

Projektowanie efektywnych algorytmów

Algorytmy wykorzystujące metody
poszukiwania lokalnego

Kacper Góral 263973

1. Wstęp

W tym eksperymencie zostały przebadane czas działania oraz dokładność wybranych algorytmów rozwiązujących asymetryczny problem komiwojażera (ang. *asymmetric travelling salesperson problem*). Polega on na znalezieniu minimalnego cyklu Hamiltona w pełnym grafie ważonym, czyli znalezieniu ścieżki w grafie zaczynającej i kończącej się w tym samym wierzchołku, która przechodzi przez każdy inny wierzchołek dokładnie raz. Asymetryczność problemu oznacza że waga krawędzi AB może być inna niż krawędzi BA.

2. Opis użytych algorytmów

W przeprowadzonym eksperymencie problem komiwojażera próbowano za pomocą algorytmu tabu search. Jego złożoność obliczeniowa znajduje się poniżej.

| Algorytm | Złożoność |
|-------------|-----------|
| Tabu search | $O(n^2)$ |

Tabela 1 Złożoność obliczeniowa algorytmu

2.1. Tabu search

Algorytm tabu search polega na iteracyjnym ulepszeniu losowo wygenerowanego rozwiązania za pomocą wykonywania najlepszych kroków w danym momencie oraz dodawanie kolejnych wykonanych kroków na listę tabu czyli listę ruchów niedozwolonych. Ma ona na celu uniknięcie minimum lokalnego i ciągle podążanie ku minimum globalnemu. Działanie algorytmu zostało przedstawione na następującym przykładzie (zostaną prześledzone pierwsze dwie iteracje

Założmy że dany jest graf o 4 wierzchołkach $\{1,2,3,4\}$ i macierzy incydencji $c = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 & 10 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 15 & 7 & 0 & 8 \\ 6 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$.

Niech naszym początkowym rozwiązaniem będzie 1-2-3-4-1 o koszcie 22.

- 1. Iteracja – lista tabu jest pusta a dostępne ruchy to (2,3)[czyli zamiana drugiego miejsca z trzecim](2,4) oraz (3,4). Te ruchy spowodowałyby powstanie rozwiązań o kosztach kolejno 26, 30 i 33. Wybieramy ruch (2,3) ponieważ generuje on rozwiązanie o najmniejszym koszcie. Ruch stosujemy na obecnym rozwiązaniu oraz wpisujemy go na listę tabu.
- 2. Iteracja – obecne rozwiązanie to 1-3-2-4-1, najlepszy koszt to 22 a lista tabu zawiera ruch (2,3). Dostępne ruchy to (2,4) oraz (3,4) ponieważ ruch (2,3) znajduje się na liście tabu. Ruchy generują kolejno koszty 32 i 24. Wybieramy ruch (3,4) ponieważ generuje on rozwiązanie o najmniejszym koszcie. Ruch stosujemy na obecnym rozwiązaniu oraz wpisujemy go na listę tabu.

Kolejne iteracje algorytmu są przeprowadzane analogicznie.

2.1.1. Opis implementacji

Główna część algorytmu znajduje się w metodzie *solve()*. W tej funkcji zostaje zainicjalizowane początkowe losowe rozwiązanie problemu a także główna pętla. W pętli zostaje znaleziony oraz zastosowany najlepszy możliwy ruch a następnie zostaje dodany do listy tabu. Drugą istotną metodą

jest *findBestMove* która znajduje najlepszy ruch, który w danym momencie nie jest na liście tabu. Kluczowymi strukturami są obiekt *graph* klasy *map* który przechowuje macierz incydencji zadanego grafu, tablica *tabuList* przechowująca zabronione ruchy oraz tablica *bestSolution* przechowująca najlepszą znalezioną ścieżkę.

3. Plan eksperymentu

Ze względu na właściwości algorytmu, eksperyment został podzielony na dwie części: badanie zależności czasu wykonania algorytmu od ilości wierzchołków, oraz badanie wpływu ilości iteracji oraz wielkości listy tabu na dokładność otrzymywanych wyników.

3.1. Zależność czasu wykonania od wielkości grafu

W tej części eksperymentu został przebadany wpływ wielkości grafu na długość wykonania algorytmu. Zostały przebadane następujące wielkości grafu: 10,20,30,40,50,60,70,80, 90 i 100. Dla każdej ilości wierzchołków zostało wygenerowane 25 losowych grafów dla których następnie zastosowano algorytm tabu search o parametrach wielkość listy tabu = 25 oraz ilość iteracji = 1000 w celu rozwiązania problemu komiwojażera. Następnie czasy dla wszystkich grafów o danej ilości wierzchołków były uśredniane. Grafy były generowane poprzez przypisywanie losowych wartości w zakresie $0-(2^{30}-2)$ dla poszczególnych komórek w macierzy incydencji grafu. Niemożliwym ścieżkom zostały przypisane wartości $2^{30}-1$. Do pomiaru czasu została wykorzystana funkcja *QueryPerformanceCounter*.

3.2. Zależność dokładności wyników od parametrów algorytmu

W tej części eksperymentu został przebadany wpływ wielkości listy tabu oraz liczby iteracji na dokładność wyniku uzyskiwanego za pomocą algorytmu. Zostały przebadane następujące wartości parametrów:

- Wielkość listy tabu: 50,100,150,200
- Ilość iteracji: 500,1000, 2000, 5000, 10000, 20000

Zestawy parametrów zostały przetestowane na następujących plikach zawierających grafy o znanym minimalnym koszcie cyklu Hamiltona: *ftv33.atsp*, *ftv44.atsp*, *ftv55.atsp*, *ftv64.atsp*, *ftv70.atsp*. Dla każdej kombinacji parametrów i plików zostało wygenerowane 10 instancji na których zastosowano algorytm tabu search. Następnie zostało obliczone odchylenie od najlepszej ścieżki w procentach. Na koniec odchylenie zostało uśrednione dla wszystkich 10 instancji.

4. Wyniki

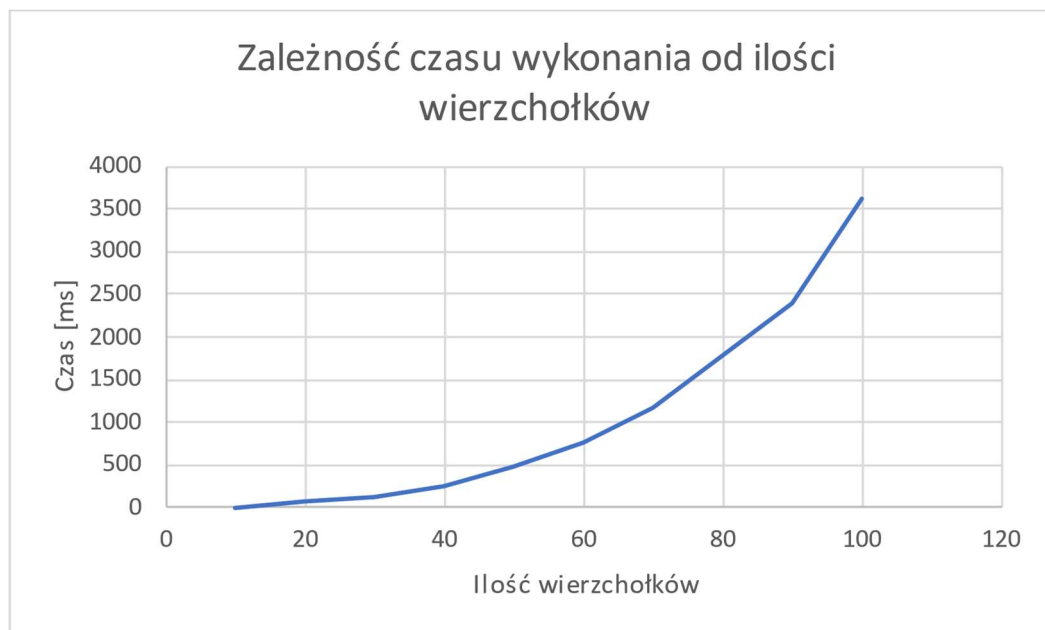
4.1. Pomiary czasu

Wyniki pomiarów czasu przedstawiają poniższe tabela i wykres:

| Ilość wierzchołków | Czas [ms] |
|--------------------|-----------|
| 10 | 5.70553 |
| 20 | 75.325 |

| | |
|-----|---------|
| 30 | 127.124 |
| 40 | 255.252 |
| 50 | 492.029 |
| 60 | 772.694 |
| 70 | 1162.15 |
| 80 | 1778.94 |
| 90 | 2407.48 |
| 100 | 3633.75 |

Tabela 2 Wyniki pomiarów



Wykres 1 Zależność czasu wykonania od ilości wierzchołków

4.2. Pomiarы dokładności

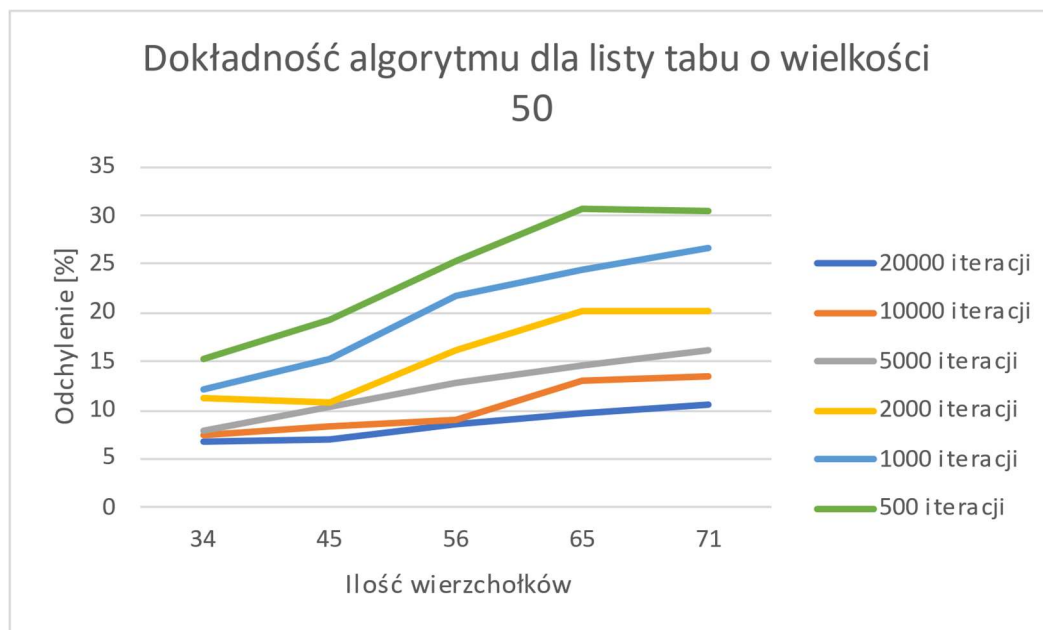
| Ilość wierzchołków | Długość listy tabu | Ilość iteracji | Średnie odchylenie od prawidłowej wartości [%] |
|--------------------|--------------------|----------------|--|
| 34.00 | 50.00 | 500.00 | 15.3655 |
| 34.00 | 50.00 | 1000.00 | 12.1462 |
| 34.00 | 50.00 | 2000.00 | 11.2053 |
| 34.00 | 50.00 | 5000.00 | 7.93157 |
| 34.00 | 50.00 | 10000.00 | 7.4028 |
| 34.00 | 50.00 | 20000.00 | 6.80404 |
| 34.00 | 100.00 | 500.00 | 17.1617 |
| 34.00 | 100.00 | 1000.00 | 18.0171 |
| 34.00 | 100.00 | 2000.00 | 14.0746 |
| 34.00 | 100.00 | 5000.00 | 12.4728 |

| Ilość wierzchołków | Długość listy tabu | Ilość iteracji | Średnie odchylenie od prawidłowej wartości [%] |
|--------------------|--------------------|----------------|--|
| 34.00 | 100.00 | 10000.00 | 9.42457 |
| 34.00 | 100.00 | 20000.00 | 9.29238 |
| 34.00 | 150.00 | 500.00 | 19.1213 |
| 34.00 | 150.00 | 1000.00 | 20.7854 |
| 34.00 | 150.00 | 2000.00 | 18.8258 |
| 34.00 | 150.00 | 5000.00 | 15.2177 |
| 34.00 | 150.00 | 10000.00 | 15.2955 |
| 34.00 | 150.00 | 20000.00 | 13.2737 |
| 34.00 | 200.00 | 500.00 | 25.2877 |
| 34.00 | 200.00 | 1000.00 | 25.6765 |
| 34.00 | 200.00 | 2000.00 | 20.8476 |
| 34.00 | 200.00 | 5000.00 | 18.6003 |
| 34.00 | 200.00 | 10000.00 | 16.2442 |
| 34.00 | 200.00 | 20000.00 | 14.4635 |
| 34.00 | 300.00 | 500.00 | 35.1711 |
| 34.00 | 300.00 | 1000.00 | 27.6594 |
| 34.00 | 300.00 | 2000.00 | 27.1851 |
| 34.00 | 300.00 | 5000.00 | 24.7045 |
| 34.00 | 300.00 | 10000.00 | 22.8538 |
| 34.00 | 300.00 | 20000.00 | 20.07 |
| 45.00 | 50.00 | 500.00 | 19.2374 |
| 45.00 | 50.00 | 1000.00 | 15.2945 |
| 45.00 | 50.00 | 2000.00 | 10.8617 |
| 45.00 | 50.00 | 5000.00 | 10.3038 |
| 45.00 | 50.00 | 10000.00 | 8.2827 |
| 45.00 | 50.00 | 20000.00 | 6.98078 |
| 45.00 | 100.00 | 500.00 | 19.969 |
| 45.00 | 100.00 | 1000.00 | 18.6671 |
| 45.00 | 100.00 | 2000.00 | 14.8419 |
| 45.00 | 100.00 | 5000.00 | 13.3292 |
| 45.00 | 100.00 | 10000.00 | 12.5976 |
| 45.00 | 100.00 | 20000.00 | 11.5561 |
| 45.00 | 150.00 | 500.00 | 26.119 |
| 45.00 | 150.00 | 1000.00 | 21.1903 |
| 45.00 | 150.00 | 2000.00 | 18.8159 |
| 45.00 | 150.00 | 5000.00 | 15.8401 |
| 45.00 | 150.00 | 10000.00 | 13.8252 |
| 45.00 | 150.00 | 20000.00 | 13.9306 |
| 45.00 | 200.00 | 500.00 | 25.6355 |

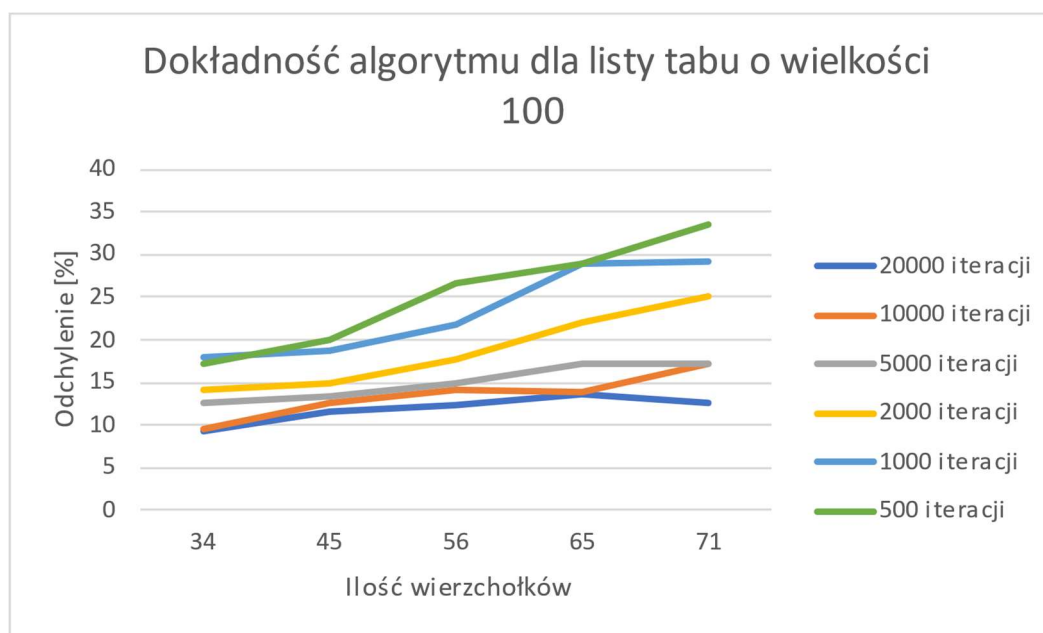
| Ilość wierzchołków | Długość listy tabu | Ilość iteracji | Średnie odchylenie od prawidłowej wartości [%] |
|--------------------|--------------------|----------------|--|
| 45.00 | 200.00 | 1000.00 | 23.2362 |
| 45.00 | 200.00 | 2000.00 | 19.9814 |
| 45.00 | 200.00 | 5000.00 | 16.8196 |
| 45.00 | 200.00 | 10000.00 | 15.9454 |
| 45.00 | 200.00 | 20000.00 | 15.6913 |
| 45.00 | 300.00 | 500.00 | 31.1097 |
| 45.00 | 300.00 | 1000.00 | 29.8946 |
| 45.00 | 300.00 | 2000.00 | 23.4036 |
| 45.00 | 300.00 | 5000.00 | 22.2381 |
| 45.00 | 300.00 | 10000.00 | 21.1903 |
| 45.00 | 300.00 | 20000.00 | 17.6255 |
| 56.00 | 50.00 | 500.00 | 25.3483 |
| 56.00 | 50.00 | 1000.00 | 21.847 |
| 56.00 | 50.00 | 2000.00 | 16.2189 |
| 56.00 | 50.00 | 5000.00 | 12.8794 |
| 56.00 | 50.00 | 10000.00 | 9.04229 |
| 56.00 | 50.00 | 20000.00 | 8.62562 |
| 56.00 | 100.00 | 500.00 | 26.592 |
| 56.00 | 100.00 | 1000.00 | 21.6791 |
| 56.00 | 100.00 | 2000.00 | 17.7861 |
| 56.00 | 100.00 | 5000.00 | 14.7886 |
| 56.00 | 100.00 | 10000.00 | 14.0299 |
| 56.00 | 100.00 | 20000.00 | 12.3072 |
| 56.00 | 150.00 | 500.00 | 33.6754 |
| 56.00 | 150.00 | 1000.00 | 26.2313 |
| 56.00 | 150.00 | 2000.00 | 23.4142 |
| 56.00 | 150.00 | 5000.00 | 17.699 |
| 56.00 | 150.00 | 10000.00 | 14.9129 |
| 56.00 | 150.00 | 20000.00 | 15.2177 |
| 56.00 | 200.00 | 500.00 | 30.1182 |
| 56.00 | 200.00 | 1000.00 | 31.2997 |
| 56.00 | 200.00 | 2000.00 | 24.546 |
| 56.00 | 200.00 | 5000.00 | 21.5299 |
| 56.00 | 200.00 | 10000.00 | 20.9142 |
| 56.00 | 200.00 | 20000.00 | 16.8781 |
| 56.00 | 300.00 | 500.00 | 37.5249 |
| 56.00 | 300.00 | 1000.00 | 31.1629 |
| 56.00 | 300.00 | 2000.00 | 27.3383 |
| 56.00 | 300.00 | 5000.00 | 24.8943 |

| Ilość wierzchołków | Długość listy tabu | Ilość iteracji | Średnie odchylenie od prawidłowej wartości [%] |
|--------------------|--------------------|----------------|--|
| 56.00 | 300.00 | 10000.00 | 24.2289 |
| 56.00 | 300.00 | 20000.00 | 22.2015 |
| 65.00 | 50.00 | 500.00 | 30.658 |
| 65.00 | 50.00 | 1000.00 | 24.5024 |
| 65.00 | 50.00 | 2000.00 | 20.1577 |
| 65.00 | 50.00 | 5000.00 | 14.5024 |
| 65.00 | 50.00 | 10000.00 | 12.9473 |
| 65.00 | 50.00 | 20000.00 | 9.59761 |
| 65.00 | 100.00 | 500.00 | 28.8635 |
| 65.00 | 100.00 | 1000.00 | 28.9179 |
| 65.00 | 100.00 | 2000.00 | 22.1588 |
| 65.00 | 100.00 | 5000.00 | 17.1941 |
| 65.00 | 100.00 | 10000.00 | 13.7466 |
| 65.00 | 100.00 | 20000.00 | 13.5726 |
| 65.00 | 150.00 | 500.00 | 35.28 |
| 65.00 | 150.00 | 1000.00 | 29.8749 |
| 65.00 | 150.00 | 2000.00 | 25.5737 |
| 65.00 | 150.00 | 5000.00 | 22.5884 |
| 65.00 | 150.00 | 10000.00 | 18.3089 |
| 65.00 | 150.00 | 20000.00 | 16.8407 |
| 65.00 | 200.00 | 500.00 | 34.4481 |
| 65.00 | 200.00 | 1000.00 | 32.4089 |
| 65.00 | 200.00 | 2000.00 | 27.2811 |
| 65.00 | 200.00 | 5000.00 | 23.3551 |
| 65.00 | 200.00 | 10000.00 | 21.3105 |
| 65.00 | 200.00 | 20000.00 | 19.4671 |
| 65.00 | 300.00 | 500.00 | 37.4497 |
| 65.00 | 300.00 | 1000.00 | 33.1376 |
| 65.00 | 300.00 | 2000.00 | 32.2349 |
| 65.00 | 300.00 | 5000.00 | 26.6993 |
| 65.00 | 300.00 | 10000.00 | 25.6335 |
| 65.00 | 300.00 | 20000.00 | 22.9962 |
| 71.00 | 50.00 | 500.00 | 30.441 |
| 71.00 | 50.00 | 1000.00 | 26.718 |
| 71.00 | 50.00 | 2000.00 | 20.159 |
| 71.00 | 50.00 | 5000.00 | 16.1641 |
| 71.00 | 50.00 | 10000.00 | 13.5128 |
| 71.00 | 50.00 | 20000.00 | 10.5692 |
| 71.00 | 100.00 | 500.00 | 33.6 |

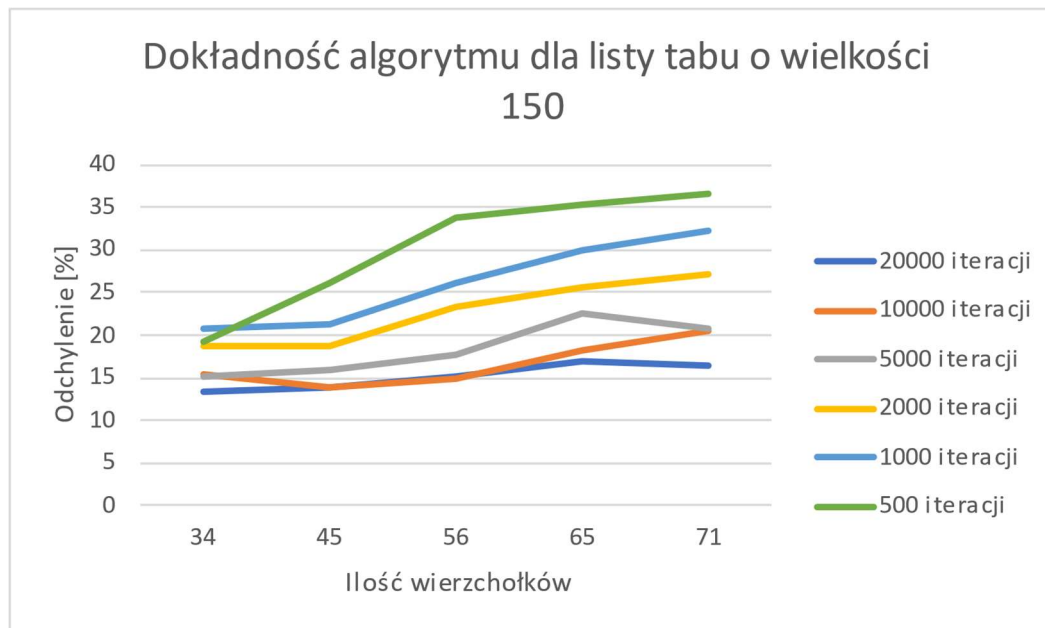
| Ilość wierzchołków | Długość listy tabu | Ilość iteracji | Średnie odchylenie od prawidłowej wartości [%] |
|--------------------|--------------------|----------------|--|
| 71.00 | 100.00 | 1000.00 | 29.2615 |
| 71.00 | 100.00 | 2000.00 | 25.041 |
| 71.00 | 100.00 | 5000.00 | 17.1128 |
| 71.00 | 100.00 | 10000.00 | 17.3128 |
| 71.00 | 100.00 | 20000.00 | 12.5949 |
| 71.00 | 150.00 | 500.00 | 36.5795 |
| 71.00 | 150.00 | 1000.00 | 32.2051 |
| 71.00 | 150.00 | 2000.00 | 27.0615 |
| 71.00 | 150.00 | 5000.00 | 20.841 |
| 71.00 | 150.00 | 10000.00 | 20.4974 |
| 71.00 | 150.00 | 20000.00 | 16.4564 |
| 71.00 | 200.00 | 500.00 | 36.8974 |
| 71.00 | 200.00 | 1000.00 | 32.7333 |
| 71.00 | 200.00 | 2000.00 | 29.8308 |
| 71.00 | 200.00 | 5000.00 | 23.5897 |
| 71.00 | 200.00 | 10000.00 | 20.2821 |
| 71.00 | 200.00 | 20000.00 | 19.4974 |
| 71.00 | 300.00 | 500.00 | 43.9333 |
| 71.00 | 300.00 | 1000.00 | 34.9436 |
| 71.00 | 300.00 | 2000.00 | 29.7282 |
| 71.00 | 300.00 | 5000.00 | 29.0667 |
| 71.00 | 300.00 | 10000.00 | 26.7128 |
| 71.00 | 300.00 | 20000.00 | 21.9385 |



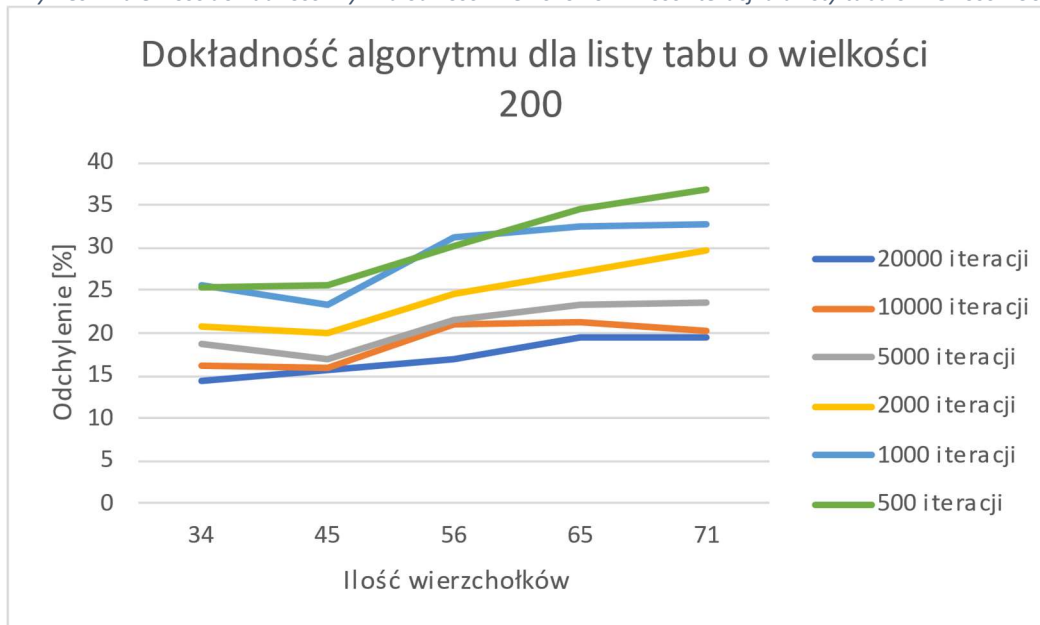
Wykres 2 Zależność dokładności wyniku od ilości wierzchołków i ilości iteracji dla listy tabu o wielkości 50



Wykres 3 Zależność dokładności wyniku od ilości wierzchołków i ilości iteracji dla listy tabu o wielkości 100



Wykres 4 Zależność dokładności wyniku od ilości wierzchołków i ilości iteracji dla listy tabu o wielkości 150



Wykres 5 Zależność dokładności wyniku od ilości wierzchołków i ilości iteracji dla listy tabu o wielkości 200

5. Wnioski

Algorytm tabu search posiada znacznie lepszą złożoność obliczeniową od algorytmów takich jak brute force lub algorytm Helda-Karpa. Dla 100 wierzchołków potrafił podać wynik po niecałych 4 sekundach, gdzie we wcześniej wspomnianych algorytmach niemożliwe było otrzymanie wyniku w rozsądnym czasie dla ilości wierzchołków oscylujących w okolicach 20. Ponadto trend wzrostu czasu wykonania algorytmu tabu search jest względnie korzystny ponieważ wynosi $O(n^2)$ w porównaniu do $O(n!)$ oraz $O(n^2 2^n)$ dla wcześniej wspomnianych algorytmów. Należy jednak pamiętać iż w celu osiągnięcia dosyć dokładnego wyniku czas ten znacząco się zwiększy ze względu na większą potrzebną liczbę iteracji oraz długość listy tabu. Pomimo tych czynników algorytm dostarcza takie wyniki w znacznie krótszym czasie niż wcześniej wspomniane algorytmy. Jednak w przeciwieństwie do nich algorytm tabu search nie dostarcza dokładnych wyników a jedynie ich przybliżenia, których dokładność jest zależna od

wielkości listy tabu oraz ilości iteracji. Z wykresów wynika, iż ilość iteracji prawie zawsze zwiększa dokładność algorytmu. Natomiast zwiększenie liczby tabu negatywnie wpływa na dokładność jeśli nie zostanie również zwiększona liczba iteracji. Optymalna relacja pomiędzy tymi parametrami zmienia się wraz ze wzrostem liczby wierzchołków grafu, ponieważ przy zwiększeniu ilości wierzchołków spada dokładność algorytmu.