

Lista 1: Ajustando uma RNA ‘no braço’

César A. Galvão - 190011572

Para essa lista, é considerada a seguinte arquitetura de uma rede neural *feed-forward*:¹

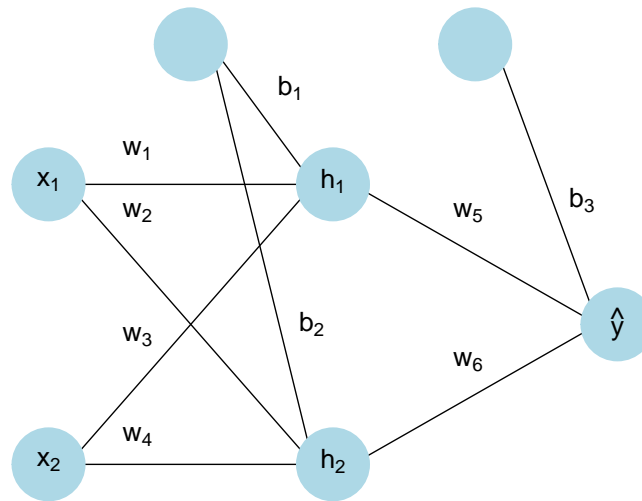


Figura 1: Arquitetura da rede neural artificial. Adotamos função de ativação sigmoide e linear nas camadas escondidas e de saída, respectivamente.

Questão 1

Item a

Crie uma função computacional para calcular o valor previsto da variável resposta $\hat{y} = f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ em função de \mathbf{x} e $\boldsymbol{\theta}$. Use a função para calcular \hat{y} para $\boldsymbol{\theta} = (0.1, \dots, 0.1)$ e $\mathbf{x} = (1, 1)$.

¹Documento disponível no repositório do autor: <https://github.com/cesar-galvao/Topicos-1---Redes-neurais>

Implementa-se de forma matricial. A função não é adaptativa ao tamanho da rede e exige que o usuário forneça uma lista θ com os seguintes elementos:

1. $W^{(1)}$ - matriz 2×2 de pesos da camada de entrada $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}$. Cada linha deve representar os pesos de cada neurônio para o neurônio subsequente, i.e. w_{ij} representa o peso do neurônio de entrada i para o próximo neurônio j .
2. $b^{(1)}$ - vetor de viés da camada de entrada $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.
3. $W^{(2)}$ - matriz 2×1 de pesos da camada de saída $\begin{pmatrix} w_5 \\ w_6 \end{pmatrix}$.
4. $b^{(2)}$ - vetor elemento de viés da camada de saída (b_3) .

Como função de ativação foi escolhida a função sigmóide denotada por $\phi = \frac{1}{1+e^{-x}}$. A função de previsão é dada por:

$$\hat{y} = W^{(2)\top} \phi(W^{(1)\top} \mathbf{x} + \mathbf{b}^{(1)}) + \mathbf{b}^{(2)}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= W^{(1)\top} \mathbf{x} + \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{h} &= \phi(\mathbf{a}) \\ \hat{y} &= W^{(2)\top} \mathbf{h} + b^{(2)} \end{aligned}$$

```
# Função de ativação
phi <- function(x) {1/(1 + exp(-x))}

# Função de previsão
ffwd <- function(x, theta) {

  if(any(dim(theta[[1]]) != c(2, 2))){
    stop("Feed Forward: O primeiro elemento de theta deve ser uma
    ↪ matriz de pesos 2x2 para a aplicação nos dados")
  } else if(length(theta[[2]]) != 2){
    stop("Feed Forward: O segundo elemento de theta deve ser um
    ↪ vetor viés de tamanho 2 para somar aos dados")
  } else if(any(dim(theta[[3]]) != c(2, 1))){
    stop("Feed Forward: O terceiro elemento de theta deve ser uma
    ↪ matriz de pesos 2x1 para aplicação na única camada h")
  } else if(length(theta[[4]]) != 1){
    stop("Feed Forward: O quarto elemento de theta deve ser um
    ↪ vetor viés de tamanho 1 para soma na única camada h")
  } else if(!is.data.frame(x) | !tibble::is_tibble(x) & dim(x)[2]
    ↪ != 2){
```

```

    stop("Feed Forward: x deve ser uma dataframe ou tibble com 2
    ↪   colunas")
  }

  x <- as.matrix(x)

  W1 <- theta[[1]]
  b1 <- theta[[2]]
  W2 <- theta[[3]]
  b2 <- theta[[4]]

  a <- (t(W1)%*%t(x))+b1
  h <- phi(a)
  yhat <- (t(W2)%*%h)+b2

  return( # separacao dos elementos de saída para usar no
  ↪   backpropagation
    list(yhat = as.double(yhat),
         hidden = h,
         pre_activation = a)
  )
}

```

Agora vamos calcular \hat{y} para $\theta = (0.1, \dots, 0.1)$ e $x = (1, 1)$.

```

x <- data.frame(x1 = 1, x2 = 1)

theta <- list(
  M1 = matrix(c(0.1), nrow = 2, ncol = 2),
  b12 = c(0.1, 0.1),
  M2 = matrix(c(0.1), nrow = 2, ncol = 1),
  b3 = c(0.1)
)

ffwd(x, theta)

```

Obtemos $\hat{y} = 0.2148885$.

Item b

Crie uma rotina computacional para calcular a função de custo $J(\theta)$. Em seguida, divida o conjunto de dados observados de modo que as **primeiras** 80.000 amostras componham o conjunto de **treinamento**, as próximas 10.000 o de **validação**, e as **últimas** 10.000 o de **teste**. Qual é o custo da rede no

conjunto de teste quando $\theta = (0.1, \dots, 0.1)$?

Primeiro são gerados os dados conforme as instruções da lista:

```
### Gerando dados "observados"
set.seed(1.2024)
m.obs <- 100000
dados <- tibble(x1.obs=runif(m.obs, -3, 3),
                x2.obs=runif(m.obs, -3, 3)) %>%
  mutate(mu=abs(x1.obs^3 - 30*sin(x2.obs) + 10),
         y=rnorm(m.obs, mean=mu, sd=1))
```

Depois, implementamos a função de custo $J(\theta)$, que é dada por

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m L(f(x_{1i}, x_{2i}; \theta), y_i) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (f(x_{1i}, x_{2i}; \theta) - y_i)^2 \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - y_i)^2, \end{aligned}$$

onde m é o número de observações.

```
J.Loss <- function(dados, theta, target){

  if(!is.data.frame(dados) | !tibble::is_tibble(dados)){
    stop("Loss: Dados deve ser uma dataframe ou tibble.")
  } else if (dim(dados)[2] != 2){
    stop("Loss: Matriz de dados deve ter 2 colunas.")
  } else if (!is.list(theta)){
    stop("Loss: Theta deve ser uma lista com pesos e viéses.")
  } else if (!is.numeric(target)){
    stop("Loss: Target deve ser um vetor numérico.")
  }

  # transpoe os dados para termos acesso aos vetores de x que serao
  ↪ passados para a primeira camada da rede
  #tdados <- t(as.matrix(dados))

  yhat <- ffwd(dados, theta)$yhat
  a <- t(ffwd(dados, theta)$pre_activation)
```

```

return(
  list(
    loss = mean((target - yhat)^2), #média ja entrega soma/m
    yhat = yhat,
    pre_activation = a,
    hidden = matrix(c(phi(a[,1]), phi(a[,2])), ncol = 2)
  )
)
}

```

Em seguida, separamos o nosso conjunto de dados em treinamento, validação e teste.

```

dados_train <- dados[1:80000,]
dados_valid <- dados[80001:90000,]
dados_test <- dados[90001:nrow(dados),]

```

Finalmente, executamos a função de *feed-forward* nos dados gerados para calcularmos \hat{y} e em seguida calculamos o custo da rede com $\theta = (0.1, \dots, 0.1)$.

```

# transformamos os dados em matriz
x_test <- dados_test %>%
  select(x1.obs, x2.obs)

# separamos o target
y_test <- dados_test %>%
  pull(y)

# theta já foi gerado e será reaproveitado
J.Loss(x_test, theta, y_test)$loss

```

Obtemos um custo de 663.1286383.

Item c

Use a regra da cadeia para encontrar expressões algébricas para o vetor gradiente

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = \left(\frac{\partial J}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial J}{\partial b_3} \right).$$

Desejamos $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta})$ tal que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}) &= \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2 \right] \\
&= \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i) \nabla_{\boldsymbol{\theta}} (y_i - \hat{y}_i), \quad \text{pois } \hat{y}_i = f(x_{1i}, x_{2i}; \boldsymbol{\theta}) \\
&= \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i) (-1) \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \hat{y}_i
\end{aligned} \tag{1}$$

Resolvemos o gradiente, considerando $\phi(x) = \sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \hat{y}_i &= \nabla_{\boldsymbol{\theta}} [h_{1i} w_5 + h_{2i} w_6 + b_3] \\
&= \nabla_{\boldsymbol{\theta}} [\phi(a_{1i}) w_5 + \phi(a_{2i}) w_6 + b_3] \\
&= \nabla_{\boldsymbol{\theta}} [\phi(x_{1i} w_1 + x_{2i} w_3 + b_1) w_5 + \phi(x_{1i} w_2 + x_{2i} w_4 + b_2) w_6 + b_3].
\end{aligned}$$

É imediato que

$$\frac{\partial \hat{y}_i}{\partial b_3} = 1, \quad \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial w_5} = h_{1i}, \quad \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial w_6} = h_{2i}.$$

Para $b_j, j \in \{1, 2\}$ resolvemos de forma análoga:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{y}_i}{\partial b_1} &= w_5 \frac{\partial h_1}{\partial b_1} = w_5 \frac{\partial}{\partial b_1} \phi(x_{1i} w_1 + x_{2i} w_3 + b_1) \\
&= w_5 \frac{\partial}{\partial b_1} \left(\frac{1}{1 + e^{-(x_{1i} w_1 + x_{2i} w_3 + b_1)}} \right) \\
&= w_5 \frac{(-1) \cdot \frac{\partial}{\partial b_1} (1 + e^{-(x_{1i} w_1 + x_{2i} w_3 + b_1)})}{(1 + e^{-(x_{1i} w_1 + x_{2i} w_3 + b_1)})^2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial b_1} (1 + e^{-(x_{1i} w_1 + x_{2i} w_3 + b_1)}) &= -1 \cdot e^{-(x_{1i} w_1 + x_{2i} w_3 + b_1)} \\
&= -e^{-(x_{1i} w_1 + x_{2i} w_3 + b_1)} = -e^{-a_1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \hat{y}_i}{\partial b_1} = w_5 \frac{e^{-a_1}}{(1 + e^{-a_1})^2}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial b_2} = w_6 \frac{e^{-a_2}}{(1 + e^{-a_2})^2}.$$

Para $w_j, j \in \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial w_1} &= w_5 \frac{\partial h_1}{\partial w_1} = w_5 \frac{x_{1i} e^{-a_1}}{(1 + e^{-a_1})^2} \\ \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial w_2} &= w_6 \frac{x_{1i} e^{-a_2}}{(1 + e^{-a_2})^2} \\ \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial w_3} &= w_5 \frac{x_{2i} e^{-a_1}}{(1 + e^{-a_1})^2} \\ \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial w_4} &= w_6 \frac{x_{2i} e^{-a_2}}{(1 + e^{-a_2})^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, substituímos os as componentes na equação (1) e explicitamos cada componente do gradiente²:

²Essa notação poderia ser escrita de forma mais elegante e sucinta. No entanto, dessa forma facilita a comparação entre a expressão analítica e a implementação computacional pelo leitor.

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial w_1} \\ \frac{\partial J}{\partial w_2} \\ \frac{\partial J}{\partial w_3} \\ \frac{\partial J}{\partial w_4} \\ \frac{\partial J}{\partial w_5} \\ \frac{\partial J}{\partial w_6} \\ \frac{\partial J}{\partial b_1} \\ \frac{\partial J}{\partial b_2} \\ \frac{\partial J}{\partial b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m (y - \hat{y}_i) (-1) w_5 x_{1i} \frac{e^{-a_{1i}}}{(1+e^{-a_{1i}})^2} \\ \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m (y - \hat{y}_i) (-1) w_6 x_{1i} \frac{e^{-a_{2i}}}{(1+e^{-a_{2i}})^2} \\ \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m (y - \hat{y}_i) (-1) w_5 x_{2i} \frac{e^{-a_{1i}}}{(1+e^{-a_{1i}})^2} \\ \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m (y - \hat{y}_i) (-1) w_6 x_{2i} \frac{e^{-a_{2i}}}{(1+e^{-a_{2i}})^2} \\ \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m (y - \hat{y}_i) (-h_{1i}) \\ \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m (y - \hat{y}_i) (-h_{2i}) \\ \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m (y - \hat{y}_i) (-1) w_5 \frac{e^{-a_{1i}}}{(1+e^{-a_{1i}})^2} \\ \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m (y - \hat{y}_i) (-1) w_6 \frac{e^{-a_{2i}}}{(1+e^{-a_{2i}})^2} \\ \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m (y - \hat{y}_i) (-1) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Item d

Crie uma função computacional que receba como entrada o vetor θ , uma matriz design (x) e as respectivas observações (y) e forneça, como saída, o gradiente definido no item c). Apresente o resultado da função aplicada sobre o banco de treinamento, quando $\theta = (0.1, \dots, 0.1)$. Atenção: implemente o algoritmo *back-propagation* (Algoritmo 6.4 do livro Deep Learning) para evitar realizar a mesma operação múltiplas vezes.

Primeiramente, implementamos o gradiente encontrado em (2):

```
gradiente <- function(dados, theta, target){
  if(!is.list(theta)){
    stop("Gradiente: Theta deve ser uma lista com pesos e
    ↪ viéses.")
  }
}
```



```

} else if(!is.data.frame(dados) | !tibble::is_tibble(dados)){
  stop("Gradiente: Dados deve ser uma dataframe ou tibble.")
} else if(!is.numeric(target)){
  stop("Gradiente: Target deve ser um vetor numérico.")
}

loss_results <- J.Loss(dados, theta, target)

# vetor de yhat
yhat <- loss_results$yhat

# pre_activation da J.Loss retorna o vetor de 'a'
a <- loss_results$pre_activation
#transformacao nos neuronios pre-ativacao
a <- exp(a)/(1+ exp(a))^2

# diferenca entre (target) y e yhat
diff <- (target-yhat)

# dados como uma matriz
dados <- as.matrix(dados)

g_w1 <- 2*mean((-1)*diff*theta[[3]][1]*dados[,1]*a[,1]) #x1,
↪ a1, w5
g_w2 <- 2*mean((-1)*diff*theta[[3]][2]*dados[,1]*a[,2]) #x1,
↪ a2, w6
g_w3 <- 2*mean((-1)*diff*theta[[3]][1]*dados[,2]*a[,1]) #x2,
↪ a1, w5
g_w4 <- 2*mean((-1)*diff*theta[[3]][2]*dados[,2]*a[,2]) #x2,
↪ a2, w6
g_w5 <- 2*mean(diff*(-loss_results$hidden[,1])) #h1
g_w6 <- 2*mean(diff*(-loss_results$hidden[,2])) #h2
g_b1 <- 2*mean((-1)*diff*theta[[3]][1]*a[,1]) #a1, w5
g_b2 <- 2*mean((-1)*diff*theta[[3]][2]*a[,2]) #a2, w6
g_b3 <- 2*mean(diff*(-1)) #b3

grad <- c(g_w1, g_w2, g_w3, g_w4, g_w5, g_w6, g_b1, g_b2, g_b3)
names(grad) <- c("w1", "w2", "w3", "w4", "w5", "w6", "b1",
↪ "b2", "b3")

return(
  list(grad = grad,
    loss_results = list(
      loss = loss_results$loss,
      yhat = loss_results$yhat,

```

```

        hidden = loss_results$hidden,
        pre_activation = loss_results$pre_activation,
        diff = diff
      )
    )
  }

```

É apresentado na Tabela 1 a seguir o resultado da função aplicada sobre o banco de treinamento, quando $\theta = (0.1, \dots, 0.1)$:

```

grad_item_d <- gradiente(dados_train[,c(1,2)], theta,
  ↪ dados_train$y)$grad

```

Tabela 1: Valores do gradiente para $\theta = (0.1, \dots, 0.1)$

Componente	Derivada
w1	-0.1767887
w2	-0.1767887
w3	0.6458047
w4	0.6458047
w5	-22.3246918
w6	-22.3246918
b1	-1.0732662
b2	-1.0732662
b3	-43.4113383

Item e

Aplique o método do gradiente para encontrar os parâmetros que minimizam a função de custo no **banco de validação**. Inicie o algoritmo no ponto $\theta = (0, \dots, 0)$, use taxa de aprendizagem $\epsilon = 0.1$ e rode o algoritmo por 100 iterações. Reporte o menor custo obtido e indique em qual iteração ele foi observado. Apresente também o vetor de pesos estimado e comente o resultado.

A *backpropagation* foi implementada na função a seguir, que exige como hiperparâmetros a taxa de aprendizagem e a quantidade de épocas.

```

backpropagation <- function(dados, theta, target, learning_rate =
  ↪ NULL, epochs = NULL){

  if(!is.list(theta)){

```

```

    stop("Back propagation: Theta deve ser uma lista com pesos e
    ↪ viéses.")
  } else if(!is.data.frame(dados) | !tibble::is_tibble(dados)){
    stop("Back propagation: Dados deve ser uma dataframe ou
    ↪ tibble.")
  } else if(!is.numeric(target)){
    stop("Back propagation: Target deve ser um vetor numérico.")
  } else if (!is.numeric(learning_rate) & !is.null(learning_rate)
    ↪ & learning_rate > 0){
    stop("Back propagation: Learning rate deve ser um número real
    ↪ positivo.")
  } else if (!is.integer(epochs) & !is.null(epochs)){
    stop("Back propagation: Epochs deve ser um número inteiro
    ↪ positivo.")
  }
}

# initiate history and best theta
loss_history <- numeric(epochs)
best_theta <- theta

# initiate loop
for(i in 1:epochs){
  grad_results <- gradiente(dados, theta, target)
  # fill in history
  loss_history[i] <- grad_results$loss_results$loss
  # fill in gradient list for update
  gradient_list <- list(
    W1_update = matrix(grad_results$grad[1:4], nrow = 2, byrow
    ↪ = TRUE),
    b12_update = grad_results$grad[7:8],
    W2_update = matrix(grad_results$grad[5:6], nrow = 2, byrow
    ↪ = TRUE),
    b3_update = grad_results$grad[9]
  )
  # best theta condition
  if (i >= 2){
    if(loss_history[i] < loss_history[i-1]){
      best_theta <- theta
    }
  }
  # update theta with learning rate
  theta <- list( #usaremos o mesmo nome para atualizar no loop
    W1 = theta[[1]] - learning_rate*gradient_list$W1_update,
    b12 = theta[[2]] - learning_rate*gradient_list$b12_update,
    W2 = theta[[3]] - learning_rate*gradient_list$W2_update,

```

```

        b3 = theta[[4]] - learning_rate*gradient_list$b3_update
    )

}
# outputs: pesos finais e histórico de loss
return(list(
  theta = theta,
  loss_history = loss_history,
  best_theta = best_theta
))
}

```

A seguir é apresentado o resultado da função aplicada sobre o banco de validação, quando $\theta = (0, \dots, 0)$, com taxa de aprendizagem $\epsilon = 0.1$ e 100 iterações.

```

theta <- list(
  W1 = matrix(rep(0, 4), nrow = 2, byrow = TRUE),
  b12 = c(0, 0),
  W2 = matrix(rep(0, 2), nrow = 2, byrow = TRUE),
  b3 = 0
)

learning_rate <- 0.1

epochs <- 100L

y <- dados_valid$y
x <- dados_valid[,c(1,2)]

back_validacao <- backpropagation(x, theta, y, learning_rate,
  ↪ epochs)

```

O menor custo obtido foi 144.1480361 e foi observado na iteração 16.

Um gráfico do histórico de custo é apresentado a seguir:

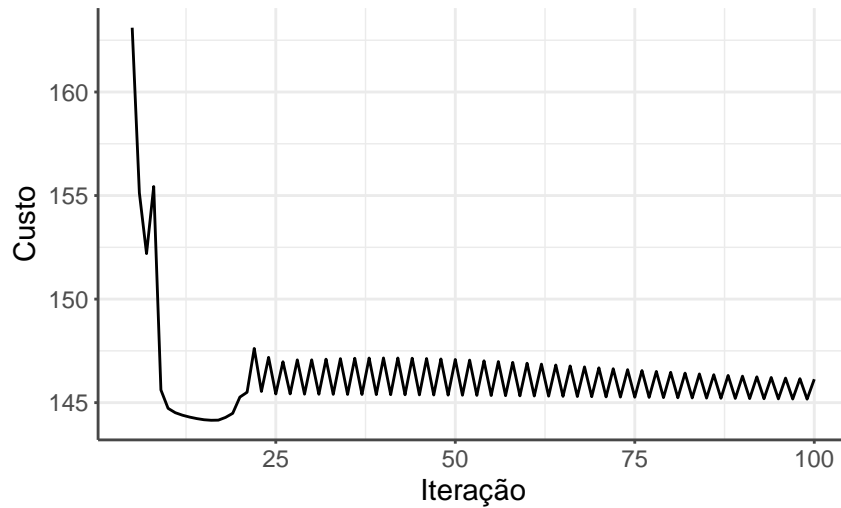


Figura 2: Histórico de custo para o banco de validação.

O vetor de pesos estimado para a iteração de menor valor da perda foi:

$$\hat{W}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.6958498 & -1.6958498 \\ -2.6882879 & -2.6882879 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3.4379156 \\ 3.4379156 \end{pmatrix},$$

$$\hat{W}^{(2)} = \begin{pmatrix} 8.7439654 \\ 8.7439654 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}}^{(2)} = 9.7284693.$$

Interessantemente, os pesos de cada variável para a camada seguinte, assim como os vieses, são idênticos. Além disso, os pesos aplicados nos neurônios da camada escondida também são idênticos. Isso pode ser um indicativo de que ambas as variáveis explicativas possuem importância igual para a previsão da variável resposta. Ao mesmo tempo, ambas X_1 e X_2 têm o mesmo processo gerador, então não parece ser surpreendente que os pesos sejam iguais.

Finalmente, o gráfico indica que possivelmente o algoritmo estacionou em um mínimo local de valor superior ao mínimo encontrado na iteração de número 16.

Item f

Apresente o gráfico do custo no conjunto de treinamento e no de validação (uma linha para cada) em função do número da iteração do processo de otimização. Comente os resultados.

A seguir é construído o gráfico. Novamente, trata-se de duas bases de dados relativamente simples, com um mesmo processo gerador dos dados e uma quantidade razoável de pontos, então é esperado que o custo de treinamento e validação sejam semelhantes.

Apesar disso, é possível notar que, na base de treinamento, o algoritmo escapa do mínimo identificado ligeiramente mais rápido, possivelmente devido à maior disponibilidade de dados. Neste caso, a base de treinamento é oito vezes maior que a base de validação.

Algumas coisas são notáveis:

- A partir de uma certa época, ambas as curvas ficam com forma de serrate. Isso provavelmente indica que o tamanho do *learning rate* deveria ser adaptado a partir desses pontos para capturar apenas descidas na perda;
- O comportamento do serrate nas curvas é espelhado: a “amplitude de onda” aumenta com a época no banco de dados de treinamento e diminui no banco de dados de validação;
- A perda média no conjunto de treinamento passa a aumentar enquanto a perda média no conjunto de validação passa a diminuir.

```
# hiperparametros e base de treinamento
learning_rate <- 0.1
epochs <- 100L
y <- dados_train$y
x <- dados_train[,c(1,2)]

comparacao_treino_validacao <- tibble(
  epoch = rep(1:epochs, 2),
  base = rep(c("Validação", "Treinamento"), each = epochs),
  # back_validacao foi gerada no item e
  loss = c(back_validacao$loss_history, backpropagation(x, theta,
    ↪ y, learning_rate, epochs)$loss_history)
)

comparacao_treino_validacao %>%
  filter(loss < 170) %>%
  ggplot(aes(epoch, loss, group = base, color = base))+
  geom_line(alpha = .5)+
  labs(x = "Iteração",
    y = "Custo",
    color = "")+
  theme_bw()+
  theme(panel.border = element_blank(), # Remove all panel
    ↪ borders
    axis.line = element_line(color = "#474747"), # Add axis
    ↪ lines
```

```
axis.ticks.x = element_line(color = "#474747"), # X axis
  ↳ ticks
axis.ticks.y = element_line(color = "#474747"), # Y axis
  ↳ ticks
axis.ticks.length = unit(0.05, "cm"), # Control tick
  ↳ length
legend.position = "bottom")
```

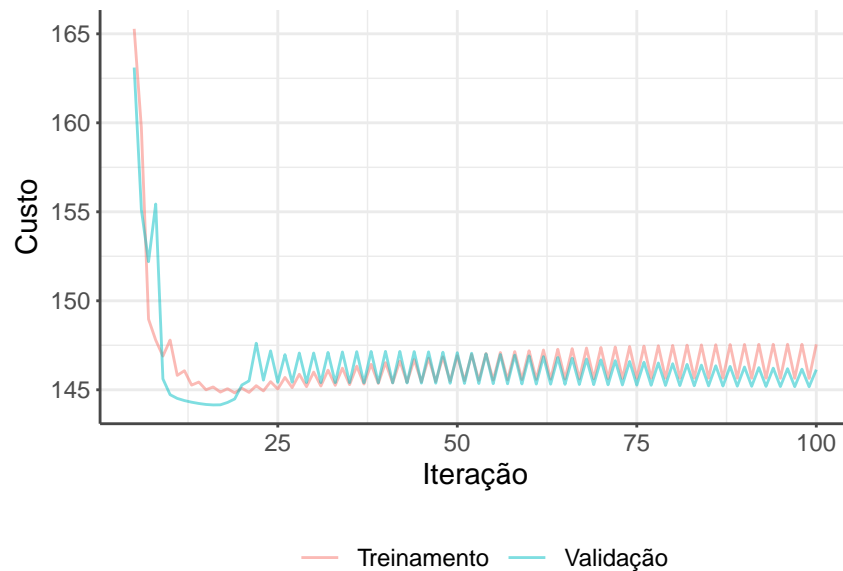


Figura 3: Histórico de custo para o banco de treinamento e validação.

Item g

Calcule os valores previstos (\hat{y}_i) e os resíduos ($y_i - \hat{y}_i$) da rede no conjunto de teste e represente-os graficamente em função de x_1 e x_2 . Dica: tome como base o código usado para a visualização da superfície ($E(Y|X_1, X_2), X_1, X_2$). Altere o gradiente de cores e, se necessário, use pontos semi-transparentes. Analise o desempenho da rede nas diferentes regiões do plano. Há locais onde o modelo é claramente viesado ou menos acurado?

```
# usamos o melhor theta encontrado
theta <- back_validacao$best_theta

resultados_gradiente <- gradiente(dados_test[,c(1,2)], theta,
  ↳ dados_test$y)
```

```

residuos = resultados_gradiente$loss_results$diff

# usamos o conjunto de teste
dados_graf_residuos <- dados_test %>%
  select(x1.obs, x2.obs, y) %>% #seleciona variaveis de interesse
  mutate(residuos = residuos,
         yhat = resultados_gradiente$loss_results$yhat
        )

# base do gráfico
plot_residuos <- ggplot(dados_graf_residuos, aes(x=x1.obs,
  ↪ y=x2.obs)) +
  geom_point(aes(colour=residuos), size=2, shape=15, alpha = .3)
  ↪ +
  coord_cartesian(expand=F) +
  scale_colour_gradient(low="white",
    high="black",
    name="Resíduos") +
  xlab(TeX("$X_1$")) + ylab(TeX("$X_2$"))+
  theme(legend.position = "bottom",
    axis.title.y = element_text(angle = 0, vjust = 0.5))

#gráfico da esperança
n <- 100
x1 <- seq(-3, 3, length.out=n)
x2 <- seq(-3, 3, length.out=n)
dados.grid <- as_tibble(expand.grid(x1, x2)) %>%
  rename_all(~ c("x1", "x2")) %>%
  mutate(mu=abs(x1^3 - 30*sin(x2) + 10))

plot_esperanca <- ggplot(dados.grid, aes(x=x1, y=x2)) +
  geom_point(aes(colour=mu), size=2, shape=15) +
  coord_cartesian(expand=F) +
  scale_colour_gradient(low="white",
    high="black",
    name=TeX("$E(Y|X_1, X_2)$")) +
  xlab(TeX("$X_1$")) + ylab(TeX("$X_2$"))+
  theme(legend.position = "bottom",
    axis.title.y = element_text(angle = 0, vjust = 0.5))

```

O gráfico dos resíduos utilizando o gradiente implementado e o gráfico da esperança são apresentados a seguir. Interessantemente, o resíduo parece ser maior em regiões em que a esperança $E(Y|X_1, X_2)$ é maior e menor onde a esperança é menor. A região de resíduos próximos a zero é uma região intermediária que margeia o senóide.


```
plot_grid(plot_residuos, plot_esperanca, ncol=2)
```

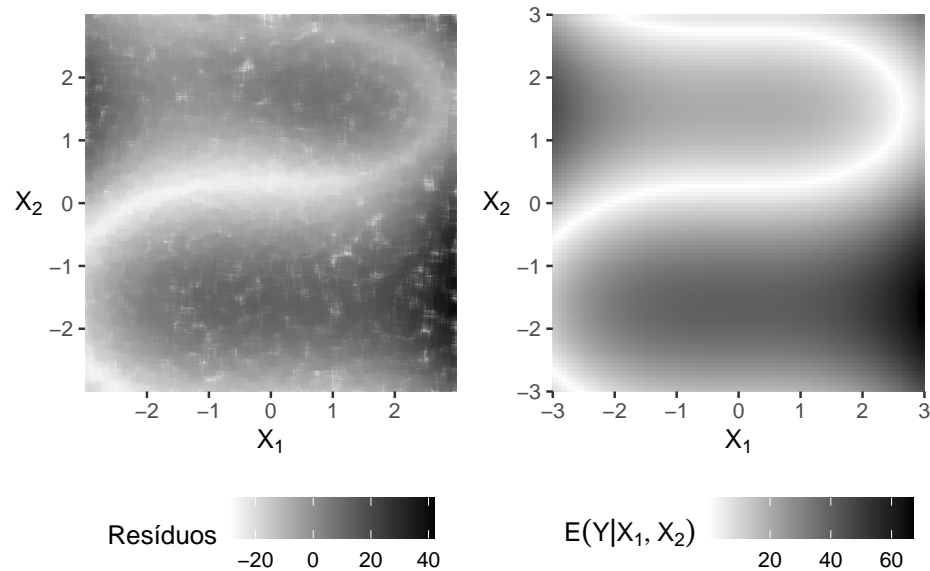


Figura 4: Resíduos da rede em função de X_1 e X_2 .

Item h

Faça um gráfico do valor observado y_i em função do valor esperado $\hat{y}_i = E(Y_i|x_{1i}, x_{2i})$ para cada observação do conjunto de teste. Interprete o resultado.

No gráfico abaixo é possível observar que os valores de \hat{y} tendem a se concentrar nas extremidades e parece haver uma sobreposição de comportamentos na transição entre os valores extremos do valor esperado.

Enquanto parece haver uma grande dispersão em toda a região observada, os valores entre os extremos de \hat{y} parecem ter menor variância e estão mais concentrados em torno do valor esperado — apesar de haver pontos bem distantes. Além disso, fica evidente a maior variância para para valores extremos de \hat{y} .

```
dados_graf_residuos %>%
  ggplot(aes(yhat, y))+
  geom_point(alpha = 0.3)+
  geom_abline(slope = 1, intercept = 0, color = "red")+
  theme_bw()+
  labs(x = TeX("$\\hat{y}_i$"), y = TeX("$y_i$"))+
  theme(panel.border = element_blank(), # Remove all panel
        ↪ borders
```

```

axis.line = element_line(color = "#474747"), # Add axis lines
axis.ticks.x = element_line(color = "#474747"), # X axis
  ↳ ticks
axis.ticks.y = element_line(color = "#474747"), # Y axis
  ↳ ticks
axis.ticks.length = unit(0.05, "cm"), # Control tick length
legend.position = "bottom",
axis.title.y = element_text(angle = 0, vjust = 0.5))

```

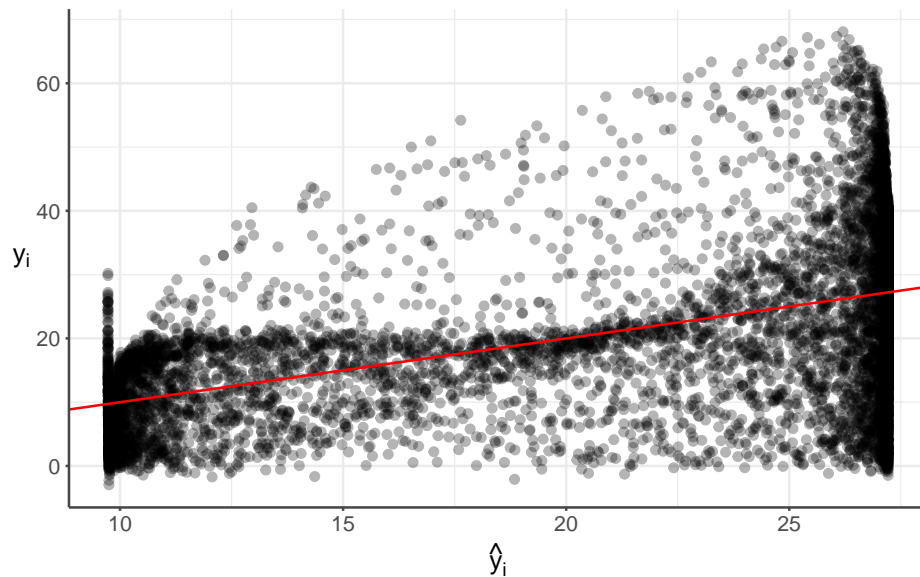


Figura 5: Valor observado em função do valor esperado gerado pela rede neural.

Item i

Para cada $k = 1, \dots, 300$, recalcule o gradiente obtido no item d) usando apenas as k -primeiras observações do banco de dados original. Novamente, use $\theta = (0.1, \dots, 0.1)$. Apresente um gráfico com o valor do primeiro elemento do gradiente — isso é, a derivada parcial $\frac{\partial J}{\partial w_1}$ — em função do número de amostras k . Como referência, adicione uma linha horizontal vermelha indicando o valor obtido em d). Em seguida, use a função `microbenchmark` para comparar o tempo de cálculo do gradiente para $k = 300$ e $k = 100000$. Explique de que maneira os resultados dessa análise podem ser usados para acelerar a execução do item e).

Primeiro são obtidos os elementos $\frac{\partial J}{\partial w_1}$ para as amostras de tamanho 1 a 300:

```

theta <- list(
  M1 = matrix(c(0.1), nrow = 2, ncol = 2),
  b12 = c(0.1, 0.1),
  M2 = matrix(c(0.1), nrow = 2, ncol = 1),
  b3 = c(0.1)
)

k_w1 <- function(dados, theta, i){
  base <- dados[1:i,c(1, 2)] #dados com linha 1 ate i
  y <- dados$y[1:i] #target com linhas 1 até i
  return(gradiente(base, theta, y)$grad[1]) #retorna w1
}

valores_w1 <- tibble(
  k = 1:300,
  w1 = map_dbl(k, ~ k_w1(dados, theta, .))
)

```

O gráfico do valor de w_1 calculado em função do tamanho da amostra é exibido a seguir. Como é de se esperar, o valor de w_1 tende a se aproximar do valor obtido no item d) à medida que o tamanho da amostra aumenta.

```

ggplot(valores_w1, aes(k, w1, group = 1))+
  geom_line()+
  geom_hline(yintercept = grad_item_d["w1"], color = "red")+
  theme_bw()+
  labs(x = "Tamanho da amostra", y = TeX("$w_1$"))+
  theme(panel.border = element_blank(), # Remove all panel
        ↪ borders
        axis.line = element_line(color = "#474747"), # Add axis lines
        axis.ticks.x = element_line(color = "#474747"), # X axis
        ↪ ticks
        axis.ticks.y = element_line(color = "#474747"), # Y axis
        ↪ ticks
        axis.ticks.length = unit(0.05, "cm"), # Control tick length
        legend.position = "bottom",
        axis.title.y = element_text(angle = 0, vjust = 0.5))+
  annotate("text", x = 200, y = 0,
          label = paste0("w1 = ",round(grad_item_d["w1"],2)),
          hjust = 1, vjust = 0, size = 4, color = "red")

```

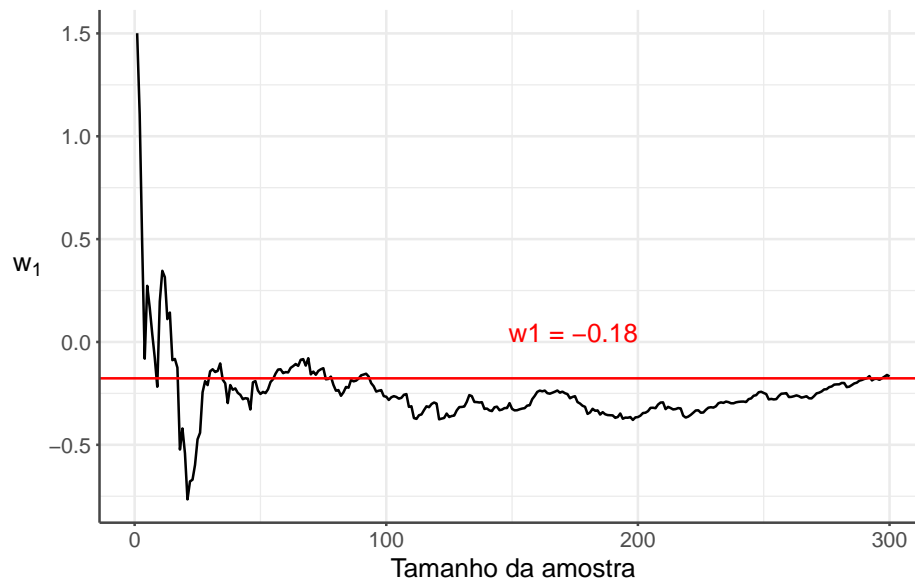


Figura 6: Valor do gradiente $\frac{\partial J}{\partial w_1}$ em função do tamanho da amostra.

Nota-se do gráfico na Figura 6 que o valor de w_1 tende a se aproximar do valor obtido no item d) à medida que o tamanho da amostra aumenta. Ao mesmo tempo, o resultado do benchmark exposto na Tabela 2 sugere um tempo muito menor para o cálculo do gradiente com amostras menores. Se com uma amostra de tamanho 300 o tempo médio de execução tem uma diferença de duas ordens de grandeza em relação à amostra de tamanho 100.000 e o resultado para o gradiente é muito próximo, uma possibilidade para acelerar ainda mais a execução do item e) seria realizar o cálculo do gradiente em pacotes (*batches*).

```
microbenchmark::microbenchmark(
  k_300 = k_w1(dados, theta, 300),
  k_100000 = k_w1(dados, theta, 100000),
  times = 100
) %>%
  summary() %>%
  select(-neval) %>%
  knitr::kable(digits = 2)
```

Tabela 2: Resultados do microbenchmark para o cálculo do gradiente com $k = 300$ e $k = 100.000$.

expr	min	lq	mean	median	uq	max
k_300	301.11	324.46	438.63	428.70	482.75	1077.63
k_100000	22478.30	23236.24	34778.43	25198.98	27250.06	189120.91

Item j

Ajuste sobre o conjunto de treinamento um modelo linear normal (modelo linear 1)

$$Y_i = N(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i}, \sigma)$$

usando a função `lm` do pacote `R` (ou outra equivalente). Em seguida, inclua na lista de covariáveis termos quadráticos e de interação linear. Isso é, assuma que no modelo linear 2,

$$E(Y|x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_2^2 + \beta_5 x_1 x_2.$$

Compare o erro quadrático médio no conjunto de teste dos dois modelos lineares acima com o da rede neural ajustada anteriormente. Qual dos 3 modelos você usaria para previsão? Justifique sua resposta.

Os modelos lineares são ajustados a seguir:

```
MSE1 <- lm(y ~ x1.obs + x2.obs, data = dados_train) %>%
  anova() %>%
  pull(`Mean Sq`) %>%
  min()

MSE2 <- lm(y ~ x1.obs*x2.obs + I(x1.obs^2) + I(x2.obs^2), data =
  ↪ dados_train) %>%
  anova() %>%
  pull(`Mean Sq`) %>%
  min()

MSErn <- min(back_validacao$loss_history)
```

As perdas quadráticas são expostas na tabela a seguir:

Tabela 3: Perdas quadráticas dos modelos ajustados.

Modelo	MSE
Rede Neural	144.15
Modelo Linear 1	138.71
Modelo Linear 2	94.76

Pautado exclusivamente pelas perdas quadráticas, o modelo que deveria ser escolhido deveria ser o Modelo Linear 2, que inclui interações e termos quadráticos. No entanto, é importante considerar também a capacidade de generalização do modelo. Uma avaliação desses modelos considerando outras bases de dados para teste seria necessária para determinar o melhor desempenho.

Item k

Para cada modelo ajustado (os dois lineares e a rede neural), descreva o efeito no valor esperado da variável resposta causado por um aumento de uma unidade da covariável x_1 ?

Temos como variação no valor esperado da variável resposta em função do incremento unitário de x_1 as expressões e valores a seguir:

Modelo 1

$$\frac{d\hat{y}}{dx_1} = \hat{\beta}_1 = 1.2$$

Neste modelo a variação é facilmente interpretável, visto que o incremento unitário em x_1 é simplesmente de $\hat{\beta}_1$ em y_i .

Modelo 2

$$\frac{d\hat{y}}{dx_1} = \hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_3 x_1 + \hat{\beta}_5 x_2 = 1.19 + 1.4x_1 + -2.09555 x_2$$

O Modelo 2 exige uma interpretação mais complexa. O efeito de um incremento unitário em x_1 não só varia de acordo com $\hat{\beta}_1$, mas com o próprio valor de x_1 . Além disso, por haver interação entre variáveis, a interpretação exigiria um valor fixo de x_2 .

Rede Neural

$$\frac{\partial \hat{y}_i}{\partial x_{1i}} = w_5 \frac{\partial}{\partial x_{1i}} h_{1i} + w_6 \frac{\partial}{\partial x_{1i}} h_{2i} = w_5 w_1 \frac{e^{-a_{1i}}}{(1+e^{a_{1i}})^2} + w_6 w_2 \frac{e^{-a_{2i}}}{(1+e^{a_{2i}})^2}$$

A interpretação deste modelo fica muito mais complexa a partir da expressão algébrica anterior. Mantendo x_2 constante, o comportamento de \hat{y} em função de x_1 está representado na Figura 7 a seguir³:

```
efeitos_x1 <- tibble(  
  x1 = seq(-3, 3, length.out = 100),  
  x20 = rep(0, 100),  
  x215 = rep(1.5, 100),  
  x2_15 = rep(-1.5, 100),  
  x23 = rep(3, 100)  
) %>%  
mutate(yhat0 = ffwd(.,c(1,2)),  
  ↪ back_validacao$best_theta)$yhat,  
  yhat15 = ffwd(.,c(1,3)),  
  ↪ back_validacao$best_theta)$yhat,  
  yhat15_ = ffwd(.,c(1,4)),  
  ↪ back_validacao$best_theta)$yhat,  
  yhat3 = ffwd(.,c(1,5)),  
  ↪ back_validacao$best_theta)$yhat) %>%  
select(x1, yhat0, yhat15, yhat15_, yhat3) %>%  
pivot_longer(cols = -x1, names_to = "x2", values_to = "yhat")  
  ↪ %>%  
mutate(x2 = case_when(  
  x2 == "yhat0" ~ '0',  
  x2 == "yhat15" ~ '1.5',  
  x2 == "yhat15_" ~ '-1.5',  
  x2 == "yhat3" ~ '3'  
)  
)
```

³Foi utilizado o melhor θ encontrado utilizando o banco de dados de validação.

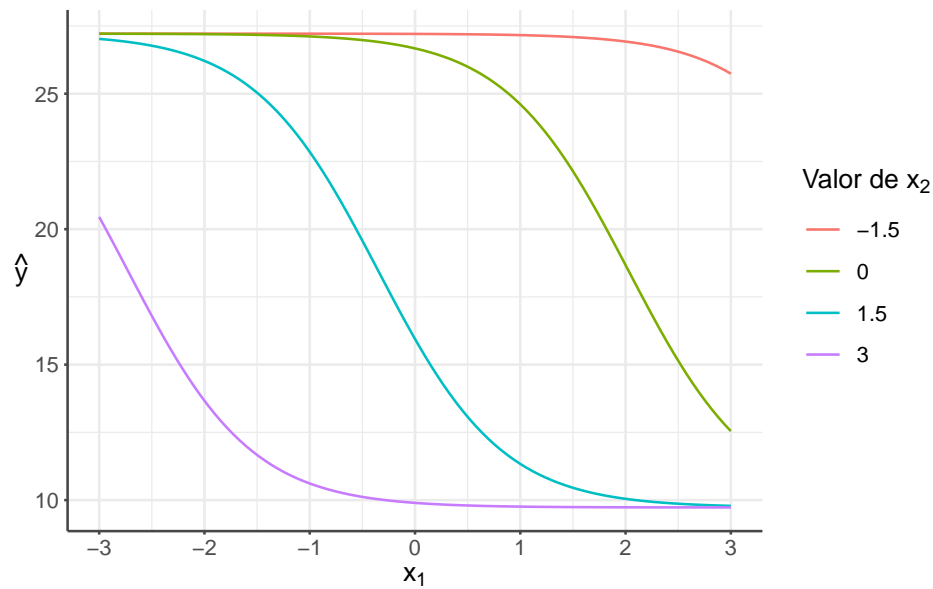


Figura 7: Efeito de um incremento unitário em x_1 no valor esperado da variável resposta.

Item 1

Novamente, para cada um dos 3 modelos em estudo, calcule o percentual de vezes que o intervalo de confiança de 95% (para uma nova observação!) capturou o valor de y_i . Considere apenas os dados do conjunto de teste. No caso da rede neural, assuma que, aproximadamente, $\frac{y_i - \hat{y}_i}{\hat{\sigma}} \sim N(0, 1)$, onde $\hat{\sigma}$ representa a raiz do erro quadrático médio da rede. Comente os resultados. Dica: para os modelos lineares, use a função `predict(mod, interval="prediction")`.

Utilizamos os modelos gerados com a base de treinamento para fazer a avaliação sobre os dados de teste.

```
# modelo 1
predictm1 <- predict(x1m1, interval="prediction", newdata =
  ↪ dados_test) %>%
  tidy() %>%
  as.matrix(ncol = 3)

withinm1 <- (dados_test$y >= predictm1[,2] & dados_test$y <=
  ↪ predictm1[,3]) %>%
  mean()

# modelo 2
```



```

predictm2 <- predict(x1m2, interval="prediction", data =
  ↳ dados_test) %>%
  tidy() %>%
  as.matrix(ncol = 3)

withinm2 <- (dados_test$y >= predictm2[,2] & dados_test$y <=
  ↳ predictm2[,3]) %>%
  mean()

# rede neural
tabela_withinrn <- tibble(
  yhat = ffwd(dados_test[,c(1,2)],
    ↳ back_validacao$best_theta)$yhat, #usamos o melhor theta da
    ↳ validação
  sigma = sqrt(min(back_validacao$loss_history)), #usamos o
    ↳ minimo da loss da validação
  y = dados_test$y,
  std_y = (y-yhat)/sigma
) %>%
mutate(
  lower = yhat - qnorm(0.975)*sigma,
  upper = yhat + qnorm(0.975)*sigma,
  within = (y >= lower & y <= upper)
)

withinrn <- tabela_withinrn%>%
  pull(within) %>%
  mean()

```

As proporções dos valores de y_i que foram capturados pelos intervalos de confiança gerados são exibidos na Tabela 4 a seguir. Enquanto o Modelo 2 obteve o menor MSE, a proporção dos valores reais capturados pelo intervalo de confiança foi a menor entre os três modelos. Em comparação, a rede neural apresentou o maior MSE, mas uma proporção de captura muito similar ao Modelo Linear 1.

Tabela 4: Proporção de valores de y_i capturados pelos intervalos de confiança de 95%.

Modelo	Proporção	MSE
Modelo Linear 1	0.96	138.71
Modelo Linear 2	0.74	94.76
Rede Neural	0.94	144.15

Item m

Para o modelo linear 1, faça um gráfico de dispersão entre x_1 e x_2 onde cada ponto corresponde a uma observação do conjunto de teste. Identifique os pontos que estavam contidos nos respectivos intervalos de confiança utilizando a cor verde. Para os demais pontos, use vermelho. Comente o resultado.

A seguir é construído o gráfico de dispersão conforme a instrução. Além disso, o gráfico da esperança condicional de Y em função de X_1 e X_2 é apresentado para comparação. Interessantemente os pontos contidos nos intervalos de confiança parecem estar mais concentrados nas regiões de maior valor da esperança condicional. No entanto, há pontos no terceiro quadrante, que possuem baixos valores na esperança condicional, que também não foram capturados — esse padrão não se repete em outros setores do gráfico. O padrão de não-captura (dentro do domínio de X_1 e X_2 que estamos considerando) aparenta ser de baixos valores de X_1 com valores extremos de X_2 altos valores de X_1 dentro de um intervalo entre -1 e -2 para X_2 .

```
tabela <- as_tibble(predictm1) %>%
  rlang::set_names("yhat", "lower", "upper") %>%
  mutate(y = dados_test$y,
         within = (y >= lower & y <= upper),
         x1 = dados_test$x1.obs,
         x2 = dados_test$x2.obs)

plot_regressao <- ggplot(tabela, aes(x1, x2, color = within))+
  geom_point(alpha = 0.09)+
  scale_color_manual(values = c("red", "green")) +
  theme_bw()+
  labs(x = TeX("$x_1$"), y = TeX("$x_2$"), color = "Dentro do
↪ IC")+
  theme(panel.border = element_blank(), # Remove all panel
↪ borders
        axis.line = element_line(color = "#474747"), # Add axis lines
        axis.ticks.x = element_line(color = "#474747"), # X axis
↪ ticks
        axis.ticks.y = element_line(color = "#474747"), # Y axis
↪ ticks
        axis.ticks.length = unit(0.05, "cm"), # Control tick length
        legend.position = "bottom",
        axis.title.y = element_text(angle = 0, vjust = 0.5))

plot_grid(plot_regressao, plot_esperanca, ncol=2)
```

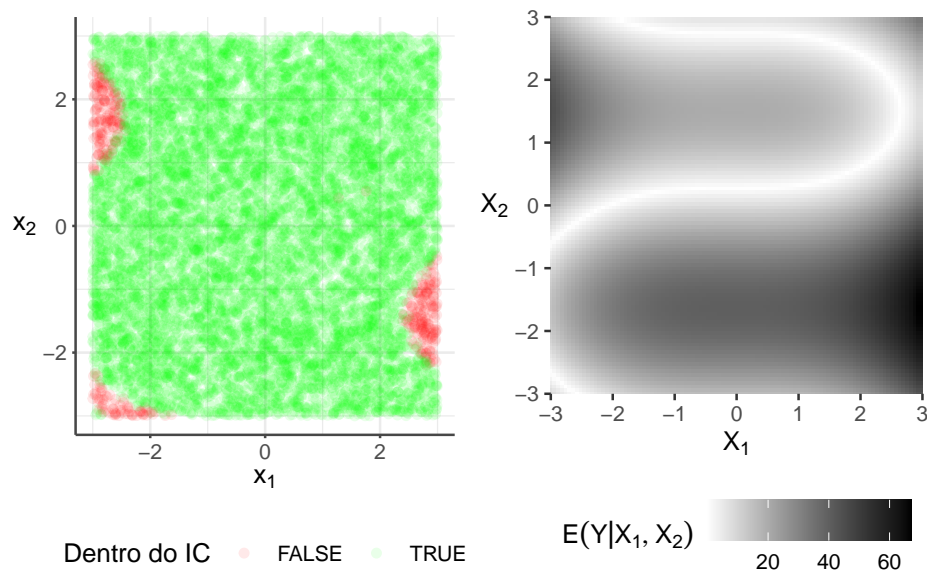
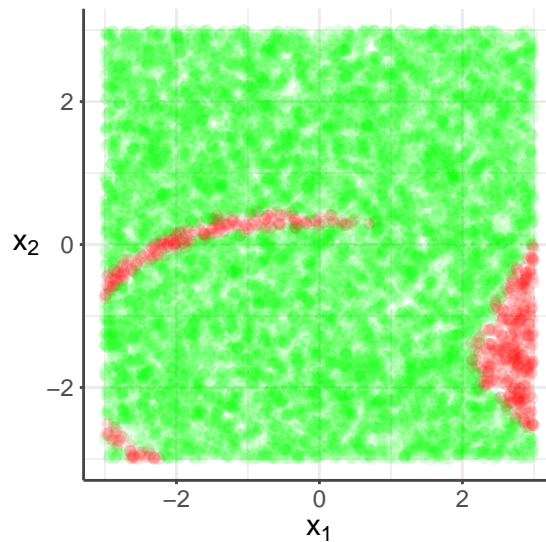


Figura 8: Pontos contidos nos intervalos de confiança de 95% para o Modelo Linear 1.

Para comparação, é feito o mesmo gráfico para os intervalos de confiança da rede neural. Em comparação ao caso anterior, há um padrão que se assemelha ao gráfico da esperança condicional. Parte do vale no senóide não é capturado, especificamente os próximos e pertencentes ao terceiro quadrante, assim como valores de alta esperança no quarto quadrante.

```
tabela_withinrn %>%
  mutate(x1 = dados_test$x1.obs,
         x2 = dados_test$x2.obs) %>%
  ggplot(aes(x1, x2, color = within)) +
  scale_color_manual(values = c("red", "green")) +
  geom_point(alpha = 0.12) +
  theme_bw() +
  labs(x = TeX("$x_1$"), y = TeX("$x_2$"), color = "Dentro do
  ↪ IC") +
  theme(panel.border = element_blank(), # Remove all panel
  ↪ borders
        axis.line = element_line(color = "#474747"), # Add axis lines
        axis.ticks.x = element_line(color = "#474747"), # X axis
        ↪ ticks
        axis.ticks.y = element_line(color = "#474747"), # Y axis
        ↪ ticks)
```

```
axis.ticks.length = unit(0.05, "cm"), # Control tick length
legend.position = "bottom",
axis.title.y = element_text(angle = 0, vjust = 0.5),
aspect.ratio = 1)
```



Dentro do IC ● FALSE ● TRUE

Figura 9: Pontos contidos nos intervalos de confiança de 95% para a Rede Neural.

Lições aprendidas

É muito positivo construir funções que retornam listas com os resultados de cada etapa do algoritmo. Isso facilita a depuração e a compreensão do código. Além disso, é importante testar cada função separadamente para garantir que ela está retornando o resultado esperado.

Frequentemente quando avançava um item, percebia que poderia incrementar funções anteriores que já retornavam internamente vetores que seriam usados futuramente. Dessa forma, é possível utilizar listas para fazer referências fáceis a componentes de cada etapa e evitar repetições desnecessárias de cálculos, reduzindo o custo computacional da lista como um todo.

A utilização de `cache: true` na seção YAML do documento é muito útil para economizar tempo para renderizar versões incrementadas do documento, especialmente no caso de termos que executar várias vezes cálculos custosos

como o back propagation — Isso foi escrito quando eu usava o processo de *back-propagation* dentro de um `for`.

O tempo de processamento foi reduzido de 10 minutos a 5s usando contas matriciais. No entanto, tive muitos problemas na hora de converter o código. Uma revisão bem detalhada teve que ser feita para identificar pequenos problemas de matrizes transpostas.

Para os gráficos, poderia ter sido mais econômico em termos de linhas de código se tivesse montado uma função para toda a configuração do `theme()`.