# 1 Матанализ от Виноградова

## 1.1

**Равномерная сходимость степенных рядов.** Пусть дан степенной ряд, $R \in (0, +\infty]$ — его радиус сходимости. Тогда для любого $r \in (0, R)$ ряд равномерно сходится в круге $\overline{B}(z_0, r)$.

**(Абель). О степенных рядах.** Пусть дан вещественный степенной ряд, $R \in (0, +\infty)$ — его радиус сходимости. Если ряд сходится при $x = x_0 + R$ или $x = x_0 - R$, то он равномерно сходится на $[x_0, x_0 + R]$ или $[x_0 - R, x_0]$ соответственно, а его сумма непрерывна в точке $x_0 + R$ слева (соответственно, в точке $x_0 - R$ справа).

**Интегрирование степенных рядов.** Пусть дан вещественный степенной ряд, $R \in (0, +\infty]$ — его радиус сходимости. Тогда ряд можно интегрировать почленно по любому отрезку, лежащему в интервале сходимости: если $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, то

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(b - x_0)^{k+1} - (a - x_0)^{k+1}}{k + 1}$$

Если, кроме того, ряд сходится при $x = x_0 + R$ или $x = x_0 - R$, то равенство верно и при $b = x_0 + R$ или $a = x_0 - R$ соответственно.

## 1.2

Пусть $f \in L(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f} \in L$, $\widetilde{f}$ определяется равенством $\widetilde{f} = f$ на $[x - \pi, x + \pi)$. Тогда для любого $u \in (x - \pi, x + \pi)$

$$J_A(f, u) - S_{[A]}(\widetilde{f}, u) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

# 2 Большое задание от доктора Тренча

## 2.1

$$(4s^2 + 4s + 1)Y(s) = \frac{3 + s}{s^2 + 1} + 4(-1 + 2s) + 8 = \frac{3 + s}{s^2 + 1} + 4(-1 + 2s) + 8s + 4.$$

Since $4s^2 + 4s + 1 = 4(s + 1/2)^2$,

$$Y(s) = \frac{3 + s}{4(s + 1/2)^2(s^2 + 1)} + \frac{2}{s + 1/2}. \tag{A}$$

$$\frac{3 + s}{4(s + 1/2)^2(s^2 + 1)} = \frac{A}{s + 1/2} + \frac{B}{(s + 1/2)^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1}$$

where

$$(A(s + 1/2) + B)(s^2 + 1) + (Cs + D)(s + 1/2)^2 = \frac{3 + s}{4}.$$

$$\begin{aligned}
10B &= 5 \quad \text{(set } s = -1/2\text{)}; \\
2A + 4B + D &= 3 \quad \text{(set } s = 0\text{)}; \\
12A + 8B + 9C + 9D &= 4 \quad \text{(set } s = 1\text{)}; \\
A + C &= 0 \quad \text{(equate coefficients of } s^3\text{)}.
\end{aligned}$$

Solving this system yields $A = 3/5$, $B = 1/2$, $C = -3/5$, $D = -1/5$. Therefore,

$$\begin{aligned}\frac{3+s}{4(s+1/2)^2(s^2+1)} &= \frac{3}{5}\frac{1}{s+1/2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1/2)^2} - \frac{1}{5}\frac{3s+1}{s^2+1}.\\ &\leftrightarrow \frac{3}{5}e^{-t/2} + \frac{1}{2}te^{-t/2} - \frac{1}{5}(3\cos t + \sin t).\end{aligned}$$

Since $\frac{2}{s+1/2} \leftrightarrow 2e^{-t/2}$, this and (A) imply that $y = \frac{e^{-t/2}}{10}(5t+26) - \frac{1}{5}(3\cos t + \sin t)$.

# 3 Маленькие задания от доктора Тренча

## 3.1

$e^t \leftrightarrow \frac{1}{s-1}$ and $\sin at \leftrightarrow \frac{a}{s^2+a^2}$, so $H(s) = \frac{a}{(s-1)(s^2+a^2)}$.

## 3.2

$\sinh at \leftrightarrow \frac{a}{s^2-a^2}$ and $\cosh at \leftrightarrow \frac{1}{s^2-a^2}$, so $H(s) = \frac{as}{(s^2-a^2)^2}$.

## 3.3

$Y(s) = \frac{s-1}{s^2+1} + \frac{Y(s)}{s^2+1}$; $Y(s)\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{s-1}{s^2+1}$; $Y(s)\frac{s^2}{s^2+1} = \frac{s-1}{s^2+1}$; $Y(s) = \frac{s-1}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$, so $y = 1 - t$.