Lista 2

Modelos Lineares Generalizados - 2/2023

César Augusto Galvão - 19/0011572

Laiza Mendes - 20/0067028

Table of contents

Questão 1

Considere os dados sobre a qualidade do vinho tinto, apresentados no ficheiro `Q01-data.txt`. Ajuste o modelo de regressão linear múltipla, e faça uma análise completa desses dados. Que conclusões você tira dessa análise? (use 5% de significância durantes as análises).

a) Proponha algum método para resolver o problema da multicolinearidade no conjunto de dados

b) Usando algum método de seleção de variáveis, obtenha o modelo final para o conjunto de dados

c) Apresente a tabela de Análise de Variância para testar a significância global dos coeficientes do modelo final. Apresente as hipóteses de teste e conclua.

d) Com base no modelo obtido no item anterior, faça uma análise de resíduos e conclua.

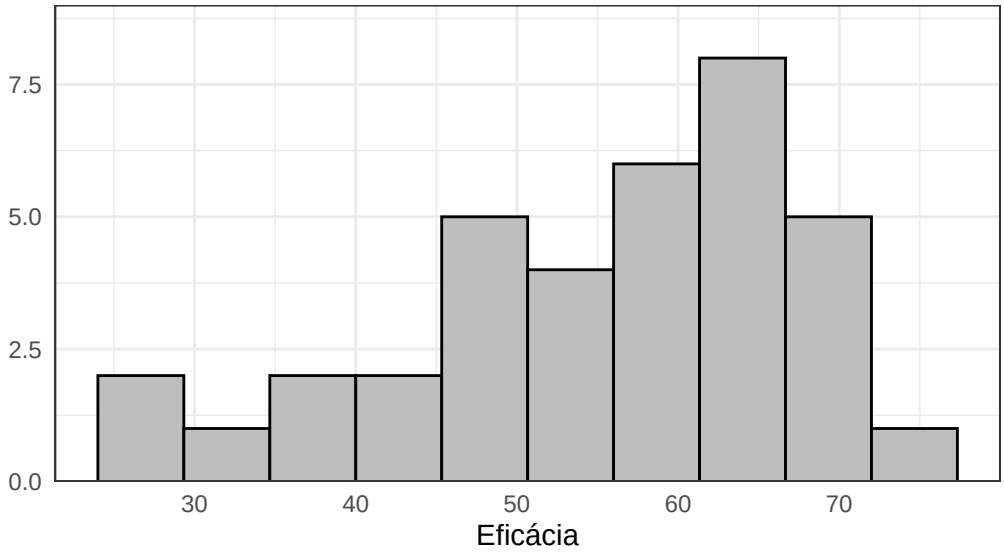
Questão 2

Uma equipe de pesquisadores de saúde mental deseja comparar três métodos de tratamento da depressão grave (A, B e C=referência). Eles também gostariam de estudara relação entre idade e eficácia do tratamento, bem como a interação (se houver) entre idade e tratamento. Cada elemento da amostra aleatória simples de 36 pacientes, foi selecionado aleatoriamente para receber o tratamento A, B ou C. Os dados obtidos podem ser encontrados no ficheiro `Q02-data.txt`. A variável dependente y é a eficácia do tratamento; as variáveis independentes são: a idade do paciente no aniversário mais próximo e o tipo de tratamento administrado (use 1% de significância durantes as análises).

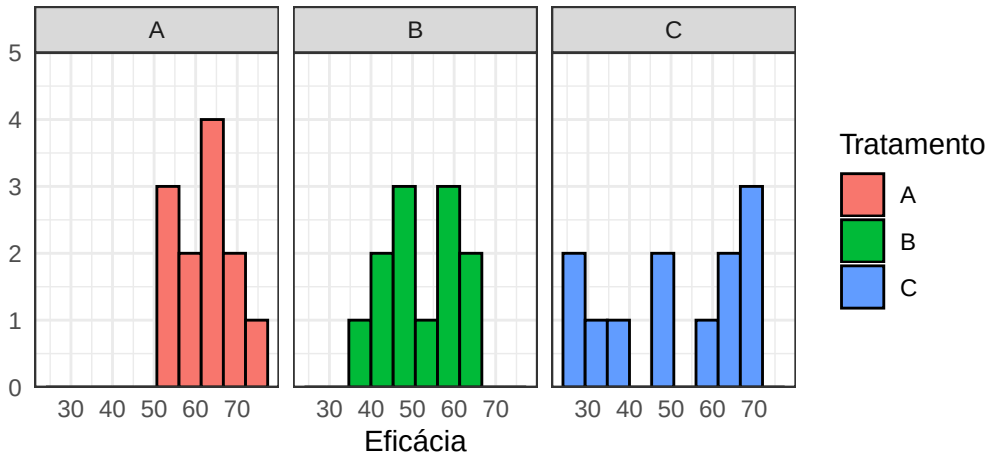
Uma amostra dos dados é exibida na tabela a seguir:

eficacia	idade	tratamento
56	21	A
41	23	B
40	30	B
28	19	C
55	28	A
25	23	C

Um histograma da variável resposta é exibido a seguir, sugerindo assimetria na sua distribuição.



No entanto, se montamos um histograma da variável resposta para cada valor de tratamento, vemos que há uma discrepência na sua distribuição. O tratamento A está bem concentrando em eficácias mais altas, enquanto o B está mais concentrado ao centro da métrica de eficácia e o C está amplamente distribuído.



a) Ajuste um modelo de regressão linear e interprete os resultados obtidos

Inicialmente, consideremos apenas um gráfico de dispersão entre a variável resposta e a única variável numérica, Idade. É possível notar uma relação que pode ou não ser linear, mas também há indícios de heteroscedasticidade. As demais variáveis são dicotômicas, então não há necessidade de se montar dispersões para elas.

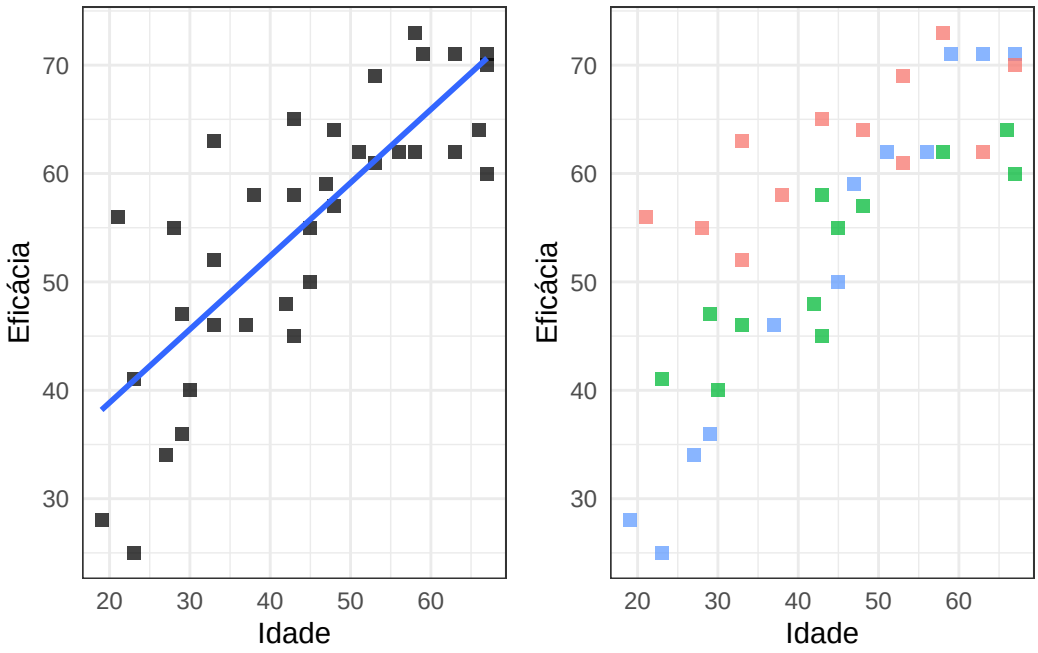
Além disso, se segregamos a dispersão por grupos de tratamento, notamos que pode ser preferível um modelo que considere comportamentos de cada grupo separadamente.

Temos um potencial modelo de regressão linear que pode ou não conter interações entre as variáveis, o qual pode ser expresso em sua forma saturada, em que X_1 é a variável idade e X_2 a variável tratamento

$$y_i = \beta_0 + \beta_1\, x_{1i} + \beta_2\, x_{2i} + \beta_3\, x_{1i}\, x_{2i} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

ou, de forma análoga, desmembrando X_2 em variáveis *dummy* X_A e X_B, indicadores da presença do tratamento A e B, ambas assumindo valor 0 quando se trata do tratamento C

$$y_i = \beta_0 + \beta_1\, x_{1i} + \beta_2\, x_{Ai} + \beta_3\, x_{Bi} + \beta_4\, x_{1i}\, x_{Ai} + \beta_5\, x_{1i}\, x_{Bi} + \varepsilon_i. \tag{2}$$



Se simplesmente ajustamos um modelo de regressão linear – sem os termos de interação – utilizando (2) como referência na função `lm()`, obtemos os seguintes resultados:

Table 1: Modelo de regressão linear para tratamentos sem interação com idade sobre eficácia

Coeficiente	Estimativa	EP	Estatística t	p-valor
(Intercept)	22.291	3.505	6.359	0.000
idade	0.664	0.070	9.522	0.000
A	10.253	2.465	4.159	0.000
B	0.445	2.464	0.181	0.858

Ou seja, se considerarmos independentemente idade, tratamento A e tratamento B, podemos considerar que:

- Há uma linha de base na eficácia de aproximadamente 22.3, i.e. sob o tratamento C;
- A eficácia base para o tratamento A é de 32.3;
- A eficácia base para o tratamento B é de 22.75 – mas poderíamos desconsiderar este coeficiente, se nos guiarmos pelo p-valor;
- Cada ano a mais de vida incrementa a eficácia em 0.644.

É possível considerar que um tamanho de amostra pequeno tenha grande influência sobre a significância de $H_0 : \beta_3 = 0$ do modelo. No entanto, trata-se de um fenômeno para o qual o

tratamento pode estar estreitamente associado à idade, caso em que teríamos que considerar o modelo (2) por completo.

b) Obtenha a tabela ANOVA para o modelo obtido no item (a) e interprete os resultados

Se montarmos uma tabela de Análise de Variância para o modelo de regressão linear ajustado, obtemos os resultados a seguir:

Table 2: Tabela ANOVA para o modelo linear sem interações

Fonte de Var.	g.l.	SQ	QM	F	p-valor
idade	1	3424.432	3424.432	94.015	0.000
A	1	803.804	803.804	22.068	0.000
B	1	1.189	1.189	0.033	0.858
Residuals	32	1165.575	36.424	NA	NA

Nota-se que a maioria da variância explicada pelo modelo está associada à variável idade, enquanto a soma de quadrados das variáveis de tratamento juntas não superam a soma de quadrados dos resíduos.

Se conjugarmos os resultados deste item com os do item a) vemos que isoladamente apenas idade, e interessantemente apenas o tratamento A, parecem ser variáveis que realmente contribuem para a explicação do fenômeno.

c) Considere a possibilidade de incluir a interação entre as varáveis independentes

i) Lista de todos os submodelos possíveis

A partir do modelo (2), construimos todos os possíveis submodelos. Considerando que temos três covariáveis e dois termos de interação, temos $\sum_{n=1}^{5} \binom{6}{n} = 62$ modelos

1. $y_i = \beta_0 + \varepsilon_i$
2. $y_i = \beta_1 \, x_{1i} + \varepsilon_i$
3. $y_i = \beta_2 \, x_{Ai} + \varepsilon_i$
4. $y_i = \beta_3 \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
5. $y_i = \beta_4 \, x_{1i} \, x_{Ai} + \varepsilon_i$

6. $y_i = \beta_5 \, x_{1i} \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
7. $y_i = \beta_0 + \beta_1 \, x_{1i} + \varepsilon_i$
8. $y_i = \beta_0 + \beta_2 \, x_{Ai} + \varepsilon_i$
9. $y_i = \beta_0 + \beta_3 \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
10. $y_i = \beta_0 + \beta_4 \, x_{1i} \, x_{Ai} + \varepsilon_i$
11. $y_i = \beta_0 + \beta_5 \, x_{1i} \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
12. $y_i = \beta_1 \, x_{1i} + \beta_2 \, x_{Ai} + \varepsilon_i$
13. $y_i = \beta_1 \, x_{1i} + \beta_3 \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
14. $y_i = \beta_1 \, x_{1i} + \beta_4 \, x_{1i} \, x_{Ai} + \varepsilon_i$
15. $y_i = \beta_1 \, x_{1i} + \beta_5 \, x_{1i} \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
16. $y_i = \beta_2 \, x_{Ai} + \beta_3 \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
17. $y_i = \beta_2 \, x_{Ai} + \beta_4 \, x_{1i} \, x_{Ai} + \varepsilon_i$
18. $y_i = \beta_2 \, x_{Ai} + \beta_5 \, x_{1i} \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
19. $y_i = \beta_3 \, x_{Bi} + \beta_4 \, x_{1i} \, x_{Ai} + \varepsilon_i$
20. $y_i = \beta_3 \, x_{Bi} \beta_5 \, x_{1i} \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
21. $y_i = \beta_4 \, x_{1i} \, x_{Ai} + \beta_5 \, x_{1i} \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
22. $y_i = \beta_0 + \beta_1 \, x_{1i} + \beta_2 \, x_{Ai} + \varepsilon_i$
23. $y_i = \beta_0 + \beta_1 \, x_{1i} + \beta_3 \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
24. $y_i = \beta_0 + \beta_1 \, x_{1i} + \beta_4 \, x_{1i} \, x_{Ai} + \varepsilon_i$
25. $y_i = \beta_0 + \beta_1 \, x_{1i} + \beta_5 \, x_{1i} \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
26. $y_i = \beta_0 + \beta_2 \, x_{Ai} + \beta_3 \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
27. $y_i = \beta_0 + \beta_2 \, x_{Ai} + \beta_4 \, x_{1i} \, x_{Ai} + \varepsilon_i$
28. $y_i = \beta_0 + \beta_2 \, x_{Ai} + \beta_5 \, x_{1i} \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
29. $y_i = \beta_0 + \beta_3 \, x_{Bi} + \beta_4 \, x_{1i} \, x_{Ai} + \varepsilon_i$
30. $y_i = \beta_0 + \beta_3 \, x_{Bi} + \beta_5 \, x_{1i} \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
31. $y_i = \beta_0 + \beta_4 \, x_{1i} \, x_{Ai} + \beta_5 \, x_{1i} \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
32. $y_i = \beta_1 \, x_{1i} + \beta_2 \, x_{Ai} + \beta_3 \, x_{Bi} + \varepsilon_i$
33. $y_i = \beta_1 \, x_{1i} + \beta_2 \, x_{Ai} + \beta_4 \, x_{1i} \, x_{Ai} + \varepsilon_i$
34. $y_i = \beta_1 \, x_{1i} + \beta_2 \, x_{Ai} + \beta_5 \, x_{1i} \, x_{Bi} + \varepsilon_i$

35. $y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \varepsilon_i$
36. $y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
37. $y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
38. $y_i = \beta_2 x_{Ai} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \varepsilon_i$
39. $y_i = \beta_2 x_{Ai} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
40. $y_i = \beta_2 x_{Ai} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
41. $y_i = \beta_3 x_{Bi} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
42. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{Ai} + \beta_3 x_{Bi} + \varepsilon_i$
43. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{Ai} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \varepsilon_i$
44. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
45. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \varepsilon_i$
46. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
47. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
48. $y_i = \beta_0 + \beta_2 x_{Ai} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \varepsilon_i$
49. $y_i = \beta_0 + \beta_2 x_{Ai} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
50. $y_i = \beta_0 + \beta_2 x_{Ai} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
51. $y_i = \beta_0 + \beta_3 x_{Bi} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
52. $y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{Ai} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \varepsilon_i$
53. $y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{Ai} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
54. $y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{Ai} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
55. $y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
56. $y_i = \beta_2 x_{Ai} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
57. $y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{Ai} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
58. $y_i = \beta_0 + \beta_2 x_{Ai} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
59. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
60. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{Ai} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
61. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{Ai} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_5 x_{1i} x_{Bi} + \varepsilon_i$
62. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{Ai} + \beta_3 x_{Bi} + \beta_4 x_{1i} x_{Ai} + \varepsilon_i$

ii) Interpretação de coeficientes de regressão de fatores de interação

Agora experimentamos ajustar exatamente o modelo (2) e, conforme suspeitas, verificamos que não apenas agora o coeficiente β_3, correspondente ao tratamento B, é significativamente diferente de zero, como a interação dos tratamentos também o é.

Table 3: Modelo de regressão linear para tratamentos com interação com idade sobre eficácia

Coeficiente	Estimativa	EP	Estatística t	p-valor
(Intercept)	6.211	3.350	1.854	0.074
idade	1.033	0.072	14.288	0.000
A	41.304	5.085	8.124	0.000
B	22.707	5.091	4.460	0.000
idade:A	-0.703	0.109	-6.451	0.000
idade:B	-0.510	0.110	-4.617	0.000

Há várias mudanças na interpretação dos coeficientes estimados em relação ao primeiro modelo ajustado. Primeiramente, vemos que o efeito mínimo dos tratamentos está bem diferente, com interceptos $C < B < A$, com uma grande diferença entre o primeiro e último tratamento.

O efeito da interação entre idade e tratamentos pode ser melhor explicada se analisarmos graficamente primeiro. A figura a seguir ilustra as curvas de regressão para cada tratamento.

Cabe recapitularmos que o grupo de referência é o tratamento C, o que força a interpretação de que o intercepto β_0 do modelo é o seu efeito de tratamento isolado e $\beta_1\, x_{1i}$ se refere à interação entre o tratamento C e a variável idade.

Podemos expressar entao o modelo ajustado da seguinte forma:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\, x_{1i} + \hat{\beta}_2\, x_{Ai} + \hat{\beta}_3\, x_{Bi} + \hat{\beta}_4\, x_{1i}\, x_{Ai} + \hat{\beta}_5\, x_{1i}\, x_{Bi}$$

$$= \begin{cases} \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\, x_{1i}, \text{ se tratamento C} \\ (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_2) + (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_4) x_{1i}, \text{ se tratamento A} \\ (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_3) + (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_5) x_{1i}, \text{ se tratamento B} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 6.21 + 1.03\, x_{1i}, \text{ se tratamento C} \\ 47.51 + 0.33\, x_{1i}, \text{ se tratamento A} \\ 28.91 + 0.53\, x_{1i}, \text{ se tratamento B} \end{cases} \tag{3}$$

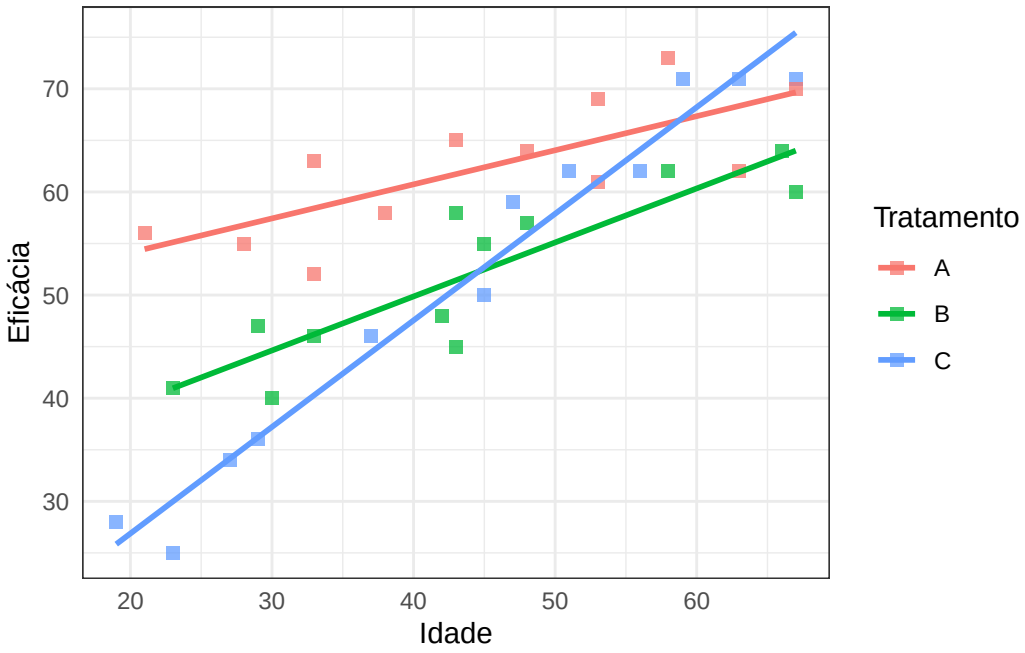


Figure 1: Curvas de regressão para modelo com interações.

Em termos reais, o modelo sugere que há uma grande influência da idade sobre a eficácia do tratamento C, enquanto essa influência é menor para o tratamento B e menor ainda para o tratamento A.

iii) Tabela ANOVA

Finalmente, montamos a tabela de ANOVA do modelo. Em contraposição ao modelo anterior, sem interações, vemos que uma pequena parcela da soma de quadrados é atribuída aos resíduos. De fato, o coeficiente associado ao efeito puro do tratamento B ainda explica muito pouco da variação do modelo. No entanto, para que possamos considerar a interação Idade × Tratamento B, que testa significativamente para $H_a : \beta_j \neq 0$, mantemos o efeito puro.

Table 4: Tabela ANOVA para o modelo linear com interações

Fonte de Var.	g.l.	SQ	QM	F	p-valor
idade	1	3424.432	3424.432	222.295	0.000
A	1	803.804	803.804	52.178	0.000
B	1	1.189	1.189	0.077	0.783
idade:A	1	375.002	375.002	24.343	0.000
idade:B	1	328.424	328.424	21.319	0.000

Table 4: Tabela ANOVA para o modelo linear com interações *(continued)*

Fonte de Var.	g.l.	SQ	QM	F	p-valor
Residuals	30	462.148	15.405	NA	NA

iv) Análise completa dos resíduos do modelo

COMO?

Supõe-se que $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

Apêndice

Todo o projeto de composição deste documento pode ser encontrado aqui: https://github.com/cesar-galvao/mlg