Limites

O objetivo deste objeto de aprendizagem é facilitar a compreensão da definição formal de limite de uma função de uma variável, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para isso o usuário conta com um eixo x (domínio de f) e um eixo y (imagem de f).

No eixo x estão definidos o ponto x_0, onde se quer calcular o limite, e x, um ponto na vizinhança de x_0, tal que $|x_0 - x| < \delta$. Esta condição é representada na figura pela impossibilidade de arrastar x para longe dos colchetes ao redor de x_0, que indicam os limites inferior e superior da vizinhança.

No eixo y estão definidos $f(x)$, que só pode ser alterado arrastando-se x, bem como L, o limite procurado, e a vizinhança de L, de tamanho ε.

A função f é escolhida aleatoriamente pelo *software* e sua expressão *não* é informada. Ainda assim, o usuário pode determinar o limite de f em x_0 modificando δ e L de tal modo que o ponto $f(x)$ fique sempre na vizinhança de L.

A atividade fica muito mais interessante se explorada com dois usuários: o primeiro define x_0 e ε, enquanto o segundo comanda x, δ e L. Assim, o primeiro usuário pede ao segundo que ajuste L e δ de modo que, para qualquer x, $f(x)$ fique sempre na vizinhança de L (matematicamente, $|L - f(x)| < \varepsilon$). Quando ele conseguir fazer isso, o primeiro usuário reduz ε e novamente solicita ao primeiro que ajuste seus parâmetros. Esse jogo de gato-e-rato pode prosseguir indefinidamente, até que ambos os usuários concordem que L já representa, com adequada acurácia, o limite procurado.

Eventualmente o *software* sorteará uma função descontínua, o que permite ainda explorar a inexistência do limite: o usuário não conseguirá encontrar um L e δ que satisfaça a condição acima. Neste ponto é possível explorar também o conceito de limite lateral.

Espera-se que, procedendo desta forma, torne-se mais fácil para o usuário compreender a definição formal de limite: o limite de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em x_0 é igual a L se, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, for possível encontrar um $\delta > 0$ tal que $|L - f(x)| < \varepsilon$ para qualquer x que satisfaça $|x_0 - x| < \delta$.