Stabilitatea Lyapunov

P. Dobra

Date

1 Concepte de bază

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

unde $\mathbf{f}$ este o funcţie Lipschitz pe subdomeniul $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^n$
Fie $\mathbf{f} : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$. Dacă există $L > 0$ astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ pentru orice $x, y \in D$, atunci f se numeşte funcţie Lipschitz (sau funcţie lipschitziană) pe $\mathbf{D}$, L numindu-se constantă Lipschitz a funcţiei $\mathbf{f}$.
Fie $f : D \to R$, f lipschitziană pe D. Atunci f este uniform continuă pe D.
Se consideră $\mathbf{x}_e = 0$, un punct de echilibru a sistemului $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

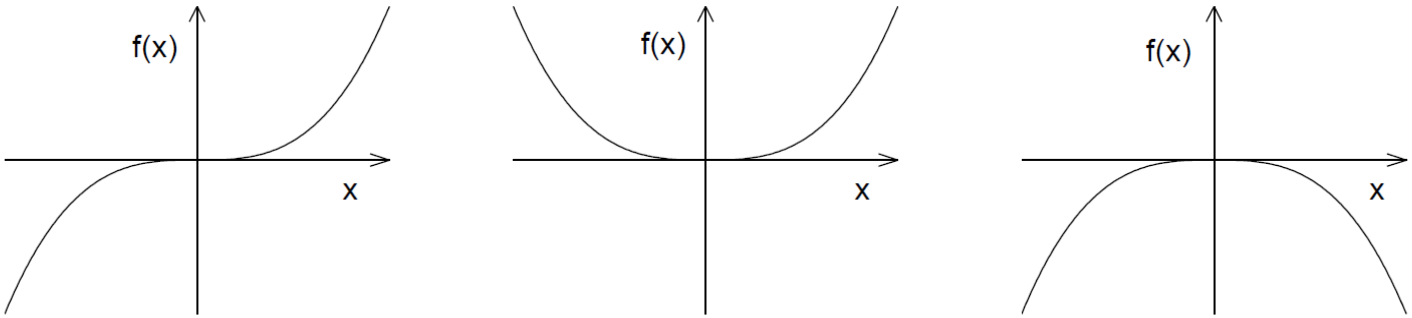
Definition 1

Punctul de echilibru $\mathbf{x}_e = 0$ al sistemului $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ este:

- *stabil* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ (dependent de ε) a.î. $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Longrightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \ (\forall)\, t \geq 9$
- *instabil* dacă nu este stabil
- *asimptotic stabil* dacă este stabil şi δ poate fi determinat a.î. $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$

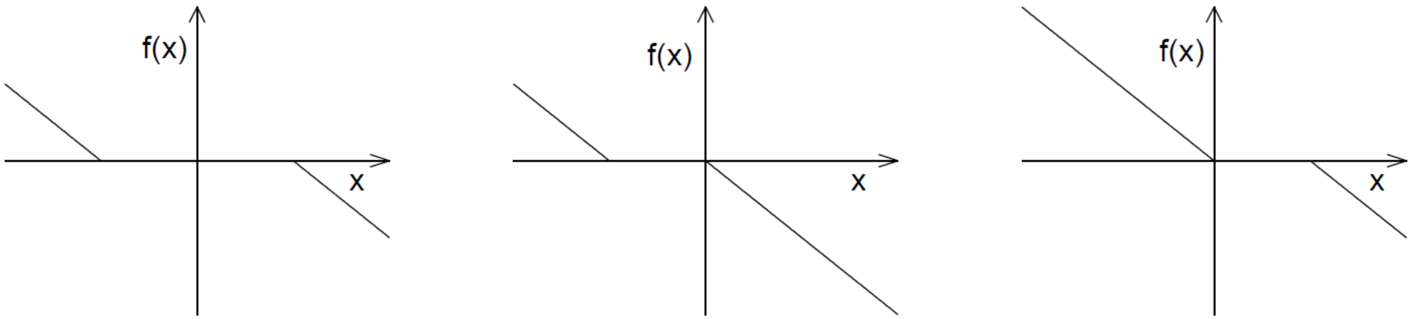
1.1 Sisteme scalare $(n = 1)$

Comportarea lui $\mathbf{x}(t)$ în vecinătatea originii poate fi determinată prin *examinarea semnului* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$
Cerinţa $\varepsilon - \delta$ privind stabilitatea este încălcată dacă $\mathbf{xf}(\mathbf{x}) > 0$ în fiecare parte a originii



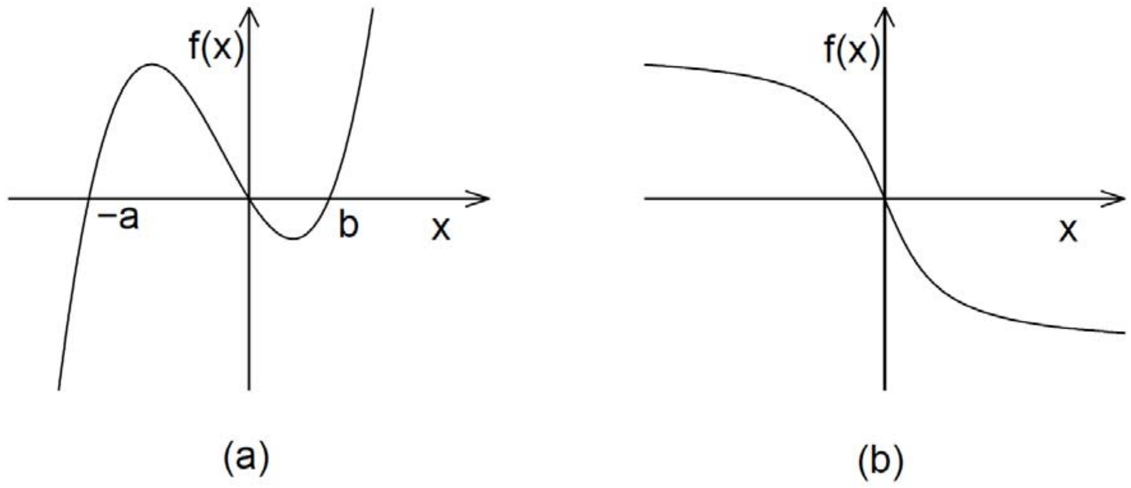
Sistememe scalare instabile

Originea este stabilă dacă şi numai dacă $\mathbf{xf}(\mathbf{x}) \leq 0$ în vecinătatea origini



Sistememe scalare stabile

Originea este asimptotic stabilă dacă şi numai dacă $\mathbf{x}\mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0$ în vecinătatea originii



1.Sistem scalar: (a) Asimptotic Stabil (AS); (b) Global Asimptotic Stabil (GAS)

Definition 2

Fie originea un punct de echilibru asimptotic stabil al sistemului $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)$, unde $\mathbf{f}$ este o funcţie Lipschitz definita pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^n$ ($0 \in D$)

- *Regiunea de atracţie* (numită şi *regiune de stabilitate asimptotică*, *domeniu de atracţie* sau *bazin*) este setul tuturor punctelor $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}$ astfel încât soluţia sistemului $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)$, $\mathbf{x}\left(0\right) = \mathbf{x}_0$, este definită pentru $\left(\forall\right) t \geq 0$ şi converge la origine când $t \to \infty$
- *Originea este global asimptotic stabilă* dacă regiunea de atracţie este întregul spaţiu $\mathbf{R}^n$

2 Sisteme LTI

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x}\ (t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = \Phi\left(t\right)\mathbf{x}_0 \\
\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{M}\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{J} = block\ diag\left(\mathbf{J}_1,\ \mathbf{J}_2, \cdots, \mathbf{J}_p\right) \\
\mathbf{J}_k &= \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}_{m_k \times m_k}
\end{aligned}
$$

$$
\Phi\left(t\right) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}\mathbf{e}^{\mathbf{J}\mathbf{t}}\mathbf{M}^{-1} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{m_k}\mathbf{R}_{ki}t^{i-1}e^{\lambda_k t}
$$

m_k ordinul de multiplicitate a λ_k, respectiv ordinul blocului Jordan $\mathbf{J}_k$

2.1 Stabilitatea sistemelor LTI

$$\mathrm{Re}\{\lambda_k\} < 0,\ (\forall)\, k \Longleftrightarrow Asimptotic\ Stabil\ \ (AS)$$

$$\mathrm{Re}\{\lambda_k\} > 0,\ pentru\ un\ k \Longleftrightarrow InStabil\ \ (IS)$$

$$\mathrm{Re}\{\lambda_k\} \leq 0,\ (\forall)\, k\ \&\ m_k > 1\ pentru\ \ \mathrm{Re}\{\lambda_k\} = 0 \Longleftrightarrow InStabil\ \ (IS)$$

$$\mathrm{Re}\{\lambda_k\} \leq 0,\ (\forall)\, k\ \&\ m_k = 1\ pentru\ \ \mathrm{Re}\{\lambda_k\} = 0 \Longleftrightarrow Stabil\ \ (S)$$

Remark 1

Dacă matricea $\mathbf{A}^{n\times n}$ are o valoare proprie multiplă cu ordinul de multiplicitate m_k, atunci blocul Jordan corespunzător v.p. λ_k are ordinul unu, dacă şi numai dacă $rank\,(A - \lambda_k I) = n - n_k$

Punctul de echilibru $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ al lui $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ este *stabil* dacă şi numai dacă toate valorile proprii ale $\mathbf{A}$ satisfac $\mathrm{Re}\{\lambda_k\} \leq 0$ şi pentru fiecare valoare proprie cu $\mathrm{Re}\{\lambda_k\} = 0$ şi ordinul de multiplicitate algebric $m_k \geq 2$, $rank\{A - \lambda_k I)\} = n - m_k$, unde n este dimensiunea lui $\mathbf{x}$.
Punctul de echilibru $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ este *global asimptotic stabil* dacă şi numai dacă toate valorile proprii ale lui $\mathbf{A}$ satisfac $\mathrm{Re}\{\lambda_k\} < 0$.
Atunci când toate valorile proprii ale lui $\mathbf{A}$ satisfac $\mathrm{Re}\{\lambda_k\} < 0$, $\mathbf{A}$ se numeşte *matrice Hurwitz*.
Atunci când *originea unui sistem liniar este asimptotic stabilă*, soluţia sa satisface inegalitatea

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq k\,\|\mathbf{x}(0)\|\, e^{-\lambda t},\ (\forall)\, t \geq 0,\ k \geq 1,\ \lambda > 0$$

2.2 Stabilitatea exponenţială

Theorem 1

Punctul de echilibru $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ al $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ este *exponenţial stabil* dacă

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq k\,\|\mathbf{x}(0)\|\, e^{-\lambda t},\ (\forall)\, t \geq 0,$$

$k \geq 1,\ \lambda > 0$, pentru toate $\|\mathbf{x}(0)k\| < c$
Este *global exponenţial stabil* dacă inegalitatea este satisfăcută pentru orice stare iniţială $\mathbf{x}(0)$

3 Metoda lui Lyapunov

Fie $V(x)$ o funcţie continuă diferenţiabilă definită într-un domeniu $D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in D$. Derivata lui V de-a lungul traiectoriilor lui $\dot{x} = f(x)$ este

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \dot{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k(x) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \end{aligned}$$

Dacă $\Phi(t; x)$ este soluţia $\dot{x} = f(x)$ care începe în starea iniţială x la momentul $t = 0$ $(\Phi(0; x) = x(0) = x_0)$, atunci

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\Phi(t; x)) \Big|_{t=0}$$

Dacă $\dot{V}(x)$ este negativă, V va scădea de-a lungul soluţiei lui $\dot{x} = f(x)$
Dacă $\dot{V}(x)$ este pozitivă, V va creşte de-a lungul soluţiei lui $\dot{x} = f(x)$

- *Theorem 2*
  - Dacă există $V(x)$ astfel încât

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \;\&\; V(x) > 0,\ (\forall)\, x \in D \; cu \; x \neq 0 \\ \dot{V}(x) &\leq 0,\ (\forall)\, x \in D \end{aligned}$$

    atunci originea este *stabilă*
  - Dacă

$$\dot{V}(x) < 0,\ (\forall)\, x \in D \; cu \; x \neq 0$$

    atunci originea este *asimptotic stabilă*
  - Dacă $V(x) > 0$, $(\forall)\, x \neq 0$,

$$\|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty$$

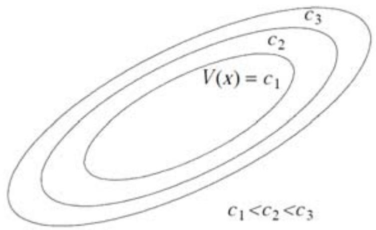
    şi $\dot{V}(x) < 0$, $(\forall)\, x \neq 0$, atunci originea este *globală asimptotic stabil*

3.1 Terminologie

$V(0) = 0,\ V(x) \geq 0\ pt.\ x \neq 0$	Pozitiv semidefinită
$V(0) = 0,\ V(x) > 0\ pt.\ x \neq 0$	Pozitiv definită
$V(0) = 0,\ V(x) \leq 0\ pt.\ x \neq 0$	Negativ semidefinită
$V(0) = 0,\ V(x) < 0\ pt.\ x \neq 0$	Negativ definită
$\|x\| \to \infty \Longrightarrow V(x) \to \infty$	Radial nemărginită

Theorem 3

Originea este *stabilă* dacă există o funcţie continuă, diferenţiabilă $V(x)$ astfel încât $\dot{V}(x)$ este *negativ semidefinită* şi este *asimptotic stabilă* dacă $\dot{V}(x)$ este *negativ definitivă*. Este *global asimptotic stabilă* dacă condiţiile de *stabilitate asimptotică se menţin la nivel global* şi $V(x)$ este *radial nemărginită*. Funcţia continuă diferenţiabilă $V(x)$ care satisface condiţiile de stabilitate se numeşte o *funcţie Lyapunov*. Suprafaţa $V(x) = c$, cu $c > 0$, se numeşte o *suprafaţă Lyapunov*



Suprafeţe Lyapunov

3.2 Pendulul fără frecare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a\sin(x_1) \end{aligned}$$

$$V(x) = a(1-\cos(x_1)) + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$V(0) = 0 \;\&\; V(x) \; - \; pozitiv\ definit\breve{a} \; -\pi < x_1 < \pi$$

$$\dot{V}(x) = a\dot{x}_1\sin(x_1) + x_2\dot{x}_2 = ax_2\sin(x_1) - ax_2\sin(x_1) = 0$$

Originea este stabilă, dar NU asimptotic stabilă deoarece $\dot{V}(x) \equiv 0$

3.3 Pendulul cu frecare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a\sin(x_1) - bx_2\end{aligned}$$

$$V(x) = a\,(1-\cos(x_1)) + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$V(0) = 0 \;\&\; V(x) \;-\; pozitiv\ definit\breve{a} \;-\pi < x_1 < \pi$$

$$\dot{V}(x) = a\dot{x}_1\sin(x_1) + x_2\dot{x}_2 = \ldots = -bx_2^2$$

Originea este stabilă, dar $\dot{V}(x)$ *NU este negativ definită, deoarece* $\dot{V}(x) \equiv 0$, pt. $x_2 = 0$ & $(\forall)\, x_1$

Remark 2

- Condiţiile teoremei lui Lyapunov sunt suficiente.
- Eşecul unui funcţii candidat la funcţia Lyapunov pentru a satisface condiţiile de stabilitate sau stabilitate asimptotică NU înseamnă că punctul de echilibru NU este stabil sau asimptotic stabil. Aceasta înseamnă doar că stabilitatea NU poate fi stabilită prin utilizarea acestei funcţii candidat la funcţia Lyapunov.

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}x^T P x + a\left(1-\cos\left(x_1\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a\left(1-\cos\left(x_1\right)\right) \end{aligned}$$

$$p_{11} > 0,\ p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \ldots = a\left(1-p_{22}\right)x_2\sin\left(x_1\right) - ap_{12}x_1\sin\left(x_1\right) + \\ &\quad + \left(p_{11}-p_{12}b\right)x_1x_2 + \left(p_{12}-p_{22}b\right)x_2^2 \end{aligned}$$

Pt. $p_{22} = 1,\ p_{11} = bp_{12},\ p_{12} = \frac{b}{2}$

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}abx_1 \sin(x_1) - \frac{1}{2}bx_2^2$$

$$D = \{|x_1| < \pi\}$$

$V(x)$ este *pozitiv definită* şi $\dot{V}(x)$ este *negativ definitivă* pe D. *Originea este asimptotic stabilă*.