

Jméno: **Petr Červenka** Kolega: Michal Vranovský
Kruh: **Středa** Číslo skup.: 2
Měřeno: **9.3.2021** Zpracování: 10h

Klasifikace:

1. Pracovní úkoly

1. DÚ: Odvoďte vztah (5), spočtěte β pro $U = 100$ V (dosazujte energii v jednotkách keV!) a diskutujte, zda je korektní považovat elektrony v této úloze za nerelativistické.
2. DÚ: Odvoďte vztahy (7) a (9) (stačí ponechat v domácí přípravě).
3. Změřte měrný náboj elektronu působením podélného magnetického pole. Měření proveďte pro různé hodnoty urychlovacího napětí U v rozmezí 750 až 1250 V. Pomocné napětí na A_1 (Obr. 3) volte 140 V. Hodnotu $\frac{e}{m_e}$ určete fitováním závislosti (7) s errorbary.
4. Změřte měrný náboj elektronu působením kolmého magnetického pole. Naměřte několik dvojic urychlovacích napětí U (v rozsahu do 300 V) a magnetizačního proudu I (v rozsahu do 4 A). Hodnotu $\frac{e}{m_e}$ určete fitováním závislosti (9) s errorbary.

2. Použité přístroje a pomůcky

Regulovatelné zdroje napětí: 300 V a 2 kV, regulovatelný zdroj proudu 10 A, zdroj střídavého napětí 6,3 V, ampérmetr, voltmetr, obrazovka se solenoidem, katodová trubice, Helmholtzovy cívky, aparatura na měření průměru elektronového svazku s dřevěnými posuvnými měřidly a zástěnou, tyčový a podkovovitý permanentní magnet.

3. Teoretický úvod

3.1. Nabitá částice v elmg. poli

Částice nesoucí náboj q vletí rychlostí \vec{v} do elmg. pole, které je popsáno magnetickou indukcí \vec{B} a intenzitou el. pole \vec{E} . Začne na ni působit Lorentzova síla

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1)$$

Rychlost částice lze rozložit do směru kolmého na a rovnoběžného s \vec{B} , odtud platí pro její velikost

$$v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2. \quad (2)$$

Speciální případ je $E = 0$ V · m⁻¹. Lze odvodit (viz. [1]), že trajektorie částice bude záviset na úhlu mezi \vec{v} a \vec{B} . Hmotnost elektronu značí m_e a elementární náboj e .

1. $\vec{v} \cdot \vec{B} = 0$, částice se bude pohybovat po kružnici. Pro její poloměr platí

$$r = \frac{v}{\Omega} = \frac{vm_e}{Be}. \quad (3)$$

2. $\vec{v} \times \vec{B} = 0$, částice se bude pohybovat stále rovně (mg. pole na ni nebude mít vliv).

3. $\vec{v} \cdot \vec{B} \in (0; 1)$, částice se bude pohybovat po šroubovici. Pro stoupání šroubovice platí

$$s = vT = \frac{2\pi v}{B} = \frac{2\pi vm_e}{Be}. \quad (4)$$

3.2. Urychlení e^-

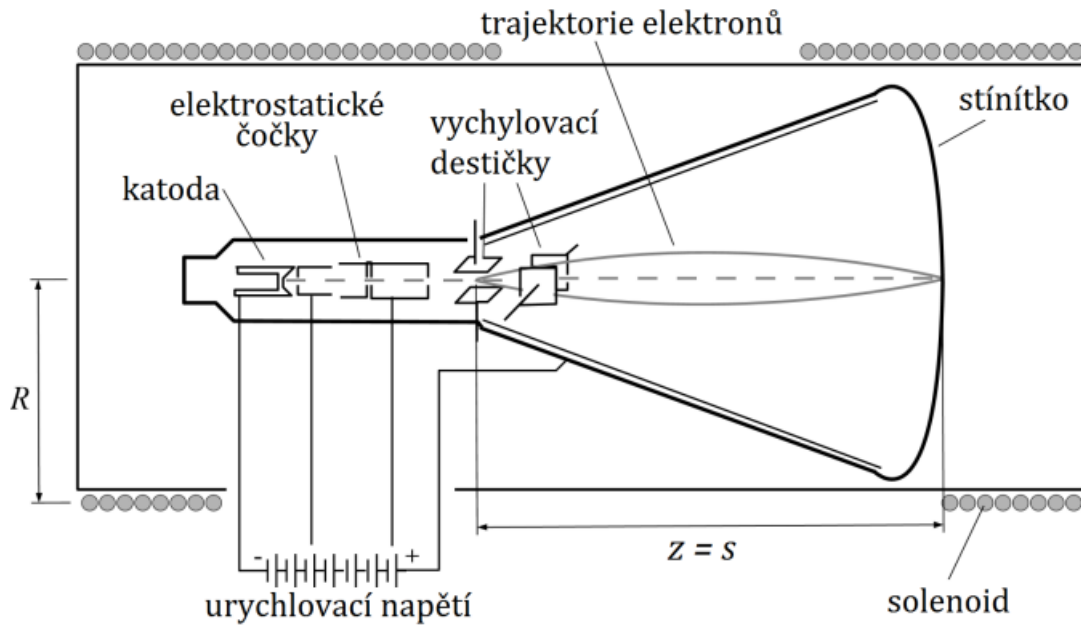
Elektrony jsou urychleny elektrickým polem mezi dvěma body s napětím U . Ze zákona zachování energie se mění energie el. pole na kinetickou energii elektronů (odvozeno v A). Velikost rychlosti je

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e c^2}}. \quad (5)$$

3.3. Použitá experimentální zařízení

3.3.1. Obrazovka se solenoidem

Její princip je založen na generaci elektronového paprsku, urychlení elektronů, ovlivnění paprsku mag. polem cívky a detekce paprsku na obrazovce. Toto zařízení je na Obr. 1.



Obr. 1: Schéma vnitřku obrazovky se solenoidem. Převzato z [1].

Generaci elektronů zajišťuje rozžhavená katoda. Poté jsou elektrony předurychleny a zaostřeny elektrostatickými čočkami. Následně přijdou do prostoru, kde probíhá hlavní urychlování a jsou luminofovy detekovány na obrazovce. Proudem, který prochází cívku, můžeme měnit B , a tudíž lze měnit počet závitů šroubovice mezi obrazovkou a výstupem urychlování elektronů (výstup elektron. děla). Budeme požadovat, aby vzdálenost mezi el. dělem a obrazovkou z byla právě rovna stoupání šroubovice s .

Magnetická indukce uvnitř cívky má tvar

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}, \quad (6)$$

kde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Wb} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ je permeabilita vakua, N je počet závitů cívky, I je proud procházející cívku a l je délka cívky. Zkombinováním (4) pro $s = z$, (5) a (6) dostaneme závislost mezi urychl. napětím a proudem v cívce

$$U(I^2) = \frac{e}{8m_e} \cdot \left(\frac{z\mu_0 N}{\pi l} \right)^2 \cdot I^2. \quad (7)$$

3.4. Helmholtzovy cívky a katodová trubice

Zařízení je zachyceno na Obr. 2. Helmholtzovy cívky mají oproti jejich tloušťce velký poloměr. Magnetické pole je mezi cívkami přibližně homogení a pro magnetickou indukci platí (převzato z [1])

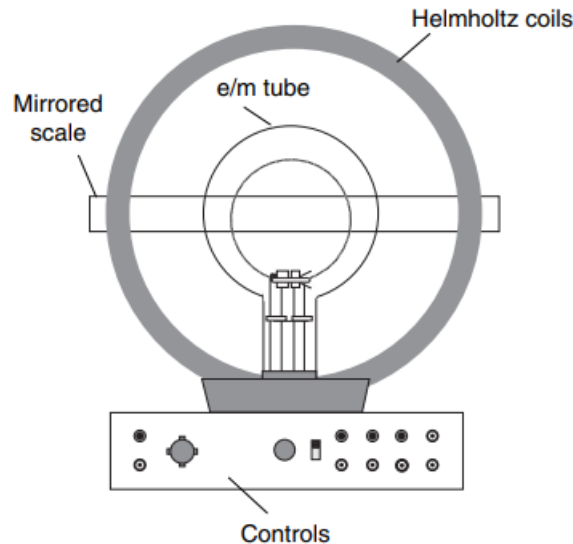
$$B = \frac{8\mu_0 N I}{5\sqrt{5}R}, \quad (8)$$

kde R je poloměr cívek.

Elektrony se uvolňují z rozžhavené katody, jsou urychleny a vletí přímo do baňky. Skleněná baňka obsahuje zředěný plyn, který elektrony ionizují a je vidět jejich trajektorie uvnitř baňky. Pomocí Helmholtzových cívek umístěných souměrně po stranách baňky je zakřivena trajektorie elektronů.

Zkombinujeme (3), (5) a (8) s výsledkem

$$U(I^2) = \frac{e}{m_e} \frac{8}{125} \left(\frac{d\mu_0 N}{R} \right)^2 \cdot I^2. \quad (9)$$



Obr. 2: Schéma katodové trubice a Helmholtzových cívek. Převzato z [3].

3.5. Statistika

Během výpočtů budeme muset určit chybu nepřímých měření. Pokud $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, pak pro chybu veličiny y platí

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_{x_n}^2. \quad (10)$$

Pokud jsou jednotlivá měření zatížena chybami a chceme je zohlednit ve výsledné hodnotě veličiny potřebujeme vzorec

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i y_i}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}}, \quad p_i = \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}. \quad (11)$$

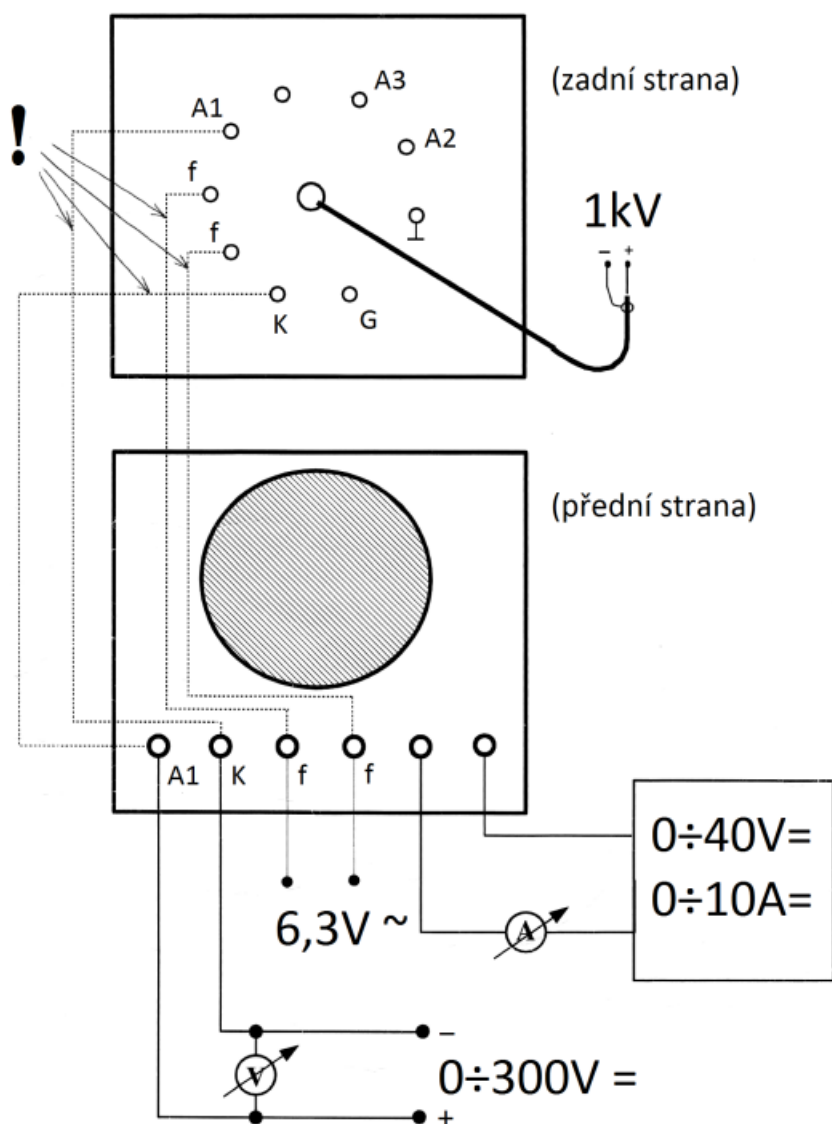
4. Postup měření

4.1. Podélné mag. pole – obrazovka s cívkou

Zapojili jsme aparaturu obrazovky s cívkou dle Obr. 3. Zapnuli jsme všechny zdroje napětí, ke kterým jsme připojili dráty (tím jsme zapnuli žhavení katody). Nastavili jsme napětí na A_1 na 140 V. Magnetizační proud, který ukazoval ampérmetr, jsme nastavili nulový. Na vysokonapěťovém zdroji připojeném zezadu aparatury jsme nastavili napětí 750 V. Zvyšovali jsme magnetizační proud a sledovali jsme značku, kterou zanechával elektron. paprsek, na obrazovce. Při tom jsme se snažili odhadnout, kdy má šroubovice (trajektorie e^-) uvnitř aparatury právě polovinu závitu. Magnetizační proud jsme si zapsali a nastavili jsme ho nulový. Zvýšili jsme napětí o 50 V a stejný postup jsme opakovali dokud jsme neodměřili proud pro 1250 V.

4.2. Příčné magnetické pole - katodová trubice a Helmholtzovy cívky

Zapojili jsme aparaturu dle Obr. 4. Zapnuli jsme zdroje napětí. Nastavili jsme napětí na zdroji s 300 V tak, abychom v baňce pozorovali modrý proud elektronů. Zvýšením magnetizačního proudu jsme elektrony dostali na kruhovou dráhu. Změřili jsme průměr kružnice (odtud referenční průměr). Následně jsme změnili napětí. Změnil se průměr kružnice. Změnou magnetizačního proudu jsme elektrony dostali zpět na kruhovou dráhu s referenčním průměrem. Takto jsme postupovali dokud jsme neobdrželi deset dvojic proudů a napětí. Nakonec jsme si zkusili, co udělá s kružnicí přiložený magnet.



Obr. 3: Schéma zapojení obrazovky se solenoidem. Čárkované čáry značí propojení uvnitř přístroje. Převzato z [1].

5. Vypracování

5.1. Elektrony letící v podélném mag. poli – obrazovka s cívkou

Data z měření byla vynesena do grafu na Obr. 5. Koeficient A fitovací funkce je roven koeficientu před I^2 v (7). Odtud vyjádříme hledanou hodnotu

$$\frac{e}{m_e} = 8A \left(\frac{\pi l}{z \mu_0 N} \right)^2. \quad (12)$$

Dosazením hodnot $l = 0,381$ m, $z = 0,498$ m¹, $N = 174$, $A = 22$ V · A⁻² a $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Wb · A⁻¹ · m⁻¹ a použitím vztahů (10) vychází měrný náboj elektronu $e_m = (2,1 \pm 0,1) \cdot 10^{10}$ C · kg⁻¹.

U [V]	750	800	850	900	950	1000	1050	1100	1150	1200	1250
I [A]	1,2	1,5	2,6	2,8	3,2	3,6	3,8	4,2	4,2	5,0	5,3
σ_I [A]	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3

Tab. 1: Tabulka naměřených dvojic proudu I (s chybou σ_I) a napětí U .

¹Hodnota je dvojnásobná oproti zadání, hledali jsme jen polovinu závitu šroubovice.

U [V]	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
I [A]	0,95	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40
σ_I [A]	0,05	0,1	0,15	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	0,1	0,05	0,15

Tab. 2: Tabulka naměřených dvojic napětí U a proudu I s chybou σ_I .

5.2. Elektrony v příčném poli – katodová trubice a Helmh. cívky

Naměřené hodnoty byly zpracovány formou grafu na Obr. 6 a Tab. 2. Jako v předchozí sekci je koef. A roven vyrazu před I^2 ve vzorci (9). Vyjádřením

$$\frac{e}{m_e} = \frac{125A}{8} \cdot \left(\frac{R}{d\mu_0 N} \right)^2 \quad (13)$$

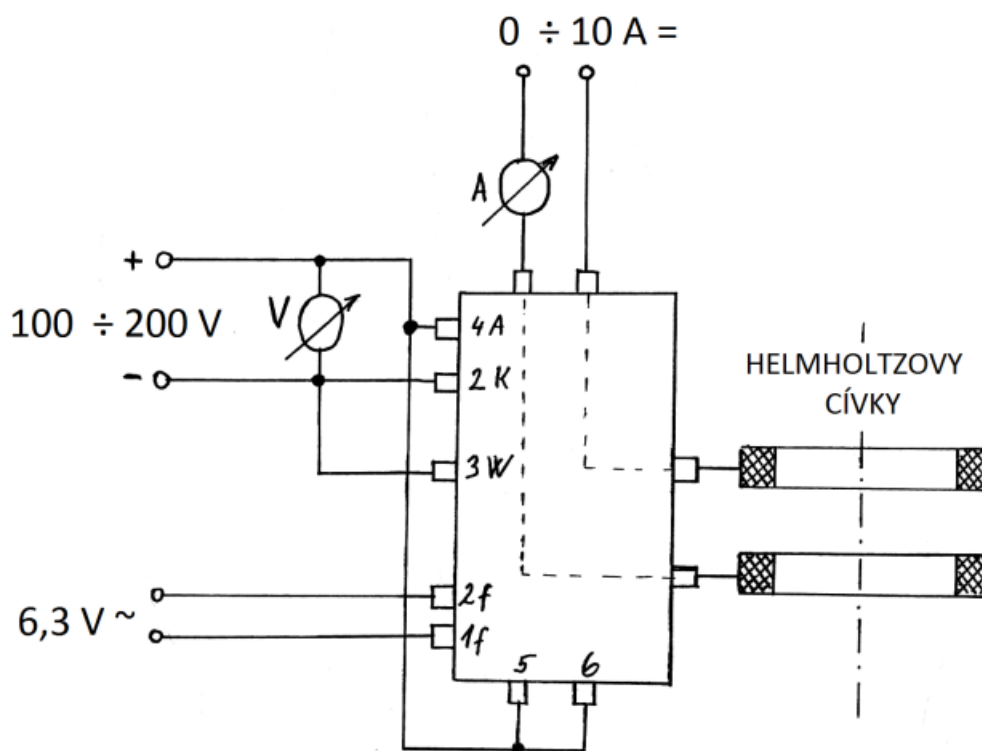
a dosazením hodnot $R = 0,15$ m, $N = 130$ a $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Wb \cdot A $^{-1}$ \cdot m $^{-1}$, $d = (0,1 \pm 0,03)$ cm dostaneme výsledek $e_m = (13 \pm 8) \cdot 10^{10}$ C \cdot kg $^{-1}$.

6. Diskuse

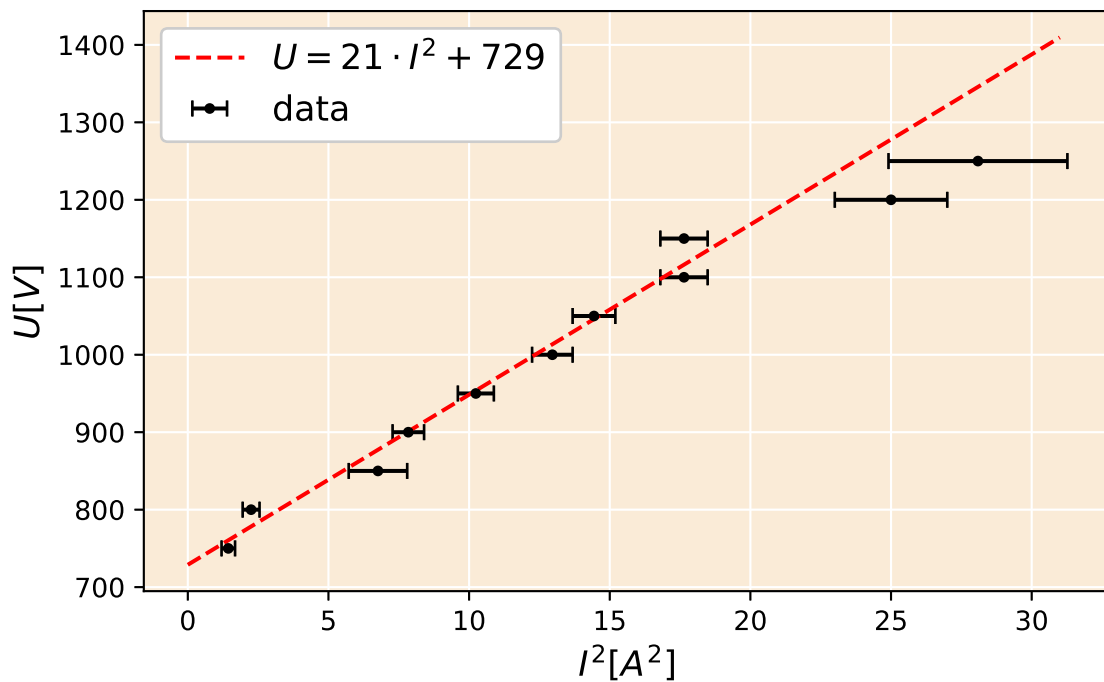
Měrný náboj elektronu je dle [3] roven $e_m = 17,588047 \cdot 10^{10}$ C \cdot kg $^{-1}$.

6.1. Elektrony v podélném poli

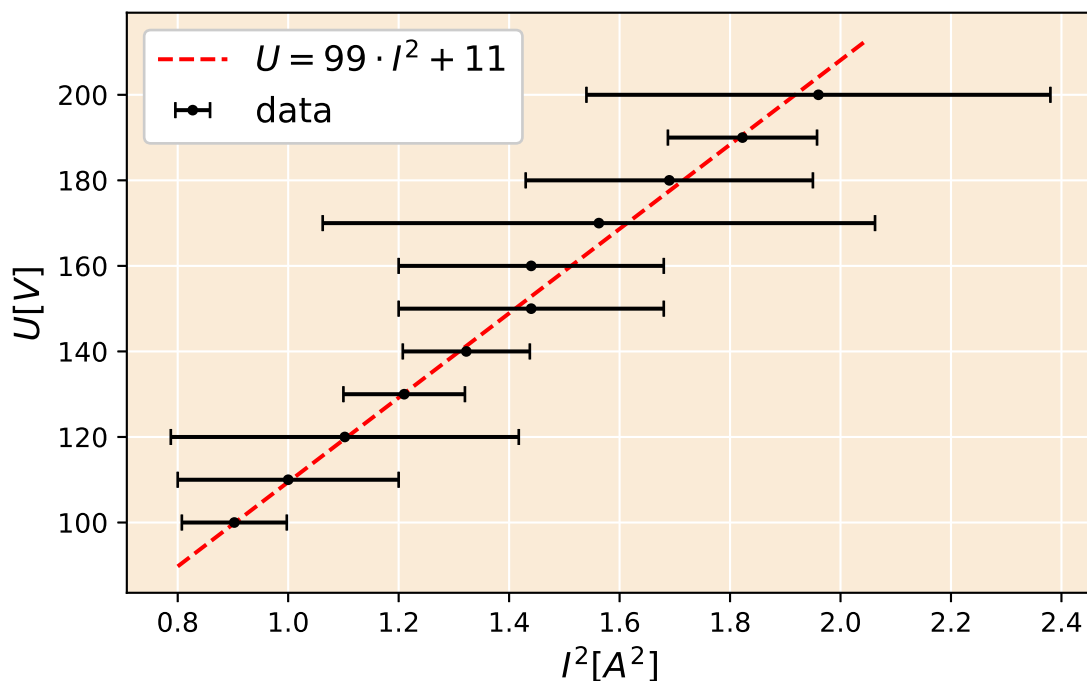
Náš výsledek bude zatížen chybou. Nejdříve jsem myslel, že jsem při výpočtu udělal někde chybu, ale po několika-kanásobném přezkoumání výsledku mohu říci, že je správně vypočten. Problém je nejspíše v tom, že při měření bylo těžké určit, kdy se mezi obrazovku a elektronové dělo vešla půlka závitů šroubovice. Značka na televizi opisovala spirálu, ale velmi rychle se dostala na prostředek, a pak už se nepohybovala. Je možné, že jsme si mysleli, že určujeme správnou vzdálenost, ale místo toho jsme mohli určovat např. třetinu závitů. Logicky bych předpokládal, že se značka



Obr. 4: Schéma zapojení katodové trubice a Helmholtzových cívek. Obdélník značí krabičku u aparatury. Převzato z [1].



Obr. 5: Závislost kvadrátu magnetizačního proudu I^2 na urychlovacím napětí U . Fitováno funkcí $U = A \cdot I^2 + B$, kde $A = (22,0 \pm 1,1) \text{ V} \cdot \text{A}^{-2}$ a $B = (729 \pm 8) \text{ V}$.



Obr. 6: Závislost kvadrátu magnetizačního proudu I^2 v cívkách na urychlovacím napětí U . Fitováno funkcí $U = A \cdot I^2 + B$, kde $A = (99 \pm 2) \text{ V} \cdot \text{A}^{-2}$ a $B = (11 \pm 3) \text{ V}$.

bude pohybovat po spirále, dojde doprostřed, a poté se bude pohybovat po rozvíjející se spirále. A celé znovu. Dojde doprostřed a zase nakraj. Délku závitů bychom určili z pozice značky na maximální vzdálenosti od středu a středu.

Rychlost elektronů bude o trochu větší než udává vzorec (5). Elektrony jsou předurychleny napětím 140 V. Je

otázka, po jakou vzdálenost na ně elektrické pole působí. Další nepřesností je idealizace homogenního magnetického pole. Na koncích cívky přestává platit vztah (6), hodnota B je na koncích menší oproti hodnotě uprostřed cívky. Tyto dva jevy způsobí to, že kdybychom očekávali, že se elektrony pohybují přesně po jednom závitě šroubovice, ve skutečnosti by se elektrony nacházeli (kdyby mohly) již dále za obrazovkou. Musíme uvažovat z ze vzorce (7) trochu menší. V dosazených hodnotách v 5.1 změníme $z = 0,418$ m s výsledkem $e_m = (3,0 \pm 0,1) \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$. Porovnáním s původní hodnotou $e_m = (2,1 \pm 0,1) \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$ můžeme odhadovat $\sigma_{sys} = 1,0 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Elektrony v tomto experimentu nemusíme považovat za relativistické. Jevy speciální teorie relativity bychom započítali pro $\beta = \sqrt{\frac{2eU}{m_e c^2}} \gg 0,01$. V A je $\beta = 0,02$.

Přístroj nevypadal, že by byl nějak poškozen. Závěrem je, že jsme nevědomně neměřili polovinu závitů šroubovice, ale trochu jinou hodnotu.

6.2. Elektrony v příčném magnetickém poli

Pokus byl jednodušší, protože jsme po celou dobu viděly trajektorii elektronů. Nevýhodou bylo, že jsme museli mít během experimentu zatemněno, s metrem se proti zrcadlu špatně měřilo, a proto mělo měření poloměru kružnice velkou chybu. Kdybychom měřili pomocí laseru, byl by výsledek mnohem přesnější. Kdybychom určili $d = (0,1 \pm 0,003) \text{ m}$ dostali bychom $\sigma_{em} = 0,8 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$ místo $8 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$. Z odvození vzorce (8) je zřejmé, že tato hodnota udává B na ose, v polovině vzdálenosti obou cívek, (tj. přesně uprostřed skleněné baňky). Dále od středu bude B lehce menší, trajektorie elektronů bude méně zakřívována. Průměr kružnice, který jsme viděli, musíme ve vzorci (9) brát o trochu menší. Dejme tomu, že bychom udělali korekci $d = 0,95 \text{ m}$, pak $e_m = 14 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$. Odtud $\sigma_{sys} = 10^{10} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$. Naše statistická chyba je velká a převyší všechny systematické chyby.

Působením magnetu jsme mohli měnit trajektorii elektronů z kružnice na šroubovici. Jedná se o případ, kdy elektron vletí do magnetického, tak že \vec{v}, \vec{B} nejsou rovnoběžné ani kolmé.

7. Závěr

Tabulkovou hodnotu $e_m = 17,588047 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$ se podařilo ověřit jen řádově. Měření v podélném magnetickém poli, bylo zatíženo chybou, museli bychom více prozkoumat samotný přístroj obrazovky s el. dělem. Nejlépe vidět přímo trajektorii elektronů. Měření v příčném magnetickém poli by potřebovalo změnit měření průměru kružnice.

Naměřená hodnota **měrného náboje** při použití obrazovky je:

$$e_m = (2,1 \pm 0,1 \text{ (stat.)} \pm 1,0 \text{ (sys.)}) \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Naměřená hodnota **měrného náboje** při použití baňky a Helmholtz. cívek je:

$$e_m = (13 \pm 8 \text{ (stat.)} \pm 1 \text{ (sys.)}) \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

8. Použitá literatura

- [1] Kolektiv KF. Návod: Úloha 3a – Měrný náboj elektronu [Online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435538/mod_resource/content/6/3a_Naboj_170218.pdf
- [2] Základní fyzikální konstanty. Laboratorní průvodce [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: <https://www.labo.cz/mft/zkonst.htm>
- [3] E/m APPARATUS [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: http://web.physics.ucsb.edu/~phys128/experiments/electron/Electron_Properties_01.pdf

Příloha

A. Domácí příprava

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{2} m v^2 = UQ$$

$$v^2 = \frac{2UQ}{m} \quad v = \underbrace{\sqrt{\frac{2UQ}{m c^2}}}_{\beta} c^2$$

$$\beta \approx 100V = U$$

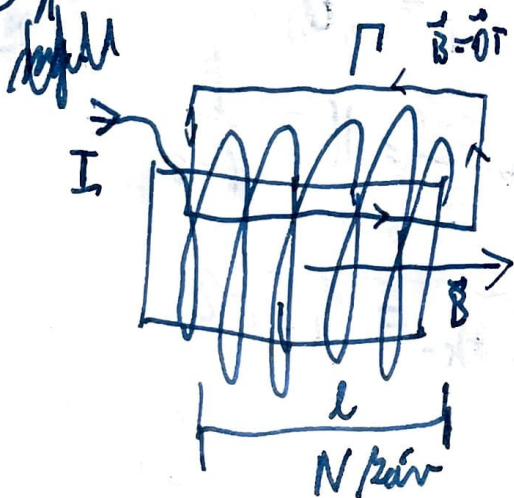
$$\beta = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^6}} \approx \sqrt{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt{\frac{10^{-17}}{10^{-15}}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot 10^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot 10^{-1} \approx \frac{1}{4.8} \cdot 10^{-1} \approx \frac{1}{5} \cdot 10^{-1}$$

$$m_e = 0.51 \cdot 10^{-6} \frac{eV}{c^2}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 1}{0.51 \cdot 10^6}} \approx \sqrt{\frac{4}{10^4}} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0.02$$

elektrony lze považovat za nerelativistické

2 pole solenoidu \rightarrow mag. indukce \vec{B} + vztah $\textcircled{17}$



$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_c = \mu_0 N I$$

$$B \cdot l = \mu_0 N I$$

$$B = \frac{\mu_0 N}{l} I$$

$$A \approx \frac{2\pi N}{B} \frac{m_e}{e} \approx \frac{2\pi N l}{\mu_0 N I} \frac{m_e}{e} = \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}} \frac{2\pi l}{\mu_0 N I} \frac{m_e}{e}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 N}{2\pi l} \right)^2 \frac{l}{m_e} I^2 = U$$

③ ~~Helmholtz~~ (14)

$$\frac{d}{2} = r = \frac{N}{SL} = \frac{N}{\frac{B_e}{\mu_0 N I}}$$

Helmholtz: $B = \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{\mu_0 N}{R} I$

$$\frac{d}{2} = \frac{\sqrt{\frac{2\hbar e}{m} \frac{mv}{e}}}{\frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{\mu_0 N I}{R}}$$

$$\left(\frac{d}{2} \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{\mu_0 N}{R} \right)^2 I^2 = \frac{2\hbar}{e} v^2$$

$$\frac{e}{m} \frac{1}{2} \left(\frac{4d \mu_0 N}{5\sqrt{5} R} \right)^2 I^2 = v^2$$

④ ~~Millikan~~

$\vec{F}_g + \vec{F}_0 + \vec{F}_e + \vec{F}_m = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{0}$ ^{naturne v}

$$- \rho_{ol} \frac{4}{3} \pi r^3 g - 6\pi \eta N v_s + qE + \rho_{ord} \frac{4}{3} \pi r^3 g = 0$$

$$Eq = \frac{4}{3} \pi r^3 g (-\rho_{ord} + \rho_{ol}) + 6\pi \eta N v_s$$

$$v = \sqrt{\frac{9\eta N g}{2g(\rho_{ol} - \rho_{ord})}}$$

$$Eq = v \cdot \left(\frac{4}{3} \pi r^3 g \frac{\rho_{ol} - \rho_{ord}}{2g} + 6\pi \eta N v_s \right)$$

$$Eq = 6\pi \eta r \left(\frac{N}{2} v_s + v_s \right)$$

$$v = Ed \quad q = \frac{d}{v} 6\pi \eta r (N v_s + v_s)$$