Fyzikální praktikum I **FJFI ČVUT v Praze**

Úloha 3 – Modul pružnosti v tahu a ve smyku

Jméno:	**Petr Červenka**	Kolega:	Michal Vranovský
Kruh:	**Čtvrtek**	Číslo skup.:	2
Měřeno:	**30.9.2021**	Zpracování:	10 h

Klasifikace:

1 Pracovní úkoly

1. **DÚ:** Domácí úkol
2. Úkol 1:
   a) Změřte závislost relativního délkového prodloužení $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ ocelového drátu na napětí $\sigma = \frac{F}{S}$ ve dvou případech: při postupném zatěžování a postupném odlehčovnání.
   b) Pro oba případy sestrojte graf.
   c) Metodou nejmenších čtverců (ne fitem!) vypočítejte modul pružnosti v tahu E ocelového drátu. Získané parametry použijte k vykreslení přímek prokládající sestrojené grafy.
3. Úkol 2:
   a) Změřte závislost průhybu z ocelového nosníku na velikosti síly F ve dvou případech: při postupném zatěžování a postupném odlehčovnání.
   b) Pro oba případy sestrojte graf.
   c) Metodou nejmenších čtverců (ne fitem!) vypočítejte modul pružnosti v tahu E ocelového drátu. Získané parametry použijte k vykreslení přímek prokládající sestrojené grafy.
4. Úkol 3:
   a) Změřte závislost úhlu zkroucení ϕ ocelového drátu na velikosti točivého momentu M ve dvou případech: při jeho postupném zvětšování a zmenšování.
   b) Pro oba případy sestrojte graf.
   c) Metodou nejmenších čtverců (ne fitem!) vypočítejte modul pružnosti ve smyku G ocelového drátu. Získané parametry použijte k vykreslení přímek prokládající sestrojené grafy.
5. Úkol 4:
   a) Za pomoci torzního kyvadla určete moment setrvačnosti I_0 systému bez závaží, pomocí něj pak modul pružnosti ve smyku G ocelového drátu. Dobu torzních kmitů měřte postupnou metodou.

2 Použité přístroje a pomůcky

Při měření byly použity pomůcky a přístroje: digitální váhy, posuvné měřidlo, mikrometrický šroub, pásové měřidlo (metr), posuvné měřidlo, sada závaží, mikroskop s okulárním mikrometrem, 2 břity a nosník, stojany, struny, indikátorové hodinky, kotouč s úhloměrem, provázek, 2 kladky, závitová tyč, mobil s měřením času.

3 Teoretický úvod

Reálná tělesa můžeme popsat rovnicemi pro tělesa s nekonečně mnoha stupni volnosti. Řešení těchto rovnic je obtížné. Pro malá prodloužení platí Hookův zákon

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{S} \ . \tag{1}$$

Pro naše výpočty použijeme (i indexuje pořadové číslo měření)

$$(\Delta L)_i = \frac{4Lg}{\pi E d^2} m_i \ . \tag{2}$$

kde m je hmotnost závaží, d je průměr struny, L je délka struny, ΔL je prodloužení struny.

Z domácího úkolu známe plošný moment setrvačnosti tyče obdélníkového tvaru. Dosazením do rovnice pro ohyb nosníku na břitech dostaneme pro výchylku jeho prostřední bodu

$$v_i = -\frac{gL^3}{4Eab^3} m_i \ , \tag{3}$$

kde v_i je výchylka nosníku z rovnovážné polohy při i-tém měření, L je vzdálenost břitů, a je šířka nosníku, b je výška nosníku.

Krutem struny lze změřit modul pružnosti ve smyku pomocí vztahu

$$\phi_i = \frac{2L\zeta m_i g}{\pi R^4 G} \ . \tag{4}$$

Torzní kmity lze vybudit krutem struny a následným uvolněním. Pro periodu torzních kmitů platí

$$T = \sqrt{\frac{8LI}{GR^4}} \ . \tag{5}$$

V našem experimentu představuje torzní kyvadlo závitová tyč se závažími zavěšenými na struně. Ze známosti dvou různých konfigurací (konfig. A a B) závaží na tyči a dvou period (T_A, T_B) torzních kmitů lze určit moment setrvačnosti závitové tyče

$$I_{tyč} = \frac{{T_A}^2(I_{B1} + I_{B2}) - {T_B}^2(I_{A1} + I_{A2})}{{T_B}^2 - {T_A}^2} \overset{I_1 \approx I_2}{\approx} 2\frac{{T_A}^2 I_{B1} - {T_B}^2 I_{A1}}{{T_B}^2 - {T_A}^2} \ . \tag{6}$$

Při statistickém zpracování našich výsledků budeme používat rovnice pro výpočet průměru a chyby měření náhodné veličiny

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ , \tag{7}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \ . \tag{8}$$

Vezmeme-li lineární funkci $f : y = a \cdot x + b$ a minimalizujeme-li hodnotu $\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(x_i))^2$ dostaneme hodnoty koeficientů

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N}(x_i)^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}, \ b = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i - a\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \ . \tag{9}$$

Pro chyby parametrů převezmeme z [3] vzorce

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i - b - ax_i)^2} \tag{10}$$

$$\sigma_a = s_y\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N\sum_{i=1}^{N}(x_i)^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}} \tag{11}$$

$$\sigma_b = s_y\sqrt{\frac{N}{N\sum_{i=1}^{N}(x_i)^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}} \ . \tag{12}$$

Dále budeme využijeme metodu postupných měření. Princip spočívá v tom, že máme sudý počet naměřených hodnot N, které rozdělíme na dvě poloviny. Dostaneme hodnoty x_k, $x_{k+\frac{N}{2}}$, kde $k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}$. Utvoříme rozdíl dvojic $z_k = x_{k+\frac{N}{2}} - x_k$. Pro převodní vztahy platí

$$\bar{x} = \frac{\bar{z}}{\frac{N}{2}} = \frac{\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}(z_i)}{\frac{N}{2}} \tag{13}$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_z}{\frac{N}{2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} (z_i - \bar{z})^2}{(\frac{N}{2} - 1)\frac{N}{2}}} \cdot \frac{1}{\frac{N}{2}} \ . \tag{14}$$

Během výpočtů budeme muset určit chybu nepřímých měření. Pokud $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, pak pro chybu veličiny y platí

$$(\sigma_y)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2 \ . \tag{15}$$

4 Postup měření

Postup měření bude složen ze čtyř částí. Každá část bude věnována jednomu ze čtyř úkolů.
Na počátku měření jsem zvážili jednotlivá závaží a zapsali si jejich hmotnosti.

1. Úkol 1
   a) Předepnuli jsme strunu závažím o hmotnosti 101 g. Zapamatovali jsme si hodnotu (referenční hodnota), kterou ukazovaly indikátorové hodiny.
   b) Postupně jsme zavěšovali další závaží a zapsali jsme si hodnotu, kterou ukázaly indikátorové hodiny. Odečtením referenční hodnoty od právě napsané hodnoty jsme dostali prodloužení struny.
   c) Po zavěšení určitého počtu závaží jsme postup obrátili. Závaží jsme postupně odebírali a analogicky jsme určovali prodloužení.
2. Úkol 2
   a) Asistent nám zapojil světlo u mikroskopu.
   b) Změřili jsme výšku a šířku obdélníkové tyče pomocí mikrom. šroubu.
   c) Tyč jsme posunuli tak, aby místo působení síly (místo z háčkem na závaží) bylo přesně uprostřed břitů.
   d) Změřili jsme vzdálenost břitů.
   e) Zaostřili jsme obraz v mikroskopu tak, abychom viděli černou rysku na stupnici. Mikroskop jsme na stojanu posunuli tak, aby ryska byla v okolí 1 na stupnici (1 ± 0.5).
   f) Přidávali jsme závaží, dokud stupnice stačila, tj. ryska nepřesáhla hodnotu 10 (o moc) a zapsali jsme si počet dílků, o které se ryska vychýlila.
   g) Celý postup v předchozím bodu jsme analogicky opakovali při odebírání závaží.
3. Úkol 3
   a) Změřili jsme délku struny metrem, průměr struny mikrometrem. Průměr kotouče umístěného na struně jsme změřili pomocí posuvného měřidla.
   b) Na provázky vedené přes kladku jsme postupně zavěšovali závaží.
   c) Úhel stočení struny jsme odečetli z úhloměru, který byl umístěn na kotouči.
   d) Analogicky jsme postup opakovali, když jsme závaží ubírali.
4. Úkol 4
   a) Zvážili jsme 2 válcová závaží s otvory uvnitř nich. Změřili jsme jejich výšku, vnější a vnitřní poloměr.
   b) Závaži jsme našroubovali na závitovou tyč do polohy A, tak aby tyč byla rovnoběžně s podlahou.
   c) Tyč jsme roztočili a počkali, až se kmity ustálí. Poté jsme tyč zastavili.
   d) Tyč jsme vychýlili z rovnovážné polohy a měřili jsme délku 10 kyvů.
   e) Závaží jsme posunuli do polohy B. Tyč jsme vychýlili z rovnovážné polohy a měřili jsme délku 10 kyvů.
   f) Nakonec jsme tyč vychýlili,a pak změřili délku 50 kyvů.

5 Vypracování

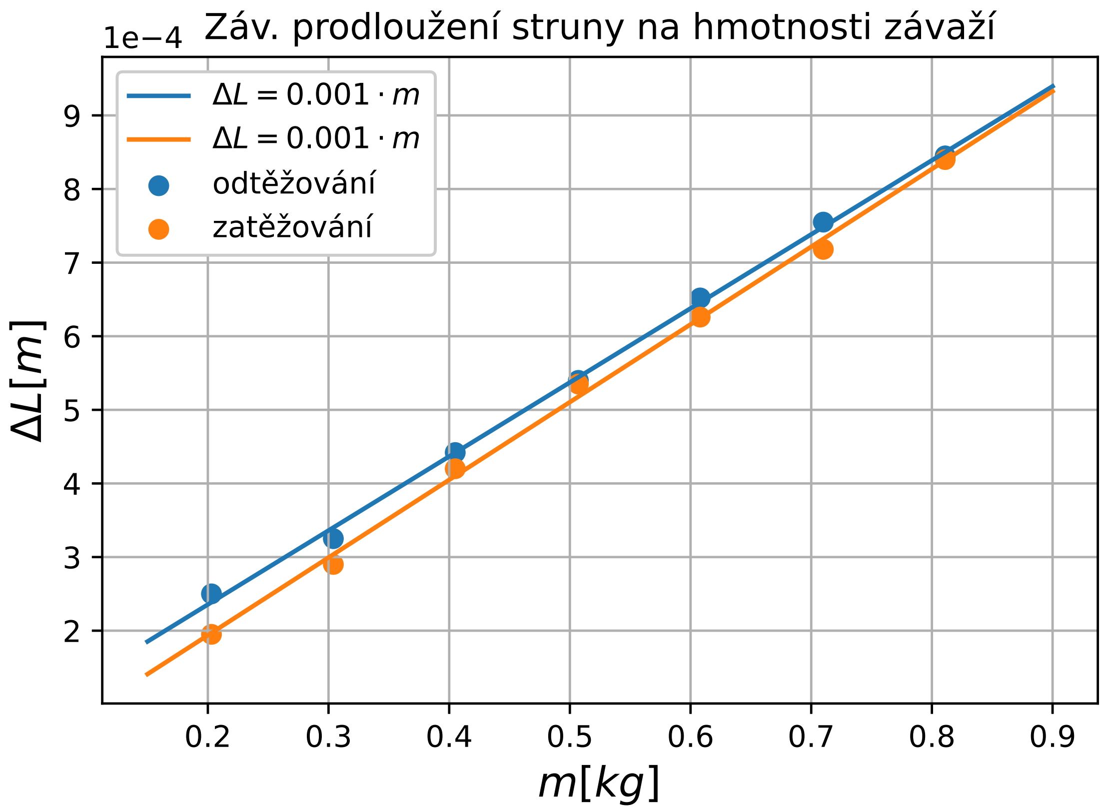
5.1 Úkol 1

Základní parametry soustavy jsou: předpínací závaží o hmotnosti $m_0 = 0.101\,\mathrm{kg}$, průměr struny $d_{str} = 10^{-4} \cdot (2.5 \pm 0.05)\,\mathrm{m}$, délka struny $l_{str} = (0.96 \pm 0.0005)\,\mathrm{m}$. V Tab. 1 jsou uvedena naměřená data.

m [kg] závaží	ΔL [m $\cdot 10^{-5}$] zatěžování	ΔL [m $\cdot 10^{-5}$] odlehčování
102	19.5	25
203	29	32.5
304	43	44.2
406	53.5	54
507	62.6	65.2
609	71.8	75.5
710	84	84.5

Tab. 1: Závislost prodloužení struny ΔL na hmotnosti m.

Obr. 1 ukazuje závislost prodloužení struny na hmotnosti zavěšených závaží. Použitím metody nejmeších čtverců



Obr. 1: Závislost prodloužení struny na hmotnosti zavěšených závaží

na vztah (2), dostaneme koeficient $a = \dfrac{gL}{\pi R^2 E} \Rightarrow E = \dfrac{gL}{\pi R^2 a}$. Ze vzorce (15) dostaneme výslednou chybu měření E. Výsledná hodnotu modulu pružnosti při zatěžování je: $E = (182 \pm 7)\,\mathrm{GPa}$.

Výsledná hodnotu modulu pružnosti při odtěžování je: $E = (191 \pm 8)\,\mathrm{GPa}$.

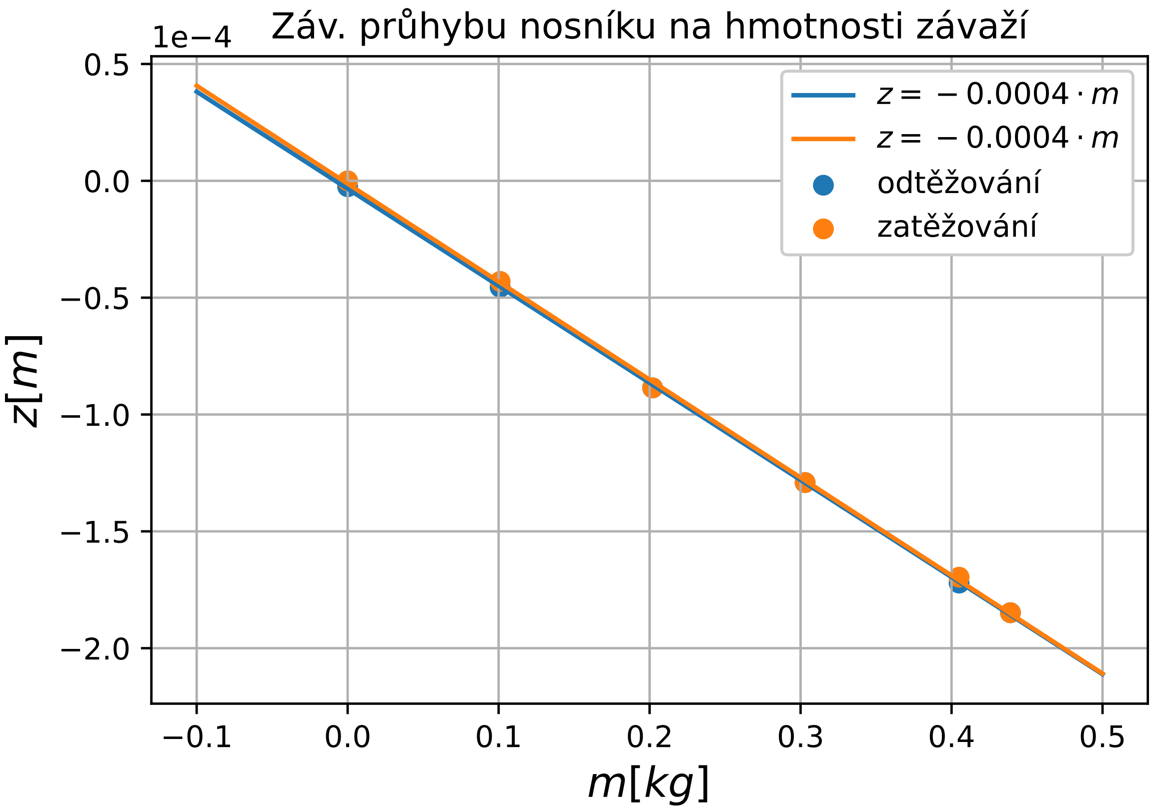
5.2 Úkol 2

Základní parametry soustavy jsou: vzdálenost břitů $L = (0.495 \pm 0.0005)\,\mathrm{m}$, šířka nosníku $a = 10^{-3} \cdot (3.995 \pm 0.005)\,\mathrm{m}$, výška nosníku $b = 10^{-3} \cdot (9.99 \pm 0.005)\,\mathrm{m}$. V Tab. 2 jsou uvedena naměřená data.

m [kg] závaží	z [m $\cdot 10^{-3}/39.5$] zatěžování	z [m $\cdot 10^{-3}/39.5$] odlehčování
0	X	0.1
101	1.7	1.8
202	3.5	3.5
303	5.1	5.1
405	6.7	6.8
439	7.3	X

Tab. 2: Závislost průhybu prostředního bodu nosníku na hmotnosti m.

Graf na Obr. 2 ilustruje závislost výchylky prostředního bodu nosníku na hmotnosti závaží.



Obr. 2: Závislost průhybu nosníku na hmotnosti závaží

Hodnoty modulu pružnosti v tahu určíme použitím metody nejmenších čtverců na rovnici (3) (analogie $y_i = k \cdot x_i$). Tím určíme neznámý koeficient k. Platí, že $k = \dfrac{gL^3}{4Eab^3} \Rightarrow E = \dfrac{gL^3}{4kab^3}$. Z rovnice (15) spočítáme chybu E.

Výsledná hodnotu modulu pružnosti při zatěžování je: $E = (178 \pm 6)\,$GPa.

Výsledná hodnotu modulu pružnosti při odtěžování je: $E = (180 \pm 6)\,$GPa.

5.3 Úkol 3

Základní parametry soustavy jsou: délka struny $l = (0.663 \pm 0.005)\,$m, průměr struny $d = 10^{-3} \cdot (1.995 \pm 0.005)\,$m, průměr kotouče $\zeta = 10^{-2} \cdot (3.98 \pm 0.005)\,$m. V Tab. 3 jsou uvedena naměřená data.

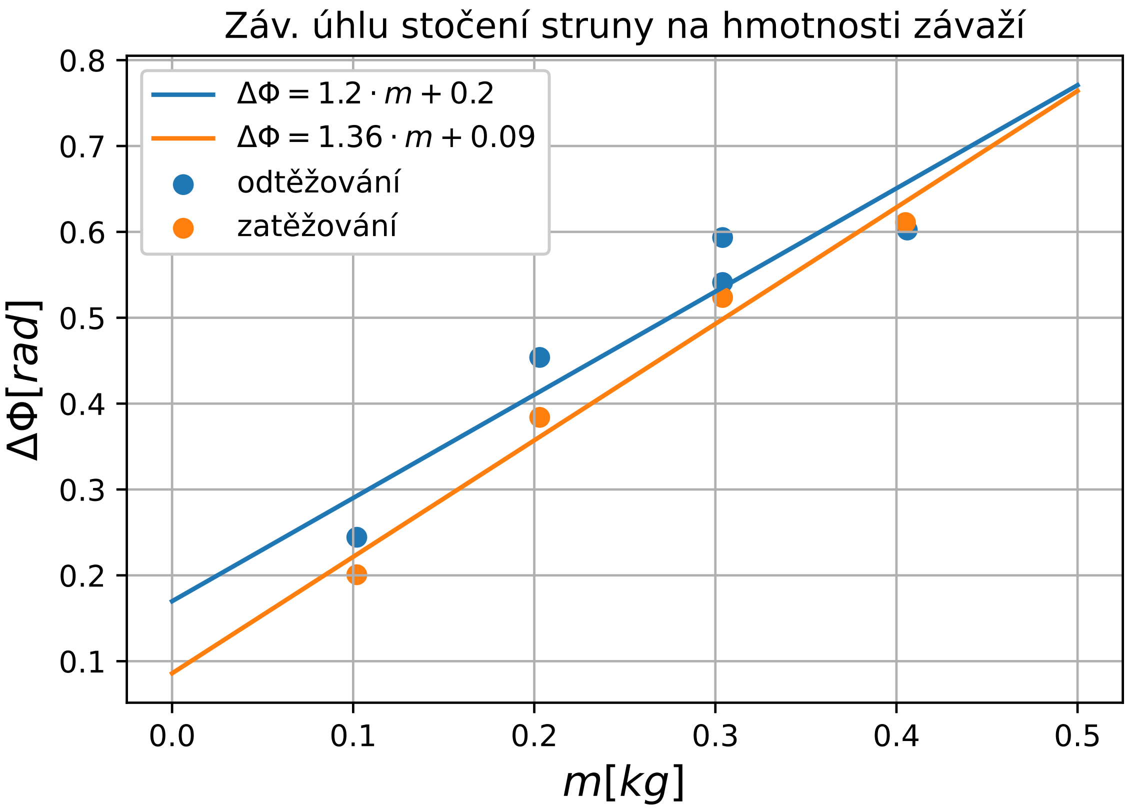
V grafu na Obr. 3 je vidět závislost úhlu stočení struny v závnislosti na hmotnosti závaží. Použijeme metodu nejmenších čtverců na rovnici (4). A spočítáme chybu G dle (15).

Výsledná hodnotu modulu pružnosti ve smyku při zatěžování je: $G = (123 \pm 7)\,$GPa.

Výsledná hodnotu modulu pružnosti ve smyku při odtěžování je: $G = (138 \pm 8)\,$GPa.

m [kg] závaží	$\Delta\Phi$ [°] zatěžování	$\Delta\Phi$ [°] odlehčování
102	11.5	14
203	22	26
304	30	31
304	X	34
405	35	X
406	X	34.5

Tab. 3: Závislost krutu struny na hmotnosti m



Obr. 3: Závislost krutu struny na hmotnosti závaží

5.4 Úkol 4

Základní parametry soustavy jsou: hmotnost závaží (pro obě stejná) $M = 0.128\,\mathrm{kg}$, výška závaží č. 1 $v_1 = 10^{-3}\cdot(8.44\pm0.005)\,\mathrm{m}$, výška závaží č. 2 $v_2 = 10^{-3}\cdot(8.45\pm0.005)\,\mathrm{m}$, vnější poloměr závaží $R_o = 10^{-2}\cdot(2.49\pm0.005)\,\mathrm{m}$, vnitřní poloměr závaží $R_i = 10^{-2}\cdot(0.36\pm0.005)\,\mathrm{m}$, délka struny $l = (0.229\pm0.0005)\,\mathrm{m}$, průměr struny $d = 10^{-3}\cdot(0.49\pm0.005)\,\mathrm{m}$. Pro zjednodušení provedeme $v_1 = v_2 = 10^{-3}\cdot(8.45\pm0.005)\,\mathrm{m}$. Vzdálenost středů závaží od osy otáčení v konfiguraci A je $x_{A1} = 10^{-3}\cdot(8.75\pm0.05)\,\mathrm{m}$, $x_{A2} = 10^{-3}\cdot(8.83\pm0.05)\,\mathrm{m}$ a v konfiguraci B je $x_{B1} = 10^{-3}\cdot(5.67\pm0.05)\,\mathrm{m}$, $x_{B2} = 10^{-3}\cdot(5.69\pm0.05)\,\mathrm{m}$. Moment setrvačnosti závaží vůči ose otačení určíme ze vzorce uvedeném v 9.

V Tab. 4 jsou uvedena naměřená data pro určení momentu setrvačnosti tyče.

Máme již potřebné informace pro určení momentu setrvačnosti tyče. Ze vzorce (6) vychází $I_{tyč} = 0.00048\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-2}$. Chyba mom. setr. tyče je určena vzorcem (15), zde si ulehčíme práci a budeme předpokládat aproximovaný vzorec v (6). Zderivováním a dosazením hodnot do rovnice (15) máme výsledek $I_{tyč} = 10^{-3}\cdot(0.48\pm0.05)\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-2}$. Ze vzorce (5) vyjádříme G. Celkový moment setrvačnosti soustavy je roven $I = I_{tyč}+I_{záv1}+I_{záv2} = 10^{-3}\cdot(1.35\pm0.05\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.

Dále do Tab. 5 jsou zpracována data z měření periody torzních kmitů. Při výpočtu byly použity vzorce (14) a (13).

#	T_A [s]	T_B [s]
1	7.04	5.28
2	7.34	5.28
3	7.10	5.24
4	7.12	5.24
5	7.21	5.26
$\sigma_{T_{A,B}}$	0.05	0.009
$\bar{T}_{A,B}$	7.16	5.260

Tab. 4: Naměřené hodnoty period kmitů, jejich průměr a chyba

k	t_k [s]	t_{k+5} [s]
1	12.95	78.96
2	26.14	92.21
3	39.40	105.34
4	52.53	118.65
5	65.7	131.55

Tab. 5: Metoda postupných měření; Závaží jsou umístěna v konfiguraci B.

Během časových intervalů byla změřena hodnota 5 kyvů tj. $\frac{5}{2}T$. Po zpracování naměřených hodnot postupnou metodou dostáváme výsledek $T = \frac{2}{5}(13.20 \pm 0.01)\,\mathrm{s} = (5.28 \pm 0.004)\,\mathrm{s}$.

Posledním krokem je určení modulu pružnosti ve smyku G. Vyjádříme ze vzorce(5) G, aplikujeme rovnici (15) a máme výsledek: $G = (77 \pm 8)\,\mathrm{GPa}$.

6 Diskuse

U všech úkolů naměřené hodnoty modulu pružnosti v tahu nebo modulu pružnosti ve smyku ukazují, že zkoumaná tělesa jsou z oceli. To jsme i očekávali, protože struny jsou většinou vyrobeny z oceli, totéž platí pro nosník. U ocelí $E \in \langle 180, 210\rangle\,\mathrm{GPa}$, $G \in \langle 75, 90\rangle\,\mathrm{GPa}$.

6.1 Úkol 1

Podle závislosti prodloužení struny na hmotnosti závaží bych usoudil, že proběhla mírná plastická defermace struny při zatěžování struny. Při odlehčování poté neprobíhá deformace po stejné křivce, a proto se moduly prožnosti v tahu při zatěžování a odlehčování liší

Měření je určitě zatíženo systematickou chybou. Struna byla upnuta v držáku lehce nakřivo. Díky tomu se bude struna méně natahovat, odhaduji, že zde by mohla vzniknout chyba 2 GPa.

Dále je struna uchycena uvnitř indikátorových hodinek, které při zatížení ukázaly nějakou hodnotu, ale při drobném poklepání na hodiny se ručička na hodinách posunula. V mechanismu hodin tedy muselo být nějaké tření, díky kterému se mechanismus zadrhával. Neznám mechanismus uvnitř indikátorových hodin, ale minimální chyba bude 3 GPa.

6.2 Úkol 2

Díky měření výchylky pomocí mikroskopu mají výsledky nejvyšší přesnost. U tohoto úkolu je poměrně důležité, aby místo, kde zavěšujeme závaží, bylo přímo uprostřed.

Měření je omezeno stupnicí v mikroskopu. Byli jsme schopni pověsit pouze 5 závaží, než se ryska dostala mimo stupnici. V tomto úkolu nebyla přesáhnuta mez pružnosti, a proto deformace při zatěžování i odtěžování probíhá po stejné křivce.

Ryska často na stupnici kmitala, jakýkoliv otřes ji ihned rozkmital (bouchnutí do stolu, otřesy podlahy při chůzi...). Chyba při čtení by se pohybovala okolo $\sigma_{čtení} = \frac{10^{-3}}{39.5} \cdot \frac{4}{10}\,\mathrm{m} \approx 10^{-5}\,\mathrm{m}$. Tato chyba nebude mít velký vliv na výsledek.

6.3 Úkol 3

Vychází výsledek, který vůbec neodpovídá tabulkové hodnotě. Proč?

Důvodem bude malé množství dat. Dochází ke špatnému určení parametru a z rovnice (9), a tím pádem špatnému určení G. Předpokládejme $b = 0$, poté dostaneme

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} (x_i)^2}. \tag{16}$$

Rovnici (16) použijeme na vzorec (4) s výsledkem

$$G = \frac{2\zeta g L \sum_{i=1}^{N} (m_i)^2}{\pi R^4 \sum_{i=1}^{N} m_i \Phi_i}. \tag{17}$$

Pro zatěžování je $G = (102 \pm 5)\,\mathrm{GPa}$ a pro odlehčování $G = (95 \pm 5)\,\mathrm{GPa}$.

Problém u tohoto experimentu vidím v kotouči umístěném na struně. Prvním problémem jsou provázky přivázané na kotouči. Nešlo přesně lokalizovat, kde provázky skutečně "tahají"za kotouč, tím by se mohl změnit parametr ζ ve vzorci (3). Další nedokonalostí jsou kladky, které do mechanismu přidávají místo, kde se může tvořit nadbytečné tření (provázky o kladky, místo otačení kladek).

Odhaduji $\sigma_{sys} = 4\,\mathrm{GPa}$.

Kdybychom měli k dispozici větší stojan, mohli bychom zavěsit více závaží a výsledek zpřesnit.

6.4 Úkol 4

Nejméně povedený úkol z naší strany. Nesmyslně jsme měřili periody T_A, T_B, které jsou uvedené v 4. Měli jsme rovnou použít postupnou metodu a měření T_A, T_B by bylo mnohem přesnější. Poté bychom více snížili statickou chybu měření G.

Další nepřesnosti jsou měření času a velice zkroucená krátká struna. Systematická chyba může být okolo $\sigma_{sys} = 7\,\mathrm{GPa}$.

Pokud bychom chtěli zpřesnit výsledek, bylo by dobré vyměnit strunu, měřit jinak čas (pomocí záznamu z kamery, laserem při průchodu tyče maximální výchylkou atd.), zavěsit tyč přesně uprostřed (tyč byla asymetricky zavěšena).

7 Závěr

Uvedeme výsledky našich experimentů.

7.1 Úkol 1

Výsledná hodnotu modulu pružnosti při zatěžování je: $E = (182 \pm 7(stat) \pm 5(sys))\,\mathrm{GPa}$
Výsledná hodnotu modulu pružnosti při odtěžování je: $E = (191 \pm 8(stat) \pm 5(sys))\,\mathrm{GPa}$

7.2 Úkol 2

Výsledná hodnotu modulu pružnosti při zatěžování je: $E = (178 \pm 6(stat))\,\mathrm{GPa}$
Výsledná hodnotu modulu pružnosti při odtěžování je: $E = (180 \pm 6(stat))\,\mathrm{GPa}$

7.3 Úkol 3

Výsledná hodnotu modulu pružnosti ve smyku při zatěžování je: $G = (102 \pm 5(stat) \pm 4(sys))\,\mathrm{GPa}$
Výsledná hodnotu modulu pružnosti ve smyku při odtěžování je: $G = (95 \pm 5(stat) \pm 4(sys))\,\mathrm{GPa}$

7.4 Úkol 4

Výsledná hodnotu modulu pružnosti ve smyku je: $G = (77 \pm 8(stat) \pm 7(sys))\,\mathrm{GPa}$

8 Použitá literatura

[1] Kolektiv KF. *Návod: Úloha 3 – Modul pružnosti v tahu a ve smyku* [Online, cit. 4. října 2021]. http://praktikum.fjfi.cvut.cz/pluginfile.php/415/mod_resource/content/test.pdf

[2] Kolektiv KF. *Chyby měření* [Online, cit. 4. října 2021]. http://praktikum.fjfi.cvut.cz/documents/chybynav/chyby-o.pdf

[3] CHALOUPKA, Petr. Základy fyzikálních měření [online]. In: . [cit. 2021-10-3]. Dostupné z: https://people.fjfi.cvut.cz/chalopet/ZFM/ZFM.pdf

[4] HEJNOVÁ, Eva. METODY MĚŘENÍ A ZPRACOVÁNÍ MĚŘENÍ [online]. In: . s. 8 [cit. 2021-10-3]. Dostupné z: http://physics.ujep.cz/~ehejnova/UTM/materialy_studium/metody_mereni.pdf

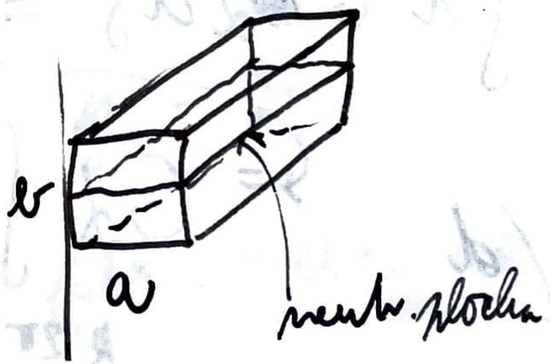
Příloha

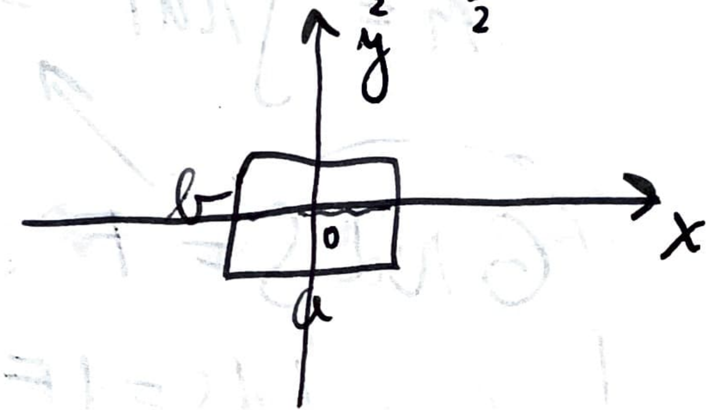
9 Domácí příprava

DOV

$$\boxed{J = \int y^2\, dS = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\, dx\, dy = x \left(\frac{b}{2}\right)^3 \frac{2}{3} = \frac{ab^3}{12}}$$

1





② $2 m_i \xi g = \dfrac{6\pi R^4}{2L} \varphi_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_i = \frac{6\pi R^4}{4 \xi g L} \varphi_i$$

f: $y = ax + b$ + metoda nejm. čtverců

$$a = \frac{\sum y_i x_i}{\sum (x_i)^2}, \quad b = 0$$

$$\frac{6\pi R^4}{4 \xi g L} = \frac{\sum m_i \varphi_i}{\sum (\varphi_i)^2}$$

$$\boxed{G = \frac{4 \xi g L}{\pi R^4} \frac{\sum m_i \varphi_i}{\sum (\varphi_i)^2}}$$

nebo

V

$$\frac{1}{a} m_i = \varphi_i$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{\sum m_i \varphi_i}{\sum (m_i)^2}$$

$$a = \frac{\sum (m_i)^2}{\sum m_i \varphi_i} \Rightarrow \boxed{G = \frac{4 \xi g L}{\pi R^4} \frac{\sum (m_i)^2}{\sum m_i \varphi_i}}$$

$$I_{cell} = I_{tyč} + I_{záv_1} + I_{záv_2}$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = K_1$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{K_1}$$

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{\frac{G\pi R^4}{2LI}} = K_1 I$$

přísp. válcové tyče jinak $I_{tyč}$

$$I_C = \frac{m_1}{4}\left(R_{T1}^2 + R_{T2}^2 + \frac{v_T^2}{3}\right) + \frac{m_{z1}}{4}\left(R_{z11}^2 + R_{z12}^2 + \frac{v_{z1}^2}{3}\right) +$$

$$m_{z1}\left(x_1 + \frac{v_{z1}}{2}\right)^2 + \frac{m_{z2}}{4}\left(R_{z21}^2 + R_{z22}^2 + \frac{v_{z2}^2}{3}\right) + m_{z2}\left(x_2 + \frac{v_{z2}}{2}\right)^2$$

$$\frac{T_a^2}{I_a} = \frac{T_b^2}{I_b}$$

změřím periody T_i při různých I_i

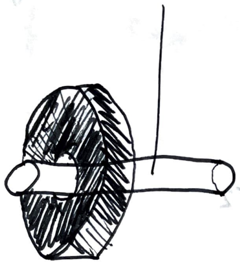
$$\boxed{\begin{matrix} I_{a1} \approx I_{a2} \\ I_{b1} \approx I_{b2} \end{matrix}}$$

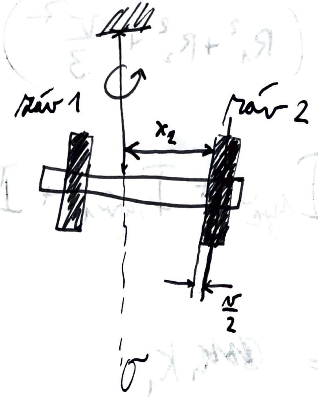
$$T_a^2 (I_{tyč} + I_b) = T_b^2 (I_{tyč} + I_a)$$

$$I_{tyč}(T_a^2 - T_b^2) = I_a T_b^2 - I_b T_a^2$$

$$\boxed{I_{tyč} = \frac{I_a T_b^2 - I_b T_a^2}{T_a^2 - T_b^2}}$$

$$I_{\substack{záv.\\ válcové}} = \frac{m}{4}\left(R_i^2 + R_0^2 + \frac{v^2}{3}\right)$$





Stein. veta

$$I_{\substack{záv\\ vůči\ ose\ o}} = \frac{m}{4}\left(R_i^2 + R_0^2 + \frac{v^2}{3}\right) + m\left(x_2 + \frac{v}{2}\right)^2$$

3.

indexy A, B označují veličiny v konfiguraci závaží v poloze A, B
index 1 → závaží 1
index 2 → závaží 2

$$\omega^2 = \frac{G \pi R^4}{2 L I}$$

$$T_A: \quad \frac{4\pi^2}{T_A^2} = \underbrace{\frac{G \pi R^4}{2L}}_{=K} \frac{1}{I_A} \quad (1)$$

$$T_B: \quad \frac{4\pi^2}{T_B^2} = K \frac{1}{I_B} \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{T_B^2}{T_A^2} = \frac{I_B}{I_A} = \frac{I_{tyč} + I_{B1} + I_{B2}}{I_{tyč} + I_{A1} + I_{A2}}$$

$$T_B^2 (I_T + I_{A1} + I_{A2}) = T_A^2 (I_T + I_{B1} + I_{B2})$$

$$(T_B^2 - T_A^2) I_{tyč} = I_{B1} T_A^2 + I_{B2} T_A^2 - T_B^2 I_{A1} - T_B^2 I_{A2}$$

$$I_{tyč} = \frac{T_A^2 (I_{B1} + I_{B2}) - T_B^2 (I_{A1} + I_{A2})}{T_B^2 - T_A^2}$$

$$\boxed{\frac{T_B^2}{T_A^2} = \frac{I_B}{I_A} = \frac{I_{tyč} + I_{B1} + I_{B2}}{I_{tyč} + I_{A1} + I_{A2}}}$$

$$\boxed{I_{tyč} = \frac{T_A^2 (I_{B1} + I_{B2}) - T_B^2 (I_{A1} + I_{A2})}{T_B^2 - T_A^2}}$$