Progressão Aritmética (PA)

Interpolação

Definição de Interpolação

Definição de Interpolação

Interpolação é o processo de **aproximar** uma função ou construir uma nova função **que passa por pontos dados**. Em termos simples, a interpolação é usada para **estimativas dentro de um intervalo** já conhecido, ou seja, dada uma série de pontos, buscamos uma função que **interpole** entre esses pontos.

- Em **matemática**, a interpolação é usada para **determinar** uma função que passa por **pontos conhecidos**, muitas vezes utilizada para estimar valores que estão entre pontos dados.
- A **interpolação polinomial** é uma das formas mais comuns de interpolação, onde se encontra um polinômio de grau $n-1$ que passa por n pontos.

Tipos de Interpolação

Tipos de Interpolação

Interpolação Lagrange:

A interpolação **Lagrange** usa uma fórmula específica para encontrar um polinômio que passe por todos os pontos conhecidos. A fórmula é baseada nas funções **Lagrange**, que são os **polinômios de base** para a interpolação.

Interpolação Newton:

A interpolação **Newton** usa uma abordagem sequencial para calcular o polinômio interpolador. É mais eficiente para adicionar pontos à medida que são conhecidos, comparado ao método de Lagrange.

Interpolação Spline:

A interpolação **Spline** usa funções polinomiais por intervalos e é usada para criar uma curva suave que conecta os pontos, sem grandes oscilações.

Interpolação Lagrange

Interpolação Lagrange

A **Interpolação Lagrange** encontra um polinômio de grau $n-1$ que passa por n pontos dados. Para n pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, o polinômio interpolador $P(x)$ é dado por:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot L_i(x)$$

onde $L_i(x)$ são as funções de Lagrange, calculadas como:

$$L_i(x) = \prod_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Essa fórmula envolve o **produto** de termos que dependem dos pontos (x_j, y_j), de modo a garantir que o polinômio interpolador passe pelos pontos dados.

Exemplos de Interpolação Lagrange

Exemplos de Interpolação Lagrange

Exemplo 1:

Dado os pontos $(1, 2)$, $(2, 3)$ e $(3, 5)$, queremos encontrar o polinômio que passa por esses pontos.

A interpolação Lagrange nos dá o polinômio $P(x)$:

$$P(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x)$$

Calculando as funções de Lagrange:

1. $L_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2}$
2. $L_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)$
3. $L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$

Agora, montamos o polinômio final:

$$P(x) = 2 \cdot L_1(x) + 3 \cdot L_2(x) + 5 \cdot L_3(x)$$

Exemplo 2:

Dado os pontos $(0, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 5)$, podemos usar a mesma abordagem para calcular o polinômio interpolador. A interpolação de Lagrange pode ser calculada utilizando a fórmula explicada anteriormente para cada $L_i(x)$.

Interpolação Newton

Interpolação Newton

A **Interpolação Newton** utiliza um polinômio da forma:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + a_{n-1}(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

Onde os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ são calculados com base em **divisões divididas**.

A **divisão dividida** é uma técnica para calcular os coeficientes de forma eficiente.

Interpolação Spline

Interpolação Spline

A **Interpolação Spline** é utilizada para criar uma curva suave que passa por todos os pontos, mas sem oscilações indesejadas. A spline mais comum é a **spline cúbica**, que utiliza polinômios cúbicos por intervalos.

A principal vantagem das splines sobre os polinômios de interpolação simples é que elas evitam o problema da **oscilação** (ou "efeito de Runge"), que pode ocorrer quando o grau do polinômio é muito alto.

Aplicações da Interpolação

Aplicações da Interpolação

Ciências: Estimativa de valores desconhecidos a partir de dados experimentais.

Engenharia: Criação de curvas suaves para o desenho de componentes ou trajetórias.

Economia: Estimativas de séries temporais.

Computação Gráfica: Criação de superfícies suaves entre pontos conhecidos.

Resumo Esquemático

Resumo esquemático

Tipo de Interpolação	Método	Fórmula	Aplicação
Lagrange	Polinômio interpolador baseado em funções de Lagrange	$P(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot L_i(x)$	Interpolação direta entre pontos conhecidos
Newton	Polinômio interpolador baseado em divisões divididas	$P(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + \ldots$	Mais eficiente quando adiciona novos pontos
Spline	Polinômio por intervalos (geralmente cúbico)	Varia conforme o intervalo	Criar curvas suaves