Fyzikální praktikum I **FJFI ČVUT v Praze**

Úloha 4 – Cavendishův experiment

Jméno:	**Petr Červenka**	Kolega:	Michal Vranovský
Kruh:	**Čtvrtek**	Číslo skup.:	2
Měřeno:	**7.10.2021**	Zpracování:	15h

Klasifikace:

1 Pracovní úkoly

1. **DÚ:**
   a) Zopakujte si výpočet chyb nepřímého měření, vysvětlete rozdíl mezi lineárním a kvadratickým zákonem hromadění chyb a jejich použití.
   b) Odvoďte vztah pro výpočet relativní chyby měření G a zamyslete se, jak vypadá chyba periody kmitu T a chyba rozdílu vzdáleností rovnovážných poloh S.
2. Úkol 2:
   a) Ve spolupráci s asistentem zkontrolujte, zda je torzní kyvadlo horizontálně vyrovnané.
   b) Pomocí torzního kyvadla změřte gravitační konstantu. Do protokolu přiložte graf naměřených dat včetně errorbarů a nafitované funkce. Diskutujte, zda bylo kyvadlo rotačně vyrovnané.

2 Použité přístroje a pomůcky

Aparatura s torzním kyvadlem, dvě závaží kulového tvaru, He-Ne laser, ochranné brýle, metr, mobil s měřením času, stojan a držák na laser, laserový dálkoměr, zemnící kabel.

3 Teoretický úvod

Vynikající britský experimentátor Henry Cavendish provedl experiment s torzními vahami, a tím se mu podařilo určit gravitační konstantu. Experiment byl zopakován i v praktiku. Zjednodušený nákres celé soustavy je na Obr. 3.

Z rovnosti torzního momentu a momentu síly, který způsobí gravitační síla (výpočet je uveden v [1]) dostaneme

$$\frac{2dGm_1m_2}{b^2}(1-\beta) = k\Theta \ , \tag{1}$$

kde $\beta = b^3(b^2+4d^2)^{-\frac{3}{2}}$.

Nahlédnutím do 3 vidíme, že pro malé výchylka platí

$$\tan(2\Theta) \approx 2\Theta = \frac{|S_1 - S_2|}{2L} \ . \tag{2}$$

Z minulého úkolu [3] víme, že pro periodu torzních kmitů platí vztah

$$T^2 = \frac{4\pi^2 I}{k} \ . \tag{3}$$

Dosazením vztahů (3) a (2) do pravé strany rovnice (1) dostaneme

$$G = \frac{\pi^2 b^2 |S_1 - S_2|(d^2 + \frac{2}{5}r^2)}{T^2 L m_2 d(1-\beta)} \ . \tag{4}$$

V domácím úkolu 10 je odvozen vztah pro relativní chybu gravitační konstanty

$$\frac{\sigma_G}{G} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_S}{S}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2} \ . \tag{5}$$

Pro statistické zpracování dat využijeme vzorce pro kombinaci dvou nezávislých měření. Pro průměrnou hodnotu a chybu náhodné veličiny, kterou dostaneme zkombinováním výsledků měření veličin $y_i \pm \sigma_{y_i}$, platí

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i y_i}{\sum_{i=1}^n p_i}, \ \sigma_x \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}}, \tag{6}$$

kde $p_i = \dfrac{1}{\sigma_{y_i}^2}$.

4 Postup měření

Tentokrát máme pouze jeden úkol rozdělený na dvě části. Postup měření nebudeme dělit na dvě části, ale popíšeme obě části najednou.

1. Asistent nám řekl podrobnosti ohledně celé aparatury (práce s laserem, odaretování kyvadla, horizontální vyrovnanost kyvadla atd.).
2. Kyvadlo nebylo horizontálně vyrovnané, a proto jsme ho pomocí šroubů vyrovnali. Že je kyvadlo horizontálně vyrovnané, lze poznat pomocí odrazu od pomocného zrcátka. Měli bychom vidět tvar 4.
3. Kyvadlo jsme pomocí šroubků pomalu odaretovali. Asistent nám zapnul laser. Dále jsme více naklonili laser, aby se světlo po odrazu od zrcátka dostalo do blízkosti metru na zdi. Kyvadlo jsme znovu zaaretovali.
4. Na otočný stojan jsme umístili kovové koule. Stojan jsme otočili tak, aby se koule skoro dotýkaly krabičky s kyvadlem.
5. Zapnuli jsme laser a velice pomalu jsme odaretovali kyvadlo. Po zdi začala jezdit světelná značka (tečka). Chvilku jsme počkali, jestli nedojde k odrazu kyvadla od stěny krabičky. Nedošlo, takže jsme začali měřit čas a odečítat pozici tečky na metru (vždy po 20 s).
6. Po třech periodách torzních kmitů jsme koule pomalu otočili skoro o π rad, jak zobrazeno na 3.
7. Opět jsme začali měřit čas a odečítat pozici tečky na metru (vždy po 20 s).
8. Nakonec jsme vypnuli laser a zaaretovali kyvadlo.
9. Pomocí laserového dálkoměru jsme změřili vzdálenost mezi zrcátkem na kyvadlu a metrem na zdi.

5 Vypracování

Gró celého zpracovnání dat, je správné nafitování naměřených hodnot.

5.1 Poloha S_1

Data naměřená v poloze S_1 jsou zobrazena na Obr. 1.

Fitovací funkce má tvar $f_{fit}(t) = A\exp(-\delta t)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi\right)+S_1$. Vystupují zde proměnné: fáze ϕ, amplituda kmitů A, dekrement útlumu δ, perioda kmitů T, rovnovážná poloha S_1 a jediný nezávislý parametr čas t. Hodnoty a chyby parametrů jsou uvedeny v Tab. 1.

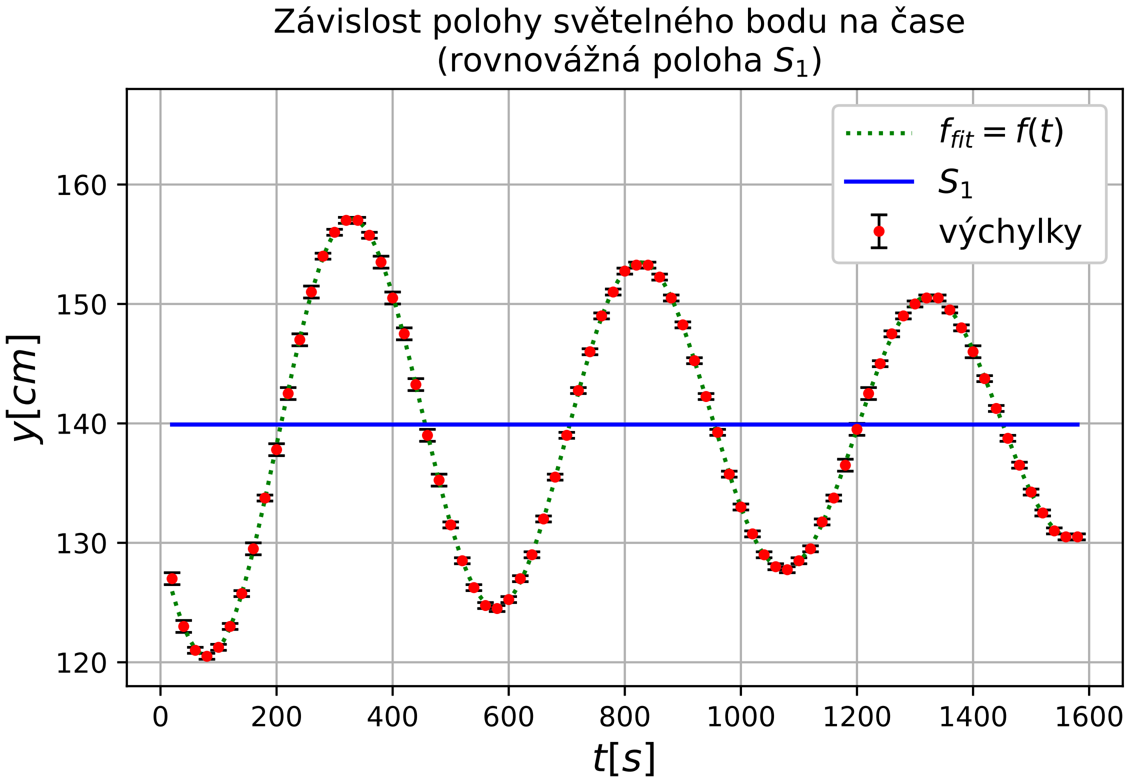
#	A [cm]	δ [s^{-1}]	T [s]	ϕ [rad]	S_1 [cm]
Hodnota	-20.12	4.75e-04	497.56	31.939	139.903
Chyba	0.05	3e-06	0.18	0.004	0.017

Tab. 1: Tabulka hodnot parametrů fitovací funkce f

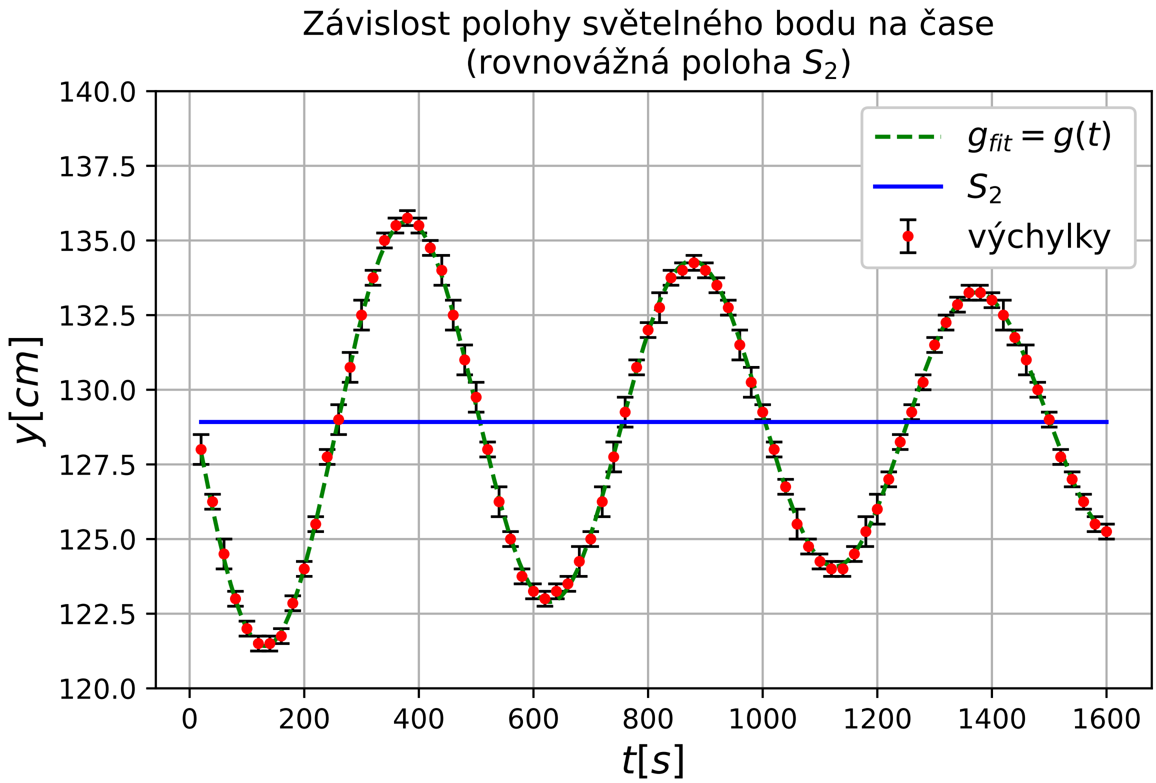
5.2 Poloha S_2

Data naměřená v poloze S_2 jsou zobrazena na Obr. 2.

Fitovací funkce má tvar $g_{fit}(t) = A\exp(-\delta t)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi\right)+S_2$. Parametry mají stejné názvy jako u funkce f_{fit}. Hodnoty a chyby parametrů jsou uvedeny v Tab. 2.



Obr. 1: Graf závislosti výchylky světelného bodu na čase



Obr. 2: Graf závislosti výchylky světelného bodu na čase

#	A [cm]	δ [s^{-1}]	T [s]	ϕ [rad]	S_2 [cm]
Hodnota	-7.95	4.40e-04	497.0	31.292	128.921
Chyba	0.05	8e-06	0.3	0.007	0.015

Tab. 2: Tabulka hodnot parametrů fitovací funkce g

5.3 Určení gravitační konstanty

Data z měření vzdálenosti od zrcátka k metru na zdi jsou v Tab. 3. Hodnotu $L = (5.966 \pm 0.003)$ m dostaneme klasickým spočítáním aritmetického průměru a střední kvadratické chyby aritmetického průměru. Pro periodu torzních

L [m]
5.983
5.971
5.973
5.970
5.958
5.966
5.957
5.958
5.956
5.965

Tab. 3: Tabulka naměřených hodnot vzdálenosti zrcátka a metru

kmitů můžeme zkombinovat naše dvě měření. Použijeme (6) a dostaneme $T = (497.41 \pm 0.15)$ s. Pro $S = S_2 - S_1 = (10.982 \pm 0.032) \cdot 10^{-2}$ m. Ze zadání úlohy máme konstanty: $r = 9.55$ mm, $d = 50.7$ mm, $b = 45$ mm, $m_2 = 1.24$ kg.

Všechny hodnoty dosadíme do vztahu (4). Výsledek je $G = 6.607 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. V 10 a v (5) jsme odvodili vztah pro chybu G. Výsledná hodnota gravitační konstanty je: $G = (6.61 \pm 0.02) \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

6 Diskuse

Metoda měření gravitační konstanty je velice citlivá na jakékoliv gravitační působení kyvadla a ostatních těles. Někdy se stalo, když kyvadlo kmitalo ve vodorovném, že najednou začalo lehce kmitat i ve směru svislém. Nejspíše to bylo zapříčiněno vibracemi podlahy (chůze osob, průjezd tramvaje ...). Při těchto kmitech bude docházet k disipaci energie, amplituda kmitů se bude více snižovat. Řekl bych, že se i o trochu prodlouží perioda podélných kmitů. Tento efekt nebude mít na systematickou chybu velký vliv, odhaduji $\sigma_{G_{sys}} = 10^{-13}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. Přenosem experimentu na klidné místo bychom tento efekt eliminovali.

Předpokládám, že nejzásadnějším ovlivněním experimentu je měření času. Použili jsme metodu "jeden hlásí, druhý píše". Experimentátor zapisuje výchylky a říká časové intervaly, spolupracovník čte na metru výchylky světelného bodu. Pokud zapneme stopky, je pro člověka nemožné zastavit čas pokaždeé přesně na hodnotách $20 \cdot n$, $n = 1, 2, \ldots, 80$. Vyzkoušel jsem měření reakční doby na stránce http://klimes.mysteria.cz/clanky/psychologie/reflex_reaction_time.htm. Má reakční doba se pohybuje okolo 0.32 s.

Chyby měření času budou mít normální rozdělení. Zkusil jsem generovat čísla $x \in \langle 0.30, 0.50 \rangle$ (přibližné hodnoty reakční doby) a dvě náhodná čísla $0, 1$. Když padla 0, pak jsem x přičetl k času v bodech $t = 20 \cdot k$ s, $k = 1, 2, \ldots, 80$. Pokud padla 1, tak jsem x odečetl. Po několika spuštěních programu jsem dostal (zaokrouhleno na tisíciny) $G_{max} = (6.628 \pm 0.022) \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ a $G_{min} = (6.601 \pm 0.022) \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. Porovnáním s G v odstavci 5.3 vidíme, že se hodnoty liší. Systematická chyba z měření času bude maximálně $G_{sys} = 3 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. Tuto chybu by šlo odstarnit, kdybychom nad metr dali světelné senzory. Světelná tečka by poté jela po senzorech. V PC bychom zapnuli měření času a v daných intervalech by senzory pouze vrátily informaci o pozici tečky.

Dalším problémem je, že na torzní kyvadlo působili gravitačně i jiné objekty v těsném okolí. Kyvadlo je uloženo v krabičce, kyvadlo stojí na stole blízko zdi. Kousek od něj je i laser na ocelovém stojanu. Při výpočtu jsme zanedbali moment setrvačnosti tyčky, na které jsou umístěné menší koule. Tyto vlivy je poměrně těžké určit. Chyba se může pohybovat klidně nad $G_{sys} = 6 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

Rotační vyrovnanost kyvadla poznáme z naměřených dat. Výchylky světelného bodu jsou na obě strany od rovnovážné polohy zhruba stejné.

Článek [4] uvádí hodnotu gravitační konstanty z roku 2018 jako $G = (6.67430 \pm 0.00015) \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. Hodnota spadá do našeho intervalu. Je ale otázka, jestli mi neutekly ještě některé systematické chyby.

7 Závěr

Uvedeme výsledek našeho měření.

Výsledná hodnota **gravitační konstanty** je: $G = (6.61 \pm 0.02(stat) \pm 0.10(sys)) \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

8 Použitá literatura

[1] Kolektiv KF. *Návod: Úloha 4 – Cavendishův experiment* [Online, cit. 9. října 2021].
http://praktikum.fjfi.cvut.cz/pluginfile.php/415/mod_resource/content/test.pdf

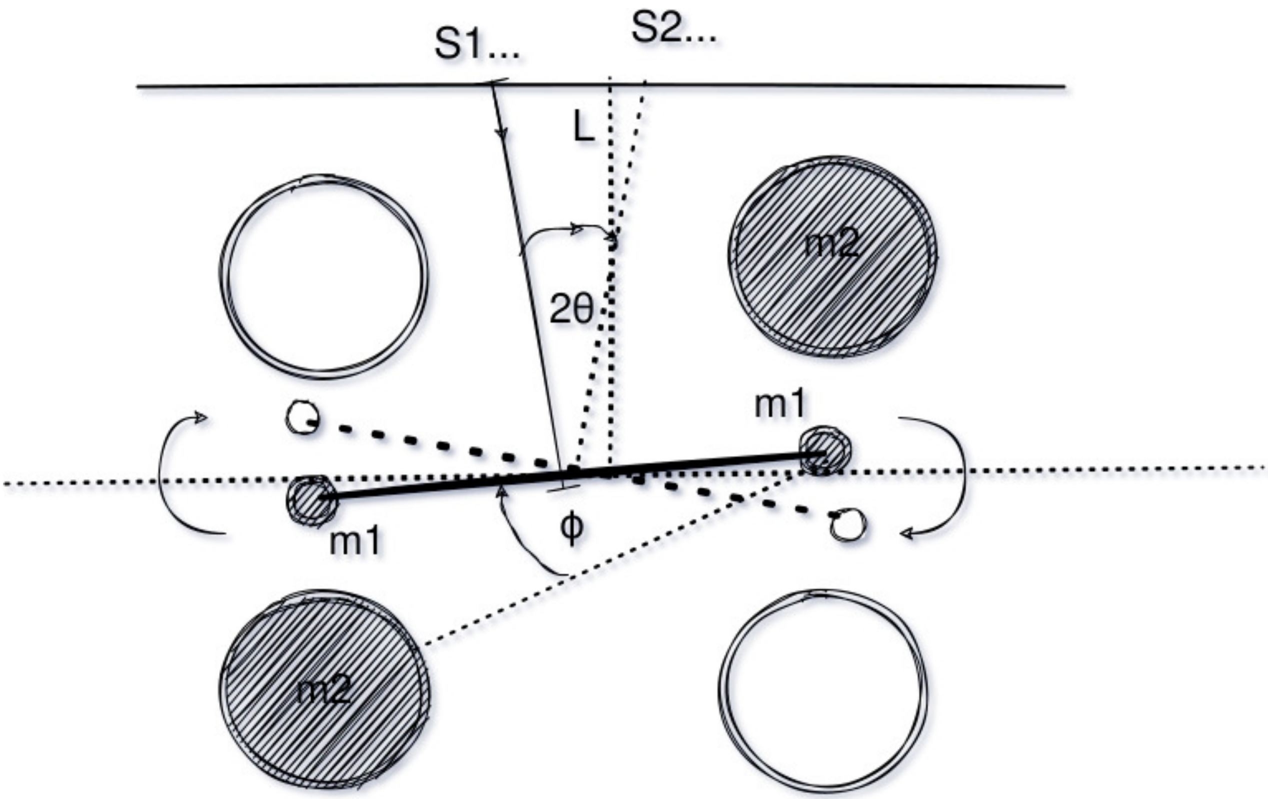
[2] Kolektiv KF. *Chyby měření* [Online, cit. 9. října 2021].
http://praktikum.fjfi.cvut.cz/documents/chybynav/chyby-o.pdf

[3] ČERVENKA, Petr. Modul pružnosti v tahu a ve smyku [online]. In: . s. 9 [cit. 2021-10-9].
Dostupné z: https://github.com/cervep12/protokoly/blob/main/praktika_modulyGE.pdf

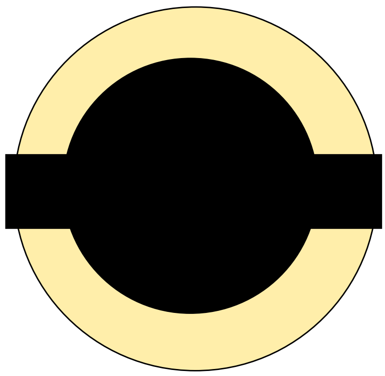
[4] Gravitational constant. Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2021-10-9].
Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_constant

Příloha

9 Nákresy



Obr. 3: Schéma experimentu



Obr. 4: Odraz v zrcátku při horizontální vyrovnanosti

10 Domácí příprava

1) lineár zák: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\sigma_y = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| |\sigma_{x_1}| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| |\sigma_{x_2}| + \dots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| |\sigma_{x_n}|$$

kvard. zák:

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2}$$

lineární → chceme odhadnout chybu měřené veličiny ještě před měřením / maximální chyba měř. vel.

→ $\sigma_{y\,\text{lineár}} \geq \sigma_{y\,\text{kvadr.}}$

kvadr. → nejpravděpodob. chyba naměř. velič.

---

2) $G = \text{konst.}\ \dfrac{S}{T^2 \cdot L}$

$$G = \text{konst.} \cdot \frac{S}{T^2 L} \qquad S = |S^2 - S^1|$$

$$\sigma_G = \text{konst.}\sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial S}\right)^2 \sigma_S^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)^2 \sigma_T^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2} =$$

$$= \text{konst.}\sqrt{\left(\frac{1}{T^2 L}\right)^2 \frac{\sigma_S^2}{S^2} S^2 + \left(2\frac{S}{T^3 L}\right)^2 \sigma_T^2 + \left(\frac{S}{T^2 L^2}\right)^2 \sigma_L^2} =$$

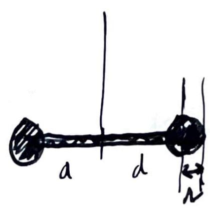
$$= \text{konst.}\sqrt{\left(\frac{S}{T^2 L}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sigma_S^2}{S^2} + 4\frac{\sigma_T^2}{T^2} + \frac{\sigma_L^2}{L^2}\right)}$$

$$= G\sqrt{\frac{\sigma_S^2}{S^2} + \frac{\sigma_T^2}{T^2}\cdot 4 + \frac{\sigma_L^2}{L^2}}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_G}{G} = \sqrt{\frac{\sigma_S^2}{S^2} + 4\frac{\sigma_T^2}{T^2} + \frac{\sigma_L^2}{L^2}}}$$

$\sigma_L \approx 8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \qquad k = ? \quad I = ?$$



$I_{tyč} \approx 0\,\mathrm{kg\,m^2}$