

II. Modos de Vibración

1. Librerías

```
In [1]: import numpy as np
np.set_printoptions(formatter = {'float': lambda x: '{0:0.5f}'.format(x)})

import matplotlib.pyplot as plt
from tabulate import tabulate
```

2. Grados de Libertad

```
In [2]: while True:
    try:
        gdl = int(input('* Ingrese el número de grados de libertad: '))
        break
    except ValueError:
        print('* Ingrese un número de GDL válido.\n')

print(f'* El modelo es de {gdl} GDL.')
```

* El modelo es de 2 GDL.

3. Matriz de Rigidez

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K_{n-1} + K_n & -K_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -K_n & -K_n \end{pmatrix}$$

3.1 Rigideces de Entrepiso

```
In [3]: k = np.empty(gdl)

for i in range(gdl):
    while True:
        try:
            k[i] = float(input(f'* Rigidez K(i + 1) (kg/cm): '))
            print(f'\n> Rigidez K(i + 1) = {k[i]} kg/cm')
            break
        except ValueError:
            print(f'\n! Ingrese un valor de K(i + 1) válido.')
```

> Rigidez K1 = 15555.56 kg/cm

> Rigidez K2 = 87179.49 kg/cm

3.2 Formulación de la Matriz de Rigidez

```
In [4]: K = np.zeros((gdl, gdl))

for i in range(gdl):
    # Cálculo de rigideces

    # Rigidez actual
    k1 = k[i]

    # Rigidez posterior
    try:
        k2 = k[i + 1]
    except IndexError:
        k2 = 0

    ## Llenado de la matriz

    # Posición actual
    K[i, i] = k1 + k2

    # Posición derecha
    if i + 1 < gdl:
        K[i, i + 1] = -k2

    # Posición izquierda
    if i - 1 >= 0:
        K[i, i - 1] = -k1
```

3.3 Representación de la Matriz de Rigidez

```
In [5]: K_r = tabulate(K, tablefmt = 'fancy_grid')

print('* Matriz K =\n')
print(K_r)
```

• Matriz K =

242735	-87179.5
-87179.5	87179.5

4. Matriz de Masas

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix}$$

4.1 Masas Concentradas

```
In [6]: m = np.empty(gdl)

for i in range(gdl):
    while True:
        try:
            m[i] = float(input(f'* Masa M(i + 1) (kg-s2/cm): '))
            print(f'\n> Masa M(i + 1) = {m[i]} kg-s2/cm')
            break
        except ValueError:
            print(f'\n! Ingrese un valor de M(i + 1) válido.')
```

> Masa M1 = 154.74 kg-s2/cm

> Masa M2 = 150.25 kg-s2/cm

4.2 Formulación de la Matriz de Masas

```
In [7]: M = np.zeros((gdl, gdl))

for i in range(gdl):
    M[i, i] = m[i]
```

4.3 Representación de la Matriz de Masas

```
In [8]: M_r = tabulate(M, tablefmt = 'fancy_grid')

print('* Matriz M =\n')
print(M_r)
```

- Matriz M =

154.74	0
0	150.25

5. Frecuencias y Períodos

- Para el cálculo de las *frecuencias modales* se parte de la expresión:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{X} = \omega^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}$$

- Multiplicando por la *inversa de la Matriz de Masas* \mathbf{M}^{-1} a ambos miembros se tiene:

$$\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{X} = \omega^2 \mathbf{X}$$

- Lo cual equivale al *Problema de Valores Característicos* (PVC) de la matriz \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \lambda \cdot \mathbf{X}$$

5.1 Obtención de la Matriz A

```
In [9]: M_ = np.linalg.inv(M)

A = np.matmul(M_, K)
```

5.2 Representación de la Matriz A

```
In [10]: A_r = tabulate(A, tablefmt = 'fancy_grid')

print('* Matriz A:\n')
print(A_r)
```

- Matriz A:

1568.66	-563.393
-580.23	580.23

5.3 Autovalores de A

```
In [11]: A_lambda = np.linalg.eig(A)[0][::-1]

print('* Autovalores:')

for i in range(gdl):
    print(f'\n\t* λ(i + 1) = {A_lambda[i]:.2f}')
```

- Autovalores:

* λ1 = 318.70

* λ2 = 1830.19

5.4 Cálculo de Frecuencias

```
In [12]: # Frecuencias circulares
w = np.sqrt(A_lambda)

print('* Frecuencias circulares (rad/s)')

for i in range(gdl):
    print(f'\n\t* w(i + 1) = {w[i]:.4f}')
```

Frecuencias

f = w / (2 * np.pi)

print('\n- Frecuencias naturales (Hz)')

for i in range(gdl):
 print(f'\n\t* f(i + 1) = {f[i]:.4f}')

- Frecuencias circulares (rad/s)

* w1 = 17.8523

* w2 = 42.7807

- Frecuencias naturales (Hz)

* f1 = 2.8413

* f2 = 6.8088

5.5 Cálculo de Períodos

```
In [13]: T = 1 / f

print('* Períodos (s)')

for i in range(gdl):
    print(f'\n\t* T(i + 1) = {T[i]:.3f}')
```

- Períodos (s)

* T1 = 0.352

* T2 = 0.147

6. Modos de Vibración

- A partir de la solución de la *matriz de vectores propios* \mathbf{X} de la matriz \mathbf{A} se tiene:

$$\mathbf{X} = \left[\left\{ X_n \right\} \cdots \left\{ X_2 \right\} \left\{ X_1 \right\} \right]$$

- Donde cada vector X_i se conoce como modo de vibración. Este, es un vector unitario *tomado de forma vertical* dentro de la matriz.
- Existen diversos métodos para normalizar los modos de vibración. El más conveniente, para una posterior aplicación del *Método Dinámico Modal Espectral*, es aquel respecto a la *Matriz de Masas* \mathbf{M} .

$$\phi_i = \frac{X_i}{\sqrt{X_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot X_i}}$$

6.1 Matriz de Vectores Propios

```
In [14]: X = np.linalg.eig(A)[1]

X_r = tabulate(X, tablefmt = 'fancy_grid')

print('* Matriz X:\n')
print(X_r)
```

- Matriz X:

0.907039	0.410917
-0.421046	0.911673

6.2 Vectores de Modos de Vibración

```
In [15]: # Traspuesta de la matriz de autovectores de A
Xt = X.T

x = np.empty((gdl, gdl))

print('* Vectores x:')

for i in range(gdl):
    x[i] = Xt[gdl - i - 1].flatten()
    print(f'\n\t* Vector x(i + 1) = {x[i]}')
```

- Vectores x:

* Vector x1 = [0.41092 0.91167]

* Vector x2 = [0.90704 -0.42105]

6.3 Normalización Respecto a la Matriz de Masas

```
In [16]: phi = np.copy(x)

for i in range(gdl):
    # Normalización en una línea, por César Sánchez
    phi[i] = x[i] / np.sqrt(x[i] @ M @ x[i].reshape(-1, 1))

print('\n- Vectores Normalizados φ:')

for i in range(gdl):
    print(f'\n\t* Vector φ(i + 1) = {phi[i]}')
```

- Vectores Normalizados φ:

* Vector φ1 = [0.03344 0.07419]

* Vector φ2 = [0.07310 -0.03394]

```
In [17]: phi[0]
```

```
Out[17]: array([0.03344, 0.07419])
```

7. Interpretación de Resultados

```
In [18]: plt.rcParams['figure.figsize'] = 4.5 * len(phi), 8
plt.rcParams['font.family'] = 'Georgia'
plt.rcParams['font.style'] = 'italic'
plt.style.use('grayscale')
```

```
In [19]: # Creación de subplots
fig, axs = plt.subplots(1, gdl)

# Título global
fig.suptitle('Modos de Vibración', fontsize = '26')

for i, x in enumerate(phi):
    y = []

    for j in range(len(phi[i])):
        y.append(6 * (j + 1) / len(phi[i]))

    axs[i].set_title(f'i = {i + 1}', fontsize = '14')

    axs[i].yaxis.set_visible(False)
    axs[i].xaxis.set_visible(False)

    axs[i].plot(0, 0, marker = '_', markersize = 30)

    # Posición inicial
    axs[i].plot(np.zeros(len(phi[i])), y, marker = 'o', markersize = 23, linestyle = '', color = '#d8dcd6', zorder = 1)
    axs[i].plot(np.zeros(len(phi[i]) + 1), np.append(0, y), linestyle = '--', color = '#d8dcd6')

    # Posición final
    axs[i].plot(x, y, marker = 'o', markersize = 23, linestyle = '', color = '#c14a09', zorder = 1)
    axs[i].plot(np.append(0, x), np.append(0, y), linestyle = '-', color = '#c14a09', alpha = 0.75)

    # Vectores desplazamiento
    axs[i].quiver(np.zeros(len(phi[i])), y, x, np.zeros(len(phi[i])), scale = 1, zorder = 2, color = '#d8dcd6', zorder = 1)

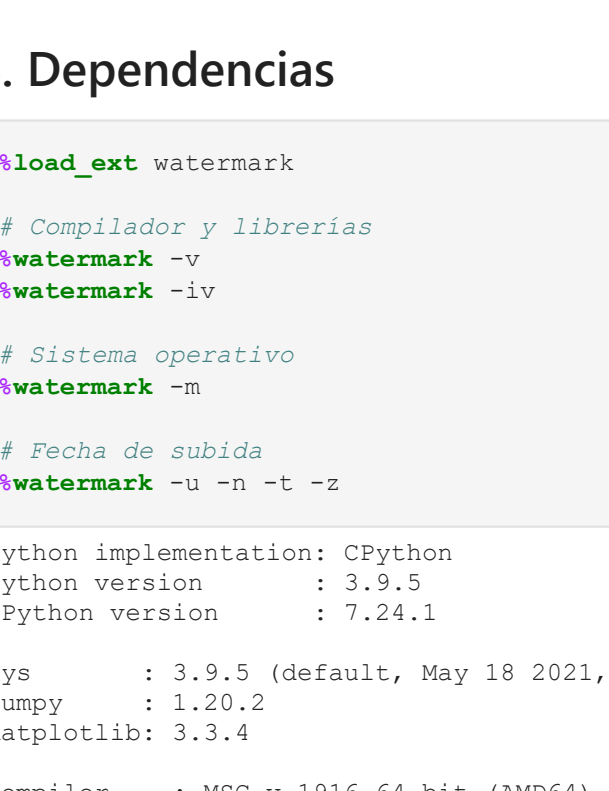
    # Frecuencias circulares
    axs[i].text(0, -0.5, f'w(i + 1) = {w[i]:.2f} rad/s', fontsize = 11, ha = 'center', color = '#363737')

    axs[i].set_xlim([-1.5 * abs(phi).max(), 1.5 * abs(phi).max()])
    axs[i].set_ylim([-1, 7])

plt.show()
```

Modos de Vibración

$i = 1$



$i = 2$



8. Dependencias

```
In [20]: %load_ext watermark

# Compilador y librerías
%watermark -v
%watermark -iv

# Sistema operativo
%watermark -m

# Fecha de subida
%watermark -u -n -t -z
```

Python implementation: CPython
Python version: 3.9.5
IPython version: 7.24.1

sys: 3.9.5 (default, May 18 2021, 14:42:02) [MSC v.1916 64 bit (AMD64)]
numpy: 1.20.2
matplotlib: 3.3.4

Compiler: MSC v.1916 64 bit (AMD64)
OS: Windows
Release: 10
Machine: AMD64
Processor: Intel64 Family 6 Model 165 Stepping 3, GenuineIntel
CPU cores: 12
Architecture: 64bit

Last updated: Mon Jun 21 2021 12:17:33SA Pacific Standard Time