Exercicio de laboratorio

César A. Galvão - 19/0011572

2022-06-24

Questao 1

```r
tipo <- factor(c("I", "II", "III"))
tempo <- c(19,20,16,
           22,21,15,
           20,33,18,
           18,27,26,
           25,40,17)
dados <- data.frame(tipo, tempo)
```

Determine a forma do modelo e as hipóteses consideradas

A comparação das médias dos grupos, neste caso os tipos de circuito, será realizada mediante análise de variância. O modelo escolhido para tal é o modelo de efeitos, expresso na equação a seguir

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., a; \quad j = 1, 2, ..., n \tag{1}$$

em que μ é a média geral, τ_i é a média ou efeito dos grupos e e_{ij} é o desvio do elemento. Os grupos são indexados por i e os indivíduos de cada grupo indexados por j.

As hipóteses do teste são as seguintes:

$$\begin{cases} H_0 : \tau_1 = ... = \tau_a = 0, & \text{(O efeito de tratamento é nulo)} \\ H_1 : \exists \tau_i \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

que equivale dizer

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = ... = \mu_a \\ H_1 : \exists \mu_i \neq \mu_j,\, i \neq j. \end{cases} \tag{3}$$

Qual a forma da estatística de teste e sua distribuição amostral?

A estatística de teste é calculada mediante a média ponderada entre a soma dos quadrados dos tratamentos e a soma dos quadrados dos resíduos (quadrados médios dos tratamentos e dos resíduos respectivamente). Sob H_0 a estatística de teste tem distribuição $F(a-1, an-a)$. Os graus de liberdade correspondem aos denominadores dos quadrados médios. Especificamente,

$$\frac{\frac{\text{SQTRAT}}{a-1}}{\frac{\text{SQRES}}{an-a}} = \frac{\text{QMTRAT}}{\text{QMRES}} \sim F(a-1, an-a) \tag{4}$$

Construa a tabela de análise de variância e conclua o teste considerando alfa = 0,05

```
tabela <- aov(tempo ~ tipo, dados)

broom::tidy(tabela) %>%
  kbl(align = 'c')%>%
  kable_paper(full_width = T)
```

term	df	sumsq	meansq	statistic	p.value
tipo	2	260.9333	130.46667	4.006141	0.0464845
Residuals	12	390.8000	32.56667	NA	NA

Com base apenas na ANOVA, cujo p-valor é $< 0,05$, há evidências para rejeitar H_0, ou seja, existe pelo menos uma média de grupo diferente das demais.

Quais são as suposições adotadas para a ANOVA? Essas suposições foram satisfeitas para esse experimento?

Para o teste de análise de variâncias, considerando o modelo de efeitos, supõe-se sobre os resíduos, elemento aleatório do lado direito da expressão do modelo:

- independência;
- normalidade;
- homogeneidade de variâncias (homocedasticidade).

Por hipótese, supõe-se que as amostras são independentes. Não há, a priori, como testar independência pois entende-se que isso é derivado do desenho do experimento.

A normalidade da distribuição dos resíduos pode ser testada mediante o teste de Shapiro-Wilk.

```
shapiro.test(tabela$residuals)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  tabela$residuals
## W = 0.9424, p-value = 0.4135
```

O teste assume como hipótese nula a normalidade dos dados amostrais. Com base no p-valor obtido, não há evidências para a rejeição de H_0. Isto é, supõe-se normalidade dos dados.

Quando à homocedasticidade, utiliza-se o teste de Levene. A hipótese nula supõe homogeneidade de variâncias entre as amostras.

```r
#teste de homocedasticidade sobre resíduos
car::leveneTest(tempo ~ tipo, dados)
```

```
## Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
##       Df F value Pr(>F)
## group  2  2.2415 0.1489
##       12
```

De fato, obtém-se p-valor superior a 0.05, sugerindo a não rejeição de H_0.

Faça comparações entre os pares de médias pelo teste de Tukey e apresente os resultados.

Opta-se pelo teste de Tukey para comparações múltiplas de médias. Trata-se de um teste unilateral para comparação de médias entre grupos de tratamento. Sob H_0, ou seja, a igualdade entre as médias comparadas, a estatística de teste segue uma distribuição Tukey, cujos parâmetros são os graus de liberdade do resíduo e o número de comparações:

$$\frac{|\bar{y}_i. - \bar{y}_j.|}{\sqrt{\frac{\text{QMRES}}{n}}} \overset{H_0}{\sim} \text{Tukey}\left(gl.res., n^o comp.\right) \tag{5}$$

```r
TukeyHSD(tabela)
```

```
##   Tukey multiple comparisons of means
##     95% family-wise confidence level
##
## Fit: aov(formula = tempo ~ tipo, data = dados)
##
## $tipo
##         diff       lwr        upr     p adj
## II-I    7.4  -2.22898 17.0289799 0.1425885
## III-I  -2.4 -12.02898  7.2289799 0.7876393
## III-II -9.8 -19.42898 -0.1710201 0.0459970
```

Pelo teste de Tukey, há indícios para rejeição de H_0 apenas quando comparados os grupos II e III, corroborando o resultado da análise de variâncias.

Construa um intervalo de confiança para média do circuito com menores tempos considerando gama = 0,98

```r
dados %>%
  group_by(tipo)%>%
  summarise(media = mean(tempo))%>%
  print()
```

```
## # A tibble: 3 x 2
##   tipo  media
##   <fct> <dbl>
## 1 I      20.8
## 2 II     28.2
## 3 III    18.4
```

O grupo de menor média de tempo é o grupo III, cuja média é de 18,4. Considerando que a comparação da média do grupo à média global é uma análise de resíduos, utiliza-se como variância QMRES, pois $E\left(\text{QMRES}\right) = \sigma^2$. Dessa forma, calcula-se o intervalo de confiança considerando $\gamma = 0,98$:

$$
\begin{aligned}
IC\left(\bar{y}_i.;\gamma\right) &= \bar{y}_i. \pm t_{(an-a;1-\alpha/2)} \cdot \sqrt{\frac{\text{QMRES}}{n}} && (6)\\
&= \bar{y}_3. \pm t_{(15-3;1-0,01)} \cdot \sqrt{\frac{32,56667}{5}} && (7)\\
&= \bar{y}_3. \pm t_{(12;0,99)} \cdot \sqrt{\frac{32,56667}{5}} && (8)\\
IC\left(\bar{y}_3.;0,98\right) &= 18,4 \pm 2,68 \cdot \sqrt{\frac{32,56667}{5}} && (9)\\
&= 18,4 \pm 6,84 && (10)\\
&= [11,55; 25,24] && (11)
\end{aligned}
$$

Exercício de simulação

Faça um experimento de simulação considerando $a = 4$ tratamentos com $n = 4$ repetições e um valor de $\sigma^2 = 25$. Faça $k = 1000$ iterações em que a hipótese nula da ANOVA seja verdadeira e verifique a proporção de casos com pelo menos um erro do tipo I para os testes de comparações múltiplas de médias usando as técnicas de Tukey e Fisher e verificando se existem diferenças entre as técnicas.

São realizadas 1000 iterações considerando 4 tratamentos e 4 repetições independentes cada – portanto amostras de um tamanho total de 16 unidades – advindas de distribuições normais com variância igual a 25. Dessa forma, são satisfeitos os pressupostos da hipótese nula da ANOVA: (1) independência, (2) normalidade e (3) homocedasticidade.

No bloco abaixo, primeiramente é gerado um seed para controlar a geração das 1000 seed únicos seguintes (cuja parte inteira apenas é considerada), usadas na geração das amostras. Assim garante-se a replicabilidade do experimento. Como todas as amostras são geradas aleatoreamente sem qualquer dependência, considera-se que são independentes. Por fim, cada amostra$_k$; $k \in \{1, 2, ..., 1000\}$ de tamanho 16 é gerada com um seed$_k$ correspondente.

```
#seed inicial para gerar as seeds das amostras
set.seed(12)

#seeds para a geracao de amostras nas iteracoes
random <- unique(as.integer(runif(1000, 1, 500000)))

#um vetor que receberá todos os p-valor
resultados <- c()
```

```r
for (k in 1:1000){ #mil iteracoes
  set.seed(random[k]) #seleciona a seed correspondente
  amostra <- data.frame(
    trat = factor(c('I', 'II', 'III', 'IV')),
    medidas = rnorm(16, sd = 5))
  #registra p-valor na tabela
  resultados <- c(resultados,broom::tidy(
    aov(medidas~trat, data = amostra))$p.value[1])
}

erro_tipo1 <- sum(resultados <= 0.05)
```

Observa-se da simulação que em 57 casos houve erro do tipo 1 considerando $\alpha = 0,05$, o que representa 5.7% dos casos.

A seguir, são realizados os testes de comparações múltiplas de médias de Tukey e de Fisher.

Caso os testes de comparação múltipla sejam feitos apenas após o teste da anova ser significativo os resultados do item anteiror são alterados?