$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2-\lambda_1 & \cdots & \lambda_n-\lambda_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1}-\lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}-\lambda_1^{n-1} \end{vmatrix} =$$

rozvo.

$$= \begin{vmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & \cdots & \lambda_n-\lambda_1 \\ \lambda_2^2-\lambda_1^2 & \cdots & \\ \vdots & & \\ (\lambda_2-\lambda_1)\sum_{k=0}^{n-2}\lambda_2^{n-2-k}\lambda_1^k & \cdots & (\lambda_n-\lambda_1)\sum_{k=0}^{n-2}\lambda_n^{n-2-k}\lambda_1^k \end{vmatrix} =$$

$\lambda_2 \neq \lambda_1$

$(\lambda_2 = \lambda_1) \Rightarrow \det(V_{and}) = 0$ (2 stejné sloupce v determinantu)

$$= \prod_{i=2}^{n}(\lambda_i-\lambda_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2+\lambda_1 & & & & \lambda_n+\lambda_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-2}\lambda_2^{n-k-2}\lambda_1^k & & \cdots & & \sum_{k=0}^{n-2}\lambda_n^{n-k-2}\lambda_1^k \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot\lambda_1 \\ - \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_2^2+\lambda_2\lambda_1+\lambda_1^2 & \cdots & & \lambda_n^2+\lambda_n\lambda_1+\lambda_1^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum & \cdots & & \sum \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot\lambda_1^2 \\ - \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2 & \cdots & & \lambda_n^2+\lambda_1\lambda_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum & \cdots & & \sum \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot\lambda_1 \\ - \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_2^2 & & & \lambda_n^{n-2} \\ \lambda_2^3+\lambda_2^2\lambda_1+\lambda_2\lambda_1^2+\lambda_1^3 & & & \vdots \\ \sum & & & \sum \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot\lambda_1^3 \\ \cdot\lambda_1^2 \\ \cdot\lambda_1 \\ - \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Obdobně upravuji další řádky dokud nedostanu:

$$\prod_{i=2}^{n}(\lambda_i-\lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & & \\ \lambda_2^{n-2} & \cdots & & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

! zapomněl jsem psát $\prod_{i=2}^{n}(\lambda_i-\lambda_n)$

$$\prod_{i=2}^{n}(\lambda_i-\lambda_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & & & \lambda_n \\ \vdots & & & \\ \lambda_2^{n-2} & & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} = \left[\longrightarrow \text{obdobné úpravy jako pro } \lambda_1 \right] =$$

$$= \prod_{i=2}^{n}(\lambda_i-\lambda_1)\cdot\prod_{j=3}^{n}(\lambda_j-\lambda_2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_3 & \cdots & & \lambda_n \\ \vdots & & & \\ \lambda_3^{n-3} & & & \lambda_n^{n-3} \end{vmatrix} = \left[\text{obd. úpravy}\right] = \cdots$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_{n-1} & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i_1=2}^{n}(\lambda_{i_1}-\lambda_1)\cdot\prod_{i_2=3}^{n}(\lambda_{i_3}-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot\prod_{i_{n-2}=n-1}^{n}(\lambda_{i_{n-2}}-\lambda_{n-2})\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_{n-1} & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{\prod_{i=2}^{n}(\lambda_{i_1}-\lambda_1)\cdot\prod_{i_2=3}^{n}(\lambda_{i_3}-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot\prod_{i_{n-2}=n-1}^{n}(\lambda_{i_{n-2}}-\lambda_{n-2})\cdot(\lambda_n-\lambda_{n-1})}$$

(2)

$$\begin{aligned} x + ay + a^2 z &= a^3 \\ x + by + b^2 z &= b^3 \\ x + cy + c^2 z &= c^3 \end{aligned}$$

↳ $a = b \vee b = c \vee a = c$

$\Rightarrow$ Vandermon. det $= 0 \Rightarrow \mathbb{V}$ sing. mat

↳ $a \neq b \neq c \neq a$ 1 řešení $\Rightarrow \mathbb{V}$ reg. mat.

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbb{V} = \left[\prod_{i=2}^{3} (\lambda_i - \lambda_1) \cdot (\lambda_3 - \lambda_2)\right] = (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$$

$\boxed{\text{pro } x}$ $\quad x = \dfrac{\det \mathbb{V}_x}{\det \mathbb{V}}, \quad \mathbb{V}_x = \begin{pmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{pmatrix}$

$$\det \mathbb{V}_x = \left|\begin{pmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{pmatrix}\right| \overset{a \neq 0,\, b \neq 0 \neq c}{=\!=\!=} abc \begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ b^2 & 1 & b \\ c^2 & 1 & c \end{vmatrix} =$$

$$= -abc \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & b^2 & b \\ 1 & c^2 & c \end{vmatrix} = abc \det \mathbb{V} \Rightarrow x = abc, \; a \neq 0 \neq b, \; c \neq 0$$

$$x = \begin{cases} abc, & a \neq 0,\ b \neq,\ c \neq 0 \\ 0, & a = 0 \vee b = 0 \vee c = 0 \end{cases}$$

zbytečné

pre y $\quad \mathbb{V}_y = \begin{pmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{pmatrix}$

rozvoj determ.

$$\det \mathbb{V}_y = -\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 0 & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c^2-a^2 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ c^2-a^2 & c^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(b-a)(c-a) \cdot \begin{vmatrix} b+a & b^2+ba+a^2 \\ c+a & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b+a & b^2+ba+a^2 \\ c-b & (c^2-b^2)+ca-ba \end{vmatrix} =$$

$$= -(b-a)(c-a)(c-b) \cdot \begin{vmatrix} b+a & b^2+ba+a^2 \\ 1 & c+b+a \end{vmatrix} =$$

$$= -\det \mathbb{V} \cdot \left[(b+a)(c+b+a) - \underline{b^2} - \underline{ba} - \underline{a^2} \right] =$$

$$= -\det \mathbb{V} \cdot (bc + ac + ab) = \det \mathbb{V}_y$$

$$y = \frac{\det \mathbb{V}_y}{\det \mathbb{V}} = -(\cancel{a+b}\, a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

pro z: $\quad W_z = \begin{pmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{pmatrix}$

rozvoj det.

$$\det W_z = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b^2+ab+a^2) \\ c-a & (c-a)(c^2+ac+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)\cdot(c-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c^2-b^2+ac-ba \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)(c+b+a) = \det W\cdot(a+b+c)$$

$$z = \frac{\det W_z}{\det W} = (a+b+c)$$

1 řešení: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc \\ -(ab+ac+bc) \\ a+b+c \end{pmatrix}, \quad a \neq b \neq c \neq a$