

ATD, Lógica y Deep Learning: un triángulo que apenas estamos explorando

Carlos Ernesto Ramírez Ovalle

Pontificia Universidad Javeriana – Cali

4 de diciembre de 2025

- El **deep learning** domina muchas aplicaciones, pero:
 - Es difícil de interpretar.
 - Cuesta incorporar conocimiento estructurado de manera explícita.
- El **Análisis Topológico de Datos (ATD)** ofrece:
 - Invariantes globales robustos al ruido (forma de los datos, agujeros, conectividad).
- La **lógica** ofrece:
 - Un lenguaje declarativo para conocimiento, reglas y garantías.
- **Pregunta central:**

¿Podemos diseñar modelos que aprendan como redes, razonen como sistemas lógicos y respeten estructuras topológicas?

Mapa de la charla

- 1 ATD y Deep Learning
- 2 Lógica y Deep Learning
- 3 ATD, Lógica y DL juntos
- 4 Perspectivas y cierre

- Objetivo del **ATD**: estudiar la **forma global** de los datos:
 - Componentes conexas, agujeros, cavidades (números de Betti).
- Herramientas clave:
 - Complejos simpliciales (Vietoris–Rips, Čech, etc.).
 - Homología persistente: códigos de barras y diagramas de persistencia.
- Propiedades:
 - Invariancia topológica.
 - Robustez frente a ruido y deformaciones continuas.



- Una red neuronal profunda compone capas no lineales:

$$f = f_L \circ f_{L-1} \circ \cdots \circ f_1.$$

- Desde un punto de vista geométrico/topológico:
 - Cada capa induce una **deformación (aprox.) continua** del espacio de datos.
 - Las *regiones de decisión* tienen estructura topológica rica:
 - Componentes conexas, túneles, cavidades.
- Problema actual:
 - Optimización centrada en una *loss* puntual (cross-entropy, MSE).
 - Poco control explícito sobre la **forma** de las regiones de decisión o de las representaciones internas.

- **Topological Deep Learning** combina ATD y DL para:
 - Analizar redes y sus representaciones internas.
 - Diseñar arquitecturas que operan sobre estructuras topológicas (complejos celulares, hipergrafos, cell complexes).
- Dos usos típicos:
 - ① **Análisis**: homología persistente del paisaje de pérdida, activaciones, regiones de decisión.
 - ② **Regularización**: términos de pérdida que controlan la topología de las representaciones.
- Además:
 - Aparecen arquitecturas donde los datos viven en complejos celulares, no sólo en grafos o mallas.

Ejemplo: ATD como lupa sobre redes

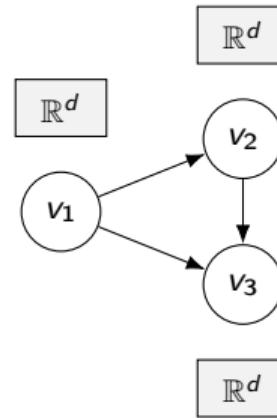
- Idea general:
 - Considerar las **activaciones** de una capa como un conjunto de puntos en un espacio de alta dimensión.
 - Construir un complejo (p.ej. Vietoris–Rips) sobre esos puntos.
 - Calcular homología persistente (H_0, H_1, H_2, \dots).
- Aplicaciones:
 - Estudiar cómo cambian los agujeros y componentes durante el entrenamiento.
 - Comparar arquitecturas en términos de complejidad topológica de sus regiones de decisión.
- Beneficio:
 - Lenguaje matemático para describir cambios **estructurales** en el aprendizaje, más allá de loss/accuracy.

Ejemplo: regularización topológica

- Objetivo:
 - Que las representaciones de cada clase formen una **única pieza** bien separada.
- Estrategia típica:
 - ① Extraer las features de una capa intermedia para cada ejemplo.
 - ② Construir un complejo simplicial (Vietoris–Rips, test de proximidad).
 - ③ Calcular homología (números de Betti, códigos de barras).
 - ④ Definir una *topological loss* que penalice:
 - demasiadas componentes conexas;
 - agujeros persistentes no deseados.
- Pérdida total:
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{tarea}} + \lambda \mathcal{L}_{\text{topo}}.$$
- Filosofía:
 - Similar a una *restricción de energía* pero sobre la **forma** del espacio de representaciones.

Arquitecturas topológicas: complejos y haces

- Más allá de grafos:
 - Redes sobre **cell complexes**, hipergrafos y complejos simpliciales.
- Sheaf Neural Networks:
 - Un haz asigna un espacio (vectorial, por ejemplo) a cada nodo/arista/celda.
 - Las restricciones de compatibilidad codifican cómo se “pegan” localmente los datos.
- Ventaja:
 - Modelos que respetan explícitamente la estructura topológica subyacente: heterofilia, oversmoothing, estructuras multilayer, etc.



- Bajo el paraguas de la **Neuro-Symbolic AI (NeSy)**:
 - Redes neuronales + razonamiento simbólico.
- Componentes típicos:
 - ① **Capa neuronal**: extrae representaciones o predicciones a partir de datos brutos.
 - ② **Capa simbólica**: representa hechos, reglas, programas.
 - ③ **Mecanismo de integración**: diferenciable o híbrido.
- Motivación:
 - Incorporar conocimiento previo y reglas lógicas.
 - Mejorar explicabilidad sin renunciar a la potencia del DL.

Tres patrones de integración lógica–DL

① Lógica como regularizador del loss

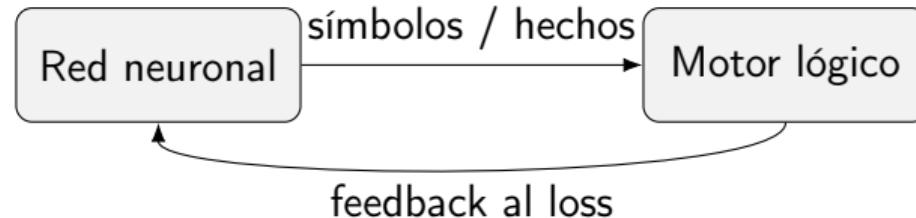
- Se añaden términos que penalizan la violación de fórmulas lógicas.
- Ejemplo: semantic loss, Logic Tensor Networks, DeepProbLog.

② Lógica como capa de razonamiento

- La red produce símbolos (etiquetas, hechos).
- Un motor lógico (SAT, ASP, Prolog, etc.) razona sobre ellos.

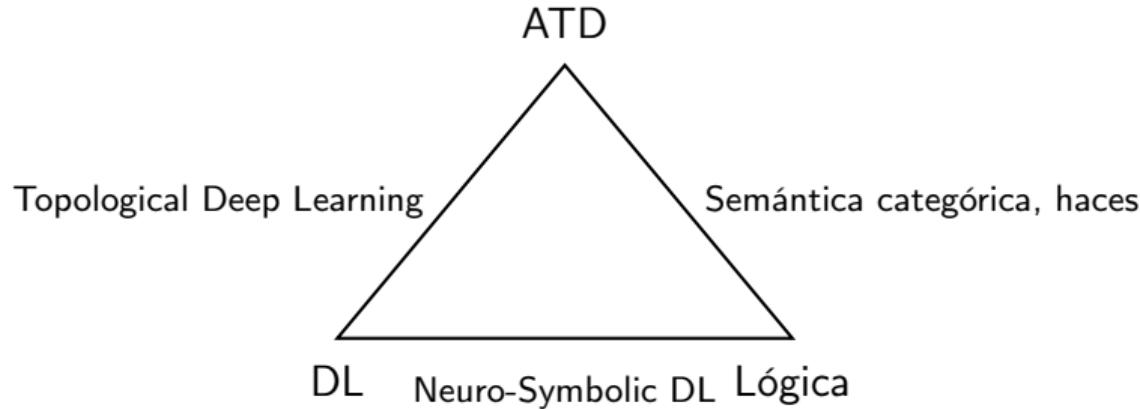
③ Lógica embebida en la arquitectura

- Redes que implementan directamente procesos lógicos (Neural Theorem Provers, modelos de inducción de programas).



- Topología y lógica tienen una larga interacción:
 - Semánticas topológicas para lógicas modales y espaciales.
 - Topos, marcos, espacios locales como modelos lógicos.
- **Haces (sheaves):**
 - En ATD/TDL: datos locales que se *pegan* globalmente; cohomología de haces.
 - En lógica: modelos que varían en contextos (tiempo, mundos posibles, sitios).
- Moraleja:
 - Haces, complejos y categorías proporcionan un **lenguaje común** para hablar de verdad local, consistencia global y forma de los datos.

El triángulo ATD–Lógica–DL



- Vértices:
 - ATD: forma global, invariantes topológicos.
 - Lógica: estructura declarativa, reglas, razonamiento.
 - DL: capacidad de ajuste en alta dimensión.
- Meta:

Modelos que aprendan representaciones con forma controlada (ATD), que satisfagan reglas (lógica) y que sigan siendo entrenables a gran escala (DL).

Integración 1: pérdidas topológico–lógicas

- Paso 1: expresar propiedades deseadas en lenguaje lógico.
 - “Cada clase forma un único cluster bien separado.”
 - “No deben aparecer ciclos de cierta longitud en las regiones de decisión.”
- Paso 2: traducir esas propiedades a invariantes topológicos.
 - Números de Betti clase a clase.
 - Presencia/ausencia de ciclos persistentes.
- Paso 3: incorporarlas en la función de pérdida:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{tarea}} + \lambda \mathcal{L}_{\text{topo}} + \mu \mathcal{L}_{\log}.$$

- Potencial:
 - Combinar conocimiento de dominio en forma de reglas con control geométrico/topológico sobre las representaciones internas.

Integración 2: haces neuro-simbólicos

- Idea: un haz sobre un grafo/complexo donde:
 - Cada *fibra* contiene variables lógicas y features neuronales.
 - Las restricciones de compatibilidad codifican:
 - coherencia lógica local;
 - coherencia topológica global.
- Entrenamiento:
 - Capas tipo Sheaf Neural Network actualizan secciones del haz.
 - La loss penaliza:
 - errores de tarea;
 - violaciones de compatibilidad del haz;
 - violaciones de reglas lógicas globales.
- Aplicaciones potenciales:
 - Sistemas con estructura de red + conocimiento experto: biología de sistemas, redes sociales, ciudades, ODS, medios, etc.

Posibles líneas de investigación

① Análisis topológico de modelos neuro-simbólicos

- Comparar topología de representaciones con y sin restricciones lógicas.

② Energía + topología + lógica

- Extender restricciones de energía a *presupuestos topológico-lógicos*: maximizar desempeño sujeto a energía, forma e implicaciones lógicas.

③ Arquitecturas sheaf–NeSy en dominios concretos

- Aplicar en datos reales: ciencias de la vida, redes sociales, datos clínicos, percepción de paz, ODS.

④ Métricas de complejidad basadas en topología

- Relacionar complejidad lógica de las reglas con complejidad topológica de las regiones de decisión aprendidas.

Mensaje para profesores

- Para matemáticos:
 - Preguntas bien formadas en topología algebraica, teoría de haces y categorías aplicadas al aprendizaje.
- Para computólogos:
 - Nuevas arquitecturas y funciones de pérdida con garantías estructurales.
- Para áreas aplicadas:
 - Modelos que respeten conocimiento experto y la geometría de los datos.
- Mensaje final:

*No se trata sólo de explicar redes existentes, sino de **diseñar** modelos donde la forma (ATD) y el significado (lógica) sean componentes de primera clase en el aprendizaje profundo.*

Referencias sugeridas (selección)

- Papamarkou, T. (2024). *Topological deep learning is the new frontier in AI*.
- Zia, A. et al. (2024). *Topological deep learning: a review of an emerging paradigm*.
- Ballester, R., Casacuberta, C., Escalera, S. (2024). *Topological Data Analysis for Neural Network Analysis: A Comprehensive Survey*.
- Zhang, B. et al. (2024). *Deep Neural Network Interpretability via Topological Data Analysis*.
- Hansen, J., Gebhart, T. (2020). *Sheaf Neural Networks*.
- Nawaz, U. et al. (2025). *A Review of Neuro-Symbolic AI Integrating Reasoning and Learning*.
- Liang, B. et al. (2025). *AI Reasoning in the Deep Learning Era*.