Fyzikální praktikum II **FJFI ČVUT v Praze**

Úloha 4 – Balmerova série

Jméno:	**Petr Červenka**	Kolega:	Michal Vranovský
Kruh:	**Středa**	Číslo skup.:	2
Měřeno:	**16.3.2022**	Zpracování:	14h

Klasifikace:

1. Pracovní úkoly

1. DÚ: V přípravě odvoďte vzorec (4) pro případ, kdy je splněna podmínka úhlu nejmenší deviace $\alpha_1 = \alpha_2$.
2. Metodou dělených svazků změřte lámavý úhel hranolu. Měření opakujte 5×.
3. Změřte index lomu hranolu v závislosti na vlnové délce pro čáry rtuťového spektra (o známé vlnové délce), vyneste do grafu a fitováním nelineární funkcí (6) určete disperzní vztah $n = n(\lambda)$.
4. Změřte spektrum vodíkové výbojky, vypočítejte vlnové délky jednotlivých čar a porovnejte s tabulkovými hodnotami. Ověřte pomocí naměřených dat platnost vztahu (2) a určete hodnotu Rydbergovy konstanty.
5. Určete charakteristickou disperzi $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$ v okolí vlnové délky 589 nm (žlutá dvojitá čára v sodíkovém spektru). Poté spočítejte minimální velikost základny hranolu, vyrobeného ze stejného materiálu jako hranol, se kterým měříte, který je ještě schopný sodíkový dublet rozlišit.

2. Použité přístroje a pomůcky

Goniometr, nástavec s nitkovým křížem, nástavec se štěrbinou, optický hranol, stolní lampa, rtuťová, vodíková a sodíková výbojka.

3. Teoretický úvod

3.1. Spektrum záření

Energie elektronů v atomu může nabývat jem diskrétních hodnot. Přechodem elektronu mezi energetickými hladinami A a B atom buď přijme, nebo uvolní energii $E = hf_{AB}$, která odpovídá energii fotonu. Odtud plyne, že spektrum záření atomu je čárové tj. jsou v něm zastoupeny jen určité vlnové délky (ve vidit. oblasti – barvy). Pro viditelné spektrum atomu vodíku (Balmerova série) platí (viz. [1])

$$\lambda = B\frac{n^2}{n^2-4}, \quad n = 3, 4, 5, 6, \quad B = 364{,}56 \text{ nm}. \tag{1}$$

Pro převrácenou hodnotu máme

$$\lambda^{-1} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 3, 4, 5, 6, \quad R = \frac{4}{B}, \tag{2}$$

kde R je Rydbergova konstanta, pro kterou platí vztah

$$R = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 10973731{,}57 \text{ m}^{-1}, \tag{3}$$

kde ε_0 je permitivita vakua, m_e je hmotnost elektronu, e je elementární náboj, h je Planck. konst., c je rychlost světla. Vyčíslená hodnota je z [2].

3.2. Fyzikální vlastnosti hranolu

Optický hranol na Obr. 1 je prostředí s indexem lomu n. Světelný paprsek se po průchodu hranolem odchýlí od původního směru o úhel ε. Úhel nejmenší odchylky ozn. ε_0. Dvě stěny hranolu svírají úhel lámavý úhel φ. Po rozepsání vztahů mezi úhly, podmínky $\alpha_1 = \alpha_2$ a využití Snellova zákona (odvozeno v A) dostaneme vztah

$$\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon_0+\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = n. \tag{4}$$

Je-li $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\lambda)$, je derivace

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_0}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varepsilon_0+\varphi}{2}\right)}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{1-n^2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{5}$$

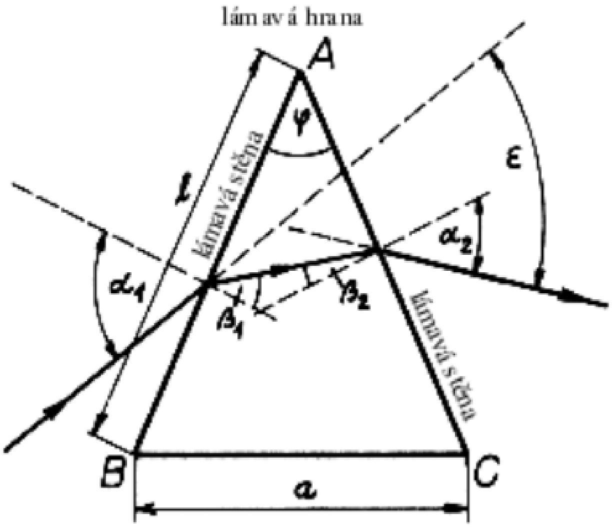
Vztah $n = n(\lambda)$ umožňuje získat $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$. Disperzní vztah pro hranol je dobře aproximován funkcí

$$n = n_n + \frac{C}{\lambda - \lambda_n}, \tag{6}$$

kde n_n, C, λ_n jsou konstanty. Pokud jsou vlnové délky světla dopadající na hranol blízko u sebe, hranol zalomí paprsky světla téměř do stejného místa. Při hrubém rozlišení detektoru tyto vlnové délky nerozeznáme. Definujeme rozlišovací schopnost hranolu

$$r = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = a\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}, \tag{7}$$

kde $\Delta\lambda$ je minimální rozdíl dvou vlnových délek, a je šířka podstavy hranolu.



Obr. 1: Optický hranol a lom světla. Převzato z [1].

3.3. Statistika

Během výpočtů budeme muset určit chybu nepřímých měření. Pokud $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, pak pro chybu veličiny y platí

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2 \ . \tag{8}$$

Pokud jsou jednotlivá měření zatížena chybami a chceme je zohlednit ve výsledné hodnotě veličiny potřebujeme vzorec

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i y_i}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad \sigma_x \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}}, \quad p_i = \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}. \tag{9}$$

4. Postup měření

Nejdříve jsme na goniometr připevnili nástavec s nitkovým křížem a do nitkového kříže jsme umístili lampičku. Zapnuli jsme lampičku v kříži a v goniometru. Na otočný podstavec jsme dali hranol. Otáčením dalekohledu jsme našli lomené světlo vycházející z lampičky v nitkovém kříži. Odečetli jsme úhel otočení dalekohledu. Hranol láme světlo doleva a doprava (lomené paprsky mají tvar V). Otočili jsme dalekohled tak, abychom viděli i druhou část lomeného světla a odečetli jsme úhel otočení dalekohledu. Poté jsme hranol na stolečku posunuli o kousek dále od světla, aby zůstal ještě na stolečku. Opakovali jsme právě popsaný postup, dokud jsme nedostali pět dvojic hodnot.

Vyměnili jsme nitkový kříž za nástavec se štěrbinou. Zapnuli jsme rtuťovou výbojku a umístili jsme ji co nejblíže k nástavci. Paprsky se na hranolu zalomili. Dalekohledem jsme opět hledali lomené paprsky. Když jsme neviděli všechny barvy spektra, zmenšili jsme velikost štěrbiny, a poté jsme spatřili všechny. Otáčeli jsme hranolem, než se dostal to takové polohy, kdy se obraz v dalekohledu zastavil. Zaměřili jsme jednotlivé barvy a odečítali jsme velikost úhlu otočení dalekohledu. Dalekohled jsme měli otočený do jedné strany, otočili jsme ho zhruba o 90°. Otáčeli jsme hranolem, dokud se obraz v dalekohledu nezastavil a opět jsme měřili úhly, pod kterými se lámaly barvy spektra. Analogický postup jsme provedli pro vodíkovou výbojku. U sodíkové výbojky jsme postupovali stejně s jediným rozdílem. Žlutou čáru jsme viděli velice širokou. Změřili jsme šířku této čáry tak, že jsme odečetli velikost úhlů pro kraje čáry.

5. Vypracování

Domácí úkol byl splněn a je obsažen v A.

5.1. Lámavý úhel φ hranolu

Změřili jsme úhly odchýlení lomených paprsku d_1, d_2, lámavý úhel je poté absolutní hodnota z $\frac{d_1 - d_2}{2}$. Naměřené hodnoty jsou v Tab. 1. Výsledek je $\varphi = (1{,}0510 \pm 0{,}0003)$ rad.

#	2φ [°]
1	120,527
2	120,395
3	120,404
4	120.353
5	120,500

Tab. 1: Tabulka hodnot dvojnásobku lámavého úhlu φ .

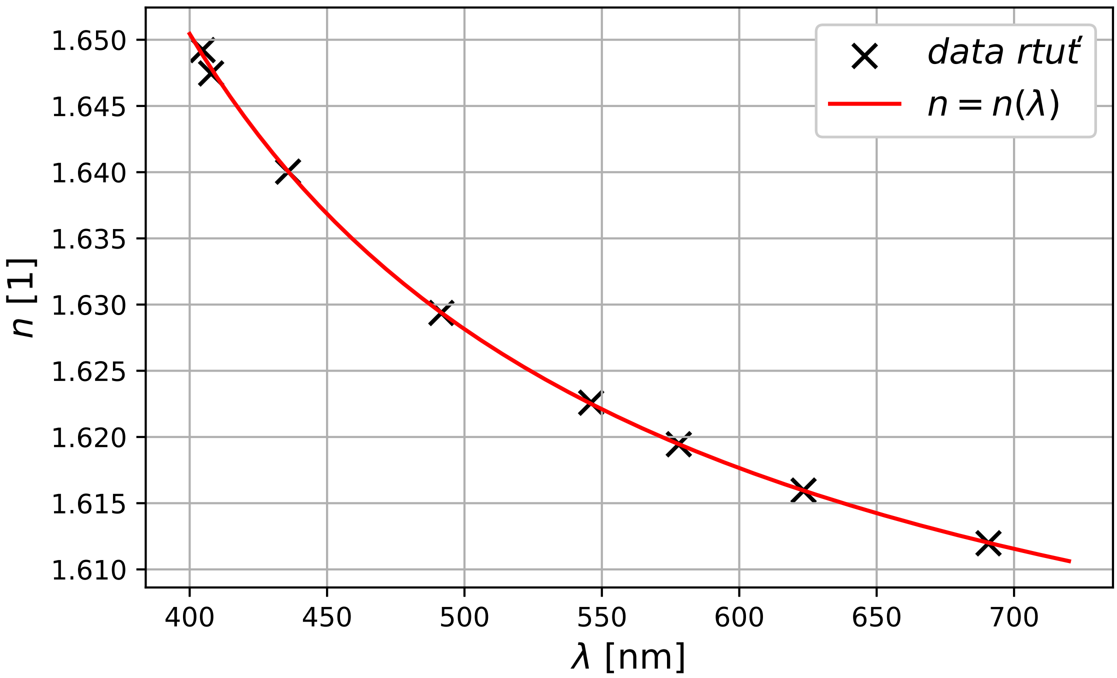
5.2. Index lomu hranolu

Pro rtuťovou výbojku jsme naměřili úhly odchýlení známých barev jejího spektra. Ze vzorce (4) jsme poté určili indexy lomu daných vlnových délek . Na Obr. 2 jsme nafitováním indexů lomu určili konstanty ve vzorci (6). Hodnoty vlnových délek jsou převzaty z papíru spekter u úlohy. Stejné hodnoty lze najít i v [3].

5.3. Viditelné spektrum vodíku

Z naměřených hodnot úhlů odchýlení lomených paprsků jsme spočítali indexy lomu dle (4). Ze závislosti (6) pro konstanty z nafitované závislosti na Obr. 2 jsme určili vlnové délky spektrálních čar vodíku. Hodnoty i s chybami (určené dle (8)) jsou v Tab. 2. Rydbergovy konstanty pro danou vlnovou délku jsou v Tab. 2. Aplikací vzorce (9) na Rydbergovy konstanty s příslušnými chybami dostaneme výslednou hodnotu $R = (10100000 \pm 200000)\ \mathrm{m}^{-1}$.

Chceme ověřit vzorec (2). Jedinou naměřenou hodnotou v tomto vzorci je λ, tímto je určena veličina na jedné ose grafu. Musíme navolit ještě jednu veličinu pro druhou osu. Budeme předpokládat, že pro danou λ známe $n \in \hat{4}$.



Obr. 2: Graf závislosti indexu lomu hranolu na vlnové délce lomeného světla. Fitováno funkcí $n = n(\lambda)$ tvaru (6), kde $n_n = (1{,}589 \pm 0{,}001)$, $\lambda_n = (222 \pm 8)$ nm, $C = (11{,}0 \pm 0{,}7)$ nm.

λ_{tab} [nm]	λ [nm]	σ_λ [nm]	R [m^{-1}]	σ_R [m^{-1}]
410,2	436	16	10300000	400000
434,0	487	20	9800000	400000
486,1	550	25	9700000	400000
656,3	656	34	11000000	600000

Tab. 2: Tabulkové hodnoty vlnových délek ze spektra vodíku λ_{tab}, naše vypočtené hodnoty vln. délek λ s chybou σ_λ. Ze vzorce (2) vypočtené Rydbergovy konstanty R s chybou σ_R (určeno dle (8)) k příslušné námi vypočtené vlnové délce.

Závislost (2) přepíšeme do tvaru

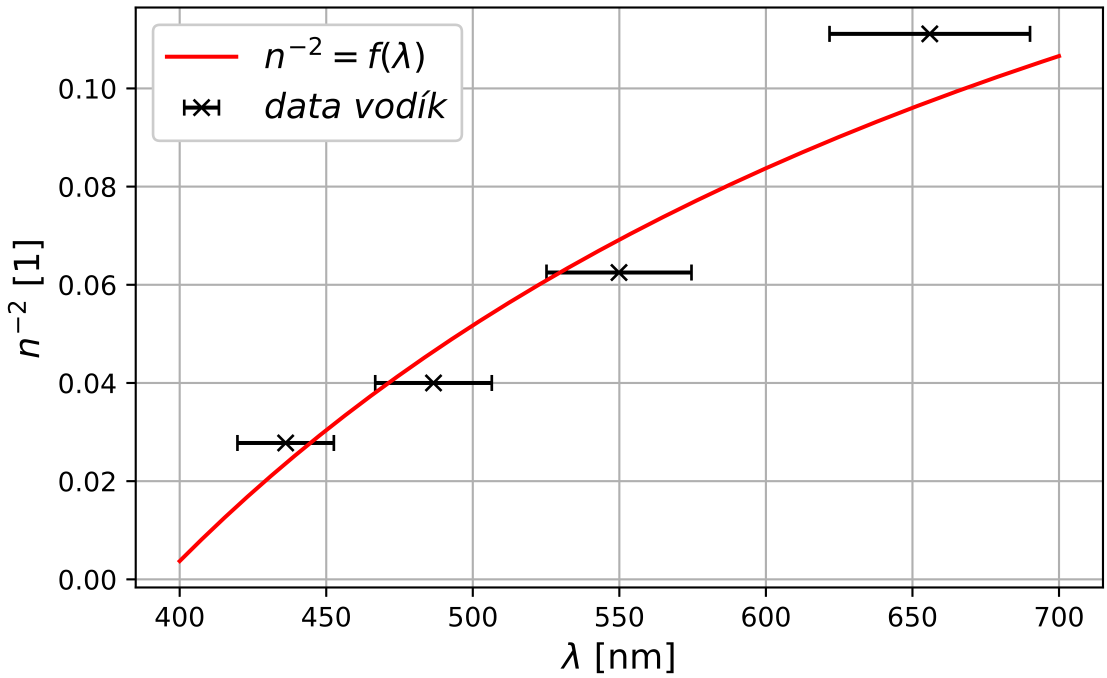
$$n^{-2} = f(\lambda) = -\frac{1}{\lambda R} + \frac{1}{\xi^2}. \tag{10}$$

Touto závislostí nafitujeme vypočtené hodnoty vlnových délek spektra vodíku z Tab. 2. Výsledná závislost je na Obr. 3. Rydbergova konstanta je $R = (0{,}010 \pm 0{,}002) \cdot 10^9\ \mathrm{m}^{-1}$.

5.4. Sodíkový dublet a rozlišení hranolu

Analogicky jako v předchozích úkolech vypočteme vlnové délky dvou žlutých čar ve spektru záření sodíku (úhly lomu parsku, znalost indexu lomu pro danou vln. délku $\implies \lambda$). Viděli jsme jen jednu čáru, měřili jsme její kraje. Dostaneme $\lambda_1 = (584 \pm 28)$ nm, $\lambda_2 = (587 \pm 28)$ nm. Zadání 1 říká určete $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$, což lze ze znalosti $n = n(\lambda)$ určit analyticky, nemuseli jsme ani nic měřit. Derivováním (2) máme

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{C}{(\lambda - \lambda_n)^2}. \tag{11}$$



Obr. 3: Graf závislosti čísel n^{-2} na vlnové délce λ. Fitováno funkcí $n^{-2} = f(\lambda)$ tvaru (10), kde $R = (0{,}010 \pm 0{,}002) \cdot 10^9\ \mathrm{m}^{-1}$, $\xi = (2{,}0 \pm 0{,}2)$.

Z [3] je pro sodíkový dublet $\lambda_1 = 589{,}0$ nm, $\lambda_2 = 589{,}6$ nm. Přepisem vzorce (7) do tvaru

$$a = \frac{\lambda}{\Delta\lambda \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}}, \tag{12}$$

budeme brát jen absolutní hodnotu. Dosazením hodnot $\lambda_{stř} = 589{,}3$ nm, $\Delta\lambda = 0{,}6$ nm, $C = (11{,}0 \pm 0{,}7)$ nm, $\lambda_n = (222 \pm 8)$ nm dostaneme $a = (12{,}0 \pm 0{,}9)$ mm. Použitím našich hodnot $\lambda = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = (586 \pm 20)$ nm, $\Delta\lambda = (3 \pm 40)$ nm vychází $a = (2 \pm 30)$ mm.

6. Diskuse

6.1. Chyby při měření

V každém úkolu nám vychází velké chyby měření. Proč? Problém vznikl při měření. Natočení hranolu, kdy se barva v dalekohledu zastaví, je pro každou barvu jiné. My jsme našli natočení hranolu pro jednu barvu, nechali jsme hranol stát a naměřili jsme úhly odchýlení všech barev. Tuto hrubou chybu jsme si samozřejmě uvědomili až při zpracovávání dat.

6.2. Lámavý úhel

Data z Tab. 1 jasně ukazují, že lámavý úhel je zhruba 60°. Není divu, měli jsme k dispozici hranol, který měl podstavu z rovnostranného trojúhelníku.

6.3. Index lomu hranolu

I přes námi udělanou hrubou chybu ukazuje závislost na Obr. 2, že vzorec (6) excelentně předpovídá index lomu hranolu pro danou vlnovou délku. Goniometr měří s přesností úhlových sekund, systematická chyba je dána převážně odčítáním hodnot úhlů. Zaměřovač se stupnicí byl v dalekohledu špatně vidět, proto jsme někdy mohli odečítat jinou hodnotu úhlu. Zkusili jsme, jak moc se můžeme při měření netrefit a systematická chyba je maximálně $30'$. Tato chyba nebude mít na měření zásadní vliv.

6.4. Spektrum vodíku a Rydbergova konstanta

Data z Tab. 2 jasně ukazují, podle které barvy jsme nastavovali polohu hranolu (656 nm). Ostatní vlnové délky jsou úplně mimo tabulkové hodnoty. Je zde vidět i další jev, který je naprosto obecný, že s rostoucí vlnovou délkou roste i chyba měření. Hodnoty Rydbergovy konstanty se zhruba shodují s výsledkem (3), který jsme očekávali. Fit na Obr. 3 ukazuje, že teoreticky odvozený vztah (2) není k zahození. Pro absolutní platnost vztahu je potřeba určit konstanty zde vystupující s větší přesností.

6.5. Sodíkový dublet a rozlišení hranolu

Blízkost námi naměřených vlnových délek sodíkového dubletu se neshoduje s opravdovým rozdílem těchto vlnových délek ((3 ± 40) nm vs. 0,6 nm). Naměřené vlnové délky nedávají dobrou odpověď na to, jakou vlnovou délku mají spektrální čáry (chyba 28 nm). Šířka hranolu pro odlišení čar je $a = (12{,}0 \pm 0{,}9)$ mm. Hranol v experimentální sestavě měl $a \approx 3$ cm, to znamená, že bychom měli rozlišit spektrální čáry sodíkového dubletu. V dalekohledu jsme ovšem viděli jednu tlustou žlutou čáru a nešlo dvě spektrální čáry odlišit. Příčiny mohou být následující − dodatečné difrakční efekty v aparatuře, světlo neprocházelo nejširší částí hranolu, nedokonale zaostřený obraz v dalekohledu a možná některé další.

7. Závěr

Konec dlouhého putování světem spektrometrie nadešel, na rozloučenou uvedu výsledky našeho snažení.

Lámavý úhel hranolu je:

$\varphi = (1{,}0510 \pm 0{,}0003)$ rad,

z vlnových délek spektra atomu vodíku stojí za zmínku jen červená barva:

$\lambda_č = (656 \pm 34)$ nm.

Hodnota Rydbergovy konstanty vypočtená z vlnových délek spektra atomu vodíku je:

$R = (10100000 \pm 200000)\ \mathrm{m}^{-1}$.

Hodnota Rydbergovy konstanty určená fitem na Obr. 3 je:

$R = (0{,}010 \pm 0{,}002) \cdot 10^9\ \mathrm{m}^{-1}$.

Minimální šířka podstavy hranolu pro rozlišení spektrálních čar sodíkového dubletu je:

$a = (12{,}0 \pm 0{,}9)$ mm.

8. Použitá literatura

[1] KOLEKTIV KF. Balmerova série. Kurz: B212-02PRA2 - Fyzikální praktikum 2 [online]. [cit. 2022-03-19]. Dostupné z: https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435553/mod_resource/content/10/Uloha_4_LS_20200219.pdf

[2] Základní fyzikální konstanty. Laboratorní průvodce [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://www.labo.cz/mft/zkonst.htm

[3] C. R. NAVE, Stránky hyperphysics - atomová spektra, [cit. 2022-03-18]. Dostupné z: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/atspect2.html#c2

Příloha

A. Domácí příprava

DCV

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ $\qquad \sin\alpha_1 = n \sin\beta_1$ $\qquad \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n$

$2\alpha = \varepsilon + \varphi$ $\qquad \sin\beta_2 = n \sin\alpha_2$ $\qquad \dfrac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2} = n$ $\Rightarrow$

$\beta_1 + \beta_2 = \varphi$ $\qquad \beta_1 = \beta_2 = \beta \Rightarrow \beta = \dfrac{\varphi}{2}$

$$\alpha = \frac{\varepsilon + \varphi}{2} \rightarrow \quad \sin\alpha = n \sin\beta$$

$$\beta = \frac{\varphi}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\varepsilon+\varphi}{2}\right) = n \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon+\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = n}$$