Stabilitatea intrare-ieşire

P. Dobra

Date

1 Pasivitate

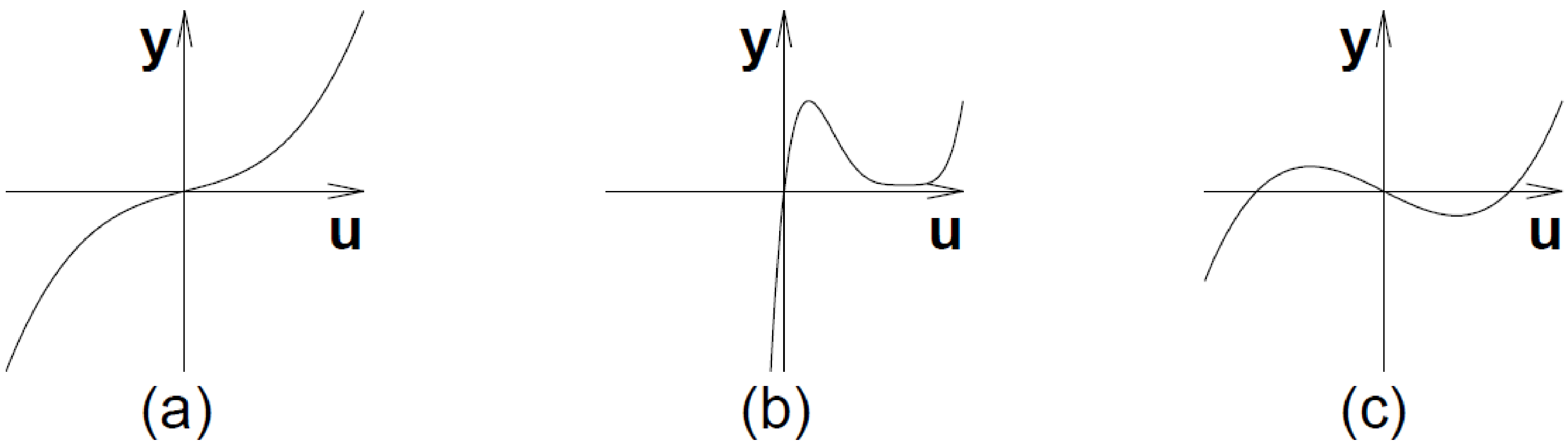
1.1 Funcţii fără memorie

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(t,\ \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} h_1(t,\ \mathbf{u}) \\ h_2(t,\ \mathbf{u}) \\ \vdots \\ h_{n_y}(t,\ \mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

$$puterea\ de\ intrare = \sum_{k=1}^{n_y} u_k y_k = \mathbf{u}^T\mathbf{y}$$

Definition 1 $\mathbf{y} = \mathbf{h}(t,\ \mathbf{u})$ *este*

- pasivă dacă $\mathbf{u}^T\mathbf{y} \geq 0$
- fără pierderi dacă $\mathbf{u}^T\mathbf{y} = 0$
- intrarea strict pasivă dacă $\mathbf{u}^T\mathbf{y} \geq\ \mathbf{u}^T\varphi(\mathbf{u})$ pentru o anumită funcţie φ unde $\mathbf{u}^T\varphi(\mathbf{u}) > 0$, $(\forall)\,\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$
- ieşire strict pasivă dacă $\mathbf{u}^T\mathbf{y} \geq\ \mathbf{y}^T\boldsymbol{\rho}(\mathbf{u})$ pentru o anumită funcţie $\boldsymbol{\rho}$ unde $\mathbf{y}^T\boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}) > 0$, $(\forall)\,\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$

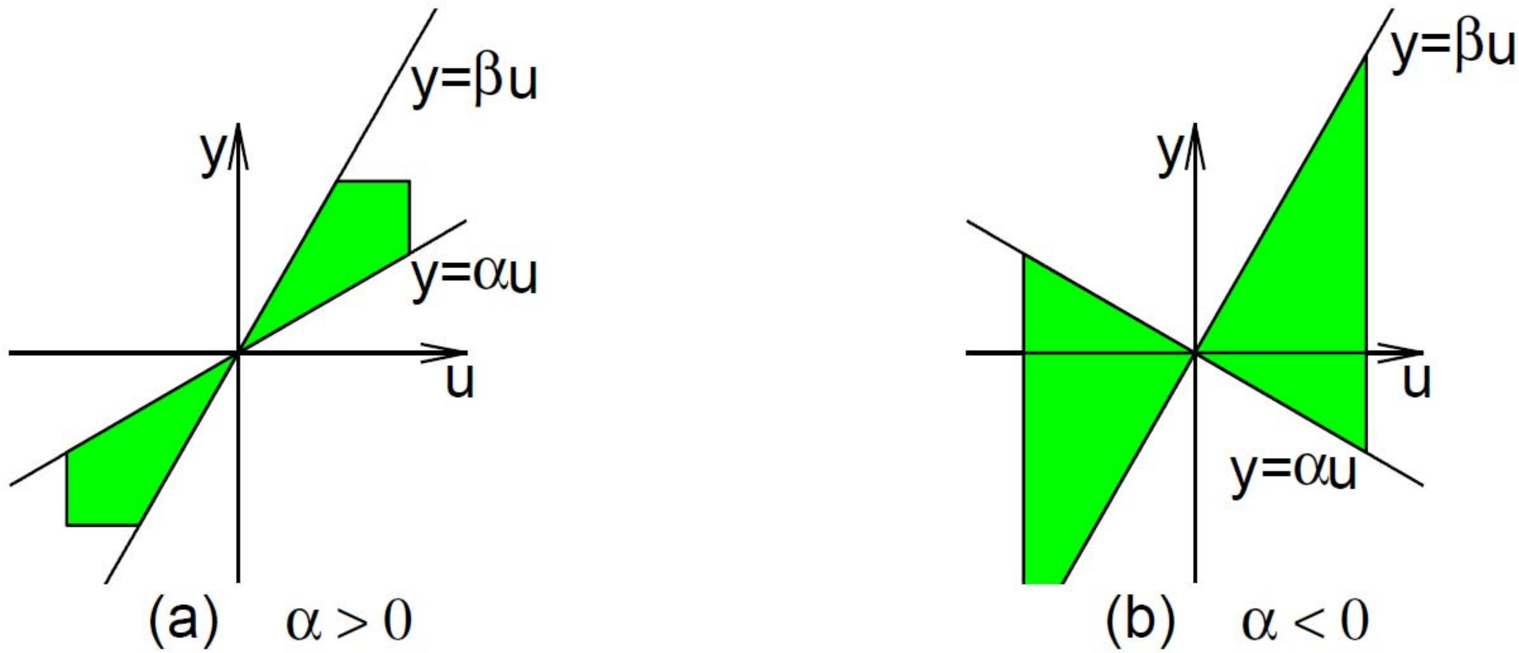


1.Funcţii fără memorie: (a) & (b) pasive; (c) nepasivă

1.2 Neliniaritate de tip sector

h aparţine sectorului $[\alpha,\ \beta]$ ($h \in [\alpha,\ \beta]$) dacă

$$\alpha u^2 \leq uh(t,u) \leq \beta u^2 \Leftrightarrow [h(t,u) - \alpha u]\,[h(t,u) - \beta u] \leq 0$$



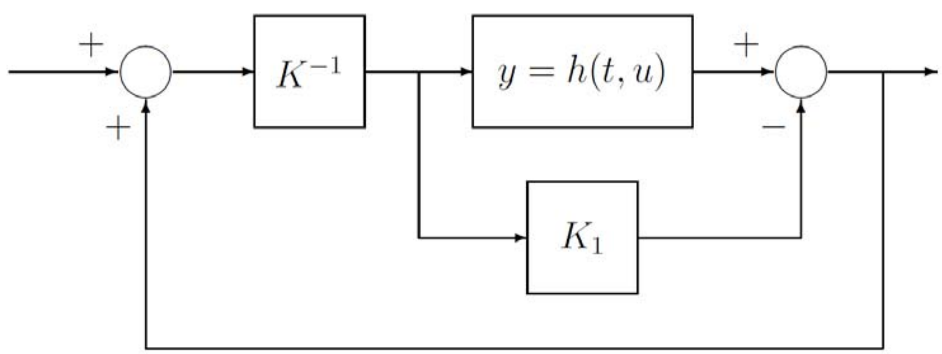
2.Neliniarităţi de tip sector

Definition 2 O funcţie fără memorie $h(t,u)$ se spune că aparţine sectorului

- $[0,\infty]$ dacă $u^T h(t,u) \geq 0$
- $[K_1,\infty]$ dacă $u^T[h(t,u) - K_1 u] \geq 0$
- $[0,K_2]$ cu $K_2 = K_2^T > 0$ dacă $h^T(t,u)[h(t,u) - K_2 u] \leq 0$
- $[K_1,K_2]$ cu $K = K_2 - K_1 = K^T > 0$ dacă $[h(t,u) - K_1 u]^T[h(t,u) - K_2 u] \leq 0$

O funcţie în sector $[K_1,K_2]$ poate fi transformată într-o funcţie în sector $[0,\infty]$ printr-un "*FeedForward*" (*FF*) şi o reacţie de la ieşire (*FDBK*).

$$[K_1,\ K_2] \stackrel{FF}{\longrightarrow} [0,\ K] \stackrel{K^{-1}}{\longrightarrow} [0,\ I] \stackrel{FDBK}{\longrightarrow} [0,\ \infty]$$



3.Transformarea unei funcţii din sectorul $[K_1,K_2]$ în sector $[0,\infty]$

1.3 Modele în spaţiul stărilor

Definition 3 Sistemul

$$\dot{x} = f(x,u),\ y = h(x,u)$$

este *pasiv* dacă există o funcţie continuă, diferenţiabilă, pozitiv semidefinită $V(x)$ (*funcţia de stocare*
astfel încât

$$u^T y \geq \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f\left(x,u\right),\ (\forall)\ (x,u)$$

Mai mult, este

- fără pierderi dacă $u^T y = \dot{V}$
- intrarea strict pasivă dacă $u^T y \geq\ \dot{V} + u^T \varphi(u)$ pentru o anumită funcţie φ unde $u^T \varphi(u) > 0$, $(\forall)\, u \neq$
- ieşire strict pasivă dacă $u^T y \geq\ \dot{V} + y^T \rho(y)$ pentru o anumită funcţie ρ unde $y^T \rho(y) > 0$, $(\forall)\, y \neq 0$
- strict pasivă dacă $u^T y \geq\ \dot{V} + \psi(x)$ pentru o anumită funcţie pozitiv definită ψ

Example 1

a)

$$\dot{x} = u,\ y = x; \quad V(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow uy = \dot{V} \Rightarrow \textit{\textbf{fără pierderi}}$$

b$_1$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u,\ y = x + h(x),\ h \in [0,\ \infty) \\ V(x) &= \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow u\,y = \dot{V} + uh(u) \Rightarrow \textit{\textbf{pasiv}} \end{aligned}$$

b$_2$)

$$h \in [0,\ \infty) \Rightarrow uh(u) > 0,\ (\forall)\,u \neq 0 \Rightarrow \textit{\textbf{intrare strict pasivă}}$$

c$_1$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -h(x) + u,\ y = x,\ h \in [0,\ \infty) \\ V(x) &= \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow u\,y = \dot{V} + yh(u) \Rightarrow \textit{\textbf{pasiv}} \end{aligned}$$

c$_2$)

$$h \in (0,\ \infty) \Rightarrow yh(u) > 0,\ (\forall)\,y \neq 0 \Rightarrow \textit{\textbf{ieşire strict pasivă}}$$

Example 2

a)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u,\ y = h(x),\ h \in [0,\ \infty) \\ V(x) &= \int_0^x h(\sigma)\, d\sigma \Rightarrow \dot{V} = h(x)\, \dot{x} = yu \Rightarrow \textit{fără pierderi} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} a\dot{x} &= -x + u,\ y = h(x),\ h \in [0,\ \infty) \\ V(x) &= a \int_0^x h(\sigma)\, d\sigma \Rightarrow \dot{V} = h(x)\,(-x+u) = yu - xh(x) \end{aligned}$$

b$_1$)

$$yu = \dot{V} + xh(x) \Rightarrow \textit{pasiv}$$

b$_2$)

$$h \in (0,\ \infty) \Rightarrow \textit{Strict pasiv}$$

2 Funcţii de transfer real pozitive

Definition 4 O matrice de transfer raţională $G^{m\times m}(s)$ *este real pozitivă dacă*

- poli tuturor funcţiilor de transfer ale lui $G(s)$ sunt în semiplanul complex stâng $(Re\left\{\hat{s}_k\right\} \leq 0,\ (\forall)\ k)$
- $(\forall)\ \omega \in \mathbb{R}$ pentru care $j\omega$ nu este un pol al unei unei funcţii de transfer $G_{ij}\left(s\right),\ (\forall)\ i,\ j = \overline{1,\ m}$ matricea $G(j\omega) + G^T(-j\omega)$ este pozitiv semidefinită
- orice pol pur imaginar $j\omega$ al unei unei funcţii de transfer $G_{ij}\left(s\right),\ (\forall)\ i,\ j = \overline{1,\ m}$, este un pol simpl şi matricea reziduurilor $\lim\limits_{s\to j\omega}(s - j\omega)G(s)$ este Hermitian pozitiv semidefinită

$G(s)$ este real strict pozitivă dacă $G(s-\varepsilon)$ este real pozitivă pentru $(\forall)\,\varepsilon > 0$.

Cazul scalar (m=1)

$$G(j\omega) + G^T(-j\omega) = 2\,\mathrm{Re}\left\{G\left(j\omega\right)\right\}$$

- $\mathrm{Re}\left\{G\left(j\omega\right)\right\}$ este o funcţie uniformă în raport cu ω.
- $\mathrm{Re}\left\{G(j\omega)\right\}] \geq 0,\ (\forall)\ \omega \in [0,\ \infty) \Leftrightarrow$ *locul de transfer* a lui $G(j\omega)$ se află în semiplanul complex drep
- *Gradul relativ* al funcţiei de transfer este zero sau unul.

Lemma 1 O matrice de transfer raţională $G^{m\times m}(s)$ este real strict pozitivă dacă

Definition 5 • $G(s)$ este Hurwitz

• $G(j\omega)+G^T(-j\omega)>0,\ (\forall)\,\omega\in\mathbb{R}$ este pozitiv semidefinită

• $G(\infty)+G^T(\infty)>0$ sau

$$\lim_{\omega\to\infty}\omega^{2(m-q)}\det\left(G(j\omega)+G^T(-j\omega)\right)>0,$$

unde $q=rank\left(G(\infty)+G^T(\infty)\right)$.

Cazul scalar (m=1)

$G\left(s\right)$ este *real strict pozitivă* dacă şi numai dacă

• $G\left(s\right)$ este Hurwitz.

• $\mathrm{Re}\left\{G(j\omega)\right\}>0,\ (\forall)\ \omega\in[0,\ \infty)$.

• $G(\infty)>0$sau $\lim_{\omega\to\infty}\omega^2\,\mathrm{Re}\left\{G(j\omega)\right\}>0.$

Lemma real pozitivă

Fie $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, unde (A, B) este controlabilă şi (A, C) este observabilă. $G(s)$ este *rea* *pozitivă* dacă şi numai dacă există matrice $P = P^T > 0$, L şi W astfel încât

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= -L^T L \\ PB &= C^T - L^T W \\ W^T W &= D + D^T \end{aligned}$$

Lemma Kalman-Yakubovich-Popov (real strict pozitivă)

Fie $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, unde (A, B) este controlabilă şi (A, C) este observabilă. $G(s)$ este *rea* *stict pozitivă* dacă şi numai dacă există matrice $P = P^T > 0$, L, W şi $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= -L^T L - \varepsilon P \\ PB &= C^T - L^T W \\ W^T W &= D + D^T \end{aligned}$$

Lemma 2 Sistemul LTI în forma minimală

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx + Du$$

este:

- pasiv dacă $G(s)$ este real pozitivă;
- strict pasiv dacă $G(s)$ este real strict pozitivă.

3 Conexiunea cu stabilitatea

În cazul în care sistemul

$$\dot{x} = f(x,u),\ y = h(x,u)$$

este *pasiv* cu o funcţie de stocare pozitiv definită $V(x)$, atunci originea lui $\dot{x} = f(x,0)$ este stabilă. În cazul în care sistemul

$$\dot{x} = f(x,u),\ y = h(x,u)$$

este *strict pasiv*, atunci originea lui $\dot{x} = f(x,0)$ este asimptotic stabil. Mai mult, dacă funcţia de stocare este radial nemărginită, originea va fi *global asimptotic stabilă*.

Sistemul

$$\dot{x} = f(x,u),\ y = h(x,u)$$

este *zero observabil* dacă orice soluţie a sistemului aunonom $\dot{x} = f(x,0)$ nu este unică în spaţiu
$S = \{h(x,0) = 0\}$, alta decât soluţia identic nulă $x(t) \equiv 0$.

Cazul sisemelor liniare

$$\dot{x} = Ax,\ y = Cx$$

Observabilitatea perechi $(A,\ C)$ este echivalentă cu

$$y(t) = Ce^{At}x(0) \equiv 0 \Leftrightarrow x(0) = 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv 0.$$

În cazul în care sistemul

$$\dot{x} = f(x,u),\ y = h(x,u)$$

are *ieşirea strict pasivă* şi este *zero observabil*, atunci *originea sistemului autonom* $\dot{x} = f(x,0)$ *est*
asimptotic stabilă. În plus, dacă funcţia de stocare este *radial nemărginită* atunci originea va fi *globa*
asimptotic stabilă.

Example 3

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -ax_1^3 - kx_2 + u,\ y = x_2,\ a,\ k > 0$$

$$V(x) = \frac{1}{4}ax_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x) = ax_1^3x_2 + x_2\left(-ax_1^3 - kx_2 + u\right) = -ky^2 + yu$$

Sistemul are ieşirea strict pasivă

$$y(t) \equiv 0 \Leftrightarrow x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow ax_1^3 \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$$

Sistem zero observabil. V este radial nemărginită. Originea sistemului autonom este GAS.

4 Stabilitatea u/y

Modele de intrare-ieşire:

$$y = Hu$$

$u(t)$ este o funcţie continuă pe porţiuni şi aparţine unui spaţiu liniar

- *Spaţiul funcţiilor mărginite*: $\sup\limits_{t\geq 0}\|u(t)\| < \infty$
- *Spaţiul funcţiilor pătratice-integrabile*: $\int_0^\infty u^T(t)u(t)dt < \infty$

Norma unui semnal $\|u\|$:

- $\|u\| \geq 0$ şi $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- $\|au\| = a\|u\|$ pentru $(\forall)\, a > 0$
- Inegalitatea triunghiului: $\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|$

Spaţiul $\mathcal{L}_p$:

- $\mathcal{L}_\infty$: $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup\limits_{t\geq 0}\|u(t)\| < \infty$
- $\mathcal{L}_2$: $\|u\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^\infty u^T(t)\,u(t)\,dt} < \infty$
- $\mathcal{L}_p$: $\|u\|_{\mathcal{L}_p} = \left(\int_0^\infty \|u(t)\|^p\,dt\right)^{1/p} < \infty,\ 1 \leq p < \infty$

Notaţie $\mathcal{L}_p^m$: p este tipul de *p-normă* folosit pentru a defini spaţiul şi m este dimensiunea lui u

Spaţiul extins: $\mathcal{L}_e = \{u\ |u_\tau \in \mathcal{L},\ (\forall)\ \tau \in [0,\ \infty)\}$

- u_τ este o trunchiere a lui u: $u(t) = \begin{cases} u(t)\,, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$
- $\mathcal{L}_e$ este un spaţiu liniar şi $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_e$

Cauzalitatea: $H : \mathcal{L}_e^m \to \mathcal{L}_e^q$ este cauzală dacă valoarea ieşirii $(Hu)(t)$ în orice moment t depinde numai de valori anterioare a intrării

$$(Hu)_\tau = (Hu_\tau)_\tau$$

Definition 6 O funcţie continuă scalară $g(r)$, definită pentru $r \in [0,\ a)$ este funcţia câştig dacă ea este nedecrescătoare şi $g(0) = 0$.

Funcţia de clasă K este o funcţie câştig, dar nu şi invers. Nefiind obligatoriu ca funcţia câştig să fie strict crescătoare putem avea $g = 0$ sau $g(r) = sat\,(r)$.

Definition 7 $H : \mathcal{L}_e^m \to \mathcal{L}_e^q$ este stabilă u/y ($\mathcal{L}$ stabilă) dacă există o funcţie câştig g, definită pe $[0,\ \infty)$ şi o constantă ne-negativă β astfel încât

$$\|(Hu)_\tau\|_{\mathcal{L}} \leq g\left(\|u_\tau\|_{\mathcal{L}}\right) + \beta,\ (\forall)\, u \in \mathcal{L}_e^m \text{ şi } \tau \in [0,\ \infty)$$

Este stabilă u/y ($\mathcal{L}$ stabilă) cu câştig mărginit (finit) dacă există constantele ne-negative γ şi β astfel încât

$$\|(Hu)_\tau\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma\,\|u_\tau\|_{\mathcal{L}} + \beta,\ (\forall)\, u \in \mathcal{L}_e^m \text{ şi } \tau \in [0,\ \infty)$$

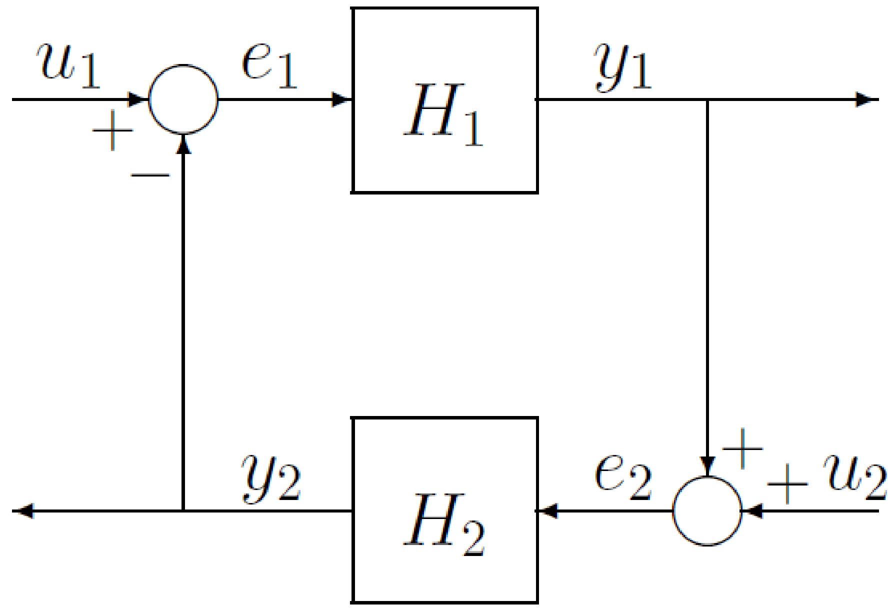
În acest caz, spunem că sistemul are câştigul $\mathcal{L} \leq \gamma$. Termenul β este inclus în definiţie pentru sistemele la care Hu nu dispare la $u = 0$.

5 Stabilitatea u/y a modelelor de stare

$$\dot{x} = f(x, u), \; y = h(x, u), \quad 0 = f(0, 0), \; 0 = h(0, 0)$$

Cazul 1: Originea sistemului autonom este exponenţial stabilă

6 Stabilitatea sistemelor cu reacţie



4.Sistem cu reacţie negativă

$$\dot{x}_i = f_i\left(x_i, e_i\right), \quad y_i = h_i\left(x_i, e_i\right), \quad i \in \{1,\ 2\}$$

Teorema pasivităţi

Theorem 1 Conexiunea cu reacţie negativă a două sisteme pasive este pasivă.

Stabilitatea asimptotică

Theorem 2 Se consideră conexiunea cu reacţie a două sisteme dinamice. Când $u = 0$*, originea sistemului închis este asimptotic stabil dacă una dintre următoarele condiţii este îndeplinită:*

- *ambele componente ale conexiunii cu reacţie sunt strict pasive;*
- *ambele componente ale conexiunii cu reacţie sunt strict pasive şi zero observabile;*
- *o componentă este strict pasivă, iar cealaltă este ieşire strict pasivă şi zero observabilă.*

Dacă funcţia de stocare pentru fiecare componentă este radial nemărginită, atunci originea este globa asimptotic stabilă.

Example 4

$$H_1 \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ax_1^3 - kx_2 + e_1 \\ y_1 = x_2 \end{cases} \qquad H_2 \begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -bx_3 - kx_4^3 + e_2 \\ y_2 = x_4 \end{cases}$$

$$a,\ b,\ k > 0$$

$$V_1 = \frac{1}{4}ax_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}_1 = ax_1^3x_2 - ax_1^3x_2 - kx_2^2 + x_2e_1 = -ky_1^2 + y_1e_1$$

Cu $e_1 = 0,\ y_1(t) \equiv 0 \Leftrightarrow x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$

H_1 are *ieşirea strict pasivă şi zero observabilă*

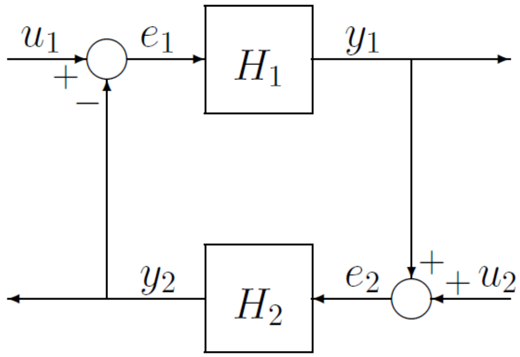
$$V_2 = \frac{1}{2}bx_3^2 + \frac{1}{2}x_4^2$$

$$\dot{V}_2 = bx_3x_4 - bx_3x_4 - x_4^4 + x_4e_2 = -y_2^4 + y_2e_2$$

Cu $e_2 = 0,\ y_2(t) \equiv 0 \Leftrightarrow x_4(t) \equiv 0 \Rightarrow x_3(t) \equiv 0$

H_2 are *ieşirea strict pasivă şi zero observabilă*
V_1 & V_2 *sunt radial nemărginite*
Originea sistemului este GAS

7 Teorema amplificărilor mici



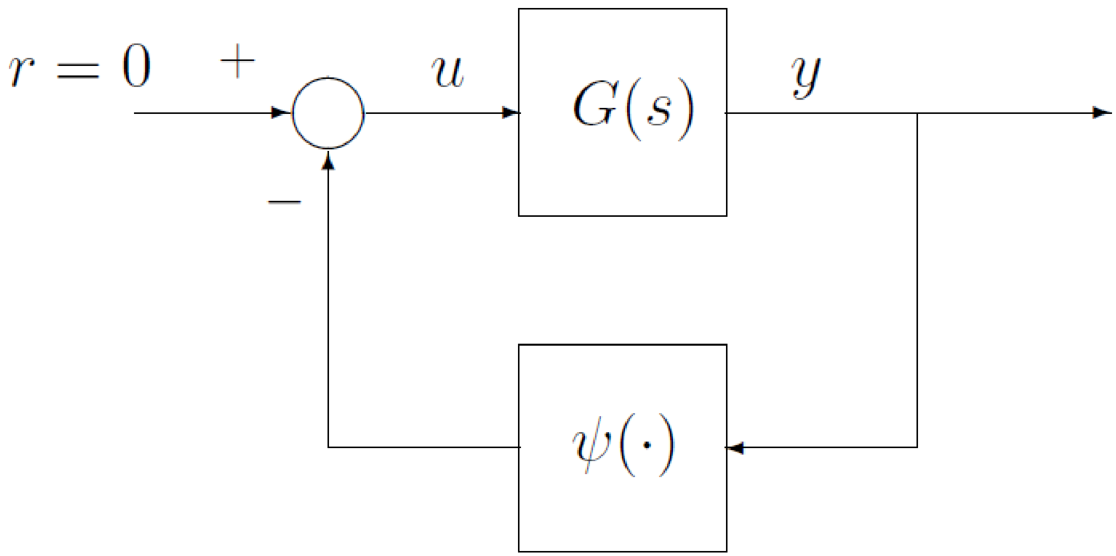
5.Sistem cu reacţie negativă

$$
\begin{aligned}
\|y_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} &\leq \gamma_1 \|e_{1\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_1, \; (\forall) \; e_1 \in \mathcal{L}_e^m, \; (\forall) \; \tau \in [0, \; \infty) \\
\|y_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} &\leq \gamma_2 \|e_{2\tau}\|_{\mathcal{L}} + \beta_2, \; (\forall) \; e_2 \in \mathcal{L}_e^q, \; (\forall) \; \tau \in [0, \; \infty)
\end{aligned}
$$

$$
u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^T, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}^T, \quad e = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix}^T
$$

Theorem 3 Conexiunea cu reacţie stabilă u/y (stabililă $\mathcal{L}$) cu amplificare măriginită dacă $\gamma_1\gamma_2 < 1.$

8 Stabilitatea absolută



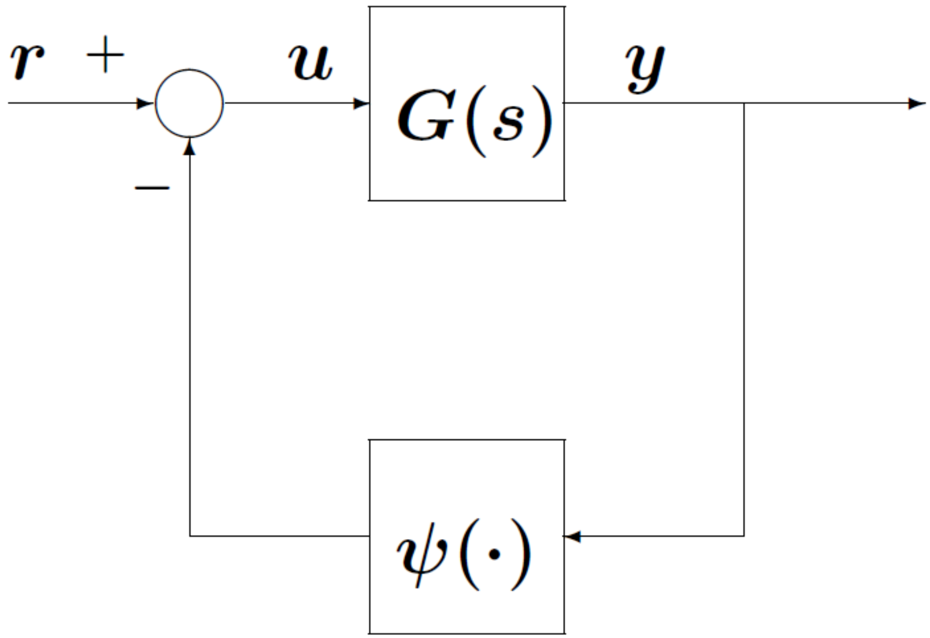
6.Sistem neliniar cu reacţie negativă

Theorem 4 Sistemul este absolut stabil în cazul în care originea este global stabilă pentru oric neliniaritate într-un anumit sector. Este absolut stabil într-un domeniul finit dacă originea este uni form asimptotic stabilă.

SNS

Criteriul Cercului
Criteriul Popov

Stabilitate absoluta

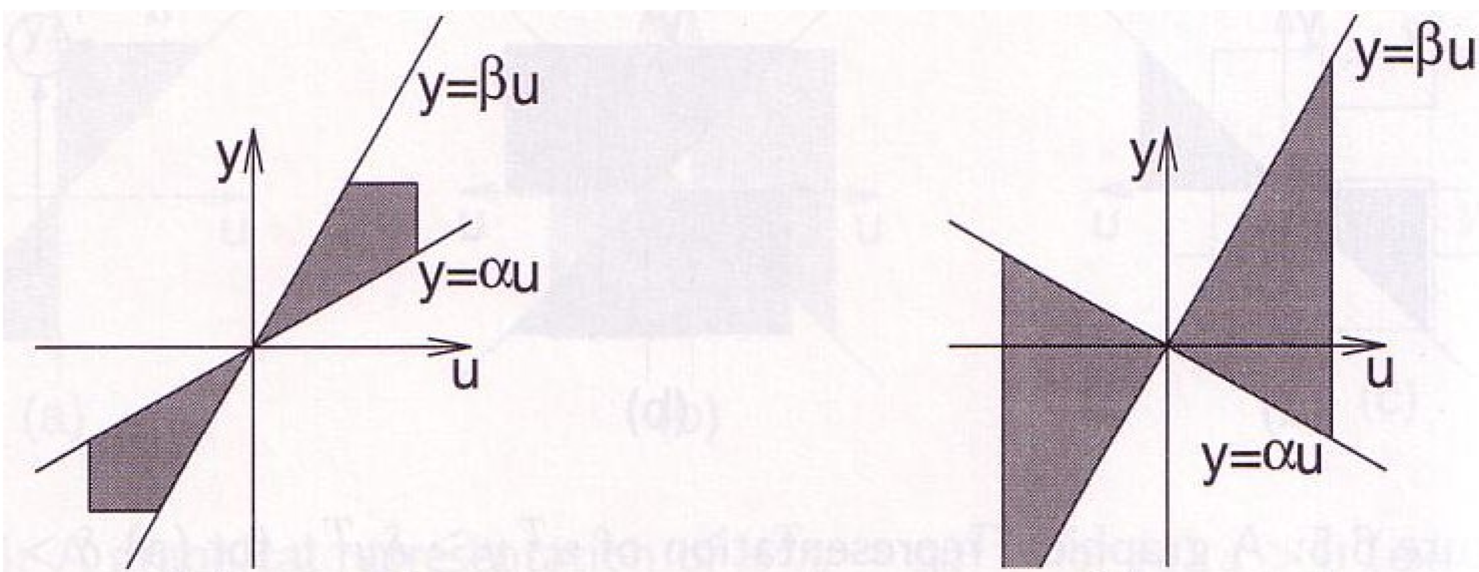


Sistem asimptotic stabil cand (pentru r=0, sistem relaxat) originea este asimptotic stabila pentru orice tip de neliniaritate dintr-un sector dat.

Neliniaritate de tip sector

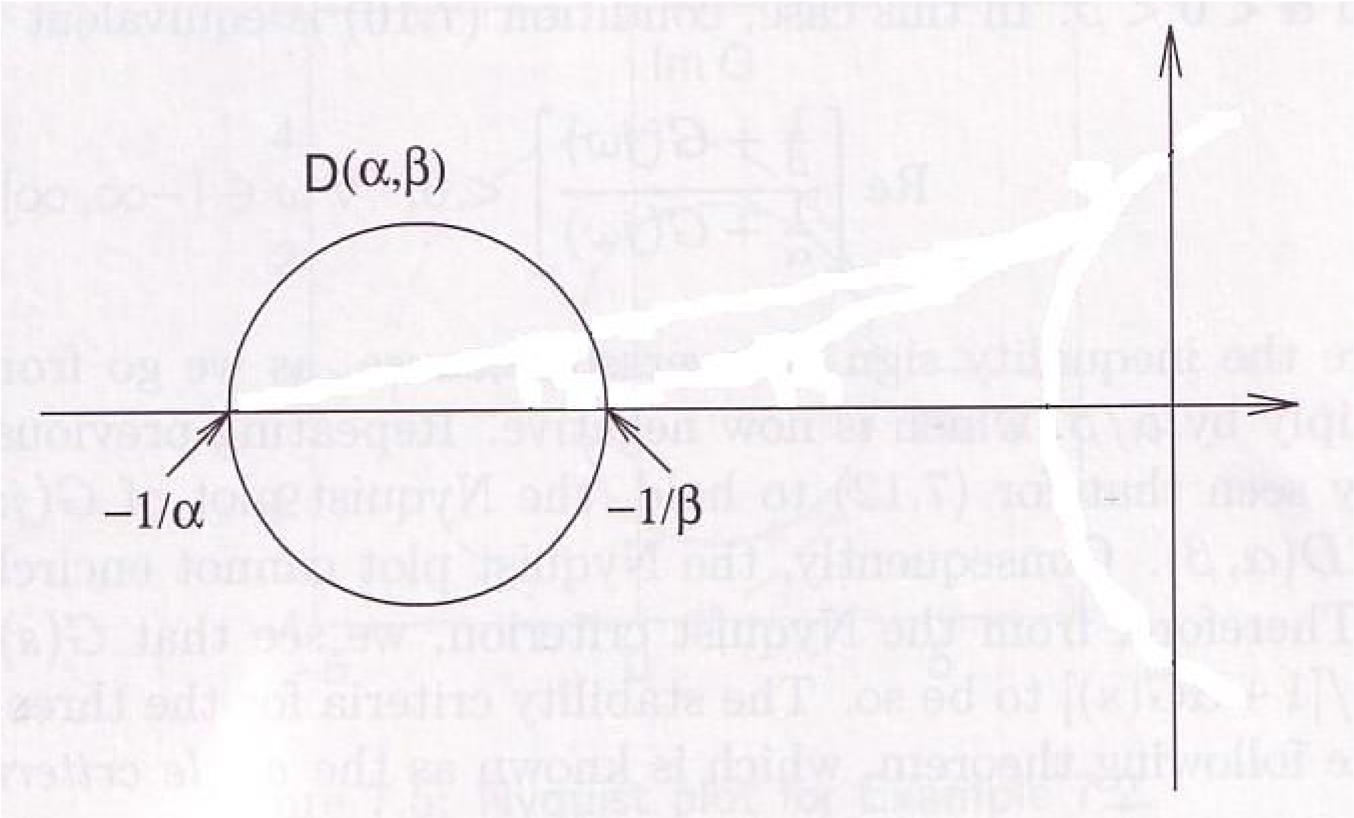
O funcţie fără memorie $\Psi : [0,\ \infty) \to R$ se spune că aparţine sectorului:

1. $[0,\ \infty]$, dacă $u \cdot \Psi(t,u) \geq 0$;
2. $[\alpha,\ \infty]$, dacă $u \cdot [\Psi(t,u) - \alpha \cdot u] \geq 0$;
3. $[0,\ \beta]$ cu $\beta > 0$, dacă $\Psi(t,u) \cdot [\Psi(t,u) - \beta \cdot u] \geq 0$;



Criteriul cercului

$D(\alpha,\ \beta)$ este discul din planul complex a cărui diametru este segmentul de dreaptă $[-1/\alpha,\ -1/\beta]$



Criteriul cercului

Pentru $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ este SPR si $\psi \in [0, \infty]$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \\ u &= -\psi(y) \end{aligned}$$

Kalman-Yakubovich-Popov Lemma

$$\exists\ P = P^T > 0,\ L, W, \varepsilon > 0$$

$$\begin{aligned} PA + A^TP &= -L^TL - \varepsilon P \\ PB &= C^T - L^TW \\ W^TW &= D + D^T \end{aligned}$$

$$V(x) = \tfrac{1}{2}x^TPx$$

Criteriul cercului

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= \tfrac{1}{2}x^T P\dot{x} + \tfrac{1}{2}\dot{x}^T P x \\
&= \tfrac{1}{2}x^T(PA + A^T P)x + x^T PBu \\
&= -\tfrac{1}{2}x^T L^T L x - \tfrac{1}{2}\varepsilon x^T P x + x^T(C^T - L^T W)u \\
&= -\tfrac{1}{2}x^T L^T L x - \tfrac{1}{2}\varepsilon x^T P x + (Cx + Du)^T u \\
&\quad - u^T D u - x^T L^T W u
\end{aligned}
$$

$$u^T D u = \tfrac{1}{2}u^T(D + D^T)u = \tfrac{1}{2}u^T W^T W u$$

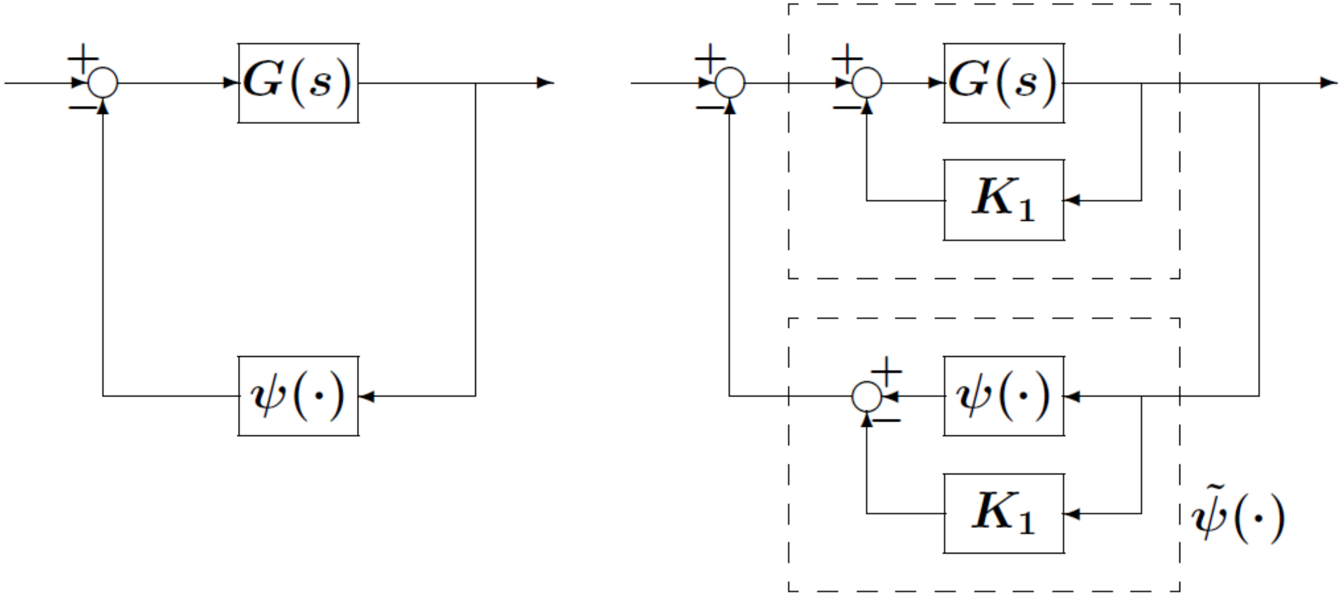
$$\dot{V} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon x^T P x - \tfrac{1}{2}(Lx + Wu)^T(Lx + Wu) - y^T\psi(y)$$

$$y^T\psi(y) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{V} \leq -\tfrac{1}{2}\varepsilon x^T P x$$

Din ultima relatie rezulta ca originea este global asimptotic stabila.

Criteriul cercului

Dar daca $\psi \in [K_1, \infty]$?

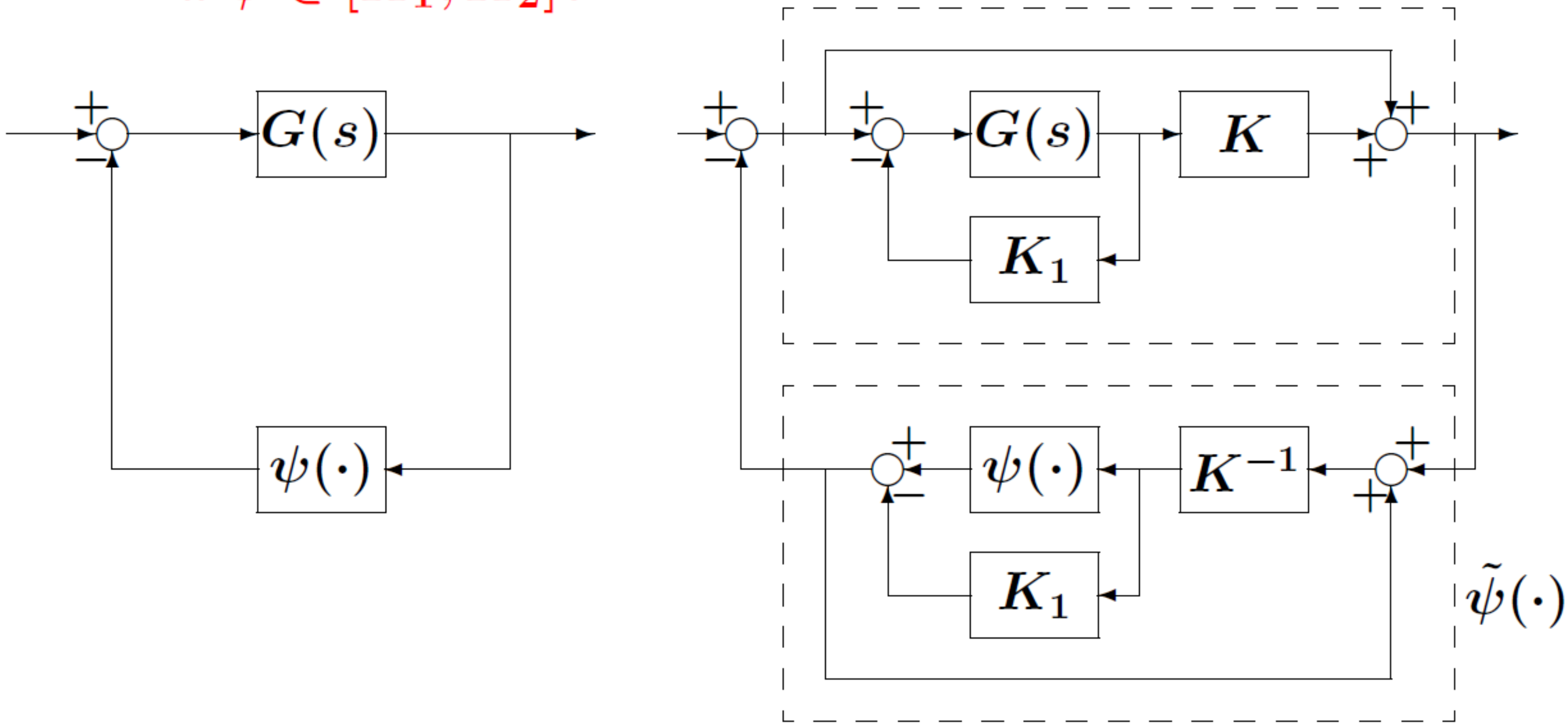


$\tilde{\psi} \in [0, \infty]$; Originea este global asimptotic stabila daca:

$G(s)[I + K_1 G(s)]^{-1}$ este SPR

Criteriul cercului

Dar daca if $\psi \in [K_1, K_2]$?



$\tilde{\psi} \in [0, \infty]$; Originea este global asimptotic stabila daca:

$I + KG(s)[I + K_1 G(s)]^{-1}$ este SPR

Criteriul cercului

$$I + KG(s)[I + K_1 G(s)]^{-1} = [I + K_2 G(s)][I + K_1 G(s)]^{-1}$$

Teorema: (Criteriul Cercului) Sistemul este asimptotioc stabil daca:

- $\psi \in [K_1, \infty]$ si $G(s)[I + K_1 G(s)]^{-1}$ este SPR sau
- $\psi \in [K_1, K_2]$ si $[I + K_2 G(s)][I + K_1 G(s)]^{-1}$ este SPR.

Cazul scalar: $\psi \in [\alpha, \beta], \ \beta > \alpha$

Sistemul este asimptotic stabil daca

$$\frac{1 + \beta G(s)}{1 + \alpha G(s)}$$ este Hurwitz si:

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1 + \beta G(j\omega)}{1 + \alpha G(j\omega)}\right] > 0, \ \ \forall\, \omega \in [0, \infty]$$

Criteriul cercului

Cazul 1: $\alpha > 0$

Din criteriul Nyquist rezulta ca:

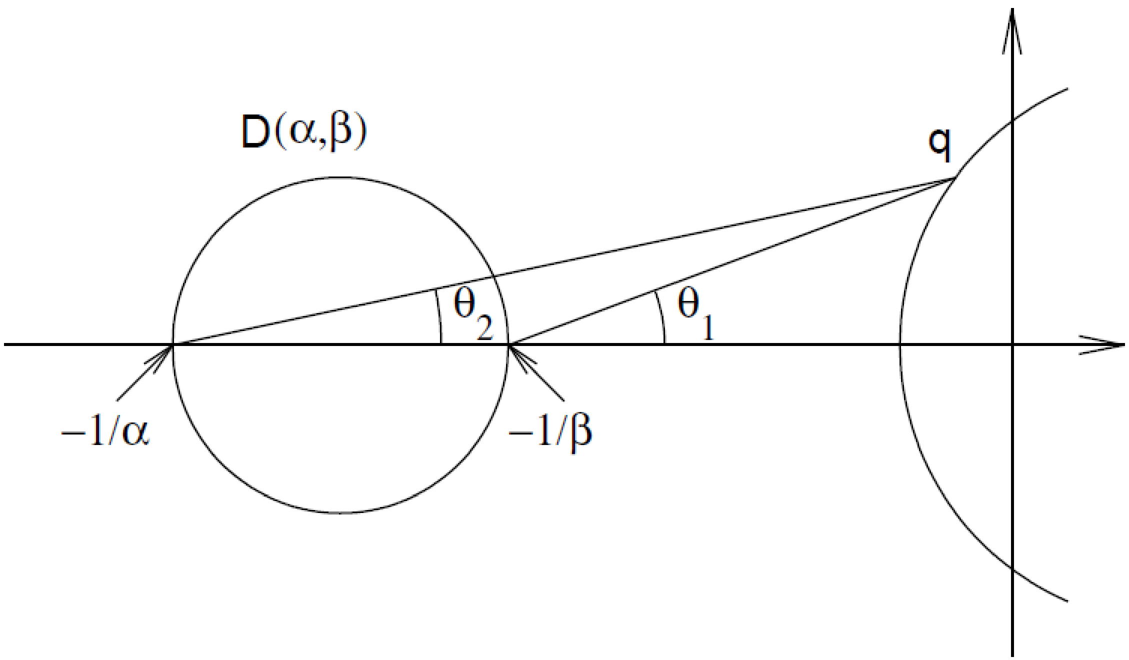
$$\frac{1+\beta G(s)}{1+\alpha G(s)} = \frac{1}{1+\alpha G(s)} + \frac{\beta G(s)}{1+\alpha G(s)}$$

este Hurwitzian daca hodograful lui *G(jω)* nu intersecteaza punctul critic de coordonate $-(1/\alpha) + j0$ si il incercuieste in sens trigonometric de *m* ori , unde *m* este numarul de poli din semiplanul drept ai lui *G(s).*

$$\frac{1+\beta G(j\omega)}{1+\alpha G(j\omega)} = \frac{\frac{1}{\beta} + G(j\omega)}{\frac{1}{\alpha} + G(j\omega)}$$

Criteriul cercului

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\frac{1}{\beta}+G(j\omega)}{\frac{1}{\alpha}+G(j\omega)}\right] > 0, \quad \forall\, \omega \in [0, \infty]$$



Sistemul este asimptotic stabil daca hodograful lui G(jω) nu intersecteaza discul D(α,β), si il incercuieste in sens triginometric de *m* ori.

Criteriul cercului

Cazul 2: $\alpha = 0$

$$1 + \beta G(s)$$

$$\mathrm{Re}[1 + \beta G(j\omega)] > 0, \;\; \forall\, \omega \in [0, \infty]$$

$$\mathrm{Re}[G(j\omega)] > -\frac{1}{\beta}, \;\; \forall\, \omega \in [0, \infty]$$

Sistemul este asimptotic stabil daca G(s) este Hurwitzian si hodograful lui G(jω) se situeaza la dreapta dreptei definita de $\mathrm{Re}[s] = -1/\beta$

Criteriul cercului

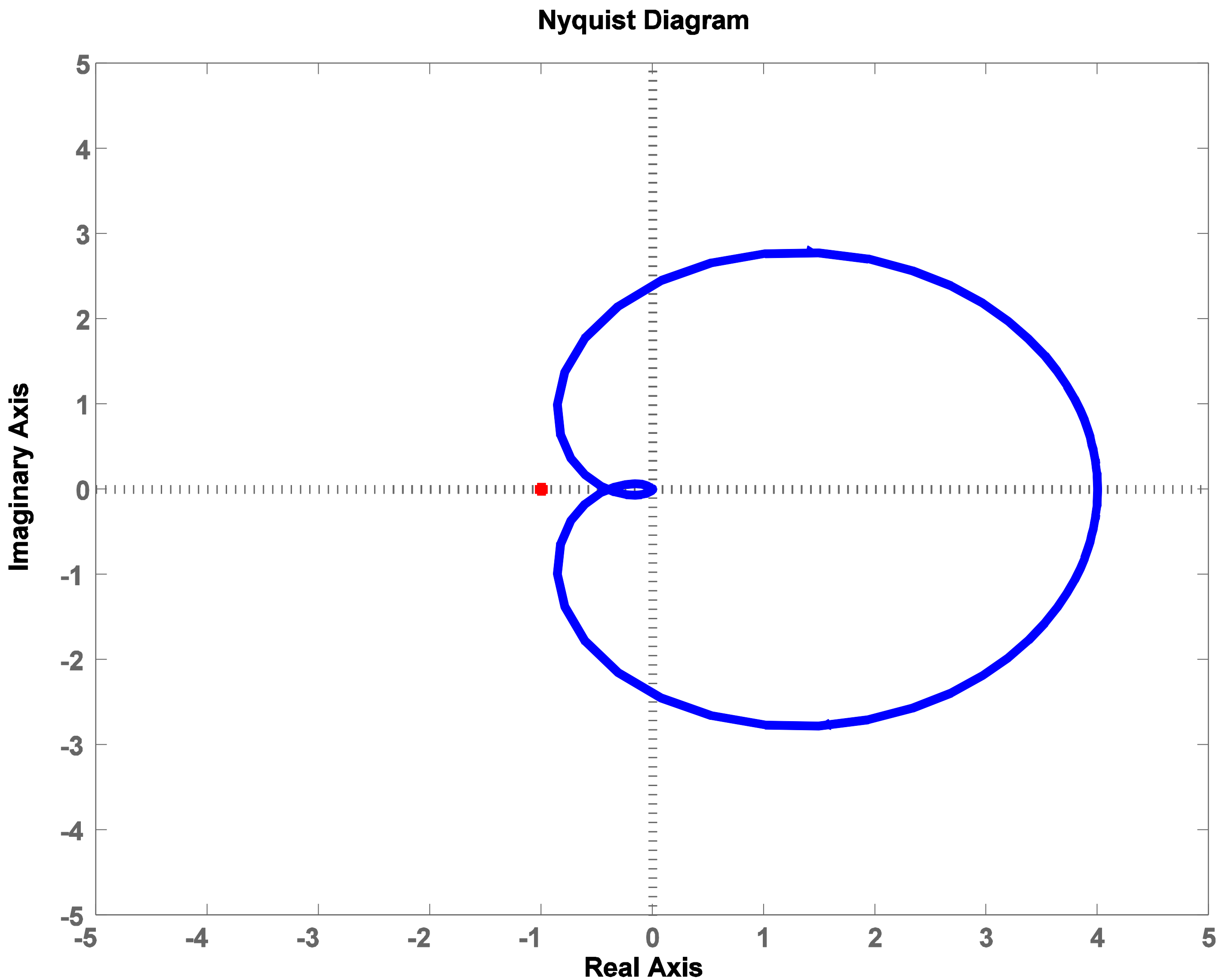
Cazul 3: $\alpha < 0 < \beta$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1+\beta G(j\omega)}{1+\alpha G(j\omega)}\right] > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\left[\frac{\frac{1}{\beta}+G(j\omega)}{\frac{1}{\alpha}+G(j\omega)}\right] < 0$$

In acest caz hodograful lui *G(jω) trebuie sa se situeze in iteriorul discului D(α,β)*
Astfel ca hodograful nu poate sa incercuiasca punctul critic $-(1/\alpha)+j0$
Din criteriul Nyquist, G(s) trebuie sa fie hurwitzian.

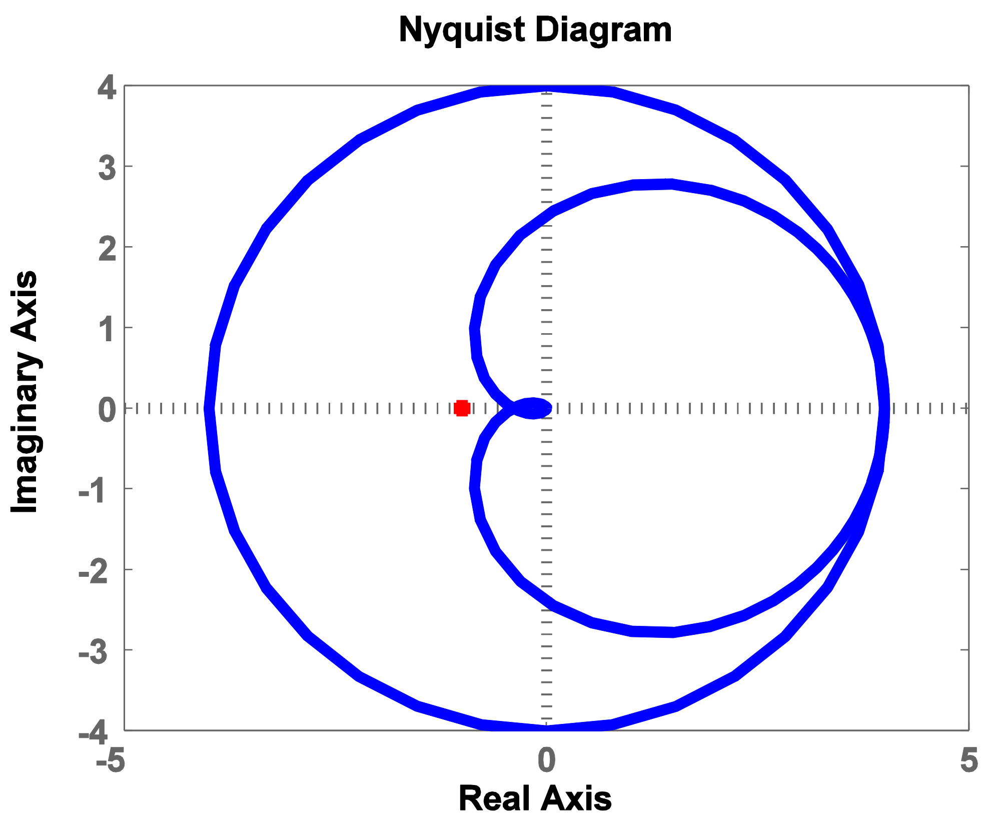
Sistemul este asimptotic stabil daca G(s) este Hurwitzian si hodograful lui G(jω) se situeaza in interiorul discului *D(α,β)*

CC-Ex. $H(s) = \dfrac{4}{(s+1)\left(\frac{1}{2}s+1\right)\left(\frac{1}{3}s+1\right)}$



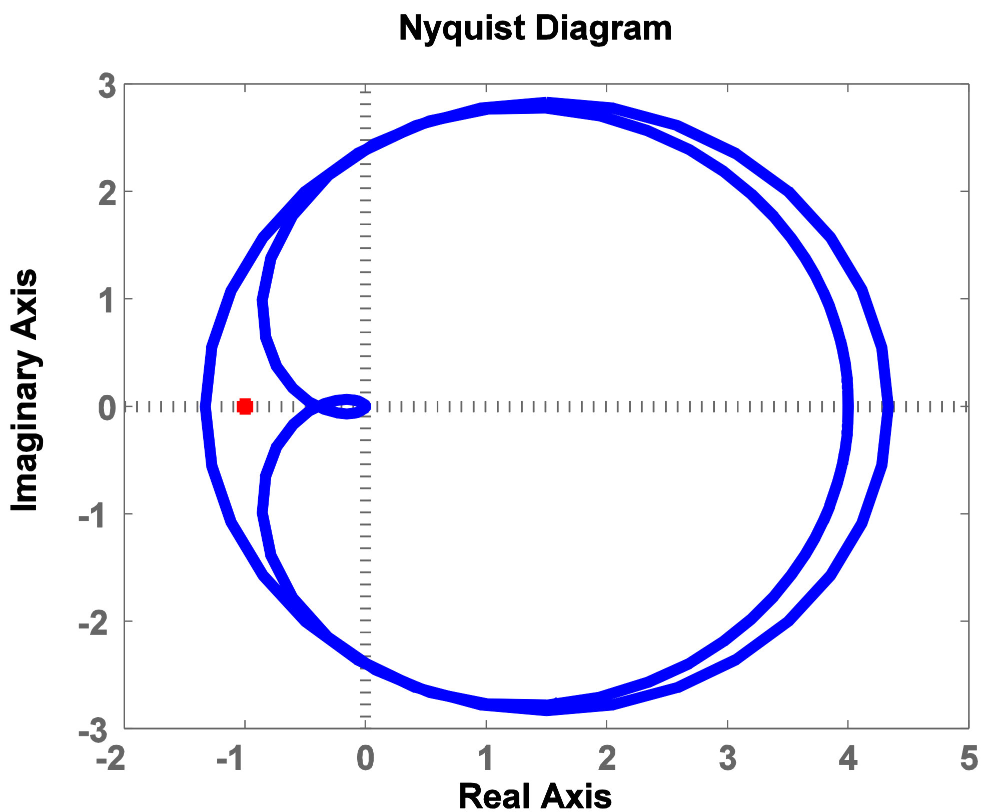
CC-Ex. $H(s) = \frac{4}{(s+1)\left(\frac{1}{2}s+1\right)\left(\frac{1}{3}s+1\right)}$

Caz 3: Cerc cu centru in (0, 0), raza 4 $\rightarrow$ Sector $[-.25,\ +.25]$



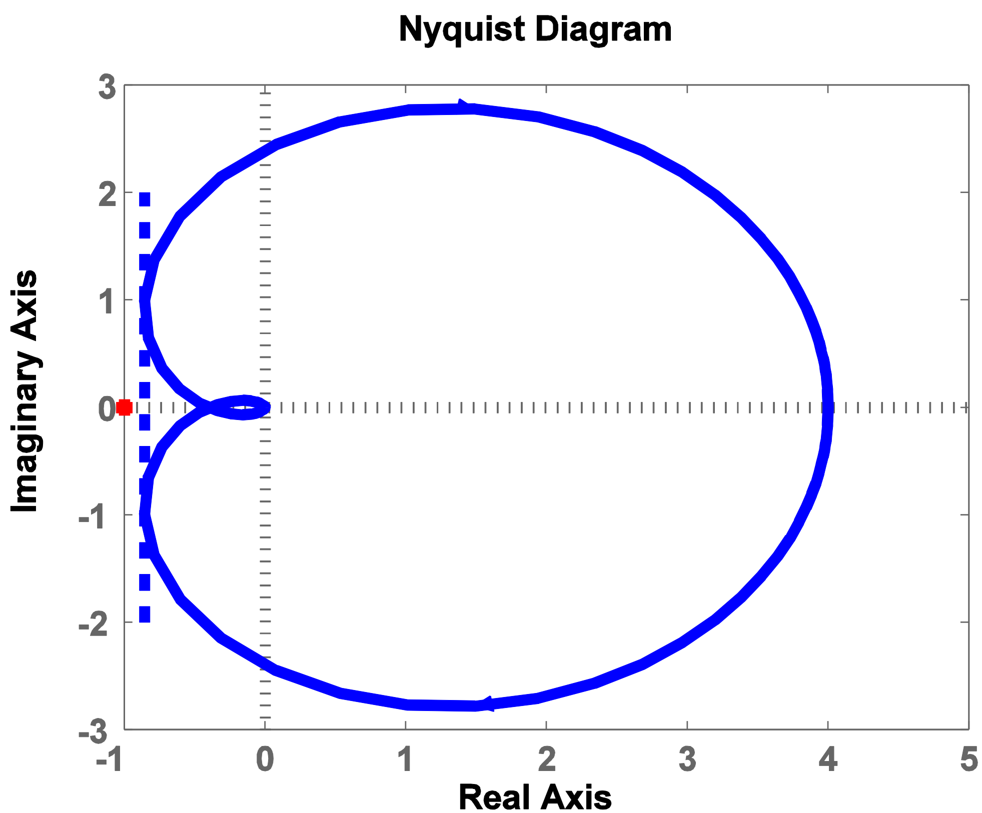
CC-Ex. $H(s) = \frac{4}{(s+1)\left(\frac{1}{2}s+1\right)\left(\frac{1}{3}s+1\right)}$

Caz 3: Cerc cu centru in (1.5, 0), raza 2.83 $\rightarrow$ Sector $[-.23,\ +.75]$

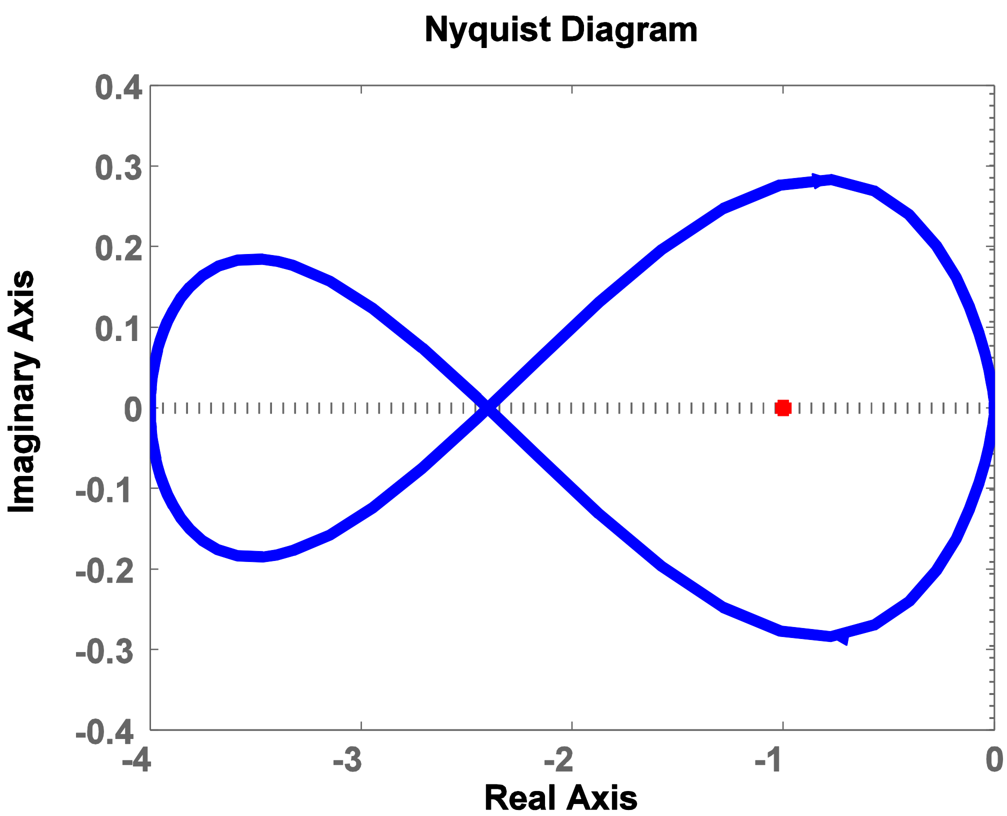


CC-Ex. $H(s) = \frac{4}{(s+1)\left(\frac{1}{2}s+1\right)\left(\frac{1}{3}s+1\right)}$

Caz 1: $\min \mathrm{Re}\{H(j\omega\} = -0.8571 \rightarrow$ Sector [0, 1.1667]

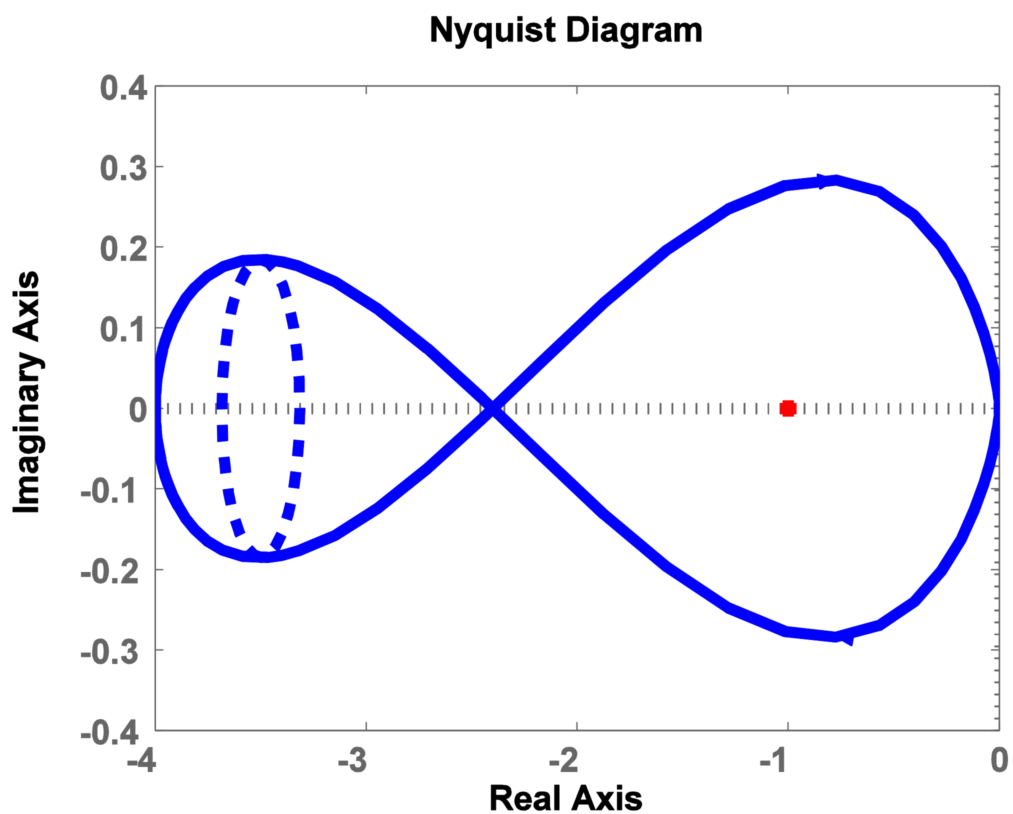


CC-Ex. $H(s) = \dfrac{4}{(s-1)\left(\frac{1}{2}s+1\right)\left(\frac{1}{3}s+1\right)}$

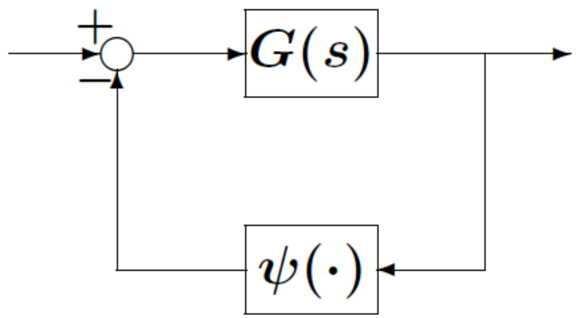


CC-Ex. $H(s) = \frac{4}{(s-1)\left(\frac{1}{2}s+1\right)\left(\frac{1}{3}s+1\right)}$

Caz 1: Cerc cu centru in $(-3.5,\ 0)$ si raza $0.185 \rightarrow$ Sector $[0.2714,\ 0.3017]$



Criteriul Popov



$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
y &= Cx \\
u_i &= -\psi_i(y_i), \;\; 1 \le i \le p
\end{aligned}
$$

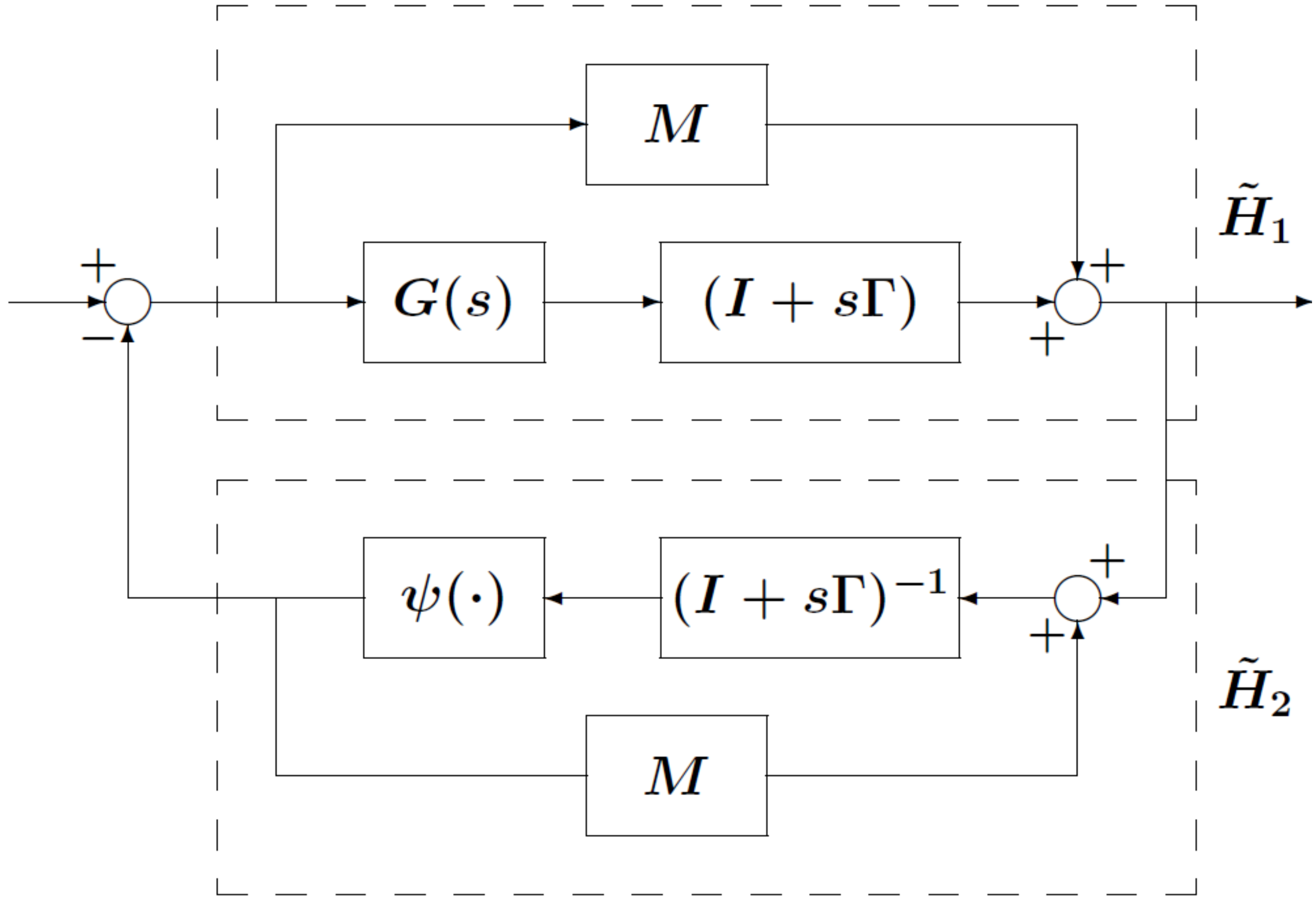
$$\psi_i \in [0, k_i], \quad 1 \le i \le p, \quad (0 < k_i \le \infty)$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_p), \quad M = \mathrm{diag}(1/k_1, \cdots, 1/k_p)$$

Criteriul Popov

$$\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_p), \quad M = \mathrm{diag}(1/k_1, \cdots, 1/k_p)$$



De demonstat ca $\tilde{H}_1$ si $\tilde{H}_2$ sunt pasive !

Criteriul Popov

$$
\begin{aligned}
& M + (I + s\Gamma)G(s) \\
&\quad = \; M + (I + s\Gamma)C(sI - A)^{-1}B \\
&\quad = \; M + C(sI - A)^{-1}B + \Gamma C s(sI - A)^{-1}B \\
&\quad = \; M + C(sI - A)^{-1}B + \Gamma C(sI - A + A)(sI - A)^{-1}B \\
&\quad = \; (C + \Gamma C A)(sI - A)^{-1}B + M + \Gamma C B
\end{aligned}
$$

Daca $M + (I + s\Gamma)G(s)$ este SPR, atunci $\tilde{H}_2$ este strict pasiva avand functia de stocare $V_1 = \frac{1}{2}x^T P x$, unde *P* este dat de ecuatiile Kalman-Yakubovich-Popov:

$$
\begin{aligned}
PA + A^T P &= -L^T L - \varepsilon P \\
PB &= (C + \Gamma C A)^T - L^T W \\
W^T W &= 2M + \Gamma C B + B^T C^T \Gamma
\end{aligned}
$$

Criteriul Popov

$\tilde{H}_2$ consta din *p* componente decuplate

$$\begin{aligned} & M + (I + s\Gamma)G(s) \\ = \;& M + (I + s\Gamma)C(sI - A)^{-1}B \\ = \;& M + C(sI - A)^{-1}B + \Gamma C s(sI - A)^{-1}B \\ = \;& M + C(sI - A)^{-1}B + \Gamma C(sI - A + A)(sI - A)^{-1}B \\ = \;& (C + \Gamma C A)(sI - A)^{-1}B + M + \Gamma C B \end{aligned}$$

$\tilde{H}_2$ rezulta pasiva, si cu functia de stocare:

$$V_2 = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \int_0^{z_i} \psi_i(\sigma)\, d\sigma$$

Criteriul Popov

Daca se foloseste ca si candidata la functia Lyapunov

$$V = \tfrac{1}{2}x^T P x + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \int_0^{y_i} \psi_i(\sigma)\, d\sigma$$

pentru structura cu reactie negativa initiala:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad u = -\psi(y)$$

rezulta

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \tfrac{1}{2}x^T P\dot{x} + \tfrac{1}{2}\dot{x}^T P x + \psi^T(y)\Gamma\dot{y} \\
&= \tfrac{1}{2}x^T(PA + A^T P)x + x^T PBu \\
&\quad + \psi^T(y)\Gamma C(Ax + Bu) \\
&= -\ \tfrac{1}{2}x^T L^T L x -\ \tfrac{1}{2}\varepsilon x^T P x \\
&\quad + x^T(C^T + A^T C^T \Gamma - L^T W)u \\
&\quad + \psi^T(y)\Gamma C A x + \psi^T(y)\Gamma C B u
\end{aligned}$$

Criteriul Popov

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon x^T P x - \tfrac{1}{2}(Lx + Wu)^T(Lx + Wu) \\ &\quad - \psi(y)^T[y - M\psi(y)] \\ &\leq -\tfrac{1}{2}\varepsilon x^T P x - \psi(y)^T[y - M\psi(y)]\end{aligned}$$

$$\psi_i \in [0, k_i] \Rightarrow \psi(y)^T[y - M\psi(y)] \geq 0 \Rightarrow \dot{V} \leq -\tfrac{1}{2}\varepsilon x^T P x$$

Criteriul POPOV

Sistemul este absolut stabil daca pentru $(\forall)\, i = \overline{1,\ p},\ \Psi_i \in [0,\ k_i]$, $\exists \gamma_i > 0$ cu $1 + \lambda_k \gamma_i \neq 0$ pentru $(\forall)\ \lambda_k$ astfel încât $M + (I + s\Gamma)G(s)$ este SPR.

Criteriul Popov

Cazul scalar: $$\frac{1}{k} + (1 + s\gamma)G(s)$$

este SPR daca G(s) este de tip Hurwitz si

$$\frac{1}{k} + \mathrm{Re}[G(j\omega)] - \gamma\omega \mathrm{Im}[G(j\omega)] > 0, \quad \forall\, \omega \in [0, \infty)$$

Daca:

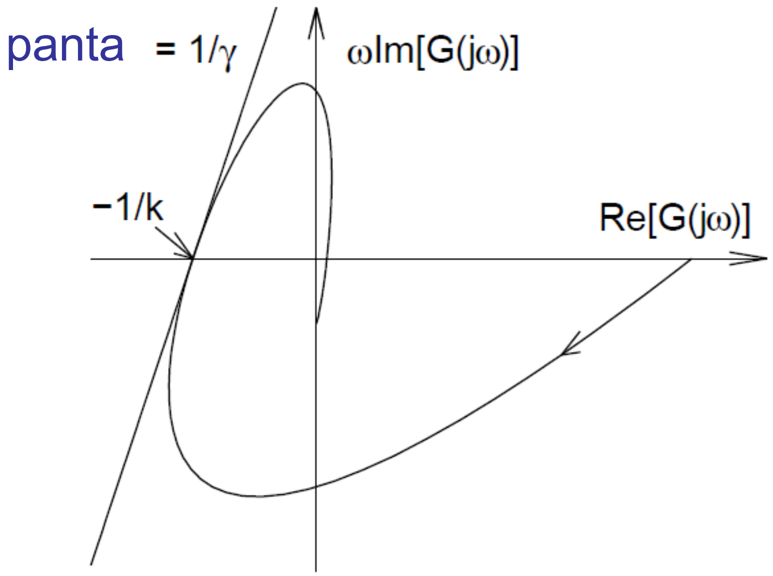
$$\lim_{\omega \to \infty} \left\{ \frac{1}{k} + \mathrm{Re}[G(j\omega)] - \gamma\omega \mathrm{Im}[G(j\omega)] \right\} = 0$$

este nevoie si de :

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega^2 \left\{ \frac{1}{k} + \mathrm{Re}[G(j\omega)] - \gamma\omega \mathrm{Im}[G(j\omega)] \right\} > 0$$

CP – Interpretarea geometrica

$$\frac{1}{k} + \mathrm{Re}[G(j\omega)] - \gamma\omega\mathrm{Im}[G(j\omega)] > 0, \;\; \forall\, \omega \in [0, \infty)$$



Graficul Popov

Criteriul Popov

Exemplu

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 - h(y), \quad y = x_1$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha x_1 - x_2 - h(y) + \alpha x_1, \quad \alpha > 0$$

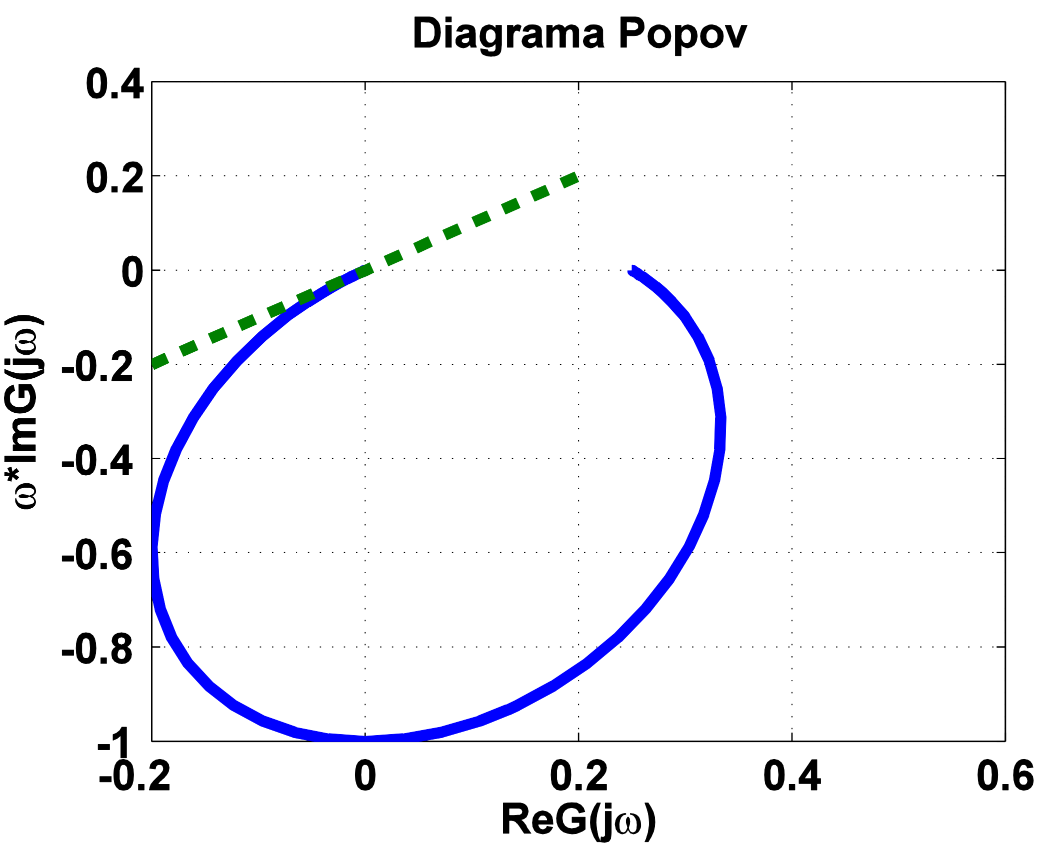
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + \alpha}, \quad \psi(y) = h(y) - \alpha y$$

$$h \in [\alpha, \beta] \;\; \Rightarrow \;\; \psi \in [0, k] \qquad (k = \beta - \alpha > 0)$$

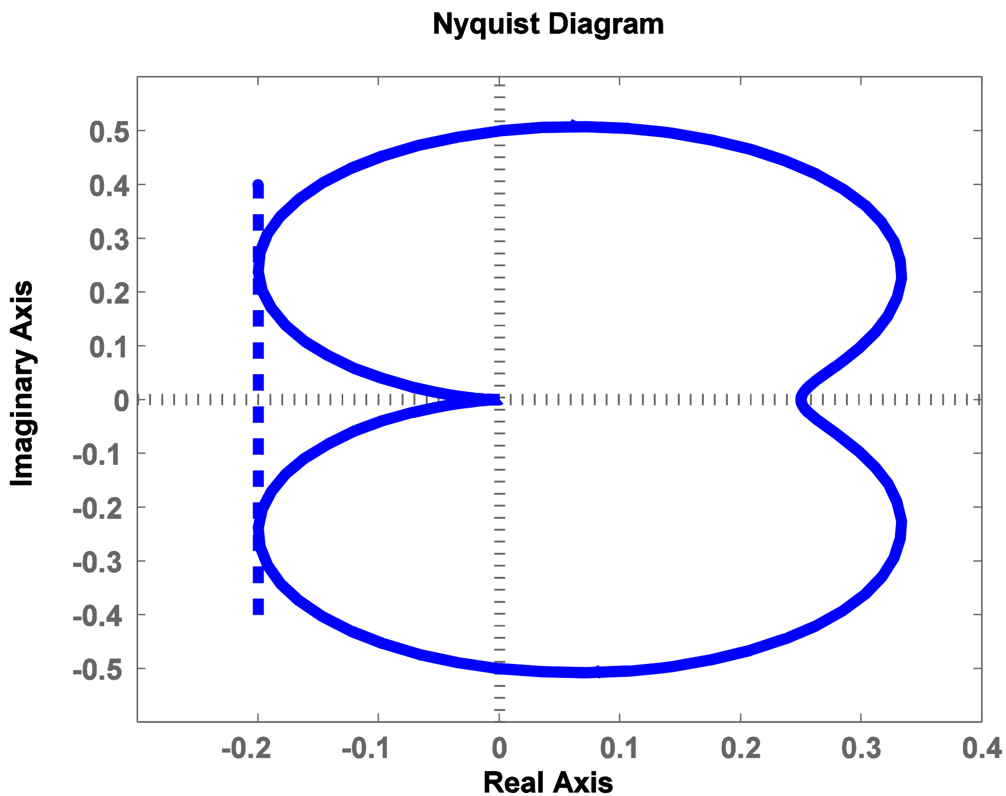
$$\gamma > 1 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{\alpha - \omega^2 + \gamma\omega^2}{(\alpha - \omega^2)^2 + \omega^2} > 0, \;\; \forall\, \omega \in [0, \infty)$$

si
$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{\omega^2(\alpha - \omega^2 + \gamma\omega^2)}{(\alpha - \omega^2)^2 + \omega^2} = \gamma - 1 > 0$$

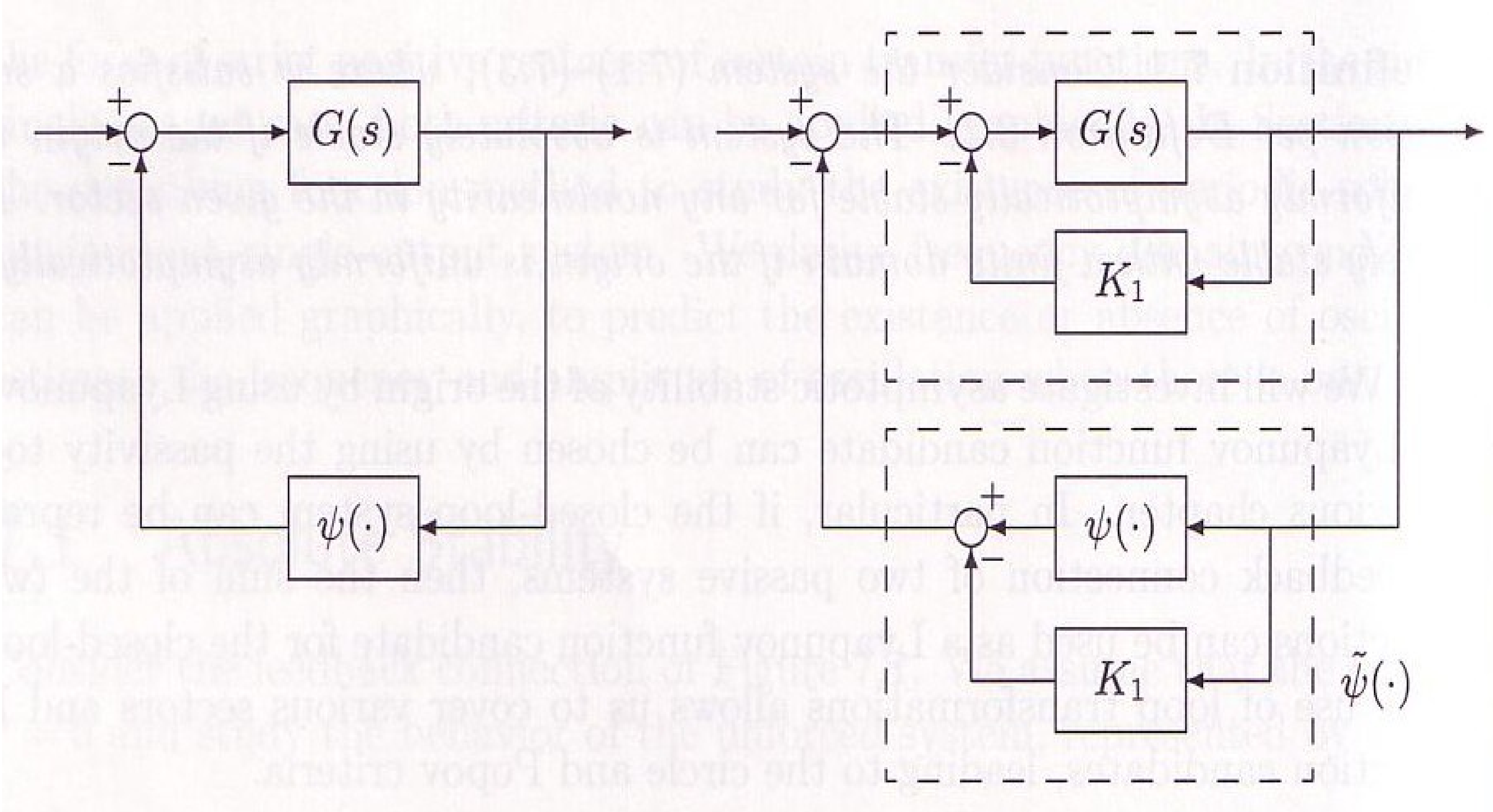
Sistem absolut stabil pentru $\Psi \in [0,\ \infty]$ şi $h \in [\alpha,\ \infty)$



Aplicând Criteriul cercului $\Rightarrow$ Sect $[0,\ 1+2\sqrt{\alpha}]$



Criteriul Popov – Czul unui sector [K1, K2]



$$\Psi \in [K_1,\ K_2] \Rightarrow \tilde{\Psi} \in [0,\ K_2 - K_1]$$

$$\tilde{G}\left(s\right) = \frac{G(s)}{1+K_1 G(s)}$$