Análisis de complejidad

Dr. J.B. Hayet

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

Noviembre 2009

Outline

Previously en la clase

Vimos una serie de algoritmos pre-implementados de manera genérica (a través de patrones) que permiten hacer operaciones sobre elementos (dentro de un rango dado) de contenedores, accedidos por iteradores.

```
vector<Shape> shapes;
vector<Shape> filledShapes;
...
int colors[] = { 133, 222,11, 48, 95 };
transform(shapes.begin(), shapes.end(), colors,
  filledShapes,
  mem_fun_ref(&Shape::fill));
cout << endl;
```

Organizar tus datos

Cuando manipulas un conjunto de un gran numero de datos, la manera de organizar estos datos y de acceder a ellos se hace critica: por ejemplo, el tiempo de acceso al dato i de un contenedor secuencial es muy diferente según que la implementacion es hecha por un arreglo o por una lista ligada:

- arreglo: se accede directamente a un lugar en memoria $*(a + i)$
- lista: se necesita copiar el apuntador next i veces

Mas generalmente, hay algoritmos, implementaciones de interfaces dadas que son mas eficientes que otras. Un formalismo para compararlas es indispensable.

Organizar tus datos

Notar que si una implementación dada es mucho menos eficiente en cuanto a una funcionalidad especifica, no significa que el objeto contenedor correspondiente es “mal” implementado. Ejemplo: un contenedor como vector da una funcionalidad de inserción al principio del contenedor poco eficiente, pero...

Todo depende de cual sera el uso que harás de tu contenedor! Es importante poder caracterizar lo eficiente de estos algoritmos implementando funcionalidades.

Organizar tus datos: ADTs

Una noción muy importante antes de seguir: la de Tipo de Dato Abstracto (*Abstract Data Type*). Permite definir contenedores, o mas generalmente estructuras de datos en términos generales, especificando solo las funcionalidades.

- Independiente de todo lenguaje (especificaciones teóricas)
- Autorizan varias implementaciones
- Típicamente, una lista, un vector son ADTs: precisan el comportamiento general de esas estructuras de datos
- El concepto de ADT aplicado en programación da la noción de interfaz

Organizar tus datos: ADTs

- Una estructura de datos especificada como ADT describe operaciones de manipulación de datos
- Puede especificar la complejidad de esas operaciones
- Se concibe algoritmos en función de esos ADT: el diseño de algoritmos eficientes depende de una buena elección de ADTs y la eficiencia de la implementación dependerá de la estructura concreta usada para la implementación del ADT

Organizar tus datos: ADTs

Ejemplo, el ADT Stack

- Create/Delete: crear una nueva pila y destruirla
- Push: Poner un objeto arriba
- Pop: Quitar el objeto de arriba
- Clear: Limpiar la pila

Vimos ejemplos en la clase de implementaciones de Stack

Organizar tus datos: ADTs

En términos de implementación, el concepto más cercano es el de interfaz:

Complejidad

Para poder caracterizar implementaciones, la primera cosa que hacer es aislar la o las "variables" que permiten caracterizar la complejidad del problema que resolver, para expresar la complejidad de los operaciones. Típicamente, un numero de elementos dentro del contenedor...

Ejemplos:

- Pila
- Cadena de caracteres
- Grafo

Complejidad en espacio

La primera manera de caracterizar una implementación es en términos de la memoria que requiere (espacio): una función $M(n)$, característica del algoritmo, en función del tamaño de los datos (n), que permite evaluar la cantidad requerida en memoria para usar el algoritmo

Complejidad en tiempo

Es una función $T(n)$ que describe el comportamiento del algoritmo en cuanto a su tiempo de ejecución, en términos de n, el tamaño de los datos de input al algoritmo...

Se expresa esta función $T(n)$ de manera exacta si posible, en términos de las operaciones elementales (operaciones aritméticas, operaciones de asignación, de dereferenciación), y no en términos de tiempo absoluto... Lo que nos interesa es la tasa de crecimiento, la tendencia cuando n es grande.

Complejidad en tiempo

Aunque una multiplicación puede ser mas costosa en términos de unidad de tiempo que una adición, por ejemplo, no es tan importante considerar la constante multiplicativa que hay entre los dos. En cambio, se considera la complejidad en terminos de número total de operaciones elementales

```
void Ex1(int n) {
    int i,j;
    int sum=0,summ=0,limit=n*n;
    for (i=1;i<limit;i++)
        ++sum
    for (j=1;j<sum;j++)
        ++summ;
}
```

Complejidad en tiempo

En el ejemplo:

$$\begin{aligned} T(n) &= 4 + 1 + n^2 + 2(n^2 - 1) + 1 + n^2 - 1 + 2(n^2 - 2) \\ &= 6n^2 - 1 \end{aligned}$$

Aquí lo que nos importa realmente es sobre todo que se comporta como n^2 para grandes valores de n

Outline

Complejidad en tiempo

A veces no se puede establecer una forma exacta o aun aproximada de $T(n)$, sino expresarla estadísticamente:

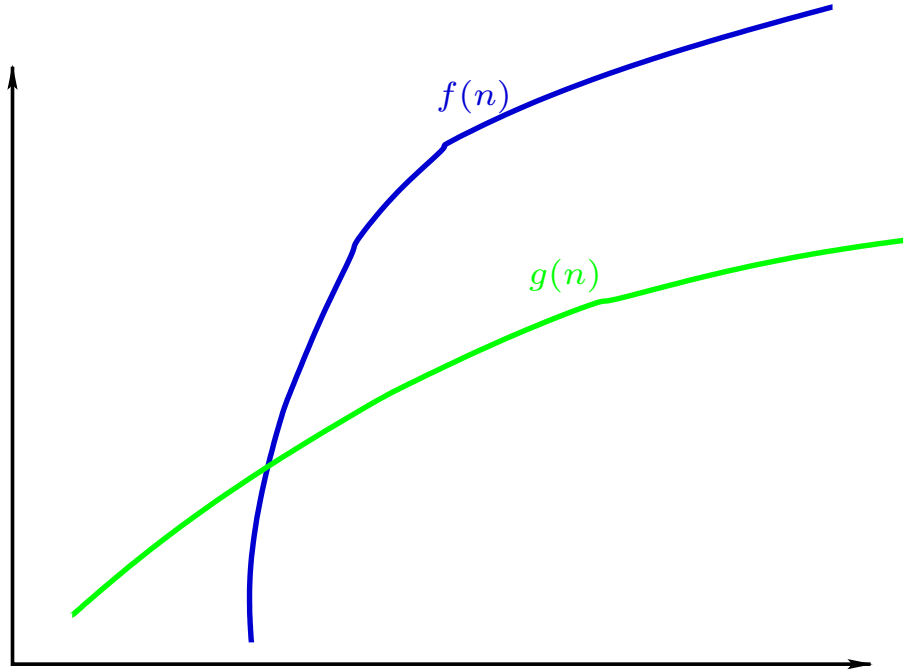
- en promedio
- en el peor de los casos

Ejemplo: búsqueda en un quadtree

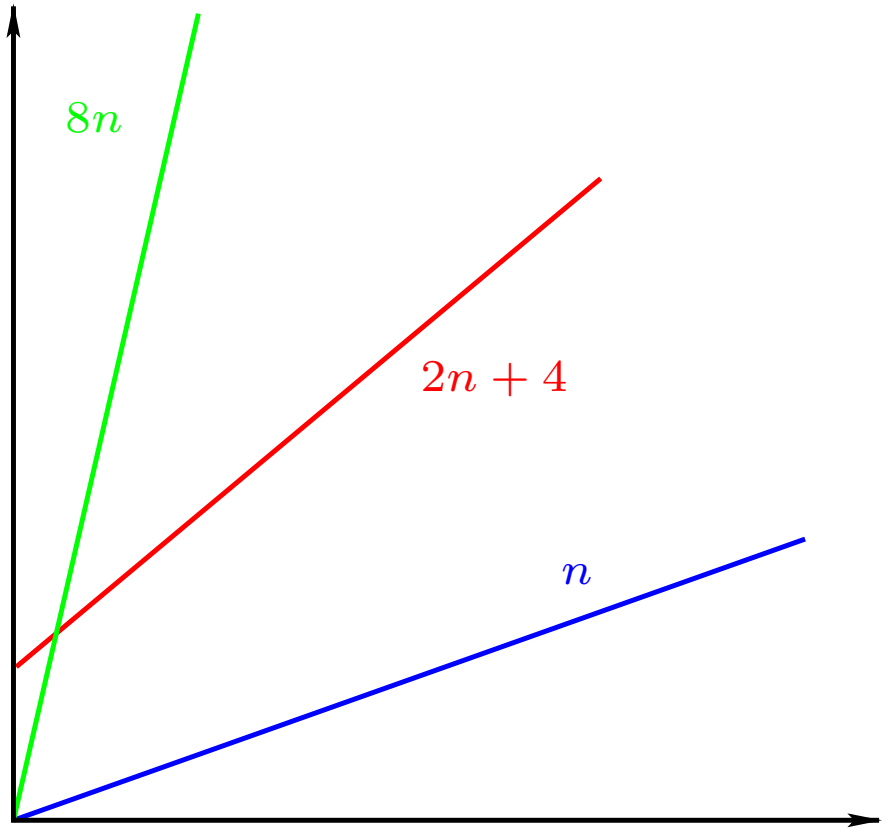
Gran O

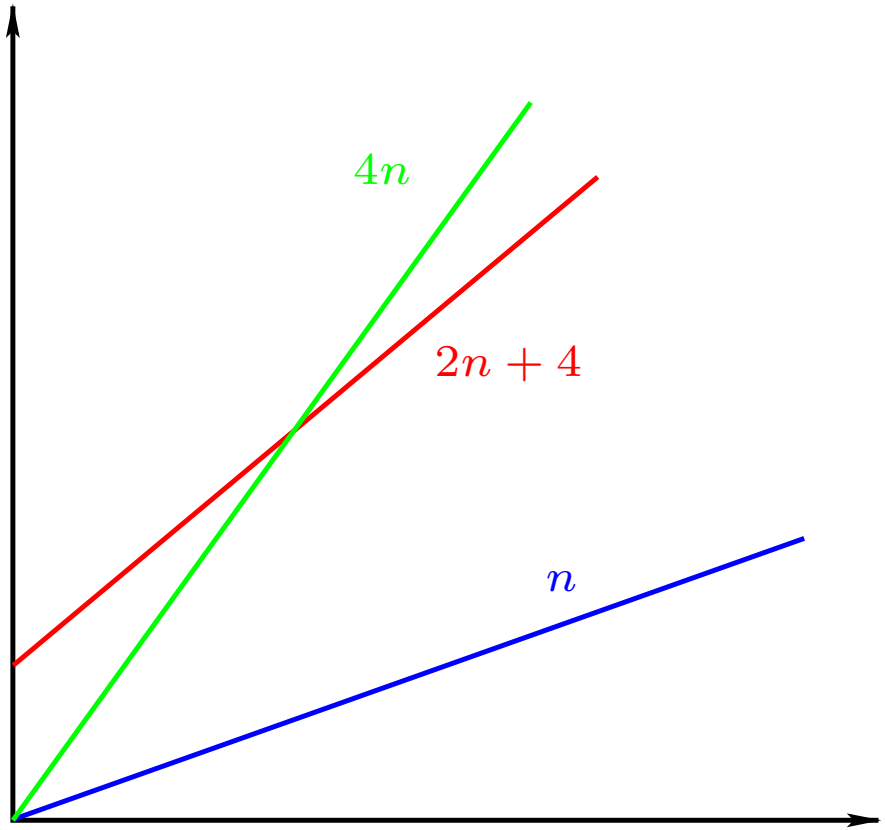
Como lo que nos interesa es el comportamiento asintótico de las complejidades, se usa herramientas clásicas para comparar esos comportamientos cuando $n \longrightarrow \infty$

Dadas dos funciones T y U de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, se dice que $T(n) = O(U(n))$ ssi existe un real $c > 0$ y un entero n_0 tal que $\forall n \geq n_0,\ T(n) \leq cU(n)$



Gran O





$$T(n) = 2n + 4 = O(n)$$

Gran O

- La notación de gran O permite definir una cuota superior a una función y una familia de tendencia de crecimiento
- $T(n) = O(U(n))$ significa que el crecimiento de T es inferior o igual al de U para grandes valores de n
- Se puede definir una "métrica" entre funciones:

$$1 \leq \log n \leq n \leq n \log n \leq n^2 \leq 2^n \leq n^n$$

- las constantes multiplicativas no cuentan

Gran O

- Si $T(n)$ es un polinomio de grado g, entonces $T(n) = O(n^g)$: se puede "olvidar" los términos de grado inferior y las constantes
- Usar la clase de funciones mas chica: $2n$ es $O(n)$ (no se dice, aunque es cierto, que es $O(n^2)$)
- Usar la expresión mas simple: no se dice que $2n$ es $\frac{1}{2}n$

Gran O

Propiedad: suma y producto

Si $T_1(n) = O(U_1(n))$ y $T_2(n) = O(U_2(n))$, entonces
$T(n) = T_1(n) + T_2(n) = O(\max(U_1(n), U_2(n)))$.

Si $T_1(n) = O(U_1(n))$ y $T_2(n) = O(U_2(n))$, entonces
$T(n) = T_1(n)T_2(n) = O(U_1(n)U_2(n))$.

Prueba:

$\exists\ (c_1 > 0, n_0^1)\ /\ \forall n \geq n_0^1,\ T_1(n) \leq c_1 U_1(n)$

$\exists\ (c_2 > 0, n_0^2)\ /\ \forall n \geq n_0^2,\ T_2(n) \leq c_2 U_2(n)$

entonces :

$\forall n \geq \max(n_0^1, n_0^2),\ T(n) \leq (c_1 + c_2)\max(U_1(n), U_2(n))$ □

$\forall n \geq \max(n_0^1, n_0^2),\ T(n) \leq c_1 c_2 U_1(n) U_2(n)$ □

Gran O

Propiedad: suma y producto

Si $T_1(n) = O(U_1(n))$ y $T_2(n) = O(U_2(n))$, entonces
$T(n) = T_1(n) + T_2(n) = O(\max(U_1(n), U_2(n)))$.

Si $T_1(n) = O(U_1(n))$ y $T_2(n) = O(U_2(n))$, entonces
$T(n) = T_1(n)T_2(n) = O(U_1(n)U_2(n))$.

Prueba:

$\exists\ (c_1 > 0, n_0^1)\ /\ \forall n \geq n_0^1,\ T_1(n) \leq c_1 U_1(n)$

$\exists\ (c_2 > 0, n_0^2)\ /\ \forall n \geq n_0^2,\ T_2(n) \leq c_2 U_2(n)$

entonces :

$\forall n \geq \max(n_0^1, n_0^2),\ T(n) \leq (c_1 + c_2)\max(U_1(n), U_2(n))$ $\square$

$\forall n \geq \max(n_0^1, n_0^2),\ T(n) \leq c_1 c_2 U_1(n)U_2(n)$ $\square$

Gran O

Propiedad: transitividad
Si $T(n) = O(U(n))$ y $U(n) = O(W(n))$, entonces
$T(n) = O(W(n))$

Prueba:
$\exists\ (c_1 > 0, n_0^1)\ /\ \forall n \geq n_0^1,\ T(n) \leq c_1 U(n)$
$\exists\ (c_2 > 0, n_0^2)\ /\ \forall n \geq n_0^2,\ U(n) \leq c_2 V(n)$
entonces $\forall n \geq \max(n_0^1, n_0^2),\ T(n) \leq c_1 c_2 V(n)$ $\square$

Gran O

Propiedad: transitividad
Si $T(n) = O(U(n))$ y $U(n) = O(W(n))$, entonces
$T(n) = O(W(n))$

Prueba:
$\exists\ (c_1 > 0, n_0^1)\ /\ \forall n \geq n_0^1,\ T(n) \leq c_1 U(n)$
$\exists\ (c_2 > 0, n_0^2)\ /\ \forall n \geq n_0^2,\ U(n) \leq c_2 V(n)$
entonces $\forall n \geq \max(n_0^1, n_0^2),\ T(n) \leq c_1 c_2 V(n)$ $\square$

Gran O

Propiedad: base de logaritmo y O

$\log_a n = O(\log_b n)$ para cualquieros a, $b > 1$. Eso significa que asintoticamente, no importa la base del logaritmo, de la misma manera que no importa un factor multiplicativo en una potencia constante de n. Se podrá usar base 2, e o 10 como base de la función de referencia.

Prueba:

$\log_a n = \frac{1}{\log_b a} \log_b n$

Gran O

Propiedad: base de logaritmo y O

$\log_a n = O(\log_b n)$ para cualquieros a, $b > 1$. Eso significa que asintoticamente, no importa la base del logaritmo, de la misma manera que no importa un factor multiplicativo en una potencia constante de n. Se podrá usar base 2, e o 10 como base de la función de referencia.

Prueba:

$\log_a n = \frac{1}{\log_b a} \log_b n$

Gran omega

Se dice que $T(n) = \Omega(U(n))$ ssi existe un real $c > 0$ y un entero n_0 tal que $\forall n \geq n_0,\ T(n) \geq cU(n)$

Establece una cuota inferior a $T(n)$. Es equivalente a $U(n) = O(T(n))$: si existe n_0 y $c > 0$ tal que $T(n) \geq cU(n)$, $U(n) \leq \frac{1}{c}T(n)$.

Las propiedades de O valen tambien para Ω (transitividad, polinomios, producto), y el max se hace min en la propiedad relativa a la suma.

Gran theta

Se dice que $T(n) = \Theta(U(n))$ ssi $T(n) = O(U(n))$ y $T(n) = \Omega(U(n))$

Establece la equivalencia de comportamiento de dos funciones para grandes valores de n. Lo que nos interesara particularmente es la cuota superior.

Mas propiedades

- Se puede escribir que $T(n) = O(U(n))$ si $\lim_{n->\infty} \frac{T(n)}{U(n)}$ es una constante.
  Prueba: si el limite es c, existe n_0 tal que $|\frac{T(n)}{U(n)} - c| < \frac{c}{2}$, lo que implica $\frac{T(n)}{U(n)} < \frac{3c}{2}$ para $n \geq n_0$,

$$T(n) < \frac{3c}{2} U(n) \, \square$$

- Se puede escribir que $T(n) = \Theta(U(n))$ si $\lim_{n->\infty} \frac{T(n)}{U(n)}$ es constante no nula.
  Prueba: igual, pero implica $\frac{T(n)}{U(n)} \leq \frac{3c}{2}$, y $\frac{T(n)}{U(n)} \geq \frac{c}{2}$ $\square$

Mas propiedades

Dominaciones:

- $n^k = O((1+\epsilon)^n))$ para todo $k > 0$ y todo $\epsilon > 0$: todo polinomio es dominado por toda exponencial, incluso de una potencia arbitrariamente pequeña.
- $(\log n)^k = O(n^\epsilon)$ para todo $k > 0$ y todo $\epsilon > 0$: todo logaritmo es dominado por toda potencia, incluso de factores arbitrariamente pequeños.

Outline

Analisis: el por qué

Antes de optimizar cualquiera cosa en su programa, es importante determinar cual es la complejidad del algoritmo subyacente!

- elecciones algorítmicas cambian el comportamiento asintotico de la función de complejidad: n, $n \log n$, $n^2 \ldots$
- optimizaciones en el código "solo" cambian constantes o factores multiplicativos a este comportamiento asintótico: $\frac{n}{2}$, $4n \ldots$

Limites de la análisis

A veces se tiene que relativizar las relaciones de dominación a traves del O: si tengo dos algoritmos para una funcionalidad dada y que

$$\begin{aligned} T(n) &= 1000000n \\ U(n) &= n^{\frac{12}{10}} \end{aligned}$$

Aunque $T(n)$ está dominado por $U(n)$, el comportamiento de U puede ser preferible en la gran mayoría de los casos!

Ejemplo 1: ordenamiento por selección

Ordenar un arreglo de enteros, por selección: se cambia el valor examinado por el mínimo de los que siguen

```
index 0 1 2 3 4 5 6 accion
-------------------------------------------------------
      | 4 0 3 6 1 8 5
it=0  | 0 4 3 6 1 8 5 swap 0,4
it=1  | 0 1 3 6 4 8 5 swap 1,4
it=2  | 0 1 3 6 4 8 5 -
it=3  | 0 1 3 4 6 8 5 swap 4,6
it=4  | 0 1 3 4 5 8 6 swap 5,6
it=5  | 0 1 3 4 5 6 8 swap 6,8
```

Complejidad?

Ejemplo 1: ordenamiento por selección

```
// Search for min between start and end
int minIndex (int *tab, int start, int end) {
        int imin = start;
        for (int i=start+1; i<end; i++)
                if (tab[i] < tab[imin])
                        imin = i;
        return imin;
}
// swap i and j
void swap (int *tab, int i, int j) {
        int t   = tab[i];
        tab[i]  = tab[j];
        tab[j]  = t;
}
```

Ejemplo 1: ordenamiento por selección

La función principal:

```
void selectSort(int *tab, int nels) {
        for (int i=0; i<nels-1; i++)
                swap(tab,i,minIndex (tab, i, nels));
}
```

En cada elemento del recorrido, se cambia el valor por el valor minimo encontrado al recorrer el final del arreglo.

Ejemplo 1: ordenamiento por selección

Complejidad $T(n)$:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (T_{swap} + T_{minIndex(tab,i,n)})$$

- swap se hace en tiempo constante, con 4 accesos al arreglo, 3 asignaciones (7)
- minIndex depende del rango de los indices

Ejemplo 1: ordenamiento por selección

El método *minIndex*:

- términos constantes: 3 (2 asignaciones y una adición)
- términos hechos $(end - start)$ veces: la comparación
- términos hechos $(end - start - 1)$ veces: una incrementación, dos accesos a arreglo y una comparación
- queda el término hecho en caso de que la condición es true, 1 asignación. En el caso peor, estara true en todos casos

En el peor de los casos:

$$\begin{aligned} T_{minIndex(tab,i,n)} &= 3 + (n - i) + 5(n - i - 1) \\ &= 6n - 6i - 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 1: ordenamiento por selecion

En total:

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=0}^{n-2}(T_{swap} + T_{minIndex(tab,i,n)}) \\ &= 7(n-2) + \sum_{i=0}^{n-2}(6n - 6i - 2) \\ &= 7(n-2) + (n-1)6n - 2(n-1) - 6\sum_{i=0}^{n-2} i \\ &= 6n^2 - n - 12 - 3(n-2)(n-1) \\ &= 3n^2 - 10n - 18 \end{aligned}$$

Entonces el algoritmo es cuadrático en el peor caso: $T(n) = O(n^2)$, no es muy eficiente para grandes valores de n.

Ejemplo 2: mergeSort

Otro algoritmo famoso para ordenamiento: el mergeSort,

Adopta el principio del *divide-and-conquer* para el ordenamiento en sitio:

```
void mergeSort(int *tab,int start,int end,int pivot){
  if(start == end) return;
  else {
     // Primera parte
     mergeSort(tab,start,pivot,(start+pivot)/2);
     // Segunda
     mergeSort(tab,pivot+1,end,(pivot+end+1)/2);
  }
  // Combinar los arreglos
  merge(tab,start,end,pivot);
}
```

Ejemplo 2: mergeSort

```
void merge(int *tab,int start,int end,int pivot) {
    int tmptab[end-start+1];
    int i=start,j=pivot+1,k=0;
    for(;j<end && i<pivot+1;) {
      if(tab[j]<=tab[i])
        tmptab[k]=tab[j++]
      else
        tmptab[k]=tab[i++]
      k++;
    }
    for (;j<end;j++) tmptab[k++]=tab[j++];
    for (;i<pivot+1;j++) tmptab[k++]=tab[i++];
    for (i=start;i<end;i++) tab[i]=tmptab[i];
}
```

Ejemplo 2: mergeSort

- en el primer ciclo, una vez cada de los elementos de tab, excepto los que vienen en el ciclo final
- en total, $T_{merge}(n) = O(n)$ donde $n = end - start + 1)$
- luego, remarcar que el algoritmo es recursivo, entonces, en cada nivel, tenemos dos instancias del problema original, pero con tamaño de dato dividido por dos
- en el caso que $n = 1$, salimos directamente después de la comparación: $T(1) = 1$

Ejemplo 2: mergeSort

En consecuencia, se puede escribir:

$$\begin{cases} T(1) & = & 1 \\ T(n) & = & 2T(\frac{n}{2}) + O(n) \\ & \leq & 2T(\frac{n}{2}) + cn \end{cases}$$

expresando la complejidad de manera recursiva.

Solución?

Ejemplo 2: mergeSort

Poner $n = 2^i$ y $U(i) = T(n)$, la relación se hace:

$$\begin{aligned} U(0) &= 1 \\ U(i) &= 2U(i-1) + c2^i \\ &= 4U(i-2) + c(2^i + 2.2^{i-1}) \\ &= 8U(i-3) + c(2^i + 2.2^{i-1} + 2^2 2^{i-2}) \\ \ldots & \\ &= 2^i U(0) + ci2^i \end{aligned}$$

Entonces

$$T(n) = n(1 + c \log n) = O(n \log n)$$

El algoritmo de mergeSort es en $n \log n$

Ejemplo 3: búsqueda por dicotomía

```
bool search(int *tab,int val,int start,int end,int &in
  if (end==start) {
     if (tab[start]==val) {
        ind=start;
        return true;
     } else return false:
  }
  int pivot=(start+end)/2;
  if (val<tab[pivot])
        return search(tab,val,start,pivot,ind);
  else if (val>tab[pivot])
        return search(tab,val,pivot+1,end,ind);
  else {
     ind=pivot;
     return true;
  }
```

Ejemplo 3: búsqueda por dicotomía

En un arreglo ordenado, la complejidad de una búsqueda es de orden $O(\log n)$: todos los datos pueden estar vistos como un árbol binario conteniendo todos los enteros. El algoritmo solo busca un camino de la raíz hasta una hoja (y uno solo).

$$T(n) = O(\log n)$$

Complejidades usuales

- $O(1)$: complejidad constante. Occure cuando instrucciones son ejecutadas una y una vez solamente, independientemente del tamaño del problema
- $O(\log n)$: complejidad logarítmica, que crece ligeramente con n. Problemas de dicotomía, típicamente, donde el problema es compartido en varias instancias y solo una esta procesada.
- $O(n)$: complejidad lineal. Problemas con ciclos sobre los datos con procesamiento de duración constante...
- $O(nlog(n))$: complejidad n-logarítmica. Problemas donde en cada iteración se divide en sub-problemas, donde el procesamiento es lineal ($\mathrm{mergeSort}$, $\mathrm{quickSort}$)

Complejidades usuales

- $O(n^2)$: complejidad cuadrática. Caso de tos los algoritmos que implica dos ciclos imbricados, donde el ciclo interno se hace sobre todos los datos o aun sobre un numero de datos lineal en el index del primer ciclo
- $O(n^3)$: complejidad cubica, implica generalmente tres ciclos imbricados
- $O(2^n)$: complejidad exponencial, eso corresponde a algoritmos ingenuos, que a partir de ciertos tamaños no muy altos son completamente inutilisables

Complejidad del problema

Hasta ahora solo hemos analizado la complejidad de soluciones a unos problemas; para varios problemas (como el ordenamiento), hay varios tipos de soluciones de complejidad diferente, pero ninguno puede llegar abajo de cierto nivel: se habla de complejidad intrinseca al problema (la complejidad del mejor algoritmo que puede solvarlo)

Complejidad del problema

Una noción importante:

- problemas: decisión / existencia
- maquinas deterministas (Turing): hacen una instrucción a la vez, corresponden al modelo teórico clásico para las maquinas actuales
- maquinas no-deterministas: maquinas teóricas, que tendrían la posibilidad, frente a una situación en que hay que explorar varias posibilidades, de explorarlas en varias procesos paralelos

Complejidad del problema

Clases de problemas:

- L: problemas que pueden estar resueltos en tiempo logarítmico
- P: problemas que pueden estar resueltos en tiempo polinomial (problemas “fáciles”)
- NL: problemas que pueden estar resueltos por un algoritmo en una maquina no determinista en tiempo logaritmico
- NP: problemas que pueden estar resueltos por un algoritmo en una maquina no determinista en tiempo polinomial

Complejidad del problema: problemas NP

- Problemas muy dificiles, combinatorios
- Implican generalmente una enumeración de posibilidades que hay que examinar
- Son equivalente a problemas de decisión que, si se da una solución candidata, se puede contestar en tiempo poliniomial que si o no
- NP-dificil: los mas difíciles, aun, todo problema NP se puede reducir polinomialmente en uno de esos

Complejidad del problema: problemas NP-dificil