Roteiro de produção da AI-0146

Limites

Dr. Ivan Ramos Pagnossin

5 de abril de 2012

Comentário técnico: para este passo-a-passo a AI-0146 deve ser configurada de modo que $f(x) = 2x + 1$.

⌊AI num LMS ⇝ ⟨Nome do aluno⟩⌋, nesta atividade interativa veremos, passo-a-passo, o conceito de limite de uma função de uma variável. Você pode refazer este tutorial quantas vezes quiser.

Comentário técnico: se a AI não estiver sendo executada num LMS (pacote SCORM), o nome do aluno não estará disponível. Neste caso, remover este vocativo.

O valor f em $x = x_0$ é simplesmente $f(x_0)$. Mas e se x for um número muito *próximo* de x_0, embora diferente? Intuitivamente, podemos responder: "$f(x)$ será muito próximo de $f(x_0)$". Este realmente é o caso *na maioria das vezes*, mas nem sempre. Veja esta equação:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L. \tag{1}$$

Ela deve ser lida assim: o limite de f quando x tende a x_0 ($x \to x_0$) é igual a L. Ou seja, se x for muito *próximo* de x_0, $f(x)$ será *igual* a L, um número que não conhecemos a priori. L é dito "o limite" de f em x_0.

Dois detalhes podem ter passado despercebidos: primeiro, L não é necessariamente igual a $f(x_0)$, embora isto aconteça com frequência (veremos que isto tem a ver com a *continuidade* de f). Segundo, dizer que x está *próximo* de x_0 tem um significado rigoso. Na verdade, o correto é dizer que x pertence à vizinhança de x_0.

Veja a figura. Você pode arrastar x, mas há uma restrição: ele não pode ir muito longe de x_0. Especificamente, $|x - x_0| < \delta$. O conjunto dos valores que x pode assumir, de $x_0 - \delta$ até $x_0 + \delta$, é a vizinhança de x_0. δ pode ser qualquer número positivo (desde que a vizinhança permaneça no domínio de f, uma preocupação que não temos aqui, pois o domínio de f é $\mathbb{R}$). Certifique-se de que você entendeu isso antes de continuar. ●

Outro detalhe inerente à equação 1 é que f é calculada sempre em x, nunca em x_0, e resulta no número $f(x)$, também exibido na figura. Assim, à medida que você arrasta x na vizinhança de x_0, $f(x)$ varre um intervalo corresponde na imagem de f (faça isso agora). ●

Agora, experimente reduzir δ. Note que, com isso, o intervalo de variação de $f(x)$ também diminui. Assim, se fizermos isto indefinidamente, de modo que x e x_0 sejam números cada vez mais próximos ($\delta \to 0$), podemos esperar que $f(x)$ também aproxime-se mais e mais de um número qualquer L. Este é o limite de f em x_0.

Mas isto só é verdade por que a função usada aqui é contínua (você saberá qual é ela em breve). O problema é que, embora possamos sempre fazer $\delta \to 0$, não podemos garantir que a variação em $f(x)$ também tenda a zero. Nós veremos isto depois.

No momento, a questão a ser respondida é "que critério podemos usar para dizer que L é de fato o número que procuramos?". A resposta para esta pergunta levou alguns milhares de anos para ser respondida, mas no escopo desta atividade podemos escrevê-la assim:

Se **eu** escolher um número ε arbitrariamente pequeno, **você** poderá encontrar um δ tal que, para qualquer x na vizinhança de x_0, $f(x)$ permanece tão próximo de L que $|L - f(x)| < \varepsilon$. ●

Nós vamos agora brincar de gato e rato: eu vou escolher ε e você vai ajustar L e δ, na figura, de modo a satisfazer o critério acima. Em seguida eu vou reduzir ε e você será obrigado a ajustar novamente L e δ... Note que a inequação $|L - f(x)| < \varepsilon$ é satisfeita quando $f(x)$ fica sempre entre os colchetes ao redor de L, na figura.

Comentário técnico: no *applet*, faça $x_0 = 2$ e $\varepsilon = 3$. A partir daqui e até que o tutorial esteja concluído, o usuário não poderá modificar x_0 nem ε. Por outro lado, ele poderá mexer em L e δ.

Calcularemos o limite de f em $x_0 = 2$. Para começar, eu escolhi $\varepsilon = 3$. Agora é a sua vez: ajuste $L = 20$ e $\delta = 1$. Na verdade esses valores iniciais de L e δ são totalmente arbitrários, mas para simplificar a sua interação com a atividade, ajuste-os conforme solicitado. No final deste tutorial você poderá explorar livremente a figura. ●

Comentário técnico: Faça $L = 20$ e $\delta = 1$ no *applet* se os valores ajustados pelo usuário diferirem de mais de 10% desses valores.

Pela definição acima, se $L = 20$ for o limite procurado, então podemos arrastar x livremente e sempre obteremos $f(x)$ entre os colchetes ao redor de L. Veja se isto acontece. ●

Como você pôde perceber, em nenhum momento $f(x)$ permaneceu entre os colchetes ao redor de L. Ou seja, $|L - f(x)| > \varepsilon$ e, por conseguinte, $L = 20$ **não** é o valor que procuramos.

Na verdade, L deve estar mais próximo de $f(x)$. Escolha um L mais próximo de $f(x)$. Arraste x por toda a vizinhança de x_0 e observe o movimento de $f(x)$ para tomar a sua decisão. ●

$\lfloor$Usuário escolheu $3 \leq L \leq 7$ $\rightsquigarrow$ Muito bom! Parece que você entendeu a ideia.$\rfloor$ Eu ajustei $L = 6$ apenas para simplificar, mas poderíamos prosseguir com o valor que você escolheu. Qual é o comportamento de $f(x)$ agora? ●

Desta vez $f(x)$ hora está dentro do intervalo, hora não. O problema é que a vizinhança de x_0 está muito grande. Mas você pode corrigir isso: faça $\delta \approx 0,2$ (é só em ε que você não pode mexer). ●

Comentário técnico: faça $\delta = 0,2$ no *applet* independentemente do ajuste do usuário.

Agora sim: $f(x)$ está sempre contido no intervalo $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$, independentemente de qual seja o x na vizinhança de x_0. ●

Comentário técnico: faça $\varepsilon = 1$ no *applet*.

No entanto, ainda pela definição de limite, **eu** posso reduzir ε. Escolhi $\varepsilon = 1$, diminuindo assim a extensão do intervalo ao redor de L, e novamente colocando $f(x)$ fora dele. Verifique. ●

O que devemos fazer para corrigir isto é, novamente, aproximar L de $f(x)$. Faça $L = 5$ e verifique o comportamento de $f(x)$. ●

Comentário técnico: faça $\varepsilon = 0,5$ no *applet*.

Parece que $f(x)$ voltou a manter-se entre os colchetes. Mas agora eu reduzi ainda mais ε, para $0,5$. Reduza δ mais um pouco. ●

Comentário técnico: se o usuário não tiver reduzido δ, faça $\delta = 0,05$ no *applet*.

Nós podemos continuar assim indefinidamente, mas creio que você entendeu a ideia e podemos parar por aqui. Agora responda: qual é o valor de L que você encontrou, isto é, qual é o limite de f em $x_0 = 2$?

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L = \boxed{}$$

Comentário técnico: disponibilize um *text field* para o usuário digitar a resposta. O valor esperado é $L = 5$, com erro aceitável de 2%.

⌊Usuário errou ⇝ A resposta correta é $L = 5$. Se você não chegou a este resultado (aproximadamente), refaça os passos acima antes de prosseguir.⌋

Nos passos acima, $f(x) = 2x + 1$. Note que $L = f(2)$. Em palavras, o limite de f em $x_0 = 2$ é simplesmente $f(x_0)$. Quando isto acontece, dizemos que *f é contínua em x_0*. Por outro lado, quando isto acontece para *todos* os pontos do domínio de f, isto é, não só para $x_0 = 2$, dizemos que *f é contínua* (em todos os pontos).

Comentário técnico: no *applet*, trocar a função para:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < 3 \\ 2x + 1 & x \geq 3 \end{cases}.$$

Além disso, fazer $x_0 = 3$, $\delta = 1$, $\varepsilon = 3$ e zoom $= 1$.

Acontece que este nem sempre é o caso. Na figura acima f foi alterada para

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < 3 \\ 2x + 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

Esta função **não** é contínua.

Agora é com você: todos os elementos da figura podem ser alterados (x_0, x, δ, ε e L). Reproduza os passos que fizemos há pouco com esta função e responda: é possível encontrar um L quando $x_0 = 3$? Ou seja, f tem limite em $x_0 = 3$?

Agora que você já passou por tudo isso, leia a definição formal de limites:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

L é o limite da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em $x = x_0$ se, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, é possível encontrar um $\delta > 0$ tal que $|L - f(x)| < \varepsilon$ para todo x que satisfaz $|x - x_0| < \delta$.

Lembre-se: você pode executar este tutorial quantas vezes quiser. Basta pressionar o botão "recomeçar".

Comentário técnico: ao finalizar este tutorial, o aluno ganha nota máxima (cem pontos), independentemente das respostas dele durante o tutorial.