Modelos Lineares Generalizados Mistos

Modelos Lineares Generalizados - 2/2023

Laíza Mendes - 20/0067028

César Augusto Galvão - 19/0011572

Table of contents

Introdução

Em diversas áreas do conhecimento, pesquisas são feitas buscando uma descrição de efeito em uma unidade de análise, porém com dados coletados não apenas no nível da unidade. Muitas vezes, é de interesse compreender como características de agrupamentos das unidades de análise interferem no comportamento de interesse. Naturalmente, uma interpretação que surge é de níveis de hierarquia das características estudadas, de modo que modelos *hierarquizados* ou *multinível* são adequados para o estudo do fenômeno.

Para dar concretude, pode-se pensar em um estudo sobre o desempenho acadêmico de alunos. Para selecionar a amostra, escolas são amostradas primeiro, em seguida turmas e, em um terceiro nível, alunos. Variáveis como orçamento da escola, tempo de experiência dos professores das turmas e renda familiar dos alunos são observadas. O pressuposto por trás de um estudo com esse desenho é de que o desempenho dos alunos pode ser afetado por características suas (renda familiar), da turma (professor) e da escola (orçamento) de formas diferentes. Além disso, é esperado que alunos da mesma turma tenham comportamentos correlacionados e o mesmo pode ser esperado para turmas dentro da mesma escola.

Estudar de forma hierarquizada esse tipo de fenômeno permite evitar falácias na modelagem devido à perda de poder da análise ou influência exagerada de algumas variáveis devido à agregação ou desagregação de variáveis de níveis hierárquicos diferentes. Além disso, é possível estudar como agrupamentos das unidades de análise se comportam e como isso influencia níveis inferiores da hierarquia.

Nessa classe de modelos é possível ter três combinações de tipos de parâmetros:

1. Todos os parâmetros são fixos, quando se tem um modelo de efeitos fixos;
2. Parte dos parâmetros é fixa e parte é aleatória, quando se tem um **modelo misto**; e
3. Todos os parâmetros são aleatórios, quando se tem um modelo aleatório.

O foco deste trabalho são os modelos que pertencem ao tipo 2.

Método

Modelagem

O modelo linear generalizado misto realizado neste relatório é ilustrado a seguir. Considere uma amostra de tamanho n distribuída em J agrupamentos em um modelo com apenas dois níveis de hierarquia. A variável resposta $Y_{ij} \sim \text{Bernoulli}(p),\ i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, J,\ 0 < p < 1$ é uma variável binária e apenas uma covariável para cada nível de hierarquia serão consideradas por simplicidade. Essas serão denotadas por X e Z para a covariável de nível inferior e superior, respectivamente.

O modelo com todos os parâmetros aleatórios pode ser genericamente expresso da seguinte forma:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} X_{1ij} + \varepsilon_{ij}, \tag{1}$$

em que β_{0j} é o intercepto para o grupo j, β_{1j} é o coeficiente geral para a covariável de nível hierárquico inferior X_{1ij} e ε_{ij} é o elemento estocástico associado associado à observação Y_{ij}.

No entanto, para cada valor j o intercepto e o coeficiente são influenciados também pelo comportamento das categorias de nível hierárquico superior. É possível então expressá-los na forma

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} Z_j + u_{0j}, \tag{2}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11} Z_j + u_{1j}. \tag{3}$$

Neste caso, $\gamma_{(.)0}$ é o intercepto para $\beta_{(.)j}$, $\gamma_{(.)1}$ é o coeficiente associado à covariável de nível hierárquico superior Z_j para cada $\beta_{(.)j}$ e $u_{(.)j}$ é o erro residual associado a cada $\beta_{(.)j}$, ou seja, é associado à dispersão entre as categorias de agrupamento[1].

Finalmente, se substituimos (2) e (3) em (1), obtemos um detalhamento do modelo genérico em termos de suas componentes hierarquizadas:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01} Z_j + \gamma_{10} X_{1ij} + \gamma_{11} Z_j X_{1ij} + u_{1j} X_{1ij} + \varepsilon_{ij} + u_{0j}. \tag{4}$$

Podemos interpretar as componentes da seguinte forma:

[1] Em um modelo misto, bastaria escolher ou o intercepto ou o coeficiente, neste caso simplificado, como um termo que não varie em j.

- Existe um intercepto geral – γ_{00};
- Existem efeitos que agem exclusivamente nas variáveis de um nível hierárquico específico – $\gamma_{01}Z_j$ e $\gamma_{10}X_{1ij}$;
- Existe um efeito de *mediação* do comportamento do grupo sobre a unidade de observação – $\gamma_{11}Z_jX_{1ij}$;
- Existem uma componente de variância do grupo que incide sobre o comportamento da unidade – $u_{1j}X_{1ij}$; e
- Existem componentes de variância entre unidades e entre grupos – ε_{ij} e u_{0j} respectivamente.

As variâncias do modelo são obtidas de ε_{ij}, u_{0j} e u_{1j}, assumidos como variáveis aleatórias Normais centradas em zero, de modo que se pode calcular a proporção de variância no segundo nível da hierarquia, entre agrupamentos. Essa medida é chamada de correlação intraclasse e é dada por

$$\rho = \frac{\sigma^2_{u_0}}{\sigma^2_{u_0} + \sigma^2_{\varepsilon} + u_{1j}}. \tag{5}$$

No caso do modelo linear generalizado, especificamente o logístico, o lado direito da equação (4) é tomado como o preditor linear η e a função de ligação adotada é a logit. Dessa forma, tem-se a variável resposta $Y \sim \text{Bin}(n, p)$, $\mu = np$ e uma candidata a função de ligação $\eta = \text{logit}(\mu)$.

Estimação e testes de hipótese

Entre os métodos de estimação comuns dos coeficientes do modelo, os autores da referência principal deste relatório indicam maxima verossimilhança restrita (REML), mínimos quadrados generalizados (GLS), equações estimadoras generalizadas (GEE), bootstrap e métodos bayesianos. No entanto, a documentação do pacote `lme4` para R indica que, para a função `lme4::glmer()`, é utilizada quadratura adaptativa de Gauss-Hermite para aproximação da log-verossimilhança.

Para a realização de testes de hipótese, assume-se que os estimadores têm distirbuição normal e podem ser testados quanto à sua significância usando teste de Wald.

Para conclusões sobre a eficácia do modelo, há diversas propostas como os R quadrados de Cox e Snell ou o de Nagelkerke, explorado durante a disciplina de MLG. No entanto, há uma extensão para modelos multinível proposta por McKelvey e Zavoina (1975, *apud* Moerbeek e Schoot, 2017) análogo ao R^2. Ainda se atendo a um modelo simplificado de dois níveis, a proporção de variância explicada pelo modelo pode ser dada por

$$R^2_{MZ} = \frac{\sigma^2_F}{\sigma^2_F + \sigma^2_{u0} + \sigma^2_R}, \tag{6}$$

onde σ^2_F é a variância do preditor linear, σ^2_{uo} é a variância do intercepto e σ^2_R é a variância do resíduo de nível mais baixo.

Resíduos

Resíduos em modelos multinível podem ser explorados de diversas formas para verificar linearidade, homocedasticidade, autocorrelação, entre outros. Uma das principais diferenças em relação a modelos não hierarquizados é que há um resíduo para cada efeito aleatório no modelo.

Entre as formas de avaliação gráfica dos resíduos, pode-se citar:

- Resíduos padronizados versus escores da distribuição Normal;
- Resíduos dos diferentes níveis versus a variável resposta;
- Gráfico simultâneo da regressão para todas as classes estudadas;

Banco de dados

A título de ilustrar os métodos de modelagem para análise apresentados acima, foi escolhido um banco de dados utilizado também no livro de referência. Esse banco é sobre a educação na Tailândia e são orginados de um estudo sobre o ensino pré-primário na Tailândia (Raudenbush & Bhumirat, 1992; see Raudenbush et al., 2004, p. 115). Nesse caso, temos dois níveis claros presentes, o superior, que seria a escola, e o inferior, que seriam os alunos.

Para a nossa análise, usaremos como variável resposta a variável REPEAT, que é uma variável dicotômica que indica se o aluno repetiu ou não alguma vez durante o ensino pré-primário, sendo, nos dados, 0 para não e 1 para sim. Além disso, há as variáveis usadas como explicativas para o nível dos alunos, que seriam SEX, para expressar o sexo dos alunos (0 para menina e 1 para menino), e PPED, para sinalizar se o aluno teve ou não educação pré-primária (0 para não e 1 para sim). Já para o nível das escolas, foi utilizada a variável MSESC como variável preditora, ela disgnifica a média SES que é a média dp índice socioeconômico associado região onde se encontra a escola.

Fazendo uma análise descritiva inicial do banco de dados, notou-se que, de um total de 441 escolas, somando 8582 alunos, 55 escolas apresentavam a variável MSESC como NAs. Como essa é a única variável preditora das escolas, para que fosse ilustrada corretamente a modelagem, foi necessário retirá-las dos dados. Poderiam ser utilizadas algumas outras alternativas estatísticas, mas decidimos apenas remover essas escolas da análise, uma vez que, além do

banco permanecer bem grande, com 7516 alunos, o foco da análise é apenas demonstrar, vide aplicação, os conceitos vistos nesse trabalho para modelos multinível(ou modelos de regressão hierárquica).

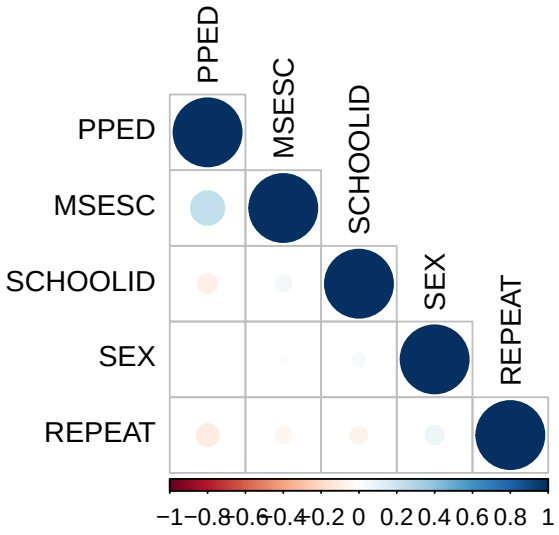
Pacotes e funções

Para o processo de modelagem, foi utilizado o pacote `lme4`, dedicado a modelos multinível. Deste pacote, a função `glmer()` foi utilizada para computação dos modelos, isso porque essa função que é usada para ajustar modelos lineares mistos generalizados quando a variável de resposta é discreta, no nosso caso é binária, ou quando a distribuição de erros não é normal.

Resultados

Análise dos possíveis modelos

Inicialmente, como análises anteriores a aplicação do banco de dados, é importante testar se há ou não correlação entre as variáveis do banco. Isso porque é necessário verificar se há multicolinearidade, uma vez que essa interfere na eficiência do modelo. Logo, obteve-se



Nota-se que as variáveis apresentam correlação muito baixa entre elas, portanto, a multicolinearidade não é um problema para esses dados.

Para o banco de dados tratado, aplicamos 3 modelos, os quais comparamos e analisamos qual de fato se ajustou melhor aos dados, foram eles:

- Modelo nulo: um modelo com o intercepto apenas, o mais simples possível, utilizado de base para avaliar se a inclusão de variáveis explicativas melhora significativamente o ajuste do modelo;
- Modelo com variáveis explicativas fixas: um modelo com todas as variáveis explicativas do nível inferior fixas, incluindo SEX e PPED, assumindo que o efeito dessas variáveis é constante para todas as escolas, tendo efeitos aleatórios apenas no intercepto, em que poderemos entender o impacto mais direto dessas variáveis de nível inferior quanto a variável REPEAT;
- Modelo hierárquico com efeitos aleatórios misto: um modelo que inclui a variáveil explicativa MSESC do nível superior, introduzindo efeitos aleatórios não só para o intercepto, mas também para a variável MSESC com relação a cada escola (nível superior).

Com isso, analisaremos qual dos três modelos se ajusta melhor aos dados e se incluir variáveis explicativas, bem como incluir o efeito aleatório para uma delas, fará diferença no que diz espeito a qualidade dos modelos.

Modelo nulo

Partindo para a modelagem, começando pelo modelo nulo, obtemos os seguintes resultados do resumo do modelo:

```
Generalized linear mixed model fit by maximum likelihood (Laplace
  Approximation) [glmerMod]
 Family: binomial  ( logit )
Formula: REPEAT ~ 1 + (1 | SCHOOLID)
   Data: dados_spss

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
  5547.0   5560.8  -2771.5   5543.0     7514

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-1.6295 -0.4173 -0.2480 -0.1755  4.7976

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 SCHOOLID (Intercept) 1.668    1.292
Number of obs: 7516, groups:  SCHOOLID, 356

Fixed effects:
             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -2.2343255  0.0003828   -5836   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
optimizer (Nelder_Mead) convergence code: 0 (OK)
Model failed to converge with max|grad| = 0.184618 (tol = 0.002, component 1)
Model is nearly unidentifiable: very large eigenvalue
 - Rescale variables?
```

Nota-se, do *output* do código, que o modelo, que inclui apenas o intercepto para cada nível da escola, apresenta intercepto é estatisticamente significativo, em que quando todas as outras variáveis são mantidas constantes, o log-odds de REPEAT para o grupo de referência é -2.2343255. Dessa forma, há uma maior probabilidade média ou chance de REPEAT ser igual

a 0 (não ocorrer) em comparação com REPEAT ser igual a 1 (ocorrer), em que a chance de repetir é $e^{-2.2343255}$ vezes a chance de não repetir. Além disso, nota-se que há também uma variação significativa entre as escolas na interceptação do efeito médio da resposta REPEAT.

Modelo com variáveis explicativas fixas

Para esse modelo, acrescentamos as variáveis explicativas do nível dos estudantes, ou seja, SEX e PPED. Elas serão colocadas no modelo como variáveis fixas, em que não há efeito aleatório, dessa forma, obtemos

```
Generalized linear mixed model fit by maximum likelihood (Laplace
  Approximation) [glmerMod]
 Family: binomial  ( logit )
Formula: REPEAT ~ SEX + PPED + (1 | SCHOOLID)
   Data: dados_spss

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
  5456.9   5484.6  -2724.4   5448.9     7512

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-2.1587 -0.4039 -0.2474 -0.1679  6.1366

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 SCHOOLID (Intercept) 1.634    1.278
Number of obs: 7516, groups:  SCHOOLID, 356

Fixed effects:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -2.23410    0.10054 -22.222  < 2e-16 ***
SEX          0.53494    0.07539   7.095 1.29e-12 ***
PPED        -0.64189    0.09860  -6.510 7.51e-11 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Correlation of Fixed Effects:
     (Intr) SEX
SEX  -0.440
PPED -0.406 -0.002
optimizer (Nelder_Mead) convergence code: 0 (OK)
unable to evaluate scaled gradient
```

```
Model failed to converge: degenerate  Hessian with 2 negative eigenvalues
```

todas as variaveis são estatisticamente significativas para o modelo. Sendo o intercepto o log-odds de repetição para os alunos quando todas as variáveis explicativas (SEX e PPED) são zero, como ele é igual a -2.23410 nesse modelo, e é negativo, a chance de repetir é menor que a de não repetir, ou seja, a chance de repetir é $e^{-2.23410}$ vezes a chance de não repetir. Ademais, quanto ao SEX, mantendo as outras variáveis igual a 0, se ele aumenta em uma unidade (ou seja, quando muda de "girl", 0, para "boy",1), a log-odds de repetição aumenta em 0.53494 vezes, então, a chance de repetir é e^0.53494 vezes maior para meninos. Em contrapartida, quando PPED aumenta em uma unidade, para as outras variáveis iguais a 0 (ou seja, quando muda de "não" para "sim", teve educação pré primaria), a log-odds de repetição diminui em 0.64189 vezes, pois é negativo, logo, a chance de repetir é $e^{-}0.64189$ vezes a de não repetir para quem teve educação pré primária.

Modelo hierárquico com efeitos aleatórios misto

Por fim, para esse modelo adicionamos a variável preditora do nível da escola, MSESC, em que agora, há um efeito aleatório da mesma sobre o fator de cada variável explicativa em relação à variável resposta. Nessa perspectiva, tem-se

```
Generalized linear mixed model fit by maximum likelihood (Laplace
  Approximation) [glmerMod]
 Family: binomial  ( logit )
Formula: REPEAT ~ SEX + PPED + (1 + MSESC | SCHOOLID)
   Data: dados_spss

     AIC      BIC   logLik deviance df.resid
  5457.8   5499.3  -2722.9   5445.8     7510

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-2.3829 -0.4021 -0.2467 -0.1714  6.0794

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev. Corr
 SCHOOLID (Intercept) 1.454    1.206
          MSESC       1.154    1.074    -0.38
Number of obs: 7516, groups:  SCHOOLID, 356

Fixed effects:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
```

```
(Intercept) -2.24718    0.10607 -21.186  < 2e-16 ***
SEX          0.53496    0.07591   7.047 1.83e-12 ***
PPED        -0.64527    0.09915  -6.508 7.61e-11 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Correlation of Fixed Effects:
     (Intr) SEX
SEX  -0.432
PPED -0.395 -0.004
```

Assim, a análise fica análoga a do modelo anterior com relação a PPED, SEX e o intercepto, a diferença é que agora, como MSESC está imbutido em SCHOOLID (MSESC) dos efeitos aleatórios, ela indica que há uma variância de 1.154 entre as escolas com relação ao MSESC.

Comparando os modelos

Diante dos três modelos acima, podemos fazer a escolha daquele que melhor se adequa aos dados. Com isso, fez-se o teste de deviance por meio da tabela ANOVA para comparar o modelo 1 com o modelo 2, obtendo-se o seguinte resultado

```
Data: dados_spss
Models:
modelo_intercepto: REPEAT ~ 1 + (1 | SCHOOLID)
modelo_efeitos_fixos: REPEAT ~ SEX + PPED + (1 | SCHOOLID)
                     npar    AIC    BIC  logLik deviance  Chisq Df Pr(>Chisq)
modelo_intercepto       2 5547.0 5560.8 -2771.5   5543.0
modelo_efeitos_fixos    4 5456.9 5484.6 -2724.4   5448.9 94.088  2  < 2.2e-16

modelo_intercepto
modelo_efeitos_fixos ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Considerando, para esse teste, H_0 de que a inclusão de termos adicionais no modelo 2 não melhora significativamente o ajuste do modelo aos dados, e o modelo mais simples 1 é suficiente, pode-se afirmar que há evidências de que o modelo 2 é mais adequado aos dados que o modelo 1.

Por conseguinte, comparamos o modelo 2 ao modelo 3, para verificar de fato qual é o mais adequado. Assim, resulta-se na seguinte tabela ANOVA

```
Data: dados_spss
Models:
modelo_efeitos_fixos: REPEAT ~ SEX + PPED + (1 | SCHOOLID)
modelo_efeitos_aleatorios: REPEAT ~ SEX + PPED + (1 + MSESC | SCHOOLID)
                          npar    AIC    BIC  logLik deviance  Chisq Df
modelo_efeitos_fixos         4 5456.9 5484.6 -2724.4   5448.9
modelo_efeitos_aleatorios    6 5457.8 5499.3 -2722.9   5445.8 3.0859  2
                          Pr(>Chisq)
modelo_efeitos_fixos
modelo_efeitos_aleatorios     0.2137
```

Como não rejeita-se H0 de que modelo mais simples é suficiente, em favor do modelo mais complexo, não há evidências de que o modelo mais simples não seja suficiente ou de que a inclusão do efeito aleatório da variável MSESC de nível superior melhore significativamente o ajuste do modelo aos dados.

Modelo escolhido

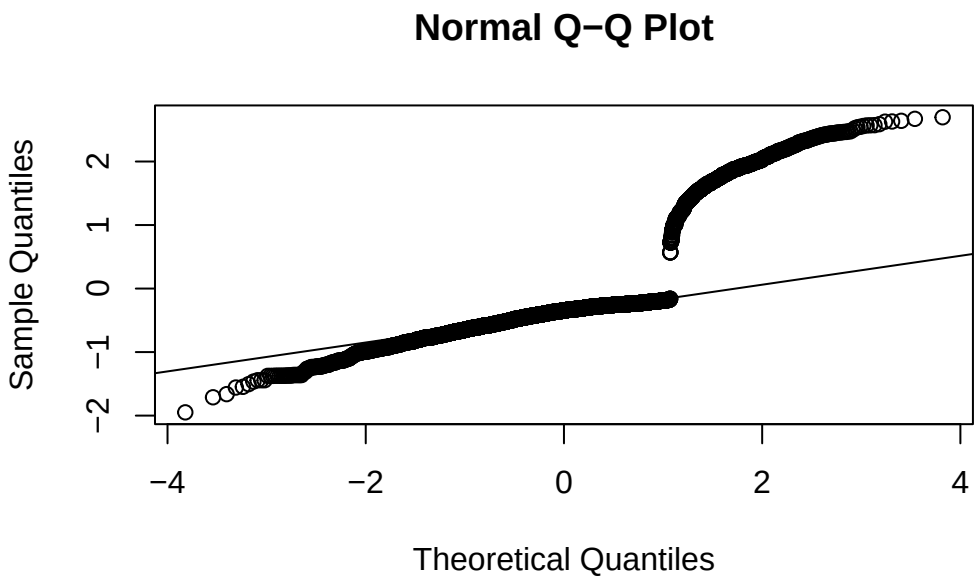
Diante dos resultados acima, vamos escolher o modelo mais completo, o modelo 3, com a variável de nível superior MSESC, a fim de se obter algumas estatisticas sobre o mesmo, inclusive para fazer a análise de resíduos, já que nosso trabalho fala sobre modelos mistos, mesmo que não haja de fato melhora estatisticamente significativa ao escolher esse modelo em relação ao segundo modelo mostrado.

Calcularemos, então, a estatística da correlação intraclasse, que indica quanto da variação total na variável resposta (REPEAT) pode ser atribuída às diferenças entre as escolas. Assim, com uma correlação intraclasse de 0.9378021, pode-se interpretar que, como está próximo de 1, a maior parte da variação na probabilidade de um aluno repetir ao menos uma vez está relacionada às diferenças entre as escolas, ou melhor, às diferenças socioeconômicas da região (MSESC). Isso sugere que a variabilidade nessa probabilidade é significativamente influenciada pela escola à qual os alunos pertencem.

Análise de Resíduos

Com isso, para o modelo escolhido, é de suma importância que seja feita a análise dos resíduos para que seja garantida a eficiência do modelo.

Inicialmente, fazendo-se o teste de normalidade para os resíduos.



Nota-se que os resíduos não são normais, o que faz sentido, dado o fato de que a variável preditora é uma binomial.

Discussão

Com uma finalidade exemplificativa, foi exposta superficialmente a fundamentação teórica para modelos lineares generalizados multinível. Além disso, foi selecionado um banco de dados utilizado pelos autores da principal referência deste relatório para demonstrar a aplicação do modelo.

Para demonstrar o processo de modelagem, foram ajustados três modelos: um modelo nulo, outro com efeitos fixos e um terceiro com efeitos mistos. Não foram encontradas diferenças significativas de deviance entre os três, mas foi mantida a análise dos efeitos mistos com propósitos pedagógicos. Dessa forma, o modelo de efeitos mistos, mesmo não apresentando uma significativa melhoria em termos de explicação da variância em relação ao modelo nulo, apresentou todos os coeficientes significativamente diferentes de zero.

Uma das dificuldades encontradas foi conseguir identificar todos os coeficientes do modelo utilizando o output do R. Dessa forma, não conseguimos expressar o modelo obtido em uma expressão algébrica em sua forma completa. Outra dificuldade encontrada foi identificar teoria e funções que realizasse medidas diagnósticas de influência como DFFIT, DFBETAS, COVRatio, entre outros. Como não foram identificadas, não foi feita análise de pontos de influência.

Apêndice

A principal referência utilizada neste trabalho foram os capítulos 1, 2, 3, 4 e 6 de Hox, J., Moerbeek, M., & Van de Schoot, R. (2017). *Multilevel analysis: Techniques and applications*. Routledge.

Todo o projeto de composição deste documento pode ser encontrado aqui: https://github.com/cesar-galvao/Listas-MLG/tree/main/trabalho_final