

Laborator Nr.4.1.

SOLUȚIA DE CONTROL ROBUST H_∞ APLICATĂ UNUI SISTEM DE SUSPENSIE

Sistemele robuste se axează pe proiectarea și implementarea unor sisteme de reglare în condiții de incertitudini asupra modelului procesului condus sau pentru procese variabile în timp.

Incertitudinile nu pot fi evitate în sistemele de reglare a sistemelor fizice reale. Incertitudinile pot fi clasificate în două categorii (Gu *et al.*, 2005):

- semnale perturbatoare și
- perturbații dinamice.

Din prima categorie (**semnale perturbatoare**) fac parte perturbații pe intrări și ieșiri, zgomote de măsurare. Categoria a doua (**perturbații dinamice**) reprezintă diferențele între modelul matematic și comportarea dinamică a sistemului real, erori de modelare. Dintre sursele cele mai uzuale ale acestor erori de modelare se pot enumera (Dulf *et al.*, 2007; Damen, 2002): dinamica nemodelată, neglijarea neliniarităților sistemului real – folosirea unui sistem liniar, simplificare intenționată a modelului pentru a putea fi folosit ulterior, variația parametrilor sistemului datorată condițiilor de mediu. Aceste erori de modelare pot influența în mod negativ stabilitatea și performanțele sistemului de reglare. Pentru ca prezența acestor erori de modelare să poată fi utilizată în analiza și proiectarea reguletoarelor robuste trebuie determinat un model matematic care să reprezinte aceste erori. Astfel, luând în considerare modelele matematice ale incertitudinilor se va proiecta un regulator robust care stabilizează nu numai sistemul nominal ci și întreaga clasă de sisteme care există într-un anumit domeniu de incertitudine în jurul modelului nominal. Determinarea modelelor matematice ale incertitudinilor se poate realiza fie în domeniul timp, fie în domeniul frecvențial.

1. Modelarea incertitudinilor

Modelarea în domeniul timp.

În acest caz, determinarea modelului matematic al incertitudinilor presupune utilizarea modelului nominal al procesului reprezentat în spațiul stărilor: $G = (A, B, C, D)$. $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D$ reprezintă incertitudinile asociate matricilor sistemului care sunt variații în matricile A, B, C, D . Luând în considerare incertitudinile sistemului, procesul real poate fi descris prin: $G_\Delta = (A + \Delta A, B + \Delta B, C + \Delta C, D + \Delta D)$. Aceste incertitudini matriceale sunt limitate de normă: $\|\Delta A\| = \rho$, definindu-se raza de stabilitate: $r = \min_{\Delta A} \{\rho \mid A + \Delta A \text{ instabil}\}$, unde matricea A se consideră stabilă, (Dulf, 2007).

Modelarea în domeniul frecvențial

În acest caz se presupune că incertitudinile reprezintă fenomene complexe, nemodelate sau neglijate intenționat, dependente de frecvență. Reprezentarea incertitudinilor poate avea două forme: **nestructurată** și **structurată**.

Incertitudinile nestructurate sunt cele mai des întâlnite în practică. În acest caz, modelul incertitudinilor (blocul Δ), poate fi reprezentat printr-o matrice de transfer incertă, dar limitată de normă. Astfel, chiar dacă există foarte puține informații referitoare la efectele incertitudinilor asupra procesului, există informații legate de limitarea superioară în funcție de frecvența acestora, care se poate estima.

Incertitudinile structurate sunt incertitudinile despre care sunt disponibile informații „structurale”, ceea ce duc la restrângerea acestora la o porțiune a modelului procesului.

În multe sisteme de control industrial incertitudinile pot fi cauzate și de descrierea inexactă a caracteristicilor componentelor precum și schimbarea punctului staționar de funcționare. Incertitudinile de acest tip pot fi reprezentate ca variații ale parametrilor sistemului într-o anumită gamă de valori și afectează performanțele la frecvențe joase ale sistemului. Dacă se poate determina o anumită structură a modelului incertitudinilor, atunci acestea devin incertitudini structurate. Este de dorit să se “structureze” incertitudinea, dacă este posibil, întrucât aceasta restrânge clasa de incertitudini pentru care trebuie să fie proiectat regulatorul.

Câteva dintre cele mai utilizate moduri de reprezentare a incertitudinilor în domeniul frecvențial sunt (Dulf, 2007): aditiv, multiplicativ, de tip numărător – numitor (utilizând descompunere în factori coprimi). *Incertitudinea aditivă* oferă o măsură a erorii dintre dinamica reală și a modelului nominal – **eroarea absolută**, iar *incertitudinea multiplicativă* arată – **erorile relative**. Considerând $G_p(s)$ modelul procesului perturbat, real, iar $G_o(s)$ modelul nominal al procesului, incertitudinile se vor reprezenta grafic după cum urmează:

- Incertitudinea aditivă : $G_p(s) = G_o(s) + \Delta(s)$

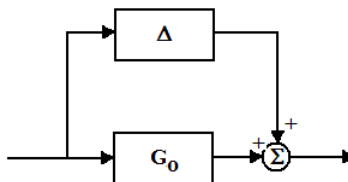


Figura 4.1. Incertitudine aditivă

- Incertitudinea aditivă inversă : $\frac{1}{G_p(s)} = \frac{1}{G_o(s)} + \Delta(s)$

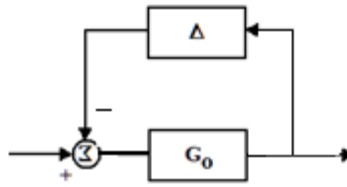


Figura 4.2. Incertitudine aditivă inversă

- Incertitudinea multiplicativă pe ieșire $G_p(s) = [I + \Delta(s)] G_0(s)$

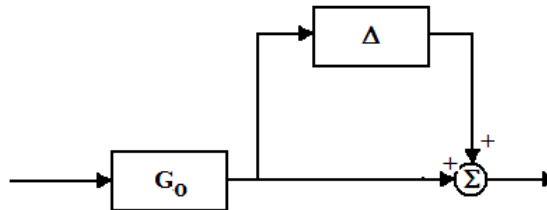


Figura 4.3. Incertitudine multiplicativă pe ieșire

- Incertitudinea multiplicativă inversă pe ieșire $\frac{1}{G_p(s)} = \frac{1}{G_0(s)} (I + \Delta(s))$

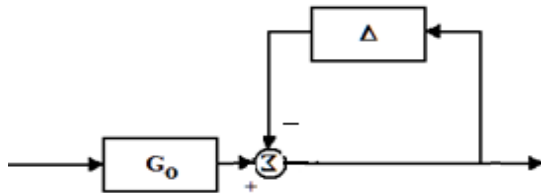


Figura 4.4. Incertitudine multiplicativă inversă pe ieșire

- Incertitudine prin factorizare coprimă, de exemplu factorizare coprimă la dreapta:
 $G_p(s) = (N + \Delta_N) (M + \Delta_M)^{-1}$

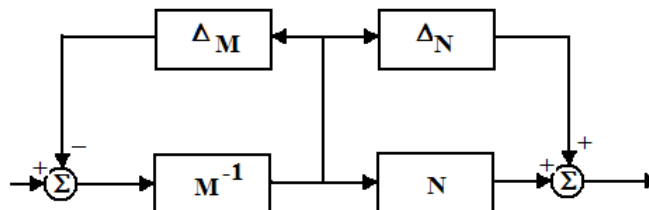


Figura 4.5. Incertitudine cu factori coprими la dreapta

În proiectarea sistemelor robuste sunt foarte utile formulările matematice ale **transformărilor liniar-fracționare**. O transformată liniar-fracționară se poate defini ca o matrice de transfer între intrările exogene ale sistemului și ieșirile care se doresc a fi controlate.

În figurile 4.6 și 4.7 se prezintă cele două formulări ale transformatelor liniar-fracționare (Dulf *et al.*, 2007; Gu *et al.*, 2005; Damen, 2002).

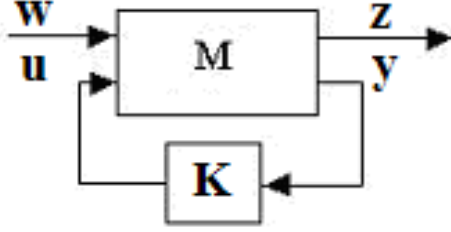


Figura 4.6. Transformarea liniar-fracționară inferioară

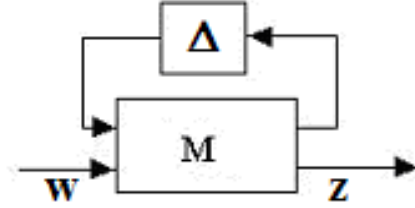


Figura 4.7. Transformarea liniar-fracționară superioară

Atât în figura 4.6 cât și în figura 4.7, **M** reprezintă matricea de transfer a interconexiunilor de la w la z , având următoarea structură:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Transformata liniar-fracționară inferioară este dată de relația (2), iar transformata liniar-fracționară superioară este dată de relația (3).

$$T_I(M, K) = M_{11} + M_{12}K(I - M_{22}K)^{-1}M_{21} \quad (2)$$

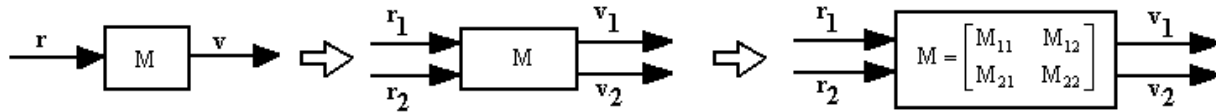
dacă $\det(I - M_{22}K) \neq 0$;

$$T_S(M, \Delta) = M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12} \quad (3)$$

dacă $\det(I - M_{11}\Delta) \neq 0$.

Exemplu de calcul a transformatei liniar-fracționare superioare:

Pas 1: Separăm incertitudinile de model

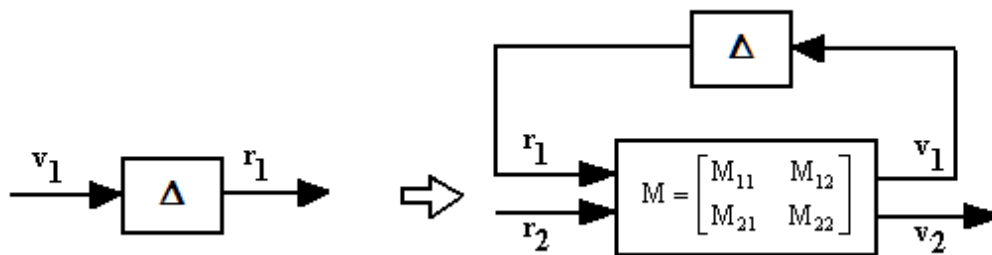


pentru care sunt valabile relațiile:

$$v_1 = M_{11} \cdot r_1 + M_{12} \cdot r_2 \quad (*)$$

$$v_2 = M_{21} \cdot r_1 + M_{22} \cdot r_2 \quad (**)$$

Pas 2: Considerăm $r_1 = v_1 \cdot \Delta$



Din ecuația (*) rezultă:

$$v_1 = M_{11} \cdot \Delta \cdot v_1 + M_{12} \cdot r_2 \rightarrow v_1 [I - M_{11} \cdot \Delta] = M_{12} \cdot r_2 \rightarrow v_1 = [I - M_{11} \cdot \Delta]^{-1} M_{12} \cdot r_2$$

Din ecuația (**) rezultă:

$$v_2 = M_{21} \cdot \Delta \cdot v_1 + M_{22} \cdot r_2 \rightarrow v_2 = M_{21} \cdot \Delta \cdot [I - M_{11} \cdot \Delta]^{-1} M_{12} \cdot r_2 + M_{22} \cdot r_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow v_2 = [M_{21} \cdot \Delta \cdot [I - M_{11} \cdot \Delta]^{-1} M_{12} + M_{22}] \cdot r_2$$

În proiectarea sistemelor de reglare robuste, indiferent de ce tip de incertitudine este luată în considerare, modelul procesului perturbat, real, $G_p(s)$ poate fi reprezentat sub forma standard a unei transformate liniar-fracționare superioare, unde Δ reprezintă modelul incertitudinii corespunzătoare și respectiv sub forma unei transformate liniar-fracționare inferioare, unde K reprezintă regulatorul, figura 4.8.

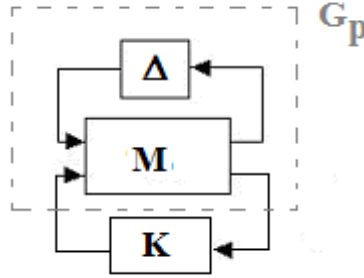


Figura 4.8. Structura generalizată a incertitudinii

Matricile de transfer pentru toate tipurile de incertitudini prezentate anterior (aditiv, multiplicativ la ieșire și pentru incertitudinile cu factori coprimi la dreapta) sunt:

$$M = \begin{bmatrix} O & I \\ I & G_o \end{bmatrix} \quad (4)$$

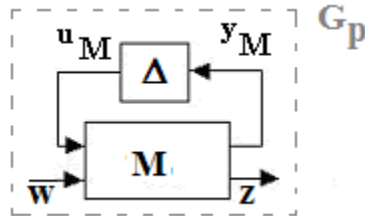
$$M = \begin{bmatrix} -G_o & G_o \\ -G_o & G_o \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$M = \begin{bmatrix} O & G_o \\ I & G_o \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$M = \begin{bmatrix} -I & I \\ -G_o & G_o \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} [M^{-1} & 0] & M^{-1} \\ - & - & - \\ [-G_o & I] & G_o \end{array} \right] \quad (8)$$

Considerând modelul procesului perturbat, real, $G_p(s)$ reprezentat sub forma standard a unei transformate liniar-fracționare superioare, cu Δ reprezentând modelul incertitudinii corespunzătoare:



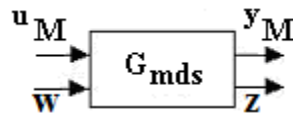
se pot determina relațiile:

$$\dot{X} = A \cdot X + B_1 \cdot u_M + B_2 \cdot w$$

$$y_M = C_1 \cdot X + D_{11} \cdot u_M + D_{12} \cdot w$$

$$z = C_2 \cdot X + D_{21} \cdot u_M + D_{22} \cdot w$$

Astfel G_{mds} va descrie dinamica sistemului, luând în considerare incertitudinile parametrilor



unde:

$$G_{mds} = \begin{bmatrix} A & | & B1 & B2 \\ - & - & - & - \\ C1 & | & D11 & D12 \\ C2 & | & D21 & D22 \end{bmatrix}$$

Exemplu. Proiectarea unui sistem de control robust pentru suspensia descrisă în figura 4.9.

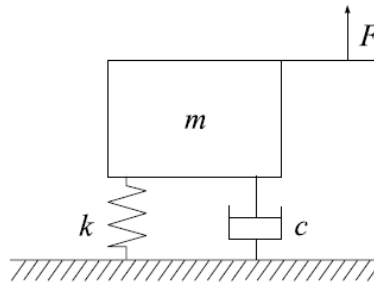


Figura 4.9 Sistemul de suspensie activă

Dinamica sistemului este descrisă de ecuația diferențială: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u$.

unde:

- x – reprezintă deplasarea blocului de masă - m - din poziția de echilibru,
- c – reprezintă constanta de amortizare,
- k – reprezintă constanta arcului iar
- $u=F$ – reprezintă forța care acționează asupra blocului de masă m .

În figura 4.10 este prezentată diagrama bloc a sistemului de suspensie activă.

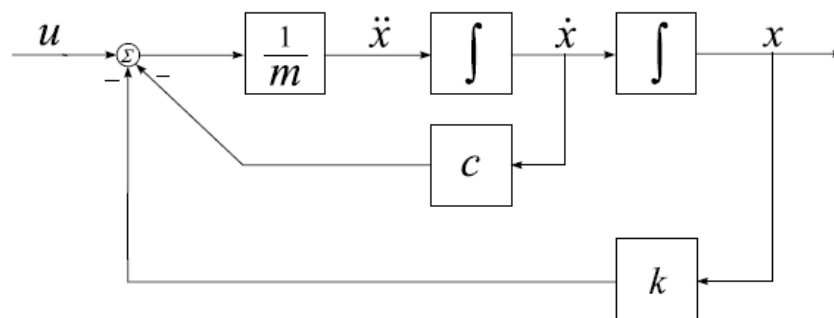


Fig.4.10 Diagrama bloc a sistemului de suspensie activă

Într-un sistem real, parametrii fizici m , c , k nu sunt cunoscuți cu exactitate, dar se cunoaște gama în care variază.

Astfel

$$m = \bar{m}(1 + p_m \delta_m)$$

$$c = \bar{c}(1 + p_c \delta_c)$$

$$k = \bar{k}(1 + p_k \delta_k)$$

unde $\bar{m} = 3, \bar{c} = 1$ și $\bar{k} = 2$ reprezintă **valorile nominale** ale parametrilor m, c, k iar p_m, p_c, p_k și $\delta_k, \delta_c, \delta_m$ reprezintă **perturbațiile posibile (relative)** ale acestor parametri. Se consideră $p_m = 0.4, p_c = 0.2$ și $p_k = 0.3$ și $-1 \leq \delta_k, \delta_c, \delta_m \leq 1$.

Acești parametri reprezintă incertitudini de 40% în masa blocului, de 20% a coeficientului de amortizare și de 30% a coeficientului de rigiditate a arcului. Fiecare parametru m, c, k poate fi reprezentat printr-o transformare linear-fracționară superioară (TLF) după cum urmează:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} &= \frac{1}{\bar{m}(1 + p_m \delta_m)} = \frac{1}{\bar{m}} - \frac{p_m}{\bar{m}} \delta_m (1 + p_m \delta_m)^{-1} \\ &= F_U(M_{mi}, \delta_m) \end{aligned}$$

În mod similar $c = \bar{c}(1 + p_c \delta_c), k = \bar{k}(1 + p_k \delta_k)$:

$$c = F_U(M_c, \delta_c), \quad k = F_U(M_k, \delta_k)$$

unde:

$$M_{mi} = \begin{bmatrix} -p_m \frac{1}{\bar{m}} \\ -p_m \frac{1}{\bar{m}} \end{bmatrix} \quad \text{- transformată liniar fracționară superioară pentru incertitudini inverse multiplicative la ieșire}$$

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & \bar{c} \\ p_c & \bar{c} \end{bmatrix} \quad \text{- transformată liniar fracționară superioară pentru incertitudini multiplicative la ieșire}$$

$$M_k = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k} \\ p_k & \bar{k} \end{bmatrix} \quad \text{- transformată liniar fracționară superioară pentru incertitudini multiplicative la ieșire}$$

În figura 4.11 sunt reprezentate diagramele bloc a transformărilor liniar-fracționare superioare.

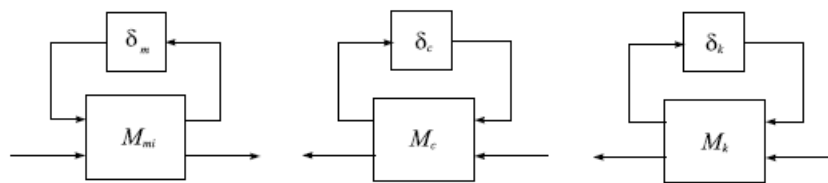


Figura 4.11 Reprezentarea TLF superioară a parametrilor incerti

Modelul procesului poate fi reprezentat prin transformate liniar-fracționare a perturbațiilor necunoscute, reale. În figura 4.12 este prezentată diagrama bloc a sistemului de suspensie activă, luând în considerare incertitudinile parametrilor.

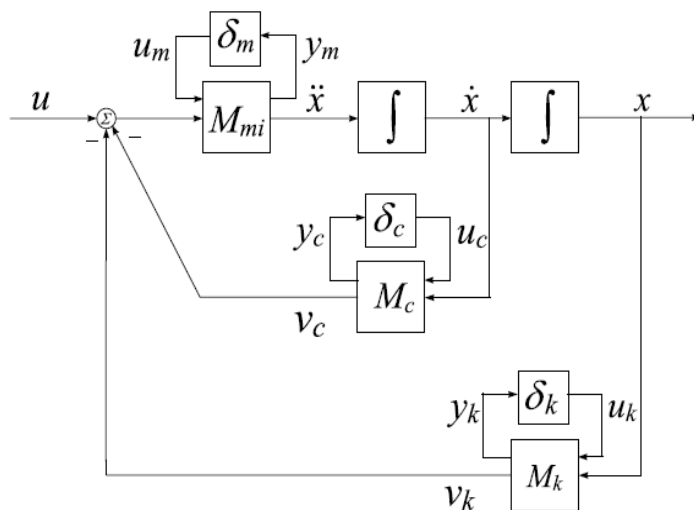


Figura 4.12 Diagrama bloc a sistemului de suspensie activă luând în considerare incertitudinile parametrilor

Se notează: $x_1 = x$,

$$x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1,$$

$$y = x_1 \text{ astfel incat } \dot{x}_2 = \ddot{x} = \ddot{x}_1.$$

obținându-se următoarele ecuații:

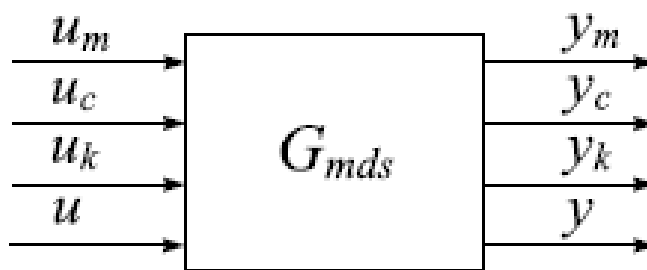
$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -p_m u_m + \frac{1}{m}(u - v_c - v_k) \\
y_m &= -p_m u_m + \frac{1}{m}(u - v_c - v_k) \\
y_c &= \bar{c} x_2 \\
y_k &= \bar{k} x_1 \\
v_c &= p_c u_c + \bar{c} x_2 \\
v_k &= p_k u_k + \bar{k} x_1 \\
y &= x_1 \\
u_m &= \delta_m y_m \\
u_c &= \delta_c y_c \\
u_k &= \delta_k y_k
\end{aligned}$$

Eliminând variabilele v_c , v_k , se vor obține ecuațiile care descriu comportamentul dinamic al sistemului.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \text{---} \\ y_m \\ y_c \\ y_k \\ \text{---} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -\frac{\bar{k}}{m} & -\frac{\bar{c}}{m} & | & -p_m & -\frac{p_c}{m} & -\frac{p_k}{m} & | & \frac{1}{m} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ -\frac{\bar{k}}{m} & -\frac{\bar{c}}{m} & | & -p_m & -\frac{p_c}{m} & -\frac{p_k}{m} & | & \frac{1}{m} \\ 0 & \bar{c} & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \bar{k} & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \text{---} \\ u_m \\ u_c \\ u_k \\ \text{---} \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_m \\ u_c \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_m & 0 & 0 \\ 0 & \delta_c & 0 \\ 0 & 0 & \delta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_m \\ y_c \\ y_k \end{bmatrix}$$

Astfel G_{mds} va descrie dinamica sistemului, luând în considerare incertitudinile parametrilor. Acest sistem prezintă 4 intrări, 4 ieșiri și 2 stări.



Reprezentarea în spațiul stărilor a sistemului augmentat G_{mds} este:

$$G_{mds} = \begin{bmatrix} A & | & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & | & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & | & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

unde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_m & -\frac{p_c}{\bar{m}} & -\frac{p_k}{\bar{m}} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\bar{m}} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} \\ 0 & \bar{c} \\ \bar{k} & 0 \end{bmatrix}, D_{11} = \begin{bmatrix} -p_m & -\frac{p_c}{\bar{m}} & -\frac{p_k}{\bar{m}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{m}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [1 \ 0], D_{21} = [0 \ 0 \ 0], D_{22} = 0$$

După cum se poate observa, G_{mds} depinde doar \bar{m}, \bar{c} și \bar{k} și p_m, p_c, p_k și de ecuațiile originale dintre intrări și ieșiri. Astfel G_{mds} se cunoaște în totalitate, nu conține parametrii incerți.

Implementare Matlab:

mod_mds.m

```
% calculul matricii Gmds care descrie dinamica sistemului, luând în
% considerare incertitudinile parametrilor
m = 3;
c = 1;
k = 2;
pm = 0.4;
pc = 0.2;
pk = 0.3;
%
A = [ 0 1
      -k/m -c/m];

B1 = [ 0 0 0
      -pm -pc/m -pk/m];

B2 = [ 0
      1/m];

C1 = [-k/m -c/m
      0 c
      k 0];
```

```

C2 = [ 1 0 ];

D11 = [-pm -pc/m -pk/m
0 0 0
0 0 0];

D12 = [1/m
0
0 ];

D21 = [0 0 0];

D22 = 0;

G = pck(A, [B1,B2], [C1;C2], [D11 D12;D21 D22]);

```

Varianta 2: folosind comanda *sysic*

sys_mds.m

```

m_nom = 3; c_nom = 1; k_nom = 2;
p_m = 0.4; p_c = 0.2; p_k = 0.3;
mat_mi = [-p_m 1/m_nom; -p_m 1/m_nom];
mat_c = [0 c_nom; p_c c_nom];
mat_k = [0 k_nom; p_k k_nom];
int1 = nd2sys([1], [1 0]);
int2 = nd2sys([1], [1 0]);
systemnames = 'mat_mi mat_c mat_k int1 int2';
sysoutname = 'G';
inputvar = '[um;uc;uk;u]';
input_to_mat_mi = '[um;u-mat_c(2)-mat_k(2)]';
input_to_mat_c = '[uc;int1]';
input_to_mat_k = '[uk;int2]';
input_to_int1 = '[mat_mi(2)]';
input_to_int2 = '[int1]';
outputvar = '[mat_mi(1);mat_c(1);mat_k(1);int2]';
sysic;

```

Comportamentul incert al procesului se poate descrie printr-o transformată liniar-fracționară superioară $y_i = F_U(G_{mds}, \Delta)u$ așa cum se prezintă în figura 4.13. Matricea incertitudinilor Δ , are o structură fixă. Este o matrice diagonală $\Delta = \text{diag}(\delta m, \delta c, \delta k)$. Acest tip de incertitudini se mai numesc incertitudini structurate.

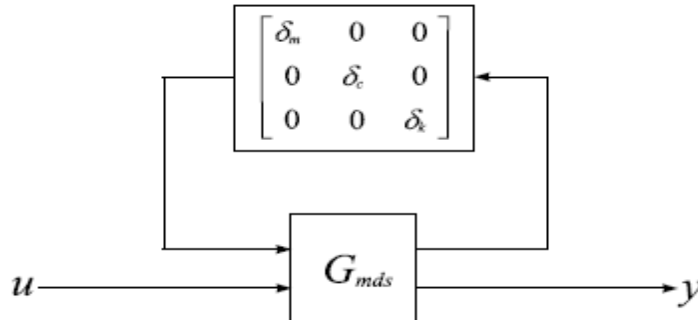


Figura 4.13 Reprezentarea TLF a sistemului cu parametric incerti

Obiectivul principal al sistemului este sintetizarea unui controler liniar cu reacție de la ieșire $u(s)=K(s)y(s)$, care să asigure stabilitatea și performanțele sistemului nominal și de asemenea să determine stabilitatea robustă și performanțele întregii clase de sisteme care există într-un anumit domeniu de incertitudine în jurul sistemului nominal.

Analiza în domeniul frecvențial a sistemului în buclă deschisă se poate realiza folosind comanda *starp*.

Implementare Matlab:

pfr_mds.m

```
%
% Frequency responses of the perturbed plants
%
mod_mds
omega = logspace(-1,1,100);
[delta1,delta2,delta3] = ndgrid([-1 0 1],[-1 0 1], ...
[-1 0 1]);
for j = 1:27
delta = diag([delta1(j),delta2(j),delta3(j)]);
olp = starp(delta,G);
olp_ic = sel(olp,1,1);
olp_g = frsp(olp_ic,omega);
figure(1)
vplot('bode',olp_g,'c-')
subplot(2,1,1)
hold on
subplot(2,1,2)
hold on
end
subplot(2,1,1)
olp_ic = sel(G,4,4);
olp_g = frsp(olp_ic,omega);
vplot('bode',olp_g,'r--')
subplot(2,1,1)
title('BODE PLOTS OF PERTURBED PLANTS')
hold off
subplot(2,1,2)
hold off
```