Model Pertumbuhan Logistik

Langkah 1: Identifikasi Masalah Dunia Nyata

Memodelkan pertumbuhan populasi suatu komunitas dengan keterbatasan sumber daya.

Contoh:
Sebuah RT memiliki 20 orang untuk penduduk awal. Populasi bertambah karena kelahiran, tetapi juga terbatas oleh kapasitas lingkungan yang maksimal dapat menampung 100 orang.

Masalah:
Bagaimana populasi akan berkembang seiring berjalannya waktu hingga mencapai batas lingkungan?

Langkah 2: Formulasi Masalah ke dalam Matematika
Populasi awal P_0 = 20
Kapasitas ingkungan K = 100
Laju pertumbuhan intrinsic r = 0,2
Bagaimana perubahan populasi seiring berjalannya waktu $P(t)$?

Langkah 3: Membuat Asumsi

1. Tidak ada migrasi masuk atau keluar RT.
2. Laju kelahiran dan kematian mengikuti pola alami.
3. Kapasitas lingkungan K tetap dan tidak berubah.
4. Populasi tumbuh sesuai dengan model logistik.

Langkah 4: Formulasi Model Matematis

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Dimana:

$P(t)$ = Jumlah populasi pada waktu t

r = Laju pertumbuhan intrinsic

K = Kapasitas batas lingkungan

$1 - \frac{P}{K}$ = Faktor penghambat pertumbuhan

$\frac{dP}{dt}$ = Laju perubahan populasi terhadap waktu

Langkah 5: Penyelesaian Model

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

$$\int \frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{K}\right)} = \int r\,dt$$

Untuk mencari integral di sisi kiri, pecahannya disederhanakan:

$$\frac{1}{P\left(1-\frac{P}{K}\right)} = \frac{K}{P(K-P)}$$

dan pecahan kemudian diubah menjadi pecahan parsial:

$$\frac{K}{P(K-P)} = \frac{1}{P} + \frac{K}{K-P}$$

sehingga diperoleh

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}\right) dP = \int r\,dt$$

$$ln|P| - \ln|K-P| = rt + C$$

$$ln|K-\ P| - \ln|P| = -rt - C$$

$$\ln\left|\frac{K-P}{P}\right| = -rt - C$$

$$\left|\frac{K-P}{P}\right| = e^{-rt-C}$$

$$\left|\frac{K-P}{P}\right| = e^{-C}e^{-rt}$$

$$\frac{K-P}{P} = \pm\, e^{-C}e^{-rt}$$

Jika A = $\pm\, e^{-C}$

$$\frac{K-P}{P} = Ae^{-rt}$$

$$\frac{K}{P} - 1 = Ae^{-rt}$$

$$\frac{K}{P} = 1 + Ae^{-rt}$$

$$\frac{P}{K} = \frac{1}{1+Ae^{-rt}}$$

$$P = \frac{K}{1+Ae^{-rt}}$$

Maka solusi dari persamaan ini adalah:

$$P(t) = \frac{K}{1+Ae^{-rt}}$$

Untuk mencari A, asumsikan t = 0 dan P(0) = . Maka diperoleh

$$P_0 = \frac{K}{1 + Ae^0}$$

Mengingat bahwa $e^0 = 1$, maka diperoleh:

$$A = \frac{K - P_0}{P_0}$$

Jadi, solusi persamaannya adalah:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right) e^{-rt}}$$

Populasi awal (P_0): 20
Kapasitas lingkungan (K): 100
Laju pertumbuhan intrinsic (r): 0,2
Waktu: 0 hingga 50 hari

Substitusi parameter ke solusi:

$$P(t) = \frac{100}{1 + \left(\frac{100 - 20}{20}\right) e^{-0,2t}}$$