Roteiro do Objeto de Aprendizagem AI-0122

Dr. Ivan Ramos Pagnossin*

3 de agosto de 2011

Resumo

Este é o roteiro de produção e de orientação aos educadores do Objeto de Aprendizagem AI-0122, desenvolvido para o tópico 2 (Derivadas parciais) da disciplina de Fundamentações Matemáticas II (PLC0016) do módulo 2 do curso a distância de Licenciatura em Ciências da USP, do convênio UNIVESP.

No que segue, o texto em preto é aquele que será apresentado para o(a) cursista. O texto em verde é destinado à equipe de educadores e pedagogos, e o texto em vermelho é destinado à equipe técnica, de produção do OA. O símbolo ● indica um ponto de parada do OA, no qual ele aguarda uma ação do usuário, sinalizando para prosseguir (em geral isto é feito através do botão "avançar"). Isto ocorre em duas situações: quando é necessário avaliar uma resposta do usuário ou quando o OA precisa alterar alguma configuração automaticamente, a fim de preparar-se para os experimentos seguintes.

Ao longo do texto, os colchetes [ ] indicam campos os quais o(a) cursista deve fornecer uma resposta, em geral respondendo a uma questão anterior. E os símbolos entre ⟨ e ⟩ representam valores numéricos que são preenchidos automaticamente pelo *software*. Esta atividade contém ainda algumas atividades extras, destacadas em caixas amarelas.

Este documento pode ainda sofrer modificações.

Caro educador, o foco deste Objeto de Aprendizagem (OA) é a diferença entre derivada parcial ($\partial f/\partial x$) e derivada total (df/dx) de uma função de duas variáveis. Os experimentos e exercícios sugeridos são feitos todos para $f(x, y) = xy$, interpretado como a área do retângulo de lados x e y. Deste modo, partindo de uma situação simples e conhecida do(a) cursista, esperamos tornar o assunto mais compreensível. Outros conceitos explorados são:

- Taxa média e pontual de variação de f.
- Derivada direcional (superficialmente).
- Gradiente (apenas o conceito é apresentado).

Esses assuntos são abordados através de experimentos, sugeridos à medida que o(a) cursista avança. É muito importante que ele(a) seja incentivado(a) a participar do fórum associado a este tópico. De fato, em vários pontos desta atividade *online* ele(a) é explicitamente instruído(a) a procurar e oferecer ajuda no fórum. Além disso, mais importante que as avaliações automáticas feitas pelo OA (que podem ou não ser consideradas na média, a critério do Professor-Autor da disciplina) é a execução, passo-a-passo, dos experimentos e exercícios sugeridos.

Os pré-requisitos desta atividade são: ter lido o tópico 2 (derivadas parciais) e ter executado a AI-0118 (parte 1) e AI-0118-2 (parte 2).

A atividade tem apenas uma seção, com o texto abaixo, que aparece à medida que se pressiona o botão "avançar", representado aqui pelo símbolo ●. A AI-0121 é o ambiente de experimentos do usuário,

*irpagnossin.elearning@gmail.com

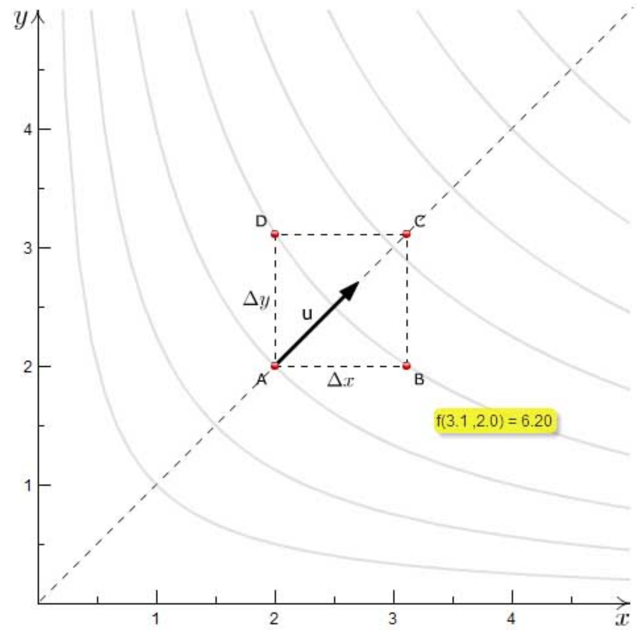

Figura 1: área de exploração do usuário (este texto não aparece no OA).

e aparece numa janela flutuante sobre o texto (para que seja sempre visível, sem que o usuário tenha de rolar a página).

Atenção: criar o HTML de modo que, se a execução de Javascript estiver desativada, nada aparece, a não ser a mensagem: "Você deve permitir a execução de código Javascript para realizar esta atividade *online*. Veja `aqui` como fazer."

Início da atividade (o título não aparece no OA)

Caro cursista, antes de executar esta atividade *online* estude o tópico "Derivadas parciais", no texto-base, e execute a atividade *online* ⟨NOME DO OA NO MOODLE⟩. Utilize o fórum deste tópico para discutir suas conclusões, dificuldades e também para auxiliar seus colegas. Este texto deve aparecer na descrição do SCO, no imsmanifest.xml.

A figura acima (figura 1) apresenta o gráfico da função $f(x, y) = xy$ através de suas curvas de nível, ou seja, como se o estivessemos vendo de cima. Interpretaremos esta função como a área de um retângulo de lados x e y (dados em metros, por exemplo). O principal objetivo desta atividade *online* é explorar a diferença entre $\partial f/\partial x$ (derivada parcial) e df/dx (derivada total).

Na figura acima há quatro pontos: A, B, C e D. O ponto A pode ser arrastado livremente (use o *mouse*), enquanto os pontos B e D só podem ser arrastados na horizontal e vertical, respectivamente. E o ponto C permanece sempre sobre a reta tracejada, cuja inclinação é dada por $\Delta y/\Delta x$. Experimente arrastá-los para entender melhor estas relações, e observe que ao passar o *mouse* sobre um ponto, suas coordenadas são exibidas, bem como o valor de f nele. O mesmo para Δx e Δy.

Mas **atenção**: não confunda o retângulo de lados x e y, objeto do nosso estudo, com aquele de lados Δx e Δy, que aparece na figura.

O aplicativo posiciona o ponto A em $(3, 4/3)$ e impede a interação do usuário com o ponto A.

O ponto A foi automaticamente posicionado em $(3, 4/3)$, o que representa um retângulo de lados 3 m e 4/3 m. Sua área é, portanto, 4 m^2. Pergunta: se aumentarmos o lado x do retângulo em meio metro, qual será o valor da área? Represente esta nova situação através do ponto B, arrastando-o para a direita de A de tal modo que $\Delta x = 1/2$ (não precisa ser exato). E verifique o valor de $f(x_B, y_B)$, passando o *mouse* por cima de B. ●

Verificar se $\Delta x = x_B - x_A = 1/2$, com erro de até 10%. Se não for, fazer $\Delta x = 1/2$.

Qual é a **variação da área** (Δf_{AB}) associada a esta **variação do lado** (Δx)?

$$\Delta f_{AB} = f(x_B, y_B) - f(x_A, y_A) = [\qquad]\ \text{m}^2 \tag{1}$$ ●

O aplicativo impede a interação do usuário com o ponto B, e avalia a resposta dele (veja acima), com tolerância de 10%.

⌊Se errou a resposta ⇝ A resposta correta é $\Delta f_{AB} = \langle \Delta f_{AB} \rangle$.⌋ E qual é a **taxa de variação média**?

$$\frac{\Delta f_{AB}}{\Delta x} = [\qquad]\ \text{m}^2/\text{m} \tag{2}$$ ●

O aplicativo deve salvar Δx no Javascript, para poder restaurá-lo mais a frente. Ele deve também avaliar a resposta (veja acima), com tolerância de 10%.

Este resultado significa que, **em média**, a área do retângulo varia $\langle \Delta \mathrm{f_{AB}}/\Delta \mathrm{x} \rangle$ m^2 para cada metro que acrescemos em x. Para entender isto, esqueça por um instante o Δx que você usou há pouco e considere o seguinte problema:

A taxa de variação média de f ao longo do eixo x é $\langle \Delta f_{AB}/\Delta x \rangle$ m^2/m. Qual é a variação em f quando x varia de 1/4 m?

Para responder esta pergunta você deve simplesmente multiplicar a taxa de variação de f (vamos chamá-la de δf, apenas para não confundir com Δf_{AB}) pela variação de x (δx):

$$\delta f = \frac{\Delta f_{AB}}{\Delta x} \delta x,$$

o que resulta $\langle \delta f \rangle$. Verifique isto: arraste o ponto B para perto de A até que $\Delta x = 1/4$ e verifique a variação em f.

Em geral, a expressão acima funciona quando δx é pequeno, o que acarreta um δf pequeno. Neste caso, chamamos esses símbolos de **diferenciais**. Mas à medida que aumentamos δx, δf torna-se mais e mais incorreto. ●

Restaurar $\Delta x \approx 1/2$ (usar o valor do usuário, salvo há pouco).

Este é um excelente ponto para explorar o conceito de diferencial, e distinguí-lo da derivada. Um exercício clássico que pode ser apresentado é o de calcular o seno de $60,5°$.

$$\begin{aligned}
\delta(\sin(x)) &= \frac{d}{dx}(\sin x)\delta x \\
&= \cos(x)\delta x \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{\pi}{180} \\
&\approx 0,004
\end{aligned}$$

Assim, $\sin(x + \delta x) \approx \sin(x) + \delta(\sin(x)) \approx 0,870$, com $x = 60°$. Atenção: é preciso trabalhar em radianos para obter um bom resultado.

Para continuarmos, eu reposicionei o ponto B de modo $\Delta x \approx 1/2$. E vamos deixar as unidades de lado.

Agora vejamos: será que se aumentarmos o lado y em meio metro obteremos os mesmos resultados? Esta situação é representada pelo ponto D. Arraste-o até que $\Delta y = 1$ ● e calcule:

Verificar se $\Delta y = y_D - y_A = 1/2$, com erro de até 10%. Se não for, fazer $\Delta y = 1/2$.

$$\Delta f_{AD} = f(x_D, y_D) - f(x_A, y_A) = [\qquad]$$
$$\frac{\Delta f_{AD}}{\Delta y} = [\qquad] \tag{3}$$

●

⌊Se errou alguma das respostas ⇝ A resposta correta é $\Delta f_{AD} = \langle \Delta f_{AD} \rangle$ e $\Delta f_{AD}/\Delta y = \langle \Delta f_{AD}/\Delta y \rangle$.⌋ Ou seja, um acréscimo de igual medida no lado y acarreta uma variação maior da área do retângulo do que aquela obtida quando aumentamos x. Isto significa que a taxa de variação média da área é maior na direção do eixo y do que na do eixo x. ●

Salve o Δx e o Δy do usuário no Javascript e, em seguida, faça $A = (4/3, 3)$ e $\Delta x = \Delta y = 1/2$ na AI-0121.

Mas cuidado, pois isto depende da configuração com que estamos trabalhando: o ponto A. Por exemplo, eu posicionei A em $(4/3, 3)$ na figura acima. Refaça a análise acima nesta situação e responda: em que direção a área varia mais rapidamente? Em x ou em y? ●

Faça $A \approx (3, 4/3)$ e $\Delta x \approx \Delta y \approx 1/2$ (usar os dados do usuário) na AI-0121.

Então, $f(x, y)$ varia diferentemente ao longo de x e y. Dito de outra forma, a taxa de variação média de f ao longo de x não é necessariamente igual àquela ao longo de y. E como você deve ter imaginado, podemos determinar a taxa de variação **pontual** de f ao longo de x fazendo $\Delta x \to 0$. A este resultado chamamos **derivada parcial de f com relação a x**, e a representamos por $\partial f/\partial x$.

Faça isto empiricamente: arraste o ponto B para bem perto de A (utilize a ferramenta de *zoom*) e calcule:

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_{AB}}{\Delta x} = [\qquad]. \tag{4}$$

Nesta equação, $\partial f(A)/\partial x$ é a derivada parcial de f com relação a x calculada no ponto A. ●

⌊Se errou a resposta ⇝ A resposta correta é $\partial f(A)/\partial x = 4/3$.⌋

Mas como sabemos que $f(x, y) = xy$, podemos também calcular $\partial f/\partial x$ através do cálculo diferencial: como mantivemos y constante (o ponto B só pode ser movido na horizontal), então qualquer ocorrência de y na expressão de f comporta-se como uma constante. E deste modo,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = \frac{\partial x}{\partial x} y = y.$$

Em $A = (3, 4/3)$, a derivada parcial de f com relação a x é simplesmente $4/3$. Compare com o resultado obtido em (4). ●

Para $f(x, y) = xy$, $\partial f/\partial x = y$. Ou seja, é constante ao longo de x. Por isso, não importa o valor de Δx utilizado, $\partial f/\partial x = \Delta f_{AB}/\Delta x$ sem qualquer erro. O mesmo não acontecerá mais a frente, quando falarmos das derivadas totais.

Refaça a análise acima ao longo de y: arraste o ponto D para perto de A e determine $\partial f/\partial y$ empiricamente. Depois, calcule a derivada parcial de f com relação a y em A e compare os resultados.

Faça $\Delta x = \Delta y = 1/2$ na AI-0121.

Mas, e se modificarmos tanto x quanto y? Esta situação é representada pelo ponto C. Determine:

$$\Delta f_{AC} = f(x_C, y_C) - f(x_A, y_A) = [\qquad]. \tag{5}$$

⌊Se errou a resposta ⇝ A resposta correta é $\Delta_{AC} = \langle \Delta f_{AC} \rangle$.⌋

E qual seria a taxa de variação (média ou pontual)? Temos de dividir por Δx ou por Δy? Na verdade podemos fazer ambos: se dividirmos por Δx obteremos, no limite em que $\Delta x \to 0$, a **derivada total de** f **com relação a** x, representada por df/dx:

$$\frac{df(A)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_{AC}}{\Delta x} = [\qquad]. \tag{6}$$

⌊Se errou a respotas ⇝ A resposta correta é $df(A)/dx = \langle y_A + x_A \Delta y/\Delta x \rangle$.⌋

Analogamente, podemos calcular o limite de $\Delta f_{AC}/\Delta y$:

$$\left.\frac{df}{dy}\right|_{(x_A, y_A)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f_{AC}}{\Delta y} = [\qquad]. \tag{7}$$

⌊Se errou a respotas ⇝ A resposta correta é $df(A)/dy = \langle y_A \Delta x/\Delta y + x_A \rangle$.⌋

Há ainda uma terceira opção: podemos dividir por $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, a distância entre os pontos A e C. Neste caso obteremos, no limite em que $\Delta s \to 0$, a **derivada direcional** de f, representada por $\partial f/\partial \mathbf{u}$, onde $\mathbf{u}$ é o versor (vetor de comprimento unitário) paralelo à reta tracejada. Mas nós não entraremos em detalhes sobre esta forma.

Muita atenção agora: $\partial f/\partial x$ é a derivada de f com relação a x, quando y é **independente** de x (e, por isso, podemos mantê-lo constante ao variar x). Por outro lado, df/dx é a derivada de f com relação a x quando y é **dependente** de x (e, por isso, **não** podemos mantê-lo constante ao variar x).

O ponto D representa esta dependência: você pode arrastá-lo, mas ele sempre permanecerá sobre a reta tracejada. Ou seja, se você o arrastar na horizontal (Δx), inevitavelmente observará também um movimento vertical (Δy). Esta relação entre x e y por ser escrita pela equação da reta: $y = y_A + m(x - x_A)$, onde m é a inclinação da reta, dada por $\Delta y/\Delta x$, o que equivale à derivada de y com relação a x no ponto A quando $\Delta x \to 0$: dy/dx.

É claro que na prática utilizamos o cálculo diferencial para obter a derivada total:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \\ &= y + x\frac{dy}{dx} \\ &= y + xm. \end{aligned} \tag{8}$$

Faça a conta para $(x, y) = (x_A, y_A)$ e compare com o resultado obtido em (6). Discuta com seus colegas e tutores o porquê da pequena diferença. Por que nos experimentos anteriores não houve diferença?

A diferença observada tem origem no fato de que Δx e Δy são finitos, de modo que o limite $\Delta x \to 0$ é realizado aproximadamente na equação 6 (o mesmo para y). Nos experimentos anteriores este problema não aparece por que as derivadas parciais de f são constantes, de modo que $\partial f/\partial x = \Delta f_{AB}/\Delta x$ independentemente do tamanho de Δx. Idem para y.

EXTRA Para entender a expressão de df/dx acima, perceba que $\Delta f_{AC} = \Delta f_{AB} + \Delta f_{BC}$ (atenção para os subscritos). Como vimos, podemos aproximar Δf_{AB} por

$$\Delta f_{AB} \approx \frac{\partial f(A)}{\partial x}\Delta x,$$

Expressão análoga pode ser obtida para Δf_{BC}, com a derivada agora calculada em B. Assim,

$$\Delta f_{AC} \approx \frac{\partial f(A)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(B)}{\partial y}\Delta y.$$

Dividindo por Δx,

$$\frac{\Delta f_{AC}}{\Delta x} \approx \frac{\partial f(A)}{\partial x} + \frac{\partial f(B)}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

e fazendo $\Delta x \to 0$, obtemos:

$$\frac{df(A)}{dx} = \frac{\partial f(A)}{\partial x} + \frac{\partial f(A)}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Note que troquei $\partial f(\mathbf{B})/\partial y$ por $\partial f(\mathbf{A})/\partial y$, pois quando $\Delta x \to 0$, o ponto B tende ao ponto A. E como A representa qualquer ponto no domínio de f, podemos removê-lo da expressão acima, o que resulta na equação 8. Note também que a segunda parcela acima é simplesmente a regra da cadeia para $f(x, y(x))$, com y sendo uma função de x. Experimente fazer este desenvolvimento para df/dy.

A derivada total de f com relação a y é similar [agora consideramos que x depende de y, ou seja, $x \equiv x(y)$]:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dy} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y}\\ &= \frac{y}{m} + x,\end{aligned}$$

onde usamos $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$. Faça suas contas e compare com o resultado empírico.

EXTRA Caso você tenha ficado curioso(a) quanto a derivada direcional, para $f(x, y) = xy$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta f_{AC}}{\Delta s} = \frac{x\Delta y + y\Delta x}{\Delta s}.$$

Arraste C para perto de A e determine a derivada direcional empiricamente, e use a expressão acima para comparar os resultados.

Discuta com seus colegas e tutores: se a relação entre x e y fosse não uma reta, mas $y = x^2$, quais seriam df/dx e df/dy?

Neste caso, $dy/dx = 2x$ em (6). O que resulta $df/dx = y + 2x^2$. Analogamente, $dx/dy = (2x)^{-1}$ na derivada total com relação a y, de modo que $df/dy = (y + 2x^2)/(2x)$.

Permita que A seja alterado pelo usuário na AI-0121.

Para finalizar esta atividade *online*, perceba que a variação de f entre A e C (equação 5) é ainda maior que aquela entre A e D (3). Ou seja, dependendo da direção em que andamos (no plano xy), f varia mais ou menos.

Faça o seguinte: posicione A sobre uma curva de nível e, variando Δx e Δy para alterar a inclinação da reta tracejada, determine a direção em que Δf_{AC} é máxima. Uma dica é pensar na distância necessária para alcançar a próxima curva de nível. A ideia é fixar Δf_{AC} (a variação de f entre uma curva de nível e outra) e descobrir para qual direção é preciso andar menos para atingir esta variação em f (imagine o gráfico de f como sendo um morro no qual você quer subir). Em x (deslocamento Δx), em y (Δy) ou em uma combinação de ambos ($\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$)?

Ao determinar a direção, pressione o botão "marcar a direção". O *software* colocará uma indicação dela em A. Depois, refaça este processo para outros cinco pontos, preferencialmente sobre as curvas de nível exibidas. Qual é a relação entre essas direções e as curvas de nível? Discuta suas conclusões e dificuldades com seus colegas e tutores.

obs.: você pode apagar os marcadores de direção. Basta arrastar o mouse em volta deles e pressionar o botão "apagar".

> O objetivo neste ponto é o(a) cursista identificar que as direções de máxima variação de f são sempre perpendiculares às curvas de nível. Quando este conhecimento tiver sido desenvolvido no fórum, lance a pergunta: "em que direção f varia menos?" A resposta é: "paralelamente às curvas de nível". Afinal, ao caminharmos sobre elas $f(x, y) =$ constante. Ou seja, não varia.

Agora que você concluiu esta atividade *online* seguindo os passos acima, experimente refazê-los para outros pontos A e outros valores de Δx e Δy (fazendo-os menor do que zero, por exemplo).