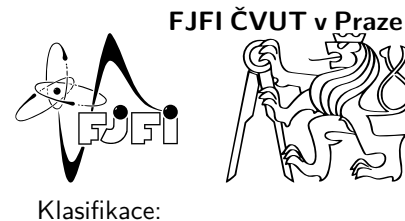


Jméno: **Petr Červenka** Kolega: Michal Vranovský
 Kruh: **Čtvrtek** Číslo skup.: 2
 Měřeno: **14.10.2021** Zpracování: 16 h



1 Pracovní úkoly

1. Část 1
 - a) **DŮ:** Odvoďte rovnici pro Poissonovu konstantu.
 - b) Změřte Poissonovu konstantu Clémentovou-Désormesovou metodou.
2. Část 2
 - a) Určete objem prachovnice metodou vážení.
 - b) Určete objem téže prachovnice pomocí komprese plynu.
 - c) Výsledky vzájemně porovnejte.

2 Použité přístroje a pomůcky

2.1 Část 1

Otevřený manometr; kovový metr přibitý na dřevěném stojanu; kulová bání se dvěma kohouty; gumové hadičky; ruční gumová pumpička; tlačítkový kohout; stopky s fotoelektrickou branou; polystyrenová podložka.

2.2 Část 2

Katetometr; gumové hadičky; nádoba, která má v dolním otvoru vývod; prachovnice; plynová byreta s porovnávacím ramenem; teploměr; digitální váhy; záslepka; skleněná láhev

3 Teoretický úvod

3.1 Část 1

V experimentu předpokládáme, že pracujeme s ideálním plynem. S ideálním plynem lze provést izotermický, adiabatický, izochorický a izobarický děj. Pro izotermický děj s id. plynem platí

$$\frac{p}{V} = \text{konst.} \quad (1)$$

Pro izochorický děj platí

$$pT = \text{konst.} \quad (2)$$

Pro adiabatický děj platí

$$pV^\kappa = \text{konst.} \quad (3)$$

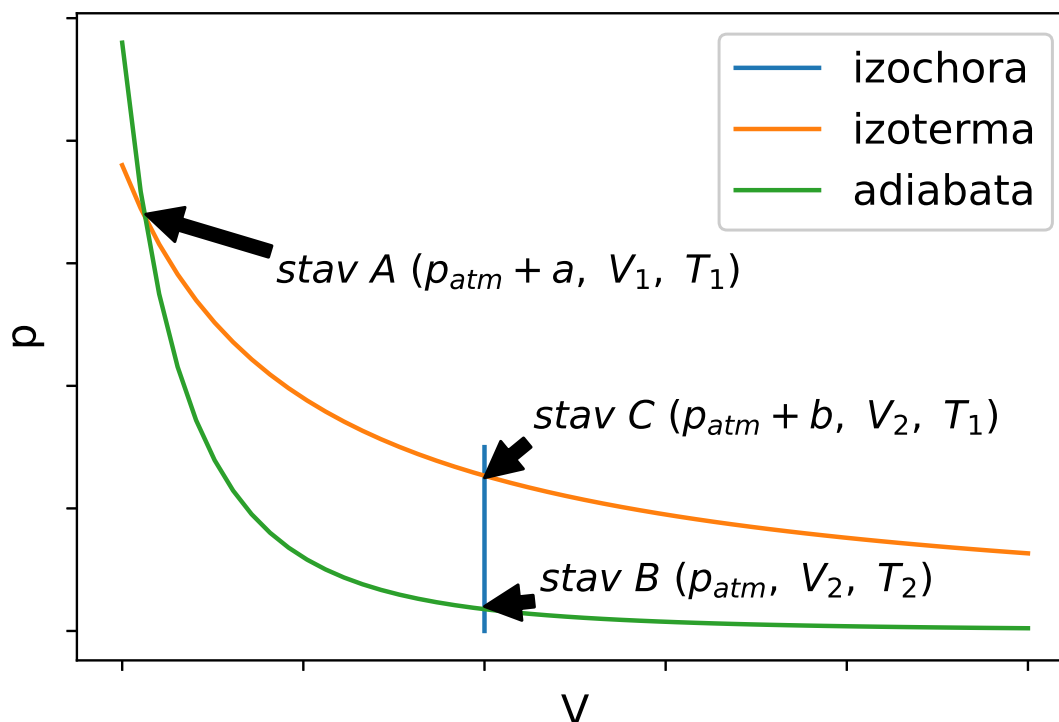
Na Obr. 1 je vidět, že pokud chceme dostat plyn ze stavu A do stavu C, můžeme to udělat dvěma různými procesy. Zkombinujeme rovnice (3) pro přechod z A do B, (1) pro přechod z A do C. Dostaneme

$$\frac{p_{atm} + a}{p_{atm}} = \left(\frac{p_{atm} + a}{p_{atm} + b} \right)^\kappa, \quad (4)$$

kde a je tlak, který vznikne kompresí plynu. Tlak p_{atm} je atmosférický tlak a b je tlak, který vznikne díky izochorickému ději (přechod z B do C na Obr. 1). Matematickými úpravami, použitím Taylorova rozvoje a vztahů $a = \rho hg$, $b = \rho h'$ máme

$$\kappa = \frac{h}{h - h'}, \quad (5)$$

kde h a h' jsou rozdíly výšek hladin v otevřeném manometru.



Obr. 1: pV diagram ideálního plynu při Clémentově-Désormesově metodě

3.2 Část 2

U menších nádob lze jejich objem zjistit pomocí vážení. Princip je jednoduchý. Máme kapalinu o známé hustotě a známé objemové roztažnosti. Zvážíme nádobu, nalijeme kapalinu do nádoby a zvážíme nádobu. Ze vztahů

$$V_{nád.} = \frac{m_{kap.}}{\rho_{kap.}} = m_{kap.} V_j, \quad (6)$$

kde V_j je jednotkový objem kapaliny ($[V_j] = \text{m}^3 \text{kg}^{-1}$), lze určit objem nádoby. Pro vodu platí $V_j = 0.9998(1 + 0.00018t)$, kde t je teplota ve $^{\circ}\text{C}$ a $[V_j] = \text{cm}^3 \text{g}^{-1}$.

U nádob, které mají velké rozměry (nádobu na skladování ropy, cisterna, vodojem atd.) nebo prostě jejich objem nelze změřit vážením, se používá metoda měření objemů pomocí komprese plynu. Schéma aparatury je na Obr. 2. Jedná se o biretu (B), která má přídatné rameno (T) se stejným obsahem průřezu. Dále je zde nádoba s kapalinou (Z). Posouváním nádoby nahoru nebo dolů lze měnit výšku hladiny kapaliny v biretě a přídatném rameni. Nádobu, u které chceme změřit objem, připojíme k biretě. Vše musí skvěle těsnit. Poté otevřeme kohout na vrcholu birety a vyrovnáme tlak uvnitř nádoby s tlakem atmosférickým. Určíme objem V_1 , který zabírá kapalina v biretě. Kohout zavřeme a zvedneme nádobu. Analogicky určíme objem V_2 kapaliny v biretě. Změříme rozdíl h mezi výškou hladiny v biretě a v přídatném rameni.

Plyn koná izotermický děj. Máme dva stavy (A,B) ideálního plynu. Stav A je popsán proměnnými $A : (p_{atm.}, V + V_{100} - V_1)$, kde V_{100} je objem celé birety a V_1 je objem kapaliny určený při otevřeném kohoutu. Stav B je popsán proměnnými $B : (p_{atm.} + \rho hg, V + V_{100} - V_2)$. Použitím (1) dostaneme

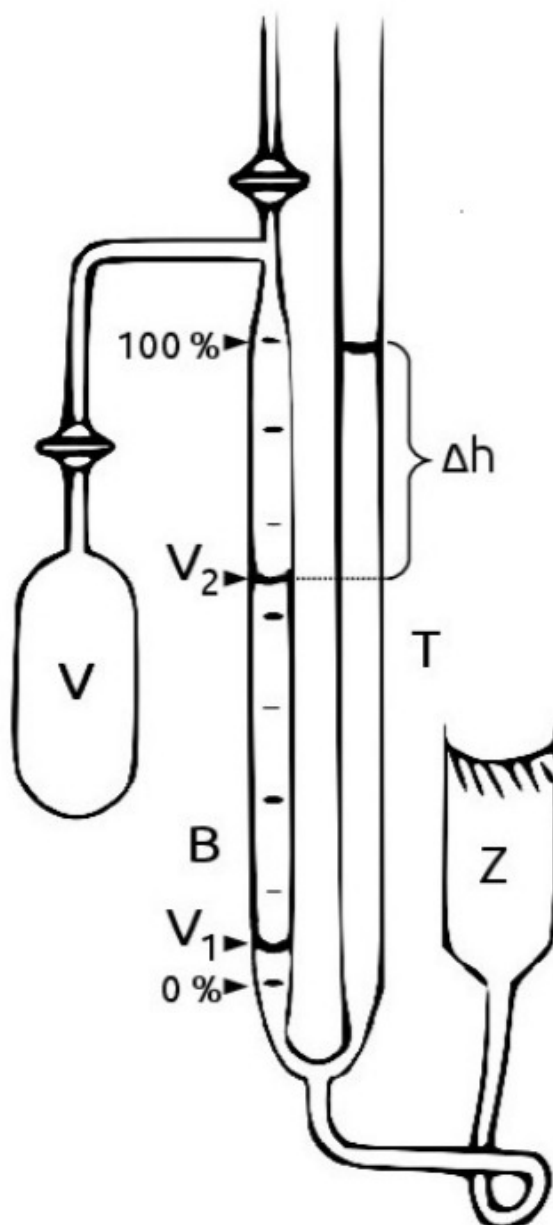
$$p_{atm.}(V + V_{100} - V_1) = (p_{atm.} + \rho hg)(V + V_{100} - V_2). \quad (7)$$

Odtud dostaneme vztah

$$V = (V_2 - V_1) \frac{p}{\rho hg} + V_2 + V_{100}. \quad (8)$$

Nesmíme ale zapomenout, že jsme nádobu nějak připojili (nejspíše hadicí). Proto poté hadici na konci utěsníme a zopakujeme předchozí postup. Výsledný objem nádoby bude

$$V_{nád.} = V - V_{had.} \quad (9)$$



Obr. 2: Nákres aparatury pro měření objemů kompresí plynu. Převzato z [1].

4 Postup měření

4.1 Část 1

1. Nastavili jsme fotoelektrickou bránu do režimu gate.
2. Otevřeli jsme kohout, který uzavíral hadičku spojující ruční pumpičku a bání.
3. Pumpičkou jsme napumpovali vzduch do bání. Kohout jsme zavřeli.
4. Počkali jsme, než se ustálí poloha hladiny v otevřeném manometru, a poté jsme odečetli pozici hladiny v obou ramenech otevřeného manometru.
5. Rychle jsme zmáčkli tlačítko na tlačítkovém kohoutu a zaznameli jsme si čas, který ukázal displej na stopkách s fotoel. branou.
6. Opět jsme vyčkali na ustálení hladin a poté jsme odečetli výšku hladin v obou ramenech manometru.

7. Dlouze jsme zmáčkli tlačítkový kohout, aby se vyrovnal tlak. Poté jsme vynulovali stopky a celý postup opakovali.

4.2 Část 2

Nejprve uvedu postup měření objemu pomocí metody komprese plynu.

1. Do hadice jsme dali zástrčku. Otevřeli jsme kohout na horním okraji birety.
2. Upravili jsme výšku zásobní nádoby tak, aby se výška hladiny kapaliny v biretě pohybovala kolem nižších hodnot na měřítku na biretě.
3. Pomocí katetometru jsme změřili výšku hladiny. Zavřeli jsme kohout.
4. Zvedli jsme nádobu výše. Změřili jsme výšku hladiny v biretě a v pomocné trubici.
5. Poté jsme vyměnili zástrčku za prachovnici a celý postup jsme analogicky opakovali.
6. Nakonec jsme změřili délku 1 dílku a určili jsme referenční hladinu na čtvrtém dílku stupnice birety.

Postup pro určení objemu vážením je následující:

1. Do velké láhve jsme nalili vodu o teplotě kolem 22°C .
2. Vodu jsme nalili do prachovnice, soustavu zvážili a změřili teplotu soustavy.
3. Vodu jsme vylili a celý postup opakovali.
4. CHYBNĚ jsme až na konec zvážili samotnou prachovnici, kterou jsme předtím vytřeli (tento krok měl být první).

5 Vypracování

5.1 Část 1

Dosazením hodnot z Tab. 1 do vzorce (5) dostaneme hodnoty Poissonovy konstanty. První dvě měření dopadla naprosto odlišně od ostatních, proto jsou v grafu na Obr. 3 zobrazeny dvě funkce. Fitovací funkce $g(t) = a \cdot t + b$

h [cm]	h' [cm]	Δt [s]
15.4	1.9	0.333
16.4	1.7	0.351
16.9	3.8	0.265
14.3	3.4	0.284
16.0	3.4	0.503
15.1	3.8	0.244
16.4	3.9	0.323
17.3	4.1	0.284
16.7	3.9	0.343
16.9	4.3	0.429
17.2	3.9	0.381
16.8	3.7	0.481

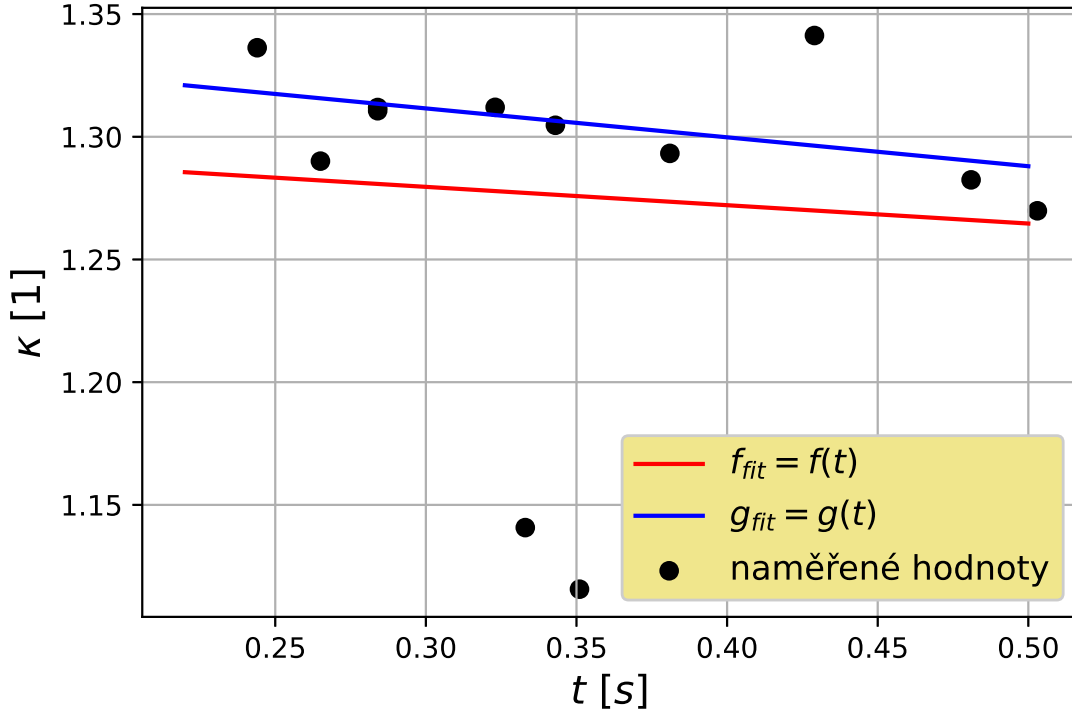
Tab. 1: Tabulka hodnot rozdílů hladin v otevřeném manometru a doba otevření kohoutu.

nebere v úvahu první dvě měření, funkce $f(t) = c \cdot t + d$ již ano. V Tab. 2 jsou uvedeny parametry fitovacích funkcí. Parametr c má obrovskou chybu. Funkci f zahodíme a budeme pracovat pouze s funkcí g .

Uděláme-li $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$ dostaneme hodnotu κ , kdy byl kohout otevřen po nulovou dobu. Jedná se tedy o ideální adiabatický děj. Díky této limitě nám zbyde pouze koeficient b , což je hledaná Poissonova konstanta.

parametr	hodnota
$a [s^{-1}]$	-0.12 ± 0.08
$b [1]$	1.35 ± 0.03
$c [s^{-1}]$	-0.1 ± 0.3
$d [1]$	1.3 ± 0.1

Tab. 2: Tabulka hodnot parametrů fitovacích funkcí



Obr. 3: Graf závislosti Poissonovy konstanty na čase

5.2 Část 2

5.2.1 Metoda vážení

Hodnoty získané metodou vážení jsou zobrazeny v Tab. 3, V_j je jednotkový objem ze vztahu (6). Hmotnost prázdné prachovnice je $m_0 = (96.56 \pm 0.52)$ g. Chyba této hmotnosti je vyšší, protože jsme prachovnici vážili až po té, co jsme do ní nalili vodu.

m [g]	t [°C]	V_j [g · cm ⁻³]
210.44	21.3	1.00363
210.24	22.0	1.00376
210.42	22.0	1.00376
210.34	22.0	1.00376
210.48	22.2	1.00380

Tab. 3: Tabulka hmotnosti m prachovnice s vodou o teplotě t

Předpokládáme, že $V_j = V_j(t)$ a $m_{kap.} = m_{celk.} - m_{nád.}$, kde $m_{celk.}$ je hmotnost prachovnice s vodou. Po odečtení hmotnosti m_0 od hmotností v Tab. 3 dostaneme výsledek pro hmotnost vody $m_{kap.} = (113.8 \pm 0.5)$ g. Chybu jsme dostali ze vztahu $\sqrt{0.0426^2 + 0.52^2}$, kde první číslo je statistická chyba měření hmotností uvedených v Tab. 3 a druhé číslo je chyba hmotnosti samotné nádoby. Pro jednotkový objem platí $V_j = (1.00374 \pm 3 \cdot 10^{-5})$ g · cm⁻³.

Vezmeme vzorec (6), chyba $V_{nád.}$ bude chyba nepřímých měření (vzorec pro chybu nepřímých měření lze nalézt

v [3]). Výsledný objem prachovnice je $V_{nad.} = (114 \pm 1) \text{ cm}^3$.

5.2.2 Metoda komprese plynu

V Tab. 4 jsou uvedena naměřená data. První dva řádky jsou naměřené hodnoty pro záslepku, ostatní hodnoty jsou pro prachovnici. Referenční bod na čtvrtém dílku má pozici $x_{ref} = (192.660 \pm 0.005) \text{ mm}$. Pro přepočet vzdáleností hladin na objem použijeme následující vzorec

$$V_{1,2} = \frac{x_{ref} - x_{1,2}}{d_{dilek}} V_{dilek} + V_{ref}. \quad (10)$$

S rozdílem $h = x_2 - x_{trub.}$, tíhovým zrychlením $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, atmosférickým tlakem $p_{atm.} = 101325 \text{ Pa}$, hustotou vody (převzato z [6]) za teploty 21°C $\rho = 0.998 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ a objemem $V_{100} = 65.6 \text{ cm}^3$ máme všechny potřebné ingredience do vzorce (8). Dostaneme hodnoty objemů nádoby s hadičkou a objemů hadičky. Statisticky tyto hodnoty zpracujeme tj. určíme aritmetický průměr a chybu aritmetického průměru.¹

Pro prachovnici máme výsledek $V_{nad.} = (145 \pm 8) \text{ cm}^3$, pro hadičku $V_{had.} = (17 \pm 15) \text{ cm}^3$.

x_1 [mm]	x_2 [mm]	$x_{trub.}$ [mm]
191.270	186.240	116.120
168.700	166.800	126.840
182.970	174.319	116.005
170.865	161.865	116.920
199.635	191.817	136.605
187.305	180.390	136.325
184.335	178.010	137.607
184.275	175.010	116.780
189.005	179.905	120.110
186.000	176.190	113.150
175.265	167.045	110.970

Tab. 4: Tabulka vzdáleností hladin x_1 , x_2 v biretě a hladiny $x_{trub.}$ v trubici od bodu, od kterého katetometr měřil.

6 Diskuse

6.1 Část 1

Tento experiment je velice náchylný na jakýkoliv únik plynu. Je otázka, jak dobře byl celý systém utěsněn. Při měření mi přišlo, že systém těsní velice dobře. Pouze první dvě hodnoty Poissonovy konstanty jsou naprosto odlišné od ostatních. Myslím, že jsme nejspíše špatně uzavřeli kohout u pumpičky. Tyto dvě hodnoty beru jako hrubé chyby.

Museli jsme přibližně 20 s počkat, než se ustálí výška hladin v manometru. Pumpování plynu do bání můžeme považovat za adiabatickou kompresi, při které se plyn ochladí. Poté izochorickým dějem dochází k vyrovnání teploty plynu s okolím (teplota roste, tlak klesá). Odtud mohla vzniknout chyba při určování výšek hladin. Obdobně při adiabatické expanzi při otevření kohoutu, kterou následoval izochorický děj. Systematická chyba bude kolem $\sigma_{sys1} = 0.01$.

Používáme idealizaci vzduchu jako ideálního plynu. Zanedbáváme hlavně stlačitelnost plynu. Odhaduji, že touto idealizací bude $\sigma_{sys2} = 0.03$.

Zlepšit by se dalo odečítání z manometru např. pomocí katetometru. Mohli bychom systém při otevření kohoutu tepelně izolovat od okolí. Dále bychom mohli prozkoumat přesnější vztah závislosti Poissonovy konstanty na době otevření kohoutu.

Pro dvouatomové molekuly uvádí [5] $\kappa = 1.4$, což naše výsledky poměrně dobře potvrzují.

6.2 Část 2

Experiment doprovázelo několik hrubých chyb. Při měření objemů metodou vážení máme dvě hodnoty teploty vody v Tab. 3, díky kterým se do výsledku přenesla chyba 0.5 cm^3 . Nejdříve jsme do prachovnice nalili vodu, ale

¹Můžeme si dovolit zanedbat chybu měření objemů, protože tato chyba vychází řádově menší než 10^{-3} cm^3 .

tím pádem v prachovnici zůstaly nějaké kapky. Chyba měření samotné prachovnice je 0.52 g, což se pak promítne i do hodnoty objemu prachovnice. Při druhé metodě se nám utrhla nádoba s vodou, což velice poznamenalo měření objemu hadičky. Osobně si myslím, že objem hadičky se bude pohybovat kolem 30 cm^3 .

Proč má objem prachovnice velkou chybu? Z dat v Tab. 4 to není patrné, ale pokud bychom spočítali objem prachovnice pomocí čtvrtého řádku tabulky, dostaneme hodnotu 200 cm^3 . Odstraněním této hodnoty máme $V_{nád.} = (138 \pm 3)\text{ cm}^3$.

Měření pomocí katetometru je velmi přesné, ale naši aparaturu ovlivnily větší nepřesnosti. Výšky hladin bychom klidně mohli měřit obyčejným metrem. Drobnou nepřesností je i například to, jak moc zastrčíme hadici do prachovnice. Uvažujeme standartní atmosférický tlak, ovšem ve škole mohl být tlak o něco větší nebo menší. Tyto drobnosti bychom mohli započítat, ale oproti systematické chybě budou prakticky bezvýznamné. Metoda měření objemů pomocí komprese plynu je poznamenána rozbitím soustavy. Nemohu naše výsledky nějak porovnat, protože hodnota chyby měření je příliš velká.

Celkově se tento podúkol moc nepovedl.

7 Závěr

Po rozboru jednotlivých úkolů jsem dospěl k následujícím výsledkům.

Výsledná hodnota **Poissonovy konstanty** je: $\kappa = (1.35 \pm 0.03(stat) \pm 0.04(sys))$.

Výsledná hodnota **objemu prachovnice** při metodě vážení je: $V_{nád.} = (114 \pm 1(stat))\text{ cm}^3$.

Výsledná hodnota **objemu prachovnice** při metodě komprese plynu je: $V_{nád.} = (121 \pm 18(stat))\text{ cm}^3$.

8 Použitá literatura

- [1] Kolektiv KF. *Návod: 05 - Poissonova konstanta a měření dutých objemů* [Online, cit. 16. října 2021].
http://praktikum.fjfi.cvut.cz/pluginfile.php/415/mod_resource/content/test.pdf
- [2] Kolektiv KF. *Chyby měření* [Online, cit. 16. října 2021].
<http://praktikum.fjfi.cvut.cz/documents/chybynav/chyby-o.pdf>
- [3] ČERVENKA, Petr. Modul pružnosti v tahu a ve smyku [online]. In: . s. 9 [cit. 2021-10-9].
Dostupné z: https://github.com/cervep12/protokoly/blob/main/praktika_modulyGE.pdf
- [4] ČERVENKA, Petr. Cavendishův experiment [online]. [cit. 2021-10-16].
Dostupné z: <https://github.com/cervep12/protokoly/blob/main/Cavendish.pdf>
- [5] Ekvipartiční teorém [online]. [cit. 2021-10-16].
Dostupné z: https://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/www/fyzika.html
- [6] Tabulky.pdf [online]. 10.10.2005 [cit. 2021-10-16].
Dostupné z: http://hydraulika.fsv.cvut.cz/Hydraulika/Hydraulika/Predmety/HYAR/ke_stazeni/cviceni/laboratore/tabulky.pdf

Příloha

9 Domácí příprava

$$pV^\gamma = \text{const}$$

$$d(pV^\gamma) = 0$$

$$V^\gamma dp + \gamma p V^{\gamma-1} dV = 0$$

$$dp + \gamma p V^{-1} dV = 0$$

$$d\left(\frac{mg}{\pi r^2}\right) + \gamma p V^{-1} dV = 0$$

$$d\left(\frac{mg}{\pi r^2}\right) + \gamma \frac{p}{V} S dx = 0$$

$$dp = -\gamma \frac{p}{V} S dx$$

$$dV = S dx$$

$$m \ddot{x} = -\gamma S \frac{p}{V} S dx = -\gamma \frac{S^2 p}{V} dx \approx -\gamma \frac{S^2 p}{V} x$$

$$\ddot{x} + \gamma \frac{S^2 p}{mV} x = 0$$

$$\frac{(2\pi)^2}{T^2} = \gamma \frac{\pi^2 r^4 p}{mV}$$

$$\boxed{\frac{4mV}{T^2 \pi r^4} = \gamma}$$