Naším cílem je udat předpis sčítání, který přiřadí součet nejen přirozeným číslům a a 1, nýbrž každé dvojici přirozených čísel a a b. Zápis $a + b$ znamená, že k a přičteme 1 tolikrát, kolikrát to udává b, tedy např.

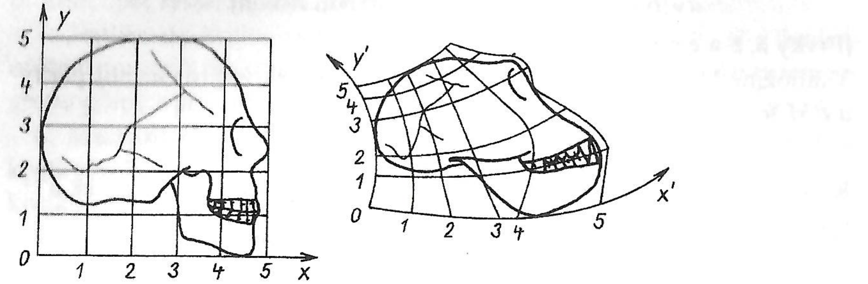
$$a + 2 = (a + 1) + 1\,,$$
$$a + 3 = (a + 2) + 1 = ((a + 1) + 1) + 1 \quad \text{atd.},$$
$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 \quad \text{pro každé přirozené číslo } a \text{ a } b.$$

Co přitom znamená $a + (b + 1)$, resp. $a + b'$, to je jasné právě tehdy, je-li to známo už pro $a + b$. Pomocí úplné indukce lze udat ne právě jednoduchý důkaz toho, že skutečnosti, které známe důvěrně z početní praxe (jako např. to, že $a + b$ je pro všechna přirozená čísla opět přirozené číslo, a to číslo určené jednoznačně), lze čistě logicky odvodit z axiomatického systému a z postupu uvedeného pro sčítání. Všechny další zákony sčítání (např. $a + b = b + a$ atd.) lze taktéž odvodit tímto způsobem, a tak vznikne z axiomatického systému krok po kroku celá aritmetika.

Zdá se, že uvedený systém axiómů má jistou vadu: Všechny prvky nějaké množiny, které uvedeným axiómům vyhovují, se nazývají přirozená čísla. Uvažujme třeba podmnožinu množiny přirozených čísel, která se skládá z přirozených čísel větších než 100 a vykazuje stejný vztah následnictví se 101 jako prvním prvkem; tuto podmnožinu bude třeba opět nazvat množinou přirozených čísel. Geometricky zcela odlišný obraz dává např. množina všech tzv. kmenných zlomků (tj. zlomků tvaru $1/k$), v níž by následníkem prvku $1/n$ bylo číslo $1/(n + 1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (srov. obr. 3.3g). V obou příkladech lze definovat „sčítání, odčítání" atp.

Zde je třeba učinit zásadní poznámku. Přirozená čísla tvoří z historického hlediska systém, k němuž byla axiomatická soustava vytvořena až dodatečně. Proto také spojujeme s tímto systémem axiómů zcela pochopitelně představu, že čísla, která tak dobře známe, popíše jednoznačným způsobem. Matematika však nevyšetřuje objekty, nýbrž vztahy, které mezi nimi existují (H. Poincaré). Systém Peanových axiómů popisuje jistou strukturu, totiž následnictví, a všechny množiny s touto strukturou jsou z hlediska axiomatického systému nerozlišitelné. Odráží to skutečnost, že není rozhodující, čím počítáme (jablky, na prstech, desetinnými čísly, římskými číslicemi atd.), nýbrž jak počítáme. K tomu ještě jeden geometrický příklad: Představme si rovinu pokreslenou geometrickými útvary (body, přímkami apod.), které mají být popsány nějakým blíže neurčeným axiomatickým systémem. Když tuto rovinu (např. gumovou blánu) spojitě roztáhneme, aniž bychom ji přitom roztrhli, zůstávají polohové vztahy mezi geometrickými obrazci zachovány. Pojem přímky už pochopitelně nemá ten názorný význam jako dříve, ale když se dvě přímky protínaly předtím, protínají se nyní i ve zdeformované rovině. Zdeformované útvary jsou k sobě ve stejných vztazích, jako tomu bylo u nedeformovaných. Ačkoliv jsou obě soustavy znázorněny rozdílnými modely, nelze ryze pojmově obě soustavy od sebe

odlišit. Znázorníme-li např. Evropu na mapě pomocí Mercatorovy projekce, zachovávající úhly, nebo pomocí Eckertovy eliptické projekce, zachovávající plochy, bude se tok Labe a jeho přítoků geometricky na obou mapách lišit,



Obr. 3.4 Thompsonovy transformace v biologii

vždy však bude vyjadřovat tutéž geografickou situaci. Pro morfologii, jejímž úkolem je studium příbuzných forem, je deformace forem velmi účinným pomocným prostředkem, který v nedávné době nalezl uplatnění zvláště v embryologii. Obrázek 3.4 ukazuje, že celkem „nepatrná" deformace lidské lebky vede na lebku šimpanze: je jasné, že by bylo třeba deformovat podstatně více, kdybychom chtěli dostat lebku psa.

3.4.2. Axiomatický systém teorie grup

Budeme nyní vyšetřovat systém axiómů, který nebyl – na rozdíl od situace u přirozených čísel – zadán pro již rozvinutou teorii, nýbrž byl postaven do čela teorie, již bylo třeba teprve vytvořit. Matematici pochopitelně už měli jisté zkušenosti s matematickými objekty, o nichž dnes říkáme, že tvoří grupu, a to ještě předtím, než vytvořili systém axiómů pro teorii grup, ale teorie grup sama nebyla ještě rozvinuta.

Uvažujme množinu M libovolných předmětů. Objekty této množiny mohou být např. čísla, otáčení, vektory apod. V tomto okamžiku nás nezajímá, jaké povahy jsou jednotlivé prvky. Pro množinu M nechť existuje jistá operace (vazba, spojení), jíž je každým dvěma prvkům a a b z M přiřazen právě jeden nový prvek c. V oboru čísel jsou takovými operacemi např. elementární početní úkony (sčítání, násobení). Budeme-li se opírat o způsob zápisu násobení, označíme operaci spojení dvou prvků a a b z M symbolem $a \circ b$. Aby množina M tvořila *grupu*, požadujeme od onoho dosud blíže neurčeného spojení, aby splňovalo tyto požadavky (axiómy grupy):

G.1 Spojením libovolných dvou prvků množiny M se nedostaneme mimo množinu M.

G.2 Pro každé tři prvky množiny M platí

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \text{(asociativní zákon)}.$$

(Prvky a, b a c nemusí být navzájem různé.)

G.3 V množině M existuje prvek e (jednotkový prvek) tak, že pro všechny prvky a z M je

$$e \circ a = a .$$

G.4 Ke každému prvku a z množiny M existuje právě jeden inverzní prvek a^{-1} tak, že platí

$$a^{-1} \circ a = e .$$

Uvedeme nyní několik příkladů grupy:

1. Množinou M nechť je množina všech racionálních čísel bez nuly, operací nechť je obvyklé násobení. Je jasné, že axiómy G.1 a G.2 jsou splněny. Jednotkovým prvkem je 1, a tedy platí i G.3. Protože jsme vyloučili nulu, existuje ke každému prvku a inverzní prvek $1/a$. Máme tedy grupu.

2. Reálná čísla bez nuly tvoří vzhledem k operaci násobení opět grupu, která obsahuje grupu z příkladu 1.

3. Množina, skládající se z čísel 1 a -1, tvoří grupu, je-li operací opět násobení. Možná spojení $1 . 1, (-1) . 1, 1 . (-1)$ a $(-1) . (-1)$ nás nevyvedou z množiny M. Axióm G.2 platí pro všechna reálná čísla, tedy i pro 1 a -1. Jednotkovým prvkem je 1 a konečně je vzhledem ke vztahům $1 . 1 = 1$ a $(-1) . (-1) = 1$ každý prvek inverzní sám k sobě!

4. Vedle násobení je pro reálná čísla definováno i sčítání v poněkud nezvyklém označení $a \circ b = a + b$. Sčítání splňuje také všechny axiómy grupy, přičemž nula vystupuje v roli „jednotkového prvku".

5. Zvolíme-li jako množinu prvků množinu všech celých nebo množinu všech racionálních čísel a jako operaci sčítání, dostaneme opět grupy, které jsou obsaženy v grupě z příkladu 4.

Předpis, jímž jsou prvky grupy spojovány, je tedy zobecněním jak operace sčítání, tak i operace násobení. Pojem grupy se však neomezuje jen na číselné množiny.

6. Otáčení O_α kruhové desky okolo jejího středu o úhel α nechť tvoří prvky tzv. grupy rotací. Přitom je $\alpha > 0$, otáčíme-li proti smyslu otáčení hodinových ručiček, a $\alpha < 0$ pro otáčení ve směru hodinových ručiček. Spojení dvou otočení O_α a O_β nechť je otočení o úhel $\alpha + \beta$, symbolicky $O_\alpha \circ O_\beta = O_{\alpha+\beta}$. Je názorně patrné, že spojení tří otočení nezávisí na pořadí, v němž tato otáčení provádíme (axióm G.2). Jednotkovým prvkem je otočení O_0 o úhel 0, které ponechává vše beze změny a které tedy není ve smyslu běžné řeči žádným otáčením. Prvkem inverzním k otočení O_α je otočení $O_{-\alpha}$, tedy otočení, které provedené otočení opět zruší: $O_\alpha \circ O_{-\alpha} = O_0$.

7. Jestliže do kruhu vepíšeme pravidelný n-úhelník ($n \geqq 3$) a budeme-li otáčení provádět tak, aby se vrcholy n-úhelníka opět kryly, pak dostaneme podgrupu grupy z příkladu 6. Tato podgrupa bude mít konečný počet prvků.

8. Mechanicky uskutečnitelné uspořádání 20 pohyblivých částí Rubikovy kostky tvoří prvky Rubikovy grupy. Operacemi jsou otáčení jednotlivých vrstev kostky. (Počet možných uspořádání je dán číslem 43 252 003 274 489 856 000.)

9. Pohyby tělesa v prostoru, které těleso nedeformují, tvoří též grupu.

Na dané množině lze zavést i operace, které nesplňují všechny axiómy grupy:

Uvažujme stejnou množinu jako v příkladu 4 a definujme operaci takto: $a \circ b = a + b^2$. Pak je

$$\begin{aligned}(a \circ b) \circ c &= (a + b^2) \circ c = (a + b^2) + c^2 = a + b^2 + c^2 ,\\ a \circ (b \circ c) &= a + (b \circ c)^2 = a + (b + c^2)^2 = a + b^2 + c^4 + 2bc^2 ,\end{aligned}$$

a tedy je obecně $(a \circ b) \circ c \neq a \circ (b \circ c)$ čili axióm G.2 není splněn.

Cvičení

3.1. Vyhovuje množina kladných sudých čísel systému Peanových axiómů?

3.2. Nechť jsou a, b kladná reálná čísla (tj. $a, b > 0$). Vyhovuje operace spojení, definovaná vzorcem

a) $a \circ b = a . b$,

b) $a \circ b = \log_r a + \log_r b$ (r je reálný základ logaritmu) axiómům grupy?

3.3. Ukažte, že funkce $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$ s operací spojení $g(x) \circ h(x) = g(h(x))$ tvoří grupu.

3.4. Hledejte podgrupy na Rubikově kostce!

3.5. Nová pojetí systému axiómů

Axiomatická metoda si klade za základní cíl právě to, co samotný logický formalismus poskytnout nemůže, totiž průhlednost matematiky až do hloubky.

N. Bourbaki

Matematika vznikla z potřeby mít možnost vyslovit se o chování reálných objektů. Za tímto účelem byly vlastnosti předmětů vyjádřeny ve výrocích (větách), které měly odpovídat získaným zkušenostem. Axiómy tvořící zákla-