# Liniarizarea armonică a sistemelor neliniare

P. Dobra

# 1 Liniarizarea armonică a sistemelor neliniare

În acest capitol se prezintă câteva metode pentru analiza aproximativă a sistemelor neliniare care au o largă utilitate practică. Soluţia analitică a ecuaţiei diferenţiale (neliniare) care descrie un sistem neliniar este imposibil (în cele mai multe cazuri) de determinat. Aceste metode de analiză aproximativă care au o largă utilitate practică se pot grupa în trei categorii:

1. *Metoda bazată pe funcţia de descriere* constă în înlocuirea elementului neliniar dintr-un sistem cu o aproximaţie liniară care să poată fi utilizată în analiza şi/sau sinteza sistemului în ansamblu (care se efectuează în domeniul frecvenţial). Utilitatea acestei metode este în stabilirea existenţei şi stabilităţii ciclurilor limită şi în evitarea fenomenelor de rezonanţă.
2. *Metode numerice de modelare* a sistemelor neliniare care fac apel la metodele de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale neliniare, dintre care metoda Runge-Kutta a fost prezentată în capitolul anterior.
3. *Metoda perturbaţiei singulare* este în special utilizată în analiza sistemelor în care includerea sau excluderea unei componente particulare modifică structura (ordinul)

sistemului (De exemplu , într-un amplificator, luarea în considerare a capacităţii parazite, determină creşterea cu o unitate a ordinului modelului). Acestă metodă poate fi înlocuită print-o *modelare nestructurată a incertitudinilor* (sisteme robuste), care va fi tratată pe larg înt-un capitol următor.

Elementele neliniare care apar în cadrul sistemelor de reglare automată se pot împărţi în două categorii:

1. *Elementele neliniare esenţiale* care sunt introduse deliberat într-un sistem automat;

2. *Elementele neliniare neesenţile* care apar în mod accidental într-un sistem.

Un element neliniar esenţial se introduce în mod deliberat în cadrul unui sistem, cu scopul de a realiza o comportare intrare-ieşire $(u/y)$ dorită, de exemplu elementele de tip releu (bipoziţional/tripoziţional cu/fără histerezis). Caracteristica statică a elementelor de tip releu este prezentată în figura 1.*a*.
Elementele neliniare neesenţiale au de obicei un caracter natural şi este de dorit ca ele să nu apară în cadrul sistemelor de reglare automată. Liniarizarea acestor elemente, în general nu conduc la neconcordanţe prea mari între teorie şi practică. Dintre neliniarităţile neesenţiale pot fi amintite următoarele: saturaţia, zona de insensibilitate,

jocul în angrenaje (luft), frecarea uscată şi histerezisul (mecanic, termic sau magnetic). Caracteristicile statice a acestor elemente sunt prezentate în figura 1.*b*÷*g*.

# 2 Metoda bazată pe funcţia de descriere

Metoda bazată pe funcţia de descriere este o metodă de liniarizare în domeniul frecvenţă a elementelor neliniare. Această metodă se aplică în special în cazul neliniarităţilor descrise prin funcţii discontinue (figura 1), pentru care liniarizarea prin dezvoltare în serie Taylor este inoperantă.

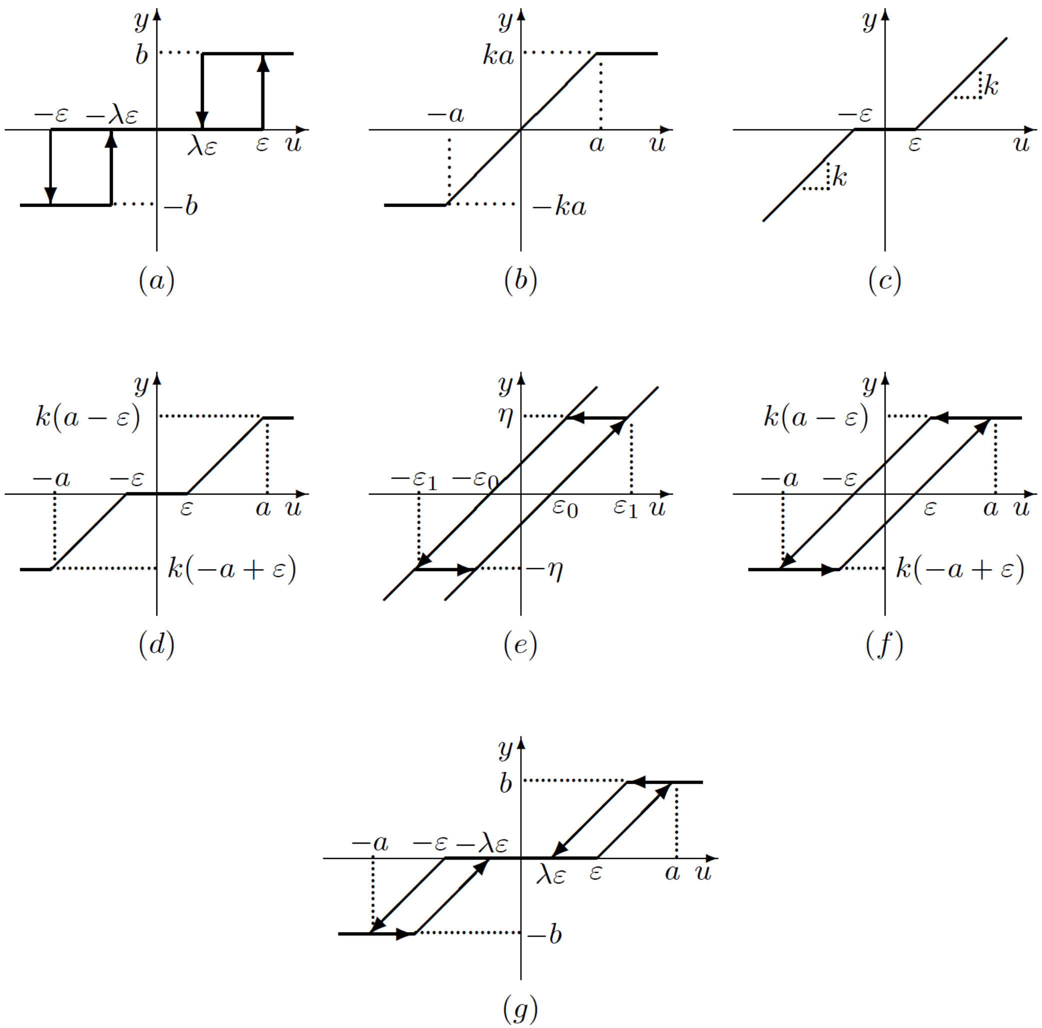
## 2.1 Definiţia funcţiei de descriere

Elementele neliniare pentru care se defineşte funcţia de descriere sunt cu o intrare şi o ieşire şi prezintă următoarele caracteristici:

1. Relaţia $(u/y)$ are următoarea formă:

$$y(t) = f(u(t)), \tag{1}$$

   unde $f$ este o funcţie continuă şi monotonă pe porţiuni, univalentă sau polivalentă, având discontinuităţi de cel mult prima speţă;




1.Caracteristicile statice ale elementelor neliniare de tip: (a) releu; (b) saturaţie; (c) zonă de insensibilitate; (d) zonă de insensibilitate şi saturaţie; (e) joc mecanic (luft); (f) histerezis şi saturaţie; (g) zonă de insensibilitate, histerezis şi saturaţie

2. neliniaritatea $(1)$ este simetrică faţă de originea planului $(u,\ y)$;
3. Dacă intrarea $u\,(t)$ este periodică în timp, atunci şi ieşirea $y\,(t)$ este periodică, de aceeaşi perioadă ca şi intrarea;
4. În cadrul sistemului, elementul neliniar este urmat de un element liniar $(SISO)$, care are caracteristica de modul (diagramele Bode) de tip filtru trece-jos, cu o pantă de cel puţin $-40\ dB/decad\breve{a}$ în zona pulsaţiei de tăiere.

Ipotezele prezentate mai sus sunt satisfăcute în majoritatea aplicaţiilor practice. În cazul în care aceste ipoteze nu sunt îndeplinite în totalitate, trebuie să fie luate în considerare şi armonicile de ordin superior.
Se consideră un sistem continuu în timp care îndeplineşte ipotezele $1 \div 4$, şi pentru care se consideră o intrare sinusoidală:

$$u\,(t) = A \sin\left(\Omega t\right),\ A \geq 0,\ \Omega \geq 0, \tag{2}$$

şi $t$ reprezintă variabila timp.
Pentru semnalul de ieşire $y(t)$ care face parte din clasa semnalelor periodice $(S_P\,[T])$,

analiza Fourier constă în reprezentarea lui $y(t)$ prin:

$$y(t)=\frac{C_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k\cos\left(k\Omega t\right)+S_k\sin\left(k\Omega t\right)\right), \tag{3}$$

respectiv o sumă ponderată de semnale periodice elementare, de perioadă $T$. În relaţia $(3)$ $\frac{C_0}{2}$ se numeşte componenta continuă sau valoarea medie, $\Omega$ se numeşte frecvenţa fundamentală, iar frecvenţele de forma $k\Omega,\ k\geq 2$, se numesc frecvenţe armonice. Întrucât frecvenţa unghiulară a unei componente este $k\Omega,\ k\geq 2$, se spune că în $(3)$ componentele constituie armonicele semnalului fundamental de frecvenţă $\Omega$. Reprezentarea $(3)$ constituie *forma trigonometrică I a seriei Fourier*. *Coeficienţii Fourier* se calculează prin relaţiile:

$$\begin{aligned}
C_k &= \frac{2}{T}\int_0^T y\left(\tau\right)\cos\left(k\Omega\tau\right)d\tau,\ \ k\in\mathbb{N},\\
S_k &= \frac{2}{T}\int_0^T y\left(\tau\right)\sin\left(k\Omega\tau\right)d\tau,\ \ k\in\mathbb{N}^*,
\end{aligned}$$

unde $\{C_k\}$ reprezintă mulţimea coeficienţilor Fourier în fază, iar $\{S_k\}$ în cuadratură.

În baza ipotezelor $1 \div 3$ îndeplinite rezultă $C_0 = 0$ şi dacă ipoteza $4$ este îndeplinită, atunci se poate considera că semnalul de ieşire este bine aproximat reţinând numai fundamentala din seria Fourier $(3)$, respectiv:

$$y\left(t\right) \simeq C_1 \cos\left(\Omega t\right) + S_1 \sin\left(\Omega t\right) = Y_1 \sin\left(\Omega t + \varphi_1\right),$$

unde:

$$Y_1 = \sqrt{C_1^2 + S_1^2}, \quad \varphi_1 = \arctan\left(\frac{C_1}{S_1}\right).$$

Efectele neliniarităţii asupra semnalului de intrare sinusoidal sunt:

1. Amplificarea semnalului de intrare cu:

$$\frac{Y_1}{A} = \frac{\sqrt{C_1^2 + S_1^2}}{A};$$

2. Defazarea semnalului de intrare cu:

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{C_1}{S_1}\right).$$

Prin analogie cu răspunsul în frecvenţă al sistemelor continue se defineşte *funcţia de descriere*:

$$N\left(A\right)=\left|N\left(A\right)\right|e^{j\varphi_1}=\frac{\sqrt{C_1^2+S_1^2}}{A}e^{j\arctan\left(\frac{C_1}{S_1}\right)}. \tag{4}$$

O reprezentare echivalentă a funcţiei de descriere corespunzătoare neliniarităţii definite în relaţia $(1)$, în care se pune în evidenţă partea reală, respectiv imaginară, este:

$$\begin{aligned}N\left(A\right) &= N_R\left(A\right)+N_I\left(A\right)=\frac{S_1+jC_1}{A}= \\ &= \frac{2}{T}\int_0^T f\left(A\sin\left(\Omega t\right)\right)\left(\sin\left(\Omega t\right)+j\cos\left(\Omega t\right)\right)d\left(\Omega t\right)= \\ &= \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f\left(A\sin\left(\vartheta\right)\right)\left(\sin\left(\vartheta\right)+j\cos\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta.\end{aligned} \tag{5}$$

Funcţia astfel definită se mai numeşte şi *funcţia de descriere la o singură intrare (sau intrare sinusoidală)*[1] $(SIDF)$ şi se referă la cazul particular în care intrarea are un

[1] Single-Input (or Sinusoidal Input) Describing Function $(SIDF)$

singur termen. În cazul în care semnalul de intrare are forma:

$$u(t) = A_0 + A_1 \sin(\Omega t),$$

vom avea *funcţia de descriere la intrare duală*[2] $(DIDF)$. În acest caz semnalul de ieşire se aproximează prin:

$$\begin{aligned} y(t) &\backsimeq \frac{C_0}{2} + C_1 \cos(\Omega t) + S_1 \sin(\Omega t) = \\ &= Y_0 + Y_1 \sin(\Omega t + \varphi_1), \end{aligned}$$

unde:

$$Y_0 = \frac{C_0}{2}, \quad Y_1 = \sqrt{C_1^2 + S_1^2}, \quad \varphi_1 = \arctan\left(\frac{C_1}{S_1}\right).$$

Funcţia de descriere la intrare duală are două componente:

$$N_0(A) = \frac{Y_0}{A}, \quad N_1(A) = \frac{Y_1}{A} e^{j\varphi_1}, \tag{6}$$

care se calculează astfel:

[2] Dual-Input Describing Function $(DIDF)$

$$N_0\left(A_0, A_1\right) = \frac{1}{2\pi A_0}\int_0^{2\pi} f\left(A_0 + A_1\sin\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta, \tag{7}$$

$$N_1\left(A_0, A_1\right) = \frac{1}{\pi A_1}\int_0^{2\pi} f\left(A_0 + A_1\sin\left(\vartheta\right)\right)\left(\sin\left(\vartheta\right) + j\cos\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta. \tag{8}$$

Componenta $N_0\left(A_0, A_1\right)$ este în totdeauna o funcţie reală, pe când $N_1\left(A_0, A_1\right)$ poate să fie reală sau complexă. Componenta $N_1\left(A_0, A_1\right)$, respectiv $(SIDF)$ este reală numai în cazul în care neliniaritatea $(1)$ este simplă (univalentă). În cazul în care neliniaritatea $(1)$ este bivalentă şi are următoarea descriere:

$$f\left(u\right) = \begin{cases} f_+\left(u\right), & \text{pentru } \dot{u}\left(t\right) > 0, \\ f_-\left(u\right), & \text{pentru } \dot{u}\left(t\right) < 0, \end{cases}$$

se obţine:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(N_1\left(A_0, A_1\right)\right) &= \frac{1}{\pi A_1} \int_0^{2\pi} f\left(A_0 + A_1 \sin\left(\vartheta\right)\right) \cos\left(\vartheta\right) d\vartheta \bigg|_{\nu = A_1 \sin(\vartheta)} = \\ &= \frac{1}{\pi A_1^2} \int_{-A_1}^{A_1} \left\{f_+\left(A_0 + \nu\right) - f_+\left(A_0 + \nu\right)\right\} d\nu = \frac{\pm \mathcal{S}}{\pi A_1^2}.\end{aligned} \quad (9)$$

unde $\mathcal{S}$ este aria cuprinsă între graficele funcţiilor $f_+\left(u\right)$ şi $f_-\left(u\right)$, iar semnul plus, respectiv minus este în corespondenţă cu sensul de parcurgere al curbei orar, respectiv trigonometric.

În mod evident formularea prezentată poate fi generalizată, prin reţinerea a mai multor termeni din seria Fourier $(3)$ şi definind *funcţia de descriere la mai multe intrări*[3] $(MIDF)$. O variantă a $MIDF$ este *funcţia de descriere matricială*, obţinută prin trunchierea unei matrici formate din vectori care conţin coeficienţii Fourier ai semnalelor de intrare, respectiv de ieşire.

În practică se utilizează *funcţia de descriere invers negativă*, care are următoarea ex-

[3] Multiple-Input Describing Function $(MIDF)$

primare:

$$N_i(A) = -\frac{1}{N(A)}, \quad A > 0,$$

al cărei hodograf se numeşte *locul de descriere invers negativ* al elementului neliniar defint în relatia $(1)$.

*Example 1 (RTH) Caracteristica statică a elementului de tip releu, prezentată în figura 1.a are următoarele particularizări:*

*(a) Releu bipoziţional pentru* $\lambda = 1$ *şi* $\varepsilon = 0$*;*
*(b) Releu bipoziţional cu histerezis pentru* $\lambda = -1$ *şi* $\varepsilon > 0$*;*
*(c) Releu tripoziţional pentru* $\lambda = 1$ *şi* $\varepsilon > 0$*;*
*(d) Releu tripoziţional cu histerezis pentru* $|\lambda| < 1$ *şi* $\varepsilon > 0$*.*

*Se cere să se determine funcţia de descriere la intrare sinusoidală şi locul de descriere invers negativ al acestor neliniarităţi.*

Partea reală a funcţiei de descriere la intrare sinusoidală este:

$$N_R(A) = \frac{2}{\pi A}\int_0^{\pi} y(t)\sin(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{2}{\pi A}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} b\sin(\vartheta)\,d\vartheta\Bigg|_{\substack{\sin(\vartheta_1)=\frac{\varepsilon}{A}\\ \sin(\vartheta_2)=\lambda\frac{\varepsilon}{A}}} =$$

$$= \frac{2b}{\pi A}\left(\cos(\vartheta_1) - \cos(\vartheta_2)\right)\Bigg|_{\substack{\sin(\vartheta_1)=\frac{\varepsilon}{A}\\ \sin(\vartheta_2)=\lambda\frac{\varepsilon}{A}}} =$$

$$= \frac{2b}{\pi A}\left(\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\lambda\frac{\varepsilon}{A}\right)^2}\right), \quad A \geq \varepsilon.$$

Partea imaginară a funcţiei de descriere la intrare sinusoidală este dată în relaţia $(9)$, respectiv:

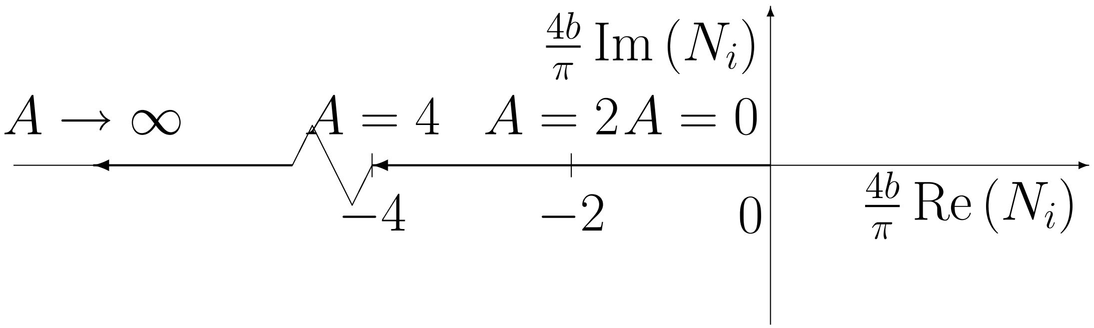
$$N_I(A) = -(1-\lambda)\frac{2\varepsilon b}{\pi A^2}, \quad A \geq \varepsilon.$$

În cazul particularizărilor considerate rezultă funcţia de descriere $N(A)$, respectiv funcţia de descriere invers negativă $N_i(A)$:

1.(a) *Releu bipoziţional pentru $\lambda = 1$ şi $\varepsilon = 0$:*

$$N(A) = \frac{4b}{\pi A}, \quad N_i(A) = -\frac{\pi A}{4b}, \quad A > 0;$$

Locul de descriere invers negativ este prezentat în figura 2.



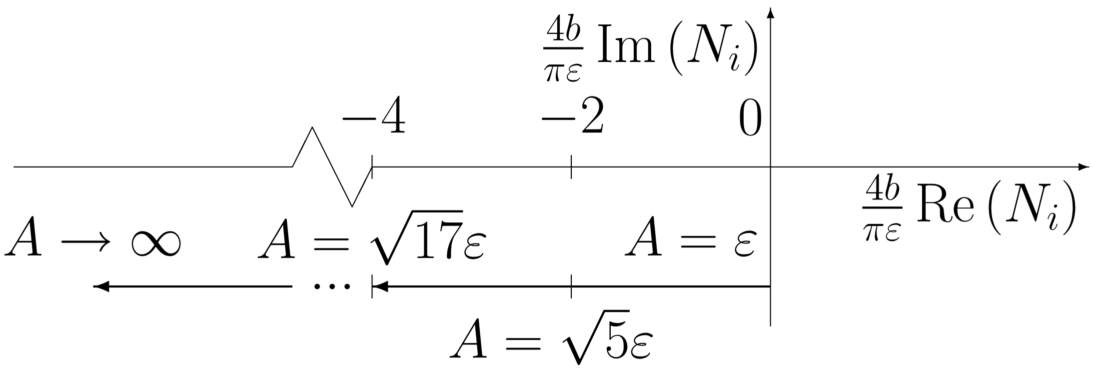

2.Locul de descriere invers negativ al releului bipoziţional fără histerezis

(b) *Releu bipoziţional cu histerezis pentru* $\lambda = -1$ *şi* $\varepsilon > 0$*:*

$$N(A) = \frac{4\varepsilon b}{\pi A^2}\left(\sqrt{\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^2 - 1} - j\right),$$

$$N_i(A) = -\frac{\pi\varepsilon}{4b}\left(\sqrt{\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^2 - 1} + j\right), \quad A \geq \varepsilon;$$

Locul de descriere invers negativ este prezentat în figura 3.



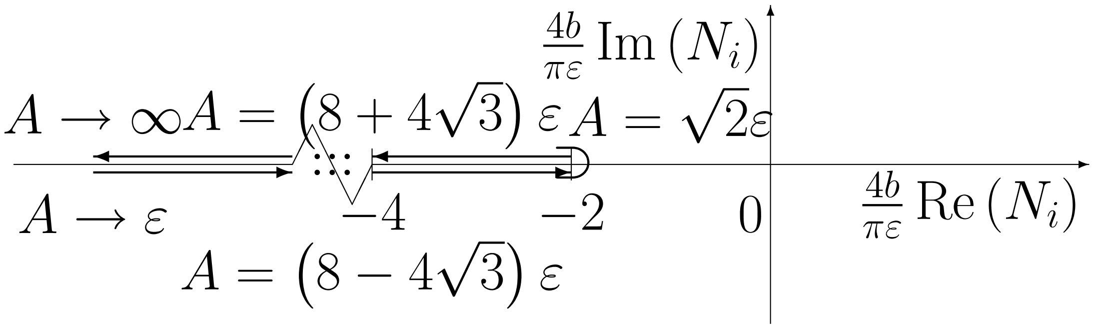

3.Locul de descriere invers negativ al releului bipoziţional cu histerezis

(c) *Releu tripoziţional pentru* $\lambda = 1$ ***şi*** $\varepsilon > 0$*:*

$$N(A) = \frac{4\varepsilon b}{\pi A^2}\sqrt{\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^2 - 1},$$

$$N_i(A) = -\frac{\pi A^2}{4\varepsilon b}\left(\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad A > \varepsilon;$$

Locul de descriere invers negativ este prezentat în figura 4.




4.Locul de descriere invers negativ al releului tripoziţional fără histerezis

(d) *Releu tripoziţional cu histerezis pentru* $|\lambda| < 1$ *şi* $\varepsilon > 0$*:*

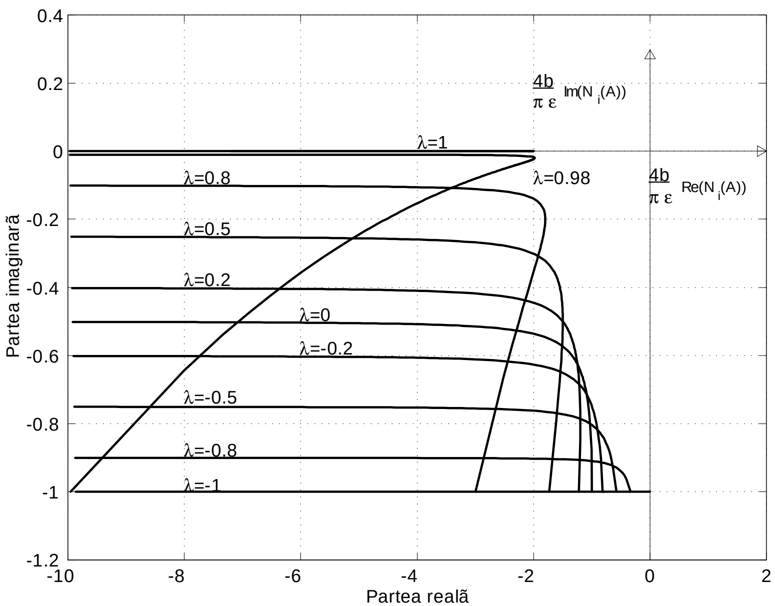
$$N(A) = \frac{2\varepsilon b}{\pi A^2}\left(\sqrt{\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^2 - 1} + \sqrt{\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^2 - \lambda^2} - j(1-\lambda)\right),$$

$$N_i(A) = -\frac{\pi A^2}{4\varepsilon b}\frac{\sqrt{\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^2 - 1} + \sqrt{\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^2 - \lambda^2} + j(1-\lambda)}{\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^2 - \lambda + \sqrt{\left(\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^2 - 1\right)\left(\left(\frac{A}{\varepsilon}\right)^2 - \lambda^2\right)}},$$

$$A \geq \varepsilon.$$

Locul de descriere invers negativ este prezentat în figura 5. $\triangleleft$

*Remark 1 Se observă că în cazul neliniarităţilor de tip releu bipoziţional (fără/cu histerezis) partea imaginară a locului de descriere invers negativ are o valoare unică (figurile 2 şi 3) în raport cu amplitutinea semnalului sinusoidal de intrare, pe când în cazul neliniarităţilor de tip releu tripoziţional (cu/fără histerezis) partea imaginară a locului de descriere invers negativ nu este unică (figurile 4 şi 5 cu excepţia cazului* $\lambda = -1$*) în raport cu amplitutinea semnalului sinusoidal de intrare.*




5.Locul de transfer invers negativ pentru releul tripoziţional cu histerezis

*Remark 2 În cazul neliniarităţilor univalente (de tip releu bi- tri- poziţional fără histerezis) partea imaginară a locului de descriere invers negativ este egală cu zero (figurile 2, 4 şi în figura 5 pentru $\lambda = 1$), pe când în cazul neliniarităţilor bivalente (de tip releu bi- tri- poziţional cu histerezis) partea imaginară a locului de descriere invers negativ este diferită de zero (figurile 3 şi 5 pentru $\lambda \neq 1$).*

*Example 2 (ElSat) Să se determine funcţia de descriere la intrare sinusoidală a elementului neliniar de tip saturaţie, a cărui caracteristică statică este prezentată în figura 1.b, (se consideră $k = 1$).*

Partea reală a funcţiei de descriere la intrare sinusoidală este:

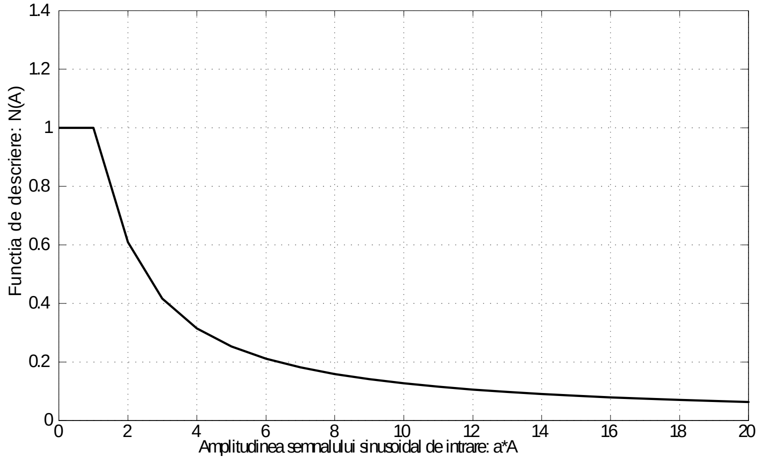
$$
\begin{aligned}
N_R(A) &= \frac{2}{\pi A}\int_0^{\pi} y(t)\sin(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{4}{\pi A}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\sin(\vartheta)\,d\vartheta = \\
&= \frac{4}{\pi A}\int_0^{\vartheta_1} A\sin(\vartheta)\sin(\vartheta)\,d\vartheta\Bigg|_{\sin(\vartheta_1)=\frac{a}{A}} +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{4}{\pi A}\int_{\vartheta_1}^{\frac{\pi}{2}} a\sin(\vartheta)\, d\vartheta\Bigg|_{\sin(\vartheta_1)=\frac{a}{A}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\left(\vartheta-\frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\right)\Bigg|_0^{\vartheta_1} + \frac{4a}{\pi A}\left(\cos(\vartheta)\right)\Big|_0^{\vartheta_1} = \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\left(\frac{a}{A}\right)-\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right)+\frac{4a}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2} = \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\left(\frac{a}{A}\right)+\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right), \quad A \geq a.
\end{aligned}$$

Partea imaginară a funcţiei de descriere la intrare sinusoidală este nulă, deoarece neliniaritatea este univalentă, $N_I(A) = 0$.
Funcţia de descriere la intrare sinusoidală a elementului neliniar de tip saturaţie este:

$$N(A) = \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\left(\frac{a}{A}\right)+\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right), \quad A \geq a,$$




6.Funcţia de descriere a elementului neliniar de tip saturaţie la intrare sinusoidală

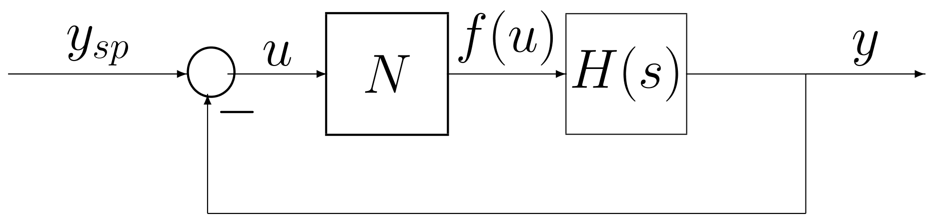
şi are reprezentarea grafică în raport cu amplitudinea semnalului de intrare de tip sinus, în figura 6. $\triangleleft$

Pentru celelalte neliniarităţi a căror caracteristici statice sunt prezentate în figurile 1.$c \div g$, se pot calcula în mod similar funcţiile de descriere, iar locurile de descriere invers negative au reprezentări şi interpretări similare cazului prezentat în exemplul ($RTH$). Detalii suplimentare se găsesc în [?].

## 2.2 Oscilaţii în sisteme cu reacţie negativă

Una dintre principalele aplicaţii ale funcţiei de descriere este determinarea existenţei ciclurilor limită în cadrul sistemelor neliniare cu reacţie negativă. Majoritatea aplicaţiilor practice îndeplinesc *ipoteza separabilităţii*, respectiv în cadrul sistemului partea neliniară poate să fie separată (structural) de partea neliniară.

Ţinând seama de analogiile dintre răspunsul în frecvenţă (sisteme liniare) şi de funcţia de descriere (sisteme neliniare), sistemele automate neliniare pot fi tratate în aceeaşi manieră ca şi sistemele automate liniare. Sistemul de reglare automată neliniar este descompus structural în două subsisteme, unul neliniar şi celălalt liniar. Schema bloc structurală a unui asemenea sistem automat neliniar cu o intrare şi o ieşire este prezentată în figura 7.




7.Structura unui sistem neliniar cu reacţie negativă

Se presupune că partea liniară îndeplineşte *ipoteza 4* de la definirea funcţiei de descriere şi în plus mai satisface următoarele ipoteze:

1. Partea liniară este stabilă $\mathrm{Re}\{\hat{s}_k\} \leq 0$ şi are cel mult un pol în origine;
2. Modurile necontrolabile, respectiv neobservabile, sunt asimptotic stabile.

Dacă în sistemul neliniar cu reacţie negativă (figura 7) există un ciclu limită, atunci semnalul $u(t)$ poate fi aproximat printr-un semnal sinusoidal cu componentă continuă, respectiv:

$$u(t) \backsimeq U_0 + U_1 \sin(\omega t),$$

şi în mod corespunzător:

$$f(u) \backsimeq N_0 U_0 + (\mathrm{Re}(N_1)) U_1 \sin(\omega t) + (\mathrm{Im}(N_1)) U_1 \cos(\omega t),$$

unde $N_0$ şi $N_1$ sunt componentele funcţiei de descriere la intrări duale $(DIDF)$. În domeniul complex, această ultimă relaţie se scrie astfel:

$$f(u) \backsimeq N_0 U_0 + \left(\mathrm{Im}\left(N_1 e^{j\omega t}\right)\right) U_1.$$

Ieşirea sistemului în regim staţionar este:

$$y \backsimeq H(0) N_0 U_0 + \left(\mathrm{Im}\left(H(j\omega) N_1 e^{j\omega t}\right)\right) U_1,$$

şi ţinând seama de reacţia negativă:

$$u = y_{sp} - y,$$

rezultă:

$$\begin{aligned} y_{sp} &= \left(1 + H(0)\, N_0\right) U_0, && (10)\\ 0 &= 1 + \mathrm{Re}\left(H(j\omega)\, N_1\right), && (11)\\ 0 &= \mathrm{Im}\left(H(j\omega)\, N_1\right), && (12) \end{aligned}$$

unde $U_1 \neq 0$ (condiţie necesară de existenţă a oscilaţiilor). Prin scrierea componentelor funcţiei de descriere în raport cu $U_0$ şi $U_1$, relaţia $(10)$ se rescrie astfel:

$$H(0) = \frac{1}{N_0(U_0, U_1)} \left(\frac{y_{sp}}{U_0} - 1\right), \qquad (13)$$

în care necunoscutele sunt numai $U_0$ şi $U_1$. Relaţiile $(11)$, $(12)$ pot fi rescrise în domeniul complex printr-o singură relaţie:

$$H(j\omega) = \frac{-1}{N_1(U_0, U_1)}, \qquad (14)$$

cunoscută sub denumirea de *ecuaţia balanţei armonice*, şi care pune în evidenţă o dependenţă între $U_0$, $U_1$ şi $\omega$. În cazul în care neliniaritatea este univalentă, rezultă partea imaginară a componentei $N_1$ din funcţia de descriere egală cu zero, şi în consecinţă:

$$\mathrm{Im}\left(H\left(j\omega\right)\right) = 0,$$

ceea ce permite determinarea pulsaţiei independent de $U_0$, $U_1$. Interpretarea geometrică a relaţiei $(14)$ este foarte simplă în planul complex, prin reprezentarea celor două hodografe asociate răspunsului în frecvenţă pentru partea liniară $\left(H\left(s\right)\right)$, respectiv a locului de descriere invers negativ $\left(\frac{-1}{N_1(U_0,U_1)}\right)$. Intersecţiile celor două locuri de transfer corespund soluţiilor ecuaţiei balanţei armonice $(14)$.
Din ecuaţia $(13)$ rezultă stabilirea unei relaţii între $U_0$ şi $U_1$, respectiv:

$$U_0 = F\left(U_1\right),$$

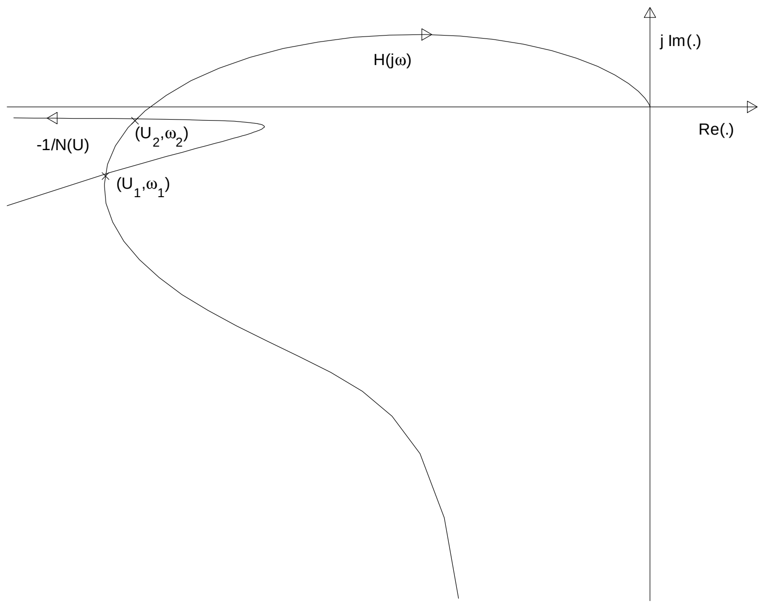
care prin înlocuire în componenta $N_1$ a funcţiei de descriere la intrări duale, permite definirea următoarei funcţii:

$$N\left(U_1\right) \triangleq N_1\left(F\left(U_1\right), U_1\right).$$

Ecuaţia balanţei armonice $(14)$ se rescrie astfel:

$$H\left(j\omega\right) = \frac{-1}{N\left(U_1\right)}, \tag{15}$$

unde $N\left(U_1\right)$ coincide cu funcţia de descriere la intrări sinusoidale, când neliniaritatea este simetrică faţă de origine şi mărimea de referinţă este nulă $(y_{sp} = 0)$.
Interpretarea geometrică a relaţiei $(EBA)$ în cazul sistemului neliniar cu reacţie negativă din figura 7 se face în planul complex, unde se trasează locul de transfer al subsistemului liniar $(H\left(s\right))$ pentru $\omega \geq 0$ şi locul de descriere invers negativ al elementului neliniar $\frac{-1}{N(U_1)}$ pentru $U_1 \geq 0$. Punctele de intersecţie a celor două locuri corespund oscilaţiilor întreţinute ale sistemului neliniar cu reacţie negativă. Această metodă este cunoscută sub denumirea de metoda celor două locuri şi este ilustrată în figura 8.
Din figura 8 se constată că există două puncte de intersecţie între cele două locuri de transfer şi în consecinţă există două cicluri limită caracterizate de $(U_1, \omega_1)$, respectiv $(U_2, \omega_2)$. $U_i$, $i \in \{1, 2\}$ reprezintă amplitudinile oscilaţiilor, care se citesc de pe hodograful corepunzător locului de descriere invers negativ $\frac{-1}{N(U_1)}$ şi $\omega_i$, $i \in \{1, 2\}$ reprezintă pulsaţiile celor două oscilaţii, care se citesc de pe hodograful corespunzător funcţiei de transfer $H\left(s\right)$. În continuare se pune problema stabilităţii acestor cicluri limită.




8.Interpretarea geometrică a metodei celor două locuri

## 2.3 Stabilitatea ciclurilor limită

Caracterizarea ciclurilor limită din punct de vedere al stabilităţii necesită un studiu mai aprofundat care să permită stabilirea parametrilor oscilaţiilor întreţinute. O oscilaţie întreţinută se caracterizează prin amplitudinea ei $(U_{osc})$, respectiv perioada oscilaţiei $\left(T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_{osc}}\right)$. O perturbare a acestei oscilaţii are ca efect variaţia amplitudinii cu $\Delta U$, respectiv a pulsaţiei cu $\Delta\omega$.

În acest caz ecuaţia balanţei armonice $(15)$, se rescrie astfel:

$$H\left(j\omega_{osc}+\Delta s\right)=\frac{-1}{N\left(U_{osc}+\Delta U\right)}, \tag{16}$$

unde $\Delta s = j\Delta\omega$ şi $\mathrm{Re}\left\{\Delta s\right\}$ stabileşte amortizarea (creşterea sau descreşterea). Pentru perturbaţii relativ mici ecuaţia balanţei armonice $(16)$, se poate rescrie astfel:

$$\left.\frac{\partial H\left(s\right)}{\partial s}\right|_{s=j\omega_{osc}}\Delta s=\left.\frac{\partial\left(\frac{-1}{N(U)}\right)}{\partial U}\right|_{U_{osc}}\Delta U. \tag{17}$$

Prima parte a ecuaţiei $(17)$ este:

$$\left.\frac{\partial H\left(s\right)}{\partial s}\right|_{s=j\omega_{osc}}\Delta s=\left.\frac{\partial H\left(s\right)}{\partial\omega}\frac{d\omega}{ds}\right|_{s=j\omega_{osc}}\Delta s=-j\left.\frac{\partial H\left(j\omega\right)}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_{osc}}\Delta s, \tag{18}$$

şi prin combinare cu relaţia $(17)$ rezultă:

$$\frac{\Delta s}{\Delta U} = j \left. \frac{\partial \left( \frac{-1}{N(U)} \right)}{\partial U} \right|_{U_{osc}} \left( \left. \frac{\partial H\left(j\omega\right)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{osc}} \right)^{-1} . \tag{19}$$

Pentru oscilaţii stabile (ciclu limită stabil) trebuie ca $\mathrm{Re}\left\{\Delta s\right\}$ şi $\Delta U$ să fie de semn contrar, respectiv deviaţii pozitive sau negative ale amplitudinii determină oscilaţii amortizate în amplitudine.
Se definesc următoarele mărimi complexe:

$$\Phi = \left. \frac{\partial H\left(j\omega\right)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{osc}} , \tag{20}$$

care reprezintă direcţia în lungul căreia creşte cantitatea $H\left(j\omega\right)$ pentru $\omega$ crescător, respectiv:

$$\Psi = \left.\frac{\partial\left(\frac{-1}{N(U)}\right)}{\partial U}\right|_{U_{osc}}, \tag{21}$$

care reprezintă direcţia în lungul căreia creşte cantitatea $\frac{-1}{N(U)}$ pentru $U$ crescător. Cu aceste notaţii partea reală a relaţiei $(19)$ se scrie astfel:

$$\frac{\mathrm{Re}\{\Delta s\}}{\Delta U} = -\,\mathrm{Im}\left\{\frac{\Psi}{\Phi}\right\}, \tag{22}$$

şi cu ajutorul căreia se poate stabili natura ciculului limită. Ciclul limită este stabil dacă:

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\Psi}{\Phi}\right\} > 0, \tag{23}$$

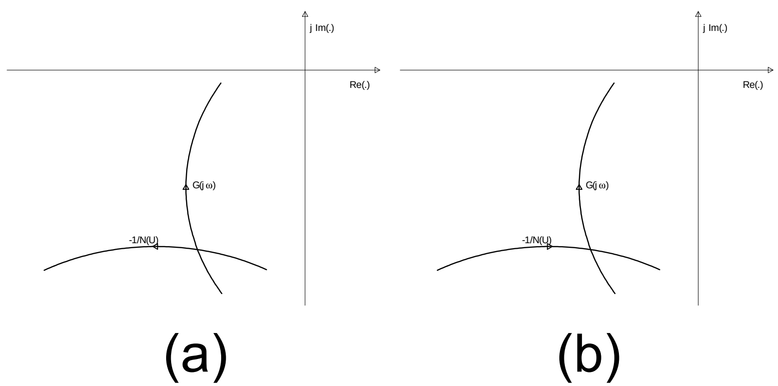
sau echivalent:

$$0 < \angle\Psi - \angle\Phi < \pi. \tag{24}$$

Această metodă de stabilire a naturii ciclurilor limită este cunoscută sub denumirea de

*metoda lui Loeb* şi are o interpretare geometrică foarte sugestivă în planul complex, prin reprezentarea celor două locuri de transfer.
Ciclul limită caracterizat prin perechea $(U_{osc} > 0, \omega_{osc} > 0)$ este:

- *stabil*, dacă pornind din punctul de intersecţie a celor două locuri pe hodograful asociat lui $H(j\omega)$ pentru $\omega$ crescător, hodograful asociat lui $N_i(U) = \frac{-1}{N(U)}$ pentru $U$ crescător rămâne la stânga, vezi figura 9.*a*;
- *instabil*, dacă pornind din punctul de intersecţie a celor două locuri pe hodograful asociat lui $H(j\omega)$ pentru $\omega$ crescător, hodograful asociat lui $N_i(U) = \frac{-1}{N(U)}$ pentru $U$ crescător rămâne la dreapta, vezi figura 9.*b*;




9.Natura ciclurilor limită: (a) ciclu limită stabil; (b) ciclu limită instabil

*Example 3 (MCDL01) Se consideră structura sistemului neliniar cu reacţie negativă prezentat în figura 7, cu neliniaritatea de tip releu bipoziţional cu histerezis având* $\varepsilon = 1$, $b = \frac{\pi}{4}$ *şi partea liniară caracterizată de funcţia de transfer:*

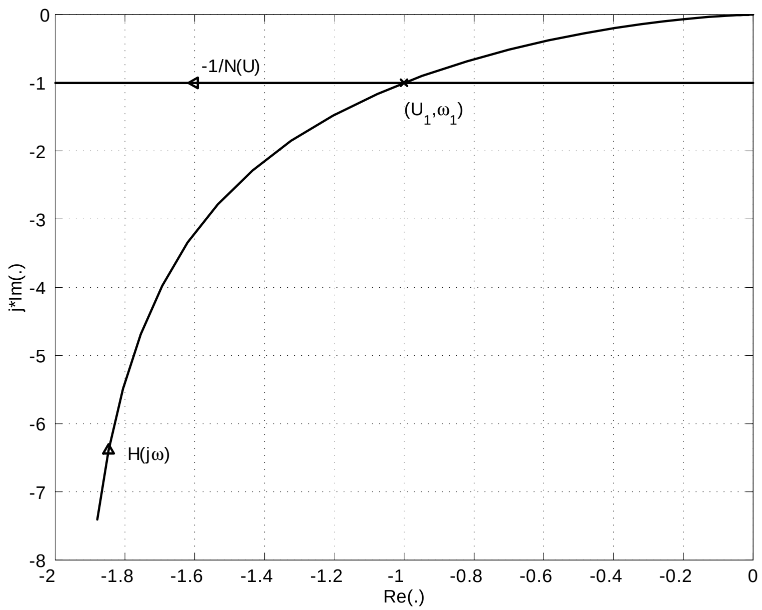
$$H(s) = \frac{2}{s(s+1)}.$$

*Se cere să se determine natura ciclului limită şi parametrii acestuia.*

Locul de transfer al părţii liniare este prezentat în diagrama Nyquist din figura 10. Funcţia de descriere invers negativă a elementului neliniar de tip releu bipoziţional cu histerezis a fost calculată în *exemplul* $(RTH.b)$ şi are următoarea expresie:

$$\begin{aligned} N_i(U) &= -\frac{1}{N(U)} = -\frac{\pi\varepsilon}{4b}\left(\sqrt{\left(\frac{U}{\varepsilon}\right)^2 - 1} + j\right)\Bigg|_{A \geq \varepsilon} = \\ &= -\left(\sqrt{U^2-1} + j\right)\Big|_{A \geq 1}. \end{aligned}$$

Locul de descriere invers negativ este prezentat în diagrama Nyquist din figura 10. Intersecţia celor două locuri determină un *ciclu limită stabil (metoda Loeb)*, ai cărui




10.Reprezentarea celor două locuri în diagrama Nyquist *(Exemplul MCDL01)*

parametri rezultă din ecuaţia balanţei armonice $(15)$, care în acest caz are următoarea exprimare:

$$\begin{cases} \frac{2}{1+\omega^2} = \sqrt{U^2 - 1}, \\ \frac{2}{\omega(1+\omega^2)} = 1. \end{cases}$$

Soluţia acceptată este:

$$(U_{osc}, \omega_{osc}) = (U_1, \omega_1) = (1,\ 1)\,.$$

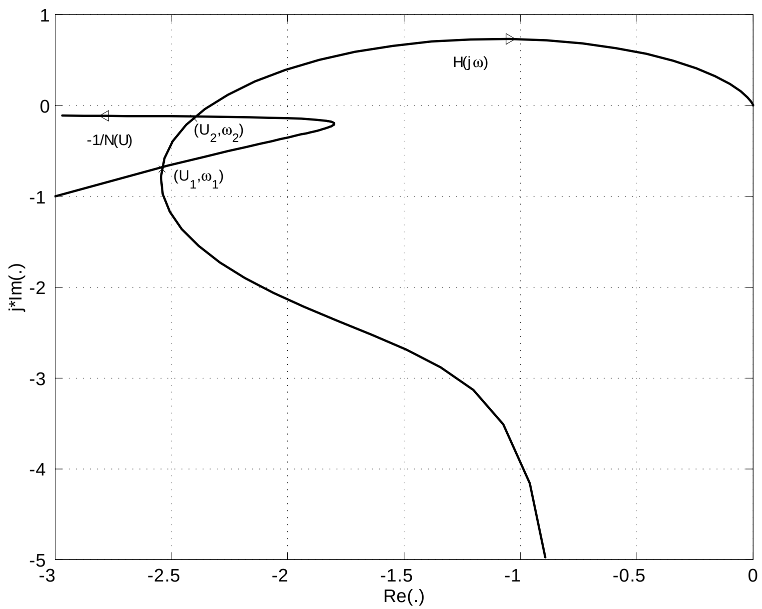
Cei doi parametri se pot citi direct din diagrama Nyquist astfel: $\omega_1$ se citeşte de pe hodograful asociat lui $H\left(j\omega\right)$, respectiv $U_1$ se citeşte de pe hodograful asociat locului de descriere invers negativ $-\frac{1}{N(U)}$. $\lhd$

*Example 4 (MCDL02) Se consideră structura sistemului neliniar cu reacţie negativă prezentat în figura 7, cu neliniaritatea de tip releu tripoziţional cu histerezis având $\varepsilon = 1$, $b = \frac{\pi}{4}$, $\lambda = 0.8$ şi partea liniară caracterizată de funcţia de transfer:*

$$H\left(s\right) = \frac{7}{s\left(s^2 + s + 3\right)}.$$

*Se cere să se determine natura ciclurilor limită şi parametrii acestora.*

Locul de transfer al părţii liniare este prezentat în diagrama Nyquist din figura 11. Funcţia de descriere invers negativă a elementului neliniar de tip releu tripoziţional cu




11.Reprezentarea celor două locuri în diagrama Nyquist *(Exemplul MCDL02)*

histerezis a fost calculată în *exemplul* $(RTH.d)$ şi are următoarea expresie:

$$N_i(U) = -\frac{\pi U^2}{4\varepsilon b}\frac{\sqrt{\left(\frac{U}{\varepsilon}\right)^2-1}+\sqrt{\left(\frac{U}{\varepsilon}\right)^2-\lambda^2}+j(1-\lambda)}{\left(\frac{U}{\varepsilon}\right)^2-\lambda+\sqrt{\left(\left(\frac{U}{\varepsilon}\right)^2-1\right)\left(\left(\frac{U}{\varepsilon}\right)^2-\lambda^2\right)}} =$$

$$= -U^2\frac{\sqrt{U^2-1}+\sqrt{U^2-0.64}+0.2j}{U^2-0.8+\sqrt{(U^2-1)(U^2-0.64)}}\Bigg|_{U\geq 1}.$$

Locul de descriere invers negativ este prezentat în diagrama Nyquist din figura 11. Intersecţia celor două locuri determină un *ciclu limită instabil* caracterizat prin:

$$(U_1, \omega_1) = (1.0088,\ 1.6034)\,,$$

respectiv un *ciclu limită stabil* caracterizat prin:

$$(U_2, \omega_2) = (2.1856,\ 1.7071)\,. \quad \triangleleft$$

### 2.3.1 Criteriul Bilharz

Ecuaţia balanţei armonice $(15)$ poate fi utilizată pentru studiul stabilităţii asimptotice pe baza localizării rădăcinilor ei în planul complex. În cazul general funcţia de transfer a subsistemului liniar din figura 7 se poate exprima ca raport de două polinoame prime între ele, respectiv:

$$H(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}. \tag{25}$$

Ecuaţia balanţei armonice $(15)$ în care se face substituţia $s = j\omega$, are aceleaşi rădăcini ca şi polinomul:

$$\Delta(s, U) = \alpha(s) + N(U)\beta(s). \tag{26}$$

În lucrarea [?] se arată că sistemul neliniar cu reacţie negativă (prezentat în figura $(7)$), este asimptotic stabil pentru orice punct de funcţionare, dacă şi numai dacă polinomul $(26)$ este *hurwitzian*[4] pentru $U > 0$.
În cazul în care neliniaritatea este univalentă şi simetrică faţă de origine $(\mathrm{Im}(N(U)) = 0)$ verificarea stabilităţii asimptotice se poate face cu ajutor criteriilor de la sisteme liniare (Hurwitz, Routh-Hurwitz etc.). În cazul neliniarităţilor multivalente $(\mathrm{Im}(N(U)) \neq 0)$ polinomul $(26)$ are coeficienţi complecşi şi poate fi exprimat astfel:

$$\Delta(s) = s^n + (\delta_{R1} + j\delta_{I1})s^{n-1} + (\delta_{R2} + j\delta_{I2})s^{n-2} + \cdots + (\delta_{Rn} + j\delta_{In}), \tag{27}$$

unde $\delta_{Rk} \in \mathbb{R}$, $\delta_{Ik} \in \mathbb{R}$, $\forall k = \overline{1,\ n}$. Cu ajutorul acestor coeficienţi reali se formează

[4] Un polinom se numeşte *hurwitzian* dacă toate zerourile sale sunt situate în semiplanul complex stâng $(\mathrm{Re}(s) < 0)$

*matricea Bilharz* de ordinul $2n$ asociată polinomului $\Delta(s)$:

$$B_{2n} = \begin{pmatrix} 1 & \delta_{I1} & -\delta_{R2} & -\delta_{I3} & \delta_{R4} & \delta_{I5} & -\delta_{R6} & -\delta_{I7} & \cdots \\ 0 & \delta_{R1} & \delta_{I2} & -\delta_{R3} & -\delta_{I4} & \delta_{R5} & \delta_{I6} & -\delta_{R7} & \cdots \\ 0 & 1 & \delta_{I1} & -\delta_{R2} & -\delta_{I3} & \delta_{R4} & \delta_{I5} & -\delta_{R6} & \cdots \\ 0 & 0 & \delta_{R1} & \delta_{I2} & -\delta_{R3} & -\delta_{I4} & \delta_{R5} & \delta_{I6} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \delta_{I1} & -\delta_{R2} & -\delta_{I3} & \delta_{R4} & \delta_{I5} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{R1} & \delta_{I2} & -\delta_{R3} & -\delta_{I4} & \delta_{R5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad (28)$$

în care $\delta_{Rk} = \delta_{Ik} = 0$ pentru $k > n$.

*Theorem 1 (Bilharz) Polinomul* $(27)$ *este hurwitzian dacă şi numai dacă*

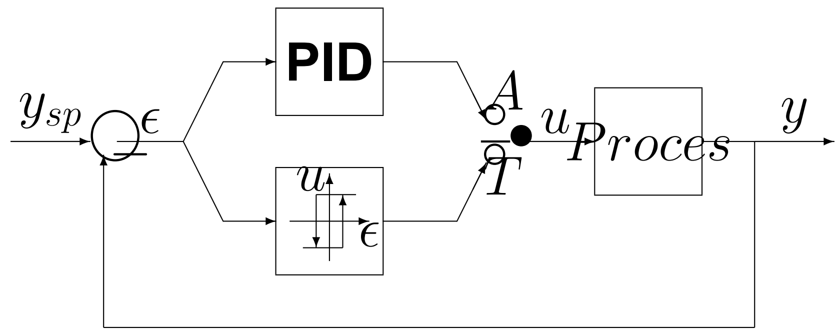
$$\det(B_{2k}) > 0, \quad \forall k = \overline{1,\ n}.$$

Această metodă se pretează la implementare pe calculator numeric.

# 3 Regulatorul PID autoacordabil

O aplicaţie practică a metodei bazate pe funcţia de descriere este cea a regulatorului $PID$ autoacordabil. Majoritatea sistemelor industriale se bazează pe regulatoare cu structură clasică de tip $PID$. Există suficient de multe metode pentru acordarea parametrilor acestor regulatoare clasice (metoda locului rădăcinilor, metoda Guillemin-Truxal, metode bazate pe răspunsul în frecvenţă, metoda Zigler-Nichols, etc.). Cea mai populară din punct de vedere practic este metoda Zigler-Nichols [?]. Această metodă de acordare a parametrilor unui regulator de tip $PID$ se bazează pe observaţia că parametrii regulatorului se pot determina din cunoaşterea unui singur punct de pe locul de transfer (din diagrama Nyquist) asociat sistemului deschis. Structura sistemului de reglare automată capabilă să estimeze parametrii acestui punct (numit *punct critic* şi care corespune intersecţiei dintre locul de transfer al sistemului liniar şi locul de descriere invers negativ al sistemului neliniar) este prezentată în figura 12. Parametrii punctului critic sunt cei ce caracterizează ciclul limită care se obţine, şi sunt amplitudinea şi perioada (frecvenţa) oscilaţiilor.

Sistemul prezentat în figura 12 are două regimuri de funcţionare în funcţie de poziţia comutatorului $k$, şi anume:




12.Structura regulatorului PID autoacordabil prin metoda releului

$(A)$ - Funcţionarea sistemului în *regim automat*, respectiv sistem de reglare automată cu regulator de tip PID;
$(T)$ - Funcţionarea sistemului în *regim de acordare*[5], respectiv sistemul fucţionează in regim de estimare a parametrilor ciclului limită (amplitudinea şi perioada (frecvenţa) oscilaţiilor).
Structura regulatorului PID este:

$$u(t) = K_p \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau)\, d\tau + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right), \tag{29}$$

unde $u$ reprezintă variabila de comandă din sistem, $\varepsilon(t) = y_{sp}(t) - y(t)$ reprezintă

[5] Tuning

## 1.Tabelul Zigler-Nichols cu parametrii de acord ai regulatoarelor de tip P, PI şi PID

| **Regulator** | $K_p$ | $T_i$ | $T_d$ |
|---|---|---|---|
| **P** | $0.5k_c$ | - | - |
| **PI** | $0.45k_c$ | $0.8T_c$ | - |
| **PID** | $0.6k_c$ | $0.5T_c$ | $0.12T_c$ |

eroarea din sistemul de reglare automată (diferenţa dintre mărimea de prescriere $(y_{sp})$ şi mărimea măsurată (ieşirea procesului $y(t)$).
Metoda Zigler-Nichols originală se bazează pe structura cu reacţie negativă a unui sistem de reglare automată liniar în care regulatorul este proporţional. Factorul de proporţionalitate al regulatorului $(K_p)$ se măreşte în mod gradat, până când se obţine limita de stabilitate, respectiv în sistem apar oscilaţii cu amplitudinea şi frecvenţa constante.
În diagrama Nyquist această limită de stabilitate corespunde intersecţiei dintre locul de transfer al sistemului deschis (liniar) şi axa reală negativă, mai exact această intersecţie are loc în punctul critic, care este $(-1,\ j0)$. Corespunzător oscilaţiilor întreţinute se reţine factorul de proporţionalitate al regulatorului, care se notează cu $k_c$ şi perioada acestora $T_c$. Pe baza acestor doi parametri (corespunzători punctului critic) în tabelul 1 se dau parametrii de acord ai regulatoarelor de tip: proporţional $(P)$, proporţional-integral $(PI)$ şi proporţional-integral-derivativ $(PID)$.
Evident că în cazul în care procesul este identificat (are funcţia de transfer cunoscută)

această metodă practică are o transcriere analitică care se deduce relativ simplu.

## 3.1 Estimarea perioadei de oscilaţie

Se presupune că procesul care se doreşte a fi reglat cu ajutorul unui regulator de tip $PID$, are următoarea realizare de stare:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{30}$$

Releul bipoziţional din structura de reglare prezentată în figura $12$, se consideră de tip bipoziţional fără histerezis, şi în consecinţă are următoarea descriere:

$$u(t) = \begin{cases} +b, & \text{dacă } \varepsilon(t) > 0, \\ -b, & \text{dacă } \varepsilon(t) < 0, \end{cases} \tag{31}$$

unde $\varepsilon(t) = y_{sp}(t) - y(t)$ reprezintă eroarea din sistem.
Sistemul prezentat în figura $12$, cu comutatorul $k$ pe poziţia $T$ $(k \leftarrow T)$ prezintă un ciclu limită simetric cu perioada de oscilaţie $T_c$, dacă diferenţa între două momente de timp

consecutive ale comutării releului este $\frac{T_c}{2}$, respectiv:

$$t_{k+1} - t_k = \frac{T_c}{2}. \tag{32}$$

Se presupune că semnalul de comandă pe intervalul $[t_k,\ t_{k+1})$ este $u(t) = +b$. În acest caz răspunsul pe stare al sistemului liniar caracterizat prin relaţia $(30)$ este:

$$x(t_{k+1}) = \Phi\left(\frac{T_c}{2}\right) x(t_k) + \Gamma b, \tag{33}$$

unde $\Phi\left(\frac{T_c}{2}\right)$ este matricea de tranziţie calculată la $t = \frac{T_c}{2}$, respectiv:

$$\Phi\left(\frac{T_c}{2}\right) = e^{A\frac{T_c}{2}}, \tag{34}$$

iar

$$\Gamma = \int_0^{\frac{T_c}{2}} e^{A\tau} B d\tau. \tag{35}$$

În ideea că ciclul limită este simetric, trebuie ca următoarea identitate să fie îndeplinită:

$$x\left(t_{k+1}\right)=-x\left(t_k\right). \tag{36}$$

Revenind la relaţia $(33)$ rezultă:

$$x\left(t_k\right)=-\left(I+\Phi\left(\frac{T_c}{2}\right)\right)^{-1}\Gamma b. \tag{37}$$

Presupunând că ieşirea sistemului $y\left(t_k\right)$ este zero, rezultă următoarea relaţie:

$$y\left(t_k\right)=Cx\left(t_k\right)=-C\left(I+\Phi\left(\frac{T_c}{2}\right)\right)^{-1}\Gamma b=0, \tag{38}$$

care implică:

$$C\left(I+\Phi\left(\frac{T_c}{2}\right)\right)^{-1}\Gamma=0. \tag{39}$$

Ultima relaţie permite determinarea perioadei de oscilaţie, corespunzătoare ciclului limită.

*Remark 3 Ecuaţia* $(39)$ *poate fi rescrisă astfel:*

$$H\left(\frac{T_c}{2},\ -1\right) = 0, \tag{40}$$

*unde* $H\left(\frac{T_c}{2},\ z\right)$ *este funcţia de transfer în* $\mathcal{Z}$ *a sistemului eşantionat (corespunzător sistemului continuu liniar invariant în timp definit prin relaţia* $(30)$*) cu perioada de eşantionare* $\frac{T_c}{2}$*;*

*Remark 4 Relaţia* $(39)$ *are loc şi în cazul sistemelor liniare cu timp mort, pentru care* $\frac{T_c}{2}$ *este mai mare sau cel mult egală cu timpul mort;*

*Remark 5 În cazul în care releul este bipoziţional cu histerezis, perioada de oscilaţie corespunzătoare ciclului limită se estimează printr-o relaţie similară, respectiv:*

$$H\left(\frac{T_c}{2},\ -1\right) = -\frac{\varepsilon}{b}, \tag{41}$$

*unde* $\varepsilon$ *reprezintă zona de histerezis a releului şi* $b$ *este ieşirea releului (vezi figura 1.a).*

### 3.1.1 Aproximarea perioadei de oscilaţie

Relaţiile $(39)$, respectiv $(40)$ permit determinarea exactă a perioadei de oscilaţie. În cazul sistemelor de ordin ridicat acest calcul se complică. În continuare se investighează precizia obţinută în cazul aproximării prin funcţia de descriere. Se consideră cazul unui ciclu limită simetric şi se notează cu $h = \frac{T_c}{2}$. Funcţia de transfer în $\mathcal{Z}$ a sistemului eşantionat (corespunzător sistemului continuu liniar invariant în timp definit prin relaţia $(30)$) cu perioada de eşantionare $h$ este:

$$H\left(h,\ e^{sh}\right)\Big|_{z=e^{sh}} = \frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{s+jk\omega_s}\left(1-e^{-\left(1-e^{-h(s+jk\omega_s)}\right)}\right)H\left(s+jk\omega_s\right)\Bigg|_{z=e^{sh}}, \qquad (42)$$

unde $\omega_s = \frac{2\pi}{h}$ este pulsaţia de eşantionare şi $j = \sqrt{-1}$ este unitatea imaginară. Pentru $sh = j\pi \ \ (z=-1)$, relaţia $(42)$ se rescrie astfel:

$$\begin{aligned} H\left(h,\ -1\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{j\left(\pi+2k\pi\right)}H\left(j\frac{\pi+2k\pi}{h}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\left(1+2k\right)\pi}\,\mathrm{Im}\left(H\left(j\frac{\pi+2k\pi}{h}\right)\right). \end{aligned} \qquad (43)$$

Din seria infinită obţinută se reţine numai primul termen, respectiv:

$$H\left(h,\ -1\right) \backsimeq \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Im}\left(H\left(j\frac{\pi}{h}\right)\right). \tag{44}$$

Această ultimă relaţie permite determinarea aproximativă a perioadei de oscilaţie $T_c$ pe baza relaţiei $(40)$ în cazul releului bipoziţional fără histerezis, respectiv pe baza relaţiei $(41)$ în cazul releului bipoziţional cu histerezis. Rezultatul obţinut prin acest calcul al perioadei de oscilaţie $T_c$, corespunde liniarizării elementului neliniar prin funcţia de descriere. Pentru obţinerea unei precizii cât mai ridicate trebuie ca funcţia de transfer $H\left(s\right)$ să aibă un caracter de filtru trece jos.

*Example 5 (LCP$_1$) Se consideră structura unui sistem cu reacţie negativă prezentată în figura 12, cu comutatorul $k \leftarrow T$. Funcţia de transfer a procesului este:*

$$H\left(s\right) = \frac{a}{s\left(s+1\right)\left(s+a\right)}.$$

*Se cere să se calculeze perioada de oscilaţie corespunzătoare ciclului limită, în cazul unui releu bipoziţional fără histerezis, prin cele două metode prezentate (exactă şi aproximativă).*

Întrucât elementul neliniar este de tip releu bipoziţional fără histerezis, rezultă că pulsaţia corespunzătoare oscilaţiilor ciclului limită se poate obţine din următoarea ecuaţie:

$$\arg\left(H\left(j\omega_c\right)\right) = -\pi,$$

respectiv:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\omega_c\right) - \arctan\left(\frac{\omega_c}{a}\right) &= -\pi \\ \arctan\left(\frac{\omega_c\left(a+1\right)}{a-\omega_c^2}\right) &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Din ultima egalitate rezultă:

$$\omega_c = \sqrt{a}, \text{ respectiv } T_c = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}. \tag{45}$$

Funcţia de transfer în $\mathcal{Z}$ a sistemului eşantionat cu perioada de eşantionare $h$ se aproximează pe baza relaţiei $(42)$, respectiv:

$$H(h,z)=\frac{h}{z-1}-\frac{a\left(1-e^{-h}\right)}{(a-1)\left(z-e^{-h}\right)}+\frac{1-e^{-ah}}{a(a-1)\left(z-e^{-ah}\right)}.$$

Perioada corespunzătoare oscilaţiilor ciclului limită se obţine din următoarea ecuaţie:

$$H(h,-1)\big|_{h=\frac{T_c}{2}}=0.$$

Se evaluează funcţia de transfer în $\mathcal{Z}$ pentru $z=-1$, respectiv:

$$\begin{aligned}
H(h,-1) &= -\frac{h}{2}+\frac{a\left(1-e^{-h}\right)}{(a-1)\left(1+e^{-h}\right)}-\frac{1-e^{-ah}}{a(a-1)\left(1+e^{-ah}\right)}= \\
&= -\frac{h}{2}+\frac{a}{a-1}\left(\frac{1-e^{-h}}{1+e^{-h}}-\frac{1}{a^2}\frac{1-e^{-ah}}{1+e^{-ah}}\right)\Bigg|_{a\gg 1}\backsimeq \\
&\backsimeq -\frac{h}{2}+\left(1+\frac{1}{a}\right)\frac{h}{2}\frac{1-h/2+h^2/6}{1-h/2+h^2/4}\backsimeq \\
&\backsimeq -\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{h^2}{12}\right).
\end{aligned}$$

În consecinţă $h \simeq 2\sqrt{\frac{3}{a}}$, respectiv:

$$T_c = 4\sqrt{\frac{3}{a}},$$

care este comparabilă cu perioada de oscilaţie calculată în mod exact. $\triangleleft$

*Example 6 (LCP$_2$) Se consideră structura unui sistem cu reacţie negativă prezentată în figura 12, cu comutatorul $k \leftarrow T$. Funcţia de transfer a procesului este:*

$$H(s) = \frac{\beta}{s+a} e^{-s\tau},\ a, b, \tau > 0.$$

*Se cere să se calculeze perioada de oscilaţie, corespunzătoare ciclului limită, în cazul unui releu bipoziţional cu histerezis, prin metoda bazată pe funcţia de descriere.*

Se evaluează funcţia de transfer în $\mathcal{Z}$ pentru $z = -1$, respectiv:

$$H(h, -1) = \frac{\beta}{a} \frac{e^{-ah}\left(2e^{a\tau} - 1\right) - 1}{1 + e^{-ah}}.$$

În acest caz elementul neliniar este de tip releu bipoziţional cu histerezis. Perioada de oscilaţie corespunzătoare ciclului limită se estimează prin relaţia $(41)$, respectiv:

$$H\left(\frac{T_c}{2},\ -1\right) = -\frac{\varepsilon}{b}, \tag{46}$$

unde $\varepsilon$ reprezintă zona de histerezis a releului şi $b$ este ieşirea releului (vezi figura 1.*a*). În consecinţă:

$$T_c = 2h = -\frac{2}{a}\ln\left|\frac{\beta b - a\varepsilon}{\beta b\left(2e^{a\tau} - 1\right) + a\varepsilon}\right|.$$

Prin aplicarea metodei Loeb se constată că ciclul limită care se obţine este stabil. $\triangleleft$

## 3.2 Estimarea amplitudinii oscilaţiilor

Amplitudinea oscilaţiilor ciclului limită $(A_c)$ pentru sistemul cu reacţie negativă prezentat în figura $(12)$, cu comutatorul $k \leftarrow T$, se estimează din condiţia de modul, respectiv:

$$\left|N_i\left(A\right)\right|_{A=A_c} = \left|H\left(j\omega\right)\right|_{\omega=\omega_c}. \tag{47}$$

În cazul elementului neliniar de tip releu (cu/fără histerezis), relaţia $(47)$ se rescrie astfel:

$$\frac{\pi A_c}{4b} = \left| H\left(j\omega_c\right) \right|,$$

de unde rezultă amplitudinea oscilaţiilor care apar pe intrarea elementului neliniar:

$$A_c = \frac{4b}{\pi} \left| H\left(j\omega_c\right) \right|.$$

Pentru acordarea parametrilor regulatoarelor de tip $PID$, se defineşte *factorul de amplificare echivalent* $(k_c)$ al releului pentru transmiterea semnalului sinusoidal de intrare cu amplitudinea $A_c$, respectiv:

$$k_c = \frac{4b}{\pi A_c} = \frac{1}{\left| H\left(j\omega_c\right) \right|}.$$

## 3.3 Aspecte practice privind estimarea parametrilor ciclului limită

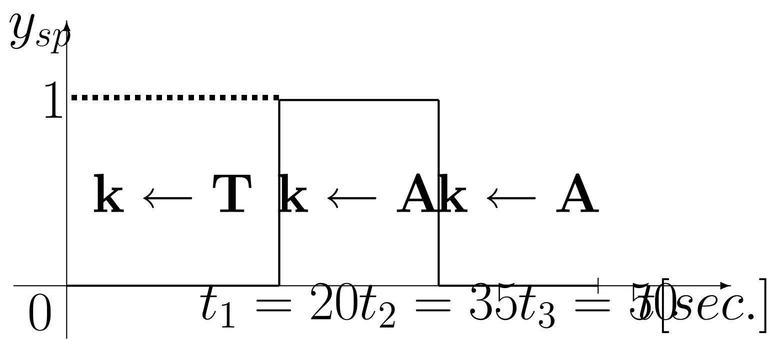
Structura regulatorului $PID$ autoacordabil bazată pe metoda releului, prezentată în figura $(12)$ este implementată de obicei pe un sistem numeric bazat pe microcontroler.

Perioada oscilaţiilor poate fi uşor determinată prin măsurarea timpului între două treceri prin aceeaşi valoare şi în acelaşi sens a semnalului de eroare din sistem $(\varepsilon)$. Amplitudinea oscilaţiilor poate fi determinată prin măsurarea valorii vârf la vârf a aceluiaşi semnal de eroare (sau ieşire). Aceste metode de estimare sunt uşor de implementat deoarece se bazează numai pe operaţii de numărare şi comparare. Această analiză, pe baza funcţiei de descriere, se bazează că prima armonică a oscilaţiei (fundamentala) este dominantă faţă de armonicile superioare. Dacă această ipoteză nu este îndeplinită, atunci este necesară filtrarea semnalului măsurat.
Structurii de estimare mai elaborate se bazează pe estimatorul celor mai mici pătrate şi filtrul Kalman extins pentru determinarea amplitudinii şi perioadei (frecvenţei) oscilaţiei corespunzătoare ciclului limită. Rezultatele simulărilor şi experienţa în domeniul proceselor industriale au indicat că în practică sunt mai puţin indicate metode sofisticate pentru determinarea amplitudinii şi perioadei oscilaţiei corespunzătoare ciclului limită.

*Example 7 Se consideră structura unui sistem cu reacţie negativă prezentată în figura* $(12)$. *Funcţia de transfer a procesului este:*

$$H(s) = \frac{1}{s+0.2}e^{-s}.$$

*Se cere să se determine parametrii de acord ai unui regulator $PID$, în cazul unui releu bipoziţional cu histerezis ($\varepsilon = 0.05,\ b = 0.5$). Semnalul de referinţă $(y_{sp})$ şi regimurile de funcţionarea ale structurii prezentate în figura $(12)$ sunt indicate în figura $(13)$.*




13.Mărimea de referinţă şi regimurile de funcţionare ale regulatorului $PID$ autoacordabil prin metoda releului

Din funcţionarea sistemului în regim de acordare $(k \leftarrow T)$ se citeşte din figura $14$ amplitudinea şi perioada oscilaţiilor corespunzătoare ciclului limită (în regim staţionar):

$$A_c \backsimeq 0.5, \quad T_c \backsimeq 4.0057.$$

Cu ajutorul amplitudinii oscilaţiilor $(A_c)$ se calculează:

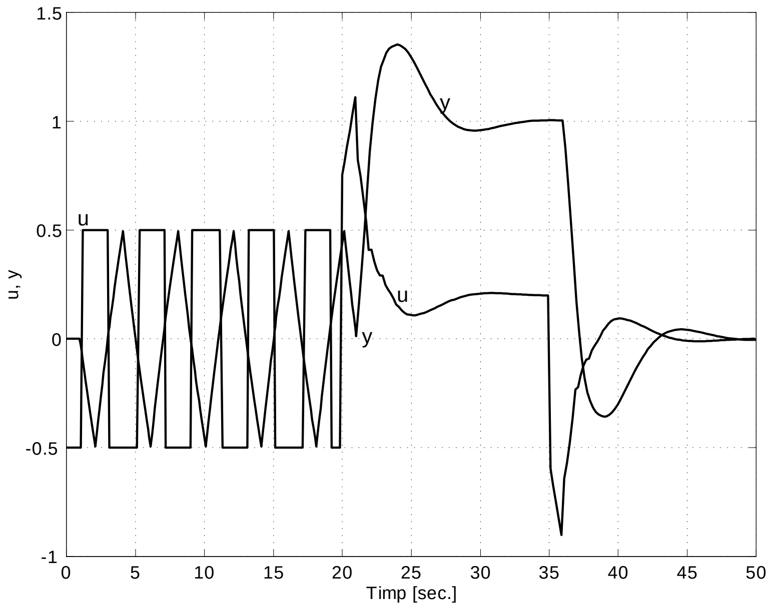
$$k_c = \frac{4b}{\pi A_c} \backsimeq 1.2732.$$

Pe baza tabelului 1 se calculează parametrii de acord ai regulatorului $PID$:

$$\begin{aligned} K_p &= 0.6k_c = 0.7639, \\ T_i &= 0.5T_c = 2.0028, \\ T_d &= 0.12T_c = 0.4807. \end{aligned}$$

Implementarea regulatorului pe baza relaţiei $(29)$ este neutilizabilă practic, deoarece comanda $(u)$ are valori foarte mari (de ordinul $10^{12}$). Structura utilizabilă practic a regulatorului $PID$ este aceea care prezintă o comportare $PI$ în raport cu mărimea de referinţă $y_{sp}$ şi o comportare $PID$ în raport cu mărimea măsurată $y$. Rezultatele simulării se prezintă în figura $(14)$, unde se arată evoluţia în timp a mărimii de ieşire (măsurate) $y$ şi a mărimii de comandă din sistemul cu reacţie negativă $u$, în cele două regimuri de funcţionare (acordare $(k \leftarrow T)$ şi automat cu regulator $PID$ $(k \leftarrow A)$). $\triangleleft$

*Remark 6 Perioada de oscilaţie estimată prin aproximarea bazată pe funcţia de des-*




14.Rezultatele simulării în cazul regulatorului $PID$ autoacordabil pe baza metodei releului şi utilizării metodei practice Zigler-Nichols pentru calculul parametrilor *criere este:*

$$T_c = -\frac{2}{a} \ln \left| \frac{\beta b - a\varepsilon}{\beta b \left(2e^{a\tau} - 1\right) + a\varepsilon} \right| \Bigg|_{\substack{\beta=1,\ a=0.2,\ \tau=1 \\ \varepsilon=0.05,\ b=0.5}} \backsimeq 4.0056.$$

*În acest exemplu se constată că aproximarea bazată pe funcţia de descriere este foarte bună.*

*Remark 7 Åström şi Wittenmark recomandă metoda practică a lui Zigler-Nichols pentru acordarea parametrilor regulatoarelor de tip $PID$ (tabelul $1$) dacă este îndeplinită următoarea condiţie:*

$$2 < kk_c < 20, \tag{48}$$

*unde $k$ este factorul de proporţionalitate al procesului în regim staţionar şi $k_c$ este factorul de amplificare echivalent al elementului neliniar (releu bipoziţional).*

### 3.3.1 Acordarea parametrilor regulatorului $\mathrm{PID}$ prin specificarea marginii de

**câştig şi a marginii de fază**

(Subsubsubsection head:)Acordarea parametrilor regulatorului $\mathbf{PID}$ prin specificarea marginii de câştig

În cazul în care *punctul critic* (intersecţia dintre locul de transfer al sistemului liniar şi locul de descriere invers negativ al elementului liniar) din diagrama Nyquist este cunoscut, se pot calcula relativ uşor parametrii unui regulator de tip $PID$ (relaţia $(29)$), care să asigure o margine de câştig $(m_k)$ impusă sistemului deschis. Presupunem că regulatorul este de tip $P$, având constanta de proporţionalitate $K_p$. Pentru ca sistemul în buclă deschisă să prezinte o margine de câştig impusă $m_k$ trebuie ca:

$$K_p = \frac{m_k}{k_c},$$

unde $k_c$ este amplificarea corespunzătoare punctului critic a sistemului în buclă deschisă.

În cazul regulatorului de tip $PID$ problema determinării constantelor de integrare $T_i$ şi derivare $T_d$ nu este determinată. În cele mai multe situaţii trebuie impusă constanta de integrare $T_i$ a regulatorului pe alte considerente, ca de exemplu compensarea constantei de timp dominante din proces. Răspunsul în frecvenţă a regulatorului $PID$, definit în relaţia $(29)$ este:

$$\begin{aligned} H_{PID}(j\omega) &= K_p\left(1+\frac{1}{j\omega T_i}+j\omega T_d\right)= \\ &= K_p\left(1+\frac{1}{j\omega T_i}\left(1-\omega^2 T_i T_d\right)\right). \end{aligned}$$

Pentru ca sistemul în buclă deschisă cu regulator de tip $PID$ să asigure o margine de câştig impusă $m_k$ trebuie ca:

$$T_d=\frac{1}{\omega_c^2 T_i},$$

unde $\omega_c$ este pulsaţia oscilaţiilor corespunzătoare punctului critic.

*Example 8 Funcţia de transfer a procesului se consideră aceeaşi ca şi în exemplul precedent. Se cere să se determine parametrii de acord ai unui regulator $PID$, care să compenseze constanta de timp dominantă din proces şi să asigure o margine de câştig impusă $m_k = 0.75$ $\left(m_k^{dB} = -37482\right)$. În regim de acordare sistemul utilizează un releu bipoziţional fără histerezis ( $b = 0.5$). Semnalul de referinţă $(y_{sp})$ şi regimurile de funcţionarea ale structurii prezentate în figura $(12)$ sunt indicate în figura $(13)$.*

Din funcţionarea sistemului în regim de acordare $(k \leftarrow T)$ se citeşte din figura $15$ amplitudinea şi perioada oscilaţiilor corespunzătoare ciclului limită (în regim staţionar):

$$A_c \backsimeq 0.4533, \quad T_c \backsimeq 3.6667.$$

Cu ajutorul amplitudinii oscilaţiilor $(A_c)$ se calculează:

$$k_c = \frac{4b}{\pi A_c} \backsimeq 1.4045.$$

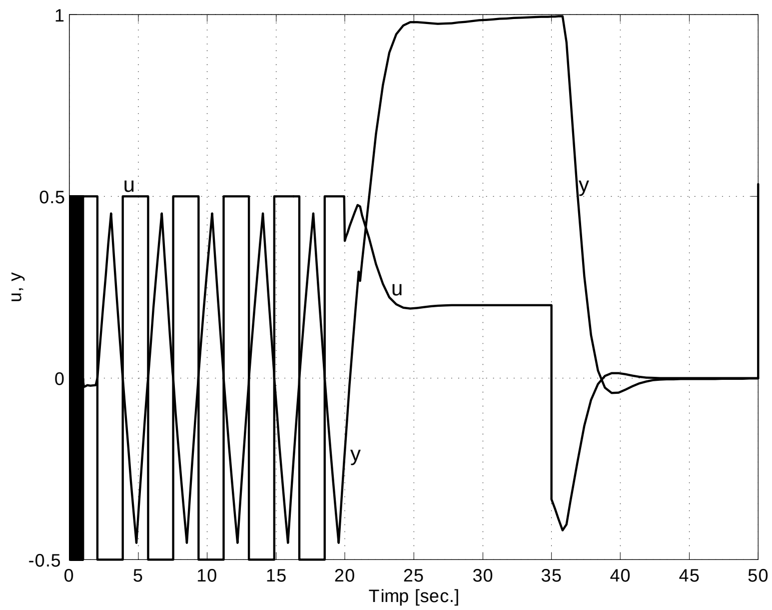
Se impune constanta de integrare egală cu constanta de timp dominantă a procesului, respectiv $T_i = 5 \ [\sec.]$. Constanta de proporţionalitate a regulatorului $PID$ este:

$$K_p = \frac{m_k}{k_c} = 0.5340,$$

iar constanta de derivare este:

$$T_d = \frac{1}{\omega_c^2 T_i} = \frac{T_c^2}{4\pi^2 T_i} = 0.0681.$$

Structura utilizată a regulatorului $PID$ este aceea care prezintă o comportare $PI$ în




15.Rezultatele simulării în cazul regulatorului $PID$ autoacordabil pe baza metodei releului şi utilizării metodei marginii de câştig pentru calculul parametrilor regulatorului

raport cu mărimea de referinţă $y_{sp}$ şi o comportare $PID$ în raport cu mărimea măsurată $y$. Rezultatele simulării se prezintă în figura $(15)$, unde se arată evoluţia în timp a mărimii de ieşire (măsurate) $y$ şi a mărimii de comandă din sistemul cu reacţie negativă $u$, în cele două regimuri de funcţionare (acordare $(k \leftarrow T)$ şi automat cu regulator $PID$ $(k \leftarrow A)$). $\lhd$

(Subsubsubsection head:)Acordarea parametrilor regulatorului $\mathbf{PID}$ prin specificarea marginii de fază

Funcţia de transfer a procesului se consideră $H(s)$, iar funcţia de transfer a sistemului în buclă deschisă este $H_{PID}(s)\,H(s)$, unde:

$$H_{PID}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right).$$

Se presupune că punctul de intersecţie al hodografului funcţiei de transfer cu axa reală negativă din diagrama Nyquist este cunoscut şi acestui punct îi corespunde pulsaţia $\omega_c$. Pentru ca sistemul în buclă deschisă să aibă marginea de fază $\gamma_k$ la pulsaţia $\omega_c$, trebuie ca regulatorul să introducă o fază de $+\gamma_k$ la pulsaţia $\omega_c$, respectiv să fie îndeplinită relaţia:

$$\omega_c T_d - \frac{1}{\omega_c T_i} = \tan(\gamma_k).$$

Şi în acest caz trebuie determinată o relaţie suplimentară între constanta de integrare $T_i$ şi constanta de derivare $T_d$ pentru ca problema să fie determinată. Se consideră că între cele două constate există o relaţie de proporţionalitate, respectiv:

$$T_i = \alpha T_d. \tag{49}$$

În aceste condiţii rezultă:

$$T_d = \frac{\tan(\gamma_k) + \sqrt{\frac{4}{\alpha} + \tan^2(\gamma_k)}}{2\omega_c}. \tag{50}$$

Pentru ca sistemul deschis să prezinte o margine de fază $\gamma_k$ la pulsaţia $\omega_c$ este necesar ca factorul de proporţionalitate al regulatorului să fie calculat după relaţia:

$$K_p = \frac{\cos(\gamma_k)}{|H(j\omega_c)|} = k_c \cos(\gamma_k), \tag{51}$$

unde $k_c$ este amplificarea corespunzătoare punctului critic al sistemului în buclă deschisă.
Aceste relaţii se pot aplica şi în cazul regulatorului autoacordabil prin metoda releului prezentat în figura $(12)$. Procedura de proiectare constă în estimarea parametrilor ciclului limită $(k_c,\ \omega_c)$ care se obţine prin funcţionarea sistemului în regim de acordare $(k \leftarrow T)$. După estimarea acestor parametri se calculează parametrii regulatorului $PID$, după relaţiile prezentate mai sus.

*Example 9 ($PID_{\gamma_k}$) Se consideră structura unui sistem cu reacţie negativă prezentată* *în figura* $(12)$*. Funcţia de transfer a procesului este:*

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$

*Se cere să se determine parametrii de acord ai unui regulator* $PID$*, astfel încât marginea de fază a sistemului deschis să fie* $\gamma_k = \frac{\pi}{4}$ *în cazul utilizării unui releu bipoziţional cu histerezis (*$\varepsilon = 0.05,\ b = 0.25$*). Semnalul de referinţă* $(y_{sp})$ *şi regimurile de funcţionare ale structurii prezentate în figura* $(12)$ *sunt indicate în figura* $(13)$*, cu următoarele modificări:* $t_1 = 40\ [\sec.],\ t_2 = 70\ [\sec.],\ t_3 = 100\ [\sec.]$.

Din funcţionarea sistemului în regim de acordare $(k \leftarrow T)$ se citeşte din figura $16$ amplitudinea şi perioada oscilaţiilor corespunzătoare ciclului limită (în regim staţionar):

$$A_c \simeq 0.2436, \quad T_c \simeq 7.9187.$$

Cu ajutorul amplitudinii oscilaţiilor $(A_c)$ se calculează:

$$k_c = \frac{4b}{\pi A_c} \simeq 1.3065.$$

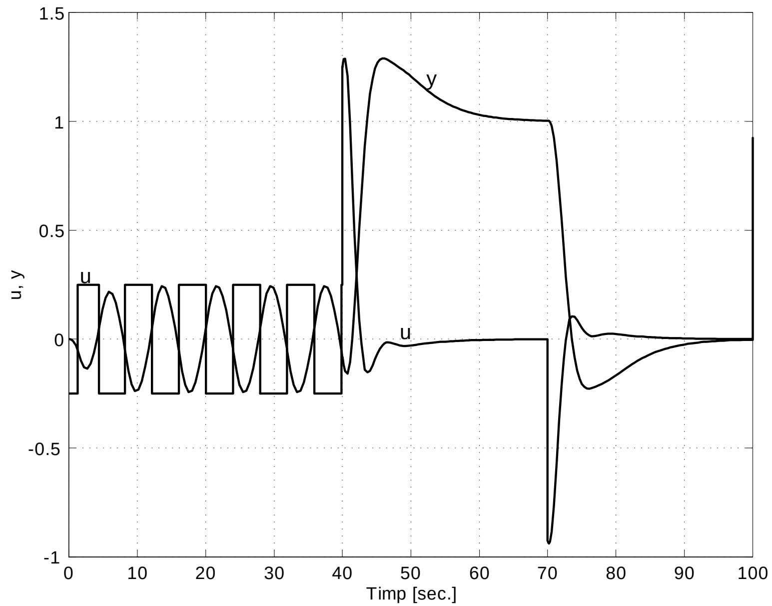
Pe baza relaţiilor $(K_p)$, $(T_d)$ şi $(T_i)$ cu $\alpha = 6$ se calculează parametrii de acord ai regulatorului $PID$:

$$\begin{aligned} K_p &= 0.9238, \\ T_i &= 7.9334, \\ T_d &= 1.3222. \end{aligned}$$

Structura utilizabilă practic a regulatorului $PID$ este aceea care prezintă o comportare $PI$ în raport cu mărimea de referinţă $y_{sp}$ şi o comportare $PID$ în raport cu mărimea măsurată $y$. Rezultatele simulării se prezintă în figura $(16)$, unde se arată evoluţia în timp a mărimii de ieşire (măsurate) $y$ şi a mărimii de comandă din sistemul cu reacţie negativă $u$, în cele două regimuri de funcţionare (acordare $(k \leftarrow T)$ şi automat cu regulator $PID$ $(k \leftarrow A)$). $\lhd$

## 3.4 Regulatorul PID cu antisaturaţie

Regulatorul $PID$ este şi la ora actuală cel mai utilizat algoritm în practică atât în echipamentele analogice cât şi în cele numerice, care tot mai mult tind să înlocuiască pe cele analogice. Regulatorul $PID$ sau reţelele de regulatoare $PID$ pot rezolva un număr mare de probleme de reglare care apar în industrie. Structura regulatorului $PID$ este



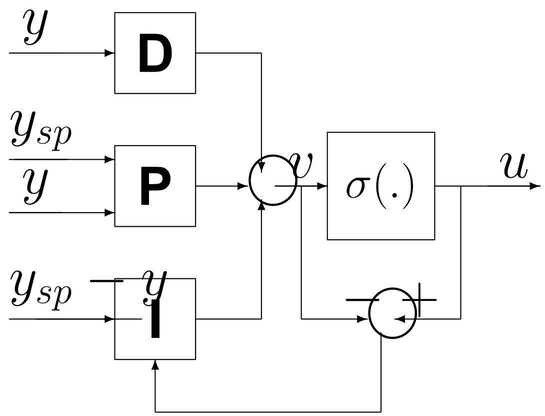

16.Rezultatele simulării în cazul regulatorului $PID$ autoacordabil pe baza metodei releului şi utilizării metodei marginii de fază pentru calculul parametrilor regulatorului

cea prezentată în relaţia $(29)$, cu semnificaţia mărimilor de intrare (eroare) $\varepsilon$, respectiv de ieşire (comandă) $u$ prezentată la începutul acestei secţiunii şi care se vede foarte clar din figura $(12)$. Parametrii regulatorului $PID$ sunt: factorul de proporţionalitate (amplificare) $K_p$, constanta de integrare $(T_i)$ şi constanta de derivare $(T_d)$. Acţiunea simultană a celor trei efecte (proporţional $P$, integral $I$ şi derivativ $D$) este ponderată prin cei trei parametri ai regulatorului $PID$ ($K_p$, $T_i$, $T_d$).
Acţiunea integrală a regulatorului are rolul de creştere a amplificării acestuia în domeniul frecvenţelor joase şi inplicit scăderea erorilor (poziţie, viteză, acceleraţie) în regim staţionar. Acţiunea derivativă introduce o fază pozitivă în sistem şi în consecinţă măreşte gradul de stabilitate şi banda de trecere pentru sistemul cu reacţie negativă.
Acţiunea derivativă (şi proporţională) asupra unor semnale particulare (treaptă, impuls, semnal dreptunghiular, etc.) care pot să apară în sistem face regulatorul $PID$ cu structura prezentată în relaţia $(29)$ neutilizabil practic, datorită semnalelor de comandă foarte mari care implicit provoacă apariţia fenomenelor de saturaţie în sistemul de reglare. Deci chiar în cazul unui sistem liniar, apariţia acestor fenomene de saturaţie impune o analiză mai atentă a sistemului prin apelarea la unele din metodele specifice sistemelor neliniare. O analiză a elementului neliniar de tip saturaţie pe baza funcţiei de descriere a fost făcută la începutul acestui capitol (Exemplul $(ElSat)$). În cadrul acestei secţiuni

se prezintă o implementare numerică a regulatorului $PID$, care să evite pe cât posibil apariţia acestui fenomen nedorit în sistem şi dacă apariţia saturaţiei nu poate fi evitată atunci să se acţioneze intern (la nivel de regulator) asura eliminării cât mai rapid posibil a efectului nedorit. În literatura de specialitate se întâlneşte structura regulatorului $PID$ cu comportare diferită în raport cu mărimea de prescriere $y_{sp}$ (de obicei $PI$) şi în raport cu mărimea măsurată $y$ (de obicei $PID$). Evident că această structură de regulator $PID$ poate fi încadrată în structura generală a regulatoarelor de tip $RST$.
Structura de implementare numerică a regulatorului $PID$ *cu antisaturaţie* se prezintă în figura $17$, unde după cum se observă cele trei acţiuni $(P,\ I,\ D)$ sunt tratate în mod separat. *Fenomenul de saturaţie se evită* prin eliminarea completă a acţiunii derivative asupra mărimii de referinţă şi ponderării acţiunii proporţionale asupra mărimii de referinţă, respectiv mărimii măsurate. *Eliminarea fenomenului de saturaţie* (în cazul în care acesta apare) se face printr-o acţiune internă a regulatorului asupra efectului integral din regulator.

### 3.4.1 Discretizarea şi modificarea acţiunilor $\mathrm{P}$, $\mathrm{I}$ şi $\mathrm{D}$

(Subsubsubsection head:)Acţiunea proporţională: $\mathbf{P}$
Acţiunea proporţională din regulatorul $PID$ (cu acţiune continuă în timp) prezentat în




17.Structura regulatorului PID cu antisaturaţie

relaţia $(29)$ este:

$$P(t) = K_p \varepsilon(t) = K_p (y_{sp}(t) - y(t)) . \tag{52}$$

Implementarea numerică şi ponderarea acestei acţiuni în raport cu mărimea de prescriere $y_{sp}$ şi mărimea măsurată $y$ se face după următoarea relaţie:

$$P(t_k) = K_p \left(\beta_p y_{sp}(t_k) - y(t_k)\right) , \tag{53}$$

unde $t_k$ reprezintă momentul de eşantionare curent, iar parametrul de ponderare $\beta_p$ admite o ajustare independentă de mărimea de referinţă şi răspunsul la perturbaţii. În majoritatea situaţiilor alegerea acestui parametru este legată de introducerea unui zero în sistem.

(Subsubsubsection head:)Acţiunea integrală: **I**

Acţiunea integrală din regulatorul $PID$ continuu (relaţia $(29)$) este:

$$I(t) = \frac{K_p}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau)\, d\tau = \frac{K_p}{T_i} \int_0^t \left(y_{sp}(\tau) - y(\tau)\right) d\tau. \tag{54}$$

La aceste acţiuni se mai adaugă un termen cu scopul de eliminare a fenomenului de saturaţie care poate să apară în sistemul de reglare automată. Acest termen suplimentar acţionează numai în momentul în care a apărut fenomenul de saturaţie a comenzii şi cu ajutorul său se încearcă o readucere în domeniul liniar a comenzii. Acţiunea integrală modificată prezentată în figura $(17)$ are următoarea exprimare:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{K_p}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau)\, d\tau + \frac{1}{T_t} \int_0^t \varepsilon_s(\tau)\, d\tau = \\ &= \frac{K_p}{T_i} \int_0^t \left(y_{sp}(\tau) - y(\tau)\right) d\tau + \frac{1}{T_t} \int_0^t \left(u(\tau) - v(\tau)\right) d\tau, \end{aligned} \tag{55}$$

unde $T_t$ se numeşte constanta de urmărire[6].

6 Tracking time constant

Obţinerea algoritmului de implementare numerică a acestui termen de tip integral se poate face prin aplicarea operatorului de derivare în raport cu timpul asupra acţiunii integrale $I(t)$ definită în relaţia $(55)$:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{K_p}{T_i}\varepsilon(t) + \frac{1}{T_t}\varepsilon_s(t).$$

Aproximarea derivatei printr-un operator cu diferenţe aplicat înainte, permite obţinera următoarei relaţii:

$$\frac{I(t_{k+1}) - I(t_k)}{h} = \frac{K_p}{T_i}\varepsilon(t_k) + \frac{1}{T_t}\varepsilon_s(t_k),$$

unde $h$ este pasul (constanta) de eşantionare. În final prin rescrierea acestei ultime relaţii se obţine:

$$I(t_{k+1}) = I(t_k) + K_p\frac{h}{T_i}\varepsilon(t_k) + \frac{h}{T_t}\varepsilon_s(t_k), \tag{56}$$

pe baza căreia se poate face implementarea numerică a acţiunii de integrare prezente în regulatorul numeric cu antisaturaţie.

(Subsubsubsection head:)Acţiunea derivativă: $\mathbf{D}$

Acţiunea derivativă prezentată în relaţia $(29)$ nu poate fi implementată, deoarece amplificarea regulatorului creşte foarte mult în domeniul frecvenţelor înalte, ceea ce determină o amplificare foarte mare a zgomotelor. Acţiunea derivativă se aproximează:

$$sT_d \backsimeq \frac{sT_d}{1 + s\frac{T_d}{N}}, \tag{57}$$

ceea ce limitează amplificarea semnalelor de frecvenţă mai ridicată decât $\frac{N}{T_d}$ la $N$. În regulatoarele analogice $N$ are o valoare fixă, cuprinsă în domeniul $5 \div 20$. Pentru evitarea fenomenului de saturaţie, acţiunea derivativă nu se doreşte să apară în raport cu mărimea de prescriere şi numai în raport cu mărimea măsurată.
Acţiunea derivativă modificată se poate descrie matematic prin următoarea relaţie:

$$D(t) + \frac{T_d}{N}\frac{dD(t)}{dt} = -K_p T_d \frac{dy(t)}{dt}, \tag{58}$$

Aproximarea operaţiei de derivare se poate face prin mai multe metode, dintre care cele mai utilizate sunt: aproximarea prin operatorul cu diferenţe aplicat înainte sau înapoi şi aproximarea Tustin. Toate aceste aproximări conduc la următoarea relaţie de implementare numerică a acţiunii derivative din regulator:

$$D(t_k) = \alpha_d D(t_k) - \beta_d (y(t_k) - y(t_{k-1})), \tag{59}$$

care este stabilă numai dacă $|\alpha_d| < 1$. În cazul aproximării derivatei în raport cu timpul prin operatorul cu diferenţe aplicat înainte, acţiunea derivativă a regulatorului este stabilă numai dacă:

$$T_d > N\frac{h}{2}.$$

Aproximarea Tustin are ca dezavantaj faptul că $\alpha_d \to 1$ când $T_d \to 0$. Aproximarea derivatei în raport cu timpul prin operatorul cu diferenţe aplicat înapoi, permite obţinerea celor mai bune rezultate în raport cu toate valorile constantei de derivare $T_d$. Prin această aproximare a operaţiei de derivare rezultă:

$$\alpha_d = \frac{T_d}{T_d + Nh}, \quad \beta_d = K_p\frac{NT_d}{T_d + Nh}. \tag{60}$$

(Subsubsubsection head:)Algoritmul **PID**

Algoritmul $PID$ presupune implementarea următoarelor relaţii pe un sistem de calcul:

$$
\begin{aligned}
&P(t_k) = K_p\left(\beta_p y_{sp}(t_k) - y(t_k)\right),\\
&D(t_k) = \alpha_d D(t_k) - \beta_d\left(y(t_k) - y(t_{k-1})\right),\\
&v(t_k) = P(t_k) + I(t_k) + D(t_k),\\
&u(t_k) = \sigma\left(v(t_k)\right),\\
&I(t_{k+1}) = I(t_k) + \beta_i\left(y_{sp}(t_k) - y(t_{k-1})\right) + \beta_t\left(u(t_k) - v(t_k)\right).
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Acest algoritm este cu antisaturaţie şi are „reset“ în cazul apariţiei fenomenului de saturaţie a comenzii, limitează amplificarea acţiunii derivative la „$N$“ şi pondereează mărimea de prescriere cu „$\beta_p$“. Funcţia care descrie elementul de saturaţie (neliniaritatea din sistem) are următoarea exprimare:

$$
\sigma\left(v(t_k)\right) = \begin{cases} u_M, & v(t_k) > u_M \\ v(t_k), & u_m \le v(t_k) \le u_M \\ u_m, & v(t_k) < u_m \end{cases},
\tag{62}
$$

în cazul unui element liniar cu saturaţie la $u_m$ şi $u_M$. Parametrii $\alpha_d$, $\beta_d$, $\beta_i$ şi $\beta_t$ sunt obţinuţi din parametrii primari $K_p$, $T_i$, $T_d$, $T_t$ şi $N$ ai regulatorului $PID$, astfel:

$$\begin{array}{ll} \alpha_d = \frac{T_d}{T_d+Nh}, & \beta_d = K_p\frac{NT_d}{T_d+Nh}, \\ \beta_i = K_p\frac{h}{T_i}, & \beta_t = \frac{h}{T_t}. \end{array} \tag{63}$$

#### (Subsubsubsection head:)Algoritmul **PI**

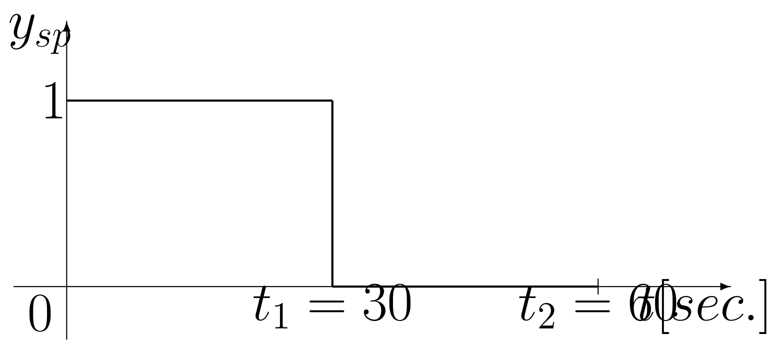
În multe cazuri practice nu este necesară acţiunea derivativă. În acest caz algoritmul este de tip $PI$ şi presupune implementarea următoarelor relaţii pe un sistem de calcul:

$$\begin{array}{l} P\left(t_k\right) = K_p\left(\beta_p y_{sp}\left(t_k\right) - y\left(t_k\right)\right), \\ v\left(t_k\right) = P\left(t_k\right) + I\left(t_k\right), \\ u\left(t_k\right) = \sigma\left(v\left(t_k\right)\right), \\ I\left(t_{k+1}\right) = I\left(t_k\right) + \beta_i\left(y_{sp}\left(t_k\right) - y\left(t_{k-1}\right)\right) + \beta_t\left(u\left(t_k\right) - v\left(t_k\right)\right). \end{array} \tag{64}$$

Acest algoritm este de tip $PI$ cu antisaturaţie şi care prezintă „reset“ în cazul apariţiei fenomenului de saturaţie a comenzii şi ponderează mărimea de prescriere cu „$\beta_p$“. Funcţia care descrie elementul de saturaţie este prezentată în relaţia $(62)$. Parametrii $\beta_i$ şi $\beta_t$ sunt obţinuţi din parametrii primari $K_p$, $T_i$ şi $T_t$ ai regulatorului $PI$, astfel:

$$\beta_i = K_p\frac{h}{T_i}, \quad \beta_t = \frac{h}{T_t}. \tag{65}$$

*Example 10 Se consideră sistemul din exemplul* $\left(PID_{\gamma_k}\right)$ *cu parametrii regulatorului* $PID$ *calculaţi prin impunerea marginii de fază* $\gamma_k$. *Se cere să se determine răspunsul sistemului în buclă închisă la semnalul de referinţă* $(y_{sp})$ *prezentat în figura* $(18)$ *în următoarele cazuri:* $(a)$ *regulator* $PID$ *continuu;* $(b)$ *regulator* $PID$ *discret cu saturaţie;* $(c)$ *regulator* $PID$ *discret cu antisaturaţie.*

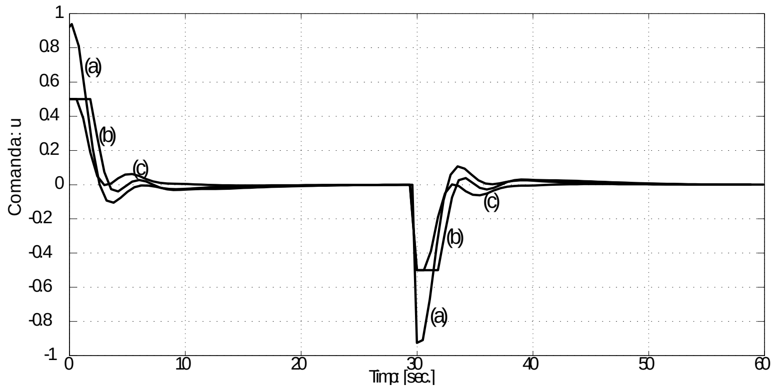



18.Mărimea de referinţă a sistemului cu reacţie negativă

Parametrii de acord ai regulatorului $PID$ sunt:

$$\begin{aligned} K_p &= 0.9238, \\ T_i &= 7.9334, \\ T_d &= 1.3222. \end{aligned}$$

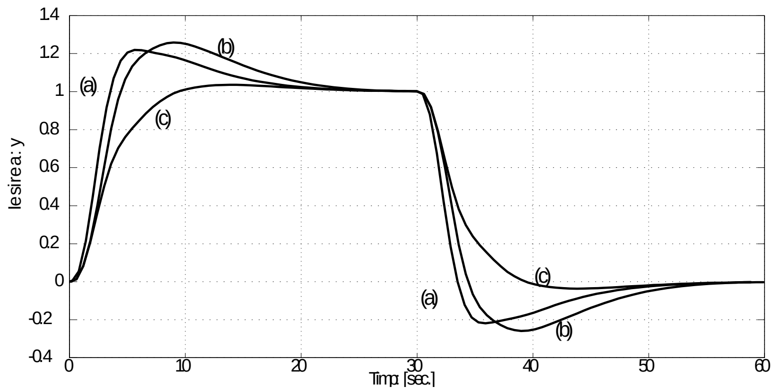
Structura utilizabilă practic a regulatorului $PID$ continuu este ceea care prezintă o comportare $PI$ în raport cu mărimea de referinţă $y_{sp}$ şi o comportare $PID$ în raport cu mărimea măsurată $y$. Acţiunea derivativă se consideră cea prezentată în relaţia $(57)$, cu $N = 8$. Rezultatele simulării se prezintă în figurile $19$ $(a)$ şi $20$ $(a)$, unde se arată evoluţia în timp a mărimii de comandă din sistemul cu reacţie negativă $u$, respectiv ieşirea (măsurată) $y$. Regulatorul $PID$ discret a fost implementat pe baza relaţiilor $(61)$ utilizând un pas de eşantionare $h = 0.1$ $[\sec.]$. În cazul regulatorului cu saturaţie nu a fost luată în considerare reacţia internă a regulatorului, respectiv $\beta_t = 0$. În cazul regulatorului cu antisaturaţie a fost considerată constanta de urmărire $T_t = 0.5$ $[\sec.]$, respectiv $\beta_t = 0.2$ $[\sec.]$. Rezultatele simulării se prezintă în figurile $19$ şi $20$, unde se arată evoluţia în timp a mărimii de comandă din sistemul cu reacţie negativă $u$, respectiv ieşirea (măsurată) $y$ în cele două cazuri $(b)$ regulatorul discret cu saturaţie şi $(c)$ regulatorul discret cu antisaturaţie. $\triangleleft$




19.Evoluţia mărimii de comandă în următoarele cazuri: $(a)$ regulator $PID$ continuu; $(b)$ regulator $PID$ discret cu saturaţie; $(c)$ regulator $PID$ discret cu antisaturaţie

# 4 Concluzii

În acest capitol a fost prezintată *metoda bazată pe funcţia de descriere* pentru analiza aproximativă a sistemelor neliniare care are o largă utilitate practică. Metoda bazată pe funcţia de descriere constă în înlocuirea elementului neliniar dintr-un sistem cu o aproximaţie liniară care să poată fi utilizată în analiza şi/sau sinteza sistemului în ansamblu (care se efectuează în domeniul frecvenţial). Utilitatea acestei metode este în stabilirea existenţei şi stabilităţii ciclurilor limită şi în evitarea fenomenelor de rezonanţă.
Ca şi aplicaţie practică a metodei bazate pe funcţia de descriere a fost prezentat regu-




20.Evoluţia mărimii de ieşire (măsurate) în următoarele cazuri: $(a)$ regulator $PID$ continuu; $(b)$ regulator $PID$ discret cu saturaţie; $(c)$ regulator $PID$ discret cu antisaturaţie

latorul $PID$ autoacordabil. De asemenea a fost studiat fenomenul de saturaţie prezent în practică în cazul regulatoarelor de tip $PID$, precum şi modalităţi de evitare şi înlăturare cât mai rapidă a acestei neliniarităţi de tip accidental.