# Sistemas Lineares

Teorema de Rouché-Capelli

# Definição do Teorema de Rouché-Capelli

## Definição do Teorema de Rouché-Capelli

O **Teorema de Rouché-Capelli** fornece uma condição que determina quando um sistema linear tem **solução única**, **infinitas soluções** ou **nenhuma solução**.

### Enunciado:

Dado um sistema linear de equações $A \cdot X = B$, onde $A$ é a matriz dos coeficientes e $B$ é o vetor de termos constantes:

- O sistema tem **solução única** se, e somente se, o **posto** da matriz dos coeficientes $A$ for igual ao **posto** da matriz aumentada $[A|B]$ e este posto for **igual ao número de variáveis**.
- O sistema tem **infinitas soluções** se o **posto** de $A$ for igual ao **posto** da matriz aumentada $[A|B]$, mas o **posto** for menor do que o número de variáveis.
- O sistema tem **nenhuma solução** se o **posto** da matriz $A$ for diferente do **posto** da matriz aumentada $[A|B]$.

# Definição de Posto de uma Matriz

## Definição de Posto de uma Matriz

O **posto** de uma matriz é o número máximo de linhas ou colunas linearmente independentes da matriz. Esse conceito é fundamental para aplicar o Teorema de Rouché-Capelli, pois ele está relacionado à **rank** ou **classificação** das matrizes.

# Condições para as Soluções

## Condições para as soluções

### Solução única

O sistema terá uma solução única **se o posto de $A$ for igual ao número de variáveis $n$**, e também se o posto de $A$ for igual ao posto da matriz aumentada $[A|B]$.

Isso significa que o sistema é **consistente** e **tem tantas equações quanto variáveis**.

### Infinitas soluções

Se o posto de $A$ for **igual ao posto de $[A|B]$**, mas menor que o número de variáveis $n$, o sistema tem **infinitas soluções**. Isso ocorre quando há **graus de liberdade** (quando as variáveis podem assumir múltiplos valores).

### Nenhuma solução

Se o **posto de $A$** for diferente do **posto de $[A|B]$**, o sistema não tem solução. Esse caso ocorre quando as equações do sistema são contraditórias.

Exemplo Prático

## Exemplo prático

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + 2z = 12 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes $A$ é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz aumentada $[A|B]$ é:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

# Exemplo Prático

**Passo 1: Calcular o posto de $A$**

Aplicamos escalonamento para $A$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Após o escalonamento, obtemos a matriz equivalente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

O posto de $A$ é $2$ (duas linhas linearmente independentes).

**Passo 2: Calcular o posto de $[A|B]$**

A matriz aumentada $[A|B]$ após o escalonamento é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

O posto de $[A|B]$ é $2$ (também duas linhas linearmente independentes).

**Passo 3: Verificar a solução**

Como o posto de $A$ é igual ao posto de $[A|B]$ e o posto é menor que o número de variáveis (3), o sistema tem **infinitas soluções**.

# Propriedades Importantes

## Propriedades importantes

O Teorema de Rouché-Capelli nos permite classificar sistemas lineares sem precisar resolvê-los completamente.

Se o **posto da matriz dos coeficientes** for menor que o número de variáveis, sempre haverá **infinitas soluções** ou **nenhuma solução**.

A técnica de escalonamento (ou **eliminação de Gauss**) é fundamental para determinar os postos das matrizes e aplicar o teorema.

# Resumo Esquemático

## Resumo esquemático

| Condição | Posto de $A$ | Posto de $[A|B]$ | Soluções |
|---|---|---|---|
| **Solução única** | $= n$ | $= n$ | Única |
| **Infinitas soluções** | $< n$ | $= \text{posto de } A$ | Infinitas |
| **Nenhuma solução** | $\neq$ | $\neq$ | Nenhuma |