### Fyzikální praktikum I

# Úloha 8 – Kondenzátor, mapování elektrostatického pole

Jméno: **Petr Červenka** Kolega: Michal Vranovský

Kruh: **Čtvrtek** Číslo skup.: 3 Měřeno: **4.11.2021** Zpracování: 18h



Klasifikace:

### 1 Pracovní úkoly

1. DÚ: Odvoďte kapacitu C deskového kondenzátoru.

- 2. DÚ: Pro deskový kondenzátor stanovte závislost  $\frac{S}{d}$  plochy desek S a vzdálednosti d mezi nimi jako funkci náboje Q a napětí U. Následně spočítejte hodnotu poměru  $\frac{S}{d}$  pro vzduchový deskový kondenzátor s volbou  $Q = Q_{max} = 50~\mu\text{C}$  a  $U = U_{max} = 100~\text{kV}$ .
- 3. Změřte průrazné napětí U mezi deskami kondenzátoru pro deset různých vzdáleností desek d. Náboj přivádějte až do průrazu mezi deskami kondenzátoru. Průrazné napětí U určete prostřednictvím silového působení na vahách ve chvíli průrazu a vztahu (5). Z naměřených hodnot průrazného napětí U pro různé vzdálenosti d určete následně dielektrickou pevnost vzduchu a prorovnejte ji s tabulkouvou hodnotou pro suchý vzduch. Diskutujte důvod případné odlišnosti hodnot.
- 4. Změřte přitažlivé síly mezi deskami kondenzátoru v závislosti na doskoku jiskřiště s pro tři různé vzdálenosti desek d. Náboj přivádějte až do průrazu na kulovém jiskřišti s mikrometrickým šroubem, paralelně připojenému k deskovému kondenzátoru. Ze silového působení spočítejte napětí a ze vztahu v poznámce se pokuste určit neznámou funkci  $f\left(\frac{s}{D}\right)$  ze vztahu (7) vzhledem k podmínce (8) a monotónnosti funkce u doskoku s. Experimentání data a nalezenou funkci zpracujte do grafu.
- 5. Zvolte si dvě konfigurace elektrod, nastavte na nich napětí cca  $10~\rm V$  a zmapujte potenciál v síti  $12~\times~12~\rm bodů$ . V domácím vyhodnocení proveďte grafické zpracování naměřených dat.

### 2 Použité přístroje a pomůcky

Pravítko, posuvné měřidlo, Wimhurstova elektrika, váha, deskový kondenzátor, sada závaží, zkratovač, kulové jiskřiště s mikrometrickým šroubem, vodiče, regulovatelný zdroj 12 V, souprava pro mapování elektrického pole, voltmetr, Petriho miska.

### 3 Teoretický úvod

#### 3.1 Kapacita kondenzátoru, dielektrická pevnost

Máme-li vodič, který nabijeme nábojem Q na potenciál  $\phi$ , pak platí  $Q = C\phi$  a konstantu uměrnosti C nazýváme elektrická kapacita. Pokud máme dvě vodivé elektrody na potenciálech  $\phi_1 > \phi_2$ , pak pro kapacitu této soustavy platí

$$Q = C(\phi_1 - \phi_2) = CU. \tag{1}$$

V 9 je odvozen vztah pro kapacitu deskového kondenzátoru

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d},\tag{2}$$

kde S je plocha desek kondenzátoru, d je vzdálenost desek,  $\varepsilon_0$  je permitivita vakua a  $\varepsilon_r$  je relativní permitivita prostředí. Kapacita C je závislá na daném geometrickém uspořádání elektrod a na typu prostředí, které vyplňuje prostor mezi elektrodami.

Dielektrická pevnost je konstanta, která charakterizuje odolnost dielektrika vůči elektrickému poli. V definičním vztahu

$$E_p = \frac{U_p}{d} \iff d \cdot E_p = U_p, \tag{3}$$

je  $U_p$  elektrické napětí, d je délka. Pokud dosáhne intenzita elektrického pole hodnotu  $E_p$ , dielektrikum se stává vodivé a dochází k jeho průrazu. Pro suchý vzduch uvádí [1] hodnotu  $E_p = 3,0 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### 3.2 Energie el. pole, síly mezi deskami kondenzátoru

Energie kondenzátoru je rovna práci, kterou musíme vykonat, abychom kondenzátor nabili. Při přenosu náboje dq vykonáme práci dW = Udq. Celková vykonaná práce poté je

$$W = \int_0^Q U \, \mathrm{d}q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{CU^2}{2}.$$
 (4)

Síla, kterou se přitahují desky deskového kondenzátoru, bude jednosložková. Získáme ji jako práci virtuálních posunutí (síla působí proti posunutí)

$$F = -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}d} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d} \left(\frac{CU^2}{2}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d} \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}U^2}{2}\right) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r SU^2}{2d^2}.$$
 (5)

### 3.3 Průraz na kulovém jiskřišti

Kulové jiskřiště je jednoduchý přístroj pro měření vysokých napětí. Pro kulové elektrody vzdálené od sebe o doskok s lze analyticky najít výraz pro elektrické pole v prostoru. Převezmeme vzorec z [1] pro průrazné napětí vzduchu mezi nimi

$$U_{pr} = 27,75(1 + \frac{0,757}{\sqrt{\delta D}})\frac{\delta s}{f(\frac{s}{D})}, \qquad \delta = \frac{b}{760} \cdot \frac{293}{273 + t},$$
 (6)

kde  $U_{pr}$  je průrazné napětí [kV], s doskok [cm], D průměr koulí [cm],  $\delta$  korekční faktor na hustotu vzduchu, b barometrický tlak [Torr], t teplota [°C].

Vyjádříme-li neznámou funkci f máme

$$f\left(\frac{s}{D}\right) = 27,75\left(1 + \frac{0,757}{\sqrt{\delta D}}\right)\frac{\delta}{U_{pr}}D \cdot \frac{s}{D}.\tag{7}$$

Funkce  $f=f\left(\frac{s}{D}\right)$  je závislá na poměru  $\frac{s}{D}$  a na poloze jiskřišti proti zemi. V [1] je uvedeno, že funkce f je s rostoucí m s rostoucí a

$$f\left(\frac{s}{D} = 0\right) = 1. \tag{8}$$

### 3.4 Mapování elektorstatického pole

Intenzita elektrického pole  $\vec{E}$  je definována

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{a}.\tag{9}$$

Elektrostatické pole je potenciální, a proto  $\vec{E}=-\nabla\phi$ . Dále platí  $\vec{F}=-\nabla W$ . Z těchto dvou vztahů dostaneme dosazením do 9 a zintegrováním vztah

$$\phi = \frac{W}{a} + K. \tag{10}$$

Konstanta K je hodnota referenčního potenciálu  $\phi_0$ . Celkově dostaneme

$$\frac{W}{q} = \phi - \phi_0 = \Delta U. \tag{11}$$

V elektrostatickém poli existují ekvipotenciální plochy. Stačí nám tedy měřit potenciál v daném místě prostoru, sestrojit plochu hodnot potenciálů v závisloti na místě v prostoru a  $\vec{E}$  získáme ze vztahu  $\vec{E} = -\nabla \phi$ .

### 4 Postup měření

### 4.1 Úkol 1

Položili jsme závaží na horní desku kondenzátoru, tak aby byly desky rovnoběžné. Pomocí šroubu jsme desky přiblížili, poté jsme je vyrovnali tak, aby byly přesně v zákrytu. Připojili jsme desky kondenzátorů pomocí vodičů k Wimhurstově elektřině. Asistent nám zapnul váhy a zkontroloval funkčnost aparatury. Změřili jsme tloušťku kondenzátorových desek. Nastavovali jsme různé vzdálenosti desek kondenzátoru (vzdálenost změřena posuv. měř.) a pomocí Wimhurstovy elektřiny jsme na kondenzátor přiváděli náboj. Při jiskrovém výboji jsme vždy odečetli hodnotu hmotnosti na vahách. Poté jsme vždy přiložením zkratovače kondenzátor vybili.

### 4.2 Úkol 2

Aparaturu s předchozího úkolu jsme modifikovali. Připojili jsme paralelně ke kondenzátoru kulové jiskřiště. Vzdálenost mezi deskami kondenzátoru jsme nechali fixní (0.6 mm - 1.0 mm). Vzdálenost doskoku mezi koulemi jsme poté měnili a pomocí Wimhurstovy elektřiny přiváděli náboj na jiskřiště a kondenzátor. Po průrazu na kulovém jiskřišti jsme odečetli hodnotu na vahách, kondenzátor a kulové jiskřiště jsme zkratovačem vybili. Když mezi deskami kondenzátoru působila větší síla, desky se přitáhli blíže. Museli jsme tedy také kontrolovat, zda je vzdálenost desek stále fixní. Postup jsme opakovali třikrát pro různé vzdálenosti desek kondenzátoru.

### 4.3 Úkol 3

Nalili jsme vodu do Petriho misky a položili jsme ji na bodovou mříž. Do nástavců, mezi nimiž byla Petriho miska, jsme dali elektrody. Jednu elektrodu jsme připojili na kladný pól zdroje stejnosměrného napětí, druhou na záporný pól. Pomocí voltmetru, ke kterému byla připojena jehlová elektroda, jsme odečítali hodnoty napětí v jednotlivých bodech mříže. Hodnoty jsme zapisovali do tabulky. Po odečtení všech hodnot jsme vypnuli zdroj, vyměnili jsme elektrody za jiné, zdroj jsme zapnuli a celý postup jsme opakovali analogicky znovu.

### 5 Vypracování

### 5.1 Úkol 1

Prvním krokem bylo změření průměru kruhových desek kondenzátoru  $d = (17.00 \pm 0.05)$  cm. Tloušťka obou desek vyšla  $l = (3.10 \pm 0.05)$  mm. Hodnoty napětí na kondenzátoru získáme ze vztahu (5), kde F = mg. Relativní permitivita vzduchu je dle [1] rovna  $\varepsilon_r = 1,00054$  a permitivita vakua je rovna  $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ .

$d  [\mathrm{mm}]$	m[g]	U [kV]
15,30	38,2	17,57
20,25	42,7	28,68
13,40	26,7	11,62
11,30	18,3	6,81
11,60	23,8	8,23
10,00	17,8	5,01
11,60	24,5	8,35
9,90	14,3	4,37
16,90	39,8	21,09
15,25	29,5	15,35

Tab. 1: Tabulka naměřených hodnot vzdálenosti desek d, hmotností m a vypočtených napětí U mezi deskami.

Hodnotu  $E_p$  z rovnice 3 získáme jako konstantu uměrnosti mezi U a d. Fitovací funkce na Obr.1 má tvar  $f(d) = A \cdot d + B$ . Koeficient A je hledaná  $E_p$ . Z fitu plyne výsledek  $E_p = (2.35 \pm 0.07) \text{MV} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### 5.2 Úkol 2

Výchozí vzorec pro určení neznámé funkce  $f=f\left(\frac{s}{D}\right)$  je (7). Rozdělení hodnot deseti doskoků s v Tab. 2 jsme volili ekvidistantní. Průměr koulí je  $D=(1.44\pm0.005)$  cm. Napětí spočteme dle 5, za d volíme postupně  $d_1 = (6.6 \pm 0.05) \text{ mm}, d_2 = (7.65 \pm 0.05) \text{ mm}, d_3 = (9.1 \pm 0.05) \text{ mm}.$ 

Doskok s musíme převést na cm. Do vztahu (7) pro neznámou funkci f dosadíme naměřené hodnoty. V ten den byla teplota t=22.7 °C a tlak b=100230 Pa  $\doteq 751.7889$  Torr. Nesmíme zapomenout ještě na podmínku (8). Vše jsme zpracovali do Obr. 2.

Parametry fitovacích funkcí A, B s chybami  $\sigma_A, \sigma_B$  jsou zobbrazeny v Tab. 3. Výslednou funkci f v posledním

řádku získáme ze vztahu pro kombinaci měření (vztah uveden v [3]).

Neznámá funkce má tvar  $f\left(\frac{s}{D}\right) = 0.057 \ln\left(\frac{s}{D}\right) + 1.82.^{1}$  Z rovnice (6) získáme dosazením hodnot s hodnoty průrazného napětí, zachyceno na Obr. 3.

 $<sup>^{1}</sup>$  Pro s=0 cm má ln $\left(\frac{s}{D}\right)$  singularitu. Pro bod v okolí 0 je volena aproximace  $s=0{,}0001$  cm.

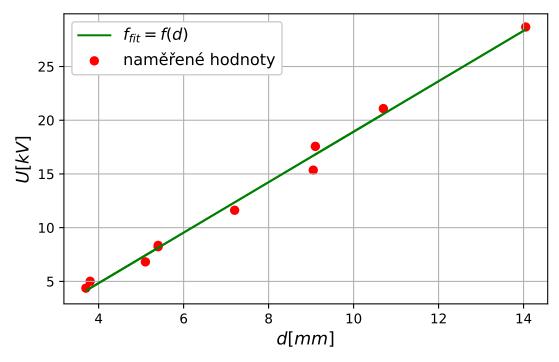
Dielektrická pevnost je konstanta úměrnosti mezi U a s, což je  $E_p = (2,512 \pm 0,005) \; \mathrm{MV \cdot m^{-1}}.$ 

s [mm]	$m_1$ [g]	$m_2$ [g]	$m_3$ [g]	$U_1 [kV]$	$U_2 [kV]$	$U_3$ [kV]
1,0	0,9	2,0	1,0	1,956	3,379	2,843
1,3	1,9	3,6	1,9	2,842	4,534	3,918
1,6	2,7	5,7	1,9	3,388	5,705	3,918
1,9	3,5	8,2	3,9	3,857	6,843	5,614
2,2	4,8	10,1	4,9	4,517	7,594	6,292
2,5	6,4	14,8	8,2	5,216	9,193	8,140
2,8	7,4	20,8	9,9	5,608	10,898	8,944
3,1	9,3	28,2	12,0	6,287	12,690	9,847
3,4	11,2	23,0	14,7	6,899	11,460	10,898
3,7	13,2	30,3	17,6	7,490	13,154	11,925

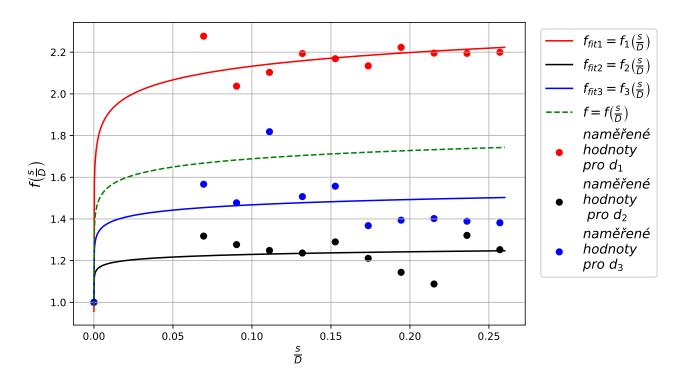
Tab. 2: Tabulka naměřených hodnot doskoku s, hmotností  $m_1,m_2,m_3$  a vypočtených napětí  $U_1,U_2,U_3$ , které odpovídají vzdálenosti desek kondenzátoru  $d_1,d_2,d_3$ .

#	A	В	$\sigma_A$	$\sigma_B$
$f_{fit1}$	0,095	2,35	0,006	0,03
$f_{fit2}$	0,018	1,27	0,007	0,03
$f_{fit3}$	0.04	1.55	0.01	0.06
f	0,057	1,82	0,004	0,02

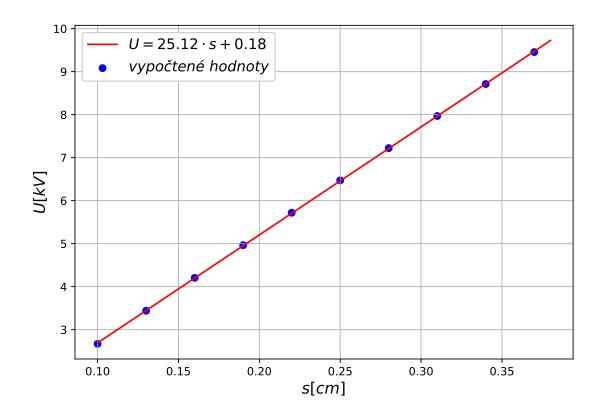
Tab. 3: Tabulka naměřených hodnot vzdálenosti desek d, hmotností m a vypočtených napětí U mezi deskami.



Obr. 1: Graf závisloti napětí U na vzdálenosti d desek kondenzátoru. Fitováno funkcí  $f(d) = A \cdot d + B$ , kde  $A = (2.35 \pm 0.07) \text{MV} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $B = -4.6 \pm 0.6$ .



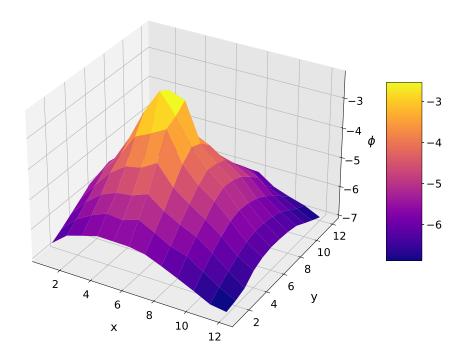
Obr. 2: Graf závisloti neznámé funkce f na poměru doskoku s ku průměru koulí D. Fitováno funkcemi  $f_{fit}\left(\frac{s}{D}\right) = A \cdot \ln\left(\frac{s}{D}\right) + B.$  Parametry funkcí jsou rozebrány v textu.



Obr. 3: Graf závisloti průrazného napětí U na doskoku s. Fitováno funkcí  $f_{fit}(s) = A \cdot s + B$ , kde  $A = (25,12 \pm 0,05) \text{ kV} \cdot \text{cm}^{-1}$  a  $B = (0,18 \pm 0,01) \text{ kV}$ .

### 5.3 Úkol 3

Sestavili jsme dvě konfigurace elektrod. První konfigurace byla kruhová elektroda, uvnitř které byla bodová elektroda. Druhá konfigurace byla elektroda s čárovou elektrodou. Kruhová elektroda byla nabita na potenciál  $\phi_1=7,3$  V v první konfiguraci a  $\phi_2=7,7$  V ve druhé. Byla zkonstruována i interaktivní mapa elektrického potenciálu, dostupná po zkopírování obsahu na https://raw.githubusercontent.com/cervep12/python/main/El\_pole/potenc1.html a na https://raw.githubusercontent.com/cervep12/python/main/El\_pole/potenc2.html, následném vložení do textového souboru a uložení souboru jako HTML. Statická mapa elektrických potenciálů je na Obr. 4 a Obr. 5.



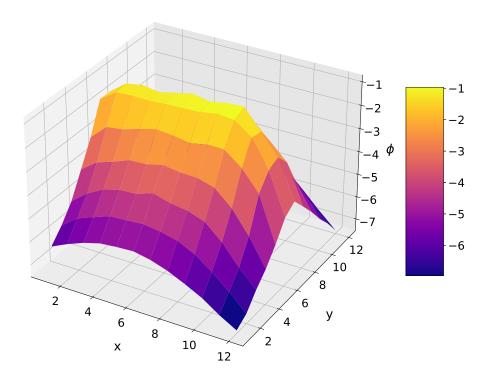
Obr. 4: Graf mapování elektrického potenciálu pro první konfiguraci. Souřadnice x, y jsou polohy bodů na bodové mříži pod Petriho miskou. Na ose z je vynášen potenciál  $\phi$  naměřený v dáném bodě.

### 6 Diskuse

### 6.1 Úkol 1

Hodnota elektrického pole, pří které dochází k průrazu vzduchu nám vyšla o něco nižší než tabulková hodnota  $E_p=3~\mathrm{MV\cdot m^{-1}}$ . Jeden důvod může být ten, že byl deštivý den a byla větší vlhkost vzduch. Kvůli větší vodivosti pak stačí slabší elektrické pole na jeho ionizaci. Zde bude vznikat minimální systematická chyba  $\sigma_1=0.1~\mathrm{MV\cdot m^{-1}}$ . Další nepřesnost vzniká při odčítání na vahách. Při měření jsme točili klikou Wimhurstovy elektřiny poměrně pomalu, abychom minimalizovali chybu při odčítání z vah. Stupnice se pohybuje i tak velice rychle, hodnota každé hmotnosti je zatížena chybou  $\sigma_m=2~\mathrm{g}$ . Zkusil jsem náhodně generovat čísla  $\zeta\in\langle-2;2\rangle$  g a přičítat je našim naměřeným hodnota hmotnosti m. Předpokládal jsem normální rozdělení chyb.

Napadl mě i problém idealizace homogenního pole mezi deskami kondenzátoru. V [2] je uvedeno, že pro  $\frac{d}{\sqrt{S}} = 0.1$  je chyba asi 20 % a pro  $\frac{d}{\sqrt{S}} = 0.01$  asi 2 %. Naše hodnoty jsou  $\frac{d}{\sqrt{S}} = \frac{0.01}{0.15} \approx 0.067$ , budeme brát chybu vzorce (4) 13 %. Na okrajích je elektrické pole slabší. Kapacita kondenzátoru bude větší. Při daném náboji bude na deskách menší



Obr. 5: Graf mapování elektrického potenciálu pro druhou konfiguraci. Souřadnice x, y jsou polohy bodů na bodové mříži pod Petriho miskou. Na ose z je vynášen potenciál  $\phi$  naměřený v dáném bodě.

napětí a menší napětí bude na kondenzátoru i při průrazu vzduchu. Ze vzorce (3) poté vyjde i  $E_p$  menší. Výsledná chyba vzniklá idelalizací a nedokonalým odčítáním (generovaná čísla byla přičítána až ke korekci na kapacitu) není vyšší než  $\sigma_3 = 0.45 \ \mathrm{MV} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ .

Poslední efekt je nedokonalá vyrovnanost desek. Vzdálenost desek bude na jedné straně menší a bude se zde lépe ionizovat vzduch. Pokud budeme brát, že vzdálenost desek je menší o  $0.04~\mathrm{mm}$  je chyba asi  $0.05~\mathrm{MV\cdot m}^{-1}$ .

V návodu k měření bylo doporučeno, aby vodiče byly dále od železných předmětů. Nám ale jde hlavně o náboj na deskách v době průrazu vzduchu. Kovové předměty mohou odebírat nějaký náboj skrze vodiče, ale na kondenzátory nebudou mít vliv.

#### 6.2 Úkol 2

Měřící metoda pomocí kulového jiskřiště je velice přesná. Nevím, jak se došlo k analytickému řešení. Při experimentu někdy přeskočila jiskra mezi koulemi našikmo, myslím, že s tímto určitě analytické řešení nepočítá. Tuto chybu nemohu odhadnout. Jako v předchozím úkolu bude problém s vlhkostí vzduchu . Hodnota napětí U ve vzorci (6) silně závisí na funkci f. Funkce f je ovlivněna okrajovými efekty na kondenzátoru a nedokonalým čtením hodnot z váhy. Zkusil jsem opět generovat náhodná čísla pro určení chyby z nedokonalého čtení z vah se započítáním okrajových efektů. Problém je, že body na Obr. 2 mají jiné uspořádání a už by je lépe fitovala jiná funkce (např.  $\sqrt{x}$ ). Odhaduji, že tato chyba bude kolem  $0.3~{\rm MV\cdot m^{-1}}$ .

Při každém přitáhnutí desek kondenzátoru se desky vychýlily a nebyly rovnoběžné. Vždy jsme je srovnali do paralelní pozice, ale i odtud může vzniknout nějaká chyba.

V obou úkolech jsme zanedbali nepřesnost měření vzdálenosti mezi deskami kondenzátoru. Na výsledek to bude mít malý vliv oproti ostatním nepřesnostem, které jsou uvedené výše. Doskok mezi koulemi byl určen s přesností  $10^{-3}$  cm, hodnoty doskoku můžeme považovat za konstantí.

Celkově byly úkoly s Wimhurstovou elektřinou velice efektní a zábavné.

### 6.3 Úkol 3

Gró celého měření byla trpělivost a pečlivé přikládání měřící jehly na tečky. Kruhová elektroda zasahovala do rohových bodů mříže. Byli jsme nuceni měřicí jehlou zajet šikmo pod elektrodu, proto bych rohové hodnoty potenciálů bral s rezervou. Voda má nějaký elektrický odpor, ale můžeme ji považovat za homogenní prosředí. Skutečné elektrické pole bez vody bude mít posunuté hodnoty potenciálu, ale potenciálové pole by mělo být stejné tvarově. Tvar potenciálového pole odpovídá mým představám o něm během praktika.

### 7 Závěr

Všechny úkoly se povedly dotáhnout do zdárného konce a mohu teď prezentovat naše výsledky.

Výsledná hodnota **elektrické pevnosti vzduchu** z prvního úkolu je:

```
E_p = (2.35 \pm 0.07(stat) \pm 0.60(sys)) \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}.
```

Výsledná hodnota **elektrické pevnosti vzduchu** z druhého úkolu je:

 $E_p = (2.512 \pm 0.005(stat) \pm 0.400(sys)) \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}.$ 

Výsledky třetí úlohy jsou na Obr. 4 a Obr. 5 ve statické podobě. Interaktivní obrázky jsou dostupné na adresách v 5.3.

### 8 Použitá literatura

- [1] Kolektiv KF. Návod: Úloha 8 Kondenzátor, mapování elektrostatického pole [Online]. [cit. 6. listopadu 2021].

  Dostupné z: http://https://moodle-vyuka.cvut.cz/pluginfile.php/435372/mod\_resource/content/3/Kondenzator\_181008.pdf
- [2] Elektrostatické pole nabitých vodičů [online]. [cit. 2021-11-06].

  Dostupné z: https://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz\_fyziky\_pro\_DS/display.php/elmag/1\_4
- [3] CHALOUPKA, Petr. Základy fyzikálních měření [online]. In: . [cit. 2021-11-06]. Dostupné z: https://people.fjfi.cvut.cz/chalopet/ZFM/ZFM.pdf

## Příloha

9 Domácí příprava

SEUS E = (Edv = Q=CV = C Q d.  $\frac{g}{d} = f(q, 0)$ CU= & Q d  $\frac{V}{Q} = \frac{d}{\epsilon_0 S} = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{S}{d} = \frac{S}{d$ 

> Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská Fyzikální praktikum J - zimní semestr