2(X), \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Evident, și dispersia de selecție, varianta nedeplasată,

$$\mathrm{S}_n^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}_n^2\right),$$

va converge, și ea, aproape sigur la dispersia teoretică:

$$\boxed{\mathrm{S}_n^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathrm{D}^2(X), \quad \text{pentru } n \to \infty.}$$

Dacă suntem în condiții mai slabe, folosind Propoziția 5.25, deducem și convergența în probabilitate, la dispersia teoretică, a dispersiei de selecție. $\diamond$

Remarca 5.107 Dacă suntem în cadrul de lucru al Remarcii 2.102, atunci Legea Numerelor Mari ne ajută și la stabilirea convergenței, în diverse sensuri, a **funcției de repartiție de selecție**[317] dată de

$$F_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \le t\}}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_t}(X_i)}{n}, \quad \text{unde } t \in \mathbb{R} \text{ și } A_t \stackrel{\text{def}}{=} (-\infty, t],$$

când volumul selecției $n \to \infty$.

Evident, dacă v.a. $(X_i)_i$ sunt de tip **i.i.d.**, atunci și v.a. $(\mathbb{1}_{A_t}(X_i))_i$ sunt de tip **i.i.d.** cu media[318], vezi și formula (2.48),

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X_i \le t\}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X \le t\}}\right) = \mathbb{P}(X \le t) = F_X(t).$$

Conform Corolarului 5.91, **LSNM** înseamna că are loc convergența în probabilitate a funcției de repartiție de selecție la funcției teoretică de repartiție $F_X(t)$:

$$F_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_t}(X_i)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_t}(X)) = F_X(t), \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Conform Propoziției 5.98 sau a Teoremei 5.104 se va obține chiar convergența aproape sigură a funcției de repartiție de selecție la funcției teoretică de repartiție $F_X(t)$:

$$F_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_t}(X_i)}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_t}(X)) = F_X(t), \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. $\diamond$

---

317 Să observăm că $n \cdot F_n$ reprezintă, de fapt, numărul tuturor indicilor $i \le n$ pentru care v.a. X_i ia valori mai mici sau egale cu t, adică numărul tuturor observațiilor, dintre primele n, care sunt cel mult egale cu t.

De asemenea, se vede din definiție că valoarea $F_n(t)$, a funcției de repartiție de selecție într-un punct t, este o v.a.. Conform semnificației, avem că v.a. $nF_n(t) \sim \mathscr{B}(n, F_X(t))$.

318 Evident, are loc și $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_t}(X_i)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_t}(X)) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X \in A_t\}}\right) = \mathbb{P}(X \in A_t) = F_X(t)$.

5.4 Teorema Limită Centrală

Fie șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip **i.i.d.** (independența este în ansamblu) astfel încât au dispersie finită și să notăm

$$\mathbb{E}(X_k) = \mu \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(X_k) = \sigma^2, \quad \text{pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

Studiem, în continuare, problema convergenței în repartiție a șirului sumelor $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ standardizate, i.e. a șirului de v.a. $\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(S_n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sau, echivalent, a șirului de v.a. $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$ standardizate, i.e. a șirului de v.a. $\left(\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(\bar{X}_n)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Să observăm că avem egalitățile

$$\boxed{\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right)}{\sqrt{\mathrm{D}^2\left(\bar{X}_n\right)}}},$$

deoarece, conform (2.72) și (2.73),

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{E}(S_n) = n\mu, && \mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right) = \mu \\ &\mathrm{D}^2(S_n) = n\sigma^2, && \mathrm{D}^2\left(\bar{X}_n\right) = \frac{1}{n}\sigma^2. \end{aligned}} \tag{5.25}$$

Deci v.a. $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ este standardizarea v.a. S_n,, iar v.a. $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ este standardizarea v.a. $\bar{X}_n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 5.108 (Teorema Limită Centrală) *Fie șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip* ***i.i.d.*** *(independența este în ansamblu) astfel încât*

$$\mathbb{E}(X_k) = \mu < \infty \quad \textit{și} \quad \mathrm{D}^2(X_k) = \sigma^2 < \infty, \quad \textit{pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci, are loc convergența

$$\boxed{\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(S_n)}} \xrightarrow{F} Z \sim \mathcal{N}(0,1)\,, \quad \textit{pentru } n \to \infty.} \tag{5.26}$$

Prin urmare, șirul de v.a. standardizate $\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(S_n)}}\right)_n$ are drept limită (în sensul funcției de repartiție) o v.a. normală standard.

Remarca 5.109 Folosind (5.25) deducem că relația (5.26) poate fi scrisă și sub forma

$$\boxed{\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{F} Z \sim \mathcal{N}(0,1)\,, \quad \text{pentru } n \to \infty} \tag{5.27}$$

sau, echivalent,

$$\boxed{\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(\bar{X}_n)}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{F} Z \sim \mathcal{N}(0,1)\,, \quad \text{pentru } n \to \infty,} \tag{5.28}$$

adică

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} F_{\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}(z) = \lim_{n\to\infty} F_{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(z) = F_Z(z) \stackrel{\text{not}}{=} \Phi(z), \\ &\hfill \text{pentru orice } z \in \mathbb{R}, \end{aligned}} \tag{5.29}$$

unde Φ este funcția de repartiție asociată v.a. $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, i.e.

$$\Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \quad z \in \mathbb{R},$$

pentru care există tabele cu valori ale ei.

Să reamintim faptul că funcția de repartiție $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)\,dt$ reprezintă și aria domeniului plan cuprins între $x = z$, axa Ox și curba $y = f_Z(x)$. $\diamond$

Remarca 5.110 Prin urmare, pentru n suficient de mare,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le z\right) = F_{\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}(z) \simeq \Phi(z)\,, \quad z \in \mathbb{R} \tag{5.30}$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z\right) = F_{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(z) \simeq \Phi(z)\,, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{5.31}$$

Deci, pentru orice $-\infty \le a < b \le \infty$,

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le b\right) = F_{\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}(b) - F_{\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}(a)$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq b\right) = F_{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(b) - F_{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(a)$$

și astfel, folosind (5.30) și (5.31), obținem că, pentru n suficient de mare,

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq b\right) = \mathbb{P}\left(a < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq b\right) \simeq \Phi(b) - \Phi(a), \quad \text{pentru orice } -\infty \leq a < b \leq \infty. \tag{5.32}$$

Astfel, am obținut următoarele estimări pentru ca S_n, sau respectiv $\bar{X}_n$, să fie între anumite limite:

$$\mathbb{P}\left(a\sqrt{n\sigma^2} + n\mu < S_n \leq b\sqrt{n\sigma^2} + n\mu\right) \simeq \Phi(b) - \Phi(a)$$

sau, echivalent,

$$\mathbb{P}\left(a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu < \bar{X}_n \leq b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu\right) \simeq \Phi(b) - \Phi(a).$$

◇

Remarca 5.111 Deci, pentru n suficient de mare, obținem și că v.a. $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ sau, echivalent,

$$S_n = \sum\nolimits_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{N}\big(n\mu, n\sigma^2\big) \quad \text{sau} \quad \bar{X}_n \sim \mathcal{N}\Big(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\Big).$$

◇

Remarca 5.112 Dacă suntem în cadrul de lucru al Remarcii 2.102 și X reprezintă o caracteristică cercetată, iar $(X_i)_{i=\overline{1,n}}$ reprezintă o selecție (sau eșantion) de volum n, adică v.a. de tip **i.i.d.**, urmând repartiția lui X, atunci $\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(X) = \mu$, iar $\mathrm{D}^2(X_k) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2$, pentru $k = \overline{1,n}$.

Reamintim definiția mediei de selecție

$$\bar{X}_n \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}.$$

Atunci media și dispersia mediei de selecție sunt date, vezi (2.72) și (2.73), de

$$\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right) = \mu \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2\left(\bar{X}_n\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Atunci, pentru n suficient de mare ($n > 30$), media de selecție $\bar{X}_n$ poate fi aproximată de o v.a. ce urmează o distribuție normală de tip $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, oricare ar fi[319] legea de repartiție a lui X.

Într-adevăr, aplicând Teorema Limită Centrală,

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{F} Z \sim \mathcal{N}(0,1)\,, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Aplicând Propoziția 3.130, obținem

$$\bar{X}_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_n + \mu \xrightarrow{F} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z + \mu \sim \mathcal{N}\Big(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\Big), \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

◇

Demonstrația Teoremei Limită Centrală 5.108. V.a. S_n standardizată este dată de

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}\left(S_n\right)}{\sqrt{\mathrm{D}^2\left(S_n\right)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \quad \text{unde } n \in \mathbb{N}^*,$$

iar funcția caracteristică asociată este, ținând cont de Remarca 4.28,

$$\begin{aligned}
\varphi_{Z_n}(t) &= \varphi_{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)}(t) \\
&= \varphi_{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)}\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big) \\
&= \prod\nolimits_{k=1}^{n} \varphi_{(X_k-\mu)}\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big) \\
&= \left[\varphi_{(X_1-\mu)}\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\right]^n,
\end{aligned}$$

deoarece $(X_k - \mu)$ sunt identic distribuite și deci

$$\varphi(t) \overset{\text{def}}{=\!=} \varphi_{(X_1-\mu)}(t) = \varphi_{(X_k-\mu)}(t)\,, \quad \text{pentru orice } k \in \mathbb{N}^*,\ t \in \mathbb{R}.$$

[319] Pentru cazul în care legea caracteristicii X este una normală, vezi relația (3.73) din cadrul Remarcii 2.102.

Observăm că

$$\mathbb{E}\left(\left|X_k-\mu\right|^2\right)=\mathbb{E}\left[\left(X_k-\mu\right)^2\right]=\mathrm{D}^2\left(X_k\right)=\sigma^2<\infty,$$

deci, conform Teoremei 4.30 (vezi și teorema de derivare a integralei Lebesgue dată de [25, Lemma 12.31]), există derivatele continue ale funcției caracteristice

$$\begin{aligned}\varphi'\left(t\right)&=i\mathbb{E}\left(\left(X_k-\mu\right)e^{it\left(X_k-\mu\right)}\right)\\ \varphi''\left(t\right)&=i^2\mathbb{E}\left(\left(X_k-\mu\right)^2e^{it\left(X_k-\mu\right)}\right).\end{aligned}$$

Prin urmare, are loc și formula lui Taylor (4.11) asociată funcției caracteristice φ și astfel putem scrie (vezi și Nota 267):

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\varphi\left(0\right)+\frac{\varphi'\left(0\right)}{1!}t+\frac{\varphi''\left(0\right)}{2!}t^2+o(t^2)\\ &=1+\frac{i\mathbb{E}\left(X_k-\mu\right)}{1!}t-\frac{\mathbb{E}\left(X_k-\mu\right)^2}{2!}t^2+o(t^2)\\ &=1-\frac{\sigma^2}{2}t^2+o(t^2),\end{aligned}$$

unde $\lim_{t\to 0}\frac{o(t^2)}{t^2}=0$.

Deci

$$\varphi_{Z_n}\left(t\right)=\left(1-\frac{\sigma^2}{2}\frac{t^2}{n\sigma^2}+o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)\right)^n.$$

Trecându-se la limită, se obține

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{Z_n}\left(t\right)=\lim_{n\to\infty}e^{\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)\right)}=e^{-\frac{t^2}{2}},$$

deoarece $\lim_{n\to\infty}n o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{t^2}{\sigma^2}\frac{o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)}{\frac{t^2}{n\sigma^2}}=0$.

Deci, folosind formula (4.24) precum și Definiția 5.47, putem scrie că

$$Z_n\xrightarrow{\varphi}Z\sim\mathcal{N}(0,1)\,,\quad\text{pentru } n\to\infty,$$

sau, echivalent (vezi Corolarul 5.70), obținem că $Z_n\xrightarrow{F}Z\sim\mathcal{N}(0,1)$, pentru $n\to\infty$, adică standardizarea $Z_n=\frac{S_n-\mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(S_n)}}$, devine, la limită, distribuția normală standard. ∎

Aplicând Teorema Limită Centrală, obținem că distribuția normală este cazul limită al multor distribuții (în sensul Remarcii 5.111); în acest sens, vezi Remarca 5.117, Remarca 5.119, Remarca 5.121, Remarca 5.123 și Remarca 5.124. Deci pentru valori mari ale lui n putem folosi doar tabelele distribuției normale.

În cazul particular al șirului $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip **i.i.d.** (independența este în ansamblu), urmând o distribuție Bernoulli, $X_k \sim \mathscr{B}(1,p)$, pentru $k \in \mathbb{N}^*$, se obține $S_n \sim \mathscr{B}(n,p)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. În acest caz S_n are semnificația de **frecvența absolută de apariție a *Succesului* la n încercări**, iar $\bar{X}_n$ are semnificația de **frecvența relativă de apariție a *Succesului* la n încercări**.

Conform (2.83),

$$\mathbb{E}(S_n) = np \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(S_n) = npq.$$

Obținem astfel următorul rezultat.

Teorema 5.113 (Teorema lui Moivre-Laplace) *Fie șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip **i.i.d.** (independența este în ansamblu) și distribuite Bernoulli $X_k \sim \mathscr{B}(1,p)$.*

Atunci, are loc convergența

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{F} Z \sim \mathscr{N}(0,1)\,, \quad \textit{pentru } n \to \infty.$$

Remarca 5.114 Avem faptul că, pentru n suficient de mare, $F_{\frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n\,\sigma^2}}}(z)$ este aproximativ egal cu $\Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} F_Z(z)$, prin urmare (vezi și (5.32)), folosind

$$\mathbb{P}\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = F_{\frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n\,\sigma^2}}}(b) - F_{\frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n\,\sigma^2}}}(a)\,,$$

obținem că pentru orice $-\infty \le a < b \le \infty$ și, pentru n suficient de mare,

$$\mathbb{P}\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \mathbb{P}\left(a \le \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}} \le b\right) \simeq \Phi(b) - \Phi(a)\,. \tag{5.33}$$

Deci am obținut următoarele estimări pentru ca frecvența absolută S_n sau respectiv frecvența relativă $\bar{X}_n$, să fie între anumite limite:

$$\mathbb{P}\left(a\sqrt{npq} + np \le S_n \le b\sqrt{npq} + np\right) = \mathbb{P}\left(a\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} + p \le \bar{X}_n \le b\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} + p\right)$$
$$\simeq \Phi(b) - \Phi(a)\,.$$

◇

Remarca 5.115 Regula practică este următoarea:

- dacă $n \geq 30$ și $\min(np, nq) \geq 10$, atunci aproximarea este foarte bună;
- dacă $n \geq 30$ și $\min(np, nq) \in (5, 10)$, atunci aproximarea este bună, dar fără mare precizie;
- dacă $n \geq 30$ și $\min(np, nq) \leq 5$, atunci aproximarea nu este bună și în acest caz se folosește distribuția Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ cu parametrul $\lambda = np$ (vezi și Teorema 2.162 și Remarca 2.164).

$\diamond$

Remarca 5.116 Presupunem că un eveniment A se realizează cu probabilitatea p. Utilizând notațiile și cadrul de lucru din Exemplul 5.93 putem spune că șirul standardizat al frecvențelor absolute de apariție a evenimentului A converge în funcția de repartiție la o v.a. distribuită normal standard. $\diamond$

Remarca 5.117 Dacă v.a. de tip **i.i.d.** $X_k \sim \mathscr{B}(1, p)$, atunci $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathscr{B}(n, p)$, și, utilizând Remarca 5.111, obținem aproximarea distribuției binomiale cu ajutorul distribuției normale:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathscr{N}(np, npq), \quad \text{pentru } n \text{ suficient de mare} \tag{5.34}$$

(de obicei, dacă $\min(np, nq) \geq 10$).

Având în vedere tabelele de valori ale distribuției binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, pentru diverse valori $n \geq 2$, $p \in (0, 1)$ și pentru $k = \overline{0, n}$, și tabelele de valori ale distribuției normale standard, i.e. ale funcției Φ de repartiție, s-a observat că adăugarea unui factor de corecție (**corecție de continuitate în cazul în care Teorema Limită Centrală este utilizată pentru v.a. discrete**) de $1/2$ îmbunătățește calitatea aproximării valorilor v.a. discrete printr-o v.a continuă.

Mai precis, pentru orice $\ell \in \mathbb{N}$, dacă ne interesează probabilități de tipul $\mathbb{P}(S_n \leq \ell)$, atunci avem, mai întâi, că

$$\mathbb{P}(S_n \leq \ell) = \mathbb{P}(S_n < \ell + 1/2)$$

și abia acum folosim relația (5.34) și apoi (3.69).

Astfel,

$$\mathbb{P}(S_n \leq \ell) = \mathbb{P}(S_n < \ell + 1/2)$$

$$
\begin{aligned}
&= F_{S_n}(\ell + 1/2 - 0) \\
&\simeq F_{\mathcal{N}(np,npq)}(\ell + 1/2 - 0) \\
&= F_{\mathcal{N}(np,npq)}(\ell + 1/2) \\
&= \Phi\left(\frac{\ell + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \ell = \overline{0,n}.
\end{aligned}
$$

Similar,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \geq \ell) &= \mathbb{P}(S_n > \ell - 1/2) \\
&= 1 - F_{S_n}(\ell - 1/2) \\
&\simeq 1 - F_{\mathcal{N}(np,npq)}(\ell - 1/2) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\ell - 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \ell = \overline{0,n}.
\end{aligned}
$$

De asemenea, dacă ne interesează chiar probabilitățile $\mathbb{P}(S_n = \ell)$, unde $\ell \in \mathbb{N}$, atunci avem, mai întâi, că

$$
\mathbb{P}(S_n = \ell) = \mathbb{P}(\ell - 1/2 < S_n < \ell + 1/2)
$$

și abia acum folosim relația (5.34) și apoi (3.69).

Astfel,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n = \ell) &= \mathbb{P}(\ell - 1/2 < S_n < \ell + 1/2) \\
&= F_{S_n}(\ell + 1/2 - 0) - F_{S_n}(\ell - 1/2) \\
&\simeq F_{\mathcal{N}(np,npq)}(\ell + 1/2 - 0) - F_{\mathcal{N}(np,npq)}(\ell - 1/2) \\
&= F_{\mathcal{N}(np,npq)}(\ell + 1/2) - F_{\mathcal{N}(np,npq)}(\ell - 1/2) \\
&= \Phi\left(\frac{\ell + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\ell - 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \ell = \overline{0,n}.
\end{aligned}
$$

$\diamond$

Demonstrația Teoremei 5.113 a lui Moivre-Laplace. V.a. S_n standardizată este dată de

$$
Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(S_n)}} = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} S_n + \frac{-np}{\sqrt{npq}},
$$

iar funcția caracteristică asociată este

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(t) &= e^{it\frac{-np}{\sqrt{npq}}}\varphi_{S_n}\left(\frac{1}{\sqrt{npq}}t\right)\\ &= e^{it\frac{-np}{\sqrt{npq}}}\left(pe^{i\frac{t}{\sqrt{npq}}}+q\right)^n\\ &= \left(pe^{\frac{itq}{\sqrt{npq}}}+qe^{\frac{-itp}{\sqrt{npq}}}\right)^n,\end{aligned}$$

deoarece dacă $X_k \sim \mathscr{B}(1,p)$, atunci $S_n = \sum_{k=1}^n X_k \sim \mathscr{B}(n,p)$ și în acest caz

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = \left(pe^{it}+q\right)^n.$$

Scriem formula lui Taylor pentru funcția exponențială și obținem (vezi și Nota 267):

$$\begin{aligned}pe^{\frac{itq}{\sqrt{npq}}} &= p + \frac{p}{1!}\frac{itq}{\sqrt{npq}} + \frac{p}{2!}\left(\frac{itq}{\sqrt{npq}}\right)^2 + o\left(n^{-1}\right),\\ qe^{\frac{-itp}{\sqrt{npq}}} &= q + \frac{q}{1!}\frac{-itp}{\sqrt{npq}} + \frac{q}{2!}\left(\frac{-itp}{\sqrt{npq}}\right)^2 + o\left(n^{-1}\right),\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}pe^{\frac{itq}{\sqrt{npq}}} + qe^{\frac{-itp}{\sqrt{npq}}} &= p + \frac{p}{1!}\frac{itq}{\sqrt{npq}} + \frac{p}{2!}\left(\frac{itq}{\sqrt{npq}}\right)^2 + o\left(n^{-1}\right)\\ &\quad + q - \frac{q}{1!}\frac{itp}{\sqrt{npq}} + \frac{q}{2!}\left(\frac{itp}{\sqrt{npq}}\right)^2 + o\left(n^{-1}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{2n}t^2 + o\left(n^{-1}\right),\end{aligned}$$

adică

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left(1 - \frac{1}{2n}t^2 + o\left(n^{-1}\right)\right)^n.$$

Trecându-se la limită, se obține

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{\lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{1}{2n}t^2 + o(n^{-1})\right)} = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

deoarece $\lim_{n\to\infty} n o(n^{-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{o(n^{-1})}{n^{-1}} = 0$.

Deci, folosind formula (4.24), Definiția 5.47 și Corolarul 5.70, am obținut că

$$Z_n \xrightarrow{\varphi} Z \sim \mathscr{N}(0,1)\,, \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

sau, echivalent, $Z_n \xrightarrow{F} Z \sim \mathscr{N}(0,1)\,$, pentru $n \to \infty$, adică standardizarea unei v. a. distribuite binomial, i.e. $Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(S_n)}}$, devine, la limită, distribuția normală standard. ∎

În cazul șirului $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip **i.i.d.** (independența este în ansamblu), urmând o distribuție Poisson, $X_k \sim \mathscr{P}(1)$, pentru $k \in \mathbb{N}^*$, se obține, conform relației (4.32), $S_\lambda \sim \mathscr{P}(\lambda)$, unde $\lambda \in \mathbb{N}^*$ și, conform (2.94),

$$\mathbb{E}(S_\lambda) = \lambda \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(S_\lambda) = \lambda.$$

În acest caz obținem:

Teorema 5.118 *Fie șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip* ***i.i.d.*** *(independența este în ansamblu) și distribuite Poisson $X_k \sim \mathscr{P}(1)\,$.*

Atunci,

$$\frac{S_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{F} Z\,, \quad \textit{pentru } \mathbb{N} \ni \lambda \to \infty,$$

unde $Z \sim \mathscr{N}(0,1)\,$.

Remarca 5.119 Dacă v.a. de tip **i.i.d.** $X_k \sim \mathscr{P}(\lambda)$, atunci $S_n = \sum_{k=1}^n X_k \sim \mathscr{P}(n\lambda)$ și, utilizând Remarca 5.111, obținem aproximarea distribuției Poisson cu ajutorul distribuției normale:

$$S_n = \sum\nolimits_{k=1}^{n} X_k \sim \mathscr{N}(n\lambda, n\lambda)\,, \quad \text{pentru } n \text{ suficient de mare.} \tag{5.35}$$

La fel ca și în cazul distribuției binomiale (vezi Remarca 5.117), pentru o mai bună precizie a aproximării, folosim și aici factorul $1/2$ al **corecției de continuitate în cazul în care Teorema Limită Centrală este utilizată pentru v.a. discrete**.

Astfel, deoarece valoarea $\ell \in \mathbb{N}$, avem

$$\mathbb{P}(S_n \leq \ell) = \mathbb{P}(S_n < \ell + 1/2)\,.$$

Apoi, folosind (5.35) și (3.69), obținem (vezi și pagina 614):

$$\mathbb{P}(S_n \leq \ell) = \mathbb{P}(S_n < \ell + 1/2)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{\ell + 1/2 - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right), \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

De asemenea, dacă ne interesează chiar probabilitățile $\mathbb{P}(S_n = \ell)$, atunci să observăm, mai întâi, că

$$\mathbb{P}(S_n = \ell) = \mathbb{P}(\ell - 1/2 < S_n < \ell + 1/2),$$

deoarece valoarea $\ell \in \mathbb{N}$.

Astfel, folosind (5.35) și (3.69), obținem (vezi și pagina 615):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = \ell) &= \mathbb{P}(\ell - 1/2 < S_n < \ell + 1/2)\\ &\simeq \Phi\left(\frac{\ell + 1/2 - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{\ell - 1/2 - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right), \quad \ell \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

$\diamond$

Demonstrația Teoremei 5.118. V.a. S_λ standardizată este dată de

$$Z_\lambda = \frac{S_\lambda - \mathbb{E}(S_\lambda)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(S_\lambda)}} = \frac{S_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} S_\lambda - \sqrt{\lambda},$$

iar funcția caracteristică asociată este

$$\varphi_{Z_\lambda}(t) = e^{-it\sqrt{\lambda}} \varphi_X\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} t\right) = e^{\lambda\left(e^{it/\sqrt{\lambda}} - 1\right) - it\sqrt{\lambda}},$$

deoarece dacă $X_k \sim \mathscr{P}(1)$, atunci $S_\lambda = \sum_{k=1}^{\lambda} X_k \sim \mathscr{P}(\lambda)$ și în acest caz

$$\varphi_{S_\lambda}(t) = \prod_{k=1}^{\lambda} \varphi_{X_k}(t) = e^{\lambda\left(e^{it} - 1\right)}.$$

Făcând calcule similare celor de la pagina 616 obținem (vezi și Nota 267)

$$\begin{aligned}e^{it/\sqrt{\lambda}} &= 1 + \frac{1}{1!}\frac{it}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 + o\left(\lambda^{-1}\right)\\ &= 1 + \frac{it}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{\lambda} + o\left(\lambda^{-1}\right),\end{aligned}$$

deci

$$\lambda e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}} - \lambda - it\sqrt{\lambda} = -\frac{1}{2} t^2 + \lambda o\left(\lambda^{-1}\right).$$

Astfel,

$$\varphi_{Z_\lambda}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2 + \lambda o(\lambda^{-1})}$$

și trecând la limită se obține

$$\lim_{\lambda\to\infty} \varphi_{Z_\lambda}(t) = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2 + \lambda o(\lambda^{-1})} = e^{-\frac{1}{2}t^2},$$

deoarece $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda o(\lambda^{-1}) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{o(\lambda^{-1})}{\lambda^{-1}} = 0$.

Deci $Z_n \xrightarrow{\varphi} Z \sim \mathscr{N}(0,1)$ sau, echivalent, $Z_n \xrightarrow{F} Z \sim \mathscr{N}(0,1)$, pentru $n \to \infty$. ∎

În cazul șirului $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip **i.i.d.** (independența este în ansamblu), urmând o distribuție geometrică, $X_k \sim \mathscr{G}(p) = \mathscr{NegB}(1,p)$, pentru $k \in \mathbb{N}^*$, se obține, conform relației (4.33), $S_n \sim \mathscr{NegB}(n,p)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, și, conform relațiilor (4.34) și (4.35), deducem că

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{p} \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(S_n) = \frac{nq}{p^2}, \quad \text{unde } n \in \mathbb{N}^*$$

(vezi și Remarca 2.179 și formulele (2.101), (2.102) în cazul $r = n$).

În acest caz obținem:

Teorema 5.120 *Fie șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip **i.i.d.** (independența este în ansamblu) și distribuite geometric $X_k \sim \mathscr{G}(p) = \mathscr{NegB}(1,p)$, $p \in (0,1)$.*

Atunci,

$$\frac{pS_n - n}{\sqrt{nq}} \xrightarrow{F} Z, \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

unde $Z \sim \mathscr{N}(0,1)$.

Remarca 5.121 Dacă $X_k \sim \mathscr{NegB}(1,p)$, atunci $\sum_{k=1}^n X_k \sim \mathscr{NegB}(n,p)$ și, utilizând Remarca 5.111, obținem aproximarea distribuției binomiale cu exponent negativ cu ajutorul distribuției normale (vezi și abordarea din cadrul Remarcii 5.117):

$$\sum_{k=1}^n X_k \sim \mathscr{N}\left(\frac{n}{p}, \frac{nq}{p^2}\right), \quad \text{pentru } n \text{ suficient de mare.}$$

◇

Demonstrație. V.a. S_n standardizată este dată de

$$Z_n = \frac{S_n - \frac{n}{p}}{\frac{\sqrt{nq}}{p}} = \frac{pS_n - n}{\sqrt{nq}}, \quad \text{unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

Funcția caracteristică asociată este

$$\begin{aligned}
\varphi_{Z_n}(t) &= e^{it\frac{-n}{\sqrt{nq}}}\varphi_{S_n}\left(\frac{p}{\sqrt{nq}}t\right) \\
&= e^{it\frac{-n}{\sqrt{nq}}}\left(\frac{pe^{\frac{ip}{\sqrt{nq}}t}}{1-qe^{\frac{ip}{\sqrt{nq}}t}}\right)^n \\
&= \left(\frac{e^{\frac{it}{\sqrt{nq}}}\left(1-qe^{\frac{ip}{\sqrt{nq}}t}\right)}{pe^{\frac{ip}{\sqrt{nq}}t}}\right)^{-n} \\
&= \left(\frac{1}{p}e^{\frac{iq}{\sqrt{nq}}t} - \frac{q}{p}e^{\frac{i}{\sqrt{nq}}t}\right)^{-n}.
\end{aligned}$$

Făcând calcule similare celor de la pagina 616 obținem (vezi și Nota 267)

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left(1 + \frac{1}{2n}t^2 + o(n^{-1})\right)^{-n},$$

și apoi

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{-\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{2n}t^2 + o(n^{-1})\right)} = e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Deci standardizarea sumei a n v.a. independente distribuite geometric devine, la limită, distribuția normală standard, adică $Z_n \xrightarrow{\varphi} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ sau, echivalent, $Z_n \xrightarrow{F} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, pentru $n \to \infty$. ∎

În cazul șirului $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip **i.i.d.** (independența este în ansamblu) cu $X_k \sim \chi^2(1,1)$, pentru $k \in \mathbb{N}^*$, se obține, conform relației (4.36), $S_n \sim \chi^2(n,1)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ și conform (3.84),

$$\mathbb{E}(S_n) = n \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(S_n) = 2n, \quad \text{unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

În acest caz obținem:

Teorema 5.122 *Fie șirul* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *de v.a. de tip* **i.i.d.** *(independența este în ansamblu) cu* $X_k \sim \chi^2(1,1)$.

Atunci,

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{F} Z\,, \quad \textit{pentru } n \to \infty,$$

unde $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Remarca 5.123 Dacă $X \sim \chi^2(n,1)$, atunci, pentru n mare, v.a. $Z_n = \dfrac{X-n}{\sqrt{2n}}$ este distribuită normal standard $\mathcal{N}(0,1)$, deci, echivalent, $X = \sqrt{2n}\,Z_n + n$ este distribuită normal de tipul $\mathcal{N}(n, 2n)$.

Practic, dacă $n > 30$, calcularea probabilităților se face utilizând tabelul distribuției normale de medie n și dispersie $2n$ și deci, folosind formula de legătură (3.69),

$$\epsilon = \mathbb{P}\left(X > \chi^2_\epsilon\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq \chi^2_\epsilon\right) = 1 - F\left(\chi^2_\epsilon\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\chi^2_\epsilon - n}{\sqrt{2n}}\right).$$

$\diamond$

Remarca 5.124 Conform relației (4.38), dacă $X_k \sim \mathrm{Exp}\,(\lambda)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, atunci $\sum_{k=1}^n X_k \sim \mathrm{Gamma}\,(n,\lambda)$ și, utilizând Remarca 5.111, obținem aproximarea distribuției Gamma cu ajutorul distribuției normale:

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{N}\Big(\frac{n}{\lambda}, \frac{n}{\lambda^2}\Big), \quad \text{pentru } n \text{ suficient de mare.}$$

În plus, avem și legătura $\chi^2(n,1) = \mathrm{Gamma}\big(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\big)$ dată de (3.82), deci distribuția χ^2 poate fi aproximată, așa cum s-a văzut și în Remarca 5.123, cu ajutorul distribuției normale. $\diamond$

În cazul unui șir de v.a. $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de tip **i.i.d.**, cu $X_k \sim t\,(1)\,,\, k \in \mathbb{N}^*$, nu se poate aplica Teorema Limită Centrală (evident, deoarece dispersia există doar dacă parametrul $n > 2$, deci, în cazul nostru, media $\mathbb{E}\,(X_k)$ și dispersia $\mathrm{D}^2\,(X_k)$ nu există[320]), dar concluzia ei se menține, în forma precizată mai jos.

[320] De fapt, să reamintim că $t\,(1) = \mathscr{C}\,(0,1)$, iar o v.a. distribuită Cauchy nu admite medie și dispersie (vezi Exemplul 3.40).

Teorema 5.125 *Dacă* $X_n \sim t(n)$, *atunci*

$$\frac{X_n}{\sqrt{\frac{n}{n-2}}} = \frac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sqrt{\mathrm{D}^2(X_n)}} \xrightarrow{F} Z, \quad \textit{pentru } n \to \infty, \tag{5.36}$$

unde $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Remarca 5.126 Fie $Y_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$ și $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente astfel încât $Y_k \sim \mathcal{N}(0,1)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Folosind Propoziția 3.246 obținem $\sum_{k=1}^{n} Y_k^2 \sim \chi^2(n,1)$ și conform Propoziției 3.248, v.a.

$$X_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k^2}{n}}} \sim t(n).$$

Vom demonstra (5.36) în cazul șirului de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Folosind Propoziția 3.245 se obține că $Y_k^2 \sim \chi^2(1,1)$, deci $\mathbb{E}\left(Y_k^2\right) = 1$ și $\mathrm{D}^2\left(Y_k^2\right) = 2$. Acum se poate aplica Corolarul 5.87 pentru a obține că șirul $\left(Y_k^2\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LSNM**, deci $\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k^2}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\left(Y_k^2\right) = 1$.

Conform Propoziției 5.25 obținem

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k^2}{n}}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1, \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

precum și

$$\frac{Y_0}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k^2}{n}}} \xrightarrow{\mathbb{P}} Y_0, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Dar convergența în probabilitate implică și convergența în funcția de repartiție, deci are loc (5.36), deoarece $\sqrt{\frac{n-2}{n}} \to 1$, pentru $n \to \infty$. ◇

Remarca 5.127 Deoarece, pentru n suficient de mare, cantitatea $\frac{n}{n-2} \simeq 1$, obținem că dacă v.a. $X \sim t(n)$, atunci, pentru n suficient de mare, X este distribuită aproximativ normal standard $\mathcal{N}(0,1)$ adică, pentru n suficient de mare,

distribuția $t(n)$ este aproximativ normală standard $\mathcal{N}(0,1)$

sau, echivalent, pentru n suficient de mare,

$$F_{t(n)}(x) \simeq F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) \stackrel{\text{not}}{=} \Phi(x), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

Practic, dacă $n > 30$, calcularea probabilităților se face utilizând tabelul distribuției normale standard:

$$\epsilon = \mathbb{P}(X > t_\epsilon) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t_\epsilon) = 1 - F_X(t_\epsilon) \simeq 1 - \Phi(t_\epsilon).$$

De asemenea, folosind simetria graficului densității f_X în raport cu axa Oy,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X| \leq t_\epsilon) &= \mathbb{P}(-t_\epsilon \leq X \leq t_\epsilon)\\ &= 2\mathbb{P}(0 \leq X \leq t_\epsilon)\\ &= 2\Big(\mathbb{P}(X \leq t_\epsilon) - \frac{1}{2}\Big)\\ &= 2F_X(t_\epsilon) - 1\\ &\simeq 2\Phi(t_\epsilon) - 1.\end{aligned}$$

◇

Remarca 5.128 O demonstrație alternativă pentru Teorema 5.125 (vezi și Remarca 5.127) este dată de utilizarea Propoziției 5.46.

Conform Propoziției 3.248, dacă $X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ și $Y_n \sim \chi^2(n,1)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, sunt două v.a. independente, atunci

$$T \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{X_n}{\sqrt{\frac{Y_n}{n}}} \sim t(n). \tag{5.37}$$

Pe de altă parte, este evident că

$$X_n \xrightarrow{F} Z \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \text{pentru } n \to \infty. \tag{5.38}$$

Reamintim (3.84):

$$\mathbb{E}(Y_n) = n \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(Y_n) = 2n,$$

deci,

$$\mathbb{E}\left(\frac{Y_n}{n}\right) = 1 \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2\left(\frac{Y_n}{n}\right) = \frac{2}{n}$$

și, folosind inegalitatea (2.76) a lui Cebâșev, deducem că pentru orice $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - 1\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{2/n}{\epsilon^2}.$$

Astfel obținem că

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - 1\right| < \epsilon\right) = 1,$$

adică

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Folosind Propoziția 5.25 rezultă și limita

$$\sqrt{\frac{Y_n}{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1, \quad \text{pentru } n \to \infty. \tag{5.39}$$

Utilizând Propoziția 5.46 pentru limitele (5.38) și (5.39) avem

$$T = \frac{X_n}{\sqrt{\frac{Y_n}{n}}} \xrightarrow{F} \frac{Z}{1} = Z \sim \mathscr{N}(0,1)\,, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Astfel, deoarece are loc (5.37), obținem faptul că, pentru n suficient de mare, distribuția $t\,(n)$ este aproximativ normală standard $\mathscr{N}(0,1)$. $\diamond$

5.5 Exerciții rezolvate

5.5.1 Care este probabilitatea ca la 1000 de aruncări ale unei monede frecvența absolută de apariție a stemei să fie între 400 și 650?

Rezolvare:

Să definim v.a. independente X_k care iau drept valori numărul de apariții ale stemei la aruncarea k a monedei, deci

$$X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci, v.a.

$$S_{10^3} \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{k=1}^{10^3} X_k$$

are drept valori numărul de apariții ale stemei la aruncarea de 1000 de ori a unei monede, adică frecvența absolută de apariție a stemei la $n = 10^3$ aruncări.

Deoarece $X_k \sim \mathscr{B}(1,p)$, $k \in \mathbb{N}^*$, obținem $S_{10^3} \sim \mathscr{B}\left(10^3, p\right)$. Pentru calculul mediei și dispersiei putem folosi formula (2.83) sau calculul cu ajutorul funcției caracteristice (vezi pagina 529).

Dar putem calcula și direct:

$$\mathbb{E}\left(S_{10^3}\right) = \sum_{k=1}^{10^3} \mathbb{E}\left(X_k\right) = 10^3 \cdot \mathbb{E}\left(X_1\right) = 10^3 \cdot \frac{1}{2},$$

iar dispersia se poate obține folosind independența și dispersia v.a. X_k :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2\left(S_{10^3}^2\right) &= \mathrm{D}^2\left(\sum_{k=1}^{10^3} X_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{10^3} \mathrm{D}^2\left(X_k\right) \\ &= 10^3 \cdot \mathrm{D}^2\left(X_1\right) \\ &= 10^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 250. \end{aligned}$$

Luând $\epsilon = 10^2$ în inegalitatea (2.76) a lui Cebâșev obținem

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(400 < S_{10^3} < 650\right) > \mathbb{P}\left(400 < S_{10^3} < 600\right) &= \mathbb{P}\left(\left|S_{10^3} - 500\right| < 10^2\right) \\ &\geq 1 - \frac{250}{10^4} \\ &= \frac{39}{40}. \end{aligned}$$

5.5.2 Care este probabilitatea ca la 300 de aruncări ale unui zar frecvența absolută de apariție a feței 1 să fie între 40 și 60?

Rezolvare:

Vom folosi inegalitatea (2.76) a lui Cebâșev.

5.5.3 Fie X v.a. care reprezintă numărul de apariții ale feței 5 a unui zar la 10^5 aruncări ale lui. Să se calculeze limita inferioară a probabilității realizării inegalității

$$\left|\frac{X}{10^5} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{10^2}$$

(este vorba de o estimare a frecvenței relative de apariție a feței 5).

Rezolvare:

Evident, $X \sim \mathscr{B}\left(10^5, p\right)$, unde $p = \frac{1}{6}$. Deci frecvența relativă de apariție a feței 5 este $\dfrac{X}{10^5}$.

De fapt, dacă definim v.a. independente X_k care iau drept valori numărul de apariții ale feței 5 la aruncarea k a zarului, atunci

$$X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{5}{6} & \dfrac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

iar

$$X = S_{10^5} \stackrel{\text{def}}{=} \sum\nolimits_{k=1}^{10^5} X_k$$

are drept valori frecvența absolută de apariție a feței 5 la $n = 10^5$ aruncări, iar

$$\frac{X}{10^5} = \frac{S_{10^5}}{10^5} = \frac{\sum_{k=1}^{10^5} X_k}{10^5}$$

are drept valori frecvența relativă de apariție a feței 5 la $n = 10^5$ aruncări.

Deoarece $X_k \sim \mathscr{B}\left(1, p\right), k \in \mathbb{N}^*$, obținem $S_{10^3} \sim \mathscr{B}\left(10^5, p\right)$.

Conform (2.83),

$$\mathbb{E}\left(X\right) = 10^5 \cdot \frac{1}{6} \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2\left(X\right) = 10^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6},$$

deci

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_{10^5}}{10^5}\right) = \frac{1}{6} \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2\left(\frac{S_{10^5}}{10^5}\right) = \frac{5}{36 \cdot 10^5}.$$

Luând $\epsilon = 10^{-2}$ în inegalitatea (2.76) a lui Cebâșev aplicată v.a. $Y = \frac{X}{10^5}$ obținem

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{10^5}}{10^5} - \frac{1}{6}\right| < 10^{-2}\right) \geq 1 - \frac{5}{10^{-4} \cdot 36 \cdot 10^5} = \frac{71}{72}.$$

Să observăm că putem aplica inegalitatea (2.76) a lui Cebâșev și direct v.a. $Y = \frac{X}{10^5} - \frac{1}{6}$. În acest caz media $\mathbb{E}\left(Y\right) = 0$ și dispersia

$$\mathrm{D}^2\left(Y\right) = \mathbb{E}\left(Y\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left(\frac{X^2}{10^{10}} - \frac{2X}{6\cdot 10^5} + \frac{1}{36}\right)\\
&= \frac{1}{10^{10}}\mathbb{E}\left(X^2\right) - \frac{1}{3\cdot 10^5}\mathbb{E}\left(X\right) + \frac{1}{36}\\
&= \frac{5}{36\cdot 10^5}.
\end{aligned}
$$

5.5.4 Fie X v.a. care reprezintă numărul de apariții ale stemei la n aruncări ale unei monede. Cât de mare trebuie să fie n astfel încât să avem următoarea estimare a frecvenței relative de apariție a stemei la cele n aruncări:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10^2}\right) > 0.99.$$

Rezolvare:

Evident, $X \sim \mathscr{B}\left(n,p\right)$, unde $p = \frac{1}{2}$. Conform (2.83),

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \frac{n}{2} \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2\left(X\right) = \frac{n}{4},$$

deci, notând $Y = \frac{X}{n}$, obținem

$$\mathbb{E}\left(Y\right) = \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2\left(Y\right) = \frac{1}{4n}.$$

Luând $\epsilon = 10^{-2}$ în inegalitatea (2.76) a lui Cebâșev aplicată v.a. Y obținem

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| < 10^{-2}\right) \geq 1 - \frac{1}{10^{-4}\cdot 4n}.$$

Impunem ca $1 - \frac{10^4}{4n} > 0.99$ și obținem $n > \frac{10^6}{4}$.

5.5.5 Fie o v.a. X de tip continuu cu densitatea f, care ia valori în $(0,1)$, $\mathbb{P}-$a.s.. Definim șirul de v.a. $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prin $X_n = \mathrm{frac}\left(nX\right), n \in \mathbb{N}^*$, unde

$$\mathrm{frac}\left(nX\right) \stackrel{\mathrm{def}}{=} nX - \lfloor nX \rfloor,$$

iar $\lfloor nX \rfloor$ este partea întreagă a v.a. nX, i.e. cel mai mare întreg aleator mai mic sau egal decât v.a. nX.

Să se arate că șirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge[321] în funcția de repartiție la o v.a. $Y \sim \mathscr{U}(0,1)$, pentru $n \to \infty$.

Rezolvare:

Deoarece $\operatorname{frac}(nX) \in [0,1)$, obținem că $F_{X_n}(x) = 0$, pentru $x < 0$, iar $F_{X_n}(x) = 1$, pentru $x \geq 1$.

Apoi, X fiind v.a. continuă, se poate arata și că $F_{X_n}(0) = 0$.

Pe de alta parte, $X \in (0,1)$ deci obținem că $nX \in (0,n)$, $\mathbb{P}-$a.s., deci, pentru orice $x \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}
F_{X_n}(x) &= \mathbb{P}(X_n \leq x) \\
&= \mathbb{P}(\operatorname{frac}(nX) \leq x, \Omega) \\
&= \mathbb{P}\left(\operatorname{frac}(nX) \leq x, \bigcup\nolimits_{k=1}^{n} \{k-1 \leq nX < k\}\right) \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(k-1 \leq nX < k, \operatorname{frac}(nX) \leq x) \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(k-1 \leq nX \leq x + (k-1)) \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\frac{k-1}{n} \leq X \leq \frac{x+(k-1)}{n}\right) \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{x+(k-1)}{n}} f(y)\,dy,
\end{aligned}$$

deoarece dacă $k-1 \leq nX < k$, atunci $\operatorname{frac}(nX) = nX - (k-1)$, deci

$$\begin{aligned}
\{k-1 \leq nX < k, \operatorname{frac}(nX) \leq x\} &= \{k-1 \leq nX < k, nX \leq x + (k-1)\} \\
&= \{k-1 \leq nX \leq x + (k-1)\}.
\end{aligned}$$

Aplicând o teoremă de medie, avem că există $\xi_{n,k} \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{x+(k-1)}{n}\right) \subseteq \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ astfel încât

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{x+(k-1)}{n}} f(y)\,dy = \frac{x}{n} f(\xi_{n,k}),$$

[321] Vezi Remarca 3.87, dar și Exemplul 5.80.

deci

$$\begin{aligned}F_{X_n}(x) &= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{x}{n} f(\xi_{k,n}) \\ &= x \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\xi_{k,n}) \\ &\to x \int_0^1 f(y)\,dy \\ &= x, \quad \text{pentru } n \to \infty,\end{aligned}$$

adică

$$\lim\nolimits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = x, \quad x \in (0,1).$$

Prin urmare,

$$\lim\nolimits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_Y(x), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

unde F_Y este dată de (3.51).

5.5.6 Fie o v.a. X de tip continuu cu densitatea f, care ia valori în $(0,1)$, $\mathbb{P}-$a.s.. Definim șirul de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prin $X_n = \widetilde{\text{frac}}(nX)$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde[322]

$$\widetilde{\text{frac}}(nX) \stackrel{\text{def}}{=} nX - [\![nX]\!],$$

iar $[\![nX]\!]$ este întregul aleator cel mai apropiat de v.a. nX, i.e. partea întreagă a v.a. $(nX + 1/2)$.

Să se arate că șirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge[323] în funcția de repartiție la o v.a. $Y \sim \mathcal{U}(-1/2, 1/2)$, pentru $n \to \infty$.

---

[322] Să observăm că dacă definim partea întreagă

$$[\![x]\!] \stackrel{\text{def}}{=} \lfloor x + 1/2 \rfloor = \begin{cases} k, & \text{dacă } x \in [k, k+1/2), \\ k+1, & \text{dacă } x \in [k+1/2, k+1), \end{cases} \quad \text{pentru } k \in \mathbb{Z},$$

atunci $[\![x]\!]$ este **numărul întreg cel mai apropiat de numărul real** x.
De exemplu, $[\![5.3]\!] = 5$, $[\![5.7]\!] = 6$, $[\![-5.3]\!] = -5$, iar $[\![-5.7]\!] = -6$.
Apoi partea fracționară

$$\widetilde{\text{frac}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} x - [\![x]\!] = \begin{cases} x - k \in [0, 1/2), & \text{dacă } x \in [k, k+1/2), \\ x - (k+1) \in [-1/2, 0), & \text{dacă } x \in [k+1/2, k+1), \end{cases} \text{ pentru } k \in \mathbb{Z},$$

și, prin urmare, $\widetilde{\text{frac}}(x)$ este un număr între -0.5 și 0.5.

[323] Vezi Remarca 3.87.

Rezolvare:

Deoarece $\widetilde{\text{frac}}\,(nX) \in [-1/2, 1/2)$, obținem că $F_{X_n}(x) = 0$, dacă $x < -1/2$ și $F_{X_n}(x) = 1$, dacă $x \geq 1/2$.

Calculăm

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= \mathbb{P}(X_n \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(\widetilde{\text{frac}}\,(nX) \leq x, \Omega\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\widetilde{\text{frac}}\,(nX) \leq x, \bigcup\nolimits_{k=1}^{n} \{k-1 \leq nX < k\}\right) \\ &= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(k-1 \leq nX < k, \widetilde{\text{frac}}\,(nX) \leq x\right). \end{aligned} \tag{5.40}$$

Să observăm că dacă $k-1 \leq nX < k$, atunci

$$\widetilde{\text{frac}}\,(nX) = \begin{cases} nX - (k-1), & \text{dacă } nX \in [k-1, k-1/2), \\ nX - k, & \text{dacă } nX \in [k-1/2, k), \end{cases}$$

deci

$$\begin{aligned} &\left\{k-1 \leq nX < k, \widetilde{\text{frac}}\,(nX) \leq x\right\} \\ &= \{k-1 \leq nX < k-1/2, nX \leq x + (k-1)\} \\ &\quad \cup \{k-1/2 \leq nX < k, nX \leq x + k\} \\ &= \{k-1 \leq nX \leq x + (k-1)\} \cup \{k-1/2 \leq nX \leq x + k\}. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Acum, dacă $x \in [-1/2, 0)$, atunci

$$\begin{aligned} k - 1/2 &\leq x + k &&< k \\ k - 3/2 &\leq x + (k-1) &&< k - 1 \end{aligned}$$

deci (5.41) devine

$$\left\{k-1 \leq nX < k, \widetilde{\text{frac}}\,(nX) \leq x\right\} = \{k-1/2 \leq nX \leq x + k\}$$

și, conform (5.40),

$$F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\frac{k-1/2}{n} \leq X \leq \frac{x+k}{n}\right) \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1/2}{n}}^{\frac{x+k}{n}} f\left(y\right) dy.
\end{aligned}
$$

Aplicând o teoremă de medie, avem că există $\xi_{n,k} \in \left(\frac{k-1/2}{n}, \frac{x+k}{n}\right) \subseteq \left(\frac{k-1/2}{n}, \frac{k}{n}\right)$ astfel încât

$$
\int_{\frac{k-1/2}{n}}^{\frac{x+k}{n}} f\left(y\right) dy = \frac{x+1/2}{n} f\left(\xi_{n,k}\right),
$$

deci

$$
\begin{aligned}
F_{X_n}\left(x\right) &= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{x+1/2}{n} f\left(\xi_{k,n}\right) \\
&= \left(x+\frac{1}{2}\right) \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\xi_{k,n}\right) \\
&\to \left(x+\frac{1}{2}\right) \int_0^1 f\left(y\right) dy \\
&= x+\frac{1}{2}, \quad \text{pentru } n \to \infty,
\end{aligned}
$$

adică

$$
\lim\nolimits_{n\to\infty} F_{X_n}\left(x\right) = x+\frac{1}{2}, \quad x \in [-1/2, 0).
$$

Pe de altă parte, dacă $x \in [0, 1/2)$, atunci

$$
\begin{aligned}
k &\leq x+k &&< k+1/2 \\
k-1 &\leq x+(k-1) &&< k-1/2
\end{aligned}
$$

deci (5.41) devine

$$
\begin{aligned}
&\left\{k-1 \leq nX < k, \widetilde{\text{frac}}\left(nX\right) \leq x\right\} \\
&= \left\{k-1 \leq nX \leq x+(k-1)\right\} \cup \left\{k-1/2 \leq nX < k\right\}
\end{aligned}
$$

şi, conform (5.40),

$$\begin{aligned}
F_{X_n}(x) &= \mathbb{P}(X_n \le x) \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(k-1 \le nX < k, \widetilde{\text{frac}}(nX) \le x\right) \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \left[\mathbb{P}\left(\frac{k-1}{n} \le X \le \frac{x+(k-1)}{n}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{k-1/2}{n} \le X \le \frac{k}{n}\right)\right] \\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{x+(k-1)}{n}} f(y)\,dy + \int_{\frac{k-1/2}{n}}^{\frac{k}{n}} f(y)\,dy\right].
\end{aligned}$$

Aplicând o teoremă de medie, avem că există $\xi_{n,k} \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{x+k-1}{n}\right) \subseteq \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k-1/2}{n}\right)$ şi $\eta_{n,k} \in \left(\frac{k-1/2}{n}, \frac{k}{n}\right)$ astfel încât avem respectiv

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{x+(k-1)}{n}} f(y)\,dy = \frac{x}{n} f(\xi_{n,k}) \quad \text{şi} \quad \int_{\frac{k-1/2}{n}}^{\frac{k}{n}} f(y)\,dy = \frac{1/2}{n} f(\eta_{n,k}),$$

deci

$$\begin{aligned}
F_{X_n}(x) &= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{x}{n} f(\xi_{k,n}) + \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{1/2}{n} f(\eta_{k,n}) \\
&= x \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\xi_{k,n}) + \frac{1}{2} \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\eta_{k,n}) \\
&\to x \int_0^1 f(y)\,dy + \frac{1}{2} \int_0^1 f(y)\,dy \\
&= x + \frac{1}{2}, \quad \text{pentru } n \to \infty,
\end{aligned}$$

adică

$$\lim\nolimits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = x + \frac{1}{2}, \quad x \in [0, 1/2).$$

Prin urmare,

$$\lim\nolimits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_Y(x), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

unde F_Y este dată de (3.49).

5.5.7 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de tip i.i.d., cu $X_k \sim \mathcal{U}[0,1]$, $k \in \mathbb{N}^*$. Să definim

$$Y_n = \min\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Să se determine funcția de repartiție asociată v.a. Y_n.

(b) Să se arate că șirul $(nY_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge în funcția de repartiție la o v.a. $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$, pentru $n \to \infty$.

Rezolvare:

(a) Vezi Exercițiul 3.6.32.

(b) Folosind Definiția 5.26 a convergenței în funcția de repartiție precum și forma (3.61) a funcției de repartiție asociată v.a. Y, i.e. $F_Y(y) = 1 - e^{-y}$, trebuie să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} F_{nY_n}(y) = F_Y(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Pentru aceasta folosim punctul (a) și faptul că

$$F_{nY_n}(y) = \mathbb{P}\left(nY_n \le y\right) = \mathbb{P}\left(Y_n \le y/n\right) = F_{Y_n}(y/n).$$

Deci trebui să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y/n) = 1 - e^{-y}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

5.5.8 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de tip i.i.d., cu $X_k \sim \mathcal{U}[0,1]$, $k \in \mathbb{N}^*$. Să definim

$$Z_n = \max\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Să se determine funcția de repartiție asociată v.a. Z_n.

(b) Să se arate că șirul $(n(1-Z_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge în funcția de repartiție la o v.a. $Z \sim \mathrm{Exp}(1)$, pentru $n \to \infty$.

5.5.9 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente două câte două și date de

$$\mathbb{P}\left(X_1 = 0\right) = 1$$

și

$$X_k : \begin{pmatrix} -\sqrt{k} & 0 & \sqrt{k} \\ \dfrac{1}{k} & 1 - \dfrac{2}{k} & \dfrac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad k \ge 2.$$

Să se arate că șirul dat verifică **LSNM** și apoi că verifică **LTNM**.

Rezolvare:

Evident, $X_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, iar $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}\left(X_1^2\right) = \mathrm{D}^2(X_1) = 0$.

Pentru orice $k \geq 2$,

$$\mathbb{E}(X_k) = 0, \quad \mathbb{E}\left(X_k^2\right) = \mathrm{D}^2(X_k) = 2.$$

Deoarece șirul $\left(\mathrm{D}^2(X_k)\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit, sunt satisfăcute condițiile din Corolarul 5.87 (vezi și Corolarul 5.88) și obținem concluzia, i.e.

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Deoarece șirul $\left(\mathrm{D}^2(X_k)\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit, sunt satisfăcute condițiile din Corolarul 5.87 (vezi și Corolarul 5.88). Într-adevăr, avem (vezi și (2.73))

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \frac{\mathrm{D}^2(S_n)}{n^2} \\
&= \frac{\mathrm{D}^2\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{n^2} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^n \mathrm{D}^2(X_k)}{n^2} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^n 2}{n^2} \\
&= \frac{2}{n}, \quad \text{pentru } n \to \infty,
\end{aligned}$$

și astfel șirul dat satisface **LSNM**, i.e.

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

deoarece (vezi și (2.72))

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{n} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_k\right)}{n} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n} 0}{n} \\
&= 0, \quad \text{pentru } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Să observăm, în plus, că sunt satisfăcute și condițiile din Propoziția 5.99 (dacă impunem ca v.a. să fie independente în ansamblu), deoarece[324]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{D}^2\left(X_k\right)}{k^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2} = 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

deci șirul dat verifică și **LTNM**, i.e.

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

5.5.10 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente două câte două și date de

$$\mathbb{P}\left(X_1 = 0\right) = 1$$

și

$$X_k : \begin{pmatrix} -\sqrt{\ln k} & \sqrt{\ln k} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad k \geq 2.$$

Să se arate că șirul dat verifică **LSNM** și apoi că verifică **LTNM**.

Rezolvare:

Să calculăm $\mathbb{E}\left(X_1\right) = \mathbb{E}\left(X_1^2\right) = \mathrm{D}^2\left(X_1\right) = 0$, iar pentru orice $k \geq 2$,

$$\mathbb{E}\left(X_k\right) = 0, \quad \mathbb{E}\left(X_k^2\right) = \mathrm{D}^2\left(X_k\right) = \ln k.$$

Observăm că șirul $\left(\mathrm{D}^2\left(X_k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ nu este mărginit, dar putem utiliza totuși Corolarul 5.87 (vezi și Corolarul 5.88).

---

[324] Folosim **seria armonică generalizată**: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} (C), & \text{dacă } \alpha > 1, \\ (D), & \text{dacă } \alpha \leq 1. \end{cases}$

Într-adevăr, aplicând Lema lui Stolz-Cesàro[325], obținem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{D}^2\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n \mathrm{D}^2\left(X_k\right)}{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n+1\right)}{\left(n+1\right)^2-n^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

și astfel are loc concluzia, i.e.

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}0,\quad \text{pentru } n\to\infty.$$

Să observăm, în plus, că sunt satisfăcute și condițiile din Propoziția 5.99 (dacă impunem ca v.a. să fie independente în ansamblu), deoarece

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{D}^2\left(X_k\right)}{k^2}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2}<\infty.$$

Într-adevăr, seria $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2}$ este convergentă deoarece funcția $f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x^2}$ este descrescătoare strict pe $[2,\infty)$, deci șirul $\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)_{k\geq 2}$ este descrescător strict și astfel putem aplica criteriul condensării; prin urmare, seria

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2}\sim\sum_{k=1}^{\infty}2^k\frac{\ln(2^k)}{(2^k)^2}=\ln 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$$

care, la rândul ei, este convergentă conform criteriului rădăcinii.

Prin urmare, șirul dat verifică și **LTNM**, i.e.

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}\xrightarrow{\text{a.s.}}0,\quad \text{pentru } n\to\infty.$$

5.5.11 Fie $\left(X_k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente două câte două cu $\mathbb{E}\left(X_k\right)=0$ și $\mathrm{D}^2\left(X_k\right)=k^{\lambda}$, $k\geq 1$ și $\lambda\in(0,1)$. Să se arate că șirul dat verifică **LSNM**.

[325] **Lema lui Stolz-Cesàro**: fie $\left(a_n\right)_n$, $\left(b_n\right)_n$ două șiruri astfel încât șirul $\left(b_n\right)_n$ este strict monoton și nemărginit; dacă există $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ atunci există și $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ și este egală tot cu ℓ.

Rezolvare:

Aplicând Lema lui Stolz-Cesàro, obținem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{D}^2\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n \mathrm{D}^2\left(X_k\right)}{n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n k^{\lambda}}{n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\lambda}}{(n+1)^2-n^2}\\&=0,\end{aligned}$$

deci, conform Corolarului 5.87, șirul dat verifică **LSNM**.

5.5.12 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente două câte două și cu densitățile

$$f_{X_k}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{k}}e^{-\frac{(x-\theta^k)^2}{\sqrt{k}}},\quad \theta\in[0,1).$$

Să se arate că șirul dat verifică **LSNM**.

Rezolvare:

Să calculăm, folosind substituția $\frac{x-\theta^k}{k^{1/4}}=x$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_k\right)&=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{k}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-\theta^k)^2}{\sqrt{k}}}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(k^{1/4}x'+\theta^k)e^{-(x')^2}dx'\\&=\frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}dx+\frac{\theta^k}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\\&=\theta^k.\end{aligned}$$

Apoi, integrând prin părți,

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^2\left(X_k\right)&=\mathbb{E}(X_k-\theta^k)^2\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{k}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\theta^k)^2e^{-\frac{(x-\theta^k)^2}{\sqrt{k}}}dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x')^2 e^{-(x')^2} dx' \\
&= \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\frac{e^{-x^2}}{-2} \right)' dx \\
&= \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}} \left(x \frac{e^{-x^2}}{-2} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{-2} dx \right) \\
&= \frac{\sqrt{k}}{2}.
\end{aligned}
$$

Aplicând Lema lui Stolz-Cesàro, obținem

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{D}^2\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \mathrm{D}^2(X_k)}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{2n^2} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 - n^2} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

deci, conform Corolarului 5.87, șirul dat verifică **LSNM**.

5.5.13 Fie $(X_k)_k$ un șir de v.a. de tip i.i.d., cu $X_k \sim \text{Bernoulli}(p) = \mathscr{B}(1,p)$. Să se arate că

$$
\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} p, \quad \text{pentru } n \to \infty.
$$

Rezolvare:

Pentru rezolvare vezi și Exemplul 5.93.

Prezentăm în continuare o demonstrație alternativă cu ajutorul convergenței în funcția caracteristică.

Știm că dacă avem n v.a. independente X_k astfel încât $X_k \sim \mathscr{B}(1,p)$, $k = \overline{1,n}$, atunci $S_n = \sum_{k=1}^n X_k \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Avem $\varphi_{X_k}(t) = pe^{it} + qe^{i0}$ și, folosind formula (4.8),

$$
\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = \left(pe^{it} + q\right)^n.
$$

Să definim $Y_n = \frac{S_n}{n}$, iar funcția caracteristică asociată este, ținând cont de Remarca 4.28,

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{1}{n}t\right) = \left(pe^{i\frac{t}{n}} + q\right)^n,$$

deci $\ln \varphi_{Y_n}(t) = n \ln(pe^{i\frac{t}{n}} + q)$.

Să calculăm acum limita

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln\left(pe^{it\alpha} + q\right)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{1}{pe^{it\alpha}+q} itpe^{it\alpha}}{1} = \frac{itp}{p+q} = itp.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(pe^{i\frac{t}{n}} + q\right)^n = e^{itp} = \varphi_Y(t),$$

unde $Y : \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$ este v.a. constantă.

Am obținut, prin urmare, că $Y_n \xrightarrow{\varphi} p$, pentru $n \to \infty$ și, folosind Teorema 5.68, deducem că $Y_n \xrightarrow{F} p$, pentru $n \to \infty$. Deoarece limita este v.a. constantă obținem, conform Teoremei 5.64, convergența în probabilitate $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} p$.

5.5.14 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente în ansamblu și date de

$$X_k : \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 - \dfrac{1}{k^2} & \dfrac{1}{k^2} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că șirul dat verifică **LSNM** și apoi că verifică **LTNM**.

Rezolvare:

Avem $\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{k}$ și $\mathrm{D}^2(X_k) = 1 - \frac{1}{k^2}$.

Aplicând Lema lui Stolz-Cesàro, obținem

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \mathrm{D}^2(X_k)}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}{n^2}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}{n^2} \right)$$

$$= 0 - \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{(n+1)^2 - n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{2n+1}$$

$$= 0,$$

deci, conform Corolarului 5.87, șirul dat verifică **LSNM**, i.e.

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Să observăm că $\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n}$. Aplicând Lema lui Stolz-Cesàro, obținem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{(n+1) - n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$

$$= 0.$$

Prin urmare[326], folosind Exemplul 5.79, avem următoarea convergență a șirurilor numerice (văzute ca v.a. constante)

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}\right) \xrightarrow{F} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

iar apoi, folosind Propoziția 5.46, putem scrie **LSNM** sub forma

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Apoi, deoarece

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{D}^2 (X_k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} < \infty,$$

[326] Vezi Remarca 5.95.

putem aplica Propoziția 5.99 și obținem că șirul dat verifică și **LTNM**, i.e.

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}\right) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Așa cum am văzut mai sus, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}\right) = 0$, prin urmare (este ușor de arătat, folosind chiar Definiția 5.10), avem următoarea convergență a șirurilor numerice (văzute ca v.a. constante)

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}\right) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

iar apoi, folosind Propoziția 5.17, putem scrie **LTNM** sub forma

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

5.5.15 Fie șirul de v.a. $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de tip i.i.d., cu $X_k \sim \mathscr{B}(1,p)$, unde $k \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ și $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Să se determine tabloul de repartiție al v.a. S_n.

(b) Să se determine funcția caracteristică a v.a. X_k și S_n și apoi, folosind funcția caracteristică, să se determine media și dispersia v.a. X_k și S_n.

(c) Să se determine limita în probabilitate și limita aproape sigură a șirului $(\bar{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Să se interpreteze rezultatul.

5.5.16 Fie A un eveniment cu probabilitatea de realizare $p \in (0,1)$. Fie f_n numărul de realizări ale evenimentului A atunci când repetăm de n ori experiența. Să se arate, folosind inegalitatea lui Cebâșev, că,

$$\frac{f_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} p, \quad \text{pentru } n \to \infty,$$

adică, pentru orice $\epsilon > 0$, are loc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{f_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Să se interpreteze rezultatul[327].

[327] Vezi și Exercițiul 2.4.23 și Exemplul 5.93.

Rezolvare:

Evident, $f_n \sim \mathscr{B}(n,p)$, deci

$$\mathbb{E}\left(\frac{f_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(f_n) = \frac{np}{n} = p,$$
$$\mathrm{D}^2\left(\frac{f_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{D}^2(f_n) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}.$$

Prin urmare, aplicând inegalitatea (2.75) a lui Cebâșev v.a. f_n/n, obținem inegalitatea $\mathbb{P}\left(\left|\frac{f_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{f_n}{n}\right)\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{pq/n}{\epsilon^2}$, deci

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{f_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{pq}{n\epsilon^2} \to 0, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

5.5.17 Fie $k, l \in \mathbb{N}^*$ și $p \in (0,1)$. Fie v.a. independente $X \sim \mathscr{B}(k,p)$, $Y \sim \mathscr{B}(l,p)$ și v.a. independente X_i date de $\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = 1/2$, unde $i \in \mathbb{N}^*$.

(a) Să se determine, folosind funcția caracteristică, media și dispersia v.a. X.

(b) Să se determine, folosind eventual funcția caracteristică, tipul distribuției v.a. $X+Y$. Să se deducă, folosind funcția caracteristică, și dispersia lui $2X-3Y$.

(c) Să se determine tipul distribuției v.a. $\frac{1+X_i}{2}$ și apoi al v.a.

$$S_n = \frac{n + \sum_{i=1}^n X_i}{2}, \quad \text{pentru } n \in \mathbb{N}^*.$$

(d) Să se determine limita în probabilitate și limita aproape sigură a șirului $\left(\bar{X}_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Să se interpreteze rezultatul.

5.5.18 Fie șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip i.i.d., repartizate Poisson $\mathscr{P}(1)$, reprezentând numărul de erori de la pagina $k \in \mathbb{N}^*$, și $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Să se determine funcția caracteristică a v.a. X_k și S_n și apoi, folosind funcția caracteristică, să se determine media și dispersia v.a. X_k și S_n.

(b) Să se determine (folosind, eventual, funcția caracteristică) tabloul de repartiție al v.a. $X_1 + X_2$ și apoi S_n.

(c) Să se determine limita în probabilitate și limita aproape sigură a șirului $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Folosind legăturile dintre tipurile de convergențe să se determine și limita în funcția caracteristică a șirului $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(d) Să se determine funcția de repartiție $F_{\frac{S_n}{n}}$ asociată v.a. $\frac{S_n}{n}$. Folosind legăturile dintre tipurile de convergențe să se determine și limita în funcția de repartiție a șirului $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Mai precis, să se determine limita șirului de funcții $\left(F_{S_n/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și apoi limita[328]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{nt}\frac{n^k}{k!}e^{-n}, \quad \text{unde } t\in\mathbb{R}.$$

5.5.19 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente în ansamblu și date de

$$X_k : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad k\in\mathbb{N}^*.$$

și $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de numere pozitive astfel încât $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=0$.

Să definim

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k, \quad T_n=\sum_{k=1}^{n}a_kX_k, \quad \text{unde } n\in\mathbb{N}^*.$$

(a) Să se arate că $\dfrac{S_n}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}0,\quad \dfrac{S_n}{n}\xrightarrow{\text{a.s.}}0$ și $\dfrac{T_n}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}0$, pentru $n\to\infty$.

(b) Să se determine tipul distribuției v.a. $\dfrac{1+X_k}{2}$ și apoi al v.a. $\dfrac{S_n+n}{2}$.

(c) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left[\cos\left(\frac{a_1t}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\frac{a_nt}{n}\right)\right]=1, \quad \text{pentru orice } t\in\mathbb{R}.$$

Rezolvare:

(a) Avem $\mathbb{E}(X_k)=0$ și $\mathrm{D}^2(X_k)=1$, deci

$$\mathbb{E}(S_n)=0,$$

[328] Pentru alte exemple similare vezi https://www.math.uaic.ro/~maticiuc/didactic/Applications_of_Probability_Theory.pdf, Problem 6, pagina 27.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_n) &= \sum\nolimits_{k=1}^{n} a_k \mathbb{E}(X_k) = 0,\\ \mathrm{D}^2(S_n) &= \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathrm{D}^2(X_k) = n,\\ \mathrm{D}^2(T_n) &= \sum\nolimits_{k=1}^{n} a_k^2 \mathrm{D}^2(X_k) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} a_k^2.\end{aligned}$$

Deoarece șirul $\left(\mathrm{D}^2(X_k)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit, obținem $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, pentru $n \to \infty$, conform Corolarului 5.87 (vezi și Corolarul 5.88).

Utilizând[329] Propoziția 5.99 (vezi și Corolarul 5.101) obținem și $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, pentru $n \to \infty$.

Pe de altă parte, aplicând Lema lui Stolz-Cesàro, obținem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{D}^2(T_n)}{n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^2}{(n+1)^2 - n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Deci, conform Corolarului 5.87, șirul $(a_k X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LSNM** și astfel obținem $\frac{T_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, pentru $n \to \infty$.

Evident, convergența în probabilitate se obține și prin aplicarea directă a inegalității (2.76) a lui Cebâșev:

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{n}\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{\mathrm{D}^2\left(\frac{T_n}{n}\right)}{\epsilon^2} \to 1, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Să observăm că în cazul particular $a_k = \sqrt[3]{k}$, pentru $k \in \mathbb{N}^*$, șirul $(a_k X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface și condițiile Propoziției 5.99 deoarece

$$\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{D}^2(a_k X_k)}{k^2} = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2/3}}{k^2} = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{4/3}} < \infty.$$

[329] Evident, deoarece v.a. $(X_k)_k$ sunt de tip i.i.d., putem aplica Teorema 5.104; astfel, pentru a obține **LTNM** nu mai este necesară independența în ansamblu ci este suficientă independența două câte două a v.a..

Prin urmare șirul $(a_k X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LTNM**, i.e. $\frac{T_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, pentru $n\to\infty$.
(b) Să arătăm că $\frac{S_n+n}{2} \sim \mathscr{B}\,(n,1/2)$ folosind funcția carateristică.

Vom calcula $\varphi_{\frac{S_n+n}{2}}$ folosind $\varphi_{X_k}(t) = \frac{1}{2}e^{-i\,\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}e^{i\,\frac{t}{2}}$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$ și $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{S_n+n}{2}}(t) &= \varphi_{\frac{\sum_{k=1}^n X_k+n}{2}}(t)\\
&= \varphi_{\sum_{k=1}^n \frac{1+X_k}{2}}(t)\\
&= \prod\nolimits_{k=1}^n \varphi_{\frac{1+X_k}{2}}(t)\\
&= \prod\nolimits_{k=1}^n \mathbb{E}\Big(e^{it\,\frac{1+X_k}{2}}\Big)\\
&= \prod\nolimits_{k=1}^n e^{i\,\frac{t}{2}}\,\mathbb{E}\Big(e^{i\,\frac{t}{2}\,X_k}\Big)\\
&= e^{i\,\frac{nt}{2}}\prod\nolimits_{k=1}^n \varphi_{X_k}\Big(\frac{t}{2}\Big)\\
&= e^{i\,\frac{nt}{2}}\Big(\varphi_{X_1}\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big)^n\\
&= e^{i\,\frac{nt}{2}}\Big(\frac{1}{2}e^{-i\,\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}e^{i\,\frac{t}{2}}\Big)^n\\
&= \Big(\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}\Big)^n.
\end{aligned}$$

Folosind (4.15), observăm că am obținut

$$\varphi_{\frac{S_n+n}{2}}(t) = \Big(\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}\Big)^n = \varphi_U(t), \quad \text{unde } U\sim\mathscr{B}\,(n,1/2)\,,$$

și, folosind proprietatea de unicitate dată de Remarca 4.34, deducem concluzia.

Putem calcula și astfel:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{S_n+n}{2}}(t) &= \prod\nolimits_{k=1}^n \varphi_{\frac{1+X_k}{2}}(t)\\
&= \prod\nolimits_{k=1}^n \Big(e^{it\cdot 0}\,\frac{1}{2} + e^{it\cdot 1}\,\frac{1}{2}\Big)\\
&= \Big(\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}\Big)^n\\
&= \varphi_U(t), \quad \text{unde } U\sim\mathscr{B}\,(n,1/2)\,,
\end{aligned}$$

deoarece

$$\frac{1+X_k}{2} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad k \geq 1,$$

deci, prin identificare, deducem aceeași concluzie.

(c) Folosind legăturile dintre convergențe date de Teorema 5.62 și Corolarul 5.70 avem

(5.42) $$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\frac{T_n}{n}}(t) = \varphi_0(t), \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}.$$

Dar $\varphi_0(t) = \mathbb{E}\left(e^{it\cdot 0}\right) = 1$, iar

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{T_n}{n}}(t) &= \varphi_{\frac{\sum_{k=1}^n a_k X_k}{n}}(t) \\
&= \varphi_{\sum_{k=1}^n \frac{a_k X_k}{n}}(t) \\
&= \prod_{k=1}^n \varphi_{\frac{a_k X_k}{n}}(t) \\
&= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left(e^{it\frac{a_k X_k}{n}}\right) \\
&= \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}\left(\frac{a_k t}{n}\right) \\
&= \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a_k t}{n}\right),
\end{aligned}$$

deoarece $\varphi_{X_k}(t) = e^{it(-1)}\frac{1}{2} + e^{it}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) = \cos t$.

Relația (5.42) devine (limita se poate scrie și sub forma unui produs infinit):

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{a_k t}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a_k t}{n}\right) = 1,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

5.5.20 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. independente în ansamblu și date de

$$X_k : \begin{pmatrix} -k^\alpha & k^\alpha \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha < \frac{1}{2}$$

și fie $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Să se arate că:

$$(a) \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \text{pentru } n \to \infty;$$

$$(b) \quad \lim_{n\to\infty} \left[\cos\left(\frac{t}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{2^\alpha t}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \cos\left(\frac{n^\alpha t}{n}\right)\right] = 1, \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare:

(a) Avem $\mathbb{E}(X_k) = 0$ și $\mathrm{D}^2(X_k) = k^{2\alpha}$, deci

$$\mathbb{E}(S_n) = 0,$$
$$\mathrm{D}^2(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}^2(X_k) = \sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha},$$

Aplicând Lema lui Stolz-Cesàro, obținem

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{D}^2(S_n)}{n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha}}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2\alpha}}{(n+1)^2 - n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2\alpha}}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\alpha}}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

deoarece $1 - 2\alpha > 0$.

Deci, conform Corolarului 5.87, obținem $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, pentru $n \to \infty$.

Avem și

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{D}^2(X_k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{2\alpha}}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2-2\alpha}} < \infty,$$

deoarece $2 - 2\alpha > 1$.

Deci, conform Propoziției 5.99, obținem și $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, pentru $n \to \infty$.

(b) Folosind legăturile dintre convergențe date de Teorema 5.62 și Corolarul 5.70 avem

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \varphi_0(t) = 1, \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}.$$

Dar

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) &= \varphi_{\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}}(t) \\
&= \varphi_{\sum_{k=1}^n \frac{X_k}{n}}(t) \\
&= \prod_{k=1}^n \varphi_{\frac{X_k}{n}}(t) \\
&= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left(e^{it\frac{X_k}{n}}\right) \\
&= \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}\left(\frac{t}{n}\right) \\
&= \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{k^\alpha t}{n}\right),
\end{aligned}$$

deoarece $\varphi_{X_k}(t) = e^{it(-k^\alpha)}\frac{1}{2} + e^{itk^\alpha}\frac{1}{2} = \cos(k^\alpha t)$.

Astfel obținem (limita se poate scrie și sub forma unui produs infinit):

$$\prod_{k=1}^\infty \cos\left(\frac{k^\alpha t}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{k^\alpha t}{n}\right) = 1,$$

$$\text{pentru orice } t \in \mathbb{R}.$$

5.5.21 Fie șirul $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip i.i.d., cu $X_k \sim \mathscr{U}[-1,1]$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ și $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt[3]{k}X_k$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Să se arate că $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, pentru $n \to \infty$.

(b) Să se determine funcțiile caracteristice $\varphi_{Y_1}, \varphi_{Y_2}, \varphi_{Y_3}$. Folosind (a) și legăturile dintre tipurile de convergențe să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^n}{\sqrt[3]{n!}}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\sin\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{n}\right)\right] = 1.$$

5.5.22 Fie $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de numere pozitive astfel încât $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=0$ și $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de tip i.i.d. (independența este în ansamblu), cu $X_k\sim\mathscr{U}\,[-1,1]\,,\,k\in\mathbb{N}^*$.

Să definim

$$S_n=\sum\nolimits_{k=1}^{n}X_k\,,\quad T_n=\sum\nolimits_{k=1}^{n}a_kX_k\,,\quad \text{unde } n\in\mathbb{N}^*.$$

Să se arate că:

$$(a)\quad \frac{S_n}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}0,\quad \frac{S_n}{n}\xrightarrow{\text{a.s.}}0,\quad \text{pentru } n\to\infty;$$

$$(b)\quad \frac{T_n}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}0,\quad \text{pentru } n\to\infty;$$

$$(c)\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^n}{a_1a_2\ldots a_n}\sin\left(\frac{a_1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\sin\left(\frac{a_n}{n}\right)\right]=1.$$

5.5.23 Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se arate că[330]

$$(a)\quad \lim_{n\to\infty}\int\cdots\int_{[0,1]^n}f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)dx_1\ldots dx_n=f\left(\frac{1}{2}\right);$$

$$(b)\quad \lim_{n\to\infty}\int\cdots\int_{[0,1]^n}f\left(\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\right)dx_1\ldots dx_n=f\left(\frac{1}{e}\right).$$

Rezolvare:

Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de tip i.i.d., cu $X_k\sim\mathscr{U}[0,1]$, $k\in\mathbb{N}^*$.

(a) Să observăm că integrala multiplă din enunț este, de fapt (conform unei formule de transfer), o medie, mai precis,

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{n}\right)\right)=\int\cdots\int_{[0,1]^n}f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)dx_1\ldots dx_n\,.$$

Prin urmare, trebuie să calculăm $\lim_{n\to\infty}I_n$, unde

$$I_n=\mathbb{E}\left(f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{n}\right)\right).$$

[330] Pentru alt exemplu similar vezi https://www.math.uaic.ro/~maticiuc/didactic/Applications_of_Probability_Theory.pdf, Problem 7, pagina 28.

Având în vedere Teorema 5.96 și Teorema 5.104 deducem că $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LSNM** și respectiv **LTNM**, deci

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2}, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Folosind Teorema 5.62 și caracterizarea dată de Teorema 5.34, obținem

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}\right)\right) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

(b) Să observăm că integrala multiplă din enunț este, de fapt (conform unei formule de transfer), o medie, mai precis,

$$\mathbb{E}\left(f\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} X_k}\right)\right) = \int \cdots \int_{[0,1]^n} f\left(\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}\right) dx_1 \ldots dx_n .$$

Prin urmare, trebuie să calculăm $\lim_{n\to\infty} J_n$, unde

$$J_n = \mathbb{E}\left(f\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} X_k}\right)\right) = \mathbb{E}\left(f\left(e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln(X_k)}{n}}\right)\right).$$

Calculăm media și dispersia v.a. $\ln(X_k)$ folosind formula de transfer (3.28) și obținem

$$\mathbb{E}(\ln(X_k)) = -1 \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(\ln(X_k)) = 1,$$

deci șirul $\left(\mathrm{D}^2(X_k)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit și putem aplica Propoziția 5.99.

Obținem că $(\ln(X_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LTNM** (evident, putem aplica direct Teorema 5.104), deci

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(X_k)}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}(\ln(X_1)) = -1, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Conform Teoremei 5.62 și a caracterizării date de Teorema 5.34, obținem

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(f\left(e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln(X_k)}{n}}\right)\right) = \mathbb{E}\left(f\left(e^{-1}\right)\right) = f\left(e^{-1}\right).$$

5.5.24 Fie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un șir de v.a. de tip i.i.d., cu $X_k \sim \mathscr{U}[0,1]$, $k \in \mathbb{N}^*$. Fie $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție măsurabilă astfel încât $\int_0^1 |h(x)|dx < \infty$. Să se arate că[331]

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} h\left(X_k\right)}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \int_0^1 h\left(x\right) dx, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

Rezolvare:

Să observăm că integrala din enunț este, de fapt, o medie, mai precis,

$$\mathbb{E}\left(h\left(X\right)\right) = \int_0^1 h\left(x\right) dx, \quad \text{pentru orice } X \sim \mathscr{U}[0,1].$$

Să observăm că șirul de v.a. $\left(h\left(X_k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este, de asemenea, de tip i.i.d.. Prin urmare, aplicând Teorema 5.96 și Teorema 5.104, obținem că șirul $\left(h\left(X_k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisface **LSNM** și respectiv **LTNM.**

Deci

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} h\left(X_k\right)}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}\left(h\left(X_1\right)\right), \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

5.5.25 Care este probabilitatea ca la 500 de aruncări ale unui zar frecvența absolută de apariție a feței 6 să fie cel mult 90?

Rezolvare:

Să definim v.a. S_{500} care are drept valori numărul de apariții ale feței 6 la aruncarea de 500 de ori a unui zar.

Evident, $S_{500} \sim \mathscr{B}\left(500, 1/6\right)$. Conform (2.83),

$$\mathbb{E}\left(S_{500}\right) = 500 \cdot \frac{1}{6} \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2\left(S_{500}\right) = 500 \cdot \frac{5}{36}.$$

---

[331] Acest algoritm de aproximare a valorii integralei $\int_0^1 h\left(x\right) dx$ este un exemplu standard din cadrul **metodei Monte-Carlo** de aproximare a integralelor.

Astfel putem să **aproximăm valoarea unei integrale** pe $[0,1]$ utilizand doar v.a. de tip uniform pe $(0,1)$.

Mai precis, dacă generăm mai întâi, prin diverse alte metode cunoscute,

$$\text{eșantionul de valori} \quad x_1, \ldots, x_n \quad \text{al unei v.a.} \quad X \sim \mathscr{U}(0,1),$$

atunci, conform rezultatului teoretic demonstrat, valoarea $\frac{\sum_{k=1}^{n} h(x_k)}{n}$ va reprezenta o aproximare a integralei $\int_0^1 h\left(x\right) dx$.

Dacă se consideră șirul $\left(X_k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. de tip i.i.d., distribuite uniform pe domeniul $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^d$, atunci, în mod similar, se obține o estimarea a integralei multiple $\frac{1}{\lambda(\mathscr{D})} \int_{\mathscr{D}} h\left(\mathbf{x}\right) d\mathbf{x}$, unde λ este măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}^d$, mai precis $\frac{\sum_{k=1}^{n} h(X_k)}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \frac{1}{\lambda(\mathscr{D})} \int_{\mathscr{D}} h\left(\mathbf{x}\right) d\mathbf{x}$, pentru $n \to \infty$.

Se cere determinarea probabilității

$$\mathbb{P}\left(S_{500} \leq 90\right).$$

Să observăm că nu mai putem aplica inegalitatea lui Cebâșev deoarece aceasta ne dă doar estimări de tipul

$$\mathbb{P}\left(\left|S_{500} - \mathbb{E}\left(S_{500}\right)\right| < \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\mathbb{E}\left(S_{500}\right) - \epsilon < S_{500} < \mathbb{E}\left(S_{500}\right) + \epsilon\right),$$

adică X să ia valori în intervalul centrat $\left(\mathbb{E}\left(S_{500}\right) - \epsilon, \mathbb{E}\left(S_{500}\right) + \epsilon\right)$.

În cazul nostru vom folosi relația (5.32) dată de Teorema Limită Centrală 5.108 (sau, mai precis, relația (5.33) dată de Teorema 5.113 a lui Moivre-Laplace). Astfel, pentru orice $-\infty \leq a < b \leq \infty$,

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{S_{500} - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \simeq \Phi\left(b\right) - \Phi\left(a\right).$$

Vom lua

$$a = -\infty \quad \text{și} \quad b = \frac{90 - 500/6}{\sqrt{500 \cdot 5/36}} = \frac{4}{5},$$

deci

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_{500} \leq 90\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{S_{500} - 500/6}{\sqrt{500 \cdot 5/36}} \leq \frac{90 - 500/6}{\sqrt{500 \cdot 5/36}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{S_{500} - 500/6}{\sqrt{500 \cdot 5/36}} \leq \frac{4}{5}\right) \\
&\simeq \Phi\left(\frac{4}{5}\right) - \Phi\left(-\infty\right) \\
&= \Phi\left(0.8\right) - 0 \\
&= 0.788145.
\end{aligned}$$

5.5.26 Care este probabilitatea ca la 300 de aruncări ale unui zar frecvența absolută de apariție a feței 1 să fie între 60 și 70?

5.5.27 Care este probabilitatea ca la 100 de aruncări ale unei monede frecvența absolută de apariție a stemei să fie cuprinsă între 40 și 60?

Rezolvare:

Să definim v.a. $S_{100} \sim \mathscr{B}(100, 1/2)$ care are drept valori numărul de apariții ale stemei la 100 de aruncări ale unei monede. Conform (2.83),

$$\mathbb{E}(S_{100}) = 50 \quad \text{și} \quad \mathrm{D}^2(S_{100}) = 25\,.$$

Se cere determinarea probabilității

$$\mathbb{P}(40 \leq S_{100} \leq 60)\,.$$

Vom folosi relația (5.32) sau (5.33). Pentru aceasta luăm

$$a = \frac{40-50}{\sqrt{25}} = -2 \quad \text{și} \quad b = \frac{60-50}{\sqrt{25}} = 2$$

și folosim (3.68):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(40 < S_{100} \leq 60) &= \mathbb{P}\left(\frac{40-50}{\sqrt{25}} < \frac{S_{100}-50}{\sqrt{25}} \leq \frac{60-50}{\sqrt{25}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-2 < \frac{S_{100}-50}{\sqrt{25}} \leq 2\right) \\
&\simeq \Phi(2) - \Phi(-2) \\
&= 2\Phi(2) - 1 \\
&= 2 \cdot 0.97725 - 1 \\
&= 0.9545.
\end{aligned}$$

Să observăm că putem aplica inegalitatea lui Cebâșev deoarece ne interesează ca S_{100} să ia valori în intervalul centrat

$$(\mathbb{E}(S_{100}) - \epsilon, \mathbb{E}(S_{100}) + \epsilon) = (40, 60)$$

pentru $\epsilon = 10$. Deci

$$\mathbb{P}(|S_{100} - \mathbb{E}(S_{100})| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\mathrm{D}^2(S_{100})}{\epsilon^2} = 1 - \frac{25}{100} = 0.75.$$

5.5.28 Avem o v.a. cu media 4.0 și deviația standard 1.5. Dacă se ia un eșantion de volum 50, care este probabilitatea ca media $\bar{X}_{50}$ să fie între 3.5 și 3.8?

Rezolvare:

Se cere determinarea probabilității $\mathbb{P}\left(3.5 \leq \bar{X}_{50} \leq 3.8\right)$.

În cazul nostru vom folosi relația (5.32)

$$\mathbb{P}\left(a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\mu<\bar{X}_{50}\leq b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}+\mu\right)=\mathbb{P}\left(a<\frac{\bar{X}_{50}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leq b\right)$$
$$\simeq \Phi\left(b\right)-\Phi\left(a\right),$$

pentru orice $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Să luăm

$$a=\frac{3.5-4}{1.5/\sqrt{50}}=-2.36 \quad \text{și} \quad b=\frac{3.8-4}{1.5/\sqrt{50}}=-0.94$$

și să folosim (3.68):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(3.5<\bar{X}_{50}\leq 3.8\right)&=\mathbb{P}\left(\frac{3.5-4}{1.5/\sqrt{50}}<\frac{\bar{X}_{50}-4}{1.5/\sqrt{50}}\leq\frac{3.8-4}{1.5/\sqrt{50}}\right)\\&=\mathbb{P}\left(-2.36<\frac{\bar{X}_{50}-4}{1.5/\sqrt{50}}\leq -0.94\right)\\&\simeq \Phi\left(-0.94\right)-\Phi\left(-2.36\right)\\&=1-\Phi\left(0.94\right)-\left(1-\Phi\left(2.36\right)\right)\\&=\Phi\left(2.36\right)-\Phi\left(0.94\right)\\&=0.990863-0.826391\\&=0.1645.\end{aligned}$$

5.5.29 Să presupunem că X reprezintă numărul mediu de accesări ale contului de către clienții unei bănci și că v.a. X are media 3.2 și deviația standard 2.4. Se alege un eșantion de 100 de clienți. Care este probabilitatea ca valoarea medie $\bar{X}_{100}$ a numărului de accesări să fie mai mare decât 4?

Rezolvare:

Avem eșantionul $X_1,\ldots,X_{100}$ (vezi și Remarca 5.112) de v.a. de tip i.i.d., urmând distribuția v.a. X.

Pentru a estima $\mathbb{P}\left(\bar{X}_{100}>4\right)$, unde $\bar{X}_{100}=\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i}{100}$, se utilizează relația (5.32). Este necesar și calculul mediei $\mathbb{E}\left(\bar{X}_{100}\right)$ și a dispersiei $\mathrm{D}^2\left(\bar{X}_{100}\right)$.

5.5.30 Să presupunem că X reprezintă numărul mediu de accesări ale unei pagini de internet a unui magazin online și că v.a. X are media 4.3 și deviația standard 1.8. Se alege un eșantion de 100 de utilizatori de internet. Care este probabilitatea ca valoarea medie $\bar{X}_{100}$ a numărului de accesări să fie mai mare decât 6?

5.5.31 De câte ori trebuie să aruncăm o monedă astfel încât să obținem cu o probabilitate de 0.99 ca frecvența relativă a apariției stemei să fie între 48% și 52%?

Rezolvare:

Se cere determinarea probabilității

$$\mathbb{P}\left(0.48 \leq \bar{X}_n \leq 0.52\right).$$

În cazul nostru vom folosi relația (5.32) sau (5.33) cu $p = q = 1/2$:

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}} \leq b\right) = \mathbb{P}\left(a\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} + p < \bar{X}_n \leq b\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} + p\right)$$
$$\simeq \Phi(b) - \Phi(a),$$

pentru orice $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Să luăm a astfel încât

$$a\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} + p = 0.48 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{0.48 - 0.5}{\sqrt{1/4}/\sqrt{n}} = -0.04\sqrt{n}$$

și b astfel încât

$$b\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} + p = 0.52 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{0.52 - 0.5}{\sqrt{1/4}/\sqrt{n}} = 0.04\sqrt{n},$$

deci $a = -b$ și

$$0.99 = \mathbb{P}\left(0.48 < \bar{X}_n \leq 0.52\right) \simeq \Phi(b) - \Phi(-b) = 2\Phi(b) - 1.$$

Deci

$$\Phi(b) = 0.995 \quad \Rightarrow \quad b = 2.57$$

și astfel alegem (vezi Nota 99)

$$n = \left\lceil \left(\frac{2.57}{0.04}\right)^2 \right\rceil = \lceil 4128.1 \rceil = 4129 \in \mathbb{N}^*.$$

5.5.32 De câte ori trebuie să aruncăm un zar astfel încât să obținem, cu o probabilitate de 0.99, ca frecvența relativă a apariției feței 6 să fie între $\dfrac{1}{6} - 0.05$ și $\dfrac{1}{6} + 0.05$?

Rezolvare:

Se cere determinarea probabilității

$$\mathbb{P}\Big(\frac{1}{6} - 0.05 \leq \bar{X}_n \leq \frac{1}{6} + 0.05\Big).$$

În cazul nostru vom folosi relația (5.32) sau (5.33) cu $p = 1/6,\ q = 5/6$:

$$\mathbb{P}\bigg(a < \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}} \leq b\bigg) = \mathbb{P}\bigg(a\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} + p < \bar{X}_n \leq b\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} + p\bigg)$$
$$\simeq \Phi\left(b\right) - \Phi\left(a\right),$$

pentru orice $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Să luăm

$$a = \frac{1/6 - 0.05 - 1/6}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} = -6\sqrt{n}\frac{0.05}{\sqrt{5}} = -\sqrt{n}0.1342$$
$$b = \frac{1/6 + 0.05 - 1/6}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} = 6\sqrt{n}\frac{0.05}{\sqrt{5}} = \sqrt{n}0.1342,$$

deci $a = -b$.

Obținem

$$0.99 = \mathbb{P}\left(\frac{1}{6} - 0.05 \leq \bar{X}_n \leq \frac{1}{6} + 0.05\right) \simeq \Phi\left(b\right) - \Phi\left(-b\right) = 2\Phi\left(b\right) - 1,$$

deci

$$\Phi\left(b\right) = 0.995 \quad \Rightarrow \quad b = 2.57$$

și astfel alegem (vezi Nota 99)

$$n = \left\lceil \left(\frac{2.57}{0.1342}\right)^2 \right\rceil = \lceil 366.74 \rceil = 367 \in \mathbb{N}^*.$$

Să observăm că putem aplica inegalitatea lui Cebâșev deoarece ne interesează ca $\bar{X}_n$ să ia valori în intervalul centrat

$$\left(\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right)-\epsilon, \mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right)+\epsilon\right)=(1/6-0.05, 1/6+0.05),$$

pentru $\epsilon = 0.05$. Deci impunem

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n-1/6\right|<0.05\right) \geq 1-\frac{\mathrm{D}^2\left(\bar{X}_n\right)}{0.05^2}=1-\frac{pq/n}{0.0025}=1-\frac{5/\left(36n\right)}{0.0025}>0.99.$$

Obținem

$$n>\frac{5}{0.01\cdot 0.0025\cdot 36}=5555.6,$$

deci alegem $n = 5556 \in \mathbb{N}^*$.

Indice de nume

Bibliografie

[1] Lee J. Bain, Max Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics* (Second Edition), Duxbury, 1992.

[2] Paolo Baldi, *Calcolo delle probabilità* (Seconda Edizione), McGraw-Hill, Milano, 2011.

[3] Patrick Billingsley, *Convergence of Probability Measures* (Second Edition), John Wiley & Sons, New-York, 1999.

[4] Patrick Billingsley, *Probability and Measure* (Anniversary Edition), John Wiley & Sons, New-Jersey, 2012.

[5] Matthew A. Carlton, Jay L. Devore, *Probability with Applications in Engineering, Science, and Technology*, Springer, New-York, 2014.

[6] Kai Lai Chung, *A Course in Probability Theory* (Third Edition), Academic Press, San Diego, 2001.

[7] Erhan Çinlar, *Probability and Stochastics*, Springer, New-York, 2011.

[8] George Ciucu, *Elemente de teoria probabilităților și statistică matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1963.

[9] George Ciucu, Virgil Craiu, *Introducere în teoria probabilităților și statistică matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971.

[10] George Ciucu, Virgil Craiu, *Probleme de statistică matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968.

[11] George Ciucu, Virgil Craiu, Ion Săcuiu, *Culegere de probleme de teoria probabilităților*, Editura Tehnică, București, 1967.

[12] George Ciucu, Virgil Craiu, Ion Săcuiu, *Probleme de statistică matematică*, Editura Tehnică, București, 1974.

[13] George Ciucu, Virgil Craiu, Ion Săcuiu, *Probleme de teoria probabilităților*, Ediția a II-a, Editura Tehnică, București, 1974.

[14] George Ciucu, Gabriel Sîmboan, *Teoria probabilităților și statistică matematică. Culegere de probleme*, Editura Tehnică, București, 1962.

[15] George Ciucu, Constantin Tudor, *Probabilități și procese stochastice*, vol. I, Editura Academiei, București, 1978.

[16] George Ciucu, Constantin Tudor, *Teoria probabilităților și aplicații*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1983.

[17] Jay Devore, *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences* (Ninth Edition), Cengage Learning, Boston, 2016.

[18] Jay L. Devore, Kenneth N. Berk, *Modern Mathematical Statistics with Applications* (Second Edition), series: Springer Texts in Statistics, Springer New York, 2012.

[19] Monica Dumitrescu, Dorel Florea, Constantin Tudor, *Probleme de teoria probabilităților și statistică matematică*, Editura Tehnică, București, 1985.

[20] Rick Durrett, *Probability. Theory and Examples* (Fourth Edition), Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[21] William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (Third Edition), volume I, John Wiley, New-York, 1968.

[22] William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (Second Edition), volume II, John Wiley, New-York, 1971.

[23] Grigorij Mihajlovič Fihtenholț, *Curs de calcul diferențial și integral*, vol. II, Editura Tehnică, București, 1964.

[24] Ionuț Florescu, *Probability and Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2015.

[25] Ionuț Florescu, Ciprian A. Tudor, *Handbook of Probability*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2014.

[26] Hans Föllmer, Alexander Schied, *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time* (Second Edition), Walter de Gruyter, Berlin, 2004.

[27] Bet Fristedt, Lawrence Gray, *A Modern Approach to Probability Theory*, Birkhäuser Boston, 1997.

[28] Robert G. Gallager, *Stochastic Processes. Theory for Applications*, Cambridge University Press, New York, 2013.

[29] Geoffrey R. Grimmett, David R. Stirzaker, *One Thousand Exercises in Probability*, Oxford University Press, New-York, 2001.

[30] Geoffrey R. Grimmett, David R. Stirzaker, *Probability and Random Processes* (Third Edition), Oxford University Press, New-York, 2001.

[31] Allan Gut, *Probability: A Graduate Course* (Second Edition), Springer, New-York, 2013.

[32] Marius Iosifescu, Gheorghe Mihoc, Radu Theodorescu, *Teoria probabilităților și statistică matematică*, Editura Tehnică, București, 1966.

[33] Jean Jacod, Philip Protter, *Probability Essentials* (Second Edition), Springer-Verlag Berlin, 2004.

[34] Thomas Kämpke, Franz Josef Radermacher, *Income Modeling and Balancing*, Springer New-York, 2015.

[35] Achim Klenke, *Probability Theory. A Comprehensive Course* (Second Edition), Springer, London, 2014.

[36] R.G. Laha, V.K. Rohatgi, *Probability Theory*, John Wiley & Sons, U.S.A., 1979.

[37] Aristide Leonte, *Elemente de Calculul Probabilităților (note de curs)*, Reprografia Universității din Craiova, Craiova, 1971.

[38] Aristide Leonte, *Exemple și contraexemple în teoria probabilităților*, Reprografia Universității din Craiova, Craiova, 1976.

[39] Aristide Leonte, Rodica Trandafir, *Clasic și actual în calculul probabilităților*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1974.

[40] Nicolae Mihăilă, *Introducere în teoria probabilităților și statistică matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965.

[41] Gheorghe Mihoc, *Elemente de calculul probabilităților*, Editura Tehnică, București, 1954.

[42] Gheorghe Mihoc, George Ciucu, Virgil Craiu, *Teoria probabilităților și statistică matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1970.

[43] Gheorghe Mihoc, Dumitru Firescu, *Statistică matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1966.

[44] Gheorghe Mihoc, Nicolae Micu, *Teoria probabilităților și statistică matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.

[45] Octav Onicescu, Gheorghe Mihoc, *Lecții de statistică matematică*, Editura Tehnică, București, 1958.

[46] Valentin V. Petrov, *Limit Theorems of Probability Theory*, Claredon Press, Oxford, 1995.

[47] Jim Pitman, *Probability*, Springer New-York, 1993.

[48] Anca Precupanu, *Analiză matematică. Funcții reale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976.

[49] Anca Precupanu, *Analiză matematică. Măsură și integrală I*, Editura Universității „Alexandru Ioan Cuza", Iași, 2006.

[50] Corina Reischer, Anca Sâmboan, *Culegere de probleme de teoria probabilităților și statistică matematică (pentru licee)*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972.

[51] Corina Reischer, George Sâmboan, Radu Theodorescu, *Teoria probabilităților,* Editura Didactică și Pedagogică, București, 1967.

[52] Sheldon Ross, *A First Course in Probability* (Eighth Edition), Pearson, 2010.

[53] Sheldon Ross, *Introduction to Probability Models* (Ninth Edition), Elsevier, Amsterdam, 2007.

[54] Sheldon Ross, *Simulation* (Fifth Edition), Elsevier, Amsterdam, 2013.

[55] Albert N. Shiryaev, *Probability – 1* (Third Edition), Springer New-York, 2016.

[56] Albert N. Shiryaev, *Probability – 2* (Third Edition), Springer New-York, 2019.

[57] Albert N. Shiryaev, *Problems in Probability*, Springer New-York, 2012.

[58] Gheorghe Sirețchi, *Calcul diferențial și integral, vol. I (Noțiuni fundamentale)*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985.

[59] Gheorghe Sirețchi, *Calcul diferențial și integral, vol. II (Exerciții)*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985.

[60] Pavel Talpalaru, Liliana Popa, Emilia Popovici, *Probleme de teoria probabilităților și statistică matematică*, Editura Universității Tehnice „Gheorghe Asachi", Iași, 1995.

[61] Constantin Tudor, *Curs de teoria probabilităților*, Editura Universității din București, București, 1988.

[62] Richard von Mises, *Mathematical Theory of Probability and Statistics*, Academic Press, New-York, 1964.

[63] John L. Weatherwax, *A Solution Manual for: A First Course In Probability by Sheldon M. Ross*, https://www.waxworksmath.com/, 2013.