

Analiza fenomenului de cuantizare

P. Dobra

May 3, 2010

Contents

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Analiza fenomenului de cuantizare | 2 |
| 2 | Discretizarea sistemelor continue | 2 |
| 2.1 | Discretizarea modelelor de stare | 3 |
| 2.2 | Discretizarea modelelor intrare-ieșire | 4 |
| 2.3 | Metode bazate pe transformări echivalente | 9 |
| 2.3.1 | Modele de stare echivalent | 11 |
| 2.4 | Sensibilitatea funcției de transfer a sistemului discret | 12 |
| 2.4.1 | Analiza sensibilității | 12 |
| 2.4.2 | Metoda locului rădăcinilor | 14 |
| 3 | Analiza erorilor datorate cuantizării semnalelor | 15 |
| 3.1 | Conversia analog-digitală | 16 |
| 3.1.1 | Cuantizarea prin rotunjire | 17 |
| 3.1.2 | Cuantizarea prin trunchiere | 20 |
| 3.2 | Conversia digital-analogică | 21 |
| 3.3 | Modelarea stochastică a efectelor de cuantizare | 24 |
| 4 | Concluzii | 28 |

List of Figures

| | | |
|---|---|----|
| 1 | Analiza sensibilității polilor sistemului discret cu ajutorul metodei locului rădăcinilor | 16 |
| 2 | Structura tipică a unui sistem de control automat | 16 |
| 3 | Diagrama bloc a unui sistem digital de control | 17 |
| 4 | Caracteristica de transfer a cuantizatorului prin rotunjire (a) și eroarea de rotunjire (b) | 18 |
| 5 | Densitatea de probabilitate a erorii de rotunjire | 19 |
| 6 | Caracteristica de transfer a cuantizatorului prin trunchiere (a) și eroarea de trunchiere (b) | 20 |

| | | |
|----|--|----|
| 7 | Densitatea de probabilitate a erorii de trunchiere | 21 |
| 8 | Principiul de funcționare al extrapolatorului de ordinul zero | 23 |
| 9 | Funcția pondere a extrapolatorului de ordinul zero | 23 |
| 10 | Răspunsul în frecvență al extrapolatorului de ordinul zero | 24 |
| 11 | Diagrama bloc a realizării de stare pentru un sistem discret în care se prezintă modelarea stochastică a efectelor de cuantizare | 25 |
| 12 | Elementele matricei de covarianță pentru $k = 0, 1, \dots, 20$ | 27 |

List of Tables

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Conversia discret-continuu în spațiul stărilor | 11 |
| 2 | Conversia continuu-discret în spațiul stărilor | 11 |

1 Analiza fenomenului de cuantizare

În cazul sistemelor discrete în timp care sunt implementate pe sisteme cu aritmetică digitală (în particular procesoare digitale de prelucrare a semnalelor¹ (*DSP*)), sunt cerute considerații suplimentare în ceea ce privește analiza performanțelor sistemelor atât în domeniul timp cât și în domeniul frecvență. Deoarece prin natura discretă a procesoarelor digitale de prelucrare a semnalelor, reprezentarea variabilelor și funcțiile aritmetice bazate pe reprezentare cu lungime finită produc trei efecte:

1. funcțiile de transfer sunt cuantizate, ceea ce implică poziționarea singularităților (polii și zerourile) numai la anumite locații specificate ale planului complex „ \mathbb{Z} “;
2. semnalele de intrare sunt cuantizate;
3. sunt introduse zgomote suplimentare de la operațiile de înmulțire și împărțire efectuate în prelucrarea numerică.

În această secțiune se face o analiză a acestor efecte și se încearcă să se prezinte modalități pentru minimizarea efectelor de cuantizare.

2 Discretizarea sistemelor continue

În această secțiune se prezintă metode de discretizare a sistemelor continue atât în reprezentarea de stare cât și în reprezentarea intrare-ieșire. Metoda de discretizare folosită în ambele cazuri se bazează pe utilizarea unui extrapolator de ordinul zero pentru intrările sistemului continuu. Această abordare descrie de fapt funcționarea normală a unui proces comandat cu un sistem numeric. Modelele discretizate se pot folosi atât în simulări, cât și în analiza și sinteza sistemelor de comandă numerică. La baza metodelor de discretizare prezentate stau algoritmi pentru evaluarea exponențialei matriciale.

¹Digital Signal Procesor (*DSP*)

2.1 Discretizarea modelelor de stare

Se consideră sistemul liniar continuu descris în spațiul stărilor prin:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}\tag{1}$$

Se presupune că pentru o perioadă de eșantionare dată h , vectorul de intrare $u(t)$ este constant pe fiecare interval de timp $[kh, (k+1)h)$, având valoarea $u_k = u(kh)$. Dacă se notează cu $x_k = x(kh)$, soluția ecuației de stare din relația (1) la momentul $t = t_{k+1} = (k+1)h$ este:

$$x_{k+1} = e^{Ah}x_k + \int_0^h e^{A(h-\tau)}Bu_k d\tau,\tag{2}$$

care se poate scrie astfel:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k,\tag{3}$$

unde:

$$\Phi = e^{Ah}, \quad \Gamma = \int_0^h e^{A\tau}B d\tau.\tag{4}$$

Ecuația de ieșire din relația (1) se transcrie direct la momentul $t = t_k = kh$, respectiv:

$$y_k = Cx_k + Du_k,\tag{5}$$

și reprezintă ecuația de ieșire a sistemului discretizat.

Discretizarea sistemului continuu (1) se reduce la calculul matricilor Φ și Γ date în relația (4). Se definește matricea compusă (pătratică):

$$\Psi = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n_u \times n} & 0_{n_u \times n_u} \end{pmatrix}.\tag{6}$$

Exponențiala matricială $e^{\Psi t}$, pentru orice $t \geq 0$, va avea aceeași structură bloc ca și matricea compusă Ψ , respectiv:

$$e^{\Psi t} = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) & \Gamma_1(t) \\ 0_{n_u \times n} & I_{n_u \times n_u} \end{pmatrix},\tag{7}$$

unde matricile $\Phi_1(t)$ și $\Gamma_1(t)$ trebuie determinate. Exponențiala matricială $e^{\Psi t}$ satisface următoarea ecuație diferențială:

$$\frac{d}{dt}(e^{\Psi t}) = \Psi e^{\Psi t} \Big|_{e^{\Psi t}|_{t=0}=I}.\tag{8}$$

Pe baza relațiilor (6), (7) și (8) rezultă:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_1(t)}{dt} &= A\Phi_1(t) \Big|_{\Phi_1(0)=I}, \\ \frac{d\Gamma_1(t)}{dt} &= A\Gamma_1(t) + B \Big|_{\Gamma_1(0)=0},\end{aligned}$$

și în consecință:

$$\Phi_1(t) = e^{At}, \quad \Gamma_1(t) = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau.$$

Pentru evaluarea matricilor Φ și Γ ale sistemului discretizat se poate folosi identitatea:

$$e^{\Psi h} = \begin{pmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0_{n_u \times n} & I_{n_u \times n_u} \end{pmatrix},$$

reducând problema la evaluarea unei singure exponențiale matriciale (de dimensiune mărită). Această tehnică a fost propusă de Van Loan [?]. Detalii suplimentare se pot găsi în [?].

2.2 Discretizarea modelelor intrare-ieșire

În continuare se prezintă o metodă de discretizare a unui sistem continuu descris de modelul de tip intrare-ieșire:

$$Y(s) = H(s) U(s), \quad (9)$$

unde $Y(s)$ și $U(s)$ sunt transformatele Laplace ale vectorilor de intrare și de ieșire, respectiv $H(s)$ este matricea de transfer a sistemului continuu. Modelul discretizat corespunzător modelului continuu din relația (9) este:

$$Y(z) = H(z) U(z), \quad (10)$$

unde $Y(z)$ și $U(z)$ sunt transformatele \mathcal{Z} ale vectorilor de intrare, respectiv ieșire, iar $H(z)$ este matricea de transfer a sistemului discretizat.

Se prezintă numai algoritmul de discretizare pentru un sistem cu o intrare și o ieșire (*SISO*). În cazul mai multor intrări sau ieșiri, se aplică acest algoritm pentru fiecare element al matricei de transfer. Procedura prezentată este aplicabilă și sistemelor cu timpi morți. Prin discretizare se elimină factorii iraționali datorăți timpilor morți, rezultând numai funcții de transfer raționale în variabila complexă z .

Se consideră funcția de transfer a unui sistem cu timp mort:

$$H(s) = H'(s) e^{-\tau_m s}, \quad (11)$$

unde $H'(s)$ este o funcție de transfer rațională, iar τ_m este timpul mort. Dacă h este perioada de eșantionare, atunci timpul mort se poate exprima astfel:

$$\tau_m = mh + \lambda, \quad (12)$$

unde $0 \leq \lambda < h$ și $m \geq 0$ este un număr întreg pozitiv. În funcție de valoarea lui λ se disting două cazuri:

1. Dacă $\lambda = 0$ (timpul mort este un multiplu întreg al perioadei de eșantionare) procedura pentru discretizarea sistemului cu timp mort (11) este simplă și se prezintă în continuare:

(a) Pentru partea rațională $H'(s)$ se calculează o realizare de stare minimală:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad ; \quad (13)$$

(b) Se discretizează sistemul continuu în forma:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{aligned} \quad ,$$

unde $\Phi = e^{Ah}$, $\Gamma = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau$;

(c) Se calculează:

$$H(z) = (C(zI - \Phi)^{-1} \Gamma + D) z^{-m}, \quad (14)$$

unde z^{-m} reprezintă întârzierea introdusă de timpul mort $\tau_m = mh$.

2. În cazul $\lambda > 0$, procedura de discretizare devine mai complexă. În acest caz funcția de transfer a sistemului este:

$$H(s) = H'(s) e^{-mhs} e^{-\lambda s}.$$

Ca și în cazul precedent, factorul irațional e^{-mhs} , va introduce factorul de întârziere z^{-m} . Pentru $H'(s) e^{-\lambda s}$ se consideră realizarea de stare:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \lambda) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t - \lambda) \end{aligned} \quad ,$$

unde matricile A, B, C și D sunt aceleași ca și în relația (13). Pentru discretizarea acestui sistem trebuie definită comanda $u(t - \lambda)$, pe intervalul $[kh, (k+1)h)$, respectiv:

$$u(t - \lambda) = \begin{cases} u_{k-1}, & t \in [kh, kh + \lambda) \\ u_k, & t \in [kh + \lambda, (k+1)h) \end{cases} \quad . \quad (15)$$

În consecință:

$$x(kh + \lambda) = \Phi_1 x(kh) + \Gamma_1 u_{k-1}, \quad (16)$$

unde $\Phi_1 = e^A$, $\Gamma_1 = \int_0^\lambda e^{A\tau} B d\tau$, respectiv:

$$x(kh + h) = \Phi_2 x(kh + \lambda) + \Gamma_2 u_k, \quad (17)$$

unde $\Phi_2 = e^{A(h-\lambda)}$, $\Gamma_2 = \int_0^{h-\lambda} e^{A\tau} B d\tau$. Înlocuind $x(kh + \lambda)$ dat în relația (16) în relația (17), se obține:

$$x_{k+1} = \Phi_2 \Phi_1 x_k + \Phi_2 \Gamma_1 u_{k-1} + \Gamma_2 u_k,$$

unde a fost folosită notația $x_k = x(kh)$. Ecuația de ieșire se rescrie astfel:

$$y_k = Cx_k + Du_{k-1},$$

unde $y_k = y(kh)$. Se introduce o nouă variabilă de stare (u_{k-1}) și în consecință noul vector al variabilelor de stare este:

$$\tilde{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Sistemul discretizat are următoarea reprezentare de stare:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{\Phi}\tilde{x}_k + \tilde{\Gamma}u_k, \\ y_k &= \tilde{C}\tilde{x}_k \end{aligned},$$

unde:

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_2\Phi_1 & \Phi_2\Gamma_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}.$$

Funcția de transfer discretă este:

$$H(z) = \tilde{C} \left(zI - \tilde{\Phi} \right)^{-1} \tilde{\Gamma} z^{-m}.$$

În continuare se prezintă procedura pentru discretizarea funcțiilor de transfer cu timp mort prezentate în relația (11):

- (a) Se calculează $m = \lceil \frac{\tau_m}{h} \rceil^2$, respectiv $\lambda = \tau_m - mh$;
- (b) Se calculează realizarea minimală (A, B, C, D) astfel încât:

$$H'(s) = C(sI - A)^{-1}B + D;$$

- (c) Se calculează Φ_1, Γ_1, Φ_2 și Γ_2 prin identificarea următoarelor relații:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & \Gamma_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda}, \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_2 & \Gamma_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (h-\lambda)}; \quad (19)$$

- (d) Se definesc:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= \begin{pmatrix} \Phi_2\Phi_1 & \Phi_2\Gamma_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \tilde{C} &= \begin{pmatrix} C & \text{sign}(\lambda)D \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = (1 - \text{sign}(\lambda))D; \end{aligned}$$

$$\text{unde } \text{sign}(a) = \begin{cases} \frac{a}{|a|}, & \text{dacă } a \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } a = 0 \end{cases};$$

²[.] reprezintă partea întreagă

(e) Se calculează:

$$H(z) = \left(\tilde{C} \left(zI - \tilde{\Phi} \right)^{-1} \tilde{\Gamma} + \tilde{D} \right) z^{-m}. \quad (20)$$

Algoritmul prezentat (pentru $\lambda > 0$) se reduce pentru $\lambda = 0$, la algoritmul anterior, observând că în acest caz:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= I, \quad \Gamma_1 = 0, \\ \Phi_2 &= \Phi = e^{Ah}, \quad \Gamma_2 = \Gamma = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau; \end{aligned}$$

iar expresia lui $H(z)$ dată în relația (20) se reduce la expresia (14).

Pentru calculul matricilor definite în relațiile (18) și (19) se utilizează algoritmi existenți la ora actuală pentru evaluarea exponențialei matriciale [?]. Din studiul efectuat de Moler și Van Loan pentru calculul exponențialei matriciale rezultă că există două clase de metode care pot sta la baza elaborării unor algoritmi eficienți și fiabili pentru o implementare numerică robustă. Prima metodă, bazată pe aproximarea Padé, a fost propusă de Ward (1977) și se bazează pe utilizarea aproximărilor raționale de tip Padé [?] pentru funcția exponențială, combinată cu o metodă de scalare și ridicare la putere. A doua clasă de metode are la bază reducerea matricii date, prin transformări de similaritate de tip QR , la o formă cât mai simplă pentru care evaluarea exponențialei să fie cât mai ușoară. Una dintre abordările posibile este folosirea formei bloc-diagonale a exponențialei matriciale. Un studiu complet al acestor metode este prezentat în [?].

Example 1 *Să se calculeze funcția de transfer în \mathcal{Z} corespunzătoare sistemului continuu caracterizat de funcția de transfer:*

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)} e^{-0.35s}, \quad (21)$$

pentru pasul de eșantionare $h = 0.2$ [sec.] și să se compare rezultatul cu cel obținut prin utilizarea transformatei „ \mathcal{Z} modificate”.

Prin aplicarea algoritmului prezentat rezultă:

1. $m = \left\lceil \frac{\tau_m}{h} \right\rceil = \left\lceil \frac{0.35}{0.2} \right\rceil = 1$, respectiv $\lambda = \tau_m - mh = 0.15$;
2. Realizarea de stare minimală (A, B, C, D) a funcției de transfer raționale:

$$H'(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)},$$

este:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ C &= (0 \ 0 \ 1), \quad D = (0); \end{aligned}$$

3. Se calculează Φ_1 , Γ_1 , Φ_2 și Γ_2 prin identificarea următoarelor relații:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Gamma_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^\lambda = \\
& \quad \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{0.15} = \\
& \quad = e \begin{pmatrix} 6.2093e-1 & -2.3978e-1 & 0 & 1.1989e-1 \\ 1.9890e-1 & 9.8060e-1 & 0 & 9.7011e-3 \\ 9.7011e-3 & 1.4899e-1 & 1 & 5.0342e-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} \Phi_2 & \Gamma_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{(h-\lambda)} = \\
& \quad \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{0.05} = \\
& \quad = e \begin{pmatrix} 8.5845e-1 & -9.2784e-2 & 0 & 4.6392e-2 \\ 4.6392e-2 & 9.9762e-1 & 0 & 1.1893e-3 \\ 1.1893e-3 & 4.9960e-2 & 1 & 2.0070e-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

4. Se determină:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_2 \Phi_1 & \Phi_2 \Gamma_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
& \quad \begin{pmatrix} 5.2192e-1 & -2.9682e-1 & 0 & 1.0202e-1 \\ 1.4841e-1 & 9.6714e-1 & 0 & 1.5240e-2 \\ 1.6429e-2 & 1.9770e-1 & 1 & 1.1307e-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
& \tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.6392e-2 \\ 1.1893e-3 \\ 2.0070e-5 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
& \tilde{C} = \begin{pmatrix} C & \text{sign}(\lambda) D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
& \tilde{D} = (1 - \text{sign}(\lambda)) D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

5. Funcția de transfer în \mathcal{Z} este:

$$H^{(1)}(z) = \left(\tilde{C} \left(zI - \tilde{\Phi} \right)^{-1} \tilde{\Gamma} + \tilde{D} \right) z^{-m} =$$

$$= \frac{2.0070e - 5z^{-1} + 2.0981e - 3z^{-2} + 3.5119e - 3z^{-3} + 3.4600e - 4z^{-4}}{1 - 2.4891z^{-1} + 2.0379z^{-2} - 5.4881e - 1z^{-3}} z^{-1}.$$

Funcția de transfer în \mathcal{Z} , calculată pe baza transformatei „ \mathcal{Z} modificate” este:

$$\begin{aligned} H^{(2)}(z) &= \mathcal{Z} \{ \mathcal{L}^{-1} \{ H(s) \} \} = \mathcal{Z} \{ \mathcal{L}^{-1} \{ H'(s) e^{-s\tau_m} \} \} = \\ &= \mathcal{Z} \{ \mathcal{L}^{-1} \{ H'(s) e^{-s(nh-mh)} \} \} \Big|_{n=2, h=0.2, m=0.25} = \\ &= \mathcal{Z} \{ \mathcal{L}^{-1} \{ H'(s) e^{+smh} \} \} z^{-n} \Big|_{n=2, h=0.2, m=0.25} = \\ &= \mathcal{Z}_m \{ \mathcal{L}^{-1} \{ H'(s) \} \} \Big|_{m=0.25} z^{-2} = \\ &= \mathcal{Z}_m \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+a)(s+b)} \right\} \right\} \Big|_{a=2, b=1, m=0.25} z^{-2} = \\ &= \frac{1}{ab} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{be^{-amh}}{(a-b)(z-e^{-ah})} - \frac{ae^{-bmh}}{(a-b)(z-e^{-bh})} \right) \Big|_{\substack{a=2, b=1, \\ m=0.25, h=0.2}} z^{-2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{e^{-0.1}}{z-e^{-0.4}} - \frac{2e^{-0.05}}{z-e^{-0.2}} \right) z^{-2} = \\ &= \frac{1.1893e - 3z^{+2} + 2.1504e - 2z^{+1} + 7.1868e - 3}{z^{+3} - 2.4891z^{+2} + 2.0379z^{+1} - 5.4881e - 1} z^{-2}. \end{aligned}$$

Prin cele două metode de calcul a funcției de transfer în \mathcal{Z} , se observă că polii celor două funcții de transfer $H^{(1)}(z)$, respectiv $H^{(2)}(z)$ sunt aceleași, pe când zerourile diferă chiar ca și număr. \triangleleft

Remark 1 Pentru sisteme cu timp mort, se recomandă alegerea pasului de eșantionare h un submultiplu întreg al timpului mort, deoarece timpul mort fracționar ($\lambda > 0$) introduce întodeauna un zero (cazul SISO) suplimentar în funcția de transfer discretă. În funcție de valorile lui λ , acest zero poate rezulta chiar în exteriorul cercului unitate al planului complex, determinând o comportare de fază neminimă pentru sistemul discretizat. Dacă nu este posibilă alegerea recomandată pentru h , atunci este indicat să se experimenteze cu mai multe valori a lui h pentru prevenirea unor astfel de comportări.

2.3 Metode bazate pe transformări echivalente

Transformările echivalente provin din metodele de integrare numerică. Transformările echivalente mapează valorile complexe din planul complex „ s ” în planul complex „ z ” utilizând următoarele metode mai cunoscute:

1. metoda drepunghiurilor „înainte”³:

$$s \sim \frac{z-1}{h}; \quad (22)$$

³Forward rectangular rule

2. metoda drepunghiurilor „înapoi”⁴:

$$s \sim \frac{z-1}{hz}; \quad (23)$$

3. metoda trapezelor sau transformarea biliniară (Tustin⁵):

$$s \sim \frac{2z-1}{h(z+1)}; \quad (24)$$

sau invers:

1. metoda drepunghiurilor „înainte”:

$$z \sim 1 + hs; \quad (25)$$

2. metoda drepunghiurilor „înapoi”:

$$z \sim \frac{1}{1-hs}; \quad (26)$$

3. metoda trapezelor sau transformarea biliniară (Tustin):

$$z \sim \frac{1 + \frac{h}{2}s}{1 - \frac{h}{2}s}. \quad (27)$$

Transformarea biliniară mapează polii și zerourile din semiplanul complex stâng al planului „ s ” în interiorul cercului cu centrul în origine și rază unitară din planul „ z ”, respectiv semiplanul complex drept în exteriorul cercului. Dintre transformările echivalente, transformarea biliniară este mai des utilizată, deoarece răspunsul în frecvență pe domeniul de liniaritate al scalei frecvențelor constituie un invariant. Acest punct până la care domeniul frecvențelor „continue” este liniar în raport cu domeniul frecvențelor „numerice” în raport cu caracteristica de modul a răspunsului în frecvență, se numește punct de „*pre-încovoiere*” și acesta poate fi modificat prin introducerea unui factor de adaptare în locul constantei $\frac{2}{h}$, din relația (24), respectiv:

$$\frac{2}{h} \leftarrow \frac{\omega_p}{\tan\left(\frac{T\omega_p}{2}\right)}, \quad (28)$$

unde domeniul $[0, \omega_p]$ reprezintă domeniul de invarianță a răspunsui în frecvență în raport cu transformarea biliniară⁶.

⁴Backward rectangular rule

⁵Trapezoidal rule or Tustin's bilinear rule

⁶ ω_p - prewarped frequency

2.3.1 Modele de stare echivalent

Cele menționate mai sus se pot transpune și în cazul modelelor de stare ale sistemelor. Se consideră modelul de stare al unui sistem continuu:

$$G_c(s) = C_c(sI - A_c)^{-1} B_c + D_c, \quad (29)$$

respectiv modelul de stare echivalent al sistemului numeric descris prin:

$$G_d(z) = C_d(zI - A_d)^{-1} B_d + D_d. \quad (30)$$

În tabelul 1 se redau în mod sintetic relațiile prin care se obține descrierea sistemului continuu în spațiul stărilor (A_c, B_c, C_c, D_c) plecând de la sistemul numeric (A_d, B_d, C_d, D_d) , pentru cele trei metode prezentate anterior, respectiv relațiile de la continuu la discret se prezintă în tabelul 2.

Table 1: Conversia discret-continuu în spațiul stărilor

| | Metoda dreptun- ghiurilor „înainte“ | Metoda dreptun- ghiurilor „înapoi“ | Metoda Tustin |
|-------|--|---------------------------------------|--------------------------------------|
| A_c | $\frac{1}{T}(A_d - I)$ | $\frac{1}{T}(I - A_d^{-1})$ | $\frac{2}{T}(A_d - I)(I + A_d)^{-1}$ |
| B_c | B_d | $A_d^{-1}B_d$ | $2(I + A_d)^{-1}B_d$ |
| C_c | $\frac{1}{T}C_d$ | $\frac{1}{T}C_dA_d^{-1}$ | $\frac{2}{T}C_d(I + A_d)^{-1}$ |
| D_c | D_d | $D_d - C_dA_d^{-1}B_d$ | $D_d - C_d(I + A_d)^{-1}B_d$ |

Table 2: Conversia continuu-discret în spațiul stărilor

| | Metoda dreptun- ghiurilor „înainte“ | Metoda dreptun- ghiurilor „înapoi“ | Metoda Tustin |
|-------|--|---------------------------------------|--|
| A_d | $I + TA_c$ | $(I - TA_c)^{-1}$ | $(I + \frac{T}{2}A_c)(I - \frac{T}{2}A_c)^{-1}$ |
| B_d | TB_c | $(I - TA_c)^{-1}TB_c$ | $(I - \frac{T}{2}A_c)^{-1}B_c$ |
| C_d | C_c | $C_c(I - TA_c)^{-1}$ | $TC_c(I - \frac{T}{2}A_c)^{-1}$ |
| D_d | D_c | $D_c + C_c(I - TA_c)^{-1}TB_c$ | $D_c + \frac{T}{2}C_c(I - \frac{T}{2}A_c)^{-1}B_c$ |

Corespunzător metodei Tustin modificate, respectiv metodei care permite modificarea domeniului frecvențelor pentru care răspunsul în frecvență este invariant în raport cu transformarea biliniară, în ultima coloană din tabelele 1 și 2 se face următoarea substituție:

$$T \leftarrow 2 \frac{\tan\left(\frac{T\omega_p}{2}\right)}{\omega_p}. \quad (31)$$

Un alt avantaj pe care îl are transformata biliniară este acela că matricile gramianilor de observabilitate și controlabilitate, respectiv valorile singulare Hankel sunt invariante [?]. Cu alte cuvinte un sistem în forma balansată în urma aplicării transformării biliniare rămâne tot în forma balansată, ceea ce implică că transformarea biliniară reține un sistem într-o bază bine condiționată dacă sistemul inițial a fost în forma balansată.

2.4 Sensibilitatea funcției de transfer a sistemului discret

Funcția de transfer a sistemului discret cu o intrare și o ieșire se consideră:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\beta_m z^m + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0}. \quad (32)$$

Coeficienții celor două polinoame $N(z)$ și $D(z)$ rezultă în urma unor calcule care se efectuează cu o precizie finită, ceea ce implică cuantizarea acestor coeficienți și implicit localizarea polilor și zerourilor funcției de transfer numai la locații discrete din planul complex „ z ”. Cuantizarea funcției de transfer a sistemului discret schimbă valorile coeficienților celor două polinoame față de valorile reale. Acest fenomen de cuantizare provine din reprezentarea numerelor în calculator pe cuvinte cu lungime finită. În această secțiune se prezintă două metode pentru studiu efectelor datorate cuantizării coeficienților funcției de transfer a sistemului discret.

Prima metodă se bazează de analiză sensibilității coeficienților celor două polinoame apelând la dezvoltarea în serie Taylor, iar cea de a doua are la bază metoda locului rădăcinilor.

2.4.1 Analiza sensibilității

Se consideră cazul în care asupra coeficienților polinomului de la numitor acționează efectul de trunchiere, respectiv acești coeficienți sunt perturbați cu $\delta\alpha_k$, de la valoarea reală α_{k_0} , respectiv:

$$\alpha_k = \alpha_{k_0} + \delta\alpha_k, \quad \forall k = \overline{1, n}, \quad (33)$$

deci în polinomul de la numitor se consideră cu coeficienți variabili, respectiv:

$$D(z, \alpha_k) = z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0. \quad (34)$$

Zerourile acestui polinom se notează cu λ_j , $j = \overline{1, n}$, iar perturbația $\delta\alpha_k$ determină o abatere a rădăcinii de ordinul „ j ” cu $\delta\lambda_j$ față de valoarea reală λ_{j_0} . Poziția rădăcinilor polinomului $D(z, \alpha_k)$ în raport cu cercul unitate din planul complex „ z ”, determină stabilitatea asimptotică a sistemului caracterizat de funcția de transfer definită în relația (32). Influența perturbațiilor coeficienților ($\delta\alpha_k$) asupra rădăcinilor polinomului caracteristic (λ_j) se studiază prin dezvoltarea în serie Taylor a polinomului $D(z, \alpha_k)$ în jurul valorilor nominale λ_{j_0} și α_{k_0} ,

$$D(z, \alpha_k) = D(\lambda_{j_0}, \alpha_{k_0}) + \left. \frac{\partial D(z, \alpha_k)}{\partial z} \right|_{\substack{z=\lambda_{j_0} \\ \alpha_k=\alpha_{k_0}}} \delta\lambda_j + \left. \frac{\partial D(z, \alpha_k)}{\partial \alpha_k} \right|_{\substack{z=\lambda_{j_0} \\ \alpha_k=\alpha_{k_0}}} \delta\alpha_k + \dots, \quad (35)$$

unde pentru perturbații relativ mici ale rădăcinilor $\delta\lambda_j \ll 1$, termenii de ordin superior se neglijează. Evaluând relația (35) pentru $z = \lambda_j$ și ținând cont că $D(\lambda_j, \alpha_k) = 0$, respectiv $D(\lambda_{j_0}, \alpha_{k_0}) = 0$, rezultă:

$$0 = 0 + \left. \frac{\partial D(z, \alpha_k)}{\partial z} \right|_{\substack{z=\lambda_{j_0} \\ \alpha_k=\alpha_{k_0}}} \delta\lambda_j + \left. \frac{\partial D(z, \alpha_k)}{\partial \alpha_k} \right|_{\substack{z=\lambda_{j_0} \\ \alpha_k=\alpha_{k_0}}} \delta\alpha_k, \quad (36)$$

relație care arată influența perturbației $\delta\alpha_k$ asupra rădăcinii λ_j . Ultima relație se rescrie astfel:

$$\delta\lambda_j = - \frac{\left. \frac{\partial D(z, \alpha_k)}{\partial \alpha_k} \right|_{\substack{z=\lambda_{j_0} \\ \alpha_k=\alpha_{k_0}}}}{\left. \frac{\partial D(z, \alpha_k)}{\partial z} \right|_{\substack{z=\lambda_{j_0} \\ \alpha_k=\alpha_{k_0}}}} \delta\alpha_k. \quad (37)$$

Din expresia polinomului caracteristic definit în relația (34), rezultă:

$$\left. \frac{\partial D(z, \alpha_k)}{\partial \alpha_k} \right|_{\substack{z=\lambda_{j_0} \\ \alpha_k=\alpha_{k_0}}} = z^k \Big|_{\substack{z=\lambda_{j_0} \\ \alpha_k=\alpha_{k_0}}} = \lambda_{j_0}^k. \quad (38)$$

Același polinom caracteristic se poate scrie în forma factorizată astfel:

$$D(z, \alpha_k) = (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_{k-1}) (z - \lambda_k) (z - \lambda_{k+1}) \cdots (z - \lambda_n), \quad (39)$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial D(z, \alpha_k)}{\partial z} \right|_{\substack{z=\lambda_{j_0} \\ \alpha_k=\alpha_{k_0}}} &= (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_{k-1}) (z - \lambda_k) (z - \lambda_{k+1}) \cdots (z - \lambda_n) \Big|_{\substack{z=\lambda_{j_0} \\ \alpha_k=\alpha_{k_0}}} = \\ &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (\lambda_{j_0} - \lambda_i). \end{aligned} \quad (40)$$

Pe baza ultimilor două rezultate (39) și (40), relația (37) se rescrie astfel:

$$\delta\lambda_j = \frac{\lambda_{j_0}^k}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (\lambda_{j_0} - \lambda_i)} \delta\alpha_k. \quad (41)$$

Din analiza ultimului rezultat obținut se poate face următoarele două comentarii:

1. În cazul unui sistem asimptotic stabil ($|\lambda_{j_0}| < 1$) este evidentă următoarea relație:

$$|\lambda_{j_0}|^n < |\lambda_{j_0}|^{n-1} < \cdots < |\lambda_{j_0}|^2 < |\lambda_{j_0}| < 1,$$

iar din examinarea numărătorului din relația (41) se constată că influența cea mai mare asupra rădăcinilor λ_j o are coeficientul α_0 , iar influența coeficienților α_k ($1 \leq k \leq n$), asupra polilor sistemului, scade progresiv pe măsură ce $k \rightarrow n$;

2. Din examinarea numitorului din relația (41), în aceeași ipoteză de sistem asimptotic stabil, se constată că influența coeficienților α_k , asupra polilor sistemului, crește în mod dramatic odată cu creșterea ordinului sistemului n .

Example 2 Se consideră sistemul discret, cu următoarea reprezentare:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{pmatrix} a_{11} & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k, \\ y_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x_k. \end{aligned}$$

Se cere să se studieze sensibilitatea polilor sistemului în raport cu efectul de cuantizare δa_{11} a parametrului a_{11} , care are valoarea nominală $a_{11_0} = 2.5$.

Funcția de transfer în \mathcal{Z} este:

$$\begin{aligned} H(z) &= C(zI - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \left(zI - \begin{pmatrix} a_{11} & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{z - a_{11}}{z^2 + (1 - a_{11})z + 3 - a_{11}}. \end{aligned}$$

Sensibilitatea zerourilor sistemului (rădăcinilor polinomului de la numărător) în raport cu parametrul $\beta_0 = -a_{11}$ este +1.

Pentru $a_{11_0} = 2.5$ polii sistemului (rădăcinile polinomului de la numitor) sunt: $\lambda_{1_0} = 0.5$ și $\lambda_{2_0} = 1.0$. Sensibilitatea valorilor proprii în raport cu parametrul a_{11} se studiază în continuare. Prin identificare rezultă: $\alpha_0 = 3 - a_{11}$ și $\alpha_1 = 1 - a_{11}$. Aplicând relația (37) rezultă:

$$\begin{aligned} \delta\lambda_j &= - \frac{\left. \frac{\partial D(z, \alpha_k)}{\partial \alpha_0} \right|_{\substack{z=\lambda_{j_0} \\ a_{11}=a_{11_0}}} \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_{11}} \delta a_{11} + \left. \frac{\partial D(z, \alpha_k)}{\partial \alpha_1} \right|_{\substack{z=\lambda_{j_0} \\ a_{11}=a_{11_0}}} \frac{\partial \alpha_1}{\partial a_{11}} \delta a_{11}}{\left. \frac{\partial D(z, \alpha_k)}{\partial z} \right|_{\substack{z=\lambda_{j_0} \\ a_{11}=a_{11_0}}}} = \\ &= - \frac{1(-1)\delta a_{11} + z(-1)\delta a_{11}}{2z + (1 - a_{11})} \bigg|_{\substack{z=\lambda_{j_0} \\ a_{11}=a_{11_0}}}, \quad \forall j = \overline{1, 2}. \end{aligned}$$

Pentru o variație a lui a_{11} de la $a_{11_0} = 2.5$ la $a_{11} = 2.51$ rezultă o schimbare a valorii proprii λ_1 de la $\lambda_{1_0} = 0.5$ la $\lambda_1 = 0.488$ (respectiv $\delta\lambda_1 = -0.012$), iar valoarea proprie λ_2 se schimbă de la $\lambda_{2_0} = 1$ la $\lambda_2 = 1.04$ (respectiv $\delta\lambda_2 = 0.04$), ceea ce duce sistemul la instabilitate, deoarece o valoare proprie este în afara cercului cu centru în originea planului complex „ z ” și rază egală cu unitatea ($|z| = 1$). \triangleleft

2.4.2 Metoda locului rădăcinilor

În continuare este analizată problema sensibilității valorilor proprii ale sistemului în raport cu efectul de cuantizare, care se manifestă prin variații ale coeficienților funcției de transfer în \mathcal{Z} , apelând la metoda locului rădăcinilor. Sistemul caracterizat de funcția de transfer prezentată în relația (32) se reconfigurează sub forma unui sistem cu reacție negativă, care pe calea directă prezintă un factor de transfer definit de parametrul în raport cu care se studiază sensibilitatea (γ), iar pe calea de reacție prezintă funcția de transfer $H_r(z) = \frac{R(z)}{S(z)}$, astfel determinată încât numitorul din relația (32) să coincidă cu numitorul funcției de transfer a sistemului închis, respectiv:

$$D(z) = \gamma R(z) + S(z). \quad (42)$$

Evident că parametrul γ este un element din matricea coeficienților, matricea de intrare sau matricea de ieșire a realizării de stare pentru sistem, în raport cu care se studiază problema sensibilității valorilor proprii. În polinoamele $R(z)$, respectiv $S(z)$ parametrul γ , nu poate să apară pentru a putea apela la metoda locului rădăcinilor.

Rădăcinile sistemului închis (valorile proprii ale sistemului) sunt date de către următoarea ecuație polinomială:

$$\gamma R(z) + S(z) = 0,$$

care este echivalentă cu:

$$\gamma \frac{R(z)}{S(z)} = -1,$$

și pentru care se poate aplica metoda locului rădăcinilor.

Example 3 *Se consideră sistemul din exemplul precedent. Se cere să se studieze sensibilitatea polilor în raport cu parametrul a_{11} , care are valoarea nominală $a_{11_0} = 2.5$.*

Numitorul funcției de transfer al sistemului discret este:

$$\begin{aligned} D(z) &= z^2 + (1 - a_{11})z + 3 - a_{11} = \\ &= -a_{11}(z + 1) + z^2 + z + 3. \end{aligned}$$

Prin identificare cu relația (42), rezultă:

$$\begin{aligned} \gamma &= a_{11}, \\ R(z) &= -(z + 1), \\ S(z) &= z^2 + z + 3, \end{aligned}$$

respectiv metoda locului rădăcinilor se aplică pentru:

$$a_{11} \frac{-(z + 1)}{z^2 + z + 3} = -1.$$

Locul rădăcinilor pentru $a_{11} = 0 : 0.1 : 3.0$, este prezentat în figura 1.

Sistemul este stabil pentru $a_{11} \in (2, 2.5)$ și din figură se observă sensibilitatea celor două valori proprii în raport cu parametrul a_{11} . O măsură a sensibilității fiecărei valori proprii în raport cu a_{11} este dată de către distanța între două puncte marcate cu „×”. Ca și în cazul precedent se constată o sensibilitate mai mare a valorii proprii care în modul se apropie de 1. Pentru $a_{11} \in (2, 2\sqrt{3} - 1)$ sistemul prezintă un singur mod, corespunzător polilor complex conjugați, iar pentru $a_{11} \in (2\sqrt{3} - 1, 2.5)$ sistemul prezintă două moduri, corespunzătoare celor doi poli reali $\lambda_1 \in (\sqrt{3} - 1, 0)$, respectiv $\lambda_2 \in (\sqrt{3} - 1, 1)$. ◁

3 Analiza erorilor datorate cuantizării semnalelor

Structura tipică a unui sistem de control automat cu reacție negativă este prezentată în figura 2. Dezvoltarea rapidă în ultima perioadă a microprocesoarelor (μP), microcontrolerelor (μC) și a procesoarelor digitale de semnal (DSP) a determinat ca proiectarea sistemelor de control digital să fie tot mai atractivă.

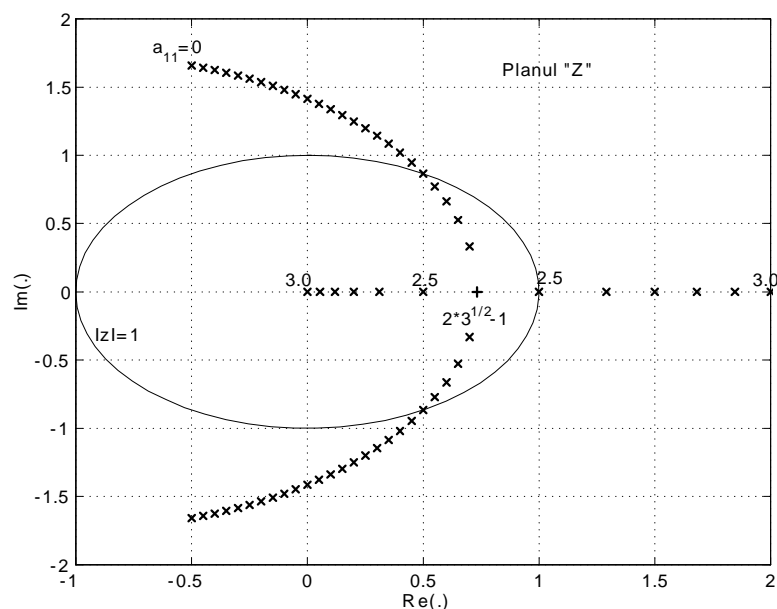


Figure 1: Analiza sensibilității polilor sistemului discret cu ajutorul metodei locului rădăcinilor

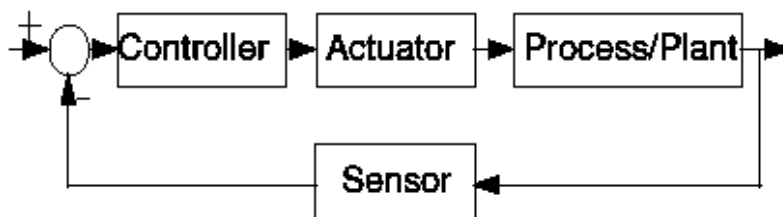


Figure 2: Structura tipică a unui sistem de control automat

Diagrama bloc a unui sistem digital de control este prezentată în figura 3, unde se prezintă și semnalele cu care operează fiecare bloc. Semnalele digitale prelucrate de regulator (implementat pe un sistem cu μP , μC sau DSP) sunt, fie furnizate ca atare de anumite surse discrete, fie sunt obținute prin discretizarea eşantioanelor semnalelor analogice, prin conversie analog-digitală. Semnalele prelucrate trebuie transformate în semnale analogice, operație realizată prin conversia digital-analogică. În secțiunea de față vor fi discutate aspecte legate de obținerea semnalelor digitale prin conversie A/D precum și metode de reconstituire a semnalelor analogice prin conversie D/A .

3.1 Conversia analog-digitală

Semnalele analogice pot fi transformate în semnale digitale cu ajutorul convertoarelor A/D , care furnizează semnale digitale, reprezentate binar cu un număr finit de biți. Conversia A/D este un proces care implică trei operații:

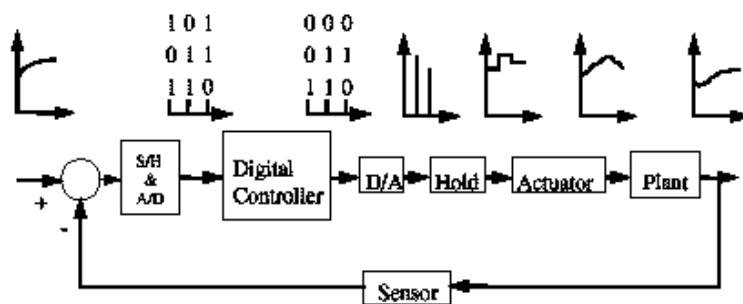


Figure 3: Diagrama bloc a unui sistem digital de control

- *eșantionarea* care transformă semnalul analogic (continuu în timp și amplitudine) în semnal eșantionat (discret în timp și continuu în amplitudine);
- *cuantizarea*, operație prin care semnalul eșantionat este cuantizat în amplitudine, alocându-i-se o valoare dintr-un set finit de valori discrete;
- *codarea* care constă în atribuirea unui cod binar semnalului cuantizat.

În structura convertoarelor A/D nu întodeauna pot fi separate cele trei module funcționale (eșantionatorul, cuantizatorul și codorul), dar această separare ușurează procesul de analiză. În această secțiune se insistă asupra operației de cuantizare care este tratată prin metode specifice sistemelor stochastice.

Prin cuantizare fiecărui eșantion i se alocă o valoare dintr-un set de valori. Distanța dintre două nivele consecutive de cuantizare este denumită *pas de cuantizare*. Dacă pasul de cuantizare este constant cuantizarea este *uniformă*, iar în caz contrar cuantizarea este *neuniformă*. În cazul cuantizării uniforme nivelul semnalului de la ieșirea cuantizatorului este multiplu al pasului de cuantizare, în timp ce la cuantizarea neuniformă nivelul semnalului de ieșire este o funcție monotonă de înțrghi care pot avea orice valoare. Majoritatea convertoarelor A/D lucrează cu cuantizare uniformă. Cuantizarea poate fi executată prin *rotunjire* sau prin *trunchiere*.

3.1.1 Cuantizarea prin rotunjire

Caracteristica de transfer a cuantizatorului (relația dintre semnalul de intrare (eșantionat) $s^*(kT)$ și semnalul de ieșire (cuantizat) $s_q(kT)$) este prezentată în figura 4, unde q este pasul de cuantizare. Pe abscisă sunt reprezentate nivelele de cuantizare ale eșantioanelor, iar pe ordonată nivelele disponibile pentru reprezentare. Intrarea variază continuu de la valoarea maximă negativă la valoarea maximă pozitivă, iar ieșirea variază în trepte.

Dacă numărul nivelelor de reprezentare de la ieșire este 2^n numărul nivelelor analogice de decizie este $2^n - 1$, iar distanța dintre două nivele de cuantizare consecutive este q . Prin *rotunjire*, unui eșantion analogic i se atribuie cel mai apropiat nivel de reprezentare disponibil. De exemplu (în figura 4) ieșirea cuantizatorului este $1 \times q$, pentru valori

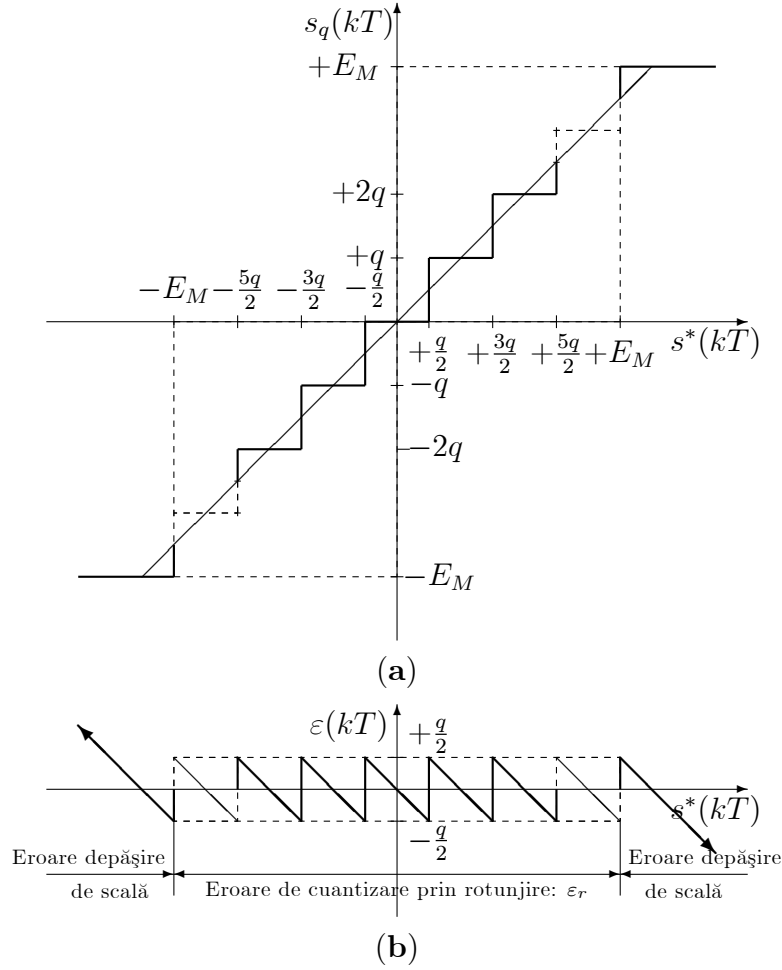


Figure 4: Caracteristica de transfer a cuantizatorului prin rotunjire (a) și eroarea de rotunjire (b)

ale semnalului eșantionat în gama $[\frac{q}{2}, \frac{3q}{2})$. Eroarea de cuantizare prin rotunjire⁷ este prezentată în figura 4.b. Din analiza acestui grafic se constată că operația de cuantizare determină apariția a două feluri de erori.

Când semnalul de intrare se află în domeniul de lucru al cuantizatorului, eroarea variază periodic și continuu între $-\frac{q}{2}$ și $+\frac{q}{2}$. Acest tip de eroare, denumită *eroare de cuantizare prin rotunjire*⁸, apare atunci când valoarea eșantionului analogic este situată între două nivele disponibile de cuantizare. Dacă numărul nivelelor de cuantizare este mic, eroarea va fi în general corelată cu semnalul de intrare. Dacă numărul nivelelor este mare, iar cuantizarea este uniformă, se poate folosi ipoteza că eroarea de cuantizare nu este corelată cu semnalul.

Deoarece există doar un număr limitat de nivele de cuantizare, toate eșantioanele care depășesc nivelul maxim de cuantizare se rotunjesc la valoarea E_M , iar cele care

⁷roundoff error

⁸rounded quantization error

sunt sub nivelul minim de cuantizare se rotunjesc la valoarea $-E_M$. Eroarea care apare atunci când semnalul de intrare iese din domeniul de lucru al cuantizatorului este denumită *eroare de depășire*⁹. Valoarea acesteia crește nelimitat odată cu semnalul de intrare. Eroarea de depășire este similară cu zona de saturație de la sistemele neliniare.

Eroarea de rotunjire este denumită și *zgomot de rotunjire*, efectul ei în sistemul de prelucrare fiind echivalent cu prezența unui zgomot aditiv în componenta semnalului furnizat de convertorul A/D . Această eroare este inerentă procesului de conversie A/D , valoarea ei fiind dependentă de numărul nivelelor de cuantizare ale cuantizatorului.

Eroarea de cuantizare este un *proces stochastic* care poate fi caracterizat prin mărimi statistice. Dacă pasul de cuantizare este q , densitatea de probabilitate a erorii de cuantizare prin rotunjire este:

$$p(\varepsilon_r) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & |\varepsilon_r| < \frac{q}{2} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Acest zgomot prezintă valoarea medie:

$$\mu_r = \mathcal{E}\{\varepsilon_r\} = \int_{-\frac{q}{2}}^{+\frac{q}{2}} \varepsilon_r p(\varepsilon_r) d\varepsilon_r = \int_{-\frac{q}{2}}^{+\frac{q}{2}} \varepsilon_r \frac{1}{q} d\varepsilon_r = 0, \quad (43)$$

și o dispersie:

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 &= \mathcal{E}\{(\varepsilon_r - \mu_r)^2\} = \mathcal{E}\{\varepsilon_r^2\} - \mathcal{E}\{\varepsilon_r\}^2 = \\ &= \int_{-\frac{q}{2}}^{+\frac{q}{2}} \varepsilon_r^2 \frac{1}{q} d\varepsilon_r - 0 = \frac{q^2}{12}. \end{aligned} \quad (44)$$

Funcția densitate de probabilitate a *eroarii de cuantizare prin rotunjire* este reprezentată în figura 5.

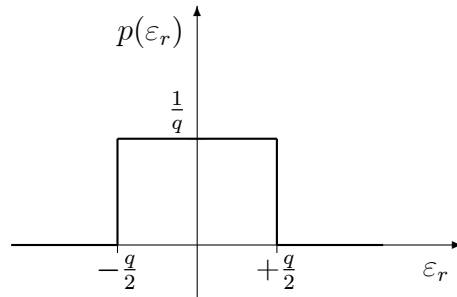


Figure 5: Densitatea de probabilitate a erorii de rotunjire

⁹overflow error

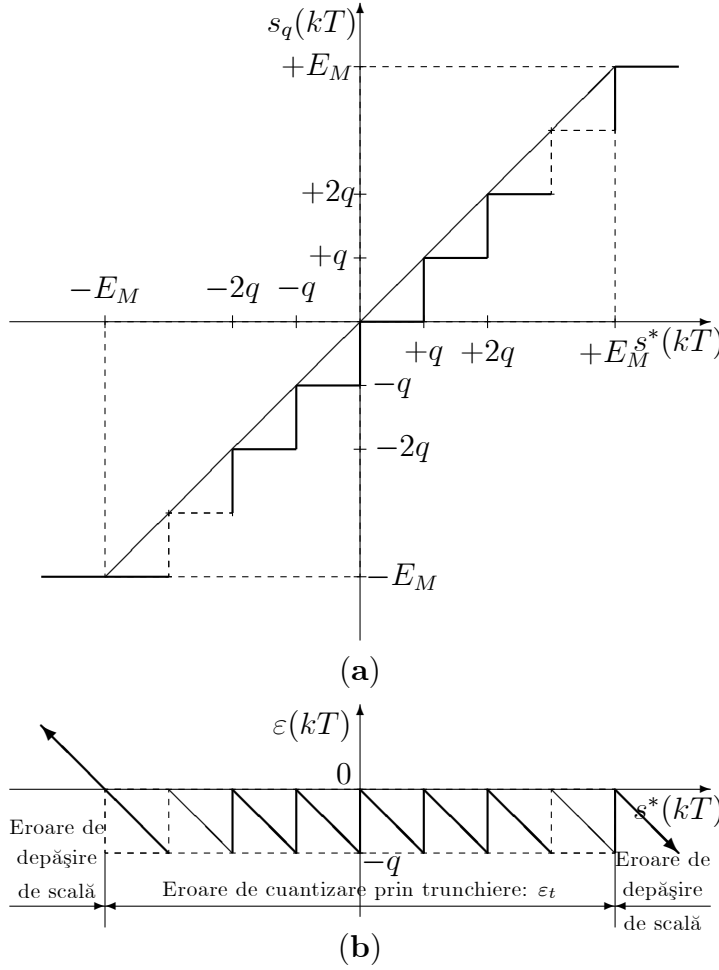


Figure 6: Caracteristica de transfer a cuantizatorului prin trunchiere (a) și eroarea de trunchiere (b)

3.1.2 Cuantizarea prin trunchiere

La cuantizarea prin trunchiere unui eșantion analogic i se atribuie cel mai mare nivel de reprezentare disponibil care este valoric inferior eșantionului. Caracteristica de transfer a cuantizatorului prin trunchiere este prezentată în figura 6, unde q este pasul de cuantizare.

Când semnalul de intrare se află în domeniul de lucru al cuantizatorului, eroarea variază periodic și continuu între 0 și $-q$. Acest tip de eroare, denumită *eroare de cuantizare prin trunchiere*¹⁰, apare atunci când valoarea eșantionului analogic este situată între două nivele disponibile de cuantizare.

Funcția densitate de probabilitate a *eroarii de trunchiere* este reprezentată în figura 7, pentru mărimi reprezentate în virgulă fixă și în cod complement față de doi. Dacă pasul de cuantizare este q , densitatea de probabilitate a erorii de cuantizare prin trunchiere

¹⁰truncation quantization error

este:

$$p(\varepsilon_t) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & -q < \varepsilon_t < 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Acest zgomot prezintă valoarea medie:

$$\mu_t = \mathcal{E}\{\varepsilon_t\} = \int_{-q}^0 \varepsilon_t p(\varepsilon_t) d\varepsilon_t = \int_{-q}^0 \varepsilon_t \frac{1}{q} d\varepsilon_t = \frac{q}{2}, \quad (45)$$

și o dispersie:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \mathcal{E}\{(\varepsilon_t - \mu_t)^2\} = \mathcal{E}\{\varepsilon_t^2\} - \mathcal{E}\{\varepsilon_t\}^2 = \\ &= \int_{-q}^0 \varepsilon_t^2 \frac{1}{q} d\varepsilon_t - \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{q^2}{12}. \end{aligned} \quad (46)$$

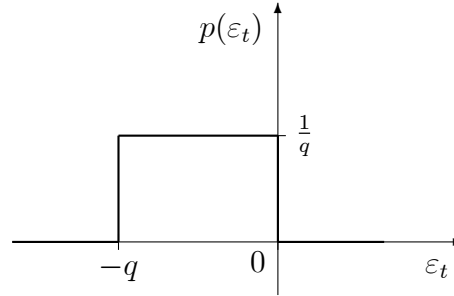


Figure 7: Densitatea de probabilitate a erorii de trunchiere

3.2 Conversia digital-analogică

În majoritatea aplicațiilor este necesar ca semnalul digital, obținut în urma implementării algoritmului de control, să fie disponibil sub formă analogică. Procesul de obținere a semnalului analogic din semnalul digital corespunzător se numește *reconstituirea semnalului analogic*. Reconstituirea semnalului analogic reprezintă operația inversă conversiei analog-digitale și se execută cu ajutorul dispozitivelor de reconstrucție. Teorema eșantionării arată că reconstituirea unui semnal analogic de bandă limitată poate fi realizată cu ajutorul unui filtru trece-jos. Pentru reconstituirea semnalului analogic trebuie efectuate operațiile complementare celor implicate de conversia A/D (*decodarea, decuantizarea și deeeșantionarea*).

Prin operația de *decodare* și *decuantizare*, din semnalul digital reprezentat printr-o secvență de simboluri 0 și 1, se obțin eșantioanele analogice. *Deeșantionarea* este realizarea de dispozitivul de extrapolare (interpolare) a semnalului pe o perioadă de eșantionare și de filtrul trece-jos care elimină frecvențele înalte. Deoarece operatorul de cuantizare nu este inversabil, nivelul analogic real (existent la intrarea cuantizatorului

din convertorul A/D) nu poate fi refăcut. Decuantizarea se reduce la reprezentarea printr-un continuu de valori a semnalului de la ieșirea cuantizatorului (din convertorul A/D), care aproximează intrarea sa, în limitele erorii de cuantizare. Din punct de vedere structural, există doar blocul de decodare în locul blocului de decodare și decuantizare.

Decodorul și extrapolatorul (interpolatorul) din dispozitivul de reconstituire formează convertorul digital-analogic (D/A). Operația de conversie D/A poate fi definită de relația:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT) h(t - kT), \quad (47)$$

unde $h(t)$ caracterizează convertorul D/A particular. Această relație arată că spectrul semnalului analogic $\tilde{s}(t)$, $(\tilde{S}(j\Omega))$ diferă de spectrul secvenței $s_d(kT)$, $(S_d(e^{j\omega T}))$ în domeniul $0 \leq f \leq \frac{1}{2T}$, deoarece $\tilde{S}(j\Omega)$ și $S_d(e^{j\omega T})$ satisfac relația:

$$\tilde{S}(j\Omega) = S_d(e^{j\omega T}) H(j\Omega). \quad (48)$$

Pentru a compensa această modificare a spectrului, datorată în esență extrapolatorului din convertorul D/A , secvența digitală este deseori prelucrată anterior cu un filtru digital al cărui răspuns în frecvență are forma:

$$|G(e^{j\omega T})| = \frac{1}{|H(j\Omega)|}. \quad (49)$$

Operația de reconstituire a semnalului analogic se poate face prin:

- *interpolare*, operație în care valorile semnalului $s(t)$ în intervalul $kT < t < (k+1)T$ se determină pe baza valorilor de la capetele intervalului (a eșantioanelor);
- *extrapolare*, când reconstituirea semnalului analogic între momentele de eșantionare kT și $(k+1)T$ se dermină pe baza valorilor din momentele de eșantionare precedente: $kT, (k-1)T, \dots, T, 0$.

Există posibilitatea ca, pe un interval finit, un semnal să fie aproximat cu o funcție polinomială (*interpolarea polinomială*). Această tehnică de aproximare este mai ușor de realizat și permite adaptarea la eșantionarea neuniformă. Operația de interpolare implică calculul inversei unei matrici, operație care poate să fie evitată utilizând *formula de interpolare a lui Lagrange*. Cu ajutorul *filtrului de reconstrucție* se refăce semnalul pe baza a $N+1$ valori anterioare ale semnalului, unde N reprezintă ordinul filtrului.

Cea mai simplă metodă de reconstituire a semnalului este utilizarea unui *extrapolator de ordin zero*, care are funcția pondere:

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}. \quad (50)$$

Funcția de transfer a extrapolatorului de ordin zero este:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \quad (51)$$

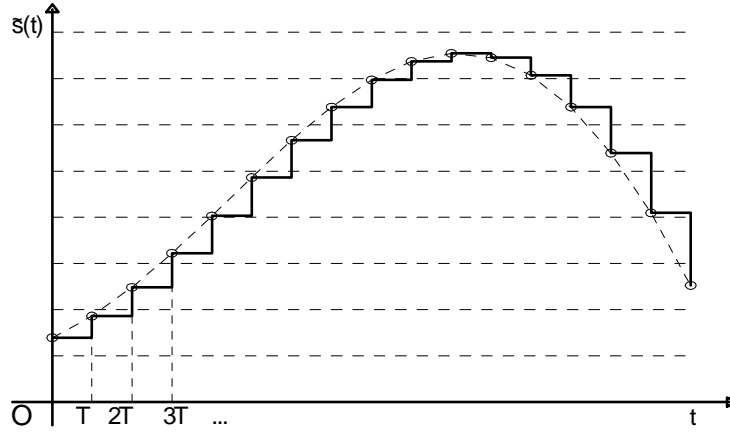


Figure 8: Principiul de funcționare al extrapolatorului de ordinul zero

În acest caz semnalul reconstituit este format din trepte, valoarea semnalului pe intervalul $[kT, (k+1)T)$ fiind valoarea eșantionului din momentul kT , care este reținut până la sosirea eșantionului următor, figura 8. Se constată diferența care există între semnalul reconstituit și cel inițial. Pentru analiza distorsiunilor care rezultă prin aplicarea acestei metode se consideră că operația de „reținere” a valorii eșantionului poate fi exprimată matematic printr-o operație de mediere a eșantioanelor. Funcția pondere a filtrului de mediere este prezentată în figura 9, iar răspunsul în frecvență are expresia:

$$H_0(j\omega) = T \frac{\sin\left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right)}{\pi \frac{\omega}{\omega_s}} e^{-j\pi \frac{\omega}{\omega_s}} = T \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right) e^{-j\pi \frac{\omega}{\omega_s}}, \quad (52)$$

unde $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ este pulsația de eșantionare, iar *sinc* este funcția „sinus cardinal” și este prezentat în figura 10.

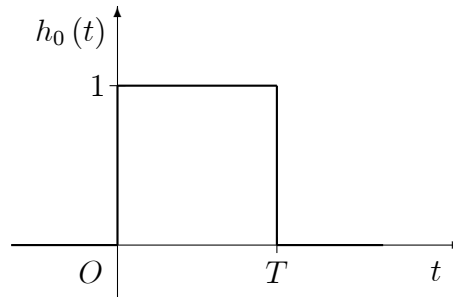


Figure 9: Funcția pondere a extrapolatorului de ordinul zero

Analizând relația (52) din punct de vedere al spectrului de putere, pot fi puse în evidență două tipuri de distorsiuni:

- distorsiuni liniare, introduse de factorul $\operatorname{sinc}\left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right)$. Componentele spectrale

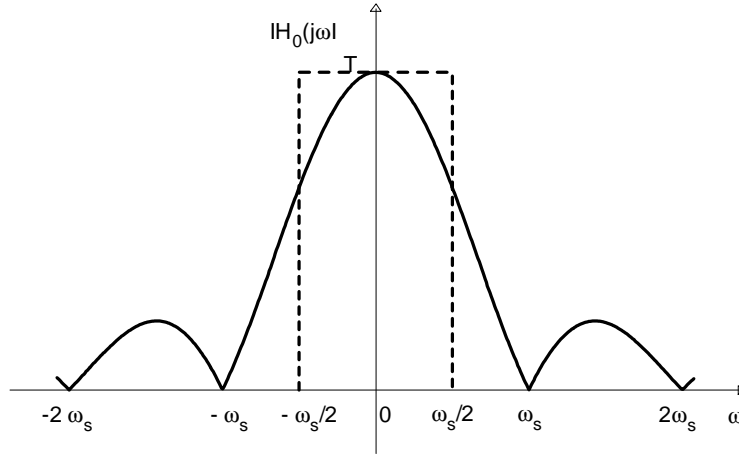


Figure 10: Răspunsul în frecvență al extrapolatorului de ordinul zero

cu pulsația cea mai mare, respectiv $\frac{\omega_s}{2}$, sunt atenuate cu factorul $\text{sinc}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.6366$ ($-3.9224 \text{ dB} \approx -4 \text{ dB}$), atenuare tolerabilă;

- distorsiuni care provin din faptul că, componentele spectrului translatat nu sunt atenuate total. Pentru a reduce acest efect, după circuitul de reținere se introduce un filtru trece-jos.

3.3 Modelarea stochastică a efectelor de cuantizare

În fiecare moment de eșantionare „ k ” modelul zgomotului se consideră de forma:

$$\varepsilon(k, \cdot) = w(k, \cdot) + \mu_\varepsilon,$$

unde $\varepsilon(k, \cdot)$ reprezintă valoarea reală corespunzătoare procesului stochastic cu $w(k, \cdot)$ variabilă aleatoare pentru fiecare moment de eșantionare k , $k = 1, 2, \dots$. Variabila aleatoare $w(k, \cdot)$ are valoarea medie zero și dispersia $\frac{q^2}{12}$, atâta timp cât $u_\varepsilon = 0$ în cazul procesului de cuantizare prin rotunjire, respectiv $u_\varepsilon = -\frac{q}{2}$ în cazul procesului de cuantizare prin trunchiere.

Pentru un sistem discret (obținut prin eșantionare), se consideră zgomotul datorat erorilor de calcul modelat prin variabila aleatoare $\varepsilon_c(k, w)$, zgomotul datorat fenomenelor de cuantizare care au loc în convertorul A/D modelat prin variabila aleatoare $\varepsilon_u(k, w)$ și zgomotul pe ieșire datorat convertorului D/A modelat prin $\varepsilon_y(k, w)$. În aceste condiții realizarea de stare a sistemului discret, prezentată în figura 11 este:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B(u(k) + \varepsilon_u(k)) + \varepsilon_c(k), \\ y(k) &= Cx(k) + \varepsilon_y(k). \end{aligned} \tag{53}$$

Pentru sistemul prezentat în figura 11 calculul dispersiei variabilei de ieșire σ_y^2 ,

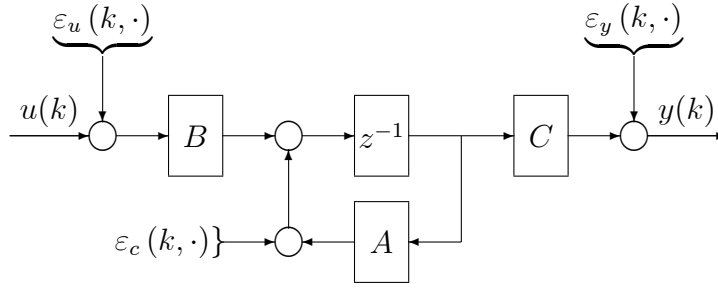


Figure 11: Diagrama bloc a realizării de stare pentru un sistem discret în care se prezintă modelarea stochastică a efectelor de cuantizare

necesită determinarea valorii pătratice medii pentru această variabilă,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} \{y(k) y^T(t)\} &= \mathcal{E} \{(Cx(k) + \varepsilon_y(k, \cdot)) (Cx(k) + \varepsilon_y(k, \cdot))^T\} = \\
 &= \mathcal{E} \{(Cx(k) + \varepsilon_y(k, \cdot)) (x^T(k) C^T + \varepsilon_y^T(k, \cdot))\} = \\
 &= \mathcal{E} \left\{ \begin{array}{l} Cx(k) x^T(k) C^T + \varepsilon_y(k, \cdot) x^T(k) C^T + \\ + Cx(k) \varepsilon_y^T(k, \cdot) + \varepsilon_y(k, \cdot) \varepsilon_y^T(k, \cdot) \end{array} \right\}. \quad (54)
 \end{aligned}$$

În ipotezele realiste că valoarea medie a zgomotului pe ieșire $\varepsilon_y(k, \cdot)$ este zero și că acest zgomot nu este corelat cu vectorul variabilelor de stare $x(k)$, rezultă:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} \{y(k) y^T(t)\} &= C \mathcal{E} \{x(k) x^T(t)\} C^T + \mathcal{E} \{\varepsilon_y(k, \cdot) \varepsilon_y^T(k, \cdot)\} = \\
 &= CP_{xx}(k) C^T + R_y(0), \quad (55)
 \end{aligned}$$

unde $P_{xx}(k)$ este matricea de covarianță pe stare și $R_y(0)$ este autocorelația zgomotului de ieșire.

Calculul matricei de covarianță pe stare $P_{xx}(k)$, se face în mod recursiv, prin calculul valorii pătratice medii pentru vectorul variabilelor de stare:

$$\begin{aligned}
 P_{xx}(k+1) &= \mathcal{E} \{x(k+1) x^T(k+1)\} = \\
 &= \mathcal{E} \left\{ \begin{array}{l} (Ax(k) + Bw_u(k, \cdot) + w_c(k, \cdot)) \times \\ \times (Ax(k) + Bw_u(k, \cdot) + w_c(k, \cdot))^T \end{array} \right\} = \\
 &= \mathcal{E} \left\{ \begin{array}{l} (Ax(k) + Bw_u(k, \cdot) + w_c(k, \cdot)) \times \\ \times (x^T(k) A^T + w_u^T(k, \cdot) B^T + w_c^T(k, \cdot)) \end{array} \right\} = \\
 &= \mathcal{E} \left\{ \begin{array}{l} Ax(k) x^T(k) A^T + Ax(k) w_u^T(k, \cdot) B^T + \\ + Ax(k) w_c^T(k, \cdot) + Bw_u(k, \cdot) x^T(k) A^T + \\ + Bw_u(k, \cdot) w_u^T(k, \cdot) B^T + Bw_u(k, \cdot) w_c^T(k, \cdot) + \\ + w_c(k, \cdot) x^T(k) A^T + w_c(k, \cdot) w_u^T(k, \cdot) B^T + \\ + w_c(k, \cdot) w_c^T(k, \cdot) \end{array} \right\}. \quad (56)
 \end{aligned}$$

Deoarece zgomotul pe intrare $w_u(k, \cdot)$ și zgomotul datorat erorilor de calcul $w_c(k, \cdot)$ sunt independente și necorelate cu vectorul variabilelor de stare $x(k)$, ecuația prece-

dentă se rescrie astfel:

$$\begin{aligned} P_{xx}(k+1) &= \mathcal{E} \left\{ \begin{aligned} &Ax(k)x^T(k)A^T + Bw_u(k,.)w_u^T(k,.)B^T + \\ &+ w_c(k,.)w_c^T(k,.) \end{aligned} \right\} = \\ &= AP_{xx}(k)A^T + BR_u(0)B^T + R_c(0), \end{aligned} \quad (57)$$

unde $R_u(\tau)$ și $R_c(\tau)$, la mometul $\tau = 0$ sunt funcțiile de autocorelație a zgomotului pe intrare, respectiv a zgomotului datorat erorilor de calcul. Dacă starea inițială este perfect cunoscută, atunci $P_{xx}(0) = 0$, și relația (57) permite calculul matricei de covarianță pe stare $P_{xx}(k)$ la orice moment de eșantionare $k = 1, 2, \dots$. În ipoteza unui sistem discret stabil, respectiv toate valorile proprii ale matricei coeficienților A sunt în interiorul cercului unitate din planul complex „ z “, rezultă:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{xx}(k) \rightarrow P_{xx}(k+1). \quad (58)$$

Example 4 Se consideră sistemul discret din Exemplul 2, cu $a_{11} = 2.4$. Pe intrarea sistemului există un convertor A/D pe 10 biți cu intrarea analogică în domeniul $-1 \div +1$ [V] (cel mai puțin semnificativ bit (LSB) reprezintă aproximativ 20 [mV]. Se consideră că sistemul de calcul utilizat se bazează pe un procesor de semnal numeric (DSP) în virgulă fixă pe 16 biți (TMS320C5X). Pe ieșirea sistemului există un convertor D/A pe 9 biți cu ieșirea analogică în domeniul $-1 \div +1$ [V] (cel mai puțin semnificativ bit (LSB) reprezintă aproximativ 40 [mV]. Se cere să se calculeze zgomotul pe ieșire.

Valorile medii (μ_x) și varianțele (σ_x^2) sunt:

- Pentru zgomotul de pe intrare $\varepsilon_u(k,.)$:

$$\mu_u = 0,$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\left(\frac{1}{2^9}\right)^2}{12} = 3.18 \times 10^{-7} \text{ [V}^2] \Rightarrow R_u = 3.18 \times 10^{-7} \text{ [V}^2];$$

- Pentru zgomotul datorat erorilor de calcul $\varepsilon_c(k,.)$:

$$\mu_{c_{1,2}} = \frac{\left(\frac{1}{2^9}\right)^2}{12} = 1.53 \times 10^{-5},$$

$$\sigma_{c_{1,2}}^2 = \frac{\left(\frac{1}{2^{15}}\right)^2}{12} = 7.76 \times 10^{-11} \Rightarrow R_c = \begin{pmatrix} 7.76 \times 10^{-11} & 0 \\ 0 & 7.76 \times 10^{-11} \end{pmatrix};$$

- Pentru zgomotul de pe ieșire $\varepsilon_y(k,.)$:

$$\mu_y = \frac{\frac{1}{2^8}}{2} = 1.95 \times 10^{-3},$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\left(\frac{1}{2^8}\right)^2}{12} = 1.27 \times 10^{-7} \Rightarrow R_y = 1.27 \times 10^{-7}.$$

Matricea de covarianță pe stare este:

$$P_{xx}(k+1) = \begin{pmatrix} 2.4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} P_{xx}(k) \begin{pmatrix} 2.4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} R_u(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T + R_c(0). \quad (59)$$

În figura 12 sunt prezentate elementele matricei de covarianță pentru $k = 0, 1, \dots, 20$. Se observă că:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{xx}(k) = \begin{pmatrix} 19.06 \times 10^{-6} & 9.70 \times 10^{-6} \\ 9.70 \times 10^{-6} & 5.43 \times 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

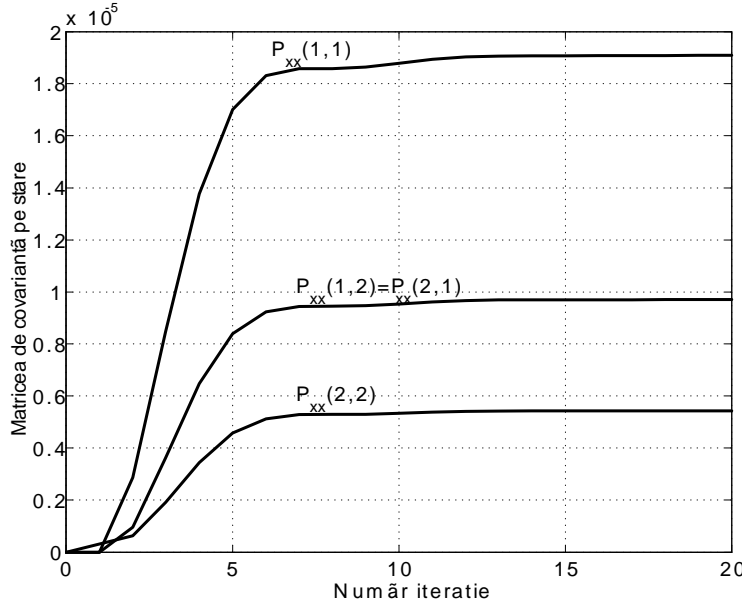


Figure 12: Elementele matricei de covarianță pentru $k = 0, 1, \dots, 20$

Varianța variabilei de ieșire este:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{y(k) y^T(t)\} &= C P_{xx}(k) C^T + R_y(0) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19.06 \times 10^{-6} & 9.70 \times 10^{-6} \\ 9.70 \times 10^{-6} & 5.43 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1.27 \times 10^{-6} = \\ &= 5.43 \times 10^{-6} + 1.27 \times 10^{-6} = 6.70 \times 10^{-6}. \end{aligned} \quad (60)$$

Din examinarea elementelor matricei de covarianță rezultă care este sursa incertitudinilor introduse în sistem prin fenomenul de cuantizare. Asupra acestei surse trebuie să se acționeze prin utilizarea procesoarelor cu unitate centrală aritmetică și logică¹¹ performantă, cum ar fi *DSP*. În cazul utilizării *DSP* contribuția erorilor de calcul

¹¹Central Arithmetic Logic Unit (*CALU*)

este neglijabilă și numai convertorul D/A constituie o sursă de eroare cu o contribuție mărginită și care crește cu scăderea numărului de biți ai convertorului D/A . Pentru ca această contribuție mărginită să nu fie deranjantă trebuie ca numărul de biți ai convertorului D/A să nu scadă sub 8.

Utilizând valorile medii calculate ale zgomotelor pe intrare, stare și ieșire în relația (53), rezultă:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_1(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2.4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_1(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 0 + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 0 + \begin{pmatrix} 1.53 \times 10^{-5} \\ 1.53 \times 10^{-5} \end{pmatrix}, \\ y(k) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_1(k) \end{pmatrix} + 1.95 \times 10^{-3}. \end{aligned} \quad (61)$$

Prin soluționarea recursivă a relației (61), rezultă:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_1(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.65 \times 10^{-5} \\ -3.06 \times 10^{-5} \end{pmatrix},$$

respectiv:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) &= Cx(k) + R_y = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7.65 \times 10^{-5} \\ -3.06 \times 10^{-5} \end{pmatrix} + 1.95 \times 10^{-3} = \\ &= 1.92 \times 10^{-3} [V]. \triangleleft \end{aligned}$$

4 Concluzii

În acest capitol au fost prezentate metode pentru discretizarea sistemelor continue care se pretează la implementarea pe calculatoare numerice. Dintre transformările echivalente, transformarea biliniară este mai des utilizată, deoarece răspunsul în frecvență pe domeniul de liniaritate al scalei frecvențelor constituie un invariant.

Pentru analiza sensibilității funcției de transfer a sistemului discret a fost utilizată metoda locului rădăcinilor.

Pentru un sistem eșantionat a fost utilizată modelarea stochastică a fenomenelor de cuantizare care au loc în convertorul A/D și în convertorul D/A , respectiv a erorilor de calcul.