Fyzikální praktikum I

Úloha 12 – Coulombův zákon

FJFI ČVUT v Praze

Jméno:	**Petr Červenka**	Kolega:	Michal Vranovský
Kruh:	**Čtvrtek**	Číslo skup.:	3
Měřeno:	**2.12.2021**	Zpracování:	14h

Klasifikace:

1. Pracovní úkoly

1. DÚ: Odvoďte Coulombův zákon z Gaussova zákona.
2. Ověřte, zda je aparatura horizontálně stabilní a zda se nachází v rovnovážné poloze. Poté správně nakalibrujte torzní siloměr.
3. Zapojte elektrický obvod dle Obr. 3.
4. Pomocí multimetru nastaveného na stejnosměrný proud určete vztah mezi elektrostatickou silou a vzdáleností. Změřené hodnoty zapište do tabulky.
5. Nalezněte vztah mezi elektrostatickou silou a nábojem na kouli. Poté vypočítejte konstantu úměrnosti S z (3).
6. Z naměřených dat vypočítejte permitivitu vakua. Vyneste data do grafu.
7. Vyhodnoťte, zda přímka, kterou jste získali z grafu, prochází počátkem. Co z tohoto grafu vyplývá?

2. Použité přístroje a pomůcky

Torzní siloměr, dvě vodivé sféry se závěsem, kondenzátorová deska, vysokonapěťový zdroj, digitální multimetr, elektrometrický zesilovač s napěťovým zdrojem o 12 V, jednopólový páčkový vypínač, kondenzátor 100 nF/250 V a dvě duté vodivé koule.

3. Teoretický úvod

3.1. Metoda elektrostatického zobrazení

Máme elektrický náboj Q ve vzdálenosti a od vodivé desky. Chceme vědět, jakou silou bude náboj přitahován k desce. Na vodivé desce je na potencíál kladena podmínka $\varphi = 0$ V. Umístěním druhého, fiktivního a opačně nabitého náboje do stejné vzdálenosti a za stěnu tuto podmínku splníme. Úloha se poté redukuje na silové působení dvou nábojů. Velikost síly, kterou se náboje přitahují je

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(2a)^2}. \tag{1}$$

Zde uvažujeme bodové náboje, ovšem v experimentu byl náboj rozprostřen na kouli o poloměru r. S koulí se tedy nelze přiblížit do vzdálenosti $D < r$. Budeme předpokládat závislost (pro bodové náboje $b = 0$)

$$F = A(a)Q^2 + b. \tag{2}$$

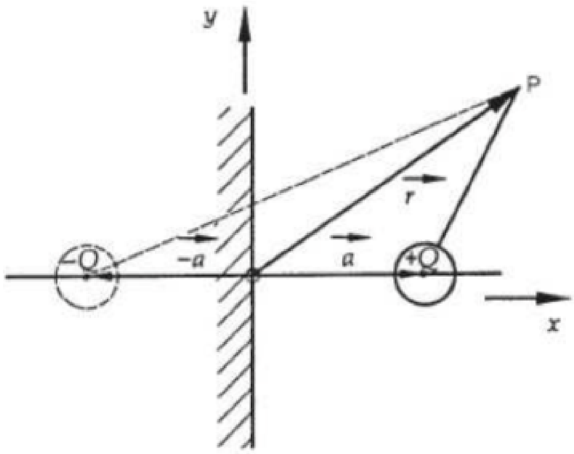
Z (1) úpravami dostaneme

$$\varepsilon_0 = \frac{Q^2}{16\pi F a^2} = \frac{1}{16\pi S}, \tag{3}$$

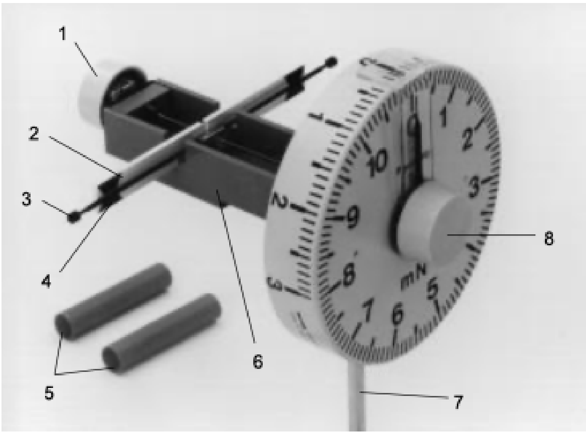
kde S je sklon vynesené přímky z hodnot $A(a)$ a $\frac{1}{a^2}$.

3.2. Torzní siloměr

Torzním siloměrem lze změřit velikost síly pomocí krutu drátu. Na Obr. 2 je zobrazen torzní siloměr. Při působení momentu sil na zavěšené předměty se rameno páky natočí. Dojde ke krutu drátu a vychýlení ramena páky z rovnovážné polohy. Aplikací otáčením ručičky indikátorových hodin aplikujeme opačně orientovaný moment sil a rameno páky se dostane zpět do rovnovážné polohy. Z indikátorových hodin odečteme velikost "protisíly", která je až na znaménko shodná se silou působící na předměty.



Obr. 1: Metoda elektrostatického zobrazení. Vpravo je umístěn reálný náboj, vlevo je fiktivní náboj. Převzato z [1].



Obr. 2: Torzní siloměr použitý při měření. Otočný knuflík (1) slouží pro kalibraci siloměru. Obdélníková destička (2) se značením rovnovážných poloh, rameno páky (4), systém (3) je na zavěšení závaží. Dále jsou zde ochranné trubice (5), tlumič vířivých proudů (6) a držák (7). Měření provádíme otáčením ručičky indikátorových hodin (8) tak, aby rameno páky bylo v mezi ryskami rovnovážné polohy. Siloměr je otočen o 90˚. Převzato z [1].

3.3. Statistika

Během výpočtů budeme muset určit chybu nepřímých měření. Pokud $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, pak pro chybu veličiny y platí

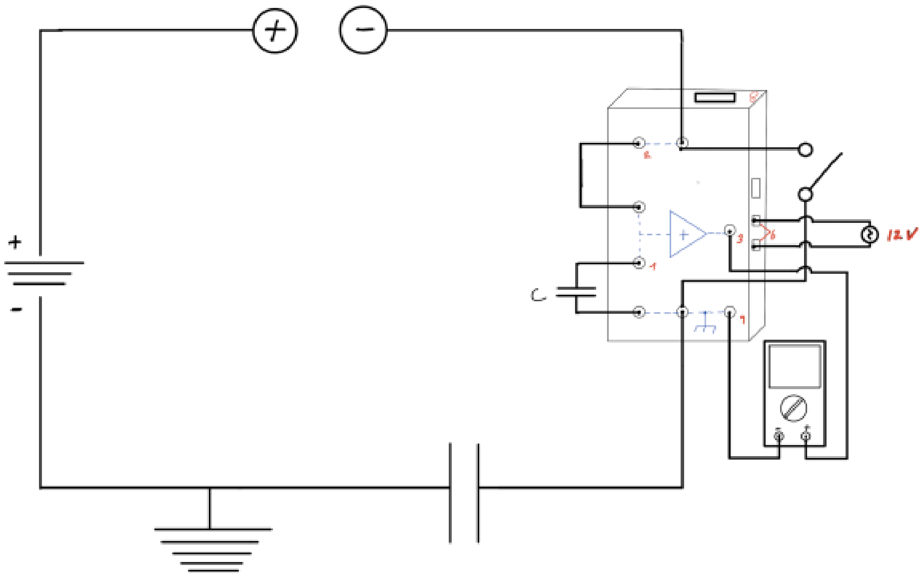
$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2 \ . \tag{4}$$

Pokud jsou jednotlivá měření zatížena chybami a chceme je zohlednit ve výsledné hodnotě veličiny potřebujeme vzorec

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i y_i}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad \sigma_x \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}}, \quad p_i = \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}. \tag{5}$$

4. Postup měření

Z připravených součástek jsme sestavili obvod dle Obr. 3. Povolili jsme upevnění siloměru, nastavili jsme počáteční vzdálenosti koulí na siloměru od desky na 5 cm a horizontálně jsme siloměr vyrovnali. Siloměr jsme zkalibrovali. Přepínač jsme přepli tak, aby multimetr ukazoval 0 V. Na vysokonapěťovém zdroji jsme nastavili 5 kV, hodnota napětí byla i na jedné z dutých vodivých koulí. Dotkli jsme se touto koulí sféry zavěšené na siloměru. Nastavili jsme napětí na vysokonap. zdroji na 0 V. Otočením ručičky indikátorových hodin jsme dostali ramena se zavěšenými sférami do rovnovážné polohy. Přepnuli jsme přepínač. Druhou vodivou koulí jsme se dotkli nabité sféry. Multimetr ukázal nějakou hodnotu napětí, kterou jsme si zapsali. Dále jsme si zapsali hodnotu síly na siloměru. Tento postup jsme poté provedli pro 10, 15, 20, 25 kV. Změnili jsme vzdálenost na 6, 7, 8 cm a postup analogicky opakovali. Poslední vzdálenost byla 4 cm. Sféra se k desce přitahovala velice silně. Na rameno vah jsme dali prst, který sloužil jako zarážka pro rameno sil. Když se sféra dotkla desky, vybila se a měření bylo znehodnoceno. Poté jsme otáčeli ručičkou indikátorových hodin a hledali jsme rovnovážnou polohu. Vše jsme zopakovali pro napětí $5, 10, 15, 20, 25$ kV, hodnoty napětí na multimetru a hodnoty sil jsme si zapisovali.



Obr. 3: Elektrický obvod měřící aparatury. Dokreslený kvádr je operační zesilovač. Dvě koule značí duté vodivé koule. Zdroj se svorkami $\pm$ je vysokonapěťový zdroj. Kondenzátorová deska je ve spodní části obvodu. Uzemnění ve spodní části obvodu dosáhneme spojením vstupu zesilovače a zemí vysokonapěťového zdroje . Převzato z [1].

5. Vypracování

Naměřené hodnoty jsou uvedené v Tab. 2. Nafitované hodnoty pro jednotlivé vzdálenosti desky a sféry jsou na Obr. 4. Důležitý parametr A je v Tab. 1. Vezmeme parametry A (s chybami) jako funkce $\frac{1}{a^2}$ uděláme lineární fit. Platí vztah $Q = CU$, kde $C = 10$ nF. Hodnoty A vydělíme C^2, nafitujeme a dostaneme S ze vzorce (3). Výsledek je na Obr. 5. Hodnota $S = (234 \pm 18)\ \mathrm{Gm \cdot F^{-1}}$. Výsledná hodnota permitivity vakua (femto násobek) je $\varepsilon_0 = (85 \pm 7)\ \mathrm{fF \cdot m^{-1}}$. Chyba ε_0 byla určena ze vzorce (4).

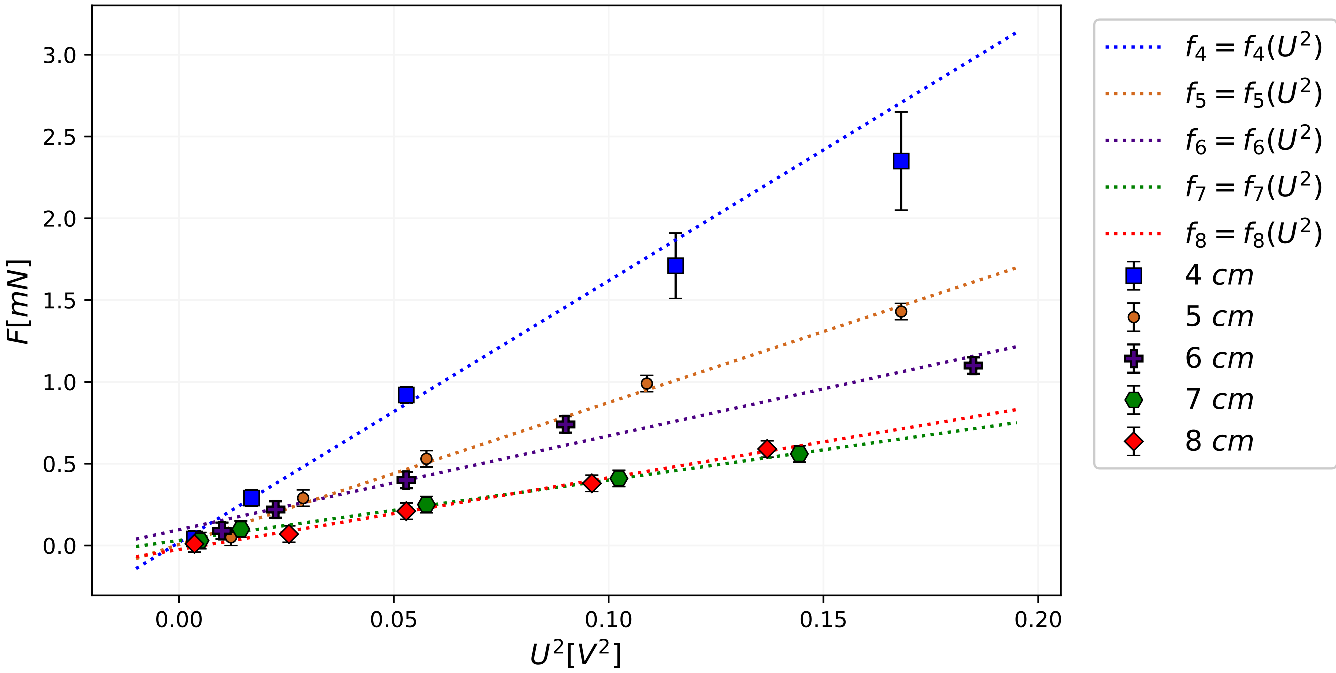
#	$A\,[\mathrm{mN \cdot V^{-2}}]$	$B\,[\mathrm{mN}]$	$\sigma_A\,[\mathrm{mN \cdot V^{-2}}]$	$\sigma_B\,[\mathrm{mN}]$
f_4	16,0	0,020	1,0	0,04
f_5	8,7	0,006	0,4	0,04
f_6	5,7	0,100	0,4	0,03
f_7	3,7	0,030	0,4	0,04
f_8	4,4	-0,020	0,5	0,04

Tab. 1: Tabulka parametrů fitovacích funkcí f_i z Obr. 4, kde hodnota i odpovídá číselně vzdálenosti a. Veličiny σ jsou jejich chyby.

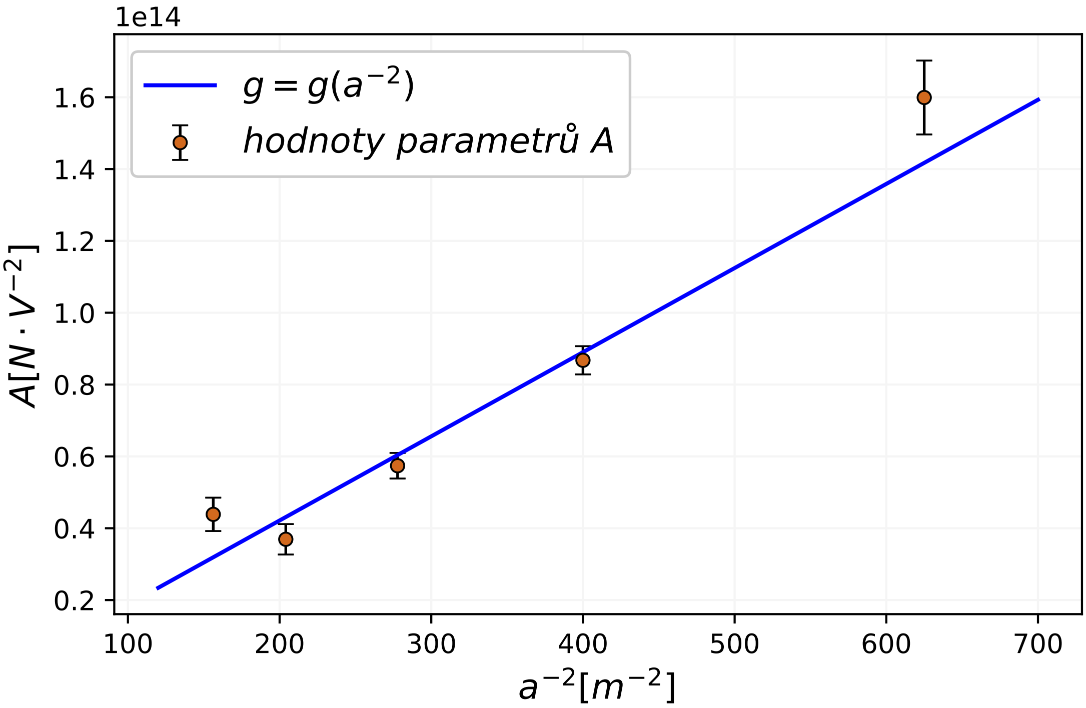
6. Diskuse

6.1. Permitivita vakua a závislost síly na vzdálenosti

Z Obr. 4 vidíme, že síla roste se snižující se vzdáleností a. Ve vzdálenosti $a = 7$ cm muselo dojít k více chybám. Směrnice přímky je menší než pro $a = 8$ cm. K odstranění této chyby jsem předpokládal, že koeficient $A = (4{,}9 \pm$



Obr. 4: Závislost síly mezi deskou a nabitou sférou na kvadrátu napětí (na multimetru). Symboly (čtverec, kříž atd.) odlišují jednotlivé vzdálenosti desky a sféry. Pro fixní vzdálenost platí: čím více je symbol vpravo, tím větší napětí na něj bylo přivedeno. Fitovací funkce f_i mají tvar $f_i(U^2) = A \cdot U^2 + B$ a jsou rozebrány v Tab. 1.



Obr. 5: Závislost parametrů A z Tab. 1 na hodnotách a^{-2}, kde a je vzdálenost desky a sféry. Pro funkci g platí $g = \dfrac{S}{a^2} + L$, kde $S = (234 \pm 18)\ \mathrm{Gm \cdot F^{-1}}$ a $L = (-5 \pm 5)\ \mathrm{TN \cdot V^{-2}}$.

0,1) $2\mathrm{N \cdot V^{-2}}$ pro funkci f_7 v Tab. 1.

Vzorec (1) platí pro velkou desku a náboj blízku u ní, to v našem případě není splněno. Deska bude sféru přitahovat více, než je uvedeno idealizovaném vzorci, protože náboje jsou rozmístěné na desce, která má menší rozměry, a proto jsou náboje blíže ke sféře, než v idealizovaném případě. Udělal jsem korekci (síla 2x větší)

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{8\pi S}. \tag{6}$$

Dále nám bylo vysvětleno, že náboj na sféře se posune od desky. Pro menší a se posune dále, než pro větší a. Poloměr sféry mohl být asi 1,3 cm. Uvažoval jsem korekce na jednotlivé vzdálenosti 4,2, 5,12, 6,07, 7,04, 8,02 cm.

Dáme-li dohromady všechny tyto korekce, dostaneme $S = (240 \pm 21)$ Gm $\cdot$ F^{-1} a $\varepsilon_0 = (165 \pm 14)$ fF $\cdot$ m^{-1}. Odtud mohu odhadnout systematickou chybu ε_0 způsobenou těmito efekty $\sigma_{\varepsilon_0} = 87$ fF $\cdot$ m^{-1}.

Voltmetr měřil s rozlišením 0,01 V. Zkusil jsme náhodně přičítat hodnoty $\delta \in \langle -0{,}01;\ 0{,}01\rangle$ V, nejvyšší odchylka od výše uvedeného ε_0 byla 26 fF $\cdot$ m^{-1}. Další příspěvek k sys. chybě.

Experiment byl velice náchylný na jakoukoliv nepřesnost, určitě jsme jich několik při měření udělali.

6.2. Průchod přímky počátkem

Na Obr. 5 je hodnota koeficientu $L = (-5 \pm 5)$ TN $\cdot$ V^{-2}. Při extrapolaci by přímka neprocházela počátkem. Proč?

Pokud by přímka procházela počátkem platilo by

$$\frac{1}{a^2} \to 0, \quad a \to \infty, \quad F \to 0. \tag{7}$$

Zde by naše teorie předpopvídala, že např. 100 m od desky bychom nic nenaměřili.

Extrapolací přímky zjistíme, že s $\frac{1}{a^2}$ nelze jít do nuly. Měnilo by se tam znaménko A a ze vzorce (2) (při zanedbání b) i znaménko F. Najednou by byla síla odpudivá. To je nějaké divné. Pro bod, kde přímka protína osu x, platí

$$\begin{aligned} 0 = A = \frac{F}{Q^2} &= 2{,}34 \cdot 10^{11} \frac{1}{a_0^2} - 5 \cdot 10^{12} \\ a_0 &= \sqrt{\frac{2{,}34}{5}} = 21{,}6 \text{ cm}. \end{aligned} \tag{8}$$

Do vzdálenosti a_0 můžeme vzorec (1) používat. Poté ovšem neplatí, že síla bude nulová (Coulombické síly mají nekonečný dosah). Můžeme odtud usuzovat, že v této vzdálenosti bude mít deska na nabitou sféru zanedbatelný vliv.

Očekával jsem spíše podmínku, že se sférou nebude možné libovolně blízko přiblížit.

7. Závěr

Diskutovali jsme charakter sil v závisloti na vzdálenosti od desky. Síly rostou s klesající vzdáleností od desky. Metoda elektrostatického zobrazení funguje dobře pro náboje blízko desky.

Naměřená hodnota **permitivita vakua** je:
$\varepsilon_0 = (85 \pm 7(stat.) \pm 113(sys.))$ fF $\cdot$ m^{-1}.

8. Použitá literatura

[1] Kolektiv KF. Návod: Úloha 12 – Coulombův zákon [Online]. [cit. 2021-12-4]. Dostupné z: https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/447433/mod_resource/content/3/Coulomb_211019.pdf

[2] ŠTOLL, Ivan. Elektřina a magnetismus. Vyd. 2. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2003. ISBN 80-010-2693-0.

Příloha

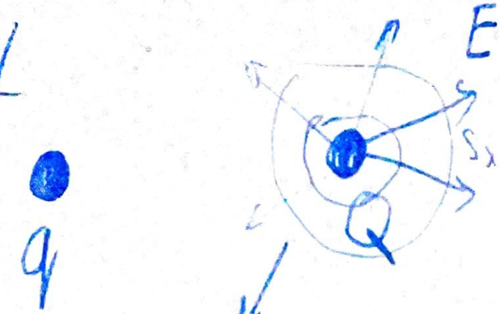
A. Tabulky

a [cm]	U [V]	F [mN]	σ_F [mN]
4	0,06	0,04	0,05
4	0,13	0,29	0,05
4	0,23	0,92	0,05
4	0,34	1,71	0,20
4	0,41	2,35	0,30
5	0,11	0,05	0,05
5	0,17	0,29	0,05
5	0,24	0,53	0,05
5	0,33	0,99	0,05
5	0,41	1,43	0,05
6	0,10	0,09	0,05
6	0,15	0,22	0,05
6	0,23	0,40	0,05
6	0,30	0,74	0,05
6	0,43	1,10	0,05
7	0,07	0,03	0,05
7	0,12	0,10	0,05
7	0,24	0,25	0,05
7	0,32	0,41	0,05
7	0,38	0,56	0,05
8	0,06	0,01	0,05
8	0,16	0,07	0,05
8	0,23	0,21	0,05
8	0,31	0,38	0,05
8	0,37	0,59	0,05

Tab. 2: Tabulka naměřených vzdáleností a mezi sférou a deskou, přitažlivých sil F mezi deskou a sférou. Chyba sil σ_F je pro většinu měření stejná jako chyba siloměru. Při odvedení náboje ze sféry jsme na multimetru měřili napětí U. Pro fixní vzd. a jsme měnili napětí vysokonapěťového zdroje (5, 10, 15, 20 ,25 kV). První hodnota pro fixní a odpovídá 5 kV, druhá 10 kV atd.

B. Domácí příprava

DCV



$$\rightarrow \oiint_{S_x} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

S_x volím soustředné kulové slupky $\Rightarrow d\vec{S} \parallel \vec{E}$

$$\rightarrow \oiint_{S_x} E\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$E = E(r) \Rightarrow$ E je na kulové slupce konst.

$$\rightarrow E\,S_x = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Q působí silou na q $\quad \vec{F} = \vec{E}\cdot q$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}}$$