I. Zbiory

1.Zasada **indukcji matematycznej** (sformułować).
Jest to metoda sprawdzania twierdzeń o liczbach naturalnych.
Jeżeli:
twierdzenie T jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej $\mathbf{n_0}$, oraz z prawdziwości twierdzenia T dla liczby naturalnej $\mathbf{n \geq n_0}$ wynika prawdziwość twierdzenia T dla liczby $\mathbf{n + 1}$, to twierdzenie T jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych $\mathbf{n \geq n}$

2. ZASADA **EKSTENSJONALNOŚCI**: Zbiory **A** oraz **B** są identyczne wtw mają one dokładnie te same elementy; symbolicznie: **A = B wtw** $\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

ZASADA **DYSTRYBUTYWNOŚCI**: Żaden zbior nie jest identyczny z żadnym ze swoich elementow; symbolicznie: $\neg(\exists y\ \exists x\ (\mathrm{Zbior}(x) \wedge y \in x \wedge x = y))$

zbior pusty to zbior nie mający żadnego elementu. Pojęcie to można ściśle zdefiniować następująco:
Zbiorem pustym nazywamy zbior: $\{x : x = x \wedge \neg(x = x)\}$.

3. (**inkluzja**) Zbior A zawiera się w zbiorze B wtw każdy element zbioru A jest też elementem zbioru B; symbolicznie:
$A \subseteq B$ **wtw** $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$

(**podzbior**) Zbior A jest podzbiorem zbioru B wtw $A \subseteq B$.

(**inkluzja właściwa**) $A \subset B$ wtw $A \subseteq B \wedge \neg(A = B)$

(**podzbior właściwy**) Zbior A jest podzbiorem właściwym zbioru B wtw $A \subset B$.

(**krzyżowanie** się zbiorow)

Zbior **A** krzyżuje się ze zbiorem **B** wtw
(i) $\exists x\ (x \in A \wedge x \in B)$,
(ii) $\exists y\ (y \in A \wedge \neg(y \in B))$, **oraz**
(iii) $\exists z\ (z \in B \wedge \neg(z \in A))$.

(**rozłączność** zbiorow) Zbiory A oraz B są rozłączne wtw $\neg\exists x\ (x \in A \wedge x \in B)$

4. Zbior **pusty jest podzbiorem każdego zbioru**. Dowod nie-wprost.
Zakładamy, że dla pewnego zbioru A, zbior pusty nie należy do A.
Zachodzi to wtw
1) $\neg\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$
2) $\exists x \neg(x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$
3) $\exists x\ (x \in \emptyset \rightarrow \neg(x \in A))$

Z tego wynika sprzeczność (implikacja fałszywa <1-0>).
Zbior pusty należy do zbioru A, dla każdego A.

5. **Zbior zbiorow** (tj. zbior, ktorego elementami są zbiory) nazywamy **rodziną zbiorow**.
Rodzinę wszystkich podzbiorow danego zbioru A nazywamy **zbiorem potęgowym** zbioru A i oznaczamy symbolem $\mathbf{2^A}$.

$2^A = \{x : x \subseteq A\}$

$A = \{1, 2, 3\}$

$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1,2,3\}\}$

6. **Sumą** zbiorow **A** i **B** nazywamy zbior tych elementow, ktore należą do zbioru **A** lub do zbioru **B**, matematycznie zapisujemy ją tak: $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$

Iloczynem/Częścią wspolną zbioru **A** i **B** nazywamy zbior tych elementow, ktore należą jednocześnie do zbioru **A** i do zbioru **B**, formalnie zapisujemy ją tak:
$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$
Iloczyn zbiorow nazywany jest także częścią wspolną zbiorow lub przekrojem zbiorow.

Rożnicą zbiorow **A** i **B** nazywamy zbior tych elementow, ktore należą do zbioru **A**, a ktore nie należą do zbioru **B**, możemy ją zapisać tak: .

$\mathbf{x \in A \setminus B \leftrightarrow x \in A \land x \notin B}$

Rożnica zbiorow **A** i **B** zapisywana jest też **A - B**

(**rożnica symetryczna** zbiorow) Rożnica symetryczna zbiorow **A** i **B** jest to zbior **A ÷ B** spełniający warunek:

$\mathbf{x \in A \div B \leftrightarrow (x \in A \land x \notin B) \lor (x \in B \land x \notin A)}$.

Dopełnieniem zbioru A z przestrzeni U nazywamy zbior tych elementow przestrzeni U, ktore nie należą do zbioru A. Dopełnienie zbioru A oznaczamy jako **A'** lub $\mathbf{A^c}$. Dopełnienie możemy zapisać tak:

$\mathbf{A' = U \setminus A}$

$\mathbf{A' = \{x: x \in U \land x \notin A\}}$

7. **Kres** (kraniec) **dolny** (rownież łac. **infimum**) oraz <u>kres</u> (kraniec) <u>gorny</u> (także łac. <u>supremum</u>) – w matematyce pojęcia oznaczające odpowiednio: **największe z ograniczeń dolnych** oraz <u>najmniejsze z ograniczeń gornych</u> danego zbioru, o ile takie istnieją.

Niepusty podzbior A zbioru liczb rzeczywistych nazywamy **ograniczonym z dołu**, jeśli istnieje taka liczba $\mathbf{m \in R}$, że dla każdej liczby $\mathbf{x \in A}$ spełniona jest nierowność: $\mathbf{m \le x}$

tzn. jeżeli istnieje liczba **m**, ktora jest **nie większa od każdej liczby zbioru** liczbowego **A**, to mowimy, że zbior A jest **ograniczony z dołu**.

Niepusty podzbior **A** zbioru liczb rzeczywistych nazywamy **ograniczonym z gory**, jeśli istnieje taka liczba $\mathbf{M \in R}$, że dla każdej liczby $\mathbf{x \in A}$ spełniona jest nierowność: $\mathbf{x \le M}$

tzn. jeżeli istnieje liczba **M**, ktora jest **nie mniejsza od każdej liczby zbioru** liczbowego **A**, to mowimy, że zbior **A** jest **ograniczony z gory**.

8. (**rownoliczność zbiorow**). Dwa zbiory A i B są **rownoliczne** wtw istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna **f**, która odwzorowuje zbiór A **na** zbiór B. O funkcji takiej mowimy, że ustala ona równoliczność zbiorow A i B. O zbiorach równolicznych mówimy natomiast, że są one równej mocy.

(**zbior przeliczalny**) Zbior **A** jest **przeliczalny** wtw zbior **A** jest **skończony** **lub** zbior **A** jest **rownoliczny** ze zbiorem liczb **naturalnych**.

9. Zbior **A** nazywamy **nieprzeliczalnym** jeśli **nie jest** on **przeliczalny**

Twierdzenie 1: Zbior **{0,1}** N wszystkich ciągow przyjmujących jedynie wartości 0, 1 jest nieprzeliczalny.

Dowod: Przypuśćmy, że odwrotnie, zbior ten jest przeliczalny. Ponieważ jest on nieskończony (Przyporządkowanie każdej liczbie naturalnej **n** ciągu, który zaczyna się na **n** jedynek, a potem już ma same zera jest injekcją z **N** w {0,1} N .), więc musiałaby istnieć bijekcja ε : N → {0,1} N. Skonstruujmy ciąg **γ** w następujący sposób:

$\gamma_n = 1 - \varepsilon(n)n$.

Zauważmy, że w zgodzie z tą definicją **γ** nie może być wartością funkcji **ε**. Rzeczywiście, **γ** rożni się od dowolnej wartości ε(n) ∈ {0,1} **N** na **n**-tym miejscu. W rezultacie ε nie jest na, więc nie jest także bijekcją. Otrzymaliśmy sprzeczność.

<u>II. Relacje, porządki, funkcje</u>

1. (**para uporządkowana**) zbiory dwuelementowe, w ktorych „kolejność występowania elementow jest istotna"

Parą uporządkowaną <x, y> nazywamy **zbior {{x}, {x, y}}**.

(**n**-tka uporządkowana; **n ≥ 2**)

(a) **<x1, x2> = {{x1}, {x1, x2}}**,

(b) **$\langle x1, x2, ..., xn+1\rangle = \langle\langle x1, x2, ..., xn\rangle, xn+1\rangle$**.

(**iloczyn kartezjański**; inaczej produkt kartezjański)

Iloczynem kartezjańskim zbiorow A i B nazywamy zbior:

$A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in B\}$.

(**relacja n-członowa; n ≥ 2**) Niech n ≥ 2. Relacją n-członową nazywamy dowolny podzbior zbioru n-tek uporządkowanych.

(**relacja n-członowa w zbiorze; n ≥ 2**).

Mowimy, że relacja n-członowa R jest n-członową relacją w zbiorze A wtw $R \subseteq An$.

(**dziedzina, przeciwdziedzina i pole relacji binarnej**)

Niech R będzie relacją binarną.

Dziedziną relacji R nazywamy zbior:

$D_R = \{x : \exists y\ (xRy)\}$. (poprzedniki)

Przeciwdziedziną relacji R nazywamy zbior:

$D^*_R = \{y: \exists x\ (xRy)\}$. (następniki)

Polem relacji R jest zbior:

$D_R \cup D^*_R$. (**suma zbiorow, wszystkie elementy**)

(**i-ta dziedzina relacji n-członowej; n > 2 oraz 1 ≤ i ≤ n**).

Niech R będzie relacją n-członową, gdzie n > 2. Pod pojęciem **i-tej dziedziny** (1 ≤ i ≤ n) relacji R rozumiemy zbior:

D_i

$R = \{y : \exists x1 ... \exists xi\text{-}1 \exists xi\text{+}1 ... \exists xn\ R(x1, ...,xi\text{-}1, y, xi\text{+}1, xn)\}$

2. Mowimy, że relacja binarna R jest:
   (i) **zwrotna** w zbiorze A wtw **$\forall x \in A\ (xRx)$**,
   (ii) **przeciwzwrotna** w zbiorze A wtw **$\forall x \in A\ \neg(xRx)$**,
   (iii) **niezwrotna** w zbiorze A wtw **$\neg\forall x \in A\ (xRx)$.**

Mowimy, że relacja binarna R jest:
   (i) **symetryczna** w zbiorze A wtw **$\forall x \in A\ \forall y \in A\ (xRy \rightarrow yRx)$**,
   (ii) **przeciwsymetryczna** w zbiorze A wtw **$\forall x \in A\ \forall y \in A\ (xRy \rightarrow \neg(yRx))$**,
   (iii) **antysymetryczna** w zbiorze A wtw **$\forall x \in A\ \forall y \in A\ (xRy \wedge x \neq y \rightarrow \neg(yRx))$**.

Mowimy, że relacja binarna R jest:
   (i) **przechodnia** w zbiorze A wtw
   $\forall x \in A\ \forall y \in A\ \forall z \in A\ (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$,
   (ii) **spojna** w zbiorze A wtw **$\forall x \in A\ \forall y \in A\ (xRy \vee yRx \vee x = y)$**.

3. Mowimy, że relacja binarna R jest relacją **równoważnościową** w zbiorze A wtw R jest w A **zwrotna, symetryczna i przechodnia**.

Niech A będzie niepustym zbiorem, zaś R będzie relacją binarną w A i zarazem rownoważnościową w A.
Klasą abstrakcji elementu $x \in A$ względem relacji R nazywamy zbior:

$[x]_R = \{y \in A : xRy\}$.

4. **Konwersem** (**relacja odwrotna**) relacji binarnej **R** nazywamy relację **Ř** określoną wzorem:

$x\check{R}\ y \leftrightarrow yR\ x$.

Niech R, S będą relacjami binarnymi**. Iloczynem względnym** relacji R i S jest relacja $R \circ S$ określona następująco:

$x(R \circ S)y \leftrightarrow \exists z\ (xRz \wedge zSy)$.

5. Niech R będzie relacją binarną w zbiorze A. **Relację** R nazywamy

porządkującą zbior A wtw R jest **zwrotna, przechodnia i antysymetryczna** w A. Mowimy wowczas, że R porządkuje zbior A, i parę uporządkowaną <A, R> nazywamy zbiorem uporządkowanym.

Relację binarną R w zbiorze A **nazywamy liniowo porządkującą** zbior A wtw R **porządkuje** zbior A i ponadto R jest **spojna** w A. Mowimy wowczas, że relacja **R liniowo porządkuje zbior** A, i parę uporządkowaną <A, R> nazywamy **zbiorem liniowo uporządkowanym** lub **łańcuchem**.

Niech **< A, R >** będzie zbiorem uporządkowanym. Element $a_0 \in A$ nazywamy **maksymalnym**, jeżeli nie poprzedza on żadnego innego elementu w zbiorze **A**, czyli jeżeli nie istnieje $a \in A$ takie, że $a \neq a_0$ i a_0Ra.

Niech **< A, R >** będzie zbiorem uporządkowanym. Element $a_0 \in A$ nazywamy **największym**, jeżeli jest on poprzedzany przez wszystkie elementy zbioru **A**, czyli jeżeli dla każdego $a \in A$ spełniony jest warunek aRa_0.

W zbiorze uporządkowanym **< A, R >** istnieje co najwyżej **jeden** element **największy**. Element **największy** jest elementem **maksymalnym**.

Niech **< A, R >** będzie zbiorem uporządkowanym. Element $a_0 \in A$ nazywamy **minimalnym**, jeżeli nie poprzedza go żadnen inny elementu w zbiorze **A**, czyli jeżeli nie istnieje $a \in A$ takie, że $a \neq a_0$ i aRa_0.

Niech **< A, R >** będzie zbiorem uporządkowanym. Element $a_0 \in A$ nazywamy **najmniejszym**, jeżeli poprzedza on wszystkie elementy zbioru **A**, czyli jeżeli dla każdego $a \in A$ spełniony jest warunek a_0Ra.

W zbiorze uporządkowanym **< A, R >** istnieje co najwyżej **jeden** element **najmniejszy**. Element **najmniejszy** jest elementem **minimalnym**.

Drzewo

Niech **< A, R >** będzie zbiorem uporządkowanym. **< A, R >** nazwiemy **drzewem**, jeśli w **< A, R >** istnieje element **najmniejszy** $a_0 \in A$, oraz każdy element $a \neq a_0$ ma dokładnie jeden bezpośredni poprzednik.

Element **najmniejszy** drzewa nazywamy **korzeniem**.

Jeśli **< A, R >** jest **drzewem** oraz **A** jest zbiorem **skończonym**, to mowimy, że **< A, R >** jest **drzewem skończonym**. Wówczas elementy **maksymalne** tego drzewa nazywamy **liśćmi**.

Niech **< A, R >** będzie drzewem. Jeśli **B** jest **uporządkowanym liniowo podzbiorem** zbioru **A** oraz **nie** istnieje **inny uporządkowany liniowo podzbior C** zbioru **A** taki, że $B \subseteq C$, to **B** nazywamy **gałęzią** drzewa **< A, R >**

Drzewo **< A, R >** nazywamy **drzewem binarnym**, jeśli każdy element $a \in A$ ma **co najwyżej dwa bezpośrednie następniki**.

6. Relację $R \subseteq A \times B$ nazywamy **funkcją jednoargumentową** wtw spełnione są następujące warunki:

(i) $\forall x \in D_R \; \exists y \in B \; (xRy)$,

(ii) $\forall x \in D_R \; \forall y \in B \; \forall z \in B \; (xRy \land xRz \rightarrow y = z)$.

funkcja rożnowartościowa to taka, ktora dla rożnych argumentow przyjmuje rożne wartości.

Definicja: Funkcja rożnowartościowa - **injekcja**

Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest rożnowartościowa jeżeli dla wszystkich x_1, x_2 prawdziwa jest implikacja $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \rightarrow f(x_2)$

Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy funkcją **"na"** (**surjekcją**), jeżeli dla każdego **y** istnieje **x** , taki, że $y = f(x)$

Każdy element zbioru Y ma swoj odpowiednik w zbiorze X

Bijekcją nazywamy funkcję, ktora jest **jednocześnie** funkcją rożnowartościową (**injekcją**) i funkcją "na" (**surjekcją**).

7. **Funkcja odwrotna** – funkcja przyporządkowująca wartościom jakiejś funkcji jej odpowiednie argumenty, czyli
działająca odwrotnie do niej.
Funkcję **f: X → Y** (por. uwaga) nazywamy odwracalną, gdy istnieje funkcja **g: X → Y** taka, że
g(f (x)) = x dla każdego **x** ∈ X
f(g (y)) = y dla każdego **y** ∈ Y

Złożenie (**superpozycja**) **funkcji** – funkcja zwracająca wartość pewnej funkcji w punkcie zadanym za pomocą innej.
f* g(x) = f (g(x))

8.
9.Twierdzenie o gęstym uporządkowaniu zbioru liczb wymiernych – dowod – zbior jest uporządkowany gęsto wtw dla
dowolnych a,b, a ≠ b istnieje c takie, że a<=c oraz a ≠ c i c ≠ b. Liczba a+b/2 jest liczbą c
twierdzenie o niewymierności liczby pierwiastek z 2 – nie jest wymierna – dowod nie-wprost!
Zał. Pierw.z 2 jest liczbą wymierną. Wowczas dla pewnych liczb n,m nal Z, m ≠ 0 mamy:
pier z 2=n/m / do kwadratu
2 = n^2/m^2
2m^2=n^2 – n jest liczbą parzystą = 2k
2m^2 = 4k^2
m^2 = 2k^2 – m,n nie są względnie pierwsze – SDPRZECZNOŚĆ

III

1. **Ciąg arytmetyczny** – ciąg liczbowy, w ktorym każdy wyraz można otrzymać dodając wyraz bezpośrednio go poprzedzający oraz ustaloną liczbę, zwaną **rożnicą ciągu**. Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy ciągiem arytmetycznym, jeśli dla pewnej liczby **r** (nazywanej rożnicą ciągu) zachodzi $a_{n+1} = a_n + r$

Ciąg geometryczny - ciąg liczbowy (skończony bądź nieskończony), ktorego kolejny wyraz jest iloczynem wyrazu
poprzedniego przez pewną stałą nazywaną **ilorazem**. $(a_n) = qa_{n-1}$

IV

1. **Granica ciągu** – Liczbę **g** nazywamy **granicą** ciągu a_n, jeśli do dodatniego, dowolnie małego **E**, istnieje taka liczba **N**, że wszystkie wartości a_n o wskaźniku **n>= N** spełniają nierowność: **|an – g|< E** zbieżność określa sytuacje kiedy ciąg dążą do pewnej wartości granicznej. Niech a_n będzie dowolnym ciągiem. Jeśli w każdym otoczeniu **ε g** znajdują się wszystkie wyrazy ciągu a_n to an jest **zbieżny do g**, a liczbę tę nazywamy **granicą**. ($\lim a_n=g$)

Dla niektorych rozbieżnych ciągow nieskończonych wprowadza się pojęcie **granicy niewłaściwej**. Są to te ciągi, ktorych
wyrazy rosną lub maleją nieograniczenie; można powiedzieć, że dążą one do punktu w nieskończoności.

2. Twierdzenia o: **jednoznaczności granicy** – Jeśli ciąg jest **zbieżny**, to ma dokładnie **jedną granicę**

O ograniczoności ciągu zbieżnego – Jeśli ciąg jest **zbieżny**, jest rownież **ograniczony** (WNIOSEK: **jeśli** jest
nieograniczony, **nie** jest **zbieżny**)

o działaniach na ciągach zbieżnych – jeśli a_n i b_n są **zbieżne**, to **ciągi** a_n+b_n, a_n-b_n, a_n*b_n są **zbieżne** oraz
$\lim(a_n+b_n)= \lim a_n + \lim b_n$, (tak samo z rożnicą i iloczynem)

o trzech ciągach – jeżeli ciągi a_n i b_n są zbieżne do tej samej granicy **g** oraz począwszy od pewnego wskaźnika **m**,
zachodzi $a_n<c_n<b_n$ dla **n>m** to ciąg c_n jest rownież zbieżny do **g**

o ciągu zbieżnym do 0 i nieograniczonym – jeśli ciąg an **jest zbieżny do 0** oraz ciąg b_n jest **nieograniczony** to ciag

$c_n=a_n*b_n$ jest **zbieżny do 0**

V

1. **Granica funkcji w punkcie** – Niech f będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu (**x-a, x+a**) punktu **x**, gdzie
a<0. Jeśli dla dowolnego ciągu **xn** argumentow funkcji **f**, takiego że **x_n->x** przy n->nieskończoność oraz **x_n=/= x**,
dla każdego **n**, odpowiedni ciąg wartości **f(x_n)** jest zbieżny do granicy **g**, to mowimy, że **g** jest granicą funkcji **f** w
punkcie **x (lim f(x) = g)**

Ciągłość funkcji w punkcie – niech f będzie określoną w pewnym otoczeniu **x_0 (x_0-a, x_0+a), a > 0**.
Jeśli **f** ma w **x_0** granicę rowną **f(x)** (tj. **lim f(x) = f(x_0)**) to mowimy, że **f** jest ciągła w punkcie **x_0**.

2. Tw. **O działaniach na funkcjach ciągłych** -
np. **f * g(x) = f(x) * g(x)**
f + g(x) = f(x) + g(x)
f - g(x) = f(x) – g(x)
f / g(x) = f(x) / g(x) (o ile **g(x) ≠ 0** dla kazdego x)
Jeśli **f** i **g** są funkcjami **ciągłymi** na przedziale **(a,b)** to funkcje **f * g, f + g , f - g, f / g** też są ciągłe na przedziale **(a,b)**.

3. Wspołczynnik **a** w rownaniu **f(x) = ax + b** nazywamy wspołczynnikiem kierunkowym **tg alfa = f (x_0 + h) – f(x_0) / x_0 + h – x_0 = a**

iloraz rożnicowy – niech **f** będzie dowolną **funkcją rzeczywistą** określoną w pewnym otoczeniu **(x_0-a, x_0+a)** punktu **x_0**.
Niech ponadto **0 < |h| <a**. Wowczas liczbę **f (x_0 + h) – f(x0) / h** nazywamy **ilorazem roznicowym** funkcji **f** w punkcie **x_0** dla
przyrostu **h**.

pochodna funkcji w punkcie- niech **f** będzie **funkcją rzeczywistą** określoną w pewnym otoczeniu **(x_0 - a, x_0 + a)** punktu **x_0**
oraz niech **0 < |h| < a**. Jeśli istnieje **skończona granica** ilorazu rożnicowego to tę granicę nazywamy **pochodną funkcji** f w
punkcie **x_0**
f' (x) = lim f(x_0 + h) – f(x_0) / h

Rożniczkowalność - Jeśli funkcja **f** ma w punkcie **x_0** pochodną, to mowimy, że funkcja jest **rożniczkowalna w x_0**. Jeśli
funkcja określona w **(a, b)** ma pochodną w każdym punkcie przedziału **(a, b)** to mowimy, że **f** ma pochodną w **(a, b)** lub, że
f jest rożniczkowalne w **(a, b)**

4. Twierdzenie **o ciągłości funkcji rożniczkowalnej** - jeśli **funkcja** jest **rożniczkowalna w** pewnym **punkcie**, to **jest w**
tym **punkcie ciągła**

5. Twierdzenie **o działaniach arytmetycznych na pochodnych** - Jeżeli **funkcje f(x)** i **g(x)** są rożniczkowalne, to
a) **(a * f(x))' = a * f '(x)** , gdzie **a** jest liczbą rzeczywistą
b) **(f(x) + g(x))' = f '(x) + g '(x)** , (pochodna sumy dwoch funkcji rożniczkowalnych rowna jest sumie pochodnych tych funkcji),
c) **(f(x) - g(x))' = f '(x) – g '(x)** , (pochodna rożnicy dwoch funkcji rożniczkowalnych jest rowna rożnicy pochodnych tych funkcji),
d) **(f(x) * g(x))' = f '(x) * g(x) + f(x) * g '(x)** ,
e) **(f(x) / g(x))' = [f '(x) * g(x) - f(x) * g '(x)] / [g(x)]^2** , gdy g(x) ≠ 0.

6. Twierdzenie **o pochodnej funkcji złożonej** - Jeżeli funkcja **$u = g(x)$** ma w punkcie **x_0** pochodną **$g'(x_0)$** oraz
funkcja **$y = f(u)$** ma w odpowiednim punkcie **$u_0 = g(x_0)$** pochodną **$f'(u_0)$,** to funkcja złożona **$y = f(g(x))$** ma w punkcie **x_0** pochodną określoną wzorem **$y' = f'(g(x_0))g'(x_0)$.**

twierdzenie **o pochodnej funkcji odwrotnej** - Jeżeli funkcja **$y = f(x)$** jest ciągła i ściśle monotoniczna w przedziale **X** oraz
rożniczkowalna w pewnym punkcie **$x_0 \in X$**, to funkcja do niej odwrotna **$x = g(y)$** jest rożniczkowalna w punkcie **$y_0 = f(x_0)$**
i **$g'(y_0) = 1f'(x_0)$, gdy $f'(x_0) \neq 0$.**

7. **Pochodna drugiego rzędu** – Niech **f** będzie funkcją o wartościach rzeczywistych określoną w pewnym otoczeniu punktu **x_0** i różniczkowalną w tym punkcie. Jeśli **f'** ma pochodną w punkcie **x_0**, to tą pochodną nazywamy pochodną drugiego rzędu funkcji **f** w punkcie **x_0 ($f''(x)$)**

ekstremum lokalne – niech **f** będzie funkcją o wartościach rzeczywistych określoną w pewnym otoczeniu punktu **x_0 (x_0- a, x_0+a)**. Jeśli istnieje liczba … :o<...<=a taka że x należy(x_0-...,x_0+...)=>f(x)=<f(x_0), to mowimy, ż funkcja f ma w x0 maksimum lokalne . Jeżeli dla pewnej …:0<...=<a zachodzi x(x_0-..,x_0+...)=>f(x)>=f(x_0) to f ma w x_0 minimum lokalne

8. Twierdzenie o warunku koniecznym istnienia ekstremum lokalnego funkcji – jeśli funkja f o wartościach rzeczywistych określona w pewnym otoczeniu i rożniczkowalna w tym punkcie ma w x_0 ekstremum lokalnem to f'(x_0)=0

9. Twierdzenie **o warunku dostatecznym istnienia ekstremum lokalnego funkcji**- niech **f** będzie funkcją o wartościach rzeczywistych określoną w pewnym otoczeniu punktu **x_0**, rożniczkowalną w **x_0.** Niech ponadto **f** będzie rożniczkowalne w **x_0** i niech **f(x_0)=0**

1) Jeśli **$f''(x) < 0$**, to funkcja **f** ma w **x_0** max lokalne
2) jeśli **$f''(x) > 0$**, to f ma w **x_0** minimum lokalne