

Jméno: **Petr Červenka** Kolega: Michal Vranovský  
 Kruh: **Středa** Číslo skup.: 2  
 Měřeno: **23.3.2022** Zpracování: 16h

## 1. Pracovní úkoly

1. DÚ: Z Planckova vyzařovacího zákona odvoďte Stefan-Boltzmannův zákon a určete tvar konstanty  $\sigma$  pomocí  $c$ ,  $k$ ,  $\hbar$ .
2. Ocejchujte referenční žárovku pomocí měření odporu. Diskutujte, zda  $\alpha$  v rovnici (6) je konstanta. Výsledky zpracujte graficky. Ověřte správnost výsledků pomocí závislosti výkonu na čtvrté mocnině  $T$ . Pomocí fitu určete konstantu  $\beta$ .
3. Ověřte Stefan-Boltzmannův zákon (4), výsledky vynesete do grafu a určete konstantu  $\varepsilon$ .
4. Zjistěte teplotu žárovky připojené k neznámému zdroji (alepoň 6 měření) pomocí závislosti transmise na vlnové délce. Graficky zpracujte a teplotu získejte pomocí aritmetického průměru z fitů závislosti intenzity na vlnové délce  $I = I(\lambda)$ .

## 2. Použité přístroje a pomůcky

Pulfrichův fotometr, zdroj napětí 0 – 30 V, wolframová vlákna (dvě světelné žárovky), multimetr, ohmmetr, zdroj referenčního napětí.

## 3. Teoretický úvod

### 3.1. Vybrané vlastnosti záření

Elektromagnetické záření nese energii. Intenzita záření  $I$  je střední hodnota plošné hustoty toku výkonu záření. Průchodem záření prostředím se může měnit jeho intenzita, definujeme transmissi

$$T = \frac{I_p}{I_v}, \quad (1)$$

jako poměr intenzity záření prošlého prostředím  $I_p$  ku intenzitě záření vstupujícího do prostředí  $I_v$ .

Vztah mezi diferenciály intenzity záření (pro danou vlnovou délku  $\lambda$ )  $I_\lambda$  a vlnové délky udává Planckův vyzařovací zákon

$$dI_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left\{\frac{hc}{\lambda kT}\right\} - 1} d\lambda, \quad (2)$$

kde vystupují standartně značené konstanty – Planckova konst.  $h$ , rychl. světla  $c$ , Boltzmannova konst.  $k$ ,  $T$  je abs. teplota. Tato funkce má maximum na vlnové délce

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \quad (3)$$

kde  $b \approx 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$ . Integrací Planckova zákona přes všechny  $\lambda$  dostaneme

$$I = \sigma T^4 \quad \text{nebo s korekcí} \quad I = \varepsilon \sigma T^4, \quad (4)$$

kde  $\sigma$  je konstanta uvedena v [A](#) a  $\varepsilon$  je korekční člen. Dále platí vztah s konstantou  $\beta$

$$P = UI = \beta T^4. \quad (5)$$

### 3.2. Odpor wolframového vlákna

Odpor wolframového vlákna  $R$  lze spočítat užitím dvou (možná i více) vzorců

$$R = R_0(1 + \alpha \Delta T), \quad (6)$$

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (7)$$

Vystupují zde  $R_0$  referenční hodnota odporu,  $\Delta T$  rozdíl teplot,  $\alpha$  teplotní součinitel odporu (pro wolfram  $4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ),  $\rho$  rezistivita,  $S$  obsah průřezu vlákna,  $l$  délka vlákna. Pro rezistivitu wolframu platí (v  $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ )

$$\rho = -0,968 + 19,274 \left( \frac{T}{1000} \right) + 7,826 \left( \frac{T}{1000} \right)^2 - 1,8517 \left( \frac{T}{1000} \right)^3 + 0,2079 \left( \frac{T}{1000} \right)^4. \quad (8)$$

### 3.3. Statistika

Během výpočtů budeme muset určit chybu nepřímých měření. Pokud  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , pak pro chybu veličiny  $y$  platí

$$\sigma_y^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_{x_n}^2. \quad (9)$$

Pokud jsou jednotlivá měření zatížena chybami a chceme je zohlednit ve výsledné hodnotě veličiny potřebujeme vzorec

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i y_i}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}}, \quad p_i = \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}. \quad (10)$$

## 4. Postup měření

Jednu žárovku (referenční) z aparatury fotometru připojíme ke zdroji napětí. K žárovce připojíme paralelně ohmmetr. Změříme odpor žárovky. Ohmmetr vyměníme za voltmetr a k žárovce sériově připojíme ampérmetr. Měníme na zdroji napětí tak, aby  $UI < 50 \text{ W}$ ,  $U < 24 \text{ V}$ . Zapisujeme si hodnoty proudu a napětí v obvodu. Druhou žárovku (měřenou) připojíme ke zdroji referenčního napětí. Odstraníme matná skla a nastavíme polohu žárovek tak, že vidíme jejich vlákna v okuláru. Vratíme matná skla. Rozsvítíme žárovky. Referenční žárovka musí svítit méně. Kolečkem měřících bubnů nastavíme nějakou hodnotu transmise (zhruba 10–40) u měřené žárovky, již na buben nesaháme, ale poznamenejme si hodnotu transmise. Otáčením kolečkem u referenční žárovky hledáme hodnotu transmise, kdy jsou barvy v okuláru stejné. Hodnoty transmise, napětí a proudu si zapíšeme. Musíme dobře zvolit hodnotu transmise u měřené žárovky, abychom se nedostali mimo stupnici na referenční žárovce. Postupně měníme filtry 1–10 a hledáme stejné barvy změnou transmise  $T_{ref}$ , tu si zapíšeme.

Změníme hodnoty  $U$ ,  $I$  na referenční žárovce, aby svítila méně než měřená. Upravíme opět vhodně transmisi u měřené žárovky. Stejně jako předtím měníme filtry a hledáme stejné barvy. Měření provedeme třikrát pro případ, kdy referenční žárovka svítí méně než měřená, třikrát pro situaci, kdy svítí více.

## 5. Vypracování

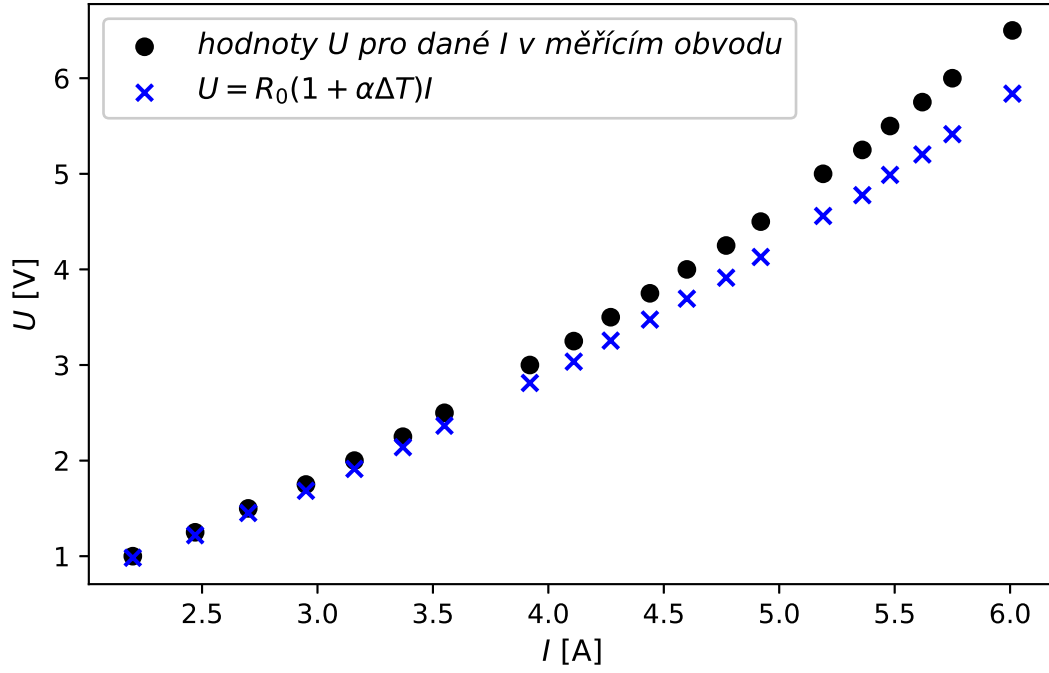
Domácí úkol byl splněn a je obsažen v A. Data z měření lze najít na <https://moodle-vyuka.cvut.cz/mod/assign/view.php?id=156618>.

### 5.1. Cejchování žárovky

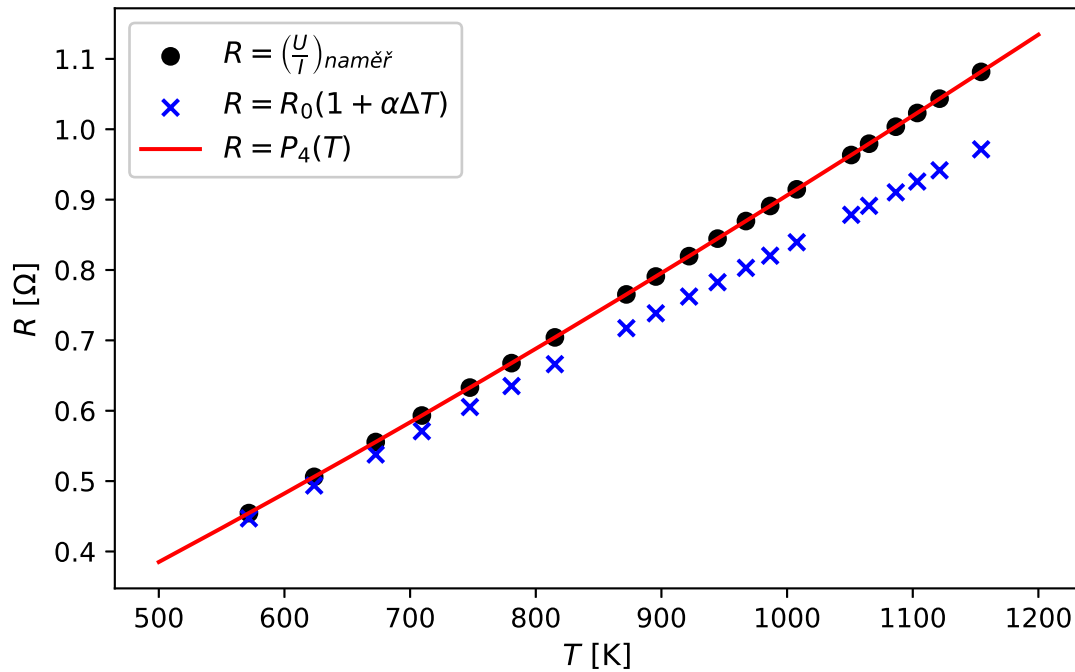
Odpor žárovky při teplotě  $T_0 = 297,25 \text{ K}$ , která byla v místnosti, je  $R_0 = 0,2 \Omega$ . Když žárovka svítí, ze vztahu  $R = \frac{U}{I}$  dopočteme odpor žárovky. Kombinací vzorců (8) a (7) určíme teplotu žárovky. Výsledky výpočtu ilustrují Obr. 1 a Obr. 2. Polynom  $P_4$  má tvar

$$P_4(T) = R_{\text{žár}} = 0,007692 \left( \frac{T}{1000} \right)^4 - 0,068510 \left( \frac{T}{1000} \right)^3 + 0,289548 \left( \frac{T}{1000} \right)^2 + 0,713103 \left( \frac{T}{1000} \right) - 0,035814, \quad (11)$$

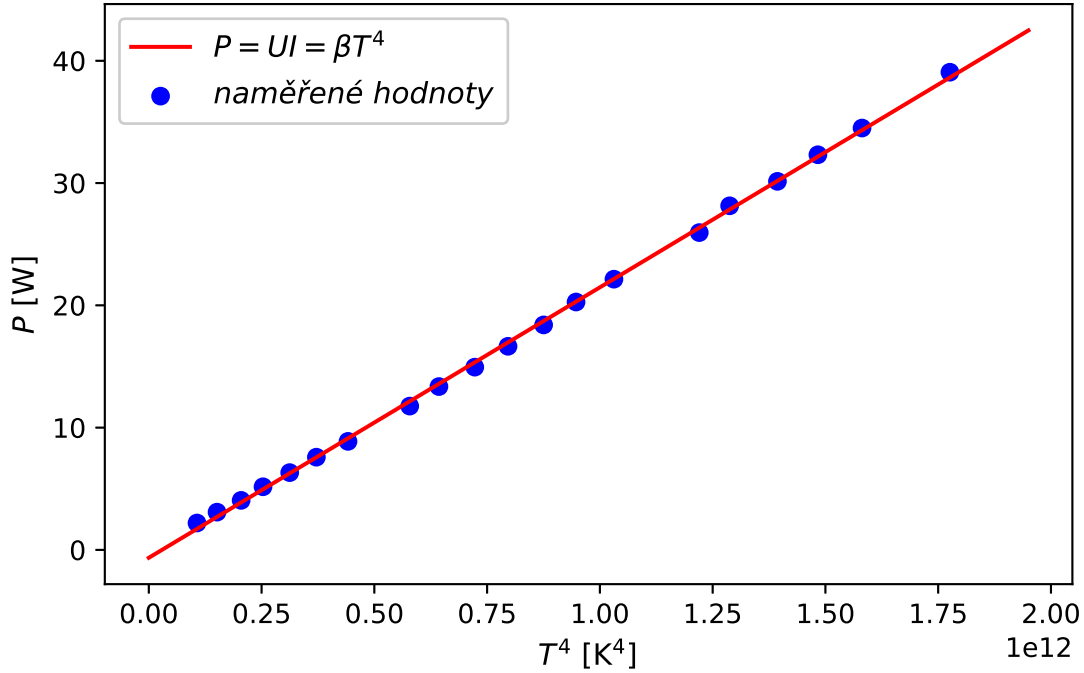
chyby koeficientů u jednotlivých mocnin (řádu  $10^{-13} \Omega$ ) jsou zanedbány. Vztah (5) je zachycen na Obr. 3 a máme rovnost pro koeficient  $\beta = (221,2 \pm 1,3) \cdot 10^{-13} \text{ W} \cdot \text{K}^{-4}$ .



Obr. 1: Graf závislosti napětí na žárovce na proudu proch. žárovkou pro dva typy závislostí. Odpor žárovky z naměřených  $U$ ,  $I$  roven  $\frac{U}{I}$  a nafitovaný polynomem čtvrtého stupně  $P_4(T)$  s předpisem (11). Druhou závislostí je vzorec (6).



Obr. 2: Graf závislosti odporu žárovky na teplotě. Analogicky jako na Obr. 1 pro naměřené hodnoty  $U$ ,  $I$  a závislost (6).



Obr. 3: Graf závislosti výkonu žárovky na čtvrté mocnině její teploty. Lineárním fitem (klasický tvar  $\beta T^4 + \zeta$ ) vychází  $\beta = (221,2 \pm 1,3) \cdot 10^{-13} \text{ W} \cdot \text{K}^{-4}$ . Koeficient  $\zeta$  pro nás není podstatný.

## 5.2. Teplota žárovky a Planckův zákon

Z definice transmise (1), Planckova zákona (2) a rovnosti prošlých intenzit, které jsme viděli v okuláru, dostaneme vztah mezi intenzitou měřené a referenční žárovky

$$I_{\text{měř}} = \frac{T_{\text{ref}}}{T_{\text{měř}}} I_{\text{ref}}. \quad (12)$$

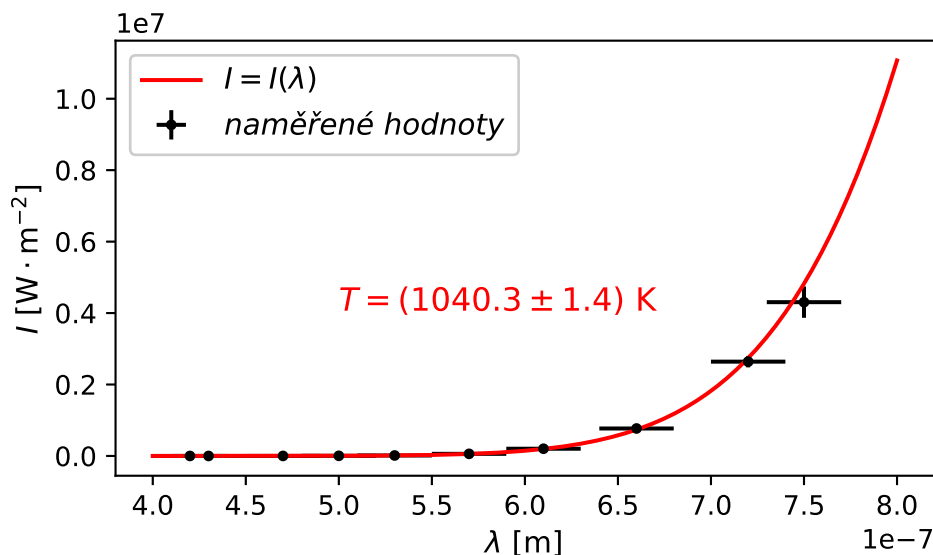
Hodnoty transmisí máme naměřené. Jelikož známe  $U$ ,  $I$  pro referenční žárovku, můžeme určit její teplotu. Fotometr nám vybíral pomocí filtrů jednotlivé vlnové délky  $\Rightarrow$  známe vlnovou délku. Můžeme dopočítat intenzitu pro danou vlnovou délku

$$I_{\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left\{\frac{hc}{\lambda kT}\right\} - 1}. \quad (13)$$

Intenzitu  $I_{\lambda \text{ měř}}$  dostaneme triviálně dle (12). Měření jsme provedli šestkrát, odtud bychom dostali šest grafů, jelikož jsou všechny naprosto stejné uvedu jen jeden, který je na Obr. 4. Použitím (10) pro fitem získané hodnoty  $T$ , které jsou uvedeny v Tab. 1, získáme výslednou teplotu měřené žárovky  $T_{\text{vysl}} = (1086,9 \pm 0,7) \text{ K}$ .

## 5.3. Ověření Stefan-Boltzmannova zákona

V kapitole 5.2 jsme si již připravili půdu pro naše výpočty. Definiční obor funkce na Obr. 4 protáhneme do větších vlnových délek, výsledek je na Obr. 5. Numerickou integrací této funkce dostaneme  $I_c$  v Tab. 1. Vyneseme závislost  $I_c$  na teplotě žárovky z Tab. 1 – graf na Obr. 6. Emisivita povrchu vlákna vychází  $\varepsilon = (0,31233 \pm 10^{-5})$ .



Obr. 4: Graf závislosti intenzity záření  $I$  měřené žárovky na dané vlnové délce  $\lambda$ . Funkce  $I(\lambda)$  má tvar (13). Žárovka má teplotu  $T = (1040,3 \pm 1,4)$  K.

$T$ [K]	$\sigma_T$ [K]	$I_c$ [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ]	$\sigma_{I_c}$ [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ]
1040,3	1,4	21079	113
1022,0	1,8	19627	128
1074.2	1,6	23954	143
1114.1	1,2	27717	120
1142.6	2,7	30663	291
1158,8	1,8	32440	202

Tab. 1: Tabulka teplot měřené žárovky  $T$  s chybou  $\sigma_T$  a celkové intenzity záření  $I_c$ . Výsledky  $T$  jsou získány fitem dat na Obr. 4 (fitů je šest, uveden je jen jeden). Hodnoty  $I_c$  jsme dostali integrací funkce na Obr. 5. Chyby  $\sigma_{I_c}$  způsobené nepřesnostmi integrace jsou řádu  $10^{-5} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Hodnoty  $\sigma_{I_c}$  jsou odhadnuty tak, že při integraci  $T \leftrightarrow (T \pm \sigma_T)$  ( $T$  zaměníme za  $T + \sigma_T$  a pak za  $T - \sigma_T$ ). Upozornění: uvedeno vše na desetiny, i když by se měly některé hodnoty zaokrouhlit jinak.

## 6. Diskuse

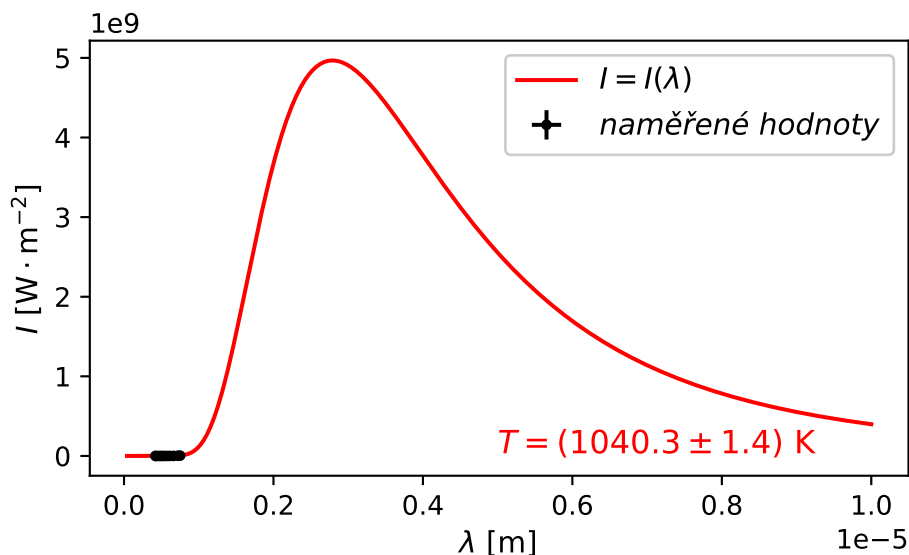
### 6.1. Cejchování žárovky

Odpověď na otázku 2, zda je  $\alpha$  konstanta je naprosto elementární. Buď je vidět z Obr. 1, že teoretická závislost odporu  $R = R_0(1 + \alpha\Delta T)$  pro  $\alpha = \text{konst.}$  neodpovídá skutečnosti. Nebo dáme do rovnosti rovnice (6), (7) pro  $\rho_0 = \frac{R_0 S}{l}$  s výsledkem

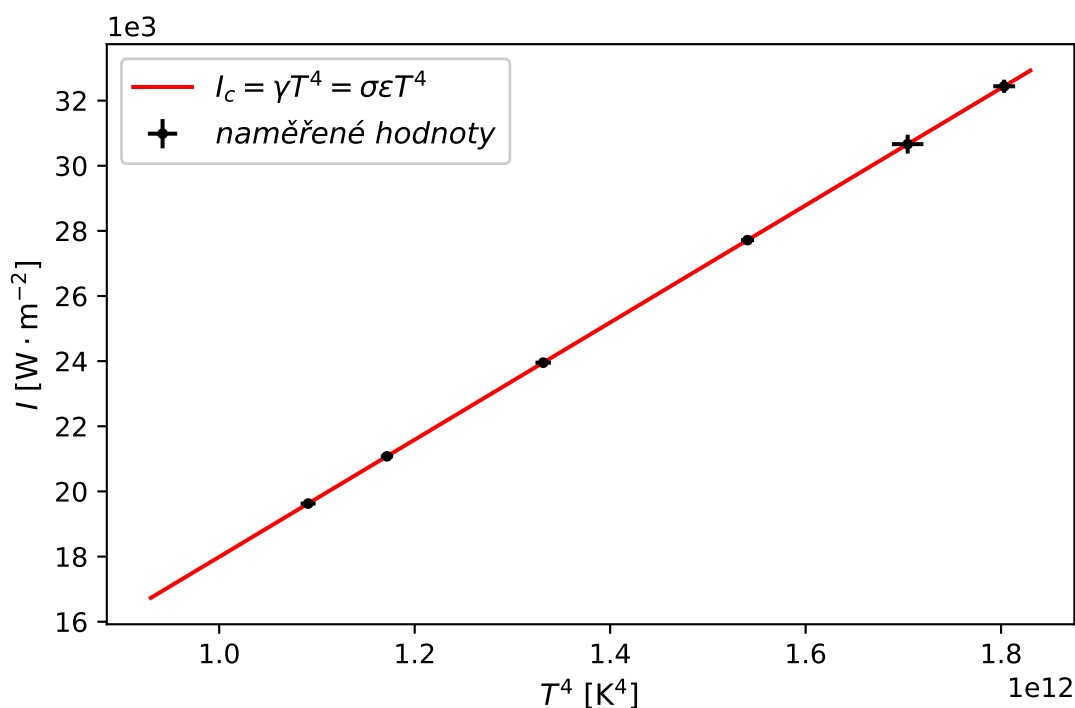
$$\alpha(T) = \frac{\rho(T) - \rho_0}{\rho_0 \Delta T}, \quad (14)$$

podíl polynomu čtvrtého stupně a polynomu prvního stupně není konstantní. Platnost vztahu (5) je z Obr. 3 naprosto evidentní.

Experimentálním zařízením je uzavřený obvod, u kterého zanedbáváme odpor drátů a kontaktů jejich připojení. Na systematickou chybu bude mít toto největší vliv. Jestli jsou dráty v praktiku z nějakého dobrého vodiče, tak lze systematickou chybu prakticky zanedbat.



Obr. 5: Graf závislosti intenzity záření  $I$  na dané vlnové délce  $\lambda$ . Referenční žárovka má teplotu  $T = (1040,3 \pm 1,4)$  K. Funkce  $I(\lambda)$  je prodloužením funkce z Obr. 4.



Obr. 6: Graf závislosti celkové intenzity záření  $I_c$  na čtvrté mocnině teploty žárovky  $T$ . Fitováno lineární funkcí obecného tvaru  $I_c(T^4) = \gamma T^4 + B$ . Podstatný koeficient  $\gamma = \sigma\epsilon = (1,79904 \pm 0,00006) \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ , kde  $\sigma \approx 5,76 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ . Poté  $\epsilon = (0,31233 \pm 10^{-5})$ .

## 6.2. Teplota žárovky

Teplotu žárovky jsme měřili v situacích, kdy referenční zářila méně než měřená. V Tab. 1 jsou první tři teploty pro situaci, kdy referenční svítí méně. Že se první tři a poslední tři hodnoty diametrálně liší, když by měly být srovnatelné, nebude náhoda. Indicii, že je zde nějaký problém, dává samotný návod [1], kde se vehementně požaduje měření: „Svítí třikrát méně, svítí třikrát více.“ Hodnoty teplot z referenční žárovky se nějakým způsobem propisují do hodnot pro měřenou žárovku. Jediná cesta, která vede mezi intenzitami záření žárovek, je vzorec (12). Nedokázal jsem přijít na to, proč tomu tak je.

### 6.3. Ověření Stefan-Boltzmannova zákona

Černé těleso je ideální model. Emisivita  $\varepsilon = (0,31233 \pm 10^{-5})$  nám říká, jak moc se wolframové vlákno žárovky liší od tohoto modelu. Emisivita vyšla menší než 1, což odpovídá předpokladům, že černé těleso je nejlepší model v otázce vyzařování a další tělesa mají vlastnosti horší. Závislost na Obr. 6 dokládá platnost Stefan-Boltzmannova zákona.

Systematické chyby budou dány hlavně tím, jak člověk vnímá barvy, které vidí v okuláru. Ptáte se proč? Interpretaci barev zajišťuje mozek, a ten máme každý jiný. My jsme v experimentu největší část systematické chyby převedli na statistickou tím, že jsme uvažovali hodnoty transmise odečítaných z bubnů s chybou.

## 7. Závěr

Prokousali jsme se až k třesniče na dortu jménem závěr. Zákon zachování lidské práce se opět potvrdil – lehké měření, obtížné zpracování. Ověřili jsme platnost Stefan-Boltzmannova zákona (Obr. 6) a určili jsme emisivitu wolframového vlákna  $\varepsilon = (0,31233 \pm 10^{-5})$ . Ocejchovali jsme si referenční žárovku, ověřili jsme závislost výkonu na čtvrté mocnině teploty a dokázali jsme, že koeficient  $\alpha$  nelze uvažovat konstantní. Pomocí referenční žárovky jsme určili teplotu neznámé žárovky jako  $T_{vysl} = (1086,9 \pm 0,7)$  K.

## 8. Použitá literatura

- [1] KOLEKTIV KF. Měření teploty wolframového vlákna. Kurz: B212-02PRA2 - Fyzikální praktikum 2 [online]. [cit. 2022-03-26]. Dostupné z: [https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435568/mod\\_resource/content/22/wolfram190213.pdf](https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435568/mod_resource/content/22/wolfram190213.pdf)

# **Příloha**

## **A. Domácí příprava**



$$\frac{dU}{I(\lambda)} = \int_0^{+\infty} \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} d\lambda = \left[ \begin{matrix} u = \frac{1}{\lambda} \\ du = -\frac{1}{\lambda^2} \end{matrix} \right] = \int_{+\infty}^0 \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{u^3}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} du =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{u^3}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} d\lambda = \left[ \begin{matrix} \lambda = u \frac{hc}{kT} \\ \frac{kT}{hc} d\lambda = du \end{matrix} \right] =$$

$$= \int_0^{+\infty} 2hc^2 \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 \frac{u^3}{e^u - 1} \frac{kT}{hc} du =$$

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská  
Fyzikální praktikum II - letní semestr  
Zabloudil

$$= 2hc^2 \left( \frac{kT}{hc} \right)^4 \int_0^{+\infty} \frac{u^3}{e^u - 1} du = \frac{2hc^2 k^4 \pi^4}{(hc)^4 15} T^4 = \sigma T^4$$

$$\frac{k^4 \pi^4}{60 h^3 c^2} = \boxed{\sigma = \frac{2k^4 \pi^4}{15 h^3 c^2}}$$

$$\textcircled{1} \int_0^{+\infty} \frac{u^3}{e^u - 1} du = \int_0^{+\infty} \frac{u^3 e^{-u}}{1 - e^{-u}} du = \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-iu} du = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u(i+1)} du =$$

$$= \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-iu} du = \int_0^{+\infty} u^3 \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-u(i+1)} du = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u(i+1)} du =$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{6}{(i+1)^4} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{6}{i^4} = \frac{6\pi^4}{90} = \frac{3}{45} \pi^4 = \frac{1}{15} \pi^4$$

$$\textcircled{2} \int_0^{+\infty} u^3 e^{-2u} du = \left[ \begin{matrix} u = \lambda^3 & u' = 3\lambda^2 \\ v' = e^{-2\lambda} & v = -\frac{e^{-2\lambda}}{2} \end{matrix} \right] = \left[ \frac{u^3 e^{-2u}}{2} \right]_0^{+\infty} + \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-2u} du =$$

$$= \left[ \begin{matrix} u = \lambda^2 & u' = 2\lambda \\ v' = e^{-2\lambda} & v = -\frac{e^{-2\lambda}}{2} \end{matrix} \right] = \frac{3}{2^2} \int_0^{+\infty} 2\lambda e^{-2\lambda} du = \left[ \begin{matrix} u = \lambda & u' = 1 \\ v' = e^{-2\lambda} & v = -\frac{e^{-2\lambda}}{2} \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{6}{2^2} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda} d\lambda = \frac{6}{2^4} \left[ -\frac{e^{-2\lambda}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{6}{2^4}$$