



Model Pertumbuhan Logistik dengan Metode Kuadrat Terkecil

Kelompok Terakhir

Anggota Kelompok

- **Arsandy Jati P. // 662023003**
- **Vincentius Pramudya A // 662023004**
- **Ceria Malika Putri Riawan //**
662023008

1. Identifikasi Masalah Dunia Nyata

Pertumbuhan penduduk yang tidak terkendali menyebabkan peningkatan jumlah penduduk miskin, yang berdampak pada ekonomi, sosial, dan lingkungan

Contoh:

Di Kabupaten Probolinggo, angka kemiskinan masih tinggi akibat keterbatasan lapangan kerja, akses pendidikan yang rendah, dan ketidakefektifan program bantuan sosial.

Masalahnya:

Memprediksi jumlah penduduk miskin di Kabupaten Probolinggo.

2. Formulasi Masalah ke dalam Matematika

- jumlah penduduk miskin sebagai parameter $N(t)$.
- jumlah penduduk miskin awal sebagai parameter N_0 .
- laju pertumbuhan intrinsik jumlah penduduk miskin sebagai parameter r .
- kapasitas tampung sebagai parameter K .

3. Membuat Asumsi

- Data yang di gunakan akurat
- Garis Kemiskinan di Kabupaten Probolinggo kurang lebih sebesar Rp 500.000 per kapita per bulan

4. Formulasi Model Matematis

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t)$$

$N(t)$ = jumlah penduduk miskin pada waktu t

r = laju pertumbuhan intrinsik jumlah penduduk miskin

K = kapasitas tampung

asumsikan $K = r / a$

5. Penyelesaian Model

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t)$$

$$\frac{dN}{dt} = N \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

$$\frac{dN}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = dt$$

Menggunakan pecahan parsial untuk memisahkan:

$$\frac{1}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{1 - \frac{N}{K}}$$

Mengkalikan kedua ruas dengan penyebut

$$N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

$$1 = A \left(1 - \frac{N}{K}\right) + BN$$

Untuk menentukan A dan B, pilih nilai

$$N = 0$$

Untuk mendapatkan A = 1, lalu pilih N = K untuk mendapatkan B = $\frac{1}{K}$. Jadi,

$$\frac{1}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = \frac{1}{N} + \frac{\frac{1}{K}}{1 - \frac{N}{K}}$$

Mengintegrasikan kedua ruas:

$$\int \left(\frac{1}{N} + \frac{\frac{1}{K}}{1 - \frac{N}{K}} \right) dN = \int dt$$

$$\ln|N| - \ln\left|1 - \frac{N}{K}\right| = rt + C$$

$$\ln\left|\frac{N}{1 - \frac{N}{K}}\right| = rt + C$$

$$\frac{N}{1 - \frac{N}{K}} = e^{rt+C}$$

5. Penyelesaian Model

Misalkan $e^C = C_1$, maka:

$$\frac{N}{1 - \frac{N}{K}} = C_1 e^{rt}$$

$$N = C_1 e^{rt} \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

$$N(1 + C_1 e^{rt}) = K C_1 e^{rt}$$

$$N = \frac{K C_1 e^{rt}}{1 + C_1 e^{rt}}$$

Gunakan kondisi awal $N(0) = N_0$ untuk menentukan C_1 :

$$N_0 = \frac{K C_1}{1 + C_1}$$

$$C_1 = \frac{N_0}{K - N_0}$$

Sehingga solusi akhirnya:

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

Estimasi Parameter

$$\begin{aligned}N(t) &= \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} \\N(t)(N_0 + (K - N_0)e^{-rt}) &= N_0 K \\N(t)(K - N_0)e^{-rt} &= N_0 K - N(t)N_0 \\\ln(N(t)(K - N_0)e^{-rt}) &= \ln(N_0(K - N(t))) \\\ln N(t) + \ln(K - N_0) + \ln(e^{-rt}) &= \ln N_0 + \ln(K - N(t)) \\\ln N(t) - \ln(K - N(t)) - rt &= \ln N_0 - \ln(K - N_0) \\\ln\left(\frac{N(t)}{K - N(t)}\right) &= rt + \ln\left(\frac{N_0}{K - N_0}\right)\end{aligned}$$

Selanjutnya, dimisalkan

$$\ln\left(\frac{N(t)}{K - N(t)}\right) = y \quad \text{dan} \quad \ln\left(\frac{N_0}{K - N_0}\right) = b$$

maka diperoleh

$$y = rt + b$$

Nilai r dan b ditentukan dengan metode kuadrat terkecil berikut:

$$\begin{aligned}r &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\b &= \bar{y} - r\bar{x}\end{aligned}$$

Hasil Perhitungan Parameter

Diperoleh hasil dalam Tabel 1, dengan $K = 280.000$.

Tabel 1. Hasil Perhitungan Parameter dengan Metode Kuadrat Terkecil

Tahun	Populasi Penduduk Miskin	$y_t = \ln\left(\frac{N(t)}{K - N(t)}\right)$	$x_t = t$
2010	276.700	4,429011418	0
2011	259.200	2,522646978	1
2012	248.500	2,0654553	2
2013	238.700	1,754345033	3
2014	231.900	1,573024067	4
2015	236.960	1,705761435	5
2016	240.470	1,805535464	6

Hasil Perhitungan Parameter

Tabel 2. Hasil Perhitungan Parameter dengan Metode Kuadrat Terkecil (Lanjutan)

Tahun	Populasi Penduduk Miskin	$y_i = \ln\left(\frac{N(t)}{K - N(t)}\right)$	$x_i = t$
2017	236.720	1,699187374	7
2018	217.060	1,237991921	8
2019	207.220	1,046339839	9
2020	218350	1,26462605	10
2021	223320	1,371184306	11
2022	203230	0,973524404	12
2023	205020	1,005886124	13
Jumlah		24,45451971	

Diperoleh

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = -0,14867$$

$$b = \bar{y} - r\bar{x} = 2,373971$$

$$N_0 = \frac{e^b K}{1 + e^b} = 256.149,836$$

6. Codingan

```
import numpy as np          # Perhitungan numeri
import matplotlib.pyplot as plt # membuat grafik

def logistik(N0, K, r, t): # Fungsi untuk menghitung pertumbuhan logistik
    return (N0 * K) / (N0 + (K - N0) * np.exp(-r * t))

# Parameter berdasarkan penelitian
N0 = 256149.836 # Populasi awal
K = 280000      # Kapasitas maksimum
r = -0.14867    # Laju pertumbuhan negatif (populasi menurun)

tahun = np.arange(0, 20, 1) # Simulasi untuk 20 tahun ke depan dan selisih 1 tahun
populasi = logistik(N0, K, r, tahun) # menghitung populasi tiap tahun

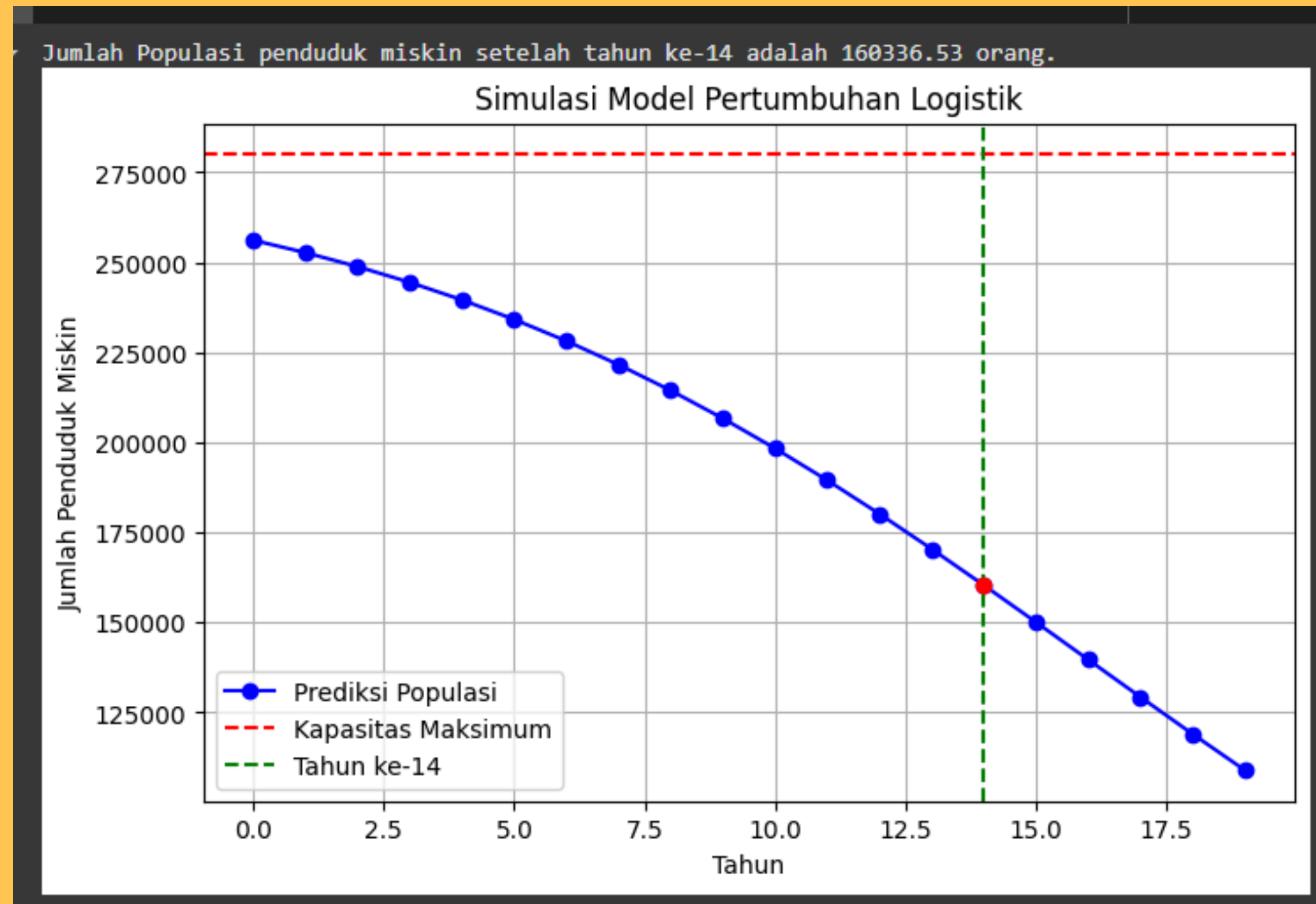
# menghitung Populasi penduduk miskin setelah tahun ke-14
tahun_14 = 14 # tahun ke-14
populasi_14 = logistik(N0, K, r, tahun_14) # populasi tahun ke -14

# Menampilkan hasil jumlah Populasi penduduk miskin setelah tahun ke-14
print(f"Jumlah Populasi penduduk miskin setelah tahun ke-{tahun_14} adalah {populasi_14:.2f} orang.") # di ambil 2 digit belakang koma sajaa
```

6. Codingan

```
# Plot hasil simulasi
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(tahun, populasi, marker='o', linestyle='-', color='blue', label='Prediksi Populasi') # marker o itu menampilkan titik data
plt.axhline(y=K, color='red', linestyle='--', label='Kapasitas Maksimum') # menambahkan garis horizontal di K
plt.axvline(x=tahun_14, color='green', linestyle='--', label=f"Tahun ke-{tahun_14}") # menambahkan garis vertikal di tahun ke 14
plt.scatter(tahun_14, populasi_14, color='red', zorder=5) # menambahkan titik untuk bulan ke-5 dan zorder untuk urutan tumpukan elemen
plt.xlabel('Tahun')
plt.ylabel('Jumlah Penduduk Miskin')
plt.title('Simulasi Model Pertumbuhan Logistik')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Grafik Codingan



7. Validasi Model

Tabel 2. Hasil Perhitungan Populasi dan Galat Taksiran

Populasi Sebenarnya	Tahun ke- (t)	Populasi Taksiran $N(t)$	Galat Taksiran
276.700	0	256.149,836	0,074268753
259.200	1	252.699,6198	0,025078627
248.500	2	248.811,0606	0,001251753
238.700	3	244.446,5569	0,02407439
231.900	4	239.570,5376	0,033076919
236.960	5	234.151,2184	0,0118534
240.470	6	228.162,6543	0,051180379

Tabel 2. Hasil Perhitungan Populasi dan Galat Taksiran (Lanjutan)

Populasi Sebenarnya	Tahun ke- (t)	Populasi Taksiran $N(t)$	Galat Taksiran
236.720	7	221.587,0235	0,063927748
217.060	8	214.417,0269	0,012176233
207.220	9	206.658,2341	0,002710964
218.350	10	198.331,1558	0,091682364
223.320	11	189.472,7902	0,151563719
203.230	12	180.137,3818	0,113627999
205.020	13	170.396,1672	0,168880269
Rata-rata			0,058954

8. Penggunaan Model

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

$$N(t) = \frac{256.149,836 \times 280.000}{256.149,836 + (280.000 - 256.149,836)e^{0,14867t}}$$

$$N(t) = \frac{71.721.954.080}{256.149,836 + (23.850,164)e^{0,14867t}}$$

8. Penggunaan Model

Tabel 3. Hasil Prediksi Jumlah Penduduk Miskin

Tahun	Prediksi Jumlah Penduduk Miskin
2024	160.335,958
2025	150.056,5309
2026	139.666,9406
2027	129.281,0177
2028	119.012,4321

9. Kelebihan Kekurangan

Kelebihan

- Topik yang Relevan
- Data yang Akurat
- Model yang Valid

Kekurangan

- Keterbatasan Model

The background features a light gray base with abstract geometric elements. On the left, there are overlapping blue and yellow curved shapes. On the right, there are several yellow and orange circles of varying sizes. At the bottom, there are more blue and yellow curved shapes and circles. A large, solid yellow rounded rectangle is centered on the page, serving as a background for the text.

Terimakasih