Laborator Nr.6.

SOLUŢIA DE CONTROL ROBUST H_∞ APLICATĂ UNUI SISTEM DE SUSPENSIE ACTIVĂ

SPECIFICAŢIILE SISTEMELOR DE REGLARE ROBUSTĂ

Specificarea performanţelor

Robusteţea are o importanţă crucială în proiectarea sistemului de control, deoarece sistemele reale sunt vulnerabile la perturbaţii externe, zgomote de măsurare şi există întotdeauna diferenţe între modelele matematice utilizate pentru proiectarea regulatoarelor şi sistemul real. Pe lângă asigurarea stabilităţii robuste, sistemul de reglare trebuie să satisfacă o serie de cerinţe de performanţă pentru sistemul nominal (atenuarea perturbaţiilor, urmărirea semnalelor de intrare, etc.) ţinând cont de limitările determinate de capacitatea instalaţiei şi imprecizia datorată zgomotului de măsurare.

Norma $\mathbf{H}_\infty$ a unei matrici de transfer reprezintă o măsură a amplificării maxime a sistemului respectiv, fiind folosită în descrierea performanţelor sistemului. Prin minimizarea normei $\mathbf{H}_\infty$ a unei matrici de transfer se minimizează energia semnalului de ieşire datorat unor semnale de intrare de energie finită. Astfel în cazul minimizării normei $\mathbf{H}_\infty$ a unei funcţii de transfer în circuit închis se poate garanta un nivel de performanţă nominală (Dulf, 2007).

În figura 4.13 se prezintă o structură tipică a unui sistem în buclă închisă. *G* reprezintă modelul procesului iar *K* reprezintă regulatorul care trebuie calculat. Semnalele *r, y, u, e, d* şi *n* reprezintă în aceasta ordine semnalul de referinţă, semnalul de ieşire, semnalul de comandă, eroarea, perturbaţiile şi zgomotele de măsurare.

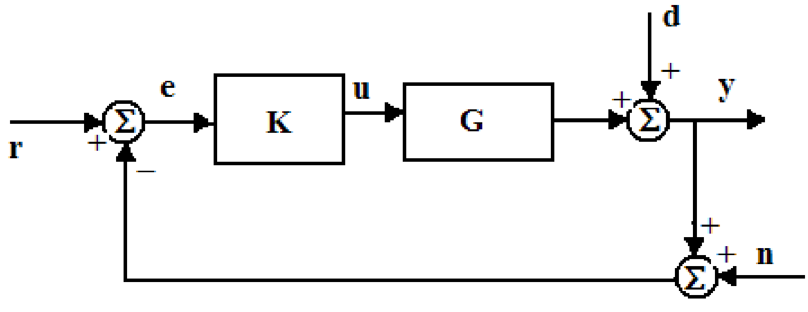


Figura 4.13. Structura tipică a unui sistem în buclă închisă

Pe baza acestei structuri se pot scrie următoarele ecuaţii:

$$y = [(I + GK)^{-1}GK]r + [(I + GK)^{-1}]d - [(I + GK)^{-1}]GKn$$

$$u = [K(I + GK)^{-1}]r - [K(I + GK)^{-1}]d - [K(I + GK)^{-1}]n \qquad (1)$$

$$e = [(I + GK)^{-1}]r - [(I + GK)^{-1}]d - [(I + GK)^{-1}]n$$

Astfel din mulţimea tuturor regulatoarelor stabilizatoare (care asigură stabilitatea internă a sistemului în buclă închisă) trebuie determinat regulatorul optim care să minimizeze:

- Pentru performanţe bune la urmărirea semnalului de intrare: $\|(I + GK)^{-1}\|_\infty$;
- Pentru atenuarea efectelor perturbaţiilor: $\|(I + GK)^{-1}\|_\infty$;
- Pentru rejectarea zgomotelor de măsură_ $\|-(I + GK)^{-1}GK\|_\infty$;
- Pentru limitarea semnalelor de comandă aplicate instalaţiei: $\|K(I + GK)^{-1}\|_\infty$.

În mod convenţional funcţia de transfer între perturbaţia echivalentă la ieşire şi ieşirea instalaţiei (figura 3.8) este numită şi **funcţie de sensibilitate** (Gu *et al.*, 2005) :

$$S=(I + GK)^{-1} \tag{2}$$

După cum se poate observa în ecuaţiile (1) matricea de sensibilitate reprezintă şi matricea de transfer dintre semnalul de referinţă şi eroarea de urmărire. Astfel, prin minimizarea normei $\mathbf{H}_\infty$ se asigură atât atenuarea efectelor perturbaţiilor la ieşire precum şi minimizarea erorii de urmărire.

Matricea de transfer dintre semnalul de referinţă şi ieşirea procesului reprezintă **funcţia de sensibilitate complementară** (Gu *et al.*, 2005):

$$T=-(I + GK)^{-1}\mathrm{GK} \tag{3}$$

De asemenea matricea de transfer între perturbaţia aplicată la ieşire şi semnalul de comandă se notează cu:

$$\mathrm{R}= K(I + GK)^{-1} \tag{4}$$

În general în minimizările prezentate anterior se vor utiliza funcţii de ponderare pentru a reflecta mărimea şi importanţa relativă perturbaţiilor şi erorilor. Astfel, spre exemplu în loc să se minimizeze funcţia de sensibilitate singură se va minimiza:

$$\min_{K\ stabilizator} \|W_u S W_d\|_\infty \tag{5}$$

unde $\mathrm{W_u}$ şi $\mathrm{W_d}$ sunt alese pentru asigurarea performanţelor impuse referitor la urmărire semnalelor de intrare, respectiv pentru rejectarea efectelor perturbaţiilor (Gu *et al.*, 2005).

Stabilitatea robustă

Se poate spune despre un sistem că este *robust* dacă este stabil şi atinge anumite criterii de performanţă chiar şi în prezenţa unor incertitudini. Astfel un regulator robust trebuie să stabilizeze orice model perturbat G_p, care reprezintă o combinaţie a modelului nominal G_o şi a modelului incertitudinii Δ. Acest lucru implică de asemenea că regulatorul robust stabilizează şi sistemul nominal G_o deoarece totdeauna se presupune $\Delta \in \boldsymbol{D}_\varepsilon$, unde $\boldsymbol{D}_\varepsilon$ este domeniul admisibil al perturbaţiilor care include şi $\Delta=0$ (fără perturbaţii).

Dacă se consideră o incertitudine aditivă, figura 4.14 unde $\Delta(s)$ reprezintă matricea incertitudinilor sistemului, stabilă.

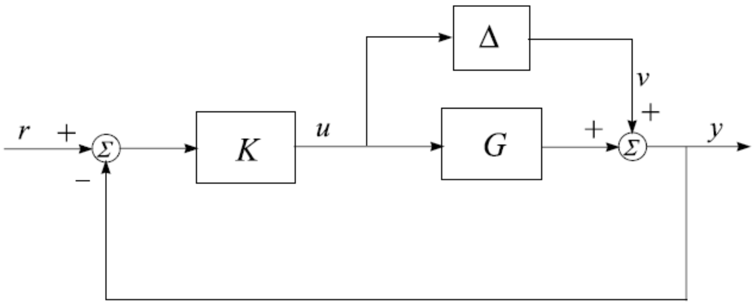


Figura 4.14 Incertitudine aditivă

Se poate determina funcţia de transfer între *v* şi *u* după cum urmează:

$T_{uv}= -K(I + G_oK)^{-1}$.

Pe baza „Teoremei amplificării mici" (Dulf, 2007; Callier et *al.*, 1991; Gu *et al.*, 2005) se poate enunţa: **sistemul în buclă închisă este robust stabil dacă regulatorul K(s) stabilizează procesul nominal, pentru incertitudini stabile $\Delta(s)$ şi este îndeplinită următoarea condiţie**: $\left\| K(I+G_0K)^{-1} \right\|_\infty < \dfrac{1}{\left\| \Delta \right\|_\infty}$.

În cazul în care este necesară determinarea unui regulator robust care să stabilizeze cel mai mare set de perturbaţii, marginea maximă de stabilitate se determină rezolvând următoare problemă de minimizare:

$$\min_{K\_stabilizator} \left\| K(I+G_0K)^{-1} \right\|_\infty \tag{6}$$

În multe cazuri se cunoaşte mărimea incertitudinii ca o funcţie dependentă de frecvenţă.Prin introducerea funcţiei de ponderare W, blocul incertitudinilor se poate rescrie astfel:

$$\Delta(s) = \tilde{\Delta}(s)W(s) \tag{7}$$

În acest caz condiţia stabilităţii robuste devine:

$$\left\| WK(I + G_0K)^{-1} \right\|_\infty < 1$$

iar problema de minimizare devine:

$$\min_{K\_stabilizator} \left\| WK(I + G_0K)^{-1} \right\|_\infty .$$

După exemplul prezentat pot fi derivate condiţiile de stabilitate robustă pentru celelalte modele ale incertitudinilor considerate în paragraful anterior. Astfel, condiţia de stabilitate robustă pentru incertitudinile multiplicative la ieşire este: $\left\| G_0K(I + G_0K)^{-1} \right\|_\infty < \frac{1}{\left\| \Delta \right\|_\infty}$.

Asigurarea stabilităţii robuste este o problemă importantă în calculul regulatorului robust. Defapt, problema stabilizării robuste este formulată ca o problemă de optimizare $\mathbf{H}_\infty$, unde un regulator K este ales astfel încât să se minimizeze norma $\mathbf{H}_\infty$ a unei funcţii de transfer în circuit închis, cu restricţia că acesta trebuie, de asemenea, să stabilizeze instalaţia nominală.

<u>Rezolvarea metodei de conducere H_∞</u>

Aşa cum s-a mai prezentat anterior, un sistem că este *robust* dacă rămâne stabil şi atinge anumite criterii de performanţă chiar şi în prezenţa unor incertitudini. Sistemul de reglare robustă presupune determinarea unui regulator, pentru un sistem dat, astfel încât sistemul în buclă închisă să fie robust.

Abordarea $\mathbf{H}_\infty$ s-a dovedit a fi o metodă eficace de calcul a regulatoarelor robuste în cazul sistemelor de control liniare, invariante în timp. Abordarea $\mathbf{H}_\infty$ rezolvă, în general, problema stabilităţii robuste şi a performanţelor nominale (Gu et *al.*, 2005).

Se ştie ca în practică niciodată nu o să fie suficientă utilizarea unei singure funcţii de cost. O abordare corectă ar fi utilizarea unei combinaţii a funcţiilor de cost. De exemplu se poate impune o eroare de urmărire cât mai mică şi de asemenea limitarea semnalelor de comandă. Astfel se obţine o problemă de sensibilitate combinată:

$$\min_{K\_stabilizator} \left\| \begin{matrix} (I + GK)^{-1} \\ K(I + GK)^{-1} \end{matrix} \right\|_\infty \qquad (8)$$

Funcţia de cost se poate interpreta ca performanţe nominale impuse, minimizarea efectelor perturbaţiilor sau a erorii de urmărire şi asigurarea stabilităţii robuste în cazul unor incertitudini aditive. Pentru a adopta o procedură de soluţie unificată, funcţia de cost poate fi restructurată în configuraţia standard prezentată în figura 4.15. Acest lucru se realizează folosind transformata liniar-fracţionară şi prin gruparea semnalelor în semnale externe de intrare, de ieşire, de intrare în regulator, de ieşire din regulator (semnalul de comandă). *M(s)* reprezintă matricea de transfer a interconexiunilor dintre *w* şi *z*, *z* reprezintă semnalul de ieşire care trebuie minimizat.

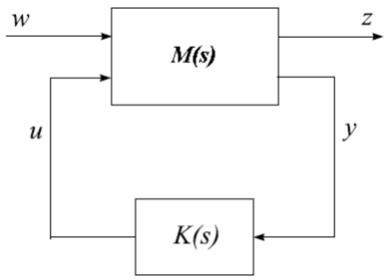


Figura 4.15 Configurația H_{inf} standard

Problema de sinteză $\mathbf{H}_\infty$ (Gu et *al.*, 2005; Ionete, 2001) este următoarea: să se determine un regulator (dacă există) care să satisfacă următoarele două cerințe:

1) Să asigure stabilitatea sistemului în buclă închisă;

2) Să atenueze influența mărimilor exogene w asupra variabilelor de calitate z.

Defapt, se va minimiza norma $\mathbf{H}_\infty$ a funcției de transfer dintre *w* și z.

Ținând cont că *M(s)* are următoarea structură: $M(s)=\begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix}$ se poate obține $z= [M_{11} + M_{12}K(I - M_{22}K)^{-1}M_{21}]\, w$ care reprezintă transformata liniar-fracționară inferioară $T_I(M,K)w$.

Astfel obiectivul devine soluționarea problemei $\mathbf{H}_\infty$ (Dulf, 2007; Gu *et al.*, 2005):

$$\min_{K\_stabilizator} \|T_I(M,K)w\|_\infty \qquad (9)$$

Soluția problemei $\mathbf{H}_\infty$ nu este unică. Defapt, nu există formulări analitice ale soluțiilor. Este suficientă determinarea unui regulator K astfel încât norma $\mathbf{H}_\infty$ a funcției de transfer în buclă închisă să fie mai mică decât un număr pozitiv dat:

$$\|T_I(M,K)\|_\infty < \gamma \qquad (10)$$

iar $\gamma > \gamma_o = \min_{K\_stabilizator} \|T_I(M,K)\|_\infty$. Aceasta reprezintă problema $\mathbf{H}_\infty$ suboptimală. Prin reducerea succesivă a lui γ, pornind de la o valoare relativ mare pentru a asigura existența unei soluții suboptimale se poate determina o soluție optimă (Gu et *al.*, 2005).

Exemplu: Soluţia de control robust aplicată unui sistem de suspensie.

În ceea ce priveşte stabilitatea şi performanţele sistemului nominal, regulatorul calculat trebuie stabilizeze intern sistemul în buclă închisă. De asemenea performanţele impuse sistemului în buclă închisă trebuie îndeplinite pentru modelul nominal descris de *Gmds*. Pentru îndeplinirea performanţelor se foloseşte criteriul S / KS, „S over KS" (Gu et *al.*, 2005) descris de:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p \cdot S \cdot (Gmds) \\ W_u \cdot K \cdot S \cdot (Gmds) \end{bmatrix} \right\|_\infty \prec 1, \text{ cu } S(Gmds) = (I + GmdsK)^{-1} \text{ - funcţia de sensibilitate.}$$

Wp şi *Wu* sunt funcţii de ponderare alese pentru a reprezenta caracteristicile frecvenţiale a unor perturbaţii externe pe ieşire *d* şi cerinţele de performanţă.

Sistemul în buclă închisă prezintă stabilitate robustă dacă sistemul în buclă închisă este stabil intern pentru oricare model posibil al sistemului *G*= FU(*Gmds,Δ*). De asemenea sistemul în buclă închisă pentru oricare model *G*= FU(*Gmds,Δ*), trebuie să satisfacă criteriul de performanţă:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p (I + GmdsK)^{-1} \\ W_u K (I + GmdsK)^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty \prec 1,$$

În figura 4.16. diagrama bloc a sistemului în buclă închisă care include funcţiile de ponderare şi blocul incertitudinilor.

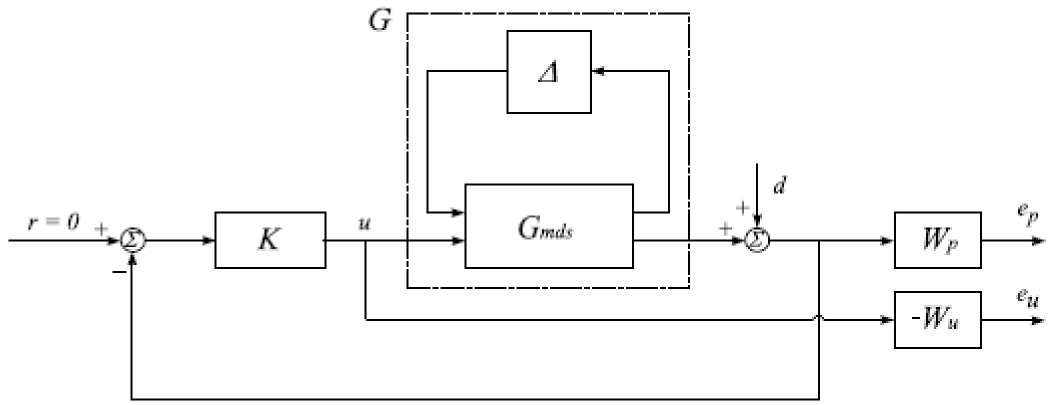


Figura 4.16. Schema de reglare în buclă închisă a sistemului

După cum se observă *Gmds* reprezintă modelul nominal al procesului, *d,* reprezintă perturbaţiia, *Δ* este matricea incertitudinilor, *Wu, Wp,* sunt funcţiile de ponderare care reflectă semnificaţia relativă a cerinţelor de performanţă. Pentru o bună atenuare a efectelor perturbaţiilor precum şi asigurarea unui timp de răspuns şi a unui anumit suprareglaj *Wu, Wp,*au următoarea formă:

$$w_p(s) = 0.95\frac{s^2 + 1.8s + 10}{s^2 + 8.0s + 0.01}$$

Wu(s)=0.01

Trebuie menţionat că alegerea funcţiilor de ponderare potrivite este un pas crucial în sinteza regulatorului robust şi **de obicei presupune câteva încercări**.

Implementare Matlab:

wts_mds.m

```
% definirea functiilor pondere

nuWp = [1 1.8 10];
dnWp = [1 8 0.01];
gainWp = 0.95;
Wp = nd2sys(nuWp,dnWp,gainWp);
nuWu = 1;
dnWu = 1;
gainWu = 10^(-2);
Wu = nd2sys(nuWu,dnWu,gainWu);
```

Prin aplicarea metodei prezentate, folosind mediul Matlab/SIMULINK, se determină regulator robust H∞.

Interconexiunile sistemului:

Structura sistemului în buclă deschisă este prezentată în figura 4.17. echivalentă cu schema bloc prezentată în figura 4.18.

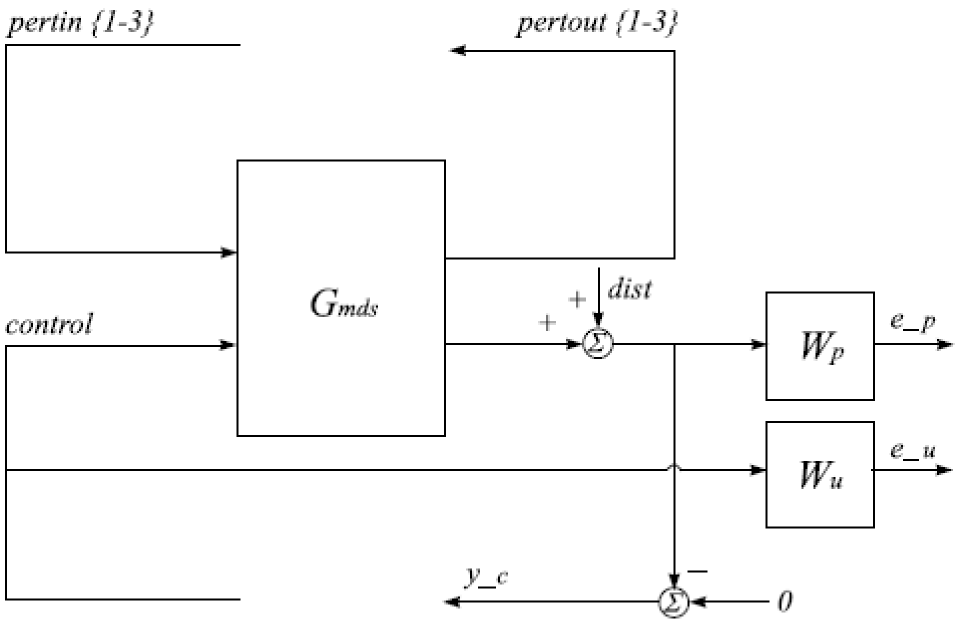


Figura 4.17 Structura sistemului în buclă deschisă

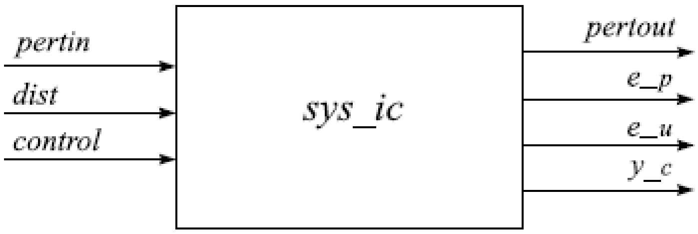


Figura 4.18 Schema bloc a sistemului în buclă deschisă

Implementare Matlab:

olp_mds.m

```
systemnames =' G Wp Wu';
inputvar ='[ pert{3}; dist; control ]';
outputvar ='[ G(1:3); Wp; -Wu; -G(4)-dist ]';
input_to_G ='[ pert; control ]';
input_to_Wp ='[ G(4)+dist ]';
input_to_Wu ='[ control ]';
sysoutname ='sys_ic';
cleanupsysic ='yes';
sysic
```

Simularea procesului în buclă închisă folosind regulatorul robust calculat se bazează pe structura prezentată în figura 4.19.

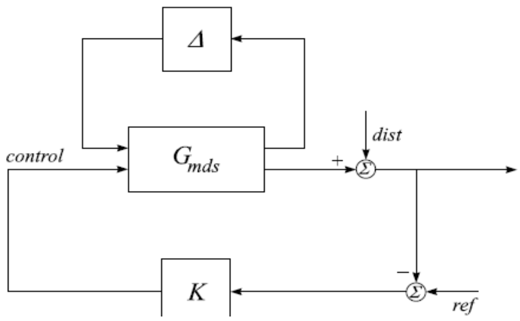


Figura 4.19. Structura sistemului în buclă închisă

Implementare Matlab:

1. *modelul sistemului în buclă deschisă cu incertitudini*

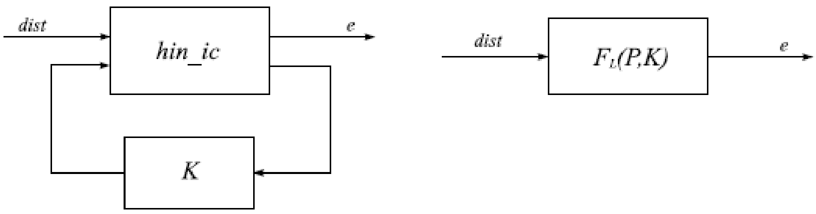
sim_mds.m

```
systemnames = ' G ';
inputvar = '[ pert{3}; ref; dist; control ]';
outputvar = '[ G(1:3); G(4)+dist; ref - G(4) - dist ]';
input_to_G = '[ pert; control ]';
sysoutname = 'sim_ic';
cleanupsysic = 'yes';
sysic
```

2. *calculul regulatorului robust*

Pentru calculul regulatorului avem nevoie de matricea de transfer a sistemului nominal în buclă închisă de la perturbații (dist) la eroare (e) :

hin_ic = sel(sys_ic,[4:6],[4:5])



Sintaxa pentru calculul regulatorului:

[k,clp] = hinfsyn(p,nmeas,ncon,glow,ghigh,tol)

unde:

open-loop interconnection	p (matrix of type SYSTEM)
number of measurements	nmeas
number of controls	ncons
lower bound of bisection	glow
upper bound of bisection	ghigh
absolute tolerance for the bisection method	tol

controller (matrix of type SYSTEM) k
closed-loop system (matrix of type SYSTEM) clp

hin_mds.m

```
nmeas = 1;
ncon = 1;
gmin = 1;
gmax = 10;
tol = 0.001;
hin_ic = sel(sys_ic,4:6,4:5);
[K_hin,clp] = hinfsyn(hin_ic,nmeas,ncon,gmin,gmax,tol);
```

Analiza sistem: Pentru analiza performantelor sistemului de reglare se foloseşte comanda *trsp*.

Implementare Matlab:

clp_mds.m

```
% response to the reference
sim_mds
K = K_hin;
clp = starp(sim_ic,K);
timedata = [0 20 40];
stepdata = [1 0 1];
dist = 0;
ref = step_tr(timedata,stepdata,0.1,60);
u = abv(0,0,0,ref,dist);
y = trsp(clp,u,60,0.1);
figure(1)
vplot(sel(y,4,1),'y-',ref,'r--')
title('CLOSED-LOOP TRANSIENT RESPONSE to reference input')
xlabel('Time (secs)')
ylabel('y (m)')
%
% response to the disturbance
timedata = [0 20 40];
stepdata = [1 0 1];
dist = step_tr(timedata,stepdata,0.1,60);
ref = 0;
u = abv(0,0,0,ref,dist);
y = trsp(clp,u,60,0.1);
figure(2)

vplot(sel(y,4,1),'y-',dist,'r--')
title('TRANSIENT RESPONSE TO THE DISTURBANCE')
xlabel('Time (secs)')
ylabel('y (m)')
```

Bibliografie:

1. D.-W. Gu, P. Hr. Petkov and M. M. Konstantinov, *Robust Control Design with Matlab*, Springer-Verlag London Limited, 2005
2. Robust Control Toolbox User Guide, www.mathworks.com