Jindra Petáková

MATEMATIKA

příprava
K MATURITĚ
a k přijímacím zkouškám
NA VYSOKÉ ŠKOLY

PROMETHEUS®

Sbírka byla zpracována ve spolupráci s JČMF.

Zpracovala: RNDr. Jindra Petáková
Lektorovali: doc. RNDr. Jaroslav Černý, CSc.
PhDr. Ivan Bušek
Revizi výsledků provedli: RNDr. Jana Bočková
Mgr. Lenka Kadlecová
RNDr. Dana Kolářová
RNDr. Jindřich Teller

Dotisk 1. vydání

ISBN 80-7196-099-3

Obsah

Předmluva

Sbírka úloh z učiva střední školy je určena k opakování a procvičení učiva k maturitě a k přípravě na přijímací zkoušky z matematiky na vysoké školy.

Obsah sbírky je zpracován v souladu s učebními osnovami matematiky pro gymnázia, které schválilo Ministerstvo školství mládeže a tělovýchovy České republiky dne 24. 5. 1991 pod č.j. 17 668/91-20 s platností od 1. 9. 1991.

Sbírka je členěna podle tematických celků do 20 kapitol, v poslední kapitole jsou ukázky souborů úloh z přijímacích zkoušek na některé vysoké školy. Úlohy jsou seřazeny nejen podle tematických celků, ale v rámci jednotlivých kapitol jsou i dále systematicky uspořádány. K lepší orientaci slouží podrobně zpracovaný obsah. Sbírka obsahuje celkem 1 200 číslovaných úloh s mnoha obměnami. Podle typu třídy nebo střední školy (gymnázium, průmyslová škola, ekonomická škola apod.) nebo podle zvolené vysoké školy lze počítat jen příklady v těch kapitolách, které student potřebuje znát.

Nakonec jsou uvedeny výsledky úloh, které umožňují kontrolu správnosti řešení. U složitějších úloh je uveden i stručný návod řešení.

Autorka

1 Základní poznatky o výrocích a množinách

1.1 Výrok, operace s výroky

1 Rozhodněte, které z následujících vět lze považovat za výroky:
a) Úhlopříčky čtverce nejsou navzájem kolmé.
b) Existuje rovnostranný trojúhelník.
c) Pythagorova věta.
d) Číslo x je kladné.

2 Vyslovte negace následujících výroků:
a) Součin dvou záporných reálných čísel je kladný.
b) Číslo $\sqrt{18}$ je dvojnásobkem čísla $\sqrt{3}$.
c) Přímka daná rovnicí $y = 2x - 1$ neprochází bodem $[1; 1]$.
d) $\sqrt{10} \geqq 3$.

3 Rozhodněte, zda jsou pravdivé následující složené výroky:
a) Číslo π lze zapsat desetinným číslem 3,141 59 nebo zlomkem $\frac{22}{7}$.
b) Číslo e je větší než 2 a zároveň menší než 3.
c) Je-li číslo dělitelné třemi, potom je ciferný součet čísla dělitelný třemi.
d) Číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné dvanácti.

4 Rozepište jako konjunkci nebo jako disjunkci dvou výroků zápisy:
a) $10 > 8 > 5$
b) $3 \leqq \pi$
c) $100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25$
d) $\triangle KLM \sim \triangle PQR \sim \triangle XYZ$

5 Víme, že je pravdivá implikace: „Jestliže je Jana nemocná, potom nepřijde do školy.“ Dnes Jana nepřišla do školy. Rozhodněte, zda je pravdivý výrok: „Jana je nemocná.“

6 Maminka řekla malému Petrovi: „Jestliže budeš hodný, dostaneš dort.“ Jsou čtyři možnosti:
a) Petr byl hodný, dostal dort.
b) Petr byl hodný, nedostal dort.
c) Petr nebyl hodný, dostal dort.
d) Petr nebyl hodný, nedostal dort.
Ve kterých případech a) až d) vyslovila maminka pravdivý výrok?

7 Rozhodněte, při kterých pravdivostních hodnotách výroků A, B je uvedená výroková formule pravdivá:
a) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$
b) $(\neg A \vee B) \Rightarrow \neg B$

8 Rozhodněte, zda uvedené výrokové formule jsou tautologiemi:
a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
b) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$
c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
d) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

1.2 Obměněná implikace, obrácená implikace

9 K dané implikaci napište obrácenou implikaci a obměněnou implikaci. V jednotlivých případech rozhodněte o pravdivosti implikace dané, obrácené i obměněné.
a) Je-li součin dvou přirozených čísel liché číslo, potom jsou obě čísla lichá.
b) Jestliže je konvexní čtyřúhelník kosočtverec, potom jsou jeho úhlopříčky navzájem kolmé.
c) Je-li druhá mocnina reálného čísla větší než 5, potom je i dané reálné číslo větší než 5.

1.3 Negace složených výroků

10 Napište negace následujících slovních výroků.
a) Přijde Alena a Barbora.
b) Přijde Cyril nebo David.
c) Jestliže přijde Eva, potom přijde i Hana.
d) Jan přijde právě tehdy, když přijde Iva.

11 Napište negace uvedených výroků.
a) Číslo 50 je dělitelné 15 a 5.
b) Číslo 50 není dělitelné 15 nebo není dělitelné 5.
c) Jestliže je poslední dvojčíslí daného přirozeného čísla dělitelné 4, potom je i dané číslo dělitelné 4.
d) Číslo je dělitelné 6 právě tehdy, když je dělitelné 2 a 3.

1.4 Výroky s kvantifikátory

12 Doplňte jedno ze slov: „aspoň, právě, nejvýše“ tak, aby výrok byl pravdivý.
a) Každé prvočíslo má … dva různé dělitele.
b) Dvě různé přímky v rovině mohou mít … jeden společný bod.
c) Nerovnici $x^2 > 5$ splňují … tři přirozená čísla.

13 Doplňte jedno ze slov: „existuje, každý“ tak, aby výrok byl pravdivý.
a) … trojúhelník, který je rovnostranný.
b) … přirozený násobek čísla 2 je číslo sudé.

14 Kvantifikované výroky zapsané symbolicky vyjádřete slovy a rozhodněte o jejich pravdivosti.
a) $\forall x \in \mathsf{R}$: $x^2 > 0$
b) $\forall x \in \mathsf{R}$: $\sqrt{x^2} = |x|$
c) $\forall x \in \mathsf{R}\ \exists y \in \mathsf{R}$: $x \cdot y = 10$
d) $\forall a \in \mathsf{R}\ \forall b \in \mathsf{R}$: $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$
e) $\forall a \in \mathsf{R}^+\ \forall b \in \mathsf{R}^+$: $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$
f) $\exists x \in \mathsf{R}\ \forall y \in \mathsf{R}$: $x \cdot y = y$

15 Vyslovte negace následujících výroků.
a) Aspoň šest přirozených čísel splňuje nerovnost $x - 40 < 0$.
b) Číslo 92 má nejvýše pět dělitelů.
c) Rovnice $x^5 - x + 2 = 0$ má právě tři kořeny v množině komplexních čísel.
d) Existuje takové reálné číslo m, že platí: $(m + 1)^2 = m$.
e) Každé prvočíslo je liché číslo.

1.5 Operace s množinami – průnik, sjednocení, rozdíl, doplněk

16 Zapište výčtem prvků následující množiny.
a) $\mathsf{M}_1 = \{x \in \mathsf{N};\ x^2 < 20\}$
b) $\mathsf{M}_2 = \{x \in \mathsf{Z};\ |x| = 5\}$

17 Jsou dány dvě množiny: $\mathsf{M}_1 = \{x \in \mathsf{N};\ x \mid 60\}$, $\mathsf{M}_2 = \{x \in \mathsf{N};\ 7 < x \leqq 10\}$. Zapište výsledek operací $\mathsf{M}_1 \cap \mathsf{M}_2$, $\mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2$, $\mathsf{M}_2 - \mathsf{M}_1$.

18 Najděte takové množiny A, B, pro které platí:
$\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{1, 2, 3\}$, $\mathsf{B} - \mathsf{A} = \{5, 6\}$.

19 Doplněk množiny $\{x \in \mathsf{R};\ -3 < x \leqq 5\}$ v množině reálných čísel zapište jako sjednocení dvou intervalů.

20 Jsou dány tři intervaly $\mathsf{A} = \langle -7; 2\rangle$, $\mathsf{B} = \langle -2; 5)$, $\mathsf{C} = \langle 2; \infty)$. Zapište:
a) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$
b) $\mathsf{A} \cap \mathsf{C}$
c) $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$
d) $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cup \mathsf{C}$
e) $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap \mathsf{C}$
f) $(\mathsf{A} \cap \mathsf{C}) \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$
g) A'_{R}
h) $\mathsf{A} - \mathsf{B}$

2 Základní typy rovnic a nerovnic

2.1 Lineární rovnice a nerovnice

1 Řešte rovnice a nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $5 \cdot \{5 \cdot [5 \cdot (5x - 4) - 4] - 4\} = 5$
b) $3[2(3x - 6) - 2(4x - 5) + 1] - 3 = 6[3 - 8(x - 3)]$
c) $x - (2x - 0{,}2)^2 = 5{,}8 - (2x + 0{,}1) \cdot (2x - 0{,}1)$
d) $(x - 1)^3 + (x - 2)^3 + (x - 3)^3 = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$
e) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x - \frac{x}{2}}{2} - \dfrac{x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + \frac{x}{2}}{2}}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(x - \dfrac{x}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{2}$
f) $(x - 1)^2 - (x + 1)^2 < 8$
g) $\dfrac{4x - 7}{2} - \dfrac{x - 4}{6} \geqq 2x - 3$

2.2 Rovnice a nerovnice v součinovém tvaru

2 Řešte rovnice a nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $(9 - 4x^2)(x^2 - 6x + 9) = 0$
b) $(4x^2 + 25)(50 - x^2) = 0$
c) $(x - 6)(x + 2) > 0$
d) $(x + 2)(4 - x) \leqq 0$
e) $(x^2 + 2)(x + 7) \geqq 0$
f) $x^2(11x - 3) < 0$
g) $(2 - x)(x^2 - 9) \geqq 0$
h) $(x - 10)(10 - x) \leqq 0$

2.3 Rovnice a nerovnice v podílovém tvaru

3 Řešte rovnice a nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\dfrac{2x - 5}{x + 3} = 0$
b) $\dfrac{(x + 5)(x - 6)}{36 - x^2} = 0$
c) $\dfrac{x + 2}{3x - 2} \leqq 0$
d) $\dfrac{4x - 3}{7 + x} > 0$
e) $\dfrac{(5x - 3)(x + 4)}{x(6 - x)} \leqq 0$
f) $\dfrac{1 - 2x}{x^2 - 1} < 0$

2.4 Kvadratické rovnice

4 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $4x^2 + x = 0$
b) $2x^2 - 5 = 0$
c) $3x^2 + x - 2 = 0$
d) $x^2 + 2x - 1 = 0$
e) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
f) $3x^2 + x + 2 = 0$
g) $x^2 + (2\sqrt{3} + 1)x + 3 + \sqrt{3} = 0$
h) $x^2 + x(2\sqrt{3} + 1) + 2\sqrt{3} = 0$
i) $x^2 - \sqrt{2}x + x - \sqrt{2} = 0$
j) $\frac{1}{2}(2x - 1)^2 - \left[\frac{1}{2}(x + 1)\right]^2 = 3\left[\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

5 Ověřte, že číslo $x = 2 + 3\sqrt{2}$ je kořenem rovnice $x^2 - 6x - 10 + 6\sqrt{2} = 0$.

2.5 Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

6 Sestavte všechny kvadratické rovnice, jejichž kořeny jsou čísla:

a) $2;\ -3$
b) $1 + \sqrt{3};\ 1 - \sqrt{3}$
c) $-1;\ -1$
d) $0;\ 5$
e) $\dfrac{1}{10 - \sqrt{50}};\ \dfrac{1}{10 + 5\sqrt{2}}$

7 Rovnice $x^2 + px + 6 = 0$ má jeden kořen -2. Vypočítejte druhý kořen a koeficient $p \in \mathrm{R}$.

8 Rovnice $x^2 - 3x + q = 0$ má jeden kořen -1. Vypočítejte druhý kořen a absolutní člen $q \in \mathrm{R}$.

9 Určete všechny hodnoty parametru $b \in \mathrm{R}$ tak, aby jeden kořen kvadratické rovnice $2x^2 + bx + 9 = 0$ byl dvakrát větší než druhý kořen.

10 Určete koeficient lineárního členu $m \in \mathrm{R}$ tak, aby jeden kořen kvadratické rovnice $x^2 + mx + 5 = 0$ byl o 4 větší než druhý kořen této rovnice.

11 Určete všechny hodnoty absolutního členu $q \in \mathrm{R}$ tak, aby jeden kořen kvadratické rovnice $4x^2 - 15x + q = 0$ byl druhou mocninou druhého kořene.

12 Aniž rovnici $x^2 + 2x + 5 = 0$ řešíte, určete:
a) součet převrácených hodnot jejích kořenů
b) součet druhých mocnin jejích kořenů

13 Aniž rovnici $5x^2 + 8x + 5 = 0$ řešíte, sestavte všechny kvadratické rovnice, jejichž kořeny jsou čísla:
a) třikrát větší než kořeny původní rovnice
b) o tři větší než kořeny původní rovnice

2.6 Kvadratický trojčlen

14 Dané kvadratické trojčleny (resp. dvojčleny) rozložte v množině reálných čísel v součin kořenových činitelů:

a) $x^2 - 5x + 6$
b) $x^2 + 7x + 10$
c) $x^2 + 2x - 8$
d) $x^2 + 10x - 11$
e) $x^2 + x - 2$
f) $x^2 - 11x + 30$
g) $x^2 - 10x + 25$
h) $x^2 + 4x + 4$
i) $x^2 - 6x + 9$
j) $4x^2 + 4x + 1$
k) $16x^2 - 25$
l) $15x^2 - 30x$
m) $2x^2 + x - 1$
n) $3x^2 - 17x + 10$
o) $-x^2 + 7x + 8$
p) $-2x^2 + 11x - 15$
q) $x^2 + 4$
r) $x^2 + 4x + 5$

15 Určete maximum (resp. minimum) kvadratického trojčlenu (resp. dvojčlenu) pomocí úpravy:

a) $x^2 + 2x + 6$
b) $x^2 + 4x + 4$
c) $x^2 - 3x + 2$
d) $4x^2 - 4x$
e) $4x^2 + 8x + 12$
f) $2x^2 - 8x + 1$
g) $-2x^2 + x$
h) $-x^2 + 2x + 3$
i) $-x^2 - 16$

16 Rozložte kvadratické trojčleny, zapište, kdy má výraz smysl a zjednodušte:

a) $\dfrac{4x^2 + 7x - 2}{12x^2 + 5x - 2}$
b) $\dfrac{\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 2} - \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + x - 6}}{\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 3x - 10} - \frac{x^2 + 10x + 24}{x^2 + 4x - 12}}$

2.7 Kvadratické nerovnice

17 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $x^2 - 2x - 15 \geqq 0$
b) $3x^2 + 5x - 2 < 0$
c) $-2x^2 - 5x + 12 > 0$
d) $x^2 - 2x - 2 \leqq 0$
e) $2x - x^2 \geqq 2 - x$
f) $x^2 + 5x + 7 > 0$
g) $9x^2 - 6x + 1 \leqq 0$
h) $2x^2 + 3x \geqq 0$
i) $4x^2 \leqq 1$
j) $x^2 + 2x + 6 < 0$

2.8 Rovnice s neznámou ve jmenovateli

18 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{5x}{4-x^2} = \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{x}{x^2-4}$

b) $1 + 3\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x-3}{x-2} - \dfrac{2}{x-2}\right) = \dfrac{15}{2x-x^2}$

c) $\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x+1}{x}\right) : \left(\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x-1}{x}\right) = \dfrac{x+1}{x-1}$

2.9 Nerovnice s neznámou ve jmenovateli

19 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\dfrac{1}{x} \geqq 6$
b) $\dfrac{2x+3}{x-1} < 1$
c) $\dfrac{x+3}{x-1} \leqq \dfrac{x+3}{x}$
d) $\dfrac{8}{x^2+4x+1} \leqq 0$
e) $\dfrac{\frac{1}{2}x - 2}{x-1} + \dfrac{\frac{1}{2}x + 2}{x+1} \geqq 1$
f) $2 \leqq \dfrac{x}{x^2+1}$

2.10 Rovnice s neznámou pod odmocninou

20 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sqrt{x} + x = 2$
b) $3\sqrt{x+5} - 5 = x$
c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = 5$
d) $\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+7} = -4$
e) $\sqrt{-x} = 2 - \sqrt{2-x}$
f) $\sqrt{10-x} + \sqrt{x-10} = 2$
g) $\sqrt{2x+7} + \sqrt{x-5} = \sqrt{3x+2}$
h) $\sqrt{-x - \sqrt{1-x}} = 1$
i) $\dfrac{2x}{2\sqrt{3} + \sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{x}}{4\frac{1}{2}}$
j) $\dfrac{4}{x + \sqrt{x^2+x}} - \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2+x}} = \dfrac{3}{x}$

2.11 Nerovnice s neznámou pod odmocninou

21 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sqrt{x^2-4} \leqq x + 1$
b) $\sqrt{x^2-1} < x + 2$
c) $x + 1 \leqq \sqrt{x^2+3x}$
d) $x - 1 < \sqrt{x^2-4}$

2.12 Rovnice s neznámou v absolutní hodnotě

22 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $|x| = 7$
b) $|x-1| = 3$
c) $|x+4| = 1$
d) $|x+\pi| = 6$
e) $|2x-3| = 6$
f) $|6-x| = 2$
g) $\left|x - \sqrt{3} + 1\right| = 2 - \sqrt{3}$
h) $\left|x - 5\sqrt{11}\right| = 0$
i) $|4x-7| = -1$
j) $|x-7| = x - 7$
k) $|x-2| = 2 - x$
l) $|8-5x| = 5x - 8$
m) $|2x-3| = x$
n) $|2x-5| = 1 - 3x$
o) $|4-x| - |2x+3| = 7$
p) $|2x-4| - |x+3| = 2 - |x-5|$
q) $|x-1| + 3|2-x| = x - |1-x|$
r) $|x-4| + |2x-1| = |x| + 3$
s) $|x+2| = 4|x-3|$
t) $x^2 + |x-1| - 1 = 0$
u) $|x^2+4x| - 3x - 6 = 0$
v) $|x^2+2x-1| - x = 1$

2.13 Nerovnice s neznámou v absolutní hodnotě

23 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $|x| \geqq 6$
b) $|x-3| < 2$
c) $|x+5| \leqq 7$
d) $|x-\sqrt{3}| > 2 + 5\sqrt{3}$
e) $|3x-1| < x$
f) $|1-x| > 3|x+3|$
g) $|2x+1| - |3-x| \geqq x$
h) $x^2 - 3|x+1| - x \leqq 0$
i) $|x| < x^2 - 6$
j) $|x^2+4x| - 6 \leqq$
k) $\dfrac{3}{|x-2|} \leqq x$
l) $\dfrac{|x+3|}{x+1} \geqq 2$

2.14 Řešení rovnic metodou substituce

24 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$
c) $20x^{-4} + 3x^{-2} - 2 = 0$
d) $5\sqrt[4]{x} - \sqrt{x} - 6 = 0$

25 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $(1-x^2)^2 - 2(x^2-1) + 1 = 0$
b) $(x^2+2x-3)(x^2+2x+1) - 5 = 0$
c) $(x^2-x+2)^2 - 6(x^2-x) - 4 = 0$
d) $(x^2-2x+8)^2 : (x^2-2x)^2 - 4 = 0$

26 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $x^2 + 2x - 12 - 2\sqrt{x^2+2x+12} = 0$
b) $\sqrt{2x^2+5x} - \sqrt{2x^2+5x-10} = \sqrt{2}$
c) $(2x + \sqrt{x-1})(2x + \sqrt{x-1} - 8) - 2(2x + \sqrt{x-1}) - 24 = 0$

27 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-4} - 3\right)\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-4} + 4\right) + 10 = 0$

b) $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2x-1}{x^2} + 2\right)\left(\dfrac{1-2x}{x^2} + 1\right) = \left(3 \cdot \dfrac{2x-1}{x^2}\right)^2$

c) $\sqrt{\dfrac{3}{x}+\sqrt{\dfrac{3}{x}}}=1-\sqrt{\dfrac{3}{x}}$

d) $\sqrt{\dfrac{x+10}{x+2}}-3\sqrt{\dfrac{x+2}{x+10}}=2$

e) $\left(3-\sqrt{\dfrac{x+4}{2-x}}\right)\left(2+\sqrt{\dfrac{x+4}{2-x}}\right)-6=0$

f) $\dfrac{x}{x+1}-2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3$

2.15 Reciproké rovnice

28 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $2x^3-3x^2-3x+2=0$

b) $2x^3+7x^2+7x+2=0$

c) $6x^4+17x^3+17x^2+17x+6=0$

d) $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$

29 Určete $K,\ L \in \mathrm{R}$ tak, aby daná rovnice byla reciproká. Potom rovnici řešte v R:
$6x^4-5x^3-38x^2+Kx+L=0$

2.16 Soustavy rovnic

Soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých

30 Určete všechna čísla $x,\ y \in \mathrm{R}$ tak, aby byla řešením dané soustavy:

a) $\begin{aligned} 7x-3y&=15\\ 5x+6y&=27 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3x+2y&=20\\ 2x+3y&=20 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3(x-2)+2y&=x+y\\ 4x+5(y+x)&=3x-6 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} (x+4)(y-2)&=(x-2)(y+13)\\ (x-1)(y-3)&=(x+2)(y-5) \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x-5y&=7\\ x-5y&=6 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 2x-3y&=5\\ 4x-6y&=10 \end{aligned}$

Soustavy lineárních rovnic o třech neznámých

31 Určete všechna čísla $x, y, z \in \mathrm{R}$ tak, aby byla řešením dané soustavy:

a) $\begin{aligned} x+y+2z&=-1\\ 2x-y+2z&=-4\\ 4x+y+4z&=-2 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x+3y+z&=15\\ 7x-y+z&=9\\ x+2y+z&=9 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x+y-z&=0\\ 4x+2y+z&=0\\ x-y+3z&=0 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 2x-y&=6\\ y+4z&=8\\ x-z&=1 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x+y-z&=0\\ x+y+2z&=4\\ 4x+3y+3z&=5 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 3x+2y+z&=3\\ x+y+z&=2\\ 4x+3y+2z&=5 \end{aligned}$

Soustavy lineárních rovnic o více neznámých

32 Určete všechna čísla $x,\ y,\ z,\ u \in \mathrm{R}$ tak, aby byla řešením dané soustavy:

a) $\begin{aligned} 2x-3y+z+2u&=0\\ 3x+y-2z-u&=6\\ 4x-2y-3z-4u&=-6\\ x+2y+3z-2u&=-7 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x-y+z+u&=0\\ x+y-z-u&=2\\ 2x-y+u&=3\\ 3x+z-u&=0 \end{aligned}$

Další úlohy

33 Určete všechna čísla $x,\ y \in \mathrm{R}$ tak, aby byla řešením dané soustavy:

a) $\begin{aligned} \dfrac{x+y+1}{x-y+1}&=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{x+y+1}{1-x+y}&=3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x+y&=5\\ xy&=6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x+xy+y&=7\\ x-xy+y&=1 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x^2+y^2&=125\\ x^2-y^2&=25 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x^2-3y^2&=24\\ 2x-3y&=0 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x^2+4y^2-2x&=15\\ x-y+1&=0 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}&=\dfrac{1}{2}\\ x+y&=-1 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} |x|+2|y|&=10\\ 2x-3y&=6 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} 2x+y&=7\\ |x-y|&=2 \end{aligned}$

j) $\begin{aligned} xy+xy^2&=18\\ x+xy^3&=27 \end{aligned}$

k) $\begin{aligned} x^2y^2-x^2y^3&=-4\\ x^2y^3-x^2&=7 \end{aligned}$

l) $\begin{aligned} x+y&=4\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}&=3 \end{aligned}$

2.17 Řešení soustav rovnic metodou substituce

34 Určete všechna čísla $x,\ y \in \mathrm{R}$ tak, aby byla řešením dané soustavy:

a) $\begin{aligned} \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}&=5\\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{6}{y}&=6 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \dfrac{2}{x+y}-\dfrac{5}{x-y}&=1\\ \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}&=\dfrac{9}{5} \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \dfrac{1}{3-x+2y}+\dfrac{1}{3+x-2y}&=\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{1}{3+x-2y}-\dfrac{1}{3-x+2y}&=\dfrac{1}{4} \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} \dfrac{x+1}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}&=\dfrac{3}{2}\\ 2\cdot\dfrac{x+1}{x+y}-3\cdot\dfrac{y}{x-y}&=\dfrac{1}{2} \end{aligned}$

35 Určete všechna čísla $x, y, z \in \mathrm{R}$ tak, aby byla řešením dané soustavy:

a) $\begin{aligned} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}&=9\\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{4}{z}&=11\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{2}{z}&=9 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{2}{x-z}&=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{10}{y-z}&=\dfrac{7}{3}\\ \dfrac{3}{x-z}+\dfrac{5}{y-z}&=-\dfrac{1}{4} \end{aligned}$

36 Určete všechna čísla $x,\ y \in \mathrm{R}$ tak, aby byla řešením dané soustavy:

a) $\begin{aligned} |x+2|+2|y-3|&=15\\ |x+2|-4|y-3|&=3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} |x+y|-|x-y|&=4\\ |x+y|+2|x-y|&=13 \end{aligned}$

37 Určete všechna čísla $x,\ y \in \mathrm{R}$ tak, aby byla řešením dané soustavy:

a) $\begin{aligned} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}&=4\\ 2\sqrt{x+y}-3\sqrt{x-y}&=3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \sqrt{x+3}\cdot\sqrt{y+5}&=9\\ \sqrt{x+3}+\sqrt{y+5}&=6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x^2+\sqrt{y}&=14\\ x^4-\sqrt{y}&=6 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x^2-y^2+\sqrt{x+y}&=1{,}5\\ (x^2-y^2)\cdot\sqrt{x+y}&=0{,}5 \end{aligned}$

2.18 Soustavy nerovnic

38 Řešte v R soustavy nerovnic:

a) $2(x-1) \leqq 1-x$
$7-3x \leqq x+10$
$x-3 > 2x-6$

b) $3x-8 < x+6 < 2x+2$

c) $3x - \dfrac{x+2}{6} > x$
$2x - \dfrac{1}{3}x > x - \dfrac{x-1}{6}$

d) $x^2-9 \geqq 0$
$x^2-3x-4 < 0$

e) $4 < x^2+4x+8 \leqq 5$

f) $-2 \leqq 2x^2-x-3 < 1+3x$

g) $\dfrac{2+x}{x-1} < 3$
$\dfrac{2}{x-1} \geqq 1$

h) $x < \dfrac{1}{x} < 3$

i) $\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{x} \leqq \dfrac{x}{3}$
$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{x}{2}$

j) $|x-3| + 2|x+1| > 4$
$|1+2x| - 5 \leqq x$

k) $2 \leqq |x-4| < 5$

l) $3 < |2x+4| < 10$

Soustava rovnice a nerovnice se dvěma neznámými

39 Graficky znázorněte množinu všech řešení $[x;y]$, x, $y \in$ R dané soustavy:

a) $x-2y=5$
$3x+y \leqq 1$

b) $x+y=5$
$y+2 \geqq 0$

c) $2x-y \leqq 4$
$2x-y=2$

Soustava nerovnic se dvěma neznámými

40 Graficky znázorněte množinu všech řešení $[x;y]$, x, $y \in$ R dané soustavy:

a) $3x-y \leqq 7$
$x+2y \geqq 0$
$x-5y \geqq -7$

b) $x-3y \leqq 0$
$x-3y \leqq 5$

c) $xy \geqq 0$
$(x+2)(y-3) \leqq 0$

2.19 Slovní úlohy

41 Připíšeme-li k danému číslu číslici 1 vpravo, dostaneme dvojciferné číslo 4,5krát větší než číslo, které bychom dostali, kdybychom číslici 1 připsali vlevo. Určete dané číslo.

42 Ze tří různých nenulových cifer vytvoříme všechna trojciferná čísla s různými ciframi. Potom tato trojciferná čísla sečteme a výsledek je dělitelný 222. Dokažte.

43 Najděte zlomek v základním tvaru, pro který platí: jmenovatel zlomku je o tři větší než čitatel a hodnota zlomku se nezmění, jestliže k čitateli přičteme číslo 1 a ke jmenovateli přičteme číslo 2,5.

44 Součet dvou přirozených čísel je 50, rozdíl jejich aritmetického a geometrického průměru je 18. Určete tato dvě čísla.

45 Tři čísla splňují následující podmínky. Dělíme-li součet prvního a druhého čísla třetím číslem, vyjde podíl 1 se zbytkem 2. Dělíme-li součet prvního a třetího čísla číslem druhým, vyjde podíl 2 beze zbytku a při dělení součtu druhého a třetího čísla prvním číslem je podíl 3 se zbytkem 2. Určete tato tři čísla.

46 Na schodišti vysokém 3,6 m by se počet schodů zvětšil o 3, kdyby se výška jednoho schodu zmenšila o 4 cm. Kolik schodů má schodiště? Jak jsou schody vysoké?

47 Jana měla vypočítat 70 úloh. Kdyby denně vyřešila o dvě více, než si naplánovala, skončila by o 4 dny dříve. Za kolik dní chtěla původně všechny úlohy vypočítat?

48 Malý Pavel skládal kostky stavebnice (kostka má tvar krychle). Chtěl postavit velikou krychli. Zbylo mu však 75 kostek, proto hranu zvětšil o jednu kostku. Potom mu ale 16 kostek chybělo. Kolik kostek měl ve stavebnici?

49 Zvětšíme-li jednu stranu obdélníku o 2 cm a druhou zmenšíme o 4 cm, zmenší se obsah obdélníku o 36 cm^2. Zvětšíme-li obě strany o 1 cm, bude obsah 143 cm^2. Určete původní rozměry obdélníku.

50 Jana je třikrát starší než Martin. Za pět let však bude jen dvakrát starší. Kolik let je nyní oběma dětem?

51 Zvětšíme-li stranu čtverce, zvětší se obsah o 21 %. O kolik procent jsme zvětšili stranu čtverce?

52 a) Cena zboží nejprve vzrostla o 20 %, později klesla o 10 %. O kolik procent se změnila původní cena vzhledem ke konečné ceně zboží?
b) Cena zboží nejprve klesla o 10 %, později vzrostla o 20 %. O kolik procent se změnila původní cena vzhledem ke konečné ceně zboží?
c) Jsou úlohy a), b) stejné?

53 Petr a Pavel skládali uhlí. Petr by sám uhlí složil za 3 hodiny, Pavel by sám pracoval 2 hodiny.
a) Za jak dlouho složí hromadu uhlí, pracují-li oba společně?
b) Nejprve pracuje Petr sám půl hodiny, pak teprve přijde Pavel a zbytek uhlí složí společně. Za jak dlouho práci dokončí?
c) Chlapci nejprve pracují společně 20 minut, potom Pavel odejde. Jak dlouho ještě bude muset Petr pracovat, aby zbytek hromady uhlí sklidil?

54 Naplnění bazénu vodou první rourou trvá o dvě hodiny déle než druhou rourou a o 3 hodiny 36 minut déle, než kdyby bazén natékal oběma rourami najednou. Kolik hodin trvá naplnění bazénu jen první rourou? Za jak dlouho by se bazén naplnil jen druhou rourou?

55 Smícháme 10 litrů 30% roztoku a 15 litrů 50% roztoku. Kolikaprocentní bude výsledný roztok?

56 Kolik litrů destilované vody musíme přilít ke 100 litrům 90% lihu, abychom dostali líh 75%?

57 Kolik litrů vody 60 °C teplé musíme přilít do 30 litrů vody 30 °C teplé, chceme-li, aby výsledná teplota vody byla 40 °C?

58 Ze stanic A a B, vzdálených od sebe 170 km, jedou proti sobě dva vlaky. Rychlík, který ujede za hodinu 80 km, vyjel ze stanice A v 8 hodin. Osobní vlak vyjel ze stanice B v 7 hodin 30 minut a jel rychlostí 40 km·h^{-1}. V kolik hodin a jak daleko od stanice A se oba vlaky potkají?

59 Ze dvou míst C, D, vzdálených od sebe 120 km, vyjedou současně dvě auta. Pohybují-li se proti sobě, je po 20 minutách jízdy jejich vzdálenost 50 km.

Vyjedou-li týmž směrem, pak po 24 minutách je jejich vzdálenost 108 km. Vypočítejte, jakými rychlostmi se obě auta pohybují.

60 Do města vzdáleného 50 km vyjel cyklista. Vyjel však o 10 minut později, než si naplánoval, a proto jel rychlostí o $0{,}5\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ větší, než měl původně v plánu. Do města však přijel v plánovaném čase. Jakou rychlostí měl v plánu jet? Za jak dlouho chtěl původně dojet do města?

3 Rovnice s parametrem

3.1 Lineární rovnice s parametrem

1 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$ a s parametrem $a \in \mathrm{R}$:

a) $x(a-4) = a^2 - 16$
b) $x(2a+1) = 5$
c) $x(a-1) + a(x+4) = 2$
d) $a^2x - x + a = 1$
e) $(3x+5)(a+4) = 2a+8$
f) $xa^2 = a(1+3x) - 3$

2 Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathrm{R}$ tak, aby řešením rovnice $2p(xp+1) - (p^2+1)x = 2$ bylo kladné reálné číslo.

3 V rovnici $\dfrac{m}{x} + \dfrac{m+3}{2} = 8 + \dfrac{1}{x}$ určete hodnotu parametru $m \in \mathrm{R}$ tak, aby kořenem dané rovnice bylo číslo 2.

4 Řešte rovnici s neznámou $p \in \mathrm{R}$ a s parametrem $q \in \mathrm{R}$: $pq + 2q = 1 + p$

3.2 Rovnice s neznámou ve jmenovateli

5 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$ a s parametrem $m \in \mathrm{R}$:

a) $\dfrac{2m}{2+x} = \dfrac{m-1}{x+1-m}$
b) $\dfrac{2+2m}{x+m} + \dfrac{x-m}{x+1} = 1$
c) $\dfrac{2x+m}{x+1} - \dfrac{3m}{x-m} = 2$
d) $\dfrac{(m+1)x-6}{x} = 3\left(1 - \dfrac{m^2-m}{x}\right)$

3.3 Rovnice s neznámou pod odmocninou

6 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$ a s parametrem $p \in \mathrm{R}$:

a) $\sqrt{x^2+2p} = x + p$
b) $\sqrt{x^2-4p} + x = 2p$
c) $\sqrt{x^2+p^2} = x - 2p$
d) $\sqrt{4x^2+4x-p} + 2x = p$

3.4 Neznámá v absolutní hodnotě

7 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$ a s parametrem $k \in \mathrm{R}$:

a) $|x-k| = 2$
b) $|x-5| = k$
c) $|x+3k| = |x-k|$
d) $|x+5-k| = |x-2|$

3.5 Soustavy rovnic

8 Určete všechna čísla $x, y \in \mathrm{R}$ tak, aby byla řešením dané soustavy s parametrem $a \in \mathrm{R}$:

a) $x - 4ay = 1$
$2ax - 2y = 1$
b) $x + (a-1)y = 1$
$(a+1)x + 3y = -1$
c) $3(ax-1) = -y$
$3(ay-1) = -x$
d) $x - 2ay = 3$
$2a(x-2) = 1 + y$

9 Určete, pro která $t \in \mathrm{R}$ je řešením soustavy
$x + 2y = 2,\ 2x - 3y = t$
uspořádaná dvojice reálných čísel $[x;y]$ taková, že $x < 0 \wedge y > 0$.

10 Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathrm{R}$ tak, aby řešením soustavy $px + y = 3,\ 2x - 3y = p$ byla taková uspořádaná dvojice reálných čísel $[x;y]$, pro kterou platí $y = \frac{1}{2}x$.

3.6 Kvadratické rovnice s parametrem

11 Je dána rovnice $(2a+3)x^2 + x - a + 4 = 0$.
Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathrm{R}$, pro které je daná rovnice lineární.

12 Je dána rovnice $2x^2 + (b+1)x + 6 = 0$.
Určete všechny hodnoty parametru $b \in \mathrm{R}$, pro které má daná rovnice dva různé reálné kořeny.

13 Je dána rovnice $x^2 + cx + 4 + \frac{3}{2}c = 0$.
Určete všechny hodnoty parametru $c \in \mathrm{R}$, pro které má rovnice dvojnásobný kořen.

14 Je dána rovnice $x^2 - 2dx + 2d^2 - 9 = 0$.
Určete všechny hodnoty parametru $d \in \mathrm{R}$, pro které nemá rovnice v množině reálných čísel řešení.

15 Je dána rovnice $px(3x+4) = x^2 + 1$.
V závislosti na hodnotě parametru $p \in \mathrm{R}$ určete počet řešení dané rovnice v množině reálných čísel.

16 Je dána rovnice $(a+1)x^2 - 2(a+3)x + 2a^2 - 7a + 3 = 0$.
Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathrm{R}$, pro které má rovnice jeden kořen roven nule. Potom určete druhý kořen.

17 Je dána rovnice $t(x^2+1) - 3 = x(x - 2t)$.
Určete všechny hodnoty parametru $t \in \mathrm{R}$, pro které má daná rovnice:
a) dva různé reálné kladné kořeny
b) dva různé reálné záporné kořeny
c) dva různé reálné kořeny opačných znamének

18 Je dána rovnice $x^2 - (m+3)x + m - 13 = 0$.
Určete všechny hodnoty parametru $m \in \mathrm{R}$ tak, aby kořeny dané rovnice byla dvě navzájem opačná čísla.

19 Je dána rovnice $x^2 - (m+3)x + m - 13 = 0$.
Určete všechny hodnoty parametru $m \in \mathrm{R}$ tak, aby kořeny dané rovnice byla dvě navzájem převrácená čísla.

3.7 Neznámá ve jmenovateli (po úpravě kvadratická rovnice)

20 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$ a s parametrem $a \in \mathrm{R}$:

a) $\dfrac{2x+a}{x+2} - \dfrac{a}{x-2} = a$

b) $x\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{x+a}\right) = \dfrac{2}{x+a} - \dfrac{1}{ax+a^2}$

c) $\dfrac{3}{x+a} + \dfrac{a-1}{x-a} = \dfrac{2a}{x}$

d) $\dfrac{a}{x(a-1)} = 2 - x$

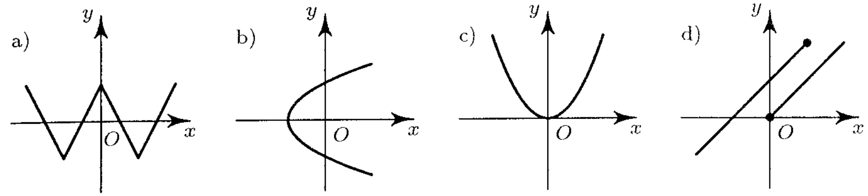
4 Funkce

4.1 Definice funkce

1 Rozhodněte, zda následujícími předpisy jsou dány funkce na dané množině:

a) $f_1\colon y = 2x - 1 \wedge x \in \mathrm{R}$
b) $f_2\colon y = \sqrt{x+4} \wedge x \in \langle -4; \infty)$
c) $f_3\colon y^2 = x \wedge x \in \mathrm{R}$
d) $f_4\colon y = x^2 \wedge x \in \mathrm{R}$

2 Rozhodněte, které z nakreslených množin bodů na obr. 1 jsou grafem funkce:



Obr. 1

4.2 Rovnost funkcí

3 Rozhodněte, zda dané funkce f, g jsou si rovny:

a) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$
b) $f(x) = x$, $g(x) = x^2 \cdot x^{-1}$
c) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \mathrm{tg}\, x \cdot \cos x$

4.3 Definiční obor funkce

4 Určete definiční obory uvedených funkcí:

$f_1(x) = x^2 + 3x - 1$

$f_2(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$

$f_3(x) = \dfrac{x}{13x^2 + 10x - 3}$

$f_4(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

$f_5(x) = \dfrac{1}{|x+3| - 4}$

$f_6(x) = \sqrt{x+2}$

$f_7(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}$

$f_8(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{4x-6}}$

$f_9(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x-6}}$

$f_{10}(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{\dfrac{7}{10-x}}$

$f_{11}(x) = \log(x-3)$

$f_{12}(x) = \dfrac{1}{\log_2(x+4) - 3}$

$f_{13}(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)}$

$f_{14}(x) = \sqrt{\log_5 x + 1}$

4.4 Hodnota funkce, obor funkčních hodnot

5 Vypočítejte hodnotu funkce $y = \dfrac{x+4}{x-1}$ v bodech -1, 3, $\sqrt{2}$.

6 Je dána funkce f: $y = x^3 - x \wedge x \in \mathrm{R}$. Vypočítejte: $f(-2)$, $f(\frac{1}{3})$, $f(2\sqrt{3})$.

7 Je dána funkce $g(x) = 3x^2 + 1$. Vypočítejte: $g(1)$, $g(a) + g(2)$, $g(a+2)$, $g(b^2)$, $[g(b)]^2$.

8 Je dána funkce $f(x) = x^2 + 2x - 30$. Rozhodněte, zda existuje $x \in \mathrm{R}$ tak, aby platilo:

a) $f(x) = 5$ b) $f(x) = -100$ c) $f(x) = \frac{11}{2}\sqrt{3}$

9 Je dána funkce $g(x) = 2x - 3$. Rozhodněte, zda existuje $x \in \mathrm{R}$ tak, aby platilo:

a) $g(x^2) = [g(x)]^2 - 2$ b) $g(x+6) = g(6x)$ c) $g(x) + 6 = 6g(x)$

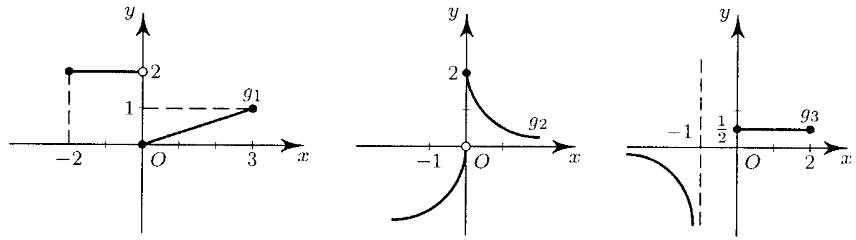
10 Je dána funkce h: $y = \dfrac{x^2+1}{2-x^2}$.

a) Rozhodněte, která z následujících čísel 2, $-\frac{5}{2}$, 0, 5, -1 patří do oboru hodnot funkce h.

b) Určete všechna čísla $m \in \mathrm{R}$ tak, aby platilo: $h(m) = h(\sqrt{3})$

c) Určete všechna čísla $c \in \mathrm{R}$ tak, aby platilo: $h(c+1) = h(\frac{1}{2})$

11 Na obr. 2 jsou grafy funkcí g_1, g_2, g_3:



Obr. 2

a) Určete definiční obor a obor funkčních hodnot pro funkce g_1, g_2, g_3.

b) Určete čísla x_1, x_2, x_3 z definičního oboru funkce g_1 tak, aby platilo:

$g_1(x_1) = 0{,}5$ $g_1(x_2) = 2$ $g_1(x_3) = -3$

4.5 Funkce složená

12 Jsou dány dvě funkce $f(x) = 3x + 1$ a $g(x) = x^2 + 3x + 2$. Vypočítejte:

a) $f(g(1))$ c) $f(f(2))$ e) $f(g(a))$
b) $g(f(1))$ d) $g(g(-3))$ f) $g(f(b))$

13 Jsou dány dvě funkce $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = (x+1)^2$.

a) Vypočítejte $f(g(-2))$.

b) Vyjádřete předpis funkce $h(x) = f(g(x))$ rovnicí a potom vypočítejte $h(-2)$.

14 Jsou dány dvě funkce $f(x) = -2x + 3$ a $g(x) = \sqrt{x}$. Napište předpisy pro funkce složené:

a) $f \circ g$ c) $f \circ (f \circ g)$ e) $f \circ (g \circ f)$
b) $g \circ f$ d) $g \circ (g \circ f)$ f) $g \circ (f \circ g)$

15 Jsou dány tři funkce $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x + 3$. Vytvořte složené funkce h_1 až h_4 a určete jejich definiční obory:

a) $h_1(x) = g(h(f(x)))$ c) $h_3(x) = f(g(h(x)))$
b) $h_2(x) = f(h(g(x)))$ d) $h_4(x) = h(g(f(x)))$

16 Určete hodnotu parametru $a \in \mathrm{R}$ tak, aby pro funkci $h(x) = ax + 3$ platilo $h(h(2)) = 17$.

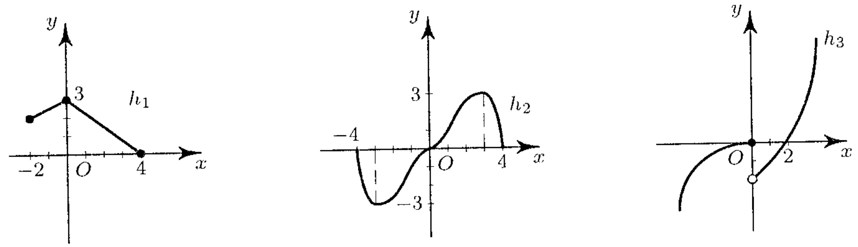
17 U daných složených funkcí určete funkci vnější a funkci vnitřní:

a) $y = 6\sqrt{x} - 4$ c) $y = \log^2 x$ e) $y = 5^{\sqrt{x}}$ g) $y = \log^2 x - 4\log x$
b) $y = \sqrt{x^2 - 4x}$ d) $y = \log x^2$ f) $y = \sqrt{5^x}$ h) $y = (x^2+1)^3$

4.6 Vlastnosti funkcí

Rostoucí, klesající funkce

18 Na obr. 3 jsou grafy funkcí h_1, h_2, h_3. Rozhodněte, ve kterých intervalech jsou dané funkce rostoucí, klesající.



Obr. 3

19 Dokažte, že funkce g_1: $y = 2x - 1$ je rostoucí v R.

20 Dokažte, že funkce g_2: $y = -3x + 6$ je klesající v R.

Prostá funkce

21 Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou prosté ve svém definičním oboru:

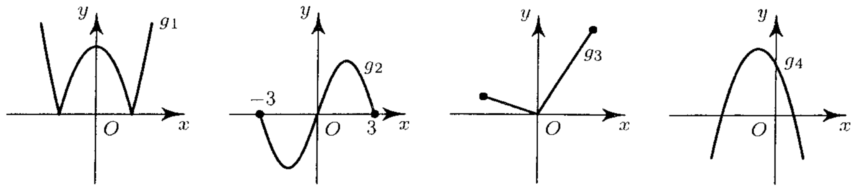
f_1: $y = 2x + 5$ f_2: $y = x^2 - 4$ f_3: $y = 2^x$ f_4: $y = |x+1|$

22 Určete co největší intervaly, ve kterých jsou prosté funkce, jejichž grafy jsou na obr. 3.

Sudá, lichá funkce

23 Které z funkcí h_1 až h_{12} jsou sudé (liché) v definičním oboru?

h_1: $y = x$ h_4: $y = 4x$ h_7: $y = |x|$ h_{10}: $y = x^3$
h_2: $y = \cos x$ h_5: $y = x^2$ h_8: $y = \log x$ h_{11}: $y = 2^x$
h_3: $y = \dfrac{1}{x}$ h_6: $y = \dfrac{4x}{x^2-4}$ h_9: $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$ h_{12}: $y = \dfrac{x^2}{|x|+3}$



Obr. 4

24 Na obr. 4 jsou nakresleny grafy funkcí g_1, g_2, g_3, g_4. Rozhodněte, které z uvedených funkcí jsou sudé (liché) v definičním oboru.
(Pozn.: Graf funkce g_1 je souměrný podle osy y, graf funkce g_2 je souměrný podle počátku soustavy souřadnic.)

Omezená funkce

25 Rozhodněte, které z funkcí g_1 až g_{16} jsou omezené shora, omezené zdola, omezené v definičním oboru.

$g_1\colon y = \cos x$	$g_5\colon y = x$	$g_9\colon y = x^2$	$g_{13}\colon y = 2^x$
$g_2\colon y = \sin^2 x$	$g_6\colon y = \lvert x\rvert$	$g_{10}\colon y = x^3$	$g_{14}\colon y = 2^{\lvert x\rvert}$
$g_3\colon y = \cos x - 1$	$g_7\colon y = -4x$	$g_{11}\colon y = x^{-1}$	$g_{15}\colon y = \log x$
$g_4\colon y = 2\sin x$	$g_8\colon y = -4\lvert x\rvert + 3$	$g_{12}\colon y = x^{-2}$	$g_{16}\colon y = -\lvert\log x\rvert$

26 Dokažte, že dané funkce jsou omezené v definičním oboru.

$$f_1(x) = \frac{10}{x^2+2} \qquad f_2(x) = x^2 \wedge x \in \langle -5; 3\rangle \qquad f_3(x) = \frac{x}{x+4} \wedge x \in \mathrm{R}_0^+$$

Maximum, minimum funkce

27 Rozhodněte, zda funkce f_1 až f_9 mají maximum nebo minimum v definičním oboru. Jestliže mají maximum nebo minimum, potom určete, ve kterém bodě, a dále určete jeho hodnotu.

$f_1\colon y = 2x$	$f_4\colon y = \lvert x\rvert + 1$	$f_7\colon y = 2^x + 1$
$f_2\colon y = 2x^2 - 1$	$f_5\colon y = -x^2 + 4$	$f_8\colon y = -\lvert\log x\rvert$
$f_3\colon y = \dfrac{x+3}{x}$	$f_6\colon y = \dfrac{4x^2}{x^2+4}$	$f_9\colon y = \dfrac{1}{x^2+2x+1}$

Vlastnosti funkcí — opakování

28 Načrtněte graf funkce f, víte-li, že
$\mathrm{D}(f) = \langle -3; \infty) - \{0\}$, $f(-3) = -2$.
Průsečíky grafu funkce f s osou x jsou v bodech $P_1[-1; 0]$, $P_2[5; 0]$.
V intervalu $\langle -3; 0)$ je funkce f rostoucí a není omezená shora.
V intervalu $\langle -3; 3\rangle - \{0\}$ je funkce f sudá.
V intervalu $\langle 3; \infty)$ je funkce f rostoucí a omezená shora číslem $h = 4$.

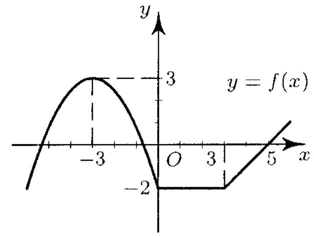
a) Z grafu určete obor funkčních hodnot funkce f.
b) Určete souřadnice průsečíku grafu funkce f s osou y.
c) Je funkce f omezená zdola v definičním oboru?
d) Určete maximum funkce f v definičním oboru.

e) Určete minimum funkce f v definičním oboru.
f) Je funkce f prostá v definičním oboru?
g) Určete alespoň jeden interval, ve kterém je funkce f prostá.

4.7 Vztahy mezi grafy funkcí

29 Za předpokladu, že znáte graf funkce $y = f(x)$, který je na obr. 5, načrtněte grafy funkcí:

a) $y = f(x) + 2$	f) $y = -f(x)$
b) $y = f(x+2)$	g) $y = -f(2x)$
c) $y = f(x-1) - 3$	h) $y = \lvert f(x)\rvert$
d) $y = 2f(x)$	i) $y = f(\lvert x\rvert)$
e) $y = \frac{1}{2}f(x)$	j) $y = \lvert f(\lvert x\rvert)\rvert$



Obr. 5

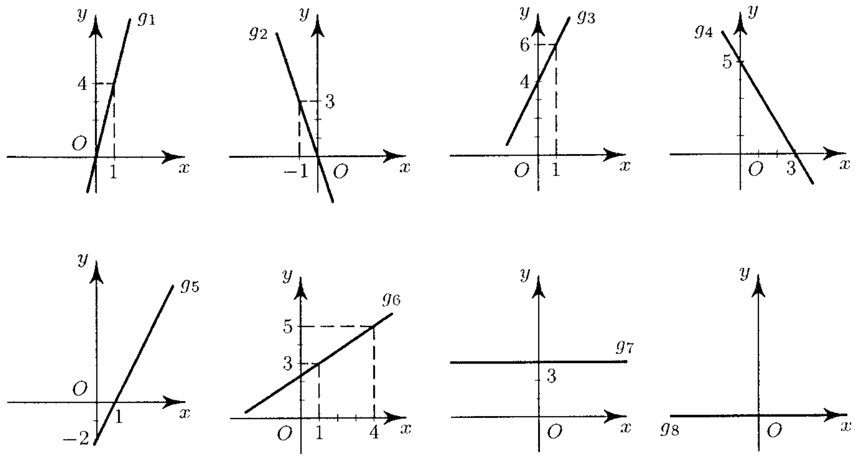
4.8 Lineární funkce

30 Funkční předpis lineární funkce f zapište rovnicí, víte-li, že platí: $f(0) = 1 \wedge f(2) = 5$.

31 Funkční předpis lineární funkce g zapište rovnicí, víte-li, že graf funkce g prochází body $A[1; 2]$, $B[3; -4]$.

32 Funkční předpis lineární funkce h zapište rovnicí, víte-li, že pro funkci h platí: $h(x+1) - h(x) = 2 \wedge h(0) = 3$.

33 Funkční předpisy lineárních funkcí g_1 až g_8 zapište rovnicemi, jsou-li jejich grafy na obr. 6:



Obr. 6

34 Nakreslete graf funkce f, která je po částech lineární a pro kterou platí: $D(f) = \langle -5; \infty)$, $f(-5) = 0$. Pro $x = 0$ funkce nabývá maxima, hodnota maxima je 5. Pro $x \in \langle -5; 0)$ je funkce rostoucí, pro $x \in \langle 0; 4\rangle$ je funkce f klesající a $f(4) = -5$. V intervalu $\langle 4; \infty)$ je daná funkce konstantní. Dále zapište funkci f jako sjednocení lineárních funkcí.

35 Načrtněte graf funkce, určete obor funkčních hodnot:

a) $f_1\colon y = -2x + 1$ b) $f_2\colon y = 0{,}5x + 3 \wedge x \in \langle -3; 0) \cup \{2\} \cup \langle 5; \infty)$

36 Načrtněte grafy funkcí f_1, f_2:

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & x \geqq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1, & x \geqq 2 \\ 2x + 1, & x < 2 \end{cases}$$

37 Je dána funkce $g\colon y = -2x + 3$. Funkční předpis lineární funkce f určete tak, aby graf funkce f byl souměrný s grafem funkce g podle

a) osy x, b) osy y, c) počátku, d) přímky $y = x$.

38 Určete reálné číslo a tak, aby pro lineární funkci $f\colon y = ax + 2$ platilo: $\forall x \in \langle -4; 4\rangle$ je $f(x) \in \langle -10; 10\rangle$.

39 Určete reálné číslo b tak, aby pro lineární funkci $h\colon y = -2x + b$ platilo: $\forall x \in \langle -5; 5\rangle$ je $f(x) \in \langle -15; 25\rangle$.

Graf lineární funkce s absolutními hodnotami

40 Nakreslete grafy funkcí:

$f_1\colon y = |x|$ $m_1\colon y = |x + 2| + 0{,}5|x - 1| - x$

$f_2\colon y = |x| + 2$ $m_2\colon y = |x + 1| - |3 - x| + 2$

$f_3\colon y = |x + 2|$ $g_1\colon y = |x - 1| - 2$

$f_4\colon y = |x + 2| - 3$ $g_2\colon y = \big||x - 1| - 2\big| - 3$

$h_1\colon y = 2|x|$ $g_3\colon y = \Big|\big||x - 1| - 2\big| - 3\Big|$

$h_2\colon y = 2|x - 3| + 1$ $g_4\colon y = \Big|\Big|\big||x| - 1\big| - 1\Big| - 1\Big|$

41 Načrtněte grafy funkcí:

a) $y = x + \sqrt{x^2}$ b) $y = 2x - 1 + |x - 1| + \sqrt{(1 - x)^2}$

Funkce signum: $y = \operatorname{sgn} x$

42 Načrtněte grafy funkcí:

$h_1\colon y = \operatorname{sgn} x$ $h_3\colon y = \operatorname{sgn}(x - 2)$ $h_5\colon y = \operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn}(x + 2)$

$h_2\colon y = x \operatorname{sgn} x$ $h_4\colon y = \operatorname{sgn}(x^2 - 2x - 3)$ $h_6\colon y = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn}(x + 2)$

Funkce celá část: $y = [x]$

43 Načrtněte grafy funkcí:

$g_1\colon y = [x]$ $g_3\colon y = [x - 2]$ $g_5\colon y = 2[x]$ $g_7\colon y = [x] + x$

$g_2\colon y = -[x]$ $g_4\colon y = [x] - 2$ $g_6\colon y = [2x]$ $g_8\colon y = [x] - x$

Lineární interpolace

44 Za předpokladu, že graf funkce $f(x) = x^2$ lze v intervalu $\langle 2{,}14; 2{,}15\rangle$ považovat za úsečku, vypočítejte $f(2{,}147)$.

45 Za předpokladu, že graf funkce $g(x) = \cos x$ lze v intervalu $\langle 22°40'; 22°50'\rangle$ považovat za úsečku, vypočítejte $\cos 22°43'$.

4.9 Kvadratická funkce

46 Funkční předpis kvadratické funkce f zapište rovnicí, víte-li, že platí: $f(1) = -2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 4$.

47 Funkční předpis kvadratické funkce f zapište rovnicí, víte-li, že graf funkce f prochází body $K[0; -3]$, $L[1; 0]$, $M[-1; -4]$.

48 Funkční předpis kvadratické funkce f zapište rovnicí, víte-li, že platí: funkce f je sudá v R, hodnota minima je -8 a jeden z průsečíků grafu funkce s osou x má souřadnice $[2; 0]$.

49 Funkční předpis kvadratické funkce f zapište rovnicí, víte-li, že platí: funkce f pro $x = 2$ nabývá maxima, přičemž hodnota maxima je 4 a osu y protíná graf funkce f v bodě $[0; 1]$.

50 Funkční předpis kvadratické funkce f zapište rovnicí, víte-li, že platí: funkce f je v intervalu $(-\infty; 3\rangle$ rostoucí, v intervalu $\langle 3; \infty)$ je klesající. Graf prochází počátkem soustavy souřadnic. Hodnota maxima je 18.

51 Je dána funkce $g\colon y = x^2 - 4x + 3$. Určete všechna reálná čísla x tak, aby platilo $g(x) = g(-2)$.

52 Určete reálná čísla a, b tak, aby pro funkci $y = ax^2 + bx + 5$ platilo: $\forall x \in \mathrm{R}\ f(x + 1) - f(x) = 8x + 3$.

53 Je dána funkce $g\colon y = x^2 - 2x - 3$. Funkční předpis kvadratické funkce f určete tak, aby graf funkce f byl souměrný s grafem funkce g

a) podle osy x, b) podle osy y, c) podle počátku.

54 Načrtněte grafy funkcí (určete souřadnice vrcholu, souřadnice průsečíků grafu s osou x a s osou y, načrtněte graf, určete obor funkčních hodnot):

$f_1\colon y = x^2 + 4x + 3$ $f_4\colon y = -x^2 - 3x$ $f_7\colon y = 3x^2 + 6x + 3$

$f_2\colon y = x^2 - 6x + 9$ $f_5\colon y = 2x^2 - 6$ $f_8\colon y = -2x^2 + 4x + 1$

$f_3\colon y = x^2 + x + 1$ $f_6\colon y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ $f_9\colon y = \frac{3}{4}x^2 - 3x - \frac{7}{2}$

Graf kvadratické funkce s absolutními hodnotami

55 Načrtněte grafy funkcí:

$g_1\colon y = x^2 + 2x - 3$ $h_1\colon y = x^2 - 3x$ $k_1\colon y = |2x + 1| - x|x - 4|$

$g_2\colon y = |x^2 + 2x - 3|$ $h_2\colon y = x^2 - 3|x|$ $k_2\colon y = x|x - 2| + |x^2 - 2x|$

$g_3\colon y = x^2 + 2|x| - 3$ $h_3\colon y = x|x - 3|$ $k_3\colon y = |x^2 - x| + |x| - 2$

$g_4\colon y = \big|x^2 + 2|x| - 3\big|$ $h_4\colon y = |x|(x - 3)$ $k_4\colon y = |9 - x^2| + |4 - x^2| - 5$

4.10 Úprava výrazu — graf funkce

56 Načrtněte grafy daných funkcí:

a) $y = \left(\dfrac{x - 5}{x + 1} + 1\right) : \left(1 - \dfrac{2x - 1}{x + 1}\right)$

b) $y = \dfrac{x^3 - 8}{\frac{x^2 + 4}{x + 2} + \frac{2x}{x + 2}} : \dfrac{x^3 + 8}{(x - 2)^2 + 2x}$

c) $y = \left(x + 2 + \dfrac{2}{x - 1}\right) \cdot \left(x - 2 + \dfrac{2}{x + 1}\right)$

d) $y = \dfrac{x^3 - 4x + x^2 - 4}{x^2 - x - 2} \cdot x$

e) $y = \dfrac{12x^3 - 5x^2 - 6x - 1}{4x + 1}$

f) $y = 2x^2 - \dfrac{1}{1 - \frac{x}{1 + x}}$

4.11 Exponenciální funkce

57 Určete reálná čísla a, b tak, aby graf funkce $y = a \cdot 2^x + b$ procházel body $A[0; \frac{7}{2}]$, $B[-1; 2]$.

58 Určete reálná čísla a, b tak, aby graf funkce $y = 2^{x+a} + b$ procházel body $A[1; 15]$, $B[-2; 1]$.

59 Určete všechny hodnoty reálného parametru q tak, aby daná funkce byla rostoucí.

a) $y = \left(\dfrac{2q^2}{q^2+1}\right)^x$ b) $y = \left(\dfrac{1}{q}\right)^x$ c) $y = \left(\dfrac{q+3}{q-1}\right)^x$

60 Určete všechny hodnoty reálného parametru p tak, aby daná funkce byla klesající.

a) $y = \left(\dfrac{p-1}{3p}\right)^x$ b) $y = (p^2 - 4)^x$ c) $y = \left(\dfrac{p+1}{p^2-1}\right)^x$

61 Užitím grafu vhodné exponenciální funkce dokažte, že $\left(\frac{7}{5}\right)^{-0,5} < 1$.

62 Užitím grafu vhodné exponenciální funkce rozhodněte, zda číslo $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^{0,4}$ je větší, nebo menší než 1.

63 Pomocí grafů vhodných exponenciálních funkcí rozhodněte, které z čísel K, L je větší:

a) $K = 0{,}25^{0,1}$, $L = 0{,}26^{0,1}$ b) $K = \mathrm{e}^{-1,1}$, $L = \pi^{-1,1}$ c) $K = \left(\dfrac{6}{11}\right)^{2,3}$, $L = \left(\dfrac{6}{11}\right)^{2,4}$

64 Pomocí grafu vhodné exponenciální funkce rozhodněte, jaký vztah platí mezi reálnými čísly r, s víte-li, že platí:

a) $\left(\frac{2}{7}\right)^r < \left(\frac{2}{7}\right)^s$ b) $1{,}7^r > 1{,}7^s$ c) $\left(\sqrt{2}-1\right)^r > \left(\sqrt{2}-1\right)^s$

65 Pomocí grafů exponenciálních funkcí rozhodněte, který ze vztahů $0 < a < 1$, $a > 1$ platí, víte-li, že platí:

a) $a^{-0,7} > a^{-0,8}$ b) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$ c) $\dfrac{1}{a^3} > \dfrac{1}{a^2}$

66 Načrtněte grafy funkcí (určete definiční obor, obor funkčních hodnot, průsečíky grafu s osou x a s osou y):

f_1: $y = 2^x - 4$ f_4: $y = |2^{x+1} - 4|$ f_7: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 1$

f_2: $y = 2^{x+1} - 4$ f_5: $y = 2^{|x+1|} - 4$ f_8: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 4$

f_3: $y = -(2^{x+1} - 4)$ f_6: $y = 2^{|x|+1} - 4$ f_9: $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 4$

67 Načrtněte grafy funkcí:

g_1: $y = 2^{-x}$ g_3: $y = 3 \cdot 2^x$ g_5: $y = \mathrm{e}^x$

g_2: $y = 2^{-x+1}$ g_4: $y = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ g_6: $y = 10^x$

4.12 Logaritmus čísla

68 Danou rovnost přepište pomocí definice logaritmu:

a) $3^2 = 9$ b) $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$ c) $9^{\frac{1}{2}} = 3$

69 Vypočítejte:

a) $\log_{\frac{1}{3}} 9$ c) $\log_7 \sqrt{7}$ e) $\log_8 \sqrt{2}$ g) $\log_{0,25} 4$

b) $\log_5 125$ d) $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{16}$ f) $\log_5 1$ h) $\log_{0,2} 0{,}04$

70 Najděte všechna $x \in (0; \infty)$, pro něž platí:

a) $\log_3 x = 4$ c) $\log_{\frac{1}{5}} x = -1$ e) $\log_5 x = 0$ g) $\log_{17} x = 1$

b) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$ d) $\log_2 x = -\dfrac{1}{3}$ f) $\log_{\frac{1}{4}} x = \dfrac{3}{2}$ h) $\log x = -\dfrac{3}{5}$

71 Najděte všechna kladná reálná čísla a tak, aby platilo:

a) $\log_a 27 = 3$ c) $\log_a \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$ e) $\log_a 4 = \dfrac{1}{4}$ g) $\log_a 8 = 6$

b) $\log_a \dfrac{1}{16} = 4$ d) $\log_a 5 = -1$ f) $\log_a \sqrt{8} = 3$ h) $\log_a \sqrt{1\,000} = \dfrac{3}{2}$

72 Užitím pravidel pro počítání s logaritmy upravte a potom rozhodněte, zda dané číslo x je kladné, nebo záporné. Je-li číslo x kladné, rozhodněte dále, zda je menší, nebo větší než jedna.

a) $x_1 = 2\log 4 + \log 3 - \log 6$ c) $x_3 = 2\log_{0,2} 4 + \log_{0,2} 3 - \log_{0,2} 6$

b) $x_2 = \log_6 12 - \log_6 \frac{1}{12} - 2$ d) $x_4 = \ln 4 + \ln \dfrac{1}{3} - 2\left(\ln 2 + \ln \dfrac{1}{4}\right)$

73 Vypočítejte:

a) $\log_2 \log_2 16$ d) $3\log_2 \dfrac{5}{3} - 2\log_2 \dfrac{10}{9} + \log_2 \dfrac{1}{30}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 4$ e) $\log^2 2 + \log 2 \cdot \log 5 + \log 5 - \log 1$

c) $\log_5 \dfrac{1}{25} - (\log_{\frac{1}{3}} 9)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 4^2$ f) $2^{\log_2 3} + 3^{\log_3 5}$

74 Vypočítejte x, víte-li, že a, b, c jsou kladná reálná čísla (odlogaritmujte):

a) $\log x = 0{,}5\log a + 3\log b - 2\log c$

b) $\log x = \dfrac{1}{2}\log a - \log b - \dfrac{3}{5}\log c + 1$

c) $\log_2 x = 3\log_2 a + 2\log_2 b + 4$

d) $\log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{1}{4}(\log_{\frac{1}{2}} a + 3\log_{\frac{1}{2}} b) - 2 + \log_{\frac{1}{2}} c$

75 Dané výrazy vyjádřete pomocí $\log a$, $\log b$, $\log c$, kde a, b, c jsou daná kladná reálná čísla (zlogaritmujte):

a) $\log \dfrac{a^2b^3}{100\sqrt{c}}$ b) $\log \sqrt{\dfrac{10a}{bc}}$ c) $\log \dfrac{(a+b)^2}{c}$

4.13 Logaritmická funkce

76 Určete reálná čísla a, b tak, aby pro funkci h_1: $y = a\log_2 x + b$ platilo $h_1(4) = 5$, $h_1(\frac{1}{4}) = -7$.

77 Určete reálná čísla a, b tak, aby graf funkce h_2: $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+a)+b$ procházel body $K[2;1]$, $L[8;0]$.

78 Určete definiční obory funkcí f_1 až f_{10}:

f_1: $y = \log_3 x$

f_2: $y = \log_3(x+6)$

f_3: $y = \log(x^2-4)$

f_4: $y = \dfrac{1}{\log x - 1}$

f_5: $y = \dfrac{1}{\log_2(x+7) - 1}$

f_6: $y = \log(|x+1| - 7)$

f_7: $y = \log(-|x+3| + |x| + 1)$

f_8: $y = \sqrt{\log(x+3)}$

f_9: $y = \log \dfrac{x}{2x-1}$

f_{10}: $y = \sqrt{\log_{0,2} \dfrac{x+5}{x}}$

79 Pomocí grafu vhodné logaritmické funkce rozhodněte, zda je dané číslo kladné, nebo záporné. Je-li dané číslo kladné, rozhodněte dále, zda je menší, nebo větší než jedna.

a) $A = \log_2 3$ b) $B = \log_{0,3} 0{,}6$ c) $C = \log_{100} 0{,}99$

80 Pomocí grafu vhodné logaritmické funkce rozhodněte, zda platí $A > B$, nebo $A < B$:

a) $A = \log_3 11$, $B = \log_3 12$
b) $A = \log_{\frac{1}{2}} 0{,}4$, $B = \log_{\frac{1}{2}} 0{,}3$
c) $A = \log_3 5$, $B = \log_5 3$
d) $A = \log_{0,1} 0{,}2$, $B = \log_{0,6} 0{,}2$

81 Pomocí grafu vhodné logaritmické funkce rozhodněte, zda je $a > 1$, nebo $a \in (0;1)$, víte-li, že platí:

a) $\log_a 2 < \log_a 5$ b) $\log_a 2{,}7 > \log_a 2{,}8$ c) $\log_a 0{,}4 < \log_a 1$

82 Určete takové celé číslo m, pro které platí nerovnosti:

a) $m < \log_3 2 < m+1$
b) $m < \log_{\frac{1}{2}} 5 < m+1$
c) $m < \log 150 < m+1$
d) $m < \ln 10 < m+1$

Využijte graf vhodné logaritmické funkce.

83 Načrtněte grafy funkcí. (Určete definiční obor, obor funkčních hodnot, průsečíky grafu s osou x a s osou y.)

g_1: $y = \log_2(x+4)$

g_2: $y = \log_2(x+4) - 1$

g_3: $y = |\log_2(x+4) - 1|$

g_4: $y = |\log_2(x+4)| - 1$

g_5: $y = \log_2|x+4| - 1$

g_6: $y = \log_2(|x|+4) - 1$

84 Načrtněte grafy funkcí:

h_1: $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$

h_2: $y = 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2$

h_3: $y = 3\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

h_4: $y = \ln x$

h_5: $y = \log x$

h_6: $y = \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x$

h_7: $y = \log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x$

85 Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí:

a) $\log_{1,5} x < \log_{1,5} 5$ b) $\log_{0,7}(x+1) \leqq \log_{0,7} \dfrac{1}{3}$

Využijte graf vhodné logaritmické funkce.

4.14 Grafické řešení rovnic a nerovnic

86 Řešte v R graficky rovnice. Kreslete na milimetrový papír, pro kreslení grafů funkcí užijte šablonu, výsledky uvádějte s přesností na desetiny. Proveďte zkoušku dosazením nebo užitím grafické kalkulačky.

a) $x^2 = x + 4$
b) $|x| = \dfrac{1}{2}x + 4$
c) $\log_2 x = x - 4$
d) $2^{x-1} = -(x-2)^2 + 5$
e) $\ln x + 6 = |x - 2|$
f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} - 3 = -\dfrac{1}{x}$

87 Řešte v R graficky nerovnice. Kreslete na milimetrový papír, pro kreslení grafů funkcí užijte šablonu, výsledky uvádějte s přesností na desetiny.

a) $|x+2| \geqq -|x| + 4$
b) $|x^2 - 1| > -x^2 + 4$
c) $\log_{\frac{1}{2}} x > 9x - 10^2$
d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geqq \log_2(x+4)$

88 Řešte v R graficky rovnice s parametrem $a \in$ R. Proveďte diskusi o počtu řešení vzhledem k hodnotě parametru $a \in$ R.

a) $-x + a = 2|x|$
b) $ax = |x-1|$
c) $|x-2| + x = 2x + a$
d) $|x-2| + x = ax + 3$
e) $|x-2| + x = ax$
f) $|1-2x| + |x+1| = a$

4.15 Inverzní funkce

89 Rozhodněte, ke kterým z daných funkcí existují funkce inverzní v definičním oboru, a svoje tvrzení zdůvodněte.

a) $y = 2x - 1$
b) $y = x^2 - 2x$
c) $y = 3^x$
d) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$
e) $y = |x|$
f) $y = \sqrt{x}$

90 U následujících funkcí postupně určete definiční obor, vypočítejte průsečíky s osami, načrtněte graf, zapište obor funkčních hodnot. Rozhodněte, zda existuje funkce inverzní. Jestliže ano, do téže soustavy souřadnic nakreslete graf funkce inverzní a pro funkci inverzní určete definiční obor, obor funkčních hodnot a rovnici.

a) $y = 3x + 2$
b) $y = -\frac{x}{2} + 4$
c) $y = |x+2|$
d) $y = -x + 3$
e) $y = x$
f) $y = 2$
g) $y = \frac{1}{2}x^2 \wedge x \in \langle 0; \infty)$
h) $y = \frac{1}{2}x^2 \wedge x \in (-\infty; 0\rangle$
i) $y = \frac{1}{2}x^2$
j) $y = x^2 - 6x + 5$
k) $y = x^2 - 6x + 5 \wedge x \in \langle 3; \infty)$
l) $y = x^2 - 6x + 5 \wedge x \in (-\infty; 3\rangle$
m) $y = 2^{x-1} - 4$
n) $y = 0{,}5^{x+2} - 1$
o) $y = e^x$
p) $y = \log_2 x + 1$
q) $y = \log_2(x+4)$
r) $y = 2 + \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

5 Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice

5.1 Exponenciální rovnice

1 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $2^{3x-1} \cdot 4 = 8^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) $\sqrt[4]{4^x} \cdot \sqrt[3]{2^{x-3}} = \sqrt[6]{16}$

c) $\frac{1}{3^x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{27^{3-3x}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x+3}$

d) $0.25 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = 1$

e) $2 \cdot 0{,}5^{x^2+\frac{8}{3}x} = \frac{8}{\sqrt[3]{4}}$

f) $5^x \cdot 2^x = 100^{x-1}$

g) $\frac{81}{16} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{x+1}$

h) $\frac{3^x}{2 \cdot 3^{\sqrt{3}}} = 4{,}5$

2 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $3^x + 3^{x+1} = 108$

b) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{21}{8}$

c) $7 \cdot 4^{-x+2} = 3 \cdot 4^{-x+3} - 5$

d) $\frac{4}{5} \cdot 5^0 + 5^{-1} - 25^x + 20 \cdot 25^{x-1} = 0$

e) $3^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{5}{3}$

f) $2^{2x} \cdot 5^x - 2^{2x-1} \cdot 5^{x+1} = -600$

3 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$

b) $\frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x = 9$

c) $9 \cdot 3^x + 3^{-x} = 10$

d) $9^{x-0,5} + 9^{0,5-x} = \frac{10}{3}$

e) $2\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

f) $5^{2x} \cdot (5^{2x} - 5) = 3 \cdot (5^{2x+1} + 5^{2x}) + 50$

4 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $3^x + 3^{x+1} = 7 \cdot 4^x - 4^{x+1}$

b) $2^{x-1} - 2^{x-2} = 5^{x-3} + 2^{x-3}$

c) $2 \cdot 4^x + 5^{x-\frac{1}{2}} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

d) $3^x + \frac{9^x}{3} = 3^{x+1} + \frac{9^x}{9}$

5 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

b) $16^x = 8 \cdot 4^x + 2 \cdot 8^x$

6 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $3^x = 10$

b) $5^{x+1} = 4$

c) $2^x \cdot 3^{x-1} = 6$

d) $5^x \cdot 7^{2x} = 16^{x-1}$

7 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $6 \cdot 7^{x+3} - 7^{x+2} = 82$

b) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{-x} = 7$

c) $2^x - 3^x = 2^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1}$

d) $7 \cdot 6^x - 2 \cdot 4^x = 6 \cdot 9^x$

8 Určete všechna čísla x, $y \in \mathrm{R}$ tak, aby byla řešením dané soustavy:

a) $2^x + 5 \cdot 3^y = 53$
$7 \cdot 2^x - 3^y = 47$

b) $2^{x+1} + 3^y = 31$
$2^x - 3^{y-2} = -1$

c) $2 \cdot 2^{x-y} + 2^{x+y-1} = 20$
$10 \cdot 2^{x-y-1} - 2^{x+y} = -22$

d) $16^{x+y} = 8$
$16^x + 16^y = 6$

e) $5^{\frac{x+y}{2}} : 5^{\frac{x+y}{4}} = 625$
$6^{\frac{x-y}{2}} : 6^{\frac{x-y}{4}} = 216$

f) $x^{y+1} = 27$
$x^{-y+1} = 3^{-1}$

5.2 Logaritmické rovnice

9 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\log_2(x+1) = 3$

b) $4\log_3(2x-1) = 12$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -2$

d) $\log_4(5x-4) = 2$

e) $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}} x = 0$

f) $\log_{\frac{1}{2}} \log_3(1 + 20\log_2 x) = -2$

g) $\log_2[14 + 2\log_7(1 + 2\log_{\frac{1}{2}} x)] = 4$

h) $\log_9\{3\log_2[1 + \log_3(1 - 2\log_3 x)]\} = 0{,}5$

10 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\log_5(x^2 + 2x) = \log_5(-3x)$

b) $\log x^2 = \log(4 - x^2)$

c) $\log_{0,1}(x^2 - 5x) = \log_{0,1}(5x + 11)$

d) $\log_2(x^2 - x) = \log_2 x$

11 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\log x = 2\log 5 + \log 4$

b) $\frac{\log_3 x}{1 + \log_3 2} = 2$

c) $\log_6(x+1) + \log_6 x = 1$

d) $\log_2(x+7) - \log_2 x = 3$

e) $\log(x+3) = \log x + \log 3$

f) $\log_8 \sqrt{x+30} + \log_8 \sqrt{x} = 1$

g) $\log x^5 - \log x^4 + \log x^3 = 12$

h) $\log\sqrt{x} + \log\frac{1}{x^2} - \log x^3 + \frac{11}{2} = \frac{\log x^2}{1 + \log 10}$

i) $3\log 2x^2 + 2\log 3x^3 = 5\log x + 2\log 6x^3$

j) $0{,}5(3\log 5 - 1 - \log x) = 2 - \log 5$

k) $\log_4(3x+2) - 2\log_4 x = 2 - \log_4 8$

l) $1 + \log_3(5-x) - \log_3(2x-1) = \log_3(2x-1)$

12 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\log_2 \frac{3-x}{x+3} = -2$

b) $\log_3 \frac{6x-2}{x-3} = 2$

c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x+14} = \frac{\log 125}{\log 5}$

d) $\log_7 \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$

13 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\frac{\log_3(6x-2)}{\log_3(x-3)} = 2$

b) $\frac{\log_5(x-\frac{1}{4})}{\log_5(x+\frac{7}{2})} = -1$

c) $\frac{2\log 3x}{\log(2-7x)} = 1$

d) $\frac{\log x}{\log(x-2)} = \frac{\log 9}{\log 3}$

14 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 = 0$

b) $4\log_9 x(\log_9 x - 1) = 2 + 3\log_9 x$

c) $\log_{\frac{1}{2}}^2(x+1) + 5\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 6$

d) $4\log_3(2x+1) + \log_3\sqrt{2x+1} = \frac{3}{2}\log_3^2(2x+1) - 6$

15 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\dfrac{\log x + 3}{3 - \log x} = 5$ b) $\dfrac{\log x + 1}{2 + \log x} + \dfrac{2\log x - 1}{\log x} = 3$

16 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\log_{\frac{1}{7}} x + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{7}} x} = -2$ c) $\log_3^2(x+1) + \dfrac{1}{\log_3^2(x+1)} = \dfrac{17}{4}$

b) $\log x^3 + 2 = \dfrac{10}{\log x^2}$ d) $\log_4^2 x^3 - \dfrac{4}{\log_4^2 x^2} = 8$

17 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\log 100x + \log 10x = 7$ c) $\log 100x + \log 10x^2 = 7$

b) $\log 100x + \log^2 10x = 7$ d) $\log 100x^2 + \log^2 10x^2 = 7$

18 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\dfrac{3}{2}\log\dfrac{x^2}{10} + \log\dfrac{100}{x^3} - \log\dfrac{\sqrt{10}}{x} = -2$

b) $\dfrac{\log_2 x - 2}{\log_2 \frac{x}{4}} - 2\log_2\sqrt{x} = \log_2^2 x + 1$

c) $\dfrac{\log_2 2x}{\log_2 8x} + \log_2\dfrac{x}{8} = \dfrac{2}{\log_2 4 - \log_2 0{,}5}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{\frac{1}{2}} 4x = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} 16x}{\log_{\frac{1}{2}} 8} + \log_{\frac{1}{2}} 4$

e) $\dfrac{\log_3^2 9x}{\log_3 81x^2} = \dfrac{3}{2}$

f) $\dfrac{\log\frac{x}{10}}{\log^2\sqrt{x}} + 1 = \log x$

19 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $x^{\log x} = 100x$ c) $1\,000x^2 = x^{\log x}$ e) $x^{\log_7 x^2} = 49x^3$

b) $x^{\log x + 2} = 100x$ d) $27x^2 = x^{\log_3 x}$ f) $(\sqrt{x})^{\log_2 x + 1} = 2$

20 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\log_2 x + \log_4 8 = \log_8 16$ c) $\log_2 x - \log_4 x + \log_{16} x = \dfrac{3}{4}$

b) $\log_9 x + \log_3 x = 6$ d) $\log_x 2 + \log_{4x} 8 = 2\log_{4x} 16$

21 Určete všechna čísla x, $y \in \mathrm{R}$ tak, aby byla řešením dané soustavy:

a) $x + y = 7$
$\log x + \log y = 1$

b) $x^2 + y^2 = 20$
$\log_2 x + \log_2 y = 3$

c) $\log_2 x + \log_4 y = 2$
$\log_4 x + \log_2 y = 2{,}5$

d) $\log_3(x+1) = 3^{\log_3 1}$
$\log_{\frac{1}{3}}(x+y) = 1 + \log_{\frac{1}{3}} 6$

22 Určete všechna čísla x, $y \in \mathrm{R}$ tak, aby byla řešením dané soustavy:

a) $\log x + \log y = 1$
$2\log x - \log y = 5$

b) $\log_2 x + 2\log_2 y = 10$
$2\log_2 x^2 - \log_2 y^2 = 10$

c) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_2 y = 3$
$\dfrac{6\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_2 y} - \dfrac{2\log_2 y}{\log_{\frac{1}{2}} x} = -1$

d) $xy = 100$
$\log^2 x + \log^2 y = 10$

e) $2^{x+y} \,.\, 4^{2x-y} = 8$
$\log_3(x+y) = 2$

f) $5^{\log x} + 3^{\log y} = 4$
$5^{2\log x} - 3^{2\log y} = -8$

23 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $x + \log_2(8 + 2^x) = 7$

b) $x + \log_2(1 - 3\cdot 2^x) = x\log_2 4$

c) $\log_2 3 + \log_2 4^{x+\sqrt{x}} = \log_2(2^{x+\sqrt{x}+1} + 4) + 2$

d) $\log_3 4\cdot 2^x + \log_3 3^{x+2} = \log_3 36^x$

e) $\log_5 10\cdot 25^x - \log_5(5^x + 25) = x + 1$

24 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $3^{\log_5 x} + 45 = 2\cdot 3^{\log_5 x + 1}$

b) $5\cdot(4^{\log_3 x} - 4^0) = 4^{\log_3 x + 1} - 4^{\log_3 x - 1}$

c) $3\cdot 16^{\log x} - 5\cdot 4^{\log x} - 2 = 0$

d) $2^{\log x} + 3^{\log x - 1} = 2^{\log x + 1} - 3^{\log x - 2}$

5.3 Exponenciální nerovnice

25 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $3^{x+5} < 1$ c) $0{,}1^{2x} \leqq 1$ e) $3^{x-5} < 0$

b) $2^{3x-4} \geqq 1$ d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3} > 1$ f) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x+2} \geqq 0$

26 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $3^{x-1} > 9$ c) $3^{2x} \leqq 7$ e) $4^x \cdot 2^x \leqq 100$

b) $0{,}125^{2x+3} \leqq 16$ d) $0{,}2^x > 3$ f) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^x \cdot 3^{x+4} > -1$

27 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $3^{x+4} \geqq 3^{2x-1}$ c) $0{,}2^{3x-2} \geqq 0{,}2^{x+5}$ e) $2^x \cdot 2^{x+1} < 2^{x+3}$

b) $4^{x+5} < 16^{x+1}$ d) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{x^2} < \left(\dfrac{1}{6}\right)^{2x+8}$ f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \cdot \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{8}$

28 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $3^{x+1} + 3^{x+2} < 36$ d) $25^x - 9\cdot 5^x + 20 < 0$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2} \leqq 3$ e) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \geqq 1$

c) $2^x - 3^x > 2^{x+2} - 3^{x+1}$ f) $2^x - 5\cdot 4^{x-2} < 1 - 2^{x-1}$

5.4 Logaritmické nerovnice

29 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $\log_3(x-4) < 0$ c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+5) \leqq 0$ e) $\log_{0,3} \dfrac{x+7}{2-x} \geqq 0$

b) $\log_5(x^2-2x+1) \geqq 0$ d) $\log_{\frac{3}{7}}(4x^2+3x) > 0$ f) $\log_{1,2}\left(4+\dfrac{2}{x}\right) \geqq 0$

30 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $\log_3(x+4) \leqq 4$ c) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+4) \geqq -3$ e) $\log_x 2 > 1$

b) $\log_5(2x-1) > -1$ d) $\log_{0,1}(x-6) < 2$ f) $\log_x 5 < -2$

31 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $\log_3(2x-1) \geqq \log_3(4x+3)$ c) $\log_{20}(x^2-3x) \leqq \log_{20} x + \log_{20} 5$

b) $\log_{\frac{1}{3}}(x+4) \leqq \log_{\frac{1}{3}}(5x-4)$ d) $\log_{0,2}(x-3) > \log_{0,2} x - \log_{0,2} 2$

32 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $\log 5 \cdot \log_{11}(x+3) \geqq 0$ c) $\log x \cdot \log(x+1) \leqq 0$

b) $\log_5 0{,}4 \cdot \log_{0,9}(x-1) \leqq 0$ d) $\log_{0,1} x \cdot \log_7(4x-1) > 0$

33 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $\log_3^2 x + \log_3 x - 2 \leqq 0$ c) $\log_4^2(x+1) - 9 > 0$

b) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \leqq 0$ d) $\log_{0,25}^2(x-1) - \log_{0,25}(x-1) \geqq 0$

34 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $\dfrac{\log x + 1}{\log x - 2} < 0$ b) $\dfrac{1}{\log x} + \dfrac{1}{3} \geqq 0$

35 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $|\log x| \leqq 4$ d) $|2 - \log x| > 1$ f) $\dfrac{1}{2}|\log_2 x + 1| \leqq 4$

b) $|\log_3 x - 1| \leqq 2$

c) $|2\log x + 3| > 4$ e) $\left|\dfrac{\log x - 3}{4}\right| \leqq \dfrac{1}{2}$ g) $\left|\dfrac{2\log_{\frac{1}{2}} x + 8}{4}\right| < 3$

36 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $2|\log x| - 3 \leqq |\log x - 1|$ b) $|\log x + 2| - |\log x| \leqq 1$

37 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $\log|x| > 2$ d) $\log|3-x| \geqq 2$ f) $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x}{3}\right| < \dfrac{1}{4}$

b) $\log_2|x-3| \leqq 4$

c) $\log_{\frac{1}{2}}|x+2| < 1$ e) $\log\dfrac{|2x+1|}{3} < 1$ g) $\log_{\frac{1}{3}}\left|\dfrac{4x+3}{9}\right| \geqq 2$

38 Řešte soustavy nerovnic s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $1 \leqq \log_3 x \leqq 2$ c) $-3 \leqq 2 - \log_2 x \leqq -2$

b) $-3 \leqq \dfrac{4\log x - 3}{5} \leqq 1$ d) $1 < \dfrac{\log x + 1}{2} + \log x < 2$

39 Řešte soustavy nerovnic s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $1 \leqq |\log_3 x| \leqq 2$ c) $2 \geqq |4 - \log_{\frac{1}{3}} x| \geqq 1$

b) $2 \leqq \dfrac{|\log x| + 1}{2} \leqq 3$ d) $3 < \left|\dfrac{\log x - 5}{2}\right| < 4$

40 Řešte soustavy nerovnic s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $1 \leqq \log_3|x| \leqq 2$ c) $-3 < \log|x-4| < 2$

b) $-2 < \log_{\frac{1}{2}}\left|\dfrac{2}{3}x\right| < -1$ d) $-1 < \log\left|\dfrac{x+1}{2}\right| < 1$

6 Goniometrické funkce a trigonometrie

6.1 Velikost úhlu — míra stupňová, míra oblouková

1 Velikost úhlu v míře stupňové vyjádřete v míře obloukové. Výsledek napište jako násobek čísla π.

$\alpha = 20°$ $\quad\gamma = 210°$ $\quad\varepsilon = 100°$
$\beta = 200°$ $\quad\delta = 9°$ $\quad\omega = 22°30'$

2 Velikost úhlu v míře stupňové vyjádřete v míře obloukové. K převodu užijte kalkulačku, výsledek udejte s přesností na tři desetinná místa.

$\alpha = 26°54'$ $\quad\beta = 156°09'$ $\quad\gamma = 222{,}37°$

3 Velikost úhlu v míře obloukové vyjádřete v míře stupňové.

$x_1 = \frac{7}{4}\pi$ $\quad x_2 = \frac{15}{6}\pi$ $\quad x_3 = \frac{11}{12}\pi$

4 Velikost úhlu v míře obloukové vyjádřete v míře stupňové. K výpočtu použijte kalkulačku, výsledek uveďte s přesností na minuty.

$y_1 = 0{,}24$ $\quad y_3 = -1{,}57$ $\quad y_5 = 0{,}003$
$y_2 = 2{,}5$ $\quad y_4 = 0{,}8\pi$ $\quad y_6 = 10^6$

5 Vyjádřete ve stupních i v radiánech úhel, který svírají hodinové ručičky v 11 hodin 30 minut.

6.2 Orientovaný úhel

6 Nakreslete daný orientovaný úhel v soustavě souřadnic. Vrchol zvolte v počátku, počáteční rameno splývá s kladnou poloosou x. Určete, ve kterém kvadrantu potom leží koncové rameno.

$\alpha = 143°$ $\quad\gamma = 11\,234°$ $\quad x_1 = 3{,}25\pi$ $\quad x_3 = -\frac{11}{6}\pi$
$\beta = -426°$ $\quad\delta = -270°$ $\quad x_2 = \frac{17}{3}\pi$ $\quad x_4 = 2$

7 Je dána jedna z velikostí orientovaného úhlu. Určete jeho základní velikost. Potom zapište všechny jeho velikosti.

$\alpha = 5\,432°$ $\quad\gamma = 200°20'$ $\quad x_1 = \frac{31}{4}\pi$ $\quad x_3 = -\frac{17}{3}\pi$
$\beta = -544°$ $\quad\delta = -5°55'$ $\quad x_2 = 20\pi$ $\quad x_4 = 8$

6.3 Hodnoty goniometrických funkcí $y = \sin x$, $y = \cos x$

8 Vypočítejte (bez použití kalkulačky):

a) $\sin\frac{5}{6}\pi$, $\sin\frac{15}{3}\pi$, $\sin\left(-\frac{7}{4}\pi\right)$
b) $\cos\frac{3}{4}\pi$, $\cos\frac{7}{6}\pi$, $\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$
c) $\sin 210°$, $\sin 330°$, $\sin 720°$
d) $\cos(-180°)$, $\cos 120°$, $\cos 240°$

9 S užitím kalkulačky nebo tabulek vypočítejte s přesností na 4 desetinná místa:

a) $\sin 144°21'$, $\sin(-15°13')$
b) $\cos 126°47'$, $\cos 2\,400°$
c) $\sin 1$, $\sin 4{,}2$
d) $\cos 5{,}4$, $\cos 3{,}14$

10 Určete všechny velikosti úhlu $\alpha \in \langle 0; 360°)$, pro které platí:

a) $\sin\alpha = \sin 57°$ $\quad$ b) $\cos\alpha = \cos 306°$ $\quad$ c) $\sin\alpha = \sin 203°18'$

11 Určete základní velikost úhlu ve stupních, víte-li, že platí:

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \cos\alpha < 0$ $\quad$ c) $\sin\gamma = -\frac{1}{2}$
b) $\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \sin\beta > 0$ $\quad$ d) $\cos\delta = 2$

12 Určete základní velikost úhlu v radiánech, víte-li, že platí:

a) $\sin x_1 = -\frac{1}{2} \wedge \cos x_1 > 0$ $\quad$ c) $\sin x_3 = -1$
b) $\cos x_2 = -\frac{1}{2} \wedge \sin x_2 < 0$ $\quad$ d) $\cos x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

13 S užitím kalkulačky nebo tabulek určete základní velikost úhlu ve stupních a minutách, víte-li, že platí:

a) $\sin\alpha = 0{,}400\,0 \wedge \cos\alpha > 0$ $\quad$ c) $\sin\gamma = -0{,}123\,4$
b) $\cos\beta = 0{,}400\,0 \wedge \sin\beta < 0$ $\quad$ d) $\cos\delta = 0{,}567\,8$

14 S užitím kalkulačky nebo tabulek určete základní velikost úhlu v radiánech s přesností na dvě desetinná místa, víte-li, že platí:

a) $\sin x_1 = 0{,}700\,0 \wedge \cos x_1 < 0$ $\quad$ c) $\sin x_3 = -0{,}876\,5$
b) $\cos x_2 = -0{,}700\,0 \wedge \sin x_2 < 0$ $\quad$ d) $\cos x_4 = 0{,}432\,1$

6.4 Grafy goniometrických funkcí $y = \sin x$, $y = \cos x$

15 Načrtněte grafy funkcí f_1 až f_9. Určete periodu, vypočítejte průsečíky grafu funkce s osou x i s osou y, určete obor funkčních hodnot.

$f_1\colon y = \sin x$ $\quad f_4\colon y = 2\sin x$ $\quad f_7\colon y = \sin 2x$
$f_2\colon y = \sin x + 2$ $\quad f_5\colon y = -\sin x + 2$ $\quad f_8\colon y = \sin(-2x)$
$f_3\colon y = \sin(x+2)$ $\quad f_6\colon y = -2\sin(-x)$ $\quad f_9\colon y = \sin\frac{1}{2}x$

16 Načrtněte grafy funkcí g_1 až g_9. Určete periodu, vypočítejte průsečíky grafu funkce s osou x i s osou y, určete obor funkčních hodnot.

$g_1\colon y = \cos x$ $\quad g_4\colon y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad g_7\colon y = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$
$g_2\colon y = \cos x - \frac{\pi}{4}$ $\quad g_5\colon y = \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad g_8\colon y = -\frac{1}{2}\cos 4x$
$g_3\colon y = \frac{\pi}{4} - \cos x$ $\quad g_6\colon y = -\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ $\quad g_9\colon y = \cos\frac{\pi}{4}x$

17 Načrtněte grafy funkcí h_1 až h_6. Určete periodu, vypočítejte průsečíky grafu funkce s osou x i s osou y, určete obor funkčních hodnot.

$h_1\colon y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad h_3\colon y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right)$ $\quad h_5\colon y = \sin 2\pi x$
$h_2\colon y = 3\cos 2x - \frac{\pi}{3}$ $\quad h_4\colon y = \sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad h_6\colon y = \sin(2\pi + x)$

18 Načrtněte grafy funkcí f_1 až f_4, g_1 až g_4 a podle obrázků rozhodněte, které dvojice funkcí se sobě rovnají.

$f_1(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad g_1(x) = \sin x$
$f_2(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad g_2(x) = \cos x$
$f_3(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad g_3(x) = -\sin x$
$f_4(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad g_4(x) = -\cos x$

19 Graficky ověřte platnost následujících rovností:

a) $\sin(x + \pi) = -\sin x$ c) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = \sin x$

b) $\sin(2\pi - x) = -\sin x$ d) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\cos x$

20 V intervalu $\langle 0; 2\pi\rangle$ načrtněte grafy funkcí:

a) $y = \sin^2 x$ c) $y = \sin x + \cos x$ e) $y = \sin^{-1} x$

b) $y = \cos^2 x$ d) $y = \sin x - \cos x$ f) $y = \cos^{-1} x$

21 Pomocí grafu vhodné funkce nebo pomocí jednotkové kružnice rozhodněte, které z daných dvou čísel je větší.

a) $A_1 = \sin 170°$, $A_2 = \sin 175°$ c) $C_1 = \sin 2$, $C_2 = \sin 3$ e) $E_1 = \cos 6$, $E_2 = \sin 6$

b) $B_1 = \cos 20°$, $B_2 = \cos 290°$ d) $D_1 = \cos 50°$, $D_2 = \sin 50°$ f) $F_1 = \sin(-1)$, $F_2 = -\cos(-1)$

6.5 Hodnoty goniometrických funkcí $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$

22 Vypočítejte (bez použití kalkulačky):

a) $\operatorname{tg} \frac{7}{6}\pi$, $\operatorname{tg} 4\pi$, $\operatorname{tg} \frac{5}{4}\pi$ b) $\operatorname{cotg} \frac{7}{4}\pi$, $\operatorname{cotg} \frac{2}{3}\pi$, $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2}$ c) $\operatorname{tg} 135°$, $\operatorname{tg}(-60°)$, $\operatorname{tg} 90°$ d) $\operatorname{cotg} 210°$, $\operatorname{cotg}(-300°)$, $\operatorname{cotg} 270°$

23 S užitím kalkulačky nebo tabulek vypočítejte s přesností na 4 desetinná místa:

a) $\operatorname{tg} 58°28'$, $\operatorname{tg} 145°18'$ b) $\operatorname{cotg} 20°32'$, $\operatorname{cotg} 92°47'$ c) $\operatorname{tg} 2$, $\operatorname{tg} 0{,}03$ d) $\operatorname{cotg} 0{,}25$, $\operatorname{cotg} 7$

24 Určete základní velikost úhlu v radiánech, víte-li, že platí:

a) $\operatorname{tg} x_1 = \sqrt{3} \wedge \sin x_1 > 0$ c) $\operatorname{tg} x_3 = 0$

b) $\operatorname{cotg} x_2 = 1 \wedge \cos x_2 < 0$ d) $\operatorname{cotg} x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

25 S užitím kalkulačky nebo tabulek určete základní velikost úhlu ve stupních a minutách, víte-li, že platí:

$\operatorname{tg} \alpha = 1{,}4$ $\operatorname{tg} \gamma = -0{,}2$ $\operatorname{cotg} \varepsilon = 2$ $\operatorname{cotg} \psi = -3$

$\operatorname{tg} \beta = 10$ $\operatorname{tg} \delta = -10$ $\operatorname{cotg} \varphi = 10^6$ $\operatorname{cotg} \omega = -10^{-3}$

26 S užitím kalkulačky nebo tabulek určete základní velikost úhlu v radiánech s přesností na dvě desetinná místa, víte-li, že platí:

$\operatorname{tg} x_1 = 2$ $\operatorname{tg} x_3 = 0{,}15$ $\operatorname{cotg} x_5 = -0{,}01$ $\operatorname{cotg} x_7 = 1{,}55$

$\operatorname{tg} x_2 = 20$ $\operatorname{tg} x_4 = -0{,}003$ $\operatorname{cotg} x_6 = -10^3$ $\operatorname{cotg} x_8 = -0{,}2$

6.6 Grafy goniometrických funkcí $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$

27 Načrtněte grafy funkcí f_1 až f_9. Určete definiční obor, periodu, vypočítejte průsečíky s osou x i s osou y, určete obor funkčních hodnot.

f_1: $y = \operatorname{tg} x$ f_4: $y = 2\operatorname{tg} x$ f_7: $y = \operatorname{tg} 2x$

f_2: $y = \operatorname{tg} x + \frac{\pi}{6}$ f_5: $y = -\operatorname{tg} x + 2$ f_8: $y = \operatorname{tg}(-2x)$

f_3: $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ f_6: $y = 2 - \operatorname{tg}(-x)$ f_9: $y = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$

28 Načrtněte grafy funkcí g_1 až g_9. Určete definiční obor, periodu, vypočítejte průsečíky s osou x i s osou y, určete obor funkčních hodnot.

g_1: $y = \operatorname{cotg} x$ g_4: $y = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ g_7: $y = \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

g_2: $y = \operatorname{cotg} x - \frac{\pi}{3}$ g_5: $y = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ g_8: $y = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg} 2x$

g_3: $y = \frac{\pi}{3} - \operatorname{cotg} x$ g_6: $y = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ g_9: $y = \operatorname{cotg} x\pi$

29 Načrtněte grafy funkcí f_1 až f_4, g_1 až g_4 a podle obrázků rozhodněte, které dvojice funkcí se sobě rovnají.

$f_1(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $g_1(x) = \operatorname{tg} x$

$f_2(x) = \operatorname{cotg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $g_2(x) = \operatorname{cotg} x$

$f_3(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $g_3(x) = -\operatorname{tg} x$

$f_4(x) = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $g_4(x) = -\operatorname{cotg} x$

30 V intervalu $\langle 0; 2\pi\rangle$ načrtněte grafy funkcí:

a) $y = \operatorname{tg}^2 x$ c) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$ e) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$

b) $y = \operatorname{cotg}^2 x$ d) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ f) $y = \operatorname{cotg}^{-1} x$

31 Pomocí grafu vhodné funkce nebo pomocí jednotkové kružnice rozhodněte, které z daných dvou čísel je větší.

a) $A_1 = \operatorname{tg} \frac{13}{3}\pi$, $A_2 = \operatorname{tg} \frac{14}{3}\pi$ c) $C_1 = \operatorname{cotg} 3$, $C_2 = \operatorname{tg} 3$ e) $E_1 = \operatorname{tg}(-1)$, $E_2 = \operatorname{cotg}(-1)$

b) $B_1 = \operatorname{tg}(-150°)$, $B_2 = \operatorname{tg}(-250°)$ d) $D_1 = \operatorname{cotg} 170°$, $D_2 = \operatorname{cotg} 250°$ f) $F_1 = \operatorname{cotg} 0{,}1\pi$, $F_2 = -\operatorname{cotg} 0{,}2\pi$

6.7 Grafy goniometrických funkcí s absolutními hodnotami

32 Načrtněte grafy funkcí:

f_1: $y = |\sin x|$ f_4: $y = \sin|x|$ f_7: $y = 1 - |\sin x|$

f_2: $y = |\sin x| - \frac{1}{2}$ f_5: $y = \sin\left|x + \frac{\pi}{6}\right|$ f_8: $y = |2\sin x - 1|$

f_3: $y = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$ f_6: $y = \sin\left(|x| + \frac{\pi}{6}\right)$ f_9: $y = 2|\sin x| - 1$

33 Načrtněte grafy funkcí:

g_1: $y = |\cos x|$ g_4: $y = |1 - 2\cos x|$ g_7: $y = |\cos x| - \frac{\pi}{4}$

g_2: $y = |\cos x| + 1$ g_5: $y = \big||\cos x| - 0{,}5\big|$ g_8: $y = \left|\cos x - \frac{\pi}{4}\right|$

g_3: $y = |1 - \cos x|$ g_6: $y = \cos|x|$ g_9: $y = \cos\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$

34 Načrtněte grafy funkcí:

f_1: $y = |\operatorname{tg} x|$ f_4: $y = \operatorname{tg}|x|$ f_7: $y = |\operatorname{tg} x| + \frac{\pi}{4}$

f_2: $y = |\operatorname{tg} x - 1|$ f_5: $y = \operatorname{tg}|x| - \frac{\pi}{4}$ f_8: $y = \left|\operatorname{tg} x + \frac{\pi}{4}\right|$

f_3: $y = |\operatorname{tg} x| - 1$ f_6: $y = \operatorname{tg}\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$ f_9: $y = \operatorname{tg}\left|x + \frac{\pi}{4}\right|$

35 Načrtněte grafy funkcí:

g_1: $y = |\operatorname{cotg} x|$ g_4: $y = \operatorname{cotg}|x|$ g_7: $y = \left|\operatorname{cotg} x - \frac{\pi}{4}\right|$

g_2: $y = |\operatorname{cotg} x| + \frac{\pi}{3}$ g_5: $y = |1 - \operatorname{cotg} x|$ g_8: $y = \left|\operatorname{cotg}\left(|x| - \frac{\pi}{4}\right)\right|$

g_3: $y = \left|\operatorname{cotg} x + \frac{\pi}{3}\right|$ g_6: $y = 1 - |\operatorname{cotg} x|$ g_9: $y = \operatorname{cotg}\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$

36 Načrtněte grafy funkcí:

$f_1\colon y = \sin x + |\sin x|$ $\quad f_3\colon y = 2|\sin x|\cos x$ $\quad f_5\colon y = \operatorname{tg} x\,|\cos x|$

$f_2\colon y = \cos x - |\cos x|$ $\quad f_4\colon y = -2|\cos x \sin x|$ $\quad f_6\colon y = \operatorname{cotg} x\,|\sin x|$

37 Načrtněte grafy funkcí:

$$g_1\colon y = \frac{|\sin x|}{\sin x} \qquad g_3\colon y = \frac{\sin x + |\sin x|}{\sin x - |\sin x|} \qquad g_5\colon y = \frac{\sin x + |\sin x|}{\cos x + |\cos x|}$$

$$g_2\colon y = \frac{\cos x}{|\cos x|} \qquad g_4\colon y = \frac{\cos x - |\cos x|}{\cos x + |\cos x|} \qquad g_6\colon y = \frac{\sin x - |\sin x|}{\cos x - |\cos x|}$$

38 Načrtněte grafy funkcí:

$h_1\colon y = \operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x|$ $\quad h_3\colon y = |\operatorname{tg} x| \cdot |\operatorname{cotg} x|$ $\quad h_5\colon y = |\operatorname{tg} x| \cdot \operatorname{tg}^{-1} x$

$h_2\colon y = \operatorname{cotg} x - |\operatorname{cotg} x|$ $\quad h_4\colon y = \operatorname{tg} x \cdot |\operatorname{cotg} x|$ $\quad h_6\colon y = |\operatorname{cotg} x|^{-1} \cdot \operatorname{cotg} x$

6.8 Cyklometrické funkce

39 Načrtněte graf funkce $y = \sin x$ v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$. Potom nakreslete graf funkce inverzní $y = \arcsin x$. Určete její definiční obor, obor funkčních hodnot.

40 Načrtněte graf funkce $y = \cos x$ v intervalu $\langle 0; \pi \rangle$. Potom nakreslete graf funkce inverzní $y = \arccos x$. Určete její definiční obor, obor funkčních hodnot.

41 Načrtněte graf funkce $y = \operatorname{tg} x$ v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Potom nakreslete graf funkce inverzní $y = \operatorname{arctg} x$. Určete její definiční obor, obor funkčních hodnot.

42 Načrtněte graf funkce $y = \operatorname{cotg} x$ v intervalu $(0; \pi)$. Potom nakreslete graf funkce inverzní $y = \operatorname{arccotg} x$. Určete její definiční obor, obor funkčních hodnot.

43 Vypočítejte:

$\arcsin \frac{1}{2}$ $\quad \arccos 1$ $\quad \operatorname{arctg} \sqrt{3}$ $\quad \operatorname{arccotg}(-1)$

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad \arccos 0$ $\quad \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ $\quad \operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{3}}{3}$

44 Vypočítejte pomocí kalkulačky, výsledek uveďte ve stupních a minutách i v radiánech.

$\arcsin 0{,}42$ $\quad \arccos(-0{,}9)$ $\quad \operatorname{arctg} 35$ $\quad \operatorname{arccotg} 0{,}8$

$\arcsin 2$ $\quad \arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$ $\quad \operatorname{arctg}(-5)$ $\quad \operatorname{arccotg} 6$

Goniometrické vzorce

6.9 Základní vztahy mezi funkcemi

45 Aniž určíte hodnotu x, určete hodnoty zbývajících goniometrických funkcí v bodě x, víte-li, že platí:

a) $\cos x = \frac{4}{5} \wedge x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\sin x = -\frac{12}{13} \wedge x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

c) $\operatorname{tg} x = \frac{15}{8} \wedge x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

d) $\operatorname{cotg} x = -\frac{7}{24} \wedge x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

46 Určete definiční obor daného výrazu a potom ho zjednodušte.

a) $(1 + \cos x)(1 - \cos x)$

b) $\sin x \cdot \cos^2 x + \sin^3 x$

c) $(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin x \cdot \cos x$

d) $(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2$

e) $\sin^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x$

f) $\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x$

g) $\dfrac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x}$

h) $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} + \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

i) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} + \dfrac{1 + \cos x}{\sin x}$

j) $\sin^2 x \cdot \operatorname{cotg}^2 x + \sin^2 x - 1$

k) $\cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x$

l) $\cos x \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)$

m) $(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$

n) $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin^2 x$

o) $\operatorname{cotg}^2 x - \cos^2 x - \operatorname{cotg}^2 x \cdot \cos^2 x$

p) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

q) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg} x} - \dfrac{\operatorname{cotg} x}{1 + \operatorname{cotg} x}$

r) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{cotg} x} - \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$

47 Určete, pro která $x \in \mathrm{R}$ jsou definovány uvedené rovnosti, a pak je dokažte.

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

b) $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x \cdot \cos x} = 2$

c) $\dfrac{\cos(-x)}{1 - \sin x} = \dfrac{1 - \sin(-x)}{\cos x}$

d) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

e) $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$

f) $\dfrac{1}{\cos x} - \sin x \cdot \operatorname{tg} x = \cos x$

g) $\sin x + \cos x = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{cotg} x}$

h) $\left(\dfrac{1}{\sin x} + \sin x\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\cos x} + \cos x\right)^2 = 5 + \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$

i) $\sin x \cdot \operatorname{cotg} x \cdot \cos x = 1 - \sin^2 x$

j) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$

k) $\dfrac{2}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tg} x)^2 + (1 - \operatorname{tg} x)^2$

l) $1 - 2\sin^2 x = \dfrac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{\operatorname{cotg}^2 x + 1}$

m) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} + \dfrac{1}{\operatorname{cotg}^2 x + 1} = 1$

n) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = \dfrac{1 - 2\cos^2 x}{\sin x \cos x}$

o) $\left(\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{cotg} x}\right)^2 = \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$

48 Určete, pro která $x \in \mathrm{R}$ jsou definovány uvedené rovnosti, a pak je dokažte.

a) $\dfrac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x} = \dfrac{1 + \sin x + \cos x}{\cos x}$

b) $\dfrac{1 + \cos x + \sin x}{1 + \cos x} = \dfrac{1 + \sin x - \cos x}{\sin x}$

6.10 Vzorce pro dvojnásobný úhel

49 Aniž určíte hodnotu x, určete hodnoty goniometrických funkcí $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$, $\sin 4x$ a $\cos 4x$, víte-li, že platí:

a) $\sin x = \frac{3}{4},\ x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

b) $\cos x = -\frac{3}{5},\ x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

c) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2},\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

d) $\operatorname{cotg} x = -\frac{\sqrt{2}}{5},\ x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

50 Aniž určíte hodnotu x, určete hodnoty goniometrických funkcí $\cos x$ a $\sin x$, víte-li, že platí:

a) $\cos 2x = \frac{3}{4},\ 2x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\sin 2x = -\frac{1}{3},\ 2x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

51 Vypočítejte:

a) $2\sin 22°30' \cdot \cos 22°30'$
b) $\sin 15° \cdot \cos 15°$
c) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$
d) $\cos^4 75° - \sin^4 75°$

52 Určete, pro která $x \in \mathrm{R}$ mají dané rovnosti smysl, a dokažte jejich správnost.

a) $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$
b) $\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x$
c) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$
d) $\dfrac{1+\cos 2x}{\sin 2x} = \operatorname{cotg} x$
e) $\dfrac{\cos^2 x - \cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$
f) $\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x - \cos^2 x} = -2\operatorname{cotg} x$
g) $\dfrac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$
h) $\dfrac{\sin 2x - \cos x}{1 - \cos 2x - \sin x} = \operatorname{cotg} x$
i) $\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x - 2\sin^2 x} = \operatorname{cotg} x + 1$
j) $\dfrac{\sin 2x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \cos 2x} = 2\operatorname{cotg} x + 1$
k) $\dfrac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} = \operatorname{tg} x$
l) $\dfrac{\sin 2x + \cos 2x - 1}{\sin 2x - \cos 2x - 1} = -\operatorname{tg} x$
m) $4\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^2 2x = 1$
n) $(\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x)^{-1} = \frac{1}{2}\sin 2x$
o) $\operatorname{cotg}^{-1} x + \operatorname{tg}^{-1} x = 2\sin^{-1} 2x$
p) $\dfrac{\cos 2x}{1 - \operatorname{tg} x} = \cos^2 x + \dfrac{\sin 2x}{2}$
q) $\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{cotg} x - 1} = \dfrac{\sin 2x}{2} + \sin^2 x$
r) $\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{4}\sin^2 2x$
s) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos 2x$
t) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin 2x$
u) $\dfrac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$
v) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = \dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$
w) $\dfrac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} + \dfrac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = 2\operatorname{cotg} x$
z) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} + \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = 2\operatorname{tg} x$

53 Určete, pro která $x \in \mathrm{R}$ mají dané výrazy smysl, a pak výrazy zjednodušte.

a) $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x$
b) $\cos 2x + 2\sin^2 x$
c) $\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x - \cos^2 x}$
d) $\dfrac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$
e) $\dfrac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos 2x}$
f) $\dfrac{2\sin x + \sin 2x}{2\sin x - \sin 2x}$
g) $\cos^2 2x + \sin^2 2x$
h) $\cos^4 2x - \sin^4 2x$
i) $\dfrac{\cos 2x + \sin^2 x}{1 + \cos 2x}$
j) $\dfrac{2\sin^2 x - \sin 2x}{2\cos^2 x - \sin 2x}$
k) $\dfrac{1 + \sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}$
l) $\dfrac{2\cos x - \cos 2x - 1}{2\cos x + \cos 2x + 1}$

6.11 Součtové vzorce

54 Aniž určíte hodnotu x, vypočítejte $\sin(x+y) \cdot \cos(x-y)$, víte-li, že platí:

a) $\cos x = \frac{5}{7},\ x \in (0; \frac{\pi}{2}) \wedge \sin y = \frac{1}{5},\ y \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$
b) $\operatorname{tg} x = 3,\ x \in (\pi; \frac{3\pi}{2}) \wedge \operatorname{cotg} y = -2,\ y \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$

55 Dokažte:

a) $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
b) $\cos 105° = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
c) $\cos \dfrac{7}{12}\pi = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
d) $\sin \dfrac{7}{12}\pi = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
e) $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$
f) $\operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3}$

56 Dokažte:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
c) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$
d) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$
e) $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
f) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$
g) $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
h) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

57 Dokažte:

a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos x$
b) $\sin(x + \pi) + \sin(x - \pi) = -2\sin x$
c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x$
d) $\cos^2 x - \cos^2 y = \sin(x+y) \cdot \sin(y-x)$
e) $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y) \cdot \sin(x-y)$
f) $\sin x - \sin(x + 60°) + \sin(x + 120°) = 0$
g) $\cos x + \cos(x + 120°) + \cos(x + 240°) = 0$
h) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sin x$
i) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7}{6}\pi + x\right) = -\cos x$
j) $\cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(x + \frac{5}{3}\pi\right) = 0$
k) $\dfrac{\sin x}{\sin y} + \dfrac{\cos x}{\cos y} = \dfrac{2\sin(x+y)}{\sin 2y}$
l) $\dfrac{\cos x}{\sin y} - \dfrac{\sin x}{\cos y} = \dfrac{2\cos(x+y)}{\sin 2y}$

58 Vypočítejte:

a) $\sin 44° \cdot \cos 1° + \cos 44° \cdot \sin 1°$
b) $\cos \frac{9}{13}\pi \cdot \cos \frac{4}{13}\pi - \sin \frac{9}{13}\pi \cdot \sin \frac{4}{13}\pi$

59 Dokažte pomocí součtových vzorců a vzorců pro dvojnásobný úhel:

a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
b) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

6.12 Vzorce pro součet a rozdíl goniometrických funkcí

60 Následující úlohy zjednodušte dvěma způsoby. Jednak použijte součtové vzorce, jednak použijte vzorce pro součet a rozdíl goniometrických funkcí.

a) $\cos(\alpha + 30°) - \cos(\alpha - 30°)$
b) $\sin(\beta + 30°) - \sin(\beta - 30°)$
c) $\cos(\gamma + 135°) + \cos(\gamma - 135°)$
d) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$
e) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
f) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

61 Dokažte:

a) $\sin 75° + \sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{6}$
b) $\sin 75° - \sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

62 Dokažte:

a) $\dfrac{\cos 80° + \cos 20°}{\sin 110° + \sin 10°} = 1$
b) $\dfrac{\sin 5° - \sin 85°}{\cos 130° - \cos 50°} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

63 Vypočítejte:

a) $\dfrac{\sin 65° + \sin 25°}{\cos 80° + \cos 40°}$ b) $\dfrac{\cos 50° - \cos 70°}{\sin 70° - \sin 50°}$

64 Vypočítejte:

a) $\dfrac{\sin(x + 15°) + \sin(x - 15°)}{\cos(x - 15°) + \cos(x + 15°)}$ b) $\dfrac{\sin(x + \frac{5}{3}\pi) - \sin(x + \frac{1}{3}\pi)}{\cos(x - \frac{2}{3}\pi) - \cos(x - \frac{4}{3}\pi)}$

6.13 Vzorce pro poloviční úhel

65 Aniž určíte hodnotu x, vypočítejte $\sin \frac{x}{2}$ a $\cos \frac{x}{2}$, víte-li, že platí:

a) $\sin x = -0{,}8 \wedge x \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$ b) $\cos x = \frac{12}{13} \wedge x \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$

66 Dokažte:

a) $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ c) $\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

b) $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ d) $\cos 22°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

67 Dokažte a určete podmínky pro x:

a) $\sin x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ b) $\cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

68 Vyjádřete $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ pomocí $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Určete podmínky pro x.

69 Dokažte:

a) $1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} = \cos x$ c) $1 + \sin x = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2$

b) $2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos x$ d) $1 - \sin x = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2$

70 Dokažte:

a) $1 + \sin x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

b) $1 - \sin x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

6.14 Grafy funkcí — užití vzorců

71 Nakreslete grafy funkcí:

a) $y = \sin x \cdot \cos x$ b) $y = \sin^2 x - \cos^2 x$ c) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

72 Jsou dány funkce $f_1(x)$, $f_2(x)$. Nakreslete jejich grafy, potom nakreslete graf funkce $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Pro funkci $g(x)$ určete obor funkčních hodnot a periodu.

a) $f_1(x) = \frac{1}{2}\sin x$, $f_2(x) = -2\sin x$ b) $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ c) $f_1(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, $f_2(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

6.15 Vztahy pro úhly v trojúhelníku

73 Označíme-li α, β, γ vnitřní úhly v libovolném trojúhelníku ABC, potom platí pro jejich velikosti následující rovnosti. Dokažte jejich správnost.

a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

b) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

c) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

d) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

e) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$

6.16 Sinová a kosinová věta

V následujících úlohách počítejte délky stran s přesností na milimetry a velikosti úhlů s přesností na minuty.

74 Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a) $a = 10\,\text{cm}$, $\alpha = 62°$, $\beta = 34°$ c) $c = 8{,}4\,\text{cm}$, $\alpha = 41°05'$, $\gamma = 26°55'$

b) $b = 5\,\text{cm}$, $\alpha = 110°$, $\beta = 28°$ d) $a = 5{,}66\,\text{cm}$, $\beta = 56°32'$, $\gamma = 44°47'$

75 Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a) $a = 6\,\text{cm}$, $c = 7\,\text{cm}$, $\gamma = 40°$ c) $b = 8\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$, $\gamma = 26°55'$

b) $b = 6\,\text{cm}$, $c = 9\,\text{cm}$, $\beta = 75°$ d) $a = 6\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, $\beta = 30°$

76 Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a) $a = 2\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, $c = 4\,\text{cm}$ c) $a = 5\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$, $\gamma = 29°14'$

b) $a = 3\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, $c = 4\,\text{cm}$ d) $a = 7\,\text{cm}$, $c = 12\,\text{cm}$, $\beta = 124°$

77 Určete délky všech stran trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a) $t_a = 6\,\text{cm}$, $t_b = 9\,\text{cm}$, $c = 8\,\text{cm}$ d) $a = 6\,\text{cm}$, $t_a = 9\,\text{cm}$, $t_b = 4\,\text{cm}$

b) $a = 6\,\text{cm}$, $t_b = 5\,\text{cm}$, $\gamma = 45°$ e) $a = 10\,\text{cm}$, $t_a = 8\,\text{cm}$, $v_b = 6\,\text{cm}$

c) $c = 6\,\text{cm}$, $t_a = 5\,\text{cm}$, $a = 8\,\text{cm}$ f) $t_a = 6\,\text{cm}$, $t_b = 4\,\text{cm}$, $t_c = 8\,\text{cm}$

78 Vypočítejte velikost nejmenšího úhlu v trojúhelníku ABC, znáte-li délky stran $a = 7\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, $c = 9\,\text{cm}$.

79 V trojúhelníku ABC známe délku strany $b = 8\,\text{cm}$, velikost úhlu $\alpha = 30°$. Proveďte diskusi o počtu řešení a vždy vypočítejte velikost úhlu β, jestliže délka strany a postupně nabývá hodnot z množiny $a \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Údaje jsou v centimetrech.

80 Vypočítejte velikosti úhlů v trojúhelníku ABC, znáte-li délky stran $c = 10\,\text{cm}$, $b = 14\,\text{cm}$ a poměr velikostí dvou úhlů $\beta : \gamma = 2 : 1$.

81 Vypočítejte velikosti úhlů v trojúhelníku ABC, víte-li, že $b : a = \sqrt{3} : 1$, $\beta = 2\alpha$.

82 V trojúhelníku ABC znáte poměr délek stran $a : b : c = 2 : 4 : 5$. Vypočítejte velikosti úhlů trojúhelníku ABC.

83 V trojúhelníku ABC znáte velikosti úhlů $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 75°$. Vypočítejte, v jakém poměru jsou délky stran.

84 V trojúhelníku ABC znáte: $a = 4\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $\alpha = 45°$

a) Vypočítejte délku strany c pomocí kosinové věty. (Řešte kvadratickou rovnici, počítejte s přesností na jedno desetinné místo, tj. s přesností na milimetry.)

b) Výpočet ověřte konstrukcí. Narýsujte všechny trojúhelníky podle daných údajů, změřte délku strany c a porovnejte s výpočtem a).

85 Užitím kosinové věty dokažte, že všechny úhly v rovnostranném trojúhelníku mají velikost 60°.

86 Užitím kosinové věty dokažte, že v rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB platí:

a) $c = 2a\cos\alpha$ b) $c^2 = 2a^2(1-\cos\gamma)$

87 Určete délky všech stran, délky úhlopříček, výšky a velikosti všech vnitřních úhlů rovnoběžníku $ABCD$, je-li dáno:

a) $|AB| = 6{,}2$ cm, $|BC| = 5{,}4$ cm, $|AC| = 4{,}8$ cm
b) $|AB| = 10{,}8$ cm, $v_a = 4{,}2$ cm, $\alpha = 27°11'$

88 V lichoběžníku $ABCD$ znáte délky stran $|AB| = 30$ cm, $|BC| = 15$ cm, $|CD| = 20$ cm, $|AD| = 12$ cm. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů.

89 Vypočítejte délku strany KN a velikost úhlu $|\sphericalangle NKL|$ ve čtyřúhelníku $KLMN$, je-li dáno: $|KL| = 10$ cm, $|LM| = 12$ cm, $|MN| = 6$ cm, $|\sphericalangle KLM| = 65°$, $|\sphericalangle KNM| = 98°$.

90 Vzdálenost dvou bodů A, B kterou nelze přímo změřit určíme následovně: zvolíme libovolné dva body K, L ze kterých je na body A, B vidět. (Body A, B, K, L leží v jedné rovině.) Změříme vzdálenost $|KL| = 50$ m a následující úhly: $|\sphericalangle BLK| = 54°$, $|\sphericalangle ALK| = 124°$, $|\sphericalangle AKL| = 28°$, $|\sphericalangle BKL| = 76°$. Vypočítejte vzdálenost $|AB|$.

91 Vypočítejte šířku řeky, jestliže na jednom břehu byla vyznačena úsečka KL délky 40 m a dále byly změřeny úhly $|\sphericalangle LKS| = 76°24'$ a $|\sphericalangle KLS| = 43°52'$, kde S je bod na druhém břehu řeky.

92 Na těleso působí v jednom bodě dvě síly $F_1 = 40$ N a $F_2 = 70$ N, které svírají úhel 50°. Určete velikost výslednice F a úhel, který svírají síly F a F_1.

93 Síla $F = 200$ N se rozkládá na dvě složky $F_1 = 150$ N a $F_2 = 100$ N. Vypočítejte úhel, který svírají síly F_1 a F_2.

94 Síla $F = 200$ N se rozkládá na dvě složky, které s ní svírají úhly o velikostech $\alpha = 27°$, $\beta = 74°$. Vypočítejte velikosti obou složek.

95 Tři síly $F_1 = 10$ N, $F_2 = 20$ N, $F_3 = 27$ N působí na těleso v jednom bodě v téže rovině a jsou v rovnováze. Vypočítejte úhly, které svírají jednotlivé síly navzájem.

6.17 Vzorce pro obsah trojúhelníku, čtyřúhelníku

96 V trojúhelníku ABC znáte: $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $v_a = 2$ cm. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC a výšku v_b.

97 V trojúhelníku ABC znáte: $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $\gamma = 60°$. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC a výšky v_a, v_b, v_c.

98 Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, jestliže délky jeho stran jsou 5 cm, 6 cm, 9 cm. Potom vypočítejte obsah trojúhelníku $S_{AB}S_{BC}S_{AC}$, kde S_{AB}, S_{BC}, S_{AC} jsou postupně středy stran AB, BC, AC.

99 V rovnoběžníku $ABCD$ znáte: $|AB| = 8$ cm, $|AD| = 2$ cm, $|\sphericalangle DAB| = 30°$. Vypočítejte obsah rovnoběžníku $ABCD$ a výšky v_a, v_b. Potom rovnoběžník narýsujte a měřením ověřte správnost výpočtu obou výšek.

100 Vypočítejte obsah lichoběžníku $ABCD$, znáte-li délky stran $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|CD| = 2$ cm, $|AD| = 6$ cm.

101 Čtverec $ABCD$ ($a = 4$ cm) otočte kolem vrcholu A o úhel 45°. Dostanete tak čtverec $A_1B_1C_1D_1$. Vypočítejte obsah čtyřúhelníku, který je průnikem čtverců $ABCD$ a $A_1B_1C_1D_1$.

6.18 Vzorce pro poloměry kružnic trojúhelníku opsané a vepsané

102 Vypočítejte poloměr kružnice trojúhelníku ABC opsané i poloměr kružnice trojúhelníku ABC vepsané, znáte-li: $b = 4$ cm, $c = 6$ cm, $\alpha = 45°$.

103 Vypočítejte poloměr kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku ABC, je-li délka přepony $c = 5$ cm a délka odvěsny $a = 3$ cm.

104 Vypočítejte poloměr kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC, je-li pravý úhel u vrcholu C, $c = 10$ cm, $b = 8$ cm.

105 Vypočítejte poloměry kružnic připsaných trojúhelníku ABC znáte-li: $a = 4$ cm, $b = 8$ cm, $\gamma = 100°$

6.19 Pravidelné mnohoúhelníky

106 Vypočítejte délku strany a, obvod o a obsah S pravidelného pětiúhelníku, který je vepsán do kružnice o poloměru $r = 6$ cm.

107 Vypočítejte délku strany a, obvod o a obsah S pravidelného pětiúhelníku, kterému je vepsána kružnice o poloměru $r = 6$ cm.

108 Strana pravidelného devítiúhelníku je $a = 5$ cm. Vypočítejte poloměr kružnice, kterou lze danému devítiúhelníku a) opsat, b) vepsat.

109 a) V pravidelném dvanáctiúhelníku $A_1A_2A_3\ldots A_{12}$ ($a = 6$ cm) označte postupně S_1, S_2, S_3, …, S_{12} středy stran A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{11}A_{12}$, $A_{12}A_1$. Vypočítejte poměr obsahů dvanáctiúhelníků $A_1A_2A_3\ldots A_{12}$ a $S_1S_2S_3\ldots S_{12}$.

b) Úlohu a) řešte obecně, tj. $A_1A_2A_3\ldots A_n$ je libovolný pravidelný n-úhelník o straně a.

c) Do kružnice o poloměru R vepište pravidelný n-úhelník a zároveň této kružnici opište pravidelný n-úhelník. Vypočítejte poměr obsahů n-úhelníku vepsaného a opsaného dané kružnici.

110 Do kružnice o poloměru R vepište pravidelný n-úhelník, $n \in \{3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$. Dokažte správnost vzorce pro obsah n-úhelníku, je-li vepsán

a) rovnostranný trojúhelník, potom jeho obsah je $S = \dfrac{3R^2\cdot\sqrt{3}}{4}$,

b) čtverec, potom jeho obsah je $S = 2R^2$,

c) pravidelný šestiúhelník, potom jeho obsah je $S = \dfrac{3R^2\cdot\sqrt{3}}{2}$,

d) pravidelný osmiúhelník, potom jeho obsah je $S = 2R^2\cdot\sqrt{2}$,

e) pravidelný dvanáctiúhelník, potom jeho obsah je $S = 3R^2$,

f) pravidelný šestnáctiúhelník, potom jeho obsah je $S = 4R^2\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}$,

g) pravidelný dvacetičtyřúhelník, potom jeho obsah je $S = 6R^2\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

7 Goniometrické rovnice a nerovnice

7.1 Goniometrické rovnice

1 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sin x = \dfrac{1}{2}$ c) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

b) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\cos x = -1$ f) $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$

2 Řešení následujících rovnic vyjádřete ve stupňové míře:

a) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos x = \dfrac{1}{2}$ c) $\operatorname{tg} x = 1$

3 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $2 \cdot \dfrac{\cos x + 1}{3} - \dfrac{4\cos x - 1}{2} = 1 - \cos x$

b) $\dfrac{5\sin x + 4}{10\sin x + 4} = 1$

c) $\sin x = \sin \pi - \cos \dfrac{\pi}{3}$

d) $\cos x - \cos \dfrac{5}{2}\pi = \sin \dfrac{5}{2}\pi + \cos \dfrac{5}{2}\pi$

4 Dané rovnice řešte v intervalu $\langle 0; 360^\circ)$ s užitím kalkulačky nebo tabulek. (Výsledky zapište ve stupňové míře s přesností na minuty.)

a) $\cos x = 0{,}242\,5$ b) $\operatorname{tg} x = -35$ c) $4\operatorname{cotg} x = \pi$

5 Následující rovnice řešte v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ s užitím kalkulačky nebo tabulek. (Výsledky zapište v obloukové míře s přesností na dvě desetinná místa.)

a) $\sin x = 0{,}987\,6$ b) $\cos x = 2{,}500\,0$ c) $4\cos x + \dfrac{\pi}{4} = 0{,}800\,0$

6 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sin 3x = 1$

b) $\cos 10x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos \dfrac{5}{2}x = 0$

d) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\cos\left(3x + \dfrac{5}{6}\pi\right) = -\dfrac{1}{2}$

f) $\operatorname{tg}(4x - 3) = 1$

g) $\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

h) $\sin(1 - x) = 0$

i) $\sqrt{2}\cos(4\pi + 2x) = -1$

j) $\sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$

7 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
b) $4\sin^2 x - 2\sin x = \sqrt{3}(-1 + 2\sin x)$
c) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$
d) $2\cos^2 x - 3 = 3\sin x$
e) $2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\cos x - 4 = 0$
f) $\sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{3}\sin x - 2 = 0$
g) $12\sin^4 x + \sin^2 x - 1 = 0$
h) $8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3 = 0$
i) $\sin^4 x - \cos^4 x = -1$
j) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0$
k) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x - 2 = 0$
l) $\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{cotg}^2 x - 4 = 0$

8 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $4\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$
b) $2\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$
c) $\operatorname{tg}^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x = 2$
d) $(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2 - (\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)^2 = 4$

9 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $2\sin^2 5x + 3\cos 5x = 0$
b) $2\sin^2 \dfrac{x}{3} + 3\cos \dfrac{x}{3} = 0$
c) $2\cos^2 8x = 3 - 3\sin 8x$
d) $3\operatorname{tg}^4 3x + 1 = 4\operatorname{tg}^2 3x$

10 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $2\sin^2 x - \sin x = 0$
b) $4\cos^3 x = \cos x$
c) $3\cos^2 x = 2\sin x\cos x$
d) $\operatorname{tg} x = 2\sin x$
e) $4\cos^2 x = 3\operatorname{cotg}^2 x$
f) $3\operatorname{cotg}^3 x + 3\operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{cotg} x - 1 = 0$
g) $5\sin x + 4\cos x - 10\sin x\cos x = 2$
h) $3\cos x + 3 = 4\cos^3 x + 4\cos^2 x$
i) $2\sin x + \operatorname{tg} x + 2\cos x + 1 = 0$
j) $\sqrt{2}\cos x - \operatorname{cotg} x - \sqrt{2}\sin x + 1 = 0$

11 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sin x = \cos x$
b) $\cos x = -\sqrt{3}\sin x$
c) $\sin 10x = -\cos 10x$
d) $4\cos x = 3\sin x$

12 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sin^2 x - 6\cos^2 x + \sin x\cos x = 0$
b) $2\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x\cos x = 1$
c) $3\cos^2 x + \sin x\cos x + 2\sin^2 x = 2$
d) $4\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3$
e) $\sin x\cos x - \cos^2 x = -2$
f) $7\sin^2 x + 10\cos^2 x - 11\sin x\cos x = 5$

13 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sin x + \sin 2x = 0$
b) $\sin x - \sin 2x + 2\cos x - 1 = 0$
c) $\sin 2x\cos x + \sin^2 x = 1$
d) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$

14 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$
b) $(\sin x + \cos x)^2 = 1$
c) $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}$
d) $\sin^2 x\cos^2 x = 0{,}125$
e) $0{,}5\sin^2 2x = \sin^4 x + \cos^4 x$
f) $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{1}{4}\sin^2 2x$

15 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\cos 2x + \sin x\cos x = 1$
b) $\cos 2x + \sin x = 0$
c) $\sin x + \cos 2x = 1$
d) $1 = \cos 2x - \sin x$
e) $(1 + \cos 2x)\sin x = 4\cos^2 x$
f) $\cos 2x - 2 = \cos x$
g) $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos^2 2x$
h) $\sin^6 x - \cos^6 x = \cos 2x$

16 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\cos 2x - \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$
b) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$
c) $2\sin 2x - 2\cos 2x = 2$
d) $1 - \cos 2x = \sin 2x \cdot \sin x$

17 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $(\sin 2x + \cos 2x)^2 = 0{,}5$

b) $(\sin 2x - \cos 2x)^2 = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin 2x \cdot \cos 2x = 0{,}5$

d) $\dfrac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = (\cos x + \sin x)^2$

e) $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{cotg}\, x = 8 \cos 2x$

f) $\mathrm{tg}\, x \cdot \cos^2 x \cdot \cos 2x = -\dfrac{1}{8}$

g) $\mathrm{tg}\, x \cdot (1 - \sin 2x) = 1 - \cos 2x$

h) $\dfrac{1}{\cos^2 2x} - 2\,\mathrm{tg}\, 2x = 0$

18 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sin 4x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$

b) $\sin 4x + \sin 2x = 0$

c) $\sin 4x + 2 \sin^2 2x = 2$

d) $2 \sin^4 2x - \sin^2 2x \cdot \sin 4x = 2 \sin^2 2x - \sin 4x$

e) $1 + \cos 4x = \cos 2x$

f) $(1 + \cos 4x) \cdot \sin 2x = \cos 2x$

g) $\cos 4x - 3 \cos 2x - 3 \sin 2x = 0$

19 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sin 4x = \sin 2x$

b) $\cos 4x = \cos 2x$

c) $\cos 20x = \sin 10x$

d) $\sqrt{2} \sin 8x + 2 \sin 4x = 0$

e) $\sin 6x - 2 \cos 3x = 0$

f) $\mathrm{tg}\, 3x - 2 \sin 6x = 0$

20 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sqrt{3} \sin \dfrac{x}{2} + \sin x = 0$

b) $\sin \dfrac{x}{2} + \cos x = 1$

c) $\cos \dfrac{x}{2} + \sin x = 0$

d) $\cos \dfrac{x}{4} - \sin \dfrac{x}{2} = 0$

e) $\sin \dfrac{x}{8} + \cos \dfrac{x}{4} = 0$

f) $\sqrt{3} \sin \dfrac{x}{4} - \sin \dfrac{x}{2} = 0$

21 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sin 4x = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

b) $\sin (3x + 60^\circ) = \sin x$

c) $-\sin 2x = \sin 10x$

d) $\cos (x + 1) = \cos (6x + 2)$

e) $\sin 3x = \cos\left(0{,}5x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

f) $\sin \dfrac{3}{2}x + \sin \dfrac{x}{2} = 0$

g) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

h) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$

i) $\sin 5x - \sin x = \cos 3x$

j) $\cos 3x - \sin 3x = \cos 2x - \sin 2x$

22 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sin (x + 30^\circ) + \sin (x - 30^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin x + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos (x + 120^\circ) - \cos x = \sqrt{3}$

d) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \sin 2x$

e) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin x - \sin \dfrac{\pi}{6}$

f) $\sin (x + 30^\circ) + \cos (x + 60^\circ) = 1 + \cos 2x$

g) $\sin x - 2 \sin (60^\circ - x) = 0$

h) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 5 \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

i) $\mathrm{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) \cdot \mathrm{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

j) $\cos (x + 60^\circ) \cdot \cos (x - 60^\circ) = \dfrac{1}{4}$

k) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$

23 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$

b) $\sin x + 2 \cos x = 2$

c) $\sin x + \cos x = 2$

d) $2 \sin x - \cos x + 1 = 0$

e) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$

f) $\cos x + 3 \sin x + 3 = 0$

g) $2 \sin x + 5 \cos x = 20$

h) $4 \sin x + 2 \cos x = \sqrt{2}$

24 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

b) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

c) $\sin x + \cos x = \cos 2x$

d) $\sin^3 x + 0{,}5 \sin 2x = 1 - \cos^3 x$

e) $\mathrm{cotg}\, x + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = 1$

f) $\sin^4 x + \cos^4 x = 0{,}5$

g) $\sin^6 x + \cos^6 x = 0{,}25$

h) $\mathrm{cotg}\, x - 1 = \dfrac{4 \cos 2x}{1 + \mathrm{tg}\, x}$

i) $\dfrac{1}{\sin x} = \sin x + \cos x$

j) $\dfrac{2}{\sin x} = \sin x + \cos x$

k) $2 \sin x = \dfrac{3(1 + \cos x)}{\sin x}$

l) $(1 - \mathrm{tg}\, x) \cdot (1 + \sin 2x) = 1 + \mathrm{tg}\, x$

m) $\cos x + \sin 2x = \mathrm{cotg}\, x$

n) $\cos x + \mathrm{cotg}\, x = 1 + \sin x$

o) $\cos 2x = \cos^2 x - 0{,}5\, \mathrm{tg}^2 x$

p) $\mathrm{tg}\, x \cdot \left(\mathrm{tg}\, x + \dfrac{1}{\cos x}\right) = 1$

q) $\dfrac{2}{\cos^2 x} - 5 = \mathrm{tg}\, x$

r) $\dfrac{3}{\sin^2 x} - 2 = 4\, \mathrm{cotg}\, x$

s) $\dfrac{1 + \mathrm{tg}\, x}{1 - \mathrm{tg}\, x} = 2 \cos 2x$

t) $\dfrac{1}{\sin^2 x} + 2\, \mathrm{cotg}\, x = 0$

u) $\dfrac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{3}\, \mathrm{tg}\, x = 1$

v) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - \mathrm{cotg}^2 x = \dfrac{\cos 2x - 1}{\sin^2 x}$

25 Určete všechna čísla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $y \in \langle 0; 2\pi \rangle$ tak, aby byla řešením dané soustavy:

a) $x + y = \pi$
$\mathrm{tg}(x - y) = \sqrt{3}$

b) $x - y = 120^\circ$
$\sin (x + y) = 0{,}5$

c) $x + y = \dfrac{5}{6}\pi$
$\sin x \cdot \cos y = 0{,}5$

d) $x + y = \dfrac{2}{3}\pi$
$\sin x - 2 \sin y = 0$

e) $2 \sin x - 3 \sin y = -2$
$\sin x + \sin y = 1{,}5$

f) $\cos (x + 2y) = 1$
$\sin (2x + y) = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$

7.2 Goniometrické nerovnice

26 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sin x \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\mathrm{tg}\, x \leqq -1$

c) $\sin x < 0$

d) $\mathrm{cotg}\, x > -1$

e) $\dfrac{\sqrt{3}}{3} < \mathrm{cotg}\, x < \sqrt{3}$

f) $0 \leqq \cos x < \dfrac{1}{2}$

27 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $|\sin x| \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $|\mathrm{tg}\, x| \leqq 1$

c) $\sin^2 x < 1$

d) $\cos x \geqq -4$

e) $\sin 2x \leqq \dfrac{1}{2}$

f) $\cos \dfrac{x}{2} > 0$

28 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\sin x \geqq \cos x$ b) $\cos x < -\sin x$ c) $\operatorname{tg} x \geqq \operatorname{cotg} x$

29 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$:

a) $\sin x \cdot \cos x > 0$ c) $\sin 2x \leqq \sin x$ e) $\cos 2x < 1$
b) $\sin 2x \cdot \cos x < 0$ d) $\sin^2 x \geqq \sin x$ f) $\cos 2x + \sin x < 1$

30 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $2\sin^2 x > 3\cos x$ c) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x > 2$
b) $\sin^2 x + 3\cos x - 3 \leqq 0$ d) $\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x > \frac{1}{2}$

8 Mocninné funkce, lineární lomená funkce

8.1 Grafy mocninných funkcí

1 V jednotlivých případech vždy nakreslete graf funkce f a g v jedné soustavě souřadnic a určete jejich vzájemný vztah.

a) $f_1(x) = \frac{1}{x^2}$, $g_1(x) = \frac{1}{(x-0{,}5)^2}$ c) $f_3(x) = \frac{1}{x^5}$, $g_3(x) = \frac{2}{x^5}$
b) $f_2(x) = \frac{1}{x^3}$, $g_2(x) = \frac{1}{x^3} + 2$ d) $f_4(x) = \frac{1}{x^4}$, $g_4(x) = \frac{1}{(x+2)^4} - 1$

2 Načrtněte grafy mocninných funkcí f_1 až f_6. Určete definiční obor, obor funkčních hodnot, vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce s osou x a s osou y. Při výpočtu průsečíků užijte kalkulačku, počítejte s přesností na dvě desetinná místa.

f_1: $y = (x-1)^4$ f_3: $y = (x-2)^{-2}$ f_5: $y = 2x^3 - 4$
f_2: $y = x^5 - 2$ f_4: $y = x^{-3} - 1$ f_6: $y = -x^{-4} + 2$

3 Načrtněte grafy mocninných funkcí g_1 až g_6. Určete definiční obor, obor funkčních hodnot, vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce s osou x a s osou y.

g_1: $y = |x^{-3}| - 1$ g_3: $y = |x^{-3} - 1|$ g_5: $y = |x^{-3}| + 2$
g_2: $y = |(x-1)^{-3}|$ g_4: $y = (|x| - 1)^{-3}$ g_6: $y = |x^{-3} + 2|$

4 Načrtněte grafy mocninných funkcí h_1 až h_6. Určete definiční obor, obor funkčních hodnot, vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce s osou x a s osou y.

h_1: $y = |x^{-4}| - 1$ h_3: $y = |x^{-4} - 1|$ h_5: $y = |x^{-4}| + 2$
h_2: $y = |(x-1)^{-4}|$ h_4: $y = (|x| - 1)^{-4}$ h_6: $y = |x^{-4} + 2|$

5 Načrtněte grafy mocninných funkcí m_1 až m_6. Určete definiční obor, obor funkčních hodnot, vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce s osou x a s osou y. Při výpočtu průsečíků užijte kalkulačku, počítejte s přesností na dvě desetinná místa.

$m_1(x) = 2(x+\sqrt{3})^5 - 1$ $m_3(x) = -\frac{1}{2}x^{-4} + 1$ $m_5(x) = -2x^{-2}$
$m_2(x) = (x+\sqrt{2})^6 + \sqrt{3}$ $m_4(x) = 2 - x^{-3}$ $m_6(x) = (-2x)^{-2}$

6 Načrtněte grafy funkcí k_1, k_2. Ve všech případech určete definiční obor, obor funkčních hodnot a vlastnosti funkcí k_1, k_2.

$k_1(x) = (x-1)^{-2} - 3$ $k_2(x) = 2 - (x-3)^5$

7 Načrtněte grafy funkcí s_1 až s_6.

$s_1(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$ $s_3(x) = \frac{x^3 - |x|^3}{2}$ $s_5(x) = \frac{1}{x(|x| + x)}$

$s_2(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$ $s_4(x) = \frac{x^4 + |x^4|}{x + |x|}$ $s_6(x) = \frac{x^4}{|x| - x}$

8 Řešte v R graficky následující nerovnice:

a) $x^6 > x^5$ c) $x^{-2} > x^5$ e) $x^{-3} \leqq -x^7$ g) $-x^3 \geqq x^{-6}$
b) $-x^3 \leqq x^4$ d) $x^{-4} \leqq x^{-5}$ f) $x^{-6} > -x^6$ h) $-x^{-2} \leqq x^5$

8.2 Grafy lineárních lomených funkcí

9 Nakreslete grafy funkcí f_1 až f_{12}. Vždy určete definiční obor, obor funkčních hodnot, asymptoty grafu, střed souměrnosti grafu, průsečíky s osou x i s osou y.

$f_1\colon y = \dfrac{1}{x}$ $\quad f_5\colon y = \dfrac{x+3}{x-4}$ $\quad f_9\colon y = \dfrac{2}{x}$

$f_2\colon y = \dfrac{1}{x} + 3$ $\quad f_6\colon y = \dfrac{1-x}{x+3}$ $\quad f_{10}\colon y = \dfrac{-4x}{x+3}$

$f_3\colon y = \dfrac{1}{x-4}$ $\quad f_7\colon y = \dfrac{x+3}{x}$ $\quad f_{11}\colon y = \dfrac{2x+1}{x-3}$

$f_4\colon y = \dfrac{1}{x-4} + 3$ $\quad f_8\colon y = \dfrac{x}{x-2}$ $\quad f_{12}\colon y = \dfrac{3x+4}{2x+1}$

10 Nakreslete grafy funkcí g_1 až g_6.

$g_1\colon y = \dfrac{x+1}{x-2}$ $\quad g_3\colon y = \dfrac{|x|+1}{|x|-2}$ $\quad g_5\colon y = \dfrac{x+1}{|x-2|}$

$g_2\colon y = \left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$ $\quad g_4\colon y = \dfrac{|x+1|}{x-2}$ $\quad g_6\colon y = \dfrac{|x|+1}{x-2}$

11 Nakreslete graf funkce $y = \dfrac{2x+1}{3x-6}$. Užitím grafu řešte nerovnice:

a) $\dfrac{2x+1}{3x-6} \geqq 0$ $\quad$ b) $\dfrac{2x+1}{3x-6} \leqq \dfrac{1}{3}$ $\quad$ c) $\left|\dfrac{2x+1}{3x-6}\right| \geqq 1$

12 Nakreslete graf funkce $y = \dfrac{2x+a}{x-1}$ pro $a \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$. Jak hodnota parametru a ovlivňuje graf funkce?

13 Nakreslete graf funkce $y = \dfrac{2x+1}{x+b}$ pro $b \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Jak hodnota parametru b ovlivňuje graf funkce?

14 Nakreslete graf funkce $y = \dfrac{2x+1}{cx}$ pro $c \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Jak hodnota parametru c ovlivňuje graf funkce?

15 Nakreslete grafy funkcí:

a) $y = \left(1 - \dfrac{x^2}{x^2-1}\right) : \left(\dfrac{x+2}{x+1} - 1\right)$ $\quad$ d) $y = \dfrac{1-x^2}{x^3-1} \cdot \left(\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right)$

b) $y = 1 - \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ $\quad$ e) $y = \dfrac{x^3}{x^3+2x^2} + \dfrac{x^2}{x^2+2x} - \dfrac{2x+1}{x+2}$

c) $y = 1 + \dfrac{2}{1 - \dfrac{2}{1+\frac{2}{x}}}$ $\quad$ f) $y = \dfrac{x + \dfrac{x+\frac{1}{2}}{2}}{x - \dfrac{x-\frac{x}{2}}{2}}$

8.3 Inverzní funkce k funkcím mocninným

16 Nakreslete graf dané funkce, určete definiční obor, obor funkčních hodnot, souřadnice průsečíků s osami. Rozhodněte, zda k dané funkci existuje funkce inverzní v celém definičním oboru, nebo zda existuje jen v podmnožině definičního oboru. Jestliže inverzní funkce existuje, nakreslete v téže soustavě souřadnic její graf, určete definiční obor, obor funkčních hodnot, průsečíky s osami a rovnici.

$f_1\colon y = x^2$ $\quad f_4\colon y = x^{-2}$ $\quad f_7\colon y = (x+2)^2 - 1$

$f_2\colon y = x^3$ $\quad f_5\colon y = x^{-3}$ $\quad f_8\colon y = 4 - x^2$

$f_3\colon y = x^6$ $\quad f_6\colon y = x^{-6}$ $\quad f_9\colon y = 2x^3 + 1$

17 Nakreslete graf dané funkce, určete definiční obor, obor funkčních hodnot, souřadnice průsečíků s osami. Rozhodněte, zda k dané funkci existuje funkce inverzní v celém definičním oboru, nebo zda existuje jen v podmnožině definičního oboru. Jestliže inverzní funkce existuje, nakreslete v téže soustavě souřadnic její graf, určete definiční obor, obor funkčních hodnot, průsečíky s osami a rovnici.

$g_1\colon y = \sqrt{x}$ $\quad g_4\colon y = \sqrt[3]{x}$ $\quad g_7\colon y = 2\sqrt{x-1} + 3$

$g_2\colon y = \sqrt{x+2}$ $\quad g_5\colon y = \sqrt[3]{x-2}$ $\quad g_8\colon y = 2\sqrt[4]{1-x}$

$g_3\colon y = \sqrt{x} + 2$ $\quad g_6\colon y = 2\sqrt[3]{x-2}$ $\quad g_9\colon y = \sqrt[5]{x} - 1$

8.4 Inverzní funkce k funkci lineární lomené

18 Nakreslete graf dané funkce, určete definiční obor, obor funkčních hodnot, souřadnice průsečíků s osami. Zdůvodněte, proč k dané funkci existuje funkce inverzní. Nakreslete v téže soustavě souřadnic její graf, určete definiční obor, obor funkčních hodnot, průsečíky s osami a rovnici.

$h_1\colon y = \dfrac{1}{x}$ $\quad h_3\colon y = \dfrac{1}{x-2}$ $\quad h_5\colon y = \dfrac{2x+3}{x-1}$

$h_2\colon y = \dfrac{1}{x} - 2$ $\quad h_4\colon y = \dfrac{x+1}{x-2}$ $\quad h_6\colon y = \dfrac{4+x}{1-x}$

Počítání s odmocninami a s mocninami

8.5 Počítání s odmocninami

19 Vypočítejte:

a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{27}$

c) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{12} - \sqrt{8})$

d) $(2\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3} - 2\sqrt{5})$

e) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{3}) - \sqrt{6} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})$

f) $(\sqrt{11} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{11} + \sqrt{5})$

g) $(3\sqrt{7} + \sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{7} - \sqrt{2})$

h) $(\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3})$

i) $(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{3})$

20 Vypočítejte:

a) $\sqrt{72} : \sqrt{2}$

b) $\sqrt{60} : \sqrt{15}$

c) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{5}}$

d) $(\sqrt{10} + \sqrt{12}) : \sqrt{2}$

e) $(6\sqrt{15} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{10}) : 2\sqrt{5}$

f) $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

21 Vypočítejte:

a) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$
b) $\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{2}$
c) $(3\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{54})\cdot\sqrt[3]{4}$
d) $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})\cdot(\sqrt[4]{27}-\sqrt[4]{8})$
e) $(2\sqrt[3]{18}+3\sqrt[3]{12}):\sqrt[3]{6}$
f) $(\sqrt[4]{20}+\sqrt[4]{4}):\sqrt[4]{4}$

22 Částečně odmocněte:

a) $\sqrt{12}-\sqrt{48}+2\sqrt{75}$
b) $2\sqrt{8}-\sqrt{8}+11\sqrt{72}$
c) $8\sqrt{50}+4\sqrt{32}-6\sqrt{162}$
d) $\sqrt{98}+\sqrt{200}+\sqrt{128}$
e) $\sqrt{75}-\sqrt{300}+\sqrt{243}$
f) $2\sqrt{108}-2\sqrt{27}+12\sqrt{12}$

23 Částečně odmocněte:

a) $\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+2\sqrt[3]{250}$
b) $5\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{5}-10\sqrt[3]{40}$
c) $\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{1\,024}$
d) $\sqrt[3]{32}+2\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{500}$

24 Částečně odmocněte:

a) $\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}+2\sqrt[4]{243}$
b) $\sqrt[4]{405}+3\sqrt[4]{80}-5\sqrt[4]{5}$

25 Zapište pomocí jediné odmocniny:

a) $2\sqrt{7}$ b) $5\sqrt{3}$ c) $4\sqrt[3]{2}$ d) $3\sqrt[4]{4}$

26 Odstraňte odmocninu ze jmenovatele zlomku (zlomky usměrněte):

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
b) $\dfrac{12}{\sqrt{6}}$
c) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{14}}{\sqrt{6}}$
d) $\dfrac{4\sqrt{15}+5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$
e) $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$
f) $\dfrac{1}{1+\sqrt{7}}$
g) $\dfrac{15}{2\sqrt{3}-3}$
h) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$
i) $\dfrac{2+\sqrt{8}}{6-3\sqrt{2}}$
j) $\dfrac{\sqrt{27}-1}{2+4\sqrt{3}}$
k) $\dfrac{3\sqrt{5}-5\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}$
l) $\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{\sqrt{15}-2\sqrt{5}}$

27 Odstraňte odmocninu ze jmenovatele zlomku (zlomky usměrněte):

a) $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
b) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}$

28 Rozhodněte, které z čísel A, B je větší. (Při výpočtu nepoužívejte kalkulačku.)

a) $A_1=\dfrac{22\,222}{2-\sqrt{2}}$, $B_1=\dfrac{33\,333}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$
b) $A_2=\dfrac{6\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$, $B_2=\dfrac{15\sqrt{2}}{\sqrt{30}}$
c) $A_3=\dfrac{11\sqrt{13}}{13\sqrt{11}}$, $B_3=\dfrac{22\sqrt{27}}{27\sqrt{22}}$

29 Vypočítejte hodnotu výrazu $v(x)=\dfrac{1}{x}+2x$ pro následující hodnoty x_1 až x_9:

$x_1=\sqrt{2}$
$x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$x_3=2\sqrt{5}$
$x_4=3-\sqrt{3}$
$x_5=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$
$x_6=3+\sqrt{5}$
$x_7=2\sqrt{2}+\sqrt{7}$
$x_8=\dfrac{2}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}$
$x_9=\sqrt{2}+1-\sqrt{3}$

30 Odstraňte odmocniny ze jmenovatelů zlomků (zlomky usměrněte):

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$
b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$
c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{32}}$
d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{10}}$
e) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{10^2}}$
f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{10^3}}$
g) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{8}}$
h) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}-1}$
i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

31 Vypočítejte:

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}-4}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6}+4}$
b) $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$

32 Umocněte:

a) $(1+\sqrt{2})^2$
b) $(5\sqrt{3}-\sqrt{6})^2$
c) $(3\sqrt{5}+2\sqrt{10})^2$
d) $(1-2\sqrt{3})^3$
e) $(\sqrt{2}+2)^3$
f) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^3$
g) $(2-\sqrt{5})^{-2}$
h) $(\sqrt{3}+2)^{-2}$
i) $(\sqrt{2}-1)^{-3}$

33 Odmocněte ($a, b, x, y, z, m \in \mathsf{R}$):

a) $\sqrt{a^2}$
b) $\sqrt{100x^6}\cdot\sqrt{y^2z^4}$
c) $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$
d) $\sqrt{a^2+b^2}$
e) $\sqrt{x^2-6x+9}$
f) $\sqrt{0{,}25m^2+m+1}$

34 Vypočítejte hodnotu výrazu $w(x)=x^3-x^2-\dfrac{1}{x}$ pro hodnoty x_1, x_2, x_3:

$x_1=\sqrt{5}$ $x_2=2+\sqrt{3}$ $x_3=2\sqrt{2}-3$

35 Vypočítejte:

a) $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right):\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

b) $(\sqrt{7}+4)\cdot\left(\dfrac{21}{2\sqrt{7}}-\dfrac{12}{\sqrt{7}+1}\right)$

c) $\left(\dfrac{55}{5-\sqrt{5}}+\dfrac{5\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}-\dfrac{8}{3-\sqrt{5}}\right)\cdot(\sqrt{5}-3)$

d) $\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

e) $\dfrac{(1+\sqrt{5})^2-(1-\sqrt{5})^2}{4\sqrt{5}}$

f) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}+\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}\right)^2$

g) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}\right)^2$

36 Vypočítejte:

a) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{13}+2}+\sqrt{\sqrt{13}-2}}{\sqrt{\sqrt{13}+2}-\sqrt{\sqrt{13}-2}}$

8.6 Počítání s mocninami s celým exponentem

37 Zapište jako mocninu ($n \in \mathsf{N}$, $a, x \in \mathsf{R} - \{0\}$, $b \in \mathsf{R}$):

a) $2^2 \cdot 2^3$ c) $16 \cdot 2^{n-4}$ e) $x^{4n-3} \cdot x^{5-2n}$
b) $5^{-1} \cdot 5^5$ d) $x^3 \cdot x^5 \cdot x^7$ f) $a^5 \cdot b^3 \cdot a^{-2} \cdot b^4$

38 Zapište jako mocninu ($n, k \in \mathsf{Z}$, $x, y, a, b \in \mathsf{R} - \{0\}$):

a) $4^7 : 4^5$ c) $16 : 2^{n+4}$ e) $y^{2n+3} : y^{n+3}$
b) $\dfrac{7^{n+1}}{49}$ d) $\dfrac{x^3}{x^5 \cdot x^{-2}}$ f) $\dfrac{a^{k+1}}{b^{k+2}} : \dfrac{a^{2k}}{b^3}$

39 Vypočítejte a určete, kdy výrazy mají smysl:

a) $(2x)^3$ c) $(12x)^2 : (3x)^3$ e) $[(x^{-2}y)^3]^2 \cdot (y^{-1})^{-6}$
b) $(1\frac{1}{2})^5 \cdot \left(\dfrac{2^{-1}}{3}\right)^3$ d) $\left(\dfrac{-x^{-1} \cdot y^2}{x^3}\right)^{-5}$ f) $\left(\dfrac{x}{2y^2}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{y}{x^{-3}}\right)^5$

40 Vypočítejte zpaměti ($x \in \mathsf{R} - \{0\}$):

a) $2x^0$ b) $(2x)^0$ c) 2^0x d) $2 : x^0$ e) $2^0 : x$ f) 0^0

41 Vypočítejte zpaměti ($k \in \mathsf{N}$):

a) $(-1)^{-1}$ b) -1^2 c) $(-1)^3$ d) $(-1)^{-2}$ e) $(-1)^{2k}$ f) $(-1)^{2k+1}$

42 Vypočítejte (bez použití kalkulačky):

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} + 2^{-1} + (-1)^5 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$ e) $\left[2 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}\right]^2$

b) $(0{,}1)^{-1} - 2^{-2} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-4} - \dfrac{1^{-4}}{2} - (-1)^{-1}$ f) $(2^{-2} + 4^{-1})^2$

c) $0{,}2^{-1} - (-1^{-2}) - \dfrac{1}{2^{-1}} + \dfrac{1^{-5}}{2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$ g) $(0{,}02)^{-3} \cdot \left[(0{,}1)^{-2}\right]^{-1}$

d) $\left\{\left[\dfrac{1}{2}^{-2}\right]^{-1} - (3^{-1})^{-2} + 1\right\}^{-2}$ h) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} - \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 - 0{,}4^{-1}$

43 Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

a) $(x^2)^{-1} : 9(x^{-3})^2$ d) $\left(\dfrac{a^2b^{-3}}{c^{-2}d^3}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{c^4d^{-1}}{a^{-3}b^2}\right)^2$

b) $\dfrac{(x^4y^{-3})^{-2}}{(x^3)^{-3}y^5}$ e) $[n^{-2} \cdot 3n^3 \cdot (6n)^{-1}]^{-2} : (2n^{-1})^0$

c) $0{,}8^{-1} \cdot a^2b^{-3} \cdot 1{,}5a^{-2}b^5$ f) $\left[m^4 \cdot \left(\dfrac{2}{m}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{m^2}{4}\right)^{-3} \cdot \dfrac{1}{16}\right]^{-1}$

44 Základy mocnin rozložte na prvočinitele, potom zlomky kraťte ($n \in \mathsf{N}$):

a) $\dfrac{6^7 \cdot 22^5 \cdot 15^6 \cdot 2^7}{10^7 \cdot 12^6 \cdot 33^5}$ b) $\dfrac{6^{3n-1} \cdot 9^{n-1} \cdot 10^{2n-1}}{30^{2n-4} \cdot 32^n \cdot 12^{1-n}}$ c) $\dfrac{21^{2n-2} \cdot 15^{n+2} \cdot 49^n}{20^{2n-5} \cdot 14^{n-2} \cdot 16^{3-2n}}$

45 Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

a) $\dfrac{x^5 \cdot (x^n \cdot 6 \cdot y^{4n})^3}{9 \cdot y^{4n} \cdot (x^5 \cdot 2 \cdot y^6)^2}$ b) $\dfrac{(16b^3a^{-1})^{-3}}{(a^3b^{-2} \cdot 4)^{-2}}$ c) $\dfrac{(27r^3s^4)^{n-1}}{(3rs^{-2})^{3n+1}}$

46 Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

a) $\dfrac{x^{n+1} + 6x^n}{x^{n-1} + 6x^{n-2}}$ b) $\dfrac{y^{a+2} - y^a}{y^{a+1} + y^a}$ c) $\dfrac{a^{2x} + 6a^x + 9}{a^{2x} - 9}$ d) $\dfrac{x^{2n} - y^{2n}}{x^{n+1} - xy^n}$

47 Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

a) $\dfrac{x^3 - x^2}{x^{n+1}} - \dfrac{4x^5 - x^3}{x^{n+3}} - \dfrac{4 - x}{x^n}$

b) $\dfrac{x^2 - 1}{4x^5} - 2 \cdot \dfrac{1 - x^{n-4}}{16x^{n-1}} - \dfrac{3x^{n-2} - x^2}{8x^{n+1}}$

48 Vypočítejte:

a) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - (\sqrt{5})^{-4} - \left(\dfrac{5}{2}\right)^{-2} - \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$

b) $(\sqrt{3})^4 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

c) $2^{-1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{-3}$

d) $(\sqrt{2})^{-1} + (\sqrt{2})^{-2} - (-\sqrt{2})^{-3}$

8.7 Počítání s mocninami s racionálním exponentem

49 Zapište pomocí odmocniny a vypočítejte bez použití kalkulačky:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ d) $16^{0,5}$ g) $1\,000^{-\frac{2}{3}}$ j) $1^{-\frac{5}{4}}$
b) $125^{\frac{1}{3}}$ e) $81^{0,25}$ h) $4^{-\frac{3}{2}}$ k) $-1^{\frac{5}{4}}$
c) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ f) $\left(\frac{1}{100}\right)^{1,5}$ i) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ l) $0^{\frac{1}{5}}$

50 Zapište jako mocninu s racionálním exponentem ($x \in \mathsf{R}^+$):

a) $\sqrt{x}$ b) $\sqrt[3]{x^5}$ c) $\sqrt[5]{x^3}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ e) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^3}}$

51 Výsledky následujících úloh zapište jako mocninu čísla 2:

a) $2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$ c) $\left[\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{3}{4}}$ e) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{8}} \cdot 16^{\frac{10}{16}}$

b) $2^{\frac{3}{4}} : 2^{\frac{1}{2}}$ d) $\left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{7}{8}}$ f) $(2^{\frac{1}{3}})^4 \cdot 2^{(\frac{1}{3})^3}$

52 Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

a) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{4}}}{x^2}$ c) $\dfrac{(y^{\frac{1}{2}})^3 \cdot (y^2)^{\frac{1}{3}}}{y \cdot y^{\frac{2}{3}}}$ e) $\dfrac{(xy)^{\frac{1}{2}} \cdot (x^2y)^{-\frac{1}{3}}}{(xy^2)^{-\frac{2}{3}}}$

b) $\dfrac{y^2}{(y^{\frac{1}{6}})^2}$ d) $\dfrac{(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}} \cdot (x^{\frac{1}{6}})^{\frac{9}{4}}}{(x^{\frac{7}{2}})^{\frac{5}{6}}}$ f) $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{5}}}{y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-2} \cdot \dfrac{(y^{-1}x^{-2})^{-\frac{1}{2}}}{(xy^2)^{\frac{1}{10}}}$

53 Následující úlohy počítejte dvěma způsoby:

1. způsob: výraz upravte užitím pravidel pro počítání s odmocninami.
2. způsob: výraz nejprve přepište pomocí mocnin s racionálním exponentem a potom upravte užitím pravidel pro počítání s mocninami.

a) $\sqrt{3 \cdot \sqrt{3}}$

b) $\sqrt{8 \cdot \sqrt{4 \cdot \sqrt{2}}}$ e) $\sqrt{5 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{5}} \cdot \sqrt[4]{5}}$ g) $\dfrac{\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{8}}}{\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{4}}}$

c) $\sqrt[3]{5^2 \cdot \sqrt{5}}$

d) $\sqrt[4]{11} \cdot \sqrt[4]{11}^3$ f) $\dfrac{\sqrt[5]{7 \cdot \sqrt[6]{49}}}{\sqrt{7}}$ h) $\sqrt[6]{\dfrac{16}{\sqrt{2}}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{8}{\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2}$

54 Upravte a udejte podmínky:

a) $\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}$

b) $\sqrt{z^3\cdot\sqrt{z^2\cdot\sqrt{z}}}$

c) $\sqrt[3]{k^2\cdot\sqrt{k}}$

d) $\sqrt[4]{m}\cdot\sqrt[4]{m}^3$

e) $\sqrt{y\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{y}}\cdot\sqrt[4]{y}}$

f) $\dfrac{\sqrt[5]{u\cdot\sqrt[6]{u^2}}}{\sqrt{u}}$

g) $\dfrac{\sqrt[3]{a\cdot\sqrt{a^3}}}{\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}}$

h) $\sqrt[6]{\dfrac{b^4}{\sqrt{b}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{b^3}{\sqrt{b}}}\cdot\sqrt{b}$

55 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $x^4 = 625$ c) $x^{\frac{1}{3}} = 0{,}4$ e) $\sqrt{x^3} = 8$ g) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^5}} = 3$

b) $64x^6 - 1 = 0$ d) $\sqrt[4]{x} = 9$ f) $x^{\frac{2}{3}} = 0{,}25$ h) $\sqrt{125x^2} = 5x\sqrt{5}$

8.8 Úpravy výrazů obsahujících mocniny a odmocniny

56 Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

a) $\left(\dfrac{8-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \dfrac{8+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)\cdot\dfrac{x^2-16}{4\sqrt{x}}$

b) $\dfrac{2}{1+\sqrt{x}} - \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{x+2}{1-x}$

c) $\left(4-\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right) - \dfrac{6}{x-1}$

d) $\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{7}+\sqrt{x}} + \left(\dfrac{7\sqrt{7}+x\sqrt{x}}{\sqrt{7}+\sqrt{x}} - \sqrt{7x}\right) : (7-x)$

e) $\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

57 Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

a) $[2x^{-1} + (2x)^{-1} + (x+2)^{-1}]^{-1}\cdot(x+2)^{-1}$

b) $\left[1+(x^{-2}-1)^{-1}\right]^{-1} + \left[1-(x^{-2}+1)^{-1}\right]^{-1}$

c) $x^{-1}\cdot(1-x^{-2})\cdot(1+x^{-3})^{-1}\cdot(x^{-2}-x^{-1}+1)$

d) $\left[x^{-1}\cdot(x^{-1}-x^{-2})\right]^{-1} - \left[x\cdot(x^{-1}-1^{-1})\right]^{-1}$

58 Zjednodušte následující výrazy a určete, kdy mají smysl:

a) $\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}+1}{a^{-\frac{1}{2}}-1} - \dfrac{a^{-\frac{1}{2}}-1}{a^{-\frac{1}{2}}+1}$

b) $\dfrac{b^{\frac{3}{2}}+b^{-\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}-b^{-\frac{3}{2}}} + \dfrac{b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{3}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$

c) $\dfrac{c^{-\frac{1}{3}}}{c^{-\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{2c^{-\frac{2}{3}}}{c^{-\frac{2}{3}}-c^{\frac{4}{3}}}$

d) $\left(\dfrac{d^{-0,5}}{d^{0,5}+1} - \dfrac{d^{-0,5}+d^{0,5}}{1-d}\right)^{-1}$

e) $\left(\dfrac{16e^{-1}-9e}{4e^{-0,5}-3e^{0,5}} + \dfrac{16e-9e^{-1}}{4e^{0,5}-3e^{-0,5}} - \dfrac{e-e^{-1}}{e^{0,5}-e^{-0,5}}\right) : (e^{0,5}+e^{-0,5})$

59 Načrtněte grafy funkcí:

$$f_1(x) = \frac{(-x)^3\cdot(-x)^5}{x^2\cdot(-x)^2} \qquad f_2(x) = \frac{x^4\cdot(-x)^{-4}}{x\cdot(-x)^5}\cdot\frac{-x^6}{x^{-2}\cdot(-x)^{-3}}$$

60 Načrtněte grafy funkcí:

$$g_1(x) = \sqrt{\frac{x^{-3}\cdot\sqrt{x}}{x^2}\cdot\frac{x^{-2}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}} \qquad g_3(x) = \frac{\sqrt{3x}-x\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{3x}}$$

$$g_2(x) = \sqrt[3]{\frac{x\cdot\sqrt{x}}{x^{-2}}\cdot\frac{x^{-4}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}} \qquad g_4(x) = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-2}$$

9 Posloupnosti a řady

9.1 Způsoby zadání posloupnosti

1 V dané posloupnosti závisí n-tý člen a_n na čísle n. Znáte-li několik prvních členů, napište alespoň tři členy další a odhadněte vzorec pro a_n.

a) $4, 8, 12, 16, 20, \dots$ c) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$
b) $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ d) $-\frac{1}{27}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, -1, -3, \dots$

2 Zapište vzorcem pro n-tý člen
a) posloupnost všech přirozených sudých čísel,
b) posloupnost všech přirozených lichých čísel,
c) posloupnost všech přirozených čísel dělitelných 11,
d) posloupnost všech přirozených čísel, která při dělení 5 dávají zbytek 1.

3 Posloupnost je dána vzorcem pro n-tý člen. Napište prvních pět členů dané posloupnosti a načrtněte graf.

a) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = (n-1) \cdot n$ e) $a_n = n^2 - 5$
b) $a_n = n \cdot 2^{-n}$ d) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ f) $a_n = n \cdot (-1)^{n+1}$

4 Posloupnost je dána rekurentně. Vypočítejte prvních šest členů posloupnosti, odhadněte vzorec pro n-tý člen a dokažte jeho správnost.

a) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 4$ b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ c) $a_1 = -1$, $a_{n+1} = (-1)^{2n+1} a_n + 2$

5 Posloupnost je dána rekurentně. Vypočítejte prvních šest členů posloupnosti, odhadněte vzorec pro n-tý člen a dokažte jeho správnost.

a) $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_{n+1} = \frac{4}{3}(a_n + a_{n-1})$
b) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$
c) $a_1 = -3$, $a_2 = -1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$

9.2 Vlastnosti posloupností

Posloupnost rostoucí, klesající

6 Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou rostoucí, které jsou klesající, které nejsou ani rostoucí ani klesající. Potom svoje tvrzení dokažte.

a) $(n)_{n=1}^{\infty}$ d) $(-n^2 + 4n - 4)_{n=1}^{\infty}$ g) $((-1)^n \cdot n)_{n=1}^{\infty}$
b) $(-2n + 3)_{n=1}^{\infty}$ e) $(\log n)_{n=1}^{\infty}$
c) $(n^2 + 2n + 4)_{n=1}^{\infty}$ f) $(\log_{\frac{1}{2}} n)_{n=1}^{\infty}$ h) $\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$

Posloupnost omezená

7 Rozhodněte, zda dané posloupnosti jsou omezené shora, zdola, omezené. Potom svoje tvrzení dokažte.

a) $(n+1)_{n=1}^{\infty}$ c) $(n^2 - 1)_{n=1}^{\infty}$ e) $(\sin n)_{n=1}^{\infty}$
b) $\left(-\dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ d) $\left(\dfrac{5n+2}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ f) $\left(\dfrac{n+4}{-n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Limita posloupnosti

8 Vypočítejte limity daných posloupností.
(Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou konvergentní.)

a) $\left(\dfrac{5}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ d) $\left((-1)^n \cdot \dfrac{1}{5n}\right)_{n=1}^{\infty}$ g) $(1 + (-1)^n)_{n=1}^{\infty}$
b) $(7)_{n=1}^{\infty}$ e) $(3^n)_{n=1}^{\infty}$ h) $(\sqrt{n+2})_{n=1}^{\infty}$
c) $\left(\dfrac{4n}{3n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ f) $\left(\dfrac{n^2+4n-1}{2n^2-n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$ i) $\left(\dfrac{n^2+4n}{n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$

9.3 Aritmetická, geometrická posloupnost

9 Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou aritmetické, které jsou geometrické. V případě aritmetických posloupností určete diferenci, v případě geometrických posloupností určete kvocient.

a) $\left(\dfrac{n+3}{5}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $(1-n)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left(\dfrac{2^n}{3^{n+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ d) $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

10 Posloupnost je dána rekurentně. Napište několik členů. Rozhodněte, které z uvedených posloupností jsou aritmetické, které jsou geometrické. Posloupnosti zapište vzorcem pro n-tý člen a dokažte jeho správnost.

a) $a_1 = 7$, $a_{n+1} = 2a_n - 3n - 1$ b) $a_1 = 8$, $a_{n+1} = a_n + 4 \cdot 2^n$ c) $a_1 = 5$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = 2(a_n - 3) - a_{n+1}$

11 Dokažte, že daná tři čísla tvoří tři následující členy jisté aritmetické posloupnosti. Určete diferenci.

a) $\log 16, \log 8, \log 4$ c) $\sin 60°, \sin 0°, \sin(-60°)$
b) $\dfrac{1\,999}{2\,000}, \dfrac{2\,999}{2\,000}, \dfrac{3\,999}{2\,000}$ d) $a^2 - 2, (a+1)^2, (a+2)^2$, kde $a \in \mathrm{R}$

12 Dokažte, že daná tři čísla tvoří tři následující členy jisté geometrické posloupnosti. Určete kvocient.

a) $\sqrt{5} - \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5} + \sqrt{2}$ c) $\sin 2x, \cos x, \frac{1}{2} \operatorname{cotg} x$, kde $x \in (0, \pi)$
b) $\dfrac{1\,999}{2\,000}, \dfrac{1\,999}{4\,000}, \dfrac{1\,999}{8\,000}$ d) $b+1, b^2 + 2b + 1, b^3 + 3b^2 + 3b + 1$, kde $b \in \mathrm{R}$

13 Tvoří-li kladná reálná čísla a_1, a_2, a_3 tři následující členy geometrické posloupnosti, potom jejich dekadické logaritmy tvoří tři následující členy aritmetické posloupnosti. Dokažte.

14 Přičteme-li k daným číslům $-6, 2, 26$ reálné číslo x, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete, které číslo musíme přičíst. Potom určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, která takto vznikne.

15 Určete reálné číslo x tak, aby čísla a_1, a_2, a_3 tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti.

a) $a_1 = x^2 + x$, $a_2 = x^2 + 4x + 4$, $a_3 = 16$
b) $a_1 = \log(2x - 1)$, $a_2 = \log(4x - 2)$, $a_3 = \log(5x + 2)$
c) $a_1 = \sin x$, $a_2 = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, $a_3 = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

16 Určete reálné číslo x tak, aby čísla a_1, a_2, a_3 tvořila tři následující členy geometrické posloupnosti.

a) $a_1 = 1$, $a_2 = 2^x$, $a_3 = 2^{x+2} + 12$

b) $a_1 = 1 + 2\log x$, $a_2 = 3 - 4\log x$, $a_3 = 3 + \log x$

c) $a_1 = \dfrac{1}{2\operatorname{cotg} x}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \dfrac{3}{\sin 2x}$

17 V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 20$, $d = 4$.
a) Kolikátý člen je roven číslu 100?
b) Kolikátý člen je roven číslu 150?

18 V geometrické posloupnosti je $a_1 = 64$, $q = \frac{1}{2}$. Kolikátý člen je roven číslu $\frac{1}{32}$?

19 Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí:

a) $a_4 = 9$, $a_{10} = 21$
b) $a_1 + a_3 = 2$, $a_2 + a_7 = -8$
c) $2a_2 - a_3 = 20$, $a_4 - 5a_1 = -95$
d) $a_3 = 2a_4$, $a_2 = -a_8$
e) $a_2 - a_1 = 6$, $a_{20} - a_{18} = 15$
f) $a_4 + a_5 + a_7 + a_8 = 10$, $a_{21} : a_1 = 2$
g) $a_1 + a_2 = 5$, $a_1^2 + a_2^2 = 13$
h) $a_3 + a_5 = 8$, $a_3^2 - a_5^2 = 32$
i) $a_4 + a_5 = 4$, $a_4 \cdot a_5 = -5$

20 Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí:

a) $a_2 = 1{,}5$, $a_5 = 40{,}5$
b) $a_2 = 16$, $a_4 = 1$
c) $a_1 + a_2 - a_4 = -110$, $a_2 + a_3 - a_5 = -220$
d) $a_8 - a_4 = 360$, $a_7 - a_5 = 144$
e) $a_2 + a_3 = 60$, $a_1 + a_4 = 252$
f) $a_2 \cdot a_3 = 9$, $a_2 + a_3 = 10$

21 Tři čísla, která tvoří tři následující členy aritmetické posloupnosti, mají součet 60 a součin 7 500. Určete tato čísla.

22 Určete tři reálná čísla větší než 8 a menší než 648 tak, aby spolu s danými čísly tvořila pět následujících členů
a) aritmetické posloupnosti, b) geometrické posloupnosti.

23 Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte čtyři čísla tak, aby spolu s vypočtenými kořeny vzniklo šest následujících členů
a) aritmetické posloupnosti, b) geometrické posloupnosti.

24 Najděte dvě reálná čísla x, y tak, aby čísla 3, x, y tvořila tři následující členy geometrické posloupnosti a čísla x, y, 18 tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti.

25 Určete čtyři čísla tak, aby první tři tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -3$ a poslední tři tvořila tři následující členy geometrické posloupnosti s kvocientem $q = \frac{1}{2}$.

26 Deset čísel tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 3$. První, třetí a sedmé číslo tvoří tři následující členy geometrické posloupnosti. Určete tato čísla.

27 V aritmetické posloupnosti známe první člen $a_1 = 18$ a diferenci $d = -5$. Určete $n \in \mathrm{N}$ tak, aby platilo $a_n + a_{n+3} = -189$.

28 V geometrické posloupnosti známe první člen $a_1 = \frac{1}{64}$ a kvocient $q = 2$. Určete $n \in \mathrm{N}$ tak, aby platilo $a_n + a_{2n} = 8\,200$.

29 Součet tří po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti je 9. První číslo necháme, druhé číslo zvětšíme o 12 a třetí číslo zmenšíme o 3. Dostaneme tak tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Určete původní trojici čísel a proveďte zkoušku.

30 Tři čísla tvoří tři po sobě následující členy aritmetické posloupnosti a součet jejich druhých mocnin je 126. Jestliže první číslo zmenšíme třikrát, druhé číslo necháme a třetí číslo zvětšíme čtyřikrát, dostaneme tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete tuto trojici čísel a proveďte zkoušku.

31 Tři čísla tvoří tři po sobě následující členy geometrické posloupnosti. Jestliže první číslo zmenšíme o 36, dostaneme tři následující členy aritmetické posloupnosti. Jestliže dále třetí číslo dělíme -8, dostaneme opět tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete tuto trojici čísel a proveďte zkoušku.

32 Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Obvod trojúhelníku je 96 cm. Vypočítejte délky stran.

33 Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, součet délek všech hran kvádru je 84 cm. Vypočítejte povrch kvádru, víte-li, že jeho objem je 64 cm^3.

34 Aritmetická posloupnost je dána vzorcem pro n-tý člen $a_n = \frac{1}{4}(3 - 2n)$. Vypočítejte a_1, d. Dále vypočítejte součet prvních deseti členů a součet druhých deseti členů dané posloupnosti.

35 V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 3$, $d = 4$. Kolik členů této posloupnosti musíme sečíst, aby součet byl větší než 250?

36 V aritmetické posloupnosti známe třetí člen $a_3 = 18$. Určete podmínku pro diferenci tak, aby platilo $s_9 \leqq 150$.

37 Určete, jakou podmínku musí splňovat první člen aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 5$, aby platilo $s_{20} \geqq 1\,000$.

38 Určete součet všech přirozených čísel, která vyhovují nerovnici

$$\left(12x + \frac{2}{3}\right) \cdot 5 - \frac{5x - 15}{3} < 50(x + 10).$$

39 Určete součet všech sudých čísel, která vyhovují nerovnici $x^2 - 53x + 150 \leqq 0$.

40 Vypočítejte součet všech přirozených dvojciferných čísel.

41 Dokažte, že součet prvních n lichých čísel je n^2.

42 V aritmetické posloupnosti určete první člen a diferenci, víte-li, že platí:

a) $a_6 = -\frac{1}{3}a_{16}$, $s_{26} = 104$
b) $s_5 = 60$, $s_{10} = 170$
c) $s_{10} = s_{11} = 165$

43 V aritmetické posloupnosti je první člen $a_1 = 10$ a diference $d = -2$. Vypočítejte člen, který je roven jedné šestině součtu všech členů předchozích.

44 V geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 36$ určete kvocient tak, aby platilo: $s_3 \leqq 252$.

45 V geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 2$ vypočítejte, kolik členů dává součet 186, jestliže poslední sčítanec je $a_n = 96$.

46 V geometrické posloupnosti platí $s_6 = 9s_3$. Určete a_1, q.

47 Součet prvních deseti členů aritmetické posloupnosti je 210, součet následujících deseti členů této posloupnosti je 610. Určete a_1, d.

48 Součet prvních tří členů geometrické posloupnosti je 38, součet následujících tří členů této posloupnosti je $\frac{304}{27}$. Vypočítejte a_1, q, s_6.

49 Určete několik reálných čísel větších než 2 a menších než 42 tak, aby s danými čísly tvořila aritmetickou posloupnost a dále aby platilo:
a) celkový součet čísel původních i vložených je 88
b) součet čísel vložených je 88

50 Mezi čísla 16 a 81 dejte několik čísel tak, aby s danými čísly tvořila geometrickou posloupnost a dále aby platilo:
a) celkový součet čísel původních i vložených je 211
b) součet čísel vložených je -42

51 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathsf{N}$:

a) $4 + 6 + 8 + \ldots + x = 270$
b) $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \ldots + x = 970$
c) $5 + 6 + 15 + 16 + 25 + 26 + \ldots + x = 1\,221$
d) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^x = 1\,023$
e) $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \ldots + \frac{x}{1\,024} = 8\,188$
f) $x + 2x + 3x + 4x + \ldots + 50x = 2\,550$

52 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathsf{N}$:

a) $3 + 6 + 9 + 12 + \ldots + 3x \geqq 999$
b) $15 + 10 + 5 + 0 - 5 - \ldots - x \leqq -100$
c) $2 + 20 + \ldots + 2 \cdot 10^x < 10^6$
d) $\frac{x^2}{1} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{9} + \ldots + \frac{x^2}{3^{10}} \geqq 54\,321$

53 Řešte soustavy nerovnic s neznámou $x \in \mathsf{N}$:

a) $500 \leqq 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + x \leqq 1\,000$
b) $0{,}9 < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^x} < 1$

9.4 Zápisy pomocí $\sum$

54 Zapište pomocí sumy:

a) $5 + 7 + 9 + 11 + \ldots + 27$
b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{64}$
c) $-2 - 5 - 8 - 11 - \ldots - 56$
d) $-1 + 2 - 4 + 8 - 16 + \ldots - 1\,024$

55 Danou sumu rozepište pomocí součtu a součet vypočítejte.

a) $\sum_{i=1}^{16} i$ b) $\sum_{n=2}^{18} (4n - 5)$ c) $\sum_{k=20}^{30} 2k$

56 Dokažte:

a) $\sum_{i=16}^{40} (i + 4) = -20 + \sum_{j=1}^{40} j$ b) $\sum_{i=1}^{24} (3i + 1) = \sum_{k=0}^{26} (3k - 4)$

57 Vypočítejte:

a) $\left(\sum_{i=1}^{20} i \cdot 2\right)^2 + \sum_{i=1}^{20} i \cdot 2^2$ b) $\sqrt{\sum_{i=3}^{10} 13i + \sum_{i=5}^{10} \sqrt{2^i}}$

58 V úlohách a), b), e), f) řešte rovnice s neznámou $x \in \mathsf{N}$, v úlohách c), d) řešte rovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $\sum_{i=1}^{x} i = 1\,275$
b) $\sum_{i=1}^{x} (2i + 3) = 2\,496$
c) $\sum_{i=1}^{200} (x + i) = 10\,100$
d) $\sum_{i=5}^{50} x \cdot i = 55x + 605$
e) $\sum_{i=1}^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{511}{512}$
f) $\sum_{i=1}^{5} 2^{x-i} = 2^{2x-10} - 2^{x-5}$

9.5 Užití geometrické posloupnosti

59 Počátkem roku uložil pan Novák do banky 50 000 Kč. Vklad je úročen 8 % ročně.
a) Kolik korun bude mít na vkladovém účtu za jeden rok? (Daň z úroků neuvažujte.)
b) Kolik korun bude mít k dispozici za jeden rok, bude-li mu odečtena daň z úroků ve výši 15 %?
c) Kolik korun bude mít na účtu po 4 letech? (Daň z úroků neuvažujte.)
d) Kolik korun bude mít na účtu po 4 letech, jestliže na konci každého roku mu bude odečtena daň z úroků ve výši 15 %?

60 Za pět let se počet obyvatel ve městě X zvýšil o 12 %. Jaký byl roční přírůstek? (Počítejte s přesností na desetiny.)

61 Za kolik let klesne hodnota předmětu na méně než desetinu původní ceny, jestliže ročně odepisujeme 18 % ceny předmětu z předchozího roku?

62 Při průchodu skleněnou deskou ztrácí světlo 5 % své intenzity. Kolik desek je třeba dát na sebe, aby se intenzita světla snížila alespoň na polovinu původní hodnoty?

63 Kolik peněz musí pan Dvořák uložit, aby při ročním úročení 8,5 % měl za pět let 25 000 Kč? (Daně z úroků jsou 15 %.)

64 Pan Novotný pravidelně počátkem roku uloží 10 000 Kč do banky na roční úrok 9 %. Kolik peněz bude mít k dispozici za pět let?
a) Daně z úroků neuvažujeme.
b) Počítejte daň z úroků ve výši 15 %.

65 Kuřák prokouří ročně 1 200 Kč. Kolik by uspořil za 50 let, kdyby tuto částku vždy počátkem roku ukládal na vkladní knížku při ročním úročení 8 %? (Počítejte daň z úroků ve výši 15 %.)

66 Pan Starý má půjčku 300 000 Kč na roční úrok 14 %. Jak velká musí být každoroční splátka dluhu koncem roku, chce-li pan Starý splatit dluh za pět let?

67 Pan Nový je schopen každoročně po dobu 10 let na konci roku splácet částku 50 000 Kč. Jak velkou půjčku si může vzít na roční úrok 15 %?

68 Pan Šťastný vyhrál 3 000 000 Kč. Počátkem roku uloží tuto částku na úrok 9 % (daň z úroků je 15 %). Kolik peněz může na konci každého roku vybírat, jestliže
a) vybírá jen úroky,
b) chce, aby mu peníze vystačily na dobu 30 let?

69 Do banky uložíme 10 000 Kč. Kolik peněz budeme mít po 1 roce, jestliže nám úroky ve výši 9 % připisují
a) ročně, b) čtvrtletně, c) měsíčně?
(Zdanění úroků je 15 %.)
Pozn. Úrokovací rok má 360 dnů, každý úrokovací měsíc má 30 dnů.

9.6 Nekonečná geometrická řada

70 Danou nekonečnou geometrickou řadu zapište pomocí sumy.
a) $3+9+27+81+\dots$
b) $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}x+\dots$
c) $2-4+8-16+32-\dots$
d) $\frac{3}{x^3}+\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x}+3+3x+3x^2+\dots$

71 Danou nekonečnou geometrickou řadu, která je zapsána pomocí sumy, rozepište pomocí součtu. Určete první člen a_1 a kvocient q.
a) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^{2i}$ b) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-3}}$ c) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 5(x+1)^{-i}$ d) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} [5(x+1)]^{-i}$

72 U daných nekonečných geometrických řad určete první člen a kvocient. Rozhodněte, které z daných řad jsou konvergentní, které divergentní. V případě, že se jedná o konvergentní řadu, určete její součet.
a) $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\dots$
b) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\frac{1}{24}-\dots$
c) $\sqrt{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\dots$
d) $2+3+\frac{9}{2}+\frac{27}{4}+\dots$
e) $\sqrt{5}-\sqrt{3}+5-\sqrt{15}+5\sqrt{5}-5\sqrt{3}+\dots$
f) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i$
g) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\sqrt{5}\right)^{-i}$
h) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}$
i) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^i\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2-i}$

73 Určete, pro která $x \in \mathsf{R}$ jsou konvergentní dané nekonečné geometrické řady. Potom určete součet příslušné řady.
a) $2+4x+8x^2+16x^3+\dots$
b) $x+4+(x+4)^2+(x+4)^3+\dots$
c) $x+2x+4x+8x+\dots$
d) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1-2x)^i$
e) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x^2+7)^i$
f) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x+4)^{2-3i}$
g) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x^{-2i}$
h) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(2\log x+3)^i$
i) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}2^i\cdot\sin^i x$

74 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:
a) $1+3x+9x^2+\dots=10$
b) $2-4x+8x^2-\dots=1$
c) $1+\log x+(1+\log x)^2+(1+\log x)^3+\dots=-6\log x$
d) $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\dots=-\frac{1}{3}$

75 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:
a) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(4-3x)^i=-\frac{1}{2x}$
b) $(x+1)\cdot\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x+2)^i=\frac{3x+2}{5}$
c) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x+2)^{2i}=\frac{1}{3}$
d) $2\cdot\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2i}}=\frac{x}{x+1}-\frac{x-2}{x-1}$
e) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(3\log_2 x-2)^i=\frac{1}{3}$
f) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1-2\cos^2 x)^i=\operatorname{tg} x$

76 Daná reálná čísla (periodická čísla) zapište zlomkem v základním tvaru:
a) $0{,}\overline{8}$ b) $0{,}\overline{370}$ c) $1{,}0\overline{32}$ d) $25{,}6\overline{7}$

77 Daný zlomek zapište pomocí nekonečné geometrické řady alespoň jedním způsobem:
a) $\frac{1}{1-\frac{3}{4}}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{1-x}$, kde $x \in \mathsf{R} \wedge |x|<1$

78 Vypočítejte:
a) $5\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[8]{5}\cdot\dots$
b) $\dfrac{n+\frac{n}{3}+\frac{n}{9}+\frac{n}{27}+\dots}{1+2+3+\dots+n}$, kde $n \in \mathsf{N}$

79 Součet řady $a+aq+aq^2+aq^3+\dots$ je 20.
Součet řady $a^2+a^2q^2+a^2q^4+a^2q^6+a^2q^8+\dots$ je 80. Určete čísla $a, q \in \mathsf{R}$.

Slovní úlohy

80 „Nekonečná“ spirála se skládá z polokružnic, poloměr první polokružnice je 6 cm, poloměr každé další polokružnice je o $\frac{1}{3}$ menší než poloměr polokružnice předcházející. Vypočítejte délku spirály.

81 „Nekonečná“ spirála se skládá z polokružnic, poloměr první polokružnice je 6 cm, poloměr každé další polokružnice je třikrát menší než poloměr polokružnice předcházející. Vypočítejte délku spirály.

82 Vypočítejte délku „nekonečné“ spirály, která vznikne spojením bodů A_1, A_2, A_3, A_4, … atd. čtvrtkružnicemi. Střed první čtvrtkružnice je v bodě $S_1[0;0]$, krajní body jsou $A_1[-4;0]$, $A_2[0;4]$. Střed druhé čtvrtkružnice je v bodě $S_2[0;2]$, krajní body jsou $A_2[0;4]$, $A_3[2;2]$. Střed třetí čtvrtkružnice je v bodě $S_3[1;2]$, krajní body jsou $A_3[2;2]$, $A_4[1;1]$. Střed čtvrté čtvrtkružnice je v bodě $S_4[1;1\frac{1}{2}]$, krajní body jsou $A_4[1;1]$, $A_5[\frac{1}{2};1\frac{1}{2}]$. Tento postup stále opakujeme.

83 Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry, která se skládá z úseček B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5, …. Souřadnice krajních bodů úseček jsou $B_1[1;0]$, $B_2[1;1]$, $B_3[0;1]$, $B_4[0;\frac{1}{2}]$, $B_5[\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$, $B_6[\frac{1}{2};\frac{3}{4}]$, $B_7[\frac{1}{4};\frac{3}{4}]$, $B_8[\frac{1}{4};\frac{5}{8}]$, ….

84 V daném rovnostranném trojúhelníku ABC o straně $a = 6\,\text{cm}$ sestrojte kolmici z vrcholu C na stranu AB, patu kolmice označte B_1. Bodem B_1 veďte rovnoběžku se stranou AC, průsečík této rovnoběžky se stranou BC označte C_1. Patu kolmice z bodu C_1 na stranu AB označte B_2, průsečík strany BC a rovnoběžky se stranou AC vedené bodem B_2 označte C_2. Patu kolmice z bodu C_2 na stranu AB označte B_3, průsečík strany BC a rovnoběžky s AC vedené bodem B_3 označte C_3. Tento postup stále opakujte. Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry $ACB_1C_1B_2C_2B_3C_3\ldots$, která vznikne uvedeným způsobem.

85 Ve čtverci $ABCD$, $|AB| = 6\,\text{cm}$ postupně vyznačte „nekonečnou“ lomenou čáru spojením následujících bodů: A, B, S_1(střed BC), S_2(střed AC), S_3(střed AB), S_4(střed BS_1), S_5(střed S_1S_3), S_6(střed BS_3), S_7 (střed BS_4), S_8(střed S_4S_6), S_9(střed S_6B) atd. Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry $ABS_1S_2S_3S_4\ldots$.

86 V pravoúhlé soustavě souřadnic narýsujte přímky o_1: $y = x$, o_2: $y = -x$. „Nekonečnou“ lomenou čáru $D_1D_2D_3D_4D_5D_6D_7\ldots$ sestrojte tak, že z bodu $D_1[4;0]$ povedete kolmici na přímku o_1, patu kolmice označte D_2. Z bodu D_2 sestrojte kolmici na osu y, patu kolmice označte D_3. Patu kolmice vedené z bodu D_3 na přímku o_2 označte D_4. Patu kolmice vedené z bodu D_4 na osu x označte D_5. Patu kolmice vedené z bodu D_5 na přímku o_1 označte D_6 atd. Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry $D_1D_2D_3D_4D_5D_6D_7\ldots$.

87 Do pravoúhlého trojúhelníku ABC ($a = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $|\sphericalangle ACB| = 90°$) je vepsána kružnice k_1. Tečna ke kružnici k_1 rovnoběžná se stranou BC protíná stranu AB v bodě B_1, stranu AC v bodě C_1. Do trojúhelníku AB_1C_1 je vepsána kružnice k_2, tečna ke kružnici k_2 rovnoběžná s B_1C_1 protíná strany AB, AC v bodech B_2, C_2. Do trojúhelníku AB_2C_2 je vepsána kružnice k_3, tečna ke kružnici k_3 rovnoběžná s B_2C_2 protíná AB, AC v bodech B_3, C_3. Tento postup stále opakujte. Vypočítejte součet obsahů kruhů k_1, k_2, k_3, k_4, ….

88 Sestavte následujícím způsobem „nekonečnou“ šipku. V daném rovnostranném trojúhelníku ABC ($a = 6\,\text{cm}$) sestrojte body K_1, L_1 na straně AB tak, aby platilo $|AK_1| = |K_1L_1| = |L_1B|$. Sestrojte obdélník $K_1L_1L_2K_2$ ($|K_1K_2| = 2|K_1L_1|$) tak, aby s trojúhelníkem ABC měl společnou jen úsečku K_1L_1. Nyní na straně K_2L_2 sestrojte body K_3, L_3 tak, aby platilo $|K_2K_3| = |K_3L_3| = |L_3L_2|$. Sestrojte další obdélník $K_3L_3L_4K_4$ ($|K_3K_4| = 2|K_3L_3|$) tak, aby s obdélníkem $K_1L_1L_2K_2$ měl společnou jen úsečku K_3L_3. Tento postup při konstrukci dalších obdélníků neustále opakujte. Vypočítejte obsah plochy „nekonečné“ šipky, kterou tvoří daný trojúhelník a obdélníky sestrojené uvedeným způsobem.

89 V krychli $ABCDEFGH$ o hraně $a = 6\,\text{cm}$ označte postupně A_1, B_1, C_1, D_1 středy hran EF, FG, GH, HE. Čtverec $A_1B_1C_1D_1$ tvoří podstavu další krychle $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$, která je postavená na původní krychli. Označte postupně A_2, B_2, C_2, D_2 středy hran E_1F_1, F_1G_1, G_1H_1, H_1E_1. Čtverec $A_2B_2C_2D_2$ tvoří podstavu další krychle $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$, která je postavená na předchozí krychli. Tento postup stále opakujte. Vypočítejte objem „nekonečné“ pyramidy, která takto vznikne.

90 V kouli se středem S a poloměrem 6 cm vyznačte průměr AB. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABS_1. Sestrojte kouli se středem S_1 tak, aby s koulí původní měla vnější dotyk. V této kouli vyznačte průměr A_1B_1 rovnoběžný s AB a sestrojte další rovnostranný trojúhelník $A_1B_1S_2$ tak, aby s trojúhelníkem ABS_1 měl společný jen bod S_1 a trojúhelníky ABS_1 a $A_1B_1S_2$ ležely v téže rovině. Opět sestrojte kouli se středem S_2 tak, aby s předchozí koulí měla vnější dotyk. V této nové kouli vyznačte průměr A_2B_2 rovnoběžný s průměrem A_1B_1, sestrojte rovnostranný trojúhelník $A_2B_2S_3$ tak, aby s trojúhelníkem $A_1B_1S_2$ měl společný jen bod S_2 a trojúhelníky $A_1B_1S_2$ a $A_2B_2S_3$ ležely v téže rovině. Tento postup stále opakujte. Vypočítejte objem „nekonečného sněhuláka“ složeného z koulí, které umístíme popsaným způsobem.

10 Geometrie — konstrukční úlohy

10.1 Základní typy bodových množin

1 Úsečka AB má délku 6 cm. Narýsujte následující množiny bodů v rovině ϱ

a) $M_1 = \{X \in \varrho\colon |AX| = 2\,\text{cm}\}$
b) $M_2 = \{X \in \varrho\colon |AX| \leqq 4\,\text{cm} \wedge |BX| \leqq 4\,\text{cm}\}$
c) $M_3 = \{X \in \varrho;\ |AX| = |BX|\}$
d) $M_4 = \{X \in \varrho;\ |AX| \leqq |BX|\}$

2 Úsečka AB má délku 6 cm. Narýsujte následující množiny bodů v rovině ϱ

a) $G_1 = \{X \in \varrho; |\sphericalangle ABX| = 90°\}$
b) $G_2 = \{X \in \varrho; |\sphericalangle AXB| = 90°\}$
c) $G_3 = \{X \in \varrho; |\sphericalangle ABX| = 60°\}$
d) $G_4 = \{X \in \varrho; |\sphericalangle AXB| = 60°\}$
e) $G_5 = \{X \in \varrho; |\sphericalangle AXB| = 150°\}$
f) $G_6 = \{X \in \varrho; |\sphericalangle AXB| \geqq 45°\}$
g) $G_7 = \{X \in \varrho; |\sphericalangle AXB| < 120°\}$
h) $G_8 = \{X \in \varrho\colon 135° \geqq |\sphericalangle AXB| \geqq 45°\}$

3 Je dána přímka p a číslo $m \in \mathrm{R}^+$. Nakreslete $\{X \in \varrho;\ |Xp| = m\}$.

4 Jsou dány dvě přímky p, q. Nakreslete $\{X \in \varrho;\ |Xp| = |Xq|\}$. Uvažujte:

a) $p \parallel q$
b) p, q jsou různoběžky

10.2 Tečna z bodu ke kružnici

5 Je dána kružnice $k(S; 3\,\text{cm})$ a bod M, $|SM| = 7\,\text{cm}$. Sestrojte tečny z bodu M ke kružnici k. Vyznačte body dotyku.

6 Je dána kružnice $k(S; 4\,\text{cm})$ a bod M, $|SM| = 8\,\text{cm}$. Bodem M veďte všechny přímky p tak, aby délka tětivy, kterou přímka p vytíná na kružnici k, byla 5 cm.

10.3 Konstrukce kružnic požadovaných vlastností

7 Sestrojte všechny kružnice o poloměru 1,5 cm, které se dotýkají dané kružnice $k(O; 4\,\text{cm})$ a procházejí daným bodem M, pro který platí:

a) $|OM| = 3\,\text{cm}$
b) $|OM| = 1\,\text{cm}$
c) $|OM| = 0{,}5\,\text{cm}$
d) $|OM| = 5\,\text{cm}$

8 Sestrojte všechny kružnice o poloměru 1,5 cm, které se dotýkají dané kružnice $k(O; 4\,\text{cm})$ a přímky p, pro kterou platí:

a) $|Op| = 3\,\text{cm}$
b) $|Op| = 0{,}5\,\text{cm}$

9 Jsou dány dvě rovnoběžné přímky p_1, p_2, $|p_1p_2| = 4\,\text{cm}$ a bod M, pro který platí $|Mp_1| = 1\,\text{cm}$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají daných přímek p_1, p_2 a procházejí bodem M.

10 Jsou dány kružnice $k_1(O_1; 5\,\text{cm})$, $k_2(O_2; 2\,\text{cm})$. Sestrojte všechny kružnice o poloměru 1 cm, které se dotýkají těchto dvou kružnic. Vzdálenost středů daných dvou kružnic je

a) $|O_1O_2| = 6\,\text{cm}$,
b) $|O_1O_2| = 8\,\text{cm}$.

11 Jsou dány kružnice $k_1(O_1; 4\,\text{cm})$, $k_2(O_2; 2\,\text{cm})$. Sestrojte všechny kružnice o poloměru 3 cm, které se dotýkají těchto dvou kružnic. Vzdálenost středů daných dvou kružnic je

a) $|O_1O_2| = 5{,}5\,\text{cm}$,
b) $|O_1O_2| = 7{,}5\,\text{cm}$.

12 Jsou dány soustředné kružnice $k_1(O; 5\,\text{cm})$, $k_2(O; 2\,\text{cm})$ a přímka p, pro kterou platí $|Op| = 3\,\text{cm}$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnic k_1, k_2 a přímky p.

13 Jsou dány soustředné kružnice $k_1(O; 5\,\text{cm})$, $k_2(O; 2\,\text{cm})$ a bod M, pro který platí $|OM| = 4\,\text{cm}$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnic k_1, k_2 a prochází bodem M.

10.4 Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků

Polohové úlohy

14 Je dána úsečka BS_1, $|BS_1| = 6\,\text{cm}$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je úsečka BS_1 těžnicí t_b a pro které dále platí:

a) $a = 45°$, $b = 5\,\text{cm}$
b) $a = 4\,\text{cm}$, $t_a = 7\,\text{cm}$

15 Je dána úsečka CC_1, $|CC_1| = 5\,\text{cm}$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je úsečka CC_1 výškou v_c a pro které dále platí:

a) $\beta = 120°$, $c = 3\,\text{cm}$
b) $\alpha = 60°$, $t_c = 5{,}5\,\text{cm}$

16 Je dána úsečka AB, $|AB| = 6\,\text{cm}$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je úsečka AB stranou c a pro které dále platí:

a) $v_c = 2\,\text{cm}$, $r = 4\,\text{cm}$
b) $v_c = 3\,\text{cm}$, $t_c = 4\,\text{cm}$

Nepolohové úlohy

Ve všech následujících úlohách jsou délky úseček uvedeny v centimetrech.

Značení: r je poloměr kružnice trojúhelníku opsané, ϱ je poloměr kružnice trojúhelníku vepsané.

17 Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC ($|\sphericalangle ACB| = 90°$), znáte-li:

a) $c = 6$, $v_c = 2{,}5$
b) $c = 6$, $t_c = 4$
c) $a = 3$, $\alpha = 60°$
d) $t_c = 2{,}5$, $\alpha = 60°$
e) $a = 4$, $r = 3$
f) $c = 4$, $r = 3$
g) $a = 6$, $\varrho = 2$
h) $\alpha = 60°$, $\varrho = 1{,}5$

18 Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, znáte-li:

a) $c = 6$, $a = 4{,}5$, $\alpha = 45°$
b) $b = 8$, $t_b = 2{,}5$, $\gamma = 30°$
c) $c = 6$, $a = 3$, $t_b = 4$
d) $c = 3$, $a = 5$, $t_a = 4{,}5$
e) $c = 5$, $t_a = 6$, $t_b = 3$
f) $c = 7$, $t_b = 6$, $t_c = 4{,}5$
g) $t_c = 4$, $t_a = 6$, $v_c = 3{,}5$
h) $t_a = 6$, $t_b = 6{,}3$, $t_c = 5{,}4$
i) $c = 7$, $v_a = 6{,}5$, $\alpha = 30°$
j) $c = 5$, $a = 6$, $v_a = 4{,}5$
k) $c = 4$, $v_c = 3$, $t_c = 4{,}5$
l) $c = 4$, $v_a = 3$, $t_a = 3{,}5$
m) $c = 5$, $v_a = 4$, $t_c = 3{,}5$
n) $c = 5$, $v_a = 4$, $v_c = 3$
o) $c = 3{,}5$, $v_c = 3$, $t_a = 2$
p) $c = 6$, $v_a = 3{,}5$, $v_b = 5{,}5$
q) $c = 8$, $v_c = 1{,}5$, $\gamma = 120°$
r) $c = 8$, $t_c = 4{,}7$, $\gamma = 75°$
s) $t_a = 7{,}5$, $t_c = 6$, $\alpha = 45°$
t) $v_c = 4$, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$
u) $t_c = 4$, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$
v) $t_c = 4$, $\alpha = 45°$, $\gamma = 60°$

19 Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, znáte-li:

a) $r = 4$, $v_c = 2$, $c = 7{,}5$
b) $r = 4$, $v_a = 3$, $c = 7$
c) $r = 4$, $t_c = 4{,}5$, $c = 7{,}5$
d) $r = 4$, $v_a = 5$, $\gamma = 45°$

40 Je dána přímka p, kružnice k a bod M. Vzájemnou polohu p, k, M volte stejně jako v úloze 37.
Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC tak, aby platilo $C \in k \wedge B \in p \wedge A = M$.

41 Je dána přímka p, kružnice k a bod M. Vzájemnou polohu p, k, M volte stejně jako v úloze 37.
Sestrojte všechny rovnoběžníky $MOKL$ tak, aby platilo $K \in k \wedge L \in p$.

42 Je dána přímka p, kružnice k a body P, M. Vzájemnou polohu p, k, P, M volte stejně jako v úloze 37.
Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky ABC se základnou AB tak, aby platilo $B \in k \wedge A \in p \wedge v_c \subset \leftrightarrow PM \wedge C = M$.

43 Je dán čtverec $KLMN$, $|KL| = 6\,\text{cm}$. Vně čtverce sestrojte bod A tak, aby platilo $|AM| = 3\,\text{cm}$, $|AL| = 4\,\text{cm}$.
Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC tak, aby vrcholy B, C ležely na obvodu čtverce $KLMN$.

44 Kružnice $k_1(O_1; 5\,\text{cm})$, $k_2(O_2; 3\,\text{cm})$, $|O_1O_2| = 4\,\text{cm}$ se protínají ve dvou bodech. Označte C jeden z těchto průsečíků. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky ABC se základnou AB tak, aby platilo
$A \in k_1 \wedge B \in k_2 \wedge |\sphericalangle ACB| = 120°$.

45 Kružnice $k_1(O_1; 4\,\text{cm})$, $k_2(O_2; 2{,}5\,\text{cm})$, $|O_1O_2| = 3\,\text{cm}$ se protínají ve dvou bodech. Označte T jeden z těchto průsečíků. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC tak, aby platilo $A \in k_1$, $B \in k_2$ a bod T byl těžiště trojúhelníku ABC.

46 Je dána kružnice $k(O; 4\,\text{cm})$ a bod A. Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k, které mají délku 6 cm a pro které platí, že přímka XY prochází daným bodem A.

a) $|OA| = 3\,\text{cm}$ b) $|OA| = 5{,}5\,\text{cm}$

47 Je dán rovnostranný trojúhelník ABC ($a = 6\,\text{cm}$) a kružnice $k(O; 2{,}5\,\text{cm})$. Střed O zvolte tak, aby platilo $|CO| = |BO| = 5\,\text{cm}$, $k \cap \triangle ABC = \emptyset$. Sestrojte všechny přímky p rovnoběžné se stranou AB tak, aby tětiva, kterou kružnice k vytíná na přímce p, byla stejná jako úsečka XY, kterou přímka p vytíná na trojúhelníku ABC, tj. $X \in p \cap AC$, $Y \in p \cap BC$.

Užití středové a osové souměrnosti ke konstrukci trojúhelníků

48 Je dána úsečka CS_1, $|CS_1| = 3\,\text{cm}$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je úsečka CS_1 těžnicí t_c a pro které dále platí:

a) $a = 3{,}5\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$
b) $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$
c) $b = 8\,\text{cm}$, $\beta = 30°$
d) $\alpha = 30°$, $t_b = 7{,}5\,\text{cm}$

49 Sestrojte všechny trojúhelníky ABC (délky uvedeny v cm), znáte-li:

a) $a + b = 10$, $c = 5$, $v_a = 3$
b) $b + c = 10$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$
c) $a + b + c = 12$, $\alpha = 45°$, $\beta = 75°$
d) $a + b + c = 12$, $v_c = 3$, $\gamma = 60°$

10.7 Skládání osových souměrností

50 Zvolte soustavu souřadnic Oxy. V dané soustavě souřadnic narýsujte trojúhelník ABC, $A[0;0]$, $B[3;-2]$, $C[0;-2]$. V jednotlivých případech narýsujte trojúhelník $A_1B_1C_1$, který je obrazem trojúhelníku ABC v osové souměrnosti dané osou o_1, potom narýsujte trojúhelník $A_2B_2C_2$, který je obrazem trojúhelníku $A_1B_1C_1$ v osové souměrnosti dané osou o_2. Najděte shodné zobrazení, které zobrazuje trojúhelník ABC na trojúhelník $A_2B_2C_2$.

a) $o_1\colon x = 1$, $o_2\colon x = 3$
b) $o_1\colon x = 3$, $o_2\colon x = 1$
c) $o_1\colon x = 1$, $o_2\colon y = 2$
d) $o_1\colon x = 1$, $o_2\colon y = x$
e) $o_1\colon y = x - 2$, $o_2\colon y = 0$
f) $o_1\colon y = x + 1$, $o_2\colon y = x + 1$

10.8 Hledání minimálního součtu úseček (Hledání dráhy kulečníkové koule)

51 Je dán obdélník $ABCD$, $|AB| = 6\,\text{cm}$, $|BC| = 4\,\text{cm}$ a uvnitř obdélníku dva body K, L tak, že platí $|AK| = 6\,\text{cm}$, $|BK| = 3{,}5\,\text{cm}$, $|AL| = 2\,\text{cm}$, $|BL| = 4{,}5\,\text{cm}$.

a) Na úsečce AB najděte bod X tak, aby součet vzdáleností $|KX| + |LX|$ byl minimální.
b) Najděte dva body X, Y tak, aby platilo $X \in AB$, $Y \in BC$ a součet vzdáleností $|LX| + |XY| + |KY|$ byl minimální.
c) Najděte dva body X, Y tak, aby platilo $X \in AB$, $Y \in CD$ a součet vzdáleností $|LX| + |XY| + |KY|$ byl minimální.

52 Na kulečníkovém stole leží dvě koule, červená a bílá. Červená leží ve středu stolu, bílá v jedné čtvrtině úhlopříčky stolu. (Kouli považujte za bod.)

a) Určete dráhu červené koule tak, aby se po jednom odrazu od některé stěny stolu srazila s bílou koulí.
b) Určete dráhu červené koule tak, aby se po odrazu od dvou sousedních stěn stolu srazila s bílou koulí.
c) Určete dráhu červené koule tak, aby se po odrazu od dvou protilehlých stěn stolu srazila s bílou koulí.

10.9 Stejnolehlost

Obraz útvaru

53 Je dán trojúhelník ABC ($a = 4\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$). Vně trojúhelníku ABC sestrojte bod S tak, aby platilo $|AS| = 3\,\text{cm}$, $|CS| = 4\,\text{cm}$. Narýsujte obraz trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem:

a) $\varkappa = \frac{3}{2}$ b) $\varkappa = \frac{1}{3}$ c) $\varkappa = -\frac{1}{2}$ d) $\varkappa = -1$

54 Je dán čtverec $KLMN$ ($a = 4\,\text{cm}$). Označte S střed čtverce. Nakreslete obraz čtverce ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem:

a) $\varkappa = \frac{1}{2}$ b) $\varkappa = 2$ c) $\varkappa = -\frac{3}{4}$ d) $\varkappa = -2$

55 Sestrojte trojúhelník ABC ($a = 6\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$, $c = 8\,\text{cm}$). Narýsujte těžiště T trojúhelníku ABC. Sestrojte obraz trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem $\varkappa = -\frac{1}{2}$.

56 Je dána kružnice $k(S; 4\,\text{cm})$ a bod $M \in k$. Narýsujte obraz kružnice k ve stejnolehlosti se středem v bodě M a koeficientem:

a) $\varkappa = \frac{3}{4}$ b) $\varkappa = \frac{1}{2}$ c) $\varkappa = \frac{1}{4}$ d) $\varkappa = -\frac{1}{2}$

Středy stejnolehlosti dvou úseček

57 Narýsujte středy stejnolehlosti dvou rovnoběžných úseček AB, CD v případě, že délky úseček AB a CD

a) nejsou stejné, b) jsou stejné.

58 Narýsujte středy stejnolehlosti dvou úseček KL a MN, které leží na téže přímce. Úsečky KL a MN

a) nemají žádný společný bod, b) mají společnou úsečku ML.

Středy stejnolehlosti dvou kružnic

59 Narýsujte středy stejnolehlosti dvou kružnic k_1, k_2, je-li dáno:

a) $k_1(O_1; 3)$, $k_2(O_2; 1)$, $|O_1O_2| = 6$
b) $k_1(O_1; 3)$, $k_2(O_2; 2)$, $|O_1O_2| = 3{,}5$
c) $k_1(O_1; 3)$, $k_2(O_2; 2)$, $|O_1O_2| = 1$
d) $k_1(O_1; 3)$, $k_2(O_2; 2)$, $|O_1O_2| = 0{,}5$
e) $k_1(O_1; 3)$, $k_2(O_2; 2)$, $|O_1O_2| = 0$
f) $k_1(O_1; 3)$, $k_2(O_2; 3)$, $|O_1O_2| = 7$
g) $k_1(O_1; 3)$, $k_2(O_2; 3)$, $|O_1O_2| = 6$
h) $k_1(O_1; 3)$, $k_2(O_2; 3)$, $|O_1O_2| = 5$

60 Jsou dány dvě kružnice $k_1(O_1; 4\text{cm})$, $k_2(O_2; 1\,\text{cm})$, $|O_1O_2| = 7\,\text{cm}$. Narýsujte středy stejnolehlosti S_1, S_2 daných kružnic. Označte S_1 vnější střed stejnolehlosti, S_2 vnitřní střed stejnolehlosti. Potom určete koeficienty stejnolehlosti v následujících případech:

a) střed stejnolehlosti je S_1 a stejnolehlost zobrazuje k_1 na k_2
b) střed stejnolehlosti je S_1 a stejnolehlost zobrazuje k_2 na k_1
c) střed stejnolehlosti je S_2 a stejnolehlost zobrazuje k_1 na k_2
d) střed stejnolehlosti je S_2 a stejnolehlost zobrazuje k_2 na k_1

Užití stejnolehlosti dvou kružnic v konstrukčních úlohách

61 Narýsujte společné tečny daných dvou kružnic.

a) $k_1(O_1; 3{,}5\,\text{cm})$, $k_2(O_2; 1{,}5\,\text{cm})$, $|O_1O_2| = 6{,}5\,\text{cm}$
b) $k_1(O_1; 3{,}5\,\text{cm})$, $k_2(O_2; 1{,}5\,\text{cm})$, $|O_1O_2| = 5\,\text{cm}$

62 Jsou dány dvě kružnice $k_1(O_1; 3{,}5\,\text{cm})$, $k_2(O_2; 2{,}5\,\text{cm})$, $|O_1O_2| = 7\,\text{cm}$. Narýsujte všechny přímky p tak, aby obě kružnice k_1 i k_2 vytínaly na přímce p stejně dlouhé tětivy délky 4 cm.

63 Je dán úhel $\sphericalangle AVB$, $|\sphericalangle AVB| = 45°$ a uvnitř úhlu bod M tak, že vzdálenost M od $\mapsto VB$ je 1,5 cm, vzdálenost M od $\mapsto VA$ je 3 cm. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají ramen úhlu a procházejí bodem M.

64 Je dán úhel AVB, $|\sphericalangle AVB| = 45°$, a bod M, který leží na ose úhlu AVB a pro který platí $|VM| = 5\,\text{cm}$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají ramen úhlu a procházejí bodem M.

65 Je dána kružnice $k(O; 2{,}5\,\text{cm})$ a přímka p, $|Op| = 4\,\text{cm}$. Na přímce p je dán bod T tak, že $|OT| = 4{,}5\,\text{cm}$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnice k a přímky p v bodě T.

Konstrukce úsečky dělené daným bodem v určitém poměru

66 Je dán úhel AVB, $|\sphericalangle AVB| = 30°$. Uvnitř úhlu sestrojte bod M, pro který platí, že vzdálenost bodu M od $\mapsto AV$ je 1,5 cm, vzdálenost bodu M od $\mapsto BV$ je 2 cm. Sestrojte všechny úsečky XY tak, aby bod $X \in \mapsto AV$, bod $Y \in \mapsto VB$ a bod M dělil úsečku XY v poměru $1:2$.

67 Je dán čtverec $ABCD$ ($|AB| = 5\,\text{cm}$). Uvnitř čtverce zvolte bod M, pro který platí: $|CM| = 4\,\text{cm}$, $|BM| = 1{,}5\,\text{cm}$. Sestrojte všechny úsečky XY tak, aby body X, Y ležely na obvodu čtverce a aby dále platilo:

a) $|MX| : |MY| = 3 : 2$ b) $|MX| : |XY| = 1 : 3$

68 Je dána kružnice $k(O; 4{,}5\,\text{cm})$ a bod M, $|OM| = 3{,}6\,\text{cm}$. Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k, které procházejí bodem M tak, že bod M dělí tětivu XY v poměru $3:1$.

69 Je dána kružnice $k(O; 4{,}5\,\text{cm})$ a bod M, $|OM| = 10\,\text{cm}$. Sestrojte přímku procházející bodem M tak, aby kružnici k protínala v bodech X, Y a aby dále platilo:

a) bod X leží mezi body M, Y a platí $|MX| : |XY| = 3 : 1$
b) bod Y leží mezi body M, X a platí $|MX| : |XY| = 3 : 1$

70 Je dána kružnice $k(O; 4\,\text{cm})$ a bod M, $|OM| = 9\,\text{cm}$. Sestrojte přímku procházející bodem M tak, aby kružnici k protínala v bodech X, Y a aby dále platilo $|XY| = |XM|$.

71 Kružnice $k_1(O_1; 4\,\text{cm})$, $k_2(O_2; 2{,}5\,\text{cm})$, $|O_1O_2| = 3\,\text{cm}$ se protínají ve dvou bodech. Označte M jeden z těchto průsečíků. Sestrojte všechny úsečky XY, které procházejí bodem M a pro které dále platí, že $X \in k_1$, $Y \in k_2$ a bod M dělí úsečku XY v poměru $2:1$.

Užití stejnolehlosti při konstrukci trojúhelníků

72 Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, znáte-li:

a) $a : b = 4 : 5$, $\gamma = 60°$, $v_c = 3\,\text{cm}$
b) $b : c = 7 : 6$, $\alpha = 45°$, $v_c = 3\,\text{cm}$
c) $\alpha = 75°$, $\gamma = 45°$, $\varrho = 2\,\text{cm}$
d) $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$, $r = 4\,\text{cm}$
e) $a : b : c = 7 : 3 : 5$, $v_c = 4\,\text{cm}$
f) $a : b : c = 4 : 3 : 5$, $r = 4\,\text{cm}$
g) $a : b : c = 5 : 6 : 5$, $\varrho = 2\,\text{cm}$
h) $\alpha = 45°$, $v_b = 4\,\text{cm}$, $|AB_1| : |B_1C| = 3 : 4$, kde B_1 je pata výšky z B na AC.

Užití stejnolehlosti k vepisování útvarů

73 Do trojúhelníku ABC ($a = 5\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 7\,\text{cm}$) vepište čtverec $KLMN$ tak, aby platilo $KL \subset AB \wedge M \in BC \wedge N \in AC$.

74 V kružnici $k(S; 4\,\text{cm})$ vyznačte kruhovou úseč o výšce 2,5 cm. Krajní body základny úseče označte A, B. Potom do kruhové úseče vepište čtverec $KLMN$ tak, aby platilo $KL \subset AB \wedge M \in k \wedge N \in k$.

75 V kružnici $k(S; 8\,\text{cm})$ vyznačte dva poloměry SA, SB, které svírají úhel $\alpha = 45°$. Potom do kruhové výseče ASB, kterou takto dostanete, vepište obdélník $KLMN$ tak, aby platilo:
$K \in BS \wedge L \in AS \wedge M \in k \wedge N \in k \wedge |LM| = 2|KL|$

Konstrukce na omezené nákresně

76 Jsou dány dvě přímky a, b, jejichž průsečík P leží mimo papír, na kterém rýsujeme. Dále je dán bod M. Narýsujte přímku PM, tj. spojte bod M s nedostupným průsečíkem P přímek a, b.

77 Je dán úhel AVB. Vrchol V leží mimo papír, na kterém rýsujeme. Narýsujte osu úhlu AVB.

78 Je dán trojúhelník ABC. Vrchol C leží mimo papír, na kterém rýsujeme. Narýsujte kolmici bodem C na stranu AB.

10.10 Skládání rotace a stejnolehlosti

79 Je dána přímka p, kružnice k a bod M. Vzájemnou polohu p, k, M zvolte jako v úloze 37. Sestrojte všechny obdélníky $ABCD$ tak, aby platilo: $A = M \wedge B \in p \wedge D \in k \wedge |AB| : |BC| = 2 : 1$

80 Je dána přímka p, kružnice k a bod M. Vzájemnou polohu p, k, M zvolte jako v úloze 37. Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ tak, aby platilo: $A \in p \wedge$ $\wedge\, D \in k \wedge C = M$

11 Geometrie — výpočty

11.1 Trojúhelníková nerovnost

1 V trojúhelníku ABC jsou dány strany $a = 6\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$. Určete, pro které hodnoty strany $c \in \mathrm{R}^+$ existuje trojúhelník ABC.

2 Víte, že v rovnoramenném trojúhelníku má rameno délku 10 cm. Jakou délku může mít jeho základna?

3 V trojúhelníku ABC znáte těžnice $t_a = 9\,\text{cm}$, $t_b = 6\,\text{cm}$. Jakých hodnot může nabývat délka strany a?

4 Dokažte, že v každém ostroúhlém trojúhelníku je každá z výšek menší než poloviční obvod trojúhelníku.

5 Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC platí $t_c < \frac{1}{2}(a + b)$.

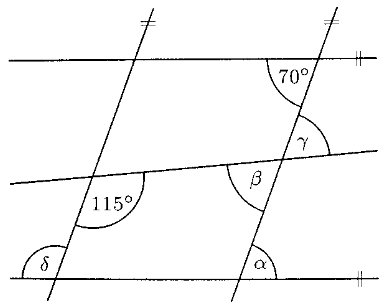
6 Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC platí $\frac{3}{4}o < t_a + t_b + t_c < o$, kde o je obvod trojúhelníku ABC.

7 Je možné sestrojit trojúhelník, jehož těžnice mají délky 2 cm, 4 cm a 5 cm?

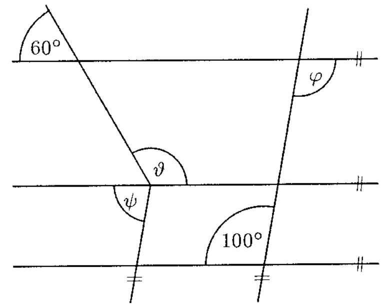
8 Je možné sestrojit trojúhelník, jehož výšky jsou 2 cm, 4 cm a 5 cm?

11.2 Úhly střídavé, souhlasné, vedlejší, vrcholové

9



a) Dopočítejte úhly α, β, γ, δ.



b) Dopočítejte úhly φ, ψ, ϑ.

11.3 Úhly v trojúhelníku

10 Dokažte, že součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°.

11 Je dán trojúhelník ABC. Vrcholem C veďte rovnoběžku s osou úhlu β, její průsečík s přímkou AB označte M. Dokažte, že trojúhelník MBC je rovnoramenný.

12 Vypočítejte úhly, které svírají výšky v rovnostranném trojúhelníku.

13 Průsečík os úhlů α, β v trojúhelníku ABC označte O. Dokažte, že $|\sphericalangle AOB| = 90° + \frac{1}{2}\gamma$.

14 V rovnostranném trojúhelníku ABC sestrojte body K, L, M tak, aby platilo $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in AC$, $|AK| = |BL| = |CM|$. Dokažte, že i trojúhelník KLM je rovnostranný.

15 V dané kružnici k sestrojte dva libovolné průměry AB, CD. Označte α úhel, který svírají přímky AB, CD. Dokažte, že tečny ke kružnici k v krajních bodech daných průměrů svírají také úhel α.

16 Dokažte, že v každém pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C je osa pravého úhlu zároveň i osou mezi v_c, t_c.

11.4 Shodnost trojúhelníků

17 Nad stranami AB, AC trojúhelníku ABC jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ABH a ACK tak, že $\triangle ABH \cap \triangle ABC = AB$, $\triangle ACK \cap \triangle ABC = AC$. Dokažte, že $|CH| = |BK|$.

18 Nad stranami AB, BC trojúhelníku ABC jsou sestrojeny čtverce $ABPQ$ a $BCRT$ tak, že s daným trojúhelníkem mají společné jen úsečky AB a BC. Dokažte, že $|CP| = |AT|$.

19 Vně rovnoběžníku $ABCD$ sestrojte čtverce $ABMN$ a $BCRS$. Dokažte:

a) $\triangle MBS \cong \triangle DCB$ b) $\triangle DAN \cong \triangle SBA$

20 Narýsujte konvexní úhel $\sphericalangle AVB$ a jeho osu označte o. Zvolte libovolný bod M na ose o. Sestrojte kolmici k_1 bodem M na $\mapsto VA$, označte body X_1, X_2 tak, aby $X_1 \in \mapsto VA \cap k_1$, $X_2 \in \mapsto VB \cap k_1$. Sestrojte kolmici k_2 bodem M na $\mapsto VB$, označte body Y_1, Y_2 tak, aby $Y_1 \in \mapsto VA \cap k_2$, $Y_2 \in \mapsto VB \cap k_2$. Dokažte:

a) $\triangle MX_1V \cong \triangle MY_2V$ b) $\triangle MX_1Y_1 \cong \triangle MY_2X_2$

11.5 Podobnost trojúhelníků

21 V lichoběžníku $ABCD$ označte S průsečík úhlopříček AC a BD. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé:

a) $\triangle ABS \sim \triangle CDS$ b) $\triangle ABS \sim \triangle DCS$ c) $\triangle SAB \sim \triangle SCD$

22 V trojúhelníku ABC narýsujte všechny tři střední příčky. $\triangle ABC$ je tak rozdělen na čtyři trojúhelníky, které jsou podobné s $\triangle ABC$. Dokažte a podobnost zapište.

23 V ostroúhlém trojúhelníku ABC veďte kolmici z bodu B na stranu AC, její patu označte B_1. Patu kolmice z bodu A na stranu BC označte A_1. Dokažte, že $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$.

24 Do rovnostranného trojúhelníku ABC o straně délky a je vepsán čtverec. Vypočítejte délku strany čtverce.

25 Do rovnostranného trojúhelníku ABC o straně délky a je vepsán obdélník, jehož strany jsou v poměru 2 : 1. Vypočítejte jeho rozměry.

26 Dané kružnici vepište a opište pravidelný šestiúhelník. Dokažte, že oba šestiúhelníky jsou podobné a vypočítejte poměr podobnosti.

27 Jsou dány kružnice $k_1(O_1; 4\,\text{cm})$, $k_2(O_2; 2\,\text{cm})$, $|O_1O_2| = 9\,\text{cm}$. Vypočítejte vzdálenost středů stejnolehlosti daných kružnic k_1, k_2.

28 V pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami $|AC| = b$, $|BC| = a$ označte C_1 patu kolmice sestrojené z vrcholu C na přeponu AB. Z bodu C_1 sestrojte kolmici na stranu BC, její patu označte L, patu kolmice z bodu C_1 na stranu AC označte K. Dokažte, že platí $|BL| : |AK| = a^3 : b^3$.

29 V jakém poměru jsou obsahy dvou podobných trojúhelníků?

30 Je dán trojúhelník ABC ($a = 6\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 8\,\text{cm}$). Na straně AB najděte bod M tak, aby obsah $\triangle ABC$ byl dvakrát větší než obsah $\triangle MBN$, kde bod $N \in BC$ a $MN \parallel AC$. Vypočítejte délku úsečky AM.

31 V rovnoramenném trojúhelníku ABC sestrojte rovnoběžku p se základnou AB tak, aby rozdělila trojúhelník na dvě části o stejném obsahu.

a) Vyjádřete vzdálenost rovnoběžky p od přímky AB pomocí výšky na základnu AB.

b) V jakém poměru dělí přímka p výšku $\triangle ABC$ na základnu?

32 Je dán obdélník $ABCD$. Označte S střed strany AB. Z bodu B sestrojte kolmici na úsečku SC, její patu označte B_1. Vypočítejte poměr délek úseček $|SB_1|$, $|B_1C|$, tj. $|SB_1| : |B_1C|$.

a) Úlohu řešte pro hodnoty $|AB| = a = 6\,\text{cm}$, $|BC| = b = 4\,\text{cm}$.

b) Úlohu řešte obecně, tj. $|AB| = a$, $|BC| = b$.

c) Určete podmínku pro délky stran obdélníku $ABCD$ tak, aby bod B_1 byl středem úsečky SC.

11.6 Pythagorova věta a Euklidovy věty

33 Rozhodněte, zda jsou pravoúhlé trojúhelníky, jejichž délky stran jsou:

a) 5, 3, 4 b) $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{4}$ c) 5, 1, 4

34 Dokažte, že jsou pravoúhlé trojúhelníky, jejichž délky stran lze zapsat:

a) $4n^2 - 1$, $4n^2 + 1$, $4n$, kde $n \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$

b) 2, $k - k^{-1}$, $k + k^{-1}$, kde $k \in (1; \infty)$

c) $r^2 - s^2$, $2rs$, $r^2 + s^2$, kde $r, s \in \mathrm{R}^+$, $r > s$

35 Napište všechny možnosti kosinové věty pro pravoúhlý trojúhelník.

36 Odvoďte vzorec pro výpočet výšky v rovnostranném trojúhelníku, znáte-li délku jeho strany a.

37 V pravoúhlém trojúhelníku známe odvěsnu $b = 10\,\text{cm}$ a výšku na přeponu $v_c = 8\,\text{cm}$. Vypočítejte délku odvěsny a a délku přepony c.

38 Ve čtverci $ABCD$ označte S střed strany AB. Potom zvolte $L \in BD$ tak, aby platilo $|BL| : |DL| = 3 : 1$. Dokažte, že $|\sphericalangle SLC| = 90°$.

39 Je dána kružnice $k(S; r)$. Kružnici k opíšeme a vepíšeme čtverec. Určete poměr délek stran a poměr obsahů těchto dvou čtverců.

40 V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ ($|AB| = 1\,\text{cm}$) je bod K průsečíkem přímek AB a CD. Dokažte, že $|EK| = \sqrt{7}\,\text{cm}$.

41 Je dán obdélník $ABCD$ ($|AB| = 8\,\text{cm}$, $|BC| = 6\,\text{cm}$). Označte A_1 patu kolmice sestrojené z bodu A na úsečku BD, označte A_2 patu kolmice sestrojené z bodu A_1 na úsečku AB. Vypočítejte délky úseček:

a) $|BD|$ b) $|DA_1|$ c) $|BA_1|$ d) $|AA_1|$ e) $|A_1A_2|$

42 Je dána kružnice $k(S, 3\,\text{cm})$. Zvolte bod M tak, aby platilo $|SM| = 9\,\text{cm}$. Z bodu M sestrojte tečny ke kružnici k. Označte body dotyku T_1, T_2. Vypočítejte délky úseček:

a) $|MT_1|$ b) $|T_1T_2|$ c) vzdálenost středu S od úsečky T_1T_2

43 Sestrojte společné tečny dvou daných kružnic $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$. Vypočítejte délky úseček T_1T_2, T_3T_4, kde T_1, T_2 jsou body dotyku jedné vnější tečny s kružnicemi k_1, k_2, T_3, T_4 jsou body dotyku jedné vnitřní tečny s kružnicemi k_1, k_2. Úlohu řešte pro hodnoty:

a) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 2$ cm, $|O_1O_2| = 2{,}5$ cm,

b) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 2$ cm, $|O_1O_2| = 8$ cm

44 V pravoúhlém trojúhelníku s přeponou c je dána odvěsna $a = 4$ cm a těžnice $t_a = 6$ cm. Vypočítejte těžnici t_b.

45 Je dán obdélník $ABCD$, ve kterém platí $|AB| : |BC| = 5 : 2$. Na straně CD najděte bod X tak, aby $|\sphericalangle AXB| = 90°$. Vypočítejte, v jakém poměru dělí bod X stranu CD.

46 Jsou dány dvě kružnice $k_1(O_1, 4\text{ cm})$, $k_2(O_2, 6\text{ cm})$, $|O_1O_2| = 5$ cm. Označte P_1, P_2 průsečíky daných dvou kružnic. Vypočítejte délku úsečky P_1P_2.

47 Uvnitř obdélníku $ABCD$ zvolte libovolný bod M. Dokažte, že platí

a) $|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2$,

b) $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2 = |AC|^2 + 4 \cdot |MS|^2$, kde S je střed daného obdélníku.

11.7 Středový a obvodový úhel

48 Na ciferníku hodinek vyznačte trojúhelník, který spojuje body odpovídající číslům 11, 8, 4. Vypočítejte jeho vnitřní úhly.

49 Na ciferníku hodinek vyznačte trojúhelník, který spojuje body odpovídající číslům 1, 8, 3. Dokažte, že je rovnoramenný, vypočítejte velikosti vnitřních úhlů.

50 Na ciferníku hodinek vyznačte dvě úsečky, které vzniknou spojením bodů odpovídající číslům 1, 5 a 8, 4. Dokažte, že tyto úsečky jsou navzájem kolmé.

51 Vypočítejte velikost úhlu, který svírají dvě úsečky, které vzniknou spojením bodů odpovídající číslům 7, 2 a 5, 4 na ciferníku hodinek.

52 Je dán pravidelný devítiúhelník $ABCDEFGHI$. Vypočítejte

a) velikosti úhlu v trojúhelníku ACD,

b) odchylku přímek BF, CI.

53 V pravidelném osmiúhelníku $ABCDEFGH$ vyznačte čtyřúhelník $BDEH$. Vypočítejte velikosti jeho vnitřních úhlů.

54 Do kružnice $k(S; r)$ je vepsán trojúhelník ABC, jehož vrcholy dělí danou kružnici k na tři kružnicové oblouky, jejichž délky jsou v poměru 2 : 3 : 7. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlu v trojúhelníku ABC.

11.8 Mocnost bodu ke kružnici

55 V dané kružnici sestrojte dvě libovolné různoběžné tětivy AB, CD. Krajní body označte tak, aby $ABDC$ byl čtyřúhelník. Průsečík úseček AD a BC označte P. Dokažte, že potom platí:

a) $\triangle APB \sim \triangle CPD$

b) $|PA| \cdot |PD| = |PC| \cdot |PB|$

56 V dané kružnici sestrojte dvě libovolné různoběžné tětivy AB, CD. Krajní body označte tak, aby $ABDC$ byl čtyřúhelník. Průsečík přímek AB a CD označte M. Dokažte, že potom platí:

a) $\triangle MAD \sim \triangle MCB$

b) $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$

57 Z bodu M sestrojte ke kružnici k tečnu, bod dotyku označte T. Dále bodem M sestrojte přímku tak, aby kružnici k protínala ve dvou bodech A, B. (Označení zvolte tak, aby bod B ležel mezi body A, M.) Dokažte, že potom platí:

a) $|\sphericalangle MTB| = |\sphericalangle MAT|$ b) $\triangle MAT \sim \triangle MTB$ c) $|MA| \cdot |MB| = |MT|^2$

11.9 Aritmetický a geometrický průměr

58 Jsou dána dvě čísla $a = 8$ a $b = 2$. Vypočítejte jejich aritmetický a geometrický průměr.

59 V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C sestrojte výšku z vrcholu C na přeponu, její patu označte C_1. S je střed AB. Označte $|AC_1| = c_b$, $|BC_1| = c_a$. Dokažte, že

a) úsečka SC je aritmetickým průměrem úseček c_a a c_b,

b) úsečka CC_1 je geometrickým průměrem úseček c_a a c_b.

60 Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M, $|MS| > r$. Průsečíky přímky MS s kružnicí k označte A, B ($|MA| = a > |MB| = b$). Bod T je bod dotyku tečny vedené z bodu M ke kružnici k. Dokažte, že

a) úsečka MS je aritmetickým průměrem úseček a, b,

b) úsečka MT je geometrickým průměrem úseček a, b.

12 Stereometrie

Použité značení: S_{XY} značí střed úsečky XY.

Polohové úlohy

12.1 Vzájemná poloha dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin, tří rovin

1 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) AS_{GH}, DS_{AB}
b) BS_{CG}, AS_{CH}
c) AS_{CH}, $S_{AE}S_{GH}$
d) EC, AS_{GH}

2 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky a roviny:

a) EC, ABH
b) BF, EGC
c) FH, BDH
d) AG, BHS_{AB}

3 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze daných dvou rovin:

a) BFS_{AC}, HFS_{EH}
b) AFH, BDG
c) EFG, BCS_{AE}
d) ABS_{DH}, $S_{AB}S_{CG}S_{CH}$

4 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin:

a) ECG, BDF, ABH
b) BCE, ADF, $S_{AE}S_{CG}S_{AF}$
c) ADE, BCS_{EF}, $S_{AF}S_{CG}S_{BF}$
d) AGH, $S_{BF}S_{CG}S_{GH}$, $S_{AE}S_{AB}S_{CD}$

5 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Vyšetřete vzájemnou polohu:

a) dvou přímek AS_{DV}, BS_{CV}
b) přímky $S_{AB}S_{BC}$ a roviny CVS_{AD}
c) dvou rovin BVS_{AD}, $DS_{BC}S_{CV}$
d) tří rovin ACV, BDV, $S_{AV}S_{BV}S_{CV}$

12.2 Řezy

6 Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou:

a) ACS_{GH}
b) $S_{FG}S_{GH}S_{AD}$
c) $S_{AD}S_{AB}S_{CG}$
d) KLM
$K \in AB \wedge |BK| = 3|AK|$
$L = S_{GH}$
$M \in EH \wedge |HM| = 3|EM|$
e) RST
$R \in BF \wedge |BR| = 3|FR|$
$S = S_{AD}$
$T \in CG \wedge |GT| = 3|CT|$
f) IJK
$I \in BF \wedge |FI| = 3|BI|$
$J \in CG \wedge |CJ| = 3|GJ|$
$K \in AD \wedge |AK| = 2|DK|$
g) $S_{AE}S_{AB}S_{EG}$
h) XYZ
$X \in \leftrightarrow AB \wedge S_{XB} = A$
$Y = S_{EH}$
$Z \in CD \wedge |DZ| = 3|CZ|$
i) UVW
$U \in \leftrightarrow AE \wedge S_{UE} = A$
$V \in EF \wedge |EV| = 3|FV|$
$W \in \mapsto BC$, $|BW| = \frac{4}{3}|BC|$

7 Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou:

a) $S_{AB}S_{FG}S_{DH}$
b) $S_{AE}S_{CD}S_{FG}$
c) $S_{AE}S_{BC}S_{GH}$
d) $S_{AD}S_{BF}S_{GH}$

8 Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou:

a) KLM
$K \in AB \wedge |BK| = 3|AK|$
$L \in CD \wedge |DL| = 3|CL|$
$M \in DV \wedge |DM| = 2|MV|$
b) OPQ
$O \in AB \wedge |AO| = 2|BO|$
$P \in CV \wedge |VP| = 3|CP|$
$Q \in DV \wedge |DQ| = 3|QV|$
c) RST
$R \in AB \wedge |AR| = 2|BR|$
$S \in CV \wedge |VS| = 3|CS|$
$T = S_{AV}$
d) XYZ
$X = S_{AD}$
$Y \in CD \wedge |DY| = 3|CY|$
$Z \in BV \wedge |BZ| = 3|VZ|$
e) EFG .
$E \in BC \wedge |BE| = 2|CE|$
$F \in AV \wedge |AF| = 2|VF|$
$G \in DV \wedge |DG| = 2|VG|$
f) IJK
$I \in \mapsto DC \wedge |DI| = 1{,}5|CD|$
$J \in \mapsto DA \wedge |DJ| = 1{,}5|AD|$
$K = S_{DV}$
g) LMN
$L \in AV \wedge A = S_{LV}$
$M \in \mapsto VB \wedge |VM|=1{,}25|BV|$
$N = S_{AD}$
h) UMW
$U = B$
$M \in CV \wedge |VM| = 3|CM|$
$W \in AV \wedge |AW| = 2|VW|$

12.3 Průnik dvou rovin

9 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečnici rovin:

a) ACE, AFH
b) EGS_{BC}, BHF
c) ABG, HFS_{AD}
d) ABC, FHS_{AE}
e) ABC, AFH
f) ACF, CGS_{AB}
g) AFH, BDG
h) ACH, $S_{AB}S_{BC}S_{EF}$
i) $AS_{EF}S_{EH}$, $CS_{CD}S_{FG}$

10 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Sestrojte průsečnici rovin:

a) ACV, BDS_{CV}
b) BCV, ADV
c) ACS_{CV}, $VS_{AD}S_{BC}$
d) BDV, $S_{BC}S_{CV}K$; $K \in AD \wedge |DK| = 3|AK|$
e) ABC, $S_{CV}S_{AV}K$; $K \in BV \wedge |VK| = 3|BK|$
f) BCV, $S_{AV}CK$; $K \in AB \wedge |AK| = 3|BK|$

12.4 Průnik přímky s rovinou

11 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečík

a) přímky $S_{AC}S_{EG}$ s rovinou BCE,
b) přímky FD s rovinou $S_{GH}S_{CG}M$; $M \in EF \wedge |FM| = 3|EM|$,
c) přímky EC s rovinou $AS_{BF}M$; $M \in EH \wedge |EM| = 3|MH|$,
d) přímky $S_{AE}G$ s rovinou $AS_{CG}S_{GH}$.

12 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Sestrojte průsečík

a) přímky CS_{AV} s rovinou KLV;
$K \in AB \wedge |BK| = 3|AK|$, $L \in CD \wedge |DL| = 3|CL|$,
b) přímky VS_{AC} s rovinou $S_{AB}S_{CV}D$,
c) přímky VS_{AC} s rovinou $AS_{BC}S_{CV}$,

d) přímky CS_{AV} s rovinou KLM;
$K \in AB \wedge |AK| = 3|BK|$,
$L \in CV \wedge |CL| = 2|VL|$, $M \in DV \wedge |MV| = 3|DM|$,
e) přímky BV s rovinou JKL; $J \in AB$, $|BJ| = 3|AJ|$,
$K \in CV \wedge |VK| = 3|CK|$, $L \in DV \wedge |DL| = 3|LV|$,
f) přímky VS_{BC} s rovinou $S_{AB}S_{AV}S_{CD}$.

12.5 Průnik přímky s povrchem tělesa

13 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průnik přímky PQ s povrchem krychle. Pro body P, Q platí:
a) $B = S_{AP}$, $H = S_{QG}$
b) $P \in \mapsto DH$, $|DP| = 1{,}5|DH|$, $B = S_{QD}$
c) $P \in \mapsto CB$, $|CP| = 1{,}5|BC|$, $Q \in \mapsto EH$, $|EQ| = 1{,}5|EH|$
d) $P \in \mapsto FB$, $|FP| = 1{,}25|BF|$, $Q \in \mapsto DH$, $|DQ| = 1{,}25|DH|$

14 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Sestrojte průnik přímky PQ s povrchem jehlanu. Pro body P, Q platí:
a) $P = S_{DV}$, $B = S_{AQ}$
b) $P \in \mapsto VB$, $|VP| = 1{,}5|VB|$, $Q = S_{DV}$
c) $P = S_{AV}$, $Q \in \mapsto DC \wedge |DQ| = 1{,}5|DC|$
d) $P \in \mapsto VA$, $|VP| = 1{,}5|VA|$, $Q \in \mapsto S_{DV}S_{CV}$, S_{CV} je střed $S_{DV}Q$

Metrické úlohy – výpočty vzdáleností

12.6 Vzdálenost dvou bodů

15 Je dána krychle $ABCDEFGH$, $a = 4$ cm. Vypočítejte vzdálenost daných bodů:
a) A, G c) A, S_{EG} e) S_{AC}, S_{CG}
b) A, S_{GH} d) B, S_{AH} f) S_{BG}, S_{AF}

16 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4$ cm, $v = 6$ cm. Vypočítejte vzdálenost daných dvou bodů:
a) A, V c) A, S_{CV} e) S_{AC}, S_{CV}
b) V, S_{BC} d) A, S_{DV} f) S_{AD}, S_{CV}

12.7 Vzdálenost bodu od přímky

17 Je dána krychle $ABCDEFGH$, $a = 4$ cm. Vypočítejte vzdálenost daného bodu od dané přímky:
a) F, AB d) F, AH g) H, AS_{CG}
b) F, AC e) E, BH h) S_{AD}, BG
c) F, AD f) A, FH i) B, $S_{AH}S_{FH}$

18 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Dokažte, že vzdálenost bodů A, C, D, E, F, G od přímky BH je vždy stejná.

19 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4$ cm, $v = 6$ cm. Vypočítejte vzdálenost daného bodu od dané přímky:
a) V, BC c) S_{CV}, AV e) B, $S_{AV}S_{CV}$
b) A, CV d) S_{CV}, BD f) A, $S_{CV}S_{DV}$

12.8 Vzdálenost rovnoběžných přímek

20 Je dána krychle $ABCDEFGH$, $a = 4$ cm. Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných přímek:
a) AE, CG b) $S_{AB}S_{BC}$, $S_{EH}S_{GH}$ c) AS_{BG}, $S_{AE}S_{FG}$

21 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4$ cm, $v = 6$ cm. Dokažte, že dané přímky jsou rovnoběžné, vypočítejte jejich vzdálenost:
a) AB, $S_{CV}S_{DV}$ b) AV, $S_{AB}S_{BV}$ c) CV, $S_{AC}S_{AV}$

12.9 Vzdálenost mimoběžek

22 Je dána krychle $ABCDEFGH$, $a = 4$ cm. Vypočítejte vzdálenost daných mimoběžných přímek.
a) AE, FG b) AH, CF c) AC, BH

23 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4$ cm, $v = 6$ cm. Vypočítejte vzdálenost daných mimoběžných přímek:
a) AB, VS_{AC} b) AB, $S_{BV}S_{CV}$ c) AC, BV

12.10 Vzdálenost bodu od roviny

24 Je dána krychle $ABCDEFGH$, $a = 4$ cm. Vypočítejte vzdálenost:
a) bodu F od roviny BEH d) bodu E od roviny $S_{EH}S_{EF}S_{AB}$
b) bodu F od roviny BEG e) bodu S_{EF} od roviny ABG
c) bodu F od roviny BCS_{AE} f) bodu S_{EF} od roviny ABS_{CG}

25 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4$ cm, $v = 6$ cm. Vypočítejte vzdálenost bodu od roviny:
a) S_{AV}, ABC c) A, $S_{AV}S_{BV}S_{CV}$
b) S_{AV}, BCV d) S_{BV}, BCS_{AV}

26 Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$, $|AB| = 4$ cm. Vypočítejte vzdálenost:
a) bodu D od roviny ABC c) bodu S_{BD} od roviny ABC
b) bodu A od roviny BCD d) těžiště $\triangle ACD$ od roviny ABC

27 Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$, $|AB| = 4$ cm, $v = 6$ cm. Vypočítejte vzdálenost:
a) bodu A od roviny CFV c) bodu A od roviny DEV
b) bodu A od roviny BCV d) bodu A od roviny CDV

12.11 Vzdálenost rovnoběžných rovin

28 Je dána krychle $ABCDEFGH$, $a = 4$ cm. Dokažte, že dané dvě roviny jsou navzájem rovnoběžné a potom vypočítejte jejich vzdálenost:
a) AFH, BGD b) BEG, $S_{EF}S_{BF}S_{FG}$ c) BCS_{EF}, EHS_{AB}

Metrické úlohy – výpočty odchylek

12.12 Odchylka dvou přímek

29 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vypočítejte odchylku přímek:
a) AC, CH b) AC, EC c) AG, BH d) AF, CH e) AE, BH f) $AS_{EG}, S_{AB}S_{BC}$ g) AF, BH h) DE, BH i) AC, BH

30 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete konstrukčně odchylku daných přímek. Velikost odchylky změřte úhloměrem.
a) BH, DF b) AS_{BC}, CH c) DH, BS_{GH}

31 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4\,\text{cm}$, $v = 6\,\text{cm}$. Vypočítejte odchylku přímek:
a) AV, DV b) AV, CV c) AB, VS_{AB} d) BC, AV e) BD, AV f) AC, BV g) AC, VS_{BC} h) AS_{CV}, CS_{AV} i) AS_{CV}, BS_{DV}

32 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4\,\text{cm}$, $v = 6\,\text{cm}$. Určete konstrukčně odchylku daných přímek. Velikost odchylky změřte úhloměrem.
a) AD, BV b) CD, BS_{CV} c) BD, CV

12.13 Odchylka přímky od roviny

33 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vypočítejte odchylku přímky od roviny:
a) BH, ABC b) BH, BCF c) AG, BCG d) AS_{EG}, BDH e) AS_{EG}, CDH f) AS_{EG}, BCF g) CE, CDH h) EC, AGH i) AC, EGS_{CD}

34 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4\,\text{cm}$, $v = 6\,\text{cm}$. Vypočítejte odchylku přímky od roviny:
a) VS_{AC}, ABC b) VS_{AC}, BCV c) AV, ABC d) AV, BCV e) BS_{DV}, ABC f) $BS_{DV}, S_{AB}S_{CD}V$

12.14 Odchylka dvou rovin

35 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vypočítejte odchylku daných rovin:
a) ACG, BDH b) ABC, BDG c) EFC, AGH d) $ABC, S_{BF}S_{CG}S_{EH}$ e) ABG, BEG f) ABG, ACE

36 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4\,\text{cm}$, $v = 6\,\text{cm}$. Vypočítejte odchylku daných rovin:
a) ABC, ADV b) ADV, BCV c) $BCV, VS_{AB}S_{CD}$ d) ABV, BCV e) BCS_{AV}, ADS_{BV} f) ADV, BCS_{AV}

37 Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$, $|AB| = 4\,\text{cm}$, $v = 6\,\text{cm}$. Vypočítejte odchylku daných rovin:
a) ABV, ABC b) ABV, DEV c) ABV, BCV d) ABV, CDV

12.15 Další úlohy

38 Je dána krychle $ABCDEFGH$, $a = 4\,\text{cm}$. Na povrchu krychle najděte nejkratší cestu, která vede
a) z bodu S_{BF} do bodu X, kde $X \in GH \wedge |HX| = 3|GX|$,
b) z bodu X do bodu Y, kde $X \in GH \wedge |HX| = 3|GX|$, $Y \in BF \wedge |FY| = 3|YB|$.

39 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4\,\text{cm}$, $v = 6\,\text{cm}$. Na povrchu jehlanu najděte nejkratší cestu, která vede
a) z bodu S_{AV} do bodu C.
b) z těžiště $\triangle BCV$ do bodu D.

40 Je dána krychle $ABCDEFGH$.
a) Dokažte, že body $ACFH$ tvoří vrcholy pravidelného čtyřstěnu.
b) Určete délku hrany krychle tak, aby délka hrany čtyřstěnu $ACFH$ byla 2 cm.
c) Dokažte, že každé dvě protilehlé hrany čtyřstěnu $ACFH$ jsou navzájem kolmé.
d) Vypočítejte tělesové výšky pravidelného čtyřstěnu $ACFH$.
e) Vypočítejte vzdálenost protilehlých hran pravidelného čtyřstěnu $ACFH$.
f) Vypočítejte odchylku sousedních hran pravidelného čtyřstěnu $ACFH$.
g) Vypočítejte odchylku sousedních stěn pravidelného čtyřstěnu $ACFH$.

41 Je dán pravidelný trojboký hranol $ABCA_1B_1C_1$, $|AB| = 4\,\text{cm}$, $v = 6\,\text{cm}$. Označte M střed AC, N střed BC.
a) Vypočítejte odchylku přímek A_1N, B_1M.
b) Vypočítejte odchylku přímek BA_1, AC_1.
c) Vypočítejte odchylku rovin A_1MN, ABC.
d) Vypočítejte vzdálenost přímek A_1B_1, MN.

42 Je dán pravidelný komolý čtyřboký jehlan $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ve kterém platí $|AB| = 8\,\text{cm}$, $|A_1B_1| = 4\,\text{cm}$, $v = 6\,\text{cm}$.
a) Vypočítejte AA_1.
b) Vypočítejte AC_1.
c) Vypočítejte odchylku hrany AA_1 od roviny ABC.
d) Vypočítejte odchylku rovin AA_1D, ABC.
e) Vypočítejte výšku původního jehlanu, ze kterého řezem rovinou rovnoběžnou s podstavou ve vzdálenosti 6 cm daný komolý jehlan vznikl.

12.16 Obsah řezu

43 Je dána krychle $ABCDEFGH$, $a = 4\,\text{cm}$. Vypočítejte obvod a obsah mnohoúhelníku, který je shodný s řezem krychle rovinou:
a) KLM; $K \in AE \wedge |EK| = 3|AK|$, $L = S_{BF}$, $M \in CG \wedge |CM| = 3|GM|$
b) EGS_{AB}
c) $S_{CG}S_{EH}S_{AB}$

44 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 4\,\text{cm}$, $v = 6\,\text{cm}$. Vypočítejte obvod a obsah mnohoúhelníku, který je shodný s řezem jehlanu rovinou:
a) BCS_{AV} b) $AS_{CD}S_{DV}$ c) $S_{AV}S_{CV}B$

45 Je dán pravidelný trojboký hranol $ABCA_1B_1C_1$, $|AB| = 4\,\text{cm}$, $v = 6\,\text{cm}$. Označte M střed AC, N střed BC. Vypočítejte obvod a obsah mnohoúhelníku, který je shodný s řezem hranolu rovinou MNA_1.

12.17 Objemy a povrchy těles

46 Délka tělesové úhlopříčky krychle je $3\sqrt{6}\,\text{cm}$. Vypočítejte
a) délku hrany krychle, b) objem krychle, c) povrch krychle.

47 Hranu krychle $ABCDEFGH$ zvětšíme dvakrát. Kolikrát se zvětší
a) objem krychle, b) povrch krychle?

48 O kolik procent se zvětší objem krychle, jestliže se hrana krychle zvětší o 15 %?

49 Objem kvádru $ABCDEFGH$ se čtvercovou podstavou je $64\,\text{cm}^3$. Odchylka tělesové úhlopříčky AG od roviny podstavy je $45°$. Vypočítejte jeho povrch.

50 Délky hran čtyřbokého hranolu jsou v poměru $a : b : c = 2 : 4 : 5$. Povrch hranolu je $57\,\text{cm}^2$. Vypočítejte jeho objem.

51 Vypočítejte objem a povrch pravidelného šestibokého hranolu. Délka podstavné hrany je 4 cm, výška hranolu je 6 cm.

52 Vypočítejte délku podstavné hrany pravidelného pětibokého hranolu, jehož výška je stejná jako délka podstavné hrany. Objem hranolu je $100\,\text{cm}^3$.

53 Pravidelný dvanáctiboký hranol o objemu $100\,\text{cm}^3$ má výšku dvakrát větší než délku podstavné hrany. Vypočítejte jeho povrch s přesností na jedno desetinné místo.

54 Vypočítejte objem a povrch pravidelného šestibokého jehlanu, jehož podstavná hrana měří 3 cm a délka boční hrany je 6 cm.

55 Vypočítejte objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož podstavná hrana měří 4 cm. Odchylka boční hrany od roviny podstavy je $60°$.

56 Vypočítejte objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu, je-li obsah podstavy $20\,\text{cm}^2$. Odchylka boční stěny od roviny podstavy je $60°$.

57 V krychli $ABCDEFGH$, $a = 4\,\text{cm}$ spojte postupně vrcholy $ABCD$ se středem hrany EH. Vypočítejte objem jehlanu $ABCDS_{EH}$.

58 Délky hran kvádru $ABCDEFGH$ jsou $a = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$. Vypočítejte objem a povrch trojbokého jehlanu $ADEC$.

59 Odvoďte vzorec pro výpočet objemu a povrchu pravidelného čtyřstěnu.

60 Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má podstavné hrany délek 6 cm a 4 cm. Boční hrana svírá s rovinou podstavy úhel $60°$. Vypočítejte objem a povrch komolého jehlanu.

61 Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má podstavné hrany délek 6 cm a 4 cm. Boční stěna svírá s rovinou podstavy úhel $60°$. Vypočítejte objem a povrch komolého jehlanu.

62 Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Na hraně CD určete bod X tak, aby rovina sestrojená bodem X rovnoběžně s rovinou podstavy ABC rozdělila čtyřstěn na dvě tělesa o stejném objemu.

63 Vypočítejte objem a povrch pravidelného osmistěnu, je-li délka jeho hrany 5 cm.

64 Vypočítejte objem a povrch pravidelného rotačního kužele o výšce 10 cm, jehož strana má od roviny podstavy odchylku $30°$.

65 Vypočítejte objem a povrch rovnostranného kužele, který vznikl rotací rovnostranného trojúhelníku ABC o straně $a = 4\,\text{cm}$ kolem osy úhlu γ.

66 Rotací pravoúhlého trojúhelníku ABC kolem odvěsny BC vznikne rotační kužel, rotací téhož pravoúhlého trojúhelníku ABC kolem odvěsny AC vznikne jiný rotační kužel. Vypočítejte poměr objemů těchto dvou kuželů.

67 Kužel ($r = 4\,\text{cm}$, $v = 6\,\text{cm}$) je rozdělen rovinou rovnoběžnou s podstavou na dvě části téhož objemu. Vypočítejte
a) poloměr kružnice, která je řezem,
b) poměr, ve kterém rovina řezu dělí výšku daného kužele.

68 Kužel má objem V. Body C_1, C_2, které dělí jeho výšku na tři stejné díly, vedeme roviny rovnoběžné s rovinou podstavy. Dostaneme tak tři tělesa. Vypočítejte, v jakém poměru jsou jejich objemy.

69 Komolý kužel ($r_1 = 4\,\text{cm}$, $r_2 = 2\,\text{cm}$, $v = 6\,\text{cm}$) je rozdělen rovinou rovnoběžnou s podstavou na dvě části téhož objemu. Vypočítejte
a) poloměr kružnice, která je řezem,
b) poměr, ve kterém rovina řezu dělí výšku.

70 Nálevka má tvar rovnostranného kužele. Vypočítejte obsah plochy smáčené vodou v případě, že do nálevky nalijete 3 litry vody.

71 Jestliže plášť kužele je půlkruh, potom průměr podstavy kužele je dvakrát větší než délka jeho strany. Dokažte.

72 Vypočítejte poloměr podstavy a objem rotačního kužele, jestliže rozvinutý plášť je kruhová výseč s poloměrem 3 cm a se středovým úhlem $120°$.

73 Nakreslete plášť stínítka na lampičku, které má tvar komolého rotačního kužele. Poloměry podstav jsou 30 cm a 15 cm. Délka strany komolého kužele je 25 cm.

74 Určete rozměry válcové nádoby o objemu 5 litrů, jestliže výška nádoby se rovná polovině průměru podstavy.

75 Osovým řezem válce je obdélník s úhlopříčkou délky 20 cm. Výška válce je dvakrát větší než průměr podstavy. Vypočítejte objem válce v litrech.

76 Osovým řezem válce je čtverec o obsahu $25\,\text{cm}^2$. Vypočítejte povrch válce.

77 Určete rozměry rovnostranného válce o objemu 1 litr.

78 Jaká je přibližně délka vlny, která je namotána na klubku tvaru koule o poloměru 8 cm, je-li průměr vlny 1 mm?

79 Kolik procent zemského povrchu leží v oblasti
a) pásma tropického (obratník ... $\varphi = 23°27'$),
b) pásma mírného (polární kruh ... $\varphi = 66°33'$),
c) pásma polárního,
d) mezi desátou a dvacátou rovnoběžkou na severní polokouli?
(Poloměr Země počítejte 6 378 km.)

80 Jakou část zemského povrchu vidíme z výšky 350 km nad Zemí?

81 Vypočítejte objem a povrch čočky, která vznikne průnikem dvou koulí o poloměrech 8 cm a 4 cm. Vzdálenost středů koulí je 10 cm.

82 Do krabice tvaru kvádru se čtvercovou podstavou o straně $a = 6$ cm a výškou $v = 4$ cm dáme kouli o poloměru 3 cm. Vypočítejte obsah kulového vrchlíku, který leží vně kvádru.

83 Do krychle $ABCDEFGH$ je vepsán jehlan $ABCDV$, kde V je střed úsečky EG a kužel, jehož podstavu tvoří kruh vepsaný do čtverce $ABCD$ a bod V. Vypočítejte poměr objemů krychle, jehlanu a kužele.

84 Krychli opište a vepište kouli. Vypočítejte poměr objemů koule opsané, krychle a koule vepsané.

85 Vypočítejte poloměr a výšku rovnostranného válce, který lze vepsat do koule o poloměru 6 cm. Vypočítejte, kolik procent z objemu koule zaujímá objem válce.

86 a) Vypočítejte poloměr a výšku rovnostranného kužele vepsaného kouli o poloměru 6 cm. Vypočítejte, kolik procent z objemu koule zaujímá objem kužele.
b) Vypočítejte poloměr a výšku rovnostranného kužele opsaného kouli o poloměru 6 cm. Vypočítejte, kolik procent z objemu kužele zaujímá objem koule.

87 Vypočítejte poloměr koule vepsané do kužele, jehož výška je $v = 6$ cm a poloměr podstavy je $r = 2$ cm. Potom vypočítejte, kolikrát je objem kužele větší než objem koule vepsané.

88 Vypočítejte polomér koule vepsané do pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož délka podstavné hrany je $a = 4$ cm a výška je $v = 6$ cm. Potom vypočítejte, kolikrát je objem jehlanu větší než objem koule vepsané.

89 Vypočítejte délku hrany krychle vepsané do polokoule o poloměru 6 cm. Kolik procent zaujímá objem krychle z objemu polokoule?

90 Vypočítejte poloměr a výšku kužele vepsaného do pravidelného čtyřstěnu. Délka hrany čtyřstěnu je 6 cm. Potom vypočítejte, kolikrát je objem kužele menší než objem čtyřstěnu.

13 Vektory

13.1 Vektor, souřadnice vektoru

1 Body $A[1;3]$, $B[4;1]$ určují vektor $\boldsymbol{u}$ (A je počáteční bod, B je koncový bod vektoru, tj. $\boldsymbol{u} = B - A$).
a) Vypočítejte souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$.
b) V soustavě souřadnic znázorněte body A, B, potom nakreslete alespoň tři orientované úsečky, které jsou umístěním vektoru $\boldsymbol{u}$.
c) Vypočítejte souřadnice bodu X tak, aby orientovaná úsečka CX, $C[-3;2]$ též určovala vektor $\boldsymbol{u}$.
d) Vektor $\boldsymbol{u}_1$ je opačný vektor k vektoru $\boldsymbol{u}$. Vypočítejte souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}_1$. Nakreslete orientované úsečky OU, OU_1, které jsou umístěním vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_1$ s počátečním bodem $O[0;0]$.

2 Body $K[-2;4;3]$, $L[-3;2;-1]$ určují vektor $\boldsymbol{z}$ (L je počáteční bod, K je koncový bod vektoru, tj. $\boldsymbol{z} = K - L$).
a) Vypočítejte souřadnice vektoru $\boldsymbol{z}$.
b) Vypočítejte souřadnice koncového bodu vektoru $\boldsymbol{z}$, jestliže vektor $\boldsymbol{z}$ umístíme do počátku soustavy souřadnic.
c) V soustavě souřadnic nakreslete orientovanou úsečku OZ, která je umístěním vektoru $\boldsymbol{z}$ s počátečním bodem $O[0;0;0]$.

3 Jsou dány body $R[3;-2]$, $S[-4;5]$, $T[2;1]$. Vypočítejte souřadnice bodu X tak, aby
a) čtyřúhelník $RSTX$ byl rovnoběžník,
b) čtyřúhelník $RSXT$ byl rovnoběžník,
c) čtyřúhelník $RXST$ byl rovnoběžník.

4 V rovnoběžnostěnu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ známe souřadnice bodů $A[2;-3;1]$, $B[3;-4;2]$, $D[4;2;-3]$, $A_1[5;3;4]$. Vypočítejte souřadnice vrcholů C, B_1, C_1, D_1.

13.2 Sčítání a odčítání vektorů, násobek vektoru

5 Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (4;3)$, $\boldsymbol{v} = (-2;-4)$.
a) Nakreslete v soustavě souřadnic orientované úsečky, které jsou umístěním vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ s počátečním bodem $O[0;0]$. Potom graficky sestrojte orientované úsečky, které odpovídají následujícím vektorům:

$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ $\quad$ $\boldsymbol{w}_3 = 2\boldsymbol{u}$ $\quad$ $\boldsymbol{w}_5 = \frac{3}{2}\boldsymbol{u} - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}$

$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ $\quad$ $\boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{u} + \left(-\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{v}$

b) Vypočítejte souřadnice vektorů $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$, $\boldsymbol{w}_4$, $\boldsymbol{w}_5$.
c) Porovnejte výsledky úloh b) s obrázkem z úlohy a).

6 Jsou dány body $A[3;3]$, $B[5;4]$, $C[7;5]$.
a) Rozhodněte, zda body A, B, C leží na přímce.
b) Určete číslo $y_D \in \mathrm{R}$ tak, aby bod $D[-3;y_D]$ ležel na přímce AB.

7 Jsou dány body $K[1;2;3]$, $L[-4;5;6]$, $M[4;3;2]$.
a) Dokažte, že body K, L, M tvoří trojúhelník.
b) Určete reálná čísla m, n, k, p tak, aby body $R[0;m;n]$, $S[k;p;6]$ ležely na přímce KL.

13.3 Lineární kombinace vektorů

8 Vektor $\boldsymbol{z} = (2; 10)$ zapište jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{u} = (1; 3)$, $\boldsymbol{v} = (-2; 2)$. Výpočet ověřte obrázkem.

9 Vektor $\boldsymbol{z} = (2; -2; -10)$ zapište jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, kde $\boldsymbol{u} = (2; 1; -1)$, $\boldsymbol{v} = (2; 3; 2)$, $\boldsymbol{w} = (4; 5; -2)$.

10 V trojúhelníku ABC označte vektory $\boldsymbol{u} = C - B$, $\boldsymbol{v} = C - A$. Jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ zapište následující vektory:
a) $\boldsymbol{w}_1 = B - A$
b) $\boldsymbol{w}_2 = A_1 - A$, kde A_1 je střed strany BC
c) $\boldsymbol{w}_3 = T - A$, kde T je těžiště trojúhelníku ABC

11 Narýsujte trojúhelník ABC ($a = 4\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$). Vyznačte vektory $\boldsymbol{b} = C - A$, $\boldsymbol{c} = B - A$. Potom v obrázku sestrojte vektor $\boldsymbol{u}$ tak, aby platilo $\boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{c} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right) \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \cdot (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b})$. Zapište výsledek.

12 V rovnoběžníku $ABCD$ vyznačte body E, F, G, S tak, že bod E je střed úsečky AB, bod F je střed úsečky BC, bod G je střed úsečky CD, bod S je střed úsečky AC. Dále označte vektory $\boldsymbol{u} = E - A$, $\boldsymbol{v} = S - A$. Zapište vektory $\boldsymbol{w} = D - F$, $\boldsymbol{z} = G - B$ jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

13 V trojúhelníku ABC vyznačte vektory $\boldsymbol{a} = C - B$, $\boldsymbol{b} = A - C$, $\boldsymbol{c} = B - A$.
a) Dokažte, že pak platí $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$.
b) Dokažte, že platí: $\boldsymbol{t}_a + \boldsymbol{t}_b + \boldsymbol{t}_c = \boldsymbol{o}$, kde $\boldsymbol{t}_a = S_{BC} - A$, $\boldsymbol{t}_b = S_{AC} - B$, $\boldsymbol{t}_c = S_{AB} - C$.

14 Je dána krychle $ABCDEFGH$.
a) V krychli vyznačte vektory $\boldsymbol{e}_1 = A - D$, $\boldsymbol{e}_2 = C - D$, $\boldsymbol{e}_3 = H - D$. Jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ zapište vektory:

$\boldsymbol{x}_1 = G - H$ $\quad \boldsymbol{x}_3 = G - A$ $\quad \boldsymbol{x}_5 = F - C$
$\boldsymbol{x}_2 = B - G$ $\quad \boldsymbol{x}_4 = B - S_{AH}$

b) Vektory $\boldsymbol{x}_1$ až $\boldsymbol{x}_5$ z úlohy a) vyjádřete jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{i} = B - A$, $\boldsymbol{j} = C - A$, $\boldsymbol{k} = H - A$.

13.4 Lineárně závislé a lineárně nezávislé vektory

15 Dokažte, že vektory $\boldsymbol{a} = (2; 2)$, $\boldsymbol{b} = (4; -4)$, $\boldsymbol{c} = (-2; -6)$ jsou lineárně závislé. Výpočet ověřte obrázkem.

16 Rozhodněte, zda dané trojice vektorů tvoří skupinu lineárně závislých, nebo lineárně nezávislých vektorů.

a) $\boldsymbol{u}_1 = (3; 6)$, $\boldsymbol{u}_2 = (-1; -2)$, $\boldsymbol{u}_3 = (1; 4)$
b) $\boldsymbol{v}_1 = (2; -1; 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3; 0; 6)$, $\boldsymbol{v}_3 = (7; -5; 10)$
c) $\boldsymbol{w}_1 = (0; 6; -2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (2; 4; 6)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-1; 4; -5)$

13.5 Velikost vektoru

17 Vypočítejte velikost vektoru $\boldsymbol{u} = (-4; 2)$. Výpočet ověřte obrázkem.

18 Vypočítejte velikost vektoru $\boldsymbol{u} = (4; -3; 5)$.

19 Určete číslo $y \in \mathsf{R}$ tak, aby velikost vektoru $\boldsymbol{z} = (6; y)$ byla 10.

20 Je dán vektor $\boldsymbol{u} = (7; -1)$. Určete vektor $\boldsymbol{v}$ tak, aby platilo: $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{u} \wedge |\boldsymbol{v}| = 10$. Výpočet ověřte obrázkem.

21 Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = (4; 2)$, $\boldsymbol{b} = (-1; 2)$. Vypočítejte souřadnice a velikosti vektorů $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$, víte-li, že
a) $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\quad$ b) $\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $\quad$ c) $\boldsymbol{c}_3 = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$.

22 Je dán vektor $\boldsymbol{f} = (3; 2)$. Určete $m \in \mathsf{R}$ tak, aby pro vektor $\boldsymbol{g} = (6; m)$ platilo $|\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}| = 5$. Výpočet ověřte obrázkem.

23 Je dán vektor $\boldsymbol{r} = (3; 2)$. Určete $q \in \mathsf{R}$ tak, aby pro vektor $\boldsymbol{s} = (q; -2)$ platilo $|3\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}| = 5$. Výpočet ověřte obrázkem.

13.6 Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$

24 Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (0; 3)$, $\boldsymbol{v} = (1; 1)$. V pravoúhlé soustavě souřadnic nakreslete orientované úsečky, které jsou umístěním daných vektorů v počátku. Z obrázku určete, jaký úhel dané vektory svírají. Potom vypočítejte skalární součin vektorů $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ dvěma způsoby:
a) podle vzorce pro výpočet skalárního součinu pomocí velikostí vektorů a úhlu, který tyto vektory svírají,
b) podle vzorce pro výpočet skalárního součinu ze souřadnic vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

Úhel dvou vektorů

25 Vypočítejte velikost úhlu vektorů $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$:
a) $\boldsymbol{u}_1 = (3; 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1; 2)$
b) $\boldsymbol{u}_1 = (-2; 4)$, $\boldsymbol{u}_2 = (6; -2)$
c) $\boldsymbol{u}_1 = (3; -2)$, $\boldsymbol{u}_2 = (4; 6)$
d) $\boldsymbol{u}_1 = (-1; 0)$, $\boldsymbol{u}_2 = (\sqrt{3}; 1)$

26 Vypočítejte úhel vektorů $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ s přesností na stupně a minuty:
a) $\boldsymbol{v}_1 = (-1; 0; 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2; 2; 0)$
b) $\boldsymbol{v}_1 = (-2; 6; 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2; 4; 4)$
c) $\boldsymbol{v}_1 = (2; -3; 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1; 2; -2)$
d) $\boldsymbol{v}_1 = (1; 0; 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0; 5; 0)$

27 Vypočítejte velikosti úhlů α, β, γ v trojúhelníku ABC, znáte-li souřadnice vrcholů. (Počítejte s přesností na stupně a minuty.)
a) $A[0; 1]$, $B[2; 3]$, $C[4; 0]$
b) $A[2; 3]$, $B[3; 1]$, $C[5; 2]$
c) $A[1; 0; 2]$, $B[2; -2; 4]$, $C[3; 6; 1]$
d) $A[1; 3; -2]$, $B[-2; 3; 1]$, $C[-2; 6; -2]$

28 Dán vektor $\boldsymbol{u} = \left(\sqrt{3}; -1\right)$. Určete souřadnice vektoru $\boldsymbol{v}$, který svírá s vektorem $\boldsymbol{u}$ úhel 60° a jehož velikost je 4.

29 Jsou dány body $A[2; 5; 10]$, $B[2; 1; 7]$. Na ose x určete bod X tak, aby platilo:
a) $|\sphericalangle ABX| = 60°$ $\quad$ b) $|\sphericalangle XAB| = 45°$

30 Určete vektor $\boldsymbol{x}$ tak, aby platilo: $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{2} \wedge |\sphericalangle \boldsymbol{x}\boldsymbol{b}| = 90° \wedge |\sphericalangle \boldsymbol{x}\boldsymbol{a}| = \frac{\pi}{3}$, kde $\boldsymbol{a} = (1; 1; 0)$, $\boldsymbol{b} = (1; 1; -1)$.

Kolmost vektorů

31 Dokažte, že dané vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou navzájem kolmé:
a) $\boldsymbol{u} = (2; 4)$, $\boldsymbol{v} = \left(-3; \frac{3}{2}\right)$
b) $\boldsymbol{u} = (4; -1; 13)$, $\boldsymbol{v} = (5; -6; -2)$
c) $\boldsymbol{u} = \left(\sqrt{5} - 1; 2\sqrt{2}\right)$, $\boldsymbol{v} = \left(\sqrt{5} + 1; -\sqrt{2}\right)$
d) $\boldsymbol{u} = (1; 1; 0)$, $\boldsymbol{v} = (0; 0; 1)$

32 Je dán vektor $\boldsymbol{u} = (4; 9)$. Určete $m \in \mathrm{R}$ tak, aby vektor $\boldsymbol{v} = (m; 2)$ byl kolmý k vektoru $\boldsymbol{u}$.

33 Je dán vektor $\boldsymbol{x} = (-1; 2; 3)$. Určete $p \in \mathrm{R}$ tak, aby vektor $\boldsymbol{y} = (17; p; 3)$ byl kolmý k vektoru $\boldsymbol{x}$.

34 a) K vektoru $\boldsymbol{a} = (1; 3)$ určete alespoň jeden vektor $\boldsymbol{b}_1$, který je k vektoru $\boldsymbol{a}$ kolmý.
b) K vektoru $\boldsymbol{a} = (1; 3)$ určete všechny vektory $\boldsymbol{b}_2$, které jsou k vektoru $\boldsymbol{a}$ kolmé a mají stejnou velikost jako vektor $\boldsymbol{a}$.
c) K vektoru $\boldsymbol{a} = (1; 3)$ určete všechny vektory $\boldsymbol{b}_k$, které jsou k vektoru $\boldsymbol{a}$ kolmé.

35 Určete vektor $\boldsymbol{f}$ tak, aby platilo $\boldsymbol{f} \perp \boldsymbol{g} \wedge |\boldsymbol{f}| = 4\sqrt{5}$, kde $\boldsymbol{g} = (3; 6)$.

36 Jsou dány body $S[3; 2]$, $M[5; 1]$. Určete bod M_1 tak, aby vektory $\boldsymbol{u}_1 = M - S$ a $\boldsymbol{u}_2 = M_1 - S$ měly stejnou velikost a byly navzájem kolmé.

37 Jsou dány body $A[2; 1]$, $B[5; 4]$. Určete souřadnice bodů C, D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl čtverec.

38 Jsou dány body $A[4; 1]$, $S[6; 2]$. Určete souřadnice bodů B, C, D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl čtverec. (Bod S je střed čtverce.)

39 Jsou dány body $A[-2; 4]$, $C[8; 5]$. Určete souřadnice bodů B, D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl čtverec.

40 Jsou dány body $K[2; 5]$, $L[6; 2]$. Určete souřadnice bodů M, N tak, aby čtyřúhelník $KLMN$ byl obdélník a aby platilo $|KL| = 3|LM|$.

41 Jsou dány body $K[-2; 2]$, $L[6; 8]$. Na ose x určete bod X tak, aby trojúhelník KLX byl pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu X.

42 Jsou dány body $R[3; 1]$, $S[-1; 3]$. Určete bod T tak, aby platilo:
a) bod T leží na ose x a $|\sphericalangle RTS| = 90°$
b) bod T leží na ose y a $|\sphericalangle SRT| = 90°$
c) bod T leží na ose I. a III. kvadrantu a $|\sphericalangle STR| = 90°$

43 Body $E[2; -2; -2]$, $F[0; -1; -4]$, $G[2; 1; -5]$ tvoří trojúhelník EFG. Dokažte, že trojúhelník EFG je pravoúhlý a rovnoramenný. U kterého vrcholu je pravý úhel?

44 Jsou dány body $M[3; -2\sqrt{2}]$, $N[-1; 2\sqrt{2}]$. Určete souřadnice bodu O tak, aby trojúhelník MNO byl pravoúhlý a rovnoramenný, s pravým úhlem
a) u vrcholu M, b) u vrcholu N, c) u vrcholu O.

13.7 Vektorový součin dvou vektorů $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$

45 Jsou dány dva vektory $\boldsymbol{u} = (0; 1; 0)$, $\boldsymbol{v} = (1; 1; 0)$.
a) Vypočítejte pomocí souřadnic vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ vektorový součin $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.
b) V pravotočivé soustavě souřadnic nakreslete orientované úsečky $\boldsymbol{OU}$, $\boldsymbol{UV}$, $\boldsymbol{OW}$, které jsou umístěním vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ s počátečním bodem $O[0; 0; 0]$. V nakresleném obrázku ověřte, že $\boldsymbol{OU} \perp \boldsymbol{OW} \wedge \boldsymbol{OV} \perp \boldsymbol{OW}$.
c) Vypočítejte velikost vektoru $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

d) Z obrázku určete úhel orientovaných úseček $\boldsymbol{OU}$, $\boldsymbol{OV}$, vypočítejte velikosti vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a potom vypočítejte velikost vektorového součinu $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ pomocí velikostí vektorů a úhlu, který tyto vektory svírají.
e) Vypočítejte $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$.
f) Vyznačte v obrázku orientované úsečky $\boldsymbol{OZ}_1$, $\boldsymbol{OZ}_2$, které jsou umístěním vektorů $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ a rozhodněte o vzájemné poloze orientovaných úseček $\boldsymbol{OZ}_1$, $\boldsymbol{OZ}_2$. Je vektorový součin komutativní?

46 Vypočítejte vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ je-li dáno:

a)	b)	c)	d)
$\boldsymbol{u} = (2; 1; 3)$	$\boldsymbol{u} = (0; 1; 3)$	$\boldsymbol{u} = (2; -1; 3)$	$\boldsymbol{u} = (2; 1)$
$\boldsymbol{v} = (-1; 4; 2)$	$\boldsymbol{v} = (1; 0; 2)$	$\boldsymbol{v} = (4; -2; 6)$	$\boldsymbol{v} = (3; 4)$

47 Vypočítejte obsah rovnoběžníku $KLMN$, jestliže znáte souřadnice vrcholů K, L, M. Vypočítejte souřadnice vrcholu N.
a) $K[2; 0; 1]$, $L[1; -1; 3]$, $M[4; 2; 1]$ b) $K[1; 3]$, $L[2; 0]$, $M[4; -1]$

48 Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, znáte-li souřadnice vrcholů A, B, C:
a) $A[4; 0; -1]$, $B[2; 4; -1]$, $C[5; 3; 4]$
b) $A[2; -1]$, $B[-1; 4]$, $C[3; -2]$
c) $A[3; -6; 5]$, $B[4; 8; 1]$, $C[5; 22; -3]$
d) $A[\sqrt{6}; 1 - \sqrt{6}; -3 + 2\sqrt{6}]$, $B[\sqrt{6}; 2 - \sqrt{6}; 2\sqrt{6}]$, $C[2 + \sqrt{6}; 2 + 2\sqrt{6}; \sqrt{6}]$

49 Vypočítejte obvod, vnitřní úhly a obsah trojúhelníku RST, jsou-li souřadnice vrcholů $R[4; 1; 0]$, $S[4; -2; -3]$, $T[1; -2; 0]$.

50 Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (2; 3; 4)$, $\boldsymbol{v} = (-2; m; 0)$. Určete hodnotu parametru $m \in \mathrm{R}$ tak, aby platilo $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = 4\sqrt{6}$.

51 Na ose y určete bod Y tak, aby obsah trojúhelníku XYZ byl 10. Souřadnice bodů X, Z jsou $X[2; 1; 0]$, $Z[2; 2; 3]$.

52 Na ose x určete bod X tak, aby obsah trojúhelníku PQX byl 3. Souřadnice bodů P, Q jsou $P[4; 0]$, $Q[2; -4]$.

53 Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = (2; 4; -1)$, $\boldsymbol{b} = (3; 1; 2)$. Určete hodnotu parametru $p \in \mathrm{R}$ tak, aby pro vektor $\boldsymbol{z} = (1; p; 2)$ platilo $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{z} \perp \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{b}$.

54 Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (3; -1; 0)$, $\boldsymbol{v} = (9; -3; 2)$. Určete souřadnice vektoru $\boldsymbol{z}$ tak, aby platilo $\boldsymbol{z} \perp \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{z} \perp \boldsymbol{v} \wedge |\boldsymbol{z}| = 1$. Úlohu řešte dvěma způsoby:
a) užitím vektorového součinu
b) užitím skalárního součinu
Posuďte, který způsob je lepší.

13.8 Smíšený součin tří vektorů $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$

55 V rovnoběžnostěnu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ známe souřadnice vrcholů $A[1; 0; 2]$, $B[3; 4; 3]$, $D[-1; 4; 6]$, $A_1[2; 1; -5]$.
a) Vypočítejte souřadnice vrcholů C, B_1, C_1, D_1.
b) Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

56 Jsou dány body $K[2; 3; -1]$, $L[8; 4; -2]$, $M[0; 6; 0]$, $O[2; 1; 4]$.
a) Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu $KLMNOPQR$.
b) Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu $KLNMOPQR$.
c) Porovnejte výsledky úloh a), b) a zdůvodněte.

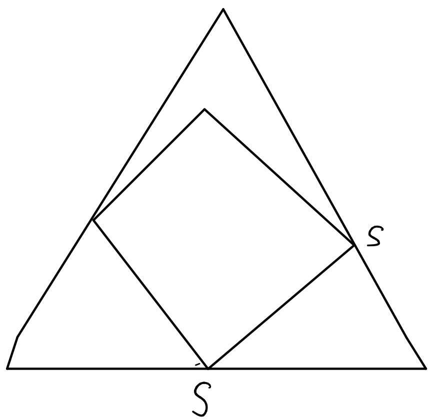
57 Vypočítejte objem čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, znáte-li souřadnice bodů $A[2;3;4]$, $B[-1;4;-2]$, $D[0;2;-5]$, $V[3;2;1]$.

58 Vypočítejte objem trojbokého hranolu $OPQO_1P_1Q_1$, znáte-li souřadnice vrcholů $O[2;0;0]$, $P[0;0;0]$, $Q[0;2;0]$, $O_1[0;0;4]$.

59 Jsou dány body $A[2;2;3]$, $B[6;3;0]$, $C[3;-1;-1]$.

a) Dále je dán bod $D[0;0;0]$. Vypočítejte objem čtyřstěnu $ABCD$.
b) Na ose x určete bod X tak, aby objem čtyřstěnu $ABCX$ byl 26.

60 Na ose z určete bod Z tak, aby objem čtyřstěnu $ABCZ$, kde $A[2;-3;1]$, $B[1;0;3]$, $C[3;1;-1]$, byl 14.



14 Analytická geometrie v rovině

14.1 Rovnice přímky

1 Přímka p je dána v jednotlivých případech různými způsoby. Nakreslete přímku p v soustavě souřadnic pomocí daných prvků. Potom sestavte její parametrické rovnice, obecnou rovnici, zapište přímku p ve směrnicovém tvaru, ve tvaru úsekovém (pokud tyto tvary existují).

a) Přímka p je dána bodem $A[4;2]$ a směrovým vektorem $\boldsymbol{s} = (2;-1)$.
b) Přímka p je dána bodem $A[2;0]$ a normálovým vektorem $\boldsymbol{n} = (-3;2)$.
c) Přímka p je dána dvěma body $A[2;3]$, $B[-2;-5]$.
d) Přímka p prochází bodem $A[-3;-1]$ a počátkem soustavy souřadnic.
e) Přímka p prochází bodem $A[3;-2]$ kolmo k ose x.
f) Přímka p je dána bodem $A[1;2\sqrt{3}]$ a směrovým úhlem $\varphi = 120°$.
g) Přímka p prochází bodem $A[-2;4]$ a má směrnici $k = 2$.
h) Přímka p protíná souřadnicové osy v bodech $X[3;0]$, $Y[0;-2]$.

2 Přímka p je dána obecnou rovnicí $2x + 5y - 6 = 0$.

a) Vyjádřete přímku p parametrickými rovnicemi.
b) Napište rovnici přímky p ve směrnicovém tvaru.

3 Vypočítejte směrnici a směrový úhel přímky, která je dána body $A[0;2]$, $B[-2;4]$.

4 Napište v parametrickém tvaru rovnici přímky p, která prochází počátkem a je rovnoběžná s přímkou q: $4x - y + 3 = 0$.

5 Určete obecnou rovnici přímky p, která je kolmá k přímce q: $2x - y + 7 = 0$ a prochází počátkem soustavy souřadnic.

6 Určete hodnotu parametru $m \in \mathrm{R}$ tak, aby přímka $x + my + 2m^2 - m - 1 = 0$ procházela počátkem soustavy souřadnic.

7 Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $A[-4;3]$ a je rovnoběžná s přímkou q: $5x - 2y + 6 = 0$.

8 Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $A[-6;5]$ a je kolmá na přímku q: $x - 2y + 9 = 0$.

9 Určete souřadnici y_M bodu $M[2;y_M]$ tak, aby bod M ležel na přímce AB, kde $A[-3;5]$, $B[-1;-1]$.

10 Body $A[2;4]$, $B[4;-6]$ určují přímku AB. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází středem úsečky AB a je kolmá na přímku MN, $M[-4;-3]$, $N[1;-2]$.

11 Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $A[3;-1]$ a je

a) rovnoběžná s přímkou q_1: $2x + 3y + 7 = 0$,
b) kolmá k přímce q_2: $x - 2y + 4 = 0$,
c) rovnoběžná s osou x,
d) kolmá k ose y.

12 Je dán trojúhelník ABC, $A[1;4]$, $B[3;-2]$, $C[-4;-6]$. Určete v parametrickém tvaru rovnici přímky, na které leží

a) strana c,
b) výška v_c,
c) těžnice t_c,
d) osa úsečky AB,
e) střední příčka rovnoběžná s AB,
f) kolmice na AB bodem A.

13 Jsou dány body $K[2; 4]$, $L[3; -2]$.
a) Napište obecnou rovnici osy úsečky KL.
b) Napište obecnou rovnici kolmice k úsečce KL v bodě L.

14 Body $A[2; 4]$, $B[4; 2]$, $C[4; 1]$ jsou vrcholy trojúhelníku ABC. Napište obecné rovnice os všech jeho stran. Potom vypočítejte souřadnice jejich průsečíku.

15 Body $A[2; 4]$, $B[4; 2]$, $C[4; 1]$ jsou vrcholy trojúhelníku ABC. Napište obecné rovnice přímek, na nichž leží těžnice t_a, t_b, t_c. Potom vypočítejte souřadnice těžiště.

16 Body $A[2; 4]$, $B[4; 2]$, $C[4; 1]$ jsou vrcholy trojúhelníku ABC. Napište obecné rovnice výšek v_a, v_b, v_c. Potom vypočítejte souřadnice průsečíku výšek.

17 Je dán trojúhelník ABC, $A[0; 0]$, $B[-4; 2]$, $C[-6; 0]$. Vypočítejte souřadnice průsečíku výšek V, souřadnice těžiště T a souřadnice středu S kružnice trojúhelníku ABC opsané. Dokažte, že body V, T, S leží na jedné přímce.

18 Napište rovnici přímky AB, $A[5; -2]$, $B[2; -3]$ v úsekovém tvaru. Vypočítejte souřadnice průsečíků přímky AB s osami souřadnic. Vypočítejte obsah trojúhelníku, který omezuje daná přímka AB spolu s osami x, y.

19 Osy x, y a přímka KL, $K[2; 9]$, $L[-4; -3]$ určují trojúhelník. Vypočítejte jeho obsah.

20 Určete obecnou rovnici přímky p tak, aby procházela bodem $M[1; 4]$ a spolu s osami x, y určovala trojúhelník o obsahu 1.

21 Bodem $M[2; 3]$ veďte přímku m tak, aby pro průsečíky $P[p; 0]$, $Q[0; q]$ přímky m se souřadnicovými osami platilo:
a) $p = q$ b) $p + q = 0$ c) $p + q = 12$ d) $p : q = 2 : 3$
Určete obecnou rovnici přímky m v jednotlivých případech.

14.2 Úsečka, polopřímka, polorovina

22 Jsou dány dva body $A[-2; 5]$, $B[4; -1]$.
a) Napište rovnici úsečky AB.
b) Napište rovnici polopřímky AB.
c) Napište rovnici polopřímky BA.

23 Je dána polopřímka $MN = \{[2 + 3t; 3 + t],\ t \in (-\infty; \frac{1}{2}\rangle\}$.
a) Určete souřadnice počátečního bodu M dané polopřímky.
b) Polopřímku nakreslete.
c) Určete y_K tak, aby bod $K[-1; y_K]$ ležel na dané polopřímce.

24 Nakreslete poloroviny:
a) $3x + y - 6 \leqq 0$ c) $2x - y \leqq 0$ e) $y \geqq 2$
b) $x - 2y + 5 \geqq 0$ d) $x + y \geqq 0$ f) $x \leqq -2{,}6$

25 Rozhodněte, zda bod $M[4; -7]$ leží v polorovině $2x - 3y + 2 \leqq 0$.

26 Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathrm{R}$ tak, aby bod $P[-4; p + 3]$ ležel v polorovině $y \geqq 2x$.

27 Rozhodněte, zda přímka p: $2x + 7y - 12 = 0$ protíná úsečku $A[2; 3]$, $B[5; -1]$.

28 Určete hodnotu parametru $c \in \mathrm{R}$ tak, aby body $A[4; 1]$, $B[2; -6]$ ležely uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou p: $3x + 5y + c = 0$.

29 Určete hodnotu parametru $b \in \mathrm{R}$ tak, aby body $K[-3; 8]$, $L[1; -9]$ ležely v opačných polorovinách určených hraniční přímkou $x + by - 3 = 0$.

14.3 Vzájemná poloha přímek

30 Vyšetřete vzájemnou polohu přímek p, q. V případě různoběžných přímek vypočítejte souřadnice průsečíku přímek p, q.
a) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t],\ t \in \mathrm{R}\}$
$q = \{[-1 + 2k; 7 - 3k],\ k \in \mathrm{R}\}$
b) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t],\ t \in \mathrm{R}\}$
$q = \{[1 + 4k; 5 - 2k],\ k \in \mathrm{R}\}$
c) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t],\ t \in \mathrm{R}\}$
$q = \{[17 + 4k; -6 - 2k],\ k \in \mathrm{R}\}$
d) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t],\ t \in \mathrm{R}\}$
$q = \{[5 + 4k; -4 - 6k],\ k \in \mathrm{R}\}$
e) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t],\ t \in \mathrm{R}\}$
q: $2x + y - 1 = 0$
f) p: $2x + y - 1 = 0$
q: $x - 2y - 8 = 0$
g) p: $2x + y - 1 = 0$
q: $4x + 2y - 2 = 0$
h) p: $2x + y - 1 = 0$
q: $2x + y - 3 = 0$

31 Vyšetřete vzájemnou polohu přímek AB a CD, znáte-li souřadnice bodů, které dané přímky určují; $A[-1; -2]$, $B[-1; 1]$, $C[1; 1]$, $D[2; 3]$.

32 Průsečíkem přímek p: $3x + y - 2 = 0$, q: $x - y - 6 = 0$ veďte rovnoběžku s přímkou r: $2x - y + 4 = 0$. Určete její obecnou rovnici.

33 Průsečíkem přímek $p = \{[1 + t; 2 - t],\ t \in \mathrm{R}\}$, $q = \{[2k; -3 + k],\ k \in \mathrm{R}\}$ veďte kolmici k přímce $r = \{[2 + 4m; 8 - 3m],\ m \in \mathrm{R}\}$. Určete její obecnou rovnici.

34 Určete parametrické rovnice přímky, která prochází průsečíkem přímek p, q, kde p: $3x - 7y + 9 = 0$, q: $5x + 3y - 29 = 0$, kolmo k ose I. a III. kvadrantu.

35 Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC tak, aby jeho strany ležely na přímkách a: $x - 2y + 8 = 0$, b: $2x + y + 1 = 0$, c: $8x - y - 11 = 0$.

36 Body $A[1; 2]$, $B[-2; 3]$, $C[-3; -1]$ určují trojúhelník. Vrcholy trojúhelníku ABC sestrojte rovnoběžky s protějšími stranami. Dostanete tak trojúhelník $A_1B_1C_1$. Vypočítejte souřadnice vrcholů A_1, B_1, C_1.

37 Jsou dány dvě přímky p: $ax + (2b - 1)y + c + 3 = 0$, q: $2x - (b + 2)y - 2c = 0$. Pro které hodnoty parametrů a, b, $c \in \mathrm{R}$ jsou dané přímky
a) splývající rovnoběžky,
b) různé rovnoběžky,
c) dvě různoběžky, které se protínají v bodě $M[5; 0]$.

38 Určete hodnoty parametrů $a, b \in \mathrm{R}$ tak, aby dané přímky p, q splývaly: $p = \{[1 - t; 2 + t],\ t \in \mathrm{R}\}$, $q = \{[a + k; 5 + bk],\ k \in \mathrm{R}\}$

39 Určete hodnotu parametru $m \in \mathrm{R}$ tak, aby přímka $mx + y + m - 11 = 0$ procházela průsečíkem přímek p: $2x + y + 6 = 0$, q: $x - 2y + 8 = 0$.

40 Určete hodnoty parametrů a, $b \in \mathrm{R}$ tak, aby body $A[3; -1]$, $B[-2; 4]$ ležely na přímce $p = \{[a + 2t; 3 - bt],\ t \in \mathrm{R}\}$.

41 Je dána přímka p: $3x - 2y + 6 = 0$. Určete hodnoty parametrů a, $c \in \mathrm{R}$ tak, aby přímka q: $ax - 5y + c = 0$ byla s přímkou p rovnoběžná a procházela bodem $M[5; 3]$.

42 Určete všechny hodnoty parametru $m \in \mathrm{R}$ tak, aby se přímky p, q protínaly ve IV. kvadrantu; p: $2x - 3y = m$, q: $4x + 3y = -11$.

43 Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathrm{R}$ tak, aby se přímky p, q protínaly ve II. kvadrantu; $p = \{[5 + 2t; a - 3t],\ t \in \mathrm{R}\}$, $q = \{[1 + 4k; 2 + k],\ k \in \mathrm{R}\}$.

44 Vypočítejte hodnotu parametru $m \in \mathrm{R}$ tak, aby se přímky p, q protínaly na ose y.
p: $(m - 1)x - (m + 2)y + m = 0$, q: $(m + 2)x + (m - 3)y + 3m - 1 = 0$

45 Vyšetřete vzájemnou polohu úseček $u_1 = \{[1 + 2t; 2 - t],\ t \in \langle -2; 1 \rangle\}$, $u_2 = \{[-1 + k; 2k],\ k \in \langle 0; 1 \rangle\}$. Nakreslete obrázek.

46 Je dána úsečka AB, kde $A[-1; 2]$, $B[2; 1]$. Určete hodnotu parametru $m \in \mathrm{R}$ tak, aby úsečka KL protínala úsečku AB v jejím středu. Souřadnice bodů K, L jsou $K[-2; -6]$, $L[2; m]$.

14.4 Odchylka dvou přímek

47 Vypočítejte odchylku přímek p, q. Výsledky uvádějte s přesností na minuty.

a) $p = \{[4 - 2t; 5 - t],\ t \in \mathrm{R}\}$
   $q = \{[2 + k; 1 + 3k],\ k \in \mathrm{R}\}$

b) p: $x + 2y - 1 = 0$
   q: $2x - y + 4 = 0$

c) p: $3x - 4y = 0$
   q: $y - 6 = 0$

d) p: $7x - y + 1 = 0$
   q: $x - 7y + 1 = 0$

e) $p = \{[2 + t; 5],\ t \in \mathrm{R}\}$
   q: $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$

f) $p = \{[1 - 3t; 2 + t],\ t \in \mathrm{R}\}$
   q: $3x - y + 7 = 0$

g) p: $y = x - 3$
   q: $y = -0{,}2x + 0{,}1$

h) p: $y = 0$
   q: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

48 Je dán trojúhelník ABC, $A[-1; 4]$, $B[2; -2]$, $C[5; -1]$. Vypočítejte
a) vnitřní úhel β trojúhelníku ABC,
b) odchylku přímek AB, BC,
c) odchylku osy úsečky AB a osy x,
d) velikost úhlu ATB, kde T je těžiště $\triangle ABC$.

49 Jsou dány dvě přímky p: $ax + y - 4 = 0$, q: $x + 2y + 8 = 0$. Určete hodnotu parametru $a \in \mathrm{R}$ tak, aby
a) přímky p, q byly navzájem kolmé,
b) odchylka přímek p, q byla $45°$.

50 Bodem $P[6; 1]$ veďte přímku p a bodem $Q[-2; 7]$ veďte přímku q tak, aby se přímky p, q protínaly na ose x a byly navzájem kolmé. Napište obecné rovnice přímek p, q.

51 Bodem $A[-1; 3]$ veďte přímku p tak, aby odchylka přímky p a přímky o: $y = x$ byla $\varphi = 60°$. Vypočítejte souřadnice průsečíku přímek p, o.

52 Jsou dány přímky p: $y = kx + 2$, q: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$. Určete směrnici $k \in \mathrm{R}$ přímky p tak, aby odchylka přímek p, q byla $\varphi = 30°$.

53 Je dána přímka q: $y = -2x + 5$. Určete rovnici přímky p procházející počátkem soustavy souřadnic tak, aby odchylka přímek p, q byla $\varphi = 45°$.

14.5 Výpočty vzdáleností

Vzdálenost dvou bodů

54 Vypočítejte obvod trojúhelníku ABC, kde $A[-3; 1]$, $B[2; -4]$, $C[3; 3]$.

55 Na ose y najděte bod Y, který má od bodu $A[-4; 3]$ vzdálenost 5.

56 Na ose x najděte bod X, který má od bodu $B[6; -3]$ vzdálenost 7.

57 Na ose y určete bod Y tak, aby měl stejnou vzdálenost od daných dvou bodů $A[-2; 1]$, $B[4; -2]$.

58 Na přímce $p = \{[1 - t; 2 + 3t],\ t \in \mathrm{R}\}$ určete bod C tak, aby měl stejnou vzdálenost od daných dvou bodů $A[-4; 2]$, $B[2; -1]$.

59 Na přímce p: $2x + y = 0$ najděte bod C tak, aby trojúhelník ABC byl rovnoramenný se základnou AB, kde $A[6; 4]$, $B[2; -2]$.

60 Na přímce AB, kde $A[-3; 2]$, $B[2; -3]$ určete bod M tak, aby platilo $|AM| = \frac{2}{3}|BM|$.

61 V rovině najděte takový bod S, který má od daných tří bodů $A[2; 0]$, $B[-4; 2]$, $C[2; -2]$ stejnou vzdálenost (tj. najděte souřadnice středu kružnice trojúhelníku ABC opsané).

Vzdálenost bodu od přímky

62 Vypočítejte vzdálenost bodu $A[-3; 13]$ od přímky KL, $K[0; 4]$, $L[-5; -6]$.

63 Vypočítejte vzdálenost bodu $A[8; -5]$ od přímky $p = \{[-4t; \frac{7}{2} + 3t],\ t \in \mathrm{R}\}$.

Vzdálenosti — další úlohy

64 Na ose y určete takový bod Y, který má od přímky p: $y = -2x + 4$ vzdálenost $2\sqrt{5}$.

65 Na přímce p: $x + 3y - 2 = 0$ určete bod M tak, aby jeho vzdálenost od přímky q: $5x + 12y - 4 = 0$ byla 3.

66 Určete hodnotu parametru $c \in \mathrm{R}$ tak, aby vzdálenost počátku soustavy souřadnic od přímky p: $2x - y + c = 0$ byla 4.

67 Přímka q je dána rovnicí $3x - 4y + 12 = 0$. Napište obecnou rovnici přímky p, která je rovnoběžná s přímkou q ve vzdálenosti 3.

68 Vypočítejte vzdálenost rovnoběžek p_1: $8x - 6y + 3 = 0$, p_2: $8x - 6y - 3 = 0$.

69 Jsou dány přímky p: $3x + 2y - 6 = 0$, q: $3x + 2y + 8 = 0$, r: $6x + 4y - 5 = 0$. Dokažte, že dané tři přímky jsou rovnoběžné a určete, v jakém poměru dělí přímka r vzdálenost mezi přímkami p, q.

70 Jsou dány přímky p_1: $2x + 3y - 11 = 0$, p_2: $4x + 6y + 5 = 0$. Určete obecnou rovnici přímky, která je rovnoběžná s danými přímkami a má od obou přímek stejnou vzdálenost (osa pásu).

71 Určete rovnici přímky, která prochází bodem $A[-2; -6]$ a jejíž vzdálenost od počátku soustavy souřadnic je $2\sqrt{2}$.

72 Ze svazku přímek procházejících počátkem soustavy souřadnic vyberte takovou, od které má bod $M[6; 2]$ vzdálenost 2.

73 Ze svazku přímek rovnoběžných s osou I. a III. kvadrantu vyberte takovou, od které má bod $M[-5; 2]$ vzdálenost $3\sqrt{2}$.

74 Najděte všechny body M, které mají od přímky p: $3x - y = 0$ vzdálenost $\frac{\sqrt{10}}{5}$ a od přímky q: $2x + y - 2 = 0$ vzdálenost $2\sqrt{5}$.

75 V rovině najděte všechny body O, které mají stejnou vzdálenost od daných přímek a: $x + 2y = 0$, b: $2x + y = 0$, c: $x - 2y + 4 = 0$. (Dané přímky určují trojúhelník; najděte střed kružnice vepsané a středy kružnic trojúhelníku připsaných.)

76 Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $M[4; 6]$. Dva dané body $A[-6; 10]$, $B[10; -6]$ mají od přímky p stejnou vzdálenost.

77 Je dán trojúhelník ABC, kde $A[2; -4]$, $B[1; -2]$, $C[0; -3]$. Určete obecnou rovnici přímky q, která je osou úhlu α trojúhelníku ABC.

78 V trojúhelníku ABC, $A[-3; 4]$, $B[-1; -2]$, $C[3; 6]$ vypočítejte:

a) výšky v_a, v_b, v_c
b) těžnice t_a, t_b, t_c
c) délku střední příčky
d) obvod a obsah $\triangle ABC$

79 Dokažte, že body $A[0; -2]$, $B[5; 3]$, $C[2; 2]$, $D[1; 1]$ tvoří vrcholy rovnoramenného lichoběžníku s rameny AD, BC. Vypočítejte:

a) obvod lichoběžníku
b) délku střední příčky
c) výšku
d) obsah

14.6 Zobrazení v analytické geometrii

80 Určete souřadnice bodu A', který je obrazem bodu $A[3; -2]$ v osové souměrnosti dané osou o: $2x - y + 7 = 0$.

81 Určete souřadnice bodu C', který je s bodem $C[3; 6]$ souměrný podle přímky AB, kde $A[-2; 1]$, $B[-1; -2]$.

82 Určete obecnou rovnici přímky p', která je s přímkou p: $2x + y - 5 = 0$ středově souměrná

a) podle počátku,
b) podle středu $S[-3; 2]$.

83 Určete obecnou rovnici přímky p', která je s přímkou p: $3x - y + 6 = 0$ souměrná

a) podle osy x,
b) podle osy y,
c) podle osy o: $x + y + 1 = 0$,
d) podle osy o: $x = 4$.

84 Napište rovnici přímky p', která je obrazem přímky p: $3x - y + 6 = 0$ ve stejnolehlosti se středem $S[2; 1]$ a koeficientem stejnolehlosti $\varkappa = 3$.

85 Světelný paprsek vychází z bodu $A[3; 4]$ a odráží se od přímky p: $x + y - 5 = 0$ do bodu $B[-4; 12]$. Určete souřadnice bodu odrazu.

86 Po přímce $2x - y = 0$ dopadá světelný paprsek na přímku p: $x - 3y + 5 = 0$, od které se odráží. Určete souřadnice bodu odrazu a napište rovnici přímky, na které leží paprsek odražený.

14.7 Další úlohy

87 Dokažte, že body $A[-3; 2]$, $B[1; 1]$, $C[0; -6]$ jsou vrcholy trojúhelníku. Najděte alespoň dva způsoby důkazu.

88 Dokažte, že trojúhelník ABC, kde $A[1; 0]$, $B[5; 6]$, $C[6; 1]$ je pravoúhlý a rovnoramenný.

89 Určete bod C tak, aby trojúhelník ABC byl pravoúhlý a rovnoramenný s přeponou AB, kde $A[4; -6]$, $B[-2; 10]$.

90 V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB, $A[-3; 4]$, $B[1; 6]$, leží vrchol C na přímce $5x - 6y - 16 = 0$. Vypočítejte souřadnice vrcholu C.

91 Jsou dány body $A[6\sqrt{3}; 0]$, $B[0; 2\sqrt{3}]$. Určete souřadnice bodu C tak, aby trojúhelník ABC byl rovnostranný.

92 Najděte souřadnice vrcholů B, C rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB, víte-li, že vrchol A má souřadnice $A[3; -2]$, vrchol C leží na ose x, a dále víte, že osa úhlu γ má rovnici $2x + y + 6 = 0$.

93 Vypočítejte souřadnice vrcholů rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB, jestliže znáte obecnou rovnici přímky, na které leží těžnice t_a: $4x + 3y + 5 = 0$, těžiště $T[4; -7]$ a $S_{AB}[1; 2]$.

94 Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecné rovnice přímek, na nichž leží strany b: $3x + 4y - 1 = 0$, c: $x - y + 2 = 0$ a výšky $v_c = 14\sqrt{2}$, $v_b = 7$.

95 Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[-1; -2]$ a obecné rovnice přímek, na kterých leží těžnice t_b: $x + 2y - 1 = 0$, t_c: $y - 4 = 0$.

96 Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $C[-2; 6]$ a obecné rovnice přímek, na kterých leží výšky v_a: $4x - y + 3 = 0$, v_b: $2x + 3y + 1 = 0$.

97 V trojúhelníku ABC znáte souřadnice vrcholů $A[-5; 1]$, $B[4; -2]$ a souřadnice průsečíku výšek $V[3; -3]$. Vypočítejte souřadnice vrcholu C.

98 Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[2; 4]$ a obecnou rovnici výšky v_c: $2x + y = 0$ a těžnice t_c: $x + y + 3 = 0$.

99 Body $S_{AB}[3; 4]$, $S_{BC}[5; -3]$, $S_{AC}[-3; 5]$ jsou středy stran daného trojúhelníku ABC. Vypočítejte souřadnice vrcholů A, B, C.

100 Vrchol C trojúhelníku ABC leží na přímce $x - 2y + 8 = 0$. Určete jeho souřadnice, znáte-li vrcholy $A[2; -1]$, $B[4; 8]$ a víte-li, že obsah trojúhelníku ABC je 10.

101 Vypočítejte souřadnice vrcholů a napište rovnice přímek, na nichž leží strany rovnostranného trojúhelníku, jestliže jedna strana splývá s osou y a jeden z vrcholů má souřadnice $[8; 0]$.

102 Dokažte, že body $A[3; 0]$, $B[6; 4]$, $C[4; 5]$, $D[1; 1]$ tvoří rovnoběžník. Vypočítejte jeho vnitřní úhly a úhel úhlopříček.

103 Vypočítejte souřadnice vrcholů B, D rovnoběžníku $ABCD$, znáte-li souřadnice vrcholů $A[4; 0]$, $C[0; -2]$ a víte-li, že strana AB je rovnoběžná s osou II. a IV. kvadrantu. Délka strany BC je $3\sqrt{2}$.

104 Body $ABCD$ tvoří rovnoběžník. Vypočítejte souřadnice bodů C, D, znáte-li vrcholy $A[2; -4]$, $B[3; -2]$ a délky úhlopříček $|AC| = 2\sqrt{5}$, $|BD| = 4$.

105 Přímka $3x + y - 10 = 0$ je osou základny AB rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$, $B[4; 8]$, $C[6; 12]$. Vypočítejte souřadnice vrcholů A, D.

106 Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$, znáte-li body $A[-1;-3]$, $B[2;1]$.

107 Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$, znáte-li souřadnice bodů $A[6;3]$, $S[1;7]$, kde bod S je střed čtverce.

108 Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$, znáte-li souřadnice bodů $A[3;2]$, $C[-5;4]$.

109 Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$, znáte-li souřadnice bodů $A[5;-6]$, $S_{AB}[7;1]$.

110 Určete souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$, znáte-li $S_{AB}[0;-3]$, $S_{CD}[2;5]$.

111 Určete souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$, znáte-li $S_{AB}[4;1]$, $S_{BC}[9;0]$.

112 Určete souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$, znáte-li $A[-3;-2]$, $S_{BC}[2;\frac{1}{2}]$.

113 Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$, znáte-li bod $B[4;-8]$ a rovnici přímky p: $x-2y=0$, na které leží úhlopříčka AC.

114 Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$, znáte-li délku strany $|AB| = 2\sqrt{10}$ a rovnice přímek p: $x-2y+1=0$, q: $2x+y-3=0$, na kterých leží úhlopříčky AC, BD.

115 Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$, víte-li, že jeden vrchol čtverce je v počátku soustavy souřadnic a úhlopříčky čtverce leží na daných přímkách p_1: $x+2y+5=0$, p_2: $2x-y=0$.

116 Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$, znáte-li souřadnice středu čtverce $S[2;-6]$ a rovnici přímky p: $5x-y+10=0$, na které leží strana AB.

117 Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$, jestliže $S_{AC}[8;0]$ a jestliže znáte rovnici přímky p: $4x+3y+18=0$, na které leží strana BC.

118 Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$ tak, aby vrchol A ležel na přímce a: $2x-y+1=0$ a vrchol C ležel na přímce c: $x+5y-12=0$. Střed S čtverce je $S[-2;1]$.

119 Určete souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$, znáte-li vrchol $A[4;-7]$ a víte-li, že vrcholy B, C leží na přímce p: $2x-y-10=0$.

120 Určete souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$, znáte-li vrchol $A[-6;6]$ a víte-li, že vrcholy B, D leží na přímce q: $x-2y+8=0$.

121 Vypočítejte souřadnice vrcholů kosočtverce $ABCD$, znáte-li vrchol $B[4;-3]$ a víte-li, že úhlopříčka AC leží na přímce p: $2x-y+4=0$. Dále platí $|AC| = 2|BD|$.

122 Určete souřadnice vrcholů obdélníku $ABCD$, znáte-li body $B[2;2]$, $D[11;4]$ a víte-li, že vrchol A leží na přímce $x+2y-10=0$.

123 Určete souřadnice vrcholů obdélníku $ABCD$, znáte-li body $A[1;7]$, $S[-4;6]$, kde S je střed obdélníku, a víte-li, že vrchol D leží na přímce $5x-y=0$.

124 Určete souřadnice vrcholů obdélníku $ABCD$, znáte-li body $A[2;0]$, $B[-6;2]$ a víte-li, že střed obdélníku S leží na přímce $6x-y+10=0$.

125 Určete souřadnice vrcholů obdélníku $ABCD$, znáte-li body $A[-4;6]$, $C[0;8]$ a víte-li, že pro strany obdélníku platí $|AB| = 2|BC|$.

14.8 Vyšetřování množin bodů dané vlastnosti

126 Jsou dány dva body $A[-4;11]$, $B[2;3]$. Vyšetřete množinu všech bodů X v rovině, pro které platí $|AX| = |BX|$.

127 Je dána úsečka $u = \{[1-t; 2+2t],\ t \in \langle 0;1\rangle\}$ a bod $A[2;3]$. Vyšetřete množinu všech bodů X v rovině takových, pro které střed úsečky AX leží na úsečce u.

128 Jsou dány přímky p_1: $2x-y+3=0$, p_2: $2x-y-3=0$. Vyšetřete množinu všech bodů v rovině, které mají od přímek p_1, p_2 stejnou vzdálenost.

129 Jsou dány přímky p_1: $2x-y+3=0$, p_2: $2x-y-3=0$. Vyšetřete množinu všech bodů v rovině, pro které platí $|Xp_1| = 2|Xp_2|$.

130 Jsou dány přímky a: $x-y+4=0$, b: $x-y-1=0$. Vyšetřete množinu středů všech úseček AB, kde $A \in a$, $B \in b$.

131 Jsou dány přímky p_1: $3x+4y+1=0$, p_2: $3x-4y=0$. Vyšetřete množinu všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od přímek p_1 a p_2.

132 Je dána přímka p: $3x+y-1=0$. Vyšetřete množinu všech bodů X v rovině, které mají od přímky p vzdálenost $\sqrt{10}$.

133 Vyšetřete množinu těžišť T všech trojúhelníků APY, kde $A[1;0]$, $P[0;0]$ a bod Y je libovolný bod ležící na kladné poloose y.

134 Vyšetřete množinu těžišť T všech trojúhelníků ABC, kde $A[-1;-2]$, $B[3;0]$ a bod C je libovolný bod přímky $y=6$.

135 Je dána polopřímka $VB = \{[2-t; -1+2t],\ t \in \langle -1;\infty)\}$. Vyšetřete množinu všech bodů X v rovině, pro které platí $|\sphericalangle XVB| = 90°$.

136 Jsou dány přímky p, q, které jsou navzájem kolmé. Vyšetřete množinu všech bodů X v rovině, pro které platí:

a) součet vzdáleností bodu X od daných dvou přímek je 5
b) rozdíl vzdáleností bodu X od daných dvou přímek je 5
c) poměr vzdáleností bodu X od daných dvou přímek je 5

137 Znázorněte v rovině množinu všech bodů X, pro jejichž souřadnice platí:

a) $|x|+|y|=4$
b) $|x-2|+|y+1|=4$
c) $|x|-|y|=4$
d) $|x+1|-|y-3|=4$

138 Znázorněte v rovině množinu všech bodů X, pro jejichž souřadnice platí:

a) $|x|+|y| \leqq 3$
b) $|x|-|y| \leqq 3$
c) $\big||x|-1\big|+\big||y|+2\big| \leqq 3$
d) $\big||x|-1\big|-\big||y|+2\big| \leqq 3$

139 Znázorněte v rovině množinu všech bodů X, pro jejichž souřadnice platí:

a) $2|x|+3y=6$
b) $2x+3|y|=6$
c) $2|x|+3|y|=6$
d) $2|x-1|+3|y+2|=6$

140 Znázorněte v rovině množinu všech bodů X, pro jejichž souřadnice platí:

a) $|x+y| \leqq 2$
b) $|x-y| \leqq 2$
c) $|x+y| \leqq |x-y|$
d) $|x|-|y| \leqq |x-y|$

20 Dokažte, že přímka p a bod A určují rovinu. Napište její obecnou rovnici:

a) $p = \{[3 - t; -2 + t; 4 + 2t], t \in \mathsf{R}\}$, $A[0; -1; 5]$
b) $p = \{[2; 4; k], k \in \mathsf{R}\}$, $A[0; 3; 0]$
c) $p = \{[1 + t; 2 - 2t; 0], t \in \mathsf{R}\}$, $A[1; 0; 3]$

21 Dokažte, že přímky p, q určují rovinu. Napište její obecnou rovnici:
$p = \{[\frac{5}{2}; 2 + t; 0], t \in \mathsf{R}\}$, $q = \{[3; 1 + k; 2], k \in \mathsf{R}\}$
V soustavě souřadnic znázorněte přímky p, q i rovinu, kterou určují.

22 Dokažte, že přímky p, q určují rovinu. Napište její obecnou rovnici:
$p = \{[1 - t; 2 + t; 3 + 2t], t \in \mathsf{R}\}$, $q = \{[k; 1 - k; 1 - 2k], k \in \mathsf{R}\}$

23 Dokažte, že přímky p, q určují rovinu. Napište její obecnou rovnici:
$p = \{[2; t; 4 - t], t \in \mathsf{R}\}$, $q = \{[1 + k; 2 + k; k], k \in \mathsf{R}\}$

24 Je dána rovina $\varrho = \{[1 - 2k - 2s; 2 + 3k - 2s; 1 - k + 4s], k, s \in \mathsf{R}\}$. Napište její obecnou rovnici.

25 Přímka $p = \{[2 + 2t; -1 - t; 5], t \in \mathsf{R}\}$ je kolmá k rovině ϱ. Bod $M[2; 0; -3]$ leží v rovině ϱ. Napište obecnou rovnici roviny ϱ.

26 Napište obecnou rovnici roviny σ, víte-li, že v rovině leží body $A[3; 4; 5]$, $B[-2; 1; 0]$ a osa y je rovnoběžná s rovinou σ.

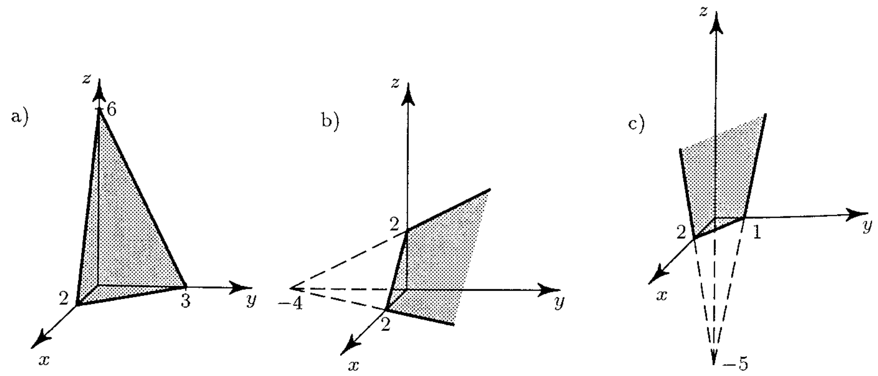
27 Napište obecnou rovnici roviny ψ, víte-li, že rovina ψ prochází počátkem soustavy souřadnic, bodem $A[1; 2; 3]$ a rovina ψ je kolmá k souřadnicové rovině dané osami x a y.

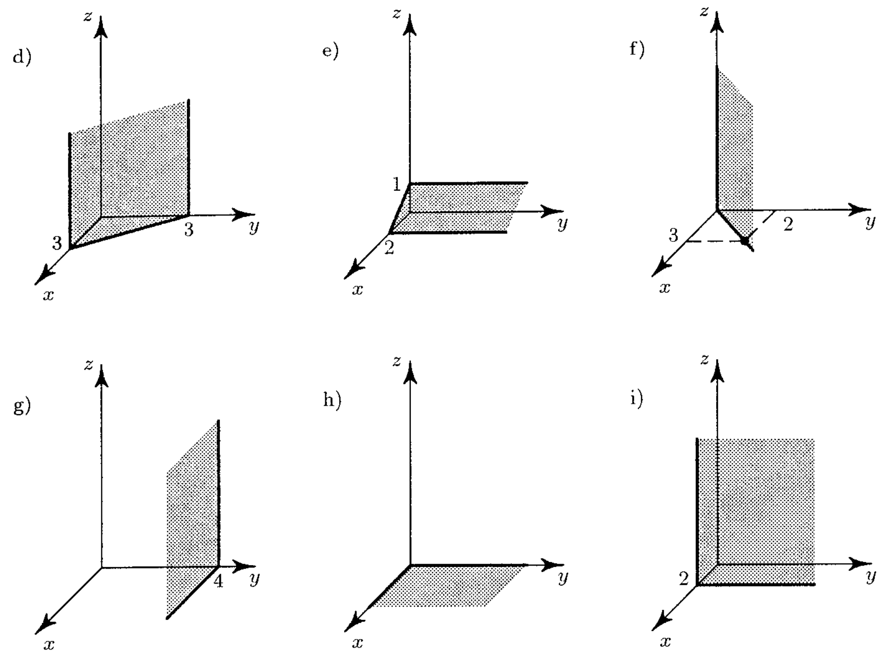
28 Napište obecnou rovnici roviny τ, která prochází bodem $T[4; 3; 2]$ rovnoběžně se souřadnicovou rovinou určenou osami y a z.

29 Napište obecnou rovnici roviny ϱ, ve které leží body $A[2; 3; 0]$, $B[-1; 2; 2]$ a rovina ϱ je kolmá k rovině σ: $3x - 2y + z + 6 = 0$.

30 Kolmicemi sestrojenými z bodu $A[-2; 1; 8]$ na roviny ϱ: $3x + y - 2z - 4 = 0$ a σ: $x + 2y - z + 5 = 0$ proložte rovinu τ. Určete její obecnou rovnici.

31 Napište obecné rovnice nakreslených rovin.





15.4 Vzájemná poloha přímky a roviny

32 Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p a roviny ϱ.

a) $p = \{[2 + t; 3 + 2t; 1 - t], t \in \mathsf{R}\}$, ϱ: $x - 2y + z - 5 = 0$
b) $p = \{[1 - 2k; 5 - k; -3 + 5k], k \in \mathsf{R}\}$, ϱ: $3x - y + z - 11 = 0$
c) $p = \{[2s; 4 + s; -1], s \in \mathsf{R}\}$, ϱ: $x - 2y - 3z + 5 = 0$

33 Vyšetřete vzájemnou polohu přímky AB, $A[-2; 0; -1]$, $B[2; 1; 4]$ a roviny ϱ, která je dána body $K[0; 0; 3]$, $L[-2; -1; 1]$, $M[0; 1; 4]$.

34 Vyšetřete vzájemnou polohu přímky q a roviny σ.

$q = \{[2 + t; 3t; 1 - t], t \in \mathsf{R}\}$, $\sigma = \{[1 + s + 2r; 3s + 3r; 1 - s - 3r], s, r \in \mathsf{R}\}$.

35 Dokažte, že přímka $p = \{[2 + k; -2k; 3], k \in \mathsf{R}\}$ je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou určenou osami x a y. Nakreslete obrázek.

36 Určete hodnoty parametrů a, $b \in \mathsf{R}$ tak, aby přímka
$p = \{[a - t; 1 + bt; 2 - 2t], t \in \mathsf{R}\}$ byla s rovinou ϱ: $x + 2y - z - 10 = 0$

a) různoběžná,
b) ležela v rovině ϱ,
c) rovnoběžná a neležela v rovině ϱ.

15.5 Vzájemná poloha dvou rovin

37 Vyšetřete vzájemnou polohu rovin ϱ a σ. Ve všech případech též znázor-

15 Analytická geometrie v prostoru

15.1 Přímka v prostoru

1 Znázorněte dané body $A[1;2;4]$, $B[3;2;-3]$, $C[2;-4;1]$, $D[-2;2;0]$ v pravoúhlé soustavě souřadnic
a) levotočivé, b) pravotočivé.

2 Napište parametrické rovnice přímky p, která je dána body $A[1;-1;3]$, $B[2;3;0]$. Potom přímku p nakreslete v soustavě souřadnic, vyznačte viditelnost. Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých přímka p protíná souřadnicové roviny. Ověřte, zda výpočet souhlasí s obrázkem.

3 Je dána přímka $p = \{[1-2k; 2+3k; 1+k], k \in \mathsf{R}\}$.
a) Rozhodněte, zda body $C[5;8;3]$, $D[3;-1;0]$ leží na přímce p.
b) Určete y, $z \in \mathsf{R}$ tak, aby bod $E[9;y;z]$ ležel na přímce p.

4 Jsou dány body $A[2;3;-1]$, $B[4;3;-2]$.
a) Rozhodněte, zda body $K[0;4;2]$, $L[2\sqrt{3};3;-\sqrt{3}]$ leží na přímce AB.
b) Určete r, $s \in \mathsf{R}$ tak, aby bod $M[r;2r;s]$ ležel na přímce AB.

5 Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých přímka $p = \{[2;1-t;4t], t \in \mathsf{R}\}$ protíná souřadnicové roviny. Přímku p nakreslete.

6 Jsou dány body $A[1;4;6]$, $B[4;1;-3]$.
a) Napište parametrické rovnice přímky AB.
b) Napište parametrické rovnice úsečky AB.
c) Napište parametrické rovnice polopřímky BA.
d) Napište parametrické rovnice přímky p_1, která je pravoúhlým průmětem přímky AB do souřadnicové roviny určené osou x a osou y.
e) Přímku AB i přímku p_1 nakreslete.

7 Napište parametrické rovnice přímky q, která prochází bodem $M[0;4;5]$ a je rovnoběžná s přímkou $p = \{[2+t;1-t;3+5t], t \in \mathsf{R}\}$.

8 Napište parametrické rovnice přímky q, která prochází bodem $K[2;4;1]$ a je rovnoběžná s osou z. Přímku q nakreslete.

9 Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází bodem $N[1;-2;3]$ rovnoběžně se souřadnicovou rovinou určenou osami y a z a je různoběžná s osou x.

10 Napište parametrické rovnice osy x.

15.2 Vzájemná poloha přímek v prostoru

11 Vyšetřete vzájemnou polohu přímek p, q. Jsou-li přímky různoběžné, určete souřadnice jejich průsečíku.

a) $p = \{[-6+t;7-t;2t], t \in \mathsf{R}\}$
$q = \{[-5-k;3-2k;5+k], k \in \mathsf{R}\}$
b) $p = \{[1+t;2-2t;t], t \in \mathsf{R}\}$
$q = \{[4-2k;1+4k;3-2k], k \in \mathsf{R}\}$

c) $p = \{[2-3t;1+t;4-t], t \in \mathsf{R}\}$
$q = \{[-4+3k;3-k;2+k], k \in \mathsf{R}\}$
d) $p = \{[2t;3-t;4-t], t \in \mathsf{R}\}$
$q = \{[2-2k;-1+k;6+2k], k \in \mathsf{R}\}$
e) $p = \{[2;4-t;1+2t], t \in \mathsf{R}\}$
$q = \{[1-k;2+3k;-1-2k], k \in \mathsf{R}\}$
f) $p = \{[2;1+t;3], t \in \mathsf{R}\}$
$q = \{[k;4;1+k], k \in \mathsf{R}\}$

12 Nakreslete přímky p, q, odhadněte jejich vzájemnou polohu a potom svůj odhad ověřte výpočtem.

a) $p = \{[1;0;t], t \in \mathsf{R}\}$
$q = \{[0;2+2k;-3k], k \in \mathsf{R}\}$
b) $p = \{[3;3;4-t], t \in \mathsf{R}\}$
$q = \{[1;1;2k], k \in \mathsf{R}\}$

13 Určete hodnotu parametru $m \in \mathsf{R}$ tak, aby přímky p, q byly různoběžné. Potom vypočítejte souřadnice průsečíku přímek p, q:
$p = \{[2+k;3-2k;4], k \in \mathsf{R}\}$, $q = \{[1-4t;m+t;1-3t], k \in \mathsf{R}\}$

14 Proveďte diskusi o vzájemné poloze daných přímek p, q vzhledem k hodnotě parametru $a \in \mathsf{R}$:
$p = \{[a+3k;1-2k;2+k], k \in \mathsf{R}\}$, $q = \{[2-6t;-9+4t;7-2t], k \in \mathsf{R}\}$

15 Jsou dány body $A[3;2;-1]$, $B[1;-2;1]$, $C[-2;8;3]$, $D[3;m;-1]$. Proveďte diskusi o vzájemné poloze přímek AB a CD vzhledem k hodnotě parametru $m \in \mathsf{R}$.

15.3 Rovina

Parametrické rovnice roviny

16 Dokažte, že body $A[2;1;6]$, $B[0;-1;-6]$, $C[-1;2;0]$ určují rovinu a napište její parametrické rovnice.
a) Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých rovina ABC protíná osu x, osu y a osu z.
b) Danou rovinu znázorněte ve zvolené soustavě souřadnic.
c) Rozhodněte, zda body $K[2;4;15]$, $L[-3;2;6]$ leží v rovině ABC.
d) Vypočítejte $z \in \mathsf{R}$ tak, aby bod $M[-2;1;z]$ ležel v rovině ABC.

17 Je dána rovina $\varrho = \{[1+t+k;2+3t-k;5t+k], t,k \in \mathsf{R}\}$.
a) Vypočítejte průsečíky roviny ϱ se souřadnicovými osami a rovinu ϱ nakreslete.
b) Napište rovnice přímek, ve kterých rovina ϱ protíná souřadnicové roviny.

18 Ve zvolené soustavě souřadnic nakreslete rovinu $\sigma = \{[4;k;2-t], k,t \in \mathsf{R}\}$.

Obecná rovnice roviny

19 Rozhodněte, zda dané tři body určují rovinu. V případě, že rovinu určují, napište její obecnou rovnici. Vypočítejte souřadnice průsečíků roviny s osami souřadnic a rovinu ve zvolené soustavě souřadnic znázorněte.
a) $A[1;1;1]$, $B[5;1;-3]$, $C[2;0;2]$
b) $A[1;-3;-1]$, $B[2;2;0]$, $C[-4;5;5]$
c) $A[1;2;-3]$, $B[0;1;2]$, $C[2;3;-8]$
d) $A[0;0;0]$, $B[1;2;-2]$, $C[-3;-6;-5]$

něte roviny ϱ, σ v soustavě souřadnic. Jsou-li roviny různoběžné, napište parametrické rovnice jejich průsečnice a průsečnici zakreslete v obrázku.

a) $\varrho\colon 2x+4y+z-8=0$
$\sigma\colon 2y+z-6=0$

b) $\varrho\colon x+y-z-2=0$
$\sigma\colon 2x-y+z-4=0$

c) $\varrho\colon x+y-4=0$
$\sigma\colon y+2z-6=0$

d) $\varrho\colon 2x+y-3z+6=0$
$\sigma\colon 4x+2y-6z+12=0$

e) $\varrho\colon 2x+y-2z+6=0$
$\sigma\colon 4x+2y-4z+6=0$

f) $\varrho\colon x-4=0$
$\sigma\colon y-2=0$

38 Vyšetřete vzájemnou polohu rovin ϱ a σ:
$\varrho=\{[3+t-k;5+t;-t+2k],\ t,k\in\mathsf{R}\}$
$\sigma=\{[3+s-4p;6+2s-3p;1+5p],\ s,p\in\mathsf{R}\}$

39 Určete hodnoty parametrů a, $b\in\mathsf{R}$ tak, aby roviny
$\varrho\colon x+by+z-7=0$, $\sigma\colon ax+4y-z+3=0$ byly

a) rovnoběžné, b) různoběžné, c) navzájem kolmé.

15.6 Vzájemná poloha tří rovin

40 Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin.

a) $\varrho_1\colon 2x-y+z-5=0$
$\sigma_1\colon x+y+3z-6=0$
$\tau_1\colon 3x+2y-4z+7=0$

b) $\varrho_2\colon x+y+z-3=0$
$\sigma_2\colon 3x-2y+z-8=0$
$\tau_2\colon 4x-y+2z+1=0$

c) $\varrho_3\colon x-y+2z-1=0$
$\sigma_3\colon x+2y-z+2=0$
$\tau_3\colon x-2y+3z-2=0$

d) $\varrho_4\colon x+y-z-1=0$
$\sigma_4\colon x+y+z+2=0$
$\tau_4\colon 2x+2y-2z+1=0$

15.7 Odchylka dvou přímek

41 Vypočítejte odchylku přímek p, q.

a) $p=\{[2+t;t;7-2t],\ t\in\mathsf{R}\}$
$q=\{[4-k;5;-3+k],\ k\in\mathsf{R}\}$

b) $p=\{[2-2t;1+t;4-3t],\ t\in\mathsf{R}\}$
$q=\{[1+k;1-k;4-k],\ k\in\mathsf{R}\}$

c) $p=\{[2+t;2t;-3t],\ t\in\mathsf{R}\}$
$q=\{[1-k;2-2k;3+3k],\ k\in\mathsf{R}\}$

d) $p=\{[2;3;t],\ t\in\mathsf{R}\}$
$q=\{[k;0;-k],\ k\in\mathsf{R}\}$

42 Body $A[2;-2;1]$, $B[0;2;1]$, $C[9;-6;6]$ určují trojúhelník ABC. Vypočítejte:

a) úhel α v $\triangle ABC$ b) odchylku přímek AC, AB

43 Je dána přímka $p=\{[1+3t;2-t;4t],\ t\in\mathsf{R}\}$. Vypočítejte s přesností na minuty

a) odchylku α přímky p a osy x,
b) odchylku β přímky p a osy y,
c) odchylku γ přímky p a osy z.
d) Dokažte, že platí: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

44 Je dán bod $A[2;-1;0]$ a přímka $p=\{[3+t;1-t;-3],\ t\in\mathsf{R}\}$. Na přímce p určete bod M tak, aby odchylka přímek AM a p byla a) $90°$, b) $60°$.

45 Vypočítejte odchylku průsečnice rovin $\varrho\colon 2x+y-z+3=0$ a $\sigma\colon x+y-5=0$ od osy z.

46 Určete hodnoty parametrů a, $b\in\mathsf{R}$ tak, aby přímky p, q byly různoběžné a navzájem kolmé.
$p=\{[1+4t;2+at;b+t],\ t\in\mathsf{R}\}$, $q=\{[9;2+2k;2-k],\ k\in\mathsf{R}\}$.

47 Určete parametrické rovnice přímky p, víte-li, že platí: přímka p prochází středem úsečky AB, $A[-1;4;5]$, $B[2;-2;-1]$, přímka p je kolmá na úsečku AB a zároveň je kolmá na přímku KL, kde $K[1;0;0]$, $L[0;1;0]$.

15.8 Odchylka přímky od roviny

48 Vypočítejte odchylku přímky p od roviny ϱ.

a) $p_1=\{[4-2t;1-2t;t],\ t\in\mathsf{R}\}$
$\varrho_1\colon x+4y+z-1=0$

b) $p_2=\{[t;5;2+t],\ t\in\mathsf{R}\}$
$\varrho_2\colon x+z-7=0$

c) $p_3=\{[1+t;2-t;9-t],\ t\in\mathsf{R}\}$
$\varrho_3\colon 2x-y+3z-5=0$

d) $p_4=\{[t;t;0],\ t\in\mathsf{R}\}$
$\varrho_4\colon x-y=0$

49 Vypočítejte odchylku osy z od roviny $\varrho\colon 2x-2y+z+11=0$. Výsledek uveďte s přesností na minuty.

50 Vypočítejte odchylku přímky $p=\{[2+2t;-1-3t;3+\sqrt{3}\,t],\ t\in\mathsf{R}\}$ od souřadnicové roviny určené osami y a z.

51 Je dána přímka $p=\{[1+t;2+at;-1-t],\ t\in\mathsf{R}\}$ a rovina $\varrho\colon x+y-z+8=0$. Určete hodnotu parametru $a\in\mathsf{R}$ tak, aby platilo:

a) $p\perp\varrho$ c) odchylka přímky p od roviny ϱ je $30°$ b) $p\parallel\varrho$

15.9 Odchylka dvou rovin

52 Vypočítejte odchylku daných dvou rovin ϱ, σ.

a) $\varrho_1\colon 2x+y-z+4=0$
$\sigma_1\colon 2x+4y+2z-5=0$

b) $\varrho_2\colon 2x+3y-4z+1=0$
$\sigma_2\colon 4x-4y-z-7=0$

c) $\varrho_3\colon x-y+z=0$
$\sigma_3\colon 2x-2y+2z-4=0$

d) $\varrho_4\colon x-y+9=0$
$\sigma_4\colon y-11=0$

53 Vypočítejte odchylku roviny $\varrho\colon 2x+2y-z-8=0$ od souřadnicové roviny určené osami x a y. Výsledek uveďte s přesností na minuty.

54 Určete všechny hodnoty parametru $a\in\mathsf{R}$ tak, aby roviny $\varrho\colon ax-y+2z-5=0$ a $\sigma\colon x+y-2z+1=0$ byly

a) navzájem kolmé, b) navzájem rovnoběžné.

15.10 Vzdálenost dvou bodů v prostoru

55 Dokažte, že dané tři body $A[2;3;-1]$, $B[4;1;0]$, $C[-2;-1;3]$ jsou vrcholy trojúhelníku a vypočítejte jeho obvod.

56 Jsou dány body $A[1;2;3]$, $B[-3;0;-2]$. Na ose x určete bod X tak, aby platilo $|AX|=|BX|$.

57 Je dán bod $A[-1;4;-2]$. Na ose y určete bod Y tak, aby platilo $|AY|=3$.

58 Na ose z určete bod C tak, aby trojúhelník ABC byl rovnoramenný se základnou AB, $A[3;-2;4]$, $B[0;-1;-2]$.

59 Na přímce AB, $A[1;4;-3]$, $B[0;2;-1]$ najděte bod M tak, aby platilo $|AM|=1$.

15.11 Vzdálenost bodu od přímky v prostoru

60 Vypočítejte vzdálenost bodu A od přímky p.
a) $A[0;2;3]$, $p = \{[3+t;5+2t;-t],\ t \in \mathrm{R}\}$
b) $A[4;-6;1]$, $p = \{[3+t;1+t;-1],\ t \in \mathrm{R}\}$
c) $A[4;5;3]$, $p = \{[2+t;7-t;1+t],\ t \in \mathrm{R}\}$
d) $A[0;0;5]$, $p = \{[2;0;t],\ t \in \mathrm{R}\}$

61 V trojúhelníku ABC vypočítejte výšku v_a, znáte-li $A[1;2;3]$, $B[3;6;2]$, $C[-1;10;-2]$.

62 Je dána přímka $p = \{[2+k;1-k;1-k],\ k \in \mathrm{R}\}$. Na ose x určete bod X tak, aby jeho vzdálenost od přímky p byla 2.

63 Na přímce $q = \{[4+k;2;2+k],\ k \in \mathrm{R}\}$ určete bod M tak, aby vzdálenost bodu M od přímky $p = \{[3-2t;t;1],\ t \in \mathrm{R}\}$ byla 4.

64 Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných přímek $p = \{[1-t;1+2t;-t],\ t \in \mathrm{R}\}$ a $q = \{[2+k;1-2k;2+k],\ k \in \mathrm{R}\}$.

65 V rovině $\varrho\colon x+y-z+1=0$ určete bod M tak, aby jeho vzdálenost od přímky $p = \{[2+t;3;t],\ t \in \mathrm{R}\}$ byla 6 a současně vzdálenost bodu M od souřadnicové roviny dané osami x, y byla 4.

15.12 Vzdálenost bodu od roviny

66 Vypočítejte vzdálenost bodu $A[4;2;-3]$ od roviny $\varrho\colon 2x-2y+z+5=0$.

67 Jsou dány body $A[-1;4;5]$, $B[2;-2;-1]$, $C[0;-1;-3]$. Na ose z určete bod Z tak, aby jeho vzdálenost od roviny určené body A, B, C byla 5.

68 Vypočítejte vzdálenost počátku soustavy souřadnic od roviny určené přímkami $p = \{[t;2t;4-t],\ t \in \mathrm{R}\}$, $q = \{[1-k;1-2k;3+k],\ k \in \mathrm{R}\}$.

69 Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných rovin $\varrho\colon 2x+y-2z-3=0$, $\sigma\colon 2x+y-2z-1=0$.

70 Na přímce $p = \{[k;3+k;2+4k],\ k \in \mathrm{R}\}$ určete bod M tak, aby jeho vzdálenost od roviny $\tau\colon 2x+y-z+12=0$ byla $2\sqrt{6}$.

71 Na přímce $p = \{[2+4t;1-t;3+2t],\ t \in \mathrm{R}\}$ určete bod M tak, aby jeho vzdálenost od souřadnicové roviny určené osami x a y byla 7.

72 Určete $z_M \in \mathrm{R}$ tak, aby vzdálenost bodu $M[4;3;z_M]$ od roviny dané přímkami $p = \{[-1+t;2;2-t],\ t \in \mathrm{R}\}$, $q = \{[2;3+k;k],\ k \in \mathrm{R}\}$ byla $5\sqrt{3}$.

15.13 Vzdálenost mimoběžek

73 Vypočítejte vzdálenost mimoběžek:
a) $p_1 = \{[2+2t;1-t;2+t],\ t \in \mathrm{R}\}$, $q_1 = \{[1-k;3+k;6],\ k \in \mathrm{R}\}$
b) $p_2 = \{[2;3;5+t],\ t \in \mathrm{R}\}$, $q_2 = \{[0;1+k;4-k],\ k \in \mathrm{R}\}$

Nakreslete obrázek pro úlohu b), tj. v soustavě souřadnic narýsujte mimoběžky p_2, q_2 a potom vyznačte jejich vzdálenost.

15.14 Souměrnosti v prostoru

74 Určete souřadnice bodu A', který je obrazem bodu $A[5;3;-4]$ ve středové souměrnosti dané středem souměrnosti $S[-6;4;1]$.

75 Určete souřadnice bodu A', který je obrazem bodu $A[2;-3;6]$ v osové souměrnosti dané osou $o = \{[2-t;3+t;2t],\ t \in \mathrm{R}\}$.

76 Určete souřadnice bodu C', který je obrazem bodu $C[-3;0;2]$ v osové souměrnosti dané přímkou AB, kde $A[0;-2;4]$, $B[-5;3;-6]$.

77 Určete souřadnice bodu M', který je s bodem $M[1;0;2]$ souměrný podle roviny $\varrho\colon x-2y-z+13=0$.

78 Je dána přímka $p = \{[2-2k;1-k;3+2k],\ k \in \mathrm{R}\}$. Určete parametrické rovnice přímky p', která je s přímkou p středově souměrná
a) podle počátku,
b) podle středu $S[4;-1;3]$.

79 Je dána přímka $p = \{[-k;1+2k;4+k],\ k \in \mathrm{R}\}$. Určete parametrické rovnice přímky p', která je s přímkou p souměrná
a) podle roviny $\varrho\colon 2x+y+3z-10=0$,
b) podle souřadnicové roviny dané osami x a y,
c) podle roviny $\sigma\colon x-5=0$.

80 Určete obecnou rovnici roviny ϱ', která je s rovinou $\varrho\colon 2x-y+z=0$ souměrná podle roviny $\sigma\colon x+y-4=0$. Potom určete obecnou rovnici druhé roviny, která tvoří též rovinu souměrnosti rovin ϱ a ϱ'.

81 Světelný paprsek, který vychází z bodu $A[1;-2;3]$, se odráží od dané roviny $\varrho\colon x+y-z+1=0$ do bodu $B[3;4;11]$. Určete souřadnice bodu odrazu.

15.15 Další úlohy

82 Dokažte, že body $A[3;0;3]$, $B[4;2;1]$, $C[2;1;-1]$, $D[1;-1;1]$ jsou vrcholy čtverce.

83 Dokažte, že body $K[5;1;-2]$, $L[2;4;-2]$, $M[2;1;1]$, $N[2;-2;-2]$ nemohou být vrcholy čtverce.

84 Dokažte, že body $A[2;-1;4]$, $B[-2;1;-2]$, $C[0;2;0]$, $D[2;1;3]$ jsou vrcholy lichoběžníku.

85 Dokažte, že body $K[1;0;3]$, $L[-1;2;2]$, $M[2;-1;-1]$ jsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníku. Vypočítejte souřadnice bodu X tak, aby body $KLXM$ byly vrcholy obdélníku.

86 Jsou dány body $A[-1;4;5]$, $B[2;-2;-1]$, $C[0;-1;-3]$, $D[2;0;m]$. Určete hodnotu parametru $m \in \mathrm{R}$ tak, aby body A, B, C, D byly vrcholy čtyřúhelníku.

15.16 Úlohy na tělesech

V následujících úlohách nejprve situaci narýsujte ve volném rovnoběžném promítání, potom zvolte vhodně soustavu souřadnic a úlohy řešte pomocí analytické geometrie. Odpověď k úloze však napište tak, aby nezávisela na vaší volbě soustavy souřadnic.

15.11 Vzdálenost bodu od přímky v prostoru

60 Vypočítejte vzdálenost bodu A od přímky p.
a) $A[0;2;3]$, $p = \{[3+t; 5+2t; -t], t \in \mathsf{R}\}$
b) $A[4;-6;1]$, $p = \{[3+t; 1+t; -1], t \in \mathsf{R}\}$
c) $A[4;5;3]$, $p = \{[2+t; 7-t; 1+t], t \in \mathsf{R}\}$
d) $A[0;0;5]$, $p = \{[2;0;t], t \in \mathsf{R}\}$

61 V trojúhelníku ABC vypočítejte výšku v_a, znáte-li $A[1;2;3]$, $B[3;6;2]$, $C[-1;10;-2]$.

62 Je dána přímka $p = \{[2+k; 1-k; 1-k], k \in \mathsf{R}\}$. Na ose x určete bod X tak, aby jeho vzdálenost od přímky p byla 2.

63 Na přímce $q = \{[4+k; 2; 2+k], k \in \mathsf{R}\}$ určete bod M tak, aby vzdálenost bodu M od přímky $p = \{[3-2t; t; 1], t \in \mathsf{R}\}$ byla 4.

64 Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných přímek $p = \{[1-t; 1+2t; -t], t \in \mathsf{R}\}$ a $q = \{[2+k; 1-2k; 2+k], k \in \mathsf{R}\}$.

65 V rovině $\varrho\colon x + y - z + 1 = 0$ určete bod M tak, aby jeho vzdálenost od přímky $p = \{[2+t; 3; t], t \in \mathsf{R}\}$ byla 6 a současně vzdálenost bodu M od souřadnicové roviny dané osami x, y byla 4.

15.12 Vzdálenost bodu od roviny

66 Vypočítejte vzdálenost bodu $A[4;2;-3]$ od roviny $\varrho\colon 2x - 2y + z + 5 = 0$.

67 Jsou dány body $A[-1;4;5]$, $B[2;-2;-1]$, $C[0;-1;-3]$. Na ose z určete bod Z tak, aby jeho vzdálenost od roviny určené body A, B, C byla 5.

68 Vypočítejte vzdálenost počátku soustavy souřadnic od roviny určené přímkami $p = \{[t; 2t; 4-t], t \in \mathsf{R}\}$, $q = \{[1-k; 1-2k; 3+k], k \in \mathsf{R}\}$.

69 Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných rovin $\varrho\colon 2x + y - 2z - 3 = 0$, $\sigma\colon 2x + y - 2z - 1 = 0$.

70 Na přímce $p = \{[k; 3+k; 2+4k], k \in \mathsf{R}\}$ určete bod M tak, aby jeho vzdálenost od roviny $\tau\colon 2x + y - z + 12 = 0$ byla $2\sqrt{6}$.

71 Na přímce $p = \{[2+4t; 1-t; 3+2t], t \in \mathsf{R}\}$ určete bod M tak, aby jeho vzdálenost od souřadnicové roviny určené osami x a y byla 7.

72 Určete $z_M \in \mathsf{R}$ tak, aby vzdálenost bodu $M[4;3;z_M]$ od roviny dané přímkami $p = \{[-1+t; 2; 2-t], t \in \mathsf{R}\}$, $q = \{[2; 3+k; k], k \in \mathsf{R}\}$ byla $5\sqrt{3}$.

15.13 Vzdálenost mimoběžek

73 Vypočítejte vzdálenost mimoběžek:
a) $p_1 = \{[2+2t; 1-t; 2+t], t \in \mathsf{R}\}$
$q_1 = \{[1-k; 3+k; 6], k \in \mathsf{R}\}$
b) $p_2 = \{[2;3;5+t], t \in \mathsf{R}\}$
$q_2 = \{[0; 1+k; 4-k], k \in \mathsf{R}\}$

Nakreslete obrázek pro úlohu b), tj. v soustavě souřadnic narýsujte mimoběžky p_2, q_2 a potom vyznačte jejich vzdálenost.

15.14 Souměrnosti v prostoru

74 Určete souřadnice bodu A', který je obrazem bodu $A[5;3;-4]$ ve středové souměrnosti dané středem souměrnosti $S[-6;4;1]$.

75 Určete souřadnice bodu A', který je obrazem bodu $A[2;-3;6]$ v osové souměrnosti dané osou $o = \{[2-t; 3+t; 2t], t \in \mathsf{R}\}$.

76 Určete souřadnice bodu C', který je obrazem bodu $C[-3;0;2]$ v osové souměrnosti dané přímkou AB, kde $A[0;-2;4]$, $B[-5;3;-6]$.

77 Určete souřadnice bodu M', který je s bodem $M[1;0;2]$ souměrný podle roviny $\varrho\colon x - 2y - z + 13 = 0$.

78 Je dána přímka $p = \{[2-2k; 1-k; 3+2k], k \in \mathsf{R}\}$. Určete parametrické rovnice přímky p', která je s přímkou p středově souměrná
a) podle počátku,
b) podle středu $S[4;-1;3]$.

79 Je dána přímka $p = \{[-k; 1+2k; 4+k], k \in \mathsf{R}\}$. Určete parametrické rovnice přímky p', která je s přímkou p souměrná
a) podle roviny $\varrho\colon 2x + y + 3z - 10 = 0$,
b) podle souřadnicové roviny dané osami x a y,
c) podle roviny $\sigma\colon x - 5 = 0$.

80 Určete obecnou rovnici roviny ϱ', která je s rovinou $\varrho\colon 2x - y + z = 0$ souměrná podle roviny $\sigma\colon x + y - 4 = 0$. Potom určete obecnou rovnici druhé roviny, která tvoří též rovinu souměrnosti rovin ϱ a ϱ'.

81 Světelný paprsek, který vychází z bodu $A[1;-2;3]$, se odráží od dané roviny $\varrho\colon x + y - z + 1 = 0$ do bodu $B[3;4;11]$. Určete souřadnice bodu odrazu.

15.15 Další úlohy

82 Dokažte, že body $A[3;0;3]$, $B[4;2;1]$, $C[2;1;-1]$, $D[1;-1;1]$ jsou vrcholy čtverce.

83 Dokažte, že body $K[5;1;-2]$, $L[2;4;-2]$, $M[2;1;1]$, $N[2;-2;-2]$ nemohou být vrcholy čtverce.

84 Dokažte, že body $A[2;-1;4]$, $B[-2;1;-2]$, $C[0;2;0]$, $D[2;1;3]$ jsou vrcholy lichoběžníku.

85 Dokažte, že body $K[1;0;3]$, $L[-1;2;2]$, $M[2;-1;-1]$ jsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníku. Vypočítejte souřadnice bodu X tak, aby body $KLXM$ byly vrcholy obdélníku.

86 Jsou dány body $A[-1;4;5]$, $B[2;-2;-1]$, $C[0;-1;-3]$, $D[2;0;m]$. Určete hodnotu parametru $m \in \mathsf{R}$ tak, aby body A, B, C, D byly vrcholy čtyřúhelníku.

15.16 Úlohy na tělesech

V následujících úlohách nejprve situaci narýsujte ve volném rovnoběžném promítání, potom zvolte vhodně soustavu souřadnic a úlohy řešte pomocí analytické geometrie. Odpověď k úloze však napište tak, aby nezávisela na vaší volbě soustavy souřadnic.

15.11 Vzdálenost bodu od přímky v prostoru

60 Vypočítejte vzdálenost bodu A od přímky p.
a) $A[0;2;3]$, $p = \{[3+t; 5+2t; -t], t \in \mathsf{R}\}$
b) $A[4;-6;1]$, $p = \{[3+t; 1+t; -1], t \in \mathsf{R}\}$
c) $A[4;5;3]$, $p = \{[2+t; 7-t; 1+t], t \in \mathsf{R}\}$
d) $A[0;0;5]$, $p = \{[2;0;t], t \in \mathsf{R}\}$

61 V trojúhelníku ABC vypočítejte výšku v_a, znáte-li $A[1;2;3]$, $B[3;6;2]$, $C[-1;10;-2]$.

62 Je dána přímka $p = \{[2+k; 1-k; 1-k], k \in \mathsf{R}\}$. Na ose x určete bod X tak, aby jeho vzdálenost od přímky p byla 2.

63 Na přímce $q = \{[4+k; 2; 2+k], k \in \mathsf{R}\}$ určete bod M tak, aby vzdálenost bodu M od přímky $p = \{[3-2t; t; 1], t \in \mathsf{R}\}$ byla 4.

64 Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných přímek $p = \{[1-t; 1+2t; -t], t \in \mathsf{R}\}$ a $q = \{[2+k; 1-2k; 2+k], k \in \mathsf{R}\}$.

65 V rovině $\varrho\colon x+y-z+1=0$ určete bod M tak, aby jeho vzdálenost od přímky $p = \{[2+t; 3; t], t \in \mathsf{R}\}$ byla 6 a současně vzdálenost bodu M od souřadnicové roviny dané osami x, y byla 4.

15.12 Vzdálenost bodu od roviny

66 Vypočítejte vzdálenost bodu $A[4;2;-3]$ od roviny $\varrho\colon 2x-2y+z+5=0$.

67 Jsou dány body $A[-1;4;5]$, $B[2;-2;-1]$, $C[0;-1;-3]$. Na ose z určete bod Z tak, aby jeho vzdálenost od roviny určené body A, B, C byla 5.

68 Vypočítejte vzdálenost počátku soustavy souřadnic od roviny určené přímkami $p = \{[t; 2t; 4-t], t \in \mathsf{R}\}$, $q = \{[1-k; 1-2k; 3+k], k \in \mathsf{R}\}$.

69 Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných rovin $\varrho\colon 2x+y-2z-3=0$, $\sigma\colon 2x+y-2z-1=0$.

70 Na přímce $p = \{[k; 3+k; 2+4k], k \in \mathsf{R}\}$ určete bod M tak, aby jeho vzdálenost od roviny $\tau\colon 2x+y-z+12=0$ byla $2\sqrt{6}$.

71 Na přímce $p = \{[2+4t; 1-t; 3+2t], t \in \mathsf{R}\}$ určete bod M tak, aby jeho vzdálenost od souřadnicové roviny určené osami x a y byla 7.

72 Určete $z_M \in \mathsf{R}$ tak, aby vzdálenost bodu $M[4;3;z_M]$ od roviny dané přímkami $p = \{[-1+t; 2; 2-t], t \in \mathsf{R}\}$, $q = \{[2; 3+k; k], k \in \mathsf{R}\}$ byla $5\sqrt{3}$.

15.13 Vzdálenost mimoběžek

73 Vypočítejte vzdálenost mimoběžek:
a) $p_1 = \{[2+2t; 1-t; 2+t], t \in \mathsf{R}\}$
$q_1 = \{[1-k; 3+k; 6], k \in \mathsf{R}\}$
b) $p_2 = \{[2;3;5+t], t \in \mathsf{R}\}$
$q_2 = \{[0; 1+k; 4-k], k \in \mathsf{R}\}$

Nakreslete obrázek pro úlohu b), tj. v soustavě souřadnic narýsujte mimoběžky p_2, q_2 a potom vyznačte jejich vzdálenost.

15.14 Souměrnosti v prostoru

74 Určete souřadnice bodu A', který je obrazem bodu $A[5;3;-4]$ ve středové souměrnosti dané středem souměrnosti $S[-6;4;1]$.

75 Určete souřadnice bodu A', který je obrazem bodu $A[2;-3;6]$ v osové souměrnosti dané osou $o = \{[2-t; 3+t; 2t], t \in \mathsf{R}\}$.

76 Určete souřadnice bodu C', který je obrazem bodu $C[-3;0;2]$ v osové souměrnosti dané přímkou AB, kde $A[0;-2;4]$, $B[-5;3;-6]$.

77 Určete souřadnice bodu M', který je s bodem $M[1;0;2]$ souměrný podle roviny $\varrho\colon x-2y-z+13=0$.

78 Je dána přímka $p = \{[2-2k; 1-k; 3+2k], k \in \mathsf{R}\}$. Určete parametrické rovnice přímky p', která je s přímkou p středově souměrná
a) podle počátku,
b) podle středu $S[4;-1;3]$.

79 Je dána přímka $p = \{[-k; 1+2k; 4+k], k \in \mathsf{R}\}$. Určete parametrické rovnice přímky p', která je s přímkou p souměrná
a) podle roviny $\varrho\colon 2x+y+3z-10=0$,
b) podle souřadnicové roviny dané osami x a y,
c) podle roviny $\sigma\colon x-5=0$.

80 Určete obecnou rovnici roviny ϱ', která je s rovinou $\varrho\colon 2x-y+z=0$ souměrná podle roviny $\sigma\colon x+y-4=0$. Potom určete obecnou rovnici druhé roviny, která tvoří též rovinu souměrnosti rovin ϱ a ϱ'.

81 Světelný paprsek, který vychází z bodu $A[1;-2;3]$, se odráží od dané roviny $\varrho\colon x+y-z+1=0$ do bodu $B[3;4;11]$. Určete souřadnice bodu odrazu.

15.15 Další úlohy

82 Dokažte, že body $A[3;0;3]$, $B[4;2;1]$, $C[2;1;-1]$, $D[1;-1;1]$ jsou vrcholy čtverce.

83 Dokažte, že body $K[5;1;-2]$, $L[2;4;-2]$, $M[2;1;1]$, $N[2;-2;-2]$ nemohou být vrcholy čtverce.

84 Dokažte, že body $A[2;-1;4]$, $B[-2;1;-2]$, $C[0;2;0]$, $D[2;1;3]$ jsou vrcholy lichoběžníku.

85 Dokažte, že body $K[1;0;3]$, $L[-1;2;2]$, $M[2;-1;-1]$ jsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníku. Vypočítejte souřadnice bodu X tak, aby body $KLXM$ byly vrcholy obdélníku.

86 Jsou dány body $A[-1;4;5]$, $B[2;-2;-1]$, $C[0;-1;-3]$, $D[2;0;m]$. Určete hodnotu parametru $m \in \mathsf{R}$ tak, aby body A, B, C, D byly vrcholy čtyřúhelníku.

15.16 Úlohy na tělesech

V následujících úlohách nejprve situaci narýsujte ve volném rovnoběžném promítání, potom zvolte vhodně soustavu souřadnic a úlohy řešte pomocí analytické geometrie. Odpověď k úloze však napište tak, aby nezávisela na vaší volbě soustavy souřadnic.

87 Krychle $ABCDEFGH$ má hranu $a = 4$. Bod K je střed úsečky EG, bod L leží na hraně GH, $|GL| = 1$, bod M leží na hraně BC, $|BM| = 1$.

a) Sestrojte řez krychle rovinou KLM.

b) Vypočítejte délky úseček AX_1, BX_2, CX_3, kde X_1, X_2, X_3 jsou body, ve kterých rovina KLM postupně protíná přímky AE, AB, CG.

88 Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má rozměry $|AB| = 4$, $|VV_1| = 6$, kde V_1 je střed podstavy $ABCD$. Zvolte body K, L, M tak, aby platilo: $K \in AB$ a $|BK| = 3|AK|$, $L \in BC$ a $|CL| = 3|BL|$, M je střed DV.

a) Sestrojte řez jehlanu rovinou KLM.

b) Vypočítejte délky úseček AX_1, BX_2, CX_3, kde X_1, X_2, X_3 jsou body, ve kterých rovina KLM protíná přímky AV, BV, CV.

89 Krychle $ABCDEFGH$ má hranu $a = 4$. Zvolte body P, Q tak, aby platilo: bod A leží v jedné třetině úsečky DP od P, bod G je středem úsečky CQ.

a) Sestrojte body P_1, P_2, ve kterých přímka PQ protíná povrch krychle.

b) Vypočítejte délku úsečky P_1P_2, která je průnikem přímky PQ s danou krychlí.

90 Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má výšku $v = 6$, délku hrany $|AB| = 4$. Označte S střed hrany AV, T těžiště trojúhelníku BCV. Vypočítejte délku úsečky ST.

91 Krychle $ABCDEFGH$ má hranu $a = 4$. Střed hrany AE označte K, střed hrany AB označte L. Bod M je vnitřní bod hrany FG a platí $|FM| = 3|GM|$.

a) Vyšetřete vzájemnou polohu přímky AG a roviny KLM.

b) Vypočítejte v jakém poměru dělí rovina KLM úsečku FD.

92 Krychle $ABCDEFGH$ má hranu $a = 4$. S_1 je střed EH, S_2 je střed FG, bod M leží na hraně DH tak, že $|HM| = 3|DM|$. Na přímce S_1S_2 určete bod X tak, aby přímky CX a FM byly různoběžné.

93 Krychle $ABCDEFGH$ má hranu $a = 4$. Vypočítejte vzdálenost středu hrany FG od přímky DS, kde bod S je střed hrany AE.

94 Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má výšku $v = 6$, hranu $|AB| = 4$. Označte M střed hrany VC. Vypočítejte vzdálenost bodu M od přímky AB.

95 Krychle $ABCDEFGH$ má hranu $a = 4$. Bod S je střed hrany AE. Vypočítejte vzdálenost bodu E od roviny FHS.

96 Krychle $ABCDEFGH$ má hranu a. Bod K je střed hrany EH, bod L je střed hrany BC.

a) Vypočítejte odchylku přímek BK a AG.

b) Vypočítejte odchylku přímky BK od roviny ALG.

c) Vypočítejte odchylku rovin BCK a ALH.

97 Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má výšku $v = 6$, délku hrany $|AB| = 4$. Označte postupně K, L, M středy hran AB, AD, CV. Vypočítejte

a) vzdálenost bodu V od roviny KLM,

b) odchylku přímek KM a CV,

c) odchylku přímky AV od roviny KLM.

d) odchylku rovin KLM a ABC.

98 Pravidelný čtyřstěn $ABCD$ má délku hrany $|AB| = 4$. Vypočítejte

a) odchylku přímek AB a CD,

b) odchylku přímek $S_{AB}S_{CD}$ a $S_{BC}S_{AD}$,

c) odchylku rovin ABC a ACD.

99 Krychle $ABCDEFGH$ má hranu $a = 4$. Vypočítejte vzdálenost mimoběžek BH a DG.

100 Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má výšku $v = 6$, délku hrany $|AB| = 4$. Vypočítejte vzdálenost mimoběžek RS a AD, kde R je střed hrany AB a S je střed hrany CV.

16 Kuželosečky

16.1 Kružnice

1 Načrtněte kružnici (určete souřadnice středu a poloměr), jestliže znáte její rovnici:

a) $x^2 + y^2 = 9$ b) $(x-1)^2 + y^2 = 16$ c) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2$

2 Napište rovnici kružnice, která má střed v počátku soustavy souřadnic a prochází bodem $A[1;1]$.

3 Napište rovnici kružnice, která má střed $S[2;1]$ a prochází bodem $K[6;-2]$. Potom vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých kružnice protíná osy x a y.

4 Napište rovnici kružnice, víte-li, že úsečka AB, $A[-1;5]$, $B[3;7]$ je její průměr.

5 Napište rovnici kružnice, která prochází body $K[3;2]$, $L[1;-4]$ a má střed:

a) na ose x c) na přímce $y = x$ e) na přímce $x - y + 9 = 0$
b) na ose y d) na přímce $y = -x$ f) na přímce $x + 3y + 1 = 0$

6 Napište rovnici kružnice, která prochází body $R[-3;2]$, $S[-1;4]$, $T[3;0]$.

7 Napište rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC. Vypočítejte souřadnice středu a poloměr.

a) $A[-5;0]$, $B[2;-1]$, $C[1;2]$ b) $A[0;0]$, $B[4;0]$, $C[4;8]$

8 Napište rovnici kružnice, která má střed v bodě $S[-5;4]$ a dotýká se přímky p: $3x - 4y + 6 = 0$.

9 Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy y v bodě $Y[0;-4]$ a osu x protíná v bodě $X[6;0]$.

10 Napište rovnici kružnice, která se osy x dotýká v bodě $T[3;0]$ a prochází bodem $M[0;1]$.

11 Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímky p: $3x + 4y - 15 = 0$, její střed leží na přímce q: $x + 2y + 6 = 0$ a poloměr je 5.

12 Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímky p: $2x - y - 4 = 0$ v bodě $P[3;2]$ a má poloměr $r = 2\sqrt{5}$.

13 Napište rovnici kružnice, která má střed $S[-5;4]$ a na přímce p: $y = 2x + 4$ vytíná tětivu délky 8.

14 Napište rovnici kružnice, která prochází body $E[3;2]$, $F[1;4]$ a dotýká se osy x.

15 Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy x i osy y. Střed kružnice leží na přímce p: $x + 3y - 4 = 0$.

16 Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy x i osy y. Její střed leží na přímce q: $x - y + 3 = 0$.

17 Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy x i osy y a prochází bodem $M[3;-6]$.

18 Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímek p_1: $y = 2$, p_2: $y = 0$ a prochází bodem $M[-\frac{5}{2}; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}]$.

19 Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímek p_1: $x = -2$, p_2: $y = 1$ a prochází bodem $M[1;-5]$.

20 Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímek p_1: $3x - 4y + 1 = 0$, p_2: $3x - 4y + 5 = 0$. Její střed leží na přímce q: $3x + 2y = 0$.

21 Napište rovnici kružnice, která prochází bodem $M[1;1]$ a dotýká se daných přímek p_1: $x + y - 6 = 0$, p_2: $x + y + 2 = 0$.

22 Napište rovnici kružnice, která prochází bodem $M[2;1]$ a dotýká se daných přímek p_1: $x - y - 3 = 0$, p_2: $7x + y + 3 = 0$.

23 Napište rovnici kružnice vepsané trojúhelníku KLM, je-li $K[2;1]$, $L[6;4]$, $M[6;1]$.

24 Napište rovnici kružnice, která se dotýká kružnice k: $(x+2)^2 + y^2 = 8$, přímky p: $x - y + 8 = 0$. Její střed leží na kolmici vedené středem kružnice k na přímku p.

25 Napište rovnici kružnice, která je obrazem kružnice k: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$,

a) ve středové souměrnosti dané středem $S[0;5]$,
b) v osové souměrnosti dané osou o: $-2x + y - 5 = 0$,
c) ve stejnolehlosti se středem $S[-2;3]$ a koeficientem $\varkappa = -\frac{1}{2}$,
d) v otočení se středem $O[1;3]$ a úhlem otočení $\alpha = 90°$.

16.2 Elipsa

26 Načrtněte elipsu (určete délky poloos a, b, excentricitu e, souřadnice středu S, souřadnice ohnisek F_1, F_2):

a) $4x^2 + 9y^2 = 36$ b) $25x^2 + y^2 = 100$ c) $(x-1)^2 + 2(y+3)^2 = 1$

27 Napište rovnici elipsy, která má ohniska v bodech $F_1[-3;2]$, $F_2[3;2]$ a hlavní poloosu 5.

28 Napište rovnici elipsy, která má ohniska v bodech $F_1[1;8]$, $F_2[1;0]$ a vedlejší poloosu 3.

29 Napište rovnici elipsy, která má ohniska $F_1[3;1]$, $F_2[5;1]$ a hlavní vrchol $A[7;1]$.

30 Napište rovnici elipsy, která má ohniska $F_1[-2;-2]$, $F_2[-2;6]$ a hlavní vrchol $A[-2;7]$.

31 Napište rovnici elipsy, znáte-li jedno ohnisko $F_1[3;-2]$ a vedlejší vrcholy $C[6;2]$, $D[6;-6]$.

32 Napište rovnici elipsy, znáte-li hlavní vrcholy $A[-4;-1]$, $B[3;-1]$ a vedlejší vrchol $C[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$.

33 Napište rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami souřadnic, dotýká se osy x i osy y a její střed je v bodě a) $S[4;-2]$, b) $S[-1;3]$.

34 Napište rovnici elipsy, která se dotýká osy x v bodě $X[-4;0]$ a osy y v bodě $Y[0;-3]$.

35 Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu totožnou s osou x, její střed je v počátku soustavy souřadnic, hlavní poloosa má délku 4 a elipsa prochází bodem $M[-2\sqrt{3};1]$.

36 Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu totožnou s osou y, střed má v počátku soustavy souřadnic, hlavní poloosa má délku $4\sqrt{2}$ a elipsa prochází bodem $M[-2\sqrt{2}; 4]$.

37 Napište rovnici elipsy, která má osy shodné s osami soustavy souřadnic a prochází body $M[-6; \sqrt{7}]$, $N[3\sqrt{2}; 4]$.

38 Napište rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, střed $S[-3; 1]$ a prochází body $K[9; 9]$, $L[13; -5]$.

39 Napište rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, střed $S[-2; 3]$, dotýká se osy x a osu y protíná v bodě $Y[0; \frac{3}{5}]$.

40 Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu rovnoběžnou s osou x, střed $S[2; 1]$, hlavní poloosa je dvakrát delší než vedlejší poloosa a elipsa prochází počátkem soustavy souřadnic.

16.3 Hyperbola

41 Načrtněte hyperbolu (určete délky poloos a, b, excentricitu e, střed S, ohniska F_1, F_2, rovnice asymptot):

a) $4x^2 - 9y^2 = 36$ c) $4y^2 - 9x^2 = 36$ e) $(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 16$
b) $9x^2 - 4y^2 = 36$ d) $x^2 - y^2 = 4$ f) $2x^2 - (y-3)^2 = 1$

42 Napište rovnici hyperboly, která má ohniska v bodech $F_1[-2; 0]$, $F_2[18; 0]$ a hlavní poloosu o délce 8.

43 Napište rovnici hyperboly s ohnisky $F_1[1; 1]$, $F_2[1; 11]$ a vedlejší poloosou o délce 4.

44 Napište rovnici hyperboly, která má ohniska $F_1[-2; 1]$, $F_2[6; 1]$ a hlavní vrchol $A[4; 1]$.

45 Napište rovnici rovnoosé hyperboly s ohnisky $F_1[-6; 2]$, $F_2[14; 2]$.

46 Napište rovnici hyperboly, která má vrcholy $A[0; -3]$, $B[-4; -3]$ a jedno ohnisko $F_1[-5; -3]$.

47 Napište rovnici hyperboly, která má osy shodné s osami soustavy souřadnic a prochází body:

a) $M[4; 2\sqrt{6}]$, $N[2\sqrt{3}; 4]$ b) $M[3; 5\sqrt{2}]$, $N[2; 5]$

48 Napište rovnici hyperboly, která má osy rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, střed $S[2; -1]$ a prochází body:

a) $M[30; 23]$, $N[-6; 5]$ b) $M[3; \frac{1}{2}]$, $N[6; 2]$

49 Napište rovnici hyperboly, která prochází bodem $M[30; 24]$ a má ohniska v bodech $F_1[0; 4\sqrt{6}]$, $F_2[0; -4\sqrt{6}]$.

50 Napište rovnici hyperboly, víte-li, že její asymptoty a_1, a_2 mají rovnice $a_1\colon y = 2x$, $a_2\colon y = -2x$ a jeden vrchol je $B[3; 0]$.

51 Napište rovnici hyperboly, víte-li, že její asymptoty a_1, a_2 mají rovnice $a_{1,2}\colon y = \pm 2(x-3)$ a jedno ohnisko je $F_1[-2; 0]$.

52 Napište rovnici hyperboly, víte-li, že její asymptoty a_1, a_2 mají rovnice $a_{1,2}\colon y - 1 = \pm 3x$ a jedno ohnisko je $F_1[-20; 1]$.

53 Napište rovnici hyperboly, která má osy rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, jedno ohnisko je $F_1[0; 10]$ a rovnice jedné asymptoty je $a_1\colon y = 2x$.

54 Napište rovnici hyperboly, která prochází počátkem soustavy souřadnic a její asymptoty jsou přímky a_1, a_2:

a) $a_1\colon 3x - y + 9 = 0$
$a_2\colon 3x + y + 3 = 0$

b) $a_1\colon y = x + 2$
$a_2\colon y = -x + 6$

55 a) Určete ohniska F_1, F_2 hyperboly $x^2 - 4y^2 = 16$. Vypočítejte vzdálenosti ohnisek od jejích asymptot.
b) Úlohu a) řešte obecně, tj. vypočítejte vzdálenosti ohnisek od asymptot hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

56 Grafem nepřímé úměrnosti $y = \frac{1}{x}$ je rovnoosá hyperbola. Načrtněte graf. Vyznačte a vypočítejte poloosy a, b, excentricitu e, určete ohniska F_1, F_2.

16.4 Parabola

57 Načrtněte parabolu (určete vrchol, ohnisko a rovnici řídicí přímky):

a) $y^2 = 10x$ b) $x^2 = 4y$ c) $y^2 = -6x$ d) $x^2 = -\frac{1}{2}y$

58 Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku a ohnisko:

a) $F[2; 0]$ b) $F[-\frac{3}{2}; 0]$ c) $F[0; -12]$ d) $F[0; \frac{1}{4}]$

59 Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku a řídicí přímku:

a) $x = -1$ b) $y = 3$ c) $x = 8$ d) $y = -11$

60 Napište rovnici paraboly, která má vrchol $V[2; -5]$ a řídicí přímku:

a) $x = 4$ b) $x = -3$ c) $y = 5$ d) $y = -6$

61 Napište rovnici paraboly, která má ohnisko $F[3; -1]$ a řídicí přímku:

a) $y = 5$ b) $y = -3$ c) $x = 7$ d) $x = 1$

62 Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku, osa paraboly je shodná s osou y a parabola prochází bodem:

a) $M_1[4; 8]$ b) $M_2[2; -6]$

63 Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku, osa paraboly je shodná s osou x a parabola prochází bodem:

a) $N_1[-4; -1]$ b) $N_2[4; 4]$

64 Napište rovnici paraboly, jejíž ohnisko je $F[0; -4]$, tečna ve vrcholu má rovnici $x - 4 = 0$.

65 Napište rovnici paraboly, která prochází bodem $L[4; 5]$, její osa má rovnici $x - 2 = 0$ a tečna ve vrcholu má rovnici $y - 1 = 0$.

66 Napište rovnici paraboly, znáte-li vrchol $V[-4; -2]$ a víte-li, že prochází bodem $K[-1; 2]$ a zároveň platí:
a) osa paraboly je rovnoběžná s osou x
b) osa paraboly je rovnoběžná s osou y

67 Napište rovnici paraboly, která má osu rovnoběžnou s některou z os souřadnic, vrchol $V[1; -4]$, a zároveň platí:
a) na ose x vytíná úsečku délky 8
b) na ose y vytíná úsečku délky 6

68 Napište rovnici paraboly, která prochází body $A[1;2]$, $B[5;2]$, $C[-1;5]$, $D[7;5]$.

69 Napište rovnici paraboly, která prochází body $M[-2;3]$, $N[6;3]$. Tečna ve vrcholu má rovnici $y = 4$.

70 Napište rovnici paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou x, prochází body $K[0;0]$, $L[0;-4]$. Ohnisko je $F[0;-2]$.

71 Napište rovnici paraboly, která prochází body $E[3;8]$, $F[-5;0]$, $G[-2;-2]$. Její osa je rovnoběžná s osou x.

72 Napište rovnici paraboly, která prochází danými body $K[-5;3]$, $L[1;-3]$, $M[-9;-13]$. Její osa je rovnoběžná s osou y.

73 Napište rovnici paraboly, která prochází body $R[2;0]$, $S[0;4]$, $T[1;1]$. Její osa je rovnoběžná s některou osou soustavy souřadnic.

16.5 Obecná rovnice kuželosečky

Kružnice

74 Úpravou na středový tvar rovnice rozhodněte, která z uvedených rovnic je rovnicí kružnice. V případě, že se jedná o kružnici, určete souřadnice středu a poloměr.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 12x + 40 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 6x - y + 9 = 0$
e) $4x^2 + 4y^2 - 16y - 9 = 0$
f) $3x^2 + 3y^2 - \sqrt{3}x + y = 0$

Elipsa

75 Úpravou na středový tvar rovnice rozhodněte, která z uvedených rovnic je rovnicí elipsy. V případě, že se jedná o elipsu, určete souřadnice středu, poloosy, excentricitu, ohniska.

a) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$
b) $2x^2 + 3y^2 - 12x + 6y + 21 = 0$
c) $3x^2 + 6y^2 + 12x + 13 = 0$
d) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y + 24 = 0$
e) $4x^2 + y^2 - 4x = 0$
f) $4x^2 + y^2 + 8\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 6 = 0$

Hyperbola

76 Úpravou na středový tvar rovnice rozhodněte, která z uvedených rovnic je rovnicí hyperboly. V případě, že se jedná o hyperbolu, určete souřadnice středu, poloosy, excentricitu, ohniska, rovnice asymptot.

a) $4x^2 - 9y^2 + 18y - 45 = 0$
b) $9x^2 - 4y^2 + 8y + 32 = 0$
c) $9x^2 - 4y^2 - 8y - 40 = 0$
d) $x^2 - y^2 - 1 = 0$
e) $x^2 - 4y^2 + 4x - 8y = 0$
f) $x^2 - 4y^2 + 4x - 4y + 2 = 0$

Parabola

77 Úpravou na vrcholový tvar rovnice rozhodněte, která z uvedených rovnic je rovnicí paraboly. V případě, že se jedná o parabolu, určete souřadnice vrcholu, ohnisko, rovnici řídicí přímky.

a) $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$
b) $x^2 + 4x + 2y + 2 = 0$
c) $y^2 - 3x - 2y + 7 = 0$
d) $y^2 + x - y = 0$
e) $4y^2 - x + 3 = 0$
f) $2x^2 - 6x - 10y - 3 = 0$

Další úlohy

78 Nejprve proveďte odhad, jakou kuželosečku může daná rovnice vyjadřovat. Potom úpravou na středový (vrcholový) tvar rozhodněte, zda odhad byl správný. Určete charakteristické prvky kuželosečky. Načrtněte obrázek.

a) $2x^2 + 3y^2 + 12x - 6y + 9 = 0$
b) $y^2 - 4x + 4 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$
d) $x^2 - 2y^2 + 4x + 12y - 23 = 0$
e) $x^2 - 2x - 5y + 2 = 0$
f) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$
g) $7x^2 + 5y^2 - 14x - 10y + 18 = 0$
h) $x^2 - 9y^2 - 2x - 8 = 0$
i) $y^2 + 3x - 4 = 0$
j) $2x^2 - 4y^2 - 6x - 12y = 0$
k) $x^2 + y^2 + x + y = 0$
l) $x^2 - y^2 + x + y = 0$

Obecná rovnice kuželosečky s parametrem

79 Obecnou rovnici kuželosečky upravte na středový (vrcholový) tvar a proveďte diskusi vzhledem k parametru $p \in \mathrm{R}$.

a) $x^2 + y^2 + x - p = 0$
b) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + p = 0$
c) $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y - p = 0$
d) $x^2 + 4y - px = 0$
e) $x^2 + y^2 + 2px + 4y + 8 = 0$
f) $2x^2 + y^2 + py = 0$
g) Je dána obecná rovnice kuželosečky $x^2 + py^2 = 20$.
Proveďte diskusi vzhledem k parametru $p \in \{0, 1, -1, 5, -5\}$.

16.6 Vnitřní (vnější) oblast kuželosečky

80 Rozhodněte, zda body $A[0;0]$, $B[0;3]$, $C[-2;0]$, $D[2;1]$ leží ve vnitřní nebo ve vnější oblasti dané kuželosečky.

a) $(x-3)^2 + y^2 = 4$
b) $3x^2 + 4y^2 = 16$
c) $x^2 - y^2 - 2 = 0$
d) $x^2 - 4y^2 + 4y = 0$
e) $y^2 + 2x - 8 = 0$
f) $(x+2)^2 = 10y$

16.7 Kuželosečka a přímka

81 Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p a kuželosečky.

a) p: $2x + y - 6 = 0$, $4x^2 + y^2 = 20$
b) p: $3x - y - 5 = 0$, $2x^2 - y^2 - 2x - 5 = 0$
c) p: $x - y - 1 = 0$, $y^2 - 2x + 3 = 0$
d) p: $2x - y + 4 = 0$, $4x^2 - y^2 - 4 = 0$

82 Je dána kružnice k se středem $S[1;2]$ a poloměrem $r = 5$. Dále jsou dány body $A[2;0]$, $B[5;9]$. Vyšetřete vzájemnou polohu kružnice k a

a) přímky AB,
b) úsečky AB,
c) polopřímky SA.

83 Určete, pro které hodnoty parametru $k \in \mathrm{R}$ má daná přímka s kuželosečkou právě jeden společný bod, dva společné body, žádný společný bod.

a) p_k: $y = kx$, $x^2 + 4y^2 - 6x + 1 = 0$
b) p_k: $y = kx - 2$, $x^2 - y^2 = 1$
c) p_k: $y = kx - k$, $x^2 + y^2 + 2x = 0$
d) p_k: $y = kx + 2$, $x^2 + 4y^2 = 16$

84 Určete, pro které hodnoty parametru $c \in \mathrm{R}$ má daná přímka s kuželosečkou právě jeden společný bod, dva společné body, žádný společný bod.

a) p_c: $y = x + c$, $x^2 + y^2 - 2 = 0$

b) p_c: $8x - 4y + c = 0$, $y^2 - 4x = 0$
c) p_c: $y = c$, $x^2 + 4y^2 = 36$
d) p_c: $y = 2x + c$, $16x^2 - 4y^2 = 1$

85 Proveďte diskusi vzhledem k parametru $a \in \mathsf{R}$ o vzájemné poloze dané přímky $q = \{[-1 + t;\ a - t],\ t \in \mathsf{R}\}$ a kružnice $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$.

86 Určete hodnotu $r \in \mathsf{R}$ tak, aby přímka $x + 2y - 1 = 0$ byla tečnou kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.

87 Určete hodnotu $p \in \mathsf{R}$ tak, aby přímka $x + 2y - 1 = 0$ byla tečnou paraboly $y^2 = 2px$.

88 Určete hodnotu $m \in \mathsf{R}$ tak, aby přímka $x + 2y - 1 = 0$ byla tečnou elipsy $x^2 + 4y^2 = m$.

89 Určete hodnotu $n \in \mathsf{R}$ tak, aby přímka $x + 2y - 1 = 0$ byla tečnou hyperboly $x^2 - 2y^2 = n$.

16.8 Tečna v bodě kuželosečky

90 Ověřte, že bod T leží na dané kuželosečce. Potom napište rovnici tečny v bodě T dané kuželosečky.

a) $T[2; 0]$, $2x^2 - 3x + y - 2 = 0$
b) $T[2; -4]$, $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$
c) $T[-2; 2]$, $4x^2 - y^2 - 12 = 0$
d) $T[1; 0]$, $x^2 + 2y^2 + 4x - 5 = 0$

16.9 Tečna z bodu ke kuželosečce

91 Rozhodněte, zda z bodu M lze sestrojit tečny dané kuželosečky.

a) $M[-8; 0]$, $y^2 + 3x + 4y - 8 = 0$
b) $M[3; 4]$, $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$
c) $M[1; -4]$, $2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$
d) $M[0; 0]$, $x^2 - y^2 + 4x + 3 = 0$

92 Napište rovnice tečen, které lze sestrojit z bodu M k dané kuželosečce. (Určete souřadnice bodů dotyku T_1, T_2.)

a) $M[0; 0]$, $x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 12 = 0$
b) $M[0; -1]$, $(x - 2)^2 + y^2 = 1$
c) $M[-3; 0]$, $x^2 + y^2 - 2y = 0$
d) $M[1; -1]$, $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$

93 Určete odchylku tečen, které lze sestrojit z bodu M k dané kuželosečce.

a) $M[0; 0]$, $x^2 - 4y^2 - 6x - 3 = 0$
b) $M[-3; 0]$, $x^2 + y^2 - 6x = 0$
c) $M[0; -2]$, $x^2 - 8y = 0$
d) $M[1; 0]$, $x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0$

16.10 Tečna rovnoběžná s danou přímkou

94 Napište rovnice tečen kuželosečky, které jsou rovnoběžné s přímkou p.

a) p: $x + y - 1 = 0$, $y^2 - 3x + y - 2 = 0$
b) p: $2x - 3y = 0$, $x^2 + 9y^2 - 5 = 0$

c) p: $2x - y + 2 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - y + 5 = 0$
d) p: $4x - y + 3 = 0$, $4x^2 - y^2 - 8x + 1 = 0$
e) p: $x - y = 0$, $9x^2 - 4y^2 - 20 = 0$
f) p: $x - 2y = 0$, $x^2 - 4y^2 - 12 = 0$

16.11 Tečna kolmá k dané přímce

95 Napište rovnice tečen kuželosečky, které jsou kolmé k dané přímce q.

a) q: $2x - y + 6 = 0$, $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$
b) q: $3x + 2y = 0$, $x^2 + 4y^2 = 4$
c) q: $x - y = 0$, $x^2 - 4y^2 = 12$
d) q: $x - 7 = 0$, $2x^2 + y - 4 = 0$

16.12 Tečna daným směrem

96 Napište rovnici tečny kuželosečky tak, aby odchylka tečny a osy x byla φ.

a) $\varphi = 45°$, $x^2 + y^2 - x - y - 4 = 0$
b) $\varphi = 45°$, $y^2 + 4x - 8 = 0$
c) $\varphi = 60°$, $6x^2 - 4y^2 = 1$
d) $\varphi = 30°$, $3x^2 + y^2 = 36$

97 Napište rovnici tečny dané kuželosečky, víte-li, že směrnice tečny je k.

a) $k = 2$, $x^2 + y^2 - 8x - y + 15 = 0$
b) $k = -3$, $y^2 - 2x = 0$

16.13 Další úlohy

98 Určete délku tětivy, kterou vytíná

a) parabola $y^2 = 8x$ na přímce $y = x - 2$,
b) kružnice $x^2 + y^2 = 10$ na přímce $y = x - 2$,
c) elipsa $2x^2 + y^2 = 8$ na přímce $y = x - 2$,
d) hyperbola $x^2 - 2y^2 = 4$ na přímce $y = x - 2$.

99 Do paraboly $y^2 = 4x$ vepište čtverec $ABCD$ tak, aby vrchol čtverce A splýval s vrcholem paraboly, vrchol C ležel na ose paraboly a vrcholy B, D ležely na parabole. Vypočítejte souřadnice bodů A, B, C, D a stranu čtverce.

100 Určete rovnici paraboly s vrcholem v počátku a s osou v ose y tak, aby čtverec vepsaný do této paraboly podle podmínek předchozí úlohy měl stranu $a = 2$.

101 Do paraboly $y^2 = 4x$ vepište rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby vrchol A splýval s vrcholem paraboly a vrcholy B, C ležely na parabole. Vypočítejte souřadnice bodů A, B, C a stranu trojúhelníku ABC.

102 Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 36$ vepište čtverec $KLMN$ (tj. vrcholy K, L, M, N leží na dané elipse). Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce a jeho stranu.

103 Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 36$ vepište rovnostranný trojúhelník KLM tak, aby vrchol K splýval s hlavním vrcholem elipsy a vrcholy L, M ležely na dané elipse. Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku KLM a jeho stranu.

104 Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 36$ vepište rovnostranný trojúhelník KLM tak, aby vrchol K splýval s vedlejším vrcholem elipsy a vrcholy L, M ležely na dané elipse. Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku KLM a jeho stranu.

105 Jsou dány paraboly P_1: $y^2 = 1 - x$ a P_2: $y^2 = -4(x + 2)$. Napište rovnice jejich společných tečen. Načrtněte obrázek.

106 Jsou dány elipsy E_1: $4x^2 + 5y^2 = 20$ a E_2: $5x^2 + 4y^2 = 20$. Napište rovnice jejich společných tečen. Načrtněte obrázek.

107 Jsou dány kružnice K_1: $x^2 + y^2 = 5$ a K_2: $(x - 10)^2 + y^2 = 45$. Napište rovnice jejich společných tečen. Narýsujte obrázek.

108 Jsou dány kružnice K_1: $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ a K_2: $x^2 + y^2 - 6x - 8 = 0$. Vypočítejte průsečíky P_1, P_2 daných kružnic. Napište rovnici přímky, která prochází body P_1, P_2.

16.14 Vyšetřování množin bodů dané vlastnosti

109 Vyšetřete množinu všech bodů X v rovině, které mají od bodu $A[-3; 6]$ dvakrát větší vzdálenost než od počátku soustavy souřadnic.

110 Vyšetřete množinu všech bodů X v rovině, které mají od bodu $M[0; \frac{1}{4}]$ a od přímky p: $y = -\frac{1}{4}$ stejnou vzdálenost.

111 Jsou dány body $M[-1; 0]$, $N[1; 0]$. Vyšetřete množinu všech bodů X v rovině, pro které platí:

a) $|XM| + |XN| = 6$
b) $|XM| + |XN| = 1$
c) $|XM| - |XN| = 1$
d) $|XN| - |XM| = 1$

112 Jsou dány body A, B, $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$. Vyšetřete množinu všech bodů X v rovině, pro které platí:

a) $|AX| = 2|BX|$ b) $|AX| \geqq 2|BX|$ c) $|AX| \leqq 2|BX|$

113 Je dána přímka p a bod M, přičemž vzdálenost bodu M od přímky p je 6 cm. Vyšetřete množinu všech bodů X v rovině, pro které platí:

a) $|XM| = |Xp|$ b) $\dfrac{|XM|}{|Xp|} = \dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{|XM|}{|Xp|} = 2$

114 Úsečka délky 3 cm se pohybuje koncovými body po dvou navzájem kolmých přímkách. Vyšetřete

a) křivku, kterou opisuje při tomto pohybu střed úsečky,
b) křivku, kterou opisuje při tomto pohybu bod X, který dělí danou úsečku v poměru 2 : 1.

115 Jsou dány body $M_1[\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, $M_2[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$. Vyšetřete množinu všech bodů X v rovině, pro které platí $\big||XM_1| - |XM_2|\big| = 2\sqrt{2}$.

116 Je dána kružnice $k(S; 2\,\mathrm{cm})$ a přímka p procházející středem S. Vyšetřete množinu všech bodů X v rovině, které dostanete následujícím způsobem: zvolte libovolný bod K na kružnici k, bodem K sestrojte kolmici m na přímku p a na ní bod X tak, aby platilo $|Xp| = 4|Kp|$. Tuto konstrukci postupně opakujte pro všechny body K dané kružnice.

117 Je dána přímka p a bod M, $|Mp| = 6\,\mathrm{cm}$. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které procházejí bodem M a dotýkají se přímky p.

118 Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice $k(S; 5\,\mathrm{cm})$ a procházejí bodem M, pro který platí $|SM| = 3\,\mathrm{cm}$.

119 Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice $k(S; 2\,\mathrm{cm})$ a procházejí bodem M, přičemž platí $|SM| = 6\,\mathrm{cm}$.

120 Je dána kružnice $k(S; 4\,\mathrm{cm})$ a její tečna t. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice k a přímky t. Úlohu řešte

a) v polorovině určené tečnou t a středem kružnice k,
b) v polorovině opačné k polorovině z úlohy a).

17 Komplexní čísla

17.1 Algebraický tvar komplexního čísla

1 Vypočítejte:

a) $2 + \mathrm{i} + 3(7 - \mathrm{i})$
b) $(\mathrm{i} - 1)(2\mathrm{i} - 3) - \mathrm{i}$
c) $(\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3}) \cdot \mathrm{i}\sqrt{6} - \sqrt{2} \cdot (2\mathrm{i}\sqrt{2} - 3) + \mathrm{i} \cdot \left(\dfrac{6}{\sqrt{6}} - \dfrac{6}{\sqrt{3}}\right)$
d) $(2 + \mathrm{i})(3 + \mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})$
e) $(\mathrm{i} + 1)(\mathrm{i} - 1) + (2\mathrm{i} + 1)^2$

2 Vypočítejte:

a) $\dfrac{3\mathrm{i} + 1}{2 + \mathrm{i}}$
b) $\dfrac{100}{3 + 4\mathrm{i}}$
c) $\dfrac{3\mathrm{i} + 2}{2\mathrm{i} - 3}$
d) $\dfrac{1 + 4\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$
e) $\dfrac{3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$
f) $49(2 - \mathrm{i}\sqrt{3})^{-2}$

3 Vypočítejte:

a) $(2 + \mathrm{i}) \cdot \mathrm{i} + \dfrac{3 + \mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}}$
b) $\dfrac{2 + \mathrm{i}}{\mathrm{i}} + \dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i} + 1} - \dfrac{2\mathrm{i} + 1}{\mathrm{i} - 1}$
c) $-\dfrac{\mathrm{i} - 1}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i} - 1} \cdot \mathrm{i} + 1$
d) $(5\mathrm{i} - 1) : \left(2 - \dfrac{\mathrm{i} + 3}{2 + \mathrm{i}}\right)$
e) $\dfrac{\frac{\mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}} + \frac{1}{\mathrm{i}}}{1 + \frac{1}{2\mathrm{i} + 1}}$

4 Dokažte, že platí: $\dfrac{(\sqrt{5} + 2\mathrm{i}) \cdot (1 + \mathrm{i})^2}{\mathrm{i}\sqrt{5} - 2} = 2$

5 Dokažte, že daná komplexní čísla z_1, z_2 se sobě rovnají:

a) $z_1 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + \mathrm{i}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
$z_2 = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \dfrac{\mathrm{i}}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

b) $z_1 = \sin 135° - \mathrm{i} \cos 270°$
$z_2 = \cos \dfrac{7}{4}\pi + \mathrm{i} \sin 8\pi$

6 Dokažte, že podíl $\dfrac{m - 3\mathrm{i}}{3 + m\mathrm{i}}$ nezávisí na hodnotě $m \in \mathsf{R}$.

7 Dokažte, že pro každé reálné číslo p je komplexní číslo $z = \dfrac{\mathrm{i}}{p - 3\mathrm{i}} + \dfrac{\mathrm{i}}{p + 3\mathrm{i}}$ ryze imaginární.
Potom určete $p \in \mathsf{R}$ tak, aby platilo $z = \frac{1}{3}\mathrm{i}$.

8 Určete, pro která reálná čísla b je komplexní číslo $z = \dfrac{8 - 6b - \mathrm{i}b}{1 - \mathrm{i}b}$

a) reálné, b) imaginární, c) ryze imaginární.

9 Určete reálné číslo k tak, aby reálná část komplexního čísla $z = \dfrac{k + 2\mathrm{i}}{k - \mathrm{i}}$ byla rovna 0,25.

10 Určete $x \in \mathsf{R}$ tak, aby imaginární část komplexního čísla $z = \dfrac{5 + x - 4\mathrm{i}}{x + 1 - 2\mathrm{i}}$ byla rovna 0,5.

17.2 Mocniny imaginární jednotky i

11 Vypočítejte:

a) i^2; i^3; i^4; i^{50}; i^{125}; i^{505}
b) $5\mathrm{i}^{100} - 3\mathrm{i}^{10} + 12\mathrm{i}^{75}$
c) $2\mathrm{i}^9 - \mathrm{i}^{12} + 5\mathrm{i}^{16} - 3\mathrm{i}^{11}$
d) i^{-1}; i^{-2}; i^{-3}; i^{-4}; i^{-37}; i^{-78}
e) $\mathrm{i}^{-30} + \mathrm{i}^{-40} + \mathrm{i}^{-50} + \mathrm{i}^{-60}$
f) $\mathrm{i}^{-1} + 5\mathrm{i}^{-6} - 14\mathrm{i}^{-7}$

12 Vypočítejte:

a) $1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4$
b) $1 + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^4 + \mathrm{i}^6 + \mathrm{i}^8 + \mathrm{i}^{10}$
c) $1 + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^7 + \mathrm{i}^9 + \mathrm{i}^{11}$
d) $1 + \mathrm{i}^{-1} + \mathrm{i}^{-2} + \mathrm{i}^{-3} + \mathrm{i}^{-4}$
e) $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i}^3 \cdot \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^5 \cdot \mathrm{i}^6 \cdot \mathrm{i}^7 \cdot \mathrm{i}^8 \cdot \mathrm{i}^9 \cdot \mathrm{i}^{10}$
f) $\mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^6 \cdot \mathrm{i}^8 \cdot \mathrm{i}^{10} \cdot \mathrm{i}^{12} \cdot \mathrm{i}^{14} \cdot \mathrm{i}^{16} \cdot \mathrm{i}^{18} \cdot \mathrm{i}^{20}$

13 Vypočítejte mocniny následujících závorek:

a) $(1 + \mathrm{i})^2$; $(1 - \mathrm{i})^2$; $(1 + \mathrm{i})^{-2}$; $(1 - \mathrm{i})^{-2}$
b) $(1 + \mathrm{i})^3$; $(1 - \mathrm{i})^3$; $(1 + \mathrm{i})^{-3}$; $(1 - \mathrm{i})^{-3}$
c) $(1 + \mathrm{i})^4$; $(1 - \mathrm{i})^4$; $(1 + \mathrm{i})^{-4}$; $(1 - \mathrm{i})^{-4}$

17.3 Znázornění komplexních čísel v Gaussově rovině

14 Nakreslete obrazy komplexních čísel $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = 3 - \mathrm{i}$.
Potom graficky určete: a) $z = z_1 + z_2$ b) $z' = z_1 - z_2$

15 Nakreslete obrazy komplexních čísel $z_1 = 2 - \mathrm{i}$, $z_2 = -2 - 4\mathrm{i}$.
Potom graficky určete: a) $2z_1$ b) $\frac{1}{2}z_2$ c) $z = 2z_1 + \frac{1}{2}z_2$

16 Nakreslete obrazy komplexních čísel $z_3 = 1 + 2\mathrm{i}$, $z_4 = 2 - \mathrm{i}$.
Potom graficky určete: a) $z = z_3 \cdot z_4$ b) $z = z_3 : z_4$

17 Nakreslete obraz komplexního čísla $z_5 = 2 + 3\mathrm{i}$.
Potom graficky určete: a) $\mathrm{i} \cdot z_5$ b) $-\mathrm{i} \cdot z_5$ c) $z_5 : \mathrm{i}$

17.4 Čísla komplexně sdružená

18 Napište čísla komplexně sdružená k daným číslům:

$z_1 = 2 + \mathrm{i}$ $z_3 = 4\mathrm{i}$ $z_5 = \sqrt{3} + 1 - 7\mathrm{i}$
$z_2 = 7 - 3\mathrm{i}$ $z_4 = \dfrac{1 + 5\mathrm{i}}{3}$ $z_6 = \sqrt{10} + \mathrm{i} + \mathrm{i}\sqrt{2}$

19 Vypočítejte čísla komplexně sdružená k daným číslům:

$w_1 = (2 + \mathrm{i})(3 - \mathrm{i})$ $w_2 = \dfrac{3 + 4\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}$ $w_3 = \dfrac{4 - 2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$

20 Vypočítejte:

a) $\overline{2 + \mathrm{i}} + 1 - \bar{\mathrm{i}}$
b) $\overline{\overline{3 + 4\mathrm{i}} + 3 - 7\mathrm{i}}$
c) $\overline{(1 + \mathrm{i}) \cdot (3 + 2\mathrm{i})}$
d) $(\overline{1 + \mathrm{i}}) \cdot (\overline{3 + 2\mathrm{i}})$
e) $\overline{(5 + 3\mathrm{i})^2}$
f) $(\overline{5 + 3\mathrm{i}})^2$

21 Vypočítejte:

a) $\overline{\left(\dfrac{1 + \mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}}\right)}$
b) $\dfrac{\overline{1 + \mathrm{i}}}{\overline{2 - \mathrm{i}}}$
c) $\dfrac{\overline{1 + \mathrm{i}}}{2 - \mathrm{i}}$

17.5 Absolutní hodnota komplexního čísla

22 Vypočítejte:

a) $|6+2\mathrm{i}|$
b) $\left|\frac{\sqrt{3}+1}{3}-\frac{\sqrt{3}-1}{3}\cdot\mathrm{i}\right|$
c) $|\sqrt{5}+2+2\mathrm{i}-\mathrm{i}\sqrt{5}|$
d) $\left|\frac{\sqrt{7}}{4}(1+\mathrm{i})+\frac{\sqrt{5}}{4}(1-\mathrm{i})\right|$

23 Vypočítejte:

a) $|(7+\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})|$
b) $\left|\frac{4-2\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}\right|$
c) $\left|\frac{10\mathrm{i}}{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}\mathrm{i}}\right|$
d) $\left|\frac{|4-3\mathrm{i}|+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}\right|$
e) $\frac{\left|\frac{3-4\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}\right|\cdot\left|\frac{1+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}\right|}{|2\mathrm{i}-1|+|-\mathrm{i}|}$
f) $\left|\frac{|\sqrt{3}-\mathrm{i}|\cdot(\mathrm{i}-1)}{|\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)|-2\mathrm{i}}\right|$

24 Vypočítejte:

a) $\frac{1+|\mathrm{i}|+|\mathrm{i}^2|}{2-|-\mathrm{i}|-|2\mathrm{i}|}$
b) $\frac{1+|\mathrm{i}|}{\mathrm{i}-|\mathrm{i}-1|}$
c) $\frac{|7\mathrm{i}|-\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-|\sqrt{5}+2\mathrm{i}|}$

25 Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí:

a) $|z|=3$
b) $|z-\mathrm{i}|=1$
c) $|z-1+\mathrm{i}|=2$
d) $|z-2|\leqq 3$
e) $|z-2-\mathrm{i}|>4$
f) $1<|z+3\mathrm{i}-2|\leqq 4$
g) $|z|=|z-2+\mathrm{i}|$
h) $|z-1-3\mathrm{i}|\geqq|z+2\mathrm{i}|$
i) $|z+\mathrm{i}|+|z+1-\mathrm{i}|=4$

Komplexní jednotka

26 Dokažte, že dané číslo je komplexní jednotkou:

a) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$
c) $\frac{\sqrt{6}}{5}-\frac{\sqrt{19}}{5}\mathrm{i}$
d) $\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{6}-\mathrm{i}\cdot\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$
e) $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{3})+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4}$
f) $\cos x+\mathrm{i}\sin x$, kde $x\in\mathrm{R}$

27 Znázorněte v Gaussově rovině obrazy všech komplexních jednotek.

28 Dokažte, že pro každé reálné číslo k je komplexní číslo $\frac{k+\mathrm{i}}{k-\mathrm{i}}$ komplexní jednotkou.

29 Určete všechna čísla $x\in\mathrm{R}$ tak, aby dané číslo bylo komplexní jednotkou:

a) $x+\mathrm{i}\frac{\sqrt{5}}{3}$
b) $x+6\mathrm{i}$
c) $x+1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}+x\mathrm{i}+\frac{\mathrm{i}}{2}$
e) $\sin x(\sin x+\mathrm{i})+\cos x(\cos x+1)$
f) $(1+\mathrm{i})\cdot\frac{\sqrt{x}}{4}+(1-\mathrm{i})\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}$

17.6 Goniometrický tvar komplexního čísla

30 Převeďte na goniometrický tvar následující komplexní čísla:

$z_1=1+\mathrm{i}$ $\quad z_4=-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ $\quad z_7=-7-7\mathrm{i}$
$z_2=3$ $\quad z_5=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ $\quad z_8=\sin 30°+\mathrm{i}\cos 30°$
$z_3=5\mathrm{i}$ $\quad z_6=10-10\mathrm{i}$ $\quad z_9=1+\cos\frac{3}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi$

31 Následující komplexní čísla převeďte na goniometrický tvar s použitím kalkulačky. Absolutní hodnotu vypočítejte s přesností na dvě desetinná místa, argument vypočítejte s přesností na minuty.

$z_1=6+3\mathrm{i}$ $\quad z_2=-1{,}4+5{,}6\mathrm{i}$ $\quad z_3=9-4\mathrm{i}$

32 Převeďte na algebraický tvar:

$z_1=4\left(\cos\frac{7}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{7}{6}\pi\right)$ $\quad z_3=5(\cos 11\pi+\mathrm{i}\sin 11\pi)$
$z_2=\cos\frac{1}{2}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\pi$ $\quad z_4=\sqrt{2}\left(\cos\frac{105}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{105}{4}\pi\right)$

33 Převeďte na algebraický tvar s použitím kalkulačky. Reálnou i imaginární část vypočítejte s přesností na dvě desetinná místa.

$z_1=3(\cos 123°55'+\mathrm{i}\sin 123°55')$ $\quad z_2=7\left(\cos\frac{14}{11}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{14}{11}\pi\right)$

34 Upravte a výsledek zapište v goniometrickém tvaru:

a) $\frac{-1+2\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$ b) $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ c) $\frac{\mathrm{i}-3}{2+\mathrm{i}}$ d) $\frac{\mathrm{i}-2}{4\mathrm{i}-8}$

35 U daných komplexních čísel určete absolutní hodnotu, argument a potom komplexní číslo znázorněte v Gaussově rovině:

$z_1=5(\cos 120°+\mathrm{i}\sin 120°)$ $\quad z_2=2\left(\cos\frac{4}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{4}{3}\pi\right)$

36 Určete $k\in\mathrm{R}$ tak, aby čísla $z_1=3+4\mathrm{i}$, $z_2=6+k\mathrm{i}$ měla stejný argument.

37 Je dána komplexní jednotka $z=\cos x+\mathrm{i}\sin x$, kde $x\in\mathrm{R}$. Vyjádřete v goniometrickém tvaru komplexní čísla:

a) $\overline{z}$ b) $(z)^{-1}$ c) $(\overline{z})^{-1}$ d) $\overline{z}\cdot(z)^{-1}$

Počítání s komplexními čísly v goniometrickém tvaru

38 Vypočítejte součin a podíl komplexních čísel z_1, z_2. Výsledek vyjádřete v goniometrickém i v algebraickém tvaru.

a) $z_1=2(\cos 105°+\mathrm{i}\sin 105°)$, $z_2=4(\cos 225°+\mathrm{i}\sin 225°)$
b) $z_1=2(\cos\frac{5}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{3}\pi)$, $z_2=4(\cos\frac{1}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{1}{6}\pi)$

39 Je dáno komplexní číslo $z=6-2\mathrm{i}$. Určete komplexní čísla z_1, z_2, z_3 tak, aby platilo:

a) Komplexní číslo z_1 má stejnou absolutní hodnotu a dvojnásobný argument než dané číslo z. Řešte výpočtem i graficky.
b) Komplexní číslo z_2 má absolutní hodnotu poloviční a argument o $\frac{5}{4}\pi$ větší než dané číslo z. Řešte výpočtem i graficky.
c) Komplexní číslo z_3 má poloviční argument než dané číslo z a je komplexní jednotkou. Řešte výpočtem i graficky.

40 Jsou dána komplexní čísla $z_1 = \frac{7}{2} + i\frac{7\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \sqrt{3} - i$.

a) V algebraickém tvaru vypočítejte $z_1 \cdot z_2$, pak výsledek převeďte do goniometrického tvaru.

b) Komplexní číslo z_1 i číslo z_2 převeďte nejprve do goniometrického tvaru, potom vypočítejte $z_1 \cdot z_2$ a výsledek převeďte zpět do algebraického tvaru.

41 Pomocí počítání s komplexními čísly v goniometrickém tvaru odvoďte součtové vzorce:

a) $\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$ b) $\sin(x-y)$, $\cos(x-y)$

17.7 Umocňování komplexních čísel

42 Užitím Moivreovy věty umocněte a výsledek převeďte do algebraického tvaru:

a) $\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right)^6$ c) $(1+i)^6$ e) $\left(-2\sqrt{3} - 2i\right)^{12}$

b) $\left(\cos\frac{3\pi}{32} + i\sin\frac{3\pi}{32}\right)^8$ d) $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^5$ f) $\left(5\sqrt{3} - 5i\right)^7$

43 Určete $n \in \mathrm{N}$ tak, aby platilo: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

44 Dokažte: $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 2$

45 Užitím Moivreovy věty a vzorce pro $(a+b)^3$ odvoďte vzorec pro $\sin 3x$ a vzorec pro $\cos 3x$.

17.8 Odmocňování komplexních čísel

46 Vypočítejte všechny druhé komplexní odmocniny

a) z čísla 4, b) z čísla -4.

47 Vypočítejte všechny čtvrté komplexní odmocniny

a) z čísla i, b) z čísla $1 - i$.

48 Vypočítejte všechny páté komplexní odmocniny z čísla 32.

49 Vypočítejte součet všech třetích komplexních odmocnin z čísla -2.

50 Vypočítejte součet třetích mocnin všech čtvrtých odmocnin z čísla 1.

17.9 Rovnice v množině komplexních čísel

51 Určete reálná čísla x, y tak, aby platilo:

a) $2x + iy = 4 - 3i$ c) $x(y+i) + y(x-i) = 2x + 2yi$

b) $x(1+i) + y(1-i) = 4 + 2i$ d) $(2+i)^3 - \frac{1-i}{i} = x - 4yi - y$

52 Řešte rovnice s neznámou $z \in \mathrm{C}$:

a) $z = 3i(z-i) - 5z$ c) $(z+i)(z-3i) = z(z-i)$

b) $\frac{z}{1-i} + \frac{z+2}{i} = \frac{5}{2i-1}$ d) $i - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = 1 - \frac{1}{z}$

53 Řešte rovnice s neznámou $z \in \mathrm{C}$:

a) $2z + 3\overline{z} = 5 + i$ c) $z\overline{z} - z = \overline{6 - 2i}$

b) $\left(2 - \frac{1}{i}\right)\overline{z} - 13 = 2(6{,}5i - z)$ d) $z(\overline{z} - 4) - 1 = 8i$

54 Řešte rovnici $(1+2i)x - 2y = 1$

a) s neznámými $x, y \in \mathrm{R}$,

b) s neznámými $x, y \in \mathrm{C}$ tak, aby čísla x, y byla čísla komplexně sdružená.

55 Řešte rovnice s neznámou $z \in \mathrm{C}$:

a) $|z| = 1 + 2i + z$ c) $|z+1| - 4i = z + 3$

b) $|z+i| = 2z + i$ d) $|z + 2 - i| = 5(z + 3i)$

56 Vypočítejte komplexní čísla z, w tak, aby byla řešením soustavy:

a) $2z + w = 8i$, $z - w = 6 + i$ b) $(1+i)z - 3w = -7 - 6i$, $2z + (2+i)w = 6 + 5i$

Rovnice v množině komplexních čísel s parametrem

57 Pro které hodnoty parametru $a \in \mathrm{C}$ nemá rovnice $iz + az = 2$ s neznámou $z \in \mathrm{C}$ v množině komplexních čísel řešení?

58 Je dána rovnice $2za + i - z(1+2i) = 3$ s neznámou $z \in \mathrm{C}$ a parametrem $a \in \mathrm{C}$.

a) Pro která $a \in \mathrm{C}$ nemá rovnice řešení?

b) Pro která $a \in \mathrm{C}$ je řešením dané rovnice číslo $z = 2 + i$?

c) Pro která $a \in \mathrm{C}$ je kořenem dané rovnice imaginární jednotka?

17.10 Kvadratická rovnice v množině komplexních čísel

59 Vyšetřete, pro které hodnoty parametru $t \in \mathrm{R}$ mají dané kvadratické rovnice s neznámou $x \in \mathrm{C}$ imaginární kořeny:

a) $x^2 + 2tx - t + 2 = 0$ c) $x^2 + tx - 1 + t = 0$

b) $2x^2 + t = 0$ d) $tx^2 - x + t = 0$

60 Řešte kvadratické rovnice s neznámou $x \in \mathrm{C}$:

a) $x^2 - 5x + 5 = 0$ g) $x^2 + x(2-i) + 3 - i = 0$

b) $5x^2 - 2x + 1 = 0$ h) $ix^2 - 3x + 4i = 0$

c) $3x^2 - 2x + 1 = 0$ i) $x^2 + (i-3)x + 2 - 2{,}5i = 0$

d) $x^2 - 4ix - 8 = 0$ j) $(7+i)x^2 - 5ix - 1 = 0$

e) $x^2 - 6ix - 12 = 0$ k) $x(3-x) = 3 - i$

f) $x^2 - 6ix - 9 = 0$ l) $x^2 - 20 = ix(2i - x)$

Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

61 Sestavte všechny kvadratické rovnice s komplexními koeficienty, jejichž kořeny jsou čísla:

a) $x_1 = 3 + i$, $x_2 = 3 - i$ c) $x_1 = x_2 = 1 + i$

b) $x_1 = 2 + i\sqrt{3}$, $x_2 = 3 + i\sqrt{3}$ d) $x_1 = i$, $x_2 = 0$

62 Sestavte všechny kvadratické rovnice s reálnými koeficienty, znáte-li jeden kořen hledané kvadratické rovnice:

a) $x_1 = 3 + i$ c) $x_1 = \cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi$

b) $x_1 = 5i$ d) $x_1 = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$

63 Rovnice $x^2 + \mathrm{i}x + q = 0$ má jeden kořen $x_1 = 2 - \mathrm{i}$. Určete druhý kořen a koeficient $q \in \mathrm{C}$.

64 Rovnice $x^2 + px + 21 = 0$ má jeden kořen $x_1 = -3 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$. Vypočítejte druhý kořen a určete koeficient $p \in \mathrm{C}$.

65 V rovnici $x^2 + 2(3 - 2\mathrm{i})x + k = 0$ určete $k \in \mathrm{C}$ tak, aby rovnice měla dvojnásobný kořen.

66 Je dána kvadratická rovnice $x^2 + \mathrm{i}x - 1 = 0$. Užitím vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice vypočítejte
a) součet převrácených hodnot kořenů,
b) součet druhých mocnin kořenů.
c) Vypočítejte kořeny dané rovnice a ověřte správnost výsledků a), b).

67 V množině C rozložte na součin kořenových činitelů:
a) $x^2 + 2x + 2$ c) $2x^2 - 4x + 10$ e) $4x^2 + 1$
b) $x^2 - 4x + 5$ d) $x^2 + x + 1$ f) $x^4 - 16$

17.11 Binomická rovnice

68 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{C}$. Výsledek zapište nejprve v goniometrickém tvaru, pak ve tvaru algebraickém. Kořeny znázorněte v Gaussově rovině.
a) $x^3 - 27 = 0$ c) $x^6 - 1 = 0$
b) $x^4 + 16 = 0$ d) $x^3 - 64\mathrm{i} = 0$

69 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{C}$. Výsledky zapište v goniometrickém tvaru. Kořeny znázorněte v Gaussově rovině.
a) $x^3 - 1 - \mathrm{i} = 0$ c) $(\mathrm{i}x)^4 + \sqrt{3} - \mathrm{i} = 0$
b) $x^6 - 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 0$ d) $(2x)^5 - 16 = 16\mathrm{i}\sqrt{3}$

70 Uvedené rovnice s neznámou $x \in \mathrm{C}$ řešte dvěma způsoby. Buď jako rovnice kvadratické, nebo jako rovnice binomické.
a) $x^2 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ b) $x^2 + 2x + 5 = 0$

18 Kombinatorika a binomická věta

18.1 Faktoriál čísla — $n!$

1 Vypočítejte:
a) $2! + 0!$ b) $2 \cdot 2! + (2^2)! + (2!)^2$ c) $3! + (3!)!$

2 Vypočítejte:
a) $\dfrac{8!}{4!}$ b) $\dfrac{8!}{4! + 4!}$ c) $\dfrac{8!}{4! \cdot 4!}$ d) $\dfrac{8!}{4 \cdot 4!}$

3 Zjednodušte:
a) $\dfrac{2! \cdot 5! \cdot 6!}{7! \cdot 4! \cdot 3!}$ b) $\dfrac{28! + 29!}{30!}$ c) $\dfrac{7 \cdot 7! + 6 \cdot 6!}{6 \cdot 7! - 7 \cdot 6!}$

4 Upravte na společného jmenovatele:
a) $\dfrac{1}{12!} + \dfrac{7}{13!}$ b) $\dfrac{1}{15!} - \dfrac{15}{16!}$ c) $\dfrac{3}{5!} - \dfrac{20}{7!} + \dfrac{2}{6!}$

5 Kraťte, určete podmínky pro n:
a) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ c) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$ e) $\dfrac{(n+4)!}{(n+2)!}$ g) $\dfrac{(2n)!}{(2n-1)!}$
b) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ d) $\dfrac{(n-100)!}{(n-99)!}$ f) $\dfrac{(n-4)!}{(n-2)!}$ h) $\dfrac{(3n-2)!}{(3n-3)!}$

6 Upravte, určete podmínky pro n:
a) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$ c) $2 \cdot \dfrac{n^2 - 16}{(n+4)!} + \dfrac{n^2 + 5}{(n+3)!} + \dfrac{3}{(n+2)!}$
b) $\dfrac{n}{(n-3)!} - \dfrac{1}{(n-4)!}$ d) $\dfrac{2}{n!} - \dfrac{2n}{(n+1)!} - \dfrac{2n+4}{(n+2)!}$

7 Upravte, určete podmínky pro n:
a) $\dfrac{(n-1)!}{3n!} + \dfrac{n!}{4(n+1)!}$ c) $\dfrac{(n+5)!}{(n+3)!} - 2 \cdot \dfrac{(n+4)!}{(n+2)!} + \dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}$
b) $\dfrac{(n-1)!}{3n!} \cdot \dfrac{n!}{4(n+1)!}$ d) $\dfrac{(n+1)!}{n!} + 4 \cdot \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} - \dfrac{9n!}{(n-1)!}$

8 Rozhodněte, které z čísel A, B je větší.
a) $A = 70! + 73!$, $B = 71! + 72!$ b) $A = n! + (n+3)!$, $B = (n+1)! + (n+2)!$

9 Dokažte, že platí:
a) $\dfrac{1\,000! + 1\,003!}{1\,001! + 1\,002!} > 1$ b) $\dfrac{1\,004! - 1\,002!}{1\,005! - 1\,003!} < 1$

10 a) Kolika nulami končí číslo 50! ?
b) Kolika nulami končí číslo 100! ?
c) Kolika nulami končí číslo 500! ?

11 Dokažte, že platí:

a) $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geqq 0$: $(n+1)! - n! = n \cdot n!$
b) $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geqq -2$: $(n+2)! + (n+3)! + (n+4)! = (n+2)! \cdot (n+4)^2$
c) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqq 4$: $(n-2)! + (n-3)! + (n-4)! = (n-4)! \cdot (n-2)^2$
d) $\forall n \in \mathbb{N}$: $n! \cdot (n+1) + n \cdot (n-1)! - (n-1)! \cdot (n^2+n) = n!$
e) $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geqq 0$: $(n+1)^2 \cdot (n!)^2 - [(n+1)!]^2 = 0$

12 Řešte rovnice s neznámou $n \in \mathbb{Z}$:

a) $5(n+1)! = (n+2)!$
b) $(n+2)! \cdot n! = 24(n+1)! \cdot (n-1)!$
c) $(n+1)! - 16(n-1)! = n!$
d) $(n-90)! + 4(n-91)! = (n-89)!$

13 Řešte rovnice s neznámou $n \in \mathbb{Z}$:

a) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 4n$
b) $\dfrac{10-17n}{(n+1)!} + \dfrac{4}{(n-1)!} = 0$
c) $\dfrac{(n+6)!}{(n+4)!} - n \cdot \dfrac{(n-4)!}{(n-5)!} = 5n + 80$
d) $\dfrac{(2n+1)!}{(2n)!} + \dfrac{(3n)!}{(3n-1)!} = \dfrac{(n+1)!}{2n!} + 50$

14 Řešte nerovnice s neznámou $n \in \mathbb{Z}$:

a) $72n! < (n+2)!$
b) $(n+2)! \cdot (24+6n) \leqq (n+4)!$
c) $(n+1)! + (n+2)! \leqq (n+3)!$
d) $(n-2)! + 5(n-4)! \geqq n(n-4)!$

15 Řešte nerovnice s neznámou $n \in \mathbb{Z}$:

a) $\dfrac{n!}{(n-2)!} + 24 \geqq 10n$
b) $n - \dfrac{(n-2)!}{(n-4)!} \geqq -1$
c) $\dfrac{3(n+4)!}{(n+2)!} - 22n \leqq 46$
d) $\dfrac{n!}{(n-2)!} - 3n \leqq \dfrac{(n+4)!}{(n+3)!} + 2$

18.2 Kombinační číslo, vlastnosti kombinačních čísel

16 Následující kombinační čísla $\binom{5}{2}, \binom{3}{3}, \binom{7}{2}, \binom{7}{5}$ vypočítejte třemi způsoby.

a) Vypočítejte je podle definice.
b) Vypočítejte je na kalkulačce.
c) Výsledek vyhledejte v Pascalově trojúhelníku.

17 Výpočtem ověřte, že platí:

a) $\binom{12}{5} = \binom{10}{5} + 2 \cdot \binom{10}{4} + \binom{10}{3} = \binom{9}{5} + 3 \cdot \binom{9}{4} + 3 \cdot \binom{9}{3} + \binom{9}{2}$
b) $\left[\binom{11}{7}\right]^2 - \left[\binom{10}{7}\right]^2 = \binom{10}{4} \cdot \left[\binom{10}{6} + \frac{1}{3} \cdot \binom{6}{5} \cdot \binom{10}{3}\right]$
c) $\binom{15}{3} - \binom{10}{3} - \binom{5}{3} = \binom{10}{2} \cdot 5 + 10 \cdot \binom{5}{2}$

18 Kolikrát je číslo $M = \binom{100}{10}$ větší než číslo $N = \binom{99}{90}$?

19 Které z čísel K, L je větší?

a) $K = \binom{500}{50}$, $L = \binom{501}{51}$
b) $K = \binom{120}{60}$, $L = \binom{120}{61}$

20 Které z čísel $\binom{100}{k}$, kde $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 100\}$ je největší?

21 Dokažte a rozhodněte, pro která $n \in \mathbb{N}$ platí:

a) $n^2 = 2\binom{n}{2} + \binom{n}{1}$
b) $n^3 = 6\binom{n}{3} + 6\binom{n}{2} + \binom{n}{1}$
c) $2\binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}$
d) $\frac{3}{2}\binom{3n-1}{n} = \binom{3n}{n}$

22 Vyjádřete jedním kombinačním číslem:

a) $\binom{17}{8} + \binom{17}{9}$
b) $\binom{11}{7} + \binom{11}{5}$
c) $\binom{10}{1} + \binom{10}{0} + \binom{11}{9}$
d) $\binom{12}{3} + \binom{4}{3} - \binom{12}{9}$
e) $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3}$
f) $\binom{20}{20} + \binom{21}{20} + \binom{22}{20} + \binom{23}{20}$

23 Víte-li, že $\binom{14}{5} = 2\,002$, určete: a) $\binom{14}{9}$ b) $\binom{14}{6}$ c) $\binom{14}{4}$ d) $\binom{14}{8}$

24 Jednotlivé zlomky nejprve zapište pomocí kombinačních čísel a pak užitím vlastností kombinačních čísel upravte (určete podmínky pro n, k, r):

a) $\dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \dfrac{n!}{(n-k+1)! \cdot (k-1)!}$
b) $\dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!} + \dfrac{2n!}{(n-r+1)! \cdot (r-1)!} + \dfrac{n!}{(n-r+2)! \cdot (r-2)!}$

18.3 Rovnice a nerovnice s kombinačními čísly

25 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\binom{10}{4}x = \binom{12}{6}$
b) $\binom{6}{3} = 2\left[x + \binom{5}{1}\right] + \frac{1}{2}\binom{4}{3}$
c) $\left[x + \binom{1}{1}\right] \cdot \left[x - \binom{2}{2}\right] = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$
d) $\binom{5}{0}x^2 - x\binom{2}{2} - \binom{8}{4} : \binom{7}{3} = 0$
e) $\left[\binom{x}{2}\right]^2 - 2\binom{6}{5} \cdot \binom{x}{2} - \binom{7}{3} - \binom{5}{3} = 0$

26 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{N}$:

a) $\binom{8}{x} = \binom{8}{5}$ b) $\binom{6}{x} + \binom{6}{x+1} = \binom{7}{4}$ c) $\binom{10}{x} = 45$

27 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\binom{x}{2} + \binom{x+1}{2} = 25$

b) $\binom{x}{1} + \binom{x-3}{x-4} = 2x - 3$

c) $\binom{x-1}{x-3} - 2 \cdot \binom{x-2}{x-4} = 0$

d) $2\binom{x+6}{x+4} - \binom{x+4}{x+2} = 4! + \binom{5}{2}x$

e) $\binom{x+1}{x+1} + \binom{5}{3} \cdot \binom{x+1}{x} - \binom{4}{3} \cdot \binom{x+1}{x-1} = 1$

f) $5\binom{x+8}{x+7} - \binom{x}{1} = 2\binom{x}{0} \cdot \binom{x+1}{x} \cdot \binom{x}{x-1}$

g) $\left[\binom{x}{1}\right]^2 - 11 = 2\left[\binom{x-1}{1} + \binom{x-2}{2}\right] \cdot \binom{x-3}{0}$

h) $\binom{x}{x-3} + \binom{x+1}{x-2} = \frac{1}{3}\left[x^3 - \binom{7}{4}\right]$

28 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\binom{x-2}{x-4} + 3 \geqq 4x$

b) $\binom{x+1}{x} + 2x < 50$

c) $\binom{x+4}{2} \geqq \binom{x-4}{2}$

d) $\binom{x+1}{x-1} - \binom{x}{x} \cdot \binom{8}{5} \leqq 44$

e) $\binom{x}{2} + \binom{x+2}{2} + \binom{x+4}{2} \leqq 100$

f) $6\binom{x+3}{3} - (x+3)^3 \leqq \frac{x+2}{2} - \binom{x+2}{2} \cdot 6$

29 Řešte rovnici a nerovnici s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\binom{4x+2}{4x} + \binom{3x}{3x-2} - \binom{2x+1}{2x} = 5\left[\binom{5x}{1} + \binom{5x}{5x}\right]$

b) $\binom{3x-3}{1} + \binom{3x-3}{2} > \frac{3x-3}{2}$

30 Řešte nerovnice a rovnice s neznámou $x \in \mathrm{R}$:

a) $\binom{8}{x} < 2\binom{8}{x-1}$ c) $\left[\binom{x}{2}\right]^2 - 5\binom{x}{2} - 6 = 0$

b) $\binom{7}{x+1} \leqq \binom{7}{x} \cdot 2$ d) $\left[\left(\frac{x}{2}\right)!\right]^2 - 5\left(\frac{x}{2}\right)! - 6 = 0$

31 Vypočítejte celá čísla x, y tak, aby byla řešením soustavy:

a) $\binom{x}{y} = 2\binom{x-1}{y-1}$
$2x - 3y - 3 = 0$

b) $\binom{x+2}{y+2} : \binom{x+1}{y+1} = 5 : 4$
$x : y = 4 : 3$

c) $\binom{x}{y} : \binom{x-1}{y-1} = 1\frac{3}{5}$
$\binom{x-1}{y-1} : \binom{x-2}{y-2} = 1\frac{3}{4}$

d) $\binom{x-1}{y} : \binom{x}{y+1} : \binom{x+1}{y+2} = 5 : 6 : 7$

18.4 Pravidlo kombinatorického součinu

32 Jana má pět různě barevných triček a tři nestejné sukně. Kolika způsoby si může vzít tričko a sukni, aby pokaždé vypadala jinak?

33 Do tanečních přišlo 32 chlapců a 34 dívek. Kolik různých tanečních párů mohou vytvořit? Za předpokladu, že první pár je zadán, každý pár spolu tančí jednu minutu a další výměna trvá 5 sekund, vypočítejte, jak dlouho by musel trvat taneční večer, aby se všichni v párech vystřídali.

34 V restauraci mají na jídelním lístku 3 druhy polévek, 7 možností výběru hlavního jídla, 4 druhy moučníku. K pití si lze objednat kávu, limonádu nebo džus. Kolika způsoby si host může vybrat oběd, za předpokladu, že bude jíst
a) jen polévku a hlavní jídlo,
b) polévku, hlavní jídlo a dále si objedná nápoj,
c) polévku, hlavní jídlo, moučník a nápoj.

35 Ve třídě chodí 14 žáků na němčinu a 13 na francouzštinu. Každý žák navštěvuje právě jeden z uvedených předmětů. Kolika způsoby lze vybrat dvojici na týdenní službu tak, aby měl službu jeden žák z oddělení němčiny a jeden žák z oddělení francouzštiny? Kolik let by žáci museli chodit do školy, aby se všechny tyto dvojice vystřídaly? (Počítejte, že školní rok má 33 vyučovacích týdnů.)

36 Maminka koupila 10 rohlíků a 8 housek. Martin si vezme buď rohlík, nebo housku. Potom si David vezme jednu housku a jeden rohlík. Kdy má David více možností výběru, když si Martin vzal rohlík, nebo když si Martin vzal housku?

18.5 Variace

37 Kolik různých přirozených čtyřciferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5? Kolik z nich je dělitelných 5? Kolik z nich je lichých?

38 Kolik různých přirozených pěticiferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 0, 2, 4, 6, 7, 8, 9? Kolik z nich je dělitelných 4? Kolik z nich je dělitelných 10? Kolik z nich je sudých?

39 Určete počet všech přirozených čísel větších než 2 000, v jejichž zápisech se vyskytují cifry 1, 2, 4, 6, 8, a to každá nejvýše jednou.

40 Určete počet všech přirozených čísel větších než 300 a menších než 5 000, v jejichž zápisech se vyskytují cifry 2, 3, 4, 7, 8, a to každá nejvýše jednou.

41 Ve třídě 1.A se vyučuje 11 různých předmětů. Kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den, vyučuje-li se tento den 6 různých předmětů?

42 Ve třídě je 30 míst, ale ve třídě 3. B je jen 28 žáků. Kolika způsoby lze sestavit zasedací pořádek? (Ve třídě jsou tři oddělení po 5 lavicích. Jedna lavice je pro dvojici žáků.)

43 Na běžecké trati běží 8 závodníků. Za předpokladu, že každou z medailí získá právě jeden závodník, vypočítejte, kolik je možností na rozdělení zlaté, stříbrné a bronzové medaile mezi závodníky.

44 Z kolika prvků lze vytvořit 992 variací druhé třídy bez opakování?

45 Zvětší-li se počet prvků o 5, zvětší se počet variací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků o 1 170. Určete původní počet prvků.

46 Zmenší-li se počet prvků o 27, zmenší se počet variací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků desetkrát. Určete původní počet prvků.

18.6 Permutace

47 Kolika způsoby lze postavit 20 žáků do řady při nástupu na tělocvik?

48 Kolika způsoby lze postavit do řady vedle sebe na poličku 15 různých knih?

49 Kolika způsoby lze postavit do řady na poličku 10 různých knih českých a 5 různých knih anglických tak, že nejprve budou knihy české a vedle nich knihy anglické.

50 Kolika způsoby lze rozmíchat hru 32 karet?

51 Kolik různých devíticiferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 1 až 9?

18.7 Kombinace

52 Kolik přímek určuje deset různých bodů v rovině, z nichž
a) žádné tři neleží v přímce,
b) právě šest leží v přímce?

53 Kolik kružnic určuje deset různých bodů v rovině, z nichž
a) žádné tři neleží v přímce,
b) právě šest leží v přímce?

54 V prostoru je dáno 15 různých bodů. Kolik rovin tyto body určují, jestliže
a) žádné tři neleží v jedné rovině,
b) právě 8 leží v jedné rovině?

55 Je dán čtverec $KLMN$. Na každé straně čtverce zvolíme 8 vnitřních bodů.
a) Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v daných bodech.
b) Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v daných bodech a každé dva vrcholy jednoho trojúhelníku leží na různých stranách čtverce.

56 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Na každé hraně zvolíme 8 vnitřních bodů.
a) Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v daných bodech.
b) Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v daných bodech a navíc trojúhelníky leží na povrchu krychle.

57 Určete počet všech úhlopříček v konvexním n-úhelníku.

58 Ve třídě je 30 žáků. Kolika způsoby lze vybrat čtveřici žáků na zkoušení?

59 Na běžecké trati běží 8 závodníků. Do finále postupují první tři. Kolik je možností na postupující trojici?

60 Kolika způsoby lze rozdělit 12 hráčů na dvě šestičlenná družstva?

61 Kolika způsoby lze 4 dívky a 8 chlapců rozdělit na dvě šestičlenná volejbalová družstva tak, aby v každém družstvu byla dvě děvčata a 4 chlapci?

62 Test přijímací zkoušky se skládá z 10 otázek z chemie, z 10 otázek z biologie a z 10 otázek z fyziky. V každém předmětu je vybíráno ze 200 navržených otázek. Kolik je možností sestavit test? (Na pořadí otázek nezáleží.)

63 Kolika způsoby lze ze skupiny 10 děvčat a 5 chlapců vybrat trojici, ve které jsou dvě děvčata a jeden chlapec?

64 Ve skupině je 20 dětí, každé dvě děti mají jiné jméno. Je mezi nimi i Alena a Jana. Kolika způsoby lze vybrat 8 dětí tak, aby mezi vybranými
a) byla Alena,
b) nebyla Alena,
c) byla Alena a Jana,
d) byla alespoň jedna z dívek Alena, Jana,
e) byla nejvýše jedna z dívek Alena, Jana,
f) nebyla ani Alena, ani Jana?

65 V krabici je 10 výrobků, z nichž jsou právě tři vadné. Kolika způsoby lze vybrat 5 výrobků tak, aby
a) žádný nebyl vadný,
b) právě jeden byl vadný,
c) nejvýše jeden byl vadný,
d) právě dva byly vadné,
e) nejvýše dva byly vadné,
f) alespoň dva byly vadné?

66 Kolika způsoby lze 20 dětí rozdělit do tří skupin tak, aby v první skupině bylo 10 dětí, ve druhé skupině bylo 6 dětí a ve třetí zbytek?

67 Z kolika prvků lze vytvořit 990 kombinací druhé třídy bez opakování?

68 Zvětší-li se počet prvků o 4, zvětší se počet kombinací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků o 30. Určete původní počet prvků.

69 Zvětší-li se počet prvků o 15, zvětší se počet kombinací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků třikrát. Určete původní počet prvků.

18.8 Variace, kombinace — rovnice

70 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathrm{N}$:

a) $V(2,x) = 56$

b) $V(x,10) = 30\,240$

c) $\dfrac{V(7,x)+V(5,x)}{V(5,x)} = 13$

d) $18K(4,x+1) = 5K(5,x+3)$

e) $2K(2,x-1) = 10(x-2)$

f) $\dfrac{K(5,x)+K(6,x)}{K(4,x+1)} = \dfrac{2}{3}$

18.9 Variace, permutace, kombinace s opakováním

71 Kolik značek Morseovy abecedy lze sestavit z teček a čárek, vytváříme-li skupiny o jednom až čtyřech prvcích?

72 Kolik pěticiferných čísel lze sestavit z cifer 2, 3, 4, 6, 7, 9, jestliže se cifry mohou opakovat?

73 V krabičce je 10 pastelek, z toho 4 stejné červené, 3 stejné modré, 2 stejné žluté a jedna zelená pastelka. Kolika způsoby lze pastelky v krabičce uspořádat?

74 Kolika způsoby lze koupit v prodejně 5 sešitů, mají-li 3 druhy sešitů v dostatečném množství?

75 V cukrárně mají pět druhů dortů v dostatečném množství. Kolika způsoby si můžeme koupit 8 dortů?

18.10 Binomická věta

76 Vypočítejte:

a) $(1+\sqrt{2})^5$ c) $(x+\sqrt{x})^4$ e) $(a\sqrt[3]{a}-3)^3$

b) $(1-2\sqrt[3]{3})^6$ d) $\left(y-\dfrac{1}{2y}\right)^5$ f) $\left(\sqrt{\dfrac{m}{n}}-\sqrt{\dfrac{n}{m}}\right)^5$

77 Umocněte:

a) $\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^4+\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$ b) $\left(2a-\dfrac{1}{a^2}\right)^5-\left(2a+\dfrac{1}{a^2}\right)^5$

78 Umocněte podle binomické věty i podle Moivreovy věty:

a) $(1+\mathrm{i})^7$ b) $(\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2})^6$ c) $(-2+2\mathrm{i}\sqrt{3})^5$

79 Ověřte, že číslo $x=\sqrt{2}-2$ je kořenem rovnice $x^5-10x^3-24x-16=0$.

80 Kolik členů obsahuje binomický rozvoj $(1+2x)^{20}$?

81 Vypočítejte pátý člen binomického rozvoje $(1+y)^{10}$.

82 Vypočítejte desátý člen binomického rozvoje $(2a+b)^{15}$.

83 Určete $x \in \mathrm{R}$ tak, aby pátý člen binomického rozvoje $\left(\dfrac{2}{x}-\sqrt{x}\right)^9$ byl roven 2 016.

84 Určete $z \in \mathrm{R}$ tak, aby sedmý člen binomického rozvoje $(\sqrt[3]{1+z}+\sqrt[6]{1-z})^9$ byl roven 63.

85 Který člen binomického rozvoje $(5-2m)^7$ obsahuje m^4?

86 Který člen binomického rozvoje $(y^2+y^{-1})^9$ obsahuje y^3?

87 Který člen binomického rozvoje $\left(\dfrac{2}{c^2}+\sqrt{c}\right)^{12}$ obsahuje výraz $\sqrt{\dfrac{1}{c^3}}$?

88 Vypočítejte takový člen binomického rozvoje, který neobsahuje a:

a) $(3\sqrt{a}-a^{-2})^{10}$ b) $\left(\sqrt[4]{a^3}+\dfrac{1}{a\sqrt{a}}\right)^8$

89 V binomickém rozvoji $\left(\dfrac{2x^2}{\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{x^5}\right)^{14}$ najděte člen, který

a) neobsahuje x, b) neobsahuje y.

90 Najděte všechny členy binomického rozvoje, které jsou racionálními čísly:

a) $(\sqrt{5}+1)^6$ b) $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^{11}$ c) $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$

91 Kolik racionálních členů obsahuje binomický rozvoj?

a) $(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})^{50}$ b) $(\sqrt[6]{5}+6\sqrt[8]{11})^{66}$

92 Určete $n \in \mathrm{N}$ tak, aby pro binomický rozvoj $(1+x)^n$ platilo:

a) koeficient u třetího členu je stejný jako koeficient u osmého členu
b) koeficient u třetího členu je 2,5krát větší než koeficient u šestého členu
c) poměr koeficientů u čtvrtého členu a třetího členu je 8 : 3
d) součet koeficientů u druhého a třetího členu je 55
e) koeficient u x^3 je čtyřikrát větší než koeficient u x^2
f) koeficient u x^2 je o 152 větší, než absolutní člen
g) koeficienty u druhého, třetího a čtvrtého členu tvoří aritmetickou posloupnost

93 Určete $n \in \mathrm{N}$ tak, aby třetí člen binomického rozvoje $(\sqrt[3]{x}+x^{-1})^n$ neobsahoval proměnnou x.

94 Určete $n \in \mathrm{N}$ tak, aby pátý člen binomického rozvoje $\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}-2z\right)^n$ neobsahoval proměnnou z.

95 Určete $n \in \mathrm{N}$ tak, aby koeficient u y^8 v binomickém rozvoji $(1+2y^2)^n$ byl roven 240.

96 Určete $n \in \mathrm{N}$ tak, aby pětinásobek třetího členu binomického rozvoje $\left(\sqrt{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{4}\right)^n$ byl číslo opačné k osminásobku členu pátého.

97 Určete $n \in \mathrm{N}$ tak, aby poměr koeficientů u osmého členu a šestého členu v binomickém rozvoji $\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^n$ byl 1 : 21.

98 Užitím binomické věty a věty Moivreovy odvoďte vzorce pro

a) $\sin 3x$, $\cos 3x$, b) $\sin 5x$, $\cos 5x$.

99 Pomocí binomické věty dokažte, že $\forall n \in \mathrm{N}$ platí:

a) $\dbinom{n}{0}+\dbinom{n}{1}+\dbinom{n}{2}+\ldots+\dbinom{n}{n}=2^n$

b) $\dbinom{n}{0}-\dbinom{n}{1}+\dbinom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\dbinom{n}{n}=0$

c) $\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} - \ldots + (-2)^n\binom{n}{n} = (-1)^n$

d) $4^n + \binom{n}{1}4^{n-1} + \binom{n}{2}4^{n-2} + \ldots + 1\binom{n}{n} = 5^n$

e) $1 + 4\binom{n}{1} + 4^2\binom{n}{2} + \ldots + 4^n\binom{n}{n} = 5^n$

100 Užitím binomické věty dokažte, že platí:

a) $\forall n \in \mathrm{N}$ je číslo $\frac{4^{2n}-1}{15}$ celé číslo

b) $\forall n \in \mathrm{N}$ je číslo $4^n - 1$ dělitelné 3

18.11 Důkaz matematickou indukcí

101 Dokažte užitím matematické indukce:

a) $\forall n \in \mathrm{N}$: $6 \mid (n^3 + 5n)$

b) $\forall n \in \mathrm{N}$: $5 \mid (n^5 + 4n)$

c) $\forall n \in \mathrm{N}$: $4 \mid (n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n)$

d) $\forall n \in \mathrm{N}$: $7 \mid (n^7 - 8n)$

102 Dokažte užitím matematické indukce:

a) $\forall n \in \mathrm{N}$: $3 \mid (4^n + 5)$

b) $\forall n \in \mathrm{N}$: $16 \mid (9^{n+1} - 8n - 9)$

c) $\forall n \in \mathrm{N}$: $36 \mid (7^n - 6n - 1)$

d) $\forall n \in \mathrm{N}$: $5 \mid (8^{2n} - 3^{2n})$

e) $\forall n \in \mathrm{N}$: $5 \mid (2^{4n+3} - 3)$

f) $\forall n \in \mathrm{N}$: $7 \mid (2^{n+2} + 3^{2n+1})$

103 Dokažte užitím matematické indukce:

a) $\forall n \in \mathrm{N}$: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\forall n \in \mathrm{N}$: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$

c) $\forall n \in \mathrm{N}$: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

d) $\forall n \in \mathrm{N}$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

e) $\forall n \in \mathrm{N}$: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

f) $\forall n \in \mathrm{N}$: $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

104 Dokažte užitím matematické indukce:

a) $\forall n \in \mathrm{N}$: $\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

b) $\forall n \in \mathrm{N}$: $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

c) $\forall n \in \mathrm{N}$: $\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

d) $\forall n \in \mathrm{N}$: $\sum\limits_{i=1}^{n} i(3i+1) = n(n+1)^2$

105 Dokažte užitím matematické indukce:

$\forall n \in \mathrm{N}$: $\frac{1\cdot 2!}{2} + \frac{2\cdot 3!}{2^2} + \frac{3\cdot 4!}{2^3} + \ldots + \frac{n\cdot(n+1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$

106 Dokažte užitím matematické indukce: $\forall n \in \mathrm{N}$, $n \geqq 5$: $2^n > n^2$

107 Posloupnost je dána rekurentně: $a_1 = 3 \wedge a_n = a_{n-1} + 2n$. Dokažte užitím matematické indukce správnost vzorce pro n-tý člen $a_n = n^2 + n + 1$.

108 Dokažte užitím matematické indukce, že pro každé přirozené číslo n je také výraz $v(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ přirozeným číslem.

109 Užitím matematické indukce dokažte, že libovolnou částku peněz větší než 4 koruny vyjádřenou v celých korunách lze složit jen užitím dvoukorun a pětikorun.

110 Užitím matematické indukce dokažte úlohy 99a), 99b) a 100a) z této kapitoly.

19 Diferenciální počet a integrální počet

Limita funkce

19.1 Limita funkce ve vlastním bodě

1 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x+3}{7}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x+\sin 2x}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}\pi}(\sin x+\cos x)$ d) $\lim\limits_{x\to1}(2^x-3^x)$ f) $\lim\limits_{x\to1}(\log 10x-\ln x)$

2 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{4x^2-36}{x+3}$ e) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^4-16}{x^3+8}$

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+1}$ f) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-6x+9}{81-x^4}$

3 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^2-x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-8x+15}$ g) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+5x-2}{27x^3-1}$

c) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+7x+3}{2x^2+9x+4}$ h) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^4+x^2-12}{x^4-2x^2-3}$

d) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{5x+6-x^2}{7x-6-x^2}$ i) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$

e) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-6}{x^3+3x^2+2x}$ j) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-1)^3-8}{3x^2-10x+3}$

4 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-5\sin x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos^2 x-3\cos x-4}{\cos^2 x-4\cos x-5}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{tg}^2 x+3\,\mathrm{tg}\,x-4}{\mathrm{tg}^2 x+4\,\mathrm{tg}\,x-5}$ d) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\dfrac{4+2\,\mathrm{cotg}\,x-2\,\mathrm{cotg}^2 x}{\mathrm{cotg}^2 x-1}$

5 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^4-x^3-5x^2-2x-3}{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-2x^3+2x^2-5x+2}{x-2}$ d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+3x^2-2}{x^3+2x+3}$

6 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$ f) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3\sqrt{x-2}}{x^2-9}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x+9}-3}$ g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{(1+x)^3}-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2x}-2}$ h) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

d) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2-\sqrt{6+x}}{x+2}$ i) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x}-3\sqrt{2}}$

e) $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$ j) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$

7 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\mathrm{tg}\,x}$ f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 2x}{1-\cos 2x}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ g) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\mathrm{tg}^2 x\right)$ h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x+\mathrm{tg}^2 x}{\sin^2 x}$ i) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\mathrm{cotg}\,x}{\sin x+\cos x}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x\cdot\cos x}{1+\cos 2x}$ j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-1}{\mathrm{cotg}\,x-1}$

8 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{1-\sqrt{\cos 2x}}$ d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x}}$ e) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sqrt{\cos x+2}}{\sin^2 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1+\sin x}}$ f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x-\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x-1}$

9 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{4x^2}$ g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x+x}{2x}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 8x}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+\sin 3x}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-x\sin x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sin 3x}$ f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x+\sin 7x}{2x}$ i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2 x-1+\sin 2x}{x}$

10 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x \sin x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{|x|}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin 2x}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{\sin x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{|x|}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+3\sin^2 x}}{\sqrt{\sin^2 x}}$

19.2 Limita funkce v nevlastním bodě

11 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+5}{3x-6}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^4-x^3+4}{5x^4+x^3+2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2+x-2}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{x+3}+4}{2^{x-1}+1}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2+4x}{3-7x}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x+5}{3\log x-1}$

12 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x^2}{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3}{x^3-3}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{2x}}{2^x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{x^2+3}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4+3x^2+5}{3-x}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{0{,}1^x+3}{0{,}1^{3x}+3}$

13 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{4x^2-x}{3x^2}}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+2}+3\sqrt{x^2-6}}{2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x-1}}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+x}}{x}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x-\sqrt{4x^2+3x})$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}$ j) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

19.3 Jednostranné limity

14 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{2x+1}{x-5}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+3}{x}$ g) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+x+1}{x^2-2x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{2x+1}{x-5}$ e) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-5}{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{5x}{1-x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x+1}{x-5}$ f) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{7}{(2-x)^3}$ i) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x^2+6}{x^2-9}$

15 Načrtněte grafy lineárních lomených funkcí: určete definiční obor, vypočítejte jednostranné limity v bodě nespojitosti, limity v nevlastních bodech. Napište rovnice asymptot, určete souřadnice středu hyperboly. Vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce s osou x i s osou y.

a) $f_1\colon y = \dfrac{x+3}{x-2}$ c) $f_3\colon y = \dfrac{2x+3}{2-x}$ e) $f_5\colon y = \dfrac{11-5x}{3x}$

b) $f_2\colon y = \dfrac{2x+3}{x-2}$ d) $f_4\colon y = \dfrac{3}{2x+4}$ f) $f_6\colon y = \dfrac{5+3x}{2x+7}$

16 Načrtněte schéma grafu funkcí g_1, g_2, g_3: určete definiční obor, vypočítejte limity v nevlastních bodech, vypočítejte jednostranné limity v bodech nespojitosti.

$g_1\colon y = \dfrac{x^2-1}{x^2+x-6}$ $g_2\colon y = \dfrac{5-2x^2}{x^2-4x+3}$ $g_3\colon y = \dfrac{-2x^3+x-1}{x^3-x}$

Derivace funkce

19.4 Definice derivace funkce

17 Užitím definice derivace vypočtěte derivaci funkce v daném bodě x_0.

$f_1(x) = x^2,\ x_0 = 3$ $f_6(x) = x^2+2x,\ x_0 = -1$
$f_2(x) = x^2-4x,\ x_0 = 1$ $f_7(x) = \sin x,\ x_0 = 0$
$f_3(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1$ $f_8(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$
$f_4(x) = x^3,\ x_0 = 2$ $f_9(x) = 1+\cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$
$f_5(x) = \dfrac{1}{x},\ x_0 = 4$ $f_{10}(x) = \dfrac{x+1}{2x-1},\ x_0 = -2$

18 Užitím definice derivace odvoďte vzorec pro derivaci dané funkce v libovolném bodě x_0 definičního oboru.

$g_1(x) = x^2$ $g_2(x) = x^3$ $g_3(x) = \sin x$ $g_4(x) = \sqrt{x}$

19.5 Pravidla pro výpočet derivace

19 Vypočítejte derivace následujících funkcí v libovolném bodě definičního oboru. (Vždy také určete definiční obor funkce dané i její derivace.)

$f_1\colon y = x^2+x^3$ $f_7\colon y = 2\sin x + 3\cos x$
$f_2\colon y = 4x^2-x+1$ $f_8\colon y = x^7 - 7\cos x$
$f_3\colon y = \sqrt{x}+x^{-2}$ $f_9\colon y = 6\ln x - 9\log x$
$f_4\colon y = 6\sqrt[3]{x}-5$ $f_{10}\colon y = 3^x + 2e^x$
$f_5\colon y = \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}$ $f_{11}\colon y = 2x+\sin x - \dfrac{1}{5}$
$f_6\colon y = \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{7}\cdot\sqrt[5]{x^2}$ $f_{12}\colon y = \operatorname{tg} x + 11\operatorname{cotg} x$

20 Vypočítejte derivace následujících funkcí v libovolném bodě definičního oboru. (Nejprve upravte předpis, kterým je funkce definována, potom teprve derivujte.)

$g_1\colon y = \dfrac{(x^2+2)^2}{4}$ $\qquad$ $g_5\colon y = \dfrac{x^3-6x^2+6x-1}{x-1}$

$g_2\colon y = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}-5\sqrt{x})}{x}$ $\qquad$ $g_6\colon y = \dfrac{x^3-3x^2+2}{x-1}$

$g_3\colon y = \dfrac{x^3+1}{x+1}$ $\qquad$ $g_7\colon y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$

$g_4\colon y = \dfrac{(x+1)^3}{x}$ $\qquad$ $g_8\colon y = \dfrac{\sin 2x + 1}{\sin x + \cos x}$

21 Derivujte podle pravidel pro derivaci součinu, podílu.

$h_1\colon y = x \cdot \sin x$ $\qquad$ $h_4\colon y = \dfrac{2x-1}{x+3}$

$h_2\colon y = (x^2-1)\cdot \sin x$ $\qquad$ $h_5\colon y = \dfrac{x^2+2x}{1-x^2}$

$h_3\colon y = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$ $\qquad$ $h_6\colon y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

22 Vypočítejte derivace složených funkcí.

$f_1(x) = (x^2+1)^6$ $\qquad$ $f_9(x) = \dfrac{1}{\sin^3 x}$

$f_2(x) = \sqrt{4x^3-x}$ $\qquad$ $f_{10}(x) = \sqrt{\cos 2x}$

$f_3(x) = \left(\sqrt{2x^3-1}+2\right)^8$ $\qquad$ $f_{11}(x) = \sqrt[3]{\cos 2x + 2x}$

$f_4(x) = \dfrac{1}{(3x^4+x^2)^{10}}$ $\qquad$ $f_{12}(x) = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

$f_5(x) = \sqrt{x+\sqrt{5x}}$ $\qquad$ $f_{13}(x) = \sqrt{\sin 3x + 5}$

$f_6(x) = \cos(2x+4)$ $\qquad$ $f_{14}(x) = \ln(2x+4)$

$f_7(x) = \sin^2 x$ $\qquad$ $f_{15}(x) = \ln(3\sin x - 8)$

$f_8(x) = \sin x^2$ $\qquad$ $f_{16}(x) = e^{\sin x}$

23 Je dána funkce $g\colon y = x^3 + 2x$. Vypočítejte $g'(0)$, $g'(1)$, $g'(-2)$.

24 Je dána funkce $f\colon y = 2x^3 - 2x + 1$. Určete, pro která $x \in \mathrm{R}$ platí:

a) $f'(x) = 0$ $\qquad$ b) $f'(x) = 4$ $\qquad$ c) $f'(x) = -5$ $\qquad$ d) $f'(x) = f'(3)$

19.6 Tečna ke grafu funkce

25 Určete směrnici tečny ke grafu funkce $y = x^2$ v bodě $T[3; 9]$.

26 Napište rovnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě T. Rovnici tečny uveďte v obecném tvaru.

a) $f_1(x) = x^2 - 2x$, $T[4; ?]$ $\qquad$ e) $f_5(x) = 2\sin x$, $T[0; ?]$

b) $f_2(x) = 2x^4 + 8x$, $T[-1; ?]$ $\qquad$ f) $f_6(x) = x \operatorname{tg} x$, $T[0; ?]$

c) $f_3(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $T\left[\dfrac{1}{2}; ?\right]$ $\qquad$ g) $f_7(x) = \dfrac{1+x^3}{x-1}$, $T[2; ?]$

d) $f_4(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$, $T[-2; ?]$ $\qquad$ h) $f_8(x) = \dfrac{\sin 2x + 1}{\cos x + \sin x}$, $T\left[\dfrac{\pi}{2}; ?\right]$

27 Je dána funkce $f(x) = 2x^2 + x - 1$. Na grafu funkce $y = f(x)$ určete bod T tak, aby

a) tečna v bodě T měla směrnici $k = 5$,
b) tečna v bodě T měla směrový úhel $\varphi = 60°$,
c) tečna v bodě T byla rovnoběžná s osou x,
d) tečna v bodě T byla rovnoběžná s osou y,
e) tečna v bodě T byla rovnoběžná s přímkou $p\colon x - y + 10 = 0$,
f) tečna v bodě T byla kolmá k přímce $q\colon 3x + y - 1 = 0$.

28 Napište obecnou rovnici tečny t ke grafu funkce $y = -x^2 - 4x + 8$ tak, aby tečna t byla rovnoběžná s přímkou $p\colon 4x - 2y + 7 = 0$. Nakreslete.

29 Ve kterém bodě křivky $y = \dfrac{1}{x^2}$ je tečna rovnoběžná s osou I. a III. kvadrantu?

30 Ve kterých bodech grafu funkce $y = x^3 - x^2 - x$ jsou tečny ke grafu rovnoběžné s osou x?

31 Pomocí derivace určete souřadnice vrcholu paraboly $y = -3x^2 + x - 1$.

32 Určete obecnou rovnici tečny ve vrcholu paraboly $y = 2x^2 + 4x - 7$.

33 Vypočítejte směrové úhly tečen vedených ke grafu funkce $y = f(x)$ v průsečících grafu funkce s osou x. Načrtněte graf dané funkce, vyznačte vypočítané úhly.

a) $f_1(x) = -x^2 + 2x$ $\qquad$ d) $f_4(x) = \sin x$ $\qquad$ g) $f_7(x) = e^x - 1$

b) $f_2(x) = x^3$ $\qquad$ e) $f_5(x) = \cos x$ $\qquad$ h) $f_8(x) = \ln x$

c) $f_3(x) = \sqrt{x} - 2$ $\qquad$ f) $f_6(x) = \operatorname{tg} x$ $\qquad$ i) $f_9(x) = \log x$

34 Ve kterém bodě grafu funkce $y = -2x^2 + 4x$ svírá tečna ke grafu s kladnou poloosou x úhel:

a) $45°$ $\qquad$ b) $120°$ $\qquad$ c) $0°$ $\qquad$ d) $\dfrac{3\pi}{4}$ $\qquad$ e) $\dfrac{\pi}{2}$

35 Vypočítejte odchylku tečen sestrojených v průsečících grafů kvadratických funkcí $y_1 = x^2 - 6x$ a $y_2 = -x^2$.

36 Vypočítejte odchylku tečen sestrojených v průsečících parabol $y_1 = x^2 + 1$ a $y_2 = -x^2 + 9$.

37 Napište rovnice tečen vedených z bodu $M[3; 0]$ ke křivce $y = \dfrac{x-4}{x}$. K výpočtu směrnice užijte derivaci. Výpočet ověřte obrázkem.

19.7 Funkce rostoucí, klesající

38 Užitím derivace funkce určete intervaly, ve kterých je daná funkce rostoucí a ve kterých je klesající.

$f_1(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$ $\qquad$ $f_4(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$f_2(x) = -2x^3 + x^2 + 4x + 3$ $\qquad$ $f_5(x) = 4x^2 - x^4$

$f_3(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ $\qquad$ $f_6(x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3$

39 Užitím derivace určete intervaly monotónnosti následujících funkcí:

$g_1(x) = x + \frac{1}{x}$ $\quad g_5(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$ $\quad g_9(x) = (x^2 - 1)^4$

$g_2(x) = x - \frac{1}{x}$ $\quad g_6(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 1}$ $\quad g_{10}(x) = x\sqrt{x - 1}$

$g_3(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$ $\quad g_7(x) = \frac{1 - 2x}{x + 3}$ $\quad g_{11}(x) = \sqrt{\frac{x - 6}{4 - x}}$

$g_4(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad g_8(x) = \frac{1 - 2x^2}{x^2 + 3}$ $\quad g_{12}(x) = \frac{\sqrt{x - 6}}{\sqrt{4 - x}}$

19.8 Druhá derivace funkce

40 Vypočítejte druhé derivace následujících funkcí v libovolném bodě x_0 definičního oboru.

$f_1(x) = 3x^2 + 6x - 2$ $\quad f_4(x) = 4\sin x + 2\cos x$

$f_2(x) = x^2 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ $\quad f_5(x) = \frac{(x^2 + 4)(x - 1)}{x^2}$

$f_3(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ $\quad f_6(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$

41 Je dána funkce $g(x) = x^5 - 6x^3 + 2x^2$. Vypočítejte $g(-1)$, $g'(-1)$, $g''(-1)$.

42 Dokažte, že funkce f: $y = 2\sin x - \cos x$ vyhovuje rovnici $y'' + y = 0$.

43 Dokažte, že funkce f: $y = 2x^2 - 4x$ vyhovuje rovnici $xy'' - y' = 4$.

19.9 Maximum, minimum funkce

44 Určete, pro která $x \in \mathrm{R}$ nabývá funkce lokálního minima, pro která $x \in \mathrm{R}$ nabývá lokálního maxima.

$f_1(x) = x^3 + 6x^2$ $\quad f_4(x) = x^3 - 12x + 9$

$f_2(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ $\quad f_5(x) = x^4 + 4x^3$

$f_3(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ $\quad f_6(x) = x^5 + 10x^4$

45 Najděte lokální extrémy funkcí:

$g_1(x) = \frac{x^2}{x + 3}$ $\quad g_3(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{x}$ $\quad g_5(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x}}$

$g_2(x) = \frac{-2}{x^2 + 4}$ $\quad g_4(x) = \sqrt{4x - x^2}$ $\quad g_6(x) = (x^2 - 1)^3$

46 Vyšetřete globální extrémy funkcí h_1 až h_6 v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$.

$h_1(x) = \cos x + \sin x$ $\quad h_4(x) = \cos x - 0{,}5\cos 2x$

$h_2(x) = \sin^2 x - 2\cos^2 x$ $\quad h_5(x) = \cos^2 x + 0{,}5\sin 2x$

$h_3(x) = \cos^2 x - \sin x$ $\quad h_6(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}$

47 Dokažte, že funkce $y = \frac{2x + 3}{x - 6}$ nemá ve svém definičním oboru extrém.

48 Určete hodnoty parametrů $a, b \in \mathrm{R}$ tak, aby minimum funkce $h(x) = ax^2 + bx + 5$ bylo v bodě $x = 2$ a jeho hodnota byla 4.

49 Určete hodnoty parametrů $p, q \in \mathrm{R}$ tak, aby funkce $m(x) = x^2 + px + q$ nabývala minima pro $x = -4$ a aby dále platilo $m(3) = -10$.

50 Určete hodnoty parametrů $b, d \in \mathrm{R}$ tak, aby lokální minimum funkce $g(x) = x^3 + bx^2 + d$ bylo v bodě $x = 2$ a jeho hodnota byla 5. Potom určete lokální maximum dané funkce $g(x)$.

19.10 Průběh funkce

51 Je dána funkce g: $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2$.

a) Najděte intervaly, ve kterých je daná funkce $y = g(x)$ rostoucí, klesající.
b) Vypočítejte lokální extrémy dané funkce.
c) Vypočítejte průsečíky grafu funkce g s osou x a s osou y.
d) Načrtněte graf funkce $y = g(x)$.
e) Napište rovnice tečen ke grafu dané funkce v bodech $T_1[0; 0]$, $T_2\left[3; -13\frac{1}{2}\right]$, $T_3\left[\frac{3}{2}; -6\frac{3}{4}\right]$.
f) Všechny tři tečny z úlohy e) zakreslete do obrázku.

52 Vyšetřete průběh funkce:

$f_1(x) = x^3 - 3x + 2$ $\quad f_6(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

$f_2(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$ $\quad f_7(x) = -2x^4 + 4x^2 + 6$

$f_3(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ $\quad f_8(x) = 0{,}1x^4 - 0{,}4x^3$

$f_4(x) = 3x^3 + 12x^2 + 12x$ $\quad f_9(x) = 0{,}02x^5 - 0{,}1x^4$

$f_5(x) = 3x^3 - 12x^2 + 12x$ $\quad f_{10}(x) = x^6 - 2x^3 - 3$

53 Vyšetřete průběh funkce:

$g_1(x) = x^2 + \frac{1}{3}x^3$ $\quad g_3(x) = x^3 - \frac{1}{10}x^5$ $\quad g_5(x) = \frac{x^4 - 8x^2}{4}$

$g_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$ $\quad g_4(x) = x^3 + \frac{1}{10}x^5$ $\quad g_6(x) = \frac{x^4 + 8x^2}{4}$

54 Vyšetřete průběh funkce:

$h_1(x) = \frac{1}{x^2} - x$ $\quad h_4(x) = \frac{2x^2 - 10}{x + 3}$ $\quad h_7(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

$h_2(x) = \frac{1}{x} + x$ $\quad h_5(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ $\quad h_8(x) = \frac{1}{1 - x^2}$

$h_3(x) = \frac{10x + 10}{x^2}$ $\quad h_6(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$ $\quad h_9(x) = \frac{1}{(1 - x)^3}$

55 Vyšetřete průběh funkce v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$:

$g_1(x) = \sin^2 x + \sin x$ $\quad g_3(x) = \cos^2 x - \sin x$

$g_2(x) = \cos^2 x + \cos x$ $\quad g_4(x) = \sin^2 x - 2\cos x$

56 Je dána funkce $f_1(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$.

a) Načrtněte graf funkce $f_1(x)$ v intervalu $\langle -5; 2 \rangle$.
b) Určete obecné rovnice tečen v bodech: $T_1[-5; -5]$, $T_2[-3; 27]$, $T_3[-1; 11]$, $T_4[0; 0]$, $T_5[1; -5]$, $T_6[2; 2]$
c) V intervalu $\langle -5; 2 \rangle$ načrtněte graf funkce $f_2(x)$, pro kterou platí, že $f_2(x) = f_1'(x)$.
d) V intervalu $\langle -5; 2 \rangle$ načrtněte graf funkce $f_3(x)$, platí-li $f_3(x) = f_1''(x)$.

19.11 Derivace implicitní funkce

57 Užitím derivace funkce dané implicitně určete rovnici tečny v bodě T dané kuželosečky. Načrtněte kuželosečku i tečnu v soustavě souřadnic. Vyznačte směrový úhel tečny. Vypočítejte směrový úhel tečny s přesností na minuty.

a) $x^2 + y^2 = 10$, $T\left[2; \sqrt{6}\right]$
b) $x^2 + 2y^2 = 4$, $T\left[\sqrt{2}; 1\right]$
c) $4x^2 + y^2 = 16$, $T\left[\sqrt{3}; 2\right]$
d) $x^2 - 4y^2 = 4$, $T\left[\sqrt{5}; \frac{1}{2}\right]$
e) $y^2 - 2x^2 = 16$, $T[0; 4]$
f) $y^2 = 6x - 8$, $T[2; -2]$
g) $x^2 = 4y + 5$, $T[3; 1]$
h) $x^2 + 4y^2 = 4$, $T\left[1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
i) $x^2 + 4y^2 = 4$, $T[0; 1]$
j) $x^2 + 4y^2 = 4$, $T[2; 0]$
k) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$, $T[-5; 5]$
l) $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$, $T[1; -1]$
m) $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y - 19 = 0$, $T\left[9; 2\sqrt{3} - 1\right]$
n) $y^2 - 2y - 2x + 1 = 0$, $T[8; 5]$
o) $x^2 + 6x + 4y + 9 = 0$, $T[1; -4]$
p) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, $T[2; 6]$
q) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, $T[4; 2]$
r) $(x + 2)^2 + 4y^2 = 8$, $T[-4; -1]$
s) $2x^2 - (y + 3)^2 = 4$, $T\left[2\sqrt{5}; 3\right]$
t) $y^2 = 2(x - 1)$, $T[9; 4]$

58 Ve kterém bodě elipsy $4(x - 1)^2 + y^2 = 1$ svírá tečna elipsy s kladnou poloosou x úhel 45°?

59 Ve kterém bodě paraboly $y^2 = 4x - 8$ je tečna kolmá na osu I. a III. kvadrantu?

60 Vypočítejte odchylku tečen křivek $x^2 + y^2 = 5$, $2x^2 + y^2 = 9$ v jejich průsečících.

19.12 Derivace funkce a výpočet limity

61 Užitím definice derivace funkce vypočítejte následující limity:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$
b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$
c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3}}{x - 3}$
d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos x - 0{,}5}{x - \frac{\pi}{3}}$
e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$
f) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{x - \pi}$
g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$
h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$
i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

62 Užitím l'Hospitalova pravidla vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$
b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$
c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3 - 4x^2 + x}{4x^3 + x}$
d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^4 - x^3 + x - 1}$
e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$
f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x + 2x}{\sin x + x}$
g) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos x + 1}{x - \pi}$
h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x + 1} - 1}$
i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$
j) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$
k) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$
l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

19.13 Slovní úlohy řešené pomocí derivací

63 Z papíru tvaru čtverce 40 cm × 40 cm vystřihneme ve všech rozích stejné čtverečky a složíme krabičku. Určete stranu čtverečku tak, aby tato krabička měla maximální objem.

64 Určete stranu čtverce, které musíme vyříznout ve všech rozích obdélníkového papíru o rozměrech 8 cm × 5 cm tak, aby po složení vznikla krabička maximálního objemu.

65 Určete rozměry válcové nádoby s víkem tak, aby při objemu 2 litry měla tato nádoba minimální povrch.

66 Určete rozměry válcové nádoby bez víka tak, aby při objemu 2 litry měla tato nádoba minimální povrch.

67 Do koule o poloměru 3 cm vepište válec maximálního objemu. Určete jeho rozměry.

68 Do koule o poloměru 3 cm vepište kužel maximálního objemu. Určete poloměr podstavy a výšku kužele.

69 Do rotačního kužele o rozměrech $r = 6$ cm, $v = 3$ cm vepište válec maximálního objemu tak, aby osa válce splývala s osou kužele. Určete rozměry válce.

70 Do rotačního kužele o rozměrech $r = 6$ cm, $v = 3$ cm vepište válec maximálního objemu tak, aby osa válce byla kolmá na osu kužele. Určete rozměry válce.

71 Kouli o poloměru 3 cm opište kužel minimálního objemu. Určete jeho rozměry.

72 Do elipsy $4x^2 + 9y^2 = 36$ vepište obdélník maximálního obsahu. Určete jeho rozměry.

73 Určete rozměry obdélníku tak, aby při daném obsahu 16 cm^2 měl minimální obvod.

74 Určete rozměry obdélníku tak, aby při daném obvodu 20 cm měl maximální obsah.

75 Do ostroúhlého trojúhelníku ABC, $c = 8\,\mathrm{cm}$, $v_c = 4\,\mathrm{cm}$ vepište obdélník $KLMN$ maximálního obsahu tak, aby $KL \subset AB$. Určete jeho rozměry.

76 Z kruhu o poloměru 6 cm oddělte kruhovou úseč, která má výšku 5 cm. Do této kruhové úseče vepište obdélník maximálního obsahu. Určete jeho rozměry.

Integrální počet

19.14 Primitivní funkce

77 Dokažte, že funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$:

a) $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$, $f(x) = \sin^2 x$, $\quad x \in \mathsf{R}$

b) $F(x) = -\operatorname{cotg} x + 11$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\quad x \in \mathsf{R} - \bigcup\limits_{k\in \mathsf{Z}} \{k\pi\}$

c) $F(x) = \ln\sqrt{\left|\dfrac{x+1}{1-x}\right|}$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, $\quad x \in \mathsf{R} - \{\pm 1\}$

78 Dokažte, že dané dvě funkce $F_1(x)$ a $F_2(x)$ jsou primitivní funkce k téže funkci a určete konstantu, o kterou se liší.

a) $F_1(x) = -\dfrac{\cos 2x}{2}$, $F_2(x) = 3 - \cos^2 x$

b) $F_1(x) = \cos 2x$, $F_2(x) = 6\cos^2 x + 4\sin^2 x$

c) $F_1(x) = \sin 2x$, $F_2(x) = (\sin x + \cos x)^2$

d) $F_1(x) = \ln\sqrt{x-2} + 3$, $F_2(x) = \ln\sqrt{2x-4}$

79 Dokažte, že platí:

a) $\int \sin^5 x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$

b) $\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c$

80 Ověřte správnost následujících vzorců:

a) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$ $\qquad$ b) $\displaystyle\int f'(x)\cdot f^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$

81 Vypočítejte a proveďte zkoušku:

a) $\int (x^3 + x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int (3x + 5)\,\mathrm{d}x$

c) $\int (2x^{-3} - x^{-4})\,\mathrm{d}x$

d) $\int (x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{3}})\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \left(\frac{x^3}{4} - \frac{4}{x^3}\right)\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \left(5\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{7}{2\sqrt{5x}}\,\mathrm{d}x$

h) $\int x^2(x-2)\,\mathrm{d}x$

i) $\int (x^2 + 4x)^2\,\mathrm{d}x$

j) $\int (1 + 2x)^3\,\mathrm{d}x$

k) $\int 5x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

l) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

m) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\left(1 + \frac{5}{x\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

n) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

o) $\int \sqrt[3]{x}(2x - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

p) $\int (x^2 + 1)(x^2 - 3)\,\mathrm{d}x$

q) $\int (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)\,\mathrm{d}x$

r) $\int (x^2 - 2x) : x\,\mathrm{d}x$

s) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 1 + \sqrt{x}}{x^3}\,\mathrm{d}x$

t) $\displaystyle\int \frac{x(\sqrt[4]{x} - x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

u) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

82 Vypočítejte a proveďte zkoušku:

a) $\displaystyle\int \left(4 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{5x+25}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{5}{1-3x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{2\sqrt[3]{x} + 3}{x}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^3}{x^2}\,\mathrm{d}x$

83 Vypočítejte:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 4}{x+2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 8}{x-2}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x} - 1}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3} + 1}{\sqrt{x} + 1}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 5x + 6}{x-3}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{2x^2 + x - 6}{2x - 3}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 4x + 4}{4x^3 - 2x^4}\,\mathrm{d}x$

84 Vypočítejte:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 5x + 7}{x+2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x}{x-1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 - 10x}{x-2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3x}{x+1}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+2}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 3}{2x+1}\,\mathrm{d}x$

85 Vypočítejte a proveďte zkoušku:

a) $\int (\sin x - 2\cos x)\,\mathrm{d}x$
b) $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x$
c) $\int \cos 4x\,\mathrm{d}x$
d) $\int 3\sin 6x\,\mathrm{d}x$
e) $\int \cos(3x+1)\,\mathrm{d}x$
f) $\int (\cos 3x + 1)\,\mathrm{d}x$
g) $\int (\cos 3x + 3x + 1)\,\mathrm{d}x$
h) $\int (3\cos 3x + 1)\,\mathrm{d}x$
i) $\int \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$
j) $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$
k) $\int \frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$
l) $\int \left(\sin\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

86 Vypočítejte a proveďte zkoušku:

a) $\int (\sin^2 x + \cos^2 x)\,\mathrm{d}x$
b) $\int (\sin^2 x - \cos^2 x)\,\mathrm{d}x$
c) $\int (\cos^{-2} x + \sin^{-2} x)\,\mathrm{d}x$
d) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$
e) $\int \mathrm{tg}^2\, x\,\mathrm{d}x$
f) $\int \mathrm{cotg}^2\, x\,\mathrm{d}x$
g) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$
h) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\,\mathrm{d}x$
i) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$
j) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 2x}{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$
k) $\displaystyle\int \left(\mathrm{tg}^2\, x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$
l) $\displaystyle\int \left(\mathrm{cotg}^2\, x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$

87 Vypočítejte a proveďte zkoušku:

a) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$
b) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$
c) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$
d) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$
e) $\int \sin^2 5x\,\mathrm{d}x$
f) $\int \cos^2 6x\,\mathrm{d}x$

88 Vypočítejte:

a) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$
b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$
c) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$
d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$
e) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$
f) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2\sin x - 1}\,\mathrm{d}x$
g) $\int \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{d}x$
h) $\int \mathrm{cotg}\, x\,\mathrm{d}x$
i) $\int \mathrm{tg}\, 2x\,\mathrm{d}x$

89 Vypočítejte a proveďte zkoušku:

a) $\int 2x(x^2+4)^5\,\mathrm{d}x$
b) $\int 3x(x^2-1)^6\,\mathrm{d}x$
c) $\int x^2(4+x^3)^4\,\mathrm{d}x$
d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+4x^3)^3}\,\mathrm{d}x$
e) $\int x(2x^2-1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$
f) $\int x^2\sqrt[3]{x^3-2}\,\mathrm{d}x$
g) $\int x\sqrt{2x^2-8}\,\mathrm{d}x$
h) $\int \sqrt{5+2x}\,\mathrm{d}x$
i) $\int 2x(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$
j) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+10}}\,\mathrm{d}x$
k) $\int \cos x(\sin x + 7)^2\,\mathrm{d}x$
l) $\displaystyle\int \sin x\sqrt{\cos x + \frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}x$

19. Diferenciální počet a integrální počet

90 Vypočítejte a proveďte zkoušku:

a) $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$
b) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$
c) $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$
d) $\int \ln x\,\mathrm{d}x$
e) $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$
f) $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$
g) $\int \sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$
h) $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$
i) $\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$
j) $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$
k) $\int x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$
l) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

91 Určete funkci f tak, aby platilo:

a) $f'(x) = x^2 + 2 \wedge f(1) = 3$
b) $f''(x) = x - 3 \wedge f(0) = 1 \wedge f(2) = 3$

19.15 Určitý integrál

92 Vypočítejte:

a) $\int_2^4 x\,\mathrm{d}x$
b) $\int_{-3}^3 (2x-5)\,\mathrm{d}x$
c) $\int_1^3 (x^2+2x)\,\mathrm{d}x$
d) $\int_{-2}^1 (x+3)^2\,\mathrm{d}x$
e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$
f) $\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$
g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
h) $\displaystyle\int_{-2}^3 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
i) $\int_{-3}^3 \sqrt{2x+10}\,\mathrm{d}x$
j) $\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$
k) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
l) $\displaystyle\int_{-1}^5 \frac{1}{4x+5}\,\mathrm{d}x$

93 Určete hodnotu parametru $c \in \mathrm{R}$ tak, aby pro funkci $g(x) = x^2 + c$ platilo $\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 15$.

94 Určete hodnoty parametrů a, $b \in \mathrm{R}$ tak, aby pro funkci $f(x) = ax^2 + b$ platilo $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \wedge \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 20$.

95 Určete hodnoty a, b, $c \in \mathrm{R}$ tak, aby pro funkci $f(x) = ax^2 + bx + c$ platilo $f'(-1) = -7 \wedge f(0) + f''(0) = 5 \wedge \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.

96 Určete hodnoty parametrů a, $b \in \mathrm{R}$ tak, aby pro funkci $h(x) = a\sqrt{x} + b$ platilo $h'(4) = \frac{1}{2} \wedge \int_0^4 h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{44}{3}$.

97 Určete hodnotu parametru $a \in \mathrm{R}$ tak, aby pro funkci $f(x) = a\sin 2x$ platilo:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$

98 Určete hodnoty a, $b \in \mathrm{R}$ tak, aby pro funkci $g(x) = a\sin x + b\cos x$ platilo $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} g(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} \wedge \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = 3$.

99 Určete hodnoty a, $b \in \mathrm{R}$ tak, aby platilo $b - a = 3 \wedge \int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = 21$.

19.16 Obsah rovinného obrazce

100 Nakreslete rovinný obrazec, který omezuje osa x a graf funkce $y = f(x)$, přičemž $x \in \langle a; b\rangle$. Potom vypočítejte jeho obsah.

a) $y = x^2 \wedge x \in \langle 0; 2\rangle$
b) $y = -x^2 + 2 \wedge x \in \langle -1; 1\rangle$
c) $y = \sqrt{x} \wedge \langle 0; 4\rangle$
d) $y = \dfrac{1}{x} \wedge x \in \langle \frac{1}{2}; 5\rangle$
e) $y = \sin x \wedge x \in \langle 0; \pi\rangle$
f) $y = \sin x + \cos x \wedge x \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$
g) $y = \mathrm{e}^x - 1 \wedge x \in \langle 0; 1\rangle$
h) $y = \ln x \wedge x \in \langle 1; \mathrm{e}\rangle$

101 Nakreslete rovinný obrazec, který omezuje daná parabola a osa x. Potom vypočítejte jeho obsah.

a) $y = -x^2 + 4$
b) $y = 2x^2 - 4x$
c) $y = -x^2 - x + 2$
d) $y = 2x^2 + 2x - 4$

102 Nakreslete rovinný obrazec, který je omezen grafy funkcí f a g v daném intervalu $\langle a; b\rangle$. Potom vypočítejte jeho obsah.

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 4 \wedge x \in \langle -2; 2\rangle$
b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin x + 1 \wedge x \in \langle 0; \pi\rangle$

103 Nakreslete rovinný obrazec, který je omezen grafy funkcí f a g. Potom vypočítejte jeho obsah.

a) $f_1(x) = x^2$, $g_1(x) = 5x - 6$
b) $f_2(x) = x^2$, $g_2(x) = 4$
c) $f_3(x) = x^2 - 1$, $g_3(x) = x + 1$
d) $f_4(x) = -x^2 + 5$, $g_4(x) = x + 3$
e) $f_5(x) = x^2 + 2$, $g_5(x) = 2x^2 - 2$
f) $f_6(x) = x^2 + 2x$, $g_6(x) = -x^2 - 2x$
g) $f_7(x) = x^2 - 2x + 3$, $g_7(x) = -2x^2 + 4x + 3$
h) $f_8(x) = 2x^2 + 3$, $g_8(x) = -x^2 + 2x - 1$
i) $f_9(x) = x^2$, $g_9(x) = \sqrt{x}$
j) $f_{10}(x) = \sqrt{x}$, $g_{10}(x) = 0{,}5x$
k) $f_{11}(x) = \dfrac{2}{x}$, $g_{11}(x) = 3 - x$
l) $f_{12}(x) = -x^2 + 5$, $g_{12}(x) = \dfrac{4}{x^2}$

104 Nakreslete grafy funkcí f a g. Vypočítejte souřadnice x_1, x_2 průsečíků daných grafů v intervalu $\langle 0; 2\pi\rangle$. Vyšrafujte rovinný obrazec, který funkce $f(x)$, $g(x)$ pro $x \in \langle x_1; x_2\rangle$ omezují. Vypočítejte jeho obsah.

a) $f_1(x) = \sin x$, $g_1(x) = \cos x$
b) $f_2(x) = \sin x$, $g_2(x) = \dfrac{1}{2}$
c) $f_3(x) = 2\sin x$, $g_3(x) = \sin 2x$
d) $f_4(x) = \operatorname{tg} x$, $g_4(x) = \sin x$

105 Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného grafem funkce $y = f(x)$ a osou x v daném intervalu. Načrtněte obrázek.

a) $f(x) = x^3 - x \wedge x \in \langle -1; 1\rangle$
b) $f(x) = x^4 - 4x^2 \wedge x \in \langle -2; 2\rangle$

106 Vypočítejte obsah rovinného obrazce, který je omezen grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$. Načrtněte obrázek.

a) $f(x) = x^3$, $g(x) = x$
b) $f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = -3x$

107 Nakreslete rovinný obrazec, který omezují grafy daných tří funkcí v uvedeném definičním oboru. Potom vypočítejte jeho obsah.

a) $f(x) = -x^2 + 5$, $g(x) = 5$, $h(x) = 3x + 1$, $D(f) = D(g) = D(h) = \mathsf{R}$
b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = 4x$, $h(x) = \dfrac{1}{4}x$, $D(f) = D(g) = D(h) = \mathsf{R}^+$
c) $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = x$, $h(x) = -x^2 + 2x + 6$, $D(f) = D(g) = D(h) = \mathsf{R}_0^-$

108 Nakreslete rovinný obrazec, který omezují dvě křivky dané rovnicemi $y^2 = 4x - 4$, $y^2 = 8x - 16$. Vypočítejte jeho obsah.

109 Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, který je omezen přímkami $y_1 = x$, $y_2 = -x$, $y_3 = 3x - 4$ dvěma způsoby:

a) pomocí integrálního počtu
b) pomocí analytické geometrie

110 Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného grafem funkce $y = f(x)$, tečnou ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě A a přímkou p. Načrtněte obrázek.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2$, $A[2; 4]$, p: $x = -2$
b) $f(x) = \sin x$, $A[0; 0]$, p: $x = \dfrac{\pi}{2}$

111 Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného danou parabolou a tečnami k této parabole v bodech, ve kterých parabola protíná osu x. Načrtněte obrázek.

a) $y = x^2 - 4x$
b) $y = x^2 - 4$
c) $y = -x^2 + 2x + 3$

112 Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného danou parabolou a tečnami k této parabole v bodech A, B. Načrtněte obrázek.

a) $y = x^2$, $A[1; 1]$, $B[0; 0]$
b) $y = x^2 - 4x + 3$, $A[0; 3]$, $B[3; 0]$

113 Určete hodnotu parametru $a \in \mathsf{R}$ tak, aby obsah rovinného obrazce, který omezuje daná parabola $y = ax^2 - 3$ a osa x byl 2.

114 Určete hodnotu parametru $a \in \mathsf{R}$ tak, aby graf kvadratické funkce $y = ax^2 + x$ omezoval s osou x rovinný obrazec, jehož obsah je 24.

115 Určete hodnotu parametru $b \in \mathsf{R}$ tak, aby graf kvadratické funkce $y = x^2 + bx$ omezoval s osou x rovinný obrazec, jehož obsah je 36.

116 Určete hodnoty parametrů a, $b \in \mathsf{R}$ tak, aby maximum kvadratické funkce $y = ax^2 + b$ bylo v bodě $[0; 4]$ a graf této funkce omezoval s osou x rovinný obrazec, jehož obsah je 32.

117 Určete kvadratickou funkci tak, aby její graf protínal osu x v bodech $A[0; 0]$, $B[6; 0]$ a spolu s osou x omezoval rovinný obrazec, jehož obsah je 48.

118 Určete kvadratickou funkci tak, aby nabývala maxima pro $x = 2$, její graf procházel počátkem soustavy souřadnic a graf této funkce spolu s osou x omezoval rovinný obrazec o obsahu 16.

119 Určete kvadratickou funkci tak, aby nabývala minima v bodě $[0; -4]$ a aby graf této funkce spolu s osou x omezoval rovinný obrazec o obsahu 16.

120 Určete hodnotu parametru $a \in \mathsf{R}$ tak, aby graf funkce $y = a\sin x$ omezoval s osou x v intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ rovinný obrazec, jehož obsah je 10.

121 Určete hodnoty parametrů a, $c \in \mathsf{R}$ tak, aby graf funkce $y = a\sin x + c$ procházel bodem $A[\frac{\pi}{6}; 2]$ a spolu s osou x omezoval v intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ rovinný obrazec, jehož obsah je $2 + \frac{1}{2}\pi$.

122 Určete hodnoty parametrů a, $b \in \mathsf{R}$ tak, aby funkce $y = a\sin x + b\cos x$ nabývala maxima pro $x = \frac{1}{4}\pi$ a graf této funkce spolu s osou x omezoval v intervalu $\langle 0; \frac{1}{2}\pi\rangle$ rovinný obrazec, jehož obsah je 6.

123 Graf funkce $y = \sin x$ a osa x omezují v intervalu $\langle 0; b\rangle$ pro $b < \pi$ rovinný obrazec. Určete hodnotu parametru $b \in \mathsf{R}$ tak, aby jeho obsah byl 1.

124 Graf funkce $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ a osa x omezují v intervalu $\langle 0; b\rangle$ pro $b < \pi$ rovinný obrazec. Určete hodnotu parametru $b \in \mathsf{R}$ tak, aby jeho obsah byl 1.

125 Graf funkce $y = \dfrac{1}{x}$ a osa x omezují v intervalu $\langle a; 1\rangle$ rovinný obrazec. Určete hodnotu parametru $a \in \mathsf{R}^+$ tak, aby jeho obsah byl 5.

126 Nakreslete graf funkce $y = x^2$ v intervalu $\langle 0; 2\rangle$. Potom vypočítejte číslo $m \in \langle 0; 2\rangle$ tak, aby obsah rovinného obrazce omezeného danou parabolou a osou x v intervalu $\langle 0; m\rangle$ byl dvakrát větší než obsah rovinného obrazce omezeného touto parabolou a osou x v intervalu $\langle m; 2\rangle$. Nakreslete.

127 Nakreslete graf funkce $y = \sin x$ v intervalu $\langle 0; \pi\rangle$. Potom vypočítejte $k \in \langle 0; \pi\rangle$ tak, aby obsah rovinného obrazce omezeného grafem dané funkce a osou x v intervalu $\langle 0; k\rangle$ byl roven třetině obsahu rovinného obrazce omezeného tímto grafem a osou x v intervalu $\langle k; \pi\rangle$. Nakreslete.

19.17 Objem rotačního tělesa

128 Nakreslete graf dané funkce v intervalu $\langle a; b\rangle$. Graf dané funkce a osa x v uvedeném intervalu omezují rovinný obrazec. Potom načrtněte těleso, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy x. Vypočítejte jeho objem. Je-li to možné, pojmenujte toto těleso.

a) $y = 2 - x$, $x \in \langle 0; 2\rangle$
b) $y = 2 - x$, $x \in \langle 0; 1\rangle$
c) $y = x + 1$, $x \in \langle 0; 1\rangle$
d) $y = x^2$, $x \in \langle 0; 2\rangle$
e) $y = x^2 + 1$, $x \in \langle -2; 2\rangle$
f) $y = -x^2 + 1$, $x \in \langle -1; 1\rangle$
g) $y = 3$, $x \in \langle 0; 2\rangle$
h) $y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0; 2\rangle$
i) $y = 0{,}5x\sqrt{x}$, $x \in \langle 0; 2\rangle$
j) $y = x^{-1}$, $x \in \langle \frac{1}{2}; 5\rangle$
k) $y = \sin x$, $x \in \langle 0; \pi\rangle$
l) $y = 2 + \sin x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$

129 Daná kuželosečka omezí rotací kolem osy x rotační těleso. Nakreslete danou kuželosečku, načrtněte vzniklé rotační těleso. Vypočítejte jeho objem. Je-li to možné, pojmenujte toto těleso.

a) $x^2 + y^2 = 4$
b) $(x-1)^2 + y^2 = 1$
c) $x^2 + 4y^2 = 4$
d) $4x^2 + y^2 = 4$

130 Daná kuželosečka omezí rotací kolem osy x v daném intervalu rotační těleso. Nakreslete danou kuželosečku, načrtněte vzniklé rotační těleso. Vypočítejte jeho objem. Je-li to možné, pojmenujte toto těleso.

a) $x^2 + y^2 = 4$, $x \in \langle 1; 2\rangle$
b) $x^2 + y^2 = 4$, $x \in \langle \frac{1}{2}; 1\rangle$
c) $x^2 + y^2 = 25$, $x \in \langle -4; 4\rangle$
d) $x^2 = 2 - 2y$, $x \in \langle -1; 1\rangle$
e) $y^2 = x$, $x \in \langle 0; 2\rangle$
f) $y^2 = 4x$, $x \in \langle 0; 2\rangle$
g) $x^2 - y^2 = 1$, $x \in \langle 1; 2\rangle$
h) $y^2 - x^2 = 1$, $x \in \langle -2; 2\rangle$

131 Odvoďte vzorec pro výpočet objemu koule o poloměru r.

132 Odvoďte vzorec pro výpočet objemu válce, který má poloměr podstavy r a výšku v.

133 Odvoďte vzorec pro výpočet objemu rotačního kužele, je-li poloměr podstavy r a výška kužele je v.

134 Odvoďte vzorec pro výpočet objemu rotačního komolého kužele, jsou-li poloměry podstav r_1, r_2 a výška komolého kužele je v.

135 Odvoďte vzorec pro výpočet objemu rotačního elipsoidu, který vznikne rotací dané elipsy kolem osy x (a — hlavní poloosa, b — vedlejší poloosa):

a) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
b) $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$

136 Parabolická úseč má základnu $a = 4\,\mathrm{cm}$ a výšku $v = 6\,\mathrm{cm}$. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací této úseče

a) kolem své základny,
b) kolem své osy.

137 Přímka $y = kx$ a osa x omezují v intervalu $\langle 0; 2\rangle$ trojúhelník, jehož rotací kolem osy x vznikne kužel. Určete hodnotu parametru $k \in \mathsf{R}$ tak, aby objem kužele byl 24π.

138 Parabola $y^2 = 2px$ a osa x omezují v intervalu $\langle 0; 2\rangle$ rovinný obrazec, jehož rotací kolem osy x vznikne rotační těleso. Určete hodnotu parametru $p \in \mathsf{R}$ tak, aby objem tohoto tělesa byl 10.

139 Rotací paraboly $y^2 = 2px$ kolem osy x v intervalu $\langle 1; 3\rangle$ vznikne parabolická vrstva. Určete hodnotu parametru $p \in \mathsf{R}$ tak, aby její objem byl 12π.

140 Nakreslete množinu všech bodů v rovině, pro jejichž souřadnice platí $x^2 + y^2 \leqq 4 \wedge y \leqq x \wedge y \geqq 0$. Dostanete tak kruhovou výseč. Její rotací kolem osy x vznikne kulová výseč. Vypočítejte její objem.

20 Pravděpodobnost a statistika

20.1 Definice pravděpodobnosti, vlastnosti pravděpodobnosti, binomické rozdělení

1 Jaká je pravděpodobnost, že při hodu mincí padne
a) rub, b) líc?

2 Jaká je pravděpodobnost, že při hodu hrací kostkou padne
a) šestka, c) číslo větší než jedna,
b) sudé číslo, d) číslo deset?

3 Hodíme dvěma kostkami, červenou a modrou. Jaká je pravděpodobnost, že
a) na obou kostkách padne šestka,
b) na obou kostkách padne liché číslo,
c) alespoň na jedné kostce padne liché číslo,
d) bude součet bodů na kostkách 5,
e) bude součet bodů na kostkách menší než 5?

4 Hodíme dvakrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že
a) padne alespoň jednou liché číslo, c) padne součet osm,
b) padne dvojice sudých čísel, d) padne součet větší než deset?

5 Hodíme dvakrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že
a) padne právě jednou šestka, c) padne nejvýše jednou šestka,
b) padne alespoň jednou šestka, d) nepadne ani jednou šestka?

6 Hodíme třikrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že
a) padne právě jednou šestka, c) padne nejvýše jednou šestka,
b) nepadne ani jednou šestka, d) padne alespoň jednou šestka?

7 Hodíme třemi kostkami. Hráč A vyhraje, padne-li součet bodů 10, hráč B vyhraje, padne-li součet bodů 11. Padne-li jiný součet, nevyhraje nikdo, hráči házejí znova. Který z hráčů má větší pravděpodobnost výhry?

8 Hodíme třikrát kostkou. Vypočítejte pravděpodobnost, že při prvním hodu padne sudé číslo, při druhém hodu padne liché číslo a při třetím hodu padne šestka?

9 Hodíme třikrát kostkou. Vypočítejte pravděpodobnost, že při prvním, nebo při druhém, nebo třetím hodu padne sudé číslo.

10 Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma mincemi najednou padne
a) na obou rub, b) alespoň na jedné rub?

11 a) Jaká je pravděpodobnost, že při třech hodech jednou mincí padne alespoň dvakrát líc?
b) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi mincemi najednou padne alespoň na dvou mincích líc?

12 Hodíme jedenkrát čtyřmi mincemi najednou. S jakou pravděpodobností padne na dvou mincích rub a na dvou mincích líc?

13 Kolikrát musíme hodit hrací kostkou, aby alespoň jedna šestka padla s pravděpodobností větší než 0,5?

14 Kolikrát musíme hodit hrací kostkou, aby alespoň jedna šestka padla s pravděpodobností větší než 75 %?

15 Kolikrát musíme hodit dvěma kostkami, aby dvojice šestek padla s pravděpodobností větší než 80 %?

16 Kolikrát musíme hodit dvěma kostkami, aby součet dvanáct padl s pravděpodobností větší než 50 %?

17 Kolikrát musíme hodit mincí, aby pravděpodobnost, že padne alespoň jednou líc byla větší než 0,999?

18 Hodíme pětkrát kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že šestka padne právě dvakrát?

19 Hodíme desetkrát kostkou. S jakou pravděpodobností mezi prvními pěti hody nepadne žádná šestka a mezi šestým až desátým hodem padnou právě tři šestky?

20 S jakou pravděpodobností padne při deseti hodech jednou kostkou alespoň třikrát šestka?

21 Rozhodněte, který z případů a), b) je pravděpodobnější.
a) Při dvaceti hodech kostkou padne šestka alespoň desetkrát.
b) Při dvaceti hodech kostkou padne šestka nejvýše desetkrát.

22 S jakou pravděpodobností při deseti hodech dvěma kostkami najednou padne alespoň třikrát dvojice šestek?

23 Co je pravděpodobnější? Hodit při čtyřech hodech kostkou právě jednu šestku, nebo hodit při osmi hodech dvěma kostkami právě jednou dvojici šestek?

24 Jaká je pravděpodobnost, že se Jana a Tomáš narodili ve stejný měsíc? (Počítejte, že měsíc je $\frac{1}{12}$ roku.)

25 Jaká je pravděpodobnost, že ze skupiny 5 studentů se alespoň dva studenti narodili ve stejný měsíc? (Počítejte, že měsíc je $\frac{1}{12}$ roku.)

26 Jaká je pravděpodobnost, že se Jana a Tomáš narodili ve stejný den? (Narodili se roku 1990.)

27 Ve skupině je 10 děvčat a 18 chlapců. Náhodně vybereme skupinu 3 studentů. S jakou pravděpodobností jsou ve vybrané skupině 2 děvčata a jeden chlapec?

28 Ve třídě je 30 žáků. Právě pět z nich nemá domácí úkol. Učitel náhodně kontroluje 6 žáků. Vypočítejte pravděpodobnost, že nejvýše dva žáci, které učitel kontroluje, nemají domácí úkol.

29 Dvanáct studentů, mezi kterými je Pavel a Tomáš, mají ze svého středu vylosovat čtyřčlennou skupinu. Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině bude
a) Tomáš, c) Tomáš a Pavel,
b) Tomáš, ale Pavel ne, d) Tomáš nebo Pavel?

30 Šest studentek a osm studentů, mezi kterými jsou Jana a David, mají ze svého středu vylosovat čtyřčlennou skupinu. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vylosovanými studenty bude
a) Jana a David, c) David,
b) Jana nebo David, d) Jana, ale David ne?

31 Střelec zasáhl cíl dvaadevadesátkrát ze 100 výstřelů.
a) Jaká je pravděpodobnost jednoho zásahu cíle?
b) S jakou pravděpodobností střelec cíl nezasáhne?
c) Jaká je pravděpodobnost, že při dvou pokusech zasáhl cíl právě dvakrát?
d) Jaká je pravděpodobnost, že při třech pokusech zasáhl cíl alespoň jedenkrát?

32 Střelec zasáhne cíl v průměru osmkrát z 10 ran.
a) S jakou pravděpodobností zasáhne cíl alespoň jedenkrát ze tří ran?
b) S jakou pravděpodobností zasáhne cíl alespoň dvakrát ze tří ran?
c) Kolikrát musí střelit, aby zasáhl cíl alespoň jednou s pravděpodobností, která je větší než 99 %?

33 Dva střelci střílejí nezávisle na sobě na cíl. První střelec zasáhne cíl s pravděpodobností 0,6, druhý s pravděpodobností 0,8. Každý vystřelí právě jednu ránu. Jaká je pravděpodobnost, že
a) žádný z nich nezasáhl cíl,
b) právě jeden zasáhl cíl,
c) oba dva zasáhli cíl?
d) Jaký výsledek dostaneme, sečteme-li pravděpodobnosti z úloh a) až c)?

34 V porotě jsou tři členové. Dva z nich rozhodují s pravděpodobností 0,95 správně, třetí rozhoduje tak, že si hodí mincí. Jaká je pravděpodobnost, že celá porota rozhodne správně (tj. rozhodnou správně alespoň dva porotci)?

35 Žárovka svítí se spolehlivostí 0,85 (tj. po určité době svítí jen 85 % žárovek). Jaká je spolehlivost systému (alespoň část svítí), jsou-li zapojeny
a) dvě žárovky sériově,
b) dvě žárovky paralelně,
c) dvě žárovky sériově a třetí k nim paralelně?

36 Žárovka svítí se spolehlivostí 92 %. Jaká je spolehlivost zařízení, ve kterém jsou tři žárovky zapojeny sériově?

37 Pravděpodobnost úspěchu určité akce je 0,9. Jaká bude pravděpodobnost, že při dvojím (při trojím) opakování akce bude alespoň jedenkrát dosaženo úspěchu?

38 Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané trojciferné číslo je
a) sudé, b) dělitelné 5?

39 Náhodně vybereme čtyřciferné číslo. Jaká je pravděpodobnost, že se v jeho zápisu vyskytuje cifra 8
a) právě jednou, c) alespoň jednou,
b) právě dvakrát, d) na druhém místě?

40 a) S jakou pravděpodobností náhodně vybrané dvojciferné číslo není dělitelné 5 a není dělitelné 7?
b) S jakou pravděpodobností náhodně vybrané dvojciferné číslo není dělitelné 5 nebo není dělitelné 7?

41 Z čísel 1 až 50 vybereme náhodně jedno číslo. S jakou pravděpodobností je dělitelné
a) šesti, b) osmi, c) šesti a osmi, d) šesti nebo osmi?

42 S jakou pravděpodobností polopřímka vedená z bodu A má s kružnicí $k(S; 3\,\text{cm})$ alespoň jeden společný bod? Řešte pro případy, že
a) $|AS| = 6\,\text{cm}$, b) $|AS| = 3\,\text{cm}$, c) $|AS| = 2\,\text{cm}$.

43 S jakou pravděpodobností protíná přímka vedená počátkem soustavy souřadnic úsečku BC, kde $B[1; 2]$, $C[6; -3]$?

44 S jakou pravděpodobností polopřímka vedená z počátku soustavy souřadnic má s elipsou $(x-3)^2 + 0{,}375y^2 = 1$ alespoň jeden společný bod?

45 Krychli o hraně $a = 4\,\text{cm}$ obarvíme modrou barvou a potom ji rozřežeme na malé krychličky o hraně $a_1 = 1\,\text{cm}$. Malé krychličky zamícháme a náhodně vybereme jednu krychličku. Jaká je pravděpodobnost, že vybraná krychlička
a) má obarvenou právě jednu stěnu,
b) má obarvené právě dvě stěny,
c) má obarvené právě tři stěny,
d) má všechny stěny neobarvené?
e) Vypočítejte součet pravděpodobností z úloh a) až d).

46 Krychli o hraně $a = 4\,\text{cm}$ obarvíme červenou barvou a potom ji rozřežeme na malé krychličky o hraně $a_1 = 1\,\text{cm}$. Malé krychličky zamícháme a náhodně vybereme osm krychliček. Jaká je pravděpodobnost, že z vybraných krychliček lze sestavit novou krychli o hraně $a_2 = 2\,\text{cm}$,
a) která bude celá červená,
b) která nebude obarvená,
c) která bude mít právě jednu stěnu červenou?

47 V osudí je 5 červených a 3 bílé koule. Z osudí v prvním tahu vytáhneme jednu kouli, při druhém tahu vytáhneme opět jednu kouli. S jakou pravděpodobností vytáhneme ve druhém tahu červenou kouli, jestliže po prvním tahu kouli
a) vracíme, b) nevracíme?

48 Máme dvě osudí. V prvním osudí jsou 3 modré a 5 černých koulí, ve druhém jsou 4 modré a 6 černých koulí. Z každého osudí vytáhneme jednu kouli. S jakou pravděpodobností budeme mít jednu modrou a jednu černou kouli?

49 Máme dvě osudí. V prvním osudí jsou 3 modré a 5 černých koulí, ve druhém jsou 4 modré a 6 černých koulí. Z prvního osudí vytáhneme jednu kouli a dáme ji do druhého osudí. S jakou pravděpodobností potom vytáhneme ze druhého osudí modrou kouli?

50 V osudí je 20 koulí, ze kterých je právě 5 žlutých. Vytáhneme najednou 2 koule. S jakou pravděpodobností
a) jsou obě vytažené koule žluté,
b) je mezi vytaženými koulemi právě jedna žlutá,
c) mezi vytaženými koulemi není žádná žlutá?
d) Vypočítejte součet pravděpodobností z úloh a) až c).

51 V osudí je 10 koulí, ze kterých jsou právě 3 zelené. Vytáhneme najednou tři koule. S jakou pravděpodobností
a) je mezi vytaženými koulemi alespoň jedna zelená,
b) jsou mezi vytaženými koulemi alespoň dvě zelené?

52 V osudí je 8 červených a 6 bílých koulí.

a) Vytáhneme postupně tři koule. Po každém tahu kouli vracíme. Jaká je pravděpodobnost, že postupně vytáhneme kouli červenou, bílou, červenou?

b) Vytáhneme postupně tři koule. Po každém tahu kouli nevracíme. Jaká je pravděpodobnost, že postupně vytáhneme kouli červenou, bílou, červenou?

c) Vytáhneme tři koule najednou. S jakou pravděpodobností jsou ve vytažené trojici koulí dvě červené a jedna bílá koule?

53 V osudí jsou v dostatečném množství stejným počtem zastoupeny koule bílé a červené. Náhodně vytáhneme 2 koule najednou. Bez ohledu na počet koulí v osudí dokažte, že pravděpodobnost, že vybrané koule jsou

a) obě červené, je vždy menší než 25 %,

b) různé barvy, je vždy větší než 50 %.

54 V bedně je 40 výrobků, z nichž právě 6 je vadných. Náhodně vybereme 5 výrobků. S jakou pravděpodobností

a) budou mezi 5 vybranými výrobky právě tři vadné,

b) budou mezi 5 vybranými výrobky alespoň dva vadné,

c) bude mezi 5 vybranými výrobky nejvýše jeden vadný?

55 V loterii vyhrává 4. cenu ten, jehož výrobní číslo losu končí stejným dvojčíslím, jako je dvojčíslí, které bylo vylosováno. S jakou pravděpodobností vyhrajeme alespoň jednu 4. cenu, koupíme-li si

a) jeden los, b) pět losů?

56 Koupíme si po jednom losu ve dvou tombolách. V první tombole vyhrává každý desátý, ve druhé tombole vyhrává každý padesátý los. Jaká je pravděpodobnost, že

a) vyhrajeme na oba losy,

b) vyhrajeme alespoň na jeden los,

c) nevyhrajeme na žádný los?

57 V tombole je 30 cen (vyhrává 30 losů). Bylo prodáno 500 losů. Pan Novák si koupil 3 losy. Jaká je pravděpodobnost, že

a) na všechny tři losy vyhraje,

b) vyhraje alespoň jednu cenu?

58 Loterie má 10 000 losů, z nichž právě 20 vyhrává. S jakou pravděpodobností alespoň něco vyhrajeme, koupíme-li si 4 losy?

59 Stroj vyrobí jednu součástku za dvě minuty. Pravděpodobnost, že součástka je vadná, je 0,05. Jaká je pravděpodobnost, že za směnu (8 hodin) vyrobí stroj právě 10 vadných součástek?

60 Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že pravděpodobnost narození chlapce je 0,485, pravděpodobnost narození děvčete je 0,515. Jaká je pravděpodobnost, že rodina, která má tři děti, má

a) právě tři děvčata,

b) dva chlapce a jedno děvče,

c) alespoň jednoho chlapce,

d) alespoň jednu dívku?

61 Student dostal test, který obsahuje 10 otázek. Ke každé otázce vybírá ze tří možností právě jednu odpověď. Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví právě polovinu otázek správně, volí-li odpovědi zcela náhodně?

62 Student dostal test, který obsahuje 10 otázek. Ke každé otázce vybírá právě jednu odpověď z možností a, b, c, d. Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví alespoň 70 % otázek správně, volí-li odpovědi zcela náhodně?

63 Lék úspěšně léčí 90 % případů onemocnění. Vypočítejte pravděpodobnost, že se vyléčí alespoň 18 pacientů z 20, kterým je lék podán.

64 Klíčivost semen určitého druhu mrkve je 96 %. Jaká je pravděpodobnost, že vyklíčí alespoň 25 semen ze 30 semen, které jsme zasadili?

65 V obchodě zjistili, že pravděpodobnost dodávky s vadnými výrobky je 0,08. Určete pravděpodobnost, že mezi 20 dodávkami budou

a) právě dvě dodávky obsahovat vadné výrobky,

b) nejvýše dvě dodávky obsahovat vadné výrobky.

Statistika

20.2 Aritmetický průměr, modus, medián, směrodatná odchylka, variační koeficient

66 Ve třídě 1. A je 15 chlapců. Údaje o výšce chlapců udává následující tabulka:

Výška (cm)	160–164	165–169	170–174	175–179	180–184
Počet žáků	2	5	4	3	1

Vypočítejte průměrnou výšku žáka, určete modus, medián.

67 Pan Dvořák jel automobilem prvních 20 km rychlostí 80 km·h^{-1}, dalších 30 km rychlostí 90 km·h^{-1}. Vypočítejte průměrnou rychlost jeho jízdy.

68 V testu při zkoušce dostalo 15 studentů známku 1, dalších 35 studentů dostalo známku 2, známku 3 dostalo 30 studentů, 15 studentů dostalo známku 4 a zbylých 5 studentů dostalo známku 5. Vypočítejte průměrnou známku z testu, modus, medián. Výsledky testu znázorněte graficky.

69 Při kontrole hmotnosti sušenek bylo zkontrolováno 10 krabic se sušenkami a zjistili se následující hodnoty: 250 g, 247 g, 251 g, 249 g, 252 g, 248 g, 251 g, 250 g, 251 g, 248 g. Vypočítejte průměrnou hmotnost krabice sušenek, směrodatnou odchylku a variační koeficient.

70 Průměrný měsíční příjem byl zjištěn náhodně u 20 osob. Výsledky zachycuje následující tabulka:

Příjem (Kč)	0–2 000	2 001–4 000	4 001–6 000	6 001–8 000
Četnost	0	3	6	4

Příjem (Kč)	8 001–10 000	10 001–12 000	12 001–14 000	18 001–20 000
Četnost	3	1	2	1

Vypočítejte průměrný příjem, modus, medián a směrodatnou odchylku.

Písemné zkoušky z matematiky na některých VŠ

UNIVERZITA KARLOVA v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

Varianta A — 1996 (75 minut)

1 Určete všechna reálná čísla x, pro něž platí $\log_2(x^2 + 2x) < 3$.

2 Určete součet všech sudých přirozených čísel, která patří do uzavřeného intervalu $\langle 63, k\rangle$, kde k je dané přirozené číslo větší než 63.

3 Určete poloměry kružnic, které se dotýkají obou os soustavy souřadnic a přímky $x + y = 15$.

4 Je dán trojúhelník ABC. Označte S střed strany BC, P bod ležící na straně AB ve vzdálenosti $\frac{1}{3}|AB|$ od bodu B, Q průsečík přímek PC a AS. Určete poměr obsahu trojúhelníku APQ a obsahu trojúhelníku ABC.

Varianta B — 1996 (75 minut)

1 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $2|x| - p = \dfrac{2|x| - 1}{p}$ s neznámou x a s nenulovým parametrem p.

2 Určete součet všech celých kladných čísel menších než 10^4, která jsou dělitelná dvanácti.

3 Určete parametr p tak, aby přímka $y = -2x + 3$ byla tečnou paraboly $y = x^2 - px + 7$. Určete bod dotyku.

4 Určete poměr objemů rotačního kužele a koule, je-li kužel této kouli opsán a povrch kužele je n-krát větší než povrch dané koule.

Varianta C — 1996 (75 minut)

1 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\dfrac{\log x^3 - 2}{\log^3 x} + \dfrac{3}{\log x} = 2.$

2 Pro členy aritmetické posloupnosti (a_n) platí
$a_4 + a_7 + a_{10} = 15, \quad a_5 + a_8 + a_{11} = 9.$
Určete k tak, aby $a_k = 0$. Určete dále číslo m, pro které je $a_m = 1$.

3 Napište rovnici kružnice, která prochází průsečíky kružnic $x^2 + y^2 - 40x + 175 = 0$, $x^2 + y^2 - 30y - 175 = 0$ a počátkem soustavy souřadnic.

4 Určete, jakou část objemu koule zaujímá pravidelný čtyřstěn do této koule vepsaný. (Průsečík výšek pravidelného čtyřstěnu dělí tyto výšky v poměru 1 : 3).

Varianta D — 1996 (75 minut)

1 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $\dfrac{x - x^2}{x^2 + x - 2} \leqq 0.$

2 V aritmetické posloupnosti a_n je dáno: $a_{10} = 37$, $s_{10} = 190$. Určete její n-tý člen a součet jejích prvních n členů.

3 Napište rovnici kružnice, která má následující vlastnosti: dotýká se přímky $y + 2 = 0$, její střed leží na přímce $x - 2y + 4 = 0$ a má vnitřní dotyk s kružnicí $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

4 Určete objem pravidelného trojbokého jehlanu, jehož boční hrany jsou na sebe kolmé a jehož podstavná hrana má velikost a.

ČVUT v Praze

Fakulta architektury

Test z matematiky — 1997 (60 minut, kalkulačka není dovolena)

1 V R řešte nerovnici $2 - \dfrac{x - 3}{x - 2} > \dfrac{x - 5}{x - 1}.$

2 V R řešte rovnici $\dfrac{\log(35 - x^2)}{\log(5 - x)} = 3.$

3 V R řešte rovnici $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = \sin^2 x.$

4 Vypočítejte délku tětivy, kterou vytíná hyperbola $x^2 - 2y^2 = 4$ na přímce p, p: $x - y - 2 = 0$.

5 Je dán bod A uvnitř ostrého úhlu, který svírají přímky p, q. Nalezněte na přímce p bod B, který má stejnou vzdálenost od přímky q jako od bodu A.

Fakulta stavební

Test z matematiky — 1996

1 Řešte v R rovnici: $\log(x + 2) + \log(x - 3) - \log 8x = \log\dfrac{1}{2}$

2 Vypočtěte všechna $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$, která vyhovují nerovnici $1 < 2 + \operatorname{cotg} x$.

3 Aritmetická posloupnost (a_n) je dána: $a_2 = -1$, $a_k = 5$ a $s_k = 5$. Vypočtěte k, diferenci d.

4 Načrtněte graf funkce $y = |x^2 - 4x|$ a vypočtěte souřadnice jeho průsečíků s osami souřadnic.

5 Kružnice se středem $S[1; -1]$ se dotýká přímky $x = 3 + 12t$, $y = 2 + 5t$. Napište její rovnici.

6 V trojúhelníku ABC je dáno: $a = 8\,\text{cm}$, $t_a = 6\,\text{cm}$ $r = 5\,\text{cm}$ (r je poloměr kružnice opsané). Popište konstrukci trojúhelníku ABC, uveďte počet řešení a jedno narýsujte.

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Varianta A — 1996

1 Zjistěte, pro která reálná čísla p má rovnice $x^2 - 4px + 2p + 16 = 0$ reálné kořeny.

2 Vypočtěte $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, je-li $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

3 Řešte v R nerovnici $\dfrac{\log 2x}{\log(2x - 1)} \geqq 2.$

4 Pro členy geometrické posloupnosti platí: $a_1 + a_2 = -3$, $a_3 + a_4 = -12$. Vypočtěte součet prvních pěti členů této posloupnosti.

5 V rovině jsou dány přímky p_1: $y = 0$ a p_2: $3x + 4y = -1$. Nalezněte všechny body, které leží na přímce p_1 a mají od bodu $[1; 0]$ vzdálenost menší než od přímky p_2.

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA v Plzni

Fakulta elektrotechnická

Ukázka testu

1 Uveďte, kdy má daný výraz smysl a zjednodušte jej:

$$\left(\frac{a^3 - ab^2 + b^3}{(a-b)^3} - \frac{b}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{a^2 - ab + b^2} - \frac{b}{a}\right)$$

2 Řešte v R rovnici: $\sqrt{5x+4} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x+1}$

3 Zjednodušte: $\dfrac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{\sin(x+y) - \sin(x-y)}$

4 Tři čísla, která tvoří aritmetickou posloupnost, mají součet 30. Odečteme-li od prvního 5, od druhého 4 a třetí ponecháme, dostaneme geometrickou posloupnost. Určete je.

5 Základna rovnoramenného trojúhelníku má vrcholy $A[-2;1]$, $B[4;7]$. Vypočítejte souřadnice vrcholu C, leží-li na přímce p o rovnici $2x - y + 14 = 0$.

6 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $\alpha = 60°$, $v_b = 9\,\text{cm}$, $\varrho = 2{,}5\,\text{cm}$ (ϱ značí poloměr kružnice vepsané).

Fakulta strojní

Test z matematiky — 1996

1 Usměrněte zlomek $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

2 Určete základ a, pro který platí $\log_a 1\,024 = -5$.

3 V množině R řešte nerovnici $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \geqq 3$.

4 Vypočtěte $(1+\mathrm{i})^{25}$ a upravte na algebraický tvar.

5 V rovině napište rovnici kružnice, která má střed v bodě $S[5;-1]$, a dotýká se přímky $3x + 4y + 14 = 0$.

6 Upravte daný výraz užitím vzorců pro posloupnosti a řady ($n \in \mathrm{N}$)

$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \ldots}.$$

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA — fakulta ekonomická v Chebu

Matematika — 1996

1 V množině R řešte nerovnici $\sqrt{2x-1} \leqq x$.

2 Určete komplexní číslo z, je-li $(5+\mathrm{i})\overline{z} - 22\mathrm{i} = -2z$ (přitom $\overline{z}$ značí číslo komplexně sdružené k číslu z).

3 Která nekonečná konvergentní geometrická řada má první člen $a_1 = 1$ a součet s rovný součtu řady $6 - \frac{6}{5} + \frac{6}{25} - \frac{6}{125} + \ldots$?

4 V rovině je dán trojúhelník $A[5;2]$, $B[1;5]$, $C[-2;1]$. Vypočítejte souřadnice paty výšky v_c na stranu AB.

5 Řešte v množině R rovnici $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

TECHNICKÁ UNIVERZITA v Liberci

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Varianta A

1 Upravte algebraický výraz a udejte podmínky jeho existence:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1}\right] \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}} - 1\right)$$

2 Vyřešte nerovnici: $\sqrt{x^2 - x - 2} \leqq 3 - x$

3 Určete rovnici přímky procházející středem kružnice $x^2 + 3x + y^2 - 2y = 0$ kolmo na přímku $x + 2y = 7$.

4 Načrtněte graf funkce $y = f(x)$ a určete (z grafu) její průsečíky s osou x. Zkontrolujte výpočtem. $y = \frac{1}{2}|x-2| - |x+1| + \frac{1}{2}x + 1$

5 Načrtněte všechna řešení goniometrické rovnice: $1 + \sin x = 2\cos^2 x$

Fakulta pedagogická

Varianta A

1 Upravte daný algebraický výraz a udejte podmínky jeho existence.

$$\frac{\frac{x+y}{x-y}}{\frac{x}{x^2+y^2-xy}} \cdot (1 - xy^{-1}) + \frac{y^3 - x^2y}{x^2 + xy} + y$$

2 Měsíční záloha za elektřinu byla v červnu 460 Kč. Přitom od 1.5. se ceny (tedy i zálohy) zvýšily o 15 %, od 1.10. znovu o 10 %. Kolik korun činila celková roční záloha? O kolik procent byly prosincové ceny vyšší než lednové?

3 Danou nerovnici řešte početně i graficky (načrtnutím grafu levé a pravé strany nerovnice) $\dfrac{x+1}{x+2} < -x - 1$.

4 Nalezněte všechna řešení rovnice $9^{x+1} + 27 = 12 \cdot 3^{x+1}$.

5 Určete rovnici přímky, na níž leží těžnice t_a trojúhelníku ABC, kde $A[-1;0]$, $B[2;3]$, $C[5;1]$.

JIHOČESKÁ UNIVERZITA — České Budějovice

Pedagogická fakulta

Varianta A — 1996

1 Ze středu podstavy krychle $ABCDA'B'C'D'$ s hranou $a = 1\,\text{dm}$ je sestrojena kolmice na její tělesovou úhlopříčku. Vypočtěte vzdálenost paty této kolmice od středu podstavy. Nakreslete obrázek.

2 Najděte kvocient geometrické posloupnosti, když součet nekonečné geometrické řady z ní utvořené je 6 a součet prvních pěti členů je $\dfrac{93}{16}$.

3 Řešte v R: $\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0$

4 Najděte souřadnice bodů A a C trojúhelníku ABC, je-li dáno $B[-1;-1]$ a výška v_a leží na přímce o rovnici $5x + 3y - 31 = 0$ a výška v_c leží na přímce o rovnici $3x + 8y - 28 = 0$.

5 Určete maximální definiční obor funkce $f\colon y = \log\left(1 - \dfrac{3}{x+1}\right)$

SLEZSKÁ UNIVERZITA v Opavě

Filozoficko-přírodovědecká fakulta

Varianta A — 1996 (75 minut, kalkulačka ani tabulky nejsou povoleny)

1 Seřaďte od nejmenšího po největší čísla 100^2, 2^{100}, $\binom{100}{2}$, $100!$.

2 Řešte nerovnici: $3x^2 + 2x - 6 < 2x^2 - x + 4$

3 Kolik existuje přirozených čísel větších než 10 000, menších než 100 000 a obsahujících (v dekadickém zápisu) pouze cifry 9, 8, 5, 2, 0? Kolik z nich je sudých?

4 Vypočtěte úhly v trojúhelníku o stranách délek a, b, c, víte-li, že úhel proti straně délky c je pravý a že platí $2a + 2b = c\sqrt{6}$.

5 Rozhodněte, zda trojúhelník ABC, ve kterém $A[-1;5;-3]$, $B[-4;6;1]$ a $C[1;3;-1]$, je pravoúhlý.

6 Určete výšku rovnostranného trojúhelníku, jehož obsah je trojnásobkem obsahu rovnostranného trojúhelníku s obvodem o.

7 Řešte rovnici: $9^{\sqrt{x-1}} = 27 \cdot 3^{\sqrt{x-1}}$

8 Řešte rovnici: $x^{2\log x + 6} = 10x^5$

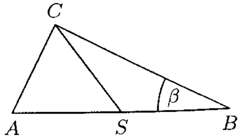
9 Charakterizujte všechna přirozená čísla n, pro která je číslo $(n-1)!$ dělitelné n.

MASARYKOVA UNIVERZITA v Brně

Fakulta informatiky

Varianta A

1 V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB a jejím středem S má úhel ABC velikost β. Úhel ACS má velikost:



(A) $60° - \frac{\beta}{2}$ **(B)** $90° - \frac{\beta}{2}$
(C) $90° - 2\beta$ **(D)** $90° - \beta$
(E) žádnou z předchozích možností

2 V určitém úseku lze břehy řeky považovat za rovnoběžky o rovnicích $y = 2x + 6$, $2x - y - 94 = 0$. Most postavený kolmo přes řeku má délku (měřeno od břehu ke břehu):

(A) $50\sqrt{2}$ **(B)** $\frac{100}{3}\sqrt{3}$ **(C)** $20\sqrt{5}$ **(D)** $100\sqrt{2}$ **(E)** 100

3 Řešením nerovnice $x^2 + x - 6 < |x - 2|$ v R je množina:

(A) $(-\infty;-4)$ **(B)** $\emptyset$ **(C)** $(-4;2)$
(D) $(-2;2)$ **(E)** $(-\infty;-4) \cup (2;\infty)$

4 Výraz $\dfrac{a + 2\sqrt{ab} + b}{a+b} : \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ je možno pro všechna $a > 0$, $b > 0$ upravit na tvar:

(A) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$ **(B)** $a + b$ **(C)** $a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$
(D) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ **(E)** $\dfrac{1}{b\sqrt{a}} + \dfrac{1}{a\sqrt{b}}$

5 Výška kužele je dvakrát menší než poloměr koule jemu opsané. Poměr objemů kužele a koule je:

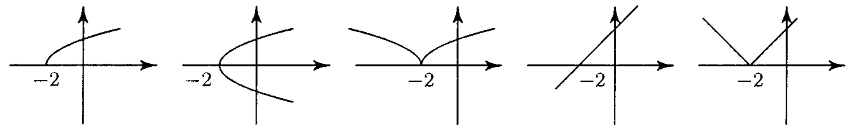
(A) $\frac{6}{32}$ **(B)** $\frac{5}{32}$ **(C)** $\frac{2}{32}$ **(D)** $\frac{3}{32}$ **(E)** $\frac{4}{32}$

6 Počet způsobů, kterými lze postavit do řady 4 muže a 4 ženy tak, aby žádné dvě ženy a žádní dva muži nestáli vedle sebe, je:

(A) $2 \cdot 4!$ **(B)** $(4!)^2$ **(C)** $2 \cdot (4!)^2$ **(D)** $\frac{8!}{2}$ **(E)** $8!$

7 Graf funkce dané předpisem $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$ by mohl být:

(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**



8 Výraz $6^{\log_{\frac{1}{6}}(x+3)}$ pro $x > -3$ je roven:

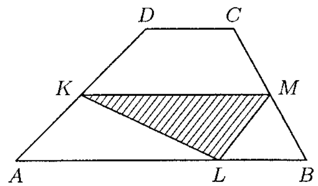
(A) $x + 3$ **(B)** $-(x+3)$ **(C)** $\dfrac{1}{x+3}$ **(D)** $-\dfrac{1}{x+3}$
(E) žádnému z předchozích

9 Jsou dána přirozená čísla l, k, $l < k$. Součet všech přirozených čísel v intervalu $\langle l; k\rangle$ je:

(A) $\frac{1}{2}(k+l)(k+l)$ **(B)** $\frac{1}{2}(k+l)(k+l-1)$ **(C)** $\frac{1}{2}(k+l)(k-l)$
(D) $\frac{1}{2}(k+l)(k-l+1)$ **(E)** $\frac{1}{2}(k+l)(k-l-1)$

10 V lichoběžníku $ABCD$ se střední příčkou KM zvolme na základně AB libovolný bod L. Poměr obsahů trojúhelníku KLM a lichoběžníku $ABCD$ je:

(A) $\frac{7}{16}$ **(B)** $\frac{6}{16}$ **(C)** $\frac{3}{16}$
(D) $\frac{4}{16}$ **(E)** $\frac{5}{16}$



11 Rovnici $p + |x| = 1 - |x|$ s celočíselným parametrem p vyhovují právě dvě různá celá čísla, jestliže:

(A) $p < 1$ (B) $p \leqq 1$ (C) p je liché číslo
(D) p je liché menší nebo rovno 1 (E) p je záporné liché číslo

12 Obrazem množiny komplexních čísel z v Gaussově rovině, která splňují zároveň tyto dvě podmínky $|z - 2| = |z - 2\mathrm{i}|$, $|z + 1| = |z + \mathrm{i}|$, je:

(A) přímka (B) bod (C) prázdná množina
(D) dvě různoběžky (E) dvě různé rovnoběžky

13 Pro přirozená čísla a, b platí: $a \leqq b$, $a \cdot b = 144$, jejich společný dělitel je 3. Počet takových dvojic a, b je:

(A) 2 (B) 1 (C) 5 (D) 4 (E) 3

14 Graf funkce dané předpisem $y = \sqrt{x+1}$ leží:

(A) na hyperbole s vrcholem $[-1, 0]$
(B) na elipse s vrcholem $[-1, 0]$
(C) na kružnici se středem $[0, 0]$
(D) na parabole s vrcholem $[-1, 0]$
(E) na žádné z předchozích křivek

15 V rovině jsou dány body $A[-6; -5]$, $B[5; -2]$, $C[8; 9]$. Bod D, který je čtvrtým vrcholem kosočtverce $ABCD$, je bod:

(A) $[-3; 6]$ (B) $[-3; 7]$ (C) $[-4; 6]$ (D) $[-3; 5]$ (E) $[-2; 6]$

16 Jestliže $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ a $\alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$, potom platí:

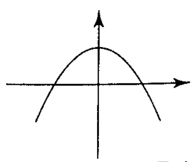
(A) $\sin 2\alpha = -\dfrac{120}{169}$ (B) $\cos 2\alpha = \dfrac{119}{169}$ (C) $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$
(D) $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{5}{12}$ (E) $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$

17 O členech posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n - 1$, platí:

(A) aspoň pět z nich jsou prvočísla
(B) právě čtyři z nich jsou prvočísla
(C) nejvýše čtyři z nich jsou prvočísla
(D) nejvýše tři z nich jsou prvočísla
(E) žádné z předchozích tvrzení

18 Na obrázku je zakreslen graf sudé funkce dané předpisem $y = ax^2 + bx + c$, kde a, b, $c \in \mathrm{R}$, $a \neq 0$. Pro koeficienty a, b, c platí:

(A) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$
(B) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$
(C) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$
(D) $a > 0$, $b = 0$, $c > 0$
(E) $a < 0$, $b = 0$, $c > 0$



19 Skleněná válcová nádoba o poloměru podstavy R a výšce větší než $2R$ je částečně naplněna vodou. Po vhození ocelové kuličky o průměru $2R$ stoupne hladina vody tak, že se dotýká nejvyššího bodu kuličky. Původní výška hladiny vody byla:

(A) $\dfrac{2}{6}R$ (B) $\dfrac{2}{7}R$ (C) $\dfrac{2}{4}R$ (D) $\dfrac{2}{5}R$ (E) $\dfrac{2}{3}R$

20 Okamžitá výchylka y hmotného bodu v závislosti na čase t je vyjádřena rovnicí $y = 2^{1-\cos t}$. Během jedné periody dosáhne okamžitá výchylka hodnoty $y = \frac{1}{2}$:

(A) právě ve čtyřech časových okamžicích
(B) právě ve třech časových okamžicích
(C) v žádném časovém okamžiku
(D) v jediném časovém okamžiku
(E) právě ve dvou časových okamžicích

Fakulta přírodovědecká

Matematika — 75 minut

1 V oboru reálných čísel řešte rovnici s parametrem a: $\log_a x^3 - 2\log_x a = 5$

2 Součin prvních devíti členů geometrické posloupnosti s reálnými členy je roven číslu 7^9. Určete pátý člen této posloupnosti.

3 V oboru reálných čísel řešte rovnici: $\cos^3 x + \cos^2 x = \sin^3 x + \sin^2 x$

4 Určete rovnice alespoň tří společných tečen kružnic $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$, když $r_1 = r_2 = 3$, $S_1[0; 5]$, $S_2[6; 0]$.

5 V oboru reálných čísel řešte rovnici: $\sqrt{8-x} - \sqrt{5+x} = 1$

6 Načrtněte grafy funkcí: a) $y = x^2 - 2x - 15$ b) $y = -\operatorname{cotg} x$

7 Určete poloměr a objem koule, která je opsaná krychli o hraně $a = 8\,\mathrm{cm}$.

8 V oboru reálných čísel řešte rovnici: $(1 - \cos 2x) \cdot (1 - \operatorname{tg} x) = 0$

MENDELOVA ZEMĚDĚLSKÁ A LESNICKÁ UNIVERZITA V Brně

Fakulta provozně ekonomická, dřevařská, lesnická

Ukázka testu z matematiky — 45 minut

1 Pomocí Moivreovy věty vypočtěte z^7, když $z = -2 + 2\mathrm{i}$. Výsledek zapište v algebraickém tvaru.

2 Určete, pro která reálná čísla je $\dfrac{3x-8}{5-x} \leqq 0$.

3 Nakreslete graf funkce f: $y = \sin 2x$ pro $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$ a určete průsečíky s osami souřadnic.

4 Zjednodušte: $\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y^2}\right] : \left(\dfrac{x-1}{y}\right)^2$

5 Rovnostranný kužel má výšku v. Vypočtěte jeho povrch.

6 Řešte v oboru R rovnici $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$.

7 Mezi čísla 32 a 243 vložte čtyři čísla tak, aby s danými tvořila geometrickou posloupnost.

Vysoké učení technické v Brně

Fakulta technologická ve Zlíně

Ukázka testu z matematiky

1 O kolik procent se zvětší objem válce, zvětší-li se poloměr o 20 % a výška se zmenší o 10 %.

2 Určete definiční obor a graf funkce $y = \sqrt{\dfrac{2-x}{|x-2|}}$.

3 Řešte v R: $\dfrac{8}{x+13} = 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{27}{x^3} + \dots$

4 Řešte v R: $-3 \leqq \log \dfrac{x}{2} \leqq 2$

5 Napište rovnici kružnice procházející bodem $A[9;2]$ dotýkající se obou souřadnicových os.

6 Řešte v R: $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2x-1} \cdot \left(\dfrac{25}{9}\right)^{3x+1} = \dfrac{27}{125}$

7 Najděte prvních pět členů aritmetické posloupnosti, v níž je $s_4 = s_5 = 100$.

8 Řešte v R: $3\,\mathrm{tg}\,x + 3\,\mathrm{cotg}\,x = -4\sqrt{3}$

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

Fakulta hornicko-geologická, metalurgie a materiálového inženýrství, stavební

Ukázka testu z matematiky

1 Upravte: $\left[\dfrac{(a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{-1})^{-1}}{c^{-2} \cdot d^{\frac{1}{2}}}\right]^{-3} \cdot \left[\dfrac{a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{2}{3}} \cdot d^{\frac{5}{2}}}{(c^{\frac{3}{2}})^4}\right]^{-1}$

2 V množině reálných čísel řešte rovnici

$\log(3x+4) - \dfrac{1}{3}\log(x-1)^3 = 2 - \log_2 2.$

3 V oboru reálných čísel řešte rovnici $|2x+3| - |x| = 5.$

4 Napište aritmetickou posloupnost, ve které platí

$2a_1 + a_2 - a_3 = 1, \quad a_2 + a_5 = 19.$

5 Řešte goniometrickou rovnici $4\sin^2(4x + 60°) = 1.$

6 Napište rovnici tečny paraboly $y^2 = 2x - 20$, která je kolmá k přímce $2x + y = 0$.

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Ukázka testu z matematiky

1 V pravoúhlém trojúhelníku leží střed kružnice opsané:

a) uvnitř trojúhelníku
b) na přeponě
c) vně trojúhelníku
d) ve vrcholu, u něhož je pravý úhel

2 Je-li $\sin x = 0{,}8$, pak $\cos x$ je roven:

a) 0,2 b) $\dfrac{\pi}{2} - 0{,}8$ c) 0,6 d) 88,2

3 Absolutní hodnota komplexního čísla $\dfrac{1+i}{1-i}$ je:

a) 1 b) -1 c) $\sqrt{2}$ d) 2

4 V aritmetické posloupnosti je $a_2 = 5$, $a_4 = 11$. První člen této posloupnosti je roven:

a) -1 b) 2,2 c) 2 d) 16

5 Najděte všechna reálná řešení rovnice $\sin 2\alpha + \sin\alpha = 0.$

6 Bodem $A[1;-2]$ veďte přímku p kolmou k přímce q o rovnici $3x+2y-1=0$. Určete rovnici přímky p a průsečík přímek p, q.

7 Zjistěte, která reálná y vyhovují nerovnici $3 - 2y > 2y - 3|y+1|$.

8 Určete, která přirozená čísla jsou řešením rovnice

$\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} - 2 \cdot \dfrac{(n+2)!}{n!} + \dfrac{(n+3)!}{(n+1)!} = n \cdot \left(n - \dfrac{7}{2}\right).$

1 Základní poznatky o výrocích a množinách

1.1 Výrok, operace s výroky

1 a) Ano; b) ano; c) ne; d) ne.

2 a) Součin dvou záporných reálných čísel není kladný. b) Číslo $\sqrt{18}$ není dvojnásobkem čísla $\sqrt{3}$. c) Přímka $y = 2x - 1$ prochází bodem $[1; -1]$. d) $\sqrt{10} < 3$.

3 a) Nepravdivý; b) pravdivý; c) pravdivý; d) nepravdivý.

4 a) $10 > 8 \wedge 8 > 5$; b) $3 < \pi \vee 3 = \pi$; c) $100 = 2 \cdot 50 \wedge 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25$; d) $\triangle KLM \sim \triangle PQR \wedge \triangle PQR \sim \triangle XYZ$.

5 Platí implikace $A \Rightarrow B$, platí B, potom o platnosti A nelze nic říci. Tedy výrok „Jana je nemocná" může být pravdivý i nepravdivý.

6 a) Pravdivý; b) nepravdivý; c) pravdivý; d) pravdivý.

7 a) Musí platit výrok B. b) Nesmí platit výrok B.

8 a) Je; b) je; c) není; d) je.

1.2 Obměněná implikace, obrácená implikace

9 a) Obrácená: Jsou-li daná dvě přirozená čísla lichá, potom je jejich součin liché číslo. Obměněná: Nejsou-li daná dvě přirozená čísla obě lichá, potom jejich součin není liché číslo. Platí implikace původní, obrácená i obměněná.
b) Obrácená: Jsou-li úhlopříčky v konvexním čtyřúhelníku navzájem kolmé, potom se jedná o kosočtverec. Obměněná: Nejsou-li úhlopříčky v konvexním čtyřúhelníku navzájem kolmé, potom se nejedná o kosočtverec. Platí implikace původní a obměněná, neplatí obrácená.
c) Obrácená: Je-li číslo větší než 5, potom je i jeho druhá mocnina větší než 5. Obměněná: Není-li číslo větší než 5, potom i jeho druhá mocnina není větší než 5. Neplatí implikace původní a neplatí implikace obměněná, platí implikace obrácená.

1.3 Negace složených výroků

10 a) Nepřijde Alena nebo nepřijde Barbora. b) Nepřijde Cyril a nepřijde David. c) Přijde Eva a nepřijde Hana. d) Přijde Jan a nepřijde Iva nebo přijde Iva a nepřijde Jan.

11 a) Číslo 50 není dělitelné 15 nebo není dělitelné 5. b) Číslo 50 je dělitelné 15 a je dělitelné 5. c) Poslední dvojčíslí přirozeného čísla je dělitelné 4 a číslo není dělitelné 4. d) Číslo je dělitelné 6 a není dělitelné 2 nebo 3 nebo číslo není dělitelné 6 a je dělitelné 2 a 3.

1.4 Výroky s kvantifikátory

12 a) Právě; b) nejvýše; c) aspoň.

13 a) Existuje; b) každý.

14 a) Druhá mocnina každého reálného čísla je číslo kladné. Neplatí, stačí zvolit $x = 0$.
b) Druhá odmocnina z druhé mocniny libovolného reálného čísla je rovna jeho absolutní hodnotě. Platí.
c) Ke každému reálnému číslu x existuje reálné číslo y tak, že součin $x \cdot y = 10$. Neplatí, stačí zvolit $x = 0$.
d) Pro každá dvě reálná čísla platí: čísla se sobě rovnají právě tehdy, když se rovnají jejich druhé mocniny. Neplatí, protože rovnají-li se sobě druhé mocniny, ještě se nemusí sobě rovnat čísla. Např. $(-4)^2 = 4^2$ ale $-4 \neq 4$.
e) Pro každá dvě kladná reálná čísla platí: je-li $a < b$, potom je i $a^2 < b^2$. Platí.
f) Existuje takové reálné číslo x, že pro všechna reálná čísla y platí $x \cdot y = y$. Platí, $x = 1$.

15 a) Nejvýše pět … b) … má aspoň šest … c) … má nejvýše dva nebo aspoň čtyři …
d) Pro každé reálné číslo neplatí … e) Existuje prvočíslo, které není liché.

1.5 Operace s množinami – průnik, sjednocení, rozdíl, doplněk

16 a) $M_1 = \{1; 2; 3; 4\}$; b) $M_2 = \{\pm 5\}$.

17 $M_1 \cap M_2 = \{10\}$; $M_1 \cup M_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 15; 20; 30; 60\}$; $M_2 - M_1 = \{8; 9\}$.

18 $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 7\}$, $B = \{1; 2; 3; 5; 6\}$.
19 $(-\infty; -3) \cup (5; \infty)$.
20 a) $\langle -2; 2 \rangle$; b) $\{2\}$; c) $\langle -7; 5)$; d) $\langle -2; \infty)$; e) $\langle 2; 5)$; f) $\langle 2; 5)$;
g) $(-\infty; -7) \cup (2; \infty)$; h) $\langle -7; -2)$.

2 Základní typy rovnic a nerovnic

2.1 Lineární rovnice a nerovnice

1 a) $\{1\}$; b) $\{4\}$; c) $\{3{,}25\}$; d) $\{2\}$; e) $\{4\}$;
f) $(-2; \infty)$; g) $(-\infty; 1\rangle$.

2.2 Rovnice a nerovnice v součinovém tvaru

2 a) $\{\pm\frac{3}{2}; 3\}$; b) $\{\pm 5\sqrt{2}\}$; c) $(-\infty; -2) \cup (6; \infty)$; d) $(-\infty; -2\rangle \cup \langle 4; \infty)$; e) $\langle -7; \infty)$;
f) $\left(-\infty; \frac{3}{11}\right) - \{0\}$; g) $(-\infty; -3\rangle \cup \langle 2; 3\rangle$; h) R.

2.3 Rovnice a nerovnice v podílovém tvaru

3 a) $\{\frac{5}{2}\}$; b) $\{-5\}$; c) $\langle -2; \frac{2}{3})$; d) $(-\infty; -7) \cup (\frac{3}{4}; \infty)$; e) $(-\infty; -4\rangle \cup (0; \frac{3}{5}\rangle \cup (6; \infty)$;
f) $(-1; \frac{1}{2}) \cup (1; \infty)$.

2.4 Kvadratické rovnice

4 a) $\{0; -\frac{1}{4}\}$; b) $\left\{\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$; c) $\{-1; \frac{2}{3}\}$; d) $\{-1 \pm \sqrt{2}\}$; e) $\{\frac{1}{2}\}$; f) $\emptyset$;
g) $\{-\sqrt{3}-1; -\sqrt{3}\}$;
h) $D = 12 + 4\sqrt{3} + 1 - 8\sqrt{3} = 12 - 4\sqrt{3} + 1 = (2\sqrt{3} - 1)^2 \Rightarrow x \in \{-1; -2\sqrt{3}\}$;
i) $D = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 4\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} + 1)^2 \Rightarrow x \in \{-1; \sqrt{2}\}$, nebo lze řešit vytýkáním; j) $\{2; \frac{1}{2}\}$.
5 x dosadíme.

2.5 Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

6 a) $k(x^2 + x - 6) = 0$, kde $k \in \mathsf{R} - \{0\}$; b) $k(x^2 - 2x - 2) = 0$, kde $k \in \mathsf{R} - \{0\}$;
c) $k(x^2 + 2x + 1) = 0$, kde $k \in \mathsf{R} - \{0\}$; d) $k(x^2 - 5x) = 0$, kde $k \in \mathsf{R} - \{0\}$;
e) $k(50x^2 - 20x + 1) = 0$, kde $k \in \mathsf{R} - \{0\}$.
7 $x_2 = -3$, $p = 5$.
8 $x_2 = 4$, $q = -4$.
9 $b = \pm 9$.
10 $m = \pm 6$.
11 $q_1 = -\frac{125}{2}, q_2 = \frac{27}{2}$.
12 a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{2}{5}$; b) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = -6$.
13 a) $k(5x^2 + 24x + 45) = 0$, kde $k \in \mathsf{R} - \{0\}$; b) $k(5x^2 - 22x + 26) = 0$, kde $k \in \mathsf{R} - \{0\}$.

2.6 Kvadratický trojčlen

14	a) $(x-3)(x-2)$	g) $(x-5)^2$	m) $(2x-1)(x+1)$
	b) $(x+2)(x+5)$	h) $(x+2)^2$	n) $(3x-2)(x-5)$
	c) $(x-2)(x+4)$	i) $(x-3)^2$	o) $(8-x)(x+1)$
	d) $(x-1)(x+11)$	j) $(2x+1)^2$	p) $(2x-5)(3-x)$
	e) $(x-1)(x+2)$	k) $(4x-5)(4x+5)$	q) nelze v R rozložit
	f) $(x-6)(x-5)$	l) $15x(x-2)$	r) nelze v R rozložit

15 a) $(x+1)^2 + 5 \Rightarrow$ pro $x = -1$ min. 5; b) pro $x = -2$ min. 0; c) pro $x = \frac{3}{2}$ min. $-\frac{1}{4}$;
d) $4(x - \frac{1}{2})^2 - 1 \Rightarrow$ pro $x = \frac{1}{2}$ min. -1; e) pro $x = -1$ min. 8; f) pro $x = 2$ min. -7;
g) $-2(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow$ pro $x = \frac{1}{4}$ max. $\frac{1}{8}$; h) pro $x = 1$ max. 4; i) pro $x = 0$ max. -16.
16 a) $\frac{x+2}{3x+2}$ $[x \neq \frac{1}{4}; -\frac{2}{3}]$; b) -1 $[x \neq -6; -5; -3; -1; 2]$.

2.7 Kvadratické nerovnice

17 a) $(-\infty; -3\rangle \cup \langle 5; \infty)$; b) $(-2; \frac{1}{3})$; c) $(-4; \frac{3}{2})$; d) $\langle 1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\rangle$; e) $\langle 1; 2\rangle$;
f) R; g) $\{\frac{1}{3}\}$; h) $(-\infty; -\frac{3}{2}\rangle \cup \langle 0; \infty)$; i) $\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle$; j) $\emptyset$.

2.8 Rovnice s neznámou ve jmenovateli

18 a) $\emptyset$; b) $\{3\}$; c) $\mathsf{R} - \{\pm 1; 0\}$.

2.9 Nerovnice s neznámou ve jmenovateli

19 a) $(0; \frac{1}{6}\rangle$; b) $(-4; 1)$; c) $(-\infty; -3\rangle \cup (0; 1)$; d) $(-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3})$; e) $(-1; 1)$; f) $\emptyset$.

2.10 Rovnice s neznámou pod odmocninou

20 a) $\{1\}$; b) $\{-5; 4\}$; c) $\{5\}$; d) $\{-\frac{14}{9}; 2\}$; e) $\{-\frac{1}{4}\}$; f) $\emptyset$; g) $\{5\}$; h) $\{-3\}$;
i) $\{\frac{6}{5}\}$; j) $\{-1; \frac{9}{16}\}$.

2.11 Nerovnice s neznámou pod odmocninou

21 a) Umocníme $\Rightarrow x^2 - 4 \leqq (x+1)^2 \Rightarrow x \geqq -\frac{5}{2}$. Určíme podmínky: $x^2 - 4 \geqq 0 \wedge x + 1 \geqq$ $\geqq 0 \Rightarrow x \geqq 2$, tedy $x \in \langle -\frac{5}{2}; \infty) \cap \langle 2; \infty) \Rightarrow x \in \langle 2; \infty)$;
b) $(-\frac{5}{4}; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$;
c) Uvažujte dva případy. Pro $x + 1 < 0$, nelze nerovnici umocnit, stačí aby $x^2 + 3x \geqq$ $\geqq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -3\rangle$. Pro $x + 1 \geqq 0$ postup jako a) $\Rightarrow x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle 1; \infty)$;
d) $(-\infty; -2\rangle \cup (\frac{5}{2}; \infty)$.

2.12 Rovnice s neznámou v absolutní hodnotě

22 a) $\{\pm 7\}$; b) $\{-2; 4\}$; c) $\{-5; -3\}$; d) $\{-\pi - 6; -\pi + 6\}$; e) $\{-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\}$; f) $\{4; 8\}$;
g) $\{-3 + 2\sqrt{3}; 1\}$; h) $\{5\sqrt{11}\}$; i) $\emptyset$; j) $\langle 7; \infty)$; k) $(-\infty; 2\rangle$; l) $\langle \frac{8}{5}; \infty)$;
m) $\{1; 3\}$;
n) $\{-4\}$; o) $\emptyset$; p) $\{1; 7\}$; q) $\{2\}$; r) $\langle \frac{1}{2}; 4\rangle$; s) $\{2; \frac{14}{3}\}$; t) $\{0; 1\}$; u) $\{-1; 2\}$;
v) $\{0; 1\}$.

2.13 Nerovnice s neznámou v absolutní hodnotě

23 a) $(-\infty; -6\rangle \cup \langle 6; \infty)$; b) $(1; 5)$; c) $\langle -12; 2\rangle$; d) $(-\infty; -2 - 4\sqrt{3}) \cup (2 + 6\sqrt{3}; \infty)$;
e) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$; f) $(-5; -2)$; g) $(-\infty; -2\rangle \cup \langle 1; \infty)$; h) $\langle 2 - \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7}\rangle$;
i) $(-\infty; -3) \cup (3; \infty)$; j) $\langle -1; 2\rangle$; k) $\langle 3; \infty)$; l) $(-1; 1\rangle$.

2.14 Řešení rovnic metodou substituce

24 a) $\{\pm 1; \pm 2\}$; b) $\{-1; 2\}$; c) $\{\pm 2\}$; d) Subst. $a = \sqrt[4]{x} \Rightarrow \sqrt{x} = a^2 \Rightarrow x \in \{16; 81\}$.
25 a) $\{\pm\sqrt{2}\}$; b) $\{-1 \pm \sqrt{5}\}$; c) $\{0; \pm 1; 2\}$; d) $\{-2; 4\}$.
26 a) $\{-6; 4\}$; b) $\{-\frac{9}{2}; 2\}$; c) $\{5\}$.
27 a) $\{\pm\sqrt{2}\}$; b) $\{4 \pm 2\sqrt{3}; \frac{-7 \pm 3\sqrt{7}}{2}\}$; c) $\{27\}$; d) $\{-1\}$; e) $\{-4; -1\}$; f) $\{-\frac{4}{3}\}$.

2.15 Reciproké rovnice

28 a) Upravte: $2(x^3 + 1) - 3x(x + 1) = 0 \Rightarrow 2(x + 1)(x^2 - x + 1) - 3x(x + 1) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x + 1)(2x^2 - 2x + 2 - 3x) = 0 \Rightarrow x \in \{-1; \frac{1}{2}; 2\}$; b) $\{-2; -1; -\frac{1}{2}\}$; c) Vytkněte: $6(x^4 + 1) + 17(x^3 + x) + 17x^2 = 0$. Nyní rovnici dělte $x^2 \Rightarrow 6(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 17(x + \frac{1}{x}) + 17 = 0$. Zvolte subst. $x + \frac{1}{x} = a$. Potom $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2 \Rightarrow x \in \{-2; -\frac{1}{2}\}$; d) $\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2; 3\}$.
29 $K = -5 \wedge L = 6 \Rightarrow x \in \{-2; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 3\}$.

2.16 Soustavy rovnic

30 a) $[3;2]$; b) $[4;4]$; c) $[9;-12]$; d) $[4;7]$; e) $\emptyset$; f) $[t;\frac{2t-5}{3}], t \in \mathsf{R}$.
31 a) $[1;2;-2]$; b) $[2;4;-1]$; c) $[0;0;0]$; d) $[3;0;2]$; e) $\emptyset$; f) $[t;1-2t;1+t], t \in \mathsf{R}$.
32 a) $[1;2;-2;3]$; b) $[1;0;-2;1]$.
33 a) $[\frac{2}{3};\frac{1}{3}]$; b) $[2;3]$; $[3;2]$; c) $[1;3]$; $[3;1]$; d) $[5\sqrt{3};\pm 5\sqrt{2}]$; $[-5\sqrt{3};\pm 5\sqrt{2}]$;
e) $[6;4]$; $[-6;-4]$; f) $[1;2]$; $[-\frac{11}{5};-\frac{6}{5}]$; g) $[-2;1]$; $[1;-2]$; h) $[6;2]$; $[-\frac{18}{7};-\frac{26}{7}]$;
i) $[3;1]$; $[\frac{5}{3};\frac{11}{3}]$; j) $[3;2]$; $[24;\frac{1}{2}]$; k) $[1;2]$; $[-1;2]$; l) $[0;4]$; $[3;1]$.

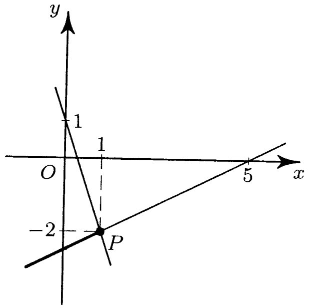
2.17 Řešení soustav rovnic metodou substituce

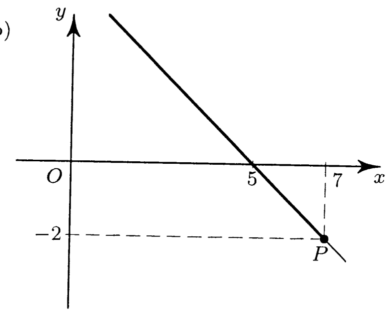
34 a) $[\frac{1}{4};3]$; b) $[3;-2]$; c) $[t;\frac{t+1}{2}]$, $t \in \mathsf{R}$; d) $[3;1]$.
35 a) $[\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}]$; b) $[6;-3;2]$.
36 a) $[-13;1]$, $[-13;5]$, $[9;1]$, $[9;5]$; b) $[5;2]$, $[2;5]$, $[-5;-2]$, $[-2;-5]$.
37 a) $[5;4]$; b) $[6;4]$; c) $[2;100]$, $[-2;100]$; d) $[\frac{3}{4};\frac{1}{4}]$, $[\frac{17}{8};-\frac{15}{8}]$.

2.18 Soustavy nerovnic

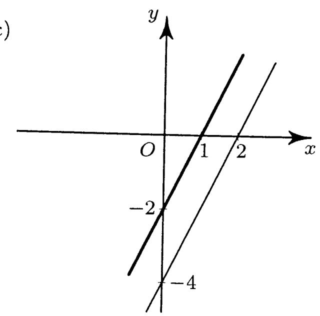
38 a) $\langle -\frac{3}{4};1\rangle$; b) $(4;7)$; c) $(\frac{1}{5};\infty)$; d) $\langle 3;4)$; e) $\langle -3;-1\rangle - \{-2\}$;
f) $(1-\sqrt{3};-\frac{1}{2}\rangle \cup \langle 1;1+\sqrt{3})$; g) $(\frac{5}{2};3\rangle$; h) $(-\infty;-1) \cup (\frac{1}{3};1)$; i) $\langle -1;0) \cup \langle 6;\infty)$;
j) $\langle -2;4\rangle - \{-1\}$; k) $(-1;2\rangle \cup \langle 6;9)$; l) $(-7;-\frac{7}{2}) \cup (-\frac{1}{2};3)$.

39

a) 

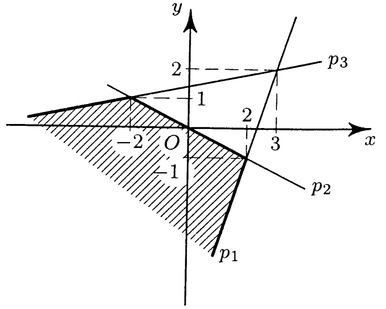
b) 

K řešení úlohy 39

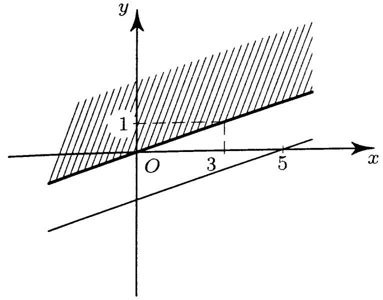
c) 

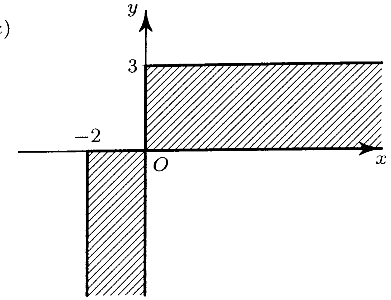
K řešení úlohy 39

40

a) 

K řešení úlohy 40

b) 

c) 

K řešení úlohy 40

2.19 Slovní úlohy

41 8. **42** Platí. **43** $\frac{2}{5}$. **44** 49; 1. **45** 4; 6; 8. **46** 15 schodů po 24 cm.
47 Za 14 dní. **48** 200. **49** $a = 12$ cm, $b = 10$ cm. **50** Jana 15 let, Martin 5 let.
51 O 10 %. **52** a) Vzrostla o 8 %; b) vzrostla o 8 %; c) úlohy a) i b) jsou stejné.
53 a) Za 1 h 12 min; b) za 1 h; c) 2 h 10 min.
54 1. roura ... 6 h, 2. roura ... 4 h. **55** 42 %. **56** 20 l. **57** 15 l.
58 V 9 h 15 min ve vzdálenosti 100 km od A.
59 $v_1 = 120\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, $v_2 = 90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. **60** $v = 12\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$; $t = 4$ h 10 min.

3 Rovnice s parametrem

3.1 Lineární rovnice s parametrem

1 a) $x \cdot (a-4) = a^2 - 16$

$a = 4$	$x \in \mathsf{R}$
$a \in \mathsf{R} - \{4\}$	$x \in \{a+4\}$

c) $x \cdot (2a-1) = -2(2a-1)$

$a = 0{,}5$	$x \in \mathsf{R}$
$a \in \mathsf{R} - \{0{,}5\}$	$x \in \{-2\}$

e) $x \cdot (a+4) = -1(a+4)$

$a = -4$	$x \in \mathsf{R}$
$a \in \mathsf{R} - \{-4\}$	$x \in \{-1\}$

b) $x \cdot (2a+1) = 5$

$a = -0{,}5$	$x \in \emptyset$
$a \in \mathsf{R} - \{-0{,}5\}$	$x \in \{\frac{5}{2a+1}\}$

d) $x \cdot (a^2-1) = 1-a$

$a = 1$	$x \in \mathsf{R}$
$a = -1$	$x \in \emptyset$
$a \in \mathsf{R} - \{\pm 1\}$	$x \in \{\frac{-1}{a+1}\}$

f) $x \cdot (a^2-3a) = a-3$

$a = 0$	$x \in \emptyset$
$a = 3$	$x \in \mathsf{R}$
$a \in \mathsf{R} - \{0;3\}$	$x \in \{\frac{1}{a}\}$

2 $x > 0$ pro $p \in (-\infty;-1) \cup \{1\}$. **3** $m = 7$. **4** $p \cdot (q-1) = 1-2q$.

$q = 1$	$x \in \emptyset$
$q \in \mathsf{R} - \{1\}$	$x \in \{\frac{1-2q}{q-1}\}$

3.2 Rovnice s neznámou ve jmenovateli

5 Je-li neznámá ve jmenovateli, musíme nakonec buď provést zkoušku, nebo ověřit podmínky.

Tak dostaneme další hodnoty pro parametr, případně pro x, které musíme zařadit do diskuse.

a) $x \cdot (m+1) = 2(m^2-1)$

$m=-1$	$x \in \mathsf{R} - \{-2\}$
$m \in \{0;1\}$	$x \in \emptyset$
$m \in \mathsf{R} - \{0;\pm 1\}$	$x \in \{2m-2\}$

b) $x \cdot (m+1) = (m+1)(m-2)$

$m=-1$	$x \in \mathsf{R} - \{\pm 1\}$
$m=1$	$x \in \emptyset$
$m \in \mathsf{R} - \{\pm 1\}$	$x \in \{m-2\}$

c) $-2x \cdot (m+1) = m(m+1)$

$m=-1$	$x \in \mathsf{R} - \{-1\}$
$m \in \{0;2\}$	$x \in \emptyset$
$m \in \mathsf{R} - \{-1;0;2\}$	$x \in \{-\frac{1}{2}m\}$

d) $x \cdot (m-2) = -3(m+1)(m-2)$

$m=-1$	$x \in \emptyset$
$m=2$	$x \in \mathsf{R} - \{0\}$
$m \in \mathsf{R} - \{-1;2\}$	$x \in \{-3m-3\}$

3.3 Rovnice s neznámou pod odmocninou

6 Umocňování není ekvivalentní úprava, proto musíme udělat zkoušku dosazením. Nezapomeňte, že $\sqrt{a^2} = |a|$.

a) $2px = 2p - p^2$

$p=0$	$x \in \mathsf{R}_0^+$
$p<-2$	$x \in \emptyset$
$p \geqq -2 \wedge p \neq 0$	$x \in \{1-\frac{1}{2}p\}$

b) $px = p^2 + p$

$p=0$	$x \in \mathsf{R}_0^-$
$p<1 \wedge p \neq 0$	$x \in \emptyset$
$p \geqq 1$	$x \in \{p+1\}$

c) $4px = 3p^2$

$p=0$	$x \in \mathsf{R}_0^+$
$p>0$	$x \in \emptyset$
$p<0$	$x \in \{\frac{3}{4}p\}$

d) $4x(1+p) = p^2 + p$

$p=-1$	$x \in (-\infty;-0{,}5\rangle$
$p<0 \wedge p \neq -1$	$x \in \emptyset$
$p \geqq 0$	$x \in \{\frac{1}{4}p\}$

3.4 Neznámá v absolutní hodnotě

7 a) $\forall k \in \mathsf{R}$: $x \in \{k-2; k+2\}$

b)

$k<0$	$x \in \emptyset$
$k \geqq 0$	$x \in \{5-k; 5+k\}$

c)

$k=0$	$x \in \mathsf{R}$
$k \in \mathsf{R} - \{0\}$	$x \in \{-k\}$

d)

$k=7$	$x \in \mathsf{R}$
$k \in \mathsf{R} - \{7\}$	$x \in \{\frac{1}{2}(k-3)\}$

3.5 Soustavy rovnic

8 a)

$a=0{,}5$	$\{[1+2y;y],\ y \in \mathsf{R}\}$
$a=-0{,}5$	$\emptyset$
$a \in \mathsf{R} - \{\pm 0{,}5\}$	$\{[\frac{1}{2a+1}; \frac{-1}{4a+2}]\}$

b)

$a=-2$	$\{[1+3y;y],\ y \in \mathsf{R}\}$
$a=2$	$\emptyset$
$a \in \mathsf{R} - \{\pm 2\}$	$\{[\frac{-1}{a-2}; \frac{1}{a-2}]\}$

c)

$a=\frac{1}{3}$	$\{[x;3-x],\ x \in \mathsf{R}\}$
$a=-\frac{1}{3}$	$\emptyset$
$a \in \mathsf{R} - \{\pm\frac{1}{3}\}$	$\{[\frac{3}{1+3a}; \frac{3}{1+3a}]\}$

d)

$a=0{,}5$	$\{[x;x-3],\ x \in \mathsf{R}\}$
$a=-0{,}5$	$\emptyset$
$a \in \mathsf{R} - \{\pm 0{,}5\}$	$\{[\frac{4a+3}{2a+1}; \frac{-1}{2a+1}]\}$

9 $x = \frac{6+2t}{7}$, $y = \frac{4-t}{7} \Rightarrow t \in (-\infty;-3)$. **10** $x = \frac{p+9}{2+3p}$, $y = \frac{6-p^2}{2+3p} \Rightarrow p \in \{-\frac{3}{2};1\}$.

3.6 Kvadratické rovnice s parametrem

11 $a = -\frac{3}{2}$, potom $x = -\frac{11}{2}$. **12** $D = b^2 + 2b - 47 \Rightarrow b \in (-\infty;-1-4\sqrt{3}) \cup (-1+4\sqrt{3};\infty)$.

13 $D = c^2 - 6c - 16 \Rightarrow c \in \{-2;8\}$. **14** $D = -4d^2 + 36 \Rightarrow d \in (-\infty;-3) \cup (3;\infty)$.

15 Pro $p = \frac{1}{3}$ je rovnice lineární, potom $x = \frac{3}{4}$. Pro $p \neq \frac{1}{3}$ je $D = 4(4p^2+3p-1) \Rightarrow$
pro $p \in (-\infty;-1) \cup (\frac{1}{4};\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3};\infty)$ má rovnice dva různé reálné kořeny,
pro $p \in \{-1;\frac{1}{4}\}$ má rovnice dvojnásobný reálný kořen,
pro $p \in (-1;\frac{1}{4})$ nemá rovnice v R řešení.

16 $x = 0$ dosadit, potom pro $a = \frac{1}{2}$ je $x_2 = \frac{14}{3}$, pro $a = 3$ je $x_2 = 3$.

17 a) $D > 0 \wedge x_1 + x_2 > 0 \wedge x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \wedge -\frac{b}{a} > 0 \wedge \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow t \in (\frac{3}{4};1)$.
b) $D > 0 \wedge x_1 + x_2 < 0 \wedge x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow t \in (3;\infty)$.
c) $D > 0 \wedge x_1 \cdot x_2 < 0 \Rightarrow t \in (1;3)$.

18 $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow m = -3$. **19** $x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow m = 14$.

3.7 Neznámá ve jmenovateli (po úpravě kvadratická rovnice)

20 Je-li neznámá ve jmenovateli, musíme nakonec buď provést zkoušku, nebo ověřit podmínky. Tak dostaneme další hodnoty pro parametr případně pro x, které musíme zařadit do diskuse.

a) $(2-a)x^2 - 4x = 0$

$a \in \{0;2;4\}$	$x \in \{0\}$
$a \in \mathsf{R} - \{0;2;4\}$	$x \in \{0; \frac{4}{2-a}\}$

b) $x^2 - 2a + 1 = 0$

$a=0$	rovnice nemá smysl
$a=1$	$x \in \{1\}$
$a \geqq 0{,}5 \wedge a \neq 1$	$x \in \{\pm\sqrt{2a-1}\}$
$a < 0{,}5 \wedge a \neq 0$	$x \in \emptyset$

c) $(2-a)x^2 + (a^2-4a)x + 2a^3 = 0$

$a=0$	$x \in \emptyset$
$a=1$	$x \in \{2\}$
$a=2$	$x \in \{4\}$
$a \in \mathsf{R} - \{0;1;2\}$	$x \in \{2a; \frac{a^2}{2-a}\}$

d) $(a-1)x^2 + (2-2a)x + a = 0$

$a=1$	rovnice nemá smysl
$a=0$	$x \in \{2\}$
$a>1$	$x \in \emptyset$
$a<1 \wedge a \neq 0$	$x \in \{1 \pm \frac{\sqrt{1-a}}{a-1}\}$

4 Funkce

4.1 Definice funkce

1 a) f_1 je funkce; b) f_2 je funkce; c) f_3 není funkce, protože např. $[4;2] \in f_3 \wedge [4;-2] \in f_3$; d) f_4 je funkce.

2 a) Je funkce; b) není funkce; c) je funkce; d) není funkce.

4.2 Rovnost funkcí

3 a) $f = g$ v R; b) $f \neq g$, protože $\mathsf{D}_f \neq \mathsf{D}_g$; c) $f \neq g$, protože $\mathsf{D}_f \neq \mathsf{D}_g$.

4.3 Definiční obor funkce

4
$\mathsf{D}(f_1) = \mathsf{R}$
$\mathsf{D}(f_2) = \mathsf{R} - \{3\}$
$\mathsf{D}(f_3) = \mathsf{R} - \{-1; \frac{3}{13}\}$
$\mathsf{D}(f_4) = \mathsf{R}$
$\mathsf{D}(f_5) = \mathsf{R} - \{-7;1\}$
$\mathsf{D}(f_6) = \langle -2;\infty)$
$\mathsf{D}(f_7) = (-\infty;-2) \cup (\frac{1}{2};\infty)$
$\mathsf{D}(f_8) = (-\infty;-2\rangle \cup (\frac{3}{2};\infty)$
$\mathsf{D}(f_9) = (\frac{3}{2};\infty)$
$\mathsf{D}(f_{10}) = \langle -4;10)$
$\mathsf{D}(f_{11}) = (3;\infty)$
$\mathsf{D}(f_{12}) = (-4;\infty) - \{4\}$
$\mathsf{D}(f_{13}) = (-\frac{1}{2};0\rangle$
$\mathsf{D}(f_{14}) = \langle \frac{1}{5};\infty)$

4.4 Hodnota funkce, obor funkčních hodnot

5 $f(-1) = -\frac{3}{2}$, $f(3) = \frac{7}{2}$ $f(\sqrt{2}) = 6 + 5\sqrt{2}$ **6** $f(-2) = -6$, $f(\frac{1}{3}) = -\frac{8}{27}$, $f(2\sqrt{3}) = 22\sqrt{3}$

7 $g(1) = 4$ $g(a) + g(2) = 3a^2 + 14$, $g(b^2) = 3b^4 + 1$,
$g(a+2) = 3a^2 - 12a + 13$; $[g(b)]^2 = 9b^4 + 6b^2 + 1$.

8 a) $x_1 = -7$, $x_2 = 5$. b) $x \in$ R neexistuje; c) $x_1 = \frac{9+\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{-13-\sqrt{3}}{2}$

9 a) $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ b) $x = \frac{6}{5}$, c) $x = \frac{21}{10}$

10 a) 2, $-\frac{5}{2}$, $5 \in$ H b) $m \in \{\pm\sqrt{3}\}$ c) $c \in \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\}$

11 a) $D(g_1) = \langle -2; 3\rangle$; $D(g_2) = R$, $D(g_3) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; \infty)$
$H(g_1) = \langle 0, 1\rangle \cup \{2\}$; $H(g_2) = (-\infty, 2) - \{0\}$; $H(g_3) = (-\infty; 0) \cup \{\frac{1}{2}\}$
b) $x_1 = 1{,}5$; $x_2 \in \langle -2; 0)$; $x_3 \in \emptyset$.

4.5 Funkce složená

12 a) 19; b) 30; c) 22, d) 12; e) $3a^2 + 9a + 7$; f) $9b^2 + 15b + 6$.

13 a) 2; b) $h(x) = (x+1)^4 + 1 \wedge h(-2) = 2$.

14 a) $-2\sqrt{x} + 3$, b) $\sqrt{-2x+3}$; c) $4\sqrt{x} - 3$; d) $\sqrt[4]{-2x+3}$; e) $-2\sqrt{-2x+3} + 3$,
f) $\sqrt{-2\sqrt{x} + 3}$.

15 a) $h_1(x) = \sqrt{x+2}$, $D(h_1) = \langle -2; \infty)$; b) $h_2(x) = \sqrt{x} + 2$, $D(h_2) = \langle 0; \infty)$;
c) $h_3(x) = \sqrt{x+3} - 1$, $D(h_3) = \langle -3; \infty)$; d) $h_4(x) = \sqrt{x-1} + 3$, $D(h_4) = \langle 1; \infty)$

16 $a_1 = 2$; $a_2 = -3{,}5$.

17 a) vnější $f(x) = 6x - 4$
vnitřní $g(x) = \sqrt{x}$
b) vnější $f(x) = \sqrt{x}$
vnitřní $g(x) = x^2 - 4x$
c) vnější $f(x) = x^2$
vnitřní $g(x) = \log x$
d) vnější $f(x) = \log x$
vnitřní $g(x) = x^2$
e) vnější $f(x) = 5^x$
vnitřní $g(x) = \sqrt{x}$
f) vnější $f(x) = \sqrt{x}$
vnitřní $g(x) = 5^x$
g) vnější $f(x) = x^2 - 4x$
vnitřní $g(x) = \log x$
h) vnější $f(x) = x^3$
vnitřní $g(x) = x^2 + 1$

4.6 Vlastnosti funkcí

Rostoucí, klesající funkce

18 h_1 roste v $\langle -2; 0\rangle$, klesá v $\langle 0; 4\rangle$; h_2 roste v $\langle -3; 3\rangle$, klesá v $\langle -4; -3\rangle$, klesá v $\langle 3; 4\rangle$;
h_3 roste v $(-\infty; 0)$, roste v $(0; \infty)$.

19 $\forall x_1, x_2 \in R: x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \Rightarrow y_1 < y_2$.

20 $\forall x_1, x_2 \in R: x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 + 6 > -3x_2 + 6 \Rightarrow y_1 > y_2$.

Prostá funkce

21 f_1 prostá v R; f_2 není prostá v R; f_3 prostá v R; f_4 není prostá v R.

22 h_1 prostá v $\langle 0; 4\rangle$; h_2 prostá v $\langle -3; 3\rangle$; h_3 prostá v $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$.

Sudá, lichá funkce

23 h_1 lichá v R, h_5 sudá v R; h_9 lichá v R;
h_2 sudá v R; h_6 lichá v R $- \{\pm 2\}$; h_{10} lichá v R;
h_3 lichá v R $- \{0\}$; h_7 sudá v R; h_{11} není sudá, není lichá.
h_4 lichá v R; h_8 není sudá, není lichá; h_{12} sudá v R.

24 g_1 je sudá v R; g_2 je lichá v $\langle -3; 3\rangle$; g_3, g_4 není sudá, není lichá.

Omezená funkce

25 g_1 omez. v R; g_5 není omez. v R; g_9 omez. zdola v R; g_{13} omez. zdola v R
g_2 omez. v R; g_6 omez. zdola v R; g_{10} není omez. v R; g_{14} omez. zdola v R;
g_3 omez. v R; g_7 není omez. v R; g_{11} není omez. v R $- \{0\}$; g_{15} není omez. v R^+
g_4 omez. v R; g_8 omez. shora v R; g_{12} omez. zdola v R $- \{0\}$; g_{16} omez. shora v R^+

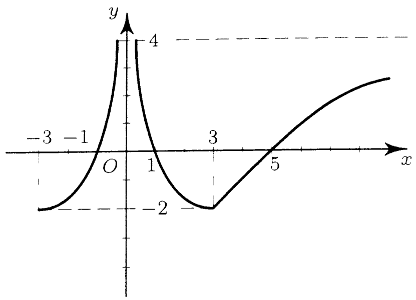
26 $\forall x \in R$. $0 < f_1(x) \leqq 5$; $\forall x \in \langle -5; 3\rangle$: $0 \leqq f_2(x) \leqq 25$; $\forall x \in R^+_0$: $0 \leqq f_3(x) < 1$.

Maximum, minimum funkce

27 f_1: v R nemá max., nemá min.;
f_2: pro $x = 0$ je hodnota min. -1;
f_3: nemá max., nemá min. v R;
f_4: pro $x = 0$ je hodnota min. 1;
f_5: pro $x = 0$ je hodnota max. 4;
f_6: pro $x = 0$ je hodnota min. 0;
f_7: nemá max., nemá min. v R;
f_8: pro $x = 1$ je hodnota max. 0;
f_9: nemá max., nemá min. v R $- \{-1\}$.

Vlastnosti funkcí — opakování

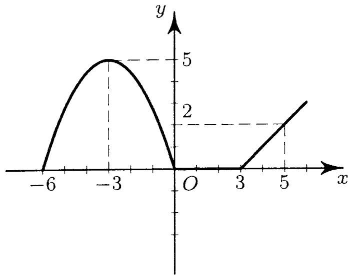
28 a) $H_f = \langle -2; \infty)$;
b) P_y neex.;
c) omez. zdola;
d) max. neex.;
e) pro $x = \pm 3$ je hodnota min. -2;
f) není prostá v D;
g) např. je prostá v $\langle 3; \infty)$;

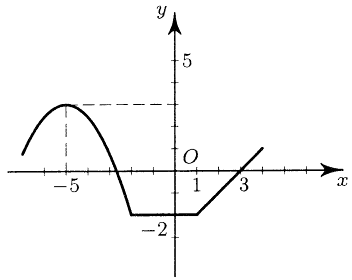


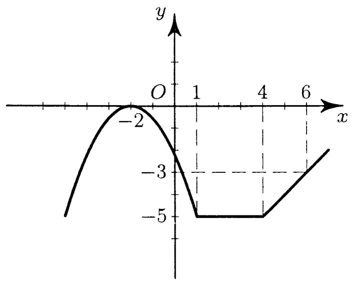
K řešení úlohy 28

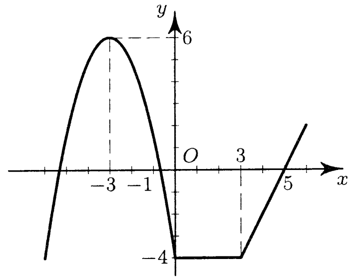
4.7 Vztahy mezi grafy funkcí

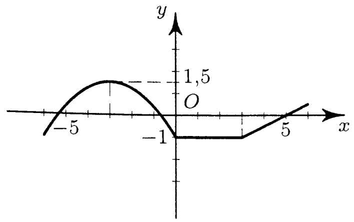
29

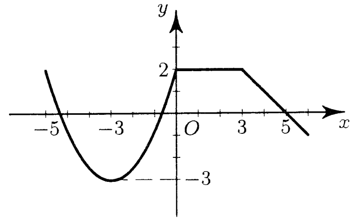
a)


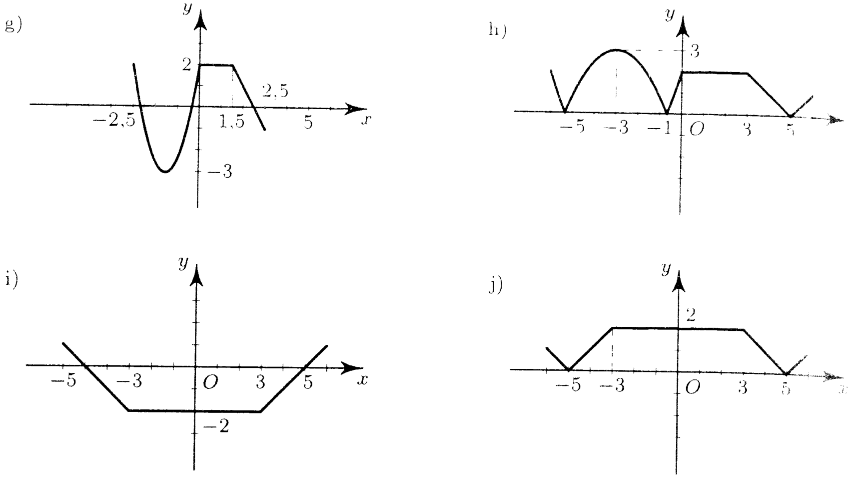
b)


c)


d)


e)


f)




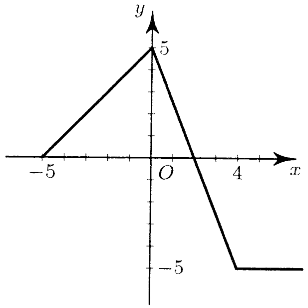
K řešení úlohy 29

4.8 Lineární funkce

30 f: $y = 2x + 1$. **31** g: $y = -3x + 5$. **32** h: $y = 2x + 3$.

33 g_1: $y = 4x$, g_2: $y = -3x$, g_3: $y = 2x + 4$, g_4: $y = -\frac{5}{3}x + 5$, g_5: $y = 2x - 2$,
g_6: $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$, g_7: $y = 3$, g_8: $y = 0$.

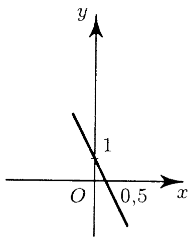
34 $f = f_1 \cup f_2 \cup f_3$
f_1: $y = x + 5 \wedge x \in \langle -5; 0)$
f_2: $y = -\frac{5}{2}x + 5 \wedge x \in \langle 0; 4)$
f_3: $y = -5 \wedge x \in \langle 4; \infty)$



K řešení úlohy 34

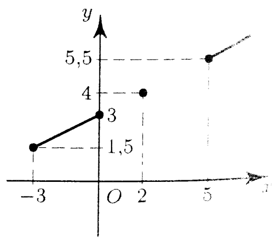
35

a)



H = R

b)



H = $\langle 1{,}5; 3) \cup \{4\} \cup \langle 5{,}5; \infty)$

K řešení úlohy 35

36

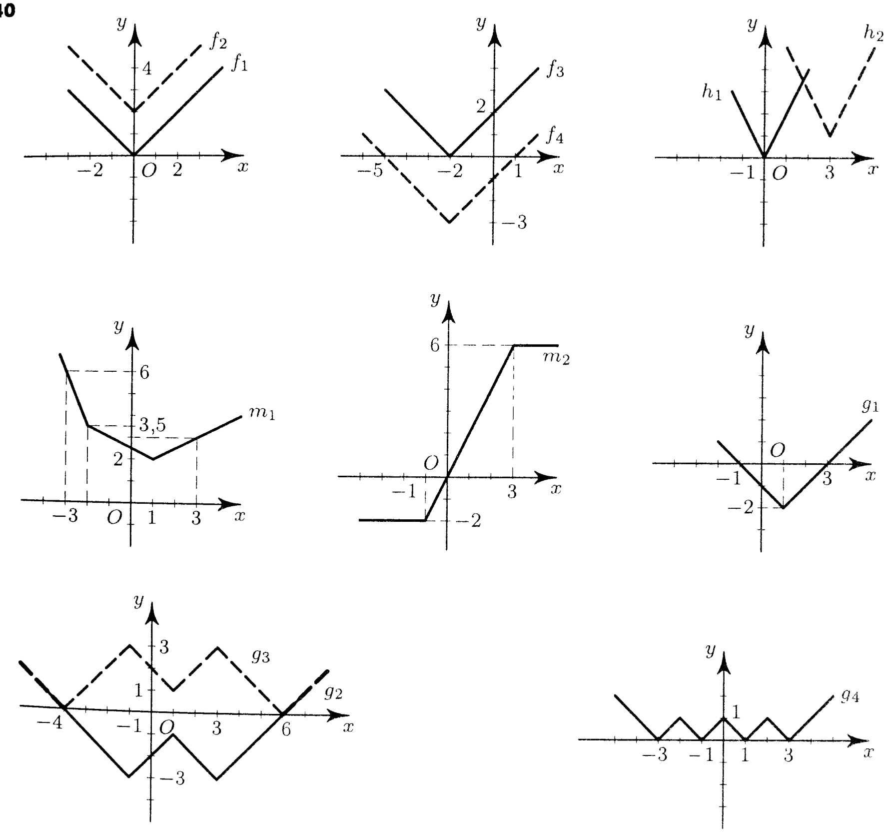
K řešení úlohy 36

37 a) $y = 2x - 3$; b) $y = 2x + 3$; c) $y = -2x - 3$; d) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

38 $a \in \langle -2; 2\rangle$. **39** $b \in \langle -5; 15\rangle$.

Graf lineární funkce s absolutními hodnotami

40

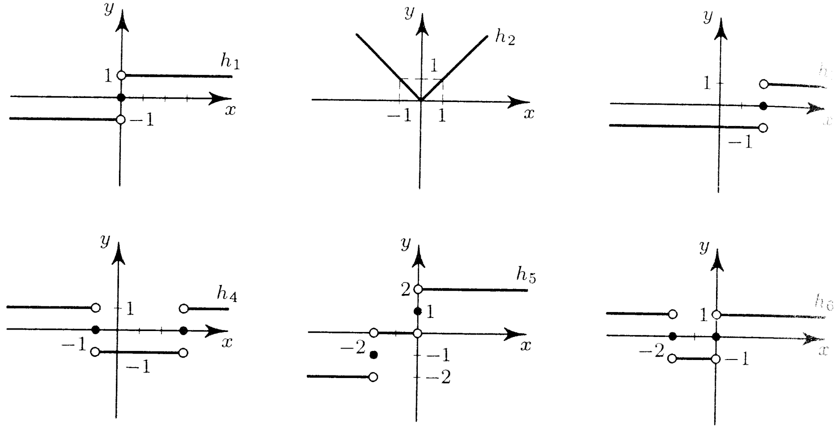


K řešení úlohy 40

41

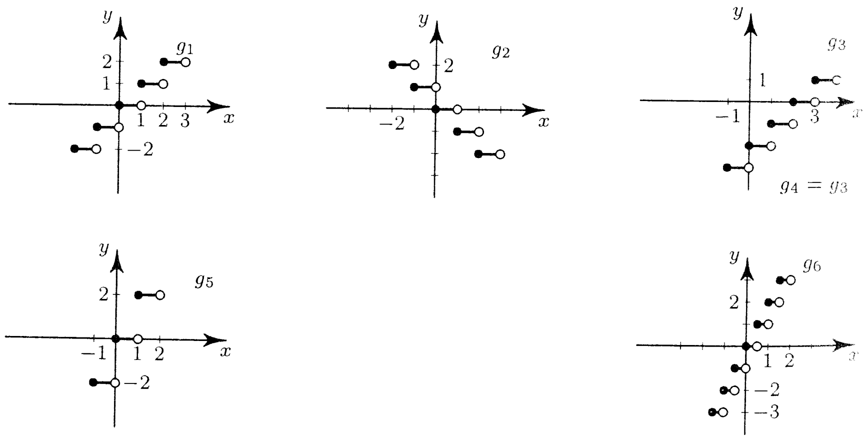
K řešení úlohy 41

42



K řešení úlohy 42

43



K řešení úlohy 43

Lineární interpolace

44 4,609 6. **45** 0,922 4.

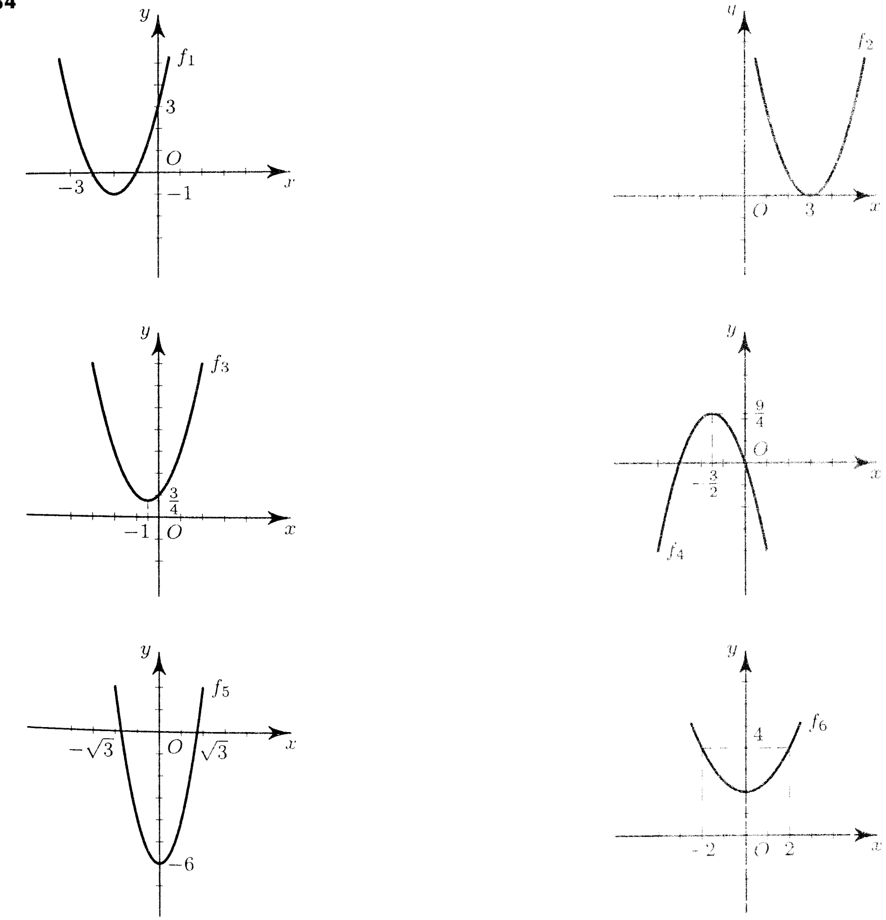
4.9 Kvadratická funkce

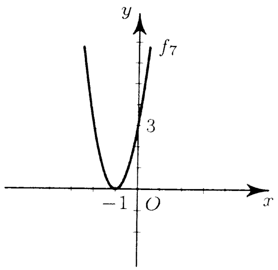
46 $y = -3x^2 + 15x - 14$. **47** $y = x^2 + 2x - 3$. **48** $y = 2x^2 - 8$ **49** $y = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$

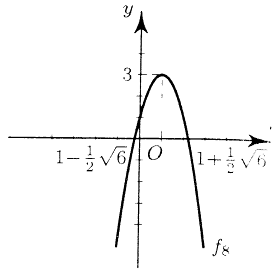
50 $y = -2x^2 + 12x$. **51** $g(-2) = g(6) = 15$. **52** $y = 4x^2 - x + 5$

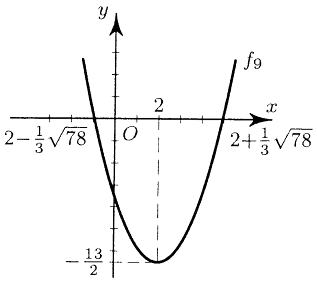
53 a) $y = -x^2 + 2x + 3$; b) $y = x^2 + 2x - 3$; c) $y = -x^2 - 2x + 3$

54



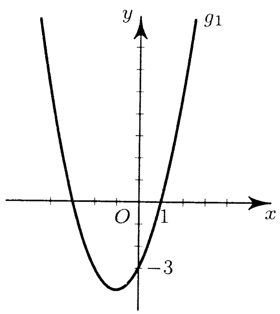


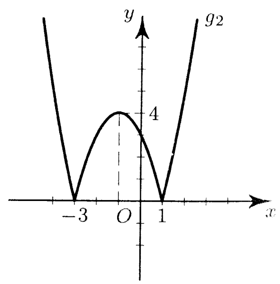


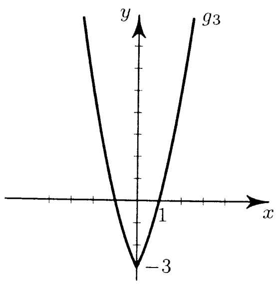


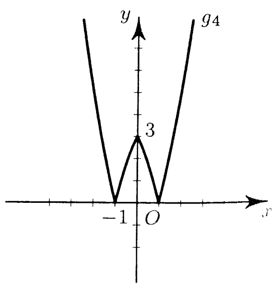
K řešení úlohy 54

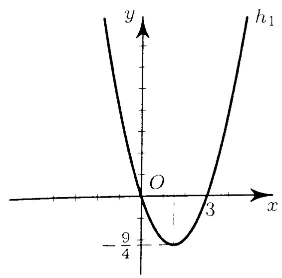
55 **Graf kvadratické funkce s absolutními hodnotami**

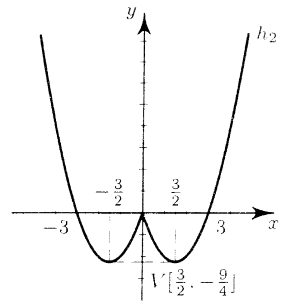


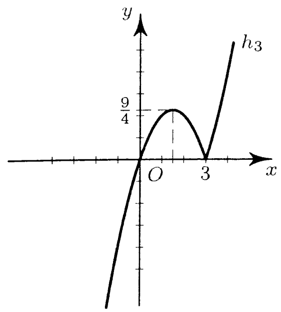


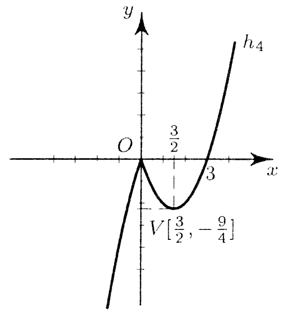


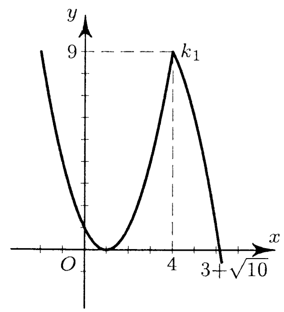


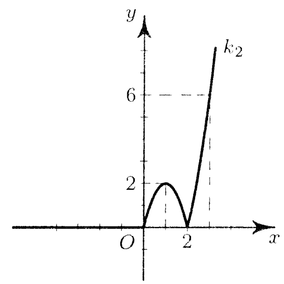


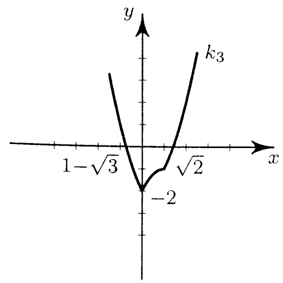


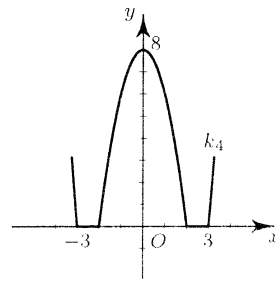










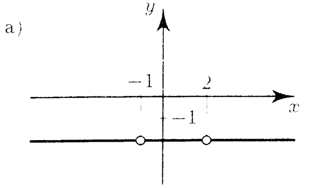


K řešení úlohy 55

4.10 Úprava výrazu — graf funkce

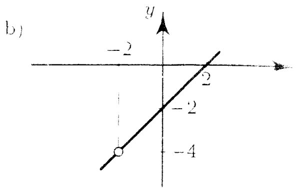
56

a)



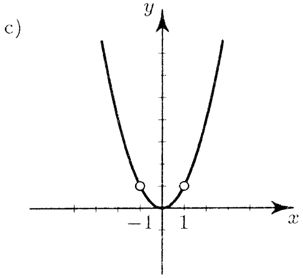
a) $y = -2$; $\mathsf{D} = \mathsf{R} - \{-1; 2\}$

b)



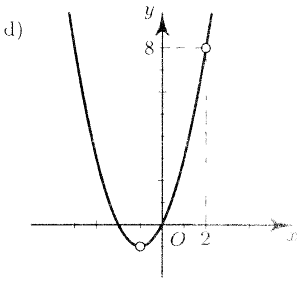
b) $y = x - 2$; $\mathsf{D} = \mathsf{R} - \{-2\}$

c)



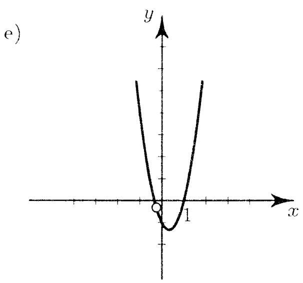
c) $y = x^2$; $\mathsf{D} = \mathsf{R} - \{\pm 1\}$

d)



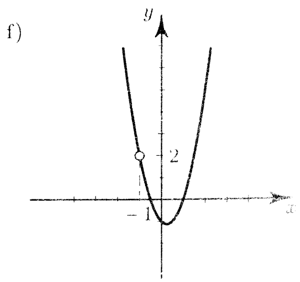
d) $y = x^2 + 2x$; $\mathsf{D} = \mathsf{R} - \{-1; 2\}$

e)



e) $y = 3x^2 - 2x - 1$; $\mathsf{D} = \mathsf{R} - \{-\frac{1}{4}\}$

f)



f) $y = 2x^2 - x - 1$; $\mathsf{D} = \mathsf{R} - \{-1\}$

K řešení úlohv 56

4.11 Exponenciální funkce

57 $a = 3 \wedge b = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 3 \cdot 2^x + \frac{1}{2}$. **58** $a = 3 \wedge b = -1 \Rightarrow y = 2^{x+3} - 1$.

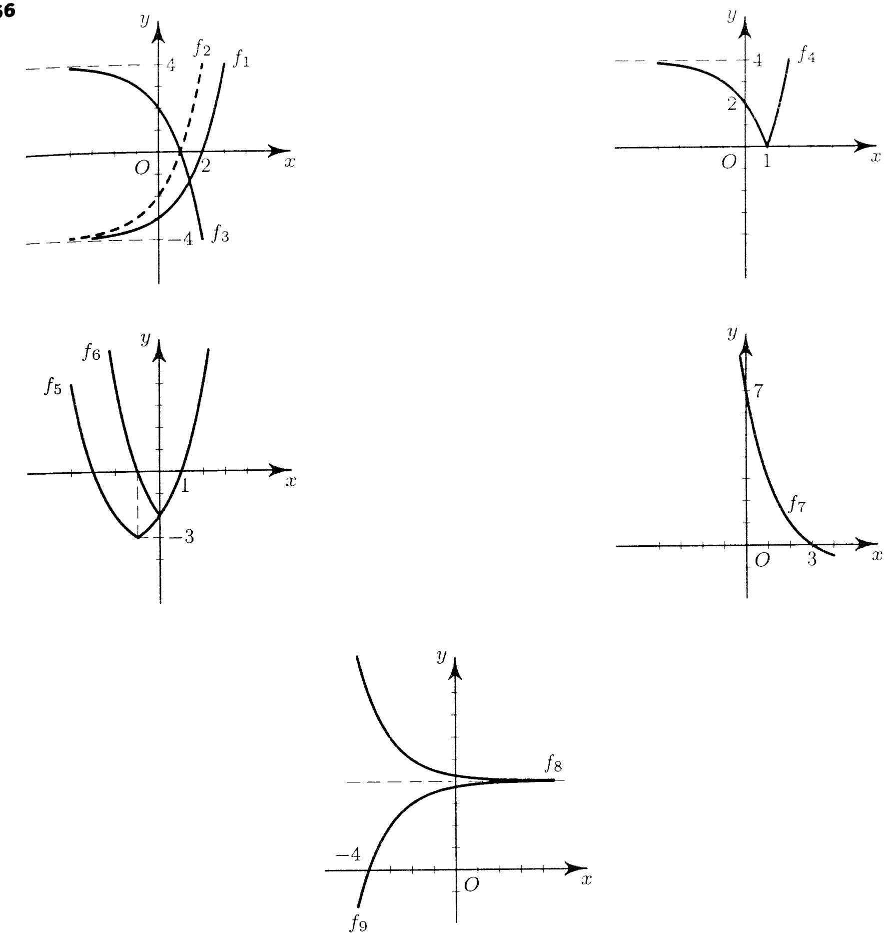
59 a) $q \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$. b) $q \in (0; 1)$; c) $q \in (1, \infty)$

60 a) $p \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (1; \infty)$; b) $p \in (-\sqrt{5}; -2) \cup (2, \sqrt{5})$; c) $p \in (2; \infty)$ **61** Platí.

62 $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{0,4} > 1$. **63** a) $K < L$; b) $K > L$. c) $K > L$

64 a) $r > s$; b) $r > s$. c) $r < s$. **65** a) $a > 1$; b) $a > 1$. c) $0 < a < 1$

66



K řešení úlohy 66

67

K řešení úlohy 67

4.12 Logaritmus čísla

68 a) $\log_3 9 = 2$; b) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; c) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$.

69 a) -2; b) 3; c) $\frac{1}{2}$; d) -8; e) $\frac{1}{6}$; f) 0; g) -1; h) 2.

70 a) 81; b) 4; c) 5; d) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$; e) 1; f) $\frac{1}{8}$; g) 17; h) $\sqrt[5]{0{,}001}$.

71 a) $a = 3$; b) $a = \frac{1}{2}$; c) $a = \frac{1}{27}$; d) $a = \frac{1}{5}$; e) $a = 256$; f) $a = \sqrt{2}$; g) $a = \sqrt{2}$; h) $a = 10$.

72 a) $x_1 = \log 8$, $0 < x_1 < 1$; b) $x_2 = \log_6 4$, $0 < x_2 < 1$; c) $x_3 = \log_{\frac{1}{5}} 8$, $x_3 < 0$; d) $x_4 = \ln \frac{16}{3}$, $x_4 > 1$.

73 a) 2; b) -1; c) -10; d) -3; e) 1; f) 8.

74 a) $x = \frac{\sqrt{a} \cdot b^3}{c^2}$; b) $x = \frac{\sqrt{a} \cdot 10}{b \cdot \sqrt[5]{c^3}}$; c) $x = a^3 \cdot b^2 \cdot 16$; d) $x = 4 \cdot \sqrt[4]{ab^3} \cdot c$.

75 a) $2 \log a + 3 \log b - 2 - \frac{1}{2} \log c$; b) $\frac{1}{2}(\log a - \log b - \log c + 1)$; c) $2 \log (a + b) - \log c$.

4.13 Logaritmická funkce

76 $a = 3 \wedge b = -1 \Rightarrow y = 3 \log_2 x - 1$. **77** $a = 1 \wedge b = 2 \Rightarrow y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1) + 2$.

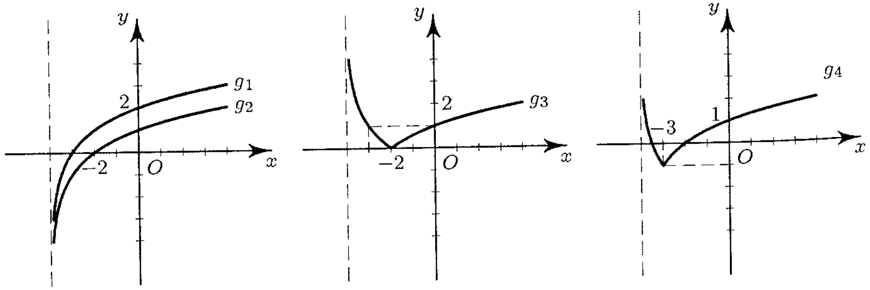
78 $\mathrm{D}(f_1) = (0; \infty)$ $\mathrm{D}(f_4) = (0; \infty) - \{10\}$ $\mathrm{D}(f_7) = (-\infty; -1)$
$\mathrm{D}(f_2) = (-6; \infty)$ $\mathrm{D}(f_5) = (-7; \infty) - \{-5\}$ $\mathrm{D}(f_8) = \langle -2; \infty)$
$\mathrm{D}(f_3) = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ $\mathrm{D}(f_6) = (-\infty; -8) \cup (6; \infty)$ $\mathrm{D}(f_9) = (-\infty; 0) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
$\mathrm{D}(f_{10}) = (-\infty; -5)$

79 a) $A > 1$; b) $0 < B < 1$; c) $C < 0$.

80 a) $B > A$; b) $B > A$; c) $B < A$; d) $B > A$.

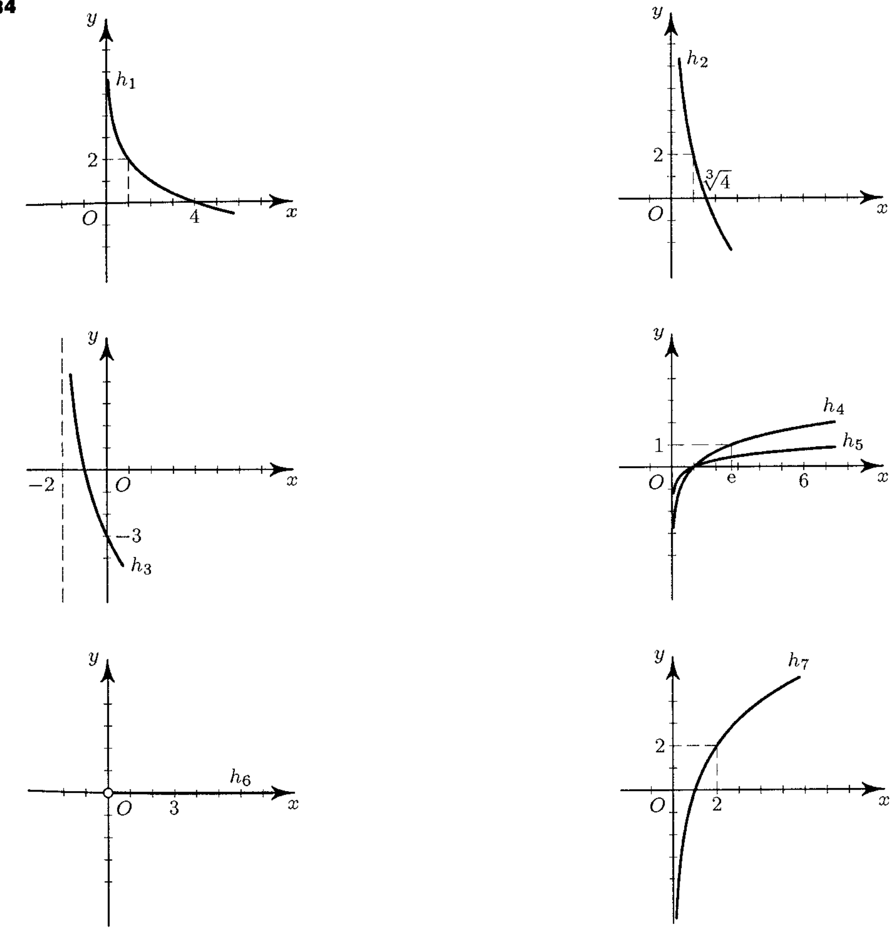
81 a) $a > 1$; b) $0 < a < 1$; c) $a > 1$. **82** a) $m = 0$; b) $m = -3$; c) $m = 2$; d) $m = 2$.

83



K řešení úlohy 83

84



K řešení úlohy 84

85 a) $x \in (0; 5)$; b) $x \in \langle -\frac{2}{3}; \infty)$.

4.14 Grafické řešení rovnic a nerovnic

86 a) $\{-1{,}6; 2{,}6\}$; b) $\{-2{,}7; 8{,}0\}$; c) $\{6{,}7\}$; d) $\{-0{,}1; 3{,}0\}$; e) $\{10{,}3\}$; f) $\{-1{,}0; 0{,}4\}$.

87 a) $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle 1; \infty)$; b) $x \in (-\infty, -1.6) \cup (1.6; \infty)$; c) $x \in (0; 10{,}7)$; d) $x \in (-4{,}0; -0{,}8)$.

88 a)

$a < 0$	0 řeš.
$a = 0$	1 řeš.
$a > 0$	2 řeš.

b)

$a \in \langle -1; 0)$	0řeš.
$a \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup \langle 1; \infty)$	1řeš.
$a \in (0; 1)$	2řeš.

c)

$a < -2$	0 řeš.
$a = -2$	nek. mnoho řeš.
$a > -2$	1 řeš.

d)

$a \in (0; 2)$	2 řeš.
$a \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$	1 řeš.

e)

$a \in \langle 0; 1)$	0řeš.
$a \in (-\infty; 0) \cup \{1\} \cup \langle 2; \infty)$	1 řeš.
$a \in (1; 2)$	2 řeš.

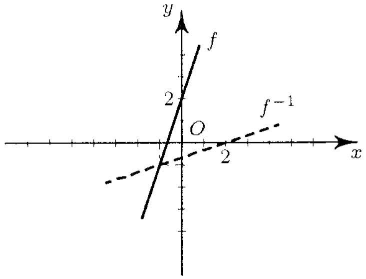
f)

$a < 1.5$	0 řeš.
$a = 1.5$	1 řeš.
$a > 1{,}5$	2 řeš.

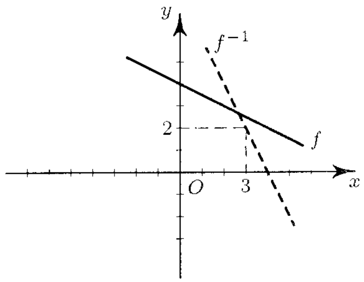
4.15 Inverzní funkce

89 a) Lineární funkce je prostá v R $\Rightarrow$ existuje v R funkce inverzní. b) Kvadr. funkce není prostá v R $\Rightarrow$ neexistuje v R funkce inverzní. c) Exp. funkce je prostá v R $\Rightarrow$ existuje v R funkce inverzní. d) Log. funkce je prostá v R^+ $\Rightarrow$ existuje v R^+ funkce inverzní. e) Daná funkce není prostá v R $\Rightarrow$ neexistuje v R funkce inverzní. f) Daná funkce je prostá v R_0^+ $\Rightarrow$ existuje v R_0^+ funkce inverzní.

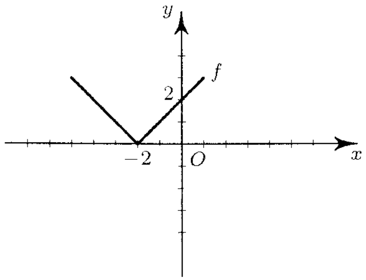
90

a) 

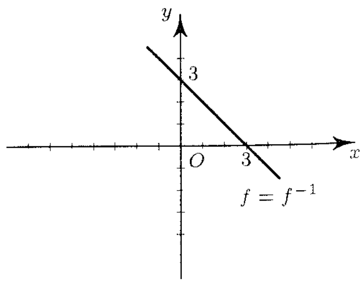
f^{-1}: $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

b) 

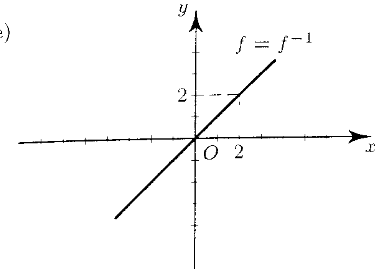
f^{-1}: $y = -2x + 8$

c) 

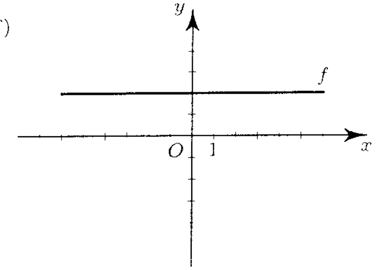
f^{-1}: neexistuje

d) 

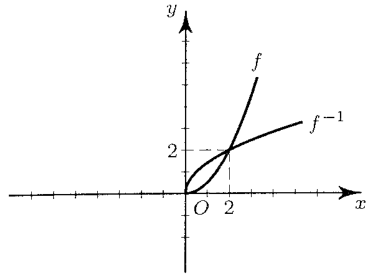
f^{-1}: $y = -x + 3$

e) 

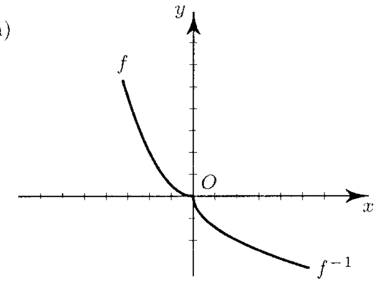
f^{-1}: $y = x$

f) 

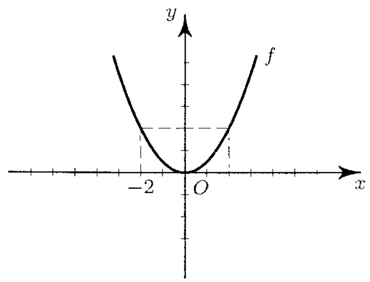
f^{-1}: neexistuje

g) 

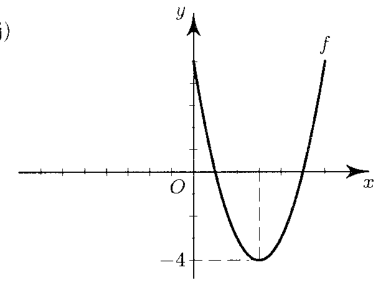
f^{-1}: $y = \sqrt{2x}$

h) 

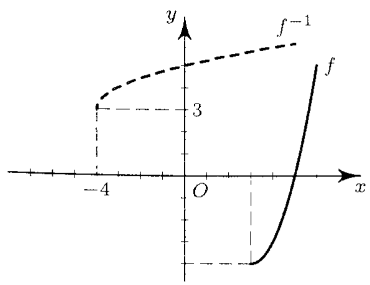
f^{-1}: $y = -\sqrt{2x}$

i) 

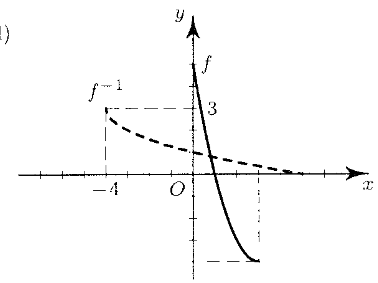
f^{-1}: neexistuje

j) 

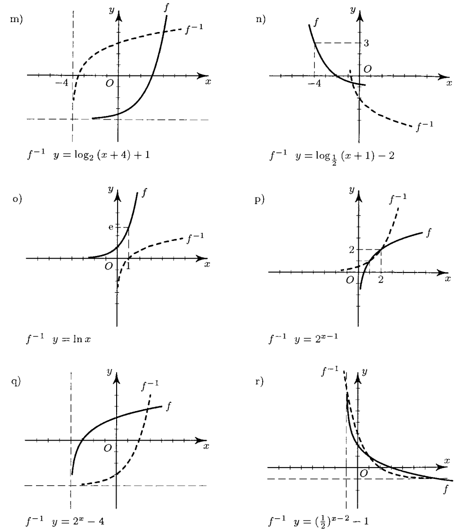
f^{-1}: neexistuje

k) 

f^{-1}: $y = \sqrt{x+4} + 3$

l) 

f^{-1}: $y = -\sqrt{x+4} + 3$



m) f^{-1} $y = \log_2(x+4) + 1$

n) f^{-1} $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 2$

o) f^{-1} $y = \ln x$

p) f^{-1} $y = 2^{x-1}$

q) f^{-1} $y = 2^x - 4$

r) f^{-1} $y = (\frac{1}{2})^{x-2} - 1$

K řešení úlohy 90

5 Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice

5.1 Exponenciální rovnice

1 Převedte na stejny zaklad
a) $\{2\}$, b) $\{2\}$, c) $\{-2\}$, d) $\{-\frac{1}{2}\}$, e) $\{-2, -\frac{2}{3}\}$, f) $\{2\}$, g) $\{2\}$, h) $\{2+\sqrt{3}\}$

2 Vytykejte a) $3^x + 3^x \; 3^1 = 108 \Rightarrow 3^x \; (1+3^1) = 108 \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$,
b) $\{-2\}$, c) $\{2\}$, d) $\{\frac{1}{2}\}$, e) $\{-1\}$, f) $\{2\}$

3 Substituce na kvadratickou rovnici
a) $\{\frac{1}{2}, 1\}$, b) $\{2\}$, c) $\{-2, 0\}$, d) $\{0, 1\}$, e) $\{-2\}$, f) $\{1\}$

4 a) Vytkněte $3^x(1+3) = 4^x(7-4)$, potom dělte $\frac{3^x}{4^x} = \frac{3}{4} \Rightarrow (\frac{3}{4})^x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 1$,

b) $\{3\}$, c) $\{\frac{3}{2}\}$, d) $\{2\}$

5 a) Upravte $2^x \; 2^x + 2^x \; 3^x = 2 \; 3^x \; 3^x$, potom dělte součinem $2^x \; 3^x$ a dostanete $(\frac{2}{3})^x + 1 = 2 \; (\frac{3}{2})^x$ Po substituci kvadraticka rovnice $x = 0$,
b) upravit, dělit součinem $4^x \; 2^x$, $x = 2$

6 Logaritmujte
a) $x = \log_3 10 = \frac{\log 10}{\log 3} = 2{,}10$, b) $x = \log_5 \frac{4}{5} = \frac{\log \frac{4}{5}}{\log 5} = -0{,}14$,
c) $x = \log_6 18 = \frac{\log 18}{\log 6} = 1{,}61$, d) $x = \log_{\frac{16}{245}} 16 = \frac{\log 16}{\log 16 - \log 245} = -1{,}02$

7 a) $\{\log_7 \frac{2}{49}\}$, b) $\{\log_3 2, -1\}$ c) $\{\log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{3}\}$, d) $\{\log_{\frac{2}{3}} 2, -1\}$

8 a) Substituce $2^x = a$, $3^y = b$, $[3, 2]$, b) substituce $2^x = a$, $3^y = b$, $[1, 3]$,
c) substituce $2^{x-y} = a$, $2^{x+y} = b$, $[3, 2]$,
d) substituce $16^x = a$, $16^y = b$, 2 řešení· $[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$,
e) v první rovnici převedte obě strany na zaklad 5, ve druhe na zaklad 6 $[14, 2]$,
f) substituce $x^y = a$, $[3, 2]$

5.2 Logaritmické rovnice

9 Užijte definici logaritmu čisla
a) $\{7\}$, b) $\{14\}$, c) $\{-2\}$, d) $\{4\}$, e) $\{\frac{1}{8}\}$, f) $\{16\}$, g) $\{\frac{1}{8}\}$, h) $\{\frac{1}{3}\}$

10 Rovnají-li se logaritmy o stejnem zakladu, potom se rovnají i logaritmovane vyrazy
a) $\{-5\}$, b) $\{\pm\sqrt{2}\}$, c) $\{-1, 11\}$, d) $\{2\}$

11 Užijte pravidla pro počitani s logaritmy
a) $\{100\}$, b) $\{36\}$, c) $\{2\}$, d) $\{1\}$, e) $\{\frac{3}{2}\}$, f) $\{2\}$,
g) $\{1\,000\}$, h) $\{10\}$, i) $\{\frac{1}{2}\}$, j) $\{\frac{1}{32}\}$, k) $\{2\}$, l) $\{2\}$

12 Užijte definici logaritmu, viz uloha 9 a) $\{\frac{9}{5}\}$, b) $\{\frac{25}{3}\}$, c) $\{2\}$ d) $\{\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\}$

13 V rovnici odstraňte zlomek, pak užijte vztah $k \; \log x = \log x^k$, dale viz úlohu 10
a) $\{11\}$, b) $\{\frac{1}{2}\}$, c) $\{\frac{2}{9}\}$, d) $\{4\}$

14 Substituce $\log_a x = t$, dostanete kvadratickou rovnici
a) $\{2, \frac{1}{8}\}$, b) $\{81, \frac{\sqrt{3}}{3}\}$, c) $\{-\frac{1}{2}, 63\}$, d) $\{-\frac{1}{3}, 40\}$

15 Substituce $\log x = t$, dostanete rovnici s neznamou ve jmenovateli a) $\{100\}$ b) $\{\frac{1}{10}\}$

16 a), c) Substituce, uprava, kvadratická rovnice
b), d) Pravidlo $\log x^k = k \; \log x$, potom substituce, uprava, kvadraticka rovnice
a) $\{7\}$, b) $\{10; \frac{\sqrt[3]{10}}{100}\}$, c) $\{-\frac{8}{9}, 8, -1+\sqrt{3}, -1+\frac{\sqrt{3}}{3}\}$, d) $\{4, \frac{1}{4}\}$

17 Dejte si pozor, kde je napsano na druhou Užijte pravidlo pro logaritmus součinu
a) $\{100\}$, b) $\{10^{-4}, 10\}$, c) $\{10\sqrt[3]{10}\}$, d) $\{\pm 0{,}01, \pm\sqrt{10}\}$

18 Pravidla pro počitaní s logaritmy Složitější ulohy
a) $\{\frac{1}{100}\}$, b) $\{\frac{1}{2}, 1\}$, c) $\{8, \frac{\sqrt[3]{4}}{16}\}$, d) $\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\}$, e) $\{3\}$, f) $\{0{,}01, 10, 100\}$

19 Logaritmujte a) $x^{\log x} = 100x \Rightarrow \log x^{\log x} = \log 100x \Rightarrow \log x \; \log x = \log 100 + \log x$, potom substituce $\log x = a$
a) $\{0{,}1, 100\}$, b) $\{0{,}01, 10\}$, c) $\{0{,}1, 1\,000\}$, d) $\{\frac{1}{3}, 27\}$, e) $\{\frac{\sqrt{7}}{7}, 49\}$, f) $\{\frac{1}{4} \; 2\}$

20 Užijte vzorec pro změnu zakladu logaritmu $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
a) $\{\frac{\sqrt[6]{32}}{2}\}$, b) $\{81\}$, c) $\{2\}$, d) $\{\sqrt{2}\}$

21 a) $x = 7 - y$, dosadit o druhe rovnice $[5, 2]$, $[2, 5]$
b) Ze druhe rovnice plyne $x \; y = 2^3 \Rightarrow x = \frac{8}{y}$, dosadit do prvni rovnice $[4, 2]$, $[2 \; 4]$
c) Převedte všechny logaritmy na zaklad 2, potom $\log_2 x = a$, $\log_2 y = b$ $[2, 4]$
d) Nejdříve upravte prave strany obou rovnic, potom užijte definice logaritmu $[2 \; 0]$

22 a) Substituce $\log x = a$, $\log y = b$ $[100 \; 0{,}1]$
b) Nejdříve ve 2 rovnici pravidlo pro logaritmus mocniny, potom substituce $[16, 8]$
c) Substituce $\log_{\frac{1}{2}} x = a$, $\log_2 y = b$ $[64, 512]$, $[\frac{1}{2}, 4]$
d) $x = \frac{100}{y}$ dosadit do druhe rovnice $[1\,000, 0{,}1]$, $[0{,}1, 1\,000]$
e) V prvni rovnici obě strany na stejny zaklad, ve druhe užijte definici logaritmu $[2, 7]$
f) Substituce $5^{\log x} = a$, $3^{\log y} = b$ $[1, 10]$

23 a) Užijte, že $x = \log 2^x$, nebo převeďte x na pravou stranu a užijte definice logaritmu
a) $\{3\}$; b) $\{-2\}$; c) $\{1\}$; d) $\{2\}$ e) $\{2\}$

24 a) Substituce $3^{\log_5 x} = a$ $x = 25$; b) Substituce $4^{\log_3 x} = a$ $x = 3$
c) Substituce $4^{\log x} = a$, kvadratická rovnice, $x = \sqrt{10}$
d) Stejné základy na jednu stranu, vytknout, dělit $x = 100$

5.3 Exponenciální nerovnice

25 a) $(-\infty; -5)$; b) $\langle \frac{4}{3}; \infty)$ c) $\langle 0; \infty)$; d) $(-\infty; -3)$ e) $\emptyset$ f) R

26 a) $(3, \infty)$ b) $\langle -\frac{13}{6}; \infty)$ c) $(-\infty; \log_9 7)$ d) $(-\infty; \log_{0,2} 3\rangle$ e) $(-\infty; \log_8 100$ f) R

27 Po substituci kvadratická nerovnice
a) $(-\infty; 5\rangle$ b) $(3; \infty)$ c) $(-\infty; \frac{7}{2}\rangle$ d) $(-\infty; -2) \cup (4; \infty)$ e) $(-\infty; 2)$ f) $(2; \infty)$

28 a) b) Vytknout, upravit c) Stejné základy k sobě vytknout d) e) f) Substituce na kvadratickou nerovnici.
a) $(-\infty; 1)$ b) $(1; \infty)$ c) $(1; \infty)$ d) $(\log_5 4; 1)$ e) $\langle 1; \infty)$ f) $(-\infty; \log_2 \frac{4}{3}) \cup (2; \infty)$

5.4 Logaritmické nerovnice

29 a) $(4; 5)$ b) $(-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$ c) $\langle -4; \infty)$ d) $(-1; -\frac{3}{4}) \cup (0; \frac{1}{4})$ e) $(-7; -\frac{5}{2}\rangle$;
f) $(-\infty; -\frac{2}{3}\rangle \cup (0; \infty)$

30 a) $(-4; 77\rangle$ b) $(\frac{3}{5}; \infty)$ c) $(-2; 2\rangle$ d) $(6{,}01; \infty)$ e) $(1; 2)$ f) $(\frac{\sqrt{5}}{5}; 1)$

31 a) $\emptyset$ b) $(\frac{4}{5}; 2\rangle$ c) $(3; 8\rangle$ d) $(3; 6)$

32 a) $(-2; \infty)$ b) $(1; 2\rangle$ c) $(0; 1\rangle$ d) $(\frac{1}{2}; 1)$

33 Substituce na kvadratickou nerovnici
a) $\langle \frac{1}{9}; 3\rangle$, b) $\langle \frac{1}{2}; 4\rangle$, c) $(-1; -\frac{63}{64}) \cup (63; \infty)$ d) $(1; \frac{5}{4}) \cup (2; \infty)$

34 Po substituci nerovnice s neznámou ve jmenovateli
a) $(0{,}1; 100)$ b) $(0; 0{,}001\rangle \cup (1; \infty)$

35 a) Substituce $\log x = a \Rightarrow |a| \leqq 4 \Rightarrow a \in \langle -4; 4\rangle \Rightarrow \log x \in \langle -4; 4\rangle \Rightarrow x \in \langle 10^{-4}; 10^4\rangle$
b) $\langle \frac{1}{3}; 27\rangle$ c) $(0; \frac{\sqrt{10}}{10^4}) \cup (\sqrt{10}; \infty)$ d) $(0; 10) \cup (1\,000; \infty)$ e) $\langle 10; 10^5\rangle$ f) $(\frac{1}{512}; 128\rangle$;
g) $(\frac{1}{4}; 1\,024)$

36 Substituce $\log x = a$, dostanete nerovnici s absolutními hodnotami
a) $\langle 10^{-4}; 100\rangle$ b) $(0; \frac{\sqrt{10}}{10}\rangle$

37 a) Substituce $|x| = a$, potom $\log a > 2 \Rightarrow a > 10^2 \Rightarrow |x| > 100 \Rightarrow (-\infty; -100) \cup (100; \infty)$
b) $\langle -13; 19\rangle - \{3\}$ c) $(-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{3}{2}; \infty)$ d) $(-\infty; -97\rangle \cup \langle 103; \infty)$
e) $(-15{,}5; 14{,}5) - \{-0{,}5\}$ f) $(-3\sqrt{10}; 0) \cup (0; 3\sqrt{10})$ g) $\langle -1; -\frac{3}{4}) \cup (-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\rangle$

38 a) $x \in \langle 3; 9\rangle$ b) $(10^{-3}; 100\rangle$, c) $\langle 16; 32\rangle$, d) $(\sqrt[3]{10}; 10)$

39 a) Substituce $\log_3 x = a \Rightarrow 1 \leqq |a| \leqq 2 \Rightarrow a \in \langle -2; -1\rangle \cup \langle 1; 2\rangle \Rightarrow \log_3 x \in \langle -2; -1\rangle \cup$
$\cup \langle 1, 2\rangle \Rightarrow x \in \langle \frac{1}{9}; \frac{1}{3}\rangle \cup \langle 3, 9\rangle$
b) $\langle 10^{-5}; 10^{-3}\rangle \cup \langle 10^3; 10^5\rangle$; c) $\langle \frac{1}{64}; \frac{1}{32}\rangle \cup (\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\rangle$ d) $(0{,}001; 0{,}1) \cup (10^{11}; 10^{13})$

40 a) Substituce $|x| = a \Rightarrow 1 \leqq \log_3 a \leqq 2 \Rightarrow a \in \langle 3^1; 3^2\rangle \Rightarrow |x| \in \langle 3; 9\rangle \Rightarrow x \in \langle -9; -3\rangle \cup$
$\cup \langle 3; 9\rangle$; b) $(-6; -3) \cup (3; 6)$ c) $(-96; 3\,999) \cup (4\,001; 104)$ d) $(-21; -\frac{6}{5}) \cup (-\frac{4}{5}; 19)$.

6 Goniometrické funkce a trigonometrie

6.1 Velikost úhlu — míra stupňová, míra oblouková

1 $\alpha = \frac{1}{9}\pi$, $\beta = \frac{10}{9}\pi$; $\gamma = \frac{7}{6}\pi$ $\delta = \frac{1}{20}\pi$ $\varepsilon = \frac{5}{9}\pi$ $\omega = \frac{1}{8}\pi$
2 $\alpha = 0{,}469$; $\beta = 2{,}725$ $\gamma = 3{,}881$ **3** $x_1 = 315°$ $x_2 = 450°$ $x_3 = 165°$
4 $y_1 = 13°45'$; $y_2 = 143°14'$ $y_3 = -89°57'$, $y_4 = 144°00'$ $y_5 = 0°10'$ $y_6 = 339°31' +$
$+ 159\,154 \cdot 360°$ **5** $165°$ popř. $195°$ $\frac{11}{12}\pi$ popř. $\frac{13}{12}\pi$

6.2 Orientovaný úhel

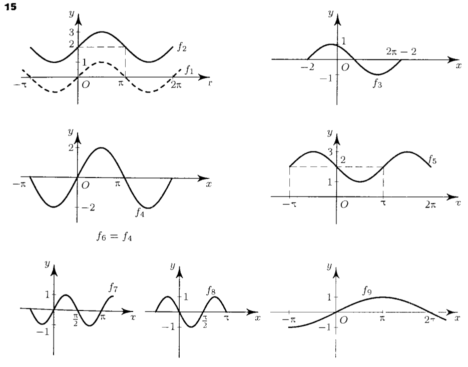
6 $\alpha \in$ II $\beta \in$ IV.; $\gamma \in$ I $\delta \in$ osa y^+ $x_1 \in$ III., $x_2 \in$ IV $x_3 \in$ I $x_4 \in$ II
7 $\alpha_0 = 32°$ $\beta_0 = 176°$ $\gamma_0 = 200°20'$ $\delta_0 = 354°05'$; $x_{1_0} = \frac{7}{4}\pi$ $x_{2_0} = 0$ $x_{3_0} = \frac{1}{3}\pi$
$x_{4_0} = 8 - 2\pi = 1{,}7168$

6.3 Hodnoty goniometrických funkcí $y = \sin x$, $y = \cos x$

8 a) $\frac{1}{2}$; 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$; c) $-0{,}5$; $-0{,}5$; 0 d) -1; $-0{,}5$; $-0{,}5$
9 a) $0{,}582\,8$; $-0{,}262\,5$ b) $-0{,}598\,8$; $-0{,}500\,0$ c) $0{,}841\,5$; $-0{,}871\,6$ d) $0{,}634\,7$; $-1{,}000\,0$
10 a) $\alpha_1 = 57°$ $\alpha_2 = 123°$ b) $\beta_1 = 306°$ $\beta_2 = 54°$ c) $\gamma_1 = 203°18'$ $\gamma_2 = 336°42'$
11 a) $\alpha_1 = 120°$ b) $\beta = 135°$; c) $\gamma_1 = 210°$ $\gamma_2 = 330°$ d) δ neexistuje
12 a) $x_1 = \frac{11}{6}\pi$, b) $x_2 = \frac{4}{3}\pi$ c) $x_3 = \frac{3}{2}\pi$, d) $x_{4_1} = \frac{1}{4}\pi$ $x_{4_2} = \frac{7}{4}\pi$
13 a) $\alpha_1 = 23°35'$, b) $\beta = 293°35'$ c) $\gamma_1 = 187°05'$ $\gamma_2 = 352°55'$
d) $\delta_1 = 55°24'$ $\delta_2 = 304°36'$
14 a) $x_{1_0} = 2{,}37$, b) $x_{2_0} = 3{,}94$ c) $x_{3_0} = 4{,}21$ $x_{3_1} = 5{,}21$ d) $x_{4_0} = 1{,}12$ $x_{4_1} = 5{,}16$

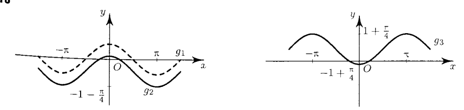
6.4 Grafy goniometrických funkcí $y = \sin x$, $y = \cos x$

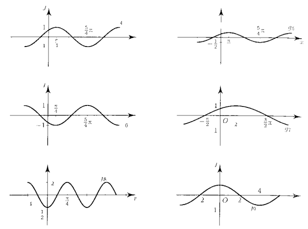
15



K řešení úlohy 15

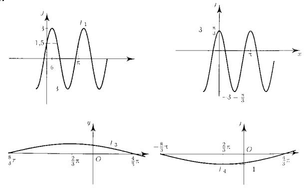
16

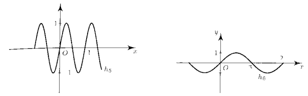




K řešení úlohy 16

17

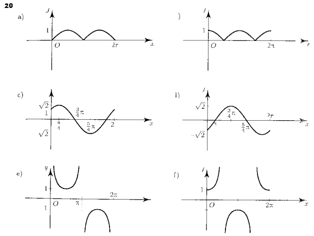




K řešení úlohy 1

18 $f\ = g_2$; $f_2 = g_3$; $f\ \ g_4$; $f_1 = g_1$. **19** a) až d) platí

20



K řešení úlohy 20

21 a) $A_1 > A_2$ b) $B_1\ \ B_2$ c) $C_1 > C_2$ d) $D\ < D_2$ e) $E_1 > E_2$ f) $F_1 < F_2$

6.5 Hodnoty goniometrických funkcí $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$

22 a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 0; 1 b) 1; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 0, c) -1; $-\sqrt{3}$; není def., d) $\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 0.

23 a) 1,629 7; 0,692 4; b) 2,669 9; −0,048 6; c) −2,185 0; 0,030 0; d) 3,916 3; 1,147 5.

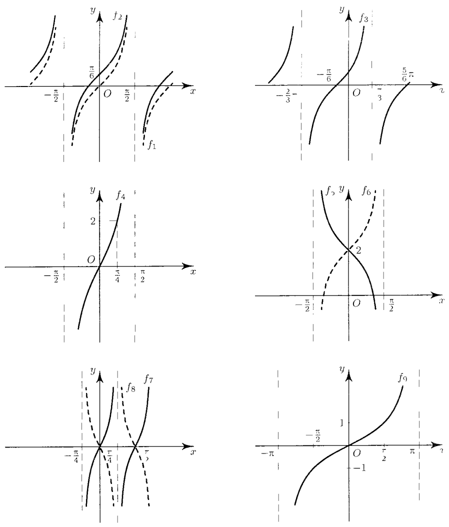
24 a) $x_1 = \frac{1}{3}\pi$; b) $x_2 = \frac{5}{4}\pi$; c) $x_{3_1} = 0$; $x_{3_2} = \pi$; d) $x_{4_1} = \frac{2}{3}\pi$; $x_{4_2} = \frac{5}{3}\pi$.

25 $\alpha = 54°28'$, $\alpha' = 234°28'$; $\beta = 84°17'$, $\beta' = 264°17'$; $\gamma = 168°41'$, $\gamma' = 348°41'$; $\delta = 95°43'$, $\delta' = 275°43'$; $\varepsilon = 26°34'$, $\varepsilon' = 206°34'$; $\varphi = 0°00'0{,}21'' \doteq 0°$, $\varphi' = 180°$; $\psi = 161°34'$, $\psi' = 341°34'$; $\omega = 90°03'$, $\omega' = 270°03'$.

26 $x_1 = 1{,}11$, $x_1' = 4{,}25$; $x_2 = 1{,}52$, $x_2' = 4{,}66$; $x_3 = 0{,}15$, $x_3' = 3{,}29$; $x_4 = 3{,}14$, $x_4' = 6{,}28$; $x_5 = 1{,}58$, $x_5' = 4{,}72$; $x_6 = 3{,}14$, $x_6' = 6{,}28$; $x_7 = 0{,}57$, $x_7' = 3{,}71$; $x_8 = 1{,}77$, $x_8' = 4{,}91$

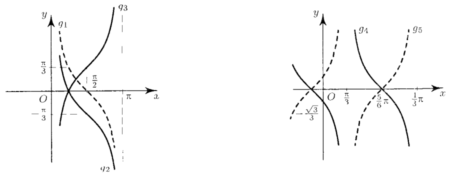
6.6 Grafy goniometrických funkcí $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{cotg}\, x$

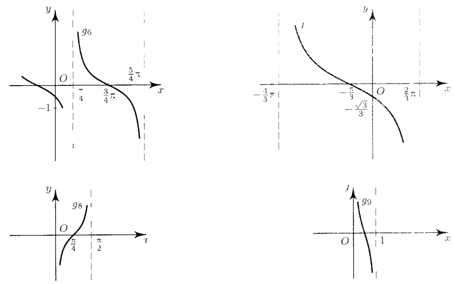
27



K řešení úlohy 27

28

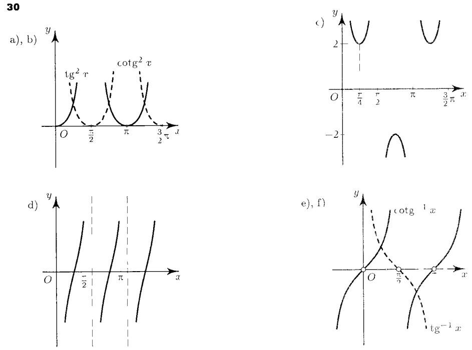




K řešení úlohy 28

29 $f_1 = g_4$, $f_2 = g_3$, $f_3 = g_4$ $f_4 = g_3$

30

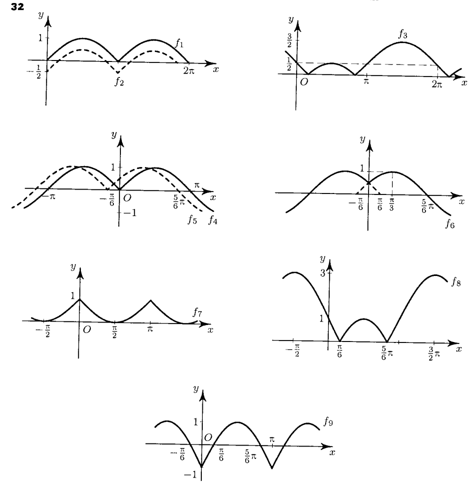


K řešení úlohy 30

31 a) $A_1 > A_2$ b) $B_1 > B_2$ c) $C_1 < C_2$ d) $D_1 < D_2$ e) $E_1 < E_2$ f) $F_1 > F_2$.

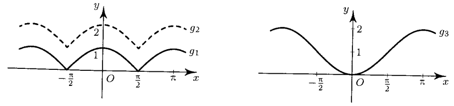
6.7 Grafy goniometrických funkcí s absolutními hodnotami

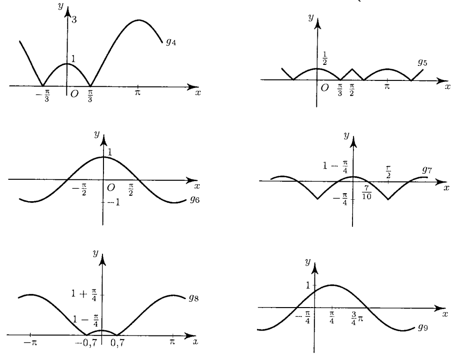
32



K řešení úlohy 32

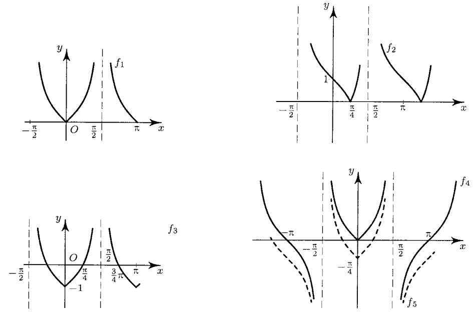
33

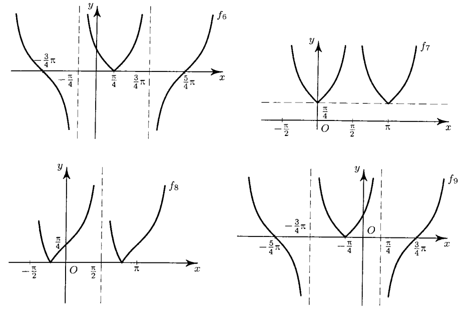




K řešení úlohy 33

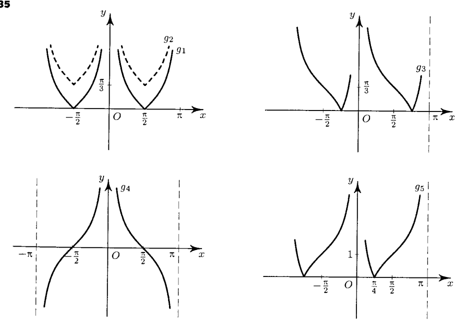
34

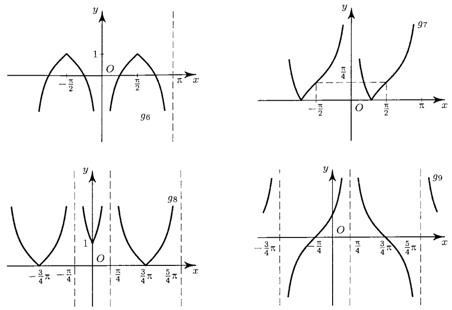




K řešení ulohy 34

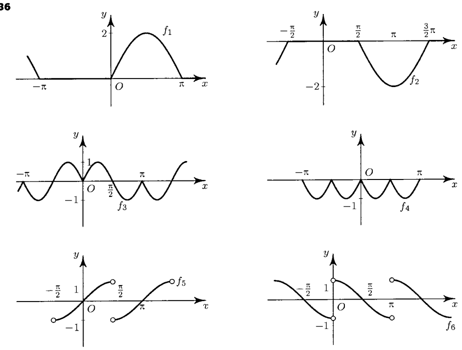
35





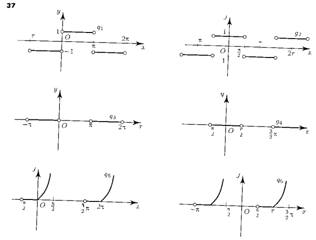
K řešení ulohy 35

36



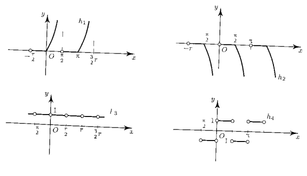
K řešení ulohy 36

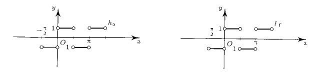
37



K řešení úlohy 37

38

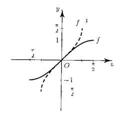




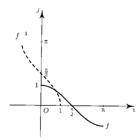
K řešení úlohy 38

6.8 Cyklometrické funkce

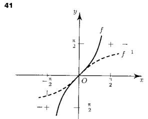
39



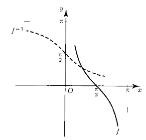
40



41



42



43 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, 0, $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{\pi}{3}$ **44** $24°30' \doteq 0{,}43$; není def.; $154°09' \doteq 2{,}69$; $138°35' \doteq 2{,}42$; $88°22' \doteq 1{,}54$; $-78°41' \doteq -1{,}37$; $51°20' \doteq 0{,}90$; $9°28' \doteq 0{,}17$

Goniometrické vzorce

6.9 Základní vztahy mezi funkcemi

45 a) $\sin x = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$; $\operatorname{cotg} x = \frac{4}{3}$; b) $\cos x = -\frac{5}{13}$; $\operatorname{tg} x = -\frac{12}{5}$; $\operatorname{cotg} x = \frac{5}{12}$, c) $\sin x = \frac{15}{17}$; $\cos x = \frac{8}{17}$; $\operatorname{cotg} x = \frac{8}{15}$; d) $\sin x = -\frac{24}{25}$; $\cos x = \frac{7}{25}$; $\operatorname{tg} x = -\frac{24}{7}$

46 a) $\sin^2 x$; $x \in \mathsf{R}$; b) $\sin x$; $x \in \mathsf{R}$; c) 1; $x \in \mathsf{R}$; d) 2; $x \in \mathsf{R}$; e) 1; $x \in \mathsf{R}$; f) $\sin^2 x$; $x \in \mathsf{R}$; g) 1; $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{k\frac{\pi}{2}\}$; h) $\frac{2}{\cos x}$; $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

i) $\frac{2}{\sin x}$, $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k\in \mathsf{Z}} \{k\pi\}$, j) 0, $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k\in \mathsf{Z}} \{k\pi\}$ k) 1 $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k\in \mathsf{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$,
l) $\frac{1}{\sin x}$, $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k\in \mathsf{Z}} \{k\frac{\pi}{2}\}$, m) $\cos^2 x$, $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k\in \mathsf{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$
n) 0, $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k\in \mathsf{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, o) 0, $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k\in \mathsf{Z}} \{k\pi\}$, p) $\sin x \cos x$, $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k\in \mathsf{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$,
q) 0, $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k\in \mathsf{Z}} \{k\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi + k\pi\}$, r) 0, $x \in \mathsf{R} - \bigcup_{k\in \mathsf{Z}} \{k\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi + k\pi\}$

47 Vždy upravíme levou stranu, pravou stranu a dokažeme, že $L = P$ U každe ulohy musime uvest, kdy výrazy mají smysl
a) $x \in \mathsf{R}$, b) $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathsf{Z}$, c) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$, d) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$,
e) $x \neq k\pi, k \in \mathsf{Z}$, f) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$, g) $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathsf{Z}$, h) $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathsf{Z}$,
i) $x \neq k\pi, k \in \mathsf{Z}$, j) $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathsf{Z}$, k) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$, l) $x \neq k\pi, k \in \mathsf{Z}$,
m) $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathsf{Z}$, n) $x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathsf{Z}$, o) $x \neq k\frac{\pi}{2}, x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$

48 a) $L = P$ pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$, b) $L = P$ pro $x \neq k\pi, k \in \mathsf{Z}$

6.10 Vzorce pro dvojnásobný úhel

49 a) $\sin 2x = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\cos 2x = -\frac{1}{8}$, $\operatorname{tg} 2x = 3\sqrt{7}$, $\sin 4x = \frac{3\sqrt{7}}{32}$, $\cos 4x = -\frac{31}{32}$;
b) $\sin 2x = \frac{24}{25}$, $\cos 2x = -\frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} 2x = -\frac{24}{7}$, $\sin 4x = -\frac{336}{625}$, $\cos 4x = -\frac{527}{625}$;
c) $\sin 2x = \frac{4}{5}$, $\cos 2x = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} 2x = \frac{4}{3}$, $\sin 4x = \frac{24}{25}$, $\cos 4x = -\frac{7}{25}$,
d) $\sin 2x = -\frac{10\sqrt{2}}{27}$, $\cos 2x = -\frac{23}{27}$, $\operatorname{tg} 2x = \frac{10\sqrt{2}}{23}$, $\sin 4x = \frac{460\sqrt{2}}{729}$, $\cos 4x = \frac{329}{729}$

50 a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos x = \frac{\sqrt{14}}{4}$, b) $\sin x = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{2}}$, $\cos x = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{2}}$

51 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

52 Vždy upravime levou stranu, pravou stranu a dokažeme, že $L = P$ U každe ulohy musime uvest, kdy vyrazy maji smysl
a) $x \in \mathsf{R}$, b) $x \in \mathsf{R}$, c) $x \in \mathsf{R}$, d) $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathsf{Z}$, e) $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathsf{Z}$,
f) $x \neq k\pi, k \in \mathsf{Z}$, g) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, x \neq \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathsf{Z}$,
h) $x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x \neq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, x \neq k\pi, k \in \mathsf{Z}$, i) $x \neq k\pi, x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$,
j) $x \neq k\pi, k \in \mathsf{Z}$, k) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in \mathsf{Z}$
l) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$ m) $x \in \mathsf{R}$, n) $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathsf{Z}$,
o) $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathsf{Z}$, p) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$, q) $x \neq k\pi, x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$,
r) $x \neq k\frac{\pi}{4}, k \in \mathsf{Z}$, s) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$, t) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$,
u) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathsf{Z}$, v) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$,
w) $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathsf{Z}$, z) $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathsf{Z}$

53 a) 1, $x \in \mathsf{R}$, b) 1, $x \in \mathsf{R}$, c) $-2\operatorname{cotg} x, x \neq k\pi, k \in \mathsf{Z}$,
d) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$, $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathsf{Z}$, e) 1, $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $k \in \mathsf{Z}$, f) $\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$, $x \neq k\pi, k \in \mathsf{Z}$,
g) 1, $x \in \mathsf{R}$, h) $\cos 4x$, $x \in \mathsf{R}$, i) $\frac{1}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$,
j) $-\operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$, k) 1, $x \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in \mathsf{Z}$,
l) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathsf{Z}$

6.11 Součtové vzorce

54 a) $\sin(x + y) = -\frac{19}{35}$, $\cos(x - y) = -\frac{8\sqrt{6}}{35}$, b) $\sin(x + y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(x + y) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$
55 Platí **56** Platí $\forall x \in \mathsf{R}$
57 a) až j) platí $\forall x \in \mathsf{R}$, k), l) platí $\forall x \in \mathsf{R} \wedge \forall y \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathsf{Z}$ **58** a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) -1
59 $\sin 3x = \sin(2x + x)$ atd

6.12 Vzorce pro součet a rozdíl goniometrických funkcí

60 a) $-\sin\alpha$, b) $\cos\beta$, c) $-\sqrt{2}\cos\gamma$, d) $\cos x$, e) 0, f) $\sqrt{2}\cos x$
63 a) $\sqrt{2}$, b) $\sqrt{3}$ **64** a) $\operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathsf{Z}$, b) $-\operatorname{cotg} x$, $x \neq k\pi, k \in \mathsf{Z}$

6.13 Vzorce pro poloviční úhel

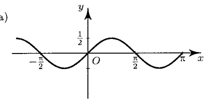
65 a) $\sin\frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, b) $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{26}}{26}$, $\cos\frac{x}{2} = \frac{-5\sqrt{26}}{26}$
66 Navod a) $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{6}$, b) $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{4}$, c) $15° = \frac{1}{2}$ $30°$, d) $22°30' = \frac{1}{2}$ $45°$
67 Navod
a) $\sin x = \sin(2\,\frac{x}{2}) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}).\cos^2\frac{x}{2}}{(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}):\cos^2\frac{x}{2}}$
atd $x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathsf{Z}$,
b) $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ atd $x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathsf{Z}$

68 $\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; $x \neq k\pi, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathsf{Z}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, $x \neq k\pi, k \in \mathsf{Z}$
69 Platí **70** Platí

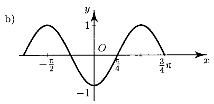
6.14 Grafy funkcí — užití vzorců

71

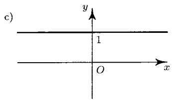
a)



b)

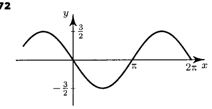


c)

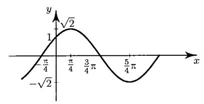


K řešení ulohy 71

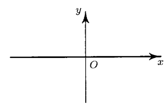
72



a) $f_1 + f_2 = -\frac{3}{2}\sin x$



b) $f_1 + f_2 = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$



c) $f_1 + f_2 = 0$

K řešení ulohy 72

6.15 Vztahy pro úhly v trojúhelníku

73 Návod $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ potom $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$ atd e) Neplatí pro pravoúhlý trojúhelník

6.16 Sinová a kosinová věta

74 a) $b = 6\,3\,\mathrm{cm}$ $c = 11{,}3\,\mathrm{cm}$ $\gamma = 84°$, b) $a = 10\,0\,\mathrm{cm}$, $c = 7\,1\,\mathrm{cm}$, $\gamma = 42°$,
c) $a = 12\,2\,\mathrm{cm}$, $b = 17\,2\,\mathrm{cm}$ $\beta = 112°00'$ d) $b = 4\,82\,\mathrm{cm}$, $c = 4{,}07\,\mathrm{cm}$ $\alpha = 78°41'$

75 a) $b = 10\,4\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 33°26'$, $\beta = 106°34'$, b) $\triangle ABC$ neex úloha nemá řeš
c) $a_1 = 10{,}6\,\mathrm{cm}$, $\beta_1 = 46°25'$ $\alpha_1 = 106°40'$, $a_2 = 3\,7\,\mathrm{cm}$ $\beta_2 = 133°35'$, $\alpha_2 = 19°30'$
d) $c = 5\,2\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 90°$ $\gamma = 60°$

76 a) $\alpha = 28°57'$, $\beta = 46°34'$, $\gamma = 104°29'$ b) $\triangle ABC$ neex , úloha nemá řeš
c) $c = 3{,}6\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 42°48'$, $\beta = 107°58'$, d) $b = 16\,9\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 20°06'$, $\gamma = 36°04'$

77 a) $a = 11{,}7\,\mathrm{cm}$, $b = 8{,}7$, b) $b_1 = 13{,}8\,\mathrm{cm}$ $c_1 = 10\,5\,\mathrm{cm}$, $b_2 = 3\,2\,\mathrm{cm}$, $c_2 = 4\,4\,\mathrm{cm}$
c) $b = 6{,}8\,\mathrm{cm}$, d) $c = 7{,}6\,\mathrm{cm}$, $b = 11{,}1\,\mathrm{cm}$
e) $b_1 = 11{,}4\,\mathrm{cm}$, $c_1 = 6{,}9\,\mathrm{cm}$, $b_2 = 3\,4\,\mathrm{cm}$, $c_2 = 12\,9\,\mathrm{cm}$
f) $a = 7{,}4\,\mathrm{cm}$, $b = 9{,}0\,\mathrm{cm}$, $c = 4{,}2\,\mathrm{cm}$

78 $\alpha = 48°11'$

79

a	2 cm	4 cm	6 cm	8 cm	10 cm
počet řeš	0	0	2	1	1
β	neex	neex	$41°49'$, $138°11'$	$30°$	$23°35'$

80 a) $\alpha = 43°17'$, $\beta = 91°09'$, $\gamma = 45°34'$ **81** a) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ $\gamma = 90°$

82 $\alpha = 22°20'$, $\beta = 49°27'$, $\gamma = 108°13'$

83 a b $c = 2\sqrt{2}$ $2\sqrt{3}$ $(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ **84** a) $c_1 = 5{,}4\,\mathrm{cm}$, $c_2 = 1{,}7\,\mathrm{cm}$

87 a) $|BD| = 10{,}6\,\mathrm{cm}$, $v_a = 4{,}0\,\mathrm{cm}$, $v_b = 4{,}6\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 131°43'$, $\beta = 48°17'$
b) $|BC| = 9{,}2\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ $|AC| = 19\,4\,\mathrm{cm}$ $v_b = 4{,}9\,\mathrm{cm}$ $\beta = 152°49'$

88 a) $\alpha = 85°28'$, $\beta = 52°53'$, $\gamma = 127°07'$ $\delta = 94°32'$

89 $|KN| = 9{,}5\,\mathrm{cm}$ $|\sphericalangle NKL| = 96°00'$

90 $|AB| = 65\,9\,\mathrm{m}$ **91** $31{,}2\,\mathrm{m}$ **92** $\Gamma = 100\,\mathrm{N}$, $|\sphericalangle F\Gamma_1| = 32°$ **93** $|\sphericalangle F_1F_2| = 76°$

94 $F_1 = 92\,\mathrm{N}$, $F_2 = 196\,\mathrm{N}$ **95** $|\sphericalangle F_1F_2| = 55°$, $|\sphericalangle F_2\Gamma_3| = 162°$, $|\sphericalangle F_1F_3| = 143°$

6.17 Vzorce pro obsah trojúhelníku, čtyřúhelníku

96 $S = 5\,\mathrm{cm}^2$ $v_b = 2\,5\,\mathrm{cm}$ **97** $S = 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ $v_a = 3\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $v_b = 2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $v_c = \frac{6}{7}\sqrt{21}\,\mathrm{cm}$

98 $S = 10\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$ $S_1 = \frac{5}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$ **99** $S = 8\,\mathrm{cm}^2$, $v_a = 1\,\mathrm{cm}$, $v_b = 4\,\mathrm{cm}$

100 $S = 15\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ **101** $S = 16(\sqrt{2} - 1)\,\mathrm{cm}^2 = 6{,}6\,\mathrm{cm}^2$

6.18 Vzorce pro poloměry kružnic trojúhelníku opsané a vepsané

102 $r = 3{,}0\,\mathrm{cm}$ $\varrho = 1\,2\,\mathrm{cm}$ **103** $r = 2{,}5\,\mathrm{cm}$ **104** $\varrho = 2\,\mathrm{cm}$

105 $\varrho_1 = 2{,}3\,\mathrm{cm}$, $\varrho_2 = 12\,8\,\mathrm{cm}$, $\varrho_3 = 5{,}7\,\mathrm{cm}$

6.19 Pravidelné mnohoúhelníky

106 $a = 7{,}05\,\mathrm{cm}$ $o = 35\,3\,\mathrm{cm}$, $S = 85{,}6\,\mathrm{cm}^2$ **107** $a = 8{,}7\,\mathrm{cm}$ $o = 43\,6\,\mathrm{cm}$, $S = 130\,8\,\mathrm{cm}^2$

108 a) $r = 7{,}3\,\mathrm{cm}$ b) $\varrho = 6{,}9\,\mathrm{cm}$

109 a) $S_{A_1A_2\ A_{12}}\ S_{S_1S_2\ S_{12}} = (8 - 4\sqrt{3})\ 1$ b) $\dfrac{S_{A_1A_2\ A_r}}{S_{S_1S_2\ S_r}} = 1\ \cos^2\dfrac{180°}{n}$

c) $S_{\mathrm{vepsaný}}\ S_{\mathrm{opsaný}} = \cos^2\dfrac{180°}{n}$

7 Goniometrické rovnice a nerovnice

7.1 Goniometrické rovnice

1 Základní typ a) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\}$ b) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{5}{4}\pi + 2k\pi, \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\}$,
c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\}$, d) $\bigcup_{k\in Z}\{\pi + 2k\pi\}$, e) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{3}\pi + k\pi\}$, f) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{5}{6}\pi + k\pi\}$

2 a) $\bigcup_{k\in Z}\{240° + k\ 360°, 300° + k\ 360°\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{60° + k\ 360°, 300° + k\ 360°\}$,
c) $\bigcup_{k\in Z}\{45° + k\ 180°\}$

3 a) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{3}\pi + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi\}$, c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\}$, d) $\bigcup_{k\in Z}\{2k\pi\}$

4 a) $\{75°58', 284°02'\}$, b) $\{91°38', 271°38'\}$, c) $\{51°51', 231°51'\}$

5 a) $\{1{,}41, 1{,}73\}$, b) $\emptyset$, c) $\{1{,}57, 4{,}72\}$

6 Substituce na základní typ Např v úloze d) $a = 2x - \frac{\pi}{4}$, podobně v ostatních případech
a) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{40}\pi + \frac{1}{5}k\pi, \frac{7}{40}\pi + \frac{1}{5}\pi\}$, c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{5}\pi + \frac{2}{5}k\pi\}$
d) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi + k\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi\}$, e) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{11}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi, \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi\}$, f) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{4} + \frac{1}{16}\pi + \frac{1}{4}k\pi\}$,
g) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{5}{6}\pi + k\pi\}$, h) $\bigcup_{k\in Z}\{1 + k\pi\}$, i) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{8}\pi + k\pi, \frac{5}{8}\pi + k\pi\}$, j) $\emptyset$

7 Substituce na kvadratickou rovnici Užijte že $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
a) $\bigcup_{k\in Z}\{2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\} = \bigcup_{k\in Z}\{\frac{2}{3}k\pi\}$,
b) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{1}{3}\pi + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\}$,
c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\}$, d) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\}$,
e) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi + 2k\pi, \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\}$, f) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{3}\pi + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\}$, g) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}\pi + k\pi, \frac{5}{6}\pi + k\pi\}$,
h) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}\pi + k\pi, \frac{5}{6}\pi + k\pi, \frac{1}{4}\pi + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi\}$, i) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi\}$, j) $\bigcup_{k\in Z}\{\mathrm{arctg}\,2 + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi\}$,
k) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi + k\pi\}$, l) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{3}\pi + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi, \frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$

8 a) Dosaďte $\mathrm{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$, potom dosaďte $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ a udělejte substituci $a = \sin^2 x$, b) analogicky, c) dosaďte $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, d) umocněte závorky, užijte $\mathrm{tg}\,x\ \mathrm{cotg}\,x = 1$, nezapomeňte podmínky
a) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{3}\pi + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi\}$, c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\}$, d) $R - \bigcup_{k\in Z}\{k\frac{\pi}{2}\}$

9 a) Nejdříve substituce $5x = a$, potom $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$, další substituce $\cos^2 a = b$ vede na kvadratickou rovnici
a) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi, \frac{4}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{2\pi + 6k\pi, 4\pi + 6k\pi\}$,
c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{48}\pi + \frac{1}{4}k\pi, \frac{5}{48}\pi + \frac{1}{4}k\pi, \frac{1}{16}\pi + \frac{1}{4}k\pi\}$, d) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{3}k\pi; \frac{1}{18}\pi + \frac{1}{3}k\pi, \frac{5}{18}\pi + \frac{1}{3}k\pi\}$

10 Vždy převeďte na jednu stranu, vytkněte Kdy se součin rovná nule? Úloha f) a dále je na postupné vytýkání
a) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi, \frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{1}{3}\pi + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi\}$
c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{2}\pi + k\pi, \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + k\pi\}$, d) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi, \frac{1}{3}\pi + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\}$,
e) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{1}{3}\pi + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi\}$, f) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{4}\pi + k\pi, \frac{1}{3}\pi + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi\}$,
g) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{3}\pi + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, \arcsin\frac{2}{5} + 2k\pi, \pi - \arcsin\frac{2}{5} + 2k\pi\}$, h) $\bigcup_{k\in Z}\{\pi + 2k\pi\ \frac{\pi}{6} + k\pi\ \frac{11}{6}\pi + k\pi\}$, i) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi\}$, j) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi + k\pi, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\}$

11 Rovnici dělte $\cos x$ a dosadte $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$

a) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi + k\pi\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{5}{6}\pi + k\pi\}$, c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{40}\pi + \frac{1}{10}k\pi\}$, d) $\bigcup_{k\in Z}\{\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + k\pi\}$

12 a) Rovnici dělte součinem $\sin x \cdot \cos x$ a dosadte $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ Po substituci $\operatorname{tg} x = a$ dostanete kvadratickou rovnici b) Nejdřive dosaďte $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, c) a dale nejprve upravte pravou stranu $2 \cdot 1 = 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$ atd

a) $\bigcup_{k\in Z}\{\operatorname{arctg} 2 + k\pi, -\operatorname{arctg} 3 + k\pi\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi\}$ c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi\}$

d) $\bigcup_{k\in Z}\{\operatorname{arctg} 3 + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi\}$, e) $\emptyset$, f) $\bigcup_{k\in Z}\{\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi, \operatorname{arctg} 5 + k\pi\}$

13 Užijte vzorec pro dvojnásobny úhel $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, potom v úlohach a) b) vytykejte, v úlohach c), d) dosaďte $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

a) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{1}{3}\pi + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\}$,

c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\}$, d) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\}$

14 Za součin $2\sin x\cos x$ dosadte $\sin 2x$ V úloze e) upravte $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1^2 - \frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$ V uloze f) upravte $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$ a rozložte podle vzorce $A^3 + B^3$, tj $(\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot (\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) = 1 \cdot [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x] = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$

a) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{12}\pi + k\pi, \frac{5}{12}\pi + k\pi\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{k\frac{\pi}{2}\}$, c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi + k\pi\}$,

d) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{8}\pi + k\frac{\pi}{4}\}$, e) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$, f) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$

15 Užijte vzorec pro dvojnasobny úhel $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ V uloze g) upravte $\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2$ a rozložte podle vzorce pro rozklad $A^2 - B^2$ Dostanete $(\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot (\sin^2 x - \cos^2 x)$ atd V uloze h) upravte $\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 - (\cos^2 x)^3$ a rozložte podle vzorce $A^3 - B^3$ a dale podobně jako v uloze 14 f)

a) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi, \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\} = \bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi\}$,

c) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi, \frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\}$, d) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi, \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\}$,

e) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, f) $\bigcup_{k\in Z}\{\pi + 2k\pi\}$, g) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\pi\}$, h) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\}$

16 Užijte vzorce pro dvojnásobny úhel

a) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi; \pi - \operatorname{arctg} 2 + k\pi\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{4}\pi + k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\}$,

c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\}$, d) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi\}$

17 Bud užijte substituce $2x = a$, nebo užijte $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$, $2\sin 2x\cos 2x = \sin 4x$

a) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{7}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{11}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{12}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{1}{6}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$, c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$,

d) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi\}$, e) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}, \frac{5}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$, f) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{7}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{11}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$,

g) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi, \frac{1}{12}\pi + k\pi, \frac{5}{12}\pi + k\pi\}$, h) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$

18 Buď užijte substituci $2x = a$, nebo užijte $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$, $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

a) $\bigcup_{k\in Z}\{k\frac{\pi}{2}, \frac{1}{8}\pi + k\pi, \frac{7}{8}\pi + k\pi\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{k\frac{\pi}{2}; \frac{1}{3}\pi + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi\}$, c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}, \frac{1}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$,

d) $\bigcup_{k\in Z}\{k\frac{\pi}{2}, \frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{1}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$, e) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}, \frac{1}{6}\pi + k\pi, \frac{5}{6}\pi + k\pi\}$,

f) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}, \frac{1}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$, g) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$

19 Substituce a), b) $2x = a$, v uloze c) $10x = a$, v uloze d) $4x = a$ atd

a) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}\pi + k\pi, \frac{5}{6}\pi + k\pi, k\frac{\pi}{2}\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi, \frac{1}{3}\pi + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi\}$,

c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{60}\pi + k\frac{\pi}{5}, \frac{1}{12}\pi + k\frac{\pi}{5}, \frac{3}{20}\pi + k\frac{\pi}{5}\} = \bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{60}\pi + k\frac{\pi}{15}\}$,

d) $\bigcup_{k\in Z}\{k\frac{\pi}{4}, \frac{3}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}, \frac{5}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$, e) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}k\pi\}$, f) $\bigcup_{k\in Z}\{k\frac{\pi}{3}, \frac{1}{9}\pi + \frac{1}{3}k\pi, \frac{2}{9}\pi + \frac{1}{3}k\pi\}$

20 Substituce $\frac{x}{2} = a$, v uloze d), f) $\frac{x}{4} = a$, v uloze e) $\frac{x}{8} = a$ atd

a) $\bigcup_{k\in Z}\{2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 4k\pi, \frac{7}{3}\pi + 4k\pi\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{2k\pi, \frac{1}{3}\pi + 4k\pi, \frac{5}{3}\pi + 4k\pi\}$

c) $\bigcup_{k\in Z}\{\pi + 2k\pi, \frac{7}{3}\pi + 4k\pi, \frac{11}{3}\pi + 4k\pi\}$, d) $\bigcup_{k\in Z}\{2\pi + 4k\pi, \frac{2}{3}\pi + 8k\pi, \frac{10}{3}\pi + 8k\pi\}$,

e) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{28}{3}\pi + 16k\pi, \frac{44}{3}\pi + 16k\pi, 4\pi + 16k\pi\} = \bigcup_{k\in Z}\{4\pi + \frac{16}{3}k\pi\}$,

f) $\bigcup_{k\in Z}\{4k\pi, \frac{2}{3}\pi + 8k\pi, \frac{22}{3}\pi + 8k\pi\}$

21 Převedte na jednu stranu, užijte vzorce pro součet a rozdil goniometrickych funkci např $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ V uloze e) nejdřive užijte, že $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ V uloze g) nejdřive sečtěte $\sin x + \sin 2x = 2\sin 2x\cos(-x)$, potom vytkněte Analogicky dale

a) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{14}\pi + \frac{2}{7}k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}\pi + k\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi + k\pi\}$, c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}k\pi, \frac{1}{8}\pi + k\frac{\pi}{4}\}$,

d) $\bigcup_{k\in Z}\{-\frac{3}{7} + \frac{2}{7}k\pi, -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}k\pi\}$, e) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{4}{7}k\pi, \frac{2}{5}\pi + \frac{4}{5}k\pi\}$, f) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi\}$,

g) $\bigcup_{k\in Z}\{k\frac{\pi}{2}; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\} = \bigcup_{k\in Z}\{\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi, \pi + 2k\pi\}$,

h) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}k\pi, \frac{1}{3}\pi + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi\} = \bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{1}{6}\pi + k\frac{\pi}{2}; \frac{1}{3}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$,

i) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}k\pi, \frac{1}{12}\pi + k\pi, \frac{5}{12}\pi + k\pi\}$, j) $\bigcup_{k\in Z}\{2k\pi, \frac{3}{10}\pi + \frac{2}{5}k\pi\}$

22 V uloze a) až f) užijte vzorce pro součet a rozdil goniometrickych funkci, naopak v úlohach g) až h) užijte součtove vzorce, tj např v uloze g) nejprve upravte $\sin(60° - x) = \sin 60°\cos x - \cos 60°\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$ atd

a) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{\pi + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\}$, c) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi\}$,

d) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi, \frac{1}{4}\pi + 2k\pi, \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\}$, e) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}\pi + 2k\pi, 2k\pi\}$,

f) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{1}{3}\pi + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\}$, g) $\bigcup_{k\in Z}\{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi\}$, h) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{4}\pi + k\pi\}$,

i) $\emptyset$, j) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi\}$, k) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}\pi + k\pi, \frac{5}{6}\pi + k\pi\}$

23 K dané rovnici dopište rovnici $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, potom substituce $\sin x = a$, $\cos x = b$ a ulohu řešte jako soustavu Jiny způsob substituce $x = 2a$, potom užijte vzorce $\sin 2a$, $\cos 2a$ a dale viz ulohu 12

a) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\}$, b) $\bigcup_{k\in Z}\{2k\pi, \arcsin\frac{4}{5} + 2k\pi\}$, c) $\emptyset$,

d) $\bigcup_{k\in Z}\{2k\pi, \pi + \arcsin\frac{4}{5} + 2k\pi\}$, e) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{3}\pi + 2k\pi\}$,

f) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \pi + \arcsin 0{,}8 + 2k\pi\}$, g) $\emptyset$, h) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, 2\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{10} + 2k\pi\}$

24 a) Užijte vzorce $A^3 - B^3$, $A^2 - B^2$ Je-li $\sin x - \cos x = 0$ dostanete prvni řešeni Je-li vyraz $\sin x - \cos x \neq 0$ lze závorkou dělit Po dosazeni $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a postupném vytýkaní dostanete další řešení $\bigcup_{k\in Z}\{2k\pi, \frac{1}{4}\pi + k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$,

b) Vzorce $A^3 + B^3$, $A^2 - B^2$ a postupujte jako v uloze a), $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{4}\pi + k\pi, \pi + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$,

c) Vzorec $\cos 2x$, rozložit, $\bigcup_{k\in Z}\{2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi\}$,

d) Upravte $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \sin x\cos x$, vzorec $A^3 + B^3$, $\bigcup_{k\in Z}\{2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$,

e) Odstraňte zlomky, nezapomeňte na podminky, $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$,

f) $\sin^4 x + \cos^4 x$ upravte stejně jako v uloze 14 e), $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi\}$,

g) $\sin^6 x + \cos^6 x$ upravte stejně jako v uloze 14 f), $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}\}$,

h) Dosadte za $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, nezapomeňte na podmínky, $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi + k\pi, \frac{1}{12}\pi + k\pi, \frac{5}{12}\pi + k\pi\}$,

i) Odstraňte zlomek, převedte na jednu stranu, vytkněte, $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{1}{4}\pi+k\pi\}$,

j) Odstraňte zlomek, potom viz ulohu 12, $\emptyset$,

k) Odstraňte zlomek, potom viz ulohu 7, $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{2}{3}\pi+2k\pi, \frac{4}{3}\pi+2k\pi\}$,

l) Dosadte za $\operatorname{tg} x$, $\sin 2x$ Upravte $1+\sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = (\sin x + \cos x)^2$ Nezapomeňte na podmínky, $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi\ \frac{3}{4}\pi+k\pi\}$,

m) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{2}\pi+k\pi, \frac{1}{6}\pi+2k\pi, \frac{5}{6}\pi+2k\pi\}$, n) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{2}\pi+2k\pi, \frac{1}{4}\pi+k\pi\}$,

o) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi, \frac{1}{4}\pi+k\frac{\pi}{2}\}$, p) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{6}\pi+2k\pi, \frac{5}{6}\pi+2k\pi\}$,

V q), s) odstraňte zlomky a dale postupujte jako v uloze 12,

q) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{4}\pi+k\pi, \operatorname{arctg}\frac{3}{2}+k\pi\}$, r) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi+k\pi, \operatorname{arctg}3+k\pi\}$,

s) Dosadte za $\operatorname{tg} x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$ Je-li $\cos x + \sin x = 0$ dostanete první řešení, je-li $\cos x + \sin x \neq 0$ můžete dělit Potom odstraňte zlomek a upravte $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x$, $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{4}\pi+k\pi, \frac{1}{12}\pi+k\pi, \frac{5}{12}\pi+k\pi\}$,

t) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{4}\pi+k\pi\}$, u) $\bigcup_{k\in Z}\{k\pi, \frac{2}{3}\pi+k\pi\}$,

v) Užijte, že $\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{cotg} x$, dosadte za $\operatorname{cotg} x$, $\cos 2x$ a dostanete $\sin x\cos x + \cos^2 x = 2\sin^2 x$ Dále viz úlohu 12, $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{1}{4}\pi+k\pi, \pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi\}$

25 a) Ze druhé rovnice je $x - y = \frac{\pi}{3}+k\pi$, ze soustavy dopočítejte x, jen pozor, aby řešení bylo v požadovaném intervalu, $[\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi]$,

b) postup viz a) $[\frac{17}{12}\pi, \frac{3}{4}\pi]$, $[\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{12}\pi]$, $[\frac{7}{4}\pi; \frac{13}{12}\pi]$,

c) $x = \frac{5}{6}\pi - y$, dosadit do druhe rovnice, součtový vzorec, $[\frac{5}{6}\pi, 0]$, $[\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi]$,

d) postup viz c) $[\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi]$,

e) Substituce $\sin x = a$, $\cos x = b$, $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, $[\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi]$,

f) Substituce $x+2y=a$, $2x+y=b \Rightarrow a, b$ atd $[\frac{8}{9}\pi, \frac{5}{9}\pi]$, $[\frac{10}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi]$, $[\frac{14}{9}\pi, \frac{11}{9}\pi]$, $[\frac{16}{9}\pi, \frac{10}{9}\pi]$

7.2 Goniometrické nerovnice

26 a) $\bigcup_{k\in Z}\langle\frac{1}{3}\pi+2k\pi, \frac{2}{3}\pi+2k\pi\rangle$, b) $\bigcup_{k\in Z}(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{3}{4}\pi+k\pi)$, c) $\bigcup_{k\in Z}(\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi)$,

d) $\bigcup_{k\in Z}(k\pi, \frac{3}{4}\pi+k\pi)$, e) $\bigcup_{k\in Z}(\frac{1}{6}\pi+k\pi, \frac{1}{3}\pi+k\pi)$,

f) $\bigcup_{k\in Z}\{(\frac{1}{3}\pi+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle \cup \langle\frac{3}{2}\pi+2k\pi, \frac{5}{3}\pi+2k\pi)\}$

27 a) $\bigcup_{k\in Z}\langle\frac{1}{4}\pi+k\pi, \frac{3}{4}\pi+k\pi\rangle$, b) $\bigcup_{k\in Z}\langle-\frac{1}{4}\pi+k\pi, \frac{1}{4}\pi+k\pi\rangle$, c) $\mathsf{R} - \bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$,

d) R, e) $\bigcup_{k\in Z}\langle\frac{5}{12}\pi+k\pi; \frac{13}{12}\pi+k\pi\rangle$, f) $\bigcup_{k\in Z}(-\pi+4k\pi, \pi+4k\pi)$

28 Znázorněte na grafu

a) $\bigcup_{k\in Z}\langle\frac{1}{4}\pi+2k\pi; \frac{5}{4}\pi+2k\pi\rangle$, b) $\bigcup_{k\in Z}(\frac{3}{4}\pi+2k\pi, \frac{7}{4}\pi+2k\pi)$,

c) $\bigcup_{k\in Z}\{\langle\frac{1}{4}\pi+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)\cup\langle\frac{3}{4}\pi+k\pi, \pi+k\pi)\} = \bigcup_{k\in Z}(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2})$

29 a), b) Kdy je součin kladny? Kdy je součin zaporný? c) až f) nejprve upravte na součin

a) $(0, \frac{\pi}{2})\cup(\pi, \frac{3}{2}\pi)$, b) $(\pi, 2\pi) - \{\frac{3}{2}\pi\}$, c) $\langle\frac{\pi}{3}; \pi\rangle\cup(\frac{5}{3}\pi, 2\pi\rangle$, d) $\{\frac{\pi}{2}\}\cup\langle\pi, 2\pi\rangle$,

e) $(0,\pi)\cup(\pi, 2\pi)$, f) $(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi)\cup(\pi, 2\pi)$

30 a), b) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, po substituci kvadraticka nerovnice

a) $\bigcup_{k\in Z}(\frac{1}{3}\pi+2k\pi, \frac{5}{3}\pi+2k\pi)$, b) R,

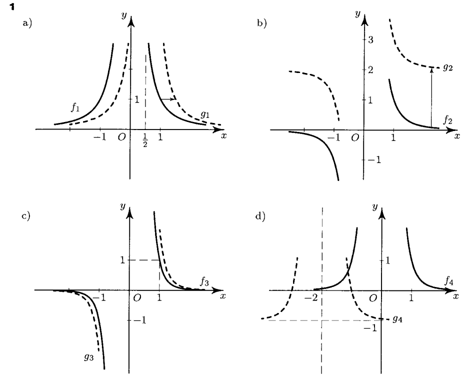
c) $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, po substituci kvadraticka nerovnice $\mathsf{R} - \bigcup_{k\in Z}\{k\frac{\pi}{4}\}$,

d) Upravte na $1+\sin 2x > \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x > -\frac{1}{2}$ $\bigcup_{k\in Z}(-\frac{\pi}{12}+k\pi, \frac{7}{12}\pi+k\pi)$

8 Mocninné funkce. Lineární lomená funkce

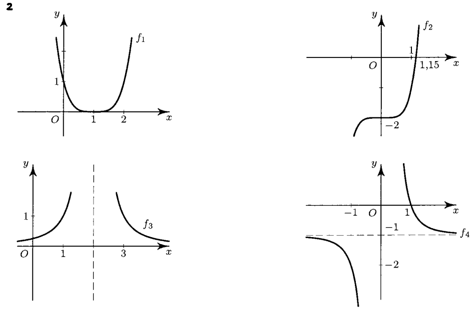
8.1 Grafy mocninných funkcí

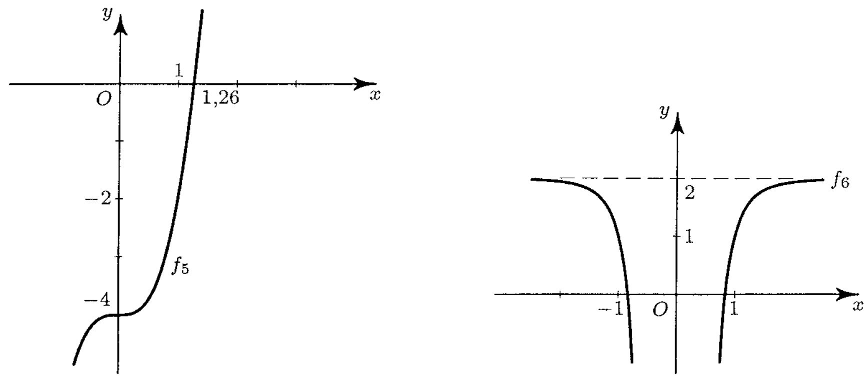
1



K řešení ulohy 1

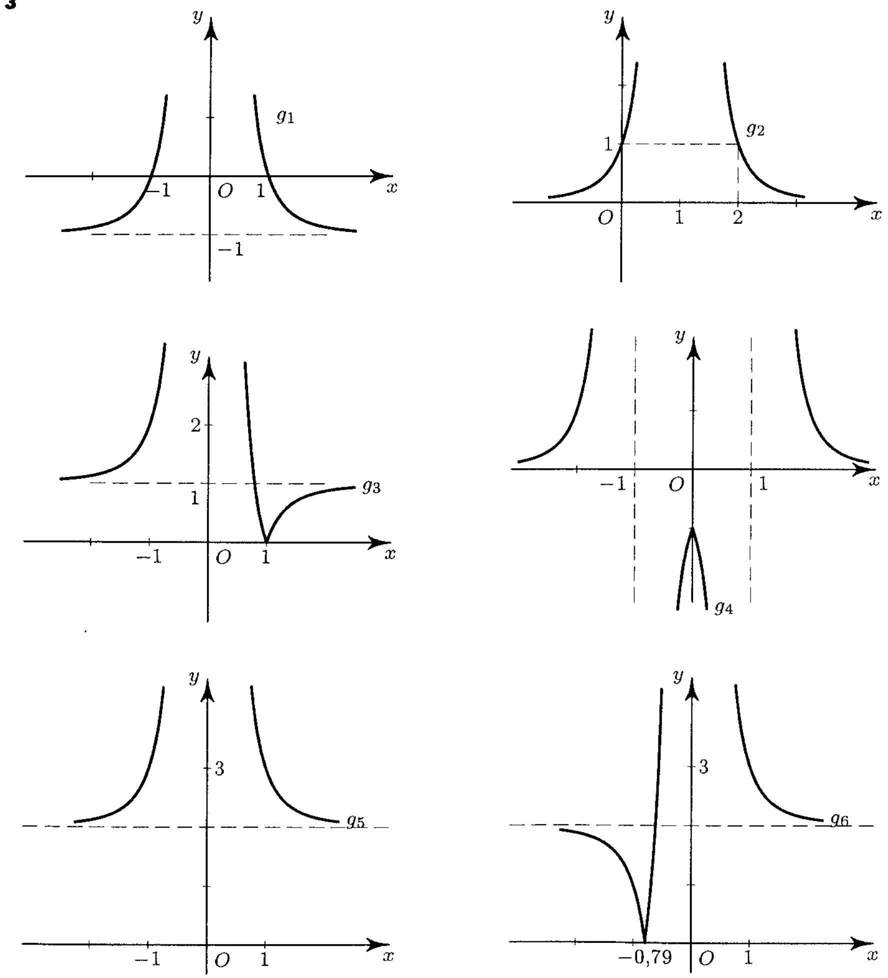
2





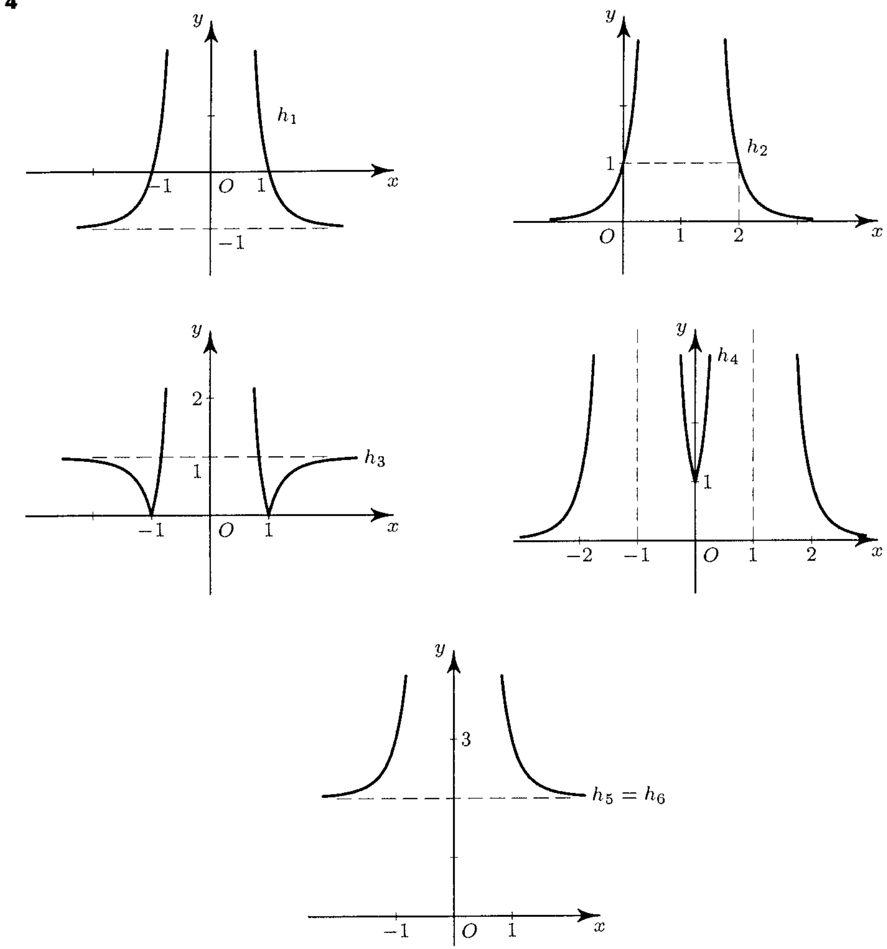
K řešení úlohy 2

3



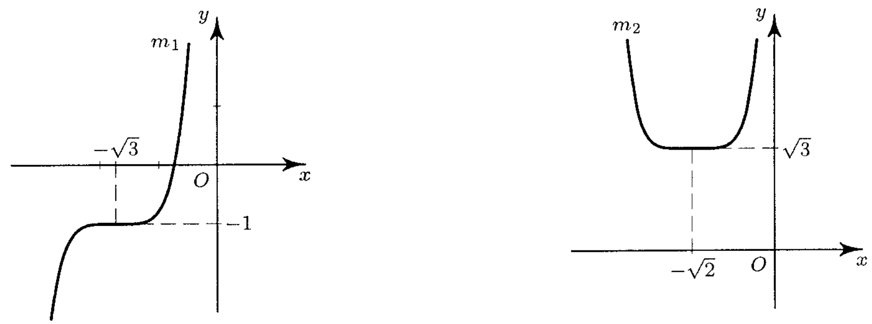
K řešení úlohy 3

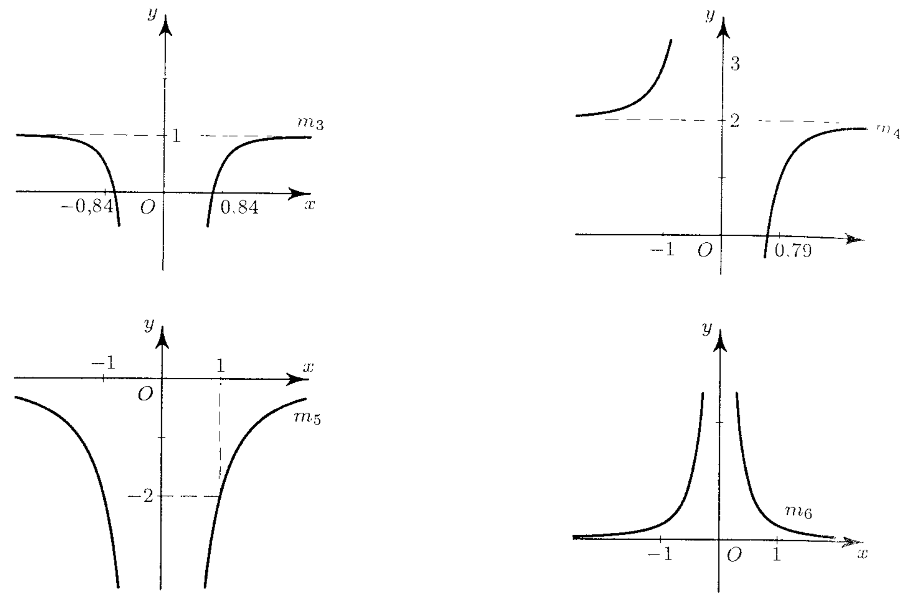
4



K řešení úlohy 4

5



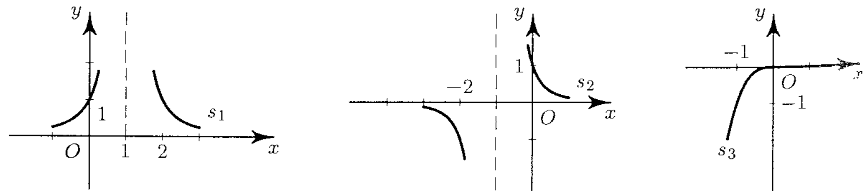


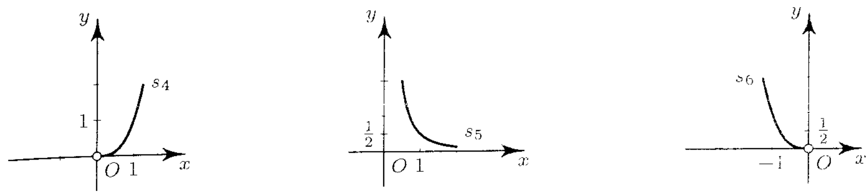
K řešení úlohy 5

6

K řešení úlohy 6

7



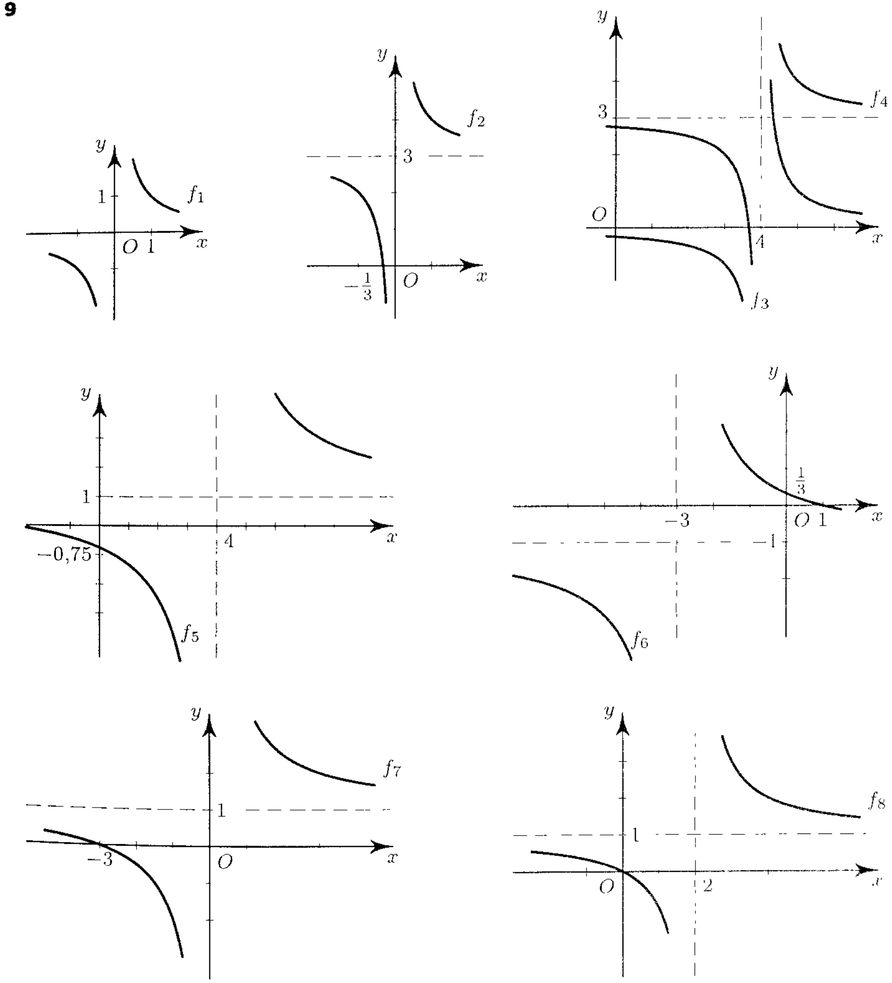


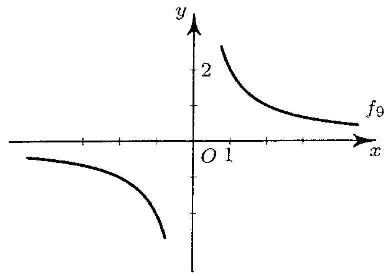
K řešení úlohy 7

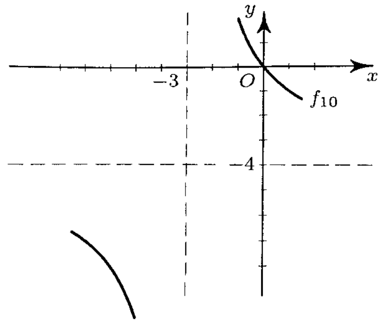
8 a) $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$; b) $(-\infty;-1)\cup\langle 0;\infty)$; c) $(-\infty;0)\cup(0;1)$; d) $(0;1)$; e) $(-\infty;0)$; f) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$; g) $(-\infty;-1)$; h) $\langle -1;0)\cup(0;\infty)$.

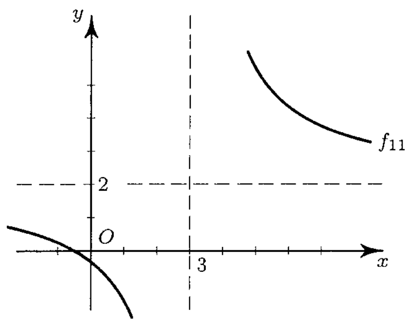
8.2 Grafy lineárních lomených funkcí

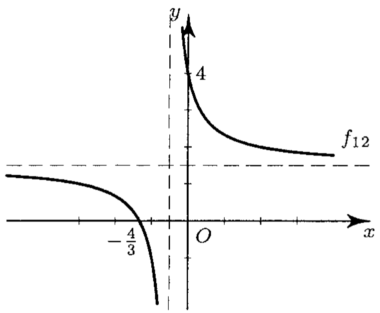
9





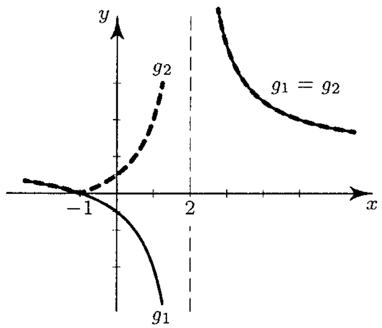


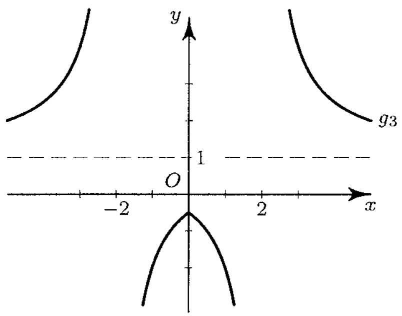


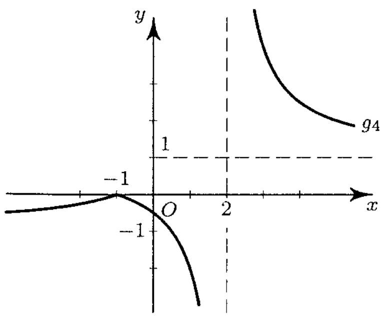


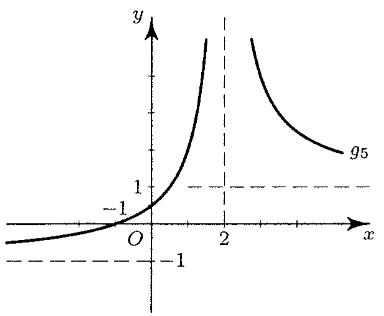
K řešení úlohy 9

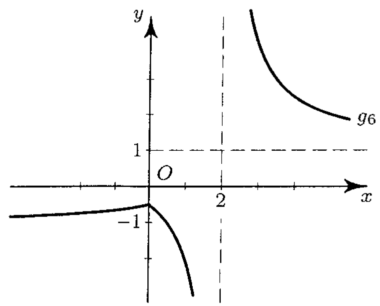
10











K řešení úlohy 10

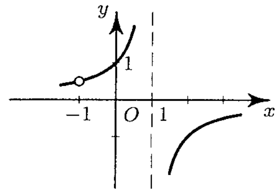
11 a) $(-\infty; -\frac{1}{2}\rangle \cup (2;\infty)$; b) $\langle -3; 2)$; c) $\langle 1; 2) \cup (2; 7\rangle$.

12 $\forall a \in \{-4; -3; -1; 0; 1; 2\}$ je grafem hyperbola. Střed $S[1;2]$, asymptoty: $x = 1$, $y = 2$. Parametr a ovlivňuje polohu větví hyperboly. Pro $a = -2$ je daná funkce lineární $y = 2$.

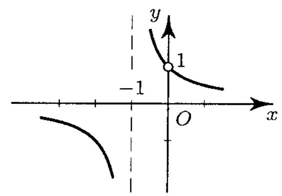
13 Všechny hyperboly mají jednu asymptotu $y = 2$, průsečík s osou x $P_x[-\frac{1}{2}; 0]$. Parametr b ovlivňuje asymptotu $x = -b$ a polohu větví hyperboly.

14 Všechny hyperboly mají jednu asymptotu $x = 0$, průsečík s osou x $P_x[-\frac{1}{2}; 0]$. Parametr c ovlivňuje asymptotu $y = \frac{2}{c}$ a polohu větví hyperboly.

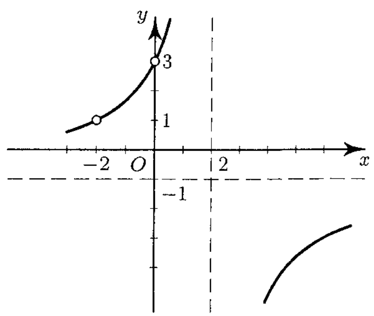
15



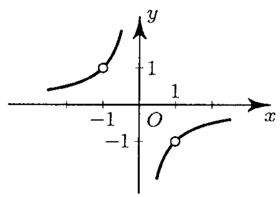
a) $y = -\frac{1}{x-1}$; D = R − {±1}



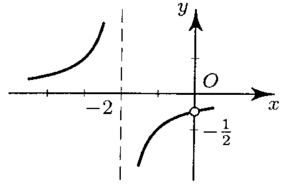
b) $y = \frac{1}{x+1}$; D = R − {−1; 0}



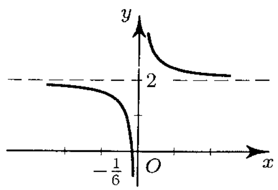
c) $y = \frac{x+6}{2-x}$; D = R − {0; ±2}



d) $y = -\frac{1}{x}$; D = R − {0; ±1}



e) $y = -\frac{1}{x+2}$; $D = R - \{-2; 0\}$



f) $y = \frac{1}{3x} + 2$; $D = R - \{0\}$

K řešení úlohy 15

8.3 Inverzní funkce k funkcím mocninným

16 f_1^{-1} k f_1 ex. např. v R_0^+, $y = \sqrt{x}$;
f_2^{-1} k f_2 ex. v $D(f_2) = R$, $y = \sqrt[3]{x}$;
f_3^{-1} k f_3 ex. např. v R_0^+, $y = \sqrt[6]{x}$;
f_4^{-1} k f_4 ex. např. v R^+, $y = \sqrt{x^{-1}}$;
f_5^{-1} k f_5 ex. v $D(f_5) = R - \{0\}$, $y = \sqrt[3]{x^{-1}}$;
f_6^{-1} k f_6 ex. např. v R^+, $y = \sqrt[6]{x^{-1}}$;
f_7^{-1} k f_7 ex. např. v $\langle -2; \infty)$, $y = \sqrt{x+1} - 2$;
f_8^{-1} k f_8 ex. např. v R_0^+, $y = \sqrt{4-x}$;
f_9^{-1} k f_9 ex. v $D(f_9) = R$, $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$.

17 g_1^{-1} k g_1 ex. v $D(g_1) = R_0^+$, $y = x^2$;
g_2^{-1} k g_2 ex. v $D(g_2) = \langle -2; \infty)$, $y = x^2 - 2$;
g_3^{-1} k g_3 ex. v $D(g_3) = \langle 0; \infty)$, $y = (x-2)^2$;
g_4^{-1} k g_4 ex. v $D(g_4) = R$, $y = x^3$;
g_5^{-1} k g_5 ex. v $D(g_5) = R$, $y = x^3 + 2$;
g_6^{-1} k g_6 ex. v $D(g_6) = R$, $y = (\frac{x}{2})^3 + 2$;
g_7^{-1} k g_7 ex. v $D(g_7) = \langle 1; \infty)$, $y = (\frac{x-3}{2})^2 + 1$;
g_8^{-1} k g_8 ex. v $D(g_8) = (-\infty; 1)$, $y = 1 - (\frac{x}{2})^4$;
g_9^{-1} k g_9 ex. v $D(g_9) = R$, $y = (x+1)^5$.

8.4 Inverzní funkce k funkci lineární lomené

18 $h_1^{-1}\colon y = \frac{1}{x}$; $h_2^{-1}\colon y = \frac{1}{x+2}$; $h_3^{-1}\colon y = \frac{1+2x}{x}$; $h_4^{-1}\colon y = \frac{2x+1}{x-1}$; $h_5^{-1}\colon y = \frac{x+3}{x-2}$;
$h_6^{-1}\colon y = \frac{x-4}{x+1}$.

Počítání s odmocninami a s mocninami

8.5 Počítání s odmocninami

19 a) 6; b) 45; c) 2; d) $-4 - 3\sqrt{15}$; e) 0; f) 6; g) 61; h) $4 + 2\sqrt{10}$;
i) $-6 - 2\sqrt{15}$.

20 a) 6; b) 2; c) 3; d) $\sqrt{5} + \sqrt{6}$; e) $3\sqrt{3} - \frac{3}{2} + \sqrt{2}$; f) $\frac{1}{3}$.

21 a) 2; b) 2; c) 24; d) $1 + \sqrt[4]{54} - \sqrt[4]{24}$; e) $2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{2}$; f) $\sqrt[4]{5} + 1$.

22 a) $8\sqrt{3}$; b) $68\sqrt{2}$; c) $2\sqrt{2}$; d) $25\sqrt{2}$; e) $4\sqrt{3}$; f) $30\sqrt{3}$.

23 a) $9\sqrt[3]{2}$; b) $4\sqrt[3]{5}$; c) 0; d) $-\sqrt[3]{4}$. **24** a) $7\sqrt[4]{3}$; b) $4\sqrt[4]{5}$.

25 a) $\sqrt{28}$; b) $\sqrt{75}$; c) $\sqrt[3]{128}$; d) $\sqrt[4]{324}$.

26 a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $2\sqrt{6}$; c) $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{21}$; d) $5 + 2\sqrt{5}$; e) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; f) $\frac{\sqrt{7}-1}{6}$; g) $10\sqrt{3} + 15$;
h) $\sqrt{2}$; i) $\frac{4}{3} + \sqrt{2}$; j) $\frac{19-5\sqrt{3}}{22}$; k) $\sqrt{15} - 4$; l) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

27 a) $\frac{3}{2}\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{6} + \sqrt{3}$; b) $1 + \sqrt{2}$.

28 a) $A_1 < B_1$; b) $A_2 = B_2$; c) $A_3 > B_3$.

29 $v(x_1) = \frac{5}{2}\sqrt{2}$; $v(x_2) = 2\sqrt{2}$; $v(x_3) = \frac{41}{10}\sqrt{5}$; $v(x_4) = \frac{13}{2} - \frac{11}{6}\sqrt{3}$;
$v(x_5) = -1 - 3\sqrt{2}$; $v(x_6) = \frac{27}{4} + \frac{7}{4}\sqrt{5}$; $v(x_7) = 6\sqrt{2} + \sqrt{7}$; $v(x_8) = \frac{7}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{6}$;
$v(x_9) = \frac{5}{2} + \frac{9}{4}\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$.

30 a) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$; b) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$; c) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}$; d) $\frac{1}{10}\sqrt[4]{1\,000}$; e) $\frac{1}{10}\sqrt{10}$; f) $\frac{1}{10}\sqrt[4]{10}$; g) $\frac{3}{2}\sqrt[5]{4}$;
h) $3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} + 3$; i) $\frac{3}{10}\sqrt[3]{36} - \frac{3}{10}\sqrt[3]{24} + \frac{3}{10}\sqrt[3]{16}$.

31 a) 2; b) 3.

32 a) $3 + 2\sqrt{2}$; b) $81 - 30\sqrt{2}$; c) $85 + 60\sqrt{2}$; d) $37 - 30\sqrt{3}$; e) $20 + 14\sqrt{2}$;
f) $20\sqrt{2} + 12\sqrt{6}$; g) $9 + 4\sqrt{5}$; h) $7 - 4\sqrt{3}$; i) $7 + 5\sqrt{2}$.

33 a) $|a|$; b) $10z^2|x^3y|$; c) $|a+b|$; d) nelze odmocnit; e) $|x-3|$; f) $|0{,}5m + 1|$.

34 a) $\frac{24}{5}\sqrt{5} - 5$; b) $17 + 12\sqrt{3}$; c) $-113 + 84\sqrt{2}$.

35 a) $2 + \sqrt{3}$; b) $\frac{9}{2}$; c) $3\sqrt{5} - 7$; d) $6\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$; e) 1; f) $\frac{33}{4}$; g) $\frac{41}{4}$.

36 a) 1; b) $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

8.6 Počítání s mocninami s celým exponentem

37 a) 2^5; b) 5^4; c) 2^n; d) x^{15}; e) x^{2n+2}; f) a^3b^7.

38 a) 4^2; b) 7^{n-1}; c) 2^{-n}; d) 1; e) y^n; f) $(ab)^{1-k}$.

39 a) $8x^3$, $x \in R$; b) $\frac{9}{256}$; c) $\frac{16}{3x}$, $x \neq 0$; d) $-x^{20}y^{-10}$, $x, y \neq 0$; e) $(\frac{y}{x})^{12}$, $x, y \neq 0$;
f) $8x^{12}y^{11}$, $x, y \neq 0$.

40 a) 2; b) 1; c) x; d) 2; e) $\frac{1}{x}$; f) neurčitý výraz.

41 a) -1; b) -1; c) -1; d) 1; e) 1; f) -1.

42 a) $\frac{1}{2}$; b) $26\frac{1}{4}$; c) $6\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{36}$; e) 49; f) $\frac{1}{4}$; g) $1\,250$; h) $-\frac{5}{16}$.

43 a) $\frac{x^4}{9}$, $x \neq 0$; b) xy, $x, y \neq 0$; c) $\frac{15}{8}b^2$, $a, b \neq 0$; d) $\frac{a^4c^6d}{b}$, $a, b, x, y \neq 0$;
e) 4, $n \neq 0$; f) $(\frac{m}{2})^7$, $m \neq 0$.

44 a) $\frac{9}{5}$; b) $5^3 \cdot 3^{4n}$; c) $42^{3n} \cdot 5^{7-n}$, $r, s \neq 0$.

45 a) $6 \cdot x^{3n-5} \cdot y^{8n-12}$, $x, y \neq 0$; b) $2^{-8}a^9b^{-13}$, $a, b \neq 0$; c) $3^{-4}r^{-4}s^{10n-2}$, $r, s \neq 0$.

46 a) x^2, $x \neq 0$, $x \neq -6$; b) $y - 1$, $y \neq 0$, $y \neq -1$; c) $\frac{a^x+3}{a^x-3}$, $a^x \neq \pm 3$, $y \neq -1$; d)
$x^{n-1} + x^{-1}y^n$, $x \neq 0$, $x^n \neq y^n$.

47 a) $-3(x^{2-n} + x^{-n})$, $x \neq 0$; b) $-\frac{1}{4x^5}$, $x \neq 0$.

48 a) -25; b) $\frac{27}{4}$; c) 4; d) $\frac{2+3\sqrt{2}}{4}$.

8.7 Počítání s mocninami s racionálním exponentem

49 a) 2; b) 5; c) $\frac{1}{3}$; d) 4; e) 3; f) $0{,}001$; g) $0{,}01$; h) $0{,}125$; i) 2; j) 1;
k) -1; l) 0.

50 a) $x^{\frac{1}{2}}$; b) $x^{\frac{5}{3}}$; c) $x^{\frac{3}{5}}$; d) $x^{-\frac{1}{4}}$; e) $2x^{-\frac{3}{5}}$.

51 a) $2^{\frac{11}{12}}$; b) $2^{\frac{1}{4}}$; c) $2^{\frac{3}{32}}$; d) $2^{-\frac{1}{8}}$; e) $2^{\frac{31}{8}}$; f) $2^{\frac{37}{27}}$.

52 a) $x^{-\frac{3}{4}}$, $x > 0$; b) $y^{\frac{5}{3}}$, $y > 0$; c) $y^{\frac{1}{2}}$, $y > 0$; d) $x^{-\frac{19}{8}}$, $x > 0$; e) $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$, $x, y > 0$;
f) $x^{\frac{1}{10}}y^{\frac{33}{10}}$, $x, y > 0$.

53 a) $3^{\frac{3}{4}}$; b) $2^{\frac{17}{8}}$; c) $5^{\frac{5}{6}}$; d) 11; e) $5^{\frac{11}{24}}$; f) $7^{-\frac{7}{30}}$; g) 1; h) $2^{\frac{23}{12}}$.

54 a) $x^{\frac{3}{4}}$, $x \geqq 0$; b) $z^{\frac{17}{8}}$, $z \geqq 0$; c) $k^{\frac{5}{6}}$, $k \geqq 0$; d) m, $m \geqq 0$; e) $y^{\frac{11}{24}}$, $y > 0$;
f) $u^{-\frac{7}{30}}$, $u > 0$; g) 1, $a > 0$; h) $b^{\frac{23}{12}}$, $b > 0$.

55 a) $x = \pm 5$; b) $x = \pm\frac{1}{2}$; c) $x = 0{,}064$; d) $x = 6\,561$; e) $x = 4$; f) $x = \pm 0{,}125$;
g) $x = 27$; h) $x \in R_0^+$.

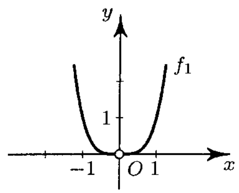
8.8 Úpravy výrazů obsohující mocniny a odmocniny

56 a) $-3(x+4)$; $x > 0 \wedge x \neq 4$; b) $\frac{1}{1-x}$; $x \geqq 0 \wedge x \neq 1$; c) 8; $x \geqq 0 \wedge x \neq 1$;
d) 1; $x \geqq 0 \wedge x \neq 7$; e) $\frac{x+1}{x-1}$; $x > 0 \wedge x \neq 1$.

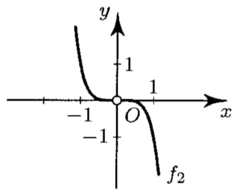
57 a) $\frac{2x}{7x+10}$; $x \neq -2; -\frac{10}{7}; 0$; b) 2; $x \neq \pm 1; 0$; c) $\frac{x-1}{x^2}$; $x \neq -1; 0$; d) x^2+x+1; $x \neq 0; 1$.

58 a) $\frac{4\sqrt{a}}{1-a}$; $a > 0 \wedge a \neq 1$; b) $b-1$; $b > 0 \wedge b \neq 1$; c) $\frac{1}{c-1}$; $c \neq \pm 1$;
d) $\sqrt{d}-1$; $d > 0 \wedge d \neq 1$; e) 6; $e > 0 \wedge e \neq 1$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$.

59



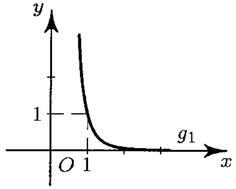
$f_1(x) = x^4$; D = R − {0}



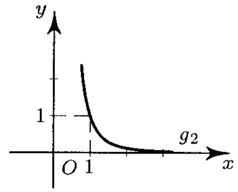
$f_2(x) = -x^5$; D = R − {0}

K řešení úlohy 59

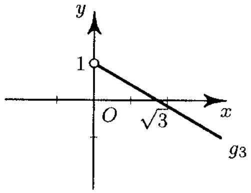
60



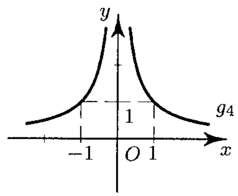
$g_1(x) = x^{-4}$; D = R^+



$g_2(x) = x^{-3}$; D = R^+



$g_3(x) = 1 - x\frac{\sqrt{3}}{3}$; D = R^+



$g_4(x) = \frac{|x|}{x^2}$; D = R − {0}

K řešení úlohy 60

9 Posloupnosti a řady

9.1 Způsoby zadání posloupností

1 a) $\ldots, 24, 28, 32, \ldots$, $a_n = 4n$; b) $\ldots, 36, 49, 64, \ldots$, $a_n = n^2$;
c) $\ldots, -1, 1, -1, \ldots$, $a_n = (-1)^n$; d) $\ldots, -9, -27, -81, \ldots$, $a_n = -3^{n-4}$.

2 a) $a_n = 2n$; b) $a_n = 2n-1$; c) $a_n = 11n$; d) $a_n = 5n-4$.

3 a) 3, 5, 7, 9, 11; b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}$; c) 0, 2, 6, 12, 20; d) 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$;
e) −4, −1, 4, 11, 20; f) 1, −2, 3, −4, 5.

4 a) $5, 9, 13, 17, 21, 25, \ldots$, $a_n = 4n+1$; b) $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$, $a_n = n^2$;
c) $-1, 3, -1, 3, -1, 3, \ldots$, $a_n = 1 + (-1)^n \cdot 2$.

5 a) $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$, $a_n = 2^n$; b) $1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots$, $a_n = 3^{n-1}$;
c) $-3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots$, $a_n = 2n-5$.

9.2 Vlastnosti posloupností

Posloupnost rostoucí, klesající

6 a) Roste; b) klesá; c) roste; d) klesá od 2. členu; e) roste; f) klesá;
g) neroste, neklesá; h) roste.

Posloupnost omezená

7 a) Omez. zdola, $a_n \geqq 2$; b) omez., $-1 \leqq a_n < 0$; c) omez. zdola, $a_n \geqq 0$;
d) omez., $\frac{7}{2} \leqq a_n < 5$; e) omez., $-1 \leqq a_n \leqq 1$; f) omez., $-5 \leqq a_n < -1$.

8 a) 0; b) 7; c) $\frac{4}{3}$; d) 0; e) diverg.; f) $\frac{1}{2}$; g) diverg.; h) diverg.; i) diverg.

9.3 Aritmetická, geometrická posloupnost

9 a) AP, $a_1 = \frac{4}{5}$, $d = \frac{1}{5}$; b) AP, $a_1 = 0$, $d = -1$; c) GP, $a_1 = \frac{2}{9}$, $q = \frac{2}{3}$;
d) není AP, není GP.

10 a) $7, 10, 13, 16, 19, \ldots$ AP, $a_n = 4 + 3n$; b) $8, 16, 32, 64, 128, \ldots$ GP, $a_n = 2^{n+2}$; c) $5, 3, 1, -1, -3, \ldots$ AP, $a_n = 7 - 2n$.

11 a) $d = \log \frac{1}{2}$; b) $d = \frac{1}{2}$; c) $d = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $d = 2a + 3$.

12 a) $q = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$; b) $q = \frac{1}{2}$; c) $q = \frac{1}{2 \sin x}$; d) $q = b + 1$.

13 $d = \log q$. **14** $x = 10 \Rightarrow a_1 = 4$, $q = 3$.

15 a) $x_1 = -8 \Rightarrow 56, 36, 16$, $x_2 = 1 \Rightarrow 2, 9, 16$; b) $x = 2 \Rightarrow \log 3, \log 6, \log 12$;
c) $x_1 = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in Z \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi, k \in Z \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

16 a) $x = \log_2 6 \Rightarrow 1, 6, 36$; b) $x_1 = 100 \Rightarrow 5, -5, 5$, $x_2 = 10^{\frac{3}{14}} \Rightarrow \frac{10}{7}, \frac{15}{7}, \frac{45}{14}$;
c) $x_1 = \frac{1}{6}\pi + k\pi, k \in Z \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6}, 1, 2\sqrt{3}$, $x_2 = \frac{5}{6}\pi + k\pi, k \in Z \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{6}, 1, -2\sqrt{3}$.

17 a) 21. člen; b) nemá řešení. **18** 12. člen.

19 a) $a_1 = 3$, $d = 2$; b) $a_1 = 3$, $d = -2$; c) $a_1 = 20$, $d = -5$; d) $a_1 \in R$, $d = -\frac{a_1}{4}$;
e) nemá řešení; f) $a_1 = 2$, $d = 0{,}1$; g) $(a_1 = 3,\ d = -1) \vee (a_1 = 2,\ d = 1)$;
h) $a_1 = 10$, $d = -2$; i) $(a_1 = -19,\ d = 6) \vee (a_1 = 23,\ d = -6)$.

20 a) $a_1 = 0{,}5 \wedge q = 3$; b) $(a_1 = 64 \wedge q = \frac{1}{4}) \vee (a_1 = -64 \wedge q = -\frac{1}{4})$; c) $a_1 = 22 \wedge q = 2$;
d) $(a_1 = 3 \wedge q = 2) \vee (a_1 = -3\,072 \wedge q = \frac{1}{2})$; e) $(a_1 = 2 \wedge q = 5) \vee (a_1 = 250 \wedge q = \frac{1}{5})$;
f) $(a_1 = 81 \wedge q = \frac{1}{9}) \vee (a_1 = \frac{1}{9} \wedge q = 9)$.

21 15, 20, 25 nebo 25, 20, 15.

22 a) AP, $d = 160 \Rightarrow 8, 168, 328, 488, 648$;
b) GP, $q_1 = 3 \Rightarrow 8, 24, 72, 216, 648$ nebo GP, $q_2 = -3 \Rightarrow 8, -24, 72, -216, 648$.

23 a) AP, 2; 3,2; 4,4; 5,6; 6,8; 8 nebo AP, 8; 6,8; 5,6; 4,4; 3,2; 2.
b) GP, 2; $2\sqrt[5]{4}$; $2\sqrt[5]{16}$; $4\sqrt[5]{2}$; $4\sqrt[5]{8}$; 8 nebo GP, 8; $4\sqrt[5]{8}$; $4\sqrt[5]{2}$; $2\sqrt[5]{16}$; $2\sqrt[5]{4}$; 2.

24 3, 6, 12, 18 nebo 3, $-\frac{9}{2}$, $\frac{27}{4}$, 18. **25** 9, 6, 3, $\frac{3}{2}$.

26 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. **27** $n = 22$. **28** $n = 10$.

29 3, −6, 12 nebo 12, −6, 3. **30** ±9, ±6, ±3 nebo ±3, ±6, ±9.

31 4, 16, 64 nebo 4, −8, 16. **32** 24 cm, 32 cm, 40 cm.

33 1 cm, 4 cm, 16 cm, $S = 168\,\mathrm{cm}^2$.

34 $a_1 = \frac{1}{4}$, $d = -\frac{1}{2}$, $s_{10} = -20$, $a_{11} + \ldots + a_{20} = -70$. **35** Aspoň 11 členů.

36 $d \leqq -\frac{2}{3}$. **37** $a_1 \geqq \frac{5}{2}$. **38** $s_{58} = 1\,711$. **39** $s_{24} = 648$. **40** $s = 4\,905$.

41 $a_1 = 1$, $a_n = 2n - 1$, $s_n = n^2$. **42** a) $a_1 = -6$, $d = 0{,}8$; b) $a_1 = 8$, $d = 2$;
c) $a_1 = 30$, $d = -3$. **43** $a_4 = 4$, $a_{21} = -30$. **44** $q \in \langle -3; 2 \rangle$. **45** $n = 5$.

46 $a_1 \in R - \{0\}$, $q = 2$. **47** $a_1 = 3$, $d = 4$. **48** $a_1 = 18$, $q = \frac{2}{3}$, $s_6 = \frac{1\,330}{27}$.

49 a) 2, $\frac{46}{3}$, $\frac{86}{3}$, 42; b) 2, 10, 18, 26, 34, 42.

50 a) 16, 24, 36, 54, 81; b) 16, −24, 36, −54, 81.

51 a) Návod: $a_1 = 4$, $d = 2$, $a_n = x = 4 + (n-1) \cdot 2$, $s_n = 270 = \frac{n}{2}[4 + 4 + (n-1) \cdot 2] \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 15 \Rightarrow x = 32$; b) $x = 96$; c) $x = 106$; d) $x = 9$; e) $x = 4\,096$; f) $x = 2$.

52 a) $\{26, 27, 28, \ldots\}$; b) $\{35, 36, 37, \ldots\}$; c) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; d) $\{191, 192, \ldots\}$.

53 a) $\{45, 46, 47, \ldots, 61\}$; b) $\{4, 5, 6, \ldots\}$.

9.4 Záplsy pomocí $\sum$

54 a) $\sum_{i=1}^{12}(2i+3)$; b) $\sum_{i=1}^{6}(\frac{1}{2})^i$; c) $(-1)\cdot\sum_{i=1}^{19}(3i-1)$; d) $\sum_{i=1}^{11}(-1)^i\cdot 2^{i-1}$.

55 a) $1+2+3+\ldots+16=136$; b) $3+7+11+\ldots+67=595$; c) $40+42+44+\ldots+60=550$.

56 a) $L=20+21+\ldots+44=\frac{25}{2}(20+44)=800$, $P=-20+(1+2+\ldots+40)=800$; b) $L=P=924$. **57** a) 177 240; b) $82+28\sqrt{2}$.

58 a) $x=50$; b) $x=48$; c) $x=-50$; d) $x=\frac{1}{2}$; e) $x=9$; f) $x=10$.

9.5 Užltí geometrlcké posloupnostl

59 a) 54 000 Kč; b) 53 400 Kč; c) 68 024,40 Kč; d) 65 051,20 Kč. **60** 2,3 %.
61 Za 12 let. **62** 14 desek. **63** 17 638,40 Kč. **64** a) 65 233,30 Kč; b) 62 714,70 Kč.
65 486 752,00 Kč. **66** 87 385,10 Kč. **67** 250 938,40 Kč. **68** a) 229 500,00 Kč; b) 257 732,40 Kč. **69** a) 10 765,00 Kč; b) 10 787,20 Kč; c) 10 792,40 Kč.

9.6 Nekonečná geometrická řada

70 a) $\sum_{i=1}^{\infty}3^i$; b) $\sum_{i=1}^{\infty}x\cdot(\frac{1}{2})^{i-1}$; c) $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\cdot 2^i$; d) $\sum_{i=1}^{\infty}3\cdot(x)^{i-4}$.

71 a) $x^2+x^4+x^6+\ldots\Rightarrow a_1=x^2$, $q=x^2$; b) $4+2+1+\frac{1}{2}+\ldots\Rightarrow a_1=4$, $q=\frac{1}{2}$;
c) $\frac{5}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}+\ldots\Rightarrow a_1=\frac{5}{x+1}$, $q=\frac{1}{x+1}$;
d) $\frac{1}{5(x+1)}+\frac{1}{25(x+1)^2}+\ldots\Rightarrow a_1=\frac{1}{5(x+1)}$, $q=\frac{1}{5(x+1)}$.

72 a) $a_1=\frac{3}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, konverg., $s=3$; b) $a_1=-\frac{1}{3}$, $q=-\frac{1}{2}$, konverg., $s=-\frac{2}{9}$;
c) $a_1=1+\sqrt{2}$, $q=\frac{1}{2}$ nebo $a_1=\sqrt{2}$, $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$, konverg., $s=2+2\sqrt{2}$;
d) $a_1=2$, $q=\frac{3}{2}$, diverg., s neex.; e) $a_1=\sqrt{5}-\sqrt{3}$, $q=\sqrt{5}$ diverg., s neex.;
f) $a_1=\frac{1}{3}$, $q=\frac{1}{3}$, konverg., $s=\frac{1}{2}$; g) $a_1=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $q=\frac{\sqrt{5}}{5}$, konverg., $s=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$;
h) $a_1=1$, $q=-\frac{1}{2}$, konverg., $s=\frac{2}{3}$; i) $a_1=-\frac{2}{3}$, $q=-\frac{3}{2}$, diverg., s neex.

73 a) pro $x\in(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ je $s=\frac{2}{1-2x}$; b) pro $x\in(-5;-3)$ je $s=-\frac{x+4}{x+3}$;
c) $q=2$, vždy diverg.; d) pro $x\in(0;1)$ je $s=\frac{1-2x}{2x}$; e) $q=x^2+7$, vždy diverg.;
f) pro $x\in(-\infty;-5)\cup(-3;\infty)$ je $s=\frac{x^2+8x+16}{x^3+12x^2+48x+63}$;
g) pro $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$ je $s=\frac{1}{x^2-1}$; h) pro $x\in(0{,}01;0{,}1)$ je $s=-\frac{2\log x+3}{2\log x+2}$;
i) pro $x\in\bigcup_{k\in Z}(-\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi)$ je $s=\frac{2\sin x}{1-2\sin x}$.

74 a) $\{\frac{3}{10}\}$; b) $\emptyset$; c) $\{\frac{\sqrt[3]{100}}{10}\}$; d) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{7}{6}\pi+2k\pi;\frac{11}{6}\pi+2k\pi\}$.

75 a) $\{\frac{3}{2}\}$; b) $\{-\frac{3}{2}\}$; c) $\{-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\}$; d) $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$; e) $\{\sqrt[4]{8}\}$; f) $\bigcup_{k\in Z}\{\frac{3}{8}\pi+k\frac{\pi}{2}\}$.

76 a) $\frac{8}{9}$; b) $\frac{10}{27}$; c) $\frac{511}{495}$; d) $\frac{2\,311}{90}$. **77** a) např. $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\ldots$; b) např. $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$; c) např. $\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\ldots$; d) např. $1+x+x^2+x^3+\ldots$.

78 a) 25; b) $\frac{3}{1+n}$. **79** $a=\frac{20}{3}$, $q=\frac{2}{3}$. **80** 18π cm. **81** 9π cm. **82** 4π cm.

83 4 cm. **84** $(12+6\sqrt{3})$ cm. **85** $(21+3\sqrt{5})$ cm. **86** $(4+4\sqrt{2})$ cm. **87** $\frac{4}{3}\pi\,\mathrm{cm}^2$.

88 $(9+9\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$. **89** $\frac{432(4+\sqrt{2})}{7}\,\mathrm{cm}^3$. **90** $\frac{288\pi(11+6\sqrt{3})}{13}\,\mathrm{cm}^3$.

10 Geometrie — konstrukční úlohy

10.1 Základní typy bodových množin

1 a) $\mathsf{M}_1=k(A;2\,\mathrm{cm})$; b) M_2 je sjednocení dvou kruhových úsečí; c) M_3 je osa úsečky AB; d) M_4 je polorovina oA, kde o je osa úsečky AB.

2 a) G_1 je kolmice k AB v B, mimo B; b) G_2 je Thalet. kruž. nad AB; c) G_3 jsou dvě polopřímky mimo B; d) G_4 jsou dva kružnic. oblouky, mimo A, B; e) G_5 jsou dva kružnicové oblouky, mimo A, B; f) G_6 jsou dvě kruhové úseče, mimo A, B; g) G_7 je rovina bez dvou kruhových úsečí, mimo A, B; h) G_8 je rozdíl dvou kruhových úsečí, mimo A, B.

3 Dvě rovnoběžky s p ve vzdálenosti m. **4** a) Osa pásu; b) osy úhlů, které p, q svírají.

10.2 Tečna z bodu ke kružnici

5 Body dotyku jsou průsečíky kružnice k s Thaletovou kružnicí nad SM.

6 Narýsujte libovolnou tětivu délky 5 cm, její střed označte X. Narýsujte kružnici $k_1(S;r=|SX|)$. Potom sestrojte tečny z M ke k_1.

10.3 Konstrukce kružnic požadovaných vlastností

7 $S\in l_{1,2}(O;(4\pm1{,}5)\,\mathrm{cm})\cap l_3(M;1{,}5\,\mathrm{cm})$; a) 2 řešení; b) 1 řešení; c) 0 řešení; d) 2 řešení.

8 $S\in l_{1,2}(O;(4\pm1{,}5)\,\mathrm{cm})\cap p_{1,2}$; $p_{1,2}\parallel p\wedge|p_{1,2}p|=1{,}5\,\mathrm{cm}$; a) 6 řešení; b) 8 řešení.

9 Poloměry hledaných kružnic jsou 2 cm. Středy leží na ose pásu a $l(M;2\,\mathrm{cm})$. Úloha má 2 řešení.

10 a) $S\in l_{1,2}(O_1;(5\pm1)\mathrm{cm})\cap l_{3,4}(O_2;(2\pm1)\mathrm{cm})$. Úloha má 6 řešení.
b) $S\in l_{1,2}(O_1;(4\pm3)\,\mathrm{cm})\cap l_{3,4}(O_2;(2\pm1)\,\mathrm{cm})$. Úloha má 2 řešení.

11 a) $S\in l_{1,2}(O_1;(4\pm3)\mathrm{cm})\cap l_{3,4}(O_2;|2\pm3|\,\mathrm{cm})$. Úloha má 4 řešení.
b) $S\in l_{1,2}(O_1;(4\pm3)\,\mathrm{cm})\cap l_{3,4}(O_2;|2\pm3|\,\mathrm{cm})$. Úloha má 4 řešení.

12 Poloměry hledaných kružnic jsou 1,5 cm nebo 3,5 cm.
Středy leží na $l_1(O_1;(2+1{,}5)\mathrm{cm})$ a na $p_{1,2}\parallel p\wedge|p_{1,2}p|=1{,}5\,\mathrm{cm}$.
Středy leží na $l_2(O_2;(3{,}5-2)\mathrm{cm})$ a na $p_{3,4}\parallel p\wedge|p_{3,4}p|=3{,}5\,\mathrm{cm}$. Úloha má 4 řešení.

13 Poloměry hledaných kružnic jsou 1,5 cm. $S\in l_1(O;(2+1{,}5)\mathrm{cm})\cap l_2(M;1{,}5\,\mathrm{cm})$.
Poloměry hledaných kružnic jsou také 3,5 cm. $S\in l_3(O;(3{,}5-2)\mathrm{cm})\cap l_4(M;3{,}5\,\mathrm{cm})$. Úloha má 4 řešení.

10.4 Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků

Vzhledem k tomu, že postup konstrukce může být u řady úloh různý, je uveden jen jeden krátký návod a počet různých trojúhelníků (čtyřúhelníků), které splňují podmínky úlohy.

14 a) $A\in k(S_1;2{,}5)\cap\mathsf{G}_{45}$, kde $\mathsf{G}_{45}=\{X\in\varrho;\ |\sphericalangle S_1XB|=45°\}$. Úloha má 1 řešení.
b) Těžiště $T\in BS_1\wedge|S_1T|=2$; $S_{BC}\in k_1(T;\frac{7}{3})\cap k_2(B;2)$. Úloha má 1 řešení.

15 a) p je kolmice bodem C_1 na CC_1. Potom $B\in p\cap\mathsf{G}_{120}$, kde $\mathsf{G}_{120}=\{X\in\varrho;\ |\sphericalangle CXC_1|=120°\}$. $|BA|=3$. Úloha má 1 řešení.
b) $S_{AB}\in p\cap k(C;5{,}5)$, kde $p\perp C_1C\wedge C_1\in p$. $A\in p\cap\mathsf{G}_{60}$, kde $\mathsf{G}_{60}=\{X\in\varrho;\ |\sphericalangle CXC_1|=60°\}$. Úloha má 2 řešení.

16 a) $S\in k_1(A;4)\cap k_2(B;4)$, $C\in p\cap l(S;4)$, kde $p\parallel AB$ ve vzdálenosti 4 cm. Úloha má 2 řešení. b) $C\in p\cap k(S_{AB};4)$, kde $p\parallel AB$ ve vzdálenosti 3 cm. Úloha má 2 řešení.

17 a) $C\in p\cap k$, kde k je Thaletova kruž. nad AB, $p\parallel AB$ ve vzdálenosti 2,5 cm. 2 řešení.
b) $C\in l(S_{AB};4)\cap k$, kde k je Thaletova kružnice nad AB. Úloha nemá řešení.
c) $A\in\mapsto CY\cap\mathsf{G}_{60}$, kde $\mathsf{G}_{60}=\{X\in\varrho;\ |\sphericalangle BXC|=60°\}$, $\mapsto CY\perp BC$. Úloha má 1 řešení.
d) V pravoúhlém trojúhelníku je $t_c=\frac{c}{2}\Rightarrow c=5$. Úloha má 1 řešení.
e) V pravoúhlém trojúhelníku je $r=\frac{c}{2}\Rightarrow c=6$. Úloha má 1 řešení.
f) V pravoúhlém trojúhelníku je $r=\frac{c}{2}\Rightarrow$ pro dané hodnoty úloha nemá řešení.
g) Nejprve sestrojte pravý úhel, potom BC. Průsečík rovnoběžek s rameny úhlu ve vzdál. 2 cm je střed kruž. vepsané. Pomocí Thalet. kruž. veďte tečnu z B ke kruž. vepsané. Úloha má 1 řešení.

h) Nejprve sestrojte úhel α. Průsečík rovnoběžek s rameny úhlu ve vzdál. 1,5 cm je střed S kruž. vepsané. Z bodu S sestrojte kolmici na jedno rameno úhlu, pata kolmice je bod X. Potom $C \in \mapsto AX \wedge |CX| = 1{,}5$. Úloha 1 řešení.

18 a) Umístíte AB, $|AB| = 6$; $C \in k(B; 4{,}5) \cap \mapsto AX$; $|\sphericalangle BAX| = 45°$. Úloha má 2 řešení.
b) Umístíte AC, $|AC| = 8$; $B \in k(S_{AC}; 2{,}5) \cap \mapsto CY$; $|\sphericalangle ACY| = 30°$. Úloha má 2 řešení.
c) $\triangle ABC$ doplňte na rovnoběžník $ABCD$; sestrojte $\triangle ABD$, $|AB| = 6$, $|AD| = 3$, $|BD| = 2t_b = 8$. Úloha má 1 řešení.
d) $\triangle ABS_{BC}$, $|AB| = 3$, $|BS_{BC}| = 2{,}5$, $|AS_{BC}| = t_a = 4{,}5$. Úloha má 1 řešení.
e) Označte T těžiště $\triangle ABC$, $|AB| = 5$, $|AT| = \frac{2}{3}t_a = 4$, $|BT| = \frac{2}{3}t_b = 2$. Úloha má 1 řešení.
f) Označte T těžiště $\triangle ABC$. $|BS_{AB}| = 3{,}5$, $|BT| = \frac{2}{3}t_b = 4$, $|TS_{AB}| = \frac{1}{3}t_c = 1{,}5$. Úloha má 1 řešení.
g) Označte C_1 patu výšky z C na AB; $\triangle CC_1S_{AB}$, $|CC_1| = v_c = 3{,}5$, $|CS_{AB}| = t_c = 4$, $|\sphericalangle CC_1S_{AB}| = 90°$. Označte těžiště $T \in CS_{AB} \wedge |CT| = \frac{8}{3}$. $A \in \mapsto S_{AB}C_1 \cap k(T; \frac{2}{3}t_a = 4)$. Úloha má 2 řešení.
h) $\triangle ABC$ doplňte na rovnoběžník $ABXC$. Označte T těžiště $\triangle ABC$, T_1 označte těžiště $\triangle BXC$. Potom můžete sestrojit $\triangle TBT_1$, $|TB| = \frac{2}{3}t_b = 4{,}2$, $|T_1B| = \frac{2}{3}t_c = 3{,}6$, $|TT_1| = \frac{2}{3}t_a = 4$. Úloha má 1 řešení.
i) Sestrojte dvě rovnoběžky p, q ve vzdálenosti $v_a = 6{,}5$. Na p libovolně vyznačte bod A. Potom $B \in q \cap k(A; 7)$. Bod C je průsečík ramene úhlu α a přímky q. Úloha má 2 řešení.
j) Sestrojte dvě rovnoběžky p, q ve vzdálenosti $v_a = 4{,}5$. Na p libovolně vyznačte bod A. Potom $B \in q \cap k(A; 5)$. $C \in q \wedge |BC| = 6$. Úloha má 2 řešení.
k) Sestrojte dvě rovnoběžky p, q ve vzdálenosti $v_c = 3$. Na p libovolně vyznačte bod A. Potom $S_{AB} \in p \wedge |AS_{AB}| = \frac{c}{2} = 2$, $C \in q \cap k(S_{AB}; 4{,}5)$. Úloha má 2 řešení.
l) Sestrojte dvě rovnoběžky p, q ve vzdálenosti $v_a = 3$. Na p libovolně vyznačte bod A. Potom $B \in q \cap k(A; 4)$, $S_{BC} \in q \cap l(A; 3{,}5)$. Úloha má 2 řešení.
m) Sestrojte dvě rovnoběžky p, q ve vzdálenosti $v_a = 4$. Na p libovolně vyznačte bod A. Potom $B \in q \cap k(A; 5)$, $C \in q \cap l(S_{AB}; 3{,}5)$. Úloha má 2 řešení.
n) Sestrojte dvě rovnoběžky p, q ve vzdálenosti $v_a = 4$. Na p libovolně vyznačte bod A. Potom $B \in q \cap k(A; 5)$, $C \in q \cap t$, kde $t \parallel AB$ ve vzdálenosti $v_c = 3$. Úloha má 2 řešení.
o) $\triangle ABC$ doplňte na rovnoběžník $ABXC$. Sestrojte $\triangle ABX$, $|AB| = 3{,}5$, výška na AB je $v_c = 3$, $|AX| = 2t_a = 4$. Úloha má 2 řešení.
p) Sestrojte dvě rovnoběžky p, q ve vzdálenosti $v_a = 3{,}5$. Na p libovolně vyznačte bod A. Potom $B \in q \cap k(A; 6)$. Sestrojte Thaletovu kružnici k nad AB, $B_1 \in l(B; 5{,}5) \cap k$, $C \in \mapsto AB_1 \cap q$. Úloha má 2 řešení.
q) Umístíte AB, $|AB| = 8$; $C \in p \cap G_{120}$, kde $p \parallel AB$ ve vzdálenosti 1,5 cm, $G_{120} = \{X \in \varrho; |\sphericalangle AXB| = 120°\}$. Úloha má 2 řešení.
r) Umístíte AB, $|AB| = 8$; $C \in k(S_{AB}; 4{,}7) \cap G_{75}$, kde $G_{75} = \{X \in \varrho; |\sphericalangle AXB| = 75°\}$. Úloha má 2 řešení.
s) Umístíte CS_{AB}; $|CS_{AB}| = t_c = 7{,}5$. Na t_c vyznačte těžiště T, $|TC| = 4$; $A \in k(T; \frac{2}{3}t_a = 5) \cap G_{45}$, kde $G_{45} = \{X \in \varrho; |\sphericalangle CXS_{AB}| = 45°\}$. Úloha má 2 řešení.
t) Umístíte CC_1, $|CC_1| = 4$, sestrojte kolmici p bodem C_1 na CC_1. $A \in p \cap G_{60}$, kde $G_{60} = \{X \in \varrho; |\sphericalangle CXC_1| = 60°\}$. $B \in p \cap G_{45}$, kde $G_{45} = \{X \in \varrho; |\sphericalangle CXC_1| = 45°\}$. Úloha má 1 řešení.
u) $\triangle ABC$ doplňte na rovnoběžník $AYBC$. Umístíte CY, $|CY| = 2t_c = 8$. $A \in G_{60} \cap G_{105}$, kde $G_{60} = \{X \in \varrho; |\sphericalangle CXS_{CY}| = 60°\}$, $G_{105} = \{X \in \varrho; |\sphericalangle CXY| = 60° + 45°\}$. Úloha má 1 řešení.
v) Nejprve sestrojte úhel $\beta = 180° - \alpha - \gamma$. Potom je úloha v) stejná jako úloha u). Úloha má 1 řešení.

19 a) Sestrojte $k(S; 4)$. Na k vyznačte libovolně bod A, $B \in k \cap l(A; 7{,}5)$. Úloha má 4 řešení.
b) Sestrojte $k(S; 4)$. Na k vyznačte libovolně bod A, $B \in k \cap l(A; 7)$. Sestrojte Thaletovu kružnici k_1 nad AB. $A_1 \in k_1 \cap l_1(A; 3)$, $C \in \mapsto BA_1 \cap k$. Úloha má 2 řešení.
c) Sestrojte $k(S; 4)$. Na k vyznačte libovolně bod A, $B \in k \cap l(A; 7{,}5)$. $C \in k \cap l_1(S_{AB}; 4{,}5)$. Úloha má 2 řešení.
d) $\triangle AA_1C$, $|AA_1| = 5$, $|\sphericalangle ACA_1| = 45°$, $|\sphericalangle AA_1C| = 90°$. Úloha má 1 řešení.

20 a) Umístíte AB, sestrojte úhel $\alpha = 45°$. Střed kružnice vepsané leží na průsečíku rovnoběžek s rameny úhlu α ve vzdálenosti 1,5. Pomocí Thalet. kruž. sestrojte tečny z bodu B ke kružnici vepsané. Úloha má 1 řešení.

b) Umístíte úhel $\beta = 60°$. Střed kružnice vepsané leží na rovnoběžkách s rameny úhlu β. Rovnoběžka s jedním ramenem úhlu β ve vzdál. $v_c = 4$ protne druhé rameno v bodě C. Pomocí Thalet. kruž. sestrojte tečny z bodu C ke kružnici vepsané. Úloha má 1 řešení.

21 a) $\triangle ABS$, $a = 6$, $|\sphericalangle ASB| = 120°$, $|AB| = \frac{1}{2}v_a = 1{,}5$. Úloha má 2 řešení.
b) Umístíte BD, bodem S_{BD} sestrojte přímku tak, aby svírala s BD úhel 45°. $C \in p \cap k(B; 4)$. Úloha má 1 řešení.

22 a) Umístíte AB. $C \in p \cap k(B; 4)$, kde $p \parallel AB$ ve vzdálenosti 3 cm. Úloha má 2 řešení.
b) $\triangle ABS$ (S je průsečík úhlopříček), $|AS| = 3$, $|BS| = 2$, $|\sphericalangle ASB| = 90°$. Úloha má 1 řešení.

23 a) $\triangle AXC$, $|AX| = 8 + 3$, $|CX| = |BD| = 7$, $|AC| = 6$; $B \in AX \wedge |AB| = 8$. Bodem C veďte rovnoběžku s AB, bodem B veďte rovnoběžku s XC. Úloha má 1 řešení.
b) $\triangle AXC$, $|AX| = 6 + 4$, $|AC| = 5$, $|\sphericalangle ACX| = 120°$; $B \in AX \wedge |AB| = 6$. Bodem C rovnoběžku s AB, bodem B rovnoběžku s XC. Úloha má 1 řešení.
c) $\triangle AYD$, $|AY| = 7 - 2$, $|YD| = 4$, $|AD| = 3$. Úloha má 1 řešení.
d) $\triangle ABD$, (6, 6, 4); $C \in p \cap G_{120}$, kde $p \parallel AB \wedge D \in p$, $G_{120} = \{X \in \varrho; |\sphericalangle BXD| = 120°\}$. Úloha má 1 řešení.

24 a) $\triangle ABD$, $|AB| = 7$, $|BD| = 5$, $\alpha = 45°$; $C \in k(A; 8) \cap \mapsto DX$, $|\sphericalangle ADX| = 150°$. Úloha má 2 řešení.
b) $\triangle ABC$, $|AC| = 6$, $|BC| = 5$, $|\sphericalangle BAC| = \alpha$; $D \in k(C; 5) \cap l$, kde l je Thalet. kruž. nad AC. Úloha má 2 řešení.
c) $\triangle BCD$, $|BC| = 6$, $|CD| = 3$, $|\sphericalangle BCD| = 30°$; $A \in k(C; 5) \cap G_{30}$, kde $G_{30} = \{X \in \varrho; |\sphericalangle BXD| = 30°\}$. Úloha nemá řešení, protože čtyřúhelník je nekonvexní.
d) $\triangle ACD$, (4, 5, 6). $B \in l \cap p$, kde l je Thaletova kružnice nad AC, $p \perp AC \wedge D \in p$. Úloha má 1 řešení.

10.5 Konstrukce úseček

25 $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$, $\sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2}$, $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ atd.
26 a) $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$; b) $\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$; c) $\sqrt{24} = \sqrt{5^2 - 1^2}$; d) $\sqrt{12} = \sqrt{4^2 - 2^2}$.
27 Např. a) $\sqrt{6} = \sqrt{3 \cdot 2}$; b) $\sqrt{12} = \sqrt{6 \cdot 2}$; c) $\sqrt{17} = \sqrt{8{,}5 \cdot 2}$; d) $\sqrt{18} = \sqrt{6 \cdot 3}$.
28 Užijte redukční úhel. **29** 2 řešení, $|AX| = 1{,}5|AB|$.
30 Úsečku 15 cm rozdělte v poměru 2 : 3 : 4.
31 a) Pyth. věta; b) Pyth. věta; c) x je úhlopříčka čtverce o straně a; d) x dvojnásobná výška rovnostran. △ o straně a; e) Euklid. věta; f) Euklid. věta; g) podobnost; h) podobnost.
32 Ve všech případech užijte podobnost.

10.6 Shodná zobrazení

33 Středová souměrnost; $S(M)$: $p \to p'$; $Y \in q \cap p'$.
34 Osová souměrnost; $O(q)$: $p \to p'$; $Y \in p \cap p'$.
35 Otočení; $R(M; \pm 60°)$: $q \to q'$; $Y \in p \cap q'$.
36 Posunutí; $T(AB)$: $k \to k'$; $Y \in p \cap k'$. Nebo $T(BA)$: $k \to k_1'$; $Y \in p \cap k_1'$.
37 Středová souměrnost; $S(M)$: $k \to k'$; $C \in p \cap k'$. Úloha má 2 řešení.
38 Otočení; $R(M; \pm 90°)$: $k \to k'$; $C \in p \cap k'$. Úloha má 2 řešení.
39 Osová souměrnost; $O(\leftrightarrow PM)$: $k \to k'$; $C \in p \cap k'$. Úloha má 2 řešení.
40 Otočení; $R(M; \pm 60°)$: $k \to k'$; $B \in p \cap k'$. Úloha má 2 řešení.
41 Posunutí; $T(OM)$: $k \to k'$; $L \in p \cap k'$. Úloha má 2 řešení.
42 Osová souměrnost; $O(\leftrightarrow PM)$: $k \to k'$; $A \in p \cap k'$. Úloha má 2 řešení.
43 Otočení; $R(A; \pm 60°)$: $\square KLMN \to \square K'L'M'N'$; $B \in \square KLMN \cap \square K'L'M'N'$. Úloha má 2 řešení.
44 Otočení; $R(C; \pm 120°)$: $k_2 \to k_2'$; $A \in k_1 \cap k_2'$. Úloha má 2 řešení.
45 Otočení; $R(T; \pm 120°)$: $k_1 \to k_1'$; $B \in k_2 \cap k_1'$. Úloha má 2 řešení.
46 Otočení. Sestrojte libovolnou tětivu KL délky 6 cm, $A' \in \leftrightarrow KL \cap k(O; 3)$, $R(O; \sphericalangle A'OA)$: $K \to X$, $L \to Y$: a) 2 řešení; b) 2 řešení.
47 Posunutí. V $\triangle ABC$ vyznačte výšku CC_1; $O' \in CC_1 \cap m$, kde m je kolmice z O na CC_1. Potom $T(OO')$: $k \to k'$; $X \in AC \cap k' \wedge Y \in BC \cap k' \Rightarrow p = \leftrightarrow XY$. Úloha má 1 řešení.

Užití středové a osové souměrnosti ke konstrukci trojúhelníků

48 Středová souměrnost;

a) $k(C;5)$; $S(S_1)$: $k \to k'$; $B \in k' \cap l(C;3{,}5)$. Úloha má 1 řešení.

b) $G_{30} = \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle CXS_1| = 30°\}$; $S(S_1)$: $G_{30} \to G'_{30}$; $B \in G'_{30} \cap G_{45}$, kde $G_{45} = \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle CXS_1| = 45°\}$. Úloha má 2 řešení.

c) $k(C;8)$; $S(S_1)$: $k \to k'$; $B \in k' \cap G_{30}$, kde $G_{30} = \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle CXS_1| = 30°\}$. Úloha má 2 řešení.

d) Těžiště $T \in CS_1$, $|CT| = 2$; $k(T; \frac{2}{3}t_b = 5)$ $S(S_1)$: $k \to k'$; $A \in k' \cap G_{30}$, kde $G_{30} = \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle CXS_1| = 30°\}$. Úloha má 2 řešení.

49 Osová souměrnost;

a) $\triangle ABX$, $|AB| = 5$, $|BX| = a + b = 10$, výška na BX je 3; $C \in BX \cap o$, kde o je osa strany AX. Úloha má 2 řešení.

b) $\triangle XBC$, $|XB| = b + c = 10$, $|\sphericalangle XBC| = \beta = 60°$, $|\sphericalangle BXC| = \frac{\alpha}{2} = 22°30'$. Potom $A \in XB \cap o$, kde o je osa strany XC. Úloha má 1 řešení.

c) $\triangle XYC$, $|XY| = b + c + a = 12$, $|\sphericalangle CXY| = \frac{\alpha}{2}$, $|\sphericalangle XYC| = \frac{\beta}{2}$. $A \in XY \cap o_1$, kde o_1 je osa strany XC, $B \in XY \cap o_2$, kde o_2 je osa strany YC. Úloha má 1 řešení.

d) $\triangle KLC$, $|KL| = b + a + c = 12$, $C \in p \cap G_{120}$, kde $p \parallel KL$ ve vzdálenosti 3 cm, $G_{120} = \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle KXL| = 120°\}$; úhel KCL je 120°, protože $|\sphericalangle KCL| = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90° + \frac{\gamma}{2} = 120°$. Označme o_1, o_2 osy stran KC, LC. Potom $A \in o_1 \cap KL$, $B \in o_2 \cap KL$. Úloha má 2 řešení.

10.7 Skládání osových souměrností

50 Složením dostaneme:

a) posunutí dané vektorem $\boldsymbol{p} = (4;0)$;
b) posunutí dané vektorem $\boldsymbol{p} = (-4;0)$;
c) středovou souměrnost, střed $S[1;2]$;
d) otočení, střed $S[1;1]$ o $\alpha = -90°$;
e) středovou souměrnost, střed $S[2;0]$;
f) identitu.

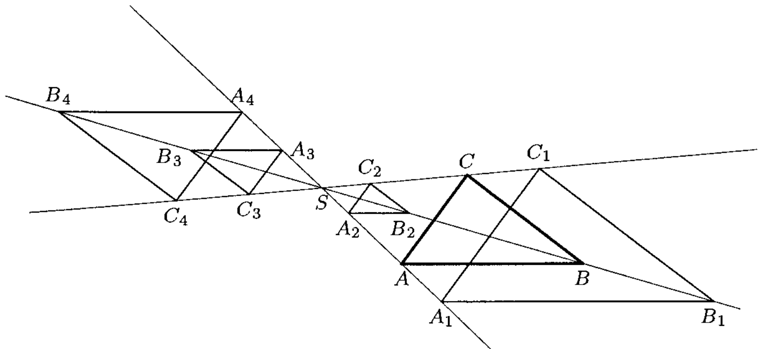
10.8 Hledání minimálního součtu úseček

51 a) $O(\leftrightarrow AB)$: $K \to K'$; potom $X \in AB \cap K'L$.
b) $O(\leftrightarrow BC)$: $K \to K'$; $O(\leftrightarrow AB)$: $L \to L'$; potom $X \in AB \cap K'L'$, $Y \in BC \cap K'L'$.
c) $O(\leftrightarrow CD)$: $K \to K'$; $O(\leftrightarrow AB)$: $L \to L'$; potom $X \in AB \cap K'L'$, $Y \in CD \cap K'L'$.

52 a) 4 řešení, postup jako v 51a), volba stěny — 4 možnosti.
b) 4 řešení, postup jako v 51b), volba dvojice stěn — 4 možnosti.
c) 2 řešení, postup jako v 51c), volba dvojice protilehlých stěn — 2 možnosti.

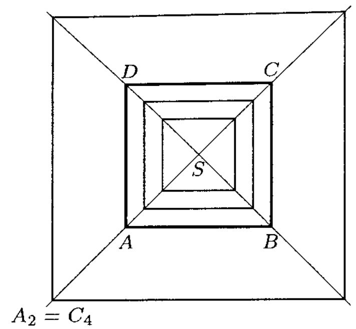
10.9 Stejnolehlost

53



K řešení úlohy 53

54



K řešení úlohy 54

55 Strany hledaného trojúhelníku tvoří střední příčky daného $\triangle ABC$.

56 a) $k_a(S_1;\ 3\,\text{cm})$, $S_1 \in SM \wedge |S_1M| = 3\,\text{cm}$; b) $k_b(S_2;\ 2\,\text{cm})$, $S_2 \in SM \wedge |S_2M| = 2\,\text{cm}$;
c) $k_c(S_3;\ 1\,\text{cm})$, $S_3 \in SM \wedge |S_3M| = 1\,\text{cm}$;
d) $k_d(S_4;\ 2\,\text{cm})$, $S_4 \in \mapsto SM \wedge |S_4S| = 6\,\text{cm} \wedge |S_4M| = 2\,\text{cm}$.

Středy stejnolehlosti dvou úseček

57 a) $S_1 \in \leftrightarrow AD \cap \leftrightarrow BC$, $S_2 \in \leftrightarrow AC \cap \leftrightarrow BD$, 2 středy stejnolehlosti;
b) $S \in AD \cap BC \vee S \in AC \cap BD$, 1 střed stejnolehlosti.

58 Narýsujte libovolný $\triangle KLX$. Potom narýsujte dva podobné trojúhelníky: $\triangle KLX \sim \triangle MNY$, $\triangle KLX \sim \triangle NMZ$.
Hledané středy leží: $S_1 \in \leftrightarrow KM \cap \leftrightarrow XY$, $S_2 \in \leftrightarrow KM \cap \leftrightarrow XZ$.

Středy stejnolehlosti dvou kružnic

59 Narýsujte dva libovolné rovnoběžné průměry AB, CD daných kružnic. Potom narýsujte středy stejnolehlosti úseček AB, CD.

60 a) $\varkappa = \frac{1}{4}$; b) $\varkappa = 4$; c) $\varkappa = -\frac{1}{4}$; d) $\varkappa = -4$.

Užití stejnolehlosti dvou kružnic v konstrukčních úlohách

61 Narýsujte středy stejnolehlosti S_1, S_2 daných kružnic, potom z bodů S_1 a S_2 veďte pomocí Thaletovy kružnice tečny ke kružnici k_1 nebo ke k_2.

62 V kružnici k_1 narýsujte libovolnou tětivu délky 4 cm, její střed označte M_1. Narýsujte kružnici $k_1'(O_1;\ |O_1M_1|)$. Podobně vyznačte tětivu dlouhou 4 cm v kružnici k_2, její střed označte M_2 a narýsujte kružnici $k_2'(O_2;\ |O_2M_2|)$. Potom společné tečny kružnic k_1', k_2' vytínají na kružnicích požadované stejné úsečky. Úloha má 4 řešení.

63 Narýsujte libovolnou kružnici $l(L;r)$, která se dotýká ramen úhlu AVB. Označte M_1, M_2 průsečíky kružnice l s přímkou VM. Přímky vedené bodem M rovnoběžně s M_1L, M_2L protínají osu úhlu AVB v bodech S_1, S_2, což jsou středy hledaných kružnic.

64 Nemusí se užít stejnolehlosti. Jednodušší je bodem M vést kolmici na osu $\sphericalangle AVB$, průsečíky kolmice s rameny úhlu označte P, Q. Potom hledané kružnice jsou dvě, kružnice $\triangle VPQ$ vepsaná a připsaná.

65 Středem O sestrojte kolmici q k přímce p. Průsečíky kolmice q s kružnicí k označte X, Y. $S_1 \in \leftrightarrow XT \cap k$, $S_2 \in \leftrightarrow YT \cap k$. Body S_1, S_2 jsou středy stejnolehlosti kružnice dané a hledané. Středy O_1, O_2 hledaných kružnic leží na kolmici k přímce p v bodě T a na osách úseček TS_1, TS_2. Poloměry jsou O_1S_1, O_2S_2.

Konstrukce úsečky dělené daným bodem v určitém poměru

66 $H(M;\varkappa = -2)$: $(\mapsto VA) \to (\mapsto V'A')$, $Y \in \mapsto VB \cap \mapsto V'A'$. Úloha má 1 řešení.

67 a) Bod X leží na obvodu čtverce $ABCD$ a na obrazu čtverce $ABCD$ ve stejnolehlosti $H(M;\varkappa = -\frac{3}{2})$. Úloha má 2 řešení.

b) Bod Y leží na obvodu čtverce $ABCD$ a na obrazu čtverce $ABCD$ ve stejnolehlosti $H(M; \varkappa = -2)$. Úloha má 2 řešení.

68 $H(M; \varkappa = -\frac{1}{3})$: $k \to k'$, $X \in k \cap k'$. Úloha má 2 řešení.

69 a) $H(M; \varkappa = \frac{3}{4})$: $k \to k'$, $X \in k \cap k'$. Úloha má 2 řešení.
b) $H(M; \varkappa = \frac{2}{3})$: $k \to k'$, $Y \in k \cap k'$. Úloha má 2 řešení.

70 $H(M; \varkappa = \frac{1}{2})$: $k \to k'$, $X \in k \cap k'$. Úloha má 2 řešení.

71 $H(M; \varkappa = -\frac{1}{2})$: $k_1 \to k_1'$, $Y_1 \in k_2 \cap k_1' \vee H(M; \varkappa = -2)$: $k_1 \to k_1''$, $Y_2 \in k_2 \cap k_1''$. Úloha má 2 řešení.

Užití stejnolehlosti při konstrukci trojúhelníků

72 a) Pomocný $\triangle A'B'C'$: $a' = 4$, $b' = 5$, $\gamma = 60°$. Vyznačte výšku v_c' v $\triangle A'B'C'$. Potom $H(C; \varkappa = \frac{v_c}{v_c'})$: $\triangle A'B'C' \to \triangle ABC$.
b) Pomocný $\triangle A'B'C'$: $b' = 7$, $c' = 6$, $\alpha = 45°$. Vyznačte výšku v_c' v $\triangle A'B'C'$. Potom $H(C; \varkappa = \frac{v_c}{v_c'})$: $\triangle A'B'C' \to \triangle ABC$.
c) Pomocný $\triangle A'B'C'$: $\alpha = 75°$, $\gamma = 45°$. Sestrojte kružnici vepsanou $\triangle A'B'C'$. Vyznačte její střed S poloměr ϱ'. Potom $H(S; \varkappa = \frac{\varrho}{\varrho'})$: $\triangle A'B'C' \to \triangle ABC$.
d) Pomocný $\triangle A'B'C'$: $\alpha = 60°$, $\gamma = 60°$. Sestrojte kružnici opsanou $\triangle A'B'C'$. Vyznačte její střed S poloměr r'. Potom $H(S; \varkappa = \frac{r}{r'})$: $\triangle A'B'C' \to \triangle ABC$.
e) Pomocný $\triangle A'B'C'$: $a' = 7$, $b' = 3$, $c' = 5$. Vyznačte výšku v_c' v $\triangle A'B'C'$. Potom $H(C; \varkappa = \frac{v_c}{v_c'})$: $\triangle A'B'C' \to \triangle ABC$.
f) Pomocný $\triangle A'B'C'$: $a' = 4$, $b' = 3$, $c' = 5$. Sestrojte kružnici opsanou $\triangle A'B'C'$. Vyznačte její střed S poloměr r'. Potom $H(S; \varkappa = \frac{r}{r'})$: $\triangle A'B'C' \to \triangle ABC$.
g) Pomocný $\triangle A'B'C'$: $a' = 5$, $b' = 6$, $c' = 5$. Sestrojte kružnici vepsanou $\triangle A'B'C'$. Vyznačte její střed S poloměr ϱ'. Potom $H(S; \varkappa = \frac{\varrho}{\varrho'})$: $\triangle A'B'C' \to \triangle ABC$.
h) Sestrojte úhel $XA'Y$, $|\sphericalangle XA'Y| = \alpha = 45°$. Na jednom ramenu vyznačte úsečky délek $|A'B_1| = 3$, $|B_1C'| = 4$. Sestrojte kolmici na $A'B_1$ bodem B_1, její průsečík s druhým ramenem označte B_2. Potom $H(B_1; \varkappa = \frac{v_b}{|B_1B_2|})$: $A' \to A$, $C' \to C$. $B \in \mapsto AB_2 \cap p$, kde $p \parallel AB_1$ ve vzdálenosti v_b.

Užití stejnolehlosti k vepisování útvarů

73 Narýsujte pomocný čtverec $K_1L_1M_1N_1$ tak, aby $K_1L_1 \parallel AB$, $M_1 \in BC \wedge N_1 \in AC$. Potom $K \in AB \leftrightarrow CK_1$, $L \in AB \leftrightarrow CL_1$. KL je strana hledaného čtverce.

74 Střed úsečky AB označte S_1. Narýsujte pomocný čtverec $K_1L_1M_1N_1$ tak, aby $K_1L_1 \subset AB$ a střed úsečky K_1L_1 byl v bodě S_1. Potom $M \in \leftrightarrow S_1M_1 \cap k \wedge N \in \leftrightarrow S_1N_1 \cap k$. MN je strana hledaného čtverce.

75 Narýsujte pomocný obdélník $K_1L_1M_1N_1$ tak, aby platilo: $K_1 \in BS$, $L_1 \in AS \wedge K_1L_1 \parallel AB \wedge |M_1L_1| = 2|K_1L_1|$. Potom $M \in \leftrightarrow SM_1 \cap k$, $N \in \leftrightarrow SN_1 \cap k$.

Konstrukce na omezené nákresně

76, 77, 78 Na papíře zvolte libovolný bod S, zvolte koeficient stejnolehlosti $\varkappa$. Ve zvolené stejnolehlosti nakreslete obraz zadání (koeficient stejnolehlosti $\varkappa$ zvolte tak, aby nedostupný bod už byl na papíře.) Proveďte požadovanou konstrukci a výsledek zobrazte ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem $\frac{1}{\varkappa}$.

9.10 Skládání rotace a stejnolehlosti

79 $R(M; \pm 90°)$: $k \to k_1$, potom $H(M; \varkappa = 2)$: $k_1 \to k_2$. $B \in p \cap k_2$. Úloha má 2 řešení.

80 $R(M; \pm 45°)$: $k \to k_1$, potom $H(M; \varkappa = \sqrt{2})$: $k_1 \to k_2$, $A \in p \cap k_2$. Úloha má 2 řešení.

11 Geometrie — výpočty

11.1 Trojúhelníková nerovnost

1 $c \in (2; 14)$. **2** $|AB| \in (0; 20)$. **3** $a \in (2; 14)$.

4 Důkaz pro v_c. Použijte trojúhelníkovou nerovnost na $\triangle ACC_1$, $\triangle BCC_1$, C_1 je pata výšky z C na AB, potom obě nerovnosti sečtěte.

5 Doplňte $\triangle ABC$ na rovnoběžník $AXBC$ a použijte trojúhelníkovou nerovnost na $\triangle CAX$.

6 Užijte trojúhelníkové nerovnosti na $\triangle ABT$, $\triangle BCT$, $\triangle ACT$, kde T je těžiště. Nerovnosti sečtěte. Potom doplňte $\triangle ABC$ na rovnoběžník $AXBC$, užijte trojúhelníkovou nerovnost na $\triangle CAX$, doplňte $\triangle ABC$ na rovnoběžník $ABYC$, užijte trojúhelníkovou nerovnost na $\triangle ABY$, doplňte $\triangle ABC$ na rovnoběžník $ABCZ$, užijte trojúhelníkovou nerovnost na $\triangle ABZ$. Nerovnosti sečtěte.

7 $\triangle ABC$ doplňte na rovnoběžník ABA_1C. Označte T těžiště $\triangle ABC$, T_1 těžiště $\triangle BA_1C$. Pro $\triangle TT_1C$ platí trojúhelníková nerovnost, proto lze $\triangle ABC$ sestrojit.

8 Z délek výšek odvoďte poměr délek stran. Platí $a : b : c = 10 : 5 : 4$. $\triangle ABC$ nelze sestrojit.

11.2 Úhly střídavé, souhlasné, vedlejší, vrcholové

9 a) $\alpha = 70°$, $\beta = \gamma = 65°$, $\delta = 110°$; b) $\varphi = 100°$, $\psi = 80°$, $\vartheta = 120°$.

11.3 Úhly v trojúhelníku

10 Bodem C veďte rovnoběžku se stranou AB. Vyznačte střídavé úhly s α, β.

11 Dopočítejte $|\sphericalangle BMC| = \frac{\beta}{2}$. **12** $60°$. **13** $|\sphericalangle AOB| = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2}$.

14 Dopočítejte úhly v $\triangle KLM$ ($\alpha = \beta = \gamma = 60°$).

15 Součet úhlů ve čtyřúhelníku např. $ASDP$ je $360°$. S je střed kružnice k, P je průsečík tečen.

16 S_{AB} je střed přepony AB, bod C_1 je pata kolmice z vrcholu C na AB, bod O je průsečík osy pravého úhlu s AB. $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ACS_{AB}| = |\sphericalangle C_1CB| = \alpha$. Proto $|\sphericalangle C_1CO| = |\sphericalangle S_{AB}CO| = 45° - \alpha$.

11.4 Shodnost trojúhelníků

17 $\triangle CAH \cong \triangle KAB$ podle věty sus, $s = b$, $u = \alpha + 60°$, $s = c$.

18 $\triangle CBP \cong \triangle TBA$ podle věty sus, $s = a$, $u = \beta + 90°$, $s = c$.

19 a) sus, $s = a$, $u = \alpha$, $s = b$; b) sus, $s = b$, $u = \alpha + 90°$, $s = a$.

20 a) Ssu, $S = |VM|$ (společná), $s = |MX_1| = |MY_2|$, $u = 90°$;
b) usu, $u = 90°$, $s = |MX_1| = |MY_2|$, uu — shodné vrcholové úhly.

11.5 Podobnost trojúhelníků

21 Platí a), c). Trojúhelníky jsou podobné podle věty uu. $u = |\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SCD|$, $u = |\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle CDS|$. Neplatí b), protože je uvedeno nesprávné pořadí vrcholů.

22 $\triangle ABC \sim \triangle AS_{AB}S_{AC} \sim \triangle S_{BC}S_{AC}S_{AB} \sim \triangle S_{AB}BS_{BC} \sim \triangle S_{AC}S_{BC}C$ (uu). Všechny trojúhelníky mají vnitřní úhly α, β, γ.

23 $\triangle AA_1C \sim \triangle BB_1C$ podle věty $uu \Rightarrow |A_1C| : |AC| = |B_1C| : |BC|$, γ je společný $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$.

24 $x = a \cdot (2\sqrt{3} - 3)$.

25 2 řešení: $x_1 = \frac{1}{2}a \cdot (3 - \sqrt{3})$, $y_1 = \frac{1}{4}a \cdot (3 - \sqrt{3})$; $x_2 = \frac{1}{13}a \cdot (4\sqrt{3} - 3)$, $y_2 = \frac{2}{13}a \cdot (4\sqrt{3} - 3)$.

26 Označte a_1 (a_2) délku strany šestiúhelníku vepsaného (opsaného) $\Rightarrow a_2 : a_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} : 1$.

27 $|S_1S_2| = 12\,\text{cm}$.

28 $\triangle BCA \sim \triangle BLC_1 \sim \triangle C_1KA \sim \triangle C_1CL \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{|BL|}{|C_1L|} \wedge \frac{a}{b} = \frac{|C_1K|}{|AK|} \wedge \frac{a}{b} = \frac{|C_1L|}{|C_1K|} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{|BL|}{|C_1L|} \cdot \frac{|C_1K|}{|AK|} \cdot \frac{|C_1L|}{|C_1K|} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{|BL|}{|AK|}$.

29 Je-li $a' : a = k$, potom $S_{\triangle A'B'C'} : S_{\triangle ABC} = k^2$. **30** $|AM| = (8 - 4\sqrt{2})\,\text{cm}$.

31 a) $|pAB| = v \cdot (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$; b) $|Cp| : |pAB| = (\sqrt{2} + 1) : 1$.

32 a) $|SB_1| : |B_1C| = 9 : 16$; b) $|SB_1| : |B_1C| = a^2 : 4b^2$; c) $|AB| : |BC| = 2 : 1$.

11.6 Pythagorova věta a Euklidovy věty

33 a) Je pravoúhlý; b) není pravoúhlý; c) není trojúhelník.
34 Ověřte platnost Pythagorovy věty.
35 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 90° = a^2 + b^2$; $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha = c^2 + b^2 - 2cb\frac{b}{c} = c^2 - b^2$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - 2ac\frac{a}{c} = c^2 - a^2$; což je vždy Pythagorova věta.
36 $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. **37** $c = 16\frac{2}{3}$ cm, $a = 13\frac{1}{3}$ cm.
38 Ověřte platnost Pythagorovy věty pro $\triangle CLS$.
39 $a_1, (S_1)$ strana (obsah) čtverce vepsaného, $a_2, (S_2)$ strana (obsah) čtverce opsaného. Potom $a_1 : a_2 = \sqrt{2} : 2$, $S_1 : S_2 = 1 : 2$.
40 Užijte Pythagorovu větu na $\triangle EAK$, $|\sphericalangle EAK| = 90°$.
41 a) $|BD| = 10$ cm; b) $|DA_1| = 3{,}6$ cm; c) $|BA_1| = 6{,}4$ cm; d) $|AA_1| = 4{,}8$ cm; e) $|A_1A_2| = 3{,}84$ cm.
42 a) $|MT_1| = 6\sqrt{2}$ cm; b) $|T_1T_2| = 4\sqrt{2}$ cm; c) $|S, T_1T_2| = 1$ cm.
43 a) $|T_1T_2| = 1{,}5$ cm; b) $|T_1T_2| = 2\sqrt{15}$ cm; $|T_3T_4| = 2\sqrt{7}$ cm.
44 $t_b = 2\sqrt{6}$ cm. **45** 2 řešení $|DX_1| : |X_1C| = 1 : 4$; $|DX_2| : |X_2C| = 4 : 1$.
46 $|P_1P_2| = 3\sqrt{7}$ cm.
47 Z bodu M sestrojte kolmici na AB a na BC. Užijte Pythagorovu větu na pravoúhlé trojúhelníky, které takto dostanete.

11.7 Středový a obvodový úhel

48 $75°, 45°, 60°$. **49** $30°, 75°, 75°$. **50** Platí. **51** $60°$. **52** a) $\alpha = 20°$, $\gamma = 120°$, $\delta = 40°$; b) $80°$. **53** $\beta = 90°$, $\delta = 112°30'$, $\varepsilon = 90°$, $\varkappa = 67°30'$. **54** $30°, 45°, 105°$.

11.8 Mocnost bodu ke kružnici

55 a) Trojúhelníky jsou podobné podle věty *uu*; shodné obvodové úhly $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD|$, shodné vrcholové úhly $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CPD|$.
b) Poměry odpovídajících stran podobných trojúhelníků jsou stejné.
56 a) Trojúhelníky jsou podobné podle věty *uu*; společný úhel u vrcholu M, shodné obvodové úhly $|\sphericalangle MAD| = |\sphericalangle MCB|$.
b) Poměry odpovídajících stran podobných trojúhelníků jsou stejné.
57 a) Označte $|\sphericalangle BAT| = \alpha$, potom $|\sphericalangle BST| = 2\alpha \Rightarrow |\sphericalangle STB| = 90° - \alpha$. Protože $|\sphericalangle STM| = 90°$, musí být $|\sphericalangle BTM| = \alpha$.
b) Trojúhelníky jsou podobné podle věty *uu*.
c) Z podobnosti podle b) plyne: $|MA| : |MT| = |MT| : |MB|$.

11.9 Aritmetický a geometrický průměr

58 Aritmetický průměr: $\frac{a+b}{2} = 5$, geometrický průměr: $\sqrt{ab} = 4$.
59 a) $|SC| = t_c = \frac{c}{2} = \frac{c_a + c_b}{2}$; b) Euklidova věta o výšce... $|CC_1| = \sqrt{c_a \cdot c_b}$.
60 a) $|MS| = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2}$; b) Mocnost bodu ke kružnici... $|MT|^2 = |MA| \cdot |MB| = a \cdot b$.

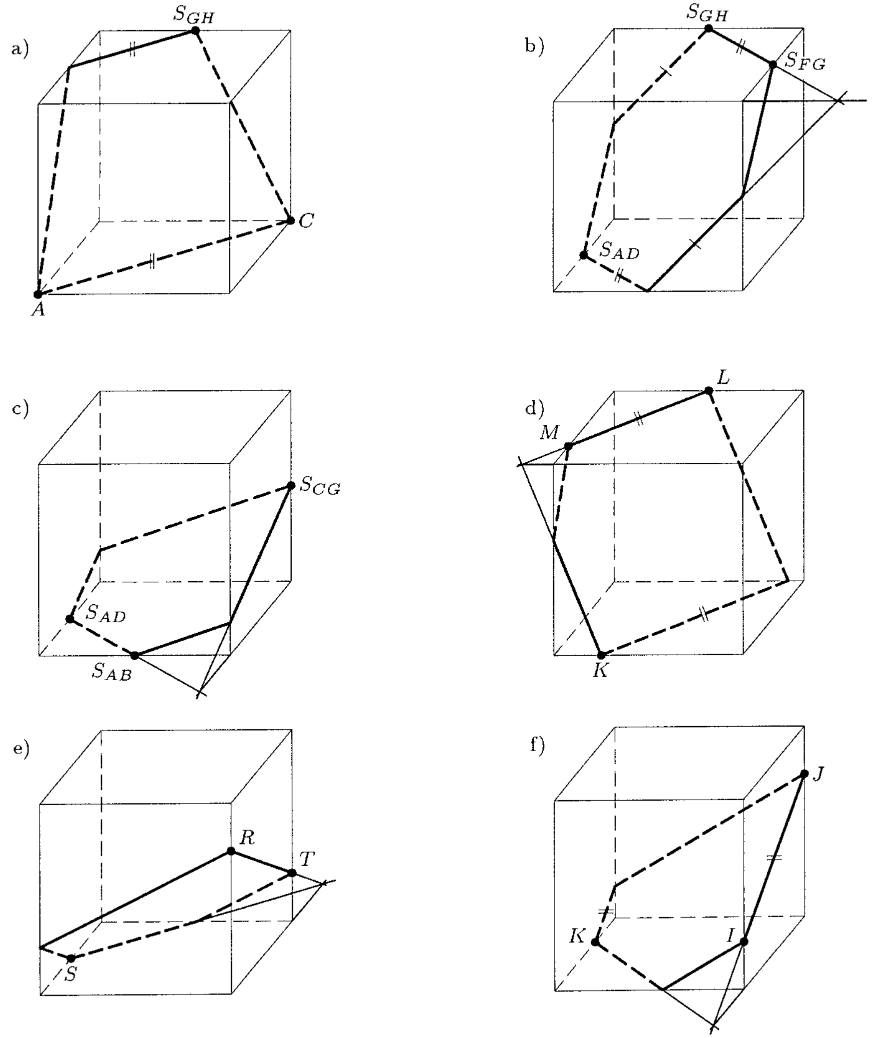
12 Stereometrie

12.1 Vzájemná poloha dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin, tří rovin

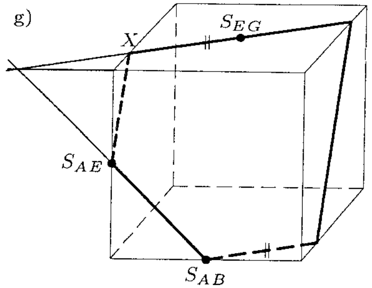
1 a) Mimoběžky; b) různoběžky; c) různé rovnoběžky; d) mimoběžky.
2 a) Přímka je různoběžná s rovinou; b) přímka je rovnoběžná s rovinou, $p \cap \varrho = \emptyset$; c) přímka leží v rovině; d) přímka leží v rovině.
3 a) Různoběžné roviny; b) různé rovnoběžné roviny; c) různoběžné roviny; d) shodné roviny.
4 a) Tři různoběžné roviny, společný jeden bod (střed krychle), trs rovin; b) tři různoběžné roviny, společná přímka $S_{BE}S_{CH}$, svazek rovin; c) tři různoběžné roviny, žádný společný bod, průsečnice jsou navzájem rovnoběžné; d) dvě rovnoběžné roviny protíná rovina třetí.
5 a) Různoběžky; b) přímka je různoběžná s rovinou; c) různé rovnoběžné roviny; d) tři různoběžné roviny, společný bod, trs rovin.

12.2 Řezy

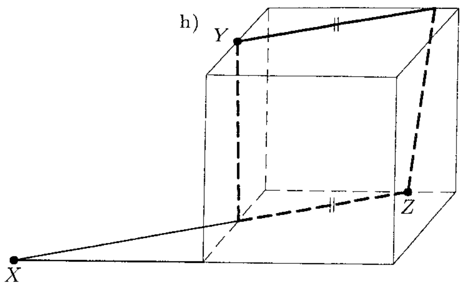
6



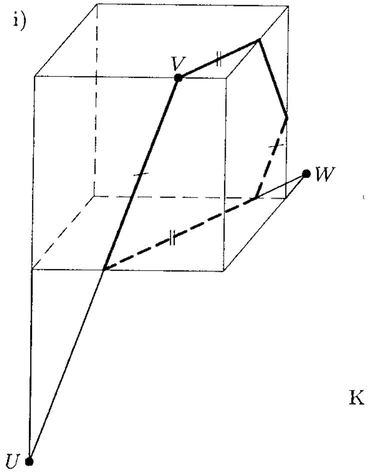
g)



h)

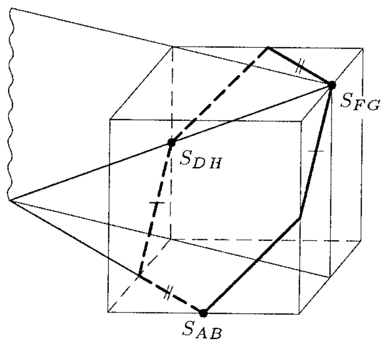


i)

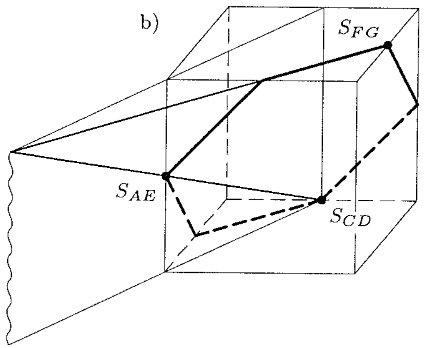


K řešení úlohy 6

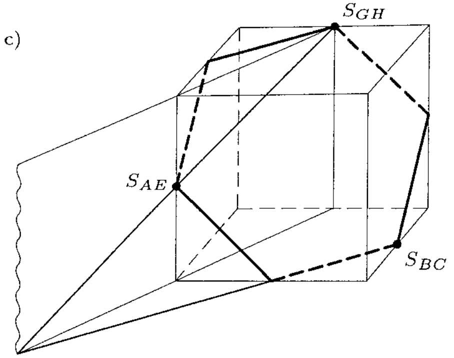
7 a)



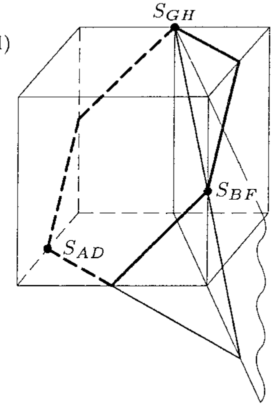
b)



c)

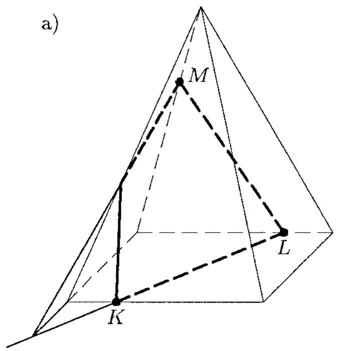


d)

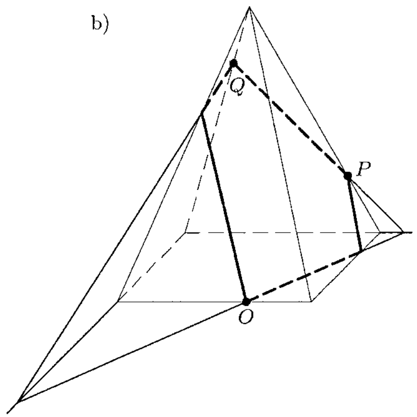


K řešení úlohy 7

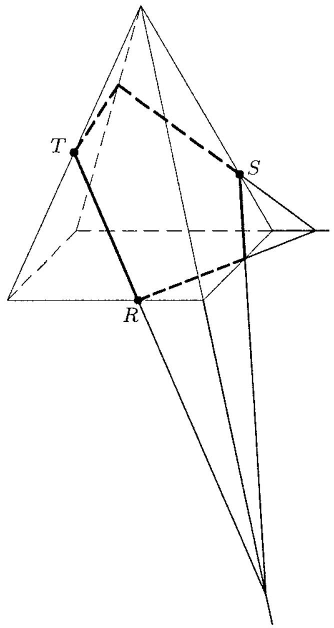
8 a)



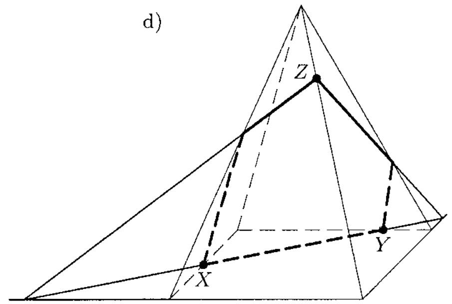
b)



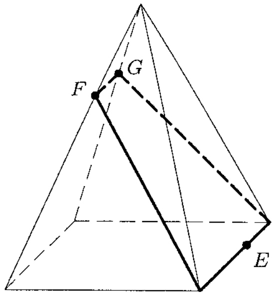
c)



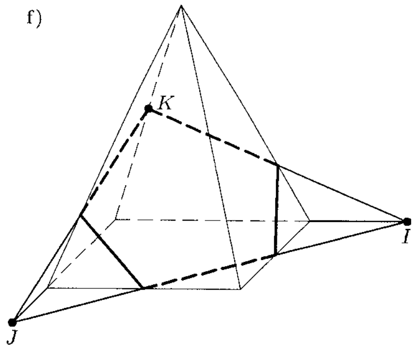
d)



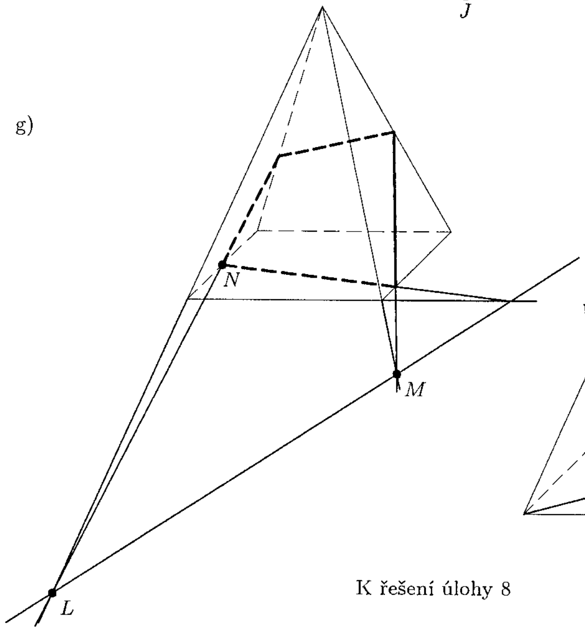
e)



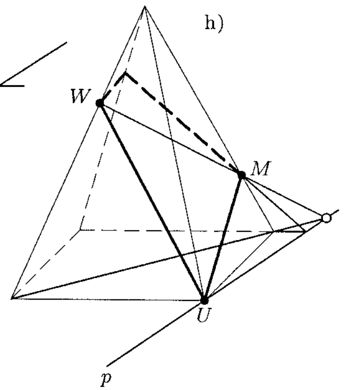
f)



g)



h)

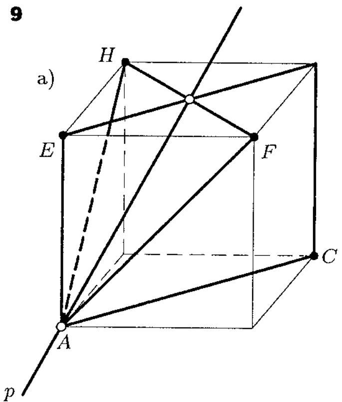


K řešení úlohy 8

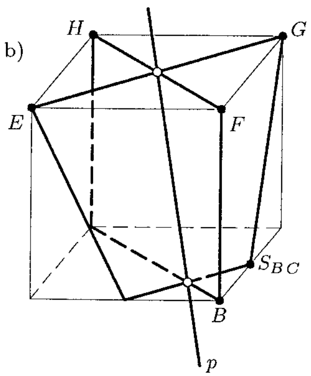
12.3 Průnik dvou rovin

9

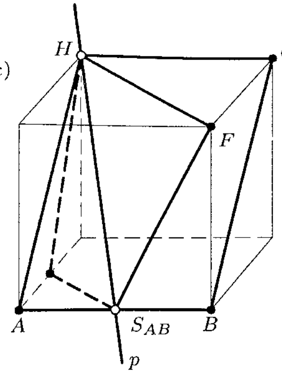
a)



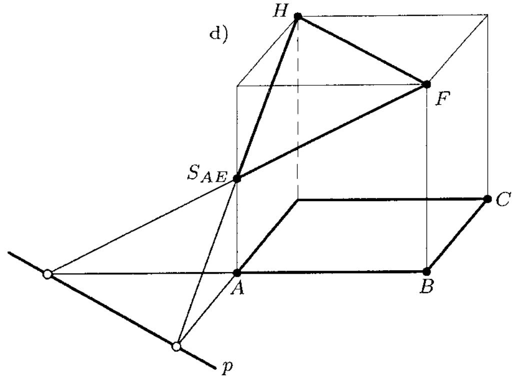
b)



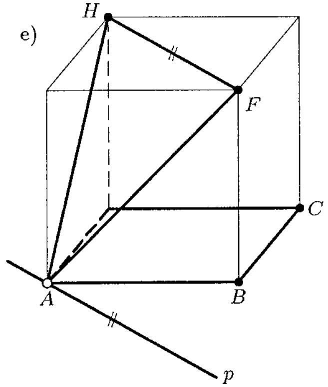
c)



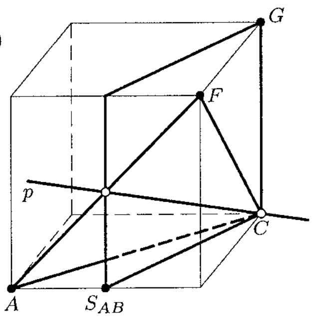
d)



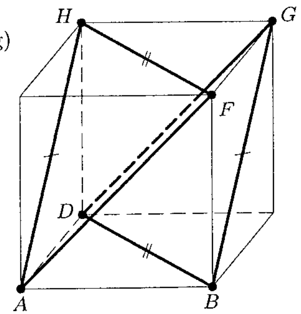
e)



f)

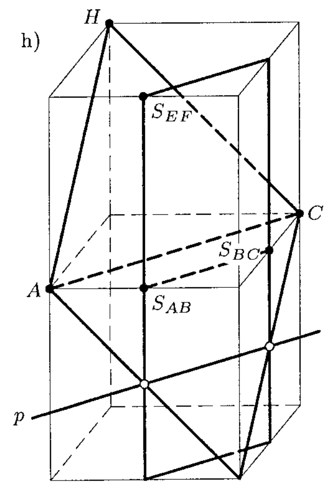


g)

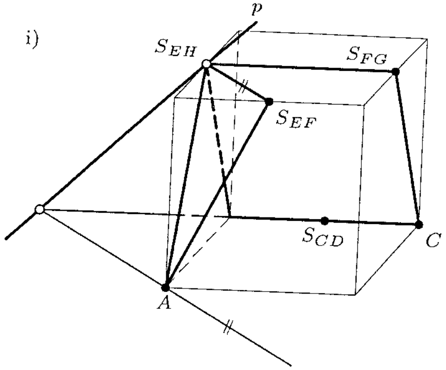


rovnoběžné roviny

h)



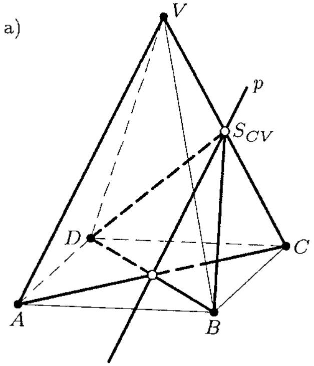
i)



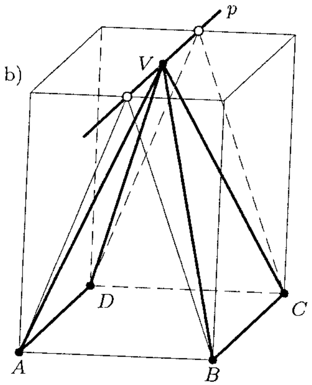
K řešení úlohy 9

10

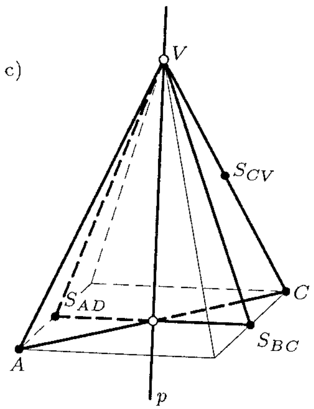
a)



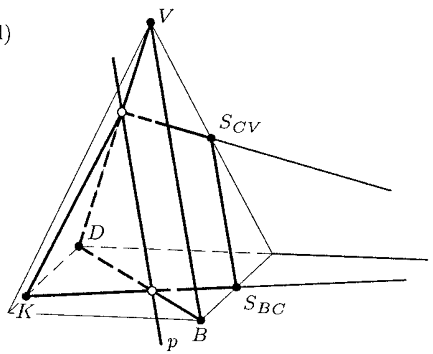
b)



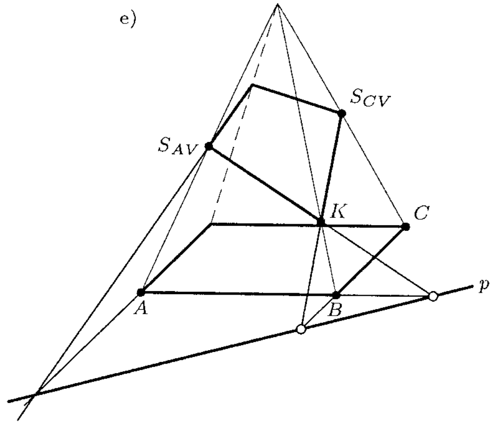
c)



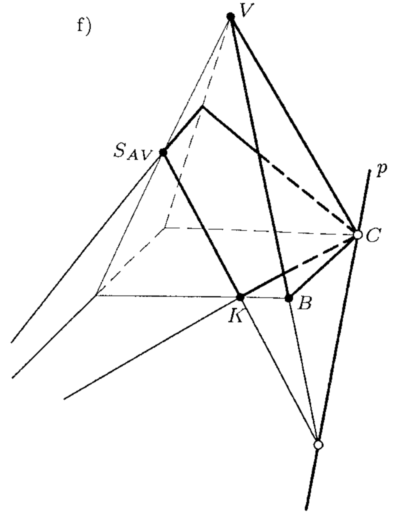
d)



e)



f)

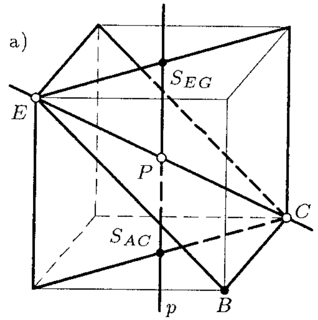


K řešení úlohy 10

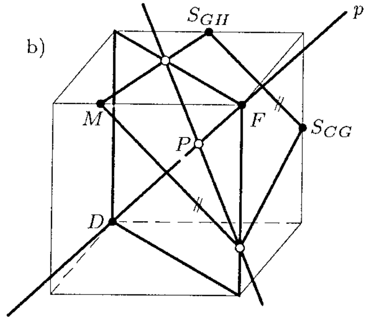
12.4 Průnik přímky s rovinou

11

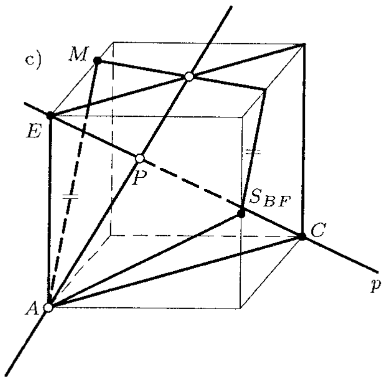
a)



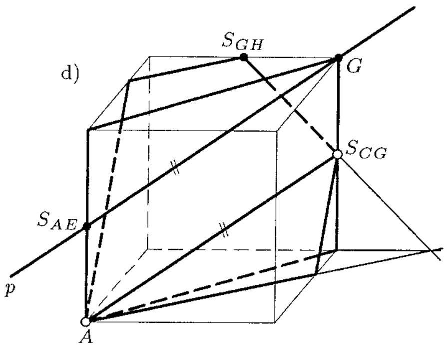
b)



c)



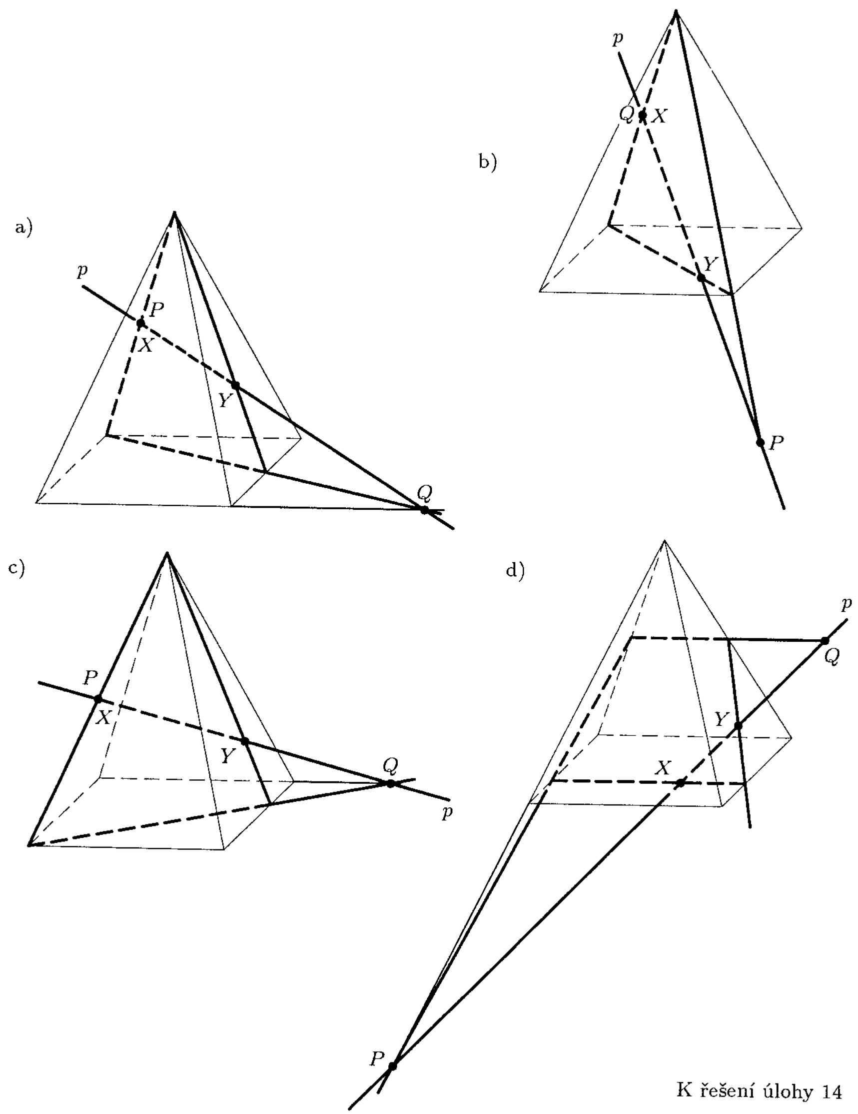
d)



přímka je rovnoběžná s rovinou

K řešení úlohy 11

14



K řešení úlohy 14

Metrické úlohy — výpočty vzdáleností

12.6 Vzdálenost dvou bodů

15 a) $4\sqrt{3}$ cm; b) 6 cm; c) $2\sqrt{6}$ cm; d) $2\sqrt{6}$ cm; e) $2\sqrt{3}$ cm; f) $2\sqrt{2}$ cm.

16 a) $2\sqrt{11}$ cm; b) $2\sqrt{10}$ cm; c) $3\sqrt{3}$ cm; d) $\sqrt{19}$ cm; e) $\sqrt{11}$ cm; f) $\sqrt{19}$ cm.

12.7 Vzdálenost bodu od přímky

17 a) 4 cm; b) $2\sqrt{6}$ cm; c) $4\sqrt{2}$ cm; d) $2\sqrt{6}$ cm; e) $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ cm; f) $2\sqrt{6}$ cm; g) 4 cm; h) $3\sqrt{2}$ cm; i) $\sqrt{22}$ cm.

18 $\triangle ABH \cong \triangle CBH \cong \triangle DHB \cong \triangle EHB \cong \triangle FBH \cong \triangle GHB \Rightarrow v = \frac{4}{3}a\sqrt{6}$ cm.

19 a) $2\sqrt{10}$ cm; b) $\frac{12}{11}\sqrt{22}$ cm; c) $\frac{6}{11}\sqrt{22}$ cm; d) $\sqrt{11}$ cm; e) $\sqrt{17}$ cm; f) $3\sqrt{2}$ cm.

12.8 Vzdálenost rovnoběžných přímek

20 a) $4\sqrt{2}$ cm; b) $2\sqrt{6}$ cm; c) $\frac{1}{3}\sqrt{30}$ cm. **21** a) $3\sqrt{2}$ cm; b) $\frac{2}{11}\sqrt{110}$ cm; c) $\frac{6}{11}\sqrt{22}$ cm.

12.9 Vzdálenost mimoběžek

22 a) 4 cm; b) 4 cm; c) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ cm. **23** a) 2 cm; b) 3 cm; c) $\frac{6}{11}\sqrt{22}$ cm.

12.10 Vzdálenost bodu od roviny

24 a) $2\sqrt{2}$ cm; b) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ cm; c) $\frac{8}{5}\sqrt{5}$ cm; d) $\sqrt{2}$ cm; e) $2\sqrt{2}$ cm; f) $\frac{8}{5}\sqrt{5}$ cm.

25 a) 3 cm; b) $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ cm; c) 3 cm; d) $\sqrt{2}$ cm.

26 a) $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ cm; b) $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ cm;
c) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ cm; d) $\frac{4}{9}\sqrt{6}$ cm.

27 a) $2\sqrt{3}$ cm; b) 3 cm; c) 6 cm; d) 6 cm.

12.11 Vzdálenost rovnoběžných rovin

28 a) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ cm; b) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ cm; c) $\frac{4}{5}\sqrt{5}$ cm.

Metrické úlohy — výpočty odchylek

12.12 Odchylka dvou přímek

29 a) 60°; b) 35°16′; c) 70°32′; d) 90°; e) 54°44′; f) 54°44′; g) 90°; h) 90°; i) 90°. **30** a) Přibližně 71°; b) přibližně 51°; c) přibližně 48°. **31** a) 35°06′; b) 50°29′; c) 90°; d) 72°27′; e) 90°; f) 90°; g) 77°05′; h) 70°32′; i) 70°32′.

32 a) Přibližně 72°; b) přibližně 77°; c) 90°.

12.13 Odchylka přímky od roviny

33 a) 35°16′; b) 35°16′; c) 35°16′; d) 35°16′; e) 24°06′; f) 24°06′; g) 35°16′; h) 54°44′; i) 0°.

34 a) 90°; b) 18°26′; c) 64°46′; d) 34°54′; e) 35°16′; f) 35°16′.

12.14 Odchylka dvou rovin

35 a) 90°; b) 54°44′; c) 90°; d) 26°34′; e) 35°16′; f) 60°.

36 a) 71°34′; b) 36°52′; c) 18°26′; d) 84°16′; e) 90°; f) 63°26′.

37 a) 60°; b) 60°; c) 51°19′; d) 82°49′.

12.15 Další úlohy

38 a) cesta $S_{BE}KX$, kde $K \in EF \wedge |KF| = 1\frac{2}{3}$ cm, délka cesty je $d = \sqrt{37}$ cm;
b) cesta YLX, kde $L \in FG \wedge |LG| = 1$ cm, délka cesty je $d = 4\sqrt{2}$ cm.

39 a) cesta CXS_{AV}, kde $X \in BV \wedge |VX| = \frac{12}{11}\sqrt{11}$ cm, délka cesty je $d = \frac{21}{11}\sqrt{11}$ cm;
b) cesta $DYT_{\triangle BCV}$, kde $Y \in CV \wedge |VY| = \frac{116}{99}\sqrt{11}$ cm, délka cesty je $d = \frac{2}{33}\sqrt{7\,579}$ cm.

40 a) $|AC| = |CH| = |AH| = |AF| = |HF| = |CF|$; b) $\sqrt{2}$ cm;
c) $AF \perp CH \wedge AH \perp CF \wedge AC \perp FD$;
d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ cm; e) $\sqrt{2}$ cm; f) $60°$; g) $70°32'$.

41 a) $51°19'$; b) $57°25'$; c) $73°54'$; d) $\sqrt{39}$ cm.

42 a) $2\sqrt{11}$ cm; b) $6\sqrt{3}$ cm; c) $64°46'$; d) $71°34'$; e) 12 cm.

12.16 Obsah řezu

43 a) $o = 4\sqrt{17}$ cm, $S = 12\sqrt{2}\,\text{cm}^2$; b) $o = (6\sqrt{2} + 4\sqrt{5})$ cm, $S = 18\,\text{cm}^2$; c) $o = 12\sqrt{2}$ cm, $S = 12\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

44 a) $o = (6 + 2\sqrt{19})$ cm, $S = 9\sqrt{2}\,\text{cm}^2$; b) $o = (\sqrt{19} + \sqrt{11} + 2\sqrt{5})$ cm, $S = \sqrt{46}\,\text{cm}^2$;
c) $o = (2\sqrt{19} + \frac{2}{3}\sqrt{35})$ cm, $S = \frac{4}{3}\sqrt{34}\,\text{cm}^2$. **45** $o = (6 + 4\sqrt{10})$ cm, $S = 3\sqrt{39}\,\text{cm}^2$.

12.17 Objemy a povrchy těles

46 a) $3\sqrt{2}$ cm; b) $54\sqrt{2}\,\text{cm}^3$; c) $108\,\text{cm}^2$. **47** a) 8×; b) 4×. **48** O 52 %.

49 $S = 16\sqrt[3]{4}(1 + 2\sqrt{2})\,\text{cm}^2$. **50** $V = 15\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

51 $V = 144\sqrt{3}\,\text{cm}^3$, $S = (48\sqrt{3} + 144)\,\text{cm}^2$. **52** $a \doteq 3{,}9$ cm. **53** $S \doteq 125{,}8\,\text{cm}^2$.

54 $S = \frac{27}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{15})\,\text{cm}^2$, $V = 40{,}5\,\text{cm}^3$. **55** $V = \frac{32}{3}\sqrt{6}\,\text{cm}^3$, $S = 16(1 + \sqrt{7})\,\text{cm}^2$.

56 $V = \frac{20}{3}\sqrt{15}\,\text{cm}^3$, $S = 60\,\text{cm}^2$. **57** $V = \frac{64}{3}\,\text{cm}^3$.

58 $V = 10\,\text{cm}^3$, $S = (\frac{57}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{41})\,\text{cm}^2$. **59** $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$, $S = a^2 \cdot \sqrt{3}$.

60 $V = \frac{76}{3}\sqrt{6}\,\text{cm}^3$, $S = (52 + 20\sqrt{7})\,\text{cm}^2$. **61** $V = \frac{76}{3}\sqrt{3}\,\text{cm}^3$, $S = 92\,\text{cm}^2$.

62 $|DX| = \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}$. **63** $V = \frac{125}{3}\sqrt{2}\,\text{cm}^3$, $S = 50\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

64 $V = 1\,000\pi\,\text{cm}^3$, $S = 100\pi(3 + 2\sqrt{3})\,\text{cm}^2$.

65 $V = \frac{8}{3}\pi\sqrt{3}\,\text{cm}^3$, $S = 12\pi\,\text{cm}^2$. **66** $V_1 : V_2 = a : b$.

67 a) $\varrho = 2\sqrt[3]{4}$ cm; b) $|VX| : |XS| = \sqrt[3]{4} : (2 - \sqrt[3]{4})$. **68** $V_1 : V_2 : V_3 = 19 : 7 : 1$.

69 a) $\varrho = \sqrt[3]{36}$ cm $\doteq 3{,}3$ cm; b) $v_1 : v_2 = (\sqrt[3]{36} - 2) : (4 - \sqrt[3]{36}) \doteq 1{,}185$.

70 $S = 6\sqrt[3]{\pi}\,\text{dm}^2$. **71** $r_{\text{kužel}} = R_{\text{půlkruh}} = s$. **72** $r = 1$ cm, $V = \frac{2}{3}\pi\sqrt{2}\,\text{cm}^3$.

73 Část mezikruží z výseče, kde $r_1 = 50$ cm, $r_2 = 25$ cm, $\varphi = 216°$.

74 $v = r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$ dm. **75** $V = 160\pi\sqrt{5}\,\text{cm}^3 \doteq 1{,}1$ litru. **76** $S = \frac{75}{2}\pi\,\text{cm}^2$.

77 $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ dm, $v = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ dm. **78** 2 730 m.

79 a) 39,8 %; b) 51,9 %; c) 8,3 %; d) 16,8 %.

80 $S \doteq 13\,300\,000\,\text{km}^2$, což je 2,6 %. **81** $V \doteq 61{,}2\,\text{cm}^3$, $S \doteq 65{,}3\,\text{cm}^2$.

82 $S = 12\pi\,\text{cm}^2$. **83** $V_{\text{krychle}} : V_{\text{jehlan}} : V_{\text{kužel}} = 12 : 4 : \pi$.

84 $V_1 : V_2 : V_3 = 3\pi\sqrt{3} : 6 : \pi$. **85** $r = 3\sqrt{2}$ cm, $v = 6\sqrt{2}$ cm, 53 %.

86 a) $r = 3\sqrt{3}$ cm, $v = 9$ cm, 28 %; b) $r = 6\sqrt{3}$ cm, $v = 18$ cm, 44 %.

87 $r = \frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}$ cm, $V_{\text{kužel}} \doteq 2V_{\text{koule}}$.

88 $r = \frac{2(\sqrt{10}-1)}{3}$ cm, $V_{\text{jehlan}} \doteq 2{,}6V_{\text{koule}}$. **89** $a = 2\sqrt{6}$ cm, 26 %.

90 $r = \sqrt{3}$ cm, $v = 2\sqrt{6}$ cm, $V_{\text{kužel}} : V_{\text{čtyřstěn}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} : 1 \Rightarrow V_{\text{k}} \doteq \frac{3}{5}V_{\text{č}}$.

13 Vektory

13.1 Vektor, souřadnice vektoru

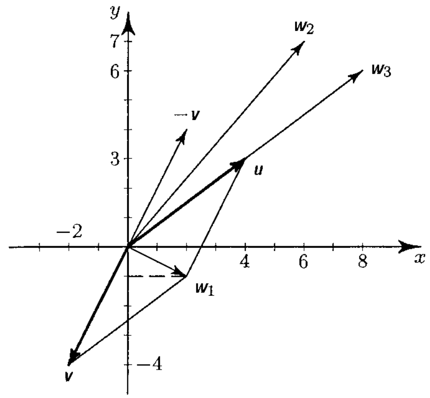
1 a) $\boldsymbol{u} = (3; -2)$; c) $X[0; -4]$; d) $\boldsymbol{u}_1 = (-3; 2)$. **2** a) $\boldsymbol{z} = (1; 2; 4)$; b) $Z[1; 2; 4]$.

3 a) $X[9; -6]$; b) $X[-5; 8]$; c) $X[-3; 2]$.

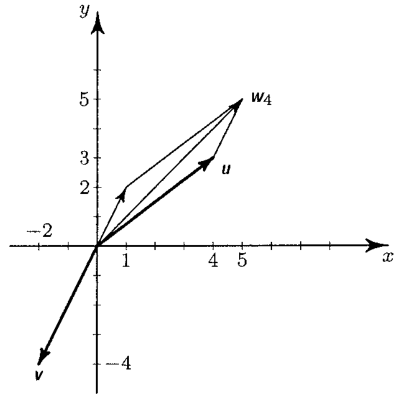
4 $C[5; 1; -2]$, $C_1[8; 7; 1]$, $B_1[6; 2; 5]$, $D_1[7; 8; 0]$.

13.2 Sčítání a odčítání vektorů, násobek vektoru

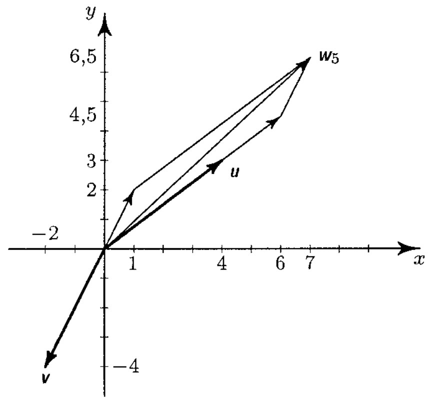
5



$\boldsymbol{w}_1 = (2; -1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (6; 7)$, $\boldsymbol{w}_3 = (8; 6)$



$\boldsymbol{w}_4 = (5; 5)$



$\boldsymbol{w}_5 = (7; \frac{13}{2})$

6 a) A, B, C leží na přímce; b) $y_D = 0$.

7 a) např. $K - L \neq k \cdot (K - M)$; b) $R[0; \frac{13}{5}; \frac{18}{5}]$, $S[-4; 5; 6]$.

13.3 Lineární kombinace vektorů

8 $\boldsymbol{z} = 3\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}$. **9** $\boldsymbol{z} = 2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$. **10** a) $\boldsymbol{w}_1 = -\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$; b) $\boldsymbol{w}_2 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$;
c) $\boldsymbol{w}_3 = -\frac{1}{3}\boldsymbol{u} + \frac{2}{3}\boldsymbol{v}$. **11** $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$. **12** $\boldsymbol{w} = -3\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{z} = -3\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$.

13 a), b) Platí. **14** a) $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{x}_3 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{x}_4 = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{x}_5 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$; b) $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{x}_5 = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

13.4 Lineárně závislé a lineárně nezávislé vektory

15 Lin. závislé, $2a - \frac{1}{2}b + c = o$.

16 a) Lin. závislé, $u_1 + 3u_2 + 0u_3 = o$; b) lin. nezávislé; c) lin. závislé, $2w_1 - w_2 - 2w_3 = o$.

13.5 Velikost vektoru

17 $|u| = 2\sqrt{5}$. **18** $|u| = 5\sqrt{2}$. **19** $y_{1,2} = \pm 8$. **20** $v_1 = (7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $v_2 = (-7\sqrt{2}; \sqrt{2})$. **21** a) $c_1 = (3;4) \Rightarrow |c_1| = 5$; b) $c_2 = (5;0) \Rightarrow |c_2| = 5$; c) $c_3 = (-1;7) \Rightarrow |c_3| = 5\sqrt{2}$. **22** $m_1 = -2$, $m_2 = 6$. **23** $q_1 = -12$, $q_2 = -6$.

13.6 Skalární součin dvou vektorů $u \cdot v$

24 a) $\varphi = 45^\circ \Rightarrow u \cdot v = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 3$; b) $u \cdot v = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 3$.

Úhel dvou vektorů

25 a) $\varphi = 45^\circ$; b) $\varphi = 135^\circ$; c) $\varphi = 90^\circ$; d) $\varphi = 150^\circ$. **26** a) $\varphi = 60^\circ$; b) $\varphi = 40^\circ 22'$; c) $\varphi = 174^\circ 14'$; d) $\varphi = 90^\circ$. **27** a) $\alpha = 59^\circ 02'$, $\beta = 78^\circ 41'$, $\gamma = 42^\circ 17'$; b) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 45^\circ$; c) $\alpha = 128^\circ 40'$, $\beta = 35^\circ 32'$, $\gamma = 15^\circ 48'$; d) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$. **28** $v_1 = (0; -4)$, $v_2 = (2\sqrt{3}; 2)$.

29 a) $X_{1,2}[2 \pm 5\sqrt{2}; 0; 0]$, b) $X_{1,2}[2 \pm 5\sqrt{3}; 0; 0]$. **30** $x_1 = (1;0;1)$, $x_2 = (0;1;1)$.

Kolmost vektorů

31 $u \cdot v = 0$. **32** $m = -\frac{9}{2}$. **33** $p = 4$.

34 a) Např. $b_1 = (3;-1)$; b) $b_{2_1} = (3;-1) \vee b_{2_2} = (-3;1)$; c) $b_k = (3k; -k)$, $k \in \mathsf{R} - \{0\}$.

35 $f_1 = (8;-4)$, $f_2 = (-8;4)$. **36** $M_1[4;4]$, $M_1'[2;0]$. **37** $C_1[2;7]$, $D_1[-1;4]$, $C_2[8;1]$, $D_2[5;-2]$. **38** $B[7;0]$, $C[8;3]$, $D[5;4]$. **39** $D[\frac{5}{2}; \frac{19}{2}]$, $B[\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}]$.

40 $M_1[7; \frac{10}{3}]$, $N_1[3; \frac{19}{3}]$, $M_2[5; \frac{2}{3}]$, $N_2[1; \frac{11}{3}]$. **41** $X[2;0]$. **42** a) $T_1[0;0]$, $T_2[2;0]$; b) $T[0;-5]$; c) $T_1[0;0]$, $T_2[3;3]$. **43** $|FG| = |EF| = 3$, $|\sphericalangle EFG| = 90^\circ$.

44 a) $O_{1,2}[3 \pm 4\sqrt{2}; \pm 4 - 2\sqrt{2}]$; b) $O_{1,2}[\pm 4\sqrt{2} - 1; \pm 4 + 2\sqrt{2}]$; c) $O_{1,2}[1 \pm 2\sqrt{2}; \pm 2]$.

13.7 Vektorový součin dvou vektorů $u \times v$

45 a) $u \times v = (0;0;-1)$; c) $|u \times v| = 1$; d) $\varphi = 45^\circ$, $|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin\varphi = 1$; e) $v \times u = (0;0;1)$; f) $z_1 = -z_2$, není komutativní.

46 a) $(-10;-7;9)$; b) $(2;3;-1)$; c) $(0;0;0)$, protože $u \parallel v$; d) $u \times v$ v rovině není def.

47 a) $N[5;3;-1]$, $S = 4\sqrt{2}$; b) abychom mohli užít vektorový součin, musíme převést úlohu do prostoru např. tak, že u všech bodů doplníme souřadnici $z = 0$. $N[3;2]$, $S = 5$.

48 a) $S_\triangle = 5\sqrt{6}$; b) $S_\triangle = 1$; c) A, B, C leží na přímce; d) $S_\triangle = 4\sqrt{10}$.

49 $o = 9\sqrt{2}$, $S_\triangle = \frac{9}{2}\sqrt{3}$, $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$. **50** $m_1 = -1$, $m_2 = -\frac{1}{5}$.

51 $Y_{1,2}[0; 1 \pm 2\sqrt{10}; 0]$. **52** $X_1[\frac{5}{2}; 0]$, $X_2[\frac{11}{2}; 0]$. **53** $p_1 = 2$, $p_2 = 5$.

54 $z_{1,2} = (\pm\frac{\sqrt{10}}{10}; \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}; 0)$.

13.8 Smíšený součin tří vektorů $(u \times v) \cdot w$

55 a) $C[1;8;7]$, $B_1[4;5;-4]$, $C_1[2;9;0]$, $D_1[0;5;-1]$; b) $V = 110$.

56 a) 108; b) 108; c) Objemy těles z úlohy a) i b) jsou stejné, protože oba rovnoběžnostěny mají stejný obsah podstavy i stejnou tělesovou výšku.

57 5. **58** 8. **59** a) $\frac{13}{2}$; b) $X_1[15;0;0]$, $X_2[-9;0;0]$. **60** $Z_1[0;0;7]$, $Z_2[0;0;17]$.

14 Analytická geometrie v rovině

14.1 Rovnice přímky

1

parametrická rovnice	obecná rovnice	směrnicový tvar	úsekový tvar
a) $x = 4 + 2t$, $y = 2 - t$, $t \in \mathsf{R}$	$x + 2y - 8 = 0$	$y = -\frac{1}{2}x + 4$	$\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$
b) $x = 2 + 2t$, $y = 3t$, $t \in \mathsf{R}$	$3x - 2y - 6 = 0$	$y = \frac{3}{2}x - 3$	$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$
c) $x = 2 + t$, $y = 3 + 2t$, $t \in \mathsf{R}$	$2x - y - 1 = 0$	$y = 2x - 1$	$\frac{x}{0,5} + \frac{y}{-1} = 1$
d) $x = 3t$, $y = t$, $t \in \mathsf{R}$	$x - 3y = 0$	$y = \frac{1}{3}x$	neexistuje
e) $x = 3$, $y = -2 + t$, $t \in \mathsf{R}$	$x - 3 = 0$	neexistuje	neexistuje
f) $x = 1 + t$, $y = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}t$, $t \in \mathsf{R}$	$\sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} = 0$	$y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$	$\frac{x}{3} + \frac{y}{3\sqrt{3}} = 1$
g) $x = -2 + t$, $y = 4 + 2t$, $t \in \mathsf{R}$	$2x - y + 8 = 0$	$y = 2x + 8$	$\frac{x}{-4} + \frac{y}{8} = 1$
h) $x = 3 + 3t$, $y = 2t$, $t \in \mathsf{R}$	$2x - 3y - 6 = 0$	$y = \frac{2}{3}x - 2$	$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$

2 a) $p = \{[3 + 5t; -2t], t \in \mathsf{R}\}$; b) $y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$. **3** $k = -1 \wedge \varphi = 135^\circ$.

4 p: $x = t$, $y = 4t$, $t \in \mathsf{R}$. **5** $x + 2y = 0$. **6** $m \in \{-\frac{1}{2}; 1\}$. **7** $5x - 2y + 26 = 0$.

8 $2x + y + 7 = 0$. **9** $y_M = -10$. **10** $x - 5y - 8 = 0$. **11** a) $x = 3 - 3t$, $y = -1 + 2t$, $t \in \mathsf{R}$, $2x + 3y - 3 = 0$; b) $x = 3 + t$, $y = -1 - 2t$, $t \in \mathsf{R}$, $2x + y - 5 = 0$; c), d) $x = 3 + t$, $y = -1$, $t \in \mathsf{R}$, $y + 1 = 0$. **12** a) $x = 1 + t$, $y = 4 - 3t$, $t \in \mathsf{R}$; b) $x = -4 + 3k$, $y = -6 + k$, $k \in \mathsf{R}$; c) $x = 2 + 6l$, $y = 1 + 7l$, $l \in \mathsf{R}$; d) $x = 2 + 3t$, $y = 1 + t$, $t \in \mathsf{R}$; e) $x = -\frac{1}{2} + k$, $y = -4 - 3k$, $k \in \mathsf{R}$; f) $x = 1 + 3l$, $y = 4 + l$, $l \in \mathsf{R}$.

13 a) $2x - 12y + 7 = 0$; b) $x - 6y - 15 = 0$. **14** o_{AB}: $x - y = 0$, o_{BC}: $y - \frac{3}{2} = 0$, o_{AC}: $4x - 6y + 3 = 0 \Rightarrow S[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$. **15** t_a: $5x + 4y - 26 = 0$, t_b: $x + 2y - 8 = 0$, t_c: $2x + y - 9 = 0 \Rightarrow T[\frac{10}{3}; \frac{7}{3}]$. **16** v_a: $y - 4 = 0$, v_b: $2x - 3y - 2 = 0$, v_c: $x - y - 3 = 0 \Rightarrow V[7;4]$. **17** $V[-4;4]$, $T[-\frac{10}{3}; \frac{2}{3}]$, $S[-3;-1]$, V, T, $S \in p$: $5x + y + 16 = 0$.

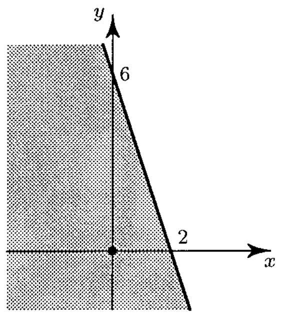
18 $\frac{x}{11} + \frac{y}{\frac{11}{3}} = 1$, $P_x[11;0]$, $P_y[0; \frac{11}{3}]$, $S_\triangle = \frac{121}{6}$. **19** $S_\triangle = \frac{25}{4}$. **20** p_1: $8x - y - 4 = 0$, p_2: $2x - y + 2 = 0$. **21** a) $x + y - 5 = 0$; b) $x - y + 1 = 0$; c) $3x + y - 9 = 0$; $x + 2y - 8 = 0$; d) $3x + 2y - 12 = 0$.

14.2 Úsečka, polopřímka, polorovina

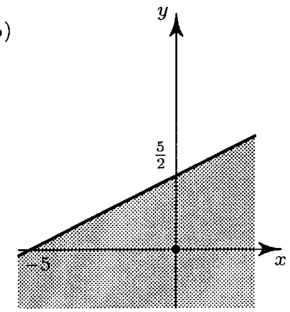
22 a) $x = -2 + t$, $y = 5 - t$, $t \in \langle 0; 6 \rangle$; b) $x = -2 + k$, $y = 5 - k$, $k \in \langle 0; \infty)$; c) $x = -2 + t$, $y = 5 - t$, $t \in (-\infty; 6\rangle$. **23** a) $M[\frac{7}{2}; \frac{7}{2}]$; b) $P_x[-7;0]$, $P_y[0; \frac{7}{3}]$; c) $y_k = 2$.

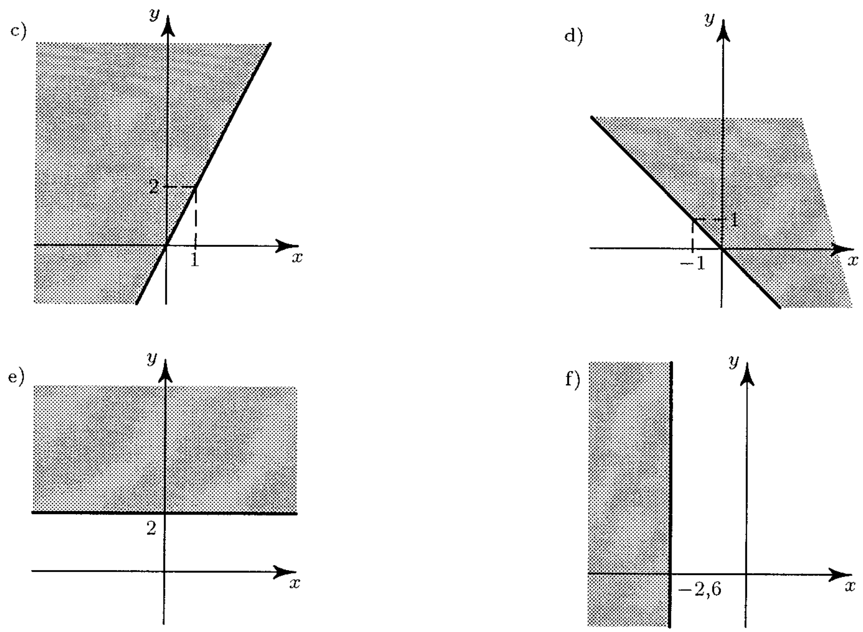
24

a)



b)





K řešení úlohy 24

25 M neleží. **26** $p \in \langle -11; \infty)$. **27** Protíná, body A, B leží v opačných polorovinách.
28 $c \in (-\infty; -17) \cup \langle 24; \infty)$. **29** $c \in (-\infty; -\frac{2}{9}) \cup (\frac{3}{4}; \infty)$.

14.3 Vzájemná poloha přímek

30 a) $p \parallel q \wedge p \neq q$; b) $P[-2; \frac{13}{2}]$; c) $P[1;2]$; d) $p = q$; e) $P[-5; 11]$; f) $P[2; -3]$; g) $p = q$; h) $p \parallel q \wedge p \neq q$. **31** $P[-1; -3]$. **32** $2x - y - 8 = 0$.
33 $4x - 3y - 19 = 0$. **34** $x = 4 - t$, $y = 3 + t$, $t \in \mathrm{R}$. **35** $A[1; -3]$ $B[2; 5]$, $C[-2; 3]$.
36 $A_1[-6; 0]$, $B_1[0; -2]$, $C_1[2; 6]$. **37** a) $a = 2$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = -1$; b) $a = 2$, $b = -\frac{1}{3}$, $c \neq -1$; c) $a = -\frac{8}{5}$, $b \neq \frac{13}{6}$, $c = 5$. **38** $a = -2$, $b = -1$. **39** $m = -3$.
40 $a = -1$, $b = 2$. **41** $a = \frac{15}{2}$, $c = -\frac{45}{2}$. **42** $m \in \langle 11; \infty)$. **43** $a \in \langle -18; -\frac{23}{4})$.
44 $m \in \{-1; \frac{1}{2}\}$. **45** $u_1 \cap u_2 = \emptyset$. **46** $m = 6$.

14.4 Odchylka dvou přímek

47 a) $45°$; b) $90°$; c) $36°52'$; d) $73°44'$; e) $30°$; f) $90°$; g) $56°19'$; h) $56°19'$.
48 a) $98°08'$; b) $81°52'$; c) $26°34'$; d) $140°43'$. **49** a) $a = -2$; b) $a \in \{3; -\frac{1}{3}\}$.
50 $p_1\colon x - y - 5 = 0$, $q_1\colon x + y - 5 = 0$, $p_2\colon x - 7y + 1 = 0$, $q_2\colon 7x + y + 7 = 0$.
51 $M_{1,2}[1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}; 1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}]$. **52** $k \in \{0; \sqrt{3}\}$. **53** $y = 3$, $y = -\frac{1}{3}x$.

14.5 Výpočty vzdáleností

Vzdálenost dvou bodů

54 $o = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$. **55** $Y_1[0; 0]$, $Y_2[0; 6]$. **56** $X_{1,2}[6 \pm 2\sqrt{10}; 0]$. **57** $Y[0; -\frac{5}{2}]$.
58 $C[\frac{1}{2}; \frac{7}{2}]$. **59** $C[-\frac{11}{4}; \frac{11}{2}]$. **60** $M_1[-1; 0]$, $M_2[-13; 12]$. **61** $S[-\frac{5}{3}; -1]$.

Vzdálenost bodu od přímky

62 $v = 3\sqrt{5}$. **63** $v = 2$.

Vzdálenosti — další úlohy

64 $Y_1[0; 14]$, $Y_2[0; -6]$. **65** $M_1[35; -11]$, $M_2[-43; 15]$.
66 $c_{1,2} = \pm 4\sqrt{5}$. **67** $p_1\colon 3x - 4y + 27 = 0$, $p_2\colon 3x - 4y - 3 = 0$. **68** $v = \frac{3}{5}$.
69 $|rp| : |rq| = 1 : 3$. **70** $o\colon 8x + 12y - 17 = 0$. **71** $p_1\colon 7x + y + 20 = 0$, $p_2\colon x - y - 4 = 0$. **72** $y = 0$, $3x - 4y = 0$. **73** $x - y + 1 = 0$, $x - y + 13 = 0$.
74 $M_1[\frac{14}{5}; \frac{32}{5}]$, $M_2[-\frac{6}{5}; -\frac{28}{5}]$, $M_3[-2; -4]$, $M_4[2; 8]$.
75 $O_1[1; 1]$, $O_2[-1; 1]$, $O_3[-2; -2]$, $O_4[-2; 2]$.
76 $x + y - 10 = 0$, $2x - y - 2 = 0$. **77** $o\colon x + y + 2 = 0$.
78 a) $v_a = 2\sqrt{5}$, $v_b = 2\sqrt{10}$, $v_c = 2\sqrt{10}$; b) $t_a = 2\sqrt{5}$, $t_b = 5\sqrt{2}$, $t_c = 5\sqrt{2}$; c) $s_a = \sqrt{10}$, $s_b = 2\sqrt{5}$, $s_c = \sqrt{10}$; d) $o = 4\sqrt{10} + 4\sqrt{5}$, $S_\triangle = 20$.
79 a) $o = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$; b) $s = 3\sqrt{2}$; c) $v = \sqrt{2}$; d) $S_\triangle = 6$.

14.6 Zobrazení v analytické geometrii

80 $A'[-9; 4]$. **81** $C'[-9; 2]$. **82** a) $p'\colon 2x + y + 5 = 0$; b) $p'\colon 2x + y + 13 = 0$.
83 a) $3x + y + 6 = 0$; b) $3x + y - 6 = 0$; c) $x - 3y + 4 = 0$; d) $3x + y - 30 = 0$.
84 $3x - y + 28 = 0$. **85** $O[-1; 6]$. **86** $O[1; 2]$, $x + 2y - 5 = 0$.

14.7 Další úlohy

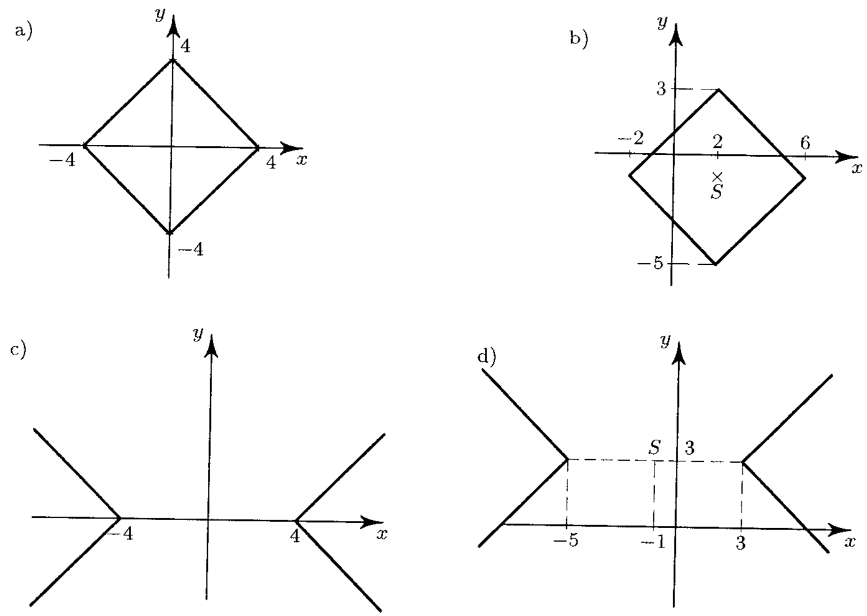
87 Např. $\boldsymbol{u}_1 = B - A$, $\boldsymbol{u}_2 = C - A$ jsou lin. nezávislé. Jinak: platí trojúhelníková nerovnost.
88 $|AC| = |BC| = \sqrt{26}$, $|\sphericalangle ACB| = 90°$. **89** $C_1[9; 5]$, $C_2[-7; -1]$. **90** $C[2; -1]$.
91 $C_{1,2}[\pm 3 + 3\sqrt{3}; \pm 9 + \sqrt{3}]$. **92** $B[-5; -6]$, $C[-3; 0]$. **93** $A[-2; 1]$, $B[4; 3]$, $C[10; -25]$.
94 $A[-1; 1]$, $B_1[-6; -4]$, $B_2[4; 6]$, $C_1[15; -11]$, $C_2[-17; 13]$. **95** $B[-19; 10]$, $C[-1; 4]$.
96 $A[2\frac{2}{5}; 12\frac{3}{5}]$, $B[-14; 9]$. **97** $C[2; -6]$. **98** $B[-10; -2]$, $C[3; -6]$.
99 $A[-5; 12]$, $B[11; -4]$, $C[-1; -2]$. **100** $C_1[6; 7]$, $C_2[1; \frac{9}{2}]$.
101 a, b: $\pm\sqrt{3}x - 3y \mp 8\sqrt{3} = 0$, c: $x = 0$, $A[0; -\frac{8}{3}\sqrt{3}]$, $B[0; \frac{8}{3}\sqrt{3}]$.
102 $\alpha = \gamma = 100°18'$, $\beta = \delta = 79°42'$, $\omega = 47°44'$.
103 $B[3; 1]$, $D[1; -3]$. **104** $C_1[0; 0]$, $D_1[-1; -2]$, $C_2[6\frac{2}{5}; -3\frac{1}{5}]$, $D_2[5\frac{2}{5}; -5\frac{1}{5}]$.
105 $A[-2; 6]$, $D[-6; 8]$. **106** $C_1[6; -2]$, $D_1[3; -6]$, $C_2[-2; 4]$, $D_2[-5; 0]$.
107 $B[5; 12]$, $C[-4; 11]$, $D[-3; 2]$. **108** $B[0; 7]$, $D[-2; -1]$.
109 $B[9; 8]$, $C_1[23; 4]$, $D_1[19; -10]$, $C_2[-5; 12]$, $D_2[-9; -2]$.
110 $A[-4; -2]$, $B[4; -4]$, $C[6; 4]$, $D[-2; 6]$.
111 $A_1[2; 4]$, $B_1[6; -2]$, $C_1[12; 2]$, $D_1[8; 8]$, $A_2[1; -1]$, $B_2[7; 3]$, $C_2[11; -3]$, $D_2[5; -7]$.
112 $B_1[2; -2]$, $C_1[2; 3]$, $D_1[-3; 3]$, $B_2[0; 2]$, $C_2[4; -1]$, $D_2[1; -5]$.
113 $A[8; 4]$, $C[-8; -4]$, $D[-4; 8]$. **114** $A[5; 3]$, $B[3; -3]$, $C[-3; -1]$, $D[-1; 5]$.
115 $A[0; 0]$, $B[-3; -1]$, $C[-2; -4]$, $D[1; -3]$. **116** $A[-2; 0]$, $B[-4; -10]$, $C[6; -12]$, $D[8; -2]$.
117 $A[22; -2]$, $B[6; -14]$, $C[-6; 2]$, $D[10; 14]$. **118** $A[-1; -1]$, $B[0; 2]$, $C[-3; 3]$, $D[-4; 0]$.
119 $C_1[3; -4]$, $B_1[2; -6]$, $D_1[5; -5]$, $C_2[1; -8]$, $B_2[2; -6]$, $D_2[3; -9]$.
120 $B[0; 4]$, $C[-2; -2]$, $D[-8; 0]$. **121** $A[-8; -12]$, $C[4; 12]$, $D[-8; 3]$.
122 $A_1[10; 0]$, $C_1[3; 6]$, $A_2[2; 4]$, $C_2[11; 2]$. **123** $B[-9; 7]$, $C[-9; 5]$, $D[1; 5]$.
124 $C[-3; 14]$, $D[5; 12]$. **125** $B_1[0; 6]$, $C_1[-4; 8]$, $B_2[-\frac{8}{5}; \frac{46}{5}]$, $C_2[-\frac{12}{5}; \frac{24}{5}]$.

14.8 Vyšetřování množin bodů dané vlastnosti

126 Osa úsečky AB: $3x - 4y + 31 = 0$. **127** X leží na úsečce $u_X = \{[-2t; 1 + 4t],\ t \in \langle 0; 1 \rangle\}$.
128 Osa pásu o: $2x - y = 0$. **129** Přímka $2x - y - 1 = 0$. **130** Středy leží na přímce $2x - 2y + 3 = 0$. **131** Dvě přímky o_1: $6x + 1 = 0$, o_2: $8y + 1 = 0$.
132 Dvě rovnoběžné přímky m_1: $3x + y - 11 = 0$, m_2: $3x + y + 9 = 0$. **133** Těžiště leží na polopřímce $q = \{[\frac{1}{3}; t],\ t \in (0; \infty)\}$. **134** Těžiště leží na přímce $3y - 4 = 0$ kromě bodu $[\frac{17}{3}; \frac{4}{3}]$. **135** Body X leží na přímce $x - 2y - 9 = 0$ kromě bodu $V[3; -3]$.

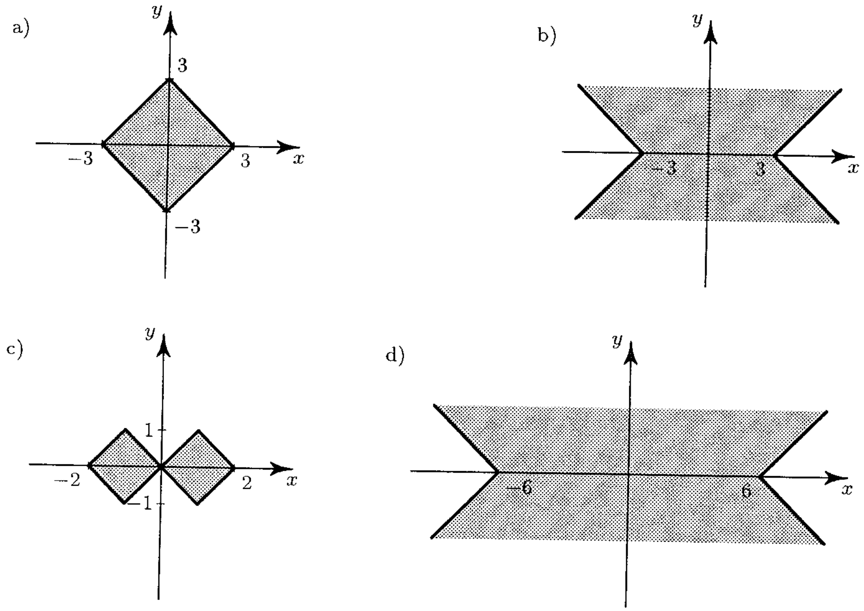
136 Zvolíme-li souřadnicovou soustavu tak, aby souřadnicové osy byly totožné s danými přímkami p, q, potom lze výsledky psát: a) čtverec s vrcholy $[\pm 5; 0]$, $[0; \pm 5]$;
b) 8 polopřímek $y = \pm x \pm 5 \wedge x \in (-\infty; -5\rangle \cup \langle 0; \infty)$, $y = \pm x \mp 5 \wedge x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 5; \infty)$.
c) 4 přímky $y = \pm\frac{1}{5}x$, $y = \pm 5x$.

137



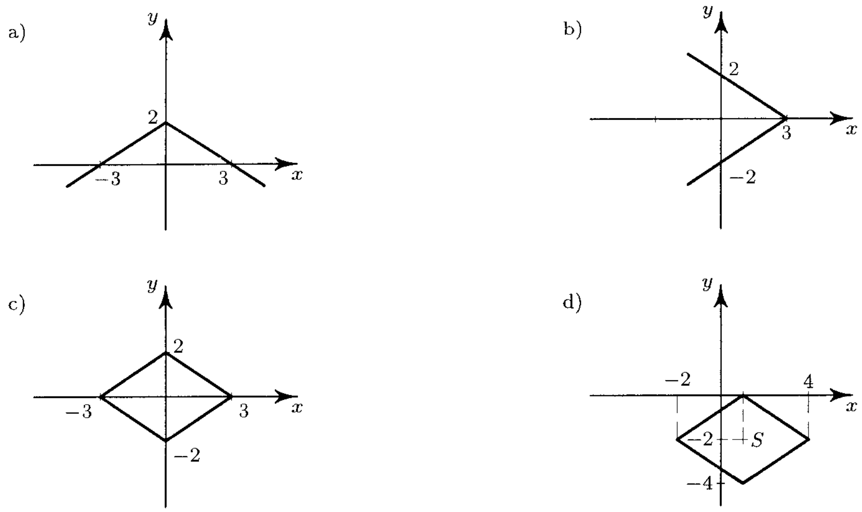
K řešení úlohy 137

138



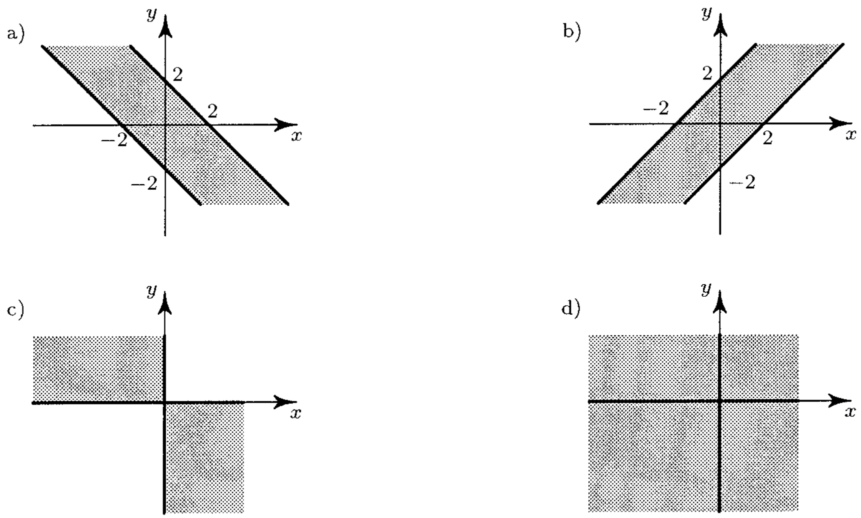
K řešení úlohy 138

139



K řešení úlohy 139

140



K řešení úlohy 140

15 Analytická geometrie v prostoru

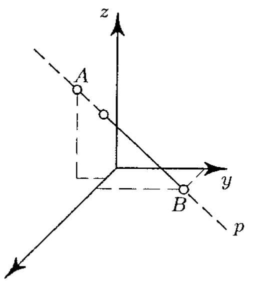
15.1 Přímka v prostoru

1

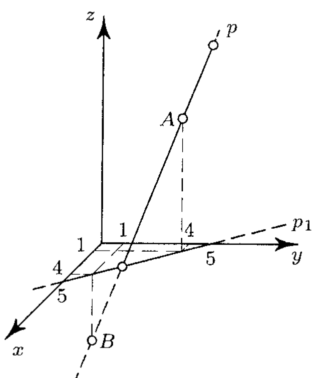
a) levotočivá s.s. b) pravotočivá s.s.

K řešení úlohy 1

2 p: $x = 1 + t$, $y = -1 + 4t$, $z = 3 - 3t$, $t \in \mathsf{R}$, $P_{xy}[2;3;0]$, $P_{xz}[\frac{5}{4};0;\frac{9}{4}]$, $P_{yz}[0;-5;6]$.



K řešení úlohy 2



K řešení úlohy 6e

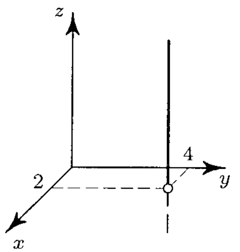
3 a) $C \notin p$, $D \in p$; b) $E[9;-10;-3]$. **4** a) $K \notin \leftrightarrow AB$, $L \in \leftrightarrow AB$; b) $M[\frac{3}{2};3;-\frac{3}{4}]$.

5 $P_{xz}[2;0;4]$, $P_{xy}[2;1;0]$, P_{yz} neexistuje.

6 $x = 1 + t$, $y = 4 - t$, $z = 6 - 3t$, a) $t \in \mathsf{R}$; b) $t \in (0;3)$; c) $t \in (-\infty;3)$; d) $x = 1 + k$, $y = 4 - k$, $z = 0$, $k \in \mathsf{R}$.

7 $x = k$, $y = 4 - k$, $z = 5 + 5k$, $k \in \mathsf{R}$. **8** $x = 2$, $y = 4$, $z = 1 + k$, $k \in \mathsf{R}$.

9 $x = 1$, $y = -2 - 2t$, $z = 3 + 3t$, $t \in \mathsf{R}$. **10** $x = k$, $y = 0$, $z = 0$, $k \in \mathsf{R}$.



K řešení úlohy 8

15.2 Vzájemná poloha přímek v prostoru

11 a) p, q různoběžky, $P[-4;5;4]$; b) p, q různé rovnoběžky; c) $p = q$; d), e) p, q mimoběžky; f) p, q různoběžky, $P[2;4;3]$.

12 a) p, q mimoběžky; b) p, q různé rovnoběžky.

13 Pro $m = -2$ je průsečík $P[5;-3;4]$.

14 Pro $a = -13$ je $p = q$, pro $a \neq -13$ jsou p, q různé rovnoběžky.

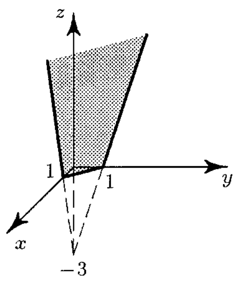
15 Pro $m = 2$ jsou p, q různoběžky, $P[3;2;-1]$, pro $m \neq 2$ jsou p, q mimoběžky.

15.3 Rovina

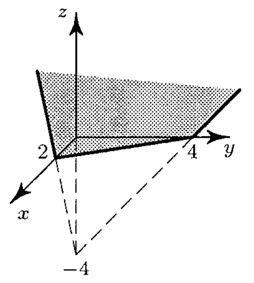
Parametrické rovnice roviny

16 Např. $x = 2 - t + k$, $y = 1 - t - 3k$, $z = 6 - 6t - 6k$, $t, k \in \mathsf{R}$; a) $P_x[1;0;0]$, $P_y[0;1;0]$, $P_z[0;0;-3]$; c) K leží v rovině, L neleží v rovině; d) $z = -6$.

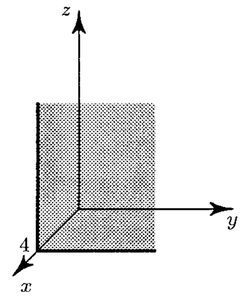
17 a) $P_x[2;0;0]$, $P_y[0;4;0]$, $P_z[0;0;-4]$;
b) $p_{xy} = \{[2+t;-2t;0], t \in \mathsf{R}\}$, $p_{xz} = \{[2+k;0;2k], k \in \mathsf{R}\}$, $p_{yz} = \{[0;4+m;m], m \in \mathsf{R}\}$.



K řešení úlohy 16b



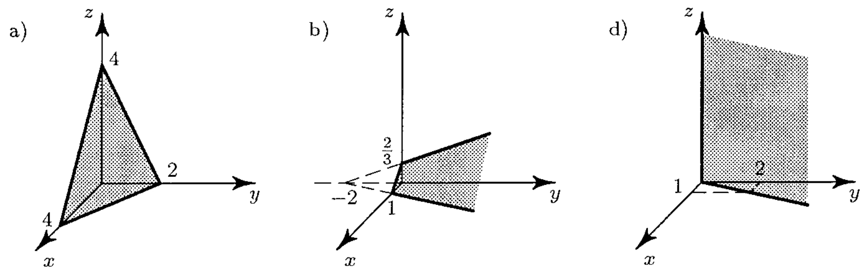
K řešení úlohy 17a



K řešení úlohy 18

Obecná rovnice roviny

19 a) $x + 2y + z - 4 = 0$; b) $2x - y + 3z - 2 = 0$; c) Body A, B, C leží na přímce, rovinu neurčují; d) $2x - y = 0$.



K řešení úlohy 19

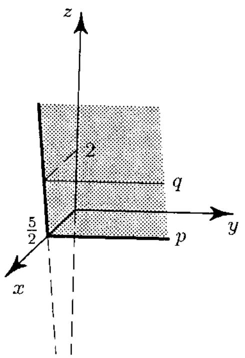
20 a) $x + 5y - 2z + 15 = 0$; b) $x - 2y + 6 = 0$; c) $6x + 3y + 2z - 12 = 0$.

21 $4x - z - 10 = 0$. **22** $2y - z - 1 = 0$. **23** $2x - y - z = 0$. **24** $x + y + z - 4 = 0$.

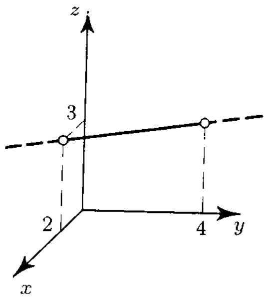
25 ϱ: $2x - y - 4 = 0$. **26** σ: $x - z + 2 = 0$. **27** ψ: $2x - y = 0$.

28 τ: $x - 4 = 0$. **29** ϱ: $x + 3y + 3z - 11 = 0$. **30** τ: $3x + y + 5z - 35 = 0$.

31 a) $3x + 2y + z - 6 = 0$; b) $2x - y + 2z - 4 = 0$; c) $5x + 10y - 2z - 10 = 0$; d) $x + y - 3 = 0$; e) $x + 2z - 2 = 0$; f) $2x - 3y = 0$; g) $y - 4 = 0$; h) $z = 0$; i) $x - 2 = 0$.



K řešení úlohy 21



K řešení úlohy 35

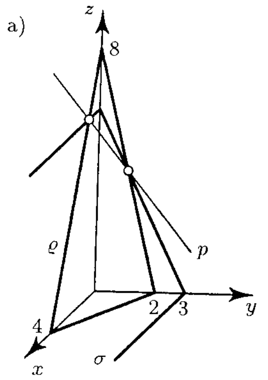
15.4 Vzójemná poloha přímky a roviny

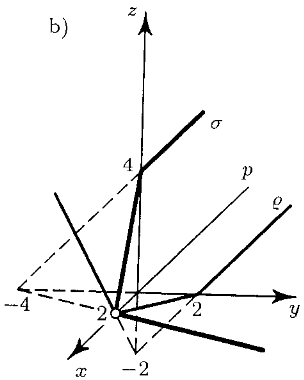
32 a) Přímka je různoběžná s rovinou, $P[0;-1;3]$; b) $p \parallel \varrho \wedge p \cap \varrho = \emptyset$; c) přímka leží v rovině. **33** Přímka je různoběžná s rovinou, $P[4;\frac{3}{2};\frac{13}{2}]$. **34** $p \parallel \sigma \wedge p \cap \sigma = \emptyset$.

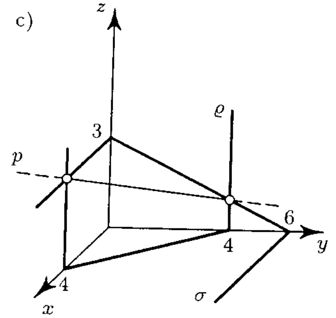
35 $p \parallel \varrho_{xy}$. **36** a) p je různoběžná s $\varrho \Leftrightarrow b \neq -\frac{1}{2} \wedge a \in \mathsf{R}$; b) $p \subset \varrho \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} \wedge a = 10$; c) $p \parallel \varrho \wedge p \cap \varrho = \emptyset \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} \wedge a \neq 10$.

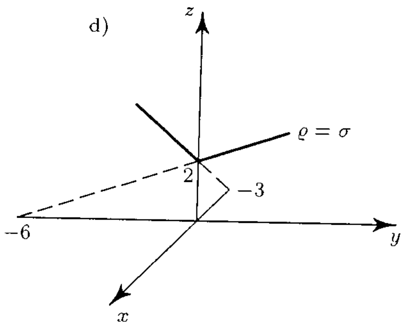
15.5 Vzájemná poloha dvou rovin

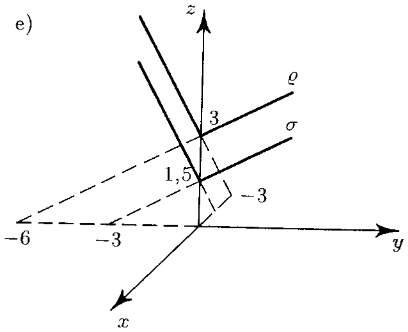
37 a) Různoběžné roviny, $p = \{[t; 1-t; 4+2t], t \in \mathsf{R}\}$; b) různoběžné roviny, $p = \{[2;t;t], t \in \mathsf{R}\}$; c) různoběžné roviny, $p = \{[-2+2t; 6-2t; t], t \in \mathsf{R}\}$; d) $\varrho = \sigma$; e) různé rovnoběžné roviny; f) různoběžné roviny $p = \{[4;2;t], t \in \mathsf{R}\}$.

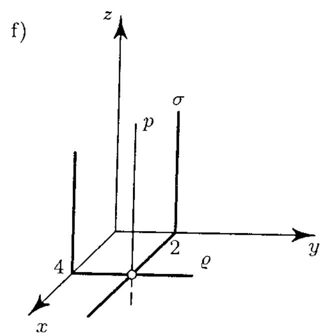












K řešení úlohy 37

38 Roviny jsou totožné.

39 a) $\varrho \parallel \sigma \Leftrightarrow a = -1 \wedge b = -4$; b) $\varrho \times \sigma \Leftrightarrow a \neq -1 \vee b \neq -4$; c) $\varrho \perp \sigma \Leftrightarrow a = 1 - 4b$.

15.6 Vzájemná poloha tří rovin

40 a) Tři různoběžné roviny, společný bod $P[1;-1;2]$; b) tři různoběžné roviny, žádný společný bod; c) tři různoběžné roviny, společná přímka $p = \{[t; -1-t; -t], t \in \mathsf{R}\}$; d) dvě rovnoběžné roviny, třetí je s nimi různoběžná.

15.7 Odchylka dvou přímek

41 a) $\varphi = 30°$; b) $\varphi = 90°$; c) $\varphi = 0°$; d) $\varphi = 45°$. **42** a) $\alpha = 135°$; b) $|\sphericalangle AC, AB| = 45°$. **43** a) $\alpha = 53°58'$; b) $\beta = 78°41'$; c) $\gamma = 38°20'$; d) platí. **44** a) $M[\frac{7}{2};\frac{1}{2};-3]$; b) $M_1[2;2;-3]$, $M_2[5;-1;-3]$. **45** $\varphi = 54°44'$.

46 $a = \frac{1}{2} \wedge b = -\frac{1}{2}$. **47** $p = \{[\frac{1}{2} - 2t; 1-2t; 2+t], t \in \mathsf{R}\}$.

15.8 Odchylka přímky od roviny

48 a) $\varphi = 45°$; b) $\varphi = 90°$, $p \perp \varrho$; c) $\varphi = 0°$, $p \parallel \varrho$, $p \cap \varrho = \emptyset$; d) $\varphi = 0°$, $p \subset \varrho$.

49 $\varphi = 19°28'$. **50** $\varphi = 30°$. **51** a) $a = 1$; b) $a = -2$; c) $a_{1,2} = -8 \pm 3\sqrt{6}$.

15.9 Odchylka dvou rovin

52 a) $\varphi = 60°$; b) $\varphi = 90°$; c) $\varphi = 0°$; d) $\varphi = 45°$. **53** $\varphi = 70°32'$.

54 a) $a = 5$; b) $a = -1$.

15.10 Vzdálenost dvou bodů v prostoru

55 $o = 10 + 4\sqrt{3}$. **56** $X[\frac{1}{8};0;0]$. **57** $Y_1[0;6;0]$, $Y_2[0;2;0]$. **58** $C[0;0;2]$.

59 $M_1[\frac{2}{3};\frac{10}{3};-\frac{7}{3}]$, $M_2[\frac{4}{3};\frac{14}{3};-\frac{11}{3}]$.

15.11 Vzdálenost bodu od přímky v prostoru

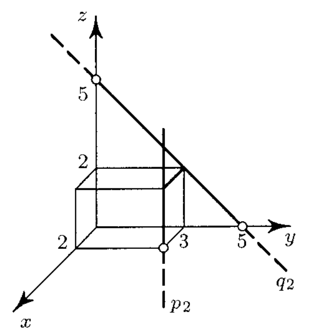
60 a) $|Ap| = \sqrt{3}$; b) $|Ap| = 6$; c) $|Ap| = 0$, $A \in p$; d) $|Ap| = 2$. **61** $|v_a| = 3\sqrt{2}$.
62 $X[3 \pm \sqrt{6}; 0; 0]$. **63** $M_1[-1; 2; -3]$, $M_2[\frac{17}{3}; 2; \frac{11}{3}]$. **64** $\frac{1}{2}\sqrt{14}$.
65 $M_1[6; -3; 4]$, $M_2[-2; 5; 4]$.

15.12 Vzdálenost bodu od roviny

66 $|A\varrho| = 2$. **67** $Z_1[0; 0; -16]$, $Z_2[0; 0; 14]$. **68** $2\sqrt{2}$. **69** $|\varrho\,\sigma| = \frac{2}{3}$. **70** $M_1[1; 4; 6]$, $M_2[25; 28; 102]$. **71** $M_1[10; -1; 7]$, $M_2[-18; 6; -7]$. **72** $z_M = 13$, $z_M = -17$.

15.13 Vzdálenost mimoběžek

73 a) $|p_1q_1| = \sqrt{3}$; b) $|p_2q_2| = 2$.



K řešení úlohy 73b

15.14 Souměrnosti v prostoru

74 $A'[-17; 5; 6]$. **75** $A'[0; 11; -2]$. **76** $C'[0; -1; 0]$. **77** $M'[-3; 8; 6]$.
78 a) $p' = \{[-2 - 2t; -1 - t; -3 + 2t], t \in \mathrm{R}\}$; b) $p' = \{[6 - 2t; -3 - t; 3 + 2t], t \in \mathrm{R}\}$.
79 a) $p' = \{[1 - 13t; -1 + 11t; 3 - 2t], t \in \mathrm{R}\}$; b) $p' = \{[4 + t; -7 - 2t; t], t \in \mathrm{R}\}$; c) $p' = \{[5 + t; -9 + 2t; -1 + t], t \in \mathrm{R}\}$. **80** $\varrho'\colon x - 2y + z + 4 = 0$; $\sigma_1\colon 3x - 3y + 2z + 4 = 0$.
81 Bod odrazu je $[3; 2; 6]$.

15.15 Další úlohy

82 $|AB| = |BC| = |CD| = |AD| = 3$, $AB \perp BC \wedge AB \perp AD$, body A, B, C, D leží v jedné rovině. **83** Body K, L, M, N neleží v jedné rovině. **84** $CD \parallel AB \wedge |AB| = 2|CD|$.
85 $\triangle KLM$ je pravoúhlý, pravý úhel je u vrcholu K, $X[0; 1; -2]$. **86** $m = 3$.

15.16 Úlohy na tělesech

87 $X_1 \in \mapsto AE$, $|AX_1| = 5\frac{3}{5}$, $X_2 \in AB$, $|X_2B| = \frac{1}{2}$, $X_3 \in CG$, $|CX_3| = 2\frac{2}{5}$.
88 $X_1 \in AV$, $|AX_1| = \frac{1}{7}\sqrt{11}$, $X_2 \in \mapsto VB$, $|BX_2| = \frac{3}{5}\sqrt{11}$, $X_3 \in CV$, $|CX_3| = \frac{9}{11}\sqrt{11}$.
89 $|P_1P_2| = \frac{1}{3}\sqrt{29}$. **90** $|ST| = \frac{1}{3}\sqrt{67}$. **91** a) Přímka AG je rovnoběžná s rovinou KLM; b) $|DP| : |PF| = 5 : 3$, kde $P \in FD \cap \leftrightarrow KLM$. **92** X leží tak, že S_1 je střed úsečky XS_2. **93** $\frac{2}{5}\sqrt{145}$. **94** $3\sqrt{2}$. **95** $\frac{2}{3}\sqrt{6}$.
96 a) $\varphi = 78°54'$; b) $\varphi = 15°48'$; c) $\varphi = 45°$.
97 a) $v = \frac{9}{17}\sqrt{34}$; b) $\varphi = 69°46'$; c) $\varphi = 18°04'$; d) $\varphi = 46°41'$.

98 a) $\varphi = 90°$; b) $\varphi = 90°$; c) $\varphi = 70°32'$. **99** $v = \frac{2}{3}\sqrt{6}$. **100** $v = \frac{3}{5}\sqrt{10}$.

16 Kuželosečky

16.1 Kružnice

1 a) $S[0; 0]$, $r = 3$; b) $S[1; 0]$, $r = 4$; c) $S[-2; 3]$, $r = \sqrt{2}$. **2** $x^2 + y^2 = 2$.
3 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$, $P_{x_{1,2}}[2 \pm 2\sqrt{6}; 0]$, $P_{y_{1,2}}[0; 1 \pm \sqrt{21}]$. **4** $(x-1)^2 + (y-6)^2 = 5$.
5 a) $(x+1)^2 + y^2 = 20$; b) $x^2 + (y + \frac{1}{3})^2 = \frac{130}{9}$; c) $(x + \frac{1}{4})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{125}{8}$; d) $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2}$; e) $(x+7)^2 + (y-2)^2 = 100$; f) nekonečně mnoho řešení $(x + 3b + 1)^2 + (y - b)^2 = 10b^2 + 20b + 20$.
6 $x^2 + (y-1)^2 = 10$. **7** a) $(x + \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2}$, $S[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]$, $r = \frac{5}{2}\sqrt{2}$; b) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 20$, $S[2; 4]$, $r = 2\sqrt{5}$.
8 $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 25$. **9** $(x - \frac{13}{3})^2 + (y+4)^2 = \frac{169}{9}$. **10** $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$.
11 $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$, $(x-52)^2 + (y+29)^2 = 25$.
12 $(x-7)^2 + y^2 = 20$, $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 20$. **13** $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 36$.
14 $(x-9)^2 + (y-10)^2 = 100$, $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. **15** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$. **16** $(x + \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.
17 $(x-15)^2 + (y+15)^2 = 225$, $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$. **18** $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$. **19** $(x-13)^2 + (y+14)^2 = 225$, $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$.
20 $(x + \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{4}{25}$. **21** $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 8$, $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 8$.
22 $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{9}{2})^2 = \frac{25}{2}$, $(x-1)^2 + y^2 = 2$. **23** $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 1$.
24 $(x + \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2}$, $(x + \frac{9}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{2}$. **25** a) $(x+2)^2 + (y-11)^2 = 9$; b) $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 9$; c) $(x+4)^2 + (y-5)^2 = \frac{9}{4}$; d) $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 9$.

16.2 Elipsa

26 a) $S[0; 0]$, $a = 3$, $b = 2$, $e = \sqrt{5}$, $F_{1,2}[\pm\sqrt{5}; 0]$;
b) $S[0; 0]$, $a = 10$, $b = 2$, $e = 4\sqrt{6}$, $F_{1,2}[0; \pm 4\sqrt{6}]$;
c) $S[1; -3]$, $a = 1$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $F_{1,2}[1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; -3]$.
27 $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$. **28** $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$. **29** $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$.
30 $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$. **31** $\frac{(x-6)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$. **32** $\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{49}{4}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{25}{4}} = 1$.
33 a) $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$; b) $\frac{(x+1)^2}{1} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$. **34** $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$.
35 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. **36** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1$. **37** $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{25} = 1$.
38 $\frac{(x+3)^2}{400} + \frac{(y-1)^2}{100} = 1$. **39** $\frac{(x+2)^2}{\frac{100}{9}} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$. **40** $\frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$.

16.3 Hyperbola

41 a) $S[0; 0]$, $a = 3$, $b = 2$, $e = \sqrt{13}$, $F_{1,2}[\pm\sqrt{13}; 0]$, $y = \pm\frac{2}{3}x$;
b) $S[0; 0]$, $a = 2$, $b = 3$, $e = \sqrt{13}$, $F_{1,2}[\pm\sqrt{13}; 0]$, $y = \pm\frac{3}{2}x$;
c) $S[0; 0]$, $a = 3$, $b = 2$, $e = \sqrt{13}$, $F_{1,2}[0; \pm\sqrt{13}]$, $y = \pm\frac{3}{2}x$;
d) $S[0; 0]$, $a = 2$, $b = 2$, $e = 2\sqrt{2}$, $F_{1,2}[\pm 2\sqrt{2}; 0]$, $y = \pm x$;
e) $S[1; -2]$, $a = 4$, $b = 2$, $e = 2\sqrt{5}$, $F_{1,2}[1 \pm 2\sqrt{5}; -2]$, $y + 2 = \pm\frac{1}{2}(x - 1)$;
f) $S[0; 3]$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = 1$, $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $F_{1,2}[\pm\frac{\sqrt{6}}{2}; 3]$, $y - 3 = \pm\sqrt{2}x$.
42 $\frac{(x-8)^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. **43** $\frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{16} = 1$. **44** $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$.

45 $\frac{(x-4)^2}{50} - \frac{(y-2)^2}{50} = 1$. **46** $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{5} = 1$.

47 a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$; b) $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{1} = 1$.

48 a) $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{12} = 1$; b) $\frac{(y+1)^2}{\frac{9}{5}} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$. **49** $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{60} = 1$.

50 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$. **51** $\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$. **52** $\frac{x^2}{40} - \frac{(y-1)^2}{360} = 1$.

53 Dvě řešení, $\frac{y^2}{80} - \frac{x^2}{20} = 1$, $\frac{(x-5)^2}{5} - \frac{(y-10)^2}{20} = 1$.

54 a) $\frac{(x+2)^2}{3} - \frac{(y-3)^2}{27} = 1$; b) $\frac{(y-4)^2}{12} - \frac{(x-2)^2}{12} = 1$.

55 a) 2; b) b. **56** $a = b = \sqrt{2}$, $e = 2$, $F_{1,2}[\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2}]$.

16.4 Parabola

57 a) $V[0;0]$, $F[\frac{5}{2};0]$, d: $x = -\frac{5}{2}$; b) $V[0;0]$, $F[0;1]$, d: $y = -1$; c) $V[0;0]$, $F[-\frac{3}{2};0]$, d: $x = \frac{3}{2}$; d) $V[0;0]$, $F[0;-\frac{1}{8}]$, d: $y = \frac{1}{8}$. **58** a) $y^2 = 8x$; b) $y^2 = -6x$; c) $x^2 = -48y$; d) $x^2 = y$. **59** a) $y^2 = 4x$; b) $x^2 = -12y$; c) $y^2 = -32x$; d) $x^2 = 44y$.

60 a) $(y+5)^2 = -8(x-2)$; b) $(y+5)^2 = 20(x-2)$; c) $(x-2)^2 = -40(y+5)$; d) $(x-2)^2 = 4(y+5)$. **61** a) $(x-3)^2 = -12(y-2)$; b) $(x-3)^2 = 4(y+2)$; c) $(y+1)^2 = -8(x-5)$; d) $(y+1)^2 = 4(x-2)$. **62** a) $x^2 = 2y$; b) $x^2 = -\frac{2}{3}y$.

63 a) $y^2 = -\frac{1}{4}x$; b) $y^2 = 4x$. **64** $(y+4)^2 = -16(x-4)$. **65** $(x-2)^2 = y-1$.

66 a) $(y+2)^2 = \frac{16}{3}(x+4)$; b) $(x+4)^2 = \frac{9}{4}(y+2)$. **67** a) $(x-1)^2 = 4(y+4)$; b) $(y+4)^2 = -9(x-1)$. **68** $(x-3)^2 = 4(y-1)$. **69** $(x-2)^2 = -16(y-4)$.

70 Dvě řešení, $(y+2)^2 = \pm 4(x \pm 1)$. **71** $(y-2)^2 = 4(x+6)$. **72** $(x+3)^2 = -2(y-5)$.

73 Dvě řešení, $(y-\frac{7}{2})^2 = 6(x+\frac{1}{24})$, $(x-2)^2 = y$.

16.5 Obecná rovnice kuželosečky

Kružnice

74 a) Kružnice $S[1;-2]$, $r = 3$; b) bod $[2;3]$; c) neexistuje bod, jehož souřadnice by splňovaly danou rovnici; d) kružnice $S[-3;\frac{1}{2}]$, $r = \frac{1}{2}$; e) kružnice $S[0;2]$, $r = \frac{5}{2}$; f) kružnice $S[\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{1}{6}]$, $r = \frac{1}{3}$.

Elipsa

75 a) Elipsa $S[1;2]$, $a = 3$, $b = 2$, $e = \sqrt{5}$, $F_{1,2}[1\pm\sqrt{5};2]$; b) bod $[3;-1]$; c) neexistuje bod, jehož souřadnice by splňovaly danou rovnici; d) elipsa $S[2;1]$, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $e = \frac{\sqrt{5}}{6}$, $F_{1,2}[2 \pm \frac{\sqrt{5}}{6};1]$; e) elipsa $S[\frac{1}{2};0]$, $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $F_{1,2}[\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}]$; f) elipsa $S[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$, $a = 2$, $b = 1$, $e = \sqrt{3}$, $F_{1,2}[-\sqrt{2};\sqrt{2}\pm\sqrt{3}]$.

Hyperbola

76 a) Hyperbola $S[0;1]$, $a = 3$, $b = 2$, $e = \sqrt{13}$, $F_{1,2}[\pm\sqrt{13};1]$, $a_{1,2}$: $y - 1 = \pm\frac{2}{3}x$;
b) hyperbola $S[0;1]$, $a = 3$, $b = 2$, $e = \sqrt{13}$, $F_{1,2}[0;1\pm\sqrt{13}]$, $a_{1,2}$: $y - 1 = \pm\frac{3}{2}x$;
c) hyperbola $S[0;-1]$, $a = 2$, $b = 3$, $e = \sqrt{13}$, $F_{1,2}[\pm\sqrt{13};-1]$, $a_{1,2}$: $y + 1 = \pm\frac{3}{2}x$;
d) hyperbola (rovnoosá) $S[0;0]$, $a = b = 1$, $e = \sqrt{2}$, $F_{1,2}[\pm\sqrt{2};0]$, $a_{1,2}$: $y = \pm x$;
e) dvě přímky p_1: $x - 2y = 0$, p_2: $x + 2y + 4 = 0$, průsečík $[-2;-1]$;
f) hyperbola $S[-2;-\frac{1}{2}]$, $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $F_{1,2}[-2\pm\frac{\sqrt{5}}{2};-\frac{1}{2}]$, $a_{1,2}$: $y+\frac{1}{2} = \pm\frac{1}{2}(x+2)$.

Parabola

77 a) Parabola $V[1;0]$, $F[1;1]$, d: $y = -1$; b) parabola $V[-2;1]$, $F[-2;\frac{1}{2}]$, d: $y = \frac{3}{2}$; c) parabola $V[2;1]$, $F[\frac{11}{4};1]$, d: $x = \frac{5}{4}$; d) parabola $V[\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$, $F[0;\frac{1}{2}]$, d: $x = \frac{1}{2}$; e) parabola $V[3;0]$, $F[\frac{49}{16};0]$, d: $x = \frac{47}{16}$; f) parabola $V[\frac{3}{2};-\frac{3}{4}]$, $F[\frac{3}{2};\frac{1}{4}]$, d: $y = -2$.

Další úlohy

78 a) Elipsa $S[-3;1]$, $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $e = \sqrt{2}$, $F_{1,2}[-3\pm\sqrt{2};1]$; b) parabola $V[1;0]$, $F[2;0]$, d: $x = 0$; c) bod $[-2;3]$; d) hyperbola $S[-2;3]$, $a = 3$, $b = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $e = \frac{3\sqrt{6}}{2}$, $F_{1,2}[-2\pm\frac{3}{2}\sqrt{6};3]$, $a_{1,2}$: $y - 3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$; e) parabola $V[1;\frac{1}{5}]$, $F[1;\frac{29}{20}]$, d: $y = -\frac{21}{20}$;
f) kružnice $S[0;1]$, $r = 2$; g) neexistuje bod, jehož souřadnice by splňovaly danou rovnici;
h) hyperbola $S[1;0]$, $a = 3$, $b = 1$, $e = \sqrt{10}$, $F_{1,2}[1\pm\sqrt{10};0]$, $a_{1,2}$: $y = \pm\frac{1}{3}(x-1)$;
i) parabola $V[\frac{4}{3};0]$, $F[\frac{7}{12};0]$, d: $x = \frac{25}{12}$; j) hyperbola $S[\frac{3}{2};-\frac{3}{2}]$, $a = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $b = \frac{3}{2}$, $e = \frac{3\sqrt{6}}{4}$, $F_{1,2}[\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\pm\frac{3\sqrt{6}}{4}]$, $a_{1,2}$: $y+\frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{3}{2})$; k) kružnice $S[-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}]$, $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
l) dvě různoběžné přímky p_1: $x - y + 1 = 0$, p_2: $x + y = 0$, průsečík $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$.

Obecná rovnice kuželosečky s parametrem

79 a)

$p > -\frac{1}{4}$	kružnice $S[-\frac{1}{2};0]$, $r = \sqrt{p+0{,}25}$
$p = -\frac{1}{4}$	bod $[-\frac{1}{2};0]$
$p < -\frac{1}{4}$	souřadnice žádného bodu rovnici nesplňují

b)

$p < 8$	elipsa $S[2;1]$, $a = \sqrt{8-p}$, $b = \frac{\sqrt{8-p}}{2}$
$p = 8$	bod $[2;1]$
$p > 8$	souřadnice žádného bodu rovnici nesplňují

c)

$p > 3$	hyperbola $S[1;-1]$, $a = \sqrt{p-3}$, $b = \frac{\sqrt{p-3}}{2}$, $F_{1,2}[1 \pm \frac{\sqrt{5p-15}}{2};-1]$
$p = 3$	dvě přímky $y + 1 = \pm\frac{1}{2}(x-1)$
$p < 3$	hyperbola $S[1;-1]$, $a = \frac{\sqrt{p-3}}{2}$, $b = \sqrt{p-3}$, $F_{1,2}[1;-1 \pm \frac{\sqrt{5p-15}}{2}]$

d) $\forall p \in \mathrm{R}$ parabola, $V[\frac{p}{2};\frac{p^2}{16}]$, $F[\frac{p}{2}-1;\frac{p^2}{16}]$, d: $y = \frac{p}{2}+1$.

e)

$p \in (-\infty;-2) \cup (2;\infty)$	kružnice $S[-p;-2]$, $r = \sqrt{p^2-4}$
$p = \pm 2$	bod $[-p;-2]$
$p \in (-2;2)$	souřadnice žádného bodu rovnici nesplňují

f)

$p \neq 0$	elipsa $S[0;-\frac{p}{2}]$, $a = \frac{\lvert p\rvert}{2}$, $b = \frac{\lvert p\rvert\sqrt{2}}{4}$, $F_{1,2}[0;-\frac{p}{2} \pm \frac{\lvert p\rvert\sqrt{2}}{4}$
$p = 0$	bod $[0;-\frac{p}{2}]$

g)

$p = 0$	dvě přímky $x = \pm 2\sqrt{5}$
$p = 1$	kružnice $S[0;0]$, $r = 2\sqrt{5}$
$p = -1$	rovnoosá hyperbola $S[0;0]$, $a = b = 2\sqrt{5}$
$p = 5$	elipsa $S[0;0]$, $a = 2\sqrt{5}$, $b = 2$
$p = -5$	hyperbola $S[0;0]$, $a = 2\sqrt{5}$, $b = 2$

16.6 Vnitřní (vnější) oblast kuželosečky

80 a) D vnitřní, A, B, C vnější; b) A, C vnitřní, B vnější, D leží na elipse; c) C, D vnitřní, A, B vnější; d) B vnitřní, C, D vnější, A leží na hyperbole; e) A, C, D vnitřní, B vnější; f) B vnitřní, A, D vnější, C leží na parabole.

16.7 Kuželosečka a přímka

81 a) p je sečna elipsy, $P_1[2;2]$, $P_2[1;4]$; b) p je vnější přímkou hyperboly; c) p je tečna paraboly $T[2;1]$; d) p je asymptotická přímka hyperboly $P[-\frac{5}{4};\frac{3}{2}]$.

82 a) sečna $P_1[4;6]$, $P_2[1;-3]$; b) společný jeden bod $P_1[4;6]$; c) společný jeden bod $P_1[1 + \sqrt{5}; 2 - 2\sqrt{5}]$.

83 a) $|k| < \sqrt{2}$ sečna, $|k| = \sqrt{2}$ tečna, $|k| > \sqrt{2}$ vnější přímka;
b) $|k| < \sqrt{5} \wedge |k| \neq \pm 1$ sečna, $|k| = \sqrt{5}$ tečna, $|k| > \sqrt{5}$ vnější přímka, $|k| = \pm 1$ asymptotická přímka; c) $|k| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ sečna, $|k| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ tečna, $|k| > \frac{\sqrt{3}}{3}$ vnější přímka;
d) $k = 0$ tečna, $k \neq 0$ sečna.

84 a) $|c| < 2$ sečna, $|c| = 2$ tečna, $|c| > 2$ vnější přímka;
b) $c < 16$ sečna, $c = 16$ tečna, $c > 16$ vnější přímka;
c) $|c| < 3$ sečna, $|c| = 3$ tečna, $|c| > 3$ vnější přímka;
d) $c = 0$ asymptota, $c \neq 0$ asymptotická přímka.

85 $|a| < 2$ sečna, $|a| = 2$ tečna, $|a| > 2$ vnější přímka. **86** $r = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **87** $p = -\frac{1}{2}$.

88 $m = \frac{1}{2}$. **89** $n = -1$.

16.8 Tečna v bodě kuželosečky

90 a) $5x + y - 10 = 0$; b) $x - 2y - 10 = 0$; c) $4x + y + 6 = 0$; d) $x - 1 = 0$.

16.9 Tečna z bodu ke kuželosečce

91 a) Nelze; b) lze; c), d) lze. **92** a) $y = -x$, $T[2; -2]$, $y = \frac{1}{5}x$, $T[\frac{10}{3}; \frac{2}{3}]$; b) $y = -1$, $T[2; -1]$, $y = \frac{4}{3}x - 1$, $T[\frac{6}{5}; \frac{3}{5}]$; c) $y = 0$, $T[0; 0]$, $y = \frac{3}{4}(x + 3)$, $T[-\frac{3}{5}; \frac{9}{5}]$; d) $y = x - 2$, $T[3; 1]$, $y = -x$, $T[3; -3]$. **93** a) 90°; b) 60°; c) 90°; d) 120°.

16.10 Tečna rovnoběžná s danou přímkou

94 a) $y = -x - 2$; b) $y = \frac{2}{3}x \pm \frac{5}{3}$; c) $y = 2x$, $y = 2x - 15$; d) $y = 4x - 1$, $y = 4x - 7$; e) neexistuje; f) neexistuje.

16.11 Tečna kolmá k dané přímce

95 a) $y = -\frac{x}{2}$, $y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$; b) $y = \frac{2}{3}x \pm \frac{5}{3}$; c) $y = -x \pm 3$; d) $y = 4$.

16.12 Tečna daným směrem

96 a) $y = x \pm 3$; b) $y = -x + 3$; c) $y = \sqrt{3}x \pm \frac{1}{2}$; d) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \pm 2\sqrt{10}$.

97 a) $y = 2x - 5$; $y = 2x - 10$; b) $y = -3x - \frac{1}{6}$.

16.13 Další úlohy

98 a) 16; b) $4\sqrt{2}$; c) $\frac{8}{3}\sqrt{2}$; d) $4\sqrt{2}$. **99** $A[0; 0]$, $B[4; -4]$, $C[8; 0]$, $D[4; 4]$, $a = 4\sqrt{2}$.

100 $x^2 = \pm\sqrt{2}y$. **101** $A[0; 0]$, $B[12; -4\sqrt{3}]$, $C[12; 4\sqrt{3}]$, $a = 8\sqrt{3}$. **102** $K[-3; -3]$, $L[3; -3]$, $M[3; 3]$, $N[-3; 3]$, $a = 6$. **103** $K_{1,2}[\pm 6; 0]$, $L[0; -2\sqrt{3}]$, $M[0; 2\sqrt{3}]$, $a = 4\sqrt{3}$.

104 $K_1[0; 2\sqrt{3}]$, $L_1[-\frac{18}{5}; -\frac{8}{5}\sqrt{3}]$, $M_1[\frac{18}{5}; -\frac{8}{5}\sqrt{3}]$, $a = \frac{36}{5}$; $K_2[0; -2\sqrt{3}]$, $L_2[-\frac{18}{5}; \frac{8}{5}\sqrt{3}]$, $M_2[\frac{18}{5}; \frac{8}{5}\sqrt{3}]$, $a = \frac{36}{5}$. **105** $t_{1,2}$: $y = \pm\frac{1}{2}x \mp 1$. **106** $t_{1,2}$: $y = x \pm 3$, $t_{3,4}$: $y = -x \pm 3$.

107 $t_{1,2}$: $y = \pm 2x \mp 5$, $t_{3,4}$: $y = \pm\frac{1}{2}x \pm \frac{5}{2}$. **108** $P_1[2; -4]$, $P_2[-1; -1]$, $x + y + 2 = 0$.

16.14 Vyšetřování množin bodů dané vlastnosti

109 Kružnice, $S[1; -2]$, $r = 2\sqrt{5}$. **110** Parabola, $y = x^2$. **111** a) Elipsa, $8x^2 + 9y^2 = 72$. b) Neexistuje bod, jehož souřadnice by splňovaly danou rovnici. c) Jedna větev hyperboly $12x^2 - 4y^2 = 3 \wedge x \geq \frac{1}{2}$. d) Jedna větev hyperboly $12x^2 - 4y^2 = 3 \wedge x \leq -\frac{1}{2}$.

112 a) Kružnice, $S \in \mapsto AB$, $|AS| = 8$ cm, $r = 4$ cm. b) Kruh, $S \in \mapsto AB$, $|AS| = 8$ cm, $r = 4$ cm. c) Rovina bez vnitřku kruhu z úlohy b).

113 a) Parabola, ohnisko v bodě M, řídící přímka — daná přímka p. b) Elipsa, střed S leží na kolmici k p bodem M, $S \in \mapsto pM$, $|Sp| = 8$ cm, $a = 4$ cm, $b = 2\sqrt{3}$ cm, $F_1 = M$.
c) Hyperbola, střed S leží na kolmici k p bodem M, $|Sp| = 2$ cm, body S, M leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou p, $a = 4$ cm, $b = 4\sqrt{3}$ cm, $F_1 = M$.

114 a) Kružnice, střed kružnice je průsečík daných přímek, $r = \frac{3}{2}$ cm. b) Elipsa, střed elipsy je průsečík daných přímek, $a = 2$ cm, $b = 1$ cm. **115** Hyperbola, $y = \frac{1}{x}$.

116 Elipsa, $S_{\text{elipsa}} = S_{\text{kružnice}}$, $a = 8$ cm, $b = 2$ cm, vedlejší poloosa leží na přímce p.

117 Parabola, ohnisko v bodě M, řídící přímka — daná přímka p. **118** Středy leží na elipse: střed elipsy leží ve středu úsečky SM, $a = 2{,}5$ cm, $b = 2$ cm, $F_1 = S$, $F_2 = M$.

119 Středy leží na hyperbole: střed hyperboly leží ve středu úsečky SM, $a = 1$ cm, $b = 2\sqrt{2}$ cm, $F_1 = S$, $F_2 = M$. **120** a) Parabola, vrchol v bodě dotyku tečny, $F = S$. b) Vnitřek polopřímky opačné k polopřímce TS, kde T je bod dotyku tečny t.

17 Komplexní čísla

17.1 Algebraický tvar komplexního čísla

1 a) $23 - 2\mathrm{i}$; b) $1 - 6\mathrm{i}$; c) $(\sqrt{6} - 4)\mathrm{i}$; d) $-5 + 15\mathrm{i}$; e) $-5 + 4\mathrm{i}$. **2** a) $1 + \mathrm{i}$; b) $12 - 16\mathrm{i}$; c) $-\mathrm{i}$; d) $4 - \mathrm{i}$; e) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$; f) $1 + 4\sqrt{3}\mathrm{i}$. **3** a) $3\mathrm{i}$; b) 1; c) $1 - \mathrm{i}$; d) $1 + 8\mathrm{i}$; e) $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

4 $L = P$. **5** a) $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$. b) $z_1 = z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0\mathrm{i}$.

6 $-\mathrm{i}$. **7** $z = \mathrm{i} \cdot \frac{2p}{p^2 + 9}$, $p = 3$. **8** a) $b \in \{0; \frac{7}{6}\}$; b) $b \in \mathrm{R} - \{0; \frac{7}{6}\}$; c) $b \in \{2; 4\}$.

9 $k = \pm\sqrt{3}$. **10** $x \in \{-7; 1\}$.

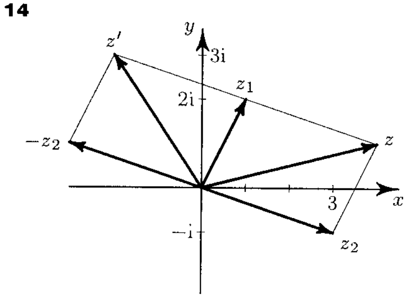
17.2 Mocniny imaginární jednotky i

11 a) $-1; -\mathrm{i}; 1; -1; \mathrm{i}; \mathrm{i}$; b) $8 - 12\mathrm{i}$; c) $4 + 5\mathrm{i}$; d) $-\mathrm{i}; -1; \mathrm{i}; 1; -\mathrm{i}; -1$; e) 0; f) $-5 - 15\mathrm{i}$.

12 a) 1; b) 0; c) $1 - \mathrm{i}$; d) 1; e) $-\mathrm{i}$; f) -1. **13** a) $2\mathrm{i}; -2\mathrm{i}; -\frac{1}{2}\mathrm{i}; \frac{1}{2}\mathrm{i}$; b) $-2 + 2\mathrm{i}$; $-2 - 2\mathrm{i}$; $-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{i}$; $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{i}$; c) $-4; -4; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}$.

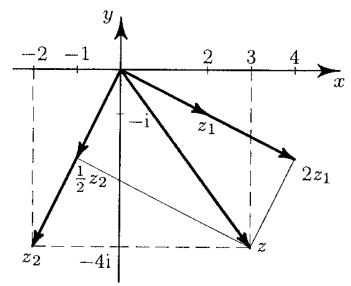
17.3 Znázornění komplexních čísel v Gaussově rovině

14



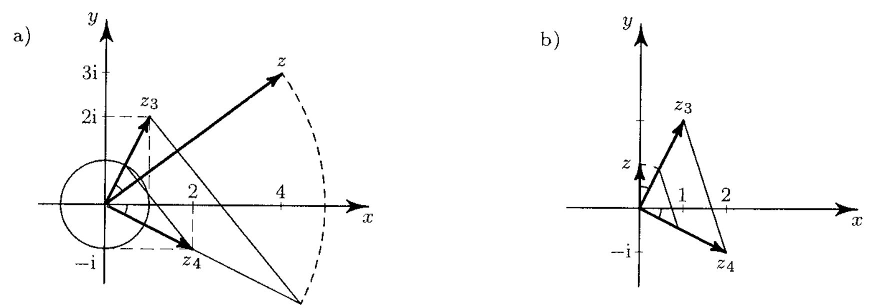
K řešení úlohy 14

15



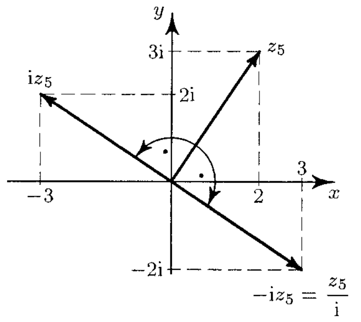
K řešení úlohy 15

16



K řešení úlohy 16

17



K řešení úlohy 17

17.4 Čísla komplexně sdružená

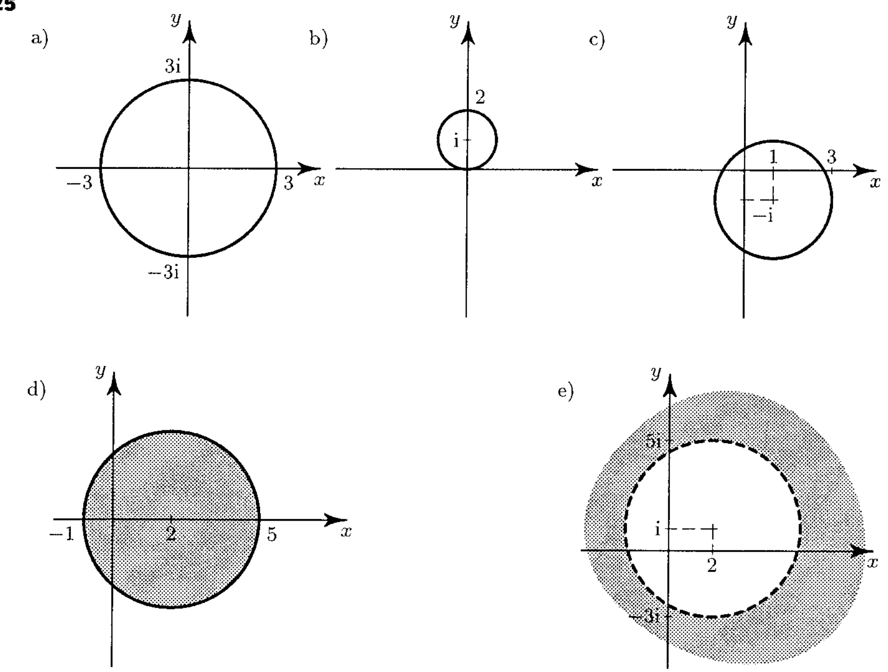
18 $\overline{z}_1 = 2 - \mathrm{i}$, $\overline{z}_2 = 7 + 3\mathrm{i}$, $\overline{z}_3 = -4\mathrm{i}$, $\overline{z}_4 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\mathrm{i}$, $\overline{z}_5 = \sqrt{3} + 1 + 7\mathrm{i}$, $\overline{z}_6 = \sqrt{10} - \mathrm{i} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

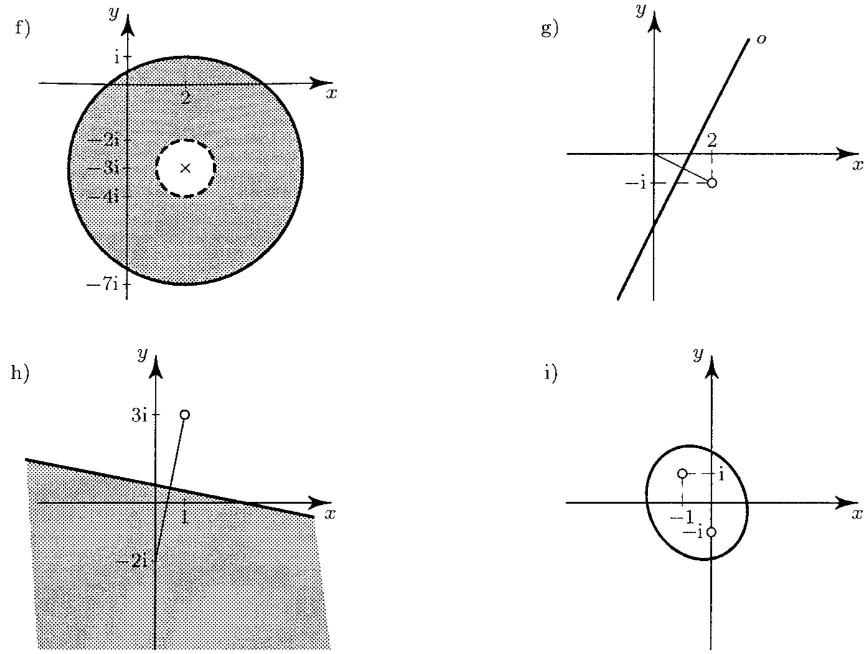
19 $\overline{w}_1 = 7 - \mathrm{i}$, $\overline{w}_2 = -1 - 2\mathrm{i}$, $\overline{w}_3 = -2 + 4\mathrm{i}$. **20** a) $3 + 0\mathrm{i}$; b) $6 + 11\mathrm{i}$; c) $1 - 5\mathrm{i}$; d) $1 - 5\mathrm{i}$; e) $16 - 30\mathrm{i}$; f) $16 - 30\mathrm{i}$. **21** a) $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i}$; b) $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i}$; c) $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}$.

17.5 Absolutní hodnota komplexního čísla

22 a) $2\sqrt{10}$; b) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; c) $3\sqrt{2}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$. **23** a) $25\sqrt{2}$; b) $\sqrt{2}$; c) $\frac{5}{3}$; d) $\sqrt{2}$; e) $\frac{5-\sqrt{5}}{20}$; f) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. **24** a) -3; b) $-\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\mathrm{i}$; c) $-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

25





K řešení úlohy 25

Komplexní jednotka

26 a) až f) platí, protože $|z| = 1$. **27** Jednotková kružnice se středem v počátku.

28 $\forall k \in \mathsf{R}$ je abs. hodnota 1. **29** a) $x \in \{\pm\frac{2}{3}\}$; b) $x \in \emptyset$; c) $x \in \{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\}$; d) $x \in \{-1; 0\}$; e) $x \in \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\}$; f) $x \in \{3\}$.

17.6 Goniometrický tvar komplexního čísla

30 $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{1}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1}{4}\pi)$, $z_2 = 3(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$, $z_3 = 5(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2})$, $z_4 = 4(\cos\frac{2}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi)$, $z_5 = 2(\cos\frac{5}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi)$, $z_6 = 10\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{4}\pi)$, $z_7 = 7\sqrt{2}(\cos\frac{5}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{4}\pi)$, $z_8 = 1(\cos\frac{1}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1}{3}\pi)$, $z_9 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}(\cos\frac{3}{8}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{8}\pi)$.

31 $z_1 = 6{,}71(\cos 26°34' + \mathrm{i}\sin 26°34')$, $z_2 = 5{,}77(\cos 104°02' + \mathrm{i}\sin 104°02')$, $z_3 = 9{,}85(\cos 336°02' + \mathrm{i}\sin 336°02')$.

32 $z_1 = -2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$, $z_2 = \mathrm{i}$, $z_3 = -5$, $z_4 = 1 + \mathrm{i}$.

33 $z_1 = -1{,}67 + 2{,}49\mathrm{i}$, $z_2 = -4{,}58 - 5{,}29\mathrm{i}$.

34 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 45° + \mathrm{i}\sin 45°)$; b) $1(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2})$; c) $\sqrt{2}(\cos 135° + \mathrm{i}\sin 135°)$; d) $0{,}25(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$. **35** $|z_1| = 5 \wedge \varphi = 120°$, $|z_2| = 2 \wedge \varphi = \frac{4}{3}\pi$. **36** $k = 8$.

37 a), b) $\cos -x + \mathrm{i}\sin -x$; c) $\cos x + \mathrm{i}\sin x$; d) $\cos -2x + \mathrm{i}\sin -2x$.

Počítání s komplexními čísly v goniometrickém tvaru

38 a) $z_1 \cdot z_2 = 8(\cos 330° + \mathrm{i}\sin 330°) = 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}$, $z_1 : z_2 = 0{,}5[\cos(-120°) + \mathrm{i}\sin(-120°)] = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$; b) $z_1 \cdot z_2 = 8(\cos\frac{11}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{11}{6}\pi) = 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}$, $z_1 : z_2 = 0{,}5(\cos\frac{3}{2}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{2}\pi) = -0{,}5\mathrm{i}$. **39** a) $z_1 = \frac{8}{5}\sqrt{10} - \frac{6}{5}\sqrt{10}\cdot\mathrm{i}$; b) $z_2 = -2\sqrt{2} - \sqrt{2}\cdot\mathrm{i}$; c) $z_3 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{20}\sqrt{10}} + \mathrm{i}\cdot\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3}{20}\sqrt{10}}$.

40 a) $z_1 \cdot z_2 = 7\sqrt{3} + 7\mathrm{i} = 14(\cos 30° + \mathrm{i}\sin 30°)$; b) stejné, jen postup jiný.

41 Návod: $z_1 = \cos x + \mathrm{i}\sin x$, $z_2 = \cos y + \mathrm{i}\sin y$. Počítejte $z_1 \cdot z_2$ dvěma způsoby; a) jednak roznásobte závorky, jednak užijte, že $z_1 \cdot z_2 = \cos(x+y) + \mathrm{i}\sin(x+y)$; b) jednak roznásobte závorky, jednak užijte, že $z_1 : z_2 = \cos(x-y) + \mathrm{i}\sin(x-y)$.

17.7 Umocňování komplexních čísel

42 a) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$; c) $-8\mathrm{i}$; d) $16 + 16\sqrt{3}\mathrm{i}$; e) $2^{24} + 0\mathrm{i}$; f) $-5 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{3} + 5 \cdot 10^6\mathrm{i}$. **43** $n = 12k + 1 \wedge k \in \mathrm{N}$ nebo $k = 0$. **44** Platí.
45 $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

17.8 Odmocňování komplexních čísel

46 a) $z_{1,2} = 2(\cos k\pi + \mathrm{i}\sin k\pi)$, $k \in \{0;1\}$; b) $z_{1,2} = 2[\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)]$, $k \in \{0;1\}$.
47 a) $z_{1,2,3,4} = \cos(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})$, $k \in \{0;1;2;3\}$; b) $z_{1,2,3,4} = \sqrt[8]{2}[\cos(\frac{7}{16}\pi + \frac{k\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{7}{16}\pi + \frac{k\pi}{2})]$, $k \in \{0;1;2;3\}$.
48 $z_{1,2,3,4,5} = 2(\cos \frac{2}{5}k\pi + +\mathrm{i}\sin \frac{2}{5}k\pi)$, $k \in \{0;1;2;3;4\}$. **49** 0. **50** 0.

17.9 Rovnice v množině komplexních čísel

51 a) $x = 2 \wedge y = -3$; b) $x = 3 \wedge y = 1$; c) $(x = 0 \wedge y = 0) \vee (x = 3 \wedge y = 1)$; d) $x = 0 \wedge y = -3$. **52** a) $z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i}$; b) $z = -1 - \mathrm{i}$; c) $z = -3\mathrm{i}$; d) $z = \mathrm{i}$.
53 a) $z = 1 - \mathrm{i}$; b) $z = 13 - 39\mathrm{i}$; c) $z_1 = -1 - 2\mathrm{i}$, $z_2 = 2 - 2\mathrm{i}$; d) $z_1 = 1 - 2\mathrm{i}$, $z_2 = 3 - 2\mathrm{i}$.
54 a) $x = 0 \wedge y = -\frac{1}{2}$; b) $x = 3 - 2\mathrm{i}$, $y = 3 + 2\mathrm{i}$. **55** a) $z = \frac{3}{2} - 2\mathrm{i}$; b) $z = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$; c) $z = 2 - 4\mathrm{i}$; d) $z = 1 - 3\mathrm{i}$. **56** a) $z = 2 + 3\mathrm{i} \wedge w = -4 + 2\mathrm{i}$; b) $z = 1 - \mathrm{i} \wedge w = 3 + 2\mathrm{i}$.

Rovnice v množině komplexních čísel s parametrem

57 $a = -\mathrm{i}$. **58** a) $a = \frac{1}{2} + \mathrm{i}$; b) $a = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}$; c) $a = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

17.10 Kvadratická rovnice v množině komplexních čísel

59 a) $t \in (-2;1)$; b) $t \in (0;\infty)$; c) $t \in \emptyset$; d) $t \in (-\infty;-\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2};\infty)$.
60 a) $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$; b) $x_{1,2} = \frac{1}{5} \pm \frac{2}{5}\mathrm{i}$; c) $\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}$; d) $x_{1,2} = \pm 2 + 2\mathrm{i}$; e) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$; f) $x_{1,2} = 3\mathrm{i}$; g) $x_{1,2} \in \{-1 + 2\mathrm{i}; -1 - \mathrm{i}\}$; h) $x_{1,2} \in \{-4\mathrm{i}; \mathrm{i}\}$; i) $x_{1,2} \in \{\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i} \cdot (-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\}$; j) $x_{1,2} \in \{\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i}; -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}\mathrm{i}\}$; k) $x_{1,2} \in \{2 + \mathrm{i}; 1 - \mathrm{i}\}$; l) $x_{1,2} \in \{3 - \mathrm{i}; -4 + 2\mathrm{i}\}$.

Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

61 a) $k(x^2 - 6x + 10) = 0$, $k \in \mathrm{C} - \{0\}$; b) $k[x^2 - (5 + 2\mathrm{i}\sqrt{3})x + 3 + 5\mathrm{i}\sqrt{3}] = 0$, $k \in \mathrm{C} - \{0\}$; c) $k[x^2 - (2 + 2\mathrm{i})x + 2\mathrm{i}] = 0$, $k \in \mathrm{C} - \{0\}$; d) $k(x^2 - x\mathrm{i}) = 0$, $k \in \mathrm{C} - \{0\}$.
62 a) $k(x^2 - 6x + 10) = 0$, $k \in \mathrm{R} - \{0\}$; b) $k(x^2 + 25) = 0$, $k \in \mathrm{R} - \{0\}$; c) $k(x^2 - x + 1) = 0$, $k \in \mathrm{R} - \{0\}$; d) $k(x^2 - 2\sqrt{3}x + 4) = 0$, $k \in \mathrm{R} - \{0\}$.
63 $x_2 = -2 \wedge q = -4 + 2\mathrm{i}$. **64** $x_2 = -3 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} \wedge p = 6$. **65** $x_1 = x_2 = -3 + 2\mathrm{i} \wedge k = 5 - 12\mathrm{i}$. **66** a) i; b) 1; c) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$. **67** a) $(x + 1 + \mathrm{i})(x + 1 - \mathrm{i})$; b) $(x - 2 + \mathrm{i})(x - 2 - \mathrm{i})$; c) $2(x - 1 + 2\mathrm{i})(x - 1 - 2\mathrm{i})$; d) $(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})$; e) $(2x + \mathrm{i})(2x - \mathrm{i})$; f) $(x + 2)(x - 2)(x + 2\mathrm{i})(x - 2\mathrm{i})$.

17.11 Binomické rovnice

68 a) $x_{1,2,3} = 3(\cos \frac{2}{3}k\pi + \mathrm{i}\sin \frac{2}{3}k\pi)$, $k \in \{0;1;2\}$, $x_1 = 3$, $x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$;
b) $x_{1,2,3,4} = 2[\cos(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi)]$, $k \in \{0;1;2;3\}$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}$; c) $x_{1,2,3,4,5,6} = 1(\cos \frac{1}{3}k\pi + \mathrm{i}\sin \frac{1}{3}k\pi)$, $k \in \{0;1;2;3;4;5\}$, $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $x_{5,6} = \pm\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$;
d) $x_{1,2,3} = 4[\cos(\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi)]$, $k \in \{0;1;2\}$, $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$, $x_3 = -4\mathrm{i}$.

69 a) $x_{1,2,3} = \sqrt[6]{2}[\cos(\frac{1}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi)]$, $k \in \{0;1;2\}$;
b) $x_{1,2,3,4,5,6} = \sqrt[6]{2}[\cos(\frac{5}{18}\pi + \frac{1}{3}k\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{5}{18}\pi + \frac{1}{3}k\pi)]$, $k \in \{0;1;2;3;4;5\}$;
c) $x_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{2}[\cos(\frac{5}{24}\pi + \frac{1}{2}k\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{5}{24}\pi + \frac{1}{2}k\pi)]$, $k \in \{0;1;2;3\}$;
d) $x_{1,2,3,4,5} = 1 \cdot [\cos(\frac{1}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{1}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi)]$, $k \in \{0;1;2;3;4\}$.
70 a) $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$; b) $x_{1,2} = -1 \pm 2\mathrm{i}$.

18 Kombinatorika a binomická věta

18.1 Faktoriál čísla — $n!$

1 a) 3; b) 32; c) 726. **2** a) 1 680; b) 840; c) 70; d) 420. **3** a) $\frac{5}{21}$; b) $\frac{1}{29}$; c) $\frac{11}{7}$. **4** a) $\frac{20}{13!}$; b) $\frac{1}{16!}$; c) $\frac{1}{42}$. **5** a) $n + 1$, $n \in \mathrm{Z}$, $n \geqq 0$; b) $n^2 - n$, $n \in \mathrm{N}$, $n \geqq 2$; c) $n^2 + n$, $n \in \mathrm{N}$; d) $\frac{1}{n-99}$, $n \in \mathrm{N}$, $n \geqq 100$; e) $n^2 + 7n + 12$, $n \in \mathrm{Z}$, $n \geqq -2$; f) $\frac{1}{n^2-5n+6}$, $n \in \mathrm{N}$, $n \geqq 4$; g) $2n$, $n \in \mathrm{N}$; h) $3n - 2$, $n \in \mathrm{N}$. **6** a) $\frac{1}{(n+1)!}$, $n \in \mathrm{Z}$, $n \geqq 0$; b) $\frac{3}{(n-3)!}$, $n \in \mathrm{N}$, $n \geqq 4$; c) $\frac{1}{(n+1)!}$, $n \in \mathrm{Z}$, $n \geqq -1$, pro $n = -2$ je výsledek 0; d) 0, $n \in \mathrm{Z}$, $n \geqq 0$.
7 a) $\frac{7n+4}{12n^2+12n}$, $n \in \mathrm{N}$; b) $\frac{1}{12n^2+12n}$, $n \in \mathrm{N}$; c) 2, $n \in \mathrm{Z}$, $n \geqq -1$; d) $(2n-1)^2$, $n \in \mathrm{N}$.
8 a) $A > B$; b) $A > B$. **9** a) Platí; b) platí.
10 a) 12 nul; b) 24 nul; c) 124 nul. **11** a), b), c), d), e) platí.
12 a) $\{3\}$; b) $\{4\}$; c) $\{4\}$; d) $\{92\}$. **13** a) $\{5\}$; b) $\{2\}$; c) $\{5\}$; d) $\{11\}$.
14 a) $\{8, 9, 10, 11, \dots\}$; b) $\{3, 4, 5, \dots\}$; c) $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$; d) $\{4, 5, 6, \dots\}$.
15 a) $x \in \{2, 3, 8, 9, 10, \dots\}$; b) $x \in \{4, 5\}$; c) $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$; d) $x \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

18.2 Kombinační číslo, vlastnosti kombinačních čísel

16 a), b), c) 10, 1, 21, 21. **17** a) $L = P = 792$; b) $L = P = 94\,500$; c) $L = P = 325$.
18 $M = 10N$. **19** a) $K < L$; b) $K > L$. **20** Největší je $\binom{100}{50}$.
21 a) Platí $\forall n \in \mathrm{N} \wedge n \geqq 2$; b) platí $\forall n \in \mathrm{N} \wedge n \geqq 3$; c), d) platí $\forall n \in \mathrm{N}$.
22 a) $\binom{18}{9}$; b) $\binom{12}{5}$; c) $\binom{12}{2}$; d) $\binom{4}{3}$; e) $\binom{7}{4}$; f) $\binom{24}{21}$.
23 a) 2 002; b) 3 003; c) 1 001; d) 3 003.
24 a) $\binom{n+1}{k}$, $n, k \in \mathrm{N}$, $n \geqq k$; b) $\binom{n+2}{r}$, $n, r \in \mathrm{N}$, $n \geqq r \geqq 2$.

18.3 Rovnice a nerovnice s kombinačními čísly

25 a) $\{4\frac{2}{5}\}$; b) $\{4\}$; c) $\{\pm 3\}$; d) $\{-1;2\}$; e) $\{6\}$. **26** a) $\{3;5\}$; b) $\{2;3\}$; c) $\{2;8\}$. **27** a) $\{5\}$; b) $\{4, 5, 6, \dots\}$; c) $\{5\}$; d) $\{0;5\}$; e) $\{5\}$; f) $\{5\}$; g) $\{5\}$; h) $\{5\}$. **28** a) $\{12, 13, \dots\}$; b) $\{0, 1, 2, 3, \dots, 16\}$; c) $\{6, 7, 8, \dots\}$; d) $\{1, 2, 3, \dots, 13\}$; e) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$; f) $\{0, 1, 2, \dots\}$. **29** a) $\{2\}$; b) $x = \frac{k}{3} \wedge k \in \mathrm{N} \wedge k \geqq 5$. **30** a) $\{4, 5, 6, 7, 8\}$; b) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$; c) $\{4\}$; d) $\{6\}$.
31 a) $[x, y] = [6, 3]$; b) $[x, y] = [8, 6]$; c) $[x, y] = [8, 5]$; d) $[x, y] = [6, 4]$.

18.4 Pravidlo kombinatorického součinu

32 15. **33** 1 088 párů, 19 h 38 min 35 s. **34** a) 21; b) 63; c) 252.
35 182 dvojic; 5,5 roku. **36** Když si Martin vezme rohlík ($72 > 70$).

18.5 Variace

37 120, 24, 72. **38** 2 160, 840, 360, 1 560. **39** 216. **40** 120. **41** 332 640.
42 $\frac{30!}{2} \doteq 1{,}326 \cdot 10^{32}$. **43** 336. **44** 32. **45** 115. **46** 40.

18.6 Permutace

47 20! = 2 432 902 008 176 640 000. **48** 15! = 1 307 674 368 000.
49 10! · 5! = 435 456 000. **50** 32! = 263 130 836 933 693 530 167 218 012 160 000 000.
51 362 880.

18.7 Kombinace

52 a) 45; b) 31. **53** a) 120; b) 100. **54** a) 455; b) 400. **55** a) 4 736; b) 2 048. **56** a) 142 208; b) 28 416. **57** $\frac{n(n-3)}{2}$. **58** 27 405. **59** 56.

60 924. **61** 420. **62** $\binom{200}{10}^3 \doteq 1{,}13 \cdot 10^{49}$. **63** 225. **64** a) 50 388; b) 75 582; c) 18 564; d) 82 212; e) 107 406; f) 43 758. **65** a) 21; b) 105; c) 126; d) 105; e) 231; f) 126. **66** 38 798 760. **67** 45. **68** 6. **69** 21.

18.8 Variace, kombinace — rovnice

70 a) $x = 8$; b) $x = 5$; c) $x = 9$; d) $x \in \{6; 7\}$; e) $x = 11$; f) $x = 8$.

18.9 Variace, permutace, kombinace s opakováním

71 30. **72** 7 776. **73** 12 600. **74** 21. **75** 495.

18.10 Binomická věta

76 a) $41 + 29\sqrt{2}$; b) $97 - 708\sqrt[3]{3} - 516\sqrt[3]{9}$; c) $x^4 + 4x^3\sqrt{x} + 6x^3 + 4x^2\sqrt{x} + x^2$; d) $y^5 - \frac{5}{2}y^3 + \frac{5}{2}y - \frac{5}{4y} + \frac{5}{16y^3} - \frac{1}{32y^5}$; e) $a^4 - 9a^2\sqrt[3]{a^2} + 27a\sqrt[3]{a} - 27$; f) $\sqrt{mn}\left(\frac{m^2}{n^3} - \frac{5m}{n^2} + \frac{10}{n} - \frac{10}{m} + \frac{5n}{m^2} - \frac{n^2}{m^3}\right)$.
77 a) $\frac{113}{2}$; b) $-160a^2 - \frac{80}{a^4} - \frac{2}{a^{10}}$. **78** a) $8 - 8\mathrm{i}$; b) $64\mathrm{i}$; c) $-512 - 512\mathrm{i}\sqrt{3}$.
79 x dosadit. **80** 21 členů. **81** $A_5 = 210y^4$. **82** $A_{10} = 320\,320a^6b^9$.
83 $x = \sqrt[3]{2}$. **84** $z = \pm\frac{1}{2}$. **85** 5. člen. **86** 6. člen. **87** 10. člen.
88 a) 3. člen; $A_3 = 295\,245$; b) člen bez a neexistuje. **89** a) 5. člen; $A_5 = 1\,025\,024y^{-3}$; b) 8. člen; $A_8 = 439\,296x^{-21}$. **90** a) 4 členy, $A_1 = 125$, $A_3 = 375$, $A_5 = 75$, $A_7 = 1$; b) racionální členy neex.; c) 3. člen, $A_3 = 91x^3$, $x \in \mathbb{Q}$. **91** a) 9 racionálních členů: 1., 7., 13., 19., 25., 31., 37., 43., 49.; b) 3 racionální členy: 1., 25., 49.
92 a) $n = 9$; b) $n = 6$; c) $n = 10$; d) $n = 10$; e) $n = 14$; f) $n = 18$; g) $n = 7$.
93 $n = 8$. **94** $n = 12$. **95** $n = 6$. **96** $n = 18$. **97** $n = 7$.
98 a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$; b) $\sin 5x = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x$, $\cos 5x = 5\cos x - 20\cos^3 x + 16\cos^5 x$. **99** Návody: a) $2^n = (1+1)^n$; b) $0 = (1-1)^n$; c) $(-1)^n = (1-2)^n$; d) $5^n = (4+1)^n$; e) $5^n = (1+4)^n$.
100 Návody: a) $4^{2n} = 16^n = (15+1)^n$; b) $4^n = (3+1)^n$.

18.11 Důkaz matematickou indukcí

Úlohy **101–110** řešíme takto:
1. Dokážeme platnost věty (vzorce) pro $n = 1$;
2. za předpokladu, že věta (vzorec) platí pro $n = k$, dokážeme, že platí také pro $n = k + 1$; závěr: věta (vzorec) platí pro $n = 1$ podle prvního kroku, tedy podle druhého kroku platí i pro $n = 2$. Platí-li pro $n = 2$, musí podle druhého kroku platit i pro $n = 3$. Platí-li pro $n = 3$, musí podle druhého kroku platit i pro $n = 4$, atd., tedy platí $\forall n \in \mathbb{N}$.

19 Diferenciální a integrální počet

Limita funkce

19.1 Limita funkce ve vlastním bodě

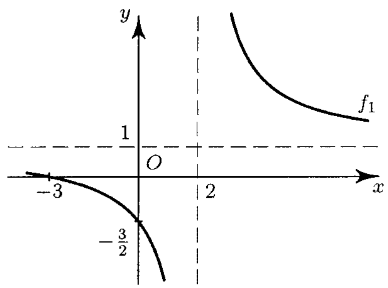
1 a) $\frac{8}{7}$; b) 0; c) -1; d) -1; e) 1; f) 1. **2** a) 4; b) $\frac{2}{3}$; c) -24; d) 0; e) $-\frac{8}{3}$; f) 0. **3** a) -1; b) -4; c) $\frac{5}{7}$; d) $\frac{7}{5}$; e) $-\frac{5}{2}$; f) $\frac{4}{3}$; g) $\frac{7}{9}$; h) $\frac{7}{4}$; i) $\frac{1}{4}$; j) $\frac{3}{2}$.
4 a) -1; b) $\frac{5}{6}$; c) $\frac{5}{6}$; d) -3. **5** a) 49; b) 11; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{3}{5}$. **6** a) 4; b) 6; c) -8; d) $-\frac{1}{4}$; e) $\frac{1}{6}$; f) $-\frac{2}{9}$; g) $\frac{3}{2}$; h) $\frac{4}{3}$; i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; j) $-\frac{1}{2}$. **7** a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) 1; d) 3; e) 1; f) 2; g) 2; h) 0; i) $-\sqrt{2}$; j) -1. **8** a) 1; b) $4\sqrt{3}$; c) -1; d) $-2\sqrt[4]{2}$; e) $-\frac{1}{16}$; f) 4. **9** a) 2; b) 8; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{4}$; e) 4; f) 6; g) $\frac{1}{2}$; h) -1; i) 2.
10 a) 2; b) -1; c) $\frac{1}{2}$; d) 8; e) $\frac{\sqrt{5}}{10}$; f) 1; g) 1; h) $\sqrt{2}$; i) 2.

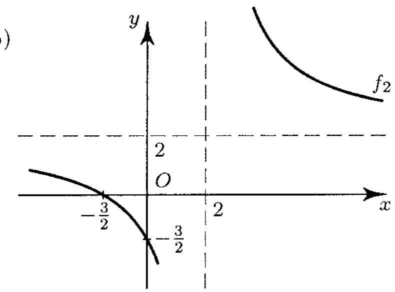
19.2 Limita funkce v nevlastním bodě

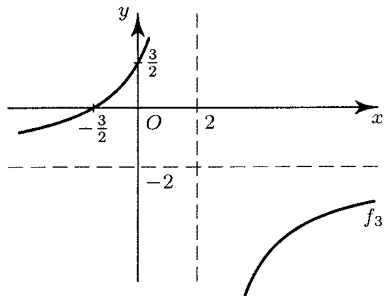
11 a) $\frac{1}{3}$; b) 3; c) $-\frac{4}{7}$; d) $\frac{2}{5}$; e) 16; f) $\frac{1}{3}$. **12** a) ∞; b) 0; c) 0; d) ∞; e) ∞; f) 0. **13** a) $\sqrt{2}$; b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sqrt{2}$; e) 1; f) 1; g) $\frac{3}{2}$; h) 1; i) $-\frac{3}{4}$; j) $\frac{1}{2}$.

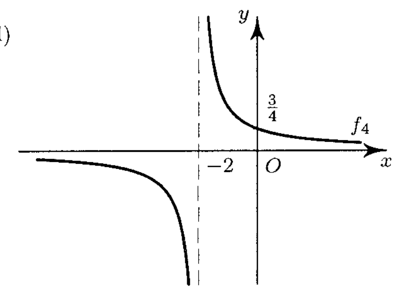
19.3 Jednostranné limity

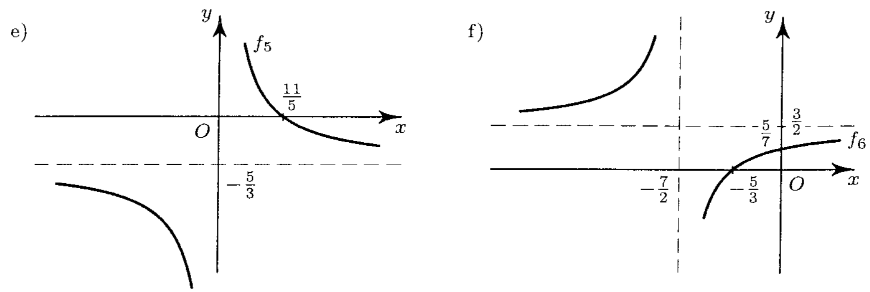
14 a) ∞; b) $-\infty$; c) neex.; d) ∞; e) $-\infty$; f) $-\infty$; g) ∞; h) $-\infty$; i) $-\infty$.
15

a)


b)


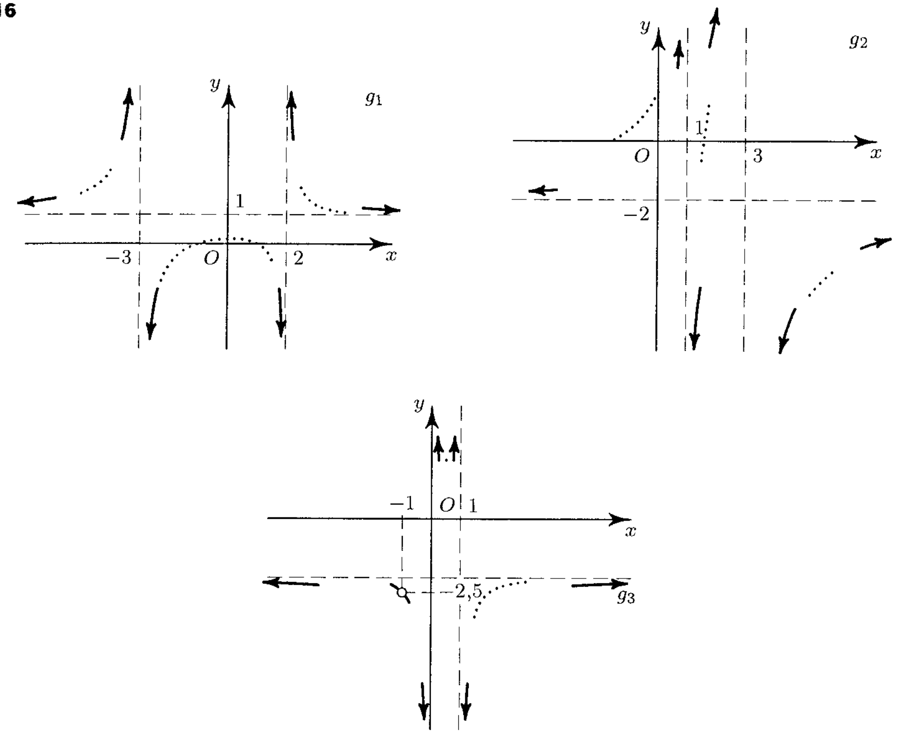
c)


d)




K řešení úlohy 15

16



K řešení úlohy 16

Derivace funkce

19.4 Definice derivace funkce

17 $f_1'(3) = 6$, $f_2'(1) = -2$, $f_3'(1) = \frac{1}{2}$, $f_4'(2) = 12$, $f_5'(4) = -\frac{1}{16}$, $f_6'(-1) = 0$, $f_7'(0) = 1$, $f_8'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f_9'(\frac{\pi}{2}) = -1$, $f_{10}'(-2) = -\frac{3}{25}$.

18 $g_1'(x_0) = 2x_0$, $g_2'(x_0) = 3x_0^2$, $g_3'(x_0) = \cos x_0$, $g_4'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

19.5 Pravidla pra výpočet derivace

19 $f_1'(x) = 2x + 3x^2$, $\mathsf{D}(f_1) = \mathsf{D}(f_1') = \mathsf{R}$; $f_2'(x) = 8x - 1$, $\mathsf{D}(f_2) = \mathsf{D}(f_2') = \mathsf{R}$;
$f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2\frac{1}{x^3}$, $\mathsf{D}(f_3) = \mathsf{R}^+$, $\mathsf{D}(f_3') = \mathsf{R}^+$;

$f_4'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\mathsf{D}(f_4) = \mathsf{R}$, $\mathsf{D}(f_4') = \mathsf{R} - \{0\}$;
$f_5'(x) = -2x^{-3} - 12x^{-4}$, $\mathsf{D}(f_5) = \mathsf{D}(f_5') = \mathsf{R} - \{0\}$;
$f_6'(x) = -2x^{-2} - \frac{2}{35}x^{-\frac{3}{5}}$, $\mathsf{D}(f_6) = \mathsf{D}(f_6') = \mathsf{R} - \{0\}$;
$f_7'(x) = 2\cos x - 3\sin x$, $\mathsf{D}(f_7) = \mathsf{D}(f_7') = \mathsf{R}$;
$f_8'(x) = 7x^6 + 7\sin x$, $\mathsf{D}(f_8) = \mathsf{D}(f_8') = \mathsf{R}$;
$f_9'(x) = \frac{6}{x} - \frac{9}{x \cdot \ln 10}$, $\mathsf{D}(f_9) = \mathsf{R}^+$, $\mathsf{D}(f_9') = \mathsf{R} - \{0\}$;
$f_{10}'(x) = 3^x \ln 3 + 2e^x$, $\mathsf{D}(f_{10}) = \mathsf{D}(f_{10}') = \mathsf{R}$;
$f_{11}'(x) = 2 + \cos x$, $\mathsf{D}(f_{11}) = \mathsf{D}(f_{11}') = \mathsf{R}$;
$f_{12}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{11}{\sin^2 x}$, $\mathsf{D}(f_{12}) = \mathsf{D}(f_{12}') = \mathsf{R} - \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{k\frac{\pi}{2}\}$.

20 $g_1'(x) = x^3 + 2x$, $g_2'(x) = -\frac{1}{6 \cdot \sqrt[6]{x^7}}$, $g_3'(x) = 2x - 1$, $g_4'(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x^2}$, $g_5'(x) = 2x - 5$, $g_6'(x) = 2x - 2$, $g_7'(x) = -\sin x + \cos x$, $g_8'(x) = -\sin x + \cos x$.

21 $h_1'(x) = \sin x + x\cos x$, $h_2'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x - \cos x$, $h_3'(x) = \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $h_4'(x) = \frac{7}{(x+3)^2}$, $h_5'(x) = \frac{2x^2+2x+2}{(1-x^2)^2}$, $h_6'(x) = \frac{-2}{1-\sin 2x}$.

22 $f_1'(x) = 12x(x^2+1)^5$, $f_2'(x) = \frac{12x^2-1}{2\sqrt{4x^3-x}}$, $f_3'(x) = \frac{24x^2(\sqrt{2x^3-1}+2)^7}{\sqrt{2x^3-1}}$, $f_4'(x) = \frac{-10(12x^3+2x)}{(3x^4+x^2)^{11}}$, $f_5'(x) = \frac{2\sqrt{5x}+5}{4\sqrt{5x^2+5x\sqrt{5x}}}$, $f_6'(x) = -2\sin(2x+4)$, $f_7'(x) = \sin 2x$, $f_8'(x) = 2x\cos x^2$, $f_9'(x) = \frac{-3\cos x}{\sin^4 x}$, $f_{10}'(x) = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$, $f_{11}'(x) = \frac{2-2\sin 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(\cos 2x+2x)^2}}$, $f_{12}' = \frac{3}{\cos^2(3x-\frac{\pi}{4})}$, $f_{13}'(x) = \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x+5}}$, $f_{14}'(x) = \frac{1}{x+2}$, $f_{15}'(x) = \frac{3\cos x}{3\sin x-8}$, $f_{16}'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$.

23 $g'(0) = 2$, $g'(1) = 5$, $g'(-2) = 14$.

24 a) $x \in \{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\}$; b) $x \in \{\pm 1\}$; c) $x \in \emptyset$; d) $x \in \{-3\}$.

19.6 Tečna ke grafu funkce

25 $k = 6$. **26** a) $6x - y - 16 = 0$; b) $y + 6 = 0$; c) $16x + y - 12 = 0$; d) $3x - y + 11 = 0$; e) $2x - y = 0$; f) $y = 0$; g) $3x - y + 3 = 0$; h) $2x + 2y - \pi - 2 = 0$. **27** a) $T[1; 2]$; b) $T[\frac{\sqrt{3}-1}{4}; -\frac{3}{4}]$; c) $T[-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}]$; d) nemá řešení; e) $T[0; -1]$; f) $T[-\frac{1}{6}; -\frac{10}{9}]$.

28 $2x - y + 17 = 0$. **29** $T[-\sqrt[3]{2}; \frac{\sqrt[3]{2}}{2}]$. **30** $T_1[1; -1]$, $T_2[-\frac{1}{3}; \frac{5}{27}]$. **31** $V[\frac{1}{6} : -\frac{11}{12}]$.

32 $y + 9 = 0$. **33** a) $63°26'$, $116°33'$; b) $0°$; c) $14°02'$; d) $45°$, $135°$; e) $135°$, $45°$; f) $45°$; g) $45°$; h) $45°$; i) $23°29'$. **34** a) $T[\frac{3}{4}; \frac{15}{8}]$; b) $T[1 + \frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{13}{8}]$; c) $V[1; 2]$; d) $T[\frac{5}{4}; \frac{15}{8}]$; e) tečna neexistuje. **35** $80°32'$. **36** $28°04'$.

37 $t_1\colon x - 9y - 3 = 0$, $t_2\colon x - y - 3 = 0$.

19.7 Funkce rostoucí, klesající

38 f_1 roste v $(-\infty; -1\rangle$, f_1 klesá v $\langle -1; \frac{4}{3}\rangle$, f_1 roste v $\langle \frac{4}{3}; \infty)$.
f_2 klesá v $(-\infty; -\frac{2}{3}\rangle$, f_2 roste v $\langle -\frac{2}{3}; 1\rangle$, f_2 klesá v $\langle 1; \infty)$.
f_3 klesá v $(-\infty; -1\rangle$, f_3 roste v $\langle -1; 0)$, f_3 klesá v $(0; 2\rangle$, f_3 roste v $\langle 2; \infty)$.
f_4 roste v $\langle -\infty; -1\rangle$, f_4 klesá v $\langle -1; 3\rangle$, f_4 roste v $\langle 3; \infty)$.
f_5 roste v $\langle -\infty; -\sqrt{2}\rangle$, f_5 klesá v $\langle -\sqrt{2}; 0\rangle$, f_5 roste v $\langle 0; \sqrt{2}\rangle$, f_5 klesá v $\langle \sqrt{2}; \infty)$.
f_6 klesá v $(-\infty; 2\rangle$, f_6 roste v $\langle 2; \infty)$.

39 g_1 roste v $(-\infty; -1\rangle$, g_1 klesá v $\langle -1; 0)$, g_1 klesá v $(0; 1\rangle$, g_1 roste v $\langle 1; \infty)$.
g_2 roste v $(-\infty; 0)$, g_2 roste v $(0; \infty)$.
g_3 klesá v $(-\infty; -1)$, g_3 roste v $\langle -1; 0)$, g_3 roste v $(0; 1\rangle$, g_3 klesá v $\langle 1; \infty)$.
g_4 roste v $(0; \infty)$.
g_5 roste v $\langle -\infty; -\sqrt{2}\rangle$, g_5 klesá v $\langle -\sqrt{2}; 0)$, g_5 klesá v $(0; \sqrt{2}\rangle$, g_5 roste v $\langle \sqrt{2}; \infty)$.
g_6 roste v $\langle -\infty; -4\rangle$, g_6 klesá v $\langle -4; -1)$, g_6 klesá v $(-1; 2\rangle$, g_6 roste v $\langle 2; \infty)$.
g_7 klesá v $\langle -\infty; -3)$, g_7 klesá v $(-3; \infty)$.
g_8 roste v $\langle -\infty; 0\rangle$, g_8 klesá v $\langle 0; \infty)$.
g_9 klesá v $(-\infty; -1\rangle$, g_9 roste v $\langle -1; 0\rangle$, g_9 klesá v $\langle 0; 1\rangle$, g_9 roste v $\langle 1; \infty)$.
g_{10} roste v $\langle 1; \infty)$.
g_{11} klesá v $(4; 6)$.
g_{12}: $\mathsf{D}(g_{12}) = \emptyset$, tedy nemá smysl zkoumat, zda funkce roste nebo klesá.

19.8 Druhá derivace funkce

40 $f_1''(x_0) = 6$, $f_2''(x_0) = 2 + \frac{\sqrt{x_0}}{2x_0^2} + \frac{2}{x_0^3}$, $f_3''(x_0) = -\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_0}}{9x_0^2} + \frac{5\cdot\sqrt[4]{x_0^3}}{16x_0^3}$,
$f_4''(x_0) = -4\sin x_0 - 2\cos x_0$, $f_5''(x_0) = \frac{8}{x_0^3} - \frac{24}{x_0^4}$, $f_6''(x_0) = \frac{-2}{(x_0+1)^3}$.

41 $g(-1) = 7$, $g'(-1) = -17$, $g''(-1) = 20$. **42** $L = P$. **43** $L = P$.

19.9 Maximum, minimum funkce

44 f_1: $M_a[-4;32]$, $M_i[0;0]$; f_2: $M_a[-1;5]$, $M_i[3;-27]$; f_3: $M_i[0;3]$, $M_{a1}[1;4]$, $M_{a2}[-1;4]$; f_4: $M_i[2;-7]$, $M_a[-2;25]$; f_5: $M_i[-3;-27]$; f_6: $M_i[0;0]$, $M_a[-8;8\,192]$.

45 g_1: $M_a[-6;-12]$, $M_i[0;0]$; g_2: $M_i[0;-\frac{1}{2}]$; g_3: $M_i[4;3]$; g_4: $M_a[2;2]$;
g_5: $M_i[2;2\sqrt{2}]$; g_6: $M_i[0;-1]$, **46** h_1: $M_a[\frac{\pi}{4};\sqrt{2}]$, $M_i[\frac{5}{4}\pi;-\sqrt{2}]$;
h_2: M_i: $h_2(0) = h_2(\pi) = h_2(2\pi) = -2$, M_a: $h_2(\frac{\pi}{2}) = h_2(\frac{3}{2}\pi) = 1$;
h_3: $M_i[\frac{\pi}{2};-1]$, M_a: $h_3(\frac{7}{6}\pi) = h_3(\frac{11}{6}\pi) = \frac{5}{4}$;
h_4: $M_i[\pi;-\frac{3}{2}]$, M_a: $h_4(\frac{\pi}{3}) = h_4(\frac{5}{3}\pi) = \frac{3}{4}$;
h_5: M_i: $h_5(\frac{5}{8}\pi) = h_5(\frac{13}{8}\pi) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$, M_a: $h_5(\frac{\pi}{8}) = h_5(\frac{9}{8}\pi) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$;
h_6: $M_i[\frac{5}{6}\pi;-\frac{\sqrt{3}}{3}]$, $M_a[\frac{\pi}{6};\frac{\sqrt{3}}{3}]$.

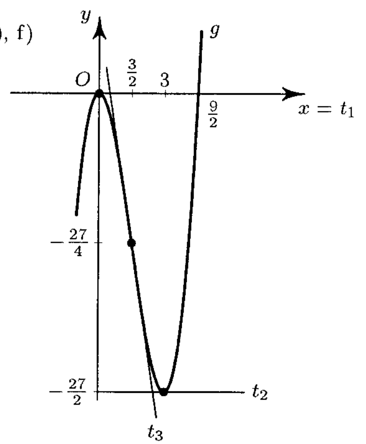
47 $\forall x \in \mathrm{D}$: $y' \neq 0 \Rightarrow$ neexistuje extrém. **48** $a = \frac{1}{4} \wedge b = -1 \Rightarrow h(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 5$.

49 $p = 8 \wedge q = -43 \Rightarrow m(x) = x^2 + 8x - 43$. **50** $b = -3 \wedge d = 9 \Rightarrow g(x) = x^3 - 3x^2 + 9$, $M_a[0;9]$.

19.10 Průběh funkce

51 a) g roste v $(-\infty;0\rangle$, g klesá v $\langle 0;3\rangle$, g roste $\langle 3;\infty)$; b) $M_a[0;0]$, $M_i[3;-\frac{27}{2}]$;
c) $P_{x_1}[0;0]$, $P_y[0;0]$, $P_{x_2}[4\frac{1}{2};0]$;

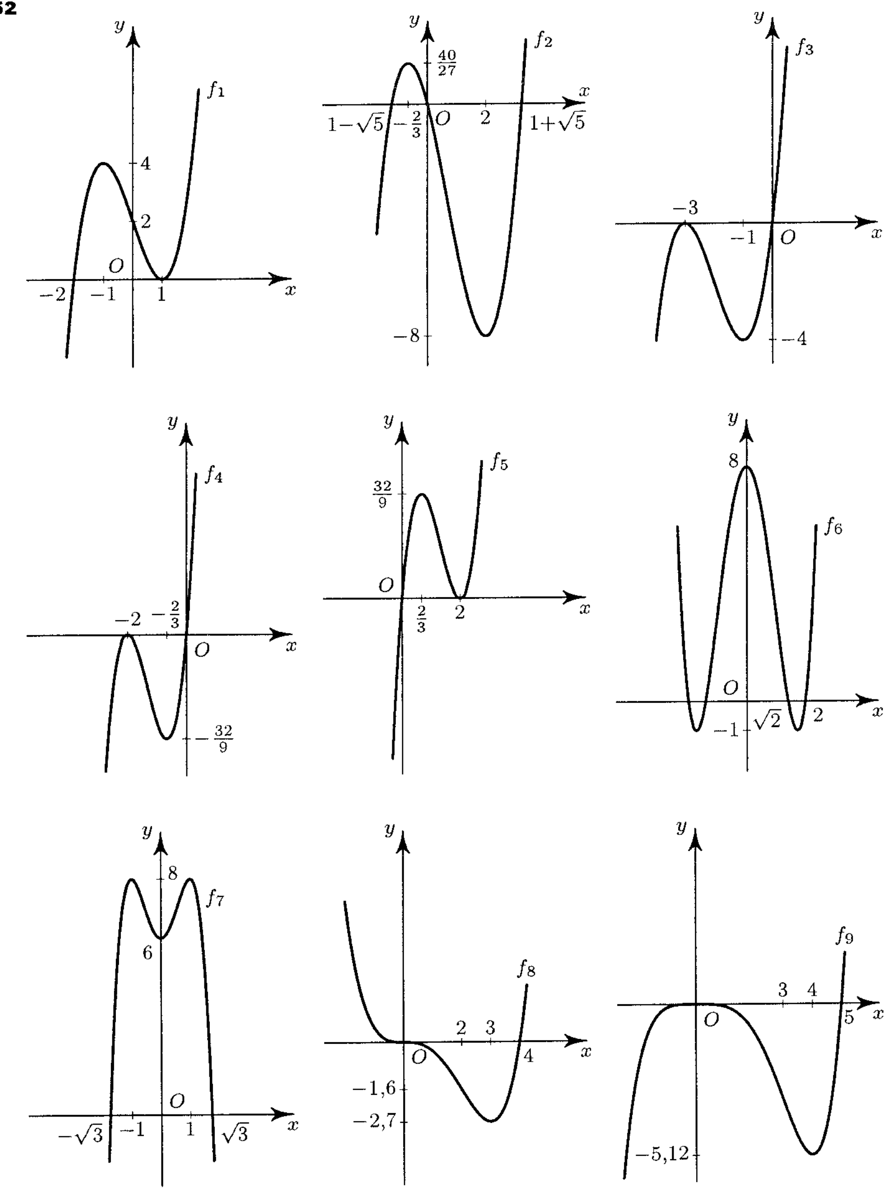
d), f)

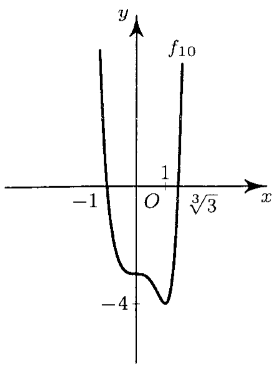


K řešení úlohy 51

e) t_1: $y = 0$, t_2: $y = -\frac{27}{2}$, t_3: $54x + 8y - 27 = 0$.

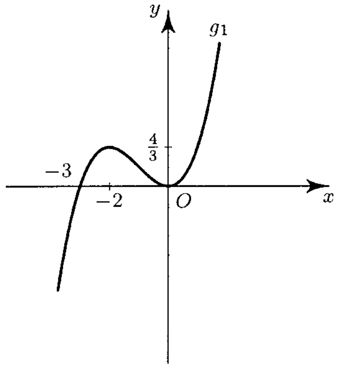
52

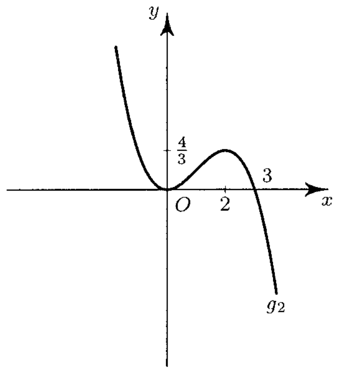


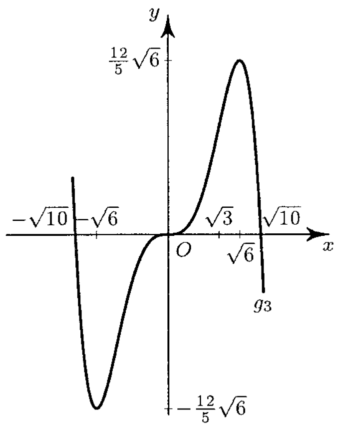


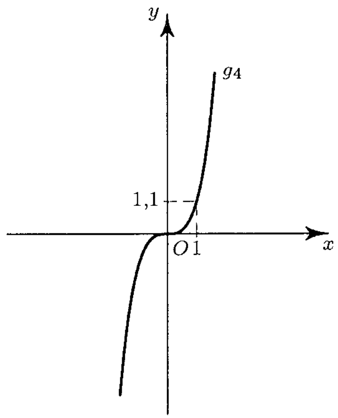
K řešení úlohy 52

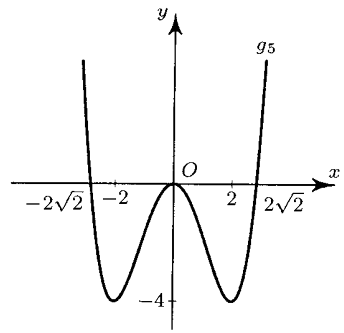
53

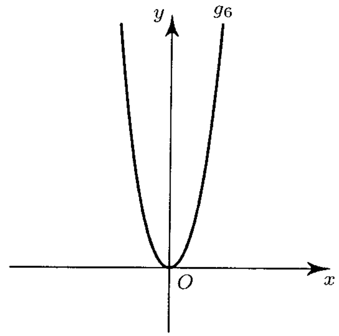






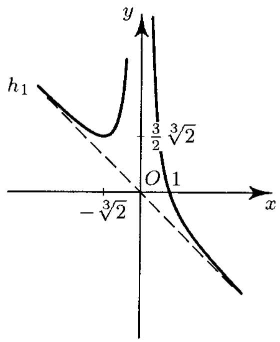


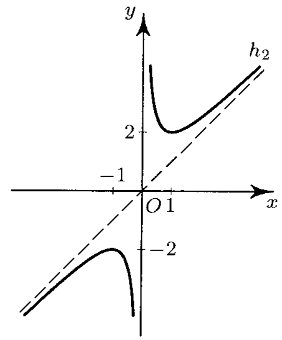


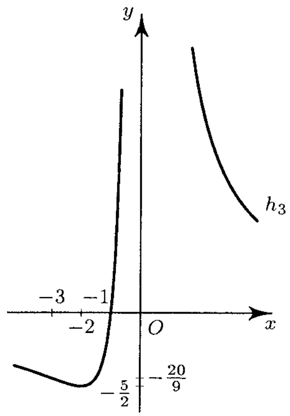


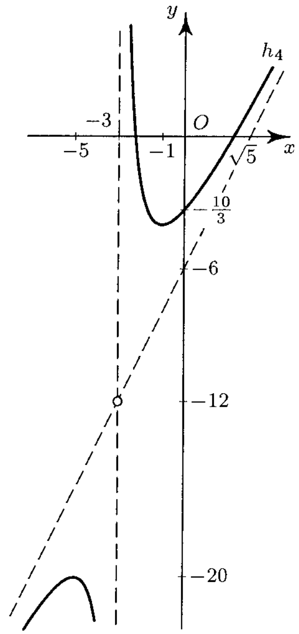
K řešení úlohy 53

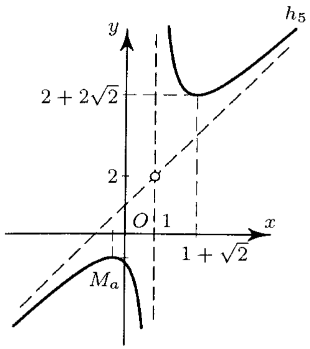
54



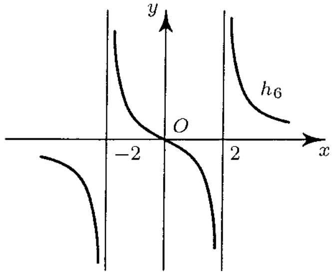


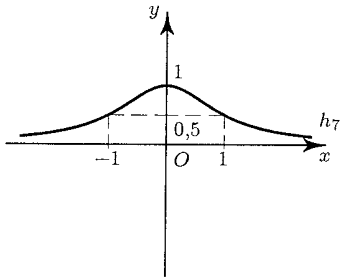


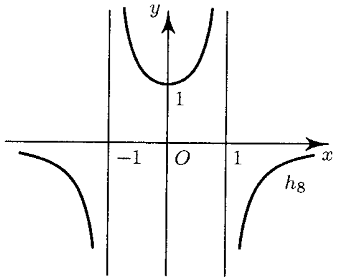


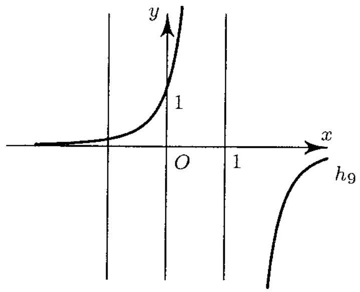


$M_a[1-\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2}]$



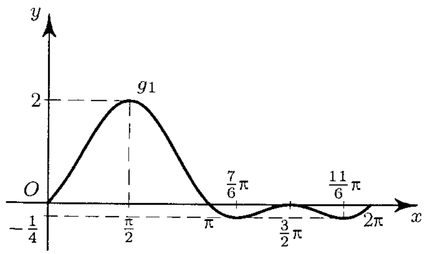


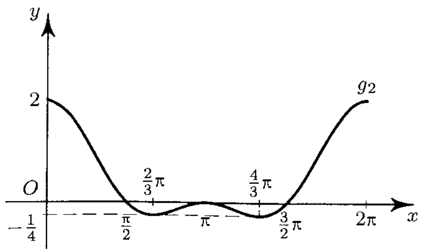


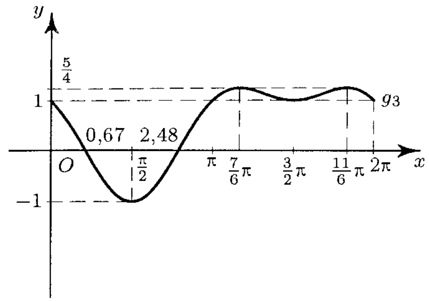


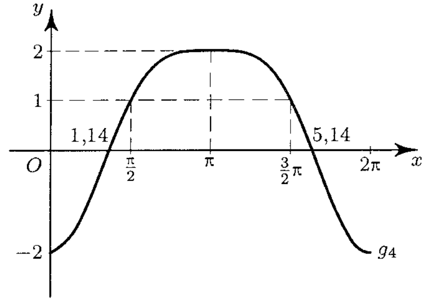
K řešení úlohy 54

55



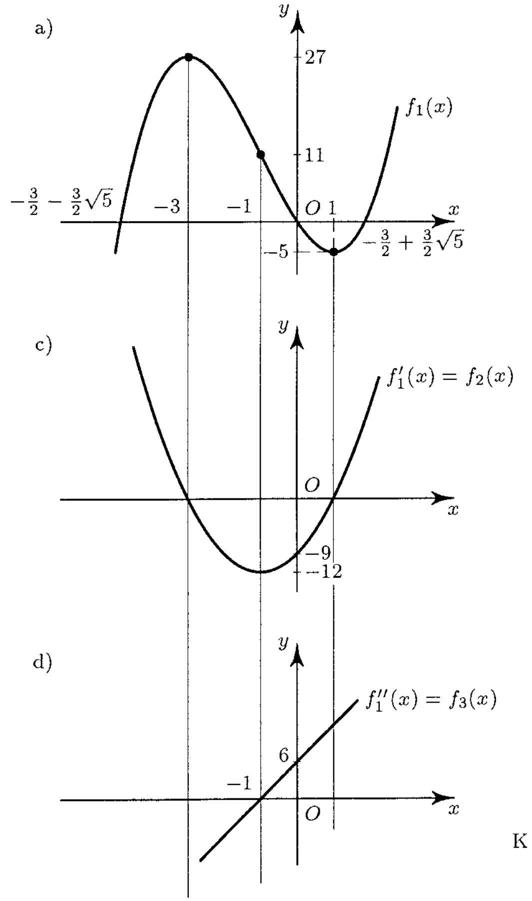






K řešení úlohy 55

56 b) T_1: $y+5=36(x+5)$, T_2: $y=27$, T_3: $y-11=-12(x+1)$, T_4: $y=-9x$, T_5: $y=-5$, T_6: $y-2=15(x-2)$.



K řešení úlohy 56

19.11 Derivace implicitní funkce

57 a) $y-\sqrt{6}=-\frac{\sqrt{6}}{3}(x-2)$, $\varphi \doteq 140°46'$;
b) $y-1=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{2})$, $\varphi \doteq 144°44'$;
c) $y-2=-2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$, $\varphi \doteq 106°06'$;
d) $y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}(x-\sqrt{5})$, $\varphi \doteq 48°11'$;
e) $y-4=0$, $\varphi=0°$;
f) $y+2=-\frac{3}{2}(x-2)$, $\varphi \doteq 123°41'$;
g) $y-1=\frac{3}{2}(x-3)$, $\varphi \doteq 56°19'$;
h) $y+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}(x-1)$, $\varphi \doteq 16°06'$;
i) $y-1=0$, $\varphi=0°$;
j) $x-2=0$, $\varphi=90°$;
k) $y-5=\frac{3}{4}(x+5)$, $\varphi \doteq 36°52'$;
l) $y+1=0$, $\varphi=0°$;
m) $y+1-2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-9)$, $\varphi=30°$;
n) $y-5=\frac{1}{4}(x-8)$, $\varphi \doteq 14°02'$;
o) $y+4=-2(x-1)$, $\varphi \doteq 116°34'$;
p) $y-6=-\frac{3}{4}(x-2)$, $\varphi \doteq 143°08'$;
q) $x-4=0$, $\varphi=90°$;
r) $y+1=-\frac{1}{2}(x+4)$, $\varphi \doteq 153°26'$;
s) $y-3=\frac{2\sqrt{5}}{3}(x-2\sqrt{5})$, $\varphi \doteq 56°09'$;
t) $y-4=\frac{1}{4}(x-9)$, $\varphi \doteq 14°02'$.

58 $T_1[1+\frac{\sqrt{5}}{10}; -\frac{2}{5}\sqrt{5}]$, $T_2[1-\frac{\sqrt{5}}{10}; \frac{2}{5}\sqrt{5}]$. **59** $T[3;-2]$. **60** $\varphi \doteq 12°32'$.

19.12 Derivace funkce a výpočet limity

61 a) 12; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{\sqrt[5]{3}}{15}$; d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) 0; f) -1; g) 1; h) 1; i) 1.
62 a) $\frac{5}{3}$; b) 4; c) 1; d) $\frac{1}{3}$; e) 2; f) $\frac{5}{2}$; g) 0; h) 8; i) 0; j) 1; k) 1; l) 1.

19.13 Slovní úlohy řešené pomocí derivací

63 $x=6\frac{2}{3}$ cm. **64** $x=1$ cm. **65** $r=\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ dm $\doteq 6{,}8$ cm, $v=\sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}$ dm $\doteq 13{,}7$ cm.
66 $r=v=\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$ dm $\doteq 8{,}6$ cm. **67** $r=\sqrt{6}$ cm, $v=2\sqrt{3}$ cm. **68** $r=2\sqrt{2}$ cm, $v=4$ cm.
69 $r_V=4$ cm, $v_V=1$ cm. **70** $r_V=1$ cm, $v_V=4$ cm.
71 $r=3\sqrt{2}$ cm, $v=12$ cm. **72** $a=3\sqrt{2}$ cm, $b=2\sqrt{2}$ cm. **73** $a=b=4$ cm.
74 $a=b=5$ cm. **75** $a=4$ cm, $b=2$ cm. **76** $a=3\sqrt{7}$ cm, $b=\frac{7}{2}$ cm.

Integrální počet

19.14 Primitivní funkce

77 $F'(x)=f(x)$. **78** a) $F_1'(x)=F_2'(x)=\sin 2x$, $F_2(x)-F_1(x)=\frac{5}{2}$; b) $F_1'(x)=F_2'(x)=-2\sin 2x$, $F_2(x)-F_1(x)=5$; c) $F_1'(x)=F_2'(x)=2\cos 2x$, $F_2(x)-F_1(x)=1$; d) $F_1'(x)=F_2'(x)=\frac{1}{2x-4}$, $F_2(x)-F_1(x)=\ln\sqrt{2}-3$. **79** Platí. **80** Platí.

81 a) $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2+c$;
b) $\frac{3}{2}x^2+5x+c$;
c) $-x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-3}+c$;
d) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+c$;
e) $\frac{1}{16}x^4+\frac{2}{x^2}+c$;
f) $\frac{10}{3}x\sqrt{x}+\frac{8}{3}\sqrt[4]{x^3}+c$;
g) $\frac{7}{5}\sqrt{5x}+c$;
h) $\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+c$;
i) $\frac{1}{5}x^5+2x^4+\frac{16}{3}x^3+c$;
j) $x+3x^2+4x^3+2x^4+c$;
k) $\frac{10}{7}x^3\cdot\sqrt{x}+c$;
l) $\frac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x}+c$;
m) $\frac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x}+5x+c$;
n) $-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-\frac{2}{x}+c$;
o) $\frac{6}{7}x^2\cdot\sqrt[3]{x}-\frac{6}{11}x\cdot\sqrt[6]{x^5}+c$;
p) $\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3-3x+c$;
q) $\frac{1}{2}x^2-x+c$;
r) $\frac{1}{2}x^2-2x+c$;
s) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{3x\sqrt{x}}+c$;
t) $\frac{4}{7}x\cdot\sqrt[4]{x^3}-\frac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x}+c$;
u) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+c$.

82 a) $4x+\ln|x|+c$;
b) $\ln|x+1|+c$;
c) $\frac{1}{5}\ln|x+5|+c$;
d) $\frac{1}{2}\ln|x+\frac{1}{2}|+c$;
e) $-\frac{5}{3}\ln|3x-1|+c$;
f) $\frac{1}{2}x^2+3\ln|x|+c$;
g) $x-4\sqrt{x}+\ln|x|+c$;
h) $6\cdot\sqrt[3]{x}+3\ln|x|+c$;
i) $\frac{1}{2}x^2+3x+3\ln|x|-\frac{1}{x}+c$.

83 a) $\frac{1}{2}x^2-2x+c$;
b) $\frac{1}{3}x^3-x+c$;
c) $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+c$;
d) $\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+c$;
e) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+c$;
f) $\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+c$;
g) $\frac{1}{2}x^2-2x+c$;
h) $\frac{1}{2}x^2+2x+c$;
i) $\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x^2}+c$.

84 a) $\frac{1}{2}x^2+3x+\ln|x+2|+c$;
b) $\frac{1}{2}x^2+3x+3\ln|x-1|+c$;
c) $\frac{1}{3}x^3+2x^2-2x-4\ln|x-2|+c$;
d) $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x-4\ln|x+1|+c$
e) $\frac{1}{3}x^3-x^2+4x-8\ln|x+2|+c$;
f) $x^2-x-\ln|x+\frac{1}{2}|+c$.

85 a) $-\cos x-2\sin x+c$;
b) $-\frac{\cos 2x}{2}+c$;
c) $\frac{1}{4}\sin 4x+c$;
d) $-\frac{1}{2}\cos 6x+c$;
e) $\frac{1}{3}\sin(3x+1)+c$;
f) $\frac{1}{3}\sin 3x+x+c$;
g) $\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{3}{2}x^2+x+c$;
h) $\sin 3x+x+c$;
i) $-2\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})+c$;
j) $-2\cos\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}x+c$;
k) $-\frac{\pi}{2}\cos\frac{x}{2}+c$;
l) $\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{4}x^2+c$.

86 a) $x+c$;
b) $-\frac{1}{2}\sin 2x+c$;
c) $\operatorname{tg}x-\operatorname{cotg}x+c$;
d) $-2\operatorname{cotg}x-3\operatorname{tg}x+c$;
e) $\operatorname{tg}x-x+c$;
f) $-\operatorname{cotg}x-x+c$;
g) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+c$;
h) $\sin x-\cos x+c$;
i) $x+\cos x+c$;
j) $x+\frac{1}{2}\cos 2x+c$;
k) $-x+c$;
l) $-2\operatorname{cotg}x-x+c$.

87 a) $\frac{1}{2}x-\frac{\sin x}{2}+c$;
b) $\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+c$;
c) $\frac{1}{2}x+\frac{\sin x}{2}+c$;
d) $\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}+c$;
e) $\frac{1}{2}x-\frac{\sin 10x}{20}+c$;
f) $\frac{1}{2}x+\frac{\sin 12x}{24}+c$.

88 a) $\ln|1+x^3|+c$;
b) $\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+c$;
c) $\frac{5}{3}\ln|1+x^3|+c$;
d) $\ln|2+\sin x|+c$;
e) $\ln|1-\cos x|+c$;
f) $\frac{1}{2}\ln|2\sin x-1|+c$;
g) $-\ln|\cos x|+c$;
h) $\ln|\sin x|+c$;
i) $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+c$.

89 a) $\frac{1}{6}(x^2+4)^6+c$;
b) $\frac{3}{14}(x^2-1)^7+c$;
c) $\frac{1}{15}(4+x^3)^5+c$;
d) $-\frac{1}{24}(1+4x^3)^{-2}+c$;
e) $\frac{1}{6}(2x^2-1)^{\frac{3}{2}}+c$;
f) $\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{(x^3-2)^4}+c$;
g) $\frac{1}{6}\sqrt{(2x^2-8)^3}+c$;
h) $\frac{1}{3}\sqrt{(5+2x)^3}+c$;
i) $2\sqrt{x^2+3}+c$;
j) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{(x^3+10)^2}+c$;
k) $\frac{1}{3}(\sin x+7)^3+c$;
l) $-\frac{2}{3}\sqrt{(\cos x+\frac{\pi}{2})^3}+c$.

90 a) $\sin x-x\cos x+c$;
b) $\cos x+x\sin x+c$;
c) $e^x(x-1)+c$;
d) $x\ln x-x+c$;
e) $\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+c$;
f) $\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+c$;
g) $\frac{1}{2}\sin^2 x+c$;
h) $x^2(\frac{\ln x}{2}-\frac{1}{4})+c$;
i) $2x\sin x-(x^2-2)\cos x+c$;
j) $e^x(x^2-2x+2)+c$;
k) $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)+c$;
l) $\frac{1}{2}\ln^2 x+c$.

91 a) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x+\frac{2}{3}$; b) $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{10}{3}x+1$.

19.15 Určitý integrál

92 a) 6; b) -30; c) $16\frac{2}{3}$; d) 21; e) 1; f) 0; g) $\frac{4}{3}$; h) $\ln\sqrt{2}$; i) $18\frac{2}{3}$; j) $e-\frac{1}{e}$; k) $\ln 2$; l) $\ln\sqrt{5}$. **93** $c=2$. **94** $a=3 \wedge b=1$. **95** $a=2 \wedge b=-3 \wedge c=1$.
96 $a=2 \wedge b=1$. **97** a) $a=1$; b) $a=4$. **98** $a=1 \wedge b=-2$.
99 $(a=-4 \wedge b=-1) \vee (a=1 \wedge b=4)$.

19.16 Obsoh rovinného obrazce

100 a) $\frac{8}{3}$; b) $\frac{10}{3}$; c) $\frac{16}{3}$; d) $\ln 10 \doteq 2{,}30$; e) 2; f) 2; g) $e-2 \doteq 0{,}72$; h) 1.
101 a) $\frac{32}{3}$; b) $\frac{8}{3}$; c) $4\frac{1}{2}$; d) 9. **102** a) 16; b) π. **103** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{32}{3}$; c) $4\frac{1}{2}$; d) $4\frac{1}{2}$; e) $\frac{32}{3}$; f) $\frac{8}{3}$; g) 4; h) 0; i) $\frac{1}{3}$; j) $\frac{4}{3}$; k) $\frac{3}{2}-\ln 4 \doteq 0{,}11$; l) $\frac{4}{3}$.
104 a) $2\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}-\frac{1}{3}\pi \doteq 0{,}68$; c) 8; d) 0. **105** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{128}{15}$. **106** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$. **107** a) $\frac{1}{2}$; b) $\ln 4 \doteq 1{,}39$; c) 4. **108** $\frac{8}{3}\sqrt{2}$. **109** 2.
110 a) $\frac{32}{3}$; b) $\frac{\pi^2}{8}-1 \doteq 0{,}23$. **111** a) $\frac{16}{3}$; b) $\frac{16}{3}$; c) $\frac{16}{3}$. **112** a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{9}{4}$.
113 $a=12$. **114** $a=\pm\frac{1}{12}$. **115** $b=\pm 6$. **116** $a=-\frac{1}{9} \wedge b=4$.
117 $y=\pm\frac{4}{3}(x^2-6x)$. **118** $y=-\frac{3}{2}x^2+6x$. **119** $y=\frac{4}{9}x^2-4$. **120** $a=\pm 10$.
121 $y=2\sin x+1$. **122** $a=b=3$. **123** $b=\frac{\pi}{2}$. **124** $b=\frac{\pi}{4}$.
125 $a=e^{-5} \doteq 0{,}007$. **126** $m=\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{18} \doteq 1{,}747$. **127** $k=\frac{\pi}{3}$.

19.17 Objem rotačního tělesa

128 a) $\frac{8}{3}\pi$; b) $\frac{7}{3}\pi$; c) $\frac{7}{3}\pi$; d) $\frac{32}{5}\pi$; e) $\frac{412}{15}\pi$; f) $\frac{16}{15}\pi$; g) 18π; h) 2π; i) π; j) $\frac{9}{5}\pi$; k) $\frac{1}{2}\pi^2$; l) $\frac{9}{2}\pi^2$. **129** a) $\frac{32}{3}\pi$; b) $\frac{4}{3}\pi$; c) $\frac{8}{3}\pi$; d) $\frac{16}{3}\pi$. **130** a) $\frac{5}{3}\pi$; b) $\frac{41}{24}\pi$; c) $\frac{472}{3}\pi$; d) $\frac{43}{30}\pi$; e) 2π; f) 8π; g) $\frac{4}{3}\pi$; h) $\frac{28}{3}\pi$. **131** $\frac{4}{3}\pi r^3$. **132** $\pi r^2 v$.

133 $\frac{1}{3}\pi r^2 v$. **134** $\frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$. **135** a) $\frac{4}{3}\pi b^2 a$; b) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. **136** a) $\frac{384}{5}\pi$; b) 12π. **137** $k = \pm 3$. **138** $p = \frac{5}{2\pi}$. **139** $p = \frac{3}{2}$. **140** $(\frac{16}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2})\pi$.

20 Pravděpodobnost a statistika

20.1 Definice pravděpodobnosti, vlastnosti pravděpodobnosti, binomické rozdělení

1 a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$. **2** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{5}{6}$; d) 0. **3** a) $\frac{1}{36}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{1}{9}$; e) $\frac{1}{6}$.

4 a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{5}{36}$; d) $\frac{1}{12}$. **5** a) $\frac{5}{18}$; b) $\frac{11}{36}$; c) $\frac{35}{36}$; d) $\frac{25}{36}$. **6** a) $\frac{25}{72}$; b) $\frac{125}{216}$; c) $\frac{25}{27}$; d) $\frac{91}{216}$. **7** Pravděpodobnost výhry obou hráčů je stejná $p = \frac{27}{216}$. **8** $\frac{1}{24}$.

9 $\frac{7}{8}$. **10** a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{3}{4}$. **11** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$. **12** $\frac{3}{8}$. **13** Alespoň 4×. **14** Alespoň 8×.

15 Alespoň 58×. **16** Alespoň 25×. **17** Alespoň 10×. **18** 0,161. **19** 0,013.

20 0,225. **21** a) 0,0006; b) 0,9999. **22** 0,0022. **23** Pravděpodobnější je, že při 4 hodech padne právě jedna šestka (0,386 > 0,182). **24** 0,083. **25** 0,618. **26** 0,003.

27 0,247. **28** 0,959. **29** a) 0,333; b) 0,242; c) 0,091; d) 0,576. **30** a) 0,066; b) 0,505; c) 0,286; d) 0,220. **31** a) 0,920; b) 0,080; c) 0,846; d) 0,999.

32 a) 0,992; b) 0,896; c) alespoň 3×. **33** a) 0,08; b) 0,44; c) 0,48; d) 1. **34** 0,950.

35 a) 0,723; b) 0,978; c) 0,958. **36** 0,779. **37** 0,99 (0,999). **38** a) 0,5; b) 0,2.

39 a) 0,297; b) 0,051; c) 0,352; d) 0,100. **40** a) 0,678; b) 0,978. **41** a) 0,16; b) 0,12; c) 0,04; d) 0,24. **42** a) 0,167; b) 1; c) 1. **43** 0,5. **44** 0,167.

45 a) 0,375; b) 0,375; c) 0,125; d) 0,125; e) 1. **46** a) $2{,}259 \cdot 10^{-10}$; b) 1; c) 0,999 6.

47 a) 0,625; b) 0,625. **48** 0,475. **49** 0,398. **50** a) 0,052 6; b) 0,394 7; c) 0,552 6; d) 1.

51 a) 0,708; b) 0,183. **52** a) 0,140; b) 0,154; c) 0,462.

53 a) $\forall n \in \mathsf{N}$: $\binom{n}{2} : \binom{2n}{2} < \frac{1}{4}$; b) $\forall n \in \mathsf{N}$: $n^2 : \binom{2n}{2} > \frac{1}{2}$. **54** a) 0,017; b) 0,154; c) 0,846. **55** a) 0,010; b) 0,049. **56** a) 0,002; b) 0,118; c) 0,882.

57 a) 0,000 2; b) 0,170. **58** 0,008. **59** 0,106. **60** a) 0,137; b) 0,363; c) 0,863; d) 0,886. **61** 0,137. **62** 0,003 5. **63** 0,677. **64** 0,999. **65** a) 0,271; b) 0,788.

Statistika

20.2 Aritmetický průměr, modus, medián, směrodatná odchylka, variační koeficient

66 a) $\overline{v} = 170\frac{2}{3}$ cm, modus: 167 cm, medián: 172 cm. **67** $\overline{v} = 85{,}7\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

68 $\overline{x} = 2{,}6$, modus: 2, medián: 2,5. **69** $\overline{x} = 249{,}7$ g, $s_x = 1{,}55$ g, $v_x = 0{,}62\,\%$.

70 $\overline{x} \doteq 7\,500$ Kč, modus: 5 000 Kč, medián: 7 000 Kč, $s_x = 3\,900$ Kč.

Výsledky zkoušek z matematiky na některých VŠ

UNIVERZITA KARLOVA v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

Varianta A

1 $x \in (-4; -2) \cup (0; 2)$.

2 Pro k sudé je $s_n = \frac{1}{4}(k - 62)(k + 64)$; pro k liché je $s_n = \frac{1}{4}(k - 63)(k + 63)$.

3 $r_{1,2} = 15 \pm \frac{15}{2}\sqrt{2}$, $r_{3,4} = \frac{15}{2}\sqrt{2}$.

4 $\triangle ABC$ doplňte na rovnoběžník ABA_1C, bodem A_1 veďte rovnoběžku s CP, její průsečík s přímkou AB označte P_1. Potom $\triangle APQ \sim \triangle AP_1A_1$. Poměr podobnosti je $\frac{5}{2} \Rightarrow S_{\triangle APQ} : S_{\triangle ABC} = \frac{4}{15}$.

Varianta B

1

$p \in (-\infty; -1)$	$p = -1$	$p \in (-1; \infty) - \{0; 1\}$	$p = 1$
$x \in \emptyset$	$x = 0$	$x = \pm\frac{p+1}{2}$	$x \in \mathsf{R}$

2 4 168 332.

3 Úloha má 2 řešení. $p_1 = 6$, $T_1[2; -1]$; $p_2 = -2$, $T_2[-2; 7]$.

4 $V_{\text{kužel}} : V_{\text{koule}} = n$.

Varianta C

1 $x \in \{\frac{1}{10}; \sqrt{10}; 100\}$. **2** k neexistuje, $m = 9$.

3 $(x - 10)^2 + (y - 7{,}5)^2 = 12{,}5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 20x - 15y = 0$.

4 $V_{\text{čtyřstěn}} : V_{\text{koule}} = \frac{2\sqrt{3}}{9\pi}$.

Varianta D

1 $x \in (-\infty; -2) \cup \langle 0; 1) \cup (1; \infty)$. **2** $a_n = 4n - 3$, $s_n = n(2n - 1)$.

3 Hledaný $S \in p \Rightarrow S[2y_S - 4; y_S]$. Pro r hledané kružnice platí: $r = y_S + 2 \wedge r = |SS_0| + 1$, kde $S_0[0; 1]$. Úloha má 2 řešení: $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 36$, $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

4 $V_{\text{čtyřstěn}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

ČVUT v Praze

Fakulta architektury

1 $x \in (1; \frac{9}{5}) \cup (2; \infty)$. **2** Po úpravě dostaneme $35 - x^2 = (5 - x)^3$. Vidíme, že jeden kořen rovnice bude číslo 6. Umocníme $\Rightarrow x^3 - 16x^2 + 75x - 90 = 0$. Mnohočlen na levé straně vydělíme závorkou $(x - 6)$, potom $x^2 - 10x + 15 = 0$. Podmínku $x \in (-\sqrt{35}; 5) - \{4\}$ splňuje jen $x = 5 - \sqrt{10}$. **3** $x \in \bigcup_{k \in \mathsf{Z}} \{\pi + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\}$.

4 Délka tětivy je $4\sqrt{2}$.

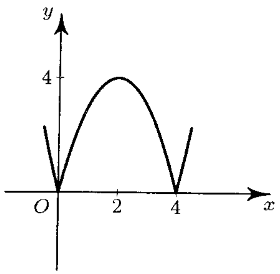
5 Stejnolehlost. Sestrojíme pomocnou polokružnici se středem na přímce p dotýkající se přímky q. Průsečíky polokružnice s přímkou AV, kde $V \in p \cap q$ označíme M_1, M_2. Bodem A vedeme rovnoběžky s AM_1, AM_2, jejich průsečíky s přímkou p jsou hledané body B. Úloha má 2 řešení.

Fakulta stavební

1 $x = 6$. **2** $x \in (0; \frac{3}{4}\pi) \cup (\pi; \frac{7}{4}\pi)$.

3 Úloha má dvě řešení: $k = 5$, potom $a_1 = -3 \wedge d = 2$; $k = 1$, potom $a_1 = 5 \wedge d = -6$.

4 $P_1[0; 0]$, $P_2[4; 0]$.



K řešení úlohy 4

5 $(x-1)^2+(y+1)^2=4 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+2y-2=0$.

6 Sestrojíme $\triangle BCS$, $|BC|=8$, $|BS|=|CS|=5$. Potom $A \in k_1(S;5) \cap k_2(S_1;6)$, kde S_1 je střed BC. Úloha má dvě řešení.

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Varianta A

1 $p \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{65}}{4}\rangle \cup \langle \frac{1+\sqrt{65}}{4}; \infty)$.

2 Úloha má 2 řešení. Pro $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ je $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{10}$, pro $\alpha \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$ je $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{10}$.

3 $x \in (1; \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\rangle$.

4 Úloha má dvě řešení: $q=2 \wedge a_1=-1 \Rightarrow s_5=-31$; $q=-2 \wedge a_1=3 \Rightarrow s_5=33$.

5 Body X leží uvnitř úsečky X_1X_2, kde $X_1[\frac{1}{2};0]$, $X_2[3;0]$.

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA v Plzni

Fakulta elektrotechnická

1 1; $a \neq b$, $a \neq 0$. **2** $x=1$. **3** $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} y$, $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$; $y \neq k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$.

4 Úloha má dvě řešení. Trojice jsou: 17, 10, 3 nebo 8, 10, 12. **5** $C[-3;8]$.

6 Umístíme úhel $\sphericalangle XAY$, $|\sphericalangle XAY| = \alpha = 60°$. S polopřímkou AY vedeme rovnoběžku p ve vzdálenosti $v_b = 9$. Potom $B \in p \cap \mapsto AX$. Průsečík rovnoběžek s rameny úhlu α ve vzdálenosti $\varrho = 2{,}5$ je střed O kružnice vepsané. Z bodu B vedeme tečnu t ke $k(O; \varrho = 2{,}5)$. $C \in t \cap \mapsto AY$. Úloha má 1 řešení.

Fakulta strojní

1 $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. **2** $a=\frac{1}{4}$. **3** $x \in \langle \frac{2}{3}\pi+2k\pi; \pi+2k\pi) \cup (\pi+2k\pi; \frac{4}{3}\pi+2k\pi\rangle$, $k \in \mathrm{Z}$.

4 $4\,096+4\,096\mathrm{i}$. **5** $(x-5)^2+(y+1)^2=25 \Leftrightarrow x^2+y^2-10x+2y+1=0$. **6** $\frac{n+1}{4}$.

Fakulta ekonomická v Chebu

1 $x \in \langle \frac{1}{2}; \infty)$. **2** $z=1-7\mathrm{i}$. **3** $1+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\frac{64}{125}+\dots$ **4** Pata výšky $C_1[1;5]$.

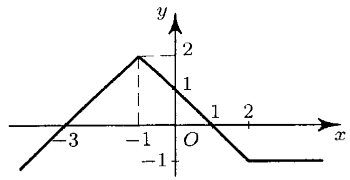
5 $x \in \bigcup_{k \in \mathrm{Z}} \{\frac{7}{12}\pi+k\pi; \frac{5}{6}\pi+k\pi\}$.

TECHNICKÁ UNIVERZITA v Liberci

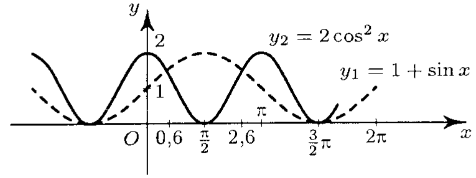
Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

1 $\frac{\sqrt{x}}{x}$, $x>0$, $x \neq 1$. **2** $x \in (-\infty;-1) \cup \langle 2; \frac{11}{5})$. **3** $2x-y+4=0$.

4 Průsečíky: $P_1[0;1]$, $P_2[1;0]$, $P_3[-3;0]$.



K řešení úlohy 4



K řešení úlohy 5

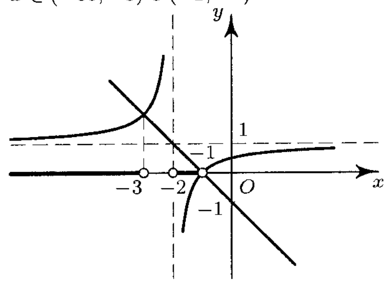
5 V intervalu $\langle 0;2\pi)$ jsou 3 řešení: $x_1 \doteq 0{,}6$, $x_2 \doteq 2{,}6$, $x_3 \doteq 4{,}7$. V R nekonečně mnoho řešení: $x \in \bigcup_{k \in \mathrm{Z}} \{x_1+2k\pi; x_2+2k\pi; x_3+2k\pi\}$. Pozn. zkoušku lze provést řešením rovnice. Potom $x \in \bigcup_{k \in \mathrm{Z}} \{\frac{\pi}{6}+2k\pi; \frac{5}{6}\pi+2k\pi; \frac{3}{2}\pi+2k\pi\}$.

Fakulta pedagogická

1 $-\frac{x^2}{y}$, $x \neq \pm y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

2 Roční záloha byla 5 418 Kč. Prosincová záloha byla o 26,5 % vyšší než lednová.

3 $x \in (-\infty;-3) \cup (-2;-1)$.



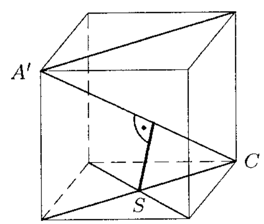
K řešení úlohy 3

4 $x \in \{0;1\}$. **5** t_a: $4x-9y+4=0$.

JIHOČESKÁ UNIVERZITA — České Budějovice

Fakulta pedagogická

1 $v = \frac{\sqrt{6}}{6}$ dm.



K řešení úlohy 1

2 $q=\frac{1}{2}$.

3 Odmocninu osamostatníme, umocníme. Umocňování není ekvivalentní úprava, proto musíme nakonec provést zkoušku. $x \in \bigcup_{k \in \mathrm{Z}} \{\frac{5}{6}\pi+2k\pi\}$. **4** $A[2;7]$, $C[4;2]$.

5 $\mathrm{D} = (-\infty;-1\rangle \cup (2;\infty)$.

SLEZSKÁ UNIVERZITA v Opavě

Filozoficko-přírodovědecká fakulta

1 $\binom{100}{2} < 100^2 < 2^{100} < 100!$. **2** $x \in (-5; 2)$. **3** 2 500 čísel, sudých 1 500.

4 Úloha má dvě řešení: $\alpha_1 = 15° \wedge \beta_1 = 75°$, $\alpha_2 = 75° \wedge \beta_2 = 15°$.

5 $\triangle ABC$ je pravoúhlý s přeponou BC. **6** Výška je $\frac{1}{2}o$. **7** $x = 10$.

8 $x \in \{\frac{1}{10}; \sqrt{10}\}$. **9** n je číslo složené nebo $n = 1$.

MASARYKOVA UNIVERZITA v Brně

Fakulta informatiky

1 D. **2** C. **3** C. **4** E. **5** D. **6** C. **7** E. **8** C. **9** D. **10** D. **11** E. **12** A. **13** E. **14** D. **15** A. **16** B. **17** A. **18** E. **19** E. **20** C.

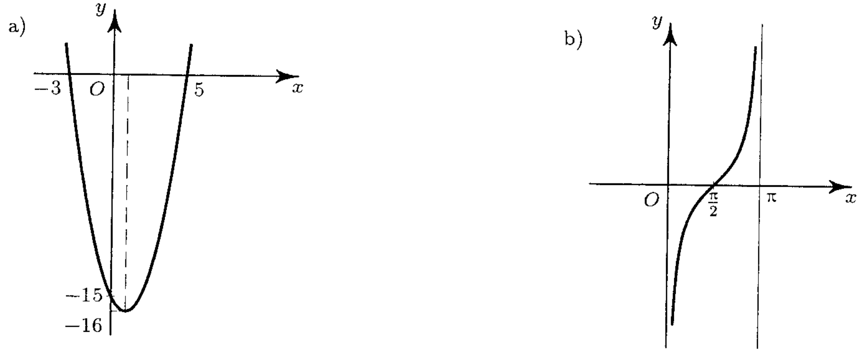
Fakulta přírodovědecká

1 Pro $a > 0 \wedge a \neq 1$ je $x \in \{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}; a^2\}$, pro $a = 1 \vee a \leqq 0$ úloha nemá v R řešení.

2 $a_5 = 7$. **3** $x \in \bigcup_{k \in Z} \{\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi\}$.

4 Tečny jsou: $t_{1,2}$: $y = -\frac{5}{6}x + 5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{61}$, t_3: $x = 3$, t_4: $y = \frac{11}{60}x + \frac{39}{20}$. **5** $x = -1$.

6



K řešení úlohy 6

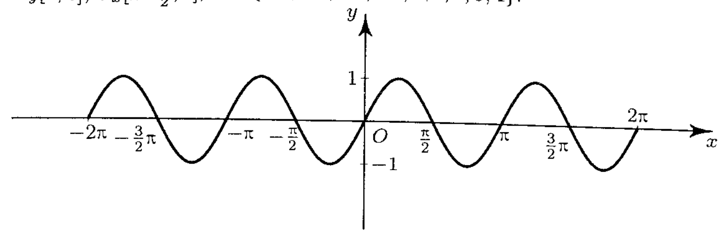
7 $r = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$, $V = 256\pi\sqrt{3}\,\text{cm}^3$. **8** $x \in \bigcup_{k \in Z} \{k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\}$.

MENDELOVA ZEMĚDĚLSKÁ A LESNICKÁ UNIVERZITA v Brně

Fakulta provozně ekonomická, dřevařská, lesnická

1 $-1\,024 - 1\,024\text{i}$. **2** $x \in (-\infty; \frac{8}{3}\rangle \cup (5; \infty)$.

3 $P_y[0; 0]$, $P_x[k \cdot \frac{\pi}{2}; 0]$, $k \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.



K řešení úlohy 3

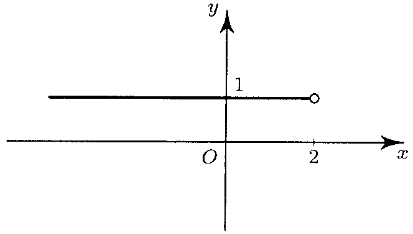
4 $\frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$, $y \neq 0$. **5** $S = \pi v^2$. **6** $x \in \{2; 4\}$. **7** 48; 72; 108; 162.

Vysoké učení technické v Brně

Fakulta technologická ve Zlíně

1 Objem se zvětší o 29,6 %.

2 $D = (-\infty; 2)$.



K řešení úlohy 2

3 $x = -8$. **4** $x \in \langle\frac{1}{500}; 200\rangle$. **5** $(x-17)^2 + (y-17)^2 = 289$, $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

6 $x = -\frac{3}{2}$. **7** 40, 30, 20, 10, 0. **8** $x \in \bigcup_{k \in Z} \{\frac{2}{3}\pi + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi\}$.

Vysoká škola báňská — Technická univerzita Ostrava

Fakulta hornicko-geologická, metalurgie a materiálového inženýrství, stavební

1 $d^{-1} \cdot b^{-\frac{11}{3}}$, $a, b, c, d > 0$. **2** $x = 2$. **3** $x \in \{-8; 2\}$.

4 $a_1 = 2 \wedge d = 3 \Rightarrow 2, 5, 8, 11, 14, 17$. **5** $\bigcup_{k \in Z} \{-7°30' + k \cdot 90°; 22°30' + k \cdot 90°; 37°30' + k \cdot 90°; 67°30' + k \cdot 90°\} = \bigcup_{k \in Z} \{22°30' + k \cdot 45°; 37°30' + k \cdot 45°\}$.

6 $x - 2y - 8 = 0$.

Fakulta elektrotechniky a informatiky

1 b). **2** c). **3** a). **4** c). **5** $\alpha \in \bigcup_{k \in Z} \{k\pi;\ \frac{2}{3}\pi + 2k\pi : \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\}$.

6 p: $2x - 3y - 8 = 0$, $P[\frac{19}{13}; -\frac{22}{13}]$. **7** $y \in (-\infty; 6)$. **8** $n = 4$.

Použité matematické symboly a značky

N	množina všech přirozených čísel
Z	množina všech celých čísel
R	množina všech reálných čísel
R_0^+	množina všech nezáporných reálných čísel
R^+	množina všech kladných reálných čísel
R^-	množina všech záporných reálných čísel
C	množina všech komplexních čísel
$a \in \mathsf{A}$, $a \notin \mathsf{A}$	a je prvkem množiny A, a není prvkem množiny A
$\mathsf{A} = \{a, b, c\}$	množina A je dána výčtem prvků
$\{x \in \mathsf{A};\ V(x)\}$	množina všech prvků množiny A, které mají vlastnost $V(x)$
$\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$	množina A je podmnožinou množiny B
$\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$	průnik množin A, B, sjednocení množin A, B
$\bigcup\limits_{k \in \mathsf{Z}} \mathsf{A}_k$	sjednocení všech množin A_k, kde $k \in \mathsf{Z}$
$\mathsf{A} - \mathsf{B}$	rozdíl množin A, B
$\emptyset$	prázdná množina
$\neg p$	negace výroku p
$p \wedge q$, $p \vee q$	konjunkce, p a zároveň q, disjunkce, p nebo q
$p \Rightarrow q$	p implikuje q, z p plyne q
$p \Leftrightarrow q$	p je ekvivalentní s q, p právě když q
$\forall x \in \mathsf{R}$:	pro každé x z množiny R platí
$\exists x \in \mathsf{R}$:	existuje x z množiny R, pro které platí
e, π	Eulerovo číslo e = 2,718 28 . . ., Ludolfovo číslo π = 3,141 59 . . .
i	imaginární jednotka
$\lvert a \rvert$	absolutní hodnota čísla a
a^n, $\sqrt[n]{a}$	n-tá mocnina čísla a, n-tá odmocnina z čísla a
$a \mid b$	číslo a dělí číslo b
$y = f(x)$, $x \in \mathsf{M}$ resp. $f\colon y = f(x)$, $x \in \mathsf{M}$	funkce, jejímž definičním oborem je množina M
$f(x)$	hodnota funkce f v bodě x
$\mathsf{D}(f)$, $\mathsf{H}(f)$	definiční obor funkce, obor hodnot funkce
f^{-1}	funkce inverzní k funkci f
$g \circ f$ resp. $y = g(f(x))$	funkce složená z funkcí f, g
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	limita funkce f v bodě a
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$	limita funkce f v bodě a zprava
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$	limita funkce f v bodě a zleva
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$	limita funkce f v nevlastním bodě ∞
f'	derivace funkce f
$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$	primitivní funkce k funkci f
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	určitý integrál funkce f od a do b
$(a_n)_{n=1}^{\infty}$	nekonečná posloupnost
a_n	n-tý člen posloupnosti
s_n	součet prvních n členů posloupnosti

d	diference aritmetické posloupnosti
q	kvocient geometrické posloupnosti
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	nekonečná řada
$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \ldots$	vektory
$X[x;y]$	bod X o souřadnicích x, y
$\boldsymbol{v} = (x;y)$	vektor $\boldsymbol{v}$ má souřadnice x, y
$\lvert\boldsymbol{v}\rvert$	velikost vektoru $\boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$	skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$	vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$
$p = \{[a_1 + s_1t; a_2 + s_2t],\ t \in \mathrm{R}\}$	zápis přímky dané parametrickými rovnicemi $x = a_1 + s_1t,\ y = a_2 + s_2t,\ t \in \mathrm{R}$
$n!$	n-faktoriál
$\binom{n}{k}$	kombinační číslo n nad k
$V(k,n)$	počet k-členných variací bez opakování z n prvků
$P(n)$	počet permutací bez opakování z n prvků
$K(k,n)$	počet k-členných kombinací bez opakování z n prvků
$\leftrightarrow AB$	přímka AB
$\mapsto AB$	polopřímka AB
AB	úsečka AB (úsečka s krajními body A, B)
S_{AB}	střed úsečky AB
$\lvert AB\rvert$	délka úsečky AB
$AB \cong CD$	úsečka AB je shodná s úsečkou CD
$\sphericalangle AVB$	úhel AVB
$\lvert\sphericalangle AVB\rvert$	velikost úhlu AVB
rad	radián
$^\circ, ', ''$	úhlový stupeň, úhlová minuta, úhlová vteřina
$\triangle ABC$	trojúhelník ABC
$\triangle ABC \cong \triangle KLM$	trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem KLM
$\triangle ABC \sim \triangle KLM$	trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku KLM
t_a	těžnice trojúhelníku ABC vedená vrcholem A
v_a	výška trojúhelníku ABC vedená ke straně a
$k(S;r)$	kružnice k se středem S a poloměrem r
$p \parallel q$	přímka p je rovnoběžná s přímkou q
$p \perp q$	přímka p je kolmá k přímce q
$\lvert Ap\rvert$	vzdálenost bodu A od přímky p
$\lvert pq\rvert$	vzdálenost rovnoběžných přímek p, q
$\lvert A\varrho\rvert$	vzdálenost bodu A od roviny ϱ
o, S	obvod rovinného obrazce, obsah rovinného obrazce
S, V	povrch tělesa, objem tělesa
$Z\colon X \to X'$	bod X' je obrazem bodu X v zobrazení Z
$O(o)$	osová souměrnost s osou souměrnosti o
$S(S)$	středová souměrnost se středem souměrnosti S
$R(S,\alpha)$	otočení se středem S a úhlem otočení α
$T(A \mapsto A')$	posunutí určené bodem A a jeho obrazem A'
$H(S,\varkappa)$	stejnolehlost se středem S a koeficientem $\varkappa$

Seznam použité literatury

[1] Antonov N. – Vygotskij M.: *Sbornik zadač po elementarnoj matematike.* Izdatelstvo fyziko-matematičeskoj literatury Moskva 1962.

[2] Benda P. a kol.: *Sbírka maturitních příkladů.* SPN Praha 1983.

[3] Boček L.: *Matematika pro gymnázia — rovnice a nerovnice.* Prometheus Praha 1994.

[4] Bušek I.: *Řešené maturitní úlohy z matematiky.* SPN Praha 1985.

[5] Bušek I. a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií.* SPN Praha 1987.

[6] Bušek I. a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií.* SPN Praha 1991.

[7] Bušek I. – Boček L. – Calda E.: *Matematika pro gymnázia — základní poznatky z matematiky.* Prometheus Praha 1992.

[8] Calda E.: *Matematika pro gymnázia — komplexní čísla.* Prometheus Praha 1994.

[9] Calda E. – Dupač V.: *Matematika pro gymnázia — kombinatorika, pravděpodobnost a statistika.* Prometheus Praha 1993.

[10] Grošek O. – Volauf P.: *Príklady z matematiky na prijímacie pohovory.* SNTL Bratislava 1988.

[11] Hlaváček A.: *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky.* SPN Praha 1965.

[12] Jirásek F. – Kriegelstein E. – Tichý Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky.* SNTL Praha 1990.

[13] Kočandrle M. – Boček L.: *Matematika pro gymnázia — analytická geometrie.* Prometheus Praha 1995.

[14] Kubát J.: *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* SPN Praha 1986.

[15] Kuščenko V.: *Sbornik konkursnych zadač po matematike.* Izd. Sudostrojenije Leningrad 1967.

[16] *Materiály vysokých škol o přijímacích zkouškách z matematiky v roce 1996 a jejich požadavky k přijímacím zkouškám z matematiky.*

[17] Odvárko O. *Matematika pro gymnázia — funkce.* Prometheus Praha 1993.

[18] Odvárko O. *Matematika pro gymnázia — goniometrie.* Prometheus Praha 1994.

[19] Odvárko O. *Matematika pro gymnázia — posloupnosti a řady.* Prometheus Praha 1995.

[20] Parízek B. – Horniaček H. – Galan A. – Kollár D. *Matematické úlohy.* Slovenské pedagogické nakladatelstvo Bratislava 1978.

[21] Pomykalová E. *Matematika pro gymnázia — planimetrie.* Prometheus Praha 1993.

[22] Pomykalová E. *Matematika pro gymnázia — stereometrie.* Prometheus Praha 1995.

[23] Smida J. – Božek M. – Odvárko O. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií.* SPN Praha 1986.

[24] Smida J. – Šedivý J. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií.* SPN Praha 1985.

[25] Vejsada F. – Talafous F. *Sbírka úloh z matematiky pro SVVŠ.* SPN Praha 1969.

Jindra Petáková

MATEMATIKA —
příprava k maturitě
a k přijímacím zkouškám
na vysoké školy

Obálku navrhl Jaroslav Pilař
Roku 2003 vydalo
nakladatelství Prometheus, spol. s r.o.,
Čestmírova 10, 140 00 Praha 4,
tel/fax: 241 740 172,
e-mail: info@prometheus-nakl.cz,
http://www.prometheus-nakl.cz
Edice Učebnice pro střední školy
Odpovědná redaktorka RNDr. Jana Vlášková
Sazbu programy TEX a METAPOST připravil Karel Horák
Vytiskl „B“ PRINT, Žitavského 572, Praha 5 – Zbraslav
Dotisk 1. vydání

97 31 246

ISBN 80-7196-099-3

ISBN 80-7196-099-3
9 788071 960997

PROMETHEUS
9731246