Sistemas Lineares

Escalonamento

Definição

Definição

O **escalonamento** de um sistema linear é um processo algébrico que consiste em **transformar a matriz dos coeficientes** em uma forma mais simples (chamada **forma escalonada**), facilitando a resolução do sistema.

Na forma escalonada:

- O primeiro elemento não nulo de cada linha (pivô) fica **à direita** do pivô da linha anterior.
- Linhas compostas apenas por zeros ficam na **parte inferior** da matriz.

Esse processo é a base do **método da eliminação de Gauss**.

Objetivo

Objetivo

Simplificar sistemas lineares para que sejam resolvidos por **substituição regressiva**.

Detectar se o sistema é:

- **possível e determinado** (uma solução),
- **possível e indeterminado** (infinitas soluções),
- ou **impossível** (sem solução).

Operações Elementares Permitidas

Operações elementares permitidas

No escalonamento, aplicamos **operações elementares em linhas** (que não alteram as soluções do sistema):

1. Trocar duas linhas de posição.
2. Multiplicar todos os elementos de uma linha por um número diferente de zero.
3. Somar a uma linha o múltiplo de outra.

Exemplo Prático

Exemplo prático

Sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

Passo 1: Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Passo 2: Zerar abaixo do pivô (primeira coluna)

- $L2 \leftarrow L2 - 2L1$
- $L3 \leftarrow L3 - 3L1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & -16 \end{array}\right]$$

Exemplo Prático

Passo 3: Zerar abaixo do pivô (segunda coluna)

- $L3 \leftarrow L3 - \frac{2}{3}L2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -10 \end{array}\right]$$

Agora temos uma **matriz escalonada.**

Passo 4: Substituição regressiva

- Da última linha: $-\frac{10}{3}z = -10 \implies z = 3$
- Segunda linha: $-3y - z = -9 \implies -3y - 3 = -9 \implies y = 2$
- Primeira linha: $x + y + z = 6 \implies x + 2 + 3 = 6 \implies x = 1$

Solução: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

Vantagens do Escalonamento

Vantagens do Escalonamento

Método sistemático, aplicável a sistemas grandes.

Permite verificar a existência e o tipo de solução.

Base para algoritmos computacionais de álgebra linear.

Resumo Esquemático

Resumo esquemático

Definição: processo de simplificação da matriz por operações elementares.

Objetivo: resolver sistemas por substituição regressiva.

Etapas:

1. Montar a matriz aumentada.
2. Usar pivôs para zerar elementos abaixo.
3. Resolver o sistema a partir da última linha.