

Traietorii de stare

P. Dobra

1 Noțiuni introductive

Descrierea prin relații intrare-ieșire (u/y) a unui sistem dinamic are următoarea formă:

$$\mathcal{S}(u, y) = 0, \quad (1)$$

unde $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{n_u}(t))^T$ este vectorul variabilelor de intrare definit ca o funcție vectorială de timp pe interval $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Vectorul variabilelor de intrare este o mulțime a perechilor ordonate $\{t, u(t)\}$, respectiv:

$$u_{[t_0, t_1]} = \{(t, u(t)) \mid \forall t \in [t_0, t_1]\}. \quad (2)$$

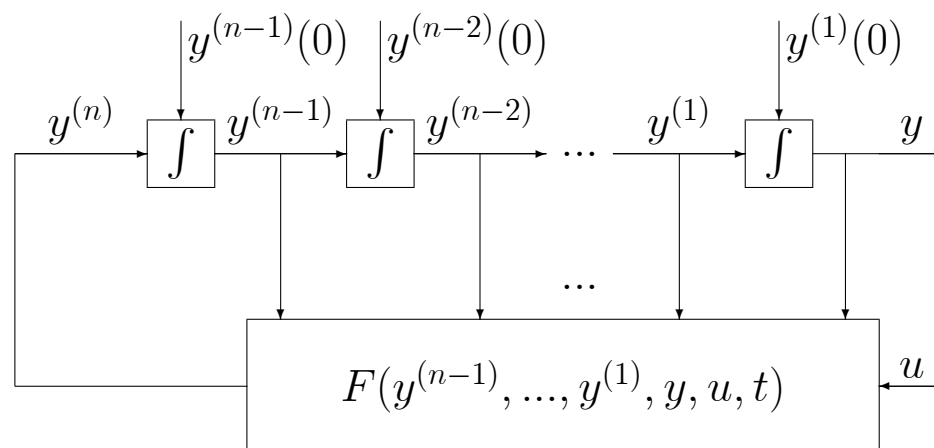
În mod similar $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n_y}(t))^T$ este vectorul variabilelor de ieșire definit ca o funcție vectorială de timp definită pe același intervalul, respectiv:

$$y_{[t_0, t_1]} = \{(t, y(t)) \mid \forall t \in [t_0, t_1]\}. \quad (3)$$

Sistemul descris prin relația intrare-ieșire (1) are proprietatea că poate fi controlat (comandat) prin variabila vectorială u și observat la ieșire prin variabila vectorială y , ambele fiind funcții de timp. Dacă u este cunoscut pentru $\forall t \in [0, t]$ atunci y poate fi unic determinat pe același interval. Dacă u este cunoscut numai pe intervalul $(t_0, t]$, $t_0 > 0$, y nu mai poate fi unic determinat pe același interval, ceea ce este echivalent cu existența a o infinitate de funcții y asociate aceleași intrări u , care diferă prin starea inițială în care se afla sistemul la momentul t_0 .

Definition 1 *Starea unui sistem dinamic este o mulțime de numere reale care reprezintă informația minimală necesară a fi cunoscută la momentul $t = t_0$, astfel încât împreună cu intrarea $u(\tau)$, $\forall \tau > t_0$, ieșirea $y(t)$, $\forall t > t_0$ să fie unic determinată.*

Schema Kelvin asociată unui sistem dinamic este prezentată în figura 1.



1.Schema Kelvin asociată unui sistem dinamic de ordinul n

Definition 2 *Se numește variabilă de stare, notată cu:*

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T,$$

funcția vectorială de timp a cărei valori la orice moment de timp t_0 reprezintă starea sistemului la acel moment.

Definition 3 Mulțimea $\Sigma = \{x(t) \mid \forall t\}$ se numește **spațiul stărilor**.

Relația intrare-stare-ieșire asociată unui sistem dinamic continuu în timp se scrie în mod uzual sub forma:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{f}(x(t), u(t)), \quad (4)$$

$$y(t) = \mathbf{g}(x(t), u(t)), \quad (5)$$

cu \mathbf{f} , \mathbf{g} funcții vectoriale, în general neliniare, respectiv:

$$\mathbf{f}(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} f_1(x(t), u(t)) \\ f_2(x(t), u(t)) \\ \vdots \\ f_n(x(t), u(t)) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{g}(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} g_1(x(t), u(t)) \\ g_2(x(t), u(t)) \\ \vdots \\ g_{n_y}(x(t), u(t)) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Dacă *sistemul este liniar invariant în timp* relația $u/x/y$ are următoarea formă particulară:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (8)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (9)$$

unde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ și $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$.

2 Traectorii de stare

Dependența funcțională:

$$x(t) = \varphi(t; x_0, u_{(t_0, t]}) , \quad (10)$$

obținută prin soluționarea ecuației de stare (4), pune în evidență evoluția stării sistemului ca funcție explicită de timp și implicită de starea inițială la momentul t_0 , $x_0 = x(t_0,)$, respectiv vectorul variabilelor de intrare $u_{(t_0, t]}$ definit pe intervalul $(t_0, t]$. Evoluția stării poate fi exprimată și prin interdependența dintre elementele vectorului de stare utilizând timpul ca parametru, respectiv prin reprezentare grafică în spațiul stărilor.

Definition 4 *Reprezentarea grafică a funcției φ în spațiul stărilor Σ cu t parametru implicit se numește **traectorie de stare**.*

Traectoria de stare este mai sugestivă și mai simplă de interpretat decât evoluția stării sistemului ca funcție explicită de timp. În cazul sistemelor de ordinul doi spațiul stărilor este bidimensional și reprezentarea traiectoriei de stare se face în plan, ceea ce simplifică foarte mult reprezentarea și interpretarea acesteia.

Definition 5 *Mai multe traectorii aparținând aceluiași sistem, considerate în raport cu stări inițiale x_0 diferite și având aceeași intrare $u_{(t_0, t]}$ (posibil nulă), formează un portret de stare.*

În spațiul stărilor traectoriile aparținând unui portret de stare **nu se intersectează**, pot însă trece printr-un număr finit de puncte.

Dependența traectoriilor de stare atât de starea inițială cât și de intrare pune în evidență posibilitatea definirii și interpretării a două tipuri de traectorii:

1. *traectorii libere*, caz în care intrarea $u_{(t_0, t]} \equiv 0$, iar starea inițială $x(t_0) = x_0 \neq 0$;
2. *traectorii forțate*, caz în care intrarea $u_{(t_0, t]} \neq 0$, iar starea inițială $x(t_0) = x_0 \equiv 0$.

Alegerea variabilelor de stare ca o variabilă dependentă și cele $n - 1$ derivate succesive ale acesteia, în conformitate cu schema Kelvin prezentată în figura 1, este cunoscută sub denumirea de *variabile de fază*, iar în acest caz spațiul stărilor devine *planul fazelor*.

3 Traectorii de fază ale sistemelor liniare de ordinul doi

Traectoriile de fază libere ale unui sistem de ordinul doi caracterizat de ecuația diferențială omogenă:

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0, \quad \forall t \geq t_0, \quad (11)$$

unde ω_n este pulsația proprie naturală, iar ζ factorul de amortizare, mărimi caracteristice ale regimului tranzitoriu liber.

O posibilă alegere a variabilelor de fază este următoarea:

$$y(t) = x_1(t), \quad \dot{y}(t) = x_2(t), \quad (12)$$

pentru care realizarea de stare este în forma *canonică de control*:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Panta traectoriilor de fază este:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\omega_n^2 x_1(t) + 2\zeta\omega_n x_2(t)}{x_2(t)}. \quad (14)$$

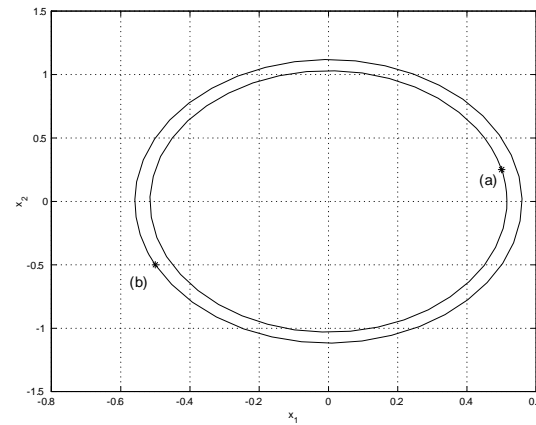
Trasarea traiectoriilor de fază necesită integrarea ecuației diferențiale definită în relația (14), pentru un set de condiții inițiale date. Trasarea simplă a traiectoriilor de fază se poate face prin modelarea analogică sau numerică.

Ecuația de stare definită în cazul general prin relația (4) are următoarea formă în cazul traiectoriilor libere:

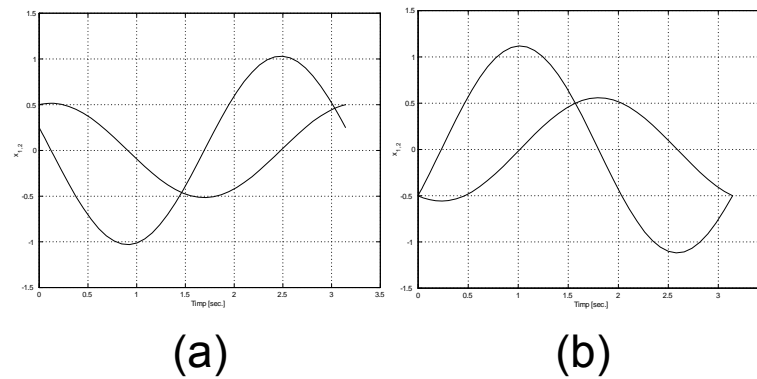
$$\dot{x}(t) = \mathbf{f}(x(t)). \quad (15)$$

O stare de echilibru implică $\dot{x}(t) = 0$ care evidențiază lipsa oricărei evoluții, ceea ce este echivalent cu existența unui *punct singular*. Se observă că punctul singular este unic în cazul sistemelor liniare și se află în originea spațiului stărilor. Punctelor singulare li s-au atribuit denumiri specifice în raport cu forma traiectoriilor de fază în imediata lor vecinătate. Există o strânsă legătură între aspectul traiectoriilor de fază și răspunsurile libere ale sistemelor de ordinul doi. În continuare se prezintă punctele singulare care se întâlnesc la sistemul liniar de ordinul doi, pentru diferite valori particulare ale parametrilor ω_n, ζ .

3.1 Centru $(\zeta = 0, \omega_n^2 > 0) \Leftrightarrow (\beta_{1,2} = \pm j\omega_n)$

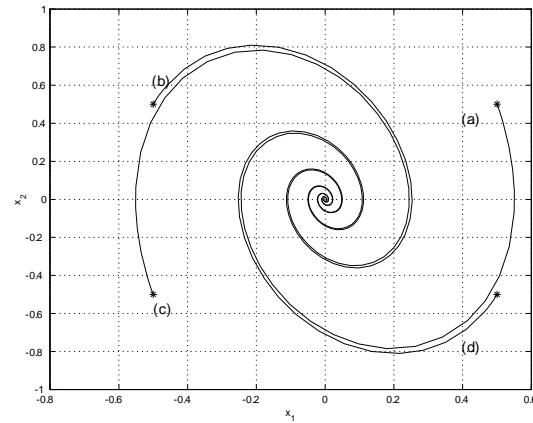


2. Traiectoriile de fază pentru punctul singular de tip centru

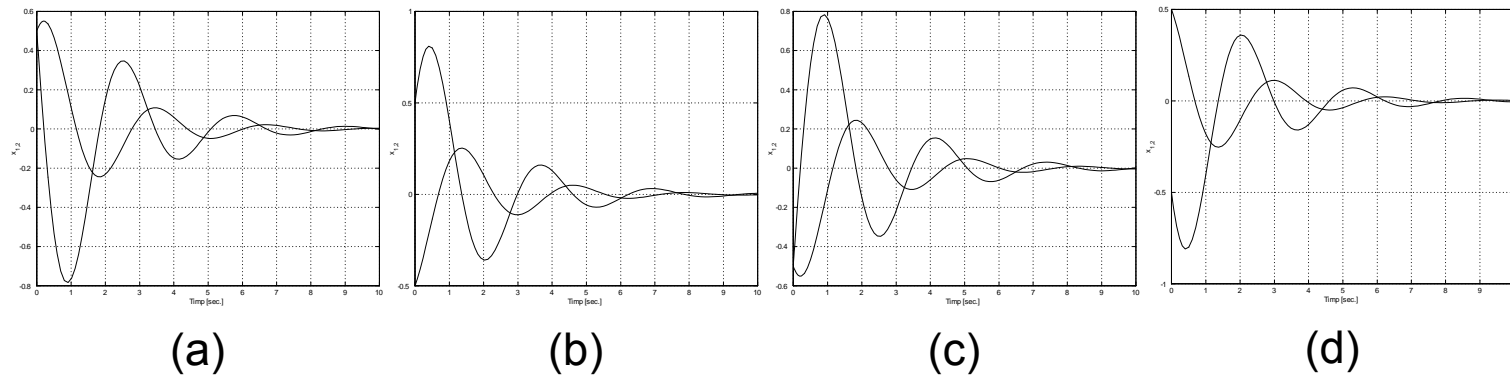


Răspunsul liber este *oscilant întreținut*, iar sistemul este *stabil* (intern).

3.2 Focar stabil ($0 < \zeta < 1, \omega_n^2 > 0$) $\Leftrightarrow (\text{Re} \{ \beta_{1,2} \} < 0)$

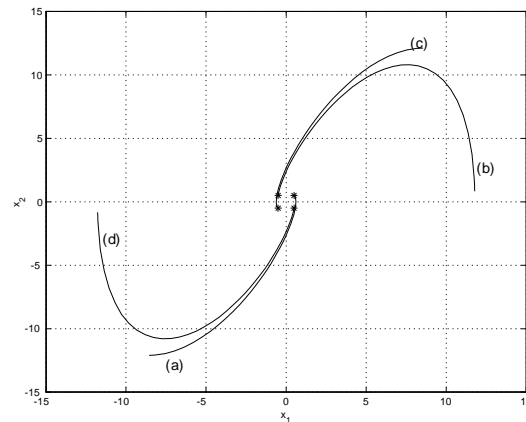


3. Traiectoriile de fază în cazul focarului stabil

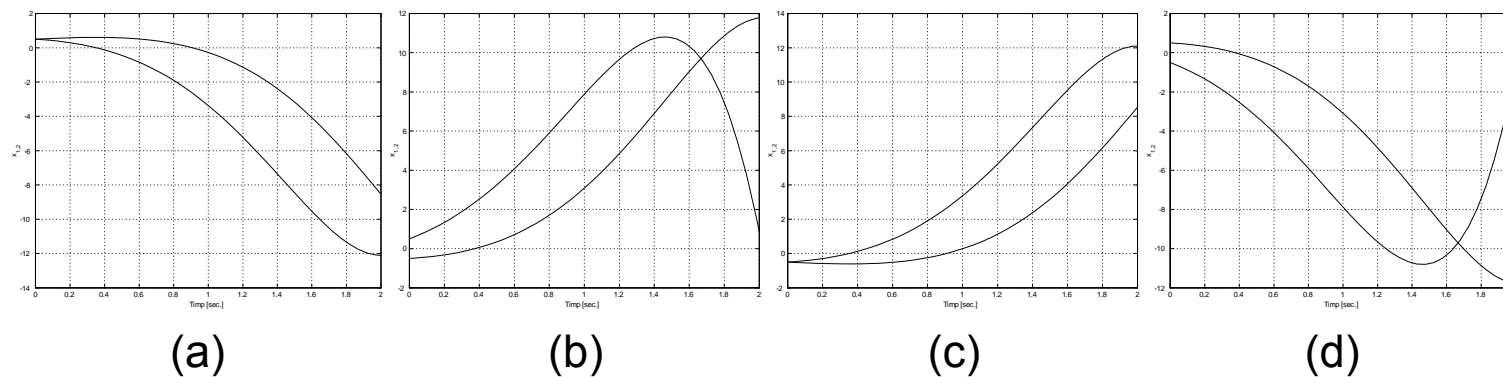


Răspunsul liber este *oscilant amortizat*, iar sistemul este *asimptotic stabil* (intern).

3.3 Focar instabil ($-1 < \zeta < 0, \omega_n^2 > 0$) $\Leftrightarrow (\operatorname{Re} \{\beta_{1,2}\} > 0)$

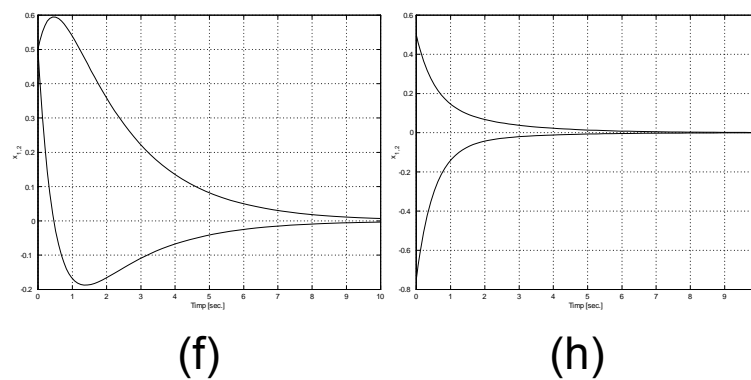


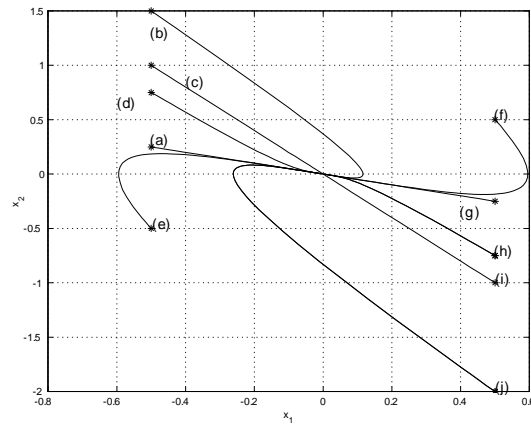
4. Traiectoriile de fază în cazul focarului instabil



Răspunsul liber este *oscilant neamortizat*, iar sistemul este *instabil*.

3.4 Nod stabil ($\zeta \geq 1, \omega_n^2 > 0$) $\Leftrightarrow (\beta_{1,2} < 0)$

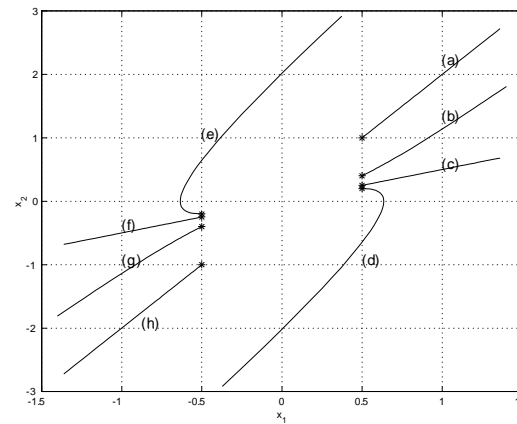




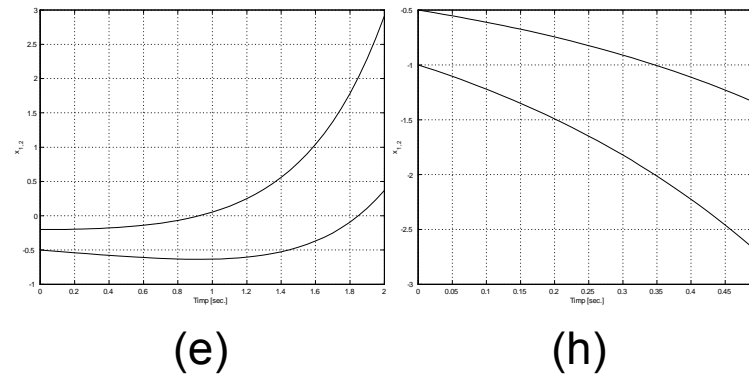
5. Traiectoriile de fază în cazul nodului stabil

Răspunsul liber este *aperiodic amortizat*, iar sistemul este *asimptotic stabil* (intern).

3.5 Nod instabil ($\zeta \geq 1, \omega_n^2 > 0$) $\Leftrightarrow (\beta_{1,2} < 0)$



6. Traiectoriile de fază în cazul punctului singular de tip nod instabil

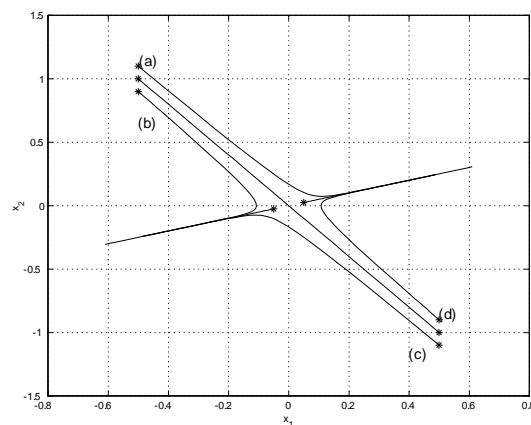


Răspunsul liber este *aperiodic neamortizat*, iar sistemul este *instabil*.

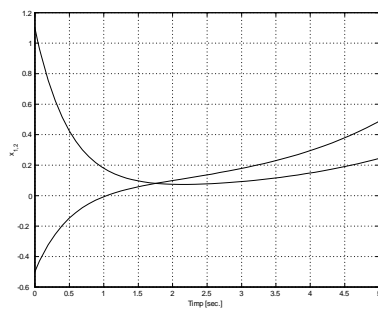
Pentru $|\zeta| = 1$ și $\omega_n^2 > 0$, ecuația caracteristică prezintă două rădăcini confundate. Dacă $\zeta = 1$

rădăcinile sunt negative, $\beta_1 = \beta_2 = -\omega_n$, iar dacă $\zeta = -1$ rădăcinile sunt pozitive, $\beta_1 = \beta_2 = \omega_n$. Traectoriile vor avea aceeași formă ca și în cazurile precedente, dar va exista o singură traiectorie sub formă de dreaptă, corespunzătoare rădăcinii reale (de fapt există și traiectoria simetrică față de origine care este tot o dreaptă). În acest caz răspunsul liber este *aperiodic critic amortizat* sau *neamortizat*, respectiv punctul singular se numește *nod critic stabil*, respectiv *nod critic instabil*.

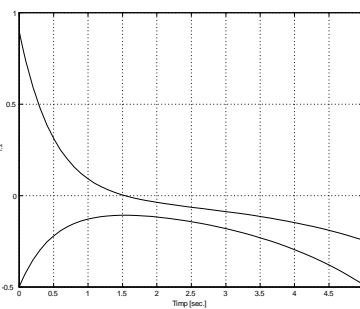
3.6 Șa $(\omega_n^2 < 0, (\forall) \zeta) \Leftrightarrow (\beta_1 < 0, \beta_2 > 0)$



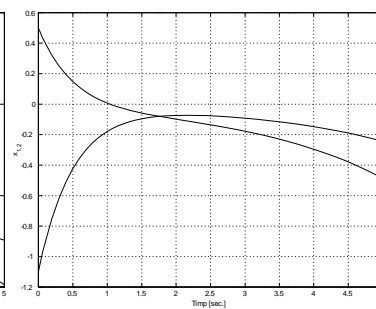
7. Traectoriile de fază în cazul punctului singular de tip șa



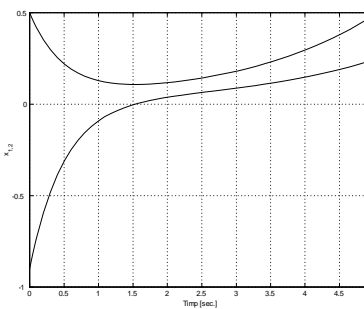
(a)



(b)



(c)



(d)

1. Punctele singulare ale sistemelor liniare de ordinul doi

		Rădăcinile ec. ecuației caracteristice	Răspunsul liber	Punctul de echilibru
$\omega_n^2 > 0$	$\zeta \leq -1$	$\beta_{1,2} \in \mathbb{R}$ $\beta_{1,2} > 0$	Aperiodic neamortizat	Nod instabil
	$-1 < \zeta < 0$	$\beta_{1,2} \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re}\{\beta_{1,2}\} > 0$	Oscilant neamortizat	Focar instabil
	$\zeta = 0$	$\beta_{1,2} \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re}\{\beta_{1,2}\} = 0$	Oscilant întreținut	Centru (Vârf)
	$0 < \zeta < 1$	$\beta_{1,2} \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re}\{\beta_{1,2}\} < 0$	Oscilant amortizat	Focar stabil
	$\zeta \geq 1$	$\beta_{1,2} \in \mathbb{R}$ $\beta_{1,2} < 0$	Aperiodic amortizat	Nod stabil
$\omega_n^2 < 0$	$\forall \zeta \in \mathbb{R}$	$\beta_{1,2} \in \mathbb{R}$ $\beta_1 < 0, \beta_2 > 0$	Aperiodic neamortizat	Șa

4 Puncte singulare ale sistemelor neliniare

O stare de echilibru pentru sistemul neliniar implică $\dot{x}(t) = 0$ care evidențiază lipsa oricărei evoluții, ceea ce este echivalent cu existența unui punct singular. În consecință soluțiile ecuației neliniare:

$$\mathbf{f}(x(t)) = 0 \Rightarrow x_{ech_k}, k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Dezvoltarea în serie Taylor în vecinătatea fiecărui punct de echilibru:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_{ech_k}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{ech_k}} (x - x_{ech_k}) + \dots \approx \\ &\approx f(x_{ech_k}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{ech_k}} (x - x_{ech_k}). \end{aligned} \quad (17)$$

Prin schimbarea de variabilă $\tilde{x} = x - x_{ech_k}$, ecuația de stare (4) devine:

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = J(x_{ech_k}) \tilde{x}(t),$$

unde:

$$J(x_{ech_k}) = \left. \frac{d\mathbf{f}(x)}{dx} \right|_{x_{ech_k}} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{array} \right) \bigg|_{x_{ech_k}}, \quad (18)$$

Caracterul punctului de echilibru x_{ech_k} poate fi studiat pe baza valorilor proprii ale matricei Jacobian, respectiv:

$$\det(\lambda I_n - J(x_{ech_k})) = 0,$$

în mod similar secțiunii anterioare, mai precis pe baza rezultatelor sintetice prezentate în Tabelul 1. Interpretarea acestor rezultate nu depinde de modul de alegere al variabilelor de stare, dar este valabil numai într-o vecinătate a punctului de echilibru spre deosebire de cazul sistemelor liniare unde rezultatele au un caracter global în tot spațiul stărilor.

Example 1 (Ex. 01) Se consideră un sistem neliniar de ordinul doi caracterizat de următoarea ecuație diferențială omogenă:

$$\ddot{x}(t) + 2(0.4 + x(t))\dot{x}(t) - 2x(t) + 8x^3(t) = 0. \quad (19)$$

Se cere să se determine punctele de echilibru (singulare) și să se studieze comportarea sistemului folosind metoda planului stărilor.

Variabilele de stare se aleg variabile de fază, pe baza schemei Kelvin prezentată în figura 1, respectiv $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}(t) = x_2(t)$.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ 2(1 - 4x_1^2(t))x_1(t) - 2(0.4 + x_1(t))x_2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x(t)). \quad (20)$$

Punctele de echilibru se determină prin rezolvarea ecuației algebrice neliniare definită în relația (16):

$$x_{ech_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{ech_2} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{ech_3} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru studiul comportării sistemului în vecinătatea celor trei puncte de echilibru trebuie mai întâi calculată matricea Jacobian $\mathbf{J}(x)$:

$$\mathbf{J}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2(1 - 12x_1^2(t) - x_2(t)) & -2(0.4 + x_1(t)) \end{pmatrix}.$$

Matricea Jacobian se evaluează în fiecare dintre cele trei puncte de echilibru, urmând ca comportarea sistemului în vecinătatea fiecărui punct de echilibru să se facă pe baza valorilor proprii ale matricilor obținute.

- În punctul de echilibru $x_{ech_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, matricea Jacobiană este:

$$\mathbf{J}(x_{ech_1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -0.8 \end{pmatrix},$$

ecuația caracteristică este:

$$\det(\lambda I_2 - \mathbf{J}(x_{ech_1})) = 0 \iff \lambda^2 + 0.8\lambda - 2 = 0.$$

Valorile proprii sunt: $\lambda_1 = -0.4 + \sqrt{2.4} > 0$ și $\lambda_2 = -0.4 - \sqrt{2.4} < 0$, deci acest punct de echilibru va fi o *șa*, având separatoarele:

$$x_2 = \left(-0.4 + \sqrt{2.4}\right) x_1, \quad x_2 = \left(-0.4 - \sqrt{2.4}\right) x_1;$$

- În punctul de echilibru $x_{ech_2} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$, matricea Jacobiană este:

$$\mathbf{J}(x_{ech_2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1.8 \end{pmatrix},$$

ecuația caracteristică este:

$$\det(\lambda I_2 - J(x_{ech_2})) = 0 \iff \lambda^2 + 1.8\lambda + 4 = 0.$$

Valorile proprii sunt: $\lambda_{1,2} = -0.9 \pm j\sqrt{3.19} \in \mathbb{C}^-$, deci acest punct de echilibru va fi un *focar stabil*;

- În punctul de echilibru $x_{ech_3} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$, matricea Jacobiană este:

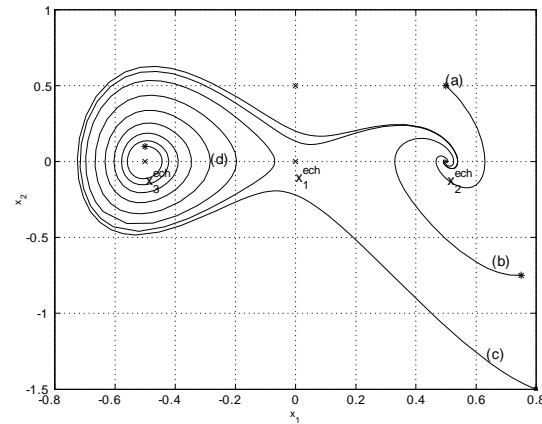
$$\mathbf{J}(x_{ech_3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0.2 \end{pmatrix},$$

ecuația caracteristică este:

$$\det(\lambda I_2 - J(x_{ech_3})) = 0 \iff \lambda^2 - 0.2\lambda + 4 = 0.$$

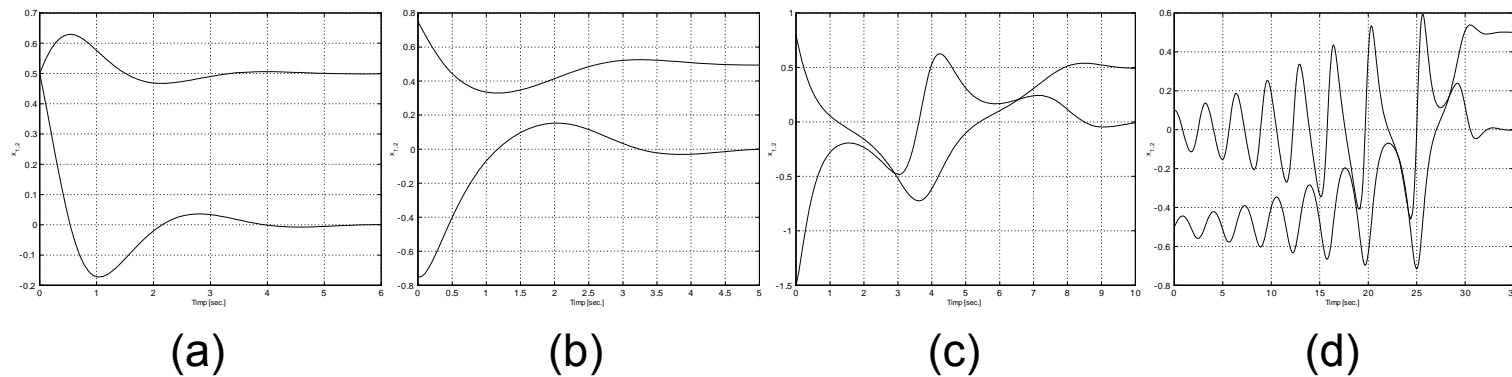
Valorile proprii sunt: $\lambda_1 = +0.1 \pm j\sqrt{3.99} \in \mathbb{C}^-$, deci acest punct de echilibru va fi un *focar instabil*.

Traectoriile de fază ale sistemului obținute prin modelare numerică (Runge-Kutta):



8. Traectoriile de fază ale unui sistem neliniar

Evoluția în timp a variabilelor de stare:



Remark 1 Punctele de echilibru din exemplul precedent au rezultat pe axa absciselor ($x_2 = 0$), ceea ce este o consecință a modului de alegere a variabilelor de stare ca variabile de fază. Punctele de echilibru ale sistemelor neliniare pot să rezulte în orice punct din spațiul stărilor.

Remark 2 Din exemplul prezentat se observă că comportarea unui sistem neliniar poate să fie studiată prin analiza valorilor proprii ale mai multor sisteme liniare, obținute prin liniarizarea sistemului neliniar în vecinătatea punctelor de echilibru. Această analiză are un caracter local fiind valabilă numai în vecinătatea punctelor de echilibru în jurul cărora a fost făcută liniarizarea.

4.1 Cicluri limită

Ciclurile limită sunt traectorii închise către care tind asimptotic, dintr-o vecinătate determinată, toate traectoriile, atât din interior, cât și din exterior (*cicluri limită stabile*), sau de la care diverg traectoriile, atât spre interior cât și spre exterior (*cicluri limită instabile*), traectorii perturbate de la aceste traectorii închise.

Example 2 Se consideră un sistem neliniar caracterizat de ecuația diferențială omogenă (Van der Pol):

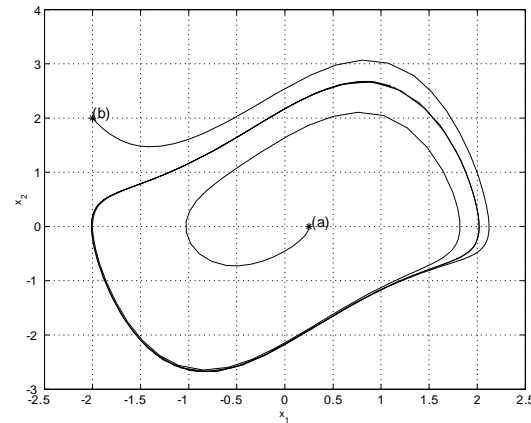
$$\ddot{x}(t) - \mu(1 - x^2(t))\dot{x}(t) + x(t) = 0. \quad (21)$$

Variabilele de stare se aleg variabile de fază, pe baza schemei Kelvin prezentată în figura 1, respectiv $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}(t) = x_2(t)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) + \mu(1 - x_1^2(t))x_2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x(t)). \quad (22)$$

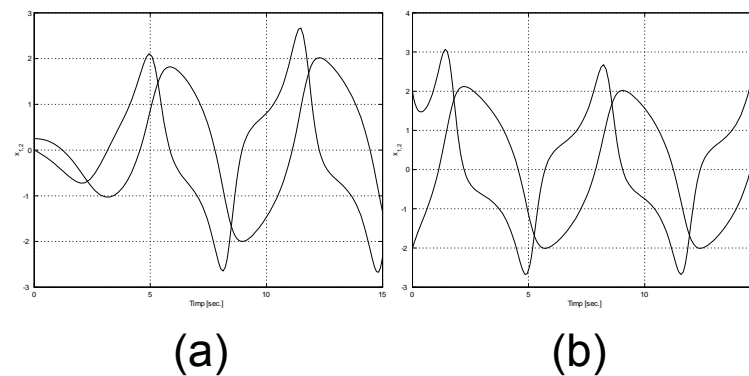
În acest caz rezultă un singur punct de echilibru, care se află în origine: $x_{ech_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pentru $\mu = 1$, în figura 9 se prezintă portretul de fază. Sistemul evoluează pe o traiectorie închisă, care poartă denumirea de *ciclu limită stabil*.

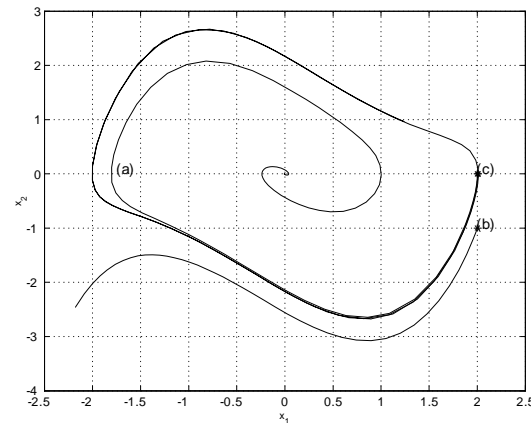


9. Portretul de fază în cazul oscilatorului Van der Pol stabil

Evoluția în timp a variabilelor de stare:

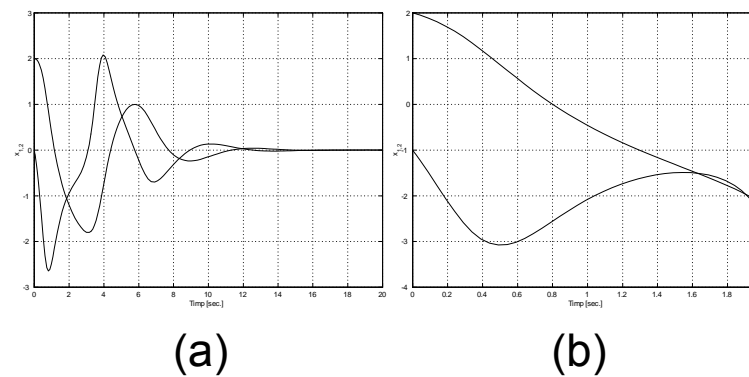


Pentru $\mu = -1$, în figura 10 se prezintă portretul de fază al sistemului. Întrucât sistemul nu se poate întreține pe traiectoria închisă, aceasta se numește *ciclu limită instabil*.



10. Portretul de fază în cazul oscilatorului Van der Pol instabil

Evoluția în timp a variabilelor de stare:



Remark 3 Există și ciclu limită semistabil, caz în care traiectoriile dintr-o parte tind la o curbă închisă (ciclu limită semistabil), iar din cealaltă parte se îndepărtează de curba închisă.

Remark 4 Ciclurile limită, stabile sau instabile ca puncte de echilibru nu se limitează la cazul studiat, ci sunt proprii în general sistemelor neliniare.

Remark 5 Cu toate că ciclurile limită sunt curbe izolate, pot exista puncte de echilibru care să prezinte mai multe traiectorii de tip ciclu limită fără însă ca acestea să se intersecteze.

Remark 6 Nu există o metodă generală prin care dispoziția ciclurilor limită în spațiul stărilor să poată fi determinată.

4.2 Metode pentru determinarea existenței ciclurilor limită în plan

Ecuția traiectoriilor libere (15) ale unui sistem neliniar de ordinul doi se scrie explicit în următoarea formă:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)), \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)). \end{cases} \quad (23)$$

Se consideră un domeniu (D_C) mărginit de o curbă închisă (C) .

Indicele unei curbe ($P = \text{ind}(C)$) este un număr întreg atașat unei curbe închise C din planul (x_1, x_2) și reprezintă numărul rotațiilor complete (în sens trigonometric) pe care le realizează un vector tangent la traiectoria de stare, $\frac{dx_2}{dx_1}$, când se plasează pe curba C (simplă sau multiplă). În cazul unei curbe închise C care înconjoară un focar stabil sau instabil, nod stabil sau instabil sau centru indicele curbei C este pozitiv și are valoarea $P = +1$. Dacă conturul C înconjoară un punct singular de tip șa, indicele curbei C este $P = -1$, dacă nu înconjoară nici un punct singular, $P = 0$, iar dacă înconjoară de două ori un punct singular, acesta se dublează.

Indicele unui punct singular (Poincaré) în planul (x_1, x_2) se definește ca *indice al unei curbe care înconjoară un singur punct de echilibru* (singular). În particular, prin *indicele unui punct singular* se înțelege indicele unui cerc, de rază suficient de mică, orientat pozitiv, cu centrul în punctul singular. Deci $P = 1$ în cazul punctelor singulare de tip: *centru*, *focar* sau *nod*, respectiv $P = -1$ în cazul punctului singular de tip *șa*.

În spațiul $n - dimensional$ (\mathbb{R}^n), pentru un domeniu mărginit și deschis (D), care este închis prin frontiera ∂D , ($\bar{D} = D \cup \partial D$), se definește o aplicație $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, continuă și derivabilă. Se consideră că $\mathbf{f}(x) \neq 0$ pe frontiera ∂D , iar în interior ($x \in D$), funcția $\mathbf{f}(x)$ se anulează într-o mulțime de puncte izolate M_f :

$$M_f = \{x \mid x \in D, \mathbf{f}(x) = 0\}. \quad (24)$$

În cazul în care $\mathbf{f}(x)$ reprezintă o funcție care descrie un sistem neliniar, al cărui traectorii de stare libere sunt definite prin relația (15), mulțimea M_f este formată din punctele de echilibru ale acestui sistem cuprinse în domeniul D .

Cu ajutorul matricei Jacobian, corespunzătoare funcției $\mathbf{f}(x)$, se definește o nouă funcție:

$$J_f(x) = \det \left(\frac{d\mathbf{f}(x)}{dx} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \quad x \in M_f,$$

și o nouă mulțime de puncte din D , în care aceasta se anulează:

$$N_f = \{x \mid x \in D, J_f(x) = 0\}. \quad (25)$$

Se spune că aplicația $\mathbf{f}(x)$ este nedegenerată dacă mulțimile M_f și N_f definite prin relațiile (24), și (25)

sunt disjuncte, respectiv:

$$M_f \cap N_f = \phi.$$

În aceste condiții, se definește *grad topologic* un număr P întreg, atașat funcției $f(x)$ pe domeniul D , și care se calculează astfel:

$$P(f, D) = \sum_{x \in M_f} \text{sign}(J_f(x)). \quad (26)$$

În cazul în care domeniul D conține un singur punct de echilibru, atunci gradul topologic al lui $f(x)$ coincide cu indicele Poincaré asociat acestui punct singular. Gradul topologic extinde noțiunea de indice Poincaré la spațiu n – dimensional (\mathbb{R}^n), și domenii D care conțin mai multe puncte de echilibru. Proprietățile gradului topologic:

1. Gradul topologic este o aplicație continuă, cu valori întregi determinate de numărul și tipul punctelor de echilibru din orice domeniul convex D ;
2. Dacă $f(x) \neq 0, \forall x \in D$, atunci $P(f, D) = 0$; Reciproca nu este adevărată;
3. Dacă $P(f, D) \neq 0$, atunci există cel puțin un punct $x^* \in D$, pentru care $f(x) = 0$;
4. Dacă $D_1 \subset D$ și $M_f \subset D$, atunci $P(f, D) = P(f, D_1)$;
5. Dacă $D = D_1 \cup D_2$ și $D_1 \cap D_2 = \phi$, atunci $P(f, D) = P(f, D_1) + P(f, D_2)$.

Example 3 Să se determine gradul topologic al sistemul neliniar definit în exemplul (Ex. 01).

Pentru realizarea de fază definită în relația (20) mulțimea punctelor de echilibru M_f definită în relația (24), este:

$$M_f = \{x_{ech_1}, x_{ech_2}, x_{ech_3}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pentru a determina mulțimea N_f definită în relația (25), mai întâi se calculează:

$$\begin{aligned} J_f(x) &= \det \left(\frac{d\mathbf{f}(x)}{dx} \right) = \det(\mathbf{J}(x)) = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2(1 - 12x_1^2(t) - x_2(t)) & -2(0.4 + x_1(t)) \end{vmatrix} = \\ &= 2(12x_1^2(t) + x_2(t) - 1). \end{aligned}$$

Mulțimea N_f este:

$$N_f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 12x_1^2(t) + x_2(t) - 1 = 0 \right\},$$

și se constată că $M_f \cap N_f = \emptyset$. În acest caz modul de calcul al gradului topologic este cel precizat în SNS

relația (26) și în cazul exemplului studiat este:

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{f}, \mathbb{R}^2) &= \sum_{x \in M_f} \text{sign}(J_f(x)) = \\
 &= \text{sign}\left(J_f(x)|_{x_{ech_1}}\right) + \text{sign}\left(J_f(x)|_{x_{ech_2}}\right) + \text{sign}\left(J_f(x)|_{x_{ech_3}}\right) = \\
 &= -1 + 1 + 1 = 1. \quad \triangleleft
 \end{aligned}$$

Example 4 Să se determine gradul topologic al sistemul neliniar care descrie procesele dinamice libere din osciatoarele electronice, descrise prin ecuația lui Van der Pol (21).

Petru realizarea de fază definită în relația (22) mulțimea punctelor de echilibru M_f definită în relația (24), este:

$$M_f = \{x_{ech_1}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

În acest caz:

$$J_f(x) = \det \left(\frac{d\mathbf{f}(x)}{dx} \right) = \det(\mathbf{J}(x)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu(1 - x_1^2) \end{vmatrix} = 1,$$

și gradului topologic este:

$$P(\mathbf{f}, \mathbb{R}^2) = \sum_{x \in M_f} \text{sign}(J_f(x)) = \text{sign}(J_f(x)|_{x_{ech_1}}) = 1. \triangleleft$$

Example 5 (Ex. 02) Să se determine gradul topologic al sistemul neliniar al cărui dinamică liberă este descrisă prin următoarea ecuație diferențială:

$$\ddot{x}(t) + (a + b\dot{x}^2(t)) \dot{x}(t) + x(t) + cx^2(t) = 0. \quad (27)$$

Realizarea de stare a acestui sistem se obține prin alegerea variabilelor de stare ca și variabile de fază, pe baza schemei Kelvin prezentată în figura 1, respectiv $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}(t) = x_2(t)$. Sistemul prezentat în relația (27) se rescrie astfel:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) - cx_1^2(t) - ax_2(t) - bx_2^3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x(t)). \quad (28)$$

Punctele de echilibru se determină prin rezolvarea ecuației algebrice neliniare definită în relația (16), și în acest caz rezultă două puncte de echilibru:

$$x_{ech_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{ech_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} \\ 0 \end{pmatrix},$$

repectiv mulțimea M_f definită în relația (24), este:

$$M_f = \{x_{ech_1}, x_{ech_2}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Matricea Jacobian $\mathbf{J}(x)$, care are următoarea expresie matematică:

$$\mathbf{J}(x) = \frac{d\mathbf{f}(x)}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + 2cx_1(t)) & -(a + 3bx_2^2(t)) \end{pmatrix},$$

respectiv:

$$\begin{aligned} J_f(x) &= \det \left(\frac{d\mathbf{f}(x)}{dx} \right) = \det(\mathbf{J}(x)) = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + 2cx_1(t)) & -(a + 3bx_2^2(t)) \end{vmatrix} = \\ &= 1 + 2cx_1(t). \end{aligned}$$

Mulțimea N_f este:

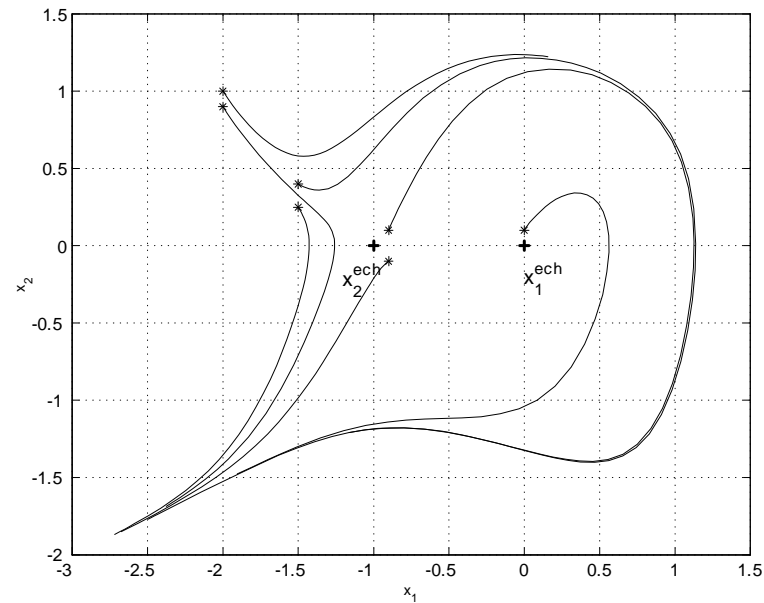
$$N_f = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2c} \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \forall x_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

și se constată că $M_f \cap N_f = \phi$. În acest caz modul de calcul al gradului topologic este cel precizat în

relația (26) și în cazul exemplului studiat este:

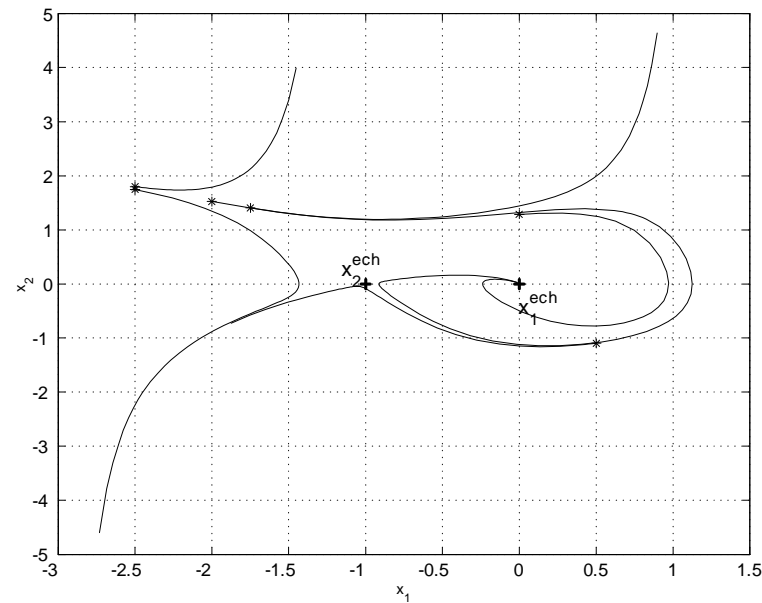
$$\begin{aligned} P(\mathbf{f}, \mathbb{R}^2) &= \sum_{x \in M_f} \text{sign}(J_f(x)) = \\ &= \text{sign}\left(J_f(x)|_{x_{ech_1}}\right) + \text{sign}\left(J_f(x)|_{x_{ech_2}}\right) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

În figura 11 se prezintă portretul de fază al sistemului, obținut prin modelare numerică, utilizând metoda Runge-Kutta pentru integrarea sistemului prezentat în relația (28), pentru $a = -1.5$, $b = 1$ și $c = 1$. În acest caz se constată prezența unui *focar instabil* în origine și a unui punct de tip *șa* în $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



11. Traiectoriile de fază ale sistemului din exemplul *Ex. 02*, pentru $a = -1.5$, $b = 1$ și $c = 1$

Portretul de fază al sistemului cu $a = +1.5$, $b = -1$ și $c = 1$ este prezentat în figura 12, iar în acest caz în origine există un *focar stabil* și un punct de tip *șa* în $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Prin analiza valorilor proprii ale matricei Jacobiene în punctul de echilibru din origine $x_{ech_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se constată că acesta este (nod sau focar) stabil dacă $a > 0$ și instabil dacă $a < 0$. \triangleleft



12. Traiectoriile de fază ale sistemului din exemplul *Ex. 02*, pentru $a = +1.5$, $b = -1$ și $c = 1$

4.3 Criterii pentru determinarea existenței ciclurilor limită în plan

Analiza ciclurilor limită ale sistemelor neliniare prezintă un considerabil interes practic prin aceea că existența ciclurilor limită stabile evidențiază oscilații libere, întreținute, fenomen care în egală măsură prezintă aplicații practice (cazul oscilatoarelor neliniare), cât și situații de excepție care trebuie evitate (înstabilități ale sistemelor automate neliniare).

În continuare se prezintă câteva criterii cu ajutorul cărora se poate studia existența sau inexistența unui ciclu limită într-un domeniu D_C mărginit de o curbă închisă C .

Criteriul lui Poincaré

În interiorul domeniului D_C nu există nici un ciclu limită dacă are loc una din următoarele afirmații:

- $P(f, D) = 0$, respectiv nu există nici un punct singular în D_C ;
- există un punct singular, dar $P(f, D) \neq 1$ (de exemplu există un punct singular de tip șa);
- există mai multe puncte singulare, dar nici o combinație nu dă $P(f, D) = 1$. \triangleleft

Criteriul negativ a lui Bendixson

În interiorul domeniului D_C nu există nici un ciclu limită dacă pe frontiera C

$$\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \text{ are semn constant. } \triangleleft \quad (29)$$

Acest criteriu rezultă punând în evidență panta traiectoriilor libere pentru sistemul al cărui descriere este dată de ecuațiile (15), respectiv:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1(t), x_2(t))}{f_1(x_1(t), x_2(t))},$$

sau, dacă pentru orice traiectorie liberă a sistemului este îndeplinită următoarea condiție:

$$f_1(x_1, x_2) dx_2 - f_2(x_1, x_2) dx_1 = 0. \quad (30)$$

Se presupune că există un ciclu limită în domeniul D_C , și se consideră ciclul limită frontiera C a domeniului D_C , atunci din (30) rezultă:

$$\oint_C (f_1(x_1, x_2) dx_2 - f_2(x_1, x_2) dx_1) = 0.$$

Prin trecere de la integrala pe contur la integrala pe domeniul D_C se obține:

$$\iint_{D_C} \left(\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = 0. \quad (31)$$

Mărimea de sub integrala dublă are semn constant și valoarea integralei nu poate fi nulă. Din această contradicție rezultă demonstrația criteriului enunțat.

În cazul variabilelor de fază cu semnificație cunoscută din mecanică (poziție, viteză, accelerație), un ciclu limită nu poate exista într-un domeniu D_C în care suma dintre "viteză" și "accelerație" nu schimbă de semn sau nu este identic nulă.

Prin aplicarea acestui criteriu la sistemul prezentat în *Ex. 02*, rezultă:

$$\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 - a - 3bx_2^2(t),$$

ceea ce implică că sistemul poate avea un ciclu limită, dacă a și b au semne contrare.

Criteriul lui Bendixson

Dacă toate traectoriile intră într-un domeniu $D_{C_1C_2}$, mărginit de contururile simple și închise C_1 , C_2 care nu au puncte comune, atât din exterior prin conturul închis C_1 , cât și din interior prin al doilea contur închis C_2 , și dacă în $D_{C_1C_2}$ există o traiectorie singulară, aceasta reprezintă un *ciclu limită stabil*. Dacă sensul traectoriilor se inversează, atunci *ciclul limită este instabil*. \triangleleft

Aplicarea acestui criteriu în cazul sistemului prezentat în exemplul (*Ex. 02*), cazul ($a = +1.5, b = -1$ și $c = 1$) pune în evidență existența unui ciclu limită instabil, după cum se observă și din portretul de fază al sistemului prezentat în figura 12.

În teoria și practica sistemelor de ordinul al doilea o importanță deosebită prezintă *ecuația lui Lié-nard*:

$$\ddot{x}(t) + g(x)\dot{x} + h(x) = 0, \quad (32)$$

pentru care se formează funcțiile integrale:

$$F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi, \quad H(x) = \int_0^x h(\xi) d\xi.$$

Cu aceste funcții ecuația (32) se rescrie sub forma următorului sistem de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) - F(x) \\ \dot{y}(t) = -h(x) \end{cases} \quad (33)$$

pentru care în continuare se pun în evidență câteva proprietăți cu ajutorul unor teoreme cunoscute în literatura de specialitate [?].

Theorem 1 (Draghilev) Dacă:

1. *$h(x)$ îndeplinește condițiile lui Lipschitz și $xh(x) > 0$ pentru $x \neq 0$, iar $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) \rightarrow \infty$;*
2. *$G(x)$ este o funcție univocă pentru $x \in (-\infty, +\infty)$ și pentru orice interval finit îndeplinește condițiile lui Lipschitz, în plus pentru orice x suficient de mic $xG(x) < 0$;*

3. *Există numerele M , k_1 și $k_2 > k_1$, toate pozitive, astfel încât:*

$$G(x) \geq k_1, \text{ pentru } x > M,$$

$$G(x) \geq k_2, \text{ pentru } x < -M;$$

atunci ecuația (32) admite un singur ciclu limită.

Această teoremă se verifică în cazul sistemului descris prin ecuația lui Van der Pol (21), considerând:

$$\begin{aligned} g(x) &= -\mu(1 - x^2(t)), \quad h(x) = x(t), \quad \text{cu } \mu > 0, \\ G(x) &= -\mu\left(x(t) - \frac{x^3(t)}{3}\right), \quad H(x) = \frac{x^2(t)}{2}, \end{aligned}$$

și în consecință sistemul considerat admite un ciclu limită.

Theorem 2 (Levinson și Smith) Dacă:

1. $h(x)$ este o funcție impară cu $h(x) > 0$ pentru $x > 0$;
2. $G(x)$ este o funcție impară și există un x_0 astfel încât $G(x) < 0$ pe intervalul $[0, x_0]$ și $F(x) \geq 0$ crește monoton pentru $x \geq x_0$;

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} H(x) \rightarrow \infty;$

4. $g(x), h(x)$ *îndeplinesc condițiile lui Lipschitz pe orice interval finit;*

atunci ecuația (32) admite un singur ciclu limită.

Se verifică ușor că aceste condiții sunt îndeplinite de ecuația Van der Pol.

Teoremele de existență a ciclurilor limită în plan (pentru ecuația (32)) prezintă o importanță practică deosebită, deoarece acestea dau cele mai consistente informații cu privire la portretul de stare al sistemelor neliniare de ordinul al doilea, prezentate prin relațiile (23).

5 Metode de trasare ale traectoriilor de stare

Ca metode mai reprezentative, se pot menționa metodele grafo-analitice, cum sunt metoda izoclinilor, metoda cercurilor, metoda triunghiurilor, metoda lui Liénard, metoda transformărilor punctuale etc. În continuare este prezentată o metodă de integrare numerică și anume metoda Runge-Kutta cu ajutorul căreia au fost obținute portretele de stare ale sistemelor prezentate.

5.1 Metode de integrare numerică de tip Runge-Kutta

Metodele de integrare de tip Runge-Kutta fac parte din metodele de integrare numerică într-un pas, care este subdivizat printr-un număr de puncte egal cu ordinul fiecărei metode. Pentru utilizarea acestor metode de integrare numerică, trebuie ca ecuația diferențială (de ordinul n) să fie rescrisă ca un sistem de n ecuații diferențiale în care fiecare ecuație diferențială să fie de ordinul întâi (acesta este întotdeauna posibilă prin alegerea variabilelor de stare ca și variabile de fază pe baza schemei Kelvin prezentate în figura 1).

Se consideră ecuația diferențială vectorială și condițiile inițiale:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{f}(t, x(t)), \quad x_0 = x(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Soluția aproximativă a sistemului de ecuații diferențiale la un moment de timp t_{k+1} se caută sub

forma:

$$x_{k+1} = F(t_k, x_k, h) = x_k + \sum_{i=1}^{n_p} \gamma_i^{(p)} s_i h, \quad (35)$$

unde $h = t_{k+1} - t_k$ este pasul de integrare (constant sau variabil), iar:

$$\begin{aligned} s_1 &= \mathbf{f}(t_k, x_k), \\ s_i &= \mathbf{f}\left(t_k + h\alpha_i^{(p)}, x_k + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}^{(p)} s_j\right), \quad i = 1, 2, \dots, n_p, \end{aligned} \quad (36)$$

sunt coeficienți vectoriali care se calculează o singură dată la fiecare pas de integrare.

Coeficienții scalari $\alpha_i^{(p)}$, $\beta_{ij}^{(p)}$, $\gamma_i^{(p)}$ din relațiile (35) și (36) se calculează astfel încât termenii din dezvoltarea în serie Taylor după puterile lui h ai funcției F (35) să coincidă cu același număr de termeni din dezvoltarea soluției exacte $x(t_k + h)$ după puterile lui h . O metodă de tip Runge-Kutta are ordinul p , dacă numărul de termeni care coincid în cele două dezvoltări este egal cu p . Relațiile de determinare ale coeficienților $\alpha_i^{(p)}$, $\beta_{ij}^{(p)}$, $\gamma_i^{(p)}$ pentru p dat nu sunt unice și de aceea există o mare varietate de metode de tip Runge-Kutta de același ordin. Indiferent de ordinul metodei, pentru determinarea soluției x_{k+1} este suficient să fie cunoscută soluția x_k și funcția vectorială $\mathbf{f}(t, x)$.

În continuare este expusă o variantă a metodelor Runge-Kutta de ordinul doi ($p = 2$) și ordinul trei ($p = 3$). Relațiile de calcul pentru cele două metode de tip Runge-Kutta, de ordinul doi și trei coincid și

sunt următoarele:

$$\begin{aligned}t_k &= t_k + h, \\x_k &= x_k + h * (s_1 + 4 * s_3 + s_2) / 6,\end{aligned}$$

unde:

$$\begin{aligned}s_1 &= \mathbf{f}(t_k, y_k), \\s_2 &= \mathbf{f}(t_k + h, y_k + h * s_1), \\s_3 &= \mathbf{f}(t_k + h/2, y_k + h * (s_1 + s_2) / 4).\end{aligned}$$

se calculează o singură dată la fiecare iterație.

Pasul de integrare se alege suficient de mic, astfel încât erorile de aproximare să nu fie prea mari, dar nici prea mici, deoarece cresc erorile de reprezentare și implicit volumul de calcul. Pasul de integrare a fost ales ca și în lucrarea [?], respectiv:

$$h = \min \left\{ h_M, 0.9 * h * \left(\frac{\eta}{\delta} \right)^{1/3} \right\},$$

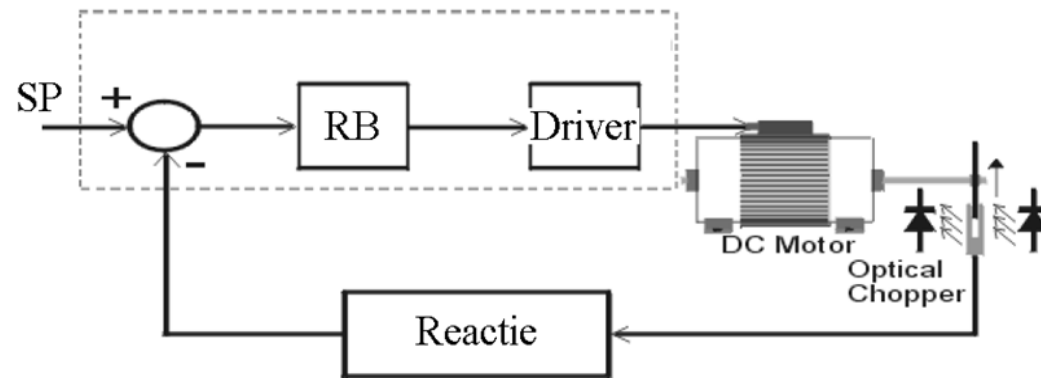
unde:

$$\begin{aligned}\delta &= \|(h * (s_1 - 2 * s_3 + s_2) / 3)\|_{\infty}, \\ \eta &= \varepsilon_1 * \max \{ \|x_k\|_{\infty}, 1 \},\end{aligned}$$

și h_M reprezintă pasul de integrare maxim admisibil.

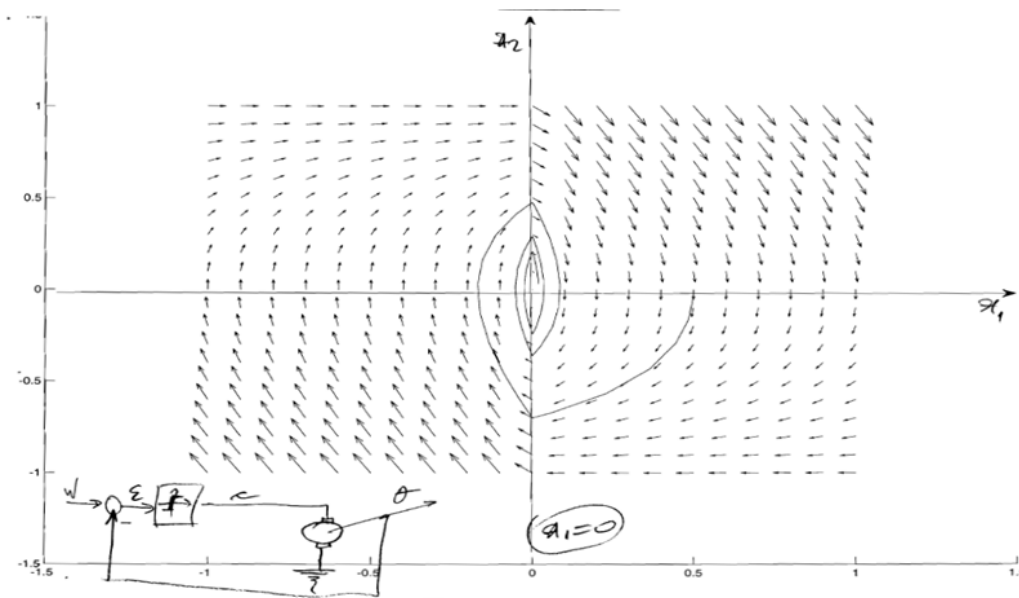
6 Sisteme de Control cu Moduri alunectoare (SMC)

6.1 Planul fazelor pt. sisteme in comutatie

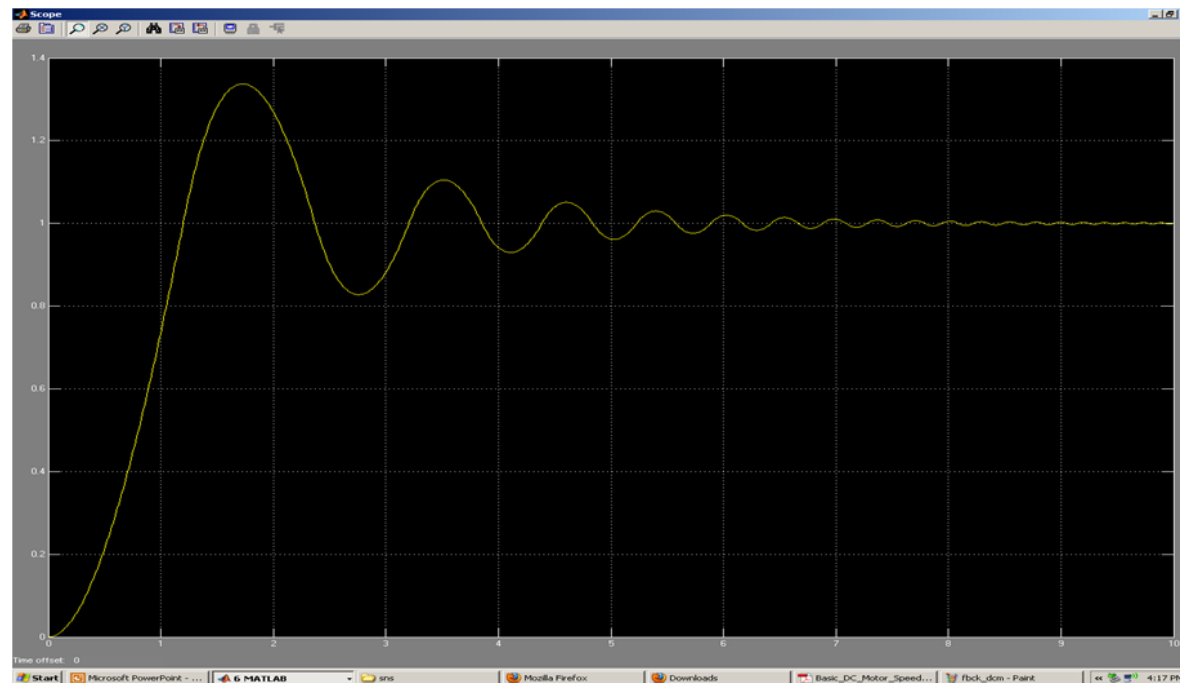


13. Controlul unui DCM cu ajutorul sistemelor în comutație

6.1.1 RB fara histerezis

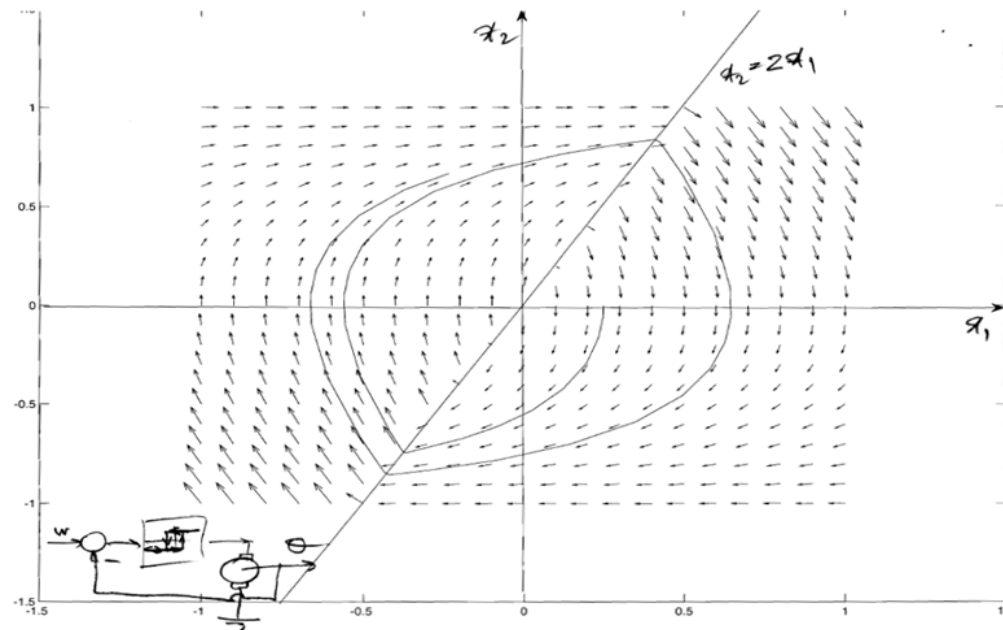


14. Controlu DCM cu un RB fara histerezis (portret de fază)

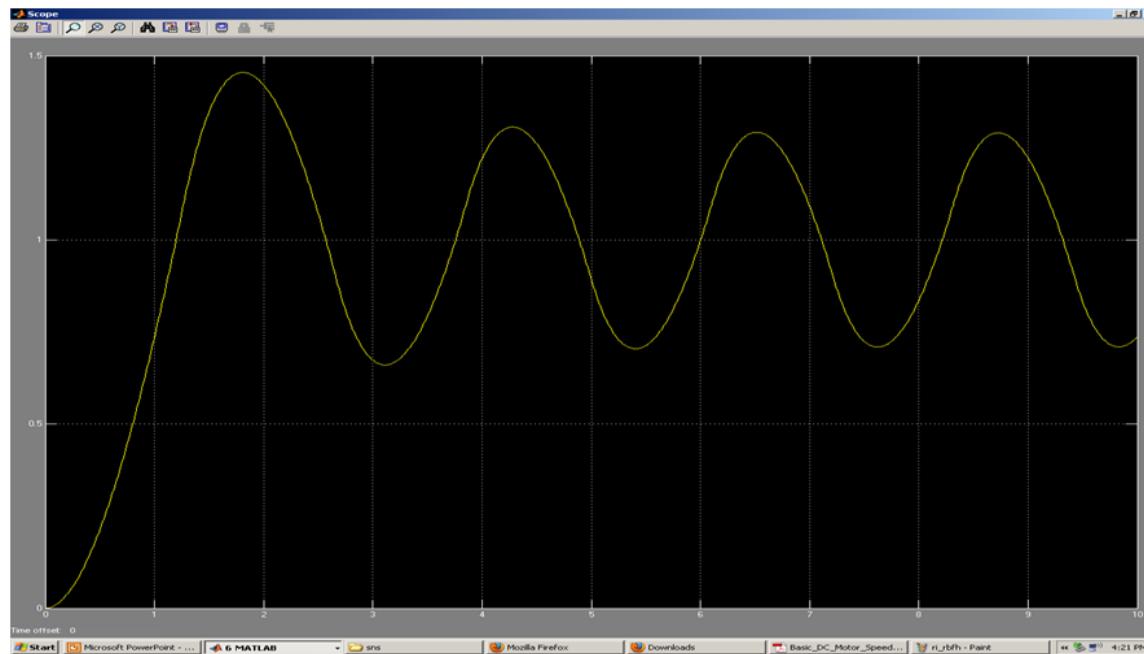


15. Raspunsul indicial in cazul controlului DCM cu ajutorul unui RB fara histerezis

6.1.2 RB cu histerezis



16. Controlu DCM cu un RB cu histerezis (portret de fază)



17. Raspunsul indicial in cazul controlului DCM cu ajutorul unui RB cu histerezis

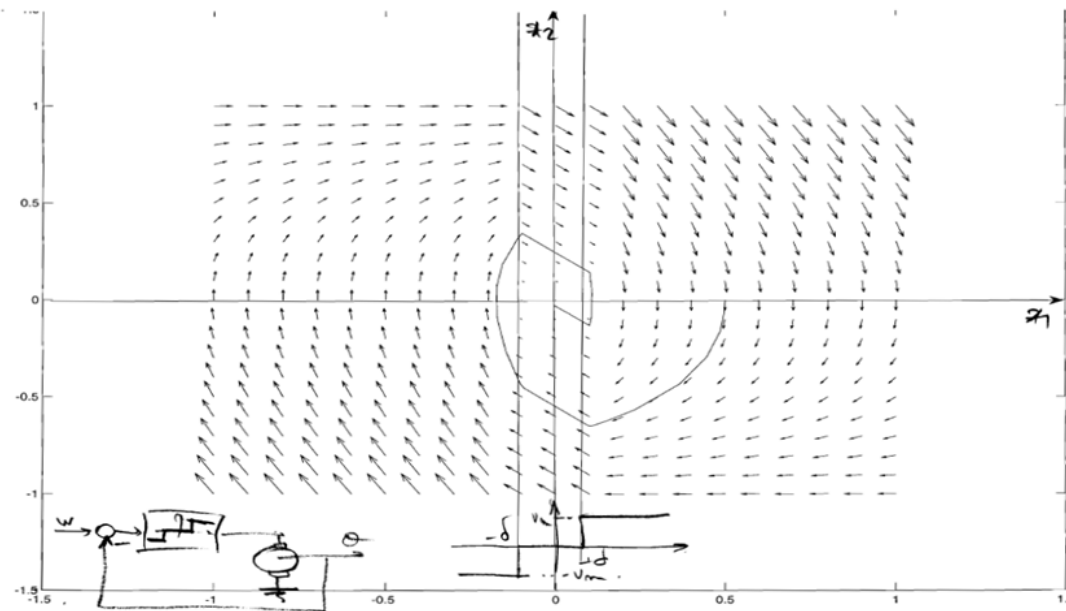
6.1.3 RT fara histerezis

7 Concluzii

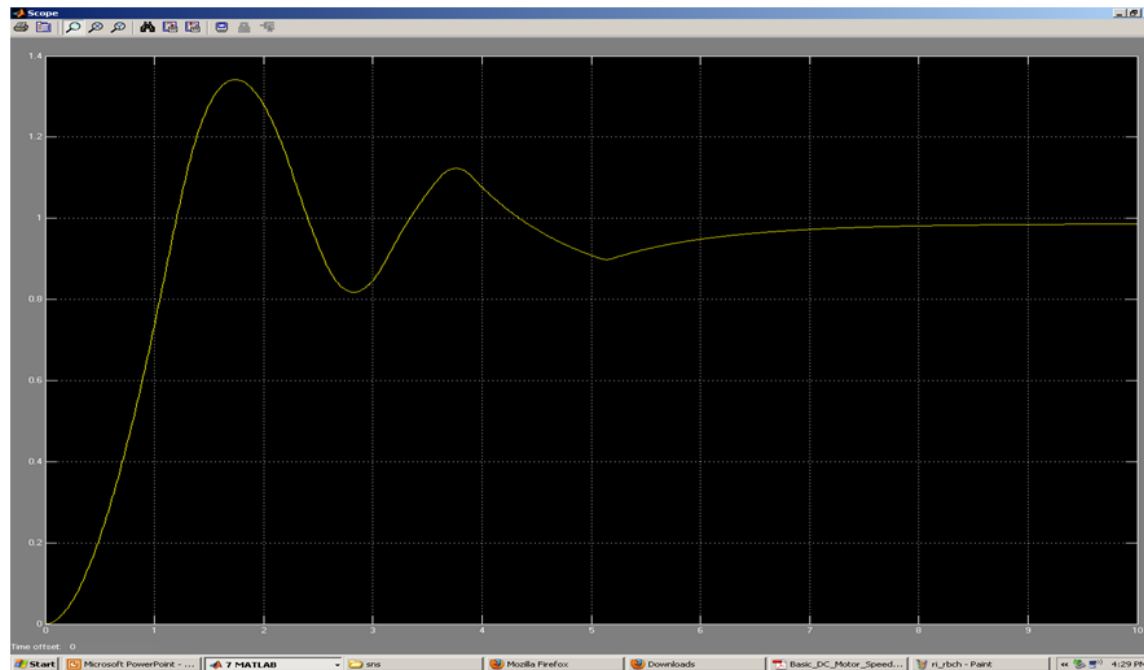
În acest capitol a fost prezentată o posibilitate de analiză a sistemelor liniare și neliniare prin localizarea singularităților în spațiul stărilor. Această analiză are un caracter global în cazul sistemelor liniare și un caracter local în cazul sistemelor neliniare.

Expunerea teoretică a fost însoțită de câteva exemple reprezentative preluate din literatura de specialitate și care au fost efectiv interpretate geometric prin modelare numerică utilizând metoda Runge-Kutta prezentată.

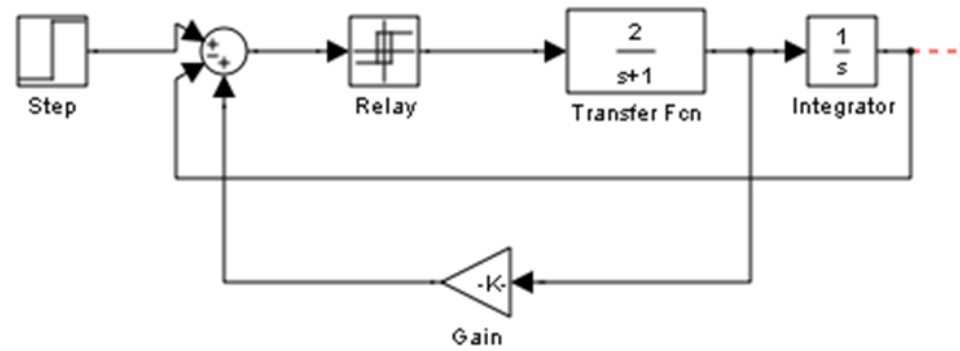
În analiza sistemelor neliniare (de ordinul al doilea) o importanță deosebită o are gradul topologic asociat sistemului în stabilirea existenței unui ciclu limită.



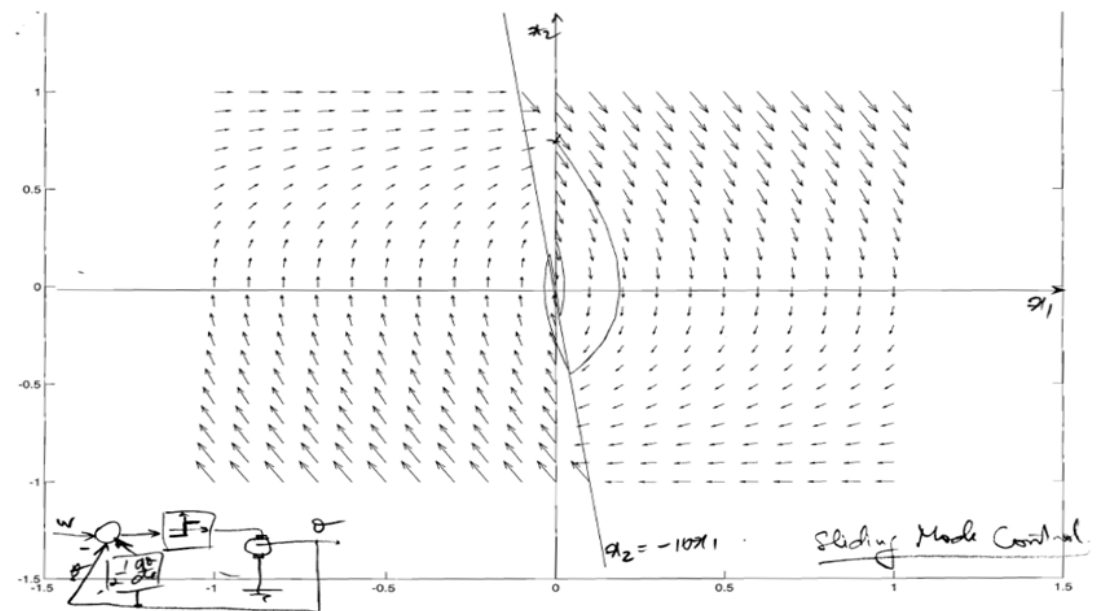
18. Controlu DCM cu un RT fara histerezis (portret de fază)



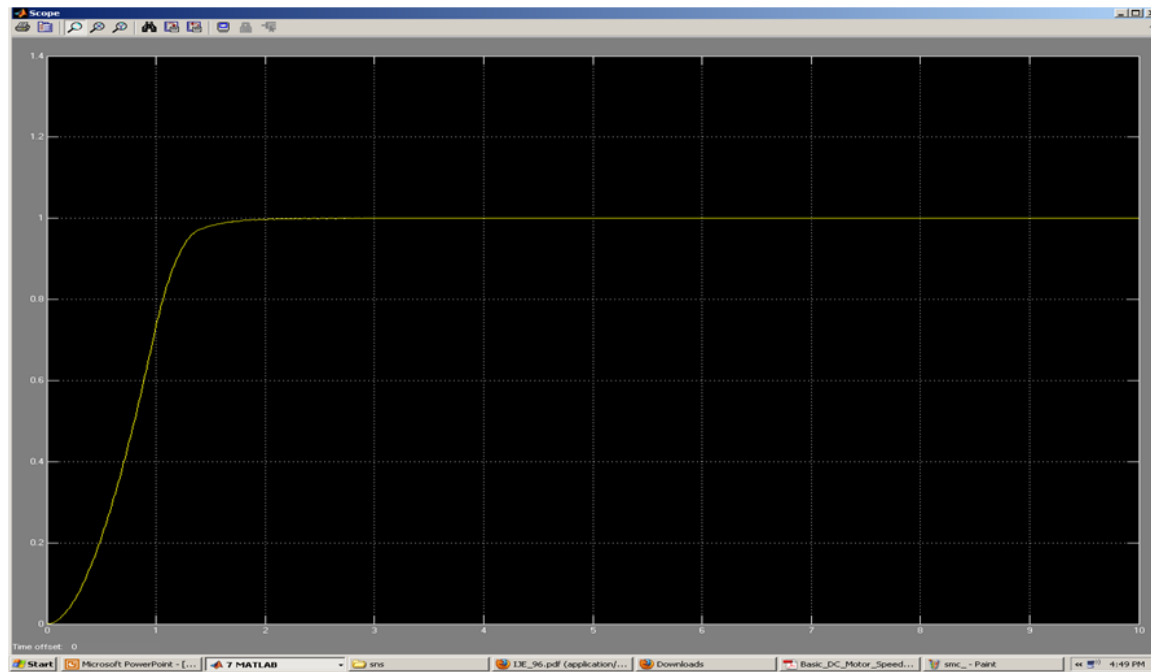
19. Raspunsul indicial in cazul controlului DCM cu ajutorul unui RT fara histerezis



20.SMC



21.SMC portret de faza



22.Raspuns indical SMC