



Jméno: **Petr Červenka** Kolega: Michal Vranovský  
Kruh: **Čtvrtek** Číslo skup.: 3  
Měřeno: **18.11.2021** Zpracování: 18h

Klasifikace:

## 1. Pracovní úkoly

1. DÚ: Ověřte, že  $e^{-\delta t}$ ,  $te^{-\delta t}$  jsou řešením pohybové rovnice Pohlova kyvadla pro kritický útlum, nalezněte řešení pro polohovou a rychlostní podmínku a nakreslete jejich průběh.
2. Naměřte časový vývoj výchylky kmitů kyvadla pro volné netlumené kmity a určete vlastní frekvenci Pohlova kyvadla.
3. Změřte závislost koeficientu útlumu na tlumícím proudu v rozmezí do 2 A (alespoň 5 hodnot). Vyneste do grafu a extrapolací určete hodnotu proudu, při které nastane kritický útlum.
4. Sestavte kalibrační křivku budícího motorku (závislost frekvence otáček na napětí).
5. Naměřte rezonanční křivky netlumeného a slabě tlumeného kyvadla. Vyneste je do jednoho grafu, určete vlastní frekvenci a diskutujte výsledek.
6. Bonus: Vytvořte v DataStudiosu fázový diagram. Prozkoumejte, jak vypadá pohyb kyvadla ve fázovém diagramu za různých podmínek (netlumený, tlumený). Grafy přiložte k protokolu a popište je.

## 2. Použité přístroje a pomůcky

Pohlovo kyvadlo, rotační senzor PASCO, PC, program DataStudio, dva multimetry, nastavitelný zdroj 0 – 3 A, vodiče, regulovatelný zdroj 650 mA – 24 V, elektrický tachometr.

## 3. Teoretický úvod

### 3.1. Potenciál harmonického oscilátoru

Harmonický oscilátor je popsán souřadnicemi  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ . Necht' mechanický harmonický oscilátor kmitá kolem stabilní rovnovážné polohy, která je určena  $n \in \mathbb{N}$  zobecněnými souřadnicemi  $(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n})$ . Potenciál  $U$  bude mít v tomto místě extrém (pro stabil. polohu minimum) tj.  $\forall i \in \hat{n}$  platí

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q_i=q_{0i}} = 0. \quad (1)$$

Jelikož  $\vec{F} = -\nabla U$ , bude síla vracet oscilátor zpět do stabilní rovnovážné polohy. Pro malé výchylky v okolí rovnovážné polohy rozvineme  $U$  do Taylorova polynomu 2. stupně. Dostaneme

$$U(\vec{q}) = U|_{\vec{q}_0} + \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{\vec{q}_0} q_i + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\vec{q}_0} q_i q_j, \quad (2)$$

kde druhý člen je dle (1) roven nule. Pro systém popsán jedinou souřadnicí  $q_1$  přejde (2) v

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dq_1^2} q_1^2 = U_0 + \frac{1}{2} k q_1^2 \quad (3)$$

### 3.2. Pohybová rovnice Pohlova kyvadla

Schéma kyvadla je na Obr. 1. Jedná se o měděný kotouč, který rotuje kolem pevné osy. Ke kotouči je upevněn stočený, tenký plech, který vytváří "vratnou sílu" (krut plechu) ze sekce 3.1. Pro odvození vyjdeme z Eulerových setrvačkových rovnic vyjádřených v hlavních osách setrvačnosti ( $I_{11} = I_1$  atd.).

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 + \varepsilon_{1jk} I_{jl} \Omega_l \Omega_k &= N_1 \\ I_2 \dot{\Omega}_2 + \varepsilon_{2jk} I_{jl} \Omega_l \Omega_k &= N_2 \\ I_3 \dot{\Omega}_3 + \varepsilon_{3jk} I_{jl} \Omega_l \Omega_k &= N_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Osa rotace je pevná, což implikuje  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  a zbyde pouze rovnice

$$N_3 = N = I_3 \dot{\Omega}_3 = I \dot{\Omega} = I \ddot{\varphi}, \quad (5)$$

kde  $\varphi$  je úhel otočení kotouče kolem osy rotace v rad. Odtud musíme vyjádřit moment sil, které působí na kotouč. Jedna část bude torzní moment pružiny. Druhá složka bude vytvářena momentem disipativních sil. Vzniknou díky magnetickému poli v cívkách. Pole bude v měděném kotouči generovat vířivé proudy. Magnetické pole, které vytvoří vířivé proudy, bude opačně orientované než magnetické pole cívek. Díky tomu bude rotace kotouče bržděna.

$$N = N_{dis.} + N_{torz.} \quad (6)$$

Pro analytické řešení uděláme předpoklady:

$$\begin{aligned} N_{dis.} &= -C \dot{\varphi} \\ N_{torz.} &= -D \varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

kde  $C \geq 0$ ,  $D > 0$  jsou konstanty. Dosazením do (5) dostaneme rovnici pro harmonický oscilátor

$$\ddot{\varphi} + \frac{C}{I} \dot{\varphi} + \frac{D}{I} \varphi = 0. \quad (8)$$

Řešení rovnice hledáme ve tvaru  $\varphi = ce^{\lambda t}$ ,  $c$  je konstanta. Rovnice je lineární, proto celkové řešení bude lineární kombinace nezávislých řešení a bude závislé na počátečních podmínkách ( $\varphi(t=0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(t=0) = \Omega_0$ ). Podle hodnot koeficientů  $D, C, I$  dostaneme různá řešení, která jsou rozebrána v [2] nebo [1].

### 3.3. Určení dekrementu útlumu při slabém tlumení

Pro slabé tlumení je řešení tvaru  $\varphi(t) = \varphi_m e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$ , kde  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ . Je-li perioda kmitů  $T$ , můžeme dekrement útlumu určit ze vztahu

$$\frac{\varphi(t+T)}{\varphi(t)} = \frac{\varphi_m e^{-\delta(t+T)} \sin(\omega(t+T) + \varphi_0)}{\varphi_m e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)} = e^{-\delta T}. \quad (9)$$

Odečtením úhlu pro dvě po sobě jdoucí lokální maxima jsme schopni určit dekrement útlumu.

### 3.4. Vynucené kmity

Na Obr. 1 je modře zobrazen motor a mechanický převod. Motor působí na kyvadlo budícím periodickým momentem sil ve tvaru  $N = N_m \cos(\Omega t)$ . Označme  $B = \frac{N_m}{I}$ ,  $\delta = \frac{C}{2I}$  a  $\omega_0^2 = \frac{D}{I}$ . Rovnice (8) přejde na tvar

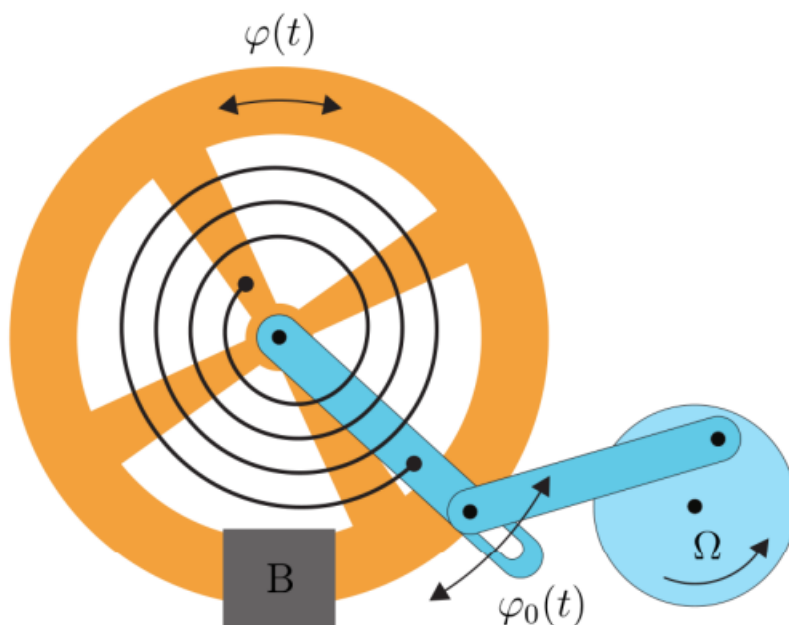
$$\ddot{\varphi} + 2\delta \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = B \cos(\Omega t). \quad (10)$$

Dosazením ansatzu  $\varphi = A \cos(\Omega t + \varphi_0)$  do (10) nalezneme vztah pro neznámou amplitudu  $A$ .

$$A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}, \quad (11)$$

Pokud  $\delta = 0$ , pak  $A \xrightarrow{\Omega \rightarrow \omega_0} +\infty$ . Necht  $\delta \neq 0$ . Budeme-li měnit  $\Omega$ , aby  $A$  byla maximální, najdeme rezonanční frekvenci  $\Omega_r$  a  $A_r$  pro které platí

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad A_r = \frac{B}{2\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (12)$$



Obr. 1: Schéma Pohlova kyvadla převzato z [1]

### 3.5. Statistika

Během výpočtů budeme muset určit chybu nepřímých měření. Pokud  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , pak pro chybu veličiny  $y$  platí

$$\sigma_y^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_{x_n}^2. \quad (13)$$

Pokud jsou jednotlivá měření zatížena chybami a chceme je zohlednit ve výsledné hodnotě veličiny potřebujeme vzorec

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i y_i}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}}, \quad p_i = \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}. \quad (14)$$

## 4. Postup měření

### 4.1. Netlumené kmity a určení vlastní frekvence Pohlova kyvadla

Zapnuli jsme PC, program DataStudio a zapojili jsme senzor Pohlova kyvadla do zásuvky. Vychýlili jsme Pohlovo kyvadlo z rovnovážné polohy, senzor snímal výchylky (vychýlení o nějaký úhel) kyvadla a zahájili jsme vykreslování hodnot v programu DataStudio. Vykreslená data jsme nafitovali pomocí funkce sinus, jehož argument měl stejnou periodu jako byla perioda kmitů Pohlova kyvadla. Postup jsme opakovali desetkrát.

### 4.2. Závislost koeficientu útlumu $\delta$ na tlumícím proudu v cívkách

Připojili jsme cívky k nastavitelnému zdroji 0 – 3 A. Do cívek jsme pustili proudy max. 2 A. Vychýlili jsme Pohlovo kyvadlo z rovnovážné polohy, nebo jsme mu udělili počáteční úhlovou rychlost. Zapnuli jsme vykreslování hodnot v PC. Kmity se rychle utlumily. Z grafu jsme odečetli hodnoty dvou po sobě jdoucích maxim a ze vzorce (9) jsme určili dekrement útlumu. Postup jsme opakovali pro různé hodnoty proudů.

### 4.3. Kalibrace motoru

Připojili jsme motor k regulovatelnému zdroji 650 mA – 24 V. Zapnuli jsme motor a nastavili napětí 4 V na zdroji. Elektrickým tachometrem jsme změřili frekvenci otáček motoru za minutu. Napětí jsme ekvidistantně měnili až jsme dosáhli hodnoty 20 V. Vždy jsme změřili frekvenci otáček motoru.

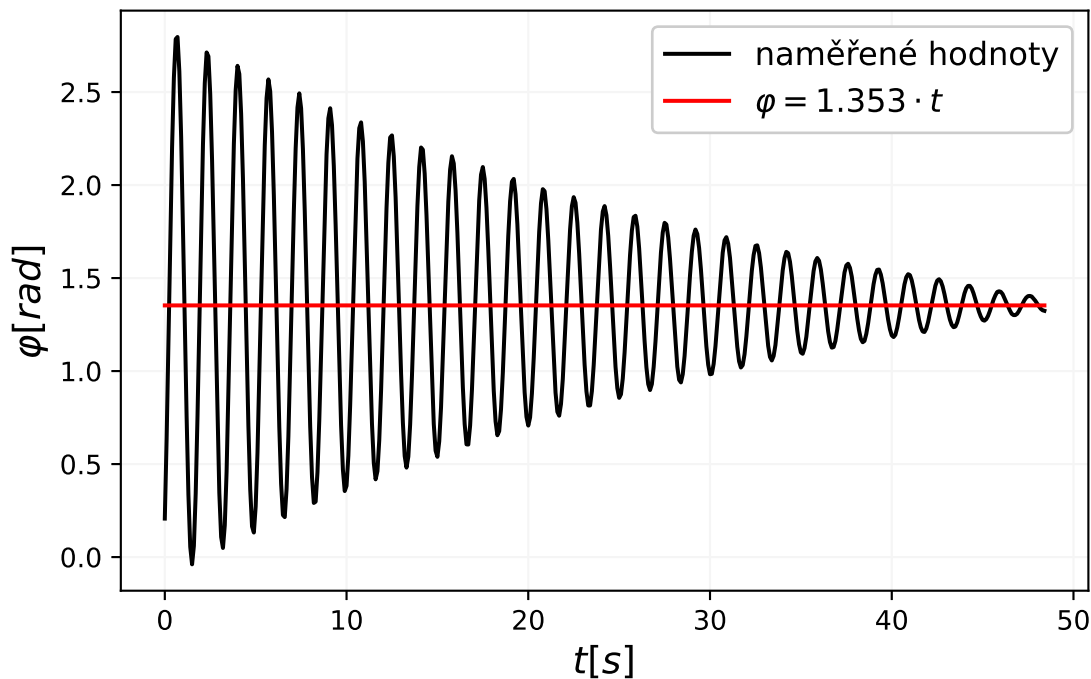
#### 4.4. Tlumené a netlumené buzené kmity Pohlova kyvadla

Začali jsme s netlumenými kmity tj. cívkami neprocházeli proud. Motor byl připojen ke zdroji napětí. Díky tomu kyvadlo kmitalo bez naší pomoci. Zapnuli jsme vykreslování hodnot na PC. Kmity měly charakter rázů. Odečítali jsme vždy největší amplitudu v naměřených datech. Napětí jsme změnili a postup opakovali osmkrát. Do cívek jsme pustili jeden stále stejný proud. Analogicky jako u netlumených kmitů jsme měnili frekvenci otáček motoru pomocí napětí na zdroji a odečetli jsme hodnoty největší amplitudy kmitů.

### 5. Vypracování

#### 5.1. Netlumené kmity a určení vlastní úhlové frekvence Pohlova kyvadla

Z hodnoty deseti period kmitů, data jsou zobrazena v Tab. 1. Dle (14) dostanu  $T = (1,6737 \pm 0,0005)$  s. Hodnotu  $\omega_0$  i s chybou spočítám dle vzorce (13) s výsledkem  $\omega_0 = (3,754 \pm 0,001) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Časový vývoj výchylky kyvadla je na Obr. 2.



Obr. 2: Závislost výchylky  $\varphi$  Pohlova kyvadla na čase  $t$ . Odečítali jsme diskretní hodnoty výchylek v krátkých časových intervalech, poté jsme časový vývoj polohy kyvadla zspojitili. Podle toho, kdy jsme zapnuli v PC nabírání dat, docházelo k různým posunům fáze (znázorněno červenou čarou).

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T$ [s]	1,68	1,67	1,67	1,67	1,67	1,68	1,67	1,67	1,67	1,67
$\sigma_T$ [ms]	1,0	1,3	1,4	1,1	1,2	1,1	2,7	3,8	2,5	3,1

Tab. 1: Tabulka naměřených period  $T$  s chybami  $\sigma_T$  kmitů Pohlova kyvadla.

#### 5.2. Závislost koeficientu útlumu na proudu v cívkách

Využijeme hodnotu  $T = (1,6737 \pm 0,0005)$  s z předchozí sekce a rovnici (9). Naměřená data jsou zobrazena v Tab. 2 a na Obr. 3. Pro kritický útlum platí podmínka  $\delta = \omega_0$ . Extrapolací dat na Obr. 3 určíme hodnotu proudu,

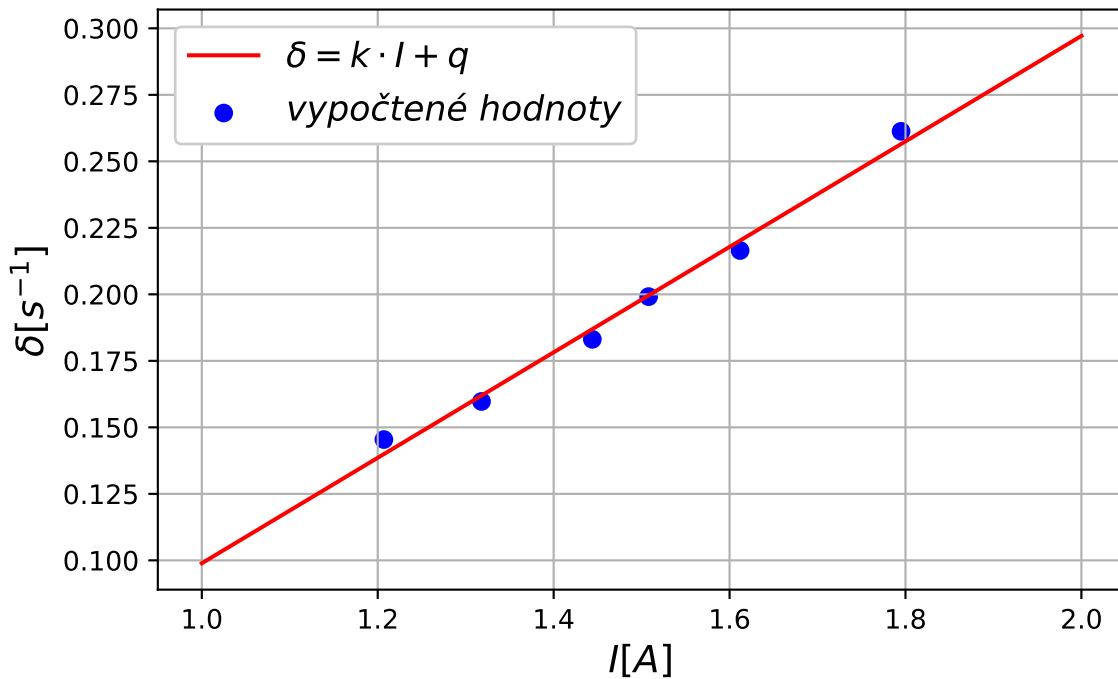
aby nastal kritický útlum. Pro kritický útlum platí

$$I_{kr} = \frac{\omega_0 - q}{k}. \quad (15)$$

Aplikací vzorců pro chybu nepřímých měření máme  $I_{kr} = (19,3 \pm 0,2)$  A.

#	1	2	3	4	5	6
$I$ [A]	1,207	1,318	1,444	1,508	1,612	1,795
$\delta$ [s <sup>-1</sup> ]	0,145	0,160	0,183	0,200	0,216	0,261

Tab. 2: Tabulka naměřených hodnot – koeficient útlumu  $\delta$  v závislosti na proudu  $I$ . Chyby  $\delta$  jsou řádově  $10^{-5}$  s<sup>-1</sup> a jsou zanedbány.



Obr. 3: Závislost dekrementu útlumu  $\delta$  na proudu v cívice  $I$ . Hodnoty parametrů jsou  $k = (0,20 \pm 0,01)$  C<sup>-1</sup> a  $q = (-0,10 \pm 0,01)$  s<sup>-1</sup>.

### 5.3. Kalibrace motoru

Sestrojili jsme kalibrační křivku motoru, která je na Obr. 4 i se všemi detaily.

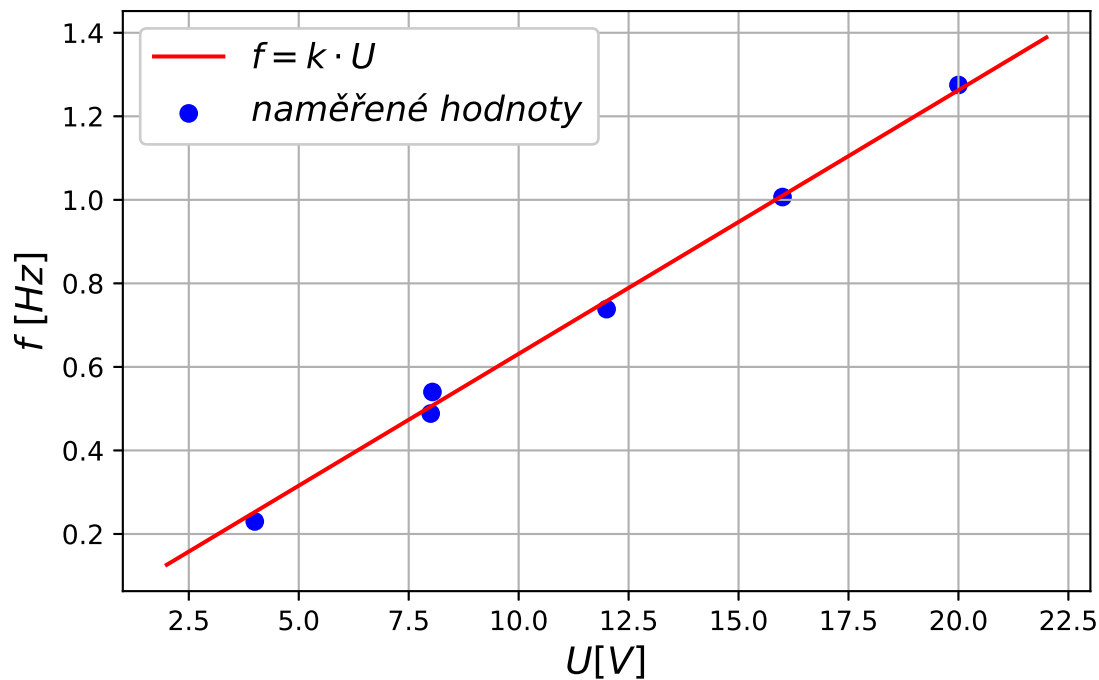
### 5.4. Rezonanční křivky netlumených a tlumených kmitů

Naměřená napětí na svorkách motoru jsme převedli pomocí závislosti z kalibrační křivky na Obr. 4 a vzorce

$$\Omega = 2\pi U k \quad (16)$$

na úhlovou frekvenci budícího momentu sil. Naměřená data lze nalézt v [3]. Proud v cívkách při tlumeném kmitání byl  $I = 1,04$  A. Výsledky shrnuje Obr. 5. Data byla fitována funkcí (11), kde pouze zaměníme  $A \rightarrow \varphi_m$ . Parametry fitu jsou vypsány v Tab. 3.

Vlastní úhlová frekvence Pohlova kyvadla při buzení netlumeném kmitání je  $\omega_{0tl} = (3,821 \pm 0,005)$  rad · s<sup>-1</sup> a při buzení tlumeném kmitání je  $\omega_{0netl} = (3,85 \pm 0,01)$  rad · s<sup>-1</sup>.



Obr. 4: Závislost frekvence otáček motoru  $f$  na přiloženém napětí na svorkách motoru  $U$ . Hodnota parametru je  $k = (63,1 \pm 0,7) \text{ mHz} \cdot \text{V}^{-1}$ .

#	$\omega_0 [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$	$\delta [\text{s}^{-1}]$	$B [\text{s}^{-2}]$	$\sigma_{\omega_0} [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$	$\sigma_{\delta} [\text{s}^{-1}]$	$\sigma_B [\text{s}^{-2}]$
$g_{netl}$	3,821	0,02	1,58	0,005	0,04	0,08
$g_{tl}$	3,85	0,13	1,56	0,01	0,01	0,09

Tab. 3: Tabulka parametrů fitovacích funkcí  $g_{tl}$  (tlumení) a  $g_{netl}$  (bez tlumení) z Obr. 5.  $B$  je maximální hodnota přeskálaného budícího momentu sil,  $\omega_0$  je vlastní úhlová frekvence,  $\delta$  je dekrement útlumu a veličiny  $\sigma$  jsou jejich chyby.

## 5.5. Fázové diagramy

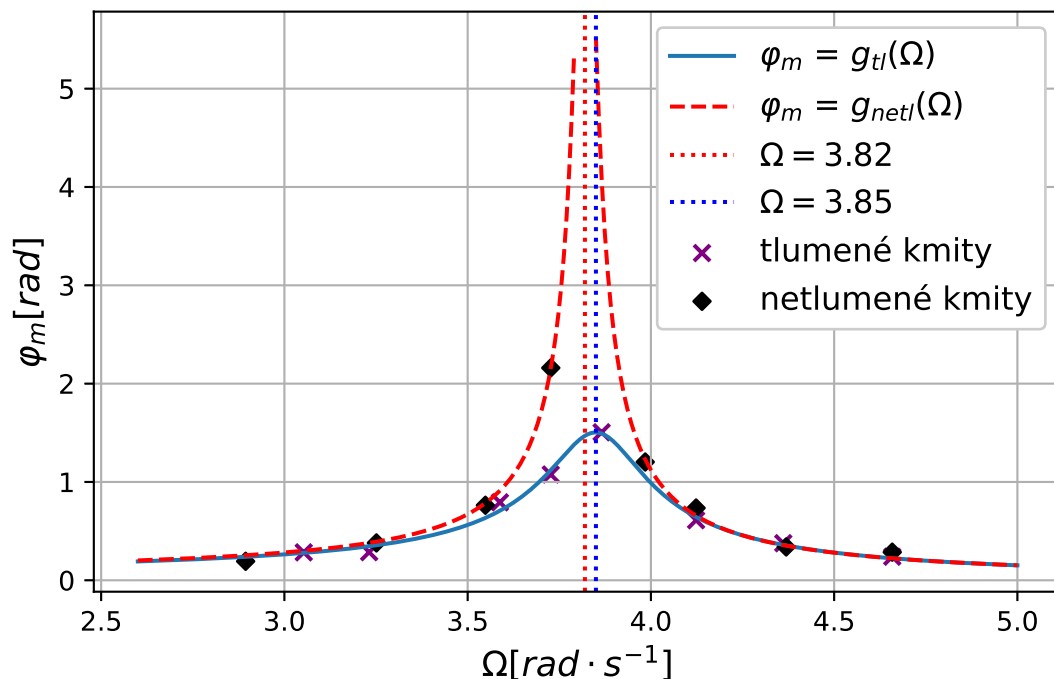
Všechny obrázky jsou umístěny v A. Podle předpokladu kmitá kyvadlo bez tlumení mnohem déle, než kyvadlo, které je tlumené. Fázové trajektorie v konfiguračním (též fázovém) prostoru nejsou nikdy uzavřené. Vždy je kyvadlo něčím tlumeno, a proto dochází k disipaci energie. Kyvadlo se nám při experimentech v praxi vždy zastavilo. Buzené kmity jsme si neuložili. Jediná zajímavost byla, že docházelo ke skládání dvou periodických pohybů – kmitů kyvadla a neustálé rotace motoru. Výsledkem byly rázy.

## 6. Diskuse

### 6.1. Netlumené kmity a určení vlastní úhlové frekvence Pohlova kyvadla

Název netlumené je zde nepřesný, kyvadlo bylo lehce tlumeno (tření mezi diskem a osou, disipace energie při krutu plechu). Po vychýlení kmitalo maximálně po dobu 3 min. Frekvence kmitání při slabém tlumení (pro nás  $\delta \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  z Tab. 4) není rovna vlastní frekvenci oscilátoru. V 3.3 je uveden vzorec pro úhlovou frekvenci tlumených kmitů  $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ . My jsme v experimentu změřili  $\omega$  ne  $\omega_0$ . Ovšem koeficient  $\delta$  můžeme zanedbat a dostaneme  $\omega = \omega_0$ .

Kdybychom měli nějaký těžký kotouč o velkém momentu setrvačnosti, k tomu i bytelnější držák s osou rotace a pružinu, dosáhli bychom aproximace netlumených kmitů (tj.  $\delta \rightarrow 0 \text{ s}^{-1}$ ). Kyvadlo by kmitalo mnohem déle na vlastní úhlové frekvenci.



Obr. 5: Závislost maximálního úhlu pootočení Pohlova kyvadla  $\varphi_m$  na úhlové frekvenci otáček motoru  $\Omega$ . Červená křivka popisuje netlumené kmity, modrá tlumené. Vertikální úsečky vyznačují rezonanční frekvence (tlumené – modrá, netlumené – červená). Rozbor fitovacích funkcí je v 5.4.

## 6.2. Závislost koeficientu útlumu na proudu v cívkách

Dle Obr. 3 je  $\delta$  přímo úměrný proudu v cívkách. V experimentu byla použita jen jedna cívka, proto jsou hodnoty koeficientu útlumu v Tab. 2 malé. Abychom dosáhli kritického útlumu, museli bychom použít proud  $I_{kr} = 19,3$  A. Náš zdroj mohl dodat maximální proud 3 A, proto jsme kritický útlum nemohli uskutečnit. Myslím, že i kdybychom měli  $I_{kr}$  k dispozici, nemuseli by to dráty v obvodu vydržet.

## 6.3. Kalibrace motoru

Zde není moc prostor pro diskusi. Výsledek závisí de facto jen na přesnosti voltmetru a tachometru a na použitém motoru (motor mohl mít klidně nelineární závislost).

## 6.4. Rezananční křivky

Vlastní frekvence získané fitem dat na Obr. 5, se liší od frekvence  $\omega_0 = (3,754 \pm 0,001)$  rad · s<sup>-1</sup> o více než bych čekal. I hodnota koeficientu útlumu pro netlumené kmity v Tab. 3 je moc vysoká.

Při experimentu jsme si u každého napětí na motoru změřili i příslušné otáčky motoru. Kdybychom vycházeli čistě jen z údajů na tachometru (bez převodu napětí na otáčky), bude rezonanční frekvence úplně jiná, stejně jako další parametry fitů. Výsledek je uveden v B. Odtud máme hodnoty  $\omega_{0netl} = (3,70 \pm 0,02)$  rad · s<sup>-1</sup>,  $\omega_{0tl} = (3,75 \pm 0,01)$  rad · s<sup>-1</sup>.

Podle očekávání (plyne ze vzorce  $\Omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$ ) se vlastní frekvence při tlumeném buzeném kmitání liší od frekvence buzených netlumených kmitů, ale ne o moc. Ovšem vlastní frekvence tlumených kmitů by měla být menší než vlastní frekvence netlumených, což v našem případě neplatí. Je to dáno tím, že výsledky jsou dost závislé na přesnosti fitu a že frekvence si jsou velice blízké. Drobné nepřesnosti v datech poté program nafituje jinak a nám se to promítne do výsledku. Pro zpřesnění výsledku by bylo dobré naměřit více dat.

## 7. Závěr

Zkalibrovali jsme motor, kalibrační křivka je na Obr. 4. Změřili jsme závislost koeficientu útlumu na proudu v cívkách viz. Obr. 3. Nechali jsme si vykreslit fázové diagramy v A.

Hodnota proudu, kdy nastává kritický útlum je:

$$I_{kr} = (19,3 \pm 0,2) \text{ A.}$$

Určili jsme **vlastní úhlovou frekvenci Pohlova kyvadla** pomocí periody kmitů s výsledkem:

$$\omega_0 = (3,754 \pm 0,001) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Rozborem rezonančních křivek jsme dospěli k hodnotě **vlastní úhlové frekvence pro netlumené kmity**:

$$\omega_{0netl} = (3,70 \pm 0,02) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Rozborem rezonančních křivek jsme dospěli k hodnotě **vlastní úhlové frekvence pro tlumené kmity**:

$$\omega_{0tl} = (3,75 \pm 0,01) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

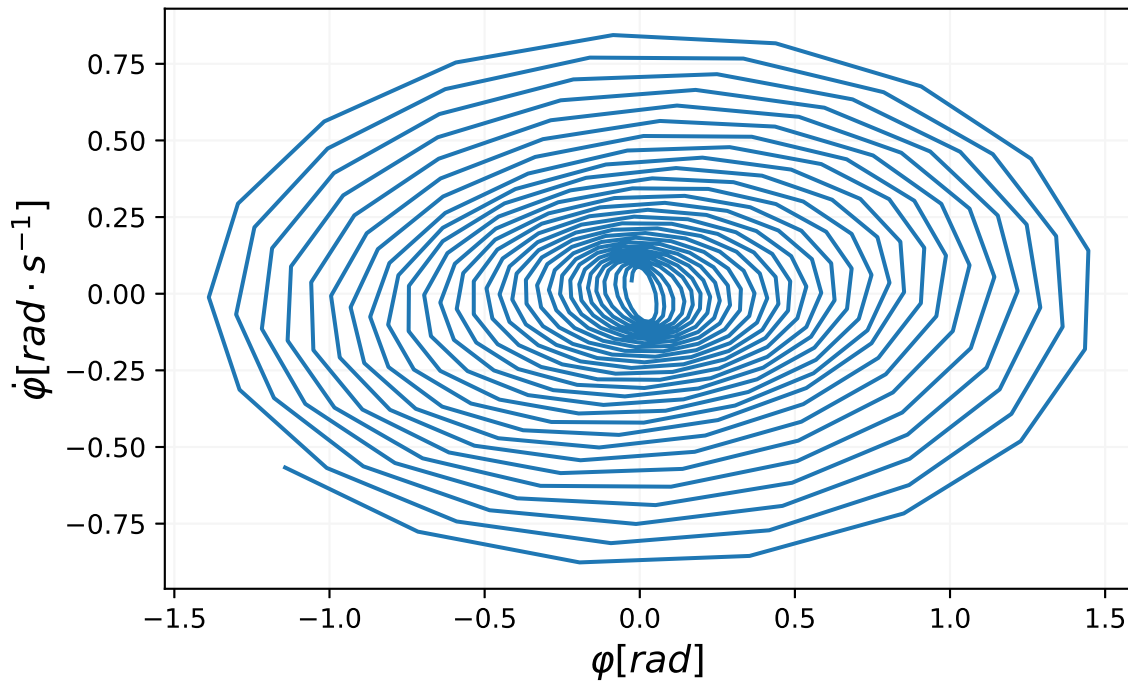
## 8. Použitá literatura

- [1] Kolektiv KF. Návod: Úloha 9 – Harmonické oscilace [Online]. [cit. 2021-11-21].  
Dostupné z: [https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435399/mod\\_resource/content/9/PohlovoKyvadlo\\_171027.pdf](https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435399/mod_resource/content/9/PohlovoKyvadlo_171027.pdf)
- [2] ŠTOLL, Ivan. Mechanika. Vyd. 3. V Praze: České vysoké učení technické, 2010. ISBN 978-80-01-04554-1.
- [3] Data z měření Úkolu 10 [online]. [cit. 2021-11-21]. Dostupné z:  
[https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435405/assignsubmission\\_file/submission\\_files/354313/prak10.pdf?forcedownload=1](https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435405/assignsubmission_file/submission_files/354313/prak10.pdf?forcedownload=1)

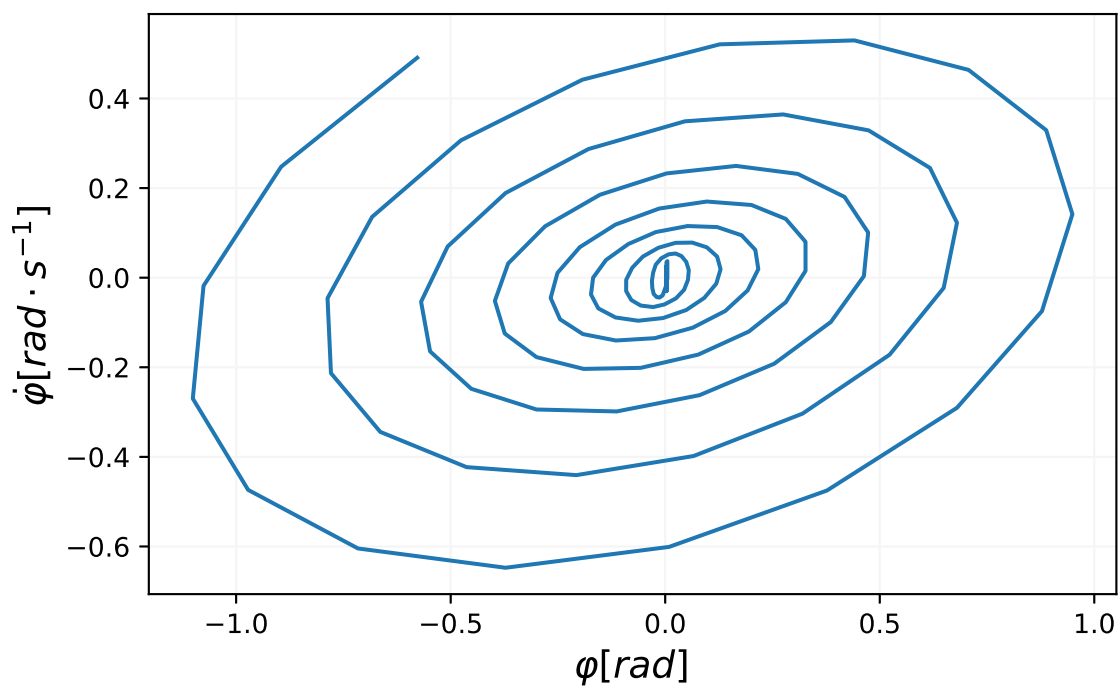


# Příloha

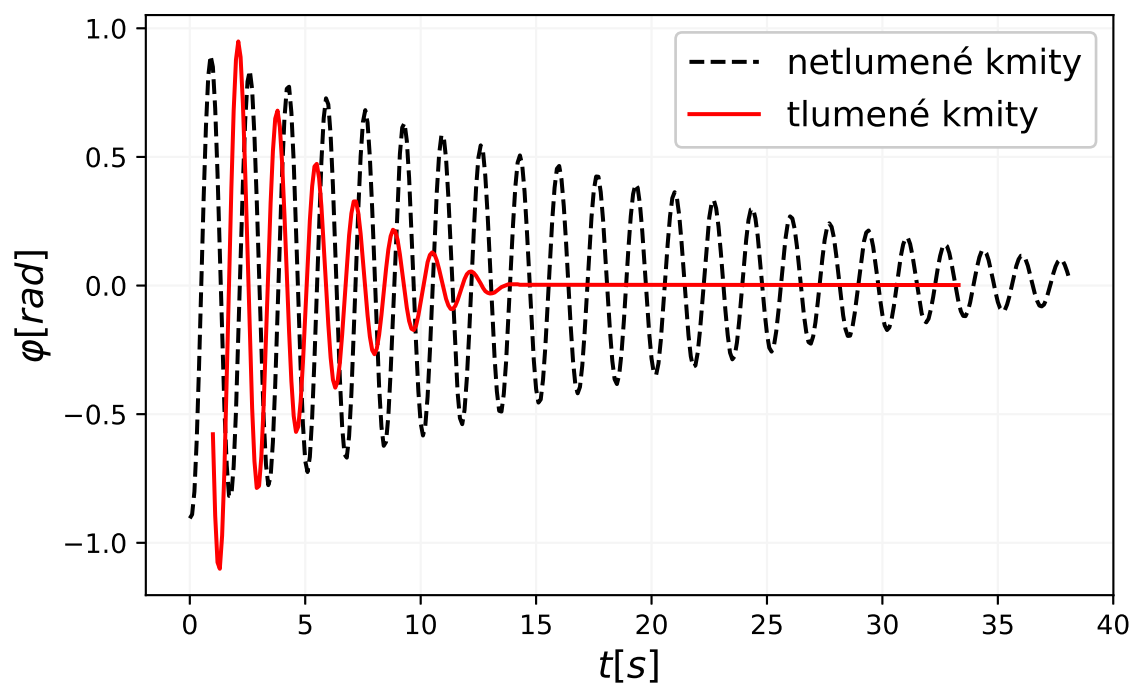
## A. Fázové diagramy



Obr. 6: Závislost úhlové frekvence kmitů Pohlova kyvadla  $\dot{\varphi}$  na úhlu otočení kyvadla  $\varphi$  pro netlumené kmity.



Obr. 7: Závislost úhlové frekvence kmitů Pohlova kyvadla  $\dot{\varphi}$  na úhlu otočení kyvadla  $\varphi$  pro tlumené kmity.



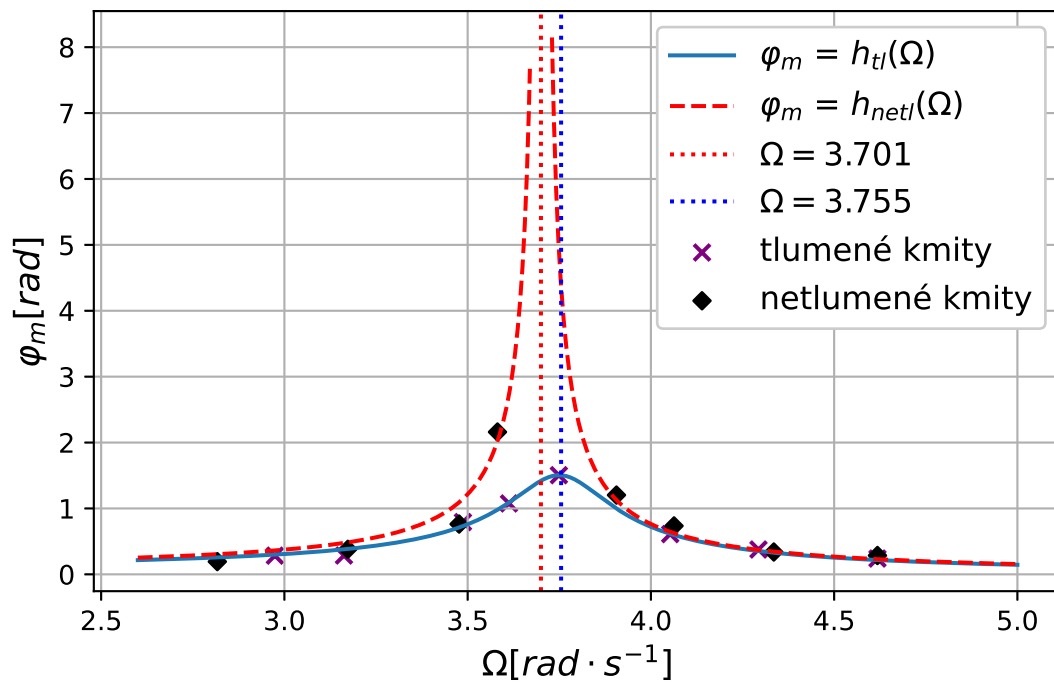
Obr. 8: Závislost úhlu otočení kyvadla  $\varphi$  na čase  $t$ .

## B. Rezonance s daty z tachometru

Fitovací program měl problém s určením chyb parametrů v případě netlumených kmitů (singularita  $\omega_0$  a práce s malými čísly v PC), ovšem hodnoty parametrů jsou reálnější než v Tab. 3.

#	$\omega_0$ [rad · s <sup>-1</sup> ]	$\delta$ [s <sup>-1</sup> ]	$B$ [s <sup>-2</sup> ]	$\sigma_{\omega_0}$ [rad · s <sup>-1</sup> ]	$\sigma_\delta$ [s <sup>-1</sup> ]	$\sigma_B$ [s <sup>-2</sup> ]
$g_{netl}$	3,70	$\approx 10^{-4}$	1,76	0,02	-	0,2
$g_{tl}$	3,75	0,14	1,59	0,01	0,01	0,09

Tab. 4: Tabulka parametrů fitovacích funkcí  $h_{tl}$  (tlumení) a  $h_{netl}$  (bez tlumení) z Obr. 9.  $B$  je maximální hodnota přeškálovaného budícího momentu sil,  $\omega_0$  je vlastní úhlová frekvence,  $\delta$  je dekrement útlumu a veličiny  $\sigma$  jsou jejich chyby.



Obr. 9: Závislost maximálního úhlu pootočení Pohlova kyvadla  $\varphi_m$  na úhlové frekvenci otáček motoru  $\Omega$ . Červená křivka popisuje netlumené kmity, modrá tlumené. Vertikální úsečky vyznačují rezonanční frekvence (tlumené – modrá, netlumené – červená). Parametry fitovacích funkcí jsou v Tab. 4.

## **C. Domácí příprava**

kritický útlum

$$\delta = \frac{C}{2I_3}$$

$$\omega_0 = \delta$$

$$(1) \ddot{\varphi} + 2\delta \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad / \quad \varphi = C e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda\delta + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

kritický útlum:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$   
( $\omega_0 = \delta$ )

obč.  
ná

$$\varphi = C_1 e^{-\delta t} + C_2 t e^{-\delta t}$$

$$\dot{\varphi} = -\delta C_1 e^{-\delta t} + C_2 e^{-\delta t} - \delta C_2 t e^{-\delta t}$$

poč.  
poč.

1) polohová podm.  $\rightarrow \varphi(t=0) = \varphi_0 > 0 \quad \dot{\varphi}(t=0) = 0$

$$\varphi_0 = C_1 + C_2 \cdot 0 \cdot e^{-\delta t} \Rightarrow C_1 = \varphi_0$$

$$\dot{\varphi}(t=0) = 0 = -\delta C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = \delta \varphi_0$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 e^{-\delta t} + \delta \varphi_0 t e^{-\delta t}}$$

2) rychlostní podm.

$$\varphi(t=0) = 0 = C_1$$

$$\dot{\varphi}(t=0) = \Omega_0 = C_2$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\varphi = \Omega_0 t e^{-\delta t}}$$



KŘIVKA dos. do ①  $e^{-\delta t} = \varphi$

$$(-\delta)^2 e^{-\delta t} + 2\delta(-\delta) e^{-\delta t} + \omega_0^2 e^{-\delta t} = 0$$

$$\delta^2 - 2\delta^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \left( \omega_0^2 = \delta^2 \right)$$

$$0 = 0 \quad \leftarrow$$

dos. do ①  $t e^{-\delta t} = \varphi$

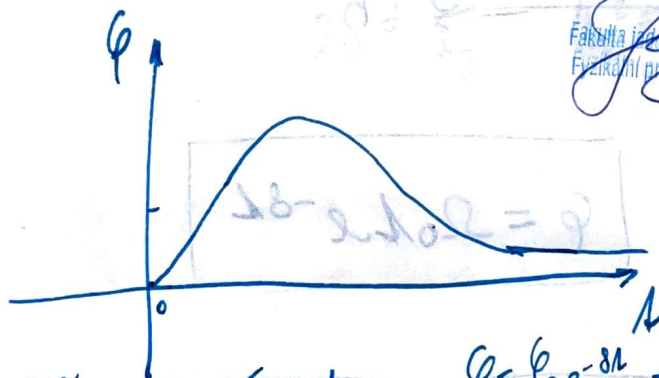
$$(e^{-\delta t} - \delta t e^{-\delta t}) + 2\delta(e^{-\delta t} - \delta t e^{-\delta t}) + \omega_0^2 t e^{-\delta t} = 0$$

$$1 - \delta - \delta + 2\delta - 2\delta^2 t + \omega_0^2 t = 0 \quad (\omega_0^2 = \delta^2)$$

$$\cancel{\delta^2 t} - \cancel{2\delta^2 t} + \cancel{\omega_0^2 t} = 0$$

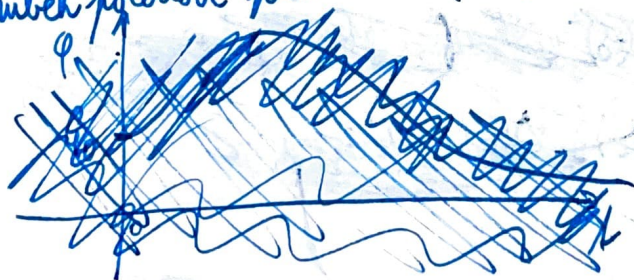
$$0 = 0$$

průběh rychlostní podm.  $\varphi = \varphi_0 t e^{-\delta t}$



Fakulta inženýrská a fyzikálně inženýrská  
Fyzikální praktikum I - zimní semestr

průběh polohové podm.



$$\varphi = \varphi_0 e^{-\delta t} + \delta \varphi_0 t e^{-\delta t}$$

