



Klasifikace:

Jméno: **Petr Červenka** Kolega: Michal Vranovský
Kruh: **Čtvrtek** Číslo skup.: 3
Měřeno: **25.11.2021** Zpracování: 18h

1. Pracovní úkoly

1. DÚ: Vypište diferenciální rovnice pro mechanický a elektrický harmonický oscilátor. Porovnáním členů určete, které veličiny si v obou oscilátorech odpovídají, a pokuste se vysvětlit roli jednotlivých prvků v RLC obvodu.
2. Sestavte sériový rezonanční obvod dle Obr. 1. Pozorujte vliv změny parametrů R , L a C na obvod. Určete frekvenci vlastních kmitů RLC obvodu pro hodnoty $R = 50 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$ a $C = 500 \text{ pF}$. Porovnejte s předpokládanou hodnotou získanou z Thompsonova vzorce (2).
3. Zobrazte proudovou rezonanční křivku na osciloskopu a slovně popište její změny při zasouvání jádra do cívky. Na základě toho odhadněte magnetický charakter jádra.
4. Proměřte proudovou rezonanční křivku v závislosti na frekvenci. Měření proveďte dvakrát: pro vzduchovou cívku a cívku s jádrem. Znázorněte obě rezonanční křivky do společného grafu a fitováním stanovte činitele jakosti obou rezonančních obvodů. Na základě toho určete indukčnost cívky s jádrem.
5. Určete kapacitu neznámého kondenzátoru, o němž víte, že má kapacitu menší, než je maximální hodnota kapacity kondenzátoru Tesla.

2. Použité přístroje a pomůcky

Frekvenční generátor GW INSTEK AFG-2025, osciloskop GoldStar, bezkontaktní ampérmetr TEK CT-1 (5 mV/mA), odporová dekáda CMT R1-1000 (1 Ω – 11 M Ω), vzduchová cívka PHYWE (1 mH, 0,4 m Ω), jádro cívky, ladící kapacitní normál Tesla (100 – 1100 pF), kondenzátor o neznámé kapacita, koaxiální kabely, spojovací vodiče.

3. Teoretický úvod

3.1. Sériový RLC obvod nebuzený

Sériovým zapojením cívky, odporu a kondenzátoru vznikne RLC obvod, jehož schéma je na Obr. 1. Proud v obvodu vybudíme krátkým impulsem a zkoumáme, co se bude dít. Matematicky je systém popsán stejně jako harmonický oscilátor. Platí

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0, \quad (1)$$

odtud ihned dostáváme vztah pro vlastní úhlovou frekvenci kmitů ω_0 a Thomsonův vztah

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (2)$$

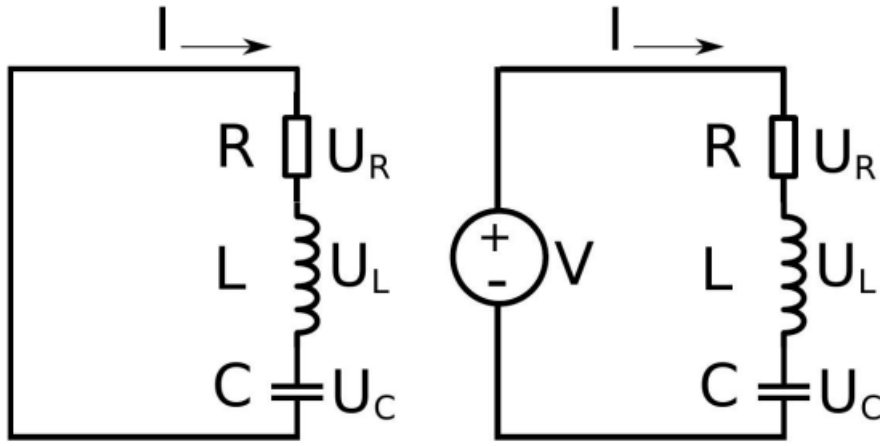
Pro průběh proudu platí

$$I(t) = I_0 \exp(-\delta t) \sin(\omega t + \varphi_0), \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2. \quad (3)$$

3.2. Vynucené kmity

Připojením zdroje harmonického napětí k RLC obvodu na Obr. 1 vybudíme kmitání proudu, který bude kmitat s úhlovou frekvencí zdroje napětí tj.

$$I(t) = I_0 \cos(\Omega t + \varphi). \quad (4)$$



Obr. 1: Schéma RLC obvodu pro volné kmity (vlevo) a pro buzené kmity (vpravo). Převzato z [1].

3.3. Impedance

Pro obvody, ve kterých vystupují parametry L a C , zavádíme pojem impedance ("komplexní odpor") definovaný

$$Z = R + iX = R + i(X_L - X_C) = R + i(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}), \quad (5)$$

kde X nazýváme reaktance, X_L indukance a X_C kapacitance. Dále platí

$$U(t) = ZI(t), \quad (6)$$

odkud vidíme, že imaginární část reaktance nám vytváří pouze fázový posun proudu a napětí. Bude-li reaktance nulová, bude nulový fázový posun proudu a napětí, což implikuje maximální elektrický výkon v obvodu. Z rovnosti $X_L = X_C$ dostaneme vztahy (2). Rezonanční frekvence je tedy rovna vlastní frekvenci RLC obvodu.

3.4. Činitel jakosti

Činitel jakosti je bezrozměrná veličina, která vyjadřuje kvalitu oscilátoru. Ideální oscilátor by měl být vybuzen pouze zdroji, které kmitají na vlastní úhlové frekvenci oscilátoru ω_0 . Dále by amplituda kmitů oscilátoru měla dosahovat nekonečných hodnot.

Pro činitel jakosti Q harmonického oscilátoru platí vztah (převzato z [2])

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}. \quad (7)$$

3.5. Rezonanční křivka

Z [1] platí pro amplitudu proudu v závislosti na frekvenci zdroje vztah

$$I_0(\Omega) = \frac{I_m}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega_0}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega_0})^2}}, \quad (8)$$

kde vztahy $\omega_0 = 2\pi f_0$ a $\Omega = 2\pi f$ můžeme přejít k frekvencím. Hledáme-li Ω , kdy má rezonanční křivka maximum, nastává pro

$$\Omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2. \quad (9)$$

Pokud budeme držet Ω , R , C konstantní, pak platí (s využitím (7))

$$Q \propto \sqrt{L}. \quad (10)$$

Větší a užší peak rezonanční křivky odpovídá větší hodnotě činitele jakosti, který je uměrný odmocnině z indukčnosti.

3.6. Určení neznámé kapacity

RLC obvod je v rezonanci na frekvenci f_0 . Kapacitu C můžeme spojitě měnit na proměnném kondenzátoru. Připojením neznámého kondenzátoru dostaneme obvod z rezonance. Změníme kapacitu na proměnném kondenzátoru tak, aby byl obvod v rezonanci. Pro neznámou kapacitu C_x platí

$$C_x = |C_1 - C_2|, \quad (11)$$

kde C_1, C_2 jsou kapacity na proměnném kondenzátoru po a před připojením neznámého kondenzátoru.

3.7. Statistika

Během výpočtů budeme muset určit chybu nepřímých měření. Pokud $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, pak pro chybu veličiny y platí

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_{x_n}^2. \quad (12)$$

Pokud jsou jednotlivá měření zatížena chybami a chceme je zohlednit ve výsledné hodnotě veličiny potřebujeme vzorec

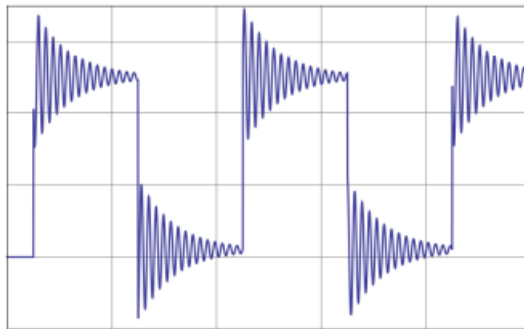
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i y_i}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}}, \quad p_i = \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}. \quad (13)$$

4. Postup měření

Nejdříve jsme sestavili RLC obvod. Sériově jsme spojili odporovou dekádu, cívku a kondenzátor. K frekvenčnímu generátoru jsme pomocí koaxiálního kabelu připojili ampérmetr, ten jsme poté připojili k odporové dekádě. Druhý konec koaxiálního kabelu jsme připojili ke kondenzátoru. Koaxiálním kabelem jsme propojili ampérmetr a kanál 2 osciloskopu. Ke kanálu 1 jsme paralelně připojili kondenzátor.

4.1. Určení vlastní frekvence RLC obvodu

Nastavili jsme kapacitu 500 pF na kondenzátoru. Na odporové dekádě byl nulový odpor. Frekvenční generátor jsme nastavili do režimu obdélníkových pulzů s frekvencí 1 kHz. Přepnuli jsme osciloskop do režimu "Ch 1". Vyladili jsme osciloskop tak, abychom viděli tlumené sinusovky, které byly vázány na obdélníkové pulzy viz. Obr. 2. Pomocí zaměřovacích křížů na displeji osciloskopu jsme odečetli vzdálenost (periodu) dvou maxim, kterou jsme přepočítali na frekvenci. Měření jsme opakovali desetkrát.



Obr. 2: Obrázek na displeji osciloskopu při správném naladění přístroje. Posíláme obdélníkové pulzy a obvod reaguje tlumenými kmity. Převzato z [1].

4.2. Rezonance proudu se vzduchovou cívkou

Změnili jsme kanál osciloskopu na "Ch 2". Nastavili jsme generátor do módu sinusových pulzů. Měnili jsme frekvenci generovaných pulzů (v okolí vlastní frekvence RLC obvodu). Pomocí kurzorů jsme změřili vzdálenost (na obrazovce) mezi maximem a minimem sinusových vln. Ve skutečnosti jsme změřili dvojnásobek napětí v obvodu a to jsme si zapsali. Provedli jsme 20 měření.

4.3. Rezonance proudu s cívkou na jádře

Zasunuli jsme jádro do cívky. Amplituda sinusových vln se zmenšila. Změnili jsme kapacitu kondenzátoru tak, aby byl obvod v rezonanci na vlastní frekvenci. Analogicky jako v 4.2 jsme měnili frekvenci zdroje a určovali napětí.

4.4. Určení neznámé kapacity

Nastavili jsme nějakou kapacitu na kondenzátoru, kterou jsme si zapsali. Obvod jsme vyladili do rezonance změnou frekvence na frekvenčním generátoru. Ke kondenzátoru jsme paralelně připojili neznámý kondenzátor. Obvod jsme vyladili do rezonance změnou kapacity na normálu Tesla, kapacitu jsme si zapsali. Neznámou kapacitu spočítáme jako absolutní hodnotu rozdílu těchto hodnot.

5. Vypracování

Základními parametry obvodu pro naše měření jsou $R = 50 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$ a $C = 500 \text{ pF}$, pokud není řečeno jinak.

5.1. Určení vlastní frekvence a změna parametrů v obvodu

Na osciloskopu jsme viděli průběh funkce tvaru (3). Chceme získat ω_0 . Koeficient útlumu je $\delta = \frac{R}{2L} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ základní parametry. Vlastní úhlová frekvence je dle (2) $\omega_0 = 1,414 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. My jsme ve skutečnosti měřili ω , ovšem koeficient δ můžeme pro základní parametry zanedbat a dostaneme $\omega = \omega_0$. Naměřená data vlastních frekvencí jsou zpracována do Tab. 1.

Výsledná vlastní frekvence RLC obvodu je $f_0 = (209 \pm 1) \text{ kHz}$.

Pokud jsme měnili hodnotu odporu R , kmity byly více tlumené a jejich amplituda byla menší. Změnou kapacity C jsme měnili amplitudu (ladění obvodu) kmitů, měnila se i frekvence kmitů (zřejmé z (2)). Změnu parametru L jsme provedli zasouváním jádra. Docházelo ke stejným změnám jako u kondenzátoru.

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_0 \text{ [kHz]}$	217,4	211,9	204,9	208,3	208,3	210,1	208,3	208,3	206,6	210,1

Tab. 1: Tabulka hodnot vlastních frekvencí RLC obvodu.

5.2. Rezonance RLC obvodu a magnetický charakter jádra

Při zasunutí jádra do cívky jsme obvod museli vyladit zpět do rezonance, což jsme provedli změnou kapacity na $C_s = 810 \text{ pF}$. Na osciloskopu jsme odečítali napětí. Převodní vztah mezi proudem a napětím je: 5 mV odpovídá 1 mA . Naměřená data jsou v Tab. 4. Rezonanční křivky pro RLC obvod s cívkou bez jádra a s jádrem jsou na Obr. 3. Jejich parametry jsou rozebrány v Tab. 2. Vidíme, že rezonanční frekvence pro RLC obvod s cívkou bez jádra je $f_0 = (207 \pm 0,2) \text{ kHz}$ a pro obvod s cívkou s jádrem je $f_0 = (208 \pm 1) \text{ kHz}$.

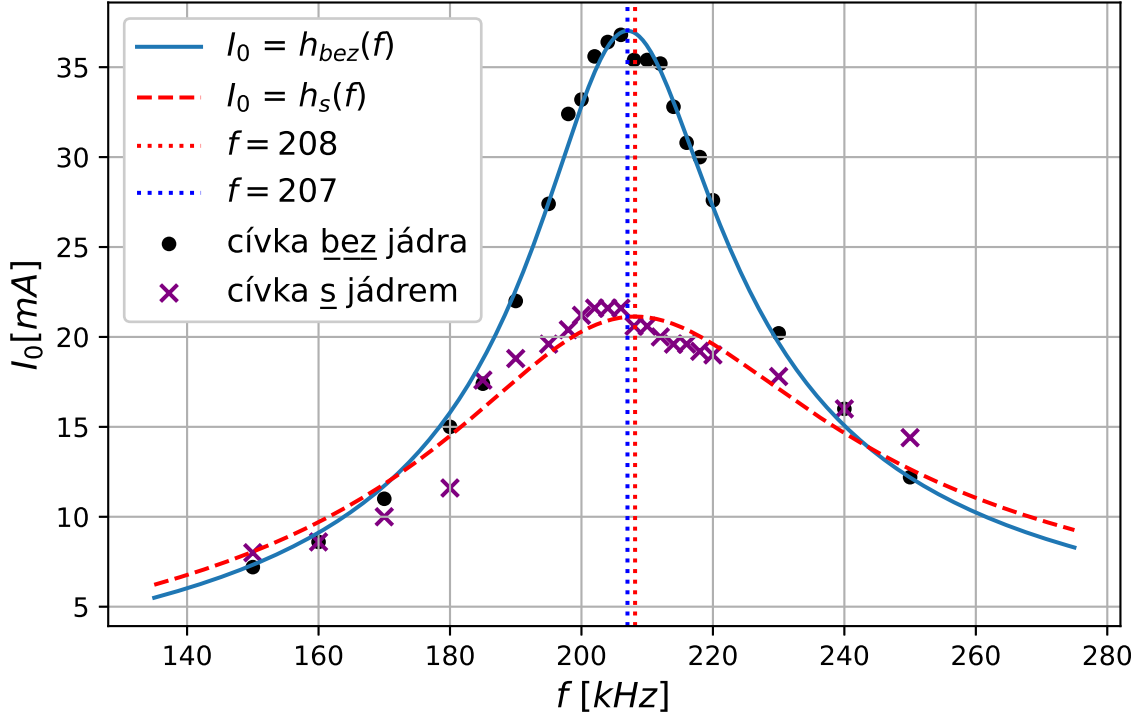
Určili jsme činitele jakosti pro RLC obvody s různými parametry. Podílem dvou činitelů jakosti, které jsou definovány vztahem (7), dostaneme

$$L_s = \frac{Q_s^2 C_s L}{C Q_{bez}^2}. \quad (14)$$

Hodnoty veličin s indexem s odpovídají obvodu s cívkou s jádrem. Chybu L_s určíme pomocí vzorce (12). Hodnoty kapacit a hodnotu indukčnosti samotné cívky beru konstantní. Dostáváme výsledek pro indukčnost cívky s jádrem $L_s = (360 \pm 60) \mu\text{H}$, což je menší než $L = 1 \text{ mH}$.

5.3. Určení neznámé kapacity

Vyjdeme ze vzorce (11). Naměřená data jsou v Tab. 3. Chyba měřicího přístroje byla $\sigma_{př} = 0,5 \text{ pF}$. Zpracováním dat dostáváme kapacitu neznámého kondenzátoru $C_x = (387 \pm 5) \text{ pF}$.



Obr. 3: Závislost proudu I_0 v RLC obvodu na frekvenci f (sinusového průběhu napětí) frekvenčního zdroje. Fitovací funkce h_{bez} odpovídá případu cívky bez jádra, h_s odpovídá cívce s jádrem. Fitovací funkce mají tvar (8). Parametry fitovacích funkcí jsou v Tab. 2.

#	f_0 [kHz]	I_m [mA]	Q [1]	σ_{f_0} [kHz]	σ_{I_m} [mA]	σ_Q [1]
h_s	208,0	21,1	3,6	1,0	0,4	0,3
h_{bez}	207,0	37,0	7,6	0,2	0,3	0,2

Tab. 2: Tabulka parametrů fitovacích funkcí h_s (s jádrem) a h_{bez} (bez jádra) z Obr. 3. I_m je maximální hodnota proudu, který je dodán frekvenčním generátorem. Dále zde vystupuje vlastní úhlová frekvence f_0 , činitel jakosti Q a veličiny σ jsou jejich chyby.

#	C_1 [pF]	C_2 [pF]	$C_1 - C_2$ [pF]
1	700	297	403
2	800	419	381
3	750	377	373
4	900	510	390
5	1000	610	390

Tab. 3: Tabulka kapacit kondenzátoru C_1 před připojením neznámého kondenzátoru a C_2 po připojení neznámého kondenzátoru (a vyladění obvodu do rezonance).

6. Diskuse

6.1. Vlastní frekvence RLC obvodu se základními parametry

Vyšlo nám $f_0 = (209 \pm 1)$ kHz. Z Thomsonova vzorce vychází $f_0 = 225$ kHz. Do měření nám lezly vlivy (propojení součástek, mechanismus uvnitř osciloskopu atd.), které zvyšovaly celkový odpor obvodu. Dejme tomu, že by se odpor zvýšil o 50 Ω . Dosazením do vztahu pro ω v (3), vidíme, že změna neovlivní hodnotu f_0 .

Problém by mohl být v tom, že cívka resp. kondenzátor nejsou jediné prvky v obvodu, které přispívají k hodnotě

L resp. C . Zvětšením těchto parametrů bude klesat námi měřená ω i vypočítaná f_0 . Odhaduji chybu $\sigma_{sys1} = 5$ kHz.

Proud v obvodu kmitá velice rychle ($\omega_0 = 2\pi f_0 \approx 10^7$ rad \cdot s $^{-1}$). Ve vodičích vznikne skin efekt. Proud je vytlačován ze středu vodiče k povrchu. Průřez vodiče, kterým protéká proud, se zmenší a odpor vodiče se zvětší. Z [3] bude proud soustředěn ve vrstvě tloušťky $\Delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}$, kde ω je úhlová frekvence procházejícího proudu, μ je permeabilita vodiče a σ je konduktivita vodiče. Budeme uvažovat měděný vodič kruhového průřezu. Z [4] je $\mu_{m\acute{e}d} \approx 10^{-6}$ N \cdot A $^{-2}$. Platí následující odhad

$$R = \frac{l}{\pi\sigma\Delta^2} = fl\mu \approx 0,1 \Omega, \quad (15)$$

kde $l = 0,5$ m je délka vodiče. Vidíme, že skin efekt nebude mít vliv na experiment.

Z osciloskopu jsme odečítali pečlivě vždy pro dva po sobě jdoucí extrémy. Asistent doporučoval zkusit i odečítání při průchodu nulovou výchylkou, ale bylo těžké nastavit osciloskop tak, aby proud opravdu kmital kolem nulové pozice, proto jsme tento krok neprovedli. Při odčítání z osciloskopu mohla vzniknout chyba max. $\sigma_{sys2} = 1$ kHz.

6.2. Rezonanční křivky

Rozebereme Obr. 3. Podle očekávání (plyne ze vzorce (9)) se vlastní frekvence v obvodech s cívkou bez jádra a s cívkou na jádře liší, ale ne o moc. Ovšem vlastní frekvence RLC obvodu cívky s jádrem by měla být menší (indukčnost cívky s jádrem je menší, jak uvidíme později) než vlastní frekvence obvodu s cívkou bez jádra, což v našem případě neplatí. Je to dáno tím, že výsledky jsou dost závislé na přesnosti fitu a frekvence si jsou velice blízké. Jen od oka je vidět, že fit dat pro funkci h_{bez} je mnohem přesnější než pro h_s . U druhé zmíněné jsou data více rozházená. Drobné nepřesnosti v datech poté program nafituje jinak a nám se to promítne do výsledku.

I při tomto úkolu se projevila neideálnost celého obvodu, a proto jsou frekvence menší, než teorie předpovídá. Přesto výsledky velice dobře korespondují s výsledkem, který jsme vypočetli v předchozím úkolu v 5.1.

Činitel jakosti je pro obvod s cívkou na jádře menší než pro obvod se vzduchovou cívkou. Ideálnější obvod je tedy druhý jmenovaný.

6.3. Magnetický charakter jádra

Při zasouvání jádra do cívky se amplituda kmitů snížila. Indukčnost cívky na jádře vyšla $L_s = (360 \pm 60) \mu\text{H}$. Magnetické jádro snižuje indukčnost, tudíž je kov, ze kterého je jádro vyrobeno, diamagnetický. Bude se jednat nejspíše o nějaký speciálnější kov. Předpokládám, že jeho relativní permeabilita bude menší než 0,9, ovšem nemohl jsem najít kov, který by tuto podmínku splnil. Abychom určili charakter jádra, nemuseli jsme ho ani počítat. Stačil by nám vztah (10) a tvar peaků na Obr. 3.

6.4. Neznámá kapacita

U experimentu záleželo hlavně na dokonalém vyladění obvodu do rezonance. Ručně toto nelze udělat naprosto přesně. Odtud vzniká chyba maximální chyba způsobená nedokonalým vyladěním. Se započítáním nepřesnosti kondenzátorového normálu (0,5 pF) máme $\sigma_1 = 5$ pF. Jelikož děláme rozdíly dvou veličin pro stejný obvod, vyruší se nežádoucí vlivy, které jsme diskutovali dříve.

7. Závěr

Určili jsme diamagnetický charakter kovového jádra cívky. Porovnali jsme rezonanční křivky na Obr. 3.

Rozborem rezonančních křivek jsme dospěli k hodnotám **vlastní frekvence** a **činitele jakosti** pro cívku bez jádra:

$$f_0 = (207 \pm 0,2 \text{ (stat.)} \pm 6 \text{ (sys.)}) \text{ kHz},$$

$$Q = (7,6 \pm 0,2).$$

Rozborem rezonančních křivek jsme dospěli k hodnotám **vlastní frekvence** a **činitele jakosti** pro cívku s jádrem:

$$f_0 = (208 \pm 1 \text{ (stat.)} \pm 6 \text{ (sys.)}) \text{ kHz},$$

$$Q = (3,6 \pm 0,3).$$

Opakovaným měřením **frekvence** sinusových vln na osciloskopu jsme získali:

$$f_0 = (209 \pm 1 \text{ (stat.)} \pm 6 \text{ (sys.)}) \text{ kHz}.$$

Hodnota **indukčnosti** cívky na jádře je:

$$L_s = (360 \pm 60) \mu\text{H}.$$

Hodnota **kapacity** neznámého kondenzátoru je:
 $Cx = (387 \pm 5 \text{ (stat.)} \pm 5 \text{ (sys.)}) \text{ pF.}$

8. Použitá literatura

- [1] Kolektiv KF. Návod: Úloha 11 – Rezonanční obvody [Online]. [cit. 2021-11-27]. Dostupné z: https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435412/mod_resource/content/9/N%C3%A1vod-Rezonan%C4%8Dn%C3%AD-obvody-181119.pdf
- [2] ŠTOLL, Ivan. Mechanika. Vyd. 3. V Praze: České vysoké učení technické, 2010. ISBN 978-80-01-04554-1.
- [3] ŠTOLL, Ivan. Elektřina a magnetismus. Vyd. 2. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2003. ISBN 80-010-2693-0.
- [4] Permeability (electromagnetism). Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2021-11-27]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Permeabilita>

Příloha

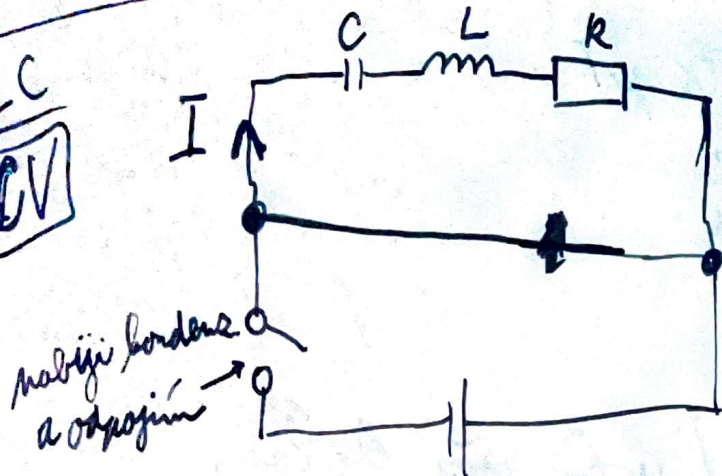
A. Tabulky

f [kHz]	U_{bez} [V]	U_s [V]
150	0,036	0,040
160	0,043	0,043
170	0,055	0,050
180	0,075	0,058
185	0,087	0,088
190	0,110	0,094
195	0,137	0,098
198	0,162	0,102
200	0,166	0,106
202	0,178	0,108
204	0,182	0,108
206	0,184	0,108
208	0,177	0,103
210	0,177	0,103
212	0,176	0,100
214	0,164	0,098
216	0,154	0,098
218	0,150	0,096
220	0,138	0,095
230	0,101	0,089
240	0,080	0,080
250	0,061	0,072

Tab. 4: Tabulka naměřených hodnot napětí v závislosti na frekvenci generátoru f . Cívce s jádrem odpovídají hodnoty U_s , cívce bez jádru U_{bez} .

B. Domácí příprava

RLC
DCV



kond.: $Q = CU_C \rightarrow \frac{dQ}{dt} = I = C \frac{dU}{dt}$

cívka: $U_L = L \dot{I}$

odpor: $U_R = RI$

$$U_L + U_C + U_R = 0 \quad / \frac{d}{dt}$$

$$L \ddot{I} + \frac{I}{C} + R \dot{I} = 0$$

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \dot{I} + \frac{1}{LC} I = 0$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$2\delta = \frac{R}{L}$$

- ① cívka, kondenzátor \rightarrow ~~premena~~ ^{premena} energie el. pole na energiu mag. pole \Rightarrow kmitanie (obrátení)
- ② odpor \rightarrow straty energie \Rightarrow útlum (ohrev drátu)