Intégration et probabilités

César Almecija
étudiant en première année aux MINES ParisTech
cesar.almecija@mines-paristech.fr

6 février 2021

Avant-propos

Ce document vise à résumer les notions essentielles d'intégration et de probabilités. Son objectif est de retracer les cheminements de pensée qui mènent aux résultats essentiels, afin de mieux les retenir. Ainsi, il pourra être avantageusement utilisé pour se refamiliariser avec ces notions, au cas-où elles auraient été oubliées. Ce travail peut également servir de préambule à une étude plus approfondie du sujet, pour découvrir les fondements de ce domaine des mathématiques.

Néanmoins, ce document ne saurait se substituer à un ouvrage de référence. En effet, par soucis de clarté et de concision, il ne détaille pas toutes les démonstrations. Celles-ci sont néanmoins nécessaires pour saisir l'entièreté des résultats énoncés ici. De cette manière, **il faut le lire comme un aide-mémoire ou un résumé, et non comme un cours**.

Ce travail se partage en trois grandes parties :

- Une première partie commençant par une introduction à la théorie de la mesure, suivie de la construction rapide de l'intégrale de Lebesgue, et qui finit par s'attarder sur les résultats essentiels d'intégration
- Une deuxième partie qui applique la partie précédente à la théorie des probabilités
- Une troisième partie rapide qui explore la théorie des séries à l'aide des résultats précédents.

Ce document s'est grandement inspiré du cours Calcul Différentiel, Intégral et Stochastique (CDIS) de l'Ecole des MINES ParisTech. L'auteur recommande aux lecteurs intéressés de s'y référer régulièrement.

Première partie

Théorie de la mesure et intégration

Chapitre 1

Introduction à la théorie de la mesure

Pour comprendre cette notion, partons d'un constat évident. On sait mesurer la taille d'un segment : la manière de mesurer cette grandeur est d'utiliser la *longueur*. Par exemple, la longueur du segment $[0, 1]$ vaut 1. Plus généralement, en notant λ l'application qui à un segment $[a, b]$ associe sa longueur $b - a$ pourrait s'appeler dans le langage courant une *mesure*, c'est-à-dire une fonction permettant d'obtenir la mesure (la taille) d'un objet.

Se posent alors les questions suivantes :

- dans $\mathbb{R}$, comment mesurer n'importe-quel ensemble ?
- plus généralement, comment mesurer dans $\mathbb{R}^n$?
- mais est-il possible de *tout* mesurer ? Ou faut-il se restreindre à une catégorie d'ensembles *mesurables* ?

On commencera par répondre à cette dernière question.

1.1 Ensembles mesurables

Il n'est pas possible de tout mesurer ainsi. Il faut introduire une classe d'ensembles, appelée **tribu**, qui va représenter l'ensemble des ensembles **mesurables**.

Une tribu doit cependant garantir certaines propriétés de stabilité par opérations ensemblistes. En effet, si deux ensembles sont mesurables, on aimerait pouvoir donner un sens à la mesure de leur intersection ou de leur union. De même, si un ensemble est mesurable, il est légitime de demander que son complémentaire soit mesurable à son tour. Enfin, demander que l'ensemble vide soit mesurable est raisonnable, et on verra par la suite que la mesure du vide doit valoir 0, conformément à l'intuition.

Ces considérations étant faites, on définit alors une tribu comme suit :

Définiton 1.1.1. Une **tribu** (ou **σ-algèbre**) $\mathcal{A}$ d'un ensemble E est une collection d'ensembles $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ vérifiant les hypothèses suivantes :

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire
3. $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable

Définiton 1.1.2. Un **espace mesurable** $(E, \mathcal{A})$ est un ensemble E muni d'une tribu $\mathcal{A}$.

Définiton 1.1.3. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Un élément $X \in \mathcal{A}$ est dit **$\mathcal{A}$-mesurable**.

Remarque 1.1.1. Si le contexte est clair (*ie* il n'y a qu'une seule tribu), on pourra omettre $\mathcal{A}$ et parler simplement d'ensemble mesurable

Définiton 1.1.4. Soit E un ensemble, et B une collection d'ensembles de E. La **tribu engendrée par** B est la plus petite tribu sur E contenant B. De manière équivalente, c'est l'intersection de toutes les tribus de E contenant B.

Exemple 1.1.1. Soit E un ensemble muni d'une topologie. La **tribu de Borel** est la tribu engendrée par les ouverts de E (ou de manière équivalente, par les fermés de E).

1.2 Définition de la mesure

Abordons désormais la notion de mesure. Un ensemble mesurable doit intuitivement admettre une mesure positive. De plus, si deux ensembles sont disjoints, il est légitime de demander que la mesure de leur union soit la somme des mesures.

Cela nous amène à définir une mesure ainsi :

Définiton 1.2.1. Une **mesure** μ sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Pour une famille au plus dénombrable d'ensembles mesurables $(A_i)_{i \in I}$,

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu\left(A_i\right)$$

Remarque 1.2.1. Cette deuxième propriété porte le nom de **σ-additivité**.

Remarque 1.2.2. Si $\mu(\varnothing) \neq 0$, le lecteur pourra vérifier que la mesure de n'importe-quel ensemble mesurable (*a fortiori* du vide) vaut $+\infty$. On comprend alors pourquoi on impose que la mesure du vide soit nulle : si ce n'était pas le cas, mesurer n'aurait pour ainsi dire aucun intérêt.

Définiton 1.2.2. Un **espace mesuré** $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ muni d'une mesure μ

Exemple 1.2.1. La **mesure de Lebesgue** sur $\mathbb{R}$ est la mesure qui prolonge la notion naturelle de longueur. Elle est habituellement notée λ.

La tribu sur $\mathbb{R}$ permettant d'utiliser cette mesure est la **tribu de Lesbesgue**. Sa construction est trop complexe pour être exposée ici. Néanmoins, le lecteur pourra se souvenir que la tribu de Lebesgue est une complétion de la **tribu de Borel** (présentée dans l'exemple 1.1.1). La notion de complétion de mesure est détaillée dans la remarque 1.2.3.

Cette définition s'adapte immédiatement si l'on se place dans $\mathbb{R}^n$. La mesure de Lebesgue prolonge alors la notion d'aire si $n = 2$, de volume si $n = 3$, etc.

Définiton 1.2.3. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Un ensemble $X \subset E$ est dit **négligeable** si :

$$\exists Y \in \mathcal{A}, \begin{cases} \mu(Y) = 0 \\ X \subset Y \end{cases}$$

Remarque 1.2.3. On remarque qu'un ensemble négligeable n'est pas forcément mesurable. Il est cepedant commode d'imposer qu'un ensemble négligeable soit nécessairement mesurable. Modifier une mesure et la tribu respective pour arriver à ce résultat porte le nom de **complétion d'une mesure**.

Ce processus ne sera pas détaillé ici, mais le lecteur peut néanmois retenir qu'une mesure complétée vérifie l'équivalence suivante : **un ensemble est négligeable ssi il est mesurable, de mesure nulle**

1.3 Fonctions mesurables

Lorsque deux espaces mesurables sont définis, il peut être utile de définir une classe de fonctions qui font bon ménage avec les tribus des espaces mis en jeu.

Définiton 1.3.1. Soit $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une **fonction $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-mesurable** est une fonction $f : E \longrightarrow F$ telle que :

$$\forall Y \in \mathcal{B}, f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$$

Remarque 1.3.1. Cette caractérisation des fonctions mesurables porte le nom de **critère de l'image réciproque**.

Définiton 1.3.2. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une fonction **$\mathcal{A}$-mesurable** est une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall Y \in \mathcal{B}, f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$$

où $\mathcal{B}$ est la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.3.2. De cette manière, dans le cas où une fonction est à valeur dans l'espace mesurable $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu de Lebesgue, on omettra la mention de la tribu de l'espace d'arrivée. Cela permet d'alléger les énoncés, étant donné que, dans l'immense majorité des cas, les fonctions seront effectivement à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu de Lebesgue.

Remarque 1.3.3. Dans le même esprit de simplification, si :

- l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue
- à part la tribu de Lebesgue, il n'y a qu'une autre tribu en jeu

alors on dira simplement qu'une fonction vérifiant la définition 1.3.2 est **mesurable**.

Le résultat suivant peut sembler anodin mais sera important dans la partie concernant les probabilités

Proposition (Composition des fonctions mesurables). *Soit* $(E, \mathcal{A})$, $(F, \mathcal{B})$ *et* $(G, \mathcal{C})$ *trois espaces mesurables. Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une fonction* $\mathcal{A}/\mathcal{B}$*-mesurable et* $g : F \longrightarrow G$ *une fonction* $\mathcal{B}/\mathcal{C}$*-mesurable. Alors* $g \circ f : E \longrightarrow G$ *est une fonction* $\mathcal{A}/\mathcal{C}$*-mesurable*

Table des matières