Proposta de atividade 1:

o teorema fundamental do Cálculo

I. R. Pagnossin, R. S. Morais, S. N. Dezidério

11 de abril de 2014

Este trabalho apresenta uma proposta de atividade de aprendizagem que utiliza o recurso educacional interativo "Integral de Riemann" (disponível aqui) para abordar o *teorema fundamental do Cálculo* (TFC).

A atividade está dividida em três partes: na primeira, utilizamos o software para construir uma soma de Riemann arbitrária, com o intuito de aproximar a área sob o gráfico de uma função afim f no intervalo $[a,b]$, e comparamos o resultado com a área exata, que pode ser obtida geometricamente. Finalmente, utilizamos a antiderivada F para evidenciar a equivalência desses resultados com $F(b) - F(a)$.

Como o software oferece bastante flexibilidade na construção das somas de Riemann, podemos aproximar a área sob f utilizando uma quantidade finita de elementos de área, fundamentado no *teorema do valor médio* para integrais (que não é abordado explicitamente).

Na segunda parte da atividade, repetimos o trabalho feito na primeira, desta vez para $f(x) = x^2$ e utilizando os critérios conhecidos como "soma inferior" e "soma superior". Utilizamos o ensejo para abordar a transição do discreto para o contínuo.

Finalmente, na terceira parte os alunos, divididos em grupos, replicam o que foi feito na primeira parte da atividade, colocando em prática a soma de Riemann, o teorema fundamental do Cálculo e familiarizando-se com o software, para que eles sejam capazes de utilizá-los nos exercícios propostos no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA).

Para mais instruções sobre como utilizar o recurso educacional, veja este tutorial.

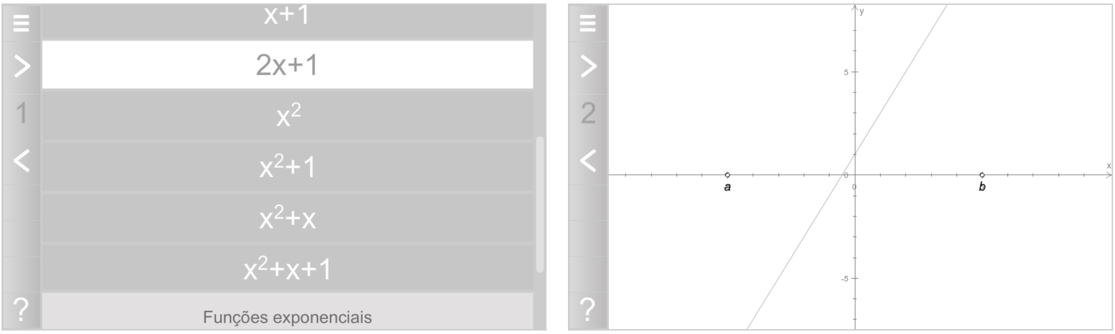

Figura 1: selecione a função $f(x) = 2x + 1$ na tela 1 (à esquerda) e avance para a tela 2, onde seu gráfico será automaticamente desenhado (à direita).

Parte 1

Nesta primeira parte da atividade, construiremos uma soma de Riemann da *função afim* $f(x) = 2x + 1$, cuja área sob ela pode ser calculada com base em argumentos geométricos (áreas do triângulo, do retângulo e do trapézio), conhecidos do aluno. Deste modo e utilizando implicitamente o *teorema do valor médio* para integrais, poderemos construir uma soma de Riemann com poucos elementos de área e mostrar como o resultado da soma equipara-se ao cálculo analítico da integral definida, evidenciando assim o TFC.

Neste processo, é importante que os alunos sejam estimulados a participar, propondo o próximo passo na solução do problema que queremos resolver, a saber: encontrar o valor da área da região delimiteada por $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e $y = f(x)$ (a "área sob f").

Objetivos específicos

Ao final desta atividade, espera-se que os alunos saibam:

- explicar o significado o termo *soma de Riemann*.
- explicar a importância do TFC.
- explicar a relação entre os dois conceitos acima.

Roteiro

1. Utilize o recurso educacional para desenhar o gráfico da *função afim* $f(x) = 2x + 1$. Para isso, escolha esta função na tela 1 do software, no grupo "funções polinomiais", e avance para a tela 2 (figura 1).

2. Escolha o intervalo de integração $[a,b] = [0,3]$: na tela 2, arraste o ponto

a para a abscissa $x = 0$ e o ponto b, para $x = 3$. Feito isso, avance para a tela 3.

3. Escolha a opção "soma personalizada" na tela 3, o que lhe dará mais flexibilidade para construir a soma de Riemann. Avance para a tela 4.

4. Na tela 4 haverá, inicialmente, apenas os limites inferior (a) e superior (b) de integração. Questione os alunos sobre como calcular a área sob o gráfico de $f(x) = 2x+1$ no intervalo escolhido. Espera-se que eles proponham utilizar a fórmula da área do trapézio de altura $b - a = 3$ e bases $f(a) = 1$ e $f(b) = 7$. Neste caso a área será

$$\text{Área sob } f = \frac{1}{2}\left[f(a) + f(b)\right](b - a).$$

Alternativamente, os alunos podem sugerir somar a área do retângulo de lados $b - a$ e $f(a)$ com a área do triângulo de base $b - a$ e altura $f(b) - f(a)$. Neste caso, a área será dada por

$$\text{Área sob } f = (b - a)f(a) + \frac{1}{2}(b - a)\left[f(b) - f(a)\right].$$

Obviamente as duas expressões resultam no mesmo valor: 12.

5. Após determinar a área sob f no intervalo $[a,b]$, questionar os alunos sobre como obter um valor *aproximado* dessa área utilizando apenas retângulos. Espera-se que eles sugiram a inserção de vários retângulos abaixo do gráfico de f (soma inferior) ou acima dele (soma superior), no intervalo de integração.

Provavelmente os alunos questionarão o porquê dessa necessidade, haja vista que as fórmulas da Geometria Euclidiana Plana resolvem o problema. Este é um bom momento para propor que eles pensem em como *aproximar* a área sob a função x^2 no mesmo intervalo de integração.

6. Após a discussão acima, ainda na tela 4, crie uma partição do intervalo $[a,b]$. Ou seja, escolha um conjunto de pontos sobre o eixo das abscissas que, juntamente com os pontos a e b, dividem o intervalo de integração em $n = 5$ (ou mais) subintervalos.

Para criar um ponto da partição, clique com o mouse sobre o eixo das abscissas, na posição $x_i \in]a,b[$ em que se quer criar o ponto. Em seguida, pressione o botão $+$ (mais), na barra de ferramentas, à esquerda da tela. Alternativamente, *posicione* o mouse sobre o ponto desejado e pressione a tecla *p*. Para remover este ponto, clique com o mouse sobre ele para selecioná-lo e pressione o botão $-$ (menos), ou pressione "delete" no teclado.

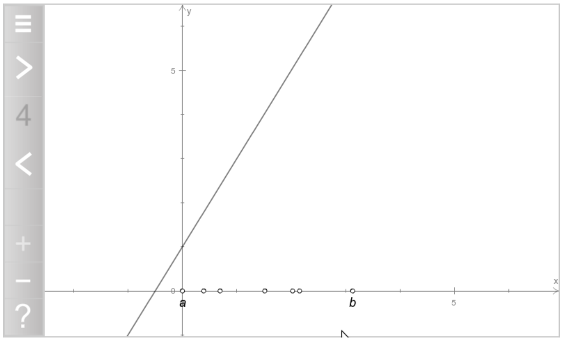

Figura 2: exemplo de partição do intervalo $[a,b] = [0,3]$. Note como os pontos x_i da partição foram escolhidos de modo que a distância entre eles varia. Isso é importante para mostrar a arbitrariedade inerente à construção de uma soma de Riemann.

Repita esse procedimento mais algumas vezes, procurando escolher os pontos x_i de modo que a distância entre eles (Δx_i) varie, como ilustrado na figura 2. Feito isso, avance para a tela 5.

7. Na tela 5, construa os elementos de área, isto é, os retângulos de base $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ e altura $f(\xi_i)$, onde ξ_i é uma abscissa *arbitrária* do subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ e $i = 0,1,\ldots,n-1$. Note que a área do i-ésimo elemento de área é igual a $f(\xi_i)\Delta x_i$.

Para criar um elemento de área no software, clique no gráfico de f em algum $\xi_i \in [x_i,x_{i+1}]$. Ao fazer isso, aparecerá o símbolo $\times$ sobre o gráfico de f, destacando o ponto $(\xi_i, f(\xi_i))$. Neste momento, pressione o botão $+$ (mais) ou a tecla *p* para que o elemento de área (um retângulo) seja automaticamente desenhado na tela. Se você repetir esse procedimento para um ξ_i diferente do mesmo subintervalo, um novo elemento de área será criado no lugar do anterior. Para remover um elemento de área, clique sobre ele e pressione o botão $-$ (menos) ou a tecla "delete".

Repita o procedimento acima para cada subintervalo, *sem se preocupar com o critério de escolha de* ξ_i, pois um dos objetivos desta atividade é que esse ajuste seja feito manualmente.

8. Ainda na tela 5, com todos os elementos de área presentes, questione os alunos sobre se a área encontrada, por meio dos retângulos, é uma boa aproximação. Note que você pode comparar a área exata (= 12), calculada no passo 4, com a soma das áreas dos elementos de área, que é exibida no canto superior direito da tela.

9. Motive os alunos a melhorar a aproximação. Para isso, chame a atenção para o fato de que em cada subintervalo há áreas "sobrando" (à esquerda de

ξ_i) e "faltando" (à direita), e que a escolha de ξ_i é arbitrária. Espera-se que os alunos proponham escolher ξ_i de modo que, em cada subintervalo, o excesso de área à esquerda compense a falta dela à direita.

Para fazer isso com o software, mova o mouse pelo subintervalo enquanto pressiona a tecla *p* várias vezes, reconstruindo assim o elemento de área para vários ξ_i. Faça isso até que, **visualmente**, o excesso de área à esquerda de ξ_i compense a falta à direita.[1] Neste caso, $f(\xi_i)$ será o *valor médio* de f no subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

Importante: quando escolhemos os ξ_i de modo que $f(\xi_i)$ seja mínimo em cada subintervalo $[x_i,x_{i+1}]$, ao somar os elementos de área obtemos a chamada "soma inferior", que subestima a área sob f. Por outro lado, quando escolhemos ξ_i de modo $f(\xi_i)$ seja máximo, obtemos a "soma superior", na qual a área é superestimada.

10. Ajuste cada um dos ξ_i conforme o critério do passo anterior. No final, compare novamente a soma das áreas dos elementos de área, no canto superior direito da tela, com a área obtida com argumentos geométricos (passo 4).

Avance para a tela 6, tomando o cuidado de verificar se a quantidade de elementos de área desenhados é igual à quantidade n de subintervalos: apenas nesta condição o software permitirá avançar.

11. Na tela 6 o software exibirá o gráfico da primitiva (ou anti-derivada) de f, a função F, sobreposta à construção realizada até aqui. Se quiser ver a expressão analítica dela, clique sobre F para selecioná-la e pressione o botão ? (ajuda), no canto inferior esquerdo da tela. Nessa proposta, $F(x) = x^2/2+x+C$, onde C é a *constante de integração*.

12. Arraste F para cima e para baixo, o que corresponde a variar C (note que o valor da constante de integração varia conforme você faz isso: consulte o valor pressionando novamente o botão de ajuda, com a função F selecionada). Argumente que essa ação não afeta a relação entre f e F, isto é, $f = dF/dx$, pois a derivada de uma constante é nula.

Essa etapa da atividade mostra que, ao integrar uma função, sua primitiva será, na verdade, uma família de funções, pois para cada valor de C, tem-se uma nova função.

13. Arraste F para baixo, até que seu vértice aproxime-se de $y = -5$ (neste caso, $C \approx -4{,}7$). O intuito desse passo é apenas facilitar o passo seguinte.

[1]**Dica**: ao clicar sobre um elemento de área, aparecem duas retas verticais, uma à esquerda e outra à direita dele, que podem servir de guias para avaliar as áreas que faltam e que sobram.

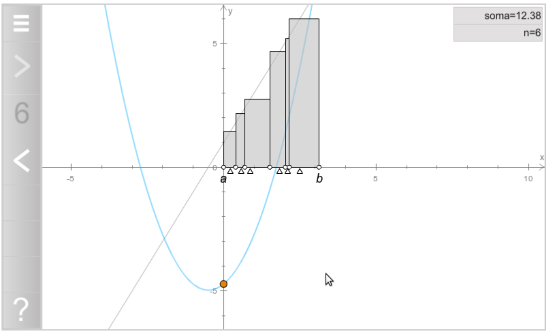

Figura 3: selecione o ponto $(a,F(a))$ e acesse a janela de ajuda para conhecer o valor de $F(a)$.

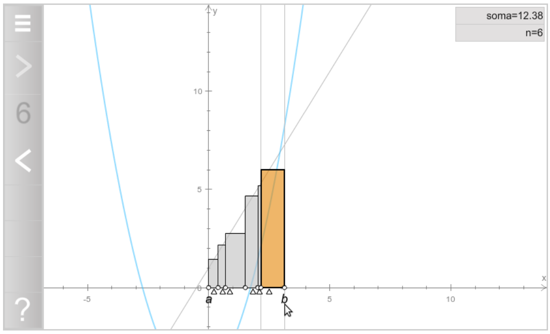

Figura 4: utilize as linhas-guia verticais para selecionar o ponto $(b,F(b))$.

14. Obtenha o valor de $F(a)$: clique próximo do ponto $(a,F(a))$ para destacá-lo no plano cartesiano, como ilustrado na figura 3. Em seguida, pressione o botão ? (ajuda) para ler o valor de $F(a)$ na janela de ajuda.

15. Obtenha o valor de $F(b)$, como no passo anterior.

Em alguns casos pode ser difícil acertar o clique sobre $(b,F(b))$.[2] Para simplificar essa tarefa, selecione o elemento de área mais à direita para que o software desenhe as linhas-guia verticais nas laterais dele (fig 4). Deste modo, basta clicar sobre a intersecção da linha vertical mais à direita com F para obter $F(b)$.

16. Calcule $F(b) - F(a)$ e compare o resultado com os valores da soma de Riemann, no canto superior direito, e da área obtida com argumentos geométricos (passo 4). O resultado desses três procedimentos deve ser o mesmo, igual a (ou aproximadamente) 12. Esta é uma evidência do TFC, a saber:

$$\text{Área sob } f \text{ em } [a,b] = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

É fundamental chamar a atenção dos alunos para os dois últimos procedimentos: no primeiro, aproximamos a área sob f pela soma da área de n retângulos (*matemática discreta*); no segundo, utilizamos a anti-derivada F para calcular $F(b) - F(a)$ (*matemática contínua*). A equivalência entre esses dois resultados é o TFC, que nos permite obter a *integral definida de* f *em* $[a,b]$ (a área sob f) sem efetuar a laboriosa soma de Riemann.

[2] Especialmente se você não fez $C \approx 4{,}7$, como instruido no passo 13.

Importante: este é um bom momento para distinguir a "área sob f" da "integral de f". Rigorosamente, a "área sob f" é de fato a área da *região* delimitada por $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e $y = f(x)$. Por exemplo, a *integral* de $f(x) = x$ no intervalo $[1, -1]$ é igual a zero:

$$\int_{1}^{-1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{-1} = 0,$$

mas a "*área* sob f" nesse intervalo é igual a um:

$$\left|\int_{1}^{-1} |x|\,dx\right| = \left|\int_{1}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{-1} x\,dx\right| = 1.$$

Assim, embora a *integral* possa ser positiva ou negativa, a *área* só pode ser positiva.

Note na última expressão que, para calcular a área, integramos $|x|$ ao invés de x, visando garantir que o integrando seja sempre positivo. Além disso, tomamos o módulo da integral para evitar o sinal negativo oriundo da orientação do intervalo de integração ($dx < 0$).

Extra: teorema do valor médio

Implicitamente, a ideia de compensar a área faltando com a área sobrando está baseada no *teorema do valor médio* (TVM) para integrais. Embora ele não faça parte dos objetivos desta atividade, dependendo do rítmo de desenvolvimento dela, o professor pode julgar interessante abordá-lo. Neste caso, convém chamar a atenção dos alunos para o fato de que, em cada sub-intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, escolhemos ξ_i de tal modo que a área sob f nesse sub-intervalo seja igual à do retângulo de base $\Delta x_i \doteq x_{i+1} - x_i$ e altura $f(\xi_i)$. Assim, podemos escrever:

$$f(\xi_i)\Delta x_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx.$$

Expandindo a ideia para todo o intervalo $[a,b]$ de integração, concluímos que se f for contínua nesse intervalo, então $\exists \xi_i \in [a,b]$ tal que

$$f(\xi_i) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

que é o teorema do valor médio para integrais.

Parte 2

Nesta segunda parte, aplicaremos os dois conceitos explorados na parte anterior (soma de Riemann e TFC) para encontrar a integral de $f(x) = x^2$ no intervalo [0,3]. Note que, desta vez, não teremos como verificar o resultado por meio da Geometria Euclidiana Plana.

Objetivos específicos

Ao final desta parte, espera-se que os alunos saibam:

- explicar o significado dos termos *soma inferior* e *soma superior*.
- relacionar o aumento na quantidade de elementos de área com a melhoria na aproximação da área pela soma de Riemann.

Roteiro

1. Utilizando o TFC, calcule a integral definida no quadro-negro:

$$\int_0^3 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + C\right]_0^3 = 9,$$

onde $C \in \mathbb{C}$ é a constante de integração.

2. Agora vamos calcular a integral utilizando o método da soma de Riemann. Para isso, selecione $f(x) = x^2$ na tela 1 do aplicativo.

3. Na tela 2, ajuste o intervalo de integração para $[a,b] = [0,3]$.

4. Na tela 3, selecione "soma inferior". Explique o que isso significa: que agora escolhemos ξ_i de tal modo que $f(\xi_i)$ seja mínimo no intervalo $[x_i,x_{i+1}]$, diferentemente do que foi feito na primeira parte, onde ξ_i foi escolhido de modo que a área do elemento de área fosse aproximadamente igual à área sob f naquele sub-intervalo.

5. Na tela 4, o aplicativo criará automaticamente uma partição *uniforme* do intervalo de integração.

6. Na tela 5, o aplicativo criará automaticamente os elementos de área e exibirá o resultado da soma no canto superior direito da tela.

7. **Importante**: mostre que, conforme a quantidade n de sub-intervalos aumenta, a soma de Riemann aproxima-se mais e mais do resultado obtido pelo TFC, no primeiro passo. Para isso, volte para a tela 4 e utilize os botões + e

— para aumentar ou reduzir n. Em seguida, avance novamente até a tela 5 para mostrar o efeito.

Por exemplo, inicialmente, com $n = 5$, a soma (inferior) de Riemann $S_n^{\text{inferior}} = 6{,}48 < 9$. Na tela 4, pressione + cinco vezes de modo que $n = 10$. Na tela 5, verifique que $S_{10}^{\text{inferior}} = 7{,}70 < 9$. Repita o processo quantas vezes forem necessárias até que essa tendência esteja clara.

8. Repita os passos 4–7, desta vez utilizando a "soma superior", e enfatize o fato de que, desta vez, a soma (superior) de Riemann aproxima-se do valor esperado por cima. Por exemplo, $S_5^{\text{superior}} = 11{,}84 > 9$, $S_{10}^{\text{superior}} = 10{,}36 > 9$ etc.

9. Conclua esta parte da atividade argumentando que $S_n^{\text{inferior}} \leq F(b) - F(a) \leq S_n^{\text{superior}}$ e que, no limite em que $n \to \infty$, independentemente do critério utilizado (soma inferior, superior ou personalizada), teremos sempre

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{\text{inferior}} \equiv \lim_{n\to\infty} S_n^{\text{superior}} \equiv \lim_{n\to\infty} S_n^{\text{personalizada}} = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Importante: enfatize aqui a transição do discreto para o contínuo.

Parte 3

Na parte final desta atividade os alunos replicarão o que foi exposto até agora para outras funções simples. Esta etapa da atividade é importante para que os alunos possam familiarizarem-se com o software, evitando problemas técnicos ao executar as tarefas propostas no AVA.

Objetivos específicos

Ao final desta parte, espera-se que os alunos saibam:

- calcular uma integral definida simples pelo TFC, considerando dada a primitiva.
- construir a soma de Riemann associada utilizando o recurso educacional interativo.

Roteiro

1. Peça aos alunos para organizarem-se em grupos de aproximadamente 5 e explique a dinâmica da atividade: cada grupo receberá uma função f e um intervalo de integração $[a,b]$, e cada um terá de calcular a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ pelo TFC, no caderno, e pela soma de Riemann *personalizada*, no computador

Tabela 1: sugestões de funções e intervalos para a atividade em grupo

$f(x)$	$[a,b]$	$\int_a^b f(x)\,dx$
x	$[-1,0]$	$-1/2 = -0{,}5$
$x+1$	$[-5,-2]$	$-7/2 = -3{,}5$
x^2+1	$[-1,1]$	$8/3 \approx 2{,}7$
x^2+x	$[-1,3]$	$40/3 \approx 13{,}3$
x^2+x+1	$[-2,1]$	$27/6 \approx 4{,}5$
e^x	$[-2,1]$	$e(1-e) \approx -4{,}7$
e^{-x}	$[-2,-1]$	$e(e-1) \approx 4{,}7$
e^x+1	$[0,2]$	$e^2+1 \approx 8{,}4$
$\sin(x)$	$[-1,3]$	$\cos(1)-\cos(3) \approx 1{,}5$
$\cos(x)$	$[-1,3]$	$\sin(1)+\sin(3) \approx 1{,}0$

do professor (ou do grupo, se houver). Os resultados serão compilados numa tabela, para que todos possam apreciá-los.

2. Atribua uma função f, dentre aquelas disponíveis no software (tela 1), e um intervalo $[a,b]$ para cada grupo (veja sugestões na tabela 1).

Informe também a primitiva de f. Isto é importante porque, até este momento, os alunos não tiveram contato com as propriedades das integrais, de modo que eles não têm condições de integrar, por exemplo, $f(x) = x + 1$, ainda que eles saibam identificar as primitivas de x e de 1.

3. Escolha um primeiro grupo, que utilizará o software para construir a soma de Riemann *personalizada* da função e intervalo atribuidos a ele.

É importante que os alunos utilizem a soma personalizada para poder obter resultados bastante próximos daqueles obtidos via TFC. Este software impõe intencionalmente um limite de $n = 25$ sub-intervalos de integração, o que não permite obter uma soma inferior ou superior bastante próxima do resultado via TFC. Caso queira explorar isso, utilize este outro recurso educacional interativo.

4. Enquanto este grupo trabalha no software, oriente os demais a efetuar o cálculo da integral definida por meio do TFC.

5. Auxilie os grupos em suas tarefas: aquele que está utilizando o computador, a construir a soma de Riemann; aqueles que estão em seus lugares, a resolver a integral via TFC.

6. Construa no quadro-negro uma tabela relacionando os grupos com os resultados obtidos por eles via TFC e via soma de Riemann, como abaixo. Responsabilize cada grupo de ir até o quadro-negro preencher seus resultados.

Grupo	Função	Intervalo	Soma de Riemann	TFC
1	x^2+1	[−1,1]	2,6	2,7
2	$\sin(x)$	[−1,3]	1,4	1,5
3	...	...	...	...

7. No final da atividade, que deve demorar aproximadamente 5 minutos por grupo, a tabela evidenciará a equivalência entre os resultados. Discuta o resultado.

Caso falte tempo para que todos os grupos participarem, proponha que eles terminem o exercício por conta própria, acessando o recurso educacional no AVA, e que discutam seus resultados no fórum do AVA.

Nomenclatura

- Uma *partição* P do intervalo de integração é um conjunto de pontos x_i sobre o eixo das abscissas que dividem o intervalo de integração em n subintervalos, com $i = 0, 1, \ldots, n$. Os limites inferior (representado por a) e superior (b) compõem o primeiro e último desses pontos, respectivamente. Ou seja, $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$.
- x_i é o i-ésimo ponto da partição do interalo [a,b].
- $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ é a amplitude do i-ésimo subintervalo de integração.
- $\Delta a_i = f(\xi_i)\Delta x_i$ é a área do i-ésimo *elemento de área*, um retângulo de base Δx_i e altura $f(\xi_i)$, onde ξ_i é um ponto qualquer do subintervalo de integração $[x_i, x_{i+1}]$.
- *Teorema do valor médio* para integrais (TVM): se f for uma função contínua em [a,b], então existirá ao menos um $\xi \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi)$, onde $f(\xi)$ é o valor médio de f em [a,b].
- Uma *primitiva*, ou *anti-derivada* da função f é a função F tal que $f = \frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}(F + C)$, onde C é a *constante de integração*.
- A *soma de Riemann* S_n é a soma de todos os elementos de área. Ou seja, $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.
- A *integral de Riemann* é o limite da soma de Riemann quando n tende ao infinito. Ou seja, $I = \lim_{n\to\infty} S_n$. Neste limite, o critério de escolha de ξ_i (soma superior, soma inferior ou personalizada, como usamos nesta proposta) é irrelevante para o resultado: $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

- O *teorema fundamental do Cálculo* (TFC) diz que, se f for contínua em $[a,b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer anti-derivada de f.

Créditos

O recurso educacional interativo utilizado nesta proposta foi inicialmente desenvolvido para a disciplina "Fundamentos de Matemática" (PLC0001) do curso de graduação semi-presencial em Licenciatura em Ciências do convênio USP/Univesp (Universidade Virtual do Estado de São Paulo), numa parceria dos autores com o Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada (CEPA) da USP.