

Sistemas Lineares

Sistema homogêneo

Definição

Definição

Um **sistema linear homogêneo** é aquele em que **todos os termos independentes (constantes)** são iguais a zero.

Em notação matricial, podemos escrever:

$$A \cdot X = 0$$

onde:

- A é a matriz dos coeficientes,
- X é o vetor incógnita,
- 0 é o vetor nulo.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

Soluções Possíveis

Soluções possíveis

Um sistema homogêneo sempre tem pelo menos uma solução, chamada **solução trivial**, que é:

$$X = (0, 0, \dots, 0)$$

Além disso, pode ter **infinitas soluções não triviais**, dependendo da relação entre o número de equações e o número de variáveis.

Condições segundo o Teorema de Rouché-Capelli:

- Se o posto da matriz A for igual ao número de variáveis, então a única solução é a trivial.
- Se o posto de A for menor que o número de variáveis, então o sistema terá **infinitas soluções não triviais**.

Exemplos Práticos

Exemplos práticos

Exemplo 1: Solução trivial

Sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

O **posto** de A é 1, mas o número de variáveis é 2.

--> O sistema possui **infinitas soluções**: $x = -y$.

Soluções não triviais: $(1, -1), (2, -2), (-3, 3), \dots$

Exemplos Práticos

Exemplo 2: Apenas solução trivial

Sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

O posto de A é 2, igual ao número de variáveis.

--> O sistema possui apenas a solução trivial: $(0, 0)$.

Propriedades Importantes

Propriedades importantes

Todo sistema homogêneo tem a **solução trivial**.

A existência de soluções **não triviais** depende da relação entre o **posto da matriz dos coeficientes** e o número de variáveis.

Se há **mais variáveis do que equações independentes**, surgem **graus de liberdade**, gerando infinitas soluções.

Resumo Esquemático

Resumo esquemático

Situação	Solução
Posto $A = n$ ($n = \text{n}^\circ$ de variáveis)	Apenas solução trivial $(0, 0, \dots, 0)$
Posto $A < n$	Infinitas soluções (triviais + não triviais)